



HAL
open science

Brisure de symétries en théorie des supercordes : applications en cosmologie et en physique des particules

Tristan Catelin-Jullien

► **To cite this version:**

Tristan Catelin-Jullien. Brisure de symétries en théorie des supercordes : applications en cosmologie et en physique des particules. Physique mathématique [math-ph]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2008. Français. NNT : . tel-00351584

HAL Id: tel-00351584

<https://theses.hal.science/tel-00351584>

Submitted on 9 Jan 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



LABORATOIRE DE PHYSIQUE THÉORIQUE - ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE
TH ESE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ PARIS VI

Spécialité : **PHYSIQUE THÉORIQUE**

Présentée par

Tristan Catelin-Jullien

pour obtenir le grade de

Docteur de l'Université Paris VI

Sujet :

**Brisure de symétries en théorie des supercordes :
applications en cosmologie et en physique des particules.**

Soutenue le 30 octobre 2008 devant le jury composé de :

MM. Carlo Angelantonj,
Pierre Binétruy, rapporteur,
Emilian Dudas, rapporteur,
Costas Kounnas, directeur de thèse,
Michela Petrini,
Marios Petropoulos,
Bert Schellekens.

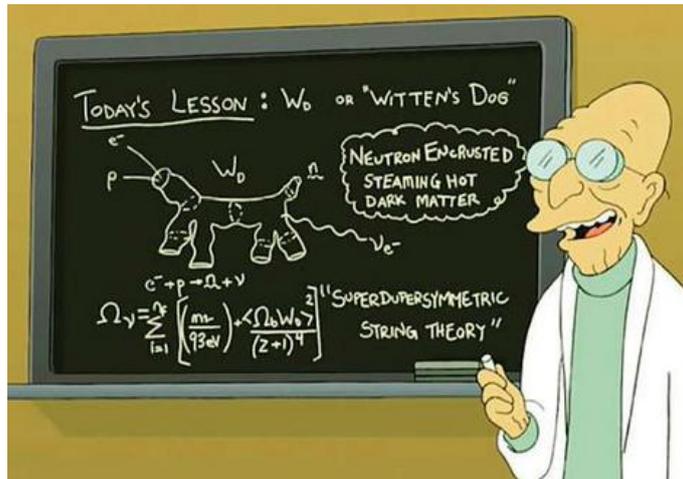


FIGURE 1 – Intrusion de la théorie des cordes dans la culture populaire.

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier les directeurs successifs du LPT, Jean Iliopoulos, Eugène Cremmer et Bernard Julia, ainsi que tous les membres du LPT pour m'avoir accueilli durant ces quatre années. Je remercie également les secrétaires successives du laboratoire, pour leur efficacité logistique qui fut utile en bien des occasions ; ainsi que Marc-Thierry Jaekel et Bernard Massot pour toute la maintenance informatique. Je tiens tout particulièrement à remercier Nicole Ribet pour, en plus de son travail irréprochable qui l'éleva au rang de légende du LPT, son extrême sympathie et le soutien moral qu'elle m'a toujours accordé au cours des périodes parfois difficiles de cette thèse.

Je remercie infiniment Costas Kounnas pour avoir accepté d'encadrer mes quatre années de recherche. Son enthousiasme débordant, sa verve, l'étendue de sa culture, sa remarquable intuition physique, et sa disponibilité ont été pour moi des facteurs constants de motivation. Je remercie également mes collaborateurs Alon Faraggi, John Rizos, Nick Toumbas, et en particulier Hervé Partouche pour sa disponibilité et sa sympathie.

Je remercie Pierre Binétruy et Emilian Dudas qui ont accepté la charge de rapporter cette thèse (dans des délais assez serrés!), ainsi que Carlo Angelantonj, Marios Petropoulos, Michela Petrini et Bert Schellekens pour me faire l'honneur de participer à mon jury.

J'ai eu la chance de partager mon bureau avec d'autres doctorants ou post-doctorants qui rendirent la vie de laboratoire agréable : Yacine Dolivet (pour une période courte mais enrichissante), et tout particulièrement Raphaël Bénichou et Christian Hagendorf, pour l'ambiance détendue qui régna en DC14. Je salue aussi Davide Cassani, Pedro Vieira et Nikolay Gromov ; je veux enfin souhaiter bonne chance à la relève, incarnée par Ioannis Florakis et François Bourliot, pour la suite de leur thèse.

Yann Michel mérite un paragraphe à lui tout seul. Nos parcours se suivent depuis le DEA, et mes quatre ans de thèse ne seraient pas les mêmes sans ce que j'ai partagé avec lui, que ce soit les soirées de rédaction de thèse jusqu'à minuit et plus, les coups de blues passagers, les soirées bière/théorie des champs, la nuit de la pougne Savane/Coca, ou la cinéphilie déviante/nanardeuse compulsive (je dois aussi remercier, entre autres, Brian Yuzna et The Rock pour l'ensemble de leur œuvre...). L'existence même de cette thèse doit sans doute beaucoup à son soutien.

Malgré l'attrait certain de la physique théorique, je n'aurais pas survécu sans tous les amis qui m'ont soutenu, et avec qui j'ai partagé nombre de moments/soirées/journées/voyages précieux. Dans le désordre : Fab, Fred, Charles et Isa, Jpouille, Jul', Rémi, Oliv', Adrian, Marchi, Guillaume et Frieda, Martial, Nico, David, Jeff, Alex, Gui, Ben, Seb et Béa, Thierry, Sév, Cédric, Myriam...

Merci aussi à ma famille, et en particulier ma mère et ma sœur, qui m'ont soutenu sans interruption durant ces quatre années.

Enfin, et surtout, je remercie Béa pour une quantité de choses qu'il serait trop long d'énumérer...

Résumé

Cette thèse est consacrée à l'étude d'applications de la théorie des cordes dans deux domaines de la physique fondamentale : la physique des particules et la cosmologie. Le principe unificateur de nos deux travaux est l'utilisation en théorie des cordes du mécanisme, initialement introduit en théorie des champs, de brisure spontanée de (super)symétrie.

Nous commençons par une présentation générale de la théorie des cordes, principalement focalisée sur les concepts que nous manierons.

Nous introduisons ensuite notre premier travail, dans lequel nous exhibons une dualité de l'espace des vides des théories de supercordes hétérotiques $\mathcal{N} = 1$, qui relie les représentations spinorielles et vectorielles du groupe de grande unification.

Dans un second travail, nous nous intéressons cette fois à la modélisation par la théorie des supercordes d'une évolution cosmologique à température non nulle et en présence d'une échelle de brisure de supersymétrie. Nous donnons également des arguments pour une stabilisation des divers modules de compactification.

Summary

This thesis is devoted to the study of some applications of superstring theory in cosmology and in particle physics. The unifying principle of our work is the stringy spontaneous (super)symmetry breaking mechanism.

Our manuscript starts with a general overview of string theory, where the emphasis is put on the aspects that will be important throughout our work.

We introduce then our first work, in which we exhibit a new symmetry of the vacua of $\mathcal{N} = 1$ heterotic string theory, exchanging the vectorial and spinorial representations of the grand unified gauge group.

In a second part, we consider stringy cosmological evolutions, at non-zero temperature and in the presence of a supersymmetry breaking scale. We also give arguments for a stabilization of the compactification moduli.

Mots-clés : Théorie des cordes, Grande unification, Dualités, Supergravité, Cosmologie.

Table des matières

Remerciements	3
Résumé	5
1 Introduction	8
1.1 Pourquoi la théorie des cordes ?	8
1.2 Principe et enjeux	10
1.3 Plan de la thèse	11
2 Quelques prérequis	15
2.1 Algèbres de Lie et théories de jauge	15
2.2 Algèbres de supersymétrie et théories de supergravité quadri-dimensionnelles	19
2.2.1 Algèbres de supersymétrie	19
2.2.2 Supergravités à quatre dimensions	20
3 Théories des supercordes en 10 dimensions	27
3.1 Action et quantification de la corde bosonique	27
3.2 Théorie des cordes et invariance conforme	33
3.2.1 Éléments de théorie conforme bidimensionnelle	34
3.2.2 Applications à la théorie des cordes	37
3.3 Action des supercordes	40
3.4 Théories de supercordes à dix dimensions	41
4 Théories des supercordes en 4 dimensions	52
4.1 Compactifications usuelles	53
4.1.1 Compactifications toroïdales et réseaux	55
4.2 Orbifolds	60
4.2.1 Orbifolds à action non-libre	61
4.2.2 Orbifolds à action libre et compactification de Scherk-Schwarz	64
4.3 Brisure de supersymétrie et de jauge dans les constructions d'orbifold	69
4.4 Supergravités effectives des réductions dimensionnelles de théories de supercordes, et schémas de brisure	71
4.5 Construction fermionique	74
4.5.1 Introduction	74
4.5.2 Construction du spectre et projections GGSO	78
4.5.3 Reproduction de constructions précédentes	79

5	Dualité spineur–vecteur dans une classe de modèles réalistes hétérotiques	84
	$\mathcal{N} = 1$	
5.1	Grande unification et groupe $SO(10)$	86
5.2	Méthode de construction et propriétés générales	89
5.3	Mise en œuvre de la dualité	97
5.4	Remarque additionnelle	99
5.5	Conclusions et perspectives	99
6	Modèles cosmologiques	103
6.1	Introduction et enjeux	103
6.2	Quelques rappels de thermodynamique	106
6.3	Aspects de la théorie des cordes à température finie	108
6.4	Cosmologie de Friedmann-Robertson-Walker	112
6.5	Forme des corrections thermiques et quantiques	113
6.6	Consistance de l'ansatz $M_{3/2} \propto T$	120
6.7	Forme des cosmologies effectives obtenues	122
6.8	Extension à deux directions de brisure, et stabilisation du module de structure complexe	123
7	Conclusion	128
A	Quelques identités utiles sur les fonctions ϑ	131
B	Algèbre superconforme $N = 2$ et flot spectral	135
C	Publication n° 1 :	
	Thermal/quantum effects and induced superstring cosmologies	139
D	Publication n° 2 :	
	Thermal and quantum superstring cosmologies	195
E	Publication n° 3 :	
	Spinor-Vector Duality in Heterotic SUSY Vacua	209
F	Publication n° 4 :	
	Induced superstring cosmologies and moduli stabilization	238
	Bibliographie	274

Chapitre 1

Introduction

1.1 Pourquoi la théorie des cordes ?

La physique théorique du 20^{ème} siècle a vu le développement des deux théories majeures utilisées à l'heure actuelle pour expliquer le monde qui nous entoure. La première est la mécanique quantique, née dans les années 1920 sous l'influence de nombre de physiciens majeurs, qui évolua plus tard en théorie quantique des champs. A l'aide de cette théorie, on décrit avec une très grande précision l'électromagnétisme (électrodynamique quantique), l'interaction faible (dans le modèle de Glashow-Salam-Weinberg, cette dernière interaction est unifiée à l'électromagnétisme ; toutefois à basse énergie cette unification est brisée), et enfin l'interaction forte (chromodynamique quantique). L'ensemble de ces trois édifices constitue le modèle standard, théorie présentant une symétrie de jauge $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$.

La deuxième théorie majeure décrit la quatrième interaction, la gravitation. Il s'agit de la relativité générale d'Einstein, développée en 1915, une théorie essentiellement géométrique dans laquelle l'espace-temps est courbé par la matière, et la chute libre n'est rien de plus que la propagation suivant les géodésiques de la géométrie de l'univers. Ces deux théories ont été vérifiées à de très grandes précisions par diverses observations, allant de la physique des particules à la cosmologie ; leurs applications pratiques sont extrêmement nombreuses.

Toutefois, cet état des choses n'est pas entièrement satisfaisant. En effet, il s'avère que ces deux théories ne sont pas compatibles : si on essaie de modéliser l'interaction gravitationnelle dans le cadre de la théorie quantique des champs, en quantifiant l'action d'Einstein-Hilbert, on obtient une théorie non renormalisable du fait de la localité de l'interaction gravitationnelle. La théorie quantique des champs associée présente alors des quantités divergentes dans le régime ultra-violet, et est de ce fait mal définie et non prédictive.

Or, l'unification de ces deux théories est souhaitable pour plusieurs raisons. Premièrement, même si la relativité générale est assez précise pour décrire la majorité des interactions gravitationnelles régissant notre univers, il existe des phénomènes, qui, de par les échelles d'énergie auxquelles ils ont lieu, requièrent un traitement à la fois relativiste et quantique. On peut notamment citer les trous noirs, qui sont devenus au fil du temps une des applications les plus prisées en théorie des cordes. Dans ce dernier champ, la théorie des cordes a enregistré un de ses grands succès en reproduisant l'entropie de Bekenstein-Hawking des trous noirs par le comptage d'une certaine classe d'états BPS [SV96] (le lecteur pourra trouver un panorama général du traitement des

trous noirs en supergravité dans [Mic08]). Les cordes pourraient également permettre de poser un nouveau regard sur le *paradoxe de l'information*, un autre symptôme de l'incompatibilité entre mécanique quantique et relativité générale.

Un second exemple est la cosmologie au voisinage du Big Bang, et plus généralement aux premiers stades de la vie de l'Univers; en effet, à cette époque, les phénomènes quantiques deviennent prépondérants, et la compréhension des grandes structures de l'univers actuel passe par une compréhension des fluctuations quantiques primordiales.

Deuxièmement, le modèle standard présente une certaine quantité d'arbitraire, allant du choix du groupe de jauge à la vingtaine de paramètres libres additionnels qu'il faut se donner pour fonder une théorie s'accordant aux données expérimentales. Un premier pas dans la réduction de ce nombre de paramètres est fourni par les théories de grande unification. Ces théories supposent, en se basant sur la concourance des trajectoires des constantes de couplage sous le groupe de renormalisation dans le cadre du modèle standard supersymétrique minimal, que le groupe de jauge à basse énergie $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ est issu de la brisure d'un groupe de jauge plus grand par mécanisme de Higgs (de même que $SU(2)_L \times U(1)_Y$ est brisé en $U(1)_{em}$ par le boson de Higgs). Des candidats naturels pour ces groupes unifiés sont $SU(5)$, $SO(10)$ et E_6 .

On peut alors se demander quelles raisons physiques peuvent être à l'origine du *choix* de ce groupe de jauge, et d'autres caractéristiques comme le nombre de générations. La théorie des champs ne prétend pas fournir de réponses à ces questions : elle modélise les interactions en les supposant connues. La théorie des cordes, au contraire, est formulée dans un cadre extrêmement restrictif, ce qui lui fournit un très fort pouvoir prédictif. Ainsi, dans les modèles de cordes hétérotiques à dix dimensions présentés dans la section 3.4, il n'existe que deux groupes de jauge rendant la théorie à dix dimensions consistante. Il se trouve alors que l'une de ces deux possibilités conduit naturellement, après réduction de la théorie à quatre dimensions, aux groupes de grande unification sus-cités. D'autres caractéristiques comme le nombre de générations sont contrôlés par la géométrie de l'espace interne, qui obéit ici encore à des restrictions fortes.

Enfin, la théorie des cordes est formulée dans le cadre de la supersymétrie (parfois amicalement dénommée SUSY dans la suite de ce mémoire). Cette symétrie suppose que les fermions et les bosons s'arrangent en paires; autrement dit, tout fermion admet un partenaire bosonique (et inversement). Cette hypothèse semble assez hardie à première vue puisqu'on n'a jamais observé de partenaires supersymétriques de particules connues; elle est pourtant attrayante à plusieurs niveaux. Elle permet d'abord de rendre compte de l'existence de la hiérarchie observée entre l'échelle de brisure électro-faible donnée par la masse du Higgs et l'échelle de grande unification. Dans le cadre des théories supersymétriques, cette hiérarchie doit toujours être introduite à la main; elle est cependant préservée sous le processus de renormalisation, dans le cadre d'un mécanisme qui ne repose plus sur des hypothèses de réglages fins parfois peu physiques. Elle rend ensuite très précise la convergence des trajectoires des constantes de couplage, qui n'était qu'approximative dans le cadre de théories non supersymétriques. Enfin, elle fournit un candidat naturel de constituant de la matière noire en la personne du *neutralino*.

La théorie des cordes qui a vu le jour à la fin des années 1960 sous le nom de *modèles duaux* avait pour but de modéliser les interactions fortes, avant que la chromodynamique quantique (QCD), théorie de jauge non-abélienne basée sur le groupe $SU(3)$, n'apparaisse comme le modèle correct. Toutefois, en 1974, Scherk et Schwarz [SS74] remarquèrent que cette théorie quantique modélisait

correctement une particule de spin 2 obéissant aux équations du mouvement dérivées de l'action d'Einstein. On tenait ainsi un candidat de graviton, et une possible théorie de gravité quantique. Cette théorie n'est toutefois valable qu'au niveau perturbatif. Au cours des années, plusieurs incursions majeures dans le domaine non-perturbatif de la théorie ont été réalisées, en exploitant l'existence de dualités reliant les différentes théories consistantes. Ce réseau de dualités a donné naissance au concept de M-théorie, théorie fondamentale définie à onze dimensions, et dont les cinq théories des cordes à dix dimensions ne seraient que les manifestations en divers points de l'espace des modules.

Nous donnons dans la section suivante les principes de base de la théorie des cordes ; nous ne poursuivrons pas d'étude non-perturbative au cours de cette thèse.

1.2 Principe et enjeux

Le postulat de départ de la théorie des cordes est de remplacer les particules de la théorie quantique des champs, qui sont des points matériels sans extension, par des cordes, c'est-à-dire des objets possédant une extension spatiale dans une direction. Ces cordes peuvent être ouvertes ou fermées ; les excitations élémentaires, donnant naissance aux états massifs de la théorie, seront données par des oscillations de la corde, quantifiées de manière similaire à l'oscillateur harmonique standard en mécanique quantique.

Le traitement perturbatif qui se fait en théorie des champs en sommant sur les diagrammes de Feynman va ici se faire en sommant sur les diagrammes de diffusion entre états de cordes, qui vont maintenant se représenter comme des surfaces (voir figure 1.1). Ces surfaces peuvent être à bord (cas des cordes ouvertes) ou sans bord (cas des cordes fermées) ; nous verrons plus tard que cette caractéristique de la théorie nous permet de la considérer comme une théorie des champs en deux dimensions, où "l'espace-temps" associé n'est autre que cette surface de propagation des états de cordes, que l'on appelle *feuille d'univers*. La notion de boucle en théorie des champs est ici remplacée par la notion de genre des surfaces sur lesquelles on va sommer. Nous verrons que le développement perturbatif s'organise naturellement selon le nombre de boucles des surfaces considérées.



FIGURE 1.1 – Exemple d'interaction à 3 points en théorie des champs ; interaction à 3 points en théorie des cordes fermées.

D'un point de vue heuristique, notons que l'interaction entre des états de cordes n'a plus lieu en un point, comme c'était le cas en théorie des champs. Ce formalisme va donc "délocaliser"

l'interaction, en introduisant une longueur minimale dans la modélisation des interactions, qui est la longueur de la corde ; on prend cette longueur de l'ordre de la longueur de Planck

$$l_P = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} \sim 10^{-35} \text{ m}, \quad (1.1)$$

échelle à laquelle on attend que les corrections quantiques à la gravitation deviennent prépondérantes. Cette longueur minimale joue un rôle de cut-off ultra-violet, régularisant ainsi naturellement les divergences qui rendaient la gravité quantique inutilisable.

1.3 Plan de la thèse

Cette thèse a pour but, dans un premier temps, de présenter la théorie des cordes au lecteur étranger à cette discipline. Le lecteur devra toutefois être muni d'un bagage conséquent en physique théorique, faute de quoi le manuscrit atteindrait une taille indécente. Il est toutefois hors de question d'englober tous les aspects de la théorie des cordes actuelles ; nous choisissons donc naturellement de présenter les prérequis à la bonne compréhension des travaux effectués au cours de mes quatre années.

Nous commençons donc par quelques prérequis. Le premier concerne les théories de jauge, ingrédient fondamental de la physique théorique qui repose sur le formalisme des algèbres de Lie et les nombreux théorèmes régissant leur structure et leur classification. Nous détaillons ensuite quelques aspects des théories de supergravité. Ces théories, basées sur le jaugeage de la supersymétrie, ont été construites au cours de la seconde moitié des années 1970 ; elles apparaissent en théorie des cordes comme des limites de basse énergie. Là encore, les hypothèses de consistance fourniront quelques contraintes fortes sur la physique émergeant de ces théories.

Nous construisons ensuite la première quantification de la corde bosonique, puis de la supercorde. Deux contraintes vont fortement réduire le nombre de théories des cordes consistantes : l'invariance conforme de la théorie formulée sur la feuille d'univers, et l'invariance modulaire de la fonction à une boucle. Nous verrons que la dimension de l'espace-temps, de manière spectaculaire, est fixée par la construction, et que l'invariance modulaire implique qu'il n'existe que cinq théories consistantes. Nous verrons encore comment apparaît naturellement la régularisation ultra-violette, dont l'absence condamnait les premières tentatives de gravité quantique.

Nous nous pencherons ensuite sur la définition d'une théorie des cordes à quatre dimensions. Deux pistes sont possibles, dont nous discuterons finalement les similitudes : compactifier six dimensions d'espace sur une variété interne de type Calabi-Yau ou de type orbifold, ou combler l'anomalie conforme existant dans une théorie à quatre dimensions par des degrés de liberté internes. Une des propriétés fondamentales inhérente à toute compactification est la possibilité de générer des brisures de symétrie. Scherk et Schwarz furent parmi les pionniers de l'application de ce mécanisme à la supersymétrie dans les fondateurs [SS79a, SS79b] ; leurs idées se prolongent naturellement en théorie des cordes sous la forme d'orbifolds et de lignes de Wilson, dont nous vanterons les mérites.

Nous nous étendrons particulièrement sur les mécanismes de brisure spontanée d’une symétrie, qu’elle soit une supersymétrie ou une symétrie de jauge, au moyen d’orbifolds à action libre ; ce mécanisme sera au cœur des deux facettes de nos travaux. Munis d’un arsenal théorique conséquent, nous aborderons ensuite les travaux originaux effectués pendant cette thèse.

Le premier travail porte sur des aspects phénoménologiques des modèles de supercordes hétérotiques. On attend de modèles réalistes qu’ils possèdent une supersymétrie $\mathcal{N} = 1$ à quatre dimensions. Cette supersymétrie s’obtient naturellement en compactifiant la théorie hétérotique sur une variété vérifiant certaines contraintes d’holonomie ; cette procédure a aussi pour effet de briser le groupe de jauge existant à dix dimensions, et nous dirige naturellement vers des groupes de jauge réalistes en vue de la construction de théories grand-unifiées.

Pour l’étude du spectre de matière, il est équivalent de se placer en des points particuliers de l’espace des modules, là où la géométrie de la variété dégénère et admet des singularités. Paradoxalement, la théorie des cordes correspondante est toujours définie en de tels points, et beaucoup plus facile à étudier.

Nous construirons alors nos modèles grâce au formalisme de la construction fermionique. Ce formalisme, par son aspect systématique, ouvre la voie à une classification de modèles réalistes selon plusieurs aspects de leur spectre (anomalies, nombre de familles, ...). Cette classification fut effectuée dans une série d’articles précédents [FKNR04, FKR07a, FKR07b, FKR08]. Dans les deux derniers articles de cette série, une dualité fut exposée, reliant le nombre de représentations vectorielles et le nombre de représentations spinorielles de $SO(10)$, le groupe de jauge émergeant naturellement de cette classe de modèles ; une preuve formelle en fut donnée.

Nous reprenons ce mécanisme et en donnons une nouvelle preuve, basée sur l’étude de la brisure spontanée de symétrie de jauge $E_6 \rightarrow SO(10)$. Nous interprétons les ingrédients de la classe de modèles de fermions libres comme des orbifolds à action libre ; l’étude des coefficients définissant un modèle, dits coefficients de projection GSO généralisée, nous permet de déterminer lesquels de ces orbifolds brisent la symétrie de jauge étendue. Il est alors aisé de construire les coefficients définissant un modèle dual. Nous nous intéressons par la suite à quelques propriétés intéressantes de cette classe de construction. Il est notamment possible de construire des modèles auto-duaux ; cette classe contient des éléments dans lesquels toutes les composantes $U(1)$ du groupe de jauge sont dépourvues d’anomalies.

Dans la deuxième partie de cette thèse, nous étudions des solutions cosmologiques issues de la théorie des cordes. À l’aide d’une compactification de Scherk-Schwarz du temps euclidien, nous nous intéressons à des théories des cordes à température finie, dans lesquelles la supersymétrie est de plus spontanément brisée par un mécanisme de Scherk-Schwarz sur une dimension interne dont on note le rayon R_5 . Le schéma précis de cette brisure est décrit par une R -charge $a + Q$, dont l’effet est de pondérer d’un signe \pm la contribution des différentes paires boson/fermion dans le potentiel effectif.

La théorie de supergravité correspondant à la limite à basse énergie de cette théorie des cordes est alors corrigée à l’ordre d’une boucle par des effets thermiques et quantiques. Nous calculons explicitement ces effets, sous certaines approximations que nous motiverons. Notamment, la structure “sans-échelle” partagée par toutes les réductions dimensionnelles de théories des cordes est brisée par la prise en compte de ces effets.

Nous cherchons alors à faire correspondre à cette supergravité déformée une évolution cosmologique. Pour cela, nous identifions les équations de la supergravité aux équations d’Einstein

donnant l'évolution d'un univers de Friedmann-Robertson-Walker. Ceci passe notamment par l'identification du module sans échelle au dilaton. Alors que l'évolution de la température au cours du temps est donnée par la condition adiabatique, nous postulons, mus par des considérations dimensionnelles et des travaux antérieurs, que le rapport de la température et de la masse du gravitino est constant. Cette contrainte est non-triviale ; elle restreint le choix de la R -charge définissant la brisure selon la dimension R_5 . Le calcul du potentiel dans un cas simple donne des termes de rétroaction ayant la forme de termes de radiation ; nous nous intéressons ensuite à la génération possible de termes ayant la forme d'une courbure, puis d'une constante cosmologique. Le potentiel ne dépend dans un premier temps que du module sans échelle, qui n'est donc plus plat : nous présentons enfin la forme des évolutions cosmologiques associées à de tels scénarios. Les termes du potentiel effectif qui dépendent des modules spectateurs sont par contre exponentiellement petits : ces modules restent plats. Toutefois l'apparition, dans le contexte de la supergravité, de termes de brisure douce, stabilise ces modules spectateurs. Le module sans échelle sera lui aussi stabilisé à la transition électro-faible, au-delà de laquelle le système sort du cadre de nos approximations.

Nous considérons enfin la généralisation de ce modèle à la présence de deux rayons brisant la supersymétrie, notés R_4 et R_5 . Ce modèle est défini sous des contraintes assez similaires au cas à un seul rayon. Il se pose alors un nouveau problème : le module de structure complexe R_5/R_4 participe à la brisure de supersymétrie, et le potentiel effectif à une boucle lui confère une dynamique non-triviale. Nous donnons des modèles explicites dans lesquels ce module est stabilisé, ce qui empêche ce nouveau module d'évoluer dynamiquement vers le cas à un seul rayon étudié précédemment.

Chapitre 2

Quelques prérequis

2.1 Algèbres de Lie et théories de jauge

La notion de symétrie d'un système est l'un des piliers de la physique moderne. En effet, connaître les transformations par lesquelles un système est laissé invariant permet de déduire des propriétés non triviales dudit système. De même, imposer une symétrie lors de la modélisation d'interactions permet de fortement contraindre la forme de la théorie obtenue : ainsi, la forme des interactions doit être invariante, et le contenu en champs de la théorie doit s'arranger en représentations du groupe de symétrie considéré.

La majorité des groupes de symétrie que nous allons rencontrer sont des groupes de Lie. Cette structure spécifique ouvre la voie à de nombreux résultats extrêmement intéressants.

Groupes et algèbres de Lie

On ne donnera ici qu'une brève introduction à la théorie des groupes et algèbres de Lie, en se restreignant aux propriétés qui nous seront utiles par la suite. On pourra notamment consulter [DFMS97] ou [FSS00] pour de plus amples détails.

Un groupe de Lie est défini comme une variété munie d'une structure de groupe, tel que les deux opérations associés à cette structure de groupe

$$\begin{aligned}(g_1, g_2) &\mapsto g_1 g_2, \\ g &\mapsto g^{-1},\end{aligned}$$

soient différentiables. Notamment, les groupes de rotation $SO(n)$, et plus généralement les groupes $SO(n, m)$ préservant la métrique de signature (n, m) sont des groupes de Lie.

Si G est un groupe de Lie, on peut définir en tout point g de G l'espace vectoriel tangent à G en g , que l'on notera T_g . On définit alors l'algèbre de Lie associée au groupe G , notée \mathfrak{g} comme l'espace tangent à G en l'identité :

$$\mathfrak{g} = T_e. \tag{2.1}$$

Ainsi, l'algèbre de Lie est formée par les transformations infinitésimales de G , ce qui veut encore dire que \mathfrak{g} décrit G au voisinage de l'identité. Par exemple, si G est le groupe de Lie des matrices

orthogonales $n \times n$ réelles de déterminant 1

$$G = SO(n), \quad (2.2)$$

alors l'algèbre de Lie associée est l'ensemble des matrices $n \times n$ réelles antisymétriques

$$\mathfrak{so}(n) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^t M = -M\}. \quad (2.3)$$

À partir de la donnée d'une algèbre de Lie \mathfrak{g} , il est possible de remonter à la structure du groupe G lorsque celui-ci est simplement connexe (dans le cas contraire, on n'arrive à reconstituer que la composante connexe de G contenant l'élément neutre). Dans le cas simplement connexe, on montre que

$$G = \exp(\mathfrak{g}). \quad (2.4)$$

Par exemple, on note que $O(n)$ et $SO(n)$ ont mêmes algèbres de Lie ; par contre l'exponentiation de $\mathfrak{so}(n)$ ne reconstitue que $SO(n)$, qui est la composante connexe de $O(n)$ contenant l'identité.

À partir de la définition comme espace tangent, on peut montrer qu'il existe sur \mathfrak{g} une application bilinéaire antisymétrique, appelée *crochet de Lie* ou *commutateur* :

$$\begin{aligned} [\ , \] &: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g} \\ (X, Y) &\mapsto [X, Y] \end{aligned} \quad (2.5)$$

qui vérifie l'identité de Jacobi :

$$[X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] = 0. \quad (2.6)$$

Si on note $(J^a)_{1 \leq a \leq n}$ des générateurs formant une base de \mathfrak{g} , on a les relations de commutation suivantes

$$[J^a, J^b] = \sum_c i f^{ab}_c J^c. \quad (2.7)$$

Les constantes f^{ab}_c sont appelées constantes de structure de l'algèbre \mathfrak{g} . Elles caractérisent de manière unique la structure de l'algèbre.

Une des bases de \mathfrak{g} parmi les plus utiles à considérer est la *base de Cartan-Weyl*. On commence par définir la sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{g} : c'est la sous-algèbre commutative maximale de \mathfrak{g} . On note $(H_i)_{1 \leq i \leq r}$ une base de générateurs de cette sous-algèbre ; r est la dimension de la sous-algèbre de Cartan et est appelé *rang* de \mathfrak{g} . Ces générateurs étant hermitiens et commutant deux à deux, on en déduit par l'identité de Jacobi que les endomorphismes de \mathfrak{g} $\text{Ad}_{h^i} : g \mapsto [h, g]$ commutent aussi deux à deux. Ils sont donc simultanément diagonalisables : ceci nous permet de compléter la famille (h^i) en base de \mathfrak{g} par des éléments (E^α) , appelés *opérateurs d'échelle*, qui sont des vecteurs propres simultanés des applications Ad_{h^i} . Ainsi, on a :

$$[H^i, E^\alpha] = \alpha^i E^\alpha. \quad (2.8)$$

Les vecteurs à r composantes $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq r}$ ainsi définis, que l'on notera de manière condensée α , sont appelés racines de l'algèbre. L'algèbre de Lie est en fait entièrement spécifiée par l'ensemble

de ses racines. Ainsi, pour classifier les algèbres de Lie simples¹, il suffit de classifier les systèmes de racines. On trouve 4 familles infinies d’algèbres (on a noté dans la seconde colonne le groupe de Lie associé G) :

\mathfrak{g}	G
A_n	$SU(n+1)$
B_n	$SO(2n+1)$
C_n	$Sp(2n)$
D_n	$SO(2n)$

TABLE 2.1 – Familles infinies d’algèbres de Lie simples.

ainsi que cinq algèbres exceptionnelles : E_6, E_7, E_8, F_4, G_2 .

Représentations des algèbres de Lie et théories de jauge

Une algèbre de Lie est a priori un ensemble abstrait, caractérisé par ses constantes de structure. Une représentation d’une algèbre de Lie est en quelque sorte une “incarnation” de cette algèbre par son action sur un espace vectoriel. Plus précisément, si E est un espace vectoriel, on appelle représentation linéaire d’un groupe G un morphisme de groupes continu de G dans $GL(E)$:

$$\begin{aligned} T : G &\longrightarrow GL(E) \\ g &\longmapsto T(g). \end{aligned} \tag{2.9}$$

En d’autres termes, on représente chaque élément de G par un isomorphisme d’un espace vectoriel V . On appelle alors dimension de la représentation la dimension de l’espace vectoriel E . Ainsi, le groupe de Lie $SO(n)$ admet une représentation de dimension n : $T(g)$ est simplement donné par l’écriture matricielle de g . Cet exemple trivial ne doit cependant pas faire oublier qu’un groupe admet plusieurs représentations, même si sa définition même lui associe souvent naturellement une de ses représentations. Ainsi, le groupe $SU(2)$ des matrices complexes unitaires de déterminant 1 admet des représentations de dimension $2j+1$ quelque soit l’entier $j \geq 0$. La classification de ces représentations est essentielle en ce qu’elle permet de prévoir le contenu d’une théorie : si une théorie admet une symétrie sous la forme d’un groupe de Lie G , son spectre doit s’arranger en représentations de G . Ce point permet notamment d’aiguiller le théoricien dans sa recherche de groupes de jauge unifiés ; nous reviendrons sur ce point dans le chapitre 5.

Pour définir la notion de représentation sur une algèbre de Lie, on note que si $g \in \mathfrak{g}$, alors le groupe unidimensionnel $\{\exp(gt) | t \in \mathbb{R}\}$ est un sous-groupe de G . Ceci nous permet d’étendre la définition de T à \mathfrak{g} , par

$$T(g) = \left. \frac{dT(e^{gt})}{dt} \right|_{t=0}. \tag{2.10}$$

1. Une algèbre de Lie est dite simple si elle ne contient pas d’idéaux (au sens du crochet de Lie) non triviaux.

L'application T est maintenant une application linéaire de \mathfrak{g} dans $\mathcal{L}(V)$. Ce prolongement préserve de plus le commutateur : on a $T([g, h]) = T(g)T(h) - T(h)T(g)$.

Il est évident qu'un groupe de Lie G et son algèbre \mathfrak{g} admettent les mêmes représentations.

Une représentation va nous intéresser en particulier : il s'agit de la représentation adjointe, dans laquelle l'algèbre de Lie va agir sur elle-même.

D'après les propriétés du commutateur, l'application

$$\begin{aligned} \text{Ad} : \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathcal{L}(\mathfrak{g}) \\ g &\longmapsto \text{Ad}_g \end{aligned} \tag{2.11}$$

où $\text{Ad}_g(h) = [g, h]$ définit une représentation linéaire de \mathfrak{g} : l'espace vectoriel associé est dans ce cas \mathfrak{g} lui-même, et la dimension de cette représentation est la dimension de l'algèbre.

L'intérêt primordial des groupes et algèbres de Lie en physique théorique vient de la considération des théories de jauge. Nous n'allons pas exposer les détails du jaugeage d'une symétrie globale d'une théorie des champs. Nous rappelons néanmoins que cette procédure consiste à rendre locale cette symétrie globale : autrement dit, le paramètre de la transformation dépend lui aussi de l'espace-temps. Pour que la théorie reste invariante sous cette opération, il est alors nécessaire de modifier la dérivée usuelle ∂_μ en dérivée covariante $\partial_\mu - iA_\mu^a T_R^a$. A_μ^a est un nouveau champ de la théorie, médiateur de la transformation de jauge, et est nommé *boson de jauge* ; les matrices T_R^a forment une base du groupe des transformations dans la représentation R . L'indice a est ici l'indice adjoint : les bosons de jauge sont toujours dans la représentation adjointe du groupe de jauge. La modification de la dérivée partielle en dérivée covariante implique alors la présence d'un terme cinétique pour les champs de jauge, qui prend la forme suivante

$$\mathcal{L}_{\text{cin.}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu,a} \tag{2.12}$$

où le tenseur de courbure $F_{\mu\nu}$ est défini comme

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f_{bc}^a A_\mu^b A_\nu^c \tag{2.13}$$

g est ici la constante de couplage.

En pratique, il est important de noter que les bosons de jauge sont dans la représentation adjointe du groupe de jauge : ceci nous permettra de déterminer explicitement les groupes de jauge associés aux différentes théories des cordes que nous allons construire dans cette thèse. Il suffira pour cela d'identifier les systèmes de racines donnés par les vertex des états que nous construirons. À ces bosons s'ajouteront des états de matière qui s'arrangeront dans diverses représentations du groupe.

Notons enfin qu'en théorie des cordes, il n'existe pas de symétrie continue globale [BD88] : une telle symétrie est en effet automatiquement jaugeée à cause de la présence sur la feuille d'univers des états de vertex donnant naissance aux bosons de jauge.

Le formalisme des théories de jauge est très puissant ; il est en effet possible de voir la relativité générale comme un jaugeage de l'invariance par difféomorphismes d'une théorie physique. Le terme cinétique du champ de jauge correspondant est alors le scalaire de Ricci R , la dérivée

covariante est celle usuellement construite à partir des symboles de Christoffel, et le boson de jauge est donné par la métrique $g_{\mu\nu}$ (qui se transformera en graviton dans une théorie de gravité quantique). Cette procédure est aussi à l'origine de l'introduction de la connection de spin, que nous rencontrerons dans la section 5.2. De même, la supergravité sera construite par jaugeage de la supersymétrie.

2.2 Algèbres de supersymétrie et théories de supergravité quadri-dimensionnelles

2.2.1 Algèbres de supersymétrie

L'importance des symétries dans la définition d'une théorie quantique peut nous pousser à introduire de nouvelles symétries, qui engendreront de nouvelles contraintes. Jusqu'à présent, le groupe de symétrie le plus général que nous avons rencontré s'écrit sous la forme $P \times G$, où P est le groupe de Poincaré, et G un groupe de jauge ayant la forme d'une algèbre de Lie. Le théorème de Coleman-Mandula, démontré dans le cadre d'hypothèses physiques naturelles, force ce produit à être direct : les symétries internes doivent commuter avec le groupe de Poincaré. Il existe toutefois un moyen de contourner ce théorème, qui est de considérer une extension de la symétrie faisant intervenir des *superalgèbres* de Lie, c'est-à-dire des symétries ayant un paramètre fermionique, et dont la structure est caractérisée par des relations d'anticommutation (on pourra trouver des informations plus complètes sur les superalgèbres de Lie dans [FSS00]). Une introduction très complète à la supersymétrie est donnée dans [Bil01]. Pour construire l'algèbre de supersymétrie, on complète l'algèbre de Poincaré, donnée par les générateurs des translations P_μ et des rotations/boosts $M_{\mu\nu}$, en introduisant des *supercharges*, prenant la forme de spineurs de Majorana d'espace temps, vérifiant

$$[P_\mu, Q_\alpha^I] = 0, \quad [M_{\mu\nu}, Q_\alpha^I] = i(\sigma_{\mu\nu})_\alpha^\beta Q_\beta^I, \quad (2.14)$$

$$\{Q_\alpha^I, \bar{Q}_\beta^J\} = 2\sigma_{\alpha\beta}^\mu P_\mu \delta^{IJ}, \quad \{Q_\alpha^I, Q_\beta^J\} = \epsilon_{\alpha\beta} Z^{IJ}.$$

$I, J = 1 \dots \mathcal{N}$ donne le nombre de supersymétries. Si $\mathcal{N} \geq 2$, on parle de supersymétrie étendue. Le comportement des charges Q sous les rotations confirme que ces charges sont des spineurs. Leur action sur les états physiques de la théorie permet d'organiser le spectre en *supermultiplets*, qui comportent le même nombre de degrés de liberté fermioniques et bosoniques. De plus, tous les états physiques d'un supermultiplet ont la même masse. Les supermultiplets sans masse comptent $2^{\mathcal{N}}$ états; pour les multiplets massifs, on trouve génériquement dans un supermultiplet contenant $2^{2\mathcal{N}}$ états. Des supermultiplets réduits existent en présence des termes de charge centrale Z^{IJ} ; la masse de ces multiplets est liée aux valeurs propres de la matrice Z^{IJ} . Lorsque k supercharges s'annulent sur la représentation, on obtient des supermultiplets BPS, de dimensions $2^{2(\mathcal{N}-k)}$.

Parmi les motivations de l'introduction de la supersymétrie, on note que sa structure permet l'obtention de certains théorèmes de non-renormalisation. Ces résultats permettent d'apporter une solution partielle au problème de la hiérarchie. Le problème de la hiérarchie de jauge, qui

intervient en théorie quantique des champs, consiste à expliquer la différence de magnitude extrêmement importante existant entre l'échelle de brisure électro-faible du modèle standard (qui est de l'ordre de la masse du Higgs, soit de l'ordre de 100 GeV), et les échelles de grande unification ($M_{GUT} \sim 10^{16}$ GeV) ou de Planck ($M_P \sim 10^{18}$ GeV). L'introduction à la main de ce rapport dans la théorie quantique (sous la forme de l'introduction de la masse du Higgs) est évidemment possible au niveau des arbres, mais dans une théorie bosonique, la forme générique des corrections quantiques à cette quantité issues de la renormalisation sont trop importantes pour préserver le rapport des échelles. Il semblerait possible d'annuler les contributions déstabilisant la hiérarchie par fine tuning ; toutefois la relation imposée à cet effet au niveau des arbres n'est pas invariante par le groupe de renormalisation, et la hiérarchie est détruite aux ordres supérieurs. Par contre, dans une théorie supersymétrique, ces corrections sont beaucoup mieux contrôlées, et, sous certaines conditions (qui définissent les *Large Hierarchy Compatible models* [FKZ94]), les corrections au potentiel sont logarithmiques dans l'échelle de *cut-off*, ce qui écrase les corrections ; la hiérarchie introduite est alors préservée. Nous donnerons de plus amples précisions sur la structure de ces corrections dans la section 6.5.

2.2.2 Supergravités à quatre dimensions

Les théories de supergravité sont définies comme la promotion de la supersymétrie globale en une symétrie locale, de manière analogue à la construction des théories de jauge telles que l'électromagnétisme. Une telle construction est indissociable de la gravitation. En effet, les transformations de supersymétrie, comme on l'a vu dans la section précédente, sont les "racines carrées" des transformations du groupe de Poincaré. Ainsi une théorie exhibant une supersymétrie locale devra forcément exhiber une invariance de Poincaré locale : en d'autres termes, cette théorie inclura la gravitation.

Le champ médiateur des transformations locales de supersymétrie est le partenaire supersymétrique du champ médiateur de la gravitation, c'est-à-dire le *graviton* de spin 2. Il correspond ainsi à une particule de spin 3/2, nommé *gravitino*. Outre ces deux champs, les théories de supergravité incorporent ensuite des degrés de liberté de matière (champs de jauge, etc.), qui s'arrangent en multiplets de supersymétrie.

L'étude des dimensions dans lesquelles il est possible de définir une théorie de supergravité a été effectuée à la fin des années 1970, principalement dans [Nah78, CJS78, CJ79]. Le fait que l'on ne puisse pas considérer de particules ayant un spin > 2 à quatre dimensions implique que le nombre maximal de supercharges d'une théorie de supergravité est de 32 ; ainsi la dimension maximale est $D = 11$. La supergravité $D = 11$ de [CJS78] est le candidat naturel de limite à basse énergie d'une théorie quantique fondamentale définie à onze dimensions, et dénommée M-théorie. La compactification de la supergravité à onze dimensions sur un cercle ou un orbifold fournit plusieurs théories à dix dimensions, à 32 ou 16 supercharges, qui peuvent s'identifier aux limites à basse énergie de théories des supercordes connues. Nous ne rentrerons pas dans ces détails, éloignés du travail mené dans cette thèse. Ces considérations ont été très riches en conséquences physiques, notamment en reliant par des opérations de dualité *non-perturbative* les différentes théories des cordes à dix dimensions.

Nous allons ici nous intéresser aux propriétés des théories de supergravité en 4 dimensions d'espace-temps. Le nombre maximal de 32 supercharges nous apprend que la supersymétrie

étendue maximale est $\mathcal{N} = 8$; elle est unique, en ce sens que le seul multiplet de la théorie est le multiplet gravitationnel. Plus généralement, les théories de supergravité étendues $\mathcal{N} \geq 5$ sont uniques ; à $\mathcal{N} = 4$, on voit apparaître le multiplet vectoriel, puis l'hypermultiplet à $\mathcal{N} = 2$, et enfin le multiplet chirale à $\mathcal{N} = 1$. On note au passage qu'une théorie chirale a obligatoirement $\mathcal{N} \leq 1$.

La présence de supersymétrie $\mathcal{N} = 1$ (et a fortiori, éventuellement de supersymétries étendues $2 \leq \mathcal{N} \leq 8$) contraint fortement la forme du lagrangien, dont les termes cinétiques et les couplages se déduiront de deux fonctions définissant la théorie. Les observations montrent de manière évidente que la supersymétrie ne peut être une symétrie exacte du monde qui nous entoure. Il convient alors de la briser à basse énergie, de manière analogue à la brisure électrofaible par le mécanisme de Higgs. Cette brisure de la supergravité est dite *spontanée* : elle introduit un décalage entre les masses de partenaires supersymétriques, dont l'amplitude est donnée par la masse du gravitino $M_{3/2}$. Cette masse provient de l'absorption du champ du goldstino par le gravitino : c'est le mécanisme de super-Higgs.

Lors de la brisure spontanée de supersymétrie, la valeur du potentiel dans le vide de la théorie peut devenir non-nulle. Cette valeur n'étant rien d'autre que la constante cosmologique, il est essentiel de réaliser des modèles de supergravité spontanément brisée garantissant une constante cosmologique nulle. En fait cette contrainte peut s'imposer sur n'importe quel modèle de supergravité, en imposant un *réglage fin* des paramètres de la théorie (masse des particules, etc...). Cette solution est assez artificielle ; nous verrons qu'il existe une classe particulière de modèles, dits *sans échelle*, pour lesquels la constante cosmologique reste nulle en présence d'une brisure spontanée de supersymétrie. Cette dénomination provient du fait que la masse du gravitino est dans le cadre de cette théorie indéterminée, car correspondant à une direction plate du potentiel.

En plus de ces propriétés hautement intéressantes sur le plan phénoménologique, nous verrons que ces modèles ont le bon goût de s'identifier aux limites à basse énergie des théories des cordes que nous définirons plus tard.

Supergravité $\mathcal{N} = 1$ à quatre dimensions et sa brisure spontanée

La meilleure manière d'écrire une action invariante sous les transformations de supersymétrie locale $\mathcal{N} = 1$ est d'utiliser le formalisme des *superchamps*², dans lequel on remplace les champs usuels $\phi(x^\mu)$ par des superchamps $\Phi(x^\mu, \Theta_\alpha, \bar{\Theta}_{\dot{\alpha}})$. Θ , $\bar{\Theta}$ sont ici des coordonnées ayant la forme de spineurs de Majorana ; ce sont des variables de Grassmann (anti-commutantes). En quatre dimensions, Θ et $\bar{\Theta}$ ont chacun deux composantes indépendantes.

Ce formalisme a pour effet de rassembler en un même champ les degrés de liberté bosonique et fermionique d'un doublet de supersymétrie. Il permet aussi une expression simple des transformations de supersymétrie.

Un multiplet chirale comprenant un scalaire z et un fermion de Weyl ψ se représente alors par un superchamp :

2. On trouvera par exemple dans [Bil01] une présentation détaillée de ce formalisme, et son application à la construction de lagrangiens supersymétriques.

$$\Phi(x, \Theta, \bar{\Theta}) = z(x) + \sqrt{2}\Theta\psi(x) + i\Theta\sigma^\mu\bar{\Theta}\partial_\mu z(x) - \Theta\Theta f(x) - \frac{i}{\sqrt{2}}\Theta\Theta\partial_\mu\psi(x)\sigma^\mu\bar{\Theta} - \frac{1}{4}\Theta\Theta\bar{\Theta}\bar{\Theta}\partial^2 z(x). \quad (2.15)$$

On voit notamment que cette expression introduit un troisième champ f , dit *auxiliaire*. Ce champ n'aura pas de terme cinétique dans l'action, et pourra être remplacé par sa valeur *on-shell*. Il donnera cependant lieu à un terme de potentiel, dit F -terme.

Dans le même esprit, on montre que la représentation d'un multiplet vectoriel (v^μ, λ) en terme d'un superchamp $V(x, \Theta, \bar{\Theta})$ fait intervenir un champ auxiliaire $D(x)$; sa substitution fera apparaître des D -termes dans le potentiel scalaire.

On s'intéresse maintenant à la construction d'une théorie de supergravité. Pour cela, il nous faut définir le spectre en matière de la théorie. Ce spectre se compose de multiplets chiraux Φ^I et de multiplets vectoriels de jauge³ V^a (a est donc ici un indice adjoint).

La théorie est alors caractérisée par une *fonction de Kähler*

$$G(z, \bar{z}) = K(z, \bar{z}) + \log |w(z)|^2 \quad (2.16)$$

dont les dérivées

$$G_I = \frac{\partial G}{\partial z^I}, \quad G_{\bar{J}} = \frac{\partial G}{\partial \bar{z}^{\bar{J}}}, \quad G_{I\bar{J}} = \frac{\partial G}{\partial z^I \partial \bar{z}^{\bar{J}}}. \quad (2.17)$$

définissent la métrique de Kähler $G_{I\bar{J}} = K_{I\bar{J}}$. Cette métrique et son inverse $G^{I\bar{J}} = (G_{I\bar{J}})^{-1}$ servent à monter et baisser les indices I, \bar{J} .

Cette métrique définit les termes cinétiques des multiplets chiraux. On se donne ensuite la *fonction cinétique de jauge* $f_{ab}(z)$. Cette fonction donne les constantes de couplage de jauge et les constantes de couplage axionique

$$\text{Re } f_{ab} = \frac{1}{g_{ab}^2}, \quad \text{Im } f_{ab} = \theta_{ab}; \quad (2.18)$$

tels qu'apparaissant dans le lagrangien bosonique

$$\mathcal{L}_{gauge} = \int -\frac{1}{4g_{ab}^2} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu,b} + \theta_{ab} F_{\mu\nu}^a \tilde{F}^{\mu\nu,b} \quad (2.19)$$

Le potentiel scalaire de cette théorie provient alors des F -termes et des D -termes : on a

$$V = V_F + V_D = e^G (G_I G^I - 3) + \frac{[(\text{Re } f)^{-1}]^{ab}}{2} (G_I (T_a)^I_{\bar{J}} \bar{z}^{\bar{J}}) (z^K (T_b)_K^{\bar{L}} G_{\bar{L}}) \quad (2.20)$$

De manière générique, le D -terme est défini positif, alors que le F -terme est de signe arbitraire. Il convient alors, pour définir le vide de cette théorie, de minimiser ce potentiel relativement aux différents champs; la constante cosmologique sera donnée par la valeur du potentiel dans ce vide

$$\Lambda = V_F \Big|_{z=z_{min.}} + V_D \Big|_{z=z_{min.}}. \quad (2.21)$$

3. Les multiplets chiraux s'ordonnent bien entendu en représentations sous le groupe de jauge : l'indice I est donc celui d'une représentation, dans laquelle la symétrie de jauge sera implémentée par les matrices $(T^a)^I_{\bar{J}}$.

Brisure spontanée de la supergravité

L'algèbre de supersymétrie est brisée lorsque l'un des deux champs auxiliaires (F^i est le champ auxiliaire d'un superchamp chiral, et D^a celui d'un multiplet vectoriel) de la théorie reçoit une valeur moyenne dans le vide non-nulle. Ceci est résumé par la condition

$$\langle G_I \rangle \neq 0. \quad (2.22)$$

Dans ce cas, par le mécanisme de *super-Higgs* [C⁺78], le gravitino absorbe le goldstino et acquiert une masse $M_{3/2} = e^{G/2}$.

On peut alors identifier les champs participant à la brisure comme les scalaires z^I tels que $G_I \neq 0$, ou encore $G_I G^I \neq 0$ (non sommé). En effet, ces champs ont une composante selon la direction du goldstino.

La brisure spontanée de la supergravité entraîne aussi l'apparition d'un cortège de termes donnant une masse aux divers champs de la théorie. Ces termes sont appelés termes de brisure douce ; leur expression dépend des détails de la fonction de Kähler du coset formé par les scalaires. On pourra se rapporter à [FKZ94, Pav95] pour des détails plus poussés. L'intérêt de l'existence de tels termes, dont l'ordre de grandeur est celui de la masse de brisure de supersymétrie, est de participer à la stabilisation de certains modules, lorsque les énergies mises en jeu sont de l'ordre de $m_{3/2}$. Nous donnons des précisions sur ce mécanisme dans [CJKPT09].

Au minimum du potentiel scalaire (2.20), on remarque que la constante cosmologique peut être nulle même en présence d'une brisure spontanée de la supergravité (c'est-à-dire, avec une masse du gravitino non-nulle). Un réglage *ad hoc* des différents paramètres de la théorie permet l'annulation de cette constante. Ces contraintes de *fine tuning* sont le plus souvent peu naturelles ; il conviendrait de trouver un modèle plus satisfaisant.

Les modèles de supergravité sans échelle

Dans cette sous-section, on va montrer, en utilisant l'expression du potentiel scalaire (2.20) ci-dessus, comment la théorie de supergravité sans échelle introduite dans [CFKN83] et développée dans [EKN84a, EKN84b, ELNT84] permet d'obtenir, après brisure spontanée de la supersymétrie, une constante cosmologique nulle et une masse du gravitino indéterminée au niveau classique. On suppose pour cela qu'il existe un module T , tel que la fonction de Kähler se décompose comme

$$G_{tot.} = G(T, \bar{T}) + \mathcal{G}(z^I, \bar{z}^{\bar{I}}) \quad (2.23)$$

On note :

$$G_T = \frac{\partial G}{\partial T}, \quad G_{\bar{T}} = \frac{\partial G}{\partial \bar{T}}, \quad G_{T\bar{T}} = \frac{\partial^2 G}{\partial T \partial \bar{T}}, \quad \mathcal{G}_I = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial z^I}, \quad \mathcal{G}_{\bar{J}} = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \bar{z}^{\bar{J}}}, \quad \mathcal{G}_{I\bar{J}} = \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial z^I \partial \bar{z}^{\bar{J}}}; \quad (2.24)$$

$G_{T\bar{T}}$, $\mathcal{G}_{I\bar{J}}$ définit alors une métrique qui permet de remonter les indices.

Si on choisit alors

$$G(T, \bar{T}) = -3 \log(T + \bar{T}) + \log |c|^2 \quad (2.25)$$

où c est une constante, on a, de manière identique, $e^{G_T} \left((G_T)_I (G_T)^I - 3 \right) = 0$. Maintenant, si on rajoute les autres degrés de liberté z, \bar{z} dans la théorie, le potentiel prend la forme

$$V = V_F + V_D = e^{G_{tot.}} (\mathcal{G}_z)_I (\mathcal{G}_z)^I + V_D \quad (2.26)$$

Sous l'hypothèse de couplage minimal des autres champs z, \bar{z} , le potentiel est positif, et on montre qu'il admet un minimum à $V = 0$. Ceci annule la constante cosmologique de la théorie de supergravité.

Dans le mécanisme de brisure spontanée de supersymétrie, la masse du gravitino est donnée par

$$M_{3/2} = e^{\frac{G_{tot.}}{2}}. \quad (2.27)$$

Dans les modèles que nous considérons, le module T est le seul à contribuer à la masse du gravitino : on a

$$M_{3/2} = \frac{|c|^2}{(T + \bar{T})^3}. \quad (2.28)$$

L'indétermination *au niveau classique* de la masse du gravitino est assurée par la platitude du potentiel, qui ne dépend pas de T . Le terme cinétique généré par la fonction de Kähler pour le module T , dont l'expression est

$$\sqrt{-g} g^{\mu\nu} 3 \frac{\partial_\mu T \partial_\nu \bar{T}}{(T + \bar{T})^2} \quad (2.29)$$

possède une symétrie non-compacte $SU(1, 1)$.

Nous verrons cependant plus tard que les corrections quantiques à ce potentiel permettent de lever cette indétermination, en générant un potentiel non trivial pour $M_{3/2}$. Il faut pour cela avoir à disposition une théorie quantique dont la limite de basse énergie peut être décrite par une théorie de supergravité : la théorie des cordes. Dans notre modèle, ces corrections s'obtiendront en considérant des théories des supercordes, hétérotiques ou de Type II, à supersymétrie étendue.

Comme reconnu dans [Wit85] dans le cas de compactifications sur des variétés d'holonomie $SU(3)$, et dans [FKP86] dans le cas de compactification sur des orbifolds, nous verrons que les supergravités à quatre dimensions correspondant à la limite de basse énergie des compactifications des différentes théories des supercordes correspondent à des modèles sans échelle. En particulier, dans le cas de compactification sur un tore $T^2 \times T^2 \times T^2$ ou des orbifolds $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, l'espace des modules de la théorie est donné par 7 champs : le dilaton/axion S , les trois modules de Kähler T^I et les trois modules de structure complexe U^I . Le potentiel de Kähler effectif est alors donné par

$$K = -\log(S + \bar{S}) - \sum_{I=1}^3 \log(T^I + \bar{T}^I) - \sum_{I=1}^3 \log(U^I + \bar{U}^I). \quad (2.30)$$

Nous reviendrons plus en détail dans la section 4.4 sur la structure de ces supergravités et l'interprétation des différents modules.

Il est alors possible, en gelant certains degrés de liberté du système, de définir des combinaisons de ces modules vérifiant la propriété sans échelle. Nous utiliserons cette méthode dans les travaux présentés au chapitre 6.

Chapitre 3

Théories des supercordes en 10 dimensions

Nous allons commencer par présenter la théorie des cordes à dix dimensions, d'abord dans le cas bosonique, puis dans le cas de la supercorde. Nous nous inspirons principalement de [Kir97] et [Pol98a].

3.1 Action et quantification de la corde bosonique

Le point de départ le plus naturel pour écrire la théorie quantique d'une corde est de postuler une action qui généralise celle de la particule libre. L'action de cette dernière s'écrit, pour une particule de masse m ,

$$S = -m \int ds = -m \int d\tau \sqrt{-\dot{x}_\mu \dot{x}^\mu} \quad (3.1)$$

et n'est autre que la longueur propre de sa ligne d'univers (τ est le *temps propre* de la particule). De la même façon, on peut donc définir l'action de la corde comme l'intégrale de l'élément de sa surface d'univers : c'est l'action de Nambu-Goto

$$S_{NG} = -T \int_M d\sigma d\tau \sqrt{-\det(\partial_a X^\mu \partial_b X_\mu)}. \quad (3.2)$$

Ici, M est appelée *feuille d'univers* de la corde, et est paramétrée par les coordonnées σ et τ , respectivement longueur propre et temps propre de la corde, comme représenté sur la figure 3.1. T est la tension de la corde, donnée en fonction de la *pente de Regge* α' par $T = 1/2\pi\alpha'$. Toutefois, cette action est difficile à utiliser en vue d'une quantification. On lui préfère l'action de Polyakov, qui lui est équivalente :

$$S = -\frac{T}{2} \int_M d\sigma d\tau \sqrt{-\gamma} \gamma^{ab} \eta_{\mu\nu} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu. \quad (3.3)$$

Cette action fait apparaître la théorie comme une théorie à deux dimensions, dans laquelle les X^μ sont des champs scalaires (au sens des difféomorphismes de la feuille d'univers). Ces scalaires vivent sur la feuille d'univers, et prennent leurs valeurs dans *l'espace cible*, qui est ici l'espace-temps habituel ; la symétrie de Poincaré propre à l'espace-temps, dans ce formalisme, devient une symétrie interne de notre théorie bi-dimensionnelle.

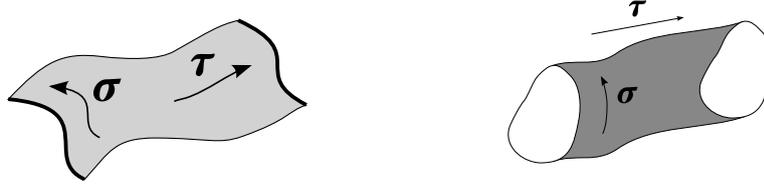


FIGURE 3.1 – Paramétrisation de la feuille d'univers de la corde ouverte et de la corde fermée.

Cette reformulation de la théorie a plusieurs conséquences : une des plus importantes est l'apparition, en plus des symétries de Poincaré

$$\gamma_{ab} \rightarrow \gamma_{ab}; \quad X^\mu \rightarrow a^\mu + L^\mu{}_\nu X^\nu, \quad (3.4)$$

et de reparamétrisation de la feuille d'univers

$$(\sigma, \tau) \rightarrow (\sigma'(\sigma, \tau), \tau'(\sigma, \tau)) \quad \gamma^{ab} \rightarrow \gamma^{cd} \left(\frac{\partial \sigma'^c}{\partial \sigma^a} \right)^{-1} \left(\frac{\partial \sigma'^d}{\partial \sigma^b} \right)^{-1} \quad (3.5)$$

de la *symétrie conforme*

$$\gamma_{ab} \rightarrow \exp(2\phi(\sigma, \tau)) \gamma_{ab}; \quad X^\mu \rightarrow X^\mu. \quad (3.6)$$

Cette invariance, dite de Weyl, est valide au niveau classique. Notons que ce résultat est spécifique aux théories des champs à deux dimensions : ce n'est qu'à cette condition que la quantité

$$\sqrt{-\gamma} \gamma^{ab} \quad (3.7)$$

est invariante sous la transformation de Weyl (3.6). L'annulation de l'anomalie quantique associée à la symétrie conforme, qui équivaut à l'annulation de la trace du tenseur énergie-impulsion de la théorie, va fortement contraindre les conditions dans lesquelles nous pourrions définir une théorie des cordes consistante. Les conséquences de l'invariance conforme du modèle-sigma feront l'objet de la section suivante ; pour l'instant nous allons donner la procédure de quantification de la corde bosonique.

Les invariances de reparamétrisation et de Weyl nous permettent de nous placer dans la *jauge conforme*, $\gamma^{ab} = \eta^{ab}$, dans laquelle l'action (3.3) induit les équations du mouvement correspondant à une propagation d'ondes :

$$\partial_a X \partial^a X = 0. \quad (3.8)$$

En théorie des cordes fermées la solution générale se sépare en secteur gauche et secteur droit : $X(\tau, \sigma) = X_L(\tau - \sigma) + X_R(\tau + \sigma)$. Prenant en compte la condition de périodicité $X(\tau, \sigma + 2\pi) = X(\tau, \sigma)$, la solution générale s'écrit comme

$$X_L(\tau + \sigma) = \frac{1}{2}x_0^\mu + \frac{\alpha'}{2}p^\mu(\tau + \sigma) + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} \frac{\alpha_k}{k} e^{-ik(\tau + \sigma)}, \quad (3.9)$$

$$X_R(\tau - \sigma) = \frac{1}{2}x_0^\mu + \frac{\alpha'}{2}p^\mu(\tau - \sigma) + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} \frac{\bar{\alpha}_k}{k} e^{-ik(\tau - \sigma)}. \quad (3.10)$$

p^μ est ici l'impulsion (ou *mode zéro*) de l'état de corde, donnant le mouvement du centre de masse. La réalité de X^μ impose les relations $\alpha_{-k} = (\alpha_k)^\dagger$ et $\bar{\alpha}_{-k} = (\bar{\alpha}_k)^\dagger$. Par extension, on pose par définition $\alpha_0^\mu = \bar{\alpha}_0^\mu = \sqrt{\alpha'/2} p^\mu$.

Il est ici pratique de passer en temps euclidien $\tau = it$; en effet, les développements précédents s'expriment alors comme des fonctions holomorphe et anti-holomorphe de la variable complexe $w = \sigma + i\tau$: $X_L(\tau + \sigma) = X_L(w)$, $X_R(\tau - \sigma) = X_R(\bar{w})$.

La quantification de cette théorie se fait comme dans le cas d'école de l'oscillateur harmonique : les relations de commutation à imposer sur les opérateurs de la théorie sont

$$[\alpha_m^\mu, \alpha_n^\nu] = [\bar{\alpha}_m^\mu, \bar{\alpha}_n^\nu] = m \eta^{\mu\nu} \delta_{m+n,0}; \quad [\alpha_m^\mu, \bar{\alpha}_n^\nu] = 0; \quad [x_0^\mu, p^\nu] = i \eta^{\mu\nu}. \quad (3.11)$$

L'espace des états du système est alors un espace de Fock qui se construit à partir d'un vide $|p\rangle$ d'impulsion p^μ annihilé par tous les opérateurs d'annihilation $\{\alpha_n^\mu, \bar{\alpha}_n^\mu \mid n > 0\}$. La tour des états physiques s'obtient par application successive des opérateurs de création $\{\alpha_n^\mu, \bar{\alpha}_n^\mu \mid n < 0\}$.

Contraintes de Virasoro

L'espace des solutions que nous avons obtenu jusqu'ici n'est pas physique. Il faut en effet imposer des contraintes supplémentaires, dites *contraintes de Virasoro*, qui correspondent à l'annulation classique du tenseur énergie-impulsion (ce qui correspond à satisfaire les équations du mouvement de la métrique sur la feuille d'univers; bien que la métrique soit entièrement fixée par le choix de jauge, ces contraintes sont non-triviales et doivent être imposées; elles découlent du fait que l'amplitude d'un processus physique doit être indépendante de la jauge dans laquelle on exprime la métrique). Ces contraintes prennent, dans la jauge conforme, la forme (on définit ∂_\pm comme les dérivées par rapport aux variables gauche et droite $\sigma_\pm = \tau \pm \sigma$, τ étant ici à nouveau le temps "lorentzien") :

$$T_{--} = \frac{1}{2} \partial_- X^\mu \partial_- X_\mu = 0; \quad T_{++} = \partial_+ X^\mu \partial_+ X_\mu = 0. \quad (3.12)$$

Si on note L_m (resp. \bar{L}_m) les modes de Fourier de $T_{++} = T(w)$ (resp. $T_{--} = \bar{T}(\bar{w})$), les contraintes choisies¹ consistent à imposer les équations d'opérateurs suivantes sur les états physiques :

$$L_{m \geq 0} |\text{phys}\rangle = 0. \quad (3.13)$$

L'expression des opérateurs de Virasoro en fonction des oscillateurs est la suivante :

1. La forme de l'algèbre de Virasoro, que nous rencontrerons plus tard, rend impossible le fait d'imposer toutes les contraintes $L_m |\text{phys}\rangle = 0$ quel que soit l'entier m .

$$\begin{aligned}
L_{m \neq 0} &= \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k^\mu \alpha_{m-k, \mu}; & L_0 &= \frac{\alpha'}{4} p^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{-k}^\mu \alpha_{k, \mu} - a; \\
\bar{L}_{m \neq 0} &= \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \bar{\alpha}_k^\mu \bar{\alpha}_{m-k, \mu}; & \bar{L}_0 &= \frac{\alpha'}{4} p^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \bar{\alpha}_{-k}^\mu \bar{\alpha}_{k, \mu} - \bar{a};
\end{aligned} \tag{3.14}$$

où a, \bar{a} sont des constantes issues de la procédure de réordonnement (vers l'ordre dit *normal*) des opérateurs α dans L_0 , faisant apparaître les commutateurs $[\alpha_{-k}, \alpha_k] = k$. On montre que, en dimension critique de la corde bosonique $D = 26$, $a = \bar{a} = 1$. Il existe plusieurs façons d'arriver à ce résultat ; celles que nous allons évoquer nous resservira par la suite dans le cas de la supercorde.

La prescription d'ordre normal dans l'opérateur $L_0 = \frac{\alpha'}{4} p^2 + \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} \alpha_{-k}^\mu \alpha_{k, \mu}$ consiste à écrire l'opérateur d'annihilation à droite de celui de création, de façon à ce que cet opérateur compte le nombre d'excitations de l'état quantique sur lequel il agit. Cette formule donne :

$$\frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} \alpha_{-k}^\mu \alpha_{k, \mu} = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{-k}^\mu \alpha_{k, \mu} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} k. \tag{3.15}$$

Le dernier terme est divergent ; c'est une sommation sur les énergies du vide des divers oscillateurs de la théorie. Une telle divergence n'est pas problématique : elle apparaît déjà en théorie des champs dans le calcul de la force de Casimir, vérifiée expérimentalement. Il existe une manière de la régulariser (voir par exemple [Haw77] pour des idées similaires) : la fonction de Riemann

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}, \tag{3.16}$$

définie pour $\text{Re}(s) > 1$, se prolonge analytiquement en $s = -1$; on trouve $\zeta(-1) = -1/12$. Ainsi, pour D dimensions, la version régularisée de L_0 prend la forme

$$L_0 = \frac{\alpha'}{4} p^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{-k}^\mu \alpha_{k, \mu} - \frac{D-2}{24}; \tag{3.17}$$

(la présence de $D-2$ en lieu et place de D vient du fait qu'on ne prend en compte que les dimensions transverses) ; et donc $a = 1$ pour $D = 26$ (et, de même, $\bar{a} = 1$)².

Comme dans la quantification de l'électromagnétisme à la Gupta-Bleuler, les conditions (3.13) sont imposées *a posteriori* sur le spectre de la théorie pour obtenir les états physiques. L'annulation simultanée de L_0 et \bar{L}_0 donne l'expression des masses des états de la théorie et une condition dite de *level-matching* :

$$\begin{aligned}
M^2 = -p^2 &= \frac{4}{\alpha'} (N_L - 1) = \frac{4}{\alpha'} (N_R - 1) = \frac{2}{\alpha'} (N_L + N_R - 2); \\
N_L &= N_R.
\end{aligned} \tag{3.18}$$

2. En fait, le fait que la théorie des cordes bosoniques ne se définit naturellement qu'en $D = 26$ peut se déduire de ce calcul. En effet, les premiers états excités $\alpha_{-1}^\mu \bar{\alpha}_{-1}^\nu |p\rangle$, où μ et ν sont des degrés de liberté *transverses*, ne peuvent pas se transformer dans les représentations massives du sous-groupe $SO(D-2, 1)$ du groupe de Lorentz $SO(D-1, 1)$; ces états doivent donc être sans masse. Donc $a = 1$, et $D = 26$.

Nous remarquons donc qu'en l'absence d'excitation par les oscillateurs, on obtient un état de masse carrée négative : cet état instable est appelé *tachyon* ; sa présence compromet fortement la pertinence de la théorie des cordes bosoniques. Nous verrons heureusement que ce problème sera éliminé en théorie des supercordes.

Intégrale de chemin de Polyakov, et généralisation du modèle sigma en présence de champs de fond

À partir de l'action (3.3), il est naturel de définir une intégrale de chemin. L'intégration fonctionnelle portera alors sur les champs de la théorie, qui ne sont autres que les coordonnées d'espace-temps X^μ , ainsi que sur les métriques g définies sur les feuilles d'univers. Bien sûr, ce domaine d'intégration est bien trop vaste : il faut en fait se restreindre aux configurations non-équivalentes sous des transformations de type difféomorphisme ou Weyl. En divisant par le volume de ce groupe, on a donc, en temps euclidien

$$Z \equiv \int \frac{[DX][Dg]}{V_{Diff \times Weyl}} e^{-S[X,g]} \quad (3.19)$$

Pour évaluer cette quantité, la prescription à adopter est d'introduire les *fantômes de Faddeev-Popov*. Par des arguments que nous ne détaillerons pas, ce mécanisme permet de fixer la jauge en posant $g_{ab} = \eta_{ab}$, et en introduisant dans l'action de nouveaux degrés de liberté : le système de fantômes de reparamétrisation anticommutants (b, c) , de poids respectifs 2 et -1 , et d'action

$$S_{gh} = \frac{1}{2\pi} \int d^2\sigma \left(b_{++} \partial_- c^+ + b_{--} \partial_+ c^- \right) \quad (3.20)$$

De sorte que notre intégrale de chemin prend la forme

$$Z \equiv \int [DX] e^{-S[X,\eta] - S_{gh}}. \quad (3.21)$$

On peut anticiper qu'après introduction de degrés de liberté fermioniques, le jaugeage des super-reparamétrisations (ou transformations de supersymétrie), se fera en introduisant le système de fantômes superconformes commutants β, γ , de poids $3/2$ et $-1/2$.

Nous allons maintenant généraliser le modèle sigma donnant l'action des cordes sur la feuille d'univers, Le spectre d'états de cordes donné dans la section précédente comporte des états de masse nulle, à savoir les états ayant $N_L = N_R = 1$. Ces états, correspondant aux états quantiques $\alpha_{-1}^\mu \alpha_{-1}^\nu |p\rangle$, se décomposent en

- une partie symétrique de trace nulle, donnant le *graviton* $G_{\mu\nu}$;
- un tenseur antisymétrique donnant le *tenseur antisymétrique* (dit de Kalb-Ramond) $B_{\mu\nu}$;
- la trace du tenseur, donnant le *dilaton* Φ .

Il est alors possible de généraliser l'action sur la feuille d'univers (3.3) en incluant les champs de fond correspondant aux états sans masse de la théorie. On obtient

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_M d\sigma d\tau \sqrt{-\gamma} \left[\gamma^{ab} G_{\mu\nu}(X) \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu + \epsilon^{ab} B_{\mu\nu}(X) \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu + \alpha' R\Phi(X) \right]. \quad (3.22)$$

Cette généralisation du modèle sigma fait apparaître le terme topologique de Gauss-Bonnet

$$\frac{1}{4\pi} \int d^2\sigma \sqrt{-\gamma} R = \chi = 2 - 2g, \quad (3.23)$$

R étant le scalaire de courbure de la métrique γ de la feuille d'univers. Ici, χ est la *caractéristique d'Euler*, et g le *genre* de la surface de feuille d'univers, qu'on peut voir heuristiquement comme le nombre de “poignées”³ de la surface : ainsi une sphère a $g = 0$, un tore $g = 1$, etc. (voir la figure 3.2)

Lors d'un calcul d'amplitude, le formalisme de l'intégrale de chemin nous fait sommer sur les différentes feuilles d'univers rendant compte de la diffusion, de la même façon qu'on va sommer sur tous les diagrammes de Feynman en théorie quantique des champs. Le résultat précédent nous apprend donc que ces sommes vont être *pondérées* par le genre de la feuille d'univers : la contribution d'une surface de genre g sera proportionnelle à $e^{-2(1-g)\Phi}$ (voir figure 3.2). La constante de couplage de la théorie est alors contrôlée par la valeur moyenne dans le vide du dilaton : l'ajout d'une poignée sur la feuille d'univers revenant à l'émission puis l'absorption d'une corde fermée, on en déduit que la constante de couplage de la théorie des cordes est donnée par

$$g_s = e^\Phi. \quad (3.24)$$

Ce résultat est très différent de ce qu'on obtient en formalisme de théorie des champs : ici, la constante de couplage de notre théorie n'est plus un paramètre libre, mais bien la valeur moyenne dans le vide d'un champs de la théorie. D'un point de vue théorique (voire épistémologique) la suppression de paramètres libres dans une théorie est extrêmement satisfaisante.

L'investigation de la contrainte d'invariance conforme du modèle sigma (3.22) a été effectuée dans [CFMP85]. Les conditions sont des équations du mouvement sur les champs de fond G, B, Φ qui dérivent de l'action *effective* d'espace-temps

$$S_{eff} \propto \int d^D X \sqrt{-G(X)} e^{-2\Phi} \left[-\frac{2(D-26)}{3\alpha'} + R - \frac{1}{12} H_{\mu\nu\rho} H^{\mu\nu\rho} + 4(\partial_\mu \Phi)(\partial^\mu \Phi) + O(\alpha') \right]. \quad (3.25)$$

R est le scalaire de Ricci associé à la métrique G ; $H = dB$ est le tenseur de courbure de la 2-forme B . On voit ainsi que cette contrainte redonne pour action effective l'action d'Einstein-Hilbert, généralisée en présence d'autres excitations. Cette action fait aussi apparaître de manière provocante la quantité $D - 26$. Le terme constant en 26 vient de la contribution à l'anomalie de Weyl des fantômes b et c .

On a là un nouveau moyen de déterminer la dimension critique. L'équation du mouvement du dilaton issue de cette action s'écrit en effet

$$\frac{D-26}{6} - \frac{\alpha'}{2} \partial^2 \Phi = 0. \quad (3.26)$$

Pour un espace-temps de faible courbure ($R_c \gg \sqrt{\alpha'}$) et un dilaton d'échelle typique de variation R_c , il faut donc $D = 26$. Toutefois, d'autres solutions sont possibles ; un exemple

3. Une définition plus rigoureuse de cette propriété topologique est donnée en termes de groupes d'homotopie. Nous ne nous y attarderons pas.

$$\begin{aligned}
\langle V_1 V_2 V_3 V_4 \rangle = & e^{-2\Phi} \quad + \quad \text{[Diagram 1]} \\
& + e^{2\Phi} \quad \text{[Diagram 2]} \quad + e^{4\Phi} \quad \text{[Diagram 3]} \quad + \dots
\end{aligned}$$

FIGURE 3.2 – Développement perturbatif d’une fonction à quatre points. Les quatre surfaces représentées ont respectivement $g = 0, 1, 2, 3$.

est la *théorie de dilaton linéaire*, où $\Phi = V_\mu X^\mu$ et $V_\mu V^\mu = \frac{26-D}{6\alpha'}$. Ces théories des cordes sont consistantes en $D \neq 26$, tant que la condition $V_\mu V^\mu = \frac{26-D}{6\alpha'}$ est vérifiée. On parle de *cordes non-critiques*. Nous ne rencontrerons pas de telles configurations dans ce mémoire.

3.2 Théorie des cordes et invariance conforme

Le résultat d’invariance conforme de la formulation de la théorie des cordes sur la feuille d’univers permet d’utiliser l’arsenal entier des théories conformes bi- dimensionnelles, dont l’exploration des nombreuses conséquences a été initiée par l’article fondateur [BPZ84].

Premièrement, comme nous l’avons déjà annoncé, l’exigence de la conservation de cette invariance après quantification est une contrainte très forte sur les caractéristiques du background dans lequel nous pouvons définir la théorie : la dimension de l’espace-temps n’est pas un paramètre libre de la théorie ; les éventuels champs de fond doivent obéir à des équations généralisant l’équation d’Einstein. Ensuite, cette propriété nous permet de simplifier considérablement le calcul d’amplitudes de diffusion : par invariance conforme, on peut reparamétriser la feuille d’univers modélisant l’interaction de manière à obtenir une surface très simple, qui ne dépendra en fait que du genre de la feuille d’univers (qui s’identifie au nombre de boucles du processus considéré). Ainsi, dans une théorie de cordes fermées, toute interaction à l’ordre des arbres se ramènera à un calcul sur la sphère, le calcul à l’ordre d’une boucle se fera sur le tore, etc. Les différentes branches externes du processus seront alors représentées par l’insertion sur cette surface d’opérateurs de vertex.

Enfin, ces amplitudes auront de plus une forme extrêmement contrainte : lorsqu’on s’intéresse aux champs dits *primaires* (ce qui sera le cas de la plupart des champs que nous rencontrerons), on montre que les amplitudes à deux et trois points sont entièrement déterminées à une constante multiplicative près, et que les fonctions à quatre points ne dépendent que d’une constante et du

cross-ratio $\frac{(z_1-z_2)(z_3-z_4)}{(z_1-z_3)(z_2-z_4)}$.

3.2.1 Éléments de théorie conforme bidimensionnelle

Nous présentons ici rapidement quelques points cruciaux reliés à la propriété d'invariance conforme ; beaucoup de détails supplémentaires sont disponibles dans [Gin88, DFMS97, Pol98a], entre autres.

Pour un espace à d dimensions muni d'une métrique $g_{\mu\nu}(x)$, on appelle transformation conforme toute transformation de coordonnées $x \rightarrow x'$ laissant la métrique invariante à un facteur d'échelle près :

$$g_{\mu\nu}(x) \rightarrow g'_{\mu\nu}(x') = \Omega^2(x)g_{\mu\nu}(x). \quad (3.27)$$

Ces transformations sont exactement celles qui préservent les angles. Il est possible de caractériser complètement ce groupe en dimension > 2 : il est composé des translations $x^\mu \rightarrow x^\mu + a^\mu$, des rotations $x^\mu \rightarrow \Lambda^\mu_\nu x^\nu$, des dilatations $x^\mu \rightarrow \lambda x^\mu$ et des transformations dites "spéciales conformes"

$$x^\mu \rightarrow \frac{x^\mu + x^2 b^\mu}{1 + 2b_\mu x^\mu + b^2 x^2}. \quad (3.28)$$

En deux dimensions, cette structure est considérablement étendue : si on part de la métrique $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$, alors l'élément de longueur s'écrit

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = dzd\bar{z}, \quad (3.29)$$

où on a posé $z = x + iy$. On voit alors que toute transformation analytique $z \rightarrow z' = f(z)$ est conforme :

$$ds^2 = dzd\bar{z} \rightarrow ds'^2 = \left| \frac{\partial f}{\partial z} \right|^2 dzd\bar{z}. \quad (3.30)$$

Le groupe conforme est alors de dimension infinie. On peut s'intéresser à ses générateurs infinitésimaux, qui sont des translations infinitésimales $z \rightarrow z + \epsilon_n(z)$, où $\epsilon_n(z) = z^{n+1}$. Cet opérateur agit alors sur les fonctions de z comme $L_n = z^{n+1}\partial_z$. On voit donc que

$$[L_m, L_n] = (m - n)L_{m+n}. \quad (3.31)$$

De même, on définit les opérateurs \bar{L}_n , agissant sur le côté antiholomorphe. Ils satisfont des relations de commutation identiques, et les deux algèbres sont indépendantes.

L'algèbre définie par les relations ci-dessus engendre toutes les reparamétrisations holomorphes d'une théorie de champs bi-dimensionnelle ; on la retrouvera donc plus tard comme caractérisant les modes du tenseur énergie-impulsion de la théorie. Toutefois, une correction quantique apparaîtra dans (3.31) : nous verrons un terme de charge centrale, qui représentera une brisure au niveau quantique de la symétrie classique (on parle d'*anomalie*).

Les propriétés de certains champs, dits *primaires*, sous l'action des transformations conformes sont aussi cruciales. Elles sont de la forme

$$\phi(z, \bar{z}) \rightarrow \left(\frac{df}{dz}\right)^h \left(\frac{d\bar{f}}{d\bar{z}}\right)^{\bar{h}} \phi(f(z), \bar{f}(\bar{z})) . \quad (3.32)$$

En particulier, sous une transformation infinitésimale $z \mapsto z + \epsilon(z)$, la variation du champ est

$$\delta\phi = ((h\partial\epsilon + \epsilon\partial) + (\bar{h}\bar{\partial}\bar{\epsilon} + \bar{\epsilon}\bar{\partial}))\phi(z, \bar{z}). \quad (3.33)$$

Pour une théorie bidimensionnelle, on montre que l'invariance conforme (*ie* sous rescaling local de la métrique) équivaut à l'annulation de la trace du tenseur énergie-impulsion T_μ^μ . Dans les coordonnées z, \bar{z} , cette trace est égale à $T_{z\bar{z}}$. La loi de conservation $\partial_\mu T^{\mu\nu}$ implique alors que $T_{zz} = T(z)$ est holomorphe, et $T_{\bar{z}\bar{z}} = \bar{T}(\bar{z})$ est antiholomorphe. Ainsi, nous avons toute une famille de courants conservés

$$J_\epsilon = \epsilon(z)T(z), \quad (3.34)$$

qui génèrent les translations d'espace-temps

$$[Q_\epsilon, \phi(z, \bar{z})] = \delta\phi, \quad (3.35)$$

où $\delta\phi$ est donnée par (3.33).

Nous nous intéressons maintenant à la représentation de cette transformation infinitésimale sur les coordonnées sous forme de l'action d'une charge sur un état quantique. Pour développer ce formalisme, il est nécessaire d'introduire la notion de compactification radiale.

La feuille d'univers correspondant à la propagation d'une corde fermée de $\tau = -\infty$ à $\tau = +\infty$ est un cylindre infini. Si on passe en temps euclidien comme précédemment, on définit la variable complexe w comme $w = \sigma + i\tau$. On peut alors définir un mapping conforme $w \mapsto z = e^{-iw}$: il est aisé de voir qu'alors le cylindre est mappé sur le plan complexe privé de l'origine ; les lignes de temps constant sont des cercles centrés sur l'origine. Cette nouvelle représentation de la feuille d'univers est particulièrement utile. En effet, dans le calcul des amplitudes de diffusion, la surface définissant un processus peut être déformée, *via* des transformations conformes, jusqu'à obtenir une surface simple : une sphère pour les processus à l'ordre des arbres, un tore pour les interactions à une boucle, etc. Les états asymptotiques sont alors représentés par des opérateurs insérés sur la feuille d'univers, selon le mécanisme de *state-operator correspondance*.

Ceci nous permet aussi d'utiliser efficacement des outils extrêmement puissants d'analyse complexe. En effet, la construction de la charge de Noether associée à un courant de divergence nulle en deux dimensions :

$$Q = \int_{\text{espace}} dx j_0(x) \quad (3.36)$$

devient ici l'intégrale de contour

$$Q = \frac{1}{2i\pi} \oint dz j(z) \quad (3.37)$$

les surfaces de temps égal étant les cercles centrés sur l'origine du plan complexe.

La formule (3.37) nous permet également d'exprimer les opérateurs L_n introduits précédemment en termes du tenseur énergie-impulsion : si on note

$$T(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{L_n}{z^{n+2}} \quad (3.38)$$

l'expansion en série de Laurent de $T(z)$, on trouve que

$$L_n = \frac{1}{2i\pi} \oint dz z^{n+1} T(z) \quad (3.39)$$

est bien la charge associée à la reparamétrisation $z \mapsto z + z^{n+1}$.

L'action d'une charge sur un champ conforme est alors aussi donnée par une intégrale de contour : la procédure d'*ordre temporel* en théorie des champs habituelle devient ici une procédure d'*ordre radial*, et a pour conséquence que l'action de la charge associée au courant j se met sous la forme

$$[Q_j, \phi](w, \bar{w}) = \frac{1}{2i\pi} \left[\oint_{C_w} dz j(z) \phi(w, \bar{w}) + \oint_{C_{\bar{w}}} d\bar{z} \bar{j}(\bar{z}) \phi(w, \bar{w}) \right] \quad (3.40)$$

où C_w et $C_{\bar{w}}$ sont des lacets fermés entourant respectivement w et \bar{w} .

Cette même procédure d'ordre radial implique aussi que le commutateur de deux charges s'exprime comme une intégrale de contour : si on a les deux charges

$$Q_1 = \frac{1}{2i\pi} \oint dz j_1(z) \quad (3.41)$$

$$Q_2 = \frac{1}{2i\pi} \oint dz j_2(z) \quad (3.42)$$

alors le commutateur $[Q_1, Q_2]$ est donné par

$$[Q_1, Q_2] = \frac{1}{2i\pi} \oint dz \frac{1}{2i\pi} \oint dw j_1(z) j_2(w). \quad (3.43)$$

Dans le cas où $j(z) = \epsilon(z)T(z)$ génère une transformation infinitésimale de coordonnées $z \mapsto z + \epsilon(z)$, l'accord entre les formules (3.35) et (3.40) implique les développements suivants pour un champ de poids conformes h, \bar{h} :

$$T(z)\phi(w, \bar{w}) = \frac{h\phi(w, \bar{w})}{(z-w)^2} + \frac{\partial\phi(w, \bar{w})}{z-w} + \text{reg.} \quad (3.44)$$

$$\bar{T}(\bar{z})\phi(w, \bar{w}) = \frac{\bar{h}\phi(w, \bar{w})}{(\bar{z}-\bar{w})^2} + \frac{\bar{\partial}\phi(w, \bar{w})}{\bar{z}-\bar{w}} + \text{reg.} \quad (3.45)$$

où les derniers termes des deux sommes désignent des contributions régulières lorsque $z \rightarrow w$. On touche ici à un des points qui nous intéressera le plus : celui d'*expansion en produits d'opérateurs* (OPE). On la définit sur les champs primaires comme le développement correspondant au comportement du produit de deux opérateurs lorsque leur distance tend vers zéro. Ce développement est relié à l'expression du propagateur du champ considéré. La forme générale est, pour une famille de champs conformes ϕ_i et dans la limite $z_1 \rightarrow z_2$:

$$\phi_i(z_1, \bar{z}_1)\phi_2(z_2, \bar{z}_2) \sim \sum_k C_{ij}^k (z_1 - z_2)^{h_k - h_i - h_j} (\bar{z}_1 - \bar{z}_2)^{\bar{h}_k - \bar{h}_i - \bar{h}_j} \phi_k(z_2, \bar{z}_2) + \text{reg}. \quad (3.46)$$

En particulier, les développements (3.44) et (3.45) doivent avoir lieu pour tout champ primaire ϕ dans toute théorie où l'invariance conforme est respectée au niveau quantique. On montre que l'opérateur $T(z)$ est de poids conforme $(2, 0)$: si l'invariance conforme est respecté au niveau quantique, on doit avoir l'OPE

$$T(z)T(w) = \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial T(w)}{z-w} + \text{reg}. \quad (3.47)$$

Nous verrons en théorie des cordes ce résultat est en général mis en défaut : un terme de *charge centrale* apparaîtra dans ce développement, et l'algèbre définie par ces commutateurs est alors appelée algèbre de Virasoro :

$$T(z)T(w) = \frac{c}{2(z-w)^4} + \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial T(w)}{z-w} + \text{reg}. \quad (3.48)$$

les centrale

Enfin, les OPE nous seront d'une grande utilité pour une autre raison. En effet, on remarque que l'équation (3.43) relie le commutateur de deux charges à l'OPE des deux courants associés. Le plus souvent, nous travaillerons avec les courants plutôt qu'avec les charges ; la forme des OPE associées nous permettra de déterminer les symétries de jauge présentes dans une théorie en s'intéressant aux structures d'algèbre de Lie induites par les différents courants présents dans le spectre de la théorie. On pourra aussi déterminer les charges des différents états sous l'action de ces courants, et les arranger en représentations.

3.2.2 Applications à la théorie des cordes

Théorie conforme du boson libre

En théorie des cordes, on montre que l'action d'un boson libre s'écrit

$$S = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int \partial X^\mu \bar{\partial} X_\mu. \quad (3.49)$$

De l'équation du mouvement

$$\partial \bar{\partial} X^\mu = 0, \quad (3.50)$$

on déduit que le produit d'opérateurs $X(z, \bar{z})X(w, \bar{w})$ se développe comme⁴

$$X^\mu(z, \bar{z})X^\nu(w, \bar{w}) \sim -\frac{\alpha'}{2} \eta^{\mu\nu} \ln(|z-w|^2). \quad (3.51)$$

Notons que cette OPE implique que le champ X n'est pas un champ primaire de la théorie. Nous allons par contre déterminer quelques opérateurs primaires, qui seront les opérateurs de vertex créant les états bosoniques de la théorie des cordes.

4. On omettra de mentionner les termes réguliers "+ reg", leur intérêt étant souvent nul dans les applications.

Le tenseur énergie-impulsion, déterminé comme en théorie des champs en introduisant une métrique bidimensionnelle dans l'action et en dérivant par rapport à cette métrique, s'écrit (dans les coordonnées complexes)

$$T(z) = -\frac{1}{\alpha'} \partial X(z) \partial X(z) \quad \bar{T}(\bar{z}) = -\frac{1}{\alpha'} \bar{\partial} X(\bar{z}) \bar{\partial} X(\bar{z}). \quad (3.52)$$

On en déduit notamment, d'après (3.51), les champs primaires suivants (indiqués avec leurs poids (h, \bar{h}))

$$\begin{aligned} (\partial X)(z) & (1, 0) \\ (\bar{\partial} X)(\bar{z}) & (0, 1) \\ e^{ikX(z)} & \left(\frac{\alpha' k^2}{4}, 0 \right) \end{aligned} \quad (3.53)$$

Les opérateurs de vertex e^{ikX} sont importants à plusieurs titres. En particulier, ils sont responsables de l'extension de groupes de jauge $U(1)^n$ (branche de Coulomb) à des groupes non abéliens.

Nous rencontrerons souvent par la suite des réalisations de groupes de jauge sous la forme d'algèbres de courants. Dans ces constructions, les opérateurs de Cartan seront donnés par les courants conformes, correspondant dans tous les cas à des états sans masse de la théorie, $i\partial X^I(z)$ (qui commutent en vertu de l'OPE $\partial X \partial X \sim (z-w)^{-2}$). L'extension de l'algèbre correspondra à l'apparition de nouveaux états sans masse, générés par des courants de la forme $e^{iP \cdot X(z)}$. De l'OPE suivante

$$i\partial X^I(z) e^{iP \cdot X(w)} \sim \frac{\alpha'}{2} \frac{P^I}{(z-w)} e^{iP \cdot X(w)} + \text{reg.} \quad (3.54)$$

on tire que, si on note (de manière assez évocatrice) H^I et E^P les opérateurs correspondant respectivement à $i\partial X^I(z)$ et $e^{iP \cdot X(w)}$, l'OPE précédente se traduit, lorsque $\alpha' = 2$, par le commutateur

$$[H^I, E^P] = P^I E^P \quad (3.55)$$

On voit ainsi que dans le cas d'un groupe de jauge non-abélien, les $e^{iP \cdot X(z)}$ correspondent aux opérateurs d'échelle. Les racines de l'algèbre de Lie sont alors les vecteurs (P^I) , et la condition de masse nulle (la mettre) montre alors que les algèbres obtenues sont les algèbres simplement lacées des familles $A_n, D_n, E_{6,7,8}$ (voir tableau 2.1). En langage de théorie de jauge, l'OPE (3.54) montre également que la charge de E^P sous l'opérateur de Cartan $i\partial X^I$ n'est autre que P^I .

Théorie conforme du fermion libre

En vue de développer une théorie supersymétrique sur le world-sheet, on va également s'intéresser à un modèle de *fermions libres* sur le world-sheet, donnée par l'action

$$S = -\frac{1}{8\pi} \int d^2z (\psi \bar{\partial} \psi + \bar{\psi} \partial \psi). \quad (3.56)$$

Cette action conduit à l'OPE suivante (la partie anti-holomorphe n'étant qu'une copie de la théorie holomorphe, et les deux théories n'interagissant pas, on ne développe ici que la théorie holomorphe) :

$$\psi(z)\psi(w) = \frac{1}{z-w} \quad (3.57)$$

Le tenseur énergie-impulsion s'écrivant

$$T(z) = -\frac{1}{2}\psi\partial\psi, \quad (3.58)$$

on conclut facilement que le champ ψ est de poids conforme $(1/2, 0)$ et que cette théorie a une charge centrale $c = 1/2$.

Théorie conforme des (super-)fantômes, et conséquences

Nous ne démontrerons pas les propriétés de cette CFT, nous contentant de les citer. On trouve que le système de fantômes bc , a une charge centrale -26 , tandis que celui des fantômes super-conformes $\beta\gamma$ a une charge centrale 11 .

L'annulation de l'anomalie de Weyl pour une théorie de cordes bosoniques comprenant D bosons X^I et des fantômes bc donne alors la dimension critique $D = 26$; de même, pour une théorie de supercordes comprenant D fermions X^I et D fermions ψ^I , ainsi que des fantômes bc et $\beta\gamma$, on trouve que l'anomalie de Weyl est nulle pour $D = 10$. On retrouve ainsi les dimensions critiques des cordes et des supercordes.

Bosonisation

Nous allons maintenant introduire une équivalence utile, qui semble étrange a priori. En analysant les OPE dérivées précédemment, on voit que la théorie conforme décrite par un boson holomorphe est équivalente à celle décrite par deux fermions réels gauches (ou, de manière équivalente, un fermion complexe gauche). Nous précisons cette équivalence plus tard, dans la section 4.1.1 : les vertex de la théorie bosonique décrite sont en fait ceux d'un *boson compact*.

Soit, donc, un boson $H(z)$ et deux fermions réels $\psi^1(z), \psi^2(z)$. Du côté bosonique, les 3 courants $J^0(z) = i\partial H(z)$, $J^\pm(z) = e^{iH(z)}$ vérifient les OPE

$$J^0(z)J^0(w) \sim \frac{1}{(z-w)^2}, \quad (3.59)$$

$$J^0(z)J^\pm(w) \sim \pm \frac{1}{z-w}; \quad (3.60)$$

Le tenseur énergie-impulsion associé est $T(z) = -\frac{1}{2}\partial X\partial X$, et les poids conformes des opérateurs sont $h(J^0) = 1$, $h(J^\pm) = \frac{1}{2}$.

On vérifie alors que si on définit le fermion complexe

$$\psi = \frac{\psi^1 + i\psi^2}{\sqrt{2}}, \quad \bar{\psi} = \frac{\psi^1 - i\psi^2}{\sqrt{2}}, \quad (3.61)$$

les mêmes OPE et les mêmes poids conformes sont reproduits par les courants suivants :

$$J^0(z) = \psi(z)\bar{\psi}(z), \quad J^+(z) = \psi(z), \quad J^-(z) = \bar{\psi}(z), \quad T(z) = -\frac{1}{2}(\psi^1(z)\partial\psi^1(z) - \psi^2(z)\partial\psi^2(z)) \quad (3.62)$$

De plus, cette équivalence, comme on le reverra plus tard, est aussi valide au niveau des fonctions de partition : la fonction de partition d'un boson compactifié sur un cercle de rayon $\sqrt{\alpha'/2}$ est identique à celle de deux fermions réels holomorphes + deux fermions réels anti-holomorphes. Ce résultat important s'étend aussi à plusieurs dimensions : ainsi, $2n$ fermions réels holomorphes + $2n$ fermions réels anti-holomorphes sont équivalents à n bosons compacts. La géométrie du tore correspondant à ces n bosons compacts est entièrement déterminée par cette équivalence et est nommée *point fermionique*.

Comme nous le verrons avec les supercordes, cette équivalence est étendue par la présence des champs de spin [FMS86], qui permettent d'écrire des vertex explicites pour les vides de Ramond de la théorie. Nous reviendrons sur ce point dans la section 3.4.

Cette procédure admet un inverse, habilement nommé *fermionisation* : des dimensions compactifiées en un tore au point fermionique peuvent être paramétrées par un ensemble de fermions libres. Cette propriété permet de relier les constructions en termes de fermions libres que nous exposerons dans la section 4.5 à des compactifications géométriques, et de considérer des compactifications non-géométriques.

3.3 Action des supercordes

On a obtenu jusqu'à présent une théorie des cordes bosonique : les différents états du spectre se transforment dans des représentations vectorielles du groupe de Lorentz. D'un point de vue phénoménologique, cela ne saurait nous satisfaire : les particules constituant la matière, quark et leptons, sont des fermions : leur spin est demi-entier, ils se transforment dans des représentations spinorielles du groupe de Lorentz et obéissent à la statistique quantique de Fermi-Dirac (ce qui implique que leur quantification fera intervenir des anticommutateurs). De la même manière que l'on a écrit une action pour les champs bosoniques de la feuille d'univers $X^\mu(\sigma, \tau)$, il est possible d'introduire des fermions ψ^μ sur la feuille d'univers, qui seront des variables de Grassmann possédant un indice vectoriel. On note que ce ne sont donc pas directement ces états qui formeront des représentations spinorielles du groupe de Lorentz (les ψ^μ sont des spineurs sur la feuille d'univers ; leur transformation sous le groupe de Lorentz, qui est une symétrie interne de la théorie des champs bi-dimensionnelle, peut être choisie de manière arbitraire). Nous allons voir plus tard que les spineurs d'espace-temps seront construits comme des vides issus de la quantification de cette théorie.

L'équivalent supersymétrique de l'action de Polyakov s'écrit, en jauge super-conforme⁵ :

$$S = -\frac{1}{2\pi} \int d^2\sigma \left(\partial_a X^\mu \partial^a X_\mu - i\bar{\psi}^\mu \rho^a \partial_a \psi_\mu \right) \quad (3.63)$$

5. L'action générale a une forme plus complexe, faisant intervenir comme dans le cas conforme une métrique sur la feuille d'univers et un gravitino ; toutefois, les transformations complètes par difféomorphismes, Weyl et supersymétrie permettent d'aboutir à la forme réduite suivante.

Ici, les matrices ρ^a sont les matrices de Dirac à deux dimensions. Le conjugué de Dirac du fermion ψ^μ est défini par $\bar{\psi}^\mu = \psi^{\mu\dagger}\rho^0$. En termes des variables complexes introduites comme dans le cas bosonique, les équations du mouvement pour les fermions s'écrivent

$$\bar{\partial}\psi_+ = 0 \quad \partial\psi_- = 0 \quad (3.64)$$

où ψ_\pm sont les deux composantes du spineur ψ . dans le cas des cordes fermées, on trouve ainsi des fermions dans les secteurs holomorphe et anti-holomorphe.

Cette symétrie va se révéler très utile, en imposant de nouvelles contraintes sur le spectre, nécessaires car comme dans le cas bosonique, la quantification des fermions de la feuille d'univers introduit dans le spectre des états non-physiques, dont il faut se débarrasser. Dans la théorie des cordes bosonique, ces états non-physiques sont éliminés en imposant des contraintes issues de l'algèbre de Virasoro. Ici, la quantification se fait en introduisant les anticommutateurs

$$\{\psi^\mu(\sigma, \tau), \psi^\nu(\sigma', \tau)\} = \pi\eta^{\mu\nu}\delta(\sigma - \sigma'); \quad (3.65)$$

on voit donc de même que les composantes temporelles ψ^0 vont induire des états de norme négative. Ces états seront éliminés par un nouvel ensemble de contraintes issues des transformations de supersymétrie, qui forment l'algèbre de super-Virasoro. L'algèbre de super-Virasoro est une généralisation de l'algèbre de Virasoro : en plus du tenseur énergie impulsion $T(z)$ (qui comprend les contributions des bosons X^μ et des fermions ψ^μ), on introduit le courant de supersymétrie sur la feuille d'univers $T_F \equiv \psi^\mu\partial X_\mu$; les modes positif de ce courant devront aussi annuler les états physiques. Nous renvoyons le lecteur à [Pol98b] pour la forme explicite de l'algèbre superconforme et pour une discussion détaillée.

3.4 Théories de supercordes à dix dimensions

Fermions sur la feuille d'univers

De la même manière que l'on a introduit les bosons comme des champs sur la feuille d'univers, on peut considérer l'introduction de champs conformes fermioniques dont l'action est donnée par (3.56) (ou, de manière équivalente, par la partie fermionique de (3.63)).

Les équations du mouvement dérivant de cette action montrent que le champ ψ^μ est holomorphe, et que le champ $\bar{\psi}^\mu$ est antiholomorphe. La théorie se sépare donc naturellement en côté gauche et côté droit, conduisant à deux théories conformes de fermions libres indépendantes.

Le fait de considérer des coordonnées fermioniques nous permet maintenant d'envisager deux conditions aux limites lors du transport du degré du champ le long du cercle défini par l'identification $\sigma \sim \sigma + 2\pi$: on définit le *secteur de Ramond* comme les solutions vérifiant $\psi^\mu(\sigma + 2\pi, \tau) = \psi^\mu(\sigma, \tau)$ et le *secteur de Neveu-Schwarz* comme les solutions vérifiant $\psi^\mu(\sigma + 2\pi, \tau) = -\psi^\mu(\sigma, \tau)$.

Les solutions se développent en modes, comme dans le cas bosonique : pour le secteur de Ramond, on trouve (en fonction des variables complexes w, \bar{w}) :

$$\psi^\mu(w) = \sum_{k \in \mathbb{Z} + \frac{1-a}{2}} \psi_k^\mu e^{ikw}; \quad (3.66)$$

$$\bar{\psi}^\mu(\bar{w}) = \sum_{k \in \mathbb{Z} + \frac{1-\bar{a}}{2}} \bar{\psi}_k^\mu e^{ik\bar{w}}. \quad (3.67)$$

Dans les expressions précédentes (a, \bar{a}) indiquent le secteur dans lequel on se place : $a = 1$ correspond au secteur de Ramond (R) dans lequel les modes du développement sont entiers, et $a = 0$ au secteur de Neveu-Schwarz (NS), dans lequel ces modes sont demi-entiers.

La quantification s'effectue cette fois en considérant des anticommutateurs : on pose les relations (m ou n étant entiers ou demi-entiers selon le secteur considéré) :

$$\{\psi_m^\mu, \psi_n^\nu\} = \eta^{\mu\nu} \delta_{m+n,0}. \quad (3.68)$$

Les composantes holomorphe et anti-holomorphe du tenseur énergie-impulsion $T(z) = -\frac{1}{2}\psi_\mu \partial\psi^\mu$ et $\bar{T}(\bar{z}) = -\frac{1}{2}\bar{\psi}_\mu \bar{\partial}\bar{\psi}^\mu$ donnent les opérateurs de l'algèbre de Virasoro suivants :

$$L_m = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z} + \frac{1-\bar{a}}{2}} \psi_{m-k}^\mu \psi_{\mu,k}. \quad (3.69)$$

Le réordonnement de cet opérateur, de même que dans l'équation (3.15), fait apparaître une énergie du vide, rendue finie après régularisation de la fonction ζ . On trouve que l'énergie du vide d'un fermion réel dans le secteur de Neveu-Schwarz est de $-\frac{1}{48}$ et celle dans le secteur de Ramond de $\frac{1}{24}$. Ainsi, la différence d'énergie du vide entre un vide NS et un vide R est de $1/16$ par fermion réel.

L'espace de Fock des états physiques s'obtient comme précédemment par l'action des opérateurs de création sur un vide annihilé par tous les opérateurs d'annihilation. Dans le secteur de Neveu-Schwarz, il n'y a pas de mode zéro donc ceci se fait de manière non-ambiguë.

Dans le secteur de Ramond, la situation est plus complexe : les modes zéro vérifient l'algèbre de Clifford

$$\{\psi_0^\mu, \psi_0^\nu\} = \eta^{\mu\nu}. \quad (3.70)$$

Le vide n'est alors pas défini de manière unique, car l'action d'un mode zéro sur un état annihilé par tous les modes strictement positifs fournit encore un état annihilé par tous les modes strictement positifs. Les vides de la théorie forment une représentation de l'algèbre de Clifford associée aux opérateurs ψ_0^μ , c'est-à-dire une représentation spinorielle du groupe de Lorentz $SO(d-1, 1)$. Les fermions d'espace-temps vont donc être donnés par les états du secteur de Ramond de la théorie. Les opérateurs de création agissent ensuite sur ce vide spinoriel de manière habituelle.

Un vide de Ramond sera noté $|\mathbf{s}\rangle$, où $\mathbf{s} = (\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}, \dots, \pm\frac{1}{2})$ donne les hélicités sous les générateurs de Lorentz.

La procédure de bosonisation décrite dans la section 3.2.2 peut s'étendre au vide de Ramond de la théorie. Si les $2d$ fermions ψ^i sont bosonisés en d bosons H_i , alors le vide de Ramond est représenté par les 2^d vertex suivants :

$$S_\alpha = e^{\frac{i}{2}(\pm H_1 \pm H_2 \pm \dots \pm H_d)}. \quad (3.71)$$

Sous l'hypothèse $\alpha' = 2$, on voit que le poids conforme d'un tel vertex est bien $h = d/8 = 2d \times (1/16)$, de sorte qu'on passe bien d'un vide de Neveu-Schwarz à un vide de Ramond. L'hélicité de ce vide s'identifie au produit des signes \pm apparaissant dans l'exponentielle.

Théories de Type II

On s'intéresse à la construction de théories des cordes présentant une supersymétrie d'espace-temps non-nulle; il faut donc que l'on réalise une supersymétrie sur la feuille d'univers sur au moins un des deux secteurs (gauche ou droit) de la théorie. Pour un secteur supersymétrique, la CFT à ajouter pour annuler la charge centrale des fantômes et superfantômes doit être de 15. Ceci nous définit la dimension de l'espace-temps dans lequel on peut définir une théorie de supercordes. Un boson libre ayant une charge centrale 1 et un fermion libre une charge centrale $1/2$, la condition $3D/2 = 15$ montre que l'on doit se placer en 10 dimensions d'espace-temps. On remarque donc immédiatement qu'a priori, il n'est pas cohérent de définir une théorie de supercordes en 4 dimensions d'espace-temps. On reviendra dans les paragraphes suivants sur la manière de remédier à ce problème conceptuel; on va pour l'instant développer les théories des cordes à 10 dimensions.

Dans les théories de cordes fermées de Type II, la supersymétrie sur la feuille d'univers est réalisée à gauche et à droite. On est alors en dix dimensions d'espace-temps, et la théorie contient dix bosons libres X^μ , $\mu = 0 \dots 9$, 10 fermions gauches libres ψ^μ , $\mu = 0 \dots 9$ et 10 fermions droits $\bar{\psi}^\mu$, $\mu = 0 \dots 9$. L'invariance de Lorentz de cette théorie implique que les conditions aux limites soient les mêmes pour tous les fermions : ainsi, dans le spectre de la théorie, les fermions seront tous dans le secteur NS ou tous dans le secteur R .

Dans le secteur NS , l'énergie de vide de la théorie est maintenant égale à $-8/24 - 8/48 = -1/2$. On voit donc que le vide du secteur $NS-NS$ est encore tachyonique, de masse carrée $-1/2$. Il existe cependant une manière consistante de tronquer ce spectre, qui va de plus assurer la présence d'une supersymétrie d'espace-temps. Cette opération de *projection GSO* va imposer une valeur pour les nombres fermioniques gauche et droit des états physiques. Dans le secteur Neveu-Schwarz, le vide a un nombre fermionique égal à -1 (ceci est dû à la prise en compte d'une excitation du fantôme c ; nous ne rentrerons pas dans les détails); la projection conservera alors les états comportant un nombre impair d'oscillateurs gauches et un nombre impair d'oscillateurs droits. Dans le secteur de Ramond, la projection GSO prend également en compte la chiralité du vide de Ramond considéré; on obtiendra la *théorie de Type IIA* si les signes de la projection GSO sont opposés dans les secteurs Ramond gauche et Ramond droit, et la *théorie de Type IIB* si ces signes sont identiques.

La projection GSO élimine donc le tachyon. Dans le secteur $NS-NS$, le premier état de la théorie est alors sans masse : en termes d'opérateurs, il s'écrit $\psi_{-1/2}^\mu \bar{\psi}_{-1/2}^\nu |p^\mu\rangle_{NS}$, et donne comme dans le cas bosonique, des degrés de liberté correspondant respectivement au graviton, au tenseur antisymétrique, et au dilaton, selon la décomposition en représentations de $SO(8) \times SO(8)$ suivante :

$$\mathbf{8}_v \times \mathbf{8}_v = \mathbf{35}_g + \mathbf{28}_B + \mathbf{1}_\Phi. \quad (3.72)$$

Si maintenant on considère des conditions au bord de Ramond, l'énergie du vide de la théorie s'annule. Parmi les états sans masse de la théorie, on trouve alors

- dans le secteur Ramond-Neveu-Schwarz ($R-NS$), on a les états $\bar{\psi}^\mu|\mathbf{s}, p\rangle$. Ces états forment une représentation de $SO(8)_L \times SO(8)_R$ s'écrivant comme $\mathbf{8}_s \times \mathbf{8}_v$. La décomposition

$$\mathbf{8}_s \times \mathbf{8}_v = \mathbf{8}_c + \mathbf{56}_c \quad (3.73)$$

sépare ces états en, respectivement, un fermion de chiralité opposée (qui s'écrit comme la “ γ -trace” $\gamma_\mu \bar{\psi}^\mu|\mathbf{s}, p\rangle$) et un *gravitino* de spin $3/2$.

- dans le secteur Neveu-Schwarz-Ramond ($NS-R$), on a de même un fermion et un gravitino.
- enfin, le secteur de Ramond-Ramond RR est sans masse en l'absence d'excitations supplémentaires. Le choix des projections GSO va alors déterminer le spectre. Dans la théorie de Type IIB, les projections GSO sont identiques à gauche et à droite : $(-)^{F_L} = (-)^{F_R} = 1$; les états du spectre sont issus du produit de représentations de $SO(8)$

$$\mathbf{8}_s \times \mathbf{8}_s = \mathbf{1} + \mathbf{28} + \mathbf{35} \quad (3.74)$$

sont respectivement un scalaire, une 2-forme, et une 4-forme dont le tenseur de courbure est self-dual.

Dans la théorie de Type IIA, les projections GSO s'écrivent $(-)^{F_L} = 1$, $(-)^{F_R} = (-)^a$ ($a = 1$ dans le secteur de Ramond, $a = 0$ dans le secteur de Neveu-Schwarz). Les états sont cette fois issus de la décomposition

$$\mathbf{8}_s \times \mathbf{8}_c = \mathbf{8}_v + \mathbf{56}_v, \quad (3.75)$$

et on obtient une 1-forme et une 3-forme.

Théories hétérotiques

Dans les théories des cordes hétérotiques [GHMR85, GHMR86], la supersymétrie sur la feuille d'univers n'est réalisée que du côté gauche de la théorie. Les degrés de libertés sont alors les bosons gauches et droits ∂X^μ , $\bar{\partial} X^\mu$ et les fermions gauches ψ^μ . Pour garantir l'absence d'anomalie conforme de cette théorie, on doit ajouter une théorie conforme de charge $\tilde{c} = 16$ du côté droit. On introduit pour cela 32 fermions libres, qui seront des scalaires d'espace-temps, qu'on note $\lambda^1(\bar{w}), \dots, \lambda^{32}(\bar{w})$.

L'ajout de ces fermions introduit une difficulté supplémentaire : ici, les 32 fermions ne sont pas contraints à avoir les mêmes conditions au bord. La consistance de la théorie obtenue va toutefois limiter les possibilités.

L'exigence d'invariance modulaire restreint de manière drastique les possibilités : il n'existe en fait que deux⁶ théories hétérotiques.

Dans la *théorie* $SO(32)$, on contraint les 32 fermions droits à avoir les mêmes conditions aux limites. Ainsi, lorsque les 32 fermions droits sont en conditions de Ramond, le vide obtenu est massif. L'implémentation de la projection GSO se fait alors en imposant $(-)^{F_L} = 1$, et $(-)^{F_R} = 1$ du côté droit, où F_R est le nombre fermionique associé aux 32 fermions $\lambda^1, \dots, \lambda^{32}$.

Le spectre se sépare comme précédemment en secteur NS et secteur R :

6. Nous verrons cependant dans la section 4.1.1 qu'on peut en fait passer continûment de l'une à l'autre.

- dans le secteur Neveu-Schwarz, on trouve d'une part les états $\psi^\mu \bar{\partial} X^\nu |p\rangle_{NS}$ qui se séparent, toujours selon (3.72), en un graviton, un tenseur antisymétrique et un dilaton ; on a ensuite les états $\psi^\mu \lambda_{-1/2}^{[i} \lambda_{-1/2}^{j]} |p\rangle_{NS}$ (l'antisymétrisation des indices vient de l'anticommutation des fermions λ) : les vertex associés à ces états forment une algèbre de Kac-Moody $SO(32)$ de niveau 1, de sorte que ces états sont en fait des bosons de jauge de $SO(32)$;
- dans le secteur de Ramond, les états sans masse sont d'une part $\bar{\partial} X^\mu |s, p\rangle$, qui se sépare comme précédemment en un gravitino et un fermion anti-chiral, et d'autre part les $\lambda_{-1/2}^{[i} \lambda_{-1/2}^{j]} |s, p\rangle$ qui sont les partenaires supersymétriques des bosons de jauge issus du secteur NS .

Dans la théorie $E_8 \times E_8$, on sépare les 32 fermions droits en deux sous-ensembles $\lambda^1, \dots, \lambda^{16}$ et $\lambda^{17}, \dots, \lambda^{32}$.

On impose alors que tous les fermions du premier groupe et tous ceux du second groupe aient les mêmes conditions au bord. Ceci va rendre les états $|s_1\rangle$ (dans lequel les fermions du 1^{er} groupe sont en conditions de Ramond et ceux du second en conditions de Neveu-Schwarz) et $|s_2\rangle$ (inversement) sans masse.

La condition GSO va consister à demander $(-)^{F_1} = (-)^{F_2} = 1$, où F_1 est le nombre fermionique associé aux 16 fermions $\lambda^1, \dots, \lambda^{16}$, et F_2 celui associé aux fermions $\lambda^{17}, \dots, \lambda^{32}$.

La partie du spectre de cette théorie ne faisant pas intervenir d'excitations en λ est identique à celui de la théorie précédente. Pour la partie de jauge, on trouve les bosons de jauge suivants si les fermions d'espace-temps sont pris en NS (la partie R du spectre donnera les gauginos correspondants) :

- les états $\psi^\mu \lambda_{-1/2}^{[i} \lambda_{-1/2}^{j]} |p\rangle_{NS}$ sont maintenant limités à $i, j \in \{1 \dots 16\}$ ou $i, j \in \{17 \dots 32\}$, ce qui nous donne des bosons de jauge de $SO(16) \times SO(16)$ dans la représentation adjointe $(\mathbf{120}, \mathbf{1}) + (\mathbf{1}, \mathbf{120})$.
- les états $\psi^\mu |s_1, p\rangle$ et $\psi^\mu |s_2, p\rangle$ complètent l'algèbre de Kac-Moody de $SO(16) \times SO(16)$ en celle de $E_8 \times E_8$. Cette complétion est en fait issue de la décomposition de l'adjoint de E_8 en représentations de $SO(16)$:

$$\mathbf{248} = \mathbf{120}_{\text{adj}} + \mathbf{128}_s. \quad (3.76)$$

Il est possible de décrire plus en détail l'extension de $SO(16)$ en E_8 en introduisant les champs de spin correspondant aux vides de Ramond. On bosonise donc les 16 fermions $\lambda^{1 \dots 16}$ en 8 bosons compacts $H^{1 \dots 8}$, pris au point fermionique.

Le vide de Ramond $|s\rangle$, où $s = \frac{1}{2}(\epsilon_1, \dots, \epsilon_8)$ est alors reproduit par le vertex suivant

$$V(s, z) = e^{\frac{i}{2}(\epsilon_1 H_1 + \dots + \epsilon_8 H_8)} \quad (3.77)$$

La condition GSO $(-)^{F_1} = 1$ fixe le produit $\prod_{i=1}^8 \epsilon_i = 1$. Le groupe de jauge formé par les fermions est alors composé :

- des 8 vertex $\lambda^{2i-1} \lambda^{2i}$, $i = 1 \dots 8$, qui, d'après la procédure de bosonisation détaillée dans la section 3.2.2, sont équivalents aux vertex $i \bar{\partial} H^i$, $i = 1 \dots 8$;
- des 112 vertex $\lambda^{[i} \lambda^{j]}$ ne faisant pas partie de la catégorie précédente, qui se représentent par les opérateurs bosoniques $e^{\epsilon_i H_i + \epsilon_j H_j}$, $i \neq j \in \{1 \dots 8\}$, $\epsilon_i = \pm 1$, $\epsilon_j = \pm 1$; cet ensemble de vertex forme avec les Cartans de l'item précédent l'algèbre de $SO(16)$;

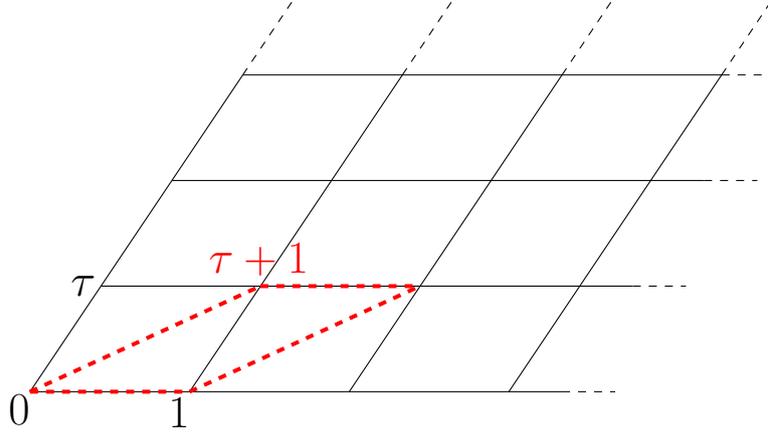


FIGURE 3.3 – Réseau du plan complexe défini par le module τ . Les réseaux définis par τ et $\tau + 1$ sont identiques

- des 128 champs de spin $\exp\left(\frac{i}{2}(\epsilon_1 H_1 + \dots + \epsilon_8 H_8)\right)$ vérifiant la condition GSO $\prod_{i=1}^8 \epsilon_i = 1$.

D’après l’équation 3.55 et les commentaires qui l’entourent, on voit que le système de racines de l’algèbre correspond à celui d’ E_8 (cf. par exemple le tableau 3.5 de [FSS00]).

Les théories des cordes hétérotiques ont un énorme intérêt phénoménologique : elles présentent à dix dimensions un groupe de jauge non trivial, au contraire des théories de Type II. Ces groupes de jauge sont de plus très intéressants en vue de la construction de modèles réalistes. Nous reviendrons en grand détail sur ce point, qui est au cœur d’une partie de notre travail de thèse, dans le chapitre 5.

Fonctions de partition à une boucle

Une quantité définissant en grande partie un modèle de théorie des cordes est la *fonction de partition à une boucle*. Cette fonction de partition correspond à l’amplitude “vide-vidé” de la propagation d’une corde fermée sur un tore.

Dans le plan complexe défini par les coordonnées de la feuille d’univers σ, t (on note ici t le temps propre de la corde pour éviter la confusion avec le paramètre de Teichmüller du tore, τ), le tore se représente comme un réseau correspondant aux identifications

$$w = \sigma + it \sim w + 2\pi \sim w + 2\pi\tau. \quad (3.78)$$

La propagation de la corde fermée sur ce tore correspond alors à une corde fermée se propageant pendant un temps euclidien $2\pi\tau_2$, et le long de l’extension de la corde sur une longueur $2\pi\tau_1$. Le générateur des translations temporelles (resp. spatiales) étant le hamiltonien $L_0 + \bar{L}_0 - c/24 - \bar{c}/24$ (resp. l’impulsion $L_0 - \bar{L}_0$), l’amplitude est donnée par la trace suivante

$$Z(\tau) = \text{Tr} \left(e^{2i\pi\tau_1 (L_0 - \bar{L}_0)} e^{-2\pi\tau_2 (L_0 + \bar{L}_0 - c/24 - \bar{c}/24)} \right) = \text{Tr} \left(q^{L_0 - c/24} \bar{q}^{\bar{L}_0 - \bar{c}/24} \right), \quad (3.79)$$

où $q = e^{2i\pi\tau}$, et où la trace est prise sur les états physiques de la théorie.

Pour avoir la fonction de partition de la théorie, il suffit maintenant d'intégrer cette quantité sur les valeurs inéquivalentes du paramètre τ . Le réseau défini par τ dans le plan complexe est invariant sous les transformations

$$T : \tau \mapsto \tau + 1; \quad S : \tau \mapsto -\frac{1}{\tau}. \quad (3.80)$$

Ces deux transformations génèrent le groupe modulaire $PSL(2, \mathbb{Z}) = SL(2, \mathbb{Z})/\mathbb{Z}_2$, dont une transformation générique est donnée par

$$\tau \mapsto \frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \quad (a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^4 \mid ad - bc = 1; \quad (3.81)$$

le quotientage par \mathbb{Z}_2 venant du fait que (a, b, c, d) et $(-a, -b, -c, -d)$ génèrent la même transformation.

On montre alors (une preuve se trouve par exemple dans [Ser94]) que le domaine d'intégration à considérer, dit *domaine fondamental*, est donné par

$$F = \left\{ \tau \in \mathbb{C} \mid |\operatorname{Re} \tau| \leq \frac{1}{2}, |\tau| \geq 1 \right\}. \quad (3.82)$$

F est représenté sur la figure 3.4.

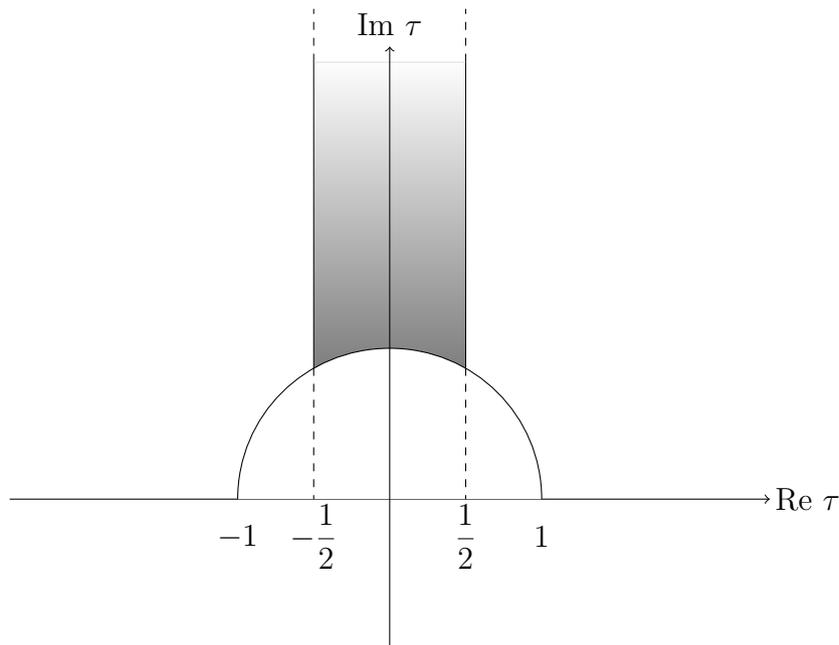


FIGURE 3.4 – Le domaine fondamental du groupe modulaire $PSL(2, \mathbb{Z})$ est ici représenté en grisé.

Ici se manifeste un énorme avantage de la théorie des cordes : dans cette intégration, l'intégration sur τ_1 impose le level-matching entre les états gauche et droit de la théorie ; l'intégration sur τ_2 est l'équivalent cordiste de l'intégration sur le paramètre de Schwinger t en théorie des champs.

τ_2 étant borné par une quantité strictement positive, la divergence ultra-violette due à la limite $t \rightarrow 0$ qui existait en théorie des champs a ici disparu.

La mesure d'intégration⁷ est la quantité invariante modulaire $d^2\tau/\tau_2^2$. Dans cette partie toutefois, nous n'effectuerons pas les intégrations, nous contentant de calculer $Z(\tau)$.

Nous allons maintenant donner quelques blocs élémentaire pour construire une fonction de partition. Pour un boson libre, les modes zéro p sont des réels arbitraires; leur intégration fournit la contribution suivante à Z (en se limitant aux degrés de liberté transverses) :

$$\int d^{D-2}p e^{-2\pi\tau_2 p^2} \sim (\tau_2)^{-(D-2)/2}. \quad (3.83)$$

La seconde partie à traiter est celle correspondant aux oscillateurs bosoniques α_{-n}^μ : il est facile de voir que la trace sur toutes les configurations donne le résultat suivant (qui intègre aussi les charges centrales $c/24, \bar{c}/24$)

$$Z_{osc.}(\tau) = \frac{1}{|\eta(\tau)|^{2(D-2)}} \quad (3.84)$$

où

$$\eta(\tau) = q^{1/24} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n) \quad (3.85)$$

est la *fonction de Dedekind*.

Les blocs de fonction de partition correspondant aux fermions d'espace-temps vont s'exprimer en fonction des *fonctions theta de Jacobi*. La fonction $\vartheta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ est associée à la *structure de spin* (a, b) , dans laquelle les fermions considérés ont des conditions aux limites caractérisées par a et b le long des deux cycles non-contractables du tore, comme représenté sur la figure 3.5. $a, b = 0$ correspond à une condition au bord antipériodique, et $a, b = 1$ à une condition périodique. a étant la condition au bord de "fermeture" de la corde fermée, sa valeur indique si on se trouve dans le secteur de Ramond ($a = 1$) ou Neveu-Schwarz ($a = 0$). b dénote quant à lui la condition de périodicité le long du cycle "temporel" de propagation de la corde fermée : sa valeur reflète l'insertion dans la trace de l'opérateur de comptage de fermions $(-)^F$. Pour $b = 0$, cet opérateur est présent ; pour $b = 1$, il est absent. Ces règles sont très utiles pour "lire" les différents degrés de liberté de la théorie par simple examen de sa fonction de partition à une boucle.

De manière explicite, on a, pour n fermions chiraux libres :

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}_{NS} \left(q^{L_0 - c/24} \bar{q}^{\bar{L}_0 - \bar{c}/24} \right) &= \left(\frac{\vartheta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}{\eta} \right)^n = \left(\frac{\vartheta_4}{\eta} \right)^n ; \\ \mathrm{Tr}_{NS} \left((-)^F q^{L_0 - c/24} \bar{q}^{\bar{L}_0 - \bar{c}/24} \right) &= \left(\frac{\vartheta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}{\eta} \right)^n = \left(\frac{\vartheta_3}{\eta} \right)^n ; \\ \mathrm{Tr}_R \left(q^{L_0 - c/24} \bar{q}^{\bar{L}_0 - \bar{c}/24} \right) &= \left(\frac{\vartheta \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}{\eta} \right)^n = \left(\frac{\vartheta_1}{\eta} \right)^n ; \end{aligned} \quad (3.86)$$

7. Cette mesure peut se dériver en remarquant que l'intégration sur le tore doit être effectuée après quotientage par le groupe de Killing conforme, ce qui fournit un facteur τ_2 au dénominateur. Le second τ_2 est donné par la contribution des modes zéro des deux bosons du cône de lumière, dont on ne tient la plupart du temps pas compte dans le calcul de $Z(\tau)$

$$\mathrm{Tr}_R \left((-)^F q^{L_0 - c/24} \bar{q}^{\bar{L}_0 - \bar{c}/24} \right) = \left(\frac{\vartheta \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix} \right]}{\eta} \right)^n = \left(\frac{\vartheta_2}{\eta} \right)^n .$$

En regroupant toutes ces contributions, on obtient les fonctions de partition suivantes :

- pour les théories de Type II,

$$Z_{II} = \frac{1}{\tau_2^4 \eta^8 \bar{\eta}^8} \times \left[\frac{1}{2} \sum_{a,b=0}^1 (-)^{a+b+ab} \left(\frac{\vartheta \left[\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix} \right]}{\eta} \right)^4 \right] \times \left[\frac{1}{2} \sum_{\bar{a},\bar{b}=0}^1 (-)^{\bar{a}+\bar{b}+\epsilon \bar{a}\bar{b}} \left(\frac{\bar{\vartheta} \left[\begin{smallmatrix} \bar{a} \\ \bar{b} \end{smallmatrix} \right]}{\bar{\eta}} \right)^4 \right], \quad (3.87)$$

où $\epsilon = 0$ pour la théorie IIA et $\epsilon = 1$ pour la théorie IIB.

- pour les théories hétérotiques,

$$Z_{SO(32)} = \frac{1}{\tau_2^4 \eta^8 \bar{\eta}^8} \times \left[\frac{1}{2} \sum_{a,b=0}^1 (-)^{a+b+ab} \left(\frac{\vartheta \left[\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix} \right]}{\eta} \right)^4 \right] \times \left[\frac{1}{2} \sum_{\gamma,\delta=0}^1 \left(\frac{\bar{\vartheta} \left[\begin{smallmatrix} \gamma \\ \delta \end{smallmatrix} \right]}{\bar{\eta}} \right)^{16} \right], \quad (3.88)$$

$$Z_{E_8 \times E_8} = \frac{1}{\tau_2^4 \eta^8 \bar{\eta}^8} \times \left[\frac{1}{2} \sum_{a,b=0}^1 (-)^{a+b+ab} \left(\frac{\vartheta \left[\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix} \right]}{\eta} \right)^4 \right] \times \left[\frac{1}{2} \sum_{\gamma,\delta=0}^1 \left(\frac{\bar{\vartheta} \left[\begin{smallmatrix} \gamma \\ \delta \end{smallmatrix} \right]}{\bar{\eta}} \right)^8 \right]^2. \quad (3.89)$$

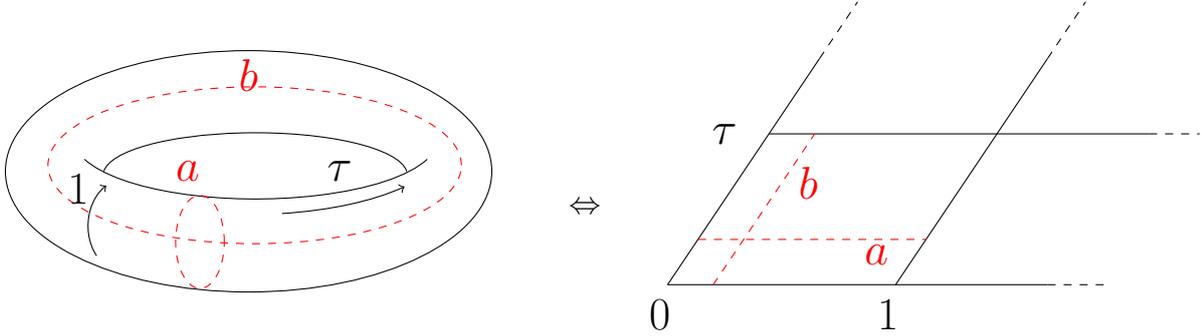


FIGURE 3.5 – Structure de spin (a, b) sur le tore de module τ .

Supersymétrie d'espace-temps

Dans les fonctions de partition (3.87), (3.88), (3.89), la projection GSO implémentée sur les bosons et fermions d'espace-temps a permis de faire apparaître les combinaisons suivantes de fonction ϑ :

$$\sum_{a,b=0}^1 (-)^{a+b+\epsilon ab} \vartheta \left[\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix} \right]^4. \quad (3.90)$$

En fait, la fameuse *aequatio identica satis abstrusa*, formulée en 1829 par Jacobi, montre que ce terme est identiquement nul. On trouvera cette identité, ainsi qu'un recueil des formules faisant intervenir les fonctions ϑ qui nous seront utiles, dans l'appendice A. Les fonctions de partition précédentes sont donc nulles, ce qui implique la présence à chaque niveau de masse de la théorie d'autant de degrés de liberté bosoniques que fermioniques (le facteur de spin-statistique étant automatiquement incorporé dans l'expression de la fonction de partition, toujours par la construction GSO). Ceci suggère fortement la présence d'une (ou plusieurs) supersymétrie(s) d'espace-temps.

Il est en fait possible de construire explicitement les charges de supersymétrie. La bosonisation de tous les fermions de la théorie permet de représenter tous les vides de Ramond sous la forme de champs de spin, et de construire les vertex des courants de supersymétrie. En effectuant les OPE des divers vertex des éléments du spectre, on reconstitue les multiplets de supersymétrie. Nous renvoyons à l'appendice B de [GKR99], où cette procédure est effectuée dans le cadre des théories de Type II compactifiées sur des orbifolds.

L'annulation de ces fonctions de partition peut aussi être comprise à l'aide de la propriété de *trialité* de $SO(8)$, qui relie la représentation vectorielle v aux deux représentations spinorielles s et c . Les *caractères* associés aux représentations de $SO(8)$ sont donnés en fonction des fonctions ϑ comme

$$\chi_O = \frac{\vartheta_3^4 + \vartheta_4^4}{2\eta^4}, \quad \chi_V = \frac{\vartheta_3^4 - \vartheta_4^4}{2\eta^4}, \quad \chi_S = \frac{\vartheta_2^4 + \vartheta_1^4}{2\eta^4}, \quad \chi_C = \frac{\vartheta_2^4 - \vartheta_1^4}{2\eta^4} \quad (3.91)$$

On vérifie donc que l'identité de Jacobi (A.15) est équivalente à l'égalité $\chi_V = \chi_S = \chi_C$. Comme on a

$$\frac{1}{2\eta^4} \sum_{a,b=0}^1 (-)^{a+b+ab} \vartheta \left[\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix} \right]^4 = \chi_V - \chi_S; \quad \frac{1}{2\eta^4} \sum_{a,b=0}^1 (-)^{a+b} \vartheta \left[\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix} \right]^4 = \chi_V - \chi_C \quad (3.92)$$

on retrouve que les fonctions de partitions de partition des théories de Type II et hétérotiques sont nulles. L'absence dans les expressions du caractère χ_O confirme de plus que ces théories sont non-tachyoniques.

Chapitre 4

Théories des supercordes en 4 dimensions

Les théories des supercordes que nous avons développées jusqu'à présent ont un inconvénient assez fâcheux. Elles sont en effet définies pour un espace-temps à dix dimensions, alors qu'il est notoire que l'espace-temps dans lequel nous vivons comporte quatre dimensions. La première solution venant à l'esprit pour remédier à ce problème est une idée remontant au début du 20^{ème} siècle et aux travaux de Kaluza et Klein. Ces derniers remarquèrent que si l'on s'intéresse à un espace-temps à cinq dimensions, et que l'on compactifie une dimension sur un cercle, on obtient, d'un point de vue quadri-dimensionnel une théorie comprenant une métrique à quatre dimensions, un vecteur et un scalaire ; de plus, l'action d'Einstein-Hilbert en cinq dimensions se réduit en quatre dimensions à une action décrivant la métrique quadri-dimensionnelle, un vecteur de jauge $U(1)$ et un scalaire libre. Cette théorie unifiait alors classiquement la gravitation et l'électromagnétisme en postulant que l'espace-temps comportait une dimension supplémentaire, repliée sur elle-même sur un rayon très faible, ce qui la rend invisible aux énergies habituelles. En suivant cette logique, on peut donc envisager de factoriser l'espace-temps à 10 dimensions dans lequel nous définissons la théorie des supercordes sous la forme

$$\mathcal{M}_{3,1} \times K \tag{4.1}$$

où K est une variété compacte qui devra vérifier de bonnes propriétés. L'échelle de taille de cette variété est alors naturellement choisie comme la taille typique à laquelle les effets cordistes deviennent prépondérants, à savoir la longueur de Planck l_P .

Cette solution paraît la plus naturelle ; il est toutefois possible d'en envisager une autre. En effet, la contrainte de dimensionnalité de l'espace-temps nous est apparue comme contrainte nécessaire pour annuler l'anomalie conforme. Une autre solution serait donc d'ajouter à la théorie des supercordes en 4 dimensions de nouveaux degrés de liberté sur la feuille d'univers formant une théorie de champs conformes et dont la charge centrale compense l'anomalie ; autrement dit nous cherchons des théories de charges conformes $(c, \tilde{c}) = (9, 9)$ dans le cas des théories de Type II, et $(c, \tilde{c}) = (9, 22)$ dans le cas des théories hétérotiques. Ce mécanisme est déjà partiellement mis en œuvre dans la construction même des cordes hétérotiques, où l'ajout de 32 fermions libres droits permet de compenser la charge centrale issue des fantômes bc et des 10 bosons d'espace-temps. On verra dans la dernière section de ce chapitre que ce mécanisme se généralise naturellement à la construction de théories quadridimensionnelles. Ces

deux approches se révèlent en fait complémentaires : l'ajout de théories conformes bien choisies permet de reproduire des compactifications géométriques en certains points de leur espace de modules ; elles permettent aussi de généraliser ces constructions géométriques de manière intéressante.

4.1 Compactifications usuelles

On cherche à écrire une théorie des cordes sur un espace-temps à dix dimensions se factorisant comme produit de l'espace-temps de Minkowski et d'une variété K à six dimensions représentant l'espace interne. Une telle variété K doit satisfaire certaines contraintes. Notamment, le vide de la théorie doit être une solution des équations du mouvement, ce qui implique, en demandant l'invariance conforme du modèle-sigma sur la feuille d'univers, que le tenseur de Ricci de la variété doit s'annuler. De plus, pour des raisons phénoménologiques, on va chercher à compactifier sur une surface qui conserve au moins une supersymétrie $\mathcal{N} = 1$ dans la théorie à quatre dimensions. On montre que cette condition est satisfaite s'il existe un spineur covariamment constant sur la variété, ce qui est encore équivalent à demander que l'*holonomie* de la variété (c'est-à-dire, le groupe de transformations que peut subir un spineur par transport parallèle le long de la variété) soit inclus¹ dans $SU(3)$. On montre en fait qu'une variété de Kähler complexe, compacte, de dimension (complexe) 3 et d'holonomie $SU(3)$ est automatiquement Ricci-plate. De tels espaces sont appelés espaces de Calabi-Yau, et constituent la géométrie naturelle de compactification de la théorie des supercordes [CHSW85].

Nous allons énoncer quelques aspects géométriques qui nous seront utiles par la suite, en nous inspirant fortement de [Gre96]. Nous commençons par détailler la structure de l'espace des modules d'une variété de Calabi-Yau, puis nous examinerons l'apparition d'une symétrie échangeant deux espaces de Calabi-Yau, nommée symétrie miroir. Nous rencontrerons à nouveau cette symétrie au chapitre 5, où l'existence d'une autre symétrie du même genre sera obtenue.

Espace des modules et symétrie miroir

Par définition, il existe sur une variété de Calabi-Yau une métrique Ricci-plate. Toutefois, celle-ci est loin d'être unique ; l'espace des modules se définit alors comme l'espace sur lequel on peut déformer une métrique Ricci-plate en une autre métrique Ricci-plate. On distingue alors deux classes de déformations. Premièrement, les déformations de type Kähler $\delta g_{i\bar{j}}$, s'écrivant avec un indice holomorphe et un indice anti-holomorphe. Une telle déformation ne modifie pas la structure complexe de la variété (c'est-à-dire, intuitivement, la manière dont les six coordonnées réelles sont groupées en trois dimensions complexes), mais agissent sur la taille de la variété. Deuxièmement, les déformations de structure complexe de la forme δg_{ij} , avec deux indices holomorphes. Cette fois, ces déformations modifient la structure complexe. En effet, on veut définir sur la variété une métrique où toutes les composantes purement holomorphes ou purement anti-holomorphes sont nulles (dite métrique *hermitienne*). Pour intégrer une

1. Si ce groupe est inclus dans $SU(3)$ mais pas dans $SU(2)$, la supersymétrie sera $\mathcal{N} = 1$ dans le cas de la compactification d'une théorie hétérotique et $\mathcal{N} = 2$ dans le cas d'une théorie de Type II ; si ce groupe est inclus dans $SU(2)$, les supersymétries conservées seront respectivement $\mathcal{N} = 2$ et $\mathcal{N} = 4$.

déformation purement holomorphe dans ce contexte, il faut alors redéfinir les coordonnées complexes, de sorte que la métrique déformée reste hermitienne.

Des considérations de géométrie différentielle que nous n'évoquerons pas ici montrent que l'espace des déformations de Kähler s'identifie à la cohomologie de Dolbeault² $H^{1,1}$, tandis que celui des déformations de structure complexe s'identifie à $H^{2,1}$.

Dans le cas d'une compactification sur un espace de Calabi-Yau, l'holonomie $SU(3)$ implique la présence sur la feuille d'univers de deux algèbres superconformes $N = 2$, l'une du côté holomorphe de la théorie et l'autre du côté anti-holomorphe. Dans le cas des théories de Type II, ces deux algèbres donnent naissance à deux supersymétries d'espace-temps ; par contre dans le cas de la compactification d'une théorie hétérotique, seule la partie holomorphe impliquera une supersymétrie d'espace-temps. L'algèbre superconforme antiholomorphe a toutefois un rôle crucial dans la détermination du groupe de jauge : nous détaillerons ce point dans le chapitre 5. Les propriétés de l'algèbre superconforme détaillées dans l'appendice B permettent de définir, pour une algèbre $(2, 2)$, l'*anneau chiral* composé de quatre catégories de champs notés (c, c) , (a, c) , (c, a) , (a, a) . On montre alors que les champs de type (c, c) sont en bijection avec les éléments de $H^{2,1}$, alors que ceux de type (c, a) sont en bijection avec les éléments de $H^{1,1}$. Cette propriété semble étonnante : deux familles de champs dont les propriétés ne diffèrent que par le signe d'une charge, fixée de manière *a priori* conventionnelle, déforment la théorie de manière drastiquement différente. Ceci tend à faire penser que la théorie conforme donnée par un Calabi-Yau peut aussi être donnée par un autre Calabi-Yau, miroir du premier, dans lequel on a échangé les cohomologies $H^{1,1}$ et $H^{2,1}$. Du point de vue de la théorie conforme, on voit qu'une telle opération va avoir pour effet de renverser le signe de la charge $U(1)$ des champs anti-holomorphes. Or, l'expression de J donnée dans l'appendice B dans le cadre de la réalisation de l'algèbre superconforme montre bien que cette charge $U(1)$ est reliée à l'hélicité des états fermioniques. L'effet de la symétrie miroir va donc, dans ce cas, correspondre au renversement de l'hélicité des fermions. Bien sûr, dans le cas d'une théorie hétérotique, le côté droit de la théorie ne comporte pas de fermions à proprement parler ; la chiralité renversée sera donc celle de représentations du groupe de jauge (nous verrons que les groupes de jauge obtenus admettent bien des représentations chirales). Par contre, dans le cas des théories de Type II, la mise en œuvre d'une symétrie miroir a bien pour effet de renverser l'hélicité des fermions anti-holomorphes. Ceci est confirmé par l'analyse de [SYZ96] : si l'on se donne une théorie de Type IIA compactifiée sur un espace de Calabi-Yau, sa théorie T-duale³ est obtenue comme la compactification de cette même théorie sur le Calabi-Yau miroir. Ou, de manière équivalente : la compactification de la théorie IIA sur un Calabi-Yau est équivalente à la compactification de la théorie IIB sur le Calabi-Yau miroir.

Un inconvénient de la procédure générale de compactification de Calabi-Yau est qu'il est difficile d'obtenir des informations concrètes sur le spectre de la théorie, ou la structure des supersymétries présentes à quatre dimensions. L'exemple de Calabi-Yau le plus simple, le tore T^6 , permet d'expliciter le spectre de la théorie compactifiée. Le tore est d'holonomie triviale, de sorte que toutes les charges de supersymétrie sont préservées par la compactification.

2. La *cohomologie de Dolbeault* $H^{p,q}$ est le quotientage de l'espace des (p, q) -formes fermées ω vérifiant $\bar{\partial}\omega = 0$ par celui des (p, q) -formes exactes ω vérifiant $\omega = \bar{\partial}\rho$, où ρ est une $(p, q - 1)$ -forme.

3. La T-dualité est introduite dans la section suivante.

Nous allons détailler cette procédure de compactification toroïdale, et en donner le spectre. Nous utiliserons abondamment cette compactification dans les sections suivantes ; elle nous servira en outre à construire les compactifications d'orbifold, présentées dans ce chapitre, qui permettent une étude explicite du spectre et des propriétés de théories à supersymétrie réduite.

4.1.1 Compactifications toroïdales et réseaux

Nous allons commencer par traiter la compactification d'un boson X sur un cercle S^1 de rayon R .

Dans un formalisme de théorie des champs, l'impulsion est quantifiée par la condition de périodicité imposée sur le degré de liberté bosonique. L'opérateur de translation le long de la dimension compacte $e^{2i\pi R p}$ devant être égal à l'identité, on obtient la condition habituelle

$$p = \frac{m}{R}, \quad m \in \mathbb{Z}. \quad (4.2)$$

En théorie des cordes, cette impulsion est celle qui se rapporte au temps propre de la corde : avec nos notations, elle correspond à $\alpha_0 + \tilde{\alpha}_0$.

Les cordes fermées font apparaître une nouvelle caractéristique de la compactification : ces cordes peuvent s'enrouler autour de la dimension compacte avant de se refermer [dessin]. Ainsi, l'équation

$$X(\sigma + 2\pi, \tau) = 2\pi n R + X(\sigma, \tau) \quad (4.3)$$

caractérise un état de corde ayant un nombre d'enroulement n autour de S^1 . Cette contrainte implique alors sur les modes zéro

$$\alpha_0 - \tilde{\alpha}_0 = n R. \quad (4.4)$$

De sorte que finalement, les modes zéro de la corde fermée le long de la dimension compacte dépendent de deux entiers (m, n) appelés *nombre d'impulsion* et *nombre d'enroulement*. Pour l'état $|m, n\rangle$, on a les modes zéro gauche et droit suivants :

$$P_L = \frac{m}{R} + \frac{nR}{\alpha'}; \quad P_R = \frac{m}{R} - \frac{nR}{\alpha'}. \quad (4.5)$$

Pour que ces états soient physiques, ils doivent satisfaire la condition de level-matching

$$\left(\frac{P_L^2}{2} + N_L \right) - \left(\frac{P_R^2}{2} + N_R \right) = 0. \quad (4.6)$$

En particulier, $P_L^2 - P_R^2$ doit être pair. Ceci est trivialement vérifié dans notre cas ; nous verrons que l'extension de cette propriété à des réseaux de dimension élevée contraint fortement la théorie.

On remarque que le spectre est invariant sous la transformation $R \rightarrow \alpha'/R$. Cette symétrie, dite *T-dualité*, échange le nombre d'enroulement et le nombre d'impulsion ; dans le cas d'une théorie de Type II, la T-dualité échange le boson compact antiholomorphe $X(\bar{z})$ en $-X(\bar{z})$. Par symétrie superconforme, le fermion antiholomorphe partenaire change aussi de signe, et donc la

chiralité des spineurs droits de la théorie est modifiée. On est ainsi passés d'une théorie de Type II à l'autre. La T-dualité se généralisera à plusieurs dimensions dans les paragraphes suivants.

La fonction de partition du boson compact diffère de celle du boson rencontrée précédemment. La contribution des oscillateurs est identique, et est donnée en fonction de la fonction η de Dedekind : $Z_{osc.} = |\eta|^{-2}$. La contribution des modes zéro est modifiée : on a

$$\Gamma_{1,1}(R) = \sum q^{\alpha' P_L^2/4} \bar{q}^{\alpha' P_R^2/4} = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \exp \left[i\pi\tau \frac{\alpha'}{2} \left(\frac{m}{R} + \frac{nR}{\alpha'} \right)^2 - i\pi\bar{\tau} \frac{\alpha'}{2} \left(\frac{m}{R} - \frac{nR}{\alpha'} \right)^2 \right]. \quad (4.7)$$

La notation $\Gamma_{1,1}(R)$ que nous avons introduite donne le bloc de la fonction de partition issus des modes zéros d'un boson gauche et un boson droit compactifiés sur un cercle de rayon R , dans la représentation dite *hamiltonienne*. Cette notation s'étend au cas de plusieurs dimensions ; dans la suite, on notera $\Gamma_{p,q}(G, B, Y)$ le réseau des modes zéro de p bosons gauches et q bosons droits compactifiés sur un (p, q) -tore. Nous reviendrons d'ici peu sur cette expression, en précisant notamment la signification physique des pq paramètres que l'on a notés G, B, Y .

Intéressons-nous encore un peu au cas simple du cercle. Il est possible d'obtenir une autre représentation de la somme de réseau (4.7), en utilisant la formule de resommation de Poisson⁴ : la représentation *lagrangienne*. On trouve alors

$$\Gamma_{1,1}(R) = \frac{R}{\sqrt{\alpha'\tau_2}} \sum_{\tilde{m}, n \in \mathbb{Z}} \exp \left[-\frac{\pi R^2}{\alpha'\tau_2} |\tilde{m} + n\tau|^2 \right]. \quad (4.8)$$

Enfin, nous allons donner une conséquence de l'équivalence de bosonisation : au point fermionique $R = \sqrt{\alpha'/2}$, on a l'égalité entre les fonctions de partition d'un boson compact d'une part, et de deux fermions gauches et deux fermions droits d'autre part :

$$\frac{1}{|\eta|^2} \Gamma_{1,1} \left(\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \right) = \frac{1}{|\eta|^2} \frac{1}{\sqrt{2\tau_2}} \sum_{\tilde{m}, n \in \mathbb{Z}} \exp \left[-\frac{\pi}{2\tau_2} |\tilde{m} + n\tau|^2 \right] = \frac{1}{2} \sum_{a,b=0}^1 \left| \frac{\vartheta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}}{\eta} \right|^2. \quad (4.9)$$

Cette formule sera généralisée dans la section 4.2.2.

Nous allons maintenant considérer le cas général de compactification de p dimensions, ce qui correspond à considérer des réseaux (p, p) . En vue de décrire les compactifications de la théorie hétérotique, nous nous intéresserons également au cas des réseaux $(p, p+16)$.

Nous considérons de p bosons gauches et q bosons droits compacts, en suivant [Nar86, NSW87]. Les impulsions internes sont données par deux vecteurs P_L, P_R , respectivement à p et q composantes, et vérifiant les conditions de level-matching (4.6) :

$$P_L^2 - P_R^2 = 2(N_R - N_L) \quad (4.10)$$

Si on définit sur notre réseau une norme lorentzienne de signature (p, q) , on a la propriété suivante : le réseau doit être auto-dual et pair. L'espace de déformation d'un réseau lorentzien vérifiant ces propriétés est $O(p, q)$; ce groupe est appelé groupe de T-dualité. On peut vérifier

4. On trouvera une version très générale de cette formule dans l'appendice A de [Kir97].

que la T-dualité $R \rightarrow 1/R$ du cercle se généralise ici en une opération d'inversion d'une matrice fonction des modules de compactification (voir par exemple [GPR94]) toutefois, on voit que le spectre de masse de la théorie obtenue après compactification est invariant sous les deux groupes $O(p)_L$ (préservant P_L^2) et $O(q)_R$ (préservant P_R^2). Ainsi, l'espace des théories des cordes inéquivalentes obtenues par cette compactification est $O(p, q)/O(p) \times O(q)$.

Un élément de l'espace $O(p, q)/O(p) \times O(q)$ est paramétrisé par pq paramètres. Dans le cas d'une compactification de p dimensions, et donc d'un réseau (p, p) , ces p^2 modules sont donnés par la métrique G_{ij} et la 2-forme antisymétrique B_{ij} vivant sur le p -tore et intervenant dans l'action du modèle-sigma pour les dimensions compactes

$$S = \int d^2\sigma \left(G_{ij} \partial_a X^i \partial^a X^j + \epsilon^{ab} B_{ij} \partial_a X^i \partial_b X^j \right). \quad (4.11)$$

Ces modules correspondent à des directions plates du potentiel dans la théorie effective. Ils définissent la géométrie de la variété de compactification.

Dans ce cas-là, la représentation lagrangienne de la somme de réseau se généralise en

$$\Gamma_{p,p} = \frac{\sqrt{\det G_{ij}}}{\alpha'^{p/2} \tau_2^{p/2}} \sum_{(\tilde{m}_i), (n_i)} \exp \left[-\frac{\pi}{\alpha' \tau_2} (G_{ij} + B_{ij}) (\tilde{m}_i + n_i \tau) (\tilde{m}_j + n_j \bar{\tau}) \right], \quad (4.12)$$

et la resommation de Poisson montre que⁵ les impulsions valent

$$P_L^i = \frac{G^{ij}}{\sqrt{2}} \left(m_j + (B_{jk} + G_{jk}) \frac{n^k}{\alpha'} \right); \quad P_R^i = \frac{G^{ij}}{\sqrt{2}} \left(m_j + (B_{jk} - G_{jk}) \frac{n^k}{\alpha'} \right). \quad (4.13)$$

Dans le cas hétérotique, nous devons maintenant compactifier sur un réseau pair, self-dual de dimension $(p, p + 16)$. Ces conditions sont en fait extrêmement restrictives : ces réseaux sont de la forme

$$\Gamma_{p,p+16} = \Gamma_{p,p} \oplus \Gamma(SO(32)) \quad \text{ou} \quad \Gamma_{p,p+16} = \Gamma_{p,p} \oplus \Gamma(E_8) \oplus \Gamma(E_8), \quad (4.14)$$

ce qui redonne les deux groupes de jauge possibles pour la théorie hétérotique. $16p$ nouveaux modules apparaissent ici. Il s'agit de *lignes de Wilson*, qui représentent la valeur moyenne dans le vide des éléments de la sous-algèbre de Cartan de rang 16 de la théorie hétérotique ($SO(32)$ ou $E_8 \times E_8$). Dans une théorie de jauge non-abélienne, ces degrés de liberté restent non-dynamiques : leur terme dans le lagrangien étant donné par $\text{Tr}((F^I)^2) + [A^I, A^J]$, il reste nul dès que les A^I commutent. Les lignes de Wilson vont modifier les conditions aux limites des états chargés sous le groupe de jauge : si m^i et n^i sont les nombres quantiques (dans la représentation hamiltonienne) d'un état de corde de charges (e^a) sous la ligne de Wilson $A^{i,a}$ (a parcourt ici la sous-algèbre de Cartan) alors la présence de cette ligne induit la modification

$$m^i \rightarrow m^i + e^a A^{i,a}; \quad n^i \rightarrow n^i. \quad (4.15)$$

5. La forme de ces impulsions se dérive aussi en étudiant l'action du modèle-sigma (4.11).

Le changement se fait en fait sur l'expression des impulsions : on a maintenant [KK97]

$$P_L^i = \frac{G^{ij}}{\sqrt{2}} \left(m_j + A_j^a e^a (B_{jk} + G_{jk}) \frac{n^k}{\alpha'} + \frac{1}{2} A_j^a A_k^a \frac{n^k}{\alpha'} \right), \quad (4.16)$$

$$P_R^i = \frac{G^{ij}}{\sqrt{2}} \left(m_j + A_j^a e^a (B_{jk} - G_{jk}) \frac{n^k}{\alpha'} + \frac{1}{2} A_j^a A_k^a \frac{n^k}{\alpha'} \right).$$

Ce shift se répercute évidemment sur le spectre de masse. Les états de corde correspondant aux opérateurs de Cartan étant neutres sous le groupe de jauge et de nombre d'enroulement nul, leur masse n'est pas modifiée ; par contre, la partie non-abélienne du groupe peut acquérir une masse. Dans ce cas, le groupe de jauge est brisé ; une configuration générique de lignes de Wilson brisera ainsi le groupe de jauge de rang 16 de la théorie hétérotique en sa sous-algèbre de Cartan $U(1)^{16}$.

Le groupe $O(p, p + 16)/O(p) \times O(p + 16)$ apparaît ici encore comme groupe de T-dualité de la théorie.

Supersymétries et groupes de jauge

Comme dans le mécanisme original de Kaluza et Klein, la compactification a pour effet de faire apparaître des degrés de liberté de jauge dans la théorie. Les bosons de jauge sont représentés, en théorie bosonique⁶ par les opérateurs de vertex (a est ici la dimension compactifiée)

$$G^{\mu a} \leftrightarrow (\partial X^\mu \bar{\partial} X^a + \partial X^a \bar{\partial} X^\mu) e^{ikX} \quad (4.17)$$

$$B^{\mu a} \leftrightarrow (\partial X^\mu \bar{\partial} X^a - \partial X^a \bar{\partial} X^\mu) e^{ikX} \quad (4.18)$$

Ces états, scindés en leur partie gauche $\partial X^\mu \bar{\partial} X^a$ et leur partie droite $\partial X^a \bar{\partial} X^\mu$, génèrent un groupe de jauge $U(1)_L \times U(1)_R$. Ce groupe de jauge est présent quelque soit le rayon de compactification.

Toutefois, en une valeur particulière du rayon, de nouveaux états sans masse apparaissent. Ces états vont étendre le groupe de jauge, et celui-ci va devenir non-abélien⁷.

La masse d'un état de mode zéro $|m, n\rangle$ et de nombres d'oscillateurs N, \tilde{N} est donnée, une fois prise en compte la condition de level-matching, par

$$M^2 = \frac{\alpha'}{4} \left(\frac{m}{R} + \frac{nR}{\alpha'} \right)^2 + N - 1 = \frac{\alpha'}{4} \left(\frac{m}{R} - \frac{nR}{\alpha'} \right)^2 + \tilde{N} - 1 \quad (4.19)$$

Si $R = \sqrt{\alpha'}$, en plus des états ci-dessus, on remarque que les états

$$\bar{\partial} X^\mu(\bar{z}) | \pm 1, \pm 1, k \rangle = e^{\pm i(2/\sqrt{\alpha'})X(z)} \bar{\partial} X^\mu(\bar{z}) e^{ikX} \quad (4.20)$$

6. L'extension à la corde supersymétrique est immédiate : l'excitation de poids 1 correspondant au vertex ∂X^μ doit être remplacée par celle de poids 1/2 correspondant au vertex ψ^μ .

7. Dans le cadre de compactifications toroïdales, le rang du groupe de jauge issu de la compactification reste toutefois constant ; si on compactifie sur un (p, q) -tore, ce rang est égal à $p + q$.

sont sans masse. En effectuant les OPE de ces vertex avec le boson de jauge $U(1)$ $\partial X^a \bar{\partial} X^\mu$, on remarque que les trois courants réalisent une algèbre affine $SU(2)$. On a donc étendu $U(1)_L$ à $SU(2)_L$. De même, on voit facilement que les états

$$\partial X^\mu(z) | \pm 1, \mp 1, k \rangle = \partial X^\mu(z) e^{\pm i(2/\sqrt{\alpha'})\bar{X}(\bar{z})} e^{ikX} \quad (4.21)$$

étendent $U(1)_R$ en $SU(2)_R$. Cette extension de jauge est un phénomène purement cordiste, faisant intervenir des états d'enroulement non-nul.

On peut généraliser cette extension au cas de la compactification de p dimensions. Il est facile de voir qu'en l'absence d'hypothèse supplémentaires, le groupe de jauge obtenu est ici $U(1)_L^p \times U(1)_R^p$. Ce groupe peut en fait s'étendre [Gin87], au maximum en $SO(2p)_L \times SO(2p)_R$. Pour cela, on doit se placer en un point de l'espace des modules tel que des vertex supplémentaires de la forme $e^{iP_L \cdot X_L} \bar{\partial} X^R$ et $\partial X^L e^{iP_R \cdot X_R}$ deviennent sans masse, et que la structure du groupe résultant soit celle de $SO(2n)$. Cette structure sera donnée par les OPE (3.55). Nous renvoyons à [Gin87] pour plus de précisions ; il y est noté entre autres que les deux théories hétérotiques $SO(32)$ et $E_8 \times E_8$ sont continûment reliées par déformation du réseau $\Gamma_{p,p+16}$. Notons enfin que, sous extension ou sous brisure par des lignes de Wilson, le rang des groupes de jauge obtenus est inchangé.

Nous reviendrons amplement par la suite au point d'extension de la jauge en $SO(2p)_L \times SO(2p)_R$, qui n'est autre que le point fermionique.

La réduction dimensionnelle change les propriétés de supersymétrie. La manière la plus simple d'appréhender ce mécanisme est de raisonner en termes de supercharges. Le nombre de supercharges maximal d'une théorie physique, comme montré dans la section 2.2 est de 32.

Les théories de cordes de Type II présentent une supersymétrie $\mathcal{N} = 2$ en dix dimensions, soit 32 supercharges (la dimension minimale d'une représentation spinorielle de $SO(10)$ étant de 16, pour des fermions de Majorana ou de Weyl). En dimension 4, cette dimension est de 4 ; si toutes les supercharges survivent, on a donc une supersymétrie $\mathcal{N} = 8$. Des supercharges formant une représentation **16** de $SO(9,1)$ se décomposent sous $SO(9,1) \rightarrow SO(3,1) \times SU(4)$ comme **16** = **(2, 4)** \oplus **($\bar{2}$, $\bar{4}$)**. En décomposant de la même manière la $\bar{\mathbf{16}}$ dans le cas d'une théorie de Type IIA, on reconstitue bien les 8 générateurs de supersymétrie en 4D, en utilisant la décomposition du spineur de Dirac à quatre dimensions **4** \rightarrow **(2, $\bar{2}$)**.

En termes d'opérateurs de vertex, il est possible de se faire une image claire de la situation. En effet, dans une théorie de Type II par exemple, si on fermionise les 10 fermions gauches d'espace-temps en 5 bosons H_0, H_1, H_2, H_3, H_4 (et de même pour les droits) en comparant les vertex du graviton

$$e^{iH_0} e^{i\bar{H}_0}$$

et du gravitino gauche

$$e^{\frac{i}{2}(H_0 \pm H_1 \pm H_2 \pm H_3 \pm H_4)} e^{i\bar{H}_0}$$

on voit que les 16 supercharges sont associées aux courants

$$e^{-\frac{i}{2}(H_0 \pm H_1)} e^{\frac{i}{2}(\pm H_2 \pm H_3 \pm H_4)}$$

Dans l'hypothèse où toutes les charges survivent à la procédure de compactification, on voit que sous décomposition du groupe de Poincaré à dix dimensions, le facteur correspondant aux directions compactifiées donne le groupe de R -symétrie, en produit direct avec le groupe de Poincaré à quatre dimensions. Ainsi, la présence de $\mathcal{N} = 1$ en dimension 10 implique $\mathcal{N} = 2$ en dimension 6 et $\mathcal{N} = 4$ en dimension quatre. De même, $\mathcal{N} = 2$ en 10D donne $\mathcal{N} = 4$ en 6D et $\mathcal{N} = 8$ en 4D.

Les exemples précédents décrivent des compactifications sur des géométries régulières. Nous allons cependant voir que les possibilités de compactification sont beaucoup plus vastes. Elles incluent notamment les orbifolds, qui sont des espaces quotients pouvant admettre des singularités. Les orbifolds les plus simples ont une interprétation géométrique claire ; on peut toutefois envisager des compactifications sur des orbifolds non-géométriques, qui débouchent sur des théories conformes parfaitement définies. Entre autres propriété, la compactification sur des orbifolds va éliminer des supercharges, et donc réduire la supersymétrie à quatre dimensions (comme le faisait déjà la compactification sur un Calabi-Yau par des propriétés d'holonomie).

4.2 Orbifolds

Lorsqu'une variété possède un groupe de symétrie, il est possible de considérer la variété quotient, dans laquelle on identifie un point de la variété avec son orbite sous le groupe de symétrie. La géométrie de la variété en est alors fortement affectée : notamment, dans le cas où le groupe de transformations admet un ou plusieurs points fixes (on parle d'*orbifold à action non-libre*), l'espace-quotient admet des singularités en ces points. Nous allons néanmoins voir que l'on peut définir sans problème une théorie des cordes compactifiée sur ce type d'espaces, dont la construction consistera dans un premier temps à garder les états de cordes invariants sous le groupe de transformation considéré. On verra ensuite que la consistance de la théorie impose d'introduire de nouveaux secteurs, dits *twistés*.

Les constructions d'orbifold ont été introduites dans [DHW85, DHVW86]. Les raisons motivant cette introduction sont multiples.

Premièrement, après les compactifications toroïdales, les compactifications sur des orbifolds sont les plus faciles à décrire. En effet, les surfaces de Calabi-Yau que l'on considère généralement ne permettent pas beaucoup de calculs explicites ; les calculs se font souvent aux points de l'espace des modules où la variété de Calabi-Yau considérée développe une singularité de type orbifold. Ainsi, la variété $K3$ dégénère en l'orbifold T^4/\mathbb{Z}_2 en un point particulier.

Deuxièmement, la construction d'orbifold, en projetant certains états de cordes hors du spectre physique, permet de réduire les symétries de la théorie. Ceci a plusieurs utilités en vue de décrire des modèles réalistes, dans lequel on attend une supersymétrie $\mathcal{N} = 1$ brisée à l'échelle du TeV et un groupe de jauge de type $SU(5)$ ou $SO(10)$. À titre de comparaison, la compactification d'une théorie hétérotique sur le tore T^6 fournit une théorie à 4 dimensions ayant une supersymétrie $\mathcal{N} = 4$, et un groupe de jauge de rang 28. Les caractéristiques topologiques de l'orbifold et l'apparition de secteurs twistés permettent aussi de contrôler plusieurs caractéristiques intéressantes de la théorie, comme par exemple le nombre de générations.

Enfin, la construction d'orbifold permet de construire des théories conformes qui n'ont pas d'interprétation géométrique simple, comme des orbifolds asymétriques, dans lesquels le groupe de symétrie n'agit pas de la même manière sur les degrés de liberté gauches et sur les droits.

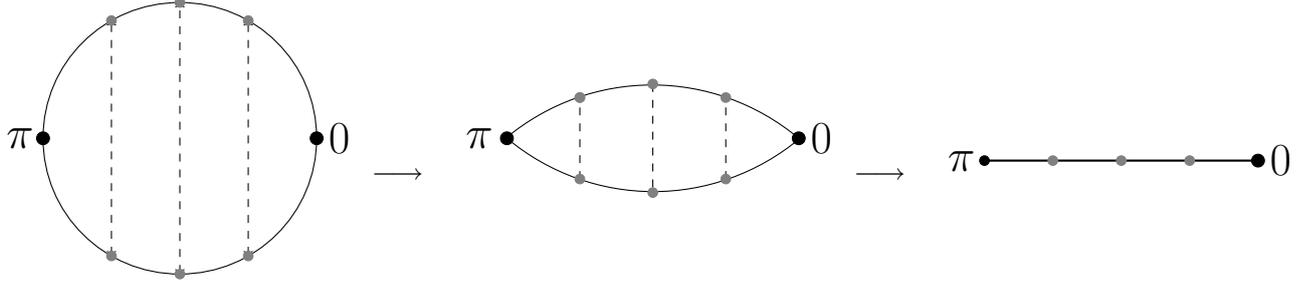


FIGURE 4.1 – L’orbifold S^1/\mathbb{Z}_2 “aplatit” le cercle en segment par identification des points reliés en pointillés; 0 et π sont points fixes du groupe de symétrie considéré.

Ces constructions présentent néanmoins un grand intérêt, d’un point de vue phénoménologique, que ce soit dans la création de modèles à supersymétrie étendue ou dans l’étude de dualités.

4.2.1 Orbifolds à action non-libre

L’exemple le plus simple d’orbifold est aussi celui que nous rencontrerons le plus souvent. Il s’agit de la compactification d’une dimension d’espace sur l’espace quotient S^1/\mathbb{Z}_2 , schématiquement représenté sur la figure 4.1. Cet orbifold est à action non-libre : l’identification $X \sim -X$ a deux points fixes sur le cercle, qui sont $X = 0$ et $X = \pi$. Le calcul de la fonction de partition à une boucle de ce modèle va illustrer l’apparition des secteurs twistés de la théorie.

Pour retenir les états invariants sous le groupe \mathbb{Z}_2 , il faut introduire dans la trace le projecteur

$$p = \frac{1 + g}{2}, \quad (4.22)$$

où g est la transformation $X \mapsto -X$. L’effet de cette projection sur les opérateurs de la théorie se déduit de la solution classique des équations du mouvement

$$X = X_0 + p_L(\tau - \sigma) + p_R(\tau + \sigma) + \sum_{n \neq 0} \frac{\alpha_n}{n} e^{-in(\tau - \sigma)} + \sum_{n \neq 0} \frac{\bar{\alpha}_n}{n} e^{-in(\tau + \sigma)} \quad (4.23)$$

on voit que les transformations sont

$$X_0 \mapsto X_0, \quad |p_L, p_R\rangle \mapsto |-p_L, -p_R\rangle, \quad (\alpha_n, \bar{\alpha}_n) \mapsto (-\alpha_n, -\bar{\alpha}_n) \quad (4.24)$$

de sorte que la fonction de partition est

$$Z_{unt.} = \text{Tr} \left(\frac{1 + g}{2} q^{L_0 - c/24} \bar{q}^{\bar{L}_0 - \bar{c}/24} \right) = \frac{1}{2} Z(R) + \left| \frac{\eta}{\theta_2} \right|. \quad (4.25)$$

Cette quantité n’est toutefois pas invariante modulaire. Pour la compléter, on peut ici raisonner en termes géométriques. L’introduction du projecteur dans la trace force les états invariants à obéir à la condition aux limites

$$X(\sigma, \tau + 2\pi) = -X(\sigma, \tau). \quad (4.26)$$

Toutefois, la transformation modulaire $\tau \mapsto -1/\tau$ nous force à considérer une condition au bord antipériodique sur le second cycle du tore :

$$X(\sigma + 2\pi, \tau) = -X(\sigma, \tau). \quad (4.27)$$

Ces états sont dits *twistés* : la corde fermée se referme en fait à une transformation du groupe de symétrie près. Le second terme de la fonction de partition est alors la trace sur les états *twistés* :

$$Z_{tw.} = \text{Tr}_{tw.} \left(\frac{1+g}{2} q^{L_0 - c/24} \bar{q}^{\bar{L}_0 - \bar{c}/24} \right). \quad (4.28)$$

Pour effectuer le calcul, on note que cette fois les modes d'oscillation sont demi-entiers. On trouve cette fois

$$Z_{tw.} = \text{Tr} \left(\frac{1+g}{2} q^{L_0 - c/24} \bar{q}^{\bar{L}_0 - \bar{c}/24} \right) = \left| \frac{\eta}{\theta_4} \right| + \left| \frac{\eta}{\theta_3} \right|. \quad (4.29)$$

La somme $Z_{unt.} + Z_{tw.}$ est maintenant invariante modulaire.

Elle se note de façon condensée comme

$$Z = \frac{1}{2} \sum_{h,g=0}^1 Z_{[g]}^{[h]}, \quad (4.30)$$

où

$$Z_{[0]}^{[0]} = Z(R); \quad Z_{[g]}^{[h]} = \left| \frac{2\eta}{\vartheta \begin{bmatrix} 1-h \\ 1-g \end{bmatrix}} \right|, \quad (h, g) \neq (0, 0). \quad (4.31)$$

Le facteur 2 du numérateur s'explique par la présence de deux vides *twistés*, correspondant aux 2 points fixes de l'orbifold.

De façon générale, on construit souvent les fonctions de partition d'orbifold en appliquant le groupe modulaire à la partie correspondant au secteur non-*twisté*, qui est facile à construire ; en effet une interprétation géométrique des secteurs *twistés* est souvent impossible.

Plusieurs choses sont importantes à noter :

- L'énergie du vide a changé. Ceci est dû au fait que les états *twistés* sont créés à partir du vide conforme par des opérateurs de poids non nuls. Nous verrons plus tard que ces états peuvent être identifiés à des vides de Ramond.
- La partie *twistée* de la fonction de partition (*ie* $(h, g) \neq (0, 0)$) ne dépend pas du rayon de compactification. Ceci est caractéristique des orbifolds à action non libre : les états *twistés* de la théorie sont localisés aux points fixes de la transformation (rappelons que $(p_L, p_R) = (0, 0)$) et ne "voient" donc pas la géométrie de l'espace interne. Ainsi, il sera possible de calculer la contribution de secteurs *twistés* en se plaçant en un point particulier de l'espace des modules de la variété de compactification ; la déformation de ce modèle vers une valeur arbitraire des modules internes n'affectera pas la forme de cette contribution.

La plupart des orbifolds que nous rencontrerons seront une généralisation du cas S^1/\mathbb{Z}_2 à plusieurs dimensions d'espace, à savoir le quotient T^d/\mathbb{Z}_2 . La fonction de partition se calcule selon le même principe : si on note G_{ij} et B_{ij} les modules du tore, on a

$$Z_{T^d/\mathbb{Z}_2} = \frac{1}{2} \sum_{h,g=0}^1 Z_{[g]}^{[h]}, \quad (4.32)$$

où

$$Z_{[0]}^{[0]} = Z(G_{ij}, B_{ij}); \quad Z_{[g]}^{[h]} = \frac{2^d |\eta|^d}{|\vartheta \begin{smallmatrix} 1-h \\ 1-g \end{smallmatrix}|^d}, \quad (h, g) \neq (0, 0). \quad (4.33)$$

Ici, $Z(G_{ij}, B_{ij})$ est la fonction de partition sur le tore vue [avant].

On emploiera souvent une notation séparant les modes d'oscillation du réseau des modes zéro : ainsi, on réécrit la fonction de partition précédente comme

$$Z = \frac{1}{2} \sum_{h,g=0}^1 \frac{\Gamma_{d,d}[g]}{|\eta|^{2d}}, \quad (4.34)$$

où

$$\Gamma_{d,d}[0] = \Gamma_{d,d}(G_{ij}, B_{ij}); \quad \Gamma_{d,d}[g] = \frac{2^d |\eta|^{3d}}{|\vartheta \begin{smallmatrix} 1-h \\ 1-g \end{smallmatrix}|^d}, \quad (h, g) \neq (0, 0). \quad (4.35)$$

Il nous reste à traiter le cas des fermions, qui, pour des raisons de supersymétrie sur la feuille d'univers, doivent subir les mêmes transformations que leurs partenaires bosoniques. Le résultat est intuitif au niveau de la fonction de partition : on a vu que dans la fonction de partition de deux fermions gauches réels donnée par

$$Z_f = \frac{1}{2} \sum_{a,b=0}^1 \frac{\vartheta \begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}}{\eta}, \quad (4.36)$$

la structure de spin (a, b) correspond aux conditions au bord des fermions le long des directions 1 et τ du tore. La présence d'une projection dans la trace, contrôlée par la valeur de g , change la condition au bord b ; la valeur de h , dénotant l'appartenance au secteur twisté, contrôle quant à elle la valeur de a . Pour un twist (h, g) , le bloc fermionique $\vartheta \begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}$ va donc être changé en $\vartheta \begin{smallmatrix} a+h \\ b+g \end{smallmatrix}$.

Cet exemple d'orbifold est géométrique : il correspond au quotientage du tore. On peut toutefois imaginer des orbifolds non géométriques, qui vont agir formellement sur la théorie conforme interne. Un exemple est donné par les orbifolds asymétriques [NSV87]. Ces orbifolds a entre autres pour effet de twister les bosons gauches ∂X et de conserver les bosons droits $\bar{\partial} X$. Cette démarche est parfaitement valable dans le cadre de la théorie conforme, où les deux côtés sont indépendants. Elle est d'une grande utilité, notamment pour la construction de théories de cordes à supersymétrie étendue [FK89, DJK08], de paires S -duales de théories de cordes [KK97], ou encore pour la réalisation de diverses brisures des groupes de jauge [CHL95, CP95]

4.2.2 Orbifolds à action libre et compactification de Scherk-Schwarz

Un orbifold à action libre correspond, à l'opposé, au quotientage de la variété par un groupe n'ayant pas de point fixe. Nous allons voir que cette différence est cruciale du point de vue de la théorie obtenue. En particulier, pour des raisons que l'on explicitera plus bas, les orbifolds à action libre sont beaucoup plus intéressants d'un point de vue phénoménologique, notamment dans les mécanismes de brisure de supersymétrie : les gravitinos, au lieu d'être purement et simplement éliminés du spectre comme c'est le cas dans les orbifolds à action non-libre, vont cette fois subsister mais devenir massifs. On peut ainsi construire des théories dans lesquelles la supersymétrie est *spontanément* brisée à une échelle dépendant de la taille des dimensions compactes ; dans une limite de décompactification, on peut recouvrir la supersymétrie initiale.

Un exemple simple d'orbifold à action libre

Nous allons commencer par développer l'exemple le plus simple d'orbifold à action libre, qui se base, pour un boson compactifié sur un cercle de rayon R , sur la symétrie \mathbb{Z}_2 (trivialement libre) de translation $X \rightarrow X + \pi R$.

L'action de cette transformation sur les vertex des modes zéro de la théorie

$$|m, n\rangle \equiv e^{i(\frac{m}{R} + \frac{nR}{\alpha'})X_L(z)} e^{i(\frac{m}{R} - \frac{nR}{\alpha'})X_R(\bar{z})} \quad (4.37)$$

est la suivante

$$|m, n\rangle \rightarrow (-)^m |m, n\rangle; \quad (4.38)$$

elle laisse de plus invariants les oscillateurs $\alpha_n, \bar{\alpha}_n$.

La partie de la fonction de partition correspondant au secteur twisté de la théorie est alors construite comme

$$Z_{untw.} = \frac{1}{\eta\bar{\eta}} \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2} (1 + (-1)^m) \exp \left(i\pi\tau \frac{\alpha'}{2} \left(\frac{m}{R} + \frac{nR}{\alpha'} \right)^2 - i\pi\bar{\tau} \frac{\alpha'}{2} \left(\frac{m}{R} - \frac{nR}{\alpha'} \right)^2 \right) \quad (4.39)$$

Nous avons vu qu'il est suffisant, pour construire la contribution twistée à la fonction de partition, d'appliquer la transformation modulaire $\tau \rightarrow -1/\tau$ à la contribution non-twistée. En effectuant ce calcul et en sommant les deux contributions, on obtient la fonction de partition finale (après une transformation de Poisson pour passer en formalisme hamiltonien)

$$Z = \frac{1}{\eta\bar{\eta}} \frac{1}{2} \sum_{h,g=0}^1 \sum_{\tilde{m}, n \in \mathbb{Z}} \exp \left[-\frac{\pi R^2}{\alpha' \tau_2} \left| \left(m + \frac{g}{2} \right) + \left(n + \frac{h}{2} \right) \tau \right|^2 \right] \quad (4.40)$$

Réseaux twistés et shiftés

Il est possible de généraliser ces expressions et de mêler les effets des orbifolds à action non-libre (*twist*) et libre (*shift*) pour obtenir des formules générales. Nous allons donner ces formules sans démonstration ; le lecteur peut se rapporter à [GKR99, FKNR04, Noo04] pour plus de détails. Pour cela, nous allons commencer par étendre l'équivalence fermion-boson formulée en section 3.2.2 au cas d'un boson twisté. Cette formule est un avant-goût du formalisme que nous développerons en section 4.5, nous ne la démontrons pas.

Au point fermionique $R = \sqrt{\alpha'/2}$, la généralisation de (4.9) donne l'équivalence

$$Z_{orb.} = \frac{1}{2} \sum_{h,g=0}^1 \frac{\Gamma_{1,1}^{[h]}[g]}{\eta\bar{\eta}} = \frac{1}{\eta\bar{\eta}} \frac{1}{2} \sum_{h,g=0}^1 \left| \vartheta \begin{bmatrix} a+h \\ b+g \end{bmatrix} \vartheta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \right|, \quad (4.41)$$

où $\Gamma_{1,1}^{[h]}[g]$ a été défini en (4.35).

Une telle équivalence existe aussi dans le cas du boson shifté :

$$\frac{1}{\eta\bar{\eta}} \frac{1}{2} \sum_{p,q=0}^1 \sum_{\tilde{m},n \in \mathbb{Z}} \exp \left[-\frac{\pi}{2\tau_2} \left| \left(m + \frac{q}{2} \right) + \left(n + \frac{p}{2} \right) \tau \right|^2 \right] = \frac{1}{2} \sum_{p,q=0}^1 \frac{1}{2} \sum_{a,b=0}^1 \left| \frac{\vartheta \begin{bmatrix} a+p \\ b+q \end{bmatrix}}{\eta} \right|^2 \quad (4.42)$$

Pour des raisons phénoménologiques, nous nous intéressons à l'orbifold d'un tore T^6 , dont les coordonnées peuvent être twistés et/ou shiftées. Dans tous les cas de figures intéressants, les twists seront caractérisés par les paramètres (h_1, g_1) pour les deux premières dimensions, (h_2, g_2) pour les deux suivantes, et $(-h_1 - h_2, -g_1 - g_2)$ pour les deux dernières⁸ et les shifts par les paramètres $(p_i, q_i)_{i=1\dots 6}$.

La quantité importante dans ce cas-là est le réseau (2, 2) twisté/shifté, qui est donné au point fermionique par [FKNR04] :

$$\Gamma_{2,2} \left[\begin{matrix} h \\ g \end{matrix} \middle| \begin{matrix} p_1 & p_2 \\ q_1 & q_2 \end{matrix} \right] = \frac{1}{4} \sum_{a_1, b_1, a_2, b_2} (-)^{a_1 q_1 + b_1 p_1 + p_1 q_1} (-)^{a_2 q_2 + b_2 p_2 + p_2 q_2} \left| \vartheta \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} \vartheta \begin{bmatrix} a_1+h \\ b_1+g \end{bmatrix} \vartheta \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} \vartheta \begin{bmatrix} a_2+h \\ b_2+g \end{bmatrix} \right|; \quad (4.43)$$

et le réseau (6, 6) le plus général s'écrit comme combinaison de ces blocs. Nous ferons usage de ces constructions dans la section 5.

Origines en théorie des champs : compactification de Scherk-Schwarz

Nous allons maintenant présenter une procédure de compactification issue de la théorie des champs, introduite à la fin des années 1970 par Scherk et Schwarz [SS79a, SS79b]. Nous reprenons ici en grande partie la présentation qui en est faite dans [KR90], ce qui nous permettra de l'étendre aux cordes de manière naturelle, comme effectué dans [Roh84, KP88, KR90]. Nous verrons enfin que tout ceci se reformule agréablement sous forme d'orbifolds à action libre, et nous verrons comment construire facilement les blocs correspondants dans la fonction de partition à une boucle. Dans la section suivante, nous donnerons la manière d'utiliser ce formalisme pour briser spontanément la supersymétrie, procédure qui est au cœur de ce travail de thèse.

Dans une compactification usuelle (toroïdale par exemple), l'identification $X^I \sim X^I + 2\pi R^I$ faite sur les coordonnées spatiales internes doit se répercuter sur les champs physiques de la théorie, qui doivent être univalués : on doit avoir

$$\Phi(X^\mu, X^I + 2\pi R^I) = \Phi(X^\mu, X^I) \quad (4.44)$$

8. L'existence de la relation $h_1 + h_2 + h_3 = g_1 + g_2 + g_3 = 0$ garantit la présence d'une supersymétrie $\mathcal{N} = 1$ à quatre dimensions.

Si l'on considère maintenant des symétries internes associées aux directions compactes X^I , données par des opérateurs Q_I , on peut s'intéresser aux configurations de champs suivantes :

$$\hat{\Phi}(X^\mu, X^I) = \exp\left(i e_I Q_I X^I\right) \Phi(X^\mu, X^I) \quad (4.45)$$

On voit alors que lorsque les dimensions internes sont compactifiées sur des rayons R^I , ces nouveaux champs ont des conditions au bord modifiées :

$$\hat{\Phi}(X^\mu, X^I + 2\pi R^I) = \exp\left(i e_I Q_I R^I\right) \hat{\Phi}(X^\mu, X^I). \quad (4.46)$$

Ainsi, la dépendance des champs en les dimensions internes n'est plus périodique : si on transporte le champ le long d'une dimension compactifiée du système, la valeur à l'arrivée sera reliée à celle du départ par une symétrie interne du système. D'un point de vue mathématique, ceci peut s'interpréter en considérant que le champ multivalué prend ses valeurs sur un fibré, dont la fibre est la groupe de symétrie interne considéré.

Cette transformation modifie les modes des impulsions internes comme

$$\frac{m^I}{R} \longrightarrow \frac{m^I}{R} + e^I q^I \quad (4.47)$$

où q_I est la charge du champ sous l'opérateur Q^I . Ceci a un effet sur le spectre de masse des états de la théorie : des champs de charge différente prendront des masses différentes dans le processus de compactification de Scherk-Schwarz, levant ainsi des dégénérescences aux différents niveaux de masse de la théorie.

L'extension à la théorie des cordes se fait de manière naturelle en partant de la propriété de modification des conditions au bord pour les états chargés de la théorie. Si l'on s'intéresse à la compactification d'une dimension sur un cercle de rayon R , les états de corde de la théorie compactifiée sont caractérisés par le nombre d'impulsion \tilde{m} et le nombre d'enroulement n (m est ici l'entier apparaissant dans la version lagrangienne de la fonction de partition du réseau $(1, 1)$). L'état de corde défini par les deux nombres (\tilde{m}, n) obéit aux conditions suivantes par transport sur les 2 cycles non-contractables du tore :

$$X(\sigma, \tau + 2\pi) = X(\sigma, \tau) + 2\pi\tilde{m}R; \quad X(\sigma + 2\pi, \tau) = X(\sigma, \tau) + 2\pi nR. \quad (4.48)$$

Ainsi, pour l'opérateur de vertex $V(\sigma, \tau)$ de charge q sous la symétrie considérée, les conditions au bord⁹ sont modifiées de la manière suivante :

$$V(\sigma + 2\pi, \tau) = e^{-ieq n R} V(\sigma, \tau); \quad (4.49)$$

$$V(\sigma, \tau + 2\pi) = e^{-ieq \tilde{m} R} V(\sigma, \tau). \quad (4.50)$$

On note que la seconde condition n'est autre que la formule usuelle de théorie des champs. La première condition est son extension cordiste, que l'on va interpréter comme caractérisant le secteur twisté d'un orbifold.

9. Ceci peut s'étendre dans le cas où on se place à l'ordre de plusieurs boucles : il suffit de considérer autant de conditions aux limites modifiées qu'il y a de cycles indépendants non-contractables sur la surface d'univers que l'on considère. Dans cette thèse, nous travaillons uniquement à l'ordre d'une boucle.

Ce mécanisme est en fait analogue à l'introduction de lignes de Wilson, évoquée en (4.15). On a toutefois ici accès à plus de courants, notamment à des courants qui briseront la supersymétrie.

Parmi les multiples façons d'implémenter ces compactifications dans l'expression d'une fonction de partition que nous allons détailler, nous en présentons une première, basée sur le couplage d'un rayon interne R_5 au courant d'hélicité d'espace-temps $\psi^2\psi^3$ (les deux fermions du cône de lumière). La théorie est ici hétérotique, mais l'extension aux théories de Type II est immédiate. Si $Z_{\tilde{m},n}$ dénote la contribution du mode \tilde{m}, n au réseau $\Gamma_{1,1}(R_5)$

$$Z_{\tilde{m},n}(R_5) = \frac{R_5}{\sqrt{\alpha'\tau_2}} \exp \left[-\frac{\pi R^2}{\alpha'\tau_2} |\tilde{m} + n\tau|^2 \right], \quad (4.51)$$

alors les conditions au bord des états de structure de spin (a, b) chargés sous ce courant sont modifiées comme [KR90] :

$$a \rightarrow a + 2ne, \quad b \rightarrow b + 2\tilde{m}e; \quad (4.52)$$

où dans ce cas e , la charge de l'état sous le courant d'hélicité vaut 1.

Le bloc de la fonction de partition encodant les structures de spin se modifie alors comme

$$Z = \dots \sum_{\tilde{m}_5, n_5} Z_{\tilde{m}_5, n_5} \frac{1}{2} \sum_{a,b} C(a, b) \vartheta \left[\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix} \right]^4 \dots \quad (4.53)$$

$$\rightarrow \dots \sum_{\tilde{m}_5, n_5} Z_{\tilde{m}_5, n_5} \frac{1}{2} \sum_{a,b} C'(a, b) \vartheta \left[\begin{smallmatrix} a+2n_5 \\ b+2\tilde{m}_5 \end{smallmatrix} \right] \vartheta \left[\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix} \right]^3 \dots \quad (4.54)$$

Ici, seule la première fonction ϑ , encodant la contribution des deux fermions du cône de lumière à quatre dimensions, est modifiée.

La modification des coefficients $C(a, b)$ est dictée par l'invariance modulaire ; on trouve $C'(a, b) = e^{i\pi(bn_5 + \tilde{m}_5 n_5)} C(a, b)$.

On remarque en fait, d'après les propriétés des fonctions ϑ , que l'implémentation de cette compactification se fait en fait en insérant un *cocycle* $(-)^{a\tilde{m}_5 + bn_5 + m_5 n_5}$ dans la fonction de partition. En isolant les blocs fermionique et de la dimension interne de Z , la projection s'implémente de la manière suivante :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{a,b} (-)^{a+b+ab} \vartheta \left[\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix} \right]^4 \times \exp \left[-\frac{\pi R^2}{\alpha'\tau_2} |\tilde{m} + n\tau|^2 \right] \\ \rightarrow & \frac{1}{2} \sum_{a,b} (-)^{a+b+ab} (-)^{a\tilde{m} + bn + \tilde{m}n} \vartheta \left[\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix} \right]^4 \times \exp \left[-\frac{\pi R^2}{\alpha'\tau_2} |\tilde{m} + n\tau|^2 \right] \end{aligned} \quad (4.55)$$

Reformulation de la compactification de Scherk-Schwarz par orbifold à action libre

Nous allons maintenant formaliser le rapport exact entre compactification de Scherk-Schwarz et orbifold à action libre, et utilisant l'exemple simple élaboré ci-dessus ; sa généralisation sera ensuite aisée.

La symétrie \mathbb{Z}_2 d'orbifold correspondant à cette brisure a pour expression $g = (-)^F \delta_5$, où $(-)^F$ est l'opérateur de comptage de fermions (gauches dans le cas hétérotique correspondant à l'exemple ci-dessus), et $\delta_5 : X_5 \mapsto X_5 + \pi R_5$ la translation selon la direction considérée pour effectuer la compactification de Scherk-Schwarz.

Schématiquement, en réécrivant le bloc de la fonction de partition correspondant aux degrés de liberté fermioniques et au réseau de la dimension compactifiée

$$\frac{1}{2} \sum_{a,b} (-)^{a+b+ab} \frac{\vartheta \left[\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix} \right]^4}{\eta^4} \times \sum_{m,n} \exp \left(i\pi\tau \left(\frac{m}{R} + \frac{nR}{\alpha'} \right)^2 - i\pi\bar{\tau} \left(\frac{m}{R} - \frac{nR}{\alpha'} \right)^2 \right), \quad (4.56)$$

de manière à faire apparaître les caractères de $SO(8)$ introduits en (3.91) :

$$\sum_{m,n} [V_8 - S_8] \times \sum_{m,n} \exp \left(i\pi\tau \left(\frac{m}{R} + \frac{nR}{\alpha'} \right)^2 - i\pi\bar{\tau} \left(\frac{m}{R} - \frac{nR}{\alpha'} \right)^2 \right) \quad (4.57)$$

l'insertion de l'opérateur de projection $(1+g)/2$ dans la trace nous donne la partie non twistée de la fonction de partition

$$\frac{1}{2} \sum_{g=0}^1 [V_8 - (-1)^g S_8] \sum_{m,n} (-1)^{gm} \exp \left(i\pi\tau \left(\frac{m}{R} + \frac{nR}{\alpha'} \right)^2 - i\pi\bar{\tau} \left(\frac{m}{R} - \frac{nR}{\alpha'} \right)^2 \right), \quad (4.58)$$

tandis que le secteur twisté, dans lequel les nombres d'enroulement sont demi-entiers et la projection GSO inversée, s'écrit

$$\frac{1}{2} \sum_{g=0}^1 (-)^g [O_8 - (-1)^g C_8] \sum_{m,n} (-1)^{gm} \exp \left(i\pi\tau \left(\frac{m}{R} + \frac{(n+1/2)R}{\alpha'} \right)^2 - i\pi\bar{\tau} \left(\frac{m}{R} - \frac{(n+1/2)R}{\alpha'} \right)^2 \right), \quad (4.59)$$

Il est alors facile de montrer que la fonction de partition de l'orbifold vaut finalement, en repassant à l'écriture en termes de fonctions theta :

$$\frac{1}{2} \sum_{h,g=0}^1 \frac{1}{2} \sum_{a,b} (-)^{a+b+ab} (-)^{ag+bh+gh} \frac{\vartheta \left[\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix} \right]^4}{\eta^4} \times \sum_{m,n} (-1)^{gm} \exp \left(i\pi\tau \left(\frac{m}{R} + \frac{(n+h/2)R'}{\alpha} \right)^2 - i\pi\bar{\tau} \left(\frac{m}{R} - \frac{(n+h/2)R'}{\alpha} \right)^2 \right) \quad (4.60)$$

Une resommation de Poisson faisant repasser en formalisme hamiltonien donne alors l'expression

$$\frac{1}{2} \sum_{h,g=0}^1 \frac{1}{2} \sum_{a,b} (-)^{a+b+ab} (-)^{ag+bh+gh} \frac{\vartheta \left[\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix} \right]^4}{\eta^4} \frac{R}{\sqrt{\alpha'\tau_2}} \sum_{\tilde{m},n} \exp \left(-\frac{\pi R^2}{\alpha'\tau_2} \left| \left(\tilde{m} + \frac{g}{2} \right) + \left(n + \frac{h}{2} \right) \tau \right|^2 \right), \quad (4.61)$$

En posant $R' = R/2$, on voit que dans cette expression, h et g ne sont autres que les parités des nombres d'enroulement de l'état de corde sur le cercle de rayon R' ; $(-)^{ag+bh+gh}$ s'identifie alors au cocycle inséré dans l'équation (4.55), et on retrouve bien le bloc de fonction de partition

$$\frac{1}{2} \sum_{\tilde{m}, n} \frac{1}{2} \sum_{a, b} (-)^{a+b+ab} (-)^{a\tilde{m}+bn+\tilde{m}n} \frac{\vartheta \left[\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix} \right]^4}{\eta^4} \frac{R'}{\sqrt{\alpha' \tau_2}} \exp \left(-\frac{\pi (R')^2}{\alpha' \tau_2} |\tilde{m} + n\tau|^2 \right) \quad (4.62)$$

4.3 Brisure de supersymétrie et de jauge dans les constructions d'orbifold

Les compactifications d'orbifold ont la capacité de réduire les groupes de symétrie présents dans une théorie. Deux types de brisure de symétrie existent : dans le cas d'une brisure *explicite*, les états médiateurs de la symétrie (bosons de jauge ou gravitino) sont éliminés du spectre par projection ; alors que dans le cas d'une brisure *spontanée*, ces états sont toujours présents dans le spectre, mais sont devenus massifs. Nous voyons alors que dans le cas de la supersymétrie, un modèle réaliste exige la présence d'une brisure spontanée vers $\mathcal{N} = 0$, de manière à introduire un décalage de masse entre super-partenaires compatible avec les observations actuelles. Nous remarquons aussi qu'une brisure spontanée du groupe de jauge, en levant la masse de certains bosons de jauge, s'apparente à un mécanisme de Higgs ; de même, une brisure spontanée de supersymétrie peut se voir comme un mécanisme de *super-Higgs* [C⁺78], dans lequel le gravitino acquiert une masse.

Nous commençons par discuter le cas de brisures explicites. Nous développerons ici les résultats correspondant aux constructions “canoniques”, qui s'avéreront les plus utiles pour décrire notre travail. Ce cas est donné par l'action d'orbifolds à action non-libres, qui réduisent partiellement la supersymétrie, et la symétrie de jauge dans le cas des théories hétérotiques. Le lien avec les compactifications de Calabi-Yau sera ici assez clair. On considère pour commencer le cas de l'orbifold T^4/\mathbb{Z}_2 , sous l'action duquel les 4 bosons $X^{7,8,9,10}$, les 4 fermions gauches $\psi^{7,8,9,10}$ et les 4 fermions droits $\bar{\psi}^{7,8,9,10}$ (dans le cas des théories de Type II) ou $\bar{\lambda}^{1,2,3,4}$ (dans le cas des théories hétérotiques) sont envoyés sur leurs opposés. Dans le cas des théories de Type II, l'action de l'orbifold sur les fermions gauches et droits est dictée par la supersymétrie sur la feuille d'univers ; dans le cas des théories hétérotiques, l'action sur les fermions droits est dictée par l'invariance modulaire¹⁰. La brisure de supersymétrie est alors induite par le fait que la transformation d'orbifold agit aussi sur la chiralité des vides de Ramond de la théorie ; ainsi, parmi les états $\psi^\mu |s_R, p\rangle$, $\bar{\psi}^\mu |s_L, p\rangle$ de la théorie de Type II donnant naissance aux gravitini et goldstinos, la projection orbifold élimine la moitié des polarisations, de sorte que la supersymétrie est réduite de moitié. Si l'on considère un \mathbb{Z}_2 supplémentaire agissant sur les coordonnées $X^{5,6,9,10}$ et les fermions correspondants, on obtient un orbifold $T^6/\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, dans lequel il ne reste plus qu'un quart de la supersymétrie initiale, soit $\mathcal{N} = 2$ en Type II et $\mathcal{N} = 2$ en hétérotique. Dans le cas de la théorie hétérotique, l'orbifold agit sur les bosons de jauge. On montre qu'un orbifold T^4/\mathbb{Z}_2 réduit le groupe de jauge $E_8 \times E_8$ en $E_7 \times SU(2) \times E_8$, tandis qu'un orbifold $T^6/\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ donne une jauge $E_6 \times SU(3) \times E_8$. Ces résultats sont identiques à ceux donnés par la compactification de la théorie hétérotique sur, respectivement, $K3 \times T^2$ et sur un Calabi-Yau d'holonomie $SU(3)$.

Nous nous intéressons maintenant au cas des brisures spontanées de symétrie, dans lesquelles la masse de certains états devient non nulle. Notre point de départ est la version cordiste du

10. Cette action est en fait une traduction du plongement de la connection de spin dans la connection de jauge ; nous détaillerons ce point dans la section 5.2.

mécanisme de Scherk-Schwarz, dont on a vu qu'il se caractérisait par l'introduction d'un cocycle de la forme $(-)^{a\tilde{m}+bn+\tilde{m}n}$. La valeur de a dépendant du caractère fermionique ou bosonique de l'état considéré, a est un exemple de R -charge. Nous allons maintenant étendre ce concept à des R -charges de la forme $a + Q$, où $e^{i\pi Q}$ est un opérateur de parité du système (c'est-à-dire, un opérateur ayant des valeurs propres ± 1). $a + Q$ est également une R -charge; il est donc possible de considérer le cocycle plus général suivant

$$(-)^{(a+Q)\tilde{m}+(b+\tilde{Q})n+\varepsilon\tilde{m}n} \quad (4.63)$$

où \tilde{Q} s'obtient à partir de Q par une transformation modulaire $\tau \rightarrow -1/\tau$. la valeur de $\varepsilon = 0, 1$ dépend des propriétés de transformation modulaire de Q : on doit avoir, sous $\tau \rightarrow \tau + 1$:

$$a + Q \rightarrow a + b + \tilde{Q} - \varepsilon. \quad (4.64)$$

La supersymétrie est bien brisée, un décalage de masse étant introduit entre partenaires supersymétriques. L'ajout de la charge Q introduit toutefois une différence dans le schéma de la brisure : une resommation de Poisson montre que les états devenant massifs après introduction de ce cocycle sont ceux pour lesquels $a + Q \equiv 1 \pmod{2}$. Ainsi, dans les paires supersymétriques vérifiant $Q = 0$, les fermions deviennent massifs, comme précédemment; par contre dans le cas $Q = 1$, ce sont les bosons qui acquièrent une masse. Les charges Q, \tilde{Q} peuvent être soit les paramètres de twist d'un orbifold (h, g) , soit encore une hélicité associée à des représentations d'un groupe de jauge, dans le cas d'une théorie comprenant des représentations spinorielles du groupe de jauge. Notons que ceci revient à considérer des lignes de Wilson discrètes. Le choix de la R -charge revient donc à choisir quels états on veut rendre massifs, et quels états on veut préserver dans le spectre sans masse. Nous rencontrerons ces brisures généralisées tout au long de notre travail. Dans le chapitre 5, les orbifolds à action libre ne brisent pas la supersymétrie, mais discriminent les différentes représentations du groupe de jauge $SO(10)$ par l'introduction de l'opérateur de parité $(-)^{\epsilon}$, où ϵ est l'hélicité $SO(10)$. Dans le chapitre 6, nous utilisons ce formalisme pour briser la supersymétrie; l'ajout d'une charge supplémentaire permet de pondérer par un signe \pm les contributions des différents états du spectre au potentiel effectif à une boucle.

Il est facile d'étendre ces considérations aux théories de Type II. Ces théories comportent deux hélicités d'espace-temps correspondant aux côtés gauche et droit. Nous avons vu dans la construction des théories à dix dimensions que les états bosoniques viennent des secteurs $a = \bar{a} = 0$ (secteur de Neveu-Schwarz–Neveu-Schwarz) et $a = \bar{a} = 1$ (secteur de Ramond–Ramond). L'implémentation d'une température dans les théories de Type II se fait donc par la compactification de Scherk-Schwarz du temps euclidien, à l'aide du cocycle

$$(-)^{(a+\bar{a})\tilde{m}+(b+\bar{b})n}. \quad (4.65)$$

Comme précédemment, la brisure de supersymétrie peut aussi s'effectuer en effectuant la compactification de Scherk-Schwarz d'une (ou plusieurs) dimensions internes. Il est dans un premier temps possible de généraliser la R -charge de la température en lui ajoutant une charge de parité interne Q , ce qui conduit à l'introduction du cocycle

$$(-)^{(a+\bar{a}+Q)\tilde{m}+(b+\bar{b}+\tilde{Q})n+\varepsilon\tilde{m}n}. \quad (4.66)$$

On a maintenant aussi accès à des compactifications de Scherk-Schwarz *asymétriques*. En effet, il est consistant de considérer l'introduction de cocycles

$$(-)^{(a+Q)\tilde{m}+(b+\tilde{Q})n+\varepsilon\tilde{m}n}, \quad (-)^{(\bar{a}+Q)\tilde{m}+(\bar{b}+\tilde{Q})n+\varepsilon\tilde{m}n}, \quad (4.67)$$

correspondant respectivement, dans les notations de la section précédente, aux orbifolds par $(-)^{F_L}\delta$ et $(-)^{F_R}\delta$, où F_L et F_R sont les nombres fermioniques gauche et droit.

Ces cocycles brisent bien la supersymétrie, en brisant spontanément une des deux algèbres superconformes (gauche ou droite) de la feuille d'univers : dans le premier cas, les états issus des secteurs $NS - NS$ et $NS - R$ restent sans masse, tandis que leurs partenaires supersymétriques provenant, respectivement, des secteurs $R - NS$ et $R - R$, deviennent massifs.

Remarquons pour finir qu'une compactification de Scherk-Schwarz peut aussi être effectuée sans brisure de supersymétrie, en introduisant un cocycle de la forme

$$(-)^{Q\tilde{m}+\tilde{Q}n+\varepsilon\tilde{m}n}. \quad (4.68)$$

Dans les deux cas typiques que nous rencontrerons, Q est soit un paramètre de twist d'un \mathbb{Z}_2 -orbifold, soit une charge sous un groupe de jauge de la théorie. Dans ce dernier cas, le mécanisme de Scherk-Schwarz s'identifie en fait à l'allumage de lignes de Wilson discrètes.

4.4 Supergravités effectives des réductions dimensionnelles de théories de supercordes, et schémas de brisure

Nous avons annoncé à la fin de la section 2.2.2 que les théories obtenues par réduction dimensionnelle de la théorie des cordes sont des supergravités sans échelle. Nous allons donner ici plus de précisions sur ce mécanisme, en développant les cas de compactification qui nous intéresseront en particulier. Beaucoup de références donnent des détails sur ces supergravités ; le lecteur pourra se rapporter, entre autres, à [Wit85, FKP86, CLO88, FP89, FKZ94, FKPZ89, FKPZ87].

Dans les réductions dimensionnelles des théories des supercordes, les degrés de liberté compactifiés s'identifient à des modules, dont le potentiel est plat. Ces modules s'arrangent génériquement en des *cosets* : la structure de la variété sur laquelle ils vivent obéit à certaines symétries, basées principalement sur la T-dualité. La forme de ces cosets est contrainte par la quantité de supersymétries présentes à quatre dimensions. Nous allons cataloguer les cosets accessibles par des compactifications toroïdales ou d'orbifolds ; beaucoup de ces cosets ont été explicitement réalisés dans [FK89], en utilisant le formalisme de construction fermionique que nous présenterons dans le paragraphe suivant. Nous mettrons principalement l'accent sur les possibilités d'obtention de modèles $\mathcal{N} = 1$, dont nous ferons un usage abondant.

- Supergravité $\mathcal{N} = 8$: cette théorie est unique ; les 70 scalaires proviennent du multiplet gravitationnel. Le coset obtenu est $E_{7(7)}/SU(8)$ [CJ79] ; $SU(8)$ est ici le groupe de R -symétrie.

- Supergravité $\mathcal{N} = 4$: les scalaires de cette théorie sont de deux types : on trouve deux scalaires dans le multiplet gravitationnel, et $6 N_V$ scalaires correspondant aux N_V multiplets vectoriels que comporte la théorie. Il se trouve en fait que l'espace des modules ne prend en compte que les scalaires commutant entre eux, donc associés à la sous-algèbre de Cartan de la jauge. On obtient donc $6(6 + r)$ scalaires, où r est le rang du groupe de jauge ; le coset obtenu est alors

$$\frac{SU(1,1)}{U(1)} \times \frac{SO(6,6+r)}{SO(6) \times SO(6+r)}. \quad (4.69)$$

Cette structure s'identifie bien entendu à celle rencontrée au cours de l'étude des réseaux de Narain, dans la section 4.1.1. $SO(6) \sim SU(4)$ est le groupe de R -symétrie $\mathcal{N} = 4$; $SU(1,1)/U(1)$ donne la contribution du doublet dilaton/axion. Selon les détails de la construction du modèle, ces scalaires peuvent provenir du multiplet gravitationnel ou de multiplets vectoriels. On note que le doublet dilaton/axion appartient au multiplet gravitationnel dans le cas des théories hétérotiques, alors qu'il appartient à un multiplet vectoriel dans le cas des théories de Type II. Les supergravités $\mathcal{N} = 2$ et $\mathcal{N} = 1$ qui nous intéresseront seront construites¹¹ à partir de troncations de ce coset ; ces troncations seront effectuées soit au moyen de projections orbifold, soit au moyen de compactification sur des variétés d'holonomie non-triviale (de type Calabi-Yau).

- Supergravité $\mathcal{N} = 2$: il existe trois types de multiplets : les multiplets vectoriels, les hyper-multiplets, et le multiplet gravitationnel. On montre que la variété des scalaires se factorise en trois parties, la première donnant la contribution du scalaire complexe dilaton/axion, et les deux autres donnant les contributions respectives des scalaires des multiplets vectoriels et de ceux des hyper-multiplets. Les résultats concernant ces géométries, dites spéciales, sont très nombreux. Nous ne rentrerons pas dans les détails, qui ne sont pas nécessaires dans le cadre de nos travaux.
- Supergravité $\mathcal{N} = 1$: cette fois, les trois types de multiplets à considérer sont le multiplet gravitationnel, les multiplets vectoriels qui définissent le groupe de jauge de la théorie, et les multiplets chiraux qui incluent les champs scalaires de la théorie.

Parmi les multiplets chiraux, on trouve le couple dilaton/axion S , ainsi que les modules de compactification, se répartissant en modules de Kähler T^i et en modules de structure complexe U^i . On montre qu'au voisinage du point où tous les champs chargés sous la jauge s'annulent, le potentiel de Kähler prend la forme

$$K = -\log(S + \bar{S}) - \sum_i k_i \log(T^i + \bar{T}^i) - \sum_i p_i \log(U^i + \bar{U}^i) \quad (4.70)$$

où $\sum_i k_i = 3$ (les modules T^i paramétrisant le volume de la variété).

La prise en compte des champs chargés sous le groupe de jauge sous la jauge modifie ce potentiel de Kähler. Ces scalaires ne sont en fait autres que les lignes de Wilson, qui font partie du réseau de Narain des modules dans le cas des théories hétérotiques. Nous allons donner quelques exemples de variétés sur lesquelles vivent les scalaires dans des constructions explicites en théorie des cordes hétérotiques.

11. Dans le cas de constructions d'orbifold, la troncation donnera la contribution du secteur non-twisté ; les secteurs twistés donneront des contributions additionnelles.

Dans le cadre d'orbifolds $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ de modèles $\mathcal{N} = 4$, on peut obtenir des potentiels de Kähler de la forme

$$K = -\log(S + \bar{S}) - \sum_{A=1}^3 \log((T^A + \bar{T}^A)(U^A + \bar{U}^A) - (y^{i_A} + \bar{y}^{i_A})^2) \quad (4.71)$$

avec $i_A = 1 \dots n_A$, $A = 1, 2, 3$, paramétrisant le coset

$$\frac{SU(1, 1)}{U(1)} \times \prod_{A=1}^3 \left[\frac{SO(2, 2 + n_A)}{SO(2) \times SO(2 + n_A)} \right], \quad (4.72)$$

dans lequel les parties $(2, 2)$ représentent les modules géométriques des trois 2-tores, et les n_A donnent des multiplets chiraux supplémentaires. Cet espace ne rend toutefois compte que du secteur non-twisté de l'orbifold (d'où la présence des modules géométriques); les secteurs twistés donnent génériquement des scalaires ayant pour potentiel

$$K_{tw.} = -2 \log(1 - CC^\dagger) \quad (4.73)$$

et vivant dans un coset de type $\frac{SU(1, n)}{U(1) \times SU(n)}$ [FGKP87a, FGKP87b].

Un autre exemple [FKP86] est donné par l'orbifold \mathbb{Z}_3 de la théorie $\mathcal{N} = 4$ hétérotique $E_8 \times E_8$, dont le coset est (4.69). Les scalaires du secteur non-twisté de la théorie s'organisent lors dans un coset

$$\frac{SU(1, 1)}{U(1)} \times \frac{SU(3, 3 + n)}{SU(3) \times SU(3 + n) \times U(1)}, \quad (4.74)$$

de potentiel de Kähler

$$K = -\log(S + \bar{S}) - \log \det(T_{i\bar{j}} + T_{i\bar{j}}^\dagger - 2C_i \bar{C}_{\bar{j}}). \quad (4.75)$$

Bien que les détails de la compactification conduisent à des formes différentes pour la théorie effective, il est possible de dériver des propriétés communes, dans le but de caractériser des mécanismes de brisure de supersymétrie.

Pour effectuer une brisure de supersymétrie en préservant la nullité de l'énergie du vide, en se plaçant dans le cadre de l'approximation (4.70), il faut introduire une dépendance en S, T^i, U^i dans le superpotentiel (dans le cas contraire, on aurait $G_I G^I = 4 + \sum_i p_i > 3$ (I sommé sur S, T^i, U^i), ce qui garantirait $V_{min.} > 0$ en vertu de la formule (2.20)). Cette modification témoigne du mécanisme de brisure, qui peut prendre la forme d'une compactification orbifold, ou d'une condensation de gauginos.

Dans une vaste catégorie de modèles orbifold, on montre que les termes cinétiques des modules sont préservés lors de la brisure de supersymétrie, modulo une redéfinition analytique des champs; ainsi la brisure est uniquement gouvernée par une modification du superpotentiel. On montre ensuite que, lorsque les modules C sont nuls, on peut factoriser l'espace des modules T^i, U^j en un produit d'espaces, dont le premier est donné par deux modules T^0, U^0 , de potentiel de Kähler

$$K_0 = -\log(T^0 + \bar{T}^0) - \log(U^0 + \bar{U}^0) \quad (4.76)$$

et un second espace regroupant les autres modules géométriques. La modification de superpotentiel ne dépend alors pas de S, T^0, U^0 , de sorte que $G^I G_I = 3$ lorsque I est sommé sur ces 3 modules. On a donc un module sans échelle, en la personne d'une combinaison linéaire de S, T^0, U^0 , qui définira la direction plate du potentiel et la masse indéterminée du gravitino. On montre pour finir que, pour les modules autres que S, T^0, U^0 , la condition $G^J G_J = 0$ est vérifiée aux minima du potentiel scalaire, ce qui garantit la nullité de la constante cosmologique. La masse du gravitino prend alors la forme

$$M_{3/2}^2 \propto \frac{k^2}{(S + \bar{S})(T^0 + \bar{T}^0)(U^0 + \bar{U}^0)} \quad (4.77)$$

Nous rencontrerons effectivement cette forme dans la section 6; $(T^0 + \bar{T}^0)^{1/2}(U^0 + \bar{U}^0)^{1/2}$ s'identifie naturellement à un rayon de compactification.

Nous allons également considérer la possibilité de brisure de supersymétrie par allumage de lignes de Wilson. On peut considérer au départ un modèle $\mathcal{N} = 4$. Intuitivement, la structure $\mathcal{N} = 4$ disparaît lorsque le coset correspondant est brisé. Ceci peut être réalisé lorsqu'on donne une valeur dans le vide non-nulle à certains des $6r$ scalaires du coset (4.69) correspondant à des lignes de Wilson. Ces scalaires se notent Y_k^I , où I représente la dimension interne et l'indice k prend ses valeurs dans la sous-algèbre de Cartan du groupe de jauge. Un choix arbitraire de lignes de Wilson brise la symétrie $SO(6) \simeq SU(4)$ présente dans la forme (4.69) au moins en $SU(4) \rightarrow SU(2) \times SU(2)' \times U(1)$. Or, ce $SU(4)$ n'est autre que la R -symétrie de $\mathcal{N} = 4$; on a donc partiellement brisé la supersymétrie à $\mathcal{N} = 2$.

La brisure par lignes de Wilson est aussi visible dans l'expression du superpotentiel. Rappelons que pour des cosets de la forme $SO(2, 2 + n)$, la fonction de Kähler prend la forme

$$G = -\log \left[(T + \bar{T})(U + \bar{U}) - (y^i + \bar{y}^i)^2 \right] \quad (4.78)$$

devient dans la limite de petites lignes de Wilson

$$\begin{aligned} G &= -\log \left[(T + \bar{T})(U + \bar{U}) \right] + \frac{(y^i + \bar{y}^i)^2}{(T + \bar{T})(U + \bar{U})} \\ &= -\log \left[(T + \bar{T})(U + \bar{U}) \right] + 2 \frac{(y^i \bar{y}^i)^2}{(T + \bar{T})(U + \bar{U})} + \frac{(y^i)^2 + (\bar{y}^i)^2}{(T + \bar{T})(U + \bar{U})} \end{aligned} \quad (4.79)$$

Les termes ainsi apparus sont proportionnels à la masse du gravitino, et font partie de la catégorie des *termes de brisure douce*. Le terme en $y\bar{y}$ fournit un terme cinétique minimal pour les lignes de Wilson y , tandis que les parties purement analytique et purement anti-analytique donnent des contributions au superpotentiel de l'ordre de la masse de brisure de supersymétrie.

4.5 Construction fermionique

4.5.1 Introduction

Dans cette section, on va présenter un mécanisme de construction de théories de supercordes dans un espace-temps à quatre dimensions, développé dans [ABK87, ABKW86], ainsi que dans

[KLT87]. Les modèles obtenus généralisent en quelque sorte les théories hétérotiques, en ce qu'ils utilisent comme degrés de liberté supplémentaires des fermions libres ; toutefois, cette construction donne accès à une bien plus grande variété de modèles, donnant entre autres accès à une grande variété de groupes de jauge. Ceci est particulièrement intéressant, par exemple en vue de la construction de théories grand-unifiées à partir de modèles de cordes ; en effet, les groupes habituellement considérés dans les modèles de grande unification, tels $SO(10)$ ou $SU(5)$, peuvent ici être réalisés par une construction naturelle.

On verra aussi que ces mécanismes reproduisent des compactifications usuelles pour des valeurs particulières des modules internes : on retrouve ainsi la compactification toroïdale au point fermionique, ainsi que les compactifications sur des orbifolds. Mais ce mécanisme permet de réaliser aussi des “compactifications non-géométriques”, tels les orbifolds asymétriques. Ces orbifolds asymétriques sont particulièrement utiles en vue de la construction de supergravités avec un nombre arbitraire de supersymétries : on peut ainsi explicitement réaliser des théories avec $N = 6, 5, 3$, qui sont difficiles à obtenir par les compactifications et orbifolds usuels.

On sait qu'un boson libre a une charge centrale 1, et un fermion libre une charge centrale $1/2$. Une théorie de cordes bosoniques en quatre dimensions a donc $c_b = 4$, ce qui nécessite, pour annuler la charge centrale due aux fantômes de Faddeev-Popov, l'ajout dans la théorie de degrés de liberté supplémentaires formant une théorie conforme de charge 22.

De même, pour une théorie supersymétrique, l'annulation de l'anomalie conforme des fantômes et superfantômes nécessite l'ajout de degrés de liberté internes vérifiant $c_{int} = 9$.

Dans les modèles usuels de Type II, où la supersymétrie est présente à gauche et à droite au niveau de la feuille d'univers, le système de charges

$$c = \tilde{c} = 9$$

est réalisé par 6 bosons et fermions correspondant aux dimensions qui seront compactifiées. Dans les modèles hétérotiques, où la supersymétrie n'a lieu que du côté gauche, on ajoute un système de charges

$$c = 9, \quad \tilde{c} = 22 = 6 + 16$$

sous la forme de 6 bosons (compacts) et 6 fermions côté gauche, et 6 bosons (compacts) et 32 fermions internes côté droit. Le choix des conditions au bord pour ces fermions détermine ensuite le groupe de jauge associé, $SO(32)$ ou $E_8 \times E_8$.

Dans les constructions de fermions libres, on comble le déficit de charge centrale *uniquement* par l'ajout de fermions libres. Ainsi, une théorie supersymétrique sera composée des bosons et fermions d'espace-temps auxquels on ajoute 18 fermions internes ; et une théorie bosonique comprendra les bosons d'espace-temps, auxquels s'ajouteront 44 fermions internes. Tout comme dans le cas de la théorie hétérotique, le contenu de la théorie ainsi construite va être donné par l'ensemble des conditions au bord considérées pour les fermions.

On expose le principe de la construction pour des théories hétérotiques ; il est immédiat de l'étendre aux théories de Type II.

La fonction de partition à une boucle et le spectre de la théorie vont résulter d'une description des différentes *structures de spin* admissibles pour tous les fermions introduits. En suivant les notations standard, l'ensemble de ces fermions, noté F , est égal à :

$$F = \{\psi^\mu, \chi^I, y^I, \omega^I \mid \bar{y}^I, \bar{\omega}^I, \bar{\phi}^a\}. \quad (4.80)$$

Ici, ψ^μ , $\mu = 2, 3$ représentent les deux fermions du cône de lumière dans l'espace-temps à quatre dimensions ; dans le cadre dans lequel nous nous plaçons, la contribution à la fonction de partition des deux autres fermions d'espace-temps est compensée par celle des super-fantômes (de même, la contribution de deux bosons d'espace-temps sera compensé par celle des fantômes). Les autres notations mettent en évidence le fait que la construction fermionique peut se voir comme une fermionisation des directions internes de la théorie à dix dimensions : les bosons internes ∂X^I , $\bar{\partial} X^I$ sont alors modélisés sous la forme de deux fermions gauches y^I, ω^I et deux fermions droits $\bar{y}^I, \bar{\omega}^I$. Il est important de noter que cette équivalence entre compactification de la théorie 10D et construction fermionique n'a lieu qu'au point fermionique. Par exemple, pour une dimension compactifiée sur un cercle, l'égalité entre les fonctions de partition à une boucle d'un boson compact

$$Z_b = \int_F \frac{d^2\tau}{\tau_2^2} \frac{R}{\sqrt{\alpha'\tau_2}} \sum_{\tilde{m}, n} \exp\left(-\frac{\pi R^2}{\alpha'\tau_2} |\tilde{m} + n\tau|^2\right) \quad (4.81)$$

et celle d'un fermion complexe gauche + 1 fermion complexe droit (ou, de manière équivalente, de deux fermions réels gauches + 2 droits)

$$Z_f = \int_F \frac{d^2\tau}{\tau_2^2} \frac{1}{2} \sum_{a,b} \left| \frac{\vartheta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}(\tau)}{\eta(\tau)} \right|^2 \quad (4.82)$$

est valable pour $R = \sqrt{\alpha'/2}$, qui est le point fermionique de S^1 . Toutefois il est important de noter le point suivant : dans des constructions d'orbifold à action non-libre, les secteurs twistés "vivent" au point fixes, et donc ne "voient" pas la géométrie de l'espace de compactification. Ainsi, quels que soient les modules de compactification orbifold d'une théorie, les secteurs twistés seront exactement décrits par le formalisme de construction fermionique.

La fonction de partition à une boucle de la théorie va s'écrire comme une combinaison linéaire (on omettra à partir de maintenant l'intégration sur le module du tore τ) :

$$Z = \frac{1}{\tau_2} \frac{1}{|\eta|^4} \sum_{(\alpha, \beta) \in \Xi} C_{(\alpha|\beta)} Z_{[\beta]}^{[\alpha]} \quad (4.83)$$

où Ξ , baptisé *groupe de parités* est un ensemble de conditions aux limites pour les fermions de F . Pour deux éléments α, β de Ξ , la fonction de partition $Z_{[\beta]}^{[\alpha]}$ correspondante est obtenue en rendant les fermions de α périodiques sur le cycle "1" du tore (ce qui détermine la structure Ramond ou Neveu-Schwarz) et les fermions de β périodiques sur le cycle " τ " du tore (voir la figure 3.5)

L'expression de $Z_{[\beta]}^{[\alpha]}$ est la suivante :

$$Z_{[\beta]}^{[\alpha]} = \prod_{\phi \in F_L} \left(\frac{\vartheta \begin{bmatrix} a(\phi) \\ b(\phi) \end{bmatrix}}{\eta} \right)^{1/2} \times \prod_{\phi \in F_R} \left(\frac{\bar{\vartheta} \begin{bmatrix} a(\phi) \\ b(\phi) \end{bmatrix}}{\bar{\eta}} \right)^{1/2}. \quad (4.84)$$

On a séparé les contributions des fermions gauches et droits ; comme on l'a remarqué précédemment $a(\phi)$ vaut 1 si $\phi \in \alpha$ et 0 sinon ; de même $b(\phi)$ vaut 1 si $\phi \in \beta$ et 0 sinon.

Il reste donc à fixer des conditions à la fois sur l'ensemble Ξ de toutes les conditions aux limites acceptables dans le cadre de notre modèle, et les coefficients $C_{(\alpha|\beta)}$. Pour cela, on demande premièrement la préservation des propriétés de factorisation de l'amplitude à plusieurs boucles lorsque l'on considère uniquement la propagation du vide dans la feuille d'univers (ce qui correspond à faire tendre la distance entre les différentes boucles vers l'infini). Il faut aussi imposer l'invariance modulaire des fonctions de partition à n'importe quel ordre en perturbation (en fait, les propriétés de factorisation d'amplitudes font que l'on n'a qu'à explorer le tore (genre 1) et le double tore (genre 2)).

Les contraintes résultant de ces exigences sont alors les suivantes :

- Les éléments de Ξ doivent respecter l'invariance de Lorentz : aucun ensemble ne peut contenir qu'un seul des deux ψ^μ .
De plus, les éléments de Ξ doivent être définis de manière à ce que les conditions au bord du courant de supersymétrie

$$T_F = \psi^\mu \partial X_\mu + \sum_I \chi^I y^I \omega^I \quad (4.85)$$

soient bien définies. Pour formaliser cette contrainte, on définit, pour un ensemble $\alpha \in \Xi$ le signe δ_α comme suit ¹² : si $\psi^\mu \in \alpha$, alors $\delta_\alpha = -1$; sinon $\delta_\alpha = 1$. Relativement aux fermions d'espace-temps, δ_α est donc le facteur spin-statistique associé à α (rappelons que si $\psi^\mu \in \alpha$, les états correspondants sont construits sur le vide de Ramond des fermions ψ^μ : on obtient donc des états se transformant dans les représentations spinorielles du groupe de Lorentz $SO(3, 1)$).

On vérifie alors que la condition évoquée se traduit en

$$\forall \alpha \in \Xi, (-)^\alpha T_F = \delta_\alpha T_F (-)^\alpha. \quad (4.86)$$

Dans l'expression précédente, on a noté $(-)^alpha$ l'opérateur de comptage des fermions de l'ensemble α (c'est-à-dire, l'opérateur anticommétant avec les fermions de α et commutant avec les autres).

Ainsi, par exemple, si un ensemble α contient les ψ^μ , $\delta_\alpha = -1$ et cet ensemble devra contenir, pour tout I , 1 ou 3 fermions parmi (χ^I, y^I, ω^I) .

- $\forall \alpha, \beta \in \Xi, (C_{(\alpha|\beta)})^2 = 1$.
- On munit $\mathcal{P}(\mathcal{F})$, l'ensemble des parties de F , d'une loi de groupe, notée additivement, correspondant à la différence symétrique ¹³ :

$$\alpha + \beta = \alpha \cup \beta - \alpha \cap \beta \quad (4.87)$$

On obtient une théorie consistante si et seulement si Ξ est un sous-groupe de $\mathcal{P}(\mathcal{F})$ pour cette loi, qui contient F . De plus, si on note des générateurs (F, b_1, \dots, b_n) les générateurs de Ξ , alors les conditions suivantes doivent être remplies :

12. Pour les théories de Type II, δ_α vaudra 1 si $(\psi^\mu \in \alpha \wedge \bar{\psi}^\mu \in \alpha)$ ou $(\psi^\mu \notin \alpha \wedge \bar{\psi}^\mu \notin \alpha)$, et -1 sinon.

13. On note qu'avec cette loi, l'ensemble vide est l'élément neutre, chaque élément b vérifie $b.b = \emptyset$, et que $F.b$ est le complémentaire de b .

$$n(b_i) = 0 \quad [8] \quad (4.88)$$

$$n(b_i \cap b_j) = 0 \quad [4] \quad (4.89)$$

$$n(b_i \cap b_j \cap b_k \cap b_l) = 0 \quad [2]. \quad (4.90)$$

où $n(b) = n_L(b) - n_R(b)$ est la différence entre le nombre de fermions gauches et le nombre de fermions droits de l'ensemble b .

- L'ensemble des coefficients $C_{(\alpha|\beta)}$ est entièrement déterminé par les coefficients $C_{(F|F)}$, $C_{(F|b_i)}$ et $C_{(b_i|b_j)}$ pour $i > j$. On a donc, pour Ξ engendré par (F, b_1, \dots, b_n) , $2^{\frac{N(N+1)}{2}+1}$ modèles de cordes consistants.

Les coefficients restants se déduisent par les règles suivantes :

$$C_{(\emptyset|\emptyset)} = 1 \quad (4.91)$$

$$\forall \alpha \in \Xi, \quad C_{(\alpha|\emptyset)} = \delta_\alpha. \quad (4.92)$$

$$\forall (\alpha, \beta, \gamma) \in \Xi^3, \quad C_{(\alpha|\beta+\gamma)} = \delta_\alpha C_{(\alpha|\beta)} C_{(\alpha|\gamma)} \quad (4.93)$$

$$\forall (\alpha, \beta) \in \Xi^2, \quad C_{(\alpha|\beta)} = e^{\frac{i\pi}{4}n(\alpha\cap\beta)} C_{(\beta|\alpha)} \quad (4.94)$$

La résolution de ces contraintes fournit le modèle le plus général de supercordes à quatre dimensions basées sur des fermions libres. Munis de ces coefficients, nous construisons maintenant la fonction de partition du modèle et le spectre associé.

4.5.2 Construction du spectre et projections GGSO

Étant donné un groupe de parités Ξ , on montre que la fonction de partition s'écrit

$$Z = \sum_{\alpha \in \Xi} \delta_\alpha \prod_{i=0}^n \frac{1}{2} \left(1 + \delta_\alpha C_{(\alpha|b_i)} (-)^{b_i} \right) R^\alpha NS^{F\alpha}. \quad (4.95)$$

Cette expression se comprend comme suit : pour chaque α , on calcule le bloc de la fonction de partition en effectuant la trace habituelle, sur les états où les fermions de α sont en conditions de Ramond et les autres en conditions de Neveu-Schwarz ; on insère ensuite dans la trace les facteurs $\frac{1}{2} \left(1 + \delta_\alpha C_{(\alpha|b_i)} (-)^{b_i} \right)$.

Dans la plupart des cas, on s'intéresse aux états sans masse de la théorie. On va donc s'intéresser aux secteurs $R^\alpha NS^{F\alpha}$ pouvant donner des états sans masse ; ces secteurs peuvent avoir une énergie de vide nulle, ou bien contenir des états excités de masse nulle. Dans le cadre d'une théorie hétérotique, les énergies du vide du secteur $R^\alpha NS^{F\alpha}$ s'écrivent

$$M_L^2 = -\frac{1}{2} + \frac{n_L(\alpha)}{16}; \quad M_R^2 = -1 + \frac{n_R(\alpha)}{16}. \quad (4.96)$$

On va voir que l'expression des coefficients $C_{(\alpha|\beta)}$ conduit à une généralisation naturelle de la projection GSO. On parle de projection GSO généralisée (GGSO).

On voit donc que chaque générateur b_i de Ξ génère une projection de type GSO : dans le secteur $R^\alpha NS^{F\alpha}$, seuls subsisteront les états pour lesquels

$$\forall b_i, \quad (-)^{b_i} = \delta_\alpha C_{(\alpha|b_i)}. \quad (4.97)$$

La projection relative à S (resp., en type II, les deux projections relatives à S et \bar{S}) n'est autre que la projection GSO habituelle $(-)^F$ (resp. $(-)^{F_L}$ et $(-)^{F_R}$). On peut par exemple vérifier son effet sur le secteur purement Neveu-Schwarz : dans ce cas $\alpha = \emptyset$ (qui appartient toujours à Ξ car $F \in \Xi$), et on a alors $C_{(\emptyset|S)} = \delta_S = -1$. Notre projection s'écrit alors

$$(-)^S = -1. \quad (4.98)$$

On note de plus que les états fondamentaux graviton/tenseur antisymétrique/dilaton survivent toujours aux projections : dans le cas hétérotique, ces états sont issus du secteur $R^\emptyset NS^F$, que l'on note $|\emptyset\rangle$:

$$G, B, \Phi : \psi^\mu \bar{\partial} X^\nu |\emptyset\rangle. \quad (4.99)$$

En utilisant (4.92), on voit qu'avec $\alpha = \emptyset$, la condition de survie (4.97) est remplie par les états ci-dessus quelque soit b_i .

4.5.3 Reproduction de constructions précédentes

Nous allons développer un premier exemple pour illustrer de manière simple comment se reproduit la compactification de la théorie hétérotique $E_8 \times E_8$ de manière intuitive. Notamment, la séparation des 32 fermions internes en deux blocs de 16, et la séparation des contraintes GSO associées se fait naturellement. Dans la section suivante, en lieu et place de la compactification sur T^6 , nous envisagerons une compactification sur $T^4/\mathbb{Z}_2 \times T^2$. Enfin, nous examinerons la construction d'un orbifold à action non-libre, et nous verrons comment les propriétés intéressantes (notamment celle de brisure spontanée de supersymétrie) apparaissent dans ce modèle.

Théorie hétérotique $E_8 \times E_8$ compactifiée sur T^6 au point fermionique

La construction se fait en deux étapes. Il faut d'abord choisir une base du groupe de parités Ξ qui va définir les différents secteurs α de la théorie ; ensuite il nous faudra spécifier les règles de projection GGSO en donnant les coefficients $C_{(\alpha|\beta)}$.

Dans une théorie supersymétrique, le groupe de parité, doit contenir \emptyset et S , où S est un ensemble de 8 fermions gauches contenant les deux fermions du cône de lumière ψ^μ . En effet, la théorie doit comporter un secteur de pur Neveu-Schwarz, qui sera, dans les notations de la section précédente, donné par $R^\emptyset NS^F$; on a également besoin de l'état donnant le gravitino, dont on a vu dans la section 3.4 qu'il se construisait à partir d'un vide où les 8 fermions du cône de lumière à dix dimensions sont en conditions de Ramond. En toute généralité, on peut choisir

$$S = \{\psi^\mu, \chi^{1\dots 6}\} \quad (4.100)$$

Le tore T^6 pris au point fermionique correspond, par fermionisation, à 12 fermions gauches et 12 fermions droits. L'ensemble décrivant ce tore est donc

$$t = \{y^{1\dots 6}, \omega^{1\dots 6} | \bar{y}^{1\dots 6}, \bar{\omega}^{1\dots 6}\} \quad (4.101)$$

Il nous faut enfin décrire les 32 fermions λ de la théorie hétérotique. On a vu que la construction de la théorie $E_8 \times E_8$ sépare ces 32 fermions en deux groupes de 16 qui doivent avoir les mêmes conditions aux limites, et demande deux projections ‘‘GSO’’. Il est donc naturel d’ajouter à Ξ les ensembles

$$e_1 = \{\bar{\lambda}^{1\dots 16}\}, \quad e_2 = \{\bar{\lambda}^{17\dots 32}\}. \quad (4.102)$$

On vérifie alors que la base obtenue $\{F, S, t, e_1, e_2\}$ vérifie les conditions de consistance (4.86), (4.88), (4.89) et (4.90).

On construit maintenant le spectre sans masse de la théorie. Il faut pour cela décrire tous les ensembles $\alpha \in \Xi$ dont le secteur correspondant $R^\alpha NS^{F\alpha}$ peut contenir des états sans masse. En examinant la formule (4.96), on voit que les ensembles en question doivent contenir 0 ou 8 fermions gauches et/ou 0,8 ou 16 fermions droits.

On trouve les secteurs définis par les ensembles suivants :

$$\emptyset; S; e_1; S + e_1; e_2; Se_2. \quad (4.103)$$

Comme on l’a vu, les degrés de liberté bosoniques sont construits sur les secteurs $\{R^\alpha NS^{F\alpha} | \psi^\mu \notin \alpha\}$, et les fermions sur les secteurs $\{R^\alpha NS^{F\alpha} | \psi^\mu \in \alpha\}$. Il est en fait aisé de voir que le partenaire supersymétriques d’un état du secteur α est à chercher dans le secteur $S\alpha$. Pour cette raison, nous ne décrivons que le spectre bosonique de la théorie, donné par les ensembles \emptyset, e_1, e_2 .

Le secteur $R^\alpha NS^{F\alpha}$ est composé d’états représentés par des opérateurs de vertex agissant sur un état de vide où les fermions de α sont en conditions de Ramond et les autres en conditions de Neveu-Schwarz. On notera un tel vide $|\alpha\rangle$; l’état $|\emptyset\rangle$ est donc le vide de pur Neveu-Schwarz. En imposant les projections GGSO suivantes¹⁴

$$(-)^F = (-)^S = -1; \quad (-)^t = (-)^{e_1} = (-)^{e_2} = 1, \quad (4.104)$$

le spectre de la théorie est le suivant : en partant du vide de pur Neveu-Schwarz $|\emptyset\rangle$, on trouve le multiplet graviton/2-forme/dilaton commun à toutes les théories, ainsi que les bosons de jauge de $SO(16)_1 \subset (E_8)_1$ et $SO(16)_2 \subset (E_8)_2$. À partir des vides $|e_1\rangle$ et $|e_2\rangle$, on génère les bosons de jauge de $\text{Spin}(SO(16)_1)$ et $\text{Spin}(SO(16)_2)$, qui complètent le groupe de jauge en $(E_8)_1 \times (E_8)_2$. Les secteurs supersymétriques $|S\rangle, |Se_1\rangle$ et $|Se_2\rangle$ donnent quant à eux les gauginos associés, ainsi que les états fermioniques du multiplet gravitationnel. Enfin, un groupe de jauge additionnel $SO(12)$ apparaît, construit à partir des vertex des six dimensions internes fermionisées en y^I, ω^I ; ceci réalise l’extension non-abélienne de la jauge $U(1)^6$ qui existe au point fermionique.

14. Ces projections ont une forme simplifiée : en toute généralité, la condition de survie d’un état (4.97) dépend de l’ensemble créant la projection (b_i dans (4.97)) et du secteur dans lequel se trouve l’état (α dans (4.97)). Ici, on adopte des conditions indépendantes de α ; ce choix est toutefois consistant.

Orbifold à action non-libre T^4/\mathbb{Z}_2

Cet orbifold est le quotientage de la transformation \mathbb{Z}_2 agissant sur 4 coordonnées $X^{6,7,8,9}$ et leurs partenaires fermioniques $\psi^{6,7,8,9}$ par $X \mapsto -X, \psi \mapsto -\psi$. Traduits en termes de fermions libres, ces degrés de liberté correspondent aux fermions suivants

$$y^i, \omega^i, \bar{y}^i, \bar{\omega}^i, \quad i = 3, 4, 5, 6; \quad \chi^i, \quad i = 3, 4, 5, 6. \quad (4.105)$$

Nous introduisons alors l'ensemble suivant :

$$b = \{\chi^{3,4,5,6}, y^{3,4,5,6} \mid \bar{y}^{3,4,5,6}, \bar{\lambda}^{1,2,3,4}\} \quad (4.106)$$

Notons que seuls des fermions de type y, \bar{y} sont éléments de b : en effet, l'inclusion des deux fermions y, ω dans l'ensemble ferait que $y\omega \equiv i\partial X$ est invariant sous la transformation que l'on cherche à réaliser ; au contraire, en prenant uniquement les $y, \partial X \rightarrow -\partial X$ comme désiré.

On note également la présence de fermions $\bar{\lambda}$ réalisant le groupe de jauge $SO(32)$ ou $E_8 \times E_8$. Cette inclusion est nécessaire pour préserver l'invariance modulaire de la fonction de partition, exigence qui se traduit dans notre cadre par le respect des règles de la construction fermionique sur les cardinaux des ensembles considérés ; comme nous l'avons signalé, ce mécanisme est celui de l'inclusion de la connection de spin dans la connection de jauge. De manière générale, la compactification des théories hétérotiques sur des orbifolds brise le groupe de jauge.

Nous n'allons pas détailler tout le spectre sans masse du modèle issu du groupe des parités généré par F, S, b, e_1, e_2 . Nous retrouvons juste les caractéristiques usuelles de la compactification d'orbifold, reformulée dans le langage de la construction fermionique.

- La supersymétrie du modèle est explicitement brisée de $\mathcal{N} = 4$ vers $\mathcal{N} = 2$: en effet, la projection $(-)^b$ élimine la moitié des 8 hélicités du secteur $\partial X^\mu |S\rangle$ qui subsistaient après les projections $(-)^S$ et $(-)^F$;
- Le groupe de jauge $E_8 \times E_8$ est brisé en $E_7 \times SU(2) \times E_8$. En effet, parmi les 248 bosons de jauge du groupe E_8 généré par les fermions $\bar{\lambda}^{1\dots 16} \equiv e_1$, qui s'écrivent soit comme éléments de $\text{Adj}(SO(16))$, soit comme éléments de $\text{Spin}(SO(16))$, certains sont éliminés par $(-)^b$. On montre que les bosons de jauge restants forment effectivement $E_7 \times SU(2)$. Le second facteur E_8 est quant à lui intact.
- Les états twistés apparaissent comme des champs de spin. L'adjonction de b dans la base de l'ensemble des parités introduit le nouveau secteur $|b\rangle$, qui donne lieu à des états sans masse. b induit aussi une nouvelle projection GSO généralisée. Parmi les 2^8 hélicités du secteur $|b\rangle$, seules 2^5 survivent aux projections $(-)^S, (-)^b, (-)^{e_1}$. En particulier, les états du secteur $|b\rangle$ s'organisent en 16 secteurs, donnés par les 16 hélicités possibles du champ de spin $|\chi^{3,4,5,6}, y^{3,4,5,6}\rangle \otimes |\bar{y}^{3,4,5,6}\rangle$. On a donc réécrit les vides twistés de T^4/\mathbb{Z}_2 comme des vides de Ramond.

Orbifold à action libre S^1/\mathbb{Z}_2

Si l'on fermionise un boson X en deux fermions réels y, ω , la transformation à action libre $X \rightarrow X + \pi$ se traduit par $y \rightarrow -y, \omega \rightarrow -\omega$. L'ensemble à introduire dans une base de parités

pour modéliser l'orbifold $X^i \rightarrow X^i + \pi$ est donc

$$e_i = \{y^i, \omega^i | \bar{y}^i, \bar{\omega}^i\}. \quad (4.107)$$

Le secteur twisté de cet orbifold est alors caractérisé par l'adoption de conditions de Ramond pour les fermions appartenant à e_i . Ceci rend génériquement le vide massif¹⁵. Là encore, le vide twisté est donné, au point fermionique, par un vide de Ramond.

15. La réalité est en fait plus complexe ; les détails de la construction exposée dans le chapitre 5 et dans [CJFKR08] apporteront beaucoup de précisions sur les différentes possibilités envisageables.

Chapitre 5

Dualité spineur–vecteur dans une classe de modèles réalistes hétérotiques $\mathcal{N} = 1$

Dans le chapitre précédent, nous avons donné plusieurs méthodes pour construire des théories des cordes à quatre dimensions. Nous avons entre autres développé le formalisme des fermions libres, qui permettent de reproduire de manière systématique des orbifolds de type \mathbb{Z}_2 ou $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Dans ce chapitre, qui présente les travaux effectués dans la publication [CJFKR08], nous allons nous intéresser aux propriétés d’une classe de modèles quadri-dimensionnels basés sur la théorie des cordes hétérotiques. Nous mettrons l’accent sur l’intérêt phénoménologique de telles constructions ; en effet, de nombreuses théories parmi les plus réalistes obtenues à l’heure actuelle ont été obtenues par cette construction (les exemples sont nombreux : voir par exemple [AEHN89, ALR90, FNY90, Far92, Far94, FMT07])

L’intérêt de ces modèles réside dans les propriétés suivantes :

- Premièrement, une compactification de type Calabi-Yau ou $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ fournit une supersymétrie $\mathcal{N} = 1$ à quatre dimensions, ce qui est l’hypothèse privilégiée pour la phénoménologie.
- Deuxièmement, au contraire des théories de Type II, les théories hétérotiques sont *naturellement* équipées d’un groupe de jauge non-abélien. Les contraintes très restrictives de consistance de la théorie des cordes n’autorisent que deux groupes de jauge à dix dimensions (comme nous l’avons signalé, ces deux groupes de jauge sont en fait reliés par déformation continue du réseau de Narain). Ceci donne un fort pouvoir prédictif à la théorie des cordes ; il est très agréable de constater la présence dans les candidats du groupe $E_8 \times E_8$, qui est particulièrement intéressant. La procédure “canonique” de compactification le brise en effet en E_6 , groupe qui a des bonnes propriétés en perspective de la construction d’une théorie de grande unification (entre autres, E_6 admet des représentations chirales). Il est en fait facile de construire des théories $SO(10)$ en partant de théories E_6 ; c’est la procédure que nous adapterons dans notre travail.
- Troisièmement, ces constructions fournissent une classe privilégiée de modèles réalistes. Notamment, il a été montré statistiquement dans [FKR07a] que parmi les $\simeq 10^{16}$ modèles que nous considérons, environ 15% ont la propriété d’avoir trois familles chirales. Il a par

contre été impossible jusqu'à présent de dériver des modèles à 3 familles par compactification sur des espaces de Calabi-Yau ou sur des orbifolds symétriques de type $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Les espaces de Calabi-Yau posent de plus d'autres problèmes phénoménologiques, comme le fait qu'il est impossible de générer un terme de brisure douce de supersymétrie donnant une masse au Higgs.

- Enfin, le schéma de compactification sur des orbifolds $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ donne naturellement naissance à de la matière chirale $\mathcal{N} = 1$, contenue dans les trois secteurs twistés de l'orbifold. Le fait que cette classe d'orbifolds admette trois "plans" de secteurs twistés permet de développer des modèles à 3 familles de manière extrêmement naturelle (notamment en conservant une famille par plan).

Malgré le cadre apparemment très restrictif des modèles de fermions libres, ces constructions ont en fait une grande portée : en effet, nous avons souligné dans le chapitre précédent que la forme et le contenu des secteurs twistés d'un orbifold ne dépend pas de la géométrie de l'espace de compactification. Les caractéristiques des secteurs twistés que nous décrirons au point fermionique seront donc valables en un point arbitraire de l'espace des modules de compactification. Il se trouve justement que ces secteurs twistés vont nous donner les représentations correspondant à la matière chirale indispensable à un modèle réaliste.

Nous réalisons en termes de fermions libres une classe générale d'orbifolds $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Ces orbifolds peuvent être vus comme des limites singulières d'espaces géométriques. Dans certains cas de figure, le groupe de jauge E_6 n'est pas brisé : les espaces correspondants seront des Calabi-Yau. Toutefois, dans la majorité des modèles que nous rencontrerons, E_6 se brise en $SO(10) \times U(1)$. La géométrie correspondante n'est alors plus de type Calabi-Yau ; une algèbre superconforme est brisée par la compactification.

Nos constructions font naturellement apparaître le groupe de grande unification $SO(10)$. Les secteurs twistés d'un modèle $SO(10)$ fournissent de la matière, sous la forme de représentations vectorielles de $SO(10)$, notées **10** ; et de représentations spinorielles (anti-spinorielles) de $SO(10)$, notées **16** (**$\overline{16}$**). Dans le cas d'une théorie E_6 , le fait que la matière s'arrange en représentations de E_6 implique que le modèle comporte autant que vecteurs que de spineurs (on sous-entend ici : spineurs + anti-spineurs). Quand la symétrie E_6 est brisée, cette propriété peut subsister, avec des conséquences intéressantes ; toutefois, elle est en général perdue.

On obtient donc un ensemble de modèles où, en général $N_{(S+\bar{S})} \neq N_V$. On a alors un résultat de dualité sur l'ensemble de ces modèles : s'il existe un modèle avec V vecteurs et S spineurs, alors il existe aussi un modèle avec S vecteurs et V spineurs. Le travail effectué dans [CJFKR08] consiste alors à prouver cette dualité, en utilisant le fait que les ensembles introduits dans la base des parités des constructions fermioniques permettent de générer des orbifolds à action libre donnant des compactifications à la Scherk-Schwarz. Les orbifolds à action libre agissent sur les différents secteurs twistés de la théorie, et leur action détermine quelle(s) représentations de $SO(10)$ vont subsister dans chaque secteur twisté. L'opération de dualité consistera alors à changer l'effet de ces projections, de manière à changer le spectre de la théorie en son dual. On notera que cette opération n'est pas unique : il existe plusieurs duaux à un modèle donné.

Le plan de ce chapitre sera le suivant. Dans un premier temps, nous donnerons quelques rappels sur les théories de grande unification ; nous nous pencherons particulièrement sur les théories

basées sur $SO(10)$, qui sont celles que nous manierons plus tard. Nous aborderons également le problème des anomalies, chirale et gravitationnelle. Dans un second temps, nous rappellerons le mécanisme d'apparition de la jauge E_6 , résultant de l'inclusion de la connection de spin dans la connection de jauge et des propriétés des espaces de Calabi-Yau. En particulier, nous insisterons sur la présence d'une algèbre superconforme $N = (2, 2)$ dans la théorie lorsque la jauge est E_6 . Nous détaillerons ensuite le processus de la construction fermionique, en donnant les expressions et le rôle des différents éléments de la base des parités. Un point central de notre raisonnement sera d'identifier la présence de l'algèbre superconforme à une correspondance entre secteurs de la théorie, dénommée " x -map". Cette x -map pourra être brisée par les projections orbifold contenues dans la théorie, ce qui conduira à la brisure de la jauge E_6 et à l'apparition de modèles ne comprenant pas le même nombre de spineurs et de vecteurs de $SO(10)$. L'identification des projections brisant la x -map nous amènera à formuler les règles de dualité.

Deux aspects intéressants de ce travail seront enfin mis en relief. On tissera premièrement un parallèle entre cette dualité et la dualité miroir que l'on a évoquée dans la section 4.1, et on discutera de l'intérêt d'une telle structure sur l'ensemble des vides de la théorie des cordes. Nous nous intéresserons enfin à l'existence de modèles auto-duaux, mais néanmoins dépourvus de symétrie E_6 ; parmi ces modèles, on notera l'existence de modèles dépourvus d'anomalie.

5.1 Grande unification et groupe $SO(10)$

La recherche de théories grand-unifiées est motivée par le fait que, sous l'effet de la procédure de renormalisation, les trajectoires des trois constantes de couplage du groupe de jauge du modèle standard non supersymétrique $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ sont presque concourantes à une échelle d'énergie élevée ($E \sim 10^{14}$ GeV). De plus, lorsqu'on ajoute l'hypothèse de supersymétrie pour considérer le *modèle standard supersymétrique minimal*, la coïncidence des trois constantes de couplage est bien plus précise que dans le cas non-supersymétrique, et a lieu cette fois à l'échelle de *grande unification* $M_{GUT} \sim 10^{16}$ GeV. Ceci suggère qu'à cette échelle, le groupe de jauge est unifié, et que le groupe de jauge observé à basse énergie est le résultat de brisures spontanées de la jauge. La propriété de concourance des trajectoires de couplage est d'ailleurs une autre motivation forte pour l'introduction de la supersymétrie.

Si le groupe de jauge visible est un sous-groupe du groupe de jauge unifié G_{GUT} , les différentes particules observées doivent s'arranger en des représentations de G_{GUT} . Il existe effectivement des groupes tels que cet arrangement existe. Nous présentons (très !) rapidement ci-dessous le modèle standard et son contenu de matière, que nous réarrangerons par la suite en représentations du groupe $SO(10)$.

Le modèle standard de la physique des particules modélisant les interactions faible, forte, et électro-magnétique est une théorie de jauge basée sur le groupe

$$G_{SM} = SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y \quad (5.1)$$

La symétrie de jauge électro-faible $SU(2)_L \times U(1)_Y$ est spontanément brisée à basse énergie par le mécanisme de Higgs, dans lequel un champ scalaire, dit boson de Higgs, vivant dans une certaine représentation du groupe de jauge, acquiert une valeur dans le vide non-nulle, et génère

de ce fait des termes de masse pour les générateurs du groupe de jauge qui ne laissent pas ce vide invariant. Ainsi, sur les 4 bosons de jauge $W_\mu^{1,2,3}$, B_μ du groupe $SU(2)_L \times U(1)_Y$, trois deviennent massifs, et la seule partie visible à basse énergie est l'électromagnétisme $U(1)_{em}$, dont le boson de jauge sans masse est le photon A_μ , obtenu comme combinaison linéaire de W_μ^3 et B_μ . Le mécanisme de Higgs donne également une masse aux quarks et aux leptons de la théorie.

Le spectre de matière du modèle standard se sépare en trois générations, notées e , μ , τ . Le contenu d'une génération est le suivant (on note entre parenthèses les représentations de $SU(3)$ et $SU(2)_L$ correspondantes, et en indice l'hypercharge¹ sous $U(1)_Y$) :

- quarks gauches $(u_L, d_L) \equiv (\mathbf{3}, \mathbf{2})_{1/6}$;
- quarks droits $u_R \equiv (\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1})_{-2/3}$ et $d_R \equiv (\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1})_{1/3}$;
- électron/neutrino gauche $(e_L, \nu_e) \equiv (\mathbf{1}, \mathbf{2})_{-1/2}$;
- électron droit $e_R \equiv (\mathbf{1}, \mathbf{1})_1$.

À cela, il faut ajouter le doublet de Higgs et son conjugué, qui fournissent les représentations $(\mathbf{1}, \mathbf{2})_{\pm 1/2}$.

Les dernières observations indiquant la non-nullité de la masse du neutrino, il convient d'en rendre compte dans le modèle standard en introduisant un neutrino droit² sous la forme d'un singlet $(\mathbf{1}, \mathbf{1})_0$.

Les deux candidats principaux de groupe de grande unification sont $SU(5)$ et $SO(10)$. En effet, il est possible de regrouper les représentations du modèle standard contenues dans une génération en deux représentations de $SU(5)$ décomposées sous $SU(5) \rightarrow G_{SM}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{10} &= (\mathbf{3}, \mathbf{2})_{1/6} \oplus (\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1})_{-2/3} \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{1})_1, \\ \bar{\mathbf{5}} &= (\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1})_{1/3} \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{2})_{-1/2}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

De plus, après introduction dans la théorie du neutrino droit, on peut en fait arranger toute une génération dans une représentation spinorielle de $SO(10)$. En effet, sous $SO(10) \rightarrow SU(5)$, on a $\mathbf{16} = \mathbf{10} \oplus \bar{\mathbf{5}} \oplus \mathbf{1}$, ce qui donne finalement sous $SO(10) \rightarrow G_{SM}$

$$\mathbf{16} = (\mathbf{3}, \mathbf{2})_{1/6} \oplus (\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1})_{-2/3} \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{1})_1 \oplus (\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1})_{1/3} \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{2})_{-1/2} \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{1})_0. \quad (5.3)$$

Ce réarrangement est un signe supplémentaire très fort de la pertinence d'une telle unification de la jauge. Le doublet de Higgs trouve aussi sa place dans le cadre de l'unification $SO(10)$, de par la décomposition du multiplet vectoriel $\mathbf{10}$ sous $SO(10) \rightarrow G_{SM}$:

$$\mathbf{10} = (\mathbf{1}, \mathbf{2})_{1/2} \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{2})_{-1/2} \oplus (\mathbf{3}, \mathbf{1})_{-1/3} \oplus (\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1})_{1/3}. \quad (5.4)$$

On remarque toutefois que l'apparition de bosons de Higgs dans le cadre d'une théorie unifiée $SO(10)$ fait apparaître des triplets de couleur. Ceci pose un problème : si le doublet de Higgs se manifeste à basse énergie par la brisure de jauge électro-faible, il n'existe pas de triplets de couleur ayant la même échelle de masse (ceci impliquerait une amplitude de désintégration du

1. définie de sorte que $Q_{em} = T_z + Y$

2. Un fermion chirale ne peut pas être massif : il n'est en effet pas possible de générer un terme de masse invariant de jauge. Le mécanisme de Higgs permet toutefois de remédier à ce problème.

proton incompatible avec les observations). Il faut donc introduire un décalage de masse entre le doublet de Higgs et le triplet de Higgs. Ceci peut être réalisé par l'inclusion dans la théorie de lignes de Wilson discrètes.

Une théorie de grande unification basée sur le groupe $SO(10)$ devra donc, pour être réaliste, être chirale³. Chaque représentation spinorielle fournira une génération, et les bosons de Higgs proviendront de multiplets vectoriels.

Nous allons obtenir des théories ayant pour groupe de jauge $SO(10)$ en passant par des théories E_6 . Nous détaillerons dans le paragraphe suivant l'apparition naturelle de E_6 dans la compactification des cordes hétérotiques. Certaines propriétés de E_6 font en fait de lui un groupe de grande unification viable : il possède en effet des représentations spinorielles complexes qui rendent possible l'écriture d'une théorie chirale. De plus, E_6 se brise naturellement en les autres candidats à la grande unification comme

$$E_6 \rightarrow SO(10) \times U(1) \rightarrow SU(5) \times U(1)^2 \quad (5.5)$$

Enfin, les théories de grande unification basées sur E_6 sont exemptes d'anomalies, gravitationnelle ou chirale.

Anomalies de jauge, et conditions de leur absence

Les anomalies de jauge sont une brisure quantique de l'invariance de jauge classique ; elles résultent de la non-invariance de la mesure d'intégration dans l'intégrale de chemin. Ce phénomène signe l'arrêt de mort d'une théorie quantique : en effet, en présence d'anomalies, des conditions de consistance fortes comme l'unitarité ou l'élimination des états de norme négative peuvent être perdues. Il convient donc d'annuler ces anomalies.

Les anomalies qui nous intéresseront se classent en deux espèces, l'anomalie chirale et l'anomalie gravitationnelle (nous renvoyons par exemple au chapitre 19 de [PS95] pour une dérivation complète de ces anomalies). Nous détaillons premièrement les conditions d'apparition de l'anomalie chirale.

L'apparition de l'anomalie chirale dans les théories de jauge résulte de la non-conservation du courant de jauge

$$j^{\mu,a} = \bar{\psi} \gamma^\nu \left(\frac{1 \pm \gamma^5}{2} \right) t^a \psi. \quad (5.6)$$

Ici, ψ est un fermion de Dirac, et le couplage est chirale en ce sens qu'il sélectionne une chiralité *via* l'insertion du projecteur. t^a parcourt les générateurs du groupe de jauge dans une représentation chirale. Des calculs assez fastidieux montrent que la valeur moyenne de la divergence de ce courant fait intervenir la trace suivante, prise sur la représentation chirale considérée, notée R :

$$A^{abc} = \text{tr}_R \left[t^a \{t^b, t^c\} \right] \quad (5.7)$$

3. Ceci est possible, car $SO(10)$ admet bien des représentations chirales.

La présence de l’anomalie chirale résulte de la non-nullité de cette dernière expression. En particulier, on montre que si le groupe de jauge n’admet que des représentations réelles (*ie* telles que les générateurs t_R^a de la représentation soient égaux à une transformation unitaire près aux représentations de la représentation conjuguée $t_R^a = -{}^t(t_R^a)$). Cette conclusion reste vraie dans le cas de représentations pseudo-réelles⁴. La présence d’anomalies a donc seulement lieu pour des groupes de jauge admettant des représentations complexes. On trouve les groupes de Lie suivants :

$$U(1); \quad SU(n); \quad SO(4n + 2); \quad E_6. \quad (5.8)$$

Il se trouve en fait que pour les groupes $SO(4n + 2)$ et E_6 , les anomalies chirales sont nulles. Nous nous intéresserons souvent aux conditions d’annulation de l’anomalie chirale $U(1)$: on voit que dans ce cas, celle-ci est nulle pour $\sum_R q_i^3 = 0$.

L’anomalie gravitationnelle [AGW84] intervient, quant à elle, lors du couplage d’une théorie de jauge à la gravitation et rend inconsistante ce couplage (l’une des deux hypothèses de conservation de l’invariance de jauge et de l’invariance sous les difféomorphismes est mise en défaut). Cette anomalie s’annule dès que les traces des générateurs $\text{tr}_R[t^a]$ sont nulles. Ceci est le cas dès que la jauge est non-abélienne ; l’anomalie gravitationnelle ne concerne donc que des facteurs $U(1)$ du groupe de jauge, et la condition d’annulation est donc $\sum_R q_i = 0$.

La brisure d’une symétrie de jauge non-porteuse d’anomalies vers des groupes contenant des facteurs potentiellement porteurs d’anomalie est intéressante car elle peut annuler automatiquement cette anomalie, si les représentations présentes après brisure peuvent s’arranger en représentations du groupe “parent”. Ce n’est toutefois pas une règle générale, et nous examinerons les occurrences et les conditions d’une telle annulation des anomalies $U(1)$ dans nos modèles.

Nous devons encore souligner un point important [DSW87] : en théorie des supercordes, il se trouve en fait qu’un groupe $U(1)$ porteur d’anomalie génère, à l’ordre d’une boucle, un terme de Fayet-Iliopoulos dans l’action effective à basse énergie. Le vide de la théorie peut alors être déstabilisé par la présence de tachyons ; de plus, le groupe porteur d’anomalie est spontanément brisé, car la correction de l’action effective, prenant la forme d’un terme $(\sum_i q_i)B \wedge F$, où B est le tenseur antisymétrique et F la courbure du champ de jauge $U(1)$, donne une masse au boson de jauge correspondant.

5.2 Méthode de construction et propriétés générales

L’apparition d’une jauge E_6 dans les compactifications de la théorie $E_8 \times E_8$ sur des espaces de Calabi-Yau est un processus bien connu. Nous en reproduisons toutefois ici les détails ; nous tisserons le parallèle entre cette construction et les compactifications sur des orbifolds $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Ceci nous permettra d’une part de comprendre l’apparition de l’algèbre superconforme $(2, 2)$ lors de la compactification, et son rôle dans la structure de la jauge. Nous en déduirons la marche à

4. La nuance entre représentations réelles et pseudo-réelles ne nous concernera pas dans le cadre de notre travail.

suivre pour briser E_6 en $SO(10)$; tout cela sera facilement traduit en termes de construction fermionique.

La compactification sur des espaces de Calabi-Yau des théories de Type II, comme on l'a vu, préserve une supersymétrie $\mathcal{N} = 2$ à quatre dimensions. Une de ces deux supersymétries vient du côté gauche de la théorie, et l'autre du côté droit. Cette propriété résulte du fait que l'holonomie $SU(3)$ permet l'existence d'un spineur covariant ; ces supersymétries impliquent [Gre96] la présence d'une structure d'algèbre superconforme $(2_L, 2_R)$ sur la feuille d'univers.

Dans le cas de la théorie hétérotique, la partie droite ne donne plus lieu à une supersymétrie d'espace-temps ; elle fournit par contre le groupe de jauge de la théorie. La brisure de la supersymétrie en Type II va alors se traduire comme une brisure du groupe de jauge en hétérotique. Ce mécanisme est connu sous le nom de plongement de la connection de spin dans la connection de jauge. Une des conséquences de cette similitude est que la structure d'algèbre superconforme sera, elle, toujours présente dans la cas hétérotique.

Connection de spin et connection de jauge, et correspondance de Gepner

La connection de spin est définie dans le but d'écrire une théorie de relativité générale incluant les spineurs. L'exigence d'invariance sous les difféomorphismes de la théorie est difficile à maîtriser en présence de degrés de liberté spinoriels, car il n'existe pas de représentations spinorielles de $GL(n, \mathbb{R})$. La solution consiste à définir en chaque point de la variété une *tétrade* e_μ^m , vérifiant $g_{\mu\nu} = e_\mu^m \eta_{mn} e_\nu^n$, où $g_{\mu\nu}$ est la métrique sur la variété considérée. Cette tétrade permet d'introduire localement des coordonnées plates, pour lesquelles la métrique associée est la métrique de Minkowski η^{mn} . Les changements de coordonnées sont maintenant des transformations du groupe de Lorentz $SO(1, n-1)$, qui agissent sur les indices plats de la tétrade.

Le groupe de Lorentz, quant à lui, admet des représentations spinorielles construites à partir des matrices gamma de l'algèbre de Clifford : sous une transformation infinitésimale Θ^{mn} , ψ se transforme comme

$$\psi \rightarrow \psi - \frac{1}{4} \Theta^{mn} \Gamma_{mn} \psi, \quad (5.9)$$

où $\Gamma_{mn} = \frac{1}{2} [\Gamma_m, \Gamma_n]$.

Pour écrire une action rendant locale cette symétrie, il est alors nécessaire d'introduire un champ de jauge et une dérivée covariante associée

On introduit alors la connection de spin ω_μ^{mn} par la procédure habituelle de jaugeage. Elle se transforme comme

$$\omega_\mu^{mn} \rightarrow \omega_\mu^{mn} + \partial_\mu \Theta^{mn} + [\omega_\mu, \Theta]^{mn} \quad (5.10)$$

et la dérivée covariante à considérer est

$$D_\mu \psi = \partial_\mu \psi + \frac{1}{4} \omega_\mu^{mn} \Gamma_{mn} \psi. \quad (5.11)$$

Cette formulation fait apparaître ω_μ^{mn} comme un boson de jauge dans la représentation adjointe du groupe de Lorentz. Il est à noter que, dans le cas de la relativité générale⁵ cette procédure n'introduit pas de nouveau degré de liberté dans la théorie ; la connection est déterminée de manière unique si l'on demande que la tétrade soit covariamment constante. En particulier, le tenseur de Riemann $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ s'exprime uniquement en fonction de la connection de spin.

Nous voyons donc que l'introduction de la connection de spin n'est rien d'autre qu'un jaugeage du groupe de Lorentz, tel qu'agissant sur les spineurs de la théorie. En particulier, si on considère une théorie des cordes compactifiée sur une variété à six dimensions, d'un point de vue quadri-dimensionnel, la composante interne de la connection de spin correspond à une symétrie interne du système. Le groupe de Lorentz $SO(9, 1)$ est brisé lors de la compactification en $SO(3, 1) \times SO(6)$, et les bosons de jauge du $SO(6)$ interne sont les ω_μ^{mn} .

La contrainte de préservation d'une supersymétrie lors d'une compactification sur un Calabi-Yau sans torsion impose une relation non-triviale entre la connection de spin et la connection de jauge. Plus précisément, il s'agit d'isoler un certain sous-groupe du groupe de jauge de la théorie $E_8 \times E_8$, et de l'identifier à la connection de spin. Les transformations associées à la connection de spin ne sont autres que les transformations que peut subir un spineur lors de son transport le long de la variété, c'est-à-dire l'holonomie de la variété. Sans aucune hypothèse, cette holonomie est $SO(6)$ et l'identification des connections brise E_8 en $SO(10) \times SO(6)$; dans le cas d'un Calabi-Yau, sur lequel il existe un spineur partout non nul, ce groupe d'holonomie est réduit à $SU(3)$, et on montre alors que le groupe de jauge résultant est $E_6 \times SU(3)$. On voit donc que l'holonomie a brisé le groupe de jauge du côté bosonique de la théorie hétérotique, alors qu'elle brisait la R-symétrie en Type II.

Ce plongement de la connection de spin dans la connection de jauge est reproduit dans la correspondance de Gepner, introduite par D. Gepner dans [Gep88]. Cette correspondance, aussi développée dans [LLS87], permet un passage d'une théorie de Type II compactifiée à 4 dimensions à une théorie hétérotique, en remplaçant, au niveau de la fonction de partition, les caractères issus des 8 fermions droits d'espace-temps présents du côté de la théorie de Type II par des caractères qui vont rendre compte des 16 bosons droits que l'on doit introduire dans le secteur bosonique de la théorie hétérotique pour annuler la charge centrale. Ce remplacement se fait au niveau des théories conformes associées aux divers facteurs de la fonction de partition et est dicté par des propriétés de conservation de l'invariance modulaire. Dans le cas que nous utiliserons, les caractères de $SO(8)$ seront remplacés par des caractères de $E_8 \times E_8$ ou de $SO(32)$. On note immédiatement que cette correspondance reproduit naturellement les deux théories hétérotiques consistantes à dix dimensions. La contrainte d'invariance modulaire demande aussi que l'on change les signes devant ces caractères : l'effet est d'ôter les signes rendant compte de la spin-statistique dans la fonction de Type II, ce qui est cohérent avec le fait que le côté droit de sa partenaire hétérotique est purement bosonique du point de vue de l'espace-temps quadri-dimensionnel.

Si l'on prend par exemple une théorie de Type IIB que l'on veut mapper sur une théorie $E_8 \times E_8$, le changement à opérer est

5. En l'absence d'exigences de réalisme de la théorie, on peut tout à fait considérer la connection de spin comme un nouveau champ de la théorie écrite.

$$\frac{1}{2} \sum_{\bar{a}, \bar{b}=0}^1 (-)^{\bar{a}+\bar{b}+\bar{a}\bar{b}} \bar{\vartheta} \left[\frac{\bar{a}}{\bar{b}} \right]^4 \longrightarrow \left(\frac{1}{2} \sum_{\bar{\gamma}, \bar{\delta}=0}^1 \bar{\vartheta} \left[\frac{\bar{\gamma}}{\bar{\delta}} \right]^8 \right)^2 \quad (5.12)$$

La jauge $E_8 \times E_8$ de la théorie à 10 dimensions est conservée à quatre dimensions dans le cas d'une compactification sur T^6 . Du côté Type II, on a une supersymétrie $\mathcal{N} = 4$ pour le côté droit de la théorie. Si maintenant on compactifie sur une variété qui brise la supersymétrie, l'holonomie devient non-triviale, et le mécanisme de plongement de la connection de spin dans la connection de jauge va briser $E_8 \times E_8$. Le cas particulier de l'orbifold $T^6/\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, obtenu en une limite singulière de l'espace des modules d'une variété de Calabi-Yau brise $\mathcal{N} = 4 \rightarrow \mathcal{N} = 1$ sur le côté droit de la théorie de Type II. La correspondance de Gepner se fait maintenant par la substitution

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2^2} \sum_{h_1, g_1=0}^1 \sum_{h_2, g_2=0}^1 \frac{1}{2} \sum_{\bar{a}, \bar{b}=0}^1 (-)^{\bar{a}+\bar{b}+\bar{a}\bar{b}} \bar{\vartheta} \left[\frac{\bar{a}}{\bar{b}} \right] \bar{\vartheta} \left[\frac{\bar{a}+h_1}{\bar{b}+g_1} \right] \bar{\vartheta} \left[\frac{\bar{a}+h_2}{\bar{b}+g_2} \right] \bar{\vartheta} \left[\frac{\bar{a}-h_1-h_2}{\bar{b}-g_1-g_2} \right] \\ & \longrightarrow \left(\frac{1}{2^2} \sum_{h_1, g_1=0}^1 \sum_{h_2, g_2=0}^1 \frac{1}{2} \sum_{\bar{\gamma}, \bar{\delta}=0}^1 \bar{\vartheta} \left[\frac{\bar{\gamma}}{\bar{\delta}} \right]^5 \bar{\vartheta} \left[\frac{\bar{\gamma}+h_1}{\bar{\delta}+g_1} \right] \bar{\vartheta} \left[\frac{\bar{\gamma}+h_2}{\bar{\delta}+g_2} \right] \bar{\vartheta} \left[\frac{\bar{\gamma}-h_1-h_2}{\bar{\delta}-g_1-g_2} \right] \right) \times \left(\frac{1}{2} \sum_{\bar{\gamma}', \bar{\delta}'=0}^1 \bar{\vartheta} \left[\frac{\bar{\gamma}'}{\bar{\delta}'} \right]^8 \right) \end{aligned} \quad (5.13)$$

et on vérifiera explicitement, *via* la construction fermionique, que la fonction de partition obtenue à la fin donne bien un facteur E_6 dans le groupe de jauge.

Même si, au contraire de la théorie de Type II, le côté droit de la théorie hétérotique ne présente pas de supersymétrie d'espace-temps, (à cause des changements du signe des caractères fermioniques lors de la correspondance), la structure d'algèbre superconforme $N = 2$ est préservée par la transformation de Gepner. Cette algèbre superconforme va impliquer l'extension du groupe de jauge $SO(10) \times U(1)^3$ à $E_6 \times U(1)^2$, par inclusion du $U(1)$ diagonal à $SO(10)$. Cette extension est une conséquence de la structure d'anneau chiral des théories $(2, 2)$ superconformes, qui implique que même en l'absence de supersymétrie, il existe toujours des "spineurs" droits, qui, par bosonisation, vont s'exprimer comme des champs de spin ayant des hélicités demi-entières. Ces hélicités ne sont autres que les charges de ces états sous les générateurs du sous-groupe de Cartan de $SO(10) \times U(1)$. Ce sont précisément ces spineurs qui vont fournir les bosons de jauge supplémentaires nécessaires à l'extension $SO(10) \times U(1) \rightarrow E_6$. La traduction de ces constructions en termes de construction fermionique va éclairer ce phénomène : les bosons de jauge nécessaires à l'extension vont émerger d'un secteur spécifique de la théorie, ce qui va faire apparaître l'expression en termes de champs de spin.

Traduction en termes de fermions libres

Munis des exemples de construction fermionique que nous avons détaillés dans la section précédente, il est assez facile de se convaincre qu'un orbifold $T^6/\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, agissant sur les six coordonnées internes notées $X^{1\dots 6}$ et leurs partenaires fermioniques $\chi^{1\dots 6}$ comme

$$g_1 : \begin{cases} X^{3,4,5,6} \\ \chi^{3,4,5,6} \end{cases} \mapsto \begin{cases} -X^{3,4,5,6} \\ -\chi^{3,4,5,6} \end{cases} ; \quad g_2 : \begin{cases} X^{1,2,5,6} \\ \chi^{1,2,5,6} \end{cases} \mapsto \begin{cases} -X^{1,2,5,6} \\ -\chi^{1,2,5,6} \end{cases}, \quad (5.14)$$

va être implémenté en considérant un groupe de parités comprenant les deux vecteurs

$$b_1 = \{\chi^{3\dots 6}, y^{3\dots 6} \mid \bar{y}^{3\dots 6}, [\bar{\phi}]\}; \quad (5.15)$$

$$b_2 = \{\chi^{1,2,5,6}, y^{1,2,5,6} \mid \bar{y}^{1,2,5,6}, [\bar{\phi}']\}. \quad (5.16)$$

Les fermions supplémentaires $[\phi]$ et $[\phi]'$ sont à choisir dans les 32 fermions droits supplémentaires ; leur forme apparaîtra lors de l'explicitation de la classe de modèles que nous allons considérer.

Dans le cadre de l'élaboration de modèles réalistes de cordes hétérotiques, il est pratique de noter les 62 fermions libres réels sous la forme

$$F = \{\psi^\mu, \chi^{1\dots 6}, y^{1\dots 6}, \omega^{1\dots 6} \mid \bar{y}^{1\dots 6}, \bar{\omega}^{1\dots 6}, \bar{\psi}^{1\dots 5}, \bar{\eta}^{1\dots 3}, \bar{\phi}^{1\dots 8}\} \quad (5.17)$$

Les fermions $\bar{\psi}, \bar{\eta}, \bar{\phi}$ sont ici des fermions *complexes* (et comptent donc comme deux fermions réels).

La dénomination de ces fermions fait apparaître $SO(10)$ comme l'algèbre de Lie affine associée aux 5 fermions complexes droits $\bar{\psi}^{1\dots 5}$. Cette notation est motivée par la transformation de Gepner (5.13) : les fermions $\bar{\psi}$ correspondent au bloc $\bar{\vartheta} \left[\frac{\bar{\gamma}}{\bar{\delta}} \right]^5$, et les trois fermions $\bar{\eta}$ aux blocs $\bar{\vartheta} \left[\frac{\bar{\gamma}+h_i}{\bar{\delta}+g_i} \right]$. Les fermions complexes $\bar{\phi}$, quant à eux, donnent le bloc additionnel E_8 introduit dans (5.13). On voit donc que la forme des ensembles b_1 et b_2 doit en fait être

$$b_1 = \{\chi^{3\dots 6}, y^{3\dots 6} \mid \bar{y}^{3\dots 6}, \bar{\psi}^{1\dots 5}, \bar{\eta}^1\}; \quad (5.18)$$

$$b_2 = \{\chi^{1,2,5,6}, y^{1,2,5,6} \mid \bar{y}^{1,2,5,6}, \bar{\psi}^{1\dots 5}, \bar{\eta}^2\}. \quad (5.19)$$

et que nos modèles seront obtenus en considérant les ensembles additionnels

$$t = \{y^{1\dots 6}, \omega^{1\dots 6} \mid \bar{y}^{1\dots 6}, \bar{\omega}^{1\dots 6}\}; \quad z = \{\bar{\phi}^{1\dots 8}\} \quad (5.20)$$

représentant respectivement le tore T^6 des dimensions internes et le bloc E_8 additionnel.

On peut maintenant facilement voir le mécanisme d'extension de la jauge $SO(10)_{\bar{\psi}} \times U(1)_{\bar{\eta}^{1,2,3}}^3$ à $E_6 \times U(1)^2$ grâce à la construction fermionique. Les bosons de jauge de E_6 sont construits sur deux secteurs de la théorie : le secteur de pur Neveu-Schwarz $|\emptyset\rangle$ et le secteur $|\bar{\psi}^{1\dots 6}, \bar{\eta}^{1,2,3}\rangle$ (obtenu par $x = F + S + t + z$). On remarque qu'en fait, les bosons de jauge de E_6 ne seront rien d'autre qu'un sous-ensemble des bosons de jauge de E_8 , qui survivent aux projections induites par la présence de nouveaux éléments dans l'ensemble des parités. En particulier de la même manière que $SO(16)$ était étendu à E_8 par les états de $\text{Spin}(SO(16))$, $SO(10)$ va être étendu à E_6 par les états construits sur $|\bar{\psi}^{1\dots 6}, \bar{\eta}^{1,2,3}\rangle$. Si ce secteur est éliminé (notamment en acquérant une masse), l'extension à E_6 est perdue. La présence de l'algèbre superconforme est alors la manifestation de la présence au niveau sans masse d'états du secteur $|\bar{\psi}^{1\dots 6}, \bar{\eta}^{1,2,3}\rangle$. On peut explicitement écrire les vertex des états survivant aux projections.

Les bosons de jauge résultant de cette construction sont les suivants :

- à partir de $|\emptyset\rangle$, on construit les bosons de jauge de $SO(10)$, $\psi^\mu \bar{\psi}^{(\dagger) [i} \bar{\psi}^{(\dagger) j]} |\emptyset\rangle$ ainsi que les 3 bosons de jauge de $U(1)^3$ $\psi^\mu \bar{\eta}^i (\bar{\eta}^i)^\dagger |\emptyset\rangle$;

- à partir de $|\bar{\psi}^{1\dots 6}, \bar{\eta}^{1,2,3}\rangle$, on construit les fermions qui permettent l'extension. On bosonise les 16 fermions droits en 8 bosons $\bar{H}_{1\dots 8}$, de sorte que

$$|\bar{\psi}^{1\dots 6}, \bar{\eta}^{1,2,3}\rangle \equiv \exp\left(\frac{i}{2} \sum_{i=1}^8 \epsilon_i \bar{H}_i\right) \quad (5.21)$$

On vérifie alors que les restrictions sur les hélicités ϵ_i données par les projections $(-)^F$, $(-)^{b_1}$, $(-)^{b_2}$ reproduisent bien le second groupe de racines de E_6 (voir l'expression des racines dans [FSS00]).

L'algèbre superconforme se traduit de façon assez intuitive d'un point de vue de construction fermionique, en utilisant un parallèle avec l'algèbre superconforme donnant la supersymétrie d'espace-temps. Le point crucial est la présence d'un mapping des états fermioniques vers les états bosoniques. Du point de vue de la construction fermionique, dans le cas de la transformation de supersymétrie $\mathcal{N} = 1$ engendrée par le côté droit de la théorie sur la feuille d'univers, ce mapping agit sur les différents secteurs comme $|\alpha\rangle \rightarrow |\alpha + S\rangle$. On a vu que la correspondance de Gepner a échangé les fermions d'espace-temps droits $\{\bar{\psi}^\mu, \bar{\chi}^{1\dots 6}\}$ en $\{\bar{\psi}^{1\dots 5}, \bar{\eta}^{1,2,3}\}$. Cette fois, le mapping se fera donc entre les secteurs $|\alpha\rangle$ et $|\alpha + x\rangle$, où

$$x = \{\bar{\psi}^{1\dots 5}, \bar{\eta}^{1,2,3}\}. \quad (5.22)$$

Nous appellerons cette transformation “ x -map”. On conçoit déjà que, de la même façon qu'une brisure (spontanée ou explicite) de la supersymétrie revient à briser une “ S -map”, la brisure de l'algèbre superconforme $N = 2$ droite va revenir à briser la x -map. Les bosons de jauge permettant l'extension à E_6 sont dans l'image du secteur de pur Neveu-Schwarz par l'opération de x -map : la brisure de cette dernière va donc bien détruire la structure de jauge E_6 .

Terminons cette section par la définition la plus générale des modèles que nous allons considérer. On montre que le respect des règles de construction fermionique nous permet d'introduire deux nouveaux ensembles, qui vont briser le groupe de jauge caché E_8 , et qui s'écrivent

$$z_1 = \{\bar{\phi}^{1,2,3,4}\}, \quad z_2 = \{\bar{\phi}^{5,6,7,8}\}. \quad (5.23)$$

De plus il est aussi possible de factoriser le tore T^6 des dimensions internes, donné par les fermions $y^i, \omega^i, \bar{y}^i, \bar{\omega}^i$ en six cercles pris au rayon d'extension de symétrie de jauge. On introduit pour cela les ensembles

$$e_i = \{y^i, \omega^i \mid \bar{y}^i, \bar{\omega}^i\}, \quad i = 1 \dots 6. \quad (5.24)$$

Finalement, la base de l'ensemble des parités est donnée par

$$F, S, (e_i)_{i=1\dots 6}, b_1, b_2, z_1, z_2. \quad (5.25)$$

En suivant la procédure de construction de modèles de fermions libres, nous devons maintenant choisir les coefficients $C_{(\alpha|\beta)}$, qui vont implémenter diverses projections sur le spectre. Nous noterons ces coefficients $[\alpha|\beta] \in \{-1, 1\}$, et nous définissons aussi $(\alpha|\beta) \in \{0, 1\}$ par $[\alpha|\beta] = e^{i\pi(\alpha|\beta)}$.

Présence des orbifolds à action libre

Dans la section 4.3, on a vu comment le couplage de shifts de réseaux internes à diverses charges (ou opérateurs de parité) permet de briser spontanément une (super)symétrie de manière analogue au mécanisme de Scherk-Schwarz. Ce couplage est naturellement présent dans le formalisme de la construction fermionique. Le quotientage de la théorie par l'action libre de translation sur la coordonnée interne $X^i \rightarrow X^i + \pi R^i$ devient, au point de fermionisation, modélisée par l'introduction de l'ensemble e_i . Le couplage de cette action libre à une charge se fait par la spécification des coefficients de projection GSO généralisée.

Dans tous les cas que nous allons considérer, la charge Q introduite dans l'équation (4.68) peut être vue comme une condition au bord de l'état de corde, et est donc reliée à un vecteur de l'ensemble des parités. Nous allons en donner deux exemples.

Le premier exemple est le cas le plus simple de brisure spontanée de supersymétrie par mécanisme de Scherk-Schwarz décrit par le bloc (4.61) de la fonction de partition. Dans ce bloc, h et g sont les paramètres de shift de la coordonnée interne X^i , et sont donc naturellement associés au vecteur e_i , tandis que a et b sont les éléments de la structure de spin d'espace-temps et sont associés au vecteur S . On voit donc qu'un tel couplage va être contrôlé au niveau de la construction fermionique par la valeur du coefficient GGSO $[e_i|S]$.

Vérifions alors que ce couplage introduit bien une différence de masse entre les bosons et les fermions. Pour simplifier, on se place dans un vide bosonique $|\alpha\rangle$ sans masse, ne contenant aucun fermion de l'ensemble e_i , et tel que $|\alpha + S\rangle$ soit également sans masse⁶. On suppose que le vecteur e_i ne détruit pas ce vide, soit $(-)^{e_i} = [e_i|\alpha]$. Alors le vide fermionique superpartenaire est $|\alpha + S\rangle$, et l'équation de "survie" s'écrit cette fois $(-)^{e_i} = [e_i|\alpha + S] = -[e_i|\alpha]$. Le partenaire supersymétrique est donc éliminé. Toutefois, dans ce cas, le nouveau partenaire supersymétrique à considérer va provenir du secteur *massif* $|\alpha + S + e_i\rangle$. Des états provenant de ce secteur sont conservés quel que soit l'effet de la projection e_i , son effet étant ici de couper la moitié des hélicités. Le partenaire fermionique est donc bien devenu massif. On note, comme remarqué dans la section 4.3, que les états fermioniques correspondent à des vides contenant le vecteur e_i , c'est-à-dire à des états de cordes ayant des modes demi-entiers dans la direction X^i ($h = 1$ dans l'équation (4.61)).

Notons ici que ce mécanisme semble différent d'une brisure spontanée de symétrie telle qu'on l'avait introduite dans la présentation des orbifolds à action libre. En effet, dans le mécanisme usuel, les états qui deviennent massifs sous l'effet de la brisure ont une masse dépendante des modules de compactification de l'espace interne (le plus souvent, de rayons internes). Ici, on trouve par contre que la masse acquise par les secteurs "éliminés" est fixée; dans l'exemple précédent, d'après les formules (4.96), la variation de masse $\Delta M^2 = \frac{1}{8}$ est fixe. Ceci vient justement du fait que les modules de compactification sont fixés au point fermionique. Si l'on déformait ce modèle pour sortir du point fermionique, la masse des états projetés dépendrait du rayon. Nous donnerons plus tard des pistes pour exploiter ce mécanisme en vue de la construction de modèles réalistes.

Le deuxième exemple est très similaire, et explicite en termes de construction fermionique un

6. Ces hypothèses très restrictives ont pour but de rendre l'exemple simple et rapide; le rapport entre coefficient GGSO et orbifold à action libre fonctionne en fait en toute généralité.

des couplages que l'on réalisera dans [CJKPT08b] : il s'agit de coupler une dimension e_i aux paramètres h, g d'un orbifold. Dans le cas qui nous occupe dans ce chapitre, l'orbifold sera celui implémenté par les ensembles $b_{1,2}$ et les paramètres seront (h_1, g_1) ou (h_2, g_2) . Dans le cas décrit dans le chapitre suivant et [CJKPT08b], (h, g) sont les paramètres de l'orbifold T^4/\mathbb{Z}_2 , qui peut être obtenu par la construction fermionique. De même, on conclut que ce couplage sera contrôlé par la valeur du coefficient $[e_i|b]$, où le vecteur b génère l'orbifold correspondant.

Il nous reste à considérer le rôle des deux ensembles z_1 et z_2 . Leur présence brise génériquement le facteur E_8 en $SO(8) \times SO(8)$. Cette brisure n'est toutefois pas inéluctable ; les groupes $SO(16)$ et E_8 peuvent être retrouvés de la manière suivante. Rappelons que l'adjoint de $SO(16)$ se décompose sous $SO(16) \rightarrow SO(8) \times SO(8)$ comme

$$\mathbf{120} = (\mathbf{28}, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{8}_v, \mathbf{8}_v) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{28}) \quad (5.26)$$

La complétion de $(\text{Adj}(SO(8)))^2$ en $\text{Adj}(SO(16))$ se fait donc en rétablissant la "bi-vectorielle" $(\mathbf{8}, \mathbf{8})$. Mais d'après la propriété de triallité de $SO(8)$, ces états peuvent s'obtenir par exemple à partir d'états dans $(\mathbf{8}_v, \mathbf{8}_{s,c})$, donnés par les bosons de jauge $|\psi^\mu \bar{\phi}^{1\dots 4}|_{z_2}$. S'ils survivent aux projections, ces états étendent $SO(8)^2$ en $SO(16)$. Une fois $SO(16)$ obtenu, une extension à E_8 est encore possible en cas de survie des spineurs de $SO(16)$ construits sur $|z_1 + z_2\rangle$.

Nous verrons cependant dans [CJFKR08] que notre preuve de la dualité impose l'existence de $i \in \{1 \dots 6\}$ et de $j \in \{1 \dots 6\}$ tels que

$$[e_i|z_1] = -1 \quad \text{et} \quad [e_j|z_2] = -1. \quad (5.27)$$

Sous ces hypothèses, les éventuels états de type $(\mathbf{8}_v, \mathbf{8}_{s,c})$ ou $(\mathbf{8}_{s,c}, \mathbf{8}_v)$ sont éliminés par une projection $(-)^{e_i}$ et l'extension du groupe de jauge vers $SO(16)$ ou E_8 n'a pas lieu. D'autres extensions sont cependant possibles, impliquant des fermions y ou ω . Elles n'apparaissent toutefois qu'au point fermionique et sont donc éliminées par déformation du modèle ; de plus, elles ne modifient pas le rang du groupe de jauge.

Deux familles d'orbifolds à action libre vont nous intéresser : les orbifolds engendrés par les éléments e_i et ceux engendrés par les éléments z_i . Nous verrons que leurs rôles sont sensiblement différents.

Pour cela, nous commençons par détailler quelques aspects du spectre de la théorie. De même qu'un orbifold \mathbb{Z}_2 implique la présence d'un secteur twisté $h = 1$, un orbifold $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ implique la présence de trois secteurs twistés $(h_1, h_2) = (1, 0), (0, 1), (1, 1)$. Ces secteurs correspondent, sans surprise, respectivement à des vides (fermioniques, par exemple) de la forme

$$b_1 = |\psi^\mu, \chi^{1,2}, y^{3,4,5,6} | \bar{y}^{3,4,5,6}, \bar{\psi}^{1\dots 5}, \bar{\eta}^1 \rangle \quad (5.28)$$

$$b_2 = |\psi^\mu, \chi^{3,4}, y^{1,2,5,6} | \bar{y}^{1,2,5,6}, \bar{\psi}^{1\dots 5}, \bar{\eta}^2 \rangle \quad (5.29)$$

$$b_3 = |\psi^\mu, \chi^{5,6}, y^{1,2,3,4} | \bar{y}^{1,2,3,4}, \bar{\psi}^{1\dots 5}, \bar{\eta}^3 \rangle \quad (5.30)$$

En fait, chacun de ces 3 vides donne naissance à un *plan twisté* : en effet, ajouter un ensemble e_i , pour i tel que $(y\bar{y})^i \in b$, à l'un des trois vides b ci-dessus, envoie sur un autre état sans

masse. L'opération consiste alors à remplacer un couple $(y\bar{y})^i$ par $(\omega\bar{\omega})^i$. Un plan twisté est donc constitué de 16 secteurs twistés; on trouve au total 48 secteurs twistés. Notons que la présence de trois plans twistés constitue un bon augure en vue de la réalisation de modèles à trois générations, comme requis par le modèle standard.

Le mécanisme exposé précédemment par lequel une projection e_i "rend massif" un secteur $|\alpha\rangle$ en l'éliminant et en considérant à sa place le secteur $|\alpha + e_i\rangle$ suppose que $e_i \cap \alpha = \emptyset$. On voit donc que, sur un plan donné, seuls deux vecteurs e_i peuvent avoir cet effet : par exemple, seuls e_1 et e_2 peuvent éliminer des états du spectre contenu dans le plan associé à b_1 . Les projections engendrées par les ensembles z_1 et z_2 peuvent par contre agir sur les trois plans twistés de nos modèles.

5.3 Mise en œuvre de la dualité

Comme nous commençons par le remarquer, la théorie est auto-duale sous l'échange représentations spinorielles \leftrightarrow représentations vectorielles de $SO(10)$ dès que le groupe de jauge est étendu à E_6 . En effet, dans ce cas, les champs de matière s'arrangent dans les représentations fondamentales $\mathbf{27}$ et $\overline{\mathbf{27}}$ de E_6 , qui se décomposent sous $E_6 \rightarrow SO(10) \times U(1)$ comme

$$\mathbf{27} = \mathbf{10} \oplus \mathbf{16} \oplus 1. \quad (5.31)$$

$$\overline{\mathbf{27}} = \mathbf{10} \oplus \overline{\mathbf{16}} \oplus 1. \quad (5.32)$$

On a donc $n_{\mathbf{10}} = n_{\mathbf{16}} + n_{\overline{\mathbf{16}}}$.

Les bosons de jauge de E_6 qui n'appartiennent pas à la sous-algèbre $SO(10) \times U(1)$ sont construits sur le vide $|x\rangle$; leur survie aux projections e_i et z_i indique que, dans les modèles E_6 , $[e_i|x] = [z_i|x] = 1$. Ceci garantit que l'algèbre superconforme $N = 2$ droite est préservée, propriété confirmée par le fait que dans un secteur twisté parmi les 48 de la théorie, si les spineurs sont construits sur un vide $|\alpha\rangle$ sont présents dans le spectre, alors les vecteurs, leurs partenaires superconformes obtenus par "x-map", construits sur le vide $|\alpha + x\rangle$, seront aussi présents, en vertu de la règle

$$[\alpha + x|e_i] = [\alpha|e_i][x|e_i], \quad [\alpha + x|z_i] = [\alpha|z_i][x|z_i] \quad (5.33)$$

valable lorsque α est un des 48 secteurs twistés. Dans chacun de ces secteurs, on trouve alors soit une représentation vectorielle et une représentation spinorielle (ou anti-spinorielle), soit aucune représentation du tout.

Si on considère un modèle qui n'est pas dual, il existe donc un e_i et/ou un z_j vérifiant $[e_i|x] = -1$, $[z_j|x] = -1$. Un tel ensemble engendre une projection qui brise spontanément la x -map. Soit e_i un ensemble brisant la x -map. Intéressons-nous alors à un plan twisté dans lequel la projection associée à e_i peut éliminer des états du spectre. Pour un secteur α de notre plan twisté, on obtient que seul l'un des deux vides $|\alpha\rangle$ et $|\alpha + x\rangle$ donne naissance à des états physiques; les états de l'autre vide sont éliminés par la projection associée à e_i . Pour des raisons de clarté, on dira que $|\alpha\rangle$ contient des représentations spinorielles (resp. vectorielles) si l'un des deux secteurs $|\alpha\rangle$, $|\alpha + x\rangle$ contient des représentations spinorielles (resp. vectorielles). L'opération

de dualité va donc consister à échanger, secteur par secteur, la représentation survivante. Ceci est contrôlé par le coefficient $[\alpha|e_i]$, soit, en fait, par le coefficient $[b|e_i]$, où b est l'un des trois vecteurs b_1, b_2, b_3 définissant le plan twisté auquel on s'intéresse. Le raisonnement étant analogue dans le cas des ensembles z_i , l'opération de dualité à l'intérieur d'un plan twisté donné par $|b\rangle$ va donc consister à renverser les coefficients

- $[b|z_i]$ pour z_i brisant la x -map ;
- $[b|e_i]$ pour les e_i susceptibles d'éliminer des représentations dans le plan $|b\rangle$, et brisant la x -map .

Ceci est montré en détail dans [CJFKR08]. Il apparaît la subtilité suivante : si on effectue la dualité dans plusieurs plans twistés, on est confrontés au fait que les coefficients $[b_1|z_i], [b_2|z_i], [b_3|z_i]$ ne sont pas indépendants (cette subtilité ne concerne pas les ensembles e_i , qui ne peuvent pas agir dans les trois plans). Le moyen d'éviter cet écueil est, sous les hypothèses (5.27), de ne plus effectuer une dualité secteur par secteur, mais seulement "plan par plan".

L'opération de dualité effectuée jusque-là est en effet la suivante :

Si un secteur $|\alpha\rangle$ comporte uniquement une représentation spinorielle (resp. vectorielle), le modèle dual sera tel que $|\alpha\rangle$ comporte uniquement une vectorielle (resp. spinorielle).

On peut néanmoins envisager une transformation de dualité plus générique, comme suit :

Si un secteur $|\alpha\rangle$ comporte uniquement une représentation spinorielle (resp. vectorielle), le modèle dual sera tel qu'on ait un secteur $|\alpha'\rangle$ qui comporte uniquement une vectorielle (resp. spinorielle).

Dans ce cas, la correspondance $\alpha \mapsto \alpha'$ doit bien entendu être une bijection. Ceci est schématisé plus clairement dans la figure 5.1.

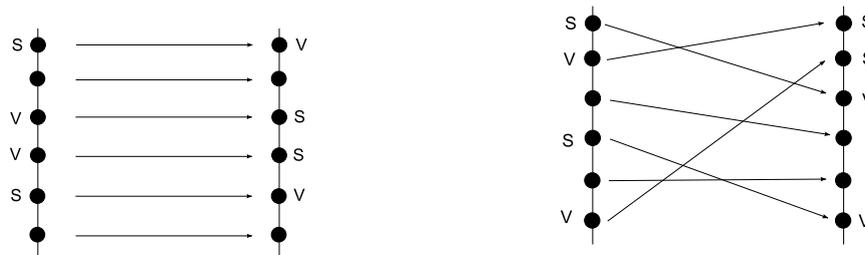


FIGURE 5.1 – Procédure de dualité secteur par secteur (à gauche) et plan par plan (à droite). la ligne verticale représente un plan twisté, et les points noirs ses différents secteurs.

Comme détaillé dans [CJFKR08], cette modification est indispensable pour pouvoir effectuer une dualité simultanément dans les trois plans twistés ; tout ceci souligne toutefois que le choix de dualité secteur par secteur que nous effectuons dans les deux premiers plans n'est pas unique. En fait, la prescription la plus générale (mais plus abstraite) est celle formulée dans [FKR07b] : nous la reprenons formellement dans le cas d'une dualité dans le plan b_1 .

Si on définit la matrice et les vecteurs suivants :

$$\Delta = \begin{pmatrix} (e_1|e_3) & (e_1|e_4) & (e_1|e_5) & (e_1|e_6) \\ (e_2|e_3) & (e_2|e_4) & (e_2|e_5) & (e_2|e_6) \\ (z_1|e_3) & (z_1|e_4) & (z_1|e_5) & (z_1|e_6) \\ (z_2|e_3) & (z_2|e_4) & (z_2|e_5) & (z_2|e_6) \end{pmatrix}; \quad Y_{16} = \begin{pmatrix} (e_1|b_1) \\ (e_2|b_1) \\ (z_1|b_1) \\ (z_2|b_1) \end{pmatrix}; \quad Y_{10} = \begin{pmatrix} (e_1|b_1 + x) \\ (e_2|b_1 + x) \\ (z_1|b_1 + x) \\ (z_2|b_1 + x) \end{pmatrix}; \quad (5.34)$$

on montre que le nombre de représentations spinorielles dans le plan b_1 est égal à $2^{4-\text{rang}(\Delta)}$ si Y_{16} est combinaison linéaire des colonnes de Δ , et 0 sinon ; de même, le nombre de représentations vectorielles dans le plan b_1 est égal à $2^{4-\text{rang}(\Delta)}$ si Y_{10} est combinaison linéaire des colonnes de Δ , et 0 sinon. On voit alors qu'une façon simple de construire un modèle dual consiste à intervertir les vecteurs Y_{16} et Y_{10} , ce qui équivaut à la procédure que nous avons détaillée. Toutefois, ce n'est pas une condition nécessaire : il suffit d'intervertir les rangs des matrices augmentées $[\Delta, Y_{16}]$ et $[\Delta, Y_{10}]$, ce qui implique qu'il suffit d'intervertir Y_{16} et Y_{10} à une combinaison linéaire des colonnes de Δ près. Cette généralisation permet de considérer des dualités qui ne se font plus secteur par secteur (au sens de la figure 5.1), mais plan par plan.

Nous ne rentrerons pas plus dans les détails de la démonstration de la dualité, ce qui paraphraserait inutilement [CJFKR08]. Nous allons par contre effectuer quelques remarques.

5.4 Remarque additionnelle

Nous souhaitons ici faire une remarque complémentaire en vue de la création de modèles réalistes. Nous venons de voir, à la fin de la section précédente, que le nombre de secteurs sans masse dans un plan donné est toujours une puissance de 2 inférieure ou égale à 16. D'un point de vue phénoménologique, nous cherchons évidemment à construire des modèles à 3 familles. On voit qu'il n'existe que 2 possibilités : 1 famille dans chacun des 3 plans, ou 2 familles dans un premier plan, 1 famille dans un second plan, et 0 famille dans le troisième plan. Le choix entre ces deux catégories de modèles peut être effectué en considérant les masses des quarks issus de chaque génération : en particulier, la hiérarchie existant entre la masse du top et les masses typiques des leptons des deux autres générations pourrait favoriser des modèles $(2, 1, 0)$ (ce comptage concerne les représentations spinorielles de $SO(10)$ qui donnent naissance à la matière chirale ; on est ensuite libre de considérer des modèles self-duaux ou non). Rappelons qu'une fois le nombre de familles fixé par l'implémentation des divers orbifolds à action libre, il est possible de lever la masse d'un plan twisté entier en couplant un rayon au paramètre de twist correspondant au plan twisté concerné ; la déformation de ce modèle permet de nous écarter du point fermionique et d'ajuster les masses des différents plans sans modifier les caractéristiques du spectre.

5.5 Conclusions et perspectives

Nous avons donc exhibé une nouvelle symétrie présente sur une classe de vides des modèles hétérotiques quadri-dimensionnels basés sur des constructions de fermions libres. Ce résultat est

intéressant à plusieurs points de vue.

Premièrement, il est intéressant de dériver des résultats nous renseignant sur la structure des vides de la théorie des supercordes. Un des grands problèmes de la théorie des cordes à l'heure actuelle est la quantité gigantesque de vides dans lesquels on peut former une théorie consistante. Ces vides ont des caractéristiques plus ou moins prometteuses en vue de faire le lien avec la physique à basse énergie que nous observons au quotidien : on s'intéresse notamment au rang du groupe de jauge, au nombre de générations de matière, ou à l'absence d'anomalies abéliennes. Beaucoup de recherches ont en fait été faites dans le but de rechercher un éventuel processus de sélection du vide de la théorie. Plusieurs stratégies ont été avancées. Une bonne direction serait de chercher une densité de probabilité sur l'espace des vides (nommé "landscape" dans la littérature). La construction d'une telle mesure est facilitée par la présence de symétries non-triviales, telle que la symétrie spineur-vecteur. Une symétrie du même ordre est la symétrie miroir, découverte au début des années 1990 [GP90]. Cette symétrie relie deux espaces de Calabi-Yau de topologie différente : les dimensions des cohomologies de Dolbeault $H^{1,1}$ et $H^{2,1}$ ont été échangés dans la transformation miroir. Il a été montré dans [SYZ96] que la théorie IIA compactifiée sur un Calabi-Yau est équivalente à la théorie IIB compactifiée sur le Calabi-Yau miroir. Les Calabi-Yau s'organisent alors en paires miroir ; ce résultat mathématique facilite grandement la classification des vides correspondants. Nous avons toutefois signalé que dans le cadre des Calabi-Yau, il n'existe pas de modèles à trois familles ; il faut considérer des déformations, sous la forme de classes de torsion non-nulles ou d'orbifolds asymétriques.

La dualité présentée dans notre travail est comparable. À la différence de la symétrie miroir qui relie deux théories présentant une algèbre superconforme $(2, 2)$ après compactification, la symétrie spineur-vecteur relie deux théories présentant une algèbre superconforme $(2, 0)$; les théories $(2, 2)$ superconformes peuvent être considérées comme des points fixes de la symétrie spineur-vecteur. Ces théories $(2, 0)$ peuvent être interprétées comme des compactifications sur des espaces de Calabi-Yau généralisés, comportant une torsion non-nulle. Cette torsion est à l'origine de la brisure spontanée de l'algèbre superconforme du côté droit de la théorie.

Cette nouvelle dualité impose donc des contraintes sur les résultats éventuels de mécanisme de sélection du vide. On pourrait en outre envisager, par exemple, que les configurations auto-duales ou présentant presque autant de spineurs que de vecteurs soient préférées à des configurations plus dissymétriques.

Enfin, l'existence de modèles auto-duaux malgré la brisure spontanée de E_6 est intéressante en ce qui concerne les éventuelles anomalies de la théorie. Dans certains de ces modèles, les trois $U(1)$ issus de la brisure $E_8 \rightarrow SO(10) \times U(1)^3$ sont dépourvus d'anomalies ; ceci va à l'encontre de l'idée généralement formulée selon laquelle tout groupe $U(1)$ issu de la brisure du E_8 originel et ne faisant pas partie du facteur donnant le modèle standard est porteur d'anomalie. Nous rappelons toutefois que la présence d'une telle anomalie est *souhaitable*, car elle brise spontanément le facteur $U(1)$ en question [DSW87].

Plusieurs pistes d'approfondissement peuvent être explorées. Il est d'abord obligatoire, pour rendre viable de tels modèles, de briser spontanément la supersymétrie de $\mathcal{N} = 1$ à $\mathcal{N} = 0$; ceci peut être réalisé en couplant une dimension interne à l'hélicité des fermions d'espace-temps (a, b) .

On peut aussi se poser la question du traitement des états chargés sous le groupe de jauge caché inclus dans E_8 ; il est souhaitable que les interactions induites par cette jauge soient invisibles à basse énergie.

Chapitre 6

Théories hétérotiques à température non-nulle, brisures spontanées de supersymétrie et évolutions cosmologiques associées

6.1 Introduction et enjeux

La cosmologie est un des terrains favoris d'application de la théorie des cordes. En effet, on attend d'une théorie quantique de la gravitation qu'elle nous éclaire sur les problèmes rencontrés par la cosmologie à l'heure actuelle, notamment en ce qui concerne les premiers stages de la vie de l'univers. Parmi ces problèmes figurent la description de l'Univers à ses premiers instants, quand sa taille atteint l'échelle de Planck ; la prépondérance des effets quantiques à ces échelles d'énergie rend indispensable l'utilisation d'une théorie de gravitation quantique. On peut aussi citer le problème de l'inflation, dont une description précise manque toujours. La théorie des cordes se caractérisant par un fort pouvoir prédictif venant des conditions très restrictives dans lesquelles on peut la définir, son utilisation implique qu'au contraire du théoricien des champs, le théoricien des cordes n'est pas libre de décider du spectre de la théorie qu'il étudie. Ainsi, la modélisation de l'inflation, qui nécessite un champ scalaire évoluant dans un potentiel possédant de bonnes propriétés, passe par l'identification en théorie des cordes ce champ et de son potentiel associé ; on n'a plus la liberté de *postuler* l'existence d'un champ ayant les bonnes propriétés.

Un deuxième problème théorique important concerne la constante cosmologique. Les observations récentes [P⁺99, R⁺98] font état d'une constante cosmologique non nulle et très petite ($\Lambda \sim 10^{-120}$ en unités de Planck). Là encore, la théorie des cordes se doit d'expliquer l'apparition d'une telle valeur, qui apparaît comme un terme constant dans l'action d'Einstein-Hilbert

$$\frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda) \tag{6.1}$$

La constante cosmologique apparaît dans les théories de supergravité à quatre dimensions comme l'énergie dans un vide de la théorie. Ce vide est obtenu en minimisant le potentiel par

rapport aux champs scalaires de la théorie. L'étude de ces conditions a révélé que dans les théories de supergravité sans échelle introduites dans la section 2.2.2, la constante cosmologique est automatiquement nulle. Nous allons toutefois voir qu'en général, les théories des cordes favorisent des constantes cosmologiques négatives.

Compactifications avec flux et stabilisation des modules

Les compactifications de la théorie des cordes sont caractérisées par la valeur des modules, qui détaillent la géométrie de l'espace interne. Le potentiel effectif de la théorie à basse énergie, dans le cas d'une compactification simple, ne dépend pas de ces modules, et leur valeur n'est donc pas fixée au niveau classique de la théorie. La présence de scalaires sans masse dans une théorie est gênante à deux niveaux. Premièrement, on perd dans un tel cas de figure le pouvoir prédictif de la théorie des cordes concernant les valeurs des différents couplages effectifs (constantes de couplage, couplages de Yukawa...); ces couplages dépendent en effet de la valeur dans le vide des modules. Deuxièmement, des scalaires sans masse propagent des interactions de longue portée; en leur présence, différents types de matière coupleraient alors différemment à cette nouvelle force, ce qui violerait les bornes expérimentales sur le principe d'équivalence.

Il est possible de générer un potentiel non-trivial pour les modules en effectuant une *compactification avec flux* (voir la revue [Gra06]). Dans ce schéma de compactification, on donne des valeurs dans le vide non-nulles aux composantes internes des champs de la théorie; il en résulte l'apparition d'un potentiel effectif, fonction des modules de compactification.

Une première exigence lors de la compactification avec flux est la préservation d'au moins une supersymétrie. En l'absence de flux, on a vu que cette condition impliquait que la variété de compactification devait être de type Calabi-Yau. Cette condition est modifiée en présence de flux: si la structure de la variété doit toujours être incluse dans $SU(3)$, l'holonomie est modifiée par des classes de torsion non-nulle. Nous ne rentrerons guère plus en détail sur ces considérations techniques assez poussées de géométrie différentielle; par contre, on note que la condition de présence de la supersymétrie donne des relations entre les classes de torsion de la variété et les flux allumés.

La présence de flux contraint aussi la forme de la métrique d'espace temps. En toute généralité, on considère une métrique à dix dimensions de la forme

$$ds_{10}^2 = e^{2A(y)} g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + e^{-2A(y)} \tilde{g}_{mn}(y) dy^m dy^n. \quad (6.2)$$

Ici, x représente les coordonnées de l'espace temps quadri-dimensionnel, y les coordonnées internes. Dans cette métrique, la présence du *facteur de warp* $A(y)$ rend le produit espace-temps \times espace interne non-trivial. La procédure de compactification avec flux sur des espaces ayant cette forme impose également des relations entre les flux allumés et le facteur de warp. Nous ne donnerons pas les formes de ces relations, que l'on peut trouver dans [Gra06, BBS07]. Le résultat est le suivant [dWShd87, MN01]: il n'existe pas de compactifications avec flux conduisant à un espace de de Sitter à quatre dimensions; le seul cas donnant lieu à une compactification sur un espace de Minkowski ($g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$) est caractérisé par l'annulation de toutes les valeurs moyennes dans le vide des flux, et la constance du facteur de warp. Intuitivement, les termes effectifs induits par les flux contribuent négativement à la constante cosmologique quadri-dimensionnelle. Ce théorème de *no-go* est valable en l'absence de corrections de supergravité aux dérivées supérieures

et en l'absence d'effets non-perturbatifs. Son existence est évidemment problématique en vue d'applications phénoménologiques : la procédure de stabilisation des modules condamne le cordiste à considérer des univers de type Anti de Sitter, qui ne correspondent pas à la réalité physique.

Heureusement, l'horizon n'est pas si noir : il existe des moyens de contourner ce résultat. Une première approche, développée dans [KKLT03], consiste à, dans un premier temps, stabiliser tous les modules de compactification en incluant des flux et des contributions non-perturbatives (qui permettent briser la structure sans échelle de la supergravité et de fixer le ¹ module de Kähler), puis à lever l'énergie du vide obtenue après stabilisation par inclusion dans la théorie de nouveaux degrés de liberté sous la forme de $\overline{D3}$ -branes. On obtient ainsi un vide métastable pour l'espace des modules, en un point où la constante cosmologique est positive et peut être ajustée.

Plusieurs reproches peuvent néanmoins être faits à ce mécanisme. Premièrement, ce travail ne considère pas d'effets thermiques dans l'évolution de l'univers. Deuxièmement, la procédure de stabilisation des modules (et en particulier du module de Kähler) fait appel à une contribution non-perturbative au superpotentiel, qui est donc supposée être du même ordre que le superpotentiel à l'ordre des arbres. La procédure de stabilisation de T uniquement après stabilisation des autres modules peut aussi être discutée. Nous noterons d'ailleurs que la forme de la modification du superpotentiel, qui est en e^{-aT} est retrouvée dans notre modèle, mais au niveau perturbatif. Enfin, la procédure de levée du potentiel du vide vers des valeurs positives à l'aide de $\overline{D3}$ -branes pose problème. En effet, l'amplitude des corrections apportées au potentiel par ces nouveaux degrés de liberté rend nécessaire une étude de la rétroaction qui en résulte. Notamment, il est raisonnable de penser que les modifications apportées ne seront pas simplement linéaires. Un tel calcul est de plus difficile : en effet, l'ajout des $\overline{D3}$ -branes rend invalide l'usage du formalisme de la supergravité $\mathcal{N} = 1$, car toutes les supersymétries sont brisées.

Plan d'attaque

Nous développons ici une autre approche, dans laquelle nous ne tentons pas de stabiliser tous les modules, mais plutôt de considérer une dynamique cosmologique pour certains d'entre eux. Autrement dit, nous minimisons l'action effective de la théorie, et non le potentiel.

Nous considérons des théories des cordes, le plus souvent hétérotiques, à température non-nulle, dans lesquelles la supersymétrie est spontanément brisée par une ou plusieurs directions compactifiées selon le mécanisme de Scherk-Schwarz développé dans la section 4.3. La température traitant différemment les bosons et les fermions, le temps euclidien est l'une de ces dimensions ; nous commençons par supposer que la brisure s'effectue également sur une seconde dimension interne, notée R_5 . La forme explicite du potentiel à une boucle permet d'isoler le module sans échelle de cette théorie. L'indétermination à l'ordre des arbres de ce module est levée à l'ordre d'une boucle par la prise en compte des termes thermiques et des termes de brisure spontanée de supersymétrie. Ces corrections sont décrites par un potentiel effectif, que nous calculons *via* le calcul de l'énergie libre du système. Dans le formalisme de la supergravité, un tel potentiel reflète en fait la renormalisation à une boucle du potentiel de Kähler . Un changement de variables sur les champs rétablit alors le potentiel de Kähler vers sa forme originelle, mais fait

1. Les auteurs de [KKLT03] se placent dans le cas où il existe un unique module de Kähler .

apparaître une correction au potentiel scalaire. Le superpotentiel, quant à lui, est protégé par les théorèmes de non-renormalisation.

Sous certaines hypothèses, les termes du potentiel effectif impliquant les autres modules de compactification seront exponentiellement petits, de sorte que ces modules pourront être pris constants. Le rayon typique correspondant à ces dimensions étant de l'ordre de la taille de la corde, l'échelle d'énergie à laquelle interviennent ces degrés de liberté sera de l'ordre de la température d'Hagedorn ; nous ne considérerons pas ce régime dans notre travail.

Dans un premier temps, le module sans échelle sera, avec la température, le seul paramètre dynamique de notre construction. Le calcul de l'amplitude du vide à une boucle de la théorie des cordes considérée permet de définir le contenu en radiation de l'univers sous la forme d'une pression et d'une densité d'énergie, par des relations usuelles de thermodynamique que nous rappelons dans la section 6.2. Ce contenu en énergie va modifier l'évolution de l'univers en introduisant un terme de rétroaction dans l'équation de Hubble. Nous détaillerons la forme la plus générale que peut prendre une telle correction quantique en utilisant les propriétés des théories de supergravité, puis indiquerons comment réaliser les différents termes envisageables. Enfin, nous présenterons les évolutions cosmologiques associées : pour cela, nous nous placerons dans le cadre d'un univers de Friedmann-Robertson-Walker, dont l'évolution est régie par le facteur d'échelle. Nous définirons un ansatz pour l'évolution, qui nous permettra d'interpréter physiquement les différents termes du potentiel obtenu ; cet ansatz est toutefois valide sous certaines contraintes, que nous expliciterons.

Dans un second temps, nous tenterons de généraliser ce mécanisme à un schéma de brisure par deux rayons internes, notés R_4, R_5 . De la même manière que précédemment, les seules contributions à considérer dans le potentiel effectif sont celles faisant intervenir ces dimensions, qui participent à la brisure. Les autres quantités peuvent être gelées de manière consistante : leurs termes dans le potentiel effectif seront négligés car ils ne se manifestent qu'à des échelles d'énergies de l'ordre de la température d'Hagedorn ; de plus, la supergravité effective fait apparaître des termes de brisure douce de supersymétrie prenant la forme de termes de masse, de l'ordre de la masse du gravitino $M_{3/2}$. Il existe par contre dans ce modèle un nouveau module présentant une dynamique non-triviale : le module de "structure complexe" R_5/R_4 . La structure des corrections quantiques sera assez similaire à celle détaillée dans le cas d'un rayon ; un point d'intérêt sera alors de savoir s'il est possible de *stabiliser* ce nouveau module, ou s'il sera attiré vers l'une des deux limites où l'on "perd" une brisure de supersymétrie. Un cas de stabilisation pourrait donner accès à de nouvelles cosmologies.

6.2 Quelques rappels de thermodynamique

Dans cette section, nous redécrivons des formules de thermodynamique reliant les quantités que nous rencontrerons par la suite. Nous supposons que nous sommes en présence d'un gaz de cordes en équilibre à une température $T \equiv 1/\beta$. Nous pouvons alors définir sa fonction de partition

$$Z = \text{Tr} e^{-\beta H}$$

Un résultat de théorie des champs stipule que la fonction de partition Z s'exprime en fonction de la fonctionnelle génératrice des diagrammes connexes W comme

$$W = \ln Z \quad (6.3)$$

Dans un cadre perturbatif, on considère la constante de couplage des cordes faible, de sorte que dans le développement de l'expression cordiste de la fonctionnelle génératrice des diagrammes connexes

$$W_{\text{str.}} = \frac{1}{g_s^2} Z_{0\text{-loop}} + Z_{1\text{-boucle}} + g_s^2 Z_{2\text{-loop}} + \dots \quad (6.4)$$

on ne considérera que les amplitudes dans le vide à une boucle et à l'ordre des arbres. Cette dernière étant nulle (voir par exemple [GSW87a, GSW87b, DP88]), $W_{\text{str.}}$ est approximée par la fonction de partition à une boucle de la théorie des cordes ; on suppose donc

$$Z_{1\text{-boucle}} = \ln Z. \quad (6.5)$$

D'après les propriétés élémentaires de l'ensemble canonique, l'énergie interne, qui est la valeur moyenne de l'énergie du système, s'exprime comme

$$U = \frac{1}{Z} \int dE E e^{-\beta E} = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z = -\frac{\partial}{\partial \beta} Z_{1\text{-boucle}} \quad (6.6)$$

Ceci nous donne la densité d'énergie du système considéré, de volume spatial fini V_3 :

$$\rho = \frac{U}{V_3} = -\frac{1}{V_3} \frac{\partial}{\partial \beta} Z_{1\text{-boucle}} \quad (6.7)$$

L'énergie libre du système est définie comme $F = U - TS$; on montre (ref.) que

$$F = -\frac{1}{\beta} \ln Z = -\frac{Z_{1\text{-boucle}}}{\beta} \quad (6.8)$$

L'identité thermodynamique s'écrivant $dF = -PdV - SdT$, on a

$$P = -\frac{\partial F}{\partial V_3} = -\frac{F}{V_3}. \quad (6.9)$$

La deuxième égalité est obtenue par la propriété d'extensivité ; dans nos calculs, le volume de l'espace tri-dimensionnel apparaît bien comme un facteur global.

Il vient donc que

$$P = \frac{Z_{1\text{-boucle}}}{V_4}, \quad (6.10)$$

où cette fois $V_4 = \beta V_3$ est le volume de l'espace-temps euclidien.

On tire de (6.7) et (6.10)

$$\rho + P = -\beta \frac{\partial P}{\partial \beta} = T \frac{\partial P}{\partial T}. \quad (6.11)$$

Par ailleurs, on a, pour un gaz relativiste à 3 dimensions d'espace, $\rho = 3P$.

On en déduit que $(\rho, P) \propto T^4$, ce qui est bien une propriété de l'énergie radiative. Nous établissons maintenant une propriété caractérisant une évolution isentropique, hypothèse que nous supposons dans le cadre de notre travail. L'entropie peut s'exprimer comme

$$S = Z_{1\text{-boucle}} + \beta U = V_4(\rho + P) \quad (6.12)$$

ρ et P étant proportionnels à T^4 , il vient que l'on doit avoir, au cours d'une évolution homogène isotrope caractérisée par le facteur d'échelle $a(t)$, $a^3(t) T^3(t) = \text{cste}$. L'évolution isentropique implique donc

$$T(t) \propto \frac{1}{a(t)}. \quad (6.13)$$

Ceci correspond bien à une dilatation du temps euclidien proportionnelle au facteur d'échelle.

Pour la suite de notre travail, nous avons également besoin d'explorer le cas où ρ et P ne dépendent pas uniquement de la température. On suppose qu'il existe dans le système des autres degrés de liberté d'énergie typique $M_i(t)$ dans le système, représentant des degrés de liberté en équilibre thermal. Des arguments dimensionnels nous convainquent alors que pour un système quadri-dimensionnel, l'hypothèse $(\rho, P) \propto T^4$ se généralise en

$$\left(\sum_i M_i \frac{\partial}{\partial M_i} + T \frac{\partial}{\partial T} \right) (\rho, P) = 4 (\rho, P). \quad (6.14)$$

Ceci nous permettra, en considérant des masses typiques constantes pour des degrés de liberté additionnels, d'envisager des termes issus d'un calcul thermodynamique, mais se comportant en $a(t)^{-2}$ ou constants dans le temps. On peut montrer alors que (6.13) est toujours vérifiée, en utilisant le fait que P et ρ restent des quantités de dimension 4 en les échelles d'énergie du système (voir la relation (6.14)).

Nous allons maintenant appliquer nous intéresser au problème de la modélisation d'une température finie en théorie des cordes. Munis de ce formalisme, nous serons en mesure de dériver la fonction de partition thermique $Z_{1\text{-boucle}}(\beta)$, et pourrons utiliser le formalisme thermodynamique développé ci-dessus pour modéliser le contenu de l'univers correspondant à notre modèle.

6.3 Aspects de la théorie des cordes à température finie

Les modèles construits dans nos travaux font intervenir une température non-nulle ; l'introduction de la température en théorie des cordes (ainsi qu'en relativité générale) n'est pas une démarche triviale. Nous commençons par en discuter la validité, pour ensuite donner la prescription, issue de la théorie des champs, que nous utiliserons. Nous verrons en particulier que la théorie des cordes fait apparaître une valeur critique de la température, dite température de Hagedorn.

La température, telle qu'introduite en thermodynamique, est une notion définie pour un système *en équilibre* avec un réservoir de température T (on notera la température inverse $1/T = \beta$). Ainsi placés dans l'ensemble canonique, la fonction de partition du système est donnée par une somme sur les états pondérée par le facteur de Boltzmann :

$$Z_{thermal} = \text{Tr} e^{-\beta H}. \quad (6.15)$$

H est ici le hamiltonien du système.

Un résultat classique de théorie de l'intégrale de chemin est que la fonction de partition d'un ensemble thermal à température $1/\beta$ se calcule en effectuant une rotation de Wick sur le temps et en compactifiant le temps euclidien ainsi obtenu sur un cycle de longueur β .

En effet, on voit alors que l'intégrale de chemin, qui consiste à faire évoluer le système dans le temps au moyen de l'opérateur d'évolution e^{-iHt} , redonne bien la fonction de partition de l'ensemble canonique dans le cas d'un temps imaginaire compact.

Ceci pose alors quelques problèmes d'application dans le cas d'espaces courbes, détaillés dans [AW88] : notamment, il est ambigu de vouloir fixer le rayon de la dimension de temps euclidien, qui est en toute rigueur une variable dynamique dans le contexte d'une évolution gravitationnelle ; l'hypothèse d'équilibre du système avec un réservoir de température empêche même de considérer une éventuelle valeur asymptotique dans le vide pour ce rayon. Par ailleurs, la définition même du hamiltonien du système, et donc de l'énergie, pose problème dans le cas de l'ensemble thermal, car on ne peut pas considérer comme isolé ce système.

Faute de pouvoir considérer l'ensemble dans son intégralité (celui-ci étant infini), une approximation valide de la température se fait en considérant un volume contenant un grand nombre de degrés de liberté, pour que les notions de mécanique statistique s'appliquent de manière satisfaisante. Une limite supérieure sur la taille du système est toutefois imposée par la propriété d'instabilité de tout système gravitant, qui a tendance à s'effondrer sur lui-même : il nous faut alors considérer un système échappant à cette instabilité de Jeans. On renvoie à [AW88] pour des informations complémentaires. Dans le cadre de notre travail, nous nous placerons systématiquement au voisinage de l'espace plat, que nous perturberons par divers termes de potentiel effectif.

Un deuxième aspect de cette définition de la température comme intégrale de chemin concerne l'incorporation de la spin-statistique. Le résultat est le même qu'en théorie des champs : lorsque la corde fermionique est transportée le long du temps compactifié, les conditions au bord doivent être antipériodiques. Ainsi, nous devons en fait calculer la quantité

$$Z_{thermal} = \text{Tr} (-)^F e^{-\beta H}; \quad (6.16)$$

où $(-)^F$ est l'opérateur de comptage de fermions.

Ainsi, la compactification de la dimension temporelle n'est en fait pas une compactification toroïdale triviale : selon leur hélicité d'espace-temps, les conditions au bord des états de cordes qui contribuent à la fonction de partition sont différentes. Ceci rappelle fortement les compactifications sur des orbifolds à action libre de type Scherk-Schwarz décrits dans la section 4.2.2. C'est en effet le bon formalisme à adopter [KR90]. Nous calculons la fonction de partition à l'ordre d'une boucle, correspondant à la propagation sur le tore. Sous transport le long des deux cycles du tore, la phase prise par les états de corde est donc fonction de leur hélicité d'espace-temps. La compactification de Scherk-Schwarz s'effectue alors exactement par la modification (4.55) de la fonction de partition. Dans un contexte de théorie des champs, la phase non-triviale

à introduire serait $(-)^{a\tilde{m}}$, correspondant au transport \tilde{m} fois le long du cycle “temporel” du tore et à l’insertion dans la trace d’autant d’opérateurs renversant les conditions au bord. En théorie des cordes, on doit compléter la phase par un facteur $(-)^{bn+\tilde{m}n}$. Ce facteur rend compte de la modification des conditions au bord de l’état de cordes sur le second cycle du tore (le cycle “spatial”); il se comprend aisément dans le formalisme d’orbifold à action libre, où le cocycle devient $(-)^{ag+bh+gh}$, h et g étant les parités des nombres d’enroulement de l’état de corde autour des deux cycles du tore. La partie $(-)^{ag}$ correspond à l’effet présent en théorie des champs; l’apparition de la phase $(-)^{bh}$ correspond au secteur twisté de l’orbifold, où les conditions au bord le long de l’autre cycle sont modifiées.

L’introduction de la température en théorie des cordes révèle un phénomène inédit en théorie des champs : l’existence d’une température critique, dite *température de Hagedorn*. Un résultat classique de la théorie des cordes est que la croissance de la densité d’états par niveau d’énergie est exponentielle : on a $n(E) \sim \exp(bE)$, où b est une constante. Il existe alors une valeur critique $T_H = b^{-1}$ au-delà de laquelle la fonction de partition à température $1/\beta$ (6.15) ne converge plus. Plusieurs aspects sont présents dans l’existence de cette température critique. Premièrement, cette température correspond précisément à l’apparition d’un état tachyonique dans le spectre [Sat87, Kog87]. Ceci est consistant avec le fait que la fonction de partition sur le tore (3.79) diverge en présence d’un état vérifiant $M^2 < 0$.

Il est bon d’analyser les détails de l’apparition de cet état tachyonique. La formulation de la température en terme d’orbifold libre développée dans la section 4.2.2 montre que dans le secteur $h = 1$ (soit un nombre d’enroulement impair autour du temps euclidien), la projection GSO est renversée par le facteur $(-)^{bh}$, ce qui ouvre la voie à l’apparition d’un tachyon dans des théories précédemment non-tachyoniques. Ensuite, une resommation de Poisson de l’expression (4.55) montre que les nombres d’enroulement selon la dimension de temps euclidien sont modifiés par le couplage comme :

$$\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} m + \frac{a}{2} - \frac{n}{2} \\ n \end{pmatrix} \quad (6.17)$$

Un calcul simple montre alors l’apparition d’un état bosonique tachyonique (rappelons que l’introduction de la température a introduit un *mass gap* entre bosons et fermions), pour $n = 1$ et $a = 0$ (voir par exemple [ADK99]).

Nous nous posons maintenant la question de la pertinence du rôle des termes de température dans une évolution cosmologique d’inspiration cordiste. Ce rôle a été mis en évidence dans plusieurs travaux, dans le cas de l’étude d’univers jeunes.

Notre approche consiste à corriger les équations d’Einstein par inclusion des corrections thermiques. Ces corrections thermiques sont importantes dans le cas d’un univers de de Sitter (c’est-à-dire, à constante cosmologique positive); en effet, une des propriétés des univers de de Sitter est la présence d’un horizon, et donc [GH77] d’une température de Hawking. Cette température de Hawking, comme dans le cas des trous noirs, existe en l’absence de sources de matière, et résulte donc des fluctuations de la métrique. Il a été montré explicitement dans [ST05], par développement en fonctions harmoniques des fluctuations de la métrique, qu’en sommant sur ces fluctuations, l’équation d’évolution pour l’univers de Friedmann-Robertson-Walker est modifié

par un terme proportionnel à $a(t)^{-4}$, ce qui correspond bien à une contribution thermique. Le résultat reste de plus valide lorsque l'on inclut aussi des scalaires sans masse. Ainsi, toute solution de de Sitter est déformée de manière intrinsèque. Ceci joue un rôle par exemple dans certains scénarios de sélection de la constante cosmologique. Il semble donc obligatoire, pour des applications cosmologiques de la théorie des cordes, d'introduire dans nos modèles une température non nulle.

Notre démarche consiste à introduire *à la main* cette température dans le modèle, de manière à générer la rétroaction sur les équations d'évolution de l'univers par calcul de la fonction de partition à une boucle (cette fonction de partition n'est donc maintenant rien d'autre que la fonction de partition du système à température T pris dans le formalisme canonique). Cette démarche permet de calculer explicitement la déformation thermique de la cosmologie pour tout modèle de théorie des cordes. L'hypothèse adiabatique, ou, de manière équivalente, la conservation de l'entropie, implique que cette température doit varier comme l'inverse du facteur d'échelle : $T(t) \propto a^{-1}(t)$.

On suppose de plus que l'on se trouve loin de la température de Hagedorn T_H , c'est-à-dire que le rayon de compactification du temps euclidien R_0 est grand devant l'échelle typique des cordes. Ceci a plusieurs effets : d'une part, l'absence de tachyon préserve le système d'une instabilité infra-rouge ; d'autre part, cela rendra exponentiellement petites les contributions au potentiel effectif des dimensions compactifiées qui ne participent pas à la brisure de supersymétrie (nous renvoyons à [CJKPT08b] pour une dérivation explicite de ces propriétés). La pertinence du formalisme de l'ensemble canonique (et donc de l'implémentation de la température par compactification du temps euclidien) peut également être remise en cause au voisinage de la température de Hagedorn [BV89, MT87]. Par exemple, il est suggéré dans [BV89] que la température de Hagedorn soit une température limite d'un gaz de cordes ; en s'approchant de cette température, l'énergie se stocke dans les états d'enroulement non-nul au lieu d'être dans les états de moment non-nul (ou inversement) ; la théorie est alors identique à sa T-duale, et on obtient encore une température effective inférieure à la température de Hagedorn. Notons que des travaux récents proposent une méthode de résolution de cette singularité à l'aide de compactifications de Scherk-Schwarz effectuées sur des backgrounds d'orientifold de théories de Type II [AKPT08].

Nous avons donc accès à un formalisme dépourvu de divergences ultra-violettes (car supprimées dans le cadre de la théorie des supercordes), de divergences infra-rouges (en absence de tachyon). Nous allons maintenant utiliser ce formalisme pour générer des évolutions cosmologiques régies par les effets thermiques et de brisure de supersymétrie que nous considérons. Pour cela, nous considérons un modèle très simple d'évolution de l'univers : le modèle de Friedmann-Robertson-Walker. Nous examinerons, par des arguments généraux de supergravité, la structure des différents termes pouvant intervenir dans les corrections à une boucle, et les effets correspondants de la rétroaction sur les équations du mouvement. Nous esquisserons les contours du calcul du potentiel et les manières de générer les différents termes.

6.4 Cosmologie de Friedmann-Robertson-Walker

Notre but va être d'établir un contact entre les équations de supergravité corrigées à une boucle issues de nos modèles de cordes et des évolutions cosmologiques. Pour cela, nous allons considérer une des formes les plus simples de cosmologie : l'*univers de Friedmann-Robertson-Walker*. Notre présentation s'inspire de [KP08b].

Sous des hypothèses d'homogénéité et d'isotropie de l'univers, on montre que la métrique la plus générale décrivant une évolution cosmologique a la forme suivante :

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega_2^2 \right) \quad (6.18)$$

Dans cette expression, k est un paramètre donnant la courbure de l'univers ainsi construit, le *facteur d'échelle* $a(t)$ paramétrise la taille de l'univers, et $d\Omega_2^2$ est l'élément de surface de la sphère S^2 .

Ce modèle d'univers fait intervenir un seul paramètre dynamique qui est le facteur d'échelle ; il est donc possible d'obtenir, à partir de l'équation d'Einstein en présence de sources modélisées par un tenseur énergie-impulsion T^μ_ν , une action effective pour $a(t)$, dite action du *mini-super-espace*, et des équations du mouvement.

Si l'on applique les mêmes hypothèses d'homogénéité et d'isotropie aux sources de matière considérées comme des fluides parfaits, on montre que le tenseur d'énergie-impulsion se met sous la forme

$$T^\mu_\nu = \text{diag}(\rho(t), -p(t), -p(t), -p(t)) \quad (6.19)$$

où ρ est la densité d'énergie et p la pression du fluide. Si l'on définit la *constante de Hubble* $H = \dot{a}/a$, les équations d'Einstein donnent l'équation de Hubble

$$3H^2 = -\frac{3k}{a^2} + \rho \quad (6.20)$$

ainsi que l'équation

$$2\dot{H} + 3H^2 = -\frac{k}{a^2} - P. \quad (6.21)$$

L'action effective se dérive en introduisant un nouveau degré de liberté $N(t)$ (factice, car absorbable par une redéfinition du temps), et en considérant la métrique

$$ds^2 = N(t)^2 dt^2 - a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega_2^2 \right) \quad (6.22)$$

L'action [HH83]

$$S_{MSS} = -\frac{1}{6} \int dt a^3 \left(\frac{3}{N} H^2 - \frac{3kN}{a^2} - \frac{1}{2N} (\rho + P) + \frac{N}{2} (\rho - P) \right) \quad (6.23)$$

redonne alors, par variation respective des degrés de liberté N et a , les équations (6.20) et (6.21). Le degré de liberté N étant non-physique, ce système est en fait dégénéré, et il suffira de considérer une combinaison linéaire de ces deux équations ; on fixera également $N(t) = 1$.

Si on souhaite ajouter de nouveaux degrés de liberté à cette action, la prescription est la suivante : les termes cinétiques sont divisés par N , et les termes de potentiel sont multipliés par N . Dans le cas qui nous occupe, l'incorporation du dilaton se fait par le terme

$$-\frac{1}{6} \int dt N a^3 \left(-\frac{1}{2N} \dot{\Phi}^2 + NV \right) \quad (6.24)$$

Tel qu'on l'a introduit, le terme cinétique du dilaton est sous la forme $\int \sqrt{-g} (\partial\Phi)^2$. Nous verrons que le calcul cordiste ne renvoie pas automatiquement cette forme pour l'action effective : il faudra rescaler la métrique obtenue apparaissant canoniquement dans la théorie des cordes pour pouvoir procéder à une identification des actions effectives.

Lorsqu'on introduit dans l'action effective le terme (6.24), on obtient premièrement l'équation du mouvement pour le module Φ :

$$\ddot{\Phi} + 3H\dot{\Phi} = -\frac{\partial V}{\partial \Phi}. \quad (6.25)$$

De plus, les équations (6.20) et (6.21) sont modifiées ; par contre la redondance que nous avons signalée fait que nous n'avons qu'à considérer une combinaison linéaire de ces deux équations pour décrire la dynamique du système. La sommation de (6.20) et (6.21) fournit alors

$$\dot{H} + 3H^2 = -\frac{2k}{a^2} + \frac{1}{2}(\rho - P), \quad (6.26)$$

équation qui reste toujours valable en présence du dilaton Φ et d'une large classe d'autres modules, caractérisés par des termes cinétiques en $(1/2)\dot{\varphi}^2$ ou en $(1/2)e^{2\alpha\Phi}\dot{\varphi}^2$. Ces modules participent bien au contenu en énergie de l'univers (nous verrons que le terme d'énergie cinétique du dilaton permet de retrouver l'équation d'état usuelle pour la radiation), mais la considération de cette équation fait qu'ils ne modifient pas l'évolution du facteur d'échelle.

Nous allons maintenant procéder à la définition de notre modèle du côté de la supergravité. La forme du potentiel effectif et celle de l'action nous guideront pour établir le contact entre les deux approches, et modéliser correctement la rétroaction donnée par les effets thermiques et quantiques à une boucle sur la cosmologie FRW.

6.5 Forme des corrections thermiques et quantiques

Structure des corrections quantiques à la supergravité sans échelle

La structure du potentiel à une boucle dans une théorie où la supersymétrie est spontanément brisée s'écrit sous la forme générale suivante (voir par exemple [FKZ94] et les références associées)

$$V_{1\text{-boucle}} = V_0 + \frac{1}{64\pi^2} \text{Str} \mathcal{M}^0 \Lambda^4 \log \frac{\Lambda^2}{\mu^2} + \frac{1}{32\pi^2} \text{Str} \mathcal{M}^2 \Lambda^2 + \frac{1}{64\pi^2} \text{Str} \left(\mathcal{M}^4 \log \frac{\mathcal{M}^2}{\mu^2} \right) + \dots \quad (6.27)$$

Dans cette expression Str désigne la supertrace $\text{Str} \mathcal{M}^{2n} = \sum_i (-)^{2J_i} (2J_i + 1) m_i^{2n}$, obtenue en pondérant la trace classique par un facteur dépendant de l'hélicité de l'état. Λ est un cut-off ultra-violet, et μ l'échelle de renormalisation, soit l'échelle d'énergie à laquelle on se place pour

mesurer la valeur de notre potentiel. Dans le cadre de notre travail, il semble naturel de prendre $\mu \sim T$. “+ . . .” représente quant à lui la contribution de termes indépendants de l'échelle de cut-off Λ . Nous allons analyser ces différents termes, avant de les réaliser explicitement par le calcul du potentiel.

Évidemment, dans une théorie supersymétrique, le terme $\text{Str } \mathcal{M}^0$ est nul. Dans un modèle sans échelle, le terme constant V_0 est également nul. On montre aussi que le terme en $\text{Str } \mathcal{M}^2 \Lambda^2$, dans le cas de $\mathcal{N} = 2$ spontanément brisée, est proportionnel à la masse du gravitino :

$$\text{Str } \mathcal{M}^2 = Q M_{3/2}^2, \quad (6.28)$$

et qu'il s'annule identiquement dans le cas de $\mathcal{N} = 4$ spontanément brisée.

Il nous reste donc à considérer les contributions au potentiel effectif provenant du terme

$$\text{Str} \left(\mathcal{M}^4 \log \frac{\mathcal{M}}{T} \right). \quad (6.29)$$

En toute généralité, ce terme peut donner naissance à des contributions en $M_{3/2}^4$, $M_{3/2}^2$, ou des termes constants, “habillés” par des termes en $\log(M_{3/2}/T)$. On montre cependant que dans le cas où on considère la brisure spontanée d'une théorie à supersymétrie étendue $\mathcal{N} = 4$, la seule contribution est proportionnelle à $M_{3/2}^4$, où $M_{3/2}$ est la masse du gravitino (c'est-à-dire, l'échelle typique de brisure de supersymétrie).

Forme du potentiel effectif

Nous n'effectuerons pas le calcul explicite, qui est détaillé dans [CJKPT08b]. Nous allons par contre détailler et justifier les hypothèses physiques adoptées.

Nous supposons en premier lieu que la variété de compactification se décompose en $S^1 \times T^5$, où le cercle S^1 est de rayon R_5 . Initialement, tous les données géométriques de la compactification sont des modules, c'est-à-dire des directions plates du potentiel. La correction à une boucle va générer un potentiel effectif levant la dégénérescence sur une combinaison de ces modules, que l'on va rendre cosmologique, et générant des contributions exponentiellement petites pour les autres modules. On est naturellement amenés à considérer que les modules non cosmologiques sont de taille comparable à l'échelle des cordes. Dans ce cas-là, la dépendance du potentiel en ces modules est exponentiellement petite, et ils peuvent être considérés comme constants.

On a vu que l'énergie des états de nombre d'enroulement non nul autour d'une dimension de rayon R comporte un terme proportionnel à R . Dans notre cas, pour un rayon R grand devant les autres énergies mises en jeu, on va donc négliger les contributions des nombres d'enroulement impairs. Il se trouve que les nombres d'enroulement pairs peuvent être pris en compte de la manière suivante. Notre point de départ est de décomposer la forme lagrangienne² du réseau $\Gamma_{1,1}$ selon la parité des nombres quantiques \tilde{m}, n :

$$\Gamma_{1,1} = \sum_{h,g=0}^1 \Gamma_{1,1}^{[h]} = \sum_{h,g=0}^1 \frac{R}{\sqrt{\tau_2}} \sum_{\tilde{m},n \in \mathbb{Z}} \exp \left[-\frac{\pi R^2}{\tau_2} |(2\tilde{m} + g) + (2n + h)\tau|^2 \right]. \quad (6.30)$$

2. Pour suivre les notations de [CJKPT08b], nous prenons ici $\alpha' = 1$.

Alors, en négligeant les nombres d'enroulement impairs, il vient

$$\Gamma_{1,1} = \Gamma_{1,1}^{[0]} + \Gamma_{1,1}^{[1]} \quad (6.31)$$

Comme $\Gamma_{1,1}^{[0]} = (1/2)\Gamma_{1,1}(2R)$, on a exprimé $\Gamma_{1,1}^{[1]}$ en termes de quantités invariantes modulaires. Ceci va nous permettre d'effectuer l'intégration de la fonction de partition sur le domaine fondamental de $PSL(2, \mathbb{Z})$ noté F , par la méthode suivante [DKL91].

On souhaite intégrer une quantité invariante modulaire de la forme $\sum_{m_1, n_1, m_2, n_2 \in \mathbb{Z}^4} f(m_1, n_1, m_2, n_2)$ sur le domaine fondamental F de $PSL(2, \mathbb{Z})$. L'ensemble des images de (m_1, n_1, m_2, n_2) par les transformations du groupe modulaire définit une orbite \mathcal{O} , dont on peut choisir un représentant $(m_1, n_1, m_2, n_2)_{\mathcal{O}}$

On peut maintenant écrire

$$\int_F \sum_{(m_1, n_1, m_2, n_2) \in \mathbb{Z}^4} f((m_1, n_1, m_2, n_2)) = \int_F \sum_{\mathcal{O}} \sum_{(m_1, n_1, m_2, n_2) \in \mathcal{O}} f((m_1, n_1, m_2, n_2)) \quad (6.32)$$

$$= \int_{\Sigma F} \sum_{\mathcal{O}} f((m_1, n_1, m_2, n_2)_{\mathcal{O}}), \quad (6.33)$$

où ΣF est l'union de toutes les images de F par le groupe modulaire. Dans le cas d'un réseau bidimensionnel, la forme des transformations :

$$\tau \rightarrow \tau + 1 \Rightarrow (m_1, n_1, m_2, n_2) \rightarrow (m_1 + n_1, n_1, m_2 + n_2, n_2) \quad (6.34)$$

$$\tau \rightarrow -1/\tau \Rightarrow (m_1, n_1, m_2, n_2) \rightarrow (-n_1, m_1, -n_2, m_2)$$

donne trois classes d'orbites : l'orbite $\{(0, 0, 0, 0)\}$, les orbites dégénérées \mathcal{O}_{m_1, m_2} , $(m_1, m_2) \in (\mathbb{Z}^2)^*$, dont un représentant est $(m_1, 0, m_2, 0)$; et enfin les orbites non dégénérées $\tilde{\mathcal{O}}$, dont les éléments vérifient $m_1 n_1 + m_2 n_2 \neq 0$.

On a $\Sigma F = 2 \times H$, la double couverture de H , le demi-plan $\text{Im } \tau > 0$. En fait, on peut ramener l'intégration sur $\text{Re } \tau \in \mathbb{R}$ à $\text{Re } \tau \in [-1/2, 1/2]$.

Si on note \parallel la bande $\{\tau \mid |\text{Re } \tau| < 1/2, \text{Im } \tau > 0\}$, on a alors ($\sum_{\tilde{\mathcal{O}}}$ balaye les orbites non-dégénérées) :

$$\int_F \frac{d^2 \tau}{\tau_2} \sum_{m_1, n_1, m_2, n_2 \in \mathbb{Z}} f((m_1, n_1, m_2, n_2)) = 2 \int_{\parallel} \frac{d^2 \tau}{\tau_2} \left[\sum_{m_1, m_2 \in \mathbb{Z}^2} f(m_1, 0, m_2, 0) + \sum_{\tilde{\mathcal{O}}} f((m_1, n_1, m_2, n_2)_{\tilde{\mathcal{O}}}) \right] \quad (6.35)$$

Pour le modèle que nous considérons, les termes correspondant à une orbite non-dégénérée impliquent, par *level-matching*, que l'état de corde associé comporte au moins une excitation d'oscillateur. Sa masse est donc de l'ordre de l'échelle de cordes, et nous pouvons négliger cet état. On ne va donc sommer que sur les orbites dégénérées. On trouve ainsi que dans l'intégrale donnant le potentiel à une boucle, on peut remplacer le réseau

$$\Gamma_{1,1}^{[0]}(R_0) \Gamma_{1,1}^{[0]}(R_5)$$

par

$$2 \frac{R_0 R_5}{\tau_2} \sum_{\tilde{m}_0, \tilde{m}_5} \exp \left[-\frac{\pi}{\sqrt{\tau_2}} ((2\tilde{m}_0 + g_0)^2 R_0^2 + (2\tilde{m}_5 + g_5)^2 R_5^2) \right].$$

Dans le cadre de nos approximations l'égalité $\Gamma_{1,1}^{[0]} = \Gamma_{1,1}(R) - (1/2)\Gamma_{1,1}(2R)$ montre que la contribution $\tilde{m} = n = 0$ s'annule donc identiquement, et l'orbite $\{(0, 0, 0, 0)\}$ est donc absente de la fonction de partition. Ceci annule la divergence infra-rouge qui découle normalement de la contribution de cette orbite (voir [DKL91]); la raison physique sous-jacente est que ce secteur est supersymétrique.

Nous traitons ensuite la partie fermionique de la fonction de partition. La brisure spontanée s'effectue, en suivant la section 4.3, en couplant les dimensions R_0 et R_5 à des R -charges a , $a + Q_5$. L'utilisation de la formule de sommation de Jacobi³ nous conduit alors à l'expression suivante :

$$Z = -\frac{V_5}{(2\pi)^5} \int_F \frac{d^2\tau}{\tau_2^{7/2}} \sum_{h_0, g_0, h_5, g_5=0}^1 (-)^{h_0+h_5+g_0+g_5} \Gamma_{1,1}^{[h_0]}(R_0) \Gamma_{1,1}^{[h_5]}(R_5) \frac{\vartheta \left[\begin{smallmatrix} 1+h_0+h_5 \\ 1+g_0+g_5 \end{smallmatrix} \right]^4}{\eta^{12} \bar{\eta}^{24}} \times \Gamma_{4,20}. \quad (6.36)$$

Cette forme implique alors que, si les compactifications de Scherk-Schwarz selon R_0 et R_5 brisent spontanément la supersymétrie, on ne doit garder que les composantes de la somme pour lesquelles $g_0 + g_5 = 1$ (toujours dans l'approximation des nombres d'enroulement pairs). Sous ces hypothèses, la présence du terme en ϑ_2^4 du côté gauche de la fonction de partition implique que celui-ci ne contient que des états de masse carrée positive. Les tachyons potentiels sont en effet détruits par la projection GSO, qui n'est pas altérée dans le cas de nombres d'enroulement pairs. Par level-matching, le spectre sera donc non-tachyonique⁴. Un développement en $\text{Im } \tau \rightarrow \infty$ permet alors d'isoler la contribution des états de masse petite devant l'échelle de corde.

La sommation sur $g_0 + g_5 = 1$ comprend deux termes : $(g_0, g_5) = (1, 0)$ et $(0, 1)$. Lorsque $g = 0$, le bloc correspondant de la fonction de partition ne prend en compte que les enroulements et les moments pairs, de sorte que le cocycle introduit dans le but de briser la supersymétrie est en fait trivial. On en déduit que, dans les différentes contributions au potentiel effectif, seules les dimensions sur lesquelles $g = 1$ participent à la brisure; les autres sont "spectatrices". Dans le cas de deux dimensions, les deux termes correspondent à la brisure par chacune des deux dimensions, tandis que l'autre reste spectatrice. Si $Q_5 = 0$, on a donc une dualité $T \leftrightarrow M_{3/2}$ au niveau de la fonction de partition. Cette dualité pousse à considérer l'ansatz suivant pour la cosmologie : $M_{3/2}(t) \sim 1/a(t)$, ou encore $M_{3/2}/T = \text{cste}$. Il est en fait montré dans [AK87] que cette trajectoire est un attracteur. Une partie du travail effectué dans [CJKPT08b] consistera à déterminer sous quelles hypothèses un tel ansatz est valide.

La dualité $T \leftrightarrow M$ est brisée quand $Q_5 \neq 0$: les contributions des différents états sont alors pondérées par $(-)^{Q_5}$. On sait que les états acquérant une masse sont ceux pour lesquels $a + Q_5 = 1$: pour $Q_5 = 1$, les bosons deviennent massifs, alors que les fermions restent sans

3. Voir l'appendice A, équation (A.17).

4. Au voisinage de la température d'Hagedorn, il n'est plus consistant de négliger les nombres d'enroulement impairs, et des tachyons apparaissent dans le spectre.

masse. Les calculs explicites montrent alors que le potentiel effectif se décompose comme la somme de ses contributions venant des différents états du spectre, pondérée par le facteur $(-)^{Q_5}$. Il est en fait possible d'aller plus loin. Si on note $n_T = \sum_s 1$ le nombre de paires boson-fermion de la théorie, et

$$n_V = \sum_s (-)^{Q_5}, \quad (6.37)$$

le potentiel effectif se décompose en deux termes ; le premier est proportionnel à n_T et correspond à la brisure par la température (la R -charge associée à la température est forcément a), tandis que le second est proportionnel à n_V , et correspond à la brisure par la dimension X^5 . Toute la dépendance en Q_5 est alors concentrée dans n_V (voir l'équation (3.9) de [CJKPT08b]), de sorte que la condition de validité de l'ansatz, que nous traiterons plus bas, va en fait se traduire par une condition sur le paramètre

$$n \equiv \frac{n_V}{n_T} \in [-1, 1]. \quad (6.38)$$

Rescaling du potentiel et définition du paramètre sans échelle ; identification avec le dilaton

Le potentiel à une boucle calculé grâce à la fonction de partition de la théorie des cordes corrige l'action effective donnée, dans le *repère de cordes*, par

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[e^{-2\phi} \left(\frac{1}{2}R + 2 \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \dots \right) - V_{\text{string}} \right] \quad (6.39)$$

On remarque le terme $e^{-2\phi}$, qui vient du développement perturbatif en nombre de boucles. Une telle forme de l'action signale que nous nous sommes placés dans le *repère de cordes*, dans lequel les champs sont ceux apparaissant dans le modèle-sigma de la théorie des cordes, ou encore correspondant aux vertex. Le potentiel effectif V_{string} apparaissant à l'ordre d'une boucle, il ne comporte donc pas de préfacteur fonction du dilaton (voir la figure 3.2).

Pour comparer cette action à celle du mini-superspace que nous avons détaillée dans la section précédente, il faut passer dans le *repère d'Einstein*, dans lequel le terme cinétique de la métrique est découplé du dilaton. On applique donc une transformation conforme sur la métrique en posant $\tilde{g}_{\mu\nu} = e^{-2\phi} g_{\mu\nu}$, ce qui élimine le préfacteur $e^{-2\phi}$. On trouve alors que la normalisation du potentiel est changée :

$$V_{\text{Einstein}} = \frac{1}{s^2} V_{\text{string}} \quad (6.40)$$

où $s = e^{-2\phi}$. Ce facteur supplémentaire sera crucial car il fera apparaître de manière naturelle le module sans échelle dans l'expression du potentiel.

Dans ce repère, l'action de supergravité se met sous la forme

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2}R + g^{\mu\nu} K_{i\bar{j}} \partial_\mu \Phi_I \partial_\nu \bar{\Phi}_{\bar{j}} - V_{\text{Einstein}} \right) \quad (6.41)$$

La brisure de supersymétrie que nous avons mise en place est générée par un 2-tore correspondant aux coordonnées R_0 et R_5 . Ceci définit deux modules complexes, T et U , tels que $t \equiv \text{Re } T = R_0 R_5$ et $u \equiv \text{Re } U = R_0/R_5$. De plus, on inclut le doublet dilaton-axion S , dont la partie réelle

$s \equiv \text{Re } S$ apparaît explicitement dans le potentiel dans le repère d'Einstein. Le potentiel de Kähler associé à ces modules s'écrit comme

$$K = -\log(S + \bar{S}) - \log(T + \bar{T}) - \log(U + \bar{U}). \quad (6.42)$$

Nos modèles supposent que $u = \text{cste}$. Dans ce cas, on remarque que le potentiel à une boucle dans le repère d'Einstein ne dépend que de la combinaison stu , et que la masse du gravitino dans le repère d'Einstein est donnée par $M_{3/2}^2 = (stu)^{-1}$. Cette masse réalise l'expression de la masse du gravitino introduite en (4.76). Il est donc consistant de considérer que s , t et u évoluent proportionnellement, les autres directions restant plates à une boucle. On pose donc $(\text{Re } Z)^3 \equiv z^3 = stu$ comme étant le seul paramètre ayant une dynamique non-triviale. Le potentiel de Kähler devient

$$K = -3\log(Z + \bar{Z}) \quad (6.43)$$

et a la forme sans échelle voulue. La masse du gravitino, qui vaut $M_{3/2} = |W| e^{\frac{G}{2}}$, où le superpotentiel W est ici constant (les autres modules de compactification étant fixés), est proportionnelle à $(\text{Re } z)^{-3}$. Lorsqu'on pose

$$M_{3/2} = e^{\alpha\Phi}, \quad (6.44)$$

le terme cinétique du module sans échelle est bien en proportionnel à $(\partial\Phi)^2$. Pour faire contact entre la théorie effective de supergravité et les évolutions cosmologiques présentées, on identifie alors le module sans échelle au dilaton. Cette identification est guidée par le fait que ces deux champs couplent à la trace du tenseur énergie-impulsion. Dans le cas de la brisure par la température et par une dimension interne, le coefficient α vaut $\sqrt{3/2}$. Nous verrons que cette égalité est modifiée lorsque l'on considère la brisure par un second rayon interne.

Génération de termes de courbure et de constante cosmologique

Nous avons vu précédemment que dans le cadre de $\mathcal{N} = 4$ spontanément brisée, le seul terme susceptible d'apparaître à une boucle varie comme $M_{3/2}^4$, soit en $1/a^4$. Sa rétroaction sur les équations de FRW prend donc la forme d'un terme de radiation. Vu la structure des corrections à une boucle donnée en (6.27), il est théoriquement possible de générer des termes en $1/a^2$, et des termes constants. Nous allons commencer par donner la marche à suivre pour générer les termes de courbure.

Dans [CJKPT08b], nous commençons par explicitement briser cette supersymétrie en compactifiant sur l'orbifold $T^4/\mathbb{Z}_2 \times T^2$. On peut ensuite considérer de petites déformations dans le spectre de masse de la théorie par l'addition de lignes de Wilson, telles qu'on les a introduites dans la section 4.1.1. Les différents états de la théorie sont chargés sous les lignes de Wilson considérées, et leur spectre de masse va être modifié. *Dans la formulation hamiltonienne*, les nombres quantiques m_I , où $I = 5 \dots 10$, vont être modifiés en $m_I + Q_a y_I^a$, où Q^a est la charge de l'état considéré sous la ligne de Wilson y_I^a . Souvenons-nous que, pour qu'il soit consistant de considérer les lignes de Wilson constantes, l'indice a est restreint à la sous-algèbre de Cartan du groupe de jauge de la théorie. Il faut maintenant prendre en compte le shift des masses

de l'états d'enroulement $(m_I, n_I) = (0, 0)$ sur les R_I , $I = 6, \dots, 10$, qui donne une contribution exponentielle

$$\Gamma_{5,5}(R_I) \simeq e^{-\pi\tau_2 \sum_I (Q_a y_I^a)^2 / R_I^2}. \quad (6.45)$$

Les termes du réseau tels que $(m_I, n_I) \neq (0, 0)$ sont quant à eux exponentiellement petits. Le développement de cette exponentielle à un ou deux ordres en $M_Y^2 = \sum_I (Q_a y_I^a)^2 / R_I^2$ va générer des termes en $M_{3/2}^2 M_Y^2$, M_Y^4 .

Nous avons décidé dans [CJKPT08b] de générer des termes spécifiques $\mathcal{N} = 2$ en brisant d'abord explicitement la supersymétrie en $\mathcal{N} = 2$ au moyen d'une compactification sur un orbifold T^4/\mathbb{Z}_2 . Une telle démarche est légitime et pose clairement l'hypothèse $\mathcal{N} = 2$; elle n'est par contre pas indispensable. En effet, comme on l'a vu dans la section 4.4, la considération de valeurs moyennes dans le vide non-nulles pour les lignes de Wilson brise en fait la supersymétrie, car elle brise spontanément l'algèbre de R -symétrie $SO(6) \sim SU(4)$ donnée par les 6 coordonnées internes X^I , $I = 5 \dots 10$.

Les deux contributions au potentiel effectif correspondant respectivement à la brisure par la température et par la dimension X^5 vont avoir, au premier ordre en les lignes de Wilson, des termes respectifs en $T^2 M_Y^2$ et $M_{3/2}^2 M_Y^2$. Comme dans le cas des termes en $1/a^4$, ces termes sont en fait respectivement de la forme $T^2 M_T^2$ et $M_{3/2}^2 M_V^{(2)}$, où la charge Q_5 pondère la somme dans le cas de la brisure par la dimension spatiale :

$$M_T^2(y) = \sum_{I=6}^{10} \frac{1}{4\pi R_I^2} \sum_s (y_I^a Q_a^s)^2 \quad (6.46)$$

$$M_V^{(2)}(y) = \sum_{I=6}^{10} \frac{1}{4\pi R_I^2} \sum_s (-)^{Q_5} (y_I^a Q_a^s)^2 \quad (6.47)$$

L'ajustement de la charge Q_5 permettra ici aussi de générer des rétroactions ayant la forme d'un terme de courbure positif ou négatif.

La possible génération d'un terme de constante cosmologique ne peut se faire que dans le cas d'une structure $\mathcal{N} = 1$ spontanément brisée. Cette fois, il n'est plus possible de commencer par briser explicitement la supersymétrie $\mathcal{N} = 4 \rightarrow \mathcal{N} = 1$ préalablement à l'introduction de lignes de Wilson : en effet, une telle démarche suppose une compactification sur $T^6/\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, ce qui fait disparaître, dans le secteur twisté, la dépendance en les rayons internes, et donc en la masse du gravitino. Ceci ne permet donc pas de réaliser les termes spécifiques $\mathcal{N} = 1$ issus de la quantité $\text{Str}(\mathcal{M}^4 \log(\mathcal{M}/T))$. Il faut donc adopter une autre approche.

L'étude des théories de supergravité nous indique que la structure $\mathcal{N} = 1$ est atteinte dès que le coset $\mathcal{N} = 2$, qui fait apparaître la R -symétrie $SU(2)$ (voir la section 4.4), est brisé en un coset $\mathcal{N} = 1$. Dans une configuration de lignes de Wilson où cette brisure est effectivement réalisée, la constante cosmologique se calculera en poussant le développement de l'exponentielle (6.45) à l'ordre y^4 , puis en effectuant l'intégration sur $\|$.

6.6 Consistance de l'ansatz $M_{3/2} \propto T$

Même s'il est dicté par des considérations dimensionnelles, et par le résultat de [AK87] qui montre que cette trajectoire est un attracteur, l'ansatz $M_{3/2} = uT$, où u est une constante, n'est pas toujours vérifié. C'est pourtant sous cette hypothèse que le potentiel que nous avons calculé prend, en l'absence de lignes de Wilson, une forme de radiation en $1/a(t)^4$. L'hypothèse $M_{3/2} \propto 1/a(t)$, couplée à la relation (6.44), implique que H et $\dot{\Phi}$ sont proportionnelles. Ceci implique que l'équation d'évolution cosmologique (6.26) et l'équation d'évolution du dilaton (6.25) doivent être proportionnelles. En identifiant les termes quartiques, on trouve que l'équation d'état du contenu effectif en radiation de notre univers (soit les termes de la pression et de la densité d'énergie qui se comportent en $1/a^4$) doit vérifier l'équation d'état

$$\rho_4 = \frac{6\alpha^2 - 1}{2\alpha^2 - 1} p_4. \quad (6.48)$$

En injectant $\alpha = \sqrt{3/2}$ on trouve $\rho_4 = 4p_4$. On trouve donc que notre contenu purement radiatif vérifie bien l'équation d'état de la radiation, *mais à cinq dimensions*. Ceci est dû au fait que les états de moment non nuls suivant la direction X^5 sont pris en compte dans le calcul du potentiel. L'étude de [CJKPT08b] donne alors une condition sur les schémas de brisure de supersymétrie pour qu'il existe une constante u vérifiant cette propriété.

Une telle forme semble problématique dans notre modélisation : un contenu en radiation classique dans un univers à quatre dimensions doit vérifier l'équation d'état usuelle $\rho = 3p$. C'est en fait le cas, une fois que l'on prend en compte la contribution à ces deux quantités du terme cinétique du dilaton. Cette incorporation du dilaton en tant que terme de radiation est légitime : il se comporte en effet, dans le contexte de validité de notre modèle, en T^4 .

La discussion de l'existence d'une solution à l'équation d'état $\rho = 4p$ est effectuée numériquement dans [CJKPT08b]. On trouve la condition $-0.0666 \lesssim n_V/n_T < 0$. Dans cet intervalle, la constante $u_c = M_{3/2}/T$ est fonction de n (défini en (6.38)). Il est en fait possible de ré-absorber la dépendance en n_T et en n_V dans une redéfinition de la température T et de la masse de brisure de supersymétrie $M_{3/2}$. La condition (6.48) peut en effet se réécrire sous la forme

$$n_T T^4 f(u) + n_V M_{3/2}^4 \tilde{f}(u) = 0 \quad (6.49)$$

Les équations régissant l'évolution étant logarithmiques en T et $M_{3/2}$, elles sont invariantes sous la redéfinition

$$n_T T^4 \equiv \hat{T}^4, \quad \frac{|n_V|}{n_c} M_{3/2}^4 \equiv \hat{M}_{3/2}^4 \quad (6.50)$$

L'équation devient

$$\hat{T}^4 f(\hat{u}) + \text{signe}(n) n_c \hat{M}_{3/2}^4 \tilde{f}(\hat{u}) = 0 \quad (6.51)$$

On montre alors premièrement que cette équation admet des solutions si $\text{signe}(n) < 0$, et, comme signalé, pour $n_c \lesssim 0.0666$.

On réduit alors en

$$\hat{T}^4 f(\hat{u}) - n_c \hat{M}_{3/2}^4 \tilde{f}(\hat{u}) = 0 \quad (6.52)$$

Si on trouve une solution $\hat{u} = \hat{u}_0$, comme

$$\hat{u}_0 = \frac{\hat{M}_{3/2}}{\hat{T}} = \left(\frac{|n_V|}{n_T} \right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{n_c^{1/4}} \frac{M_{3/2}}{T} \quad (6.53)$$

on a la relation $|n|^{1/4} \cdot u = \text{cste}$ ce qui implique bien que n se comporte en u^{-4} . Ce comportement est bien reproduit numériquement, dans le domaine d'existence de solutions (voir la forme de la Figure 1 de [CJKPT08b]).

En présence de termes de courbure et de constante cosmologique, l'identification des équations (6.26) et (6.25) implique l'identification de tous les monômes du second terme. L'identification des termes quadratiques (en $a(t)^{-2}$) ne pose pas de nouvelle condition sur le système et redéfinit la courbure effective de l'espace. L'ajout de termes indépendants de $a(t)$ pose par contre problème dans le cadre de l'article [CJKPT08b]. En effet, à la condition

$$\rho_4 = \frac{6\alpha^2 - 1}{2\alpha^2 - 1} p_4 \quad (6.54)$$

qui fixe u , on doit maintenant ajouter la condition sur les termes constants

$$\rho_0 = \frac{1 + 2\alpha^2}{1 - 2\alpha^2} p_0. \quad (6.55)$$

Remarque sur le régime de validité du modèle

Nous avons construit une évolution cosmologique dans laquelle la température et la masse typique de brisure symétrique, qui se comporte comme l'inverse de la taille typique d'une dimension interne de l'espace, sont proportionnels. En particulier, si ce modèle était valide pour un univers assez vieux, la dimension qui participe à la brisure devrait décompactifier, et la masse supersymétrique tendre vers zéro. Un tel comportement serait loin d'être réaliste. Nous allons cependant voir que ce n'est pas le cas.

Pour cela, l'exemple le plus simple est de considérer la brisure de symétrie électro-faible $SU(2)_L \times U(1)_Y \rightarrow U(1)_{em}$, effectuée par le boson de Higgs. Nous allons voir que cette brisure est générée par des corrections radiatives venant des partenaires supersymétriques [KLNQ82, KLNQ84]. À haute énergie, le groupe de jauge électro-faible est préservé : la masse effective du Higgs (*ie* la dérivée seconde à l'origine) est strictement positive, de sorte que $\langle H \rangle = 0$ est une configuration stable. Toutefois, cette masse est modifiée par les équations du groupe de renormalisation. Les contributions des termes de brisure douce de la supergravité attirent la masse carrée du Higgs vers des valeurs négatives : à l'échelle de *transmutation*, la solution $\langle H \rangle = 0$ est déstabilisée, et le Higgs acquiert une valeur dans le vide non-triviale, ce qui brise la jauge. La contribution des termes de brisure douce est prépondérante : si la masse du Higgs reste nulle lorsqu'on passe en dessous de M_{SUSY} , la brisure n'aura pas lieu. Ainsi, on voit que l'échelle de brisure de la symétrie électro-faible est de l'ordre de la masse du Higgs.

Dans le cas qui nous occupe, ceci implique que lorsqu'on descend en dessous de la masse électro-faible, l'excitation du Higgs est à prendre en compte, ce qui rend invalide l'hypothèse

selon laquelle P et ρ ne dépendent que de T et des échelles M_i . On montre alors que l'apparition de cette nouvelle échelle stabilise en fait la masse du gravitino à l'échelle de brisure électro-faible ; le module sans échelle est donc finalement stabilisé.

D'autre part, nous avons systématiquement gelé les dimensions ne brisant pas la supersymétrie à une valeur de l'ordre de l'échelle de corde. Cette hypothèse de stabilisation de modules de la théorie mérite quelques précisions. Deux cas sont à analyser : selon l'expression de la R -charge que l'on utilise pour briser spontanément la supersymétrie, nous avons signalé que la brisure donne une masse soit aux bosons, soit aux fermions. Par exemple, si la R -charge considérée est $a + H$, où H est le paramètre de twist d'un orbifold \mathbb{Z}_2 , les fermions du secteur non-twisté et les bosons du secteur twisté acquerront une masse.

Le cas des modules twistés est réglé par le potentiel effectif généré à une boucle en théorie des cordes : en effet, les termes correspondants sont positifs, ce qui induit au voisinage de zéro une masse positive pour les modules ne participant pas à la brisure de supersymétrie. Dans le cas des modules du secteur non-twisté, qui comprend les modules géométriques, la stabilisation des modules de structure complexe est assurée par la présence de termes de brisure douce (refs.) ; le module de Kähler reste quant à lui plat au niveau de la supergravité, et reçoit un potentiel de type *runaway* à une boucle en théorie des cordes toujours sous l'hypothèse sans échelle. Sa stabilisation radiative intervient à l'échelle de brisure électro-faible, comme détaillé ci-dessus.

Un traitement assez complet des termes de brisure douce peut être trouvé dans [FKZ94, Pav95], et des rappels sont effectués dans [CJKPT09]. Il y est entre autres montré que pour les modules ne participant pas à la brisure de supersymétrie, le terme de masse généré est positif et proportionnel à $M_{3/2}$, tandis que les modules de type sans échelle restent plats.

6.7 Forme des cosmologies effectives obtenues

Nous résumons ici très succinctement les résultats obtenus dans [CJKPT08b], ainsi que dans [KP08a, KP08b], concernant les formes de cosmologie accessibles par les modèles que nous avons détaillés. Le cas d'un terme de radiation négatif, théoriquement possible, n'ayant pas été explicitement réalisé dans nos travaux, nous renvoyons aux références ci-dessus pour ses conséquences cosmologiques. Nous nous intéressons aux univers, plats ou de type de Sitter, déformés par une rétroaction comprenant des termes de radiation positifs, ainsi qu'un terme de courbure de signe arbitraire, et une contribution en $1/a^6$ venant de la considération de modules sur la couche de masse. On rappelle que tous les résultats exposés dans les sections précédentes restent valables en présence de tels modules.

On trouve ainsi, selon le signe de la courbure effective fournie par l'allumage de lignes de Wilson, un univers en éternelle expansion dans le cas d'une courbure négative, avec une croissance du facteur d'échelle linéaire dans le temps pour un univers assez vieux ; et un univers se terminant dans un *big crunch* dans le cas d'une courbure positive. Le cas limite de courbure nulle fournit un univers en expansion infinie, avec, pour un univers assez vieux, $a(t) \propto \sqrt{t}$. N'oublions pas toutefois que le champ d'application de notre théorie ne concerne ni l'univers très jeune, ni les univers trop vieux (auquel cas l'hypothèse sans échelle est mise en défaut et la masse du gravitino est stabilisée). Dans le premier cas, on se rapproche en effet de la température de Hagedorn, à laquelle il convient de prendre en compte les états d'enroulement non-nul. La

physique au voisinage de cet espace est mal connue : une transition de phase peut avoir lieu (ref.) ; de plus, au voisinage du point fixe de la T-dualité selon la direction temporelle $\beta \leftrightarrow 1/\beta$, la notion même d'espace-temps est remise en cause, et il n'est plus question de parler d'effets thermiques tels qu'on les envisage normalement. Cette singularité pourrait toutefois être évitée dans une classe de modèles construits récemment, par l'allumage de flux géométriques (qui ne sont autres que des compactifications de Scherk-Schwarz) [AKPT08].

Enfin, pour un univers vieux, la masse supersymétrique se stabilise à la valeur du Higgs ; de plus la matière découple de la radiation, et on passe vers la phase d'expansion actuelle de l'univers, dominée par la matière.

6.8 Extension à deux directions de brisure, et stabilisation du module de structure complexe

Dans cette section, nous allons présenter la généralisation de ce modèle développée dans [CJKPT09]. Dans ce travail, nous considérons la brisure de supersymétrie selon deux directions internes, de rayons respectifs R_4 et R_5 . Mus par une analogie avec le cas d'un seul rayon, nous définissons les modules T et U sous la forme

$$u = \frac{R_0}{\sqrt{R_4 R_5}}, \quad \text{Re } T_1 \equiv \mathcal{T} = \sqrt{R_4 R_5}, \quad \text{Re } U_1 \equiv \mathcal{U} = \frac{R_5}{R_4}. \quad (6.56)$$

Le module u sera fixé, comme précédemment, par la consistance de notre modèle ; le module \mathcal{T} aura une évolution cosmologique similaire à celle qu'avait R_5 dans la section précédente. La nouveauté réside donc dans l'apparition du module \mathcal{U} . Nous allons voir qu'il ne participe pas à la définition du module sans échelle et à l'évolution de l'échelle de brisure de supersymétrie ; par contre, au contraire des modules spectateurs de la théorie, il apparaît dans le potentiel à une boucle dans des termes qui ne sont pas, comme précédemment, exponentiellement petits.

Sa dynamique est donc déterminée par le potentiel à une boucle ; notre but sera de donner des conditions sur les modèles construits permettant la stabilisation de \mathcal{U} . En effet, s'il n'existe pas d'état (méta-)stable pour \mathcal{U} , on obtient un comportement de type *runaway*, dans lequel \mathcal{U} est attiré soit vers 0, soit vers $+\infty$. Dans ces cas-là, un des deux rayons se replie à une échelle de l'ordre de l'échelle de cordes, et on est ramenés au mécanisme développé dans la section précédente : la hiérarchie entre le rayon participant à la brisure et les dimensions repliées à l'échelle de cordes font que les états de Kaluza-Klein sur ces dernières dimensions sont exponentiellement supprimés ; la brisure de supersymétrie est donc perdue et un des deux rayons devient spectateur. La pertinence de cette généralisation nécessite donc la stabilisation de \mathcal{U} .

Plus généralement, cette extension pose la problématique de la prise en compte de modules supplémentaires dans le mécanisme de Super-Higgs. Nous avons vu précédemment que la supersymétrie fait apparaître pour les modules ne rentrant pas en compte dans l'expression de la masse du gravitino des termes de masse (positifs) de l'ordre de $M_{3/2}$. Ces modules sont donc automatiquement stabilisés. Toutefois, la situation se complique pour les modules participant à la brisure : en effet, dans ce cas-là, le poids conforme λ est non-nul, et les termes de brisure douce ne prennent pas nécessairement la forme d'un terme de masse. Par exemple, dans le cas des trois modules S, T, U du mécanisme à un seul rayon, $\lambda = -1$ et le terme de brisure douce

est identiquement nul. Il nous faut donc aller chercher des corrections issues de la théorie des cordes pour procéder à une éventuelle stabilisation de ces modules supplémentaires.

Beaucoup d'aspects du modèle à deux rayons sont similaires au cas comportant une brisure selon un seul rayon ; nous allons passer en revue les principales différences entre les deux mécanismes mis en œuvre.

Un premier point vient de la structure de la supergravité sous-jacente. Le calcul du potentiel effectif dans le repère d'Einstein montre que le potentiel effectif est de la forme

$$V_{\text{Einstein}}(u, S, \mathcal{T}, \mathcal{U}) = \frac{1}{(\text{Re } S)^2 \mathcal{T}^2} f(u, \mathcal{U}) \quad (6.57)$$

ce qui implique, à u et \mathcal{U} fixés, qu'en notant $s = \text{Re } S$, la dégénérescence issue de la structure sans échelle est levée pour la direction $(s\mathcal{T})$.

La fonction de Kähler pour les trois modules $S, \mathcal{T}, \mathcal{U}$ conduit au lagrangien suivant :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}R - \frac{1}{4} \left(\frac{\partial s}{s} \right)^2 - \frac{1}{4} \left(\frac{\partial \mathcal{T}}{\mathcal{T}} \right)^2 - \frac{1}{4} \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\mathcal{U}} \right)^2 - V_{\text{Einstein}}(s\mathcal{T}, u, \mathcal{U}) \quad (6.58)$$

En définissant $\sqrt{2} \phi_{s, \mathcal{T}, \mathcal{U}} = \log(s, \mathcal{T}, \mathcal{U})$, le terme cinétique devient, par rotation orthonormale sur les ϕ

$$- \frac{1}{2}(\partial\Phi)^2 - \frac{1}{2}(\partial\Phi')^2 - \frac{1}{2}(\partial\phi_{\mathcal{U}})^2 \quad (6.59)$$

où

$$\Phi = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_s + \phi_{\mathcal{T}}), \quad \Phi' = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_s - \phi_{\mathcal{T}}) \quad (6.60)$$

La forme du potentiel effectif montre qu'il est consistant de geler Φ' , et $\phi_{\mathcal{U}}$ sous réserve de l'existence d'un extremum en \mathcal{U} . La normalisation du terme cinétique de Φ l'identifie naturellement au dilaton physique. On a $e^{2\Phi} = 1/s\mathcal{T} \propto M_{3/2}^2$, de sorte que, dans les notations de la section précédente $\alpha = 1$. La contrainte de consistence (6.48) entre les équations de supergravité et les équations d'Einstein donne dans ce cas l'équation d'état $\rho_4 = 5p_4$, qui correspond sans surprise à un contenu radiatif dans un espace-temps à six dimensions. Là encore, cette équation d'état, qui ne correspond pas à un contenu radiatif dans un univers quadri-dimensionnel, sera "rectifiée" par la prise en compte du terme cinétique du dilaton.

Ce schéma étant fixé, nous construisons plusieurs modèles de supercordes, hétérotiques ou de Type II, dans lesquels la supersymétrie est spontanément brisée par la température et les deux rayons R_4 et R_5 . Une subtilité nouvelle apparaît lorsque l'on considère la brisure de théories de Type II : en effet, dans ce cas-là, la brisure peut être effectuée de manière asymétrique, comme introduit dans la section 4.3. Bien sûr, la brisure par le temps euclidien reste une brisure symétrique, et la considération de cette nouveauté ne concerne que les brisures selon les deux rayons internes.

Les conditions de validité du modèle prennent la même forme que dans le cas à un rayon : l'identification des équations d'Einstein et d'évolution du paramètre sans échelle impose, par identification des termes quartiques, l'équation d'état $\rho_4(u, \mathcal{U}) = 5p_4(u, \mathcal{U})$. De plus, on veut

maintenant minimiser le potentiel selon la direction \mathcal{U} : on cherche donc à imposer, simultanément à l'équation d'état ci-dessus, les conditions $\partial_{\mathcal{U}}V(u, \mathcal{U}) = 0$ et $\partial_{\mathcal{U}}^2V(u, \mathcal{U}) \geq 0$.

Théories hétérotiques

Commençons par le cas qui est l'extension directe de nos précédents travaux, c'est-à-dire le cas d'une théorie hétérotique. Le choix du schéma de compactification de Scherk-Schwarz du temps euclidien et de deux rayons internes R_4 et R_5 se réduit en fait au choix des deux charges Q_4, Q_5 qui interviennent dans les R -charges $a + Q_4$ et $a + Q_5$ que l'on utilise pour la brisure de supersymétrie. La définition de n_V introduite en (6.37) se généralise aisément, et on considère maintenant les sommes suivantes

$$n_{10} = \sum_s (-)^{Q_4}, \quad n_{01} = \sum_s (-)^{Q_5}, \quad n_{11} = \sum_s (-)^{Q_4+Q_5}, \quad (6.61)$$

qui pondèrent les contributions au potentiel correspondant aux termes où la supersymétrie est brisée respectivement par la direction R_4 , la direction R_5 , et les deux directions simultanément. Le coefficient $\tilde{g}_0 = 0, 1$, qui indique si la température participe aussi à la brisure de supersymétrie, se déduit de la condition $\tilde{g}_0 + \tilde{g}_4 + \tilde{g}_5 \equiv 1 \pmod{2}$. Il est possible de mener en toute généralité une étude des solutions cosmologiques pour des valeurs arbitraires de $n_{10}/n_T, n_{01}/n_T, n_{11}/n_T$; la prise en compte du fait que ces trois paramètres ne sont pas indépendants s'effectue en paramétrisant l'espace des paramètres par trois réels positifs ξ_1, ξ_2, ξ_3 appartenant au tétraèdre $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 \leq 1$.

Il est assez ardu de mener une exploration méthodique de tout le tétraèdre. Un cas cependant offre des solutions stables : celui où $Q_4 = Q_5$, ce qui équivaut à $n_{10} = n_{01}$ et $n_{11} = n_T$, ou encore à $\xi_2 = \xi_3 = 0$. De nombreux détails sur la structure des solutions aux équations de consistance et d'existence d'un minimum se trouvent dans [CJKPT09]; nous citons juste dans ce manuscrit qu'une solution cosmologique existe, stabilisant \mathcal{U} au point self-dual $\mathcal{U} = 1$, lorsque

$$-0.215 \lesssim \frac{n_{01}}{n_T} = \frac{n_{10}}{n_T} < 0. \quad (6.62)$$

Cette configuration est de plus réalisable en adoptant des R -charges utilisées dans [CJKPT08b] : en choisissant la R -charge associée aux rayons R_4 et R_5 comme $a + \gamma + \gamma'$, où γ et γ' sont les hélicités des états associées aux représentations du groupe de jauge $E_8 \times E'_8$, on obtient $n_{01}/n_T = -1/63$; en choisissant la R -charge $a + H$, où H est le paramètre de twist d'un orbifold T^4/\mathbb{Z}_2 , on obtient $n_{01}/n_T = -1/127$; ces deux quantités vérifient bien (6.62).

Théories de Type II

L'extension du mécanisme de Scherk-Schwarz aux théories de Type II permet de considérer des brisures asymétriques. Une telle possibilité ne concerne évidemment pas la direction du temps euclidien, le cocycle étant donné par l'expression (4.65). Par contre on peut considérer les configurations symétrique/symétrique, symétrique/asymétrique, asymétrique/asymétrique pour les deux rayons, le dernier cas se séparant encore en deux sous-cas selon que la brisure a lieu du même côté pour les deux rayons, ou que le premier rayon brise selon le nombre fermionique gauche et le second selon le nombre fermionique droit.

	R_4	R_5
Sym/Sym	$(-)^{(a+\bar{a}+Q_4)\tilde{m}+(b+\bar{b}+\tilde{Q}_4)n+\varepsilon\tilde{m}n}$	$(-)^{(a+\bar{a}+Q_5)\tilde{m}+(b+\bar{b}+\tilde{Q}_5)n+\varepsilon\tilde{m}n}$
Sym/Asym	$(-)^{(a+\bar{a}+Q_4)\tilde{m}+(b+\bar{b}+\tilde{Q}_4)n+\varepsilon\tilde{m}n}$	$(-)^{(a+Q_5)\tilde{m}+(b+\tilde{Q}_5)n+\varepsilon\tilde{m}n}$
Asym/Asym	$(-)^{(a+Q_4)\tilde{m}+(b+\tilde{Q}_4)n+\varepsilon\tilde{m}n}$	$(-)^{(a+Q_5)\tilde{m}+(b+\tilde{Q}_5)n+\varepsilon\tilde{m}n}$
	$(-)^{(a+Q_4)\tilde{m}+(b+\tilde{Q}_4)n+\varepsilon\tilde{m}n}$	$(-)^{(\bar{a}+Q_5)\tilde{m}+(\bar{b}+\tilde{Q}_5)n+\varepsilon\tilde{m}n}$

L'exploration des modèles de Type II est ensuite assez limitée : en effet, du fait de l'absence de jauge non-triviale⁵, les R -charges disponibles sont assez peu nombreuses. La seule configuration dans laquelle il est possible de définir une R -charge différente des trois usuelles a , \bar{a} et $a + \bar{a}$ est en fait d'effectuer un orbifold T^4/\mathbb{Z}_2 sur les quatre dimensions supplémentaires spectatrices, et de coupler aux R -charges $a + H$, $\bar{a} + H$ ou $a + \bar{a} + H$. Nous cataloguons dans [CJKPT09] les différents cas possibles ; nous trouvons en fait que, même dans le cas de l'existence d'une solution critique aux équations de consistance et d'existence d'un extremum, la position d'équilibre obtenue pour \mathcal{U} est instable. Les solutions de Type II semblent donc inintéressantes d'un point de vue cosmologique, en vue de la modélisation d'une phase thermique de l'univers ; par contre elles sont prometteuses en vue de l'exploration de la physique au voisinage de la température de Hagedorn, en utilisant des constructions d'orientifold.

5. En fait, l'inclusion de D-branes dans la théorie permettrait de faire apparaître une jauge non-abélienne ; une telle possibilité serait intéressante à explorer dans des travaux futurs.

Chapitre 7

Conclusion

Au cours de ce travail de thèse, nous nous sommes intéressés à deux champs d'application de la théorie des cordes.

Le premier touche à la physique des particules et à la reproduction de propriétés caractéristiques des théories de grande unification et du modèle standard. À l'aube du démarrage des expériences du LHC au CERN, dont toute la communauté cordiste espère qu'elle validera les hypothèses actuelles que sont le mécanisme de Higgs et la supersymétrie, il est plus que jamais nécessaire d'explorer les possibilités offertes par la théorie des supercordes pour décrire la physique des particules. En particulier, le processus de sélection du vide, c'est-à-dire des caractéristiques de l'espace interne, est un problème ouvert. Une manière de progresser dans la compréhension de ce mécanisme passe par une exploration méthodique de l'espace des vides dans lesquels la théorie est définie sans ambiguïté. Nous avons mis en évidence le fait qu'il existe deux approches à cette exploration, qui donnent en fait des résultats complémentaires. La première approche est purement géométrique, et passe par la considération de familles d'espaces de Calabi-Yau ; dans ce cas, les propriétés phénoménologiques correspondantes découlent de propriétés topologiques et différentielles des surfaces de compactification. Les travaux en ce sens ont toutefois conclu qu'il était nécessaire de sortir du cadre rigide des géométries Calabi-Yau, et de considérer des compactifications avec torsion, ou encore des compactifications asymétriques.

La deuxième approche, qui est celle que nous avons poursuivie, consiste à explorer une classe de modèles basés sur des fermions libres. Il est montré que ces constructions reproduisent, entre autres, des orbifolds de type \mathbb{Z}_2 ou $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$; la résolution de ces orbifolds fournit en fait des espaces de Calabi-Yau. La plupart des propriétés intéressantes d'un point de vue phénoménologique proviennent de la forme des secteurs twistés de la théorie, de sorte qu'elles sont invariantes sous le processus de régularisation des singularités : la construction fermionique reproduit ainsi les aspects de compactification de type Calabi-Yau, et donne de plus accès à des schémas de "compactifications non-géométriques". Il est de plus en plus clair que les compactifications de type orbifold sont les configurations privilégiées en vue de reproduire les caractéristiques du modèle standard (voir par exemple [NRSRV08] pour une revue récente). Le mécanisme de Scherk-Schwarz se traduit ici en termes de flux géométriques, et donne accès à des modèles plus généraux que les Calabi-Yau.

Au sein de cette classe de vides de la théorie, nous avons montré l'existence d'une symétrie, analogue à la symétrie miroir, qui échange le nombre de représentations vectorielles et le nombre de représentations spinorielles du groupe de grande unification $SO(10)$ présentes dans le spectre.

Nous avons de plus explicité la transformation à effectuer sur un modèle donné pour obtenir un modèle dual. Contrairement à la symétrie miroir, qui relie des compactifications $(2, 2)$, la symétrie spineur-vecteur s'étend aux compactifications $(2, 0)$; les modèles $(2, 2)$ sont auto-duaux. En plus de faciliter la classification, la mise en évidence d'une telle structure de l'espace des vides nous permet de suggérer des pistes de réflexion pour une hypothétique loi de sélection des vides : des configurations auto-duales pourraient par exemple se voir privilégiées par rapport à d'autres vides dissymétriques. De manière générale, il apparaît clair que toute étude du *landscape* sera facilitée par l'exploitation des symétries de celui-ci, de la même manière que l'exploitation des symétries est et a été au cœur de tous les progrès de la physique théorique du 20^{ème} siècle.

Dans la seconde thématique de notre travail, nous avons cette fois appliqué le mécanisme de brisure spontanée de supersymétrie à la Scherk-Schwarz à l'étude de solutions cosmologiques en présence d'une température non-nulle et d'une échelle de brisure de supersymétrie. Dans un régime protégé à la fois de singularités de type Hagedorn et de l'apparition dans la théorie d'échelles privilégiées telles que l'échelle de brisure électro-faible, nous avons montré que l'évolution cosmologique était régie par une théorie de supergravité sans échelle. Sous certaines conditions, le rapport entre la température et la masse de brisure de supersymétrie est fixée, et obtient un univers dominé par la radiation, avec des corrections possibles prenant la forme d'une courbure ou d'une constante cosmologique effective. Le module sans échelle est cosmologique et se stabilise finalement à l'échelle électro-faible; les autres modules sont spectateurs, et sont automatiquement stabilisés par des termes de brisure douce. Étendant ce scénario au cas où plusieurs modules participant à la brisure de supersymétrie, nous avons de plus montré qu'il est possible de stabiliser dynamiquement certains modules de structure complexe *non spectateurs*. Notre travail n'a par contre pas pris en compte les premiers instants de l'univers, où la notion de température n'a de toute façon plus cours; dans ce régime, des travaux récents mettent à profit le mécanisme de brisure de supersymétrie à la Scherk-Schwarz dans le cadre d'orientifolds de théories de Type II pour proposer une résolution de la singularité de Hagedorn.

Annexe A

Quelques identités utiles sur les fonctions ϑ

En théorie des supercordes, les fonctions ϑ font partie des blocs élémentaires de construction des fonctions de partition. Elles interviennent dans la plupart des caractères des algèbres de Lie qui sous-tendent les différentes théories.

On définit

$$\vartheta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} (v|\tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{i\pi\tau(n-a/2)^2} e^{i\pi(2v-b)(n-a/2)}. \quad (\text{A.1})$$

Quand les variables ne sont pas explicitement notées dans les formules, on considère $v = 0$. On note $q = e^{2i\pi\tau}$.

Les transformations modulaires agissent sur les fonctions ϑ et sur la fonction de Dedekind η comme

$$\vartheta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} (v|\tau + 1) = \exp\left(-\frac{i\pi}{4}a(a-2)\right) \vartheta \begin{bmatrix} a \\ a+b-1 \end{bmatrix} (v|\tau) \quad (\text{A.2})$$

$$\vartheta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} (v| -1/\tau) = \sqrt{-i\tau} \exp\left(\frac{i\pi}{2}ab + i\pi\tau v^2\right) \vartheta \begin{bmatrix} b \\ -a \end{bmatrix} (v|\tau) \quad (\text{A.3})$$

$$\eta(\tau + 1) = \eta(\tau); \quad \eta(-1/\tau) = \sqrt{-i\tau} \eta(\tau) \quad (\text{A.4})$$

Suivant les conventions usuelles, on note

$$\vartheta_1 = \vartheta \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \vartheta_2 = \vartheta \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \vartheta_3 = \vartheta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \vartheta_4 = \vartheta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.5})$$

et on a les propriétés de périodicité suivantes sur les indices (a, b)

$$\vartheta \begin{bmatrix} a+2n \\ b+2m \end{bmatrix} (v|\tau) = e^{i\pi am} \vartheta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} (v|\tau) \quad (\text{A.6})$$

$$\vartheta \begin{bmatrix} -a \\ -b \end{bmatrix} (v|\tau) = \vartheta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} (-v|\tau) \quad (\text{A.7})$$

Nous commençons par quelques identités utiles. Les représentations des fonctions ϑ sous forme de produit sont donnée par :

$$\vartheta_1(v|\tau) = 2q^{\frac{1}{8}} \sin(\pi v) \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)(1 - q^n e^{2\pi i v})(1 - q^n e^{-2\pi i v}) \quad (\text{A.8})$$

$$\vartheta_2(v|\tau) = 2q^{\frac{1}{8}} \cos(\pi v) \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)(1 + q^n e^{2\pi i v})(1 + q^n e^{-2\pi i v}) \quad (\text{A.9})$$

$$\vartheta_3(v|\tau) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)(1 + q^{n-1/2} e^{2\pi i v})(1 + q^{n-1/2} e^{-2\pi i v}) \quad (\text{A.10})$$

$$\vartheta_4(v|\tau) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)(1 - q^{n-1/2} e^{2\pi i v})(1 - q^{n-1/2} e^{-2\pi i v}) \quad (\text{A.11})$$

Elles impliquent notamment, pour $v = 0$, les développements suivants à q petit, utilisés dans [CJKPT08b] :

$$\vartheta_2 \sim 2q^{1/8}(1 + q), \quad \vartheta_3 \sim 1 + 2q^{1/2}, \quad \vartheta_4 \sim 1 - 2q^{1/2} \quad (\text{A.12})$$

On note que l'énergie du vide dans la fonction ϑ_2 correspond bien à deux fermions réels pris en conditions au bord de Ramond, $h = 1/8$.

On a également

$$\vartheta_2 \vartheta_3 \vartheta_4 = 2\eta^3. \quad (\text{A.13})$$

ce qui se traduit dans l'approximation sans masse par

$$\vartheta_2 \sim 2\eta^3. \quad (\text{A.14})$$

Les fonctions ϑ satisfont un grand nombre d'identités remarquables. La fameuse identité de Jacobi, que nous avons déjà évoquée, est donnée par

$$\vartheta_3^4 - \vartheta_4^4 - \vartheta_2^4 = 0. \quad (\text{A.15})$$

Elle se généralise en présence d'un paramètre affine comme

$$\vartheta_3^4(v|\tau) - \vartheta_4^4(v|\tau) = \vartheta_2^4(v|\tau) - \vartheta_1^4(v|\tau). \quad (\text{A.16})$$

et reflète la propriété de triarité de $SO(8)$. Après projection GSO, c'est également cette égalité qui assure la présence d'autant d'états bosoniques que d'états fermioniques à chaque niveau de masse des théories hétérotiques ou de Type II. Cette égalité admet deux généralisations, une de Type IIB, dont nous faisons un usage abondant tout au long de la section 6 :

$$\frac{1}{2} \sum_{a,b=0}^1 (-)^{a+b+ab} \prod_{i=1}^4 \vartheta \left[\begin{smallmatrix} a+h_i \\ b+g_i \end{smallmatrix} \right] (v_i|\tau) = - \prod_{i=1}^4 \vartheta \left[\begin{smallmatrix} 1-h_i \\ 1-g_i \end{smallmatrix} \right] (v'_i|\tau) \quad (\text{A.17})$$

et une de Type IIA

$$\frac{1}{2} \sum_{a,b=0}^1 (-)^{a+b} \prod_{i=1}^4 \vartheta \left[\begin{smallmatrix} a+h_i \\ b+g_i \end{smallmatrix} \right] (v_i|\tau) = - \prod_{i=1}^4 \vartheta \left[\begin{smallmatrix} 1-h_i \\ 1-g_i \end{smallmatrix} \right] (v'_i|\tau) + \prod_{i=1}^4 \vartheta \left[\begin{smallmatrix} 1+h_i \\ 1+g_i \end{smallmatrix} \right] (v_i|\tau). \quad (\text{A.18})$$

Dans ces deux dernières formules, on suppose que $\sum_i h_i = \sum_i g_i = 0$ et on a

$$v'_1 = \frac{1}{2}(-v_1 + v_2 + v_3 + v_4); \quad v'_2 = \frac{1}{2}(+v_1 - v_2 + v_3 + v_4) \quad (\text{A.19})$$

$$v'_3 = \frac{1}{2}(v_1 + v_2 - v_3 + v_4); \quad v'_4 = \frac{1}{2}(+v_1 + v_2 + v_3 - v_4) \quad (\text{A.20})$$

Annexe B

Algèbre superconforme $N = 2$ et flot spectral

La réalisation de la supersymétrie sur la feuille d'univers d'une théorie des cordes est donnée par la structure de l'algèbre superconforme $N = 1$ (algèbre de super-Virasoro). Toutefois, pour des raisons phénoménologiques évidentes, on cherche maintenant à réaliser des supersymétries *d'espace-temps*. En fait, ceci implique la présence d'une algèbre superconforme $N = 2$. Nous allons dans un premier temps d'écrire la structure de l'algèbre superconforme $N = 2$, puis dans un second temps la réaliser explicitement dans une théorie comprenant des degrés de liberté bosoniques et fermioniques.

La présence de $\mathcal{N} = 1$ SUSY d'espace temps implique la présence de $N = 2$ superconforme sur la feuille d'univers. La considération dans le chapitre 5 de l'algèbre superconforme présente du côté non-supersymétrique des théories hétérotiques montre toutefois que la réciproque est fautive ; il est néanmoins possible de traduire les champs chiraux de l'algèbre superconforme en termes de champs de spin.

On commence par définir la théorie conforme qui contient le tenseur énergie-impulsion $T(z)$. Son OPE est de la forme

$$T(z)T(w) = \frac{c}{2(z-w)^4} + \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial T(w)}{z-w} + reg. \quad (\text{B.1})$$

La théorie conforme est alors complétée par la donnée des champs primaires ϕ , de poids conforme h_ϕ , tels que

$$T(z)\phi(w) = \frac{h_\phi \phi(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial \phi(w)}{z-w} + reg. \quad (\text{B.2})$$

et des modules de Verma correspondants.

Le passage à la théorie superconforme $N = 2$ se fait en introduisant deux super-partenaires $G^\pm(z)$ et un courant $U(1)$ $J(z)$ tels que les OPE suivantes soient réalisées :

$$T(z)G^\pm(w) = \frac{3/2}{(z-w)^2}G^\pm(w) + \frac{\partial G^\pm(w)}{z-w} + reg. \quad (\text{B.3})$$

$$T(z)J(w) = \frac{J(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial J(w)}{z-w} + reg. \quad (\text{B.4})$$

$$G^+(z)G^-(w) = \frac{2c/3}{(z-w)^3} + \frac{2J(w)}{(z-w)^2} + \frac{2T(w) + \partial J(w)}{z-w} + \text{reg.} \quad (\text{B.5})$$

$$J(z)G^\pm(w) = \pm \frac{G^\pm(w)}{z-w} + \text{reg.} \quad (\text{B.6})$$

$$J(z)J(w) = \frac{c/3}{(z-w)^2} + \text{reg.} \quad (\text{B.7})$$

Avant de voir les implications d'une telle structure sur la théorie, nous allons la réaliser effectivement en terme d'un boson complexe libre $X(z, \bar{z})$, d'un fermion complexe holomorphe ψ et d'un fermion complexe antiholomorphe λ . On note alors \dagger l'opération de conjugaison complexe : si $\psi(z) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi^1(z) + i\psi^2(z))$ alors $\psi^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi^1(z) - i\psi^2(z))$. Cette construction est tirée de [Pol198b].

Nous considérons alors l'action usuelle :

$$S = \int d^2z (\partial X \bar{\partial} X^\dagger + \psi^\dagger \bar{\partial} \psi + \psi \bar{\partial} \psi^\dagger + \lambda^\dagger \bar{\partial} \lambda + \lambda \bar{\partial} \lambda^\dagger) \quad (\text{B.8})$$

Alors, les courants

$$T(z) = -\partial X \partial X^\dagger - \frac{1}{2} \psi^\dagger \partial \psi - \frac{1}{2} \psi \partial \psi^\dagger \quad (\text{B.9})$$

$$G^+(z) = i\sqrt{2} \psi \partial X^\dagger, \quad G^-(z) = i\sqrt{2} \psi^\dagger \partial X \quad (\text{B.10})$$

$$J(z) = -\psi^\dagger \psi \quad (\text{B.11})$$

forment une théorie superconforme $N = 2$ du côté holomorphe; de même la partie antiholomorphe est obtenue en effectuant $\partial \rightarrow \bar{\partial}$, $\psi \rightarrow \lambda$.

Flot spectral

Les courants de l'algèbre superconforme admettent les développements en modes suivants :

$$T(z) = \sum_n \frac{L_n}{z^{n+2}} \quad (\text{B.12})$$

$$J(z) = \sum_n \frac{J_n}{z^{n+1}} \quad (\text{B.13})$$

$$G^\pm(z) = \sum_n \frac{G_{n\pm a}^\pm}{z^{n+3/2\pm a}} \quad (\text{B.14})$$

Les conditions au bord des supercourants G^\pm dépendent d'un paramètre $a \in [0, 1[$. Il existe alors pour chaque a une algèbre différente. Mathématiquement, on montre en fait que toutes les algèbres sont isomorphes. Il existe donc une bijection unitaire U_η envoyant un vecteur $|f_\eta\rangle$ membre d'une représentation de l'algèbre superconforme prise en $a = \eta$ sur un vecteur $|f\rangle$ correspondant à $a = 0$. Cet opérateur est dit de *flot spectral*. En pratique, deux valeurs de a nous intéressent : $a = 0$, qui donne le secteur de Neveu-Schwarz; et $a = 1/2$, qui donne le secteur de

Ramond de la théorie. On voit alors que l'opérateur de flot spectral $U_{1/2}$ est un bon candidat de générateur de supersymétrie d'espace-temps. Pour mieux s'en convaincre, nous allons examiner le cas de la théorie à charge centrale $c = 3$, donnée par les opérateurs (B.9), (B.10), (B.11). Il est possible de bosoniser le courant J de (B.11) en $J(z) \equiv i \partial \phi$; alors on a $U_{1/2} \equiv e^{-i\phi/2}$. Mais d'après la définition de ϕ , on voit que ce dernier n'est autre que la version bosonisée du fermion complexe ψ ; de sorte que $U_{1/2}$ s'identifie à un champ de spin, et relie bien les vides de Ramond du fermion ψ et les vides de Neveu-Schwarz.

Toutefois, le flot spectral n'engendre pas toujours la supersymétrie : en effet, si les fermions pris en conditions de Ramond ne sont pas d'espace-temps, les secteurs $a = 0$ et $a = 1/2$ sont tous deux bosoniques. Nous allons voir quelles sont dans ce cas les conséquences de la structure superconforme.

$N = 2$ superconforme en théorie hétérotique

Nous allons ici construire la théorie superconforme $N = 2$ présente du côté bosonique de la théorie des cordes hétérotiques. Les degrés de liberté physiques de cette théorie ont une charge centrale totale $c = 24$. Afin de faire le lien avec le chapitre 5, nous notons les degrés de liberté de la manière suivante :

- 4 bosons complexes $\mathcal{X}^{1\dots 4}$. Dans le cadre de la construction fermionique, les bosons $\mathcal{X}^{1,2,3}$ sont équivalents aux fermions libres $(\bar{\eta}\bar{\omega})^{1\dots 6}$; \mathcal{X}^4 est le boson complexe transverse d'espace temps.
- 4 bosons complexes $\mathcal{H}^{1\dots 4}$. Dans le cadre de la construction fermionique, ces bosons sont équivalents aux fermions libres $\bar{\phi}^{1\dots 8}$.
- 8 fermions complexes, notés sans surprise $\bar{\psi}^{1\dots 5}, \bar{\eta}^{1,2,3}$.

L'algèbre superconforme est réalisée par les courants :

$$T(z) = - \sum_{i=1}^4 \partial \mathcal{X} \partial \mathcal{X}^\dagger - \sum_{i=1}^4 \partial \mathcal{H} \partial \mathcal{H}^\dagger - \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^5 [(\psi^i)^\dagger \partial \psi^i + \psi^i \partial (\psi^i)^\dagger] + \sum_{i=1}^3 [(\eta^i)^\dagger \partial \eta^i + \eta^i \partial (\eta^i)^\dagger] \right]; \quad (\text{B.15})$$

$$G^+(z) = i\sqrt{2} \left[\sum_{i=1}^3 \eta^i \partial (\mathcal{X}^i)^\dagger + \psi^5 \partial (\mathcal{X}^1)^\dagger + \sum_{i=1}^4 \psi^i \partial (\mathcal{H}^i)^\dagger \right]; \quad (\text{B.16})$$

$$G^-(z) = i\sqrt{2} \left[\sum_{i=1}^3 (\eta^i)^\dagger \partial \mathcal{X}^i + (\psi^5)^\dagger \partial \mathcal{X}^1 + \sum_{i=1}^4 (\psi^i)^\dagger \partial \mathcal{H}^i \right]; \quad (\text{B.17})$$

$$J(z) = - \sum_{i=1}^5 (\psi^i)^\dagger \psi^i - \sum_{i=1}^3 (\eta^i)^\dagger \eta^i. \quad (\text{B.18})$$

On voit notamment dans la dernière équation que le courant J n'est autre que le courant d'hélicité associé aux fermions $\bar{\psi}^{1\dots 5}, \bar{\eta}^{1,2,3}$.

On voit qu'il est possible de se ramener au cas $c = 3$ en découpant cette algèbre superconforme en huit parties $c = 3$ indépendantes (les OPE entre des éléments de deux parties distinctes étant régulières). De manière similaire, les états physiques vont prendre la forme de produits

tensoriels, et ainsi l'opérateur de flot spectral $U_{a_1 \dots a_8}$, pour $a_1 = \dots = a_8 = 1/2$, va prendre la forme d'un champ de spin pour lequel les fermions $\psi^{1\dots 5}, \eta^{1\dots 3}$ sont pris en conditions de Ramond. Cet opérateur est analogue à un opérateur de supersymétrie ; les fermions ψ, η n'étant pas d'espace-temps, on ne construit toutefois pas une supersymétrie d'espace-temps. Par contre, on relie bien des états de Ramond à des états de Neveu-Schwarz.

Pour faire le lien avec le chapitre 5, nous allons voir dans ce contexte comment apparaît la brisure de cette algèbre superconforme. On suppose donc qu'il existe un boson interne X^i qui couple à la structure de spin des fermions ψ, η . Alors, si l'on considère le vertex de charge superconforme qui réalise le flot spectral, on voit que les conditions de Ramond des fermions ψ, η implique que le nombre d'enroulement du mode zéro de X^i est demi-entier, et donc que le vertex médiateur du flot spectral est massif. Ainsi, cette symétrie est spontanément brisée.

Les vertex de E_6 qui ne faisant pas partie de sa sous-algèbre $SO(10) \times U(1)$ s'expriment comme des champs de spin ; ils sont les partenaires superconformes des vertex de $SO(10) \times U(1)$. Leur masse est donc levée par la brisure superconforme, et le groupe de jauge est brisé.

Annexe C

Publication n^o 1 :

Thermal/quantum effects and induced
superstring cosmologies

Thermal/quantum effects and induced superstring cosmologies*

Tristan Catelin-Jullien¹, Costas Kounnas¹
Hervé Partouche² and Nicolaos Toumbas³

¹ Laboratoire de Physique Théorique, Ecole Normale Supérieure,[†]
24 rue Lhomond, F-75231 Paris cedex 05, France
catelin@lpt.ens.fr, Costas.Kounnas@lpt.ens.fr

² Centre de Physique Théorique, Ecole Polytechnique,[◇]
F-91128 Palaiseau, France
Herve.Partouche@cpht.polytechnique.fr

³ Department of Physics, University of Cyprus,
Nicosia 1678, Cyprus
nick@ucy.ac.cy

Abstract

We consider classical superstring theories on flat four dimensional space-times, and where $N = 4$ or $N = 2$ supersymmetry is spontaneously broken. We obtain the thermal and quantum corrections at the string one-loop level and show that the back-reaction on the space-time metric induces a cosmological evolution. We concentrate on heterotic string models obtained by compactification on a T^6 torus and on T^6/\mathbb{Z}_2 orbifolds. The temperature T and the supersymmetry breaking scale M are generated via the Scherk-Schwarz mechanism on the Euclidean time cycle and on an internal spatial cycle respectively. The effective field theory corresponds to a no-scale supergravity, where the corresponding no-scale modulus controls the Susy-breaking scale. The classical flatness of this modulus is lifted by an effective thermal potential, given by the free energy. The gravitational field equations admit solutions where M , T and the inverse scale factor $1/a$ of the universe remain proportional. In particular the ratio M/T is fixed during the time evolution. The induced cosmology is governed by a Friedmann-Hubble equation involving an effective radiation term $\sim 1/a^4$ and an effective curvature term $\sim 1/a^2$, whose coefficients are functions of the complex structure ratio M/T .

* Research partially supported by the EU (under the contracts MRTN-CT-2004-005104, MRTN-CT-2004-512194, MRTN-CT-2004-503369, MEXT-CT-2003-509661), INTAS grant 03-51-6346, CNRS PICS 2530, 3059 and 3747, ANR (CNRS-USAR) contract 05-BLAN-0079-01 and INTERREG IIIA Crete/Cyprus.

[†] Unité mixte du CNRS et de l'Ecole Normale Supérieure associée à l'Université Pierre et Marie Curie (Paris 6), UMR 8549.

[◇] Unité mixte du CNRS et de l'Ecole Polytechnique, UMR 7644.

1 Introduction

It is important to develop a string theoretic framework for studying cosmology. The ultimate goal of this task is to determine whether string theory can describe basic features of our Universe. Despite considerable effort towards this direction over the last few years (see for example [1] – [10]), still very little is known about the dynamics of string theory in time-dependent, cosmological settings. The purpose of this work is to provide a new class of non-trivial string theory cosmological solutions, where some of the difficult issues can be explored and analyzed concretely.

At the classical string level, it seems difficult to obtain exact cosmological solutions [8]. Indeed, after extensive studies in the framework of superstring compactifications (with or without fluxes), the obtained results appear to be unsuitable for cosmology. In most cases, the classical ground states correspond to static Anti-de Sitter or flat backgrounds but not to cosmological ones. The same situation appears to be true in the effective supergravity theories. Naively, the results obtained in this direction lead to the conclusion that cosmological ground states are unlikely to be found in superstring theory.

From our viewpoint this conclusion cannot be correct for two reasons:

- The first follows from the fact that already exact (to all orders in α') cosmological solutions exist, which are described by a two dimensional worldsheet conformal field theory based on a gauged Wess-Zumino-Witten model at negative level $-|k|$: $\frac{SL(2,R)_{-|k|}}{U(1)} \times M$, [2–4].
- The second is that quantum and thermal corrections are neglected in the classical string/supergravity regime.

The first class of stringy cosmological models was studied recently in [5], where it was shown how to define a normalizable wave-function for this class of backgrounds, realizing the Hartle-Hawking no-boundary proposal [11] in string theory. Explicit calculable examples were given for small values of the level $|k|$. As it was shown in [5], these models are intrinsically thermal with a temperature below but still close to the Hagedorn temperature. The disadvantage of small level $|k|$, however, is the absence of a semi-classical limit with $|k|$ arbitrarily large, which prevents us from obtaining a clean geometrical picture and studying issues such as back-reaction and particle production in a straightforward way.

Another direction consists of studying the “quantum and thermal cosmological solutions,”

which are generated dynamically at the quantum level of string theory [6,12]. Although this study looks to be hopeless and out of any systematic control, it turns out that in certain cases the quantum and thermal corrections are under control thanks to the special structure of the underlying effective supergravity theory in its spontaneously broken supersymmetric phase. An effective field theory study has already been initiated in [6,12]. (See also [13,14].)

In order to see how cosmological solutions arise naturally in this context, consider the case of a supersymmetric flat string background. At finite temperature the thermal fluctuations produce a non-zero energy density that is calculable perturbatively at the full string level. The back-reaction on the space-time metric and on certain of the moduli fields gives rise to a specific cosmological evolution. For temperatures below the Hagedorn temperature, the evolution of the universe is known to be radiation dominated. (See for instance [15,16] for some earlier work in this case and [16] for a review on string gas cosmology.)

More interesting cases are those where space-time supersymmetry is spontaneously broken at the string level either by geometrical [17] or non-geometrical fluxes. In the case where the geometrical fluxes are generated via freely acting orbifolds [18] – [23], the stringy quantum corrections are under control in a very similar way as the thermal ones. The back-reaction of the quantum and thermal corrections on the space-time metric and the moduli fields results in different kinds of cosmologies depending on the initial amount of supersymmetry ($N = 4, N = 2, N = 1$).

In this work we restrict attention to four-dimensional backgrounds with initial $N = 4$ or $N = 2$ space-time supersymmetry, obtained by toroidal compactification of the heterotic superstring on T^6 and T^6/\mathbb{Z}_2 -orbifolds. The spontaneous breaking of supersymmetry is implemented via freely acting orbifolds (as in [18] – [23]). The quantum and thermal corrections are determined simultaneously by considering the Euclidean version of the model where all coordinates are compactified: $S_T^1 \times T^3$ (for the four-dimensional space-time part) $\times M^6$ (for the internal manifold). Apart from being interesting in their own right, these examples may give us useful hints on how to handle the phenomenologically more relevant $N = 1$ cases. The $N = 1$ cases will be studied elsewhere [31].

The thermal corrections are implemented by introducing a coupling of the space-time fermion number Q_F to the string momentum and winding numbers associated to the Euclidean time cycle S_T^1 . The breaking of supersymmetry is generated by a similar coupling of an internal

R -symmetry charge Q_R to the momentum and winding numbers associated to an internal spatial cycle S_M^1 , e.g. the X_5 coordinate cycle.

We stress here, that the thermal and supersymmetry breaking couplings correspond to string theoretic generalizations of Scherk-Schwarz compactifications. Two very special mass scales appear both associated with the breaking of supersymmetry. These are the temperature scale $T \sim 1/(2\pi R_0)$ and the supersymmetry breaking scale $M \sim 1/(2\pi R_5)$, with R_0 and R_5 the radii of the Euclidean time cycle, S_T^1 , and of the internal spatial cycle, S_M^1 , respectively. The initially degenerate mass levels of bosons and fermions split by an amount proportional to T or M , according to the charges Q_F and Q_R . This mass splitting is the signal of supersymmetry breaking and gives rise to a non-trivial free energy density, which incorporates simultaneously the thermal corrections and quantum corrections due to the supersymmetry breaking boundary conditions along the spatial cycle S_M^1 .

At weak coupling, the free energy density can be obtained from the one-loop Euclidean string partition function [20] – [22]. The perturbative string amplitudes are free of the usual ultraviolet ambiguities that plague a field theoretic approach towards quantum gravity and cosmology. For large enough R_0 , R_5 , the Euclidean system is also free of tachyons – the presence of tachyons would correspond to infrared instabilities, driving the system towards a phase transition [21] – [23]. Therefore, the corresponding energy density and pressure can be determined unambiguously, and we can use them as sources in Einstein’s equations to obtain non-trivial cosmological solutions. This perturbative approach breaks down near the initial space-like singularity. We speculate whether this breakdown of perturbation theory can be associated with an early universe phase transition.

The paper is organized as follows. Section 2 is mainly a review, where we also fix most of our notations and conventions. We first consider the four-dimensional heterotic string models at finite temperature. We obtain the one-loop thermal partition function at the full string level, and then we discuss the effective field theory limit at large radius R_0 . We also review the analogous computation of the one loop string partition function at zero temperature and in the case where Susy-breaking boundary conditions are placed along the internal spatial cycle S_M^1 , [18] – [23]. In the large radius limit, the Einstein frame effective potential is proportional to the fourth power of the gravitino mass scale, and it can be positive or negative depending on the choice of the Susy-breaking operator Q_R .

In section 3, we consider the case where thermal and quantum corrections due to the supersymmetry breaking are present simultaneously. For the simplest choice $Q_R = Q_F$, the corresponding one-loop string partition function is invariant under the $T \leftrightarrow M$ exchange, manifesting the underlying temperature/gravitino mass scale duality of the models. This duality is broken by the other allowable choices for the Susy-breaking operator Q_R , which we classify for both the $N = 4$ and the $N = 2$ orbifold cases.

In the large radii R_0, R_5 limit, the pressure consists of two pieces: the purely thermal part which scales as $n_T^* T^4$, with the coefficient n_T^* being the number of all massless boson/fermion pairs in the initially supersymmetric theory, and another potential-like piece which scales as $n_V^* M^4$ and with the coefficient n_V^* being positive or negative depending on the choice of the operator Q_R . In both pieces, the rest of the dependence on the scales T and M can be expressed neatly in terms of non-holomorphic Eisenstein series of order $5/2$ whose variable is the complex structure-like ratio M/T . In addition, we incorporate the effects of small, continuous Wilson line deformations in our computation. Wilson lines along any of the internal spatial cycles, other than S_M^1 , introduce new mass scales, and pieces proportional to $\sim T^2$ and $\sim M^2$ arise in the effective thermodynamic quantities.

In section 4 we present our ansatz for the induced cosmological solutions. These are homogeneous and isotropic cosmologies for which the Susy-breaking scales T and M as well as the inverse of the scale factor $1/a$ evolve the same way in time, and so the ratio of any two of these quantities is constant. The form of this ansatz is dictated by the scaling properties of the effective energy density and pressure. The compatibility of the gravitational field equations with the equation of motion of the scalar modulus controlling the size of the gravitino mass scale fixes the ratio M/T . By solving the compatibility equations numerically, we find that in the absence of Wilson lines along S_M^1 , non-trivial four dimensional solutions exist when n_V^* is negative and the ratio $|n_V^*|/n_T^*$ is small enough. These conditions are satisfied by various models we describe explicitly in the paper. When we include Wilson lines along S_M^1 , the value of the ratio M/T for some of the solutions can be large or small, and so we can have models with a hierarchy for the scales M and T .

Having solved the compatibility equations, the time-dependence of the system is governed solely by the familiar Friedmann-Hubble equation. There is a radiation term, c_r/a^4 , whose coefficient c_r is positive in our examples. An effective curvature term, $-\hat{k}/a^2$, can be gen-

erated by turning on Wilson line deformations. The sign of \hat{k} can be positive or negative depending on the model. When we turn on the kinetic terms of some of the extra flat moduli, we generate an additional term that scales as c_m/a^6 (with c_m positive).

In section 5, we solve the Friedmann-Hubble equation for the various possible cases, and we elaborate on the properties of the cosmological solutions:

- When $c_r > 0$, we have standard hot big bang cosmologies with an intermediate radiation dominated era. The late time behavior is governed by the spatial curvature of the models.
- We also consider a priori possible exotic models characterized by $c_r < 0$. A big bang occurs when $c_m > 0$. The cosmological evolution always ends with a big crunch when $\hat{k} \geq 0$. The case $\hat{k} < 0$ however is more interesting. It involves either a first or second order phase transition between the big bang cosmology and a linearly expanding universe. The first case corresponds to a tunneling effect involving a gravitational instanton, while the transition is smooth in the second case. If the first order transition does not occur, the universe ends in a big crunch.

We finish with our conclusions and directions for future research.

2 Thermal and quantum corrections in heterotic backgrounds

Our starting point is the class of four dimensional string backgrounds obtained by toroidal compactification of the heterotic string on T^6 and T^6/\mathbb{Z}_2 orbifolds. Initially the amount of space-time supersymmetry is $N_4 = 4$ for the case of compactification on the T^6 torus and $N_4 = 2$ for the orbifold compactifications, and the four dimensional space-time metric is flat. Space-time supersymmetry is then spontaneously broken by introducing Scherk-Schwarz boundary conditions on an internal spatial cycle and/or by thermal corrections. Due to the supersymmetry breaking, the one-loop string partition function is non-vanishing, giving rise to an effective potential. Our aim is to determine the back-reaction to the initially flat metric and moduli fields.

At the one-loop level, the four dimensional string frame effective action is given by

$$S = \int d^4x \sqrt{-\det g} \left(e^{-2\phi} \left(\frac{1}{2} R + 2\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \dots \right) - \mathcal{V}_{\text{String}} \right), \quad (2.1)$$

where ϕ is the 4d dilaton field and the ellipses stand for the kinetic terms of other moduli

fields (to be specified later). At zero temperature, the effective potential $\mathcal{V}_{\text{String}}$ can be obtained from the one-loop Euclidean string partition function as follows:

$$\frac{Z}{V_4} = -\mathcal{V}_{\text{String}}, \quad (2.2)$$

with V_4 the $4d$ Euclidean volume. The absence of a dilaton factor multiplying the potential term in the action is due to the fact that this arises at the one loop level.

At finite temperature, the one-loop Euclidean partition function determines the free energy density and pressure to this order

$$\frac{Z}{V_4} = -\mathcal{F}_{\text{String}} = P_{\text{String}}. \quad (2.3)$$

The subscript indicates that these densities are defined with respect to the string frame metric. The relevant Euclidean amplitude incorporates simultaneously the thermal corrections and quantum corrections which arise from the spontaneous breaking of supersymmetry and which are present even at zero temperature.

In order to determine the back-reaction of the (thermal and/or) quantum corrections, it is convenient to work in the Einstein frame where there is no mixing between the metric and the dilaton kinetic terms. We define as usual the complex field S ,

$$S = e^{-2\phi} + i\chi, \quad (2.4)$$

where χ is the axion field. Then after the Einstein rescaling of the metric, the one loop effective action becomes:

$$S = \int d^4x \sqrt{-\det g} \left[\frac{1}{2} R - g^{\mu\nu} K_{I\bar{J}} \partial_\mu \Phi_I \partial_\nu \bar{\Phi}_{\bar{J}} - \frac{1}{s^2} \mathcal{V}_{\text{String}}(\Phi_I, \bar{\Phi}_{\bar{I}}) \right], \quad (2.5)$$

where $K_{i\bar{j}}$ is the metric on the scalar field manifold $\{\Phi_I\}$, which is parameterized by various compactification moduli including the field S . This manifold includes also the main moduli fields $T_I, U_I, I = 1, 2, 3$, which are the volume and complex structure moduli of the three internal 2-cycles respectively. We notice that in the Einstein frame the effective potential, $\mathcal{V}_{\text{String}}$, is rescaled by a factor $1/s^2$, where $s = \text{Re}(S) = e^{-2\phi}$. Taking this rescaling into account, we have

$$\mathcal{V}_{\text{Ein}} = \frac{1}{s^2} \mathcal{V}_{\text{String}}. \quad (2.6)$$

This relation will be crucial for our work later on. (We will always work in gravitational mass units, with $M_G = \frac{1}{\sqrt{8\pi G_N}} = 2.4 \times 10^{18}$ GeV).

Keeping only the main moduli fields $\{S, T_I, U_I\}$, their kinetic terms are determined in terms of the Kähler potential K [24, 25]:

$$K = -\log (S + \bar{S}) - \sum_I \log (T_I + \bar{T}_I) - \sum_I \log (U_I + \bar{U}_I) \quad (2.7)$$

with $K_{I\bar{J}} = \partial_I \partial_{\bar{J}} K$. The classical superpotential depends on the way supersymmetry is broken. Generically string backgrounds with spontaneously broken supersymmetry are flat at the classical level due to the no-scale structure of the effective supergravity theory [25]. Once the thermal and/or quantum corrections are taken into account, we obtain in some cases interesting cosmological solutions.

2.1 Heterotic supersymmetric backgrounds at finite temperature

In order to fix our notations and conventions, we first consider the case of an exact supersymmetric background at finite temperature [21] – [23]. For definiteness we choose the heterotic string with maximal space-time supersymmetry ($N_4 = 4$). All nine spatial directions as well as the Euclidean time are compactified on a ten dimensional torus. At zero temperature, the Euclidean string partition function is zero due to space-time supersymmetry. At finite temperature however the result is a well defined finite quantity. Indeed, at genus one the string partition function is given by:

$$Z = \oint_F \frac{d\tau d\bar{\tau}}{4\text{Im}\tau} \frac{1}{2} \sum_{a,b} (-)^{a+b+ab} \theta \left[\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix} \right]^4 \frac{\Gamma_{(10,26)} \left[\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix} \right]}{\eta(\tau)^{12} \bar{\eta}(\bar{\tau})^{24}}, \quad (2.8)$$

where $\Gamma_{(10,26)} \left[\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix} \right]$ is a shifted Narain lattice (which we specify more precisely below). The non-vanishing of the partition function is due to the non-trivial coupling of the lattice to the spin structures (a, b) . Here, the argument a is zero for space-time bosons and one for space-time fermions. The spin/statistics connection and modular invariance require that the unshifted $\Gamma_{(1,1)}$ sub-lattice of the Euclidean time cycle

$$\Gamma_{(1,1)} \equiv \sum_{m,n} R_0 (\text{Im}\tau)^{-\frac{1}{2}} e^{-\pi R_0^2 \frac{|m+n\tau|^2}{\text{Im}\tau}} \quad (2.9)$$

be replaced as follows:

$$\Gamma_{(1,1)} \longrightarrow \sum_{m,n} R_0 (\text{Im}\tau)^{-\frac{1}{2}} e^{-\pi R_0^2 \frac{|m+n\tau|^2}{\text{Im}\tau}} e^{i\pi(ma+nb+mn)}. \quad (2.10)$$

Redefining

$$m \rightarrow 2m + g, \quad n \rightarrow 2n + h, \quad (2.11)$$

where g, h are integers defined modulo 2, and introducing the notation $\Gamma_{(1,1)} \left[\begin{smallmatrix} h \\ g \end{smallmatrix} \right]$ for a shifted lattice,

$$\Gamma_{(1,1)} \left[\begin{smallmatrix} h \\ g \end{smallmatrix} \right] = \sum_{m,n} R_0 (\text{Im}\tau)^{-\frac{1}{2}} e^{-\pi R_0^2 \frac{|2m+g+(2n+h)\tau|^2}{\text{Im}\tau}}, \quad (2.12)$$

the thermal partition function takes the form:

$$Z = \oint_F \frac{d\tau d\bar{\tau}}{4\text{Im}\tau} \frac{1}{2} \sum_{(a,b),(h,g)} (-)^{ga+hb+hg} (-)^{a+b+ab} \theta \left[\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix} \right]^4 \frac{\Gamma_{(9,25)} \Gamma_{(1,1)} \left[\begin{smallmatrix} h \\ g \end{smallmatrix} \right]}{\eta(\tau)^{12} \bar{\eta}(\bar{\tau})^{24}}. \quad (2.13)$$

Defining $\hat{a} = a - h$ and $\hat{b} = b - g$ and using the Jacobi identity

$$\frac{1}{2} \sum_{(\hat{a}, \hat{b})} (-)^{\hat{a}+\hat{b}+\hat{a}\hat{b}} \theta \left[\begin{smallmatrix} \hat{a}+h \\ \hat{b}+g \end{smallmatrix} \right]^4 = -\theta \left[\begin{smallmatrix} 1+h \\ 1+g \end{smallmatrix} \right]^4, \quad (2.14)$$

we obtain

$$Z = \oint_F \frac{d\tau d\bar{\tau}}{4\text{Im}\tau} \sum_{(h,g)} - (-)^{g+h} \theta \left[\begin{smallmatrix} 1+h \\ 1+g \end{smallmatrix} \right]^4 \Gamma_{(1,1)} \left[\begin{smallmatrix} h \\ g \end{smallmatrix} \right] \frac{\Gamma_{(9,25)}}{\eta(\tau)^{12} \bar{\eta}(\bar{\tau})^{24}}. \quad (2.15)$$

The temperature in string frame is given by $T_{\text{String}} = 1/(2\pi R_0)$.

Since our aim is the study of induced cosmological solutions in 3+1 dimensions, we consider the case for which the radii of three spatial directions are very large: $R_x = R_y = R_z \equiv R \gg 1$. In this case the three dimensional spatial volume factorizes

$$\Gamma_{(3,3)} \cong R^3 (\text{Im}\tau)^{-\frac{3}{2}} = \frac{V_3}{(2\pi)^3} (\text{Im}\tau)^{-\frac{3}{2}}. \quad (2.16)$$

Using the expression for the $\Gamma_{(1,1)} \left[\begin{smallmatrix} h \\ g \end{smallmatrix} \right]$ shifted lattice we obtain:

$$\begin{aligned} Z &= -(2\pi R_0) V_3 \mathcal{F}_{\text{String}} = V_4 P_{\text{String}} \\ &= -\frac{V_4}{(2\pi)^4} \oint_F \frac{d\tau d\bar{\tau}}{4\text{Im}\tau^3} \sum_{(n,m),(h,g)} (-)^{g+h} e^{-\pi R_0^2 \frac{|2m+g+(2n+h)\tau|^2}{\text{Im}\tau}} \theta \left[\begin{smallmatrix} 1+h \\ 1+g \end{smallmatrix} \right]^4 \frac{\Gamma_{(6,22)}}{\eta(\tau)^{12} \bar{\eta}(\bar{\tau})^{24}}, \end{aligned} \quad (2.17)$$

where $V_4 = (2\pi R_0) V_3$ is the four dimensional space-time volume, $\mathcal{F}_{\text{String}}$ the free energy density and P_{String} the pressure in string frame.

Before we proceed further, we make some comments:

- The sector $(h, g) = (0, 0)$ gives zero contribution. This is due to the fact that we started with a supersymmetric background.

- In the odd winding sector, $h = 1$, the partition function diverges when R_0 is between the Hagedorn radius $R_H = (\sqrt{2} + 1)/2$ and its dual $1/R_H$: $\frac{1}{R_H} < R_0 < R_H$. The divergence is due to a winding state that is tachyonic when R_0 takes values in this range, and it signals a phase transition around the Hagedorn temperature [21] – [23]. In this paper we study the regime $R_0 > R_H$, where there is no tachyon and the winding sector is exponentially suppressed. The high temperature regime and the cosmological consequences of the phase transition will be examined in future work [32].

- When $R_0 \gg 1$, the contributions of the oscillator states are also exponentially suppressed, provided that the moduli parameterizing the internal $\Gamma_{(6,22)}$ lattice are of order unity.

2.2 The effective field theory in the large R_0 limit

As we already mentioned, the $h = 1$ sector of the theory gives exponentially suppressed contributions of order $\mathcal{O}(e^{-R_0^2})$. Also, the $(h, g) = (0, 0)$ sector vanishes due to supersymmetry. Thus for large R_0 , only the sector $(h, g) = (0, 1)$ contributes significantly. Using the identity:

$$\Gamma_{(1,1)}(R_0) = \Gamma_{(1,1)} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \Gamma_{(1,1)} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \Gamma_{(1,1)} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \Gamma_{(1,1)} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

and neglecting the $h = 1$ sectors, we may replace

$$\Gamma_{(1,1)} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \Gamma_{(1,1)}(R_0) - \Gamma_{(1,1)} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \Gamma_{(1,1)}(R_0) - \frac{1}{2}\Gamma_{(1,1)}(2R_0) \quad (2.19)$$

in the integral expression for Z . For each lattice term we decompose the contribution in modular orbits: $(m, n) = (0, 0)$ and $(m, n) \neq (0, 0)$. For $(m, n) \neq (0, 0)$, the integration over the fundamental domain is equivalent with the integration over the whole strip but with $n = 0$. The $(0, 0)$ contribution is integrated over the fundamental domain. Now the $(0, 0)$ contribution of $\Gamma_{(1,1)}(R_0)$ cancels the one of $\frac{1}{2}\Gamma_{(1,1)}(R_0)$, and we are left with the integration over the whole strip:

$$Z = \frac{V_4}{(2\pi)^4} \int_{\parallel} \frac{d\tau d\bar{\tau}}{4\text{Im}\tau^3} \sum_m e^{-\pi R_0^2 \frac{(2m+1)^2}{\text{Im}\tau}} \theta \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}^4 \frac{\Gamma_{(6,22)}}{\eta(\tau)^{12} \bar{\eta}(\bar{\tau})^{24}}. \quad (2.20)$$

The integral over τ_1 imposes the left-right level matching condition. The left-moving part contains the ratio

$$\frac{\theta \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}^4}{\eta^{12}} = 2^4 + \mathcal{O}(e^{-\pi\tau_2}), \quad (2.21)$$

which implies that the lowest contribution is at the massless level. Thus after the integration over τ_1 ($\tau_2 \equiv t$), the partition function takes the form

$$Z = \frac{V_4}{(2\pi)^4} \int_0^\infty \frac{dt}{2t^3} \sum_m e^{-\pi R_0^2 \frac{(2m+1)^2}{t}} \left(2^4 D_0 + \sum D(\mu) e^{-\pi t \mu^2} \right), \quad (2.22)$$

where $D(\mu)$ denotes the multiplicity of the mass level μ and $2^4 D_0$ is the multiplicity of the massless level. Changing the integration variable by setting $t = \pi R_0^2 (2m+1)^2 x$, we have:

$$Z = \frac{V_4}{\pi^2 (2\pi R_0)^4} \sum_m \frac{1}{(2m+1)^4} \int_0^\infty \frac{dx}{2x^3} e^{-\frac{1}{x}} \left(2^4 D_0 + \sum D(\mu) e^{-x\pi^2 (2m+1)^2 \mu^2 R_0^2} \right). \quad (2.23)$$

Now the second term in the parenthesis is exponentially suppressed when the masses μ are of order (or close) to the string oscillator mass scale. This will be the case when all of the internal radii and the Wilson-line moduli of the $\Gamma_{(6,22)}$ lattice are of order unity. For this specific case, the partition function simplifies to

$$Z = 2^3 D_0 \frac{V_4}{\pi^2 (2\pi R_0)^4} \sum_m \frac{1}{(2m+1)^4} = \frac{2^3 D_0 \pi^2}{48} \frac{V_4}{(2\pi R_0)^4} = \frac{1}{3} \frac{n^* \pi^2}{16} V_4 T_{\text{String}}^4, \quad (2.24)$$

where $n^* = 2^3 D_0$ is the number of the massless boson/fermion pairs in the theory. The free energy density and pressure in string frame are given by

$$P_{\text{String}} = -\mathcal{F}_{\text{String}} = \frac{1}{3} \frac{n^* \pi^2}{16} \frac{T_{\text{String}}^4}{16}. \quad (2.25)$$

In the Einstein frame, energy densities are rescaled by a factor $1/s^2$ as in equation (2.6). Thus the pressure and free energy density in this frame are given by

$$P_{\text{Ein}} = -\mathcal{F}_{\text{Ein}} = \frac{1}{3} \frac{n^* \pi^2}{16} \frac{T_{\text{String}}^4}{s^2} = \frac{1}{3} \frac{n^* \pi^2}{16} T^4, \quad (2.26)$$

where $T = T_{\text{String}}/\sqrt{s}$ is the proper temperature in the Einstein frame. This result is expected from the effective field theory point of view. When only massless states are thermally excited, the field theory expression for the pressure is given by

$$P = \frac{1}{3} \left(n_B + \frac{7}{8} n_F \right) \frac{\pi^2 T^4}{30}, \quad (2.27)$$

where n_B and n_F are the numbers of massless bosonic and fermionic degrees of freedom respectively. When $n_B = n_F = n^*$, as in a supersymmetric theory, we recover equation (2.26).

2.3 Spontaneous breaking of supersymmetry at zero temperature

In this case we consider the same class of heterotic models, but now the breaking of supersymmetry arises due to the coupling of the space-time fermion number to the momentum and winding quantum numbers of an internal spatial cycle [18] – [23]. Since the temperature is taken to be zero, the spin structures (a, b) do not couple to the quantum numbers of the Euclidean time cycle which will be taken to be very large. We also consider the case where three additional spatial directions are large. Following similar steps to the purely thermal case, the partition function is given by

$$Z = -\frac{V_5}{(2\pi)^5} \oint_F \frac{d\tau d\bar{\tau}}{4\text{Im}\tau^{\frac{7}{2}}} \sum_{(n,m),(h,g)} (-)^{g+h} e^{-\pi R_5^2 \frac{|2m+g+(2n+h)\tau|^2}{\text{Im}\tau}} \theta \left[\begin{smallmatrix} 1+h \\ 1+g \end{smallmatrix} \right]^4 \frac{\Gamma_{(5,21)}}{\eta(\tau)^{12} \bar{\eta}(\bar{\tau})^{24}}, \quad (2.28)$$

where now $V_5 = V_4(2\pi R_5)$ is a five dimensional volume and the $\Gamma_{(5,21)}$ lattice parameterizes the internal space. Here also, the $h = 1$ sectors give exponentially suppressed contributions $\mathcal{O}(e^{-R_5^2})$, and the $(h, g) = (0, 0)$ sector vanishes due to supersymmetry. The rest of the steps can be repeated as in the derivation above to find

$$Z = \frac{V_5}{(2\pi)^5} \int_0^\infty \frac{dt}{2t^{\frac{7}{2}}} \sum_m e^{-\pi R_5^2 \frac{(2m+1)^2}{t}} \left(2^4 D_0 + \sum D(\mu) e^{-\pi t \mu^2} \right), \quad (2.29)$$

which after the change of variables $t = \pi R_5^2 (2m+1)^2 x$ gives

$$Z = \frac{V_5}{\pi^{\frac{5}{2}} (2\pi R_5)^5} \sum_m \frac{1}{|2m+1|^5} \int_0^\infty \frac{dx}{2x^{\frac{7}{2}}} e^{-\frac{1}{x}} \left(2^4 D_0 + \sum D(\mu) e^{-x\pi^2 (2m+1)^2 \mu^2 R_5^2} \right). \quad (2.30)$$

For μ of order unity, this simplifies to

$$Z = 2 (1 - 2^{-5}) \frac{\zeta(5)\Gamma(\frac{5}{2})}{\pi^{\frac{5}{2}}} n^* \frac{V_4}{(2\pi R_5)^4} \quad (2.31)$$

with $n^* = 2^3 D_0$.

This result was expected from the effective field theory point of view. Indeed in a theory with spontaneously broken $N = 4$ supersymmetry, the one loop effective potential receives a non-zero contribution proportional to the mass super-trace $\text{Str}\mathcal{M}^4$, which in turn is proportional to the fourth power of the gravitino mass. The super-traces $\text{Str}\mathcal{M}^n$ vanish for $n < N = 4$. In the example of supersymmetry breaking we examined above, the masses of the states are shifted according to their spin. For initially massless states, the mass after supersymmetry

breaking becomes :

$$M_Q^2 \rightarrow \frac{Q_F^2}{R_5^2}. \quad (2.32)$$

This shows that the string frame gravitino mass is of order $M_{\text{String}} \sim 1/R_5$ and thus $\text{Str}\mathcal{M}^4 \sim c/R_5^4$. Including the contributions from all Kaluza-Klein states, one obtains the result given in formula (2.31). We obtain for the string frame effective potential:

$$\mathcal{V}_{\text{String}} = -\frac{Z}{V_4} = -2(1-2^{-5}) \frac{\zeta(5)\Gamma(\frac{5}{2})}{\pi^{\frac{5}{2}}} n^* \frac{1}{(2\pi R_5)^4}. \quad (2.33)$$

In the Einstein frame, we have $\mathcal{V}_{\text{Ein}} = \frac{1}{s^2}\mathcal{V}_{\text{String}}$ – see equation (2.6) – so that

$$\mathcal{V}_{\text{Ein}} = -2(1-2^{-5}) \frac{\zeta(5)\Gamma(\frac{5}{2})}{\pi^{\frac{5}{2}}} n^* \frac{1}{s^2(2\pi R_5)^4} = -C_V \frac{1}{(s t_1 u_1)^2} = -C_V M^4, \quad (2.34)$$

where $t_1 = \text{Re}(T_1)$, $u_1 = \text{Re}(U_1)$, and $M = 1/(s t_1 u_1)^{1/2}$ is the gravitino mass scale in the Einstein frame.

We stress here that the one loop effective potential depends only on the gravitino mass scale, which in turn depends only on the product of the s , t_1 and u_1 moduli. This suggests to freeze all moduli and keep only the diagonal combination

$$3 \log z = \log s + \log t_1 + \log u_1. \quad (2.35)$$

The Kähler potential of the diagonal modulus Z , (with $z = \text{Re}(Z)$), takes the well known $SU(1, 1)$ structure [25]

$$K = -3 \log(Z + \bar{Z}). \quad (2.36)$$

This gives rise to the kinetic term and gravitino mass scale,

$$-g^{\mu\nu} 3 \frac{\partial_\mu Z \partial_\nu \bar{Z}}{(Z + \bar{Z})^2}, \quad M^2 = 8e^K = \frac{8}{(Z + \bar{Z})^3}. \quad (2.37)$$

Freezing $\text{Im}Z$ and defining the field Φ by

$$e^{2\alpha\Phi} = M^2 = \frac{8}{(Z + \bar{Z})^3}, \quad (2.38)$$

one finds the kinetic term

$$-g^{\mu\nu} 3 \frac{\partial_\mu Z \partial_\nu \bar{Z}}{(Z + \bar{Z})^2} = -g^{\mu\nu} \frac{\alpha^2}{3} \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi. \quad (2.39)$$

The choice $\alpha^2 = 3/2$ normalizes canonically the kinetic term of the modulus Φ . The potential for this particular model is:

$$\mathcal{V}_{\text{Ein}}(\Phi) = -C_V M^4 = -C_V e^{4\alpha\Phi}, \quad \alpha = \sqrt{\frac{3}{2}}. \quad (2.40)$$

Observe that in this simple model the sign of the potential is negative. As we now explain, we can construct models with a positive potential, but with the rest of the dependence on the modulus Φ being the same. All we have to do is to couple the momentum and winding numbers of the Scherk-Schwarz cycle not only to the space-time fermion number but also to another internal charge. For example consider the $E_8 \times E'_8$ heterotic string on T^6 and instead of coupling just to Q_F , we couple to $Q_F + Q_{E_8} + Q'_{E_8}$, where Q_{E_8} denotes the charge of an E_8 representation decomposed in terms of $SO(16)$ ones, and similarly for Q'_{E_8} . These charges take half integer values for the spinorial representations and integer values for the others. The initial Susy-breaking co-cycle gets modified as follows

$$(-)^{ag+bh+hg} \longrightarrow (-)^{(a+\bar{\gamma}+\bar{\gamma}')g+(b+\bar{\delta}+\bar{\delta}')h+hg}, \quad (2.41)$$

where as before the argument a is one for space-time fermions and zero for space-time bosons, and $(\bar{\gamma}, \bar{\gamma}') = (1, 1)$ for the spinorial representations of $SO(16) \times SO(16)'$ and $(0, 0)$ for the adjoint representations. This operation breaks explicitly the $E_8 \times E'_8$ gauge group to $SO(16) \times SO(16)'$. Proceeding in similar way as in the previous example, one finds:

$$Z = 2 (1 - 2^{-5}) \frac{\zeta(5)\Gamma(\frac{5}{2})}{\pi^{\frac{5}{2}}} \tilde{n}^* \frac{V_4}{(2\pi R_5)^4}, \quad (2.42)$$

where

$$\tilde{n}^* = 2^3 [[2]_{X_{2,3}} + [6]_{T^6} + [120 - 128]_{E_8} + [120 - 128]_{E'_8}] = -2^3 \times 8 = -64. \quad (2.43)$$

In the previous example only positive signs appear in the above formula since there is no coupling of the Scherk-Schwarz lattice quantum numbers to the $E_8 \times E'_8$ charges, giving the value $n^* = 2^3 \times 504$. The reversing of sign for some representations indicates that it is for the bosons that the masses are shifted and not for the fermions in the corresponding multiplet.

We note that in the $N = 4$ case, we cannot change the left-multiplicity since all of the left-moving R-charges are equivalent as required by symmetry. This however is not true for the $N = 2$ and $N = 1$ cases. Consider for instance the class of $N = 2$ supersymmetric

backgrounds obtained by compactifying the heterotic string on a T^4/\mathbb{Z}_2 orbifold (e.g. the \mathbb{Z}_2 -orbifold limit of the K_3 CY-compactification). In this class of models (see for instance [26]) four internal supercoordinates are twisted and the corresponding four internal R-charges are half-shifted. The Euclidean partition function is given by

$$Z = \oint_F \frac{d\tau d\bar{\tau}}{4\text{Im}\tau} \frac{1}{4} \sum_{(a,b),(H,G)} (-)^{a+b+ab} \frac{\theta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}^2 \theta \begin{bmatrix} a+H \\ b+G \end{bmatrix}^2}{\eta(\tau)^4} \\ \times \frac{\Gamma_{(1,1)}(R_0) \Gamma_{(3,3)}(\text{space})}{\eta(\tau)^2 \bar{\eta}(\bar{\tau})^2} Z_{(2,2+n_0)} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} Z_{(4,4+n_t)} \begin{bmatrix} H \\ G \end{bmatrix}. \quad (2.44)$$

Here $Z_{(2,2+n_0)}$ is the contribution of two internal coordinates¹ (X_5, X_6) and n_0 -right moving world-sheet bosons ϕ_i . Before supersymmetry breaking, the corresponding $(2, 2+n_0)$ -lattice is unshifted. $Z_{(4,4+n_t)}$ stands for the contribution of four internal coordinates (X_7, X_8, X_9, X_{10}) all of which are \mathbb{Z}_2 -twisted by (H, G) , and n_t -right moving world-sheet bosons ϕ_I which can be \mathbb{Z}_2 -twisted breaking part of the initial gauge group. The θ -function terms come from the contribution of the left-moving world-sheet fermions. Four of them are \mathbb{Z}_2 -twisted by (H, G) . The contribution associated to the space-time bosons is when $a = 0$, while the one associated to the space-time fermions is when $a = 1$.

From the above supersymmetric $N = 2$ partition function, the thermal partition function is obtained in a way similar to the $N = 4$ example, by the following replacement of the Euclidean time sub-lattice:

$$\Gamma_{(1,1)}(R_0) \longrightarrow \Gamma_{(1,1)} \begin{bmatrix} h_1 \\ g_1 \end{bmatrix} (R_0) (-)^{g_1 a + h_1 b + h_1 g_1}. \quad (2.45)$$

In the case of Scherk-Schwarz spontaneous supersymmetry breaking, the partition function can be obtained by a similar replacement of the internal X_5 coordinate lattice, either by utilizing the same operator Q_F

$$\Gamma_{(1,1)}(R_5) \longrightarrow \Gamma_{(1,1)} \begin{bmatrix} h_2 \\ g_2 \end{bmatrix} (R_5) (-)^{g_2 a + h_2 b + h_2 g_2} \quad (2.46)$$

or by utilizing an R-symmetry operator associated to one of the twisted complex planes

$$\Gamma_{(1,1)}(R_5) \longrightarrow \Gamma_{(1,1)} \begin{bmatrix} h_2 \\ g_2 \end{bmatrix} (R_5) (-)^{g_2(a+H) + h_2(b+G) + h_2 g_2}. \quad (2.47)$$

These are in fact the only two possibilities involving left-moving R charges since all others are equivalent choices. However, many other choices exist by utilizing parity-like operators

¹In our notations, the space-time coordinates are $X_{0,\dots,3}$, while the internal ones are $X_{5,\dots,10}$.

involving the right moving gauge charges $\sum \bar{\gamma}_i$, as in the explicit example of $SO(16) \times SO(16)'$ spinorial representations we gave above:

$$\Gamma_{(1,1)}(R_5) \longrightarrow \Gamma_{(1,1)} \left[\begin{smallmatrix} h_2 \\ g_2 \end{smallmatrix} \right] (R_5) (-)^{g_2(a+H+\sum \bar{\gamma}_i)+h_2(b+G+\sum \bar{\delta}_i)+h_2g_2}. \quad (2.48)$$

In the next section we examine representative examples in the case where thermal and spontaneous Susy breaking operations are present simultaneously.

3 Thermal and spontaneous breaking of Susy

The most interesting situation for cosmological applications is the case where spontaneous supersymmetry breaking and thermal corrections are taken into account simultaneously.

3.1 Untwisted sector

The untwisted sector of the $N = 2$ case, $(H, G) = (0, 0)$ in equation (2.44),² has an $N = 4$ structure and thus all choices for the left R-symmetry operators are equivalent. The quantum numbers of the Euclidean time cycle and the internal X_5 -cycle are coupled to the spin structures (a, b) in the same way. After performing the Jacobi theta-function identity the partition function becomes:

$$Z_{\text{untwist}} = -\frac{1}{2} \frac{V_5}{(2\pi)^5} \oint_F \frac{d\tau d\bar{\tau}}{4\text{Im}\tau^{\frac{7}{2}}} \sum_{(n_1, m_1), (h_1, g_1)} \sum_{(n_2, m_2), (h_2, g_2)} (-)^{g_1+g_2+h_1+h_2} e^{-\pi R_0^2 \frac{|2m_1+g_1+(2n_1+h_1)\tau|^2}{\text{Im}\tau}} e^{-\pi R_5^2 \frac{|2m_2+g_2+(2n_2+h_2)\tau|^2}{\text{Im}\tau}} \theta \left[\begin{smallmatrix} 1+h_1+h_2 \\ 1+g_1+g_2 \end{smallmatrix} \right]^4 \frac{\Gamma(5, 21)}{\eta(\tau)^{12} \bar{\eta}(\bar{\tau})^{24}}. \quad (3.1)$$

The factor of $1/2$ is due to the \mathbb{Z}_2 orbifolding of the $N = 4$ theory.

Proceeding as in the simpler examples before and neglecting the $h_1 = 1$ and $h_2 = 1$ sectors for large R_0, R_5 , the non-zero contributions to the partition function occur when $g_1 + g_2 = 1$. Assuming also that all other moduli are of order unity, the only non-exponentially suppressed contributions come from the zero mass left- and right-levels. We obtain

$$Z_{\text{untwist}} = 2^3 D_0 \frac{V_5}{(2\pi)^5} \sum_{g_1, g_2} \frac{(1 - (-)^{g_1+g_2})}{2} \int_0^\infty \frac{dt}{2t^{\frac{7}{2}}} \sum_{m_1, m_2} e^{-\pi R_0^2 \frac{(2m_1+g_1)^2}{t}} e^{-\pi R_5^2 \frac{(2m_2+g_2)^2}{t}}, \quad (3.2)$$

²For $h_1 = h_2 = 0$ (even windings), the sector $(H, G) = (0, 1)$ gives zero net contribution due to the identity $\frac{1}{2} \sum_{a,b} (-)^{a+b+ab} (-)^{ag_1} (-)^{ag_2} \theta \left[\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix} \right]^2 \theta \left[\begin{smallmatrix} a \\ b+1 \end{smallmatrix} \right] \theta \left[\begin{smallmatrix} a \\ b-1 \end{smallmatrix} \right] = 0$.

which after the change of variables $t = \pi (R_0^2(2m_1 + g_1)^2 + R_5^2(2m_2 + g_2)^2)$ x gives

$$\begin{aligned} Z_{\text{untwist}} &= \frac{4D_0 \Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\pi^{\frac{5}{2}}} \frac{V_5}{(2\pi)^5} \sum_{m_1, m_2} \frac{1}{(R_0^2(2m_1 + 1)^2 + R_5^2(2m_2)^2)^{\frac{5}{2}}} \\ &+ \frac{4D_0 \Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\pi^{\frac{5}{2}}} \frac{V_5}{(2\pi)^5} \sum_{m_1, m_2} \frac{1}{(R_0^2(2m_1)^2 + R_5^2(2m_2 + 1)^2)^{\frac{5}{2}}}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

This expression is symmetric under the $R_0 \leftrightarrow R_5$ exchange. This is suggestive of a temperature/gravitino mass, T/M , duality. This duality will be broken when the supersymmetry breaking arises due to the coupling to a different Q_R charge than Q_F .

To obtain the effective four dimensional pressure, we must factorize out the space-time volume V_4 . To this extent it is convenient to define the complex structure-like ratio

$$u = \frac{R_0}{R_5} = \frac{M}{T}, \quad (3.4)$$

and re-write the partition function in the following way

$$\begin{aligned} Z_{\text{untwist}} &= \frac{4D_0 \Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\pi^{\frac{5}{2}}} \frac{V_4}{(2\pi R_0)^4} \sum_{m_1, m_2} \frac{u^4}{|(2m_1 + 1)iu + 2m_2|^5} \\ &+ \frac{4D_0 \Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\pi^{\frac{5}{2}}} \frac{V_4}{(2\pi R_5)^4} \sum_{m_1, m_2} \frac{1}{|2m_1iu + (2m_2 + 1)|^5}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Define the function

$$f(u) \equiv \sum_{m_1, m_2} \frac{u^4}{|(2m_1 + 1)iu + 2m_2|^5}, \quad (3.6)$$

which we can express in terms of Eisenstein functions of order $5/2$:

$$f(u) = u^{\frac{3}{2}} \left(\frac{1}{2^{\frac{5}{2}}} E_{5/2} \left(\frac{iu}{2} \right) - \frac{1}{2^5} E_{5/2}(iu) \right), \quad (3.7)$$

where

$$E_k(U) = \sum_{(m,n) \neq (0,0)} \left(\frac{\text{Im } U}{|m + nU|^2} \right)^k. \quad (3.8)$$

Then the pressure in the Einstein frame can be written as

$$P_{\text{untwist}} = C_T^{\text{unt}} T^4 f(u) + C_V^{\text{unt}} M^4 \frac{f(1/u)}{u}, \quad (3.9)$$

where

$$C_T^{\text{unt}} = C_V^{\text{unt}} = n_{\text{unt}}^* \frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\pi^{\frac{5}{2}}}. \quad (3.10)$$

Here $n_{\text{unt}}^* = 4D_0$ is the number of massless boson/fermion pairs in the untwisted sector. It is smaller by a factor of 1/2 from the corresponding number in the $N = 4$ case due to the \mathbb{Z}_2 -orbifolding. In this particular model the coefficients C_T^{unt} and C_V^{unt} are equal due to the underlying gravitino mass/temperature duality. For fixed u the first term stands for the thermal contribution to the pressure while the second term stands for minus the effective potential.

We note that the coefficient C_T^{unt} is fixed and positive as it is determined by the number of all massless boson/fermion pairs in the untwisted sector of the initially supersymmetric theory: $n_{\text{unt}}^* = 4D_0$. In general, the coefficient C_V^{unt} will depend on the precise way supersymmetry is broken. As we have demonstrated in the previous section, it can take both negative and positive values, depending on how the Susy-breaking operator couples to the right movers: $C_V^{\text{unt}} \sim \tilde{n}_{\text{unt}}^*$. Thus in general the temperature/gravitino mass scale duality will be broken.

Let us discuss the large u limit, which can be obtained by taking R_5 to be small (but still parametrically larger as compared to the string scale), while taking R_0 to be much larger. In this limit we expect to find a four dimensional system at finite temperature, for which only massless bosonic degrees of freedom are thermally excited. *All* fermions attain a mass from the Scherk-Schwarz boundary conditions along the X_5 cycle, and this mass is much bigger than the temperature for large u . Therefore they can be integrated out giving a temperature independent contribution to the pressure of order $1/R_5^4$. Setting $\tilde{u} = 1/u$, we have in the limit $\tilde{u} \rightarrow 0$ ($u \rightarrow \infty$):

$$f(u) = f(1/\tilde{u}) \rightarrow \sum_{m_1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{((2m_1 + 1)^2 + 4x^2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{2}{3} \sum_{m_1} \frac{1}{(2m_1 + 1)^4} = \frac{1}{3} \times \frac{\pi^4}{24}, \quad (3.11)$$

and

$$\begin{aligned} \frac{f(1/u)}{u} &\rightarrow \sum_{m_1} \frac{1}{|2m_1 + 1|^5} + \frac{1}{2^5 u^4} \sum_{m_2 \neq 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(m_2^2 + x^2)^{\frac{5}{2}}} \\ &= 2(1 - 2^{-5}) \zeta(5) + \frac{1}{24 u^4} \sum_{m_2 \neq 0} \frac{1}{m_2^4} \\ &= 2(1 - 2^{-5}) \zeta(5) + \frac{1}{12 u^4} \times \frac{\pi^4}{90}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Using these results, we find

$$P_{\text{untwist}} = \frac{1}{3} \frac{2^3 D_0}{2} \frac{\pi^2 T^4}{30} + 2(1 - 2^{-5}) \frac{\zeta(5) \Gamma(\frac{5}{2})}{\pi^{\frac{5}{2}}} (4D_0) M^4 \quad (3.13)$$

for the first two leading terms for small $\tilde{u} = 1/u$. We have used the relation $\Gamma(\frac{5}{2}) = 3\sqrt{\pi}/4$. The first contribution arises from the thermally excited massless bosons. As compared to equation (2.27) with $n_B = 2^3 D_0$ and $n_F = 0$, it is off by a factor of 1/2 due to the \mathbb{Z}_2 -orbifolding. Similarly, the second term is off by a factor of 1/2 as compared to equation (2.31) due to the orbifolding. For large u , the potential term is dominant. For generic values of u both fermions and bosons contribute to the thermal piece as in equation (3.9), with the contribution depending on the number of massless states at zero temperature and before the breaking of supersymmetry. Finally for small u , the system is essentially a five dimensional purely thermal system.

3.2 Twisted sector, $H = 1$

The contributions of the twisted sectors in the large R_0, R_5 limit depend on the number of the massless twisted states before the supersymmetry breaking, and can be determined in similar way as before. However, there is a class of models where the \mathbb{Z}_2 -orbifolding acts freely, without any fixed points, and therefore there are no massless states in the twisted sectors. For this class of models, the whole contribution to the one-loop partition function, in the large R_0, R_5 limit, is that of the massless untwisted sector states we have already determined. One example with this property is when the \mathbb{Z}_2 -twists (H, G) are accompanied with a shift of the $\Gamma_{(1,1)}(R_6)$ sub-lattice. This operation leads to the modification of $Z_{(2,10)}$ in equation (2.44), where we also set $(n_0, n_t) = (8, 8)$, as follows:

$$Z_{(2,10)} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow Z_{(2,10)} \begin{bmatrix} H \\ G \end{bmatrix} = \frac{\Gamma_{(1,1)}(R_5) \Gamma_{(1,1)}(R_6) \begin{bmatrix} H \\ G \end{bmatrix}}{\eta(\tau)^2 \bar{\eta}(\bar{\tau})^2} \frac{1}{2} \sum_{\gamma, \delta} \frac{\bar{\theta}[\gamma]_8^8}{\bar{\eta}(\bar{\tau})^8}. \quad (3.14)$$

If R_6 is sufficiently large, the coupling of the (H, G) -shift of the lattice to the twisted partition function $Z_{(4,12)} \begin{bmatrix} H \\ G \end{bmatrix}$ ensures the absence of massless states in the twisted sector.

In other situations, there are massless states in the twisted sector. Before the supersymmetry breaking, the number of massless bosons is equal to the number of massless fermions with a multiplicity n_{twist}^* . Proceeding as in the untwisted sector, and neglecting the $h_1, h_2 = 1$ sectors, one finds that there is only a non zero contribution when $g_1 + g_2 = 1$. The relative sign of the thermal part $\sim T^4$ and the supersymmetry breaking part $\sim M^4$ depends on the choice of the operators Q_F and Q_R . When there is no coupling to the right-moving gauge

charges we obtain:

$$P_{\text{twist}} = C_T^{\text{twist}} T^4 f(u) + C_V^{\text{twist}} M^4 \frac{f(1/u)}{u}, \quad (3.15)$$

where

$$\begin{aligned} C_T^{\text{twist}} &= n_{\text{twist}}^* \frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\pi^{\frac{5}{2}}} \\ C_V^{\text{twist}} &= \epsilon n_{\text{twist}}^* \frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\pi^{\frac{5}{2}}} \\ \epsilon &= (-)^{(Q_R - Q_F)}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Here, we have for the coefficient ϵ :

- $\epsilon = 1$ when $Q_R = Q_F$.
- $\epsilon = -1$ when $Q_R \neq Q_F$.

In the later case, $(-)^{(Q_R - Q_F)} = (-)^H = -1$, see equation (2.47), and $H = 1$ in the twisted sector. The change of sign indicates that it is the bosons that are becoming massive because of the supersymmetry breaking. This is related to a mechanism for moduli stabilization induced by geometrical fluxes [17].

Adding the contributions of the untwisted and twisted sectors together we obtain for the pressure

$$P = C_T T^4 f(u) + C_V M^4 \frac{f(1/u)}{u}, \quad (3.17)$$

where $C_T = C_T^{\text{unt}} + C_T^{\text{twist}}$ and likewise for C_V . The sign of the thermal contribution is always positive,

$$C_T = \frac{n_T^* \Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\pi^{\frac{5}{2}}}, \quad (3.18)$$

$n_T^* = n_{\text{unt}}^* + n_{\text{twist}}^*$. The coefficient multiplying the supersymmetry breaking part is given by

$$C_V = \frac{n_V^* \Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\pi^{\frac{5}{2}}} \quad (3.19)$$

with $n_V^* = n_{\text{unt}}^* + \epsilon n_{\text{twist}}^*$. In general n_V^* can be positive or negative depending on the model.

3.3 An explicit example

As an example we consider the $E_8 \times E_8$ heterotic string on a T^4/\mathbb{Z}_2 orbifold, whose initially supersymmetric partition function is obtained by setting

$$Z_{(2,10)} = \frac{\Gamma_{(1,1)}(R_5) \Gamma_{(1,1)}(R_6)}{\eta(\tau)^2 \bar{\eta}(\bar{\tau})^2} \frac{1}{2} \sum_{\gamma, \delta} \frac{\bar{\theta}[\gamma]_{\delta}^8}{\bar{\eta}(\bar{\tau})^8}, \quad (3.20)$$

and

$$Z_{(4,12)} [G] = \frac{\Gamma_{(4,4)} [G]}{\eta(\tau)^4 \bar{\eta}(\bar{\tau})^4} \frac{1}{2} \sum_{\gamma', \delta'} \frac{\bar{\theta} \left[\frac{\gamma'}{\delta'} \right]^6 \bar{\theta} \left[\frac{\gamma'+H}{\delta'+G} \right] \bar{\theta} \left[\frac{\gamma'-H}{\delta'-G} \right]}{\bar{\eta}(\bar{\tau})^8} \quad (3.21)$$

in equation (2.44). We shall use an R-symmetry operator associated to one of the twisted complex planes for breaking the supersymmetry, replacing the $\Gamma_{(1,1)}(R_5)$ lattice as in equation (2.47). In the twisted sectors, $(H, G) \neq (0, 0)$, the internal $\Gamma_{(4,4)}$ shifted lattice is given by

$$\Gamma_{(4,4)} [G] = \frac{2^4 \eta(\tau)^6 \bar{\eta}(\bar{\tau})^6}{\theta \left[\frac{1+H}{1+G} \right]^2 \bar{\theta} \left[\frac{1+H}{1+G} \right]^2}. \quad (3.22)$$

The orbifolding breaks the $E_8 \times E_8$ gauge group to $E_8 \times E_7 \times SU(2)$. Under $E_8 \rightarrow E_7 \times SU(2)$, the 248-dimensional adjoint representation of E_8 decomposes as

$$(\mathbf{1}, \mathbf{3}) \oplus (\mathbf{56}, \mathbf{2}) \oplus (\mathbf{133}, \mathbf{1}). \quad (3.23)$$

The untwisted sector contains $2^3 \times 504$ massless states giving the value $n_{\text{unt}}^* = 4 \times 504$ for the total number of boson/fermion pairs. These numbers arise as follows. In terms of world-sheet left/right movers the number of bosonic degrees of freedom is given by

$$n_{\text{unt}}^* = 4 \times 504 = [4]_{\psi^{2,3,5,6}} \times ([4]_{X^{2,3,5,6}} + [248]_{E_8} + [133]_{E_7} + [3]_{SU(2)}) + [4]_{\psi^{7,8,9,10}} \times ([4]_{X^{7,8,9,10}} + [2]_{SU(2)} \times [56]_{E_7}). \quad (3.24)$$

The first line gives the bosonic content of a $d = 6$ supergravity multiplet, a tensor multiplet and a vector multiplet in the adjoint of the $E_8 \times E_7 \times SU(2)$ gauge group. The second line gives the bosonic content of four uncharged and one charged hyper-multiplets. The number of fermionic degrees of freedom follows by supersymmetry. At finite temperature and when Susy is broken, the contribution of the massless untwisted states is determined as before (see equation (3.5)).

Next we analyze the contribution of states in the twisted sectors, $H = 1$. For large R_0, R_5 , we may neglect the $h_1 = 1$ and $h_2 = 1$ sectors. Also for R_6 of order unity we may set $\Gamma_{(1,1)}(R_6) \cong 1$. Setting $H = 1$, the partition function becomes in this limit

$$Z_{\text{twisted}} = \frac{V_5}{(2\pi)^5} \int_{\parallel} \frac{d\tau d\bar{\tau}}{4\text{Im}\tau^{\frac{7}{2}}} \frac{1}{\eta(\tau)^6 \bar{\eta}(\bar{\tau})^{18}} \sum_{(m_1, g_1), (m_2, g_2)} e^{-\pi R_0^2 \frac{(2m_1+g_1)^2}{\text{Im}\tau}} e^{-\pi R_5^2 \frac{(2m_2+g_2)^2}{\text{Im}\tau}} \times \frac{1}{4} \sum_{(a,b,G)} (-)^{a+b+ab} (-)^{ag_1} (-)^{(a+1)g_2} \theta \left[\frac{a}{b} \right]^2 \theta \left[\frac{a+1}{b+G} \right]^2$$

$$\times \frac{2^4}{\theta \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 1+G \end{smallmatrix} \right]^2 \bar{\theta} \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 1+G \end{smallmatrix} \right]^2} \frac{1}{2} \sum_{\gamma, \delta} \bar{\theta} \left[\begin{smallmatrix} \gamma \\ \delta \end{smallmatrix} \right]^8 \frac{1}{2} \sum_{\gamma', \delta'} \bar{\theta} \left[\begin{smallmatrix} \gamma' \\ \delta' \end{smallmatrix} \right]^6 \bar{\theta} \left[\begin{smallmatrix} \gamma'+1 \\ \delta'+G \end{smallmatrix} \right] \bar{\theta} \left[\begin{smallmatrix} \gamma'-1 \\ \delta'-G \end{smallmatrix} \right]. \quad (3.25)$$

The non-vanishing contributions arise when $g_1 + g_2 = 1$. Non-exponentially suppressed contributions arise only at the zero mass level. To obtain them, we expand the integrand in powers of $q = e^{2\pi i\tau}$.

When $g_1 + g_2 = 1$, we have for the left movers

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\eta(\tau)^6 \theta \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 1+G \end{smallmatrix} \right]^2} \frac{1}{2} \sum_{(a,b)} (-)^{a+b+ab} (-)^{ag_1} (-)^{(a+1)g_2} \theta \left[\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix} \right]^2 \theta \left[\begin{smallmatrix} a+1 \\ b+G \end{smallmatrix} \right]^2 \\ &= \frac{1}{\eta(\tau)^6 \theta \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 1+G \end{smallmatrix} \right]^2} \frac{1}{2} \sum_{(a,b)} (-)^{g_2} (-)^{b+ab} \theta \left[\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix} \right]^2 \theta \left[\begin{smallmatrix} a+1 \\ b+G \end{smallmatrix} \right]^2 \\ &= \frac{(-)^{g_2} \theta_2^2 \theta_3^2}{\eta^6 \theta_4^2} \text{ for } G=0 \quad \text{or} \quad \frac{(-)^{g_2} \theta_2^2 \theta_4^2}{\eta^6 \theta_3^2} \text{ for } G=1 \\ &= 4(-)^{g_2} (1 + \mathcal{O}(q^{1/2})). \end{aligned} \quad (3.26)$$

For the right movers we have

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\bar{\eta}(\bar{\tau})^{18} \bar{\theta} \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 1+G \end{smallmatrix} \right]^2} \frac{1}{2} \sum_{\gamma, \delta} \bar{\theta} \left[\begin{smallmatrix} \gamma \\ \delta \end{smallmatrix} \right]^8 \frac{1}{2} \sum_{\gamma', \delta'} \bar{\theta} \left[\begin{smallmatrix} \gamma' \\ \delta' \end{smallmatrix} \right]^6 \bar{\theta} \left[\begin{smallmatrix} \gamma'+1 \\ \delta'+G \end{smallmatrix} \right] \bar{\theta} \left[\begin{smallmatrix} \gamma'-1 \\ \delta'-G \end{smallmatrix} \right] \\ &= \frac{1}{\bar{q}^{3/4}} (1 + (-)^G 4 \bar{q}^{1/2} + \dots) (1 + 240 \bar{q} + \dots) [\bar{q}^{1/4} ((-)^G 2 + 56 \bar{q}^{1/2} + \dots)] \\ &= \frac{1}{\bar{q}^{1/2}} [(-)^G 2 + 8 \bar{q}^{1/2} + 56 \bar{q}^{1/2} + \mathcal{O}(\bar{q})]. \end{aligned} \quad (3.27)$$

When we add the contributions of the $(H, G) = (1, 0)$ and $(H, G) = (1, 1)$ twisted sectors together, we find that the lowest right-mass level is at zero mass as it is the case for the lowest left-mass level.

Using these results we obtain the contribution to the partition function of the massless twisted states:

$$\begin{aligned} Z_{\text{twist}} &= 2^6 (56 + 8) \frac{V_5}{(2\pi)^5} \sum_{g_1, g_2} \frac{(-)^{g_2} - (-)^{g_1}}{2} \int_0^\infty \frac{dt}{2t^{\frac{7}{2}}} \sum_{(m_1, m_2)} e^{-\pi R_0^2 \frac{(2m_1 + g_1)^2}{\text{Im}\tau}} e^{-\pi R_5^2 \frac{(2m_2 + g_2)^2}{\text{Im}\tau}} \\ &= \frac{2^5 (56 + 8) \Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\pi^{\frac{5}{2}}} \left(\frac{V_4}{(2\pi R_0)^4} f(u) - \frac{V_4}{(2\pi R_5)^4} \frac{f(1/u)}{u} \right). \end{aligned} \quad (3.28)$$

The contribution to the pressure is as in equations (3.15), (3.16) with $n_{\text{twist}}^* = 2^5 (56 + 8)$, the number of massless boson/fermion pairs in the twisted sector, and $\epsilon = -1$. The massless

bosonic content consists of 32 scalars in the $(56, 1)$ representation of $E_7 \times SU(2)$ and 128 scalars in the representation $(1, 2)$. The number of massless fermionic degrees of freedom follows by supersymmetry.

Adding the contributions of the untwisted and twisted sectors together, we obtain

$$\begin{aligned} n_T^* &= 4 \times 504 + 16 \times 128 = 4064 \\ n_V^* &= 4 \times 504 - 16 \times 128 = -32. \end{aligned} \tag{3.29}$$

In addition, we have the choice with $\epsilon = 1$ in equation (3.16), giving $n_T^* = n_V^* = 4064$. We can also change n_V^* by considering Susy-breaking operators involving the right-moving gauge charges as in equation (2.48).

3.4 Small mass scales from Wilson line deformations

A generic supersymmetric heterotic background may contain in its spectrum massive supermultiplets whose mass is obtained by switching on non-trivial continuous Wilson-lines [26] – [28]. This is a stringy realization of the Higgs mechanism, breaking the initial gauge group G to a smaller one spontaneously. This statement is not absolutely correct for discrete Wilson lines corresponding to extended symmetry points where the gauge symmetry may enhance or even get modified.

For our purposes, we restrict to arbitrary and small Wilson line deformations starting from a given supersymmetric background where R_I , $I = 6, 7, \dots, 10$ are of the order the string scale. This restriction ensures that the contributions to the thermal partition function of the momentum and winding states in these five internal directions will be exponentially suppressed in the limit where R_0 and R_5 are large.

A systematic study of the effects of Wilson lines can be found in [26] – [28]. In the zero winding sector, a Wilson line just modifies the Kaluza-Klein momenta, and the corresponding Kaluza-Klein mass becomes

$$\frac{m_I^2}{R_I^2} \longrightarrow \frac{(m_I + y_I^a Q_a)^2}{R_I^2}, \tag{3.30}$$

where Q_a is the charge operator associated to the Wilson-line y_I^a . We distinguish two different situations according to the direction I :

i) $I = 5$ where R_5 is large,

ii) $I = 6, \dots, 10$ where the R_I are of order the string scale.

In the first case, $I = 5$, after a Poisson re-summation, the net modification to the partition function is obtained by the following replacement in equation (3.5):

$$\int_0^\infty \frac{dt}{t^{\frac{7}{2}}} \sum_{m_1, m_2} e^{-\pi R_0^2 \frac{(2m_1+g_1)^2}{t} - \pi R_5^2 \frac{(2m_2+g_2)^2}{t}} \longrightarrow \int_0^\infty \frac{dt}{t^{\frac{7}{2}}} \sum_{m_1, m_2} e^{-\pi R_0^2 \frac{(2m_1+g_1)^2}{t} - \pi R_5^2 \frac{(2m_2+g_2)^2}{t}} [e^{2i\pi(2m_2+g_2) y_5^a Q_a}]. \quad (3.31)$$

The term in the brackets can be replaced with

$$\cos(2\pi(2m_2+g_2) y_5^a Q_a) = 1 - 2 \sin^2(\pi(2m_2+g_2) y_5^a Q_a). \quad (3.32)$$

In the second case, $I = 6, 7, \dots, 10$, we can set the momentum and winding numbers to zero, $m_I = n_I = 0$, so that the extra modification in the partition function is the insertion of the term:

$$\left[e^{-\pi t \sum_I \left(\frac{y_I^a Q_a}{R_I} \right)^2} \right] \simeq \left[1 - \pi t \sum_I \left(\frac{y_I^a Q_a}{R_I} \right)^2 \right]. \quad (3.33)$$

Incorporating the effects of the Wilson lines up to quadratic order, we get for the overall pressure:

$$\begin{aligned} P = & T^4 \frac{\Gamma(\frac{5}{2})}{\pi^{\frac{5}{2}}} \sum_{m_1, m_2} \frac{u^4 (n_T^* - 2 \sum_s \sin^2(2\pi m_2 y_5^a Q_a^s))}{|(2m_1+1)iu + 2m_2|^5} \\ & - T^2 \frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{\pi^{\frac{3}{2}}} \sum_{m_1, m_2} \frac{u^2 (M_T^2 - 2 \sum_s M_s^2 \sin^2(2\pi m_2 y_5^a Q_a^s))}{|(2m_1+1)iu + 2m_2|^3} \\ & + M^4 \frac{\Gamma(\frac{5}{2})}{\pi^{\frac{5}{2}}} \sum_{m_1, m_2} \frac{n_V^* - 2 \sum_s \text{sign}(s) \sin^2((2m_2+1)\pi y_5^a Q_a^s)}{|2m_1iu + (2m_2+1)|^5} \\ & - M^2 \frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{\pi^{\frac{3}{2}}} \sum_{m_1, m_2} \frac{M_V^{(2)} - 2 \sum_s \text{sign}(s) M_s^2 \sin^2((2m_2+1)\pi y_5^a Q_a^s)}{|2m_1iu + (2m_2+1)|^3}. \quad (3.34) \end{aligned}$$

In this expression, we have defined

$$M_s^2 = \frac{1}{4\pi} \sum_{I=6}^{10} \frac{(y_I^a Q_a^s)^2}{R_I^2} \quad (3.35)$$

for the pair of boson/fermion states s and also introduced

$$M_T^2 = \sum_s M_s^2, \quad M_V^{(2)} = \sum_s \text{sign}(s) M_s^2, \quad (3.36)$$

where $\text{sign}(s)$ indicates whether the state s contributes positively or negatively to n_V^* and $M_V^{(2)}$, both being possibly negative.

The following comments are in order:

- In the above expression, $y_5^a Q_a^s$ is an effective number summarizing the contribution of the R_5 -Wilson line in the term corresponding to the pair of boson/fermion states s . It does not introduce a new scale.

- The M_s 's introduce new mass scales in the theory, qualitatively different than T and M . The masses M_s are supersymmetric mass scales rather than Susy-breaking scales like T and M .

- The first two terms (which arise from the $(g_1, g_2) = (1, 0)$ sector) can be identified in the effective field theory as the thermal contribution to the pressure, P_{thermal} . Again the number n_T^* is always positive being the number of the massless boson/fermion pairs in the initially supersymmetric background. This purely thermal piece is always positive.

- The two last terms can be identified as minus the effective potential $-\mathcal{V}_{\text{eff}}$. This is naturally regularized in the infrared by the temperature scale T . This infrared regularization differs from that considered in [29], and used in [6], which is valid at zero temperature.

- The number n_V^* can be either positive or negative depending of the way supersymmetry is broken. This shows that the sign of the one loop effective potential depends on the way supersymmetry is broken, as it can be seen in supergravity by utilizing the super-trace arguments [30].

3.5 Scaling properties of the thermal effective potential

The final expression for P contains various mass scales: the two supersymmetry breaking scales which are the temperature T and the gravitino mass scale M , as well as the supersymmetric masses M_s which are generated by the Wilson-lines in the directions 6, 7, 8, 9, 10. The first identity follows immediately from the definition of P :

$$\left(T \frac{\partial}{\partial T} + M \frac{\partial}{\partial M} + \sum_s M_s \frac{\partial}{\partial M_s} \right) P = 4P \quad (3.37)$$

which can be best seen by writing P as

$$P \equiv T^4 p_4(u) + T^2 p_2(u), \quad u = \frac{M}{T}, \quad (3.38)$$

where

$$p_4 = \frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\pi^{\frac{5}{2}}} \left(F(u, y_5^a) + \tilde{F}(u, y_5^a) \right), \quad p_2 = -\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\pi^{\frac{3}{2}}} \left(G(u, y_5^a) + \tilde{G}(u, y_5^a) \right), \quad (3.39)$$

and using the definitions

$$F(u, y_5^a) = \sum_{m_1, m_2, s} \frac{u^4 \cos(4\pi m_2 y_5^a Q_a^s)}{[(2m_1 + 1)^2 u^2 + 4m_2^2]^{5/2}},$$

$$\tilde{F}(u, y_5^a) = \sum_{m_1, m_2, s} \frac{u^4 \text{sign}(s) \cos(2\pi(2m_2 + 1)y_5^a Q_a^s)}{[4m_1^2 u^2 + (2m_2 + 1)^2]^{5/2}}, \quad (3.40)$$

$$G(u, y_5^a) = \sum_{m_1, m_2, s} \frac{u^2 M_s^2 \cos(4\pi m_2 y_5^a Q_a^s)}{[(2m_1 + 1)^2 u^2 + 4m_2^2]^{3/2}},$$

$$\tilde{G}(u, y_5^a) = \sum_{m_1, m_2, s} \frac{u^2 \text{sign}(s) M_s^2 \cos(2\pi(2m_2 + 1)y_5^a Q_a^s)}{[4m_1^2 u^2 + (2m_2 + 1)^2]^{3/2}}. \quad (3.41)$$

Using standard thermodynamic identities, we can obtain the energy density ρ :

$$\rho \equiv T \frac{\partial P}{\partial T} - P = T^4 r_4(u) + T^2 r_2(u) \quad (3.42)$$

where

$$r_4 = 3p_4 - up_4', \quad r_2 = p_2 - up_2' \quad (3.43)$$

and the primes stand for derivatives with respect to u . In the sequel, we allow the Susy-breaking scales T and M to vary with time while fixing the supersymmetric masses M_s , and investigate the back-reaction to the initially flat metric and moduli fields.

4 Gravitational equations and critical solution

We assume that the back-reacted space-time metric is homogeneous and isotropic,

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 d\Omega_k^2, \quad H = \left(\frac{\dot{a}}{a} \right), \quad (4.1)$$

where Ω_k denotes the three dimensional space with constant curvature k and H is the Hubble parameter.

From the fact that $-P$ plays the role of the effective potential and the relation between the gravitino mass scale M and the no-scale modulus Φ ,

$$M = e^{\alpha\Phi}, \quad \alpha = \sqrt{\frac{3}{2}},$$

we obtain the field equation for Φ :

$$\ddot{\Phi} + 3H\dot{\Phi} = \frac{\partial P}{\partial \Phi} = \alpha u \left(\frac{\partial P}{\partial u} \right)_T = -\alpha (T^4(r_4 - 3p_4) + T^2(r_2 - p_2)). \quad (4.2)$$

We have made use of equation (3.43).

For other flat moduli φ_i , with Φ independent kinetic terms, the equation of motion is straightforward to solve,

$$\ddot{\varphi}_i + 3H\dot{\varphi}_i = 0 \quad \implies \quad \frac{1}{2}\dot{\varphi}_i^2 = \frac{c_i^2}{a^6}, \quad (4.3)$$

where the c_i 's are integration constants.

Knowing the thermal effective potential $-P$, the energy density ρ as well as the field equation for the modulus Φ , we can derive the (one-loop) corrected space-time metric by solving the gravitational field equations. These are the Friedmann-Hubble equation,

$$3H^2 = \frac{1}{2}\dot{\Phi}^2 + \frac{1}{2}\sum_i \dot{\varphi}_i^2 + \rho - \frac{3k}{a^2}, \quad (4.4)$$

and the equation that follows from varying with respect to the spatial components of the metric:

$$2\dot{H} + 3H^2 = -\frac{k}{a^2} - P - \frac{1}{2}\dot{\Phi}^2 - \frac{1}{2}\sum_i \dot{\varphi}_i^2. \quad (4.5)$$

For our purposes, it will be useful to replace equation (4.5) by the linear sum of equations (4.4) and (4.5), so that the kinetic terms of Φ and φ_i drop out:

$$\dot{H} + 3H^2 = -\frac{2k}{a^2} + \frac{1}{2}(\rho - P). \quad (4.6)$$

4.1 Critical solution

The fundamental ingredients in our analysis are the scaling properties of the thermal effective potential $-P = -T^4 p_4 - T^2 p_2$. These scaling properties suggest to search for a solution where all varying mass scales of the system, $M(\Phi)$, T and $1/a$, remain proportional during time evolution:

$$e^{\alpha\Phi} \equiv M(\Phi) = \frac{1}{\gamma a} \quad \implies \quad H = -\alpha\dot{\Phi}, \quad M(\Phi) = uT, \quad (4.7)$$

with γ and u fixed in time. Our aim is thus to determine the constants γ and u .

On the trajectory (4.7), the Φ -equation is given by

$$\dot{H} + 3H^2 = \alpha^2 \left((r_4 - 3p_4) \frac{M^4}{u^4} + (r_2 - p_2) \frac{M^2}{u^2} \right) \quad (4.8)$$

and the gravity equation (4.6) by

$$\dot{H} + 3H^2 = -2k\gamma^2 M^2 + \frac{1}{2}(r_4 - p_4) \frac{M^4}{u^4} + \frac{1}{2}(r_2 - p_2) \frac{M^2}{u^2}. \quad (4.9)$$

The compatibility of these two equations requires an identification of the coefficients of the monomials in M . The quartic terms give an equation for u , while the quadratic terms determine the sign of the parameter k and the magnitude of $|k\gamma^2|$,

$$r_4 = \frac{6\alpha^2 - 1}{2\alpha^2 - 1} p_4, \quad \left(r_4 = 4p_4 \quad \text{for} \quad \alpha^2 = \frac{3}{2} \right), \quad (4.10)$$

$$-2k\gamma^2 = \frac{2\alpha^2 - 1}{2} (r_2 - p_2) \frac{1}{u^2}, \quad \left(-2k\gamma^2 = \frac{(r_2 - p_2)}{u^2} \quad \text{for} \quad \alpha^2 = \frac{3}{2} \right). \quad (4.11)$$

Equation (4.10) reminds us of the equation of state for thermal radiation in five dimensions. In the absence of Wilson lines, where $r_2 = p_2 = 0$, we have that $\rho = 4P$, which is indeed the $5d$ state equation for thermal radiation.

Next let us consider the Friedmann-Hubble equation (4.4) along the critical trajectory (4.7) where we may set $\dot{\Phi}^2 = H^2/\alpha^2$. It becomes

$$\left(\frac{6\alpha^2 - 1}{6\alpha^2} \right) 3H^2 = -\frac{3k}{a^2} + \rho + \frac{1}{2} \sum_i \varphi_i^2 = -\frac{3k}{a^2} + T^4 r_4 + T^2 r_2 + \sum_i \frac{c_i^2}{a^6}. \quad (4.12)$$

Then by using the compatibility conditions (4.10) and (4.11), it is easy to check that equation (4.9) follows. Our ansatz (4.7) allows to reduce the differential system of equations for the modulus Φ and the gravitational field to the compatibility equations for the constants γ , u and k and the Friedman-Hubble equation (4.12).

The dilatation factor in front of $3H^2$ can be absorbed in the definition of \hat{k} , c_r and c_m , once we take into account equations (4.14) and (4.15) below:

$$3H^2 = -\frac{3\hat{k}}{a^2} + \frac{c_r}{a^4} + \frac{c_m}{a^6}, \quad (4.13)$$

where

$$3\hat{k} = -\frac{1}{\gamma^2} \frac{6\alpha^2}{6\alpha^2 - 1} \frac{1}{u^2} \left(\frac{3(2\alpha^2 - 1)}{4} (r_2 - p_2) + r_2 \right), \quad (4.14)$$

$$c_r = \frac{1}{\gamma^4} \frac{6\alpha^2}{6\alpha^2 - 1} \frac{r_4}{u^4} = \frac{1}{\gamma^4} \frac{6\alpha^2}{2\alpha^2 - 1} \frac{p_4}{u^4}, \quad (4.15)$$

and

$$c_m = \frac{6\alpha^2}{6\alpha^2 - 1} \sum_i c_i^2. \quad (4.16)$$

Recalling that $\alpha^2 = 3/2$ and the relation (3.43), equation (4.10) for u becomes

$$p_4 + u p'_4 = 0, \quad (4.17)$$

whose solution determines

$$c_m = \frac{9}{8} \sum_i c_i^2, \quad c_r = \frac{9}{2\gamma^4} \frac{p_4}{u^4}, \quad \hat{k} = -\frac{3}{16\gamma^2} \frac{2p_2 - 5up'_2}{u^2}. \quad (4.18)$$

Clearly, a necessary condition for the curvature \hat{k} not to vanish is to have non trivial Wilson lines in any of the directions 6, 7, 8, 9, 10.

We note that equation (4.13) also controls the dynamics of a FRW universe, where space has constant curvature \hat{k} and is formally filled with a thermal bath of radiation (since the sign of c_r can a priori be positive as well as negative). There can be an extra contribution, arising from the kinetic terms of some extra flat moduli, that scales as $1/a^6$.

Finally let us address a seeming puzzle. We said that along the critical trajectory and in the absence of Wilson lines, our thermodynamic quantities satisfy $\rho = 4P$. How can this situation correspond to a $4d$ universe filled with thermal radiation? The answer is that we must take into account the kinetic energy density of the modulus field Φ . When there are no Wilson lines and the kinetic terms of the other moduli are switched off, the Friedmann-Hubble equation gives $\dot{\Phi}^2 = (r_4 T^4)/4$ along the critical trajectory, and so the total energy density and pressure satisfy

$$\begin{aligned} \rho_{\text{tot}} &= r_4 T^4 + \frac{1}{2} \dot{\Phi}^2 = \frac{9r_4}{8} T^4 \\ P_{\text{tot}} &= p_4 T^4 + \frac{1}{2} \dot{\Phi}^2 = \frac{3r_4}{8} T^4. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Thus $\rho_{\text{tot}} = 3P_{\text{tot}}$ which is the $4d$ equation of state for thermal radiation.

4.2 Numerical study

4.2.1 Without Wilson lines y_5^a

Let us consider the case where the Wilson lines along the X_5 -direction are switched off. From equation (3.40), we obtain

$$p_4(u) = \frac{\Gamma(\frac{5}{2})}{\pi^{\frac{3}{2}}} \left(n_T^* f(u) + n_V^* \tilde{f}(u) \right), \quad \tilde{f}(u) = u^3 f(1/u), \quad (4.20)$$

thanks to the identities $n_T^* f(u) \equiv F(u, y_5^a = 0)$ and $n_V^* \tilde{f}(u) \equiv \tilde{F}(u, y_5^a = 0)$. Since $f + uf'$ and $\tilde{f} + u\tilde{f}'$ vanish at the origin, equation (4.17) admits a universal solution $u = 0$ for arbitrary n_V^* in the range $-n_T^* \leq n_V^* \leq n_T^*$. This solution corresponds to $M(t) \equiv 0$ at some finite T , and is associated to a 5-dimensional purely thermal system ($R_5 = \infty$). The $4d$ effective description we have considered is not valid in this case.

We are thus looking for non trivial solutions $u > 0$ of equation (4.17), which we write in the form

$$\frac{n_V^*}{n_T^*} = -\frac{f + uf'}{\tilde{f} + u\tilde{f}'}. \quad (4.21)$$

A numerical study shows that such non-trivial solutions (and consequently, non-trivial cosmological evolutions) exist only for models satisfying

$$-0.0666... < \frac{n_V^*}{n_T^*} < 0. \quad (4.22)$$

The non vanishing root of equation (4.21) is an increasing function of the ratio n_V^*/n_T^* satisfying $u \rightarrow +\infty$ when $n_V^*/n_T^* \rightarrow 0_-$ and $u \rightarrow 0$ when $n_V^*/n_T^* \rightarrow -0.0666...$ (See Fig. 1.)

The corresponding value of c_r in equation (4.18) is finite and always positive. This can be seen by noting that the quantity $n_T^* f + n_V^* \tilde{f}$ appearing in the expression for c_r equals $-u(n_T^* f' + n_V^* \tilde{f}') > 0$. The positivity follows since f' and \tilde{f}' are always negative and positive respectively.

When Wilson lines in the directions 6, 7, 8, 9, 10 are switched on, we need to determine the value of \hat{k} . Defining $G(u, y_5^a = 0) \equiv M_T^2 g(u)$ and $\tilde{G}(u, y_5^a = 0) \equiv M_V^{(2)} \tilde{g}(u)$, eq. (3.39) gives

$$p_2(u) = -\frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{\pi^{\frac{3}{2}}} \left(M_T^2 g(u) + M_V^{(2)} \tilde{g}(u) \right), \quad \tilde{g}(u) = ug(1/u), \quad (4.23)$$

so that the condition for the sign of \hat{k} – see equation (4.18) – can be expressed as

$$\hat{k} \geq 0 \quad \iff \quad -1 \leq \frac{M_V^{(2)}}{M_T^2} \leq -\frac{2g - 5ug'}{2\tilde{g} - 5u\tilde{g}'}. \quad (4.24)$$

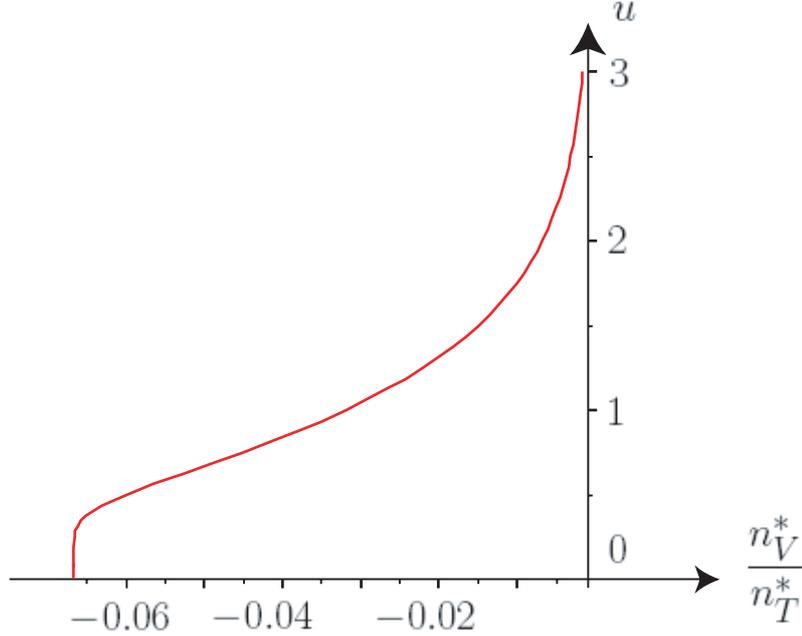


Figure 1: The non trivial root u of eq. (4.17) as a function of the ratio n_V^*/n_T^* .

The function of u appearing in the RHS of the inequality is monotonically decreasing from $+\infty$ (at $u = 0$) to 0 (at $u = \infty$). It takes the value 1, which is the maximum allowed value of the ratio $M_V^{(2)}/M_T^2$, for $u \simeq 0.940\dots$. Thus a non trivial solution of equation (4.17) satisfying $u \leq 0.940\dots$ always implies $\hat{k} \geq 0$. If instead $u > 0.940\dots$, one has

$$\hat{k} < 0 \quad \iff \quad -\frac{2g - 5ug'}{2\tilde{g} - 5u\tilde{g}'} < \frac{M_V^{(2)}}{M_T^2} < 1. \quad (4.25)$$

For the critical value $u = 0.940\dots$, equation (4.21) requires that $n_V^*/n_T^* \simeq -0.0348\dots$. Figure 2 represents the two-parameter phase diagram $(n_V^*/n_T^*, M_V^{(2)}/M_T^2)$ of the models. It is divided in two regions characterized by opposite signs for \hat{k} : negative above the critical curve and positive elsewhere. Let us detail the models we considered in the previous sections by computing the quantities n_V^* , n_T^* , M_T^2 and $M_V^{(2)}$ to determine where they are located on this phase diagram.

Model 1:

We consider an $N = 4$ heterotic string model, for example the $E_8 \times E_8$ theory on T^6 , at finite temperature and when supersymmetry is spontaneously broken by choosing $Q_R = Q_F$.

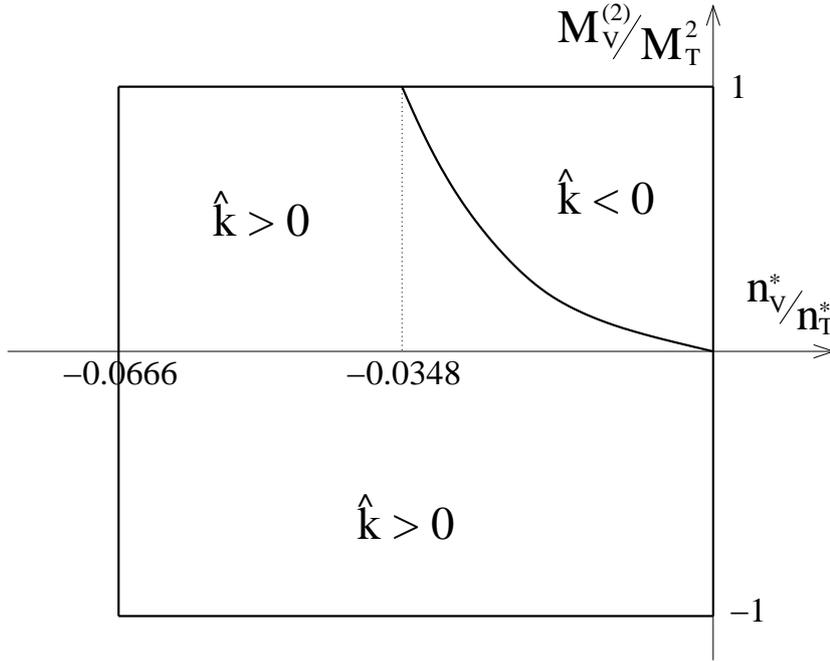


Figure 2: Phase diagram $(n_V^*/n_T^*, M_V^{(2)}/M_T^2)$ of possible models with vanishing Wilson lines in the direction 5 and arbitrary ones in the directions 6, 7, 8, 9, 10. The quantity c_r is everywhere positive, while the curvature \hat{k} is negative above the critical curve and positive elsewhere. There is no critical point $u > 0$ outside the rectangular domain.

For this model

$$n_T^* = n_V^* = 2^3 \times 504. \quad (4.26)$$

Since $n_V^* > 0$, there is no critical solution $u > 0$.

Model 2:

In the same $E_8 \times E_8$ heterotic string model, the R -symmetry operator used to break supersymmetry is chosen to be $Q_F + Q_{E_8} + Q'_{E_8}$ in order to have $n_V^* < 0$ (see equation (2.43) for the $T = 0$ case):

$$n_T^* = 2^3 \times 504; \quad n_V^* = 2^3 \times (-8). \quad (4.27)$$

Then $n_V^*/n_T^* = -1/63 \simeq -0.0159$, and so the model admits a critical solution $u > 0$. One finds numerically that $u \simeq 1.46$ and $\gamma^4 c_r \simeq 441$.

Let us consider Wilson lines y_I^a in the directions $I = 6, 7, 8, 9, 10$ and define

$$(Y^a)^2 = \frac{1}{4\pi} \sum_I \left(\frac{y_I^a}{R_I} \right)^2, \quad a = 1, \dots, 16, \quad (4.28)$$

where $a = 1, \dots, 8$ stand for the Cartan generators of the first E_8 factor and $a = 9, \dots, 16$ for the second. The derivation of the charges Q_a of the initially massless states (see the Appendix) gives:

$$M_T^2 = 2^3 \times 60 ((Y^1)^2 + \dots + (Y^{16})^2) , \quad (4.29)$$

and

$$M_V^{(2)} = 2^3 \times (-4) ((Y^1)^2 + \dots + (Y^{16})^2) . \quad (4.30)$$

Their ratio is Wilson line independent, $M_V^{(2)}/M_T^2 = -1/15$, which is negative, and so the effective curvature is positive. Numerically, one finds $\gamma^2 \hat{k} \simeq 67.2 ((Y^1)^2 + \dots + (Y^{16})^2)$.

Model 3:

In the $N = 2$ orbifold model (see section 3.3 for details), we set $Q_R = Q_F + Q_H + Q_{E_7}$ with Q_{E_7} being 1 for the spinorial representations of E_7 , decomposed in terms of $SO(12)$ ones, and 0 for the vectorial ones. We find the following :

$$n_T^* = 4064; \quad n_V^* = 992 . \quad (4.31)$$

Since n_V^*/n_T^* is positive, this model doesn't admit a critical point $u > 0$ at this stage.

Model 4:

This is the $N = 2$ orbifold model constructed in Sect. 3.3, with

$$n_T^* = 4064 , \quad n_V^* = -32 . \quad (4.32)$$

Since $n_V^*/n_T^* = -1/127 \simeq -7.87 \cdot 10^{-3}$, there is again a non trivial critical solution $u > 0$. Numerically, we find $u \simeq 1.90$ and $\gamma^4 c_r \simeq 130$.

Before switching on Wilson lines in the directions $I = 6, 7, 8, 9, 10$, the gauge group is $E_7 \times SU(2) \times E_8$. Let us consider arbitrary Wilson lines, Y^a , $a = 1, \dots, 16$: Y^1, \dots, Y^6 for the Cartan generators of the $SO(12)$ subalgebra of E_7 , Y^7 for the Cartan generator of the $SU(2)$ subalgebra of E_7 , Y^8 for the $SU(2)$ factor and Y^9, \dots, Y^{16} for the E_8 . The mass square scales, computed in the Appendix, are:

$$M_T^2 = 624 \sum_{a=1}^6 (Y^a)^2 + 1248 (Y^7)^2 + 736 (Y^8)^2 + 240 \sum_{a=9}^{16} (Y^a)^2 \quad (4.33)$$

and

$$M_V^{(2)} = -144 \sum_{a=1}^6 (Y^a)^2 - 288 (Y^7)^2 + 224 (Y^8)^2 + 240 \sum_{a=9}^{16} (Y^a)^2 . \quad (4.34)$$

Since $M_V^{(2)}$ has both definite positive and definite negative monomials, we can choose configurations of Wilson lines giving rise to either positive or negative effective curvature \hat{k} , due to the fact that $-0.0348\dots < n_V^*/n_T^* < 0$. For instance, if any Y^a , $a = 1, \dots, 7$ is non trivial (while $Y^a = 0$, $a = 8, \dots, 16$), one has $M_V^2/M_T^2 = -3/13$, and so \hat{k} is positive. Numerically, one finds $\gamma^2 \hat{k} \simeq 101 ((Y^1)^2 + \dots + (Y^6)^2 + 2(Y^7)^2)$. On the contrary, if any Y^a , $a = 9, \dots, 16$ is non trivial (while $Y^a = 0$, $a = 1, \dots, 8$), one has $M_V^{(2)}/M_T^2 = 1$ and so the representative point in the phase diagram of Fig. 2 sits above the critical curve, *i.e.* \hat{k} is negative. Numerically, one has $\gamma^2 \hat{k} \simeq -274 ((Y^9)^2 + \dots + (Y^{16})^2)$.

4.2.2 With Wilson Lines y_5^a

Any model originally characterized by the quantities n_T^* , n_V^* , M_T^2 and $M_V^{(2)}$ can be deformed by switching on the Wilson lines y_5^a , $a = 1, \dots, 16$. We are looking for solutions of equation (4.17) written in terms of the functions defined in (3.40):

$$F(u, y_5^a) + uF'(u, y_5^a) + \tilde{F}(u, y_5^a) + u\tilde{F}'(u, y_5^a) = 0. \quad (4.35)$$

We observe that the thermal contribution described by $F(u, y_5^a) + uF'(u, y_5^a)$ vanishes at $u = 0$ and asymptotically at infinity. In all of the following examples, it is also positive. On the contrary, the “effective potential” corrections $\tilde{F}(u, y_5^a) + u\tilde{F}'(u, y_5^a)$ vanish at $u = 0$ and diverge to $+\infty$ or $-\infty$ at infinity. Thus, in presence of arbitrary Wilson lines y_5^a , the universal solution $u = 0$ remains and we are looking for non trivial ones $u > 0$. These can only arise when $\tilde{F}(u, y_5^a) + u\tilde{F}'(u, y_5^a)$ takes negative values.

Model 1:

Among the Wilson lines y_5^a , ($a = 1, \dots, 8$ for the first E_8 factor and $a = 9, \dots, 16$ for the second), we choose to switch on either

- i)* y_5^1 (with $y_5^2 = \dots = y_5^{16} = 0$) or
- ii)* $y_5^1 = \dots = y_5^8$ (with $y_5^9 = \dots = y_5^{16} = 0$).

In these cases and at fixed Wilson lines, $\tilde{F}(u, y_5^a) + u\tilde{F}'(u, y_5^a)$ increases from 0 to $+\infty$, and so there is still no solution $u > 0$.

Model 2:

For the Wilson lines defined in case *ii)* above, one finds that the critical solution $u > 0$ present before deformation is slightly shifted. However, in case *i)*, the root $u > 0$ is sent to

$+\infty$ when y_5^1 approaches the numerical value 0.227... from below. For y_5^1 above this critical bound, there is no non trivial solution anymore.

Model 3:

As said before, this model does not admit a critical solution $u > 0$ when all Wilson lines in the fifth dimension are switched off. We consider four patterns of deformations, by switching on a Wilson line for a single Cartan generator:

i) y_5^1 (Cartan generator of $SO(12) \subset E_7$)

ii) y_5^7 (Cartan generator of $SU(2) \subset E_7$)

iii) y_5^8 (Cartan generator of $SU(2)$)

iv) y_5^9 (Cartan generator of E_8)

In cases *i)* and *iv)*, a large enough Wilson line deformation generates a non-trivial solution. We find the critical bound $y_5^1 = 0.895...$ for case *i)*, and $y_5^9 = 0.772...$ for case *iv)*. In all these cases, the phase transition occurs when the limit at $u \rightarrow \infty$ of the “effective potential” contribution $\tilde{F}(u, y_5^a) + u\tilde{F}'(u, y_5^a)$ is switched from $+\infty$ to $-\infty$. In some sense, a solution $u = +\infty$ appears at the transition, and then decreases for a larger Wilson line, and finally reaches a non-zero minimal value. In cases *ii)* and *iii)*, since $\tilde{F}(u, y_5^a) + u\tilde{F}'(u, y_5^a)$ is positive for any value of the Wilson line, the deformation does not create a non-trivial solution.

Model 4:

We consider the same four patterns of Wilson lines. This time, the critical solution $u > 0$ exists before deforming the model. We find that in the above cases, switching on a large enough Wilson line makes this solution disappear. However, two distinct behaviors are found:

In cases *i)* and *ii)*, we find again that the phase transition corresponds to a change in the behavior of the “effective potential” contribution at ∞ . In a similar way as before, the solution $u > 0$ existing before deformation will increase when switching on the Wilson line, then go to $+\infty$ at the transition point, and disappear for a larger Wilson line. We find the critical bound $y_5^1 = 0.105...$ for case *i)*, and $y_5^7 = 0.074...$ for case *ii)*.

For *iii)* and *iv)*, switching on the Wilson line makes the critical solution $u > 0$ decrease towards zero, so that we are left only with the universal solution when the Wilson line is above some bound. In case *iii)*, this maximal value is $y_5^8 = 0.205...$, while it is $y_5^9 = 0.207...$ for case *iv)*.

Some remarks are in order

- In all cases presented above, when a critical solution $u > 0$ exists, the effective radiation term c_r given by equation (4.18) is strictly positive.
- In some models, incorporating the Wilson lines in the fifth direction allows the critical solution $u > 0$ to be close to 0 or large. In other words, a hierarchy between the scales M and T can be found by tuning the moduli y_5^a .

5 Cosmological evolutions

When a non degenerate solution $u > 0$ exists, the model admits a well defined low energy description in four dimensions. The dynamics in this regime is controlled by the Friedmann-Hubble equation, whose behavior depends drastically on the signs of c_r and \hat{k} . In all models we considered here, with initial $N = 4$ or $N = 2$ supersymmetry, c_r turns out to be positive. However, this situation may not be generic in more complex stringy examples with initial $N = 1$ supersymmetry. For completeness, we briefly describe all possible cosmologies arising for any positive or negative value of c_r . In addition, we allow non trivial time dependent profiles for the moduli ϕ_i , giving $c_m > 0$.

5.1 Solutions for $c_r > 0$

- For $\hat{k} = 0$, $c_r > 0$, $c_m \geq 0$

When Wilson lines in the directions 6, 7, ..., 10 are absent, the curvature \hat{k} vanishes. In real time, the Friedmann-Hubble equation (4.13),

$$3H^2 = \frac{c_r}{a^4} + \frac{c_m}{a^6}, \quad (5.1)$$

can be used to express the time variable t as an integral function of the scale factor a ,

$$t(a) = \sqrt{\frac{3}{c_r}} \int_0^a \frac{v^2 dv}{\sqrt{v^2 + a_0^2}}, \quad (a \geq 0), \quad a_0 = \sqrt{\frac{c_m}{c_r}}. \quad (5.2)$$

In this form, it is straightforward to draw $a(t)$ (see Fig. 3). The explicit solution is

$$t(a) = t_0 \left(\frac{a}{a_0} \sqrt{1 + \frac{a^2}{a_0^2}} - \operatorname{arcsinh} \left(\frac{a}{a_0} \right) \right), \quad t_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{c_m}{c_r^{3/2}}, \quad (5.3)$$

describing an expanding universe that starts with a big bang. As can be seen from equation (5.1), the slope \dot{a} is infinite when a vanishes. At large t , the scale factor behaves as in the $c_m = 0$ particular case:

$$a(t) = \left(\frac{c_r}{3}\right)^{1/4} \sqrt{2t}, \quad (t \geq 0). \quad (5.4)$$

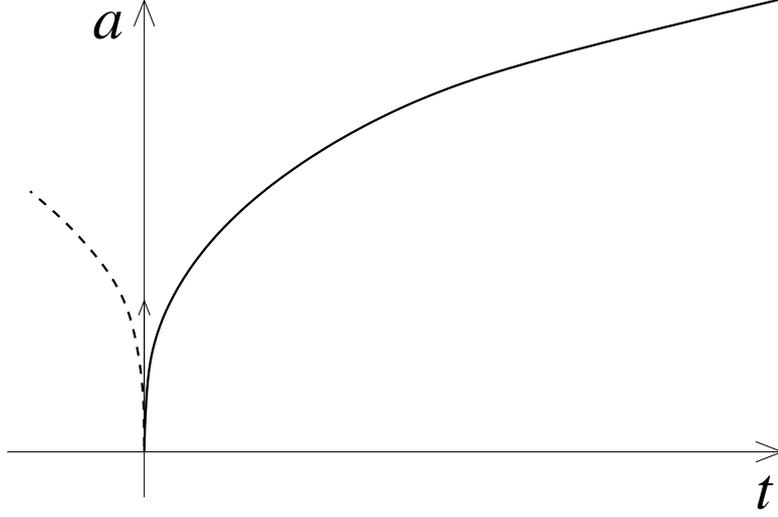


Figure 3: *Cosmological evolution for the case $\hat{k} = 0$, $c_r > 0$, $c_m \geq 0$.*

Since the transformation $t \rightarrow -t$ is a symmetry of the Friedmann-Hubble equation, the previous expanding solutions have contracting counterparts and thus ending at $t = 0$ with a big crunch. Finally, since the RHS of equation (5.1) is positive, there is no solution in Euclidean time.

The effective field theory description always breaks down before the occurrence of a space-like singularity, when the temperature (in string frame) is of order the Hagedorn temperature. At this temperature scale, new stringy dynamics must be taken into consideration which can result into a phase transition, realizing the scenario of [16].

- For $\hat{k} > 0$, $c_r > 0$, $c_m \geq 0$

When we switch on Wilson lines, $\hat{k} > 0$. Rewriting the Friedmann-Hubble eq. (4.13) in the form

$$(a^2 \dot{a})^2 = \hat{k}(a^2 + a_-^2)(a_+^2 - a^2), \quad a_{\pm} = \sqrt{\frac{\sqrt{c_r^2 + 12\hat{k}c_m} \pm c_r}{6\hat{k}}}, \quad (5.5)$$

one expects a cosmological evolution satisfying $0 \leq a \leq a_+$ should exist, while a solution with a scale factor greater than a_+ should make sense in imaginary time only. In real time, one can actually express t as a function of a as follows

$$t(a) = \pm \left(t_i + \frac{1}{\sqrt{\hat{k}}} \int_0^a \frac{v^2 dv}{\sqrt{(v^2 + a_-^2)(a_+^2 - v^2)}} \right), \quad (0 \leq a \leq a_+), \quad (5.6)$$

where

$$t_i = -\frac{1}{\sqrt{\hat{k}}} \int_0^{a_+} \frac{v^2 dv}{\sqrt{(v^2 + a_-^2)(a_+^2 - v^2)}}. \quad (5.7)$$

From these expressions, one can see that the cosmological evolution starts with a big bang at $t = t_i$. It expands until $t = 0$ where the maximum size of the universe a_+ is reached, and then it contracts until a big crunch occurs at $t = -t_i$.

To find a Euclidean solution, one needs to consider a scale factor greater than a_+ . It is then possible to find it by proceeding as before, or use the fact that such a solution can be obtained by analytic continuation of the expression (5.6) at $t = 0$, where $a = a_+$. One can write

$$t = \pm \left(t_i + \frac{1}{\sqrt{\hat{k}}} \int_0^{a_+} \frac{v^2 dv}{\sqrt{(v^2 + a_-^2)(a_+^2 - v^2)}} + \frac{1}{\sqrt{\hat{k}}} \int_{a_+}^{a_E} \frac{v^2 dv}{\sqrt{-(v^2 + a_-^2)(v^2 - a_+^2)}} \right) \equiv -i\tau, \quad (5.8)$$

from which we derive

$$\tau(a_E) = \pm \frac{1}{\sqrt{\hat{k}}} \int_{a_+}^{a_E} \frac{v^2 dv}{\sqrt{-(v^2 + a_-^2)(v^2 - a_+^2)}}, \quad (a_E \geq a_+). \quad (5.9)$$

Fig. 4 represents the solutions $a(t)$ and $a_E(\tau)$.

In the particular case where $c_m = 0$, the solutions (5.6) and (5.9) are taking the explicit forms

$$a(t) = a_+ \sqrt{1 - \left(\frac{t}{t_i} \right)^2}, \quad (t_i \leq t \leq -t_i), \quad a_+ = \sqrt{\frac{c_r}{3\hat{k}}}, \quad t_i = -\frac{1}{\hat{k}} \sqrt{\frac{c_r}{3}}, \quad (5.10)$$

and

$$a_E(\tau) = a_+ \sqrt{1 + \left(\frac{\tau}{t_i} \right)^2}, \quad (5.11)$$

whose shapes are similar to the generic case with $c_m > 0$.

- For $\hat{k} < 0$, $c_r > 0$, $c_m \geq 0$

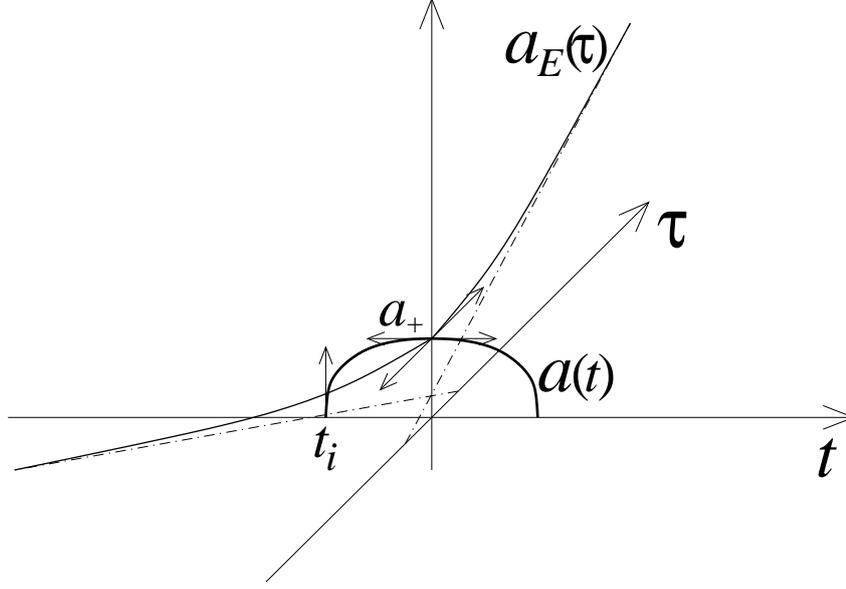


Figure 4: *Cosmological evolution for the case $\hat{k} > 0$, $c_r > 0$, $c_m \geq 0$ (in bold line). A big bang and a big crunch are occurring at $t = t_i$ and $t = -t_i$ respectively. This solution is connected to a Euclidean one at $t = -i\tau = 0$ that is asymptotically linear.*

This case is easier to deal with. Eq. (4.13) can be rewritten as

$$(a^2 \dot{a})^2 = |\hat{k}|(a^2 + a_-^2)(a^2 + a_+^2), \quad a_{\pm} = \sqrt{\frac{c_r \pm \sqrt{c_r^2 - 12|\hat{k}|c_m}}{6|\hat{k}|}}, \quad (5.12)$$

and admits the expanding solution

$$t(a) = \frac{1}{\sqrt{\hat{k}}} \int_0^a \frac{v^2 dv}{\sqrt{(v^2 + a_-^2)(v^2 + a_+^2)}}. \quad (5.13)$$

(See Fig. 5.) After a big bang, the scale factor is growing linearly in time.

The result for the particular case $c_m = 0$ can be written more explicitly. The solution takes the form

$$a(t) = a_+ \sqrt{\left(\frac{t + t_0}{t_0}\right)^2 - 1}, \quad (t \geq 0), \quad a_+ = \sqrt{\frac{c_r}{3|\hat{k}|}}, \quad t_0 = \frac{1}{|\hat{k}|} \sqrt{\frac{c_r}{3}}. \quad (5.14)$$

These cosmological solutions do not admit a sensible Euclidean continuation.

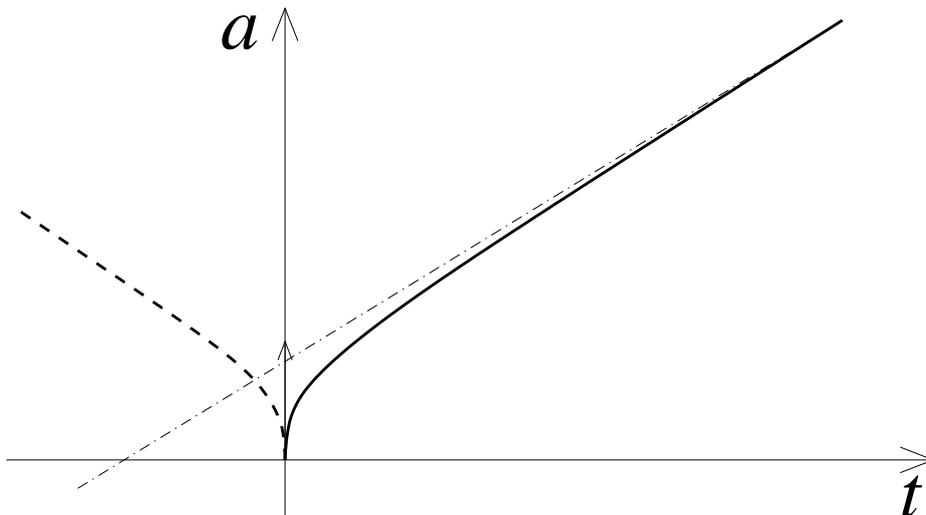


Figure 5: *Cosmological evolution for the case $\hat{k} < 0$, $c_r > 0$, $c_m \geq 0$.*

5.2 Exotic cosmologies with $c_r < 0$

Although in all explicit models we presented before c_r is positive, it is interesting to analyze the exotic situation with negative c_r , which is not a priori forbidden in more general cases with $N = 1$ initial supersymmetry.

- For $\hat{k} = 0$, $c_r < 0$, $c_m \geq 0$

A cosmological evolution in real time only exists if c_m is switched on. The scale factor satisfies $0 \leq a \leq a_0$ where

$$a_0 = \sqrt{\frac{c_m}{|c_r|}}. \quad (5.15)$$

Between a big bang at $t_i < 0$ and a big crunch at $-t_i > 0$, a reaches a maximum a_0 at $t = 0$. At this time, an analytic continuation is allowed: A Euclidean solution satisfies $a_E \geq a_0$ and goes to infinity for large positive or negative Euclidean time (see Fig. 6).

- For $\hat{k} > 0$, $c_r \leq 0$, $c_m \geq 0$

Most of the considerations of this case are identical to the one derived for $\hat{k} > 0$, $c_r > 0$, $c_m \geq 0$. In particular, the Friedmann-Hubble equation is still given by equation (5.5) and both the cosmological solution (5.6) and the Euclidean one (5.9) are valid. They are shown in Fig. 7. As long as $c_m > 0$, the only qualitative difference with the case $c_r > 0$ is that the Euclidean solution has two symmetric inflexion points. However, when c_m vanishes, the

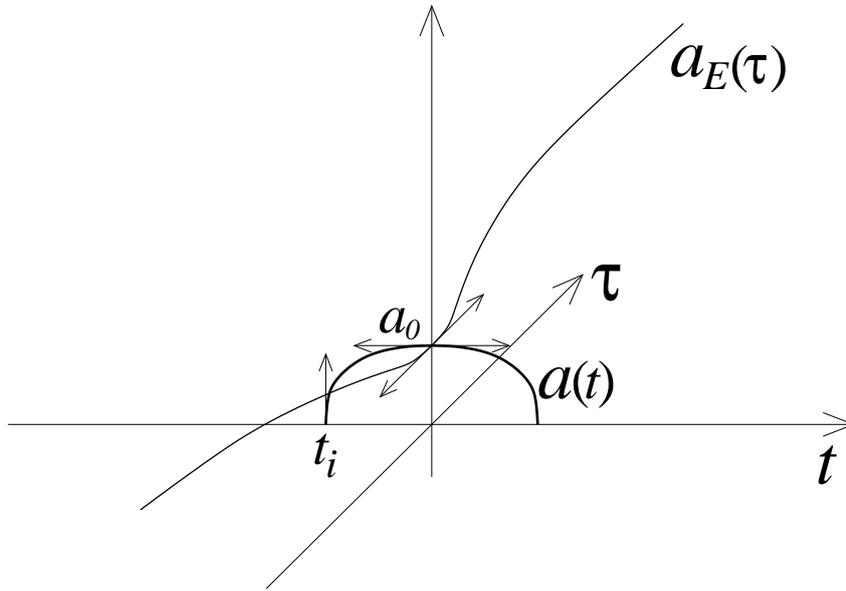


Figure 6: *Cosmological evolution for the case $\hat{k} = 0$, $c_r < 0$, $c_m \geq 0$ (in bold line). A big bang and a big crunch are occurring at $t = t_i$ and $t = -t_i$ respectively. This solution is connected to a Euclidean one at $t = -i\tau = 0$.*

evolution in real time ceases to exist.

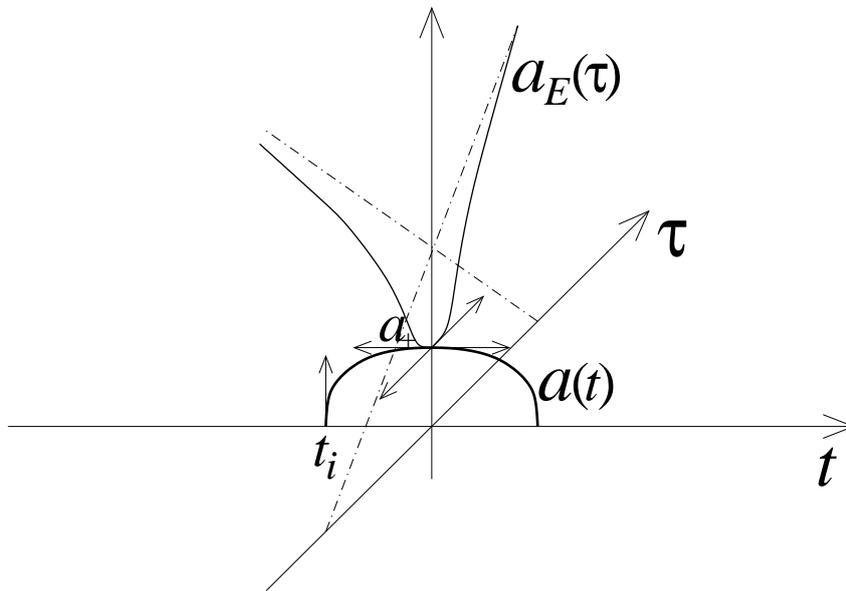


Figure 7: *Cosmological evolution for the case $\hat{k} > 0$, $c_r \leq 0$, $c_m > 0$ (in bold line). A big bang and a big crunch are occurring at $t = t_i$ and $t = -t_i$ respectively. This solution is connected to a Euclidean one at $t = -i\tau = 0$ that is asymptotically linear and has two symmetric inflexion points.*

- For $\hat{k} < 0$, $c_r < 0$, $c_m \geq 0$

This case presents the most interesting features and involves either a first or second order phase transition in the early universe. The former case is the only one considered in this paper, where a Euclidean solution has a finite action and thus can be interpreted as an instanton involved in a tunneling effect. These behaviors are qualitatively similar to the inflationary case studied in [6, 12]. To be more specific we consider the Friedmann-Hubble equation in the form

$$3(a^2\dot{a}) = 3|\hat{k}|a^4 - |c_r|a^2 + c_m, \quad (5.16)$$

and discuss various regimes, depending on the value of the discriminant of the RHS

$$\delta \equiv c_r^2 - 12|\hat{k}|c_m. \quad (5.17)$$

i) When $\delta > 0$, there are two critical values for the scale factor

$$a_{\pm} = \sqrt{\frac{|c_r| \pm \sqrt{c_r^2 - 12|\hat{k}|c_m}}{6|\hat{k}|}}. \quad (5.18)$$

Equation (5.16) then admits two distinct cosmological evolutions. The first one satisfies $0 \leq a \leq a_-$ and corresponds to the usual dynamics between a big bang at $t_i < 0$ and a big crunch at $-t_i$. The scale factor reaches a maximum a_- at $t = 0$. The second one describes an asymptotically linear contracting solution followed by an asymptotically linear expanding one. The two branches are smoothly connected at $t = 0$, where the scale factor reaches a minimum value a_+ . Therefore, this solution is non-singular. (See Fig. 8.)

The two cosmological evolutions are also related to one another by a double analytic continuation: $t = -i\tau$ and then $\tau = \tau_f + it$. Between $\tau = 0$ and $\tau = \tau_f$, a Euclidean solution whose action can be shown to be finite is allowed. It is thus an instanton between the two branches in real time and contributes to a first order phase transition. We note that when $c_m = 0$, the big bang / big crunch solution disappears since a_- vanishes.

ii) Let us turn now to the second case where the discriminant (5.17) satisfies $\delta < 0$. Equation (5.16) does not admit any critical point and the scale factor is never stationary. There is a single cosmological evolution (and no Euclidean solution). It increases from a big bang at $t = 0$, while for large t , its time dependence becomes linear. Thus, close to the big bang, the evolution is similar to the first solution occurring when $\delta > 0$, while for large t its behavior

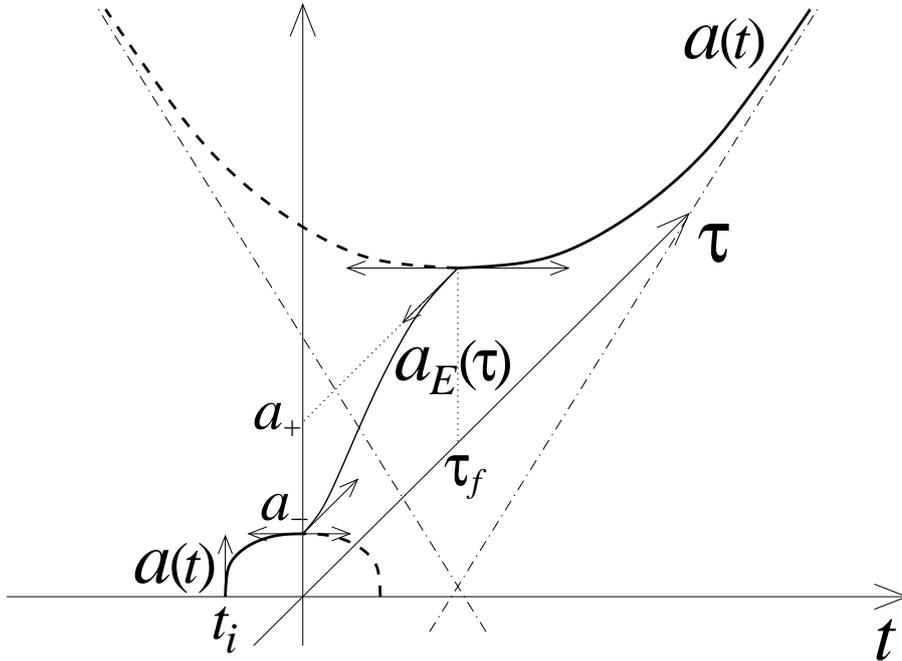


Figure 8: There are two cosmological evolutions (in bold lines) for the case $\hat{k} < 0$, $c_r \leq 0$, $c_m \geq 0$, when $\delta > 0$. The first one starts with a big bang at $t = t_i$ and ends with a big crunch at $t = -t_i$. The second one has a contracting phase followed by an expanding one. These two branches are connected to each other by a first order phase transition via an instanton.

is similar to the second expanding solution. Since there is an inflexion point at $t = t_{\text{inf}}$ when $a = \sqrt{2c_m/|c_r|}$, the cosmological evolution for $\delta < 0$ can be interpreted as a second order phase transition between the same initial and final states encountered in the first order phase transition for $\delta > 0$. (See Fig. 9.)

iii) In the critical case $\delta = 0$, equation (5.16) admits two expanding cosmological evolutions which are asymptotic to a static one, $a \equiv a_0$, where

$$a_0 \equiv a_{\pm} = \sqrt{\frac{|c_r|}{6|\hat{k}|}} = a_{\text{inf}} = \sqrt{\frac{2c_m}{|c_r|}}, \quad (5.19)$$

together with two contracting ones obtained by time reversal. The first expanding solution starts with a big bang, while the second one is linear for large positive time. (See Fig. 10.)

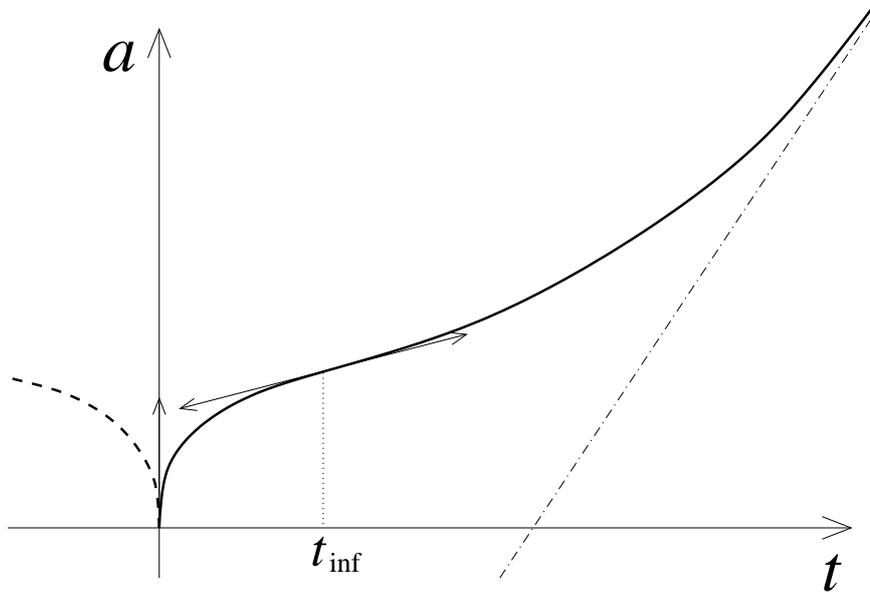


Figure 9: *Cosmological evolution for the case $\hat{k} < 0$, $c_r \leq 0$, $c_m \geq 0$, when $\delta < 0$. It describes a second order phase transition occurring at t_{inf} , between a phase that starts with a big bang to another phase that expands linearly in time.*

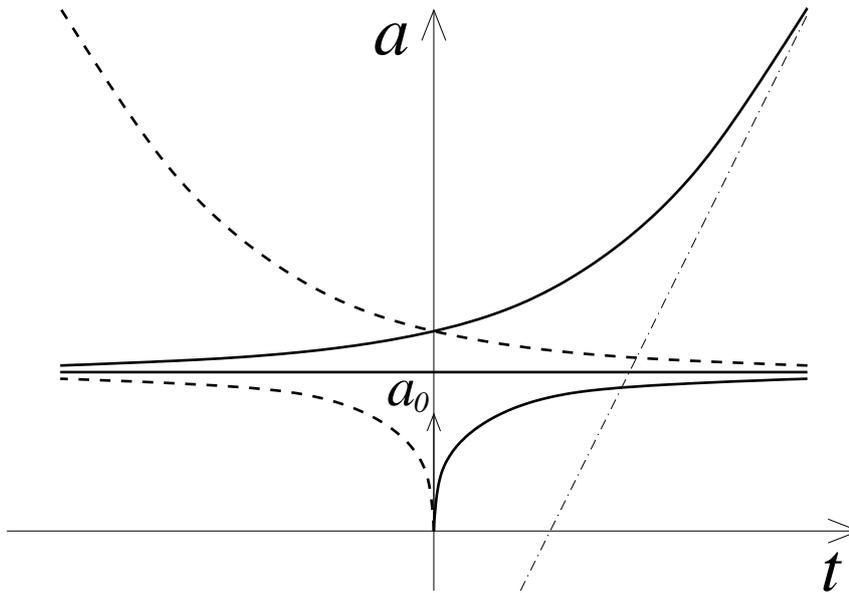


Figure 10: *There are two expanding (contracting) cosmological evolutions for the case $\hat{k} < 0$, $c_r \leq 0$, $c_m \geq 0$, when $\delta = 0$. All are asymptotic to the static solution $a \equiv a_0$.*

6 Conclusions

We have obtained several cosmological solutions in a large class of four dimensional heterotic string compactifications with spontaneously broken $N = 4$ or $N = 2$ space-time supersymmetry. The cosmological evolution is induced once radiative quantum and thermal corrections are taken into consideration. These corrections are calculated at the perturbative string level and shown to possess universal scaling properties. The reason is an underlying duality between the temperature and the supersymmetry breaking scale.

Our solutions correspond to homogeneous and isotropic Friedmann-Robertson-Walker universes. They are characterized by the ratio of the supersymmetry breaking scale to the temperature, and this ratio remains constant during time evolution. Even though Kaluza-Klein states associated to the supersymmetry breaking cycle are thermally excited, the equation of state governing cosmological evolution is identical to that of massless thermal radiation in four dimensions. This is due to the special relation between the no-scale modulus field associated to the supersymmetry breaking scale and the Hubble parameter: $\dot{\Phi}^2 = 2H^2/3$. Universes with spherical, toroidal or hyperbolic spatial sections can be found once we incorporate Wilson line deformations.

In this paper we focused on the low temperature phase of the models. When the temperature is close to the Hagedorn temperature our effective field theory analysis breaks down and new stringy dynamics must be taken into consideration. It would be interesting to investigate if phase transitions can occur in these models as the temperature approaches the Hagedorn temperature, and whether such phase transitions result in non-singular time-dependent geometries. To this extent it could prove useful to incorporate in our work the proposal of [23], where such a phase transition is shown to occur in $N = 4$ heterotic string models, and study the cosmological implications.

It would be interesting to extend our analysis to the $N = 1$ heterotic orbifold models, and for the cases where supersymmetry is broken spontaneously. In this class of models, one expects to find inflationary phases, once radiative and thermal corrections are properly taken into account. The analysis of [6, 12] reveals interesting transitions between such inflationary phases and radiation dominated phases with similar properties to those found in this work. In our examples, the coefficient of the $1/a^4$ term in the Friedmann-Hubble equation is positive.

Perhaps among the $N = 1$ examples it is possible to find models characterized by negative values of this coefficient. Then non trivial cosmological phenomena would occur, including first or second order phase transitions that allow for the possibility to realize the proposal for the creation of a universe from “nothing” [11] in string theory [6,12].

The relation between the supersymmetry breaking scale with the temperature is a key property of our solutions. Suppose that such a scaling property persisted in an early universe epoch, and that initially supersymmetry was broken around the string scale. During such epoch, the Susy-breaking scale gets lower and lower as the universe expands and cools. At lower temperatures new dynamics may become relevant that can stabilize this scale. Such a scenario can give us a new perspective on how to handle the hierarchy and naturalness problems.

Acknowledgements

We are grateful to Constantin Bachas, Ramy Brustein, Dieter Lüst, Marios Petropoulos, Jan Troost and Fabio Zwirner for useful discussions. N.T. thanks the Ecole Normale Supérieure and C.K. and H.P. the University of Cyprus for hospitality.

The work of C.K. and H.P. is partially supported by the EU contract MRTN-CT-2004-005104 and the ANR (CNRS-USAR) contract 05-BLAN-0079-01 (01/12/05). N.T. and C.K. are supported by the EU contract MRTN-CT-2004-512194. H.P. is also supported by the EU contracts MRTN-CT-2004-503369 and MEXT-CT-2003-509661, INTAS grant 03-51-6346, and CNRS PICS 2530, 3059 and 3747, while N.T. is also supported by an INTERREG IIIA Crete/Cyprus program.

Appendix A

In this Appendix, we provide details on the derivation of the charges associated to the Cartan generators of the gauge groups of the heterotic string models we considered. We also derive the contributions to M_T^2 and $M_V^{(2)}$ (see equation (3.34)) associated to Wilson lines in the internal direction 6 only. Since the result is linear in the $(y_6^i)^2$'s, the result for arbitrary Wilson lines in the directions 6, 7, 8, 9, 10 is obtained under the replacement $(y_6^i)^2/(4\pi R_6^2) \rightarrow (Y^i)^2$, where $(Y^i)^2$ is defined in (4.28).

Consider the $N = 4$ heterotic model with gauge group $E_8 \times E_8$. When built out from 32 worldsheet fermions as in the standard procedure, the vertex operators for the gauge fields associated to the Cartan generators of the first E_8 factor are given by

$$\lambda^{2i-1}\lambda^{2i}, \quad i = 1, \dots, 8, \quad (\text{A.1})$$

whereas those associated to the Cartan generators of the second E_8 are given by

$$\lambda^{2i-1}\lambda^{2i}, \quad i = 9, \dots, 16. \quad (\text{A.2})$$

In terms of representations of $SO(16)$, the adjoint representation of E_8 decomposes as

$$\mathbf{248} = \mathbf{120} \oplus \mathbf{128}, \quad (\text{A.3})$$

where the **120** is the adjoint representation of $SO(16)$ and the **128** is the spinorial representation with positive chirality. The corresponding vertex operators can be written explicitly by bosonizing the 32 fermions into 16 free bosons H_i , $i = 1, \dots, 16$. This formalism has the advantage to make the roots of the Lie algebra appear in a clear way. For the **120** we obtain

$$\mathbf{120} : (e^{i(\pm H_j \pm H_k)}, (j \neq k)) \oplus i\partial H_j, \quad j, k \in \{1, \dots, 8\}. \quad (\text{A.4})$$

The 8 latter vertex operators correspond to the Cartan generators. For the **128** we have

$$\mathbf{128} : e^{\frac{i}{2}(\epsilon_1 H_1 + \epsilon_2 H_2 + \dots + \epsilon_8 H_8)}, \quad (\text{A.5})$$

with the GSO constraint $\prod_{i=1}^8 \epsilon_i = 1$. Our goal here is to compute the quantity

$$M_T^2(y_6^a) = \frac{1}{4\pi R_6^2} \sum_{s \in \mathbf{248}} (Q_s^a y_6^a)^2, \quad (\text{A.6})$$

where we denote by Q_a^s the charges of a state s with respect to the Cartan generators. We are going to consider the case of one E_8 gauge group; the generalization to $E_8 \times E_8$ is straightforward.

To begin with, we recall that the Cartan states are neutral. Then we are interested in the 112 remaining states of the **120** adjoint representation. It is not hard to see that

$$\sum_{s \in \mathbf{120}} (Q_a^s y_6^a)^2 = \sum_{i \neq j \in \{1, \dots, 8\}} \sum_{\epsilon_1, \epsilon_2 = \pm 1} (\epsilon_1 y_6^i + \epsilon_2 y_6^j)^2. \quad (\text{A.7})$$

Therefore we get a quadratic polynomial in the y_6^i 's. Noticing that this polynomial is invariant under the transformations $y_6^i \leftrightarrow -y_6^i$ and $y_6^i \leftrightarrow y_6^j$, we obtain

$$\sum_{s \in \mathbf{120}} (Q_a^s y_6^a)^2 = \alpha \sum_{i=1}^8 (y_6^i)^2. \quad (\text{A.8})$$

Computing the $(y_6^1)^2$ term, we get $\alpha = 28$.

For the **128**, we see that

$$\sum_{s \in \mathbf{128}} (Q_a^s y_6^a)^2 = \sum_{\epsilon_1, \dots, \epsilon_7 = \pm 1} \frac{1}{4} \left(\epsilon_1 y_6^1 + \epsilon_2 y_6^2 + \dots + \left(\prod_{i=1}^7 \epsilon_i \right) y_6^8 \right)^2. \quad (\text{A.9})$$

If we set $y_6^8 = 0$, the symmetries $y_6^i \leftrightarrow -y_6^i$ and $y_6^i \leftrightarrow y_6^j$, valid for $i, j = 1, \dots, 7$, guarantee that this polynomial will be of the form

$$\beta \sum_{i=1}^7 (y_6^i)^2. \quad (\text{A.10})$$

Restoring $y_6^8 \neq 0$ gives a $(y_6^8)^2$ term and crossed terms $y_6^i y_6^8$. However, y_6^8 has been artificially isolated in the treatment of the GSO constraint: by isolating other y_6^i 's and using the same arguments, we can show that our polynomial is of the form

$$\sum_{s \in \mathbf{128}} (Q_a^s y_6^a)^2 = \beta \sum_{i=1}^8 (y_6^i)^2. \quad (\text{A.11})$$

We obtain $\beta = 32$.

It is then straightforward to evaluate the sums encountered before. We obtain

$$M_T^2 = \frac{2^3}{4\pi R_6^2} \left(60 \sum_{i=1}^{16} (y_6^i)^2 \right), \quad (\text{A.12})$$

and when coupling the Scherk-Schwarz cycle to the helicity of the E_8 representation

$$M_V^{(2)} = \frac{2^3}{4\pi R_6^2} \left(-4 \sum_{i=1}^{16} (y_6^i)^2 \right). \quad (\text{A.13})$$

In the $N = 2$ models, the orbifolding breaks $E_8 \rightarrow E_7 \times SU(2)$, under which the adjoint representation decomposes as

$$\mathbf{248} \rightarrow (\mathbf{133}, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{56}, \mathbf{2}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{3}). \quad (\text{A.14})$$

The Cartan generators of E_8 give the Cartan generators of $E_7 \times SU(2)$:

$$(i\partial H_1, \dots, i\partial H_6, i(\partial H_7 - \partial H_8)); \quad i(\partial H_7 + \partial H_8). \quad (\text{A.15})$$

Switching on arbitrary $y_6^1, \dots, y_6^7, y_6^8$, we compute the charges of the various states step by step.

In the $\mathbf{133}$, we have 7 neutral Cartan operators, 60 ladder operators in the $Adj(SO(12))$ subalgebra

$$e^{i(\pm H_j \pm H_k)}, \quad j \neq k \in \{1, \dots, 6\}, \quad (\text{A.16})$$

2 ladders in the $Adj(SU(2))$

$$e^{\pm i(H_7 - H_8)}, \quad (\text{A.17})$$

and 64 ladders in a spinorial representation

$$e^{\frac{i}{2}(\pm H_1 \pm \dots \pm H_6 \pm (H_7 - H_8))} \quad (\text{A.18})$$

obeying a GSO condition. We see that y_6^7 has a particular role here. The latter states have charges $\pm \frac{1}{2}$ under the first six Cartan generators, and charges ± 1 under the seventh. Using the same arguments as before, we see that the sum for the spinorial states is of the form

$$\alpha \left(\sum_{i=1}^6 (y_6^i)^2 + (2y_6^7)^2 \right). \quad (\text{A.19})$$

The polynomial we are looking for is therefore

$$\sum_{s \in \mathbf{133}} (Q_a^s y_6^a)^2 = 20 \sum_{i=1}^6 (y_6^i)^2 + 2(2y_6^7)^2 + 16 \left(\sum_{i=1}^6 (y_6^i)^2 + (2y_6^7)^2 \right) = 36 \sum_{i=1}^6 (y_6^i)^2 + 72(y_6^7)^2. \quad (\text{A.20})$$

Note that if we want to couple the Scherk-Schwarz cycle to the helicity of the E_7 , we have to compute also $\sum_s \text{sign}(s)(Q_a y_6^a)^2$, where states in the spinorial representations of the $SO(12)$ subgroup contribute with a minus sign. To get this sum we have to put a minus sign in front of the **64** part, so that

$$\begin{aligned} \sum_{s \in \mathbf{133}} \text{sign}(s)(Q_a y_6^a)^2 &= 20 \sum_{i=1}^6 (y_6^i)^2 + 2(2y_6^7)^2 - 16 \left(\sum_{i=1}^6 (y_6^i)^2 + (2y_6^7)^2 \right) \\ &= 4 \sum_{i=1}^6 (y_6^i)^2 - 56(y_6^7)^2. \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

For the **(56,2)** representation, we begin with the states with vertex operators

$$e^{\pm H_i \pm H_7}, \quad e^{\pm H_i \pm H_8}. \quad (\text{A.22})$$

The corresponding $Q_a^s y_6^a$ are respectively

$$\pm y_6^i \pm (y_6^7 + y_6^8), \quad \pm y_6^i \pm (y_6^7 - y_6^8). \quad (\text{A.23})$$

Therefore the sum for these states equals

$$\begin{aligned} \sum_s (Q_a^s y_6^a)^2 &= 4 \sum_{i=1}^6 (y_6^i)^2 + 24 (y_6^7 + y_6^8)^2 + 4 \sum_{i=1}^6 (y_6^i)^2 + 24 (y_6^7 - y_6^8)^2 \\ &= 8 \sum_{i=1}^6 (y_6^i)^2 + 48 ((y_6^7)^2 + (y_6^8)^2). \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

The remaining states to be considered have vertex operators

$$e^{\frac{i}{2}(\pm H_1 \pm \dots \pm H_6 \pm (H_7 + H_8))}. \quad (\text{A.25})$$

For these, we get

$$16 \left(\sum_{i=1}^6 (y_6^i)^2 + (2y_6^8)^2 \right). \quad (\text{A.26})$$

Adding everything, we get the final result for the representation:

$$\sum_{s \in (\mathbf{56}, \mathbf{2})} (Q_a^s y_6^a)^2 = 24 \sum_{i=1}^6 (y_6^i)^2 + 48 (y_6^7)^2 + 112 (y_6^8)^2. \quad (\text{A.27})$$

If we couple to the E_7 helicity, we also have

$$\sum_{s \in (\mathbf{56}, \mathbf{2})} \text{sign}(s) (Q_a^s y_6^a)^2 = -8 \sum_{i=1}^6 (y_6^i)^2 + 48 (y_6^7)^2 - 16 (y_6^8)^2. \quad (\text{A.28})$$

For the $\mathbf{3}$ of $SU(2)$ the two states

$$e^{\pm i(H_7 + H_8)} \quad (\text{A.29})$$

have charges ± 2 . So we get

$$\sum_{s \in (\mathbf{1}, \mathbf{3})} (Q_a^s y_6^a)^2 = 8 (y_6^8)^2. \quad (\text{A.30})$$

In the twisted sector, we encounter the representation $(\mathbf{56}, \mathbf{1})$, whose sum is obtained by switching off y_6^8 in the result obtained for the $(\mathbf{56}, \mathbf{2})$ representation and by dividing the result by 2. One then obtains,

$$\sum_{s \in (\mathbf{56}, \mathbf{1})} (Q_a^s y_6^a)^2 = 12 \sum_{i=1}^6 (y_6^i)^2 + 24 (y_6^7)^2, \quad (\text{A.31})$$

$$\sum_{s \in (\mathbf{56}, \mathbf{1})} \text{sign}(s) (Q_a^s y_6^a)^2 = -4 \sum_{i=1}^6 (y_6^i)^2 + 24 (y_6^7)^2. \quad (\text{A.32})$$

We also encounter the $(\mathbf{1}, \mathbf{2})$ representation, where the sum equals $2(y_6^8)^2$.

Application to Models 3 and 4

For model 4, we set $Q_R = Q_F + Q_H$. If we consider Wilson lines corresponding to the 16 Cartan generators of $E_8 \times E_7 \times SU(2)$, the result is

$$M_{T,V}^{2,(2)} = \frac{4}{4\pi R_6^2} \left[60 \sum_{i=9}^{16} (y_6^i)^2 + 36 \sum_{i=1}^6 (y_6^i)^2 + 72 (y_6^7)^2 + 24 \sum_{i=1}^6 (y_6^i)^2 + 48 (y_6^7)^2 + 112 (y_6^8)^2 + 8 (y_6^8)^2 \right] \\ \pm \frac{1}{4\pi R_6^2} \left[32 \left(12 \sum_{i=1}^6 (y_6^i)^2 + 24 (y_6^7)^2 \right) + 128 (2(y_6^8)^2) \right].$$

So we get

$$M_T^2 = \frac{1}{4\pi R_6^2} \left(240 \sum_{i=9}^{16} (y_6^i)^2 + 624 \sum_{i=1}^6 (y_6^i)^2 + 1248 (y_6^7)^2 + 736 (y_6^8)^2 \right) \\ M_V^{(2)} = \frac{1}{4\pi R_6^2} \left(240 \sum_{i=9}^{16} (y_6^i)^2 - 144 \sum_{i=1}^6 (y_6^i)^2 - 288 (y_6^7)^2 + 224 (y_6^8)^2 \right). \quad (\text{A.33})$$

For model 3, we set $Q_R = Q_a + Q_H + Q_{E_7}$. We get the same expression for M_T^2 , while

$$\begin{aligned}
M_V^{(2)} &= \frac{4}{4\pi R_6^2} \left[4 \sum_{i=1}^6 (y_6^i)^2 - 56 (y_6^7)^2 - 8 \sum_{i=1}^6 (y_6^i)^2 + 48 (y_6^7)^2 - 16 (y_6^8)^2 + 8 (y_6^8)^2 + 60 \sum_{i=9}^{16} (y_6^i)^2 \right] \\
&\quad - \frac{1}{4\pi R_6^2} \left[32 \left(-4 \sum_{i=1}^6 (y_6^i)^2 + 24 (y_6^7)^2 \right) + 128 (2(y_6^8)^2) \right] \\
&= \frac{1}{4\pi R_6^2} \left(112 \sum_{i=1}^6 (y_6^i)^2 - 800 (y_6^7)^2 - 288 (y_6^8)^2 + 240 \sum_{i=9}^{16} (y_6^i)^2 \right). \tag{A.34}
\end{aligned}$$

References

- [1] I. Antoniadis, C. Bachas, J. R. Ellis and D. V. Nanopoulos, “An expanding universe in string theory,” Nucl. Phys. B **328** (1989) 117.
- [2] C. Kounnas and D. Lust, “Cosmological string backgrounds from gauged WZW models,” Phys. Lett. B **289** (1992) 56 [arXiv:hep-th/9205046].
- [3] C. R. Nappi and E. Witten, “A closed, expanding universe in string theory,” Phys. Lett. B **293** (1992) 309 [arXiv:hep-th/9206078].
- [4] S. Elitzur, A. Giveon, D. Kutasov and E. Rabinovici, “From big bang to big crunch and beyond,” JHEP **0206** (2002) 017 [arXiv:hep-th/0204189].
- [5] C. Kounnas, N. Toumbas and J. Troost, “A wave-function for stringy universes,” JHEP **0708** (2007) 018 [arXiv:0704.1996 [hep-th]].
- [6] C. Kounnas and H. Partouche, “Inflationary de Sitter solutions from superstrings,” arXiv:0706.0728 [hep-th].
- [7] H. Liu, G. W. Moore and N. Seiberg, “The challenging cosmic singularity,” arXiv:gr-qc/0301001.
- [8] J. M. Maldacena and C. Nunez, “Supergravity description of field theories on curved manifolds and a no go theorem,” Int. J. Mod. Phys. A **16** (2001) 822 [arXiv:hep-th/0007018].

- [9] P. K. Townsend, “Quintessence from M-theory,” *JHEP* **0111** (2001) 042 [arXiv:hep-th/0110072]; J. Sonner and P. K. Townsend, “Recurrent acceleration in dilaton-axion cosmology,” *Phys. Rev. D* **74** (2006) 103508 [arXiv:hep-th/0608068]; J. Sonner and P. K. Townsend, “Dilaton domain walls and dynamical systems,” *Class. Quant. Grav.* **23** (2006) 441 [arXiv:hep-th/0510115].
- [10] K. Skenderis, P. K. Townsend and A. Van Proeyen, “Domain-wall/cosmology correspondence in adS/dS supergravity,” *JHEP* **0708** (2007) 036 [arXiv:0704.3918 [hep-th]].
- [11] A. Vilenkin, “Creation of universes from nothing,” *Phys. Lett. B* **117** (1982) 25; J. B. Hartle and S. W. Hawking, “Wave function of the universe,” *Phys. Rev. D* **28** (1983) 2960; A. Vilenkin, “Quantum creation of universes,” *Phys. Rev. D* **30** (1984) 509; R. Brustein and S. P. de Alwis, “The landscape of string theory and the wave function of the universe,” *Phys. Rev. D* **73** (2006) 046009 [arXiv:hep-th/0511093].
- [12] C. Kounnas and H. Partouche, “Instanton transition in thermal and moduli deformed de Sitter cosmology,” arXiv:0705.3206 [hep-th].
- [13] N. Ohta, “Accelerating cosmologies and inflation from M / superstring theories,” *Int. J. Mod. Phys. A* **20** (2005) 1 [arXiv:hep-th/0411230]; K. i. Maeda and N. Ohta, “Inflation from superstring / M theory compactification with higher order corrections. I,” *Phys. Rev. D* **71** (2005) 063520 [arXiv:hep-th/0411093].
- [14] M. Bouhmadi-Lopez and P. Vargas Moniz, “Quantisation of parameters and the string landscape problem,” *JCAP* **0705** (2007) 005 [arXiv:hep-th/0612149].
- [15] N. Matsuo, “Superstring thermodynamics and its application to cosmology,” *Z. Phys. C* **36** (1987) 289.
- [16] R. H. Brandenberger and C. Vafa, “Superstrings in the early universe,” *Nucl. Phys. B* **316** (1989) 391; R. H. Brandenberger, “String gas cosmology and structure formation: A brief review,” arXiv:hep-th/0702001.
- [17] M. Grana, T. W. Grimm, H. Jockers and J. Louis, “Soft supersymmetry breaking in Calabi-Yau orientifolds with D-branes and fluxes,” *Nucl. Phys. B* **690** (2004) 21 [arXiv:hep-th/0312232]; D. Lust, S. Reffert and S. Stieberger, “Flux-induced soft supersymmetry breaking in chiral type IIb orientifolds with D3/D7-branes,” *Nucl. Phys. B*

- 706** (2005) 3 [arXiv:hep-th/0406092]; J. P. Derendinger, C. Kounnas, P. M. Petropoulos and F. Zwirner, “Superpotentials in IIA compactifications with general fluxes,” Nucl. Phys. B **715** (2005) 211 [arXiv:hep-th/0411276]; L. Andrianopoli, M. A. Lledo and M. Trigiante, “The Scherk-Schwarz mechanism as a flux compactification with internal torsion,” JHEP **0505** (2005) 051 [arXiv:hep-th/0502083]; G. Dall’Agata and N. Prezas, “Scherk-Schwarz reduction of M-theory on G_2 -manifolds with fluxes,” JHEP **0510** (2005) 103 [arXiv:hep-th/0509052].
- [18] J. Scherk and J. H. Schwarz, “Spontaneous breaking of supersymmetry through dimensional reduction,” Phys. Lett. B **82** (1979) 60.
- [19] R. Rohm, “Spontaneous supersymmetry breaking in supersymmetric string theories,” Nucl. Phys. B **237** (1984) 553.
- [20] C. Kounnas and M. Porrati, “Spontaneous supersymmetry breaking in string theory,” Nucl. Phys. B **310** (1988) 355; S. Ferrara, C. Kounnas, M. Porrati and F. Zwirner, “Superstrings with spontaneously broken supersymmetry and their effective theories,” Nucl. Phys. B **318** (1989) 75.
- [21] J. J. Atick and E. Witten, “The Hagedorn transition and the number of degrees of freedom of string theory,” Nucl. Phys. B **310** (1988) 291.
- [22] C. Kounnas and B. Rostand, “Coordinate dependent compactifications and discrete symmetries,” Nucl. Phys. B **341** (1990) 641.
- [23] I. Antoniadis and C. Kounnas, “Superstring phase transition at high temperature,” Phys. Lett. B **261** (1991) 369; I. Antoniadis, J. P. Derendinger and C. Kounnas, “Non-perturbative temperature instabilities in $N = 4$ strings,” Nucl. Phys. B **551** (1999) 41 [arXiv:hep-th/9902032].
- [24] E. Witten, “Dimensional reduction of superstring models,” Phys. Lett. B **155** (1985) 151; S. Ferrara, C. Kounnas and M. Porrati, “General dimensional reduction of ten-dimensional supergravity and superstring,” Phys. Lett. B **181** (1986) 263; M. Cvetič, J. Louis and B. A. Ovrut, “A string calculation of the Kähler potentials for moduli of \mathbb{Z}_N orbifolds,” Phys. Lett. B **206** (1988) 227; L. J. Dixon, V. Kaplunovsky and J. Louis, “On effective field theories describing $(2, 2)$ vacua of the heterotic string,” Nucl. Phys.

- B **329** (1990) 27; M. Cvetič, J. Molera and B. A. Ovrut, “Kähler potentials for matter scalars and moduli of \mathbb{Z}_N orbifolds,” Phys. Rev. D **40** (1989) 1140.
- [25] E. Cremmer, S. Ferrara, C. Kounnas and D. V. Nanopoulos, “Naturally vanishing cosmological constant in $N = 1$ supergravity,” Phys. Lett. B **133** (1983) 61; J. R. Ellis, C. Kounnas and D. V. Nanopoulos, “Phenomenological SU(1,1) supergravity,” Nucl. Phys. B **241** (1984) 406.
- [26] E. Kiritsis and C. Kounnas, “Perturbative and non-perturbative partial supersymmetry breaking: $N = 4 \rightarrow N = 2 \rightarrow N = 1$,” Nucl. Phys. B **503** (1997) 117 [arXiv:hep-th/9703059].
- [27] K. S. Narain, “New heterotic string theories in uncompactified dimensions < 10 ,” Phys. Lett. B **169** (1986) 41; K. S. Narain, M. H. Sarmadi and E. Witten, “A note on toroidal compactification of heterotic string theory,” Nucl. Phys. B **279** (1987) 369.
- [28] E. Kiritsis, “String theory in a nutshell,” *Princeton, USA: Univ. Pr. (2007) 588 p.*
- [29] E. Kiritsis and C. Kounnas, “Curved four-dimensional space-times as infrared regulator in superstring theories,” Nucl. Phys. Proc. Suppl. **41** (1995) 331 [arXiv:hep-th/9410212]; E. Kiritsis and C. Kounnas, “Infrared regularization of superstring theory and the one loop calculation of coupling constants,” Nucl. Phys. B **442** (1995) 472 [arXiv:hep-th/9501020].
- [30] S. Ferrara, C. Kounnas, M. Porrati and F. Zwirner, “Effective superhiggs and Str M^2 from four-dimensional strings,” Phys. Lett. B **194** (1987) 366.
- [31] T. Catelin-Jullien, C. Kounnas, H. Partouche and N. Toumbas, In preparation.
- [32] C. Kounnas, H. Partouche, N. Toumbas and J. Troost, In preparation.

Annexe D

Publication n^o 2 :

Thermal and quantum superstring
cosmologies

Thermal and Quantum Superstring Cosmologies*

Tristan Catelin-Jullien¹, Costas Kounnas¹
Hervé Partouche² and Nicolaos Toumbas³

¹ Laboratoire de Physique Théorique, Ecole Normale Supérieure,[†]
24 rue Lhomond, F-75231 Paris Cedex 05, France
catelin@lpt.ens.fr, Costas.Kounnas@lpt.ens.fr

² Centre de Physique Théorique, Ecole Polytechnique,[◇]
F-91128 Palaiseau, France
Herve.Partouche@cphpt.polytechnique.fr

³ Department of Physics, University of Cyprus,
Nicosia 1678, Cyprus
nick@ucy.ac.cy

*Talk given by Costas Kounnas at the 3rd RTN Workshop Forces-Universe,
Valencia, Spain October 1-5, 2007,*

*and by Hervé Partouche at the “String Phenomenology and Dynamical Vacuum Selection”
Workshop, Liverpool, UK, March 27-29, 2008.*

Abstract

We consider four dimensional heterotic string backgrounds for which supersymmetry is spontaneously broken via the Scherk-Schwarz mechanism on an internal spatial cycle and by finite temperature effects. We concentrate on initially flat backgrounds with $N = 4$ and $N = 2$ amount of supersymmetry. Thermal and quantum corrections give rise to a non-trivial cosmological evolution. We show that these corrections are under control and calculable due to the underlying no-scale structure of the effective supergravity theory. The effective Friedmann-Hubble equation involves a radiation term $\sim 1/a^4$ and a curvature term $\sim 1/a^2$, whose coefficients are functions of ratio of the gravitino mass scale to the temperature.

* Research partially supported by the EU (under the contracts MRTN-CT-2004-005104, MRTN-CT-2004-512194, MRTN-CT-2004-503369, MEXT-CT-2003-509661), INTAS grant 03-51-6346, CNRS PICS 2530, 3059 and 3747, and ANR (CNRS-USAR) contract 05-BLAN-0079-01 (01/12/05).

[†] Unité mixte du CNRS et de l'Ecole Normale Supérieure associée à l'université Pierre et Marie Curie (Paris 6), UMR 8549.

[◇] Unité mixte du CNRS et de l'Ecole Polytechnique, UMR 7644.

1 Introduction

A fundamental challenge for string theory is to explain the cosmology of our Universe. How can the theory describe, or even better predict, basic features of our Universe? Despite considerable effort over the last few years (see [1] – [9] for a partial list of references), still a concrete string theoretic framework for studying cosmology is lacking. The purpose of this article is to report some progress toward this direction by exhibiting new, physically relevant cosmological solutions of superstring theory. These solutions were obtained and analyzed recently in [10], after taking into account thermal and quantum corrections in superstring models for which supersymmetry is spontaneously broken.

At the level of classical string compactifications (with or without fluxes), it seems difficult to obtain realistic, tractable cosmological solutions. In most cases, the classical ground states correspond to static Anti-de Sitter or flat backgrounds and not to cosmological ones. But this classical analysis neglects the thermal and quantum corrections, which inevitably must play an important role in any attempt to identify non-trivial cosmological states.

It is precisely this direction that we wish to explore in this article. It involves studying cosmologies that are generated dynamically at the quantum level of string theory [6–8, 10]. For certain cases the quantum and thermal corrections are under control due to the very special structure of the underlying effective supergravity theory in its spontaneously broken supersymmetric phase.

In order to see how cosmological solutions emerge naturally in this context, consider the case of an initially supersymmetric flat string background at finite temperature. The thermal fluctuations produce a calculable energy density whose back-reaction on the space-time metric and on certain moduli fields gives rise to a cosmological evolution. For temperatures below the Hagedorn temperature, the evolution of the universe is known to be radiation dominated [11, 12].

More interesting cases are those where space-time supersymmetry is spontaneously broken at the string level via freely acting orbifolds [13]– [18]. In these cases, the thermal and supersymmetry breaking couplings correspond to a generalization of Scherk-Schwarz compactification in superstrings. The thermal corrections are implemented by introducing a coupling of the space-time fermion number Q_F to the string momentum and winding num-

bers associated to the Euclidean time cycle S_T^1 . The breaking of supersymmetry is generated by a similar coupling of an internal R -symmetry charge Q_R to the momentum and winding numbers associated to an internal spatial cycle S_M^1 , e.g. the X_5 coordinate cycle.

Two special mass scales appear both associated with the breaking of supersymmetry: the temperature scale $T \sim 1/(2\pi R_0)$ and the supersymmetry breaking scale $M \sim 1/(2\pi R_5)$, where R_0 and R_5 are the radii of the Euclidean time cycle, S_T^1 , and of the internal spatial cycle, S_M^1 , respectively. The initially degenerate mass levels of bosons and fermions split by an amount proportional to T or M , according to the charges Q_F and Q_R . This mass splitting gives rise to a non-trivial free energy density, which incorporates simultaneously the thermal corrections and quantum corrections due to the supersymmetry breaking boundary conditions along the spatial cycle S_M^1 . The back-reaction on the initially flat space-time metric results in different kinds of cosmological evolutions, depending on the initial amount of supersymmetry ($N = 4, N = 2, N = 1$).

In [10] we concentrated on four dimensional heterotic models with initial $N = 4$ and $N = 2$ amount of supersymmetry, leaving the phenomenologically more interesting $N = 1$ cases for future work. Below we summarize some of our main results.

2 Thermal and quantum corrections in heterotic backgrounds

We study the class of four dimensional string backgrounds obtained by toroidal compactification of the heterotic string on T^6 and T^6/\mathbb{Z}_2 orbifolds. The initial amount of space-time supersymmetry is $N_4 = 4$ for the T^6 models and $N_4 = 2$ for the orbifold models. Space-time supersymmetry is then spontaneously broken by introducing Scherk-Schwarz boundary conditions on an internal spatial cycle and by thermal corrections.

The four dimensional one-loop effective action in string frame is given by

$$S = \int d^4x \sqrt{-\det g} \left(e^{-2\phi} \left(\frac{1}{2} R + 2\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \dots \right) - \mathcal{V}_{\text{String}} \right), \quad (2.1)$$

where ϕ is the $4d$ dilaton field. The ellipses stand for the kinetic terms of other moduli fields. At zero temperature, the effective potential $\mathcal{V}_{\text{String}}$ is given in terms of the one-loop

Euclidean string partition function as follows:

$$\frac{Z}{V_4} = -\mathcal{V}_{\text{String}} \quad (2.2)$$

with V_4 the $4d$ Euclidean volume. At finite temperature, the one-loop Euclidean partition function determines the free energy density and pressure:

$$\frac{Z}{V_4} = -\mathcal{F}_{\text{String}} = P_{\text{String}}. \quad (2.3)$$

In order to determine the back-reaction on the metric and on certain moduli fields, it is convenient to work in the Einstein frame. For this purpose, we define the complex field S , $S = e^{-2\phi} + i\chi$, where χ is the axion field. Then after the Einstein rescaling of the metric, the one loop effective action becomes:

$$S = \int d^4x \sqrt{-\det g} \left[\frac{1}{2}R - g^{\mu\nu} K_{I\bar{J}} \partial_\mu \Phi_I \partial_\nu \bar{\Phi}_{\bar{J}} - \frac{1}{s^2} \mathcal{V}_{\text{String}}(\Phi_I, \bar{\Phi}_{\bar{I}}) \right]. \quad (2.4)$$

Here $K_{i\bar{j}}$ is the metric on the scalar field manifold $\{\Phi_I\}$, parameterized by various compactification moduli and the field S . This manifold includes also the main moduli fields T_I, U_I , $I = 1, 2, 3$, which are the volume and complex structure moduli of the three internal 2-cycles respectively.

In the Einstein frame the effective potential is rescaled by a factor $1/s^2$, where $s = \text{Re}S = e^{-2\phi}$. We have $\mathcal{V}_{\text{Ein}} = \mathcal{V}_{\text{String}}/s^2$. We always work in gravitational mass units, with $M_G = \frac{1}{\sqrt{8\pi G_N}} = 2.4 \times 10^{18}$ GeV.

What will be crucial in our analysis are some fundamental scaling properties of \mathcal{V}_{Ein} in the limit of large $R_0, R_5 \gg 1$. In this limit, only the temperature scale $T \sim 1/\sqrt{s}R_0$ and three of the main moduli fields, $\{S, T_1, U_1\}$ appear in \mathcal{V}_{Ein} . All other moduli appear in exponentially suppressed contributions:

$$\mathcal{V}_{\text{Ein}} \simeq \frac{F\left(\frac{sR_0^2}{sR_5^2}, \dots\right)}{(st_1u_1)^2} + \mathcal{O}(e^{-c_0R_0 - c_5R_5}), \quad (2.5)$$

where the function F will be determined later on. Freezing all other moduli, the classical Kähler potential takes a no-scale structure [19], as was expected from the effective field theory approach:

$$K = -\log(S + \bar{S}) - \log(T_1 + \bar{T}_1) - \log(U_1 + \bar{U}_1) \equiv -3\log(Z + \bar{Z}), \quad (2.6)$$

with $z = \text{Re } Z$ and $z^3 = st_1 u_1$.

The classical superpotential is constant, and so the gravitino mass scale is given by

$$M^2 = 8e^K = \frac{1}{st_1 u_1} = \frac{1}{z^3}. \quad (2.7)$$

Freezing further $\text{Im} Z$ and defining the field Φ by

$$e^{2\alpha\Phi} = M^2 = \frac{8}{(Z + \bar{Z})^3}, \quad (2.8)$$

we obtain the following kinetic term

$$-g_{\mu\nu} 3 \frac{\partial_\mu Z \partial_\nu \bar{Z}}{(Z + \bar{Z})^2} = -g_{\mu\nu} \frac{\alpha^2}{3} \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi \quad (2.9)$$

from the Kähler potential. The choice $\alpha^2 = 3/2$ normalizes canonically the kinetic term of the no-scale modulus Φ .

In all, the effective potential in Einstein frame acquires the following structure:

$$\mathcal{V}_{\text{Ein}} \simeq M^4 F \left(\frac{sR_0^2}{sR_5^2}, \dots \right) \simeq M^4 F \left(\frac{M^2}{T^2}, \frac{m_Y^2}{T^2} \right). \quad (2.10)$$

The possible dependence on other Susy mass scales M_Y^2 will become clear latter on, when we consider explicit examples.

3 Thermal and spontaneous breaking of supersymmetry

We first consider the case of a heterotic string background with maximal space-time supersymmetry ($N_4 = 4$). All nine spatial directions as well as the Euclidean time are compactified on a ten dimensional torus. At zero temperature and in the absence of Susy breaking couplings, the Euclidean string partition function is zero due to space-time supersymmetry.

At finite temperature and in the presence of a Scherk-Schwarz Susy breaking coupling, the result is a well defined finite quantity [16]- [18]. At genus one the string partition function is given by:

$$\begin{aligned} Z = & \int_F \frac{d\tau d\bar{\tau}}{4\text{Im}\tau} \frac{1}{2} \sum_{a,b} \frac{(-)^{a+b+ab} \theta \left[\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix} \right]^4}{\eta(\tau)^{12} \bar{\eta}(\bar{\tau})^{24}} \Gamma_{(5,21)}(R_I) \Gamma_{(3,3)}(R) \\ & \times \sum_{h_0, g_0} \Gamma \left[\begin{smallmatrix} h_0 \\ g_0 \end{smallmatrix} \right] (R_0) (-)^{g_0 a + h_0 b + g_0 h_0} \sum_{h_5, g_5} \Gamma \left[\begin{smallmatrix} h_5 \\ g_5 \end{smallmatrix} \right] (R_5) (-)^{g_5 a + h_5 b + g_5 h_5} . \end{aligned} \quad (3.1)$$

The non-vanishing of the partition function is due to the non-trivial coupling of the $\Gamma(R_0)$ and the $\Gamma(R_5)$ shifted lattices to the spin structures (a, b) . Here, the argument a is zero for space-time bosons and one for space-time fermions. The shifted lattices are given by $\Gamma_{(1,1)} \begin{bmatrix} h \\ g \end{bmatrix} (R) = \sum_{m,n} R(\text{Im}\tau)^{-\frac{1}{2}} e^{-\pi R^2 \frac{|2m+g+(2n+h)\tau|^2}{\text{Im}\tau}}$. We are interested in the case for which the radii of three spatial directions are very large, $R_x = R_y = R_z \equiv R \gg 1$, so that the three dimensional spatial volume factorizes $\Gamma_{(3,3)} \cong R^3 \text{Im}\tau^{-\frac{3}{2}} = (V_3/(2\pi)^3) \text{Im}\tau^{-\frac{3}{2}}$.

Before we proceed, the following comments are in order:

- The sector $(h_0, g_0) = (h_5, g_5) = (0, 0)$ gives zero contribution due to the fact that we started with a supersymmetric background.
- In the odd winding sectors, $h_0 = 1$ and/or $h_5 = 1$, the partition function diverges when R_0 and/or R_5 are between the Hagedorn radius $R_H = (\sqrt{2} + 1)/2$ and its dual $1/R_H$: $\frac{1}{R_H} < R_{0,5} < R_H$. The divergence is due to winding states that become tachyonic. Their condensation drives the system towards a phase transition [16]- [18].
- In the regime $R_0, R_5 \gg 1$, there are no tachyons. As we will see, the odd winding sectors as well as the string oscillator states give exponentially suppressed contributions to the partition function. The contributions of the internal $\Gamma_{(5,21)}(R_I)$ lattice states are also exponentially suppressed, provided that the moduli R_I are of order unity.

Thus for large R_0, R_5 , only sectors for which $h_0 = h_5 = 0$ contribute significantly. By utilizing Jacobi identities involving the theta functions, we can see that when $h_0 = h_5 = 0$, we get a non-zero contribution only if $g_0 + g_5 = 1$.

Next, using the relation $\Gamma(R) = \Gamma \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \Gamma \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \Gamma \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \Gamma \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ and neglecting the odd winding sectors, we may replace

$$\Gamma \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \Gamma(R) - \Gamma \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \Gamma(R) - \frac{1}{2}\Gamma(2R) \quad (3.2)$$

in the integral expression for Z . For each lattice term we decompose the contribution in modular orbits: $(m_i, n_i) = (0, 0)$ and $(m_i, n_i) \neq (0, 0)$. For $(m_i, n_i) \neq (0, 0)$, the integration over the fundamental domain is equivalent with the integration over the whole strip but with $n_i = 0$. Notice also that the $(0, 0)$ contribution of $\Gamma(R)$ cancels the one of $\frac{1}{2}\Gamma(2R)$. We are

left with the following integration over the whole strip:

$$Z = \frac{V_5}{(2\pi)^5} \sum_{g_0+g_5=1} \int_{\parallel} \frac{d\tau d\bar{\tau}}{4\text{Im}\tau^{\frac{7}{2}}} \frac{\theta [0]_4^4 \Gamma_{(5,21)}(R_I)}{\eta(\tau)^{12} \bar{\eta}(\bar{\tau})^{24}} \sum_{m_0, m_5} e^{-\pi R_0^2 \frac{(2m_0+g_0)^2}{\text{Im}\tau}} e^{-\pi R_5^2 \frac{(2m_5+g_5)^2}{\text{Im}\tau}}. \quad (3.3)$$

The integral over τ_1 imposes the left-right level matching condition. The left-moving part contains the ratio $\theta [0]_4^4 / \eta^{12} = 2^4 + \mathcal{O}(e^{-\pi\tau_2})$, which implies that the lowest contribution is at the massless level. Thus after the integration over τ_1 ($\tau_2 \equiv t$), the partition function takes the form

$$Z = 2^4 D_0 \frac{V_5}{(2\pi)^5} \sum_{g_1, g_2} \frac{(1 - (-)^{g_1+g_2})}{2} \int_0^\infty \frac{dt}{2t^{\frac{7}{2}}} \sum_{m_1, m_2} e^{-\pi R_0^2 \frac{(2m_1+g_1)^2}{t}} e^{-\pi R_5^2 \frac{(2m_2+g_2)^2}{t}}, \quad (3.4)$$

up to exponentially suppressed contributions that we drop. The factor $2^4 D_0$ is the multiplicity of the massless level.

Changing the integration variable by setting $t = \pi(R_0^2(2m_1+g_1)^2 + R_5^2(2m_2+g_2)^2) x$, the integral over x can be expressed neatly in terms of Eisenstein functions of order $k = 5/2$:

$$E_k(U) = \sum_{(m,n) \neq (0,0)} \left(\frac{\text{Im } U}{|m + nU|^2} \right)^k. \quad (3.5)$$

The pressure in the Einstein frame can be written as

$$P = \frac{Z}{V_4} = C_T T^4 f_{5/2}(u) + C_V M^4 \frac{f_{5/2}(1/u)}{u}, \quad (3.6)$$

where $u = R_0/R_5 = M/T$, and 2

$$f_k(u) = u^{k-1} \left(\frac{1}{2^k} E_k \left(\frac{iu}{2} \right) - \frac{1}{2^{2k}} E_k(iu) \right). \quad (3.7)$$

Here $C_T = C_V \sim n^*$, where $n^* = 8D_0$ is the number of massless fermion/boson pairs. In this particular model the coefficients C_T and C_V are equal due to the underlying gravitino mass/temperature duality. For fixed u the first term stands for the thermal contribution to the pressure while the second term stands for minus the effective potential.

We conclude this section with some further comments.

- The coefficient C_T is fixed and positive as it is determined by the number of all massless boson/fermion pairs in the initially supersymmetric theory.

- The coefficient C_V will depend on the way the Susy-breaking operator Q_R couples to the left and right movers. In general, $Q_F \neq Q_R$ and the temperature / gravitino mass duality will be broken. Then C_V can be either positive or negative.
- For the T_6/\mathbb{Z}_2 orbifold models with $N = 2$ initial supersymmetry, and with Q_R acting only on the left-movers such that $Q_R \neq Q_F$, the net contribution of the twisted sectors to C_V is negative [10]. The change of sign indicates that in the twisted sectors, the states that become massive are the bosons rather than the fermions.

3.1 Small mass scales from Wilson line deformations

A generic supersymmetric heterotic background may contain in its spectrum massive supermultiplets whose mass is obtained by switching on non-trivial continuous Wilson-lines [20]. This is a stringy realization of the Higgs mechanism, breaking spontaneously the initial gauge group to smaller subgroups.

We restrict to arbitrary and small Wilson line deformations starting from a given supersymmetric background where R_I , $I = 6, 7, \dots, 10$ are of the order the string scale. In the zero winding sector, a Wilson line just modifies the Kaluza-Klein momenta, and the corresponding Kaluza-Klein mass becomes

$$\frac{m_I^2}{R_I^2} \longrightarrow \frac{(m_I + y_I^a Q_a)^2}{R_I^2}, \quad (3.8)$$

where Q_a is the charge operator associated to the Wilson-line y_I^a . We can distinguish two different cases: $I = 5$ where R_5 is large, and $I = 6, \dots, 10$ where the R_I are of order the string scale.

Here we shall consider the second case $I = 6, 7, \dots, 10$. In this case, we can set the momentum and winding numbers to zero, $m_I = n_I = 0$, so that the relevant modification in the partition function is the insertion of the term:

$$e^{-\pi t \left(\frac{y_I^a Q_a}{R_I} \right)^2} \simeq 1 - \pi t \left(\frac{y_I^a Q_a}{R_I} \right)^2. \quad (3.9)$$

Then incorporating the effects of the Wilson lines up to quadratic order, we get for the overall pressure:

$$P = C_T T^4 f_{\frac{5}{2}}(u) - D_T T^2 M_Y^2 f_{\frac{3}{2}}(u) + C_V M^4 \frac{f_{\frac{5}{2}}(1/u)}{u} - D_V M^2 M_Y^2 \frac{f_{\frac{3}{2}}(1/u)}{u}. \quad (3.10)$$

Here, $M_Y \sim y_I^a Q_a / R_I$ introduces a new mass scale in the theory, which is qualitatively different than T and M . M_Y is a supersymmetric mass scale rather than a Susy-breaking scale like T and M .

3.2 Scaling properties of the thermal effective potential

The final expression for P contains three mass scales: M , T and M_Y . The first identity it satisfies follows from its definition:

$$\left(T \frac{\partial}{\partial T} + M \frac{\partial}{\partial M} + M_Y \frac{\partial}{\partial M_Y} \right) P = 4P, \quad (3.11)$$

which can be best seen by writing P as

$$P \equiv T^4 p_4(u) + T^2 M_Y^2 p_2(u) = P_4 + P_2, \quad u = \frac{M}{T}. \quad (3.12)$$

Using standard thermodynamic identities, we can obtain the energy density $\rho = \rho_4 + \rho_2$:

$$\rho \equiv T \frac{\partial}{\partial T} P - P = \rho_4 + \rho_2 \quad (3.13)$$

with

$$\rho_4 = \left(3P_4 - u \frac{\partial}{\partial u} P_4 \right) \quad \rho_2 = \left(P_2 - u \frac{\partial}{\partial u} P_2 \right). \quad (3.14)$$

In the sequel, we allow the Susy-breaking scales T and M to vary with time while fixing the supersymmetric mass scale M_Y and also u , and investigate the back-reaction to the initially flat metric and moduli fields.

4 Gravitational equations and critical solution

We assume that the back-reacted space-time metric is homogeneous and isotropic

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 d\Omega_k^2, \quad H = \left(\frac{\dot{a}}{a} \right), \quad (4.1)$$

where Ω_k denotes the three dimensional space with constant curvature k and H is the Hubble parameter.

From the fact that $-P$ plays the role of the effective potential and the relation between the gravitino mass scale M and the no scale modulus Φ , $M = e^{\alpha\Phi}$, we obtain the field equation:

$$\ddot{\Phi} + 3H\dot{\Phi} = \frac{\partial P}{\partial \Phi} = \alpha u \left(\frac{\partial P}{\partial u} \right)_T = -\alpha (\rho_4 - 3P_4 + \rho_2 - P_2). \quad (4.2)$$

The remaining equations are the gravitational field equations. These are the Friedmann-Hubble equation,

$$3H^2 = \frac{1}{2}\dot{\Phi}^2 + \rho - \frac{3k}{a^2}, \quad (4.3)$$

and the equation that follows from varying with respect to the spatial components of the metric:

$$2\dot{H} + 3H^2 = -\frac{k}{a^2} - P - \frac{1}{2}\dot{\Phi}^2. \quad (4.4)$$

This last equation can be replaced by the linear sum of the two gravitational field equations, so that the kinetic term of Φ drops out:

$$\dot{H} + 3H^2 = -\frac{2k}{a^2} + \frac{1}{2}(\rho - P). \quad (4.5)$$

4.1 Critical solution

The scaling properties of the thermal effective potential suggest to search for a solution where all varying mass scales of the system, $M(\Phi)$, T and $1/a$, remain proportional during time evolution:

$$e^{\alpha\Phi} \equiv M(\Phi) = \frac{1}{\gamma a} \implies H = -\alpha\dot{\Phi}, \quad M(\Phi) = uT \quad (4.6)$$

with γ and u fixed in time. Our aim is thus to determine the constants γ and u .

Along the critical trajectory, the compatibility of the Φ -equation of motion with the gravitational field equations requires that

$$r_4 = \frac{6\alpha^2 - 1}{2\alpha^2 - 1}p_4, \quad \left(r_4 = 4p_4 \quad \text{for } \alpha^2 = \frac{3}{2} \right), \quad (4.7)$$

$$-2k\gamma^2 = \frac{2\alpha^2 - 1}{2} \frac{r_2 - p_2}{u^2} M_Y^2, \quad \left(-2k\gamma^2 = \frac{(r_2 - p_2)}{u^2} M_Y^2 \quad \text{for } \alpha^2 = \frac{3}{2} \right), \quad (4.8)$$

where $r_4 = \rho_4/T^4$ and $r_2 = \rho_2/(T^2 M_Y^2)$. The first equation is an algebraic equation for the complex structure-like ratio u . The second equation determines the spatial curvature of the solution.

Having solved for the compatibility equations, the dynamics for the scale factor a is governed by an effective Friedmann-Hubble equation as follows:

$$3H^2 = -\frac{3\hat{k}}{a^2} + \frac{c_r}{a^4}, \quad (4.9)$$

where

$$3\hat{k} = -\frac{1}{\gamma^2} \frac{6\alpha^2}{6\alpha^2 - 1} \frac{1}{u^2} \left(\frac{3(2\alpha^2 - 1)}{4}(r_2 - p_2) + r_2 \right) M_Y^2, \quad (4.10)$$

$$c_r = \frac{1}{\gamma^4} \frac{6\alpha^2}{6\alpha^2 - 1} \frac{r_4}{u^4} = \frac{1}{\gamma^4} \frac{6\alpha^2}{2\alpha^2 - 1} \frac{p_4}{u^4}. \quad (4.11)$$

The following comments are in order:

- Clearly, a necessary condition for the curvature \hat{k} not to vanish is to have non trivial Wilson lines in any of the directions 6, 7, 8, 9, 10. Models with both positive and negative \hat{k} can be constructed [10].
- The value of the ratio $u = M/T$ was obtained by solving the compatibility equations numerically. It can be large or small depending on the model. In other words there are models with a hierarchy for the Susy-breaking scales M and T . In all models considered in [10], the value for the effective coefficient c_r was positive.

5 Concluding remark

The purpose of this talk is to emphasize the plausible existence of cosmological superstring solutions, inflationary or not, which are generated dynamically at the quantum string level. Such cosmologies arise naturally from an initially flat spacetime, once supersymmetry is spontaneously broken by thermal and quantum effects. They are examples of no-scale, radiatively induced cosmologies. We believe that this new set-up will result in a coherent and fruitful framework in order to understand superstring cosmology.

Acknowledgements

The work of C.K. and H.P. is partially supported by the EU contract MRTN-CT-2004-005104 and the ANR (CNRS-USAR) contract 05-BLAN-0079-01 (01/12/05). N.T. and C.K. are supported by the EU contract MRTN-CT-2004-512194. H.P. is also supported by the EU contracts MRTN-CT-2004-503369 and MEXT-CT-2003-509661, INTAS grant 03-51-6346, and CNRS PICS 2530, 3059 and 3747, while N.T. is also supported by an INTERREG IIIA Crete/Cyprus program.

References

- [1] I. Antoniadis, C. Bachas, J. R. Ellis and D. V. Nanopoulos, “An expanding universe in string theory,” Nucl. Phys. B **328** (1989) 117.
- [2] C. Kounnas and D. Lust, “Cosmological string backgrounds from gauged WZW models,” Phys. Lett. B **289** (1992) 56 [arXiv:hep-th/9205046];
- [3] C. R. Nappi and E. Witten, “A closed, expanding universe in string theory,” Phys. Lett. B **293** (1992) 309 [arXiv:hep-th/9206078].
- [4] S. Elitzur, A. Giveon, D. Kutasov and E. Rabinovici, “From big bang to big crunch and beyond,” JHEP **0206**, 017 (2002) [arXiv:hep-th/0204189].
- [5] C. Kounnas, N. Toumbas and J. Troost, “A Wave-function for Stringy Universes,” JHEP **0708**, 018 (2007) [arXiv:0704.1996 [hep-th]].
- [6] C. Kounnas and H. Partouche, “Instanton transition in thermal and moduli deformed de Sitter cosmology,” arXiv:0705.3206 [hep-th].
- [7] I. Antoniadis and C. Kounnas, Nucl. Phys. B **284**, 729 (1987).
- [8] C. Kounnas and H. Partouche, “Inflationary de Sitter solutions from superstrings,” arXiv:0706.0728 [hep-th].
- [9] J. M. Maldacena and C. Nunez, “Supergravity description of field theories on curved manifolds and a no go theorem,” Int. J. Mod. Phys. A **16**, 822 (2001) [arXiv:hep-th/0007018].
- [10] T. Catelin-Jullien, C. Kounnas, H. Partouche and N. Toumbas, “Thermal/quantum effects and induced superstring cosmologies,” arXiv:0710.3895 [hep-th].
- [11] N. Matsuo, “Superstring Thermodynamics and its Application to Cosmology,” Z. Phys. C **36**, 289 (1987).
- [12] R. H. Brandenberger and C. Vafa, “Superstrings in the Early Universe,” Nucl. Phys. B **316**, 391 (1989); R. H. Brandenberger, “String gas cosmology and structure formation: A brief review,” arXiv:hep-th/0702001.

- [13] J. Scherk and J. H. Schwarz, “Spontaneous Breaking Of Supersymmetry Through Dimensional Reduction,” *Phys. Lett. B* **82** (1979) 60.
- [14] R. Rohm, “Spontaneous supersymmetry breaking in supersymmetric string theories,” *Nucl. Phys. B* **237**, 553 (1984).
- [15] C. Kounnas and M. Porrati, “Spontaneous supersymmetry breaking in string theory,” *Nucl. Phys. B* **310** (1988) 355; S. Ferrara, C. Kounnas, M. Porrati and F. Zwirner, “Superstrings with spontaneously broken supersymmetry and their effective theories,” *Nucl. Phys. B* **318** (1989) 75.
- [16] J. J. Atick and E. Witten, “The Hagedorn transition and the number of degrees of freedom of string theory,” *Nucl. Phys. B* **310**, 291 (1988).
- [17] C. Kounnas and B. Rostand, “Coordinate dependent compactifications and discrete symmetries,” *Nucl. Phys. B* **341**, 641 (1990);
- [18] I. Antoniadis and C. Kounnas, “Superstring phase transition at high temperature,” *Phys. Lett. B* **261** (1991) 369; I. Antoniadis, J. P. Derendinger and C. Kounnas, “Non-perturbative temperature instabilities in $N = 4$ strings,” *Nucl. Phys. B* **551** (1999) 41 [arXiv:hep-th/9902032].
- [19] E. Cremmer, S. Ferrara, C. Kounnas and D. V. Nanopoulos, “Naturally vanishing cosmological constant in $N = 1$ supergravity,” *Phys. Lett. B* **133** (1983) 61; J. R. Ellis, C. Kounnas and D. V. Nanopoulos, “Phenomenological $SU(1,1)$ supergravity,” *Nucl. Phys. B* **241** (1984) 406.
- [20] K. S. Narain, “New Heterotic String Theories In Uncompactified Dimensions ≥ 10 ,” *Phys. Lett. B* **169** (1986) 41; K. S. Narain, M. H. Sarmadi and E. Witten, “A Note on Toroidal Compactification of Heterotic String Theory,” *Nucl. Phys. B* **279** (1987) 369.

Annexe E

Publication n^o 3 :
Spinor-Vector Duality in Heterotic
SUSY Vacua

Spinor-Vector Duality in Heterotic SUSY Vacua

Tristan Catelin-Jullien*, Alon E. Faraggi[†], Costas Kounnas*
and John Rizos[‡]

* Laboratoire de Physique Théorique¹, Ecole Normale Supérieure,
24 rue Lhomond, F-75231 Paris cedex 05, France.
catelin@lpt.ens.fr, costas.kounnas@lpt.ens.fr

[†] Department of Mathematical Sciences, University of Liverpool, Liverpool L69 7ZL, UK.
Alon.Faraggi@liv.ac.uk

[‡] Department of Physics, University of Ioannina, GR45110 Ioannina, Greece.
irizos@uoi.gr

Abstract

We elaborate on the recently discovered spinor-vector duality in realistic free fermionic heterotic vacua. We emphasize the interpretation of the freely-acting orbifolds carried out on the six internal dimensions as coordinate-dependent compactifications; they play a central role in the duality, especially because of their ability to break the right-moving superconformal algebra of the space-time supersymmetric heterotic vacua. These considerations lead to a simple and intuitive proof of the spinor-vector duality, and to the formulation of explicit rules to find the dual of a given model. We discuss the interest of such a duality, notably concerning the structure of the space of vacua of superstring theory.

¹Unité mixte du CNRS et de l'Ecole Normale Supérieure associée à l'université Pierre et Marie Curie (Paris 6), UMR 8549.

1 Introduction

Heterotic string theory [1] is a preferred candidate to build realistic string theories. Indeed, its structure allows a large variety of gauge groups, derived from the breaking of the original $SO(32)$ or $E_8 \times E_8$ 10-dimensional gauge group upon compactification [2]. These groups include usual grand unification groups such as $SO(10)$ or $SU(5)$, usually arising from the breaking of the E_6 gauge group present in a $N = (2, 2)$ Calabi-Yau compactification of heterotic string theories.

One expects a realistic theory to have $\mathcal{N} = 1$ (which is further spontaneously broken) four-dimensional supersymmetry. In our framework, this is achieved by compactifying the six internal dimensions on a $T^6/\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ orbifold. This procedure initially breaks supersymmetry from $\mathcal{N} = 4$ to $\mathcal{N} = 1$. The last breaking $\mathcal{N} = 1 \rightarrow \mathcal{N} = 0$ is assumed to be realized either by non-perturbative phenomena or by (geometric or non-geometric) fluxes [3]. The $T^6/\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ orbifold framework also has the advantage to have three $\mathcal{N} = 2$ twisted sectors, which can lead naturally to a realization of models with three generations [4] – [8].

The models we are going to be interested in are built using the so-called fermionic construction [5], where the Weyl anomaly is cancelled by inclusion of free fermionic degrees of freedom on the world-sheet. Over the years, several string-derived realistic models have been constructed using this formalism [6]. It is known [7, 8] that such models reproduce a wide variety of compactifications, toroidal or more generally Calabi-Yau, at special points of their moduli space. A particular model is specified by a basis of sets of fermions, or more precisely by summation over a set of spin structures authorized for the fermions. In this procedure, standard \mathbb{Z}_2 freely-acting and non-freely acting orbifolds are encoded in a very natural way, which arises from the properties of fermionization when the internal manifold is at the extended symmetry point, referred to as the *fermionic point*. Placing ourselves at this specific point of the moduli space of the theory is not very restrictive : indeed, if one chooses to deform these models in order to move away from this point, the form of the twisted sectors, and therefore the chiral matter content of the model, is unchanged as these sectors are insensitive to the geometry of the compactification manifold [4, 8, 9]. The $T^6/\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ orbifold breaking the supersymmetry to $\mathcal{N} = 1$ is realized by means of the introduction of two sets of fermions, that we will call b_1 and b_2 . We finally have to specify the value of various discrete torsion coefficients, defining the action of the generalized GSO projections present in the construction; this specification, among other things, encodes the precise effect of all the orbifoldings that have been introduced.

In this paper, we will focus on a duality that has been pointed out in a recent work [4], where several properties of all possible heterotic $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ models have been detailed, by means of a computerized statistical study of their massless spectra. This study has been restricted to a subclass of models closely resembling the usual three generation realistic string models, where the gauge group yielded by the free fermions include a factor $SO(10)$. This duality exchanges, within the three twisted sectors of the orbifold, the number of vectorial representations of $SO(10)$ with the number of spinorial plus anti-spinorial representations of $SO(10)$. Starting from obviously self-dual cases, namely the cases where the $SO(10)$ gauge is extended to E_6 , which can be linked to the usual $N = (2, 2)$ compactifications on Calabi-Yau surfaces, we will be able to project out some of the representations of $SO(10)$ by suitable freely-acting orbifolds, therefore explicitly creating dual pairs of models in a straightforward way. We will be able to construct the dual model of some generic model, which will prove the duality. As noted in previous work, this

duality is realized internally in each twisted sector. Consequentially, the duality has been shown to hold in $\mathcal{N} = 2$ theories as well (as $\mathcal{N} = 2$ supersymmetry is conserved in each of the twisted sectors). The mechanism of the proof can be adapted in a straightforward way to this case.

The main ingredient of the construction will be to consider the effect of freely-acting orbifolds. These orbifolds, when carried out in the simplest way, correspond to the modding out of a half-shift symmetry $X \rightarrow X + \pi R$ on an internal boson X . In this case, the generated twisted sectors are massive; without further hypotheses, the mass shift does not depend on the various representations to which the states belong. However, in a particular framework, the freely-acting orbifold can break a symmetry by lifting the mass degeneracy between the symmetry partners. This happens if, in addition to the translation, we consider modding out a parity operator, discriminating states having different charges under a symmetry group. As a result, states with different charges will undergo different mass shifts, leading to a *spontaneous* breaking of symmetry. This mechanism is the stringy generalization [3] of the field-theoretic Scherk-Schwarz compactification [10] ; it can be used to spontaneously break supersymmetry, when the parity operator is chosen to be the space-time helicity of the string state [3]. More generally, various patterns of spontaneous SUSY breaking are obtained by choosing an arbitrary R -symmetry charge (see for example [11] for a recent cosmological application of these constructions).

This enables us also to break an internal superconformal algebra, relating vectorial and spinorial representations of some gauge group of the theory. The current transforming the spinorial representation into the vectorial one and vice-versa is part of the right hand side of the $N = (2, 2)$ superconformal algebra present in the model in the case of an unbroken E_6 . By doing a Scherk-Schwarz compactification of an internal direction coupled to the helicity associated to the different representations of the gauge group, one is then able to break this superconformal symmetry, discriminating vectorial and spinorial representations by creating a mass gap.

In the first part of this paper, we will review the free fermionic setup used to construct the class of models we will be interested in. Then we will detail how one can implement freely-acting orbifolds with the sets we introduced, how these freely-acting orbifolds can be used for the spontaneously breaking of some symmetry, and how it can, in our case, lift the mass degeneracy between the spinorial/anti-spinorial representations of $SO(10)$ and the vectorial representations of $SO(10)$. In a third part, we will focus on one twisted plane (that is, one family of twisted sectors) of the theory. We will start by considering one specific model in the first twisted plane, and detail its massless spectrum. Then, we will enunciate the rules to construct the $(S_t \leftrightarrow V)$ -dual of a model, and apply them on the model we just constructed. We will also give some tools to perform this duality directly on the partition function of the theory. Finally, we will conclude by some remarks on the significance of this duality, especially regarding the structure of the vacua of $\mathcal{N} = 1$ heterotic string theories.

2 Free fermionic construction

2.1 $\mathcal{N} = 1$ and $\mathcal{N} = 2$ parity set basis and partition function

Starting for a four-dimensional superstring theory made out of free fermions [5], the 20 left-moving fermions are noted, following references [9, 12]

$$\{\psi^\mu, \chi^{1\dots 6}, y^{1\dots 6}, \omega^{1\dots 6}\} \quad (2.1)$$

and the 44 right-moving ones

$$\{\bar{y}^{1\dots 6}, \bar{\omega}^{1\dots 6}, \bar{\psi}^{1\dots 5}, \bar{\eta}^{1\dots 3}, \bar{\phi}^{1\dots 8}\} \quad (2.2)$$

where the $\bar{\psi}$'s, $\bar{\eta}$'s and $\bar{\phi}$'s are *complex* fermions. These notations fixed, we are considering the sets

$$F = \{\psi^\mu, \chi^{1\dots 6}, y^{1\dots 6}, \omega^{1\dots 6} \mid \bar{y}^{1\dots 6}, \bar{\omega}^{1\dots 6}, \bar{\psi}^{1\dots 5}, \bar{\eta}^{1\dots 3}, \bar{\phi}^{1\dots 8}\};$$

$$S = \{\psi^\mu, \chi^{1\dots 6}\}; \quad e_i = \{y^i, \omega^i \mid \bar{y}^i, \bar{\omega}^i\}, \quad [i = 1 \dots 6];$$

$$b_1 = \{\chi^{3\dots 6}, y^{3\dots 6} \mid \bar{y}^{3\dots 6}, \bar{\psi}^{1\dots 5}, \bar{\eta}^1\}; \quad (2.3)$$

$$b_2 = \{\chi^{1,2,5,6}, y^{1,2,5,6} \mid \bar{y}^{1,2,5,6}, \bar{\psi}^{1\dots 5}, \bar{\eta}^2\};$$

$$z_1 = \{\bar{\phi}^{1\dots 4}\}; \quad z_2 = \{\bar{\phi}^{5\dots 8}\}.$$

Noting additively the usual composition law of the free fermionic formalism, we will use that

$$x = \{\bar{\psi}^{1\dots 5}, \bar{\eta}^{1,2,3}\} = F + S + \sum_i e_i + z_1 + z_2 \quad (2.4)$$

and

$$b_3 = b_1 + b_2 + x = \{\chi^{1\dots 4}, y^{1\dots 4} \mid \bar{y}^{1\dots 4}, \bar{\psi}^{1\dots 5}, \bar{\eta}^3\} \quad (2.5)$$

are part of the vacua of the theory. Note that the case of a $\mathcal{N} = 2$ theory is treated by considering the previous set, amputated of b_2 . This has the effect of considering a $T^4/\mathbb{Z}_2 \times T^2$ orbifold instead of a $T^6/\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. The duality also holds in this case, as we will see from the mechanism of construction that the duality holds separately in each twisted sector; and within a twisted sector, $\mathcal{N} = 2$ supersymmetry is preserved.

The generic form of this partition function is quite lengthy but useful. We note, as an index of the various blocks, the corresponding degrees of freedom. Noting for brevity $h_3 = -h_1 - h_2$, it reads :

$$\begin{aligned} Z_{\mathcal{N}=1} &= \int_F \frac{d^2\tau}{\tau_2^2} \frac{\tau_2^{-1}}{\eta^{12}\bar{\eta}^{24}} \frac{1}{2^2} \sum_{h_i, g_i} \left(\frac{1}{2} \sum_{a,b} (-)^{a+b+ab} \vartheta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \vartheta \begin{bmatrix} a+h_1 \\ b+g_1 \end{bmatrix} \vartheta \begin{bmatrix} a+h_2 \\ b+g_2 \end{bmatrix} \vartheta \begin{bmatrix} a+h_3 \\ b+g_3 \end{bmatrix} \right)_{\psi^\mu, \chi} \\ &\times \left(\frac{1}{2} \sum_{\epsilon, \xi} \bar{\vartheta} \begin{bmatrix} \epsilon \\ \xi \end{bmatrix}^5 \bar{\vartheta} \begin{bmatrix} \epsilon+h_1 \\ \xi+g_1 \end{bmatrix} \bar{\vartheta} \begin{bmatrix} \epsilon+h_2 \\ \xi+g_2 \end{bmatrix} \bar{\vartheta} \begin{bmatrix} \epsilon+h_3 \\ \xi+g_3 \end{bmatrix} \right)_{\bar{\psi}^{1\dots 5}, \bar{\eta}^{1,2,3}} \\ &\times \left(\frac{1}{2} \sum_{H_1, G_1} \frac{1}{2} \sum_{H_2, G_2} (-)^{H_1 G_1 + H_2 G_2} \bar{\vartheta} \begin{bmatrix} \epsilon+H_1 \\ \xi+G_1 \end{bmatrix}^4 \bar{\vartheta} \begin{bmatrix} \epsilon+H_2 \\ \xi+G_2 \end{bmatrix}^4 \right)_{\bar{\phi}^{1\dots 8}} \\ &\times \left(\sum_{s_i, t_i} \Gamma_{6,6} \begin{bmatrix} h_i | s_i \\ g_i | t_i \end{bmatrix} \right)_{(y\omega\bar{y}\bar{\omega})^{1\dots 6}} \times e^{i\pi\Phi(\gamma, \delta, s_i, t_i, \epsilon, \xi, h_i, g_i, H_1, G_1, H_2, G_2)} \end{aligned} \quad (2.6)$$

where the internal twisted/shifted (6, 6) lattice is given by

$$\begin{aligned}
\Gamma_{6,6} \left[\begin{matrix} h_i | s_i \\ g_i | t_i \end{matrix} \right] &= \frac{1}{2^6} \sum_{\gamma_i, \delta_i} \left(\left| \vartheta \left[\begin{matrix} \gamma_1 + h_1 \\ \delta_1 + g_1 \end{matrix} \right] \right| \left| \vartheta \left[\begin{matrix} \gamma_1 \\ \delta_1 \end{matrix} \right] \right| (-)^{\gamma_1 t_1 + \delta_1 s_1 + s_1 t_1} \right)_{(y\omega\bar{y}\bar{\omega})^1} \\
&\times \left(\left| \vartheta \left[\begin{matrix} \gamma_2 + h_1 \\ \delta_2 + g_1 \end{matrix} \right] \right| \left| \vartheta \left[\begin{matrix} \gamma_2 \\ \delta_2 \end{matrix} \right] \right| (-)^{\gamma_2 t_2 + \delta_2 s_2 + s_2 t_2} \right)_{(y\omega\bar{y}\bar{\omega})^2} \\
&\times \left(\left| \vartheta \left[\begin{matrix} \gamma_3 + h_2 \\ \delta_3 + g_2 \end{matrix} \right] \right| \left| \vartheta \left[\begin{matrix} \gamma_3 \\ \delta_3 \end{matrix} \right] \right| (-)^{\gamma_3 t_3 + \delta_3 s_3 + s_3 t_3} \right)_{(y\omega\bar{y}\bar{\omega})^3} \\
&\times \left(\left| \vartheta \left[\begin{matrix} \gamma_4 + h_2 \\ \delta_4 + g_2 \end{matrix} \right] \right| \left| \vartheta \left[\begin{matrix} \gamma_4 \\ \delta_4 \end{matrix} \right] \right| (-)^{\gamma_4 t_4 + \delta_4 s_4 + s_4 t_4} \right)_{(y\omega\bar{y}\bar{\omega})^4} \\
&\times \left(\left| \vartheta \left[\begin{matrix} \gamma_5 + h_3 \\ \delta_5 + g_3 \end{matrix} \right] \right| \left| \vartheta \left[\begin{matrix} \gamma_5 \\ \delta_5 \end{matrix} \right] \right| (-)^{\gamma_5 t_5 + \delta_5 s_5 + s_5 t_5} \right)_{(y\omega\bar{y}\bar{\omega})^5} \\
&\times \left(\left| \vartheta \left[\begin{matrix} \gamma_6 + h_3 \\ \delta_6 + g_3 \end{matrix} \right] \right| \left| \vartheta \left[\begin{matrix} \gamma_6 \\ \delta_6 \end{matrix} \right] \right| (-)^{\gamma_6 t_6 + \delta_6 s_6 + s_6 t_6} \right)_{(y\omega\bar{y}\bar{\omega})^6}.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Here $e^{i\pi\Phi}$ is a global phase whose effect is to implement the various GGSO projections acting on the spectrum of this theory. Following the formalism of [5], these GGSO projections are equivalently defined by the coefficients $C_{(v_i|v_j)} \equiv [v_i|v_j]$, where v_i and v_j are the vectors of (2.3). This phase is required to satisfy modular invariance constraints, that is, it must be invariant under the following transformations :

$$\tau \rightarrow \tau + 1 \Rightarrow \begin{cases} (a, b) & \rightarrow (a, a + b + 1) \\ (\gamma_i, \delta_i) & \rightarrow (\gamma_i, \gamma_i + \delta_i + 1) \\ (\epsilon, \xi) & \rightarrow (\epsilon, \epsilon + \xi + 1) \\ (h_i, g_i) & \rightarrow (h_i, h_i + g_i) \\ (H_i, G_i) & \rightarrow (H_i, H_i + G_i) \\ (s_i, t_i) & \rightarrow (s_i, s_i + t_i) \end{cases} ; \quad \tau \rightarrow -1/\tau \Rightarrow \begin{cases} (a, b) & \rightarrow (b, a) \\ (\gamma_i, \delta_i) & \rightarrow (\delta_i, \gamma_i) \\ (\epsilon, \xi) & \rightarrow (\xi, \epsilon) \\ (h_i, g_i) & \rightarrow (g_i, h_i) \\ (H_i, G_i) & \rightarrow (G_i, H_i) \\ (s_i, t_i) & \rightarrow (t_i, s_i) \end{cases}. \tag{2.8}$$

Here we may make some remarks.

- The global phase Φ does not depend on the spin structure of the space-time fermions, (a, b) . This is necessary to preserve $\mathcal{N} = 1$ supersymmetry; otherwise supersymmetry is spontaneously broken, as the gravitini acquire a mass. We will not consider this mechanism here. Note however that the construction of a realistic model also requires such a breaking.
- We want to emphasize the physical meaning of the parameter ϵ in the expression (2.6). As the $\bar{\psi}$ block corresponds to the representations of $SO(10)$, ϵ is the associated chirality : spinorials of $SO(10)$ have $\epsilon = 1$, whereas vectorials have $\epsilon = 0$. We will relate this later to the right-moving SCFT of the model; breaking this SCFT will be done by assuming a non-trivial dependence of the global phase Φ of the spin-structure (ϵ, ξ) .
- The inclusion of (s_i, t_i) performs additional shifts on the six (fermionized) internal dimensions compactified on $T^6/\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. These shifts correspond to the presence of the sets (e_i) in the parity basis; similarly, the twisting parameters (H_i, G_i) account for the presence of the sets z_i . Coupling these parameters to various spin structures by a suitable form of the phase Φ will generate the Scherk-Schwarz symmetry breakings we will consider.

2.2 $SO(10)$ models as Gepner-map duals of Type II models

The model we have considered above is in fact obtained directly from a Type II model by a map introduced in [13]. This map defines a correspondence between a heterotic model and a Type II model by the following construction.

If we label $B_{\lambda=1,2,3,4}$ the four characters of $SO(8)$ O_8, V_8, S_8, C_8 , one can write a generic Type II partition function in the following form

$$Z_{II} = \frac{1}{\tau_2^4 \eta^8 \bar{\eta}^8} \sum_{\lambda, \bar{\lambda}} B_{\lambda} \bar{B}_{\bar{\lambda}} Z_{\lambda, \bar{\lambda}} \quad (2.9)$$

Here, $Z_{\lambda, \bar{\lambda}}$ account for the spin-statistics of the model and, in the case of compactified theories, for the internal lattices. The general procedure² is then to replace the $SO(2d)$ characters of the right-moving side of the theory by $SO(8+2d) \times E_8$ characters, so that the modular properties of the partition function are preserved. The product only involves the singlet character of E_8 , whereas the map for the $SO(2d)$ characters is done as follows :

$$\bar{O}_{2d} \rightarrow \bar{V}_{2d+8}, \quad \bar{V}_{2d} \rightarrow \bar{O}_{2d+8}, \quad \bar{S}_{2d} \rightarrow -\bar{S}_{2d+8}, \quad \bar{C}_{2d} \rightarrow -\bar{C}_{2d+8}. \quad (2.10)$$

In particular, for the usual IIA and IIB space-time fermions blocks, $d = 4$ and the replacement is done by

$$\frac{1}{2} \sum_{\bar{a}, \bar{b}} (-)^{\bar{a}+\bar{b}} \bar{\vartheta} \left[\frac{\bar{a}}{\bar{b}} \right]^4 \rightarrow \left[\frac{1}{2} \sum_{\bar{a}, \bar{b}} (-)^{\bar{a}\bar{b}} \bar{\vartheta} \left[\frac{\bar{a}}{\bar{b}} \right]^8 \right] \times \frac{1}{2} \sum_{\bar{\gamma}, \bar{\delta}} \bar{\vartheta} \left[\frac{\bar{\gamma}}{\bar{\delta}} \right]^8 \quad (2.11)$$

$$\frac{1}{2} \sum_{\bar{a}, \bar{b}} (-)^{\bar{a}+\bar{b}+\bar{a}\bar{b}} \bar{\vartheta} \left[\frac{\bar{a}}{\bar{b}} \right]^4 \rightarrow \left[\frac{1}{2} \sum_{\bar{a}, \bar{b}} \bar{\vartheta} \left[\frac{\bar{a}}{\bar{b}} \right]^8 \right] \times \frac{1}{2} \sum_{\bar{\gamma}, \bar{\delta}} \bar{\vartheta} \left[\frac{\bar{\gamma}}{\bar{\delta}} \right]^8 \quad (2.12)$$

We see that the reversal of the sign of the fermionic characters breaks the usual spin-statistics, so that, from a space-time point of view, this operation has traded a supersymmetric sector for a purely bosonic sector. Following our notations for the free fermionic degrees of freedom and their obvious extension to Type II models, the mapping Type II \rightarrow Heterotic is done by replacing the free fermions of Type II $\{\bar{\psi}^{\mu}, \bar{\chi}^{1\dots 6}\}$ by the free fermions of the heterotic $\{\bar{\psi}^{1\dots 5}, \bar{\eta}^{1,2,3}, \bar{\phi}^{1\dots 8}\}$. Also note that in both Type IIA and Type IIB cases, the obtained block is in fact a second copy of the singlet of E_8 , which signals an enhancement of $SO(16)$ to E_8 .

Carrying out the $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ orbifold on both of these models, we see that the heterotic model we consider in this paper is no other than the Gepner-map of a Type II $\mathcal{N}_4 = 2$ model, *via* the mapping

²There exists a second solution, which is the replacement by $SO(32)$ characters.

$$\frac{1}{2} \sum_{\bar{a}, \bar{b}} (-)^{\bar{a}+\bar{b}+\bar{a}\bar{b}} \bar{\vartheta} \left[\begin{smallmatrix} \bar{a} \\ \bar{b} \end{smallmatrix} \right] \bar{\vartheta} \left[\begin{smallmatrix} \bar{a}+h_1 \\ \bar{b}+g_1 \end{smallmatrix} \right] \bar{\vartheta} \left[\begin{smallmatrix} \bar{a}+h_2 \\ \bar{b}+g_2 \end{smallmatrix} \right] \bar{\vartheta} \left[\begin{smallmatrix} \bar{a}+h_3 \\ \bar{b}+g_3 \end{smallmatrix} \right] \longrightarrow \quad (2.13)$$

$$\left[\frac{1}{2} \sum_{\bar{a}, \bar{b}} \vartheta \left[\begin{smallmatrix} \bar{a} \\ \bar{b} \end{smallmatrix} \right]^5 \bar{\vartheta} \left[\begin{smallmatrix} \bar{a}+h_1 \\ \bar{b}+g_1 \end{smallmatrix} \right] \bar{\vartheta} \left[\begin{smallmatrix} \bar{a}+h_2 \\ \bar{b}+g_2 \end{smallmatrix} \right] \bar{\vartheta} \left[\begin{smallmatrix} \bar{a}+h_3 \\ \bar{b}+g_3 \end{smallmatrix} \right] \right] \times \frac{1}{2} \sum_{\bar{\gamma}, \bar{\delta}} \bar{\vartheta} \left[\begin{smallmatrix} \bar{\gamma} \\ \bar{\delta} \end{smallmatrix} \right]^8.$$

One recognizes the block of (2.6) corresponding to the $\bar{\psi}$'s and $\bar{\eta}$'s. The second block accounts for an E_8 gauge group formed by the complex fermions $\bar{\phi}^{1\dots 8}$; generically, this group will be broken due to the inclusion of the sets z_1 and z_2 in our construction.

Out of the two four-dimensional supersymmetries of the Type II model, only the left-moving one is still present in the heterotic; however, the right-moving superconformal algebra survives the mapping. This is nothing but the embedding of the spin connection of Type II models into the connection of the corresponding heterotic ones. Then, this superconformal algebra does not give birth to a space-time SUSY, but relates spinors to vectors, belonging to representations which are now of the internal $SO(10)$ spanned by the $\bar{\psi}$'s. The survival of this symmetry will guarantee the existence at the massless level of what were formerly right-moving gravitinos and are now gauge bosons in a spinorial of $SO(10)$: then, $SO(10) \times U(1)^3$ gets enhanced to $E_6 \times U(1)^2$. This enhancement comes as no surprise from the Calabi-Yau point of view: the general embedding of spin-connection into gauge connection singles out a subalgebra $SU(3)$ inside the first E_8 , corresponding to the holonomy of the compactification manifold. The anomaly cancellation mechanism [14] then requires that we switch on background values for this $SU(3)$, and the surviving gauge group is E_6 , coming from the embedding $SU(3) \times E_6 \subset E_8$. Of course, the Cartans of $SU(3)$ still define a gauge group $U(1)^2$, so that, in the presence of a right-moving $N = 2$ SCFT, we indeed find a gauge group $E_6 \times U(1)^2 \times E_8$. This is realized explicitly in our constructions.

Note that this procedure underlines the naturalness of the appearance of a gauge group $SO(10)$ in $\mathcal{N} = 1$ realistic theories: the Type II right-moving fermionic block made out of S, V, C representations of the Lorentz group $SO(8)$ is traded for a block made out of E_8 characters. The $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ orbifold required to break the four-dimensional supersymmetry $\mathcal{N} = 4 \rightarrow 1$ is forced by consistency to act on this E_8 , generically breaking it to $E_6 \times U(1)^2$.

We will now enumerate the sectors from which we will be able to build massless states, and identify their interpretation as twisted sectors of the $\mathcal{N} = 4 \rightarrow \mathcal{N} = 1$ $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ orbifold.

3 Spectrum of the model; superconformal x -map and its spontaneous breaking

3.1 $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ twisted sectors

It is pretty straightforward to check that the $\mathcal{N} = 1$ supersymmetric partner of a state built on some vacuum $|\alpha\rangle$ will come from the vacuum $|\alpha + S\rangle$. Here, we will therefore restrain our enumeration to the bosonic vacua. Apart from the pure NS vacuum, states can be built from the following sets:

- the 16 twisted sectors $|\mathcal{B}_{\lambda_3\lambda_4\lambda_5\lambda_6}^1\rangle = |b_1 + \sum_{i=3}^6 \lambda_i e_i\rangle$, where $\lambda_i = 0$ or 1 ;
- the 16 twisted sectors $|\mathcal{B}_{\lambda_1\lambda_2\lambda_5\lambda_6}^2\rangle = |b_2 + \sum_{i=1,2,5,6} \lambda_i e_i\rangle$, where $\lambda_i = 0$ or 1 ;
- the 16 twisted sectors $|\mathcal{B}_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4}^3\rangle = |b_3 + \sum_{i=1}^4 \lambda_i e_i\rangle$, where $\lambda_i = 0$ or 1 ;
- the sectors $|\alpha + x\rangle$, where α is any of the sectors described above;
- the sectors $|z_1\rangle, |z_2\rangle, |z_1 + z_2\rangle$.

To properly distinguish a particle from its anti-particle, it will be handy to consider instead the fermionic sectors $B \equiv S + \mathcal{B}$, so as the space-time chirality appears in a clear way. We will then restrain ourselves to considering positive ψ^μ -helicity states. In the following, we will denote $|B^1\rangle$ (and similarly for $|B^2\rangle, |B^3\rangle$) a generic sector $|\mathcal{B}_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4}^1\rangle$, and more generally $|B\rangle$ an arbitrary twisted sector. The $|B\rangle$ sectors are in one-to-one correspondence with the fixed points of the $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ orbifold transformation.

Let us make some comments :

- In the following, we will pay no attention to the sectors $|z_1\rangle, |z_2\rangle, |z_1 + z_2\rangle$, which can lead to additional gauge bosons. The minimal gauge group is $SO(8) \times SO(8)$; as pointed out in [4], appropriate choice of the GGSO phases ensures that this gauge group is not enhanced, and that no mixed³ massless states appear. In the following, we will assume these no-enhancement hypotheses, which state that there exists e_i and e_j , $i \neq j$, such as $[e_i|z_1] = -1$ and $[e_j|z_2] = -1$. This choice projects out any would-be gauge bosons that would enhance $SO(8) \times SO(8) \rightarrow SO(16)$; the largest enhancement one can have in that case is a $SO(8) \rightarrow SO(9)$, which can also be eliminated by allowing one more i such as $[e_i|z_1] = -1$; at any rate, there is no mixing between the “observable” gauge and the “hidden” gauge.
- The spinor-vector duality finds its root from the fact that if $|\alpha\rangle$ is a relevant vacuum to build massless states, so is $|\alpha + x\rangle$. This correspondence is the superconformal “ x -map” $|B\rangle \mapsto |B + x\rangle$ pointed out in [15]. It is obvious that if (the excitations of) $|\alpha\rangle$ are in the vectorial of the $SO(10)$ induced by the 5 complex fermions $\bar{\psi}^{1\dots 5}$, then $|\alpha + x\rangle$ will belong to a spinorial of the same group; the x -map being an involution, the converse is also true. What is at stake is then to find, given a set of GGSO projections, which sectors will survive; and for each theory, describe the dual theory in terms of the effects of its various GGSO projections.
- An important case of figure brings a self-dual case. When preserving the $N = (0, 2)$ superconformal field theory, the $SO(10)_{\bar{\psi}} \times U(1)_{\bar{\eta}}$, where $U(1)_{\bar{\eta}}$ is the diagonal $U(1)$ induced by $\bar{\eta}^{1,2,3}$, is lifted to E_6 . In this case, the vectorial **10** and the spinorial **16** of $SO(10)$ (resp the anti-spinorial $\overline{\mathbf{16}}$) are grouped in the fundamental **27** (resp. $\overline{\mathbf{27}}$) of E_6 , which decomposes as $\mathbf{27} \rightarrow \mathbf{10} \oplus \mathbf{16} \oplus \mathbf{1}$ (resp. $\overline{\mathbf{27}} \rightarrow \mathbf{10} \oplus \overline{\mathbf{16}} \oplus \mathbf{1}$).

³By mixed states, we mean states charged under both the “observable” $SO(10)$ or E_6 and the “hidden” gauge group containing the $SO(8) \times SO(8)$.

3.2 The x -map and superconformal algebra in representations of $SO(10)$

To begin with, we will restrain ourselves to consider only one twisted sector, namely $B_{0000}^1 = S + b_1$. We will note the associated ground state $|B_{0000}^1\rangle$. Our results will easily be extended to any of the 48 twisted sectors detailed above. The untwisted sector, built out of the pure Neveu-Schwarz ground state, gives the gauge bosons of the gauge group, but not the spinorial/vectorial representations we are interested in.

The B_{0000}^1 vacuum is then written as

$$B_{0000}^1 : \text{Spin}(\psi^\mu, \chi^{1,2}, y^{3\dots 6}) \otimes \text{Spin}(\bar{y}^{3\dots 6}, \bar{\psi}^{1\dots 5}, \bar{\eta}^1) \quad (3.1)$$

and the addition of the sector x brings the vacuum

$$B_{0000}^1 + x : \text{Spin}(\psi^\mu, \chi^{1,2}, y^{3\dots 6}) \otimes \text{Spin}(\bar{y}^{3\dots 6}, \bar{\eta}^{2,3}). \quad (3.2)$$

Here, one may make a few remarks, which will be valid for any of the 48 twisted sectors. Firstly, due to the presence of 8 left-moving and 16 right-moving real fermions obeying Ramond boundary conditions, the sector $|B_{0000}^1\rangle$ is massless by itself, and contains spin-fields made out of the $SO(10)$ fermions $\bar{\psi}$; it therefore induces a spinorial of $SO(10)$. On the other hand, the sector $|B_{0000}^1 + x\rangle$ has 8 left-moving and 8 right-moving Ramond real fermions, so that its ground energies read

$$M_L^2 = 0; \quad M_R^2 = -\frac{1}{2}.$$

A massless state will then be reached when exciting this ground state by a weight 1/2 right-moving fermionic oscillator. If we wish to consider states charged under $SO(10)$, this excitation has to be taken to be $\bar{\psi}_{-1/2}^i$, and the resulting state lies in a vectorial representation of $SO(10)$. Therefore, the x -map links vectorials to spinorials of $SO(10)$. Obviously, the x -map arises as the right-moving part of the $N = (2, 2)$ superconformal field theory that is still present after the Type II \rightarrow Heterotic Gepner-map, and acts inside the gauge group, due to the embedding of the spin connection into the gauge connection.

As in the case of spontaneous breaking of supersymmetry, a spontaneous breaking of the x -map will amount to projecting out from the spectrum spinorial or vectorial representations of $SO(10)$, giving different masses to the two partners. In terms of the free fermionic construction, this situation is reflected in the fact that states from the massless sector $|B\rangle$ (resp. $|B + x\rangle$) will be projected out, whereas states from the sectors $|B + e_i\rangle$ (resp. $|B + x + e_i\rangle$) will be preserved. These sectors are massive and are naturally interpreted as the twisted sector of the freely-acting orbifold based on the half-shift of the coordinate X^i . We see that the net effect of this action is that the sectors $|B\rangle$ (resp. $|B + x\rangle$) will get a mass, whereas the sectors $|B + x\rangle$ (resp. $|B\rangle$) will remain massless. We carry out an explicit example of such a mass lift in the next subsection; as one can expect, it crucially relies on a careful choice of the GGSO projections.

3.3 Implementing the e_i -generated freely-acting orbifolds

In this subsection, we briefly recall some useful results about twisted/shifted lattices. The usual equivalence between a compact boson taken at the fermionic point and two left-moving plus two right-moving real fermions is easily extended to orbifold partition functions of each theory.

When we consider two internal dimensions, the ϑ -function form of a zero-mode lattice $\Gamma_{2,2}$, taken at the enhanced symmetry (or fermionic) point (denoted $f.p.$)

$$\Gamma_{2,2}\Big|_{f.p.} = \left(\frac{1}{2} \sum_{\gamma, \delta} |\vartheta \left[\begin{smallmatrix} \gamma \\ \delta \end{smallmatrix} \right]|^2 \right)^2 \quad (3.3)$$

is generalized to the orbifold version of the theory. When one implements the non-freely-acting \mathbb{Z}_2 orbifold $X^{1,2} \rightarrow -X^{1,2}$, whose twisting parameters will be denoted (h, g) , as well as the two freely-acting \mathbb{Z}_2 orbifolds $X^{1,2} \rightarrow X^{1,2} + \pi$, whose shifting parameters will be noted (s_1, t_1, s_2, t_2) , the lattice sum is modified as

$$\begin{aligned} \Gamma_{2,2} \left[\begin{smallmatrix} h|s_1, s_2 \\ g|t_1, t_2 \end{smallmatrix} \right] \Big|_{f.p.} &= \frac{1}{4} \sum_{\gamma_{1,2}, \delta_{1,2}} (-)^{\gamma_1 t_1 + \delta_1 s_1 + s_1 t_1} (-)^{\gamma_2 t_2 + \delta_2 s_2 + s_2 t_2} \\ &\times \left| \vartheta \left[\begin{smallmatrix} \gamma_1 + h \\ \delta_1 + g \end{smallmatrix} \right] \vartheta \left[\begin{smallmatrix} \gamma_1 \\ \delta_1 \end{smallmatrix} \right] \vartheta \left[\begin{smallmatrix} \gamma_2 + h \\ \delta_2 + g \end{smallmatrix} \right] \vartheta \left[\begin{smallmatrix} \gamma_2 \\ \delta_2 \end{smallmatrix} \right] \right| \end{aligned} \quad (3.4)$$

Therefore, implementing in the above partition function the freely-acting orbifolds (in this case, half-way shifts) corresponding to the sets e_i only amounts to inserting the phases $(-)^{\gamma t + \delta s + st}$. For now, we have just shifted the internal $\Gamma_{6,6}$ lattice, independently of the rest of the spectrum. The corresponding orbifold is the \mathbb{Z}_2 -translation along each circle of the internal space.

If we wish to couple this shift to other states of the theory, we must introduce a phase relating the shift parameters (s_i, t_i) to the spin structures of the states we want to act on. Such a freely-acting orbifold takes the form $(-)^Q \cdot T^i$, where T^i is the \mathbb{Z}_2 -translation of the i^{th} coordinate $X^i \mapsto X^i + \pi R^i$, and $(-)^Q$ is the parity operator associated to the spin structure we are considering (generalizing the usual fermion counting operator $(-)^F$, which would correspond to coupling to the spin-structure of the space-time fermion spin structure (a, b)).

One can carry out the calculation of the partition function corresponding to this orbifold, by inserting the projection operator in the computation of the trace over physical states and adding the contribution of the twisted sector. The result is that this orbifold is done by simply adding a cocycle in the partition function. As an example, if we consider a $\Gamma_{1,1}$ lattice coupled to some spin structure (ϵ, ξ) , the modification is made as follows :

$$\begin{aligned} Z &= [\dots] \frac{R}{\sqrt{\tau_2}} \sum_{\tilde{m}, n} \exp \left[-\frac{\pi R^2}{\tau_2} |\tilde{m} + n\tau|^2 \right] \\ \longrightarrow [\dots] &\times \frac{1}{2} \sum_{h, g} (-)^{\epsilon g + \xi h + gh} \frac{R}{\sqrt{\tau_2}} \sum_{\tilde{m}, n} \exp \left[-\frac{\pi R^2}{\tau_2} \left| \left(\tilde{m} + \frac{g}{2} \right) + \left(n + \frac{h}{2} \right) \tau \right|^2 \right] \\ &= [\dots] \times \sum_{h, g} (-)^{\epsilon g + \xi h + gh} \Gamma_{1,1} \left[\begin{smallmatrix} h \\ g \end{smallmatrix} \right] \left(\frac{R}{2} \right) \end{aligned} \quad (3.5)$$

where $\Gamma_{1,1} \left[\begin{smallmatrix} h \\ g \end{smallmatrix} \right]$ is the shifted $\Gamma_{1,1}$ lattice

$$\Gamma_{1,1} \left[\begin{smallmatrix} h \\ g \end{smallmatrix} \right] = \frac{R}{\sqrt{\tau_2}} \sum_{\tilde{m}, n} \exp \left[-\frac{\pi R^2}{\tau_2} |(2\tilde{m} + g) + (2n + h)\tau|^2 \right] \quad (3.6)$$

and the overall [...] refers to all the other blocks of the partition function, which are unchanged in the process.

Setting $R_{SS} = R/2$, we recover the well-known fact that this mechanism is equivalent to performing a stringy Scherk-Schwarz compactification, which is done by coupling the internal dimension to the $SO(10)$ helicity current [3]

$$\oint (\bar{\psi}^1)^\dagger \bar{\psi}^1.$$

Such a task is achieved by inserting in the concerned partition function block the cocycle

$$(-)^{\epsilon \tilde{m} + \xi n + \tilde{m} n}, \quad (3.7)$$

where now \tilde{m} and n are the momentum/winding numbers of the string state along the radius R_{SS} [3]. Looking at the expressions (3.4) and (3.5), one sees that, since the internal shift parameters of the internal dimensions are no other than (s_i, t_i) that the coupling of the internal shifted lattice to the $SO(10)$ spin-structure (ϵ, ξ) will be done by inserting a phase of the form

$$(-)^{\epsilon t_i + \xi s_i + s_i t_i}. \quad (3.8)$$

It is worth noting that this coupling indeed lifts the mass of the states according to their chirality ϵ : by considering the insertion of the Scherk-Schwarz cocycle (3.7), a Poisson resummation of the modified lattice

$$\frac{R_{SS}}{\sqrt{\tau_2}} \sum_{\tilde{m}, n} (-)^{\epsilon \tilde{m} + \xi n + \tilde{m} n} \exp \left[-\frac{\pi R_{SS}^2}{\tau_2} |\tilde{m} + n\tau|^2 \right] \quad (3.9)$$

shows that the string states now have momentum and winding numbers

$$\left(m - \frac{\epsilon}{2} - \frac{n}{2}, n \right) \quad (3.10)$$

which signals a mass lifting in the $\epsilon = 1$ sector. This procedure is of course encoded in the basic form of the fermionic construction and does not require further elaboration : it is related to the values of the discrete torsions $[e_i|B]$ and $[e_i|B+x]$, where B is an arbitrary twisted sector of the theory.

3.4 Breaking the x -symmetry with the freely-acting orbifold e_i

We start by considering the two sectors already written above, which read, in terms of spin-fields

$$B_{0000}^1 : \text{Spin} [(\psi^\mu)_+, (\chi^{12})_{\epsilon_2}, (y^{34})_{\epsilon_3}, (y^{56})_{\epsilon_4}] \otimes \text{Spin} [(\bar{y}^{34})_{\bar{\epsilon}_1}, (\bar{y}^{56})_{\bar{\epsilon}_2}, (\bar{\psi}^{1\dots 5})_{\bar{\epsilon}_3}, (\bar{\eta}^1)_{\bar{\epsilon}_4}] \quad (3.11)$$

$$B_{0000}^1 + x : \text{Spin} [(\psi^\mu)_+, (\chi^{12})_{\epsilon_2}, (y^{34})_{\sigma_3}, (y^{56})_{\sigma_4}] \otimes \text{Spin} [(\bar{y}^{34})_{\bar{\sigma}_1}, (\bar{y}^{56})_{\bar{\sigma}_2}, (\bar{\eta}^2)_{\bar{\sigma}_3}, (\bar{\eta}^3)_{\bar{\sigma}_4}] \quad (3.12)$$

where the $\epsilon_i, \bar{\epsilon}_i, \sigma_i, \bar{\sigma}_i$ are the helicities of the spin-fields.

As discussed above, the physical states of the sector $B_{0000}^1 + x$ we are interested in are obtained by exciting the vacuum with a weight $1/2 \bar{\psi}$ oscillator :

$$\text{Spin} [(\psi^\mu)_+, (\chi^{12})_{e_2}, (y^{34})_{\sigma_3}, (y^{56})_{\sigma_4}] \otimes [\bar{\psi}^i_{-1/2}] \text{Spin} [(\bar{y}^{34})_{\bar{\sigma}_1}, (\bar{y}^{56})_{\bar{\sigma}_2}, (\bar{\eta}^2)_{\bar{\sigma}_3}, (\bar{\eta}^3)_{\bar{\sigma}_4}] \quad (3.13)$$

The relevant GGSO projections to carry out in this example are those arising from the sets S , $S + b_1$, b_2 , $(e_i)_{i=1\dots 6}$. The F -projection is redundant with the $S + b_1$ -one. The z_i -projections do not change the features of the spectrum in the sector B_{0000}^1 as soon as we assume that they do not project the whole sector out; we will, for now, neglect them.

Equivalently, we will find it handy to consider instead, on a sector $B_{\lambda_3\lambda_4\lambda_5\lambda_6}^1$ the projections induced by the sets

$$S, \quad S + b_1, \quad \tilde{b}_2 = S + b_2 + (1 - \lambda_5)e_5 + (1 - \lambda_6)e_6, \quad (e_i)_{i=1\dots 6} . \quad (3.14)$$

Recall that, as $|B_{\lambda_3\lambda_4\lambda_5\lambda_6}^1\rangle$ are fermionic sectors, the constraints to be met are $(-)^{\alpha} = -(\alpha|B_{\lambda_3\lambda_4\lambda_5\lambda_6}^1)$, where α is one of the sets above.

Initially, the sectors $B_{\lambda_3\lambda_4\lambda_5\lambda_6}^1$ have 2^{12} degrees of freedom. Carrying out the S , $S + b_1$, \tilde{b}_2 , $(e_{3\dots 6})$ projections cut the number of physical states down to $2^5 = 32$. Noticing that

$$\tilde{b}_2 \cap B_{\lambda_3\lambda_4\lambda_5\lambda_6}^1 = \{\psi^\mu |\bar{\psi}^{1\dots 5}\}, \quad (3.15)$$

we see that, as the ψ^μ helicity has been fixed, this GGSO projection implies that the spectrum of states inside the sectors $B_{\lambda_3\lambda_4\lambda_5\lambda_6}^1$ is chiral with respect to the group $SO(10)$. Such a feature crucially depends on the presence of the set b_2 in our construction; this is consistent with the fact that the presence of a chiral matter spectrum requires $\mathcal{N} = 1$ space-time supersymmetry.

Now we look at the effect of the e_1 and e_2 projections, first restricting our attention to B_{0000}^1 . The latter survives the e_1 projection if $[e_1|B_{0000}^1] = -1$; otherwise the entire sector $|B_{0000}^1\rangle$ is projected out. However, in the latter case, as mentioned earlier, one has to consider the massive sector $|B_{0000}^1 + e_1\rangle$. The spin field accounting for this Ramond ground now has an initial degeneracy of 2^{14} ; carrying out the S , $S + b_1$, \tilde{b}_2 , $(e_{1,3\dots 6})$ projections cut the number of degrees of freedom to 2^6 . This time, the various projections are not able to fix the $SO(10)$ -chirality of the massive state, since

$$\tilde{b}_2 \cap (B_{\lambda_3\lambda_4\lambda_5\lambda_6}^1 + e_1) = \{\psi^\mu, \omega^1 |\bar{\omega}^1, \bar{\psi}^{1\dots 5}\}. \quad (3.16)$$

This is consistent with the fact that when fixing the space-time spin, we still have a degeneracy in the representations **16** and $\overline{\mathbf{16}}$ of $SO(10)$, which is mandatory for these representations to be massive.

The superconformal partner of $|B_{0000}^1\rangle$ is $|B_{0000}^1 + x\rangle$; this sector contains vectorial representations of $SO(10)$. Let us recall that, from the usual constraints of the free fermionic models, the discrete torsion coefficients we are interested in obey, for $i = 1, 2$:

$$[B^1 + x|e_i] = [B^1|e_i][x|e_i]. \quad (3.17)$$

Therefore, if we set $[x|e_i] = 1$, the sector $|B_{0000}^1 + x\rangle$ will behave in the same way as $|B_{0000}^1\rangle$ with respect to the e_i projections. If $[B_{0000}^1|e_i] = 1$, the twisted sector will be projected out as

a whole, regardless of the spinorial/vectorial character of the representations; if $[B_{0000}^1|e_i] = -1$, both spinors and vectors will survive.

Up to now, we have thus not been able to discriminate between spinorial and vectorial representations of $SO(10)$ lying in the same twisted sector. As one can expect, this will be done by acting on the value of the discrete torsion $[x|e_i]$. Indeed, let us again place ourselves in the twisted sector $|B_{0000}^1\rangle$, and its vectorial counterpart $|B_{0000}^1 + x\rangle$. The same reasoning as before, and the use of the equation (3.17), yields the following rules of survival (we recall that $\delta_B = -1$ for any fermionic twisted sector):

- when $[B_{0000}^1|e_i] = -1$ and $[x|e_i] = 1$, both sectors $|B_{0000}^1\rangle$ and $|B_{0000}^1 + x\rangle$ survive at the massless level;
- when $[B_{0000}^1|e_i] = 1$ and $[x|e_i] = 1$, both sectors $|B_{0000}^1\rangle$ and $|B_{0000}^1 + x\rangle$ are projected out;
- when $[B_{0000}^1|e_i] = -1$ and $[x|e_i] = -1$, $|B_{0000}^1\rangle$ survives and $|B_{0000}^1 + x\rangle$ is projected out;
- when $[B_{0000}^1|e_i] = 1$ and $[x|e_i] = -1$, $|B_{0000}^1\rangle$ is projected out and $|B_{0000}^1 + x\rangle$ survives.

Now that we know how to manipulate each twisted sector, we can start to explore the duality. Note that the list of ingredients at our disposal is quite simple and handy.

We are dealing with three twisted planes, in which four left-moving and four right-moving fermions picked among the fermionized coordinates $(y^i\omega^i)(\bar{y}^i\bar{\omega}^i)$ are in Ramond boundary conditions. These fermions carry indices $(i_1, i_2, i_3, i_4) = (3, 4, 5, 6)$ for the B^1 family, $(1, 2, 5, 6)$ for the B^2 family, and $(1, 2, 3, 4)$ for the B^3 family. We can act on these twisted sectors by making the freely-acting orbifold generated by the set e_i act in a non-trivial way on them. Then one sees that, to be able to project out states, one must consider the action of the sets e_i and e_j , where i and j are different from $i_{1\dots 4}$; otherwise, the e_i -projection's effect is to choose the internal chiralities of the corresponding spin-field. Moreover, if i is one of the four indices $i_{1\dots 4}$, the sector $B + e_i$ is not massive, but rather another twisted sector of the same plane.

Then two projections have to be considered for each twisted plane. In the following, we will be interested in the B^1 plane, so that we will consider the orbifolds induced by e_1 and e_2 . This fact is not surprising : in the B^1 plane, the physics is independent of the volume of the four internal coordinates corresponding to the fermions $(y\omega|\bar{y}\bar{\omega})^{3456}$; therefore, a spontaneous breaking of symmetry in this plane must be constructed out of the two last internal coordinates, as the value of the mass gap will depend on the size of these coordinates. Of course, in this paper we will encounter no such dependence, as all moduli are set at the fermionic point; however, a deformation of these models would make this feature clear.

Finally, to compute the action of the orbifolds e_1 and e_2 on one arbitrary sector of the first twisted plane $|B_{\lambda_3\lambda_4\lambda_5\lambda_6}^1\rangle$, we remark that the usual constraints of the fermionic construction impose

$$[B_{\lambda_3\lambda_4\lambda_5\lambda_6}^1|e_i] = [b_1 + S|e_i] \prod_{j=3}^6 [e_j|e_i]^{\lambda_j} \quad i = 1, 2. \quad (3.18)$$

Knowing all the coefficients $[e_i|e_j]$, which are part of the definition of the model, we are then able to repeat the above reasoning to deduce the action of e_1 and e_2 projections on $|B_{\lambda_3\lambda_4\lambda_5\lambda_6}^1\rangle$ and $|B_{\lambda_3\lambda_4\lambda_5\lambda_6}^1 + x\rangle$.

3.5 The z_i projections

The case of the z_i projections is in many ways similar to the case of the e_i 's. This time, as we have, for any twisted sector B of the theory $B \cap z_1 = B \cap z_2 = \emptyset$, any non-trivial discrete torsion turned on for the z sets will have an effect on the three twisted planes. One can derive all the rules in a similar way as for the e_i 's : the z_i projections can be taken to break the x superconformal CFT or not, and various combinations of hypotheses on the GGSO yields various cuts in the spectrum of the theory. As this case is identical to the $e_{1,2}$ orbifolds, the rules of the previous subsection apply.

We will often omit the z_i projections, to which most of the rules we derive for the (e_i) projections similarly apply. We will actually specifically need them to perform further cuts in the spectrum, giving us the possibility to restrain the number of representations present in our models.

4 Construction of dual pairs of models

4.1 A class of self-dual models : the E_6 models

As we mentioned previously, since in E_6 models the spectrum arranges itself in fundamental representations $\mathbf{27}$ and $\overline{\mathbf{27}}$, these models are trivially self-dual.

The gauge group E_6 is present in a model if and only if the x -map is unbroken. This is equivalent to requiring that the freely-acting orbifolds do not break the right-moving part of the $N = (2, 2)$ superconformal algebra of the initial model. In terms of discrete torsion coefficients, this condition is encoded in the equality

$$\forall i = 1 \dots 6, \quad [x|e_i] = 1; \quad [x|z_{1,2}] = 1. \quad (4.1)$$

From the considerations of the previous section, it is then obvious that if the above equalities are met, in any twisted sector $|B\rangle$, the representations $(S, V) \subset \mathbf{27}$ and $(\bar{S}, V) \subset \overline{\mathbf{27}}$ will be either simultaneously conserved or simultaneously destroyed, depending on the value of the GGSO coefficients $[B|e_i]$, $[B|z_i]$. Explicitly building the spectrum and counting the states surviving after the application of the various GGSO projections confirms the self-duality; we find that a given twisted sector $|B\rangle$ possesses one $SO(10)$ -spinor (chiral or anti-chiral, its chirality being fixed by the \tilde{b}_2 -projection), one $SO(10)$ -vector and one singlet under $SO(10)$, but charged with respect to the additional $U(1)$ of $SO(10) \times U(1) \subset E_6$:

$$|B\rangle \quad : \quad (S, V) \subset \mathbf{27} \quad \text{or} \quad (\bar{S}, V) \subset \overline{\mathbf{27}}. \quad (4.2)$$

When the action of all z_i -induced and e_i -induced freely-acting orbifolds are trivial on the twisted sectors, we find therefore that the model possesses N_+ $\mathbf{27}$ and N_- $\overline{\mathbf{27}}$ E_6 representations, with $N_+ + N_- = 48$. As the various orbifolds act, they are able to cut in each twisted sector, either the vectorial, or the spinorial, or the whole sector. As an example, we consider the twisted sectors $|B_{\lambda_3 \lambda_4 \lambda_5 \lambda_6}^1\rangle$. Depending on the values of the GGSO coefficients $[b_1|e_i]$, $i = 1, 2$ and $[e_j|e_i]$, $i = 1, 2$, $j = 3, 4, 5, 6$, we are able, thanks to the identities

$$[B_{\lambda_3 \lambda_4 \lambda_5 \lambda_6}^1|e_i] = [B_{0000}^1|e_i] \prod_{j=3}^6 [e_j|e_i]^{\lambda_j}, \quad (4.3)$$

$$[B_{\lambda_3\lambda_4\lambda_5\lambda_6}^1|e_i] = [B_{0000}^1|z_i] \prod_{j=3}^6 [e_j|z_i]^{\lambda_j}, \quad (4.4)$$

to determine the effect of the e_i - and z_i -projections on each one of the twisted sectors of the B^1 plane. In particular, if $[e_k|e_i] = -1$, one sees that the e_i -projection has opposite effects on the sectors $|B_{\lambda_3\lambda_4\lambda_5\lambda_6}^1\rangle$ and $|B_{\lambda_3\lambda_4\lambda_5\lambda_6}^1 + e_k\rangle$.

4.2 Duality inside the $\mathcal{N} = 2$ sectors

As the classification in [4, 9] shows, one can create several kinds of non-self-dual models, in which, in a given twisted plane generated by the sectors $|B_1\rangle$ and $|B_1 + x\rangle$, one has either only spinorials of $SO(10)$ (with either positive or negative chirality; moreover, the number of spinors and antispinors do not have to be equal) or only vectorials. For a non-self dual model, as the x -superconformal map is broken, there exists at least one $i \in \{1 \dots 6\}$ such that $[x|e_i] = -1$ or (inclusive) one $i \in \{1, 2\}$ such that $[x|z_i] = -1$.

Let us start by considering a breaking by e_i . First we argue that the condition $[x|e_i] = -1$ is able to break the self-duality only in the sectors where the freely-acting orbifold e_i has the possibility to project out entire representations of $SO(10)$: namely $i = 1, 2$ for B^1 sectors, $i = 3, 4$ for B^2 sectors, and $i = 5, 6$ for B^3 sectors. Indeed, let us suppose that $[x|e_1] = -1$ while the others $[x|e_i] = 1$, and investigate the consequences on the spectrum. In the B^1 sectors, we have seen in a previous section that this breaking of x -map can project out spinors and/or vectors of $SO(10)$. However, in B^2 and B^3 sectors, due to the intersections

$$\forall \lambda_i \in \{0, 1\}, \quad B_{\lambda_1\lambda_2\lambda_5\lambda_6}^2 \cap e_1 = (B_{\lambda_1\lambda_2\lambda_5\lambda_6}^2 + x) \cap e_1 \neq \emptyset \quad (4.5)$$

and

$$\forall \lambda_i \in \{0, 1\}, \quad B_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4}^3 \cap e_1 = (B_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4}^3 + x) \cap e_1 \neq \emptyset \quad (4.6)$$

the e_1 -projection only kills helicities, having a similar action in the sectors $B^{2,3}$ and their superconformal partners $B^{2,3} + x$; it is not able to annihilate entire representations. Then the duality spinor-vector is still valid in these sectors.

With this in mind, we focus on a case where the x -map is only broken in the first plane, that is by e_1 and/or e_2 . The duality map is then the following : *the $(S_t \leftrightarrow V)$ -dual of a model where the x -map is broken only in the first twisted plane is constructed by reversing the signs of the discrete torsion coefficients $[B_{0000}^1|e_i]$ and $[B_{0000}^1|z_j]$ for every e_i , $i = 1, 2$, satisfying $[x|e_i] = -1$, and for every z_j satisfying $[x|z_j] = -1$.* This procedure is easily seen to be in agreement with the rules given in [4], where the general form of the duality transformation is formulated as the exchange of the ranks of the matrices $[\Delta^{(1)}, Y_{16}^{(1)}]$ and $[\Delta^{(1)}, Y_{10}^{(1)}]$; this particular set of rules actually exchanges the vectors $Y_{16}^{(1)}$ and $Y_{10}^{(1)}$.

To prove this, let us suppose that $[x|e_1] = -1$ and consider the action of the e_1 projection on a given sector $|B_{\lambda_3\lambda_4\lambda_5\lambda_6}^1\rangle$.

- Since one has

$$[B_{\lambda_3\lambda_4\lambda_5\lambda_6}^1|e_1] = [B_{0000}^1|e_1] \times \underbrace{[e_3|e_1]^{\lambda_3}[e_4|e_1]^{\lambda_4}[e_5|e_1]^{\lambda_5}[e_6|e_1]^{\lambda_6}}_{=\varepsilon} \quad (4.7)$$

we conclude that the sector $B_{\lambda_3\lambda_4\lambda_5\lambda_6}^1$ survives the e_1 projection iff $[B_{0000}^1|e_i] = -\varepsilon$, and is projected out iff $[B_{0000}^1|e_i] = \varepsilon$;

- Then, since $[x|e_1] = -1$, we see that the sector $B_{\lambda_3\lambda_4\lambda_5\lambda_6}^1 + x$ survives iff $[B_{0000}^1|e_i] = \varepsilon$, and is projected out iff $[B_{0000}^1|e_i] = -\varepsilon$.
- Therefore, the case $[B_{0000}^1|e_i] = \varepsilon$ corresponds to keeping only the spinorial of $SO(10)$ arising from $B_{\lambda_3\lambda_4\lambda_5\lambda_6}^1$, whereas $[B_{0000}^1|e_i] = -\varepsilon$ preserves only the vectorial representation from this sector.
- Then, it is obvious to see that reversing the sign of $[B_{0000}^1|e_1]$ will bring the dual model, since the factor $\varepsilon = [e_3|e_1]^{\lambda_3}[e_4|e_1]^{\lambda_4}[e_5|e_1]^{\lambda_5}[e_6|e_1]^{\lambda_6}$ has not been changed in the process.

One must also look at the case where both e_1 and e_2 are breaking the x -map. It is easy to convince oneself that one must reverse *the two* discrete torsions $[B_{0000}^1|e_1]$ and $[B_{0000}^1|e_2]$ to get the dual model. Indeed, supposing that we start from a configuration where only the spinorial representation survive from the sector $B_{\lambda_3\lambda_4\lambda_5\lambda_6}^1$ after the two projections, one sees that reversing only one of the two GGSO coefficients annihilates the whole sector $B_{\lambda_3\lambda_4\lambda_5\lambda_6}^1$; whereas reversing both coefficients brings back the vectorial of the sector.

Using similar arguments, one shows that, in the case of a breaking of the x -map by a set z_i , the dual model is obtained by also switching the sign of the corresponding GGSO coefficient $[B_{0000}^1|z_j]$. Indeed, the z_i are never, in all three planes, part of the spin-fields giving the vacuum, and then we can derive rules for them which are similar to the rules we have for $e_{1,2}$ when acting on the first plane, $e_{3,4}$ on the second plane and $e_{5,6}$ on the third plane. We note that, since the coefficients $(S|e_i)$ and $(S|z_i)$ are set to preserve $\mathcal{N} = 1$ supersymmetry, we may replace in the above rules $[B_{0000}^1|\dots]$ by $[b_1|\dots]$. We recover the fact that the spinor-vector duality is realized *within* each $\mathcal{N} = 2$ twisted plane $B^{1,2,3}$.

Note that the rule we gave for the duality is not unique. One can check that, if we perform the duality in the first plane, a dual model can be obtained by reversing the sign of $[B_{0000}^1|e_i]$ for every i , $i = 1 \dots 6$, satisfying $[x|e_i] = -1$ (that is, we do not restrain ourselves to the two “relevant” projections in the first twisted plane which are e_1 and e_2). As a consequence, a given model admits more than one dual. We will give additional arguments to this point at the end of this section.

When the x -map is broken in more than one plane, some subtleties arise, that require finer details. Consider a x -map-breaking set α , that is, $[\alpha|x] = -1$. α may be one of the e_i or one of the z_i . The duality operation has to be carried out in the three planes, by reversing the GGSO coefficients $[b_1|\alpha]$, $[b_2|\alpha]$, and $[b_3|\alpha]$. However, the third twisted plane is not independent from

the two others, since $b_3 = b_1 + b_2 + x$. Having carried out the two first steps of the duality, we see that the two reversals

$$[b_1|\alpha] \rightarrow -[b_1|\alpha], \quad [b_2|\alpha] \rightarrow -[b_2|\alpha] \quad (4.8)$$

entail, since $[b_3|\alpha] = [b_1|\alpha] \cdot [b_2|\alpha] \cdot [x|\alpha]$:

$$[b_3|\alpha] \rightarrow [b_3|\alpha]. \quad (4.9)$$

This situation arises if a set α is able to break the spinor-vector duality in all three planes. This is not the case for the e_i 's : as we have seen, e_1 and e_2 can only break the duality in the first plane B^1 , e_3 and e_4 in the second plane B^2 , and e_5 and e_6 in the third plane B^3 .

It is however problematic when α is equal to z_1 and z_2 . In that case, the duality is restored if we assume the existence of e_i and e_j , $i \neq j$, such as :

$$[e_i|z_1] = -1 \quad \text{and} \quad [e_j|z_2] = -1. \quad (4.10)$$

These conditions are precisely the no-enhancements hypotheses we assumed to define the class of models in which we demonstrate the duality.

Indeed, when (4.10) is verified, the transformation (4.8) for $\alpha = z_1$ entails⁴

$$[b_3|z_1] \rightarrow -[b_3 + e_i|z_1]. \quad (4.11)$$

This feature has the following effect. In the two first twisted planes, the transformations (4.8) imply that if, in a model, the sector $|B_{\lambda_3\lambda_4\lambda_5\lambda_6}^1\rangle$ contains a spinorial representation, it will contain a vectorial representation in the dual model. However, due to the transformation (4.11), we learn that if, in a model, the sector $|B_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4}^3\rangle$ contains a spinorial representation, *the sector* $|B_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4}^3 + e_i\rangle$ will contain a vectorial representation in the dual model. Then, in the third plane, we have a modified the x -map : instead of linking a sector $|B_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4}^3\rangle$ to $|B_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4}^3 + x\rangle$, we have linked it to $|B_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4}^3 + (x + e_i)\rangle$. In this respect, the duality in the third plane can also be viewed as being a sector-by-sector correspondence.

This also points out that the duality operation is not unique : one can choose to modify the x -map $\alpha \mapsto \alpha + x$ into $\alpha \mapsto \alpha + x + e_i$ in the two first planes, for appropriate sets e_i , *i.e.* such as $\alpha + e_i$ is massless, and e_i satisfies a condition of the type (4.10). This observation is connected to the fact that the duality operation is viewed in [4] as an exchange of the rank of the matrices

$$\text{rank} \left[\Delta^{(I)}, Y_{16}^{(I)} \right] \leftrightarrow \text{rank} \left[\Delta^{(I)}, Y_{10}^{(I)} \right] ; \quad (4.12)$$

this rank being constant under linear combinations on the columns of $\Delta^{(I)}$.

Also note that when we will detail in section 4.4 the duality procedure, in the no-enhancement framework, in terms of cocycle insertions, it will be sufficient to insert cocycles relative to the twist parameters h_1 and h_2 ; the effect on the third plane will automatically follow.

⁴We suppose here that $e_i \neq e_5, e_6$. If not, one adapts the proof in the straightforward way by exchanging the roles of b_1, b_2, b_3 .

4.3 Explicit realization of the duality in the first twisted plane

We consider a model given by the following discrete torsion coefficients :

$$[B_{0000}^1|e_1] = 1, \quad [x|e_1] = 1, \quad [x|e_2] = -1; \quad (4.13)$$

and

$[\cdot \cdot]$	e_1	e_2
e_3	-1	1
e_4	1	-1
e_5	1	1
e_6	-1	1

Then the action of e_1 and e_2 projections on the B^1 twisted plane and the resulting spectrum are summarized in table 1. This table gives, for a model and its dual, the discrete torsion accounting for the effect of the projections e_1 and e_2 for each of the 16 sectors of the first twisted plane, and the corresponding surviving representations. The left part of the table assumes $[B_{0000}^1|e_2] = 1$ while the right part is for $[B_{0000}^1|e_2] = -1$. As we discussed, a coefficient 1 relatively to e_1 projects out spinors and vectors altogether; a coefficient 1 with respect to e_2 projects out spinors and a -1 projects out vectors.

$[\cdot \cdot]$	e_1	e_2	rep.	e_1	e_2	rep.
B_{0000}^1	1	1	\emptyset	1	-1	\emptyset
B_{0001}^1	-1	1	V	-1	-1	S
B_{0010}^1	1	1	\emptyset	1	-1	\emptyset
B_{0100}^1	1	-1	\emptyset	1	1	\emptyset
B_{1000}^1	-1	1	V	-1	-1	S
B_{1100}^1	-1	-1	S	-1	1	V
B_{1010}^1	-1	1	V	-1	-1	S
B_{1001}^1	1	1	\emptyset	1	-1	\emptyset
B_{0101}^1	-1	-1	S	-1	1	V
B_{0110}^1	1	-1	\emptyset	1	1	\emptyset
B_{0011}^1	-1	1	V	-1	-1	S
B_{1110}^1	-1	-1	S	-1	1	V
B_{1101}^1	1	-1	\emptyset	1	1	\emptyset
B_{1011}^1	1	1	\emptyset	1	-1	\emptyset
B_{0111}^1	-1	-1	S	-1	1	V
B_{1111}^1	1	-1	\emptyset	1	1	\emptyset

Table 1: GGSO coefficients for the first twisted plane and corresponding surviving representation, for the choice of coefficients (4.13).

Note that in fact, this model is already self-dual; however, the duality operation is non-trivial, as it exchanges spinorial and vectorial representations inside each twisted sector $B_{\lambda_3\lambda_4\lambda_5\lambda_6}^1$, and we find it more instructive to detail the duality procedure in this model rather than in a

purely vectorial or purely spinorial model (recall from [4] that in one twisted plane, one has either a purely vectorial, purely spinorial/anti-spinorial or half-vectorial half-spinorial – *i.e.* self-dual – spectrum). Obviously, under a duality transformation, a model having only spinorial representations (which can be specifically obtained, for example, by setting $[e_{3,4,5,6}|e_2] = 1$) will be related to a model having only vectorial representations, the transformation being done sector by sector. We present an explicit example of such a duality transformation in Appendix I.

We have not mentioned here the chirality of the spinorial representations; these depend on the \tilde{b}_2 projection, which in turn depends on the discrete torsions

$$[B_{0000}^1|\tilde{b}^2]; [e_i|\tilde{b}_2], \quad i = 3, 4, 5, 6. \quad (4.14)$$

We will fix $[B_{0000}^1|\tilde{b}^2] = -1$ and consider two cases of figure for the other four GGSO coefficients :

$$(1) : \begin{array}{|c|c|} \hline [\cdot|\cdot] & \tilde{b}_2 \\ \hline e_3 & 1 \\ e_4 & 1 \\ e_5 & 1 \\ e_6 & 1 \\ \hline \end{array} \quad \text{and} \quad (2) : \begin{array}{|c|c|} \hline [\cdot|\cdot] & \tilde{b}_2 \\ \hline e_3 & 1 \\ e_4 & -1 \\ e_5 & 1 \\ e_6 & -1 \\ \hline \end{array}$$

Extracting the spinorial representations from the previous model, we find that for case (1), before and after duality, all $SO(10)$ spinors have positive chirality. For case (2), we find that, before and after duality, we have 2 chiral and 2 anti-chiral spinors.

Note that to put in evidence more features of the construction, we have taken non-trivial values for the coefficients $[e_{3,4,5,6}|e_{1,2}]$. Had we not done this, the remaining model would have had more generations. One sees that within a twisted plane, arbitrary values of the coefficients $[e_{3,4,5,6}|e_i]$, where e_i doesn't break the x -map, are only able to project out half of the twisted sectors; only 8 sectors out of 16 contribute, giving either a purely spinorial, purely vectorial, or half-vectorial and half-spinorial spectrum.

Further projections in the spectrum can then be performed by acting with the orbifolds generated by z_1 and z_2 . Indeed we can obtain the formula

$$[B_{\lambda_3\lambda_4\lambda_5\lambda_6}^1|z_{1,2}] = [B_{0000}^1|z_{1,2}] \times \prod_{i=3}^6 [e_i|z_{1,2}]^{\lambda_i} \quad (4.15)$$

and the survival condition of the sector $|B_{\lambda_3\lambda_4\lambda_5\lambda_6}^1\rangle$ is

$$[B_{\lambda_3\lambda_4\lambda_5\lambda_6}^1|z_{1,2}] = -1. \quad (4.16)$$

Setting, for some $(i, j) \in \{3, 4, 5, 6\} \times \{1, 2\}$, some discrete torsions

$$[e_i|z_j] = -1 \quad (4.17)$$

gives one access to models in which only 4 sectors or only 2 sectors out of the 16 survive at the massless level.

To conclude this subsection, let us note that the explicit model we constructed above is self-dual; however the E_6 gauge symmetry has been broken. Breaking $E_6 \rightarrow SO(10) \times U(1)$, as it makes an abelian factor $U(1)$ appear in the gauge group, is generally believed to lead to anomalies. However, in a class of self-dual models, $U(1)$ anomalies can be evaded when summing on the contribution of the three twisted planes. We provide an explicit example of this property in the Appendix II.

4.4 Plane by plane insertions of discrete torsion coefficients, and their overall effects

In this subsection, we want to indicate how these constructions can be translated in terms of modifications of the overall phase Φ introduced in the general form of the partition function (2.6). Again, we focus on the first twisted plane; the generalization for the simultaneous action on the three planes will be addressed at the end of this subsection. We are then considering the internal dimensions e_i , $i = 1, 2$. The term of the partition function representing the first twisted plane is obtained when the four space-time fermions $\chi^{3,4,5,6}$ are twisted : therefore, $h_1 = 0$ and, $h_2 = h_3 = h$ is the relevant twisting parameter.

Remembering that the freely-acting orbifolds are conveniently represented by the insertion of cocycles in the partition function, we find the following rules.

First, in the absence of superconformal symmetry breaking, one is able to project out a whole sector of the twisted plane (that is, both the spinorial and the vectorial coming from this sector) by adding a phase

$$(-)^{ht_i+gs_i} , \quad (-)^{hG_i+gH_i} , \quad (4.18)$$

depending on the breaking being done by a e_i or a z_i projection. As we discussed earlier, such a coupling renders the $h = 1$ sectors massive, which is the case in the plane that we are considering. Furthermore, as we have explained before, the effect the different sectors of the plane is dictated by the values of the coefficients $(e_i|e_j)$. These discrete torsions are controlled by the insertion of the cocycles

$$(-)^{s_i t_j + s_j t_i} . \quad (4.19)$$

One is then able to construct a variety of self-dual models using these rules. Similarly, one is able to control the value of the coefficient $(e_i|z_j)$ by means of the insertion of

$$(-)^{s_i G_j + H_j t_i} . \quad (4.20)$$

The superconformal x -map is broken as soon as we couple a freely-acting orbifold to the $SO(10)$ spin-structure (ϵ, ξ) . In the first twisted plane, such a breaking requires the action of at least one of the sets (e_1, e_2, z_1, z_2) ; the corresponding cocycles to be inserted then read, respectively :

$$(-)^{\epsilon t_i + \xi s_i + s_i t_i} , \quad i = 1, 2 ; \quad (-)^{\epsilon G_i + \xi H_i + H_i G_i} , \quad i = 1, 2 . \quad (4.21)$$

Coupling the two previous effects now allow us to control which representation (spinorial or vectorial) survives at the massless level in the model. Starting from a case where both spinors and vectors survive, the addition of one of the SCFT-breaking phases (4.21) lifts the spinorials

of $SO(10)$, so that only the vectorials survive. If instead we start from a case where the whole sector has been projected out, by the insertion of a cocycle of the form (4.18), adding a cocycle (4.21) recovers the spinorials, while the vectorials remain massive. The phase we inserted in this case is then the product of (4.18) and (4.21).

We may summarize the possibilities as follows :

- no cocycle introduced : S and V stay at the massless level;
- $(-)^{ht_i+gs_i}$: both S and V become massive;
- $(-)^{\epsilon t_i+\xi s_i+s_i t_i}$: S becomes massive, V stays massless;
- $(-)^{(\epsilon+h)t_i+(\xi+g)s_i+s_i t_i}$: S stays massless, V becomes massive.

Of course, if one considers a breaking by z_i , one has to replace (s_i, t_i) by (H_i, G_i) .

We then learn how to engineer the duality map directly on the partition function. We have stated that it has to be done by reversing the GGSO projections $[B^1|e_i]$, $[B^1|z_i]$ for each x -breaking projections e_i, z_i . But these values are encoded in cocycles

$$(-)^{ht_i+gs_i} , \quad (-)^{hG_i+gH_i} . \quad (4.22)$$

where h is the orbifold parameter relevant for the plane we are interested in. Therefore, to carry out the duality map, one has to insert a cocycle (4.18) for each projection breaking the x -map (*i.e.* such that a cocycle of the form (4.21) is present in the partition function).

5 Conclusion and discussion

In this paper, we gave a new demonstration of the spinor-vector duality that was shown to hold among the $\mathcal{N} = 2$ \mathbb{Z}_2 and the $\mathcal{N} = 1$, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ heterotic-string vacua obtained *via* the free fermionic construction. We interpreted the freely-acting orbifolds present in the model in terms of stringy Scherk-Schwarz mechanisms; these have been used to give a non-vanishing mass to some sectors of the theory, and/or to perform a spontaneous breaking of the right-moving superconformal algebra (also called x -map) which is responsible of the gauge enhancement $SO(10) \times U(1) \rightarrow E_6$. Such a breaking creates non-self-dual models, where we do not have the same number of spinorial and vectorial representations of $SO(10)$ at the massless level of the theory. We described the procedure used to construct the dual of a given model. Moreover, we explicitly constructed self-dual models in which E_6 gauge is broken.

Such models may, or may not, be free from all Abelian and mixed anomalies. The cases in which the self-dual models are particularly interested, as in such models one does not need to resort to field theory arguments to shift the vacuum to a stable supersymmetric vacuum. Finally, we have given rules on how to perform this duality directly on the expression of the 1-loop partition function of the model.

One may ask what are the implications of such a duality. Firstly, we can see it as a symmetry in the space of vacua of string theory, whose study has been of great interest over the past years [16]. Furthermore, the duality is exhibited in the space of free fermionic models that have also given rise to some of the most realistic string models constructed to date. The geometrical structure underlying the free fermionic models is that of the $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ orbifold, and a natural

question is whether it extends to other orbifolds. The spinor–vector duality can be thought of as being of the same kind as mirror symmetry [17]. Indeed, mirror symmetry is manifest in this model as the symmetry exchanging spinorials of $SO(10)$ into anti-spinorials of $SO(10)$. This is due to the Type II \leftrightarrow Heterotic correspondence being related to the embedding of the spin-connection in the gauge connection. Therefore, changing the chirality of the $SO(10)$ spinors amounts, on the Type II side, to change the GSO projection on the right-hand side of the theory. This Type IIA \leftrightarrow Type IIB switch is known [18] to be equivalent to the substitution of the compactification manifold by its mirror. Our constructions displays this mirror symmetry : this relies on the choice of the coefficients $[b_1|\tilde{b}_2]$ and $[e_i|\tilde{b}_2]$, as we have shown that the \tilde{b}_2 projection imposes the chirality of the massless spinorial representations (if any). The mirror symmetry implies a change in the topology of the compactification manifold, as the Euler characteristic is taken to its opposite. Spinor-vector duality can, as well, be thought of as another topology–changing duality. Note that its range of application is wider than the mirror case. Here, non-self-dual points correspond to $N = (2, 0)$ compactifications. Just as mirror symmetry can be thought of as a manifestation of T -duality [18] also the spinor–vector duality may be regarded as such, but with the added action on the bundle representing the gauge degrees of freedom of the heterotic string, induced by the breaking of the $N = 2$ world–sheet superconformal symmetry on the right-moving bosonic side of the heterotic string. Thus, just as mirror symmetry have led to the notion of topology changing transition between mirror manifolds, the spinor–vector duality suggests that the web of connections is far more complex, and further demonstrating that our understanding of string theory is truly only rudimentary. Furthermore, what we may find is that the distinction of particles into spinor and vector representation is a mere low energy organisation. What the string truly cares about is its internal consistency, characterized by the modular invariance of the partition function.

Acknowledgements

AEF and JR would like to thank the École Normale Supérieure and the École Polytechnique for hospitality. AEF work is supported in part by STFC under contract PP/D000416/1 and by the EU under contract MRTN-CT-2006-035863-1. CK is supported in part by the EU under the contracts MRTN-CT-2004-005104, MRTN-CT-2004-512194, MRTN-CT-2004-503369, MEXT-CT-2003-509661, ANR (CNRS-USAR) contract 05-BLAN-0079-01. JR work is supported in part by the EU under contracts MRTN-CT-2006-035863-1 and MRTN-CT-2004-503369.

Appendix I

A dual pair of models with spectrum in the first twisted plane

We consider the model given by the following GGSO coefficients matrix :

$$[v_i|v_j] = e^{i\pi(v_i|v_j)} \tag{I.1}$$

$$(v_i|v_j) = \begin{matrix} & 1 & S & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & b_1 & b_2 & z_1 & z_2 \\ \begin{matrix} 1 \\ S \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \\ e_6 \\ b_1 \\ b_2 \\ z_1 \\ z_2 \end{matrix} & \left(\begin{array}{cccccccccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) & \end{matrix} \tag{I.2}$$

As far as the $SO(10)$ representations are concerned, this model contains two vectorials $\mathbf{10}$, one in the sector $S + b_1 + e_5 + x$, and one in the sector $S + b_1 + e_3 + e_5 + x$. The spectrum is therefore contained in the first twisted plane; we will only need to carry out the duality in this plane.

We apply the duality procedure as follows.

First, we notice that, since

$$x = 1 + S + \sum_{i=1}^6 e_i + z_1 + z_2,$$

we have

$$\begin{aligned} (x|e_1) &= 0, & (x|e_2) &= 1, & (x|e_3) &= 0, \\ (x|e_4) &= 0, & (x|e_5) &= 0, & (x|e_6) &= 1, \\ (x|z_1) &= 1, & (x|z_2) &= 1. \end{aligned}$$

The method we exposed then consists in reversing the GGSO coefficients ($b_1|e_2$), ($b_1|z_1$) and ($b_1|z_2$). The resulting matrix is therefore (the coefficients we changed are in bold) :

$$(v_i|v_j) = \begin{matrix} & 1 & S & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & b_1 & b_2 & z_1 & z_2 \\ \begin{matrix} 1 \\ S \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \\ e_6 \\ b_1 \\ b_2 \\ z_1 \\ z_2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & \mathbf{1} & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \mathbf{0} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (\text{I.3})$$

When explicitly computing the spectrum of this new model, we find indeed that two spinors $\overline{\mathbf{16}}$ of $SO(10)$ arise from the first plane, in the sectors $S + b_1 + e_5$ and $S + b_1 + e_3 + e_5$. We see then that in this simple case, the duality transformation occurs sector by sector in the first twisted plane, like described in section 4.

Appendix II

A self-dual, anomaly-free model without E_6 enhancement

We are considering the model given by the matrix which coefficients $(v_i|v_j) \in \{0, 1\}$ are defined by

$$[v_i|v_j] = e^{i\pi(v_i|v_j)} \quad (\text{II.1})$$

$$(v_i|v_j) = \begin{matrix} & 1 & S & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & b_1 & b_2 & z_1 & z_2 \\ \begin{matrix} 1 \\ S \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \\ e_6 \\ b_1 \\ b_2 \\ z_1 \\ z_2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (\text{II.2})$$

We see that since $(z_1|x) = (z_1|1) + (z_1|S) + \sum_{i=1}^6 (z_1|e_i) + (z_1|z_1) + (z_1|z_2) \equiv 1 \pmod{2}$, the gauge group E_6 is broken. Moreover, the conditions $(e_1|z_2) = (e_4|z_1) = 1$ ensure that the “hidden” gauge group is minimal and the full gauge group is $SO(10) \times U(1)^3 \times SO(8) \times SO(8)$.

The spectrum of this model contains (we note as an index the three charges under the $U(1)_{\bar{\eta}^i}$, $i = 1, 2, 3$) :

- three spinors $\mathbf{16}$ of $SO(10)$, one for each twisted plane,

$$\mathbf{16}_{(1/2,0,0)}, \mathbf{16}_{(0,-1/2,0)}, \mathbf{16}_{(0,0,-1/2)},$$

- three vectors $\mathbf{10}$ of $SO(10)$, one for each twisted plane,

$$\mathbf{10}_{(0,1/2,1/2)}, \mathbf{10}_{(-1/2,0,1/2)}, \mathbf{10}_{(-1/2,1/2,0)},$$

- six non-abelian gauge group singlets, two for each twisted plane,

$$\mathbf{1}_{(1,-1/2,-1/2)}, \mathbf{1}_{(1/2,1,-1/2)}, \mathbf{1}_{(1/2,-1/2,1)},$$

$$\mathbf{1}_{(-1,-1/2,-1/2)}, \mathbf{1}_{(1/2,-1,-1/2)}, \mathbf{1}_{(1/2,-1/2,-1)}.$$

By verifying the identities $\sum q_i = \sum q_i^3 = 0$ for the three abelian factors of the gauge group, we see that the observable spectrum is anomaly-free. Note that this anomaly does not occur plane by plane, but results from a cancellation between the three planes.

One can also check that in this model, the contributions of the $(\mathbf{8}, \mathbf{1})$ and $(\mathbf{1}, \mathbf{8})$ multiplets of $SO(8) \times SO(8)$ to the $U(1)$ anomalies cancel.

References

- [1] D. J. Gross, J. A. Harvey, E. J. Martinec and R. Rohm, “Heterotic String Theory. 1. The Free Heterotic String,” Nucl. Phys. B **256**, 253 (1985).
D. J. Gross, J. A. Harvey, E. J. Martinec and R. Rohm, “Heterotic String Theory. 2. The Interacting Heterotic String,” Nucl. Phys. B **267**, 75 (1986).
- [2] P. Candelas, G. T. Horowitz, A. Strominger and E. Witten, “Vacuum Configurations For Superstrings,” Nucl. Phys. B **258**, 46 (1985).
- [3] C. Kounnas and M. Porrati, “Spontaneous Supersymmetry Breaking in String Theory,” Nucl. Phys. B **310** (1988) 355.
C. Kounnas and B. Rostand, “Coordinate Dependent Compactifications and Discrete Symmetries,” Nucl. Phys. B **341**, 641 (1990).
- [4] A. E. Faraggi, C. Kounnas and J. Rizos, “Chiral family classification of fermionic $Z(2) \times Z(2)$ heterotic orbifold models,” Phys. Lett. B **648** (2007) 84 [arXiv:hep-th/0606144].
A. E. Faraggi, C. Kounnas and J. Rizos, “Spinor - vector duality in fermionic $Z(2) \times Z(2)$ heterotic orbifold models,” Nucl. Phys. B **774** (2007) 208 [arXiv:hep-th/0611251].
A. E. Faraggi, C. Kounnas and J. Rizos, “Spinor-Vector Duality in $N=2$ Heterotic String Vacua,” Nucl. Phys. B **799** (2008) 19 [arXiv:0712.0747 [hep-th]].
- [5] I. Antoniadis, C. Bachas, C. Kounnas and P. Windey, “Supersymmetry Among Free Fermions And Superstrings,” Phys. Lett. B **171**, 51 (1986).
I. Antoniadis, C. P. Bachas and C. Kounnas, “Four-Dimensional Superstrings,” Nucl. Phys. B **289**, 87 (1987).
H. Kawai, D. C. Lewellen and S. H. H. Tye, “Construction of Fermionic String Models in Four-Dimensions,” Nucl. Phys. B **288**, 1 (1987).
I. Antoniadis and C. Bachas, “4-D Fermionic Superstrings with Arbitrary Twists,” Nucl. Phys. B **298** (1988) 586.
- [6] I. Antoniadis, J. R. Ellis, J. S. Hagelin and D. V. Nanopoulos, “The Flipped $SU(5) \times U(1)$ String Model Revamped,” Phys. Lett. B **231** (1989) 65.
A. E. Faraggi, D. V. Nanopoulos and K. j. Yuan, “A Standard Like Model in the 4D Free Fermionic String Formulation,” Nucl. Phys. B **335**, 347 (1990).
I. Antoniadis, G. K. Leontaris and J. Rizos, “A Three generation $SU(4) \times O(4)$ string model,” Phys. Lett. B **245**, 161 (1990).
A. E. Faraggi and D. V. Nanopoulos, “Naturalness of three generations in free fermionic $Z(2)\text{-}n \times Z(4)$ string models” Phys. Rev. D **48**, 3288 (1993).
A. E. Faraggi, “A New standard - like model in the four-dimensional free fermionic string formulation,” Phys. Lett. B **278**, 131 (1992)
G. K. Leontaris and J. Rizos, “ $N = 1$ supersymmetric $SU(4) \times SU(2)_L \times SU(2)_R$ effective theory from the weakly coupled heterotic superstring,” Nucl. Phys. B **554**, 3 (1999) [arXiv:hep-th/9901098].
G. B. Cleaver, A. E. Faraggi and D. V. Nanopoulos, “String derived MSSM and M-theory unification,” Phys. Lett. B **455**, 135 (1999) [arXiv:hep-ph/9811427].
G. B. Cleaver, A. E. Faraggi and C. Savage, “Left-right symmetric heterotic-string derived models,” Phys. Rev. D **63**, 066001 (2001) [arXiv:hep-ph/0006331].

- A. E. Faraggi, E. Manno and C. Timirgaziu, “Minimal standard heterotic string models,” *Eur. Phys. J. C* **50**, 701 (2007) [arXiv:hep-th/0610118].
- [7] A. E. Faraggi, “ $Z(2) \times Z(2)$ Orbifold compactification as the origin of realistic free fermionic models,” *Phys. Lett. B* **326**, 62 (1994) [arXiv:hep-ph/9311312].
P. Berglund, J. R. Ellis, A. E. Faraggi, D. V. Nanopoulos and Z. Qiu, “Elevating the free-fermion $Z(2) \times Z(2)$ orbifold model to a compactification of F-theory,” *Int. J. Mod. Phys. A* **15**, 1345 (2000) [arXiv:hep-th/9812141].
R. Donagi and A. E. Faraggi, “On the number of chiral generations in $Z(2) \times Z(2)$ orbifolds,” *Nucl. Phys. B* **694**, 187 (2004) [arXiv:hep-th/0403272].
- [8] E. Kiritsis, C. Kounnas, P. M. Petropoulos and J. Rizos, “On the Heterotic Effective Action at One-Loop, Gauge Couplings and the Gravitational Sector,” arXiv:hep-th/9605011.
E. Kiritsis, C. Kounnas, P. M. Petropoulos and J. Rizos, “Universality properties of $N = 2$ and $N = 1$ heterotic threshold corrections,” *Nucl. Phys. B* **483**, 141 (1997) [arXiv:hep-th/9608034].
E. Kiritsis and C. Kounnas, “Perturbative and non-perturbative partial supersymmetry breaking: $N = 4 \rightarrow N = 2 \rightarrow N = 1$,” *Nucl. Phys. B* **503**, 117 (1997) [arXiv:hep-th/9703059].
A. Gregori and C. Kounnas, “Four-dimensional $N = 2$ superstring constructions and their (non-)perturbative duality connections,” *Nucl. Phys. B* **560**, 135 (1999) [arXiv:hep-th/9904151].
A. Gregori, C. Kounnas and J. Rizos, “Classification of the $N = 2$, $Z(2) \times Z(2)$ -symmetric type II orbifolds and their type II asymmetric duals,” *Nucl. Phys. B* **549**, 16 (1999) [arXiv:hep-th/9901123].
- [9] A. E. Faraggi, C. Kounnas, S. E. M. Nooij and J. Rizos, “Classification of the chiral $Z(2) \times Z(2)$ fermionic models in the heterotic superstring,” *Nucl. Phys. B* **695** (2004) 41 [arXiv:hep-th/0403058].
- [10] J. Scherk and J. H. Schwarz, “Spontaneous Breaking Of Supersymmetry Through Dimensional Reduction,” *Phys. Lett. B* **82**, 60 (1979).
J. Scherk and J. H. Schwarz, “How To Get Masses From Extra Dimensions,” *Nucl. Phys. B* **153**, 61 (1979).
- [11] T. Catelin-Jullien, C. Kounnas, H. Partouche and N. Toumbas, “Thermal/quantum effects and induced superstring cosmologies,” *Nucl. Phys. B* **797**, 137 (2008) [arXiv:0710.3895 [hep-th]].
- [12] S. E. M. Nooij, “Classification of the chiral $Z(2) \times Z(2)$ heterotic string models,” arXiv:hep-th/0603035.
- [13] D. Gepner, “Space-Time Supersymmetry in Compactified String Theory and Superconformal Models,” *Nucl. Phys. B* **296**, 757 (1988).
W. Lerche, D. Lust and A. N. Schellekens, “Chiral Four-Dimensional Heterotic Strings from Selfdual Lattices,” *Nucl. Phys. B* **287**, 477 (1987).
- [14] M. B. Green and J. H. Schwarz, “Anomaly Cancellation In Supersymmetric D=10 Gauge Theory And Superstring Theory,” *Phys. Lett. B* **149**, 117 (1984).

- [15] A. E. Faraggi, “Generation mass hierarchy in superstring derived models,” Nucl. Phys. B **407**, 57 (1993) [arXiv:hep-ph/9210256].
 A. E. Faraggi, “Partition functions of NAHE-based free fermionic string models,” Phys. Lett. B **544**, 207 (2002) [arXiv:hep-th/0206165].
- [16] D. Senechal, “Search For Four-Dimensional String Models. 1,” Phys. Rev. D **39**, 3717 (1989).
 K. R. Dienes, “New string partition functions with vanishing cosmological constant,” Phys. Rev. Lett. **65**, 1979 (1990).
 M. R. Douglas, “The statistics of string / M theory vacua,” JHEP **0305**, 046 (2003) [arXiv:hep-th/0303194].
 F. Denef and M. R. Douglas, “Distributions of flux vacua,” JHEP **0405**, 072 (2004) [arXiv:hep-th/0404116].
 B. S. Acharya, F. Denef and R. Valandro, “Statistics of M theory vacua,” JHEP **0506**, 056 (2005) [arXiv:hep-th/0502060].
 R. Blumenhagen, F. Gmeiner, G. Honecker, D. Lust and T. Weigand, “The statistics of supersymmetric D-brane models,” Nucl. Phys. B **713**, 83 (2005) [arXiv:hep-th/0411173].
 K. R. Dienes, “Statistics on the heterotic landscape: Gauge groups and cosmological constants of four-dimensional heterotic strings,” Phys. Rev. D **73**, 106010 (2006) [arXiv:hep-th/0602286].
 M. R. Douglas and W. Taylor, “The landscape of intersecting brane models,” JHEP **0701**, 031 (2007) [arXiv:hep-th/0606109].
 K. R. Dienes, M. Lennek, D. Senechal and V. Wasnik, “Supersymmetry versus Gauge Symmetry on the Heterotic Landscape,” Phys. Rev. D **75**, 126005 (2007) [arXiv:0704.1320 [hep-th]].
 O. Lebedev, H. P. Nilles, S. Raby, S. Ramos-Sanchez, M. Ratz, P. K. S. Vaudrevange and A. Wingerter, “A mini-landscape of exact MSSM spectra in heterotic orbifolds,” Phys. Lett. B **645**, 88 (2007) [arXiv:hep-th/0611095].
- [17] B. R. Greene and M. R. Plesser, “Duality In Calabi-Yau Moduli Space,” Nucl. Phys. B **338**, 15 (1990).
- [18] A. Strominger, S. T. Yau and E. Zaslow, “Mirror symmetry is T-duality,” Nucl. Phys. B **479**, 243 (1996) [arXiv:hep-th/9606040].

Annexe F

Publication n^o 4 :
Induced superstring cosmologies and
moduli stabilization

Induced superstring cosmologies and moduli stabilization*

Tristan Catelin-Jullien¹, Costas Kounnas¹
Hervé Partouche² and Nicolaos Toumbas³

¹ Laboratoire de Physique Théorique, Ecole Normale Supérieure,[†]
24 rue Lhomond, F-75231 Paris cedex 05, France
catelin@lpt.ens.fr, Costas.Kounnas@lpt.ens.fr

² Centre de Physique Théorique, Ecole Polytechnique,[◇]
F-91128 Palaiseau, France
Herve.Partouche@cpht.polytechnique.fr

³ Department of Physics, University of Cyprus,
Nicosia 1678, Cyprus
nick@ucy.ac.cy

Abstract

We extend the analysis of the recently obtained stringy cosmological solutions induced by thermal and quantum effects, once space-time supersymmetry is spontaneously broken by geometrical fluxes. Cases in which more than one modulus participating in the supersymmetry breaking mechanism are investigated. The free energy is obtained at the full string level. In the intermediate cosmological region where the temperature and the supersymmetry breaking scale are sufficiently smaller than the Hagedorn temperature, the quantum and thermal corrections are under control and calculable. The reason is that the contributions to the effective potential of the moduli that are not participating in the supersymmetry breaking are exponentially suppressed. The backreaction on the initially flat background results in many cases into cosmological evolutions, where the dynamics of all complex structure moduli is frozen. The solutions describe effectively a radiation dominated era, where thermal effects are never negligible, even if the temperature tends to zero at late times. We analyze several types of supersymmetry breaking patterns and examine the stability of the corresponding radiation era.

* Research partially supported by the EU (under the contracts MRTN-CT-2004-005104, MRTN-CT-2004-512194, MRTN-CT-2004-503369, MEXT-CT-2003-509661), ANR (CNRS-USAR) contract 05-BLAN-0079-02, CNRS PICS 2530, 3059 and 3747, INTAS grant 03-51-6346 and INTER-REG IIIA Crete/Cyprus.

[†] Unité mixte du CNRS et de l'Ecole Normale Supérieure associée à l'Université Pierre et Marie Curie (Paris 6), UMR 8549.

[◇] Unité mixte du CNRS et de l'Ecole Polytechnique, UMR 7644.

1 Introduction

Perhaps the most natural setting for testing string theory is the cosmology of our Universe. By now, there is a plethora of cosmological data favoring the phenomenological model of hot Big Bang cosmology, where the cosmological evolution starts with a highly singular event, the Big Bang, followed by an initial period of rapid inflation, a very high temperature phase, a proportionally large amount of dark matter and dark energy [1]. Many features of this phenomenological model are not well understood, and the hope is that their explanation will arise from a fundamental theory of quantum gravity such as string theory.

In an effort to build a concrete theoretical framework for studying cosmology, a class of string theory vacua, where the backreaction of both thermal and quantum effects can be systematically taken into account, was recently examined in [2–5]. In particular, starting with four dimensional heterotic string models, with initial $N = 4$ or $N = 2$ space-time supersymmetry [5], and implementing the thermal and the quantum corrections due to spontaneous breaking of supersymmetry, cosmological solutions are found, at least when the temperature T and the supersymmetry breaking scale M are sufficiently below the Hagedorn temperature T_H . In these examples, all moduli that are not involved in the breaking of supersymmetry give exponentially suppressed contributions to the (thermal) effective potential. This is essentially the underlying reason for the no-scale structure [4, 5] characterizing these models. Due to this remarkable property, the thermal and quantum corrections are under control and calculable. We would like to stress here that the absence of both infrared and ultraviolet ambiguities leads to a well defined energy density and pressure [5].

To be more precise, we are forced to separate the cosmological evolution in four distinct phases, according to the value of the temperature, namely:

(i) The very early “Big Bang” phase, where the underlying string theory degrees of freedom are strongly coupled. Perhaps string dualities can be applied to understand this phase and resolve the classical Big Bang singularity. See e.g. [6–11, 19] and references therein.

(ii) A high temperature stringy phase, $T \lesssim T_H$, where string oscillators and winding states must be properly taken into account [13–17]. Often, these lead to a non-geometrical structure of the Universe, e.g. the T-fold cosmologies of [2], or even to a change of the topology and dimensionality of space [7, 11].

(iii) The third phase has features similar to that of a standard, radiation dominated Friedmann cosmology. Here, the Universe has cooled down to temperatures far below Hagedorn. The effects of string massive states are exponentially suppressed $\mathcal{O}(\exp(-M_s/T))$. In this phase, the ratio of the temperature T and supersymmetry breaking scale M is fixed, both evolving inversely proportional to the scale factor of the Universe [4, 5]. In cases with $N = 1$ initial supersymmetry, the behavior can be that of a cosmological constant dominated inflationary universe [3, 4].

(iv) At lower temperatures, new phenomena such as the electroweak phase transition, QCD confinement and structure formation are taking place. We expect also that in this phase, some dynamics becoming relevant at these lower temperatures will stabilize the no-scale modulus associated to the supersymmetry breaking scale [18].

Some interesting ideas concerning the first two stringy phases have been presented recently in [19], where it was argued that the introduction of certain chemical potentials in the standard canonical ensemble of superstrings removes the Hagedorn instabilities. These ensembles are characterized by a “Temperature duality,” $\mathcal{Z}(T/T_H) = \mathcal{Z}(T_H/T)$. (See also [12] for some related work.) Equally interesting are the models of [11], which possess a new kind of *massive boson-fermion degeneracy symmetry*. Type II, heterotic and orientifold models have been presented. Some proposals are put forward, in the framework of these theories, concerning the early structure of the Universe.

Here however, we would like to examine more thoroughly the generalization of supersymmetry breaking in the cases where more moduli are involved, not only in heterotic string but also in type II closed string theories, working in the intermediate region (iii). It is interesting that this intermediate phase can be studied with high precision at the full string level [5], thanks to the fact that just below the Hagedorn temperature, the theory possesses a no-scale structure. The free energy is set by a single, overall scale, which can be chosen to be either the temperature or the supersymmetry breaking scale, and the rest of the dependence is given in terms of functions of dimensionless, complex structure like ratios. The backreaction on the initially flat background induces the cosmological evolution [4, 5].

In the string models studied in [5], only a single modulus was participating in the supersymmetry breaking mechanism. In this work we extend the analysis for cases where more geometrical moduli participate in the spontaneous breaking of supersymmetry. As we already

remarked, all such moduli give non-exponentially suppressed contributions to the effective potential. We examine in more detail the case where the supersymmetry breaking arises via geometrical fluxes [20] induced by stringy Scherk-Schwarz [21] boundary conditions along two internal spatial cycles with radii denoted by R_4 and R_5 . The supersymmetry breaking scale M is proportional to the inverse of the volume modulus $\sqrt{R_4 R_5}$. The results can be easily extended to cases involving more internal cycles. The heterotic or type II geometrical fluxes are introduced by utilizing the helicity and/or other internal R-symmetry charges. In the type II models, left-moving and right-moving R-symmetry charges can be coupled symmetrically or asymmetrically to the two cycles.

As we will see, the low energy dynamics of some models admits a solution describing a radiation dominated era. During the evolution, the supersymmetry breaking scale M and the temperature T evolve in time the same way as the inverse of the scale factor of the Universe. It is then important to analyze the stability for the dimensionless modulus describing the shape of the internal space, $\mathcal{U} \equiv R_5/R_4$. We find a rich structure of phenomena, depending on whether the corresponding effective potential admits a minimum, a maximum or a run-away behavior. Complementary results can be found in [22]. There, it is shown that these solutions are attractors for the dynamics. That is, there are basins of initial conditions whose associated cosmological evolutions converge towards the radiation dominated era with stabilized complex structures.

The paper is organized as follows. In Section 2, we describe the basic principles of the construction, clarifying the domain of validity of our analysis. We examine different classes heterotic and type II string vacua and implement various ways that lead to a spontaneous breaking of supersymmetry. We calculate the free energy at the full string level, and obtain the generic structure of the thermal effective potential in the intermediate region where $T \ll T_H$. We use these general results to find their counterparts at zero temperature. We also derive in the Einstein frame the gravitational equations and the equations of motion for the main moduli participating in the supersymmetry breaking mechanism, including the dilaton field. We present solutions at zero temperature, where the time evolution of the scale factor and the stability of the complex structure \mathcal{U} are analyzed.

In Section 3, we present explicit thermal models leading to radiation dominated cosmological evolutions. The compatibility between the gravitational equations and the equations of mo-

tion of the relevant moduli leads to the equation of state $\rho = (3+n)P$, where n is the number of internal dimensions involved in the supersymmetry breaking mechanism. In addition, we analyze the stability for the modulus \mathcal{U} . We compare to the zero temperature situation, mainly to show the relevance of the thermal corrections to the cosmological evolution. We show that during the radiation era, even when the temperature is very small, thermal effects are never negligible. The qualitative behaviors of thermal and non-thermal evolutions are drastically different. This is due to the non-linear character of the gravitational and moduli equations.

The final Section is devoted to conclusions and perspectives.

2 General setup

We consider initially supersymmetric flat backgrounds within the context of four dimensional superstrings constructed via orbifolds [23] and/or via the free fermionic construction [24]. By turning on certain non-trivial geometrical fluxes, we can spontaneously break space-time supersymmetry [21]. The procedure that we follow involves coupling some of the internal lattice quantum numbers to the space-time Fermion number F and/or to any of the discrete R-symmetry charges Q_R . This is a generalization of the Scherk-Schwarz mechanism to superstrings [21]. In addition, the system is put at finite temperature [13–15]. Our aim is to study cosmological evolutions induced by the thermal and quantum corrections, as in [5], and in particular investigate how some of the geometrical moduli, participating in the breaking of supersymmetry, can be stabilized around a local minimum.

2.1 Heterotic models

We start with heterotic string compactifications on six-manifolds of the form $S^1(R_4) \times S^1(R_5) \times \mathcal{M}_4$. Here, the choice of the four-manifold \mathcal{M}_4 determines the initial amount of supersymmetry: $N_4 = 4$ for the case of T^4 , and $N_4 = 2$ for the cases of T^4/\mathbb{Z}_2 orbifold and K_3 compactifications. Two internal cycles, associated to the X^4 and X^5 directions, have been singled out, since these are to be utilized to break supersymmetry spontaneously.

We illustrate the derivation of the pressure on the simplest example. The initially super-

symmetric string partition function is given by

$$Z = \frac{V_3}{(2\pi)^3} \int_{\mathcal{F}} \frac{d^2\tau}{\tau_2^{5/2}} \Gamma_{(1,1)}(R_0) \frac{1}{2} \sum_{a,b} (-)^{a+b+ab} \theta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}^4 \frac{\Gamma_{(6,22)}}{\eta^{12} \bar{\eta}^{24}}, \quad (2.1)$$

where the Euclidean time direction is compactified on a circle of radius R_0 . V_3 is the volume of the three large spatial directions. The $\Gamma_{(6,22)}$ lattice is associated to the zero mode contribution of the internal six-manifold, along with the $E_8 \times E_8$ or $SO(32)$ right-moving lattice. For instance, the $E_8 \times E_8$ case on T^6 gives the block

$$\Gamma_{(6,22)} = \Gamma_{(6,6)} \frac{1}{2} \sum_{\gamma,\delta} \bar{\theta} \begin{bmatrix} \gamma \\ \delta \end{bmatrix}^8 \frac{1}{2} \sum_{\gamma',\delta'} \bar{\theta} \begin{bmatrix} \gamma' \\ \delta' \end{bmatrix}^8, \quad (2.2)$$

where γ , δ and γ' , δ' are integers defined modulo 2.

We wish to implement a non-zero temperature in the model. This is done by coupling the momentum and winding quantum numbers associated to the Euclidean time circle to the space-time fermion number F [13–15] [5]. The contributions of the right-moving world-sheet degrees of freedom to F are always even. Thus, at the level of the one-loop string partition function, the operation amounts to replacing the $\Gamma_{(1,1)}(R_0)$ lattice with

$$\Gamma_{(1,1)}(R_0) \rightarrow \sum_{h_0, \tilde{g}_0} \Gamma_{(1,1)} \begin{bmatrix} h_0 \\ \tilde{g}_0 \end{bmatrix} (R_0) (-)^{a\tilde{g}_0 + bh_0 + \tilde{g}_0 h_0}, \quad (2.3)$$

where $\Gamma_{(1,1)} \begin{bmatrix} h \\ \tilde{g} \end{bmatrix}$ is a \mathbb{Z}_2 -shifted lattice [25] given by [13–15] [5]

$$\Gamma_{1,1} \begin{bmatrix} h \\ \tilde{g} \end{bmatrix} (R) = \frac{R}{\sqrt{\tau_2}} \sum_{\tilde{m}, n} e^{-\frac{\pi R^2}{\tau_2} |(2\tilde{m} + \tilde{g}) + (2n + h)\tau|^2}. \quad (2.4)$$

The spontaneous breaking of space-time supersymmetry is done by coupling the two $\Gamma_{(1,1)}$ lattices associated with the internal circles of radii R_4 and R_5 to generic R-symmetry charges [5, 13–15, 21]. In the case of models with $N_4 = 4$ initial supersymmetry, all such charges associated to the left-moving world-sheet degrees of freedom are equivalent by symmetry. Different choices exist involving right-moving gauge R-charges [5]. For example, consider the $E_8 \times E_8$ models and decompose the E_8 representations in terms of $SO(16)$ ones. One can choose R-charges which are odd for the $SO(16)$ spinorial representations and even for the others¹.

¹In the $N_2 = 2$ orbifold models, one can choose R-charges associated to the twisted T^4 planes to which the left-moving world-sheet degrees of freedom contribute as well [5].

We will present a class of cases, where starting with $N_4 = 4$, $E_8 \times E_8$ vacua, space-time supersymmetry is broken if we couple the X^i lattices, $i = 4, 5$, to $F + \bar{Q}_i$, where the right-moving charges \bar{Q}_i are odd for the $SO(16)$ spinorial representations associated with one or both the E_8 factors. So we replace the X^4 and X^5 lattices as follows:

$$\Gamma_{(1,1)}(R_i) \rightarrow \sum_{h_i, \tilde{g}_i} \Gamma_{(1,1)}^{[h_i]_{[\tilde{g}_i]}}(R_i) (-)^{(a+\bar{Q}_i)\tilde{g}_i+(b+\bar{L}_i)h_i+\epsilon_i\tilde{g}_i h_i} . \quad (2.5)$$

\bar{Q}_i , $i = 4, 5$, can be identified to be either γ , γ' or $\gamma + \gamma'$. [γ and γ' are odd for the corresponding $SO(16)$ spinorial representations.] \bar{L}_i is equal to δ , δ' or $\delta + \delta'$ respectively, as dictated by modular invariance, and $\epsilon_i = 0, 1$ depending on the modular transformation $\tau \rightarrow \tau + 1$. Under this,

$$a + \bar{Q}_i \rightarrow a + \bar{Q}_i , \quad b + \bar{L}_i \rightarrow a + b + \bar{Q}_i + \bar{L}_i + \epsilon_i . \quad (2.6)$$

For instance, for $(\bar{Q}_i, \bar{L}_i) \equiv (\gamma + \gamma', \delta + \delta')$ one has $\epsilon_i = 1$, while for $(\bar{Q}_i, \bar{L}_i) \equiv (\gamma, \delta)$ or (γ', δ') , ϵ_i vanishes. With these modifications taken into account, the one-loop string partition function is given by

$$\begin{aligned} Z &= \frac{V_3}{(2\pi)^3} \int_{\mathcal{F}} \frac{d^2\tau}{\tau_2^{5/2}} \frac{\Gamma_{(4,4)}}{\eta^{12}\bar{\eta}^{24}} \frac{1}{2} \sum_{a,b} (-)^{a+b+ab} \theta \left[\begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \right]^4 \\ &\times \frac{1}{4} \sum_{\gamma, \delta} \sum_{\gamma', \delta'} \bar{\theta}_{[\delta]}^{[\gamma]}{}^8 \bar{\theta}_{[\delta']}^{[\gamma']}{}^8 \prod_{i=0,4,5} \sum_{h_i, \tilde{g}_i} \Gamma_{(1,1)}^{[h_i]_{[\tilde{g}_i]}} (-)^{(a+\bar{Q}_i)\tilde{g}_i+(b+\bar{L}_i)h_i+\epsilon_i\tilde{g}_i h_i} . \end{aligned} \quad (2.7)$$

In this equation, we have $\bar{Q}_0 = \bar{L}_0 = 0$. Redefining $a = \hat{a} + \sum_i h_i$ and $b = \hat{b} + \sum_i \tilde{g}_i$, and using the Jacobi identity [5], one obtains

$$\begin{aligned} Z &= -\frac{V_3}{(2\pi)^3} \int_{\mathcal{F}} \frac{d^2\tau}{\tau_2^{5/2}} \frac{\Gamma_{(4,4)}}{\eta^{12}\bar{\eta}^{24}} \sum_{h_i, \tilde{g}_i} \theta \left[\begin{matrix} 1+\sum_i h_i \\ 1+\sum_i \tilde{g}_i \end{matrix} \right]^4 (-)^{\sum_i h_i + \sum_i \tilde{g}_i + (\sum_i h_i)(\sum_i \tilde{g}_i)} \\ &\times \frac{1}{4} \sum_{\gamma, \delta} \sum_{\gamma', \delta'} \bar{\theta}_{[\delta]}^{[\gamma]}{}^8 \bar{\theta}_{[\delta']}^{[\gamma']}{}^8 \prod_i \Gamma_{(1,1)}^{[h_i]_{[\tilde{g}_i]}} (-)^{\epsilon_i h_i \tilde{g}_i + \bar{Q}_i \tilde{g}_i + \bar{L}_i h_i} . \end{aligned} \quad (2.8)$$

In the large radii regime $R_i \gg R_H$, where R_H is the Hagedorn radius, the system is free of tachyons. The odd winding sectors, $h_i = 1$, are exponentially suppressed. In this regime only the sectors $h_i = 0$, $i = 0, 4, 5$ and $\tilde{g}_0 + \tilde{g}_4 + \tilde{g}_5 = 1$ modulo 2 contribute significantly (the latter condition due to the fact that $\theta_{[1]}^1$ vanishes identically). Furthermore, if the internal lattice $\Gamma_{(4,4)}$ moduli are kept to be of order unity, we can express the leading contributions

as the following integral [5]:

$$\begin{aligned}
Z &= \frac{V_3}{(2\pi)^3} R_0 R_4 R_5 \sum_{\tilde{g}_i} \frac{1 - (-)^{\sum_i \tilde{g}_i}}{2} \sum_s (-)^{\tilde{Q}_4(s)\tilde{g}_4 + \tilde{Q}_5(s)\tilde{g}_5} \\
&\times \int_0^\infty \frac{d\tau_2}{\tau_2^4} \sum_{\tilde{m}_i} e^{-\frac{\pi}{\tau_2} [(2\tilde{m}_0 + \tilde{g}_0)^2 R_0^2 + (2\tilde{m}_4 + \tilde{g}_4)^2 R_4^2 + (2\tilde{m}_5 + \tilde{g}_5)^2 R_5^2]}. \quad (2.9)
\end{aligned}$$

In the first line the sum over s runs over the $2^3 \times 504$ massless boson/fermion pairs of the initially supersymmetric model. The contributions of massive states are exponentially suppressed, of order $e^{-\pi R_i}$. The integral gives the pressure in the string frame:

$$\begin{aligned}
P_{\text{string}} &= \frac{Z}{V_4} = \frac{R_4 R_5}{(2\pi)^4} \frac{2}{\pi^3} \sum_{\tilde{g}_i} \frac{1 - (-)^{\sum_i \tilde{g}_i}}{2} \sum_s (-)^{\tilde{g}_4 \tilde{Q}_4(s) + \tilde{g}_5 \tilde{Q}_5(s)} \\
&\times \sum_{\tilde{m}_i} \frac{1}{\left[(2\tilde{m}_0 + \tilde{g}_0)^2 R_0^2 + (2\tilde{m}_4 + \tilde{g}_4)^2 R_4^2 + (2\tilde{m}_5 + \tilde{g}_5)^2 R_5^2 \right]^3}. \quad (2.10)
\end{aligned}$$

We parameterize the various moduli as follows:

$$\begin{aligned}
T &:= \frac{1}{2\pi R_0 \sqrt{\text{Re}S}}, \quad M := \frac{1}{2\pi \sqrt{\mathcal{T} \text{Re}S}}, \quad \text{Re}T_1 := R_4 R_5 \equiv \mathcal{T}, \\
\text{Re}U_1 &:= \frac{R_5}{R_4} \equiv \mathcal{U}, \quad u := \frac{R_0}{\sqrt{\mathcal{T}}}, \quad (2.11)
\end{aligned}$$

where S is the 4d dilaton-axion modulus, $\text{Re}S = e^{-2\phi_D}$. The two supersymmetry breaking scales, in the Einstein frame, are the temperature T and the gravitino mass scale M . The pressure in this frame is related to the string frame pressure by:

$$P = \frac{1}{(\text{Re}S)^2} P_{\text{string}} = T^4 p(u, \mathcal{U}), \quad (2.12)$$

with

$$p(u, \mathcal{U}) = n_{100} p_{100}(u, \mathcal{U}) + n_{010} p_{010}(u, \mathcal{U}) + n_{001} p_{001}(u, \mathcal{U}) + n_{111} p_{111}(u, \mathcal{U}). \quad (2.13)$$

The coefficients $n_{\tilde{g}_0 \tilde{g}_4 \tilde{g}_5}$ are given in terms of the supersymmetry breaking R-charges,

$$n_{100} = 2^3 \times 504, \quad n_{010} = \sum_s (-)^{\tilde{Q}_4(s)}, \quad n_{001} = \sum_s (-)^{\tilde{Q}_5(s)}, \quad n_{111} = \sum_s (-)^{\tilde{Q}_4(s) + \tilde{Q}_5(s)}, \quad (2.14)$$

while the dependence on the complex structure moduli u and \mathcal{U} involves the shifted Eisenstein functions:

$$p_{\tilde{g}_0 \tilde{g}_4 \tilde{g}_5}(u, \mathcal{U}) = \frac{2}{\pi^3} \sum_{\tilde{m}_0, \tilde{m}_4, \tilde{m}_5} \frac{u^4}{\left[(2\tilde{m}_0 + \tilde{g}_0)^2 u^2 + (2\tilde{m}_4 + \tilde{g}_4)^2 \mathcal{U}^{-1} + (2\tilde{m}_5 + \tilde{g}_5)^2 \mathcal{U} \right]^3}. \quad (2.15)$$

2.2 Type II models

We construct Type II models with similar thermal and supersymmetry breaking properties. In these examples, the internal manifold involves either a T^4 factor for $N_4 = 8$ initial supersymmetry or a T^4/\mathbb{Z}_2 factor for $N_4 = 4$. Orientifolds of these lead to models with $N_4 = 4$ and $N_4 = 2$ initial supersymmetry respectively, and include open string matter sectors. At weak coupling in four dimensions, these are dual to heterotic models [26], some of which we considered in the previous section. Models with $N_4 = 2$ initial supersymmetry can also be constructed if we start with a $T^6/(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}'_2)$ orbifold [27]. We illustrate the derivation of the pressure in the intermediate cosmological region, with $T \ll T_H$, for the type II $N_4 = 4$ models, but the results can be generalized to the other cases.

The $N_4 = 4$ partition function is

$$Z = \frac{V_3}{(2\pi)^3} \int_{\mathcal{F}} \frac{d^2\tau}{\tau_2^{5/2}} \frac{1}{(\eta\bar{\eta})^8} \prod_{i=0,4,5} \Gamma_{(1,1)}(R_i) \frac{1}{2} \sum_{H,G} Z_{(4,4)}[G]^H \\ \times \frac{1}{2} \sum_{a,b} \theta_{[b]}^{[a]} \theta_{[b+G]}^{[a+H]} \theta_{[b-G]}^{[a-H]} (-)^{a+b+ab} \frac{1}{2} \sum_{\bar{a},\bar{b}} \bar{\theta}_{[\bar{b}]}^{[\bar{a}]} \bar{\theta}_{[\bar{b}+G]}^{[\bar{a}+H]} \bar{\theta}_{[\bar{b}-G]}^{[\bar{a}-H]} (-)^{\bar{a}+\bar{b}+\bar{a}\bar{b}}. \quad (2.16)$$

The T^4/\mathbb{Z}_2 part is given by [25]:

$$Z_{(4,4)}[G]^H = \frac{\Gamma_{(4,4)}}{(\eta\bar{\eta})^4}, \quad \text{when } (H, G) = (0, 0) \\ Z_{(4,4)}[G]^H = \frac{2^4 \eta^2 \bar{\eta}^2}{\theta_{[1-G]}^{[1-H]} \bar{\theta}_{[1-G]}^{[1-H]2}}, \quad \text{when } (H, G) \neq (0, 0). \quad (2.17)$$

The characters H, G are integers defined modulo 2.

As usual, the finite temperature is implemented by inserting the thermal co-cycle and replacing the Euclidean time lattice as follows [13–15]:

$$\Gamma_{(1,1)}(R_0) \rightarrow \sum_{h_0, \bar{g}_0} \Gamma_{(1,1)}[h_0, \bar{g}_0](R_0) (-)^{(a+\bar{a})\bar{g}_0 + (b+\bar{b})h_0}. \quad (2.18)$$

In contrast to the heterotic case, the contributions to the space-time fermion number F from both the left-moving and right-moving sectors can be odd or even. In the sequel, we denote by F_L the contribution of the world-sheet left-movers to the space-time fermion number and similarly for F_R .

There are several ways to break the initial $N_4 = 4$ supersymmetry spontaneously, either by symmetric or asymmetric geometrical fluxes [20, 21, 23]. The two left-moving space-time

supersymmetries can be broken if we couple either or both the X^4 and X^5 lattice charges to F_L , or to left-moving R-charges associated with the twisted planes: $F_L + Q_i$. Also, the two right-moving space-time supersymmetries are broken by coupling the lattice charges to F_R or to $F_R + \bar{Q}_i$. Each lattice is replaced as follows [19]:

$$\Gamma_{(1,1)}(R_i) \rightarrow \sum_{h_i, \tilde{g}_i} \Gamma_{(1,1)} \left[\begin{smallmatrix} h_i \\ \tilde{g}_i \end{smallmatrix} \right] (R_i) (-)^{[(a+Q_i)\tilde{g}_i + (b+L_i)h_i + \tilde{g}_i h_i] \epsilon_i} (-)^{[(\bar{a}+\bar{Q}_i)\tilde{g}_i + (\bar{b}+\bar{L}_i)h_i + \tilde{g}_i h_i] \bar{\epsilon}_i}, \quad (2.19)$$

where Q_i, \bar{Q}_i can be set to zero or identified with the twist charge H . Correspondingly L_i, \bar{L}_i can be set to zero or identified with the character G . Also, we have introduced the parameters $\epsilon_i, \bar{\epsilon}_i$, taking the values 0 or 1, to indicate whether we couple the circle i to the left- or right-movers.

In particular, we will examine 3 distinct cases where $N_4 = 4$ is spontaneously broken to $N_4 = 0$ (and then thermalized):

-*Case 1* : Two asymmetric breakings, e.g. $(\epsilon_4, \bar{\epsilon}_4) = (1, 0), (\epsilon_5, \bar{\epsilon}_5) = (0, 1)$.

-*Case 2* : One symmetric and one asymmetric breaking, e.g. $(\epsilon_4, \bar{\epsilon}_4) = (1, 1), (\epsilon_5, \bar{\epsilon}_5) = (0, 1)$.

-*Case 3* : Two symmetric breakings, $(\epsilon_4, \bar{\epsilon}_4) = (1, 1), (\epsilon_5, \bar{\epsilon}_5) = (1, 1)$.

In addition, we will consider a case where the $N_4 = 4$ supersymmetry is partially broken to $N_4 = 2$. The remaining supersymmetries are then broken by thermal effects:

-*Case 1'* : Two left-moving asymmetric breakings, e.g. $(\epsilon_4, \bar{\epsilon}_4) = (1, 0), (\epsilon_5, \bar{\epsilon}_5) = (1, 0)$.

The partition function can be written as follows:

$$\begin{aligned} Z &= \frac{V_3}{(2\pi)^3} R_0 R_4 R_5 \int_{\mathcal{F}} \frac{d^2\tau}{\tau_2^4} \frac{1}{(\eta\bar{\eta})^8} \frac{1}{2} \sum_{H,G} Z_{(4,4)} \left[\begin{smallmatrix} H \\ G \end{smallmatrix} \right] \\ &\times \frac{1}{2} \sum_{a,b} \theta \left[\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix} \right]^2 \theta \left[\begin{smallmatrix} a+H \\ b+G \end{smallmatrix} \right] \theta \left[\begin{smallmatrix} a-H \\ b-G \end{smallmatrix} \right] (-)^{a+b+ab} \frac{1}{2} \sum_{\bar{a}, \bar{b}} \bar{\theta} \left[\begin{smallmatrix} \bar{a} \\ \bar{b} \end{smallmatrix} \right]^2 \bar{\theta} \left[\begin{smallmatrix} \bar{a}+H \\ \bar{b}+G \end{smallmatrix} \right] \bar{\theta} \left[\begin{smallmatrix} \bar{a}-H \\ \bar{b}-G \end{smallmatrix} \right] (-)^{\bar{a}+\bar{b}+\bar{a}\bar{b}} \\ &\times \prod_{i=0,4,5} \left\{ \sum_{h_i, \tilde{g}_i} \sum_{\tilde{m}_i, n_i} e^{-\frac{\pi R_i^2}{\tau_2} |(2\tilde{m}_i + \tilde{g}_i) + (2n_i + h_i)\tau|^2} (-)^{[(a+Q_i)\tilde{g}_i + (b+L_i)h_i + \tilde{g}_i h_i] \epsilon_i + [(\bar{a}+\bar{Q}_i)\tilde{g}_i + (\bar{b}+\bar{L}_i)h_i + \tilde{g}_i h_i] \bar{\epsilon}_i} \right\}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Here $(\epsilon_0, \bar{\epsilon}_0) = (1, 1)$ and $(Q_0, \bar{Q}_0) = (L_0, \bar{L}_0) = (0, 0)$.

As in the heterotic case, we are interested in the regime where the radii R_i , $i = 0, 4, 5$, are much bigger than the Hagedorn radius, $R_i \gg R_H$. In this intermediate cosmological

regime, the system is free of any tachyonic instabilities. The odd winding sectors, $h_i = 1$, are exponentially suppressed, and the only significant contributions to the partition function occur for $h_i = 0$, $\tilde{g}_0 + \epsilon_4 \tilde{g}_4 + \epsilon_5 \tilde{g}_5 = 1$ modulo 2 and $\tilde{g}_0 + \bar{\epsilon}_4 \tilde{g}_4 + \bar{\epsilon}_5 \tilde{g}_5 = 1$ modulo 2.

The pressure receives contributions from the untwisted sector, $H = 0$, and from the twisted sector $H = 1$. In the untwisted sector, the result is given by

$$\begin{aligned} \frac{Z_{\text{untwisted}}}{V_4} &= \frac{R_4 R_5}{(2\pi)^4} \sum_{\tilde{g}_i} \frac{1 - (-)^{\sum_i \epsilon_i \tilde{g}_i}}{2} \frac{1 - (-)^{\sum_i \bar{\epsilon}_i \tilde{g}_i}}{2} \\ &\times \frac{2}{\pi^3} \sum_{\tilde{m}_i} \frac{n_0^{\text{untwisted}}}{\left[(2\tilde{m}_0 + \tilde{g}_0)^2 R_0^2 + (2\tilde{m}_4 + \tilde{g}_4)^2 R_4^2 + (2\tilde{m}_5 + \tilde{g}_5)^2 R_5^2 \right]^3}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

$n_0^{\text{untwisted}}$ is the number of massless boson/fermion pairs in the untwisted sector of the initially supersymmetric $N_4 = 4$ model. We have $n_0^{\text{untwisted}} = n_0/2$, where $n_0 = 2^7$ counts the massless pairs of the $N_4 = 8$ model; the factor of 1/2 is due to the orbifolding.

In the twisted sector we have

$$\begin{aligned} \frac{Z_{\text{twisted}}}{V_4} &= \frac{R_4 R_5}{(2\pi)^4} \sum_{\tilde{g}_i} \frac{1 - (-)^{\sum_i \epsilon_i \tilde{g}_i}}{2} \frac{1 - (-)^{\sum_i \bar{\epsilon}_i \tilde{g}_i}}{2} (-)^{(\epsilon_4 Q_4 + \bar{\epsilon}_4 \bar{Q}_4) \tilde{g}_4 + (\epsilon_5 Q_5 + \bar{\epsilon}_5 \bar{Q}_5) \tilde{g}_5} \\ &\times \frac{2}{\pi^3} \sum_{\tilde{m}_i} \frac{n_0^{\text{twisted}}}{\left[(2\tilde{m}_0 + \tilde{g}_0)^2 R_0^2 + (2\tilde{m}_4 + \tilde{g}_4)^2 R_4^2 + (2\tilde{m}_5 + \tilde{g}_5)^2 R_5^2 \right]^3}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

$n_0^{\text{twisted}} = 2^8/2$ is the number of massless boson/fermion pairs in the twisted sector of the initially supersymmetric $N_4 = 4$ model. The $Q_4, \bar{Q}_4, Q_5, \bar{Q}_5$ appearing in Eq. (2.22) can be either zero or identified to the twist charge $H = 1$.

Using the definitions of the moduli introduced in Eq. (2.11), the pressure P is taking the same form as in Eq. (2.12) with

$$p(u, \mathcal{U}) = \sum_{\substack{\tilde{g}_0 + \epsilon_4 \tilde{g}_4 + \epsilon_5 \tilde{g}_5 = 1 \text{ mod } 2 \\ \tilde{g}_0 + \bar{\epsilon}_4 \tilde{g}_4 + \bar{\epsilon}_5 \tilde{g}_5 = 1 \text{ mod } 2}} n_{\tilde{g}_0 \tilde{g}_4 \tilde{g}_5} p_{\tilde{g}_0 \tilde{g}_4 \tilde{g}_5}(u, \mathcal{U}), \quad (2.23)$$

where the functions $p_{\tilde{g}_0 \tilde{g}_4 \tilde{g}_5}$ are given in Eq. (2.15), and the coefficients $n_{\tilde{g}_0 \tilde{g}_4 \tilde{g}_5}$ are similarly defined, in terms of supersymmetry breaking R-charges, as in Eq. (2.14),

$$n_{\tilde{g}_0 \tilde{g}_4 \tilde{g}_5} = n_0 = \frac{2^8}{2}, \quad \text{for } N_4 = 8, \quad (2.24)$$

$$n_{\tilde{g}_0 \tilde{g}_4 \tilde{g}_5} = \frac{n_0}{2} \left(1 + 2(-)^{(\epsilon_4 Q_4 + \bar{\epsilon}_4 \bar{Q}_4) \tilde{g}_4 + (\epsilon_5 Q_5 + \bar{\epsilon}_5 \bar{Q}_5) \tilde{g}_5} \right), \quad \text{for } N_4 = 4. \quad (2.25)$$

In the $N_4 = 4$ cases, the coefficients $n_{\tilde{g}_0 \tilde{g}_4 \tilde{g}_5}$ can take negative values as well. The results can be generalized to $N_4 = 2$ models.

2.3 The zero temperature limit

Setting $T = 0$, or $R_0 \rightarrow \infty$, in Eqs (2.10), (2.21) and (2.22), we can obtain the one-loop effective potential at zero temperature. It arises from quantum effects due to the spontaneous breaking of supersymmetry. For the heterotic models, the effective potential takes the form

$$\mathcal{V} = M^4 v(\mathcal{U}), \quad (2.26)$$

where M is defined in (2.11), and

$$v(\mathcal{U}) = n_{10} v_{10}(\mathcal{U}) + n_{01} v_{01}(\mathcal{U}). \quad (2.27)$$

The coefficients $n_{\tilde{g}_4 \tilde{g}_5}$ are determined in terms of the R-charges,

$$n_{\tilde{g}_4 \tilde{g}_5} = \sum_s (-)^{\tilde{g}_4 \bar{Q}_4(s) + \tilde{g}_5 \bar{Q}_5(s)}, \quad (2.28)$$

and

$$v_{\tilde{g}_4 \tilde{g}_5}(\mathcal{U}) = -\frac{2}{\pi^3} \sum_{\tilde{m}_4, \tilde{m}_5} \frac{1}{\left[(2\tilde{m}_4 + \tilde{g}_4)^2 \mathcal{U}^{-1} + (2\tilde{m}_5 + \tilde{g}_5)^2 \mathcal{U} \right]^3}. \quad (2.29)$$

The type II effective potential takes a form similar to the heterotic one, as in Eq. (2.26), where now

$$v(\mathcal{U}) = \sum_{\substack{\epsilon_4 \tilde{g}_4 + \epsilon_5 \tilde{g}_5 = 1 \pmod{2} \\ \bar{\epsilon}_4 \tilde{g}_4 + \bar{\epsilon}_5 \tilde{g}_5 = 1 \pmod{2}}} n_{\tilde{g}_4 \tilde{g}_5} v_{\tilde{g}_4 \tilde{g}_5}(\mathcal{U}), \quad (2.30)$$

with $n_{\tilde{g}_4 \tilde{g}_5} = n_{\tilde{g}_0 \tilde{g}_4 \tilde{g}_5}$, given in (2.25) (or (2.24)).

2.4 Non thermal cosmologies

In the zero temperature limit, the 1-loop effective action takes the form:

$$S = \int d^4x \sqrt{-\det g} \left\{ \frac{1}{2} R - g^{\mu\nu} \left(\frac{\partial_\mu S \partial_\nu \bar{S}}{(S + \bar{S})^2} + \frac{\partial_\mu T_1 \partial_\nu \bar{T}_1}{(T_1 + \bar{T}_1)^2} + \frac{\partial_\mu U_1 \partial_\nu \bar{U}_1}{(U_1 + \bar{U}_1)^2} \right) - \mathcal{V} \right\}. \quad (2.31)$$

All other moduli can be frozen since they do not appear in the effective potential. More precisely, their contributions to the effective potential are exponentially suppressed. Freezing further $\text{Im}S$, $\text{Im}T_1$ and $\text{Im}U_1$, we obtain for the Lagrangian

$$\mathbb{L} = \frac{1}{2} R - \frac{1}{2} \left((\partial\phi_S)^2 + (\partial\phi_T)^2 + (\partial\phi_U)^2 \right) - e^{-2\sqrt{2}(\phi_S + \phi_T)} \frac{v(\mathcal{U})}{(2\pi)^4}, \quad (2.32)$$

where

$$\text{Re}S := e^{\sqrt{2}\phi_S}, \quad \mathcal{T} := e^{\sqrt{2}\phi_{\mathcal{T}}}, \quad \mathcal{U} := e^{\sqrt{2}\phi_{\mathcal{U}}}. \quad (2.33)$$

It is useful to redefine the fields as follows

$$\begin{pmatrix} \phi \\ \phi_- \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_S \\ \phi_{\mathcal{T}} \end{pmatrix} \quad (2.34)$$

since the field ϕ_- does not appear in the potential:

$$\mathbb{L} = \frac{1}{2}R - \frac{1}{2}((\partial\phi)^2 + (\partial\phi_-)^2 + (\partial\phi_{\mathcal{U}})^2) - M^4 v(\mathcal{U}) \quad \text{with} \quad M = \frac{e^\phi}{2\pi}. \quad (2.35)$$

We look for homogeneous and isotropic solutions where the metric is of the Friedmann-Robertson-Walker form, with vanishing spatial curvature:

$$ds^2 = -N(t)^2 dt^2 + a(t)^2 dx^i dx^i, \quad H \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a} \right). \quad (2.36)$$

Here N is the laps function, $a(t)$ the scale factor and H the Hubble parameter. In the gauge choice $N = 1$, the gravitational field equations are

$$3H^2 = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}\dot{\phi}_-^2 + \frac{1}{2}\dot{\phi}_{\mathcal{U}}^2 + \mathcal{V}, \quad (2.37)$$

$$2\dot{H} + 3H^2 = -\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}\dot{\phi}_-^2 - \frac{1}{2}\dot{\phi}_{\mathcal{U}}^2 + \mathcal{V}. \quad (2.38)$$

Their linear sum is independent of the fields kinetic terms:

$$\dot{H} + 3H^2 = \mathcal{V} = M^4 v(\mathcal{U}). \quad (2.39)$$

Eq. (2.38) follows by differentiating the Friedmann-Hubble Eq. (2.37), once the following moduli field equations are satisfied:

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} = -\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\phi} = -4M^4 v(\mathcal{U}), \quad (2.40)$$

$$\ddot{\phi}_{\mathcal{U}} + 3H\dot{\phi}_{\mathcal{U}} = -\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\phi_{\mathcal{U}}} = -\sqrt{2} M^4 \mathcal{U} v'(\mathcal{U}), \quad (2.41)$$

$$\ddot{\phi}_- + 3H\dot{\phi}_- = 0, \quad (2.42)$$

where prime derivatives are with respect to \mathcal{U} . The last equation can be integrated giving

$$\frac{1}{2}\dot{\phi}_-^2 = \frac{c_-}{a^6}, \quad (2.43)$$

where c_- is a positive constant. Eq. (2.41) can be satisfied for a constant \mathcal{U} , if there exists a solution to

$$v'(\mathcal{U}) = 0. \quad (2.44)$$

We will look for models for which this extremum is a local minimum so that the complex structure modulus \mathcal{U} is stabilized. The compatibility of Eqs (2.39) and (2.40) requires that there exists a constant c_ϕ such that:

$$\dot{\phi} = -4H + \frac{c_\phi}{a^3}. \quad (2.45)$$

In [22], it is shown that the solution for $c_\phi = 0$ is an attractor. Thus, we concentrate on the case $c_\phi = 0$, so that

$$M \equiv \frac{e^\phi}{2\pi} = M_0 \left(\frac{a_0}{a}\right)^4, \quad (2.46)$$

where $M_0 a_0^4$ is a positive integration constant.

The Hubble equation takes the form:

$$3H^2 = -\frac{c_m}{a^6} + \frac{c}{a^{16}} \quad \text{where} \quad c_m = \frac{3}{5}c_- > 0, \quad c = -v(\mathcal{U}) \times \frac{3}{5}M_0^4 a_0^{16}. \quad (2.47)$$

If $c > 0$, one has for $c_m = 0$

$$a(t) = A t^{1/8} \quad \text{where} \quad A = 2^{3/8} \left(\frac{c}{3}\right)^{1/16}. \quad (2.48)$$

When the kinetic energy for ϕ_- is switched on, i.e. when $c_m > 0$, one has a big bang/big crunch cosmology. The solution $t(a)$ is given by

$$t(a) = \pm t_0 \int_{a/A}^1 \frac{x^7 dx}{\sqrt{1-x^{10}}}, \quad 0 \leq a \leq A \quad \text{where} \quad A = \left(\frac{c}{c_m}\right)^{1/10}, \quad t_0 = \sqrt{3}c^{3/10}c^{-4/5}. \quad (2.49)$$

We investigate whether some of the heterotic and type II models we considered satisfy the minimization condition (2.44), which fixes the modulus \mathcal{U} , and the positivity of the parameter c , Eq. (2.47), which allows for real time solutions:

$$\textit{Extremum} : v'(\mathcal{U}) = 0, \quad \textit{Stability} : v''(\mathcal{U}) > 0, \quad \textit{Real time} : v(\mathcal{U}) < 0. \quad (2.50)$$

The shape of the potential as a function of \mathcal{U} depends on the R-symmetry breaking charges which define the coefficients $n_{\tilde{g}_4\tilde{g}_5}$. Since the functions $v_{\tilde{g}_4\tilde{g}_5}$ in Eq. (2.29) are negative, we need some of the $n_{\tilde{g}_4\tilde{g}_5}$ to be positive.

In the heterotic models, the functions v_{10} and v_{01} defining the effective potential, Eq. (2.27), are monotonic functions of \mathcal{U} , the former decreasing and the latter increasing, (see Fig. 1a). To have an extremum, n_{10} and n_{01} must be of the same sign. The real time condition requires

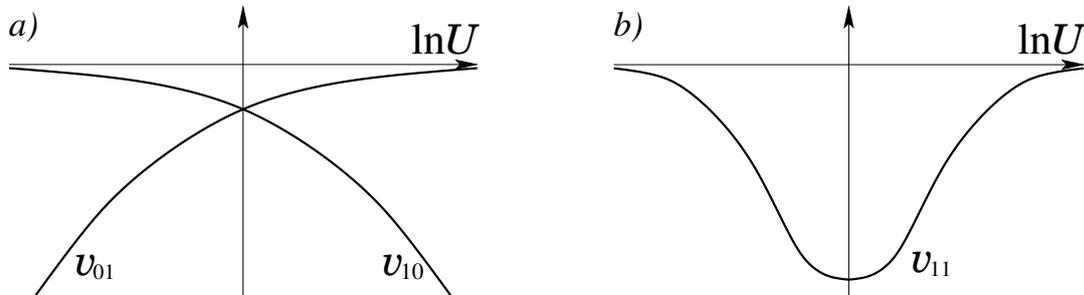


Figure 1: The functions $v_{\bar{g}_4\bar{g}_5}$ versus $\ln \mathcal{U}$.

this sign to be positive, which implies that the solution is unstable under fluctuations of \mathcal{U} . Stable cosmological solutions exist only at non-zero temperature, as we will see in the next section. We may have, however, stationary domain wall solutions.

We now study the effective potential given in Eq. (2.30) for the different type II cases.

-*Case 1* : The potential is proportional to the function v_{11} , which is invariant under $\mathcal{U} \rightarrow 1/\mathcal{U}$. This implies that a stationary point, which is a minimum, occurs at $\mathcal{U} = 1$, (see Fig. 1b). The conditions (2.50) are simultaneously satisfied if $n_{11} > 0$. This can be realized by choosing $Q_4 = \bar{Q}_5 = 0$ or H .

-*Case 2* : Since the potential is proportional to the monotonic function $v_{01}(\mathcal{U})$, there is always a runaway behavior for this model: $\mathcal{U} \rightarrow 0$ *i.e.* $R_4 \rightarrow +\infty$ for $n_{01} > 0$ and $\mathcal{U} \rightarrow +\infty$ *i.e.* $R_5 \rightarrow +\infty$ for $n_{01} < 0$. Thus, the dynamics drives the system out of the scope of our analysis, and one should look for a solution in five dimensions, where supersymmetry is spontaneously broken by the remaining finite size internal radius.

-*Case 3* : This type II model has an effective potential of the form encountered in the heterotic case.

-*Case 1'* : The model is supersymmetric with a flat effective potential.

At finite temperature, we are going to see that the situations in the type II cases also change drastically.

3 Thermal cosmologies

3.1 Equations of motion and thermodynamics

Using the field redefinitions (2.33)–(2.34) and the FRW ansatz (2.36), the thermal effective action is

$$S = -\frac{1}{6} \int dt N a^3 \left(\frac{3}{N^2} H^2 - \frac{1}{2N^2} \dot{\phi}^2 - \frac{1}{2N^2} \dot{\phi}_-^2 - \frac{1}{2N^2} \dot{\phi}_u^2 - P \right), \quad (3.1)$$

where the pressure can be expressed in terms of the supersymmetry breaking scale $M(\phi)$ as

$$P = M^4 \frac{p(u, \mathcal{U})}{u^4}, \quad M = \frac{e^\phi}{2\pi}, \quad u = \frac{M}{T}. \quad (3.2)$$

The gravity equations are obtained by varying with respect to N and a ,

$$\frac{3}{N^2} H^2 = \frac{1}{2N^2} \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2N^2} \dot{\phi}_-^2 + \frac{1}{2N^2} \dot{\phi}_u^2 + \rho \quad \text{with} \quad \rho := -P - N \frac{\partial P}{\partial N}, \quad (3.3)$$

$$\frac{2}{N^2} \dot{H} + \frac{3}{N^2} H^2 - \frac{2}{N^3} H \dot{N} = -\frac{1}{2N^2} \dot{\phi}^2 - \frac{1}{2N^2} \dot{\phi}_-^2 - \frac{1}{2N^2} \dot{\phi}_u^2 - P - \frac{1}{3} a \frac{\partial P}{\partial a}, \quad (3.4)$$

where in general P can depend on N and a . To determine the dependence, we recall in which specific frame we computed P :

$$P = \frac{Z}{(\text{Re}S)^2 V_4} = \frac{Z}{N a^3} \quad \Longrightarrow \quad N = 2\pi R_0 \sqrt{\text{Re}S} = \frac{1}{T}, \quad a = 2\pi R \sqrt{\text{Re}S}, \quad (3.5)$$

where $R_1 = R_2 = R_3 \equiv R$ are the radii of the large three spatial directions (before the large volume limit $R \rightarrow +\infty$ is taken). Since $P = T^4 p(u, \mathcal{U})$ and T is identified with the inverse of the laps function, we have

$$\rho = T \frac{\partial P}{\partial T} - P \quad \text{and} \quad \frac{\partial P}{\partial a} = 0. \quad (3.6)$$

It is remarkable that these expressions are identical to the ones derived from thermodynamics. We thus show that the variational principle is in perfect agreement with thermodynamics.

Since P (in the action (3.1)) and ρ (in Eq. (3.3)) are scalars under time reparameterizations, we can write the gravitational equations in the simple gauge $N = 1$ as follows:

$$3H^2 = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} \dot{\phi}_-^2 + \frac{1}{2} \dot{\phi}_u^2 + \rho, \quad (3.7)$$

$$2\dot{H} + 3H^2 = -\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - \frac{1}{2} \dot{\phi}_-^2 - \frac{1}{2} \dot{\phi}_u^2 - P. \quad (3.8)$$

Combining Eqs (2.12) and (3.6), we obtain

$$\rho = T^4 r(u, \mathcal{U}) \quad \text{where} \quad r = 3p - u \partial_u p. \quad (3.9)$$

The equations of motion for the moduli fields can be written as follows:

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} = \frac{\partial P}{\partial \phi} \equiv T^4 \{3p(u, \mathcal{U}) - r(u, \mathcal{U})\}, \quad (3.10)$$

$$\ddot{\phi}_{\mathcal{U}} + 3H\dot{\phi}_{\mathcal{U}} = \frac{\partial P}{\partial \phi_{\mathcal{U}}} \equiv T^4 \sqrt{2} \mathcal{U} \partial_{\mathcal{U}} p(u, \mathcal{U}), \quad (3.11)$$

$$\ddot{\phi}_- + 3H\dot{\phi}_- = 0, \quad (3.12)$$

where the r.h.s. of Eq. (3.10) follows from Eqs (3.2) and (3.9).

The last equation gives (2.43). We would like to find solutions to the remaining system of equations, with \mathcal{U} stabilized. Then, Eq. (3.11) amounts to the following algebraic equation

$$D(u, \mathcal{U}) := \mathcal{U} \partial_{\mathcal{U}} p = 0, \quad (3.13)$$

requiring that u is also a constant. It follows that the time dependence of ρ and P arises from the T^4 pre-factors only. From the relations in (3.2), we have that

$$M(\phi) = uT \quad \Longrightarrow \quad \dot{\phi} = \frac{\dot{T}}{T}. \quad (3.14)$$

Instead of solving the scale factor Eq. (3.8), we choose to solve the equation that arises from the conservation of the energy-momentum tensor:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} \dot{\phi}_{\mathcal{U}}^2 + \frac{1}{2} \dot{\phi}_-^2 + \rho \right) + 3H \left(\dot{\phi}^2 + \dot{\phi}_{\mathcal{U}}^2 + \dot{\phi}_-^2 + \rho + P \right) = 0. \quad (3.15)$$

Using the equations of motion for the scalar fields and (3.14), this gives

$$\dot{\phi} = \frac{\dot{T}}{T} = -H \quad \Longrightarrow \quad aT = a_0 T_0, \quad (3.16)$$

where $a_0 T_0$ is a positive integration constant.

Next, we consider the linear sum of Eqs (3.8) and (3.7),

$$\dot{H} + 3H^2 = \frac{1}{2}(\rho - P) = \frac{1}{2} T^4 \{r(u, \mathcal{U}) - p(u, \mathcal{U})\}. \quad (3.17)$$

Using (3.16), the compatibility between this equation and (3.10) implies the following thermal equation of state:

$$\rho = 5P. \quad (3.18)$$

This is one of the main results of this paper. It reminds us of the analogous equation, $\rho = 4P$, derived in [5, 28], when a single modulus was participating in the spontaneous supersymmetry breaking mechanism. These results are very suggestive, and we conjecture that they will be generalized to the cases when more moduli participate in the supersymmetry breaking. When n such fields are involved, we expect the equation of state to take the form:

$$\rho = (3 + n)P. \quad (3.19)$$

In the two moduli case, which we are considering here, Eq. (3.18) can also be written as

$$C(u, \mathcal{U}) := (2 + u\partial_u)p = 0. \quad (3.20)$$

As a result, the complex structure ratios (u, \mathcal{U}) are determined by the equations $D = C = 0$. It is interesting that along this critical trajectory, complex structure moduli participating in the breaking of supersymmetry are stabilized, and thus the cosmology is characterized by a single running scale.

The time dependence of the scale factor is dictated by the Friedmann-Hubble Eq. (3.7). The latter takes the form

$$3H^2 = \frac{c_r}{a^4} + \frac{c_m}{a^6} \quad \text{where} \quad c_r = 6(a_0 T_0)^4 p(u, \mathcal{U}), \quad c_m = \frac{6}{5} c_- > 0. \quad (3.21)$$

When $c_m = 0$, the universe is effectively radiation dominated and a cosmological solution exists if the constant $p(u, \mathcal{U})$ is positive:

$$a(t) = B\sqrt{t} \quad \text{with} \quad B = \sqrt{2} \left(\frac{c_r}{3} \right)^{1/4}. \quad (3.22)$$

When c_m is non-trivial, the time t can be expressed as a function of the scale factor as follows:

$$\begin{aligned} \text{if } c_r > 0 : \quad t(a) &= t_0 \int_0^{a/B} \frac{x^2 dx}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \forall a \geq 0, \\ \text{if } c_r < 0 : \quad t(a) &= \pm t_0 \int_{a/B}^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad 0 \leq a \leq B, \end{aligned} \quad (3.23)$$

where

$$B = \sqrt{\frac{c_m}{|c_r|}} \quad \text{and} \quad t_0 = \sqrt{3} c_m |c_r|^{-3/2}. \quad (3.24)$$

In the explicit examples presented in the following section, we always find $c_r > 0$. It would be interesting to find if models with “negative effective radiation energy density”, c_r/a^4 , are allowed.

As noticed in [5], the fact that the cosmological evolution we have found behaves effectively like a four dimensional universe filled with thermal radiation is not in contradiction with the state equation $\rho = 5P$. The reason is that the total energy density and pressure contain the “cold” part associated to the kinetic energy of ϕ . When $c_m = 0$, one has $\dot{\phi}^2/2 = \rho/5$, so that

$$\begin{aligned}\rho_{\text{tot}} &= \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \rho = \frac{6}{5}\rho \\ P_{\text{tot}} &= \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + P = \frac{2}{5}\rho,\end{aligned}\tag{3.25}$$

in agreement with the expected state equation $\rho_{\text{tot}} = 3P_{\text{tot}}$.

3.2 Some stringy examples

We examine whether the extremization condition (3.13) and the compatibility condition (3.20) are simultaneously satisfied in the various heterotic and type II models under consideration:

$$\textit{Extremum} : D(u, \mathcal{U}) = 0, \quad \textit{Compatibility} : C(u, \mathcal{U}) = 0, \quad \textit{Stability} : \partial_{\mathcal{U}}^2 p(u, \mathcal{U}) < 0. \tag{3.26}$$

As in the non-thermal situation, the shape of the potential depends on the R-symmetry breaking charges. Their choices determine the coefficients $n_{\tilde{g}_0\tilde{g}_4\tilde{g}_5}$ that satisfy $-n_{100} \leq n_{\tilde{g}_0\tilde{g}_4\tilde{g}_5} \leq n_{100}$.

However, in the heterotic cases, n_{111} , n_{010} and n_{001} are not totally arbitrary. It is convenient to parameterize the a priori allowed models by separating the n_{100} states into 4 groups, depending on their parity under the operators $(-)^{\tilde{Q}_4}$ and $(-)^{\tilde{Q}_5}$, as shown in Table 3.27.

	$n_{100}\xi_1$ states	$n_{100}\xi_2$ states	$n_{100}\xi_3$ states	$n_{100}(1 - \xi_1 - \xi_2 - \xi_3)$ states	
$(-)^{\tilde{Q}_4}$	+	+	-	-	(3.27)
$(-)^{\tilde{Q}_5}$	+	-	+	-	

We observe that the parameter space of models is the tetrahedron:

$$\left\{ (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in [0, 1]^3 \quad \text{such that} \quad \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 \leq 1 \right\}, \tag{3.28}$$

which constrains the ratios:

$$r_{010} := \frac{n_{010}}{n_{100}} = 2(\xi_1 + \xi_2) - 1, \quad r_{001} := \frac{n_{001}}{n_{100}} = 2(\xi_1 + \xi_3) - 1, \quad r_{111} := \frac{n_{111}}{n_{100}} = 1 - 2(\xi_2 + \xi_3). \tag{3.29}$$

The conditions (3.26) and the $\xi_2 \leftrightarrow \xi_3$ duality symmetry can be visualized geometrically in terms of the tetrahedron representation. Some type II models are also characterized in terms of this representation.

In the large/small u and \mathcal{U} regimes, p contains exponentially suppressed contributions that we have to neglect by consistency. The dominant contributions take the form of a linear sum of a finite number of monomials $u^a \mathcal{U}^b$. The $(\ln u, \ln \mathcal{U})$ -plane is divided into 6 sectors inside of which a power expansion is defined, (see Fig. 2). The boundaries of these sectors are the lines $\mathcal{U} = \lambda u^\omega$, where $\omega = -2, 0, 2$. We show in the Appendix the power expansion of

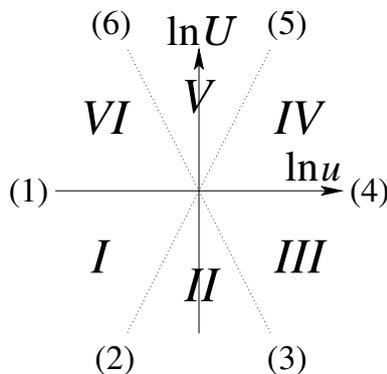


Figure 2: The $(\ln u, \ln \mathcal{U})$ -complex plane can be divided in 6 sectors, I, \dots, VI , separated by 6 edges of slope $-2, 0$ or 2 . The power expansions of $p(u, \mathcal{U})$, which are listed in the Appendix are well defined in each sector.

$p(u, \mathcal{U})$ in each sector. More accurate expressions are also given along the lines $\mathcal{U} = \lambda u^{\pm 2, 0}$ that are useful to connect the power expansions on each sides. $D(u, \mathcal{U}) = 0$ and $C(u, \mathcal{U}) = 0$ define curves which asymptote to the lines $\mathcal{U} = \lambda u^{\pm 2, 0}$, for which we have determined the intercept λ as a function of the ratios $r_{\tilde{g}_0 \tilde{g}_4 \tilde{g}_5}$. The constraints are simultaneously satisfied if these curves meet at a point (u_c, \mathcal{U}_c) . Then, the stability condition, $\partial_{\mathcal{U}}^2 p(u_c, \mathcal{U}_c) < 0$, and the sign of the radiation density are determined. The $C(u, \mathcal{U}) = 0$ constraint requires to have at least one negative $r_{\tilde{g}_0 \tilde{g}_4 \tilde{g}_5}$.

- Our analysis shows the existence of non-trivial thermal cosmological solutions in heterotic models with $\bar{Q}_4 \equiv \bar{Q}_5$, and type II *Case 3* models with $Q_4 + \bar{Q}_4 \equiv Q_5 + \bar{Q}_5$, where the pressure takes the general form

$$p(u, \mathcal{U}) = n_{100} [p_{100} + r(p_{010} + p_{001}) + p_{111}], \quad (3.30)$$

with $-1 \leq r \leq 1$. These models lie along the edge $\xi_2 = \xi_3 = 0$ of the tetrahedron. The duality symmetry $\mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}^{-1}$ implies that along the axis $\mathcal{U} \equiv 1$, $D(u, \mathcal{U}) = 0$. As r varies, we

find 4 distinct patterns, specified by

$$r_{c3} = -\frac{f_{5/2}^{ee}(1) + f_{5/2}^{oo}(1)}{2f_{5/2}^{oe}(1)} \simeq -0.215, \quad r_{c2} = -\frac{S_5^e}{S_5^o} = -\frac{1}{31} \quad \text{and} \quad r_{c1} = 0, \quad (3.31)$$

where the functions in the definition of r_{c3} can be found in Eq. (A.12).

- It turns out that there are no cosmological solutions with constant u and \mathcal{U} when $r < r_{c3}$ or $r > 0$, since then $C(u, \mathcal{U}) \neq 0$ everywhere.

- A stable cosmological solution exists when $r_{c3} < r < r_{c2}$, with $c_r > 0$, (see Fig. 3a). It corresponds to a global minimum of the thermal effective potential.

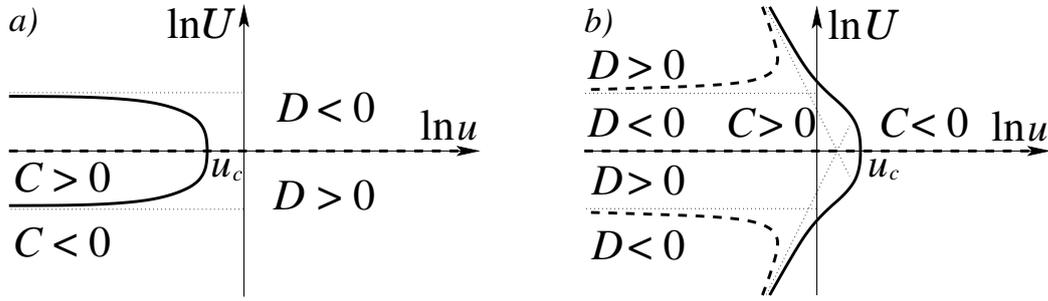


Figure 3: For a pressure of the form (3.30), the curves defined by $C(u, \mathcal{U}) = 0$ (straight lines) and $D(u, \mathcal{U}) = 0$ (dashed lines) are represented. When $r_{c3} < r < r_{c2}$ (Fig. a), there is a stable cosmological solution $(u_c, \mathcal{U}_c = 1)$. It corresponds to a global minimum of the thermal effective potential. When $r_{c2} \leq r < 0$ (Fig. b), there is a stable cosmological solution $(u_c, \mathcal{U}_c = 1)$ that corresponds to a local minimum. Two runaway behaviors that bring the system to five dimensions are also allowed.

- When $r_{c2} \leq r < 0$, a stable cosmological solution with $\mathcal{U}_c = 1$ still exists, with $c_r > 0$, but this corresponds to a local minimum of the thermal effective potential. Actually, new branches of the locus $D = 0$ are present and converge exponentially towards the curve $C = 0$, (see Fig. 3b). Formally, their common asymptotes define flat directions. However, since these “solutions” imply R_5 (or R_4) to be very large, they are out of the scope of our analysis. They are better understood in terms of runaway behaviors that decompactify the system to five dimensions, where supersymmetry is broken by the remaining finite size internal radius R_4 (or R_5) and thermal effects.²

² A similar runaway behavior can be realized in type II *Case 2* models, with generic operator \bar{Q}_5 . They involve a pressure $p(u, \mathcal{U}) = n_{100}[p_{100} + rp_{001}]$, where $-1 \leq r \leq 1$. Their representative points in the tetrahedron satisfy $\xi_1 = \xi_3 = \frac{1}{2} - \xi_2$, where $0 \leq \xi_2 \leq \frac{1}{2}$. When r varies, there is a phase where the curves $D = 0$ and $C = 0$ are non-trivial and asymptotic to one another. The situation is similar to what is observed in the lower half plane of Fig. 3b.

For the heterotic model with the choice $\bar{Q}_4 = \bar{Q}_5 = \gamma + \gamma'$, one has

$$\begin{aligned} n_{100} &= n_{111} = 2^3 \times 504, \\ n_{010} &= n_{001} = 2^3 [[2]_{X_{2,3}} + [6]_{T^6} + [120 - 128]_{E_8} + [120 - 128]_{E'_8}] = -2^3 \times 8, \end{aligned} \quad (3.32)$$

so that $r_{c2} < r = -1/63 < r_{c1}$. In this specific case, the cosmological solution corresponds to $(u_c, \mathcal{U}_c) \simeq (1.649, 1)$, where $c_r \simeq 0.0708 \times 6(a_0 T_0)^4$.

Another model considered in [5] is based on the heterotic T^4/\mathbb{Z}_2 orbifold, with non-Abelian gauge group $E_8 \times E_7 \times SU(2)$. In that case, one has $r_{c2} < r = -1/127 < r_{c1}$ and the corresponding cosmological solution fixes $(u_c, \mathcal{U}_c) \simeq (1.996, 1)$, with $c_r \simeq 0.0762 \times 6(a_0 T_0)^4$.

• We can treat in a similar way type II *Case 1'* models with arbitrary $Q_4 + Q_5$. The pressure is of the form

$$p(u, \mathcal{U}) = n_{100}[p_{100} + rp_{111}], \quad (3.33)$$

where $-1 \leq r \leq 1$. This class of models belongs to a segment in the interior of the tetrahedron, $\xi_2 = \xi_3 = \frac{1}{2} - \xi_1$, $0 \leq \xi_1 \leq \frac{1}{2}$. The symmetry $\mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}^{-1}$ implies $D(u, \mathcal{U}) = 0$ along the axis $\mathcal{U} \equiv 1$. Also, $p(u, \mathcal{U})$ is constant in sectors *III* and *IV* (and their common edge (4)), implying that $D(u, \mathcal{U})$ is vanishing. For $r < 0$, there is no other solutions to $D = 0$. When r varies, the set of solutions to $C(u, \mathcal{U}) = 0$ is divided into 3 classes characterized by

$$r_{c4} \simeq -0.77, \quad r'_{c3} = -\frac{f_{5/2}^{ee}(1)}{f_{5/2}^{oo}(1)} \simeq -0.215. \quad (3.34)$$

- For $r < r_{c4}$, the right boundary of the locus $C \leq 0$ is asymptotic to the edges (3) and (5), where D is not vanishing yet, (see Fig. 4a). The only solution to $D = C = 0$ arises at $\mathcal{U} = 1$, but the corresponding cosmological evolution is unstable to small fluctuations of \mathcal{U} .

- For $r_{c4} < r < r'_{c3}$, a cosmological solution with constant u and \mathcal{U} exists, (see Fig. 4b), but is again unstable to small fluctuations of \mathcal{U} .

- For $r'_{c3} < r$, one has $C(u, \mathcal{U}) > 0$ everywhere: There is no cosmological solution with constant complex structures.

• The last class of systems we analyze corresponds to type II *Case 1* models with arbitrary $Q_4 + \bar{Q}_5$. The pressure is

$$p(u, \mathcal{U}) = n_{100}[p_{100} + rp_{011}], \quad (3.35)$$

where $-1 \leq r \leq 1$. In contrast to the previous cases, these models are not represented by points in the tetrahedron. For $r < 0$, the only solutions to $D(u, \mathcal{U}) = 0$ are along the axis

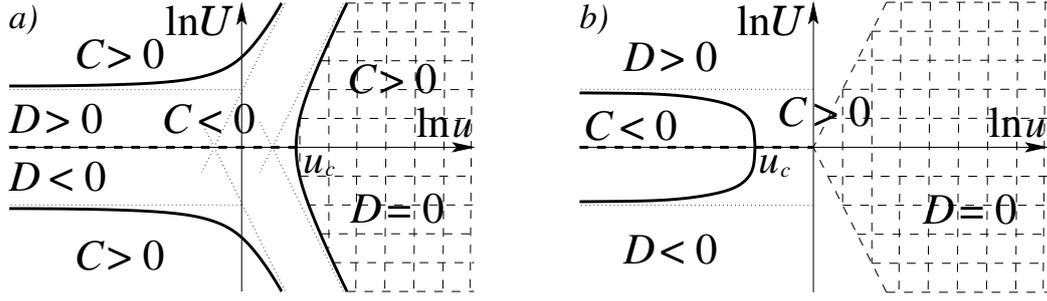


Figure 4: For a pressure of the form (3.33), the curves defined by $C(u, \mathcal{U}) = 0$ (straight lines) are represented. The locus $D = 0$ is composed of the axis $\mathcal{U} = 1$, and the sectors III and IV, (see Fig. 2). When $r < r_{c4}$ (Fig. a) or $r_{c4} \leq r < r'_{c3}$ (Fig. b), there is an unstable cosmological solution $(u_c, \mathcal{U}_c = 1)$.

$\mathcal{U} = 1$. The set of solutions to $C(u, \mathcal{U}) = 0$ is characterized by the point r'_{c3} of Eq. (3.34) and $r_{c1} = 0$.

- For $r < r'_{c3}$, the axis $\mathcal{U} = 1$ is entirely inside the region $C(u, \mathcal{U}) < 0$ that has two distinct boundaries, (see Fig. 5a), and so there is no cosmological solution with constant u and \mathcal{U} .
- For $r'_{c3} \leq r < 0$, the region $C(u, \mathcal{U}) < 0$ has now a connected boundary, (see Fig. 5b). The latter crosses the axis $\mathcal{U} = 1$, so that a cosmological solution $(u_c, \mathcal{U}_c = 1)$ exists. It is however unstable to small fluctuations of \mathcal{U} .
- For $0 < r$, one has $C(u, \mathcal{U}) > 0$ everywhere: There is no cosmological solution with constant u and \mathcal{U} .

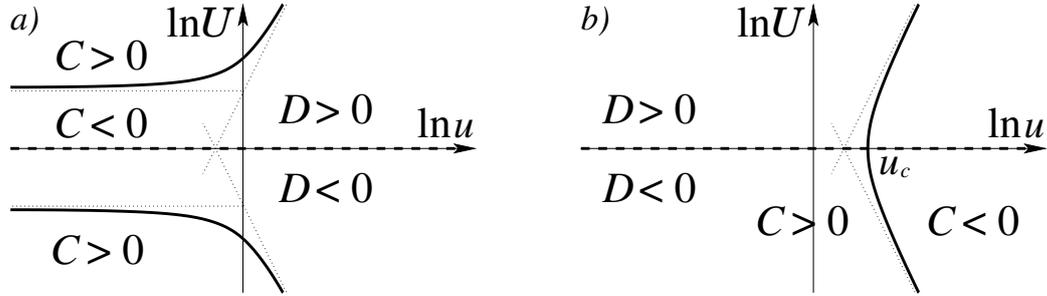


Figure 5: For a pressure of the form (3.35), the curves defined by $C(u, \mathcal{U}) = 0$ (straight lines) and $D(u, \mathcal{U}) = 0$ (dashed lines) are represented. When $r < r'_{c3}$ (Fig. a), there is no cosmological solution with constant complex structures. When $r'_{c3} \leq r < 0$ (Fig. b), there is an unstable cosmological solution $(u_c, \mathcal{U}_c = 1)$.

3.3 Non-thermal vs thermal cosmologies

The cosmological evolutions found in the non-thermal and thermal cases, Eqs (2.47) and (3.21), have drastically different properties we would like to comment on.

First, the contributions of the kinetic energy of the field ϕ_- to the “effective” Friedmann-Hubble equation are of *opposite sign*. This phenomenon is due to the different compatibility relations $\dot{\phi} = -4H$ for the non-thermal cosmology and $\dot{\phi} = -H$ for the thermal one, once they are inserted in the respective Friedmann-Hubble Eqs (2.37) and (3.7). This is also the reason why these equations have $1/a^{16}$ and $1/a^4$ monomial contributions, respectively. The intermediate cosmological region we are considering is described by the thermal cosmologies. At late times however, the temperature, being proportional to the inverse of the scale factor, tends to zero, and a paradox seems to arise as the cosmological evolution is never described by the non-thermal solutions.

To better understand this point, we rewrite the pressure and energy density as follows, (see the relations (3.2) and (3.9)):

$$P = -M^4 v_{\text{th}}, \quad \rho = M^4 (v_{\text{th}} + u \partial_u v_{\text{th}}) \quad \text{where} \quad v_{\text{th}}(u, \mathcal{U}) = -\frac{p(u, \mathcal{U})}{u^4}. \quad (3.36)$$

When the pressure is of the general form (A.1), one can use the expansion valid for $u \gg 1$ (\mathcal{U} fixed), Eqs (A.11) and (A.15), to decompose v_{th} into two pieces:

$$v_{\text{th}}(u, \mathcal{U}) = -\{n_{010} k_3^{oe}(\mathcal{U}^{-1}) + n_{001} k_3^{oe}(\mathcal{U}) + n_{011} k_3^{oo}(\mathcal{U})\} + \hat{v}_{\text{th}}(u, \mathcal{U}), \quad (3.37)$$

where

$$\hat{v}_{\text{th}}(u, \mathcal{U}) = -\frac{1}{u^4} \times \{(n_{100} + n_{111}) S_4^o + (n_{010} + n_{001} + n_{011}) S_4^e\} + \dots, \quad (3.38)$$

up to exponentially suppressed terms as $u \rightarrow +\infty$. Clearly, $\hat{v}_{\text{th}}(u, \mathcal{U}) \rightarrow 0$ in this limit. Since $n_{\tilde{g}_0 \tilde{g}_4 \tilde{g}_5} = n_{\tilde{g}_4 \tilde{g}_5}$, the u -independent terms of the r.h.s. of Eq. (3.37) are equal to the zero temperature effective potential $v(\mathcal{U})$ found for the heterotic or type II cases, Eqs (2.27) and (2.30). Thus, P and ρ are only converging to their $T = 0$ counterparts when $u \rightarrow +\infty$. However, the thermal cosmologies we have considered have stabilized $u \equiv u_c$, implying that the finite temperature corrections $\hat{v}_{\text{th}}(u, \mathcal{U})$, even if the temperature is small, are never negligible. In fact, the condition $u = M(t)/T(t) \rightarrow +\infty$ for the thermal system to be correctly approximated by the non-thermal one implies that the thermal corrections should be screened by radiative corrections, and not that they would necessarily vanish. Explicit

cosmological evolutions with $u \rightarrow +\infty$ are analyzed in [22]. They describe Big Crunch cosmologies, where the temperature is proportional to $1/a$. So, T is large in absolute value (but still negligible compared to M).

Finally, we note that in the present work, each time a stable cosmological solution at finite temperature is found, its counterpart at $T = 0$ is unstable, and vice versa. As explained in [22], this is a consequence of the fact that for arbitrary initial conditions, the cosmological evolutions are always converging to an attractor. Depending on the model, the latter can be the radiation dominated universes studied in [5] and the present paper, or Big Crunch cosmologies where the thermal effects are screened by radiative corrections.

4 Conclusions

The main result of this work is to show the existence of the critical stringy cosmologies of [5], even in the cases where more than one modulus participate in the supersymmetry breaking mechanism. They correspond to a radiation dominated era with constant complex structures. A thorough analysis was done for several string models with $N_4 \geq 2$ initial supersymmetry. Depending on the pattern of supersymmetry breaking, the critical values of the thermal effective potential for the complex structure moduli are either minima or maxima. Run away behaviors that bring the system to higher dimensions can also occur. When the radiation era is stable, we explicitly show that even if the temperature tends to zero at late times, thermal corrections to the dynamics are never negligible.

Our approach was to separate the cosmological evolution in distinct regions, according to the value of the temperature. The stringy non-geometrical region, where the temperature is of order the Hagedorn temperature, is much harder to understand. Stringy phenomena occur where conventional field theoretic notions concerning the geometry and topology are breaking down. Some interesting proposals to understand this early time region have been put forward in [11, 19]. The intermediate region, just after the Hagedorn era is shown to be under control. The free energy is free of any infrared and ultraviolet ambiguities, allowing us to follow the backreaction on the geometry and determine the time evolution of several moduli fields. We show that the only relevant moduli are the ones participating in the supersymmetry breaking mechanism. The others are either frozen by receiving a soft-

breaking mass, or they remain flat directions with exponentially suppressed contribution to the free energy.

A very interesting result is that the critical cosmological solutions are governed by a higher dimensional thermal state equation, $\rho = (d - 1) P$, or in the four dimensional effective description, this equation becomes $\rho = (3 + n) P$ where n is the number of moduli participating in the breaking of supersymmetry. In [5,28], we analyzed the case $n = 1$. Here, we generalize the result to the $n = 2$ case. The overall scale evolves in time such that the state equation is valid, while complex structure -like ratios of scales are frozen.

Although our work covers adequately and unambiguously the intermediate cosmological region, it is incomplete to describe the very early Hagedorn era, where non-geometric stringy phenomena are important. It is incomplete as well to describe relatively late time phenomena, like the radiative breaking of the electroweak gauge symmetry and QCD confinement, where non-perturbative transmutation scales, like for instance Λ_{QCD} , are relevant. The extension to the late time era requires to consider at least models with $N_4 = 1$ initial supersymmetry. Progress concerning the very early era can be made provided that we understand better the resolution of the Hagedorn instabilities and the stringy non-geometrical structure of the early universe.

Acknowledgements

We are grateful to C. Angelantonj, C. Bachas, J. Estes, J. Troost and especially F. Bourliot for useful discussions. H.P. and N.T. thank the Ecole Normale Supérieure and C.K. and H.P. the University of Cyprus for hospitality.

The work of C.K. and H.P. is partially supported by the EU contract MRTN-CT-2004-005104 and the ANR (CNRS-USAR) contract 05-BLAN-0079-01 (01/12/05). N.T. and C.K. are supported by the EU contract MRTN-CT-2004-512194. H.P. is also supported by the EU contracts MRTN-CT-2004-503369 and MEXT-CT-2003-509661, INTAS grant 03-51-6346, and CNRS PICS 2530, 3059 and 3747, while N.T. is also supported by an INTERREG IIIA Crete/Cyprus program.

Appendix A

We list in this Appendix the large and small complex structure expansions of an arbitrary linear combination of functions $p_{\tilde{g}_0\tilde{g}_4\tilde{g}_5}$ defined in Eq. (2.15),

$$p(u, \mathcal{U}) = n_{100}(p_{100} + r_{010}p_{010} + r_{001}p_{001} + r_{111}p_{111} + r_{011}p_{011}). \quad (\text{A.1})$$

For fixed ω and λ , we determine the power expansion along the lines $\ln \mathcal{U} = \omega \ln u + \ln \lambda$ when $\ln u$ and/or $\ln \mathcal{U}$ are large, by making an extensive use of the approximations

$$\begin{aligned} \sum_m \frac{1}{((2m+1)^2x+a)^3} &= \frac{3\pi}{16} \frac{1}{a^{5/2}} \frac{1}{\sqrt{x}} + \dots, \\ \sum_m \frac{1}{((2m)^2x+a)^3} &= \frac{3\pi}{16} \frac{1}{a^{5/2}} \frac{1}{\sqrt{x}} + \dots, \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

where $a > 0$, $x \rightarrow 0_+$ and the dots stand for $\mathcal{O}(e^{-\pi\sqrt{a/x}}/x^{3/2})$ terms. Similarly, we use

$$\begin{aligned} \sum_m \frac{1}{((2m+1)^2x+a)^{5/2}} &= \frac{2}{3} \frac{1}{a^2} \frac{1}{\sqrt{x}} + \dots, \\ \sum_m \frac{1}{((2m)^2x+a)^{5/2}} &= \frac{2}{3} \frac{1}{a^2} \frac{1}{\sqrt{x}} + \dots, \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

where again we neglect exponentially suppressed terms. The $(\ln u, \ln \mathcal{U})$ -plane can then be divided in 6 sectors, I, II, \dots, VI , where the expansions are independent of ω (and λ). The boundaries of these sectors are the lines whose slopes are $\omega = -2, 0$ or 2 , (see Fig. 2). In each sector, we find,

$$\begin{aligned} \frac{p^I}{n_{100}} &= u^{-2} S_6^o \\ &\quad + u^3 \mathcal{U}^{-5/2} (S_5^e + r_{001} S_5^o) \\ &\quad + u^3 \mathcal{U}^{3/2} ((1 + r_{010} + r_{001}) S_4^e + (r_{111} + r_{011}) S_4^o), \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

$$\begin{aligned} \frac{p^{II}}{n_{100}} &= u^4 \mathcal{U}^{-3} r_{001} S_6^o \\ &\quad + u^{-1} \mathcal{U}^{-1/2} (S_5^o + r_{001} S_5^e) \\ &\quad + u^3 \mathcal{U}^{3/2} ((1 + r_{001}) S_4^e + (r_{010} + r_{111} + r_{011}) S_4^o), \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

$$\begin{aligned} \frac{p^{III}}{n_{100}} &= u^4 \mathcal{U}^{-3} r_{001} S_6^o \\ &\quad + u^4 \mathcal{U}^2 ((r_{010} + r_{011}) S_5^o + r_{001} S_5^e) \\ &\quad + (1 + r_{111}) S_4^o + (r_{010} + r_{001} + r_{011}) S_4^e, \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

$$\begin{aligned} \frac{p^{IV}}{n_{100}} &= u^4 \mathcal{U}^3 r_{010} S_6^o \\ &\quad + u^4 \mathcal{U}^{-2} ((r_{001} + r_{011}) S_5^o + r_{010} S_5^e) \\ &\quad + (1 + r_{111}) S_4^o + (r_{010} + r_{001} + r_{011}) S_4^e, \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

$$\begin{aligned} \frac{p^V}{n_{100}} &= u^4 \mathcal{U}^3 r_{010} S_6^o \\ &\quad + u^{-1} \mathcal{U}^{1/2} (S_5^o + r_{010} S_5^e) \\ &\quad + u^3 \mathcal{U}^{-3/2} ((1 + r_{010}) S_4^e + (r_{001} + r_{111} + r_{011}) S_4^o), \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

$$\begin{aligned} \frac{p^{VI}}{n_{100}} &= u^{-2} S_6^o \\ &\quad + u^3 \mathcal{U}^{5/2} (S_5^e + r_{010} S_5^o) \\ &\quad + u^3 \mathcal{U}^{-3/2} ((1 + r_{010} + r_{001}) S_4^e + (r_{111} + r_{011}) S_4^o), \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

where we have defined

$$\begin{aligned} S_6^o &= \frac{2}{\pi^3} \sum_m \frac{1}{(2m+1)^6} = \frac{\pi^3}{240}, \\ S_5^o &= \frac{2}{\pi^3} \frac{3\pi}{16} \sum_m \frac{1}{|2m+1|^5} = \frac{93}{128} \frac{\zeta(5)}{\pi^2}, \quad S_5^e = \frac{2}{\pi^3} \frac{3\pi}{16} \sum_{m \neq 0} \frac{1}{|2m|^5} = \frac{3}{128} \frac{\zeta(5)}{\pi^2}, \\ S_4^o &= \frac{2}{\pi^3} \frac{3\pi}{16} \frac{2}{3} \sum_m \frac{1}{(2m+1)^4} = \frac{\pi^2}{192}, \quad S_4^e = \frac{2}{\pi^3} \frac{3\pi}{16} \frac{2}{3} \sum_{m \neq 0} \frac{1}{(2m)^4} = \frac{\pi^2}{2880}. \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

The previous sectors are separated by edges, (1), ..., (6), in the neighborhood of which some terms we neglected in the interior of the adjacent sectors are not exponentially suppressed anymore. Along these edges, one has $\mathcal{U} = \lambda u^{\pm 2, 0}$, where $\lambda \simeq 1$, and

$$\begin{aligned} \frac{p^{(1)}}{n_{100}} &= u^{-2} S_6^o \\ &\quad + u^3 (f_{5/2}^{ee}(\lambda) + r_{010} f_{5/2}^{oe}(\lambda^{-1}) + r_{001} f_{5/2}^{oe}(\lambda) + (r_{111} + r_{011}) f_{5/2}^{oo}(\lambda)), \quad \lambda = \mathcal{U}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{p^{(2)}}{n_{100}} &= u^3 \mathcal{U}^{3/2} ((1 + r_{001}) S_4^e + (r_{010} + r_{111} + r_{011}) S_4^o) \\ &\quad + u^{-2} (g_3^{eo}(\lambda) + r_{001} g_3^{oe}(\lambda)), \quad \lambda = \mathcal{U} u^{-2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{p^{(3)}}{n_{100}} &= u^4 \mathcal{U}^{-3} r_{001} S_6^o \\ &\quad + h_{5/2}^{oe}(\lambda) + (r_{010} + r_{011}) h_{5/2}^{eo}(\lambda) + r_{001} h_{5/2}^{ee}(\lambda) + r_{111} h_{5/2}^{oo}(\lambda), \quad \lambda = \mathcal{U} u^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{p^{(4)}}{n_{100}} &= (1 + r_{111}) S_4^o + (r_{010} + r_{001} + r_{011}) S_4^e \\ &\quad + u^4 (r_{010} k_3^{oe}(\lambda^{-1}) + r_{001} k_3^{oe}(\lambda) + r_{011} k_3^{oo}(\lambda)), \quad \lambda = \mathcal{U}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{p^{(5)}}{n_{100}} &= u^4 \mathcal{U}^3 r_{001} S_6^o \\ &\quad + h_{5/2}^{oe}(\lambda^{-1}) + r_{010} h_{5/2}^{ee}(\lambda^{-1}) + (r_{001} + r_{011}) h_{5/2}^{eo}(\lambda^{-1}) + r_{111} h_{5/2}^{oo}(\lambda^{-1}), \quad \lambda = \mathcal{U} u^{-2}, \end{aligned}$$

$$\frac{p^{(6)}}{n_{100}} = u^3 \mathcal{U}^{-3/2} ((1 + r_{010})S_4^e + (r_{001} + r_{111} + r_{011})S_4^o) + u^{-2} (g_3^{eo}(\lambda^{-1}) + r_{010}g_3^{oe}(\lambda^{-1})), \quad \lambda = \mathcal{U}u^2, \quad (\text{A.11})$$

where we have introduced the functions

$$\begin{aligned} f_{5/2}^{ee}(\lambda) &= \frac{2}{\pi^3} \frac{3\pi}{16} \sum_{(m,n) \neq (0,0)} \frac{1}{((2m)^2\lambda + (2n)^2\lambda^{-1})^{5/2}}, \\ f_{5/2}^{oe}(\lambda) &= \frac{2}{\pi^3} \frac{3\pi}{16} \sum_{m,n} \frac{1}{((2m+1)^2\lambda + (2n)^2\lambda^{-1})^{5/2}}, \\ f_{5/2}^{oo}(\lambda) &= \frac{2}{\pi^3} \frac{3\pi}{16} \sum_{m,n} \frac{1}{((2m+1)^2\lambda + (2n+1)^2\lambda^{-1})^{5/2}}, \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

$$g_3^{eo}(\lambda) = \frac{2}{\pi^3} \sum_{m,n} \frac{1}{((2m)^2\lambda + (2n+1)^2)^3}, \quad g_3^{oe}(\lambda) = \frac{2}{\pi^3} \sum_{m,n} \frac{1}{((2m+1)^2\lambda + (2n)^2)^3}, \quad (\text{A.13})$$

$$\begin{aligned} h_{5/2}^{oe}(\lambda) &= \frac{2}{\pi^3} \frac{3\pi}{16} \lambda^2 \sum_{m,n} \frac{1}{((2m+1)^2\lambda + (2n)^2)^{5/2}}, \\ h_{5/2}^{eo}(\lambda) &= \frac{2}{\pi^3} \frac{3\pi}{16} \lambda^2 \sum_{m,n} \frac{1}{((2m)^2\lambda + (2n+1)^2)^{5/2}}, \\ h_{5/2}^{ee}(\lambda) &= \frac{2}{\pi^3} \frac{3\pi}{16} \lambda^2 \sum_{(m,n) \neq (0,0)} \frac{1}{((2m)^2\lambda + (2n)^2)^{5/2}}, \\ h_{5/2}^{oo}(\lambda) &= \frac{2}{\pi^3} \frac{3\pi}{16} \lambda^2 \sum_{m,n} \frac{1}{((2m+1)^2\lambda + (2n+1)^2)^{5/2}}, \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

$$k_3^{oe}(\lambda) = \frac{2}{\pi^3} \sum_{m,n} \frac{1}{((2m+1)^2\lambda + (2n)^2\lambda^{-1})^3}, \quad k_3^{oo}(\lambda) = \frac{2}{\pi^3} \sum_{m,n} \frac{1}{((2m+1)^2\lambda + (2n+1)^2\lambda^{-1})^3}. \quad (\text{A.15})$$

References

- [1] S. Perlmutter *et al.* [Supernova Cosmology Project Collaboration], “Measurements of Ω and Λ from 42 high-redshift supernovae,” *Astrophys. J.* **517**, 565 (1999) [arXiv:astro-ph/9812133].
- [2] C. Kounnas, N. Toumbas and J. Troost, “A wave-function for stringy universes,” *JHEP* **0708** (2007) 018 [arXiv:0704.1996 [hep-th]].
- [3] C. Kounnas and H. Partouche, “Instanton transition in thermal and moduli deformed de Sitter cosmology,” *Nucl. Phys. B* **793** (2008) 131 [arXiv:0705.3206 [hep-th]].

- [4] C. Kounnas and H. Partouche, “Inflationary de Sitter solutions from superstrings,” Nucl. Phys. B **795** (2008) 334 [arXiv:0706.0728 [hep-th]].
- [5] T. Catelin-Jullien, C. Kounnas, H. Partouche and N. Toumbas, “Thermal/quantum effects and induced superstring cosmologies,” Nucl. Phys. B **797** (2008) 137 [arXiv:0710.3895 [hep-th]].
- T. Catelin-Jullien, C. Kounnas, H. Partouche and N. Toumbas, “Thermal and quantum superstring cosmologies,” Fortsch. Phys. **56** (2008) 792 [arXiv:0803.2674 [hep-th]].
- [6] M. Gasperini and G. Veneziano, “Pre-big bang in string cosmology,” Astropart. Phys. **1** (1993) 317 [arXiv:hep-th/9211021].
- M. Gasperini, M. Maggiore and G. Veneziano, “Towards a non-singular pre-big bang cosmology,” Nucl. Phys. B **494**, 315 (1997) [arXiv:hep-th/9611039].
- [7] E. Kiritsis and C. Kounnas, “Dynamical topology change, compactification and waves in a stringy early universe,” arXiv:hep-th/9407005.
- E. Kiritsis and C. Kounnas, “Dynamical topology change in string theory,” Phys. Lett. B **331** (1994) 51 [arXiv:hep-th/9404092].
- E. Kiritsis and C. Kounnas, “Dynamical topology change, compactification and waves in string cosmology,” Nucl. Phys. Proc. Suppl. **41** (1995) 311 [arXiv:gr-qc/9701005].
- E. Kiritsis and C. Kounnas, “String gravity and cosmology: Some new ideas,” arXiv:gr-qc/9509017.
- [8] J. Khoury, B. A. Ovrut, N. Seiberg, P. J. Steinhardt and N. Turok, “From big crunch to big bang,” Phys. Rev. D **65**, 086007 (2002) [arXiv:hep-th/0108187].
- [9] H. Liu, G. W. Moore and N. Seiberg, “The challenging cosmic singularity,” arXiv:gr-qc/0301001.
- [10] B. Craps, S. Sethi and E. P. Verlinde, “A matrix big bang,” JHEP **0510**, 005 (2005) [arXiv:hep-th/0506180].
- [11] C. Kounnas, “Massive boson-fermion degeneracy and the early structure of the universe,” arXiv:0808.1340 [hep-th].

- [12] C. Angelantonj, M. Cardella and N. Irges, “An alternative for moduli stabilisation,” *Phys. Lett. B* **641**, 474 (2006) [arXiv:hep-th/0608022].
- [13] J. Atick and E. Witten, “The Hagedorn transition and the number of degrees of freedom of string theory,” *Nucl. Phys. B* **310**, 291 (1988).
- [14] C. Kounnas and B. Rostand, “Coordinate dependent compactifications and discrete symmetries,” *Nucl. Phys. B* **341** (1990) 641.
- [15] I. Antoniadis and C. Kounnas, “Superstring phase transition at high temperature,” *Phys. Lett. B* **261** (1991) 369.
- I. Antoniadis, J. P. Derendinger and C. Kounnas, “Non-perturbative supersymmetry breaking and finite temperature instabilities in $N = 4$ superstrings,” arXiv:hep-th/9908137.
- C. Kounnas, “Universal thermal instabilities and the high-temperature phase of the $N = 4$ superstrings,” arXiv:hep-th/9902072.
- [16] R. H. Brandenberger and C. Vafa, “Superstrings in the Early Universe,” *Nucl. Phys. B* **316**, 391 (1989).
- [17] R. Easther, B. R. Greene, M. G. Jackson and D. N. Kabat, “String windings in the early universe,” *JCAP* **0502**, 009 (2005) [arXiv:hep-th/0409121].
- B. Greene, D. Kabat and S. Marnerides, “Bouncing and cyclic string gas cosmologies,” arXiv:0809.1704 [hep-th].
- [18] E. Cremmer, S. Ferrara, C. Kounnas and D. V. Nanopoulos, “Naturally vanishing cosmological constant in $N = 1$ supergravity,” *Phys. Lett. B* **133** (1983) 61.
- J. R. Ellis, C. Kounnas and D. V. Nanopoulos, “No scale supersymmetric GUTs,” *Nucl. Phys. B* **247** (1984) 373.
- J. R. Ellis, C. Kounnas and D. V. Nanopoulos, “Phenomenological $SU(1, 1)$ supergravity,” *Nucl. Phys. B* **241** (1984) 406.
- J. R. Ellis, A. B. Lahanas, D. V. Nanopoulos and K. Tamvakis, “No-scale supersymmetric standard model,” *Phys. Lett. B* **134**, 429 (1984).

- [19] C. Angelantonj, C. Kounnas, H. Partouche and N. Toumbas, “Resolution of Hagedorn singularity in superstrings with gravito-magnetic fluxes,” Nucl. Phys. B **809** (2009) 291 [arXiv:0808.1357 [hep-th]].
- [20] J. P. Derendinger, C. Kounnas, P. M. Petropoulos and F. Zwirner, “Superpotentials in IIA compactifications with general fluxes,” Nucl. Phys. B **715** (2005) 211 [arXiv:hep-th/0411276].
- J. P. Derendinger, C. Kounnas, P. M. Petropoulos and F. Zwirner, “Fluxes and gaugings: $N = 1$ effective superpotentials,” Fortsch. Phys. **53** (2005) 926 [arXiv:hep-th/0503229].
- G. Villadoro and F. Zwirner, “ $N = 1$ effective potential from dual type-IIA D6/O6 orientifolds with general fluxes,” JHEP **0506**, 047 (2005) [arXiv:hep-th/0503169].
- G. Villadoro and F. Zwirner, “D terms from D-branes, gauge invariance and moduli stabilization in flux compactifications,” JHEP **0603**, 087 (2006) [arXiv:hep-th/0602120].
- L. Andrianopoli, M. A. Lledo and M. Trigiante, “The Scherk-Schwarz mechanism as a flux compactification with internal torsion,” JHEP **0505** (2005) 051 [arXiv:hep-th/0502083].
- G. Dall’Agata and N. Prezas, “Scherk-Schwarz reduction of M-theory on G_2 -manifolds with fluxes,” JHEP **0510** (2005) 103 [arXiv:hep-th/0509052].
- J. P. Derendinger, P. M. Petropoulos and N. Prezas, “Axionic symmetry gaugings in $N = 4$ supergravities and their higher-dimensional origin,” Nucl. Phys. B **785**, 115 (2007) [arXiv:0705.0008 [hep-th]].
- [21] J. Scherk and J. H. Schwarz, “Spontaneous breaking of supersymmetry through dimensional reduction,” Phys. Lett. B **82** (1979) 60.
- R. Rohm, “Spontaneous supersymmetry breaking in supersymmetric string theories,” Nucl. Phys. B **237** (1984) 553.
- C. Kounnas and M. Porrati, “Spontaneous supersymmetry breaking in string theory,” Nucl. Phys. B **310** (1988) 355.
- S. Ferrara, C. Kounnas and M. Porrati, “ $N = 1$ superstrings with spontaneously broken symmetries,” Phys. Lett. B **206** (1988) 25.

- S. Ferrara, C. Kounnas, M. Porrati and F. Zwirner, “Effective superhiggs and Str M^2 from four-dimensional strings,” *Phys. Lett. B* **194** (1987) 366.
- S. Ferrara, C. Kounnas and M. Porrati, “Superstring solutions with spontaneously broken four-dimensional supersymmetry,” *Nucl. Phys. B* **304** (1988) 500.
- [22] F. Bourliot, C. Kounnas and H. Partouche, “Attraction to a radiation era in early superstring cosmology”, CPHT-RR 089.1208, LPTENS - 08/64 preprint.
- [23] L. J. Dixon, J. A. Harvey, C. Vafa and E. Witten, “Strings on orbifolds,” *Nucl. Phys. B* **261**, 678 (1985).
- L. J. Dixon, J. A. Harvey, C. Vafa and E. Witten, “Strings on orbifolds. 2,” *Nucl. Phys. B* **274**, 285 (1986).
- K. S. Narain, M. H. Sarmadi and C. Vafa, “Asymmetric orbifolds,” *Nucl. Phys. B* **288**, 551 (1987).
- K. S. Narain, M. H. Sarmadi and C. Vafa, “Asymmetric orbifolds: Path integral and operator formulations,” *Nucl. Phys. B* **356**, 163 (1991).
- [24] I. Antoniadis, C. P. Bachas and C. Kounnas, “Four-dimensional superstrings,” *Nucl. Phys. B* **289** (1987) 87.
- H. Kawai, D. C. Lewellen and S. H. H. Tye, “Construction of fermionic string models in four-dimensions,” *Nucl. Phys. B* **288**, 1 (1987).
- [25] C. Kounnas, “BPS states in superstrings with spontaneously broken SUSY,” *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **58** (1997) 57 [arXiv:hep-th/9703198].
- E. Kiritsis and C. Kounnas, “Perturbative and non-perturbative partial supersymmetry breaking: $N = 4 \rightarrow N = 2 \rightarrow N = 1$,” *Nucl. Phys. B* **503** (1997) 117 [arXiv:hep-th/9703059].
- E. Kiritsis, C. Kounnas, P. M. Petropoulos and J. Rizos, “String threshold corrections in models with spontaneously broken supersymmetry,” *Nucl. Phys. B* **540** (1999) 87 [arXiv:hep-th/9807067].
- [26] I. Antoniadis, C. Bachas, C. Fabre, H. Partouche and T. R. Taylor, “Aspects of type I - type II - heterotic triality in four dimensions,” *Nucl. Phys. B* **489** (1997) 160 [arXiv:hep-th/9608012].

- I. Antoniadis, H. Partouche and T. R. Taylor, “Duality of $N = 2$ heterotic - type I compactifications in four dimensions,” Nucl. Phys. B **499** (1997) 29 [arXiv:hep-th/9703076].
- I. Antoniadis, H. Partouche and T. R. Taylor, “Lectures on heterotic - type I duality,” Nucl. Phys. Proc. Suppl. **61A** (1998) 58 [Nucl. Phys. Proc. Suppl. **67** (1998) 3] [arXiv:hep-th/9706211].
- [27] A. Gregori, C. Kounnas and J. Rizos, “Classification of the $N = 2$, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ -symmetric type II orbifolds and their type II asymmetric duals,” Nucl. Phys. B **549**, 16 (1999) [arXiv:hep-th/9901123].
- [28] I. Antoniadis and C. Kounnas, “The dilaton classical solution and the supersymmetry breaking evolution in an expanding universe,” Nucl. Phys. B **284**, 729 (1987).

Bibliographie

- [ABK87] Ignatios Antoniadis, C. P. Bachas, and C. Kounnas. Four-dimensional superstrings. *Nucl. Phys.*, B289 :87, 1987.
- [ABKW86] Ignatios Antoniadis, Constantin Bachas, C. Kounnas, and Paul Windey. Supersymmetry among free fermions and superstrings. *Phys. Lett.*, B171 :51, 1986.
- [ADK99] Ignatios Antoniadis, J. Pierre Derendinger, and Costas Kounnas. Non-perturbative temperature instabilities in $n = 4$ strings. *Nucl. Phys.*, B551 :41–77, 1999, hep-th/9902032.
- [AEHN89] Ignatios Antoniadis, John R. Ellis, J. S. Hagelin, and Dimitri V. Nanopoulos. The Flipped $SU(5) \times U(1)$ String Model Revamped. *Phys. Lett.*, B231 :65, 1989.
- [AGW84] Luis Alvarez-Gaume and Edward Witten. Gravitational Anomalies. *Nucl. Phys.*, B234 :269, 1984.
- [AK87] Ignatios Antoniadis and C. Kounnas. The Dilaton Classical Solution And The Supersymmetry Breaking Evolution In An Expanding Universe. *Nucl. Phys.*, B284 :729, 1987.
- [AKPT08] C. Angelantonj, C. Kounnas, H. Partouche, and N. Toumbas. Resolution of Hagedorn singularity in superstrings with gravito-magnetic fluxes. 2008, 0808.1357.
- [ALR90] Ignatios Antoniadis, G. K. Leontaris, and J. Rizos. A Three generation $SU(4) \times O(4)$ string model. *Phys. Lett.*, B245 :161–168, 1990.
- [AW88] Joseph J. Atick and Edward Witten. The Hagedorn Transition and the Number of Degrees of Freedom of String Theory. *Nucl. Phys.*, B310 :291–334, 1988.
- [BBS07] K. Becker, M. Becker, and J. H. Schwarz. *String theory and M-theory : A modern introduction*. Cambridge, UK : Cambridge Univ. Pr., 2007.
- [BD88] Tom Banks and Lance J. Dixon. Constraints on String Vacua with Space-Time Supersymmetry. *Nucl. Phys.*, B307 :93–108, 1988.
- [Bil01] Adel Bilal. Introduction to supersymmetry. 2001, hep-th/0101055.
- [BPZ84] A. A. Belavin, Alexander M. Polyakov, and A. B. Zamolodchikov. Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory. *Nucl. Phys.*, B241 :333–380, 1984.
- [BV89] Robert H. Brandenberger and C. Vafa. Superstrings in the Early Universe. *Nucl. Phys.*, B316 :391, 1989.
- [C⁺78] E. Cremmer et al. SuperHiggs Effect in Supergravity with General Scalar Interactions. *Phys. Lett.*, B79 :231, 1978.
- [CFKN83] E. Cremmer, S. Ferrara, C. Kounnas, and Dimitri V. Nanopoulos. Naturally Vanishing Cosmological Constant in $N=1$ Supergravity. *Phys. Lett.*, B133 :61, 1983.
- [CFMP85] Curtis G. Callan, D. Friedan, E. J. Martinec, and M. J. Perry. Strings in Background Fields. *Nucl. Phys.*, B262 :593, 1985.

- [CHL95] Shyamoli Chaudhuri, George Hockney, and Joseph D. Lykken. Maximally supersymmetric string theories in $D < 10$. *Phys. Rev. Lett.*, 75 :2264–2267, 1995, hep-th/9505054.
- [CHSW85] P. Candelas, Gary T. Horowitz, Andrew Strominger, and Edward Witten. Vacuum Configurations for Superstrings. *Nucl. Phys.*, B258 :46–74, 1985.
- [CJ79] E. Cremmer and B. Julia. The SO(8) Supergravity. *Nucl. Phys.*, B159 :141, 1979.
- [CJFKR08] Tristan Catelin-Jullien, Alon E. Faraggi, Costas Kounnas, and John Rizos. Spinor-Vector Duality in Heterotic SUSY Vacua. 2008, 0807.4084.
- [CJKPT08a] Tristan Catelin-Jullien, Costas Kounnas, Hervé Partouche, and Nicolaos Toumbas. Thermal and quantum superstring cosmologies. *Fortsch. Phys.*, 56 :792–799, 2008, arXiv :0803.2674 [hep-th].
- [CJKPT08b] Tristan Catelin-Jullien, Costas Kounnas, Hervé Partouche, and Nicolaos Toumbas. Thermal/quantum effects and induced superstring cosmologies. *Nucl. Phys.*, B797 :137–178, 2008, arXiv :0710.3895 [hep-th].
- [CJKPT09] Tristan Catelin-Jullien, Costas Kounnas, Herve Partouche, and Nicolaos Toumbas. Induced superstring cosmologies and moduli stabilization. 2009, 0901.0259.
- [CJS78] E. Cremmer, B. Julia, and Joel Scherk. Supergravity theory in 11 dimensions. *Phys. Lett.*, B76 :409–412, 1978.
- [CLO88] Mirjam Cvetič, Jan Louis, and Burt A. Ovrut. A String Calculation of the Kahler Potentials for Moduli of $Z(N)$ Orbifolds. *Phys. Lett.*, B206 :227, 1988.
- [CP95] Shyamoli Chaudhuri and Joseph Polchinski. Moduli space of CHL strings. *Phys. Rev.*, D52 :7168–7173, 1995, hep-th/9506048.
- [DFMS97] P. Di Francesco, P. Mathieu, and D. Senechal. *Conformal field theory*. New York, USA : Springer (1997) 890 p, 1997.
- [DHVW85] Lance J. Dixon, Jeffrey A. Harvey, C. Vafa, and Edward Witten. Strings on orbifolds. *Nucl. Phys.*, B261 :678–686, 1985.
- [DHVW86] Lance J. Dixon, Jeffrey A. Harvey, C. Vafa, and Edward Witten. Strings on orbifolds. 2. *Nucl. Phys.*, B274 :285–314, 1986.
- [DJK08] Yacine Dolivet, Bernard Julia, and Costas Kounnas. Magic $N=2$ supergravities from hyper-free superstrings. *JHEP*, 02 :097, 2008, 0712.2867.
- [DKL91] Lance J. Dixon, Vadim Kaplunovsky, and Jan Louis. Moduli dependence of string loop corrections to gauge coupling constants. *Nucl. Phys.*, B355 :649–688, 1991.
- [DP88] Eric D’Hoker and D. H. Phong. The Geometry of String Perturbation Theory. *Rev. Mod. Phys.*, 60 :917, 1988.
- [DSW87] Michael Dine, N. Seiberg, and Edward Witten. Fayet-Iliopoulos Terms in String Theory. *Nucl. Phys.*, B289 :589, 1987.
- [dWShD87] B. de Wit, D. J. Smit, and N. D. Hari Dass. Residual Supersymmetry of Compactified $D=10$ Supergravity. *Nucl. Phys.*, B283 :165, 1987.
- [EKN84a] John R. Ellis, C. Kounnas, and Dimitri V. Nanopoulos. No Scale Supersymmetric Guts. *Nucl. Phys.*, B247 :373–395, 1984.
- [EKN84b] John R. Ellis, C. Kounnas, and Dimitri V. Nanopoulos. Phenomenological SU(1,1) Supergravity. *Nucl. Phys.*, B241 :406, 1984.
- [ELNT84] John R. Ellis, A. B. Lahanas, Dimitri V. Nanopoulos, and K. Tamvakis. No-Scale Supersymmetric Standard Model. *Phys. Lett.*, B134 :429, 1984.

- [Far92] Alon E. Faraggi. A New standard - like model in the four-dimensional free fermionic string formulation. *Phys. Lett.*, B278 :131–139, 1992.
- [Far94] Alon E. Faraggi. $Z(2) \times Z(2)$ Orbifold compactification as the origin of realistic free fermionic models. *Phys. Lett.*, B326 :62–68, 1994, hep-ph/9311312.
- [FGKP87a] Sergio Ferrara, Luciano Girardello, Costas Kounnas, and Massimo Porrati. Effective Lagrangians For Four-Dimensional Superstrings. *Phys. Lett.*, B192 :368, 1987.
- [FGKP87b] Sergio Ferrara, Luciano Girardello, Costas Kounnas, and Massimo Porrati. The Effective Interactions Of Chiral Families In Four-Dimensional Superstrings. *Phys. Lett.*, B194 :358, 1987.
- [FK89] Sergio Ferrara and Costas Kounnas. Extended Supersymmetry in Four-dimensional Type II Strings. *Nucl. Phys.*, B328 :406, 1989.
- [FKNR04] A. E. Faraggi, C. Kounnas, S. E. M. Nooij, and J. Rizos. Classification of the chiral $Z(2) \times Z(2)$ fermionic models in the heterotic superstring. *Nucl. Phys.*, B695 :41–72, 2004, hep-th/0403058.
- [FKP86] Sergio Ferrara, Costas Kounnas, and Massimo Porrati. General Dimensional Reduction of Ten-Dimensional Supergravity and Superstring. *Phys. Lett.*, B181 :263, 1986.
- [FKPZ87] Sergio Ferrara, Costas Kounnas, Massimo Porrati, and Fabio Zwirner. Effective Superhiggs And StrM2 From Four-Dimensional Strings. *Phys. Lett.*, B194 :366, 1987.
- [FKPZ89] Sergio Ferrara, Costas Kounnas, Massimo Porrati, and Fabio Zwirner. Superstrings with Spontaneously Broken Supersymmetry and their Effective Theories. *Nucl. Phys.*, B318 :75, 1989.
- [FKR07a] Alon E. Faraggi, Costas Kounnas, and John Rizos. Chiral family classification of fermionic $Z(2) \times Z(2)$ heterotic orbifold models. *Phys. Lett.*, B648 :84–89, 2007, hep-th/0606144.
- [FKR07b] Alon E. Faraggi, Costas Kounnas, and John Rizos. Spinor - vector duality in fermionic $Z(2) \times Z(2)$ heterotic orbifold models. *Nucl. Phys.*, B774 :208–231, 2007, hep-th/0611251.
- [FKR08] Alon E. Faraggi, Costas Kounnas, and John Rizos. Spinor-Vector Duality in $N=2$ Heterotic String Vacua. *Nucl. Phys.*, B799 :19–33, 2008, 0712.0747.
- [FKZ94] Sergio Ferrara, Costas Kounnas, and Fabio Zwirner. Mass formulae and natural hierarchy in string effective supergravities. *Nucl. Phys.*, B429 :589–625, 1994, hep-th/9405188.
- [FMS86] Daniel Friedan, Emil J. Martinec, and Stephen H. Shenker. Conformal invariance, supersymmetry and string theory. *Nucl. Phys.*, B271 :93, 1986.
- [FMT07] Alon E. Faraggi, Elisa Manno, and Cristina Timirgaziu. Minimal standard heterotic string models. *Eur. Phys. J.*, C50 :701–710, 2007, hep-th/0610118.
- [FNY90] Alon E. Faraggi, Dimitri V. Nanopoulos, and Ka-jia Yuan. A Standard Like Model in the 4D Free Fermionic String Formulation. *Nucl. Phys.*, B335 :347, 1990.
- [FP89] Sergio Ferrara and Massimo Porrati. The Manifolds Of Scalar Background Fields In $Z(N)$ Orbifolds. *Phys. Lett.*, B216 :289, 1989.
- [FSS00] L. Frappat, A. Sciarrino, and P. Sorba. *Dictionary On Lie Algebras and Superalgebras*. Academic Press, 2000.
- [Gep88] Doron Gepner. Space-Time Supersymmetry in Compactified String Theory and Superconformal Models. *Nucl. Phys.*, B296 :757, 1988.
- [GH77] G. W. Gibbons and S. W. Hawking. Cosmological Event Horizons, Thermodynamics, and Particle Creation. *Phys. Rev.*, D15 :2738–2751, 1977.

- [GHMR85] David J. Gross, Jeffrey A. Harvey, Emil J. Martinec, and Ryan Rohm. Heterotic String Theory. 1. The Free Heterotic String. *Nucl. Phys.*, B256 :253, 1985.
- [GHMR86] David J. Gross, Jeffrey A. Harvey, Emil J. Martinec, and Ryan Rohm. Heterotic String Theory. 2. The Interacting Heterotic String. *Nucl. Phys.*, B267 :75, 1986.
- [Gin87] Paul H. Ginsparg. Comment on Toroidal Compactification of Heterotic Superstrings. *Phys. Rev.*, D35 :648, 1987.
- [Gin88] Paul H. Ginsparg. Applied conformal field theory. 1988, hep-th/9108028.
- [GKR99] A. Gregori, C. Kounnas, and J. Rizos. Classification of the $N = 2$, $Z(2) \times Z(2)$ -symmetric type II orbifolds and their type II asymmetric duals. *Nucl. Phys.*, B549 :16–62, 1999, hep-th/9901123.
- [GP90] Brian R. Greene and M. R. Plesser. Duality in Calabi-Yau Moduli Space. *Nucl. Phys.*, B338 :15–37, 1990.
- [GPR94] Amit Giveon, Massimo Porrati, and Eliezer Rabinovici. Target space duality in string theory. *Phys. Rept.*, 244 :77–202, 1994, hep-th/9401139.
- [Gra06] Mariana Grana. Flux compactifications in string theory : A comprehensive review. *Phys. Rept.*, 423 :91–158, 2006, hep-th/0509003.
- [Gre96] Brian R. Greene. String theory on Calabi-Yau manifolds. 1996, hep-th/9702155.
- [GSW87a] Michael B. Green, J. H. Schwarz, and Edward Witten. *Superstring Theory. Vol. 1 : Introduction*. Cambridge University Press (Cambridge Monographs On Mathematical Physics), 1987.
- [GSW87b] Michael B. Green, J. H. Schwarz, and Edward Witten. *Superstring Theory. Vol. 2 : Loop Amplitudes, Anomalies And Phenomenology*. Cambridge University Press (Cambridge Monographs On Mathematical Physics), 1987.
- [Haw77] S. W. Hawking. Zeta Function Regularization of Path Integrals in Curved Space-Time. *Commun. Math. Phys.*, 55 :133, 1977.
- [HH83] J. B. Hartle and S. W. Hawking. Wave Function of the Universe. *Phys. Rev.*, D28 :2960–2975, 1983.
- [Kir97] Elias Kiritsis. Introduction to superstring theory. 1997, hep-th/9709062.
- [KK97] Elias Kiritsis and Costas Kounnas. Perturbative and non-perturbative partial supersymmetry breaking : $N = 4 \rightarrow n = 2 \rightarrow n = 1$. *Nucl. Phys.*, B503 :117–156, 1997, hep-th/9703059.
- [KKLT03] Shamit Kachru, Renata Kallosh, Andrei Linde, and Sandip P. Trivedi. De Sitter vacua in string theory. *Phys. Rev.*, D68 :046005, 2003, hep-th/0301240.
- [KLNQ82] C. Kounnas, A. B. Lahanas, Dimitri V. Nanopoulos, and M. Quiros. Supergravity Induced Radiative $SU(2) \times U(1)$ Breaking with Light Top Quark and Stable Minimum. *Phys. Lett.*, B132 :95, 1982.
- [KLNQ84] C. Kounnas, A. B. Lahanas, Dimitri V. Nanopoulos, and M. Quiros. Low-Energy Behavior of Realistic Locally Supersymmetric Grand Unified Theories. *Nucl. Phys.*, B236 :438, 1984.
- [KLT87] Hikaru Kawai, David C. Lewellen, and S. H. Henry Tye. Construction of fermionic string models in four- dimensions. *Nucl. Phys.*, B288 :1, 1987.
- [Kog87] Ya. I. Kogan. Vortices on the World Sheet and String’s Critical Dynamics. *JETP Lett.*, 45 :709–712, 1987.

- [KP88] Costas Kounnas and Massimo Porrati. Spontaneous Supersymmetry Breaking in String Theory. *Nucl. Phys.*, B310 :355, 1988.
- [KP08a] Costas Kounnas and Hervé Partouche. Inflationary de Sitter solutions from superstrings. *Nucl. Phys.*, B795 :334–360, 2008, 0706.0728.
- [KP08b] Costas Kounnas and Hervé Partouche. Instanton transition in thermal and moduli deformed de Sitter cosmology. *Nucl. Phys.*, B793 :131–159, 2008, 0705.3206.
- [KR90] Costas Kounnas and Bruno Rostand. Coordinate dependent compactifications and discrete symmetries. *Nucl. Phys.*, B341 :641–665, 1990.
- [LLS87] W. Lerche, D. Lust, and A. N. Schellekens. Chiral Four-Dimensional Heterotic Strings from Selfdual Lattices. *Nucl. Phys.*, B287 :477, 1987.
- [Mic08] Yann Michel. *Aspects des trous noirs extrêmes en supergravité et théorie des cordes*. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie, 2008.
- [MN01] Juan Martin Maldacena and Carlos Nunez. Supergravity description of field theories on curved manifolds and a no go theorem. *Int. J. Mod. Phys.*, A16 :822–855, 2001, hep-th/0007018.
- [MT87] David Mitchell and Neil Turok. Statistical Properties of Cosmic Strings. *Nucl. Phys.*, B294 :1138, 1987.
- [Nah78] W. Nahm. Supersymmetries and their representations. *Nucl. Phys.*, B135 :149, 1978.
- [Nar86] K. S. Narain. New Heterotic String Theories in Uncompactified Dimensions < 10 . *Phys. Lett.*, B169 :41, 1986.
- [Noo04] S. E. M. Nooij. Classification of the chiral $Z(2) \times Z(2)$ heterotic string models. 2004, hep-th/0603035.
- [NRSRV08] Hans Peter Nilles, Saul Ramos-Sanchez, Michael Ratz, and Patrick K. S. Vaudrevange. From strings to the MSSM. 2008, 0806.3905.
- [NSV87] K. S. Narain, M. H. Sarmadi, and C. Vafa. Asymmetric Orbifolds. *Nucl. Phys.*, B288 :551, 1987.
- [NSW87] K. S. Narain, M. H. Sarmadi, and Edward Witten. A Note on Toroidal Compactification of Heterotic String Theory. *Nucl. Phys.*, B279 :369, 1987.
- [P⁺99] S. Perlmutter et al. Measurements of Omega and Lambda from 42 High-Redshift Supernovae. *Astrophys. J.*, 517 :565–586, 1999, astro-ph/9812133.
- [Pav95] Ilarion Pavel. *Une Possible Origine Dynamique De La Hiérarchie De Masse*. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie, 1995.
- [Pol98a] J. Polchinski. *String theory. Vol. 1 : An introduction to the bosonic string*. Cambridge, UK : Univ. Pr. (1998) 402 p, 1998.
- [Pol98b] J. Polchinski. *String theory. Vol. 2 : Superstring theory and beyond*. Cambridge, UK : Univ. Pr. (1998) 531 p, 1998.
- [PS95] Michael Edward Peskin and Daniel V. Schroeder. *An Introduction to quantum field theory*. Addison-Wesley, 1995.
- [R⁺98] Adam G. Riess et al. Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant. *Astron. J.*, 116 :1009–1038, 1998, astro-ph/9805201.
- [Roh84] Ryan Rohm. Spontaneous Supersymmetry Breaking in Supersymmetric String Theories. *Nucl. Phys.*, B237 :553, 1984.

- [Sat87] B. Sathiapalan. Vortices on the String World Sheet and Constraints on Toral Compactification. *Phys. Rev.*, D35 :3277, 1987.
- [Ser94] J.P. Serre. *Cours d'arithmétique, 4ème édition*. Presses Universitaires de France, 1994.
- [SS74] Joel Scherk and John H. Schwarz. Dual models for nonhadrons. *Nucl. Phys.*, B81 :118–144, 1974.
- [SS79a] Joel Scherk and John H. Schwarz. How to get masses from extra dimensions. *Nucl. Phys.*, B153 :61–88, 1979.
- [SS79b] Joel Scherk and John H. Schwarz. Spontaneous breaking of supersymmetry through dimensional reduction. *Phys. Lett.*, B82 :60, 1979.
- [ST05] Saswat Sarangi and S. H. Henry Tye. The boundedness of Euclidean gravity and the wavefunction of the universe. 2005, hep-th/0505104.
- [SV96] Andrew Strominger and Cumrun Vafa. Microscopic Origin of the Bekenstein-Hawking Entropy. *Phys. Lett.*, B379 :99–104, 1996, hep-th/9601029.
- [SYZ96] Andrew Strominger, Shing-Tung Yau, and Eric Zaslow. Mirror symmetry is T-duality. *Nucl. Phys.*, B479 :243–259, 1996, hep-th/9606040.
- [Wit85] Edward Witten. Dimensional Reduction of Superstring Models. *Phys. Lett.*, B155 :151, 1985.