



HAL
open science

Résurgence des systèmes différentiels linéaires et calcul des matrices de Stokes

Pascal Rémy

► **To cite this version:**

Pascal Rémy. Résurgence des systèmes différentiels linéaires et calcul des matrices de Stokes. Mathématiques [math]. Université d'Angers, 2007. Français. NNT: . tel-00351882

HAL Id: tel-00351882

<https://theses.hal.science/tel-00351882>

Submitted on 12 Jan 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Résurgence des systèmes différentiels linéaires et calcul des matrices de Stokes

THESE DE DOCTORAT

Spécialité : Mathématiques

ECOLE DOCTORALE D'ANGERS

Présentée et soutenue publiquement
le 19 septembre 2007 à 10h15
par Pascal REMY
devant le jury ci-dessous :

Boele BRAAKSMA,

Rapporteur, Professeur émérite, University of Groningen, Pays-Bas

Eric DELABAERE,

Examinateur, Professeur, Université d'Angers

Jean-Pierre RAMIS,

Rapporteur, Professeur émérite, Université Paul Sabatier, Toulouse

Membre de l'Institut (Académie des Sciences)

Bruno SALVY,

Examinateur, Directeur de Recherche, INRIA, Rocquencourt

Jacques-Arthur WEIL,

Examinateur, Maître de Conférence, Université de Limoges

Directeur de thèse :

Michèle LODAY-RICHAUD, Professeur, Université d'Angers

LAREMA, U.M.R. 6093 associée au CNRS
2 Bd Lavoisier, 49045 Angers cedex 01, France

REMERCIEMENTS

Mes premiers remerciements vont tout naturellement à mon « maître », Michèle Loday-Richaud, qui a accepté de m'encadrer pendant ces cinq années de thèse et qui m'a fait partager sa passion pour la recherche. Je tiens également à la remercier pour sa disponibilité, sa patience et ses conseils éclairés qui m'ont aidé à avancer dans mon travail.

Je souhaite également remercier très chaleureusement Boele Braaksma et Jean-Pierre Ramis qui m'ont fait l'honneur d'accepter d'être les rapporteurs de cette thèse.

J'adresse aussi mes plus vifs remerciements à Eric Delabaere, à Bruno Salvy et à Jacques-Arthur Weil qui ont accepté de faire partie de mon jury.

Je remercie aussi le Département de Mathématiques de l'Université d'Angers pour les conditions matérielles dont j'ai pu bénéficier durant mes deux premières années de thèse. Je remercie en particulier notre bibliothécaire Françoise Bock pour sa grande disponibilité.

Je tiens également à remercier les membres de l'Université de Limoges et, en particulier, Moulay Barkatou et Jacques-Arthur Weil, d'avoir accepté de me recevoir à plusieurs reprises. Leurs conseils m'ont été très utiles, notamment pour l'utilisation du logiciel ISOLDE qui m'a permis de traiter les différents exemples numériques.

Pendant toute la durée de ma thèse, j'ai toujours pu compter sur le soutien sans faille de ma famille, y compris (et surtout) lors de mes moments de doutes et d'hésitations. Je tiens à les remercier ici du fond du coeur.

Enfin, je tiens à remercier mes collègues de travail et les quelques thésards du LA-REMA que j'ai connus lors de mes premières années de thèse. Je pense en particulier à Jean-Marc Rasoamanana avec qui j'ai partagé de grands moments mathématiques, notamment en DEA et pendant la préparation à l'Agrégation.

Table des matières

Table des matières	v
Introduction	ix
Notations principales	xiii
1 Préliminaires	1
1.1 Sommation des séries divergentes	1
1.1.1 Séries formelles de type Gevrey	1
1.1.2 Transformation de Borel formelle et transformation de Laplace	3
1.1.3 Questions de prolongements analytiques	6
1.1.4 Séries formelles résurgentes	8
1.1.5 Notes sur la multisommabilité	9
1.2 Rappels sur la théorie des fonctions résurgentes	12
1.2.1 Transformations de Borel et de Laplace	12
1.2.2 Extension de la transformation de Borel formelle et application à la sommation des séries divergentes	18
1.2.3 Fonctions résurgentes	22
1.3 Solutions des systèmes différentiels linéaires méromorphes à l'origine	25
1.3.1 Irrégularité des systèmes	25
1.3.2 Phénomène de Stokes	30
1.3.3 Position du problème	32
1.3.4 Un algorithme de normalisation des solutions formelles	35
1.A Appendice 1.A. Un algorithme de calcul	45
I Systèmes de niveau unique 1	47
Introduction	49
2 Etude théorique	51
2.1 Résurgence-sommabilité de la série formelle \hat{f} (plan de Laplace)	53
2.1.1 Cas où la monodromie formelle est diagonale (L diagonale)	55
2.1.2 Cas général (L sous forme de Jordan)	67
2.2 Description des singularités de la transformée de Borel \tilde{f} (plan de Borel)	72

2.2.1	Séries formelles résurgentes de la classe de Nilsson	73
2.2.2	Cas où L est diagonale	79
2.2.3	Cas général	83
2.3	Isomorphisme linéaire liant coefficients de résurgence et multiplicateurs de Stokes	89
2.3.1	Une égalité fondamentale	89
2.3.2	Cas où L est diagonale	93
2.3.3	Cas général	101
2.A	Appendice 2.A. Singularités de \tilde{f} et microsolutions (ou majeurs)	109
2.A.1	Rappels sur les microfonctions	110
2.A.2	Equations de type exponentiel et microsolutions	112
2.A.3	Application à la description des singularités de \tilde{f}	113
2.B	Appendice 2.B. Démonstration du lemme de Grönwall	116
3	Calcul effectif des multiplicateurs de Stokes	119
3.1	Cas où L est diagonale	120
3.1.1	Transformée de Borel de \hat{f} et système à points singuliers réguliers	121
3.1.2	Multiplicateurs de Stokes et matrices de connexion	129
3.1.3	Calcul effectif des matrices de connexion par prolongements analytiques successifs	132
3.1.4	Evaluation de l'erreur dans le calcul des matrices de connexion .	134
3.1.5	Exemple 1 (une seule singularité et monodromie formelle non triviale)	153
3.1.6	Exemple 2 (une seule singularité et monodromie formelle triviale)	166
3.1.7	Exemple 3 (deux singularités alignées et monodromie formelle non triviale)	172
3.2	Cas général	181
3.2.1	Détermination du système à points singuliers réguliers associé à \tilde{f}	182
3.2.2	Généralisation du contrôle d'erreur	185
3.2.3	Exemple	187
II	Systèmes de niveau unique $r \geq 2$	197
	Introduction	199
4	Etude théorique	201
4.1	Système r -réduit $[\mathbf{A}]$ associé à $[A]$	202
4.1.1	Rappels sur la réduction du rang	202
4.1.2	Système r -réduit $[\mathbf{A}]$	203
4.2	Résurgence-sommabilité de \hat{f}	205
4.2.1	Perturbation régulière	206
4.2.2	Prolongeabilité sans fin et croissance exponentielle	207
4.3	Description des singularités de \tilde{f}	215
4.3.1	Cas où la singularité ω est de front monomial	216

4.3.2	Cas où la singularité ω n'est pas de front monomial	219
4.4	Calcul des multiplicateurs de Stokes	231
4.4.1	Matrices de Stokes et réduction du rang	231
4.4.2	Détermination de l'isomorphisme linéaire	234
4.4.3	Relations liant multiplicateurs de Stokes et coefficients de résurgence en une singularité de front monomial	237
4.4.4	Relations liant multiplicateurs de Stokes et quasi-coefficients de résurgence en une singularité de front non monomial	244
4.A	Appendice 4.A. Quelques précisions sur les majeurs des exponentielles $\exp(q)$ avec $q \in t^{-1/r}\mathbb{C}[t^{-1/r}]$ et $\deg(q) < r$	249
4.A.1	Quelques exemples	250
4.A.2	Rappels sur les fonctions hypergéométriques	252
4.A.3	Majeurs et fonctions hypergéométriques	254
4.A.4	Etude des développements trans-asymptotiques à l'origine	258
5	Calcul effectif des multiplicateurs de Stokes	261
5.1	Détermination du système r -réduit dans le cas rationnel	262
5.2	Contrôle d'erreur dans l'évaluation de $\tilde{\mathbf{f}}$	266
5.3	Système différentiel linéaire associé à $\tilde{\mathbf{f}}$	273
5.3.1	Détermination du système associé à $\tilde{\mathbf{f}}$	273
5.3.2	Etude du système en un point ordinaire	277
5.3.3	Etude en un point singulier non nul porté par un polynôme réduit à un monôme (singularité de front monomial)	280
5.3.4	Etude en un point singulier non nul porté par un polynôme non réduit à un monôme (singularité de front non monomial)	282
5.4	Calcul effectif des multiplicateurs de Stokes par prolongements analytiques successifs	287
5.5	Exemples	290
5.5.1	Exemple 1 (singularité de front monomial)	290
5.5.2	Exemple 2 (singularité de front non monomial)	301
III	Systèmes de niveaux simultanés (1, 2)	313
	Introduction	315
6	Multi-résurgence de la série formelle \hat{f}	317
6.1	Résurgence de la série formelle \hat{f}	318
6.1.1	Perturbation régulière	320
6.1.2	Quelques lemmes préparatoires	321
6.1.3	Construction de séries majorantes	329
6.1.4	Démonstration de la résurgence de \hat{f}	336
6.1.5	Description des singularités de \hat{f}	339
6.2	Résurgence de la série formelle $\hat{\mathbf{f}}$	343
6.2.1	Détermination du système 2-réduit $[\mathbf{A}]$	343

6.2.2	Remarques sur la transformée de Borel de \hat{f}	344
6.2.3	Démonstration de la résurgence de \hat{f}	344
6.2.4	Description des singularités de \tilde{f}	348
7	Multiplicateurs de Stokes du premier niveau	353
7.1	Découplage des niveaux	354
7.2	Calcul théorique des multiplicateurs de Stokes du premier niveau	357
7.3	Calcul effectif des multiplicateurs de Stokes du premier niveau	363
7.3.1	Système différentiel linéaire associé à \tilde{f}	365
7.3.2	Contrôle d'erreur dans l'évaluation de \tilde{f}	369
7.3.3	Calcul par prolongements analytiques successifs	372
7.4	Exemple	374
A	Simplification de la méthode du calcul effectif des multiplicateurs de Stokes	385
	Bibliographie	391

Introduction

Cette thèse est une contribution à l'étude du phénomène de Stokes des systèmes différentiels linéaires méromorphes à l'origine 0 de \mathbb{C} et de dimension $n \geq 2$, c'est-à-dire, de la forme

$$[A] \quad x^{r+1} \frac{dY}{dx} = A(x)Y$$

où r est un nombre entier positif, Y le vecteur inconnu et où $A(x)$ est une matrice carrée de dimension n à coefficients analytiques à l'origine : $A(x) \in M_n(\mathbb{C}\{x\})$.

Un tel système admet une solution fondamentale formelle $\widehat{Y}(x)$ de la forme

$$\widehat{Y}(x) = \widehat{F}(x)x^L e^{Q(1/x)}$$

où $\widehat{F}(x)$ est une matrice inversible à coefficients séries méromorphes formelles en x , L est une matrice constante complexe et $Q(\frac{1}{x})$ une matrice diagonale de polynômes en une racine $\frac{1}{t} = x^{-1/\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}^*$, de la variable x sans terme constant ([BJL79-1]).

La classification méromorphe des systèmes différentiels linéaires est plus complexe. Elle se ramène, à quotient près, à l'étude du phénomène de Stokes de $\widehat{F}(x)$ ou phénomène de discontinuité des solutions asymptotiques. Dans les années '70 Y. Sibuya ([Si76], [Si90]) et B. Malgrange ([Mal79]) en ont donné une caractérisation par un ensemble de cohomologie non abélienne. Plus tard, des cocycles particuliers ont pu être exhibés pour caractériser chaque classe de cohomologie ([Bal80], [BJL79-2], [L-R94]), ces deux derniers, appelés *cocycles de Stokes*, coïncidant avec les cocycles obtenus par les théories de sommation ([MR89], [MR91], [MalR92]) ou de résurgence ([E81-1], [E85]); leurs composantes fournissent un système complet d'invariants méromorphes sous la forme d'un système privilégié de *matrices de Stokes*. Ce sont de ces matrices de Stokes-là et d'elles seules dont il est question dans la suite. Leurs coefficients pertinents (un certain nombre d'entre eux sont nécessairement égaux à 0 ou à 1) sont appelés *multiplicateurs de Stokes*.

Parallèlement à une étude théorique et quelques calculs exacts, diverses tentatives ont été menées en vue du calcul numérique effectif de ces matrices de Stokes. Les méthodes se classent en deux groupes, celles qui opèrent directement dans le plan de la variable initiale (ou plan de Laplace) et celles qui opèrent après transformation de Borel (*i.e.*, dans le plan de Borel). Les unes procèdent par limites de suites récurrentes, les

autres par prolongement analytique. Ont ainsi été traités, d’abord le cas des systèmes de niveau pur 1 et de dimension 2 ([JLP76-1]), puis le cas des systèmes de dimension 2 à exponentielles monomiales ([MR82]), le cas de tous les systèmes de dimension deux ([L-R90-1]), le cas des systèmes de niveau pur égal à un sous une condition forte de genericité ([LS97]). Mentionnons aussi des travaux de l’école néerlandaise (B. J. L. Braaksma, G. K. Immink) ou de l’école anglo-saxonne autour de F. W. J. Olver. Aucune de ces méthodes n’est accompagnée d’un calcul d’erreur. Or, la question de la non-nullité ou de la non-égalité des multiplicateurs de Stokes est importante dans de nombreuses questions (théorie de Galois différentielle, équivalence méromorphe, etc. . .). Une évaluation du terme d’erreur permettrait d’y répondre par l’affirmative.

Notre principale contribution dans ce mémoire est la construction d’un algorithme de calcul numérique des multiplicateurs de Stokes avec évaluation de l’erreur. La méthode s’applique à tous les systèmes de niveau unique r quelconque. Nous l’avons étendue au calcul des multiplicateurs de Stokes de niveau 1 des systèmes de niveaux multiples (1,2). Son extension au calcul des multiplicateurs de Stokes de plus bas niveau des systèmes de niveaux multiples quelconques (r_1, \dots, r_s) va de soi. Son extension au calcul des multiplicateurs de Stokes des niveaux supérieurs se heurte au problème créé par la divergence à l’origine de la transformée de Borel, mais nous restons confiants dans une possible généralisation à ce cas (voir par exemple [vdH05]).

Dans chaque cas étudié nous faisons précéder l’étude algorithmique d’une étude théorique «résurgente» ayant pour but de mettre en relation le plan de Laplace et le plan de Borel. Ainsi, après avoir développé la méthode de J. Écalé par perturbation et séries majorantes pour établir la résurgence-sommabilité des séries \widehat{F} nous étudions les singularités induites dans le plan de Borel et nous précisons par des formules explicites la correspondance entre multiplicateurs de Stokes (dans le plan de Laplace) et coefficients de résurgence (dans le plan de Borel). Il suffit alors de travailler dans l’un ou l’autre des deux plans pour avoir une totale information sur l’un ou l’autre des deux points de vue : multiplicateurs de Stokes ou coefficients de résurgence qui tous deux caractérisent la classe méromorphe du système étudié.

Dans la partie algorithmique, pour une complète effectivité, nous supposons que la matrice $A(x)$ est à coefficients rationnels.

Nous avons choisi de travailler dans le plan de Borel en calculant les coefficients de résurgence. Ceux-ci sont obtenus par prolongement analytique dans le plan de Borel en contournant les singularités par la droite. Les dérivations étrangères sont définies comme une moyenne à partir de tous les prolongements possibles. On sait que les matrices de Stokes sont reliées aux dérivations étrangères via un logarithme. Nous aurions donc pu envisager de calculer directement les dérivations étrangères dans le plan de Borel et de revenir aux matrices de Stokes via un logarithme (de matrice). Une telle méthode est plus lourde que celle que nous proposons. Elle a, en outre, le désavantage de multiplier l’erreur commise par le nombre de prolongements analytiques nécessaires.

Nous construisons d’abord notre algorithme dans le cas le plus “simple”, celui des systèmes de niveau pur égal à un (les exponentielles sont de vraies exponentielles

$\exp(-a/x)$) lorsque la matrice de monodromie formelle L est diagonale ; nous ne supposons pas pour autant que les valeurs propres de L soient simples (cf. paragraphe I.3.1). Nous utilisons une «forme préparée» du système obtenue, si nécessaire, par transformation de jauge polynomiale en x et x^{-1} et changement de variable. Les équations de convolution auxquelles satisfait la transformée de Borel \tilde{F} de \hat{F} , convenablement écrites, sont des équations différentielles linéaires à points singuliers réguliers. Nous procédons par prolongement analytique de la série convergente \tilde{F} “à la Cauchy” en suivant une chaîne de boules dont les centres sont alignés sur le segment reliant l’origine 0 à la singularité étudiée. Les centres incluent les éventuels points singuliers rencontrés sur le segment. Dans la partie multiforme des solutions l’argument de la variable est choisi de façon à passer par la droite des singularités. Pour évaluer l’erreur commise nous nous appuyons sur un résultat de J. van der Hoeven ([vdH99]) concernant le prolongement analytique d’une série en un point ordinaire. Aux points singuliers, plutôt que d’utiliser l’algorithme proposé par J. van der Hoeven dans ce cas ([vdH01]), nous adaptons directement l’algorithme précédent. Dans cette procédure, un certain nombre de choix reste libre : nombre et taille des boules, point choisi pour la comparaison d’une boule à la suivante, etc. . . . Nous présentons trois exemples dans lesquels nous faisons varier les paramètres libres et nous observons les effets de leurs variations.

Le cas des systèmes de niveau pur égal à un avec matrice de monodromie formelle L non diagonalisable (cf. paragraphe I.3.2) est analogue mais nous devons alors travailler simultanément avec des blocs de colonnes correspondant aux blocs de Jordan de la matrice L .

Les systèmes de niveau pur $r \geq 2$ sont passibles d’un traitement analogue mais au prix de fortes complications. Nous avons choisi d’éviter l’utilisation de la transformation de Borel d’ordre r qui conduit à des équations de convolution plus difficiles à gérer. Nous avons préféré nous ramener au niveau 1 via la technique de réduction du rang. Le prix à payer est une augmentation de la dimension des systèmes d’un facteur r . Les singularités intermédiaires dans le plan de Borel sont maintenant, en général, des singularités essentielles (cf. paragraphe II.4.3) et nous choisissons une chaîne de boules qui les évitent par la droite. Nous évaluons l’erreur de façon analogue au cas précédent et nous expérimentons à nouveau la méthode sur des exemples.

Nous terminons par l’étude des systèmes de niveaux multiples $(1, 2)$. Nous montrons comment l’étude et l’algorithme précédents peuvent être étendus aux singularités de niveau 1. Pour l’étude des singularités de niveau 2 nous appliquons à nouveau la technique de réduction du rang mais la transformée de Borel \tilde{F} admet maintenant une singularité à l’origine et nous n’avons pas d’estimation de l’erreur commise dans l’évaluation de \tilde{F} en un point voisin. Peut-être, les dernières techniques développées par J. van der Hoeven dans [vdH05] peuvent-elles apporter une solution.

En appendice, nous présentons quelques rappels théoriques sur la résurgence et le lemme de Grönwall appliqué à notre situation et nous donnons une version simplifiée de nos algorithmes valable dans certains cas particuliers.

Notations principales

$[A]$	système étudié	p. 33
$\widehat{Y} = \widehat{F}x^L e^Q$	solution fondamentale formelle du système $[A]$	p. 33
$L_j ; n_j ; \lambda_j$	$j^{\text{ème}}$ bloc de Jordan de la matrice L ; sa dimension ; sa valeur propre	p. 33
q_j	polynôme de la matrice Q associé à L_j	p. 34

Systèmes de niveau unique 1 et premier niveau des systèmes de niveaux (1,2)

$\widehat{f} ; \widehat{f}^{[q]}$	matrice formée des n_1 premières colonnes de \widehat{F} ; sa $q^{\text{ème}}$ colonne	p. 35
$\widetilde{f} ; \widetilde{f}^{[q]}$	transformée de Borel de \widehat{f} ; sa $q^{\text{ème}}$ colonne	p. 53
ω	singularité de \widetilde{f}	p. 72
Λ_ω	ensemble des exposants de ramification de \widetilde{f} en ω	pp. 82, 89, 341
$N_{\omega,0} ; N_{\omega,\lambda}$	degrés logarithmiques de \widetilde{f} en ω	pp. 89, 341
θ	direction anti-Stokes de $[A]$	p. 90
C_θ	matrice de Stokes associée à \widehat{Y} dans la direction θ	p. 90
$c_\theta ; c_\theta^{[q]}$	matrice formée des n_1 premières colonnes de C_θ ; sa $q^{\text{ème}}$ colonne	p. 90
$\Omega_\theta(\widehat{f})$	ensemble des singularités de \widetilde{f} sur la demi-droite $d_\theta = [0, \infty e^{i\theta}[$	p. 91

Systèmes de niveau unique $r \geq 2$ et second niveau des systèmes de niveau (1,2)

$[\mathbf{A}]$	système r -réduit de $[A]$	pp. 203-204
$\widehat{\mathbf{Y}}$	solution fondamentale formelle de $[\mathbf{A}]$ associée à $\widehat{\mathbf{Y}}$	p. 204
$\widehat{\mathbf{F}}$	série r -réduite de $\widehat{\mathbf{F}}$	p. 204
$\widehat{\mathbf{f}} ; \widehat{\mathbf{f}}^{[;q]}$	matrice formée des n_1 premières colonnes de $\widehat{\mathbf{F}}$; sa $q^{\text{ème}}$ colonne	pp. 204-205
$\widetilde{\mathbf{f}} ; \widetilde{\mathbf{f}}^{[;q]}$	transformée de Borel de $\widehat{\mathbf{f}}$; sa $q^{\text{ème}}$ colonne	p. 206
ω	singularité de $\widetilde{\mathbf{f}}$	p. 215
$Fr(\omega)$	front de ω	p. 215
Λ_ω	ensemble des exposants de ramification de $\widetilde{\mathbf{f}}$ en ω	p. 219
$N_{\omega,0} ; N_{\omega,\lambda}$	degrés logarithmiques de $\widetilde{\mathbf{f}}$ en ω	p. 219
$\theta - \frac{2k\pi}{r}$	direction anti-Stokes de $[A]$ associée à un polynôme $q_j \neq 0$	p. 232
$C_{\theta,k}$	matrice de Stokes associée à $\widehat{\mathbf{Y}}$ dans la direction $\theta - \frac{2k\pi}{r}$	p. 232
$c_{\theta,k} ; c_{\theta,k}^{[;q]}$	matrice formée des n_1 premières colonnes de $C_{\theta,k}$; sa $q^{\text{ème}}$ colonne	p. 233
θ	direction anti-Stokes de $[\mathbf{A}]$ correspondante aux $\theta - \frac{2k\pi}{r}$	p. 232
\mathbf{C}_θ	matrice de Stokes associée à $\widehat{\mathbf{Y}}$ dans la direction θ	p. 232
$\Omega_\theta(\widehat{\mathbf{f}})$	ensemble des singularités de $\widetilde{\mathbf{f}}$ sur la demi-droite $d_\theta = [0, \infty e^{i\theta}[$	p. 233

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce premier chapitre, nous introduisons les divers outils, notations et résultats qui nous serviront tout au long de cette thèse. Les trois paragraphes qui suivent sont dans une large mesure indépendants.

1.1 Sommation des séries divergentes

Nous rappelons ici brièvement la théorie de la (multi)sommation des séries divergentes. Nous introduisons en particulier les notations et résultats dont nous nous servons tout au long de cette thèse. Pour plus de détails, nous renvoyons par exemple à [Mal95] et [MR89] pour la sommabilité et à [MR91] pour la multisommabilité, ainsi qu'aux références qui y sont citées. On pourra également voir [L-R90-2] et [Ra93] pour leurs aspects historiques et heuristiques, ainsi que [Bal00].

1.1.1 Séries formelles de type Gevrey

Définition 1.1 ([Ra84]) Une série formelle

$$\widehat{\varphi}(x) = \sum_{m \geq 0} \varphi_m x^m \in \mathbb{C}[[x]]$$

est dite *de type Gevrey de niveau* $r \in \mathbb{Q}_+^*$ si

$$\exists C > 0, \exists A > 0 \text{ tels que } \forall m \geq 0, |\varphi_m| \leq CA^m (m!)^{1/r}$$

On note $\mathbb{C}[[x]]_{1/r}$ l'ensemble de ces séries

On peut vérifier que $\mathbb{C}[[x]]_{1/r}$ est une \mathbb{C} -algèbre stable par dérivation et que l'on a les inclusions

$$\mathbb{C}\{x\} \subset \mathbb{C}[[x]]_{1/r'} \subset \mathbb{C}[[x]]_{1/r}$$

pour tout $r \leq r'$ ($\mathbb{C}\{x\}$ désigne l'ensemble des séries de rayon de convergence non nul).

Dans les deux premières parties de cette thèse (étude des systèmes de niveau unique), nous utiliserons essentiellement les séries de type Gevrey de niveau 1. Les algèbres générales $\mathbb{C}[[x]]_{1/r}$ n'interviendront que pour l'étude des systèmes à plusieurs niveaux (troisième partie).

Définition 1.2 ([Ra80]) Une fonction φ définie sur un secteur ouvert Σ de sommet 0 est dite *asymptotique au sens Gevrey de niveau r sur Σ* à une série

$$\widehat{\varphi}(x) = \sum_{m \geq 0} \varphi_m x^m$$

si, sur tout sous-secteur fermé Σ' de Σ on a :

$$\exists C > 0 \text{ tel que } \forall x \in \Sigma', \forall M \in \mathbb{N}^*, \left| \varphi(x) - \sum_{m=0}^{M-1} \varphi_m x^m \right| \leq CA^M (M!)^{1/r} |x|^M$$

En particulier, $\widehat{\varphi}(x) \in \mathbb{C}[[x]]_{1/r}$

La condition d'asymptoticité au sens Gevrey de niveau r détermine la fonction φ modulo *les fonctions plates de niveau r sur Σ , i.e.*, les fonctions ψ vérifiant une inégalité de la forme : pour tout sous-secteur fermé Σ' de Σ ,

$$\exists A, C > 0 \text{ tels que } \forall x \in \Sigma', |\psi(x)| \leq C \exp\left(-\frac{A}{|x|^r}\right)$$

Lemme 1.3 (Watson ([Wat11])) Soient Σ un secteur ouvert de sommet 0 et d'ouverture $\frac{\pi}{r}$ et φ une fonction plate de niveau r sur Σ .

Alors, $\varphi \equiv 0$ sur Σ .

Ce résultat est une conséquence du théorème de Phragmén-Lindelöf. Il s'en suit que si φ est asymptotique au sens Gevrey de niveau r à une série $\widehat{\varphi}$ sur un secteur ouvert d'ouverture strictement supérieure à $\frac{\pi}{r}$, alors la fonction φ est complètement caractérisée par la série $\widehat{\varphi}$. On pose alors les définitions suivantes :

Définition 1.4 ([MR89], [Ra80], [Ne19]) Une série $\widehat{\varphi}$ est dite *r -sommable dans la direction θ* si $\widehat{\varphi}$ est de type Gevrey de niveau r et s'il existe une fonction analytique φ asymptotique à $\widehat{\varphi}$ au sens Gevrey de niveau r sur un secteur ouvert bissecté par θ et d'ouverture strictement supérieure à $\frac{\pi}{r}$.

On note alors $\varphi = s_\theta(\widehat{\varphi})$ la *somme* de $\widehat{\varphi}$ dans la direction θ .

On note $\mathbb{C}\{x\}_{1/r;\theta}$ l'ensemble de ces séries.

Définition 1.5 Une série $\widehat{\varphi}$ est dite *r -sommable* si elle est r -sommable dans toutes les directions, excepté un nombre fini.

On note $\mathbb{C}\{x\}_{1/r}$ l'ensemble des séries r -sommables.

$\mathbb{C}\{x\}_{1/r;\theta}$ et $\mathbb{C}\{x\}_{1/r}$ sont des \mathbb{C} -algèbres différentielles.

1.1.2 Transformation de Borel formelle et transformation de Laplace

La transformation de Borel formelle est l'opérateur linéaire $\widehat{\mathcal{B}}$ de $\mathbb{C}[[x]]$ sur $\mathbb{C}[[\xi]]$ défini par

$$\widehat{\mathcal{B}} : \widehat{\varphi}(x) = \sum_{m \geq 0} \varphi_m x^m \in \mathbb{C}[[x]] \mapsto \widetilde{\varphi}(\xi) = \sum_{m \geq 1} \varphi_m \frac{\xi^{m-1}}{(m-1)!} \in \mathbb{C}[[\xi]]$$

On appelle $\widetilde{\varphi}$ le mineur de $\widehat{\varphi}$. Cette transformation consiste à appliquer formellement à chaque monôme x^m la transformation de Borel

$$\mathcal{B}_\theta(x^m)(\xi) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma x^m e^{\frac{\xi}{x}} \frac{dx}{x^2} = \begin{cases} \frac{\xi^{m-1}}{(m-1)!} & \text{si } m \geq 1 \\ 0 & \text{si } m = 0 \end{cases}$$

de x^m dans la direction θ (en fait dans n'importe quelle direction θ puisque le résultat est indépendant de la direction choisie), où γ est le lacet aboutissant en 0 dans des directions où le noyau $e^{\frac{\xi}{x}} \frac{dx}{x^2}$ décroît rapidement (voir figure 1.1). En particulier, si on remplace x^m par une fonction φ holomorphe sur un secteur Σ de sommet 0, bissecté par θ et d'ouverture strictement supérieure à π , $\mathcal{B}_\theta(\varphi)$ a un sens dès que $|\varphi(x)|$ ne croît pas trop vite quand $|x|$ tend vers 0 dans Σ . Cette transformation de Borel sera étudiée plus en détail au paragraphe 1.2.1.

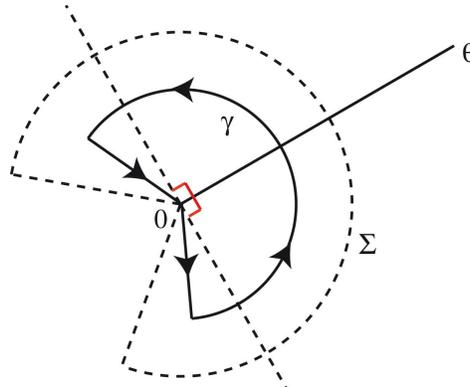


Figure 1.1

Si $\widehat{\varphi} \in \mathbb{C}\{x\}$, le mineur $\widetilde{\varphi}$ est une fonction entière à croissance exponentielle d'ordre au plus un à l'infini.

Si $\widehat{\varphi} \in \mathbb{C}[[x]]_{1/r}$, $r > 1$, le mineur $\widetilde{\varphi}$ est une fonction entière.

Si $\widehat{\varphi} \in \mathbb{C}[[x]]_1$, le mineur $\widetilde{\varphi}$ est un élément de $\mathbb{C}\{\xi\}$ et son rayon de convergence est en général fini.

Si $\widehat{\varphi} \in \mathbb{C}[[x]]_{1/r}$, $r < 1$, le mineur $\widetilde{\varphi}$ est un élément de $\mathbb{C}[[\xi]]$.

Considérons maintenant une fonction analytique à l'origine $\tilde{\varphi}$ et supposons que $\tilde{\varphi}$ peut être prolongée analytiquement le long de la demi-droite $d_\theta = [0, \infty e^{i\theta}[$ avec une croissance exponentielle d'ordre au plus un à l'infini sur d_θ , *i.e.*,

$$|\tilde{\varphi}(\xi)| \leq C e^{a|\xi|} \text{ pour tout } \xi \in d_\theta \text{ tel que } |\xi| \gg 0$$

La transformée de Laplace

$$\mathcal{L}_\theta(\tilde{\varphi})(x) = \int_0^{\infty e^{i\theta}} \tilde{\varphi}(\xi) e^{-\frac{\xi}{x}} d\xi$$

de $\tilde{\varphi}$ dans la direction θ est une fonction analytique sur un disque d'axe d_θ dont le bord passe par l'origine. Si la croissance exponentielle de $\tilde{\varphi}$ reste valable sur un secteur illimité d'axe d_θ , alors $\mathcal{L}_\theta(\tilde{\varphi})$ peut être prolongée en une fonction analytique sur un secteur de sommet 0, bissecté par θ et d'ouverture strictement supérieure à π .

L'utilisation conjointe de la transformation de Borel formelle et de la transformation de Laplace permet de caractériser parmi les séries de type Gevrey de niveau 1 celles qui sont 1-sommables :

Théorème 1.6 (sommation de Borel-Laplace, [MR89], [Ne19]) *Une série formelle*

$$\hat{\varphi}(x) = \sum_{m \geq 0} \varphi_m x^m \in \mathbb{C}[[x]]_1$$

est 1-sommable dans la direction θ si, et seulement si, son mineur $\tilde{\varphi}$ peut être prolongé analytiquement sur un secteur illimité d'axe d_θ avec une croissance exponentielle d'ordre au plus un à l'infini (voir figure 1.2).

La somme $s_\theta(\hat{\varphi})$ de $\hat{\varphi}$ dans la direction θ est alors donnée par

$$s_\theta(\hat{\varphi})(x) = \varphi_0 + \int_0^{\infty e^{i\theta}} \tilde{\varphi}(\xi) e^{-\frac{\xi}{x}} d\xi$$

On a le diagramme suivant (sommation de Borel-Laplace de niveau 1) :

$$\hat{\varphi}(x) \xrightarrow{\hat{\mathcal{B}}} \tilde{\varphi}(\xi) \xrightarrow{\mathcal{L}_\theta} s_\theta(\hat{\varphi})(x)$$

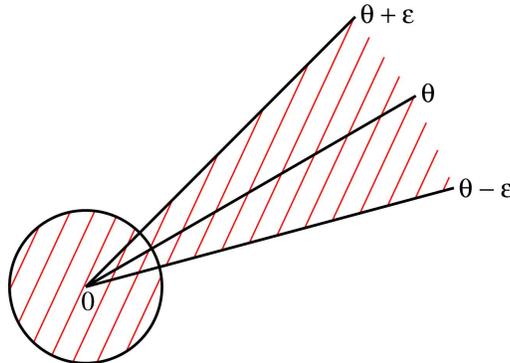


Figure 1.2 - domaine d'analyticité de $\tilde{\varphi}$

Ce procédé de sommation des séries formelles de type Gevrey de niveau 1 est une conséquence d'une méthode de sommation due à E. Borel ([Bo99], [Bo28]). On peut également (voir par exemple [Le00], [MR89] et [Ne19]), moyennant l'introduction de *la transformation de Borel formelle* $\widehat{\mathcal{B}}_r = \varrho_{1/r} \circ \widehat{\mathcal{B}} \circ \varrho_r$ de niveau r^1 , caractériser parmi les séries de type Gevrey de niveau r celles qui sont r -sommables dans une direction θ fixée : une série formelle

$$\widehat{\varphi}(x) = \sum_{m \geq 0} \varphi_m x^m \in \mathbb{C}[[x]]_{1/r}$$

est r -sommable dans la direction θ si, et seulement si, la somme

$$\widetilde{\varphi}_r(\xi) = \widehat{\mathcal{B}}_r(\widehat{\varphi})(\xi) = \sum_{m \geq r} \frac{\varphi_m}{\Gamma(\frac{m}{r})} \xi^{m-r} \in \mathbb{C}\{\xi\}$$

(cette série est nécessairement convergente par la formule de Stirling, puisque $\widehat{\varphi}$ est de type Gevrey de niveau r) peut être prolongée analytiquement sur un secteur illimité d'axe d_θ avec une croissance exponentielle d'ordre au plus r à l'infini. Dans ces conditions, la somme $s_\theta(\widehat{\varphi})$ de $\widehat{\varphi}$ dans la direction θ est donnée par

$$s_\theta(\widehat{\varphi})(x) = \varphi_0 + \varphi_1 x + \dots + \varphi_{r-1} x^{r-1} + r \int_0^{\infty e^{i\theta}} \xi^{r-1} \widetilde{\varphi}_r(\xi) e^{-\frac{\xi^r}{x^r}} d\xi$$

Noter que cette intégrale est en fait $\varrho_{1/r} \circ \mathcal{L}_\theta \circ \varrho_r(\widetilde{\varphi}_r)(x)$, où \mathcal{L}_θ désigne la transformation de Laplace usuelle. On pose $\mathcal{L}_{r;\theta} = \varrho_{1/r} \circ \mathcal{L}_\theta \circ \varrho_r$ et on appelle cette transformation *la transformation de Laplace de niveau r* . On a alors le diagramme de sommation de Borel-Laplace de niveau r suivant :

$$\widehat{\varphi}(x) \xrightarrow{\widehat{\mathcal{B}}_r} \widetilde{\varphi}_r(\xi) \xrightarrow{\mathcal{L}_{r;\theta}} s_\theta(\widehat{\varphi})(x)$$

Ces dernières définitions et propriétés ne nous serviront que très peu dans la suite de cette thèse, puisque nous travaillons essentiellement avec des séries formelles de type Gevrey de niveau 1. Revenons à présent sur la caractérisation de la 1-sommabilité par la méthode de Borel-Laplace. Nous voyons, sur la formule intégrale du théorème 1.6, que les directions θ dans lesquelles la série formelle $\widehat{\varphi}$ ne peut être sommée sont les directions pour lesquelles $\widetilde{\varphi}$ admet des singularités. Pour étudier ces singularités, il est nécessaire de recourir à des prolongements analytiques de $\widetilde{\varphi}$ sur le revêtement universel de $\mathbb{C} \setminus \mathcal{S}$, où \mathcal{S} désigne l'ensemble des singularités de $\widetilde{\varphi}$. Cet ensemble est en général discret (il s'agit d'un réseau $\mathfrak{R} = \mathbb{Z}\omega_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}\omega_p$) dans le cas des équations différentielles non linéaires. Il est fini dans le cas des équations différentielles linéaires.

¹Les deux opérateurs ϱ_r et $\varrho_{1/r}$ sont définis par

$$\varrho_r(x) = x^{1/r} \text{ et } \varrho_{1/r}(x) = x^r$$

et sont appelés respectivement *opérateur de ramification de niveau r* et *opérateur de déramification de niveau r* .

Il peut admettre des points d'accumulation ou même être dense dans \mathbb{C} dans le cas d'équations fonctionnelles plus générales.

Avant d'étudier plus en détail ces questions de prolongements analytiques, revenons un instant sur la transformation de Borel formelle $\widehat{\mathcal{B}}$.

Par définition, $\widehat{\mathcal{B}}$ est un opérateur linéaire du \mathbb{C} -espace vectoriel $\mathbb{C}[[x]]_1$ sur le \mathbb{C} -espace vectoriel $\mathbb{C}\{\xi\}$.

Si $\widehat{\varphi}, \widehat{\psi} \in x\mathbb{C}[[x]]_1$, on vérifie que la transformée de Borel formelle du produit $\widehat{\varphi}\widehat{\psi}$ est une série convergente à l'origine, *i.e.*, $\widehat{\varphi}\widehat{\psi} \in x\mathbb{C}[[x]]_1$. La somme de cette série coïncide alors avec le produit de convolution

$$\widetilde{\varphi} * \widetilde{\psi}(\xi) = \int_0^\xi \widetilde{\varphi}(\xi - \eta)\widetilde{\psi}(\eta)d\eta$$

des mineurs $\widetilde{\varphi}$ et $\widetilde{\psi}$. Ce produit de convolution admet pour élément unité la distribution de Dirac à l'origine δ .

On pose alors $\widehat{\mathcal{B}}(1) = \delta$ et on étend la transformation de Borel formelle $\widehat{\mathcal{B}}$ à

$$\widehat{\mathcal{B}} : \widehat{\varphi}(x) = \sum_{m \geq 0} \varphi_m x^m \in \mathbb{C}[[x]]_1 \mapsto \widetilde{\varphi}(\xi) = \varphi_0 \delta + \sum_{m \geq 1} \varphi_m \frac{\xi^{m-1}}{(m-1)!} \in \mathbb{C}\delta \oplus \mathbb{C}\{\xi\}$$

$\widehat{\mathcal{B}}$ est un isomorphisme de l'algèbre multiplicative $(\mathbb{C}[[x]]_1, \cdot)$ sur l'algèbre convolutive $(\mathbb{C}\delta \oplus \mathbb{C}\{\xi\}, *)$; son inverse est la *transformation de Laplace formelle* $\widehat{\mathcal{L}}$ définie par

$$\widehat{\mathcal{L}}(\delta)(x) = 1 \text{ et } \widehat{\mathcal{L}}(\xi^m)(x) = m!x^{m+1} \text{ pour tout } m \geq 0$$

Noter que la transformation de Laplace formelle consiste à appliquer formellement la transformation de Laplace \mathcal{L}_θ dans n'importe quelle direction θ aux différents monômes ξ^m de la série convergente $\sum_{m \geq 0} \varphi_m \xi^m$.

1.1.3 Questions de prolongements analytiques

Définition 1.7 Soit \mathcal{S} un sous-ensemble discret de \mathbb{C} .

On dit qu'une fonction analytique à l'origine est *une fonction prolongeable sans fin de support singulier* \mathcal{S} si elle peut être prolongée analytiquement le long de tout chemin d'origine 0 et de classe \mathcal{C}^1 par morceaux, tracé sur $\mathbb{C} \setminus \mathcal{S}$ et ne faisant qu'un nombre fini de tours autour d'un nombre fini de points de \mathcal{S} .

Le prolongement analytique du produit de convolution est donnée par la

Proposition 1.8 ([Del94], [Del97], [Del01]) Soient \mathcal{S} et \mathcal{S}' deux sous-ensembles discrets de \mathbb{C} .

Si $\widetilde{\varphi}$ (resp. $\widetilde{\psi}$) est un germe de fonctions analytiques prolongeables sans fin de support singulier \mathcal{S} (resp. \mathcal{S}'), alors le produit de convolution

$$\widetilde{\varphi} * \widetilde{\psi}(\xi) = \int_0^\xi \widetilde{\varphi}(\xi - \eta)\widetilde{\psi}(\eta)d\eta$$

est un germe de fonctions analytiques prolongeables sans fin de support singulier $\mathcal{S} \cup \mathcal{S}' \cup (\mathcal{S} \oplus \mathcal{S}')$.

Les ensembles \mathcal{S} et \mathcal{S}' portent les *singularités en bout* de $\tilde{\varphi} * \tilde{\psi}$: ces singularités sont obtenues lorsque les extrémités 0 et ξ de la chaîne d'intégration $(0, \xi)$ viennent à rencontrer une singularité de l'intégrand (voir figure 1.3).

L'ensemble $\mathcal{S} \oplus \mathcal{S}'$ portent les *singularités par pincement* de $\tilde{\varphi} * \tilde{\psi}$: elles sont obtenues lorsque la chaîne d'intégration $(0, \xi)$ est pincée entre une singularité de $\tilde{\varphi}(\xi - \eta)$ et une singularité de $\tilde{\psi}(\eta)$ (voir figure 1.4).

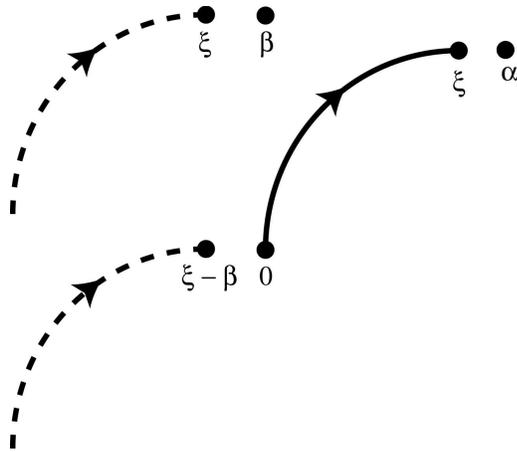


Figure 1.3 - singularité en bout

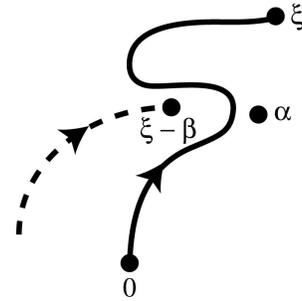


Figure 1.4 - singularité par pincement

Dans ces deux figures, nous avons supposé que α est une singularité de $\tilde{\psi}$ et que β est une singularité de $\tilde{\varphi}$.

Ce résultat permet de préciser la structure algébrique de certains espaces. On a en particulier le résultat suivant :

Corollaire 1.9 Soit $\mathfrak{R} = \mathbb{Z}\omega_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}\omega_p$ un réseau discret.

L'ensemble des germes de fonctions analytiques prolongeables sans fin de support singulier \mathfrak{R} est une algèbre convolutive et une sous-algèbre de $(\mathbb{C}\{\xi\}, *)$.

Pour les calculs ultérieurs, nous nous servirons également du résultat suivant :

Corollaire 1.10 Soit \mathcal{S} un sous-ensemble discret de \mathbb{C} .

Soient \tilde{e} une fonction entière et $\tilde{\varphi}$ un germe de fonctions analytiques prolongeables sans fin de support singulier \mathcal{S} .

Alors, $\tilde{e} * \tilde{\varphi}$ est encore un germe de fonctions analytiques prolongeables sans fin de support singulier \mathcal{S} .

En particulier, toutes les singularités de $\tilde{e} * \tilde{\varphi}$ sont des singularités en bout.

Dans le cas des systèmes différentiels linéaires de niveau unique 1, ce résultat nous suffira pour établir la résurgence-sommabilité (voir définition 1.11 ci-après) des solutions formelles du système, ainsi que pour décrire avec précision la nature des singularités dans le plan de Borel. Pour des résultats plus précis comme les formules reliant multiplicateurs de Stokes et coefficients de résurgence ou pour traiter le cas des systèmes différentiels linéaires de niveau unique quelconque, nous aurons besoin d'étendre ces différents résultats à des fonctions non régulières, voire non intégrables, à l'origine (voir paragraphe 1.2).

1.1.4 Séries formelles résurgentes

Définition 1.11 Soit \mathcal{S} un sous-ensemble discret de \mathbb{C} .

Une série formelle résurgente de support singulier \mathcal{S} est une série de type Gevrey de niveau 1 dont le mineur est une fonction prolongeable sans fin de support singulier \mathcal{S} . On note $\mathcal{R}(\mathcal{S})$ l'ensemble de ces séries.

De plus, si les prolongements analytiques du mineur sont à croissance exponentielle d'ordre au plus un à l'infini, on dit que la série est *une série formelle résurgente-sommable de support singulier \mathcal{S}* . On note $\mathcal{R}_{\text{som}}(\mathcal{S})$ l'ensemble de ces séries.

Les deux ensembles $\mathcal{R}(\mathcal{S})$ et $\mathcal{R}_{\text{som}}(\mathcal{S})$ sont des \mathbb{C} -espaces vectoriels et des sous- \mathbb{C} -espaces vectoriels de $\mathbb{C}[[x]]_1$. On déduit du corollaire 1.9 la proposition suivante :

Proposition 1.12 Soit $\mathfrak{R} = \mathbb{Z}\omega_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}\omega_p$ un réseau discret.

Les ensembles $\mathcal{R}(\mathfrak{R})$ et $\mathcal{R}_{\text{som}}(\mathfrak{R})$ sont des \mathbb{C} -algèbres et des sous- \mathbb{C} -algèbres de $\mathbb{C}[[x]]_1$.

Quant au corollaire 1.10, il permet d'établir le résultat suivant :

Proposition 1.13 Soit \mathcal{S} un sous-ensemble discret de \mathbb{C} .

Les ensembles $\mathcal{R}(\mathcal{S})$ et $\mathcal{R}_{\text{som}}(\mathcal{S})$ sont des $\mathbb{C}\{x\}$ -modules et plus généralement des $\mathbb{C}[[x]]_{1/r}$ -modules, où r est un nombre rationnel strictement supérieur à 1.

Les deux espaces vectoriels $\mathcal{R}(\mathcal{S})$ et $\mathcal{R}_{\text{som}}(\mathcal{S})$ sont suffisants pour étudier la résurgence-sommabilité des solutions formelles des systèmes différentiels linéaires de niveau unique. Cependant, pour décrire avec précision la nature des singularités dans le plan de Borel et pour obtenir les formules reliant multiplicateurs de Stokes et coefficients de résurgence, il est nécessaire de les étendre par adjonction du logarithme, de puissances ramifiées x^α , $\alpha \in \mathbb{C}$, et d'exponentielles de la forme e^q avec q élément de $x^{-1/k}\mathbb{C}[x^{-1/k}]$. Les espaces ainsi obtenus sont appelés *espaces des fonctions résurgentes-(sommables) de support singulier \mathcal{S}* . Nous rappelons brièvement quelques-unes de leurs propriétés au paragraphe 1.2.

Terminons maintenant ce paragraphe sur la sommation des séries divergentes par quelques rappels sur la multisommabilité des séries formelles $\widehat{\varphi}(x) \in \mathbb{C}[[x]]$.

1.1.5 Notes sur la multisommabilité

La r -sommabilité n'est pas suffisante pour sommer les solutions formelles des équations différentielles algébriques, même dans le cas linéaire. Le premier exemple construit en ce sens est dû à J.-P. Ramis et Y. Sibuya ([RS89, chap. 3, 3 – 7]) : l'équation différentielle linéaire

$$x^5(2-x)y'' + x^2(4+5x^2-2x^3)y' + 2(2-x+x^2)y = 4x + 2x^2 + 10x^3 - 3x^4$$

admet une seule solution série formelle à l'origine $\widehat{f}(x) = \widehat{f}_1(x) + \widehat{f}_2(x)$, où

$$\widehat{f}_1(x) = \sum_{m \geq 0} (-1)^m m! x^{m+1}$$

est la série d'Euler et où

$$\widehat{f}_2(x) = \widehat{f}_1(x^2) = \sum_{m \geq 0} (-1)^m m! x^{2m+2}$$

Il est classique que la série formelle \widehat{f}_1 est 1-sommable et que la série formelle \widehat{f}_2 est 2-sommable. En revanche, leur somme $\widehat{f} = \widehat{f}_1 + \widehat{f}_2$ n'est ni 1-sommable ni 2-sommable (et même ni r -sommable pour n'importe quelle valeur de r). On est donc amené, pour contourner cette difficulté et "sommer" la série \widehat{f} , à introduire le concept plus général de multisommabilité.

Il existe plusieurs définitions pour la multisommabilité des séries formelles ([Bal92], [L-R94], [MalR92], [MR91]). Toutes ces définitions sont équivalentes, mais reposent sur des concepts différents : la méthode de W. Balsler ([Bal92]) utilise une méthode d'itération de transformations de Laplace de niveaux différents ; celles de M. Loday-Richaud ([L-R94]) et B. Malgrange et J.-P. Ramis ([MalR92]) utilisent essentiellement la cohomologie et la notion de correction exponentiellement petite ; et celle de J. Martinet et J.-P. Ramis ([MR91]) repose sur la théorie de l'accélération de J. Ecalle ([E87]).

Cette dernière définition généralise l'approche par formule intégrale et prolongement analytique de la r -sommabilité (sommation de Borel-Laplace : cf. théorème 1.6 et conséquences). En outre, elle a l'avantage sur les méthodes géométriques (avec celle de W. Balsler) d'être susceptible d'application numérique, puisqu'elle fournit un procédé explicite de sommation.

Rappelons brièvement en quoi consiste cette définition de la multisommabilité. Pour plus de détails, nous renvoyons à [MR91].

On commence par définir pour $a > 1$ le noyau d'accélération \mathcal{C}_a de puissance a par

$$\mathcal{C}_a(\xi) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{-\pi}} e^{u-u^{1/a}\xi} du$$

où $\gamma_{-\pi}$ désigne un contour de Hankel "autour" de \mathbb{R}^- (voir figure 1.7 ci-après). Ces noyaux \mathcal{C}_a sont des fonctions entières et on peut montrer que

$$\mathcal{C}_a(\xi) = \frac{1}{\pi} \sum_{m \geq 0} \sin\left(\frac{m\pi}{b}\right) \frac{\Gamma(1 + \frac{m}{a})}{\Gamma(1 + m)} \xi^m \text{ où } b \text{ vérifie } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$$

En particulier, si a est un nombre rationnel (c'est le seul cas que nous rencontrons), \mathcal{C}_a est une fonction de Meijer. De plus, dans toute les directions vérifiant $|\arg(\xi)| < (1 - \frac{1}{a}) \frac{\pi}{2}$, les noyaux \mathcal{C}_a ont une croissance exponentielle à l'infini du type

$$(1.1) \quad \xi^{\frac{b}{2}} e^{\frac{1}{b} a^{-\frac{b}{a}} \xi^b}$$

On définit alors *les opérateurs d'accélération de niveaux $r < r'$ dans la direction θ* par

$$\mathfrak{Q}_{(r,r');\theta}(\varphi)(\tau) = \frac{1}{\tau} \int_0^{\infty e^{i\theta}} \mathcal{C}_{r'/r} \left(\frac{\xi}{\tau^{r/r'}} \right) \varphi(\xi) d\xi$$

Noter que la croissance exponentielle à l'infini du noyau $\mathcal{C}_{r'/r}$ (cf. (1.1)) montre que l'opérateur $\mathfrak{Q}_{(r,r');\theta}$ est applicable aux fonctions φ à croissance exponentielle d'ordre au plus $\frac{r'}{r'-r} > 1$ à l'infini.

En fait, on préfère utiliser *les opérateurs d'accélération "redressés" de niveaux $r < r'$ dans la direction θ* définis par

$$\mathbf{A}_{(r,r');\theta} = \mathfrak{Q}_{1/r'} \circ \mathfrak{Q}_{(r,r');r\theta} \circ \mathfrak{Q}_r$$

Ceux-ci sont applicables aux fonctions à croissance exponentielle d'ordre au plus $\frac{r'r}{r'-r}$ à l'infini. La justification du qualificatif "redressé" apparaîtra dans le diagramme de multisommation qui suit : les opérateurs $\mathbf{A}_{(r,r');\theta}$ correspondent à des flèches horizontales, alors que les opérateurs $\mathfrak{Q}_{(r,r');\theta}$ correspondent à des flèches obliques.

Ces différents opérateurs étant construits, on pose la définition suivante :

Définition 1.14 ([MR91, p. 343]) Soient $0 < r_1 < r_2 < \dots < r_s$ des nombres rationnels et θ une direction.

Une série formelle $\widehat{\varphi}(x) \in \mathbb{C}[[x]]$ est dite (r_1, r_2, \dots, r_s) -sommable dans la direction θ si les conditions suivantes sont satisfaites :

- (0) La série $\widehat{\varphi}$ est de type Gevrey de niveau r_1 : $\widehat{\varphi}(x) \in \mathbb{C}[[x]]_{1/r_1}$.
- (1) La somme de la série convergente $\widehat{\mathcal{B}}_{r_1}(\widehat{\varphi})$ peut être prolongée analytiquement sur un secteur illimité d'axe d_θ avec une croissance exponentielle d'ordre au plus $\frac{r_2 r_1}{r_2 - r_1}$ à l'infini.
- (2) La fonction $\mathbf{A}_{(r_1, r_2); \theta} \circ \widehat{\mathcal{B}}_{r_1}(\widehat{\varphi})$ peut être prolongée analytiquement le long de d_θ avec une croissance exponentielle d'ordre au plus $\frac{r_3 r_2}{r_3 - r_2}$ à l'infini.
- ...
- (k) La fonction $\mathbf{A}_{(r_{k-1}, r_k); \theta} \circ \mathbf{A}_{(r_{k-2}, r_{k-1}); \theta} \circ \dots \circ \mathbf{A}_{(r_1, r_2); \theta} \circ \widehat{\mathcal{B}}_{r_1}(\widehat{\varphi})$ peut être prolongée analytiquement le long de d_θ avec une croissance exponentielle d'ordre au plus $\frac{r_{k+1} r_k}{r_{k+1} - r_k}$ à l'infini.
- ...
- (s) La fonction $\mathbf{A}_{(r_{s-1}, r_s); \theta} \circ \mathbf{A}_{(r_{s-2}, r_{s-1}); \theta} \circ \dots \circ \mathbf{A}_{(r_1, r_2); \theta} \circ \widehat{\mathcal{B}}_{r_1}(\widehat{\varphi})$ peut être prolongée analytiquement le long de d_θ avec une croissance exponentielle d'ordre au plus r_s à l'infini.

Proposition 1.15 Si $\widehat{\varphi}(x) \in \mathbb{C}[[x]]$ est (r_1, r_2, \dots, r_s) -sommable dans la direction θ , alors

$$\mathcal{L}_{r_s; \theta} \circ \mathbf{A}_{(r_{s-1}, r_s); \theta} \circ \mathbf{A}_{(r_{s-2}, r_{s-1}); \theta} \circ \dots \circ \mathbf{A}_{(r_1, r_2); \theta} \circ \widehat{\mathcal{B}}_{r_1}(\widehat{\varphi})$$

est définie et analytique sur un secteur bissecté par θ .

Définition 1.16 Si $\widehat{\varphi}(x) \in \mathbb{C}[[x]]$ est (r_1, r_2, \dots, r_s) -sommable dans la direction θ , sa multisomme $s_\theta(\widehat{\varphi})$ dans la direction θ est définie par

$$s_\theta(\widehat{\varphi}) = \mathcal{L}_{r_s; \theta} \circ \mathbf{A}_{(r_{s-1}, r_s); \theta} \circ \mathbf{A}_{(r_{s-2}, r_{s-1}); \theta} \circ \dots \circ \mathbf{A}_{(r_1, r_2); \theta} \circ \widehat{\mathcal{B}}_{r_1}(\widehat{\varphi})$$

On a alors le diagramme de multisommation suivant :

$$\widehat{\varphi} \xrightarrow{\widehat{\mathcal{B}}_{r_1}} \widetilde{\Phi}_1 \xrightarrow{\mathbf{A}_{(r_1, r_2); \theta}} \widetilde{\Phi}_2 \xrightarrow{\mathbf{A}_{(r_2, r_3); \theta}} \dots \xrightarrow{\mathbf{A}_{(r_{s-1}, r_s); \theta}} \widetilde{\Phi}_s \xrightarrow{\mathcal{L}_{r_s; \theta}} s_\theta(\widehat{\varphi})$$

On note $\mathbb{C}\{x\}_{1/r_1, 1/r_2, \dots, 1/r_s; \theta}$ l'ensemble des séries formelles (r_1, r_2, \dots, r_s) -sommables dans la direction θ .

Noter que si l'on avait utilisé les opérateurs $\mathfrak{Q}_{(r, r'); \theta}$, on aurait eu le diagramme suivant (cas $s = 2$) :

$$\begin{array}{ccccccc} \widehat{\varphi} & \xrightarrow{\widehat{\mathcal{B}}_{r_1}} & \widetilde{\Phi}_1 & \xrightarrow{\mathbf{A}_{(r_1, r_2); \theta}} & \widetilde{\Phi}_2 & \xrightarrow{\mathcal{L}_{r_2; \theta}} & s_\theta(\widehat{\varphi}) \\ \downarrow \mathfrak{Q}_{r_1} & & & & \vdots & & \uparrow \mathfrak{Q}_{1/r_2} \\ \widehat{\varphi} & \xrightarrow{\widehat{\mathcal{B}}} & \widetilde{\varphi}_1 & & & & \\ & & \searrow \mathfrak{Q}_{(r_1, r_2); r_1 \theta} & & & & \\ & & & & \widetilde{\varphi}_2 & \xrightarrow{\mathcal{L}_{r_2 \theta}} & \varphi(t_2) \end{array}$$

Définition 1.17 Une série $\widehat{\varphi}$ est dite (r_1, r_2, \dots, r_s) -sommable si elle est (r_1, r_2, \dots, r_s) -sommable dans toutes les directions, excepté un nombre fini.

On note $\mathbb{C}\{x\}_{1/r_1, 1/r_2, \dots, 1/r_s}$ l'ensemble des séries (r_1, r_2, \dots, r_s) -sommables.

$\mathbb{C}\{x\}_{1/r_1, 1/r_2, \dots, 1/r_s; \theta}$ et $\mathbb{C}\{x\}_{1/r_1, 1/r_2, \dots, 1/r_s}$ sont des \mathbb{C} -algèbres différentielles.

On étend aisément la définition 1.14 sur la multisommabilité des séries formelles aux séries méromorphes formelles de la façon suivante : une série

$$\widehat{\varphi}(x) = \frac{\varphi_{-p}}{x^p} + \dots + \frac{\varphi_{-1}}{x} + \widehat{\psi}(x) \text{ avec } \widehat{\psi}(x) \in \mathbb{C}[[x]]$$

est (r_1, r_2, \dots, r_s) -sommable dans la direction θ si $\widehat{\psi}(x)$ est (r_1, r_2, \dots, r_s) -sommable dans la direction θ . La somme $s_\theta(\widehat{\varphi})$ de $\widehat{\varphi}$ dans la direction θ est alors définie par

$$s_\theta(\widehat{\varphi})(x) = \frac{\varphi_{-p}}{x^p} + \dots + \frac{\varphi_{-1}}{x} + s_\theta(\widehat{\psi})(x)$$

1.2 Rappels sur la théorie des fonctions résurgentes

Pour le confort du lecteur, nous esquissons ci-dessous une partie de la théorie des fonctions résurgentes de J. Ecalle telle qu'elle est présentée dans [E81-1], [E81-2] et [E85]. Pour plus de détails, et notamment pour les démonstrations, nous renvoyons plus particulièrement à [E81-1, chapitres 1 à 3] et [E85, chapitre 1]. On pourra également voir par exemple [CNP93], [E92] et [Sau06].

On note \mathbb{C}_∞ la surface du Riemann du logarithme, *i.e.*, le revêtement universel de \mathbb{C}^* de point base 1.

Un germe est dit *holomorphe multiforme à l'origine (de \mathbb{C}_∞)* s'il est holomorphe sur un ouvert de \mathbb{C}_∞ contenant un ensemble de la forme

$$\{\xi = re^{i\theta} ; \theta \in \mathbb{R}, 0 < r < h(\theta)\}$$

où h est une fonction continue quelconque à valeurs strictement positives.

Un germe est dit *holomorphe à l'origine (de \mathbb{C}_∞)* s'il est holomorphe et uniforme (*i.e.*, sans monodromie) à l'origine. Autrement dit, l'ensemble des germes holomorphes à l'origine s'identifie à l'ensemble $\mathbb{C}\{\xi\}$ des germes de fonctions holomorphes à l'origine (de \mathbb{C}).

Noter que l'on a l'injection

$$\{\text{germes holomorphes à l'origine}\} \hookrightarrow \{\text{germes holomorphes multiformes à l'origine}\}$$

1.2.1 Transformations de Borel et de Laplace

Soit φ une fonction holomorphe (multiforme ou non) à l'origine et à croissance sous-exponentielle à l'origine, *i.e.*, plus petite que $C_\varepsilon e^{\frac{\varepsilon}{|x|}}$ pour tout $\varepsilon > 0$ uniformément sur tout secteur $\theta_1 < \arg(x) < \theta_2$. Il revient au même de dire que

$$(1.2) \quad \overline{\lim}_{|x| \rightarrow 0} |x| \log(|\varphi(x)|) = 0$$

uniformément sur tout secteur $\theta_1 < \arg(x) < \theta_2$. La transformée de Borel (ou mineur)

$$\mathcal{B}_\theta(\varphi)(\xi) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \varphi(x) e^{\frac{\xi}{x}} \frac{dx}{x^2}$$

de φ dans la direction θ (le chemin γ est donné au paragraphe 1.1.2, figure 1.1) définit un germe de fonction holomorphe multiforme à l'origine qui peut être prolongée à \mathbb{C}_∞ tout entier : si Σ est un secteur (de \mathbb{C}_∞) de sommet 0, bissecté par θ et d'ouverture $\varpi > \pi$, la définition du lacet γ et la condition de croissance à l'origine (1.2) de φ montrent que $\mathcal{B}_\theta(\varphi)$ définit une fonction analytique sur un secteur illimité d'axe θ et d'ouverture $\varpi - \pi$. La condition de croissance (1.2) de φ étant satisfaite sur des secteurs Σ d'ouverture ϖ quelconque, $\mathcal{B}_\theta(\varphi)$ définit bien par prolongement analytique une fonction holomorphe sur \mathbb{C}_∞ tout entier. Par ailleurs, on peut montrer ([E85],

[MR82]) qu'un tel germe est à croissance exponentielle d'ordre au plus un à l'infini, *i.e.*,

$$\overline{\lim}_{|\xi| \rightarrow +\infty} \frac{\log(|\tilde{\varphi}(\xi)|)}{|\xi|} < +\infty \text{ ou ce qui revient au même } |\tilde{\varphi}(\xi)| \leq C e^{A|\xi|} \text{ dès que } |\xi| \gg 0$$

uniformément sur tout secteur $\theta_1 < \arg(\xi) < \theta_2$.

Notons dans la suite $\tilde{\varphi} = \mathcal{B}(\varphi)$ le prolongement analytique à \mathbb{C}_∞ d'un mineur quelconque de φ . Nous continuons d'appeler mineur de φ ce prolongement analytique.

La fonction φ est appelée *constante de résurgence*. On note \mathcal{R}_{cte} l'ensemble de ces fonctions. Le terme "constante" est justifié par le fait que le mineur $\tilde{\varphi}$ n'ayant pas de singularités (autre que l'origine) sur \mathbb{C}_∞ , toutes ses dérivations étrangères sont nulles.

Considérons à présent une constante de résurgence φ et son mineur $\tilde{\varphi}$. La transformation de Laplace \mathcal{L}_θ (cf. paragraphe 1.1.2) appliquée à $\tilde{\varphi}$ ne pose pas de problème à l'infini, puisque $\tilde{\varphi}$ est à croissance exponentielle d'ordre au plus un sur d_θ . En revanche, elle peut être divergente à l'origine, même dans des cas simples : par exemple, la fonction $\varphi(x) = x^{-1/2}$ admet pour mineur $\tilde{\varphi}$ la fonction définie par

$$\tilde{\varphi}(\xi) = \frac{\xi^{-3/2}}{\Gamma(-\frac{1}{2})} = -2\sqrt{\pi}\xi^{-3/2}$$

qui est clairement non intégrable à l'origine. On ne peut donc plus appliquer la procédure de Borel-Laplace décrite au paragraphe 1.1.2. Pour y pallier, on utilise l'artifice suivant :

Étant donné un élément φ de \mathcal{R}_{cte} , on définit

$$\tilde{\Phi}_u(\xi) = \frac{1}{2i\pi} \int_0^{1/u} \varphi(x) e^{\frac{\xi}{x}} \frac{dx}{x^2}$$

pour un u quelconque arbitrairement proche de l'origine dans \mathbb{C}_∞ . La condition de croissance (1.2) de φ montre que $\tilde{\Phi}_u$ est une fonction holomorphe multiforme à l'origine. On appelle $\tilde{\Phi}_u$ un *majeur* de φ . On note $[\varphi]$ la classe de $\tilde{\Phi}_u$ modulo $\mathbb{C}\{\xi\}$ (qui est indépendante de u) et on dit que $[\varphi]$ est la *classe des majeurs de φ modulo $\mathbb{C}\{\xi\}$* . On étend alors la transformée de Borel $\mathcal{B}(\varphi)$ d'un élément quelconque φ de \mathcal{R}_{cte} en

$$\mathcal{B}(\varphi) = ([\varphi], \tilde{\varphi})$$

Soit à présent $\tilde{\Phi}$ élément de $[\varphi]$ un majeur quelconque de φ . Avec ces définitions, le mineur $\tilde{\varphi}$ de φ est la variation de $\tilde{\Phi}$:

$$\tilde{\varphi} = \text{var}(\tilde{\Phi})$$

La notation var désigne l'opérateur de variation à l'origine :

$$\text{var}(\tilde{\Phi})(\xi) = \tilde{\Phi}(\xi) - \tilde{\Phi}(\xi e^{-2i\pi})$$

On note $\tilde{\varphi} = \text{var}([\varphi])$. Suivant la terminologie des microfonctions (voir par exemple [D73], [Ka83], [Mal74], [Mal85], [Mal89], [Mal91-1], [Mal91-2], [S.G.A.7] et [SKK73]) que nous rappelons brièvement à l'appendice 2.A, la classe $[\varphi]$ est appelée *microfonction* –et, par abus de langage, tout élément $\tilde{\Phi}$ de $[\varphi]$ également–, le mineur $\tilde{\varphi}$ est la *variation* de $[\varphi]$ et le couple $\mathcal{B}(\varphi) = ([\varphi], \tilde{\varphi})$ est appelé *hyperfonction*.

Lorsque les mineurs de deux constantes de résurgence φ et ψ sont intégrables à l'origine, le produit de convolution $\tilde{\varphi} * \tilde{\psi}$ donné au paragraphe 1.1.2 est bien défini. Lorsque ceux-ci ne sont plus intégrables à l'origine, il faut procéder de manière différente et définir un produit de convolution sur les classes des majeurs $[\varphi]$ et $[\psi]$.

Théorème 1.18 ([E81-1], [E85], [Sau06]) *Soient φ et ψ deux constantes de résurgence et $[\varphi]$ et $[\psi]$ les classes de leurs majeurs respectifs.*

Soient $\tilde{\Phi}$ un majeur de φ et $\tilde{\Psi}$ un majeur de ψ . Pour ξ proche de l'origine dans \mathbb{C}_∞ , on définit la convolution tronquée

$$\tilde{\Phi} *_u \tilde{\Psi}(\xi) = \int_u^{\xi-u} \tilde{\Phi}(\xi - \eta) \tilde{\Psi}(\eta) d\eta$$

où u est un point auxiliaire proche de l'origine dans \mathbb{C}_∞ tel que $\xi \in]0, u[$ et $\arg(\xi - u) = \arg \xi - \pi$ (voir figure 1.5).

Cette fonction est holomorphe multiforme à l'origine et sa variation peut être prolongée en une fonction holomorphe sur \mathbb{C}_∞ tout entier qui est à croissance exponentielle d'ordre au plus un à l'infini.

*De plus, la classe de $\tilde{\Phi} *_u \tilde{\Psi}$ modulo les fonctions holomorphes à l'origine ne dépend ni de u ni du choix des représentants $\tilde{\Phi}$ et $\tilde{\Psi}$ dans leur classe respective $[\varphi]$ et $[\psi]$.*



Figure 1.5

Notation 1.19 Cette classe est notée $[\varphi] \circledast [\psi]$ et est appelée *produit de convolution des majeurs*.

Corollaire 1.20 *Soit \mathcal{C} l'espace des microfonctions, i.e., l'espace des classes de germes de fonctions holomorphes multiformes à l'origine modulo $\mathbb{C}\{\xi\}$.*

On note \mathcal{C}_1 le sous-espace de \mathcal{C} formé des microfonctions dont la variation peut être prolongée à \mathbb{C}_∞ tout entier avec une croissance exponentielle d'ordre au plus un à l'infini.

La loi \circledast est associative et permet de munir \mathcal{C}_1 d'une structure d'algèbre de convolution.

Avec ces définitions, on obtient pour tout $\varphi, \psi \in \mathcal{R}_{\text{cte}}$:

$$\mathcal{B}(\varphi\psi) = ([\varphi\psi], \widetilde{\varphi\psi})$$

avec

$$[\varphi\psi] = [\varphi] \otimes [\psi] \text{ et } \widetilde{\varphi\psi} = \text{var}([\varphi\psi])$$

L'ensemble \mathcal{R}_{cte} est donc une \mathbb{C} -algèbre multiplicative. Remarquer que si les mineurs $\widetilde{\varphi}$ et $\widetilde{\psi}$ sont intégrables à l'origine, on retrouve pour le mineur de $\varphi\psi$ le produit de convolution usuel :

$$\widetilde{\varphi\psi}(\xi) = \int_0^\xi \widetilde{\varphi}(\xi - \eta)\widetilde{\psi}(\eta)d\eta = \widetilde{\varphi} * \widetilde{\psi}(\xi)$$

On peut à présent étendre la définition de la transformation de Laplace \mathcal{L}_θ donnée au paragraphe 1.1.2 :

Soit φ une constante de résurgence et $[\varphi]$ sa classe des majeurs modulo les fonctions holomorphes à l'origine. La transformée de Laplace de $[\varphi]$ dans la direction θ est définie par

$$\mathcal{L}_\theta([\varphi])(x) = \int_{\gamma'_{\theta,\varepsilon}} \widetilde{\Phi}(\xi)e^{-\frac{\xi}{x}}d\xi + \int_{\varepsilon e^{i\theta}}^{\infty e^{i\theta}} \widetilde{\varphi}(\xi)e^{-\frac{\xi}{x}}d\xi$$

où $\widetilde{\Phi}$ est un majeur de φ et où $\gamma'_{\theta,\varepsilon}$ désigne le cercle de centre l'origine et de rayon ε parcouru une fois dans le sens inverse des aiguilles d'une montre à partir de $\varepsilon e^{i(\theta-2\pi)}$.

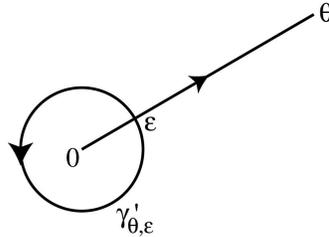


Figure 1.6 - chemin d'intégration de $\mathcal{L}_\theta([\varphi])$

La seconde intégrale est bien définie puisque $\widetilde{\varphi}$ est à croissance exponentielle d'ordre au plus un à l'infini sur d_θ et le théorème de Cauchy montre que $\mathcal{L}_\theta([\varphi])$ est indépendante du choix de ε et de $\widetilde{\Phi}$. On obtient alors la

Proposition 1.21 *La transformation de Borel \mathcal{B}_θ dans la direction θ est un isomorphisme de l'algèbre multiplicative $(\mathcal{R}_{\text{cte}}, \cdot)$ sur l'algèbre convolutive (\mathcal{C}_1, \otimes) . L'inverse de \mathcal{B}_θ est \mathcal{L}_θ et, pour tout $\varphi, \psi \in \mathcal{R}_{\text{cte}}$, on a*

$$\mathcal{L}_\theta([\varphi]) = \varphi \text{ et } \mathcal{L}_\theta([\varphi] \otimes [\psi]) = \mathcal{L}_\theta([\varphi])\mathcal{L}_\theta([\psi])$$

Noter que si le mineur $\tilde{\varphi}$ d'un élément φ de \mathcal{R}_{cte} est intégrable à l'origine, la transformée de Laplace de $[\varphi]$ se réduit à la transformée de Laplace usuelle de $\tilde{\varphi}$:

$$\mathcal{L}_\theta([\varphi])(x) = \int_0^{\infty e^{i\theta}} \tilde{\varphi}(\xi) e^{-\frac{\xi}{x}} d\xi = \mathcal{L}_\theta(\tilde{\varphi})(x)$$

Par ailleurs, on peut montrer que dans la classe $[\varphi]$ il existe *toujours* au moins un représentant privilégié qui est holomorphe sur \mathbb{C}_∞ et à croissance exponentielle d'ordre au plus un à l'infini. Nous notons $maj(\varphi)$ un tel majeur privilégié, fixé une fois pour toute. On obtient alors

$$\mathcal{L}_\theta([\varphi])(x) = \int_{\gamma_\theta} maj(\varphi)(\xi) e^{-\frac{\xi}{x}} d\xi = \mathcal{L}_\theta(maj(\varphi))(x)$$

où γ_θ est le contour de Hankel "autour" de la demi-droite d_θ défini par

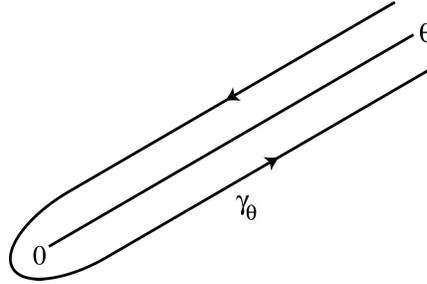


Figure 1.7 - contour de Hankel
autour de d_θ

On assimile la classe $[\varphi]$ à ce majeur privilégié $maj(\varphi)$ de φ . Désormais, la transformation de Borel \mathcal{B} sur \mathcal{R}_{cte} est définie pour tout $\varphi \in \mathcal{R}_{cte}$ par

$$\boxed{\mathcal{B}(\varphi) = (maj(\varphi), \tilde{\varphi})}$$

De plus, pour tout φ et ψ éléments de \mathcal{R}_{cte} , on a les différentes relations

$$maj(\varphi\psi) = maj(\varphi) \otimes maj(\psi)$$

$$\mathcal{L}_\theta(maj(\varphi)) = \varphi$$

$$\mathcal{L}_\theta(maj(\varphi) \otimes maj(\psi)) = \mathcal{L}_\theta(maj(\varphi)) \mathcal{L}_\theta(maj(\psi))$$

Terminons ce paragraphe par quelques formules classiques :

fonction φ	mineur $\tilde{\varphi}$	majeur $maj(\varphi)$
x^m avec $m \in \mathbb{N}^*$	$\frac{\xi^{m-1}}{(m-1)!}$	$\frac{\xi^{m-1} \log \xi}{(m-1)! 2i\pi}$
x^λ avec $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$	$\frac{\xi^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}$	$\frac{\xi^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)(1 - e^{-2i\pi\lambda})} = \frac{1}{2i\pi} e^{i\pi\lambda} \Gamma(1 - \lambda) \xi^{\lambda-1}$
x^{-m} avec $m \in \mathbb{N}$	0 (ou $\delta^{(m)}$)	$\frac{(-1)^m m!}{2i\pi \xi^{m+1}}$

$\delta^{(m)}$ désigne la dérivée $m^{\text{ème}}$ de la distribution de Dirac à l'origine δ . On peut également montrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ et tout $p \in \mathbb{N}$, le majeur $maj(x^\lambda \log^p x)$ de $x^\lambda \log^p x$ est un élément de $\xi^{\lambda-1} \mathbb{C}[\log \xi]$. Précisément,

$$maj(x^\lambda \log^p x)(\xi) = \begin{cases} \sum_{k=0}^p \alpha_k \xi^{\lambda-1} \log^k \xi & \text{si } \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}^* \\ \sum_{k=1}^{p+1} \alpha_k \xi^{\lambda-1} \log^k \xi & \text{si } \lambda \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

avec des nombres complexes non nuls α_k convenables (voir [Mal85] par exemple). L'élément unité du produit de convolution \otimes étant $\frac{1}{2i\pi\xi}$ (évident par la formule de Cauchy), on a

$$(1.3) \quad \boxed{\forall \varphi \in \mathcal{R}_{\text{cte}}, \forall m \geq 1, \mathcal{B} \left(\frac{1}{x^m} \varphi \right) = \frac{d^m}{d\xi^m} \mathcal{B}(\varphi) = \left(\frac{d^m maj(\varphi)}{d\xi^m}, \frac{d^m \tilde{\varphi}}{d\xi^m} \right)}$$

Enfin, à la dérivation $x^2 \frac{d}{dx}$ dans le plan de Laplace correspond par \mathcal{B} la multiplication par ξ dans le plan de Borel :

$$(1.4) \quad \boxed{\forall \varphi \in \mathcal{R}_{\text{cte}}, \mathcal{B} \left(x^2 \frac{d\varphi}{dx} \right) = \xi \mathcal{B}(\varphi) = (\xi maj(\varphi), \xi \tilde{\varphi})}$$

Noter que cette dérivation est l'analogue de la dérivation $\frac{d}{dz}$ dans la carte à l'infini obtenue à l'aide du changement de variable $x = \frac{1}{z}$. En particulier, nous utiliserons *toujours* cette dérivation et non pas la dérivation usuelle $\frac{d}{dx}$. De plus, les deux formules (1.3) et (1.4) restent valables pour n'importe quel autre majeur de φ .

1.2.2 Extension de la transformation de Borel formelle et application à la sommation des séries divergentes

Dans ce paragraphe, nous considérons des développements formels de la forme

$$(1.5) \quad \widehat{\varphi}(x) = \sum_{m \geq 0} \alpha_m \varphi_m(x)$$

où $\alpha_m \in \mathbb{C}$ et où $\varphi_m \in \mathcal{R}_{\text{cte}}$. La transformée de Borel formelle de $\widehat{\varphi}$ est donnée par

$$\widehat{\mathcal{B}}(\widehat{\varphi}) = \sum_{m \geq 0} \alpha_m \mathcal{B}(\varphi_m)$$

On définit ainsi formellement un majeur $\widetilde{\Phi}$ de $\widehat{\varphi}$ et le mineur $\widetilde{\varphi}$ de $\widehat{\varphi}$ par

$$\widetilde{\Phi} = \sum_{m \geq 0} \alpha_m \text{maj}(\varphi_m) \text{ et } \widetilde{\varphi} = \sum_{m \geq 0} \alpha_m \widetilde{\varphi}_m$$

Le mineur $\widetilde{\varphi}$ est égal à la variation du majeur $\widetilde{\Phi}$ et les relations (1.3) et (1.4) restent valables :

$$\forall m \geq 1, \widehat{\mathcal{B}}\left(\frac{1}{x^m} \widehat{\varphi}\right) = \frac{d^m}{d\xi^m} \widehat{\mathcal{B}}(\widehat{\varphi}) \text{ et } \widehat{\mathcal{B}}\left(x^2 \frac{d\widehat{\varphi}}{dx}\right) = \xi \widehat{\mathcal{B}}(\widehat{\varphi})$$

Le majeur $\widetilde{\Phi}$ peut être holomorphe multiforme à l'origine ou non. Lorsqu'il ne l'est pas, nous supposons toujours qu'il est le développement asymptotique à l'origine d'une fonction holomorphe multiforme à l'origine, que nous notons encore $\widetilde{\Phi}$. Dans tous les cas, nous disons que le majeur $\widetilde{\Phi}$ *définit une fonction holomorphe multiforme à l'origine*.

Notons désormais \mathcal{H} l'ensemble des développements formels $\widehat{\varphi}$ de la forme (1.5) dont le majeur $\widetilde{\Phi}$ définit une fonction holomorphe multiforme à l'origine.

Si $\widehat{\varphi} \in \mathcal{H}$, on définit, comme au paragraphe 1.2.1, la classe $[\widehat{\varphi}]$ des majeurs de $\widehat{\varphi}$ modulo $\mathbb{C}\{\xi\}$ comme la classe de $\widetilde{\Phi}$ modulo $\mathbb{C}\{\xi\}$; et on a $\widetilde{\varphi} = \text{var}([\widehat{\varphi}])$. Lorsque $\widehat{\varphi}$ et $\widehat{\psi}$ sont deux éléments de \mathcal{H} , on a

$$[\widehat{\varphi}\widehat{\psi}] = [\widehat{\varphi}] \otimes [\widehat{\psi}]$$

et tout représentant de $[\widehat{\varphi}\widehat{\psi}]$ est holomorphe multiforme à l'origine. En particulier, (\mathcal{H}, \cdot) est une algèbre multiplicative. Comme précédemment, on choisit un majeur quelconque dans la classe $[\widehat{\varphi}]$ que l'on note $\text{maj}(\widehat{\varphi})$ et on a

$$\text{maj}(\widehat{\varphi}\widehat{\psi}) = \text{maj}(\widehat{\varphi}) \otimes \text{maj}(\widehat{\psi})$$

Regardons à présent quelques exemples classiques de développements formels $\widehat{\varphi}$ éléments de \mathcal{H} . Ceux-ci nous serviront constamment dans cette thèse.

Exemple 1.22 Si $\varphi_m(x) = x^m$ pour tout $m \geq 0$, i.e., $\widehat{\varphi} \in \mathbb{C}[[x]]$, on retrouve, pour le mineur $\widetilde{\varphi}$, la formule du paragraphe 1.1.2 :

$$\widetilde{\varphi}(\xi) = \alpha_0 \delta + \sum_{m \geq 1} \alpha_m \frac{\xi^{m-1}}{(m-1)!}$$

Un majeur $\tilde{\Phi}$ s'écrit alors

$$\tilde{\Phi}(\xi) = \frac{\alpha_0}{2i\pi\xi} + \left(\sum_{m \geq 1} \alpha_m \frac{\xi^{m-1}}{(m-1)!} \right) \frac{\log \xi}{2i\pi}$$

En particulier, si $\hat{\varphi} \in \mathbb{C}[[x]]_1$, ce majeur est holomorphe multiforme à l'origine et nous le notons désormais $maj(\hat{\varphi})$:

$$maj(\hat{\varphi})(\xi) = \frac{\alpha_0}{2i\pi\xi} + \left(\sum_{m \geq 1} \alpha_m \frac{\xi^{m-1}}{(m-1)!} \right) \frac{\log \xi}{2i\pi}$$

Plus généralement, si $\hat{\varphi}(x) = \hat{\psi}(x)x^\lambda$ avec

$$\hat{\psi}(x) = \sum_{m \geq 0} \psi_m x^m \in \mathbb{C}[[x]]_1$$

et $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, alors le majeur $maj(\hat{\varphi})$ et le mineur $\tilde{\varphi}$ définis par

$$maj(\hat{\varphi})(\xi) = \frac{e^{i\pi\lambda}}{2i\pi} \sum_{m \geq 0} (-1)^m \Gamma(1 - m - \lambda) \psi_m \xi^{m+\lambda-1}$$

et

$$\tilde{\varphi}(\xi) = \sum_{m \geq 0} \frac{\psi_m}{\Gamma(m + \lambda)} \xi^{m+\lambda-1}$$

sont holomorphes multiformes à l'origine.

On peut également montrer que tout majeur (et donc le mineur) de $\hat{\psi}(x)x^\lambda \log^p x$, avec $\hat{\psi} \in \mathbb{C}[[x]]_1$, $\lambda \in \mathbb{C}$ et $p \in \mathbb{N}$, est une fonction de la classe de Nilsson à l'origine, i.e., de la forme

$$\sum_{\text{finie}} \chi_{\mu,q}(\xi) \xi^\mu \log^q \xi$$

où $\chi_{\mu,q}(\xi) \in \mathbb{C}\{\xi\}$, $\mu \in \mathbb{C}$ et $q \in \mathbb{N}$. En particulier, tout majeur de $\hat{\psi}(x)x^\lambda \log^p x$ est holomorphe multiforme à l'origine. Précisément, on peut choisir comme majeur

$$maj(\hat{\psi}(x)x^\lambda \log^p x) = \begin{cases} \sum_{k=0}^p \chi_k(\xi) \xi^{\lambda-1} \log^k \xi & \text{si } \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z} \\ \sum_{k=1}^{p+1} \chi_k(\xi) \log^k \xi & \text{si } \lambda \in \mathbb{N}^* \\ \sum_{\ell=0}^q \sum_{k=0}^p \alpha_{\ell,k} \xi^{\lambda+\ell-1} \log^k \xi + \sum_{k=1}^{p+1} \chi_k(\xi) \log^k \xi & \text{si } \lambda = -q \in -\mathbb{N} \end{cases}$$

avec $\chi_k(\xi) \in \mathbb{C}\{\xi\}$ et $\alpha_{\ell,k} \in \mathbb{C}$ ([Mal85]).

Introduisons à présent une sous-algèbre particulière de l'algèbre \mathcal{H} . Celle-ci nous servira constamment dans la suite de cette thèse.

Proposition 1.23 ([E85], [Sau06]) *Pour toute direction $\theta \in \mathbb{S}^1$, nous notons $\mathcal{H}_{\theta, \text{exp}}$ l'ensemble des $\widehat{\varphi}$ élément de \mathcal{H} dont le mineur $\widetilde{\varphi}$ peut être prolongé analytiquement sur un secteur illimité d'axe d_θ avec une croissance exponentielle d'ordre au plus un à l'infini.*

($\mathcal{H}_{\theta, \text{exp}}, \cdot$) est une algèbre multiplicative et une sous-algèbre de (\mathcal{H}, \cdot) . De plus, on a les inclusions

$$\mathcal{R}_{\text{cte}} \subset \mathcal{H}_{\theta, \text{exp}} \subset \mathcal{H}$$

Soient $\widehat{\varphi} \in \mathcal{H}_{\theta, \text{exp}}$ et $\text{maj}(\widehat{\varphi})$ un majeur de $\widehat{\varphi}$. La transformée de Laplace

$$\mathcal{L}_\theta(\text{maj}(\widehat{\varphi}))(x) = \int_{\gamma'_{\theta, \varepsilon}} \text{maj}(\widehat{\varphi})(\xi) e^{-\frac{\xi}{x}} d\xi + \int_{\varepsilon e^{i\theta}}^{\infty e^{i\theta}} \widetilde{\varphi}(\xi) e^{-\frac{\xi}{x}} d\xi$$

de $\text{maj}(\widehat{\varphi})$ dans la direction θ définit alors une fonction holomorphe multiforme sur un secteur de sommet 0, bissecté par θ et d'ouverture strictement supérieure à π . Remarquer que si $\widetilde{\Phi}$ est un autre majeur de $\widehat{\varphi}$, le théorème de Cauchy montre que

$$\mathcal{L}_\theta(\text{maj}(\widehat{\varphi})) = \mathcal{L}_\theta(\widetilde{\Phi})$$

De plus, si le mineur $\widetilde{\varphi}$ est intégrable à l'origine, on peut faire tendre ε vers 0 et on retrouve ([Sau06]) la formule classique de la transformée de Laplace de $\widetilde{\varphi}$ dans la direction θ :

$$\mathcal{L}_\theta(\text{maj}(\widehat{\varphi}))(x) = \int_0^{\infty e^{i\theta}} \widetilde{\varphi}(\xi) e^{-\frac{\xi}{x}} d\xi = \mathcal{L}_\theta(\widetilde{\varphi})(x)$$

La transformation de Laplace \mathcal{L}_θ est compatible avec le produit de convolution \otimes :

$$\mathcal{L}_\theta(\text{maj}(\widehat{\varphi}) \otimes \text{maj}(\widehat{\psi})) = \mathcal{L}_\theta(\text{maj}(\widehat{\varphi})) \mathcal{L}_\theta(\text{maj}(\widehat{\psi}))$$

Si le majeur $\text{maj}(\widehat{\varphi})$ d'un élément $\widehat{\varphi}$ de $\mathcal{H}_{\theta, \text{exp}}$ peut être prolongé analytiquement sur des secteurs illimités d'axes d_θ et $d_{\theta-2\pi}$ avec une croissance exponentielle d'ordre au plus un à l'infini (on peut montrer que l'on peut toujours choisir un majeur comme ceci), alors

$$\mathcal{L}_\theta(\text{maj}(\widehat{\varphi}))(x) = \int_{\gamma_\theta} \text{maj}(\widehat{\varphi})(\xi) e^{-\frac{\xi}{x}} d\xi$$

où γ_θ est le contour de Hankel précédent (cf. figure 1.7). En particulier, si

$$\widehat{\varphi}(x) = \sum_{m \geq 0} \varphi_m x^m \in \mathbb{C}[[x]]_1$$

est 1-sommable dans la direction θ , alors sa somme $s_\theta(\widehat{\varphi})$ est donnée par

$$s_\theta(\widehat{\varphi})(x) = \int_{\gamma_\theta} \text{maj}(\widehat{\varphi})(\xi) e^{-\frac{\xi}{x}} d\xi$$

où

$$\text{maj}(\widehat{\varphi})(\xi) = \frac{\varphi_0}{2i\pi\xi} + \left(\sum_{m \geq 1} \frac{\varphi_m}{(m-1)!} \xi^{m-1} \right) \frac{\log \xi}{2i\pi}$$

En effet, le mineur

$$\widetilde{\varphi}(\xi) = \sum_{m \geq 1} \frac{\varphi_m}{(m-1)!} \xi^{m-1}$$

étant holomorphe à l'origine et pouvant être prolongé analytiquement sur un secteur illimité d'axe d_θ avec une croissance exponentielle d'ordre au plus un à l'infini, le majeur $\text{maj}(\widehat{\varphi})$ vérifie les conditions voulues.

Plus généralement, on a la

Proposition 1.24 *Si $\widehat{\varphi} \in \mathbb{C}[[x]]_1$ est 1-sommable dans la direction θ , alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ et tout $p \in \mathbb{N}$:*

1. $\widehat{\varphi}x^\lambda \log^p x$ est un élément de $\mathcal{H}_{\theta, \text{exp}}$, i.e., $\text{maj}(\widehat{\varphi}x^\lambda \log^p x)$ est holomorphe à l'origine et son mineur peut être prolongé analytiquement sur un secteur illimité d'axe d_θ avec une croissance au plus exponentielle d'ordre un à l'infini.
2. L'intégrale de Laplace $\mathcal{L}_\theta(\text{maj}(\widehat{\varphi}x^\lambda \log^p x))$ dans la direction θ est donnée par

$$\mathcal{L}_\theta(\text{maj}(\widehat{\varphi}x^\lambda \log^p x)) = s_\theta(\widehat{\varphi})x^\lambda \log^p x$$

Démonstration. 1. La série $\widehat{\varphi}$ étant 1-sommable dans la direction θ , nous avons $\widehat{\varphi} \in \mathcal{H}_{\theta, \text{exp}}$. Par ailleurs, $x^\lambda \log^p x$ est une constante de résurgence et donc en particulier un élément de $\mathcal{H}_{\theta, \text{exp}}$. La structure d'algèbre de $\mathcal{H}_{\theta, \text{exp}}$ (proposition 1.23) permet de conclure.

2. Le majeur $\text{maj}(\widehat{\varphi}x^\lambda \log^p x)$ de $\widehat{\varphi}x^\lambda \log^p x$ vérifiant

$$\text{maj}(\widehat{\varphi}x^\lambda \log^p x) = \text{maj}(\widehat{\varphi}) \otimes \text{maj}(x^\lambda \log^p x)$$

on a

$$\mathcal{L}_\theta(\text{maj}(\widehat{\varphi}x^\lambda \log^p x)) = \mathcal{L}_\theta(\text{maj}(\widehat{\varphi}))\mathcal{L}_\theta(\text{maj}(x^\lambda \log^p x))$$

La série $\widehat{\varphi}$ étant 1-sommable dans la direction θ , la remarque précédente montre que $\mathcal{L}_\theta(\text{maj}(\widehat{\varphi})) = s_\theta(\widehat{\varphi})$. D'autre part, $x^\lambda \log^p x$ étant une constante de résurgence, nous avons $\mathcal{L}_\theta(\text{maj}(x^\lambda \log^p x)) = x^\lambda \log^p x$ (proposition 1.21). Le résultat suit aisément. ■

Remarque 1.25 Le résultat de cette proposition reste valable si on remplace $x^\lambda \log^p x$ par n'importe quelle constante de résurgence : si $\widehat{\varphi} \in \mathbb{C}[[x]]_1$ est 1-sommable dans la direction θ et si $\psi \in \mathcal{R}_{\text{cte}}$, alors $\widehat{\varphi}\psi$ est un élément de $\mathcal{H}_{\theta, \text{exp}}$ et on a

$$\mathcal{L}_\theta(\text{maj}(\widehat{\varphi}\psi)) = s_\theta(\widehat{\varphi})\psi$$

L'utilisation des majeurs dans la théorie de la sommation des séries divergentes permet également d'établir le résultat suivant :

Proposition 1.26 Soient $\lambda \in \mathbb{C}$ et

$$\widehat{\varphi}(x) = \sum_{m \geq 0} \varphi_m x^m \in \mathbb{C}[[x]]_1$$

Le majeur

$$\text{maj}(\widehat{\varphi}x^\lambda) = \begin{cases} \frac{e^{i\pi\lambda}}{2i\pi} \sum_{m \geq 0} (-1)^m \Gamma(1 - m - \lambda) \varphi_m \xi^{m+\lambda-1} & \text{si } \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z} \\ \left(\sum_{m \geq 0} \frac{\varphi_m}{(m+p-1)!} \xi^{m+p-1} \right) \frac{\log \xi}{2i\pi} & \text{si } \lambda = p \in \mathbb{N}^* \\ \sum_{k=1}^{p+1} \frac{(-1)^k k! \varphi_{p+1-k}}{2i\pi \xi^k} + \left(\sum_{m \geq p+1} \frac{\varphi_m}{(m-p-1)!} \xi^{m-p-1} \right) \frac{\log \xi}{2i\pi} & \text{si } \lambda = -p \in -\mathbb{N} \end{cases}$$

est holomorphe multiforme à l'origine, i.e., $\widehat{\varphi}x^\lambda$ est un élément de \mathcal{H} .

Si $\widehat{\varphi}x^\lambda$ est également un élément de $\mathcal{H}_{\theta, \text{exp}}$, alors $\widehat{\varphi}$ est 1-sommable dans la direction θ et on a

$$\mathcal{L}_\theta(\text{maj}(\widehat{\varphi}x^\lambda))(x) = s_\theta(\widehat{\varphi})x^\lambda$$

Démonstration. La série $\widehat{\varphi}$ étant de type Gevrey de niveau 1, il est clair que $\widehat{\varphi}x^\lambda$ est un élément de \mathcal{H} .

Supposons en outre que $\widehat{\varphi}x^\lambda$ est un élément de $\mathcal{H}_{\theta, \text{exp}}$. Comme $x^{-\lambda}$ est une constante de résurgence, la structure d'algèbre de $\mathcal{H}_{\theta, \text{exp}}$ montre que $\widehat{\varphi}$ est également un élément de $\mathcal{H}_{\theta, \text{exp}}$. La série $\widehat{\varphi}$ est donc 1-sommable dans la direction θ . L'égalité sur la transformée de Laplace de $\text{maj}(\widehat{\varphi}x^\lambda)$ est alors obtenue à l'aide de la proposition 1.24. ■

Ces deux dernières propositions nous seront très utiles pour établir l'isomorphisme linéaire entre les multiplicateurs de Stokes et les coefficients de résurgence.

1.2.3 Fonctions résurgentes

La présence du logarithme, de puissances non entières de x et d'exponentielles ramifiées dans les solutions formelles des systèmes différentiels linéaires ne permet pas de nous limiter à la prolongeabilité sans fin telle que nous l'avons définie au paragraphe 1.1.3. En particulier, il est nécessaire d'étendre la définition 1.7 aux fonctions holomorphes multiformes à l'origine :

Définition 1.27 Soit \mathcal{S} un sous-ensemble discret de \mathbb{C} que l'on relève en un sous-ensemble discret de \mathbb{C}_∞ .

On dit qu'une fonction holomorphe multiforme à l'origine est *une fonction prolongeable sans fin de support singulier \mathcal{S}* si elle peut être prolongée analytiquement le long de tout chemin d'origine 0 dans \mathbb{C}_∞ et de classe \mathcal{C}^1 par morceaux, tracé sur $\mathbb{C}_\infty \setminus \mathcal{S}$ et ne faisant qu'un nombre fini de tours autour de l'origine de \mathbb{C}_∞ et autour d'un nombre fini de points de \mathcal{S} .

On étend de même la définition 1.11 sur les séries formelles résurgentes à la notion de fonctions résurgentes :

Définition 1.28 (fonctions résurgentes) Soit \mathcal{S} un sous-ensemble discret de \mathbb{C} que l'on relève en un sous-ensemble discret de \mathbb{C}_∞ .

On dit qu'une série formelle

$$\widehat{\varphi} = \sum_{m \geq 0} \alpha_m \varphi_m \text{ avec } \alpha_m \in \mathbb{C} \text{ et } \varphi_m \in \mathcal{R}_{\text{cte}}$$

est une *fonction résurgente de support singulier* \mathcal{S} si son majeur $\text{maj}(\widehat{\varphi})$ est une fonction holomorphe multiforme à l'origine –i.e., $\widehat{\varphi}$ est un élément de $\mathcal{H}-$ dont la variation est une fonction prolongeable sans fin de support singulier \mathcal{S} .

De plus, si les prolongements analytiques sont à croissance exponentielle d'ordre au plus un à l'infini, on dit que $\widehat{\varphi}$ est une *fonction résurgente-sommable de support singulier* \mathcal{S} .

Cette définition coïncide donc avec la définition 1.11 dans le cas où $\widehat{\varphi}$ est une série de type Gevrey de niveau 1. Les séries formelles résurgentes (resp. résurgentes-sommables) associées à \mathcal{S} sont donc des fonctions résurgentes (resp. résurgentes-sommables) de support singulier \mathcal{S} . On note encore $\mathcal{R}(\mathcal{S})$ (resp. $\mathcal{R}_{\text{som}}(\mathcal{S})$) l'ensemble des fonctions résurgentes (resp. résurgentes-sommables) de support singulier \mathcal{S} .

L'étude du produit de convolution \otimes permet d'étendre le résultat de la proposition 1.8 sur le prolongement analytique du produit de convolution usuel $*$:

Théorème 1.29 ([E81-1], [E85]) Soient \mathcal{S} et \mathcal{S}' deux sous-ensembles discrets de \mathbb{C} que l'on relève en deux sous-ensembles discrets de \mathbb{C}_∞ .

Si $\widehat{\varphi}$ (resp. $\widehat{\psi}$) est une fonction résurgente(-sommable) de support singulier \mathcal{S} (resp. \mathcal{S}'), alors $\widehat{\varphi}\widehat{\psi}$ est une fonction résurgente(-sommable) de support singulier $\mathcal{S} \cup \mathcal{S}' \cup (\mathcal{S} \oplus \mathcal{S}')$.

Ce théorème (non trivial) permet d'établir plusieurs résultats importants :

Proposition 1.30 Soit $\mathfrak{R} = \mathbb{Z}\omega_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}\omega_p$ un réseau de \mathbb{C} que l'on relève en un réseau de \mathbb{C}_∞ .

Les ensembles $(\mathcal{R}(\mathfrak{R}), x^2 \frac{d}{dx})$ et $(\mathcal{R}_{\text{som}}(\mathfrak{R}), x^2 \frac{d}{dx})$ sont des \mathbb{C} -algèbres différentielles.

Proposition 1.31 Soit \mathcal{S} un sous-ensemble discret de \mathbb{C} que l'on relève en un sous-ensemble discret de \mathbb{C}_∞ .

Alors, $\mathcal{R}(\mathcal{S})$ et $\mathcal{R}_{\text{som}}(\mathcal{S})$ sont des \mathcal{R}_{cte} -modules.

Ces deux propositions sont les analogues respectifs des propositions 1.12 et 1.13. Le résultat suivant est très important puisqu'il permet d'étudier avec précision les singularités dans le plan de Borel et d'établir l'isomorphisme linéaire entre les multiplicateurs de Stokes et les coefficients de résurgence.

Théorème 1.32 Soit \mathcal{S} un sous-ensemble discret de \mathbb{C} que l'on relève en un sous-ensemble discret de \mathbb{C}_∞ .

Soient $\lambda \in \mathbb{C}$, $p \in \mathbb{N}$ et $\widehat{\varphi} \in \mathbb{C}[[x]]_1$ une fonction résurgente-sommable de support singulier \mathcal{S} .

Alors,

1. $\widehat{\varphi}x^\lambda \log^p x$ est une fonction résurgente-sommable de support singulier \mathcal{S} .
2. Si on écrit son majeur sous la forme

$$\text{maj}(\widehat{\varphi}x^\lambda \log^p x)(\xi) = \begin{cases} \sum_{k=0}^p \chi_k(\xi) \xi^{\lambda-1} \log^k \xi & \text{si } \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z} \\ \sum_{k=1}^{p+1} \chi_k(\xi) \log^k \xi & \text{si } \lambda \in \mathbb{N}^* \\ \sum_{\ell=0}^q \sum_{k=0}^p \alpha_{\ell,k} \xi^{\lambda+\ell-1} \log^k \xi + \sum_{k=1}^{p+1} \chi_k(\xi) \log^k \xi & \text{si } \lambda = -q \in -\mathbb{N} \end{cases}$$

avec $\alpha_{\ell,k} \in \mathbb{C}$ et $\chi_k \in \mathbb{C}\{\xi\}$, alors les fonctions analytiques χ_k définissent des germes de fonctions analytiques prolongeables sans fin de support singulier \mathcal{S} qui sont à croissance exponentielle d'ordre au plus un à l'infini.

Le premier point de ce théorème est évident avec la proposition 1.31, puisque $x^\lambda \log^p x$ est une constante de résurgence. Quant au second point, il est plus délicat à établir. Nous en donnerons une démonstration au paragraphe 2.2.3. Celle-ci est basée sur les propriétés classiques suivantes de l'opérateur de variation var :

Lemme 1.33 Pour tout $m \geq 1$, on pose $\text{var}^{m+1} = \text{var} \circ \text{var}^m$.

1. Si $\widetilde{\varphi}$ est une fonction holomorphe multiforme à l'origine, alors

$$\forall m \geq 1, \text{var}^m(\widetilde{\varphi})(\xi) = \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} \widetilde{\varphi}(\xi e^{-2ik\pi})$$

2. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\forall m \in \{1, \dots, p\}, \text{var}^m(\log^p \xi) = \frac{(2i\pi)^m p!}{(p-m)!} \log^{p-m} \xi + \alpha_1 \log^{p-m-1} \xi + \dots + \alpha_{p-m}$$

avec $\alpha_1, \dots, \alpha_{p-m} \in \mathbb{C}$; et $\text{var}^m(\log^p \xi) = 0$ pour tout $m \geq p+1$.

3. Pour tout $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\forall m \geq 1, \text{var}^m(\xi^\lambda \log^p \xi) = (1 - e^{-2i\pi\lambda})^m \xi^\lambda \log^p \xi + \beta_1 \xi^\lambda \log^{p-1} \xi + \dots + \beta_p \xi^\lambda$$

avec $\beta_1, \dots, \beta_p \in \mathbb{C}$.

1.3 Solutions des systèmes différentiels linéaires méromorphes à l'origine

1.3.1 Irrégularité des systèmes

Considérons un système différentiel linéaire $[A]$ méromorphe à l'origine de la forme

$$[A] \quad x^{r+1} \frac{dY}{dx} = A(x)Y$$

où $r \in \mathbb{Z}$ et où $A(x)$ est un élément de $M_n(\mathbb{C}\{x\})$ tel que $A(0) \neq 0$. Il est d'usage d'appeler *rang de Poincaré de $[A]$* le nombre entier r . Ce nombre n'est pas invariant par transformation de jauge méromorphe, *i.e.*, par changement linéaire d'inconnue de la forme $Z = T(x)Y$ où $T(x) \in GL_n(\mathbb{C}\{x\}[\frac{1}{x}])$ ², mais il admet une valeur minimale r_0 appelée *vrai rang de Poincaré de $[A]$* . La valeur de r_0 détermine la nature de l'origine pour le système $[A]$:

- Si $r_0 \leq -1$, l'origine est un point ordinaire et le théorème de Cauchy-Lipschitz affirme que le système $[A]$ admet une unique solution fondamentale $F(x)$ analytique à l'origine et vérifiant $F(0) = I_n$. De plus, le disque de convergence de F est celui de la matrice A .
- Si $r_0 = 0$, l'origine est un point *singulier régulier* et si $r_0 \geq 1$, l'origine est un point *singulier irrégulier*. La détermination d'une solution fondamentale est alors plus complexe.

1.3.1.1 Détermination de l'irrégularité du système $[A]$

Une méthode due à J. Moser ([Mo60]) fournit un algorithme permettant de construire une transformation de jauge $Z = T(x)Y$ de telle sorte que le rang de Poincaré du système de jauge $[{}^T A]$ soit égal à son vrai rang de Poincaré r_0 . Rappelons brièvement cette méthode qui nous servira au chapitre 5.

Notons

$$A(x) = \sum_{m \geq 0} A_m x^m$$

et associons au système $[A]$ les deux quantités suivantes :

Définition 1.34 • On appelle *rang de Moser de $[A]$* le nombre rationnel

$$m(A) = \max \left(0, r + \frac{\text{rg}(A_0)}{n} \right)$$

²le système de jauge $[{}^T A]$ est défini par

$$x^{r+1} \frac{dZ}{dx} = (TAT^{-1} + x^{r+1}T'T^{-1})Z = (TAT^{-1} - x^{r+1}TT^{-1})Z$$

et on dit que $[A]$ et $[{}^T A]$ sont *méromorphiquement équivalents*.

Lorsque $T(x) \in GL_n(\mathbb{C}[[x]][\frac{1}{x}])$, on parle de *transformation de jauge formelle* et on dit que $[A]$ et $[{}^T A]$ sont *formellement équivalents*.

où r est le rang de Poincaré de $[A]$, $\text{rg}(A_0)$ le rang de la matrice de tête A_0 de $A(x)$ et n la dimension du système.

- On appelle *polynôme de Moser de $[A]$* le polynôme de la variable λ défini par

$$\mathfrak{P}(A, \lambda) = x^{\text{rg}(A_0)} \det \left(\lambda I_n + \frac{A_0}{x} + A_1 \right) \Big|_{x=0}$$

Comme pour le rang de Poincaré, le rang de Moser $m(A)$ n'est pas invariant par transformation de jauge méromorphe, mais il admet une valeur minimale $m_0(A)$. Noter que

$$m(A) = m_0(A) \Leftrightarrow r = r_0$$

Le théorème de Moser ci-dessous donne une condition nécessaire et suffisante pour déterminer si $m(A) = m_0(A)$ et fournit, dans le cas contraire, un algorithme construisant à l'aide de transformations de jauge adéquates sur le système $[A]$ un système de jauge de rang de Moser minimal, et donc de rang de Poincaré r_0 .

Théorème 1.35 ([Mo60]) • *Le rang de Moser $m(A)$ du système $[A]$ est égal à $m_0(A)$ si, et seulement si, le polynôme de Moser $\mathfrak{P}(A, \lambda)$ n'est pas identiquement nul.*

- *Si $m(A) > m_0(A)$, alors on peut réduire le rang de Moser du système par des transformations de jauge de la forme*

$$T(x) = (P_0 + P_1 x) \Delta$$

où P_0 et P_1 sont des matrices constantes, P_0 est inversible et où Δ est une matrice diagonale dont les termes diagonaux ne prennent que les valeurs 1 ou x .

Pour plus de précision sur l'algorithme, on renvoie à [B95], [H83] et [H87]. Signalons, en outre, que l'algorithme de Moser est implanté sous Maple dans la procédure `moser_reduce` du paquetage `DEtools`.

1.3.1.2 Cas des singularités régulières

Nous supposons ici que le système $[A]$ est de la forme

$$x \frac{dY}{dx} = A(x)Y$$

avec $A(0) \neq 0$. Ce système, parfois appelé *système de première espèce*, admet une solution fondamentale de la forme

$$Y(x) = F(x)x^L$$

où $F(x)$ est une matrice à coefficients analytiques à l'origine et où L est une matrice constante complexe. De plus, le disque de convergence de la série $F(x)$ est celui de la matrice $A(x)$. On dispose, pour ce système, de bons algorithmes de calcul d'une solution fondamentale $Y(x)$ ([CL55], [S86]).

Apportons toutefois quelques précisions qui nous seront utiles dans la suite lors du calcul effectif des multiplicateurs de Stokes (voir chapitres 3, 5 et 7). Notons comme précédemment

$$A(x) = \sum_{m \geq 0} A_m x^m$$

On a le résultat classique suivant (voir par exemple [Bal00] et [Was65]) :

Proposition 1.36 *Si les valeurs propres de la matrice de tête A_0 de $A(x)$ ne diffèrent pas d'un entier³, i.e., $\lambda - \mu \notin \mathbb{Z}^*$ pour toutes valeurs propres λ et μ de A_0 , alors le système $[A]$ admet une unique solution fondamentale de la forme*

$$Y(x) = F(x)x^{A_0}$$

avec

$$F(x) = I_n + \sum_{m \geq 1} F_m x^m \in M_n(\mathbb{C}\{x\})$$

De plus, en posant $F_0 = I_n$, les coefficients F_m sont uniquement déterminés par les relations

$$(1.6) \quad F_m(A_0 + mI_n) - A_0 F_m = \sum_{k=0}^{m-1} A_{m-k} F_k, \quad m \geq 1$$

Les égalités (1.6) permettent de construire des algorithmes pour calculer les premiers termes de la série F ou pour évaluer une somme partielle de F en tout point de son disque de convergence.

Lorsqu'au moins deux valeurs propres de A_0 diffèrent d'un entier, on construit, à l'aide de cisaillements successifs (voir [Was65, p. 94]), une transformation de jauge polynomiale $Z = T(x)Y$ de telle sorte que le système de jauge associé

$$x \frac{dZ}{dx} = B(x)Z = \left(\sum_{m \geq 0} B_m x^m \right) Z$$

satisfasse à l'hypothèse de la proposition 1.36. Il s'ensuit qu'une solution fondamentale du système $[A]$ est de la forme

$$Y(x) = T^{-1}(x)F(x)x^{B_0}$$

où

$$F(x) = I_n + \sum_{m \geq 1} F_m x^m \in M_n(\mathbb{C}\{x\})$$

et où les coefficients F_m sont uniquement déterminés par les relations

$$F_m(B_0 + mI_n) - B_0 F_m = \sum_{k=0}^{m-1} B_{m-k} F_k, \quad m \geq 1$$

³Noter que l'on admet les valeurs propres multiples.

1.3.1.3 Cas des singularités irrégulières

Nous supposons à présent que le système $[A]$ est de la forme

$$x^{r+1} \frac{dY}{dx} = A(x)Y$$

où le vrai rang de Poincaré r_0 de $[A]$ est supérieur à 1. H. L. Turrittin ([Tu55]) et W. Wasow ([Was65]) ont été les premiers à donner en toute généralité une solution fondamentale formelle du système $[A]$. Vers la fin des années 1970, W. Balsler, W. B. Jurkat et D. A. Lutz ont montré qu'une bonne symétrisation des formules de Turrittin et Wasow permet d'obtenir pour le système $[A]$ une solution fondamentale formelle de la forme

$$(1.7) \quad \widehat{Y}(x) = \widehat{F}(x)x^L e^{Q(\frac{1}{x})}$$

où $\widehat{F}(x)$ est une matrice inversible à coefficients séries méromorphes formelles en x , L est une matrice constante complexe et $Q(\frac{1}{x})$ une matrice diagonale de polynômes en une racine $\frac{1}{t} = x^{-1/\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}^*$, de la variable x sans terme constant ([BJL79-1], [J78]). On montre également que r_0 est la partie entière supérieure du degré en $\frac{1}{x}$ de Q . La série formelle $\widehat{F}(x)$ est appelée *facteur série formelle de $\widehat{Y}(x)$* , la matrice L est la *matrice des exposants de monodromie formelle de $\widehat{Y}(x)$* , $e^{Q(\frac{1}{x})}$ est la *partie irrégulière de $\widehat{Y}(x)$* et l'entier ν est le *degré de ramification de $\widehat{Y}(x)$* . Un protocole pour le calcul de cette partie irrégulière ([B97]), basé sur la démonstration de Turrittin-Wasow, est implanté sous Maple dans le code ISOLDE⁴ (utiliser la commande `exp_parts`). En particulier, on peut obtenir par ce biais le degré de ramification ν . Noter que si le système $[A]$ est à singularité régulière à l'origine, cette procédure reste valable et on obtient $Q = 0$.

Rappelons que la matrice Q et une forme de Jordan de L , les valeurs propres étant prises modulo \mathbb{Z} , constituent les invariants formels de $[A]$, *i.e.*, elles sont invariantes par transformation de jauge formelle ([BJL79-1]).

Lorsque Q est une homothétie, le facteur série formelle \widehat{F} définit une fonction méromorphe à l'origine (si $Q = qI_n$, le changement de variable $Z = e^{-q}Y$ transforme le système $[A]$ en un système à point singulier régulier). En revanche, si au moins deux polynômes de Q sont distincts, la série formelle \widehat{F} est en général divergente. Dans ce dernier cas, on peut obtenir une solution de $[A]$ analytique multiforme à l'origine en sommant \widehat{F} dans une direction θ fixée, puis en prolongeant analytiquement la fonction obtenue autour de l'origine de \mathbb{C}_∞ par le théorème de Cauchy. Du fait de la divergence de la série \widehat{F} , la direction θ ne peut pas être choisie arbitrairement : il existe des directions dans lesquelles \widehat{F} ne peut être sommée (sans quoi \widehat{F} serait convergente par le théorème de Cauchy). Ces directions, qui sont en nombre fini, constituent les directions singulières de \widehat{Y} (ou du système $[A]$), et sont appelées *directions anti-Stokes de \widehat{Y}* (ou de $[A]$). Elles sont directement lisibles sur les polynômes des exponentielles de la partie irrégulière de \widehat{Y} (voir définition 1.38 ci-après). Les directions anti-Stokes

⁴Ce paquetage a été développé à l'IMAG de Grenoble par M. Barkatou et E. Pflügel. On trouvera un pointeur dans [B].

sont caractérisées par le fait que les sommes de part et d'autre de ces directions ne se recollent pas toujours, des sauts de type exponentiel pouvant apparaître : c'est le *phénomène de Stokes*.

Dans tous les cas, le facteur série formelle \widehat{F} est une transformation de jauge formelle entre un système

$$[A_0] \quad x^{r+1} \frac{dY}{dx} = A_0(x)Y$$

dont une solution fondamentale formelle est $\widehat{Y}_0(x) = x^L e^{Q(\frac{1}{x})}$, et le système $[A]$. En particulier, \widehat{F} est solution du système différentiel linéaire

$$[A_0 : A] \quad x^{r+1} \frac{dF}{dx} = A(x)F - FA_0(x)$$

Le système $[A_0]$ est appelé *forme normale de $[A]$* et $[A_0 : A]$ est *le système de passage de $[A_0]$ à $[A]$* . Le système $[A_0]$ n'est pas unique et intervient de façon fondamentale dans la classification formelle des systèmes différentiels linéaires méromorphes à l'origine. W. Balser, W. B. Jurkat et D. A. Lutz ont montré dans [BJL79-1] que deux systèmes $[A]$ et $[B]$ sont formellement équivalents si, et seulement si, ils sont formellement équivalents à une même forme normale. Autrement dit, deux systèmes sont formellement équivalents si, et seulement si, leurs invariants formels sont identiques⁵. Il est donc nécessaire, étant donné un système $[A]$, de savoir en déterminer une forme normale $[A_0]$. En général,

$$A_0(x) \neq x^{r+1} \frac{d(Q(\frac{1}{x}))}{dx} + x^r L$$

puisque les matrices L et Q ne commutent pas nécessairement. Cependant, on peut montrer que $A_0(x)$ est toujours un polynôme en x et $\frac{1}{x}$. Une telle matrice peut être obtenue, par exemple, avec le logiciel DESIR2 réalisé par l'IMAG de Grenoble. On trouvera un pointeur dans [B].

Avant de rappeler brièvement quelques résultats classiques sur le phénomène de Stokes qui nous serviront dans la suite, regardons un peu plus précisément le cas des systèmes $[A]$ où le degré de ramification ν de la solution fondamentale formelle (1.7) est égal à 1 (*cas non ramifié*). Pour ces systèmes, on montre ([BJL79-1]) que les deux matrices L et Q commutent et que l'on peut choisir dans la solution fondamentale formelle (1.7) la matrice L sous forme de Jordan. Aussi, si on note

$$L = \bigoplus_{j=1}^J L_j$$

où chaque L_j est un bloc de Jordan de L de dimension n_j , alors la matrice Q est de la forme

$$Q\left(\frac{1}{x}\right) = \bigoplus_{j=1}^J q_j \left(\frac{1}{x}\right) I_{n_j} \text{ avec } q_j \in x^{-1}\mathbb{C}[x^{-1}]$$

⁵Dans ce cas, on dit que les deux systèmes appartiennent à la même *classe formelle*.

On peut également, quitte à réduire les valeurs propres modulo les entiers à gauche, supposer que les valeurs propres λ de L vérifient $\operatorname{Re}(\lambda) \in [0, 1[$. On exhibe ainsi directement les invariants formels de $[A]$ dans la solution fondamentale formelle $\widehat{Y}(x)$. Par ailleurs, on peut choisir comme forme normale de $[A]$ le système $[A_0]$, où la matrice $A_0(x)$ est définie par

$$A_0(x) = x^{r+1} \frac{d}{dx} \left(Q \left(\frac{1}{x} \right) \right) + x^r L$$

Signalons que les deux matrices L et Q ainsi définies peuvent être obtenues sous Maple avec la commande `formal_sols` du paquetage ISOLDE. Noter que cette commande fournit également une somme partielle de la série formelle $\widehat{F}(x)$ ([BP99]).

Dans cette thèse, nous nous intéressons **uniquement** à ce type de système (on peut toujours s'y ramener à l'aide de l'extension algébrique finie $x \mapsto x^\nu$ de la variable x); et nous prenons comme solution fondamentale formelle

$$\widehat{Y}(x) = \widehat{F}(x) x^L e^{Q(\frac{1}{x})}$$

où les matrices L et Q sont choisies comme ci-dessus. Toutefois, nous verrons, lors du calcul effectif des multiplicateurs de Stokes, qu'il peut parfois être nécessaire de recourir au *cas ramifié*, i.e., au cas où le degré de ramification ν de la solution fondamentale formelle est supérieur à 2.

Rappelons à présent quelques points importants sur le phénomène de Stokes des systèmes à singularité irrégulière à l'origine.

1.3.2 Phénomène de Stokes

Nous considérons ici un système différentiel linéaire $[A]$ dont une solution fondamentale formelle $\widehat{Y}(x)$ est de la forme (1.7). Décomposons le facteur série formelle \widehat{F} en

$$\widehat{F}(x) = \left[\widehat{F}_1(x) \quad \cdots \quad \widehat{F}_n(x) \right]$$

où $\widehat{F}_\ell(x) \in M_{n,1}(\mathbb{C}[[x]][\frac{1}{x}])$ désigne la $\ell^{\text{ème}}$ colonne de \widehat{F} . Notons

$$Q \left(\frac{1}{x} \right) = \operatorname{diag} \left(q_1 \left(\frac{1}{x} \right), \dots, q_n \left(\frac{1}{x} \right) \right) \text{ avec } q_j \in x^{-1/\nu} \mathbb{C}[x^{-1/\nu}]$$

Nous supposons qu'il existe au moins deux polynômes q_j et q_ℓ distincts, sans quoi \widehat{F} serait convergente et il n'y aurait aucun phénomène de Stokes.

Lorsque $q_j \neq q_\ell$, nous écrivons le polynôme $q_j - q_\ell$ sous la forme

$$(q_j - q_\ell) \left(\frac{1}{x} \right) = -\frac{\alpha_{j,\ell}}{x^{k_{j,\ell}}} + o \left(\frac{1}{x^{k_{j,\ell}}} \right)$$

où $\alpha_{j,\ell} \neq 0$ et où $k_{j,\ell} \in \mathbb{Q}_+^*$ désigne le degré de $q_j - q_\ell$. On a les définitions suivantes :

Définition 1.37 • Les niveaux de la $\ell^{\text{ème}}$ colonne \widehat{F}_ℓ du facteur série formelle \widehat{F} sont les nombres rationnels $k_{j,\ell}$ avec $j \in \{1, \dots, n\}$ tels que $q_j \neq q_\ell$.

• Les niveaux du système $[A]$ sont les niveaux des n colonnes de \widehat{F} .

Lorsque l'on est dans le cas non ramifié, les niveaux sont entiers.

Définition 1.38 • Une direction θ est *une direction anti-Stokes de la $\ell^{\text{ème}}$ colonne \widehat{F}_ℓ de \widehat{F}* quand pour une, et donc toute, détermination $\tilde{\theta}$ de θ , il existe au moins un polynôme q_j distinct de q_ℓ tel que

$$\alpha_{j,\ell} e^{-ik_{j,\ell}\tilde{\theta}} > 0$$

On dit alors que θ est *une direction anti-Stokes de \widehat{F}_ℓ attachée à $q_j - q_\ell$* .

• Une direction θ est *une direction anti-Stokes du système $[A]$* (ou de la solution fondamentale formelle \widehat{Y}) si elle est une direction anti-Stokes pour au moins une colonne de \widehat{F} .

On a le résultat classique suivant :

Théorème 1.39 ([BBRS91], [Br91], [MalR92], [MR91]) Soient $\ell \in \{1, \dots, n\}$ et $r_{1,\ell} < r_{2,\ell} < \dots < r_{s_\ell,\ell}$ l'ensemble des niveaux de la $\ell^{\text{ème}}$ colonne \widehat{F}_ℓ de \widehat{F} ordonnés par ordre croissant.

Alors, \widehat{F}_ℓ est $(r_{1,\ell}, r_{2,\ell}, \dots, r_{s_\ell,\ell})$ -sommable dans toutes les directions qui ne sont pas des directions anti-Stokes de \widehat{F}_ℓ .

Passons à présent à l'étude proprement dite du phénomène de Stokes de $[A]$. Nous orientons le cercle des directions \mathbb{S}^1 dans le sens des aiguilles d'une montre. Nous choisissons cette orientation afin que nos calculs soient compatibles avec les calculs classiques au voisinage de l'infini lorsque l'orientation de \mathbb{S}^1 est dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. Nous utilisons la terminologie gauche-droite dans le sens suivant : à partir d'une direction $\theta \in \mathbb{S}^1$ fixée, nous allons à gauche (resp. à droite) lorsque nous nous déplaçons sur \mathbb{S}^1 dans le sens inverse des aiguilles d'une montre (resp. dans le sens des aiguilles d'une montre). Dans toute cette thèse, sauf mention contraire, nous choisissons les arguments dans $] -2\pi, 0]$. En particulier, $\log x$ est un nombre réel pour $x > 0$.

Si $\theta \in \mathbb{S}^1$ n'est pas une direction anti-Stokes de $[A]$, on note

$$Y_\theta(x) = s_\theta(\widehat{F})(x) x^L e^{Q(\frac{1}{x})}$$

la somme de \widehat{Y} dans la direction θ . Noter que $x^L e^{Q(\frac{1}{x})}$ est une vraie fonction par le choix de $\arg x = \theta$. De plus, cette fonction Y_θ est clairement une solution fondamentale de $[A]$.

Maintenant, si θ est une direction anti-Stokes de $[A]$, on définit la somme droite $Y_{\theta-} = Y_{\theta-\varepsilon}$ et la somme gauche $Y_{\theta+} = Y_{\theta+\varepsilon}$ de \widehat{Y} dans la direction θ , où $\varepsilon > 0$ est arbitrairement petit. Le théorème de Cauchy montre alors qu'il existe une unique matrice inversible $S_\theta \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que

$$Y_{\theta-} = Y_{\theta+} S_\theta$$

Proposition 1.40 ([BJL79-2], [L-R94]) *La matrice S_θ s'écrit sous la forme*

$$S_\theta = I_n + C_\theta$$

où la matrice $C_\theta \in M_n(\mathbb{C})$ est nilpotente. De plus, si on note

$$C_\theta = \left[C_\theta^{(j,\ell)} \right]_{1 \leq j, \ell \leq n}$$

alors $C_\theta^{(j,\ell)} = 0$ dès que $j = \ell$ et dès que θ n'est pas une direction anti-Stokes attachée à $q_j - q_\ell$. En particulier, si θ n'est pas une direction anti-Stokes de la $\ell^{\text{ème}}$ colonne du facteur série formelle \widehat{F} , alors la $\ell^{\text{ème}}$ colonne de la matrice C_θ est nulle.

Définition 1.41 La matrice C_θ est la matrice de Stokes associée à \widehat{Y} dans la direction θ . Les coefficients de C_θ sont les multiplicateurs de Stokes de \widehat{Y} dans la direction θ .

L'ensemble des matrices de Stokes associées à $\widehat{Y}(x)$ caractérise le phénomène de Stokes du système $[A]$. L'une des questions importantes, par exemple en théorie de Galois différentielle, est de déterminer si les multiplicateurs de Stokes sont nuls ou non.

Le but de cette thèse est de construire une méthode de calcul effectif des multiplicateurs de Stokes avec évaluation de l'erreur commise.

Rappelons pour terminer que l'étude théorique du phénomène de Stokes a permis de répondre au problème de classification méromorphe des systèmes :

Théorème 1.42 (théorème de classification méromorphe, [BJL79-2]) *Soient $[A]$ et $[B]$ deux systèmes d'une même classe formelle.*

$[A]$ et $[B]$ sont méromorphiquement équivalents si, et seulement si, ils ont les mêmes matrices de Stokes.

Dans la suite, nous nous servons uniquement du résultat partiel suivant :

Corollaire 1.43 *Deux systèmes différentiels linéaires méromorphiquement équivalents ont les mêmes matrices de Stokes.*

Ce résultat nous permet de "préparer" le système initial $[A]$, afin d'en simplifier l'étude, en normalisant, à l'aide de transformations de jauge méromorphes, la solution fondamentale formelle $\widehat{Y}(x)$ sous une forme précise (voir paragraphe 1.3.3 ci-après).

1.3.3 Position du problème

Dans cette thèse, nous nous restreignons à l'étude des systèmes différentiels linéaires méromorphes à singularité irrégulière à l'origine dans le cas non ramifié. Rappelons que nous pouvons toujours nous y ramener à l'aide d'une extension algébrique finie convenable de la variable x . Plus précisément, nous nous intéressons aux systèmes différentiels linéaires de la forme

$$[A] \quad x^{r+1} \frac{dY}{dx} = A(x)Y$$

dont une solution fondamentale formelle $\widehat{Y}(x) = \widehat{F}(x)x^L e^{Q(\frac{1}{x})}$ est telle que

- ★ $\widehat{F}(x) \in GL_n(\mathbb{C}[[x]][\frac{1}{x}])$;
- ★ $L = \bigoplus_{j=1}^J L_j$, où chaque L_j est un bloc de Jordan de L de dimension n_j et de valeur propre λ_j vérifiant $\operatorname{Re}(\lambda_j) \in [0, 1[$;
- ★ $Q(\frac{1}{x}) = \bigoplus_{j=1}^J q_j(\frac{1}{x}) I_{n_j}$ avec $q_j \in x^{-1}\mathbb{C}[x^{-1}]$

L'origine étant une singularité irrégulière, on a $Q \neq 0$ et le degré en $\frac{1}{x}$ de Q est égal au vrai rang de Poincaré de $[A]$. Rappelons que les matrices L et Q ainsi définies constituent les invariants formels de $[A]$ et qu'elles peuvent être obtenues par exemple sous Maple à l'aide de la commande `formal_sols` du paquetage ISOLDE.

L'étude du phénomène de Stokes du système $[A]$ est rendue difficile par le fait que r n'est pas nécessairement le vrai rang de Poincaré de $[A]$ et surtout par le fait que l'étude du facteur série formelle \widehat{F} est elle-même très complexe : si on sait que la série \widehat{F} est solution du système de passage $[A_0 : A]$, il est souvent difficile de la reconnaître parmi toutes les solutions possibles.

Une étape importante dans l'étude du phénomène de Stokes de $[A]$ consiste donc à construire un système méromorphiquement équivalent à $[A]$ (les matrices L et Q et les matrices de Stokes restent donc inchangées) qui permet de surmonter ces deux problèmes. L'idée consiste à normaliser la série \widehat{F} à $I_n + O(x)$ à l'aide d'une transformation de jauge méromorphe convenable : on peut montrer qu'il existe un élément $T(x)$ de $GL_n(\mathbb{C}\{x\}[\frac{1}{x}])$ tel que

$$T(x)\widehat{F}(x) = I_n + O(x)$$

La transformation de jauge considérée est alors $Z = T(x)Y$. Nous donnons au paragraphe 1.3.4 une méthode algorithmique pour construire une telle matrice. Plus précisément, nous montrons que nous pouvons choisir $T(x) \in GL_n(\mathbb{C}[x, \frac{1}{x}])$.

Une telle transformation de jauge permet à la fois de réduire le système $[A]$ à son vrai rang de Poincaré (que nous continuons d'appeler r) et de caractériser le nouveau facteur série formelle, que nous notons encore \widehat{F} : l'hypothèse sur les valeurs propres de la matrice L montre que \widehat{F} est l'unique solution série formelle vérifiant $\widehat{F}(0) = I_n$ du système de passage $[A_0 : A]$ ([BJL79-1]).

Pour simplifier encore les démonstrations à venir, nous avons besoin d'une normalisation un peu plus fine sur \widehat{F} . A l'aide d'une transformation de jauge rationnelle sans pôle à l'origine (voir paragraphe 1.3.4), nous renormalisons \widehat{F} sous la forme $I_n + O(x^{2r})$.

Finalement, nous nous restreignons dans la suite aux systèmes différentiels linéaires méromorphes à l'origine $[A]$ de la forme

$$x^{r+1} \frac{dY}{dx} = A(x)Y \quad \text{avec } r \in \mathbb{N}^*$$

dont une solution fondamentale formelle $\widehat{Y}(x) = \widehat{F}(x)x^L e^{Q(\frac{1}{x})}$ est telle que

- ★ $\widehat{F}(x) = I_n + O(x^{2r}) \in M_n(\mathbb{C}[[x]])$;
- ★ $L = \bigoplus_{j=1}^J L_j$, où chaque L_j est un bloc de Jordan de L de dimension n_j et de valeur propre λ_j vérifiant $\operatorname{Re}(\lambda_j) \in [0, 1[$;

★ $Q\left(\frac{1}{x}\right) = \bigoplus_{j=1}^J q_j\left(\frac{1}{x}\right) I_{n_j}$ avec

$$q_j\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{a_{j,r}}{x^r} - \dots - \frac{a_{j,1}}{x}$$

Noter qu'avec ces normalisations, r est nécessairement le vrai rang de Poincaré de $[A]$. De plus, la matrice $A(x)$ s'écrit sous la forme

$$A(x) = A_0(x) + B(x)$$

où

$$A_0(x) = x^{r+1} \frac{d(Q(\frac{1}{x}))}{dx} + x^r L = \sum_{k=1}^r kx^{r-k} \text{diag}(a_{1,k}I_{n_1}, \dots, a_{J,k}I_{n_J}) + x^r L$$

et où $B(x)$ est un élément de $M_n(x^{2r}\mathbb{C}\{x\})$. Précisément, si B est découpée comme la matrice L sous la forme

$$B = [B^{(j,\ell)}]_{1 \leq j, \ell \leq J} \text{ avec } B^{(j,\ell)} \text{ de dimension } n_j \times n_\ell$$

alors

$$B^{(j,\ell)}(x) = \begin{cases} O(x^{3r}) & \text{si } q_j - q_\ell = 0 \\ O(x^{3r-k}) & \text{si } \deg(q_j - q_\ell) = k \end{cases}$$

On fixe également dans la suite la forme normale

$$x^{r+1} \frac{dY}{dx} = A_0(x)Y$$

du système $[A]$.

Le facteur série formelle \widehat{F} est l'unique solution série formelle vérifiant $\widehat{F}(0) = I_n$ du système de passage

$$[A_0 : A] \quad x^{r+1} \frac{dF}{dx} - A_0 F + F A_0 = B F$$

Noter que, compte tenu de la structure de la matrice A_0 , ce système se scinde colonne par colonne de la manière suivante : nous découpons la matrice \widehat{F} comme la matrice L en décomposant

$$\widehat{F} = \left[\widehat{F}_1 \quad \dots \quad \widehat{F}_J \right]$$

en J blocs de colonnes \widehat{F}_j , le nombre de colonnes de chaque bloc \widehat{F}_j étant égal à la taille n_j du $j^{\text{ème}}$ bloc de Jordan L_j de L . La matrice \widehat{F}_j est alors l'unique solution série formelle vérifiant $\widehat{F}_j(0) = I_{n_j}$ du système

$$x^{r+1} \frac{dF_j}{dx} - A_0 F_j + \sum_{k=1}^r kx^{r-k} a_{j,k} F_j + x^r F_j L_j = B F_j$$

où nous avons noté $I_{n_j}(j)$ la matrice de dimension $n \times n_j$ formée du $j^{\text{ème}}$ bloc de colonne de la matrice I_n suivant le découpage de L . En particulier, nous voyons qu'il

suffit d'étudier les n_1 premières colonnes \widehat{F}_1 de \widehat{F} . Les résultats obtenus s'étendent alors sans difficulté aux autres blocs de colonnes \widehat{F}_j de \widehat{F} en permutant ceux-ci avec \widehat{F}_1 et en renormalisant la solution formelle sous la forme précédente. Pour simplifier les notations dans la suite, nous désignons par $\widehat{f} = \widehat{F}_1$ les n_1 premières colonnes de \widehat{F} . De plus, quitte à faire le changement de variable $Z = x^{-\lambda_1} e^{-q_1} Y$ et à renormaliser le facteur série formelle et les exposants de monodromie formelle comme précédemment, nous supposons finalement que

$$\lambda_1 = q_1 = 0 \text{ et } \operatorname{Re}(\lambda_j) \in [0, 1[\text{ pour tout } j \in \{1, \dots, J\}$$

Noter que ce changement de variable ne modifie en rien le phénomène de Stokes du système $[A]$. Aussi, \widehat{f} est l'unique solution série formelle vérifiant $\widehat{f}(0) = I_{n, n_1}$ du système différentiel linéaire

$$x^{r+1} \frac{df}{dx} - A_0 f + x^r f L_1 = B F$$

où I_{n, n_1} désigne la matrice de dimension $n \times n_1$ formée des n_1 premières colonnes de la matrice identité I_n .

Terminons ce paragraphe sur les solutions des systèmes différentiels linéaires méromorphes à l'origine en donnant une méthode algorithmique pour la normalisation des solutions formelles.

1.3.4 Un algorithme de normalisation des solutions formelles

Nous considérons ici un système différentiel linéaire $[A]$ méromorphe à l'origine dont une solution fondamentale formelle $\widehat{Y}(x) = \widehat{F}(x) x^L e^{Q(\frac{1}{x})}$ est telle que

- ★ $\widehat{F}(x) \in GL_n(\mathbb{C}[[x]][\frac{1}{x}])$;
- ★ L est sous forme de Jordan et ses valeurs propres λ vérifient $\operatorname{Re}(\lambda) \in [0, 1[$;
- ★ $Q(\frac{1}{x})$ est une matrice diagonale dont les termes sont des polynômes en $\frac{1}{x}$ sans terme constant.

Rappelons que les matrices L et Q constituent les invariants formels de $[A]$ et que celles-ci peuvent être obtenues par exemple sous Maple à l'aide de la commande `formal_sols` du paquetage ISOLDE. Cette commande permet également de calculer un nombre fini de termes du facteur série formelle \widehat{F} .

Le but de ce paragraphe est de donner un algorithme permettant de construire une matrice $T_k \in GL_n(\mathbb{C}\{x\}[\frac{1}{x}])$ vérifiant

$$T_k(x) \widehat{F}(x) = I_n + O(x^k)$$

où k est un entier naturel fixé. En fait, nous allons voir que cette matrice T_k est même un élément de $GL_n(\mathbb{C}(x))$. Nous procédons en deux étapes :

1. (normalisation de \widehat{F} à $I_n + O(x)$) Construire une matrice $P \in GL_n(\mathbb{C}[x, \frac{1}{x}])$ telle que $P(x) \widehat{F}(x) = I_n + O(x)$.

2. (normalisation de \widehat{F} à $I_n + O(x^k)$) Construire une matrice $Q_k \in GL_n(\mathbb{C}(x))$ telle que $Q_k(x)P(x)\widehat{F}(x) = I_n + O(x^k)$.

La première étape est la partie difficile de la normalisation de la solution fondamentale formelle \widehat{Y} . Quant à la seconde, elle est plus simple : la matrice Q_k est un élément de $M_n(\mathbb{C}[x])$ de degré $k - 1$ vérifiant $Q_k(0) = I_n$. Elle sert à "nettoyer" les termes en x^p , $p \in \{1, \dots, k - 1\}$, de la série formelle $P(x)\widehat{F}(x)$. La matrice T_k cherchée est alors définie par $T_k = Q_k P$.

Etape 1 : normalisation de \widehat{F} à $I_n + O(x)$

Commençons par regarder un problème plus simple de normalisation : étant donné un élément $\widehat{G}(x)$ de $GL_n(\mathbb{C}[[x]][\frac{1}{x}])$, construire une matrice $T \in GL_n(\mathbb{C}[x, \frac{1}{x}])$ telle que $T(x)\widehat{G}(x) = I_n + O(x)$.

La construction d'une telle matrice T repose sur le résultat suivant basé sur une méthode de pivot de Gauss partiel à gauche.

Lemme 1.44 *Etant donné un élément H de $M_n(\mathbb{C})$, $H \neq 0$, il existe une matrice $U \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $K = UH$ vérifie les propriétés suivantes :*

1. K est triangulaire supérieure ;
2. si le $j^{\text{ème}}$ terme diagonal de K est nul, alors la $j^{\text{ème}}$ ligne de K est nulle.

Noter que les deux matrices H et K ont même rang et que le nombre de lignes nulles dans K est égal à la dimension de $\ker(H)$. Les deux matrices K et U peuvent être obtenues à l'aide de l'algorithme suivant :

entrée : $\{ \text{matrice } H \in M_n(\mathbb{C}) \}$

1. Poser $B = \begin{bmatrix} H & I_n \end{bmatrix} \in M_{n,2n}(\mathbb{C})$. # après chaque opération élémentaire, on note encore B la nouvelle matrice obtenue
2. (cas de la première colonne) Déterminer $\mathcal{J}_1 = \{j \in \{1, \dots, n\} \text{ tel que } B^{(j,1)} \neq 0\}$
 - 2.1. Si \mathcal{J}_1 est non vide :
 - 2.1.1. poser $\mathcal{J}_1 = \{j_{1,1} < \dots < j_{1,p_1}\}$
 - 2.1.2. permuter la première et la $j_{1,1}^{\text{ème}}$ ligne de B
 - 2.1.3. annuler tous les $B^{(j,1)}$ pour $j \in \{2, \dots, n\}$ en remplaçant la $j^{\text{ème}}$ ligne B_j de B par $B_j - \frac{B^{(j,1)}}{B^{(1,1)}} B_1$
 - 2.2. Si \mathcal{J}_1 est vide, passer à 3.
3. (cas des colonnes 2 à $n - 1$) Pour ℓ de 2 à $n - 1$, déterminer $\mathcal{J}_\ell = \{j \in \{\ell, \dots, n\} \text{ tel que } B^{(j,\ell)} \neq 0\}$
 - 3.1. Si \mathcal{J}_ℓ est non vide :
 - 3.1.1. poser $\mathcal{J}_\ell = \{j_{\ell,1} < \dots < j_{\ell,p_\ell}\}$
 - 3.1.2. permuter la $\ell^{\text{ème}}$ et la $j_{\ell,1}^{\text{ème}}$ ligne de B

- 3.1.3. annuler tous les $B^{(j,\ell)}$ pour $j \in \{\ell + 1, \dots, n\}$ en remplaçant la $j^{\text{ème}}$ ligne B_j de B par $B_j - \frac{B^{(j,\ell)}}{B^{(\ell,\ell)}} B_\ell$
- 3.1.4. déterminer $\mathcal{T}_\ell = \{j \in \{1, \dots, \ell - 1\} \text{ tel que } B^{(j,j)} = 0\}$
- 3.1.5. si \mathcal{T}_ℓ est non vide, remplacer la $j^{\text{ème}}$ ligne B_j de B , $j \in \mathcal{T}_\ell$, par $B_j - \frac{B^{(j,\ell)}}{B^{(\ell,\ell)}} B_\ell$
- 3.2. Si \mathcal{J}_ℓ est vide :
- 3.2.1. déterminer $\mathcal{J}'_\ell = \{j \in \{1, \dots, \ell - 1\} \text{ tel que } B^{(j,j)} = 0 \text{ et } B^{(j,\ell)} \neq 0\}$
- 3.2.2. si \mathcal{J}'_ℓ est non vide :
- 3.2.2.1. poser $\mathcal{J}'_\ell = \{j'_{\ell,1} < \dots < j'_{\ell,q_\ell}\}$
- 3.2.2.2. permuter la $\ell^{\text{ème}}$ et la $j'_{\ell,1}$ ligne de B
- 3.2.2.3. passer à l'étape 3.1.4.
4. (cas de la $n^{\text{ème}}$ colonne)
- 4.1. Si $B^{(n,n)} \neq 0$:
- 4.1.1. déterminer $\mathcal{T}_n = \{j \in \{1, \dots, n - 1\} \text{ tel que } B^{(j,j)} = 0\}$
- 4.1.2. si \mathcal{T}_n est non vide, remplacer la $j^{\text{ème}}$ ligne B_j de B , $j \in \mathcal{T}_n$, par $B_j - \frac{B^{(j,n)}}{B^{(n,n)}} B_n$
- 4.2. Si $B^{(n,n)} = 0$:
- 4.2.1. déterminer $\mathcal{J}'_n = \{j \in \{1, \dots, n - 1\} \text{ tel que } B^{(j,j)} = 0 \text{ et } B^{(j,n)} \neq 0\}$
- 4.2.2. si \mathcal{J}'_n est non vide :
- 4.2.2.1. poser $\mathcal{J}'_n = \{j'_{n,1} < \dots < j'_{n,q_n}\}$
- 4.2.2.2. permuter la $n^{\text{ème}}$ et la $j'_{n,1}$ ligne de B
- 4.2.2.3. passer à l'étape 4.1.1.

sorties : {la matrice K formée des n premières colonnes de B ; la matrice U formée des n dernières colonnes de B }

Nous donnons à l'appendice 1.A une programmation de cet algorithme sous Maple8. Nous déduisons de ce lemme le résultat suivant :

Proposition 1.45 Soit $\widehat{G}(x) \in GL_n(\mathbb{C}[[x]][\frac{1}{x}])$ une série méromorphe formelle inversible.

1. Il existe un élément $T(x)$ de $GL_n(\mathbb{C}[x, \frac{1}{x}])$ tel que $T(x)\widehat{G}(x) = I_n + O(x)$.
2. Une matrice T convenable est donnée par l'algorithme suivant :
 - (a) Pour $j \in \{1, \dots, n\}$, déterminer

$$m_j = \min \left(0, \min_{1 \leq \ell \leq n} \left(\text{val} \left(\widehat{G}^{(j,\ell)} \right) \right) \right) \in -\mathbb{N}$$

où $\text{val}(\widehat{G}^{(j,\ell)})$ désigne la valuation en x de la série formelle $\widehat{G}^{(j,\ell)}$

(b) Définir $T(x) := \text{diag}(x^{-m_1}, \dots, x^{-m_n})$, $\widehat{H}(x) := T(x)\widehat{G}(x)$ et $H := \widehat{H}(0)$

(c) Tant que $\text{rg}(H) < n$

(c.1) déterminer un couple (K, U) vérifiant le lemme 1.44

(c.2) pour $j \in \{1, \dots, n\}$, poser $\varepsilon_j = \begin{cases} 1 & \text{si } K^{(j,j)} \neq 0 \\ \frac{1}{x} & \text{si } K^{(j,j)} = 0 \end{cases}$

(c.3) poser $\widehat{H}(x) := \text{diag}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)U\widehat{H}(x)$

poser $H := \widehat{H}(0)$

poser $T(x) := \text{diag}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)UT(x)$

(d) Calculer $T(x) := H^{-1}T(x)$

Démonstration (cas $n = 2$). Dans le point (b), la définition de $T(x)$ montre que la matrice $\widehat{H}(x)$ est un élément de $M_2(\mathbb{C}[[x]])$ vérifiant $\widehat{H}(0) \neq 0$. De plus, \widehat{H} est inversible, puisque \widehat{G} et T le sont. Ainsi, le déterminant $\det \widehat{H}$ de \widehat{H} s'écrit sous la forme

$$\det \widehat{H}(x) = \alpha_v x^v + \dots \in \mathbb{C}[[x]] \setminus \{0\}$$

avec $\alpha_v \neq 0$ et $v = \text{val}(\det \widehat{H}(x)) \in \mathbb{N}$.

Lorsque $v = 0$, la matrice $H = \widehat{H}(0)$ est inversible (car $\alpha_0 = \det H$). Ainsi, $\text{rg}(H) = 2$ et la matrice T du point (d) convient.

Lorsque $v \geq 1$, la matrice H est non inversible et non nulle, donc $\text{rg}(H) = 1$. La boucle "tant que" du point (c) consiste à faire chuter la valuation v jusqu'à 0. Il faut donc montrer que cette boucle s'arrête.

Les points (c.1) et (c.2) assurent à la matrice $\widehat{K}(x) = \text{diag}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)U\widehat{H}(x)$ les propriétés suivantes :

- $\widehat{K}(x) \in M_2(\mathbb{C}[[x]])$ puisque la ligne de $\widehat{K} = UH = U\widehat{H}(0)$ multipliée par $\frac{1}{x}$ est nulle (lemme 1.44) ;
- $\widehat{K}(x)$ est inversible avec

$$\det \widehat{K}(x) = \det(\text{diag}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)) \det(U) \det \widehat{H}(x) = u\alpha_v x^{v-1} + \dots$$

où $u = \det(U)$. En particulier, $u\alpha_v \neq 0$ car U est inversible.

Ainsi, à chaque passage dans la boucle, la valuation v diminue de 1. Il s'ensuit qu'au bout de v passages la valuation de $\det \widehat{H}$ est nulle et donc H est inversible. Nous concluons alors comme précédemment (cas où $v = 0$).

Par ailleurs, les seules matrices contenant des puissances de x ou $\frac{1}{x}$ étant diagonales, il est clair que $T(x) \in GL_2(\mathbb{C}[x, \frac{1}{x}])$. ■

La démonstration dans le cas général repose également sur le fait que la boucle "tant que" fait chuter la valuation des $\det \widehat{H}$ successifs jusqu'à 0. Cependant, comme nous avons ici

$$\det(\text{diag}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)) = \frac{1}{x^p}$$

pour un certain entier $p \in \{1, \dots, n-1\}$, il convient de s'assurer que le nombre de lignes nulles dans H , *i.e.*, $\dim \ker(H)$, est toujours inférieur à la valuation de $\det \widehat{H}$. Ce résultat est fourni par le lemme suivant :

Lemme 1.46 *Soit $\widehat{H}(x) = \sum_{m \geq 0} H_m x^m \in GL_n(\mathbb{C}[[x]])$ une série formelle inversible avec $H_0 \neq 0$.*

Alors, $\dim \ker(H_0) \leq \text{val}(\det \widehat{H})$.

Démonstration. La série formelle \widehat{H} étant inversible, nous avons $\det \widehat{H} \in \mathbb{C}[[x]] \setminus \{0\}$ et donc $\text{val}(\det \widehat{H})$ est fini.

Notons h le rang de H_0 et fixons deux éléments Q_1 et Q_2 de $GL_n(\mathbb{C})$ tels que

$$Q_1 H_0 Q_2 = \begin{bmatrix} I_h & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Nous obtenons ainsi

$$Q_1 \widehat{H} Q_2 = \begin{bmatrix} I_h + O(x) & O(x) \\ O(x) & O(x) \end{bmatrix}$$

d'où

$$\det(Q_1 \widehat{H} Q_2) = \sum_{j \geq n-h} a_j x^j \in \mathbb{C}[[x]] \setminus \{0\}$$

et donc

$$\dim \ker(H_0) = n - h \leq \text{val}(\det(Q_1 \widehat{H} Q_2)) = \text{val}(\det \widehat{H})$$

puisque $\det Q_1, \det Q_2 \in \mathbb{C}^*$. ■

Nous pouvons à présent terminer la démonstration de la proposition 1.45.

Démonstration (cas général). La démonstration est identique à celle du cas où $n = 2$. Le lemme 1.46 assure que le rang de H augmente nécessairement jusqu'à n dans la boucle "tant que" puisque la valuation de $\det H$ diminue jusqu'à 0 (il suffit de remarquer qu'à chaque passage dans la boucle, la nouvelle série \widehat{H} satisfait toujours aux conditions du lemme 1.46). ■

Revenons à présent à la normalisation de notre série formelle \widehat{F} . A première vue, la méthode décrite ci-dessus est difficilement applicable avec $\widehat{G} = \widehat{F}$. Il est en effet illusoire de connaître explicitement toute la série formelle \widehat{F} . Cependant, si nous regardons de plus près l'algorithme de la proposition 1.45, nous voyons qu'il suffit de connaître uniquement la valuation en x de la série initiale, puis le terme constant de chacune des nouvelles séries formelles. Par ailleurs, chacune des matrices $T(x)$ construites au cours de l'algorithme de la proposition 1.45 permettant de réaliser une transformation de jauge méromorphe sur le système initial $[A]$, la série formelle $T(x)\widehat{H}(x)$ est en fait le nouveau facteur série formelle d'une solution fondamentale formelle du système de jauge $[{}^T A]$. Noter que les deux matrices L et Q ne sont pas affectées par ces différentes transformations puisqu'elles sont des invariants formels de $[A]$. Ainsi, moyennant à

chaque étape le calcul des systèmes de jauge successifs, nous pouvons écrire un algorithme analogue à celui de la proposition 1.45 permettant de normaliser notre série $\widehat{F}(x)$ à $I_n + O(x)$.

L'algorithme ci-dessous fournit une matrice $P \in GL_n(\mathbb{C}[x, \frac{1}{x}])$ telle que

$$P(x)\widehat{F}(x) = I_n + O(x)$$

ainsi que le système de jauge $[{}^P A]$ correspondant. Pour chacun des systèmes calculés, nous prenons comme solution fondamentale formelle $\widehat{H}(x)x^L e^{Q(\frac{1}{x})}$ et nous notons $H = \widehat{H}(0)$ la matrice de tête de $\widehat{H}(x)$. Rappelons que les matrices H , L et Q peuvent être obtenues sous Maple à l'aide de la commande `formal_sols` du paquetage ISOLDE, puisque nous sommes dans le cas non ramifié.

Algorithme 1.47

entrée : {le système $[A]$ du début du paragraphe 1.3.4}

1. Pour $j \in \{1, \dots, n\}$, déterminer

$$m_j = \min \left(0, \min_{1 \leq \ell \leq n} \left(\text{val} \left(\widehat{F}^{(j, \ell)} \right) \right) \right) \in -\mathbb{N}$$

où $\text{val}(\widehat{F}^{(j, \ell)})$ désigne la valuation en x de la série formelle $\widehat{F}^{(j, \ell)}$

Définir $P(x) := \text{diag}(x^{-m_1}, \dots, x^{-m_n})$

Définir $P_1 := P$ et $A := P_1 A P_1^{-1} + x^{r+1} P_1' P_1^{-1}$

2. Calculer la matrice de tête H du facteur série formelle \widehat{H} de la solution fondamentale formelle $\widehat{H}(x)x^L e^{Q(\frac{1}{x})}$ du système $[A]$
3. Tant que $\text{rg}(H) < n$

- 3.1. déterminer un couple (K, U) vérifiant le lemme 1.44

$$3.2. \text{ pour } j \in \{1, \dots, n\}, \text{ poser } \varepsilon_j = \begin{cases} 1 & \text{si } K^{(j, j)} \neq 0 \\ \frac{1}{x} & \text{si } K^{(j, j)} = 0 \end{cases}$$

- 3.3. faire $P_1 := \text{diag}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)U$, $A := P_1 A P_1^{-1} + x^{r+1} P_1' P_1^{-1}$ et $P := P_1 P$

- 3.4. calculer la matrice de tête H du facteur série formelle \widehat{H} de la solution fondamentale formelle $\widehat{H}(x)x^L e^{Q(\frac{1}{x})}$ du système $[A]$

4. Calculer $P := H^{-1}P$ et $A := H^{-1}AH - x^{r+1}H^{-1}H'$

sorties : {la matrice de transformation de jauge P et le système de jauge $[{}^P A]$ }

Etape 2 : normalisation de \widehat{F} à $I_n + O(x^k)$, $k \in \mathbb{N}^*$

Nous supposons ici que la première étape a été effectuée : le facteur série formelle $\widehat{F}(x)$ vérifie $\widehat{F}(x) = I_n + O(x)$.

Ecrivant \widehat{F} sous la forme

$$\widehat{F}(x) = I_n + F_1x + \dots + F_{k-1}x^{k-1} + O(x^k)$$

nous voyons que la matrice $Q_k(x) \in M_n(\mathbb{C}[x])$ définie par

$$Q_k(x) = I_n + \sum_{p=1}^{k-1} Q_{k,p}x^p$$

avec

$$Q_{k,p} = - \sum_{\ell=0}^{p-1} Q_{k,\ell}F_{p-\ell}$$

satisfait à $Q_k(x)\widehat{F}(x) = I_n + O(x^k)$.

De plus, cette matrice est clairement inversible, puisque

$$\det Q_k \in \mathbb{C}[x] \text{ et } (\det Q_k)(0) = 1$$

En particulier, Q_k est un élément de $GL_n(\mathbb{C}(x))$ et Q_k^{-1} est sans pôle à l'origine.

Terminons ce paragraphe par deux exemples simples de normalisation. Les systèmes étudiés sont de niveau unique 1. Dans le premier exemple, la matrice des exposants de monodromie formelle est diagonale; et, dans le second exemple, elle admet un bloc de Jordan de dimension 2. Tous les calculs sont faits sous Maple8 à l'aide du paquetage ISOLDE.

Exemple 1 Considérons le système différentiel linéaire

$$x^3 \frac{dY}{dx} = A(x)Y$$

avec

$$A(x) = \begin{bmatrix} -\frac{3x^4 + 11x^3 - 5x^2 - 3x - 2}{(1+x)(1-x^2)} & -\frac{3x^5 + x^4 + 27x^3 - 7x^2 - 4x - 4}{2(1-x^2)^2} \\ \frac{x^5 + 6x^4 + 10x^3 - 4x^2 - 3x - 2}{(1+x)^2} & \frac{x^5 + 5x^4 + 23x^3 - 5x^2 - 4x - 4}{2(1-x)(1+x)^2} \end{bmatrix}$$

Une solution fondamentale formelle est $\widehat{Y}(x) = \widehat{F}(x)x^L e^{Q(\frac{1}{x})}$ avec $L = \text{diag}(0, \frac{1}{2})$, $Q(\frac{1}{x}) = \text{diag}(0, -\frac{1}{x})$ et

$$\widehat{F}(x) = \begin{bmatrix} -1 + O(x^2) & 2 + O(x^2) \\ 1 + O(x^2) & -2 + O(x^2) \end{bmatrix}$$

Ce système est donc de rang de Poincaré 2 et de vrai rang de Poincaré 1. Le but de cet exemple est de normaliser le facteur série formelle à $I_2 + O(x^2)$ et de donner le système de jauge correspondant.

Les valuations des termes de $\widehat{F}(x)$ étant nulles, nous avons $m_1 = m_2 = 0$. La matrice de tête

$$F_0 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

de \widehat{F} est de rang 1. Un couple (K, U) correspondant à cette matrice étant

$$K = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } U = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

nous considérons la transformation de jauge $Y_1 = P_1 Y$ avec $P_1 = \text{diag}(1, \frac{1}{x})U$. Le système de jauge correspondant s'écrit alors

$$x^2 \frac{dY_1}{dx} = \begin{bmatrix} \frac{9x^4 + 17x^3 - 5x^2 - 3x - 2}{2(1-x^2)^2} & -\frac{3x^5 + x^4 + 27x^3 - 7x^2 - 4x - 4}{2(1-x^2)^2} \\ \frac{2x^5 + 9x^4 + 11x^3 - x^2 - 3x - 2}{2(1-x^2)^2} & -\frac{3x^5 + 7x^4 + 15x^3 - x^2 - 4x - 4}{2(1-x^2)^2} \end{bmatrix} Y_1$$

et a pour solution fondamentale formelle $\widehat{Y}_1(x) = \widehat{F}_1(x)x^L e^{Q(\frac{1}{x})}$, où la matrice de tête $F_{1,0}$ de \widehat{F}_1 est donnée par

$$F_{1,0} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Celle-ci étant inversible, nous considérons la transformation de jauge $Y_2 = F_{1,0}^{-1} Y_1$ et le système de jauge correspondant

$$x^2 \frac{dY_2}{dx} = \begin{bmatrix} -\frac{x^2(2x+1)}{(x+1)^2} & -\frac{x^2(x-1)}{(x+1)^2} \\ \frac{x(5x^4 + 5x^3 + 7x^2 + x - 2)}{2(1-x^2)^2} & -\frac{x^4 - 3x^3 - x^2 - 3x - 2}{2(1+x)(1-x^2)} \end{bmatrix} Y_2$$

Ce système admet pour solution fondamentale formelle $\widehat{Y}_2(x) = \widehat{F}_2(x)x^L e^{Q(\frac{1}{x})}$ avec

$$\widehat{F}_2(x) = \begin{bmatrix} 1 - x + O(x^2) & O(x^2) \\ x + O(x^2) & 1 + x + O(x^2) \end{bmatrix} = I_2 + O(x)$$

Il reste à normaliser la série \widehat{F}_2 à $I_2 + O(x^2)$. Cette normalisation s'obtient à l'aide de la matrice

$$Q_2(x) = I_2 - \begin{bmatrix} -x & 0 \\ x & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+x & 0 \\ -x & 1-x \end{bmatrix}$$

Il s'ensuit que la matrice T_2 cherchée est donnée par

$$T_2 = Q_2 F_{1,0}^{-1} P_1 = Q_2 F_{1,0}^{-1} \text{diag} \left(1, \frac{1}{x} \right) U = \frac{1}{x} \begin{bmatrix} x^2 - 1 & -x - 1 \\ -2(x-1) & -x + 2 \end{bmatrix}$$

Le système de jauge correspondant s'écrit alors

$$x^2 \frac{dY}{dx} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{x^2}{1+x} \\ \frac{x^2}{1-x} & 1 + \frac{x}{2} \end{bmatrix} Y$$

et nous pouvons vérifier que ce système admet pour solution fondamentale formelle $\widehat{Y}(x) = \widehat{F}(x)x^L e^{Q(\frac{1}{x})}$ avec

$$\widehat{F}(x) = \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{2}x^2 + O(x^3) & x^2 + O(x^3) \\ -x^2 + O(x^3) & 1 + \frac{1}{2}x^2 + O(x^3) \end{bmatrix} = I_2 + O(x^2)$$

Exemple 2 Considérons à présent le système différentiel linéaire

$$x^6 \frac{dY}{dx} = A(x)Y$$

où la matrice $A(x)$ est égale à

$$\begin{bmatrix} \frac{x^4(4x^6+26x^5+18x^4-19x^3+9x^2+3x-3)}{(2x-1)(x+1)} & -\frac{x^7(48x^5+48x^4-47x^3+14x^2+10x-6)}{6(2x-1)(x+1)} & x^3(2x^2-1) \\ \frac{2x(6x^6+39x^5+23x^4-29x^3+7x^2+5x-3)}{(2x-1)(x+1)} & -\frac{x^4(72x^5+60x^4-53x^3+17x^2+7x-6)}{3(2x-1)(x+1)} & 2(3x^2-1) \\ -\frac{x^7(12x^6+78x^5+54x^4-71x^3-x^2+7x+3)}{3(2x-1)(x+1)} & \frac{x^{11}(48x^4+48x^3-47x^2+5x+7)}{6(2x-1)(x+1)} & -x^4(2x^4-x^2-\frac{16}{3}x-1) \end{bmatrix}$$

Une solution fondamentale formelle est $\widehat{Y}(x) = \widehat{F}(x)x^L e^{Q(\frac{1}{x})}$ avec $Q(\frac{1}{x}) = \text{diag}(0, -\frac{1}{x}, -\frac{1}{x})$

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \text{ et } \widehat{F}(x) = \begin{bmatrix} O(1) & O(1) & O(1) \\ \frac{1}{x} + O(1) & \frac{6}{x} + O(1) & \frac{6}{x} + O(1) \\ O(1) & O(1) & O(1) \end{bmatrix}$$

Ce système est de rang de Poincaré 5 et de vrai rang de Poincaré 1. Nous voulons normaliser le facteur série formelle à $I_3 + O(x^2)$ et donner le système de jauge correspondant.

Nous avons $m_1 = m_3 = 0$ et $m_2 = -1$. Nous considérons donc la transformation de jauge $Y_1 = P_1 Y$ avec $P_1 = \text{diag}(1, x, 1)$. Le système de jauge correspondant s'écrit alors

$$x^5 \frac{dY_1}{dx} = A_1(x)Y_1$$

où la matrice $A_1(x)$ est égale à

$$\begin{bmatrix} \frac{x^3(4x^6+26x^5+18x^4-19x^3+9x^2+3x-3)}{(2x-1)(x+1)} & -\frac{x^5(48x^5+48x^4-47x^3+14x^2+10x-6)}{6(2x-1)(x+1)} & x^2(2x^2-1) \\ \frac{2x(6x^6+39x^5+23x^4-29x^3+7x^2+5x-3)}{(2x-1)(x+1)} & -\frac{x^3(72x^5+60x^4-59x^3+14x^2+10x-6)}{3(2x-1)(x+1)} & 6x^2-2 \\ -\frac{x^6(12x^6+78x^5+54x^4-71x^3-x^2+7x+3)}{3(2x-1)(x+1)} & \frac{x^9(48x^4+48x^3-47x^2+5x+7)}{6(2x-1)(x+1)} & -\frac{x^3(6x^4-3x^2-16x-3)}{3} \end{bmatrix}$$

Ce système admet pour solution fondamentale formelle $\widehat{Y}_1(x) = \widehat{F}_1(x)x^L e^{Q(\frac{1}{x})}$, où $\widehat{F}_1(x)$ est maintenant un élément inversible de $M_3(\mathbb{C}[[x]])$. Précisément,

$$\widehat{F}_1(x) = \begin{bmatrix} O(x) & O(x) & O(x) \\ 1 + O(x) & 6 + O(x) & 6 + O(x) \\ O(x) & O(x) & O(x) \end{bmatrix}$$

A partir de là, nous procédons comme dans l'exemple précédent : la transformation de jauge $Y_2 = P_2 Y_1$ avec

$$P_2 = \frac{1}{3x^4} \begin{bmatrix} -18x^2 & 9x^4 & 0 \\ 3x^2 & -x^4 & 0 \\ -3x^2 & x^4 & -1 \end{bmatrix}$$

permet la normalisation de la série formelle $\widehat{F}_1(x)$ à $I_3 + O(x)$. Précisément, le système de jauge correspondant

$$x^2 \frac{dY_2}{dx} = \begin{bmatrix} 2x^4 & 18x^3(x+1) & -18x^3 \\ -\frac{x^3(8x-1)}{18(2x-1)(x+1)} & -\frac{2x^2-4x-3}{3(x+1)} & x \\ \frac{x(24x^6+12x^5-36x^4+23x^3-20x^2-7x+6)}{54(2x-1)(x+1)} & \frac{x^2(2x^4+4x^3+2x^2-x+1)}{x+1} & 1 + \frac{1}{3}x + x^2 - 2x^4 \end{bmatrix} Y_2$$

a pour solution fondamentale formelle $\widehat{Y}_2(x) = \widehat{F}_2(x)x^L e^{Q(\frac{1}{x})}$ avec

$$\widehat{F}_2(x) = \begin{bmatrix} 1 + O(x^2) & O(x^2) & O(x^2) \\ O(x^2) & 1 + O(x^2) & O(x^2) \\ \frac{x}{9} + O(x^2) & x + O(x^2) & 1 + O(x^2) \end{bmatrix} = I_3 + O(x)$$

Il reste à normaliser la série $\widehat{F}_2(x)$ à $I_3 + O(x^2)$. Cette normalisation s'obtient à l'aide de la matrice

$$Q_2(x) = I_3 - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{x}{9} & x & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{x}{9} & -x & 1 \end{bmatrix}$$

Il s'ensuit que la matrice T_2 cherchée est donnée par

$$T_2 = Q_2 P_2 P_1 = \frac{1}{3x^4} \begin{bmatrix} -18x^2 & 9x^5 & 0 \\ 3x^2 & -x^5 & 0 \\ -x^2(x+3) & x^5 & -1 \end{bmatrix}$$

Le système de jauge correspondant s'écrit alors

$$(*) \quad x^2 \frac{dY}{dx} = \begin{bmatrix} 0 & 18x^3 & -18x^3 \\ -\frac{x^2(4x^2-3x+2)}{18(2x-1)(x+1)} & 1 + \frac{x}{3} + \frac{x^3}{1+x} & x \\ \frac{x^2(2x-1)}{18(x+1)} & -\frac{x^3}{1+x} & 1 + \frac{x}{3} \end{bmatrix} Y$$

et nous pouvons vérifier que ce système admet pour solution fondamentale formelle $\widehat{Y}(x) = \widehat{F}(x)x^L e^{Q(\frac{1}{x})}$ avec

$$\widehat{F}(x) = \begin{bmatrix} 1 + O(x^3) & O(x^3) & O(x^3) \\ -\frac{x^2}{9} + O(x^3) & 1 + \frac{x^2}{4} + O(x^3) & O(x^3) \\ \frac{x^2}{18} + O(x^3) & -\frac{x^2}{2} + O(x^3) & 1 + \frac{x^2}{4} + O(x^3) \end{bmatrix} = I_3 + O(x^2)$$

Il convient de noter que le système de jauge final obtenu à l'aide de l'algorithme 1.46 n'est pas nécessairement "le plus simple" possible, en tout cas du point de vue de notre méthode de calcul effectif (voir ci-dessous). Par exemple, le système (*) ci-dessus est méromorphiquement équivalent au système

$$(**) \quad x^2 \frac{dZ}{dx} = \begin{bmatrix} 0 & x^3 & -2x^3 \\ \frac{x^2}{1-2x} & 1 + \frac{x}{3} & x \\ \frac{x^2(2x-1)}{1+x} & -\frac{x^3}{1+x} & 1 + \frac{x}{3} + \frac{x^3}{1+x} \end{bmatrix} Z$$

la transformation de jauge adéquate étant une transformation de jauge constante :

$$Z = CY \text{ avec } C = \begin{bmatrix} -\frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Ceci a son importance lors du calcul effectif des multiplicateurs de Stokes (voir chapitre 3) : pour le système (*), nous devrions travailler avec des systèmes de dimension 12, 24 et 48, alors que le système (**) ne nécessite que des systèmes de dimension 9, 18 et 36 (voir le paragraphe 3.2.3 pour plus de détails).

Signalons pour finir que ces deux exemples sont utilisés au chapitre 3 pour illustrer le calcul effectif des multiplicateurs de Stokes.

1.A Appendice 1.A. Un algorithme de calcul

Dans cet appendice, nous donnons une programmation sous Maple8 de l'algorithme du lemme 1.44 servant à la normalisation des solutions formelles :

```
Gausselim2 := proc(h : :matrix,k,u)
  local i,j,s,t,b,n :
  n := rowdim(h) :
  b := blockmatrix(1,2,[h,diag(1$n)]) :
  for j from 1 to n do
    s := [ ] :
    for i from j to n do
      if b[i,j] <> 0 then s := [op(s),i] fi :
    od :
  od :
```

```

if nops(s)<>0 then
  b :=swaprow(b,j,s[1]) :
  for i from j+1 to n do
    b := addrow(b,j,i,-b[i,j]/b[j,j]) :
  od :
  t :=[ ] :
  for i from 1 to j-1 do
    if b[i,i]=0 then t :=[op(t),i] fi :
  od :
  if nops(t)<>0 then
    for i in t do b :=addrow(b,j,i,-b[i,j]/b[j,j]) od :
  fi :
else
  t :=[ ] :
  for i from 1 to j-1 do
    if b[i,i]=0 and b[i,j]<>0 then t :=[op(t),i] fi :
  od :
  if nops(t)<>0 then
    b :=swaprow(b,j,t[1]) :
    for i in t do b :=addrow(b,j,i,-b[i,j]/b[j,j]) od :
  fi :
fi :
od :
k :=submatrix(b,1..n,1..n) :
u :=submatrix(b,1..n,n+1..2*n) :
end :

```

Première partie

Systemes de niveau unique 1

Introduction

Tout système de niveau unique 1 est méromorphiquement équivalent (cf. paragraphe 1.3.3) à un système différentiel linéaire à coefficients méromorphes à l'origine

$$[A] \quad x^2 \frac{dY}{dx} = A(x)Y \text{ avec } A(x) \in M_n(\mathbb{C}\{x\})$$

dont une solution fondamentale formelle $\widehat{Y}(x) = \widehat{F}(x)x^L e^{Q(\frac{1}{x})}$ est normalisée de sorte que

- ★ $\widehat{F}(x) = I_n + O(x^2) \in M_n(\mathbb{C}[[x]])$;
- ★ $L = \bigoplus_{j=1}^J L_j$, où chaque L_j est un bloc de Jordan de L de dimension $n_j \geq 1$ et de valeur propre λ_j vérifiant $\lambda_1 = 0$ et $\text{Re}(\lambda_j) \in [0, 1[$ pour tout $j \in \{1, \dots, J\}$;
- ★ $Q(\frac{1}{x}) = \bigoplus_{j=1}^J (-\frac{a_j}{x} I_{n_j})$ de sorte que $a_1 = 0$.

Ainsi, l'étude du phénomène de Stokes des systèmes de niveau unique 1 se réduit, sans perte de généralité, à celle des systèmes du type [A]. En particulier, il suffit de savoir déterminer les multiplicateurs de Stokes associés à une solution fondamentale formelle \widehat{Y} normalisée comme ci-dessus.

Aussi, **nous fixons désormais dans cette première partie** un tel système [A] et une telle solution fondamentale formelle $\widehat{Y}(x)$.

Pour ces systèmes, de nombreux cas ont déjà été étudiés (voir par exemple [Bal84], [Bal93], [BJL79-3], [JLP76-1], [JLP76-2], [L-R90-1], [LS97]). En particulier, il est bien connu qu'il existe un isomorphisme linéaire entre les multiplicateurs de Stokes de $\widehat{Y}(x)$ et les coefficients de résurgence de la transformée de Borel \widetilde{F} de \widehat{F} en ses singularités. Celui-ci est classique dans le cas où la matrice L est diagonale, voire nulle (cf. références ci-dessus).

Dans le chapitre 2 de cette thèse, nous nous proposons d'expliciter cet isomorphisme en toute généralité (la matrice L est sous forme de Jordan quelconque). En particulier, nous redémontrons de deux manières différentes (perturbations régulières et microfonctions) que les singularités de \widetilde{F} sont de la classe de Nilsson.

Dans le chapitre 3, nous montrons, dans le cas où les coefficients de la matrice $A(x)$ sont rationnels, qu'une interprétation de l'isomorphisme linéaire précédent en terme de matrices de connexion permet d'obtenir une méthode de calcul effectif de tous les multiplicateurs de Stokes de $\widehat{Y}(x)$. En particulier, nous construisons des algorithmes permettant d'évaluer l'erreur commise. Cette méthode est illustrée par quatre exemples

regroupant à eux quatre tous les types de systèmes de niveau unique 1 qu'on peut rencontrer.

Suivant la remarque du paragraphe 1.3.3, nous limitons notre étude au premier bloc de colonne \widehat{f} de \widehat{F} . Nous nous intéressons ainsi uniquement aux multiplicateurs de Stokes situés dans les n_1 premières colonnes c_θ des matrices de Stokes C_θ . Rappelons que tous les résultats obtenus dans ce cas s'étendent sans difficultés aux autres blocs de colonnes de \widehat{F} en permutant ceux-ci avec \widehat{f} et en renormalisant la solution formelle sous la forme adéquate.

Chapitre 2

Etude théorique

Nous considérons dans ce chapitre un système différentiel linéaire à coefficients méromorphes à l'origine

$$[A] \quad x^2 \frac{dY}{dx} = A(x)Y \text{ avec } A(x) \in M_n(\mathbb{C}\{x\})$$

dont la solution fondamentale formelle $\widehat{Y}(x) = \widehat{F}(x)x^L e^{Q(\frac{1}{x})}$ est normalisée de sorte que

- ★ $\widehat{F}(x) = I_n + O(x^2) \in M_n(\mathbb{C}[[x]])$;
- ★ $L = \bigoplus_{j=1}^J L_j$, où chaque L_j est un bloc de Jordan de L de dimension $n_j \geq 1$ et de valeur propre λ_j vérifiant $\lambda_1 = 0$ et $\text{Re}(\lambda_j) \in [0, 1[$ pour tout $j \in \{1, \dots, J\}$;
- ★ $Q(\frac{1}{x}) = \bigoplus_{j=1}^J (-\frac{a_j}{x} I_{n_j})$ de sorte que $a_1 = 0$.

Rappelons que tout système de niveau unique 1 est méromorphiquement équivalent à un système $[A]$ de ce type.

Avec ces normalisations, la matrice $A(x)$ s'écrit sous la forme

$$A(x) = A_0(x) + B(x)$$

où $A_0(x)$ est définie par

$$A_0(x) = x^2 \frac{d(Q(\frac{1}{x}))}{dx} + xL = \bigoplus_{j=1}^J (a_j I_{n_j} + xL_j)$$

et où $B(x)$ est un élément de $M_n(x^2\mathbb{C}\{x\})$. Précisément, si B est découpée comme la matrice L :

$$B = [B^{(j,\ell)}]_{1 \leq j, \ell \leq J} \text{ avec } B^{(j,\ell)} \text{ est de dimension } n_j \times n_\ell$$

alors

$$B^{(j,\ell)}(x) = \begin{cases} O(x^3) & \text{si } a_j - a_\ell = 0 \\ O(x^2) & \text{si } a_j - a_\ell \neq 0 \end{cases}$$

Par ailleurs, le facteur série formelle \widehat{F} étant l'unique solution série formelle vérifiant $\widehat{F}(0) = I_n$ du système de passage

$$[A_0 : A] \quad x^2 \frac{dF}{dx} - A_0 F + F A_0 = BF$$

(cf. [BJL79-1]), nous voyons que, compte tenu de la structure de la matrice A_0 , la série formelle \widehat{f} (premier bloc de colonnes de \widehat{F}) est l'unique solution série formelle vérifiant $\widehat{f}(0) = I_{n, n_1}$ du système

$$(1) \quad x^2 \frac{df}{dx} - A_0 f + x f L_1 = Bf$$

où I_{n, n_1} désigne la matrice formée des n_1 premières colonnes de la matrice identité I_n .

Pour chacun des paragraphes suivants (étude de la résurgence-sommabilité, structure des singularités et isomorphisme linéaire), nous commençons toujours par traiter le cas où la matrice des exposants de monodromie formelle L est diagonale : si les démonstrations sont bien plus simples que dans le cas où la matrice L est sous forme de Jordan quelconque, celles-ci sont typiques des arguments à utiliser.

Toutes les matrices carrées de dimension $n \times n$ utilisées dans ce chapitre étant découpées comme la matrice L , nous utilisons les notations suivantes :

Cas où L est diagonale Si M est une matrice carrée de dimension n , alors

- pour tout $j, \ell \in \{1, \dots, n\}$, $M^{(j, \ell)}$ désigne le terme situé à la $j^{\text{ème}}$ ligne et $\ell^{\text{ème}}$ colonne de M ;
- la lettre minuscule m désigne la première colonne de M et, pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, $m^{[j]}$ est le $j^{\text{ème}}$ terme de m .

Cas où L est sous forme de Jordan quelconque Si M est une matrice carrée de dimension n découpée comme la matrice L , alors

- pour tout $j, \ell \in \{1, \dots, J\}$, $M^{(j, \ell)}$ désigne le bloc de dimension $n_j \times n_\ell$ situé à la $j^{\text{ème}}$ ligne et $\ell^{\text{ème}}$ colonne de M dans ce découpage ;
- la lettre minuscule m désigne la matrice formée des n_1 premières colonnes de M . De plus, pour tout $q \in \{1, \dots, n_1\}$, $m^{[q]}$ désigne la $q^{\text{ème}}$ colonne de m et nous notons

$$m^{[q]} = \begin{bmatrix} m^{[1; q]} \\ \vdots \\ m^{[J; q]} \end{bmatrix}$$

où le nombre de ligne de la matrice $m^{[j; q]}$, $j \in \{1, \dots, J\}$, est égal à la dimension du $j^{\text{ème}}$ bloc de Jordan L_j de L : $m^{[j; q]}$ est donc de dimension $n_j \times 1$. Enfin, pour tout $\ell \in \{1, \dots, n_j\}$, nous désignons par $m^{[j, \ell; q]}$ le $\ell^{\text{ème}}$ terme de la matrice colonne $m^{[j; q]}$.

2.1 Résurgence-sommabilité de la série formelle \widehat{f} (plan de Laplace)

Rappelons que \widehat{f} désigne la sous-matrice du facteur série formelle \widehat{F} formée par les n_1 premières colonnes de \widehat{F} , où n_1 est la dimension du premier bloc de Jordan L_1 de la matrice L . Dans ce paragraphe, nous donnons une démonstration détaillée du résultat bien connu suivant :

Théorème 2.1 (résurgence-sommabilité des solutions formelles) *La série formelle \widehat{f} est résurgente-sommable de support singulier les points $a_j \neq 0$.*

Soit \mathcal{L} un chemin d'origine 0 et de classe \mathcal{C}^1 par morceaux ne faisant qu'un nombre fini de tours autour des points $a_j \neq 0$. Ce chemin peut être relevé sur le revêtement universel $\widetilde{\mathbb{C}}_a$ de $\mathbb{C} \setminus \bigcup_j \{a_j \neq 0\}$ en un chemin que nous notons encore \mathcal{L} . Nous associons à \mathcal{L} un voisinage ouvert simplement connexe $\Delta_{\mathcal{L}}$ dans $\widetilde{\mathbb{C}}_a$ formé par l'union d'un disque ouvert \mathcal{D} de centre 0 et d'un voisinage ouvert simplement connexe de \mathcal{L} qui évitent les points $a_j \neq 0$ à une distance minimale $\nu > 0$: pour tout $j \in \{1, \dots, J\}$ tel que $a_j \neq 0$ et pour tout $\xi \in \Delta_{\mathcal{L}}$, $|\xi - a_j| \geq \nu$.

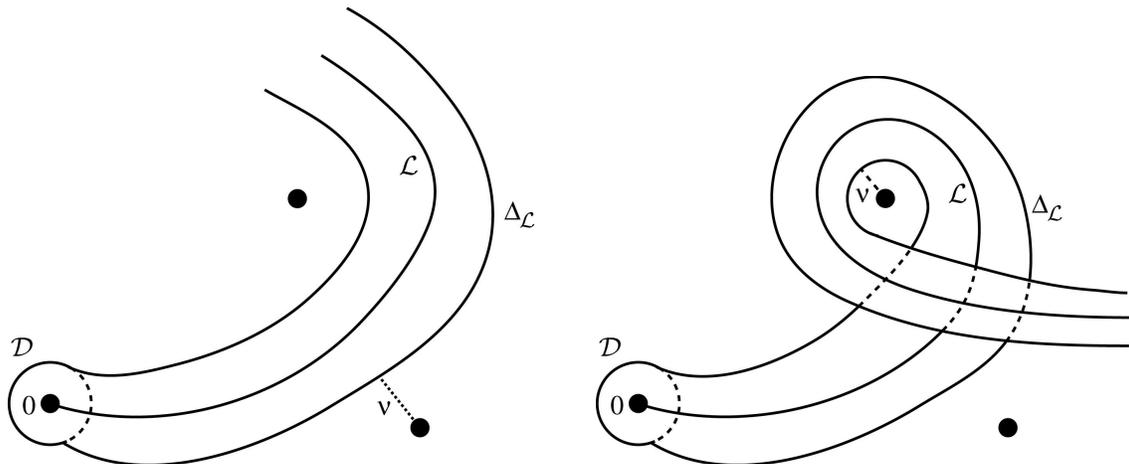


Figure 2.1 - exemples de chemins \mathcal{L} et de domaines $\Delta_{\mathcal{L}}$

Dans ce qui suit, nous allons démontrer que la transformée de Borel \widetilde{f} de \widehat{f} est convergente à l'origine et peut être prolongée analytiquement à $\Delta_{\mathcal{L}}$ tout entier avec une croissance exponentielle d'ordre au plus un à l'infini. Ceci établira le théorème 2.1 grâce à la définition de la résurgence-sommabilité d'une série formelle (définition 1.11).

Il existe plusieurs méthodes pour arriver à ce résultat (voir par exemple [E85] et [Mal91-1]). Nous reprenons en détail la méthode d'étude par perturbation et séries majorantes proposée par J. Ecalle ([E85, paragraphes 2.3 et 2.4]). Celle-ci offre l'avantage de permettre une description précise des singularités de \widetilde{f} et de s'étendre assez simplement au cas de niveau unique quelconque, voire de plusieurs niveaux.

Un des arguments clés dans la construction des séries majorantes est le résultat classique suivant :

Lemme 2.2 (lemme de Grönwall) Soit Δ un sous-domaine ouvert connexe quelconque de $\Delta_{\mathcal{L}}$. Nous fixons un point base ξ_0 élément de Δ ; et une ligne brisée $\bar{\Lambda}$ contenue dans $\Delta_{\mathcal{L}}$ et joignant 0 à ξ_0 .

Pour tout $\xi \in \Delta$, nous notons $\bar{\Lambda}_{\xi}$ une ligne brisée contenue dans Δ et joignant ξ_0 à ξ . La ligne brisée $\Lambda_{\xi} = \bar{\Lambda} \cup \bar{\Lambda}_{\xi}$ union des deux lignes brisées $\bar{\Lambda}$ et $\bar{\Lambda}_{\xi}$ est paramétrée par la longueur de courbe

$$\begin{aligned} [0, s_{\xi}] &\longrightarrow \Lambda_{\xi} \\ s &\longmapsto \Lambda_{\xi}(s) \end{aligned}$$

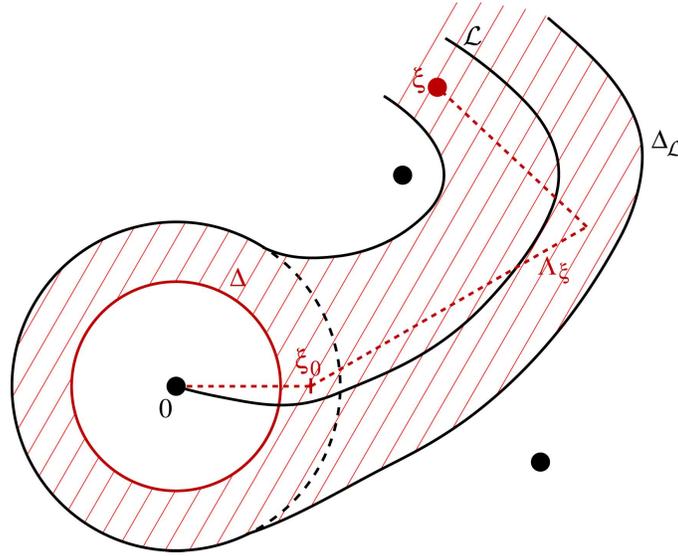


Figure 2.2 - exemple de domaine Δ , de point ξ_0 et de chemin Λ_{ξ}

Supposons que la fonction φ est holomorphe sur Δ et vérifie une inégalité différentielle du type

$$\forall \xi \in \Delta, \forall s \in [s_{\xi_0}, s_{\xi}], |\varphi'(\Lambda_{\xi}(s))| \leq u |\varphi(\Lambda_{\xi}(s))| + v(s)$$

où $u \in \mathbb{R}^+$ et où v est une série entière à coefficients positifs ou nuls et de rayon de convergence infini.

Soit ψ l'unique solution de l'équation

$$\psi' = u\psi + v(\xi)$$

de condition initiale $\psi(0) \in \mathbb{R}^+$. Alors,

1. ψ est une série entière à coefficients positifs ou nuls et de rayon de convergence infini.
2. Si $|\varphi(\xi_0)| \leq \psi(0)$, alors $|\varphi(\Lambda_{\xi}(s))| \leq \psi(s)$ pour tout $\xi \in \Delta$ et tout $s \in [s_{\xi_0}, s_{\xi}]$.

Ce résultat s'obtient aisément à partir de la démonstration classique du lemme de Grönwall (voir par exemple [Yoc]) en remarquant que $|\varphi(\xi_0)| \leq \psi(s_{\xi_0})$ puisque la

restriction de ψ à \mathbb{R}^+ est une fonction croissante. Nous donnons une démonstration de ce lemme à l'appendice 2.B.

Ce résultat s'étend sans difficulté au cas où φ est une matrice de $M_{p,1}(\mathcal{O}(\Delta))$ avec $p \geq 2$, à condition de choisir $u \in M_p(\mathbb{R}^+)$ et $v \in M_{p,1}(\mathcal{O}(\mathbb{C}))$.

Dans tout ce qui suit, nous notons

$$(1_\alpha) \quad x^2 \frac{df}{dx} - A_0 f + x f L_1 = \alpha B f, \quad \alpha \in \mathbb{C}$$

le système obtenu à partir de (1) par perturbation régulière et

$$(\widetilde{1}_\alpha) \quad \xi \widetilde{f} - \widetilde{A}_0 * \widetilde{f} + \widetilde{f} * L_1 = \alpha \widetilde{B} * \widetilde{f}$$

son transformé de Borel. Ces deux systèmes redonnent respectivement (1) et $(\widetilde{1})$ en substituant 1 à α . Rappelons que

$$A_0(x) = \bigoplus_{j=1}^J (a_j I_{n_j} + x L_j)$$

et que $B(x) = A(x) - A_0(x)$ est un élément de $M_n(x^2 \mathbb{C}\{x\})$. Précisément, si la matrice B est découpée comme la matrice L :

$$B = [B^{(j,\ell)}]_{1 \leq j, \ell \leq J}$$

avec $B^{(j,\ell)}$ de dimension $n_j \times n_\ell$, alors

$$B^{(j,\ell)}(x) = \begin{cases} O(x^3) & \text{si } a_j - a_\ell = 0 \\ O(x^2) & \text{si } a_j - a_\ell \neq 0 \end{cases}$$

2.1.1 Cas où la monodromie formelle est diagonale (L diagonale)

Compte tenu des normalisations faites dans ce cas, la matrice L_1 est nulle et la matrice $A_0(x)$ est de la forme

$$A_0(x) = \text{diag}(0, a_2 + x\lambda_2, \dots, a_n + x\lambda_n)$$

Les systèmes (1_α) et $(\widetilde{1}_\alpha)$ se simplifient alors respectivement en

$$(1_\alpha) \quad x^2 \frac{df}{dx} - A_0 f = \alpha B f$$

$$(\widetilde{1}_\alpha) \quad \xi \widetilde{f} - \widetilde{A}_0 * \widetilde{f} = \alpha \widetilde{B} * \widetilde{f}$$

Etude des systèmes perturbés (1_α) et $(\tilde{1}_\alpha)$

Lemme 2.3 *Le système (1_α) admet une unique solution série formelle en α de la forme*

$$\widehat{f}(x, \alpha) = I_{n,1} + \sum_{m \geq 1} \widehat{f}_m(x) \alpha^m$$

où nous avons noté $I_{n,1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ la première colonne de la matrice identité I_n et où

$\widehat{f}_m(x) \in M_{n,1}(x^2\mathbb{C}[[x]])$ pour tout $m \geq 1$.

Démonstration. Les séries \widehat{f}_m sont déterminées de proche en proche à partir de $\widehat{f}_0 = I_{n,1}$ comme unique solution vérifiant $\widehat{f}_m(0) = 0$ du système

$$x^2 f'_m - A_0 f_m = B \widehat{f}_{m-1}$$

de dimension n .

Pour $m = 1$, la $j^{\text{ème}}$ équation du système ci-dessus s'écrit pour $j \in \{1, \dots, n\}$ sous la forme

$$(2.1) \quad x^2 f_1^{[j]'} - a_j f_1^{[j]} - \lambda_j x f_1^{[j]} = b^{[j]}$$

puisque $B \widehat{f}_0$ n'est autre que la première colonne b de B . Il résulte des hypothèses faites :

- $b^{[j]}(x) = O(x^2)$ pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$;
- $b^{[j]}(x) = O(x^3)$ pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$ tel que $a_j = 0$;
- $\text{Re}(\lambda_j) \in [0, 1[$ pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$

que l'équation (2.1) admet une unique solution $\widehat{f}_1^{[j]}$ série formelle en x et de valuation 2 : $\widehat{f}_1^{[j]}(x) = O(x^2)$.

Pour $m \geq 2$, la $j^{\text{ème}}$ équation du système s'écrit pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$ sous la forme

$$(2.2) \quad x^2 f_m^{[j]'} - a_j f_m^{[j]} - \lambda_j x f_m^{[j]} = (B \widehat{f}_{m-1})^{[j]}$$

où à présent le second membre $(B \widehat{f}_{m-1})^{[j]}$ est un $O(x^4)$ pour tout j . Par le même argument que précédemment, nous en déduisons une unique solution $\widehat{f}_m^{[j]}$ série formelle en x et de valuation 2. ■

A la série double $\widehat{f}(x, \alpha)$ correspond dans le plan de Borel la série

$$\varphi(\xi, \alpha) = \delta I_{n,1} + \sum_{m \geq 1} \varphi_m(\xi) \alpha^m$$

où δ est la distribution de Dirac à l'origine et $\varphi_m(\xi) \in M_{n,1}(\xi\mathbb{C}[[\xi]])$ pour tout $m \geq 1$. Il résulte de l'isomorphisme de Borel-Laplace formel ([MR89]) que cette série double

$\varphi(\xi, \alpha)$ est l'unique solution de ce type du système (\widetilde{I}_α) . En particulier, pour $\alpha = 1$, nous obtenons

$$\widetilde{f}(\xi) = \varphi(\xi, 1) = \delta I_{n,1} + \sum_{m \geq 1} \varphi_m(\xi)$$

Cette écriture va nous permettre d'établir le théorème 2.1, puis de donner au paragraphe 2.2 une description précise des singularités de \widetilde{f} . Précisément, nous démontrons que, pour tout α élément d'un disque ouvert de centre 1, la série

$$\sum_{m \geq 1} \varphi_m(\xi) \alpha^m$$

est holomorphe sur $\Delta_{\mathcal{L}}$ avec une croissance exponentielle d'ordre au plus un. Nous procédons en plusieurs étapes : nous commençons par établir que les séries formelles $\varphi_m(\xi)$ sont convergentes à l'origine et peuvent être prolongées analytiquement à $\Delta_{\mathcal{L}}$ tout entier ; puis, à l'aide d'un argument de série majorante, nous démontrons que, pour tout α proche de 1, la série des $\varphi_m(\xi) \alpha^m$ converge uniformément sur tout compact de $\Delta_{\mathcal{L}}$. Cet argument de série majorante fournit également la croissance exponentielle d'ordre au plus un sur $\Delta_{\mathcal{L}}$ de la série des $\varphi_m(\xi) \alpha^m$.

Etape 1 : analyticité des φ_m sur $\Delta_{\mathcal{L}}$

Proposition 2.4 *Pour tout $m \geq 1$, les séries φ_m sont convergentes et admettent sur le domaine $\Delta_{\mathcal{L}}$ un prolongement analytique que nous notons encore φ_m .*

Démonstration. Par définition de $\varphi(\xi, \alpha)$, les séries φ_m sont les mineurs des \widehat{f}_m . Ainsi, en divisant les équations (2.1) et (2.2) par x et en appliquant une transformation de Borel, nous voyons que les $\varphi_m^{[j]}$ sont les uniques solutions séries formelles de l'équation différentielle

$$(2.3) \quad \begin{cases} (\xi - a_j) \varphi_m^{[j]'} - (\lambda_j - 1) \varphi_m^{[j]} = (\widetilde{B}' * \varphi_{m-1})^{[j]} \\ \varphi_m^{[j]}(0) = 0 \end{cases}$$

avec

$$\widetilde{B}' * \varphi_0 = \widetilde{B}' * \delta I_{n,1} = \widetilde{b}' \text{ et } \widetilde{b}^{[j]'}(\xi) = \begin{cases} O(\xi) & \text{si } a_j = 0 \\ O(1) & \text{si } a_j \neq 0 \end{cases}$$

Regardons cette équation pour $m = 1$:

★ Dans le cas où $a_j \neq 0$, l'origine est un point ordinaire de (2.3). La série formelle $\varphi_1^{[j]}$ est donc convergente.

★ Dans le cas où $a_j = 0$, la solution formelle $\varphi_1^{[j]}$ est donnée par

$$\varphi_1^{[j]}(\xi) = \sum_{m \geq 1} \frac{\beta_m^{[j]}}{m + 1 - \lambda_j} \xi^m$$

où les $\beta_m^{[j]}$ sont les coefficients de la série $\tilde{b}^{[j]'}(\xi)$:

$$\tilde{b}^{[j]'}(\xi) = \sum_{m \geq 1} \beta_m^{[j]} \xi^m$$

La série $\varphi_1^{[j]}$ est donc convergente puisqu'elle a le même rayon de convergence que $\tilde{b}^{[j]'}$.
 ★ Par ailleurs, la série \tilde{b} est une fonction entière. Les séries $\varphi_1^{[j]}$ peuvent donc être prolongées analytiquement à $\Delta_{\mathcal{L}}$ tout entier par le théorème de Cauchy-Lipschitz.

Le même raisonnement s'étend à $m \geq 2$ quelconque, puisque le produit de convolution $\tilde{B}' * \varphi_{m-1}$ est analytique sur $\Delta_{\mathcal{L}}$ et vérifie $(\tilde{B}' * \varphi_{m-1})(\xi) = O(\xi)$ (proposition 1.8). ■

Nous avons ainsi démontré que les φ_m sont des germes de fonctions analytiques prolongeables sans fin de support singulier les points $a_j \neq 0$.

Etape 2 : construction de séries majorantes

La manière de construire de telles séries n'étant pas unique, nous présentons ici une méthode qui a l'avantage de se généraliser assez simplement au cas d'une matrice L quelconque et aux systèmes de niveau unique $r \geq 2$, mais aussi aux systèmes à plusieurs niveaux.

Convergence normale de la série $\sum_{m \geq 1} \varphi_m(\xi)$ sur \mathcal{D}

Les séries $\varphi_m(\xi)$ étant convergentes sur \mathcal{D} (étape 1), montrons maintenant que, pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, la série $\sum_{m \geq 1} \varphi_m(\xi) \alpha^m$ converge normalement sur \mathcal{D}

Pour cela, considérons le système de dimension n défini par les n équations

$$(2_\alpha) \quad \begin{cases} xg^{[1]} = \alpha(|B|g)^{[1]} + x \\ (1 - \operatorname{Re}(\lambda_j))xg^{[j]} = \alpha(|B|g)^{[j]} & \text{si } a_j = 0 \text{ et } j \neq 1 \\ \nu g^{[j]} = \alpha(|B|g)^{[j]} + x(|\lambda_j| + 1)g^{[j]} & \text{si } a_j \neq 0 \end{cases}$$

où $|B|$ est la série des modules de B (cf. définition ci-dessous) et ν la distance de $\Delta_{\mathcal{L}}$ aux points $a_j \neq 0$. Rappelons également qu'avec nos normalisations, nous avons $\lambda_1 = 0$, et donc en particulier $\operatorname{Re}(\lambda_1) = 0$, et $\operatorname{Re}(\lambda_j) \in [0, 1[$ pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$.

Définition 2.5 La série des modules de

$$k(x) = \left[\sum_{m \geq 0} k_m^{(j,\ell)} x^m \right] \in M_{u,v}(\mathbb{C}[[x]])$$

est la série $|k|(x) \in M_{u,v}(\mathbb{R}^+[[x]])$ définie par

$$|k|(x) = \left[\sum_{m \geq 0} |k_m^{(j,\ell)}| x^m \right]$$

En particulier, $|k(x)| \leq |k|(|x|)$ ¹.

Lemme 2.6 *Le système (2_α) admet une unique solution série formelle en α de la forme*

$$g(x, \alpha) = I_{n,1} + \sum_{m \geq 1} g_m(x) \alpha^m$$

avec $g_m(x) \in M_{n,1}(x^2 \mathbb{R}^+[[x]])$ pour tout $m \geq 1$. De plus, cette série double définit une fonction analytique en x et α pour x proche de 0 et $\alpha \in \mathbb{C}$.

Démonstration. L'existence et l'unicité de g sont évidentes en remarquant que les séries g_m se déduisent de proche en proche à partir de $g_0 = I_{n,1}$ comme unique solution vérifiant $g_m(0) = 0$ du système

$$\begin{cases} (1 - \operatorname{Re}(\lambda_j))xg_m^{[j]} = (|B|g_{m-1})^{[j]} & \text{si } a_j = 0 \text{ (et en particulier si } j = 1) \\ \nu g_m^{[j]} = (|B|g_{m-1})^{[j]} + x(|\lambda_j| + 1)g_m^{[j]} & \text{si } a_j \neq 0 \end{cases}$$

Pour $m = 1$, les conditions

$$\begin{cases} 1 - \operatorname{Re}(\lambda_j) > 0 \text{ pour tout } j \in \{1, \dots, n\} \\ b^{[j]}(x) = O(x^3) \text{ si } a_j = 0 \\ b^{[j]}(x) = O(x^2) \text{ si } a_j \neq 0 \end{cases}$$

assurent l'existence et l'unicité de $g_1^{[j]}$.

Pour $m \geq 2$, la condition $(|B|g_{m-1})^{[j]}(x) = O(x^3)$ assure l'existence et l'unicité des autres $g_m^{[j]}$.

De plus, nous vérifions que $g'_m(0) = 0$ pour tout $m \geq 1$.

Etablissons maintenant l'analyticité de $g(x, \alpha)$ en x et α . Le système (2_α) peut être écrit sous la forme

$$M(x, \alpha)g = I_{n,1}$$

avec $M(x, \alpha) = D + xN(x, \alpha)$, où D est une matrice diagonale de dimension n dont les termes diagonaux sont $1 - \operatorname{Re}(\lambda_j) > 0$ ou ν et où $N(x, \alpha)$ est une matrice carrée

¹D'une manière générale, si M et N sont deux matrices de même taille :

$$M = [M^{(j,\ell)}] \text{ et } N = [N^{(j,\ell)}]$$

nous notons

$$|M| \leq |N| \iff |M^{(j,\ell)}| \leq |N^{(j,\ell)}| \text{ pour tout } j \text{ et } \ell$$

En particulier, si tous les termes de la matrice N sont égaux à ν , nous notons

$$|M| \leq |\nu| \iff |M^{(j,\ell)}| \leq |\nu| \text{ pour tout } j \text{ et } \ell$$

de dimension n dont les termes sont analytiques en x et affines en α pour x proche de 0. Ici encore, nous utilisons le fait que $B(x)$ est au moins un $O(x^2)$ à l'origine, ce qui nous permet de simplifier par x lorsque $a_j = 0$. La matrice

$$M(0, \alpha) = D$$

étant inversible, nous pouvons résoudre le système précédent pour obtenir une solution g analytique pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$ et pour tout x assez proche de 0. ■

La transformée de Borel par rapport à x de $g(x, \alpha)$ définie par

$$\Phi(\xi, \alpha) = \delta I_{n,1} + \sum_{m \geq 1} \Phi_m(\xi) \alpha^m$$

avec $\Phi_m(\xi) \in M_{n,1}(\xi \mathbb{R}^+[[\xi]])$ pour tout $m \geq 1$, est donc une fonction entière de ξ et ceci pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$. D'autre part, les $\Phi_m^{[j]}$ satisfont aux équations déduites par transformation de Borel des équations vérifiées par les $g_m^{[j]}$:

$$(2.4) \quad (1 - \operatorname{Re}(\lambda_j)) \Phi_m^{[j]} = \left(|\widetilde{B}|' * \Phi_{m-1} \right)^{[j]} \quad \text{si } a_j = 0$$

et

$$(2.5) \quad \begin{cases} \nu \Phi_m^{[j]'} = \left(|\widetilde{B}|' * \Phi_{m-1} \right)^{[j]} + (|\lambda_j| + 1) \Phi_m^{[j]} \\ \Phi_m^{[j]}(0) = 0 \end{cases} \quad \text{si } a_j \neq 0$$

avec $\Phi_0 = \delta I_{n,1}$ (en effet, $\Phi_m = \widetilde{g}_m$). La fonction $|\widetilde{B}|'$ étant une fonction entière sur \mathbb{C} , il résulte que les Φ_m sont elles aussi des fonctions entières.

Lemme 2.7 *Pour tout $m \geq 1$ et pour tout $\xi \in \mathcal{D}$, les fonctions φ_m vérifient l'inégalité*

$$|\varphi_m(\xi)| \leq \Phi_m(|\xi|)$$

Démonstration. Les $\varphi_m^{[j]}$ sont solutions des équations (2.3).

Lorsque $a_j = 0$, nous intégrons l'équation différentielle

$$\xi \varphi_1^{[j]'} - (\lambda_j - 1) \varphi_1^{[j]} = \widetilde{b}^{[j]}'$$

par la méthode de variation de la constante et nous obtenons

$$\varphi_1^{[j]}(\xi) = \xi^{\lambda_j - 1} \int_0^\xi \eta^{-\lambda_j} \widetilde{b}^{[j]}'(\eta) d\eta$$

pour tout $\xi \in \mathcal{D}$. Noter que cette intégrale n'est pas singulière à l'origine puisque $0 \leq \operatorname{Re}(\lambda_j) < 1$: en écrivant $\widetilde{b}^{[j]}'$ sous la forme

$$\widetilde{b}^{[j]}'(\eta) = \sum_{m \geq 1} \beta_m^{[j]} \eta^m$$

nous retrouvons la formule de la démonstration de la proposition 2.4 :

$$\varphi_1^{[j]}(\xi) = \sum_{m \geq 1} \frac{\beta_m^{[j]}}{m+1-\lambda_j} \xi^m \text{ pour tout } \xi \in \mathcal{D}$$

Fixons à présent $\xi \in \mathcal{D}$, $\arg(\xi) = \theta$. En considérant pour le chemin $(0, \xi)$ le segment $[0, \xi]$, nous obtenons

$$\varphi_1^{[j]}(\xi) = |\xi|^{\lambda_j-1} \int_0^{|\xi|} t^{-\lambda_j} \widetilde{b}^{[j]'}(te^{i\theta}) dt$$

et donc

$$\begin{aligned} \left| \varphi_1^{[j]}(\xi) \right| &\leq |\xi|^{\operatorname{Re}(\lambda_j)-1} \int_0^{|\xi|} t^{-\operatorname{Re}(\lambda_j)} |\widetilde{b}^{[j]'}(t)| dt \\ &\leq \widetilde{b}^{[j]'}(|\xi|) |\xi|^{\operatorname{Re}(\lambda_j)-1} \int_0^{|\xi|} t^{-\operatorname{Re}(\lambda_j)} dt \end{aligned}$$

puisque $|\widetilde{b}'|$ est une fonction croissante sur \mathbb{R}^+ ($|\widetilde{b}'|$ est une série entière à coefficients positifs ou nuls et de rayon de convergence infini). Noter que l'intégrale est convergente du fait que $\operatorname{Re}(\lambda_j) \in [0, 1[$. Par suite,

$$\left| \varphi_1^{[j]}(\xi) \right| \leq \frac{|\widetilde{b}^{[j]'}(|\xi|)|}{1 - \operatorname{Re}(\lambda_j)}$$

Nous obtenons ainsi l'inégalité cherchée pour $m = 1$ grâce à (2.4) :

$$\left| \varphi_1^{[j]}(\xi) \right| \leq \Phi_1^{[j]}(|\xi|) \text{ pour tout } \xi \in \mathcal{D}$$

Lorsque $a_j \neq 0$, le lemme de Grönwall (lemme 2.2) appliqué aux équations (2.3) et (2.5) avec $\Delta = \mathcal{D}$, $\xi_0 = 0$ et $\Lambda_\xi = [0, \xi]$ donne à nouveau l'inégalité cherchée pour $m = 1$.

Pour $m \geq 2$, la démonstration est analogue. Nous utilisons l'holomorphicité sur \mathcal{D} du produit de convolution $\widetilde{B}' * \varphi_{m-1}$ et l'inégalité

$$\left| \left(\widetilde{B}' * \varphi_{m-1} \right) (\xi) \right| \leq \left(|\widetilde{B}'| * \Phi_{m-1} \right) (|\xi|) \text{ pour tout } \xi \in \mathcal{D}$$

aisément obtenue par récurrence. En particulier, lorsque $a_j = 0$, nous remplaçons \widetilde{b}' par $\widetilde{B}' * \varphi_{m-1}$. ■

Corollaire 2.8 *Pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, la série $\sum_{m \geq 1} \varphi_m(\xi) \alpha^m$ converge normalement sur le disque \mathcal{D} .*

Démonstration. Soient $\alpha \in \mathbb{C}$ et ρ' le rayon du disque \mathcal{D} . Grâce au lemme 2.7, nous avons

$$\forall m \geq 1, \forall \xi \in \mathcal{D}, |\varphi_m(\xi) \alpha^m| \leq \Phi_m(|\xi|) |\alpha|^m$$

Les séries Φ_m étant à coefficients positifs, nous obtenons

$$\forall m \geq 1, \forall \xi \in \mathcal{D}, |\varphi_m(\xi)\alpha^m| \leq \Phi_m(\rho') |\alpha|^m$$

et donc le résultat cherché, puisque la série $\sum_{m \geq 1} \Phi_m(\rho') |\alpha|^m$ est convergente par construction. ■

Remarque 2.9 Outre la convergence normale sur \mathcal{D} de la série $\tilde{f}(\xi) = \sum_{m \geq 1} \varphi_m(\xi)$ obtenue en faisant $\alpha = 1$ dans le corollaire 2.8, cette démonstration permet de retrouver deux résultats bien connus : la série \tilde{f} est de type Gevrey de niveau 1 et le rayon du disque de convergence \mathcal{D}_0 de sa transformée de Borel \tilde{f} est $\min_{a_j \neq 0} |a_j|$.

Construction d'une famille de séries majorantes

Nous reprenons l'idée précédente en cherchant cette fois à appliquer le lemme de Grönwall aux équations (2.3) quelle que soit la valeur de a_j . L'origine $\xi = 0$ posant un problème dans le cas où $a_j = 0$, nous construisons une famille de séries majorantes sur des domaines connexes de $\Delta_{\mathcal{L}}$ strictement croissants et ne contenant pas 0.

Fixons $\xi_0 \in \mathcal{D} \cap]0, 1[$. La série $\sum_{m \geq 1} \varphi_m(\xi)$ étant normalement convergente sur le disque $|\xi| \leq \xi_0$, nous lui associons un nombre $K > 0$ tel que $|\varphi_m(\xi)| \leq K$ pour tout $m \geq 1$ et tout $|\xi| \leq \xi_0$.

De plus, quitte à modifier le domaine $\Delta_{\mathcal{L}}$, nous supposons désormais $\nu < \xi_0$.

Pour tout $\varepsilon \in]0, \xi_0[$, nous considérons le domaine $\Delta_\varepsilon = \{\xi \in \Delta_{\mathcal{L}}; |\xi| > \varepsilon\}$ ² (voir figure 2.3) et nous définissons le système formé par les n équations

$$(3_\alpha^\varepsilon) \quad \begin{cases} \varepsilon h^{[1]} = \alpha(Ch)^{[1]} + xh^{[1]} + \varepsilon - x + \alpha(xK - 1) \\ \varepsilon h^{[j]} = \alpha(Ch)^{[j]} + x(|\lambda_j| + 1)h^{[j]} + \alpha xK & \text{si } a_j = 0 \text{ et } j \neq 1 \\ \nu h^{[j]} = \alpha(Ch)^{[j]} + x(|\lambda_j| + 1)h^{[j]} + \alpha xK & \text{si } a_j \neq 0 \end{cases}$$

²Quitte à diminuer ξ_0 , nous pouvons toujours supposer Δ_ε connexe pour tout ε .

où $C = I_n + |B|$.

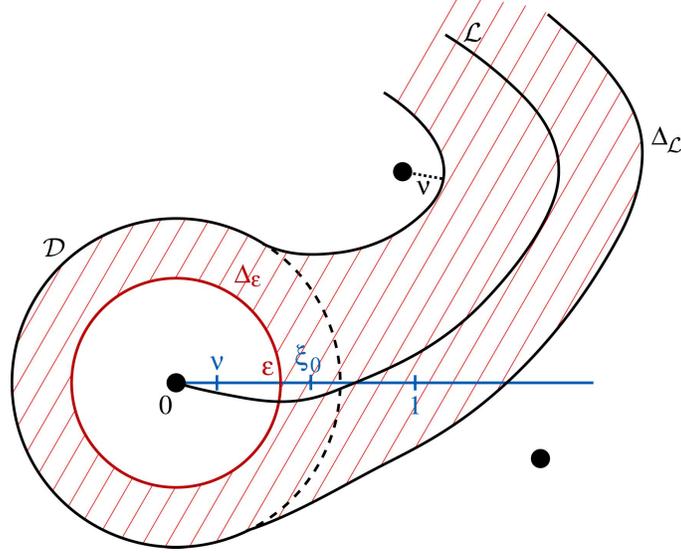


Figure 2.3 - exemple de domaine Δ_ε

Ce système admet une unique solution série formelle en α de la forme

$$h_\varepsilon(x, \alpha) = I_{n,1} + \sum_{m \geq 1} h_{\varepsilon,m}(x) \alpha^m$$

où les $h_{\varepsilon,m}(x) \in M_{n,1}(x\mathbb{R}^+[[x]])$ se déduisent de proche en proche comme unique solution vérifiant $h_{\varepsilon,m}(0) = 0$ des systèmes

$$\begin{cases} \varepsilon h_{\varepsilon,1}^{[j]} = |b|^{[j]} + x(|\lambda_j| + 1)h_{\varepsilon,1}^{[j]} + xK & \text{si } a_j = 0 \\ \nu h_{\varepsilon,1}^{[j]} = |b|^{[j]} + x(|\lambda_j| + 1)h_{\varepsilon,1}^{[j]} + xK & \text{si } a_j \neq 0 \end{cases}$$

si $m = 1$ et

$$\begin{cases} \varepsilon h_{\varepsilon,m}^{[j]} = h_{\varepsilon,m-1}^{[j]} + (|B| h_{\varepsilon,m-1})^{[j]} + x(|\lambda_j| + 1)h_{\varepsilon,m}^{[j]} & \text{si } a_j = 0 \\ \nu h_{\varepsilon,m}^{[j]} = h_{\varepsilon,m-1}^{[j]} + (|B| h_{\varepsilon,m-1})^{[j]} + x(|\lambda_j| + 1)h_{\varepsilon,m}^{[j]} & \text{si } a_j \neq 0 \end{cases}$$

si $m \geq 2$. En particulier, nous avons

$$\forall m \geq 1, h_{\varepsilon,m}^{[j]'}(0) = \begin{cases} \frac{K}{\varepsilon^m} & \text{si } a_j = 0 \\ \frac{K}{\nu^m} & \text{si } a_j \neq 0 \end{cases}$$

En utilisant les hypothèses $\varepsilon < \xi_0$ et $\nu < \xi_0$ et en adaptant la démonstration du lemme 2.6, nous voyons que la série $h_\varepsilon(x, \alpha)$ est en fait analytique en x et α pour x proche de

0 et α dans un disque ouvert $D(1, \rho)$ de centre 1 et de rayon $\rho \in]0, 1 - \xi_0[$. En effet, le système (3_α^ε) peut être écrit sous la forme

$$M(x, \alpha)h = \begin{bmatrix} \varepsilon - x + \alpha(xK - 1) \\ \alpha xK \\ \vdots \\ \alpha xK \end{bmatrix}$$

avec $M(x, \alpha) = D + xN(x, \alpha)$, où D est une matrice diagonale de dimension n dont les termes diagonaux sont $\varepsilon - \alpha$ ou $\nu - \alpha$ et où $N(x, \alpha)$ est une matrice carrée de dimension n dont les termes sont analytiques en x et affines en α pour x proche de 0.

La transformée de Borel par rapport à x de $h_\varepsilon(x, \alpha)$, notée $\psi_\varepsilon(\xi, \alpha)$, est donc une fonction entière en ξ à croissance exponentielle d'ordre au plus 1, et ceci pour tout $\alpha \in D(1, \rho)$. Précisément, nous avons

$$\psi_\varepsilon(\xi, \alpha) = \delta I_{n,1} + \sum_{m \geq 1} \psi_{\varepsilon,m}(\xi) \alpha^m$$

et les séries $\psi_{\varepsilon,m}^{[j]} = \tilde{h}_{\varepsilon,m}^{[j]}$ satisfont aux équations

$$(2.6) \quad \begin{cases} \varepsilon \psi_{\varepsilon,m}^{[j]'} = \psi_{\varepsilon,m-1}^{[j]'} + \left(|\widetilde{B}' * \psi_{\varepsilon,m-1} \right)^{[j]} + (|\lambda_j| + 1) \psi_{\varepsilon,m}^{[j]} \\ \psi_{\varepsilon,m}^{[j]}(0) = \frac{K}{\varepsilon^m} \end{cases} \quad \text{si } a_j = 0$$

et

$$(2.7) \quad \begin{cases} \nu \psi_{\varepsilon,m}^{[j]'} = \psi_{\varepsilon,m-1}^{[j]'} + \left(|\widetilde{B}' * \psi_{\varepsilon,m-1} \right)^{[j]} + (|\lambda_j| + 1) \psi_{\varepsilon,m}^{[j]} \\ \psi_{\varepsilon,m}^{[j]}(0) = \frac{K}{\nu^m} \end{cases} \quad \text{si } a_j \neq 0$$

où nous avons posé $\psi'_{\varepsilon,0} = 0$. Les séries $\psi_{\varepsilon,m}$ sont donc des fonctions entières. Par ailleurs, $|\varphi_m(\xi)| \leq K$ pour tout $|\xi| \leq \xi_0$ et $\psi_{\varepsilon,m}(0) > K$ puisque ε et ν sont strictement plus petits que 1. Les séries $\psi_{\varepsilon,m}$ vérifient donc l'inégalité

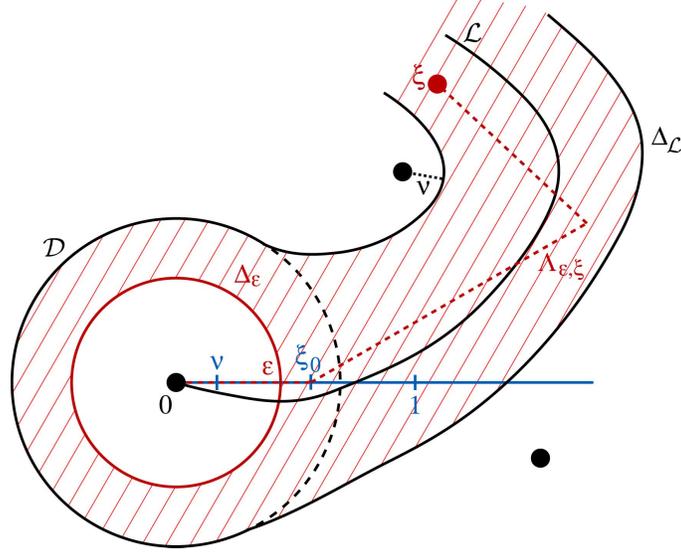
$$|\varphi_m(\xi)| < \psi_{\varepsilon,m}(0)$$

pour tout $m \geq 1$ et tout $|\xi| \leq \xi_0$.

Etape 3 : application à l'analyticité et à la croissance exponentielle d'ordre au plus 1 sur $\Delta_{\mathcal{L}}$ de la série $\varphi(\xi, \alpha)$, $\alpha \in D(1, \rho)$

Pour tout $\varepsilon \in]0, \xi_0[$, le domaine Δ_ε est connexe et contient ξ_0 . Choisissons, pour tout $\xi \in \Delta_\varepsilon$, une ligne brisée $\overline{\Lambda}_{\varepsilon,\xi}$ contenue dans Δ_ε et joignant ξ_0 à ξ ; et paramétrons le chemin $\Lambda_{\varepsilon,\xi} = [0, \xi_0] \cup \overline{\Lambda}_{\varepsilon,\xi}$ par la longueur de courbe

$$\begin{aligned} [0, s_\xi] &\longrightarrow \Lambda_{\varepsilon,\xi} \\ s &\longmapsto \Lambda_{\varepsilon,\xi}(s) \end{aligned}$$

Figure 2.4 - chemin $\Lambda_{\varepsilon, \xi}$

Le chemin $\Lambda_{\varepsilon, \xi}$ satisfait donc aux conditions du lemme de Grönwall (lemme 2.2). De plus, nous avons $|\Lambda'_{\varepsilon, \xi}(s)| = 1$ et $|\Lambda_{\varepsilon, \xi}(s)| \leq s$ pour tout $s \in [0, s_\xi]$, et, plus particulièrement, $\Lambda_{\varepsilon, \xi}(s) = s$ pour tout $s \in [0, \xi_0]$.

Proposition 2.10 *Soit $\varepsilon \in]0, \xi_0[$. Alors,*

$$\forall m \geq 1, \forall \xi \in \Delta_\varepsilon, \forall s \in [0, s_\xi], |\varphi_m(\Lambda_{\varepsilon, \xi}(s))| \leq \psi_{\varepsilon, m}(s)$$

Démonstration. Nous procédons par récurrence sur $m \geq 1$ en appliquant le lemme de Grönwall aux équations (2.3) et (2.6) dans le cas où $a_j = 0$ et aux équations (2.3) et (2.7) dans le cas où $a_j \neq 0$.

Regardons pour $m = 1$:

★ Lorsque $a_j = 0$, la fonction $\varphi_1^{[j]}$ vérifie l'équation différentielle (2.3) et donc l'inégalité différentielle

$$\forall \xi \in \Delta_\varepsilon, \forall s \in [\xi_0, s_\xi], \varepsilon \left| \varphi_1^{[j]'}(\Lambda_{\varepsilon, \xi}(s)) \right| \leq (|\lambda_j| + 1) \left| \varphi_1^{[j]}(\Lambda_{\varepsilon, \xi}(s)) \right| + \left| \widetilde{b}^{[j]}(\Lambda_{\varepsilon, \xi}(s)) \right|$$

Les coefficients de la série \widetilde{b}' sont positifs, d'où

$$\left| \widetilde{b}'(\Lambda_{\varepsilon, \xi}(s)) \right| \leq \widetilde{b}'(|\Lambda_{\varepsilon, \xi}(s)|) \leq \widetilde{b}'(s)$$

et donc

$$\forall \xi \in \Delta_\varepsilon, \forall s \in [\xi_0, s_\xi], \varepsilon \left| \varphi_1^{[j]'}(\Lambda_{\varepsilon, \xi}(s)) \right| \leq (|\lambda_j| + 1) \left| \varphi_1^{[j]}(\Lambda_{\varepsilon, \xi}(s)) \right| + \widetilde{b}'^{[j]}(s)$$

Par ailleurs, la fonction entière $\psi_{\varepsilon, 1}^{[j]}$ satisfait à l'équation différentielle (2.6) :

$$\varepsilon \psi_{\varepsilon, 1}^{[j]'} = (|\lambda_j| + 1) \psi_{\varepsilon, 1}^{[j]} + \widetilde{b}'^{[j]}$$

de condition initiale $\psi_{\varepsilon,1}^{[j]}(0) > K \geq \left| \varphi_1^{[j]}(\xi_0) \right|$. Il résulte alors immédiatement du lemme de Grönwall l'inégalité :

$$\forall \xi \in \Delta_\varepsilon, \forall s \in [\xi_0, s_\xi], \left| \varphi_1^{[j]}(\Lambda_{\varepsilon,\xi}(s)) \right| \leq \psi_{\varepsilon,1}^{[j]}(s)$$

Par ailleurs, pour tout $s \in [0, \xi_0]$, nous avons $\Lambda_{\varepsilon,\xi}(s) = s \leq \xi_0$, d'où, par construction de la série $\psi_{\varepsilon,1}^{[j]}$:

$$\forall s \in [0, \xi_0], \left| \varphi_1^{[j]}(\Lambda_{\varepsilon,\xi}(s)) \right| \leq \psi_{\varepsilon,1}^{[j]}(0)$$

et donc

$$\forall s \in [0, \xi_0], \left| \varphi_1^{[j]}(\Lambda_{\varepsilon,\xi}(s)) \right| \leq \psi_{\varepsilon,1}^{[j]}(s)$$

puisque la restriction de $\psi_{\varepsilon,1}^{[j]}$ à \mathbb{R}^+ est une fonction croissante ($\psi_{\varepsilon,1}^{[j]}$ est une série entière à coefficients positifs de rayon de convergence infini). Il s'ensuit l'inégalité cherchée pour $m = 1$:

$$\forall \xi \in \Delta_\varepsilon, \forall s \in [0, s_\xi], \left| \varphi_1^{[j]}(\Lambda_{\varepsilon,\xi}(s)) \right| \leq \psi_{\varepsilon,1}^{[j]}(s)$$

★ Lorsque $a_j \neq 0$, la fonction $\varphi_1^{[j]}$ vérifie l'inégalité différentielle

$$\forall \xi \in \Delta_\varepsilon, \forall s \in [s_{\xi_0}, s_\xi], \nu \left| \varphi_1^{[j]'}(\Lambda_{\varepsilon,\xi}(s)) \right| \leq (|\lambda_j| + 1) \left| \varphi_1^{[j]}(\Lambda_{\varepsilon,\xi}(s)) \right| + \widetilde{b}^{[j]'}(s)$$

Celle-ci est obtenue comme précédemment à partir de l'équation différentielle (2.3) et des propriétés de la série $\widetilde{b}^{[j]}$.

La fonction entière $\psi_{\varepsilon,1}^{[j]}$ satisfait à présent à l'équation différentielle (2.7) :

$$\nu \psi_{\varepsilon,1}^{[j]'} = (|\lambda_j| + 1) \psi_{\varepsilon,1}^{[j]} + \widetilde{b}^{[j]'}(s)$$

de condition initiale $\psi_{\varepsilon,1}^{[j]}(0) > K \geq \left| \varphi_1^{[j]}(\xi_0) \right|$. Ainsi, le lemme de Grönwall donne :

$$\forall \xi \in \Delta_\varepsilon, \forall s \in [\xi_0, s_\xi], \left| \varphi_1^{[j]}(\Lambda_{\varepsilon,\xi}(s)) \right| \leq \psi_{\varepsilon,1}^{[j]}(s)$$

et donc à nouveau l'inégalité cherchée pour $m = 1$:

$$\forall \xi \in \Delta_\varepsilon, \forall s \in [0, s_\xi], \left| \varphi_1^{[j]}(\Lambda_{\varepsilon,\xi}(s)) \right| \leq \psi_{\varepsilon,1}^{[j]}(s)$$

Nous avons en effet toujours $\left| \varphi_1^{[j]}(\Lambda_{\varepsilon,\xi}(s)) \right| \leq \psi_{\varepsilon,1}^{[j]}(0) \leq \psi_{\varepsilon,1}^{[j]}(s)$ pour tout $s \in [0, \xi_0]$.

Pour passer de l'ordre $m - 1$ à l'ordre m , il suffit de vérifier l'inégalité

$$(2.8) \quad \forall \xi \in \Delta_\varepsilon, \forall s \in [0, s_\xi], \left| \left(\widetilde{B}' * \varphi_{m-1} \right) (\Lambda_{\varepsilon,\xi}(s)) \right| \leq \left(\widetilde{B}' * \psi_{\varepsilon,m-1} \right) (s)$$

En effet, nous avons alors

$$\forall \xi \in \Delta_\varepsilon, \forall s \in [0, s_\xi], \left| \left(\widetilde{B}' * \varphi_{m-1} \right) (\Lambda_{\varepsilon,\xi}(s)) \right| \leq \psi'_{\varepsilon,m-1}(s) + \left(\widetilde{B}' * \psi_{\varepsilon,m-1} \right) (s)$$

puisque $\psi'_{\varepsilon, m-1}(s) \geq 0$ pour $s \geq 0$; et nous pouvons appliquer le lemme de Grönwall comme précédemment.

Fixons $\xi \in \Delta_\varepsilon$ et $s \in [0, s_\xi]$ et démontrons l'inégalité (2.8). Nous avons

$$\left(\widetilde{B}' * \varphi_{m-1}\right)(\Lambda_{\varepsilon, \xi}(s)) = \int_0^{\Lambda_{\varepsilon, \xi}(s)} \widetilde{B}'(\Lambda_{\varepsilon, \xi}(s) - \eta) \varphi_{m-1}(\eta) d\eta$$

En faisant le changement de variable $\eta = \Lambda_{\varepsilon, \xi}(t)$, nous obtenons

$$\begin{aligned} \left|\left(\widetilde{B}' * \varphi_{m-1}\right)(\Lambda_{\varepsilon, \xi}(s))\right| &\leq \int_0^s |\widetilde{B}'(|\Lambda_{\varepsilon, \xi}(s) - \Lambda_{\varepsilon, \xi}(t)|)| \varphi_{m-1}(\Lambda_{\varepsilon, \xi}(t)) dt \\ &\leq \int_0^s |\widetilde{B}'(s-t)| \psi_{\varepsilon, m-1}(t) dt \end{aligned}$$

puisque $\Lambda_{\varepsilon, \xi}(0) = 0$, $|\Lambda_{\varepsilon, \xi}(s) - \Lambda_{\varepsilon, \xi}(t)| \leq s - t$ et, d'après l'hypothèse de récurrence, nous avons

$$\forall s \in [0, s_\xi], \quad |\varphi_{m-1}(\Lambda_{\varepsilon, \xi}(s))| \leq \psi_{\varepsilon, m-1}(s)$$

Par suite,

$$\left|\left(\widetilde{B}' * \varphi_{m-1}\right)(\Lambda_{\varepsilon, \xi}(s))\right| \leq \left(|\widetilde{B}'| * \psi_{\varepsilon, m-1}\right)(s)$$

ce qui termine la démonstration de la proposition. ■

Tous ces résultats permettent d'établir le théorème 2.1 :

Soit $\alpha \in D(1, \rho)$. En adaptant la démonstration du corollaire 2.8, nous obtenons la convergence normale de la série des $\varphi_m(\xi)\alpha^m$ sur tout compact de Δ_ε , et donc aussi sur tout compact de $\Delta_{\mathcal{L}} \setminus \{0\}$. La série $\varphi(\xi, \alpha)$ est donc analytique sur $\Delta_{\mathcal{L}} \setminus \{0\}$, puis sur $\Delta_{\mathcal{L}}$, puisque l'origine est une singularité inexistante de $\varphi(\xi, \alpha)$ (la série des $\varphi_m(\xi)\alpha^m$ est convergente à l'origine). D'autre part, fixons $\varepsilon \in]0, \xi_0[$. La série $\psi_\varepsilon(\xi, \alpha)$ est à croissance exponentielle d'ordre au plus 1 sur Δ_ε . La série $\varphi(\xi, \alpha)$ vérifie donc pour tout $\xi \in \Delta_\varepsilon$ l'inégalité

$$|\varphi(\xi, \alpha)| \leq \psi_\varepsilon(s_\xi, |\alpha|) \leq A_{|\alpha|} e^{B_{|\alpha|} s_\xi} \text{ avec } A_{|\alpha|}, B_{|\alpha|} > 0$$

puisque $|\alpha| \in D(1, \rho)$. Par suite, $\varphi(\xi, \alpha)$ est à croissance exponentielle d'ordre au plus 1 sur $\Delta_{\mathcal{L}}$.

Il résulte de tout ceci que la série $\widetilde{f}(\xi) = \varphi(\xi, 1)$ est convergente et peut être prolongée analytiquement avec une croissance exponentielle d'ordre au plus un à $\Delta_{\mathcal{L}}$ tout entier.

2.1.2 Cas général (L sous forme de Jordan)

La démonstration étant analogue à celle du cas où la matrice L est diagonale, nous ne donnons que les idées essentielles, et en particulier les systèmes qui permettent de construire les diverses séries majorantes.

Rappelons que, pour toute matrice M de dimension $n \times n_1$, nous notons $M^{[j;q]}$ la $j^{\text{ème}}$ colonne de M et nous posons

$$M^{[;\ell;q]} = \begin{bmatrix} M^{[1;q]} \\ \vdots \\ M^{[J;q]} \end{bmatrix}$$

où le nombre de ligne de la matrice $M^{[j;q]}$, $j \in \{1, \dots, J\}$, est égal à la dimension du $j^{\text{ème}}$ bloc de Jordan L_j de L : $M^{[j;q]}$ est donc de dimension $n_j \times 1$ et le $\ell^{\text{ème}}$ coefficient de cette matrice, $\ell \in \{1, \dots, n_j\}$, est noté $M^{[j,\ell;q]}$.

Le premier bloc de colonne \widehat{f} de \widehat{F} est l'unique solution série formelle vérifiant $\widehat{f}(0) = I_{n,n_1}$ du système

$$(1) \quad x^2 \frac{df}{dx} - A_0 f + x f L_1 = B f$$

où nous avons noté I_{n,n_1} la matrice formée des n_1 premières colonnes de la matrice identité I_n . Compte tenu de la structure de la matrice L_1 , nous scindons ce système de dimension $n \times n_1$ colonne par colonne. Nous en déduisons alors que la $q^{\text{ème}}$ colonne $\widehat{f}^{[q]}$ de \widehat{f} , $q \in \{1, \dots, n_1\}$, est l'unique solution série formelle vérifiant $\widehat{f}^{[q]}(0) = I_{n,n_1}^{[q]}$ du système

$$(1^{[q]}) \quad x^2 \frac{df^{[q]}}{dx} - A_0 f^{[q]} + x \widehat{f}^{[q-1]} = B f^{[q]}$$

où nous avons posé $\widehat{f}^{[0]} = 0$. Compte tenu de cette structure, nous voyons que toutes les démonstrations qui suivent seront faites par récurrence sur $q \in \{1, \dots, n_1\}$.

Afin de généraliser les calculs faits précédemment, nous perturbons le système $(1^{[q]})$ en

$$(1_\alpha^{[q]}) \quad x^2 \frac{df^{[q]}}{dx} - A_0 f^{[q]} + x \widehat{f}^{[q-1]} = \alpha B f^{[q]}, \quad \alpha \in \mathbb{C}$$

En étudiant comme dans le cas où L est diagonale le système $(1_\alpha^{[q]})$, nous voyons que son système transformé de Borel $(\widetilde{1}_\alpha^{[q]})$ admet une unique solution série formelle en α de la forme

$$\varphi^{[j;q]}(\xi, \alpha) = \delta I_{n,n_1}^{[j;q]} + \sum_{m \geq 1} \varphi_m^{[j;q]}(\xi) \alpha^m$$

où, pour tout $m \geq 1$, la matrice $\varphi_m^{[j;q]}$, $j \in \{1, \dots, J\}$, est l'unique solution série formelle du système différentiel de dimension n_j :

$$(2.9) \quad \begin{cases} (\xi - a_j) \varphi_m^{[j;q]'} - (L_j - I_{n_j}) \varphi_m^{[j;q]} = (\widetilde{B}' * \varphi_{m-1})^{[j;q]} - \varphi_m^{[j;q-1]} \\ \varphi_m^{[j;q]}(0) = 0 \end{cases}$$

Ce système peut être étudié de deux manières différentes : soit directement avec les matrices, soit en remarquant tout simplement que la matrice L_j induit un système triangulaire à n_j équations défini par les équations différentielles

$$(2.10) \quad \begin{cases} (\xi - a_j)\varphi_m^{[j,\ell;q]'} - (\lambda_j - 1)\varphi_m^{[j,\ell;q]} = (\widetilde{B}' * \varphi_{m-1})^{[j,\ell;q]} + \varphi_m^{[j,\ell+1;q]} - \varphi_m^{[j,\ell;q-1]} \\ \varphi_m^{[j,\ell;q]}(0) = 0 \end{cases}$$

avec $\ell \in \{1, \dots, n_j\}$ et $\varphi_m^{[j,n_j+1;q]} = 0$. Ainsi, les $\varphi_m^{[j;q]}$ sont holomorphes sur $\Delta_{\mathcal{L}}$ et vérifient, dans le cas où $a_j = 0$: pour tout $\xi \in \mathcal{D}$,

$$\varphi_m^{[j,\ell;q]}(\xi) = \xi^{\lambda_j-1} \int_0^\xi \frac{\left((\widetilde{B}' * \varphi_{m-1})^{[j,\ell;q]} + \varphi_m^{[j,\ell+1;q]} - \varphi_m^{[j,\ell;q-1]} \right) (\eta)}{\eta^{\lambda_j}} d\eta$$

c'est-à-dire

$$\varphi_m^{[j;q]}(\xi) = \xi^{\lambda_j-1} \int_0^\xi \frac{\left((\widetilde{B}' * \varphi_{m-1})^{[j;q]} + M_j \varphi_m^{[j;q]} - \varphi_m^{[j;q-1]} \right) (\eta)}{\eta^{\lambda_j}} d\eta$$

où $M_j = L_j - \lambda_j I_{n_j}$ est la matrice nilpotente de Jordan d'ordre n_j .

La convergence normale sur le disque \mathcal{D} de la série $\sum_{m \geq 1} \varphi_m^{[j;q]} \alpha^m$, $\alpha \in \mathbb{C}$, est obtenue, comme dans le cas où L est diagonale, en considérant le système $(2_\alpha^{[q]})$ défini par les J équations matricielles

$$\begin{cases} xg^{[1;q]} = \alpha(|B|g)^{[1;q]} + xM_1g^{[1;q]} + xg^{[1;q-1]} + xI_{n,n_1}^{[1;q]} - 2xI_{n,n_1}^{[1;q-1]} \\ (1 - \operatorname{Re}(\lambda_j))xg^{[j;q]} = \alpha(|B|g)^{[j;q]} + xM_jg^{[j;q]} + xg^{[j;q-1]} & \text{si } a_j = 0 \text{ et } j \neq 1 \\ \nu g^{[j;q]} = \alpha(|B|g)^{[j;q]} + x(|L_j| + I_{n_j})g^{[j;q]} + xg^{[j;q-1]} & \text{si } a_j \neq 0 \end{cases}$$

Ce système admet une unique solution série formelle en α de la forme

$$g^{[j;q]}(x, \alpha) = I_{n,n_1}^{[j;q]} + \sum_{m \geq 1} g_m^{[j;q]}(x) \alpha^m$$

où les $g_m^{[j;q]}(x)$ sont des éléments de $M_{n,1}(x^2\mathbb{R}^+[[x]])$ pour tout $m \geq 1$. De plus, la série double $g^{[j;q]}(x, \alpha)$ est analytique en x et en α pour x proche de 0 et α dans \mathbb{C} . En effet, le système $(2_\alpha^{[q]})$ peut être écrit sous la forme

$$M(x, \alpha)g^{[j;q]} = H(x, \alpha)$$

avec

- $M(x, \alpha) = T + xN(x, \alpha)$, où T est une matrice triangulaire supérieure de dimension $n \times n$ dont les termes diagonaux sont $1 - \operatorname{Re}(\lambda_j) > 0$ ou ν , et où $N(x, \alpha)$ est une matrice

carrée de dimension $n \times n$ dont les termes sont analytiques en x et affines en α pour x proche de 0 ;

• $H(x, \alpha)$ est une matrice colonne de dimension $n \times 1$ dont les termes sont analytiques en x et en α pour x proche de 0 et α dans \mathbb{C} . Précisément, si nous écrivons $H(x, \alpha)$ sous la forme

$$H(x, \alpha) = \begin{bmatrix} H^{[1]}(x, \alpha) \\ \vdots \\ H^{[j]}(x, \alpha) \end{bmatrix}$$

alors les matrices $H^{[j]}(x, \alpha)$ de dimension $n_j \times 1$ sont données par

$$H^{[j]}(x, \alpha) = \begin{cases} g^{[1;q-1]} + I_{n,n_1}^{[1;q]} - 2I_{n,n_1}^{[1;q-1]} & \text{si } j = 1 \\ g^{[j;q-1]} & \text{si } j \neq 1 \text{ et } a_j = 0 \\ xg^{[j;q-1]} & \text{si } a_j \neq 0 \end{cases}$$

Noter que si $q = 1$, $H(x, \alpha)$ se réduit en une matrice constante (car $g^{[0]} = 0$), qui est par conséquent analytique en x pour x proche de 0, ce qui initialise la récurrence sur q . Lorsque $q \geq 2$, l'hypothèse de récurrence affirme que $g^{[j;q-1]}$ est analytique en x et en α pour x proche de 0 et α dans \mathbb{C} . Nous concluons alors comme au lemme 2.6.

Ainsi, le système transformé de Borel de $(2_\alpha^{[q]})$ par rapport à x admet une unique solution série formelle en α de la forme

$$\Phi_m^{[j;q]}(\xi, \alpha) = \delta I_{n,n_1}^{[j;q]} + \sum_{m \geq 1} \Phi_m^{[j;q]}(\xi) \alpha^m$$

qui converge pour tout $(\xi, \alpha) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$, et nous pouvons montrer aisément que les $\Phi_m^{[j;q]}(\xi) \in M_{n,1}(\xi \mathbb{R}^+ \{ \xi \})$ sont des fonctions entières vérifiant les équations

$$\begin{cases} (1 - \operatorname{Re}(\lambda_j)) \Phi_m^{[j;q]} = \left(|\widetilde{B}|' * \Phi_{m-1} \right)^{[j;q]} + M_j \Phi_m^{[j;q]} + \Phi_m^{[j;q-1]} & \text{si } a_j = 0 \\ \nu \Phi_m^{[j;q]'} = \left(|\widetilde{B}|' * \Phi_{m-1} \right)^{[j;q]} + (|L_j| + I_{n_j}) \Phi_m^{[j;q]} + \Phi_m^{[j;q-1]} & \text{si } a_j \neq 0 \end{cases}$$

Nous concluons alors comme au lemme 2.7 :

Lorsque $a_j = 0$, nous établissons l'inégalité

$$|\varphi_m^{[j,\ell;q]}(\xi)| \leq \Phi_m^{[j,\ell;q]}(|\xi|) \text{ pour tout } \xi \in \mathcal{D}$$

sur chaque coefficient $\varphi_m^{[j,\ell;q]}$ de la matrice $\varphi_m^{[j;q]}$ en utilisant le fait que la matrice M_j induit un système triangulaire de dimension n_j sur les coefficients de $\varphi_m^{[j;q]}$ et $\Phi_m^{[j;q]}$.

Lorsque $a_j \neq 0$, nous appliquons directement le lemme de Grönwall (lemme 2.2) et nous obtenons à nouveau l'inégalité

$$|\varphi_m^{[j;q]}(\xi)| \leq \Phi_m^{[j;q]}(|\xi|)$$

pour tout $\xi \in \mathcal{D}$.

Pour établir l'analyticité et la croissance exponentielle d'ordre au plus un sur $\Delta_{\mathcal{L}}$ de la série $\varphi^{[;q]}(\xi, \alpha)$, nous procédons comme dans le cas où la matrice L est diagonale : Nous fixons un point base $\xi_0 \in \mathcal{D} \cap]0, 1[$ et un réel $K > 0$ tels que $|\varphi_m(\xi)| \leq K$ pour tout $m \geq 1$ et tout $|\xi| \leq \xi_0$. Pour tout $\varepsilon \in]0, \xi_0[$, nous considérons le domaine ouvert $\Delta_\varepsilon = \{\xi \in \Delta_{\mathcal{L}}; |\xi| > \varepsilon\}$ que nous supposons connexe, et nous définissons le système $(3_\alpha^{[;q]})$ par les J équations matricielles :

- $\varepsilon h^{[1;q]} = \alpha(C h)^{[1;q]} + x(|L_1| + I_{n_1})h^{[1;q]} + xh^{[1;q-1]} + (\varepsilon - x - \alpha)I_{n, n_1}^{[1;q]} - 2xI_{n, n_1}^{[1;q-1]} + \alpha x \mathbf{K}_{n_1}$
- si $a_j = 0$ et $j \neq 1$, alors

$$\varepsilon h^{[j;q]} = \alpha(C h)^{[j;q]} + x(|L_j| + I_{n_j})h^{[j;q]} + xh^{[j;q-1]} + \alpha x \mathbf{K}_{n_j}$$

- si $a_j \neq 0$, alors

$$\nu h^{[j;q]} = \alpha(C h)^{[j;q]} + x(|L_j| + I_{n_j})h^{[j;q]} + xh^{[j;q-1]} + \alpha x \mathbf{K}_{n_j}$$

où $C = I_n + |B|$ et où \mathbf{K}_ℓ est le vecteur colonne de dimension ℓ dont les termes sont tous égaux à K .

A nouveau, ce système admet une unique solution série formelle en α de la forme

$$h_\varepsilon^{[;q]}(x, \alpha) = I_{n, n_1}^{[;q]} + \sum_{m \geq 1} h_{\varepsilon, m}^{[;q]}(x) \alpha^m$$

où les $h_{\varepsilon, m}^{[;q]}(x)$ sont des éléments de $M_{n, 1}(x\mathbb{R}^+[[x]])$ pour tout $m \geq 1$. En outre, ces séries formelles vérifient

$$h_{\varepsilon, m}^{[j;q]'}(0) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon^m} \mathbf{K}_{n_j} & \text{si } a_j = 0 \\ \frac{1}{\nu^m} \mathbf{K}_{n_j} & \text{si } a_j \neq 0 \end{cases}$$

Par ailleurs, en choisissant $\nu < \xi_0$ (ce qui est toujours possible), nous montrons que la série double $h_\varepsilon^{[;q]}(x, \alpha)$ est en fait analytique en x et en α pour x proche de 0 et α dans un disque ouvert $D(1, \rho)$ de centre 1 et de rayon $\rho \in]0, 1 - \xi_0[$. En effet, le système $(3_\alpha^{[;q]})$ peut être écrit sous la forme

$$M(x, \alpha)h^{[;q]} = H(x, \alpha)$$

avec

- $M(x, \alpha) = D + xN(x, \alpha)$, où D est une matrice diagonale de dimension n dont les termes diagonaux sont $\varepsilon - \alpha$ ou $\nu - \alpha$, et où $N(x, \alpha)$ est une matrice carrée de dimension $n \times n$ dont les termes sont analytiques en x et affines en α pour x proche de 0 ;
- $H(x, \alpha)$ est une matrice colonne de dimension $n \times 1$ dont les termes sont analytiques en x et en α pour x proche de 0 et α dans $D(1, \rho)$. Précisément,

$$H(x, \alpha) = \begin{bmatrix} xh^{[1;q-1]} + (\varepsilon - x - \alpha)I_{n, n_1}^{[1;q]} - 2xI_{n, n_1}^{[1;q-1]} + \alpha x \mathbf{K}_{n_1} \\ xh^{[j;q-1]} + \alpha x \mathbf{K}_{n_j} \\ \vdots \\ xh^{[j;q-1]} + \alpha x \mathbf{K}_{n_j} \end{bmatrix}$$

Comme précédemment, si $q = 1$, cette matrice $H(x, \alpha)$ se réduit en un polynôme en x et en α (car $h^{[0]} = 0$), ce qui initialise la récurrence sur q . Lorsque $q \geq 2$, l'hypothèse de récurrence affirme que $h^{[q-1]} = h_\varepsilon^{[q-1]}$ est analytique en x et en α pour x proche de 0 et α dans $D(1, \rho)$.

Par conséquent, la transformée de Borel formelle $\psi_\varepsilon^{[q]}(\xi, \alpha)$ de $h_\varepsilon^{[q]}(x, \alpha)$ par rapport à x définit une fonction entière de ξ qui est à croissance exponentielle d'ordre au plus un l'infini. Plus précisément, nous avons

$$\psi_\varepsilon^{[q]}(\xi, \alpha) = \delta I_{n, n_1}^{[q]} + \sum_{m \geq 1} \psi_{\varepsilon, m}^{[q]}(\xi) \alpha^m$$

où les séries $\psi_{\varepsilon, m}^{[q]} \in M_{n, 1}(\mathbb{R}^+[[\xi]])$ satisfont pour tout $m \geq 1$ aux systèmes différentiels

$$\begin{cases} \varepsilon \psi_{\varepsilon, m}^{[j; q]'} = \psi_{\varepsilon, m-1}^{[j; q]'} + \left(\widetilde{B}' * \psi_{\varepsilon, m-1} \right)^{[j; q]} + (|L_j| + I_{n_j}) \psi_{\varepsilon, m}^{[j; q]} + \psi_{\varepsilon, m}^{[j; q-1]} & \text{si } a_j = 0 \\ \nu \psi_{\varepsilon, m}^{[j; q]'} = \psi_{\varepsilon, m-1}^{[j; q]'} + \left(\widetilde{B}' * \psi_{\varepsilon, m-1} \right)^{[j; q]} + (|L_j| + I_{n_j}) \psi_{\varepsilon, m}^{[j; q]} + \psi_{\varepsilon, m}^{[j; q-1]} & \text{si } a_j \neq 0 \end{cases}$$

(nous avons posé $\psi_{\varepsilon, 0}^{[j; q]'} = 0$) de condition initiale $\psi_{\varepsilon, m}^{[j; q]}(0) = h_{\varepsilon, m}^{[j; q]'}(0) > K$. Nous avons en effet $\psi_{\varepsilon, m}^{[j; q]} = \widetilde{h}_{\varepsilon, m}^{[j; q]}$ et $0 < \varepsilon, \nu < 1$. Les séries $\psi_{\varepsilon, m}^{[j; q]}$ définissent donc des fonctions entières en ξ et nous pouvons appliquer le lemme de Grönwall aux équations (2.9). En particulier, en adaptant la démonstration de la proposition 2.10, nous obtenons aisément les inégalités

$$|\varphi_m^{[j; q]}(\xi)| \leq \psi_{\varepsilon, m}^{[j; q]}(s_\varepsilon)$$

pour tout $\xi \in \Delta_\varepsilon$. Nous terminons la démonstration du théorème 2.1 comme dans le cas où la matrice L est diagonale.

2.2 Description des singularités de la transformée de Borel \widetilde{f} (plan de Borel)

Dans ce paragraphe, nous nous proposons de décrire avec précision la nature d'une singularité ω de f , en fonction des singularités du système initial. Des études plus ou moins précises ont déjà été faites dans le cas où la matrice des exposants de monodromie formelle L est diagonale, voire même nulle ou à valeurs propres distinctes, non nulles et ne différant pas d'un entier (voir par exemple [BJL82-1], [E85], [L-R95], [LS97]). En particulier, à notre connaissance, le cas général où la solution formelle du système initial contient des logarithmes n'a jamais été détaillée. Nous traitons ici le cas le plus général où la matrice L est diagonale ou sous forme de Jordan quelconque.

Nous utilisons pour ce faire la solution du système obtenue au paragraphe 2.1 par perturbation régulière et séries majorantes (voir [E85], et pour plus de développement [CNP93], [Del01]) : ayant écrit \widetilde{f} sous la forme

$$\widetilde{f}(\xi) = \sum_{m \geq 1} \varphi_m(\xi)$$

où les φ_m sont des fonctions analytiques à l'origine prolongeables sans fin et où la série converge normalement sur tout compact de $\tilde{\mathbb{C}}_a$, il suffit de voir que les φ_m ont toutes le même type de singularité en ω , lequel se transmet alors à \tilde{f} .

Avant de commencer cette étude, introduisons les types de singularités dont nous avons besoin ici.

2.2.1 Séries formelles résurgentes de la classe de Nilsson

Rappelons qu'une série formelle résurgente est une série formelle de type Gevrey de niveau 1 dont le mineur est prolongeable sans fin (définition 1.11).

L'espace Nil_0 des *germes de fonctions de la classe de Nilsson à l'origine* (ou fonction à croissance modérée à l'origine) est l'espace engendré par les germes de fonctions de la forme $\varphi_{\lambda,p}(\xi)\xi^\lambda \log^p \xi$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$, $p \in \mathbb{N}$ et $\varphi_{\lambda,p}$ analytique à l'origine. L'espace Nil_0 est naturellement muni d'une structure de $\mathbb{C}\{x\}$ -module différentiel.

Pour tout point $\omega \in \mathbb{C}$, on définit l'espace Nil_ω des *germes de fonctions de la classe de Nilsson en ω* comme étant le translaté de Nil_0 en ω : il est formé des germes de fonctions $\tilde{\varphi}$ en ω dont les translatés $\tau_\omega \tilde{\varphi}(\xi) = \tilde{\varphi}(\xi + \omega)$ appartiennent à Nil_0 .

Considérons à présent p points distincts $\omega_1, \dots, \omega_p$ de \mathbb{C}^* et notons $\mathfrak{R} = \mathbb{Z}\omega_1 + \dots + \mathbb{Z}\omega_p$ le réseau engendré par $\omega_1, \dots, \omega_p$.

Définition 2.11 Une série formelle résurgente est dite *résurgente de la classe de Nilsson sur \mathfrak{R}* si toutes les singularités de son mineur sont des singularités de la classe de Nilsson en des points de \mathfrak{R} . On note $\mathcal{R}^{\text{Nils}}(\mathfrak{R})$ l'ensemble de ces fonctions.³

Proposition 2.12 L'espace $\mathcal{R}^{\text{Nils}}(\mathfrak{R})$ des séries formelles résurgentes de la classe de Nilsson sur \mathfrak{R} est une algèbre et une sous-algèbre différentielle de la \mathbb{C} -algèbre $\mathbb{C}[[x]]_1$ des séries formelles de type Gevrey de niveau 1.

Démonstration. Il suffit de vérifier que si $\hat{\varphi}$ et $\hat{\psi}$ sont deux éléments de $\mathcal{R}^{\text{Nils}}(\mathfrak{R})$, alors $\hat{\varphi}\hat{\psi}$ est encore une série formelle résurgente de la classe de Nilsson.

Le mineur $\mathcal{B}(\hat{\varphi}\hat{\psi})$ du produit $\hat{\varphi}\hat{\psi}$ étant donné par le produit de convolution

$$\tilde{\varphi} * \tilde{\psi}(\xi) = \int_0^\xi \tilde{\varphi}(\xi - \eta)\tilde{\psi}(\eta)d\eta$$

des mineurs $\tilde{\varphi}$ et $\tilde{\psi}$, la proposition 1.8 montre que $\mathcal{B}(\hat{\varphi}\hat{\psi})$ est prolongeable sans fin et que ses singularités sont des éléments du réseau \mathfrak{R} . De plus, ces singularités sont nécessairement de la classe de Nilsson, puisque $\tilde{\varphi}$ et $\tilde{\psi}$ sont des éléments de Nil_ω pour tout $\omega \in \mathfrak{R}$. ■

Revenons à présent à l'étude du système différentiel linéaire $[A]$. Rappelons (paragraphe 2.1) que le système $[\tilde{A}]$ transformé de Borel de $[A]$ admet pour singularités potentielles les points de l'ensemble

$$\mathcal{S}' = \{a_j - a_\ell \neq 0; 1 \leq j, \ell \leq J\}$$

³On définit de manière analogue les fonctions de la classe de Nilsson sur un ensemble discret \mathcal{S} quelconque.

et notons \mathfrak{R}' le réseau engendré par \mathcal{S}' . En fait, comme nous allons étudier séparément chaque solution de $[A]$ (placée en première colonne de la solution fondamentale formelle $\widehat{F}(x)x^L e^{Q(\frac{1}{x})}$ où a_1 a été normalisé à $a_1 = 0$), il suffit même d'introduire le réseau \mathfrak{R} engendré par les singularités

$$\mathcal{S} = \{a_j \neq 0; 1 \leq j \leq J\}$$

Il est à noter que, du fait de la linéarité du système $[A]$, la structure d'algèbre de $\mathcal{R}^{\text{Nils}}(\mathfrak{R})$ est inutile; tous les calculs se déroulant à l'intérieur du $\mathbb{C}\{x\}$ -module des séries formelles résurgentes sur \mathcal{S} (proposition 1.13). En effet, il n'apparaît jamais dans $[A]$ de puissances y^2, y^3, \dots de la fonction inconnue y , mais uniquement des produits de la forme $e(x)y$ avec $e(x)$ analytique à l'origine.

Comme précédemment, nous notons \widetilde{f} le premier bloc de colonne de \widetilde{F} et nous limitons notre étude à ce bloc de colonnes. Les propriétés du $\mathbb{C}\{x\}$ -module des séries formelles résurgentes de la classe de Nilsson sur \mathcal{S} sont suffisantes pour étudier la nature des singularités de \widetilde{f} (cf. appendice 2.A) et obtenir les multiplicateurs de Stokes. Elles restent cependant trop générales pour décrire avec précision les singularités ω de \widetilde{f} . En effet, nous allons voir que les seules singularités qui apparaissent dans le cas des systèmes de niveau unique 1 tel que normalisé sont des pôles d'ordre un, des puissances non entières de ξ et des puissances du logarithme. Nous sommes donc conduits à donner la définition suivante :

Définition 2.13 (singularité simple-ramifiée) Soit Ω un sous-ensemble discret de \mathbb{C}^* .

1. On dit qu'un germe $\widetilde{\varphi}$ admet *une singularité simple-ramifiée en $\omega \in \Omega$* si, modulo les fonctions analytiques à l'origine,

$$\tau_\omega \widetilde{\varphi}(\xi) = \sum_{p=0}^{N_{\omega,0}} \frac{\alpha_{\omega,p}}{\xi} \log^p \xi + \sum_{p=1}^{N_{\omega,0}+1} \widetilde{h}_{\omega,p}(\xi) \log^p \xi + \sum_{\lambda \in \Lambda_\omega} \sum_{p=0}^{N_{\omega,\lambda}} \left(\widetilde{H}_{\omega,\lambda,p}(\xi) \log^p \xi \right) \xi^{\lambda-1}$$

avec $\alpha_{\omega,p}$ constants, $\widetilde{h}_{\omega,p}$ et $\widetilde{H}_{\omega,\lambda,p}$ analytiques à l'origine, Λ_ω sous-ensemble fini de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ dont les valeurs deux à deux ne diffèrent pas d'un entier relatif et $N_{\omega,0}$ et $N_{\omega,\lambda}$ entiers naturels.

Λ_ω est l'ensemble des *exposants de ramification de $\widetilde{\varphi}$ au point ω* .

$N_{\omega,0}$ et $(N_{\omega,\lambda})_{\lambda \in \Lambda_\omega}$ sont les *ordres logarithmiques de $\widetilde{\varphi}$ au point ω* .

$\alpha_{\omega,p}, \widetilde{h}_{\omega,p}$ et $\widetilde{H}_{\omega,\lambda,p}$ sont les *coefficients de résurgence de $\widetilde{\varphi}$ au point ω* . Ils dépendent bien sûr du prolongement analytique de $\widetilde{\varphi}$ au voisinage de ω .

2. Une série formelle résurgente est dite *résurgente simple-ramifiée sur Ω* si son mineur admet une singularité simple-ramifiée en tout point de Ω .

Cette définition regroupe les cas particuliers suivants :

★ *Cas d'une singularité simple en ω :*

$$\tau_\omega \widetilde{\varphi}(\xi) = \frac{\alpha_\omega}{\xi} + \widetilde{h}_\omega(\xi) \log \xi + \text{Hol}_\omega(\xi)$$

avec α_ω constant et \tilde{h}_ω et Hol_ω analytiques à l'origine. On trouve de telles singularités par exemple dans [Can89], [CNP93], [Del94], [Del01], [E85] et [L-R95].

★ *Cas d'une singularité purement ramifiée en ω d'exposants Λ_ω :*

$$\tau_\omega \tilde{\varphi}(\xi) = \sum_{\lambda \in \Lambda_\omega} \tilde{H}_{\omega,\lambda}(\xi) \xi^{\lambda-1} + Hol_\omega(\xi)$$

avec $\tilde{H}_{\omega,\lambda}$ et Hol_ω analytiques à l'origine. Il s'agit du cas le plus simple pour les singularités car les mineurs et les majeurs de x^λ sont du même type (voir par exemple [BJL82-1] et [LS97]).

★ *Cas d'une singularité simple-ramifiée en ω d'exposants Λ_ω :*

$$\tau_\omega \tilde{\varphi}(\xi) = \frac{\alpha_\omega}{\xi} + \tilde{h}_\omega(\xi) \log \xi + \sum_{\lambda \in \Lambda_\omega} \tilde{H}_{\omega,\lambda}(\xi) \xi^{\lambda-1} + Hol_\omega(\xi)$$

avec α_ω constant et \tilde{h}_ω , $\tilde{H}_{\omega,\lambda}$ et Hol_ω analytiques à l'origine.

Ces trois cas particuliers interviennent essentiellement lorsque la matrice L est diagonale (voir paragraphe 2.2.2). Les puissances du logarithme de la définition 2.13 apparaissent dès lors que le premier bloc de Jordan de la matrice L , ou que les blocs de Jordan de L associés à la singularité ω , sont de dimension supérieure ou égale à 2 (voir paragraphe 2.2.3) comme le montrent les deux exemples simples suivants :

Exemple 1 Le système différentiel linéaire

$$x^2 \frac{dY}{dx} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ x^2 & 1 & x & 0 \\ x^2 & 0 & 1 & x \\ x^2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} Y$$

admet pour solution fondamentale formelle $\hat{Y}(x) = \hat{F}(x) x^L e^{Q(\frac{1}{x})}$ avec

$$\hat{F}(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hat{f}_3 & 1 & 0 & 0 \\ \hat{f}_2 & 0 & 1 & 0 \\ \hat{f}_1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } Q\left(\frac{1}{x}\right) = \text{diag}\left(0, -\frac{1}{x}, -\frac{1}{x}, -\frac{1}{x}\right)$$

les \hat{f}_j étant les uniques solutions séries formelles vérifiant $\hat{f}_j(x) = O(x^2)$ du système

$$\begin{cases} x^2 \frac{df_1}{dx} - f_1 = x^2 \\ x^2 \frac{df_2}{dx} - f_2 = x^2 + x \hat{f}_1 \\ x^2 \frac{df_3}{dx} - f_3 = x^2 + x \hat{f}_2 \end{cases}$$

Les termes $x\widehat{f}_1$ et $x\widehat{f}_2$ proviennent du second bloc de Jordan

$$L_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

de la matrice L . Ce sont ces termes qui sont responsables de l'apparition des puissances logarithmiques dans l'écriture de \widetilde{f} au voisinage de 1. La transformée de Borel de ce système est entièrement résolue : en prenant la détermination principale du logarithme, nous avons facilement pour tout $\xi \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re}(\xi) < 1$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \widetilde{f}_1(\xi) = \frac{\xi}{\xi - 1} \\ \widetilde{f}_2(\xi) = \frac{2\xi}{\xi - 1} + \frac{\log(1 - \xi)}{\xi - 1} \\ \widetilde{f}_3(\xi) = \frac{3\xi}{\xi - 1} + \frac{2\log(1 - \xi)}{\xi - 1} + \frac{\log^2(1 - \xi)}{2(\xi - 1)} \end{array} \right.$$

Le terme polaire était attendu, puisque la valeur propre du bloc de Jordan correspondant à la singularité $\xi = 1$ est nulle. Les termes en $\frac{\log(1-\xi)}{\xi-1}$ et $\frac{\log^2(1-\xi)}{\xi-1}$ ont été obtenus à partir de l'égalité classique

$$\mathcal{B}(x\widehat{f}_j)(\xi) = 1 * \widetilde{f}_j(\xi) = \int_0^\xi \widetilde{f}_j(\eta) d\eta$$

pour $j \in \{1, 2\}$.

Exemple 2 Considérons à présent le système différentiel linéaire

$$x^2 \frac{dY}{dx} = \begin{bmatrix} 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \frac{x}{2} & x \\ x^2 & 0 & 0 & 1 + \frac{x}{2} \end{bmatrix} Y$$

dont une solution fondamentale formelle est $\widehat{Y}(x) = \widehat{F}(x)x^L e^{Q(\frac{1}{x})}$ avec

$$\widehat{F}(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \widehat{f}_2 & \widehat{f}_4 & 1 & 0 \\ \widehat{f}_1 & \widehat{f}_3 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad Q\left(\frac{1}{x}\right) = \operatorname{diag}\left(0, 0, -\frac{1}{x}, -\frac{1}{x}\right)$$

les \widehat{f}_j étant les uniques solutions séries formelles vérifiant $\widehat{f}_j(x) = O(x^2)$ du système

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 \frac{df_1}{dx} - \left(1 + \frac{x}{2}\right) f_1 = x^2 \quad , \quad x^2 \frac{df_2}{dx} - \left(1 + \frac{x}{2}\right) f_2 = x\widehat{f}_1 \\ x^2 \frac{df_3}{dx} - \left(1 + \frac{x}{2}\right) f_3 = -x\widehat{f}_1 \quad , \quad x^2 \frac{df_4}{dx} - \left(1 + \frac{x}{2}\right) f_4 = x\widehat{f}_3 - x\widehat{f}_2 \end{array} \right.$$

La transformée de Borel de \widehat{f} admet une unique singularité en $\xi = 1$, mais, contrairement à l'exemple précédent, le bloc de Jordan correspondant à cette singularité a pour valeur propre $\frac{1}{2}$. Nous nous attendons donc à avoir au moins un terme en $(\xi - 1)^{-\frac{1}{2}}$ dans l'écriture de \tilde{f} .

Dans cet exemple, nous pouvons à nouveau calculer exactement \tilde{f} puisque la transformée de Borel du système précédent est encore entièrement résolue : en prenant la détermination principale du logarithme, nous avons pour tout $\xi \in \mathbb{C}$ tel que $\text{Re}(\xi) < 1$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{f}_1(\xi) = -2(1 - \xi)^{-\frac{1}{2}} + 2 \\ \tilde{f}_2(\xi) = -4(1 - \xi)^{-\frac{1}{2}} - 2(1 - \xi)^{-\frac{1}{2}} \log(1 - \xi) + 4 \quad , \quad \tilde{f}_3(\xi) = -\tilde{f}_2(\xi) \\ \tilde{f}_4(\xi) = 16(1 - \xi)^{-\frac{1}{2}} + 8(1 - \xi)^{-\frac{1}{2}} \log(1 - \xi) + 2(1 - \xi)^{-\frac{1}{2}} \log^2(1 - \xi) - 16 \end{array} \right.$$

Comme précédemment, les termes en $x\widehat{f}_j$ font apparaître les termes $\log(1 - \xi)(1 - \xi)^{-\frac{1}{2}}$ et $\log^2(1 - \xi)(1 - \xi)^{-\frac{1}{2}}$.

Ces deux exemples sont repris à la fin du paragraphe 2.3.3 pour illustrer le calcul des multiplicateurs de Stokes via les coefficients de résurgence de f en ses singularités.

Terminons ce paragraphe par une propriété importante des séries formelles résurgentes simples-ramifiées.

Proposition 2.14 *Soient \tilde{e} une fonction entière de valuation v en 0 et $\tilde{\varphi}$ un germe de fonctions analytiques prolongeables sans fin de support singulier Ω .*

Supposons que $\tilde{\varphi}$ admette une singularité simple-ramifiée en $\omega \in \Omega$ d'exposants Λ_ω et d'ordres logarithmiques $(N_{\omega,0}, (N_{\omega,\lambda})_{\lambda \in \Lambda_\omega})$.

*Alors, le produit de convolution $\tilde{e} * \tilde{\varphi}$ garde une singularité simple-ramifiée en ω de mêmes exposants Λ_ω et de mêmes ordres logarithmiques $(N_{\omega,0}, (N_{\omega,\lambda})_{\lambda \in \Lambda_\omega})$:*

$$\tau_\omega(\tilde{e} * \tilde{\varphi})(\xi) = \sum_{p=1}^{N_{\omega,0}+1} \tilde{k}_{\omega,p}(\xi) \log^p \xi + \sum_{\lambda \in \Lambda_\omega} \sum_{p=0}^{N_{\omega,\lambda}} \left(\tilde{K}_{\omega,\lambda,p}(\xi) \log^p \xi \right) \xi^{\lambda-1} + \text{Hol}_\omega(\xi)$$

En particulier, les coefficients de résurgence $\tilde{k}_{\omega,p}$ sont de valuation v à l'origine et les coefficients de résurgence $\tilde{K}_{\omega,\lambda,p}$ sont de valuation $v + 1$ à l'origine.

Noter qu'en convolant le germe $\tilde{\varphi}$ avec une fonction entière, nous perdons tous les termes de la forme $\frac{\log^p \xi}{\xi}$.

Démonstration. Nous savons déjà (cf. corollaire 1.10) que les singularités de

$$(\tilde{e} * \tilde{\varphi})(\xi) = \int_0^\xi \tilde{e}(\xi - \eta) \tilde{\varphi}(\eta) d\eta$$

sont les singularités de $\tilde{\varphi}$ et que celles-ci sont toutes des singularités en bout. Nous avons alors, pour tout ξ au voisinage de ω avec $\xi \neq \omega$:

$$(\tilde{e} * \tilde{\varphi})(\xi) = cte + \int_{\eta_0}^{\xi} \tilde{e}(\xi - \eta) \tilde{\varphi}(\eta) d\eta$$

où

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(\eta) &= \sum_{p=0}^{N_{\omega,0}} \frac{\alpha_{\omega,p}}{\eta - \omega} \log^p(\eta - \omega) + \sum_{p=1}^{N_{\omega,0}+1} \tilde{h}_{\omega,p}(\eta - \omega) \log^p(\eta - \omega) \\ &\quad + \sum_{\lambda \in \Lambda_{\omega}} \sum_{p=0}^{N_{\omega,\lambda}} \left(\tilde{H}_{\omega,\lambda,p}(\eta - \omega) \log^p(\eta - \omega) \right) (\eta - \omega)^{\lambda-1} + Hol_{\omega}(\eta - \omega) \end{aligned}$$

pour tout η entre η_0 et ξ . La fonction \tilde{e} étant entière, nous pouvons écrire à l'aide de la formule de Taylor :

$$\forall \xi, \eta \in \mathbb{C}, \tilde{e}(\xi - \eta) = \sum_{m \geq 0} \tilde{e}_m(\xi - \omega) (\eta - \omega)^m$$

avec

$$\tilde{e}_m(\xi - \omega) = \frac{(-1)^m}{m!} \frac{d^m \tilde{e}}{d\xi^m}(\xi - \omega)$$

En particulier, les $\tilde{e}_m(\xi - \omega)$ sont des fonctions entières vérifiant

$$\begin{cases} \forall m \in \{0, \dots, v-1\}, \tilde{e}_m(\xi - \omega) = O((\xi - \omega)^{v-m}) \\ \forall m \geq v, \tilde{e}_m(\xi - \omega) = O(1) \end{cases}$$

puisque \tilde{e} est de valuation v en 0.

Le calcul par intégrations par parties successives des intégrales

$$\int_{\eta_0}^{\xi} (\eta - \omega)^{m-1} \log^p(\eta - \omega) d\eta \quad \text{et} \quad \int_{\eta_0}^{\xi} (\eta - \omega)^{\lambda+m-1} \log^p(\eta - \omega) d\eta$$

pour tout $m \geq 0$, tout $p \geq 0$ et tout $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, et les propriétés des fonctions $\tilde{e}_m(\xi - \omega)$ fournissent alors le point 2. Nous avons en effet

$$\int_{\eta_0}^{\xi} (\eta - \omega)^{m-1} \log^p(\eta - \omega) d\eta = \begin{cases} \log^{p+1}(\xi - \omega) + cte \text{ si } m = 0 \\ (\xi - \omega)^m \sum_{\ell=0}^p \beta_{\ell} \log^{\ell}(\xi - \omega) + cte \text{ si } m \geq 1 \end{cases}$$

avec $\beta_{\ell} \in \mathbb{C}^*$ et

$$\int_{\eta_0}^{\xi} (\eta - \omega)^{\lambda+m-1} \log^p(\eta - \omega) d\eta = (\xi - \omega)^{\lambda+m} \sum_{\ell=0}^p \gamma_{\lambda,\ell} \log^{\ell}(\xi - \omega) + cte \text{ si } m \geq 0$$

avec $\gamma_{\lambda,\ell} \in \mathbb{C}^*$. ■

Corollaire 2.15 *Soit Ω un sous-ensemble discret de \mathbb{C} .*

L'ensemble des séries formelles résurgentes simples-ramifiées sur Ω est un $\mathbb{C}\{x\}$ -module et plus généralement un $\mathbb{C}[[x]]_{1/r}$ -module pour tout entier r supérieur à 2, où $\mathbb{C}[[x]]_{1/r}$ désigne l'espace des séries formelles de type Gevrey de niveau r .

Ce résultat est l'un des points clés de l'étude des singularités de \tilde{f} dans le cas des systèmes de niveau unique. Nous nous servirons ici uniquement de la structure de $\mathbb{C}\{x\}$ -module. La structure de $\mathbb{C}[[x]]_{1/r}$ -module nous sera utile dans le cas où le système est de niveaux simultanés (1, 2).

Passons à présent à l'étude des singularités de \tilde{f} .

2.2.2 Cas où L est diagonale

Soit ω une singularité de \tilde{f} . En résolvant les équations (2.3) par la méthode de variation de la constante, nous voyons que les coefficients $\varphi_m^{[j]}$ des matrices φ_m sont donnés pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$ par

$$(2.11) \quad \varphi_m^{[j]}(\xi) = (\xi - a_j)^{\lambda_j - 1} \int_0^\xi (\eta - a_j)^{-\lambda_j} \left(\tilde{B}' * \varphi_{m-1} \right)^{[j]}(\eta) d\eta$$

l'intégrale étant prise sur un même chemin de $\tilde{\mathbb{C}}_a$ de classe \mathcal{C}^1 par morceaux joignant 0 à ξ . En particulier, les λ_j étant normalisés de telle sorte que $\text{Re}(\lambda_j) \in [0, 1[$, cette intégrale n'est pas singulière à l'origine dans le cas où $a_j = 0$.

Cette formule de récurrence nous permet d'obtenir la nature de la singularité ω pour chacun des germes de fonctions analytiques prolongeables sans fin φ_m .

Proposition 2.16 *Pour tout $m \geq 1$, le germe φ_m admet une singularité simple-ramifiée en ω :*

$$\tau_\omega \varphi_m(\xi) = \frac{\alpha_{\omega, m}}{\xi} + \tilde{h}_{\omega, m}(\xi) \log \xi + \sum_{\lambda \in \Lambda_\omega} \tilde{H}_{\omega, \lambda, m}(\xi) \xi^{\lambda-1} + \text{Hol}_{\omega, m}(\xi)$$

où $\alpha_{\omega, m} \in M_{n,1}(\mathbb{C})$, $\tilde{h}_{\omega, m}, \tilde{H}_{\omega, \lambda, m}, \text{Hol}_{\omega, m} \in M_{n,1}(\mathbb{C}\{\xi\})$ et où les exposants Λ_ω sont donnés par

$$\Lambda_\omega = \{\lambda_j; j \in \{1, \dots, n\} \text{ tel que } a_j = \omega \text{ et } \lambda_j \neq 0\}$$

Démonstration. Nous procédons par récurrence sur $m \geq 1$.

Pour $m = 1$, l'expression (2.11) devient

$$\varphi_1^{[j]}(\xi) = (\xi - a_j)^{\lambda_j - 1} \int_0^\xi (\eta - a_j)^{-\lambda_j} \tilde{b}^{[j]'}(\eta) d\eta$$

où nous avons noté \tilde{b} la première colonne de la matrice \tilde{B} . En particulier, \tilde{b} est une fonction entière.

Vu cette expression, il est clair que $\varphi_1^{[j]}$ est analytique (resp. à singularité polaire) en

ω lorsque $a_j \neq \omega$ (resp. $a_j = \omega$ et $\lambda_j = 0$). Lorsque $a_j = \omega$ et $\lambda_j \neq 0$, la série \tilde{b}' étant une fonction entière, nous écrivons, pour tout $\eta \in \mathbb{C}$,

$$\tilde{b}^{[j]'}(\eta) = \sum_{k \geq 0} \beta_k^{[j]}(\eta - \omega)^k$$

et nous obtenons

$$\begin{aligned} \varphi_1^{[j]}(\xi) &= (\xi - \omega)^{\lambda_j - 1} \int_0^\xi \sum_{k \geq 0} \beta_k^{[j]}(\eta - \omega)^{k - \lambda_j} d\eta \quad \text{avec } \operatorname{Re}(k - \lambda_j) > k - 1 \geq -1 \\ &= (\xi - \omega)^{\lambda_j - 1} \left(\sum_{k \geq 0} \frac{\beta_k^{[j]}(-\omega)^{k - \lambda_j + 1}}{k - \lambda_j + 1} + \sum_{k \geq 0} \frac{\beta_k^{[j]}(\xi - \omega)^{k - \lambda_j + 1}}{k - \lambda_j + 1} \right) \\ &= (\xi - \omega)^{\lambda_j - 1} \sum_{k \geq 0} \frac{\beta_k^{[j]}(-\omega)^{k - \lambda_j + 1}}{k - \lambda_j + 1} + \sum_{k \geq 0} \frac{\beta_k^{[j]}(\xi - \omega)^k}{k - \lambda_j + 1} \end{aligned}$$

les deux séries étant convergentes. Ainsi, φ_1 a une singularité simple-ramifiée en ω d'exposant Λ_ω .

Supposons maintenant que φ_{m-1} ait une singularité simple-ramifiée en ω d'exposant Λ_ω et étudions l'intégrale

$$\mathcal{I}_j(\xi) = \int_0^\xi (\eta - a_j)^{-\lambda_j} \left(\tilde{B}' * \varphi_{m-1} \right)^{[j]}(\eta) d\eta$$

pour ξ voisin de ω , $\xi \neq \omega$. Grâce à la proposition 2.14, nous savons que le produit de convolution

$$\left(\tilde{B}' * \varphi_{m-1} \right)^{[j]} = \sum_{k=1}^n \tilde{B}'^{(j,k)} * \varphi_{m-1}^{[k]}$$

a une singularité simple-ramifiée en ω d'exposant Λ_ω avec

$$\left(\tilde{B}' * \varphi_{m-1} \right)^{[j]}(\xi) = \tilde{k}_\omega(\xi - \omega) \log(\xi - \omega) + \sum_{\lambda \in \Lambda_\omega} \tilde{K}_{\omega,\lambda}(\xi - \omega)(\xi - \omega)^{\lambda - 1} + \operatorname{Hol}_\omega(\xi - \omega)$$

Ainsi, dans le cas $a_j \neq \omega$, nous avons clairement

$$\mathcal{I}_j(\xi) = \tilde{h}_\omega(\xi - \omega) \log(\xi - \omega) + \sum_{\lambda \in \Lambda_\omega} \tilde{H}_{\omega,\lambda}(\xi - \omega)(\xi - \omega)^{\lambda - 1} + \operatorname{Hol}_\omega(\xi - \omega)$$

avec $\tilde{h}_\omega(\xi)$, $\tilde{H}_{\omega,\lambda}(\xi)$ et $\operatorname{Hol}_\omega(\xi)$ analytiques à l'origine; et dans le cas $a_j = \omega$, nous obtenons grâce à l'hypothèse $\lambda_j \neq 1$: modulo les fonctions analytiques à l'origine,

$$\mathcal{I}_j(\xi) = \left(\tilde{h}_\omega(\xi - \omega) \log(\xi - \omega) + \sum_{\lambda \in \Lambda_\omega} \tilde{H}_{\omega,\lambda}(\xi - \omega)(\xi - \omega)^{\lambda - 1} + \operatorname{Hol}_\omega(\xi - \omega) \right) (\xi - \omega)^{-\lambda_j}$$

avec $\tilde{h}_\omega(\xi), \tilde{H}_{\omega,\lambda}(\xi) \in \xi\mathbb{C}\{\xi\}$ et Hol_ω analytique en 0. Par suite, l'expression (2.11) montre que φ_m a une singularité simple-ramifiée en ω d'exposant Λ_ω , ce qui termine la récurrence. ■

La nature de la singularité ω pour \tilde{f} est alors obtenue grâce aux deux lemmes suivants :

Lemme 2.17 *Les séries $\sum_{m \geq 1} \tilde{h}_{\omega,m}$ et $\sum_{m \geq 1} \tilde{H}_{\omega,\lambda,m}$, $\lambda \in \Lambda_\omega$, définissent des fonctions analytiques à l'origine.*

Démonstration. Il suffit, pour s'en convaincre, de regarder le cas de deux exposants distincts λ et μ , i.e., $\Lambda_\omega = \{\lambda, \mu\}$. Dans le cas général de p exposants distincts, il faudrait remplacer le système ci-dessous construit sur var , var^2 et var^3 par un système en tout point analogue construit sur var , var^2 , ..., var^{p+1} . Nous laissons les cas de zéro et un exposant à l'initiative du lecteur.

A l'aide de l'opérateur de variation, nous obtenons le système

$$\begin{bmatrix} \text{var}(\tau_\omega \varphi_m)(\xi) \\ \text{var}^2(\tau_\omega \varphi_m)(\xi) \\ \text{var}^3(\tau_\omega \varphi_m)(\xi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2i\pi I_n & (1 - e^{-2i\pi\lambda})\xi^{\lambda-1} I_n & (1 - e^{-2i\pi\mu})\xi^{\mu-1} I_n \\ 0 I_n & (1 - e^{-2i\pi\lambda})^2 \xi^{\lambda-1} I_n & (1 - e^{-2i\pi\mu})^2 \xi^{\mu-1} I_n \\ 0 I_n & (1 - e^{-2i\pi\lambda})^3 \xi^{\lambda-1} I_n & (1 - e^{-2i\pi\mu})^3 \xi^{\mu-1} I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{h}_{\omega,m}(\xi) \\ \tilde{H}_{\omega,\lambda,m}(\xi) \\ \tilde{H}_{\omega,\mu,m}(\xi) \end{bmatrix}$$

où les séries $\sum_{m \geq 1} \text{var}(\tau_\omega \varphi_m)$, $\sum_{m \geq 1} \text{var}^2(\tau_\omega \varphi_m)$ et $\sum_{m \geq 1} \text{var}^3(\tau_\omega \varphi_m)$ convergent uniformément sur un ouvert U_ν de la surface de Riemann du logarithme \mathbb{C}_∞ de la forme

$$\begin{cases} \nu < |\xi| < \nu_0 \\ -\varepsilon < \arg(\xi) - \arg(\omega) < 2\pi + \varepsilon \end{cases}$$

En effet, la démonstration du paragraphe 2.1.1 montre que la série des φ_m converge uniformément sur tout compact de $\tilde{\mathbb{C}}_a$ et en particulier sur un ouvert de $\tilde{\mathbb{C}}_a$ de la forme

$$\begin{cases} \nu < |\xi - \omega| < \nu_0 \\ -6\pi - \varepsilon < \arg(\xi - \omega) - \arg(\omega) < 2\pi + \varepsilon \end{cases}$$

Le déterminant de la matrice \mathcal{M} de ce système d'inconnues $\tilde{h}_{\omega,m}(\xi)$, $\tilde{H}_{\omega,\lambda,m}(\xi)$ et $\tilde{H}_{\omega,\mu,m}(\xi)$ étant donné par

$$\begin{aligned} \det \mathcal{M} &= \left(\det \begin{bmatrix} 2i\pi & (1 - e^{-2i\pi\lambda})\xi^{\lambda-1} & (1 - e^{-2i\pi\mu})\xi^{\mu-1} \\ 0 & (1 - e^{-2i\pi\lambda})^2 \xi^{\lambda-1} & (1 - e^{-2i\pi\mu})^2 \xi^{\mu-1} \\ 0 & (1 - e^{-2i\pi\lambda})^3 \xi^{\lambda-1} & (1 - e^{-2i\pi\mu})^3 \xi^{\mu-1} \end{bmatrix} \right)^n \\ &= (2i\pi)^n (1 - e^{-2i\pi\lambda})^{2n} (1 - e^{-2i\pi\mu})^{2n} (e^{-2i\pi\lambda} - e^{-2i\pi\mu})^n \xi^{n(\lambda+\mu-2)} \end{aligned}$$

il est non nul pour tout $\xi \in \mathbb{C}_\infty$, puisque λ et μ sont distincts et vérifient $0 \leq \text{Re}(\lambda) < 1$ et $0 \leq \text{Re}(\mu) < 1$. La matrice \mathcal{M} est donc un difféomorphisme holomorphe sur \mathbb{C}_∞ . Ainsi, les séries des $\tilde{h}_{\omega,m}$, $\tilde{H}_{\omega,\lambda,m}$ et $\tilde{H}_{\omega,\mu,m}$ convergent uniformément sur l'ouvert U_ν . Il reste à démontrer que ces séries n'ont pas de singularité à l'origine.

Etablissons-le par exemple pour la série des $\tilde{h}_{\omega,m}$: les fonctions $\tilde{h}_{\omega,m}$ étant holomorphes au voisinage de 0, nous en déduisons que la somme \tilde{h}_ω est holomorphe dans toute couronne $\nu < |\xi| < \nu_0$, et donc dans le disque époiné $0 < |\xi| < \nu_0$. La fonction \tilde{h}_ω est donc développable en série de Laurent :

$$\tilde{h}_\omega(\xi) = \sum_{p \in \mathbb{Z}} c_p \xi^p \text{ avec } c_p = \frac{1}{2\pi i} \oint \eta^{-p-1} \tilde{h}_\omega(\eta) d\eta \text{ pour } p \in \mathbb{Z}$$

Par l'analyticité des $\tilde{h}_{\omega,m}$ à l'origine, cette série de Laurent se réduit à une série entière (les coefficients c_p sont tous nuls pour $p < 0$ par le théorème des résidus). La fonction \tilde{h}_ω est donc bien un élément de $M_{n,1}(\mathbb{C}\{\xi\})$. ■

Lemme 2.18 *La série $\sum_{m \geq 1} \alpha_{\omega,m}$ est convergente et la série $\sum_{m \geq 1} Hol_{\omega,m}$ définit une fonction analytique à l'origine.*

Démonstration. Du lemme 2.17, nous déduisons que la série des $\alpha_{\omega,m} + \xi Hol_{\omega,m}(\xi)$ converge uniformément sur la couronne $\nu < |\xi| < \nu_0$, pour tout $\nu > 0$, donc définit une fonction holomorphe sur le disque époiné $0 < |\xi| < \nu_0$. Le même argument que précédemment montre que la série de Laurent associée à cette fonction se réduit à une série entière, dont le terme constant n'est autre que la série des $\alpha_{\omega,m}$, qui converge donc. Nous en déduisons alors la convergence de la série des $Hol_{\omega,m}$ vers une fonction analytique en 0. ■

Nous obtenons ainsi le résultat suivant explicitant la nature des singularités de \tilde{f} dans le cas où la matrice L est diagonale :

Théorème 2.19 *Soit ω l'un des $a_j \neq 0$.*

La fonction \tilde{f} a une singularité simple-ramifiée en ω :

$$\tau_\omega \tilde{f}(\xi) = \frac{\alpha_\omega}{\xi} + \tilde{h}_\omega(\xi) \log \xi + \sum_{\lambda \in \Lambda_\omega} \tilde{H}_{\omega,\lambda}(\xi) \xi^{\lambda-1} + Hol_\omega(\xi)$$

où $\alpha_\omega \in M_{n,1}(\mathbb{C})$, $\tilde{h}_\omega, \tilde{H}_{\omega,\lambda}, Hol_\omega \in M_{n,1}(\mathbb{C}\{\xi\})$ et où les exposants de ramification Λ_ω sont donnés par

$$\Lambda_\omega = \{\lambda_j; j \in \{1, \dots, n\} \text{ tel que } a_j = \omega \text{ et } \lambda_j \neq 0\}$$

En particulier,

1. Si $\lambda_j = 0$ pour tous les j tels que $a_j = \omega$, alors ω est une singularité simple.
2. Si $\lambda_j \neq 0$ pour tous les j tels que $a_j = \omega$, alors ω est une singularité purement ramifiée d'exposants Λ_ω .

Nous déduisons de ce théorème la propriété importante suivante :

Corollaire 2.20 *Les coefficients de résurgence de \tilde{f} en ω sont des germes de fonctions analytiques prolongeables sans fin de support singulier les points $a_j - \omega$ et sont à croissance exponentielle d'ordre au plus un à l'infini.*

Démonstration. Les coefficients de résurgence de \tilde{f} en ω sont analytiques à l'origine. Par ailleurs, nous savons déjà que $\tau_\omega \tilde{f}$ est prolongeable sans fin de support singulier les points $a_j - \omega$ et est à croissance exponentielle d'ordre au plus un à l'infini (théorème 2.1). Il est donc raisonnable de penser qu'il en est de même des divers coefficients de la formule précédente. En effet, plaçons-nous à nouveau dans le cas de deux exposants : $\Lambda_\omega = \{\lambda, \mu\}$. Un calcul analogue à celui du lemme 2.17 nous donne

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{h}_\omega(\xi) = \square \operatorname{var}(\tau_\omega \tilde{f})(\xi) + \square \operatorname{var}^2(\tau_\omega \tilde{f})(\xi) + \square \operatorname{var}^3(\tau_\omega \tilde{f})(\xi) \\ \tilde{H}_{\omega, \lambda}(\xi) = \square \xi^{-n(\lambda-1)} \operatorname{var}(\tau_\omega \tilde{f})(\xi) + \square \xi^{-n(\lambda-1)} \operatorname{var}^2(\tau_\omega \tilde{f})(\xi) + \square \xi^{-n(\lambda-1)} \operatorname{var}^3(\tau_\omega \tilde{f})(\xi) \\ \tilde{H}_{\omega, \mu}(\xi) = \square \xi^{-n(\mu-1)} \operatorname{var}(\tau_\omega \tilde{f})(\xi) + \square \xi^{-n(\mu-1)} \operatorname{var}^2(\tau_\omega \tilde{f})(\xi) + \square \xi^{-n(\mu-1)} \operatorname{var}^3(\tau_\omega \tilde{f})(\xi) \end{array} \right.$$

où \square désigne un nombre complexe. Le résultat s'ensuit alors aisément. ■

2.2.3 Cas général

Dans le cas général (la matrice des exposants de monodromie formelle L est sous forme de Jordan quelconque), nous conduisons l'étude d'une singularité ω de \tilde{f} de façon analogue à ce que nous avons fait dans le cas où L est diagonale. Nous découpons les matrices suivant les blocs de Jordan de L et nous remplaçons les calculs précédents sur les coefficients par des calculs sur les blocs, d'où une plus grande difficulté technique.

Rappelons que

- ★ $\varphi_m^{[j;q]}$ désigne la $q^{\text{ème}}$ colonne de la matrice φ_m ;
- ★ $\varphi_m^{[j;q]}$ désigne le $j^{\text{ème}}$ bloc de la matrice $\varphi_m^{[j;q]}$ dans le découpage selon les blocs de Jordan de L :

$$\varphi_m^{[j;q]} = \begin{bmatrix} \varphi_m^{[1;q]} \\ \vdots \\ \varphi_m^{[J;q]} \end{bmatrix}$$

En particulier, $\varphi_m^{[j;q]}$ est une matrice de dimension $n_j \times 1$;

- ★ $\varphi_m^{[j,\ell;q]}$ désigne le $\ell^{\text{ème}}$ coefficient de la matrice $\varphi_m^{[j;q]}$.

La formule pour le calcul explicite des coefficients $\varphi_m^{[j,\ell;q]}$ des matrices φ_m est obtenue à présent en résolvant les équations (2.10) par la méthode de variation de la constante : pour tout $j \in \{1, \dots, J\}$ et tout $\ell \in \{1, \dots, n_j\}$,

$$(2.12) \quad \varphi_m^{[j,\ell;q]}(\xi) = (\xi - a_j)^{\lambda_j - 1} \int_0^\xi \frac{\left(\left(\tilde{B}' * \varphi_{m-1} \right)^{[j,\ell;q]} + \varphi_m^{[j,\ell+1;q]} - \varphi_m^{[j,\ell;q-1]} \right) (\eta)}{(\eta - a_j)^{\lambda_j}} d\eta$$

où nous avons posé $\varphi_m^{[j,n_j+1;q]} = 0$. En particulier, lorsque $q = 1$, l'expression (2.12) se simplifie en

$$(2.13) \quad \varphi_m^{[j,\ell;1]}(\xi) = (\xi - a_j)^{\lambda_j - 1} \int_0^\xi \frac{\left(\left(\tilde{B}' * \varphi_{m-1} \right)^{[j,\ell;1]} + \varphi_m^{[j,\ell+1;1]} \right) (\eta)}{(\eta - a_j)^{\lambda_j}} d\eta$$

Comme dans les deux exemples traités au paragraphe 2.2.1, les récurrences sur les coefficients $\varphi_m^{[j,\ell;1]}$ font apparaître des puissances du logarithme. Précisément, en adaptant l'étude de l'expression (2.11) à celle de (2.13), nous obtenons la

Proposition 2.21 *Pour tout $m \geq 1$, le germe de fonctions analytiques prolongeables sans fin $\varphi_m^{[;1]}$ admet une singularité simple-ramifiée en ω d'exposants Λ_ω et d'ordres logarithmiques $(N_{\omega,0} + 1, (N_{\omega,\lambda} + 1)_{\lambda \in \Lambda_\omega})$ avec*

$$\begin{cases} \Lambda_\omega = \{\lambda_j; j \in \{1, \dots, n\} \text{ tel que } a_j = \omega \text{ et } \lambda_j \neq 0\} \\ N_{\omega,0} = \max(n_j - 2; j \in \{1, \dots, J\} \text{ tel que } a_j = \omega \text{ et } \lambda_j = 0) \\ N_{\omega,\lambda} = \max(n_j - 2; j \in \{1, \dots, J\} \text{ tel que } a_j = \omega \text{ et } \lambda_j = \lambda) \end{cases}$$

Démonstration. Les degrés logarithmiques $N_{\omega,0} + 1$ et $N_{\omega,\lambda} + 1$ sont obtenus par les différentes récurrences sur les coefficients $\varphi_1^{[j,\ell;1]}$, $\ell \in \{1, \dots, n_j\}$ et j fixé. L'étude du produit de convolution $\tilde{B}' * \varphi_{m-1}$ (proposition 2.14) montre, comme à la proposition 2.16, que la nature de la singularité ω pour les $\varphi_m^{[;1]}$, $m \geq 2$, est la même que pour $\varphi_1^{[;1]}$. ■

Finalement, à l'aide de l'expression (2.12), nous obtenons le

Corollaire 2.22 *Soit $q \in \{1, \dots, n_1\}$. Pour tout $m \geq 1$, la $q^{\text{ème}}$ colonne $\varphi_m^{[;q]}$ du germe φ_m admet une singularité simple-ramifiée en ω :*

$$\begin{aligned} \tau_\omega \varphi_m^{[;q]}(\xi) &= \sum_{p=0}^{N_{\omega,0}+q} \frac{\alpha_{\omega,p,m}^{[;q]}}{\xi} \log^p \xi + \sum_{p=1}^{N_{\omega,0}+q+1} \tilde{h}_{\omega,p,m}^{[;q]}(\xi) \log^p \xi \\ &\quad + \sum_{\lambda \in \Lambda_\omega} \sum_{p=0}^{N_{\omega,\lambda}+q} \left(\tilde{H}_{\omega,\lambda,p,m}^{[;q]}(\xi) \log^p \xi \right) \xi^{\lambda-1} + Hol_{\omega,m}^{[;q]}(\xi) \end{aligned}$$

où l'ensemble Λ_ω et les entiers $N_{\omega,0}$ et $N_{\omega,\lambda}$ sont définis à la proposition 2.21.

La suite de l'étude de ω en tant que singularité de \tilde{f} est identique à celle du cas où L est diagonale : la partie délicate consiste à établir l'analyticité à l'origine des séries $\sum_{m \geq 1} \tilde{H}_{\omega,\lambda,p,m}^{[;q]}$ pour tout $\lambda \in \Lambda_\omega$ et tout $p \in \{0, \dots, N_{\omega,\lambda} + q\}$. L'utilisation de variations successives sur $\tau_\omega \varphi_m^{[;q]}$ reste l'argument clé de la démonstration, mais la présence conjointe des $\log^p \xi$ et des $\xi^{\lambda-1}$ pose de réelles difficultés techniques.

Analyticité à l'origine des séries $\sum_{m \geq 1} \tilde{H}_{\omega,\lambda,p,m}^{[;q]}$

Nous supposons bien sûr que l'ensemble Λ_ω est non vide, sinon il n'y aurait rien à faire.

Fixons $q \in \{1, \dots, n_1\}$ et $m \geq 1$, et démontrons que les $\tilde{H}_{\omega,\lambda,p,m}^{[;q]}$ sont des combinaisons

linéaires de $\text{var}^s(\tau_\omega \varphi_m^{[q]})$, $s \in S \subset \mathbb{N}$ convenable fini, à coefficients analytiques sur \mathbb{C}_∞ : l'analyticité à l'origine des séries $\sum_{m \geq 1} \tilde{H}_{\omega, \lambda, p, m}^{[q]}$ est alors obtenue comme dans le cas où L est diagonale (lemme 2.17), puisque la série des $\varphi_m^{[q]}$ converge uniformément sur tout ouvert de $\tilde{\mathbb{C}}_a$ de la forme

$$\begin{cases} \nu < |\xi - \omega| < \nu_0 \\ -2S_{\max}\pi - \varepsilon < \arg(\xi - \omega) - \arg(\omega) < 2\pi + \varepsilon \end{cases}$$

où $0 < \nu < \nu_0$, $\varepsilon > 0$ et où S_{\max} est le plus grand entier $s \in S$.

Nous commençons par éliminer tous les termes en $\frac{\log^p \xi}{\xi}$ et en $\log^p \xi$ en considérant $N_{\omega, 0} + q + 2$ variations autour de l'origine de $\tau_\omega \varphi_m^{[q]}$: grâce aux propriétés de la variation (lemme 1.33), nous obtenons

$$\psi(\xi) = \text{var}^{N_0 + q + 2}(\tau_\omega \varphi_m^{[q]})(\xi) = \sum_{\lambda \in \Lambda_\omega} \sum_{p=0}^{N_{\omega, \lambda} + q} \left(\tilde{k}_{\lambda, p}(\xi) \log^p \xi \right) \xi^{\lambda-1}$$

avec

$$\tilde{k}_{\lambda, p} = (1 - e^{-2i\pi\lambda})^{N_{\omega, 0} + q + 2} \tilde{H}_{\omega, \lambda, p, m}^{[q]} + \alpha_{\lambda, p+1} \tilde{H}_{\omega, \lambda, p+1, m}^{[q]} + \dots + \alpha_{\lambda, N_{\omega, \lambda} + q} \tilde{H}_{\omega, \lambda, N_{\omega, \lambda} + q, m}^{[q]}$$

où $\alpha_{\lambda, p+1}, \dots, \alpha_{\lambda, N_{\omega, \lambda} + q} \in \mathbb{C}$. Il suffit donc de voir que les $\tilde{k}_{\lambda, p}$ sont des combinaisons linéaires de $\text{var}^s(\psi)$ à coefficients analytiques sur \mathbb{C}_∞ .

Nous traitons les deux premiers cas : $\Lambda_\omega = \{\lambda\}$ et $\Lambda_\omega = \{\lambda, \mu\}$, la démonstration pour plus de trois exposants étant une généralisation du second cas.

- Cas $\Lambda_\omega = \{\lambda\}$ Posons $n_\lambda = N_{\omega, \lambda} + q$ et

$$\psi(\xi) = \sum_{p=0}^{n_\lambda} \tilde{k}_{\lambda, p}(\xi) \psi_{\lambda, p}(\xi)$$

avec $\psi_{\lambda, p}(\xi) = \xi^{\lambda-1} \log^p \xi$. Les fonctions $\tilde{k}_{\lambda, p}$ étant analytiques à l'origine, elles vérifient le système linéaire

$$\begin{bmatrix} \psi(\xi) \\ \vdots \\ \text{var}^{n_\lambda} \psi(\xi) \end{bmatrix} = \mathcal{M}(\xi) \begin{bmatrix} \tilde{k}_{\lambda, 0}(\xi) \\ \vdots \\ \tilde{k}_{\lambda, n_\lambda}(\xi) \end{bmatrix}$$

avec $\mathcal{M}(\xi) = M(\xi) \otimes I_n$, la matrice $M(\xi)$ étant

$$M(\xi) = \begin{bmatrix} \psi_{\lambda, 0}(\xi) & \cdots & \psi_{\lambda, n_\lambda}(\xi) \\ \vdots & & \vdots \\ \text{var}^{n_\lambda} \psi_{\lambda, 0}(\xi) & \cdots & \text{var}^{n_\lambda} \psi_{\lambda, n_\lambda}(\xi) \end{bmatrix} \in M_{n_\lambda + 1}(\xi^{\lambda-1}[\log \xi])$$

En utilisant le premier point du lemme 1.33, nous obtenons

$$\det M = (-1)^{\lfloor \frac{n_\lambda + 1}{2} \rfloor} \det N$$

par combinaisons linéaires sur les lignes de M , où $[x]$ désigne la partie entière de $x \geq 0$ et où

$$N = \begin{bmatrix} \xi^{\lambda-1} & \xi^{\lambda-1} \log \xi & \cdots & \xi^{\lambda-1} (\log \xi)^{n_\lambda} \\ e^{-2i\pi\lambda} \xi^{\lambda-1} & e^{-2i\pi\lambda} \xi^{\lambda-1} (\log \xi - 2i\pi) & \cdots & e^{-2i\pi\lambda} \xi^{\lambda-1} (\log \xi - 2i\pi)^{n_\lambda} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ e^{-2n_\lambda i\pi\lambda} \xi^{\lambda-1} & e^{-2n_\lambda i\pi\lambda} \xi^{\lambda-1} (\log \xi - 2n_\lambda i\pi) & \cdots & e^{-2n_\lambda i\pi\lambda} \xi^{\lambda-1} (\log \xi - 2n_\lambda i\pi)^{n_\lambda} \end{bmatrix}$$

Ainsi,

$$\det M = (-1)^{\lfloor \frac{n_\lambda+1}{2} \rfloor} (-2i\pi e^{-2i\pi\lambda})^{\frac{n_\lambda(n_\lambda+1)}{2}} \left(\prod_{k=1}^{n_\lambda} k! \right) \xi^{(\lambda-1)(n_\lambda+1)}$$

puisque

$$N = \text{diag}(\xi^{\lambda-1}, e^{-2i\pi\lambda} \xi^{\lambda-1}, \dots, e^{-2n_\lambda i\pi\lambda} \xi^{\lambda-1}) \mathcal{V}(\log \xi, \log \xi - 2i\pi, \dots, \log \xi - 2n_\lambda i\pi)$$

où $\mathcal{V}(\log \xi, \log \xi - 2i\pi, \dots, \log \xi - 2n_\lambda i\pi)$ est la matrice de van der Monde construite sur $\log \xi, \log \xi - 2i\pi, \dots, \log \xi - 2n_\lambda i\pi$. Il s'ensuit que la matrice \mathcal{M} est un difféomorphisme holomorphe sur \mathbb{C}_∞ , ce qui donne le résultat voulu.

• Cas $\Lambda_\omega = \{\lambda, \mu\}$ Le début de la démonstration est analogue à celle du cas précédent. Posons $n_\lambda = N_{\omega, \lambda} + q$, $n_\mu = N_{\omega, \mu} + q$ et

$$\psi(\xi) = \sum_{p=0}^{n_\lambda} \tilde{k}_{\lambda, p}(\xi) \psi_{\lambda, p}(\xi) + \sum_{p=0}^{n_\mu} \tilde{k}_{\mu, p}(\xi) \psi_{\mu, p}(\xi)$$

A présent, la matrice du système linéaire vérifié par les $\tilde{k}_{\lambda, p}$ et $\tilde{k}_{\mu, p}$ est $\mathcal{M}(\xi) = M(\xi) \otimes I_n$ avec $M(\xi) = \begin{bmatrix} M_\lambda(\xi) & M_\mu(\xi) \end{bmatrix}$ et

$$M_*(\xi) = \begin{bmatrix} \psi_{*,0}(\xi) & \cdots & \psi_{*,n_*}(\xi) \\ \vdots & & \vdots \\ \text{var}^{n_\lambda+n_\mu+1} \psi_{*,0}(\xi) & \cdots & \text{var}^{n_\lambda+n_\mu+1} \psi_{*,n_*}(\xi) \end{bmatrix} \in M_{n_\lambda+n_\mu+2, n_*+1}(\xi^{*-1}[\log \xi])$$

Une étude analogue au cas précédent montre que

$$\det M = (-1)^{\lfloor \frac{n_\lambda+n_\mu+2}{2} \rfloor} (e^{-2i\pi\lambda})^{\frac{(n_\lambda+n_\mu+1)(n_\lambda+n_\mu+2)}{2}} \xi^{(\lambda-1)(n_\lambda+1)+(\mu-1)(n_\mu+1)} \det N$$

où N est la matrice du lemme ci-dessous avec $a = \log \xi$, $k = -2i\pi$, $x = e^{-2i\pi(\mu-\lambda)}$, $p = n_\lambda$ et $q = n_\mu$.

Lemme 2.23 Soient $a, k, x \in \mathbb{C}$, $k \neq 0$, et $p, q \in \mathbb{N}$. La matrice

$$N = \begin{bmatrix} 1 & a_0 & \cdots & a_0^p & 1 & a_0 & \cdots & a_0^q \\ 1 & a_1 & \cdots & a_1^p & x & xa_1 & \cdots & xa_1^q \\ 1 & a_2 & \cdots & a_2^p & x^2 & x^2 a_2 & \cdots & x^2 a_2^q \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_{p+q+1} & \cdots & a_{p+q+1}^p & x^{p+q+1} & x^{p+q+1} a_{p+q+1} & \cdots & x^{p+q+1} a_{p+q+1}^q \end{bmatrix}$$

où $a_j = a + jk$ pour tout $j \in \{0, \dots, p + q + 1\}$, est inversible si et seulement si $x \neq 1$ dans le cas $q = 0$ et $x \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ dans le cas $q \geq 1$. De plus, son déterminant est indépendant de a .

Démonstration. Le déterminant de N est nul dans les deux cas suivants : $x = 1$ ou $x = 0$ et $q \geq 1$.

Réciproquement, supposons $x \neq 1$ (resp. $x \notin \{0, 1\}$) lorsque $q = 0$ (resp. $q \geq 1$) et démontrons que $rg(N) = p + q + 2$.

La définition des a_j , $j \in \{0, \dots, p + q + 1\}$, montre que

$$\frac{d}{da} \det N = 0$$

et donc le déterminant de N est indépendant de a .

Il suffit donc d'étudier le rang de la matrice N_1 obtenue en remplaçant a par 0 dans N . En particulier, le rang de N_1 est égal au rang de la matrice N_2 définie par

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & x & x & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & p & \cdots & p^p & x^p & px^p & \cdots & p^q x^p \\ 1 & (p+1) & \cdots & (p+1)^p & x^{p+1} & (p+1)x^{p+1} & \cdots & (p+1)^q x^{p+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & (p+q+1) & \cdots & (p+q+1)^p & x^{p+q+1} & (p+q+1)x^{p+q+1} & \cdots & (p+q+1)^q x^{p+q+1} \end{bmatrix}$$

Notons N'_2 (resp. N''_2) la sous-matrice de N_2 formée par les $p + 1$ premières (resp. $q + 1$ dernières) colonnes de N_2 . Par combinaisons linéaires sur les colonnes lorsque $p \geq 2$, N'_2 devient

$$N'_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \binom{1}{1} & & 0 & \vdots \\ 1 & \binom{2}{1} & & 2! \binom{2}{2} & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & 0 \\ 1 & \binom{p}{1} & & 2! \binom{p}{2} & \cdots & p! \binom{p}{p} \\ 1 & \binom{p+1}{1} & & 2! \binom{p+1}{2} & \cdots & p! \binom{p+1}{p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 1 & \binom{p+q+1}{1} & & 2! \binom{p+q+1}{2} & \cdots & p! \binom{p+q+1}{1} \end{bmatrix}$$

En effet, la $j^{\text{ème}}$ colonne de N'_3 , $j \in \{3, \dots, p + 1\}$, ayant pour $\ell^{\text{ème}}$ composante

$$(j-1)! \binom{\ell-1}{j-1} = \prod_{h=0}^{j-2} (\ell-1-h)$$

il suffit de considérer la combinaison linéaire

$$C_j + \sum_{h=1}^{j-2} \alpha_h C_{h+1}$$

où C_h représente la $h^{\text{ème}}$ colonne de N_2' et où les α_h sont définis par la relation

$$\prod_{h=0}^{j-2} (X - h) = X^{j-1} + \sum_{h=1}^{j-2} \alpha_h X^h$$

D'une façon analogue, la matrice N_2'' devient, en simplifiant par des puissances de x convenables lorsque $q \geq 1$,

$$N_3'' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ x & \binom{1}{1} & 0 & & \vdots \\ x^2 & \binom{2}{1} x & 2! \binom{2}{2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ x^q & \binom{q}{1} x^{q-1} & 2! \binom{q}{2} x^{q-2} & \cdots & q! \binom{q}{q} \\ x^{q+1} & \binom{q+1}{1} x^q & 2! \binom{q+1}{2} x^{q-1} & \cdots & q! \binom{q+1}{q} x \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x^{p+q+1} & \binom{p+q+1}{1} x^{p+q} & 2! \binom{p+q+1}{2} x^{p+q-1} & \cdots & q! \binom{p+q+1}{1} x^{p+1} \end{bmatrix}$$

Ainsi, $rg(N_1) = rg\left(\begin{bmatrix} N_3' & N_3'' \end{bmatrix}\right)$. Si nous supposons maintenant $rg\left(\begin{bmatrix} N_3' & N_3'' \end{bmatrix}\right) \leq p + q + 1$, nous obtenons, en traduisant la dépendance des lignes, un polynôme

$$P(X) = \sum_{j=0}^{p+q+1} \beta_j X^j \in \mathbb{C}[x] \setminus \{0\}$$

admettant 1 comme racine d'ordre $p + 1$ et x comme racine d'ordre $q + 1$ (en effet, la somme des lignes de la $\ell^{\text{ème}}$ colonne de N_3' (resp. N_3'') est égale à $P^{(\ell)}(1)$ (resp. $P^{(\ell)}(x)$)), ce qui est absurde puisque $x \neq 1$ par hypothèse. D'où le résultat. ■

Comme $\text{Re}(\mu - \lambda) \in]-1, 1[$ et $\lambda \neq \mu$, nous avons $\det N \in \mathbb{C}^*$ et nous concluons comme dans le cas $\Lambda_\omega = \{\lambda\}$.

Singularités de \tilde{f}

L'analyticité à l'origine des séries $\sum_{m \geq 1} \tilde{H}_{\omega, \lambda, p, m}^{[q]}$ étant démontrée, la suite de l'étude ne pose pas de difficultés : nous établissons la convergence des séries $\sum_{m \geq 1} \alpha_{\omega, p, m}^{[q]}$, ainsi que l'analyticité à l'origine de $\sum_{m \geq 1} \tilde{h}_{\omega, p, m}^{[q]}$ et $\sum_{m \geq 1} \text{Hol}_{\omega, m}^{[q]}$ en adaptant la démonstration du lemme 2.18. Nous obtenons ainsi la nature de la singularité ω dans le cas où la matrice L est sous forme de Jordan quelconque :

Théorème 2.24 Soient ω l'un des $a_j \neq 0$ et $q \in \{1, \dots, n_1\}$. La $q^{\text{ème}}$ colonne $\tilde{f}^{[q]}$ de \tilde{f} a une singularité simple-ramifiée en ω : modulo les fonctions analytiques à l'origine,

$$\tau_\omega \tilde{f}^{[q]}(\xi) = \sum_{p=0}^{N_{\omega,0}+q} \frac{\alpha_{\omega,p}^{[q]}}{\xi} \log^p \xi + \sum_{p=1}^{N_{\omega,0}+q+1} \tilde{h}_{\omega,p}^{[q]}(\xi) \log^p \xi + \sum_{\lambda \in \Lambda_\omega} \sum_{p=0}^{N_{\omega,\lambda}+q} \left(\tilde{H}_{\omega,\lambda,p}^{[q]}(\xi) \log^p \xi \right) \xi^{\lambda-1}$$

où $\alpha_{\omega,p}^{[q]} \in M_{n,1}(\mathbb{C})$, $\tilde{h}_{\omega,p}^{[q]}, \tilde{H}_{\omega,\lambda,p}^{[q]} \in M_{n,1}(\mathbb{C}\{\xi\})$ et où les exposants de ramification Λ_ω et les ordres logarithmiques $(N_{\omega,0} + q, (N_{\omega,\lambda} + q)_{\lambda \in \Lambda_\omega})$ sont donnés par

$$\begin{cases} \Lambda_\omega = \{\lambda_j; j \in \{1, \dots, J\} \text{ tel que } a_j = \omega \text{ et } \lambda_j \neq 0\} \\ N_{\omega,0} = \max(n_j - 2; j \in \{1, \dots, J\} \text{ tel que } a_j = \omega \text{ et } \lambda_j = 0) \\ N_{\omega,\lambda} = \max(n_j - 2; j \in \{1, \dots, J\} \text{ tel que } a_j = \omega \text{ et } \lambda_j = \lambda) \end{cases}$$

De plus, les coefficients de résurgence de $\tilde{f}^{[q]}$ en ω sont des germes de fonctions analytiques prolongeables sans fin de support singulier les points $a_j - \omega$ et sont à croissance exponentielle d'ordre au plus un à l'infini.

Ce résultat généralise le théorème 2.19. En particulier, nous voyons que la nature de la singularité ω dépend uniquement de la forme de Jordan de L , et précisément des blocs de Jordan liés à l'exponentielle $e^{-\frac{\omega}{x}}$ de la partie irrégulière de \hat{Y} .

Noter que la méthode utilisée pour établir ce résultat fournit une démonstration du théorème 1.32.

2.3 Isomorphisme linéaire liant coefficients de résurgence et multiplicateurs de Stokes

Nous orientons le cercle des directions \mathbb{S}^1 dans le sens des aiguilles d'une montre. Rappelons que nous choisissons cette orientation afin que nos calculs soient compatibles avec les calculs classiques au voisinage de l'infini lorsque l'orientation de \mathbb{S}^1 est dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. Nous utilisons la terminologie gauche-droite dans le sens suivant : à partir d'une direction $\theta \in \mathbb{S}^1$ fixée, nous allons à gauche (resp. à droite) lorsque nous nous déplaçons sur \mathbb{S}^1 dans le sens inverse des aiguilles d'une montre (resp. dans le sens des aiguilles d'une montre).

Tous les arguments que nous considérons dans la suite sont pris dans $] -2\pi, 0]$. En particulier, $\log x$ est un nombre réel pour $x > 0$.

2.3.1 Une égalité fondamentale

Rappelons que la solution fondamentale formelle \hat{Y} que nous étudions est de la forme

$$\hat{Y}(x) = \hat{F}(x)x^L e^{Q(\frac{1}{x})}$$

où

- ★ \widehat{F} est un élément de $M_n(\mathbb{C}[[x]])$ normalisé à $\widehat{F}(x) = I_n + O(x^2)$;
- ★ L est la matrice des exposants de monodromie formelle normalisée à $L = \bigoplus_{j=1}^J L_j$, où chaque L_j est un bloc de Jordan de L de dimension n_j associé à la valeur propre λ_j avec $\lambda_1 = 0$ et $\operatorname{Re}(\lambda_j) \in [0, 1[$;
- ★ $Q(\frac{1}{x}) = \bigoplus_{j=1}^J (-\frac{a_j}{x}) I_{n_j}$ avec $a_1 = 0$

Fixons une direction anti-Stokes $\theta \in] - 2\pi, 0]$ de \widehat{Y} , *i.e.*, une direction déterminée par au moins une singularité $a_j - a_\ell$ de \widehat{F} . La matrice de Stokes C_θ associée à la solution fondamentale formelle \widehat{Y} dans la direction θ est définie par la relation

$$Y_{\theta-} = Y_{\theta+}(I_n + C_\theta)$$

où $Y_{\theta-} = Y_{\theta-\varepsilon}$ (resp. $Y_{\theta+} = Y_{\theta+\varepsilon}$) est la somme droite (resp. gauche) de \widehat{Y} dans la direction θ . Les sommes $Y_{\theta\pm}$ étant définies par

$$Y_{\theta\pm} = s_{\theta\pm}(\widehat{F})x^L e^{Q(\frac{1}{x})}$$

il résulte de la relation précédente l'égalité

$$(2.14) \quad s_{\theta-}(\widehat{F}) - s_{\theta+}(\widehat{F}) = s_{\theta+}(\widehat{F})x^L e^{Q(\frac{1}{x})} C_\theta e^{-Q(\frac{1}{x})} x^{-L}$$

Comme il est d'usage dans cette première partie, nous notons c_θ la matrice formée des n_1 premières colonnes de C_θ . La notation $c_\theta^{[j;q]}$ désigne toujours la $q^{\text{ème}}$ colonne de c_θ et nous découpons $c_\theta^{[j;q]}$ sous la forme

$$c_\theta^{[j;q]} = \begin{bmatrix} c_\theta^{[1;q]} \\ \vdots \\ c_\theta^{[j;q]} \end{bmatrix}$$

de telle sorte que le nombre de lignes de la matrice $c_\theta^{[j;q]}$ soit égal à la dimension n_j du $j^{\text{ème}}$ bloc de Jordan L_j de L . Lorsque la matrice L est diagonale, nous avons $q = n_j = 1$ et nous notons simplement $c_\theta^{[j]}$ la matrice scalaire $c_\theta^{[j;1]}$.

En considérant dans l'égalité (2.14) le bloc \widehat{f} formé des n_1 premières colonnes de \widehat{F} et en utilisant les propriétés de C_θ (proposition 1.40), nous obtenons pour tout $q \in \{1, \dots, n_1\}$:

$$\begin{aligned} & s_{\theta-}(\widehat{f}^{[j;q]}) - s_{\theta+}(\widehat{f}^{[j;q]}) \\ &= s_{\theta+}(\widehat{F}) \left[x^{L_j} \left(c_\theta^{[j;q]} - c_\theta^{[j;q-1]} \log x + \dots + \frac{(-1)^{q-1}}{(q-1)!} c_\theta^{[j;1]} \log^{q-1} x \right) e^{-\frac{a_j}{x}} \right]_{a_j \in d_\theta^*} \end{aligned}$$

puisque les $a_j \in d_\theta^*$ sont les seules singularités de $\widehat{f}^{[j;q]}$ sur d_θ . Cette notation signifie simplement que les seuls blocs éventuellement non nuls sont situés aux lignes de blocs

d'indices j avec $a_j \in d_\theta^*$. Ainsi, en notant $\Omega_\theta(\widehat{f})$ l'ensemble des singularités de \widehat{f} (et donc de sa $q^{\text{ème}}$ colonne $\widehat{f}^{[;q]}$) sur d_θ et

$$J_\omega = \{j \in \{1, \dots, J\} ; a_j = \omega\}$$

nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} & s_{\theta^-}(\widehat{f}^{[;q]}) - s_{\theta^+}(\widehat{f}^{[;q]}) \\ &= \sum_{\omega \in \Omega_\theta(\widehat{f})} s_{\theta^+}(\widehat{F}) \left[x^{L_j} \left(c_\theta^{[j;q]} - c_\theta^{[j;q-1]} \log x + \dots + \frac{(-1)^{q-1}}{(q-1)!} c_\theta^{[j;1]} \log^{q-1} x \right) \right]_{j \in J_\omega} e^{-\frac{\omega}{x}} \end{aligned}$$

D'autre part, l'ensemble $\Omega_\theta(\widehat{f})$ étant fini et les sommes $s_{\theta^\pm}(\widehat{f}^{[;q]})$ de $\widehat{f}^{[;q]}$ étant définies par

$$s_{\theta^\pm}(\widehat{f}^{[;q]})(x) = \int_0^{\infty e^{i\theta^\pm}} \widehat{f}^{[;q]}(\xi) e^{-\frac{\xi}{x}} d\xi$$

nous avons par déformation du chemin $d_{\theta^-} = [0, \infty e^{i\theta^-} [$ (voir figure 2.5) l'égalité suivante :

$$s_{\theta^-}(\widehat{f}^{[;q]}) - s_{\theta^+}(\widehat{f}^{[;q]}) = \sum_{\omega \in \Omega_\theta(\widehat{f})} e^{-\frac{\omega}{x}} \int_{\gamma_{\theta^+}} \tau_\omega \widehat{f}^{[;q]}(\xi) e^{-\frac{\xi}{x}} d\xi$$

où γ_{θ^+} est le contour de Hankel autour de d_{θ^+} défini à la figure 1.7.

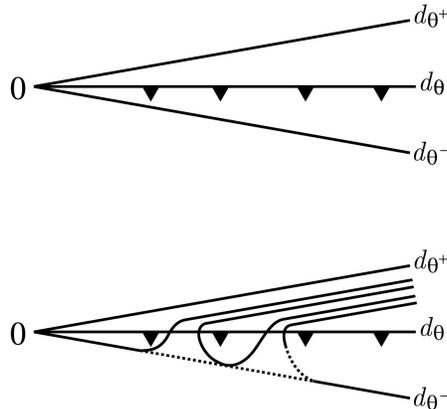


Figure 2.5 - déformation du chemin d_{θ^-}

Nous obtenons finalement l'égalité fondamentale suivante

$$(2.15) \quad \sum_{\omega \in \Omega_\theta(\widehat{f})} e^{-\frac{\omega}{x}} \int_{\gamma_{\theta^+}} \tau_\omega \widetilde{f}^{[j;q]}(\xi) e^{-\frac{\xi}{x}} d\xi = \sum_{\omega \in \Omega_\theta(\widehat{f})} s_{\theta^+}(\widehat{F}) M_\omega(x) e^{-\frac{\omega}{x}}$$

où

$$M_\omega(x) = \left[x^{L_j} \left(c_\theta^{[j;q]} - c_\theta^{[j;q-1]} \log x + \dots + \frac{(-1)^{q-1}}{(q-1)!} c_\theta^{[j;1]} \log^{q-1} x \right) \right]_{j \in J_\omega}$$

qui se simplifie dans le cas où L est diagonale en

$$(2.16) \quad \sum_{\omega \in \Omega_\theta(\widehat{f})} e^{-\frac{\omega}{x}} \int_{\gamma_{\theta^+}} \tau_\omega \widetilde{f}(\xi) e^{-\frac{\xi}{x}} d\xi = \sum_{\omega \in \Omega_\theta(\widehat{f})} s_{\theta^+}(\widehat{F}) \left[c_\theta^{[j]} x^{\lambda_j} \right]_{j \in J_\omega} e^{-\frac{\omega}{x}}$$

Ces expressions vont nous permettre de calculer de façon exacte les multiplicateurs de Stokes $c_\theta^{[j;q]}$, $j \in J_\omega$, en fonction des coefficients de résurgence de $\widetilde{f}^{[j;q]}$ en $\omega \in \Omega_\theta(\widehat{f})$, puisque $\tau_\omega \widetilde{f}^{[j;q]}$ est connu explicitement (théorème 2.24). Ceux-ci dépendant du prolongement analytique de $\widetilde{f}^{[j;q]}$, nous faisons dans la suite le choix suivant : nous prolongeons analytiquement $\widetilde{f}^{[j;q]}$ le long de d_θ en évitant systématiquement toutes les singularités $\omega \in \Omega_\theta(\widehat{f})$ par la droite (figure 2.6). Les coefficients de résurgence de $\widetilde{f}^{[j;q]}$ en une singularité ω sont alors ceux obtenus à l'aide de ce prolongement analytique, que nous appelons *prolongement analytique à droite de ω* (figure 2.6).

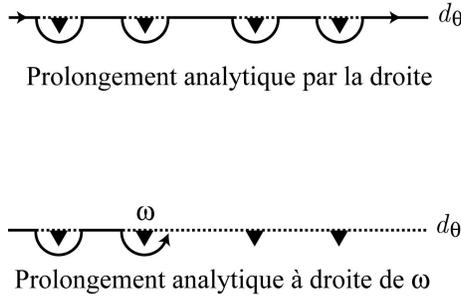


Figure 2.6

Pour établir les relations liant les multiplicateurs de Stokes et les coefficients de résurgence, nous procédons de la manière suivante :

1. nous montrons que, pour tout $\omega \in \Omega_\theta(\widehat{f})$,

$$\mathcal{L}_{\theta^+}(\tau_\omega \widetilde{f}^{[j;q]})(x) = \int_{\gamma_{\theta^+}} \tau_\omega \widetilde{f}^{[j;q]}(\xi) e^{-\frac{\xi}{x}} d\xi = s_{\theta^+}(\widehat{F}) M_\omega(x)$$

2. en utilisant l'hypothèse fondamentale $\widehat{F}(0) = I_n$, nous identifions les termes des développements asymptotiques à l'origine $\widehat{\mathcal{L}}_{\theta^+}(\tau_\omega \widetilde{f}^{[j;q]})$ de $\mathcal{L}_{\theta^+}(\tau_\omega \widetilde{f}^{[j;q]})$ et $\widehat{F} M_\omega(x)$ de $s_{\theta^+}(\widehat{F}) M_\omega(x)$.

Précisément, pour établir le premier point, nous allons voir que les intégrales de Laplace $\mathcal{L}_{\theta^+}(\tau_\omega \tilde{f}^{[q]})(x)$ peuvent être écrites sous la forme

$$\mathcal{L}_{\theta^+}(\tau_\omega \tilde{f}^{[q]})(x) = \sum_{j=1}^p s_{\theta^+}(\widehat{h}_j) x^{\mu_j} \log^{r_j} x$$

où les couples $(\mu_j, r_j) \in \mathbb{C} \times \mathbb{N}$ sont distincts deux à deux et où $s_{\theta^+}(\widehat{h}_j)$ désigne la somme d'une série formelle \widehat{h}_j de type Gevrey de niveau 1 qui est 1-sommable dans la direction θ^+ . Le résultat suivra en utilisant le

Lemme 2.25 *Soient $m \in \mathbb{N}^*$ et $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ des fonctions définies sur un secteur Σ de sommet 0, bissecté par θ^+ et d'ouverture strictement supérieure à π par*

$$\varphi_j(x) = \sum_{\ell=1}^{p_j} s_{\theta^+}(\widehat{h}_{j,\ell}) x^{\mu_\ell} \log^{r_\ell} x$$

où $\widehat{h}_{j,\ell}$ désigne une série formelle de type Gevrey de niveau 1 qui est 1-sommable dans la direction θ^+ de somme $s_{\theta^+}(\widehat{h}_{j,\ell})$ et où les couples $(\mu_\ell, r_\ell) \in \mathbb{C} \times \mathbb{N}$ sont distincts deux à deux.

Supposons que l'on ait sur Σ une égalité de la forme

$$\varphi_1 + \varphi_2 e^{q_2} + \dots + \varphi_m e^{q_m} = 0$$

où les exponentielles e^{q_j} sont distinctes deux à deux et toutes plates sur un même secteur de sommet 0 bissecté par θ^+ .

Alors, $\varphi_j = 0$ pour tout $j \in \{1, \dots, m\}$.

Démonstration. En prenant les développements asymptotiques à l'origine de l'égalité

$$\varphi_1 + \varphi_2 e^{q_2} + \dots + \varphi_m e^{q_m} = 0$$

nous obtenons

$$\sum_{\ell=1}^{p_1} \widehat{h}_{1,\ell} x^{\mu_\ell} \log^{r_\ell} x = 0$$

et donc $\widehat{h}_{1,\ell} = 0$ pour tout $\ell \in \{1, \dots, p_1\}$. Ces séries étant 1-sommables dans la direction θ^+ , nous en déduisons que $s_{\theta^+}(\widehat{h}_{1,\ell}) = 0$ pour tout $\ell \in \{1, \dots, p_1\}$, et donc $\varphi_1 = 0$. Un raisonnement similaire montre que tous les φ_j sont nuls. ■

2.3.2 Cas où L est diagonale

Nous considérons l'égalité (2.16) avec, pour tout $\omega \in \Omega_\theta(\widehat{f})$,

$$\tau_\omega \tilde{f}(\xi) = \frac{\alpha_\omega}{\xi} + \tilde{h}_\omega(\xi) \log \xi + \sum_{\lambda \in \Lambda_\omega} \tilde{H}_{\omega,\lambda}(\xi) \xi^{\lambda-1} + \text{Hol}_\omega(\xi)$$

où $\alpha_\omega \in M_{n,1}(\mathbb{C})$, $\tilde{h}_\omega, \tilde{H}_{\omega,\lambda}, Hol_\omega$ sont holomorphes à l'origine et se prolongent analytiquement sur un secteur illimité d'axe d_{θ^+} avec une croissance exponentielle d'ordre au plus un à l'infini, et $\Lambda_\omega = \{\lambda_j; j \in \{1, \dots, n\} \text{ tel que } a_j = \omega \text{ et } \lambda_j \neq 0\}$ (théorème 2.19 et corollaire 2.20).

L'intégrale de Laplace $\mathcal{L}_{\theta^+}(\tau_\omega \tilde{f})(x)$ se ramène au calcul des trois intégrales

$$\int_{\gamma_{\theta^+}} \frac{\alpha_\omega}{\xi} e^{-\frac{\xi}{x}} d\xi ; \int_{\gamma_{\theta^+}} \tilde{h}_\omega(\xi) \log \xi e^{-\frac{\xi}{x}} d\xi \text{ et } \int_{\gamma_{\theta^+}} \tilde{H}_{\omega,\lambda}(\xi) \xi^{\lambda-1} e^{-\frac{\xi}{x}} d\xi$$

★ Pour la première intégrale, le théorème des résidus montre que

$$\int_{\gamma_{\theta^+}} \frac{\alpha_\omega}{\xi} e^{-\frac{\xi}{x}} d\xi = 2i\pi\alpha_\omega$$

★ Notons $\hat{h}_\omega \in M_{n,1}(x\mathbb{C}[[x]]_1)$ la série formelle dont le mineur est \tilde{h}_ω . La série \tilde{h}_ω étant convergente, \hat{h}_ω est une série de type Gevrey de niveau 1 de majeur

$$maj(\hat{h}_\omega)(\xi) = \tilde{h}_\omega(\xi) \frac{\log \xi}{2\pi i}$$

Finalement, les propriétés du prolongement analytique de \tilde{h}_ω montrent que la série \hat{h}_ω est 1-sommable dans la direction θ^+ avec

$$\int_{\gamma_{\theta^+}} \tilde{h}_\omega(\xi) \log \xi e^{-\frac{\xi}{x}} d\xi = 2i\pi s_{\theta^+}(\hat{h}_\omega)(x)$$

★ Pour la troisième intégrale, nous procédons d'une manière analogue, mais avec des séries ramifiées. La fonction $\tilde{H}_{\omega,\lambda}$ étant analytique à l'origine, nous posons

$$\tilde{H}_{\omega,\lambda}(\xi) = \sum_{m \geq 0} H_{\omega,\lambda,m} \xi^m \in M_{n,1}(\mathbb{C}\{\xi\})$$

Définissons alors la série formelle $\hat{H}_{\omega,\lambda}$ par

$$(2.17) \quad \hat{H}_{\omega,\lambda}(x) = 2i\pi e^{-i\pi\lambda} \sum_{m \geq 0} \frac{(-1)^m}{\Gamma(1-m-\lambda)} H_{\omega,\lambda,m} x^m$$

Cette série est de type Gevrey de niveau 1 et un majeur de $\hat{h} = \hat{H}_{\omega,\lambda} x^\lambda$ est

$$maj(\hat{h}) = \tilde{H}_{\omega,\lambda} \xi^{\lambda-1}$$

Ce majeur est holomorphe multiforme à l'origine et sa variation

$$\text{var}(maj(\hat{h})) = (1 - e^{-2i\pi\lambda}) \tilde{H}_{\omega,\lambda} \xi^{\lambda-1}$$

peut être prolongée analytiquement sur un secteur illimité d'axe d_{θ^+} avec une croissance exponentielle d'ordre au plus un à l'infini. La série \hat{h} est donc un élément de $\mathcal{H}_{\theta^+, \text{exp}}$

(proposition 1.23). La proposition 1.26 montre alors que la série formelle $\widehat{H}_{\omega,\lambda}$ est 1-sommable dans la direction θ^+ avec

$$\int_{\gamma_{\theta^+}} \widetilde{H}_{\omega,\lambda}(\xi) \xi^{\lambda-1} e^{-\frac{\xi}{x}} d\xi = s_{\theta^+}(\widehat{H}_{\omega,\lambda}) x^\lambda$$

Ces différents calculs nous permettent d'obtenir pour tout $\omega \in \Omega_\theta(\widehat{f})$ l'égalité

$$\int_{\gamma_{\theta^+}} \tau_\omega \widetilde{f}(\xi) e^{-\frac{\xi}{x}} d\xi = 2i\pi\alpha_\omega + 2i\pi s_{\theta^+}(\widehat{h}_\omega)(x) + \sum_{\lambda \in \Lambda_\omega} s_{\theta^+}(\widehat{H}_{\omega,\lambda})(x) x^\lambda$$

où les séries formelles \widehat{h}_ω et $\widehat{H}_{\omega,\lambda}$ sont 1-sommables dans la direction θ^+ . Nous déduisons alors de l'égalité (2.16) et du lemme 2.25 le résultat suivant :

Lemme 2.26 *Pour tout $\omega \in \Omega_\theta(\widehat{f})$,*

$$(2.18) \quad \boxed{\int_{\gamma_{\theta^+}} \tau_\omega \widetilde{f}(\xi) e^{-\frac{\xi}{x}} d\xi = s_{\theta^+}(\widehat{F}) M_\omega(x) = s_{\theta^+}(\widehat{F}) \left[c_\theta^{[j]} x^{\lambda_j} \right]_{j \in J_\omega}}$$

En particulier, $\tau_\omega \widetilde{f}$ est un majeur de

$$\widehat{F} \left[c_\theta^{[j]} x^{\lambda_j} \right]_{j \in J_\omega} = \sum_{j \in J_\omega} c_\theta^{[j]} \widehat{F}_{[j]}(x) x^{\lambda_j}$$

où $\widehat{F}_{[j]}(x) \in M_{n,1}(\mathbb{C}[[x]])$ est la $j^{\text{ème}}$ colonne de \widehat{F} .

Nous pouvons à présent expliciter les relations entre les coefficients de résurgence de \widetilde{f} à droite de ω et les multiplicateurs de Stokes $c_\theta^{[j]}$, $j \in J_\omega$.

Fixons $\omega \in \Omega_\theta(\widehat{f})$. En prenant les développements asymptotiques à l'origine dans l'égalité (2.18), nous obtenons

$$(2.19) \quad 2i\pi\alpha_\omega + 2i\pi\widehat{h}_\omega(x) + \sum_{\lambda \in \Lambda_\omega} \widehat{H}_{\omega,\lambda}(x) x^\lambda = \widehat{F} \left[c_\theta^{[j]} x^{\lambda_j} \right]_{j \in J_\omega}$$

avec $\widehat{h}_\omega \in M_{n,1}(x\mathbb{C}[[x]])$ et $\widehat{H}_{\omega,\lambda} \in M_{n,1}(\mathbb{C}[[x]])$. La série \widehat{F} étant normalisée à $\widehat{F}(x) = I_n + O(x^2)$, nous obtenons, en identifiant les termes dans l'égalité (2.19), le

Théorème 2.27 *Pour toute singularité $\omega \in \Omega_\theta(\widehat{f})$ de \widetilde{f} , nous considérons le prolongement analytique de \widetilde{f} à droite de ω et nous notons*

- $\alpha_\omega = \begin{bmatrix} \alpha_\omega^{[1]} \\ \vdots \\ \alpha_\omega^{[n]} \end{bmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{C})$ le coefficient de résurgence lié à $\frac{1}{\xi}$
- $\widetilde{H}_{\omega,\lambda}(\xi) = \begin{bmatrix} \widetilde{H}_{\omega,\lambda}^{[1]}(\xi) \\ \vdots \\ \widetilde{H}_{\omega,\lambda}^{[n]}(\xi) \end{bmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{C}\{\xi\})$ le coefficient de résurgence lié à $\xi^{\lambda-1}$

Alors, pour tout $\omega \in \Omega_\theta(\widehat{f})$ et pour tout $j \in J_\omega$:

1. Si $\lambda_j = 0$,

$$c_\theta^{[j]} = 2i\pi\alpha_\omega^{[j]}$$

2. Si $\lambda_j \neq 0$, le résidu $\alpha_\omega^{[j]}$ est nul, $\lambda_j \in \Lambda_\omega$ et⁴

$$c_\theta^{[j]} = \frac{2i\pi e^{-i\pi\lambda_j}}{\Gamma(1-\lambda_j)} \tilde{H}_{\omega,\lambda_j}^{[j]}(0)$$

En particulier, nous voyons qu'il n'est pas nécessaire de connaître la totalité des coefficients de résurgence de \tilde{f} en ω pour calculer les multiplicateurs de Stokes, mais uniquement certaines de leurs valeurs. Ce sont précisément ces nombres que nous chercherons à approcher dans le paragraphe 3.1.

Terminons ce paragraphe par deux exemples simples permettant d'illustrer le calcul des multiplicateurs de Stokes.

Exemple 1 Dans ce premier exemple, nous calculons la valeur exacte des multiplicateurs de Stokes en déterminant directement les prolongements analytiques de \tilde{f} à droite de ses singularités.

Le système différentiel linéaire

$$[A] \quad x^2 \frac{dY}{dx} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x^2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2x^2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -x^3 & 0 & 0 & 2 + \frac{x}{2} & 0 \\ 3x^4 & 0 & x^2 & 0 & 3 \end{bmatrix} Y$$

admet pour solution fondamentale formelle $\widehat{Y}(x) = \widehat{F}(x)x^L e^{Q(\frac{1}{x})}$ avec $L = \text{diag}(0, 0, 0, \frac{1}{2}, 0)$, $Q(\frac{1}{x}) = \text{diag}(0, -\frac{1}{x}, -\frac{2}{x}, -\frac{2}{x}, -\frac{3}{x})$ et

$$\widehat{F}(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \widehat{f}_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \widehat{f}_2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \widehat{f}_3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \widehat{f}_4 + \widehat{f}_5 & 0 & \widehat{f}_1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

les \widehat{f}_j étant les uniques solutions séries formelles en x vérifiant $\widehat{f}_j(x) = O(x^2)$ et satis-

⁴Nous avons en effet de (2.16) l'égalité $\widehat{H}_{\omega,\lambda}(0) = \frac{2i\pi e^{-i\pi\lambda}}{\Gamma(1-\lambda)} \tilde{H}_{\omega,\lambda}(0)$ pour tout $\lambda \in \Lambda_\omega$.

faisant à

$$(*) \quad \begin{cases} x^2 \frac{d\widehat{f}_1}{dx} - \widehat{f}_1 = x^2 \\ x^2 \frac{d\widehat{f}_2}{dx} - 2\widehat{f}_2 = 2x^2 \quad , \quad x^2 \frac{d\widehat{f}_3}{dx} - \left(2 + \frac{x}{2}\right) \widehat{f}_3 = -x^3 \\ x^2 \frac{d\widehat{f}_4}{dx} - 3\widehat{f}_4 = 3x^4 \quad , \quad x^2 \frac{d\widehat{f}_5}{dx} - 3\widehat{f}_5 = x^2 \widehat{f}_2 \end{cases}$$

L'écriture du facteur série formelle \widehat{F} a été obtenue en appliquant la méthode par perturbation régulière donnée au paragraphe 2.1.1 : la série double $\widehat{F}(x, \alpha)$ est en fait un polynôme en α de degré 2 : $\widehat{F}(x, \alpha) = I_5 + \widehat{F}_1(x)\alpha + \widehat{F}_2(x)\alpha^2$ avec

$$\widehat{F}_1(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \widehat{f}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \widehat{f}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \widehat{f}_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \widehat{f}_4 & 0 & \widehat{f}_1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \widehat{F}_2(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \widehat{f}_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Cette simplicité du calcul est due à la forme même du système $[A]$. Malheureusement, dans la majorité des cas, $\widehat{F}(x, \alpha)$ est une vraie série et il est alors impossible d'utiliser cette méthode (voir exemple suivant).

Le système $[A]$ admet deux directions anti-Stokes : \mathbb{R}^+ et \mathbb{R}^- . La première colonne de \widehat{F} étant divergente, \mathbb{R}^+ est une direction singulière du système. En revanche, \mathbb{R}^- est une direction régulière, puisque \widehat{f}_1 n'admet que \mathbb{R}^+ comme direction anti-Stokes. Autrement dit,

$$C_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_0^{[2]} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_0^{[3]} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_0^{[4]} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_0^{[5]} & 0 & c_0^{[2]} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad C_{-\pi} = 0.$$

Grâce aux équations (*), nous pouvons déterminer de manière exacte le prolongement analytique de \widetilde{f} à droite de chacune de ses singularités $\omega \in \{1, 2, 3\}$. Pour \widetilde{f}_1 , \widetilde{f}_2 et \widetilde{f}_4 , le calcul est évident puisque nous avons

$$\widetilde{f}_1(\xi) = \frac{\xi}{\xi - 1}, \quad \widetilde{f}_2(\xi) = \frac{2\xi}{\xi - 2} \quad \text{et} \quad \widetilde{f}_4(\xi) = \frac{\xi^3}{2(\xi - 3)}$$

\widetilde{f}_3 admet une unique singularité en $\xi = 2$ et son prolongement analytique à droite est

donné pour tout $\xi \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re}(\xi) > 2$ par

$$\begin{aligned}\tilde{f}_3(\xi) &= -(\xi - 2)^{-\frac{1}{2}} \int_0^\xi \eta(\eta - 2)^{-\frac{1}{2}} d\eta \\ &= -\frac{8i\sqrt{2}}{3}(\xi - 2)^{-\frac{1}{2}} - \frac{2\xi + 8}{3}\end{aligned}$$

puisque nous avons choisi une détermination du logarithme vérifiant : $\log x \in \mathbb{R}$ si $x \in \mathbb{R}_+^*$. Noter également que, comme nous avons évité la singularité $\xi = 2$ par la droite, l'hypothèse $\tilde{f}_3(0) = 0$ entraîne $(-2)^{\frac{1}{2}} = e^{-\frac{i\pi}{2}}\sqrt{2} = -i\sqrt{2}$.

Quant à \tilde{f}_5 , elle admet une singularité polaire en $\xi = 3$, qui ne pose donc pas de problème pour le prolongement analytique, et une singularité logarithmique en $\xi = 2$. Le prolongement analytique de \tilde{f}_5 à droite de $\xi = 2$ est alors donné pour tout $\xi \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re}(\xi) > 2$ par

$$\tilde{f}_5(\xi) = \frac{1}{\xi - 3} (\xi * \tilde{f}_2)(\xi)$$

où

$$(\xi * \tilde{f}_2)(\xi) = 4(\xi - 2) \log(\xi - 2) + \xi^2 - 4\xi(1 + \log 2 - i\pi) + 8(\log 2 - i\pi)$$

Ainsi, modulo les fonctions analytiques à l'origine, les prolongements analytiques de \tilde{f} à droite des points $\omega = 1, 2, 3$ sont donnés par

$$\tau_1 \tilde{f}(\xi) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\xi} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tau_2 \tilde{f}(\xi) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{4}{\xi} \\ -\frac{8i\sqrt{2}}{3}\xi^{-\frac{1}{2}} \\ \frac{4\xi}{\xi - 1} \log \xi \end{bmatrix}, \tau_3 \tilde{f}(\xi) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{21 - 8 \log 2 + 8i\pi}{2\xi} \end{bmatrix}$$

et nous obtenons par le théorème 2.27 :

$$\begin{cases} c_0^{[2]} = 2i\pi \\ c_0^{[3]} = 8i\pi \\ c_0^{[5]} = (21 - 8 \log 2)i\pi - 8\pi^2 \end{cases}, \quad c_0^{[4]} = -\frac{16i\sqrt{2}\pi}{3}$$

Exemple 2 Dans ce second exemple, nous ne pouvons plus calculer directement le prolongement analytique de \tilde{f} à droite de ses singularités. En particulier, la méthode par perturbation régulière utilisée dans l'exemple précédent pour expliciter le facteur série formelle \widehat{F} n'est plus valable, puisque $\widehat{F}(x, \alpha)$ est une vraie série. Nous donnons sur cet exemple une méthode pour contourner ce problème. Celle-ci sera généralisée au paragraphe 3.1.

Considérons le système différentiel linéaire

$$x^2 \frac{dY}{dx} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{x^2}{1+x} \\ \frac{x^2}{1-x} & 1 + \frac{x}{2} \end{bmatrix} Y$$

de solution fondamentale formelle $\widehat{Y}(x) = \widehat{F}(x)x^L e^{Q(\frac{1}{x})}$ avec $\widehat{F}(x) = I_2 + O(x^2)$, $L = \text{diag}(0, \frac{1}{2})$ et $Q(\frac{1}{x}) = \text{diag}(0, -\frac{1}{x})$. Elle admet deux directions anti-Stokes \mathbb{R}^+ et \mathbb{R}^- , les matrices de Stokes associées étant

$$C_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c_0^{[2]} & 0 \end{bmatrix} \text{ et } C_{-\pi} = \begin{bmatrix} 0 & * \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Nous cherchons ici à calculer $c_0^{[2]}$.

Grâce à l'équation de passage (1), nous savons que les séries $\widehat{f}^{[j]}$, $j \in \{1, 2\}$, satisfont à

$$(2.20) \quad \begin{cases} (1+x)x^2 \frac{d\widehat{f}^{[1]}}{dx} = x^2 \widehat{f}^{[2]} \\ (1-x)x^2 \frac{d\widehat{f}^{[2]}}{dx} = x^2 \widehat{f}^{[1]} + (1-x) \left(1 + \frac{x}{2}\right) \widehat{f}^{[2]} \end{cases}$$

En divisant alors chacune de ces égalités par x^2 et en appliquant une transformation de Borel, nous voyons que les séries $\tilde{f}^{[j]}$ vérifient les équations différentielles

$$\begin{cases} \xi \tilde{f}^{[1]''} = -\tilde{f}^{[1]} + \tilde{f}^{[2]} - (\xi + 2) \tilde{f}^{[1]'} \\ (\xi - 1) \tilde{f}^{[2]''} = \tilde{f}^{[1]} + \frac{1}{2} \tilde{f}^{[2]} - \frac{3}{2} \tilde{f}^{[2]'} + (\xi - 1) \tilde{f}^{[2]'} \end{cases}$$

Ainsi, le vecteur colonne $\tilde{\mathcal{F}} = \begin{bmatrix} \tilde{f} \\ \tilde{f}' \end{bmatrix}$ est solution du système différentiel

$$[S] \quad \frac{dZ}{d\xi} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{\xi} & \frac{1}{\xi} & -\frac{\xi+2}{\xi} & 0 \\ \frac{1}{\xi-1} & \frac{1}{2(\xi-1)} & 0 & -\frac{3}{2(\xi-1)} + 1 \end{bmatrix} Z$$

dont 1 est un point singulier régulier. L'écriture de $[S]$ au voisinage de 1 est

$$[S_1] \quad (\xi - 1) \frac{dZ}{d\xi} = C_1(\xi - 1)Z \text{ avec } C_1(\xi) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \xi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \xi \\ -\frac{\xi}{\xi+1} & \frac{\xi}{\xi+1} & -\frac{\xi(\xi+3)}{\xi+1} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{3}{2} + \xi \end{bmatrix}$$

La matrice de tête

$$C_1(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

de ce système étant diagonalisable, il est facile de voir qu'une solution fondamentale de $[S_1]$ est donnée par

$$(2.21) \quad Z_1(\xi - 1) = D_1 G_1(\xi - 1) (\xi - 1)^{M_1}$$

avec

$$D_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

matrice de diagonalisation de $C_1(0)$, $M_1 = \text{diag}(0, 0, 0, -\frac{3}{2})$ et $G_1(\xi - 1)$ analytique sur le disque ouvert $D(1, 1)$ de centre 1 et de rayon 1 et vérifiant $G_1(0) = I_4$.

Le prolongement analytique de $\tilde{\mathcal{F}}$ à droite de 1, toujours noté $\tilde{\mathcal{F}}$, étant une solution de

$$[S_1], \text{ il existe une unique matrice } \mathfrak{S}_1 = \begin{bmatrix} \sigma_{1,1} \\ \sigma_{1,2} \\ \sigma_{1,3} \\ \sigma_{1,4} \end{bmatrix} \text{ vérifiant } \tilde{\mathcal{F}}(\xi) = Z_1(\xi - 1) \mathfrak{S}_1. \text{ Nous allons}$$

donc chercher à exprimer le multiplicateur de Stokes $c_0^{[2]}$ en fonction des coefficients de la matrice de connexion \mathfrak{S}_1 .

Commençons par donner quelques précisions sur Z_1 : il est clair que les trois premières colonnes de Z_1 sont analytiques en 1. D'autre part, le calcul des premiers termes de G_1 donnant

$$G_1(\xi - 1) = I_4 + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -3 & 0 \\ \frac{8}{45} & \frac{4}{45} & -\frac{4}{15} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} (\xi - 1) + O((\xi - 1)^2)$$

nous voyons que la quatrième colonne de Z_1 est

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -2(\xi - 1)^{-\frac{1}{2}} \\ 0 \\ (\xi - 1)^{-\frac{3}{2}} \end{bmatrix} + O((\xi - 1)^{\frac{1}{2}})$$

Ainsi, grâce au théorème 2.27, nous obtenons la relation

$$c_0^{[2]} = -4\sqrt{\pi}\sigma_{1,4}$$

En particulier, $c_0^{[2]} \in i\mathbb{R}$. En effet, les séries $\tilde{\mathcal{F}}$ et G_1 sont à coefficients réels et \mathfrak{S}_1 vérifie la relation $\tilde{\mathcal{F}}(\alpha) = Z_1(\alpha - 1)\mathfrak{S}_1$ pour tout $\alpha \in]0, 1[$ avec

$$Z_1(\alpha - 1) = D_1 G_1(\alpha - 1)(\alpha - 1)^{M_1}$$

où $D_1 \in M_4(\mathbb{R})$ et $(\alpha - 1)^{M_1} = \text{diag}(1, 1, 1, -\frac{i}{(1-\alpha)\sqrt{1-\alpha}})$.

Nous avons donc ramené, sur cet exemple, le calcul de $c_0^{[2]}$ à un calcul de matrice de connexion. Nous montrons au chapitre 3 qu'il est toujours possible de le faire dans le cadre des systèmes de niveau unique 1, ce qui nous fournira une méthode pour le calcul effectif des multiplicateurs de Stokes.

2.3.3 Cas général

Nous considérons à présent l'égalité (2.15). Pour tout $\omega \in \Omega_\theta(\hat{f})$ et pour tout $q \in \{1, \dots, n_1\}$, nous savons (théorème 2.24) que nous avons, modulo les fonctions analytiques à l'origine :

$$\tau_\omega \tilde{f}^{[;q]}(\xi) = \sum_{p=0}^{N_{\omega,0}+q} \frac{\alpha_{\omega,p}^{[;q]}}{\xi} \log^p \xi + \sum_{p=1}^{N_{\omega,0}+q+1} \tilde{h}_{\omega,p}^{[;q]}(\xi) \log^p \xi + \sum_{\lambda \in \Lambda_\omega} \sum_{p=0}^{N_{\omega,\lambda}+q} \left(\tilde{H}_{\omega,\lambda,p}^{[;q]}(\xi) \log^p \xi \right) \xi^{\lambda-1}$$

avec $\alpha_{\omega,p}^{[;q]} \in M_{n,1}(\mathbb{C})$, $\tilde{h}_{\omega,p}^{[;q]}$, $\tilde{H}_{\omega,\lambda,p}^{[;q]}$ holomorphes à l'origine et se prolongeant analytiquement sur un secteur illimité d'axe $d_{\theta+}$ avec une croissance exponentielle d'ordre au plus un à l'infini, et

$$\begin{cases} \Lambda_\omega = \{\lambda_j; j \in \mathbb{N}_J^* \text{ tel que } a_j = \omega \text{ et } \lambda_j \neq 0\} \\ N_{\omega,0} = \max(n_j - 2; j \in \mathbb{N}_J^* \text{ tel que } a_j = \omega \text{ et } \lambda_j = 0) \\ N_{\omega,\lambda} = \max(n_j - 2; j \in \mathbb{N}_J^* \text{ tel que } a_j = \omega \text{ et } \lambda_j = \lambda) \end{cases}$$

Etablissons, comme dans le cas où L est diagonale, le résultat suivant :

Lemme 2.28 *Pour tout $\omega \in \Omega_\theta(\hat{f})$,*

$$(2.22) \quad \boxed{\int_{\gamma_{\theta+}} \tau_\omega \tilde{f}^{[;q]}(\xi) e^{-\frac{\xi}{x}} d\xi = s_{\theta+}(\hat{F}) M_\omega(x)}$$

En particulier, $\tau_\omega \tilde{f}^{[;q]}$ est un majeur de

$$\hat{F} M_\omega(x) = \hat{F} \left[x^{L_j} \left(c_\theta^{[j;q]} - c_\theta^{[j;q-1]} \log x + \dots + \frac{(-1)^{q-1}}{(q-1)!} c_\theta^{[j;1]} \log^{q-1} x \right) \right]_{j \in J_\omega}$$

Nous procédons comme au paragraphe 2.3.2 en calculant explicitement l'intégrale de Laplace

$$\mathcal{L}_{\theta^+}(\tau_\omega \tilde{f}^{[q]})(x) = \int_{\gamma_{\theta^+}} \tau_\omega \tilde{f}^{[q]}(\xi) e^{-\frac{\xi}{x}} d\xi$$

Ce calcul découle des deux résultats suivants (lemmes 2.29 et 2.30) :

Lemme 2.29 *Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ et tout $p \in \mathbb{N}$,*

$$\int_{\gamma_{\theta^+}} \xi^{\lambda-1} \log^p \xi e^{-\frac{\xi}{x}} d\xi = 2i\pi \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} \frac{d^{p-k}}{d\lambda^{p-k}} \left(\frac{e^{-i\pi\lambda}}{\Gamma(1-\lambda)} \right) x^\lambda \log^k x$$

En particulier,

$$\xi^{\lambda-1} \log^p \xi = \text{maj} \left(2i\pi \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} \frac{d^{p-k}}{d\lambda^{p-k}} \left(\frac{e^{-i\pi\lambda}}{\Gamma(1-\lambda)} \right) x^\lambda \log^k x \right)$$

Démonstration. Pour tout $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, nous avons

$$\int_{\gamma_{\theta^+}} \xi^{\lambda-1} e^{-\frac{\xi}{x}} d\xi = \frac{2i\pi e^{-i\pi\lambda}}{\Gamma(1-\lambda)} x^\lambda$$

Cette formule s'étend aux λ entiers puisque la fonction $z \mapsto \frac{1}{\Gamma(z)}$ est une fonction entière. En dérivant alors cette égalité par rapport à λ , nous obtenons le résultat voulu pour l'intégrale de Laplace

$$\int_{\gamma_{\theta^+}} \xi^{\lambda-1} \log^p \xi e^{-\frac{\xi}{x}} d\xi$$

Les fonctions $x^\lambda \log^q x$ étant des constantes de résurgence pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ et tout $q \in \mathbb{N}$, l'isomorphisme de Borel-Laplace (proposition 1.21) permet d'affirmer que

$$\xi^{\lambda-1} \log^p \xi = \text{maj} \left(2i\pi \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} \frac{d^{p-k}}{d\lambda^{p-k}} \left(\frac{e^{-i\pi\lambda}}{\Gamma(1-\lambda)} \right) x^\lambda \log^k x \right)$$

ce qui termine la démonstration. ■

Lemme 2.30 *Soit $\tilde{\varphi}$ une fonction analytique à l'origine :*

$$\tilde{\varphi}(\xi) = \sum_{m \geq 0} \varphi_m \xi^m \in \mathbb{C}\{\xi\}$$

Nous supposons que $\tilde{\varphi}$ peut être prolongée analytiquement sur un secteur illimité d'axe d_{θ^+} avec une croissance exponentielle d'ordre au plus un à l'infini.

Alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ et tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\int_{\gamma_{\theta^+}} \tilde{\varphi}(\xi) \xi^{\lambda-1} \log^p \xi e^{-\frac{\xi}{x}} d\xi = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} s_{\theta^+}(\widehat{\varphi}_{p-k})(x) x^\lambda \log^k x$$

où les séries formelles

$$\widehat{\varphi}_\ell(x) = 2i\pi \sum_{m \geq 0} \frac{d^\ell}{dz^\ell} \left(\frac{e^{-i\pi z}}{\Gamma(1-z)} \right) \Big|_{z=m+\lambda} \varphi_m x^m \in \mathbb{C}[[x]]_1$$

sont 1-sommables dans la direction θ^+ .

Démonstration. Nous procédons par récurrence sur $p \geq 0$.

★ Supposons pour l'instant que $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$.

Pour $p = 0$, nous avons vu au paragraphe 2.3.2 que

$$\int_{\gamma_{\theta^+}} \widetilde{\varphi}(\xi) \xi^{\lambda-1} e^{-\frac{\xi}{x}} d\xi = s_{\theta^+}(\widehat{\varphi}_0)(x) x^\lambda$$

avec

$$\widehat{\varphi}_0(x) = 2i\pi e^{-i\pi\lambda} \sum_{m \geq 0} \frac{(-1)^m}{\Gamma(1-m-\lambda)} \varphi_m x^m = 2i\pi \sum_{m \geq 0} \left(\frac{e^{-i\pi z}}{\Gamma(1-z)} \right) \Big|_{z=m+\lambda} \varphi_m x^m$$

Supposons le résultat vrai jusqu'au rang $p-1$ et démontrons-le au rang p .

En utilisant le lemme 2.29, nous voyons que

$$\widehat{\varphi} = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} \widehat{\varphi}_{p-k} x^\lambda \log^k x$$

où les $\widehat{\varphi}_\ell$ sont ceux annoncés au lemme 2.30, admet $\widetilde{\varphi}(\xi) \xi^{\lambda-1} \log^p \xi$ pour majeur :

$$maj(\widehat{\varphi}) = \widetilde{\varphi}(\xi) \xi^{\lambda-1} \log^p \xi$$

D'après l'hypothèse sur $\widetilde{\varphi}$, ce majeur est holomorphe multiforme à l'origine et sa variation peut être prolongée analytiquement sur un secteur illimité d'axe d_{θ^+} avec une croissance exponentielle d'ordre au plus un à l'infini (c'est évident en utilisant les points 2 et 3 du lemme 1.33). Autrement dit, $\widehat{\varphi}$ est un élément de $\mathcal{H}_{\theta^+, \text{exp}}$ (proposition 1.23). D'autre part, d'après l'hypothèse de récurrence, les séries formelles $\widehat{\varphi}_{p-k}$ sont 1-sommables dans la direction θ^+ pour tout $k \in \{1, \dots, p\}$. La proposition 1.24, point 1, montre alors que les $\widehat{\varphi}_{p-k} x^\lambda \log^k x$ sont des éléments de $\mathcal{H}_{\theta^+, \text{exp}}$ pour tout $k \in \{1, \dots, p\}$. Il s'ensuit alors que $\widehat{\varphi}_p x^\lambda$ est un élément de $\mathcal{H}_{\theta^+, \text{exp}}$ (proposition 1.23), et donc la série formelle $\widehat{\varphi}_p$ est 1-sommable dans la direction θ^+ (proposition 1.26). Nous obtenons alors par le point 2 de la proposition 1.24 :

$$\int_{\gamma_{\theta^+}} \widetilde{\varphi}(\xi) \xi^{\lambda-1} \log^p \xi e^{-\frac{\xi}{x}} d\xi = \mathcal{L}_{\theta^+}(maj(\widehat{\varphi}))(x) = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} s_{\theta^+}(\widehat{\varphi}_{p-k})(x) x^\lambda \log^k x$$

ce qui donne le résultat.

★ Cette démonstration s'étend sans difficulté au cas où λ est un entier en utilisant le lemme 2.29 et en remarquant que $\frac{1}{\Gamma(-m)} = 0$ pour tout $m \in \mathbb{N}$. ■

Il résulte des deux lemmes 2.29 et 2.30 que

$$\mathcal{L}_{\theta^+}(\tau_\omega \tilde{f}^{[q]})(x) = \sum_{p=0}^{N_{\omega,0+q}} \beta_{\omega,p}^{[q]} \log^p x + \sum_{p=0}^{N_{\omega,0+q}} s_{\theta^+}(\widehat{h}_{\omega,p}^{[q]}) \log^p x + \sum_{\lambda \in \Lambda_\omega} \left(\sum_{p=0}^{N_{\omega,\lambda+q}} s_{\theta^+}(\widehat{H}_{\omega,\lambda,p}^{[q]}) \log^p x \right) x^\lambda$$

avec $\beta_{\omega,p}^{[q]} \in M_{n,1}(\mathbb{C})$, $\widehat{h}_{\omega,p}^{[q]} \in M_{n,1}(x\mathbb{C}[[x]]_1)$ et $\widehat{H}_{\omega,\lambda,p}^{[q]} \in M_{n,1}(\mathbb{C}[[x]]_1)$, ces séries étant 1-sommables dans la direction θ^+ . En comparant cette égalité avec (2.15) et en utilisant le lemme 2.25, nous obtenons le lemme 2.28.

Comme dans le cas où L est diagonale, les égalités (2.22) nous permettent d'explicitier les relations entre les coefficients de résurgence de $\tilde{f}^{[q]}$ à droite de ω et les multiplicateurs de Stokes $c_\theta^{[j;q]}$, $j \in J_\omega$. Le développement asymptotique à l'origine de l'intégrale de Laplace

$$\mathcal{L}_{\theta^+}(\tau_\omega \tilde{f}^{[q]})(x) = \int_{\gamma_{\theta^+}} \tau_\omega \tilde{f}^{[q]}(\xi) e^{-\frac{\xi}{x}} d\xi$$

est

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{L}}_{\theta^+}(\tau_\omega \tilde{f}^{[q]})(x) &= \sum_{p=0}^{N_{\omega,0+q}} \beta_{\omega,p}^{[q]} \log^p x + \sum_{\lambda \in \Lambda_\omega} \left(\sum_{p=0}^{N_{\omega,\lambda+q}} \gamma_{\omega,\lambda,p}^{[q]} \log^p x \right) x^\lambda \\ &\quad + \sum_{p=0}^{N_{\omega,0+q}} \widehat{h}_{\omega,p}^{[q]}(x) \log^p x + \sum_{\lambda \in \Lambda_\omega} \left(\sum_{p=0}^{N_{\omega,\lambda+q}} \widehat{K}_{\omega,\lambda,p}^{[q]}(x) \log^p x \right) x^\lambda \end{aligned}$$

avec $\beta_{\omega,p}^{[q]}, \gamma_{\omega,\lambda,p}^{[q]} \in M_{n,1}(\mathbb{C})$ et $\widehat{h}_{\omega,p}^{[q]}, \widehat{K}_{\omega,\lambda,p}^{[q]} \in M_{n,1}(x\mathbb{C}[[x]])$. Le coefficient du terme en x^{λ_j} de

$$x^{\lambda_j} \left(c_\theta^{[j;q]} - c_\theta^{[j;q-1]} \log x + \dots + \frac{(-1)^{q-1}}{(q-1)!} c_\theta^{[j;1]} \log^{q-1} x \right)$$

étant égal à $c_\theta^{[j;q]}$, nous voyons que, pour tout $\omega \in \Omega_\theta(\widehat{f})$ et tout $j \in J_\omega$:

1. si $\lambda_j = 0$, nous avons $c_\theta^{[j;q]} = \beta_{\omega,0}^{[j;q]}$
2. si $\lambda_j \neq 0$, nous avons $c_\theta^{[j;q]} = \gamma_{\omega,\lambda_j,0}^{[j;q]} = \widehat{H}_{\omega,\lambda_j,0}^{[j;q]}(0)$

Les deux matrices $\beta_{\omega,0}^{[q]}$ et $\gamma_{\omega,\lambda,0}^{[q]}$ sont calculables directement à partir des coefficients de résurgence de $\tilde{f}^{[q]}$ au point ω . Précisément, en utilisant le lemme 2.29, nous avons

$$\beta_{\omega,0}^{[q]} = \sum_{p=1}^{N_{\omega,0+q}} \kappa_p(0) \alpha_{\omega,p}^{[q]} \text{ et } \gamma_{\omega,\lambda,0}^{[q]} = \sum_{p=1}^{N_{\omega,\lambda+q}} \kappa_p(\lambda) \widetilde{H}_{\omega,\lambda,p}^{[q]}(0)$$

où le nombre complexe $\kappa_p(\lambda)$ est défini pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ par

$$\kappa_p(\lambda) = 2i\pi \frac{d^p}{dz^p} \left(\frac{e^{-i\pi z}}{\Gamma(1-z)} \right)_{|z=\lambda}$$

Il s'ensuit alors le

Théorème 2.31 Soit $q \in \{1, \dots, n_1\}$. Pour toute singularité $\omega \in \Omega_\theta(\widehat{f})$ de \widetilde{f} , nous considérons le prolongement analytique de $\widetilde{f}^{[q]}$ à droite de ω et nous notons

- $\alpha_{\omega,p}^{[q]} = \begin{bmatrix} \alpha_{\omega,p}^{[1;q]} \\ \vdots \\ \alpha_{\omega,p}^{[J;q]} \end{bmatrix}$ le coefficient de résurgence lié à $\frac{\log^p \xi}{\xi}$ avec $p \in \{0, \dots, N_{\omega,0} + q\}$
- $\widetilde{H}_{\omega,\lambda,p}^{[q]}(\xi) = \begin{bmatrix} \widetilde{H}_{\omega,\lambda,p}^{[1;q]}(\xi) \\ \vdots \\ \widetilde{H}_{\omega,\lambda,p}^{[J;q]}(\xi) \end{bmatrix}$ le coefficient de résurgence lié à $\xi^{\lambda-1} \log^p \xi$ avec $p \in \{0, \dots, N_{\omega,\lambda} + q\}$

Alors, pour tout $\omega \in \Omega_\theta(\widehat{f})$ et pour tout $j \in J_\omega$:

1. Si $\lambda_j = 0$, nous avons

$$c_\theta^{[j;q]} = \sum_{p=0}^{N_{\omega,0}+q} \kappa_p(0) \alpha_{\omega,p}^{[j;q]}$$

2. Si $\lambda_j \neq 0$, nous avons $\alpha_{\omega,p}^{[j;q]} = 0$ pour tout $p \in \{0, \dots, N_{\omega,0} + q\}$, $\lambda_j \in \Lambda_\omega$ et,

$$c_\theta^{[j;q]} = \sum_{p=0}^{N_{\omega,\lambda_j}+q} \kappa_p(\lambda_j) \widetilde{H}_{\omega,\lambda_j,p}^{[j;q]}(0)$$

Terminons ce paragraphe en reprenant les deux exemples du paragraphe 2.2.1. Ceux-ci sont très simples et nous pouvons calculer la valeur exacte des multiplicateurs de Stokes en déterminant directement les prolongements analytiques de \widetilde{f} à droite de ses singularités. Naturellement, ces deux exemples ne sont pas du tout généraux, mais ils illustrent convenablement le théorème 2.31, et notamment l'utilisation des nombres $\kappa_p(\lambda)$. Signalons tout de même ici que nous donnons au paragraphe 3.2 une méthode générale pour calculer de façon effective avec évaluation d'erreur tous les multiplicateurs de Stokes des systèmes de niveau unique 1 à coefficients rationnels dans le cas où la matrice L est sous forme de Jordan quelconque.

Exemple 1 Dans ce premier exemple, la matrice des exposants de monodromie formelle est nilpotente et admet un bloc de Jordan de dimension 1 et un bloc de Jordan de dimension 3. Nous calculons la valeur exacte des multiplicateurs de Stokes en déterminant directement les prolongements analytiques de \widetilde{f} par la droite.

Le système différentiel linéaire

$$[A] \quad x^2 \frac{dY}{dx} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ x^2 & 1 & x & 0 \\ x^2 & 0 & 1 & x \\ x^2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} Y$$

admet pour solution fondamentale formelle $\widehat{Y}(x) = \widehat{F}(x)x^L e^{Q(\frac{1}{x})}$ avec

$$\widehat{F}(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \widehat{f}_3 & 1 & 0 & 0 \\ \widehat{f}_2 & 0 & 1 & 0 \\ \widehat{f}_1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } Q\left(\frac{1}{x}\right) = \text{diag}\left(0, -\frac{1}{x}, -\frac{1}{x}, -\frac{1}{x}\right)$$

les \widehat{f}_j étant les uniques solutions séries formelles vérifiant $\widehat{f}_j(x) = O(x^2)$ du système

$$(*) \quad \begin{cases} x^2 \frac{df_1}{dx} - f_1 = x^2 \\ x^2 \frac{df_2}{dx} - f_2 = x^2 + x\widehat{f}_1 \\ x^2 \frac{df_3}{dx} - f_3 = x^2 + x\widehat{f}_2 \end{cases}$$

Le système $[A]$ admet deux directions anti-Stokes : \mathbb{R}^+ (déterminée par le point $\xi = 1$) et \mathbb{R}^- (déterminée par le point $\xi = -1$); et les matrices de Stokes associées sont définies par

$$C_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_0^{[2,1]} & 0 & 0 & 0 \\ c_0^{[2,2]} & 0 & 0 & 0 \\ c_0^{[2,3]} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } C_{-\pi} = 0$$

Grâce aux équations (*), nous pouvons déterminer de manière exacte le prolongement analytique de \widetilde{f} à droite de sa singularité $\xi = 1$. A l'aide d'une transformation de Borel, nous obtenons pour tout $\xi \in \mathbb{C}$ tel que $\text{Re}(\xi) > 1$:

$$\begin{cases} \widetilde{f}_1(\xi) = \frac{\xi}{\xi - 1} \\ \widetilde{f}_2(\xi) = \frac{2\xi + i\pi}{\xi - 1} + \frac{\log(\xi - 1)}{\xi - 1} \\ \widetilde{f}_3(\xi) = \frac{6\xi - \pi^2 + 4i\pi}{2(\xi - 1)} + \frac{(2 + i\pi)\log(\xi - 1)}{\xi - 1} + \frac{\log^2(\xi - 1)}{2(\xi - 1)} \end{cases}$$

puisque nous avons choisi une détermination du logarithme vérifiant : $\log x \in \mathbb{R}$ si $x \in \mathbb{R}_+^*$. Noter également que, comme nous avons évité la singularité $\xi = 1$ par la droite, l'hypothèse $\widetilde{f}_k(0) = 0$ pour $k \in \{1, 2, 3\}$ entraîne $\log(-1) = -i\pi$. Ainsi, modulo les fonctions analytiques à l'origine, le prolongement analytique de \widetilde{f} à droite du point

$\omega = 1$ est donné par

$$\tau_1 \tilde{f}(\xi) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{6 - \pi^2 + 4i\pi}{\xi} + (2 + i\pi) \frac{\log \xi}{\xi} + \frac{\log^2 \xi}{2\xi} \\ \frac{2 + i\pi}{\xi} + \frac{\log \xi}{\xi} \\ \frac{1}{\xi} \end{bmatrix}$$

Nous obtenons ainsi par le théorème 2.31

$$\begin{cases} c_0^{[2,1]} = (6 - \pi^2 + 4i\pi)\kappa_0(0) + (2 + i\pi)\kappa_1(0) + \frac{1}{2}\kappa_2(0) \\ c_0^{[2,2]} = (2 + i\pi)\kappa_0(0) + \kappa_1(0) \\ c_0^{[2,3]} = \kappa_0(0) \end{cases}$$

où les nombres $\kappa_0(0)$, $\kappa_1(0)$ et $\kappa_2(0)$ sont définis par

$$\begin{cases} \kappa_0(0) = 2i\pi \\ \kappa_1(0) = 2\pi^2 - 2i\pi\gamma \\ \kappa_2(0) = -4\pi^2\gamma - \frac{7i\pi^3}{3} + 2i\pi\gamma^2 \end{cases}$$

Par suite,

$$\begin{cases} c_0^{[2,1]} = -4\pi^2 + i \left(12\pi - \frac{7\pi^3}{6} - 4\pi\gamma + \pi\gamma^2 \right) \\ c_0^{[2,2]} = 2i\pi(2 - \gamma) \\ c_0^{[2,3]} = 2i\pi \end{cases}$$

Exemple 2 Dans ce second exemple, la matrice des exposants de monodromie formelle admet deux blocs de Jordan de dimension 2, l'un de valeur propre nulle et l'autre de valeur propre $\frac{1}{2}$. Nous calculons la valeur exacte des multiplicateurs de Stokes en déterminant directement les prolongements analytiques de \tilde{f} par la droite.

Le système différentiel linéaire

$$x^2 \frac{dY}{dx} = \begin{bmatrix} 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \frac{x}{2} & x \\ x^2 & 0 & 0 & 1 + \frac{x}{2} \end{bmatrix} Y$$

admet pour solution fondamentale formelle $\widehat{Y}(x) = \widehat{F}(x)x^L e^{Q(\frac{1}{x})}$ avec

$$\widehat{F}(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \widehat{f}_2 & \widehat{f}_4 & 1 & 0 \\ \widehat{f}_1 & \widehat{f}_3 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad \text{et } Q\left(\frac{1}{x}\right) = \text{diag}\left(0, 0, -\frac{1}{x}, -\frac{1}{x}\right)$$

les \widehat{f}_j étant les uniques solutions séries formelles vérifiant $\widehat{f}_j(x) = O(x^2)$ du système

$$(*) \quad \begin{cases} x^2 \frac{df_1}{dx} - \left(1 + \frac{x}{2}\right) f_1 = x^2 & , & x^2 \frac{df_2}{dx} - \left(1 + \frac{x}{2}\right) f_2 = x \widehat{f}_1 \\ x^2 \frac{df_3}{dx} - \left(1 + \frac{x}{2}\right) f_3 = -x \widehat{f}_1 & & x^2 \frac{df_4}{dx} - \left(1 + \frac{x}{2}\right) f_4 = x \widehat{f}_3 - x \widehat{f}_2 \end{cases}$$

A nouveau, ce système admet pour directions anti-Stokes la direction \mathbb{R}^+ (déterminée par le point $\xi = 1$) et la direction \mathbb{R}^- (déterminée par le point $\xi = -1$); et les matrices de Stokes associées sont définies par

$$C_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_0^{[2,1;1]} & c_0^{[2,1;2]} & 0 & 0 \\ c_0^{[2,2;1]} & c_0^{[2,2;2]} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et } C_{-\pi} = 0$$

Grâce aux équations (*), nous pouvons déterminer de manière exacte le prolongement analytique de \widetilde{f} à droite de sa singularité $\xi = 1$. A l'aide d'une transformation de Borel, nous obtenons pour tout $\xi \in \mathbb{C}$ tel que $\text{Re}(\xi) > 1$:

$$\begin{cases} \widetilde{f}_1(\xi) = 2i(\xi - 1)^{-\frac{1}{2}} + 2 \\ \widetilde{f}_2(\xi) = (-2\pi + 4i)(\xi - 1)^{-\frac{1}{2}} + 2i(\xi - 1)^{-\frac{1}{2}} \log(\xi - 1) + 4 & , & \widetilde{f}_3(\xi) = -\widetilde{f}_2(\xi) \\ \widetilde{f}_4(\xi) = (8\pi - 16i + 2i\pi^2)(\xi - 1)^{-\frac{1}{2}} + (4\pi - 8i)(\xi - 1)^{-\frac{1}{2}} \log(\xi - 1) \\ \quad - 2i(\xi - 1)^{-\frac{1}{2}} \log^2(\xi - 1) - 16 \end{cases}$$

puisqu'il nous avons choisi une détermination du logarithme vérifiant : $\log x \in \mathbb{R}$ si $x \in \mathbb{R}_+^*$. Comme dans l'exemple précédent, nous avons $\log(-1) = -i\pi$ et $(-1)^{\frac{1}{2}} = e^{-\frac{i\pi}{2}} = -i$ (nous évitons la singularité $\xi = 1$ par la droite et nous avons par hypothèse $\widetilde{f}_k(0) = 0$ pour $k \in \{1, 2, 3, 4\}$). Ainsi, modulo les fonctions analytiques à l'origine, le prolongement analytique de f à droite du point $\omega = 1$ est donné par

$$\tau_1 \widetilde{f}(\xi) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ (-2\pi + 4i)\xi^{-\frac{1}{2}} + 2i\xi^{-\frac{1}{2}} \log \xi & (8\pi - 16i + 2i\pi^2)\xi^{-\frac{1}{2}} + (4\pi - 8i)\xi^{-\frac{1}{2}} \log \xi - 2i\xi^{-\frac{1}{2}} \log^2 \xi \\ 2i\xi^{-\frac{1}{2}} & (2\pi - 4i)\xi^{-\frac{1}{2}} - 2i\xi^{-\frac{1}{2}} \log \xi \end{bmatrix}$$

Nous obtenons ainsi par le théorème 2.31

$$\left\{ \begin{array}{l} c_0^{[2,1;1]} = (-2\pi + 4i)\kappa_0 \left(\frac{1}{2}\right) + 2i\kappa_1 \left(\frac{1}{2}\right) \\ c_0^{[2,2;1]} = 2i\kappa_0 \left(\frac{1}{2}\right) \\ c_0^{[2,1;2]} = (8\pi - 16i + 2i\pi^2)\kappa_0 \left(\frac{1}{2}\right) + (4\pi - 8i)\kappa_1 \left(\frac{1}{2}\right) - 2i\kappa_2 \left(\frac{1}{2}\right) \\ c_0^{[2,2;2]} = -c_0^{[2,1;1]} = (2\pi - 4i)\kappa_0 \left(\frac{1}{2}\right) - 2i\kappa_1 \left(\frac{1}{2}\right) \end{array} \right.$$

où les nombres $\kappa_0 \left(\frac{1}{2}\right)$, $\kappa_1 \left(\frac{1}{2}\right)$ et $\kappa_2 \left(\frac{1}{2}\right)$ sont définis par

$$\left\{ \begin{array}{l} \kappa_0 \left(\frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{\pi} \\ \kappa_1 \left(\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{\pi}(\gamma + 2 \log 2 + i\pi) \\ \kappa_2 \left(\frac{1}{2}\right) = -\sqrt{\pi}(3\pi^2 - 2\gamma^2 - 8\gamma \log 2 - 8 \log^2 2 - 4i\pi\gamma - 8i\pi \log 2) \end{array} \right.$$

Par suite,

$$\left\{ \begin{array}{l} c_0^{[2,1;1]} = 4i\sqrt{\pi}(2 - \gamma - 2 \log 2) \\ c_0^{[2,2;1]} = 4i\sqrt{\pi} \\ c_0^{[2,1;2]} = -2i\sqrt{\pi}(16 - \pi^2 - 8\gamma + 2\gamma^2 - 16 \log 2 + 8 \log^2 2 + 8\gamma \log^2 2) \\ c_0^{[2,2;2]} = -4i\sqrt{\pi}(2 - \gamma - 2 \log 2) \end{array} \right.$$

2.A Appendice 2.A. Singularités de \tilde{f} et microsolutions (ou majeurs)

Dans cet appendice, nous reprenons l'étude des singularités de \tilde{f} en rappelant le point de vue de J. Ecalle, tel qu'exposé par B. Malgrange dans [Mal89] et [Mal91-1], sur les microsolutions des équations de type exponentiel, *i.e.*, à coefficients polynomiaux et de niveaux inférieurs ou égaux à 1 (théorème 2.33).

La description des singularités de \tilde{f} par cette méthode est plus rapide que celle proposée au paragraphe 2.2, mais elle est moins précise : nous obtenons ici simplement

le fait que les singularités sont de la classe de Nilsson. Néanmoins, cette propriété suffit à établir les relations entre les multiplicateurs de Stokes de la matrice c_θ et les coefficients de résurgence de \tilde{f} en ses singularités (la démonstration du paragraphe 2.3 s'adapte sans difficulté à cette situation). Nous pouvons ainsi retrouver les résultats plus précis du théorème 2.24, mais les calculs pour y parvenir sont plus lourds.

Nous allons reprendre cette démonstration dans le cas des systèmes de niveau unique $r \geq 2$ (chapitre 4), puis dans le cas des systèmes à deux niveaux simultanés (1, 2) (chapitre 6). Dans le cas des niveaux simultanés (1, 2), cette approche nous permet de décrire avec la précision suffisante les singularités de niveau 2 ; celles de niveau 1 sont accessibles par la méthode du paragraphe 2.2.

Commençons par rappeler brièvement les résultats essentiels sur les microsolutions des équations de type exponentiel tels qu'on peut les trouver dans [E81-1], [Mal89] et [Mal91-1].

2.A.1 Rappels sur les microfonctions

Pour le confort du lecteur, nous esquissons ci-dessous la théorie des microfonctions (majeurs de J. Ecalle) telle qu'elle est présentée par B. Malgrange dans [Mal74]. Pour plus de détails, voir [Mal74], [Mal85], [Mal91-1] et [Mal91-2].

Microfonction en $\alpha \in \mathbb{C}$

Soit D un disque ouvert de centre 0, $D^* = D \setminus \{0\}$ et \tilde{D}^* le revêtement universel de D^* défini à partir d'un point base a élément de D^* . Les espaces des fonctions analytiques sur D et \tilde{D}^* sont notés respectivement $\mathcal{O}(D)$ et $\mathcal{O}(\tilde{D}^*)$. Le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}(\tilde{D}^*) & \xrightarrow{id-T} & \mathcal{O}(\tilde{D}^*) \\ & \searrow \text{can} & \nearrow \text{var} \\ & \mathcal{C}(D) & \end{array}$$

La notation $\mathcal{C}(D) = \mathcal{O}(\tilde{D}^*)/\mathcal{O}(D)$ désigne l'espace des fonctions analytiques sur \tilde{D}^* modulo celles qui induisent des fonctions analytiques sur D . L'application can est la projection canonique dans le quotient, l'application var est la variation : $\text{var}(\tilde{\varphi})(\xi) = \tilde{\varphi}(\xi) - \tilde{\varphi}(\xi e^{-2i\pi})$; et T est la monodromie le long d'un lacet d'origine et d'extrémité a tournant une fois dans le sens indirect autour de l'origine : $T(\tilde{\varphi})(\xi) = \tilde{\varphi}(\xi e^{-2i\pi})$.

En faisant tendre le rayon du disque D vers 0 (et le point base a vers 0 suivant un rayon), on obtient les espaces \mathcal{O} , $\tilde{\mathcal{O}}$ et \mathcal{C} –appelés respectivement espace des germes de fonctions analytiques à l'origine, espace des germes de fonctions multiformes à l'origine et espace des microfonctions à l'origine– et les flèches

$$\tilde{\mathcal{O}} \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{can}} \\ \xleftrightarrow{\text{var}} \\ \xrightarrow{\text{var}} \end{array} \mathcal{C}$$

En accord avec le choix du paragraphe 2.3, nous adoptons pour T la convention de J. Ecalle dans [E81-1]. En conséquence, nous choisissons $id - T$ et non pas $T - id$ comme B. Malgrange dans [Mal74].

Pour $\alpha \in \mathbb{C}$, les translatsés des espaces précédents au point α sont notés respectivement \mathcal{O}_α , $\tilde{\mathcal{O}}_\alpha$ et \mathcal{C}_α . On continue d'appeler can et var les applications canonique et de variation correspondantes.

Transformée de Laplace d'une microfonction

Soit $\Phi \in \mathcal{C}_\alpha$ et supposons que $\text{var}(\Phi)$ peut être prolongée analytiquement en une fonction holomorphe $\tilde{\varphi}$ à croissance exponentielle d'ordre 1 à l'infini le long de la demi-droite $d_{\alpha,\theta}$ issue de α et de direction θ . La transformée de Laplace $\mathcal{L}_{\alpha,\theta}(\Phi)$ de Φ dans la direction θ est alors définie de la manière suivante :

- on choisit un représentant $\tilde{\Phi}$ de Φ dans $\tilde{\mathcal{O}}_\alpha$, *i.e.*, tel que $\text{can}(\tilde{\Phi}) = \Phi$;
- on choisit $\varepsilon > 0$ et on désigne par $\gamma'_{\alpha,\theta,\varepsilon}$ (resp. $\gamma''_{\alpha,\theta,\varepsilon}$) le cercle de centre α et de rayon ε parcouru une fois dans le sens inverse des aiguilles d'une montre à partir de $\alpha + \varepsilon e^{i(\theta-2\pi)}$ (resp. l'intervalle $[\alpha + \varepsilon e^{i\theta}, \infty e^{i\theta}[$ sur $d_{\alpha,\theta}$) (figure 2.7) ;
- on pose

$$\mathcal{L}_{\alpha,\theta}(\Phi)(x) = \int_{\gamma'_{\alpha,\theta,\varepsilon}} \tilde{\Phi}(\xi) e^{-\frac{\xi}{x}} d\xi + \int_{\gamma''_{\alpha,\theta,\varepsilon}} \tilde{\varphi}(\xi) e^{-\frac{\xi}{x}} d\xi$$

Pour $\varepsilon > 0$ assez petit, cette intégrale définit une fonction holomorphe sur un disque ouvert d'axe θ dont le bord passe par 0, puisque $\tilde{\varphi}$ est à croissance exponentielle d'ordre 1 à l'infini le long de $d_{\alpha,\theta}$. De plus, $\mathcal{L}_{\alpha,\theta}(\Phi)$ ne dépend ni de $\tilde{\Phi}$, ni de ε , mais uniquement de Φ .

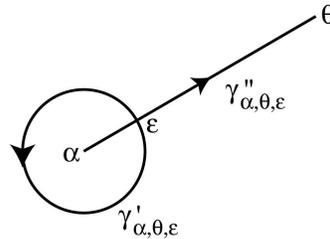


Figure 2.7 - chemin d'intégration de $\mathcal{L}_{\alpha,\theta}(\Phi)$

Dans la terminologie de J. Ecalle ([E81-1]), Φ est appelé majeur de $\mathcal{L}_{\alpha,\theta}(\Phi)$ (ou de son développement asymptotique à l'origine $\hat{\mathcal{L}}_{\alpha,\theta}(\Phi)$) et $\tilde{\varphi}$ mineur de Φ . Par abus de langage, on appelle aussi majeur de $\mathcal{L}_{\alpha,\theta}(\Phi)$ (ou de $\hat{\mathcal{L}}_{\alpha,\theta}(\Phi)$) tout représentant $\tilde{\Phi}$ de Φ et on s'autorise à noter $\tilde{\Phi} = \text{maj}(\mathcal{L}_{\alpha,\theta}(\Phi))$ (ou $\tilde{\Phi} = \text{maj}(\hat{\mathcal{L}}_{\alpha,\theta}(\Phi))$).

Microfonction de la classe de Nilsson

On étend la notion de fonction de la classe de Nilsson en 0 (paragraphe 2.2.1) de la façon suivante : une microfonction Φ est dite appartenir à la classe de Nilsson en 0 si

l'un de ses représentants $\tilde{\Phi}$ (donc tout représentant) appartient à la classe de Nilsson en 0. On note $\tilde{\Phi} \in Nil_0$ et $\Phi \in \overline{Nil_0}$. En un point $\alpha \in \mathbb{C}$, on note Nil_α et $\overline{Nil_\alpha}$ les translatés respectifs de Nil_0 et $\overline{Nil_0}$.

Avec les notations ci-dessus, on peut énoncer :

Proposition 2.32 ([E81-1], [Mal85, page 265])

1. Soient $\hat{\varphi} \in \mathbb{C}[[x]]_1$ une série de type Gevrey de niveau 1, $\lambda \in \mathbb{C}$, $p \in \mathbb{N}$. Soit $\tilde{\Phi} = \text{maj}(\hat{\varphi}(x)x^\lambda \log^p x)$ un majeur de $\hat{\varphi}(x)x^\lambda \log^p x$. Alors, la microfonction $\text{can}(\tilde{\Phi})$ définie par $\tilde{\Phi}$ appartient à la classe de Nilsson $\overline{Nil_0}$.
2. Réciproquement, si $\Phi \in \overline{Nil_0}$ et si $\tilde{\varphi} = \text{var}(\Phi)$ admet un prolongement analytique à croissance exponentielle d'ordre 1 à l'infini le long d'une demi-droite d_θ , alors le développement asymptotique à l'origine de $\mathcal{L}_\theta(\Phi)$ est de la forme $\sum_{\text{finie}} \hat{\varphi}_{\lambda,p}(x)x^\lambda \log^p x$ avec $\hat{\varphi}_{\lambda,p} \in \mathbb{C}[[x]]_1$, $\lambda \in \mathbb{C}$ et $p \in \mathbb{N}$.

Rappelons (voir paragraphe 2.2) que dans l'étude des systèmes de niveau unique 1, seules interviennent les microfonctions de la classe de Nilsson en $\alpha \in \mathbb{C}$.

2.A.2 Equations de type exponentiel et microsolutions

Soient $p = a_n(x)\partial_x^n + \dots + a_1(x)\partial_x + a_0(x)$ une équation de type exponentiel et \tilde{p} sa transformée de Borel. Rappelons que celle-ci est obtenue en substituant respectivement ∂_ξ à $\frac{1}{x}$ et ξ à $x^2\partial_x$. En particulier, $\tilde{p} = b_m(\xi)\partial_\xi^m + \dots + b_1(\xi)\partial_\xi + b_0(\xi)$ est de type exponentiel et le degré du polynôme $b_m(\xi)$ est égal à l'ordre de p : $\deg(b_m) = n$. Contrairement à ce qui se passe à l'infini, la présence du $x^2\partial_x$ dans les formules de passage de p à \tilde{p} ne permet pas d'énoncer la réciproque, à savoir que $\deg(a_n) = m$.

Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ les points singuliers de \tilde{p} , *i.e.*, les zéros de b_m , et m_1, \dots, m_s leur ordre de multiplicité. L'espace des microsolutions en α_j de \tilde{p} , *i.e.*, l'espace des $\Phi \in \mathcal{C}_{\alpha_j}$ vérifiant $\tilde{p}\Phi = 0$ (dans l'espace des microfonctions), est de dimension m_j ([Ka83]).

Soit θ une direction telle que les demi-droites $d_{\alpha_j, \theta}$ ne se rencontrent pas. Si Φ est une microsolution en α_j de \tilde{p} , alors $\text{var}(\Phi) = \tilde{\varphi}$ est une vraie solution de l'équation $\tilde{p}\tilde{y} = 0$, et elle admet un prolongement analytique à croissance exponentielle d'ordre 1 à l'infini le long de $d_{\alpha_j, \theta}$, puisque \tilde{p} est de type exponentiel. Ainsi, la transformée de Laplace $\mathcal{L}_{\alpha_j, \theta}(\Phi)$ de Φ est bien définie et elle est solution de l'équation $py = 0$.

Les solutions de l'équation $py = 0$ sont alors obtenues de la manière suivante :

Théorème 2.33 (J. Ecalle, B. Malgrange) Soit θ une direction telle que les demi-droites $d_{\alpha_j, \theta}$ ne se rencontrent pas. Pour tout $j \in \{1, \dots, s\}$, soit $(\Phi_{\alpha_j, k})_{1 \leq k \leq m_j}$ une base de microsolutions en α_j de \tilde{p} .

Alors, les $\mathcal{L}_{\alpha_j, \theta}(\Phi_{\alpha_j, k})$ forment une base de solutions de l'équation $py = 0$.

Pour une démonstration de ce résultat, nous renvoyons à [Mal89], [Mal91-1, théorème 2.2] ou [Mal91-2, page 197]. La transformée de Laplace définit donc un isomorphisme entre l'ensemble des microsolutions de \tilde{p} et l'ensemble des solutions de p .

Nous utilisons partiellement ce théorème sous la forme suivante :

Corollaire 2.34 *Soit $(\hat{\varphi}_1, \dots, \hat{\varphi}_n)$ une base de solutions formelles de p :*

$$\hat{\varphi}_j = \hat{\psi}_j e^{-\frac{\alpha_j}{x}} \text{ avec } \alpha_j \in \mathbb{C} \text{ et } \hat{\psi}_j \in x^{\mu_j} e^{P\left(\frac{1}{x^{1/k_j}}\right)} \mathbb{C}[[x]][\log x]$$

où $\mu_j \in \mathbb{C}$ et où $P_j(x)$ est un élément de $x\mathbb{C}[x]$ de degré inférieur à $k_j - 1$.

Pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, choisissons un majeur $\text{maj}(\hat{\psi}_j)$ de $\hat{\psi}_j$ et définissons $\tilde{\Phi}_j$ par

$$\tilde{\Phi}_j = \tau_{-\alpha_j} \text{maj}(\hat{\psi}_j)$$

$\tilde{\Phi}_j$ est un majeur de $\hat{\varphi}_j$ et il définit une fonction holomorphe multiforme en α_j .

Une base de microsolutions de \tilde{p} est alors donnée par

$$(\text{can}(\tilde{\Phi}_1), \dots, \text{can}(\tilde{\Phi}_n))$$

Rappelons que les majeurs $\text{maj}(\hat{\psi}_j)$ définissent toujours une fonction de *détermination finie*, i.e., que l'on peut les écrire sous la forme

$$\text{maj}(\hat{\psi}_j)(\xi) = \sum_{\text{finie}} \chi_{\lambda,p}(\xi) \xi^\lambda \log^p \xi$$

avec $\chi_{\lambda,p}$ holomorphes sur un disque pointé à l'origine, $\lambda \in \mathbb{C}$ et $p \in \mathbb{N}$. De plus, ils sont de la classe de Nilsson si, et seulement si, \tilde{p} est à singularités régulières (voir par exemple [In56]). C'est en particulier le cas lorsque l'équation p est de niveau unique 1.

2.A.3 Application à la description des singularités de \tilde{f}

Considérons un système différentiel linéaire à coefficients méromorphes à l'origine

$$[A] \quad x^2 \frac{dY}{dx} = A(x)Y \text{ avec } A(x) \in M_n(\mathbb{C}\{x\})$$

de solution fondamentale formelle $\hat{Y}(x) = \hat{F}(x)x^L e^{Q(\frac{1}{x})}$ avec

- ★ $\hat{F}(x) = I_n + O(x^2) \in M_n(\mathbb{C}[[x]])$;
- ★ $L = \bigoplus_{j=1}^J L_j$, où chaque L_j est un bloc de Jordan de L de dimension n_j et de valeur propre λ_j (nous supposons comme précédemment $\lambda_1 = 0$) ;
- ★ $Q(\frac{1}{x}) = \bigoplus_{j=1}^J \left(-\frac{a_j}{x} I_{n_j}\right)$ de sorte que $a_1 = 0$.

Rappelons que, la matrice \hat{F} étant découpée comme L , nous notons \hat{f} les n_1 premières colonnes de \hat{F} et que le résultat démontré ici sur les singularités de son mineur \tilde{f} s'étend sans difficulté aux autres blocs de colonnes de \hat{F} en permutant ceux-ci avec \hat{f} et en renormalisant les exponentielles et les exposants de monodromie formelle correspondants (voir l'introduction du chapitre 2). Le théorème d'Ecalte-Malgrange (théorème

2.32) permet de retrouver le résultat du théorème 2.24 qui établit l'appartenance du mineur \tilde{f} de \hat{f} à la classe de Nilsson en chacune de ses singularités.

Le lemme du vecteur cyclique ([D70]) et le théorème d'algébrisation de Birkhoff ([Bir13], [Si90]) établissent l'existence d'une matrice $P \in GL_n(\mathbb{C}\{x\}[\frac{1}{x}])$ telle que le système de jauge

$$[{}^{P^{-1}}A] \quad x^2 \frac{dZ}{dx} = (P^{-1}AP - x^2 P^{-1}P')Z$$

obtenu par la transformation de jauge $Z = P^{-1}Y$ soit le système compagnon d'une équation différentielle linéaire (E) d'ordre n à coefficients polynomiaux. Une solution fondamentale formelle de cette équation est alors

$$\hat{Z}(x) = \hat{G}(x)x^L e^{Q(\frac{1}{x})} \text{ avec } \hat{G}(x) = P^{-1}(x)\hat{F}(x) \in M_n(\mathbb{C}[[x]][x^{-1}])$$

En particulier, \hat{G} est une fonction résurgente, puisque \hat{F} l'est. De plus, l'équation (E) est de niveau unique 1 et donc de type exponentiel.

Décomposons $\hat{G} = [\hat{G}_1 \ \cdots \ \hat{G}_J]$ en J blocs de colonnes \hat{G}_j : le nombre de colonnes de chaque bloc \hat{G}_j est égal à la taille du $j^{\text{ème}}$ bloc de Jordan L_j de L . Nous avons alors

$$(2.23) \quad \hat{Z}(x) = \left[\hat{G}_1(x)x^{L_1} \ \hat{G}_2(x)x^{L_2}e^{-\frac{a_2}{x}} \ \cdots \ \hat{G}_J(x)x^{L_J}e^{-\frac{a_J}{x}} \right]$$

avec $\hat{G}_j(x) \in M_{n_j, n_j}(\mathbb{C}[[x]][\frac{1}{x}])$ pour tout $j \in \{1, \dots, J\}$. Pour montrer que la transformée de Borel \tilde{f} de \hat{f} appartient à la classe de Nilsson en chacune de ses singularités ω , il suffit d'établir que le prolongement analytique de \tilde{G}_1 à droite de ω est un élément de Nil_ω . En effet, \tilde{f} est de la forme $\tilde{f} = \tilde{P} * \tilde{G}_1$ avec

$$\tilde{P} = \sum_{k=0}^v p_k \delta^{(k)} + \tilde{e}$$

où p_k est un élément de \mathbb{C} , $\delta^{(k)}$ la dérivée $k^{\text{ème}}$ de la distribution de Dirac à l'origine et \tilde{e} une fonction entière.

Quitte à multiplier par une puissance convenable de x , nous pouvons supposer que, pour tout $j \in \{1, \dots, J\}$ et tout $q \in \{1, \dots, n_j\}$, le premier terme $\hat{g}_{j,q}$ de la $q^{\text{ème}}$ colonne de \hat{G}_j est un élément de $\mathbb{C}[[x]]_1$, et plus précisément une série formelle résurgente. $[{}^{P^{-1}}A]$ étant le système compagnon de l'équation (E) , la décomposition (2.23) de la solution fondamentale formelle $\hat{Z}(x)$ de $[{}^{P^{-1}}A]$ montre qu'une base de solutions formelles de (E) est de la forme $(\hat{z}_{1,1}, \dots, \hat{z}_{1,n_1}, \hat{z}_{2,1}, \dots, \hat{z}_{J,1}, \dots, \hat{z}_{J,n_J})$ avec

$$\hat{z}_{j,q}(x) = \left(\sum_{\ell=1}^q \hat{g}_{j,\ell}(x)x^{\lambda_j} \frac{\log^{q-\ell} x}{(q-\ell)!} \right) e^{-\frac{a_j}{x}}$$

Les singularités de l'équation transformée de Borel (\tilde{E}) de (E) sont les points $\xi = a_j$ avec $j \in \{1, \dots, J\}$. A chacune des solutions formelles $\hat{z}_{j,q}$ correspond une microsolution de (\tilde{E}) au point a_j (corollaire 2.34). Précisément, cette microsolution est $\text{can}(\mathcal{N}_{a_j,q})$ avec

$$\mathcal{N}_{a_j,q} = \tau_{-a_j} \text{maj} \left(\sum_{\ell=1}^q \hat{g}_{j,\ell}(x) x^{\lambda_j} \frac{\log^{q-\ell} x}{(q-\ell)!} \right) \in \text{Nil}_{a_j}$$

et une base de microsolutions en une singularité ω de (\tilde{E}) s'écrit

$$(\text{can}(\mathcal{N}_{a_j,q}); 1 \leq q \leq n_j)_{j;a_j=\omega} \subset \overline{\text{Nil}_\omega}$$

Fixons à présent une singularité ω de \tilde{f} , *i.e.*, une singularité de \tilde{G}_1 et de (\tilde{E}), et étudions le prolongement analytique à droite de ω de \tilde{G}_1

Prolongement analytique à droite de ω de la première colonne $\tilde{G}_{1,1}$ de \tilde{G}_1

La première colonne de $\hat{Z}(x)$ étant $\begin{bmatrix} \hat{z}_{1,1} \\ \vdots \\ \frac{d^n \hat{z}_{1,1}}{dx^n} \end{bmatrix}$ avec $\hat{z}_{1,1} = \hat{g}_{1,1}$, nous avons

$$\hat{G}_{1,1} = \begin{bmatrix} \hat{g}_{1,1} \\ \vdots \\ \frac{d^n \hat{g}_{1,1}}{d\xi^n} \end{bmatrix}$$

Le majeur

$$\text{maj}(\hat{z}_{1,1}) = \frac{\tilde{g}_{1,1} \log \xi}{2\pi i}$$

de $\hat{z}_{1,1}$ est une microsolution en 0 de (\tilde{E}) (corollaire 2.34). Sa variation $\tilde{g}_{1,1}$ est donc une solution de (\tilde{E}). Par suite, son prolongement analytique définit une microsolution de (\tilde{E}) en ω qui appartient à la classe de Nilsson Nil_ω . Les différents termes de $\tilde{G}_{1,1}$ étant obtenus à l'aide de la relation classique :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathcal{B} \left(\frac{d^k \hat{g}_{1,1}}{dx^k} \right) = \frac{d^{k+1}}{d\xi^{k+1}} \left(\xi^k \frac{d^{k-1} \tilde{g}_{1,1}}{d\xi^{k-1}} \right)$$

(à $x^{k+1} \frac{d^k}{dx^k}$ correspond $\xi^k \frac{d^{k-1}}{d\xi^{k-1}}$ par transformation de Borel) et l'algèbre Nil_ω étant stable par dérivation, cette propriété s'étend à $\tilde{G}_{1,1}$ tout entier.

Prolongement analytique à droite de ω de la deuxième colonne $\tilde{G}_{1,2}$ de \tilde{G}_1

Dans le cas où le bloc de Jordan L_1 de L n'est pas de dimension 1 (*i.e.*, $n_1 \geq 2$), la deuxième colonne de $\hat{Z}(x)$ est de la forme $\hat{G}_{1,2} + \hat{G}_{1,1} \log x$.

Par définition du système compagnon, nous avons

$$\widehat{G}_{1,2} + \widehat{G}_{1,1} \log x = \begin{bmatrix} \widehat{z}_{1,2} \\ \vdots \\ \frac{d^n \widehat{z}_{1,2}}{dx^n} \end{bmatrix}$$

avec $\widehat{z}_{1,2} = \widehat{g}_{1,2} + \widehat{g}_{1,1} \log x$, d'où

$$\widehat{G}_{1,2} = \begin{bmatrix} \widehat{g}_{1,2} \\ \widehat{g}'_{1,2} + \frac{\widehat{g}_{1,1}}{x} \\ \vdots \\ \frac{d^n \widehat{g}_{1,2}}{dx^n} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k (n-1)!}{(n-1-k)! x^{k+1}} \frac{d^{n-1-k} \widehat{g}_{1,2}}{dx^{n-1-k}} \end{bmatrix}$$

Le mineur $\widetilde{g}_{1,2}$ de $\widehat{g}_{1,2}$ appartient à la classe de Nilsson Nil_ω . En effet, $\widehat{g}_{1,2}$ s'écrit $\widehat{g}_{1,2} = \widehat{z}_{1,2} - \widehat{g}_{1,1} \log x$ et nous savons que $\widehat{z}_{1,2}$ et $\widehat{g}_{1,1}$ ont des mineurs appartenant à la classe de Nilsson Nil_ω . Le même résultat s'étend aux autres termes de $\widehat{G}_{1,2}$ par stabilité de l'algèbre Nil_ω par dérivation, puisque ceux-ci sont de la forme

$$\sum_{\ell=0}^{p_1} \alpha_\ell(\xi) \frac{d^\ell \widetilde{g}_{1,1}}{d\xi^\ell} + \sum_{\ell=0}^{p_2} \beta_\ell(\xi) \frac{d^\ell \widetilde{g}_{1,2}}{d\xi^\ell}$$

avec $\alpha_\ell, \beta_\ell \in \mathbb{C}[\xi]$ et $p_1, p_2 \in \mathbb{N}$ convenables.

Cette démonstration s'étendant sans difficulté aux autres colonnes de \widetilde{G}_1 , nous retrouvons bien le fait que \widetilde{G}_1 , et donc \widetilde{f} , appartiennent à la classe de Nilsson Nil_ω pour toute singularité ω de \widetilde{f} .

2.B Appendice 2.B. Démonstration du lemme de Grönwall

Dans cet appendice, nous donnons une démonstration du lemme de Grönwall (lemme 2.2) en adaptant celle de J.-C. Yoccoz ([Yoc]) donnée dans le cadre d'une variable réelle.

Fixons $\xi \in \Delta$. Le chemin Λ_ξ étant paramétré par la longueur de courbe, nous avons

$$\Lambda_\xi(0) = 0, \Lambda_\xi(s_{\xi_0}) = \xi_0, \Lambda_\xi(s_\xi) = \xi, |\Lambda_\xi(s)| \leq s \text{ et } |\Lambda'_\xi(s)| = 1$$

La fonction φ est holomorphe sur Δ et satisfait à l'inégalité différentielle

$$\forall s \in [s_{\xi_0}, s_\xi], |\varphi'(\Lambda_\xi(s))| \leq u |\varphi(\Lambda_\xi(s))| + v(s)$$

avec $u \in \mathbb{R}^+$ et v fonction entière à coefficients positifs ou nuls.

L'unique solution ψ de l'équation $\psi' = u\psi + v(\xi)$ de condition initiale $\psi(0) \in \mathbb{R}^+$ est clairement une fonction entière à coefficients positifs ou nuls. Sa restriction à \mathbb{R}^+ définit donc une fonction croissante et nous avons en particulier $\psi(0) \leq \psi(s_{\xi_0})$.

En adaptant la démonstration de J.-C. Yoccoz dans [Yoc], nous établissons, dans le cas où $|\varphi(\xi_0)| \leq \psi(0)$, l'inégalité :

$$\forall s \in [s_{\xi_0}, s_{\xi}], |\varphi(\Lambda_{\xi}(s))| \leq \psi(s)$$

Premier cas : $u = 0$

Soit $s \in [s_{\xi_0}, s_{\xi}]$. Par hypothèse, nous avons

$$|\varphi'(\Lambda_{\xi}(s))| \leq v(s) = \psi'(s),$$

et donc

$$\int_{s_{\xi_0}}^s |\Lambda'_{\xi}(t)\varphi'(\Lambda_{\xi}(t))| dt \leq \int_{s_{\xi_0}}^s \psi'(t) dt = \psi(s) - \psi(s_{\xi_0})$$

puisque $|\Lambda'_{\xi}(t)| = 1$. Comme

$$\int_{s_{\xi_0}}^s |\Lambda'_{\xi}(t)\varphi'(\Lambda_{\xi}(t))| dt \geq \left| \int_{s_{\xi_0}}^s \Lambda'_{\xi}(t)\varphi'(\Lambda_{\xi}(t)) dt \right| = \left| \int_{\xi_0}^{\Lambda_{\xi}(s)} \varphi'(\eta) d\eta \right|,$$

nous obtenons

$$|\varphi(\Lambda_{\xi}(s))| \leq \psi(s) + |\varphi(\xi_0)| - \psi(s_{\xi_0})$$

et donc bien $|\varphi(\Lambda_{\xi}(s))| \leq \psi(s)$ puisque $|\varphi(\xi_0)| \leq \psi(0) \leq \psi(s_{\xi_0})$.

Second cas : $u \neq 0$

Ce cas est le point délicat de la démonstration. Nous procédons en deux étapes :

Supposons $|\varphi(\xi_0)| < \psi(0)$:

Nous allons montrer, en raisonnant par l'absurde, que $|\varphi(\Lambda_{\xi}(s))| < \psi(s)$ pour tout $s \in [s_{\xi_0}, s_{\xi}]$.

Supposons donc qu'il existe $s_1 \in]s_{\xi_0}, s_{\xi}]$ tel que $|\varphi(\Lambda_{\xi}(s_1))| \geq \psi(s_1)$. Sous cette hypothèse, nous avons le

Lemme 2.35 *Il existe $s_2 \in]s_{\xi_0}, s_1]$ tel que :*

1. Pour tout $s \in [s_{\xi_0}, s_2[$, $|\varphi(\Lambda_{\xi}(s))| < \psi(s)$;
2. $|\varphi(\Lambda_{\xi}(s_2))| = \psi(s_2)$.

Démonstration. L'ensemble $E = \{s \in [s_{\xi_0}, s_{\xi}]; |\varphi(\Lambda_{\xi}(s))| \geq \psi(s)\}$ est un fermé non vide de $[s_{\xi_0}, s_{\xi}]$, car il contient s_1 . Il admet donc un minimum s_2 . En particulier, $s_2 \in]s_{\xi_0}, s_1]$ puisque $|\varphi(\xi_0)| < \psi(0) \leq \psi(s_{\xi_0})$.

1. S'il existe un élément $s \in]s_{\xi_0}, s_2[$ tel que $|\varphi(\Lambda_{\xi}(s))| \geq \psi(s)$, nous avons $s \in E$ et donc

$s \geq s_2$, ce qui est absurde. Par conséquent, $|\varphi(\Lambda_\xi(s))| < \psi(s)$ pour tout $s \in]s_{\xi_0}, s_2[$. Finalement, les inégalités $|\varphi(\xi_0)| < \psi(0) \leq \psi(s_{\xi_0})$ montrent que $|\varphi(\Lambda_\xi(s))| < \psi(s)$ pour tout $s \in [s_{\xi_0}, s_2[$.

2. s_2 étant le minimum de E , nous avons nécessairement $|\varphi(\Lambda_\xi(s_2))| = \psi(s_2)$. En effet, l'inégalité $|\varphi(\Lambda_\xi(s_2))| > \psi(s_2)$ entraînant par continuité de φ et ψ l'existence d'un $\alpha > 0$ tel que $|\varphi(\Lambda_\xi(s_2 - \alpha))| > \psi(s_2 - \alpha)$, nous aurions $s_2 - \alpha \in E$, et donc $s_2 \leq s_2 - \alpha$, ce qui est absurde. ■

Prenons l'élément $s_2 \in]s_{\xi_0}, s_\xi]$ de ce lemme. Pour tout $s \in [s_{\xi_0}, s_2]$, nous obtenons

$$|\varphi'(\Lambda_\xi(s))| \leq u\psi(s) + v(s) = \psi'(s)$$

d'où

$$\int_{s_{\xi_0}}^{s_2} |\Lambda'_\xi(s)\varphi'(\Lambda_\xi(s))| ds \leq \int_{s_{\xi_0}}^{s_2} \psi'(s) ds$$

et donc

$$|\varphi(\Lambda_\xi(s_2))| \leq \psi(s_2) + |\varphi(\xi_0)| - \psi(s_{\xi_0}) < \psi(s_2)$$

ce qui est contradictoire avec le point 2. Il s'ensuit l'inégalité $|\varphi(\Lambda_\xi(s))| < \psi(s)$ pour tout $s \in [s_{\xi_0}, s_\xi]$, ce qui donne le résultat cherché.

Supposons $|\varphi(\xi_0)| = \psi(0)$:

Pour établir l'inégalité cherchée, nous utilisons une méthode de perturbation en considérant, pour tout $\alpha > 0$, l'élément ψ_α unique solution fonction entière à coefficients positifs ou nuls de l'équation

$$\psi' = u\psi + v(\xi)$$

de condition initiale $\psi_\alpha(0) = \psi(0) + \alpha$.

En appliquant le résultat précédent à ψ_α , nous obtenons

$$(2.24) \quad \forall \alpha > 0, \forall s \in [s_{\xi_0}, s_\xi], |\varphi(\Lambda_\xi(s))| < \psi_\alpha(s)$$

puisque $|\varphi(\xi_0)| < \psi_\alpha(0)$.

D'autre part, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^+$ et tout $\xi \in \mathbb{C}$,

$$\psi_\alpha(\xi) = e^{u\xi} \left(\psi(0) + \alpha + \int_0^\xi e^{-u\eta} v(\eta) d\eta \right)$$

Ainsi, pour tout $\xi \in \mathbb{C}$, l'application $\alpha \mapsto \psi_\alpha(\xi)$ est continue sur \mathbb{R}^+ . En faisant alors tendre α vers 0 dans l'inégalité (2.24), nous obtenons finalement

$$\forall s \in [s_{\xi_0}, s_\xi], |\varphi(\Lambda_\xi(s))| \leq \psi(s)$$

ce qui achève la démonstration du lemme de Grönwall.

Chapitre 3

Calcul effectif des multiplicateurs de Stokes

Plusieurs méthodes pour le calcul effectif des multiplicateurs de Stokes sont déjà connues dans le cadre des systèmes différentiels linéaires méromorphes de niveau unique, voire de plusieurs niveaux. On pourra voir par exemple [Bal84], [Bal93], [BJL79-3], [Br91], [Im90], [JLP76-1], [JLP76-2], [L-R90-1], [Lu79], [LS97], [MR82] et [OD98]. Pour des systèmes très particuliers (voir l'exemple 1 du paragraphe 2.3.2 et les exemples 1 et 2 du paragraphe 2.3.3), nous pouvons également obtenir les valeurs exactes des multiplicateurs de Stokes à l'aide d'une perturbation régulière sur le système $[A]$. Mais ceci reste marginal.

Nous proposons ici une méthode de calcul de tous les multiplicateurs de Stokes pour tous les systèmes de niveau unique 1 à coefficients rationnels, et ceci avec évaluation de l'erreur. Fixons un système $[A]$ de niveau unique 1 de la forme

$$x^2 \frac{dY}{dx} = A(x)Y$$

avec $A(x) \in M_n(\mathbb{C}(x))$ sans pôle à l'origine. Nous supposons, quitte à faire une transformation de jauge méromorphe convenable, qu'une solution fondamentale formelle $\widehat{Y}(x) = \widehat{F}(x)x^L e^{Q(\frac{1}{x})}$ de $[A]$ est normalisée comme au chapitre 2, soit :

- ★ $\widehat{F}(x) = I_n + O(x^2) \in M_n(\mathbb{C}[[x]])$;
- ★ $L = \bigoplus_{j=1}^J L_j$, où chaque L_j est un bloc de Jordan de L de dimension $n_j \geq 1$ et de valeur propre λ_j vérifiant $\lambda_1 = 0$ et $\operatorname{Re}(\lambda_j) \in [0, 1[$ pour tout $j \in \{1, \dots, J\}$;
- ★ $Q(\frac{1}{x}) = \bigoplus_{j=1}^J (-\frac{a_j}{x} I_{n_j})$ de sorte que $a_1 = 0$.

Rappelons qu'une telle transformation n'affecte en rien les matrices de Stokes de $[A]$, puisque celles-ci sont des invariants méromorphes de $[A]$ ([BJL79-2]).

Une première étape consiste à ramener le calcul des multiplicateurs de Stokes à celui des matrices de connexion d'un système différentiel linéaire à points singuliers réguliers, comme nous l'avons fait sur l'exemple 2 du paragraphe 2.3.2. Du fait de la linéarité du système $[A]$, nous nous limitons à l'étude des multiplicateurs de Stokes situés dans les n_1 premières colonnes des matrices de Stokes. Nous savons (théorème 2.31) que ces multiplicateurs de Stokes ne dépendent que des coefficients de résurgence de \widetilde{f}

en ses singularités (à savoir les points $a_j \neq 0$), où \tilde{f} désigne comme précédemment la transformée de Borel des n_1 premières colonnes \hat{f} de \hat{F} . Au lieu de travailler directement avec le système de convolution transformé de Borel du système de passage $[A_0 : A]$ tout entier, nous préférons lui substituer un système différentiel linéaire $[S]$ de dimension k (dépendant de n , n_1 et des degrés des numérateurs et des dénominateurs des coefficients de la matrice A) vérifié par les colonnes de \tilde{f} et leurs ℓ premières dérivées, ℓ étant un entier naturel non nul convenablement choisi. On observe immédiatement sur le système $[S]$ le fait que toutes ses singularités sont régulières (voir par exemple [BJL82-1]). Celles-ci sont placées à l'origine et en les singularités potentielles de \tilde{f} , *i.e.*, les points $a_j \neq 0$. Après avoir donné une description précise des singularités $a_j \neq 0$ et choisi une solution fondamentale "analytique" en ces points, nous réinterprétons le théorème 2.31 (ou le théorème 2.27 dans le cas où L est diagonale) en terme des coefficients de la matrice de connexion entre 0 et a_j .

Les coefficients de connexion cherchés sont alors obtenus en exprimant le prolongement analytique de la solution initiale considérée au voisinage de 0 dans cette base analytique en a_j . Ce prolongement analytique est réalisé "à la Cauchy" le long d'une chaîne de boules d'intersection non vide. A chaque étape, nous évaluons l'erreur commise en nous appuyant sur une méthode développée par J. van der Hoeven dans [vdH99]¹. L'erreur totale est alors fonction du nombre d'étapes nécessaires au calcul et des différents choix opérés.

Nous n'avons pas cherché ici à optimiser le calcul d'erreur : dans les différents exemples que nous traitons, nous pouvons voir que l'erreur réelle est beaucoup plus faible que l'erreur que nous avons obtenue par notre méthode. Toutefois, mis à part ce problème d'optimisation, il nous semble que cette méthode peut être intéressante dans la mesure où elle permet de calculer de façon effective avec évaluation de l'erreur tous les multiplicateurs de Stokes.

Nous détaillons ci-dessous (paragraphe 3.1) le cas où la matrice des exposants de monodromie formelle L est diagonale. Lorsque celle-ci est sous forme de Jordan quelconque (paragraphe 3.2), les calculs sont analogues mais plus complexes du fait de la présence des blocs de Jordan de dimension supérieure à 2 dans L : les dimensions sont multipliées par la taille des blocs de Jordan L_j de L .

3.1 Cas où L est diagonale

Dans tout ce paragraphe, nous supposons que la matrice des exposants de monodromie formelle L est diagonale :

$$L = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

¹Nous tenons ici à remercier Jacques-Arthur Weil de nous avoir signalé cet article. Par ailleurs, Bruno Salvy nous a également indiqué récemment (août 2007) que les techniques de calcul qui y sont développées ont déjà été initiées par les Chudnovsky ([ChCh87], [ChCh90]).

et normalisée de sorte que $\lambda_1 = 0$ et $\operatorname{Re}(\lambda_j) \in [0, 1[$ pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$. Ainsi, le système $[A]$ considéré dans la suite est de la forme

$$x^2 \frac{dY}{dx} = A(x)Y$$

avec

$$A(x) = \operatorname{diag}(0, a_2 + \lambda_2 x, \dots, a_n + \lambda_n x) + \operatorname{diag}\left(\frac{1}{P_1(x)}, \dots, \frac{1}{P_n(x)}\right) B(x)$$

où $B(x) \in M_n(x^2\mathbb{C}[x])$ et $P_j(x) \in \mathbb{C}[x]$ vérifie $P_j(0) = 1$.

Rappelons que nous notons \widehat{f} la première colonne du facteur série formelle \widehat{F} et que nous désignons par $\widehat{f}^{[j]}$ le $j^{\text{ème}}$ terme de \widehat{f} .

3.1.1 Transformée de Borel de \widehat{f} et système à points singuliers réguliers

Détermination du système différentiel $[S]$

Une réécriture du système de passage (1) (cf. page 52) donne pour les séries $\widehat{f}^{[j]}$ les équations différentielles suivantes :

$$(3.1) \quad x^2 \frac{d\widehat{f}^{[j]}}{dx} - a_j \widehat{f}^{[j]} - \lambda_j x \widehat{f}^{[j]} = \frac{1}{P_j(x)} \sum_{k=1}^n B^{(j,k)} \widehat{f}^{[k]}, \quad j \in \{1, \dots, n\}$$

Notons

$$P_j(x) = 1 + \sum_{m=1}^{p_j} P_{j,m} x^m$$

Après multiplication par le polynôme P_j , la relation (3.1) devient :

$$(3.2) \quad (1 + P_{j,1}x) \left(x^2 \frac{d\widehat{f}^{[j]}}{dx} - a_j \widehat{f}^{[j]} \right) - \lambda_j x \widehat{f}^{[j]} = \sum_{k=1}^n B_1^{(j,k)} \widehat{f}^{[k]} - \sum_{m=2}^{p_j} P_{j,m} x^m \left(x^2 \frac{d\widehat{f}^{[j]}}{dx} - a_j \widehat{f}^{[j]} \right)$$

avec

$$B_1^{(j,k)} = \begin{cases} B^{(j,k)} & \text{si } j \neq k \\ B^{(j,j)} + \lambda_j \sum_{m=1}^{p_j} P_{j,m} x^{m+1} & \text{si } j = k \end{cases}$$

En particulier, $B_1^{(j,k)} \in x^2\mathbb{C}[x]$. Définissons alors les trois entiers

$$b_j = \max_{1 \leq k \leq n} (\deg(B^{(j,k)}))$$

$$\mu_j = \max_{1 \leq k \leq n} (\deg(B_1^{(j,k)})) = \max(p_j + 1, b_j)$$

$$\mu = \max_{1 \leq j \leq n} (\mu_j)$$

En divisant l'égalité (3.2) par x^μ et en appliquant une transformation de Borel à cette nouvelle équation, nous voyons que les séries $\tilde{f}^{[j]}$ vérifient les équations différentielles

$$(3.3) \quad (\xi - a_j) \frac{d^\mu \tilde{f}^{[j]}}{d\xi^\mu} - (\lambda_j - \mu - P_{j,1}(\xi - a_j)) \frac{d^{\mu-1} \tilde{f}^{[j]}}{d\xi^{\mu-1}} = \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=0}^{\mu-2} \alpha_{k,\ell} \frac{d^\ell \tilde{f}^{[k]}}{d\xi^\ell} + (\xi - a_j) \sum_{\ell=0}^{\mu-2} \beta_\ell \frac{d^\ell \tilde{f}^{[j]}}{d\xi^\ell}$$

avec $\alpha_{k,\ell} \in \mathbb{C}$ et $\beta_\ell \in \mathbb{C}$.

Remarque 3.1 Pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, il suffit en principe de diviser l'égalité (3.2) par x^{μ_j} pour obtenir une équation différentielle vérifiée par $\tilde{f}^{[j]}$. Cependant, ceci n'est pas satisfaisant pour la suite : le système compagnon associé à ces équations est très complexe à écrire puisque les ordres de dérivation apparaissant dans chacune de ces équations varient suivant la valeur de j . L'introduction du nombre μ permet de contourner ce problème en homogénéisant les ordres de dérivation. En particulier, les blocs intervenant dans le système compagnon des équations (3.3) sont tous de même taille. Noter cependant que le fait d'augmenter les ordres de dérivation reste anodin et ne change pas la structure des singularités des fonctions $\tilde{f}^{[j]}$.

Considérons alors le vecteur colonne

$$\tilde{\mathcal{F}} = \begin{bmatrix} \tilde{f} \\ \tilde{f}' \\ \vdots \\ \frac{d^{\mu-1} \tilde{f}}{d\xi^{\mu-1}} \end{bmatrix}$$

de dimension $n\mu$. Au vu des équations (3.3), il est clair que $\tilde{\mathcal{F}}$ vérifie un système différentiel linéaire $[S]$ de dimension $n\mu$ à points singuliers les points $\xi = a_j$, $j \in \{1, \dots, n\}$, qui sont tous singuliers réguliers. Afin d'interpréter les multiplicateurs de Stokes $c_\theta^{[j]}$ en terme de coefficients de connexion entre 0 et a_j , nous allons étudier ce système différentiel $[S]$ au voisinage de chacune de ses singularités $a_j \neq 0$.

Fixons une singularité ω de \tilde{f} et écrivons le système $[S]$ sous la forme²

$$[S_\omega] \quad (\xi - \omega) \frac{dZ}{d\xi} = C_\omega(\xi - \omega)Z$$

où la matrice $C_\omega(\xi)$ de dimension $n\mu \times n\mu$ s'écrit

$$C_\omega(\xi) = \left[\begin{array}{ccc|cc} 0I_n & \xi I_n & 0I_n & 0I_n & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \\ \vdots & & \ddots & \xi I_n & 0I_n \\ 0I_n & \cdots & \cdots & 0I_n & \xi I_n \\ \hline & & C_\omega^{(3)}(\xi) & & C_\omega^{(4)}(\xi) \end{array} \right]$$

et où

- ★ $C_\omega^{(4)}(\xi)$ est une matrice diagonale ;
- ★ les termes de la $j^{\text{ème}}$ ligne de $\left[C_\omega^{(3)}(\xi) \quad C_\omega^{(4)}(\xi) \right]$ sont des fractions rationnelles de la forme $\frac{\alpha\xi + \beta\xi^2}{\xi - a_j + \omega}$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Noter que si $a_j = \omega$, *i.e.*, $j \in J_\omega$, les termes correspondants sont des fonctions affines : $\frac{\alpha\xi + \beta\xi^2}{\xi - a_j + \omega} = \alpha + \beta\xi$. De plus, lorsque $j \in J_\omega$, le $j^{\text{ème}}$ terme diagonal de $C_\omega^{(4)}(\xi)$ est $\lambda_j - \mu - P_{j,1}\xi$.

En particulier, le disque de convergence de la série $C_\omega(\xi - \omega)$ est le disque ouvert

$$\mathcal{D}_\omega = D\left(\omega, \frac{1}{\rho_\omega}\right)$$

de centre ω et de rayon $\frac{1}{\rho_\omega} = \min_{j \notin J_\omega} (|a_j - \omega|)$

Etude du système $[S_\omega]$

Nous construisons ici une solution fondamentale $Z_\omega(\xi - \omega)$ de $[S_\omega]$.

Proposition 3.2 *La matrice de tête $C_\omega(0)$ de C_ω est diagonalisable et admet pour matrice de diagonalisation*

$$D_\omega = \begin{bmatrix} I_{n(\mu-1)} & 0 \\ D_\omega^{(3)} & I_n \end{bmatrix}$$

où la $j^{\text{ème}}$ ligne de $D_\omega^{(3)}$ est nulle dès que $j \notin J_\omega$.

Après diagonalisation, la matrice

$$M_\omega = D_\omega^{-1} C_\omega(0) D_\omega$$

²Dans la suite du paragraphe 3.1, sauf mention contraire, toute matrice carrée M de dimension $n\mu$ sera découpée en blocs en

$$M = \begin{bmatrix} M^{(1)} & M^{(2)} \\ M^{(3)} & M^{(4)} \end{bmatrix}$$

où $M^{(1)}$ (resp. $M^{(4)}$) est une matrice carrée de dimension $n(\mu - 1)$ (resp. n).

s'écrit $M_\omega = \text{diag}(M_{\omega,1}, M_{\omega,2}, \dots, M_{\omega,n\mu})$ avec

$$M_{\omega,j} = 0 \text{ si } j \in \{1, \dots, n(\mu - 1)\}$$

et

$$M_{\omega,n(\mu-1)+j} = \begin{cases} 0 & \text{si } j \notin J_\omega \\ \lambda_j - \mu & \text{si } j \in J_\omega \end{cases}$$

Démonstration. Les valeurs propres de $C_\omega(0)$ sont 0, d'ordre de multiplicité $n\mu - |J_\omega|$, et les $\lambda_j - \mu$ pour $j \in J_\omega$. La décomposition par blocs de $C_\omega(0)$ fournit immédiatement une base évidente de vecteurs propres pour 0 et pour les $\lambda_j - \mu$. ■

Remarque 3.3 Ces résultats très simples sont dus à la normalisation de la série formelle \widehat{F} à $\widehat{F}(x) = I_n + O(x^2)$. Si nous avions simplement choisi $\widehat{F} = I_n + O(x)$, la matrice $C_\omega^{(4)}$ n'aurait pas été diagonale et les calculs (notamment D_ω) auraient été plus compliqués.

Après transformation de jauge constante $Z_1 = D_\omega^{-1}Z$, nous obtenons le système

$$(\xi - \omega)Z_1' = D_\omega^{-1}C_\omega(\xi - \omega)D_\omega Z_1$$

de matrice de tête diagonale $M_\omega = D_\omega^{-1}C_\omega(0)D_\omega$. En appliquant alors la théorie locale classique des systèmes à point singulier régulier ([Was65]), nous obtenons le résultat suivant :

Proposition 3.4 *Nous adoptons les notations et les normalisations précédentes. Nous notons en outre $J_{\omega,0}$ l'ensemble éventuellement vide*

$$J_{\omega,0} = \{j \in \{1, \dots, n\} \text{ tel que } a_j = \omega \text{ et } \lambda_j = 0\} \subset J_\omega$$

1. Si $J_{\omega,0}$ est vide ($\lambda_j \neq 0$ pour tout $j \in J_\omega$), alors le système $[S_\omega]$ admet une solution fondamentale $Z_\omega(\xi - \omega)$ de la forme

$$Z_\omega(\xi - \omega) = D_\omega G_\omega(\xi - \omega)(\xi - \omega)^{M_\omega}$$

où $G_\omega(\xi - \omega)$ est analytique sur le disque \mathcal{D}_ω et vérifie $G_\omega(0) = I_{n\mu}$.

2. Si $J_{\omega,0}$ est non vide, les deux valeurs propres 0 et $\lambda_j - \mu$ diffèrent d'un entier pour tout $j \in J_\omega$ tel que $\lambda_j = 0$, puisque $\mu \in \mathbb{N}^*$. Des cisaillements successifs permettent d'obtenir une solution fondamentale $Z_\omega(\xi - \omega)$ du système $[S_\omega]$ sous la forme

$$Z_\omega(\xi - \omega) = \mathcal{T}_\omega(\xi - \omega)G_\omega(\xi - \omega)(\xi - \omega)^{M'_\omega}$$

où les matrices \mathcal{T}_ω , G_ω et M'_ω satisfont aux conditions suivantes :

(a) La matrice $\mathcal{T}_\omega(\xi) \in M_{n\mu}(\mathbb{C}[\xi])$ est de la forme

$$\mathcal{T}_\omega(\xi) = \begin{bmatrix} \xi^\mu I_n & 0 & \cdots & 0 & t_{1,\mu-1} \\ 0 & \xi^\mu I_n & \ddots & \vdots & t_{1,\mu-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \xi^\mu I_n & t_{1,1} \\ t_{2,\mu-1} & t_{2,\mu-2} & \cdots & t_{2,1} & t_0 \end{bmatrix}$$

où les blocs sont carrés de dimension $n \times n$ et vérifient les conditions suivantes :

i. colonne de droite :

Tous les termes de $t_{1,k}$, $k \in \{1, \dots, \mu-1\}$, sont nuls sauf éventuellement ceux des colonnes d'indices $j \in J_{\omega,0}$ qui sont de la forme $\alpha_k \xi^k + \dots + \alpha_{\mu-1} \xi^{\mu-1}$ avec $\alpha_k, \dots, \alpha_{\mu-1} \in \mathbb{C}$.

ii. ligne du bas :

Tous les termes de $t_{2,k}$, $k \in \{1, \dots, \mu-1\}$, sont nuls sauf éventuellement ceux des lignes d'indices $j \in J_\omega$ qui sont de la forme $\alpha \xi^\mu$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$.

iii. coin t_0 :

Si $j \notin J_{\omega,0}$, la $j^{\text{ème}}$ colonne de t_0 est nulle, sauf son terme diagonal qui vaut ξ^μ .

Si $j \in J_{\omega,0}$, le terme diagonal de la $j^{\text{ème}}$ colonne de t_0 est de la forme $1 + \alpha_1 \xi + \dots + \alpha_{\mu-1} \xi^{\mu-1}$ avec $\alpha_1, \dots, \alpha_{\mu-1} \in \mathbb{C}$ et les autres termes de cette $j^{\text{ème}}$ colonne sont de la forme $\beta_1 \xi + \dots + \beta_{\mu-1} \xi^{\mu-1}$ avec $\beta_1, \dots, \beta_{\mu-1} \in \mathbb{C}$.

(b) $G_\omega(\xi - \omega)$ est analytique sur le disque \mathcal{D}_ω et vérifie $G_\omega(0) = I_{n\mu}$;

(c) La matrice M'_ω admet une décomposition de Dunford

$$M'_\omega = \Delta_\omega + N_\omega$$

où

– la matrice Δ_ω , diagonalisable, est formée de la diagonale et des lignes d'indices $n(\mu-1) + j$ pour $j \in J_\omega$ de M'_ω ;

– la matrice $N_\omega = \Delta_\omega - M'_\omega$ est nilpotente d'ordre 2 et commute avec Δ_ω .

Plus précisément, M'_ω est de la forme

$$M'_\omega = \begin{bmatrix} -\mu I_{n(\mu-1)} & M'_\omega{}^{(2)} \\ 0 & M'_\omega{}^{(4)} \end{bmatrix}$$

où

– les colonnes d'indices $n(\mu-1) + j$ avec $j \notin J_{\omega,0}$ sont nulles sauf le terme diagonal de $M'_\omega{}^{(4)}$ qui vaut $\lambda_j - 2\mu$ si $j \in J_\omega \setminus J_{\omega,0}$ et $-\mu$ sinon ;

– la restriction de M'_ω aux indices (de lignes et de colonnes) $n(\mu-1) + j$ avec $j \in J_{\omega,0}$ vaut $-\mu I_{|J_{\omega,0}|}$.

Les termes non nuls et non diagonaux de la matrice M'_ω vont poser problème ultérieurement.

Démonstration. 1. Si $J_{\omega,0}$ est vide, *i.e.* si $\lambda_j \neq 0$ pour tout $j \in J_\omega$, les valeurs propres de M_ω ne diffèrent pas d'un entier et nous concluons directement.

2. En revanche, si $J_{\omega,0}$ est non vide, 0 et $-\mu$ sont des valeurs propres de la matrice M_ω qui diffèrent d'un entier. Nous sommes donc obligés de faire μ cisaillements consécutifs à partir du système

$$\xi \frac{dZ_1}{d\xi} = D_\omega^{-1} C_\omega(\xi) D_\omega Z_1 = (M_\omega + O(\xi)) Z_1$$

à l'aide de la matrice $\gamma(\xi) = \text{diag}(\gamma_1(\xi), \dots, \gamma_{n\mu}(\xi))$ où

$$\gamma_j(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{si le } j^{\text{ème}} \text{ terme diagonal de } M_\omega \text{ est égal à } -\mu \\ \xi & \text{sinon} \end{cases}$$

Noter qu'avec une telle matrice, nous faisons un cisaillement sur tous les termes diagonaux de la matrice M_ω qui ne sont pas égaux à $-\mu$.

★ Commençons par observer ce qui se passe lors du premier cisaillement. Le système obtenu par la transformation de jauge $Z_2 = \gamma^{-1} Z_1$ s'écrit

$$\xi \frac{dZ_2}{d\xi} = (\gamma^{-1} M_\omega \gamma - \xi \gamma^{-1} \gamma' + O(\xi)) Z_2 = (T_1 + O(\xi)) Z_2$$

La matrice de tête T_1 est de la forme

$$T_1 = \begin{bmatrix} -I_{n(\mu-1)} & T_1^{(2)} \\ 0 & T_1^{(4)} \end{bmatrix}$$

où les matrices $T_1^{(2)}$ et $T_1^{(4)}$ satisfont aux conditions suivantes :

- $T_1^{(2)} = \begin{bmatrix} 0_{n(\mu-2) \times n} \\ \tau_{1,1}^{(2)} \end{bmatrix}$, où $\tau_{1,1}^{(2)}$ est une matrice carrée de dimension $n \times n$ dont les seuls termes éventuellement non nuls sont situés aux colonnes d'indices $j \in J_{\omega,0}$. Noter que les termes de $T_1^{(2)}$ sont répartis comme ceux de $M_\omega^{(2)}$.
- $T_1^{(4)}$ est une matrice carrée de dimension $n \times n$. Son $j^{\text{ème}}$ terme diagonal est -1 (resp. $\lambda_j - \mu - 1$, $-\mu$) si $j \notin J_\omega$ (resp. $j \in J_\omega \setminus J_{\omega,0}$, $j \in J_{\omega,0}$). Les autres termes de $T_1^{(4)}$ sont répartis comme ceux de $M_\omega^{(4)}$.

Les valeurs propres de T_1 sont donc -1 , $\lambda_j - \mu - 1$ et $-\mu$ d'ordre de multiplicité respectif $n\mu - |J_\omega|$, $|J_\omega| - |J_{\omega,0}|$ et $|J_{\omega,0}|$. De plus, il est aisé de voir, au vu de la répartition des termes non nuls dans $T_1^{(2)}$ et $T_1^{(4)}$, que la matrice T_1 est diagonalisable. Elle admet pour matrice de diagonalisation

$$d_1 = \begin{bmatrix} I_{n(\mu-1)} & d_1^{(2)} \\ 0 & d_1^{(4)} \end{bmatrix}$$

où

- les termes de $d_1^{(2)}$ sont répartis comme ceux de $T_1^{(2)}$;
- $\text{diag}(d_1^{(4)}) = I_n$ et les autres termes de $d_1^{(4)}$ sont répartis comme ceux de $T_1^{(4)}$.

Ainsi, la matrice de tête du système obtenu par la transformation de jauge constante $Z_3 = d_1^{-1}Z_2$ est $\text{diag}(T_1) = \text{diag}(T_{1,1}, T_{1,2}, \dots, T_{1,n\mu})$ où

$$T_{1,j} = -1 \text{ si } j \in \{1, \dots, n(\mu - 1)\}$$

et

$$T_{1,n(\mu-1)+j} = \begin{cases} -1 & \text{si } j \notin J_\omega \\ \lambda_j - \mu - 1 & \text{si } j \in J_\omega \setminus J_{\omega,0} \\ -\mu & \text{si } j \in J_{\omega,0} \end{cases}$$

* A partir de là, une récurrence sur $k \in \{1, \dots, \mu - 1\}$ montre que la matrice de tête T_k du système obtenu lors du $k^{\text{ème}}$ cisaillement est de la forme

$$T_k = \begin{bmatrix} -kI_{n(\mu-1)} & T_k^{(2)} \\ 0 & T_k^{(4)} \end{bmatrix}$$

où les matrices $T_k^{(2)}$ et $T_k^{(4)}$ satisfont aux conditions suivantes :

- $T_k^{(2)} = \begin{bmatrix} 0_{n(\mu-k-1) \times n} \\ \tau_{k,k}^{(2)} \\ \vdots \\ \tau_{k,1}^{(2)} \end{bmatrix}$, où les matrices $\tau_{k,\ell}^{(2)}$ sont des matrices carrées de dimension

$n \times n$ dont les seuls termes éventuellement non nuls sont situés aux colonnes d'indices $j \in J_{\omega,0}$.

- $T_k^{(4)}$ est une matrice carrée de dimension $n \times n$. Son $j^{\text{ème}}$ terme diagonal est $-k$ (resp. $\lambda_j - \mu - k$, $-\mu$) si $j \notin J_\omega$ (resp. $j \in J_\omega \setminus J_{\omega,0}$, $j \in J_{\omega,0}$). Les autres termes de $T_k^{(4)}$ sont répartis comme ceux de la matrice $M_\omega^{(4)}$.

A présent, les valeurs propres de T_k sont $-k$, $\lambda_j - \mu - k$ et $-\mu$ et sont d'ordre de multiplicité respectif $n\mu - |J_\omega|$, $|J_\omega| - |J_{\omega,0}|$ et $|J_{\omega,0}|$. Comme précédemment, la matrice T_k est diagonalisable et admet une matrice de diagonalisation de la forme

$$d_k = \begin{bmatrix} I_{n(\mu-1)} & d_k^{(2)} \\ 0 & d_k^{(4)} \end{bmatrix}$$

où

- les termes de $d_k^{(2)}$ sont répartis comme ceux de $T_k^{(2)}$;

- $\text{diag}(d_k^{(4)}) = I_n$ et les autres termes de $d_k^{(4)}$ sont répartis comme ceux $T_k^{(4)}$.

Une fois la matrice T_k diagonalisée, nous obtenons alors le système

$$\xi \frac{dZ}{d\xi} = (\text{diag}(T_k) + O(\xi))Z$$

avec $\text{diag}(T_k) = \text{diag}(T_{k,1}, T_{k,2}, \dots, T_{k,n\mu})$ où

$$T_{k,j} = -k \text{ si } j \in \{1, \dots, n(\mu - 1)\}$$

et

$$T_{k,n(\mu-1)+j} = \begin{cases} -k & \text{si } j \notin J_\omega \\ \lambda_j - \mu - k & \text{si } j \in J_\omega \setminus J_{\omega,0} \\ -\mu & \text{si } j \in J_{\omega,0} \end{cases}$$

★ Finalement, la matrice de tête du système obtenu lors du $\mu^{\text{ème}}$ cisaillement est la matrice M'_ω cherchée. Quant à la matrice \mathcal{T}_ω , elle est donnée par la relation

$$\mathcal{T}_\omega(\xi) = D_\omega \gamma(\xi) d_1 \dots \gamma(\xi) d_{\mu-1} \gamma(\xi)$$

Ecrivons à présent M'_ω sous la forme $M'_\omega = \Delta_\omega + N_\omega$, où les matrices Δ_ω et N_ω sont données dans la proposition 3.4. La répartition des termes non nuls dans ces deux matrices montre aisément que Δ_ω est diagonalisable et que N_ω est nilpotente (son spectre est réduit à $\{0\}$). De plus, nous avons $N_\omega^2 = 0$ et $[\Delta_\omega, N_\omega] = 0$. Par suite, cette écriture de M'_ω est bien une décomposition de Dunford de M'_ω . ■

Finalement, les matrices \mathcal{T}_ω et M'_ω que nous considérons dans cette proposition et dans la suite du paragraphe 3.1 peuvent être obtenues aisément à l'aide de l'algorithme suivant :

entrées : {la matrice $C_\omega(\xi)$ du système $[S_\omega]$ et la matrice de diagonalisation D_ω de la matrice de tête de C_ω (proposition 3.2)}

1. Calculer $G_0(\xi) = D_\omega^{-1} C_\omega(\xi) D_\omega$ et $M_\omega = G_0(0)$
Déterminer $\gamma(\xi) = \text{diag}(\gamma_1(\xi), \dots, \gamma_{n\mu}(\xi))$
Poser $\mathcal{T}_\omega := D_\omega$
2. Pour ℓ de 1 à $\mu - 1$:
Calculer $H_\ell(\xi) = \gamma^{-1}(\xi) G_{\ell-1}(\xi) \gamma(\xi) - \xi \gamma(\xi) \gamma'(\xi)$
Déterminer $T_\ell = H_\ell(0)$ et sa matrice de diagonalisation d_ℓ
Calculer $G_\ell(\xi) = d_\ell^{-1} H_\ell(\xi) d_\ell$
Poser $\mathcal{T}_\omega := \mathcal{T}_\omega \gamma(\xi) d_\ell$

3. Calculer $H_\mu(\xi) = \gamma^{-1}(\xi)G_{\mu-1}(\xi)\gamma(\xi) - \xi\gamma^{-1}(\xi)\gamma'(\xi)$
Poser $\mathcal{T}_\omega := \mathcal{T}_\omega\gamma(\xi)$ et $M'_\omega = H_\mu(0)$

sorties : {la matrice de cisaillement $\mathcal{T}_\omega(\xi)$; la nouvelle matrice M'_ω des exposants de monodromie}

3.1.2 Multiplicateurs de Stokes et matrices de connexion

Fixons à présent une direction anti-Stokes $\theta \in]-2\pi, 0]$ de \widehat{f} . Notons comme précédemment $\Omega_\theta(\widehat{f})$ l'ensemble des singularités de \widetilde{f} dans la direction θ et

$$\widetilde{\mathcal{F}} = \begin{bmatrix} \widetilde{f} \\ \widetilde{f}' \\ \vdots \\ \frac{d^{\mu-1}\widetilde{f}}{d\xi^{\mu-1}} \end{bmatrix}$$

Le prolongement analytique de $\widetilde{\mathcal{F}}$ à droite de ω , que nous notons encore $\widetilde{\mathcal{F}}$, étant solution du système $[S_\omega]$, il existe une unique matrice

$$\mathfrak{S}_\omega = \begin{bmatrix} \sigma_{\omega,1} \\ \vdots \\ \sigma_{\omega,n\mu} \end{bmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{C})$$

appelée matrice de connexion entre 0 et ω , telle que $\widetilde{\mathcal{F}}(\xi) = Z_\omega(\xi - \omega)\mathfrak{S}_\omega$. Ainsi, le $j^{\text{ème}}$ terme de $\widetilde{\mathcal{F}}$ –et donc de \widetilde{f} – est une combinaison linéaire à coefficients dans \mathbb{C} des termes de la $j^{\text{ème}}$ ligne de $Z_\omega(\xi - \omega)$. Par conséquent, lorsque $j \in J_\omega$, la $j^{\text{ème}}$ ligne de Z_ω doit nécessairement contenir au moins un terme en $\frac{1}{\xi - \omega}$ si $j \in J_{\omega,0}$ ou un terme en $(\xi - \omega)^{\lambda_j - 1}$ si $j \notin J_{\omega,0}$, l'un excluant l'autre (théorème 2.27)³. L'étude de Z_ω nous donne leur place précise :

Proposition 3.5 *Avec les notations précédentes, n'apparaissent dans les n premières lignes de la solution fondamentale $Z_\omega(\xi - \omega)$ des termes en $\frac{1}{\xi - \omega}$ (ligne $j \in J_{\omega,0}$) ou en $(\xi - \omega)^{\lambda_j - 1}$ (ligne $j \in J_\omega \setminus J_{\omega,0}$) qu'aux seules places correspondant à des termes non nuls dans les n dernières colonnes de Δ_ω . Plus précisément :*

1. Pour $j \in J_{\omega,0}$, la $j^{\text{ème}}$ ligne de $Z_\omega(\xi - \omega)$ admet au plus un terme en $\frac{1}{\xi - \omega}$, situé colonne $n(\mu - 1) + j$. Nous le notons $\frac{\alpha_{\omega,j}}{\xi - \omega}$.
2. Pour $j \in J_\omega \setminus J_{\omega,0}$, la $j^{\text{ème}}$ ligne de $Z_\omega(\xi - \omega)$ admet au plus $|J_{\omega,0}| + 1$ termes en $(\xi - \omega)^{\lambda_j - 1}$, situés colonnes $n(\mu - 1) + k$ avec $k \in J_{\omega,0} \cup \{j\}$. Nous les notons $\beta_{\omega,k}(\xi - \omega)^{\lambda_j - 1}$, $k \in J_{\omega,0} \cup \{j\}$.

³Il suffit de rechercher ces termes, puisque ce sont eux qui nous permettent de calculer les multiplicateurs de Stokes $c_\theta^{[j]}$.

Démonstration. Nous reprenons les deux cas de la proposition 3.4 :

★ Lorsque $J_{\omega,0}$ est vide, la définition de la matrice M_ω (proposition 3.2) montre que les $n(\mu - 1)$ premières colonnes et les $(n(\mu - 1) + j)^{\text{ème}}$ colonnes de $Z_\omega(\xi - \omega)$, $j \notin J_\omega$, sont analytiques en ω . En revanche, la $(n(\mu - 1) + j)^{\text{ème}}$ colonne de $Z_\omega(\xi - \omega)$, $j \in J_\omega$, admet un unique terme en $(\xi - \omega)^{\lambda_j - \mu}$ situé à la $(n(\mu - 1) + j)^{\text{ème}}$ ligne. Autrement dit,

$$\frac{d^{\mu-1} \tilde{f}}{d\xi^{\mu-1}}(\xi - \omega) = *_j(\xi - \omega)^{\lambda_j - \mu} + h(\xi - \omega)$$

où $*_j$ est une matrice colonne de dimension $n \times 1$ dont le seul terme éventuellement non nul est situé à la $j^{\text{ème}}$ ligne, et où $h(\xi)$ est un élément de $M_{n,1}(\mathbb{C}\{\xi\})$. Ceci achève la démonstration dans le cas où $|J_{\omega,0}| = 0$.

★ Supposons à présent $J_{\omega,0}$ non vide.

La décomposition de Dunford de M'_ω étant

$$M'_\omega = \Delta_\omega + N_\omega$$

avec N_ω nilpotente d'ordre 2 (cf. proposition 3.4), il est clair que

$$(\xi - \omega)^{M'_\omega} = (\xi - \omega)^{\Delta_\omega} (I_{n\mu} + N_\omega \log(\xi - \omega))$$

Une matrice de diagonalisation de Δ_ω est de la forme

$$P = \begin{bmatrix} I_{n(\mu-1)} & 0 \\ 0 & P^{(4)} \end{bmatrix}$$

où $\text{diag}(P^{(4)}) = I_n$ et où les autres termes de P sont répartis comme ceux de Δ_ω . Nous avons alors

$$(\xi - \omega)^{\Delta_\omega} = P(\xi - \omega)^{\text{diag}(\Delta_\omega)} P^{-1}$$

avec

$$(\xi - \omega)^{\text{diag}(\Delta_\omega)} = \begin{bmatrix} (\xi - \omega)^{-\mu} I_{n(\mu-1)} & 0 \\ 0 & * \end{bmatrix}$$

où $* = \text{diag}(*_1, *_2, \dots, *_n)$ vérifie

$$*_j = \begin{cases} (\xi - \omega)^{-\mu} & \text{si } j \notin J_\omega \text{ ou } j \in J_{\omega,0} \\ (\xi - \omega)^{\lambda_j - 2\mu} & \text{si } j \in J_\omega \setminus J_{\omega,0} \end{cases}$$

Par conséquent,

$$(\xi - \omega)^{\Delta_\omega} = \begin{bmatrix} (\xi - \omega)^{-\mu} I_{n(\mu-1)} & 0 \\ 0 & \square \end{bmatrix}$$

où \square est une matrice carrée de dimension $n \times n$ vérifiant :

- lorsque $j \notin J_{\omega,0}$, la $j^{\text{ème}}$ colonne de \square est nulle, sauf son terme diagonal qui vaut $(\xi - \omega)^{-\mu}$ si $j \notin J_\omega$ et $(\xi - \omega)^{\lambda_j - 2\mu}$ si $j \in J_\omega \setminus J_{\omega,0}$;
- lorsque $j \in J_{\omega,0}$, la $j^{\text{ème}}$ colonne de \square est nulle, sauf son terme diagonal qui vaut

$(\xi - \omega)^{-\mu}$ et les termes situés sur les lignes d'indice $k \in J_\omega \setminus J_{\omega,0}$ qui sont de la forme $\alpha(\xi - \omega)^{-\mu} + \beta(\xi - \omega)^{\lambda_j - 2\mu}$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Puisque $G_\omega(0) = I_{n\mu}$, nous voyons, en considérant les n dernières lignes de \mathcal{C}_ω (cf. proposition 3.4), que :

- si $j \in J_{\omega,0}$, la $(n(\mu - 1) + j)^{\text{ème}}$ ligne de $Z_\omega(\xi - \omega)$ admet un seul terme en $(\xi - \omega)^{-\mu}$, situé colonne $n(\mu - 1) + j$;
- si $j \in J_\omega \setminus J_{\omega,0}$, la $(n(\mu - 1) + j)^{\text{ème}}$ ligne de $Z_\omega(\xi - \omega)$ admet $|J_{\omega,0}| + 1$ termes en $(\xi - \omega)^{\lambda_j - \mu}$, situés colonnes $n(\mu - 1) + k$ avec $k \in J_{\omega,0} \cup \{j\}$.
- si $j \notin J_\omega$, la $(n(\mu - 1) + j)^{\text{ème}}$ ligne de $Z_\omega(\xi - \omega)$ n'admet aucun terme en $(\xi - \omega)^{-\mu}$ ou en $(\xi - \omega)^{\lambda_j - \mu}$.

Nous concluons alors comme dans le cas où $J_{\omega,0} = \emptyset$. ■

Cette démonstration fournit également la forme complète de $Z_\omega(\xi - \omega)$. Bien que celle-ci ne soit pas utile pour la suite, nous la signalons quand même pour information. Nous avons

$$\tau_\omega Z_\omega(\xi) = P_\omega \left(\frac{1}{\xi} \right) + \tilde{k}_\omega(\xi) \log(\xi) + \sum_{\lambda \in \Lambda_\omega} \tilde{K}_{\omega,\lambda}(\xi) \xi^{\lambda - \mu} + Hol_\omega(\xi)$$

avec $P_\omega(\xi)$ élément de $M_{n\mu}(\xi\mathbb{C}[\xi])$ et de degré μ , et $\tilde{k}_\omega, \tilde{K}_{\omega,\lambda}, Hol_\omega$ éléments de $M_{n\mu}(\mathbb{C}\{\xi\})$. De plus, les n premières lignes de $\tau_\omega Z_\omega$ sont de la forme

$$\frac{\alpha_\omega}{\xi} + \tilde{h}_\omega(\xi) \log(\xi) + \sum_{\lambda \in \Lambda_\omega} \tilde{H}_{\omega,\lambda}(\xi) \xi^{\lambda - 1} + Hol_\omega(\xi)$$

avec α_ω constant et $\tilde{h}_\omega, \tilde{H}_{\omega,\lambda}$ et Hol_ω analytiques à l'origine. En particulier, les n premières lignes de Z_ω ne contiennent pas d'autres singularités que celles potentiellement présentes dans \hat{f} : les n premières lignes de Z_ω ont une singularité simple-ramifiée en ω d'exposants de ramification Λ_ω .

Les valeurs exactes des nombres $\alpha_{\omega,j}$ et $\beta_{\omega,k}$ de la proposition 3.5 peuvent être obtenues en déterminant, au plus, les $\mu - 1$ premiers termes de la série $G_\omega(\xi - \omega)$. Ainsi, en combinant cette proposition avec le théorème 2.27, nous ramenons le calcul des multiplicateurs de Stokes à un calcul de matrice de connexion à l'aide des deux relations suivantes :

Proposition 3.6 *Pour tout $\omega \in \Omega_\theta(\hat{f})$ et pour tout $j \in J_\omega$, les multiplicateurs de Stokes $c_\theta^{[j]}$ et les coefficients de la matrice de connexion \mathfrak{S}_ω sont liés par les relations suivantes :*

1. Si $\lambda_j = 0$,

$$\boxed{c_\theta^{[j]} = 2i\pi\alpha_{\omega,j}\sigma_{\omega,n(\mu-1)+j}}$$

2. Si $\lambda_j \neq 0$,

$$c_\theta^{[j]} = 2i\pi \frac{e^{-i\pi\lambda_j}}{\Gamma(1-\lambda_j)} \beta_{\omega,j} \sigma_{\omega,n(\mu-1)+j} + 2i\pi \frac{e^{-i\pi\lambda_j}}{\Gamma(1-\lambda_j)} \sum_{k \in J_{\omega,0}} \beta_{\omega,k} \sigma_{\omega,n(\mu-1)+k}$$

Il faut maintenant construire une méthode pour évaluer numériquement les matrices de connexion \mathfrak{S}_ω et l'erreur commise dans le calcul.

3.1.3 Calcul effectif des matrices de connexion par prolongements analytiques successifs

Dans ce paragraphe, nous donnons une méthode permettant d'évaluer numériquement les matrices de connexion \mathfrak{S}_ω pour toutes les singularités ω de \tilde{f} . Rappelons que ces matrices de connexion sont obtenues à l'aide du prolongement analytique de \mathcal{F} à droite de ω

Nous généralisons les notations précédentes de la manière suivante : pour tout $\beta \in \mathbb{C}$, notons

$$J_\beta = \{j \in \{1, \dots, n\} \text{ tel que } a_j = \beta\}$$

$$\rho_\beta = \max_{j \notin J_\beta} \left(\frac{1}{|a_j - \beta|} \right)$$

et $\mathcal{D}_\beta = D(\beta, \frac{1}{\rho_\beta})$ le disque ouvert de centre β et de rayon $\frac{1}{\rho_\beta}$.

Ainsi, $\tilde{f}(\xi)$ (et donc $\tilde{\mathcal{F}}(\xi)$) est analytique sur \mathcal{D}_0 et les séries $G_\omega(\xi - \omega)$ de la proposition 3.4 le sont sur \mathcal{D}_ω .

Lorsque $\beta \notin \{a_j, 1 \leq j \leq n\}$, le système $[S]$ n'est pas singulier en β . Nous choisissons l'unique solution fondamentale $Z_\beta(\xi - \beta)$ analytique sur \mathcal{D}_β qui vérifie $Z_\beta(0) = I_{n\mu}$.

Lorsque β est l'un des $a_j \neq 0$, le système $[S]$ est irrégulier en $\beta = \omega$ et nous reprenons la solution fondamentale $Z_\omega(\xi - \omega)$ construite à la proposition 3.4.

Une direction anti-Stokes θ de \hat{f} étant fixée, nous notons $\Omega_\theta(\hat{f}) = \{\omega_1 < \dots < \omega_p\}$ les singularités de \tilde{f} sur la demi-droite d_θ ordonnées par ordre croissant.

L'algorithme suivant permet d'évaluer numériquement \mathfrak{S}_{ω_1} :

1. Si $\mathcal{D}_0 \cap \mathcal{D}_{\omega_1} \neq \emptyset$, choisissons $\alpha \in \mathcal{D}_0 \cap \mathcal{D}_{\omega_1} \cap]0, \omega_1[$ (figure 3.1).
Alors \mathfrak{S}_{ω_1} est l'unique solution de l'équation $\tilde{\mathcal{F}}(\alpha) = Z_{\omega_1}(\alpha - \omega_1) \mathfrak{S}_{\omega_1}$ ⁴
2. Si $\mathcal{D}_0 \cap \mathcal{D}_{\omega_1} = \emptyset$, alors

⁴Nous pouvons calculer directement $Z_{\omega_1}^{-1}(\alpha - \omega_1) \tilde{\mathcal{F}}(\alpha)$. Cependant, l'inverse d'une matrice conduisant à des calculs lourds, il vaut mieux résoudre directement cette équation en utilisant par exemple une décomposition LU .

2.1. choisissons une suite $0 < \alpha_1 < \beta_1 < \dots < \alpha_p < \beta_p < \alpha_{p+1} < \omega_1$ sur d_θ telle que (figure 3.2)

$$\alpha_1 \in \mathcal{D}_0 \cap \mathcal{D}_{\beta_1}, \alpha_j \in \mathcal{D}_{\beta_{j-1}} \cap \mathcal{D}_{\beta_j} \text{ pour } j \in \{2, \dots, p\}, \text{ et } \alpha_{p+1} \in \mathcal{D}_{\beta_p} \cap \mathcal{D}_{\omega_1}$$

2.2. prolongeons analytiquement $\tilde{\mathcal{F}}$ de proche en proche dans chaque disque \mathcal{D}_{β_j} :

$$\tilde{\mathcal{F}}(\xi) = Z_{\beta_j}(\xi - \beta_j)\mathcal{V}_j$$

où la suite $(\mathcal{V}_j)_{1 \leq j \leq p}$ est définie par :

- \mathcal{V}_1 est l'unique solution de l'équation $\tilde{\mathcal{F}}(\alpha_1) = Z_{\beta_1}(\alpha_1 - \beta_1)\mathcal{V}_1$
- pour $j \in \{2, \dots, p\}$, \mathcal{V}_j est l'unique solution de l'équation

$$\tilde{\mathcal{F}}(\alpha_j) = Z_{\beta_{j-1}}(\alpha_j - \beta_{j-1})\mathcal{V}_{j-1} = Z_{\beta_j}(\alpha_j - \beta_j)\mathcal{V}_j$$

2.3. \mathfrak{S}_{ω_1} est alors l'unique solution de l'équation

$$Z_{\beta_p}(\alpha_{p+1} - \beta_p)\mathcal{V}_p = Z_{\omega_1}(\alpha_{p+1} - \omega_1)\mathfrak{S}_{\omega_1}$$

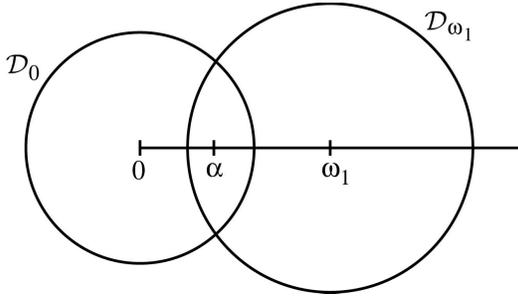


Figure 3.1

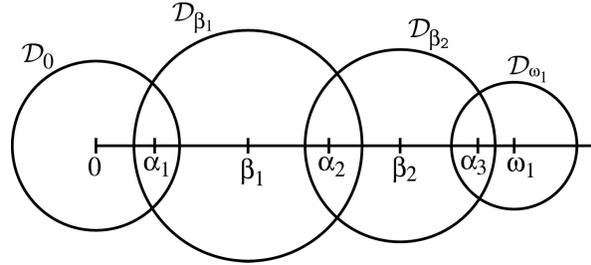


Figure 3.2

Remarque 3.7 Suivant le choix du paragraphe 2.3, nous prolongeons analytiquement $\tilde{\mathcal{F}}(\xi)$ par la droite. Le prolongement analytique à droite de ω_1 correspondant à

$$Z_{\omega_1}(\xi - \omega_1)\mathfrak{S}_{\omega_1}$$

nous évaluons Z_{ω_1} en un point α_{p+1} tel que $\arg(\alpha_{p+1} - \omega_1) = \arg \omega_1 - \pi$.

Pour calculer ensuite \mathfrak{S}_{ω_2} , il suffit d'appliquer l'algorithme ci-dessus à partir de $Z_{\omega_1}(\xi - \omega_1)\mathfrak{S}_{\omega_1}$, qui est par construction le prolongement analytique de $\tilde{\mathcal{F}}$ le long de d_θ à droite de ω_1 . En itérant ce procédé, nous pouvons calculer tous les \mathfrak{S}_{ω_k} , $k \in \{1, \dots, p\}$.

3.1.4 Evaluation de l'erreur dans le calcul des matrices de connexion

Tous les calculs de valeurs approchées et toutes les évaluations d'erreur sur les matrices sont réalisés à l'aide de la norme d'application linéaire $\|\cdot\|$ associée à la norme euclidienne sur \mathbb{C}^m , $m \in \mathbb{N}^*$. En reprenant l'algorithme du calcul des matrices de connexion, nous voyons qu'il faut répondre aux deux questions suivantes :

1. Comment évaluer numériquement $\tilde{\mathcal{F}}(\alpha)$ avec $\alpha \in \mathcal{D}_0 \setminus \{0\}$ et les $Z_\beta(\alpha - \beta)$ avec $\beta \in \mathbb{C}^*$ et $\alpha \in \mathcal{D}_\beta \setminus \{\beta\}$, tout en contrôlant l'erreur commise ?
2. Quelle erreur commettons-nous dans le calcul des matrices \mathcal{V}_j et \mathfrak{S}_ω en remplaçant $\tilde{\mathcal{F}}(\alpha)$ et $Z_\beta(\alpha - \beta)$ par des valeurs approchées ?

Pour répondre à la première question, nous adaptons une méthode de J. van der Hoeven sur le contrôle de l'erreur commise lors de l'évaluation des fonctions holonomes au voisinage d'un point ordinaire ([vdH99]) ou d'un point singulier régulier ([vdH01]).

La réponse à la seconde question est beaucoup plus simple et n'utilise que les propriétés classiques de la norme $\|\cdot\|$ (voir ci-dessous) : les formules nécessaires sont données aux lemmes 3.22 et 3.23 à la fin de ce paragraphe.

3.1.4.1 Quelques rappels sur la norme $\|\cdot\|$

Pour tout vecteur $X = \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_m \end{bmatrix}$ de \mathbb{C}^m , notons

$$\|X\|_2 = \left(\sum_{j=1}^m |X_j|^2 \right)^{1/2}$$

la norme euclidienne de X et munissons l'espace $M_{m,p}(\mathbb{C})$ de la norme d'application linéaire associée : pour tout $M \in M_{m,p}(\mathbb{C})$,

$$\|M\| = \max_{\|X\|_2=1} \|MX\|_2$$

Noter que si M est un vecteur, alors $\|M\| = \|M\|_2$. Rappelons quelques propriétés classiques de $\|\cdot\|$ que nous utiliserons dans la suite :

- ★ $\|\cdot\|$ est une norme d'algèbre : pour toutes matrices M et N , $\|MN\| \leq \|M\| \|N\|$
- ★ Pour tout $M \in M_{m,p}(\mathbb{C})$, $\|M\| = s_{M,\max}$, où $s_{M,\max}$ est la plus grande valeur singulière⁵ de M . En particulier,
 - si $M \in M_m(\mathbb{C})$ est diagonale, alors $\|M\|$ est le rayon spectral de M
 - si $M \in GL_m(\mathbb{C})$, alors $\|M^{-1}\| = \frac{1}{s_{M,\min}}$, où $s_{M,\min}$ est la plus petite valeur singulière de M

⁵Les valeurs singulières de M sont les racines carrées des valeurs propres de ${}^t\overline{M}M$ (qui sont par construction toutes positives).

★ Pour tout $M \in M_{m,p}(\mathbb{C})$,

$$\|M\| \leq \left(\sum_{j=1}^m \sum_{\ell=1}^p |M^{(j,\ell)}|^2 \right)^{1/2}$$

En particulier, si $|M| \leq a$, alors $\|M\| \leq a\sqrt{mp}$

3.1.4.2 Contrôle de l'erreur sur $\tilde{\mathcal{F}}(\alpha), \alpha \in \mathcal{D}_0 \setminus \{0\}$

Une démarche naturelle pourrait consister à adapter au cas d'un système la démonstration de l'article [vdH01] consacré au cas des équations différentielles linéaires à points singuliers réguliers, puisque $\tilde{\mathcal{F}}$ est solution du système $[S]$ à point singulier régulier à l'origine. Malheureusement, la méthode qui en résulte conduit dans notre cas à un contrôle d'erreur très complexe en vue de son implantation sous machine.

Aussi avons-nous choisi d'adapter la méthode de l'article [vdH99] consacré au cas des équations différentielles linéaires à points ordinaires. Notons

$$\hat{f}(x) = \begin{bmatrix} \hat{f}^{[1]}(x) \\ \vdots \\ \hat{f}^{[n]}(x) \end{bmatrix} = I_{n,1} + \sum_{m \geq 2} \hat{f}_m x^m$$

Proposition 3.8 *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $m_0 \geq \mu + 1$ et un nombre réel $W > 0$ indépendants de m tel que*

$$\forall m \geq m_0, \left| \hat{f}_m \right| \leq (m - \mu)! W(\rho_0 + \varepsilon)^{m-1}$$

où μ est l'entier défini au paragraphe 3.1.1 et où $\frac{1}{\rho_0}$ est le rayon du disque de convergence de la transformée de Borel \tilde{f} de \hat{f} .

En particulier, nous allons donner un algorithme pour le calcul d'un m_0 et d'un W convenables (algorithme 3.9). Le résultat de cette proposition nous servira pour contrôler l'erreur sur $\tilde{\mathcal{F}}(\alpha)$ (théorème 3.10)

Démonstration. Les séries $\hat{f}^{[j]}$, $j \in \{1, \dots, n\}$, vérifient les équations (3.1) :

$$x^2 \frac{d\hat{f}^{[j]}}{dx} - a_j \hat{f}^{[j]} - \lambda_j x \hat{f}^{[j]} = \frac{1}{P_j(x)} \sum_{k=1}^n B^{(j,k)} \hat{f}^{[k]}$$

Notons

$$P_j(x) = 1 + \sum_{m=1}^{p_j} P_{j,m} x^m \text{ et } B^{(j,k)}(x) = \sum_{m=2}^{b_j} B_m^{(j,k)} x^m$$

Multiplions (3.1) par P_j et appliquons une transformation de Mellin. Rappelons que cette transformation est un isomorphisme d'algèbres entre l'algèbre de Weyl $\mathbb{C}[x][x \frac{d}{dx}]$ et l'algèbre des opérateurs aux différences à coefficients polynomiaux $\mathbb{C}[m][\tau]$, où la

variable $m \in \mathbb{Z}$ est l'indice des suites de $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ et où τ est l'opérateur de décalage arrière : $\tau(u_m) = u_{m-1}$. Précisément cet isomorphisme est défini par les transformations

$$x \longmapsto \tau \text{ et } x \frac{d}{dx} \longmapsto m$$

Nous obtenons, pour tout $m \geq \mu_j + 2$, les relations de récurrences suivantes définissant les \widehat{f}_m :

$$(3.4) \quad \sum_{\ell=0}^{p_j} P_{j,\ell} \left((m-1-\ell-\lambda_j) \widehat{f}_{m-1-\ell}^{[j]} - a_j \widehat{f}_{m-\ell}^{[j]} \right) = \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=2}^{b_j} B_{\ell}^{(j,k)} \widehat{f}_{m-\ell}^{[k]}$$

avec $P_{j,0} = 1$. En introduisant alors les vecteurs colonnes

$$\widehat{\mathcal{F}}_m^{[j]} = \begin{bmatrix} \widehat{f}_{m-\mu+1}^{[j]} \\ \vdots \\ \widehat{f}_m^{[j]} \end{bmatrix} \text{ et } \widehat{\mathcal{F}}_m = \begin{bmatrix} \widehat{\mathcal{F}}_m^{[1]} \\ \vdots \\ \widehat{\mathcal{F}}_m^{[n]} \end{bmatrix}$$

nous obtenons pour tout $m \geq \mu + 1$ la relation

$$(3.5) \quad \widehat{\mathcal{F}}_{m+1} = (m-\mu) C_m \widehat{\mathcal{F}}_m = (m-\mu)! C_m \dots C_{\mu+1} \widehat{\mathcal{F}}_{\mu+1}$$

où C_m est un élément de $M_{n\mu}(\mathbb{C}(m))$ qui n'admet pour pôles aucun entier supérieur à $\mu + 1$. En fait, il est aisé de voir, à l'aide des égalités (3.4), que les pôles de C_m sont μ et les $\lambda_j - 1$ avec j tel que $a_j = 0$. La suite matricielle $(C_m)_{m \geq \mu+1}$ converge vers la matrice constante diagonale par blocs $C_{\infty} = \text{diag}(C_{\infty,1}, \dots, C_{\infty,n})$ où les blocs $C_{\infty,j} \in M_{\mu}(\mathbb{C})$ vérifient

$$C_{\infty,j} = \begin{cases} 0I_{\mu} & \text{si } a_j = 0 \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{P_{j,p_j}}{a_j} & \cdots & \frac{P_{j,1}}{a_j} & \frac{1}{a_j} \end{bmatrix} & \text{si } a_j \neq 0 \end{cases}$$

En particulier, la matrice C_{∞} est diagonalisable comme somme directe de matrices diagonalisables, et son rayon spectral vaut

$$\rho_0 = \max_{a_j \neq 0} \frac{1}{|a_j|}$$

Ainsi, en considérant une matrice $U \in GL_{n\mu}(\mathbb{C})$ telle que $D_{\infty} = U^{-1} C_{\infty} U$ soit diagonale, nous avons $\|D_{\infty}\| = \rho_0$.

Définissons maintenant, pour tout $m \geq \mu + 1$, les matrices suivantes :

$$D_m = U^{-1} C_m U \text{ et } E_m = U^{-1} (C_{\infty} - C_m) U = D_{\infty} - D_m$$

Par construction, la matrice E_m est une matrice à coefficients rationnels en m . Elle tend vers 0 quand m tend vers $+\infty$ et elle n'admet pour pôles aucun entier supérieur à $\mu + 1$. Par conséquent, chacun de ses coefficients $E_m^{(j,\ell)}$ est borné, sur les entiers supérieurs à $\mu + 1$, par $\frac{M_{j,\ell}}{m-\mu}$. Ce nombre réel $M_{j,\ell}$ peut être obtenu sous Maple à l'aide de la commande `maximize`. En notant alors

$$M = \left(\sum_{j,\ell=1}^{n\mu} M_{j,\ell}^2 \right)^{1/2}$$

il s'ensuit les inégalités suivantes :

$$(3.6) \quad \|E_m\| \leq \frac{M}{m-\mu} \leq M \text{ pour tout } m \geq \mu + 1$$

Remarquer que si nous avons choisi une majoration uniforme sur les coefficients $E_m^{(j,\ell)}$, disons $\frac{M'}{m-\mu}$ pour tout $j, \ell \in \{1, \dots, n\mu\}$, nous aurions obtenu comme inégalité

$$\|E_m\| \leq \frac{n\mu M'}{m-\mu} \leq n\mu M' \text{ pour tout } m \geq \mu + 1$$

Cependant, si ce choix peut sembler a priori intéressant, il s'avère en général catastrophique d'un point de vue numérique. Nous renvoyons à l'exemple 1 pour plus de précisions.

Définissons à présent, pour $\varepsilon > 0$ fixé, l'entier m_0 par

$$m_0 = \left\lceil \frac{M}{\varepsilon} \right\rceil + \mu + 1$$

Nous avons alors

$$\frac{M}{m-\mu} \leq \frac{m_0 - \mu}{m - \mu} \varepsilon$$

d'où, par (3.6), l'inégalité

$$\|D_\infty - D_m\| = \|E_m\| \leq \varepsilon \text{ pour tout } m \geq m_0$$

et donc

$$(3.7) \quad \|D_m\| \leq \|D_\infty\| + \varepsilon = \rho_0 + \varepsilon \text{ pour tout } m \geq m_0$$

D'autre part, la relation (3.5) entraîne

$$\left\| \widehat{\mathcal{F}}_{m+1} \right\| \leq (m-\mu)! \|UD_m \dots D_{\mu+1} U^{-1}\| \left\| \widehat{\mathcal{F}}_{\mu+1} \right\| \text{ pour tout } m \geq \mu + 1$$

Notant

$$\mathfrak{D} = \begin{cases} I_{n\mu} & \text{si } m_0 = \mu + 1 \\ D_{m_0-1} \dots D_{\mu+1} & \text{si } m_0 \geq \mu + 2 \end{cases}$$

nous en déduisons, grâce à (3.7), l'inégalité suivante : pour tout $m \geq m_0$,

$$\left\| \widehat{\mathcal{F}}_{m+1} \right\| \leq (m - \mu)! \|U\| (\rho_0 + \varepsilon)^{m-m_0+1} \|\mathcal{D}\| \|U^{-1}\| \left\| \widehat{\mathcal{F}}_{\mu+1} \right\|$$

Remarquons à présent que nous avons l'inégalité $\|\mathcal{D}\| \leq (\rho_0 + M)^{m_0-\mu-1}$:

– si $m_0 = \mu + 1$, le résultat est évident ;

– si $m_0 \geq \mu + 2$, nous avons l'inégalité $\|D_m\| \leq \|D_\infty\| + \|E_m\| = \rho_0 + \|E_m\|$ et nous concluons par (3.6).

Il s'ensuit alors, pour tout $m \geq m_0$, l'inégalité

$$\left\| \widehat{\mathcal{F}}_{m+1} \right\| \leq (m - \mu)! \frac{\text{cond}(U) \left\| \widehat{\mathcal{F}}_{\mu+1} \right\| (\rho_0 + M)^{m_0-\mu-1}}{(\rho_0 + \varepsilon)^{m_0-2}} (\rho_0 + \varepsilon)^{m-1}$$

où $\text{cond}(U) = \|U\| \|U^{-1}\|$ est le conditionnement de la matrice U . Nous obtenons ainsi le résultat voulu en choisissant pour constante W (indépendante de m) le nombre réel

$$W = \frac{\text{cond}(U) \left\| \widehat{\mathcal{F}}_{\mu+1} \right\| (\rho_0 + M)^{m_0-\mu-1}}{(\rho_0 + \varepsilon)^{m_0-2}}$$

Nous avons en effet

$$\left| \widehat{f}_m^{[j]} \right| \leq \left\| \widehat{\mathcal{F}}_{m+1} \right\| \leq (m - \mu)! W (\rho_0 + \varepsilon)^{m-1}$$

pour tout $m \geq m_0$ et tout $j \in \{1, \dots, n\}$. ■

Cette démonstration fournit également un algorithme pour calculer un m_0 et un W convenables :

Algorithme 3.9 (détermination de m_0 et W) L'algorithme suivant permet de calculer un entier m_0 et un nombre réel W convenables :

1. Pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$ et tout $m \geq \mu + 1$, noter

$$\widehat{\mathcal{F}}_m^{[j]} = \begin{bmatrix} \widehat{f}_{m-\mu+1}^{[j]} \\ \vdots \\ \widehat{f}_m^{[j]} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \widehat{\mathcal{F}}_m = \begin{bmatrix} \widehat{\mathcal{F}}_m^{[1]} \\ \vdots \\ \widehat{\mathcal{F}}_m^{[n]} \end{bmatrix}$$

2. Déterminer la matrice C_m telle que

$$\widehat{\mathcal{F}}_{m+1} = (m - \mu) C_m \widehat{\mathcal{F}}_m \quad \text{pour tout } m \geq \mu + 1$$

Calculer $C_\infty = \lim_{m \rightarrow +\infty} C_m$

3. Déterminer $U \in GL_{n\mu}(\mathbb{C})$ telle que $U^{-1} C_\infty U$ soit diagonale

4. (calcul de m_0) Calculer pour tout $m \geq \mu + 1$ la matrice

$$E_m = U^{-1}(C_\infty - C_m)U$$

Déterminer, pour tout $j, \ell \in \{1, \dots, n\mu\}$, le nombre réel

$$M_{j,\ell} = \sup_{m \geq \mu+1} ((m - \mu) |E_m^{(j,\ell)}|)$$

Calculer

$$M = \left(\sum_{j,\ell=1}^{n\mu} M_{j,\ell}^2 \right)^{1/2}$$

Calculer

$$m_0 = \left\lceil \frac{M}{\varepsilon} \right\rceil + \mu + 1$$

5. (calcul de W) Calculer

$$W = \frac{\text{cond}(U) \left\| \widehat{\mathcal{F}}_{\mu+1} \right\| (\rho_0 + M)^{m_0 - \mu - 1}}{(\rho_0 + \varepsilon)^{m_0 - 2}}$$

Désormais, nous fixons m_0 et W correspondant à ce choix. Nous pouvons à présent contrôler l'erreur sur $\widetilde{\mathcal{F}}(\alpha)$ avec $\alpha \in \mathcal{D}_0 \setminus \{0\}$:

Théorème 3.10 (contrôle d'erreur sur $\widetilde{\mathcal{F}}(\alpha)$)

Soient $\alpha \in \mathcal{D}_0 \setminus \{0\}$ et $\varepsilon > 0$ tel que $|\alpha| < \frac{1}{\rho_0 + \varepsilon}$.

Notons

$$K = W \sqrt{n\mu} \max_{0 \leq \ell \leq \mu-1} \left(\frac{1}{|\alpha|^\ell} \right) \quad (K \text{ est indépendant de } m)$$

et, pour tout $m \geq \mu - 1$,

$$\widetilde{\mathcal{F}}_{[m]}(\alpha) = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{m+1} \frac{\widehat{f}_k \alpha^{k-1}}{(k-1)!} \\ \vdots \\ \sum_{k=\mu}^{m+1} \frac{\widehat{f}_k \alpha^{k-\mu}}{(k-\mu)!} \end{bmatrix}$$

la $m^{\text{ème}}$ somme partielle de $\widetilde{\mathcal{F}}(\alpha)$.

1. Pour tout $m \geq m_0 - 2$,

$$\left\| \widetilde{\mathcal{F}}(\alpha) - \widetilde{\mathcal{F}}_{[m]}(\alpha) \right\| \leq K \frac{((\rho_0 + \varepsilon) |\alpha|)^{m+1}}{1 - (\rho_0 + \varepsilon) |\alpha|}$$

2. En particulier, si $\nu > 0$ est l'erreur cherchée, alors

$$m_\nu = \max \left(m_0 - 2, \left\lceil \frac{\log((1 - (\rho_0 + \varepsilon)|\alpha|)\nu) - \log(K)}{\log((\rho_0 + \varepsilon)|\alpha|)} \right\rceil \right)$$

$$\text{vérifie } \left\| \tilde{\mathcal{F}}(\alpha) - \tilde{\mathcal{F}}_{[m_\nu]}(\alpha) \right\| \leq \nu.$$

Démonstration. 1. Par définition de $\tilde{\mathcal{F}}_{[m]}$, nous avons

$$\tilde{\mathcal{F}}(\alpha) - \tilde{\mathcal{F}}_{[m]}(\alpha) = \sum_{k \geq m+2} \begin{bmatrix} \frac{\hat{f}_k \alpha^{k-1}}{(k-1)!} \\ \vdots \\ \frac{\hat{f}_k \alpha^{k-\mu}}{(k-\mu)!} \end{bmatrix}$$

avec

$$\left\| \begin{bmatrix} \frac{\hat{f}_k \alpha^{k-1}}{(k-1)!} \\ \vdots \\ \frac{\hat{f}_k \alpha^{k-\mu}}{(k-\mu)!} \end{bmatrix} \right\| = \left(\sum_{\ell=0}^{\mu-1} \sum_{j=1}^n \left(\frac{|\hat{f}_k^{[j]}| |\alpha|^{k-\ell-1}}{(k-\ell-1)!} \right)^2 \right)^{1/2}$$

Grâce à la proposition 3.8 et puisque $k \geq m+2 \geq m_0$, nous en déduisons les inégalités suivantes : pour tout $\ell \in \{0, \dots, \mu-1\}$ et tout $j \in \{1, \dots, n\}$,

$$\begin{aligned} \frac{|\hat{f}_k^{[j]}| |\alpha|^{k-\ell-1}}{(k-\ell-1)!} &\leq \frac{(k-\mu)!}{(k-\ell-1)!} W(\rho_0 + \varepsilon)^{k-1} |\alpha|^{k-\ell-1} \\ &\leq W(\rho_0 + \varepsilon)^{k-1} |\alpha|^{k-\ell-1} \\ &\leq \frac{K}{\sqrt{n\mu}} ((\rho_0 + \varepsilon)|\alpha|)^{k-1} \end{aligned}$$

Le résultat suit en remarquant que $(\rho_0 + \varepsilon)|\alpha| < 1$. ■

Nous voyons dans ce théorème l'intérêt du facteur $(m - \mu)$ introduit en (3.5), qui nous a permis d'obtenir $(m - \mu)!$ à la proposition 3.8, puis de conclure ici. Ainsi, même si les égalités (3.4) sont valables pour $m \geq \mu_j$, il est nécessaire de ne les utiliser que pour $m \geq \mu_j + 2$.

3.1.4.3 Contrôle de l'erreur sur $Z_\beta(\alpha - \beta)$, $\beta \in \mathbb{C}^*$, $\alpha \in \mathcal{D}_\beta \setminus \{\beta\}$

Rappelons que $Z_\beta(\xi - \beta)$ est une solution fondamentale au voisinage de β du système $[S]$. Nous allons distinguer le cas où β n'est pas une singularité de $[S]$, i.e., $\beta \notin \{a_j; 1 \leq$

$j \leq n\}$, et le cas où $\beta = \omega$ est l'un des $a_j \neq 0$. Dans le premier cas, l'étude est relativement simple puisque β est un point ordinaire de $[S]$. En revanche, si $\beta = \omega$ est l'un des $a_j \neq 0$, Z_ω est une solution fondamentale au voisinage d'un point singulier régulier de $[S]$: la forme de Z_ω a été donnée à la proposition 3.4 et nous voyons qu'il suffit de contrôler l'erreur sur la série G_ω .

En un point ordinaire (cas $\beta \notin \{a_j; 1 \leq j \leq n\}$) : Réécrivons le système $[S]$ sous la forme

$$[S_\beta] \quad \frac{dZ}{d\xi} = C_\beta(\xi - \beta)Z$$

où la matrice $C_\beta(\xi - \beta)$ de dimension $n\mu \times n\mu$ est définie par

$$C_\beta(\xi - \beta) = \left[\begin{array}{ccc|c} 0I_n & I_n & 0I_n & 0I_n \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0I_n \\ 0I_n & \dots & \dots & I_n \\ \hline & C_\beta^{(3)}(\xi - \beta) & & C_\beta^{(4)}(\xi - \beta) \end{array} \right]$$

avec

$$C_\beta^{(3)}(\xi - \beta) = \begin{bmatrix} \square_1(\xi - \beta) & \dots & \square_1(\xi - \beta) \\ \vdots & & \vdots \\ \square_n(\xi - \beta) & \dots & \square_n(\xi - \beta) \end{bmatrix} \text{ et } C_\beta^{(4)}(\xi - \beta) = \text{diag}(\square_1(\xi - \beta), \dots, \square_n(\xi - \beta))$$

les coefficients $\square_j(\xi - \beta)$ étant des fractions rationnelles de la forme $\frac{\alpha_1 + \alpha_2 \xi}{\xi - a_j}$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$. Le point $\xi = \beta$ est donc un point ordinaire de $[S_\beta]$ et la solution fondamentale $Z_\beta(\xi - \beta)$ que nous considérons est celle vérifiant $Z_\beta(0) = I_{n\mu}$. Noter que cette solution est analytique sur le disque ouvert \mathcal{D}_β de centre β et de rayon $\frac{1}{\rho_\beta}$ (voir le début du paragraphe 3.1.3 pour les notations).

Le but de ce paragraphe est de contrôler l'erreur sur $Z_\beta(\alpha - \beta)$ avec $\alpha \in \mathcal{D}_\beta \setminus \{\beta\}$. La méthode que nous présentons est analogue à celle du paragraphe précédent et généralise au cas d'un système à coefficients rationnels celle donnée par J. van der Hoeven dans [vdH99] pour une équation à coefficients polynomiaux.

Notons

$$Z_\beta(\xi - \beta) = \sum_{m \geq 0} Z_{\beta,m}(\xi - \beta)^m \text{ avec } Z_{\beta,0} = I_{n\mu}$$

et commençons par établir pour la $\ell^{\text{ème}}$ colonne $Z_{\beta,m}^{(\ell)}$ de $Z_{\beta,m}$, $\ell \in \{1, \dots, n\mu\}$, une inégalité du type

$$(3.8) \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \left| Z_{\beta,m}^{(\ell)} \right| \leq W_\ell(\rho_\beta + \varepsilon)^m$$

pour tout $m \geq m_0^{(\ell)}$ avec $m_0^{(\ell)}$ et W_ℓ convenables.

Par identification des termes en $(\xi - \beta)^m$ dans $[S_\beta]$, nous obtenons les relations suivantes :

- Si $j \in \{1, \dots, n(\mu - 1)\}$,

$$Z_{\beta, m+1}^{(j, \ell)} = \frac{1}{m+1} Z_{\beta, m}^{(j+\mu, \ell)} \text{ pour tout } m \geq 0$$

- Si $j \in \{1, \dots, n\}$,

$$Z_{\beta, m+1}^{(n(\mu-1)+j, \ell)} = \frac{m}{(m+1)(a_j - \beta)} Z_{\beta, m}^{(n(\mu-1)+j, \ell)} + \frac{1}{m+1} \sum_{k=1}^{n\mu} \left(\alpha_k Z_{\beta, m}^{(k, \ell)} + \beta_k Z_{\beta, m-1}^{(k, \ell)} \right)$$

pour tout $m \geq 1$, avec $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{C}$

Ainsi, en notant $\mathcal{Z}_{\beta, m}^{(j, \ell)} = \begin{bmatrix} Z_{\beta, m-1}^{(j, \ell)} \\ Z_{\beta, m}^{(j, \ell)} \end{bmatrix}$, nous voyons que le vecteur colonne

$$\mathcal{Z}_{\beta, m}^{(\ell)} = \begin{bmatrix} \mathcal{Z}_{\beta, m}^{(1, \ell)} \\ \vdots \\ \mathcal{Z}_{\beta, m}^{(n\mu, \ell)} \end{bmatrix}$$

de dimension $2n\mu$ vérifie, pour tout $m \geq 1$, la relation

$$\mathcal{Z}_{\beta, m+1}^{(\ell)} = V_{\beta, m}^{(\ell)} \mathcal{Z}_{\beta, m}^{(\ell)} = V_{\beta, m}^{(\ell)} \dots V_{\beta, 1}^{(\ell)} \mathcal{Z}_{\beta, 1}^{(\ell)}$$

où $V_{\beta, m}^{(\ell)}$ est un élément de $M_{2n\mu}(\mathbb{C}(m))$ qui n'admet pour pôles aucun entier supérieur à 1 (il est aisé de voir sur les égalités précédentes que seul -1 est un pôle de $V_{\beta, m}^{(\ell)}$).

La suite matricielle $(V_{\beta, m}^{(\ell)})_{m \geq 1}$ converge vers la matrice constante diagonale par blocs $V_{\beta, \infty} = \text{diag}(V_{\beta, \infty, 1}, \dots, V_{\beta, \infty, n\mu})$ où les blocs $V_{\beta, \infty, j}$ vérifient

$$\begin{cases} V_{\beta, \infty, j} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \text{si } j \in \{1, \dots, n(\mu - 1)\} \\ \text{et} \\ V_{\beta, \infty, n(\mu-1)+j} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{a_j - \beta} \end{bmatrix} & \text{si } j \in \{1, \dots, n\} \end{cases}$$

En particulier, $V_{\beta, \infty}$ est indépendante de ℓ (choix de la colonne dans Z_β) et son rayon spectral est ρ_β . Contrairement à ce que nous avons vu au paragraphe précédent, cette matrice $V_{\beta, \infty}$ n'est pas diagonalisable (seuls les n derniers blocs le sont). Ainsi, même si la méthode algorithmique pour obtenir l'inégalité (3.8) est similaire à celle utilisée précédemment, l'algorithme utilisé est quant à lui foncièrement différent à cause de la présence de blocs de Jordan de dimension deux dans $V_{\beta, \infty}$. Finalement, en reprenant la méthode proposée par J. van der Hoeven dans [vdH99], nous obtenons les résultats suivants :

Proposition 3.11 ([vdH99]) *Pour tout $\ell \in \{1, \dots, n\mu\}$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $m_0^{(\ell)} \geq 1$ et un nombre réel $W_\ell > 0$ indépendants de m tel que*

$$\forall m \geq m_0^{(\ell)}, \quad \left| Z_{\beta, m}^{(\ell)} \right| \leq W_\ell (\rho_\beta + \varepsilon)^m$$

Algorithme 3.12 (détermination de $m_0^{(\ell)}$ et W_ℓ , [vdH99]) L'algorithme suivant permet de calculer un entier $m_0^{(\ell)}$ et un nombre réel W_ℓ convenables :

1. Pour tout $j \in \{1, \dots, n\mu\}$ et tout $m \geq 1$, noter

$$\mathcal{Z}_{\beta, m}^{(j, \ell)} = \begin{bmatrix} Z_{\beta, m-1}^{(j, \ell)} \\ Z_{\beta, m}^{(j, \ell)} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{Z}_{\beta, m}^{(\ell)} = \begin{bmatrix} \mathcal{Z}_{\beta, m}^{(1, \ell)} \\ \vdots \\ \mathcal{Z}_{\beta, m}^{(n\mu, \ell)} \end{bmatrix}$$

2. Déterminer la matrice $V_{\beta, m}^{(\ell)}$ telle que

$$\mathcal{Z}_{\beta, m+1}^{(\ell)} = V_{\beta, m}^{(\ell)} \mathcal{Z}_{\beta, m}^{(\ell)} \quad \text{pour tout } m \geq 1$$

Calculer $V_{\beta, \infty} = \lim_{m \rightarrow +\infty} V_{\beta, m}^{(\ell)}$

3. Déterminer $\widehat{U} \in GL_{2n\mu}(\mathbb{C})$ telle que $\widehat{U}^{-1} V_{\beta, \infty} \widehat{U}$ soit sous forme de Jordan
4. Noter $U = \widehat{U} \text{diag}(1, \chi, \dots, \chi^{2n\mu-1})$, où $\chi = \min\left(\frac{\varepsilon}{2\sqrt{n(\mu-1)}}, 1\right)$
5. (calcul de $m_0^{(\ell)}$) Calculer pour tout $m \geq 1$ la matrice

$$E_{\beta, m}^{(\ell)} = U^{-1} (V_{\beta, \infty} - V_{\beta, m}^{(\ell)}) U$$

Déterminer, pour tout $j, k \in \{1, \dots, 2n\mu\}$, le nombre réel

$$M_{\ell, j, k} = \sup_{m \geq 1} \left(m \left| E_{\beta, m}^{(\ell)(j, k)} \right| \right)$$

Calculer

$$M_\ell = \left(\sum_{j, k=1}^{2n\mu} M_{\ell, j, k}^2 \right)^{1/2}$$

Calculer

$$m_0^{(\ell)} = \left\lceil \frac{2M_\ell}{\varepsilon} \right\rceil + 1$$

6. (calcul de W_ℓ) Calculer

$$W_\ell = \frac{\text{cond}(U) \left\| \mathcal{Z}_{\beta, 1}^{(\ell)} \right\| (\rho_\beta + \frac{\varepsilon}{2} + M_\ell)^{m_0^{(\ell)} - 1}}{(\rho_\beta + \varepsilon)^{m_0^{(\ell)} - 1}}$$

Démonstration. Les points (3) et (4) de l'algorithme permettent de construire une matrice diagonale D_∞ vérifiant

$$\|D_\infty - U^{-1}V_{\beta,\infty}U\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \text{ et } \|D_\infty\| = \rho_\beta$$

de la manière suivante : $J_\infty = \widehat{U}^{-1}V_{\beta,\infty}\widehat{U}$ est une matrice sous forme de Jordan ayant $n(\mu - 1)$ termes égaux à 1 sur sa première sur-diagonale et ses termes diagonaux étant ceux de $V_{\beta,\infty}$ à une permutation près. Ainsi, en prenant pour D_∞ la partie diagonale de J_∞ ⁶, la matrice

$$D_\infty - U^{-1}V_{\beta,\infty}U = D_\infty - \text{diag}\left(1, \frac{1}{\chi}, \dots, \frac{1}{\chi^{2n\mu-1}}\right) J_\infty \text{diag}(1, \chi, \dots, \chi^{2n\mu-1})$$

vérifie la propriété suivante : les termes égaux à 1 de la première sur-diagonale de J_∞ sont remplacés par χ et les autres termes de la matrice sont nuls. Par conséquent,

$$\|D_\infty - U^{-1}V_{\beta,\infty}U\| \leq \chi\sqrt{n(\mu - 1)} \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Posons $D_m^{(\ell)} = U^{-1}V_{\beta,m}^{(\ell)}U$. Grâce à D_∞ et au point (5) de l'algorithme, nous obtenons, pour tout $m \geq m_0^{(\ell)}$,

$$\begin{aligned} \|D_\infty - D_m^{(\ell)}\| &\leq \|D_\infty - U^{-1}V_{\beta,\infty}U\| + \|E_{\beta,m}^{(\ell)}\| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{M_\ell}{m} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

et donc $\|D_m^{(\ell)}\| \leq \|D_\infty\| + \varepsilon = \rho_\beta + \varepsilon$. Noter que les nombres réels $M_{\ell,j,k}$ sont bien définis puisque les coefficients de $E_{\beta,m}^{(\ell)}$ sont des fractions rationnelles en m tendant vers 0 quand m tend vers $+\infty$, leurs uniques pôles éventuels étant -1 . La fin de la démonstration est identique à celle de la proposition 3.8 en remarquant que nous avons également

$$\begin{aligned} \|D_m^{(\ell)}\| &\leq \|U^{-1}V_{\beta,\infty}U\| + \|E_{\beta,m}^{(\ell)}\| \\ &\leq \|D_\infty\| + \frac{\varepsilon}{2} + M_\ell \\ &\leq \rho_\beta + \frac{\varepsilon}{2} + M_\ell \end{aligned}$$

⁶Nous avons alors $\|D_\infty\| = \rho_\beta$.

pour tout $m \geq 1$. ■

Si cet algorithme est valable pour n'importe quelle valeur de ε , un choix trop "au hasard" peut s'avérer catastrophique pour le calcul d'erreur. En effet, si ε est petit – ce qui est un choix a priori intéressant –, alors χ est petit et donc $\frac{1}{\chi}$ est grand. Par conséquent, le nombre $m_0^{(\ell)}$, borne inférieure de validité des calculs, risque d'exploser. En fait, il convient, si possible, de choisir ε afin que χ et $\frac{1}{\chi}$ ne soient pas trop grands, *i.e.*, afin que χ soit proche de 1. Nous renvoyons au paragraphe 3.1.5 pour un exemple numérique.

Enonçons à présent le résultat permettant de contrôler l'erreur sur $Z_\beta(\alpha - \beta)$, $\alpha \in \mathcal{D}_\beta \setminus \{\beta\}$:

Théorème 3.13 (contrôle d'erreur sur $Z_\beta(\alpha - \beta)$)

Soient $\alpha \in \mathcal{D}_\beta \setminus \{\beta\}$ et $\varepsilon > 0$ tel que $|\alpha - \beta| < \frac{1}{\rho_\beta + \varepsilon}$.

Notons

$$K = n\mu \max_{1 \leq \ell \leq n\mu} W_\ell, \quad m_0 = \max_{1 \leq \ell \leq n\mu} m_0^{(\ell)}$$

et $Z_{\beta,[m]}$ la $m^{\text{ème}}$ somme partielle de Z_β .

1. Pour tout $m \geq m_0 - 1$,

$$\|Z_\beta(\alpha - \beta) - Z_{\beta,[m]}(\alpha - \beta)\| \leq K \frac{((\rho_\beta + \varepsilon) |\alpha - \beta|)^{m+1}}{1 - (\rho_\beta + \varepsilon) |\alpha - \beta|}$$

2. En particulier, si $\nu > 0$ est l'erreur cherchée, alors

$$m_\nu = \max \left(m_0 - 1, \left\lceil \frac{\log((1 - (\rho_\beta + \varepsilon) |\alpha - \beta|) \nu) - \log(K)}{\log((\rho_\beta + \varepsilon) |\alpha - \beta|)} \right\rceil \right)$$

vérifie $\|Z_\beta(\alpha - \beta) - Z_{\beta,[m_\nu]}(\alpha - \beta)\| \leq \nu$.

Démonstration. 1. Grâce à la proposition 3.11, nous avons

$$\|Z_\beta(\alpha - \beta) - Z_{\beta,[m]}(\alpha - \beta)\| \leq \sum_{k \geq m+1} \|Z_{\beta,k}\| |\alpha - \beta|^k$$

avec, pour tout $k \geq m + 1 \geq m_0$:

$$\|Z_{\beta,k}\|^2 \leq \sum_{j,\ell=1}^{n\mu} |Z_{\beta,k}^{(j,\ell)}|^2 \leq \sum_{j,\ell=1}^{n\mu} \left(\frac{K}{n\mu} (\rho_\beta + \varepsilon)^k \right)^2 = (K(\rho_\beta + \varepsilon)^k)^2$$

Le résultat suit en remarquant que $(\rho_\beta + \varepsilon) |\alpha - \beta| < 1$. ■

En un point singulier (cas $\beta = \omega$ est l'un des $a_j \neq 0$) : A présent, ω est un point singulier régulier pour le système $[S]$. La solution fondamentale $Z_\omega(\xi - \omega)$ du système $[S_\omega]$ est alors donnée à la proposition 3.4. En particulier, nous voyons qu'il faut distinguer deux cas suivant que $J_{\omega,0} = \{j \in \{1, \dots, n\} \text{ tel que } a_j = \omega \text{ et } \lambda_j = 0\}$ est vide ou non.

Le système $[S_\omega]$ étant à point singulier régulier en ω , on pourrait envisager de transcrire la méthode de l'article [vdH01] aux systèmes. Cependant, la méthode conduisant à des calculs complexes, il nous apparaît plus simple ici d'adapter la méthode précédente pour l'étendre au cas des systèmes à points singuliers réguliers.

Premier cas : les exposants de monodromie associés à ω sont non nuls ($J_{\omega,0} = \emptyset$) : La solution fondamentale étudiée est

$$Z_\omega(\xi - \omega) = D_\omega G_\omega(\xi - \omega)(\xi - \omega)^{M_\omega}$$

Les matrices D_ω et M_ω étant connues explicitement (cf. paragraphe 3.1.1, proposition 3.2), il suffit de contrôler l'erreur sur la série $G_\omega(\xi - \omega)$. Celle-ci est analytique sur le disque ouvert \mathcal{D}_ω et elle est l'unique solution série entière vérifiant $G_\omega(0) = I_{n\mu}$ de l'équation

$$(3.9) \quad (\xi - \omega)G'_\omega = D_\omega^{-1}C_\omega(\xi - \omega)D_\omega G_\omega - G_\omega M_\omega$$

avec

$$D_\omega^{-1}C_\omega(\xi)D_\omega = \left[\begin{array}{ccc|c} 0I_n & \xi I_n & 0I_n & 0I_n \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0I_n & \cdots & 0I_n & \xi I_n \\ \hline & & R_1(\xi) & \xi I_n \\ \hline & & R_2(\xi) & R_3(\xi) \end{array} \right]$$

où $R_1(\xi)$ et $R_2(\xi)$ (resp. $R_3(\xi)$) sont des matrices de dimension $n \times n(\mu - 1)$ (resp. $n \times n$) vérifiant les conditions suivantes :

- ★ si $j \notin J_\omega$ (resp. $j \in J_\omega$), les termes de la $j^{\text{ème}}$ ligne de $R_1(\xi)$ sont nuls (resp. de la forme $\alpha\xi$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$) ;
- ★ si $j \notin J_\omega$ (resp. $j \in J_\omega$), les termes de la $j^{\text{ème}}$ ligne de $R_2(\xi)$ sont de la forme $\frac{\alpha\xi + \beta\xi^2}{\xi - a_j + \omega}$ (resp. $\alpha\xi$) avec $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$;
- ★ si $j \notin J_\omega$, le terme $R_3^{(j,j)}(\xi)$ est de la forme $\frac{\alpha\xi + \beta\xi^2}{\xi - a_j + \omega}$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, et les termes $R_3^{(j,\ell)}(\xi)$, $\ell \neq j$, sont nuls ;
- ★ si $j \in J_\omega$, le terme $R_3^{(j,j)}(\xi)$ (resp. $R_3^{(j,\ell)}(\xi)$, $\ell \neq j$) est de la forme $\lambda_j - \mu + \alpha\xi$ (resp. $\alpha\xi$) avec $\alpha \in \mathbb{C}$.

Comme précédemment, nous notons

$$(3.10) \quad G_\omega(\xi - \omega) = \sum_{m \geq 0} G_{\omega,m}(\xi - \omega)^m \text{ avec } G_{\omega,0} = I_{n\mu}$$

et, pour $\ell \in \{1, \dots, n\mu\}$, $G_{\omega, m}^{(\ell)} = \begin{bmatrix} G_{\omega, m}^{(1, \ell)} \\ \vdots \\ G_{\omega, m}^{(n\mu, \ell)} \end{bmatrix}$ la $\ell^{\text{ème}}$ colonne de $G_{\omega, m}$. En injectant alors

la série (3.10) dans l'équation (3.9) et en procédant comme dans le cas où $\beta \notin \{a_j; 1 \leq j \leq n\}$, nous voyons aisément que le vecteur colonne $\mathcal{G}_{\omega, m}^{(\ell)} = \begin{bmatrix} \mathcal{G}_{\omega, m}^{(1, \ell)} \\ \vdots \\ \mathcal{G}_{\omega, m}^{(n\mu, \ell)} \end{bmatrix}$ de dimension

$2n\mu$, où $\mathcal{G}_{\omega, m}^{(j, \ell)} = \begin{bmatrix} G_{\omega, m-1}^{(j, \ell)} \\ G_{\omega, m}^{(j, \ell)} \end{bmatrix}$, vérifie

$$(3.11) \quad \mathcal{G}_{\omega, m+1}^{(\ell)} = H_{\omega, m}^{(\ell)} \mathcal{G}_{\omega, m}^{(\ell)}$$

pour tout $m \geq 1$. La suite matricielle $(H_{\omega, m}^{(\ell)})_{m \geq 1} \in (M_{2n\mu}(\mathbb{C}(m)))^{\mathbb{N}^*}$ converge vers la matrice constante diagonale par blocs $H_{\omega, \infty} = \text{diag}(H_{\omega, \infty, 1}, \dots, H_{\omega, \infty, n\mu})$ où les blocs $H_{\omega, \infty, j}$ vérifient

$$\begin{cases} H_{\omega, \infty, j} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \text{si } j \in \{1, \dots, n(\mu-1)\} \text{ ou } j = n(\mu-1) + k \text{ avec } k \in J_\omega \\ \text{et} \\ H_{\omega, \infty, n(\mu-1)+j} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{a_j - \omega} \end{bmatrix} & \text{si } j \notin J_\omega \end{cases}$$

De plus, les pôles des coefficients de la matrice $H_{\omega, m}^{(\ell)}$ ne sont pas des entiers supérieurs à 1. En fait, nous pouvons montrer que les pôles de $H_{\omega, m}^{(\ell)}$ sont -1 , les $\lambda_j - \mu - 1$ et les $\mu - \lambda_j - 1$ avec j tel que $a_j = \omega$.

Nous retrouvons ici un résultat analogue au cas précédent. En particulier, nous obtenons les résultats suivants :

Proposition 3.14 *Pour tout $\ell \in \{1, \dots, n\mu\}$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $m_0^{(\ell)} \geq 1$ et un nombre réel $W_\ell > 0$ indépendants de m tel que*

$$\forall m \geq m_0^{(\ell)}, \quad |G_{\omega, m}^{(\ell)}| \leq W_\ell (\rho_\omega + \varepsilon)^m$$

Algorithme 3.15 (détermination de $m_0^{(\ell)}$ et W_ℓ) L'algorithme suivant permet de calculer un entier $m_0^{(\ell)}$ et un nombre réel W_ℓ convenables :

1. Pour tout $j \in \{1, \dots, n\mu\}$ et tout $m \geq 1$, noter

$$\mathcal{G}_{\omega, m}^{(j, \ell)} = \begin{bmatrix} G_{\omega, m-1}^{(j, \ell)} \\ G_{\omega, m}^{(j, \ell)} \end{bmatrix} \text{ et } \mathcal{G}_{\omega, m}^{(\ell)} = \begin{bmatrix} \mathcal{G}_{\omega, m}^{(1, \ell)} \\ \vdots \\ \mathcal{G}_{\omega, m}^{(n\mu, \ell)} \end{bmatrix}$$

2. Déterminer la matrice $H_{\omega, m}^{(\ell)}$ telle que

$$\mathcal{G}_{\omega, m+1}^{(\ell)} = H_{\omega, m}^{(\ell)} \mathcal{G}_{\omega, m}^{(\ell)} \text{ pour tout } m \geq 1$$

Calculer $H_{\omega, \infty} = \lim_{m \rightarrow +\infty} H_{\omega, m}^{(\ell)}$

3. Déterminer $\widehat{U} \in GL_{2n\mu}(\mathbb{C})$ telle que $\widehat{U}^{-1}H_{\omega,\infty}\widehat{U}$ soit sous forme de Jordan
4. Noter $U = \widehat{U} \operatorname{diag}(1, \chi, \dots, \chi^{2n\mu-1})$, où $\chi = \min\left(\frac{\varepsilon}{2\sqrt{n(\mu-1)+|J_\omega|}}, 1\right)$
5. (calcul de $m_0^{(\ell)}$) Calculer pour tout $m \geq 1$ la matrice

$$E_{\omega,m}^{(\ell)} = U^{-1}(H_{\omega,\infty} - H_{\omega,m}^{(\ell)})U$$

Déterminer, pour tout $j, k \in \{1, \dots, 2n\mu\}$, le nombre réel

$$M_{\ell,j,k} = \sup_{m \geq 1} (m |E_{\omega,m}^{(\ell)(j,k)}|)$$

Calculer

$$M_\ell = \left(\sum_{j,k=1}^{2n\mu} M_{\ell,j,k}^2 \right)^{1/2}$$

Calculer

$$m_0^{(\ell)} = \left\lceil \frac{2M_\ell}{\varepsilon} \right\rceil + 1$$

6. (calcul de W_ℓ) Calculer

$$W_\ell = \frac{\operatorname{cond}(U) \left\| \mathcal{G}_{\omega,1}^{(\ell)} \right\| (\rho_\omega + \frac{\varepsilon}{2} + M_\ell)^{m_0^{(\ell)}-1}}{(\rho_\omega + \varepsilon)^{m_0^{(\ell)}-1}}$$

Théorème 3.16 (contrôle d'erreur sur $G_\omega(\alpha - \omega)$)

Soient $\alpha \in \mathcal{D}_\omega \setminus \{\omega\}$ et $\varepsilon > 0$ tel que $|\alpha - \omega| < \frac{1}{\rho_\omega + \varepsilon}$.

Notons

$$K = n\mu \max_{1 \leq \ell \leq n\mu} W_\ell, \quad m_0 = \max_{1 \leq \ell \leq n\mu} m_0^{(\ell)}$$

et $G_{\omega,[m]}$ la $m^{\text{ème}}$ somme partielle de G_ω .

1. Pour tout $m \geq m_0 - 1$,

$$\left\| G_\omega(\alpha - \omega) - G_{\omega,[m]}(\alpha - \omega) \right\| \leq K \frac{((\rho_\omega + \varepsilon) |\alpha - \omega|)^{m+1}}{1 - (\rho_\omega + \varepsilon) |\alpha - \omega|}$$

2. En particulier, si $\nu > 0$ est l'erreur cherchée, alors

$$m_\nu = \max \left(m_0 - 1, \left\lceil \frac{\log((1 - (\rho_\omega + \varepsilon) |\alpha - \omega|) \nu) - \log(K)}{\log((\rho_\omega + \varepsilon) |\alpha - \omega|)} \right\rceil \right)$$

vérifie $\left\| G_\omega(\alpha - \omega) - G_{\omega,[m_\nu]}(\alpha - \omega) \right\| \leq \nu$.

Etant donné un élément $\alpha \in \mathcal{D}_\omega \setminus \{\omega\}$ et un réel $\varepsilon > 0$, ce théorème nous permet de déterminer un élément \check{G}_ω de $M_{n\mu}(\mathbb{C})$ vérifiant

$$\|G_\omega(\alpha - \omega) - \check{G}_\omega\| \leq \varepsilon$$

Le résultat suivant permet d'évaluer l'erreur commise lorsque nous substituons la matrice \check{G}_ω à $G_\omega(\alpha - \omega)$ dans $Z_\omega(\alpha - \omega)$.

Théorème 3.17 (contrôle d'erreur sur $Z_\omega(\alpha - \omega) = D_\omega G_\omega(\alpha - \omega)(\alpha - \omega)^{M_\omega}$)
Soient $\alpha \in \mathcal{D}_\omega \setminus \{\omega\}$, $\varepsilon > 0$ et \check{G}_ω un élément de $M_{n\mu}(\mathbb{C})$ vérifiant

$$\|G_\omega(\alpha - \omega) - \check{G}_\omega\| \leq \varepsilon$$

Notons \check{Z}_ω l'élément de $M_{n\mu}(\mathbb{C})$ défini par

$$\check{Z}_\omega = D_\omega \check{G}_\omega (\alpha - \omega)^{M_\omega}$$

Alors,

$$\boxed{\|Z_\omega(\alpha - \omega) - \check{Z}_\omega\| \leq s_{D_\omega, \max} s_{(\alpha - \omega)^{M_\omega, \max}} \varepsilon}$$

où $s_{D_\omega, \max}$ (resp. $s_{(\alpha - \omega)^{M_\omega, \max}}$) désigne la plus grande valeur singulière de la matrice D_ω (resp. $(\alpha - \omega)^{M_\omega}$).

Démonstration. La norme $\|\cdot\|$ étant une norme d'algèbre, nous avons l'inégalité

$$\|Z_\omega(\alpha - \omega) - \check{Z}_\omega\| \leq \|D_\omega\| \|G_\omega(\alpha - \omega) - \check{G}_\omega\| \|(\alpha - \omega)^{M_\omega}\|$$

Le résultat suit à l'aide des propriétés classiques de la norme $\|\cdot\|$ (cf. paragraphe 3.1.4.1).

■

Second cas : certains exposants de monodromie associés à ω sont nuls ($J_{\omega,0} \neq \emptyset$) :
A présent, la solution fondamentale étudiée est

$$Z_\omega(\xi - \omega) = \mathcal{T}_\omega(\xi - \omega) G_\omega(\xi - \omega) (\xi - \omega)^{M'_\omega}$$

et les matrices \mathcal{T}_ω et M'_ω sont connues explicitement (proposition 3.4, point 2-a et 2-c). Il suffit donc, comme dans le cas où $J_{\omega,0}$ est vide, de contrôler l'erreur sur la série G_ω . Pour ce faire, nous allons voir que nous pouvons utiliser les résultats de la proposition 3.11 et du théorème 3.13, modulo quelques changements évidents dus à la dimension des systèmes utilisés.

La série $G_\omega(\xi - \omega) = \sum_{m \geq 0} G_{\omega,m}(\xi - \omega)^m$ est convergente sur \mathcal{D}_ω et elle est l'unique solution série entière vérifiant $G_\omega(0) = I_{n\mu}$ de l'équation

$$(\xi - \omega)G'_\omega = \mathcal{T}_\omega^{-1} C_\omega(\xi - \omega) G_\omega - G_\omega M'_\omega$$

où $\mathcal{T}_\omega^{-1} C_\omega(\xi) = \mathcal{T}_\omega^{-1}(\xi) C_\omega(\xi) \mathcal{T}_\omega(\xi) - \xi \mathcal{T}_\omega^{-1}(\xi) \mathcal{T}'_\omega(\xi)$ admet M'_ω comme matrice de tête (proposition 3.4). La nature des termes de $\mathfrak{C}_\omega(\xi) = \mathcal{T}_\omega^{-1} C_\omega(\xi) - M'_\omega$ peut être précisée

de la manière suivante :

- pour $j \in \{1, \dots, n(\mu - 1)\}$ (resp. $j \in J_\omega$), les termes de la $j^{\text{ème}}$ ligne (resp. $(n(\mu - 1) + j)^{\text{ème}}$ ligne) de $\mathfrak{C}_\omega(\xi)$ sont de la forme $\alpha_1 \xi + \dots + \alpha_{\mu+1} \xi^{\mu+1}$ avec $\alpha_1, \dots, \alpha_{\mu+1} \in \mathbb{C}$;
- pour $j \notin J_\omega$, la $(n(\mu - 1) + j)^{\text{ème}}$ ligne de $\mathfrak{C}_\omega(\xi)$ est de la forme $\frac{\alpha_1 \xi + \dots + \alpha_{\mu+1} \xi^{\mu+1}}{\xi - a_j + \omega}$ avec $\alpha_1, \dots, \alpha_{\mu+1} \in \mathbb{C}$.

Fixons à présent une colonne $G_\omega^{(\ell)}$ de G_ω , $\ell \in \{1, \dots, n\mu\}$. Si tous les termes non diagonaux de la $\ell^{\text{ème}}$ colonne de la matrice M'_ω sont nuls, alors les séries formant la colonne $G_\omega^{(\ell)}$ sont données par une relation d'ordre $n\mu(\mu + 1)$ indépendamment de toute autre colonne. Si la $\ell^{\text{ème}}$ colonne de M'_ω contient $q_\ell \geq 1$ termes non nuls, nous obtenons des relations de récurrences portant sur q_ℓ colonnes $G_\omega^{(\ell_1)}, \dots, G_\omega^{(\ell_{q_\ell})}$ dont les indices ℓ_k ne peuvent pas être écrits sous la forme $\ell_k = n(\mu - 1) + j$ avec $j \in J_\omega, 0$.

Précisément, indiquons ces q_ℓ colonnes de sorte que $\ell_1 < \dots < \ell_{q_\ell-1} < \ell_{q_\ell}$; et notons $\ell_{q_\ell} = \ell$ pour simplifier. En reprenant les méthodes exposées dans les deux cas précédents, nous pouvons toujours trouver une relation de récurrence de la forme

$$(3.12) \quad \mathfrak{g}_{\omega, m+1}^{(\ell)} = \mathcal{H}_{\omega, m}^{(\ell)} \mathfrak{g}_{\omega, m}^{(\ell)}$$

pour tout $m \geq \mu$, où

1. $\mathfrak{g}_{\omega, m}^{(\ell)}$ est la matrice colonne de dimension $q_\ell n\mu(\mu + 1)$ définie par

$$\mathfrak{g}_{\omega, m}^{(\ell)} = \begin{bmatrix} \mathcal{G}_{\omega, m}^{(\ell_2)} \\ \vdots \\ \mathcal{G}_{\omega, m}^{(\ell_{q_\ell})} \\ \mathcal{G}_{\omega, m}^{(\ell)} \end{bmatrix} \quad \text{où } \mathcal{G}_{\omega, m}^{(k)} = \begin{bmatrix} \mathcal{G}_{\omega, m}^{(1, k)} \\ \vdots \\ \mathcal{G}_{\omega, m}^{(n\mu, k)} \end{bmatrix} \quad \text{et } \mathcal{G}_{\omega, m}^{(j, k)} = \begin{bmatrix} G_{\omega, m-\mu}^{(j, k)} \\ \vdots \\ G_{\omega, m}^{(j, k)} \end{bmatrix}$$

2. $\mathcal{H}_{\omega, m}^{(\ell)}$ est un élément de $M_{q_\ell n\mu(\mu+1)}(\mathbb{C}(m))$ qui n'admet pour pôles aucun entier supérieur à μ
3. la suite $(\mathcal{H}_{\omega, m}^{(\ell)})_{m \geq \mu}$ converge vers la matrice constante $\mathcal{H}_{\omega, \infty}^{(\ell)} = I_{q_\ell} \otimes H_{\omega, \infty}$, où $H_{\omega, \infty}$ est la matrice diagonale par blocs définie par

$$H_{\omega, \infty} = \text{diag}(H_{\omega, \infty, 1}, \dots, H_{\omega, \infty, n\mu})$$

chaque bloc $H_{\omega, \infty, j} \in M_{\mu+1}(\mathbb{C})$ vérifiant

$$\left\{ \begin{array}{l} H_{\omega, \infty, j} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix} \\ \text{et} \\ H_{\omega, \infty, n(\mu-1)+j} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ 0 & & & \frac{1}{a_j - \omega} \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad \text{si } \begin{cases} j \in \{1, \dots, n(\mu - 1)\} \\ \text{ou} \\ j = n(\mu - 1) + k \text{ avec } k \in J_\omega \end{cases} \quad \text{si } j \notin J_\omega$$

En particulier, le rayon spectral de $\mathcal{H}_{\omega,\infty}^{(\ell)}$ est ρ_ω ⁷

En adaptant alors les démonstrations de la proposition 3.11 et des théorèmes 3.13 et 3.17, nous obtenons les résultats suivants :

Proposition 3.18 *Pour tout $\ell \in \{1, \dots, n\mu\}$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $m_0^{(\ell)} \geq \mu$ et un nombre réel $W_\ell > 0$ indépendants de m tel que*

$$\forall m \geq m_0^{(\ell)}, |G_{\omega,m}^{(\ell)}| \leq W_\ell (\rho_\omega + \varepsilon)^m$$

Algorithme 3.19 (détermination de $m_0^{(\ell)}$ et W_ℓ) L'algorithme suivant permet de calculer un entier $m_0^{(\ell)}$ et un nombre réel W_ℓ convenables :

1. Déterminer $\mathfrak{g}_{\omega,m}^{(\ell)}$ et la relation (3.12), puis calculer $\mathcal{H}_{\omega,\infty}^{(\ell)}$
2. Déterminer $\widehat{U} \in GL_{q_\ell n \mu(\mu+1)}(\mathbb{C})$ telle que $J_{\omega,\infty}^{(\ell)} = \widehat{U}^{-1} \mathcal{H}_{\omega,\infty}^{(\ell)} \widehat{U}$ soit sous forme de Jordan
3. Noter $U = \widehat{U} \text{diag}(1, \chi, \dots, \chi^{q_\ell n \mu(\mu+1)-1})$ avec

$$\chi = \min \left(\frac{\varepsilon}{2\sqrt{p_\ell}}, 1 \right)$$

où $p_\ell = q_\ell (n(\mu^2 - 1) + |J_\omega|)$ est le nombre de 1 apparaissant sur la première sur-diagonale de $J_{\omega,\infty}^{(\ell)}$

4. (calcul de $m_0^{(\ell)}$) Calculer pour tout $m \geq \mu$ la matrice

$$E_{\omega,m}^{(\ell)} = U^{-1} (\mathcal{H}_{\omega,\infty}^{(\ell)} - \mathcal{H}_{\omega,m}^{(\ell)}) U$$

Déterminer, pour tout $j, k \in \{1, \dots, q_\ell n \mu(\mu+1)\}$, le nombre réel

$$M_{\ell,j,k} = \sup_{m \geq \mu} ((m - \mu + 1) |E_{\omega,m}^{(\ell)(j,k)}|)$$

Calculer

$$M_\ell = \left(\sum_{j,k=1}^{q_\ell n \mu(\mu+1)} M_{\ell,j,k}^2 \right)^{1/2}$$

Calculer

$$m_0^{(\ell)} = \left\lceil \frac{2M_\ell}{\varepsilon} \right\rceil + \mu$$

⁷Contrairement aux cas précédents, la dimension du système (3.12) et la matrice limite $\mathcal{H}_{\omega,\infty}^{(\ell)}$ dépendent de la colonne choisie dans $G_{\omega,m}$. Cette difficulté supplémentaire est simplement due à la présence éventuelle des termes à la fois non diagonaux et non nuls dans la matrice M'_ω . Naturellement, si la matrice M'_ω est diagonale, ceci n'a plus lieu d'être.

5. (calcul de W_ℓ) Calculer

$$W_\ell = \frac{\text{cond}(U) \left\| \mathbf{g}_{\omega, \mu}^{(\ell)} \right\| (\rho_\omega + \frac{\varepsilon}{2} + M_\ell)^{m_0^{(\ell)} - \mu}}{(\rho_\omega + \varepsilon)^{m_0^{(\ell)} - 1}}$$

Théorème 3.20 (contrôle d'erreur sur $G_\omega(\alpha - \omega)$)

Soient $\alpha \in \mathcal{D}_\omega \setminus \{\omega\}$ et $\varepsilon > 0$ tel que $|\alpha - \omega| < \frac{1}{\rho_\omega + \varepsilon}$.

Notons

$$K = n\mu \max_{1 \leq \ell \leq n\mu} W_\ell, \quad m_0 = \max_{1 \leq \ell \leq n\mu} m_0^{(\ell)}$$

et $G_{\omega, [m]}$ la $m^{\text{ème}}$ somme partielle de G_ω .

1. Pour tout $m \geq m_0 - 1$,

$$\left\| G_\omega(\alpha - \omega) - G_{\omega, [m]}(\alpha - \omega) \right\| \leq K \frac{((\rho_\omega + \varepsilon) |\alpha - \omega|)^{m+1}}{1 - (\rho_\omega + \varepsilon) |\alpha - \omega|}$$

2. En particulier, si $\nu > 0$ est l'erreur cherchée, alors

$$m_\nu = \max \left(m_0 - 1, \left\lceil \frac{\log((1 - (\rho_\omega + \varepsilon) |\alpha - \omega|) \nu) - \log(K)}{\log((\rho_\omega + \varepsilon) |\alpha - \omega|)} \right\rceil \right)$$

vérifie $\left\| G_\omega(\alpha - \omega) - G_{\omega, [m_\nu]}(\alpha - \omega) \right\| \leq \nu$.

Théorème 3.21 (contrôle d'erreur sur $Z_\omega(\alpha - \omega) = \mathcal{T}_\omega(\alpha - \omega)G(\alpha - \omega)(\alpha - \omega)^{M'_\omega}$)

Soient $\alpha \in \mathcal{D}_\omega \setminus \{\omega\}$, $\varepsilon > 0$ et \check{G}_ω un élément de $M_{n\mu}(\mathbb{C})$ vérifiant

$$\left\| G_\omega(\alpha - \omega) - \check{G}_\omega \right\| \leq \varepsilon$$

Notons \check{Z}_ω l'élément de $M_{n\mu}(\mathbb{C})$ défini par

$$\check{Z}_\omega = \mathcal{T}_\omega(\alpha - \omega) \check{G}_\omega(\alpha - \omega)^{M'_\omega}$$

Alors,

$$\left\| Z_\omega(\alpha - \omega) - \check{Z}_\omega \right\| \leq s_{\mathcal{T}_\omega(\alpha - \omega), \max} s_{(\alpha - \omega)^{M'_\omega}, \max} \varepsilon$$

où $s_{\mathcal{T}_\omega(\alpha - \omega), \max}$ (resp. $s_{(\alpha - \omega)^{M'_\omega}, \max}$) désigne la plus grande valeur singulière de la matrice $\mathcal{T}_\omega(\alpha - \omega)$ (resp. $(\alpha - \omega)^{M'_\omega}$).

3.1.4.4 Evaluation de l'erreur sur les matrices de connexion \mathcal{V}_j et \mathfrak{S}_ω

En reprenant l'algorithme de calcul des matrices de connexion par prolongements analytiques successifs (cf. paragraphe 3.1.3), nous voyons qu'il reste à évaluer l'erreur commise dans le calcul des matrices colonnes \mathcal{V}_j et \mathfrak{S}_ω , mais aussi dans le calcul des $Z_{\beta_{j-1}}(\alpha - \beta_{j-1})\mathcal{V}_{j-1}$ et $Z_\omega(\alpha - \omega)\mathfrak{S}_\omega$. Les deux lemmes suivants fournissent ces différentes estimations. Précisément, le lemme 3.22 permet d'évaluer l'erreur commise dans le calcul des matrices de connexion \mathcal{V}_j et \mathfrak{S}_ω ; et le lemme 3.23 fournit une estimation de l'erreur commise lorsque nous remplaçons $Z_{\beta_{j-1}}(\alpha - \beta_{j-1})\mathcal{V}_{j-1}$ ou $Z_\omega(\alpha - \omega)\mathfrak{S}_\omega$ par leurs valeurs approchées $\check{Z}_{\beta_{j-1}}\check{\mathcal{V}}_{j-1}$ ou $\check{Z}_\omega\check{\mathfrak{S}}_\omega$

Lemme 3.22 Soient $m \in \mathbb{N}^*$, $M, \check{M} \in M_{m,1}(\mathbb{C})$ et $N, \check{N} \in GL_m(\mathbb{C})$ tels que $\|M - \check{M}\| \leq \varepsilon$ et $\|N - \check{N}\| \leq \varepsilon'$.

Notons P (resp. \check{P}) l'unique solution de l'équation $M = NP$ (resp. $\check{M} = \check{N}\check{P}$). Alors,

$$\|P - \check{P}\| \leq \frac{\varepsilon + \varepsilon' s_{\check{P},\max}}{s_{\check{N},\min} - \varepsilon'}$$

dès que $\varepsilon' < s_{\check{N},\min}$, où $s_{\check{N},\min}$ (resp. $s_{\check{P},\max}$) est la plus petite (resp. plus grande) valeur singulière de \check{N} (resp. \check{P}).

Démonstration. L'égalité $(N - \check{N})(P - \check{P}) = (M - \check{M}) - (N - \check{N})\check{P} - \check{N}(P - \check{P})$ entraîne

$$\|P - \check{P}\| \leq \|\check{N}^{-1}\| (\varepsilon + \varepsilon' \|\check{P}\| + \varepsilon' \|P - \check{P}\|)$$

et donc

$$\|P - \check{P}\| \leq \frac{\varepsilon + \varepsilon' \|\check{P}\|}{1 - \varepsilon' \|\check{N}^{-1}\|} \|\check{N}^{-1}\|$$

dès que $1 - \varepsilon' \|\check{N}^{-1}\| > 0$. Le résultat suit puisque $\|\check{N}^{-1}\| = \frac{1}{s_{\check{N},\min}}$. ■

Lemme 3.23 Soient $m \in \mathbb{N}^*$, $M, \check{M} \in M_m(\mathbb{C})$ et $N, \check{N} \in M_{m,1}(\mathbb{C})$ tels que $\|M - \check{M}\| \leq \varepsilon$ et $\|N - \check{N}\| \leq \varepsilon'$. Alors,

$$\|MN - \check{M}\check{N}\| \leq \varepsilon\varepsilon' + \varepsilon s_{\check{N},\max} + \varepsilon' s_{\check{M},\max}$$

où $s_{\check{M},\max}$ (resp. $s_{\check{N},\max}$) est la plus grande valeur singulière de \check{M} (resp. \check{N}).

Démonstration. Les propriétés de la norme $\|\cdot\|$ appliquées à l'égalité

$$(M - \check{M})(N - \check{N}) = (MN - \check{M}\check{N}) - \check{M}(N - \check{N}) - (M - \check{M})\check{N}$$

donnent immédiatement le résultat voulu. ■

3.1.5 Exemple 1 (une seule singularité et monodromie formelle non triviale)

Dans cet exemple, la série \tilde{f} admet une seule singularité et la monodromie formelle est non triviale.

Nous reprenons le second exemple du paragraphe 2.3.2. Le système étudié est

$$x^2 \frac{dY}{dx} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{x^2}{1+x} \\ \frac{x^2}{1-x} & 1 + \frac{x}{2} \end{bmatrix} Y$$

et nous cherchons à évaluer numériquement le multiplicateur de Stokes $c_0^{[2]}$.

Nous avons $\mu = 2$ et $\rho_0 = 1$. La série $\tilde{\mathcal{F}} = \begin{bmatrix} \tilde{f} \\ \tilde{f}' \end{bmatrix}$ est analytique sur le disque ouvert $\mathcal{D}_0 = D(0, 1)$ de centre 0 et de rayon 1. Le système associé à $\tilde{\mathcal{F}}$ s'écrit

$$[S_1] \quad (\xi - 1) \frac{dZ}{d\xi} = C_1(\xi - 1)Z \text{ avec } C_1(\xi) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \xi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \xi \\ -\frac{\xi}{\xi+1} & \frac{\xi}{\xi+1} & -\frac{\xi(\xi+3)}{\xi+1} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{3}{2} + \xi \end{bmatrix}$$

et a pour solution fondamentale (2.21) :

$$Z_1(\xi - 1) = D_1 G_1(\xi - 1) (\xi - 1)^{M_1}$$

où les matrices D_1 et M_1 sont définies par

$$D_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } M_1 = \text{diag} \left(0, 0, 0, -\frac{3}{2} \right)$$

et où $G_1(\xi - 1)$ est analytique sur le disque ouvert $\mathcal{D}_1 = D(1, 1)$ de centre 1 et de rayon 1 et vérifie $G_1(0) = I_4$. En particulier, les deux disques de convergence \mathcal{D}_0 et \mathcal{D}_1 sont non disjoints avec $\mathcal{D}_0 \cap \mathcal{D}_1 \cap \mathbb{R}^+ =]0, 1[$.

Nous savons que

$$c_0^{[2]} = -4\sqrt{\pi}\sigma_{1,4} \in i\mathbb{R}$$

et il s'agit d'évaluer numériquement le coefficient $\sigma_{1,4}$, *i.e.*, la matrice de connexion \mathfrak{S}_1 obtenue à l'aide du prolongement analytique de $\tilde{\mathcal{F}}$ à droite de 1, en évaluant l'erreur commise dans le calcul. En particulier, nous allons voir que les choix de α , ε et U sont très importants d'un point de vue numérique.

Nous effectuons les calculs en quatre points distincts :

$$\alpha_0 = \frac{1}{4}; \alpha_1 = \frac{1}{2}; \alpha_2 = \frac{4}{5}; \alpha_3 = \frac{7}{8}$$

De plus, nous comparons les résultats obtenus sur les valeurs numériques et les erreurs estimées dans chacun de ces cas.

3.1.5.1 Contrôle de l'erreur sur $\tilde{\mathcal{F}}(\alpha)$, $\alpha \in \{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$

Détermination des valeurs possibles de ε Nous devons avoir $\alpha < \frac{1}{1+\varepsilon} < 1$, i.e., $0 < \varepsilon < \frac{1-\alpha}{\alpha}$. Ainsi,

α	$\alpha_0 = \frac{1}{4}$	$\alpha_1 = \frac{1}{2}$	$\alpha_2 = \frac{4}{5}$	$\alpha_3 = \frac{7}{8}$
valeurs possibles de ε	$\varepsilon_0 \in]0, 3[$	$\varepsilon_1 \in]0, 1[$	$\varepsilon_2 \in \left]0, \frac{1}{4}\right[$	$\varepsilon_3 \in \left]0, \frac{1}{7}\right[$

Nous choisissons $\varepsilon_0 = 1$, $\varepsilon_1 = \frac{1}{2}$, $\varepsilon_2 = \frac{1}{11}$ et $\varepsilon_3 = \frac{1}{17}$. Nous verrons plus loin ce qui se passe pour un autre choix de ε .

Détermination de C_m et C_∞ Les relations (2.20) :

$$\begin{cases} (1+x)x^2 \frac{d\hat{f}^{[1]}}{dx} = x^2 \hat{f}^{[2]} \\ (1-x)x^2 \frac{d\hat{f}^{[2]}}{dx} = x^2 \hat{f}^{[1]} + (1-x) \left(1 + \frac{x}{2}\right) \hat{f}^{[2]} \end{cases}$$

nous permettent d'établir les égalités :

- ★ $\forall m \geq 2$, $m \hat{f}_m^{[1]} = \hat{f}_{m-1}^{[2]} - (m-1) \hat{f}_{m-1}^{[1]}$
- ★ $\hat{f}_2^{[2]} = -1$, $\hat{f}_3^{[2]} = -\frac{5}{2}$ et $\forall m \geq 4$, $\hat{f}_m^{[2]} = (m - \frac{1}{2}) \hat{f}_{m-1}^{[2]} - (m - \frac{5}{2}) \hat{f}_{m-2}^{[2]} - \hat{f}_{m-2}^{[1]}$

Ainsi, en notant $\hat{\mathcal{F}}_m = \begin{bmatrix} \hat{f}_{m-1}^{[1]} \\ \hat{f}_m^{[1]} \\ \hat{f}_{m-1}^{[2]} \\ \hat{f}_m^{[2]} \end{bmatrix}$, nous obtenons pour tout $m \geq 3$ l'égalité

$$\hat{\mathcal{F}}_{m+1} = (m-2)C_m \hat{\mathcal{F}}_m$$

avec

$$C_m = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{m-2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{(m+1)(m-2)} & 0 & \frac{1}{(m+1)(m-2)} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{m-2} \\ -\frac{1}{m-2} & 0 & -\frac{2m-3}{2m-4} & \frac{2m+1}{2m-4} \end{bmatrix} \text{ et } C_\infty = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Calcul de M , m_0 et W Nous choisissons pour matrice U la matrice

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Nous avons ainsi pour tout $m \geq 3$:

$$E_m = U^{-1}(C_\infty - C_m)U = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{m-2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{(m+1)(m-2)} & -\frac{1}{(m+1)(m-2)} & -\frac{1}{(m+1)(m-2)} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{m-2} & -\frac{1}{m-2} \\ \frac{1}{m-2} & 0 & -\frac{1}{m-2} & -\frac{1}{2(m-2)} \end{bmatrix}$$

Par conséquent, $M = \frac{\sqrt{134}}{4}$ et nous obtenons

(α, ε)	$(\alpha_0, \varepsilon_0)$	$(\alpha_1, \varepsilon_1)$	$(\alpha_2, \varepsilon_2)$	$(\alpha_3, \varepsilon_3)$
m_0	5	8	34	52

Pour le calcul de W , nous appliquons la formule de l'algorithme 3.9 avec $\text{cond}(U) = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2$ et $\|\widehat{\mathcal{F}}_3\| = \frac{\sqrt{265}}{6}$.

Calcul de m_ν en fonction de ν Après avoir déterminé $K = \frac{2W}{\alpha}$, nous obtenons par le théorème 3.10 :

ν	m_ν , cas $(\alpha_0, \varepsilon_0)$	m_ν , cas $(\alpha_1, \varepsilon_1)$	m_ν , cas $(\alpha_2, \varepsilon_2)$	m_ν , cas $(\alpha_3, \varepsilon_3)$
10^{-1}	11	39	342	935
10^{-2}	14	47	359	965
10^{-3}	17	55	376	995
10^{-4}	21	63	393	1026
10^{-5}	24	71	409	1056
10^{-6}	27	79	426	1086
10^{-7}	31	87	443	1116
10^{-8}	34	95	460	1146
10^{-9}	37	103	477	1176
10^{-10}	40	111	494	1206

Nous voyons sur cet exemple que le nombre de termes nécessaires pour déterminer, avec une précision donnée, une valeur approchée de la somme de la série $\widehat{\mathcal{F}}(\alpha)$ augmente sensiblement lorsque α croît. Ceci est dû au fait que les longueurs des intervalles décrits par ε décroissent vers 0.

Ce phénomène est prévisible : plus α est proche du centre du disque, plus le nombre de termes nécessaires au calcul diminue.

Remarques sur les choix de ε et de U Les deux autres éléments qui peuvent influencer sur le nombre de termes à calculer sont les choix de ε et U .

Commençons par observer, dans le cas $\alpha_2 = \frac{4}{5}$, ce qui se passe lorsque nous modifions

les valeurs de ε_2 dans $]0, \frac{1}{4}[$:

ν	$m_\nu, \varepsilon_2 = \frac{1}{13}$	$m_\nu, \varepsilon_2 = \frac{1}{12}$	$m_\nu, \varepsilon_2 = \frac{1}{11}$	$m_\nu, \varepsilon_2 = \frac{1}{9}$	$m_\nu, \varepsilon_2 = \frac{1}{7}$
10^{-1}	366	353	342	338	357
10^{-2}	382	369	359	358	383
10^{-3}	397	385	376	377	408
10^{-4}	412	401	393	397	434
10^{-5}	428	418	409	416	460
10^{-6}	443	434	426	436	485
10^{-7}	459	450	443	455	511
10^{-8}	474	466	460	475	537
10^{-9}	490	482	477	494	562
10^{-10}	505	498	494	514	588

Pour une précision donnée, nous avons des fluctuations importantes sur le nombre de termes à calculer. Par exemple, pour une précision de 10^{-10} , nous voyons qu'il suffit de calculer la 494^{ème} somme partielle de $\tilde{\mathcal{F}}(\alpha_2)$, et non la 588^{ème} comme nous aurions pu le penser si nous avions choisi au départ la valeur $\varepsilon_2 = \frac{1}{7}$. Ainsi, pour traiter des exemples numériques, il convient de tester plusieurs valeurs de ε afin d'essayer de minimiser le nombre de termes.

Par ailleurs, compte tenu du fait que les valeurs propres de la matrice limite C_∞ sont en général multiples, le choix d'une matrice U de diagonalisation de C_∞ n'est pas unique à permutation près. Il apparaît que le nombre de termes à calculer peut varier fortement d'un choix de U à un autre. Ainsi, utilisant Maple8, nous avons obtenu une matrice différente de la précédente, à savoir :

$$U_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Nous consignons dans le tableau ci-dessous le nombre de termes m_ν à calculer pour une précision ν de 10^{-j} avec $j \in \{1, \dots, 10\}$ correspondant aux deux choix U et U_1 dans les cas $(\alpha_2, \varepsilon_2) = (\frac{4}{5}, \frac{1}{11})$ et $(\alpha_3, \varepsilon_3) = (\frac{7}{8}, \frac{1}{17})$:

ν	$(\alpha_2, \varepsilon_2)$ choix U	$(\alpha_2, \varepsilon_2)$ choix U_1	$(\alpha_3, \varepsilon_3)$ choix U	$(\alpha_3, \varepsilon_3)$ choix U_1
10^{-1}	342	482	935	1288
10^{-2}	359	499	965	1318
10^{-3}	376	516	995	1348
10^{-4}	393	533	1026	1378
10^{-5}	409	550	1056	1408
10^{-6}	426	566	1086	1438
10^{-7}	443	583	1116	1469
10^{-8}	460	600	1146	1499
10^{-9}	477	617	1176	1529
10^{-10}	494	634	1206	1559

Il apparaît que m_ν prend des valeurs bien inférieures lorsque nous choisissons la matrice U . Un échantillonnage significatif de divers choix de matrice de diagonalisation de C_∞ nous conduit à penser que le choix de la matrice U est d'une certaine façon "optimale". Nous proposons donc de faire systématiquement un tel choix qui peut être programmé aisément conformément aux formules suivantes : $U = \text{diag}(U_1, \dots, U_n)$ avec $U_j \in M_\mu(\mathbb{C})$ et

$$U_j = \begin{cases} I_\mu & \text{si } a_j = 0 \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -P_{j,p_j} & \cdots & -P_{j,1} & 1 \end{bmatrix} & \text{si } a_j \neq 0 \end{cases}$$

Remarque sur le calcul de M et la majoration de $\|E_m\|$ Le nombre réel M que nous avons calculé précédemment a été obtenu à l'aide de l'algorithme 3.9. Rappelons sa définition :

$$M = \left(\sum_{j,\ell=1}^4 M_{j,\ell}^2 \right)^{1/2}$$

où les nombres réels $M_{j,\ell}$ sont définis par $M_{j,\ell} = \sup_{m \geq 4} \left((m-3) \left| E_m^{(j,\ell)} \right| \right)$.

Cependant, rien ne nous empêche de choisir une autre valeur de M . Par exemple, nous pouvons prendre une majoration uniforme sur les coefficients de E_m , disons

$$\forall j, \ell \in \{1, \dots, 4\}, \quad |E_m^{(j,\ell)}| \leq \frac{M'}{m-3}$$

Il s'ensuit l'inégalité $\|E_m\| \leq \frac{4M'}{m-3} \leq 4M'$. En reprenant alors les calculs ci-dessus avec $M = 4M'$, nous obtenons pour les mêmes choix

$$(\alpha_0, \varepsilon_0) = \left(\frac{1}{4}, 1 \right) ; (\alpha_1, \varepsilon_1) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) ; (\alpha_2, \varepsilon_2) = \left(\frac{4}{5}, \frac{1}{11} \right) \text{ et } (\alpha_3, \varepsilon_3) = \left(\frac{7}{8}, \frac{1}{17} \right)$$

le tableau suivant :

ν	m_ν , cas $(\alpha_0, \varepsilon_0)$	m_ν , cas $(\alpha_1, \varepsilon_1)$	m_ν , cas $(\alpha_2, \varepsilon_2)$	m_ν , cas $(\alpha_3, \varepsilon_3)$
10^{-1}	19	87	953	2622
10^{-2}	23	95	970	2652
10^{-3}	26	103	987	2682
10^{-4}	29	111	1004	2713
10^{-5}	33	119	1021	2743
10^{-6}	36	127	1038	2773
10^{-7}	39	135	1055	2803
10^{-8}	43	143	1072	2833
10^{-9}	46	151	1089	2863
10^{-10}	49	159	1106	2893

Si la différence entre les deux calculs est relativement faible dans les cas $(\alpha_0, \varepsilon_0)$ et $(\alpha_1, \varepsilon_1)$, nous voyons que, dans les deux autres cas, le nombre de termes augmente sensiblement (il a plus que doublé). En fait, plus nous nous éloignons du centre du disque de convergence, plus l'écart entre les deux calculs est important. Noter également que ce phénomène observé ici est fortement amplifié lorsque les matrices utilisées sont de grandes dimensions (voir ci-après).

3.1.5.2 Contrôle de l'erreur sur $Z_1(\alpha - 1)$, $\alpha \in \{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$

Détermination des matrices $H_{1,m}^{(\ell)}$ et $H_{1,\infty}$, $\ell \in \{1, \dots, 4\}$ Nous avons

$$Z_1(\xi - 1) = D_1 G_1(\xi - 1)(\xi - 1)^{M_1}$$

avec

$$D_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } M_1 = \text{diag} \left(0, 0, 0, -\frac{3}{2} \right)$$

Nous savons qu'il suffit de contrôler l'erreur sur la série $G_1(\xi - 1)$. Celle-ci est analytique sur le disque $\mathcal{D}_1 = D(1, 1)$ et est l'unique solution vérifiant $G_1(0) = I_4$ de l'équation

$$(\xi - 1)G_1' = D_1^{-1}C_1(\xi - 1)D_1G_1 - G_1M_1$$

où

$$D_1^{-1}C_1(\xi)D_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \xi & 0 \\ \frac{2\xi}{3} & \frac{\xi}{3} & 0 & \xi \\ -\frac{\xi}{\xi+1} & \frac{\xi}{\xi+1} & -\frac{\xi(\xi+3)}{\xi+1} & 0 \\ \frac{4\xi}{9} & \frac{2\xi}{9} & -\frac{2\xi}{3} & -\frac{3}{2} + \frac{2\xi}{3} \end{bmatrix}$$

A l'aide de cette équation, nous obtenons, comme précédemment pour $\tilde{\mathcal{F}}(\alpha)$, les rela-

tions liant les $G_{1,m}^{(j,\ell)}$. Ainsi, en posant $\mathcal{G}_{1,m}^{(\ell)} = \begin{bmatrix} G_{1,m-1}^{(1,\ell)} \\ G_{1,m}^{(1,\ell)} \\ G_{1,m-1}^{(2,\ell)} \\ G_{1,m}^{(2,\ell)} \\ G_{1,m-1}^{(3,\ell)} \\ G_{1,m}^{(3,\ell)} \\ G_{1,m-1}^{(4,\ell)} \\ G_{1,m}^{(4,\ell)} \end{bmatrix}$, nous avons $\mathcal{G}_{1,m+1}^{(\ell)} = H_{1,m}^{(\ell)} \mathcal{G}_{1,m}^{(\ell)}$

pour tout $m \geq 1$ avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \ell \in \{1, 2, 3\}, H_{1,m}^{(\ell)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{m+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3(m+1)} & 0 & \frac{1}{3(m+1)} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{m+1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{m+1} & 0 & \frac{1}{m+1} & -\frac{1}{m+1} & -\frac{m+3}{m+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{8}{9(2m+5)} & 0 & \frac{4}{9(2m+5)} & 0 & -\frac{4}{3(2m+5)} & 0 & \frac{4}{3(2m+5)} \end{bmatrix} \\ \text{et} \\ H_{1,m}^{(4)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{2m-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3(2m-1)} & 0 & \frac{2}{3(2m-1)} & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{2m-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{2m-1} & 0 & \frac{2}{2m-1} & -\frac{2}{2m-1} & -2\frac{m+3}{2m-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{4}{9(m+1)} & 0 & \frac{2}{9(m+1)} & 0 & -\frac{2}{3(m+1)} & 0 & \frac{2}{3(m+1)} \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

En particulier, la matrice limite des $H_{1,m}^{(\ell)}$ est

$$H_{1,\infty} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Comme pour C_∞ , cette matrice admet une matrice de trigonalisation \widehat{U} privilégiée :

$$\widehat{U} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Cas $\alpha = \alpha_1 = \frac{1}{2}$ Nous devons choisir $\varepsilon_1 \in]0, 1[$. Ainsi, nous avons toujours $\chi < 1$. Précisément, $\chi < \frac{1}{2\sqrt{3}} \approx 0.29$ pour tout ε_1 . Le nombre de termes nécessaires pour approcher $G_1(-\frac{1}{2})$ risque donc d'être important, y compris pour une précision de 10^{-1} . Nous étudions plusieurs valeurs de ε_1 pour observer les fluctuations éventuelles dans le nombre de termes à calculer : $\varepsilon_1 = \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{9}{10}$.

Suivant l'algorithme 3.15, nous notons

$$U = \widehat{U} \operatorname{diag}(1, \chi, \chi^2, \chi^3, \chi^4, \chi^5, \chi^6, \chi^7)$$

avec $\chi = \frac{\varepsilon_1}{2\sqrt{3}}$, et nous calculons $E_{1,m}^{(\ell)} = U^{-1}(H_{1,\infty} - H_{1,m}^{(\ell)})U$. Nous obtenons pour $m_0^{(\ell)}$:

	$\varepsilon_1 = \frac{1}{2}$	$\varepsilon_1 = \frac{3}{4}$	$\varepsilon_1 = \frac{9}{10}$
$\ell = 1, 2, 3$	196840	11578	3253
$\ell = 4$	197500	11776	3369

et donc $m_0 = m_0^{(4)}$ dans tous les cas. Les nombres W_ℓ , $\ell \in \{1, 2, 3, 4\}$, ayant été calculés à l'aide de la formule de l'algorithme 3.15, nous avons $K = 4W_4$. Nous obtenons alors le tableau suivant donnant, pour les trois ε_1 choisis, la somme partielle nécessaire pour approcher $G_1(-\frac{1}{2})$ avec une précision de $10^{-\nu}$, $\nu \in \{1, \dots, 10\}$.

ν	$\varepsilon_1 = \frac{1}{2}$	$\varepsilon_1 = \frac{3}{4}$	$\varepsilon_1 = \frac{9}{10}$
10^{-1}	7141063	690915	439138
10^{-2}	7141071	690932	439183
10^{-3}	7141079	690950	439228
10^{-4}	7141087	690967	439273
10^{-5}	7141095	690984	439318
10^{-6}	7141103	691001	439363
10^{-7}	7141111	691019	439408
10^{-8}	7141119	691036	439453
10^{-9}	7141127	691053	439498
10^{-10}	7141135	691070	439542

Nous retrouvons ici le phénomène déjà observé sur $\widetilde{\mathcal{F}}$, mais celui-ci est amplifié par la présence du $\chi < 1$. En particulier, une majoration uniforme des coefficients de

$E_{1,m}^{(\ell)}$ rend les calculs pratiquement impossibles, puisque le nombre de termes explose littéralement, même pour une précision de 10^{-1} . Nous obtenons en effet les valeurs suivantes :

ν	$\varepsilon_1 = \frac{1}{2}$	$\varepsilon_1 = \frac{3}{4}$	$\varepsilon_1 = \frac{9}{10}$
10^{-1}	32212830	3170120	2008308

Dans cet exemple, nous pouvons obtenir $\chi = 1$ en changeant la valeur de α , mais ce n'est malheureusement pas toujours le cas. Il est donc nécessaire d'avoir de bons algorithmes pour calculer des sommes partielles de plusieurs milliers de termes ou d'optimiser les algorithmes précédents sur le contrôle d'erreur, et notamment le calcul du nombre réel M_ℓ . Ce problème ne sera pas étudié ici.

Noter que pour le cas $\alpha = \alpha_0 = \frac{1}{4}$, le nombre de termes à calculer est encore plus important, puisque nous nous éloignons encore du centre du disque de convergence de $G_1(\xi - 1)$. Ainsi, dans la suite de cet exemple, nous n'utiliserons pas ces deux valeurs.

Cas $\alpha \in \{\alpha_2, \alpha_3\}$ A présent, nous pouvons prendre $\chi = 1$ et donc $U = \widehat{U}$. En effet, ayant $\varepsilon_2 \in]0, 4[$ pour α_2 et $\varepsilon_3 \in]0, 7[$ pour α_3 nous choisissons $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 2\sqrt{3}$. En reprenant les calculs du cas $\alpha = \alpha_1$, nous obtenons pour $m_0^{(\ell)}$

	$\alpha_2 = \frac{4}{5}$	$\alpha_3 = \frac{7}{8}$
$\ell = 1, 2, 3$	2	2
$\ell = 4$	6	6

Nous avons à nouveau $m_0 = m_0^{(4)}$ et $K = 4W_4$; et donc

ν	$\alpha_2 = \frac{4}{5}$	$\alpha_3 = \frac{7}{8}$
10^{-1}	111	19
10^{-2}	132	23
10^{-3}	152	27
10^{-4}	172	31
10^{-5}	192	35
10^{-6}	213	39
10^{-7}	233	42
10^{-8}	253	46
10^{-9}	274	50
10^{-10}	294	54

Naturellement, si nous choisissons $\varepsilon_2 > 2\sqrt{3}$ (resp. $\varepsilon_3 > 2\sqrt{3}$), le nombre de termes nécessaires pour approcher $G_1(-\frac{1}{5})$ (resp. $G_1(-\frac{1}{8})$) est modifié. De même, un changement de matrice U augmente sensiblement les valeurs obtenues. Noter également que la définition du nombre M_ℓ donnée à l'algorithme 3.15 permet, par rapport à une majoration uniforme des coefficients de $E_{1,m}^{(\ell)}$, de diviser le nombre de termes par 3.5 pour une précision de 10^{-10} , ce qui n'est pas négligeable.

Nous pouvons maintenant passer au calcul approché de $\sigma_{1,4}$.

3.1.5.3 Calcul approché de la matrice de connexion \mathfrak{S}_1

Nous n'utilisons dans la suite que les valeurs $\alpha_2 = \frac{4}{5}$ et $\alpha_3 = \frac{7}{8}$.

Calcul avec α_2 Nous partons des erreurs en 10^{-10} sur $\tilde{\mathcal{F}}(\frac{4}{5})$ et $G_1(-\frac{1}{5})$. La matrice

$$\check{\mathcal{F}} = \begin{bmatrix} -\frac{1800323213}{10000000000} \\ -\frac{1234274787}{312500000} \\ -\frac{3311457333}{5000000000} \\ -\frac{103782286013}{5000000000} \end{bmatrix}$$

vérifiant $\left| \tilde{\mathcal{F}}_{[494]}(\frac{4}{5}) - \check{\mathcal{F}} \right| \leq 10^{-10}$, nous avons $\left\| \tilde{\mathcal{F}}(\frac{4}{5}) - \check{\mathcal{F}} \right\| \leq 3 \times 10^{-10}$. De même, la matrice

$$\check{G}_1 = \begin{bmatrix} \frac{2430281071}{2500000000} & \frac{130923899}{5000000000} & -\frac{2767165401}{10000000000} & \frac{144627551}{5000000000} \\ -\frac{1252554147}{10000000000} & \frac{374688911}{400000000} & \frac{44494903}{5000000000} & \frac{3993593069}{10000000000} \\ \frac{131497289}{400000000} & -\frac{376097661}{1250000000} & \frac{18718912489}{10000000000} & -\frac{2650378957}{10000000000} \\ -\frac{212669153}{10000000000} & -\frac{16847579}{625000000} & \frac{436161159}{5000000000} & \frac{535017211}{625000000} \end{bmatrix}$$

satisfait à $\left| G_{1,[294]}(-\frac{1}{5}) - \check{G}_1 \right| \leq 10^{-10}$, et donc à $\left\| G_1(-\frac{1}{5}) - \check{G}_1 \right\| \leq 5 \times 10^{-10}$. Ainsi,

$$\check{Z}_1 = D_1 \check{G}_1 \left(-\frac{1}{5} \right)^{M_1} \quad \text{avec} \quad \left(-\frac{1}{5} \right)^{M_1} = \text{diag}(1, 1, 1, -5i\sqrt{5})$$

vérifie $\left\| Z_1(-\frac{1}{5}) - \check{Z}_1 \right\| \leq 10^{-8}$, puisque $s_{D_1, \max} = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{41}}{6}$ et $s_{(-\frac{1}{5})^{M_1}, \max} = 5\sqrt{5}$ (lemme 3.22).

Nous avons $s_{\check{Z}_1, \min} \approx 0.69$, donc \check{Z}_1 est inversible. Ainsi, (lemme 3.23) l'unique solution $\check{\mathfrak{S}}_1$ de l'équation $\check{\mathcal{F}} = \check{Z}_1 \check{\mathfrak{S}}_1$ est

$$\check{\mathfrak{S}}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{18828470627750712189254749939846345328146}{46874999989835505199240995936770291279187} \\ \frac{243686042520925981745455211611220524902847}{46874999989835505199240995936770291279187} \\ -\frac{121132108759574797809816142200095683783813}{46874999989835505199240995936770291279187} \\ -\frac{346127552474621169877061266147279354856831}{390624999915295876660341632806419093993225} i\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

et vérifie $\left\| \mathfrak{S}_1 - \check{\mathfrak{S}}_1 \right\| \leq 10^{-7}$.

Par conséquent,

$$\check{c}_0^{[2]} = -4\sqrt{\pi}\check{\sigma}_{1,4} = \frac{1384510209898484679508245064589117419427324}{390624999915295876660341632806419093993225} i\sqrt{5\pi}$$

satisfait à $\left|c_0^{[2]} - \check{c}_0^{[2]}\right| \leq 10^{-6}$. Une valeur approchée à 10^{-6} près de $\check{c}_0^{[2]}$ étant $14.047403i$, nous en déduisons que

$$\boxed{\left|c_0^{[2]} - 14.047403i\right| \leq 2 \times 10^{-6}}$$

En particulier, les cinq premières décimales de 14.047403 sont exactes.

Calcul avec α_3 Nous reprenons les notations ci-dessus en considérant cette fois les sommes partielles $\tilde{\mathcal{F}}_{[1206]}(\frac{7}{8})$ et $G_{1,[54]}(-\frac{1}{8})$. Nous avons

$$\tilde{\mathcal{F}} = \begin{bmatrix} -\frac{47509523}{200000000} \\ -\frac{15477566751}{2500000000} \\ -\frac{8896987869}{10000000000} \\ -\frac{43402821271}{10000000000} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \check{G}_1 = \begin{bmatrix} \frac{9904362937}{10000000000} & \frac{91867897}{10000000000} & -\frac{1521647103}{10000000000} & \frac{3130413}{500000000} \\ -\frac{80197001}{10000000000} & \frac{3839003}{4000000} & \frac{33307573}{10000000000} & \frac{99962709}{400000000} \\ \frac{422885127}{2500000000} & -\frac{99772623}{625000000} & \frac{3671920927}{2500000000} & -\frac{21210221}{250000000} \\ -\frac{10788401}{625000000} & -\frac{141755867}{10000000000} & \frac{452221023}{10000000000} & \frac{4572225629}{5000000000} \end{bmatrix}$$

avec $\left\|\tilde{\mathcal{F}}_{[1206]}(\frac{7}{8}) - \check{\mathcal{F}}\right\| \leq 3 \times 10^{-10}$ et $\left\|G_1(-\frac{1}{8}) - \check{G}_1\right\| \leq 5 \times 10^{-10}$. La matrice

$$\check{Z}_1 = D_1 \check{G}_1 \left(-\frac{1}{8}\right)^{M_1} \quad \text{avec} \quad \left(-\frac{1}{8}\right)^{M_1} = \text{diag}(1, 1, 1, -8i\sqrt{8})$$

vérifie donc $\left\|Z_1(-\frac{1}{8}) - \check{Z}_1\right\| \leq 2 \times 10^{-8}$ et $s_{\check{Z}_1, \min} \approx 0.8$. Ainsi,

$$\check{\mathfrak{S}}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{3934766119152123149767471993551649567901}{97959183659225052683226553724421413860961} \\ \frac{203701638647314836966278848715958919737341}{39183673463690021073306214897685655443844} \\ -\frac{101256554537154863549054289758762283727517}{39183673463690021073306214897685655443844} \\ -\frac{1756714831979279111825474340925823765045503}{1253877550838080674345798876725940974203008} i\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

satisfait à $\left\|\mathfrak{S}_1 - \check{\mathfrak{S}}_1\right\| \leq 2 \times 10^{-7}$. Par conséquent,

$$\check{c}_0^{[2]} = -4\sqrt{\pi}\check{\sigma}_{1,4} = \frac{1756714831979279111825474340925823765045503}{313469387709520168586449719181485243550752} i\sqrt{2\pi}$$

vérifie $\left|c_0^{[2]} - \check{c}_0^{[2]}\right| \leq 2 \times 10^{-6}$, et donc une valeur approchée à 3×10^{-6} de $c_0^{[2]}$ est $14.047403i$. Bien que l'erreur soit moins précise que dans le calcul précédent, nous retrouvons le fait que les cinq premières décimales de 14.047403 sont exactes.

Remarque sur la non nullité de $c_0^{[2]}$ L'une des questions importantes en théorie de Galois différentielle, par exemple, est de déterminer si les multiplicateurs de Stokes sont nuls ou non. Dans les deux calculs ci-dessus, nous avons montré que le multiplicateur de Stokes $c_0^{[2]}$ était non nul et nous en avons donné une valeur approchée avec

cinq décimales exactes. En particulier, il est aisé de voir que si nous augmentons la précision dans le calcul de $\tilde{\mathcal{F}}(\alpha)$ et $Z_1(\alpha - 1)$, nous augmentons également la précision de la valeur approchée de $c_0^{[2]}$. Toutefois, si nous nous intéressons uniquement à la non nullité de $c_0^{[2]}$, nous pouvons dire que les calculs précédents sont trop précis.

Nous reprenons ci-dessous les calculs avec $\alpha_2 = \frac{4}{5}$, mais en partant à présent d'une erreur en 10^{-3} sur $\tilde{\mathcal{F}}(\frac{4}{5})$ et $G_1(-\frac{1}{5})$. Pour chacune des valeurs approchées $\check{\mathcal{F}}$ et \check{G}_1 , nous donnons une estimation du temps de calcul réalisé avec un processeur Intel Centrino Duo T2300 cadencé à 1.66 GHz. La matrice

$$\check{\mathcal{F}} = \begin{bmatrix} -\frac{9}{50} \\ -\frac{3949}{1000} \\ -\frac{331}{500} \\ -\frac{5189}{250} \end{bmatrix} \quad (\text{calcul en 14.2 secondes})$$

vérifiant $\left| \tilde{\mathcal{F}}_{[376]}(\frac{4}{5}) - \check{\mathcal{F}} \right| \leq 10^{-3}$, nous avons $\left\| \tilde{\mathcal{F}}(\frac{4}{5}) - \check{\mathcal{F}} \right\| \leq 3 \times 10^{-3}$. De même, la matrice

$$\check{G}_1 = \begin{bmatrix} \frac{243}{250} & \frac{13}{500} & -\frac{69}{250} & \frac{7}{250} \\ -\frac{1}{8} & \frac{117}{125} & \frac{1}{125} & \frac{399}{1000} \\ \frac{41}{125} & -\frac{3}{10} & \frac{1871}{1000} & -\frac{53}{200} \\ -\frac{21}{1000} & -\frac{13}{500} & \frac{87}{1000} & \frac{107}{125} \end{bmatrix} \quad (\text{calcul en 79 secondes})$$

satisfait à $|G_{1,[152]}(-\frac{1}{5}) - \check{G}_1| \leq 10^{-3}$, et donc à $\|G_1(-\frac{1}{5}) - \check{G}_1\| \leq 5 \times 10^{-3}$. Ainsi,

$$\check{Z}_1 = D_1 \check{G}_1 \left(-\frac{1}{5} \right)^{M_1} \quad \text{avec} \quad \left(-\frac{1}{5} \right)^{M_1} = \text{diag}(1, 1, 1, -5i\sqrt{5})$$

vérifie $\|Z_1(-\frac{1}{5}) - \check{Z}_1\| \leq 10^{-1}$, puisque $s_{D_1, \max} = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{41}}{6}$ et $s_{(-\frac{1}{5})^{M_1}, \max} = 5\sqrt{5}$.

Nous avons $s_{\check{Z}_1, \min} \approx 0.69$, donc \check{Z}_1 est inversible et l'unique solution $\check{\mathfrak{S}}_1$ de l'équation $\check{\mathcal{F}} = \check{Z}_1 \check{\mathfrak{S}}_1$ est

$$\check{\mathfrak{S}}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{491168305124}{1169245998243} \\ \frac{2024026077722}{389748666081} \\ -\frac{3023741419649}{1169245998243} \\ -\frac{8636611345103}{9743716652025} i\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

et vérifie $\|\mathfrak{S}_1 - \check{\mathfrak{S}}_1\| \leq 1$.

Par conséquent,

$$\check{c}_0^{[2]} = -4\sqrt{\pi}\check{\sigma}_{1,4} = \frac{34546445380412}{9743716652025}i\sqrt{5\pi}$$

satisfait à $\left|c_0^{[2]} - \check{c}_0^{[2]}\right| \leq 6$. Une valeur approchée à 1 près de $\check{c}_0^{[2]}$ étant $14i$, nous en déduisons que

$$\boxed{\left|c_0^{[2]} - 14i\right| \leq 7}$$

Si ce calcul ne nous permet plus de connaître quelques décimales de $c_0^{[2]}$, ceci nous suffit amplement pour en conclure que le multiplicateur de Stokes $c_0^{[2]}$ est non nul. Signalons que si nous réalisons les calculs ci-dessus en partant d'une erreur en 10^{-2} sur $\tilde{\mathcal{F}}(\frac{4}{5})$ et $G_1(-\frac{1}{5})$, nous ne pouvons plus conclure à la non nullité de $c_0^{[2]}$.

3.1.6 Exemple 2 (une seule singularité et monodromie formelle triviale)

Dans ce deuxième exemple, la série \tilde{f} admet une unique singularité et la monodromie formelle est triviale.

Nous considérons le système différentiel linéaire

$$x^2 \frac{dY}{dx} = \begin{bmatrix} \frac{x^3}{1+2x} & -4x^2 \\ 2x^2 - 3x^3 & 2+x^3 \end{bmatrix} Y$$

et la solution fondamentale $\hat{Y}(x) = \hat{F}(x)e^{Q(\frac{1}{x})}$ avec $\hat{F}(x) = I_2 + O(x^2)$ et $Q(\frac{1}{x}) = \text{diag}(0, -\frac{2}{x})$. Les directions anti-Stokes de \hat{Y} sont donc \mathbb{R}^+ et \mathbb{R}^- , et les matrices de Stokes associées sont

$$C_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c_0^{[2]} & 0 \end{bmatrix} \text{ et } C_{-\pi} = \begin{bmatrix} 0 & * \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Nous cherchons une valeur approchée de $c_0^{[2]}$.

Nous avons $\mu = 3$ et \tilde{f} a une unique singularité en 2 qui est une singularité simple.

3.1.6.1 Détermination de $[S_2]$ et $Z_2(\xi - 2)$

Les séries $\hat{f}^{[j]}$ vérifiant les équations

$$(3.13) \quad \begin{cases} (1+2x)x^2 \frac{d\hat{f}^{[1]}}{dx} = x^3 \hat{f}^{[1]} - (1+2x)4x^2 \hat{f}^{[2]} \\ x^2 \frac{d\hat{f}^{[2]}}{dx} = (2x^2 - 3x^3)\hat{f}^{[1]} + (2+x^3)\hat{f}^{[2]} \end{cases}$$

leurs transformées de Borel satisfont à

$$\begin{cases} \xi \tilde{f}^{[1]''''} + (3 + 2\xi) \tilde{f}^{[1]'''} = \tilde{f}^{[1]} - 8\tilde{f}^{[2]} - 4\tilde{f}^{[1]'} - 4\tilde{f}^{[2]'} \\ (\xi - 2) \tilde{f}^{[2]''''} + 3\tilde{f}^{[2]'''} = -3\tilde{f}^{[1]} + \tilde{f}^{[2]} + 2\tilde{f}^{[1]'} \end{cases}$$

Ainsi, $\tilde{\mathcal{F}} = \begin{bmatrix} \tilde{f} \\ \tilde{f}' \\ \tilde{f}'' \end{bmatrix}$ est solution du système

$$\frac{dZ}{d\xi} = C(\xi)Z \text{ avec } C(\xi) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\xi} & -\frac{8}{\xi} & -\frac{4}{\xi} & -\frac{4}{\xi} & \frac{3+2\xi}{\xi} & 0 \\ -\frac{3}{\xi-2} & \frac{1}{\xi-2} & \frac{2}{\xi-2} & 0 & 0 & -\frac{3}{\xi-2} \end{bmatrix}$$

Le point $\xi = 2$ est un point singulier régulier et le système $[S_2]$ est alors

$$(\xi - 2) \frac{dZ}{d\xi} = C_2(\xi - 2)Z \text{ avec } C_2(\xi) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \xi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \xi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi \\ \frac{\xi}{\xi+2} & -\frac{8\xi}{\xi+2} & -\frac{4\xi}{\xi+2} & -\frac{4\xi}{\xi+2} & \frac{\xi(7+2\xi)}{\xi+2} & 0 \\ -3 & 1 & 2 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Les valeurs propres de la matrice de tête $C_2(0)$ de $C_2(\xi)$ étant 0 et -3 , elles diffèrent d'un entier et nous sommes obligés de procéder à des cisaillements. En reprenant l'algorithme de la proposition 3.4, nous trouvons comme matrice de cisaillements \mathcal{T}_2 la matrice définie par

$$\mathcal{T}_2(\xi) = \begin{bmatrix} \xi^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \xi^3 & 0 & 0 & 0 & \frac{\xi^2}{2} \\ 0 & 0 & \xi^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \xi^3 & 0 & -\frac{\xi}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \xi^3 & -\xi^2 \\ -\xi^3 & \frac{\xi^3}{3} & \frac{2\xi^3}{3} & 0 & 0 & 1 + \frac{\xi^2}{6} \end{bmatrix}$$

La solution fondamentale $Z_2(\xi - 2)$ de $[S_2]$ que nous considérons dans la proposition 3.4 est donc

$$Z_2(\xi - 2) = \mathcal{T}_2(\xi - 2)G_2(\xi - 2)(\xi - 2)^{M'_2} \text{ où } M'_2 = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

et où $G_2(\xi-2)$ est analytique sur le disque $\mathcal{D}_2 = D(2, 2)$ avec $G_2(0) = I_6$. En particulier, les cinq premières colonnes de Z_2 sont analytiques en 2 et la sixième colonne de $Z_2(\xi-2)$ est

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2(\xi-2)} \\ 0 \\ -\frac{1}{2(\xi-2)^2} \\ -\frac{1}{\xi-2} \\ \frac{1}{(\xi-2)^3} + \frac{1}{4(\xi-2)} \end{bmatrix} + \tilde{h}_2(\xi-2) \log(\xi-2) + Hol_2(\xi-2)$$

avec $\tilde{h}_2(\xi) = O(1)$ et $Hol_2(\xi) = O(1)$.

Ainsi, en notant \mathfrak{S}_2 la matrice de connexion entre 0 et 2 obtenue à l'aide du prolongement analytique de $\tilde{\mathcal{F}}$ à droite de 2 :

$$\tilde{\mathcal{F}}(\xi) = Z_2(\xi-2)\mathfrak{S}_2$$

nous obtenons par la proposition 3.6 la relation

$$c_0^{[2]} = i\pi\sigma_{2,6}$$

Comme dans l'exemple précédent, nous obtenons $c_0^{[2]} \in i\mathbb{R}$. En effet, les séries $\tilde{\mathcal{F}}(\xi)$ et $G_2(\xi-2)$ sont à coefficients réels et la matrice \mathfrak{S}_2 vérifie pour tout $\alpha \in]0, 2[$ la relation $\tilde{\mathcal{F}}(\alpha) = Z_2(\alpha-2)\mathfrak{S}_2$ où

$$Z_2(\alpha-2) = \mathcal{T}_2(\alpha-2)G_2(\alpha-2)(\alpha-2)^{M'_2}$$

avec $\mathcal{T}_2(\alpha-2) \in M_6(\mathbb{R})$ et

$$(\alpha-2)^{M'_2} = -\frac{1}{(2-\alpha)^3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\log(2-\alpha) + i\pi \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{\log(2-\alpha) - i\pi}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -6\log(2-\alpha) + 6i\pi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3.1.6.2 Choix de la valeur α dans $]0, 2[$

Comme dans l'exemple précédent, ce choix est essentiellement conditionné par la méthode d'approximation de $G_2(\alpha-2)$, et notamment par la détermination des constantes $m_0^{(\ell)}$ et W_ℓ à l'aide des systèmes (3.12). La matrice M'_2 n'étant pas diagonale, leurs dimensions dépendent de la colonne étudiée dans G_2 : la dimension maximale est de 96 et est obtenue par l'étude simultanée des quatre dernières colonnes de G_2 . Le nombre p_6 de 1 sur la première sur-diagonale d'une forme de Jordan de la matrice $\mathcal{H}_{2,\infty}^{(6)}$

est alors de 68. Par conséquent, il est nécessaire de choisir $\alpha \in]0, 2[$ afin que $\varepsilon = 4\sqrt{17}$ satisfasse aux inégalités⁸

$$2 - \alpha < \frac{2}{1 + 2\varepsilon} < 2$$

Nous prenons dans la suite $\alpha = \frac{39}{20}$ et nous déterminons une valeur approchée de $\tilde{\mathcal{F}}(\alpha)$ (resp. $G_2(\alpha - 2)$) à 3.5×10^{-10} (resp. 7×10^{-10}) en norme $\|\cdot\|$.

3.1.6.3 Approximation de $\tilde{\mathcal{F}}(\alpha)$

Nous prenons $\varepsilon = \frac{1}{160}$. En appliquant une transformation de Mellin aux équations (3.13) et en notant

$$\hat{\mathcal{F}}_m = \begin{bmatrix} \hat{\mathcal{F}}_m^{[1]} \\ \hat{\mathcal{F}}_m^{[2]} \end{bmatrix} \text{ avec } \hat{\mathcal{F}}_m^{[j]} = \begin{bmatrix} \hat{f}_{m-2}^{[j]} \\ \hat{f}_{m-1}^{[j]} \\ \hat{f}_m^{[j]} \end{bmatrix}$$

nous obtenons pour tout $m \geq 4$ l'égalité

$$\hat{\mathcal{F}}_{m+1} = (m - 3)C_m \hat{\mathcal{F}}_m$$

avec

$$C_m = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{m-3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2m} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{(m+1)(m-3)} & -\frac{1}{(m+1)(m-3)} & 0 & -\frac{8}{(m+1)(m-3)} & -\frac{4}{(m+1)(m-3)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{m-3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{m-3} \\ \frac{3}{2(m-3)} & -\frac{1}{m-3} & 0 & -\frac{1}{2(m-3)} & 0 & \frac{m}{2(m-3)} \end{bmatrix}$$

La matrice limite C_∞ étant

$$C_\infty = \text{diag} \left(0, 0, 0, 0, 0, \frac{1}{2} \right)$$

nous pouvons prendre $U = I_6$. Le calcul de $E_m = C_\infty - C_m$ donne alors $M = \frac{\sqrt{1699}}{10}$, puis $m_0 = 663$ et

$$K = W\sqrt{6} \text{ avec } W = \frac{\sqrt{1381}}{24} \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{1699}}{10} \right)^{659} \left(\frac{160}{81} \right)^{661}$$

Ainsi, la somme partielle $\tilde{\mathcal{F}}_{[115350]}(\alpha)$ de $\tilde{\mathcal{F}}(\alpha)$ vérifie

$$\left\| \tilde{\mathcal{F}}(\alpha) - \tilde{\mathcal{F}}_{[115350]}(\alpha) \right\| \leq 10^{-10}$$

⁸Avec un tel choix de α et de ε , nous pouvons prendre $\chi = 1$ et $\hat{U} = U$ pour l'étude des systèmes (3.12), et ceci quelle que soit la colonne choisie dans G_2 .

Finalement, la matrice

$$\check{\mathcal{F}} = \begin{bmatrix} \frac{1729787937}{1250000000} \\ \frac{15412444747}{500000000} \\ -\frac{38846650147}{1000000000} \\ \frac{3484723300589}{500000000} \\ -\frac{589000613901}{1000000000} \\ \frac{55892767476267}{2000000000} \end{bmatrix}$$

satisfaisant à $\left| \check{\mathcal{F}}_{[115350]}(\alpha) - \check{\mathcal{F}} \right| \leq 10^{-10}$, nous avons $\left\| \check{\mathcal{F}}(\alpha) - \check{\mathcal{F}} \right\| \leq 3.5 \times 10^{-10}$.

3.1.6.4 Approximation de $G_2(\alpha - 2)$ et $Z_2(\alpha - 2)$

La série $G_2(\xi - 2)$ est l'unique solution analytique sur \mathcal{D}_2 vérifiant $G_2(0) = I_6$ de l'équation

$$(\xi - 2)G_2' = \mathcal{T}_2^{-1} C_2(\xi - 2)G_2 - G_2 M_2'$$

où

$$\mathcal{T}_2^{-1} C_2(\xi) = \begin{bmatrix} -3 & 0 & \xi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -\frac{\xi^3}{2} & \frac{\xi^3 + 6\xi}{6} & \frac{\xi^3}{3} & -\frac{4\xi^2 + \xi}{12} \\ 0 & 0 & -3 & 0 & \xi & -1 \\ -\xi & \frac{\xi}{3} & \frac{3\xi^2 + 4\xi}{6} & -3 - \frac{\xi^2}{6} & -\frac{\xi^2}{3} & \frac{1}{4} + \frac{\xi}{3} \\ \frac{\xi}{\xi + 2} & -\frac{8\xi}{\xi + 2} & \frac{\xi^4 + 2\xi^3 - 4\xi}{\xi + 2} & -\frac{\xi^4 + 2\xi^3 + 12\xi}{3(\xi + 2)} & -\frac{2\xi^4 + 4\xi^3 - 6\xi^2 - 12\xi + 18}{3(\xi + 2)} & \frac{4\xi^3 + 9\xi^2 - 10\xi - 72}{6(\xi + 2)} \\ 0 & 0 & \xi^4 & -\frac{\xi^4}{3} & -\frac{2\xi^4}{3} & -3 + \frac{\xi^2}{2} + \frac{2\xi^3}{3} \end{bmatrix}$$

Vu la matrice M_2' , il faut déterminer trois systèmes (3.12) : deux sont associés à chacune des deux premières colonnes de G_2 et sont de dimension 24 ; et le troisième, de dimension 96, correspond à l'étude simultanée des quatre dernières colonnes de G_2 . Dans tous les cas, la valeur choisie pour α nous permet de prendre $\varepsilon = 4\sqrt{17}$ et donc $\chi = 1$ et $U = \widehat{U}$. Nous obtenons ainsi

$$\left\| G_2(\alpha - 2) - G_{2,[355]}(\alpha - 2) \right\| \leq 10^{-10}$$

puis $\|G_2(\alpha - 2) - \check{G}_2\| \leq 7 \times 10^{-10}$, la matrice \check{G}_2 étant

$$\begin{bmatrix} \frac{4999952311}{5000000000} & \frac{80119}{1000000000} & -\frac{499600661}{10000000000} & \frac{15651}{400000000} & \frac{11794979}{10000000000} & -\frac{395079067}{10000000000} \\ -\frac{3125063}{2500000000} & \frac{10004147319}{10000000000} & \frac{8637543}{10000000000} & -\frac{25005697}{500000000} & -\frac{99167}{5000000000} & \frac{178194427}{10000000000} \\ \frac{5553289}{10000000000} & -\frac{9489013}{2000000000} & \frac{4988188553}{5000000000} & -\frac{22981503}{10000000000} & -\frac{229085001}{5000000000} & -\frac{2629725537}{10000000000} \\ \frac{24999887}{500000000} & -\frac{166661129}{10000000000} & -\frac{169789911}{5000000000} & \frac{10002089117}{10000000000} & \frac{4162919}{10000000000} & -\frac{455293429}{10000000000} \\ -\frac{20883139}{10000000000} & \frac{924187479}{5000000000} & \frac{458992171}{5000000000} & \frac{176055171}{2000000000} & \frac{522764779}{625000000} & -\frac{1221461421}{1250000000} \\ -\frac{11}{5000000000} & -\frac{1541}{10000000000} & \frac{7483}{5000000000} & -\frac{5983}{10000000000} & -\frac{9621}{10000000000} & \frac{1000180031}{1000000000} \end{bmatrix}$$

et vérifiant $|G_{2,[355]}(\alpha - 2) - \check{G}_2| \leq 10^{-10}$. Noter que le phénomène observé dans l'exemple précédent sur un autre choix de majoration est amplifié par la dimension importante des systèmes (3.12) : contrairement au calcul ci-dessus, nous obtenons, pour une approximation de 10^{-10} , la 14519^{ème} somme partielle au lieu de la 355^{ème}. Le nombre de termes nécessaire est donc pratiquement 41 fois plus élevé.

Finalement, $\check{Z}_2 = \mathcal{T}_2(\alpha - 2)\check{G}_2(\alpha - 2)^{M'_2}$ est une approximation de $Z_2(\alpha - 2)$ et nous avons

$$\|Z_2(\alpha - 2) - \check{Z}_2\| \leq 1.5 \times 10^{-4}$$

3.1.6.5 Approximation de \mathfrak{S}_2 et $c_0^{[2]}$

La matrice \check{Z}_2 étant inversible avec $s_{\check{Z}_2, \min} \approx 0.78$, l'unique matrice $\check{\mathfrak{S}}_2$ définie par $\check{\mathcal{F}} = \check{Z}_2\check{\mathfrak{S}}_2$ vérifie

$$\|\mathfrak{S}_2 - \check{\mathfrak{S}}_2\| \leq 2 \times 10^{-2}$$

Une valeur approchée $\check{c}_0^{[2]}$ de $c_0^{[2]}$ est alors donnée par

$$\begin{aligned} \check{c}_0^{[2]} &= i\pi\check{\sigma}_{2,6} \\ &= -\frac{1673416360267132007305713233228285368928873551044998107731392629}{479232596387786101187840378034077659271571573961693481702880000}i\pi \end{aligned}$$

et nous avons $|c_0^{[2]} - \check{c}_0^{[2]}| \leq 7 \times 10^{-2}$. Finalement, en prenant une valeur approchée de $\check{c}_0^{[2]}$ à 10^{-2} près, nous obtenons

$$\boxed{|c_0^{[2]} + 10.97i| \leq 8 \times 10^{-2}}$$

Par suite, le multiplicateur de Stokes $c_0^{[2]}$ est non nul et le chiffre des dizaines de 10.97 est exact.

3.1.7 Exemple 3 (deux singularités alignées et monodromie formelle non triviale)

Dans ce troisième exemple, la série \tilde{f} admet deux singularités alignées et la monodromie formelle est non triviale.

Nous considérons le système différentiel linéaire

$$x^2 \frac{dY}{dx} = \begin{bmatrix} 0 & -x^2 & 0 \\ x^2 & 1 + \frac{x}{2} & 2x^2 \\ -x^2 & 3x^2 & 2 + \frac{x}{3} \end{bmatrix} Y$$

et la solution fondamentale $\hat{Y}(x) = \hat{F}(x)x^L e^{Q(\frac{1}{x})}$ avec $\hat{F}(x) = I_3 + O(x^2)$,

$$L = \text{diag} \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \right) \text{ et } Q \left(\frac{1}{x} \right) = \text{diag} \left(0, -\frac{1}{x}, -\frac{2}{x} \right)$$

Les directions anti-Stokes de \hat{Y} sont donc \mathbb{R}^+ et \mathbb{R}^- , et les matrices de Stokes associées sont

$$C_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ c_0^{[2]} & 0 & 0 \\ c_0^{[3]} & * & 0 \end{bmatrix} \text{ et } C_{-\pi} = \begin{bmatrix} 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Nous cherchons une valeur approchée des deux multiplicateurs de Stokes $c_0^{[2]}$ et $c_0^{[3]}$.

Nous avons $\mu = 2$. La fonction \tilde{f} a une singularité purement ramifiée d'exposant de ramification $\{\frac{1}{2}\}$ en $\xi = 1$ et une singularité purement ramifiée d'exposant de ramification $\{\frac{1}{3}\}$ en $\xi = 2$. Noter que le multiplicateur de Stokes $c_0^{[2]}$ (resp. $c_0^{[3]}$) est associé à la singularité $\xi = 1$ (resp. $\xi = 2$).

3.1.7.1 Détermination des systèmes $[S_1]$ et $[S_2]$

Les séries $\hat{f}^{[j]}$ vérifiant les équations

$$(3.14) \quad \begin{cases} x^2 \frac{d\hat{f}^{[1]}}{dx} = -x^2 \hat{f}^{[2]} \\ x^2 \frac{d\hat{f}^{[2]}}{dx} - \left(1 + \frac{x}{2}\right) \hat{f}^{[2]} = x^2 \hat{f}^{[1]} + 2x^2 \hat{f}^{[3]} \\ x^2 \frac{d\hat{f}^{[3]}}{dx} - \left(2 + \frac{x}{3}\right) \hat{f}^{[3]} = -x^2 \hat{f}^{[1]} + 3x^2 \hat{f}^{[2]} \end{cases}$$

leurs transformées de Borel satisfont à

$$\begin{cases} \xi \tilde{f}^{[1]''} + 2\tilde{f}^{[1]'} = -\tilde{f}^{[2]} \\ (\xi - 1)\tilde{f}^{[2]''} + \frac{3}{2}\tilde{f}^{[2]'} = \tilde{f}^{[1]} + 2\tilde{f}^{[3]} \\ (\xi - 2)\tilde{f}^{[3]''} + \frac{5}{3}\tilde{f}^{[3]'} = -\tilde{f}^{[1]} + 3\tilde{f}^{[2]} \end{cases}$$

Ainsi, le vecteur colonne $\tilde{\mathcal{F}} = \begin{bmatrix} \tilde{f} \\ \tilde{f}' \end{bmatrix}$ est solution du système différentiel linéaire

$$[S] \quad \frac{dZ}{d\xi} = C(\xi)Z \text{ avec } C(\xi) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{\xi} & 0 & -\frac{2}{\xi} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\xi-1} & 0 & \frac{2}{\xi-1} & 0 & -\frac{3}{2(\xi-1)} & 0 \\ -\frac{1}{\xi-2} & \frac{3}{\xi-2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{3(\xi-2)} \end{bmatrix}$$

Remarquer ici que la matrice du système $[A]$ étant à coefficients polynomiaux, les numérateurs des fractions rationnelles intervenant dans la matrice $C(\xi)$ n'ont aucun terme en ξ .

Les deux points $\xi = 1$ et $\xi = 2$ sont des points singuliers réguliers de $[S]$ et nous obtenons pour $[S_1]$ et $[S_2]$ les deux systèmes suivants :

$$[S_1] \quad (\xi - 1)\frac{dZ}{d\xi} = C_1(\xi - 1)Z \text{ avec } C_1(\xi) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \xi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi \\ 0 & -\frac{\xi}{\xi+1} & 0 & -\frac{2\xi}{\xi+1} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & -\frac{3}{2} & 0 \\ -\frac{\xi}{\xi-1} & \frac{3\xi}{\xi-1} & 0 & 0 & 0 & -\frac{5\xi}{3(\xi-1)} \end{bmatrix}$$

$$[S_2] \quad (\xi - 2)\frac{dZ}{d\xi} = C_2(\xi - 2)Z \text{ avec } C_2(\xi) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \xi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi \\ 0 & -\frac{\xi}{\xi+2} & 0 & -\frac{2\xi}{\xi+2} & 0 & 0 \\ \frac{\xi}{\xi+1} & 0 & \frac{2\xi}{\xi+1} & 0 & -\frac{3\xi}{2(\xi+1)} & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{3} \end{bmatrix}$$

Remarquer que les valeurs propres de chacune des matrices de tête $C_1(0)$ de $C_1(\xi)$ et $C_2(0)$ de $C_2(\xi)$ ne diffèrent pas d'un entier, les solutions fondamentales $Z_1(\xi - 1)$ et $Z_2(\xi - 2)$ sont obtenues par le point 1 de la proposition 3.4.

★ Détermination de $Z_1(\xi - 1)$: En considérant la matrice de diagonalisation

$$D_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{4}{3} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

de la matrice de tête $C_1(0)$ de $C_1(\xi)$, nous voyons que la solution fondamentale $Z_1(\xi - 1)$ de $[S_1]$ que nous considérons dans la proposition 3.4 est définie par

$$Z_1(\xi - 1) = D_1 G_1(\xi - 1) (\xi - 1)^{M_1} \text{ où } M_1 = \text{diag} \left(0, 0, 0, 0, -\frac{3}{2}, 0 \right)$$

et où $G_1(\xi - 1)$ est analytique sur le disque $\mathcal{D}_1 = D(1, 1)$ avec $G_1(0) = I_6$. En particulier, les quatre premières colonnes de Z_1 et la dernière colonne de Z_1 sont analytiques au voisinage de 1. Quant à la cinquième colonne de $Z_1(\xi - 1)$, elle s'écrit sous la forme

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -2(\xi - 1)^{-\frac{1}{2}} \\ 0 \\ 0 \\ (\xi - 1)^{-\frac{3}{2}} \\ 0 \end{bmatrix} + O\left((\xi - 1)^{\frac{1}{2}}\right)$$

Ainsi, en notant \mathfrak{S}_1 la matrice de connexion entre 0 et 1 obtenue à l'aide du prolongement analytique de $\tilde{\mathcal{F}}$ à droite de 1 :

$$\tilde{\mathcal{F}}(\xi) = Z_1(\xi - 1) \mathfrak{S}_1$$

nous obtenons par la proposition 3.6 la relation

$$c_0^{[2]} = -4\sqrt{\pi}\sigma_{1,5}$$

Comme dans les deux exemples précédents, nous obtenons à nouveau $c_0^{[2]} \in i\mathbb{R}$. En effet, les séries $\tilde{\mathcal{F}}(\xi)$ et $G_1(\xi - 1)$ sont à coefficients réels et la matrice \mathfrak{S}_1 vérifie pour tout $\alpha \in]0, 1[$ la relation $\tilde{\mathcal{F}}(\alpha) = Z_1(\alpha - 1) \mathfrak{S}_1$ avec

$$Z_1(\alpha - 1) = D_1 G_1(\alpha - 1) (\alpha - 1)^{M_1}$$

où $D_1 \in M_6(\mathbb{R})$ et $(\alpha - 1)^{M_1} = \text{diag} \left(0, 0, 0, 0, -\frac{i}{(1-\alpha)\sqrt{1-\alpha}}, 0 \right)$.

★ Détermination de $Z_2(\xi - 2)$: En considérant à présent la matrice de diagonalisation

$$D_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{3}{5} & \frac{9}{5} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

de la matrice de tête $C_2(0)$ de $C_2(\xi)$, nous voyons que la solution fondamentale $Z_2(\xi-2)$ de $[S_2]$ que nous considérons dans la proposition 3.4 est définie par

$$Z_2(\xi-2) = D_2 G_2(\xi-2)(\xi-2)^{M_2} \text{ où } M_2 = \text{diag} \left(0, 0, 0, 0, 0, -\frac{5}{3} \right)$$

et où $G_2(\xi-2)$ est analytique sur le disque $\mathcal{D}_2 = D(2, 1)$ avec $G_2(0) = I_6$. En particulier, les cinq premières colonnes de Z_2 sont analytiques au voisinage de 2 et la sixième colonne de $Z_2(\xi-2)$ s'écrit sous la forme

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{3}{2}(\xi-2)^{-\frac{2}{3}} \\ 0 \\ 0 \\ (\xi-2)^{-\frac{5}{3}} \end{bmatrix} + O\left((\xi-2)^{\frac{1}{3}}\right)$$

Ainsi, en notant \mathfrak{S}_2 la matrice de connexion entre 0 et 2 obtenue à l'aide du prolongement analytique de $\tilde{\mathcal{F}}$ à droite de 2 :

$$\tilde{\mathcal{F}}(\xi) = Z_2(\xi-2)\mathfrak{S}_2$$

nous obtenons par la proposition 3.6 la relation

$$c_0^{[3]} = -\frac{3i\pi}{\Gamma(\frac{2}{3})} e^{-\frac{i\pi}{3}} \sigma_{2,6}$$

Ici, nous ne pouvons pas apporter de précisions sur la valeur de $c_0^{[3]}$.

3.1.7.2 Approximation de \mathfrak{S}_1 et $c_0^{[2]}$

Le disque de convergence $\mathcal{D}_0 = D(0, 1)$ de $\tilde{\mathcal{F}}$ et le disque de convergence \mathcal{D}_1 de $G_1(\xi-1)$ vérifiant $\mathcal{D}_0 \cap \mathcal{D}_1 \cap \mathbb{R}^+ =]0, 1[$, nous choisissons $\alpha = \frac{1}{2}$ pour évaluer $\tilde{\mathcal{F}}(\alpha)$ et $Z_1(\alpha-1)$.

* Approximation de $\tilde{\mathcal{F}}(\alpha)$: Nous prenons $\varepsilon = \frac{1}{2}$. En appliquant une transformation de Mellin aux équations (3.14) et en notant

$$\hat{\mathcal{F}}_m = \begin{bmatrix} \hat{\mathcal{F}}_m^{[1]} \\ \hat{\mathcal{F}}_m^{[2]} \\ \hat{\mathcal{F}}_m^{[3]} \end{bmatrix} \text{ avec } \hat{\mathcal{F}}_m^{[j]} = \begin{bmatrix} \hat{f}_{m-1}^{[j]} \\ \hat{f}_m^{[j]} \end{bmatrix}$$

nous obtenons pour tout $m \geq 3$ l'égalité

$$\hat{\mathcal{F}}_{m+1} = (m-2)C_m \hat{\mathcal{F}}_m$$

avec

$$C_m = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{m-2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{(m-2)(m+1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{m-2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{m-2} & 0 & 0 & \frac{2m-1}{2m-4} & -\frac{2}{m-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3m-1} \\ \frac{1}{2m-4} & 0 & -\frac{3}{2m-4} & 0 & 0 & \frac{1}{6m-12} \end{bmatrix}$$

La matrice limite C_∞ étant

$$C_\infty = \text{diag} \left(0, 0, 0, 1, 0, \frac{1}{2} \right)$$

nous pouvons prendre $U = I_6$. Le calcul de $E_m = C_\infty - C_m$ donne alors $M = \frac{\sqrt{1945}}{12}$, puis $m_0 = 10$ et

$$K = 2W\sqrt{6} \text{ avec } W = \frac{64\sqrt{285}}{19683} \left(1 + \frac{\sqrt{1945}}{12} \right)^7$$

Ainsi, la somme partielle $\tilde{\mathcal{F}}_{[117]}(\alpha)$ de $\tilde{\mathcal{F}}(\alpha)$ vérifie

$$\left\| \tilde{\mathcal{F}}(\alpha) - \tilde{\mathcal{F}}_{[117]}(\alpha) \right\| \leq 10^{-10}$$

Finalement, la matrice

$$\check{\mathcal{F}} = \begin{bmatrix} \frac{531352723}{10000000000} \\ -\frac{8744913399}{10000000000} \\ \frac{231010113}{625000000} \\ \frac{2464509953}{10000000000} \\ -\frac{32062659541}{10000000000} \\ \frac{11891688361}{10000000000} \end{bmatrix}$$

satisfaisant à $\left| \tilde{\mathcal{F}}_{[117]}(\alpha) - \check{\mathcal{F}} \right| \leq 10^{-10}$, nous avons $\left\| \tilde{\mathcal{F}}(\alpha) - \check{\mathcal{F}} \right\| \leq 3.5 \times 10^{-10}$.

★ Approximation de $G_1(\alpha - 1)$ et $Z_1(\alpha - 1)$: La série $G_1(\xi - 1)$ est l'unique solution analytique sur \mathcal{D}_1 vérifiant $G_1(0) = I_6$ de l'équation

$$(\xi - 1)G_1' = D_1^{-1}C_1(\xi - 1)D_1G_1 - G_1M_1$$

où

$$D_1^{-1}C_1(\xi)D_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \xi & 0 & 0 \\ \frac{2\xi}{3} & 0 & \frac{4\xi}{3} & 0 & \xi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi \\ 0 & -\frac{\xi}{\xi+1} & 0 & -\frac{2\xi}{\xi+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{2\xi}{3} & -\frac{3}{2} & -\frac{4\xi}{3} \\ -\frac{\xi}{\xi-1} & \frac{3\xi}{\xi-1} & 0 & 0 & 0 & -\frac{5\xi}{3(\xi-1)} \end{bmatrix}$$

La matrice M_1 étant diagonale, les six colonnes de G_1 s'étudient séparément. Toutefois, il n'est pas nécessaire ici d'utiliser les calculs généraux du paragraphe 3.1.4.3. En effet, les fractions rationnelles de la matrice $D_1^{-1}C_1(\xi)D_1$ n'admettant aucun terme en ξ^2 , nous n'obtenons que des relations de récurrence d'ordre 1. En particulier, les systèmes (3.12) que nous devons introduire sont de dimension 6 et non 12 comme nous aurions pu le supposer au départ : pour $\ell \in \{1, \dots, 6\}$, nous notons

$$\mathcal{G}_{1,m}^{(\ell)} = \begin{bmatrix} G_{1,m}^{(1,\ell)} \\ G_{1,m}^{(2,\ell)} \\ G_{1,m}^{(3,\ell)} \\ G_{1,m}^{(4,\ell)} \\ G_{1,m}^{(5,\ell)} \\ G_{1,m}^{(6,\ell)} \end{bmatrix}$$

et nous obtenons pour tout $m \geq 1$ une relation de la forme $\mathcal{G}_{1,m+1}^{(\ell)} = H_{1,m}^{(\ell)}\mathcal{G}_{1,m}^{(\ell)}$ avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \ell \in \{1, 2, 3, 4, 6\}, H_{1,m}^{(\ell)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{m+1} & 0 & 0 \\ \frac{2}{3m+3} & 0 & \frac{4}{3m+3} & 0 & \frac{1}{m+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{m+1} \\ 0 & -\frac{1}{m+1} & 0 & -\frac{m+2}{m+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{4}{6m+15} & 0 & -\frac{8}{3m+3} \\ \frac{1}{m+1} & -\frac{3}{m+1} & 0 & 0 & 0 & \frac{6m+15}{3m+3} \end{bmatrix} \\ \text{et} \\ H_{1,m}^{(5)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{2}{2m-1} & 0 & 0 \\ \frac{4}{6m-3} & 0 & \frac{8}{6m-3} & 0 & \frac{2}{2m-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{2m-1} \\ 0 & -\frac{2}{2m-1} & 0 & -\frac{2m+1}{2m-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{3m+3} & 0 & -\frac{4}{3m+3} \\ \frac{2}{2m-1} & -\frac{6}{2m-1} & 0 & 0 & 0 & \frac{6m+1}{6m-3} \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

La matrice limite des $H_{1,m}^{(\ell)}$ étant

$$H_{1,\infty} = \text{diag}(0, 0, 0, -1, 0, 1)$$

nous choisissons $U = \widehat{U} = I_6$. En particulier, l'utilisation du nombre χ est inutile et les calculs vont être grandement simplifiés.

En fait, cette remarque s'applique à tous les systèmes de niveau unique 1 de la forme

$$x^2 \frac{dY}{dx} = A(x)Y$$

où $A(x) \in M_n(\mathbb{C}[x])$ et où la matrice des exposants de monodromie formelle L est de la forme

$$L = \text{diag}(0, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

avec $\text{Re}(\lambda_j) \in [0, 1[$ et $\lambda_j \neq 0$ pour tout $j \in \{2, \dots, n\}$. En particulier, nous aurons le même phénomène lors de l'étude du système $[S_2]$.

Revenons à présent à l'approximation de $G_1(\alpha - 1)$ et $Z_1(\alpha - 1)$. Choisissons $\varepsilon = \frac{1}{2}$. En adaptant l'algorithme 3.15 à notre cas, nous voyons que la somme partielle $G_{1,[313]}(\alpha - 1)$ de $G_1(\alpha - 1)$ vérifie

$$\|G_1(\alpha - 1) - G_{1,[313]}(\alpha - 1)\| \leq 10^{-10}$$

Finalement, la matrice \check{G}_1 définie par

$$\begin{bmatrix} \frac{5140366989}{5000000000} & -\frac{1254768263}{5000000000} & \frac{556364911}{10000000000} & -\frac{1253096363}{12500000000} & -\frac{6712421317}{10000000000} & -\frac{37442151}{10000000000} \\ -\frac{1726205709}{5000000000} & \frac{5186313417}{5000000000} & -\frac{3357128781}{5000000000} & \frac{683670819}{10000000000} & \frac{11406820373}{10000000000} & \frac{421755433}{5000000000} \\ \frac{289848681}{2500000000} & -\frac{105619597}{400000000} & \frac{423079797}{400000000} & -\frac{55086029}{2500000000} & -\frac{3573908553}{5000000000} & -\frac{3591388709}{10000000000} \\ -\frac{564438957}{2500000000} & \frac{3778350807}{2500000000} & -\frac{4455679463}{10000000000} & \frac{40258047079}{10000000000} & \frac{33832160679}{10000000000} & \frac{183625769}{5000000000} \\ -\frac{504443413}{5000000000} & \frac{2982399387}{10000000000} & -\frac{381160517}{5000000000} & \frac{3686231809}{10000000000} & \frac{17060558699}{10000000000} & \frac{1682386299}{10000000000} \\ -\frac{2267047487}{5000000000} & \frac{4574204367}{5000000000} & -\frac{1562886339}{5000000000} & \frac{699807309}{5000000000} & \frac{17942150789}{10000000000} & \frac{335316357}{6250000000} \end{bmatrix}$$

satisfaisant à $\|G_{1,[313]}(\alpha - 1) - \check{G}_1\| \leq 10^{-10}$, nous avons $\|G_1(\alpha - 1) - \check{G}_1\| \leq 7 \times 10^{-10}$

Par suite, $\check{Z}_1 = D_1 \check{G}_1(\alpha - 1)^{M_1}$ est une approximation de $Z_1(\alpha - 1)$ et nous avons

$$\|Z_1(\alpha - 1) - \check{Z}_1\| \leq 10^{-8}$$

★ Conclusion : approximation de $\check{\mathfrak{S}}_1$ et $c_0^{[2]}$: La matrice \check{Z}_1 étant inversible avec $s_{\check{Z}_1, \min} \approx 0.21$, l'unique matrice $\check{\mathfrak{S}}_1$ définie par $\check{\mathcal{F}} = \check{Z}_1 \check{\mathfrak{S}}_1$ vérifie

$$\|\check{\mathfrak{S}}_1 - \check{\mathfrak{S}}_1\| \leq 6 \times 10^{-7}$$

Une valeur approchée $\check{c}_0^{[2]}$ de $c_0^{[2]}$ est alors donnée par

$$\check{c}_0^{[2]} = -4\sqrt{\pi}\check{\sigma}_{1,5}$$

$$= \frac{4388777481027269313551044995671635517082694982023819625112667}{1017523770930140267700611587810515550204535406658808777122963} i\sqrt{2\pi}$$

et nous avons $\left|c_0^{[2]} - \check{c}_0^{[2]}\right| \leq 4 \times 10^{-6}$. Finalement, en prenant une valeur approchée de $\check{c}_0^{[2]}$ à 10^{-6} près, nous obtenons

$$\boxed{\left|c_0^{[2]} - 10.811574i\right| \leq 5 \times 10^{-6}}$$

Par suite, le multiplicateur de Stokes $c_0^{[2]}$ est non nul. Nous déduisons également de ce calcul que les quatre premières décimales de 10.8115 sont exactes.

3.1.7.3 Approximation de \mathfrak{S}_2 et $c_0^{[3]}$

Nous devons à présent regarder la connexion entre la solution $Z_1(\xi - 1)\mathfrak{S}_1$ et $Z_2(\xi - 2)$. Le disque de convergence $\mathcal{D}_1 = D(1, 1)$ de $G_1(\xi - 1)$ et le disque de convergence $\mathcal{D}_2 = D(2, 1)$ de $G_2(\xi - 2)$ vérifiant $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 \cap \mathbb{R}^+ =]1, 2[$, nous choisissons $\beta = \frac{3}{2}$ pour évaluer $Z_1(\beta - 1)\mathfrak{S}_1$ et $Z_2(\beta - 2)$. Rappelons que nous connaissons une valeur approchée $\check{\mathfrak{S}}_1$ de la matrice de connexion \mathfrak{S}_1 .

★ Approximation de $G_1(\beta - 1)$, $Z_1(\beta - 1)$ et $Z_1(\beta - 1)\mathfrak{S}_1$: Nous choisissons $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Les calculs faits précédemment sur $G_1(\alpha - 1)$ restent valables pour $G_1(\beta - 1)$. En particulier, en reprenant point par point le raisonnement précédent, nous voyons que la somme partielle $G_{1,[313]}(\beta - 1)$ de $G_1(\beta - 1)$ vérifie

$$\|G_1(\beta - 1) - G_{1,[313]}(\beta - 1)\| \leq 10^{-10}$$

Finalement, la matrice \check{G}_1 définie par

$$\begin{bmatrix} \frac{396255131}{400000000} & -\frac{165854963}{2000000000} & -\frac{4620471}{250000000} & \frac{3327155971}{10000000000} & \frac{137716449}{625000000} & -\frac{15896081}{10000000000} \\ \frac{1730213347}{5000000000} & \frac{2365351999}{2500000000} & \frac{1054951}{1600000} & \frac{84000311}{2000000000} & -\frac{80499357}{100000000} & \frac{1269117159}{10000000000} \\ \frac{374455939}{2500000000} & -\frac{6862938921}{10000000000} & \frac{4221638289}{5000000000} & \frac{260143939}{10000000000} & \frac{17996242611}{10000000000} & \frac{8675435373}{10000000000} \\ -\frac{100708643}{2000000000} & -\frac{2738293691}{10000000000} & -\frac{983313197}{10000000000} & \frac{4400271501}{10000000000} & \frac{251136529}{500000000} & -\frac{121477111}{10000000000} \\ -\frac{1145141673}{10000000000} & \frac{6093305019}{10000000000} & \frac{775541311}{5000000000} & -\frac{974467659}{10000000000} & -\frac{1129985509}{2500000000} & -\frac{1148349387}{2000000000} \\ \frac{53737559}{78125000} & -\frac{19537417971}{5000000000} & -\frac{6042047367}{5000000000} & \frac{180160119}{1000000000} & \frac{83405799143}{10000000000} & \frac{30375286611}{10000000000} \end{bmatrix}$$

satisfaisant à $\|G_{1,[313]}(\beta - 1) - \check{G}_1\| \leq 10^{-10}$, nous avons $\|G_1(\beta - 1) - \check{G}_1\| \leq 7 \times 10^{-10}$

Par suite, $\check{Z}_1 = D_1 \check{G}_1(\beta - 1)^{M_1}$ est une approximation de $Z_1(\beta - 1)$ et nous avons

$$\|Z_1(\beta - 1) - \check{Z}_1\| \leq 10^{-8}$$

La matrice $\check{\mathfrak{S}}_1$ vérifiant

$$\|\mathfrak{S}_1 - \check{\mathfrak{S}}_1\| \leq 6 \times 10^{-7}$$

nous déduisons du lemme 3.23 que $\check{Z}_1\check{\mathfrak{S}}_1$ est une approximation de $Z_1(\beta - 1)\mathfrak{S}_1$ telle que

$$\|Z_1(\beta - 1)\mathfrak{S}_1 - \check{Z}_1\check{\mathfrak{S}}_1\| \leq 1.6 \times 10^{-5}$$

★ Approximation de $G_2(\beta - 2)$ et $Z_2(\beta - 2)$: La série $G_2(\xi - 2)$ est l'unique solution analytique sur \mathcal{D}_2 vérifiant $G_2(0) = I_6$ de l'équation

$$(\xi - 2)G_2' = D_2^{-1}C_2(\xi - 2)D_2G_2 - G_2M_2$$

où

$$D_2^{-1}C_2(\xi)D_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \xi & 0 \\ -\frac{3\xi}{5} & \frac{9\xi}{5} & 0 & 0 & 0 & \xi \\ 0 & -\frac{\xi}{\xi+2} & 0 & -\frac{2\xi}{\xi+2} & 0 & 0 \\ \frac{\xi}{\xi+1} & 0 & \frac{2\xi}{\xi+1} & 0 & -\frac{3\xi}{2(\xi+1)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3\xi}{5} & -\frac{9\xi}{5} & -\frac{5}{3} \end{bmatrix}$$

La matrice M_2 étant diagonale, les six colonnes de G_2 s'étudient séparément. Comme nous l'avons signalé au paragraphe 3.1.7.2, les calculs sont beaucoup plus simples que dans le cas général, puisque les fractions rationnelles de la matrice $D_2^{-1}C_2(\xi)D_2$ n'admettent aucun terme en ξ^2 .

Choisissons alors $\varepsilon = \frac{1}{2}$ et appliquons point par point le raisonnement fait précédemment pour $G_1(\alpha - 1)$: la somme partielle $G_{2,[392]}(\beta - 2)$ de $G_2(\beta - 2)$ vérifie

$$\|G_2(\beta - 2) - G_{2,[392]}(\beta - 2)\| \leq 10^{-10}$$

Finalement, la matrice \check{G}_2 définie par

$$\begin{bmatrix} \frac{1246680547}{1250000000} & -\frac{10302933}{125000000} & -\frac{23564953}{500000000} & -\frac{6663758761}{10000000000} & \frac{173739963}{10000000000} & -\frac{233332269}{10000000000} \\ \frac{657434343}{2500000000} & \frac{2154959963}{2500000000} & \frac{2179601643}{5000000000} & -\frac{470473771}{10000000000} & -\frac{1019852381}{1250000000} & \frac{14173230121}{10000000000} \\ \frac{2740919671}{10000000000} & -\frac{447301433}{500000000} & \frac{9539308149}{10000000000} & -\frac{507726219}{10000000000} & \frac{1750403613}{10000000000} & \frac{1294509091}{2500000000} \\ \frac{128435391}{5000000000} & \frac{3783165189}{10000000000} & \frac{444445557}{10000000000} & \frac{17743120989}{10000000000} & -\frac{1252435707}{10000000000} & \frac{232153091}{1250000000} \\ -\frac{3101343757}{2000000000} & \frac{10619667}{10000000} & -\frac{12067764277}{5000000000} & \frac{477406903}{1250000000} & \frac{2702116287}{1000000000} & -\frac{57818350663}{10000000000} \\ -\frac{734429737}{2500000000} & \frac{710353103}{5000000000} & -\frac{476341057}{1000000000} & -\frac{1108696517}{10000000000} & \frac{6855595399}{10000000000} & -\frac{3384504809}{10000000000} \end{bmatrix}$$

satisfaisant à $\|G_{2,[392]}(\beta - 2) - \check{G}_2\| \leq 10^{-10}$, nous avons $\|G_2(\beta - 2) - \check{G}_2\| \leq 7 \times 10^{-10}$

Par suite, $\check{Z}_2 = D_2\check{G}_2(\beta - 2)^{M_2}$ est une approximation de $Z_2(\beta - 2)$ et nous avons

$$\|Z_2(\beta - 2) - \check{Z}_2\| \leq 10^{-8}$$

★ Conclusion : approximation de \mathfrak{S}_2 et $c_0^{[3]}$: La matrice \check{Z}_2 étant inversible avec $s_{\check{Z}_2, \min} \approx 0.26$, l'unique matrice $\check{\mathfrak{S}}_2$ définie par $\check{Z}_1 \check{\mathfrak{S}}_1 = \check{Z}_2 \check{\mathfrak{S}}_2$ vérifie

$$\|\mathfrak{S}_2 - \check{\mathfrak{S}}_2\| \leq 8 \times 10^{-5}$$

Une valeur approchée $\check{c}_0^{[3]}$ de $c_0^{[3]}$ est alors donnée par

$$\check{c}_0^{[3]} = -\frac{3i\pi}{\Gamma(\frac{2}{3})} e^{-\frac{i\pi}{3}} \check{\sigma}_{2,6}$$

et nous avons $\left| c_0^{[3]} - \check{c}_0^{[3]} \right| \leq 6 \times 10^{-4}$. Finalement, en prenant une valeur approchée à 10^{-4} près de la partie réelle et de la partie imaginaire de $\check{c}_0^{[3]}$, nous obtenons

$$\boxed{\begin{cases} \left| \operatorname{Re} \left(c_0^{[3]} \right) + 85.6509 \right| \leq 5 \times 10^{-4} \\ \left| \operatorname{Im} \left(c_0^{[3]} \right) - 6.28 \right| \leq 5 \times 10^{-4} \end{cases}}$$

Par suite, le multiplicateur de Stokes $c_0^{[3]}$ est non nul. Nous déduisons également de ce calcul que les deux premières décimales de -85.6509 et de 6.28 sont exactes.

3.2 Cas général

A présent, la matrice des exposants de monodromie formelle L est de la forme

$$L = \bigoplus_{j=1}^J L_j$$

où L_j est un bloc de Jordan d'ordre n_j associé à la valeur propre λ_j avec $\lambda_1 = 0$. Nous avons alors

$$Q \left(\frac{1}{x} \right) = \bigoplus_{j=1}^J \left(-\frac{a_j}{x} \right) I_{n_j}, \quad A_0(x) = \bigoplus_{j=1}^J (a_j I_{n_j} + x L_j)$$

et

$$A(x) = A_0(x) + \left(\bigoplus_{j=1}^J \operatorname{diag} \left(\frac{1}{P_{j,1}(x)}, \dots, \frac{1}{P_{j,n_j}(x)} \right) \right) B(x)$$

avec $P_{j,\ell}(x) = 1 + \sum_{m=1}^{p_{j,\ell}} P_{j,\ell,m} x^m \in \mathbb{C}[x]$ et $B(x) \in M_n(x^2 \mathbb{C}[x])$; et \hat{f} est une matrice de dimension $n \times n_1$.

Rappelons que la $q^{\text{ème}}$ colonne $\hat{f}^{[q]}$ de \hat{f} , $q \in \{1, \dots, n_1\}$, est découpée en

$$\hat{f}^{[q]} = \begin{bmatrix} \hat{f}^{[1;q]} \\ \vdots \\ \hat{f}^{[J;q]} \end{bmatrix}$$

où le nombre de lignes de $\widehat{f}^{[j;q]}$ est égal à la taille du $j^{\text{ème}}$ bloc de Jordan L_j de L : $\widehat{f}^{[j;q]}$ est donc de dimension $n_j \times 1$.

Rappelons également que la matrice B est découpée comme la matrice L :

$$B = [B^{(j,\ell)}]_{1 \leq j, \ell \leq J} \text{ avec } B^{(j,\ell)}(x) \in M_{n_j, n_\ell}(x^2 \mathbb{C}[x])$$

Le terme situé à la $p^{\text{ème}}$ ligne et $q^{\text{ème}}$ colonne de $B^{(j,\ell)}$ est noté $B^{(j,\ell)(p,q)}$.

Pour toute singularité ω de \widetilde{f} , le bloc $c_\theta^{[j;q]}$, $q \in \{1, \dots, n_1\}$ et $j \in J_\omega$, de la matrice de Stokes c_θ est connu en fonction des coefficients de résurgence en ω de la $q^{\text{ème}}$ colonne $\widetilde{f}^{[j;q]}$ de \widetilde{f} (théorème 2.32). Le prolongement analytique de $\widetilde{f}^{[j;q]}$ à droite de ω étant encore une fonction de la classe de Nilsson (théorème 2.24), nous voyons, par analogie au cas où L est diagonale, qu'il suffit de répondre aux deux questions suivantes pour obtenir une méthode de calcul effectif des $c_\theta^{[j;q]}$:

1. Existe-t-il un système $[S^{[q]}]$ à point singulier régulier en $\omega \in \Omega_\theta(\widehat{f}^{[q]})$ vérifié par

$$\begin{bmatrix} \widetilde{f}^{[j;q]} \\ \vdots \\ \frac{d^k \widetilde{f}^{[j;q]}}{d\xi^k} \end{bmatrix} \text{ pour un certain } k \in \mathbb{N} ?$$

2. Les méthodes de contrôle d'erreur du paragraphe 3.1 restent-elles valables ?

Malheureusement, un tel système $[S^{[q]}]$ ne peut exister puisque, les colonnes $\widehat{f}^{[j;q]}$ de \widehat{f} étant liées par les relations

$$x^2 \frac{d\widehat{f}^{[j;q]}}{dx} - a_j \widehat{f}^{[j;q]} - x L_j \widehat{f}^{[j;q]} + x \widehat{f}^{[j;q-1]} = \frac{1}{P_j(x)} \sum_{p=1}^J B^{(j,p)} \widehat{f}^{[p;q]}$$

où $P_j = \text{diag}(P_{j,1}, \dots, P_{j,n_j})$, il en est de même pour leurs transformées de Borel $\widetilde{f}^{[j;q]}$. En revanche, si nous considérons simultanément toutes les colonnes de \widetilde{f} en introduisant le vecteur colonne

$$\widetilde{\mathbf{f}} = \begin{bmatrix} \widetilde{f}^{[1;1]} \\ \vdots \\ \widetilde{f}^{[n_1]} \end{bmatrix}$$

nous pouvons obtenir des systèmes à point singulier régulier en $\omega \in \Omega_\theta(\widehat{f})$ ayant des propriétés analogues aux systèmes $[S_\omega]$ du paragraphe 3.1. En particulier, la dimension de ceux-ci dépend de la dimension du bloc de Jordan L_1 .

3.2.1 Détermination du système à points singuliers réguliers associé à \widetilde{f}

Soient $q \in \{1, \dots, n_1\}$ et $j \in \{1, \dots, J\}$. Notons $\widehat{f}^{[j,\ell;q]}$ le $\ell^{\text{ème}}$ terme de la matrice $\widehat{f}^{[j;q]}$, $\ell \in \{1, \dots, n_j\}$. Il est aisé de voir à partir du système de passage (1) (page 54)

que les séries $\widehat{f}^{[j,\ell;q]}$ vérifient les équations différentielles

$$(3.15) \quad x^2 \frac{d\widehat{f}^{[j,\ell;q]}}{dx} - a_j \widehat{f}^{[j,\ell;q]} - \lambda_j x \widehat{f}^{[j,\ell;q]} - x \widehat{f}^{[j,\ell+1;q]} + x \widehat{f}^{[j,\ell;q-1]}$$

$$= \frac{1}{P_{j,\ell}(x)} \sum_{p=1}^J \sum_{k=1}^{n_p} B^{(j,p)(\ell,k)} \widehat{f}^{[p,k;q]}$$

Comme au paragraphe 3.1, nous posons

$$b_{j,\ell} = \max_{\substack{1 \leq p \leq J \\ 1 \leq k \leq n_p}} (\deg(B^{(j,p)(\ell,k)}))$$

$$\mu_{j,\ell} = \max(p_{j,\ell} + 1, b_{j,\ell})$$

$$\mu = \max_{\substack{1 \leq j \leq J \\ 1 \leq \ell \leq n_j}} (\mu_{j,\ell})$$

et nous obtenons la relation

$$(\xi - a_j) \frac{d^\mu \widetilde{f}^{[j,\ell;q]}}{d\xi^\mu} - (\lambda_j - \mu - P_{j,\ell,1}(\xi - a_j)) \frac{d^{\mu-1} \widetilde{f}^{[j,\ell;q]}}{d\xi^{\mu-1}} - \frac{d^{\mu-1} \widetilde{f}^{[j,\ell+1;q]}}{d\xi^{\mu-1}} + \frac{d^{\mu-1} \widetilde{f}^{[j,\ell;q-1]}}{d\xi^{\mu-1}}$$

$$= \sum_{p=1}^J \sum_{k=1}^{n_p} \sum_{m=0}^{\mu-2} \alpha_{p,k,m} \frac{d^m \widetilde{f}^{[p,k;q]}}{d\xi^m} + \sum_{m=0}^{\mu-2} \beta_m \frac{d^m \widetilde{f}^{[j,\ell;q-1]}}{d\xi^m} + (\xi - a_j) \sum_{m=0}^{\mu-2} \gamma_m \frac{d^m \widetilde{f}^{[j,\ell;q]}}{d\xi^m}$$

avec $\alpha_{p,k,m}, \beta_m, \gamma_m \in \mathbb{C}$. Ainsi, le vecteur colonne

$$\widetilde{\mathcal{F}} = \begin{bmatrix} \widetilde{f} \\ \vdots \\ \frac{d^{\mu-1} \widetilde{f}}{d\xi^{\mu-1}} \end{bmatrix}$$

de dimension $n_1 n \mu$ vérifie un système différentiel linéaire $[S]$.

Si $\beta \notin \{a_j, 1 \leq j \leq J\}$, le système $[S]$ est régulier en β et toutes ses solutions fondamentales $Z_\beta(\xi - \beta)$ sont analytiques sur $\mathcal{D}_\beta = D(\beta, \frac{1}{\rho_\beta})$ avec $\rho_\beta = \max_{1 \leq j \leq J} \frac{1}{|a_j - \beta|}$.

En revanche, si $\beta = \omega$ est l'un des $a_j \neq 0$, le système $[S]$ est à point singulier régulier en ω . Précisément, $[S]$ peut être écrit sous la forme

$$[S_\omega] \quad (\xi - \omega) \frac{dZ}{d\xi} = C_\omega(\xi - \omega)Z$$

le disque de convergence de $C_\omega(\xi - \omega)$ étant $\mathcal{D}_\omega = D(\omega, \frac{1}{\rho_\omega})$ avec $\rho_\omega = \max_{j \notin J_\omega} \frac{1}{|a_j - \omega|}$. En effet, la matrice $C_\omega(\xi)$ s'écrit sous la forme

$$C_\omega(\xi) = \left[\begin{array}{cccc|c} 0I_{n_1n} & \xi I_{n_1n} & & 0I_{n_1n} & 0I_{n_1n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \xi I_{n_1n} & 0I_{n_1n} \\ 0I_{n_1n} & \cdots & \cdots & 0I_{n_1n} & \xi I_{n_1n} \\ \hline & C_\omega^{(3)(1)}(\xi) & & & \\ & \vdots & & & C_\omega^{(4)}(\xi) \\ & C_\omega^{(3)(n_1)}(\xi) & & & \end{array} \right]$$

où les matrices $C_\omega^{(3)(q)}$ et $C_\omega^{(4)}$ sont respectivement de dimension $n \times n_1n(\mu - 1)$ et $n_1n \times n_1n$. De plus :

– pour tout $q \in \{1, \dots, n_1\}$, la matrice $C_\omega^{(3)(q)}(\xi)$ se décompose en

$$C_\omega^{(3)(q)}(\xi) = \begin{bmatrix} C_\omega^{(3)(q)(1)}(\xi) \\ \vdots \\ C_\omega^{(3)(q)(J)}(\xi) \end{bmatrix}$$

où les matrices $C_\omega^{(3)(q)(j)}$ sont de dimension $n_j \times n_1n(\mu - 1)$, les termes de $C_\omega^{(3)(q)(j)}(\xi)$ étant des fractions rationnelles de la forme $\frac{\alpha\xi + \beta\xi^2}{\xi - a_j + \omega}$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Noter que si $a_j = \omega$, *i.e.*, $j \in J_\omega$, les termes sont affines : $\frac{\alpha\xi + \beta\xi^2}{\xi - a_j + \omega} = \alpha + \beta\xi$.

– la matrice $C_\omega^{(4)}$ s'écrit sous la forme

$$C_\omega^{(4)}(\xi) = \begin{bmatrix} C_{\omega,1}^{(4)}(\xi) & & & & 0 \\ C_{\omega,2}^{(4)}(\xi) & \ddots & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ 0 & & & C_{\omega,2}^{(4)}(\xi) & C_{\omega,1}^{(4)}(\xi) \end{bmatrix}$$

avec, pour $k \in \{1, 2\}$, $C_{\omega,k}^{(4)} = \text{diag}(C_{\omega,k,1}^{(4)}, \dots, C_{\omega,k,J}^{(4)}) \in M_n(\mathbb{C})$. Les matrices $C_{\omega,k,j}^{(4)} \in M_{n_j}(\mathbb{C})$ sont définies par

$$C_{\omega,1,j}^{(4)} = \begin{cases} \begin{bmatrix} \frac{\alpha_1\xi + \beta_1\xi^2}{\xi - a_j + \omega} & \frac{\xi}{\xi - a_j + \omega} & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \frac{\xi}{\xi - a_j + \omega} \\ 0 & & & \frac{\alpha_{n_j}\xi + \beta_{n_j}\xi^2}{\xi - a_j + \omega} \end{bmatrix} & \text{si } j \notin J_\omega \\ \begin{bmatrix} \lambda_j - \mu - P_{j,1,1}\xi & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_j - \mu - P_{j,n_j,1}\xi \end{bmatrix} & \text{si } j \in J_\omega \end{cases}$$

avec $\alpha_\ell, \beta_\ell \in \mathbb{C}$ et

$$C_{\omega,2,j}^{(4)} = \begin{cases} -\frac{\xi}{\xi - a_j + \omega} I_{n_j} & \text{si } j \notin J_\omega \\ -I_{n_j} & \text{si } j \in J_\omega \end{cases}$$

Avec ces différentes écritures, il est aisé de voir qu'il existe une matrice $D_\omega \in GL_{n_1 n \mu}(\mathbb{C})$ de la forme

$$D_\omega = \begin{bmatrix} I_{n_1 n (\mu-1)} & 0 \\ D_\omega^{(3)} & I_{n_1 n} \end{bmatrix}$$

telle que la matrice de tête de $M_\omega = D_\omega^{-1} C_\omega D_\omega$ soit

$$M_\omega = \begin{bmatrix} 0_{n_1 n (\mu-1)} & 0_{n_1 n (\mu-1) \times n_1 n} \\ 0_{n_1 n \times n_1 n (\mu-1)} & M_\omega^{(4)} \end{bmatrix} \text{ avec } M_\omega^{(4)} = \begin{bmatrix} M_{\omega,1} & & & 0 \\ M_{\omega,2} & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & M_{\omega,2} & M_{\omega,1} \end{bmatrix}$$

où, pour $k \in \{1, 2\}$, $M_{\omega,k} = \text{diag}(M_{\omega,k,1}, \dots, M_{\omega,k,J}) \in M_n(\mathbb{C})$ avec $M_{\omega,k,j} \in M_{n_j}(\mathbb{C})$ et

$$M_{\omega,1,j} = \begin{cases} 0I_{n_j} & \text{si } j \notin J_\omega \\ \begin{bmatrix} \lambda_j - \mu & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_j - \mu \end{bmatrix} & \text{si } j \in J_\omega \end{cases} \text{ et } M_{\omega,2,j} = \begin{cases} 0I_{n_j} & \text{si } j \notin J_\omega \\ -I_{n_j} & \text{si } j \in J_\omega \end{cases}$$

En procédant alors comme au paragraphe 3.1.1, nous obtenons une solution fondamentale $Z_\omega(\xi - \omega)$ de $[S_\omega]$ dont la nature de la singularité ω pour ses $n_1 n$ premières lignes est la même que pour \tilde{f} . Ainsi, les termes de Z_ω nécessaires pour déterminer les $c_\theta^{[j;q]}$ (théorème 2.31) étant connus, nous ramenons à nouveau le calcul des multiplicateurs de Stokes à un calcul de matrice de connexion. Il reste donc à vérifier que les méthodes d'évaluation d'erreurs du paragraphe 3.1 peuvent être généralisées au cas où la matrice L est sous forme de Jordan quelconque.

Contrairement à l'étude du paragraphe 2.3 sur le calcul exact des multiplicateurs de Stokes, nous ne travaillons pas ici sur une colonne $c_\theta^{[j;q]}$ précise, mais nous obtenons simultanément tous les coefficients de Stokes de c_θ .

3.2.2 Généralisation du contrôle d'erreur

Grâce à l'étude du paragraphe précédent, nous voyons aisément que les méthodes du paragraphe 3.1.4 pour le contrôle d'erreur sur $Z_\beta(\alpha - \beta)$, $\beta \in \mathbb{C}^*$ et $\alpha \in \mathcal{D}_\beta \setminus \{\beta\}$ (propositions 3.11, 3.14, 3.18, algorithmes 3.12, 3.15, 3.19 et théorèmes 3.13, 3.16, 3.17, 3.20, 3.21) restent valables dans le cas où la matrice L est sous forme de Jordan quelconque. En particulier, pour tout point β de \mathbb{C}^* , nous voyons que les blocs de Jordan

des différentes matrices limites sont du même type que dans le cas où la matrice L est diagonale : ce sont des matrices nilpotentes de Jordan et les matrices scalaires

$$[0] \text{ et } \left[\frac{1}{a_j - \beta} \right] \text{ avec } a_j \neq \beta$$

En effet, les dénominateurs des fractions rationnelles de la matrice du système $[S_\beta]$ sont de la forme $\xi - a_j + \beta$ si $a_j \neq \beta$ et valent 1 sinon.

Le point délicat réside dans le contrôle d'erreur sur $\tilde{\mathcal{F}}(\alpha)$ avec $\alpha \in \mathcal{D}_0 \setminus \{0\}$. Nous écrivons

$$\widehat{f}^{[j,\ell;q]} = I_{n,n_1}^{[j,\ell;q]} + \sum_{m \geq 2} \widehat{f}_m^{[j,\ell;q]} x^m \text{ et } B^{(j,p)(\ell,k)} = \sum_{m=2}^{b_j} B_m^{(j,p)(\ell,k)} x^m$$

et nous multiplions les équations (3.15) par $P_{j,\ell}$. Une transformation de Mellin permet alors d'obtenir les relations de récurrence suivantes : pour tout $m \geq \mu_j + 2$,

$$\begin{aligned} \sum_{s=0}^{p_{j,\ell}} P_{j,\ell,s} \left((m-1-\lambda_j-s) \widehat{f}_{m-1-s}^{[j,\ell;q]} - a_j \widehat{f}_{m-s}^{[j,\ell;q]} - \widehat{f}_{m-1-s}^{[j,\ell+1;q]} + \widehat{f}_{m-1-s}^{[j,\ell;q-1]} \right) \\ = \sum_{p=1}^J \sum_{k=1}^{n_p} \sum_{s=2}^{b_j} B_s^{(j,p)(\ell,k)} \widehat{f}_{m-s}^{[p,k;q]} \end{aligned}$$

avec $P_{j,0} = 1$. Ainsi, en définissant successivement

$$\widehat{\mathcal{F}}_m^{[j,\ell;q]} = \begin{bmatrix} \widehat{f}_{m-\mu+1}^{[j,\ell;q]} \\ \vdots \\ \widehat{f}_m^{[j,\ell;q]} \end{bmatrix}, \quad \widehat{\mathcal{F}}_m^{[j;q]} = \begin{bmatrix} \widehat{\mathcal{F}}_m^{[j,1;q]} \\ \vdots \\ \widehat{\mathcal{F}}_m^{[j,n_j;q]} \end{bmatrix} \text{ et } \widehat{\mathcal{F}}_m^{[;q]} = \begin{bmatrix} \widehat{\mathcal{F}}_m^{[1;q]} \\ \vdots \\ \widehat{\mathcal{F}}_m^{[J;q]} \end{bmatrix}$$

nous voyons que le vecteur colonne

$$\widehat{\mathcal{F}}_m = \begin{bmatrix} \widehat{\mathcal{F}}_m^{[;1]} \\ \vdots \\ \widehat{\mathcal{F}}_m^{[;n_1]} \end{bmatrix}$$

de dimension $n_1 n \mu$ vérifie pour tout $m \geq \mu + 1$ une égalité du type

$$\widehat{\mathcal{F}}_{m+1} = (m - \mu) C_m \widehat{\mathcal{F}}_m$$

où C_m est un élément de $M_{n_1 n \mu}(\mathbb{C}(m))$ qui n'admet pour pôles aucun entier supérieur à $\mu + 1$ et où la suite matricielle $(C_m)_{m \geq \mu+1}$ converge vers une matrice constante C_∞ diagonalisable et de rayon spectral $\rho_0 = \max_{a_j \neq 0} \frac{1}{|a_j|}$. Précisément,

$$C_\infty = I_{n_1} \otimes \text{diag}(C_{\infty,1}, \dots, C_{\infty,J})$$

où, pour tout $j \in \{1, \dots, J\}$, la matrice $C_{\infty,j} \in M_{n_j\mu}(\mathbb{C})$ est définie par

$$C_{\infty,j} = \text{diag}(C_{\infty,j,1}, \dots, C_{\infty,j,n_j})$$

avec $C_{\infty,j,\ell} \in M_\mu(\mathbb{C})$ et

$$C_{\infty,j,\ell} = \begin{cases} 0I_\mu & \text{si } a_j = 0 \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{P_{j,\ell,p_{j,\ell}}}{a_j} & \cdots & \frac{P_{j,\ell,1}}{a_j} & \frac{1}{a_j} \end{bmatrix} & \text{si } a_j \neq 0 \end{cases}$$

Ainsi, en remplaçant $n\mu$ par $n_1n\mu$, nous voyons que le résultat de la proposition 3.8 et l'algorithme 3.9 restent valables. Par suite, le théorème 3.10 permet de contrôler l'erreur dans le calcul de $\tilde{\mathcal{F}}(\alpha)$.

3.2.3 Exemple

Dans cet exemple, la série \tilde{f} admet une unique singularité et la matrice des exposants de monodromie formelle L admet un bloc de Jordan de dimension 2..

Nous considérons le système différentiel linéaire

$$x^2 \frac{dY}{dx} = \begin{bmatrix} 0 & x^3 & -2x^3 \\ \frac{x^2}{1-2x} & 1 + \frac{x}{x^3} & x \\ \frac{2x^3 - x^2}{1+x} & -\frac{x^3}{1+x} & 1 + \frac{x}{3} + \frac{x^3}{1+x} \end{bmatrix} Y$$

et la solution fondamentale $\hat{Y}(x) = \hat{F}(x)x^L e^{Q(\frac{1}{x})}$ avec $\hat{F}(x) = I_3 + O(x^2)$,

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \text{ et } Q\left(\frac{1}{x}\right) = \text{diag}\left(0, -\frac{1}{x}, -\frac{1}{x}\right)$$

Avec nos notations, nous avons $n_1 = 1$ et $n_2 = 2$. Les directions anti-Stokes de \hat{Y} sont \mathbb{R}^+ et \mathbb{R}^- , et les matrices de Stokes associées sont

$$C_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ c_0^{[2,1]} & 0 & 0 \\ c_0^{[2,2]} & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } C_{-\pi} = \begin{bmatrix} 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Nous cherchons une valeur approchée de $c_0^{[2]} = \begin{bmatrix} c_0^{[2,1]} \\ c_0^{[2,2]} \\ c_0 \end{bmatrix}$

Nous avons $\mu = 3$ et \tilde{f} a une unique singularité en 1 qui est une singularité ramifiée d'exposant de ramification $\frac{1}{3}$ avec degré logarithmique 1 :

$$\tau_1 \tilde{f}(\xi) = \tilde{H}_{1, \frac{1}{3}, 0}(\xi) \xi^{-\frac{2}{3}} + \tilde{H}_{1, \frac{1}{3}, 1}(\xi) \xi^{-\frac{2}{3}} \log \xi + Hol_1(\xi)$$

avec $\tilde{H}_{1, \frac{1}{3}, 0}(\xi)$, $\tilde{H}_{1, \frac{1}{3}, 1}(\xi)$ et $Hol_1(\xi)$ analytiques à l'origine.

3.2.3.1 Détermination de $[S_1]$ et $Z_1(\xi - 1)$

Les séries $\hat{f}^{[j]}$ vérifiant les équations

$$(3.16) \quad \begin{cases} x^2 \frac{d\hat{f}^{[1]}}{dx} = x^3 \hat{f}^{[2]} - 2x^3 \hat{f}^{[3]} \\ x^2 \frac{d\hat{f}^{[2]}}{dx} - \left(1 + \frac{x}{3}\right) \hat{f}^{[2]} - x \hat{f}^{[3]} = \frac{x^2}{1-2x} \hat{f}^{[1]} \\ x^2 \frac{d\hat{f}^{[3]}}{dx} - \left(1 + \frac{x}{3}\right) \hat{f}^{[3]} = \frac{2x^3 - x^2}{1+x} \hat{f}^{[1]} - \frac{x^3}{1+x} \hat{f}^{[2]} + \frac{x^3}{1+x} \hat{f}^{[3]} \end{cases}$$

leurs transformées de Borel satisfont à

$$\begin{cases} \xi \tilde{f}^{[1]'''} + 3\tilde{f}^{[1]''} = \tilde{f}^{[2]} - 2\tilde{f}^{[3]} \\ (\xi - 1)\tilde{f}^{[2]'''} + \left(\frac{8}{3} - 2(\xi - 1)\right) \tilde{f}^{[2]''} - \frac{10}{3}\tilde{f}^{[2]'} - \tilde{f}^{[3]''} + 2\tilde{f}^{[3]'} = \tilde{f}^{[1]'} \\ (\xi - 1)\tilde{f}^{[3]'''} + \left(\frac{8}{3} + (\xi - 1)\right) \tilde{f}^{[3]''} + \frac{5}{3}\tilde{f}^{[3]'} = 2\tilde{f}^{[1]} - \tilde{f}^{[1]'} - \tilde{f}^{[2]} + \tilde{f}^{[3]} \end{cases}$$

Ainsi, $\tilde{\mathcal{F}} = \begin{bmatrix} \tilde{f} \\ \tilde{f}' \\ \tilde{f}'' \end{bmatrix}$ est solution du système

$$\frac{dZ}{d\xi} = C(\xi)Z$$

avec

$$C(\xi) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{\xi} & -\frac{2}{\xi} & 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{\xi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\xi-1} & \frac{10}{3(\xi-1)} & -\frac{2}{\xi-1} & 0 & -\frac{8}{3(\xi-1)} + 2 & \frac{1}{\xi-1} \\ \frac{2}{\xi-1} & -\frac{1}{\xi-1} & \frac{1}{\xi-1} & -\frac{1}{\xi-1} & 0 & -\frac{1}{3(\xi-1)} & 0 & 0 & -\frac{1}{3(\xi-1)} - 1 \end{bmatrix}$$

Le point $\xi = 1$ est un point singulier régulier et le système $[S_1]$ cherché est alors

$$(\xi-1)\frac{dZ}{d\xi} = C_1(\xi-1)Z \text{ avec } C_1(\xi) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \xi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \xi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi \\ 0 & \frac{\xi}{\xi+1} & -\frac{2\xi}{\xi+1} & 0 & 0 & 0 & -\frac{3\xi}{\xi+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{10}{3} & -2 & 0 & -\frac{8}{3} + 2\xi & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 & 0 & -\frac{5}{3} & 0 & 0 & -\frac{8}{3} - \xi \end{bmatrix}$$

Les valeurs propres de la matrice de tête $C_1(0)$ de $C_1(\xi)$ étant 0 et $-\frac{8}{3}$, elles ne diffèrent pas d'un entier. Considérons alors la matrice

$$D_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{9}{32} & -\frac{9}{64} & \frac{9}{64} & \frac{15}{64} & \frac{5}{4} & -\frac{63}{64} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{3}{4} & -\frac{3}{8} & \frac{3}{8} & -\frac{3}{8} & 0 & -\frac{5}{8} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

et procédons à la transformation de jauge constante $Z \mapsto D_1^{-1}Z$. Le nouveau système s'écrit

$$(\xi-1)\frac{dZ}{d\xi} = D_1^{-1}C_1(\xi-1)D_1Z$$

avec

$$D_1^{-1}C_1(\xi)D_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \xi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \xi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi & 0 & 0 \\ \frac{9\xi}{32} & -\frac{9\xi}{64} & \frac{9\xi}{64} & \frac{15\xi}{64} & \frac{5\xi}{4} & -\frac{63\xi}{64} & 0 & \xi & 0 \\ \frac{3\xi}{4} & -\frac{3\xi}{8} & \frac{3\xi}{8} & -\frac{3\xi}{8} & 0 & -\frac{5\xi}{8} & 0 & 0 & \xi \\ 0 & \frac{\xi}{8} & -\frac{2\xi}{8} & 0 & 0 & 0 & -\frac{3\xi}{8} & 0 & 0 \\ \frac{243\xi}{256} & -\frac{243\xi}{512} & \frac{243\xi}{512} & -\frac{243\xi}{512} & \frac{69\xi}{64} & -\frac{765\xi}{712} & -\frac{\xi+1}{64} & -\frac{8}{3} + \frac{3\xi}{4} & 1 + \frac{63\xi}{64} \\ -\frac{9\xi}{32} & \frac{9\xi}{64} & -\frac{9\xi}{64} & -\frac{39\xi}{64} & \frac{3\xi}{8} & -\frac{9\xi}{64} & \frac{3\xi}{8} & 0 & -\frac{8}{3} - \frac{3\xi}{8} \end{bmatrix}$$

Nous considérons alors la solution fondamentale $Z_1(\xi - 1)$ de $[S_1]$ suivante :

$$Z_1(\xi - 1) = D_1 G_1(\xi - 1)(\xi - 1)^{M_1} \text{ où } M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{8}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{8}{3} \end{bmatrix}$$

est la matrice de tête de $D_1^{-1}C_1(\xi)D_1$ et où $G_1(\xi - 1)$ est analytique sur le disque $\mathcal{D}_1 = D(1, 1)$ avec $G_1(0) = I_9$. En particulier, les sept premières colonnes de Z_1 sont analytiques en 1 et les deux dernières colonnes de $Z_1(\xi - 1)$ s'écrivent sous la forme

$$H(\xi - 1) + \tilde{h}_{1, \frac{1}{3}, 0}(\xi - 1)(\xi - 1)^{-\frac{2}{3}} + \tilde{h}_{1, \frac{1}{3}, 1}(\xi - 1)(\xi - 1)^{-\frac{2}{3}} \log(\xi - 1) + Hol_1(\xi - 1)$$

avec

$$H(\xi) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{9}{10}\xi^{-\frac{2}{3}} & \frac{189}{100}\xi^{-\frac{2}{3}} + \frac{9}{10}\xi^{-\frac{2}{3}} \log \xi \\ 0 & \frac{9}{10}\xi^{-\frac{2}{3}} \\ 0 & 0 \\ -\frac{3}{5}\xi^{-\frac{5}{3}} & -\frac{9}{25}\xi^{-\frac{5}{3}} - \frac{3}{5}\xi^{-\frac{5}{3}} \log \xi \\ 0 & -\frac{3}{5}\xi^{-\frac{5}{3}} \\ 0 & 0 \\ \xi^{-\frac{8}{3}} - \frac{9}{40}\xi^{-\frac{2}{3}} & -\frac{9}{400}\xi^{-\frac{2}{3}} + (\xi^{-\frac{8}{3}} - \frac{9}{40}\xi^{-\frac{2}{3}}) \log \xi \\ -\frac{9}{20}\xi^{-\frac{2}{3}} & \xi^{-\frac{8}{3}} - \frac{27}{100}\xi^{-\frac{2}{3}} - \frac{9}{20}\xi^{-\frac{2}{3}} \log \xi \end{bmatrix}$$

et $\tilde{h}_{1, \frac{1}{3}, 0}(\xi) = O(\xi)$, $\tilde{h}_{1, \frac{1}{3}, 1}(\xi) = O(\xi)$ et $Hol_1(\xi) = O(1)$.

Ainsi, en notant \mathfrak{S}_1 la matrice de connexion entre 0 et 1 obtenue à l'aide du prolongement analytique de $\tilde{\mathcal{F}}$ à droite de 1 :

$$\tilde{\mathcal{F}}(\xi) = Z_1(\xi - 1)\mathfrak{S}_1$$

nous obtenons, en interprétant les relations du théorème 2.31, l'égalité suivante :

$$c_0^{[2]} = \kappa_0 \left(\frac{1}{3}\right) \begin{bmatrix} \frac{9}{10}\sigma_{1,8} + \frac{189}{100}\sigma_{1,9} \\ \frac{9}{10}\sigma_{1,9} \end{bmatrix} + \kappa_1 \left(\frac{1}{3}\right) \begin{bmatrix} \frac{9}{10}\sigma_{1,9} \\ 0 \end{bmatrix}$$

où les nombres $\kappa_0 \left(\frac{1}{3}\right)$ et $\kappa_1 \left(\frac{1}{3}\right)$ sont donnés par

$$\kappa_0 \left(\frac{1}{3}\right) = 2i\pi \frac{e^{-\frac{i\pi}{3}}}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} = \frac{\pi(\sqrt{3} + i)}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}$$

et

$$\begin{aligned} \kappa_1 \left(\frac{1}{3}\right) &= 2i\pi \frac{d}{dz} \left(\frac{e^{-i\pi z}}{\Gamma(1-z)} \right) \Big|_{z=\frac{1}{3}} \\ &= -\frac{\pi}{6\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} \left(-9\pi + 6\gamma\sqrt{3} + 9\sqrt{3}\log 3 + 6i\gamma + 5i\pi\sqrt{3} + 9i\log 3 \right) \end{aligned}$$

Nous choisissons d'évaluer $\tilde{\mathcal{F}}(\xi)$ et $Z_1(\xi - 1)$ en $\alpha = \frac{9}{10}$.

3.2.3.2 Approximation de $\tilde{\mathcal{F}}(\alpha)$

Nous prenons $\varepsilon = \frac{1}{19}$. En appliquant une transformation de Mellin aux équations (3.16) et en notant

$$\hat{\mathcal{F}}_m = \begin{bmatrix} \hat{\mathcal{F}}_m^{[1]} \\ \hat{\mathcal{F}}_m^{[2]} \\ \hat{\mathcal{F}}_m^{[3]} \end{bmatrix} \text{ avec } \hat{\mathcal{F}}_m^{[j]} = \begin{bmatrix} \hat{f}_{m-2}^{[j]} \\ \hat{f}_{m-1}^{[j]} \\ \hat{f}_m^{[j]} \end{bmatrix}$$

nous obtenons pour tout $m \geq 4$ l'égalité

$$\hat{\mathcal{F}}_{m+1} = (m-3)C_m\hat{\mathcal{F}}_m$$

avec

$$C_m = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{m-3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{m-3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{(m+1)(m-3)} & 0 & 0 & -\frac{2}{(m+1)(m-3)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{m-3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{m-3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{m-3} & 0 & 0 & \frac{-6m+8}{3(m-3)} & \frac{3m+5}{3(m-3)} & 0 & \frac{2}{m-3} & -\frac{1}{m-3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{m-3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{m-3} \\ -\frac{2}{m-3} & \frac{1}{m-3} & 0 & \frac{1}{m-3} & 0 & 0 & -\frac{1}{m-3} & \frac{3m-4}{3(m-3)} & \frac{3m-4}{3(m-3)} \end{bmatrix}$$

La matrice limite étant

$$C_\infty = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

nous prenons comme matrice de diagonalisation de C_∞ la matrice

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Le calcul de $E_m = U^{-1}(C_\infty - C_m)U$ donne alors $M = \frac{\sqrt{10895}}{15}$, puis $m_0 = 136$ et

$$K = 3W \text{ avec } W = (3 + 2\sqrt{2}) \frac{25\sqrt{330185}}{729} \left(1 + \frac{\sqrt{10895}}{15}\right)^{132} \left(\frac{19}{20}\right)^{134}$$

Ainsi, la somme partielle $\tilde{\mathcal{F}}_{[5517]}(\alpha)$ de $\tilde{\mathcal{F}}(\alpha)$ vérifie

$$\left\| \tilde{\mathcal{F}}(\alpha) - \tilde{\mathcal{F}}_{[5517]}(\alpha) \right\| \leq 10^{-10}$$

Finalement, la matrice

$$\check{\mathcal{F}} = \begin{bmatrix} -\frac{157091133}{1250000000} \\ -\frac{21369320151}{1250000000} \\ -\frac{1288246147}{1000000000} \\ -\frac{2593452861}{5000000000} \\ -\frac{1612083797527}{10000000000} \\ -\frac{209800894493}{10000000000} \\ -\frac{1227732961}{625000000} \\ -\frac{25959909731567}{10000000000} \\ -\frac{963301772839}{2500000000} \end{bmatrix}$$

satisfaisant à $\left| \tilde{\mathcal{F}}_{[5517]}(\alpha) - \check{\mathcal{F}} \right| \leq 10^{-10}$, nous avons $\left\| \tilde{\mathcal{F}}(\alpha) - \check{\mathcal{F}} \right\| \leq 4 \times 10^{-10}$.

3.2.3.3 Approximation de $G_1(\alpha - 1)$ et $Z_1(\alpha - 1)$

La série $G_1(\xi - 1)$ est l'unique solution analytique sur \mathcal{D}_1 vérifiant $G_1(0) = I_9$ de l'équation

$$(\xi - 1)G_1' = D_1^{-1}C_1(\xi - 1)D_1G_1 - G_1M_1$$

la matrice $D_1^{-1}C_1(\xi)D_1$ étant donnée précédemment. Nous reprenons les calculs du paragraphe 3.1.6 : vu la matrice M_1 , il faut déterminer huit systèmes du type (3.12) : sept sont associés à chacune des sept premières colonnes de G_1 et sont de dimension 18 ; et le huitième, de dimension 36, correspond à l'étude simultanée des deux dernières colonnes de G_1 . Dans tous les cas, la valeur choisie pour α nous permet de prendre $\varepsilon = 8.5$ et donc $\chi = 1$ et $U = \hat{U}$. Nous obtenons ainsi

$$\left\| G_1(\alpha - 1) - G_{1,[1764]}(\alpha - 1) \right\| \leq 10^{-11}$$

puis $\left\| G_1(\alpha - 1) - \check{G}_1 \right\| \leq 10^{-10}$, la matrice \check{G}_1 étant définie par

$$\hat{G}_1 = \begin{bmatrix} \frac{12500001429}{12500000000} & \frac{-4631059}{25000000000} & \frac{7408551}{20000000000} & \frac{-10000009253}{100000000000} & \frac{90347}{20000000000} & \frac{-185749}{20000000000} & \frac{138888919}{25000000000} & \frac{-964793}{100000000000} & \frac{3934911}{100000000000} \\ \frac{143152303}{100000000000} & \frac{49964247683}{50000000000} & \frac{14286623}{20000000000} & \frac{104653281}{100000000000} & \frac{-376116663}{4000000000} & \frac{-478045533}{100000000000} & \frac{-1644589}{50000000000} & \frac{447421953}{50000000000} & \frac{1908825139}{100000000000} \\ \frac{76863129}{20000000000} & \frac{-96129097}{50000000000} & \frac{50096179283}{50000000000} & \frac{-201464141}{100000000000} & \frac{452733}{100000000000} & \frac{-10324836359}{100000000000} & \frac{5119607}{100000000000} & \frac{-10429929}{100000000000} & \frac{932944909}{100000000000} \\ \frac{-58581}{10000000000} & \frac{144106173}{25000000000} & \frac{-1152556479}{100000000000} & \frac{10000047439}{100000000000} & \frac{-18462497}{100000000000} & \frac{19106783}{50000000000} & \frac{-2932100623}{25000000000} & \frac{5898519}{25000000000} & \frac{-8657917}{10000000000} \\ \frac{-1444402969}{50000000000} & \frac{180190749}{12500000000} & \frac{-179831127}{12500000000} & \frac{-394071957}{20000000000} & \frac{44163204091}{50000000000} & \frac{942659343}{100000000000} & \frac{24651101}{25000000000} & \frac{121393109}{2000000000} & \frac{3397229279}{100000000000} \\ \frac{-7781760861}{100000000000} & \frac{3895014679}{100000000000} & \frac{-3899148927}{100000000000} & \frac{4172258483}{100000000000} & \frac{-33920517}{25000000000} & \frac{3331948069}{3125000000} & \frac{-15974043}{10000000000} & \frac{142282103}{10000000000} & \frac{5653832889}{100000000000} \\ \frac{24316317}{100000000000} & \frac{-12403568087}{100000000000} & \frac{774843063}{3125000000} & \frac{-1970581}{100000000000} & \frac{143617139}{25000000000} & \frac{-300507211}{25000000000} & \frac{137174596929}{100000000000} & \frac{-353171431}{100000000000} & \frac{266232021}{25000000000} \\ \frac{-1268605321}{50000000000} & \frac{24673019}{2000000000} & \frac{-1198696579}{10000000000} & \frac{257594289}{12500000000} & \frac{-184516893}{6250000000} & \frac{521916031}{12500000000} & \frac{21226423}{6250000000} & \frac{46211123273}{50000000000} & \frac{760269239}{50000000000} \\ \frac{154703389}{20000000000} & \frac{-142175481}{50000000000} & \frac{45485863}{25000000000} & \frac{164294347}{10000000000} & \frac{-182165709}{20000000000} & \frac{61571357}{20000000000} & \frac{-367033251}{25000000000} & \frac{-114915357}{100000000000} & \frac{20767850251}{20000000000} \end{bmatrix}$$

et vérifiant $|G_{1,[1764]}(\alpha - 1) - \check{G}_1| \leq 10^{-11}$.

Finalement, $\check{Z}_1 = D_1 \check{G}_1(\alpha - 1)^{M_1}$ est une approximation de $Z_1(\alpha - 1)$ et nous avons

$$\|Z_1(\alpha - 1) - \check{Z}_1\| \leq 4.26 \times 10^{-7}$$

3.2.3.4 Approximation de \mathfrak{S}_1 et des multiplicateurs de Stokes $c_0^{[2,1]}$ et $c_0^{[2,2]}$

La matrice \check{Z}_1 étant inversible avec $s_{\check{Z}_1, \min} \approx 0.78$, l'unique matrice $\check{\mathfrak{S}}_1$ définie par $\check{\mathcal{F}} = \check{Z}_1 \check{\mathfrak{S}}_1$ vérifie

$$\|\mathfrak{S}_1 - \check{\mathfrak{S}}_1\| \leq 1.16 \times 10^{-5}$$

Une valeur approchée $\check{c}_0^{[2,1]}$ de $c_0^{[2,1]}$ et une valeur approchée $\check{c}_0^{[2,2]}$ de $c_0^{[2,2]}$ sont alors données par

$$\begin{cases} \check{c}_0^{[2,1]} = \kappa_0 \left(\frac{1}{3}\right) \times \left(\frac{9}{10} \check{\sigma}_{1,8} + \frac{189}{100} \check{\sigma}_{1,9}\right) + \frac{9}{10} \kappa_1 \left(\frac{1}{3}\right) \times \check{\sigma}_{1,9} \\ \check{c}_0^{[2,2]} = \frac{9}{10} \kappa_0 \left(\frac{1}{3}\right) \times \check{\sigma}_{1,9} \end{cases}$$

et nous avons $|c_0^{[2,1]} - \check{c}_0^{[2,1]}| \leq 1.74 \times 10^{-4}$ et $|c_0^{[2,2]} - \check{c}_0^{[2,2]}| \leq 4.9 \times 10^{-5}$. Noter que les parties réelles de $\check{c}_0^{[2,1]}$ et $\check{c}_0^{[2,2]}$ étant nulles, nous pouvons penser que les parties réelles de $c_0^{[2,1]}$ et $c_0^{[2,2]}$ sont également nulles. Pour les parties imaginaires de $c_0^{[2,1]}$ et $c_0^{[2,2]}$, nous obtenons les inégalités ci-dessous en prenant une valeur approchée des parties imaginaires de $\check{c}_0^{[2,1]}$ et $\check{c}_0^{[2,2]}$ à 10^{-7} près :

$$\boxed{\begin{cases} \left| \operatorname{Im} \left(c_0^{[2,1]} \right) - 34.3591873 \right| \leq 1.8 \times 10^{-4} \\ \left| \operatorname{Im} \left(c_0^{[2,2]} \right) - 3.5296998 \right| \leq 5 \times 10^{-5} \end{cases}}$$

Par suite, les deux multiplicateurs de Stokes $c_0^{[2,1]}$ et $c_0^{[2,2]}$ sont non nuls et les trois premières décimales de 34.3591873 et 3.5296998 sont exactes.

Deuxième partie

Systemes de niveau unique $r \geq 2$

Introduction

Tout système de niveau unique $r \geq 2$ est méromorphiquement équivalent (cf. paragraphe 1.3.3) à un système différentiel linéaire à coefficients méromorphes à l'origine

$$[A] \quad x^{r+1} \frac{dY}{dx} = A(x)Y \text{ avec } A(x) \in M_n(\mathbb{C}\{x\})$$

dont une solution fondamentale formelle $\widehat{Y}(x) = \widehat{F}(x)x^L e^{Q(\frac{1}{x})}$ est normalisée de sorte que

- ★ $\widehat{F}(x) = I_n + O(x^{2r}) \in M_n(\mathbb{C}[[x]])$;
- ★ $L = \bigoplus_{j=1}^J L_j$, où chaque L_j est un bloc de Jordan de L de dimension $n_j \geq 1$ et de valeur propre λ_j vérifiant $\lambda_1 = 0$ et $\text{Re}(\lambda_j) \in [0, 1[$ pour tout $j \in \{1, \dots, J\}$;
- ★ $Q(\frac{1}{x}) = \bigoplus_{j=1}^J q_j (\frac{1}{x}) I_{n_j}$ avec

$$q_j \left(\frac{1}{x} \right) = -\frac{a_{j,r}}{x^r} - \frac{a_{j,r-1}}{x^{r-1}} - \dots - \frac{a_{j,1}}{x} \in x^{-1}\mathbb{C}[x^{-1}]$$

de sorte que $q_1 = 0$ et $a_{j,r} = a_{\ell,r} \Leftrightarrow q_j = q_\ell$.

Ainsi, l'étude du phénomène de Stokes des systèmes de niveau unique $r \geq 2$ se réduit, sans perte de généralité, à celle des systèmes du type [A]. En particulier, il suffit de savoir déterminer les multiplicateurs de Stokes associés à une solution fondamentale formelle \widehat{Y} normalisée comme ci-dessus.

Aussi, **nous fixons désormais dans cette deuxième partie** un tel système [A] et une telle solution fondamentale formelle $\widehat{Y}(x)$.

Nous pourrions envisager de généraliser directement à ce type de systèmes les calculs effectués précédemment pour les systèmes de niveau unique 1. Dans ce cas, la série \widehat{F} étant de type Gevrey de niveau r , nous n'étudions plus sa transformée de Borel \widetilde{F} (celle-ci est holomorphe sur \mathbb{C} tout entier et nous avons "caché" toutes ses singularités à l'infini), mais sa transformée de Borel $\mathcal{B}_r(\widehat{F})$ de niveau r . Malheureusement, l'utilisation d'une telle transformation de Borel introduisant des ramifications, les calculs deviennent rapidement très complexes et ne permettent pas d'aboutir à un résultat satisfaisant. En particulier, nous n'arrivons pas à établir de formules liant les multiplicateurs de Stokes de $\widehat{Y}(x)$ et le comportement de $\mathcal{B}_r(\widehat{F})$ au voisinage de ses singularités.

Aussi, au lieu d'étudier directement le système [A], nous considérons plutôt son système r -réduit [A] obtenu par la méthode de réduction du rang ([L-R01], [Lu72], [Tu63]).

Les multiplicateurs de Stokes de $\widehat{Y}(x)$ s'obtiennent alors en étudiant le comportement de la transformée de Borel $\widetilde{\mathbf{F}}$ de la *série r -réduite* $\widehat{\mathbf{F}}$ (voir définition ci-dessous) de \widehat{F} au voisinage de ses singularités (la série $\widehat{\mathbf{F}}$ est par construction de type Gevrey de niveau 1) (chapitre 4). Nous montrons en particulier que ces singularités ne sont pas en général de la classe de Nilsson : il est nécessaire de convoler les éléments de cette classe par des majeurs d'exponentielles ramifiées.

Définition Etant donné une série

$$\widehat{\varphi}(x) = \sum_{m \geq 0} \varphi_m x^m \in M_n(\mathbb{C}[[x]])$$

on appelle *série r -réduite* de $\widehat{\varphi}(x)$ la série $\widehat{\varphi}(t)$ définie pour un choix donné $x = t^{1/r}$ d'une racine $r^{\text{ème}}$ de t par

$$\widehat{\varphi}(t) = \begin{bmatrix} \widehat{\varphi}^0(t) & t\widehat{\varphi}^{r-1}(t) & \cdots & \cdots & t\widehat{\varphi}^1(t) \\ \widehat{\varphi}^1(t) & \widehat{\varphi}^0(t) & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \widehat{\varphi}^0(t) & t\widehat{\varphi}^{r-1}(t) \\ \widehat{\varphi}^{r-1}(t) & \cdots & \cdots & \widehat{\varphi}^1(t) & \widehat{\varphi}^0(t) \end{bmatrix}$$

où, pour $\ell \in \{0, \dots, r-1\}$, on a noté

$$\widehat{\varphi}^\ell(t) = \sum_{m \geq 0} \varphi_{\ell+mr} t^m$$

la $(\ell+1)^{\text{ème}}$ sous-série des termes de r en r de $\widehat{\varphi}(t)$ définie à partir de $\widehat{\varphi}^\ell(0) = \varphi_\ell$.

Dans le chapitre 5, nous montrons que la méthode de calcul effectif donnée dans le cadre des systèmes de niveau unique 1 peut être étendue aux systèmes de niveau unique quelconque dans le cas où la matrice $A(x)$ est à coefficients rationnels. Nous illustrons ce résultat par deux exemples.

Noter que, comme pour les systèmes de niveau unique 1, il suffit de s'intéresser à la matrice $\widehat{\mathbf{f}}$ formée des n_1 premières colonnes de $\widehat{\mathbf{F}}$. Nous obtenons ainsi tous les multiplicateurs de Stokes situés dans les n_1 premières colonnes des matrices de Stokes.

Chapitre 4

Etude théorique

Nous considérons dans ce chapitre un système différentiel linéaire à coefficients méromorphes à l'origine

$$[A] \quad x^{r+1} \frac{dY}{dx} = A(x)Y \text{ avec } A(x) \in M_n(\mathbb{C}\{x\})$$

dont la solution fondamentale formelle $\widehat{Y}(x) = \widehat{F}(x)x^L e^{Q(\frac{1}{x})}$ est normalisée de sorte que

- ★ $\widehat{F}(x) = I_n + O(x^{2r}) \in M_n(\mathbb{C}[[x]])$;
- ★ $L = \bigoplus_{j=1}^J L_j$, où chaque L_j est un bloc de Jordan de L de dimension $n_j \geq 1$ et de valeur propre λ_j vérifiant $\lambda_1 = 0$ et $\text{Re}(\lambda_j) \in [0, 1[$ pour tout $j \in \{1, \dots, J\}$;
- ★ $Q(\frac{1}{x}) = \bigoplus_{j=1}^J q_j(\frac{1}{x}) I_{n_j}$ avec

$$q_j \left(\frac{1}{x} \right) = -\frac{a_{j,r}}{x^r} - \frac{a_{j,r-1}}{x^{r-1}} - \dots - \frac{a_{j,1}}{x} \in x^{-1}\mathbb{C}[x^{-1}]$$

de sorte que $q_1 = 0$ et $a_{j,r} = a_{\ell,r} \Leftrightarrow q_j = q_\ell$.

Rappelons que tout système de niveau unique $r \geq 2$ est méromorphiquement équivalent à un système $[A]$ de ce type.

Avec ces normalisations, la matrice $A(x)$ s'écrit sous la forme

$$A(x) = A_0(x) + B(x)$$

où $A_0(x)$ est définie par

$$A_0(x) = x^{r+1} \frac{d(Q(\frac{1}{x}))}{dx} + x^r L = \sum_{k=1}^r kx^{r-k} a_k + x^r L$$

avec, pour tout $k \in \{1, \dots, r\}$,

$$a_k = \text{diag}(a_{1,k} I_{n_1}, \dots, a_{J,k} I_{n_J})$$

et où $B(x)$ est un élément de $M_n(x^{2r}\mathbb{C}\{x\})$. Précisément, si B est découpée comme la matrice L :

$$B = [B^{(j,\ell)}]_{1 \leq j, \ell \leq J} \text{ avec } B^{(j,\ell)} \text{ est de dimension } n_j \times n_\ell$$

alors

$$B^{(j,\ell)}(x) = \begin{cases} O(x^{3r}) & \text{si } a_{j,r} - a_{\ell,r} = 0 \\ O(x^{2r}) & \text{si } a_{j,r} - a_{\ell,r} \neq 0 \end{cases}$$

Commençons par déterminer le système r -réduit $[\mathbf{A}]$ de $[A]$.

4.1 Système r -réduit $[\mathbf{A}]$ associé à $[A]$

4.1.1 Rappels sur la réduction du rang

Nous rappelons ici les résultats principaux sur la réduction du rang tels qu'on peut les trouver dans [L-R01]. Pour plus de détails, nous renvoyons à cet article et aux références qui y sont citées, en particulier [BJL82-2], [Lu72] et [Tu63].

L'idée générale de la réduction du rang d'un système est simple : si un système est de rang de Poincaré $r \geq 2$ en la variable x , il est de rang de Poincaré 1 en la variable $t = x^r$. Cette idée a été utilisée par certains auteurs –notamment H. Poincaré dans [P86] et G. D. Birkhoff dans [Bir09]– pour représenter certaines solutions de systèmes de rang r comme intégrales de Laplace. Malheureusement, une simple substitution de t à x^r fait apparaître des puissances fractionnaires de t . Ainsi, afin de rester dans le cadre des systèmes à coefficients méromorphes, il est nécessaire de saturer l'effet de ce changement de variable par l'action du groupe de Galois \mathcal{S}_r de l'équation $x^r = t$: la dimension du nouveau système est alors multipliée par r .

Système r -réduit

Etant donné un système différentiel linéaire $[a]$ de dimension n à coefficients méromorphes de la forme

$$x^{r+1} \frac{dY}{dx} = a(x)Y \text{ avec } a(x) = \sum_{m \geq 0} \alpha_m x^m$$

et de solution fondamentale $Y(x)$, on appelle *système r -réduit* de $[a]$ l'unique système $[\mathbf{a}]$ de la variable $t = x^r$, méromorphe à l'origine et admettant les solutions

$$\begin{bmatrix} Y(x) \\ x^{-1}Y(x) \\ \vdots \\ x^{-(r-1)}Y(x) \end{bmatrix}$$

pour un choix donné $x = t^{1/r}$ d'une racine $r^{\text{ème}}$ de t . En particulier, en posant $\rho = e^{\frac{2i\pi}{r}}$, ce système admet pour solution fondamentale

$$\mathbf{Y}(t) = \begin{bmatrix} Y(t^{1/r}) & Y(\rho t^{1/r}) & \dots & Y(\rho^{r-1} t^{1/r}) \\ (t^{1/r})^{-1} Y(t^{1/r}) & (\rho t^{1/r})^{-1} Y(\rho t^{1/r}) & \dots & (\rho^{r-1} t^{1/r})^{-1} Y(\rho^{r-1} t^{1/r}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (t^{1/r})^{-(r-1)} Y(t^{1/r}) & (\rho t^{1/r})^{-(r-1)} Y(\rho t^{1/r}) & \dots & (\rho^{r-1} t^{1/r})^{-(r-1)} Y(\rho^{r-1} t^{1/r}) \end{bmatrix}$$

Le système $[a]$ est de dimension rn et s'écrit

$$rt^2 \frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \left(\mathbf{a}(t) - \bigoplus_{k=0}^{r-1} ktI_n \right) \mathbf{Y}$$

avec

$$\mathbf{a}(t) = \begin{bmatrix} a^0(t) & ta^{r-1}(t) & \cdots & \cdots & ta^1(t) \\ a^1(t) & a^0(t) & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & a^0(t) & ta^{r-1}(t) \\ a^{r-1}(t) & \cdots & \cdots & a^1(t) & a^0(t) \end{bmatrix}$$

où, pour $\ell \in \{0, \dots, r-1\}$, on a noté

$$a^\ell(t) = \sum_{m \geq 0} \alpha_{\ell+mr} t^m$$

la $(\ell+1)$ ^{ème} sous-série des termes de r en r de $a(t)$ définie à partir de $a^\ell(0) = \alpha_\ell$.

Solution fondamentale formelle r -réduite

A une solution fondamentale formelle de $[a]$ de la forme $\widehat{Y}(x) = \widehat{\Phi}(x)x^M e^{P(\frac{1}{x})}$, avec $\widehat{\Phi}(x) \in M_n(\mathbb{C}[[x]])$, correspond une unique solution fondamentale formelle $\widehat{Y}(t)$ de $[a]$ appelée *solution fondamentale formelle r -réduite associée à $\widehat{Y}(x)$* . Précisément, on a

$$\widehat{Y}(t) = \widehat{\Phi}(t) \widehat{Y}_0(t)$$

où $\widehat{\Phi}(t)$ est la série r -réduite de $\widehat{\Phi}(x)$ et

$$\widehat{Y}_0(t) = t^{\bigoplus_{k=0}^{r-1} \frac{M-k}{r} I_n} U_{r,n}(\bar{\rho}) \left(\bigoplus_{k=0}^{r-1} \rho^{kM} \right) e^{\bigoplus_{k=0}^{r-1} P\left(\frac{1}{\rho^{k+1}/r}\right)}$$

la matrice $U_{r,n}(\bar{\rho})$ désignant le produit tensoriel $\mathcal{V}(1, \bar{\rho}, \dots, \bar{\rho}^{r-1}) \otimes I_n$ de la matrice de van der Monde construite sur $1, \bar{\rho}, \dots, \bar{\rho}^{r-1}$ par la matrice identité I_n ($\bar{\rho}$ est le conjugué de ρ dans \mathbb{C}).

De plus, si on note $[a_0]$ la forme normale de $[a]$ de solution fondamentale formelle $\widehat{Y}_0(x) = x^M e^{P(\frac{1}{x})}$, alors $\widehat{Y}_0(t)$ est la solution fondamentale formelle r -réduite de $[a_0]$ associée à $\widehat{Y}_0(x)$.

4.1.2 Système r -réduit $[A]$

Suivant le rappel précédent sur la réduction du rang, le système r -réduit $[A]$ de $[A]$ est donné par

$$[A] \quad rt^2 \frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \mathbf{A}(t) \mathbf{Y}$$

où $x = t^{1/r}$ est une racine $r^{\text{ème}}$ de t et où $\mathbf{A}(t)$ est la matrice

$$\begin{bmatrix} ra_r + tL & ta_1 & \cdots & \cdots & (r-1)ta_{r-1} \\ (r-1)a_{r-1} & ra_r + tL - tI_n & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & ra_r + tL - (r-2)tI_n & ta_1 \\ a_1 & \cdots & \cdots & (r-1)a_{r-1} & ra_r + tL - (r-1)tI_n \end{bmatrix} + \mathbf{B}(t)$$

avec $\mathbf{B}(t)$ série r -réduite de $B(x)$. En particulier, $\mathbf{B}(t)$ est un élément de $M_{rn}(t^2\mathbb{C}\{t\})$.

Le système

$$[\mathbf{A}_0] \quad rt^2 \frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \mathbf{A}_0(t) \mathbf{Y}$$

de matrice

$$\mathbf{A}_0(t) = \begin{bmatrix} ra_r + tL & ta_1 & \cdots & \cdots & (r-1)ta_{r-1} \\ (r-1)a_{r-1} & ra_r + tL - tI_n & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & ra_r + tL - (r-2)tI_n & ta_1 \\ a_1 & \cdots & \cdots & (r-1)a_{r-1} & ra_r + tL - (r-1)tI_n \end{bmatrix}$$

est le système r -réduit de la forme normale $[A_0]$ de $[A]$.

Dans la suite, nous choisissons comme solution fondamentale formelle de $[\mathbf{A}]$ la solution fondamentale formelle r -réduite $\widehat{\mathbf{Y}}(t)$ associée à $\widehat{Y}(x)$. Rappelons que

$$\widehat{\mathbf{Y}}(t) = \widehat{\mathbf{F}}(t) \widehat{\mathbf{Y}}_0(t)$$

où $\widehat{\mathbf{F}}(t) = I_{rn} + O(t^2)$ est la série r -réduite de $\widehat{F}(x)$ et où $\widehat{\mathbf{Y}}_0(t)$ est la solution fondamentale formelle r -réduite de $[\mathbf{A}_0]$ associée à $\widehat{Y}_0(x)$ (cf. paragraphe 4.1.1).

La série $\widehat{\mathbf{F}}$ est donc l'unique solution série formelle vérifiant $\widehat{\mathbf{F}}(0) = I_{rn}$ du système de passage

$$[\mathbf{A}_0 : \mathbf{A}] \quad rt^2 \frac{d\mathbf{F}}{dt} - (\mathbf{A}_0 \mathbf{F} - \mathbf{F} \mathbf{A}_0) = \mathbf{B} \mathbf{F}$$

En particulier, compte tenu de la structure de la matrice \mathbf{A}_0 , le premier bloc de colonnes $\widehat{\mathbf{f}}$ de $\widehat{\mathbf{F}}$ est l'unique solution série formelle vérifiant $\widehat{\mathbf{f}}(0) = I_{rn, n_1}$ du système

$$(1) \quad rt^2 \frac{d\mathbf{f}}{dt} - \mathbf{A}_0 \mathbf{f} + t\mathbf{f} L_1 = \mathbf{B} \mathbf{f}$$

où nous avons noté I_{rn, n_1} la matrice formée des n_1 premières colonnes de la matrice identité I_{rn} . Comme dans le cas des systèmes de niveau unique 1 et compte tenu de la

structure de la matrice L_1 , nous scindons le système (1) de dimension $rn \times n_1$ colonne par colonne. Nous en déduisons alors que la $q^{\text{ème}}$ colonne $\widehat{\mathbf{f}}^{[q]}$ de $\widehat{\mathbf{f}}$, $q \in \{1, \dots, n_1\}$, est l'unique solution série formelle vérifiant $\widehat{\mathbf{f}}^{[q]}(0) = I_{rn, n_1}^{[q]}$ du système

$$(1^{[q]}) \quad rt^2 \frac{d\widehat{\mathbf{f}}^{[q]}}{dt} - \mathbf{A}_0 \widehat{\mathbf{f}}^{[q]} + t\widehat{\mathbf{f}}^{[q-1]} = \mathbf{B}\widehat{\mathbf{f}}^{[q]}$$

où nous avons posé $\widehat{\mathbf{f}}^{[0]} = 0$. Compte tenu de cette structure, toutes les démonstrations qui suivent sont faites par récurrence sur $q \in \{1, \dots, n_1\}$.

4.2 Résurgence-sommabilité de $\widehat{\mathbf{f}}$

Nous établissons ici le

Théorème 4.1 *La série formelle $\widehat{\mathbf{f}}$ est résurgente-sommable de support singulier les points $a_{j,r} \neq 0$ (coefficient dominant du polynôme q_j).*

Les niveaux associés à $\widehat{\mathbf{f}}$ étant donnés par les degrés des polynômes non nuls $q_j \left(\frac{1}{\rho^k t^{1/r}} \right)$, seul le niveau 1 est associé à $\widehat{\mathbf{f}}$, puisque le système $[A]$ est de niveau unique. Noter que le système r -réduit $[A]$ est en général de plusieurs niveaux, sauf dans le cas exceptionnel où tous les polynômes q_j sont réduits à des monômes.

L'étude de la résurgence-sommabilité de $\widehat{\mathbf{f}}$ est donc analogue à celle des systèmes de niveau unique 1 (paragraphe 2.1). Cependant, même si les arguments donnés alors (perturbation régulière des systèmes $(1^{[q]})$ et construction de séries majorantes) restent identiques, la présence des polynômes

$$\check{q}_j \left(\frac{1}{x} \right) = q_j \left(\frac{1}{x} \right) + \frac{a_{j,r}}{x^r} = -\frac{a_{j,r-1}}{x^{r-1}} - \dots - \frac{a_{j,1}}{x}$$

rend la mise en place de ceux-ci plus délicate. Il est donc nécessaire de procéder à une nouvelle démonstration; mais, contrairement au cas des systèmes de niveau unique 1, nous traitons directement le cas où la matrice des exposants de monodromie formelle L est sous forme de Jordan.

Soit \mathcal{L} un chemin d'origine 0 et de classe \mathcal{C}^1 par morceaux ne faisant qu'un nombre fini de tours autour des points $a_{j,r} \neq 0$. Ce chemin peut être relevé sur le revêtement universel $\widetilde{\mathbb{C}}_{a_r}$ de $\mathbb{C} \setminus \bigcup_j \{a_{j,r} \neq 0\}$ en un chemin que nous notons encore \mathcal{L} . Nous lui associons un voisinage ouvert simplement connexe $\Delta_{\mathcal{L}}$ dans $\widetilde{\mathbb{C}}_{a_r}$ formé par l'union d'un disque ouvert \mathcal{D} de centre 0 et d'un voisinage ouvert simplement connexe de \mathcal{L} qui évitent les points $a_{j,r} \neq 0$ à une distance minimale $\nu > 0$: pour tout $j \in \{1, \dots, J\}$ tel

que $a_{j,r} \neq 0$ et pour tout $\tau \in \Delta_{\mathcal{L}}$, $|\tau - a_{j,r}| \geq \nu$.

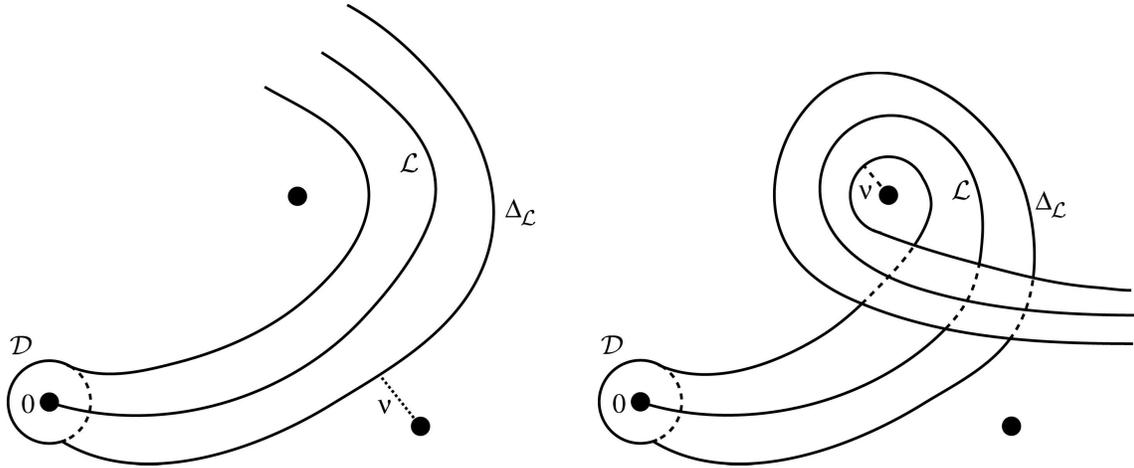


Figure 4.1 - exemples de chemins \mathcal{L} et de domaines $\Delta_{\mathcal{L}}$

Suivant la définition de la résurgence-sommabilité d'une série formelle, il s'agit de démontrer que le mineur $\tilde{\mathbf{f}}$ de $\hat{\mathbf{f}}$ est holomorphe sur $\Delta_{\mathcal{L}}$ avec une croissance exponentielle d'ordre au plus 1.

4.2.1 Perturbation régulière

Pour toute matrice M de dimension $rn \times n_1$, nous notons $M^{[q]}$ sa $q^{\text{ème}}$ colonne et nous la découpons sous la forme

$$M = \begin{bmatrix} M^{[1;q]} \\ \vdots \\ M^{[r;q]} \end{bmatrix} \text{ avec } M^{[u;q]} = \begin{bmatrix} M^{[u,1;q]} \\ \vdots \\ M^{[u,J;q]} \end{bmatrix}$$

où les r matrices $M^{[u;q]}$ sont de dimension $n \times 1$ et où le nombre de lignes de la matrice $M^{[u,j;q]}$, $j \in \{1, \dots, J\}$, est égal à la dimension du $j^{\text{ème}}$ bloc de Jordan L_j de L : $M^{[u,j;q]}$ est donc de dimension $n_j \times 1$.

Suivant l'étude du paragraphe 2.1, nous perturbons les systèmes $(\mathbf{1}^{[q]})$ en

$$(\mathbf{1}_{\alpha}^{[q]}) \quad rt^2 \frac{d\mathbf{f}^{[q]}}{dt} - \mathbf{A}_0 \mathbf{f}^{[q]} + t \hat{\mathbf{f}}^{[q-1]} = \alpha \mathbf{B} \mathbf{f}^{[q]}, \quad \alpha \in \mathbb{C}$$

En adaptant la démonstration du lemme 2.3 et en utilisant la forme de la matrice \mathbf{A}_0 , nous obtenons le résultat suivant :

Lemme 4.2 *Pour tout $q \in \{1, \dots, n_1\}$, le système $(\mathbf{1}_{\alpha}^{[q]})$ admet une unique solution série formelle en α de la forme*

$$\hat{\mathbf{f}}^{[q]}(t, \alpha) = I_{rn, n_1}^{[q]} + \sum_{m \geq 1} \hat{\mathbf{f}}_m^{[q]}(t) \alpha^m$$

où I_{rn,n_1} est la matrice formée des n_1 premières colonnes de la matrice identité I_{rn} et où $\widehat{\mathbf{f}}_m^{[;q]}(t) \in M_{rn,1}(t^2\mathbb{C}[[t]])$ pour tout $m \geq 1$.

De plus, pour tout $m \geq 1$, tout $u \in \{1, \dots, r\}$ et tout $j \in \{1, \dots, J\}$, la matrice $\widehat{\mathbf{f}}_m^{[u,j;q]}$ vérifie l'égalité

$$(4.1) \quad rt^2 \frac{d\widehat{\mathbf{f}}_m^{[u,j;q]}}{dt} - \sum_{k=1}^u (r+k-u)a_{j,r+k-u} \widehat{\mathbf{f}}_m^{[k,j;q]} - t \sum_{k=u+1}^r (k-u)a_{j,k-u} \widehat{\mathbf{f}}_m^{[k,j;q]} \\ - t(L_j - (u-1)I_{n_j}) \widehat{\mathbf{f}}_m^{[u,j;q]} + t \widehat{\mathbf{f}}_m^{[u,j;q-1]} = \left(\mathbf{B} \widehat{\mathbf{f}}_{m-1} \right)^{[u,j;q]}$$

avec $\widehat{\mathbf{f}}_0 = I_{rn,n_1}$.

A cette série double $\widehat{\mathbf{f}}^{[;q]}(t, \alpha)$ correspond dans le plan de Borel la série

$$\varphi^{[;q]}(\tau, \alpha) = \delta I_{rn,n_1}^{[;q]} + \sum_{m \geq 1} \varphi_m^{[;q]}(\tau) \alpha^m$$

où δ est la distribution de Dirac à l'origine et où $\varphi_m^{[;q]}(\tau) \in M_{rn,1}(\tau\mathbb{C}[[\tau]])$ est la transformée de Borel de $\widehat{\mathbf{f}}_m^{[;q]}(t)$ pour tout $m \geq 1$. Cette série $\varphi^{[;q]}(\tau, \alpha)$ est l'unique solution de ce type du système transformé de Borel $(\widetilde{\mathbf{1}}_\alpha^{[q]})$ de $(\mathbf{1}_\alpha^{[q]})$. Comme dans le cas des systèmes de niveau unique 1, nous obtenons pour $\alpha = 1$ l'égalité

$$\widetilde{\mathbf{f}}^{[;q]}(\tau) = \varphi^{[;q]}(\tau, 1) = \delta I_{rn,n_1}^{[;q]} + \sum_{m \geq 1} \varphi_m^{[;q]}(\tau)$$

qui va nous permettre d'établir le théorème 4.1. Précisément, nous allons démontrer que, pour tout α élément d'un disque ouvert de centre 1, la série $\sum_{m \geq 1} \varphi_m^{[;q]}(\tau) \alpha^m$ est holomorphe sur $\Delta_{\mathcal{L}}$ avec une croissance exponentielle d'ordre au plus 1.

4.2.2 Prolongeabilité sans fin et croissance exponentielle

L'analyticité de $\widetilde{\mathbf{f}}$ sur $\Delta_{\mathcal{L}}$ est obtenue par le théorème de Cauchy-Lipschitz. Cependant, nous allons en redonner une démonstration complète à l'aide des séries majorantes, afin de pouvoir étudier de façon précise la structure des singularités de $\widetilde{\mathbf{f}}$.

La démonstration que nous proposons ci-dessous est analogue à celle du paragraphe 2.1 donnée dans le cadre des systèmes de niveau unique 1. Rappelons en les différentes étapes : analyticité des $\varphi_m^{[;q]}$ sur $\Delta_{\mathcal{L}}$, convergence normale de la série $\sum_{m \geq 1} \varphi_m^{[;q]}(\tau)$ sur le disque \mathcal{D} et construction de séries majorantes.

Etape 1 : analyticité des $\varphi_m^{[;q]}$ sur $\Delta_{\mathcal{L}}$

Les $\varphi_m^{[;q]}$ étant les transformées de Borel des séries formelles $\widehat{f}_m^{[;q]}$, les matrices $\varphi_m^{[u,j;q]}$ satisfont pour tout $u \in \{1, \dots, r\}$ et tout $j \in \{1, \dots, J\}$ aux équations

$$(4.2) \quad r(\tau - a_{j,r})\varphi_m^{[u,j;q]'} - \sum_{k=1}^{u-1} (r+k-u)a_{j,r+k-u}\varphi_m^{[k,j;q]'} - \sum_{k=u+1}^r (k-u)a_{j,k-u}\varphi_m^{[k,j;q]}$$

$$- (L_j - (r+u-1)I_{n_j})\varphi_m^{[u,j;q]} + \varphi_m^{[u,j;q-1]} = \left(\widetilde{\mathbf{B}}' * \varphi_{m-1}\right)^{[u,j;q]}$$

avec $\varphi_m^{[u,j;q]}(0) = 0$ et $\varphi_0 = \delta I_{rn, n_1}$. Ces équations ont été obtenues par transformée de Borel des égalités (4.1). Notons immédiatement que, compte tenu des normalisations faites, $\widetilde{\mathbf{B}}' * \varphi_0 = \widetilde{\mathbf{b}}'$ est une fonction entière vérifiant

$$\widetilde{\mathbf{b}}'^{[u,j;q]}(\tau) = \begin{cases} O(\tau) & \text{si } a_{j,r} = 0 \\ O(1) & \text{si } a_{j,r} \neq 0 \end{cases}$$

En effet, le premier bloc de colonnes \mathbf{b} de \mathbf{B} satisfait par hypothèse à

$$\mathbf{b}^{[u,j;q]}(t) = \begin{cases} O(t^3) & \text{si } a_{j,r} = 0 \\ O(t^2) & \text{si } a_{j,r} \neq 0 \end{cases}$$

* Lorsque $a_{j,r} = 0$, l'hypothèse de niveau unique sur le système $[A]$ donne $a_{j,k} = 0$ pour tout $k \in \{1, \dots, r-1\}$. Ainsi, la matrice $\varphi_m^{[u,j;q]}$ est solution du système différentiel

$$(4.3) \quad \begin{cases} r\tau\varphi_m^{[u,j;q]'} - (L_j - (r+u-1)I_{n_j})\varphi_m^{[u,j;q]} = \left(\widetilde{\mathbf{B}}' * \varphi_{m-1}\right)^{[u,j;q]} - \varphi_m^{[u,j;q-1]} \\ \varphi_m^{[u,j;q]}(0) = 0 \end{cases}$$

La série $\varphi_m^{[u,j;q-1]}$ étant analytique en 0 et vérifiant $\varphi_m^{[u,j;q-1]}(0) = 0$, l'origine est un point ordinaire de l'équation (4.3) dès que $\widetilde{\mathbf{B}}' * \varphi_{m-1}$ est analytique et de valuation 1 en 0. En particulier, $\varphi_1^{[u,j;q]}$ est analytique à l'origine et le théorème de Cauchy-Lipschitz permet de prolonger $\varphi_1^{[u,j;q]}$ en une fonction entière.

* Lorsque $a_{j,r} \neq 0$, les $\varphi_m^{[u,j;q]}$ ne vérifient pas d'équations simples en général, puisque le polynôme

$$\check{q}_j \left(\frac{1}{x} \right) = -\frac{a_{j,r-1}}{x^{r-1}} - \dots - \frac{a_{j,1}}{x}$$

n'est pas nécessairement nul. En revanche, nous voyons, à partir de l'égalité (4.2), que les $(\varphi_m^{[u,j;q]})_{1 \leq u \leq r}$ satisfont au système différentiel

$$(4.4) \quad \begin{cases} R_j z'_{m,j,q} = S_j z_{m,j,q} + T_{m-1,j,q} - z_{m,j,q-1} \\ z_{m,j,q}(0) = 0 \end{cases}$$

où

1. La matrice $z_{m,j,q}$ est de dimension $rn_j \times 1$ et est définie par

$$z_{m,j,q} = \begin{bmatrix} \varphi_m^{[1,j;q]} \\ \varphi_m^{[2,j;q]} \\ \vdots \\ \varphi_m^{[r,j;q]} \end{bmatrix}$$

2. La matrice $T_{m-1,j,q}$ est de dimension $rn_j \times 1$ et est définie par

$$T_{m-1,j,q} = \begin{bmatrix} (\widetilde{\mathbf{B}}' * \varphi_{m-1})^{[1,j;q]} \\ (\widetilde{\mathbf{B}}' * \varphi_{m-1})^{[2,j;q]} \\ \vdots \\ (\widetilde{\mathbf{B}}' * \varphi_{m-1})^{[r,j;q]} \end{bmatrix}$$

3. Les matrices R_j et S_j sont de dimension $rn_j \times rn_j$ et sont définies par

$$R_j = \begin{bmatrix} r(\tau - a_{j,r})I_{n_j} & 0I_{n_j} & \cdots & \cdots & 0I_{n_j} \\ -(r-1)a_{j,r-1}I_{n_j} & r(\tau - a_{j,r})I_{n_j} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & r(\tau - a_{j,r})I_{n_j} & 0I_{n_j} \\ -a_{j,1}I_{n_j} & \cdots & \cdots & -(r-1)a_{j,r-1}I_{n_j} & r(\tau - a_{j,r})I_{n_j} \end{bmatrix}$$

et

$$S_j = \begin{bmatrix} L_j - rI_{n_j} & a_{j,1}I_{n_j} & \cdots & \cdots & (r-1)a_{j,r-1}I_{n_j} \\ 0I_{n_j} & L_j - (r+1)I_{n_j} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & L_j - (2r-2)I_{n_j} & a_{j,1}I_{n_j} \\ 0I_{n_j} & \cdots & \cdots & 0I_{n_j} & L_j - (2r-1)I_{n_j} \end{bmatrix}$$

En particulier, R_j et S_j sont indépendantes de m et q .

L'origine étant un point ordinaire de (4.4), $z_{1,j,q}$ est analytique à l'origine et le théorème de Cauchy-Lipschitz permet de prolonger analytiquement $z_{1,j,q}$ à $\Delta_{\mathcal{L}}$ tout entier. Par suite, pour tout $u \in \{1, \dots, r\}$, les séries $\varphi_1^{[u,j;q]}$ sont convergentes et admettent sur $\Delta_{\mathcal{L}}$ un prolongement analytique.

Finalement, un raisonnement par récurrence sur $m \geq 1$ permet d'obtenir la

Proposition 4.3 *Pour tout $m \geq 1$, les séries φ_m sont convergentes et admettent sur le domaine $\Delta_{\mathcal{L}}$ un prolongement analytique que nous notons encore φ_m .*

Nous voyons dans cette première étape les difficultés calculatoires engendrées par les polynômes \check{q}_j lorsque ceux-ci sont non nuls. Ces difficultés se retrouveront tout au long de cette deuxième partie et notamment lorsque nous étudierons les singularités de la transformée de Borel $\tilde{\mathbf{f}}$ de $\hat{\mathbf{f}}$. En effet, la démarche proposée au paragraphe 2.2 dans le cadre des systèmes de niveau unique 1 n'est plus applicable ici puisque le système (4.4) est en général à point singulier irrégulier en $a_{j,r} \neq 0$. Toutefois, cette difficulté peut être contournée en utilisant le puissant outil des microfonctions (cf. appendice 2.A).

Etape 2 : convergence normale de la série $\sum_{m \geq 1} \varphi_m^{[;q]}(\tau)$ sur \mathcal{D}

Comme au paragraphe 2.1, nous démontrons plus précisément que la série

$$\sum_{m \geq 1} \varphi_m^{[;q]}(\tau) \alpha^m$$

converge normalement sur le disque \mathcal{D} pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$.

Lorsque $a_{j,r} = 0$, nous intégrons le système différentiel (4.3) par la méthode de variation des constantes et nous obtenons

$$(4.5) \quad r \varphi_m^{[u,j;q]}(\tau) = \tau^{\frac{\lambda_j}{r} - \frac{u-1}{r} - 1} \int_0^\tau \frac{\left((\tilde{\mathbf{B}}' * \varphi_{m-1})^{[u,j;q]} + M_j \varphi_m^{[u,j;q]} - \varphi_m^{[u,j;q-1]} \right) (\eta)}{\eta^{\frac{\lambda_j}{r} - \frac{u-1}{r}}} d\eta$$

pour tout $q \in \{1, \dots, n_1\}$, tout $u \in \{1, \dots, r\}$ et tout $\tau \in \mathcal{D}$, où $M_j = L_j - \lambda_j I_{n_j}$ désigne la matrice nilpotente de Jordan d'ordre n_j . Noter que l'hypothèse $\operatorname{Re}(\lambda_j) \in [0, 1[$ montre que

$$\forall j \in \{1, \dots, J\}, \forall u \in \{1, \dots, r\}, \operatorname{Re} \left(\frac{\lambda_j}{r} - \frac{u-1}{r} \right) \in]-1, 1[$$

Définissons alors le système $(\mathbf{2}_\alpha^{[q]})$ de dimension rn par les rJ équations matricielles :

- $rtg^{[1,1;q]} = \alpha (|\mathbf{B}|g)^{[1,1;q]} + tM_1g^{[1,1;q]} + tg^{[1,1;q-1]} + tI_{rn,n_1}^{[1,1;q]} - 2tI_{rn,n_1}^{[1,1;q-1]}$
- si $a_{j,r} = 0$ et $(u, j) \neq (1, 1)$, alors

$$(r - \operatorname{Re}(\lambda_j - u + 1)) tg^{[u,j;q]} = \alpha (|\mathbf{B}|g)^{[u,j;q]} + tM_jg^{[u,j;q]} + tg^{[u,j;q-1]}$$

- si $a_{j,r} \neq 0$, alors

$$\begin{aligned} \nu g^{[u,j;q]} &= \alpha (|\mathbf{B}|g)^{[u,j;q]} + \sum_{k=1}^{u-1} |a_{j,r+k-u}| g^{[k,j;q]} + t \sum_{k=u+1}^r |a_{j,k-u}| g^{[k,j;q]} \\ &\quad + t (|L_j| + 2I_{n_j}) g^{[u,j;q]} + tg^{[u,j;q-1]} \end{aligned}$$

En adaptant la démonstration du lemme 2.6 et sa généralisation au cas où la matrice L est sous forme de Jordan quelconque (cf. paragraphe 2.1.2) et en utilisant les arguments de l'étape 1 lorsque $a_{j,r} \neq 0$, nous obtenons le résultat suivant :

Lemme 4.4 *Pour tout $q \in \{1, \dots, n_1\}$, le système $(\mathbf{2}_\alpha^{[q]})$ admet une unique solution série formelle en α de la forme*

$$g^{[q]}(t, \alpha) = I_{rn, n_1}^{[q]} + \sum_{m \geq 1} g_m^{[q]}(t) \alpha^m$$

où $g_m^{[q]}(t) \in M_{rn, 1}(t^2 \mathbb{R}^+[[t]])$ pour tout $m \geq 1$. De plus, cette série double définit une fonction analytique en t et α pour t proche de 0 et $\alpha \in \mathbb{C}$.

D'autre part,

1. Si $a_{j,r} = 0$, la série $g_m^{[u, j; q]}$ vérifie pour tout $m \geq 1$ et tout $u \in \{1, \dots, r\}$ l'égalité

$$(r - \operatorname{Re}(\lambda_j - u + 1)) t g_m^{[u, j; q]} = (|\mathbf{B}| g_{m-1})^{[u, j; q]} + t M_j g_m^{[u, j; q]} + t g_m^{[u, j; q-1]}$$

avec $g_0 = I_{rn, n_1}$.

2. Si $a_{j,r} \neq 0$, les séries $(g_m^{[u, j; q]})_{1 \leq u \leq r}$ vérifient pour tout $m \geq 1$ l'égalité

$$U_j \begin{bmatrix} g_m^{[1, j; q]} \\ g_m^{[2, j; q]} \\ \vdots \\ g_m^{[r, j; q]} \end{bmatrix} = t V_j \begin{bmatrix} g_m^{[1, j; q]} \\ g_m^{[2, j; q]} \\ \vdots \\ g_m^{[r, j; q]} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (|\mathbf{B}| g_{m-1})^{[1, j; q]} \\ (|\mathbf{B}| g_{m-1})^{[2, j; q]} \\ \vdots \\ (|\mathbf{B}| g_{m-1})^{[r, j; q]} \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} g_m^{[1, j; q-1]} \\ g_m^{[2, j; q-1]} \\ \vdots \\ g_m^{[r, j; q-1]} \end{bmatrix}$$

où U_j et V_j sont les matrices de dimension $rn_j \times rn_j$ définies par

$$U_j = \begin{bmatrix} \nu I_{n_j} & 0 I_{n_j} & \cdots & \cdots & 0 I_{n_j} \\ -|a_{j, r-1}| I_{n_j} & \nu I_{n_j} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \nu I_{n_j} & 0 I_{n_j} \\ -|a_{j, 1}| I_{n_j} & \cdots & \cdots & -|a_{j, r-1}| I_{n_j} & \nu I_{n_j} \end{bmatrix}$$

et

$$V_j = \begin{bmatrix} |L_j| + 2I_{n_j} & |a_{j, 1}| I_{n_j} & \cdots & \cdots & |a_{j, r-1}| I_{n_j} \\ 0 I_{n_j} & |L_j| + 2I_{n_j} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & |L_j| + 2I_{n_j} & |a_{j, 1}| I_{n_j} \\ 0 I_{n_j} & \cdots & \cdots & 0 I_{n_j} & |L_j| + 2I_{n_j} \end{bmatrix}$$

En particulier, les matrices U_j^{-1} et V_j sont des éléments $M_{rn_j}(\mathbb{R}^+)$. De plus, elles satisfont aux inégalités

$$|R_j^{-1}| \leq U_j^{-1} \text{ et } |R_j^{-1} S_j| \leq U_j^{-1} V_j$$

où les matrices R_j et S_j sont définies à l'égalité (4.4).

La transformée de Borel formelle par rapport à t de $g^{[q]}(t, \alpha)$ définie par

$$\Phi^{[q]}(\tau, \alpha) = \delta I_{rn, n_1}^{[q]} + \sum_{m \geq 1} \Phi_m^{[q]}(\tau) \alpha^m$$

avec $\Phi_m^{[q]}(\tau) \in M_{rn, 1}(\tau \mathbb{R}^+[[\tau]])$ pour tout $m \geq 1$, est donc une fonction entière de τ pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$. Les $\Phi_m^{[q]}$ étant les transformées de Borel des séries $g_m^{[q]}$, nous obtenons :

★ Si $a_{j,r} = 0$, les $\Phi_m^{[u,j;q]}$ vérifient pour tout $m \geq 1$ et tout $u \in \{1, \dots, r\}$ les égalités

$$(4.6) \quad (r - \operatorname{Re}(\lambda_j - u + 1)) \Phi_m^{[u,j;q]} = \left(\widetilde{\mathbf{B}}' * \Phi_{m-1} \right)^{[u,j;q]} + M_j \Phi_m^{[u,j;q]} + \Phi_m^{[u,j;q-1]}$$

avec $\Phi_0 = \delta I_{rn, n_1}$.

★ Si $a_{j,r} \neq 0$, les $(\Phi_m^{[u,j;q]})_{1 \leq u \leq r}$ vérifient pour tout $m \geq 1$ le système

$$(4.7) \quad \begin{cases} U_j Z'_{m,j,q} = V_j Z_{m,j,q} + W_{m-1,j,q} + Z_{m,j,q-1} \\ Z_{m,j,q}(0) = 0 \end{cases}$$

où nous avons posé

$$Z_{m,j,q} = \begin{bmatrix} \Phi_m^{[1,j;q]} \\ \Phi_m^{[2,j;q]} \\ \vdots \\ \Phi_m^{[r,j;q]} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad W_{m-1,j,q} = \begin{bmatrix} \left(\widetilde{\mathbf{B}}' * \Phi_{m-1} \right)^{[1,j;q]} \\ \left(\widetilde{\mathbf{B}}' * \Phi_{m-1} \right)^{[2,j;q]} \\ \vdots \\ \left(\widetilde{\mathbf{B}}' * \Phi_{m-1} \right)^{[r,j;q]} \end{bmatrix}$$

Finalement, en comparant (4.5) et (4.6) lorsque $a_{j,r} = 0^1$ et en appliquant le lemme de Grönwall aux équations (4.4) et (4.7) lorsque $a_{j,r} \neq 0$, nous obtenons comme au paragraphe 2.1 (cf. lemme 2.7 et sa généralisation au cas où la matrice L est sous forme de Jordan quelconque) le résultat suivant :

Lemme 4.5 *Pour tout $q \in \{1, \dots, n_1\}$, tout $m \geq 1$ et tout $\tau \in \mathcal{D}$, les fonctions $\varphi_m^{[q]}$ vérifient l'inégalité*

$$|\varphi_m^{[q]}(\tau)| \leq \Phi_m^{[q]}(|\tau|)$$

En particulier, la série $\sum_{m \geq 1} \varphi_m^{[q]}(\tau) \alpha^m$ converge normalement sur \mathcal{D} pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$.

Nous retrouvons ici le fait que la série $\widehat{\mathbf{f}}$ est de type Gevrey de niveau 1 et que le rayon du disque de convergence \mathcal{D}_0 de sa transformée de Borel $\widehat{\mathbf{f}}$ est $\min_{a_{j,r} \neq 0} |a_{j,r}|$. En particulier, la série initiale \widehat{f} est de type Gevrey de niveau r .

Comme pour les systèmes de niveau unique 1 (cf. paragraphe 2.1), la convergence normale sur le disque \mathcal{D} de la série $\sum_{m \geq 1} \varphi_m^{[q]}(\tau)$ nous permet de construire les séries majorantes nécessaires pour établir l'analyticité et la croissance exponentielle de $\varphi^{[q]}(\tau, \alpha)$ sur $\Delta_{\mathcal{L}}$, α dans un disque ouvert centré en 1.

¹La comparaison s'effectue coefficient par coefficient, puisque la matrice M_j induit un système triangulaire de dimension n_j sur les coefficients de $\varphi_m^{[u,j;q]}$ et $\Phi_m^{[u,j;q]}$.

Etape 3 : construction de séries majorantes et conclusion

Nous reprenons les arguments développés à l'étape 2 du paragraphe 2.1.1 et généralisés au paragraphe 2.1.2 au cas d'une matrice L sous forme de Jordan quelconque : il s'agit de construire une famille de séries majorantes de $\varphi^{[q]}(\tau, \alpha)$ sur des domaines connexes strictement croissants de $\Delta_{\mathcal{L}}$ évitant $\tau = 0$.

Fixons $\tau_0 \in \mathcal{D} \cap]0, 1[$ et $K > 0$ tel que $|\varphi_m(\tau)| \leq K$ pour tout $q \in \{1, \dots, n_1\}$, tout $m \geq 1$ et tout $|\tau| \leq \tau_0$ (un tel K existe par l'étape précédente). Nous supposons également, quitte à modifier le domaine $\Delta_{\mathcal{L}}$, que la distance ν est strictement inférieure à τ_0 .

Pour tout $\varepsilon \in]0, \tau_0[$, nous notons $\Delta_\varepsilon = \{\tau \in \Delta_{\mathcal{L}} \text{ tel que } |\tau| > \varepsilon\}$ (voir figure 4.2) et nous supposons, quitte à diminuer la valeur de τ_0 , que les Δ_ε sont connexes. Nous définissons alors les systèmes $(\mathbf{3}_\alpha^{\varepsilon[q]})$ de dimension rn par les rJ équations matricielles

- si $u = j = 1$, alors

$$\begin{aligned} \varepsilon h^{[1,1;q]} &= \alpha (\mathbf{C}h)^{[1,1;q]} + t (|L_1| + 2I_{n_1}) h^{[1,1;q]} + th^{[1,1;q-1]} + (\varepsilon - \alpha - 2t) I_{rn, n_1}^{[1,1;q]} \\ &\quad - 2t I_{rn, n_1}^{[1,1;q-1]} + \alpha t \mathbf{K}_{n_1} \end{aligned}$$

- si $a_{j,r} = 0$ et $(u, j) \neq (1, 1)$, alors

$$\varepsilon h^{[u,j;q]} = \alpha (\mathbf{C}h)^{[u,j;q]} + t (|L_j| + 2I_{n_j}) h^{[u,j;q]} + th^{[u,j;q-1]} + \alpha t \mathbf{K}_{n_j}$$

- si $a_{j,r} \neq 0$, alors

$$\begin{aligned} \nu h^{[u,j;q]} &= \alpha (\mathbf{C}h)^{[u,j;q]} + \sum_{k=1}^{u-1} |a_{j,r+k-u}| h^{[k,j;q]} + t \sum_{k=u+1}^r |a_{j,k-u}| h^{[k,j;q]} \\ &\quad + t (|L_j| + 2I_{n_j}) h^{[u,j;q]} + th^{[u,j;q-1]} + \alpha t \mathbf{K}_{n_j} \end{aligned}$$

où $\mathbf{C} = I_{rn} + |\mathbf{B}|$ et où \mathbf{K}_ℓ désigne le vecteur colonne de dimension ℓ dont tous les

termes sont égaux à K .

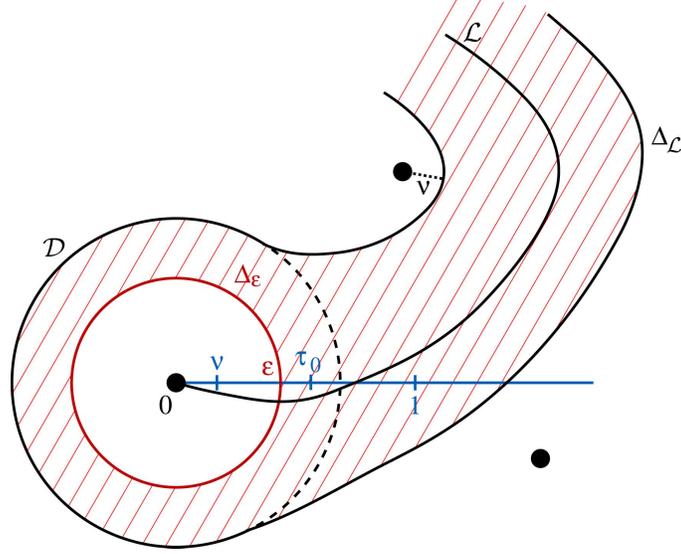


Figure 4.2 - exemple de domaine Δ_ε

En adaptant les démonstrations de l'étape 2 du paragraphe 2.1.1 et de l'étape 2 du paragraphe 4.1, nous obtenons le

Lemme 4.6 *Pour tout $q \in \{1, \dots, n_1\}$ et tout $\varepsilon \in]0, \tau_0[$, le système transformé de Borel de $(\mathfrak{Z}_\alpha^{[q]})$ admet une unique solution série formelle en α de la forme*

$$\psi_\varepsilon^{[;q]}(\tau, \alpha) = \delta I_{rn, n_1}^{[;q]} + \sum_{m \geq 1} \psi_{\varepsilon, m}^{[;q]}(\tau) \alpha^m$$

où $\psi_{\varepsilon, m}^{[;q]}(\tau) \in M_{rn, 1}(\mathbb{R}^+[[\tau]])$ pour tout $m \geq 1$. De plus, cette série double définit, pour tout $\alpha \in D(1, R)$ avec $R \in]0, 1 - \xi_0[$, une fonction entière de τ à croissance exponentielle d'ordre 1.

D'autre part, les séries $\psi_{\varepsilon, m}^{[;q]}$ définissent des fonctions entières de τ et vérifient :

1. Si $a_{j, r} = 0$, la série $\psi_{\varepsilon, m}^{[u, j; q]}$ satisfait pour tout $u \in \{1, \dots, r\}$ et tout $m \geq 1$ à l'équation

$$(4.8) \quad \varepsilon \psi_{\varepsilon, m}^{[u, j; q]'} = \psi_{\varepsilon, m-1}^{[u, j; q]'} + \left(\widetilde{\mathbf{B}}' * \psi_{\varepsilon, m-1} \right)^{[u, j; q]} + (|L_j| + 2I_{n_j}) \psi_{\varepsilon, m}^{[u, j; q]} + \psi_{\varepsilon, m}^{[u, j; q-1]}$$

de condition initiale $\psi_{\varepsilon, m}^{[u, j; q]}(0) > K$.

2. Si $a_{j, r} \neq 0$, les séries $(\psi_{\varepsilon, m}^{[u, j; q]})_{1 \leq u \leq r}$ satisfont pour tout $m \geq 1$ au système

$$(4.9) \quad U_j \mathcal{Z}'_{m, j, q} = V_j \mathcal{Z}_{m, j, q} + \mathcal{W}_{m-1, j, q} + \mathcal{Z}_{m, j, q-1}$$

de condition initiale $\mathcal{Z}_{m,j,q}(0) > K$, où les matrices U_j et V_j sont définies au lemme 4.4 et où

$$\mathcal{Z}_{m,j,q} = \begin{bmatrix} \psi_{\varepsilon,m}^{[1,j;q]} \\ \psi_{\varepsilon,m}^{[2,j;q]} \\ \vdots \\ \psi_{\varepsilon,m}^{[r,j;q]} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{W}_{m-1,j,q} = \begin{bmatrix} \left(\widetilde{|\mathbf{B}|}' * \psi_{\varepsilon,m-1} \right)^{[1,j;q]} \\ \left(\widetilde{|\mathbf{B}|}' * \psi_{\varepsilon,m-1} \right)^{[2,j;q]} \\ \vdots \\ \left(\widetilde{|\mathbf{B}|}' * \psi_{\varepsilon,m-1} \right)^{[r,j;q]} \end{bmatrix}$$

L'application du lemme de Grönwall aux équations (4.3) et (4.8) dans le cas où $a_{j,r} = 0$, et aux équations (4.4) et (4.9) dans le cas où $a_{j,r} \neq 0$, permet d'établir l'analyticité de $\varphi^{[q]}(\tau, \alpha)$ sur Δ_ε , puis sur $\Delta_{\mathcal{L}}$ tout entier, pour tout $\alpha \in D(1, R)$ (la démonstration est analogue à celle de la proposition 2.10). Quant à la croissance exponentielle d'ordre 1 sur $\Delta_{\mathcal{L}}$ de $\varphi^{[q]}(\tau, \alpha)$, elle s'obtient comme au paragraphe 2.1 à l'aide de la croissance exponentielle d'ordre 1 sur \mathbb{C} de $\psi_\varepsilon^{[q]}(\tau, |\alpha|)$, ε fixé dans $]0, \tau_0[$.

Nous terminons la démonstration du théorème 4.1 en substituant 1 à α dans la série double $\varphi^{[q]}(\tau, \alpha)$.

4.3 Description des singularités de \tilde{f}

Les singularités de \tilde{f} sont les points $a_{j,r} \neq 0$ (théorème 4.1) et nous notons ω l'une quelconque d'entre elles. L'étude de ω est plus complexe que dans le cadre des systèmes de niveau unique 1 (cf. paragraphe 2.2), puisque deux cas peuvent se produire :

★ La singularité $\omega = a_{j,r}$ est associée à un monôme q_j :

$$q_j \left(\frac{1}{x} \right) = -\frac{a_{j,r}}{x^r}$$

★ La singularité $\omega = a_{j,r}$ provient d'un polynôme q_j non réduit à monôme, *i.e.*, tel que

$$q_j \left(\frac{1}{x} \right) = -\frac{a_{j,r}}{x^r} + \check{q}_j \left(\frac{1}{x} \right)$$

avec

$$\check{q}_j \left(\frac{1}{x} \right) = -\frac{a_{j,r-1}}{x^{r-1}} - \dots - \frac{a_{j,1}}{x}$$

non identiquement nul.

Le système $[A]$ étant de niveau unique, tous les polynômes q_j portant la singularité ω , *i.e.*, tel que $a_{j,r} = \omega$, s'il en existe plusieurs, sont égaux. Nous notons désormais dans la suite

$$Fr(\omega) = \{q_j ; a_{j,r} = \omega\}$$

le *front* de ω ([MR91]) et nous définissons le polynôme \check{q}_ω par

$$q_j \left(\frac{1}{x} \right) = -\frac{\omega}{x^r} + \check{q}_\omega \left(\frac{1}{x} \right)$$

pour tout $j \in \{1, \dots, J\}$ tel que $q_j \in Fr(\omega)$. En particulier, $\check{q}_\omega = 0$ signifie que la singularité ω provient d'un monôme. Dans ce cas, nous disons que la singularité ω est de *front monomial*.

Le cas monomial est appelé cas "séparé" dans [L-R90-1]. La description de ω y est relativement simple : en adaptant la méthode du paragraphe 2.2 à l'aide des résultats du paragraphe 4.2, nous montrons que ω est une singularité de la classe de Nilsson.

Dans le second cas, l'étude est plus compliquée : ω n'est plus une singularité de la classe de Nilsson ; l'utilisation des microfonctions (cf. appendice 2.A) montre que $\tau_\omega \tilde{\mathbf{f}}$ peut être écrit au voisinage de 0 et modulo les fonctions analytiques à l'origine sous la forme

$$\tau_\omega \tilde{\mathbf{f}}(\tau) = \sum_{k=0}^{r-1} \left(\tilde{\varphi}_{\omega,k} \otimes \text{maj} \left(e^{\check{q}_\omega \left(\frac{1}{\rho^k t^{1/r}} \right)} \right) \right) (\tau)$$

où $\tilde{\varphi}_{\omega,k}$ est une fonction de la classe de Nilsson en 0, \otimes est le produit de convolution des majeurs (cf. paragraphe 1.2) et où

$$\text{maj} \left(e^{\check{q}_\omega \left(\frac{1}{\rho^k t^{1/r}} \right)} \right)$$

désigne un majeur de $e^{\check{q}_\omega \left(\frac{1}{\rho^k t^{1/r}} \right)}$ holomorphe sur la surface de Riemann \mathbb{C}_∞ du logarithme et à croissance exponentielle d'ordre au plus un à l'infini. Rappelons (cf. paragraphe 1.2.1) qu'un tel majeur existe puisque les exponentielles $e^{\check{q}_\omega \left(\frac{1}{\rho^k t^{1/r}} \right)}$ sont des constantes de résurgence (elles sont holomorphes multiformes et à croissance sous-exponentielle à l'origine). Ces majeurs seront plus particulièrement étudiés à l'appendice 4.A.

4.3.1 Cas où la singularité ω est de front monomial

L'étude est similaire à celle du paragraphe 2.2.3. Rappelons que nous devons procéder en deux étapes :

1. Montrer que la nature de la singularité ω est identique pour tous les germes de fonctions analytiques prolongeables sans fin φ_m ;
2. A l'aide de la relation

$$\tilde{\mathbf{f}}(\tau) = \sum_{m \geq 1} \varphi_m(\tau)$$

et des propriétés de convergence uniforme de cette série obtenue au paragraphe 4.2, montrer que la nature de ω se transmet à $\tilde{\mathbf{f}}$.

La première étape est le point difficile de l'étude de ω . La démonstration est sensiblement différente de celle du paragraphe 2.2.3, puisque nous travaillons a priori avec des systèmes à points singuliers irréguliers, et non à points singuliers réguliers comme dans le cas des systèmes de niveau unique 1. Néanmoins, les arguments du paragraphe 2.2.3 s'adaptent facilement à cette nouvelle situation grâce à l'hypothèse sur ω (ω est associé à un monôme).

Quant à la seconde étape, elle ne pose aucune difficulté : la démonstration est rigoureusement identique à celle du paragraphe 2.2.3.

Etude des fonctions φ_m en la singularité ω

Comme pour les systèmes de niveau unique 1, cette étude repose sur l'expression sous forme intégrale des coefficients des φ_m . En fait, il suffit juste de voir que les systèmes différentiels vérifiés par les matrices $\varphi_m^{[u,j;q]}$, $q \in \{1, \dots, n_1\}$, $u \in \{1, \dots, r\}$ et $j \in \{1, \dots, J\}$, permettent d'appliquer les arguments du paragraphe 2.2.3.

★ Si $a_{j,r} = 0$, le germe $\varphi_m^{[u,j;q]}$ est solution du système différentiel (4.3), et celui-ci est analogue au système (2.9). Noter qu'il suffit de remplacer λ_j par $\frac{\lambda_j}{r} - \frac{u-1}{r}$ dans les formules.

★ Si $a_{j,r} = \omega$, les germes $(\varphi_m^{[u,j;q]})_{1 \leq u \leq r}$ sont solutions du système différentiel (4.4). Le polynôme q_j étant réduit à un monôme, nous avons

$$a_{j,r-1} = a_{j,r-2} = \dots = a_{j,1} = 0$$

et ce système se scinde en les r systèmes différentiels

$$\begin{cases} r(\tau - \omega)\varphi_m^{[u,j;q]'} - (L_j - (r + u - 1))\varphi_m^{[u,j;q]} = \left(\tilde{\mathbf{B}}' * \varphi_{m-1}\right)^{[u,j;q]} - \varphi_m^{[u,j;q-1]} \\ \varphi_m^{[u,j;q]}(0) = 0 \end{cases}$$

Ceux-ci sont analogues aux systèmes (2.9) et permettent d'expliciter sous forme intégrale les $\varphi_m^{[u,j;q]}$ pour les j tels que $a_{j,r} = \omega$.

★ Si $a_{j,r} \notin \{0, \omega\}$, les germes $(\varphi_m^{[u,j;q]})_{1 \leq u \leq r}$ sont solutions du système différentiel (4.4). Contrairement au cas précédent, ce système est en général à point singulier irrégulier, car le polynôme \check{q}_j n'est pas nécessairement nul. Ceci ne pose toutefois pas de réelles difficultés, puisque $a_{j,r} \neq \omega$ et nous travaillons au voisinage de ω . Le système homogène associé à (4.4) admet une solution fondamentale $F_j(\tau)$ indépendante de q et m , analytique à l'origine et pouvant être prolongée analytiquement au voisinage de ω . En appliquant alors la méthode de variation des constantes, nous obtenons

$$z_{m,j,q}(\tau) = F_j(\tau) \int_0^\tau F_j^{-1}(\eta) R_j^{-1}(\eta) (T_{m-1,j,q}(\eta) - z_{m,j,q-1}(\eta)) d\eta$$

où $R_j^{-1}(\xi)$ est analytique au voisinage de ω et où

$$z_{m,j,q} = \begin{bmatrix} \varphi_m^{[1,j;q]} \\ \varphi_m^{[2,j;q]} \\ \vdots \\ \varphi_m^{[r,j;q]} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad T_{m-1,j,q} = \begin{bmatrix} \left(\tilde{\mathbf{B}}' * \varphi_{m-1} \right)^{[1,j;q]} \\ \left(\tilde{\mathbf{B}}' * \varphi_{m-1} \right)^{[2,j;q]} \\ \vdots \\ \left(\tilde{\mathbf{B}}' * \varphi_{m-1} \right)^{[r,j;q]} \end{bmatrix}$$

En particulier, les $\varphi_1^{[u,j;q]}$, $u \in \{1, \dots, r\}$, sont analytiques au voisinage de ω . Pour $m \geq 2$, la forme de $T_{m-1,j,q}$ au voisinage de ω est obtenue à l'aide de la proposition 2.14 et le comportement des $\varphi_m^{[u,j;q]}$ en ω s'en déduit alors aisément par les arguments du paragraphe 2.2.3.

La méthode du paragraphe 2.2.3 peut donc être généralisée sans problème, dans le cadre des systèmes de niveau unique r , au cas des singularités provenant d'un monôme. En remarquant que

$$\lambda_j - (u - 1) = 0 \Leftrightarrow (\lambda_j = 0 \text{ et } u = 1)$$

puisque $\text{Re}(\lambda_j) \in [0, 1[$ et $u \in \{1, \dots, r\}$, nous obtenons finalement le résultat suivant :

Proposition 4.7 *Soit $q \in \{1, \dots, n_1\}$. Pour tout $m \geq 1$, la $q^{\text{ème}}$ colonne $\varphi_m^{[q]}$ de φ_m a une singularité simple-ramifiée en ω d'exposants de ramification Λ_ω et d'ordres logarithmiques $(N_{\omega,0} + q, (N_{\omega,\lambda} + q)_{\lambda \in \Lambda_\omega})$ donnés par*

$$\Lambda_\omega = \left\{ \frac{\lambda_j}{r} - \frac{u-1}{r}; j \in \mathbb{N}_J^* \text{ et } u \in \mathbb{N}_r^* \text{ tels que } q_j \left(\frac{1}{x} \right) = -\frac{\omega}{x^r} \text{ et } (\lambda_j \neq 0 \text{ ou } u \neq 1) \right\}$$

$$N_{\omega,0} = \max \left(n_j - 2; j \in \mathbb{N}_J^* \text{ tel que } q_j \left(\frac{1}{x} \right) = -\frac{\omega}{x^r} \text{ et } \lambda_j = 0 \right)$$

$$N_{\omega,\lambda} = \max \left(n_j - 2; j \in \mathbb{N}_J^* \text{ tel que } q_j \left(\frac{1}{x} \right) = -\frac{\omega}{x^r} \text{ et } \exists u \in \mathbb{N}_r^* \text{ tel que } \frac{\lambda_j}{r} - \frac{u-1}{r} = \lambda \right)$$

Description de la singularité ω de $\tilde{\mathbf{f}}$

La démonstration du paragraphe 2.2.3 s'adapte sans changement. Grâce à la proposition 4.7, nous obtenons le théorème ci-dessous qui permet de décrire avec précision toutes les singularités de front monomial de $\tilde{\mathbf{f}}$.

Théorème 4.8 *Soit ω l'un des $a_{j,r} \neq 0$ de front monomial, i.e., tel que l'un (et donc tous) des polynômes q_j portant ω soit un monôme.*

Soit $q \in \{1, \dots, n_1\}$. La $q^{\text{ème}}$ colonne $\tilde{\mathbf{f}}^{[q]}$ de $\tilde{\mathbf{f}}$ a une singularité simple-ramifiée en ω :

modulo les fonctions analytiques à l'origine,

$$\tau_\omega \tilde{\mathbf{f}}^{[q]}(\tau) = \sum_{p=0}^{N_{\omega,0}+q} \frac{\alpha_{\omega,p}^{[q]}}{\tau} \log^p \tau + \sum_{p=1}^{N_{\omega,0}+q+1} \tilde{h}_{\omega,p}^{[q]}(\tau) \log^p \tau + \sum_{\lambda \in \Lambda_\omega} \sum_{p=0}^{N_{\omega,\lambda}+q} \left(\tilde{H}_{\omega,\lambda,p}^{[q]}(\tau) \log^p \tau \right) \tau^{\lambda-1}$$

où $\alpha_{\omega,p}^{[q]} \in M_{rn,1}(\mathbb{C})$, $\tilde{h}_{\omega,p}^{[q]}, \tilde{H}_{\omega,\lambda,p}^{[q]} \in M_{rn,1}(\mathbb{C}\{\tau\})$ et où les exposants de ramification Λ_ω et les ordres logarithmiques $(N_{\omega,0} + q, (N_{\omega,\lambda} + q)_{\lambda \in \Lambda_\omega})$ sont donnés par

$$\Lambda_\omega = \left\{ \frac{\lambda_j}{r} - \frac{u-1}{r}; j \in \mathbb{N}_J^* \text{ et } u \in \mathbb{N}_r^* \text{ tels que } q_j \left(\frac{1}{x} \right) = -\frac{\omega}{x^r} \text{ et } (\lambda_j \neq 0 \text{ ou } u \neq 1) \right\}$$

$$N_{\omega,0} = \max \left(n_j - 2; j \in \mathbb{N}_J^* \text{ tel que } q_j \left(\frac{1}{x} \right) = -\frac{\omega}{x^r} \text{ et } \lambda_j = 0 \right)$$

$$N_{\omega,\lambda} = \max \left(n_j - 2; j \in \mathbb{N}_J^* \text{ tel que } q_j \left(\frac{1}{x} \right) = -\frac{\omega}{x^r} \text{ et } \exists u \in \mathbb{N}_r^* \text{ tel que } \frac{\lambda_j}{r} - \frac{u-1}{r} = \lambda \right)$$

De plus, les coefficients de résurgence de $\tilde{\mathbf{f}}^{[q]}$ en ω sont des germes de fonctions analytiques prolongeables sans fin de support singulier les points $a_{j,r} - \omega$ et sont à croissance exponentielle d'ordre au plus un à l'infini.

Contrairement au cas des systèmes de niveau unique 1, il existe toujours dans l'écriture de $\tau_\omega \tilde{\mathbf{f}}$ des puissances non entières de τ , y compris lorsque la matrice des exposants de monodromie formelle L est triviale.

Rappelons encore une fois que cette étude n'a été rendue possible qu'en utilisant l'hypothèse fondamentale : ω est de front monomial, *i.e.*, l'un (et donc tous) des polynômes portant ω est réduit à un monôme. Cette hypothèse a permis de réduire le système à point singulier irrégulier (4.4) en r systèmes à point singulier régulier en ω et ceci a été suffisant pour appliquer les arguments du paragraphe 2.2.3. Dans le cas général, ceci n'a plus lieu d'être. La description de ω y est plus délicate et nécessite des outils plus puissants : les microfonctions.

4.3.2 Cas où la singularité ω n'est pas de front monomial

Quelques remarques sur l'étude de ω

★ La méthode précédente est difficilement applicable, puisque le système (4.4) est à présent un système à point singulier irrégulier. Une solution fondamentale de (4.4) est alors difficilement calculable et les produits de convolution $\tilde{\mathbf{B}}' * \varphi_{m-1}$ deviennent très compliqués à étudier.

Regardons pour commencer un exemple très simple :

Exemple : Le système différentiel linéaire

$$x^3 \frac{dY}{dx} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ x^4 & 2+x \end{bmatrix} Y$$

est de niveau unique 2 et admet pour solution fondamentale formelle $\widehat{Y}(x) = \widehat{F}(x)e^{Q(\frac{1}{x})}$ avec

$$\widehat{F}(x) = I_2 + O(x^4) \text{ et } Q\left(\frac{1}{x}\right) = \text{diag}\left(0, -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\right)$$

Précisément, nous voyons que la série formelle $\widehat{F}(x)$ s'écrit sous la forme

$$\widehat{F}(x) = I_2 + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \widehat{f}_1(x) & 0 \end{bmatrix}$$

où \widehat{f}_1 est l'unique solution série formelle en x vérifiant $\widehat{f}_1(x) = O(x^4)$ de l'équation

$$x^3 y' - (x+2)y = x^4$$

Ainsi, le facteur série formelle $\widehat{\mathbf{F}}$ de la solution fondamentale formelle 2-réduite associée à $\widehat{Y}(x)$ est de la forme

$$\widehat{\mathbf{F}}(t) = I_4 + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \widehat{f}_1^0(t) & 0 & t\widehat{f}_1^1(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \widehat{f}_1^1(t) & 0 & \widehat{f}_1^0(t) & 0 \end{bmatrix}$$

Son mineur $\widetilde{\mathbf{F}}$ est alors donné par $\widetilde{\mathbf{F}}(\tau) = \delta I_4 + \Phi(\tau)$, où

$$\Phi(\tau) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \phi_1(\tau) & 0 & \phi_3(\tau) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \phi_2(\tau) & 0 & \phi_4(\tau) & 0 \end{bmatrix} \in M_4(\tau\mathbb{C}\{\tau\})$$

est prolongeable sans fin, l'unique singularité de $\Phi(\tau)$ étant $\tau = 1$. Ne nous intéressant qu'à la première colonne de $\widetilde{\mathbf{F}}$, nous étudions uniquement le comportement de ϕ_1 et ϕ_2 au voisinage de $\tau = 1$. Grâce à l'équation $(\widetilde{\mathbf{1}}_\alpha)$ étudiée au paragraphe 4.2, nous savons que Φ vérifie l'équation

$$2\tau\Phi - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Phi + \Phi \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} * \Phi$$

$$+ \Phi * \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \tau & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau & 0 \end{bmatrix}$$

Ainsi, ϕ_1 et ϕ_2 satisfont au système

$$\begin{cases} (\tau - 1)\phi_1 - \frac{1}{2} * \phi_2 = \frac{\tau}{2} \\ (\tau - 1)\phi_2 - \frac{1}{2}\phi_1 + \frac{1}{2} * \phi_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \phi_1 = 2(\tau - 1)\phi_2 + 1 * \phi_2 \\ 2(\tau - 1)^2\phi_2 + \left(\tau - \frac{3}{2}\right) \cdot (1 * \phi_2) = \frac{\tau}{2} \end{cases}$$

Par conséquent, ϕ_1 est l'unique solution vérifiant $\phi_1(0) = 0$ de l'équation

$$4(\tau - 1)^2 y' + (6\tau - 7)y = 3\tau - 2$$

Nous obtenons alors en prenant la détermination principale du logarithme : pour tout $\tau \in \mathbb{C}$ tel que $\text{Re}(\tau) < 1$,

$$\phi_1(\tau) = (1 - \tau)^{-\frac{3}{2}} e^{\frac{1}{4(1-\tau)}} \int_0^\tau \frac{3\eta - 2}{\sqrt{1-\eta}} e^{-\frac{1}{4(1-\eta)}} d\eta$$

où le chemin $(0, \tau)$ est le segment $[0, \tau]$. Par suite,

$$\begin{aligned} \phi_1(\tau) = -\frac{3}{2} \left(\frac{2}{1-\tau} + \frac{{}_1F_1\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -\frac{1}{4(1-\tau)}\right)}{(1-\tau)^2} e^{\frac{1}{4(1-\tau)}} \right) \\ + \left(e^{-\frac{1}{4}} + \frac{3}{2} {}_1F_1\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -\frac{1}{4}\right) \right) (1-\tau)^{-\frac{3}{2}} e^{\frac{1}{4(1-\tau)}} + 2 \end{aligned}$$

où

$${}_1F_1\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -\frac{1}{4(1-\tau)}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)4^n(1-\tau)^n}$$

est la fonction hypergéométrique confluyente de paramètres $\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{2}$ évaluée en $-\frac{1}{4(1-\tau)}$. De même, nous montrons que ϕ_2 est l'unique solution vérifiant $\phi_2(0) = 0$ de l'équation

$$4(\tau - 1)^2(2\tau - 3)y' + (12\tau^2 - 36\tau + 25)y = -3$$

Ainsi, en prenant toujours la détermination principale du logarithme, nous avons pour tout $\tau \in \mathbb{C}$ tel que $\text{Re}(\tau) < 1$:

$$\phi_2(\tau) = -\frac{3}{4}(2\tau - 3)(1 - \tau)^{-\frac{5}{2}} e^{\frac{1}{4(1-\tau)}} \int_0^\tau \frac{\sqrt{1-\eta}}{(2\eta - 3)^2} e^{-\frac{1}{4(1-\eta)}} d\eta$$

où le chemin $(0, \tau)$ est le segment $[0, \tau]$.

Dans cet exemple, nous voyons apparaître la singularité essentielle $e^{\frac{1}{4(1-\tau)}}$ et la fonction hypergéométrique confluyente ${}_1F_1\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -\frac{1}{4(1-\tau)}\right)$.

Les exponentielles de la partie irrégulière de la solution fondamentale formelle 2-réduite associée à $\widehat{Y}(x)$ sont

$$\exp\left(-\frac{1}{t} \pm \frac{1}{t^{1/2}}\right)$$

et nous pouvons montrer (voir appendice 4.A) que les termes $e^{-\frac{1}{4\tau}}$ et ${}_1F_1\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; \frac{1}{4\tau}\right)$ sont donnés par les majeurs des exponentielles $e^{\pm \frac{1}{t^{1/2}}}$.

★ Une autre méthode possible pour étudier les singularités de front non monomial de $\tilde{\mathbf{f}}$ consiste à se ramener au cas précédent (paragraphe 4.3.1) en procédant à des changements algébriques de variable et de fonctions inconnues dans le système initial $[A]$. Nous avons en effet le résultat suivant :

Lemme 4.9 ([L-R90-1, page 186]) *Soit $p\left(\frac{1}{x}\right) \in x^{-1}\mathbb{C}[x^{-1}]$ un polynôme en x^{-1} sans terme constant et de degré d :*

$$p\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{a}{x^d} + \frac{b_{d-1}}{x^{d-1}} + \dots + \frac{b_1}{x}$$

Il existe un changement de variable

$$x = \frac{y}{1 + \alpha_1 y + \dots + \alpha_{d-1} y^{d-1}}, \quad \alpha_1, \dots, \alpha_{d-1} \in \mathbb{C}$$

tel que la partie polaire $P\left(\frac{1}{y}\right)$ de $p\left(\frac{1}{x(y)}\right)$ vérifie

$$P\left(\frac{1}{y}\right) = p\left(\frac{1}{x(y)}\right) = \frac{a}{y^d}$$

Ces changements algébriques ayant été effectués sur le système $[A]$, il s'agit de contrôler leurs actions lors du passage à la réduction du rang, puis lors de l'étude de la nouvelle transformée de Borel $\tilde{\mathbf{f}}$. Remarquer que ce changement de variable étant tangent à l'identité et résurgent, celui-ci n'affecte en rien la prolongeabilité sans fin du nouveau $\tilde{\mathbf{f}}$. Malheureusement, ces différentes étapes conduisant à des calculs lourds et compliqués, il est difficile de revenir au $\tilde{\mathbf{f}}$ initial. Toutefois, si cette démarche est difficilement applicable dans l'optique de ce paragraphe, elle nous sera en revanche très utile lors du calcul effectif des multiplicateurs de Stokes (voir paragraphe 5.2.4).

★ Nous n'utiliserons donc aucune des deux méthodes ci-dessus, puisque celles-ci n'apportent rien de précis dans l'étude de la singularité ω .

Une description suffisante de la singularité ω de $\tilde{\mathbf{f}}$ lorsque celle-ci provient d'un polynôme non réduit à un monôme peut être obtenue à l'aide de la théorie des micro-fonctions (cf. appendice 2.A). L'avantage de cette méthode sur les précédentes est de n'utiliser ni récurrence à l'aide de formules compliquées ni changement de variable sur le système initial $[A]$.

Réduction du système $[A]$ à une équation à coefficients polynomiaux (E)

Rappelons que le système r -réduit $[A]$ de $[A]$ est de la forme

$$rt^2 \frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \mathbf{A}(t)\mathbf{Y}$$

et que la solution fondamentale formelle r -réduite $\widehat{\mathbf{Y}}(t)$ associée à $\widehat{Y}(x)$ est

$$\widehat{\mathbf{Y}}(t) = \widehat{\mathbf{F}}(t) \widehat{\mathbf{Y}}_0(t) \text{ avec } \widehat{\mathbf{Y}}_0(t) = t^{\bigoplus_{k=0}^{r-1} \frac{L}{r} - \frac{k}{r} I_n} U_{r,n}(\bar{\rho}) \left(\bigoplus_{k=0}^{r-1} \rho^{kL} \right) e^{\bigoplus_{k=0}^{r-1} Q_k(\frac{1}{t})}$$

où

- $\widehat{\mathbf{F}}(t) = I_{rn} + O(t^2) \in M_{rn}(\mathbb{C}[[t]])$;
- $L = \bigoplus_{j=1}^J L_j$, chaque L_j étant un bloc de Jordan de L de dimension n_j et de valeur propre λ_j (avec $\lambda_1 = 0$) ;
- $Q_k(\frac{1}{t}) = Q(\frac{1}{\rho^k t^{1/r}})$ avec $Q(\frac{1}{x}) = \bigoplus_{j=1}^J q_j(\frac{1}{x}) I_{n_j}$, où $\deg(q_j) = r$ et $q_1 = 0$.

En appliquant successivement le lemme du vecteur cyclique ([D70]) et le théorème d'algébrisation de Birkhoff ([Bir13], [Si90]), nous obtenons l'existence d'une matrice $P \in GL_{rn}(\mathbb{C}\{t\}[\frac{1}{t}])$ telle que le système de jauge

$$[P^{-1}\mathbf{A}] \quad rt^2 \frac{d\mathbf{Z}}{dt} = (P^{-1}\mathbf{A}P - rt^2 P^{-1}P')\mathbf{Z}$$

obtenu par la transformation de jauge $\mathbf{Z} = P^{-1}\mathbf{Y}$ soit le système compagnon d'une équation différentielle linéaire (\mathbf{E}) d'ordre rn à coefficients polynomiaux. Une solution fondamentale formelle de cette équation est alors

$$\widehat{\mathbf{Z}}(t) = \widehat{\mathbf{G}}(t) \widehat{\mathbf{Y}}_0(t) \text{ avec } \widehat{\mathbf{G}}(t) = P^{-1}(t) \widehat{\mathbf{F}}(t)$$

En particulier, l'équation (\mathbf{E}) est de niveaux inférieurs ou égaux à 1. Elle est donc de type exponentiel et nous pouvons appliquer le théorème de J. Ecalle et B. Malgrange sur les microsolutions (théorème 2.33). Remarquer que P^{-1} étant méromorphe à l'origine, le facteur série formelle $\widehat{\mathbf{G}}$ est résurgent-sommable, et les singularités potentielles de la $j^{\text{ème}}$ colonne de sa transformée de Borel $\widetilde{\mathbf{G}}$ sont celles de la $j^{\text{ème}}$ colonne de $\widetilde{\mathbf{F}}$.

Comme pour les systèmes de niveau unique 1 (cf. appendice 2.A), l'étude des singularités de la transformée de Borel $\tilde{\mathbf{f}}$ des n_1 premières colonnes $\tilde{\mathbf{f}}$ de $\widehat{\mathbf{F}}$ s'obtient en étudiant la transformée de Borel des n_1 premières colonnes $\widehat{\mathbf{G}}_{1,1}$ de $\widehat{\mathbf{G}}$. Rappelons les différentes étapes nécessaires à notre étude : une réécriture convenable de la solution fondamentale formelle $\widehat{\mathbf{Z}}$ conduit à la détermination d'une base de solutions formelles de l'équation (\mathbf{E}), dont les séries formelles sont résurgentes-sommables. Le théorème d'Ecalle-Malgrange (théorème 2.33) permet alors d'obtenir une base de microsolutions de l'équation transformée de Borel de (\mathbf{E}). Finalement, une interprétation convenable du prolongement analytique de la transformée de Borel $\widetilde{\mathbf{G}}_{1,1}$ de $\widehat{\mathbf{G}}_{1,1}$ fournit une description des singularités de $\widetilde{\mathbf{G}}_{1,1}$, et donc aussi de celles de $\tilde{\mathbf{f}}$.

Détermination d'une base de solutions formelles de (\mathbf{E})

La matrice $\widehat{\mathbf{Y}}_0(t)$ est la matrice

$$\begin{bmatrix} t^{\frac{L}{r}} e^{Q_0(\frac{1}{t})} & t^{\frac{L}{r}} \rho^L e^{Q_1(\frac{1}{t})} & \dots & t^{\frac{L}{r}} \rho^{(r-1)L} e^{Q_{r-1}(\frac{1}{t})} \\ t^{\frac{L-I_n}{r}} e^{Q_0(\frac{1}{t})} & t^{\frac{L-I_n}{r}} \rho^{L-I_n} e^{Q_1(\frac{1}{t})} & \dots & t^{\frac{L-I_n}{r}} \rho^{(r-1)(L-I_n)} e^{Q_{r-1}(\frac{1}{t})} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t^{\frac{L-(r-1)I_n}{r}} e^{Q_0(\frac{1}{t})} & t^{\frac{L-(r-1)I_n}{r}} \rho^{L-I_n} e^{Q_1(\frac{1}{t})} & \dots & t^{\frac{L-(r-1)I_n}{r}} \rho^{(r-1)(L-(r-1)I_n)} e^{Q_{r-1}(\frac{1}{t})} \end{bmatrix}$$

Décomposons alors $\widehat{\mathbf{G}} = \left[\widehat{\mathbf{G}}_1 \ \cdots \ \widehat{\mathbf{G}}_r \right]$ en r blocs de colonnes de dimension $rn \times n$; puis découpons chacun des blocs $\widehat{\mathbf{G}}_u = \left[\widehat{\mathbf{G}}_{u,1} \ \cdots \ \widehat{\mathbf{G}}_{u,J} \right]$ en J blocs de colonnes : le nombre de colonnes de chaque bloc $\widehat{\mathbf{G}}_{u,j}$ est égal à la taille du $j^{\text{ème}}$ bloc de Jordan L_j de L , *i.e.*, $\widehat{\mathbf{G}}_{u,j}(t) \in M_{rn,n_j}(\mathbb{C}[[t]][\frac{1}{t}])$ pour tout $u \in \{1, \dots, r\}$.

Le système $[P^{-1}\mathbf{A}]$ étant le système compagnon de l'équation (\mathbf{E}) , seuls les premiers termes de chacune des colonnes des matrices $\widehat{\mathbf{G}}_{u,j}$ sont importants pour déterminer une base de solutions formelles de (\mathbf{E}) : pour tout $u \in \{1, \dots, r\}$, tout $j \in \{1, \dots, J\}$ et tout $q \in \{1, \dots, n_j\}$, nous notons $\widehat{\mathbf{g}}_{u,j,q}$ le premier terme de la $q^{\text{ème}}$ colonne de la matrice $\widehat{\mathbf{G}}_{u,j}$; et, quitte à multiplier par une puissance de t convenable, nous supposons que $\widehat{\mathbf{g}}_{u,j,q}$ est un élément de $\mathbb{C}[[t]]$. Précisément, la série formelle $\widehat{\mathbf{g}}_{u,j,q}$ est résurgente-sommable de support singulier les points $a_{\ell,r} - a_{j,r} \neq 0$.

Une base de solutions formelles de l'équation (\mathbf{E}) est alors de la forme $(\widehat{\mathbf{z}}_1, \dots, \widehat{\mathbf{z}}_r)$ avec

$$\widehat{\mathbf{z}}_u = (\widehat{\mathbf{z}}_{u,1,1}, \dots, \widehat{\mathbf{z}}_{u,1,n_1}, \widehat{\mathbf{z}}_{u,2,1}, \dots, \widehat{\mathbf{z}}_{u,J,1}, \dots, \widehat{\mathbf{z}}_{u,J,n_J})$$

où, pour tout $u \in \{1, \dots, r\}$, tout $j \in \{1, \dots, J\}$ et tout $q \in \{1, \dots, n_j\}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \widehat{\mathbf{z}}_{u,j,q}(t) = \sum_{\ell=1}^q \widehat{\mathbf{h}}_{u,j,\ell}(t) t^{\frac{\lambda_j}{r}} \rho^{(u-1)\lambda_j} \frac{\log^{q-\ell}(\rho^{u-1}t^{1/r})}{(q-\ell)!} e^{q_j\left(\frac{1}{\rho^{u-1}t^{1/r}}\right)} \\ \text{avec} \\ \widehat{\mathbf{h}}_{u,j,\ell}(t) = \widehat{\mathbf{g}}_{1,j,\ell}(t) + (\rho^{u-1}t^{1/r})^{-1} \widehat{\mathbf{g}}_{2,j,\ell}(t) + \dots + (\rho^{u-1}t^{1/r})^{-(r-1)} \widehat{\mathbf{g}}_{r,j,\ell}(t) \end{array} \right.$$

Recherche d'une base de microsolutions de l'équation transformée de Borel de (\mathbf{E})

Les singularités de l'équation transformée de Borel $(\widetilde{\mathbf{E}})$ de (\mathbf{E}) sont les points $\tau = a_{j,r}$ avec $j \in \{1, \dots, J\}$. A chacune des solutions formelles $\widehat{\mathbf{z}}_{u,j,q}$ correspond une microsolution de $(\widetilde{\mathbf{E}})$ au point $a_{j,r}$ (corollaire 2.34) définie par $\text{can}(\widetilde{\Phi}_{a_{j,r},u,q})$ avec

$$\widetilde{\Phi}_{a_{j,r},u,q} = \tau_{-a_{j,r}} \text{maj} \left(\sum_{\ell=1}^q \widehat{\mathbf{h}}_{u,j,\ell}(t) t^{\frac{\lambda_j}{r}} \rho^{(u-1)\lambda_j} \frac{\log^{q-\ell}(\rho^{u-1}t^{1/r})}{(q-\ell)!} e^{\check{q}_j\left(\frac{1}{\rho^{u-1}t^{1/r}}\right)} \right)$$

Cette microsolution est une microsolution de la classe de Nilsson en $a_{j,r}$ si et seulement si $\check{q}_j = 0$. Lorsque $\check{q}_j \neq 0$, nous écrivons $\widetilde{\Phi}_{a_{j,r},u,q}$ sous la forme

$$\begin{aligned} \widetilde{\Phi}_{a_{j,r},u,q} &= \tau_{-a_{j,r}} \left(\text{maj} \left(\sum_{\ell=1}^q \widehat{\mathbf{h}}_{u,j,\ell}(t) t^{\frac{\lambda_j}{r}} \rho^{(u-1)\lambda_j} \frac{\log^{q-\ell}(\rho^{u-1}t^{1/r})}{(q-\ell)!} \right) \otimes \text{maj} \left(e^{\check{q}_j\left(\frac{1}{\rho^{u-1}t^{1/r}}\right)} \right) \right) \\ &= \tau_{-a_{j,r}} \left(\mathcal{N}_{u,j,q} \otimes \text{maj} \left(e^{\check{q}_j\left(\frac{1}{\rho^{u-1}t^{1/r}}\right)} \right) \right) \end{aligned}$$

où

$$\mathcal{N}_{u,j,q} = \text{maj} \left(\sum_{\ell=1}^q \widehat{\mathbf{h}}_{u,j,\ell}(t) t^{\frac{\lambda_j}{r}} \rho^{(u-1)\lambda_j} \frac{\log^{q-\ell}(\rho^{u-1} t^{1/r})}{(q-\ell)!} \right) \in \text{Nil}_0$$

Précisément, le théorème 1.32 montre que $\mathcal{N}_{u,j,q}$ est prolongeable sans fin de support singulier les points $a_{\ell,r} - a_{j,r} \neq 0$ et est à croissance exponentielle d'ordre au plus un. En effet, les mineurs $\tilde{\mathbf{g}}_{u,j,q}$ sont prolongeables sans fin et leurs singularités sont les points $a_{\ell,r} - a_{j,r} \neq 0$. Plus précisément, lorsque nous écrivons $\mathcal{N}_{u,j,q}$ sous la forme

$$\mathcal{N}_{u,j,q}(\tau) =$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \sum_{p=0}^{q-1} \alpha_{1,j,p} \frac{\log^p \tau}{\tau} + \sum_{p=1}^q \tilde{\varphi}_{1,j,p}(\tau) \log^p \tau + \sum_{\lambda \in \left\{ -\frac{v-1}{r} - 1 \right\}_{2 \leq v \leq r}} \sum_{p=0}^{q-1} \tilde{\varphi}_{u,\lambda,p}(\tau) \tau^\lambda \log^p \tau & \text{si } \lambda_j = 0 \\ \sum_{\lambda \in \left\{ \frac{\lambda_j}{r} - \frac{v-1}{r} - 1 \right\}_{1 \leq v \leq r}} \sum_{p=0}^{q-1} \tilde{\varphi}_{u,\lambda,p}(\tau) \tau^\lambda \log^p \tau & \text{si } \lambda_j \neq 0 \end{array} \right.$$

avec $\tilde{\varphi}_{u,*,p}$ analytique à l'origine (cf. exemple 1.22), le théorème 1.32 affirme que les fonctions $\tilde{\varphi}_{u,*,p}$ sont également prolongeables sans fin de support singulier les points $a_{\ell,r} - a_{j,r}$ et sont à croissance exponentielle d'ordre au plus un à l'infini.

Dans tous les cas, une base de microsolutions en une singularité ω de $(\tilde{\mathbf{E}})$ est donnée par

$$\left(\text{can}(\tilde{\mathbf{\Phi}}_{a_{j,r},u,q}); 1 \leq u \leq r, 1 \leq q \leq n_j \right)_{j; a_{j,r} = \omega}.$$

Suivant la remarque donnée au début du paragraphe 4.3, nous notons \tilde{q}_ω le polynôme défini par

$$q_j \left(\frac{1}{x} \right) = -\frac{\omega}{x^r} + \tilde{q}_\omega \left(\frac{1}{x} \right)$$

pour tout $j \in \{1, \dots, J\}$ tel que $a_{j,r} = \omega$. Ainsi, une microsolution $\mathbf{\Phi}$ de $(\tilde{\mathbf{E}})$ en ω est un élément de Nil_ω (microfonction de la classe de Nilsson en ω) si et seulement si $\tilde{q}_\omega = 0$. Lorsque $\tilde{q}_\omega \neq 0$, nous choisissons un représentant $\tilde{\mathbf{\Phi}} \in \tilde{\mathcal{O}}_\omega$ de $\mathbf{\Phi}$, i.e., tel que $\text{can}(\tilde{\mathbf{\Phi}}) = \mathbf{\Phi}$, et, modulo les fonctions analytiques à l'origine, nous pouvons écrire $\tau_\omega \tilde{\mathbf{\Phi}}$ sous la forme

$$\tau_\omega \tilde{\mathbf{\Phi}} = \sum_{k=0}^{r-1} \tilde{\mathbf{\Phi}}_k \otimes \text{maj} \left(e^{\tilde{q}_\omega \left(\frac{1}{\rho^k t^{1/r}} \right)} \right)$$

avec $\tilde{\mathbf{\Phi}}_k$ élément de Nil_0 vérifiant la propriété (\mathcal{P}_ω) suivante : les $\tilde{\mathbf{\Phi}}_k$ peuvent être écrits sous la forme

$$\tilde{\mathbf{\Phi}}_k(\tau) = \sum_{\text{finie}} \tilde{\varphi}_{k,\lambda,p}(\tau) \tau^\lambda \log^p \tau$$

où $\lambda \in \mathbb{C}$, $p \in \mathbb{N}$ et où les fonctions analytiques à l'origine $\tilde{\varphi}_{k,\lambda,p}$ sont prolongeables sans fin de support singulier les points $a_{j,r} - \omega$ et sont à croissance exponentielle d'ordre au plus un à l'infini.

Fixons à présent une singularité $\omega = a_{j,r}$ de $\tilde{\mathbf{f}}$ de front non monomial, *i.e.*, tel que l'un (et donc tous) des polynômes q_j portant ω soit non réduit à un monôme (nous avons donc $\check{q}_\omega \neq 0$). Etudions le prolongement analytique de $\tilde{\mathbf{G}}_{1,1}$ au voisinage de ω :

Prolongement analytique en ω de la première colonne $\tilde{\mathbf{G}}_{1,1,1}$ de $\tilde{\mathbf{G}}_{1,1}$

Le système $[P^{-1}\mathbf{A}]$ étant le système compagnon de l'équation (\mathbf{E}) , la première colonne de la solution fondamentale formelle $\widehat{\mathbf{Z}}(t)$ est

$$\begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{z}}_{1,1,1} \\ \vdots \\ \frac{d^{rn}\widehat{\mathbf{z}}_{1,1,1}}{dt^{rn}} \end{bmatrix}$$

avec

$$\widehat{\mathbf{z}}_{1,1,1}(t) = \widehat{\mathbf{h}}_{1,1,1}(t) = \widehat{\mathbf{g}}_{1,1,1}(t) + t^{-1/r}\widehat{\mathbf{g}}_{2,1,1}(t) + \dots + t^{-(r-1)/r}\widehat{\mathbf{g}}_{r,1,1}(t)$$

Ainsi, la première colonne $\widehat{\mathbf{G}}_{1,1,1}$ de $\widehat{\mathbf{G}}_{1,1}$ est

$$\begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{g}}_{1,1,1} \\ \vdots \\ \frac{d^{rn}\widehat{\mathbf{g}}_{1,1,1}}{dt^{rn}} \end{bmatrix}$$

Le majeur $maj(\widehat{\mathbf{z}}_{1,1,1})$ étant une microsolution à l'origine de $(\tilde{\mathbf{E}})$, sa variation

$$\widetilde{\mathbf{h}}_{1,1,1} = \widetilde{\mathbf{g}}_{1,1,1} + t^{-1/r}\widetilde{\mathbf{g}}_{2,1,1} + \dots + t^{-(r-1)/r}\widetilde{\mathbf{g}}_{r,1,1}$$

est une solution de $(\tilde{\mathbf{E}})$. Son prolongement analytique au voisinage de ω définit donc une microsolution en ω de $(\tilde{\mathbf{E}})$. Ainsi, modulo les fonctions analytiques à l'origine, nous pouvons écrire

$$\tau_\omega \widetilde{\mathbf{h}}_{1,1,1} = \sum_{k=0}^{r-1} \widetilde{\Phi}_{k,1} \otimes maj \left(e^{\check{q}_\omega \left(\frac{1}{\rho^k t^{1/r}} \right)} \right)$$

où, pour tout $k \in \{0, \dots, r-1\}$, $\widetilde{\Phi}_{k,1}$ est un élément de Nil_0 vérifiant la propriété (\mathcal{P}_ω) . Le même raisonnement appliqué aux

$$\widehat{\mathbf{z}}_{u,1,1}(t) = \widehat{\mathbf{h}}_{u,1,1}(t) = \widehat{\mathbf{g}}_{1,1,1}(t) + (\rho^{u-1}t^{1/r})^{-1}\widehat{\mathbf{g}}_{2,1,1}(t) + \dots + (\rho^{u-1}t^{1/r})^{-(r-1)}\widehat{\mathbf{g}}_{r,1,1}(t)$$

avec $u \in \{2, \dots, r\}$ nous permet, modulo les fonctions analytiques à l'origine, d'écrire $\tau_\omega \widetilde{\mathbf{h}}_{u,1,1}$ sous la forme

$$\tau_\omega \widetilde{\mathbf{h}}_{u,1,1} = \sum_{k=0}^{r-1} \widetilde{\Phi}_{k,u} \otimes maj \left(e^{\check{q}_\omega \left(\frac{1}{\rho^k t^{1/r}} \right)} \right)$$

avec $\widetilde{\Phi}_{k,u}$ élément de Nil_0 vérifiant la propriété (\mathcal{P}_ω) pour tout $k \in \{0, \dots, r-1\}$ et tout $u \in \{2, \dots, r\}$.

Nous obtenons ainsi, modulo les fonctions analytiques à l'origine, le système

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_\omega \tilde{\mathbf{g}}_{1,1,1} + \tau_\omega \left(t^{-1/r} \widetilde{\mathbf{g}}_{2,1,1} \right) + \dots + \tau_\omega \left(t^{-(r-1)/r} \widetilde{\mathbf{g}}_{r,1,1} \right) = \sum_{k=0}^{r-1} \tilde{\Phi}_{k,1} \otimes \text{maj} \left(e^{\check{q}_\omega \left(\frac{1}{\rho^k t^{1/r}} \right)} \right) \\ \tau_\omega \tilde{\mathbf{g}}_{1,1,1} + \bar{\rho} \tau_\omega \left(t^{-1/r} \widetilde{\mathbf{g}}_{2,1,1} \right) + \dots + \bar{\rho}^{r-1} \tau_\omega \left(t^{-(r-1)/r} \widetilde{\mathbf{g}}_{r,1,1} \right) = \sum_{k=0}^{r-1} \tilde{\Phi}_{k,2} \otimes \text{maj} \left(e^{\check{q}_\omega \left(\frac{1}{\rho^k t^{1/r}} \right)} \right) \\ \vdots \\ \tau_\omega \tilde{\mathbf{g}}_{1,1,1} + \bar{\rho}^{r-1} \tau_\omega \left(t^{-1/r} \widetilde{\mathbf{g}}_{2,1,1} \right) + \dots + \bar{\rho}^{(r-1)^2} \tau_\omega \left(t^{-(r-1)/r} \widetilde{\mathbf{g}}_{r,1,1} \right) = \sum_{k=0}^{r-1} \tilde{\Phi}_{k,r-1} \otimes \text{maj} \left(e^{\check{q}_\omega \left(\frac{1}{\rho^k t^{1/r}} \right)} \right) \end{array} \right.$$

dont la matrice est la matrice de van der Monde

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \bar{\rho} & \dots & \bar{\rho}^{r-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \bar{\rho}^{r-1} & \dots & \bar{\rho}^{(r-1)(r-1)} \end{bmatrix}$$

Par suite, nous obtenons, modulo les fonctions analytiques à l'origine :

$$\tau_\omega \tilde{\mathbf{g}}_{1,1,1} = \sum_{k=0}^{r-1} \tilde{\Phi}_k \otimes \text{maj} \left(e^{\check{q}_\omega \left(\frac{1}{\rho^k t^{1/r}} \right)} \right)$$

avec $\tilde{\Phi}_k$ élément de Nil_0 vérifiant (\mathcal{P}_ω) pour tout $k \in \{0, \dots, r-1\}$. L'algèbre Nil_0 et la propriété (\mathcal{P}_ω) étant stables par dérivation, cette écriture s'étend à $\tilde{\mathbf{G}}_{1,1,1}$ tout entier, puisque les différents termes de $\tilde{\mathbf{G}}_{1,1,1}$ sont obtenus à l'aide de la relation classique

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathcal{B} \left(\frac{d^k \widehat{\mathbf{g}}_{1,1,1}}{dt^k} \right) = \frac{d^{k+1}}{d\tau^{k+1}} \left(\tau^k \frac{d^{k-1} \tilde{\mathbf{g}}_{1,1,1}}{d\tau^{k-1}} \right)$$

En effet, à $t^{k+1} \frac{d^k}{dt^k}$ correspond $\tau^k \frac{d^{k-1}}{d\tau^{k-1}}$ par transformation de Borel.

Description de la singularité ω de $\tilde{\mathbf{f}}$

L'étude du prolongement analytique au voisinage de ω de la première colonne $\tilde{\mathbf{G}}_{1,1,1}$ de $\tilde{\mathbf{G}}_{1,1}$ généralise celle donnée au paragraphe 2.A.3 dans le cadre des systèmes de niveau unique 1. Ainsi, en reprenant les arguments du paragraphe 2.A.3 pour l'étude des autres colonnes de $\tilde{\mathbf{G}}_{1,1}$, nous obtenons finalement le résultat suivant permettant d'explicitier la nature de toutes les singularités de front non monomial de $\tilde{\mathbf{f}}$:

Proposition 4.10 *Soit ω l'un des $a_{j,r} \neq 0$ de front non monomial, i.e., tel que l'un (et donc tous) des polynômes q_j portant ω ne soit pas un monôme. Notons \check{q}_ω le polynôme défini par*

$$q_j \left(\frac{1}{x} \right) = -\frac{\omega}{x^r} + \check{q}_\omega \left(\frac{1}{x} \right)$$

pour tout $j \in \{1, \dots, J\}$ tel que $q_j \in Fr(\omega)$. Alors, pour tout $q \in \{1, \dots, n_1\}$, $\tau_\omega \tilde{f}^{[q]}$ peut être écrit, localement au voisinage de 0 et modulo les fonctions analytiques à l'origine, sous la forme

$$\tau_\omega \tilde{f}^{[q]}(\tau) = \sum_{k=0}^{r-1} \left(\tilde{\varphi}_{\omega,k}^{[q]} \otimes \text{maj} \left(e^{\check{q}_\omega \left(\frac{1}{\rho^k t^{1/r}} \right)} \right) \right) (\tau)$$

où, pour tout $k \in \{0, \dots, r-1\}$, $\tilde{\varphi}_{\omega,k}^{[q]}$ est une fonction de la classe de Nilsson en 0 vérifiant la propriété (\mathcal{P}_ω) .

Précisons à présent ce résultat en cherchant dans quels cas les polynômes $\check{q}_\omega \left(\frac{1}{\rho^k t^{1/r}} \right)$ peuvent être égaux.

Etude des polynômes $\check{q}_\omega \left(\frac{1}{\rho^k t^{1/r}} \right)$, $k \in \{0, \dots, r-1\}$

Un entier $k \in \{0, \dots, r-1\}$ étant fixé, nous cherchons un critère simple permettant de déterminer tous les entiers $k' \in \{0, \dots, r-1\}$ distincts de k tel que

$$\check{q}_\omega \left(\frac{1}{\rho^k t^{1/r}} \right) = \check{q}_\omega \left(\frac{1}{\rho^{k'} t^{1/r}} \right)$$

Posons

$$\check{q}_\omega \left(\frac{1}{x} \right) = \sum_{j \in \text{supp}(\check{q}_\omega)} \frac{\alpha_j}{x^j}$$

où $\text{supp}(\check{q}_\omega)$ désigne le support du polynôme \check{q}_ω :

Définition 4.11 Si

$$P \left(\frac{1}{x} \right) = \frac{\alpha_p}{x^p} + \frac{\alpha_{p-1}}{x^{p-1}} + \dots + \frac{\alpha_1}{x}$$

est un élément de $x^{-1}\mathbb{C}[x^{-1}]$, nous appelons *support* du polynôme P l'ensemble $\text{supp}(P)$ défini par

$$\text{supp}(P) = \{j \in \{1, \dots, p\} \text{ tels que } \alpha_j \neq 0\}$$

En particulier, le plus grand élément de $\text{supp}(P)$ est le degré du polynôme P .

Par définition de \check{q}_ω , les éléments j de $\text{supp}(\check{q}_\omega)$ vérifient $j \leq r-1$. Fixons à présent deux éléments k et k' de $\{0, \dots, r-1\}$ tels que

$$k \leq k' \text{ et } \check{q}_\omega \left(\frac{1}{\rho^k t^{1/r}} \right) = \check{q}_\omega \left(\frac{1}{\rho^{k'} t^{1/r}} \right)$$

Nous avons alors

$$(4.10) \quad r|(k' - k)j \text{ pour tout } j \in \text{supp}(\check{q}_\omega)$$

et nous posons

$$\mathfrak{p} = \text{pgcd}(j \in \text{supp}(\check{q}_\omega), r)$$

le pgcd de r et des éléments du support de \check{q}_ω . En particulier, $\mathfrak{p} < r$.

– si $\mathfrak{p} = 1$, le théorème de Bezout montre que r divise $k' - k$. Les entiers k et k' sont donc égaux puisqu'ils appartiennent à l'ensemble $\{0, \dots, r - 1\}$.

– si $\mathfrak{p} > 1$, la relation (4.10) montre que r divise $(k' - k)\mathfrak{p}$. L'entier $\mathfrak{r} = \frac{r}{\mathfrak{p}}$ divise donc $k' - k$. Par conséquent, k' est de la forme

$$k' = k + \mathfrak{r}\ell \text{ avec } \ell \in \{0, \dots, \mathfrak{p} - 1\}$$

Nous obtenons finalement le résultat suivant :

Lemme 4.12 *Soient $\text{supp}(\check{q}_\omega)$ le support du polynôme \check{q}_ω , $\mathfrak{p} = \text{pgcd}(j \in \text{supp}(\check{q}_\omega), r)$ et \mathfrak{r} l'élément de $\{2, \dots, r\}$ défini par $\mathfrak{r} = \frac{r}{\mathfrak{p}}$. Alors,*

1. *Les \mathfrak{r} polynômes*

$$\check{q}_\omega \left(\frac{1}{\rho^k t^{1/r}} \right), \quad k \in \{0, \dots, \mathfrak{r} - 1\}$$

sont distincts deux à deux.

2. *Pour $k \in \{0, \dots, \mathfrak{r} - 1\}$, il existe exactement \mathfrak{p} polynômes égaux à $\check{q}_\omega \left(\frac{1}{\rho^k t^{1/r}} \right)$. Il s'agit des polynômes*

$$\check{q}_\omega \left(\frac{1}{\rho^{k'} t^{1/r}} \right)$$

avec k' de la forme $k' = k + \ell\mathfrak{r}$, $\ell \in \{0, \dots, \mathfrak{p} - 1\}$.

Corollaire 4.13 *Si r est premier avec un élément du support de \check{q}_ω (et en particulier si r est un nombre premier), les polynômes $\check{q}_\omega \left(\frac{1}{\rho^k t^{1/r}} \right)$, $k \in \{0, \dots, r - 1\}$, sont distincts deux à deux.*

Application à l'étude des singularités de $\tilde{\mathbf{f}}^{[;q]}$:

Les résultats du lemme 4.12 nous permettent de préciser la proposition 4.10 donnant la nature des singularités ω de front non monomial de $\tilde{\mathbf{f}}^{[;q]}$:

Théorème 4.14 *Soit ω l'un des $a_{j,r} \neq 0$ de front non monomial, i.e., tel que l'un (et donc tous) des polynômes q_j portant ω ne soit pas un monôme. Notons \check{q}_ω le polynôme défini par*

$$q_j \left(\frac{1}{x} \right) = -\frac{\omega}{x^r} + \check{q}_\omega \left(\frac{1}{x} \right)$$

pour tout $j \in \{1, \dots, J\}$ tel que $q_j \in Fr(\omega)$.

Soient $\text{supp}(\check{q}_\omega)$ le support du polynôme \check{q}_ω ,

$$\mathfrak{p} = \text{pgcd}(j \in \text{supp}(\check{q}_\omega), r)$$

et \mathfrak{r} l'élément de $\{2, \dots, r\}$ défini par $\mathfrak{r} = \frac{r}{\mathfrak{p}}$.

Alors, pour tout $q \in \{1, \dots, n_1\}$, $\tau_\omega \tilde{\mathbf{f}}^{[q]}$ peut être écrit, localement au voisinage de 0 et modulo les fonctions analytiques à l'origine, sous la forme

$$\tau_\omega \tilde{\mathbf{f}}^{[q]}(\tau) = \sum_{k=0}^{\mathfrak{r}-1} \left(\tilde{\varphi}_{\omega,k}^{[q]} \otimes \text{maj} \left(e^{\tilde{q}_\omega \left(\frac{1}{\rho^k t^{1/r}} \right)} \right) \right) (\tau)$$

où, pour tout $k \in \{0, \dots, \mathfrak{r} - 1\}$, $\tilde{\varphi}_{\omega,k}^{[q]}$ est une fonction de la classe de Nilsson en 0 vérifiant la propriété (\mathcal{P}_ω) .

Nous donnerons une version plus fine de ce résultat au paragraphe suivant (théorème 4.17) en précisant la nature de l'origine pour les $\tilde{\varphi}_{\omega,k}^{[q]}$. Noter que cet énoncé reste également valable pour les singularités de front monomial : nous avons en effet $\tilde{q}_\omega = 0$ et

$$\text{maj}(1) = \frac{1}{2\pi i \tau}$$

définit l'élément unité du produit de convolution \otimes . Nous retrouvons ainsi le fait que, alors, $\tilde{\mathbf{f}}$ est un élément de Nil_ω . Mais, comme pour les systèmes de niveau unique 1 (cf. théorème 2.23 et appendice 2.A), ce résultat est nettement moins précis que celui du théorème 4.8.

Revenons à présent à l'étude de la singularité ω lorsque celle-ci est de front non monomial, *i.e.*, lorsque $\tilde{q}_\omega \neq 0$. Rappelons que nous avons choisi pour majeur

$$\text{maj} \left(e^{\tilde{q}_\omega \left(\frac{1}{\rho^k t^{1/r}} \right)} \right)$$

des exponentielles $e^{\tilde{q}_\omega \left(\frac{1}{\rho^k t^{1/r}} \right)}$ des fonctions holomorphes sur la surface de Riemann \mathbb{C}_∞ du logarithme. La description des singularités de $\tilde{\mathbf{f}}$ donnée au théorème 4.14 à l'aide de ces majeurs est suffisante pour déterminer de façon théorique les multiplicateurs de Stokes. Toutefois, nous verrons au chapitre 5 que ce résultat est difficilement applicable aux calculs effectifs des multiplicateurs de Stokes associés aux singularités de front non monomial : suivant la méthode du chapitre 3 pour les systèmes de niveau unique 1, nous déterminons un système $[S_\omega]$ à point singulier irrégulier en ω vérifié par le prolongement analytique de

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{f}} \\ \tilde{\mathbf{f}}' \\ \vdots \\ \frac{d^k \tilde{\mathbf{f}}}{d\tau^k} \end{bmatrix}$$

pour un certain $k \in \mathbb{N}^*$. Il est alors possible de montrer que les exponentielles de la partie irrégulière d'une solution fondamentale formelle quelconque de $[S_\omega]$ sont les

exponentielles apparaissant dans les développements trans-asymptotiques des majeurs $maj \left(e^{\check{q}\omega \left(\frac{1}{\rho^k t^{1/r}} \right)} \right)$ (voir chapitre 5). Précisément, ces exponentielles sont de la forme $e^{P \left(\frac{1}{\tau^{1/\nu}} \right)}$, où ν est un entier naturel non nul et $P(\tau)$ un polynôme en τ sans terme constant (voir appendice 4.A).

4.4 Calcul des multiplicateurs de Stokes

4.4.1 Matrices de Stokes et réduction du rang

Comme pour les systèmes de niveau unique 1, nous orientons le cercle \mathbb{S}^1 des directions dans le sens des aiguilles d'une montre et nous prenons tous les arguments dans $] -2\pi, 0]$ afin que nos calculs soient compatibles avec les calculs classiques au voisinage de l'infini lorsque l'orientation de \mathbb{S}^1 est dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. La terminologie gauche-droite reste la même qu'au paragraphe 2.3.

Nous établissons ici le lien existant entre les multiplicateurs de Stokes associés à la solution fondamentale formelle initiale \hat{Y} (plan des x) et les prolongements analytiques de la transformée de Borel \tilde{F} en ses singularités (plan des τ).

Rappelons que la solution fondamentale formelle initiale \hat{Y} est de la forme

$$\hat{Y}(x) = \hat{F}(x)x^L e^{Q(\frac{1}{x})}$$

où

- ★ \hat{F} est un élément de $M_n(\mathbb{C}[[x]])$ normalisé à $\hat{F}(x) = I_n + O(x^{2r})$;
- ★ L est la matrice des exposants de monodromie formelle normalisée à $L = \bigoplus_{j=1}^J L_j$, où chaque L_j est un bloc de Jordan de L de dimension n_j associé à la valeur propre λ_j avec $\lambda_1 = 0$ et $\text{Re}(\lambda_j) \in [0, 1[$;
- ★ $Q(\frac{1}{x}) = \bigoplus_{j=1}^J q_j(\frac{1}{x})I_{n_j}$ où $q_1 = 0$ et

$$q_j \left(\frac{1}{x} \right) = -\frac{a_{j,r}}{x^r} + \check{q}_j \left(\frac{1}{x} \right) \text{ avec } \check{q}_j \left(\frac{1}{x} \right) = -\frac{a_{j,r-1}}{x^{r-1}} - \dots - \frac{a_{j,1}}{x}$$

D'autre part, la solution fondamentale formelle r -réduite \hat{Y} (plan des t) est

$$\hat{Y}(t) = \hat{F}(t)\hat{Y}_0(t)$$

où $\hat{F}(t) = I_{rn} + O(t^2)$ est la série r -réduite de \hat{F} et où \hat{Y}_0 est défini par

$$\hat{Y}_0(t) = t^{\bigoplus_{k=0}^{r-1} \frac{L}{r} - \frac{k}{r} I_n} U_{r,n}(\bar{\rho}) \left(\bigoplus_{k=0}^{r-1} \rho^{kL} \right) e^{\bigoplus_{k=0}^{r-1} Q_k(\frac{1}{t})}$$

$$= \begin{bmatrix} t^{\frac{L}{r}} e^{Q_0(\frac{1}{t})} & t^{\frac{L}{r}} \rho^L e^{Q_1(\frac{1}{t})} & \dots & t^{\frac{L}{r}} \rho^{(r-1)L} e^{Q_{r-1}(\frac{1}{t})} \\ t^{\frac{L-I_n}{r}} e^{Q_0(\frac{1}{t})} & t^{\frac{L-I_n}{r}} \rho^{L-I_n} e^{Q_1(\frac{1}{t})} & \dots & t^{\frac{L-I_n}{r}} \rho^{(r-1)(L-I_n)} e^{Q_{r-1}(\frac{1}{t})} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t^{\frac{L-(r-1)I_n}{r}} e^{Q_0(\frac{1}{t})} & t^{\frac{L-(r-1)I_n}{r}} \rho^{L-I_n} e^{Q_1(\frac{1}{t})} & \dots & t^{\frac{L-(r-1)I_n}{r}} \rho^{(r-1)(L-(r-1)I_n)} e^{Q_{r-1}(\frac{1}{t})} \end{bmatrix}$$

avec $Q_k(\frac{1}{t}) = Q(\frac{1}{\rho^k t^{1/r}})$.

Pour tout couple fixé (q_j, q_ℓ) de polynômes distincts, *i.e.*, tels que $a_{j,r} - a_{\ell,r} \neq 0$ (le système est de niveau unique), les directions anti-Stokes associées au polynôme

$$(q_j - q_\ell) \left(\frac{1}{x} \right) = -\frac{a_{j,r} - a_{\ell,r}}{x^r} + O\left(\frac{1}{x^{r-1}} \right)$$

sont les r directions

$$0 \geq \theta > \theta - \frac{2\pi}{r} > \dots > \theta - \frac{2(r-1)\pi}{r} > -2\pi$$

régulièrement distribuées autour de l'origine $x = 0$ pour lesquelles $-\frac{a_{j,r} - a_{\ell,r}}{x^r} \in \mathbb{R}_*^*$. En particulier, nous prenons

$$\theta = \frac{\arg(a_{j,r} - a_{\ell,r})}{r} \in \left] -\frac{2\pi}{r}, 0 \right]$$

Pour tout $k \in \{0, \dots, r-1\}$, nous notons

$$C_{\theta,k} = C_{\theta - \frac{2k\pi}{r}}$$

la matrice de Stokes associée à la solution fondamentale formelle $\widehat{Y}(x)$ dans la direction $\theta - \frac{2k\pi}{r}$, *i.e.*, l'unique matrice telle que

$$Y_{(\theta - \frac{2k\pi}{r})^-} = Y_{(\theta - \frac{2k\pi}{r})^+} (I_n + C_{\theta,k})$$

Le passage à la réduction du rang permet de regrouper les r directions $\theta - \frac{2k\pi}{r}$ en une seule direction

$$\boldsymbol{\theta} = r\theta \in \left] -2\pi, 0 \right]$$

La matrice de Stokes \mathbf{C}_θ associée à la solution fondamentale formelle r -réduite $\widehat{\mathbf{Y}}(t)$ dans la direction $\boldsymbol{\theta}$ est définie par

$$(4.11) \quad \mathbf{Y}_{\boldsymbol{\theta}^-} = \mathbf{Y}_{\boldsymbol{\theta}^+} (I_{rn} + \mathbf{C}_\theta)$$

Proposition 4.15 ([L-R01, proposition 4.2]) *Avec les notations précédentes,*

$$\mathbf{C}_\theta = \bigoplus_{k=0}^{r-1} C_{\theta,k}$$

Les sommes $\mathbf{Y}_{\boldsymbol{\theta}^\pm}$ de $\widehat{\mathbf{Y}}$ étant définies par

$$\mathbf{Y}_{\boldsymbol{\theta}^\pm} = s_{\boldsymbol{\theta}^\pm}(\widehat{\mathbf{F}}) \mathbf{Y}_0$$

où \mathbf{Y}_0 est la vraie solution associée à la solution formelle $\widehat{\mathbf{Y}}_0$ par le choix de $\arg(\boldsymbol{\theta})$ et où

$$s_{\boldsymbol{\theta}^\pm}(\widehat{\mathbf{F}})(t) = \int_0^{\infty e^{i\boldsymbol{\theta}^\pm}} \widetilde{\mathbf{F}}(\tau) e^{-\frac{\tau}{t}} d\tau$$

nous obtenons de (4.11) l'égalité

$$(4.12) \quad s_{\theta^-}(\widehat{\mathbf{F}}) - s_{\theta^+}(\widehat{\mathbf{F}}) = s_{\theta^+}(\widehat{\mathbf{F}}) \mathbf{Y}_0 \mathbf{C}_\theta \mathbf{Y}_0^{-1}$$

Comme précédemment, nous notons $\widehat{\mathbf{f}}$ la matrice formée des n_1 premières colonnes de $\widehat{\mathbf{F}}$ et $\widehat{\mathbf{f}}^{[j;q]}$ la $q^{\text{ème}}$ colonne de $\widehat{\mathbf{f}}$. Nous notons également $c_{\theta,k}$ la matrice formée des n_1 premières colonnes de la matrice de Stokes $C_{\theta,k}$. L'écriture $c_{\theta,k}^{[j;q]}$ désigne alors la $q^{\text{ème}}$ colonne de la matrice $c_{\theta,k}$ et nous la découpons sous la forme

$$c_{\theta,k}^{[j;q]} = \begin{bmatrix} c_{\theta,k}^{[1;q]} \\ \vdots \\ c_{\theta,k}^{[J;q]} \end{bmatrix}$$

où le nombre de lignes de $c_{\theta,k}^{[j;q]}$ est égal à la dimension n_j du $j^{\text{ème}}$ bloc de Jordan L_j de L : la matrice $c_{\theta,k}^{[j;q]}$ est donc de dimension $n_j \times 1$.

En considérant uniquement dans l'égalité (4.12) les n_1 premières colonnes de chaque membre, nous obtenons la relation

$$s_{\theta^-}(\widehat{\mathbf{f}}^{[j;q]}) - s_{\theta^+}(\widehat{\mathbf{f}}^{[j;q]}) = \frac{1}{r} \sum_{\omega \in \Omega_\theta(\widehat{\mathbf{f}})} s_{\theta^+}(\widehat{\mathbf{F}}) \mathbf{M}_\omega(t) e^{-\frac{\omega}{t}}$$

où $\Omega_\theta(\widehat{\mathbf{f}})$ est l'ensemble (fini) des singularités de $\widehat{\mathbf{f}}$ (et donc de sa $q^{\text{ème}}$ colonne $\widehat{\mathbf{f}}^{[j;q]}$) dans la direction θ et où $\mathbf{M}_\omega(t)$ est la matrice

$$\begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{r-1} \left[(\rho^k t^{1/r})^{L_j} \left(c_{\theta,k}^{[j;q]} - c_{\theta,k}^{[j;q-1]} \log(\bar{\rho}^k t^{1/r}) + \dots + \frac{(-1)^{q-1} \log^{q-1}(\bar{\rho}^k t^{1/r})}{(q-1)!} c_{\theta,k}^{[j;1]} \right) e^{\check{q}_\omega \left(\frac{1}{\rho^k t^{1/r}} \right)} \right]_{j \in J_\omega} \\ \sum_{k=0}^{r-1} \left[(\rho^k t^{1/r})^{L_j - I_{n_j}} \left(c_{\theta,k}^{[j;q]} - c_{\theta,k}^{[j;q-1]} \log(\bar{\rho}^k t^{1/r}) + \dots + \frac{(-1)^{q-1} \log^{q-1}(\bar{\rho}^k t^{1/r})}{(q-1)!} c_{\theta,k}^{[j;1]} \right) e^{\check{q}_\omega \left(\frac{1}{\rho^k t^{1/r}} \right)} \right]_{j \in J_\omega} \\ \vdots \\ \sum_{k=0}^{r-1} \left[(\rho^k t^{1/r})^{L_j - (r-1)I_{n_j}} \left(c_{\theta,k}^{[j;q]} - c_{\theta,k}^{[j;q-1]} \log(\bar{\rho}^k t^{1/r}) + \dots + \frac{(-1)^{q-1} \log^{q-1}(\bar{\rho}^k t^{1/r})}{(q-1)!} c_{\theta,k}^{[j;1]} \right) e^{\check{q}_\omega \left(\frac{1}{\rho^k t^{1/r}} \right)} \right]_{j \in J_\omega} \end{bmatrix}$$

avec $J_\omega = \{j \in \{1, \dots, J\}; a_{j,r} = \omega\}$. Finalement, la déformation du chemin $[0, \infty e^{i\theta^-}]$ donnant

$$s_{\theta^-}(\widehat{\mathbf{f}}^{[j;q]}) - s_{\theta^+}(\widehat{\mathbf{f}}^{[j;q]}) = \sum_{\omega \in \Omega_\theta(\widehat{\mathbf{f}})} e^{-\frac{\omega}{t}} \int_{\gamma_{\theta^+}} \tau_\omega \widetilde{\mathbf{f}}^{[j;q]}(\tau) e^{-\frac{\tau}{t}} d\tau$$

où γ_{θ^+} est le contour de Hankel autour de d_{θ^+} défini à la figure 1.7, nous obtenons la relation fondamentale suivante ;

$$(4.13) \quad \boxed{\sum_{\omega \in \Omega_\theta(\widehat{\mathbf{f}})} e^{-\frac{\omega}{t}} \int_{\gamma_{\theta^+}} \tau_\omega \widetilde{\mathbf{f}}^{[j;q]}(\tau) e^{-\frac{\tau}{t}} d\tau = \frac{1}{r} \sum_{\omega \in \Omega_\theta(\widehat{\mathbf{f}})} s_{\theta^+}(\widehat{\mathbf{F}}) \mathbf{M}_\omega(t) e^{-\frac{\omega}{t}}}$$

Cette relation va nous permettre, comme pour les systèmes de niveau unique 1 (cf. paragraphe 2.3), d'explicitier l'isomorphisme linéaire entre les multiplicateurs de Stokes $c_{\theta,k}^{[j;q]}$ et les coefficients de résurgence de $\tilde{\mathbf{f}}^{[q]}$ à droite de ses singularités $\omega \in \Omega_{\theta}(\widehat{\mathbf{f}})$. De plus, lorsque la singularité ω est de front non monomial, nous pouvons affiner le résultat du théorème 4.14 en donnant avec précision la nature de l'origine pour les fonctions $\tilde{\varphi}_{\omega,k}^{[q]}$.

4.4.2 Détermination de l'isomorphisme linéaire

Rappelons que tous les prolongements analytiques de $\tilde{\mathbf{f}}$ en ses singularités sont des prolongements analytiques par la droite. Calculons les intégrales de Laplace

$$\mathcal{L}_{\theta^+}(\tau_{\omega}\tilde{\mathbf{f}}^{[q]})(t) = \int_{\gamma_{\theta^+}} \tau_{\omega}\tilde{\mathbf{f}}^{[q]}(\tau) e^{-\frac{\tau}{t}} d\tau$$

Nous devons considérer deux cas, suivant que la singularité ω est de front monomial ou non.

Premier cas : $\omega \in \Omega_{\theta}(\widehat{\mathbf{f}})$ est de front monomial, *i.e.*, $\check{q}_{\omega} = 0$

L'écriture de $\tau_{\omega}\tilde{\mathbf{f}}^{[q]}$ au voisinage de l'origine est donnée par le théorème 4.8. Les lemmes 2.29 et 2.30 montrent alors que

$$\mathcal{L}_{\theta^+}(\tau_{\omega}\tilde{\mathbf{f}}^{[q]})(t) = \sum_{p=0}^{N_{\omega,0+q}} \beta_{\omega,p}^{[q]} \log^p t + \sum_{p=0}^{N_{\omega,0+q}} s_{\theta^+}(\widehat{h}_{\omega,p}^{[q]}) \log^p t + \sum_{\lambda \in \Lambda_{\omega}} \left(\sum_{p=0}^{N_{\omega,\lambda+q}} s_{\theta^+}(\widehat{H}_{\omega,\lambda,p}^{[q]}) \log^p t \right) t^{\lambda-1}$$

où $\beta_{\omega,p}^{[q]} \in M_{rn,1}(\mathbb{C})$ et où les séries formelles $\widehat{h}_{\omega,p}^{[q]}$ et $\widehat{H}_{\omega,\lambda,p}^{[q]}$ sont 1-sommables dans la direction θ^+ .

Second cas : $\omega \in \Omega_{\theta}(\widehat{\mathbf{f}})$ est de front non monomial, *i.e.*, $\check{q}_{\omega} \neq 0$

Rappelons que $\text{supp}(\check{q}_{\omega})$ désigne le support du polynôme \check{q}_{ω} (définition 4.11) et que nous avons noté

$$\mathfrak{p} = \text{pgcd}(j \in \text{supp}(\check{q}_{\omega}), r) \text{ et } \mathfrak{r} = \frac{r}{\mathfrak{p}}$$

Nous savons (théorème 4.14) que $\tau_{\omega}\tilde{\mathbf{f}}^{[q]}$ peut être écrit au voisinage de l'origine et modulo les fonctions analytiques en 0 sous la forme

$$\tau_{\omega}\tilde{\mathbf{f}}^{[q]}(\tau) = \sum_{k=0}^{\mathfrak{r}-1} \left(\tilde{\varphi}_{\omega,k}^{[q]} \otimes \text{maj} \left(e^{\check{q}_{\omega} \left(\frac{1}{\rho^k t^{1/r}} \right)} \right) \right) (\tau)$$

où, pour tout $k \in \{0, \dots, \mathfrak{r}-1\}$, $\tilde{\varphi}_{\omega,k}^{[q]}$ est une fonction de la classe de Nilsson en 0 pouvant être écrite sous la forme

$$\tilde{\varphi}_{\omega,k}^{[q]}(\tau) = \sum_{\text{finie}} \tilde{\psi}_{k,\lambda,p}(\tau) \tau^{\lambda} \log^p \tau$$

où $\lambda \in \mathbb{C}$, $p \in \mathbb{N}$ et où les fonctions analytiques à l'origine $\tilde{\psi}_{k,\lambda,p}$ sont prolongeables sans fin de support singulier les points $a_{j,r} - \omega$ et sont à croissance exponentielle d'ordre au plus un à l'infini.

Par définition du produit de convolution \otimes , nous obtenons l'égalité

$$\mathcal{L}_{\theta^+}(\tau_\omega \tilde{\mathbf{f}}^{[q]})(t) = \sum_{k=0}^{\tau-1} \left(\int_{\gamma_{\theta^+}} \tilde{\varphi}_{\omega,k}^{[q]}(\tau) e^{-\frac{\tau}{t}} d\tau \right) e^{\tilde{q}_\omega \left(\frac{1}{\rho^k t^{1/r}} \right)}$$

où l'intégrale de Laplace

$$\int_{\gamma_{\theta^+}} \tilde{\varphi}_{\omega,k}^{[q]}(\tau) e^{-\frac{\tau}{t}} d\tau$$

est connue explicitement à l'aide des lemmes 2.29 et 2.30.

D'autre part, en reprenant les notations ci-dessus, nous avons pour le membre de droite de l'égalité (4.13) :

– Si $\tilde{q}_\omega = 0$, alors $\mathbf{M}_\omega(t)$ est la matrice

$$\begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{r-1} \left[(\rho^k t^{1/r})^{L_j} \left(c_{\theta,k}^{[j;q]} - c_{\theta,k}^{[j;q-1]} \log(\bar{\rho}^k t^{1/r}) + \dots + \frac{(-1)^{q-1}}{(q-1)!} c_{\theta,k}^{[j;1]} \log^{q-1}(\bar{\rho}^k t^{1/r}) \right) \right]_{j \in J_\omega} \\ \sum_{k=0}^{r-1} \left[(\rho^k t^{1/r})^{L_j - I_{n_j}} \left(c_{\theta,k}^{[j;q]} - c_{\theta,k}^{[j;q-1]} \log(\bar{\rho}^k t^{1/r}) + \dots + \frac{(-1)^{q-1}}{(q-1)!} c_{\theta,k}^{[j;1]} \log^{q-1}(\bar{\rho}^k t^{1/r}) \right) \right]_{j \in J_\omega} \\ \vdots \\ \sum_{k=0}^{r-1} \left[(\rho^k t^{1/r})^{L_j - (r-1)I_{n_j}} \left(c_{\theta,k}^{[j;q]} - c_{\theta,k}^{[j;q-1]} \log(\bar{\rho}^k t^{1/r}) + \dots + \frac{(-1)^{q-1}}{(q-1)!} c_{\theta,k}^{[j;1]} \log^{q-1}(\bar{\rho}^k t^{1/r}) \right) \right]_{j \in J_\omega} \end{bmatrix}$$

et donc $\frac{1}{r} s_{\theta^+}(\widehat{\mathbf{F}}) \mathbf{M}_\omega(t)$ est de la même forme que $\mathcal{L}_{\theta^+}(\tau_\omega \tilde{\mathbf{f}}^{[q]})(t)$.

– Si $\tilde{q}_\omega \neq 0$, nous écrivons la matrice $\mathbf{M}_\omega(t)$ sous la forme

$$\mathbf{M}_\omega(t) = \sum_{k=0}^{\tau-1} \mathbf{M}_{\omega,k}(t) e^{\tilde{q}_\omega \left(\frac{1}{\rho^k t^{1/r}} \right)}$$

où, pour tout $k \in \{0, \dots, \tau - 1\}$, $\mathbf{M}_{\omega,k}(t)$ est définie par

$$\begin{bmatrix} \left[(\rho^{k+\ell\tau} t^{1/r})^{L_j} \left(c_{\theta,k+\ell\tau}^{[j;q]} - c_{\theta,k+\ell\tau}^{[j;q-1]} \log(\bar{\rho}^{k+\ell\tau} t^{1/r}) + \dots + \frac{(-1)^{q-1}}{(q-1)!} c_{\theta,k+\ell\tau}^{[j;1]} \log^{q-1}(\bar{\rho}^{k+\ell\tau} t^{1/r}) \right) \right]_{j \in J_\omega} \\ \sum_{\ell=0}^{p-1} \left[(\rho^{k+\ell\tau} t^{1/r})^{L_j - I_{n_j}} \left(c_{\theta,k+\ell\tau}^{[j;q]} - c_{\theta,k+\ell\tau}^{[j;q-1]} \log(\bar{\rho}^{k+\ell\tau} t^{1/r}) + \dots + \frac{(-1)^{q-1}}{(q-1)!} c_{\theta,k+\ell\tau}^{[j;1]} \log^{q-1}(\bar{\rho}^{k+\ell\tau} t^{1/r}) \right) \right]_{j \in J_\omega} \\ \vdots \\ \left[(\rho^{k+\ell\tau} t^{1/r})^{L_j - (r-1)I_{n_j}} \left(c_{\theta,k+\ell\tau}^{[j;q]} - c_{\theta,k+\ell\tau}^{[j;q-1]} \log(\bar{\rho}^{k+\ell\tau} t^{1/r}) + \dots + \frac{(-1)^{q-1}}{(q-1)!} c_{\theta,k+\ell\tau}^{[j;1]} \log^{q-1}(\bar{\rho}^{k+\ell\tau} t^{1/r}) \right) \right]_{j \in J_\omega} \end{bmatrix}$$

En particulier, nous voyons à nouveau que $\frac{1}{r} s_{\theta^+}(\widehat{\mathbf{F}}) \mathbf{M}_\omega(t)$ est de la même forme que $\mathcal{L}_{\theta^+}(\tau_\omega \tilde{\mathbf{f}}^{[q]})(t)$.

Il s'ensuit alors le résultat suivant obtenu à l'aide du lemme 2.25 :

Proposition 4.16 *Avec les notations précédentes,*

1. *Pour tout $\omega \in \Omega_\theta(\widehat{\mathbf{f}})$,*

$$\mathcal{L}_{\theta^+}(\tau_\omega \widetilde{\mathbf{f}}^{[;q]})(t) = \frac{1}{r} s_{\theta^+}(\widehat{\mathbf{F}}) \mathbf{M}_\omega(t)$$

2. *De plus, si $\check{q}_\omega \neq 0$, alors*

$$\mathcal{L}_{\theta^+}(\widetilde{\varphi}_{\omega,k}^{[;q]})(t) = \frac{1}{r} s_{\theta^+}(\widehat{\mathbf{F}}) \mathbf{M}_{\omega,k}(t)$$

pour tout $k \in \{0, \dots, \mathfrak{r} - 1\}$.

Outre le fait de permettre le calcul explicite des multiplicateurs de Stokes $c_{\theta,k}^{[j;q]}$ en fonction des coefficients de résurgence de $\widetilde{\mathbf{f}}^{[;q]}$ à droite de ses singularités $\omega \in \Omega_\theta(\widehat{\mathbf{f}})$, le second point de cette proposition nous fournit avec précision la nature des singularités de front non monomial de $\widetilde{\mathbf{f}}^{[;q]}$. En effet, $\widetilde{\varphi}_{\omega,k}^{[;q]}$ est un majeur de $\frac{1}{r} \widehat{\mathbf{F}} \mathbf{M}_{\omega,k}$ et nous obtenons du théorème 1.32 le résultat suivant :

Théorème 4.17 *Soit ω l'un des $a_{j,r} \neq 0$ de front non monomial, i.e., tel que l'un (et donc tous) des polynômes q_j portant ω ne soit pas un monôme. Notons \check{q}_ω le polynôme défini par*

$$q_j \left(\frac{1}{x} \right) = -\frac{\omega}{x^r} + \check{q}_\omega \left(\frac{1}{x} \right)$$

pour tout $j \in \{1, \dots, J\}$ tel que $q_j \in Fr(\omega)$.

Soient $\text{supp}(\check{q}_\omega)$ le support du polynôme \check{q}_ω ,

$$\mathfrak{p} = \text{pgcd}(j \in \text{supp}(\check{q}_\omega), r)$$

et \mathfrak{r} l'élément de $\{2, \dots, r\}$ défini par $\mathfrak{r} = \frac{r}{\mathfrak{p}}$.

Alors, pour tout $q \in \{1, \dots, n_1\}$, $\tau_\omega \widetilde{\mathbf{f}}^{[;q]}$ peut être écrit, localement au voisinage de 0 et modulo les fonctions analytiques à l'origine, sous la forme

$$\tau_\omega \widetilde{\mathbf{f}}^{[;q]}(\tau) = \sum_{k=0}^{\mathfrak{r}-1} \left(\widetilde{\varphi}_{\omega,k}^{[;q]} \otimes \text{maj} \left(e^{\check{q}_\omega \left(\frac{1}{\rho^k \tau^{1/r}} \right)} \right) \right) (\tau)$$

où, pour tout $k \in \{0, \dots, \mathfrak{r} - 1\}$, $\widetilde{\varphi}_{\omega,k}^{[;q]}$ est une fonction de la classe de Nilsson en 0.

Précisément, $\widetilde{\varphi}_{\omega,k}^{[;q]}$ admet pour tout $k \in \{0, \dots, \mathfrak{r} - 1\}$ une singularité simple-ramifiée en 0 : modulo les fonctions analytiques à l'origine,

$$\widetilde{\varphi}_{\omega,k}^{[;q]}(\tau) = \sum_{p=0}^{N_{\omega,0+q}} \frac{\alpha_{\omega,k,p}^{[;q]}}{\tau} \log^p \tau + \sum_{p=1}^{N_{\omega,0+q+1}} \widetilde{h}_{\omega,k,p}^{[;q]}(\tau) \log^p \tau + \sum_{\lambda \in \Lambda_\omega} \sum_{p=0}^{N_{\omega,\lambda+q}} \left(\widetilde{H}_{\omega,k,\lambda,p}^{[;q]}(\tau) \log^p \tau \right) \tau^{\lambda-1}$$

où $\alpha_{\omega,k,p}^{[;q]} \in M_{rn,1}(\mathbb{C})$, $\tilde{h}_{\omega,k,p}^{[;q]}$, $\tilde{H}_{\omega,k,\lambda,p}^{[;q]} \in M_{rn,1}(\mathbb{C}\{\tau\})$ et où les exposants de ramification Λ_ω et les ordres logarithmiques $(N_{\omega,0} + q, (N_{\omega,\lambda} + q)_{\lambda \in \Lambda_\omega})$ sont donnés par

$$\Lambda_\omega = \left\{ \frac{\lambda_j}{r} - \frac{u-1}{r}; j \in \mathbb{N}_J^* \text{ et } u \in \mathbb{N}_r^* \text{ tel que } q_j \in Fr(\omega) \text{ et } (\lambda_j \neq 0 \text{ ou } u \neq 1) \right\}$$

$$N_{\omega,0} = \max(n_j - 2; j \in \mathbb{N}_J^* \text{ tel que } q_j \in Fr(\omega) \text{ et } \lambda_j = 0)$$

$$N_{\omega,\lambda} = \max\left(n_j - 2; j \in \mathbb{N}_J^* \text{ tel que } q_j \in Fr(\omega) \text{ et } \exists u \in \mathbb{N}_r^* \text{ tel que } \frac{\lambda_j}{r} - \frac{u-1}{r} = \lambda\right)$$

De plus, les coefficients $\tilde{h}_{\omega,k,p}^{[;q]}$ et $\tilde{H}_{\omega,k,\lambda,p}^{[;q]}$ sont des germes de fonctions analytiques prolongeables sans fin de support singulier les points $a_{j,r} - \omega$ et sont à croissance exponentielle d'ordre au plus un à l'infini.

Ces coefficients et les constantes $\alpha_{\omega,k,p}^{[;q]}$ sont appelés k -quasi-coefficients de résurgence de $\tilde{\mathbf{f}}^{[;q]}$ en ω .

Noter que si les k -quasi-coefficients de résurgence de $\tilde{\mathbf{f}}^{[;q]}$ en ω dépendent de l'entier k , les exposants de ramification Λ_ω et les ordres logarithmiques $(N_{\omega,0} + q, (N_{\omega,\lambda} + q)_{\lambda \in \Lambda_\omega})$ sont identiques pour toutes les fonctions $\tilde{\varphi}_{\omega,k}^{[;q]}$, $k \in \{0, \dots, \mathfrak{r} - 1\}$.

Passons à présent au calcul des multiplicateurs de Stokes de la matrice $c_{\theta,k}^{[j;q]}$.

La direction θ étant fixée, le prolongement analytique de $\tilde{\mathbf{f}}$ le long de d_θ que nous considérons ici évite systématiquement les singularités par la droite. En particulier, les coefficients de résurgence et les k -quasi-coefficients de résurgence sont ceux obtenus à l'aide de ce prolongement analytique.

4.4.3 Relations liant multiplicateurs de Stokes et coefficients de résurgence en une singularité de front monomial

Fixons $\omega \in \Omega_\theta(\hat{\mathbf{f}})$ une singularité de front monomial de $\tilde{\mathbf{f}}^{[;q]}$ sur d_θ , *i.e.*, telle que $\tilde{q}_\omega = 0$.

Le calcul des multiplicateurs de Stokes de la matrice $c_{\theta,k}^{[j;q]}$, $k \in \{0, \dots, r - 1\}$ et $j \in J_\omega$, est analogue à celui du paragraphe 2.3.3 : nous savons, par la proposition 4.16, que

$$\int_{\gamma_{\theta+}} \tau_\omega \tilde{\mathbf{f}}^{[;q]}(\tau) e^{-\frac{\tau}{i}} d\tau = \frac{1}{r} s_{\theta+}(\hat{\mathbf{F}}) \mathbf{M}_\omega(t)$$

où $\mathbf{M}_\omega(t)$ est la matrice

$$\begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{r-1} \left[(\rho^k t^{1/r})^{L_j} \left(c_{\theta,k}^{[j;q]} - c_{\theta,k}^{[j;q-1]} \log(\bar{\rho}^k t^{1/r}) + \dots + \frac{(-1)^{q-1}}{(q-1)!} c_{\theta,k}^{[j;1]} \log^{q-1}(\bar{\rho}^k t^{1/r}) \right) \right]_{j \in J_\omega} \\ \sum_{k=0}^{r-1} \left[(\rho^k t^{1/r})^{L_j - I_{n_j}} \left(c_{\theta,k}^{[j;q]} - c_{\theta,k}^{[j;q-1]} \log(\bar{\rho}^k t^{1/r}) + \dots + \frac{(-1)^{q-1}}{(q-1)!} c_{\theta,k}^{[j;1]} \log^{q-1}(\bar{\rho}^k t^{1/r}) \right) \right]_{j \in J_\omega} \\ \vdots \\ \sum_{k=0}^{r-1} \left[(\rho^k t^{1/r})^{L_j - (r-1)I_{n_j}} \left(c_{\theta,k}^{[j;q]} - c_{\theta,k}^{[j;q-1]} \log(\bar{\rho}^k t^{1/r}) + \dots + \frac{(-1)^{q-1}}{(q-1)!} c_{\theta,k}^{[j;1]} \log^{q-1}(\bar{\rho}^k t^{1/r}) \right) \right]_{j \in J_\omega} \end{bmatrix}$$

La série formelle $\widehat{\mathbf{F}}$ étant normalisée à $\widehat{\mathbf{F}}(t) = I_{rn} + O(t^2)$, il suffit d'identifier les termes en $t^{\frac{\lambda_j}{r} - \frac{u-1}{r}}$, $u \in \{1, \dots, r\}$ et $j \in J_\omega$, dans la matrice $\frac{1}{r}\mathbf{M}_\omega(t)$ et dans le développement asymptotique à l'origine de l'intégrale de Laplace

$$\mathcal{L}_{\theta^+}(\tau_\omega \widetilde{\mathbf{f}}^{[q]})(t) = \int_{\gamma_{\theta^+}} \tau_\omega \widetilde{\mathbf{f}}^{[q]}(\tau) e^{-\frac{\tau}{t}} d\tau$$

★ L'écriture de $\tau_\omega \widetilde{\mathbf{f}}^{[q]}$ au voisinage de l'origine est donnée par le théorème 4.8 :

$$\tau_\omega \widetilde{\mathbf{f}}^{[q]}(\tau) = \sum_{p=0}^{N_{\omega,0+q}} \frac{\alpha_{\omega,p}^{[q]}}{\tau} \log^p \tau + \sum_{p=1}^{N_{\omega,0+q+1}} \widetilde{h}_{\omega,p}^{[q]}(\tau) \log^p \tau + \sum_{\lambda \in \Lambda_\omega} \sum_{p=0}^{N_{\omega,\lambda+q}} \left(\widetilde{H}_{\omega,\lambda,p}^{[q]}(\tau) \log^p \tau \right) \tau^{\lambda-1} + Hol_\omega(\tau)$$

avec $\alpha_{\omega,p}^{[q]} \in M_{rn,1}(\mathbb{C})$, $\widetilde{h}_{\omega,p}^{[q]}, \widetilde{H}_{\omega,\lambda,p}^{[q]}$, Hol_ω holomorphes à l'origine et se prolongeant analytiquement avec une croissance exponentielle d'ordre au plus un le long de d_{θ^+} , et

$$\Lambda_\omega = \left\{ \frac{\lambda_j}{r} - \frac{u-1}{r}; j \in \mathbb{N}_J^* \text{ et } u \in \mathbb{N}_r^* \text{ tels que } q_j \left(\frac{1}{x} \right) = -\frac{\omega}{x^r} \text{ et } (\lambda_j \neq 0 \text{ ou } u \neq 1) \right\}$$

$$N_{\omega,0} = \max \left(n_j - 2; j \in \mathbb{N}_J^* \text{ tel que } q_j \left(\frac{1}{x} \right) = -\frac{\omega}{x^r} \text{ et } \lambda_j = 0 \right)$$

$$N_{\omega,\lambda} = \max \left(n_j - 2; j \in \mathbb{N}_J^* \text{ tel que } q_j \left(\frac{1}{x} \right) = -\frac{\omega}{x^r} \text{ et } \exists u \in \mathbb{N}_r^* \text{ tel que } \frac{\lambda_j}{r} - \frac{u-1}{r} = \lambda \right)$$

Les calculs du paragraphe 2.3.3 montrent alors que le développement asymptotique à l'origine de $\mathcal{L}_{\theta^+}(\tau_\omega \widetilde{\mathbf{f}}^{[q]})(t)$ est

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{L}}_{\theta^+}(\tau_\omega \widetilde{\mathbf{f}}^{[q]})(t) &= \sum_{p=0}^{N_{\omega,0+q}} \beta_{\omega,p}^{[q]} \log^p t + \sum_{\lambda \in \Lambda_\omega} \left(\sum_{p=0}^{N_{\omega,\lambda+q}} \gamma_{\omega,\lambda,p}^{[q]} \log^p t \right) t^\lambda \\ &+ \sum_{p=0}^{N_{\omega,0+q}} \widehat{h}_{\omega,p}^{[q]}(t) \log^p t + \sum_{\lambda \in \Lambda_\omega} \left(\sum_{p=0}^{N_{\omega,\lambda+q}} \widehat{H}_{\omega,\lambda,p}^{[q]}(t) \log^p t \right) t^\lambda \end{aligned}$$

avec $\beta_{\omega,p}^{[j;q]}, \gamma_{\omega,\lambda,p}^{[j;q]} \in M_{rn,1}(\mathbb{C})$ et $\widehat{h}_{\omega,p}^{[j;q]}, \widehat{H}_{\omega,\lambda,p}^{[j;q]} \in M_{rn,1}(t\mathbb{C}[[t]])$.

★ D'autre part, le coefficient du terme en $t^{\frac{\lambda_j}{r} - \frac{u-1}{r}}$ de

$$(\rho^k t^{1/r})^{L_j - (u-1)I_{n_j}} \left(c_{\theta,k}^{[j;q]} - c_{\theta,k}^{[j;q-1]} \log(\bar{\rho}^k t^{1/r}) + \dots + \frac{(-1)^{q-1}}{(q-1)!} c_{\theta,k}^{[j;1]} \log^{q-1}(\bar{\rho}^k t^{1/r}) \right)$$

est

$$\rho^{k(L_j - (u-1)I_{n_j})} \left(c_{\theta,k}^{[j;q]} - (k \log \bar{\rho}) c_{\theta,k}^{[j;q-1]} + \dots + \frac{(-1)^{q-1} (k \log \bar{\rho})^{q-1}}{(q-1)!} c_{\theta,k}^{[j;1]} \right)$$

que nous préférons écrire sous la forme

$$\rho^{k(L_j - (u-1)I_{n_j})} \left(c_{\theta,k}^{[j;q]} + \mathfrak{X}_{j,q,k} \right)$$

avec $\mathfrak{X}_{j,1,k} = 0$ et, pour $q \geq 2$,

$$\mathfrak{X}_{j,q,k} = -(k \log \bar{\rho}) c_{\theta,k}^{[j;q-1]} + \dots + \frac{(-1)^\ell (k \log \bar{\rho})^\ell}{\ell!} c_{\theta,k}^{[j;q-\ell]} + \dots + \frac{(-1)^{q-1} (k \log \bar{\rho})^{q-1}}{(q-1)!} c_{\theta,k}^{[j;1]}$$

En particulier, si le premier bloc de Jordan L_1 de la matrice L est de dimension 1, *i.e.*, $n_1 = 1$, alors $\mathfrak{X}_{j,1,k} = 0$ pour tout $j \in J_\omega$ et tout $k \in \{0, \dots, r-1\}$.

★ En identifiant alors les termes en $t^{\frac{\lambda_j}{r} - \frac{u-1}{r}}$ dans $\frac{1}{r} \mathbf{M}_\omega(t)$ et dans $\widehat{\mathcal{L}}_{\theta^+}(\tau_\omega \widetilde{\mathbf{f}}^{[j;q]})(t)$, nous obtenons, pour tout $q \in \{1, \dots, n_1\}$ et tout $j \in J_\omega$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{r} \sum_{k=0}^{r-1} \rho^{kL_j} \left(c_{\theta,k}^{[j;q]} + \mathfrak{X}_{j,q,k} \right) = \begin{cases} \beta_{\omega,0}^{[1,j;q]} & \text{si } \lambda_j = 0 \\ \gamma_{\omega, \frac{\lambda_j}{r}, 0}^{[1,j;q]} & \text{si } \lambda_j \neq 0 \end{cases} \\ \frac{1}{r} \sum_{k=0}^{r-1} \rho^{k(L_j - I_{n_j})} \left(c_{\theta,k}^{[j;q]} + \mathfrak{X}_{j,q,k} \right) = \gamma_{\omega, \frac{\lambda_j}{r} - \frac{1}{r}, 0}^{[2,j;q]} \\ \vdots \\ \frac{1}{r} \sum_{k=0}^{r-1} \rho^{k(L_j - (r-1)I_{n_j})} \left(c_{\theta,k}^{[j;q]} + \mathfrak{X}_{j,q,k} \right) = \gamma_{\omega, \frac{\lambda_j}{r} - \frac{r-1}{r}, 0}^{[r,j;q]} \end{array} \right.$$

les matrices $\beta_{\omega,0}^{[j;q]}$ et $\gamma_{\omega,\lambda,0}^{[j;q]}$ étant aisément calculables à partir des coefficients de résurgence de $\widetilde{\mathbf{f}}^{[j;q]}$ en ω (cf. paragraphe 2.3.3). Par suite, nous obtenons le résultat suivant :

Théorème 4.18 *Soit $q \in \{1, \dots, n_1\}$. Pour toute singularité $\omega \in \Omega_\theta(\widehat{\mathbf{f}})$ de $\widetilde{\mathbf{f}}$ de front monomial, nous considérons le prolongement analytique de $\widetilde{\mathbf{f}}^{[j;q]}$ à droite de ω et nous notons*

• $\alpha_{\omega,p}^{[j;q]} = \begin{bmatrix} \alpha_{\omega,p}^{[1;q]} \\ \vdots \\ \alpha_{\omega,p}^{[r;q]} \end{bmatrix}$ avec $\alpha_{\omega,p}^{[u;q]} = \begin{bmatrix} \alpha_{\omega,p}^{[u,1;q]} \\ \vdots \\ \alpha_{\omega,p}^{[u,J;q]} \end{bmatrix}$ le coefficient de résurgence lié à $\frac{\log^p \tau}{\tau}$ avec $p \in \{0, \dots, N_{\omega,0} + q\}$

• $\tilde{H}_{\omega,\lambda,p}^{[j;q]}(\tau) = \begin{bmatrix} \tilde{H}_{\omega,\lambda,p}^{[1;q]}(\tau) \\ \vdots \\ \tilde{H}_{\omega,\lambda,p}^{[r;q]}(\tau) \end{bmatrix}$ avec $\tilde{H}_{\omega,\lambda,p}^{[u;q]}(\tau) = \begin{bmatrix} \tilde{H}_{\omega,\lambda,p}^{[u,1;q]}(\tau) \\ \vdots \\ \tilde{H}_{\omega,\lambda,p}^{[u,J;q]}(\tau) \end{bmatrix}$ le coefficient de résurgence lié à $\tau^{\lambda-1} \log^p \tau$ avec $p \in \{0, \dots, N_{\omega,\lambda} + q\}$

Alors, pour toute singularité $\omega \in \Omega_{\theta}(\hat{\mathbf{f}})$ de front monomial et pour tout $j \in J_{\omega}$, les matrices $c_{\theta,k}^{[j;q]}$, $k \in \{0, \dots, r-1\}$, sont les uniques solutions du système

$$(4.14) \quad \mathcal{V} \left(\rho^{L_j}, \rho^{L_j - I_{n_j}}, \dots, \rho^{L_j - (r-1)I_{n_j}} \right) \begin{bmatrix} c_{\theta,0}^{[j;q]} \\ c_{\theta,1}^{[j;q]} \\ \vdots \\ c_{\theta,r-1}^{[j;q]} \end{bmatrix} = r \mathfrak{C}_{j,q} - \mathfrak{X}_{j,q}$$

où

1. $\mathcal{V} \left(\rho^{L_j}, \rho^{L_j - I_{n_j}}, \dots, \rho^{L_j - (r-1)I_{n_j}} \right)$ est la matrice de van der Monde

$$\mathcal{V} \left(\rho^{L_j}, \rho^{L_j - I_{n_j}}, \dots, \rho^{L_j - (r-1)I_{n_j}} \right) = \begin{bmatrix} I_{n_j} & \rho^{L_j} & \dots & \rho^{(r-1)L_j} \\ I_{n_j} & \rho^{L_j - I_{n_j}} & \dots & \rho^{(r-1)(L_j - I_{n_j})} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ I_{n_j} & \rho^{L_j - (r-1)I_{n_j}} & \dots & \rho^{(r-1)(L_j - (r-1)I_{n_j})} \end{bmatrix}$$

2. $\mathfrak{C}_{j,q} = \begin{bmatrix} \mathfrak{C}_{j,q,1} \\ \mathfrak{C}_{j,q,2} \\ \vdots \\ \mathfrak{C}_{j,q,r} \end{bmatrix}$ est la matrice de dimension $rn_j \times 1$ définie par

$$\begin{cases} \mathfrak{C}_{j,q,1} = \sum_{p=0}^{N_{\omega,0}+q} \kappa_p(0) \alpha_{\omega,p}^{[1,j;q]} & \text{si } \lambda_j = 0 \\ \mathfrak{C}_{j,q,u} = \sum_{p=0}^{N_{\omega, \frac{\lambda_j}{r} - \frac{u-1}{r}} + q} \kappa_p \left(\frac{\lambda_j}{r} - \frac{u-1}{r} \right) \tilde{H}_{\omega, \frac{\lambda_j}{r} - \frac{u-1}{r}, p}^{[u,j;q]}(0) & \text{si } \lambda_j \neq 0 \text{ ou } u \neq 1 \end{cases}$$

où les nombres complexes $\kappa_p(\lambda)$ sont définis par la relation

$$\kappa_p(\lambda) = 2i\pi \frac{d^p}{d\alpha^p} \left(\frac{e^{-i\pi\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \right) \Big|_{\alpha=\lambda}$$

3. $\mathfrak{X}_{j,q}$ est la matrice de dimension $rn_j \times 1$ définie par

$$\mathfrak{X}_{j,q} = \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{r-1} \rho^{kL_j} \mathfrak{X}_{j,q,k} \\ \sum_{k=0}^{r-1} \rho^{k(L_j - I_{n_j})} \mathfrak{X}_{j,q,k} \\ \vdots \\ \sum_{k=0}^{r-1} \rho^{k(L_j - (r-1)I_{n_j})} \mathfrak{X}_{j,q,k} \end{bmatrix}$$

avec $\mathfrak{X}_{j,1,k} = 0$ et, pour $q \geq 2$,

$$\mathfrak{X}_{j,q,k} = -(k \log \bar{\rho}) c_{\theta,k}^{[j;q-1]} + \dots + \frac{(-1)^\ell (k \log \bar{\rho})^\ell}{\ell!} c_{\theta,k}^{[j;q-\ell]} + \dots + \frac{(-1)^{q-1} (k \log \bar{\rho})^{q-1}}{(q-1)!} c_{\theta,k}^{[j;1]}$$

pour tout $k \in \{0, \dots, r-1\}$.

Les matrices $c_{\theta,k}^{[j;q]}$ sont aisément calculables par la formule (4.14), puisque l'inverse de la matrice de van der Monde $\mathcal{V} \left(\rho^{L_j}, \rho^{L_j - I_{n_j}}, \dots, \rho^{L_j - (r-1)I_{n_j}} \right)$ est

$$\frac{1}{r} \begin{bmatrix} I_{n_j} & I_{n_j} & \dots & I_{n_j} \\ \bar{\rho}^{L_j} & \bar{\rho}^{L_j - I_{n_j}} & \dots & \bar{\rho}^{L_j - (r-1)I_{n_j}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{\rho}^{(r-1)L_j} & \bar{\rho}^{(r-1)(L_j - I_{n_j})} & \dots & \bar{\rho}^{(r-1)(L_j - (r-1)I_{n_j})} \end{bmatrix}$$

Ce théorème généralise les résultats du théorème 2.31 énoncés dans le cadre des systèmes de niveau unique 1 : en faisant $r = 1$ dans le système (4.14), nous retrouvons exactement les formules données au théorème 2.31.

Application au cas où la matrice L est diagonale Nous supposons ici que la matrice des exposants de monodromie formelle L est diagonale de la forme

$$L = \text{diag}(0, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

avec $\text{Re}(\lambda_j) \in [0, 1[$ pour tout $j \in \{2, \dots, n\}$. La matrice Q étant écrite sous la forme

$$Q \left(\frac{1}{x} \right) = \text{diag} \left(0, q_2 \left(\frac{1}{x} \right), \dots, q_n \left(\frac{1}{x} \right) \right)$$

avec

$$q_j \left(\frac{1}{x} \right) = -\frac{a_{j,r}}{x^r} - \frac{a_{j,r-1}}{x^{r-1}} - \dots - \frac{a_{j,1}}{x}$$

pour tout $j \in \{2, \dots, n\}$, nous supposons également qu'au moins un des q_j est réduit à un monôme de la forme

$$-\frac{\omega}{x^r} \text{ avec } \omega \in \mathbb{C}^*$$

Noter bien que nous ne faisons aucune restriction particulière sur les autres polynômes. Un cas similaire a été traité par M. Loday-Richaud dans [L-R01].

Nous sommes dans un cas sans logarithme où ω est une singularité de front monomial de $\tilde{\mathbf{f}}$. Notons $\theta - \frac{2k\pi}{r}$, $k \in \{0, \dots, r-1\}$ les r directions anti-Stokes de $\hat{Y}(x)$ qui sont attachées au monôme $-\frac{\omega}{x^r}$ (nous avons choisi $\theta = \frac{\arg \omega}{r} \in]-\frac{2\pi}{r}, 0]$). Nous cherchons ici une écriture explicite des multiplicateurs de Stokes $c_{\theta,k}^{[j]}$ en fonction des coefficients de résurgence de $\tilde{\mathbf{f}}$ en ω , j étant un élément de

$$J_\omega = \{j \in \{1, \dots, n\}; a_{j,r} = \omega\}$$

Noter que la matrice L étant diagonale, nous numérotions le $j^{\text{ème}}$ terme de la matrice colonne $c_{\theta,k}$ uniquement avec une lettre, et non deux comme précédemment, l'indice q des colonnes étant devenu inutile.

Le théorème 4.8 nous permet d'écrire $\tau_\omega \tilde{\mathbf{f}}$ au voisinage de l'origine sous la forme

$$\tau_\omega \tilde{\mathbf{f}}(\tau) = \frac{\alpha_\omega}{\tau} + \tilde{h}_\omega(\tau) \log \tau + \sum_{\lambda \in \Lambda_\omega} \tilde{H}_{\omega,\lambda}(\tau) \tau^{\lambda-1} + \text{Hol}_\omega(\tau)$$

où $\alpha_\omega \in M_{rn,1}(\mathbb{C})$, $\tilde{h}_\omega, \tilde{H}_{\omega,\lambda}, \text{Hol}_\omega \in M_{rn,1}(\mathbb{C}\{\tau\})$ et où les exposants de ramification Λ_ω sont donnés par

$$\Lambda_\omega = \left\{ \frac{\lambda_j}{r} - \frac{u-1}{r}; j \in \mathbb{N}_n^* \text{ et } u \in \mathbb{N}_r^* \text{ tels que } q_j \left(\frac{1}{x} \right) = -\frac{\omega}{x^r} \text{ et } (\lambda_j \neq 0 \text{ ou } u \neq 1) \right\}$$

Suivant le théorème 4.18, nous décomposons les coefficients de résurgence α_ω et $\tilde{H}_{\omega,\lambda}$ sous la forme

$$\alpha_\omega = \begin{bmatrix} \alpha_\omega^{[1]} \\ \vdots \\ \alpha_\omega^{[r]} \end{bmatrix} \text{ et } \tilde{H}_{\omega,\lambda} = \begin{bmatrix} \tilde{H}_{\omega,\lambda}^{[1]} \\ \vdots \\ \tilde{H}_{\omega,\lambda}^{[r]} \end{bmatrix}$$

où, pour tout $u \in \{1, \dots, r\}$,

$$\alpha_\omega^{[u]} = \begin{bmatrix} \alpha_\omega^{[u,1]} \\ \vdots \\ \alpha_\omega^{[u,n]} \end{bmatrix} \text{ et } \tilde{H}_{\omega,\lambda}^{[u]} = \begin{bmatrix} \tilde{H}_{\omega,\lambda}^{[u,1]} \\ \vdots \\ \tilde{H}_{\omega,\lambda}^{[u,n]} \end{bmatrix}$$

sont des matrices de dimension $n \times 1$. Noter que, comme pour les matrices $c_{\theta,k}$, nous ne faisons plus apparaître dans les numérotations l'indice q des colonnes.

Pour tout $j \in J_\omega$, l'égalité (4.14) devient :

1. Si $\lambda_j = 0$:

$$\mathcal{V}(1, \rho^{-1}, \dots, \rho^{-(r-1)}) \begin{bmatrix} c_{\theta,0}^{[j]} \\ c_{\theta,1}^{[j]} \\ \vdots \\ c_{\theta,r-1}^{[j]} \end{bmatrix} = 2i\pi r \begin{bmatrix} \alpha_{\omega}^{[1,j]} \\ \frac{e^{\frac{i\pi}{r}}}{\Gamma(1 + \frac{1}{r})} \tilde{H}_{\omega, -\frac{1}{r}}^{[2,j]}(0) \\ \vdots \\ \frac{e^{\frac{i\pi(r-1)}{r}}}{\Gamma(1 + \frac{r-1}{r})} \tilde{H}_{\omega, -\frac{r-1}{r}}^{[r,j]}(0) \end{bmatrix}$$

2. Si $\lambda_j \neq 0$:

$$\mathcal{V}(\rho^{\lambda_j}, \rho^{\lambda_j-1}, \dots, \rho^{\lambda_j-(r-1)}) \begin{bmatrix} c_{\theta,0}^{[j]} \\ c_{\theta,1}^{[j]} \\ \vdots \\ c_{\theta,r-1}^{[j]} \end{bmatrix} = 2i\pi r \begin{bmatrix} \frac{e^{-\frac{i\pi\lambda_j}{r}}}{\Gamma(1 - \frac{\lambda_j}{r})} \tilde{H}_{\omega, \frac{\lambda_j}{r}}^{[1,j]}(0) \\ \frac{e^{-\frac{i\pi(\lambda_j-1)}{r}}}{\Gamma(1 - \frac{\lambda_j-1}{r})} \tilde{H}_{\omega, \frac{\lambda_j}{r} - \frac{1}{r}}^{[2,j]}(0) \\ \vdots \\ \frac{e^{-\frac{i\pi(\lambda_j-r+1)}{r}}}{\Gamma(1 - \frac{\lambda_j-r+1}{r})} \tilde{H}_{\omega, \frac{\lambda_j}{r} - \frac{r-1}{r}}^{[r,j]}(0) \end{bmatrix}$$

Finalement, grâce à la formule classique

$$(\mathcal{V}(\rho^{\lambda_j}, \rho^{\lambda_j-1}, \dots, \rho^{\lambda_j-(r-1)}))^{-1} = \frac{1}{r} \mathcal{V}(\bar{\rho}^{\lambda_j}, \bar{\rho}^{\lambda_j-1}, \dots, \bar{\rho}^{\lambda_j-(r-1)})$$

sur l'inverse des matrices de van der Monde, nous obtenons le résultat suivant :

Proposition 4.19 *Sous les hypothèses et notations précédentes, nous avons pour tout $j \in J_{\omega}$:*

1. Si $\lambda_j = 0$, $-\frac{u-1}{r} \in \Lambda_{\omega}$ pour tout $u \in \{2, \dots, r\}$ et nous avons pour tout $k \in \{0, \dots, r-1\}$:

$$c_{\theta,k}^{[j]} = 2i\pi \alpha_{\omega}^{[1,j]} + 2i\pi \sum_{u=2}^r \rho^{k(u-1)} \frac{e^{\frac{i\pi(u-1)}{r}}}{\Gamma(1 + \frac{u-1}{r})} \tilde{H}_{\omega, -\frac{u-1}{r}}^{[u,j]}(0)$$

2. Si $\lambda_j \neq 0$, $\frac{\lambda_j}{r} - \frac{u-1}{r} \in \Lambda_{\omega}$ pour tout $u \in \{1, \dots, r\}$ et nous avons pour tout $k \in \{0, \dots, r-1\}$:

$$c_{\theta,k}^{[j]} = 2i\pi \sum_{u=1}^r \bar{\rho}^{k(\lambda_j-u+1)} \frac{e^{-\frac{i\pi(\lambda_j-u+1)}{r}}}{\Gamma(1 - \frac{\lambda_j-u+1}{r})} \tilde{H}_{\omega, \frac{\lambda_j}{r} - \frac{u-1}{r}}^{[u,j]}(0)$$

Ce résultat nous servira essentiellement au chapitre 5 lors du calcul effectif des multiplicateurs de Stokes dans le cas où la matrice L est diagonale (voir également le paragraphe 5.5 pour des exemples numériques).

4.4.4 Relations liant multiplicateurs de Stokes et quasi-coefficients de résurgence en une singularité de front non monomial

Fixons à présent $\omega \in \Omega_\theta(\widehat{\mathbf{f}})$ une singularité de front non monomial de $\widehat{\mathbf{f}}$, *i.e.*, tel que $\check{q}_\omega \neq 0$. Le calcul des multiplicateurs de Stokes $c_{\theta,k}^{[j;q]}$, $k \in \{0, \dots, r-1\}$ et $j \in J_\omega$, est sensiblement différent du cas précédent du fait de la présence des exponentielles

$$e^{\check{q}_\omega \left(\frac{1}{\rho^k t^{1/r}} \right)}$$

En particulier, nous allons écrire les multiplicateurs de Stokes en fonction des k -quasi-coefficients de résurgence de $\widehat{\mathbf{f}}^{[j;q]}$ à droite de ω .

Rappelons que nous avons noté

$$\mathfrak{p} = \text{pgcd}(j \in \text{supp}(\check{q}_\omega), r) \text{ et } \mathfrak{r} = \frac{r}{\mathfrak{p}}$$

où $\text{supp}(\check{q}_\omega)$ désigne le support du polynôme \check{q}_ω . Grâce au théorème 4.17, nous écrivons $\tau_\omega \widehat{\mathbf{f}}^{[j;q]}$ au voisinage de l'origine et modulo les fonctions analytiques en 0 sous la forme

$$\tau_\omega \widehat{\mathbf{f}}^{[j;q]}(\tau) = \sum_{k=0}^{\mathfrak{r}-1} \left(\widetilde{\varphi}_{\omega,k}^{[j;q]} \otimes \text{maj} \left(e^{\check{q}_\omega \left(\frac{1}{\rho^k t^{1/r}} \right)} \right) \right) (\tau)$$

où, pour tout $k \in \{0, \dots, \mathfrak{r}-1\}$, $\widetilde{\varphi}_{\omega,k}^{[j;q]}$ admet une singularité simple-ramifiée en 0 : modulo les fonctions analytiques à l'origine,

$$\widetilde{\varphi}_{\omega,k}^{[j;q]}(\tau) = \sum_{p=0}^{N_{\omega,0}+q} \frac{\alpha_{\omega,k,p}^{[j;q]}}{\tau} \log^p \tau + \sum_{p=1}^{N_{\omega,0}+q+1} \widetilde{h}_{\omega,k,p}^{[j;q]}(\tau) \log^p \tau + \sum_{\lambda \in \Lambda_\omega} \sum_{p=0}^{N_{\omega,\lambda}+q} \left(\widetilde{H}_{\omega,k,\lambda,p}^{[j;q]}(\tau) \log^p \tau \right) \tau^{\lambda-1}$$

où $\alpha_{\omega,k,p}^{[j;q]} \in M_{rn,1}(\mathbb{C})$, $\widetilde{h}_{\omega,k,p}^{[j;q]}, \widetilde{H}_{\omega,k,\lambda,p}^{[j;q]} \in M_{rn,1}(\mathbb{C}\{\tau\})$ et où les exposants de ramification Λ_ω et les ordres logarithmiques $(N_{\omega,0} + q, (N_{\omega,\lambda} + q)_{\lambda \in \Lambda_\omega})$ sont donnés par

$$\Lambda_\omega = \left\{ \frac{\lambda_j}{r} - \frac{u-1}{r}; j \in \mathbb{N}_J^* \text{ et } u \in \mathbb{N}_r^* \text{ tels que } q_j \in Fr(\omega) \text{ et } (\lambda_j \neq 0 \text{ ou } u \neq 1) \right\}$$

$$N_{\omega,0} = \max(n_j - 2; j \in \mathbb{N}_J^* \text{ tel que } q_j \in Fr(\omega) \text{ et } \lambda_j = 0)$$

$$N_{\omega,\lambda} = \max \left(n_j - 2; j \in \mathbb{N}_J^* \text{ tel que } q_j \in Fr(\omega) \text{ et } \exists u \in \mathbb{N}_r^* \text{ tel que } \frac{\lambda_j}{r} - \frac{u-1}{r} = \lambda \right)$$

D'autre part, nous savons (proposition 4.16, point 2) que

$$(4.15) \quad \int_{\gamma_{\theta^+}} \tilde{\varphi}_{\omega,k}^{[j;q]}(\tau) e^{-\frac{\tau}{t}} d\tau = \frac{1}{r} s_{\theta^+}(\widehat{\mathbf{F}}) \mathbf{M}_{\omega,k}(t)$$

pour tout $k \in \{0, \dots, \mathfrak{r} - 1\}$, où les matrices $\mathbf{M}_{\omega,k}(t)$ sont définies par

$$\sum_{\ell=0}^{\mathfrak{p}-1} \left[\begin{array}{c} \left[(\rho^{k+\ell\mathfrak{r}} t^{1/r})^{L_j} \left(c_{\theta,k+\ell\mathfrak{r}}^{[j;q]} - c_{\theta,k+\ell\mathfrak{r}}^{[j;q-1]} \log(\bar{\rho}^{k+\ell\mathfrak{r}} t^{1/r}) + \dots + \frac{(-1)^{q-1}}{(q-1)!} c_{\theta,k+\ell\mathfrak{r}}^{[j;1]} \log^{q-1}(\bar{\rho}^{k+\ell\mathfrak{r}} t^{1/r}) \right) \right]_{j \in J_\omega} \\ \left[(\rho^{k+\ell\mathfrak{r}} t^{1/r})^{L_j - I_{n_j}} \left(c_{\theta,k+\ell\mathfrak{r}}^{[j;q]} - c_{\theta,k+\ell\mathfrak{r}}^{[j;q-1]} \log(\bar{\rho}^{k+\ell\mathfrak{r}} t^{1/r}) + \dots + \frac{(-1)^{q-1}}{(q-1)!} c_{\theta,k+\ell\mathfrak{r}}^{[j;1]} \log^{q-1}(\bar{\rho}^{k+\ell\mathfrak{r}} t^{1/r}) \right) \right]_{j \in J_\omega} \\ \vdots \\ \left[(\rho^{k+\ell\mathfrak{r}} t^{1/r})^{L_j - (r-1)I_{n_j}} \left(c_{\theta,k+\ell\mathfrak{r}}^{[j;q]} - c_{\theta,k+\ell\mathfrak{r}}^{[j;q-1]} \log(\bar{\rho}^{k+\ell\mathfrak{r}} t^{1/r}) + \dots + \frac{(-1)^{q-1}}{(q-1)!} c_{\theta,k+\ell\mathfrak{r}}^{[j;1]} \log^{q-1}(\bar{\rho}^{k+\ell\mathfrak{r}} t^{1/r}) \right) \right]_{j \in J_\omega} \end{array} \right]$$

A partir de là, les calculs deviennent analogues à ceux du paragraphe précédent, mis à part que nous n'utilisons pas toute la matrice $\mathbf{M}_{\omega,k}(t)$, mais uniquement les \mathfrak{p} premières lignes de blocs

$$\sum_{\ell=0}^{\mathfrak{p}-1} \left[\begin{array}{c} \left[(\rho^{k+\ell\mathfrak{r}} t^{1/r})^{L_j} \left(c_{\theta,k+\ell\mathfrak{r}}^{[j;q]} - c_{\theta,k+\ell\mathfrak{r}}^{[j;q-1]} \log(\bar{\rho}^{k+\ell\mathfrak{r}} t^{1/r}) + \dots + \frac{(-1)^{q-1}}{(q-1)!} c_{\theta,k+\ell\mathfrak{r}}^{[j;1]} \log^{q-1}(\bar{\rho}^{k+\ell\mathfrak{r}} t^{1/r}) \right) \right]_{j \in J_\omega} \\ \left[(\rho^{k+\ell\mathfrak{r}} t^{1/r})^{L_j - I_{n_j}} \left(c_{\theta,k+\ell\mathfrak{r}}^{[j;q]} - c_{\theta,k+\ell\mathfrak{r}}^{[j;q-1]} \log(\bar{\rho}^{k+\ell\mathfrak{r}} t^{1/r}) + \dots + \frac{(-1)^{q-1}}{(q-1)!} c_{\theta,k+\ell\mathfrak{r}}^{[j;1]} \log^{q-1}(\bar{\rho}^{k+\ell\mathfrak{r}} t^{1/r}) \right) \right]_{j \in J_\omega} \\ \vdots \\ \left[(\rho^{k+\ell\mathfrak{r}} t^{1/r})^{L_j - (\mathfrak{p}-1)I_{n_j}} \left(c_{\theta,k+\ell\mathfrak{r}}^{[j;q]} - c_{\theta,k+\ell\mathfrak{r}}^{[j;q-1]} \log(\bar{\rho}^{k+\ell\mathfrak{r}} t^{1/r}) + \dots + \frac{(-1)^{q-1}}{(q-1)!} c_{\theta,k+\ell\mathfrak{r}}^{[j;1]} \log^{q-1}(\bar{\rho}^{k+\ell\mathfrak{r}} t^{1/r}) \right) \right]_{j \in J_\omega} \end{array} \right]$$

En effet, l'égalité (4.15) ne nous permet d'obtenir que les \mathfrak{p} multiplicateurs de Stokes $c_{\theta,k+\ell\mathfrak{r}}^{[j;q]}$, $\ell \in \{0, \dots, \mathfrak{p} - 1\}$, en fonction des k -quasi-coefficients de résurgence de $\tilde{\mathbf{f}}^{[j;q]}$ à droite de ω . Noter par ailleurs que l'ensemble

$$\{k + \ell\mathfrak{r}; \ell \in \{0, \dots, \mathfrak{p} - 1\}\}_{k \in \{0, \dots, \mathfrak{r}-1\}}$$

formant une partition de $\{0, \dots, r - 1\}$, l'ensemble des égalités (4.15), k parcourant $\{0, \dots, \mathfrak{r} - 1\}$, permet de calculer tous les multiplicateurs de Stokes $c_{\theta,p}^{[j;q]}$, $p \in \{0, \dots, r - 1\}$. De plus, une matrice $c_{\theta,p}^{[j;q]}$ ne peut être obtenue à partir de (4.15) pour deux valeurs différentes de k .

En reprenant les calculs du paragraphe précédent, nous voyons qu'il suffit de vérifier que la matrice

$$\mathcal{V}_{k,\mathfrak{p},\mathfrak{r}} = \left[\begin{array}{cccc} \rho^{kL_j} & \rho^{(k+\mathfrak{r})L_j} & \dots & \rho^{(k+(\mathfrak{p}-1)\mathfrak{r})L_j} \\ \rho^{k(L_j - I_{n_j})} & \rho^{(k+\mathfrak{r})(L_j - I_{n_j})} & \dots & \rho^{(k+(\mathfrak{p}-1)\mathfrak{r})(L_j - I_{n_j})} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho^{k(L_j - (\mathfrak{p}-1)I_{n_j})} & \rho^{(k+\mathfrak{r})(L_j - (\mathfrak{p}-1)I_{n_j})} & \dots & \rho^{(k+(\mathfrak{p}-1)\mathfrak{r})(L_j - (\mathfrak{p}-1)I_{n_j})} \end{array} \right]$$

est inversible pour tout $k \in \{0, \dots, \mathfrak{r} - 1\}$.

Lemme 4.20 *Pour tout $k \in \{0, \dots, \mathfrak{r} - 1\}$, la matrice $\mathcal{V}_{k,p,\mathfrak{r}}$ ci-dessus est inversible d'inverse*

$$\frac{1}{\mathfrak{p}} \begin{bmatrix} \bar{\rho}^{kL_j} & \bar{\rho}^{k(L_j - I_{n_j})} & \dots & \bar{\rho}^{k(L_j - (\mathfrak{p}-1)I_{n_j})} \\ \bar{\rho}^{(k+\mathfrak{r})L_j} & \bar{\rho}^{(k+\mathfrak{r})(L_j - I_{n_j})} & \dots & \bar{\rho}^{(k+\mathfrak{r})(L_j - (\mathfrak{p}-1)I_{n_j})} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{\rho}^{(k+(\mathfrak{p}-1)\mathfrak{r})L_j} & \bar{\rho}^{(k+(\mathfrak{p}-1)\mathfrak{r})(L_j - I_{n_j})} & \dots & \bar{\rho}^{(k+(\mathfrak{p}-1)\mathfrak{r})(L_j - (\mathfrak{p}-1)I_{n_j})} \end{bmatrix}$$

Démonstration. Fixons $k \in \{0, \dots, \mathfrak{r} - 1\}$ et posons

$$\mathcal{W}_{k,p,\mathfrak{r}} = \begin{bmatrix} \bar{\rho}^{kL_j} & \bar{\rho}^{k(L_j - I_{n_j})} & \dots & \bar{\rho}^{k(L_j - (\mathfrak{p}-1)I_{n_j})} \\ \bar{\rho}^{(k+\mathfrak{r})L_j} & \bar{\rho}^{(k+\mathfrak{r})(L_j - I_{n_j})} & \dots & \bar{\rho}^{(k+\mathfrak{r})(L_j - (\mathfrak{p}-1)I_{n_j})} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{\rho}^{(k+(\mathfrak{p}-1)\mathfrak{r})L_j} & \bar{\rho}^{(k+(\mathfrak{p}-1)\mathfrak{r})(L_j - I_{n_j})} & \dots & \bar{\rho}^{(k+(\mathfrak{p}-1)\mathfrak{r})(L_j - (\mathfrak{p}-1)I_{n_j})} \end{bmatrix}$$

L'élément $(\mathcal{V}_{k,p,\mathfrak{r}}\mathcal{W}_{k,p,\mathfrak{r}})^{(s,t)}$ situé à la $s^{\text{ème}}$ ligne et $t^{\text{ème}}$ colonne de blocs de la matrice $\mathcal{V}_{k,p,\mathfrak{r}}\mathcal{W}_{k,p,\mathfrak{r}}$ étant donné par

$$(\mathcal{V}_{k,p,\mathfrak{r}}\mathcal{W}_{k,p,\mathfrak{r}})^{(s,t)} = \sum_{\ell=0}^{\mathfrak{p}-1} \rho^{(k+\ell\mathfrak{r})(L_j - (s-1)I_{n_j})} \bar{\rho}^{(k+\ell\mathfrak{r})(L_j - (t-1)I_{n_j})}$$

nous obtenons

$$(\mathcal{V}_{k,p,\mathfrak{r}}\mathcal{W}_{k,p,\mathfrak{r}})^{(s,t)} = \left(\sum_{\ell=0}^{\mathfrak{p}-1} \rho^{(k+\ell\mathfrak{r})(t-s)} \right) I_{n_j}$$

★ Si $s = t$, nous avons clairement $(\mathcal{V}_{k,p,\mathfrak{r}}\mathcal{W}_{k,p,\mathfrak{r}})^{(s,t)} = \mathfrak{p}I_{n_j}$.

★ En revanche, si $s \neq t$,

$$(\mathcal{V}_{k,p,\mathfrak{r}}\mathcal{W}_{k,p,\mathfrak{r}})^{(s,t)} = \left(\rho^{k(t-s)} \sum_{\ell=0}^{\mathfrak{p}-1} \rho^{\ell\mathfrak{r}(t-s)} \right) I_{n_j} = \rho^{k(t-s)} \frac{1 - \rho^{\mathfrak{p}\mathfrak{r}(t-s)}}{1 - \rho^{\mathfrak{r}(t-s)}} I_{n_j}$$

Par suite, $(\mathcal{V}_{k,p,\mathfrak{r}}\mathcal{W}_{k,p,\mathfrak{r}})^{(s,t)} = 0$, puisque $\mathfrak{p}\mathfrak{r} = r$ et ρ est une racine $r^{\text{ème}}$ de l'unité.

Il s'ensuit que $\mathcal{W}_{k,p,\mathfrak{r}} = \mathfrak{p}\mathcal{V}_{k,p,\mathfrak{r}}^{-1}$, ce qui donne le résultat voulu. ■

Nous déduisons de ce lemme et des calculs du paragraphe précédent le résultat suivant permettant d'exprimer les multiplicateurs de Stokes $c_{\theta,k+\ell\mathfrak{r}}^{[j;q]}$ en fonction des k -quasi-coefficients de résurgence de $\tilde{\mathbf{f}}^{[q]}$ à droite de ω :

Théorème 4.21 *Soit $q \in \{1, \dots, n_1\}$. Pour toute singularité $\omega \in \Omega_{\theta}(\tilde{\mathbf{f}})$ de $\tilde{\mathbf{f}}$ de front non monomial, nous définissons le polynôme \check{q}_{ω} par*

$$q_j \left(\frac{1}{x} \right) = -\frac{\omega}{x^r} + \check{q}_{\omega} \left(\frac{1}{x} \right)$$

pour tout $j \in \{1, \dots, J\}$ tel que $q_j \in Fr(\omega)$ et nous posons

$$\mathfrak{p} = \text{pgcd}(j \in \text{supp}(\check{q}_{\omega}), r) \text{ et } \mathfrak{r} = \frac{r}{\mathfrak{p}}$$

Considérant le prolongement analytique de $\tilde{\mathbf{f}}^{[;q]}$ à droite de ω , nous notons pour tout $k \in \{0, \dots, \mathbf{r} - 1\}$:

$$\bullet \alpha_{\omega, k, p}^{[;q]} = \begin{bmatrix} \alpha_{\omega, k, p}^{[1;q]} \\ \vdots \\ \alpha_{\omega, k, p}^{[r;q]} \end{bmatrix} \text{ avec } \alpha_{\omega, k, p}^{[u;q]} = \begin{bmatrix} \alpha_{\omega, k, p}^{[u, 1;q]} \\ \vdots \\ \alpha_{\omega, k, p}^{[u, J;q]} \end{bmatrix} \text{ le } k\text{-quasi-coefficient de résurgence lié à } \frac{\log^p \tau}{\tau} \text{ avec } p \in \{0, \dots, N_{\omega, 0} + q\}$$

$$\bullet \tilde{H}_{\omega, k, \lambda, p}^{[;q]}(\tau) = \begin{bmatrix} \tilde{H}_{\omega, k, \lambda, p}^{[1;q]}(\tau) \\ \vdots \\ \tilde{H}_{\omega, k, \lambda, p}^{[r;q]}(\tau) \end{bmatrix} \text{ avec } \tilde{H}_{\omega, k, \lambda, p}^{[u;q]}(\tau) = \begin{bmatrix} \tilde{H}_{\omega, k, \lambda, p}^{[u, 1;q]}(\tau) \\ \vdots \\ \tilde{H}_{\omega, k, \lambda, p}^{[u, J;q]}(\tau) \end{bmatrix} \text{ le } k\text{-quasi-coefficient de résurgence lié à } \tau^{\lambda-1} \log^p \tau \text{ avec } p \in \{0, \dots, N_{\omega, \lambda} + q\}$$

Alors, pour toute singularité $\omega \in \Omega_{\theta}(\hat{\mathbf{f}})$ de front non monomial, pour tout $j \in J_{\omega}$ et pour tout $k \in \{0, \dots, \mathbf{r} - 1\}$, les matrices $c_{\theta, k+\ell\tau}^{[j;q]}$, $\ell \in \{0, \dots, \mathbf{p} - 1\}$, sont les uniques solutions du système

$$\mathcal{V}_{k, \mathbf{p}, \tau} \begin{bmatrix} c_{\theta, k}^{[j;q]} \\ c_{\theta, k+\tau}^{[j;q]} \\ \vdots \\ c_{\theta, k+(\mathbf{p}-1)\tau}^{[j;q]} \end{bmatrix} = r \mathfrak{C}_{k, j, q} - \mathfrak{X}_{k, j, q}$$

où

1. $\mathcal{V}_{k, \mathbf{p}, \tau}$ est la matrice

$$\mathcal{V}_{k, \mathbf{p}, \tau} = \begin{bmatrix} \rho^{kL_j} & \rho^{(k+\mathbf{r})L_j} & \dots & \rho^{(k+(\mathbf{p}-1)\tau)L_j} \\ \rho^{k(L_j - I_{n_j})} & \rho^{(k+\mathbf{r})(L_j - I_{n_j})} & \dots & \rho^{(k+(\mathbf{p}-1)\tau)(L_j - I_{n_j})} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho^{k(L_j - (\mathbf{p}-1)I_{n_j})} & \rho^{(k+\mathbf{r})(L_j - (\mathbf{p}-1)I_{n_j})} & \dots & \rho^{(k+(\mathbf{p}-1)\tau)(L_j - (\mathbf{p}-1)I_{n_j})} \end{bmatrix}$$

2. $\mathfrak{C}_{k, j, q} = \begin{bmatrix} \mathfrak{C}_{k, j, q, 1} \\ \mathfrak{C}_{k, j, q, 2} \\ \vdots \\ \mathfrak{C}_{k, j, q, \mathbf{p}} \end{bmatrix}$ est la matrice de dimension $\mathbf{p}n_j \times 1$ définie par

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{C}_{k, j, q, 1} = \sum_{p=0}^{N_{\omega, 0} + q} \kappa_p(0) \alpha_{\omega, k, p}^{[1; j; q]} \quad \text{si } \lambda_j = 0 \\ \mathfrak{C}_{k, j, q, u} = \sum_{p=0}^{N_{\omega, \frac{\lambda_j}{r} - \frac{u-1}{r}} + q} \kappa_p \left(\frac{\lambda_j}{r} - \frac{u-1}{r} \right) \tilde{H}_{\omega, k, \frac{\lambda_j}{r} - \frac{u-1}{r}, p}^{[u; j; q]}(0) \quad \text{si } \lambda_j \neq 0 \text{ ou } u \neq 1 \end{array} \right.$$

où les nombres complexes $\kappa_p(\lambda)$ sont définis par la relation

$$\kappa_p(\lambda) = 2i\pi \frac{d^p}{dz^p} \left(\frac{e^{-i\pi z}}{\Gamma(1-z)} \right) \Big|_{z=\lambda}$$

3. $\mathfrak{X}_{k,j,q}$ est la matrice de dimension $\mathfrak{p}n_j \times 1$ définie par

$$\mathfrak{X}_{k,j,q} = \begin{bmatrix} \sum_{\ell=0}^{\mathfrak{p}-1} \rho^{(k+\ell\tau)L_j} \mathfrak{X}_{k,j,q,\ell} \\ \sum_{\ell=0}^{\mathfrak{p}-1} \rho^{(k+\ell\tau)(L_j-I_{n_j})} \mathfrak{X}_{k,j,q,\ell} \\ \vdots \\ \sum_{\ell=0}^{\mathfrak{p}-1} \rho^{(k+\ell\tau)(L_j-(\mathfrak{p}-1)I_{n_j})} \mathfrak{X}_{k,j,q,\ell} \end{bmatrix}$$

avec $\mathfrak{X}_{k,j,1,\ell} = 0$ et, pour $q \geq 2$,

$$\mathfrak{X}_{k,j,q,\ell} = \sum_{p=1}^{q-1} \frac{(-1)^p ((k+\ell\tau) \log \bar{\rho})^p}{p!} c_{\theta, k+\ell\tau}^{[j; q-p]}$$

pour tout $\ell \in \{0, \dots, \mathfrak{p}-1\}$.

Ce résultat généralise les calculs du théorème 4.18 : en posant $\mathfrak{p} = r$ et donc $\tau = 1$ dans le cas où $\check{q}_\omega = 0$, *i.e.*, $\text{supp}(\check{q}_\omega) = \emptyset$, nous retrouvons toutes les formules du paragraphe précédent.

Toutefois, si ce résultat permet d'explicitier de façon théorique les relations liant les multiplicateurs de Stokes et les quasi-coefficients de résurgence de $\tilde{\mathbf{f}}$ en une singularité de front non monomial, il est cependant difficilement applicable dans un calcul numérique. Reprenons en effet l'exemple du début du paragraphe 4.3.2 : le système différentiel linéaire

$$x^3 \frac{dY}{dx} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ x^4 & 2+x \end{bmatrix} Y$$

admet pour solution fondamentale formelle $\widehat{Y}(x) = \widehat{F}(x)e^{Q(\frac{1}{x})}$ avec

$$\widehat{F}(x) = I_2 + O(x^4) \text{ et } Q\left(\frac{1}{x}\right) = \text{diag}\left(0, -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\right)$$

Notant $\widehat{\mathbf{f}}$ la première colonne de la série 2-réduite $\widehat{\mathbf{F}}$ de \widehat{F} , nous avons vu que sa transformée de Borel $\tilde{\mathbf{f}}$ a une unique singularité au point $\tau = 1$. Précisément, la

fonction $\tilde{\mathbf{f}}^{[1,2]}$ s'écrit, pour tout $\tau \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re}(\tau) < 1$, sous la forme

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{f}}^{[1,2]}(\tau) = & -\frac{3}{2} \left(\frac{2}{1-\tau} + \frac{{}_1F_1\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -\frac{1}{4(1-\tau)}\right)}{(1-\tau)^2} e^{\frac{1}{4(1-\tau)}} \right) \\ & + \left(e^{-\frac{1}{4}} + \frac{3}{2} {}_1F_1\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -\frac{1}{4}\right) \right) (1-\tau)^{-\frac{3}{2}} e^{\frac{1}{4(1-\tau)}} + 2 \end{aligned}$$

où ${}_1F_1\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; z\right)$ désigne la fonction hypergéométrique confluente de paramètres $\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{2}$. A partir de là, nous voyons qu'il est difficile, déjà sur cet exemple très simple, de retrouver les quasi-coefficients de résurgence de $\tilde{\mathbf{f}}$ en 1.

D'une manière générale, nous allons voir au paragraphe 5.3.4 que la présence des exponentielles non triviales $e^{\tilde{q}\omega\left(\frac{1}{\rho^k t^{1/r}}\right)}$ rend très difficile le calcul effectif des multiplicateurs de Stokes, tout du moins si nous travaillons avec le système initial. Nous montrerons alors qu'un recours systématique aux singularités de front monomial (ou cas séparé) permet de contourner cette difficulté.

4.A Appendice 4.A. Quelques précisions sur les majeurs des exponentielles $\exp(q)$ avec $q \in t^{-1/r}\mathbb{C}[t^{-1/r}]$ et $\deg(q) < r$

Fixons un élément q de $t^{-1/r}\mathbb{C}[t^{-1/r}]$ de degré inférieur à $r - 1$. L'exponentielle e^q étant une constante de résurgence (elle est holomorphe et à croissance sous-exponentielle à l'origine), nous choisissons –comme il est d'usage dans ce cas– pour majeur $\operatorname{maj}(e^q)$ l'un de ses majeurs holomorphes sur \mathbb{C}_∞ tout entier et à croissance exponentielle d'ordre au plus un à l'infini (on sait qu'un tel majeur existe –cf. paragraphe 1.2.1).

L'objectif de cet appendice est double : décrire, lorsque c'est possible, le majeur $\operatorname{maj}(e^q)$ en terme de fonctions spéciales, puis donner dans ce cas les exponentielles intervenant dans son développement trans-asymptotique à l'origine.

Pour établir le premier point, nous remarquons que e^q étant solution d'une équation différentielle linéaire (E) à coefficients polynomiaux et de niveau unique $\deg(q) < 1$, son majeur $\operatorname{maj}(e^q)$ définit une microsolution à l'origine de l'équation transformée de Borel (\tilde{E}) de (E) (théorème 2.33). Ainsi, la détermination explicite d'une base de microsolution à l'origine de (\tilde{E}) fournit l'écriture de $\operatorname{maj}(e^q)$ voulue. En particulier, seul le cas où q est réduit à un monôme peut être traité (voir exemples ci-après) et nous obtenons comme fonctions spéciales des fonctions hypergéométriques. Quant aux exponentielles intervenant dans le développement trans-asymptotique à l'origine de $\operatorname{maj}(e^q)$, elles sont fournies par l'étude formelle à l'origine des équations liées à ces différentes microsolution.

Commençons par regarder quelques exemples.

4.A.1 Quelques exemples

4.A.1.1 Exemple 1 : cas où $q(\frac{1}{t}) = at^{-1/2}$, $a \in \mathbb{C}^*$

L'exponentielle e^q est solution de l'équation différentielle

$$(\mathcal{E}_2) \quad 4t^3 y'' + 6t^2 y' - a^2 y = 0$$

dont la transformée de Borel est

$$(\tilde{\mathcal{E}}_2) \quad 4\tau^2 \tilde{y}' + (6\tau - a^2) \tilde{y} = 0$$

Toutes les microsolutions de $(\tilde{\mathcal{E}}_2)$ sont à l'origine et l'espace de ces microsolutions est de dimension 2 : notons en $(\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2)$ une base.

La première microsolution $\tilde{\varphi}_1$ est définie par la vraie solution $\tau^{-3/2} e^{-\frac{a^2}{4\tau}}$ de $(\tilde{\mathcal{E}}_2)$:

$$\tilde{\varphi}_1 = \text{can} \left(\tau^{-3/2} e^{-\frac{a^2}{4\tau}} \right)$$

La seconde microsolution $\tilde{\varphi}_2$ peut être obtenue en résolvant l'équation

$$4\tau^2 \tilde{y}' + (6\tau - a^2) \tilde{y} = b \text{ avec } b \in \mathbb{C}^*$$

par la méthode de variation de la constante ([Mal91-1]) : notant

$$\tilde{\Phi}_2(\tau) = \frac{2}{\tau} - a^2 \frac{{}_1F_1 \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; \frac{a^2}{4\tau} \right)}{\tau^2} e^{-\frac{a^2}{4\tau}}$$

où ${}_1F_1 \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; z \right)$ désigne la fonction hypergéométrique confluyente de paramètres $\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{2}$, nous obtenons

$$4\tau^2 \tilde{\Phi}_2' + (6\tau - a^2) \tilde{\Phi}_2 = 4$$

Ainsi, $\tilde{\varphi}_2 = \text{can}(\tilde{\Phi}_2)$ est une microsolution de $(\tilde{\mathcal{E}}_2)$ à l'origine (et elle est par construction linéairement indépendante de $\tilde{\varphi}_1$).

Le majeur $\text{maj}(e^{at^{-1/2}})$ définissant également une microsolution à l'origine, nous obtenons finalement :

$$\text{maj}(e^{at^{-1/2}})(\tau) = \lambda \tau^{-3/2} e^{-\frac{a^2}{4\tau}} + \mu \left(\frac{2}{\tau} - a^2 \frac{{}_1F_1 \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; \frac{a^2}{4\tau} \right)}{\tau^2} e^{-\frac{a^2}{4\tau}} \right)$$

avec $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Remarquer que nous retrouvons ici le résultat annoncé dans l'exemple du paragraphe 4.3.2 sur l'étude des singularités de front non monomial. Remarquer également que si nous remplaçons a par $-a$, nous obtenons exactement les mêmes formules.

4.A.1.2. Exemple 2 : cas où $q(\frac{1}{t}) = at^{-1/3}$, $a \in \mathbb{C}^*$

À présent, l'exponentielle e^q est solution de l'équation différentielle

$$(\mathcal{E}_3) \quad 27t^4 y''' + 108x^3 y'' + 60x^2 y' + a^3 y = 0$$

dont la transformée de Borel est

$$(\tilde{\mathcal{E}}_3) \quad 27\tau^3 \tilde{y}'' + 108\tau^2 \tilde{y}' + (60\tau + a^3) \tilde{y} = 0$$

A nouveau, toutes les microsolutions de $(\tilde{\mathcal{E}}_3)$ sont à l'origine. L'espace de ces microsolutions est de dimension 3, et nous en notons $(\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2, \tilde{\varphi}_3)$ une base.

Les deux premières microsolutions $\tilde{\varphi}_1$ et $\tilde{\varphi}_2$ sont définies par les vraies solutions de $(\tilde{\mathcal{E}}_3)$:

$$\tilde{\varphi}_1 = \text{can} \left(\tau^{-5/3} {}_0F_1 \left(\cdot; \frac{4}{3}; -\frac{a^3}{27\tau} \right) \right) \text{ et } \tilde{\varphi}_2 = \text{can} \left(\tau^{-4/3} {}_0F_1 \left(\cdot; \frac{2}{3}; -\frac{a^3}{27\tau} \right) \right)$$

où ${}_0F_1(\cdot; \frac{4}{3}; z)$ et ${}_0F_1(\cdot; \frac{2}{3}; z)$ désignent respectivement les fonctions hypergéométriques de paramètre $\frac{4}{3}$ et $\frac{2}{3}$. Comme précédemment, la troisième microsolution $\tilde{\varphi}_3$ peut être obtenue en résolvant par exemple l'équation

$$4\tau^2 \tilde{y}' + (6\tau - a^2) \tilde{y} = 1$$

par la méthode de variation de la constante. Nous obtenons ainsi

$$\tilde{\varphi}_3 = \text{can} \left(\frac{9}{\tau} - \frac{3a^3 {}_1F_2 \left(1; \frac{4}{3}, \frac{5}{3}; -\frac{a^3}{27\tau} \right)}{2\tau^2} \right)$$

où ${}_1F_2(1; \frac{4}{3}, \frac{5}{3}; z)$ désigne la fonction hypergéométrique de paramètres 1, $\frac{4}{3}$ et $\frac{5}{3}$.

Par suite, le majeur $\text{maj}(e^{at^{-1/3}})$ s'écrit sous la forme :

$$\text{maj}(e^{at^{-1/3}})(\tau) = \lambda \frac{{}_0F_1 \left(\cdot; \frac{2}{3}; -\frac{a^3}{27\tau} \right)}{\tau^{4/3}} + \mu \frac{{}_0F_1 \left(\cdot; \frac{4}{3}; -\frac{a^3}{27\tau} \right)}{\tau^{5/3}} + \nu \left(\frac{9}{\tau} - \frac{3a^3 {}_1F_2 \left(1; \frac{4}{3}, \frac{5}{3}; -\frac{a^3}{27\tau} \right)}{2\tau^2} \right)$$

avec $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{C}$.

4.A.1.3. Exemple 3 : cas où $q(\frac{1}{t}) = at^{-2/3}$, $a \in \mathbb{C}^*$

Les calculs sont similaires à ceux de l'exemple précédent : une équation différentielle vérifiée par e^q est

$$(\mathcal{E}_3) \quad 27t^5 y''' + 135x^4 y'' + 105x^3 y' + 8a^3 y = 0$$

Sa transformée de Borel étant

$$(\tilde{\mathcal{E}}_3) \quad 27\tau^3\tilde{y}'' + (135\tau^2 + 8a^3)\tilde{y}' + 105\tau\tilde{y} = 0$$

nous cherchons à nouveau une base $(\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2, \tilde{\varphi}_3)$ des microsolutions de $(\tilde{\mathcal{E}}_3)$ à l'origine. Comme précédemment, deux des microsolutions sont définies par les vraies solutions de $(\tilde{\mathcal{E}}_3)$ et la dernière est obtenue en résolvant par la méthode de variation de la constante l'équation

$$27\tau^3\tilde{y}'' + (135\tau^2 + 8a^3)\tilde{y}' + 105\tau\tilde{y} = 1$$

Finalement, le majeur $maj(e^{at^{-2/3}})$ s'écrit sous la forme :

$$maj(e^{at^{-2/3}})(\tau) = \lambda \frac{{}_1F_1\left(\frac{5}{6}, \frac{2}{3}, \frac{4a^3}{27\tau^2}\right)}{\tau^{5/3}} + \mu \frac{{}_1F_1\left(\frac{7}{6}, \frac{4}{3}, \frac{4a^3}{27\tau^2}\right)}{\tau^{7/3}} + \nu \frac{{}_2F_2\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{4a^3}{27\tau^2}\right)}{\tau}$$

avec $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{C}$.

4.A.1.4. Exemple 4 : cas où $q(\frac{1}{t}) = t^{-2/3} + t^{-1/3}$

A présent, e^q satisfait à l'équation différentielle

$$(216t^5 - 81t^6)y''' + (1080t^4 - 324t^5)y'' - (144t^2 - 930t^3 + 180t^4)y' + (64 - 64t - 21t^2)y = 0$$

dont la transformée de Borel est définie par

$$216\tau^3\tilde{y}''' + (64 - 144\tau + 1728\tau^2 - 81\tau^3)\tilde{y}'' - (352 - 3090\tau + 324\tau^2)\tilde{y}' + (909 - 180\tau)\tilde{y} = 0$$

Contrairement aux trois exemples précédents, les solutions (et donc les microsolutions) de cette équation ne sont pas des fonctions connues.

Ainsi, nous nous limitons dans la suite de cet appendice au cas où le polynôme q est réduit à un monôme. Avant de passer à une étude plus théorique, commençons par quelques rappels sur les fonctions hypergéométriques.

4.A.2 Rappels sur les fonctions hypergéométriques

Nous ne rappelons ici que la définition et les propriétés classiques des fonctions hypergéométriques qui nous serviront par la suite. Pour plus de détails, nous renvoyons par exemple à [Olv97], [Sla60] et [Sla66]. On pourra également consulter [AS70] et [GR00].

Etant donné p nombres complexes $a_1, a_2, \dots, a_p \in \mathbb{C}$ et q nombres complexes non entiers négatifs $b_1, b_2, \dots, b_q \in \mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})$, on appelle *fonction hypergéométrique de paramètres* a_1, a_2, \dots, a_p et b_1, b_2, \dots, b_q la fonction définie par

$$(4.16) \quad {}_pF_q(a_1, a_2, \dots, a_p; b_1, b_2, \dots, b_q; z) = \sum_{m \geq 0} \frac{(a_1)_m (a_2)_m \dots (a_p)_m}{(b_1)_m (b_2)_m \dots (b_q)_m} \frac{z^m}{m!}$$

où, pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, $(\alpha)_m$ désigne le *symbole de Pochhammer* :

$$(\alpha)_0 = 1 \text{ et } (\alpha)_m = \alpha(\alpha + 1)\dots(\alpha + m - 1) \text{ pour tout } m \geq 1$$

Dans le cas où $p = q$, ${}_pF_p$ est appelée *fonction hypergéométrique confluyente*.

On étend la définition (4.16) au cas où $p = 0$ en posant

$${}_0F_q(\cdot; b_1, b_2, \dots, b_q; z) = \sum_{m \geq 0} \frac{1}{(b_1)_m (b_2)_m \dots (b_q)_m} \frac{z^m}{m!}$$

On a les propriétés classiques suivantes :

- si $p \leq q$, la série (4.16) converge pour tout z dans \mathbb{C} et ${}_pF_q$ est une fonction entière sur \mathbb{C} ;
- si $p = q + 1$, le rayon de convergence de la série (4.16) est 1;
- si $p > q + 1$, la série (4.16) diverge en tout point de \mathbb{C}^* (sauf dans le cas où au moins l'un des a_j est un entier négatif).

Regardons à présent le lien entre ${}_pF_q$ et les équations différentielles.

– Lorsque $p \neq 0$, la fonction ${}_pF_q(a_1, a_2, \dots, a_p; b_1, b_2, \dots, b_q; z)$ est solution de l'équation hypergéométrique d'ordre $(p, q + 1)$ définie par

$$\vartheta_z(\vartheta_z + b_1 - 1)(\vartheta_z + b_2 - 1)\dots(\vartheta_z + b_q - 1)y = z(\vartheta_z + a_1)(\vartheta_z + a_2)\dots(\vartheta_z + a_p)y$$

où $\vartheta_z = z \frac{d}{dz}$ désigne l'opérateur d'Euler en z . Cet opérateur devenant

$$\vartheta_z = -\frac{1}{k} \vartheta_x \text{ avec } \vartheta_x = x \frac{d}{dx}$$

par le changement d'inconnue $z = \frac{a}{x^k}$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $k \in \mathbb{N}^*$, on en déduit que la fonction

$${}_pF_q\left(a_1, a_2, \dots, a_p; b_1, b_2, \dots, b_q; \frac{a}{x^k}\right)$$

est solution de l'équation différentielle

$$\begin{aligned} \frac{(-1)^{q-p+1}}{k^{q-p+1}} x^k \vartheta_x(\vartheta_x - k(b_1 - 1))(\vartheta_x - k(b_2 - 1))\dots(\vartheta_x - k(b_q - 1))y \\ = a(\vartheta_x - ka_1)(\vartheta_x - ka_2)\dots(\vartheta_x - ka_p)y \end{aligned}$$

En particulier, une équation de la forme

$$(4.17) \quad x^k \left(x^{q+1} \frac{d^{q+1}y}{dx^{q+1}} + \beta_q x^q \frac{d^q y}{dx^q} + \dots + \beta_1 x \frac{dy}{dx} \right) = \alpha_p x^p \frac{d^p y}{dx^p} + \dots + \alpha_1 x \frac{dy}{dx} + \alpha_0 y$$

admet une fonction ${}_pF_q(a_1, a_2, \dots, a_p; b_1, b_2, \dots, b_q; \frac{a}{x^k})$ comme solution.

– De même, lorsque $p = 0$, la fonction ${}_0F_q(\cdot; b_1, b_2, \dots, b_q; \frac{a}{x^k})$ est solution de l'équation

$$\frac{(-1)^{q+1}}{k^{q+1}} x^k \vartheta_x(\vartheta_x - k(b_1 - 1))(\vartheta_x - k(b_2 - 1))\dots(\vartheta_x - k(b_q - 1))y = ay$$

Ainsi, une équation de la forme

$$(4.18) \quad x^k \left(x^{q+1} \frac{d^{q+1}y}{dx^{q+1}} + \beta_q x^q \frac{d^q y}{dx^q} + \dots + \beta_1 x \frac{dy}{dx} \right) = (-1)^q k^q a y$$

admet une fonction ${}_0F_q(\cdot; b_1, b_2, \dots, b_q; \frac{a}{x^k})$ comme solution.

Passons à présent à l'étude des majeurs de $\exp(q)$.

4.A.3 Majeurs et fonctions hypergéométriques

Suivant la remarque précédente, nous ne nous intéressons qu'au cas où le polynôme q est de la forme

$$q \left(\frac{1}{t} \right) = \frac{a}{t^{k/r}} \text{ avec } a \in \mathbb{C}^* \text{ et } k \in \{1, \dots, r-1\}$$

★ Détermination d'une équation différentielle linéaire vérifiée par e^q :

Notant

$$y(t) = e^{q\left(\frac{1}{t}\right)} = e^{at^{-k/r}}$$

un raisonnement par récurrence montre aisément que pour tout $m \in \mathbb{N}$:

$$E_m(r, k) \quad (-1)^m r^m y^{(m)} = \sum_{j=1}^{m-1} P_{m,j}(r, k) a^j t^{-\frac{mr+jk}{r}} e^{at^{-k/r}} + k^m a^m t^{-\frac{m(r+k)}{r}} e^{at^{-k/r}}$$

où $y^{(m)} = \frac{d^m y}{dt^m}$ désigne la dérivée $m^{\text{ème}}$ de y par rapport à t et où $P_{m,j}(r, k)$ est un élément non nul de $\mathbb{Q}^+[r, k]$. Remarquer que si

$$\frac{k}{r} = \frac{k'}{r'}$$

alors les équations $E_m(r, k)$ et $E_m(r', k')$ sont identiques pour tout m . Aussi, nous supposons dans la suite que l'élément $k \in \{1, \dots, r-1\}$ est choisi de telle sorte que la fraction $\frac{k}{r}$ soit irréductible.

En utilisant alors les équations $E_m(r, k)$ ci-dessus, nous voyons que y satisfait à une équation différentielle linéaire de la forme

$$\begin{aligned} (\mathcal{E}_k) \quad r^r t^{r+k} y^{(r)} + Q_{r-1}(r, k) t^{r+k-1} y^{(r-1)} + \dots + Q_j(r, k) t^{j+k} y^{(j)} + \dots + Q_1(r, k) t^{k+1} y' \\ + (-1)^r k^r a^r y = 0 \end{aligned}$$

avec $Q_j(r, j) \in \mathbb{N}[r, k] \setminus \{0\}$ indépendants de a . Signalons que pour des valeurs k et r fixées, une telle équation peut être obtenue par exemple sous Maple à l'aide de la commande `holcxprtodiffeq` du paquetage `gfun`.

Une base de solutions de (\mathcal{E}_k) est donnée par

$$\left(e^{\rho^\ell at^{-k/r}}, \ell \in \{0, \dots, r-1\} \right)$$

où $\rho = e^{\frac{2i\pi}{r}}$ est une racine $r^{\text{ème}}$ de l'unité. Remarquer que l'hypothèse d'irréductibilité de $\frac{k}{r}$ entraîne que les polynômes $\rho^\ell at^{-k/r}$ sont bien distincts deux à deux (corollaire 4.13). L'équation (\mathcal{E}_k) est donc de type exponentiel et nous pouvons lui appliquer le théorème d'Ecalte-Malgrange sur les microsolutions (théorème 2.33) : le majeur $maj(e^{at^{-k/r}})$ définit une microsolution à l'origine de l'équation transformée de Borel $(\tilde{\mathcal{E}}_k)$ de (\mathcal{E}_k) . Ainsi, pour décrire $maj(e^{at^{-k/r}})$ en terme de fonctions spéciales, il suffit de déterminer de façon explicite une base de microsolutions de $(\tilde{\mathcal{E}}_k)$ à l'origine (qui est également une base de microsolutions de $(\tilde{\mathcal{E}}_k)$).

★ Détermination de $(\tilde{\mathcal{E}}_k)$ et d'une base de microsolutions à l'origine :

Divisant l'équation (\mathcal{E}_k) par t^k et appliquant une transformation de Borel à la nouvelle équation, nous voyons que $(\tilde{\mathcal{E}}_k)$ s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned} (\tilde{\mathcal{E}}_k) \quad r^r \tau^r \tilde{y}^{(r-1)} + Q_{r-1}(r, k) \tau^{r-1} \tilde{y}^{(r-2)} + \dots + Q_{k+1}(r, k) \tau^{k+1} \tilde{y}^{(k)} \\ + (Q_k(r, k) \tau^k + (-1)^{r-1} k^r a^r) \tilde{y}^{(k-1)} + \\ Q_{k-1}(r, k) \tau^{k-1} \tilde{y}^{(k-2)} + \dots + Q_1(r, k) \tau \tilde{y} = 0 \end{aligned}$$

L'espace des microsolutions à l'origine est de dimension r et l'espace des solutions de dimension $r-1$. Par analogie avec les exemples traités précédemment, nous pouvons nous attendre à ce que les $r-1$ solutions de base de $(\tilde{\mathcal{E}}_k)$ définissent des microsolutions à l'origine.

Les cas $r=2$ et $r=3$ ayant été étudiés complètement au paragraphe 4.A.1 (exemples 1 à 3), nous nous plaçons dans le cas $r \geq 4$. En effectuant l'un des changements de variable suivant :

$$\tilde{z} = \tau^{\mu_j} \tilde{y} \text{ avec } \mu_j = 1 + \frac{jk}{r}, j \in \{1, \dots, r-1\}$$

nous ramenons l'équation $(\tilde{\mathcal{E}}_k)$ à une équation de la forme (4.18) si $k=1$ (prendre $q=r-2$) et de la forme (4.17) si $k \geq 2$ (prendre $q=r-2$ et $p=k-1$). Les calculs étant assez lourds et compliqués, nous ne les présentons pas ici. Une base de solutions de $(\tilde{\mathcal{E}}_k)$ est alors donnée par des fonctions de la forme

$$\tau^{-\mu_j} {}_{k-1}F_{r-2} \left(a_{1,j}, a_{2,j}, \dots, a_{k-1,j}; b_{1,j}, b_{2,j}, \dots, b_{r-2,j}; \frac{\alpha_{k,j}}{\tau^k} \right)$$

avec $a_{1,j}, a_{2,j}, \dots, a_{k-1,j}, b_{1,j}, b_{2,j}, \dots, b_{r-2,j}, \alpha_{k,j}$ convenables, et chacune de ces fonctions définit bien une microsolution de $(\tilde{\mathcal{E}}_k)$ à l'origine.

La $r^{\text{ème}}$ microsolution de base est obtenue quant à elle en résolvant l'équation

$$\begin{aligned} r^r \tau^r \tilde{y}^{(r-1)} + Q_{r-1}(r, k) \tau^{r-1} \tilde{y}^{(r-2)} + \dots + Q_{k+1}(r, k) \tau^{k+1} \tilde{y}^{(k)} \\ + (Q_k(r, k) \tau^k + (-1)^{r-1} k^r a^r) \tilde{y}^{(k-1)} + \\ Q_{k-1}(r, k) \tau^{k-1} \tilde{y}^{(k-2)} + \dots + Q_1(r, k) \tau \tilde{y} = 1 \end{aligned}$$

à l'aide de la méthode de variation de la constante. En fait, il est même plus simple ici d'étudier directement l'équation $(\tilde{\mathcal{E}}'_k)$ obtenue par dérivation de l'équation $(\tilde{\mathcal{E}}_k)$:

$$\begin{aligned} (\tilde{\mathcal{E}}'_k) \quad & r^r \tau^r \tilde{y}^{(r)} + R_{r-1}(r, k) \tau^{r-1} \tilde{y}^{(r-1)} + \dots + R_{k+1}(r, k) \tau^{k+1} \tilde{y}^{(k+1)} \\ & + (R_k(r, k) \tau^k + (-1)^{r-1} k^r a^r) \tilde{y}^{(k)} + \\ & R_{k-1}(r, k) \tau^{k-1} \tilde{y}^{(k-1)} + \dots + R_1(r, k) \tau y' + Q_1(r, k) \tilde{y} = 0 \end{aligned}$$

Les $r-1$ solutions précédentes sont encore solutions de $(\tilde{\mathcal{E}}'_k)$. Une autre solution, linéairement indépendante des précédentes, est obtenue en remarquant que si nous effectuons le changement de variable $\tilde{z} = \tau \tilde{y}$, nous ramenons l'équation $(\tilde{\mathcal{E}}'_k)$ à une équation de la forme (4.17) avec $q = r-1$ et $p = k$. Ainsi, l'équation $(\tilde{\mathcal{E}}'_k)$ admet une solution de la forme

$$\tau^{-1} {}_k F_{r-1} \left(a_1, a_2, \dots, a_k; b_1, b_2, \dots, b_{r-1}; \frac{\alpha_k}{\tau^k} \right)$$

avec $a_1, a_2, \dots, a_k, b_1, b_2, \dots, b_{r-1}, \alpha_k$ convenables. Cette fonction est bien linéairement indépendante des précédentes et elle définit une microsolution à l'origine de $(\tilde{\mathcal{E}}_k)$.

★ Conclusion : Nous avons le résultat suivant :

Proposition 4.22 Soient $a \in \mathbb{C}^*$, $r \geq 4$ et $k \in \{1, \dots, r-1\}$ tel que $\frac{k}{r}$ soit irréductible. Alors, un majeur quelconque de $e^{at^{-k/r}}$ s'écrit, modulo les fonctions analytiques à l'origine, comme combinaison linéaire de fonctions de la forme

$$\frac{{}_{k-1}F_{r-2} \left(a_{1,j}, a_{2,j}, \dots, a_{k-1,j}; b_{1,j}, b_{2,j}, \dots, b_{r-2,j}; \frac{\alpha_{k,j}}{\tau^k} \right)}{\tau^{1+jk/r}} \quad \text{et} \quad \frac{{}_k F_{r-1} \left(a_1, a_2, \dots, a_k; b_1, b_2, \dots, b_{r-1}; \frac{\alpha_k}{\tau^k} \right)}{\tau}$$

avec $j \in \{1, \dots, r-1\}$ et $a_1, a_2, \dots, a_k, b_1, b_2, \dots, b_{r-1}, \alpha_k, a_{1,j}, a_{2,j}, \dots, a_{k-1,j}, b_{1,j}, b_{2,j}, \dots, b_{r-2,j}, \alpha_{k,j}$ convenables.

En particulier, notre majeur $\text{maj}(e^{at^{-k/r}})$ s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned} \text{maj}(e^{at^{-k/r}})(\tau) = & \sum_{j=1}^{r-1} \lambda_j \frac{{}_{k-1}F_{r-2} \left(a_{1,j}, a_{2,j}, \dots, a_{k-1,j}; b_{1,j}, b_{2,j}, \dots, b_{r-2,j}; \frac{\alpha_{k,j}}{\tau^k} \right)}{\tau^{1+jk/r}} \\ & + \lambda_r \frac{{}_k F_{r-1} \left(a_1, a_2, \dots, a_k; b_1, b_2, \dots, b_{r-1}; \frac{\alpha_k}{\tau^k} \right)}{\tau} \end{aligned}$$

Terminons ce paragraphe en donnant l'écriture des majeurs $\text{maj}(e^{at^{-k/r}})$ dans les cas où $r \in \{2, \dots, 5\}$:

– Cas $r = 2$ et $k = 1$:

$$\text{maj}(e^{at^{-1/2}})(\tau) = \lambda_1 \tau^{-3/2} e^{-\frac{a^2}{4\tau}} + \lambda_2 \left(\frac{2}{\tau} - a^2 \frac{{}_1F_1 \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; \frac{a^2}{4\tau} \right)}{\tau^2} e^{-\frac{a^2}{4\tau}} \right)$$

– Cas $r = 3$ et $k = 1$:

$$\text{maj}(e^{at^{-1/3}})(\tau) = \lambda_1 \frac{{}_0F_1\left(\cdot; \frac{2}{3}; -\frac{a^3}{27\tau}\right)}{\tau^{4/3}} + \lambda_2 \frac{{}_0F_1\left(\cdot; \frac{4}{3}; -\frac{a^3}{27\tau}\right)}{\tau^{5/3}} + \lambda_3 \left(\frac{9}{\tau} - \frac{3a^3}{2} \frac{{}_1F_2\left(1; \frac{4}{3}, \frac{5}{3}; -\frac{a^3}{27\tau}\right)}{\tau^2} \right)$$

– Cas $r = 3$ et $k = 2$:

$$\text{maj}(e^{at^{-2/3}})(\tau) = \lambda_1 \frac{{}_1F_1\left(\frac{5}{6}, \frac{2}{3}, \frac{4a^3}{27\tau^2}\right)}{\tau^{5/3}} + \lambda_2 \frac{{}_1F_1\left(\frac{7}{6}, \frac{4}{3}, \frac{4a^3}{27\tau^2}\right)}{\tau^{7/3}} + \lambda_3 \frac{{}_2F_2\left(\frac{1}{2}, 1; \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{4a^3}{27\tau^2}\right)}{\tau}$$

– Cas $r = 4$ et $k = 1$:

$$\begin{aligned} \text{maj}(e^{at^{-1/4}})(\tau) = & \lambda_1 \frac{{}_0F_2\left(\cdot; \frac{1}{2}, \frac{3}{4}; -\frac{a^4}{256\tau}\right)}{\tau^{5/4}} + \lambda_2 \frac{{}_0F_2\left(\cdot; \frac{3}{4}, \frac{5}{4}; -\frac{a^4}{256\tau}\right)}{\tau^{3/2}} + \lambda_3 \frac{{}_0F_2\left(\cdot; \frac{5}{4}, \frac{3}{2}; -\frac{a^4}{256\tau}\right)}{\tau^{7/4}} \\ & + \lambda_4 \frac{{}_1F_3\left(1; \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}; -\frac{a^4}{256\tau}\right)}{\tau} \end{aligned}$$

– Cas $r = 4$ et $k = 3$:

$$\begin{aligned} \text{maj}(e^{at^{-3/4}})(\tau) = & \lambda_1 \frac{{}_2F_2\left(\frac{7}{12}, \frac{11}{12}; \frac{1}{2}, \frac{3}{4}; -\frac{27a^4}{256\tau}\right)}{\tau^{7/4}} + \lambda_2 \frac{{}_2F_2\left(\frac{5}{6}, \frac{7}{6}; \frac{3}{4}, \frac{5}{4}; -\frac{27a^4}{256\tau}\right)}{\tau^{5/2}} \\ & + \lambda_3 \frac{{}_2F_2\left(\frac{13}{12}, \frac{17}{12}; \frac{5}{4}, \frac{3}{2}; -\frac{27a^4}{256\tau}\right)}{\tau^{13/4}} + \lambda_4 \frac{{}_3F_3\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1; \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}; -\frac{27a^4}{256\tau}\right)}{\tau} \end{aligned}$$

– Cas $r = 5$ et $k = 1$:

$$\begin{aligned} \text{maj}(e^{at^{-1/5}})(\tau) = & \lambda_1 \frac{{}_0F_3\left(\cdot; \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}; -\frac{a^5}{3125\tau}\right)}{\tau^{6/5}} + \lambda_2 \frac{{}_0F_3\left(\cdot; \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{6}{5}; -\frac{a^5}{3125\tau}\right)}{\tau^{7/5}} \\ & + \lambda_3 \frac{{}_0F_3\left(\cdot; \frac{4}{5}, \frac{6}{5}, \frac{7}{5}; -\frac{a^5}{3125\tau}\right)}{\tau^{8/5}} \\ & + \lambda_4 \frac{{}_0F_3\left(\cdot; \frac{6}{5}, \frac{7}{5}, \frac{8}{5}; -\frac{a^5}{3125\tau}\right)}{\tau^{9/5}} + \lambda_5 \frac{{}_1F_4\left(1; \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}; -\frac{a^5}{3125\tau}\right)}{\tau} \end{aligned}$$

– Cas $r = 5$ et $k = 2$:

$$\begin{aligned} \text{maj}(e^{at^{-2/5}})(\tau) = & \lambda_1 \frac{{}_1F_3\left(\frac{7}{10}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{4a^5}{3125\tau^2}\right)}{\tau^{7/5}} + \lambda_2 \frac{{}_1F_3\left(\frac{9}{10}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{6}{5}, \frac{4a^5}{3125\tau^2}\right)}{\tau^{9/5}} \\ & + \lambda_3 \frac{{}_1F_3\left(\frac{11}{10}, \frac{4}{5}, \frac{6}{5}, \frac{7}{5}, \frac{4a^5}{3125\tau^2}\right)}{\tau^{11/5}} \\ & + \lambda_4 \frac{{}_1F_3\left(\frac{13}{10}, \frac{6}{5}, \frac{7}{5}, \frac{8}{5}, \frac{4a^5}{3125\tau^2}\right)}{\tau^{13/5}} + \lambda_5 \frac{{}_2F_4\left(\frac{1}{2}, 1; \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{4a^5}{3125\tau^2}\right)}{\tau} \end{aligned}$$

– Cas $r = 5$ et $k = 3$:

$$\begin{aligned} \text{maj}(e^{at^{-3/5}})(\tau) = & \lambda_1 \frac{{}_2F_3\left(\frac{8}{15}, \frac{13}{15}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}; -\frac{27a^5}{3125\tau^3}\right)}{\tau^{8/5}} + \lambda_2 \frac{{}_2F_3\left(\frac{11}{15}, \frac{16}{15}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{6}{5}; -\frac{27a^5}{3125\tau^3}\right)}{\tau^{11/5}} \\ & + \lambda_3 \frac{{}_2F_3\left(\frac{14}{15}, \frac{19}{15}, \frac{4}{5}, \frac{6}{5}, \frac{7}{5}; -\frac{27a^5}{3125\tau^3}\right)}{\tau^{14/5}} \\ & + \lambda_4 \frac{{}_2F_3\left(\frac{17}{15}, \frac{22}{15}, \frac{6}{5}, \frac{7}{5}, \frac{8}{5}; -\frac{27a^5}{3125\tau^3}\right)}{\tau^{17/5}} + \lambda_5 \frac{{}_3F_4\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}; -\frac{27a^5}{3125\tau^3}\right)}{\tau} \end{aligned}$$

– Cas $r = 5$ et $k = 4$:

$$\begin{aligned} \text{maj}(e^{at^{-4/5}})(\tau) = & \lambda_1 \frac{{}_3F_3\left(\frac{9}{20}, \frac{7}{10}, \frac{19}{20}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{256a^5}{3125\tau^4}\right)}{\tau^{9/5}} + \lambda_2 \frac{{}_3F_3\left(\frac{13}{20}, \frac{9}{10}, \frac{23}{20}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{6}{5}, \frac{256a^5}{3125\tau^4}\right)}{\tau^{13/5}} \\ & + \lambda_3 \frac{{}_3F_3\left(\frac{17}{20}, \frac{11}{10}, \frac{27}{20}, \frac{4}{5}, \frac{6}{5}, \frac{7}{5}, \frac{256a^5}{3125\tau^4}\right)}{\tau^{17/5}} \\ & + \lambda_4 \frac{{}_3F_3\left(\frac{21}{20}, \frac{13}{10}, \frac{31}{20}, \frac{6}{5}, \frac{7}{5}, \frac{8}{5}, \frac{256a^5}{3125\tau^4}\right)}{\tau^{21/5}} + \lambda_5 \frac{{}_4F_4\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{256a^5}{3125\tau^4}\right)}{\tau} \end{aligned}$$

Mis à part les deux premiers cas, il semble que les fonctions hypergéométriques ${}_pF_q$ rentrant en jeu suivent une certaine logique, tant sur la valeur des nombres p et q que sur leurs paramètres. Il est donc peut être possible de déterminer de façon précise et de manière générale les fonctions hypergéométriques de la proposition 4.22. Nous ne faisons toutefois pas cette étude ici.

4.A.4 Etude des développements trans-asymptotiques à l'origine

Nous nous plaçons toujours dans le cas où le polynôme q est réduit à un monôme :

$$q\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{a}{t^{k/r}} \text{ avec } a \in \mathbb{C}^* \text{ et } k \in \{1, \dots, r-1\} \text{ tel que } \frac{k}{r} \text{ soit irréductible}$$

Nous avons vu précédemment que le majeur $\text{maj}(e^q)$ s'écrit comme combinaison linéaire des solutions de l'équation

$$\begin{aligned} (\tilde{\mathcal{E}}_k^l) \quad & r^r \tau^r \tilde{y}^{(r)} + R_{r-1}(r, k) \tau^{r-1} \tilde{y}^{(r-1)} + \dots + R_{k+1}(r, k) \tau^{k+1} \tilde{y}^{(k+1)} \\ & + (R_k(r, k) \tau^k + (-1)^{r-1} k^r a^r) \tilde{y}^{(k)} + \\ & R_{k-1}(r, k) \tau^{k-1} \tilde{y}^{(k-1)} + \dots + R_1(r, k) \tau y' + Q_1(r, k) \tilde{y} = 0 \end{aligned}$$

Il s'agit dans ce paragraphe d'étudier les exponentielles apparaissant dans le développement trans-asymptotique à l'origine de $\text{maj}(e^q)$. Pour ce faire, nous recherchons les exponentielles apparaissant dans les développements trans-asymptotiques des diverses

solutions de $(\tilde{\mathcal{E}}'_k)$. Celles-ci s'obtiennent en déterminant la partie irrégulière des solutions formelles de $(\tilde{\mathcal{E}}'_k)$.

★ Etude du polygone de Newton de $(\tilde{\mathcal{E}}'_k)$:

Le polygone de Newton de l'équation $(\tilde{\mathcal{E}}'_k)$ admet une pente nulle de longueur k et une pente $\frac{k}{r-k}$ de longueur $r-k$. Ainsi, il apparaît au plus $r-k$ exponentielles dans les solutions formelles de $(\tilde{\mathcal{E}}'_k)$ et elles sont toutes de la forme

$$e^{P(\frac{1}{\tau})} \text{ avec } P\left(\frac{1}{\tau}\right) = \frac{a}{\tau^{k/(r-k)}} + o\left(\frac{1}{\tau^{k/(r-k)}}\right), \quad a \in \mathbb{C}^*$$

Noter que la fraction $\frac{k}{r-k}$ est irréductible puisque $\frac{k}{r}$ l'est.

Nous allons à présent déterminer avec précision ces différentes exponentielles.

★ Etude des exponentielles de la partie irrégulière des solutions de $(\tilde{\mathcal{E}}'_k)$:

Commençons par nous ramener à un polygone de Newton à pentes entières en utilisant l'extension algébrique finie $\tau = \chi^{r-k}$ de la variable τ . En effectuant le changement de variable $\tilde{y}(\tau) = \tilde{z}(\chi)$, nous obtenons : pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$\tilde{y}^{(m)}(\tau) = \sum_{j=1}^{m-1} \frac{\square}{\chi^{m(r-k)-j}} \tilde{z}^{(j)}(\chi) + \frac{1}{(r-k)^m \chi^{m(r-k)-m}} \tilde{z}^{(m)}(\chi), \quad \square \in \mathbb{C}^*$$

ou encore

$$\chi^{k(r-k)} \tilde{y}^{(m)}(\tau) = \sum_{j=1}^{m-1} \square \chi^j \tilde{z}^{(j)}(\chi) + \frac{\chi^m}{(r-k)^m} \tilde{z}^{(m)}(\chi), \quad \square \in \mathbb{C}^*$$

En effectuant alors ce changement de variable dans l'équation $(\tilde{\mathcal{E}}'_k)$ et en multipliant la nouvelle équation par $\chi^{k(r-k)}$, nous obtenons

$$\begin{aligned} (\tilde{\mathcal{E}}''_k) \quad & \frac{r^r}{(r-k)^r} \chi^{r+k(r-k)} \tilde{z}^{(r)} + S_{r-1}(r, k) \chi^{r-1+k(r-k)} \tilde{z}^{(r-1)} + \dots \\ & + S_{k+1}(r, k) \chi^{k+1+k(r-k)} \tilde{z}^{(k+1)} + \left(S_k(r, k) \chi^{k+k(r-k)} + \frac{(-1)^{r-1} k^r a^r}{(r-k)^k} \chi^k \right) \tilde{z}^{(k)} + \\ & (S_{k-1}(r, k) \chi^{k-1+k(r-k)} + \sigma_{k-1} \chi^{k-1}) \tilde{z}^{(k-1)} + \dots + (S_1(r, k) \chi^{1+k(r-k)} + \sigma_1 \chi) \tilde{z}' \\ & + \sigma_0 \chi^{k(r-k)} \tilde{z} = 0 \end{aligned}$$

Comme il était attendu, le polygone de Newton de cette équation est à pentes entières. Précisément, il admet une pente nulle de longueur k et une pente k de longueur $r-k$ dont l'équation k -caractéristique associée est donnée par

$$\frac{(-1)^{r-1} k^r a^r}{(r-k)^k} + \frac{r^r}{(r-k)^r} X^{r-k} = 0$$

Les racines de cette équation étant

$$\alpha_m = \omega_{r-k}^m (r-k) \left(-\frac{ka}{r} \right)^{r/(r-k)}, \quad m \in \{0, \dots, r-k-1\}$$

où ω_{r-k} est une racine $(r-k)^{\text{ème}}$ de l'unité et où nous avons choisi les arguments dans $] - 2\pi, 0]$ afin que $u \mapsto u^{1/(r-k)}$ soit réel pour $u > 0$, nous en déduisons que les exponentielles de la partie irrégulière des solutions de $(\tilde{\mathcal{E}}_k'')$ sont de la forme

$$e^{P_m(\frac{1}{\chi})} \text{ avec } P\left(\frac{1}{\chi}\right) = -\frac{\alpha_m}{k\chi^k} + P_{m,1}\left(\frac{1}{\chi}\right) \text{ avec } P_{m,1}\left(\frac{1}{\chi}\right) = o\left(\frac{1}{\chi^k}\right)$$

En fait, le polynôme $P_{m,1}$ est identiquement nul : en effectuant le changement de variable $\tilde{z} = e^{-\frac{\alpha_m}{k\chi^k}} \tilde{Z}$, nous obtenons une équation différentielle dont le polygone de Newton admet une pente nulle de longueur 1 et une pente k de longueur $r-1$.

★ Conclusion :

Les seules exponentielles apparaissant dans le développement trans-asymptotique à l'origine de $\text{maj}(e^q)$ sont les exponentielles

$$\exp\left(-\omega_{r-k}^m \frac{r-k}{k} \left(-\frac{ka}{r}\right)^{r/(r-k)} \frac{1}{\tau^{k/(r-k)}}\right), \quad m \in \{0, \dots, r-k-1\}$$

Nous retrouverons ces différentes exponentielles lors du calcul effectif des multiplicateurs de Stokes (voir paragraphe 5.3.4).

Terminons ce paragraphe en explicitant ces exponentielles dans quelques cas particuliers :

$\exp(q)$	exponentielles du développement trans-asymptotique à l'origine
$\exp\left(\frac{a}{x^{1/2}}\right)$	$\exp\left(-\frac{a^2}{4\tau}\right)$
$\exp\left(\frac{a}{x^{1/3}}\right)$	$\exp\left(\pm \frac{2ia^{3/2}}{3\sqrt{3}} \frac{1}{\tau^{1/2}}\right)$
$\exp\left(\frac{a}{x^{2/3}}\right)$	$\exp\left(\frac{4a^3}{27\tau^2}\right)$
$\exp\left(\frac{a}{x^{1/r}}\right)$	$\exp\left(-\omega_{r-1}^m (r-1) \left(\frac{-a}{r}\right)^{r/(r-1)} \frac{1}{\tau^{1/(r-1)}}\right)$
$\exp\left(\frac{a}{x^{(r-1)/r}}\right)$	$\exp\left(-\frac{(r-1)^{r-1}}{r^r} \frac{(-a)^r}{\tau^{r-1}}\right)$

Remarquer que dans le premier cas, nous retrouvons l'exponentielle apparaissant dans l'écriture exacte du majeur de $\exp\left(\frac{a}{x^{1/2}}\right)$.

Chapitre 5

Calcul effectif des multiplicateurs de Stokes

Dans ce chapitre, nous proposons une méthode de calcul de tous les multiplicateurs de Stokes pour tous les systèmes de niveau unique $r \geq 2$ à coefficients rationnels, et ceci avec évaluation de l'erreur.

Fixons un système $[A]$ de niveau unique $r \geq 2$ de la forme

$$x^{r+1} \frac{dY}{dx} = A(x)Y$$

avec $A(x) \in M_n(\mathbb{C}(x))$ sans pôle à l'origine. Nous supposons, quitte à faire une transformation de jauge méromorphe convenable, qu'une solution fondamentale formelle $\widehat{Y}(x) = \widehat{F}(x)x^L e^{Q(\frac{1}{x})}$ est normalisée comme au chapitre 4, soit :

- ★ $\widehat{F}(x) = I_n + O(x^{2r}) \in M_n(\mathbb{C}[[x]])$;
- ★ $L = \bigoplus_{j=1}^J L_j$, où chaque L_j est un bloc de Jordan de L de dimension $n_j \geq 1$ et de valeur propre λ_j vérifiant $\lambda_1 = 0$ et $\operatorname{Re}(\lambda_j) \in [0, 1[$ pour tout $j \in \{1, \dots, J\}$;
- ★ $Q(\frac{1}{x}) = \bigoplus_{j=1}^J q_j(\frac{1}{x}) I_{n_j}$ de sorte que $q_1 = 0$ et

$$q_j \left(\frac{1}{x} \right) = -\frac{a_{j,r}}{x^r} - \frac{a_{j,r-1}}{x^{r-1}} \dots - \frac{a_{j,1}}{x}$$

Rappelons qu'une telle transformation de jauge n'affecte en rien les matrices de Stokes de $[A]$, puisque celles-ci sont des invariants méromorphes de $[A]$ ([BJL79-2]).

Quitte à permuter les colonnes de \widehat{F} , nous nous intéressons uniquement à son premier bloc de colonnes \widehat{f} . En particulier, nous cherchons à évaluer numériquement, tout en estimant l'erreur commise, uniquement les multiplicateurs de Stokes situés dans le premier bloc de colonnes $c_{\theta,k}$ de la matrice de Stokes $C_{\theta,k}$. Pour cela, nous généralisons aux systèmes de niveau unique quelconque la méthode présentée au chapitre 3 dans le cadre des systèmes de niveau unique 1. Rappelons que cette méthode consiste dans un premier temps à interpréter les différents multiplicateurs de Stokes en terme de matrices de connexion ; puis à évaluer ces différentes matrices à l'aide de prolongements

analytiques "à la Cauchy" le long d'une chaîne de boules d'intersections non vide. Une évaluation de l'erreur commise à chacune des étapes permet finalement d'évaluer l'erreur sur les multiplicateurs de Stokes. Signalons ici que les prolongements analytiques que nous considérons dans ce chapitre sont légèrement différents de ceux que nous avons utilisés au chapitre 3 pour les systèmes de niveau unique 1. En effet, les singularités de front non monomial de $\tilde{\mathbf{f}}$ étant associées à des systèmes à point singulier irrégulier (voir paragraphe 5.3.4), il est nécessaire de les "éviter" lors des prolongements analytiques. Nous renvoyons au paragraphe 5.4 pour plus de détails.

Dans l'optique de simplifier les calculs, nous supposons dans la suite que la matrice L des exposants de monodromie formelle est diagonale de la forme

$$L = \text{diag}(0, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

avec $\text{Re}(\lambda_j) \in [0, 1[$ pour tout $j \in \{2, \dots, n\}$. En particulier, la matrice Q s'écrit

$$Q \left(\frac{1}{x} \right) = \text{diag} \left(0, q_2 \left(\frac{1}{x} \right), \dots, q_n \left(\frac{1}{x} \right) \right)$$

et les matrices \hat{f} et $c_{\theta,k}$ désignent respectivement la première colonne de la matrice \hat{F} et la première colonne de la matrice de Stokes $C_{\theta,k}$. Naturellement, il est aisé de voir, par analogie avec les systèmes de niveau unique 1, que tous les calculs et raisonnements qui vont suivre restent valables pour une matrice L sous forme de Jordan quelconque. Nous laissons les détails au lecteur.

5.1 Détermination du système r -réduit dans le cas rationnel

Rappelons que le système $[A]$ que nous considérons s'écrit avec nos normalisations sous la forme

$$[A] \quad x^{r+1} \frac{dY}{dx} = A(x)Y \text{ avec } A(x) = A_0(x) + A_1(x)$$

où

$$A_0(x) = \sum_{k=1}^r k a_k x^{r-k} + x^r L ; \quad a_k = \text{diag}(0, a_{2,k}, \dots, a_{n,k})$$

et où $A_1(x) \in M_n(x^{2r}\mathbb{C}(x))$ est sans pôle à l'origine.

Les multiplicateurs de Stokes de la première colonne $c_{\theta,k}$ de la matrice de Stokes $C_{\theta,k}$ étant obtenus à partir de la transformée de Borel $\tilde{\mathbf{f}}$ de la première colonne $\hat{\mathbf{f}}$ de la série r -réduite $\hat{\mathbf{F}}$ de \hat{F} , une première étape importante consiste à déterminer de façon explicite le système r -réduit $[\mathbf{A}]$ de $[A]$. Celui-ci est de la forme

$$[\mathbf{A}] \quad rt^2 \frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \mathbf{A}(t)\mathbf{Y} \text{ avec } \mathbf{A}(t) = \mathbf{A}_0(t) + \mathbf{A}_1(t)$$

où $\mathbf{A}_0(t)$ est la matrice

$$\mathbf{A}_0(t) = \begin{bmatrix} ra_r + tL & ta_1 & \cdots & \cdots & (r-1)ta_{r-1} \\ (r-1)a_{r-1} & ra_r + tL - tI_n & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & ta_1 \\ a_1 & \cdots & \cdots & (r-1)a_{r-1} & ra_r + tL - (r-1)tI_n \end{bmatrix}$$

et où $\mathbf{A}_1(t)$ est la série r -réduite de $A_1(x)$ (cf. paragraphe 4.1.2). Précisément, $\mathbf{A}_1(t)$ est un élément de $M_{rn}(t^2\mathbb{C}(t))$ et est sans pôle à l'origine.

Connaissant la matrice $A_1(x)$, il existe plusieurs méthodes pour calculer explicitement $\mathbf{A}_1(t)$ ([BCL03, pp. 11-12]) : il s'agit d'extraire des coefficients de $A_1(x)$ les sous-séries des termes de r en r . Les coefficients de $A_1(x)$ étant des fractions rationnelles, ces sous-séries proviennent également de fractions rationnelles. Pour les obtenir, on peut par exemple procéder comme suit :

Soit $a(x) \in \mathbb{C}(x)$ une fraction rationnelle sans pôle à l'origine. Elle est développable en série entière à l'origine :

$$a(x) = \sum_{m \geq 0} a_m x^m$$

On cherche à écrire $a(x)$ sous la forme

$$a(x) = a^0(t) + a^1(t)x + \dots + a^{r-1}(t)x^{r-1}$$

où $t = x^r$ et où

$$a^\ell(t) = \sum_{m \geq 0} a_{\ell+mr} t^m$$

désigne la $(\ell + 1)^{\text{ème}}$ sous-série des termes de r en r de a .

Notons $a = \frac{p}{q}$ une décomposition irréductible de a . On peut voir p et q comme des éléments de $\mathbb{C}[X]$ et donc aussi de $\mathbb{C}(T)[X]$.

Si $q \equiv 1$, la division euclidienne de $p(X)$ par $X^r - T$ dans $\mathbb{C}(T)[X]$ fournit une identité de la forme

$$p(X) = Q(T, X)(X^r - T) + R(T, X)$$

où le degré en X de $R(T, X)$ est inférieur à $r - 1$.

Si $q \not\equiv 1$, on remarque que $q(X)$ et $X^r - T$ sont premiers entre eux. On applique l'algorithme d'Euclide pour établir l'identité de Bezout

$$U(T, X)q(X) + V(T, X)(X^r - T) = 1$$

avec $U, V \in \mathbb{C}(T)[X]$. On effectue alors la division euclidienne de pU par $X^r - T$ dans $\mathbb{C}(T)[X]$ et on obtient une identité de la forme

$$p(X)U(T, X) = Q(T, X)(X^r - T) + R(T, X)$$

où le degré en X de $R(T, X)$ est inférieur à $r - 1$.

Dans les deux cas, $R(t, x)$ fournit la décomposition cherchée de $a(x)$.

Sous Maple, l'algorithme d'Euclide est donné par la commande `gcdex` et $R(T, X)$ est obtenu par la commande `rem`.

Exemple 5.1 Plaçons-nous dans le cas $r = 3$ et considérons la fraction rationnelle

$$a(x) = \frac{x^6}{1 + 2x - x^2} \in \mathbb{C}(x)$$

L'algorithme d'Euclide appliqué à $1 + 2X - X^2$ et $X^3 - T$ donnant

$$U(T, X) = \frac{5X^2 + X(T - 2) + 2T - 1}{1 + 14T - T^2}$$

nous obtenons

$$R(T, X) = \frac{(2T + 1)T^2}{1 + 14T - T^2} + \frac{(T - 2)T^2}{1 + 14T - T^2}X + \frac{5T^2}{1 + 14T - T^2}X^2$$

Par suite, les trois sous-séries des termes de 3 en 3 de $a(x)$ sont

$$a^0(t) = \frac{(2T + 1)T^2}{1 + 14T - T^2} ; a^1(t) = \frac{(T - 2)T^2}{1 + 14T - T^2} ; a^2(t) = \frac{5T^2}{1 + 14T - T^2}$$

Le calcul de la matrice $\mathbf{A}_1(t)$ étant fait, nous modifions ses coefficients, en mettant si nécessaire au même dénominateur les diverses fractions rationnelles, afin que

$$\mathbf{A}(t) = \mathbf{A}_0(t) + \left(I_r \otimes \text{diag} \left(\frac{1}{P_1(t)}, \dots, \frac{1}{P_n(t)} \right) \right) \mathbf{B}(t)$$

où $\mathbf{B}(t) \in M_{rn}(t^2\mathbb{C}[t])$ et où $P_j(t) \in \mathbb{C}[t]$ avec $P_j(0) = 1$.

Comme dans le cas des systèmes de niveau unique 1 (cf. chapitre 3), nous cherchons un système $[S]$ vérifié par le vecteur colonne

$$\tilde{\mathcal{F}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{f}} \\ \tilde{\mathbf{f}}' \\ \vdots \\ \frac{d^{k-1}\tilde{\mathbf{f}}}{d\tau^{k-1}} \end{bmatrix}$$

de dimension $k rn$, où k est un entier naturel non nul dépendant uniquement des degrés des numérateurs et des dénominateurs des coefficients de la matrice \mathbf{A} . Nous allons voir que les singularités de ce système sont placées à l'origine et en les singularités potentielles de $\tilde{\mathbf{f}}$. Mais, contrairement à ce qui se passe pour les systèmes de niveau unique 1, les singularités non nulles du système $[S]$ ne sont pas nécessairement régulières.

En fait, une telle singularité ω est régulière si, et seulement si, ω est une singularité de front monomial de $\widehat{\mathbf{f}}$, ou, ce qui revient au même, si, et seulement si, le polynôme

$$\check{q}_\omega \left(\frac{1}{x} \right) = -\frac{a_{j,r-1}}{x^{r-1}} - \dots - \frac{a_{j,1}}{x}$$

où $j \in \{1, \dots, n\}$ vérifie $a_{j,r} = \omega$, est identiquement nul. Dans ce cas, nous montrons que la méthode employée au chapitre 3 reste valide.

En revanche, si ω est une singularité de front non monomial de $\widehat{\mathbf{f}}$, *i.e.*, si le polynôme \check{q}_ω est non identiquement nul, le système $[S]$ admet en ω une singularité irrégulière, et son vrai rang de Poincaré dépend uniquement de r et du degré de \check{q}_ω . Dans ce cas, nous montrons qu'il est nécessaire de procéder à un changement algébrique de la variable x sur le système $[A]$ pour nous ramener au cas d'une singularité de front monomial.

Toute l'étude du calcul effectif des multiplicateurs de Stokes repose sur les égalités liant les divers termes de la matrice $\widehat{\mathbf{f}}$. Commençons par rappeler les notations que nous utilisons :

- La matrice $\widehat{\mathbf{f}}$ est découpée en r matrices de dimension $n \times 1$:

$$\widehat{\mathbf{f}} = \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{f}}^{[1]} \\ \vdots \\ \widehat{\mathbf{f}}^{[r]} \end{bmatrix} \quad \text{où} \quad \widehat{\mathbf{f}}^{[u]} = \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{f}}^{[u,1]} \\ \vdots \\ \widehat{\mathbf{f}}^{[u,n]} \end{bmatrix} \in M_n(\mathbb{C}[[x]])$$

Noter que, la matrice L étant diagonale, nous numérotions les termes $\widehat{\mathbf{f}}^{[u,j]}$ de $\widehat{\mathbf{f}}$ uniquement avec deux lettres, et non trois comme au chapitre précédent, l'indice q des colonnes étant devenu inutile.

- La matrice \mathbf{B} est découpée en r^2 matrices de dimension $n \times n$:

$$\mathbf{B} = \left[\mathbf{B}^{(u,v)} \right]_{1 \leq u,v \leq r} \quad \text{avec} \quad \mathbf{B}^{(u,v)} \in M_n(t^2\mathbb{C}[t])$$

Le terme situé à la $j^{\text{ème}}$ ligne et $\ell^{\text{ème}}$ colonne de la matrice $\mathbf{B}^{(u,v)}$ est noté $\mathbf{B}^{(u,v)(j,\ell)}$.

- Les matrices colonnes $c_{\theta,k}$ de dimension $n \times 1$ sont écrites sous la forme

$$c_{\theta,k} = \begin{bmatrix} c_{\theta,k}^{[1]} \\ \vdots \\ c_{\theta,k}^{[n]} \end{bmatrix}$$

L'élément $c_{\theta,k}^{[j]}$ désigne donc le multiplicateur de Stokes situé à la $j^{\text{ème}}$ ligne et première colonne de la matrice de Stokes $C_{\theta,k}$.

La matrice $\widehat{\mathbf{f}}$ vérifiant le système différentiel

$$rt^2 \frac{d\mathbf{f}}{dt} - \mathbf{A}_0(t)\mathbf{f} = \left(I_r \otimes \text{diag} \left(\frac{1}{P_1(t)}, \dots, \frac{1}{P_n(t)} \right) \right) \mathbf{B}\mathbf{f}$$

nous en déduisons que les termes $\widehat{\mathbf{f}}^{[u,j]}$ sont liés, pour tout $u \in \{1, \dots, r\}$ et tout $j \in \{1, \dots, n\}$, par les relations fondamentales

$$(5.1) \quad rt^2 \frac{d\widehat{\mathbf{f}}^{[u,j]}}{dt} - ra_{j,r}\widehat{\mathbf{f}}^{[u,j]} - \sum_{k=1}^{u-1} (r+k-u)a_{j,r+k-u}\widehat{\mathbf{f}}^{[k,j]} - (\lambda_j - u + 1)t\widehat{\mathbf{f}}^{[u,j]} \\ - t \sum_{k=u+1}^r (k-u)a_{j,k-u}\widehat{\mathbf{f}}^{[k,j]} = \frac{1}{P_j(t)} \sum_{v=1}^r \sum_{\ell=1}^n \mathbf{B}^{(u,v)(j,\ell)} \widehat{\mathbf{f}}^{[v,\ell]}$$

Ces égalités sont analogues à celles données au paragraphe 3.1.1 (cf. égalités (3.1)). Ainsi, en posant successivement

$$b_{u,j} = \max_{\substack{1 \leq v \leq r \\ 1 \leq \ell \leq n}} (\deg(\mathbf{B}^{(u,v)(j,\ell)})) ; \quad p_j = \deg(P_j)$$

$$\mu_{u,j} = \max(p_j + 1, b_{u,j})$$

$$\mu = \max_{\substack{1 \leq u \leq j \\ 1 \leq j \leq n}} (\mu_{u,j})$$

nous savons, par analogie avec le paragraphe 3.1.1, que le système $[S]$ cherché est de dimension $rn\mu$ et est vérifié par le vecteur colonne

$$\widetilde{\mathcal{F}} = \begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{f}} \\ \widetilde{\mathbf{f}}' \\ \vdots \\ \frac{d^{\mu-1}\widetilde{\mathbf{f}}}{d\tau^{\mu-1}} \end{bmatrix}$$

En particulier, si \mathcal{D}_0 désigne le disque de convergence de la série entière $\widetilde{\mathbf{f}}$, il faut savoir calculer numériquement $\widetilde{\mathcal{F}}(\alpha)$, $\alpha \in \mathcal{D}_0 \setminus \{0\}$, et évaluer l'erreur commise.

5.2 Contrôle d'erreur dans l'évaluation de $\widetilde{\mathbf{f}}$

Nous donnons ici une méthode permettant de contrôler l'erreur commise lors de l'évaluation de $\widetilde{\mathcal{F}}$ en tout point du disque de convergence de la série entière $\widetilde{\mathbf{f}}$. Cette méthode est analogue à celle présentée au chapitre 3 dans le cadre des systèmes de niveau unique 1 (cf. paragraphe 3.1.4 page 134). Cependant, la présence éventuelle de polynômes non nuls

$$\check{q}_j \left(\frac{1}{x} \right) = -\frac{a_{j,r-1}}{x^{r-1}} - \dots - \frac{a_{j,1}}{x}$$

dans les exponentielles de la partie irrégulière de la solution fondamentale formelle \hat{Y} rend les calculs plus compliqués. En particulier, même si le résultat final reste globalement identique, la procédure algorithmique permettant l'évaluation de l'erreur (cf. algorithme 3.9 et théorème 3.10) est profondément modifiée.

Rappelons que le disque de convergence de la série entière $\tilde{\mathbf{f}}$ est le disque ouvert $\mathcal{D}_0 = D(0, \frac{1}{\rho_0})$ de centre 0 et de rayon $\frac{1}{\rho_0}$, où

$$\rho_0 = \max_{a_{j,r} \neq 0} \left(\frac{1}{|a_{j,r}|} \right)$$

Suivant la méthode du paragraphe 3.1.4.2, nous écrivons $\hat{\mathbf{f}}$ sous la forme

$$\hat{\mathbf{f}}(t) = I_{rn,1} + \sum_{m \geq 2} \hat{\mathbf{f}}_m t^m$$

où $I_{rn,1}$ est la première colonne de la matrice identité I_{rn} et où $\hat{\mathbf{f}}_m$ est un élément de $M_{rn,1}(\mathbb{C})$ pour tout $m \geq 2$. Le contrôle d'erreur sur $\tilde{\mathcal{F}}$ est basé sur le résultat suivant :

Proposition 5.2 *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $m_0 \geq \mu + 1$ et un nombre réel $W > 0$ indépendants de m tels que*

$$(5.2) \quad \forall m \geq m_0, \quad \left| \hat{\mathbf{f}}_m \right| \leq (m - \mu)! W(\rho_0 + \varepsilon)^{m-1}$$

Démontrons cette proposition : Notons

$$P_j(t) = 1 + \sum_{m=1}^{p_j} P_{j,m} t^m \quad \text{et} \quad \mathbf{B}^{(u,v)(j,\ell)}(t) = \sum_{m=2}^{b_{u,j}} \mathbf{B}_m^{(u,v)(j,\ell)} t^m$$

En multipliant les égalités (5.1) par P_j et en appliquant une transformation de Mellin, nous obtenons les relations suivantes : pour tout $u \in \{1, \dots, r\}$, tout $j \in \{1, \dots, n\}$ et tout $m \geq \mu_j + 2$,

$$\begin{aligned} \sum_{s=0}^{p_j} P_{j,s} \left(r(m-1-s) - \lambda_j + u - 1 \right) \hat{\mathbf{f}}_{m-1-s}^{[u,j]} - r a_{j,r} \hat{\mathbf{f}}_{m-s}^{[u,j]} - \sum_{k=1}^{u-1} (r+k-u) a_{j,r+k-u} \hat{\mathbf{f}}_{m-s}^{[k,j]} \\ - \sum_{k=u+1}^r (k-u) a_{j,k-u} \hat{\mathbf{f}}_{m-1-s}^{[k,j]} \Big) = \sum_{v=1}^r \sum_{\ell=1}^n \sum_{s=2}^{b_{u,j}} \mathbf{B}_s^{(u,v)(j,\ell)} \hat{\mathbf{f}}_{m-s}^{[v,\ell]} \end{aligned}$$

avec $P_{j,0} = 1$. En introduisant alors les vecteurs colonnes

$$\hat{\mathcal{F}}_m^{[u,j]} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{f}}_{m-\mu+1}^{[u,j]} \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{f}}_m^{[u,j]} \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathcal{F}}_m^{[u]} = \begin{bmatrix} \hat{\mathcal{F}}_m^{[u,1]} \\ \vdots \\ \hat{\mathcal{F}}_m^{[u,n]} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \hat{\mathcal{F}}_m = \begin{bmatrix} \hat{\mathcal{F}}_m^{[1]} \\ \vdots \\ \hat{\mathcal{F}}_m^{[r]} \end{bmatrix}$$

nous obtenons pour tout $m \geq \mu + 1$ l'égalité

$$T\widehat{\mathcal{F}}_{m+1} = (m - \mu)C_m\widehat{\mathcal{F}}_m$$

où les matrices T et C_m satisfont aux conditions suivantes :

- la matrice T est de la forme

$$T = \begin{bmatrix} I_{n\mu} & 0 & \cdots & 0 \\ T_{r-1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ T_1 & \cdots & T_{r-1} & I_{n\mu} \end{bmatrix} \quad \text{avec } T_u = \text{diag}(T_{u,1}, \dots, T_{u,n}) \in M_{n\mu}(\mathbb{C})$$

où les blocs $T_{u,j} \in M_\mu(\mathbb{C})$ vérifient

$$T_{u,j} = \begin{cases} 0I_\mu & \text{si } a_{j,r} = 0 \\ \text{diag}\left(0I_{\mu-1}, \frac{ua_{j,u}}{ra_{j,r}}\right) & \text{si } a_{j,r} \neq 0 \end{cases}$$

En particulier, la matrice T est inversible.

- la matrice C_m est un élément de $M_{rn\mu}(\mathbb{C}(m))$ qui n'admet pour pôle aucun entier supérieur à $\mu + 1$. De plus, la suite matricielle $(C_m)_{m \geq \mu+1}$ converge vers la matrice constante $C_{\infty,r} = I_r \otimes C_\infty$, où

$$C_\infty = \text{diag}(C_{\infty,1}, \dots, C_{\infty,n}) \in M_{n\mu}(\mathbb{C})$$

est diagonale par blocs, les blocs $C_{\infty,j} \in M_\mu(\mathbb{C})$ vérifiant

$$C_{\infty,j} = \begin{cases} 0I_\mu & \text{si } a_{j,r} = 0 \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{P_{j,p_j}}{a_{j,r}} & \cdots & \frac{P_{j,1}}{a_{j,r}} & \frac{1}{a_{j,r}} \end{bmatrix} & \text{si } a_{j,r} \neq 0 \end{cases}$$

Noter que si tous les polynômes q_j des exponentielles de la partie irrégulière de la solution fondamentale formelle \widehat{Y} sont réduits à des monômes ($\tilde{q}_j \equiv 0$ pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$), *i.e.*, toutes les singularités de $\tilde{\mathbf{f}}$ sont de front monomial, nous avons $T = I_{rn\mu}$ et nous retrouvons les conditions de l'égalité (3.5) du chapitre 3. Dans le cas général, il est nécessaire d'étudier la suite matricielle $(T^{-1}C_m)_{m \geq \mu+1}$. La matrice T étant indépendante de m , la matrice $T^{-1}C_m$ n'admet pour pôle aucun entier supérieur

à $\mu + 1$. De plus, la suite $(T^{-1}C_m)_{m \geq \mu+1}$ converge vers la matrice constante $T^{-1}C_{\infty,r}$. L'étude de cette matrice nous permettra, comme au chapitre 3, d'établir l'inégalité (5.2).

Commençons par déterminer la forme de la matrice T^{-1} .

Lemme 5.3 *La matrice T^{-1} est définie par*

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} I_{n\mu} & 0 & \cdots & 0 \\ S_{r-1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ S_1 & \cdots & S_{r-1} & I_{n\mu} \end{bmatrix}$$

les matrices $S_u \in M_{n\mu}(\mathbb{C})$ étant diagonales par blocs. Précisément, $S_u = \text{diag}(S_{u,1}, \dots, S_{u,n})$, où les blocs $S_{u,j} \in M_\mu(\mathbb{C})$ vérifient

$$S_{r-u} = - \sum_{v=1}^{u-1} T_{r+v-u} S_{r-v} - T_{r-u}$$

pour tout $u \in \{1, \dots, r-1\}$. En particulier, les matrices $S_{u,j}$ sont de la forme

$$S_{u,j} = \begin{cases} 0I_\mu & \text{si } a_{j,r} = 0 \\ \text{diag}(0I_{\mu-1}, s_{j,u}) \text{ avec } s_{j,u} \in \mathbb{C} & \text{si } a_{j,r} \neq 0 \end{cases}$$

Démonstration. Définissons les matrices

$$J = \begin{bmatrix} 0 & & & 0 \\ I_{n\mu} & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & I_{n\mu} & 0 \end{bmatrix} \text{ et } \mathcal{T}_u = I_r \otimes T_u = \begin{bmatrix} T_u & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & T_u \end{bmatrix}$$

avec $u \in \{1, \dots, r-1\}$. La matrice J est nilpotente d'ordre r et nous avons

$$T = I_{rn\mu} + \mathcal{T}_{r-1}J + \dots + \mathcal{T}_1J^{r-1}$$

Notons $\mathcal{S}_u = I_r \otimes S_u$, où S_u est un élément de $M_{n\mu}(\mathbb{C})$, et cherchons une matrice S de la forme

$$S = I_{rn\mu} + \mathcal{S}_{r-1}J + \dots + \mathcal{S}_1J^{r-1}$$

telle que $TS = I_{rn\mu}$.

Les matrices \mathcal{S}_u et J commutent pour tout $u \in \{1, \dots, r-1\}$, nous avons

$$TS = I_{rn\mu} + \sum_{u=1}^{r-1} \left(\mathcal{T}_{r-u} + \sum_{v=1}^{u-1} \mathcal{T}_{r+v-u} \mathcal{S}_{r-v} + \mathcal{S}_{r-u} \right) J^u$$

Il s'ensuit alors les relations

$$(5.3) \quad \forall u \in \{1, \dots, r-1\}, \mathcal{T}_{r-u} + \sum_{v=1}^{u-1} \mathcal{T}_{r+v-u} \mathcal{S}_{r-v} + \mathcal{S}_{r-u} = 0$$

Ainsi, en utilisant la définition des matrices \mathcal{T}_k et \mathcal{S}_k à l'aide des matrices T_k et S_k , nous déduisons aisément de (5.3) les relations

$$\forall u \in \{1, \dots, r-1\}, T_{r-u} + \sum_{v=1}^{u-1} T_{r+v-u} S_{r-v} + S_{r-u} = 0$$

ce qui donne le résultat voulu pour la matrice S_{r-u} .

Une récurrence immédiate sur $u \in \{1, \dots, r-1\}$ permet finalement de voir que la matrice S_{r-u} est de la même forme que les matrices T_v , $v \in \{1, \dots, r-1\}$. ■

Nous pouvons maintenant décrire avec précision la matrice $T^{-1}C_{\infty,r}$:

Corollaire 5.4 *Avec les notations précédentes,*

$$T^{-1}C_{\infty,r} = \begin{bmatrix} C_{\infty} & 0 & \cdots & 0 \\ W_{r-1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ W_1 & \cdots & W_{r-1} & C_{\infty} \end{bmatrix} \quad \text{où } W_u = S_u C_{\infty} \in M_{n\mu}(\mathbb{C})$$

Précisément, $W_u = \text{diag}(W_{u,1}, \dots, W_{u,n})$ est une matrice diagonale par blocs, où les blocs $W_{u,j} \in M_{\mu}(\mathbb{C})$ vérifient

$$W_{u,j} = \begin{cases} 0I_{\mu} & \text{si } a_{j,r} = 0 \\ \frac{s_{j,u}}{a_{j,r}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & P_{j,p_j} & \cdots & P_{j,1} & 1 \end{bmatrix} & \text{si } a_{j,r} \neq 0 \end{cases}$$

La matrice $T^{-1}C_{\infty,r}$ est donc trigonalisable et ses valeurs propres sont 0 et les $\frac{1}{a_{j,r}}$ tels que $a_{j,r} \neq 0$. En particulier, le rayon spectral de la matrice $T^{-1}C_{\infty,r}$ est ρ_0 . Noter que $T^{-1}C_{\infty,r}$ est diagonalisable si, et seulement si, $T = I_{rn\mu}$, i.e., si, et seulement si, toutes les singularités de $\tilde{\mathbf{f}}$ sont de front monomial (tous les polynômes q_j sont réduits à des monômes).

L'algorithme 3.9 ne peut être utilisé que dans le cas où la matrice limite $T^{-1}C_{\infty,r}$ de la suite matricielle $(T^{-1}C_m)_{m \geq \mu+1}$ est diagonalisable. Dans le cas général, i.e., lorsque

$T^{-1}C_{\infty,r}$ n'est pas diagonalisable, nous procédons comme dans [vdH99] en considérant une forme de Jordan de $T^{-1}C_{\infty,r}$. Finalement, en reprenant les différents algorithmes donnés au chapitre 3, nous obtenons le résultat de la proposition 5.2. Précisément, un entier m_0 et un nombre réel W convenables peuvent être déterminés de la manière suivante :

Algorithme 5.5 (détermination de m_0 et W) L'algorithme suivant permet de calculer un entier m_0 et un nombre réel W convenables :

1. Pour tout $u \in \{1, \dots, r\}$, tout $j \in \{1, \dots, n\}$ et tout $m \geq \mu + 1$, noter

$$\widehat{\mathcal{F}}_m^{[u,j]} = \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{f}}_{m-\mu+1}^{[u,j]} \\ \vdots \\ \widehat{\mathbf{f}}_m^{[u,j]} \end{bmatrix}, \quad \widehat{\mathcal{F}}_m^{[u]} = \begin{bmatrix} \widehat{\mathcal{F}}_m^{[u,1]} \\ \vdots \\ \widehat{\mathcal{F}}_m^{[u,n]} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \widehat{\mathcal{F}}_m = \begin{bmatrix} \widehat{\mathcal{F}}_m^{[1]} \\ \vdots \\ \widehat{\mathcal{F}}_m^{[r]} \end{bmatrix}$$

2. Déterminer les matrices T et C_m tel que

$$T\widehat{\mathcal{F}}_{m+1} = (m - \mu)C_m\widehat{\mathcal{F}}_m \quad \text{pour tout } m \geq \mu + 1$$

Calculer $C_{\infty,r} = \lim_{m \rightarrow +\infty} C_m$

3. Déterminer $\widehat{U} \in GL_{rn\mu}(\mathbb{C})$ telle que $J_\infty = \widehat{U}^{-1}C_{\infty,r}\widehat{U}$ soit sous forme de Jordan
4. Déterminer le nombre p de 1 apparaissant sur la première sur-diagonale de J_∞
Noter $U = \widehat{U} \text{diag}(1, \chi, \dots, \chi^{rn\mu-1})$ avec

$$\chi = \begin{cases} 1 & \text{si } p = 0 \\ \min\left(\frac{\varepsilon}{2\sqrt{p}}, 1\right) & \text{si } p \geq 1 \end{cases}$$

5. (calcul de m_0) Calculer pour tout $m \geq \mu + 1$ la matrice

$$E_m = U^{-1}(T^{-1}C_{\infty,r} - T^{-1}C_m)U$$

Déterminer, pour tout $j, \ell \in \{1, \dots, rn\mu\}$, le nombre réel

$$M_{j,\ell} = \sup_{m \geq \mu+1} ((m - \mu) |E_m^{(j,\ell)}|)$$

Calculer

$$M = \left(\sum_{j,\ell=1}^{rn\mu} M_{j,\ell}^2 \right)^{1/2}$$

Calculer

$$m_0 = \begin{cases} \left\lceil \frac{M}{\varepsilon} \right\rceil + \mu + 1 & \text{si } p = 0 \\ \left\lceil \frac{2M}{\varepsilon} \right\rceil + \mu + 1 & \text{si } p \geq 1 \end{cases}$$

6. (calcul de W) Calculer

$$W = \begin{cases} \frac{\text{cond}(U) \left\| \widehat{\mathcal{F}}_{\mu+1} \right\| (\rho_0 + M)^{m_0 - \mu - 1}}{(\rho_0 + \varepsilon)^{m_0 - 2}} & \text{si } p = 0 \\ \frac{\text{cond}(U) \left\| \widehat{\mathcal{F}}_{\mu+1} \right\| (\rho_0 + \frac{\varepsilon}{2} + M)^{m_0 - \mu - 1}}{(\rho_0 + \varepsilon)^{m_0 - 2}} & \text{si } p \geq 1 \end{cases}$$

Désormais, nous fixons m_0 et W correspondant à ce choix. Le résultat de la proposition 5.2 nous permet, comme dans le cas des systèmes de niveau unique 1, de contrôler l'erreur commise lors du calcul de $\widetilde{\mathcal{F}}(\alpha)$ avec $\alpha \in \mathcal{D}_0 \setminus \{0\}$:

Théorème 5.6 (contrôle d'erreur sur $\widetilde{\mathcal{F}}(\alpha)$)

Soient $\alpha \in \mathcal{D}_0 \setminus \{0\}$ et $\varepsilon > 0$ tel que $|\alpha| < \frac{1}{\rho_0 + \varepsilon}$.

Notons

$$K = W \sqrt{rn\mu} \max_{0 \leq \ell \leq \mu - 1} \left(\frac{1}{|\alpha|^\ell} \right) \quad (K \text{ est indépendant de } m)$$

et, pour tout $m \geq \mu - 1$,

$$\widetilde{\mathcal{F}}_{[m]}(\alpha) = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{m+1} \frac{\widehat{\mathbf{f}}_k \alpha^{k-1}}{(k-1)!} \\ \vdots \\ \sum_{k=\mu}^{m+1} \frac{\widehat{\mathbf{f}}_k \alpha^{k-\mu}}{(k-\mu)!} \end{bmatrix}$$

la $m^{\text{ème}}$ somme partielle de $\widetilde{\mathcal{F}}(\alpha)$.

1. Pour tout $m \geq m_0 - 2$,

$$\left\| \widetilde{\mathcal{F}}(\alpha) - \widetilde{\mathcal{F}}_{[m]}(\alpha) \right\| \leq K \frac{((\rho_0 + \varepsilon) |\alpha|)^{m+1}}{1 - (\rho_0 + \varepsilon) |\alpha|}$$

2. En particulier, si $\nu > 0$ est l'erreur cherchée, alors

$$m_\nu = \max \left(m_0 - 2, \left\lceil \frac{\log((1 - (\rho_0 + \varepsilon) |\alpha|) \nu) - \log(K)}{\log((\rho_0 + \varepsilon) |\alpha|)} \right\rceil \right)$$

$$\text{vérifie } \left\| \widetilde{\mathcal{F}}(\alpha) - \widetilde{\mathcal{F}}_{[m_\nu]}(\alpha) \right\| \leq \nu.$$

Noter bien que pour effectuer le contrôle d'erreur de $\widetilde{\mathcal{F}}(\alpha)$, nous n'avons fait aucune hypothèse restrictive sur la nature des singularités de $\widehat{\mathbf{f}}$: elles peuvent être de front monomial ou de front non monomial. Ceci aura son importance dans la suite (voir paragraphe 5.4).

Il s'agit à présent de déterminer et d'étudier un système différentiel linéaire $[S]$ nous permettant d'exprimer les multiplicateurs de Stokes en terme de matrices de connexion.

5.3 Système différentiel linéaire associé à $\tilde{\mathbf{f}}$

Comme au chapitre 3, nous cherchons un système différentiel linéaire $[S]$ de dimension $rn\mu$ vérifié par le vecteur colonne

$$\tilde{\mathcal{F}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{f}} \\ \tilde{\mathbf{f}}' \\ \vdots \\ \frac{d^{\mu-1}\tilde{\mathbf{f}}}{d\tau^{\mu-1}} \end{bmatrix}$$

et dont les singularités sont l'origine et les singularités potentielles de $\tilde{\mathbf{f}}$. La description d'une solution fondamentale de $[S]$ au voisinage de chacune des singularités non nulles de $[S]$ permet alors de ramener, comme pour les systèmes de niveau unique 1, le calcul des multiplicateurs de Stokes à un calcul de matrices de connexion. La détermination de ces matrices de connexion est obtenue comme au chapitre 3 par prolongements analytiques successifs de $\tilde{\mathcal{F}}$ à partir de l'origine (cf. paragraphe 3.1.3). L'évaluation de l'erreur lors de ces différents prolongements analytiques fournit alors une évaluation de l'erreur dans le calcul des multiplicateurs de Stokes (voir paragraphe 5.4).

5.3.1 Détermination du système associé à $\tilde{\mathbf{f}}$

Après multiplication par le polynôme P_j , la relation (5.1) devient

$$\begin{aligned} r(1 + P_{j,1}t) \left(t^2 \frac{d\hat{\mathbf{f}}^{[u,j]}}{dt} - a_{j,r}\hat{\mathbf{f}}^{[u,j]} \right) - (1 + P_{j,1}t) \sum_{k=1}^{u-1} (r+k-u)a_{j,r+k-u}\hat{\mathbf{f}}^{[k,j]} \\ - (\lambda_j - u + 1)t\hat{\mathbf{f}}^{[u,j]} - t \sum_{k=u+1}^r (k-u)a_{j,k-u}\hat{\mathbf{f}}^{[k,j]} \\ = \sum_{v=1}^r \sum_{\ell=1}^n \mathbf{B}_1^{(u,v)(j,\ell)} \hat{\mathbf{f}}^{[v,\ell]} - r \sum_{m=2}^{p_j} P_{j,m}t^m \left(t^2 \frac{d\hat{\mathbf{f}}^{[u,j]}}{dt} - a_{j,r}\hat{\mathbf{f}}^{[u,j]} \right) \end{aligned}$$

avec $\mathbf{B}_1^{(u,v)(j,\ell)} \in t^2\mathbb{C}[t]$. Précisément,

$$\max_{\substack{1 \leq v \leq r \\ 1 \leq \ell \leq n}} (\deg(\mathbf{B}_1^{(u,v)(j,\ell)})) = \mu_{u,j}$$

En divisant alors cette égalité par t^μ et en appliquant une transformation de Borel à la nouvelle équation, nous voyons que les séries $\tilde{\mathbf{f}}^{[u,j]}$ vérifient pour tout $u \in \{1, \dots, r\}$

et tout $j \in \{1, \dots, n\}$ les égalités

$$\begin{aligned}
& r(\tau - a_{j,r}) \frac{d^\mu \tilde{\mathbf{f}}^{[u,j]}}{d\tau^\mu} - \sum_{k=1}^{u-1} (r+k-u) a_{j,r+k-u} \frac{d^\mu \tilde{\mathbf{f}}^{[k,j]}}{d\tau^\mu} \\
& \quad - (\lambda_j - u + 1 - \mu r - r P_{j,1}(\tau - a_{j,r})) \frac{d^{\mu-1} \tilde{\mathbf{f}}^{[u,j]}}{d\tau^{\mu-1}} \\
& \quad - \sum_{k=1}^{u-1} (r+k-u) a_{j,r+k-u} P_{j,1} \frac{d^{\mu-1} \tilde{\mathbf{f}}^{[k,j]}}{d\tau^{\mu-1}} - \sum_{k=u+1}^r (k-u) a_{j,k-u} \frac{d^{\mu-1} \tilde{\mathbf{f}}^{[k,j]}}{d\tau^{\mu-1}} \\
& \quad = \sum_{v=1}^r \sum_{\ell=1}^n \sum_{s=0}^{\mu-2} \alpha_{v,\ell,s} \frac{d^s \tilde{\mathbf{f}}^{[v,\ell]}}{d\tau^s} + (\tau - a_{j,r}) \sum_{s=0}^{\mu-2} \beta_s \frac{d^s \tilde{\mathbf{f}}^{[u,j]}}{d\tau^s}
\end{aligned}$$

Le vecteur colonne

$$\tilde{\mathcal{F}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{f}} \\ \tilde{\mathbf{f}}' \\ \vdots \\ \frac{d^{\mu-1} \tilde{\mathbf{f}}}{d\tau^{\mu-1}} \end{bmatrix}$$

satisfait donc au système $[S]$ défini par¹

$$[S] \quad N(\tau) \frac{dZ}{d\tau} = C(\tau)Z$$

où :

1. La matrice $N(\tau)$ de dimension $rn\mu \times rn\mu$ s'écrit

$$N(\tau) = I_{rn(\mu-1)} \oplus N' \text{ avec } N' = \begin{bmatrix} N_r & 0 & \cdots & 0 \\ N_{r-1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ N_1 & \cdots & N_{r-1} & N_r \end{bmatrix}$$

Précisément, en posant $a_{1,u} = 0$ pour tout $u \in \{1, \dots, r\}$, les matrices N_u sont

¹Dans la suite du paragraphe 5.3, sauf mention contraire, toute matrice carrée M de dimension $rn\mu$ sera découpée en blocs en

$$M = \begin{bmatrix} M^{(1)} & M^{(2)} \\ M^{(3)} & M^{(4)} \end{bmatrix}$$

où $M^{(1)}$ (resp. $M^{(4)}$) est une matrice carrée de dimension $rn(\mu-1)$ (resp. rn).

définies par

$$\left\{ \begin{array}{l} N_r = r \operatorname{diag}(\tau - a_{1,r}, \dots, \tau - a_{n,r}) \\ \text{et} \\ \text{pour tout } u \in \{1, \dots, r-1\}, N_u = -u \operatorname{diag}(a_{1,u}, \dots, a_{n,u}) \end{array} \right.$$

2. La matrice $C(\tau)$ de dimension $rn\mu \times rn\mu$ s'écrit

$$C(\tau) = \left[\begin{array}{ccc|c} 0I_{rn} & I_{rn} & 0I_{rn} & 0I_{rn} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0I_{rn} \\ 0I_{rn} & \cdots & \cdots & I_{rn} \\ \hline & C^{(3)}(\tau) & & C^{(4)}(\tau) \end{array} \right]$$

où les deux matrices $C^{(3)}$ et $C^{(4)}$ vérifient les conditions suivantes :

- (a) la matrice $C^{(3)}(\tau)$ est de dimension $rn \times rn(\mu-1)$ et, pour tout $u \in \{0, \dots, r-1\}$ et tout $j \in \{1, \dots, n\}$, les termes de la $(nu + j)^{\text{ème}}$ ligne de $C^{(3)}$ sont de la forme $\alpha + \beta(\tau - a_{j,r})$;
- (b) la matrice $C^{(4)}(\tau)$ de dimension $rn \times rn$ s'écrit sous la forme

$$C^{(4)}(\tau) = \left[\begin{array}{cccc} C_1^{(4)} & E_1^{(4)} & \cdots & E_{r-1}^{(4)} \\ D_{r-1}^{(4)} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & E_1^{(4)} \\ D_1^{(4)} & \cdots & D_{r-1}^{(4)} & C_r^{(4)} \end{array} \right]$$

les matrices $C_u^{(4)}$, $D_u^{(4)}$ et $E_u^{(4)}$ étant diagonales de dimension n et vérifiant

- i. le $j^{\text{ème}}$ terme de $C_u^{(4)}$ est $\lambda_j - u + 1 - \mu r - rP_{j,1}(\tau - a_{j,r})$
- ii. le $j^{\text{ème}}$ terme de $D_u^{(4)}$ est $ua_{j,u}P_{j,1}$
- iii. le $j^{\text{ème}}$ terme de $E_u^{(4)}$ est $ua_{j,u}$

Le système $[S]$ est donc singulier à l'origine et en les singularités potentielles $a_{j,r} \neq 0$ de $\tilde{\mathbf{f}}$. La nature précise de la singularité $a_{j,r}$ est donnée par le résultat suivant :

Lemme 5.7 Avec les notations précédentes,

$$N'^{-1} = \left[\begin{array}{cccc} M_r & 0 & \cdots & 0 \\ M_{r-1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ M_1 & \cdots & M_{r-1} & M_r \end{array} \right]$$

où

$$M_r = N_r^{-1} = \frac{1}{r} \operatorname{diag} \left(\frac{1}{\tau - a_{1,r}}, \dots, \frac{1}{\tau - a_{n,r}} \right)$$

et où, pour tout $u \in \{1, \dots, r-1\}$,

$$M_{r-u} = -N_r^{-1} \sum_{v=0}^{u-1} N_{r-u+v} M_{r-v}$$

En particulier, les matrices M_u , $1 \leq u \leq r-1$, sont diagonales de dimension n et le $j^{\text{ème}}$ terme de M_u est un élément de $\mathbb{C} \left[a_{j,1}, \dots, a_{j,r-1}, \frac{1}{\tau - a_{j,r}} \right]$. Précisément, pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$,

1. Si le polynôme q_j est réduit à un monôme, i.e.,

$$q_j \left(\frac{1}{x} \right) = -\frac{a_{j,r}}{x^r}$$

alors le $j^{\text{ème}}$ terme de la matrice M_u est nul pour tout $u \in \{1, \dots, r-1\}$.

2. Si le polynôme q_j n'est pas réduit à un monôme, nous écrivons q_j sous la forme

$$q_j \left(\frac{1}{x} \right) = -\frac{a_{j,r}}{x^r} + \check{q}_j \left(\frac{1}{x} \right) \text{ avec } \deg(\check{q}_j) = k_j$$

et nous définissons l'entier K_j comme la partie entière supérieure de $\frac{k_j}{r-k_j}$:

$$K_j = \left\lceil \frac{k_j}{r-k_j} \right\rceil$$

En particulier, nous avons

$$K_j = \begin{cases} \frac{r}{r-k_j} - 1 = \frac{k_j}{r-k_j} & \text{si } (r-k_j) \mid r \\ \left\lceil \frac{r}{r-k_j} \right\rceil & \text{si } (r-k_j) \nmid r \end{cases}$$

Alors,

- (a) Le $j^{\text{ème}}$ terme de M_u est nul pour tout $u \in \{k_j+1, \dots, r-1\}$.
- (b) Pour tout $\ell \in \{1, \dots, K_j\}$ et pour tout $k \in \{r+1 - (\ell+1)(r-k_j), \dots, r - \ell(r-k_j)\}$, le degré (resp. la valuation) en $\frac{1}{\tau - a_{j,r}}$ du $j^{\text{ème}}$ terme de M_u est $\ell+1$ (resp. 2). Précisément, le $j^{\text{ème}}$ terme de la matrice $M_{r-\ell(r-k_j)}$ est

$$\frac{(k_j a_{j,k_j})^\ell}{r^{\ell+1}} \frac{1}{(\tau - a_{j,r})^{\ell+1}} + o \left(\frac{1}{(\tau - a_{j,r})^{\ell+1}} \right)$$

Si le polynôme q_j est réduit à un monôme, alors la singularité $a_{j,r}$ est régulière pour $[S]$. En revanche, si le polynôme q_j n'est pas réduit à un monôme, le système $[S]$ est de rang de Poincaré K_j en $a_{j,r}$. En fait, nous montrerons même que K_j est le vrai rang de Poincaré de $[S]$ en $a_{j,r}$.

En fait, cet entier K_j intervient constamment dans les calculs, y compris lorsque nous étudions le système $[S]$ en un point ordinaire ou en un point singulier régulier. Ainsi, afin d'homogénéiser les notations qui vont suivre, nous étendons la définition de K_j à tous les polynômes q_j de la manière suivante :

$$K_j = \begin{cases} 0 & \text{si } \check{q}_j = 0 \\ \left\lfloor \frac{k_j}{r - k_j} \right\rfloor & \text{si } \check{q}_j \neq 0 \text{ et } k_j = \deg(\check{q}_j) \end{cases}$$

5.3.2 Etude du système en un point ordinaire

Soit $\beta \in \mathbb{C}^*$ un point ordinaire du système $[S]$. En particulier, $\beta \neq a_{j,r}$ pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$. Ecrivons le système $[S]$ sous la forme

$$[S_\beta] \quad \frac{dZ}{d\tau} = C_\beta(\tau - \beta)Z$$

La matrice $C_\beta(\tau - \beta)$ est de dimension $rn\mu \times rn\mu$ et est définie par

$$C_\beta(\tau - \beta) = \left[\begin{array}{ccc|cc} 0I_{rn} & I_{rn} & 0I_{rn} & 0I_{rn} & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \\ \vdots & & \ddots & I_{rn} & 0I_{rn} \\ 0I_{rn} & \dots & \dots & 0I_{rn} & I_{rn} \\ \hline & C_\beta^{(3)}(\tau - \beta) & & C_\beta^{(4)}(\tau - \beta) & \end{array} \right]$$

où $C_\beta^{(3)}$ (resp. $C_\beta^{(4)}$) est une matrice de dimension $rn \times rn(\mu - 1)$ (resp. $rn \times rn$). De plus, pour tout $u \in \{0, \dots, r - 1\}$ et pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, les termes situés à la $(nu + j)$ ^{ème} ligne de $C_\beta^{(3)}(\tau - \beta)$ et $C_\beta^{(4)}(\tau - \beta)$ sont des éléments de

$$\frac{1}{(\tau - a_{j,r})^{p_j}} C[\tau] \text{ avec } 1 \leq p_j \leq K_j + 1$$

En particulier, le disque de convergence de $C_\beta(\tau - \beta)$ est le disque ouvert $\mathcal{D}_\beta = D(\beta, \frac{1}{\rho_\beta})$ de centre β et de rayon $\frac{1}{\rho_\beta}$, où

$$\rho_\beta = \max_{1 \leq j \leq n} \left(\frac{1}{|a_{j,r} - \beta|} \right)$$

Le point β étant ordinaire pour le système $[S]$, nous choisissons comme solution fondamentale de $[S_\beta]$ l'unique solution $Z_\beta(\tau - \beta)$ analytique sur \mathcal{D}_β et vérifiant $Z_\beta(0) = I_{rn\mu}$.

Par suite, $\det(M - \lambda I_q) = (-1)^q \lambda^{q-p} \left(\lambda - \frac{1}{a}\right)^p$. ■

Ainsi, après avoir mis la matrice $V_{\beta, \infty}$ sous forme de Jordan (noter qu'elle n'est jamais diagonalisable), nous obtenons une procédure analogue à celui de l'algorithme 3.12 permettant le calcul d'un $m_0^{(\ell)}$ et d'un W_ℓ convenables. Le contrôle de l'erreur commise lors de l'évaluation de $Z_\beta(\alpha - \beta)$ en un point α de $\mathcal{D}_\beta \setminus \{\beta\}$ s'en déduit alors aisément :

Théorème 5.10 (contrôle d'erreur sur $Z_\beta(\alpha - \beta)$)

Soient $\alpha \in \mathcal{D}_\beta \setminus \{\beta\}$ et $\varepsilon > 0$ tel que $|\alpha - \beta| < \frac{1}{\rho_\beta + \varepsilon}$.

Notons

$$K = rn\mu \max_{1 \leq \ell \leq rn\mu} W_\ell, \quad m_0 = \max_{1 \leq \ell \leq rn\mu} m_0^{(\ell)}$$

et $Z_{\beta, [m]}$ la $m^{\text{ème}}$ somme partielle de Z_β .

1. Pour tout $m \geq m_0 - 1$,

$$\|Z_\beta(\alpha - \beta) - Z_{\beta, [m]}(\alpha - \beta)\| \leq K \frac{((\rho_\beta + \varepsilon) |\alpha - \beta|)^{m+1}}{1 - (\rho_\beta + \varepsilon) |\alpha - \beta|}$$

2. En particulier, si $\nu > 0$ est l'erreur cherchée, alors

$$m_\nu = \max \left(m_0 - 1, \left\lceil \frac{\log((1 - (\rho_\beta + \varepsilon) |\alpha - \beta|) \nu) - \log(K)}{\log((\rho_\beta + \varepsilon) |\alpha - \beta|)} \right\rceil \right)$$

vérifie $\|Z_\beta(\alpha - \beta) - Z_{\beta, [m_\nu]}(\alpha - \beta)\| \leq \nu$.

La démonstration de ce théorème est identique à celle du théorème 3.13.

5.3.3 Etude en un point singulier non nul porté par un polynôme réduit à un monôme (singularité de front monomial)

Fixons à présent une singularité non nulle $\omega = a_{j,r}$ de $[S]$ associée à un polynôme q_j réduit à un monôme. ω est donc une singularité de front monomial de $\tilde{\mathbf{f}}$. Comme précédemment, nous notons

$$J_\omega = \{j \in \{1, \dots, n\} \text{ tel que } a_{j,r} = \omega\}$$

Rappelons que, le système $[A]$ étant de niveau unique, tous les polynômes q_j , $j \in J_\omega$, sont également réduits à des monômes. En particulier, le lemme 5.7 montre que ω est une singularité régulière pour $[S]$.

Ecrivons le système $[S]$ sous la forme

$$[S_\omega] \quad (\tau - \omega) \frac{dZ}{d\tau} = C_\omega(\tau - \omega)Z$$

où la matrice $C_\omega(\tau)$ est de dimension $rn\mu \times rn\mu$ et est définie par

$$C_\omega(\tau) = \frac{1}{r} \left[\begin{array}{cccc|c} 0I_{rn} & r\tau I_{rn} & & 0I_{rn} & 0I_{rn} \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & r\tau I_{rn} & 0I_{rn} \\ 0I_{rn} & \cdots & \cdots & 0I_{rn} & r\tau I_{rn} \\ \hline & & C_\omega^{(3)}(\tau) & & C_\omega^{(4)}(\tau) \end{array} \right]$$

les matrices $C_\omega^{(3)}$ et $C_\omega^{(4)}$ vérifiant les conditions suivantes :

- la matrice $C_\omega^{(3)}$ est de dimension $rn \times rn(\mu - 1)$. De plus, pour tout $u \in \{0, \dots, r-1\}$, les termes de la $(nu + j)^{\text{ème}}$ ligne de $C_\omega^{(3)}(\tau)$ sont de la forme $\alpha + \beta\tau$ si $j \in J_\omega$, et sont des éléments de $\frac{\tau}{(\tau - a_{j,r} + \omega)^{p_j}} \mathbb{C}[\tau]$, $1 \leq p_j \leq K_j + 1$, si $j \notin J_\omega$;

- la matrice $C_\omega^{(4)}$ est de dimension $rn \times rn$ et est définie par

$$C_\omega^{(4)}(\tau) = \begin{bmatrix} C_{\omega,1}^{(4)}(\tau) & E_{\omega,1}^{(4)}(\tau) & \cdots & E_{\omega,r-1}^{(4)}(\tau) \\ D_{\omega,r-1}^{(4)}(\tau) & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & E_{\omega,1}^{(4)}(\tau) \\ D_{\omega,1}^{(4)}(\tau) & \cdots & D_{\omega,r-1}^{(4)}(\tau) & C_{\omega,r}^{(4)}(\tau) \end{bmatrix}$$

où les matrices $C_{\omega,u}^{(4)}$, $D_{\omega,u}^{(4)}$ et $E_{\omega,u}^{(4)}$ sont diagonales de dimension n et vérifient :

- le $j^{\text{ème}}$ terme de $C_{\omega,u}^{(4)}(\tau)$ est $\lambda_j - u + 1 - \mu r - rP_{j,1}\tau$ si $j \in J_\omega$, et est un élément de $\frac{\tau}{(\tau - a_{j,r} + \omega)^{p_j}} \mathbb{C}[\tau]$, $1 \leq p_j \leq K_j + 1$, si $j \notin J_\omega$;
- le $j^{\text{ème}}$ terme de $D_{\omega,u}^{(4)}(\tau)$ et $E_{\omega,u}^{(4)}(\tau)$ est nul si $j \in J_\omega$, et est un élément de $\frac{\tau}{(\tau - a_{j,r} + \omega)^{p_j}} \mathbb{C}[\tau]$, $1 \leq p_j \leq K_j + 1$, si $j \notin J_\omega$.

Remarquer que la nullité des termes d'indices $j \in J_\omega$ de $D_{\omega,u}^{(4)}$ et $E_{\omega,u}^{(4)}$ est due au fait que ω est porté par un polynôme réduit à un monôme. Remarquer également que si tous les polynômes q_j sont réduits à des monômes, nous retrouvons exactement les résultats obtenus au paragraphe 3.1. Dans tous les cas, nous déduisons de ces calculs que le disque de convergence de $C_\omega(\tau - \omega)$ est le disque ouvert $\mathcal{D}_\omega = D(\omega, \frac{1}{\rho_\omega})$ de centre ω et de rayon $\frac{1}{\rho_\omega}$, où

$$\rho_\omega = \max_{j \notin J_\omega} \left(\frac{1}{|a_{j,r} - \omega|} \right)$$

De plus, la matrice de tête $C_\omega(0)$ de $C_\omega(\tau - \omega)$ est diagonalisable, ses valeurs propres étant 0 et les $\frac{\lambda_j}{r} - \frac{u-1}{r} - \mu$ pour tout $j \in J_\omega$ et tout $u \in \{1, \dots, r\}$. En procédant alors comme au paragraphe 3.1.1, nous pouvons construire une solution fondamentale $Z_\omega(\tau - \omega)$ de $[S_\omega]$ analogue à celle de la proposition 3.4.

Finalement, en reprenant point par point les calculs du paragraphe 3.1.4.3, nous sommes en mesure de réécrire les relations de la proposition 4.19 (relations liant les multiplicateurs de Stokes associés à une singularité de front monomial de $\tilde{\mathbf{f}}$ et les coefficients de résurgence de $\tilde{\mathbf{f}}$ à droite de ω) en terme des coefficients de la matrice

de connexion entre l'origine et ω obtenue à l'aide du prolongement analytique de $\tilde{\mathcal{F}}$ à droite de ω , mais aussi de contrôler l'erreur commise lors de l'évaluation de $Z_\omega(\alpha - \omega)$ en un point α de $\mathcal{D}_\omega \setminus \{\omega\}$. Noter que les modifications apparaissant dans ce cas sont similaires à celles que nous avons évoquées au paragraphe précédent (cf. paragraphe 5.3.2).

5.3.4 Etude en un point singulier non nul porté par un polynôme non réduit à un monôme (singularité de front non monomial)

Fixons à présent une singularité non nulle $\omega = a_{j,r}$ de $[S]$ associée à un polynôme q_j non réduit à un monôme. ω est donc une singularité de front non monomial de $\tilde{\mathbf{f}}$. Suivant les notations du paragraphe 4.2, nous définissons le polynôme \check{q}_ω par

$$q_j \left(\frac{1}{x} \right) = -\frac{\omega}{x^r} + \check{q}_\omega \left(\frac{1}{x} \right)$$

pour tout $j \in J_\omega$, *i.e.*, pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$ tel que $q_j \in Fr(\omega)$.

Notant k_ω le degré de \check{q}_ω , le lemme 5.7 montre que ω est une singularité irrégulière de $[S]$ de rang de Poincaré

$$K_\omega = \left\lceil \frac{k_\omega}{r - k_\omega} \right\rceil$$

Précisément, le système $[S]$ s'écrit sous la forme

$$[S_\omega] \quad (\tau - \omega)^{K_\omega+1} \frac{dZ}{d\tau} = C_\omega(\tau - \omega)Z$$

où la matrice $C_\omega(\tau - \omega)$ de dimension $rn\mu \times rn\mu$ est définie par

$$C_\omega(\tau - \omega) = (\tau - \omega)^{K_\omega+1} N^{-1}(\tau) C(\tau)$$

les deux matrices $N(\tau)$ et $C(\tau)$ étant données au début du paragraphe 5.3.1. En fait, nous avons même un résultat plus précis :

Proposition 5.11 *Le système $[S_\omega]$ est de vrai rang de Poincaré K_ω .*

Démonstration. La démonstration étant technique et très calculatoire, nous n'en donnons que les arguments et résultats essentiels. Les détails sont laissés à l'initiative du lecteur.

Vu la définition de l'entier K_ω (lemme 5.7), il faut distinguer deux cas, suivant que $r - k_\omega$ divise r ou non. Dans le premier cas, l'étude est relativement simple et le vrai rang de Poincaré de $[S_\omega]$ se lit directement sur la matrice $C_\omega(\tau - \omega)$. De plus, nous pouvons même donner dans ce cas le terme dominant des exponentielles de la partie irrégulière d'une solution fondamentale formelle de $[S_\omega]$. En revanche, dans le second

cas, l'étude est plus complexe et nous devons recourir au théorème de Moser permettant d'établir l'irrégularité d'un système (cf. théorème 1.35).

★ Premier cas : $(r - k_\omega)|r \Leftrightarrow K_\omega = \frac{k_\omega}{r - k_\omega}$ est un entier

En utilisant les propriétés de la matrice N (lemme 5.7) et la définition de $C(\tau)$ (page 275), nous voyons que la matrice de tête $C_\omega(0)$ de $C_\omega(\tau)$ peut s'écrire, à permutation des lignes et des colonnes près, sous la forme

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c_1 & c_2 \end{bmatrix}$$

où c_1 et c_2 sont deux matrices constantes, c_2 étant carrée d'ordre $(r - k_\omega)|J_\omega|$. Précisément,

$$c_2 = \left(\frac{k_\omega a_{k_\omega}}{r} \right)^{K_\omega+1} I_{(r-k_\omega)|J_\omega|} + N_{\text{inf}}$$

où a_{k_ω} est le coefficient du terme dominant de \check{q}_ω et où N_{inf} est une matrice nilpotente triangulaire inférieure. Par suite, K_ω est bien le vrai rang de Poincaré de $[S_\omega]$.

Cette écriture de la matrice $C_\omega(0)$ nous permet également de déterminer le terme dominant des exponentielles de la partie irrégulière d'une solution fondamentale formelle de $[S_\omega]$. En appliquant la procédure de découplage de Turrittin-Wasow ([Was65]), nous scindons le système $[S_\omega]$ en deux sous-systèmes : l'un, noté $[S'_\omega]$, de dimension $rn\mu - (r - k_\omega)|J_\omega|$ et de matrice de tête nulle ; l'autre, noté $[S''_\omega]$, de dimension $(r - k_\omega)|J_\omega|$ et de matrice de tête c_2 . Le système $[S'_\omega]$ admettant ω comme point ordinaire (construire une transformation de jauge polynomiale adéquate), nous en déduisons que la partie irrégulière d'une solution fondamentale formelle de $[S_\omega]$ admet exactement $(r - k_\omega)|J_\omega|$ exponentielles non triviales, leurs termes dominants étant tous égaux à

$$-\frac{1}{K_\omega} \left(\frac{k_\omega a_{k_\omega}}{r} \right)^{K_\omega+1} \frac{1}{(\tau - \omega)^{K_\omega}}$$

Cette écriture se simplifie en remarquant que l'hypothèse $(r - k_\omega)|r$ entraîne la réductibilité de la fraction $\frac{k_\omega}{r}$ à une fraction du type $\frac{r_\omega - 1}{r_\omega}$ avec $r_\omega \in \{1, \dots, r\}$ (la réciproque est également vraie). Nous obtenons ainsi $K_\omega = r_\omega - 1$ et les termes dominants sont alors égaux à

$$-\frac{1}{K_\omega} \left(\frac{k_\omega a_{k_\omega}}{r} \right)^{K_\omega+1} \frac{1}{(\tau - \omega)^{K_\omega}} = -\frac{(r_\omega - 1)^{r_\omega-1}}{r_\omega^{r_\omega}} \frac{a_{k_\omega}^{r_\omega}}{(\tau - \omega)^{r_\omega-1}}$$

Remarquer que si $r = 2$ et $k_\omega = 1$, nous obtenons $K_\omega = 1$ et donc comme exponentielle :

$$\exp\left(-\frac{a_1^2}{4(\tau - \omega)}\right)$$

Nous retrouvons ici, à translation en ω près, l'exponentielle du majeur de $\exp\left(\pm \frac{a_1}{t^{1/2}}\right)$ (cf. appendice 4.A).

★ Second cas : $(r - k_\omega) \nmid r$

La méthode précédente n'est plus valable, puisque la matrice de tête $C_\omega(0)$ de $C_\omega(\tau - \omega)$ est nilpotente de rang $(r - K_\omega(r - k_\omega)) |J_\omega|$.

Aussi allons-nous appliquer le théorème de Moser (cf. théorème 1.35) afin de déterminer l'irrégularité de $[S_\omega]$: ayant écrit $C_\omega(\tau - \omega)$ sous la forme

$$C_\omega(\tau - \omega) = \sum_{m \geq 0} C_{\omega,m}(\tau - \omega)^m$$

nous déterminons avec précision les deux matrices $C_{\omega,0} = C_\omega(0)$ et $C_{\omega,1}$ et nous pouvons alors montrer que le polynôme de Moser

$$\mathfrak{P}(C_\omega, \lambda) = (\tau - \omega)^{\text{rg}(C_{\omega,0})} \det \left(\lambda I_n + \frac{C_{\omega,0}}{\tau - \omega} + C_{\omega,1} \right) \Big|_{\tau=\omega}$$

s'écrit sous la forme

$$\mathfrak{P}(C_\omega, \lambda) = (-1)^{\alpha_\omega} \lambda^{rn\mu - (r - k_\omega)|J_\omega|} \left(\frac{k_\omega a_{k_\omega}}{r} \right)^{(r - (K_\omega - 1)(r - k_\omega))|J_\omega|} + R_2(\lambda)$$

où $\alpha_\omega = (r - K_\omega(r - k_\omega))(K_\omega(r - k_\omega) - k_\omega) |J_\omega|^2$, a_{k_ω} est le coefficient du terme dominant de \check{q}_ω et où $R_2(\lambda)$ est un polynôme en λ de degré strictement inférieur à $rn\mu - (r - k_\omega) |J_\omega|$. Par suite, $\mathfrak{P}(C_\omega, \lambda)$ est non identiquement nul, et K_ω est bien le vrai rang de Poincaré de $[S_\omega]$. ■

Cherchant à généraliser la méthode décrite précédemment pour les points ordinaires et les singularités régulières de $[S]$, nous appliquons la théorie locale classique des systèmes à point singulier irrégulier et nous notons $\widehat{Z}_\omega(\tau - \omega)$ une solution fondamentale formelle de $[S_\omega]$. En particulier, il semble que les exponentielles de la partie irrégulière de \widehat{Z}_ω sont, à translation en ω près, les exponentielles apparaissant dans les développements trans-asymptotiques à l'origine des majeurs $maj \left(e^{\check{q}_\omega \left(\frac{1}{\rho^{k_\omega t^1/r}} \right)} \right)$: nous avons

vu que c'était le cas pour les systèmes de niveau 2 (cf. démonstration ci-dessus) et un échantillonnage significatif d'exemples de systèmes de niveau $r \geq 3$ nous conduit à penser que ce résultat est toujours vrai.

Dans tous les cas, le facteur série formelle de $\widehat{Z}_\omega(\tau - \omega)$ est soit analytique au voisinage de ω , soit multisommable, sa somme dans une direction non anti-Stokes de $[S_\omega]$ étant alors prolongeable analytiquement au voisinage de ω par le théorème de Cauchy-Lipschitz. Ceci étant, deux difficultés apparaissent :

1. Une somme $Z_\omega(\tau - \omega)$ ayant été choisie, comment évaluer l'erreur commise dans le calcul de $Z_\omega(\alpha - \omega)$, α étant un nombre complexe proche de ω ?
2. Comment réécrire les relations du théorème 4.21 en fonction des coefficients de la matrice de connexion entre l'origine et ω ?

Pour répondre à la première question, nous pouvons envisager de transcrire aux systèmes la méthode de l'article [vdH05] permettant de contrôler l'erreur dans les

sommes des solutions formelles des équations différentielles linéaires holonomes à points singuliers irréguliers.

Toutefois, ceci s'avère inutile puisque nous ne savons pas répondre à la seconde question : le théorème 4.21 décrit les relations liant les multiplicateurs de Stokes associés à une singularité de front non monomial de \tilde{f} et les quasi-coefficients de résurgence, mais, contrairement au paragraphe 5.3.3 (singularité de front monomial), nous ne savons pas retrouver ces coefficients dans la solution fondamentale $Z_\omega(\tau - \omega)$. Rappelons que nous avons déjà établi ce point sur un exemple très simple (cf. fin du paragraphe 4.4.4).

Afin de contourner cette difficulté, nous nous ramenons au cas d'une singularité de front monomial en effectuant un changement algébrique convenable de la variable x sur le système $[A]$. Précisément, en appliquant le lemme 4.9, nous obtenons le résultat suivant :

Lemme 5.12 ([L-R90-1, page 186]) *Soit q un élément du front de ω :*

$$q\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\omega}{x^r} + \check{q}_\omega\left(\frac{1}{x}\right) \text{ avec } \check{q}_\omega \neq 0 \text{ (}\omega \text{ est de front non monomial)}$$

Il existe un changement de variable

$$(5.4) \quad x = \frac{y}{1 + \alpha_1 y + \dots + \alpha_{r-1} y^{r-1}}, \quad \alpha_1, \dots, \alpha_{r-1} \in \mathbb{C}$$

tel que la partie polaire $p\left(\frac{1}{y}\right)$ de $q\left(\frac{1}{x(y)}\right)$ vérifie

$$p\left(\frac{1}{y}\right) = q\left(\frac{1}{x(y)}\right) = -\frac{\omega}{y^r}$$

Noter que ce changement de variable doit être réalisé sur le système initial $[A]$ et non pas sur le système r -réduit $[\mathbf{A}]$, sans quoi nous ne pourrions pas éliminer tous les polynômes $\check{q}_\omega\left(\frac{1}{\rho^{k/l/r}}\right)$ avec $k \in \{0, \dots, r-1\}$. Noter également que **le système $[A]$ étant de niveau unique**, tous les polynômes portant ω sont réduits au monôme $-\frac{\omega}{y^r}$ après le changement de variable (5.4). Remarquer ici que, dans le cas où le système $[A]$ admet au moins deux niveaux, cette méthode n'est plus valable en général.

Le changement de variable (5.4) ayant été effectué sur le système $[A]$, notons $[\mathcal{A}]$ le nouveau système. Celui-ci est encore à coefficients rationnels et est toujours de niveau unique r . La solution fondamentale formelle $\hat{\mathcal{Y}}(y)$ de $[\mathcal{A}]$ correspondant à $\hat{Y}(x)$ est définie par

$$\hat{\mathcal{Y}}(y) = \hat{Y}(x(y)) = \hat{F}(x(y))(x(y))^L e^{Q(\frac{1}{x(y)})}$$

et on a le résultat suivant :

Proposition 5.13 ([L-R90-1]) *Les matrices de Stokes associées à $\hat{\mathcal{Y}}(y)$ et à $\hat{Y}(x)$ sont les mêmes.*

Il suffit donc de voir si nous pouvons appliquer les calculs précédents au système $[\mathcal{A}]$. Pour cela, étudions la solution fondamentale formelle $\widehat{\mathcal{Y}}(y)$.

Pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, notons $p_j(\frac{1}{y})$ la partie polaire de $q_j(\frac{1}{x(y)})$ et $\check{p}_j(y)$ la partie polynomiale en y de $q_j(\frac{1}{x(y)})$. Remarquer que les p_j sont définis par

$$p_j\left(\frac{1}{y}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } a_{j,r} = 0 \\ -\frac{\omega}{y^r} & \text{si } a_{j,r} = \omega \\ -\frac{b_{j,r}}{y^r} - \dots - \frac{b_{j,1}}{y} & \text{si } a_{j,r} \notin \{0, \omega\} \end{cases}$$

En notant alors $P = \text{diag}(p_1, \dots, p_n)$ et $\check{P} = \text{diag}(\check{p}_1, \dots, \check{p}_n)$ et en utilisant le fait que les matrices L et Q commutent, nous voyons que la solution fondamentale formelle $\widehat{\mathcal{Y}}(y)$ s'écrit sous la forme

$$\widehat{\mathcal{Y}}(y) = \widehat{G}(y)y^L e^{P(\frac{1}{y})}$$

où

$$\widehat{G}(y) = \widehat{F}(x(y))(1 + \alpha_1 y + \dots + \alpha_{r-1} y^{r-1})^{-L} e^{\check{P}(y)}$$

est un élément de $M_n(\mathbb{C}[[y]])$ vérifiant $\widehat{G}(0) = e^{\check{P}(0)} \in GL_n(\mathbb{C})$. Remarquer que seule la matrice des exposants de monodromie formelle de $\widehat{\mathcal{Y}}(y)$ reste inchangée par rapport à la solution initiale $\widehat{Y}(x)$. En fait, seul le facteur série formelle $\widehat{G}(y)$ peut poser problème puisqu'il n'est pas normalisé sous la forme adéquate, *i.e.*, sous la forme $\widehat{G}(y) = I_n + O(y^{2r})$. Pour s'y ramener, nous considérons un élément T de $GL_n(\mathbb{C}(x))$ de la forme

$$T(y) = (I_n + T_1(y))e^{-\check{P}(0)} \text{ avec } T_1(y) \in M_n(\mathbb{C}[y])$$

afin que

$$T(y)\widehat{G}(y) = I_n + O(y^{2r})$$

La solution fondamentale formelle $\widehat{\mathcal{Y}}_1(y) = T(y)\widehat{\mathcal{Y}}(y)$ du système de jauge ${}^T[\mathcal{A}]$ a toujours les mêmes matrices de Stokes que $\widehat{Y}(x)$ et est à présent normalisé sous la forme adéquate (cf. début du chapitre 5).

Ceci étant, nous pouvons appliquer au système ${}^T[\mathcal{A}]$ tous les calculs faits précédemment au chapitre 5 et en particulier ceux du paragraphe 5.3.3, puisque ω est à présent une singularité de front monomial. Les techniques de prolongement analytique (cf. chapitre 3 et paragraphe 5.4 ci-après) permettent alors de calculer numériquement avec évaluation d'erreur les multiplicateurs de Stokes de $\widehat{\mathcal{Y}}_1(y)$ liés à la singularité ω . Nous obtenons ainsi le résultat voulu, puisque ces multiplicateurs de Stokes sont également les multiplicateurs de Stokes de $\widehat{Y}(x)$ liés à la singularité ω .

5.4 Calcul effectif des multiplicateurs de Stokes par prolongements analytiques successifs

Dans ce paragraphe, nous donnons une méthode permettant d'évaluer numériquement tous les multiplicateurs de Stokes de tous les systèmes différentiels linéaires de niveau unique $r \geq 2$ à coefficients rationnels. Rappelons que les calculs des paragraphes 5.1, 5.2 et 5.3 s'étendent aisément au cas où la matrice des exposants de monodromie formelle est sous forme de Jordan quelconque.

Un système $[A]$ de niveau unique $r \geq 2$ et à coefficients rationnels ayant été choisi et normalisé sous la forme adéquate (cf. début du chapitre 5), nous cherchons à évaluer numériquement les multiplicateurs de Stokes du premier bloc de colonnes des matrices de Stokes de $\hat{Y}(x)$. Précisément, nous évaluons numériquement uniquement ceux qui sont associés aux singularités de front monomial de $\tilde{\mathbf{f}}$. Pour les multiplicateurs de Stokes associés aux singularités de front non monomial de $\tilde{\mathbf{f}}$, il est nécessaire de se ramener au cas précédent à l'aide d'un changement algébrique convenable de la variable x (cf. paragraphe 5.3.4), puis d'appliquer la méthode donnée ci-dessous.

Le système $[A]$ étant normalisé sous la forme adéquate, nous fixons un ensemble de directions anti-Stokes

$$\left\{ \theta - \frac{2k\pi}{r} ; k \in \{0, \dots, r-1\} \right\}$$

de $\hat{\mathbf{f}}$, où nous avons choisi $\theta \in]-\frac{2\pi}{r}, 0]$. Nous associons à cet ensemble la direction anti-Stokes $\boldsymbol{\theta} = r\theta$ de $\hat{\mathbf{f}}$. Notant

$$\Omega_{\boldsymbol{\theta}}(\hat{\mathbf{f}}) = \{\omega_1 < \dots < \omega_p\}$$

les singularités de $\tilde{\mathbf{f}}$ sur la demi-droite $d_{\boldsymbol{\theta}}$ ordonnées par ordre croissant, nous voyons qu'il suffit de s'intéresser uniquement aux deux cas génériques suivants :

1. $\Omega_{\boldsymbol{\theta}}(\hat{\mathbf{f}}) = \{\omega\}$, la singularité ω étant de front monomial ;
2. $\Omega_{\boldsymbol{\theta}}(\hat{\mathbf{f}}) = \{\omega' < \omega\}$, la singularité ω' étant de front non monomial et la singularité ω étant de front monomial.

★ Dans le premier cas, nous raisonnons comme pour les systèmes de niveau unique 1 : le système $[S_{\omega}]$ étant à point singulier régulier, nous déterminons une solution fondamentale $Z_{\omega}(\tau - \omega)$ et nous réécrivons les formules du théorème 4.18 en fonction des termes de la matrice de connexion \mathfrak{S}_{ω} entre l'origine et ω obtenue à l'aide du prolongement analytique de $\tilde{\mathcal{F}}$ à droite de ω :

$$\tilde{\mathcal{F}}(\tau) = Z_{\omega}(\tau - \omega)\mathfrak{S}_{\omega}$$

En particulier, nous déterminons ici tous les multiplicateurs de Stokes $c_{\theta,k}^{[j;q]}$ avec $j \in J_{\omega}$ et $q \in \{1, \dots, n_1\}$. L'évaluation numérique de la matrice \mathfrak{S}_{ω} peut être obtenue à l'aide de l'algorithme suivant :

1. Si $\mathcal{D}_0 \cap \mathcal{D}_\omega \neq \emptyset$, choisissons $\alpha \in \mathcal{D}_0 \cap \mathcal{D}_\omega \cap]0, \omega[$ (figure 5.1).
Alors \mathfrak{S}_ω est l'unique solution de l'équation $\tilde{\mathcal{F}}(\alpha) = Z_\omega(\alpha - \omega)\mathfrak{S}_\omega$
2. Si $\mathcal{D}_0 \cap \mathcal{D}_\omega = \emptyset$, alors
 - 2.1. choisissons une suite $0 < \alpha_1 < \beta_1 < \dots < \alpha_p < \beta_p < \alpha_{p+1} < \omega$ sur d_θ telle que (figure 5.2)

$$\alpha_1 \in \mathcal{D}_0 \cap \mathcal{D}_{\beta_1}, \alpha_j \in \mathcal{D}_{\beta_{j-1}} \cap \mathcal{D}_{\beta_j} \text{ pour } j \in \{2, \dots, p\}, \text{ et } \alpha_{p+1} \in \mathcal{D}_{\beta_p} \cap \mathcal{D}_\omega$$

- 2.2. prolongeons analytiquement $\tilde{\mathcal{F}}$ de proche en proche dans chaque disque \mathcal{D}_{β_j} :

$$\tilde{\mathcal{F}}(\tau) = Z_{\beta_j}(\tau - \beta_j)\mathcal{V}_j$$

où la suite $(\mathcal{V}_j)_{1 \leq j \leq p}$ est définie par :

- \mathcal{V}_1 est l'unique solution de l'équation $\tilde{\mathcal{F}}(\alpha_1) = Z_{\beta_1}(\alpha_1 - \beta_1)\mathcal{V}_1$
- pour $j \in \{2, \dots, p\}$, \mathcal{V}_j est l'unique solution de l'équation

$$\tilde{\mathcal{F}}(\alpha_j) = Z_{\beta_{j-1}}(\alpha_j - \beta_{j-1})\mathcal{V}_{j-1} = Z_{\beta_j}(\alpha_j - \beta_j)\mathcal{V}_j$$

- 2.3. \mathfrak{S}_ω est alors l'unique solution de l'équation

$$Z_{\beta_p}(\alpha_{p+1} - \beta_p)\mathcal{V}_p = Z_\omega(\alpha_{p+1} - \omega)\mathfrak{S}_\omega$$

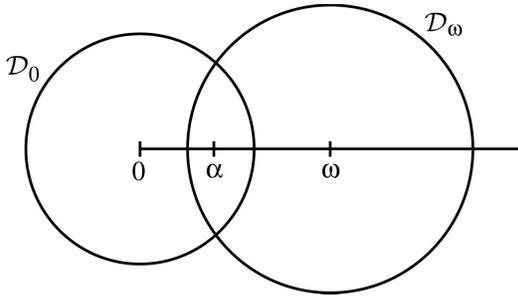


Figure 5.1

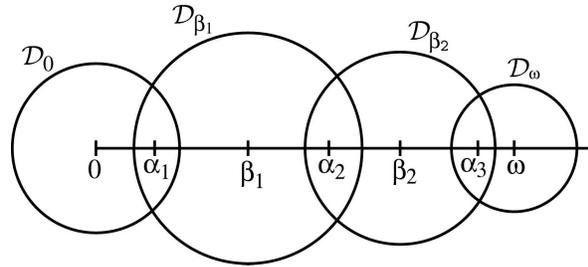


Figure 5.2

Remarque 5.14 Suivant le choix du paragraphe 4.4, nous prolongeons analytiquement $\tilde{\mathcal{F}}(\tau)$ par la droite. Ce prolongement analytique correspondant à

$$Z_\omega(\tau - \omega)\mathfrak{S}_\omega$$

nous évaluons Z_ω en un point α_{p+1} tel que $\arg(\alpha_{p+1} - \omega) = \arg \omega - \pi$.

Noter qu'à chacune des étapes, nous sommes capable d'évaluer l'erreur commise. L'erreur totale dans le calcul des multiplicateurs de Stokes est alors fonction du nombre d'étapes nécessaires au calcul et des différents choix opérés.

★ Pour le second cas, nous évaluons les multiplicateurs de Stokes $c_{\theta,k}^{[j;q]}$ avec $j \in J_\omega$ et $q \in \{1, \dots, n_1\}$ d'une manière analogue au cas précédent. Cependant, du fait de la présence de la singularité de front non monomial ω' , le prolongement analytique à droite de ω est construit de manière légèrement différente : il est nécessaire d'éviter par la droite la singularité ω' et ceci sans avoir à déterminer au préalable une solution fondamentale de $[S_{\omega'}]$. Ceci étant fait, nous évaluons les multiplicateurs de Stokes comme précédemment : la détermination d'une solution fondamentale $Z_\omega(\tau - \omega)$ de $[S_\omega]$ permet de réécrire les formules du théorème 4.18 en fonction des termes de la matrice de connexion \mathfrak{S}_ω entre 0 et ω obtenue à l'aide du prolongement analytique de $\tilde{\mathcal{F}}$ à droite de ω . L'évaluation numérique de cette matrice peut alors être obtenue à l'aide de l'algorithme suivant :

1. Choisissons une suite de points

$$0 < \alpha_1 < \beta_1 < \dots < \alpha_p < \beta_p < \omega' < \beta_{p+2} < \alpha_{p+3} < \dots < \beta_q < \alpha_{q+1} < \omega$$

sur d_θ et choisissons également trois points ordinaires α_{p+1} , β_{p+1} et α_{p+2} de $[S]$ tels que (figure 5.3)

- la singularité ω' appartient aux bords des trois disques \mathcal{D}_{β_p} , $\mathcal{D}_{\beta_{p+1}}$ et $\mathcal{D}_{\beta_{p+2}}$;
- $\arg \beta_{p+1} = \theta - \varepsilon$, avec $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit ;
- $\alpha_1 \in \mathcal{D}_0 \cap \mathcal{D}_{\beta_1}$, $\alpha_j \in \mathcal{D}_{\beta_{j-1}} \cap \mathcal{D}_{\beta_j}$ pour $j \in \{2, \dots, q\}$, et $\alpha_{q+1} \in \mathcal{D}_{\beta_q} \cap \mathcal{D}_\omega$.

2. Prolongeons analytiquement $\tilde{\mathcal{F}}$ de proche en proche dans chaque disque \mathcal{D}_{β_j} :

$$\tilde{\mathcal{F}}(\tau) = Z_{\beta_j}(\tau - \beta_j)\mathcal{V}_j$$

où la suite $(\mathcal{V}_j)_{1 \leq j \leq q}$ est définie par :

- \mathcal{V}_1 est l'unique solution de l'équation $\tilde{\mathcal{F}}(\alpha_1) = Z_{\beta_1}(\alpha_1 - \beta_1)\mathcal{V}_1$
- pour $j \in \{2, \dots, q\}$, \mathcal{V}_j est l'unique solution de l'équation

$$\tilde{\mathcal{F}}(\alpha_j) = Z_{\beta_{j-1}}(\alpha_j - \beta_{j-1})\mathcal{V}_{j-1} = Z_{\beta_j}(\alpha_j - \beta_j)\mathcal{V}_j$$

3. \mathfrak{S}_ω est alors l'unique solution de l'équation

$$Z_{\beta_q}(\alpha_{q+1} - \beta_q)\mathcal{V}_q = Z_\omega(\alpha_{q+1} - \omega)\mathfrak{S}_\omega$$

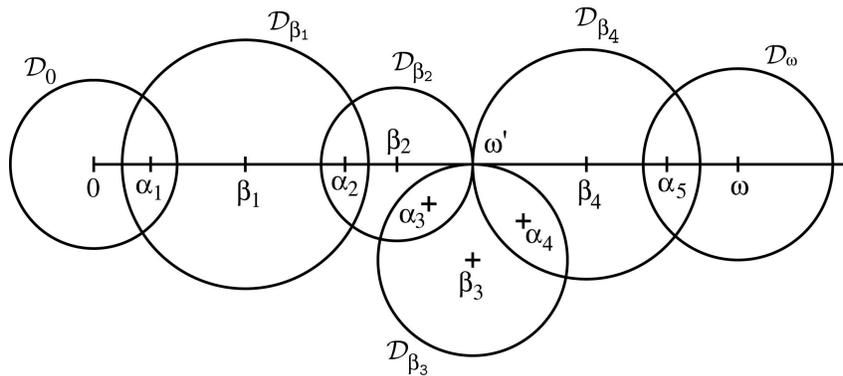


Figure 5.3

Noter que, comme précédemment, nous évaluons Z_ω en un point α_{q+1} tel que

$$\arg(\alpha_{q+1} - \omega) = \arg \omega - \pi$$

5.5 Exemples

5.5.1 Exemple 1 (singularité de front monomial)

Nous considérons le système différentiel linéaire

$$[A] \quad x^3 \frac{dY}{dx} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{x^4}{1-x} \\ 2x^4 + x^5 & 2 + \frac{x^2}{2} \end{bmatrix} Y$$

et la solution fondamentale $\widehat{Y}(x) = \widehat{F}(x)x^L e^{Q(\frac{1}{x})}$ avec $\widehat{F}(x) = I_2 + O(x^4)$,

$$L = \text{diag} \left(0, \frac{1}{2} \right) \quad \text{et} \quad Q \left(\frac{1}{x} \right) = \text{diag} \left(0, -\frac{1}{x^2} \right)$$

Ce système est de niveau unique 2 et $\widehat{Y}(x)$ admet quatre directions anti-Stokes : \mathbb{R}^+ et \mathbb{R}^- attachées à $-\frac{1}{x^2}$ et $i\mathbb{R}^+$ et $i\mathbb{R}^-$ attachées à $\frac{1}{x^2}$. Nous nous intéressons ici uniquement aux deux premières, puisque ce sont les directions anti-Stokes de la première colonne \widehat{f} de \widehat{F} . Les matrices de Stokes associées à $\widehat{Y}(x)$ dans ces deux directions sont donc définies par

$$C_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c_0^{[2]} & 0 \end{bmatrix} = C_{0,0} \quad \text{et} \quad C_{-\pi} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c_{-\pi}^{[2]} & 0 \end{bmatrix} = C_{0,1}$$

Les deux écritures $C_{0,0}$ et $C_{0,1}$ correspondent aux notations utilisées au paragraphe 4.4. Par ailleurs, pour simplifier, nous avons noté ici $c_0^{[2]}$ au lieu de $c_{0,0}^{[2]}$ et $c_{-\pi}^{[2]}$ au lieu de $c_{0,1}^{[2]}$.

Nous cherchons une valeur approchée des deux multiplicateurs de Stokes $c_0^{[2]}$ et $c_{-\pi}^{[2]}$. Le système étant de niveau unique 2, nous commençons par déterminer son système 2-réduit.

5.5.1.1 Détermination du système 2-réduit

Nous consignons dans le tableau ci-dessous les séries 2-réduites associées à chacun des coefficients de la matrice du système [A]. Rappelons que ces différentes séries

peuvent être obtenues par la méthode du paragraphe 5.1.

série $a(t)$	1 ^{ère} série 2-réduite $a^0(t)$	2 ^{nde} série 2-réduite $a^1(t)$
$-\frac{x^4}{1-x}$	$-\frac{t^2}{1-t}$	$-\frac{t^2}{1-t}$
$2x^4 + x^5$	$2t^2$	t^2
$2 + \frac{x^2}{2}$	$2 + \frac{t}{2}$	0

Nous en déduisons alors que le système 2-réduit du système $[A]$ est le système

$$[\mathbf{A}] \quad 2t^2 \frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{t^2}{1-t} & 0 & -\frac{t^3}{1-t} \\ 2t^2 & 2 + \frac{t}{2} & t^3 & 0 \\ 0 & -\frac{t^2}{1-t} & -t & -\frac{t^2}{1-t} \\ t^2 & 0 & 2t^2 & 2 - \frac{t}{2} \end{bmatrix} \mathbf{Y}$$

Par ailleurs, ayant choisi comme forme normale $[A_0]$ de $[A]$ le système

$$x^3 \frac{dY}{dx} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 + \frac{x^2}{2} \end{bmatrix} Y$$

nous obtenons pour le système 2-réduit de $[A_0]$ le système

$$[\mathbf{A}_0] \quad 2t^2 \frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 + \frac{t}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 - \frac{t}{2} \end{bmatrix} \mathbf{Y}$$

Par suite, la première colonne $\hat{\mathbf{f}}$ de la série formelle 2-réduite $\hat{\mathbf{F}}$ de \hat{F} est l'unique solution série formelle vérifiant

$$\hat{\mathbf{f}}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

du système différentiel

$$(1) \quad 2t^2 \frac{d\mathbf{f}}{dt} - \mathbf{A}_0(t)\mathbf{f} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{t^2}{1-t} & 0 & -\frac{t^3}{1-t} \\ 2t^2 & 0 & t^3 & 0 \\ 0 & -\frac{t^2}{1-t} & 0 & -\frac{t^2}{1-t} \\ t^2 & 0 & 2t^2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{f}$$

Suivant les notations précédentes, nous avons $\mu = 3$. Par ailleurs, $\tilde{\mathbf{f}}$ admet une unique singularité, placée en 1. Elle est de front monomial et est purement ramifiée d'exposants de ramification $\{-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\}$ (théorème 4.8). Déterminons à présent le système $[S_1]$ associé à $\tilde{\mathbf{f}}$ afin de ramener le calcul des multiplicateurs de Stokes $c_0^{[2]}$ et $c_{-\pi}^{[2]}$ à un calcul de matrice de connexion.

5.5.1.2 Détermination du système $[S_1]$

Nous reprenons les notations précédentes : la matrice $\hat{\mathbf{f}}$ est écrite sous la forme

$$\hat{\mathbf{f}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{f}}^{[1,1]} \\ \hat{\mathbf{f}}^{[1,2]} \\ \hat{\mathbf{f}}^{[2,1]} \\ \hat{\mathbf{f}}^{[2,2]} \end{bmatrix}$$

Une réécriture du système (1) montre que les séries $\hat{\mathbf{f}}^{[u,j]}$, $u, j \in \{1, 2\}$, vérifient les équations différentielles

$$(5.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2t^2(1-t) \frac{d\hat{\mathbf{f}}^{[1,1]}}{dt} = -t^2 \hat{\mathbf{f}}^{[1,2]} - t^3 \hat{\mathbf{f}}^{[2,2]} \\ 2t^2 \frac{d\hat{\mathbf{f}}^{[1,2]}}{dt} - \left(2 + \frac{t}{2}\right) \hat{\mathbf{f}}^{[1,2]} = 2t^2 \hat{\mathbf{f}}^{[1,1]} + t^3 \hat{\mathbf{f}}^{[2,1]} \\ 2t^2(1-t) \frac{d\hat{\mathbf{f}}^{[2,1]}}{dt} + t(1-t) \hat{\mathbf{f}}^{[2,1]} = -t^2 \hat{\mathbf{f}}^{[1,2]} - t^2 \hat{\mathbf{f}}^{[2,2]} \\ 2t^2 \frac{d\hat{\mathbf{f}}^{[2,2]}}{dt} - \left(2 - \frac{t}{2}\right) \hat{\mathbf{f}}^{[2,2]} = t^2 \hat{\mathbf{f}}^{[1,1]} + 2t^2 \hat{\mathbf{f}}^{[2,1]} \end{array} \right.$$

Les transformées de Borel $\tilde{\mathbf{f}}^{[u,j]}$ satisfont donc aux équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} 2\tau \tilde{\mathbf{f}}^{[1,1]''''} = 2(\tau - 3)\tilde{\mathbf{f}}^{[1,1]''} + 4\tilde{\mathbf{f}}^{[1,1]'} - \tilde{\mathbf{f}}^{[1,2]'} - \tilde{\mathbf{f}}^{[2,2]} \\ 2(\tau - 1)\tilde{\mathbf{f}}^{[1,2]''''} = -\frac{11}{2}\tilde{\mathbf{f}}^{[1,2]''} + 2\tilde{\mathbf{f}}^{[1,1]'} + \tilde{\mathbf{f}}^{[2,1]} \\ 2\tau \tilde{\mathbf{f}}^{[2,1]''''} = (2\tau - 7)\tilde{\mathbf{f}}^{[2,1]''} + 5\tilde{\mathbf{f}}^{[2,1]'} - \tilde{\mathbf{f}}^{[1,2]'} - \tilde{\mathbf{f}}^{[2,2]'} \\ 2(\tau - 1)\tilde{\mathbf{f}}^{[2,2]''''} = -\frac{13}{2}\tilde{\mathbf{f}}^{[2,2]''} + \tilde{\mathbf{f}}^{[1,1]'} + 2\tilde{\mathbf{f}}^{[2,1]'} \end{array} \right.$$

Ainsi, le vecteur colonne $\tilde{\mathcal{F}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{f}} \\ \tilde{\mathbf{f}}' \\ \tilde{\mathbf{f}}'' \end{bmatrix}$ est solution du système différentiel linéaire $[S]$ suivant :

$$\frac{dZ}{d\tau} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2\tau} & \frac{2}{\tau} & -\frac{1}{2\tau} & 0 & 0 & \frac{\tau-3}{\tau} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2(\tau-1)} & 0 & \frac{1}{\tau-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{11}{4(\tau-1)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2\tau} & \frac{5}{2\tau} & -\frac{1}{2\tau} & 0 & 0 & \frac{2\tau-7}{2\tau} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2(\tau-1)} & 0 & \frac{1}{\tau-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{13}{4(\tau-1)} & 0 \end{bmatrix} Z$$

Le point $\tau = 1$ est un point singulier régulier de $[S]$ et nous obtenons pour $[S_1]$ le système suivant :

$$(\tau - 1) \frac{dZ}{d\tau} = C_1(\tau - 1)Z$$

où la matrice $C_1(\tau)$ est définie par

$$C_1(\tau) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \tau & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tau & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tau & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tau & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tau & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tau & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tau \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\tau}{2(\tau+1)} & \frac{2\tau}{\tau+1} & -\frac{\tau}{2(\tau+1)} & 0 & 0 & \frac{\tau(\tau-2)}{\tau+1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{11}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\tau}{2(\tau+1)} & \frac{5\tau}{2(\tau+1)} & -\frac{\tau}{2(\tau+1)} & 0 & 0 & \frac{\tau(2\tau-5)}{2(\tau+1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{13}{4} \end{bmatrix}$$

La matrice de tête $C_1(0)$ de $C_1(\tau)$ est diagonalisable et une matrice de diagonalisation est

$$D_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{11} & 0 & \frac{4}{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{13} & 0 & \frac{4}{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Les valeurs propres de la matrice de tête $C_1(0)$ de $C_1(\tau)$ ne différant pas d'un entier, nous choisissons comme solution fondamentale du système $[S_1]$ la solution

$$Z_1(\tau - 1) = D_1 G_1(\tau - 1) (\tau - 1)^{M_1}$$

où $G_1(\tau - 1)$ est analytique sur le disque $\mathcal{D}_1 = D(1, 1)$ avec $G_1(0) = I_{12}$ et où $M_1 = \text{diag}(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -\frac{11}{4}, 0, -\frac{13}{4})$. Remarquer que M_1 est la matrice de tête du système obtenu à partir $[S_1]$ à l'aide de la transformation de jauge constante $T = D_1^{-1}Z$. En particulier, $G_1(\tau - 1)$ est l'unique solution analytique sur \mathcal{D}_1 vérifiant $G_1(0) = I_{12}$ de l'équation

$$(\tau - 1)G_1' = D_1^{-1}C_1(\tau - 1)D_1G_1 - G_1M_1$$

où

$$D_1^{-1}C_1(\tau)D_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \tau & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tau & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tau & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tau & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tau & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2\tau}{11} & 0 & \frac{4\tau}{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & \tau & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2\tau}{13} & 0 & \frac{4\tau}{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tau \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\tau}{2(\tau+1)} & \frac{2\tau}{\tau+1} & -\frac{\tau}{2(\tau+1)} & 0 & 0 & \frac{\tau(\tau-2)}{\tau+1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2\tau}{11} & 0 & -\frac{4\tau}{11} & -\frac{11}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\tau}{2(\tau+1)} & \frac{5\tau}{2(\tau+1)} & -\frac{\tau}{2(\tau+1)} & 0 & 0 & \frac{\tau(2\tau-5)}{2(\tau+1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2\tau}{13} & 0 & -\frac{4\tau}{13} & -\frac{13}{4} & 0 \end{bmatrix}$$

Vu la structure de la solution $Z_1(\tau - 1)$, nous voyons que les neuf premières colonnes de Z_1 et la onzième colonne de Z_1 sont analytiques au voisinage de 1. Quant à la dixième colonne et la douzième colonne de $Z_1(\tau - 1)$, elles s'écrivent respectivement sous la forme

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{16}{21}(\tau - 1)^{-\frac{3}{4}} \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{4}{7}(\tau - 1)^{-\frac{7}{4}} \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{8}{21}(\tau - 1)^{-\frac{3}{4}} \\ (\tau - 1)^{-\frac{11}{4}} \\ -\frac{8}{21}(\tau - 1)^{-\frac{3}{4}} \\ 0 \end{bmatrix} + O\left((\tau - 1)^{\frac{1}{4}}\right) \text{ et } \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{16}{45}(\tau - 1)^{-\frac{5}{4}} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{32}{45}(\tau - 1)^{-\frac{1}{4}} \\ -\frac{4}{9}(\tau - 1)^{-\frac{9}{4}} \\ \frac{32}{45}(\tau - 1)^{-\frac{1}{4}} \\ 0 \\ -\frac{8}{45}(\tau - 1)^{-\frac{5}{4}} - \frac{8}{9}(\tau - 1)^{-\frac{1}{4}} \\ (\tau - 1)^{-\frac{13}{4}} \end{bmatrix} + O\left((\tau - 1)^{\frac{1}{4}}\right)$$

Ainsi, en notant \mathfrak{S}_1 la matrice de connexion entre 0 et 1 obtenue à l'aide du prolongement analytique de $\tilde{\mathcal{F}}$ à droite de 1 :

$$\tilde{\mathcal{F}}(\tau) = Z_1(\tau - 1)\mathfrak{S}_1$$

nous obtenons les relations suivantes (proposition 4.19, point 2) :

$$\begin{cases} c_0^{[2]} = 2i\pi \left(\frac{16}{21\Gamma(\frac{3}{4})} e^{-\frac{i\pi}{4}} \sigma_{1,10} + \frac{16}{45\Gamma(\frac{5}{4})} e^{\frac{i\pi}{4}} \sigma_{1,12} \right) \\ c_{-\pi}^{[2]} = 2\pi \left(\frac{16}{21\Gamma(\frac{3}{4})} e^{-\frac{i\pi}{4}} \sigma_{1,10} - \frac{16}{45\Gamma(\frac{5}{4})} e^{\frac{i\pi}{4}} \sigma_{1,12} \right) \end{cases}$$

5.5.1.3 Approximation de \mathfrak{S}_1 et des multiplicateurs de Stokes

Le disque de convergence $\mathcal{D}_0 = D(0, 1)$ de $\tilde{\mathcal{F}}$ et le disque de convergence \mathcal{D}_1 de $G_1(\tau - 1)$ vérifiant $\mathcal{D}_0 \cap \mathcal{D}_1 \cap \mathbb{R}^+ =]0, 1[$, nous choisissons $\alpha = \frac{7}{8}$ pour évaluer $\tilde{\mathcal{F}}(\alpha)$ et $Z_1(\alpha - 1)$.

★ Approximation de $\tilde{\mathcal{F}}(\alpha)$: Nous prenons $\varepsilon = \frac{1}{17}$. En appliquant une transformation de Mellin aux équations (5.5) et en notant

$$\hat{\mathcal{F}}_m = \begin{bmatrix} \hat{\mathcal{F}}_m^{[1]} \\ \hat{\mathcal{F}}_m^{[2]} \end{bmatrix} \text{ avec } \hat{\mathcal{F}}_m^{[u]} = \begin{bmatrix} \hat{\mathcal{F}}_m^{[u,1]} \\ \hat{\mathcal{F}}_m^{[u,2]} \end{bmatrix} \text{ et } \hat{\mathcal{F}}_m^{[u,j]} = \begin{bmatrix} \hat{f}_m^{[u,j]} \\ \hat{f}_m^{[u,j]} \\ \hat{f}_m^{[u,j]} \\ \hat{f}_m^{[u,j]} \end{bmatrix}$$

nous obtenons pour tout $m \geq 4$ l'égalité

$$\hat{\mathcal{F}}_{m+1} = (m - 3)C_m \hat{\mathcal{F}}_m$$

où la matrice C_m est définie par

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{m-3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{m-3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{(m+1)(m-3)} & 0 & 0 & -\frac{1}{2(m+1)(m-3)} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2(m+1)(m-3)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{m-3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{m-3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{m-3} & 0 & 0 & 0 & \frac{m-3}{4m-12} & -\frac{1}{2m-6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{m-3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2m+1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{(2m+3)(m-3)} & 0 & 0 & \frac{m-3}{(2m+3)(m-3)} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{(2m+3)(m-3)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{m-3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{m-3} \\ 0 & -\frac{1}{2m-6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{m-3} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4m+1}{4m-12} \end{bmatrix}$$

La matrice limite C_∞ étant

$$C_\infty = \text{diag}(0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)$$

nous pouvons prendre $U = I_{12}$. Le calcul de $E_m = C_\infty - C_m$ donne alors $M = \frac{\sqrt{1484018}}{220}$, puis $m_0 = 98$ et

$$K = \frac{64}{49}W\sqrt{6} \text{ avec } W = \frac{\sqrt{173062054}}{2016} \left(1 + \frac{\sqrt{1484018}}{220}\right)^{94} \left(\frac{17}{18}\right)^{96}$$

Ainsi, la somme partielle $\tilde{\mathcal{F}}_{[2528]}(\alpha)$ de $\tilde{\mathcal{F}}(\alpha)$ vérifie

$$\left\| \tilde{\mathcal{F}}(\alpha) - \tilde{\mathcal{F}}_{[2528]}(\alpha) \right\| \leq 10^{-7}$$

Finalement, la matrice

$$\check{\mathcal{F}} = \begin{bmatrix} \frac{1593493}{10000000} \\ -\frac{6323871}{1250000} \\ \frac{522317}{2500000} \\ -\frac{50969537}{10000000} \\ \frac{6245433}{10000000} \\ -\frac{386751191}{10000000} \\ \frac{8774383}{10000000} \\ -\frac{6934953}{125000} \\ \frac{5397967}{2000000} \\ -\frac{5429099567}{10000000} \\ \frac{9064179}{2000000} \\ -\frac{10009420447}{10000000} \end{bmatrix}$$

satisfaisant à $\left| \check{\mathcal{F}}_{[2528]}(\alpha) - \check{\mathcal{F}} \right| \leq 10^{-7}$, nous avons $\left\| \check{\mathcal{F}}(\alpha) - \check{\mathcal{F}} \right\| \leq 6 \times 10^{-7}$.

★ Approximation de $G_1(\alpha - 1)$ et $Z_1(\alpha - 1)$: Rappelons que la série $G_1(\tau - 1)$ est l'unique solution analytique sur \mathcal{D}_1 vérifiant $G_1(0) = I_{12}$ de l'équation

$$(\tau - 1)G_1' = D_1^{-1}C_1(\tau - 1)D_1G_1 - G_1M_1$$

La matrice M_1 étant diagonale, les douze colonnes de G_1 s'étudient séparément. Par ailleurs, les polynômes de exponentielles de la partie irrégulière de $\widehat{Y}(x)$ étant réduits à des monômes, nous pouvons appliquer directement les calculs du paragraphe 3.1.4 :

pour tout $\ell \in \{1, \dots, 12\}$ nous obtenons une relation de la forme

$$\mathcal{G}_{1,m+1}^{(\ell)} = H_{1,m}^{(\ell)} \mathcal{G}_{1,m}^{(\ell)} \text{ pour tout } m \geq 1 \text{ avec } \mathcal{G}_{1,m}^{(\ell)} = \begin{bmatrix} \mathcal{G}_{1,m}^{(1,\ell)} \\ \mathcal{G}_{1,m}^{(2,\ell)} \\ \mathcal{G}_{1,m}^{(3,\ell)} \\ \mathcal{G}_{1,m}^{(4,\ell)} \\ \mathcal{G}_{1,m}^{(5,\ell)} \\ \mathcal{G}_{1,m}^{(6,\ell)} \\ \mathcal{G}_{1,m}^{(7,\ell)} \\ \mathcal{G}_{1,m}^{(8,\ell)} \\ \mathcal{G}_{1,m}^{(9,\ell)} \\ \mathcal{G}_{1,m}^{(10,\ell)} \\ \mathcal{G}_{1,m}^{(11,\ell)} \\ \mathcal{G}_{1,m}^{(12,\ell)} \end{bmatrix} \text{ et } \mathcal{G}_{1,m}^{(j,\ell)} = \begin{bmatrix} G_{1,m-1}^{(j,\ell)} \\ G_{1,m}^{(j,\ell)} \end{bmatrix}$$

où $H_{1,m}^{(\ell)}$ est une matrice carrée de dimension 24. La suite matricielle $(H_{1,m}^{(\ell)})_{m \geq 1}$ converge vers une matrice constante $H_{1,\infty}$ indépendante de ℓ qui admet dix blocs de Jordan égaux à

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

deux blocs de Jordan égaux à $[0]$ et deux blocs de Jordan égaux à $[-1]$. En choisissant alors $\varepsilon = 2\sqrt{10}$ et en adaptant l'algorithme 3.15 à notre cas, nous voyons que la somme partielle $G_{1,[692]}(\alpha - 1)$ de $G_1(\alpha - 1)$ vérifie

$$\|G_1(\alpha - 1) - G_{1,[692]}(\alpha - 1)\| \leq 10^{-7}$$

Finalement, la matrice \check{G}_1 définie par

1	0	$\frac{1}{1000000}$	$\frac{1803}{10000000}$	$-\frac{628617}{5000000}$	$\frac{1803}{10000000}$	0	$-\frac{7}{1250000}$	$\frac{85679}{10000000}$	$-\frac{3219}{10000000}$	0	$-\frac{9}{5000000}$
0	1	$\frac{3551}{2500000}$	$-\frac{11}{10000000}$	$\frac{14227}{5000000}$	$-\frac{1250011}{10000000}$	$-\frac{217}{5000000}$	0	$-\frac{183}{2000000}$	$\frac{1861}{156250}$	$\frac{11}{10000000}$	$\frac{3}{10000000}$
0	0	$\frac{9999989}{10000000}$	0	$-\frac{29}{10000000}$	$\frac{367}{2000000}$	$-\frac{629597}{5000000}$	$\frac{367}{2000000}$	0	$-\frac{3321}{10000000}$	$\frac{10963}{1250000}$	$\frac{513}{2000000}$
0	0	0	$\frac{4999997}{5000000}$	$\frac{301}{250000}$	$-\frac{3}{2000000}$	$\frac{2409}{1000000}$	$-\frac{125001}{1000000}$	$-\frac{101}{2500000}$	$\frac{37}{5000000}$	$-\frac{819}{10000000}$	$\frac{27749}{5000000}$
0	0	$\frac{339}{10000000}$	$-\frac{449}{1000000}$	$\frac{636267}{625000}$	$-\frac{449}{100000}$	$-\frac{1}{400000}$	$\frac{467}{2500000}$	$-\frac{1440827}{10000000}$	$\frac{17237}{5000000}$	0	$\frac{2671}{10000000}$
0	0	$-\frac{113637}{5000000}$	$\frac{93}{2500000}$	$-\frac{456039}{10000000}$	$\frac{10000367}{10000000}$	$\frac{261}{250000}$	$-\frac{7}{5000000}$	$\frac{22381}{10000000}$	$\frac{89157}{1250000}$	$-\frac{367}{10000000}$	$-\frac{3}{400000}$
0	0	$\frac{69}{2000000}$	0	$\frac{197}{2000000}$	$-\frac{22993}{5000000}$	$\frac{10230507}{10000000}$	$-\frac{9197}{2000000}$	$-\frac{23}{10000000}$	$\frac{3649}{1000000}$	$-\frac{1493257}{10000000}$	$-\frac{17807}{10000000}$
0	0	$-\frac{1}{5000000}$	$\frac{21}{1250000}$	$-\frac{192989}{10000000}$	$\frac{511}{10000000}$	$-\frac{38633}{1000000}$	$\frac{5000169}{5000000}$	$\frac{9893}{10000000}$	$-\frac{11}{80000}$	$\frac{10079}{5000000}$	$\frac{111273}{2000000}$
0	0	$-\frac{1713}{2000000}$	$\frac{387041}{5000000}$	$-\frac{3113163}{10000000}$	$\frac{387041}{5000000}$	$\frac{171}{2000000}$	$-\frac{4711}{1000000}$	$\frac{6689749}{5000000}$	$-\frac{116061}{10000000}$	$-\frac{21}{10000000}$	$-\frac{19517}{10000000}$
0	0	$-\frac{1}{156250}$	$\frac{1779}{2500000}$	$-\frac{2859}{10000000}$	$\frac{6939}{10000000}$	$\frac{61499}{10000000}$	$-\frac{269}{5000000}$	$\frac{18981}{1250000}$	$\frac{1999741}{2000000}$	$-\frac{691}{10000000}$	$-\frac{171}{5000000}$
0	0	$-\frac{877}{10000000}$	$\frac{9}{10000000}$	$-\frac{1251}{5000000}$	$\frac{16057}{200000}$	$-\frac{503599}{1250000}$	$\frac{20071}{250000}$	$\frac{799}{10000000}$	$-\frac{141563}{10000000}$	$\frac{224259}{156250}$	$\frac{5753}{10000000}$
0	0	$-\frac{77}{10000000}$	$\frac{683}{2500000}$	$-\frac{11129}{10000000}$	$\frac{2091}{2500000}$	$-\frac{5649}{2000000}$	$\frac{5491}{10000000}$	$\frac{57029}{10000000}$	$-\frac{37}{200000}$	$\frac{4827}{400000}$	$\frac{9999841}{10000000}$

satisfaisant à $|G_{1,[692]}(\alpha - 1) - \check{G}_1| \leq 10^{-7}$, nous avons $\|G_1(\alpha - 1) - \check{G}_1\| \leq 13 \times 10^{-7}$

Par suite, $\check{Z}_1 = D_1 \check{G}_1(\alpha - 1)^{M_1}$ est une approximation de $Z_1(\alpha - 1)$ et nous avons

$$\|Z_1(\alpha - 1) - \check{Z}_1\| \leq 14 \times 10^{-4}$$

Rappelons qu'avec notre choix de prolongement analytique, nous évaluons Z_1 en $\alpha - 1 = (1 - \alpha)e^{-i\pi}$.

★ Conclusion : approximation de \mathfrak{S}_1 et des multiplicateurs de Stokes $c_0^{[2]}$ et $c_{-\pi}^{[2]}$: La matrice \check{Z}_1 étant inversible avec $s_{\check{Z}_1, \min} \approx 0.87$, l'unique matrice $\check{\mathfrak{S}}_1$ définie par $\check{\mathcal{F}} = \check{Z}_1 \check{\mathfrak{S}}_1$ vérifie

$$\|\mathfrak{S}_1 - \check{\mathfrak{S}}_1\| \leq 87 \times 10^{-4}$$

Des valeurs approchées $\check{c}_0^{[2]}$ de $c_0^{[2]}$ $\check{c}_{-\pi}^{[2]}$ de $c_{-\pi}^{[2]}$ étant données par

$$\begin{cases} \check{c}_0^{[2]} = 2i\pi \left(\frac{16}{21\Gamma(\frac{3}{4})} e^{-\frac{i\pi}{4}} \check{\sigma}_{1,10} + \frac{16}{45\Gamma(\frac{5}{4})} e^{\frac{i\pi}{4}} \check{\sigma}_{1,12} \right) \\ \check{c}_{-\pi}^{[2]} = 2\pi \left(\frac{16}{21\Gamma(\frac{3}{4})} e^{-\frac{i\pi}{4}} \check{\sigma}_{1,10} - \frac{16}{45\Gamma(\frac{5}{4})} e^{\frac{i\pi}{4}} \check{\sigma}_{1,12} \right) \end{cases}$$

nous obtenons $|c_0^{[2]} - \check{c}_0^{[2]}| \leq 4 \times 10^{-2}$ et $|c_{-\pi}^{[2]} - \check{c}_{-\pi}^{[2]}| \leq 4 \times 10^{-2}$.

– Approximation de $c_0^{[2]}$: La partie réelle de $\check{c}_0^{[2]}$ étant nulle, nous pouvons penser que la partie réelle de $c_0^{[2]}$ est également nulle. Pour la partie imaginaire de $c_0^{[2]}$, nous obtenons l'inégalité ci-dessous en prenant une valeur approchée de la partie imaginaire de $\check{c}_0^{[2]}$ à 10^{-2} près :

$$\boxed{\left| \operatorname{Im} \left(c_0^{[2]} \right) - 9.83 \right| \leq 5 \times 10^{-2}}$$

Par suite, le multiplicateur de Stokes $c_0^{[2]}$ est non nul et le chiffre des unités de 9.83 est exact.

– Approximation de $c_{-\pi}^{[2]}$: La partie imaginaire de $\check{c}_{-\pi}^{[2]}$ étant nulle, nous pouvons penser que la partie imaginaire de $c_{-\pi}^{[2]}$ est également nulle. Pour la partie réelle de $c_{-\pi}^{[2]}$, nous obtenons l'inégalité ci-dessous en prenant une valeur approchée de la partie réelle de $\check{c}_{-\pi}^{[2]}$ à 10^{-2} près :

$$\boxed{\left| \operatorname{Re} \left(c_{-\pi}^{[2]} \right) - 4.1 \right| \leq 5 \times 10^{-2}}$$

Par suite, le multiplicateur de Stokes $c_{-\pi}^{[2]}$ est non nul et, comme précédemment, le chiffre des unités de 4.1 est exact.

5.5.2 Exemple 2 (singularité de front non monomial)

Nous considérons le système différentiel linéaire

$$[A] \quad x^3 \frac{dY}{dx} = \begin{bmatrix} 0 & x^4 \\ \frac{x^4}{1+x} & 2+2x \end{bmatrix} Y$$

et la solution fondamentale $\widehat{Y}(x) = \widehat{F}(x)e^{Q(\frac{1}{x})}$ avec

$$\widehat{F}(x) = I_2 + O(x^4) \text{ et } Q\left(\frac{1}{x}\right) = \text{diag}\left(0, -\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}\right)$$

Ce système est de niveau unique 2 et $\widehat{Y}(x)$ admet quatre directions anti-Stokes : \mathbb{R}^+ et \mathbb{R}^- attachées à $-\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}$ et $i\mathbb{R}^+$ et $i\mathbb{R}^-$ attachées à $\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x}$. Nous nous intéressons ici uniquement aux deux premières, puisque ce sont les directions anti-Stokes de la première colonne \widehat{f} de \widehat{F} . Les matrices de Stokes associées à $\widehat{Y}(x)$ dans ces deux directions sont donc définies par

$$C_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c_0^{[2]} & 0 \end{bmatrix} = C_{0,0} \text{ et } C_{-\pi} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c_{-\pi}^{[2]} & 0 \end{bmatrix} = C_{0,1}$$

Comme dans l'exemple précédent, les deux écritures $C_{0,0}$ et $C_{0,1}$ correspondent aux notations utilisées au paragraphe 4.4 et nous notons, pour simplifier, $c_0^{[2]}$ au lieu de $c_{0,0}^{[2]}$ et $c_{-\pi}^{[2]}$ au lieu de $c_{0,1}^{[2]}$.

Nous cherchons une valeur approchée des deux multiplicateurs de Stokes $c_0^{[2]}$ et $c_{-\pi}^{[2]}$. Pour cela, nous commençons par réduire le polynôme $-\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}$ à un monôme.

5.5.2.1 Réduction à un monôme

On effectue le changement de variable

$$x = \frac{y}{1-y}$$

Le système [A] devient

$$[A] \quad y^3 \frac{d\mathcal{Y}}{dy} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{y^4}{(1-y)^3} \\ \frac{y^4}{(1-y)^2} & 2 \end{bmatrix} \mathcal{Y}$$

et la solution fondamentale formelle $\widehat{\mathcal{Y}}(y)$ de [A] correspondante à $\widehat{Y}(x)$ est définie par $\widehat{\mathcal{Y}}(y) = \widehat{G}(y)e^{Q_1(\frac{1}{y})}$, où

$$\widehat{G}(y) = \widehat{F}\left(\frac{y}{1-y}\right) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e \end{bmatrix} + O(y^4) \text{ et } Q_1\left(\frac{1}{y}\right) = \text{diag}\left(0, -\frac{1}{y^2}\right)$$

La normalisation de $\widehat{\mathcal{Y}}(y)$ est obtenue par la transformation de jauge

$$Y_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-1} \end{bmatrix} \mathcal{Y}$$

et le système de jauge s'écrit alors

$$[A_1] \quad y^3 \frac{dY_1}{dy} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{ey^4}{(1-y)^3} \\ \frac{e^{-1}y^4}{(1-y)^2} & 2 \end{bmatrix} Y_1$$

La solution fondamentale formelle de $[A_1]$ définie par

$$\widehat{Y}_1(y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-1} \end{bmatrix} \widehat{Y}(x) = \widehat{F}_1(y) e^{Q_1(\frac{1}{y})}$$

vérifie donc $\widehat{F}_1(y) = I_2 + O(y^4)$ et a les mêmes matrices de Stokes que $\widehat{Y}(x)$. Ainsi, nous pouvons appliquer au système $[A_1]$ les arguments pour le calcul effectif.

5.5.2.2 Détermination du système 2-réduit

Nous consignons dans le tableau ci-dessous les séries 2-réduites associées à chacun des coefficients de la matrice du système $[A_1]$.

série $a(t)$	1 ^{ère} série 2-réduite $a^0(t)$	2 ^{nde} série 2-réduite $a^1(t)$
$\frac{ey^4}{(1-y)^3}$	$\frac{e(1+3t)t^2}{(1-t)^3}$	$\frac{e(3+t)t^2}{(1-t)^3}$
$\frac{e^{-1}y^4}{(1-y)^2}$	$\frac{e^{-1}(1+t)t^2}{(1-t)^2}$	$\frac{2e^{-1}t^2}{(1-t)^2}$

Nous en déduisons alors que le système 2-réduit du système $[A_1]$ est le système

$$[A_1] \quad 2t^2 \frac{d\mathbf{Y}_1}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{e(1+3t)t^2}{(1-t)^3} & 0 & \frac{e(3+t)t^3}{(1-t)^3} \\ \frac{e^{-1}(1+t)t^2}{(1-t)^2} & 2 & \frac{2e^{-1}t^3}{(1-t)^2} & 0 \\ 0 & \frac{e(3+t)t^2}{(1-t)^3} & -t & \frac{e(1+3t)t^2}{(1-t)^3} \\ \frac{2e^{-1}t^2}{(1-t)^2} & 0 & \frac{e^{-1}(1+t)t^2}{(1-t)^2} & 2-t \end{bmatrix} \mathbf{Y}_1$$

Par ailleurs, ayant choisi comme forme normale $[A_{1,0}]$ de $[A_1]$ le système

$$x^3 \frac{dY}{dx} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} Y$$

nous obtenons pour le système 2-réduit de $[A_{1,0}]$ le système

$$[\mathbf{A}_{1,0}] \quad 2t^2 \frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-t \end{bmatrix} \mathbf{Y}$$

Par suite, la première colonne $\hat{\mathbf{f}}$ de la série formelle 2-réduite $\hat{\mathbf{F}}$ de \hat{F} est l'unique solution série formelle vérifiant

$$\hat{\mathbf{f}}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

du système différentiel

$$(1) \quad 2t^2 \frac{d\mathbf{f}}{dt} - \mathbf{A}_0(t)\mathbf{f} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{e(1+3t)t^2}{(1-t)^3} & 0 & \frac{e(3+t)t^3}{(1-t)^3} \\ \frac{e^{-1}(1+t)t^2}{(1-t)^2} & 0 & \frac{2e^{-1}t^3}{(1-t)^2} & 0 \\ 0 & \frac{e(3+t)t^2}{(1-t)^3} & 0 & \frac{e(1+3t)t^2}{(1-t)^3} \\ \frac{2e^{-1}t^2}{(1-t)^2} & 0 & \frac{e^{-1}(1+t)t^2}{(1-t)^2} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{f}$$

Suivant les notations précédentes, nous avons $\mu = 4$. Par ailleurs, $\tilde{\mathbf{f}}$ admet une unique singularité, placée en 1. Elle est de front monomial et est simple-ramifiée d'exposant de ramification $\{-\frac{1}{2}\}$ (théorème 4.8). Déterminons à présent le système $[S_1]$ associé à $\tilde{\mathbf{f}}$ afin de ramener le calcul des multiplicateurs de Stokes $c_0^{[2]}$ et $c_{-\pi}^{[2]}$ à un calcul de matrice de connexion.

5.5.2.3 Détermination du système $[S_1]$

Nous reprenons les notations précédentes : la matrice $\hat{\mathbf{f}}$ est écrite sous la forme

$$\hat{\mathbf{f}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{f}}^{[1,1]} \\ \hat{\mathbf{f}}^{[1,2]} \\ \hat{\mathbf{f}}^{[2,1]} \\ \hat{\mathbf{f}}^{[2,2]} \end{bmatrix}$$

Une réécriture du système (1) montre que les séries $\widehat{\mathbf{f}}^{[u,j]}$, $u, j \in \{1, 2\}$, vérifient les équations différentielles

$$(5.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2t^2(1-t)^3 \frac{d\widehat{\mathbf{f}}^{[1,1]}}{dt} = e(1+3t)t^2\widehat{\mathbf{f}}^{[1,2]} + e(3+t)t^3\widehat{\mathbf{f}}^{[2,2]} \\ 2t^2(1-t)^2 \frac{d\widehat{\mathbf{f}}^{[1,2]}}{dt} - 2(1-t)^2\widehat{\mathbf{f}}^{[1,2]} = e^{-1}(1+t)t^2\widehat{\mathbf{f}}^{[1,1]} + 2e^{-1}t^3\widehat{\mathbf{f}}^{[2,1]} \\ 2t^2(1-t)^3 \frac{d\widehat{\mathbf{f}}^{[2,1]}}{dt} + t(1-t)^3\widehat{\mathbf{f}}^{[2,1]} = e(3+t)t^2\widehat{\mathbf{f}}^{[1,2]} + e(1+3t)t^2\widehat{\mathbf{f}}^{[2,2]} \\ 2t^2(1-t)^2 \frac{d\widehat{\mathbf{f}}^{[2,2]}}{dt} - (2-t)(1-t)^2\widehat{\mathbf{f}}^{[2,2]} = 2e^{-1}t^2\widehat{\mathbf{f}}^{[1,1]} + e^{-1}(1+t)t^2\widehat{\mathbf{f}}^{[2,1]} \end{array} \right.$$

En appliquant une transformation de Borel à ces équations, nous voyons que le vecteur colonne

$$\widetilde{\mathcal{F}} = \begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{f}} \\ \widetilde{\mathbf{f}}' \\ \widetilde{\mathbf{f}}'' \\ \widetilde{\mathbf{f}}''' \end{bmatrix}$$

est solution d'un système différentiel linéaire $[S]$ dont le point $\tau = 1$ est un point singulier régulier. Le système $[S_1]$ s'écrit alors sous la forme

$$(\tau - 1) \frac{dZ}{d\tau} = C_1(\tau - 1)Z$$

où la matrice $C_1(\tau)$ est définie par

Les valeurs propres de la matrice de tête $C_1(0)$ de $C_1(\tau)$ étant 0 , $-\frac{9}{2}$ et -4 , nous sommes obligés de procéder à des cisaillements (deux valeurs propres différent d'un entier). En reprenant l'algorithme de la proposition 3.4, nous trouvons comme matrice de cisaillements $\mathcal{T}_1(\tau)$ la matrice définie par

$$\begin{bmatrix} \tau^4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tau^4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\tau^3}{6} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau^4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tau^4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tau^4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tau^4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\tau^3-2\tau^2}{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tau^4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tau^4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tau^4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{e\tau^3}{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tau^4 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\tau^3-2\tau^2+6\tau}{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tau^4 & 0 & 0 & 0 & -\frac{e\tau^3}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tau^4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tau^4 & 0 & -\frac{e\tau^2(9\tau-2)}{24} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{e^{-1}\tau^4}{8} & -\frac{\tau^4}{2} & \frac{e^{-1}\tau^4}{4} & 0 & \frac{e^{-1}\tau^4}{8} & \frac{3\tau^4}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{5\tau^3-16\tau^2+48\tau}{96} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{e\tau^2(4\tau-3)}{96} & \tau^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{e^{-1}\tau^4}{9} & -\frac{5\tau^4}{9} & \frac{2e^{-1}\tau^4}{9} & 0 & \frac{e^{-1}\tau^4}{9} & \frac{14\tau^2}{9} & 0 & 0 & -\frac{12}{84} & 0 & \tau^4 & 0 \end{bmatrix}$$

Nous choisissons alors comme solution fondamentale du système $[S_1]$ la solution

$$Z_1(\tau - 1) = \mathcal{T}_1(\tau - 1)G_1(\tau - 1)(\tau - 1)^{M'_1}$$

où $G_1(\tau - 1)$ est analytique sur le disque $\mathcal{D}_1 = D(1, 1)$ avec $G_1(0) = I_{16}$ et où

$$M'_1 = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{e}{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{e}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{e}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{72} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & -\frac{5e}{24} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & -\frac{5}{84} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & -\frac{e}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{59e}{48} & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{97}{756} & 0 & -\frac{17}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Rappelons que M'_1 est la matrice de tête du système obtenu à partir $[S_1]$ à l'aide de la transformation de jauge $T = \mathcal{T}_1^{-1}Z$. En particulier, $G_1(\tau - 1)$ est l'unique solution

analytique sur \mathcal{D}_1 vérifiant $G_1(0) = I_{16}$ de l'équation

$$(\tau - 1)G'_1 = \mathcal{T}_1^{-1}C_1(\tau - 1)G_1 - G_1M'_1$$

où nous avons noté

$$\mathcal{T}_1^{-1}C_1(\tau) = \mathcal{T}_1^{-1}(\tau)C_1(\tau)\mathcal{T}_1(\tau) - \tau\mathcal{T}_1^{-1}(\tau)\mathcal{T}'_1(\tau)$$

Nous laissons au lecteur le soin d'écrire cette matrice à partir des données ci-dessus. Vu la structure de la solution $Z_1(\tau - 1)$, nous voyons que les treize premières colonnes de Z_1 et la quinzième colonne de Z_1 sont analytiques au voisinage de 1. Quant à la quatorzième colonne et la seizième colonne de $Z_1(\tau - 1)$, nous savons que seules leurs quatre premières lignes sont importantes et qu'il faut y rechercher uniquement les termes polaires $\frac{1}{\tau-1}$ et les termes ramifiés $(\tau - 1)^{-\frac{3}{2}}$. Pour chacune de ces deux colonnes, nous avons respectivement

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{6(\tau-1)} \\ 0 \\ \frac{388}{178605}(\tau - 1)^{-\frac{3}{2}} \end{bmatrix} \text{ et } \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{8}{105}(\tau - 1)^{-\frac{3}{2}} \end{bmatrix}$$

Ainsi, en notant \mathfrak{S}_1 la matrice de connexion entre 0 et 1 obtenue à l'aide du prolongement analytique de $\tilde{\mathcal{F}}$ à droite de 1 :

$$\tilde{\mathcal{F}}(\tau) = Z_1(\tau - 1)\mathfrak{S}_1$$

nous obtenons les relations suivantes (proposition 4.19, point 1) :

$$\begin{cases} c_0^{[2]} = -\left(\frac{1552\sqrt{\pi}}{178605} + i\frac{\pi}{3}\right)\sigma_{1,14} + \frac{32\sqrt{\pi}}{105}\sigma_{1,16} \\ c_{-\pi}^{[2]} = \left(\frac{1552\sqrt{\pi}}{178605} - i\frac{\pi}{3}\right)\sigma_{1,14} - \frac{32\sqrt{\pi}}{105}\sigma_{1,16} \end{cases}$$

5.5.2.4 Approximation de \mathfrak{S}_1 et des multiplicateurs de Stokes

Le disque de convergence $\mathcal{D}_0 = D(0, 1)$ de $\tilde{\mathcal{F}}$ et le disque de convergence \mathcal{D}_1 de $G_1(\tau - 1)$ vérifiant $\mathcal{D}_0 \cap \mathcal{D}_1 \cap \mathbb{R}^+ =]0, 1[$, nous choisissons $\alpha = \frac{48}{49}$ pour évaluer $\tilde{\mathcal{F}}(\alpha)$ et $Z_1(\alpha - 1)$.

* Approximation de $\tilde{\mathcal{F}}(\alpha)$: Nous prenons $\varepsilon = \frac{1}{96}$. En appliquant une transformation de Mellin aux équations (5.6) et en notant

$$\hat{\mathcal{F}}_m = \begin{bmatrix} \hat{\mathcal{F}}_m^{[1]} \\ \hat{\mathcal{F}}_m^{[2]} \end{bmatrix} \text{ avec } \hat{\mathcal{F}}_m^{[u]} = \begin{bmatrix} \hat{\mathcal{F}}_{m-1}^{[u,1]} \\ \hat{\mathcal{F}}_m^{[u,2]} \end{bmatrix} \text{ et } \hat{\mathcal{F}}_m^{[u,j]} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{f}}_{m-3}^{[u,j]} \\ \hat{\mathbf{f}}_{m-2}^{[u,j]} \\ \hat{\mathbf{f}}_{m-1}^{[u,j]} \\ \hat{\mathbf{f}}_m^{[u,j]} \end{bmatrix}$$

nous choisissons comme matrice de diagonalisation de U la matrice

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Le calcul de $E_m = U^{-1}(C_\infty - C_m)U$ montre alors que la somme partielle $\tilde{\mathcal{F}}_{[254475]}(\alpha)$ de $\tilde{\mathcal{F}}(\alpha)$ vérifie

$$\left\| \tilde{\mathcal{F}}(\alpha) - \tilde{\mathcal{F}}_{[254475]}(\alpha) \right\| \leq 10^{-6}$$

Finalement, la matrice $\check{\mathcal{F}}$ définie ci-après (voir la fin de l'exemple) satisfaisant à $\left| \tilde{\mathcal{F}}_{[254475]}(\alpha) - \check{\mathcal{F}} \right| \leq 10^{-6}$, nous avons $\left\| \tilde{\mathcal{F}}(\alpha) - \check{\mathcal{F}} \right\| \leq 5 \times 10^{-6}$.

★ Approximation de $G_1(\alpha - 1)$ et $Z_1(\alpha - 1)$: Rappelons que la série $G_1(\tau - 1)$ est l'unique solution analytique sur \mathcal{D}_1 vérifiant $G_1(0) = I_{16}$ de l'équation

$$(\tau - 1)G'_1 = \mathcal{T}_1^{-1}C_1(\tau - 1)G_1 - G_1M'_1$$

Nous ne pouvons pas présenter ici de manière explicite le calcul numérique de l'approximation de $G_1(\alpha - 1)$ du fait de la taille importante des systèmes de récurrence utilisés. Signalons tout de même que notre choix de α permet de prendre $\chi = 1$ et $U = \hat{U}$ dans l'algorithme 3.19. Finalement, en procédant comme dans les différents exemples précédents, nous obtenons une matrice \check{G}_1 satisfaisant à

$$\left\| G_1(\alpha - 1) - \check{G}_1 \right\| \leq 17 \times 10^{-25}$$

Cette précision, qui peut paraître a priori importante, est en fait nécessaire pour avoir une erreur relativement faible dans la suite. Signalons également qu'avec notre choix de α ($\alpha - 1$ est proche du centre du disque \mathcal{D}_1) nous obtenons relativement facilement \check{G}_1 : seules quelques centaines de termes sont nécessaires.

Par suite, $\check{Z}_1 = \mathcal{T}_1(\alpha - 1)\check{G}_1(\alpha - 1)^{M'_1}$ est une approximation de $Z_1(\alpha - 1)$ et nous avons

$$\left\| Z_1(\alpha - 1) - \check{Z}_1 \right\| \leq 10^{-10}$$

Rappelons qu'avec notre choix de prolongement analytique, nous évaluons Z_1 en $a-1 = (1-\alpha)e^{-i\pi}$.

★ Conclusion : approximation de \mathfrak{S}_1 et des multiplicateurs de Stokes $c_0^{[2]}$ et $c_{-\pi}^{[2]}$: La matrice \check{Z}_1 étant inversible avec $s_{\check{Z}_1, \min} \approx 0.897$, l'unique matrice $\check{\mathfrak{S}}_1$ définie par $\check{\mathcal{F}} = \check{Z}_1 \check{\mathfrak{S}}_1$ vérifie

$$\|\mathfrak{S}_1 - \check{\mathfrak{S}}_1\| \leq 10^{-5}$$

Des valeurs approchées $\check{c}_0^{[2]}$ de $c_0^{[2]}$ $\check{c}_{-\pi}^{[2]}$ de $c_{-\pi}^{[2]}$ étant données par

$$\begin{cases} \check{c}_0^{[2]} = -\left(\frac{1552\sqrt{\pi}}{178605} + i\frac{\pi}{3}\right)\check{\sigma}_{1,14} + \frac{32\sqrt{\pi}}{105}\check{\sigma}_{1,16} \\ \check{c}_{-\pi}^{[2]} = \left(\frac{1552\sqrt{\pi}}{178605} - i\frac{\pi}{3}\right)\check{\sigma}_{1,14} - \frac{32\sqrt{\pi}}{105}\check{\sigma}_{1,16} \end{cases}$$

nous obtenons $\left|c_0^{[2]} - \check{c}_0^{[2]}\right| \leq 1.5 \times 10^{-5}$ et $\left|c_{-\pi}^{[2]} - \check{c}_{-\pi}^{[2]}\right| \leq 1.5 \times 10^{-5}$.

– Approximation de $c_0^{[2]}$: La partie réelle de $\check{c}_0^{[2]}$ étant nulle, nous pouvons penser que la partie réelle de $c_0^{[2]}$ est également nulle. Pour la partie imaginaire de $c_0^{[2]}$, nous obtenons l'inégalité ci-dessous en prenant une valeur approchée de la partie imaginaire de $\check{c}_0^{[2]}$ à 10^{-5} près :

$$\left|\operatorname{Im}\left(c_0^{[2]}\right) - 6.669867\right| \leq 2 \times 10^{-5}$$

Par suite, le multiplicateur de Stokes $c_0^{[2]}$ est non nul et nous connaissons $\operatorname{Im}\left(c_0^{[2]}\right)$ avec quatre décimales exactes.

– Approximation de $c_{-\pi}^{[2]}$: Comme pour $c_0^{[2]}$, la partie réelle de $\check{c}_{-\pi}^{[2]}$ étant nulle, nous pouvons également penser que la partie réelle de $c_{-\pi}^{[2]}$ est nulle. Pour la partie imaginaire de $c_{-\pi}^{[2]}$, nous obtenons l'inégalité ci-dessous en prenant une valeur approchée de la partie réelle de $\check{c}_{-\pi}^{[2]}$ à 10^{-6} près :

$$\left|\operatorname{Im}\left(c_{-\pi}^{[2]}\right) + 1.048934\right| \leq 2 \times 10^{-5}$$

Comme précédemment, le multiplicateur de Stokes $c_{-\pi}^{[2]}$ est non nul et nous connaissons $\operatorname{Im}\left(c_{-\pi}^{[2]}\right)$ avec quatre décimales exactes.

★ Remarques sur les calculs de $\check{\mathcal{F}}$ et de \check{G}_1 :

– La matrice $\check{\mathcal{F}}$ que nous avons utilisée ci-dessus est définie par

$$\check{\mathcal{F}} = \begin{bmatrix} -\frac{58789}{62500} \\ -\frac{5481693}{250000} \\ -\frac{549811}{200000} \\ -\frac{185558893}{1000000} \\ -\frac{5929923}{1000000} \\ -\frac{215705711}{200000} \\ -\frac{10607759}{500000} \\ -\frac{13722929083}{1000000} \\ -\frac{66139873}{1000000} \\ -\frac{105305060977}{1000000} \\ -\frac{20399633}{50000} \\ -\frac{840568166361}{500000} \\ -\frac{1190219401}{500000} \\ -\frac{7735824185939}{500000} \\ -\frac{4920189639}{200000} \\ -\frac{288314628864347}{1000000} \end{bmatrix}$$

– En revanche, nous ne pouvons pas donner la matrice \check{G}_1 : celle-ci est de dimension 16×16 et ne peut rentrer dans une même page. Rappelons toutefois que cette matrice a été obtenue en déterminant la valeur exacte de $G_{1,[276]}(\alpha - 1)$, puis en prenant une valeur approchée à 10^{-25} près de chacun des termes de $G_{1,[276]}(\alpha - 1)$.

Troisième partie

Systemes de niveaux simultanés

(1, 2)

Introduction

Tout système de niveaux simultanés (1, 2) est méromorphiquement équivalent (cf. paragraphe 1.3.3) à un système différentiel linéaire à coefficients méromorphes à l'origine

$$[A] \quad x^3 \frac{dY}{dx} = A(x)Y \text{ avec } A(x) \in M_n(\mathbb{C}\{x\})$$

dont une solution fondamentale formelle $\widehat{Y}(x) = \widehat{F}(x)x^L e^{Q(\frac{1}{x})}$ est normalisée de sorte que

- ★ $\widehat{F}(x) = I_n + O(x^4) \in M_n(\mathbb{C}[[x]])$;
- ★ $L = \bigoplus_{j=1}^J L_j$, où chaque L_j est un bloc de Jordan de L de dimension $n_j \geq 1$ et de valeur propre λ_j vérifiant $\lambda_1 = 0$ et $\text{Re}(\lambda_j) \in [0, 1[$ pour tout $j \in \{1, \dots, J\}$;
- ★ $Q(\frac{1}{x}) = \bigoplus_{j=1}^J q_j (\frac{1}{x}) I_{n_j}$ avec

$$q_j \left(\frac{1}{x} \right) = -\frac{a_{j,2}}{x^2} - \frac{a_{j,1}}{x} \in x^{-1}\mathbb{C}[x^{-1}]$$

de sorte que $q_1 = 0$.

Ainsi, l'étude du phénomène de Stokes des systèmes de niveaux simultanés (1, 2) se réduit, sans perte de généralité, à celle des systèmes du type [A]. En particulier, il suffit de savoir déterminer les multiplicateurs de Stokes associés à une solution fondamentale formelle \widehat{Y} normalisée comme ci-dessus.

Aussi, **nous fixons désormais dans cette troisième partie** un tel système [A] et une telle solution fondamentale formelle $\widehat{Y}(x)$.

Les études précédentes ne peuvent pas être généralisées directement à ce type de système puisque les multiplicateurs de Stokes sont à présent liés soit au niveau 1 soit au niveau 2. Il est donc nécessaire d'étudier à la fois la série \widehat{F} et sa série 2-réduite \widetilde{F} .

Dans le chapitre 6, nous redémontrons le caractère multi-résurgent de la solution formelle $\widehat{Y}(x)$ (les séries \widehat{F} et \widetilde{F} sont résurgentes). Nous donnons également une description des singularités dans le plan de Borel. Nous montrons en particulier que les singularités de \widetilde{F} sont de la classe de Nilsson et que celles de \widehat{F} sont, à convolution près, de détermination finie.

Dans le chapitre 7, nous montrons qu'un découplage des niveaux de [A] permet d'établir un isomorphisme linéaire entre les multiplicateurs de Stokes du premier niveau et les coefficients de résurgence de \widetilde{F} en ses singularités. Nous démontrons alors

que notre méthode de calcul effectif peut à nouveau être étendue au calcul des multiplicateurs de Stokes du premier niveau dans le cas où les coefficients de $A(x)$ sont rationnels. Nous illustrons ce résultat par un exemple.

On pourra remarquer ici qu'en combinant les résultats obtenus au cours des trois parties de cette thèse, il est possible d'énoncer des résultats similaires pour tous les systèmes à deux niveaux simultanés. De plus, il est aisé de voir que notre méthode de calcul effectif s'étend sans difficulté au calcul des multiplicateurs de Stokes de plus bas niveau des systèmes de niveaux simultanés quelconques (r_1, \dots, r_s) .

Noter également que, par analogie avec les parties précédentes, nous savons qu'il suffit de se restreindre à l'étude des matrices \hat{f} et $\hat{\mathbf{f}}$ formées respectivement des n_1 premières colonnes de \hat{F} et de $\hat{\mathbf{F}}$.

Chapitre 6

Multi-résurgence de la série formelle \widehat{f}

Nous considérons dans ce chapitre un système différentiel linéaire à coefficients méromorphes à l'origine

$$[A] \quad x^3 \frac{dY}{dx} = A(x)Y \text{ avec } A(x) \in M_n(\mathbb{C}\{x\})$$

dont la solution fondamentale formelle $\widehat{Y}(x) = \widehat{F}(x)x^L e^{Q(\frac{1}{x})}$ est normalisée de sorte que

- ★ $\widehat{F}(x) = I_n + O(x^4) \in M_n(\mathbb{C}[[x]])$;
- ★ $L = \bigoplus_{j=1}^J L_j$, où chaque L_j est un bloc de Jordan de L de dimension $n_j \geq 1$ et de valeur propre λ_j vérifiant $\lambda_1 = 0$ et $\text{Re}(\lambda_j) \in [0, 1[$ pour tout $j \in \{1, \dots, J\}$;
- ★ $Q(\frac{1}{x}) = \bigoplus_{j=1}^J q_j(\frac{1}{x}) I_{n_j}$ avec

$$q_j\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{a_{j,2}}{x^2} - \frac{a_{j,1}}{x} \in x^{-1}\mathbb{C}[x^{-1}]$$

de sorte que $q_1 = 0$.

Rappelons que tout système de niveaux simultanés (1, 2) est méromorphiquement équivalent à un système [A] de ce type.

Avec ces normalisations, la matrice $A(x)$ s'écrit sous la forme

$$A(x) = A_0(x) + B(x)$$

où $A_0(x)$ est définie par

$$A_0(x) = x^3 \frac{d(Q(\frac{1}{x}))}{dx} + x^2 L = 2a_2 + xa_1 + x^2 L$$

avec, pour tout $k \in \{1, 2\}$,

$$a_k = \text{diag}(a_{1,k}I_{n_1}, \dots, a_{J,k}I_{n_J})$$

et où $B(x)$ est un élément de $M_n(x^4\mathbb{C}\{x\})$. Précisément, si B est découpée comme la matrice L :

$$B = [B^{(j,\ell)}]_{1 \leq j, \ell \leq J} \text{ avec } B^{(j,\ell)} \text{ de dimension } n_j \times n_\ell$$

alors

$$(6.1) \quad B^{(j,\ell)}(x) = \begin{cases} O(x^6) & \text{si } a_{j,2} - a_{\ell,2} = 0 \text{ et } a_{j,1} - a_{\ell,1} = 0 \\ O(x^5) & \text{si } a_{j,2} - a_{\ell,2} = 0 \text{ et } a_{j,1} - a_{\ell,1} \neq 0 \\ O(x^4) & \text{si } a_{j,2} - a_{\ell,2} \neq 0 \end{cases}$$

Dans ce chapitre, nous étudions la résurgence et la nature des singularités dans le plan de Borel de \widehat{f} (paragraphe 6.1) et de $\widehat{\mathbf{f}}$ (paragraphe 6.2).

6.1 Résurgence de la série formelle \widehat{f}

Dans ce paragraphe, nous démontrons le résultat suivant :

Théorème 6.1 *La série formelle \widehat{f} est résurgente de support singulier*

$$\Omega(\widehat{f}) = \{a_{j,1} \neq 0 \text{ tel que } a_{j,2} = 0\}$$

De plus, les prolongements analytiques de la transformée de Borel \widetilde{f} de \widehat{f} sont à croissance exponentielle d'ordre au plus deux à l'infini.

La démonstration de ce théorème est analogue à celle utilisée pour établir la résurgence-sommabilité des solutions formelles des systèmes de niveau unique (cf. paragraphes 2.1 et 4.2). Toutefois, la présence du niveau 2 dans le système $[A]$ en plus du niveau 1 modifie profondément les arguments employés, et en particulier ceux pour obtenir la croissance exponentielle adéquate à l'infini. En effet, nous cherchons ici une croissance exponentielle d'ordre deux et non d'ordre un comme pour les systèmes de niveau unique.

Fixons \mathcal{L} un chemin d'origine 0 et de classe \mathcal{C}^1 par morceaux ne faisant qu'un nombre fini de tours autour des points de $\Omega(\widehat{f})$. Ce chemin peut être relevé sur le revêtement universel $\widetilde{\mathbb{C}}_{a_1}$ de $\mathbb{C} \setminus \Omega(\widehat{f})$ en un chemin que nous notons encore \mathcal{L} . Nous associons à \mathcal{L} un voisinage ouvert simplement connexe $\Delta_{\mathcal{L}}$ dans $\widetilde{\mathbb{C}}_{a_1}$ formé par l'union d'un disque ouvert \mathcal{D} de centre 0 et d'un voisinage ouvert simplement connexe de \mathcal{L} qui évitent les points de $\Omega(\widehat{f})$ à une distance minimale $\nu > 0$: pour tout $\omega \in \Omega(\widehat{f})$ et

pour tout $\xi \in \Delta_{\mathcal{L}}$, $|\xi - \omega| \geq \nu$.

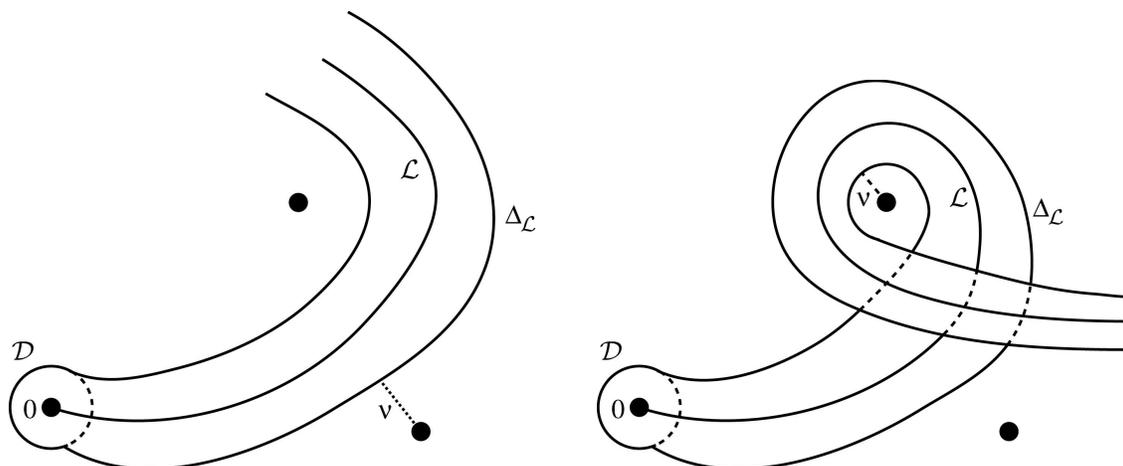


Figure 6.1 - exemples de chemins \mathcal{L} et de domaines $\Delta_{\mathcal{L}}$

Nous allons montrer que la transformée de Borel \widetilde{f} de \widehat{f} est convergente à l'origine et peut être prolongée analytiquement à $\Delta_{\mathcal{L}}$ tout entier avec une croissance exponentielle d'ordre au plus deux à l'infini.

Nous reprenons les notations du chapitre 2 : si M est une matrice de dimension $n \times n_1$, nous notons $M^{[j;q]}$ sa $j^{\text{ème}}$ colonne et nous la découpons en blocs de la forme

$$M^{[j;q]} = \begin{bmatrix} M^{[1;q]} \\ \vdots \\ M^{[J;q]} \end{bmatrix}$$

où le nombre de lignes de la matrice $M^{[j;q]}$ est égal à la taille du $j^{\text{ème}}$ bloc de Jordan L_j de L : $M^{[j;q]}$ est donc de dimension $n_j \times 1$.

La série \widehat{f} est l'unique solution série formelle vérifiant $\widehat{f}(0) = I_{n,n_1}$ du système

$$(1) \quad x^3 \frac{df}{dx} - A_0 f + x^2 f L_1 = B f$$

où I_{n,n_1} désigne comme précédemment la matrice de dimension $n \times n_1$ formée des n_1 premières colonnes de la matrice identité I_n . Comme pour les systèmes de niveau unique, la structure de la matrice L_1 permet de scinder le système (1) de dimension $n \times n_1$ colonne par colonne. Nous en déduisons alors que la $q^{\text{ème}}$ colonne $\widehat{f}^{[j;q]}$ de \widehat{f} , $q \in \{1, \dots, n_1\}$, est l'unique solution série formelle vérifiant $\widehat{f}^{[j;q]}(0) = I_{n,n_1}^{[j;q]}$ du système

$$(1^{[q]}) \quad x^3 \frac{d\widehat{f}^{[j;q]}}{dx} - A_0 \widehat{f}^{[j;q]} + x^2 \widehat{f}^{[j;q-1]} = B \widehat{f}^{[j;q]}$$

où nous avons posé $\widehat{f}^{[j;0]} = 0$. Nous retrouvons ici la structure déjà rencontrée lors de l'étude des systèmes de niveau unique : toutes les démonstrations qui vont suivre sont faites par récurrence sur $q \in \{1, \dots, n_1\}$.

6.1.1 Perturbation régulière

Suivant l'étude de la résurgence-sommabilité des solutions formelles des systèmes de niveau unique, nous perturbons les systèmes $(1^{[q]})$ en

$$(1_\alpha^{[q]}) \quad x^3 \frac{df^{[q]}}{dx} - A_0 f^{[q]} + x^2 \widehat{f}^{[q-1]} = \alpha B f^{[q]}, \quad \alpha \in \mathbb{C}$$

En reprenant la démonstration du lemme 2.3 et en utilisant la forme de la matrice A_0 , nous obtenons le résultat suivant :

Lemme 6.2 *Pour tout $q \in \{1, \dots, n_1\}$, le système $(1_\alpha^{[q]})$ admet une unique solution série formelle en α de la forme*

$$\widehat{f}^{[q]}(x, \alpha) = I_{n, n_1}^{[q]} + \sum_{m \geq 1} \widehat{f}_m^{[q]}(x) \alpha^m$$

où I_{n, n_1} est la matrice formée des n_1 premières colonnes de la matrice identité I_n et où $\widehat{f}_m^{[q]}(x) \in M_{n, 1}(x^4 \mathbb{C}[[x]])$ pour tout $m \geq 1$.

De plus, pour tout $m \geq 1$ et tout $j \in \{1, \dots, J\}$, la matrice $\widehat{f}_m^{[j; q]}$ satisfait au système différentiel

$$(6.2) \quad x^3 \frac{d\widehat{f}_m^{[j; q]}}{dx} - 2a_{j, 2} \widehat{f}_m^{[j; q]} - a_{j, 1} x \widehat{f}_m^{[j; q]} - x^2 L_j \widehat{f}_m^{[j; q]} + x^2 \widehat{f}_m^{[j; q-1]} = \left(B \widehat{f}_{m-1} \right)^{[j; q]}$$

avec $\widehat{f}_0 = I_{n, n_1}$.

A cette série double $\widehat{f}^{[q]}(x, \alpha)$ correspond dans le plan de Borel la série

$$\varphi^{[q]}(\xi, \alpha) = \delta I_{n, n_1}^{[q]} + \sum_{m \geq 1} \varphi_m^{[q]}(\xi) \alpha^m$$

où δ est la distribution de Dirac à l'origine et où $\varphi_m^{[q]}(\xi) \in M_{n, 1}(\xi^3 \mathbb{C}[[\xi]])$ est la transformée de Borel formelle de $\widehat{f}_m^{[q]}(x)$. En particulier, nous déduisons de (6.2) des systèmes simples vérifiés par les matrices $\varphi_m^{[j; q]}$, $j \in \{1, \dots, J\}$:

Lorsque $a_{j, 2} = 0$, ces systèmes sont analogues à ceux que nous avons déjà étudiés dans le cas des systèmes de niveau unique :

$$(6.3) \quad \begin{cases} (\xi - a_{j, 1}) \varphi_m^{[j; q]'} - (L_j - I_{n_j}) \varphi_m^{[j; q]} = \left(\widetilde{B}'' * \varphi_{m-1} \right)^{[j; q]} - \varphi_m^{[j; q-1]} \\ \varphi_m^{[j; q]}(0) = 0 \end{cases}$$

avec $\varphi_0 = \delta I_{n, n_1}$.

Lorsque $a_{j, 2} \neq 0$, la matrice $\varphi_m^{[j; q]}$ est l'unique solution série formelle vérifiant $\varphi_m^{[j; q]}(0) =$

$\varphi_m^{[j;q]'}(0) = 0$ du système différentiel

$$(6.4) \quad -2a_{j,2}\varphi_m^{[j;q]'} + (\xi - a_{j,1})\varphi_m^{[j;q]} = L_j \int_0^\xi \varphi_m^{[j;q]}(\eta) d\eta + \left(\widetilde{B}' * \varphi_{m-1}\right)^{[j;q]} - \int_0^\xi \varphi_m^{[j;q-1]}(\eta) d\eta$$

Cette égalité nous servira pour la construction des diverses séries majorantes. Pour l'instant, nous préférons la réécrire sous la forme

$$(6.5) \quad -2a_{j,2}\varphi_m^{[j;q]''} + (\xi - a_{j,1})\varphi_m^{[j;q]'} - (L_j - I_{n_j})\varphi_m^{[j;q]} = \left(\widetilde{B}'' * \varphi_{m-1}\right)^{[j;q]} - \varphi_m^{[j;q-1]}$$

Noter que les solutions de l'équation homogène associée à (6.5) sont des fonctions entières sur \mathbb{C} .

En raisonnant alors comme à la proposition 2.4, nous déduisons aisément des relations (6.3) et (6.5) que les séries $\varphi_m^{[j;q]}$ sont holomorphes à l'origine et peuvent être prolongées analytiquement sur $\Delta_{\mathcal{L}}$ tout entier.

Il s'agit maintenant de construire des séries majorantes convenables afin d'établir l'analyticité et la croissance exponentielle d'ordre au plus deux à l'infini sur $\Delta_{\mathcal{L}}$ de la série

$$\sum_{m \geq 1} \varphi_m^{[j;q]}(\xi) \alpha^m$$

pour tout α dans un disque centré en 1. En substituant alors 1 à α , nous obtiendrons le résultat voulu, puisque

$$\widetilde{f}(\xi) = \varphi(\xi, 1) = \delta I_{n, n_1} + \sum_{m \geq 1} \varphi_m(\xi)$$

Cette construction est basée, comme aux chapitres 2 et 4, sur l'utilisation du lemme de Grönwall (lemme 2.2). Toutefois, si les systèmes (6.3) ne posent pas de réels problèmes puisqu'ils ont déjà été étudiés, les systèmes (6.4), ou (6.5), sont plus délicats à manipuler. En particulier, la croissance exponentielle attendue apparaît à ce niveau.

Commençons par établir quelques versions modifiées du lemme de Grönwall.

6.1.2 Quelques lemmes préparatoires

Lemme 6.3 *Soit Δ un sous-domaine ouvert connexe de $\Delta_{\mathcal{L}}$ contenant l'origine $\xi = 0$ du feuillet principal.*

Pour tout $\xi \in \Delta$ nous notons Λ_ξ une ligne brisée joignant 0 à ξ et nous la paramétrons par la longueur de courbe

$$\begin{aligned} [0, s_\xi] &\longrightarrow \Lambda_\xi \\ s &\longmapsto \Lambda_\xi(s) \end{aligned}$$

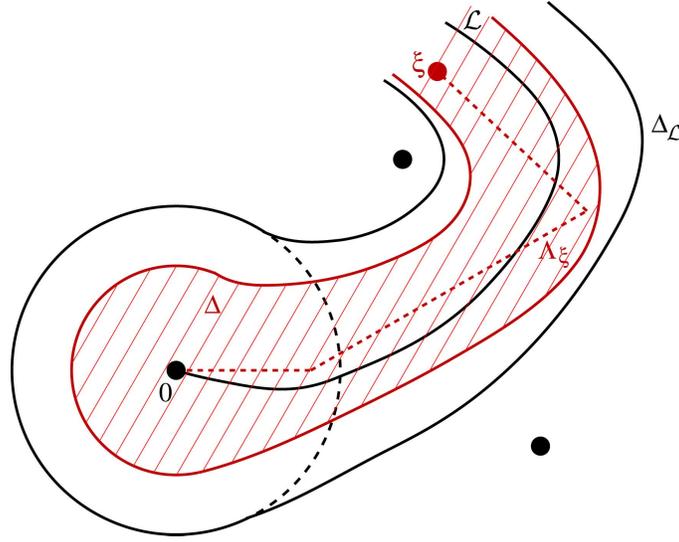


Figure 6.2 - exemple de domaine Δ et de chemin Λ_ξ

Supposons que la fonction φ est holomorphe sur Δ et vérifie l'égalité différentielle

$$(*) \quad \forall \xi \in \Delta, \quad -a\varphi'(\xi) + (\xi + b)\varphi(\xi) = c \int_0^\xi \varphi(\eta) d\eta + v(\xi)$$

où $a, b, c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, et où v est une fonction holomorphe sur Δ .

Supposons également qu'il existe une série entière w à coefficients positifs ou nuls et de rayon de convergence infini tel que

$$\forall \xi \in \Delta, \quad \forall s \in [0, s_\xi], \quad |v(\Lambda_\xi(s))| \leq w(s)$$

Soient $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}^+$ vérifiant

$$0 < \alpha \leq |a| \quad \text{et} \quad \gamma \geq |c|$$

Soit ψ l'unique solution de l'équation

$$\alpha\psi'(\xi) = \gamma \int_0^\xi \psi(\eta) d\eta + w(\xi)$$

de conditions initiales $\psi(0) \in \mathbb{R}^+$ et $\psi'(0) = \frac{w(0)}{\alpha}$. Alors,

1. ψ est une série entière à coefficients positifs ou nuls et de rayon de convergence infini.
2. Si $|\varphi(0)| \leq \psi(0)$, alors

$$|\varphi(\Lambda_\xi(s))| \leq e^{\frac{s^2 + 2\beta s}{2\alpha}} \psi(s)$$

pour tout $\xi \in \Delta$ et tout $s \in [0, s_\xi]$ dès que $\beta \geq |b|$.

Démonstration. Nous reprenons la démonstration donnée par M. Loday-Richaud dans [L-R95] dans le cas particulier où $c = 0$ et où $\varphi(0) = \psi(0) = 0$. Le point délicat est le point 2.

★ Supposons pour l'instant $c = 0$. En notant

$$\varphi(\xi) = e^{\frac{\xi^2 + 2b\xi}{2a}} \chi(\xi)$$

nous voyons que l'égalité (*) devient

$$-ae^{\frac{\xi^2 + 2b\xi}{2a}} \chi'(\xi) = v(\xi)$$

Fixons $\xi \in \Delta$. D'après l'hypothèse sur v , nous obtenons pour tout $s \in [0, s_\xi]$:

$$\left| -ae^{\frac{\Lambda_\xi(s)^2 + 2b\Lambda_\xi(s)}{2a}} \chi'(\Lambda_\xi(s)) \right| \leq w(s) \leq \alpha \psi'(s)$$

et donc

$$|\chi'(\Lambda_\xi(s))| \leq \frac{\alpha}{|a|} e^{-\operatorname{Re}\left(\frac{\Lambda_\xi(s)^2 + 2b\Lambda_\xi(s)}{2a}\right)} \psi'(s) \leq e^{-\operatorname{Re}\left(\frac{\Lambda_\xi(s)^2 + 2b\Lambda_\xi(s)}{2a}\right)} \psi'(s)$$

puisque $\alpha \in]0, |a|]$. Il s'ensuit les inégalités

$$\begin{aligned} |\chi(\Lambda_\xi(s)) - \chi(0)| &\leq \int_0^s e^{-\operatorname{Re}\left(\frac{\Lambda_\xi(\eta)^2 + 2b\Lambda_\xi(\eta)}{2a}\right)} \psi'(\eta) d\eta \\ &\leq \int_0^s e^{\operatorname{Re}\left(\frac{\eta^2 + 2\beta\eta}{2\alpha} - \frac{\Lambda_\xi(\eta)^2 + 2b\Lambda_\xi(\eta)}{2a}\right)} \psi'(\eta) d\eta \end{aligned}$$

où nous avons choisi un élément β de \mathbb{R}^+ vérifiant $\beta \geq |b|$. La fonction

$$h : \eta \longmapsto \operatorname{Re}\left(\frac{\eta^2 + 2\beta\eta}{2\alpha} - \frac{\Lambda_\xi(\eta)^2 + 2b\Lambda_\xi(\eta)}{2a}\right)$$

étant une fonction croissante sur \mathbb{R}^+ (sa dérivée h' est positive sur \mathbb{R}^+), nous obtenons

$$\begin{aligned} |\chi(\Lambda_\xi(s)) - \chi(0)| &\leq e^{\operatorname{Re}\left(\frac{s^2 + 2\beta s}{2\alpha} - \frac{\Lambda_\xi(s)^2 + 2b\Lambda_\xi(s)}{2a}\right)} \int_0^s \psi'(\eta) d\eta \\ &\leq e^{\operatorname{Re}\left(\frac{s^2 + 2\beta s}{2\alpha} - \frac{\Lambda_\xi(s)^2 + 2b\Lambda_\xi(s)}{2a}\right)} (\psi(s) - \psi(0)) \end{aligned}$$

et donc

$$|\chi(\Lambda_\xi(s))| \leq e^{\operatorname{Re}\left(\frac{s^2 + 2\beta s}{2\alpha} - \frac{\Lambda_\xi(s)^2 + 2b\Lambda_\xi(s)}{2a}\right)} (\psi(s) - \psi(0)) + |\chi(0)|$$

pour tout $s \in [0, s_\xi]$. En reprenant la définition de la fonction χ , nous avons

$$|\chi(\Lambda_\xi(s))| = e^{-\operatorname{Re}\left(\frac{\Lambda_\xi(s)^2 + 2b\Lambda_\xi(s)}{2a}\right)} |\varphi(\Lambda_\xi(s))|$$

pour tout $s \in [0, s_\xi]$. L'inégalité précédente devient alors

$$|\varphi(\Lambda_\xi(s))| \leq e^{\frac{s^2 + 2\beta s}{2\alpha}} \psi(s) + e^{\operatorname{Re}\left(\frac{\Lambda_\xi(s)^2 + 2b\Lambda_\xi(s)}{2a}\right)} (|\varphi(0)| - e^{h(s)}\psi(0))$$

pour tout $s \in [0, s_\xi]$, où h est la fonction définie précédemment. En particulier, nous avons $h(s) \geq h(0) = 0$ pour tout $s \in \mathbb{R}^+$. Comme

$$|\varphi(0)| \leq \psi(0) \Rightarrow |\varphi(0)| \leq e^{h(0)}\psi(0) \leq e^{h(s)}\psi(0)$$

nous obtenons finalement l'inégalité cherchée :

$$\forall s \in [0, s_\xi], |\varphi(\Lambda_\xi(s))| \leq e^{\frac{s^2 + 2\beta s}{2\alpha}} \psi(s)$$

★ Supposons à présent $c \neq 0$.

– Considérons pour commencer le cas où $|\varphi(0)| < \psi(0)$, et démontrons que

$$\forall s \in [0, s_\xi], |\varphi(\Lambda_\xi(s))| < e^{\frac{s^2 + 2\beta s}{2\alpha}} \psi(s)$$

Nous raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe un élément s_1 de $]0, s_\xi]$ tel que

$$|\varphi(\Lambda_\xi(s_1))| \geq e^{\frac{s_1^2 + 2\beta s_1}{2\alpha}} \psi(s_1)$$

En reprenant la démonstration du lemme 2.34 (cf. appendice 2.B sur la démonstration du lemme de Grönwall), nous obtenons l'existence d'un élément s_2 de $]0, s_1]$ vérifiant les deux hypothèses suivantes :

- $\forall s \in [0, s_2], |\varphi(\Lambda_\xi(s))| < e^{\frac{s^2 + 2\beta s}{2\alpha}} \psi(s)$
- $|\varphi(\Lambda_\xi(s_2))| = e^{\frac{s_2^2 + 2\beta s_2}{2\alpha}} \psi(s_2)$

Notons à nouveau

$$\varphi(\xi) = e^{\frac{\xi^2 + 2b\xi}{2a}} \chi(\xi)$$

et écrivons pour tout $s \in [0, s_\xi]$ l'égalité (*) sous la forme

$$\begin{aligned} -ae^{\frac{\Lambda_\xi(s)^2 + 2b\Lambda_\xi(s)}{2a}} \chi'(\Lambda_\xi(s)) &= c \int_0^{\Lambda_\xi(s)} \varphi(\eta) d\eta + v(\Lambda_\xi(s)) \\ &= c \int_0^s \varphi(\Lambda_\xi(\eta)) \Lambda_\xi'(\eta) d\eta + v(\Lambda_\xi(s)) \end{aligned}$$

Les hypothèses sur v et s_2 permettent alors d'obtenir les inégalités suivantes : pour tout $s \in [0, s_2]$,

$$\begin{aligned} \left| -ae^{\frac{\Lambda_\xi(s)^2 + 2b\Lambda_\xi(s)}{2\alpha}} \chi'(\Lambda_\xi(s)) \right| &\leq \gamma \int_0^s |\varphi(\Lambda_\xi(\eta))| d\eta + w(s) \\ &\leq \gamma \int_0^s e^{\frac{\eta^2 + 2b\eta}{2\alpha}} \psi(\eta) d\eta + w(s) \\ &\leq e^{\frac{s^2 + 2bs}{2\alpha}} \left(\gamma \int_0^s \psi(\eta) d\eta + w(s) \right) \\ &\leq \alpha e^{\frac{s^2 + 2bs}{2\alpha}} \psi'(s) \end{aligned}$$

et donc

$$\forall s \in [0, s_2], \quad |\chi'(\Lambda_\xi(s))| \leq e^{\operatorname{Re}\left(\frac{s^2 + 2bs}{2\alpha} - \frac{\Lambda_\xi(s)^2 + 2b\Lambda_\xi(s)}{2\alpha}\right)} \psi'(s)$$

En reprenant alors la démonstration donnée précédemment dans le cas où $c = 0$, nous obtenons

$$|\chi(\Lambda_\xi(s_2))| \leq e^{\operatorname{Re}\left(\frac{s_2^2 + 2bs_2}{2\alpha} - \frac{\Lambda_\xi(s_2)^2 + 2b\Lambda_\xi(s_2)}{2\alpha}\right)} (\psi(s_2) - \psi(0)) + |\chi(0)|$$

et donc

$$|\varphi(\Lambda_\xi(s_2))| < e^{\frac{s_2^2 + 2bs_2}{2\alpha}} \psi(s_2)$$

puisque $|\varphi(0)| < \psi(0)$. Cette inégalité étant contradictoire avec la définition de s_2 , nous obtenons finalement l'inégalité voulue :

$$\forall s \in [0, s_\xi], \quad |\varphi(\Lambda_\xi(s))| < e^{\frac{s^2 + 2bs}{2\alpha}} \psi(s)$$

– Lorsque $|\varphi(0)| = \psi(0)$, nous procédons comme pour le lemme de Grönwall (cf. appendice 2.B) en considérant pour tout $\varepsilon > 0$ l'unique solution ψ_ε de l'équation

$$\alpha\psi'(\xi) = \gamma \int_0^\xi \psi(\eta) d\eta + w(\xi)$$

de conditions initiales $\psi_\varepsilon(0) = \psi(0) + \varepsilon$ et $\psi'_\varepsilon(0) = \psi'(0) = \frac{w(0)}{\alpha}$. Ceci termine la démonstration. ■

Ce résultat s'étend immédiatement au cas où la fonction v vérifie une inégalité du type

$$|v(\Lambda_\xi(s))| \leq e^{\frac{s^2 + 2bs}{2\alpha}} w(s)$$

pour tout $\xi \in \Delta$ et tout $s \in [0, s_\xi]$:

Lemme 6.4 Soit Δ un sous-domaine ouvert connexe de $\Delta_{\mathcal{L}}$ contenant l'origine $\xi = 0$ du feuillet principal.

Pour tout $\xi \in \Delta$ nous notons Λ_ξ une ligne brisée joignant 0 à ξ et nous la paramétrons par la longueur de courbe

$$\begin{aligned} [0, s_\xi] &\longrightarrow \Lambda_\xi \\ s &\longmapsto \Lambda_\xi(s) \end{aligned}$$

Supposons que la fonction φ est holomorphe sur Δ et vérifie l'égalité différentielle

$$(*) \quad \forall \xi \in \Delta, \quad -a\varphi'(\xi) + (\xi + b)\varphi(\xi) = c \int_0^\xi \varphi(\eta) d\eta + v(\xi)$$

où $a, b, c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, et où v est une fonction holomorphe sur Δ .

Supposons également qu'il existe une série entière w à coefficients positifs ou nuls et de rayon de convergence infini tel que

$$\forall \xi \in \Delta, \quad \forall s \in [0, s_\xi], \quad |v(\Lambda_\xi(s))| \leq e^{\frac{s^2+2\beta s}{2\alpha}} w(s)$$

où β est un élément de \mathbb{R}^+ vérifiant $\beta \geq |b|$.

Soient $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}^+$ vérifiant

$$0 < \alpha \leq |a| \quad \text{et} \quad \gamma \geq |c|$$

Soit ψ l'unique solution de l'équation

$$\alpha\psi'(\xi) = \gamma \int_0^\xi \psi(\eta) d\eta + w(\xi)$$

de conditions initiales $\psi(0) \in \mathbb{R}^+$ et $\psi'(0) = \frac{w(0)}{\alpha}$. Alors,

1. ψ est une série entière à coefficients positifs ou nuls et de rayon de convergence infini.
2. Si $|\varphi(0)| \leq \psi(0)$, alors

$$\forall \xi \in \Delta, \quad \forall s \in [0, s_\xi], \quad |\varphi(\Lambda_\xi(s))| \leq e^{\frac{s^2+2\beta s}{2\alpha}} \psi(s)$$

Démonstration. En reprenant les notations de la démonstration précédente, nous voyons que nous obtenons dans tous les cas une inégalité de la forme

$$|\chi'(\Lambda_\xi(s))| \leq e^{\operatorname{Re}\left(\frac{s^2+2\beta s}{2\alpha} - \frac{\Lambda_\xi(s)^2+2b\Lambda_\xi(s)}{2a}\right)} \psi'(s)$$

pour tout $\xi \in \Delta$ et tout $s \in [0, s_\xi]$. Les arguments énoncés alors restent donc valables. Nous laissons les détails au lecteur. ■

Noter que les résultats de ces deux lemmes s'étendent sans difficulté au cas où φ est un élément de $M_{p,1}(\mathcal{O}(\Delta))$ avec $p \geq 2$, à condition de choisir $c \in M_p(\mathbb{C})$, $\gamma \in M_p(\mathbb{R}^+)$, $v \in M_{p,1}(\mathcal{O}(\Delta))$ et $w \in M_{p,1}(\mathcal{O}(\mathbb{C}))$.

Ces deux lemmes vont servir à construire des séries majorantes des solutions des systèmes (6.4). Pour les systèmes du type (6.3), nous procédons de manière différente en travaillant, comme aux chapitres 2 et 4 (cf. paragraphes 2.1 et 4.2), sur des inégalités différentielles. Précisément, il s'agit de voir que le lemme de Grönwall classique (cf. lemme 2.2) peut être étendu au cas où la fonction entière v est remplacée par une fonction entière de la forme

$$\xi \mapsto e^{\frac{\xi^2 + 2\beta\xi}{2\alpha}} v(\xi)$$

où α et β sont deux nombres réels positifs, α non nul, et où v est une série entière à coefficients positifs ou nuls et de rayon de convergence infini. En adaptant la démonstration du lemme de Grönwall donnée à l'appendice 2.B, nous obtenons le résultat suivant :

Lemme 6.5 *Soit Δ un sous-domaine ouvert connexe quelconque de $\Delta_{\mathcal{L}}$. Nous fixons un point base ξ_0 élément de Δ et une ligne brisée $\overline{\Lambda}$ contenue dans $\Delta_{\mathcal{L}}$ et joignant 0 à ξ_0 .*

Pour tout $\xi \in \Delta$, nous notons $\overline{\Lambda}_\xi$ une ligne brisée contenue dans Δ et joignant ξ_0 à ξ . La ligne brisée $\Lambda_\xi = \overline{\Lambda} \cup \overline{\Lambda}_\xi$ union des deux lignes brisées $\overline{\Lambda}$ et $\overline{\Lambda}_\xi$ est paramétrée par la longueur de courbe

$$\begin{aligned} [0, s_\xi] &\longrightarrow \Lambda_\xi \\ s &\longmapsto \Lambda_\xi(s) \end{aligned}$$

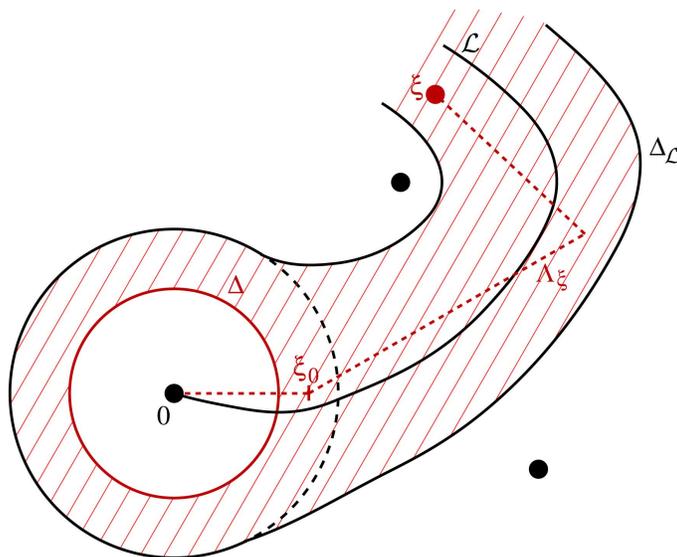


Figure 6.3 - exemple de domaine Δ , de point ξ_0 et de chemin Λ_ξ

Supposons que la fonction φ est holomorphe sur Δ et vérifie une inégalité différentielle du type

$$\forall \xi \in \Delta, \forall s \in [s_{\xi_0}, s_\xi], |\varphi'(\Lambda_\xi(s))| \leq u |\varphi(\Lambda_\xi(s))| + e^{\frac{s^2 + 2\beta s}{2\alpha}} v(s)$$

où $u, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$, $\alpha \neq 0$, et où v est une série entière à coefficients positifs ou nuls et de rayon de convergence infini.

Soit ψ l'unique solution de l'équation

$$\psi' = u\psi + v(\xi)$$

de condition initiale $\psi(0) \in \mathbb{R}^+$. Alors,

1. ψ est une série entière à coefficients positifs ou nuls et de rayon de convergence infini.
2. Si $|\varphi(\xi_0)| \leq \psi(0)$, alors $|\varphi(\Lambda_\xi(s))| \leq e^{\frac{s^2+2\beta s}{2\alpha}} \psi(s)$ pour tout $\xi \in \Delta$ et tout $s \in [s_{\xi_0}, s_\xi]$.

Démonstration. La démonstration est analogue à celle du lemme de Grönwall (cf. appendice 2.B). Pour s'en convaincre, il suffit de regarder le cas où $u = 0$. Le cas général (cas où $u \neq 0$) est laissé au lecteur.

Fixons $\xi \in \Delta$ et $s \in [s_{\xi_0}, s_\xi]$. Nous avons les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} |\varphi(\Lambda_\xi(s)) - \varphi(\xi_0)| &\leq \int_{s_{\xi_0}}^s |\varphi'(\Lambda_\xi(\eta))| d\eta \\ &\leq \int_{s_{\xi_0}}^s e^{\frac{\eta^2+2\beta\eta}{2\alpha}} v(\eta) d\eta \\ &\leq \int_{s_{\xi_0}}^s e^{\frac{\eta^2+2\beta\eta}{2\alpha}} \psi'(\eta) d\eta \\ &\leq e^{\frac{s^2+2\beta s}{2\alpha}} \int_{s_{\xi_0}}^s \psi'(\eta) d\eta = e^{\frac{s^2+2\beta s}{2\alpha}} (\psi(s) - \psi(s_{\xi_0})) \end{aligned}$$

Par suite, nous obtenons

$$\begin{aligned} |\varphi(\Lambda_\xi(s))| &\leq e^{\frac{s^2+2\beta s}{2\alpha}} (\psi(s) - \psi(s_{\xi_0})) + |\varphi(\xi_0)| \\ &\leq e^{\frac{s^2+2\beta s}{2\alpha}} (\psi(s) - \psi(s_{\xi_0}) + |\varphi(\xi_0)|) \end{aligned}$$

et donc bien

$$|\varphi(\Lambda_\xi(s))| \leq e^{\frac{s^2+2\beta s}{2\alpha}} \psi(s)$$

puisque $|\varphi(\xi_0)| \leq \psi(0) \leq \psi(s_{\xi_0})$ (la restriction de ψ à \mathbb{R}^+ est une fonction croissante car ψ est une série entière à coefficients positifs ou nuls et de rayon de convergence infini). ■

A nouveau, ce lemme s'étend sans difficulté au cas où φ est un élément de $M_{p,1}(\mathcal{O}(\Delta))$ avec $p \geq 2$, à condition de choisir $u \in M_p(\mathbb{R}^+)$ et $v \in M_{p,1}(\mathcal{O}(\mathbb{C}))$.

6.1.3 Construction de séries majorantes

La méthode utilisée ici pour construire les séries majorantes nécessaires à la démonstration du théorème 6.1 est similaire à celles des paragraphes 2.1 et 4.2.

Commençons par établir la convergence normale sur le disque \mathcal{D} de la série $\sum_{m \geq 1} \varphi_m^{[j;q]}(\xi)$

Précisément, nous allons montrer que la série

$$\sum_{m \geq 1} \varphi_m^{[j;q]}(\xi) \alpha^m$$

converge normalement sur le disque \mathcal{D} pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$.

Rappelons que ν est la distance minimale entre les points de $\Delta_{\mathcal{L}}$ et les points de $\Omega(\widehat{f}) = \{a_{j,1} \neq 0 \text{ tel que } a_{j,2} = 0\}$. Notons

$$\alpha_2 = \min_{a_{j,2} \neq 0} |a_{j,2}|$$

et définissons le système $(2_{\alpha}^{[q]})$ à l'aide des J équations matricielles suivantes :

- $xg^{[1;q]} = \alpha (|B|'g)^{[1;q]} + xM_1g^{[1;q]} + xg^{[1;q-1]} + xI_{n,n_1}^{[1;q]} - 2xI_{n,n_1}^{[1;q-1]}$
- si $a_{j,1} = a_{j,2} = 0$ et $j \neq 1$, alors

$$(1 - \operatorname{Re}(\lambda_j))xg^{[j;q]} = \alpha (|B|'g)^{[j;q]} + xM_jg^{[j;q]} + xg^{[j;q-1]}$$

- si $a_{j,1} \neq 0$ et $a_{j,2} = 0$, alors

$$\nu g^{[j;q]} = \alpha (|B|'g)^{[j;q]} + x(|L_j| + I_{n_j})g^{[j;q]} + xg^{[j;q-1]}$$

- si $a_{j,2} \neq 0$, alors

$$2\alpha_2 g^{[j;q]} = \alpha (|B|g)^{[j;q]} + |L_j| x^2 g^{[j;q]} + x^2 g^{[j;q-1]}$$

où nous avons noté $M_j = L_j - \lambda_j I_{n_j}$ la matrice nilpotente de Jordan d'ordre n_j . Noter que les trois premières équations de ce système sont celles que nous avons déjà utilisées lors de l'étude des systèmes de niveau unique. Elles permettent de construire une série majorante sur le disque \mathcal{D} des solutions $\varphi_m^{[j;q]}$ des équations (6.3). La dernière équation du système $(2_{\alpha}^{[q]})$ permet, quant à elle, de construire une série majorante sur \mathcal{D} de la solution $\varphi_m^{[j;q]}$ de l'équation (6.4). Cette équation est liée aux singularités $a_{j,2} \neq 0$ (singularités du second niveau) du système $[A]$.

En reprenant la démonstration du lemme 2.6, nous montrons que le système $(2_{\alpha}^{[q]})$ admet une unique solution série formelle en α de la forme

$$g^{[j;q]}(x, \alpha) = I_{n,n_1}^{[j;q]} + \sum_{m \geq 1} g_m^{[j;q]}(x) \alpha^m$$

où, pour tout $m \geq 1$, $g_m^{[q]}(x)$ est un élément de $M_{n,1}(x^2\mathbb{R}^+[[x]])$. De plus, cette série double définit une fonction holomorphe en x et en α pour x proche de 0 et α dans \mathbb{C} . En effet, le système $(2_\alpha^{[q]})$ peut être écrit sous la forme

$$M(x, \alpha)g^{[q]} = H(x, \alpha)$$

avec

- i. $M(x, \alpha) = T + xN(x, \alpha)$, où T est une matrice triangulaire supérieure de dimension $n \times n$ dont les termes diagonaux sont $1 - \operatorname{Re}(\lambda_j) > 0$, ν ou $2\alpha_2$, et où $N(x, \alpha)$ est une matrice carrée de dimension $n \times n$ dont les termes sont analytiques en x et affines en α pour x proche de 0 ;
- ii. $H(x, \alpha)$ est une matrice colonne de dimension $n \times 1$ dont les termes sont analytiques en x et en α pour x proche de 0 et α dans \mathbb{C} . Précisément, si nous écrivons $H(x, \alpha)$ sous la forme

$$H(x, \alpha) = \begin{bmatrix} H^{[1]}(x, \alpha) \\ \vdots \\ H^{[j]}(x, \alpha) \end{bmatrix}$$

alors les matrices $H^{[j]}(x, \alpha)$ de dimension $n_j \times 1$ sont données par

$$H^{[j]}(x, \alpha) = \begin{cases} g^{[1;q-1]} + I_{n,n_1}^{[1;q]} - 2I_{n,n_1}^{[1;q-1]} & \text{si } j = 1 \\ g^{[j;q-1]} & \text{si } j \neq 1 \text{ et } a_{j,1} = a_{j,2} = 0 \\ xg^{[j;q-1]} & \text{si } a_{j,1} \neq 0 \text{ et } a_{j,2} = 0 \\ x^2g^{[j;q-1]} & \text{si } a_{j,2} \neq 0 \end{cases}$$

Noter que si $q = 1$, la matrice $H(x, \alpha)$ se réduit à une matrice constante puisque $g^{[0]} = 0$, ce qui initialise la récurrence sur q . Lorsque $q \geq 2$, l'hypothèse de récurrence affirme que $g^{[q-1]}$ est analytique en x et en α pour x proche de 0 et α dans \mathbb{C} .

Par conséquent, la transformée de Borel formelle

$$\Phi^{[q]}(\xi, \alpha) = \delta I_{n,n_1}^{[q]} + \sum_{m \geq 1} \Phi_m^{[q]}(\xi) \alpha^m$$

de $g^{[q]}(x, \alpha)$ par rapport à x définit, pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, une fonction entière de ξ . En outre, les $\Phi_m^{[q]}(\xi)$ étant les transformées de Borel formelles des séries $g_m^{[q]}(x)$, les matrices $\Phi_m^{[j;q]}$ vérifient les relations suivantes :

– Lorsque $a_{j,1} = a_{j,2} = 0$, la série $\Phi_m^{[j;q]}$ est définie par

$$(6.6) \quad (1 - \operatorname{Re}(\lambda_j))\Phi_m^{[j;q]} = \left(\widetilde{|B|}'' * \Phi_{m-1} \right)^{[j;q]} + M_j \Phi_m^{[j;q]} + \Phi_m^{[j;q-1]}$$

– Lorsque $a_{j,1} \neq 0$ et $a_{j,2} = 0$, la série $\Phi_m^{[j;q]}$ satisfait au système différentiel

$$(6.7) \quad \begin{cases} \nu \Phi_m^{[j;q]'} = \left(|\widetilde{B}|'' * \Phi_{m-1} \right)^{[j;q]} + (|L_j| + I_{n_j}) \Phi_m^{[j;q]} + \Phi_m^{[j;q-1]} \\ \Phi_m^{[j;q]}(0) = 0 \end{cases}$$

– Lorsque $a_{j,2} \neq 0$, la série $\Phi_m^{[j;q]}$ satisfait au système différentiel

$$(6.8) \quad \begin{cases} 2\alpha_2 \Phi_m^{[j;q]'} = |L_j| \int_0^\xi \Phi_m^{[j;q]}(\eta) d\eta + \left(|\widetilde{B}|' * \Phi_{m-1} \right)^{[j;q]} + \int_0^\xi \Phi_m^{[j;q-1]}(\eta) d\eta \\ \Phi_m^{[j;q]}(0) = \Phi_m^{[j;q]'}(0) = 0 \end{cases}$$

En particulier, les séries $\Phi_m^{[j;q]}$ sont des fonctions entières sur \mathbb{C} , puisque $|\widetilde{B}|'$ est une fonction entière, et sont à coefficients positifs ou nuls.

Lemme 6.6 *Pour tout $m \geq 1$ et tout $\xi \in \mathcal{D}$, les fonctions $\varphi_m^{[j;q]}$ vérifient l'inégalité*

$$|\varphi_m^{[j;q]}(\xi)| \leq e^{\frac{|\xi|^2 + 2\alpha_1 |\xi|}{4\alpha_2}} \Phi_m^{[j;q]}(|\xi|)$$

où nous avons posé

$$\alpha_1 = \max_{1 \leq j \leq J} |a_{j,1}|$$

Démonstration. Nous procédons par récurrence sur $m \geq 1$.

★ Regardons pour $m = 1$.

Lorsque $a_{j,2} = 0$, les fonctions $\varphi_1^{[j;q]}$ vérifient les systèmes (6.3). Dans ce cas, les différents calculs faits lors de l'étude des systèmes de niveau unique montrent que

$$\forall \xi \in \mathcal{D}, \quad \left| \varphi_1^{[j;q]}(\xi) \right| \leq \Phi_1^{[j;q]}(|\xi|)$$

et donc bien

$$\forall \xi \in \mathcal{D}, \quad \left| \varphi_1^{[j;q]}(\xi) \right| \leq e^{\frac{|\xi|^2 + 2\alpha_1 |\xi|}{4\alpha_2}} \Phi_1^{[j;q]}(|\xi|)$$

Lorsque $a_{j,2} \neq 0$, nous appliquons le lemme 6.3 aux équations (6.4) et (6.8) avec $\Delta = \mathcal{D}$ et $\Lambda_\xi = [0, \xi]$ et nous obtenons l'inégalité cherchée :

$$\forall \xi \in \mathcal{D}, \quad \left| \varphi_1^{[j;q]}(\xi) \right| \leq e^{\frac{|\xi|^2 + 2\alpha_1 |\xi|}{4\alpha_2}} \Phi_1^{[j;q]}(|\xi|)$$

★ Supposons à présent l'inégalité vraie au rang $m - 1$:

$$\forall \xi \in \mathcal{D}, \quad \left| \varphi_{m-1}^{[j;q]}(\xi) \right| \leq e^{\frac{|\xi|^2 + 2\alpha_1 |\xi|}{4\alpha_2}} \Phi_{m-1}^{[j;q]}(|\xi|)$$

Démontrons alors l'inégalité

$$(6.9) \quad \forall \xi \in \mathcal{D}, \quad \left| \left(\widetilde{B}' * \varphi_{m-1} \right)^{[j;q]}(\xi) \right| \leq e^{\frac{|\xi|^2 + 2\alpha_1 |\xi|}{4\alpha_2}} \left(\widetilde{B}' * \Phi_{m-1} \right)^{[j;q]}(|\xi|)$$

Fixons $\xi \in \mathcal{D}$. Par définition du produit de convolution $*$, nous avons

$$\left(\widetilde{B}' * \varphi_{m-1} \right)^{[j;q]}(\xi) = \int_0^\xi \widetilde{B}'(\xi - \eta) \varphi_{m-1}^{[j;q]}(\eta) d\eta$$

où nous choisissons pour chemin $(0, \xi)$ le segment $[0, \xi]$. En utilisant l'hypothèse de récurrence, nous obtenons

$$\begin{aligned} \left| \left(\widetilde{B}' * \varphi_{m-1} \right)^{[j;q]}(\xi) \right| &\leq \int_0^{|\xi|} |\widetilde{B}'(|\xi| - \eta)| e^{\frac{\eta^2 + 2\alpha_1 \eta}{4\alpha_2}} \Phi_{m-1}^{[j;q]}(\eta) d\eta \\ &\leq e^{\frac{|\xi|^2 + 2\alpha_1 |\xi|}{4\alpha_2}} \int_0^{|\xi|} |\widetilde{B}'(|\xi| - \eta)| \Phi_{m-1}^{[j;q]}(\eta) d\eta \end{aligned}$$

et donc bien l'inégalité (6.9). Noter que cette inégalité reste valable lorsque nous remplaçons \widetilde{B}' par \widetilde{B}'' .

* Terminons la démonstration en établissant au rang m l'inégalité donnée au lemme 6.6.

Lorsque $a_{j,1} = a_{j,2} = 0$, nous voyons, en intégrant le système différentiel (6.3) par la méthode de variation des constantes, que la fonction $\varphi_m^{[j;q]}$ est définie pour tout $\xi \in \mathcal{D}$ par

$$\varphi_m^{[j;q]}(\xi) = \xi^{\lambda_j - 1} \int_0^\xi \frac{\left(\left(\widetilde{B}'' * \varphi_{m-1} \right)^{[j;q]} + M_j \varphi_m^{[j;q]} - \varphi_m^{[j;q-1]} \right)(\eta)}{\eta^{\lambda_j}} d\eta$$

En reprenant la démonstration du lemme 2.7 et les majorations ci-dessus, nous obtenons

$$\left| \varphi_m^{[j;q]}(\xi) \right| \leq e^{\frac{|\xi|^2 + 2\alpha_1 |\xi|}{4\alpha_2}} \frac{\left(\widetilde{B}'' * \Phi_{m-1} \right)^{[j;q]}(|\xi|) + M_j \Phi_m^{[j;q]}(|\xi|) + \Phi_m^{[j;q-1]}(|\xi|)}{1 - \operatorname{Re}(\lambda_j)}$$

La définition de $\Phi_m^{[j;q]}$ (cf. égalité (6.6)) montre alors que

$$\left| \varphi_m^{[j;q]}(\xi) \right| \leq e^{\frac{|\xi|^2 + 2\alpha_1 |\xi|}{4\alpha_2}} \Phi_m^{[j;q]}(|\xi|)$$

Lorsque $a_{j,1} \neq 0$ et $a_{j,2} = 0$, nous appliquons le lemme 6.5 aux équations (6.3) et (6.7) avec $\Delta = \mathcal{D}$, $\xi_0 = 0$ et $\Lambda_\xi = [0, \xi]$. Nous obtenons alors l'inégalité voulue :

$$\forall \xi \in \mathcal{D}, \quad \left| \varphi_m^{[j;q]}(\xi) \right| \leq e^{\frac{|\xi|^2 + 2\alpha_1 |\xi|}{4\alpha_2}} \Phi_m^{[j;q]}(|\xi|)$$

Enfin, lorsque $a_{j,2} \neq 0$, nous appliquons le lemme 6.4 aux équations (6.4) et (6.8) avec $\Delta = \mathcal{D}$ et $\Lambda_\xi = [0, \xi]$ et nous obtenons à nouveau l'inégalité voulue :

$$\forall \xi \in \mathcal{D}, \quad |\varphi_m^{[j;q]}(\xi)| \leq e^{\frac{|\xi|^2 + 2\alpha_1|\xi|}{4\alpha_2}} \Phi_m^{[j;q]}(|\xi|)$$

Il s'ensuit que

$$|\varphi_m^{[j;q]}(\xi)| \leq e^{\frac{|\xi|^2 + 2\alpha_1|\xi|}{4\alpha_2}} \Phi_m^{[j;q]}(|\xi|)$$

pour tout $\xi \in \mathcal{D}$, ce qui termine la récurrence et donc la démonstration. ■

Corollaire 6.7 *Pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, la série $\sum_{m \geq 1} \varphi_m(\xi) \alpha^m$ converge normalement sur le disque \mathcal{D} .*

En particulier, en faisant $\alpha = 1$, nous obtenons la convergence normale sur \mathcal{D} de la série $\sum_{m \geq 1} \varphi_m^{[j;q]}(\xi)$. Comme pour les systèmes de niveau unique, nous retrouvons également une propriété bien connue de la série formelle \widehat{f} : elle est de type Gevrey de niveau 1 et le rayon du disque de convergence \mathcal{D}_0 de sa transformée de Borel \widehat{f} est $\min_{a_{j,1} \in \Omega(\widehat{f})} |a_{j,1}|$ avec $\Omega(\widehat{f}) = \{a_{j,1} \neq 0 \text{ tel que } a_{j,2} = 0\}$. Ce résultat nous servira essentiellement lors du calcul effectif des multiplicateurs de Stokes du premier niveau (voir chapitre 7).

Passons à présent à la construction d'une famille de séries majorantes :

Comme pour les systèmes de niveau unique, nous allons construire une famille de séries majorantes sur des domaines connexes de $\Delta_{\mathcal{L}}$ strictement croissants et ne contenant pas 0.

Fixons un point base $\xi_0 \in \mathcal{D} \cap]0, 1[$ et associons lui un nombre $K > 0$ tel que $|\varphi_m(\xi)| \leq K$ pour tout $m \geq 1$ et tout $|\xi| \leq \xi_0$. Un tel nombre K existe bien puisque la série $\sum_{m \geq 1} \varphi_m(\xi)$ converge normalement sur \mathcal{D} et donc sur $|\xi| \leq \xi_0$. Nous supposons également, quitte à modifier le domaine $\Delta_{\mathcal{L}}$, que la distance ν est strictement inférieure à ξ_0 .

Pour tout $\varepsilon \in]0, \xi_0[$, nous considérons le domaine $\Delta_\varepsilon = \{\xi \in \Delta_{\mathcal{L}} \text{ tel que } |\xi| > \varepsilon\}$ –que nous supposons connexe quitte à diminuer ξ_0 – (voir figure 6.4) et nous définissons le système $(3_\alpha^{\varepsilon[q]})$ par les J équations matricielles suivantes :

- $\varepsilon h^{[1;q]} = \alpha (Ch)^{[1;q]} + x(|L_1| + I_{n_1}) h^{[1;q]} + xh^{[1;q-1]} + (\varepsilon - x - \alpha) I_{n, n_1}^{[1;q]} - 2x I_{n, n_1}^{[1;q-1]} + \alpha x \mathbf{K}_{n_1}$
- si $a_{j,1} = a_{j,2} = 0$ et $j \neq 1$, alors

$$\varepsilon h^{[j;q]} = \alpha (Ch)^{[j;q]} + x(|L_j| + I_{n_j}) h^{[j;q]} + xh^{[j;q-1]} + \alpha x \mathbf{K}_{n_j}$$

- si $a_{j,1} \neq 0$ et $a_{j,2} = 0$, alors

$$\nu h^{[j;q]} = \alpha (Ch)^{[j;q]} + x(|L_j| + I_{n_j}) h^{[j;q]} + xh^{[j;q-1]} + \alpha x \mathbf{K}_{n_j}$$

- si $a_{j,2} \neq 0$, alors

$$2\alpha_2 h^{[j;q]} = \alpha (|B| h)^{[j;q]} + |L_j| x^2 h^{[j;q]} + x^2 h^{[j;q-1]}$$

où $C = I_n + |B|'$ et où \mathbf{K}_ℓ désigne le vecteur colonne de dimension ℓ dont tous les termes sont égaux à K . Rappelons également que $\alpha_2 = \min_{a_{j,2} \neq 0} |a_{j,2}|$.

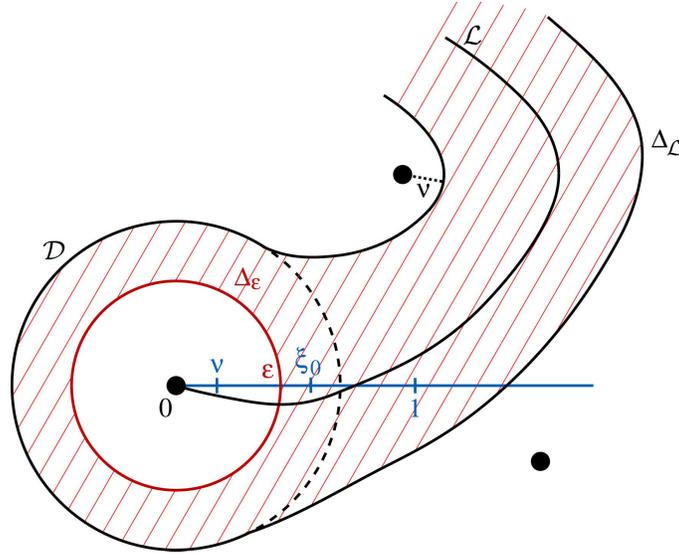


Figure 6.4 - exemple de domaine Δ_ε

Les calculs du paragraphe 2.1 montrent que le système $(3_\alpha^{[q]})$ admet une unique solution série formelle en α de la forme

$$h_\varepsilon^{[q]}(x, \alpha) = I_{n, n_1}^{[q]} + \sum_{m \geq 1} h_{\varepsilon, m}^{[q]}(x) \alpha^m$$

où, pour tout $m \geq 1$, $h_{\varepsilon, m}^{[q]}(x)$ est un élément de $M_{n,1}(x\mathbb{R}^+[[x]])$ vérifiant :

$$h_{\varepsilon, m}^{[j; q]'}(0) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon^m} \mathbf{K}_{n_j} & \text{si } a_{j,1} = a_{j,2} = 0 \\ \frac{1}{\nu^m} \mathbf{K}_{n_j} & \text{si } a_{j,1} \neq 0 \text{ et } a_{j,2} = 0 \\ 0 & \text{si } a_{j,2} \neq 0 \end{cases}$$

De plus, il est aisé de voir, à l'aide de la démonstration du lemme 2.6 et de sa généralisation au cas d'une matrice L sous forme de Jordan quelconque (cf. paragraphe 2.1.2), que cette série double $h_\varepsilon^{[q]}(x, \alpha)$ est analytique en x et α pour x proche de 0 et α dans un disque ouvert $D(1, \rho)$ de centre 1 et de rayon $\rho \in]0, 1 - \xi_0[$. Nous avons en effet les hypothèses :

- $\varepsilon < \xi_0 < 1$;
- $\nu < \xi_0 < 1$;
- le système $(3_\alpha^{[q]})$ peut être écrit sous la forme

$$M(x, \alpha)h^{[q]} = H(x, \alpha)$$

avec

- i. $M(x, \alpha) = D + xN(x, \alpha)$, où D est une matrice diagonale de dimension n dont les termes diagonaux sont $\varepsilon - \alpha$, $\nu - \alpha$ ou $2\alpha_2$, et où $N(x, \alpha)$ est une matrice carrée de dimension $n \times n$ dont les termes sont analytiques en x et affines en α pour x proche de 0 ;
- ii. $H(x, \alpha)$ est une matrice colonne de dimension $n \times 1$ dont les termes sont analytiques en x et en α pour x proche de 0 et α dans $D(1, \rho)$. Précisément, si nous écrivons $H(x, \alpha)$ sous la forme

$$H(x, \alpha) = \begin{bmatrix} H^{[1]}(x, \alpha) \\ \vdots \\ H^{[J]}(x, \alpha) \end{bmatrix}$$

alors les matrices $H^{[j]}(x, \alpha)$ de dimension $n_j \times 1$ sont données par

$$H^{[j]}(x, \alpha) = \begin{cases} xh^{[1;q-1]} + (\varepsilon - x - \alpha)I_{n, n_1}^{[1;q]} - 2xI_{n, n_1}^{[1;q-1]} + \alpha x \mathbf{K}_{n_1} & \text{si } j = 1 \\ xh^{[j;q-1]} + \alpha x \mathbf{K}_{n_j} & \text{si } j \neq 1 \text{ et } a_{j,2} = 0 \\ x^2 h^{[j;q-1]} & \text{si } a_{j,2} \neq 0 \end{cases}$$

Comme précédemment, si $q = 1$, cette matrice $H(x, \alpha)$ se réduit à un polynôme en x et en α (car $h^{[0]} = 0$), ce qui initialise la récurrence sur q . Lorsque $q \geq 2$, l'hypothèse de récurrence affirme que $h^{[j;q-1]} = h_\varepsilon^{[j;q-1]}$ est analytique en x et en α pour x proche de 0 et α dans $D(1, \rho)$.

Par conséquent, la transformée de Borel $\psi_\varepsilon^{[j;q]}(\xi, \alpha)$ de $h_\varepsilon^{[j;q]}(x, \alpha)$ par rapport à x définit une fonction entière en ξ qui est à croissance exponentielle d'ordre au plus un à l'infini, et ceci pour tout $\alpha \in D(1, \rho)$. Précisément, nous avons

$$\psi_\varepsilon^{[j;q]}(\xi, \alpha) = \delta I_{n, n_1}^{[j;q]} + \sum_{m \geq 1} \psi_{\varepsilon, m}^{[j;q]}(\xi) \alpha^m$$

et les séries $\psi_{\varepsilon, m}^{[j;q]} = \widetilde{h}_{\varepsilon, m}^{[j;q]}$ satisfont aux systèmes différentiels suivants :

– Si $a_{j,1} = a_{j,2} = 0$:

$$(6.10) \quad \begin{cases} \varepsilon \psi_{\varepsilon, m}^{[j;q]'} = \psi_{\varepsilon, m-1}^{[j;q]'} + \left(|\widetilde{B}|'' * \psi_{\varepsilon, m-1} \right)^{[j;q]} + (|L_j| + I_{n_j}) \psi_{\varepsilon, m}^{[j;q]} + \psi_{\varepsilon, m}^{[j;q-1]} \\ \psi_{\varepsilon, m}^{[j;q]}(0) = \frac{1}{\varepsilon^m} \mathbf{K}_{n_j} \end{cases}$$

– Si $a_{j,1} \neq 0$ et $a_{j,2} = 0$:

$$(6.11) \quad \begin{cases} \nu \psi_{\varepsilon, m}^{[j;q]'} = \psi_{\varepsilon, m-1}^{[j;q]'} + \left(|\widetilde{B}|'' * \psi_{\varepsilon, m-1} \right)^{[j;q]} + (|L_j| + I_{n_j}) \psi_{\varepsilon, m}^{[j;q]} + \psi_{\varepsilon, m}^{[j;q-1]} \\ \psi_{\varepsilon, m}^{[j;q]}(0) = \frac{1}{\nu^m} \mathbf{K}_{n_j} \end{cases}$$

– Si $a_{j,2} \neq 0$:

$$(6.12) \quad \begin{cases} 2\alpha_2 \psi_{\varepsilon,m}^{[j;q]'} = |L_j| \int_0^\xi \psi_{\varepsilon,m}^{[j;q]}(\eta) d\eta + \left(|\widetilde{B}' * \psi_{\varepsilon,m-1} \right)^{[j;q]} + \int_0^\xi \psi_{\varepsilon,m}^{[j;q-1]}(\eta) d\eta \\ \psi_{\varepsilon,m}^{[j;q]}(0) = \psi_{\varepsilon,m}^{[j;q]'}(0) = 0 \end{cases}$$

où nous avons posé à chaque fois $\psi_{\varepsilon,0}^{[j;q]} = 0$.

Les séries $\psi_{\varepsilon,m}^{[j;q]}$ définissent donc des fonctions entières. Par ailleurs, les séries $\psi_{\varepsilon,m}^{[j;q]}$ vérifient pour tout $m \geq 1$, tout $|\xi| \leq \xi_0$ et tout $j \in \{1, \dots, J\}$ tel que $a_{j,2} \neq 0$, les inégalités

$$|\varphi_m^{[j;q]}(\xi)| \leq K < \psi_{\varepsilon,m}^{[j;q]}(0)$$

puisque ε et ν sont strictement inférieurs à 1.

6.1.4 Démonstration de la résurgence de \widehat{f}

La construction précédente des $(\psi_\varepsilon^{[j;q]})_{\varepsilon \in]0, \xi_0[}$ permet d'établir le théorème 6.1. Nous procédons comme à l'étape 3 du paragraphe 2.1 (cf. page 64).

Pour tout $\varepsilon \in]0, \xi_0[$, le domaine Δ_ε est connexe et contient ξ_0 . Choisissons, pour tout $\xi \in \Delta_\varepsilon$, une ligne brisée $\overline{\Lambda}_{\varepsilon,\xi}$ contenue dans Δ_ε et joignant ξ_0 à ξ ; et paramétrons le chemin $\Lambda_{\varepsilon,\xi} = [0, \xi_0] \cup \overline{\Lambda}_{\varepsilon,\xi}$ par la longueur de courbe

$$\begin{aligned} [0, s_\xi] &\longrightarrow \Lambda_{\varepsilon,\xi} \\ s &\longmapsto \Lambda_{\varepsilon,\xi}(s) \end{aligned}$$

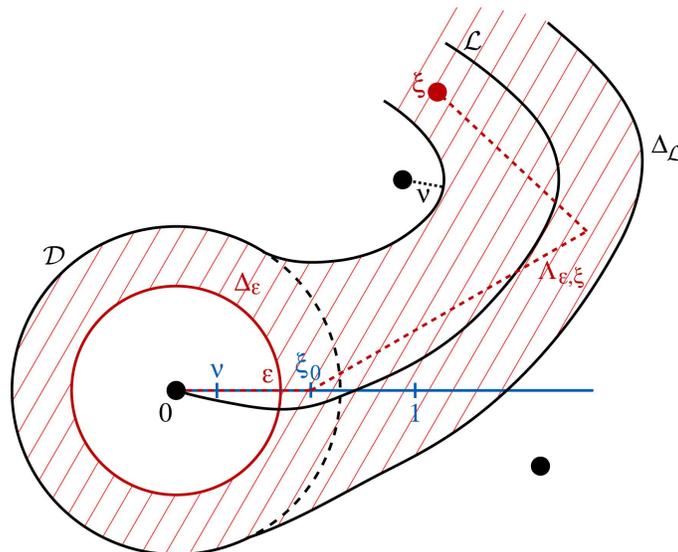


Figure 6.5 - chemin $\Lambda_{\varepsilon,\xi}$

Le chemin $\Lambda_{\varepsilon,\xi}$ satisfait donc aux conditions des lemmes 2.2 et 6.5. De plus, nous avons $|\Lambda'_{\varepsilon,\xi}(s)| = 1$ et $|\Lambda_{\varepsilon,\xi}(s)| \leq s$ pour tout $s \in [0, s_\xi]$, et, plus particulièrement, $\Lambda_{\varepsilon,\xi}(s) = s$ pour tout $s \in [0, \xi_0]$.

Proposition 6.8 *Soit $\varepsilon \in]0, \xi_0[$. Nous notons*

$$\alpha_1 = \max_{1 \leq j \leq J} |a_{j,1}| \quad \text{et} \quad \alpha_2 = \min_{a_{j,2} \neq 0} |a_{j,2}|$$

Alors,

$$\forall m \geq 1, \quad \forall \xi \in \Delta_\varepsilon, \quad \forall s \in [0, s_\xi], \quad |\varphi_m^{[j;q]}(\Lambda_{\varepsilon,\xi}(s))| \leq e^{\frac{s^2 + 2\alpha_1 s}{4\alpha_2}} \psi_{\varepsilon,m}^{[j;q]}(s)$$

Démonstration. Nous procédons par récurrence sur $m \geq 1$ en appliquant soit le lemme de Grönwall classique (lemme 2.2) soit les divers lemmes énoncés au paragraphe 6.1.2.

Regardons pour $m = 1$:

★ Lorsque $a_{j,2} = 0$, la fonction $\varphi_1^{[j;q]}$ vérifie le système différentiel (6.3). En appliquant alors le lemme 2.2 aux systèmes (6.3) et (6.10) dans le cas où $a_{j,1} = 0$ et aux systèmes (6.3) et (6.11) dans le cas où $a_{j,1} \neq 0$, nous obtenons aisément l'inégalité

$$\forall \xi \in \Delta_\varepsilon, \quad \forall s \in [\xi_0, s_\xi], \quad |\varphi_1^{[j;q]}(\Lambda_{\varepsilon,\xi}(s))| \leq \psi_{\varepsilon,1}^{[j;q]}(s)$$

(il suffit de reprendre la démonstration du niveau unique –cf. proposition 2.10). Par ailleurs, pour tout $s \in [0, \xi_0]$, nous avons $\Lambda_{\varepsilon,\xi}(s) = s \leq \xi_0$, et donc, par construction de la série $\psi_{\varepsilon,1}^{[j;q]}$:

$$\forall s \in [0, \xi_0], \quad |\varphi_1^{[j;q]}(\Lambda_{\varepsilon,\xi}(s))| \leq \psi_{\varepsilon,1}^{[j;q]}(0) \leq \psi_{\varepsilon,1}^{[j;q]}(s)$$

La restriction de $\psi_{\varepsilon,1}^{[j;q]}$ à \mathbb{R}^+ est en effet une fonction croissante, puisque $\psi_{\varepsilon,1}^{[j;q]}$ est une série entière à coefficients positifs ou nuls et de rayon de convergence infini. Il s'ensuit alors l'inégalité cherchée pour $m = 1$:

$$\forall \xi \in \Delta_\varepsilon, \quad \forall s \in [0, s_\xi], \quad |\varphi_1^{[j;q]}(\Lambda_{\varepsilon,\xi}(s))| \leq \psi_{\varepsilon,1}^{[j;q]}(s) \leq e^{\frac{s^2 + 2\alpha_1 s}{4\alpha_2}} \psi_{\varepsilon,1}^{[j;q]}(s)$$

★ Lorsque $a_{j,2} \neq 0$, la fonction $\varphi_1^{[j;q]}$ vérifie l'égalité différentielle

$$-2a_{j,2}\varphi_1^{[j;q]'} + (\xi - a_{j,1})\varphi_1^{[j;q]} = L_j \int_0^\xi \varphi_1^{[j;q]}(\eta) d\eta + \widetilde{b}^{[j;q]'} - \int_0^\xi \varphi_1^{[j;q-1]}(\eta) d\eta$$

de conditions initiales $\varphi_1^{[j;q]}(0) = \varphi_1^{[j;q]'}(0) = 0$, où nous avons noté \widetilde{b} la matrice formée des n_1 premières colonnes de \widetilde{B} . D'autre part, la fonction entière $\psi_{\varepsilon,1}^{[j;q]}$ satisfait au système différentiel

$$2\alpha_2\psi_{\varepsilon,1}^{[j;q]'} = |L_j| \int_0^\xi \psi_{\varepsilon,1}^{[j;q]}(\eta) d\eta + |\widetilde{b}|^{[j;q]'} + \int_0^\xi \psi_{\varepsilon,1}^{[j;q-1]}(\eta) d\eta$$

de conditions initiales $\psi_{\varepsilon,1}^{[j;q]}(0) = \psi_{\varepsilon,1}^{[j;q]'}(0) = 0$. En appliquant alors le lemme 6.3, nous obtenons à nouveau l'inégalité cherchée pour $m = 1$:

$$\forall \xi \in \Delta_\varepsilon, \forall s \in [0, s_\xi], \left| \varphi_1^{[j;q]}(\Lambda_{\varepsilon,\xi}(s)) \right| \leq e^{\frac{s^2+2\alpha_1 s}{4\alpha_2}} \psi_{\varepsilon,1}^{[j;q]}(s)$$

Pour passer de l'ordre $m - 1$ à l'ordre m , il suffit de vérifier l'inégalité

$$(6.13) \quad \left| \left(\widetilde{B}' * \varphi_{m-1} \right)^{[;q]}(\Lambda_{\varepsilon,\xi}(s)) \right| \leq e^{\frac{s^2+2\alpha_1 s}{4\alpha_2}} \left(|\widetilde{B}'| * \psi_{\varepsilon,m-1} \right)^{[;q]}(s)$$

pour tout $\xi \in \Delta_\varepsilon$ et tout $s \in [0, s_\xi]$. En effet, nous pouvons alors appliquer le lemme 6.5 aux systèmes (6.3) et (6.10) (resp. (6.11)) lorsque $a_{j,1} = a_{j,2} = 0$ (resp. $a_{j,1} \neq 0$ et $a_{j,2} = 0$) et le lemme 6.4 aux systèmes (6.4) et (6.12) lorsque $a_{j,2} \neq 0$.

Fixons $\xi \in \Delta_\varepsilon$ et $s \in [0, s_\xi]$ et démontrons l'inégalité (6.13). Nous avons

$$\left(\widetilde{B}' * \varphi_{m-1} \right)^{[;q]}(\Lambda_{\varepsilon,\xi}(s)) = \int_0^{\Lambda_{\varepsilon,\xi}(s)} \widetilde{B}'(\Lambda_{\varepsilon,\xi}(s) - \eta) \varphi_{m-1}^{[;q]}(\eta) d\eta$$

En faisant le changement de variable $\eta = \Lambda_{\varepsilon,\xi}(t)$, nous obtenons

$$\begin{aligned} \left| \left(\widetilde{B}' * \varphi_{m-1} \right)^{[;q]}(\Lambda_{\varepsilon,\xi}(s)) \right| &\leq \int_0^s |\widetilde{B}'|(|\Lambda_{\varepsilon,\xi}(s) - \Lambda_{\varepsilon,\xi}(t)|) \left| \varphi_{m-1}^{[;q]}(\Lambda_{\varepsilon,\xi}(t)) \right| dt \\ &\leq e^{\frac{s^2+2\alpha_1 s}{4\alpha_2}} \int_0^s |\widetilde{B}'|(s-t) \psi_{\varepsilon,m-1}^{[;q]}(t) dt \end{aligned}$$

puisque $\Lambda_{\varepsilon,\xi}(0) = 0$, $|\Lambda_{\varepsilon,\xi}(s) - \Lambda_{\varepsilon,\xi}(t)| \leq s - t$ et, d'après l'hypothèse de récurrence, nous avons

$$\forall t \in [0, s_\xi], \left| \varphi_{m-1}^{[;q]}(\Lambda_{\varepsilon,\xi}(t)) \right| \leq e^{\frac{t^2+2\alpha_1 t}{4\alpha_2}} \psi_{\varepsilon,m-1}^{[;q]}(t)$$

Par suite,

$$\left| \left(\widetilde{B}' * \varphi_{m-1} \right)^{[;q]}(\Lambda_{\varepsilon,\xi}(s)) \right| \leq e^{\frac{s^2+2\alpha_1 s}{4\alpha_2}} \left(|\widetilde{B}'| * \psi_{\varepsilon,m-1} \right)^{[;q]}(s)$$

ce qui termine la démonstration de la proposition. ■

Cette proposition montre que la série $\varphi^{[;q]}(\xi, \alpha)$ définit, pour tout $\alpha \in D(1, \rho)$, une fonction analytique sur $\Delta_{\mathcal{L}}$ (utiliser les prolongements analytiques successifs sur les domaines Δ_ε et le fait que 0 est une singularité inexistante) qui est à croissance exponentielle d'ordre au plus deux à l'infini (les fonctions entières $\psi_\varepsilon^{[;q]}$ sont simplement à croissance exponentielle d'ordre au plus un à l'infini). En substituant alors 1 à α , nous obtenons le théorème 6.1.

6.1.5 Description des singularités de \widetilde{f}

Dans ce paragraphe, nous donnons une description précise de la nature des singularités de la transformée de Borel \widetilde{f} de \widehat{f} , *i.e.*, des points de l'ensemble

$$\Omega(\widehat{f}) = \{a_{j,1} \neq 0 \text{ tel que } a_{j,2} = 0\}$$

Pour cela, nous adaptons la méthode du paragraphe 2.2 donnée dans le cadre des systèmes de niveau unique 1. Une singularité ω de \widetilde{f} étant fixée, rappelons les différents points à établir :

1. Montrer que la nature de la singularité ω est identique pour tous les germes de fonctions analytiques prolongeables sans fin φ_m ;
2. A l'aide de la relation

$$\widetilde{f}(\xi) = \sum_{m \geq 1} \varphi_m(\xi)$$

et des propriétés de convergence uniforme de cette série obtenue au paragraphe 6.1.4, montrer que la nature de ω se transmet à \widetilde{f} .

La démonstration du premier point diffère quelque peu de celle donnée au paragraphe 2.2, puisque nous travaillons ici avec un système à deux niveaux. En revanche, le second point est en tout point identique à celui du paragraphe 2.2. Nous en laissons les détails au lecteur.

Etude des fonctions φ_m en la singularité ω

Comme pour les systèmes de niveau unique 1, cette étude repose sur l'expression sous forme intégrale des coefficients des matrices φ_m . Précisément, nous allons voir que les systèmes différentiels vérifiés par les matrices $\varphi_m^{[j;q]}$, $q \in \{1, \dots, n_j\}$ et $j \in \{1, \dots, J\}$, permettent d'appliquer les arguments du paragraphe 2.2.

★ Si $a_{j,2} = 0$, le germe $\varphi_m^{[j;q]}$ est solution du système différentiel (6.3) :

$$\begin{cases} (\xi - a_{j,1})\varphi_m^{[j;q]'} - (L_j - I_{n_j})\varphi_m^{[j;q]} = \left(\widetilde{B}'' * \varphi_{m-1}\right)^{[j;q]} - \varphi_m^{[j;q-1]} \\ \varphi_m^{[j;q]}(0) = 0 \end{cases}$$

avec $\varphi_0 = \delta I_{n,n_1}$. Ce système étant analogue au système (2.9), nous pouvons lui appliquer les arguments du paragraphe 2.2.

★ Si $a_{j,2} \neq 0$, le germe $\varphi_m^{[j;q]}$ est solution du système différentiel (6.5) :

$$-2a_{j,2}\varphi_m^{[j;q]''} + (\xi - a_{j,1})\varphi_m^{[j;q]'} - (L_j - I_{n_j})\varphi_m^{[j;q]} = \left(\widetilde{B}'' * \varphi_{m-1}\right)^{[j;q]} - \varphi_m^{[j;q-1]}$$

Précisément, si $\ell \in \{1, \dots, n_j\}$, le $\ell^{\text{ème}}$ terme $\varphi_m^{[j,\ell;q]}$ de la matrice $\varphi_m^{[j;q]}$ satisfait à l'équation différentielle

$$(6.14) \quad -2a_{j,2}\varphi_m^{[j,\ell;q]''} + (\xi - a_{j,1})\varphi_m^{[j,\ell;q]'} - (\lambda_j - 1)\varphi_m^{[j,\ell;q]} = \left(\widetilde{B}'' * \varphi_{m-1}\right)^{[j,\ell;q]} \\ + \varphi_m^{[j,\ell+1;q]} - \varphi_m^{[j,\ell;q-1]}$$

de condition initiale $\varphi_m^{[j,\ell;q]}(0) = 0$. Noter que les solutions de l'équation homogène associée à (6.14) sont des fonctions entières indépendantes de ℓ , q et m . Choisissons pour base de cette équation homogène la base (f_j, g_j) où les deux fonctions entières f_j et g_j vérifient

$$f_j(0) = 1, \quad f_j'(0) = 0, \quad g_j(0) = 0 \text{ et } g_j'(0) = 1$$

En particulier, pour tout $\xi \in \mathbb{C}$, le wronskien $f_j(\xi)g_j'(\xi) - f_j'(\xi)g_j(\xi)$ est égal à

$$f_j(\xi)g_j'(\xi) - f_j'(\xi)g_j(\xi) = e^{\int_0^\xi \frac{\eta - a_{j,1}}{2a_{j,2}} d\eta} = e^{\frac{\xi^2 - 2a_{j,1}\xi}{4a_{j,2}}}$$

Ainsi, en utilisant la méthode de variation des constantes, nous obtenons

$$\varphi_m^{[j,\ell;q]}(\xi) = \frac{g_j(\xi)}{2a_{j,2}} \int_0^\xi f_j(\eta) e^{\frac{\eta^2 - 2a_{j,1}\eta}{4a_{j,2}}} C_m^{[j,\ell;q]}(\eta) d\eta - \frac{f_j(\xi)}{2a_{j,2}} \int_0^\xi g_j(\eta) e^{\frac{\eta^2 - 2a_{j,1}\eta}{4a_{j,2}}} C_m^{[j,\ell;q]}(\eta) d\eta$$

où nous avons noté

$$C_m^{[j,\ell;q]} = \left(\widetilde{B}'' * \varphi_{m-1}\right)^{[j,\ell;q]} + \varphi_m^{[j,\ell+1;q]} - \varphi_m^{[j,\ell;q-1]}$$

En particulier, les termes $\varphi_1^{[j,\ell;q]}$ sont holomorphes sur \mathbb{C} tout entier. Pour $m \geq 2$, la forme de $\widetilde{B}'' * \varphi_{m-1}$ au voisinage de ω est obtenue à l'aide de la proposition 2.14. Le comportement des $\varphi_m^{[j,\ell;q]}$ au voisinage de ω s'en déduit alors aisément par les arguments du paragraphe 2.2.

Nous pouvons donc généraliser sans réelle difficulté la méthode du paragraphe 2.2 aux systèmes de niveaux simultanés (1, 2). Nous obtenons ainsi le résultat suivant :

Proposition 6.9 *Soit $q \in \{1, \dots, n_1\}$. Pour tout $m \geq 1$, la $q^{\text{ème}}$ colonne $\varphi_m^{[;q]}$ de φ_m a une singularité simple-ramifiée en ω d'exposants de ramification Λ_ω et d'ordres logarithmiques $(N_{\omega,0} + q, (N_{\omega,\lambda} + q)_{\lambda \in \Lambda_\omega})$ donnés par*

$$\Lambda_\omega = \{\lambda_j; j \in \{1, \dots, J\} \text{ tel que } a_{j,2} = 0, a_{j,1} = \omega \text{ et } \lambda_j \neq 0\}$$

$$N_{\omega,0} = \max(n_j - 2; j \in \{1, \dots, J\} \text{ tel que } a_{j,2} = 0, a_{j,1} = \omega \text{ et } \lambda_j = 0)$$

$$N_{\omega,\lambda} = \max(n_j - 2; j \in \{1, \dots, J\} \text{ tel que } a_{j,2} = 0, a_{j,1} = \omega \text{ et } \lambda_j = \lambda)$$

Description de la singularité ω de \widetilde{f}

En reprenant point par point la démonstration du paragraphe 2.2, nous déduisons du résultat ci-dessus la nature précise de toutes les singularités de f :

Théorème 6.10 *Soit ω l'un des $a_{j,1} \neq 0$ tel que $a_{j,2} = 0$.*

Soit $q \in \{1, \dots, n_1\}$. La $q^{\text{ème}}$ colonne $\widetilde{f}^{[q]}$ de \widetilde{f} a une singularité simple-ramifiée en ω : modulo les fonctions analytiques à l'origine,

$$\tau_{\omega} \widetilde{f}^{[q]}(\xi) = \sum_{p=0}^{N_{\omega,0}+q} \frac{\alpha_{\omega,p}^{[q]}}{\xi} \log^p \xi + \sum_{p=1}^{N_{\omega,0}+q+1} \widetilde{h}_{\omega,p}^{[q]}(\xi) \log^p \xi + \sum_{\lambda \in \Lambda_{\omega}} \sum_{p=0}^{N_{\omega,\lambda}+q} \left(\widetilde{H}_{\omega,\lambda,p}^{[q]}(\xi) \log^p \xi \right) \xi^{\lambda-1}$$

où $\alpha_{\omega,p}^{[q]} \in M_{n,1}(\mathbb{C})$, $\widetilde{h}_{\omega,p}^{[q]}, \widetilde{H}_{\omega,\lambda,p}^{[q]} \in M_{n,1}(\mathbb{C}\{\xi\})$ et où les exposants de ramification Λ_{ω} et les ordres logarithmiques $(N_{\omega,0} + q, (N_{\omega,\lambda} + q)_{\lambda \in \Lambda_{\omega}})$ sont donnés par

$$\Lambda_{\omega} = \{\lambda_j; j \in \{1, \dots, J\} \text{ tel que } a_{j,2} = 0, a_{j,1} = \omega \text{ et } \lambda_j \neq 0\}$$

$$N_{\omega,0} = \max(n_j - 2; j \in \{1, \dots, J\} \text{ tel que } a_{j,2} = 0, a_{j,1} = \omega \text{ et } \lambda_j = 0)$$

$$N_{\omega,\lambda} = \max(n_j - 2; j \in \{1, \dots, J\} \text{ tel que } a_{j,2} = 0, a_{j,1} = \omega \text{ et } \lambda_j = \lambda)$$

De plus, les coefficients de résurgence de $\widetilde{f}^{[q]}$ en ω sont des germes de fonctions analytiques prolongeables sans fin de support singulier les points $a_{j,1} - \omega$ tel que $a_{j,2} = 0$.

Terminons ce paragraphe par un exemple simple permettant d'illustrer la nature des singularités de \widetilde{f} :

Exemple Le système différentiel linéaire

$$[A] \quad x^3 \frac{dY}{dx} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2x^5 & 2x + \frac{x^2}{2} & 0 & 0 \\ -6x^5 & 6x^5 & x & 0 \\ 120x^7 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} Y$$

admet pour solution fondamentale formelle $\widehat{Y}(x) = \widehat{F}(x)x^L e^{Q(\frac{1}{x})}$ avec $L = \text{diag}(0, \frac{1}{2}, 0, 0)$, $Q(\frac{1}{x}) = \text{diag}(0, -\frac{2}{x}, -\frac{1}{x}, -\frac{1}{x^2})$ et

$$\widehat{F}(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \widehat{f}_1 & 1 & 0 & 0 \\ \widehat{f}_2 + \widehat{f}_3 & \widehat{g} & 1 & 0 \\ \widehat{f}_4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

les \widehat{f}_j étant les uniques solutions séries formelles en x vérifiant $\widehat{f}_j(x) = O(x^4)$ et satisfaisant à

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 \frac{d\widehat{f}_1}{dx} - \left(2 + \frac{x}{2}\right) \widehat{f}_1 = 2x^4 \\ x^2 \frac{d\widehat{f}_2}{dx} - \widehat{f}_2 = -6x^4 \\ x^2 \frac{d\widehat{f}_3}{dx} - \widehat{f}_3 = 6x^4 \widehat{f}_1 \\ x^3 \frac{d\widehat{f}_4}{dx} - 2\widehat{f}_4 = 120x^7 \end{array} \right.$$

Une transformation de Borel des équations ci-dessus donne les équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\xi - 2)\widetilde{f}'_1 + \frac{1}{2}\widetilde{f}_1 = \xi^2 \\ (\xi - 1)\widetilde{f}_2 = -\xi^3 \\ (\xi - 1)\widetilde{f}_3 = \xi^3 * \widetilde{f}_1 \\ -2\widetilde{f}'_4 + \xi\widetilde{f}_4 = \xi^5 \end{array} \right.$$

Ainsi, en prenant la détermination principale du logarithme, nous obtenons pour tout $\xi \in \mathbb{C}$ tel que $\text{Re}(\xi) < 2$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \widetilde{f}_1 = -\frac{64\sqrt{2}}{15}(2 - \xi)^{-\frac{1}{2}} + \frac{2\xi^2}{5} + \frac{16\xi}{15} + \frac{64}{15} \\ \widetilde{f}_2 = -\frac{\xi^3}{\xi - 1} \\ \widetilde{f}_3 = \frac{1}{\xi - 1} \left(-\frac{2048\sqrt{2}}{525}(2 - \xi)^{\frac{7}{2}} + \frac{\xi^6}{150} + \frac{4\xi^5}{75} + \frac{16\xi^4}{15} - \frac{256\xi^3}{15} + \frac{1024\xi^2}{15} - \frac{8192\xi}{75} + \frac{32768}{525} \right) \\ \widetilde{f}_4 = \xi^4 + 8\xi^2 + 32 - 32e^{\frac{\xi^2}{4}} \end{array} \right.$$

Nous retrouvons sur cet exemple le résultat du théorème 6.10 : \widetilde{f} admet une singularité polaire (et donc simple) en 1 et une singularité purement ramifiée en 2 d'exposant de ramification $\{\frac{1}{2}\}$.

6.2 Résurgence de la série formelle \widehat{f}

6.2.1 Détermination du système 2-réduit $[A]$

Rappelons qu'avec nos normalisations (cf. introduction de la troisième partie), le système $[A]$ s'écrit sous la forme

$$[A] \quad x^3 \frac{dY}{dx} = (A_0(x) + B(x))Y$$

où la matrice $A_0(x)$ est définie par

$$A_0(x) = 2a_2 + xa_1 + x^2L \text{ avec } \begin{cases} a_1 = \text{diag}(0I_{n_1}, a_{2,1}I_{n_2}, \dots, a_{J,1}I_{n_J}) \\ \text{et} \\ a_2 = \text{diag}(0I_{n_1}, a_{2,2}I_{n_2}, \dots, a_{J,2}I_{n_J}) \end{cases}$$

et où $B(x)$ est un élément de $M_n(x^4\mathbb{C}\{x\})$. Rappelons également que la matrice L des exposants de monodromie formelle est sous forme de Jordan quelconque.

Par réduction du rang (cf. paragraphe 4.1.1), le système 2-réduit $[A]$ de $[A]$ est le système de dimension $2n$ défini par

$$[A] \quad 2t^2 \frac{dY}{dt} = \mathbf{A}(t)Y$$

où $x = t^{1/2}$ est une racine carrée de t et où $\mathbf{A}(t)$ est la matrice

$$\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} 2a_2 + tL & ta_1 \\ a_1 & 2a_2 + tL - tI_n \end{bmatrix} + \mathbf{B}(t)$$

avec $\mathbf{B}(t)$ série 2-réduite de $B(x)$. En particulier, $\mathbf{B}(t)$ est analytique en $t = 0$ et vérifie $\mathbf{B}(t) = O(t^2)$.

Par ailleurs, le système

$$[\mathbf{A}_0] \quad 2t^2 \frac{dY}{dt} = \mathbf{A}_0(t)Y$$

de matrice

$$\mathbf{A}_0(t) = \begin{bmatrix} 2a_2 + tL & ta_1 \\ a_1 & 2a_2 + tL - tI_n \end{bmatrix}$$

est le système 2-réduit de la forme normale $[A_0]$ de $[A]$.

Dans la suite, nous choisissons comme solution fondamentale formelle de $[A]$ la solution fondamentale formelle 2-réduite $\widehat{Y}(t)$ associée à $\widehat{Y}(x)$. Rappelons que

$$\widehat{Y}(t) = \widehat{F}(t)\widehat{Y}_0(t)$$

où $\widehat{F}(t) = I_{2n} + O(t^2)$ est la série 2-réduite de $\widehat{F}(x)$ et où $\widehat{Y}_0(t)$ est la solution fondamentale formelle 2-réduite de $[\mathbf{A}_0]$ associée à $\widehat{Y}_0(x)$ (cf. paragraphe 4.1.1).

6.2.2 Remarques sur la transformée de Borel de \widehat{f}

Les niveaux associés à \widehat{f} étant donnés par les degrés des polynômes $q_j (\pm \frac{1}{i^{1/2}})$, nous voyons que deux niveaux sont associés simultanément à \widehat{f} . Il s'agit des niveaux $\frac{1}{2}$ et 1, qui proviennent respectivement des niveaux 1 et 2 de \widehat{f} . En particulier, la présence du niveau $\frac{1}{2}$ montre que la transformée de Borel \widetilde{f} de \widehat{f} est divergente à l'origine. Noter que cette irrégularité est due au fait que la réduction du rang a ramené toutes les singularités $a_{j,1} \neq 0$ de \widehat{f} à l'origine.

Toutefois, il est aisé de voir que cette transformée de Borel (formelle) \widetilde{f} est le développement asymptotique à l'origine d'une fonction holomorphe multiforme à l'origine, que nous notons encore \widetilde{f} . Malheureusement, cette fonction n'est pas intégrable à l'origine en général. Aussi, afin de contourner cette difficulté, nous procédons comme au paragraphe 1.2.1 en considérant non pas le mineur formel \widetilde{f} , mais le majeur formel $\widetilde{f}(\tau) \frac{\log \tau}{2\pi i}$. Noter que ce majeur est le développement asymptotique à l'origine de la fonction holomorphe multiforme $\widetilde{f}(\tau) \frac{\log \tau}{2\pi i}$, que nous notons $maj(\widehat{f})$.

En étudiant ce majeur $maj(\widehat{f})$ (voir ci-après), nous obtenons le résultat suivant :

Théorème 6.11 *La série formelle \widehat{f} est résurgente de support singulier les points $a_{j,2} \neq 0$.*

Pour établir ce théorème, nous pouvons envisager de généraliser les démonstrations précédentes (cf. paragraphes 2.1, 4.2 et 6.1). Toutefois, la manipulation des majeurs au lieu des mineurs apporte trop de complications, notamment dans la construction des séries majorantes. Nous utilisons donc une méthode totalement différente basée sur les microfonctions (cf. appendice 2.A). Rappelons que, dans les autres cas étudiés dans cette thèse (systèmes de niveau unique quelconque et premier niveau des systèmes de niveaux simultanés(1,2)), nous aurions pu également utiliser cette méthode, mais celle-ci ne permettait pas de décrire avec précision les singularités dans le plan de Borel.

6.2.3 Démonstration de la résurgence de \widehat{f}

L'utilisation des majeurs nous conduit à travailler non pas sur \mathbb{C} , mais sur \mathbb{C}_∞ , revêtement universel de \mathbb{C}^* de point base 1.

Fixons \mathcal{L} un chemin d'origine 0 dans \mathbb{C}_∞ et de classe \mathcal{C}^1 par morceaux ne faisant qu'un nombre fini de tours autour de l'origine et autour des points $a_{j,2} \neq 0$. Ce chemin peut être relevé sur le revêtement universel $\widetilde{\mathbb{C}}_{\infty, a_2}$ de $\mathbb{C}_\infty \setminus \bigcup_j \{a_{j,2} \neq 0\}$ en un chemin que nous notons encore \mathcal{L} . Nous lui associons un voisinage ouvert simplement connexe $\Delta_{\mathcal{L}}$ dans $\widetilde{\mathbb{C}}_{\infty, a_2}$ formé par l'union de $\widetilde{\mathcal{D}}^*$, revêtement universel d'un disque ouvert \mathcal{D}^* pointé à l'origine de point base $a \in \mathcal{D}^*$, et d'un voisinage ouvert simplement connexe de \mathcal{L} qui évitent les points $a_{j,2} \neq 0$ à une distance minimale $\nu > 0$: pour tout $j \in \{1, \dots, J\}$ tel que $a_{j,2} \neq 0$ et pour tout $\tau \in \Delta_{\mathcal{L}}$, $|\tau - a_{j,2}| \geq \nu$.

Il s'agit de montrer que le majeur $maj(\widehat{f})$ est holomorphe multiforme à l'origine et que sa variation \widetilde{f} peut être prolongée analytiquement à $\Delta_{\mathcal{L}}$ tout entier (définition

1.28).

★ Réduction du système $[\mathbf{A}]$ à une équation (\mathbf{E}) à coefficients polynomiaux

Rappelons (cf. paragraphe 4.1.1) que le système 2-réduit $[\mathbf{A}]$ de $[A]$ est de la forme

$$2t^2 \frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \mathbf{A}(t) \mathbf{Y}$$

et que la solution fondamentale formelle 2-réduite $\widehat{\mathbf{Y}}(t)$ associée à $\widehat{Y}(x)$ est

$$\widehat{\mathbf{Y}}(t) = \widehat{\mathbf{F}}(t) \widehat{\mathbf{Y}}_0(t) \text{ avec } \widehat{\mathbf{Y}}_0(t) = t^{\text{diag}(\frac{L}{2}, \frac{L}{2} - \frac{1}{2}I_n)} U_{2,n}(\bar{\rho}) \text{diag}(I_n, \rho^L) e^{\text{diag}(Q_0(\frac{1}{t}), Q_1(\frac{1}{t}))}$$

où $\rho = e^{i\pi}$ et où

- $\widehat{\mathbf{F}}(t) = I_{2n} + O(t^2) \in M_{2n}(\mathbb{C}[[t]])$;
- $L = \bigoplus_{j=1}^J L_j$, chaque L_j étant un bloc de Jordan de L de dimension n_j et de valeur propre λ_j (avec $\lambda_1 = 0$);
- $Q_k(\frac{1}{t}) = Q(\frac{1}{\rho^k t^{1/r}})$ avec $Q(\frac{1}{x}) = \bigoplus_{j=1}^J q_j(\frac{1}{x}) I_{n_j}$ normalisé tel que $q_1 = 0$.

En appliquant successivement le lemme du vecteur cyclique ([D70]) et le théorème d'algébrisation de Birkhoff ([Bir13], [Si90]), nous obtenons l'existence d'une matrice $P \in GL_{2n}(\mathbb{C}\{t\}[\frac{1}{t}])$ telle que le système de jauge

$$[P^{-1}\mathbf{A}] \quad 2t^2 \frac{d\mathbf{Z}}{dt} = (P^{-1}\mathbf{A}P - 2t^2 P^{-1}P') \mathbf{Z}$$

obtenu par la transformation de jauge $\mathbf{Z} = P^{-1}\mathbf{Y}$ soit le système compagnon d'une équation différentielle linéaire (\mathbf{E}) d'ordre $2n$ à coefficients polynomiaux. Une solution fondamentale formelle de cette équation est alors

$$\widehat{\mathbf{Z}}(t) = \widehat{\mathbf{G}}(t) \widehat{\mathbf{Y}}_0(t) \text{ avec } \widehat{\mathbf{G}}(t) = P^{-1}(t) \widehat{\mathbf{F}}(t)$$

Remarquer que l'équation (\mathbf{E}) étant de type exponentiel (ses niveaux sont inférieurs ou égaux à 1), nous pouvons appliquer le théorème de J. Ecalle et B. Malgrange sur les microsolutions afin d'étudier la structure des singularités de $\widehat{\mathbf{f}}$. Nous y reviendrons ultérieurement.

Les propriétés de $\text{maj}(\widehat{\mathbf{f}})$ s'obtiennent en étudiant un majeur quelconque $\text{maj}(\widehat{\mathbf{G}}_{1,1})$ des n_1 premières colonnes $\widehat{\mathbf{G}}_{1,1}$ de $\widehat{\mathbf{G}}$. Précisément, il suffit de démontrer que $\text{maj}(\widehat{\mathbf{G}}_{1,1})$ définit une fonction holomorphe multiforme à l'origine dont la variation peut être prolongée analytiquement à $\Delta_{\mathcal{L}}$ tout entier. Supposons en effet que $\text{maj}(\widehat{\mathbf{G}}_{1,1})$ satisfasse à ces propriétés. Dans ce cas, les théorèmes 1.18 et 1.29 montrent que le majeur

$$\text{maj}(P\widehat{\mathbf{G}}_{1,1}) = \text{maj}(P) \otimes \text{maj}(\widehat{\mathbf{G}}_{1,1}) = \widetilde{P}(\tau) \frac{\log \tau}{2\pi i} \otimes \text{maj}(\widehat{\mathbf{G}}_{1,1}) \text{ avec } \widetilde{P}(\tau) \in M_{2n}(\mathbb{C}\{\tau\})$$

de $P\widehat{\mathbf{G}}_{1,1}$ définit également une fonction holomorphe multiforme à l'origine dont la variation peut être prolongée analytiquement à $\Delta_{\mathcal{L}}$ tout entier. Par ailleurs, l'égalité

$\widehat{f} = P\widehat{\mathbf{G}}_{1,1}$ montre que $\text{maj}(\widehat{f})$ est aussi un majeur de $P\widehat{\mathbf{G}}_{1,1}$. Les propriétés voulues sur $\text{maj}(\widehat{f})$ découlent alors des égalités classiques suivantes :

$$\text{maj}(\widehat{f}) - \text{maj}(P\widehat{\mathbf{G}}_{1,1}) \in M_{2n,n_1}(\mathbb{C}\{\tau\}) \text{ et } \text{var}(\text{maj}(\widehat{f})) = \text{var}(\text{maj}(P\widehat{\mathbf{G}}_{1,1}))$$

Aussi, fixons un majeur $\text{maj}(\widehat{\mathbf{G}}_{1,1})$ de $\widehat{\mathbf{G}}_{1,1}$ et démontrons que $\text{maj}(\widehat{\mathbf{G}}_{1,1})$ définit une fonction holomorphe multiforme à l'origine dont la variation peut être prolongée analytiquement à $\Delta_{\mathcal{L}}$ tout entier.

★ Détermination d'une base de solutions formelles de (E)

La matrice $\widehat{\mathbf{Y}}_0(t)$ est la matrice

$$\begin{bmatrix} t^{\frac{L}{2}} e^{Q_0(\frac{1}{t})} & t^{\frac{L}{2}} \rho^L e^{Q_1(\frac{1}{t})} \\ t^{\frac{L-I_n}{2}} e^{Q_0(\frac{1}{t})} & t^{\frac{L-I_n}{2}} \rho^{L-I_n} e^{Q_1(\frac{1}{t})} \end{bmatrix}$$

Décomposons alors $\widehat{\mathbf{G}} = \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{G}}_1 & \widehat{\mathbf{G}}_2 \end{bmatrix}$ en 2 blocs de colonnes de dimension $2n \times n$; puis découpons chacun des blocs $\widehat{\mathbf{G}}_u = \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{G}}_{u,1} & \cdots & \widehat{\mathbf{G}}_{u,J} \end{bmatrix}$ en J blocs de colonnes : le nombre de colonnes de chaque bloc $\widehat{\mathbf{G}}_{u,j}$ est égal à la taille du $j^{\text{ème}}$ bloc de Jordan L_j de L , *i.e.*, $\widehat{\mathbf{G}}_{u,j}(t) \in M_{2n,n_j}(\mathbb{C}[[t]][\frac{1}{t}])$ pour tout $u \in \{1, 2\}$.

Le système $[P^{-1}\mathbf{A}]$ étant le système compagnon de l'équation (E), seuls les premiers termes de chacune des colonnes des matrices $\widehat{\mathbf{G}}_{u,j}$ sont importants pour déterminer une base de solutions formelles de (E) : pour tout $u \in \{1, 2\}$, tout $j \in \{1, \dots, J\}$ et tout $q \in \{1, \dots, n_j\}$, nous notons $\widehat{g}_{u,j,q}$ le premier terme de la $q^{\text{ème}}$ colonne de la matrice $\widehat{\mathbf{G}}_{u,j}$; et, quitte à multiplier par une puissance de t convenable, nous supposons que $\widehat{g}_{u,j,q}$ est un élément de $\mathbb{C}[[t]]$.

Une base de solutions formelles de l'équation (E) est alors de la forme $(\widehat{\mathbf{z}}_1, \widehat{\mathbf{z}}_2)$ avec

$$\widehat{\mathbf{z}}_u = (\widehat{z}_{u,1,1}, \dots, \widehat{z}_{u,1,n_1}, \widehat{z}_{u,2,1}, \dots, \widehat{z}_{u,J,1}, \dots, \widehat{z}_{u,J,n_J})$$

où, pour tout $u \in \{1, 2\}$, tout $j \in \{1, \dots, J\}$ et tout $q \in \{1, \dots, n_j\}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \widehat{z}_{u,j,q}(t) = \sum_{\ell=1}^q \widehat{h}_{u,j,\ell}(t) t^{\frac{\lambda_j}{2}} \rho^{(u-1)\lambda_j} \frac{\log^{q-\ell}(\rho^{u-1}t^{1/2})}{(q-\ell)!} e^{q_j\left(\frac{1}{\rho^{u-1}t^{1/2}}\right)} \\ \text{avec} \\ \widehat{h}_{u,j,\ell}(t) = \widehat{g}_{1,j,\ell}(t) + (\rho^{u-1}t^{1/2})^{-1} \widehat{g}_{2,j,\ell}(t) \end{array} \right.$$

★ Etude de la première colonne $\text{maj}(\widehat{\mathbf{G}}_{1,1,1})$ de $\text{maj}(\widehat{\mathbf{G}}_{1,1})$

Le système $[\mathcal{P}^{-1}\mathbf{A}]$ étant le système compagnon de l'équation (\mathbf{E}) , la première colonne de la solution fondamentale formelle $\widehat{\mathbf{Z}}(t)$ est

$$\begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{z}}_{1,1,1} \\ \vdots \\ \frac{d^{2n}\widehat{\mathbf{z}}_{1,1,1}}{dt^{2n}} \end{bmatrix}$$

avec

$$\widehat{\mathbf{z}}_{1,1,1}(t) = \widehat{\mathbf{h}}_{1,1,1}(t) = \widehat{\mathbf{g}}_{1,1,1}(t) + t^{-1/2}\widehat{\mathbf{g}}_{2,1,1}(t)$$

Ainsi, la première colonne $\widehat{\mathbf{G}}_{1,1,1}$ de $\widehat{\mathbf{G}}_{1,1}$ est

$$\begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{g}}_{1,1,1} \\ \vdots \\ \frac{d^{2n}\widehat{\mathbf{g}}_{1,1,1}}{dt^{2n}} \end{bmatrix}$$

Le majeur

$$maj(\widehat{\mathbf{z}}_{1,1,1}) = maj(\widehat{\mathbf{g}}_{1,1,1}) + maj(t^{-1/2}\widehat{\mathbf{g}}_{2,1,1})$$

définit une fonction holomorphe multiforme à l'origine à laquelle correspond une micro-solution à l'origine de $(\widetilde{\mathbf{E}})$. Sa variation est donc une solution de $(\widetilde{\mathbf{E}})$ et le théorème de Cauchy-Lipschitz affirme qu'elle peut être prolongée analytiquement à $\Delta_{\mathcal{L}}$ tout entier. De même, le majeur

$$maj(\widehat{\mathbf{z}}_{2,1,1}) = maj(\widehat{\mathbf{g}}_{1,1,1}) + \bar{\rho}maj(t^{-1/2}\widehat{\mathbf{g}}_{2,1,1})$$

définit une fonction holomorphe multiforme à l'origine dont la variation peut être prolongée analytiquement à $\Delta_{\mathcal{L}}$ tout entier.

Nous obtenons ainsi le système

$$(6.15) \quad \begin{cases} maj(\widehat{\mathbf{g}}_{1,1,1}) + maj(t^{-1/2}\widehat{\mathbf{g}}_{2,1,1}) = maj(\widehat{\mathbf{z}}_{1,1,1}) \\ maj(\widehat{\mathbf{g}}_{1,1,1}) + \bar{\rho}maj(t^{-1/2}\widehat{\mathbf{g}}_{2,1,1}) = maj(\widehat{\mathbf{z}}_{2,1,1}) \end{cases}$$

dont la matrice est la matrice de van der Monde

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \bar{\rho} \end{bmatrix}$$

Par suite, $maj(\widehat{\mathbf{g}}_{1,1,1})$ définit une fonction holomorphe multiforme à l'origine dont la variation peut être prolongée analytiquement à $\Delta_{\mathcal{L}}$ tout entier.

Cette propriété s'étendant aisément aux autres termes de $\widehat{\mathbf{G}}_{1,1,1}$ puisque

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, maj\left(\frac{d^k\widehat{\mathbf{g}}_{1,1,1}}{dt^k}\right) = \frac{d^{k+1}}{d\tau^{k+1}}\left(\tau^k \frac{d^{k-1}maj(\widehat{\mathbf{g}}_{1,1,1})}{d\tau^{k-1}}\right)$$

(à $t^{k+1} \frac{d^k}{dt^k}$ correspond $\tau^k \frac{d^{k-1}}{d\tau^{k-1}}$ par transformation de Borel), nous en déduisons que $\text{maj}(\widehat{\mathbf{G}}_{1,1,1})$ définit une fonction holomorphe multiforme à l'origine dont la variation peut être prolongée analytiquement à $\Delta_{\mathcal{L}}$ tout entier.

★ Conclusion

Le raisonnement donné ci-dessus pour la première colonne de $\widehat{\mathbf{G}}_{1,1}$ se généralise aisément aux autres colonnes de $\widehat{\mathbf{G}}_{1,1}$. Il s'ensuit que $\text{maj}(\widehat{\mathbf{G}}_{1,1})$ définit une fonction holomorphe multiforme à l'origine dont la variation peut être prolongée analytiquement à $\Delta_{\mathcal{L}}$ tout entier. Par suite, $\text{maj}(\widehat{\mathbf{f}})$ admet les mêmes propriétés et le théorème 6.11 est démontré. Il s'agit à présent d'étudier les singularités de la variation $\widetilde{\mathbf{f}} = \text{var}(\text{maj}(\widehat{\mathbf{f}}))$ sur \mathbb{C}_{∞} .

6.2.4 Description des singularités de $\widetilde{\mathbf{f}}$

En reprenant les calculs du paragraphe ci-dessus, nous voyons, par analogie avec le cas des systèmes de niveau unique (cf. appendice 2.A et paragraphe 4.3.2), que la description des singularités de $\widetilde{\mathbf{f}}$ sur \mathbb{C}_{∞} peut être obtenue à l'aide de la théorie des microfonctions : l'équation (\mathbf{E}) est de type exponentiel et P est méromorphe à l'origine.

Nous reprenons les notations du paragraphe précédent.

Etude des singularités de $\widetilde{\mathbf{G}}_{1,1}$ sur \mathbb{C}_{∞}

Suivant les calculs effectués dans le cadre des systèmes de niveau unique, nous commençons par étudier les singularités de la variation $\widetilde{\mathbf{G}}_{1,1}$ du majeur $\text{maj}(\widehat{\mathbf{G}}_{1,1})$ en déterminant une base de microsolutions de l'équation $(\widetilde{\mathbf{E}})$.

Rappelons qu'une base de solutions formelles de l'équation (\mathbf{E}) est donnée par $(\widehat{\mathbf{z}}_1, \widehat{\mathbf{z}}_2)$ avec

$$\widehat{\mathbf{z}}_u = (\widehat{\mathbf{z}}_{u,1,1}, \dots, \widehat{\mathbf{z}}_{u,1,n_1}, \widehat{\mathbf{z}}_{u,2,1}, \dots, \widehat{\mathbf{z}}_{u,J,1}, \dots, \widehat{\mathbf{z}}_{u,J,n_J})$$

où, pour tout $u \in \{1, 2\}$, tout $j \in \{1, \dots, J\}$ et tout $q \in \{1, \dots, n_j\}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \widehat{\mathbf{z}}_{u,j,q}(t) = \sum_{\ell=1}^q \widehat{\mathbf{h}}_{u,j,\ell}(t) t^{\frac{\lambda_j}{2}} \rho^{(u-1)\lambda_j} \frac{\log^{q-\ell}(\rho^{u-1}t^{1/2})}{(q-\ell)!} e^{q_j\left(\frac{1}{\rho^{u-1}t^{1/2}}\right)} \\ \text{avec} \\ \widehat{\mathbf{h}}_{u,j,\ell}(t) = \widehat{\mathbf{g}}_{1,j,\ell}(t) + (\rho^{u-1}t^{1/2})^{-1} \widehat{\mathbf{g}}_{2,j,\ell}(t) \end{array} \right.$$

Recherche d'une base de microsolutions de l'équation $(\widetilde{\mathbf{E}})$

Les singularités de l'équation $(\widetilde{\mathbf{E}})$ sont les points $\tau = a_{j,2}$ avec $j \in \{1, \dots, J\}$. A chacune des solutions formelles $\widehat{\mathbf{z}}_{u,j,q}$ correspond une microsolution de $(\widetilde{\mathbf{E}})$ au point $a_{j,2}$ (corollaire 2.34) définie par $\text{can}(\widetilde{\Phi}_{a_{j,2},u,q})$ avec

$$\widetilde{\Phi}_{a_{j,2},u,q} = \tau_{-a_{j,r}} \text{maj} \left(\sum_{\ell=1}^q \widehat{\mathbf{h}}_{u,j,\ell}(t) t^{\frac{\lambda_j}{2}} \rho^{(u-1)\lambda_j} \frac{\log^{q-\ell}(\rho^{u-1}t^{1/2})}{(q-\ell)!} e^{\check{q}_j\left(\frac{1}{\rho^{u-1}t^{1/2}}\right)} \right)$$

que nous écrivons sous la forme

$$\widetilde{\Phi}_{a_{j,2},u,q} = \tau_{-a_{j,r}} \left(\text{maj} \left(\sum_{\ell=1}^q \widehat{h}_{u,j,\ell}(t) t^{\frac{\lambda_j}{2}} \rho^{(u-1)\lambda_j} \frac{\log^{q-\ell}(\rho^{u-1}t^{1/2})}{(q-\ell)!} \right) \otimes \text{maj} \left(e^{\check{q}_j \left(\frac{1}{\rho^{u-1}t^{1/2}} \right)} \right) \right)$$

Observons ici deux différences importantes avec les résultats obtenus dans le cas des systèmes de niveau unique r (voir l'appendice 2.A pour le cas $r = 1$ et le paragraphe 4.3.2 pour le cas $r \geq 2$) :

- il existe des valeurs de j pour lesquelles les termes $\text{maj} \left(e^{\check{q}_j \left(\frac{1}{\rho^{u-1}t^{1/2}} \right)} \right)$ apparaissent dans l'écriture de $\widetilde{\Phi}_{0,u,q}$ (cas $a_{j,2} = 0$). Précisément, ces valeurs de j correspondent aux cas où $a_{j,2} = 0$ et $a_{j,1} \neq 0$. En particulier, nous retrouvons ici le fait que la réduction du rang ramène à l'origine les singularités $a_{j,1} \neq 0$ de la transformée de Borel \widetilde{f} .
- le majeur

$$\mathcal{N}_{u,j,q} = \text{maj} \left(\sum_{\ell=1}^q \widehat{h}_{u,j,\ell}(t) t^{\frac{\lambda_j}{2}} \rho^{(u-1)\lambda_j} \frac{\log^{q-\ell}(\rho^{u-1}t^{1/2})}{(q-\ell)!} \right)$$

n'est pas en général une fonction de la classe de Nilsson à l'origine. En fait, ce majeur est simplement une fonction de détermination finie¹ :

$$\mathcal{N}_{u,j,q}(\tau) = \sum_{\text{finie}} \widetilde{\varphi}_{\lambda,p}(\tau) \tau^\lambda \log^p \tau$$

avec $\widetilde{\varphi}_{\lambda,p}$ holomorphes sur un disque pointé à l'origine, $\lambda \in \mathbb{C}$ et $p \in \mathbb{N}$. Ainsi, par rapport aux systèmes de niveau unique, nous perdons l'analyticité à l'origine des $\widetilde{\varphi}_{\lambda,p}$.

Toutefois, ces différences avec les calculs effectués dans le cadre des systèmes de niveau unique ne posent pas de réels problèmes : nous décrivons les singularités de $\widetilde{\mathbf{G}}_{1,1}$ sur \mathbb{C}_∞ et les fonctions de détermination finie sont toujours des fonctions holomorphes multiformes à l'origine stables par dérivation.

Finalement, une base de microsolutions en une singularité ω de $(\widetilde{\mathbf{E}})$ est donnée par

$$\left(\text{can}(\widetilde{\Phi}_{a_{j,2},u,q}); 1 \leq u \leq 2, 1 \leq q \leq n_j \right)_{j;a_{j,2}=\omega}.$$

Ainsi, lorsque Φ est une microsolutions de $(\widetilde{\mathbf{E}})$ en ω , alors tout représentant $\widetilde{\Phi} \in \widetilde{\mathcal{O}}_\omega$ de Φ , *i.e.*, tel que $\text{can}(\widetilde{\Phi}) = \Phi$, s'écrit modulo les fonctions analytiques à l'origine sous la forme

$$\tau_\omega \widetilde{\Phi} = \sum_{j;a_{j,2}=\omega} \left(\widetilde{\Phi}_{j,0} \otimes \text{maj} \left(e^{\check{q}_j \left(\frac{1}{t^{1/2}} \right)} \right) + \widetilde{\Phi}_{j,1} \otimes \text{maj} \left(e^{\check{q}_j \left(-\frac{1}{t^{1/2}} \right)} \right) \right)$$

¹Rappelons que les fonctions de la classe de Nilsson à l'origine sont des fonctions de détermination finie à croissance modérée à l'origine.

avec $\widetilde{\Phi}_{j,k}$ de détermination finie à l'origine. Remarquer que, contrairement au cas des systèmes de niveau unique, les polynômes \check{q}_j pour j tel que $a_{j,2} = \omega$ ne sont pas nécessairement identiques.

Fixons à présent une singularité $\omega = a_{j,2}$ de $\widetilde{\mathbf{G}}_{1,1}$ et étudions le prolongement analytique de $\widetilde{\mathbf{G}}_{1,1}$ au voisinage de ω :

Prolongement analytique en ω de la première colonne $\widetilde{\mathbf{G}}_{1,1,1}$ de $\widetilde{\mathbf{G}}_{1,1}$

Nous obtenons de (6.15) le système suivant :

$$\begin{cases} \widetilde{\mathbf{g}}_{1,1,1} + t^{-1/2} \widetilde{\widehat{\mathbf{g}}}_{2,1,1} = \widetilde{\mathbf{z}}_{1,1,1} \\ \widetilde{\mathbf{g}}_{1,1,1} + \bar{\rho} t^{-1/2} \widetilde{\widehat{\mathbf{g}}}_{2,1,1} = \widetilde{\mathbf{z}}_{2,1,1} \end{cases}$$

où les deux variations $\widetilde{\mathbf{z}}_{1,1,1}$ et $\widetilde{\mathbf{z}}_{2,1,1}$ de $\text{maj}(\widehat{\mathbf{z}}_{1,1,1})$ et $\text{maj}(\widehat{\mathbf{z}}_{2,1,1})$ respectivement définissent par prolongement analytique au voisinage de ω une microsolution de $(\widetilde{\mathbf{E}})$ en ω . Ainsi, modulo les fonctions analytiques à l'origine, nous obtenons le système suivant :

$$\begin{cases} \tau_\omega \widetilde{\mathbf{g}}_{1,1,1} + \tau_\omega \left(t^{-1/2} \widetilde{\widehat{\mathbf{g}}}_{2,1,1} \right) = \sum_{j; a_{j,2} = \omega} \left(\widetilde{\Phi}_{j,0} \otimes \text{maj} \left(e^{\check{q}_j \left(\frac{1}{t^{1/2}} \right)} \right) + \widetilde{\Phi}_{j,1} \otimes \text{maj} \left(e^{\check{q}_j \left(-\frac{1}{t^{1/2}} \right)} \right) \right) \\ \tau_\omega \widetilde{\mathbf{g}}_{1,1,1} + \bar{\rho} \tau_\omega \left(t^{-1/2} \widetilde{\widehat{\mathbf{g}}}_{2,1,1} \right) = \sum_{j; a_{j,2} = \omega} \left(\widetilde{\Psi}_{j,0} \otimes \text{maj} \left(e^{\check{q}_j \left(\frac{1}{t^{1/2}} \right)} \right) + \widetilde{\Psi}_{j,1} \otimes \text{maj} \left(e^{\check{q}_j \left(-\frac{1}{t^{1/2}} \right)} \right) \right) \end{cases}$$

avec $\widetilde{\Phi}_{j,k}$ et $\widetilde{\Psi}_{j,k}$ de détermination finie à l'origine. La matrice de ce système étant inversible, nous en déduisons que, modulo les fonctions analytiques à l'origine $\tau_\omega \widetilde{\mathbf{g}}_{1,1,1}$ s'écrit sous la forme

$$\tau_\omega \widetilde{\mathbf{g}}_{1,1,1} = \sum_{j; a_{j,2} = \omega} \left(\widetilde{\Theta}_{j,0} \otimes \text{maj} \left(e^{\check{q}_j \left(\frac{1}{t^{1/2}} \right)} \right) + \widetilde{\Theta}_{j,1} \otimes \text{maj} \left(e^{\check{q}_j \left(-\frac{1}{t^{1/2}} \right)} \right) \right)$$

avec $\widetilde{\Theta}_{j,k}$ de détermination finie à l'origine.

Les différents termes de $\widetilde{\mathbf{G}}_{1,1,1}$ étant obtenus à l'aide de la relation classique

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathcal{B} \left(\frac{d^k \widehat{\mathbf{g}}_{1,1,1}}{dt^k} \right) = \frac{d^{k+1}}{d\tau^{k+1}} \left(\tau^k \frac{d^{k-1} \widetilde{\mathbf{g}}_{1,1,1}}{d\tau^{k-1}} \right)$$

et l'espace des fonctions de détermination finie à l'origine étant stable par dérivation, cette propriété s'étend à $\widetilde{\mathbf{G}}_{1,1,1}$ tout entier : modulo les fonctions analytiques à l'origine,

$$\tau_\omega \widetilde{\mathbf{G}}_{1,1,1} = \sum_{j; a_{j,2} = \omega} \left(\widetilde{\Xi}_{j,0} \otimes \text{maj} \left(e^{\check{q}_j \left(\frac{1}{t^{1/2}} \right)} \right) + \widetilde{\Xi}_{j,1} \otimes \text{maj} \left(e^{\check{q}_j \left(-\frac{1}{t^{1/2}} \right)} \right) \right)$$

avec $\widetilde{\mathbf{E}}_{j,k}$ de détermination finie à l'origine.

Prolongement analytique en ω de $\widetilde{\mathbf{G}}_{1,1}$

L'étude du prolongement analytique au voisinage de ω de la première colonne $\widetilde{\mathbf{G}}_{1,1,1}$ de $\widetilde{\mathbf{G}}_{1,1}$ généralise celles données aux paragraphes 2.A.3 et 4.3.2 dans le cadre des systèmes de niveau unique : nous avons remplacé les fonctions de la classe de Nilsson par des fonctions de détermination finie. Ainsi, en reprenant les arguments de ces deux paragraphes, nous voyons que les propriétés obtenues pour $\widetilde{\mathbf{G}}_{1,1,1}$ s'étendent aisément aux autres colonnes de $\widetilde{\mathbf{G}}_{1,1}$. Ainsi, modulo les fonctions analytiques à l'origine, nous avons

$$\tau_\omega \widetilde{\mathbf{G}}_{1,1} = \sum_{j; a_{j,2}=\omega} \left(\widetilde{\mathbf{Y}}_{j,0} \otimes \text{maj} \left(e^{\check{q}_j \left(\frac{1}{i^{1/2}} \right)} \right) + \widetilde{\mathbf{Y}}_{j,1} \otimes \text{maj} \left(e^{\check{q}_j \left(-\frac{1}{i^{1/2}} \right)} \right) \right)$$

avec $\widetilde{\mathbf{Y}}_{j,k}$ de détermination finie à l'origine. Nous pouvons à présent passer à l'étude des singularités de $\widetilde{\mathbf{f}}$ sur \mathbb{C}_∞ .

Description des singularités de $\widetilde{\mathbf{f}}$ sur \mathbb{C}_∞

Rappelons que nous avons l'égalité

$$\widehat{\mathbf{f}} = P \widehat{\mathbf{G}}_{1,1}$$

avec P méromorphe à l'origine. En particulier, sa transformée de Borel \widetilde{P} définit une fonction entière sur \mathbb{C} et son majeur

$$\text{maj}(P)(\tau) = \widetilde{P}(\tau) \frac{\log \tau}{2\pi i}$$

est holomorphe sur \mathbb{C}_∞ . Ainsi, en utilisant la relation

$$\widetilde{\mathbf{f}} = \text{var}(\widehat{\mathbf{f}}) = \text{var} \left(\text{maj}(P) \otimes \text{maj}(\widehat{\mathbf{G}}_{1,1}) \right)$$

et les propriétés de prolongement analytique de $\widetilde{\mathbf{G}}_{1,1}$ au voisinage de ses singularités, nous obtenons le résultat suivant permettant d'explicitier la nature de toutes les singularités de $\widetilde{\mathbf{f}}$ sur \mathbb{C}_∞ :

Théorème 6.12 *Soit ω l'un des $a_{j,2} \neq 0$.*

Pour tout $j \in \{1, \dots, J\}$ tel que $a_{j,2} = \omega$, notons \check{q}_j le polynôme défini par

$$q_j \left(\frac{1}{x} \right) = -\frac{\omega}{x^2} + \check{q}_j \left(\frac{1}{x} \right)$$

Alors, pour tout $q \in \{1, \dots, n_1\}$, $\tau_\omega \widetilde{\mathbf{f}}^{[q]}$ peut être écrit, localement au voisinage de 0 et modulo les fonctions analytiques à l'origine, sous la forme

$$\tau_\omega \widetilde{\mathbf{f}}^{[q]}(\tau) = \sum_{j; a_{j,2}=\omega} \left(\widetilde{\varphi}_{j,0}^{[q]} \otimes \text{maj} \left(e^{\check{q}_j \left(\frac{1}{i^{1/2}} \right)} \right) + \widetilde{\varphi}_{j,1}^{[q]} \otimes \text{maj} \left(e^{\check{q}_j \left(-\frac{1}{i^{1/2}} \right)} \right) \right) (\tau)$$

où les fonctions $\widetilde{\varphi}_{j,0}^{[q]}$ et $\widetilde{\varphi}_{j,1}^{[q]}$ sont de détermination finie à l'origine.

Comme pour l'étude des singularités de front non monomial dans le cas des systèmes de niveau unique $r \geq 2$ (cf. paragraphe 4.3.2), nous ne savons pas donner une forme plus précise sur les fonctions $\tilde{\varphi}_{j,0}^{[q]}$ et $\tilde{\varphi}_{j,1}^{[q]}$.

Chapitre 7

Multiplicateurs de Stokes du premier niveau

Rappelons que nous orientons le cercle des directions \mathbb{S}^1 dans le sens des aiguilles d'une montre. Nous utilisons la terminologie gauche-droite dans le sens suivant : à partir d'une direction $\theta \in \mathbb{S}^1$ fixée, nous allons à gauche (resp. à droite) lorsque nous nous déplaçons sur \mathbb{S}^1 dans le sens inverse des aiguilles d'une montre (resp. dans le sens des aiguilles d'une montre).

Fixons une direction anti-Stokes $\theta \in]-2\pi, 0]$ de \widehat{Y} . La matrice de Stokes C_θ associée à la solution fondamentale formelle \widehat{Y} dans la direction θ est définie par la relation

$$Y_{\theta-} = Y_{\theta+}(I_n + C_\theta)$$

où $Y_{\theta-} = Y_{\theta-\varepsilon}$ (resp. $Y_{\theta+} = Y_{\theta+\varepsilon}$) est la somme droite (resp. gauche) de \widehat{Y} dans la direction θ . Ces deux sommes sont définies par

$$Y_{\theta\pm} = s_{\theta\pm}(\widehat{F})x^L e^{Q(\frac{1}{x})}$$

où $s_{\theta\pm}(\widehat{F})$ est la multisomme de \widehat{F} dans la direction θ^\pm et où $x^L e^{Q(\frac{1}{x})}$ est une vraie fonction définie par le choix de $\arg x = \theta^\pm$.

Comme précédemment, nous découpons la matrice C_θ comme la matrice L :

$$C_\theta = [C_\theta^{(j,\ell)}]_{1 \leq j, \ell \leq J}$$

où $C_\theta^{(j,\ell)}$ est un bloc de dimension $n_j \times n_\ell$. Un bloc $C_\theta^{(j,\ell)}$ est éventuellement non nul si, et seulement si, la direction anti-Stokes θ est attachée au polynôme $q_j - q_\ell$ (proposition 1.40). Le système $[A]$ étant de niveaux simultanés $(1, 2)$, le degré d'un polynôme non nul $q_j - q_\ell$ est 1 ou 2. Nous posons alors la définition suivante :

Définition 7.1 • Une direction anti-Stokes est dite *de niveau 1* (resp. *de niveau 2*) si elle est attachée à un polynôme $q_j - q_\ell$ de degré 1 (resp. 2). En particulier, les directions anti-Stokes de niveau 1 sont déterminées par les singularités de la transformée de Borel \widehat{F} de F .

• Les multiplicateurs de Stokes éléments de la matrice $C_\theta^{(j,\ell)}$ sont dits *de niveau 1* (resp. *de niveau 2*) si le polynôme $q_j - q_\ell$ est de degré 1 (resp. 2).

Dans ce chapitre, nous nous intéressons uniquement aux multiplicateurs de Stokes du premier niveau. Nous commençons par établir un isomorphisme linéaire entre ces multiplicateurs de Stokes et les coefficients de résurgence de la transformée de Borel \tilde{F} de \hat{F} en ses singularités (paragraphe 7.2), puis nous montrons que la méthode de calcul effectif développée au chapitre 3 dans le cadre des systèmes de niveau unique 1 se généralise à notre cas.

Une première étape importante consiste à isoler les multiplicateurs de Stokes du premier niveau de ceux du second niveau en découplant les deux niveaux de $[A]$.

7.1 Découplage des niveaux

Le calcul des multiplicateurs de Stokes étant rendu complexe par la multiplication des niveaux dans le système $[A]$, nous séparons les multiplicateurs de Stokes du premier niveau de ceux du second niveau en procédant à un découplage des niveaux de $[A]$.

Rappelons que la matrice Q est écrite sous la forme

$$Q \left(\frac{1}{x} \right) = \text{diag} \left(q_1 \left(\frac{1}{x} \right) I_{n_1}, \dots, q_J \left(\frac{1}{x} \right) I_{n_J} \right)$$

avec

$$q_j \left(\frac{1}{x} \right) = -\frac{a_{j,2}}{x^2} - \frac{a_{j,1}}{x} \in x^{-1}\mathbb{C}[x^{-1}]$$

Lorsque θ est une direction anti-Stokes de $[A]$ attachée au polynôme $q_j - q_\ell$, nous notons

$$q_j \ll_{\theta} q_\ell$$

Précisément, nous écrivons $q_j \ll_{\theta}^1 q_\ell$ lorsque θ est de niveau 1 et $q_j \ll_{\theta}^2 q_\ell$ lorsque θ est de niveau 2.

Introduisons les trois ensembles suivants :

$$\text{Sto}_{\theta} = \left\{ S_{\theta} = [S_{\theta}^{(j,\ell)}]_{1 \leq j, \ell \leq J} ; S_{\theta}^{(j,j)} = I_{n_j} \text{ et si } S_{\theta}^{(j,\ell)} \neq 0 \text{ alors } q_j \ll_{\theta} q_\ell \right\}$$

$$\text{Sto}_{\theta}^1 = \left\{ S_{\theta} = [S_{\theta}^{(j,\ell)}]_{1 \leq j, \ell \leq J} ; S_{\theta}^{(j,j)} = I_{n_j} \text{ et si } S_{\theta}^{(j,\ell)} \neq 0 \text{ alors } q_j \ll_{\theta}^1 q_\ell \right\}$$

$$\text{Sto}_{\theta}^2 = \left\{ S_{\theta} = [S_{\theta}^{(j,\ell)}]_{1 \leq j, \ell \leq J} ; S_{\theta}^{(j,j)} = I_{n_j} \text{ et si } S_{\theta}^{(j,\ell)} \neq 0 \text{ alors } q_j \ll_{\theta}^2 q_\ell \right\}$$

Ces trois ensembles sont des groupes et sous-groupes de $GL_n(\mathbb{C})$. On a le résultat suivant :

Théorème 7.2 ([L-R94], [MR91]) *Le groupe Sto_{θ} est le produit semi-direct du groupe Sto_{θ}^2 par le groupe Sto_{θ}^1 :*

$$\text{Sto}_{\theta} = \text{Sto}_{\theta}^1 \ltimes \text{Sto}_{\theta}^2$$

La matrice $S_\theta = I_n + C_\theta$ étant par définition un élément de Sto_θ , ce résultat permet de séparer les multiplicateurs de Stokes du premier niveau de ceux du second niveau. Précisément, nous avons le résultat suivant :

Corollaire 7.3 *Il existe un unique élément $S_{\theta(1)}$ de Sto_θ^1 et un unique élément $S_{\theta(2)}$ de Sto_θ^2 tel que*

$$S_\theta = S_{\theta(1)}S_{\theta(2)}$$

En particulier, en notant $S_{\theta(1)}$ et $S_{\theta(2)}$ sous la forme

$$S_{\theta(1)} = I_n + C_{\theta(1)} \text{ et } S_{\theta(2)} = I_n + C_{\theta(2)}$$

la matrice de Stokes C_θ s'écrit

$$C_\theta = C_{\theta(1)} + C_{\theta(2)} + C_{\theta(1)}C_{\theta(2)}$$

Cette écriture de la matrice C_θ permet de déterminer les multiplicateurs de Stokes suivant leurs niveaux : lorsque $q_j \ll_\theta^1 q_\ell$, nous avons l'égalité

$$C_\theta^{(j,\ell)} = C_{\theta(1)}^{(j,\ell)}$$

et, lorsque $q_j \ll_\theta^2 q_\ell$, nous obtenons l'égalité

$$C_\theta^{(j,\ell)} = C_{\theta(2)}^{(j,\ell)} + \sum_{k \in K_{j,\ell}} C_{\theta(1)}^{(j,k)} C_{\theta(2)}^{(k,\ell)}$$

où $K_{j,\ell}$ désigne l'ensemble

$$K_{j,\ell} = \{k \in \{1, \dots, J\} \text{ tel que } q_j \ll_\theta^1 q_k \text{ et } q_k \ll_\theta^2 q_\ell\}$$

Noter que le calcul des multiplicateurs de Stokes du second niveau est plus complexe puisqu'il peut faire intervenir également les multiplicateurs de Stokes du premier niveau.

Il s'agit à présent de déterminer les deux matrices $S_{\theta(1)}$ et $S_{\theta(2)}$ du corollaire 7.3. Pour cela, nous factorisons, comme pour la matrice S_θ , le facteur série formelle \widehat{F} suivant les niveaux :

Théorème 7.4 (théorème de factorisation ([L-R94], [MR91]))

Il existe deux séries méromorphes formelles inversibles $\widehat{G}_1, \widehat{G}_2 \in GL_n(\mathbb{C}[[x]][\frac{1}{x}])$ tel que

1. $\widehat{F} = \widehat{G}_2 \widehat{G}_1$;
2. pour $j \in \{1, 2\}$, la série \widehat{G}_j est j -sommable et ses directions anti-Stokes sont celles du système $[A]$ de niveau j ;

3. $\widehat{G}_1 x^L e^{Q(\frac{1}{x})}$ est une solution fondamentale formelle d'un système différentiel linéaire méromorphe à l'origine de la forme

$$[a_1] \quad \frac{dY}{dx} = a_1(x)Y$$

avec $a_1(x) \in M_n(\mathbb{C}\{x\}[\frac{1}{x}])$.

Afin de faciliter notre travail, il convient de normaliser les deux séries formelles \widehat{G}_1 et \widehat{G}_2 comme \widehat{F} :

Corollaire 7.5 *Il existe deux séries formelles $\widehat{F}_1, \widehat{F}_2 \in M_n(\mathbb{C}[[x]])$ tel que*

1. $\widehat{F}_1(x) = \widehat{F}_2(x) = I_n + O(x^4)$;
2. $\widehat{F} = \widehat{F}_2 \widehat{F}_1$;
3. pour $j \in \{1, 2\}$, la série \widehat{F}_j est j -sommable et ses directions anti-Stokes sont celles du système $[A]$ de niveau j ;
4. $\widehat{Y}_1(x) = \widehat{F}_1(x) x^L e^{Q(\frac{1}{x})}$ est une solution fondamentale formelle d'un système différentiel linéaire méromorphe à l'origine de la forme

$$[A_1] \quad x^3 \frac{dY_1}{dx} = A_1(x)Y_1 \text{ avec } A_1(x) \in M_n(\mathbb{C}\{x\})$$

Précisément, la matrice $A_1(x)$ s'écrit

$$A_1(x) = A_0(x) + C(x)$$

où A_0 est définie par

$$A_0(x) = 2 \operatorname{diag}(0I_{n_1}, a_{2,2}I_{n_2}, \dots, a_{J,2}I_{n_J}) + x \operatorname{diag}(0I_{n_1}, a_{2,1}I_{n_2}, \dots, a_{J,1}I_{n_J}) + x^2 L$$

et où $C(x) \in M_n(x^4 \mathbb{C}\{x\})$.

Démonstration. Considérons les deux séries méromorphes formelles \widehat{G}_1 et \widehat{G}_2 du théorème 7.4, et choisissons un élément P de $GL_n(\mathbb{C}\{x\}[\frac{1}{x}])$ tel que

$$\widehat{F}_1(x) = P(x)\widehat{G}_1(x) = I_n + O(x^4)$$

(cf. paragraphe 1.3.4 pour l'existence d'un tel P). La série P étant méromorphe, la série \widehat{F}_1 reste 1-sommable et ses directions anti-Stokes sont celles de \widehat{G}_1 . Le point 4 suit puisque $[A_1]$ est le système de jauge $[{}^P a_1]$ (cf. paragraphe 1.3.3 pour le détail des calculs). Par ailleurs, la série formelle \widehat{F} vérifiant $\widehat{F}(x) = I_n + O(x^4)$, un calcul sur les séries formelles montre aisément que

$$\widehat{F}_2(x) = \widehat{G}_2(x)P^{-1}(x) = I_n + O(x^4)$$

La 2-sommabilité de \widehat{F}_2 et ses directions anti-Stokes proviennent alors de \widehat{G}_2 puisque P^{-1} est une série méromorphe. ■

Avec cette factorisation de \widehat{F} la multisomme $s_\theta(\widehat{F})$ de \widehat{F} dans une direction non anti-Stokes θ s'écrit

$$s_\theta(\widehat{F}) = s_{2,\theta}(\widehat{F}_2)s_{1,\theta}(\widehat{F}_1)$$

où $s_{j,\theta}(\widehat{F}_j)$ désigne la somme de \widehat{F}_j dans la direction θ obtenue par la sommation de Borel-Laplace de niveau j (cf. théorème 1.6).

Fixons à présent une direction anti-Stokes θ de $[A]$ et définissons les deux matrices $S_{\theta(1)} \in GL_n(\mathbb{C})$ et $S_{\theta(2)} \in GL_n(\mathbb{C})$ par les relations

$$\begin{cases} s_{1,\theta^-}(\widehat{F}_1)x^L e^{Q(\frac{1}{x})} = s_{1,\theta^+}(\widehat{F}_1)x^L e^{Q(\frac{1}{x})} S_{\theta(1)} \\ s_{2,\theta^-}(\widehat{F}_2)s_{1,\theta^-}(\widehat{F}_1)x^L e^{Q(\frac{1}{x})} = s_{2,\theta^+}(\widehat{F}_2)s_{1,\theta^-}(\widehat{F}_1)x^L e^{Q(\frac{1}{x})} S_{\theta(2)} \end{cases}$$

On a alors le résultat suivant :

Proposition 7.6 ([L-R94], [MR91]) *Avec les notations ci-dessus,*

1. *La matrice $S_{\theta(1)}$ est un élément de Sto_θ^1 .*
2. *La matrice $S_{\theta(2)}$ est un élément de Sto_θ^2 .*
3. *La décomposition $S_\theta = S_{\theta(1)}S_{\theta(2)}$ est l'unique décomposition de ce type.*

Nous nous intéressons maintenant aux déterminations théorique et effective de la matrice $S_{\theta(1)} = I_n + C_{\theta(1)}$. Rappelons que la matrice $C_{\theta(1)}$ est formée des multiplicateurs de Stokes du premier niveau.

7.2 Calcul théorique des multiplicateurs de Stokes du premier niveau

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons uniquement aux directions anti-Stokes de niveau 1, *i.e.*, aux directions θ déterminées par les singularités de la transformée de Borel \widetilde{F} de \widehat{F} . Rappelons que ces singularités sont les points de l'ensemble

$$\Omega(\widehat{F}) = \{a_{j,1} - a_{\ell,1} \neq 0 \text{ tel que } a_{j,2} - a_{\ell,2} = 0\}$$

Précisément, nous nous restreignons aux directions θ déterminées par les singularités du premier bloc de colonne \widetilde{f} de \widetilde{F} , *i.e.*, par les points de l'ensemble

$$\Omega(\widetilde{f}) = \{a_{j,1} \neq 0 \text{ tel que } a_{j,2} = 0\}$$

et nous n'étudions que les multiplicateurs de Stokes du premier niveau situés dans le premier bloc de colonne c_θ de la matrice de Stokes C_θ .

Les multiplicateurs de Stokes du premier niveau sont les éléments de la matrice $C_{\theta(1)}$. Nous découpons alors $C_{\theta(1)}$ comme la matrice L et nous notons $c_{\theta(1)}$ son premier

bloc de colonne : $c_{\theta(1)} \in M_{n,n_1}(\mathbb{C})$. Sa $q^{\text{ème}}$ colonne $c_{\theta(1)}^{[j;q]}$, $q \in \{1, \dots, n_1\}$, s'écrit ainsi sous la forme

$$c_{\theta(1)}^{[j;q]} = \begin{bmatrix} c_{\theta(1)}^{[1;q]} \\ \vdots \\ c_{\theta(1)}^{[J;q]} \end{bmatrix} \text{ avec } c_{\theta(1)}^{[j;q]} \in M_{n_j, n_1}(\mathbb{C})$$

Rappelons que si $c_{\theta(1)}^{[j;q]}$ est non nul, alors le polynôme q_j est de degré 1 et est attaché à la direction θ . Autrement dit, $a_{j,1}$ est un élément de $\Omega(\widehat{f})$ tel que $\arg(a_{j,1}) = \theta$. Dans la suite, nous désignons par $\Omega_\theta(\widehat{f})$ l'ensemble des singularités de \widehat{f} situées sur la demi-droite $d_\theta = [0, \infty e^{i\theta}[$:

$$\Omega_\theta(\widehat{f}) = \{a_{j,1} \neq 0 \text{ tel que } a_{j,2} = 0 \text{ et } \arg(a_{j,1}) = \theta\}$$

De plus, pour tout élément ω de $\Omega(\widehat{f})$, nous notons

$$J_{\omega,1} = \{j \in \{1, \dots, J\} \text{ tel que } a_{j,1} = \omega \text{ et } a_{j,2} = 0\}$$

Le but de ce paragraphe est de décrire avec précision un isomorphisme linéaire entre les blocs éventuellement non nuls $c_{\theta(1)}^{[j;q]}$ et les coefficients de résurgence de $\widehat{f}^{[j;q]}$ en ses singularités $\omega \in \Omega_\theta(\widehat{f})$. Le résultat que nous allons obtenir est analogue à celui rencontré dans le cadre des systèmes de niveau unique 1 (théorème 2.31). En effet, la nature des singularités de $\widehat{f}^{[j;q]}$ est identique dans les deux cas. Rappelons (théorème 6.10) que les singularités ω de $\widehat{f}^{[j;q]}$ sont simples-ramifiées d'exposants de ramification Λ_ω et d'ordres logarithmiques $(N_{\omega,0} + q, (N_{\omega,\lambda} + q)_{\lambda \in \Lambda_\omega})$ donnés par

$$\Lambda_\omega = \{\lambda_j; j \in \{1, \dots, J\} \text{ tel que } a_{j,2} = 0, a_{j,1} = \omega \text{ et } \lambda_j \neq 0\}$$

$$N_{\omega,0} = \max(n_j - 2; j \in \{1, \dots, J\} \text{ tel que } a_{j,2} = 0, a_{j,1} = \omega \text{ et } \lambda_j = 0)$$

$$N_{\omega,\lambda} = \max(n_j - 2; j \in \{1, \dots, J\} \text{ tel que } a_{j,2} = 0, a_{j,1} = \omega \text{ et } \lambda_j = \lambda)$$

L'étude directe des matrices $c_{\theta(1)}^{[j;q]}$ est rendue difficile par le fait que la matrice $C_{\theta(1)}$ n'est pas définie explicitement à partir de la solution fondamentale formelle $\widehat{Y}(x)$. Pour contourner ce problème, nous reprenons la factorisation $\widehat{F} = \widehat{F}_2 \widehat{F}_1$ du corollaire 7.5. Nous savons (corollaire 7.5, point 4) que $\widehat{Y}_1(x) = \widehat{F}_1(x) x^L e^{Q(\frac{1}{x})}$ est une solution fondamentale formelle du système différentiel linéaire

$$[A_1] \quad x^3 \frac{dY_1}{dx} = A_1(x) Y_1, \quad A_1(x) = A_0(x) + C(x) \text{ et } C(x) \in M_n(x^4 \mathbb{C}\{x\})$$

dont les directions anti-Stokes sont les directions anti-Stokes de niveau 1 de $[A]$. En particulier, les calculs faits précédemment dans cette thèse permettent d'établir le résultat suivant :

Proposition 7.7 *La série formelle \widehat{F}_1 est résurgente-sommable de support singulier $\Omega(\widehat{F})$. Précisément, le support singulier d'une colonne de \widehat{F}_1 est le support singulier de la colonne correspondante dans \widehat{F} . En particulier, si \widehat{F}_1 est découpée comme la matrice L , alors le support singulier du premier bloc de colonnes \widehat{f}_1 de \widehat{F}_1 est $\Omega(\widehat{f})$.*

Démonstration. Nous ne faisons la démonstration que pour \widehat{f}_1 . Le calcul pour les autres blocs de colonnes de \widehat{F}_1 est analogue et est laissé au lecteur.

Nous déduisons de la factorisation de la série formelle \widehat{F} (corollaire 7.5) l'égalité

$$\widehat{f}_1 = \widehat{F}_2^{-1} \widehat{f}$$

où la série \widehat{F}_2 est 2-sommable et vérifie $\widehat{F}_2(x) = I_n + O(x^4)$. Ainsi, en écrivant la série \widehat{F}_2^{-1} sous la forme

$$\widehat{F}_2^{-1} = I_n + \widehat{G}_2 \text{ avec } \widehat{G}_2 \in M_n(x^4\mathbb{C}\{x\}_{1/2})$$

nous obtenons l'égalité

$$\widehat{f}_1 = \widehat{f} + \widehat{G}_2 \widehat{f}$$

qui donne après transformation de Borel

$$(7.1) \quad \widetilde{f}_1 = \widetilde{f} + \widetilde{G}_2 * \widetilde{f}$$

où \widetilde{G}_2 est une fonction entière sur \mathbb{C} (la série \widehat{G}_2 est en effet de type Gevrey de niveau 2). Les propriétés du produit de convolution $*$ (corollaire 1.10) montrent alors que les singularités de \widetilde{f}_1 sont les singularités de \widetilde{f} , *i.e.*, $\Omega(\widetilde{f}_1) = \Omega(\widetilde{f})$, et que \widetilde{f}_1 est un germe de fonctions analytiques prolongeables sans fin de support singulier $\Omega(\widetilde{f})$.

Par ailleurs, la série \widehat{f}_1 étant 1-sommable (corollaire 7.5, point 3), nous savons que \widetilde{f}_1 est à croissance exponentielle d'ordre au plus un à l'infini sur tout secteur illimité d'axe une direction non anti-Stokes de \widehat{f}_1 . En reprenant alors les diverses démonstrations de résurgence-sommabilité présentées dans cette thèse, nous en déduisons que cette propriété de croissance à l'infini s'étend sans difficulté au voisinage de n'importe quel chemin rectifiable tracé sur $\mathbb{C} \setminus \Omega(\widehat{f})$ et ne faisant qu'un nombre fini de tours autour d'un nombre fini de points de $\Omega(\widehat{f})$. ■

Fixons à présent une direction anti-Stokes θ de niveau 1 du système $[A]$. La matrice $C_{\theta(1)}$ est définie comme étant la matrice de Stokes associée à \widehat{Y}_1 dans la direction θ (paragraphe 7.1) :

$$Y_{1,\theta-} = s_{1,\theta-}(\widehat{F}_1)x^L e^{Q(\frac{1}{x})} = s_{1,\theta+}(\widehat{F}_1)x^L e^{Q(\frac{1}{x})}(I_n + C_{\theta(1)}) = Y_{1,\theta+}(I_n + C_{\theta(1)})$$

Ainsi, par analogie avec le cas des systèmes de niveau unique 1, nous pouvons nous attendre à ce que le comportement de la transformée de Borel \widetilde{F}_1 de \widehat{F}_1 en ses singularités détermine la matrice $C_{\theta(1)}$. Plus précisément, si \widehat{f}_1 est le premier bloc de colonnes de \widehat{F}_1 suivant le découpage de la matrice L , nous allons voir que le comportement de \widetilde{f}_1 en ses singularités détermine la matrice $c_{\theta(1)}$.

Etude de la transformée de Borel \tilde{f}_1

Nous savons déjà (proposition 7.7) que les singularités de \tilde{f}_1 sont les singularités de \tilde{f} . Il s'agit, dans un premier temps, de préciser la nature de chacune des singularités de \tilde{f}_1 .

Reprenons l'égalité (7.1) : pour tout $q \in \{1, \dots, n_1\}$, la $q^{\text{ème}}$ colonne $\tilde{f}_1^{[q]}$ de \tilde{f}_1 est définie par la relation

$$\tilde{f}_1^{[q]} = \tilde{f}^{[q]} + \tilde{G}_2 * \tilde{f}^{[q]}$$

La nature des singularités de $\tilde{f}^{[q]}$ étant connue par le théorème 6.10 et \tilde{G}_2 étant une fonction entière sur \mathbb{C} (la série \tilde{G}_2 est de type Gevrey de niveau 2), les propriétés du produit de convolution $*$ (proposition 2.14) permettent de décrire avec précision les singularités de \tilde{f}_1 :

Proposition 7.8 *Les singularités de $\tilde{f}_1^{[q]}$ sont toutes simples-ramifiées.*

Précisément, si ω est une singularité de $\tilde{f}_1^{[q]}$ (et donc de $\tilde{f}^{[q]}$) et si $\tilde{f}^{[q]}$ s'écrit, modulo les fonctions analytiques à l'origine, sous la forme

$$\tau_\omega \tilde{f}^{[q]}(\xi) = \sum_{p=0}^{N_{\omega,0}+q} \frac{\alpha_{\omega,p}^{[q]}}{\xi} \log^p \xi + \sum_{p=1}^{N_{\omega,0}+q+1} \tilde{h}_{\omega,p}^{[q]}(\xi) \log^p \xi + \sum_{\lambda \in \Lambda_\omega} \sum_{p=0}^{N_{\omega,\lambda}+q} \left(\tilde{H}_{\omega,\lambda,p}^{[q]}(\xi) \log^p \xi \right) \xi^{\lambda-1}$$

où $\alpha_{\omega,p}^{[q]} \in M_{n,1}(\mathbb{C})$, $\tilde{h}_{\omega,p}^{[q]}, \tilde{H}_{\omega,\lambda,p}^{[q]} \in M_{n,1}(\mathbb{C}\{\xi\})$ et où les exposants de ramification Λ_ω et les ordres logarithmiques $(N_{\omega,0} + q, (N_{\omega,\lambda} + q)_{\lambda \in \Lambda_\omega})$ sont donnés par

$$\Lambda_\omega = \{\lambda_j; j \in \{1, \dots, J\} \text{ tel que } a_{j,2} = 0, a_{j,1} = \omega \text{ et } \lambda_j \neq 0\}$$

$$N_{\omega,0} = \max(n_j - 2; j \in \{1, \dots, J\} \text{ tel que } a_{j,2} = 0, a_{j,1} = \omega \text{ et } \lambda_j = 0)$$

$$N_{\omega,\lambda} = \max(n_j - 2; j \in \{1, \dots, J\} \text{ tel que } a_{j,2} = 0, a_{j,1} = \omega \text{ et } \lambda_j = \lambda)$$

alors $\tilde{f}_1^{[q]}$ s'écrit, modulo les fonctions analytiques à l'origine, sous la forme

$$\tau_\omega \tilde{f}_1^{[q]}(\xi) = \sum_{p=0}^{N_{\omega,0}+q} \frac{\alpha_{\omega,p}^{[q]}}{\xi} \log^p \xi + \sum_{p=1}^{N_{\omega,0}+q+1} \tilde{k}_{\omega,p}^{[q]}(\xi) \log^p \xi + \sum_{\lambda \in \Lambda_\omega} \sum_{p=0}^{N_{\omega,\lambda}+q} \left(\tilde{K}_{\omega,\lambda,p}^{[q]}(\xi) \log^p \xi \right) \xi^{\lambda-1}$$

avec $\tilde{k}_{\omega,p}^{[q]}, \tilde{K}_{\omega,\lambda,p}^{[q]} \in M_{n,1}(\mathbb{C}\{\xi\})$ et $\tilde{K}_{\omega,\lambda,p}^{[q]}(0) = \tilde{H}_{\omega,\lambda,p}^{[q]}(0)$.

Noter que les termes

$$\frac{\alpha_{\omega,p}^{[q]}}{\xi} \log^p \xi \text{ et } \tilde{H}_{\omega,\lambda,p}^{[q]}(0) \xi^{\lambda-1} \log^p \xi$$

du développement de $\tilde{f}_1^{[q]}$ au voisinage de ω sont les mêmes que ceux du développement de $\tilde{f}^{[q]}$ au voisinage de ω .

Par ailleurs, en utilisant les propriétés de prolongement analytique de \tilde{f}_1 obtenus à la proposition 7.7, nous obtenons le résultat suivant :

Corollaire 7.9 *Les coefficients de résurgence de $\tilde{f}_1^{[j;q]}$ en ω sont des germes de fonctions analytiques prolongeables sans fin de support singulier les points $a_{j,1} - \omega$, avec $a_{j,1} \in \Omega(\widehat{f})$, et sont à croissance exponentielle d'ordre au plus un à l'infini.*

Détermination des multiplicateurs de Stokes du premier niveau

Les résultats obtenus pour \widehat{f}_1 étant analogues à ceux obtenus dans le cadre des systèmes de niveau unique 1, nous pouvons appliquer les arguments du paragraphe 2.3 sur le calcul des multiplicateurs de Stokes. En particulier, nous sommes en mesure de déterminer avec précision les termes de $c_{\theta(1)}^{[j;q]}$ en fonction des coefficients de résurgence de $\tilde{f}_1^{[j;q]}$ en ses singularités. Précisément, pour tout $\omega \in \Omega_\theta(\widehat{f})$ et pour tout $j \in J_{\omega,1}$, les matrices $c_{\theta(1)}^{[j;q]}$ sont uniquement déterminées par les $\alpha_{\omega,p}^{[j;q]}$ et les $\widetilde{K}_{\omega,\lambda,p}^{[j;q]}(0) = \widetilde{H}_{\omega,\lambda,p}^{[j;q]}(0)$. Ces différents termes étant également les coefficients de résurgence de $\tilde{f}^{[j;q]}$ en ω , nous établissons finalement un isomorphisme linéaire entre les termes de $c_{\theta(1)}^{[j;q]}$ et les coefficients de résurgence de $\tilde{f}^{[j;q]}$ en ses singularités :

Théorème 7.10 *Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, nous définissons le nombre complexe $\kappa_p(\lambda)$ par*

$$\kappa_p(\lambda) = 2i\pi \frac{d^p}{dz^p} \left(\frac{e^{-i\pi z}}{\Gamma(1-z)} \right) \Big|_{z=\lambda}$$

Soient $q \in \{1, \dots, n_1\}$ et θ une direction anti-Stokes de $[A]$ du premier niveau. Pour toute singularité $\omega \in \Omega_\theta(\widehat{f})$ de \tilde{f} , nous considérons le prolongement analytique de $\tilde{f}^{[j;q]}$ à droite de ω et nous notons

- $\alpha_{\omega,p}^{[j;q]} = \begin{bmatrix} \alpha_{\omega,p}^{[1;q]} \\ \vdots \\ \alpha_{\omega,p}^{[J;q]} \end{bmatrix}$ le coefficient de résurgence lié à $\frac{\log^p \xi}{\xi}$ avec $p \in \{0, \dots, N_{\omega,0} + q\}$
- $\widetilde{H}_{\omega,\lambda,p}^{[j;q]}(\xi) = \begin{bmatrix} \widetilde{H}_{\omega,\lambda,p}^{[1;q]}(\xi) \\ \vdots \\ \widetilde{H}_{\omega,\lambda,p}^{[J;q]}(\xi) \end{bmatrix}$ le coefficient de résurgence lié à $\xi^{\lambda-1} \log^p \xi$ avec $p \in \{0, \dots, N_{\omega,\lambda} + q\}$

Alors, pour tout $\omega \in \Omega_\theta(\widehat{f})$ et pour tout $j \in J_{\omega,1}$:

1. Si $\lambda_j = 0$, nous avons

$$c_{\theta(1)}^{[j;q]} = \sum_{p=0}^{N_{\omega,0}+q} \kappa_p(0) \alpha_{\omega,p}^{[j;q]} = c_\theta^{[j;q]}$$

2. Si $\lambda_j \neq 0$, nous avons $\alpha_{\omega,p}^{[j;q]} = 0$ pour tout $p \in \{0, \dots, N_{\omega,0} + q\}$, $\lambda_j \in \Lambda_\omega$ et,

$$c_{\theta(1)}^{[j;q]} = \sum_{p=0}^{N_{\omega,\lambda_j}+q} \kappa_p(\lambda_j) \widetilde{H}_{\omega,\lambda_j,p}^{[j;q]}(0) = c_\theta^{[j;q]}$$

Terminons ce paragraphe par un exemple simple.

Exemple Reprenons l'exemple du paragraphe 6.1.5. Rappelons que le système différentiel linéaire étudié est

$$[A] \quad x^3 \frac{dY}{dx} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2x^5 & 2x + \frac{x^2}{2} & 0 & 0 \\ -6x^5 & 6x^5 & x & 0 \\ 120x^7 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} Y$$

Nous considérons la solution fondamentale formelle $\widehat{Y}(x) = \widehat{F}(x)x^L e^{Q(\frac{1}{x})}$ avec $L = \text{diag}(0, \frac{1}{2}, 0, 0)$, $Q(\frac{1}{x}) = \text{diag}(0, -\frac{2}{x}, -\frac{1}{x}, -\frac{1}{x^2})$ et

$$\widehat{F}(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \widehat{f}_1 & 1 & 0 & 0 \\ \widehat{f}_2 + \widehat{f}_3 & \widehat{g} & 1 & 0 \\ \widehat{f}_4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

les \widehat{f}_j étant les uniques solutions séries formelles en x vérifiant $\widehat{f}_j(x) = O(x^4)$ et satisfaisant à

$$(*) \quad \begin{cases} x^2 \frac{d\widehat{f}_1}{dx} - \left(2 + \frac{x}{2}\right) \widehat{f}_1 = 2x^4 \\ x^2 \frac{d\widehat{f}_2}{dx} - \widehat{f}_2 = -6x^4 \\ x^2 \frac{d\widehat{f}_3}{dx} - \widehat{f}_3 = 6x^4 \widehat{f}_1 \\ x^3 \frac{d\widehat{f}_4}{dx} - 2\widehat{f}_4 = 120x^7 \end{cases}$$

Le système admet deux directions anti-Stokes de niveau 1 : \mathbb{R}^+ et \mathbb{R}^- ; et quatre directions anti-Stokes de niveau 2 : \mathbb{R}^+ , \mathbb{R}^- , $i\mathbb{R}^+$ et $i\mathbb{R}^-$. Nous nous intéressons ici uniquement à la direction anti-Stokes \mathbb{R}^+ et aux multiplicateurs de Stokes de niveau 1 associés à cette direction. La matrice de Stokes $C_{0(1)}$ de niveau 1 est définie par

$$C_{0(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_0^{[2]} & 0 & 0 & 0 \\ c_0^{[3]} & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Grâce aux équations (*), nous pouvons déterminer de manière exacte le prolongement analytique de \widehat{f} à droite de chacune de ses singularités $\omega \in \{1, 2\}$. Pour tout $\xi \in \mathbb{C}$ tel

que $\operatorname{Re}(\xi) < 2$, la transformation de Borel de chacune des séries \widehat{f}_j est donnée par

$$\left\{ \begin{array}{l} \widetilde{f}_1 = -\frac{64\sqrt{2}}{15}(2-\xi)^{-\frac{1}{2}} + \frac{2\xi^2}{5} + \frac{16\xi}{15} + \frac{64}{15} \\ \widetilde{f}_2 = -\frac{\xi^3}{\xi-1} \\ \widetilde{f}_3 = \frac{1}{\xi-1} \left(-\frac{2048\sqrt{2}}{525}(2-\xi)^{\frac{7}{2}} + \frac{\xi^6}{150} + \frac{4\xi^5}{75} + \frac{16\xi^4}{15} - \frac{256\xi^3}{15} + \frac{1024\xi^2}{15} - \frac{8192\xi}{75} + \frac{32768}{525} \right) \\ \widetilde{f}_4 = \xi^4 + 8\xi^2 + 32 - 32e^{\frac{\xi^2}{4}} \end{array} \right.$$

La fonction \widetilde{f} admet comme singularité de niveau 1 une singularité polaire en $\xi = 1$ et une singularité purement ramifiée en $\xi = 2$ d'exposant de ramification $\{\frac{1}{2}\}$. Les prolongements analytiques de \widetilde{f} à droite des points $\omega = 1, 2$ sont alors donnés, modulo les fonctions analytiques à l'origine, par

$$\tau_1 \widetilde{f}(\xi) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{4741 - 4096\sqrt{2}}{1050\xi} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \tau_2 \widetilde{f}(\xi) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{64i\sqrt{2}}{15}\xi^{-\frac{1}{2}} \\ \frac{2048i\sqrt{2}}{525} \frac{\xi^{\frac{7}{2}}}{\xi+1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Nous obtenons alors par le théorème 7.10 :

$$\left\{ \begin{array}{l} c_0^{[2]} = \frac{4741 - 4096\sqrt{2}}{525} i\pi \\ c_0^{[3]} = \frac{128i\sqrt{2}\pi}{15} \end{array} \right.$$

7.3 Calcul effectif des multiplicateurs de Stokes du premier niveau

Dans ce chapitre, nous proposons une méthode de calcul de tous les multiplicateurs de Stokes du premier niveau pour tous les systèmes de niveaux simultanés $(1, 2)$ à coefficients rationnels, et ceci avec évaluation de l'erreur.

Fixons un système $[A]$ de niveaux simultanés $(1, 2)$ de la forme

$$x^3 \frac{dY}{dx} = A(x)Y$$

avec $A(x) \in M_n(\mathbb{C}(x))$ sans pôle à l'origine. Nous supposons, quitte à faire une transformation de jauge méromorphe convenable, qu'une solution fondamentale formelle $\widehat{Y}(x) = \widehat{F}(x)x^L e^{Q(\frac{1}{x})}$ est normalisée comme au chapitre 6, soit :

- ★ $\widehat{F}(x) = I_n + O(x^4) \in M_n(\mathbb{C}[[x]])$;
- ★ $L = \bigoplus_{j=1}^J L_j$, où chaque L_j est un bloc de Jordan de L de dimension $n_j \geq 1$ et de valeur propre λ_j vérifiant $\lambda_1 = 0$ et $\operatorname{Re}(\lambda_j) \in [0, 1[$ pour tout $j \in \{1, \dots, J\}$;
- ★ $Q(\frac{1}{x}) = \bigoplus_{j=1}^J q_j(\frac{1}{x}) I_{n_j}$ de sorte que $q_1 = 0$ et

$$q_j\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{a_{j,2}}{x^2} - \frac{a_{j,1}}{x}$$

Rappelons qu'une telle transformation de jauge n'affecte en rien les matrices de Stokes de $[A]$, puisque celles-ci sont des invariants méromorphes de $[A]$ ([BJL79-2]).

Quitte à permuter les colonnes de \widehat{F} , nous nous intéressons uniquement à son premier bloc de colonnes \widehat{f} . En particulier, nous cherchons à évaluer numériquement, tout en estimant l'erreur commise, uniquement les multiplicateurs de Stokes du premier niveau situés dans le premier bloc de colonnes c_θ de la matrice de Stokes C_θ . Pour cela, nous généralisons aux systèmes de niveaux simultanés $(1, 2)$ la méthode présentée au chapitre 3 dans le cadre des systèmes de niveau unique 1. Rappelons que cette méthode consiste dans un premier temps à interpréter les différents multiplicateurs de Stokes en terme de matrices de connexion ; puis à évaluer ces différentes matrices à l'aide de prolongements analytiques "à la Cauchy" le long d'une chaîne de boules d'intersections non vide. Une évaluation de l'erreur commise à chacune des étapes permet finalement d'évaluer l'erreur sur les multiplicateurs de Stokes.

Dans l'optique de simplifier les calculs, nous supposons dans la suite que la matrice L des exposants de monodromie formelle est diagonale de la forme

$$L = \operatorname{diag}(0, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

avec $\operatorname{Re}(\lambda_j) \in [0, 1[$ pour tout $j \in \{2, \dots, n\}$. En particulier, la matrice Q s'écrit

$$Q\left(\frac{1}{x}\right) = \operatorname{diag}\left(0, q_2\left(\frac{1}{x}\right), \dots, q_n\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

et les matrices \widehat{f} et c_θ désignent respectivement la première colonne de la matrice \widehat{F} et la première colonne de la matrice de Stokes C_θ . Naturellement, il est aisé de voir, par analogie avec les systèmes de niveau unique 1, que tous les calculs et raisonnements qui vont suivre restent valables pour une matrice L sous forme de Jordan quelconque. Nous laissons les détails au lecteur.

Le système $[A]$ que nous étudions maintenant est donc de la forme

$$[A] \quad x^3 \frac{dY}{dx} = A(x)Y \text{ avec } A(x) = A_0(x) + A_1(x)$$

où

$$A_0(x) = 2 \operatorname{diag}(0, a_{2,2}, \dots, a_{n,2}) + x \operatorname{diag}(0, a_{2,1}, \dots, a_{n,1}) + x^2 L$$

et où $A_1(x) \in M_n(x^4\mathbb{C}(x))$ est sans pôle à l'origine. Précisément, nous écrivons $A_1(x)$ sous la forme

$$A_1(x) = \operatorname{diag} \left(\frac{1}{P_1(x)}, \dots, \frac{1}{P_n(x)} \right) B(x)$$

où $B(x) \in M_n(x^4\mathbb{C}[x])$ et où $P_j(x) \in \mathbb{C}[x]$ avec $P_j(0) = 1$.

Quitte à permuter les colonnes de \widehat{F} , nous nous intéressons uniquement à sa première colonne \widehat{f} et nous cherchons à calculer numériquement, tout en évaluant l'erreur commise, tous les multiplicateurs de Stokes $c_{\theta(1)}^{[j]}$ de la première colonne de la matrice de Stokes du premier niveau $C_{\theta(1)}$. Nous avons vu au paragraphe précédent (théorème 7.10) que leurs valeurs étaient uniquement déterminées par les coefficients de résurgence de la transformée de Borel \widetilde{f} de \widehat{f} . Il s'agit donc de voir si les méthodes de calculs données au chapitre 3 dans le cadre des systèmes de niveau unique 1 restent valables. Rappelons les différents points à regarder :

1. Déterminer un système différentiel linéaire $[S]$ vérifié par la matrice colonne

$$\widetilde{\mathcal{F}} = \begin{bmatrix} \widetilde{f} \\ \widetilde{f}' \\ \vdots \\ \frac{d^{k-1}\widetilde{f}}{d\xi^{k-1}} \end{bmatrix}$$

de dimension nk (k est un entier convenablement choisi) et dont les points singuliers sont situés à l'origine et en les singularités potentielles de \widetilde{f} , à savoir les points de

$$\Omega(\widehat{f}) = \{a_{j,1} \neq 0 \text{ tel que } a_{j,2} = 0\}$$

2. Construire une solution fondamentale $Z_\beta(\xi - \beta)$ du système $[S]$ au voisinage de n'importe quel point β de \mathbb{C}^* et savoir l'évaluer numériquement tout en contrôlant l'erreur commise.
3. Savoir évaluer numériquement $\widetilde{\mathcal{F}}(\alpha)$ en tout point α non nul du disque de convergence de \widetilde{f} , et ceci en contrôlant l'erreur commise.

7.3.1 Système différentiel linéaire associé à \widetilde{f}

La série formelle \widehat{f} vérifiant le système de passage

$$x^3 \frac{d\widehat{f}}{dx} - A_0\widehat{f} = A_1\widehat{f}$$

nous voyons que les séries $\widehat{f}^{[j]}$ satisfont pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$ aux équations différentielles

$$(7.2) \quad x^3 \frac{d\widehat{f}^{[j]}}{dx} - 2a_{j,2}\widehat{f}^{[j]} - a_{j,1}x\widehat{f}^{[j]} - x^2\lambda_j\widehat{f}^{[j]} = \frac{1}{P_j(x)} \sum_{k=1}^n B^{(j,k)} \widehat{f}^{[k]}$$

avec $B^{(j,k)}(x) \in x^4\mathbb{C}[x]$. Par analogie avec le chapitre 3, nous définissons les entiers

$$b_j = \max_{1 \leq k \leq n} (\deg(B^{(j,k)}))$$

$$\mu_j = \begin{cases} \max(b_j, p_j + 2) & \text{si } a_{j,2} \neq 0 \\ \max(b_j - 1, p_j + 1) & \text{si } a_{j,2} = 0 \end{cases}$$

$$\mu = \max_{1 \leq j \leq n} (\mu_j)$$

et nous notons

$$P_j(x) = 1 + \sum_{m=1}^{p_j} P_{j,m}x^m$$

★ Lorsque $a_{j,2} \neq 0$, nous multiplions (7.2) par le polynôme P_j et nous obtenons l'égalité

$$(7.3) \quad x \left(x^2 \frac{d\widehat{f}^{[j]}}{dx} - a_{j,1}\widehat{f}^{[j]} \right) - 2a_{j,2}(1 + P_{j,1}x)\widehat{f}^{[j]} = \sum_{k=1}^n B_1^{(j,k)} \widehat{f}^{[k]} - \sum_{m=1}^{p_j} P_{j,m}x^{m+1} \left(x^2 \frac{d\widehat{f}^{[j]}}{dx} - a_{j,1}\widehat{f}^{[j]} \right)$$

avec $B_1^{(j,k)}(x) \in x^2\mathbb{C}[x]$ et

$$\max_{1 \leq k \leq n} (\deg(B_1^{(j,k)})) = \mu_j = \max(b_j, p_j + 2)$$

En divisant alors l'égalité (7.3) par x^μ et en appliquant une transformation de Borel, nous obtenons

$$(7.4) \quad \frac{d^\mu \widetilde{f}^{[j]}}{d\xi^\mu} + \left(P_{j,1} - \frac{\xi - a_{j,1}}{2a_{j,2}} \right) \frac{d^{\mu-1} \widetilde{f}^{[j]}}{d\xi^{\mu-1}} = \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=0}^{\mu-2} \alpha_{k,\ell} \frac{d^\ell \widetilde{f}^{[k]}}{d\xi^\ell} + (\xi - a_{j,1}) \sum_{\ell=0}^{\mu-2} \beta_\ell \frac{d^\ell \widetilde{f}^{[j]}}{d\xi^\ell}$$

avec $\alpha_{k,\ell}$ et β_ℓ éléments de \mathbb{C} .

★ Lorsque $a_{j,2} = 0$, nous obtenons cette fois de (7.2) l'égalité

$$(7.5) \quad (1 + P_{j,1}x) \left(x^2 \frac{d\widehat{f}^{[j]}}{dx} - a_{j,1}\widehat{f}^{[j]} \right) - \lambda_j x \widehat{f}^{[j]} = \sum_{k=1}^n B_2^{(j,k)} \widehat{f}^{[k]} \\ - \sum_{m=2}^{p_j} P_{j,m} x^m \left(x^2 \frac{d\widehat{f}^{[j]}}{dx} - a_{j,1}\widehat{f}^{[j]} \right)$$

avec $B_2^{(j,k)}(x) \in x^2\mathbb{C}[x]$ et

$$\max_{1 \leq k \leq n} (\deg(B_2^{(j,k)})) = \mu_j = \max(b_j - 1, p_j + 1)$$

En divisant à présent (7.5) par x^μ et en appliquant une transformation de Borel, nous obtenons

$$(7.6) \quad (\xi - a_{j,1}) \frac{d^\mu \widetilde{f}^{[j]}}{d\xi^\mu} + (\lambda_j - \mu - P_{j,1}(\xi - a_{j,1})) \frac{d^{\mu-1} \widetilde{f}^{[j]}}{d\xi^{\mu-1}} = \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=0}^{\mu-2} \gamma_{k,\ell} \frac{d^\ell \widetilde{f}^{[k]}}{d\xi^\ell} \\ + (\xi - a_{j,1}) \sum_{\ell=0}^{\mu-2} \delta_\ell \frac{d^\ell \widetilde{f}^{[j]}}{d\xi^\ell}$$

avec $\gamma_{k,\ell}$ et δ_ℓ éléments de \mathbb{C} .

Des deux égalités (7.4) et (7.6), nous déduisons que le vecteur colonne

$$\widetilde{\mathcal{F}} = \begin{bmatrix} \widetilde{f} \\ \widetilde{f}' \\ \vdots \\ \frac{d^{\mu-1} \widetilde{f}}{d\xi^{\mu-1}} \end{bmatrix}$$

de dimension $n\mu$ est solution d'un système différentiel linéaire $[S]$ de dimension $n\mu$ à points singuliers les points $\xi = 0$ et $\xi = \omega \in \Omega(\widehat{f})$, qui sont tous singuliers réguliers. Afin d'interpréter les multiplicateurs de Stokes $c_{\theta(1)}^{[j]}$ du premier niveau en termes des coefficients de la matrice de connexion entre 0 et $\omega \in \Omega(\widehat{f})$ obtenue à l'aide du prolongement analytique de $\widetilde{\mathcal{F}}$ à droite de ω , nous devons étudier ce système différentiel $[S]$ au voisinage de chacune de ses singularités $\omega \in \Omega(\widehat{f})$. Précisément, nous allons voir que tous les calculs du chapitre 3 peuvent être repris sans réelle difficulté.

Fixons une singularité $\omega \in \Omega(\widehat{f})$ de \widehat{f} et définissons les deux ensembles

$$J_{\omega,1} = \{j; a_{j,1} = \omega \text{ et } a_{j,2} = 0\}$$

$$\overline{J}_{\omega,1} = \{j; a_{j,1} \neq \omega \text{ et } a_{j,2} = 0\}$$

Ecrivons à présent le système $[S]$ sous la forme¹

$$[S_\omega] \quad (\xi - \omega) \frac{dZ}{d\xi} = C_\omega(\xi - \omega)Z$$

où la matrice $C_\omega(\xi)$ de dimension $n\mu \times n\mu$ est définie par

$$C_\omega(\xi) = \left[\begin{array}{ccc|c} 0I_n & \xi I_n & 0I_n & 0I_n \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \xi I_n \\ 0I_n & \dots & \dots & 0I_n \\ \hline & & C_\omega^{(3)}(\xi) & C_\omega^{(4)}(\xi) \end{array} \right]$$

avec

- $C_\omega^{(4)}(\xi)$ est une matrice diagonale. Son $j^{\text{ème}}$ terme est $\lambda_j - \mu - P_{j,1}\xi$ si $j \in J_{\omega,1}$, de la forme $\frac{\alpha\xi + \beta\xi^2}{\xi - a_{j,1} + \omega}$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ si $j \in \bar{J}_{\omega,1}$ et de la forme $\alpha\xi + \beta\xi^2$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ si $a_{j,2} \neq 0$.
- les termes de la $j^{\text{ème}}$ ligne de $C_\omega^{(3)}(\xi)$ sont de la forme $\alpha + \beta\xi$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ si $j \in J_{\omega,1}$, de la forme $\frac{\alpha\xi + \beta\xi^2}{\xi - a_{j,1} + \omega}$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ si $j \in \bar{J}_{\omega,1}$ et de la forme $\alpha\xi + \beta\xi^2$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ si $a_{j,2} \neq 0$.

Il s'ensuit que le disque de convergence de la série $C_\omega(\xi - \omega)$ est le disque ouvert $\mathcal{D}_\omega = D(\omega, \frac{1}{\rho_\omega})$ de centre ω et de rayon

$$\frac{1}{\rho_\omega} = \min_{j \in \bar{J}_{\omega,1}} |a_{j,1} - \omega|$$

De plus, la matrice de tête $C_\omega(0)$ de $C_\omega(\xi - \omega)$ est diagonalisable, ses valeurs propres étant 0 et les $\lambda_j - \mu$ avec $j \in J_{\omega,1}$. Finalement, au vu de la structure de la matrice $C_\omega(\xi)$, il est aisé de voir que tous les calculs du chapitre 3 donnés dans le cadre des systèmes de niveau unique 1 restent valables :

- la construction des solutions fondamentales $Z_\omega(\xi - \omega)$ de $[S_\omega]$ est analogue à celle de la proposition 3.4. Ces solutions peuvent être évaluées avec contrôle d'erreur en tout point α de $\mathcal{D}_\omega \setminus \{\omega\}$ à l'aide des théorèmes 3.17 et 3.21.
- l'étude des n premières lignes de $Z_\omega(\xi - \omega)$ permet de réécrire, de façon analogue à la proposition 3.6, les formules du théorème 7.10 en termes des coefficients de la matrice de connexion entre 0 et $\omega \in \Omega(\hat{f})$ obtenue à l'aide du prolongement analytique de $\tilde{\mathcal{F}}$ à droite de ω .
- si β n'est pas une singularité du système $[S]$, nous choisissons comme solution fondamentale la solution $Z_\beta(\xi - \beta)$ vérifiant $Z_\beta(0) = I_{n\mu}$. Cette solution est analytique

¹Dans la suite de ce paragraphe, sauf mention contraire, toute matrice carrée M de dimension $n\mu$ sera découpée en blocs en

$$M = \begin{bmatrix} M^{(1)} & M^{(2)} \\ M^{(3)} & M^{(4)} \end{bmatrix}$$

où $M^{(1)}$ (resp. $M^{(4)}$) est une matrice carrée de dimension $n(\mu - 1)$ (resp. n).

sur le disque ouvert $\mathcal{D}_\beta = D(\beta, \frac{1}{\rho_\beta})$ de centre β et de rayon

$$\frac{1}{\rho_\beta} = \min_{j \in J_{\omega,1} \cup \bar{J}_{\omega,1}} |a_{j,1} - \beta|$$

De plus, nous pouvons l'évaluer en tout point α de $\mathcal{D}_\beta \setminus \{\beta\}$ tout en contrôlant l'erreur commise à l'aide du théorème 3.13.

Il reste à voir que nous pouvons évaluer numériquement avec contrôle d'erreur la série

$$\tilde{\mathcal{F}} = \begin{bmatrix} \tilde{f} \\ \tilde{f}' \\ \vdots \\ \frac{d^{\mu-1} \tilde{f}}{d\xi^{\mu-1}} \end{bmatrix}$$

en tout point $\alpha \in \mathcal{D}_0 \setminus \{0\}$ de son disque de convergence \mathcal{D}_0 . Rappelons que $\mathcal{D}_0 = D(0, \frac{1}{\rho_0})$ est le disque ouvert de centre 0 et de rayon

$$\frac{1}{\rho_0} = \min_{\omega \in \Omega(\tilde{f})} |\omega|$$

7.3.2 Contrôle d'erreur dans l'évaluation de \tilde{f}

Suivant la méthode du paragraphe 3.1.4.2, nous écrivons \hat{f} sous la forme

$$\hat{f}(x) = I_{n,1} + \sum_{m \geq 2} \hat{f}_m x^m$$

où $I_{n,1}$ désigne la première colonne de la matrice identité I_n et où \hat{f}_m est un élément de $M_{n,1}(\mathbb{C})$ pour tout $m \geq 2$. Le contrôle d'erreur sur $\tilde{\mathcal{F}}$ est basé sur le résultat suivant :

Proposition 7.11 *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $m_0 \geq \mu + 1$ et un nombre réel $W > 0$ indépendants de m tel que*

$$\forall m \geq m_0, \left| \hat{f}_m \right| \leq (m - \mu)! W(\rho_0 + \varepsilon)^{m-1}$$

Démontrons cette proposition : Notons

$$P_j(x) = 1 + \sum_{m=1}^{p_j} P_{j,m} x^m \text{ et } B^{(j,k)}(x) = \sum_{m=2}^{b_j} B_m^{(j,k)} x^m$$

En multipliant les égalités (7.2) par P_j et en appliquant une transformation de Mellin, nous obtenons les relations suivantes : pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$ et tout $m \geq \mu_j + 2$,

$$\sum_{\ell=0}^{p_j} P_{j,\ell} \left((m-2-\ell-\lambda_j) \hat{f}_{m-\ell-2}^{[j]} - 2a_{j,2} \hat{f}_{m-\ell}^{[j]} - a_{j,1} \hat{f}_{m-\ell-1}^{[j]} \right) = \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=4}^{b_j} B_\ell^{(j,k)} \hat{f}_{m-\ell}^{[k]}$$

Algorithme 7.12 (détermination de m_0 et W) L'algorithme suivant permet de calculer un entier m_0 et un nombre réel W convenables :

1. Pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$ et tout $m \geq \mu + 1$, noter

$$\widehat{\mathcal{F}}_m^{[j]} = \begin{bmatrix} \widehat{f}_{m-\mu+1}^{[j]} \\ \vdots \\ \widehat{f}_m^{[j]} \end{bmatrix} \text{ et } \widehat{\mathcal{F}}_m = \begin{bmatrix} \widehat{\mathcal{F}}_m^{[1]} \\ \vdots \\ \widehat{\mathcal{F}}_m^{[n]} \end{bmatrix}$$

2. Déterminer la matrice C_m telle que

$$\widehat{\mathcal{F}}_{m+1} = (m - \mu)C_m \widehat{\mathcal{F}}_m \text{ pour tout } m \geq \mu + 1$$

Calculer $C_\infty = \lim_{m \rightarrow +\infty} C_m$

3. Déterminer $\widehat{U} \in GL_{n\mu}(\mathbb{C})$ telle que $\widehat{U}^{-1}C_\infty \widehat{U}$ soit sous forme de Jordan

4. Noter $U = \widehat{U} \text{diag}(1, \chi, \dots, \chi^{n\mu-1})$ où $\chi = \min\left(\frac{\varepsilon}{2\sqrt{|\mathcal{J}_{0,2}|}}, 1\right)$

5. (calcul de m_0) Calculer pour tout $m \geq \mu + 1$ la matrice

$$E_m = U^{-1}(C_\infty - C_m)U$$

Déterminer, pour tout $j, \ell \in \{1, \dots, n\mu\}$, le nombre réel

$$M_{j,\ell} = \sup_{m \geq \mu+1} ((m - \mu) |E_m^{(j,\ell)}|)$$

Calculer

$$M = \left(\sum_{j,\ell=1}^{n\mu} M_{j,\ell}^2 \right)^{1/2}$$

Calculer

$$m_0 = \left\lceil \frac{2M}{\varepsilon} \right\rceil + \mu + 1$$

6. (calcul de W) Calculer

$$W = \frac{\text{cond}(U) \left\| \widehat{\mathcal{F}}_{\mu+1} \right\| (\rho_0 + \frac{\varepsilon}{2} + M)^{m_0 - \mu - 1}}{(\rho_0 + \varepsilon)^{m_0 - 2}}$$

Le résultat de la proposition 7.11 nous permet, comme dans le cas des systèmes de niveau unique 1, de contrôler l'erreur commise lors du calcul de $\widetilde{\mathcal{F}}(\alpha)$ avec $\alpha \in \mathcal{D}_0 \setminus \{0\}$:

Théorème 7.13 (contrôle d'erreur sur $\widetilde{\mathcal{F}}(\alpha)$)

Soient $\alpha \in \mathcal{D}_0 \setminus \{0\}$ et $\varepsilon > 0$ tel que $|\alpha| < \frac{1}{\rho_0 + \varepsilon}$.

Notons

$$K = W \sqrt{n\mu} \max_{0 \leq \ell \leq \mu-1} \left(\frac{1}{|\alpha|^\ell} \right) \quad (K \text{ est indépendant de } m)$$

et, pour tout $m \geq \mu - 1$,

$$\tilde{\mathcal{F}}_{[m]}(\alpha) = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{m+1} \frac{\hat{f}_k \alpha^{k-1}}{(k-1)!} \\ \vdots \\ \sum_{k=\mu}^{m+1} \frac{\hat{f}_k \alpha^{k-\mu}}{(k-\mu)!} \end{bmatrix}$$

la $m^{\text{ème}}$ somme partielle de $\tilde{\mathcal{F}}(\alpha)$.

1. Pour tout $m \geq m_0 - 2$,

$$\left\| \tilde{\mathcal{F}}(\alpha) - \tilde{\mathcal{F}}_{[m]}(\alpha) \right\| \leq K \frac{((\rho_0 + \varepsilon) |\alpha|)^{m+1}}{1 - (\rho_0 + \varepsilon) |\alpha|}$$

2. En particulier, si $\nu > 0$ est l'erreur cherchée, alors

$$m_\nu = \max \left(m_0 - 2, \left\lceil \frac{\log((1 - (\rho_0 + \varepsilon) |\alpha|) \nu) - \log(K)}{\log((\rho_0 + \varepsilon) |\alpha|)} \right\rceil \right)$$

vérifie $\left\| \tilde{\mathcal{F}}(\alpha) - \tilde{\mathcal{F}}_{[m_\nu]}(\alpha) \right\| \leq \nu$.

7.3.3 Calcul par prolongements analytiques successifs

Dans ce paragraphe, nous donnons une méthode permettant d'évaluer numériquement tous les multiplicateurs de Stokes du premier niveau de tous les systèmes différentiels linéaires de niveaux simultanés (1, 2) à coefficients rationnels. Rappelons que les calculs des paragraphes 7.3.1 et 7.3.2 s'étendent aisément au cas où la matrice des exposants de monodromie formelle est sous forme de Jordan quelconque.

Un système $[A]$ de niveaux simultanés (1, 2) et à coefficients rationnels ayant été choisi et normalisé sous la forme adéquate (cf. début du chapitre 7), nous cherchons à évaluer numériquement les multiplicateurs de Stokes du premier niveau du premier bloc de colonnes des matrices de Stokes de $\hat{Y}(x)$. Une direction anti-Stokes θ de \hat{f} étant fixée, nous notons

$$\Omega_\theta(\hat{f}) = \{\omega_1 < \dots < \omega_p\}$$

les singularités de \hat{f} sur la demi-droite d_θ ordonnées par ordre croissant. Nous raisonnons comme pour les systèmes de niveau unique 1 : le système $[S_\omega]$ étant à point singulier régulier pour tout $\omega \in \Omega_\theta(\hat{f})$, nous déterminons une solution fondamentale $Z_\omega(\xi - \omega)$ et nous réécrivons les formules du théorème 7.10 en fonction des termes de la matrice de connexion \mathfrak{S}_ω entre l'origine et ω obtenue à l'aide du prolongement analytique de $\tilde{\mathcal{F}}$ à droite de ω :

$$\tilde{\mathcal{F}}(\xi) = Z_\omega(\xi - \omega) \mathfrak{S}_\omega$$

L'évaluation numérique des matrices \mathfrak{S}_ω peut être obtenue à l'aide de l'algorithme suivant. En fait, cet algorithme permet uniquement de calculer la première matrice \mathfrak{S}_{ω_1} , mais il est aisé de voir qu'il s'étend sans difficulté aux autres matrices de connexion :

1. Si $\mathcal{D}_0 \cap \mathcal{D}_{\omega_1} \neq \emptyset$, choisissons $\alpha \in \mathcal{D}_0 \cap \mathcal{D}_{\omega_1} \cap]0, \omega_1[$ (figure 7.1).
Alors \mathfrak{S}_{ω_1} est l'unique solution de l'équation $\tilde{\mathcal{F}}(\alpha) = Z_{\omega_1}(\alpha - \omega_1)\mathfrak{S}_{\omega_1}$
2. Si $\mathcal{D}_0 \cap \mathcal{D}_{\omega_1} = \emptyset$, alors
 - 2.1. choisissons une suite $0 < \alpha_1 < \beta_1 < \dots < \alpha_p < \beta_p < \alpha_{p+1} < \omega_1$ sur d_θ tel que (figure 7.2)

$$\alpha_1 \in \mathcal{D}_0 \cap \mathcal{D}_{\beta_1}, \alpha_j \in \mathcal{D}_{\beta_{j-1}} \cap \mathcal{D}_{\beta_j} \text{ pour } j \in \{2, \dots, p\}, \text{ et } \alpha_{p+1} \in \mathcal{D}_{\beta_p} \cap \mathcal{D}_{\omega_1}$$

2.2. prolongeons analytiquement $\tilde{\mathcal{F}}$ de proche en proche dans chaque disque \mathcal{D}_{β_j} :

$$\tilde{\mathcal{F}}(\xi) = Z_{\beta_j}(\xi - \beta_j)\mathcal{V}_j$$

où la suite $(\mathcal{V}_j)_{1 \leq j \leq p}$ est définie par :

- \mathcal{V}_1 est l'unique solution de l'équation $\tilde{\mathcal{F}}(\alpha_1) = Z_{\beta_1}(\alpha_1 - \beta_1)\mathcal{V}_1$
- pour $j \in \{2, \dots, p\}$, \mathcal{V}_j est l'unique solution de l'équation

$$\tilde{\mathcal{F}}(\alpha_j) = Z_{\beta_{j-1}}(\alpha_j - \beta_{j-1})\mathcal{V}_{j-1} = Z_{\beta_j}(\alpha_j - \beta_j)\mathcal{V}_j$$

2.3. \mathfrak{S}_{ω_1} est alors l'unique solution de l'équation

$$Z_{\beta_p}(\alpha_{p+1} - \beta_p)\mathcal{V}_p = Z_{\omega_1}(\alpha_{p+1} - \omega_1)\mathfrak{S}_{\omega_1}$$

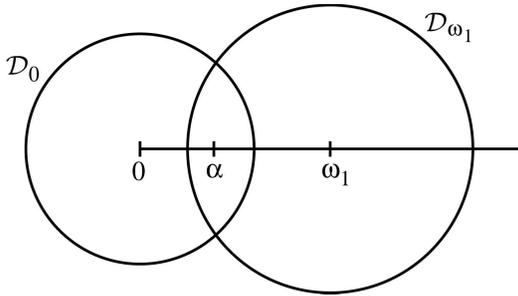


Figure 7.1

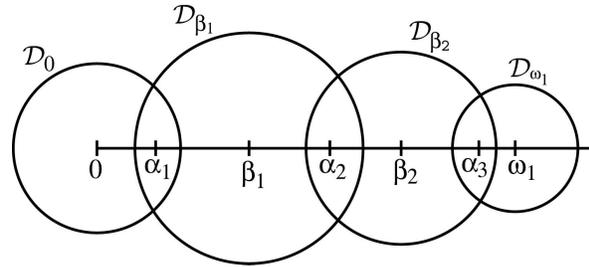


Figure 7.2

Remarque 7.14 Suivant le choix du paragraphe 7.2, nous prolongeons analytiquement $\tilde{\mathcal{F}}(\xi)$ par la droite. Ce prolongement analytique correspondant à

$$Z_{\omega_1}(\xi - \omega_1)\mathfrak{S}_{\omega_1}$$

nous évaluons Z_{ω_1} en un point α_{p+1} tel que $\arg(\alpha_{p+1} - \omega_1) = \arg \omega_1 - \pi$.

Noter qu'à chacune des étapes, nous sommes capable d'évaluer l'erreur commise. L'erreur totale dans le calcul des multiplicateurs de Stokes est alors fonction du nombre d'étapes nécessaires au calcul et des différents choix opérés.

7.4 Exemple

Nous considérons le système différentiel linéaire

$$x^3 \frac{dY}{dx} = \begin{bmatrix} 0 & x^5 & -x^4 \\ \frac{2x^5}{1+x} & x + \frac{x^2}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{x^4}{1+x^2} & 2 \end{bmatrix} Y$$

et la solution fondamentale $\widehat{Y}(x) = \widehat{F}(x)x^L e^{Q(\frac{1}{x})}$ avec $\widehat{F}(x) = I_3 + O(x^4)$,

$$L = \text{diag} \left(0, \frac{1}{2}, 0 \right) \text{ et } Q \left(\frac{1}{x} \right) = \text{diag} \left(0, -\frac{1}{x}, -\frac{1}{x^2} \right)$$

Ce système admet deux directions anti-Stokes de niveau 1 : \mathbb{R}^+ et \mathbb{R}^- , et quatre directions anti-Stokes de niveau 2 : \mathbb{R}^+ , $i\mathbb{R}^+$, \mathbb{R}^- et $i\mathbb{R}^-$. Nous nous intéressons ici uniquement à la direction anti-Stokes \mathbb{R}^+ et aux multiplicateurs de Stokes de niveau 1 associés à cette direction. En particulier, la matrice de Stokes $C_{0(1)}$ de niveau 1 est définie par

$$C_{0(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ c_0^{[2]} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Nous cherchons une valeur approchée du multiplicateur de Stokes $c_0^{[2]}$.

Nous avons $\mu = 4$ et la fonction \tilde{f} a une singularité purement ramifiée d'exposant de ramification $\{\frac{1}{2}\}$ en $\xi = 1$.

7.4.1 Détermination de $[S_1]$ et $Z_1(\xi - 1)$

Les séries $\widehat{f}^{[j]}$ vérifiant les équations

$$(7.7) \quad \begin{cases} x^3 \frac{d\widehat{f}^{[1]}}{dx} = x^5 \widehat{f}^{[2]} - x^4 \widehat{f}^{[3]} \\ x^3 \frac{d\widehat{f}^{[2]}}{dx} - \left(x + \frac{x^2}{2} \right) \widehat{f}^{[2]} = \frac{2x^5}{1+x} \widehat{f}^{[1]} \\ x^3 \frac{d\widehat{f}^{[3]}}{dx} - 2\widehat{f}^{[3]} = -\frac{x^4}{1+x^2} \widehat{f}^{[2]} \end{cases}$$

leurs transformées de Borel satisfont à

$$\begin{cases} \xi \tilde{f}^{[1]''''} + 4\tilde{f}^{[1]'''} = \tilde{f}^{[2]} - \tilde{f}^{[3]'} \\ (\xi - 1)\tilde{f}^{[2]''''} + \left(\xi + \frac{5}{2} \right) \tilde{f}^{[2]'''} + \frac{5}{2} \tilde{f}^{[2]''} = 2\tilde{f}^{[1]} \\ -2\tilde{f}^{[3]''''} + \xi \tilde{f}^{[3]'''} + \tilde{f}^{[3]''} + \xi \tilde{f}^{[3]'} + \tilde{f}^{[3]} = -\tilde{f}^{[2]} \end{cases}$$

Ainsi, le vecteur colonne $\tilde{\mathcal{F}} = \begin{bmatrix} \tilde{f} \\ \tilde{f}' \\ \tilde{f}'' \\ \tilde{f}''' \end{bmatrix}$ est solution du système différentiel linéaire

$$[S] \quad \frac{dZ}{d\xi} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{\xi} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\xi} & 0 & 0 & 0 & -\frac{4}{\xi} & 0 & 0 \\ \frac{2}{\xi-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{2(\xi-1)} & 0 & 0 & 0 & -\frac{7}{2(\xi-1)} - 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{\xi}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{\xi}{2} \end{bmatrix} Z$$

Le point $\xi = 1$ est un point singulier régulier de $[S]$ et nous obtenons pour $[S_1]$ le système suivant :

$$(\xi - 1) \frac{dZ}{d\xi} = C_1(\xi - 1)Z$$

où la matrice $C_1(\xi)$ est définie par

$$C_1(\xi) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \xi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \xi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi & 0 \\ 0 & \frac{\xi}{\xi+1} & 0 & 0 & 0 & -\frac{\xi}{\xi+1} & 0 & 0 & 0 & -\frac{4\xi}{\xi+1} & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{2} & 0 & 0 & -\frac{7}{2} - \xi & 0 \\ 0 & \frac{\xi}{2} & \frac{\xi}{2} & 0 & 0 & \frac{\xi(\xi+1)}{2} & 0 & 0 & \frac{\xi}{2} & 0 & 0 & \frac{\xi(\xi+1)}{2} \end{bmatrix}$$

La matrice de tête $C_1(0)$ de $C_1(\xi)$ est diagonalisable et une matrice de diagonalisation est

$$D_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{4}{7} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{7} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Les valeurs propres de la matrice de tête $C_1(0)$ de $C_1(\xi)$ ne diffèrent pas d'un entier, nous choisissons comme solution fondamentale du système $[S_1]$ la solution

$$Z_1(\xi - 1) = D_1 G_1(\xi - 1) (\xi - 1)^{M_1}$$

où $G_1(\xi - 1)$ est analytique sur le disque $\mathcal{D}_1 = D(1, 1)$ avec $G_1(0) = I_{12}$ et où $M_1 = \text{diag}(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -\frac{7}{2}, 0)$. Remarquer que M_1 est la matrice de tête du système obtenu à partir $[S_1]$ à l'aide de la transformation de jauge constante $T = D_1^{-1}Z$. En particulier, $G_1(\xi - 1)$ est l'unique solution analytique sur \mathcal{D}_1 vérifiant $G_1(0) = I_{12}$ de l'équation

$$(\xi - 1)G_1' = D_1^{-1}C_1(\xi - 1)D_1G_1 - G_1M_1$$

où

$$D_1^{-1}C_1(\xi)D_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \xi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \xi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi & 0 & 0 \\ \frac{4\xi}{7} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{5\xi}{7} & 0 & 0 & \xi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi \\ 0 & \frac{\xi}{\xi+1} & 0 & 0 & 0 & -\frac{\xi}{\xi+1} & 0 & 0 & 0 & -\frac{4\xi}{\xi+1} & 0 & 0 \\ -\frac{8\xi}{49} & 0 & 0 & -\frac{4\xi}{7} & 0 & 0 & 0 & \frac{10\xi}{49} & 0 & 0 & -\frac{7}{2} - \frac{2\xi}{7} & 0 \\ 0 & \frac{\xi}{2} & \frac{\xi}{2} & 0 & 0 & \frac{\xi(\xi+1)}{2} & 0 & 0 & \frac{\xi}{2} & 0 & 0 & \frac{\xi(\xi+1)}{2} \end{bmatrix}$$

Vu la structure de la solution $Z_1(\xi - 1)$, nous voyons que les dix premières colonnes de Z_1 et la dernière colonne de Z_1 sont analytiques au voisinage de 1. Quant à la onzième

colonne de $Z_1(\xi - 1)$, elle s'écrit sous la forme

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{8}{15}(\xi - 1)^{-\frac{1}{2}} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{4}{15}(\xi - 1)^{-\frac{3}{2}} \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{2}{5}(\xi - 1)^{-\frac{5}{2}} \\ 0 \\ 0 \\ (\xi - 1)^{-\frac{7}{2}} \\ 0 \end{bmatrix} + O\left((\xi - 1)^{\frac{1}{2}}\right)$$

Ainsi, en notant \mathfrak{S}_1 la matrice de connexion entre 0 et 1 obtenue à l'aide du prolongement analytique de $\tilde{\mathcal{F}}$ à droite de 1 :

$$\tilde{\mathcal{F}}(\xi) = Z_1(\xi - 1)\mathfrak{S}_1$$

nous obtenons par le théorème 7.10 la relation

$$c_0^{[2]} = -\frac{8}{15} \times \frac{2i\pi}{\Gamma(\frac{1}{2})} e^{-\frac{i\pi}{2}} \sigma_{1,11} = -\frac{16\sqrt{\pi}}{15} \sigma_{1,11}$$

Noter que, par ailleurs, nous savons que $c_0^{[2]} \in i\mathbb{R}$. En effet, les séries $\tilde{\mathcal{F}}(\xi)$ et $G_1(\xi - 1)$ sont à coefficients réels et la matrice \mathfrak{S}_1 vérifie pour tout $\alpha \in]0, 1[$ la relation $\tilde{\mathcal{F}}(\alpha) = Z_1(\alpha - 1)\mathfrak{S}_1$ avec

$$Z_1(\alpha - 1) = D_1 G_1(\alpha - 1)(\alpha - 1)^{M_1}$$

où $D_1 \in M_{12}(\mathbb{R})$ et $(\alpha - 1)^{M_1} = \text{diag}\left(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -\frac{i}{(1-\alpha)^3\sqrt{1-\alpha}}, 0\right)$.

Dans la suite, nous choisissons $\alpha = \frac{17}{22}$.

7.4.2 Approximation de $\tilde{\mathcal{F}}(\alpha)$ et $Z_1(\alpha - 1)$

7.4.2.1 Sur les difficultés d'applications de la méthode initiale du calcul effectif

Commençons par regarder l'approximation de $\tilde{\mathcal{F}}(\alpha)$. Nous choisissons $\varepsilon = \frac{7}{25}$. En appliquant une transformation de Mellin aux équations (7.7) et en notant

$$\widehat{\mathcal{F}}_m = \begin{bmatrix} \widehat{\mathcal{F}}_m^{[1]} \\ \widehat{\mathcal{F}}_m^{[2]} \\ \widehat{\mathcal{F}}_m^{[3]} \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \widehat{\mathcal{F}}_m^{[j]} = \begin{bmatrix} \widehat{f}_{m-3}^{[j]} \\ \widehat{f}_{m-2}^{[j]} \\ \widehat{f}_{m-1}^{[j]} \\ \widehat{f}_m^{[j]} \end{bmatrix}$$

nous obtenons pour tout $m \geq 5$ l'égalité

$$\widehat{\mathcal{F}}_{m+1} = (m-5)C_m \widehat{\mathcal{F}}_m$$

avec

$$C_m = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{m-4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{m-4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{m-4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{(m+1)(m-4)} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{(m+1)(m-4)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{m-4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{m-4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{m-4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{m-4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2m-3}{2m-8} & \frac{2m-3}{2m-8} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{m-4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{m-4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{m-4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2m-8} & 0 & 0 & 0 & \frac{m-3}{2m-8} & 0 & \frac{m-3}{2m-8} & 0 \end{bmatrix}$$

La matrice limite C_∞ étant

$$C_\infty = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

nous choisissons comme matrice de Jordanisation de C_∞ la matrice \widehat{U} définie par

$$\widehat{U} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La matrice U est alors définie par

$$U = \widehat{U} \bigoplus_{j=0}^{11} \left(\frac{7}{50} \right)^j$$

Dans ce cas, le calcul de $E_m = U^{-1}(C_\infty - C_m)U$ permet de montrer qu'il est nécessaire de calculer la 17555121010^{ème} somme partielle de $\widetilde{\mathcal{F}}(\alpha)$ pour obtenir une erreur de 10^{-1} !!!

Nous voyons apparaître ici un des problèmes de la méthode que nous avons décrite dans cette thèse. Si nous l'avions déjà signalé dans l'exemple 1 du chapitre 3 (cf. paragraphe 3.1.5), nous voyons ici que le nombre de termes peut exploser dans des proportions importantes. Ceci est dû au fait que nous avons choisi ici un ε petit et que la taille des matrices utilisées est grande. Remarquer que si nous avions pu éviter cette difficulté dans les exemples traités aux chapitres 3 et 5 par un choix convenable de α , il était impossible d'y échapper ici. En effet, les matrices limites que nous devons utiliser, aussi bien dans le contrôle d'erreur de $\mathcal{F}(\alpha)$ que dans celui de $G_1(\alpha - 1)$, ne sont jamais diagonalisables, et nous devons donc recourir en principe à chaque fois au nombre χ et à la matrice U .

Signalons que pour l'approximation de $G_1(\alpha - 1)$, nous rencontrons exactement les mêmes difficultés : les douze colonnes de G_1 s'étudiant séparément, nous obtenons pour tout $\ell \in \{1, \dots, 12\}$ une relation de la forme

$$\mathcal{G}_{1,m+1}^{(\ell)} = H_{1,m}^{(\ell)} \mathcal{G}_{1,m}^{(\ell)} \text{ pour tout } m \geq 1$$

où $H_{1,m}^{(\ell)}$ est une matrice carrée de dimension 24 qui converge vers une matrice constante $H_{1,\infty}$ indépendante de ℓ . En notant \widehat{V} une matrice de Jordanisation de $H_{1,\infty}$, nous voyons que la diagonale de $\widehat{V}^{-1}H_{1,\infty}\widehat{V}$ admet onze blocs de Jordan égaux à

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

une matrice scalaire égale à $[0]$ et une matrice scalaire égale à $[-1]$. Finalement, en choisissant $\varepsilon = \sqrt{11}$ et en posant $\chi = \frac{1}{2}$ et

$$V = \widehat{V} \bigoplus_{j=0}^{11} \frac{1}{2^j}$$

nous voyons qu'il est nécessaire de calculer la 1398732322^{ème} somme partielle de $G_1(\alpha - 1)$ pour obtenir une erreur de 10^{-1} .

7.4.2.2 Sur une simplification de la méthode initiale du calcul effectif

Nous proposons maintenant sur cet exemple une version plus fine de la méthode présentée dans cette thèse qui permet de diminuer de façon conséquente le nombre de

termes à calculer. Nous utilisons de façon conjointe les structures des matrices $\widehat{U}^{-1}C_\infty\widehat{U}$ et $\widehat{V}^{-1}H_{1,\infty}\widehat{V}$ et la place de la singularité de \widetilde{f} dans le plan complexe. Rappelons que $\widehat{U}^{-1}C_\infty\widehat{U}$ (resp. $\widehat{V}^{-1}H_{1,\infty}\widehat{V}$) est une forme de Jordan de la matrice limite C_∞ (resp. $H_{1,\infty}$).

Cette nouvelle méthode consiste à supprimer les termes responsables de l'explosion des calculs, à savoir le nombre χ et la matrice U (ou V).

★ Commençons par étudier la matrice $\widehat{U}^{-1}C_\infty\widehat{U}$.

Nous pouvons calculer directement les valeurs singulières de cette matrice : elles valent 0 et 1. Par conséquent,

$$\left\| \widehat{U}^{-1}C_\infty\widehat{U} \right\| = 1 = \rho_0$$

En effet, $\frac{1}{\rho_0} = 1$ est le rayon du disque de convergence de la série entière \widetilde{f} (\widetilde{f} n'admet qu'une seule singularité et elle est placée au point $\xi = 1$). Ainsi, sur cet exemple, l'introduction du nombre χ , et donc de la matrice U , est inutile (cf. démonstration de la proposition 3.11 pour l'intérêt de ces deux termes). En reprenant alors l'algorithme 7.12, nous obtenons les simplifications suivantes :

- $E_m = \widehat{U}^{-1}(C_\infty - C_m)\widehat{U}$;
- $M = \left(\sum_{j,\ell=1}^{12} M_{j,\ell}^2 \right)^{1/2}$ avec $M_{j,\ell} = \sup_{m \geq 5} \left((m-4) \left| E_m^{(j,\ell)} \right| \right)$;
- $m_0 = \left\lceil \frac{M}{\varepsilon} \right\rceil + 5$;
- $W = \frac{\text{cond}(\widehat{U}) \left\| \widehat{\mathcal{F}}_5 \right\| (1+M)^{m_0-5}}{(1+\varepsilon)^{m_0-2}}$

et ces différents termes satisfont toujours à l'inégalité

$$\left| \widehat{f}_m \right| \leq (m-\mu)! W(1+\varepsilon)^{m-1} \text{ pour tout } m \geq m_0$$

Par suite, le théorème 7.13 peut être appliqué. Nous consignons dans le tableau ci-dessous le nombre de termes m_ν nécessaires pour obtenir une précision de $10^{-\nu}$, $\nu \in \{1, \dots, 10\}$, dans le calcul de $\widetilde{\mathcal{F}}(\alpha)$ avec $\alpha = \frac{17}{22}$. Nous avons choisi $\varepsilon = \frac{1}{8}$:

ν	m_ν
10^{-1}	583
10^{-2}	599
10^{-3}	615
10^{-4}	632
10^{-5}	648
10^{-6}	665
10^{-7}	681
10^{-8}	698
10^{-9}	714
10^{-10}	731

★ Nous voyons que ce raisonnement peut également être appliqué au calcul approché de $G_1(\alpha - 1)$. En effet, nous avons encore

$$\left\| \widehat{V}^{-1} H_{1,\infty} \widehat{V} \right\| = 1 = \rho_1$$

où $\frac{1}{\rho_1} = 1$ désigne le rayon du disque de convergence de la série entière G_1 . Les modifications dans le calcul sont analogues à celles que nous avons évoquées ci-dessus. Par suite, nous obtenons le tableau suivant donnant, pour une précision de $10^{-\nu}$ fixée, $\nu \in \{1, \dots, 10\}$, le nombre de termes m_ν nécessaires au calcul d'une valeur approchée de $G_1(\alpha - 1)$ avec $\alpha = \frac{17}{22}$. Nous avons choisi pour ces calculs $\varepsilon = \frac{17}{11}$:

ν	m_ν
10^{-1}	195
10^{-2}	199
10^{-3}	204
10^{-4}	208
10^{-5}	212
10^{-6}	216
10^{-7}	220
10^{-8}	225
10^{-9}	229
10^{-10}	233

★ Avant de revenir plus en détail sur cette simplification des calculs dans l'annexe A, terminons notre exemple en déterminant une valeur approchée du multiplicateur de Stokes $c_0^{[2]}$.

7.4.3 Approximation de \mathfrak{S}_1 et $c_0^{[2]}$

Nous partons des erreurs en 10^{-5} sur $\tilde{\mathcal{F}}(\alpha)$ et $G_1(\alpha - 1)$. La matrice

$$\check{\mathcal{F}} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{25000} \\ -\frac{42991}{100000} \\ -\frac{1}{25000} \\ -\frac{101}{100000} \\ -\frac{75231}{25000} \\ -\frac{23}{50000} \\ -\frac{151}{20000} \\ -\frac{491951}{20000} \\ -\frac{409}{100000} \\ -\frac{247}{5000} \\ -\frac{13731823}{50000} \\ -\frac{801}{25000} \end{bmatrix}$$

vérifiant $\left| \tilde{\mathcal{F}}_{[648]}(\alpha) - \check{\mathcal{F}} \right| \leq 10^{-5}$, nous avons

$$\left\| \tilde{\mathcal{F}}(\alpha) - \check{\mathcal{F}} \right\| \leq 6 \times 10^{-5}$$

De même, la matrice

$$\check{G}_1 = \begin{bmatrix} \frac{99999}{100000} & \frac{7}{50000} & 0 & -\frac{22727}{100000} & 0 & -\frac{7}{50000} & \frac{1291}{50000} & 0 & 0 & -\frac{253}{100000} & 0 & 0 \\ -\frac{29}{25000} & \frac{99999}{100000} & 0 & \frac{1}{20000} & -\frac{22727}{100000} & 0 & 0 & \frac{341}{12500} & 0 & 0 & \frac{313}{50000} & 0 \\ 0 & \frac{1}{20000} & \frac{20001}{20000} & 0 & 0 & -\frac{11361}{50000} & 0 & 0 & \frac{2587}{100000} & 0 & 0 & -\frac{19}{100000} \\ 0 & -\frac{271}{100000} & 0 & \frac{99999}{100000} & \frac{3}{20000} & \frac{271}{100000} & -\frac{22727}{100000} & 0 & -\frac{3}{20000} & \frac{3669}{100000} & -\frac{1}{20000} & 0 \\ \frac{783}{50000} & 0 & 0 & -\frac{91}{100000} & \frac{99999}{100000} & 0 & \frac{1}{25000} & -\frac{4937}{20000} & 0 & 0 & \frac{1377}{100000} & 0 \\ 0 & -\frac{19}{20000} & -\frac{19}{20000} & 0 & \frac{1}{20000} & \frac{19983}{20000} & 0 & 0 & -\frac{11409}{50000} & 0 & -\frac{1}{100000} & \frac{2497}{100000} \\ 0 & \frac{2023}{50000} & 0 & 0 & -\frac{73}{25000} & -\frac{809}{20000} & \frac{99999}{100000} & \frac{1}{6250} & \frac{73}{25000} & -\frac{3891}{10000} & \frac{7}{10000} & -\frac{3}{20000} \\ -\frac{14209}{100000} & 0 & 0 & \frac{611}{50000} & 0 & 0 & -\frac{37}{50000} & \frac{117761}{100000} & 0 & \frac{1}{25000} & \frac{909}{10000} & 0 \\ 0 & \frac{1251}{100000} & \frac{1251}{100000} & 0 & -\frac{19}{20000} & \frac{53}{5000} & 0 & \frac{1}{20000} & \frac{25293}{25000} & 0 & \frac{1}{5000} & -\frac{10831}{50000} \\ \frac{1}{10000} & -\frac{45127}{100000} & -\frac{1}{12500} & 0 & \frac{2239}{50000} & \frac{45111}{100000} & 0 & -\frac{41}{12500} & -\frac{2243}{50000} & \frac{11219}{4000} & -\frac{4}{625} & \frac{77}{25000} \\ \frac{953}{100000} & -\frac{1}{25000} & 0 & \frac{689}{25000} & 0 & \frac{1}{25000} & -\frac{263}{50000} & -\frac{149}{12500} & 0 & \frac{17}{25000} & \frac{106493}{100000} & 0 \\ \frac{3}{100000} & -\frac{10877}{100000} & -\frac{10877}{100000} & 0 & \frac{627}{50000} & -\frac{8369}{100000} & 0 & -\frac{99}{100000} & -\frac{991}{10000} & 0 & -\frac{67}{50000} & \frac{22889}{25000} \end{bmatrix}$$

satisfait à $|G_{1,[212]}(\alpha - 1) - \check{G}_1| \leq 10^{-5}$, et donc à

$$\|G_1(\alpha - 1) - \check{G}_1\| \leq 13 \times 10^{-5}$$

Par suite, $\check{Z}_1 = D_1 \check{G}_1 (\alpha - 1)^{M_1}$ avec

$$(\alpha - 1)^{M_1} = \text{diag} \left(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1 - i \left(\frac{22}{7} \right)^{\frac{7}{2}}, 1 \right)$$

est une approximation de $Z_1(\alpha - 1)$ et nous avons

$$\|Z_1(\alpha - 1) - \check{Z}_1\| \leq 4 \times 10^{-2}$$

La matrice \check{Z}_1 étant inversible avec $s_{\check{Z}_1, \min} \approx 0.74$, l'unique matrice $\check{\mathfrak{S}}_1$ définie par $\check{\mathcal{F}} = \check{Z}_1 \check{\mathfrak{S}}_1$ vérifie

$$\|\mathfrak{S}_1 - \check{\mathfrak{S}}_1\| \leq 14 \times 10^{-2}$$

Par conséquent,

$$\check{c}_0^{[2]} = -\frac{16\sqrt{\pi}}{15} \check{\sigma}_{1,11}$$

$$= \frac{1091669916480813922819077363564255697606337729867457407257123475}{6990057225055102568742898701136925557692972151131035009663575377} i \sqrt{110\pi}$$

satisfait à $|c_0^{[2]} - \check{c}_0^{[2]}| \leq 27 \times 10^{-2}$. Une valeur approchée à 10^{-2} près de $\check{c}_0^{[2]}$ étant $2.9i$, nous en déduisons que

$$\boxed{|c_0^{[2]} - 2.9i| \leq 3 \times 10^{-1}}$$

Par suite, le multiplicateur de Stokes $c_0^{[2]}$ est non nul.

Annexe A

Simplification de la méthode du calcul effectif des multiplicateurs de Stokes

Nous regardons ici dans quels cas la méthode du calcul effectif des multiplicateurs de Stokes peut être simplifiée. Nous reprenons les notations usuelles données dans les chapitres 3, 5 et 7.

La simplification de la méthode que nous avons donnée dans cette thèse est basée sur le résultat classique suivant :

Lemme A.1 *Les valeurs singulières d'une matrice nilpotente de Jordan sont 0 et 1.*

Reprenant les différentes formes de Jordan des matrices limites étudiées dans le cas des systèmes de niveau unique 1 (cf. paragraphe 3.1.4), nous voyons que leurs valeurs singulières sont

$$0, 1 \text{ et les } \frac{1}{|a_j - \beta|} \text{ avec } a_j \neq \beta \text{ et } \beta \in \mathbb{C}^*$$

En effet, pour tout $\beta \in \mathbb{C}^*$, les seuls blocs de Jordan obtenus sont des matrices nilpotentes de Jordan et les matrices scalaires

$$[0] \text{ et } \left[\frac{1}{a_j - \beta} \right] \text{ avec } a_j \neq \beta$$

De même, pour les systèmes de niveaux simultanés (1, 2) (cf. paragraphe 7.3), les valeurs singulières des formes de Jordan des matrices limites sont

$$0, 1 \text{ et les } \frac{1}{|a_{j,1} - \beta|} \text{ avec } j \text{ tel que } a_{j,2} = 0 \text{ et } a_{j,1} \neq \beta, \beta \in \mathbb{C}^*$$

Noter que pour les systèmes de niveau unique $r \geq 2$, nous n'avons pas en général un tel résultat puisque nous avons des blocs de Jordan de la forme

$$\begin{bmatrix} \alpha & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \alpha \end{bmatrix} \text{ avec } \alpha \neq 0$$

Précisément, ce type de matrice intervient si, et seulement si, il existe au moins un polynôme q_j non réduit à un monôme (cf. paragraphes 5.3.2 et 5.3.3). En revanche, si tous les polynômes q_j sont réduits à des monômes, nous retrouvons les mêmes types de blocs de Jordan que dans les deux autres cas. En particulier, les valeurs singulières des formes de Jordan des matrices limites sont

$$0, 1 \text{ et les } \frac{1}{|a_{j,r} - \beta|} \text{ avec } a_{j,r} \neq \beta \text{ et } \beta \in \mathbb{C}^*$$

En conséquence, le raisonnement ci-dessous peut être appliqué aux systèmes de niveau unique $r \geq 2$ uniquement si tous les polynômes q_j sont réduits à des monômes.

★ Considérons, pour le moment, un système de niveau unique 1

Nous supposons également, pour simplifier, que la matrice des exposants de monodromie formelle est diagonale. Le lecteur pourra se reporter au paragraphe 3.1 pour la méthode initiale du calcul effectif des multiplicateurs de Stokes dans ce cas.

Rappelons que le calcul d'une valeur approchée de $\tilde{\mathcal{F}}(\alpha)$ ne pose aucun problème, puisque la matrice limite C_∞ est diagonalisable.

Les difficultés apparaissent réellement lors des calculs des valeurs approchées de $Z_\beta(\alpha - \beta)$, α dans $\mathcal{D}_\beta \setminus \{\beta\}$, \mathcal{D}_β étant le disque ouvert de centre β et de rayon

$$\frac{1}{\rho_\beta} = \min_{a_j \neq \beta} (|a_j - \beta|)$$

Ces difficultés sont dues, comme dans l'exemple que nous venons de traiter, à l'utilisation du nombre χ et de la matrice U (cf. algorithmes 3.12, 3.15 et 3.19 et exemples). En fait, si nous regardons précisément l'intérêt de ces termes (cf. démonstration de la proposition 3.11 pour leurs introductions), nous voyons que ceux-ci n'ont plus lieu d'être à partir du moment où la norme d'une forme de Jordan de la matrice limite est égale à ρ_β . Suivant la remarque donnée au début de ce paragraphe sur le calcul des valeurs singulières des matrices limites, nous voyons que ceci est le cas si, et seulement si, $\rho_\beta \geq 1$, *i.e.*, si, et seulement si, le rayon du disque \mathcal{D}_β est inférieur à 1.

Sous ces conditions, les algorithmes 3.12, 3.15 et 3.19 se simplifient de la manière suivante :

Algorithme A.2 (variante de l'algorithme 3.12) L'algorithme suivant permet de calculer un entier $m_0^{(\ell)}$ et un nombre réel W_ℓ convenables :

1. Pour tout $j \in \{1, \dots, n\mu\}$ et tout $m \geq 1$, noter

$$\mathcal{Z}_{\beta,m}^{(j,\ell)} = \begin{bmatrix} Z_{\beta,m-1}^{(j,\ell)} \\ Z_{\beta,m}^{(j,\ell)} \end{bmatrix} \text{ et } \mathcal{Z}_{\beta,m}^{(\ell)} = \begin{bmatrix} \mathcal{Z}_{\beta,m}^{(1,\ell)} \\ \vdots \\ \mathcal{Z}_{\beta,m}^{(n\mu,\ell)} \end{bmatrix}$$

2. Déterminer la matrice $V_{\beta,m}^{(\ell)}$ telle que

$$\mathcal{Z}_{\beta,m+1}^{(\ell)} = V_{\beta,m}^{(\ell)} \mathcal{Z}_{\beta,m}^{(\ell)} \text{ pour tout } m \geq 1$$

Calculer $V_{\beta,\infty} = \lim_{m \rightarrow +\infty} V_{\beta,m}^{(\ell)}$

3. Déterminer $\widehat{U} \in GL_{2n\mu}(\mathbb{C})$ telle que $\widehat{U}^{-1}V_{\beta,\infty}\widehat{U}$ soit sous forme de Jordan
4. (calcul de $m_0^{(\ell)}$) Calculer pour tout $m \geq 1$ la matrice

$$E_{\beta,m}^{(\ell)} = \widehat{U}^{-1}(V_{\beta,\infty} - V_{\beta,m}^{(\ell)})\widehat{U}$$

Déterminer, pour tout $j, k \in \{1, \dots, 2n\mu\}$, le nombre réel

$$M_{\ell,j,k} = \sup_{m \geq 1} \left(m \left| E_{\beta,m}^{(\ell)(j,k)} \right| \right)$$

Calculer

$$M_\ell = \left(\sum_{j,k=1}^{2n\mu} M_{\ell,j,k}^2 \right)^{1/2}$$

Calculer

$$m_0^{(\ell)} = \left\lceil \frac{M_\ell}{\varepsilon} \right\rceil + 1$$

5. (calcul de W_ℓ) Calculer

$$W_\ell = \frac{\text{cond}(\widehat{U}) \left\| \mathcal{Z}_{\beta,1}^{(\ell)} \right\| (\rho_\beta + M_\ell)^{m_0^{(\ell)} - 1}}{(\rho_\beta + \varepsilon)^{m_0^{(\ell)} - 1}}$$

Algorithme A.3 (variante de l'algorithme 3.15) L'algorithme suivant permet de calculer un entier $m_0^{(\ell)}$ et un nombre réel W_ℓ convenables :

1. Pour tout $j \in \{1, \dots, n\mu\}$ et tout $m \geq 1$, noter

$$\mathcal{G}_{\omega,m}^{(j,\ell)} = \begin{bmatrix} G_{\omega,m-1}^{(j,\ell)} \\ G_{\omega,m}^{(j,\ell)} \end{bmatrix} \text{ et } \mathcal{G}_{\omega,m}^{(\ell)} = \begin{bmatrix} \mathcal{G}_{\omega,m}^{(1,\ell)} \\ \vdots \\ \mathcal{G}_{\omega,m}^{(n\mu,\ell)} \end{bmatrix}$$

2. Déterminer la matrice $H_{\omega,m}^{(\ell)}$ telle que

$$\mathcal{G}_{\omega,m+1}^{(\ell)} = H_{\omega,m}^{(\ell)} \mathcal{G}_{\omega,m}^{(\ell)} \text{ pour tout } m \geq 1$$

Calculer $H_{\omega,\infty} = \lim_{m \rightarrow +\infty} H_{\omega,m}^{(\ell)}$

3. Déterminer $\widehat{U} \in GL_{2n\mu}(\mathbb{C})$ telle que $\widehat{U}^{-1}H_{\omega,\infty}\widehat{U}$ soit sous forme de Jordan
4. (calcul de $m_0^{(\ell)}$) Calculer pour tout $m \geq 1$ la matrice

$$E_{\omega,m}^{(\ell)} = \widehat{U}^{-1}(H_{\omega,\infty} - H_{\omega,m}^{(\ell)})\widehat{U}$$

Déterminer, pour tout $j, k \in \{1, \dots, 2n\mu\}$, le nombre réel

$$M_{\ell,j,k} = \sup_{m \geq 1} \left(m \left| E_{\omega,m}^{(\ell)(j,k)} \right| \right)$$

Calculer

$$M_\ell = \left(\sum_{j,k=1}^{2n\mu} M_{\ell,j,k}^2 \right)^{1/2}$$

Calculer

$$m_0^{(\ell)} = \left\lceil \frac{M_\ell}{\varepsilon} \right\rceil + 1$$

5. (calcul de W_ℓ) Calculer

$$W_\ell = \frac{\text{cond}(\widehat{U}) \left\| \mathcal{G}_{\omega,1}^{(\ell)} \right\| (\rho_\omega + M_\ell)^{m_0^{(\ell)} - 1}}{(\rho_\omega + \varepsilon)^{m_0^{(\ell)} - 1}}$$

Algorithme A.4 (variante de l'algorithme 3.19) L'algorithme suivant permet de calculer un entier $m_0^{(\ell)}$ et un nombre réel W_ℓ convenables :

1. Déterminer $\mathfrak{g}_{\omega,m}^{(\ell)}$ et la relation (3.12), puis calculer $\mathcal{H}_{\omega,\infty}^{(\ell)}$
2. Déterminer $\widehat{U} \in GL_{q_\ell n \mu(\mu+1)}(\mathbb{C})$ telle que $\widehat{U}^{-1} \mathcal{H}_{\omega,\infty}^{(\ell)} \widehat{U}$ soit sous forme de Jordan
3. (calcul de $m_0^{(\ell)}$) Calculer pour tout $m \geq \mu$ la matrice

$$E_{\omega,m}^{(\ell)} = \widehat{U}^{-1} (\mathcal{H}_{\omega,\infty}^{(\ell)} - \mathcal{H}_{\omega,m}^{(\ell)}) \widehat{U}$$

Déterminer, pour tout $j, k \in \{1, \dots, q_\ell n \mu(\mu+1)\}$, le nombre réel

$$M_{\ell,j,k} = \sup_{m \geq \mu} ((m - \mu + 1) |E_{\omega,m}^{(\ell)(j,k)}|)$$

Calculer

$$M_\ell = \left(\sum_{j,k=1}^{q_\ell n \mu(\mu+1)} M_{\ell,j,k}^2 \right)^{1/2}$$

Calculer

$$m_0^{(\ell)} = \left\lceil \frac{M_\ell}{\varepsilon} \right\rceil + \mu$$

4. (calcul de W_ℓ) Calculer

$$W_\ell = \frac{\text{cond}(\widehat{U}) \left\| \mathfrak{g}_{\omega,\mu}^{(\ell)} \right\| (\rho_\omega + M_\ell)^{m_0^{(\ell)} - \mu}}{(\rho_\omega + \varepsilon)^{m_0^{(\ell)} - 1}}$$

Noter que, pour chacune des variantes, les trois premiers points restent identiques à ceux des algorithmes initiaux. Noter également que ces algorithmes ne modifient en rien la méthode du contrôle d'erreur. Ils permettent simplement de déterminer d'autres valeurs convenables pour $m_0^{(\ell)}$ et W_ℓ , ces valeurs étant dans tous les cas plus "simples" que les valeurs obtenues à l'aide des algorithmes initiaux.

Rappelons que ces trois algorithmes ne sont applicables que dans le cas où les rayons des disques \mathcal{D}_β et \mathcal{D}_ω sont inférieurs à 1. Ainsi, en reprenant la procédure de calcul des multiplicateurs de Stokes par prolongements analytiques successifs (cf. paragraphe 3.1.3), nous voyons que cette nouvelle méthode de calcul est utilisable dès lors que toutes les singularités ω de \tilde{f} vérifient $|\omega| \leq 1$.

Ceci étant, il est aisé de voir que le raisonnement que nous venons de faire s'étend sans difficulté au cas des systèmes de niveau unique 1 dont la matrice des exposants de monodromie formelle est sous forme de Jordan quelconque.

Nous allons à présent voir qu'il est toujours possible d'appliquer cette nouvelle méthode. Fixons un système $[A]$ de niveau unique 1 et normalisé de façon adéquate (cf. début du chapitre 3) :

$$[A] \quad x^2 \frac{dY}{dx} = (\text{diag}(0I_{n_1}, a_2 I_{n_2}, \dots, a_J I_{n_J}) + xL + B(x)) Y$$

avec $B(x) \in M_n(x^2\mathbb{C}(x))$ sans pôle à l'origine. Rappelons que la solution fondamentale formelle de $[A]$ considérée est alors $\hat{Y}(x) = \hat{F}(x)x^L e^{Q(\frac{1}{x})}$ avec

- ★ $\hat{F}(x) = I_n + O(x^2) \in M_n(\mathbb{C}[[x]])$;
- ★ $L = \bigoplus_{j=1}^J L_j$, où chaque L_j est un bloc de Jordan de L de dimension $n_j \geq 1$ et de valeur propre λ_j vérifiant $\lambda_1 = 0$ et $\text{Re}(\lambda_j) \in [0, 1[$ pour tout $j \in \{1, \dots, J\}$;
- ★ $Q(\frac{1}{x}) = \bigoplus_{j=1}^J (-\frac{a_j}{x} I_{n_j})$ de sorte que $a_1 = 0$.

Notons $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{C}^*$ les singularités de \tilde{f} (premier bloc de colonne de \tilde{F}). S'il existe un élément j_0 de $\{1, \dots, p\}$ tel que $|\alpha_{j_0}| > 1$, nous effectuons le changement de variable

$$x = \alpha y \text{ avec } \alpha = \max_{1 \leq j \leq p} |\alpha_j|$$

Nous obtenons le système

$$y^2 \frac{dY}{dy} = \left(\text{diag} \left(0I_{n_1}, \frac{a_2}{\alpha} I_{n_2}, \dots, \frac{a_J}{\alpha} I_{n_J} \right) + yL + B(\alpha y) \right) Y$$

La solution fondamentale formelle correspondant à $\hat{Y}(x)$ est alors définie par

$$\hat{Y}(y) = \hat{Y}(\alpha y) = \hat{G}(y)y^L e^{Q(\frac{1}{\alpha y})} \text{ avec } \hat{G}(y) = \hat{F}(\alpha y)\alpha^L$$

et $\hat{Y}(y)$ est $\hat{Y}(x)$ ont les mêmes matrices de Stokes. Remarquer que le facteur série formelle $\hat{G}(y)$ n'est pas normalisé en général sous la forme adéquate : nous avons en effet $\hat{G}(y) = \alpha^L + O(y^2)$ au lieu de $\hat{G}(y) = I_n + O(y^2)$. En effectuant alors la transformation de jauge constante $Z = \alpha^{-L}Y$, nous obtenons le système

$$[A] \quad y^2 \frac{dZ}{dy} = \left(\text{diag} \left(0I_{n_1}, \frac{a_2}{\alpha} I_{n_2}, \dots, \frac{a_J}{\alpha} I_{n_J} \right) + yL + \alpha^{-L}B(\alpha y)\alpha^L \right) Z$$

dont la solution fondamentale formelle

$$\hat{Z}(y) = \hat{K}(y)y^L e^{Q(\frac{1}{\alpha y})} \text{ avec } \hat{K}(y) = \alpha^{-L}\hat{F}(\alpha y)\alpha^L = I_n + O(y^2)$$

a les mêmes matrices de Stokes que $\widehat{Y}(x)$. Sous cette forme, nous pouvons appliquer sans aucune difficulté notre méthode de calcul. En effet, les singularités de la transformée de Borel \widetilde{k} du premier bloc de colonnes \widehat{k} de \widehat{K} sont les points $\frac{a_j}{\alpha}$ qui sont par construction de module inférieur à 1.

★ Le raisonnement ci-dessus s'étend sans difficulté au premier niveau des systèmes de niveaux simultanés (1, 2). En particulier, si $[A]$ est un système de niveaux (1, 2) normalisé de façon adéquate (cf. début du chapitre 7) :

$$[A] \quad x^3 \frac{dY}{dx} = \left(\text{diag}(0I_{n_1}, (2a_{2,2} + a_{2,1}x)I_{n_2}, \dots, (2a_{J,2} + a_{J,1}x)I_{n_J}) + x^2L + B(x) \right) Y$$

avec $B(x) \in M_n(x^4\mathbb{C}(x))$ sans pôle à l'origine, et si $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{C}^*$ sont les singularités de \widetilde{f} , nous devons considérer le système

$$[\mathcal{A}] \quad y^3 \frac{dZ}{dy} = \left(\text{diag} \left(0I_{n_1}, \left(\frac{2a_{2,2}}{\alpha^2} + \frac{a_{2,1}}{\alpha} y \right) I_{n_2}, \dots, \left(\frac{2a_{J,2}}{\alpha^2} + \frac{a_{J,1}}{\alpha} y \right) I_{n_J} \right) + y^2L + \alpha^{-L}B(\alpha y)\alpha^L \right) Z$$

avec

$$\alpha = \max \left(\max_{1 \leq j \leq p} |\alpha_j|, 1 \right)$$

★ Lorsque le système est de niveau unique $r \geq 2$, cette nouvelle procédure de calcul ne s'applique pas toujours : il est nécessaire que tous les polynômes des exponentielles de la partie irrégulière soient réduits à des monômes. Dans ce cas, le raisonnement précédent s'applique sans difficulté. De plus, si $[A]$ est un tel système normalisé de façon adéquate (cf. début du chapitre 5) :

$$[A] \quad x^{r+1} \frac{dY}{dx} = \left(r \text{diag}(0I_{n_1}, a_{2,r}I_{n_2}, \dots, a_{J,r}I_{n_J}) + x^rL + B(x) \right) Y$$

avec $B(x) \in M_n(x^{2r}\mathbb{C}(x))$ sans pôle à l'origine, et si $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{C}^*$ sont les singularités de \widetilde{f} , nous devons considérer le système

$$[\mathcal{A}] \quad y^{r+1} \frac{dZ}{dy} = \left(r \text{diag} \left(0I_{n_1}, \frac{a_{2,r}}{\alpha^r} I_{n_2}, \dots, \frac{a_{J,r}}{\alpha^r} I_{n_J} \right) + y^rL + \alpha^{-L}B(\alpha y)\alpha^L \right) Z$$

avec

$$\alpha = \max \left(\max_{1 \leq j \leq p} \sqrt[r]{|\alpha_j|}, 1 \right)$$

Noter que le passage au système r -réduit montre que les singularités du nouveau \widetilde{f} sont de module inférieur à 1.

Bibliographie

- [AS70] M. Abramowitz, I. A. Stegun, *Handbook of mathematical functions*, Dover Publications, Inc., New York, 1970
- [Bal80] W. Balser, *Zum einzigkeitssatz in der invariantentheorie meromorpher differentialgleichungen*, Journal für die Reine und Angewandte Mathematik, **318**, 51 – 82, 1980
- [Bal84] W. Balser, *Convergent power series expansions for the Birkhoff invariants of meromorphic differential equations*, Yokohama Mathematical Journal, **32**, 15 – 29, 1984
- [Bal92] W. Balser, *Summation of formal power series through iterated Laplace integrals*, Math. Scandinavica, **70**, 161 – 171, 1992
- [Bal93] W. Balser, *Calculation of the Stokes' multipliers for a polynomial system of rank 1 having distinct eigenvalues at infinity*, Hiroshima Mathematical Journal, **23**, 223 – 230, 1993
- [Bal00] W. Balser, *Formal power series and linear systems of meromorphic ordinary differential equations*, Springer-Verlag, New York, 2000
- [BBRS91] W. Balser, B. L. J. Braaksma, J.-P. Ramis, Y. Sibuya, *Multisummability of formal power series solutions of linear ordinary differential equations*, Asymptotic Analysis, **5**, 27 – 45, 1991
- [BJL79-1] W. Balser, W. B. Jurkat, D. A. Lutz, *A general theory of invariants for meromorphic differential equations; Part I, formal invariants*, Funkcialaj Ekvacioj, **22**, 197 – 221, 1979
- [BJL79-2] W. Balser, W. B. Jurkat, D. A. Lutz, *A general theory of invariants for meromorphic differential equations; Part II, proper invariants*, Funkcialaj Ekvacioj, **22**, 257 – 283, 1979
- [BJL79-3] W. Balser, W. B. Jurkat, D. A. Lutz, *Birkhoff invariants and Stokes multipliers for meromorphic linear differential equations*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **71**, 48 – 94, 1979
- [BJL82-1] W. Balser, W. B. Jurkat, D. A. Lutz, *Transfer of connection problems for first level solutions of meromorphic differential equations and associated Laplace transforms*, Journal für die Reine und Angewandte Mathematik, **344**, 149 – 170, 1982
- [BJL82-2] W. Balser, W. B. Jurkat, D. A. Lutz, *Transfer of connection problems for meromorphic differential equations of rank $r \geq 2$ and representations of*

- solutions*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **85**, 488 – 542, 1982
- [B] Adresse des pointeurs pour ISOLDE et DESIR2 :
http://www.unilim.fr/pages_perso/moulay.barkatou/
- [B95] M. Barkatou, *A rational version of Moser's algorithm*, ISSAC '95, Montréal, Academic Press, 1995
- [B97] M. Barkatou, *An algorithm to compute the exponential part of a formal fundamental matrix solution of a linear differential system*, AAECC, **8-1**, 1 – 23, 1997
- [BCL03] M. Barkatou, F. Chyzak, M. Loday-Richaud, *Remarques algorithmiques liées au rang d'un opérateur différentiel linéaire*, Prépublication du Département de Mathématiques de l'Université d'Angers, n°164, 2003
- [BP99] M. Barkatou, E. Pflügel, *An algorithm computing the regular formal solutions of a system of linear differential equations*, Journal of Symbolic Computation, **28**, 569 – 587, 1999
- [Bir09] G. D. Birkhoff, *Singular points of ordinary linear differential equations*, Translations of the American Mathematical Society, **10**, 436 – 470, 1909
- [Bir13] G. D. Birkhoff, *Equivalent singular points of ordinary linear differential equations*, Math. Ann., **74**, n°1, 134 – 139, 1913
- [Bo99] E. Borel, *Mémoire sur les séries divergentes*, Annales Scientifiques de l'E.N.S., Paris, 3^{ème} série, **16**, 9 – 136, 1899
- [Bo28] E. Borel, *Leçons sur les séries divergentes*, Gauthier-Villars, Paris, 1928, réimpression éd. Jacques Gabay, 1988
- [Br91] B. L. J. Braaksma, *Multisummability and Stokes multipliers of linear meromorphic differential equations*, Journal of Differential Equations, **92**, 45 – 75, 1991
- [Can89] B. Candelpergher, *Une introduction à la résurgence*, Gazette des Mathématiciens, Société Mathématiques de France, **42**, 36 – 64, 1989
- [ChCh87] D. V. Chudnovsky, G. V. Chudnovsky, *Computer assisted number theory with applications*, Lecture Notes in Mathematics, Springer, Berlin, **1240**, 1 – 68, 1987
- [ChCh90] D. V. Chudnovsky, G. V. Chudnovsky, *Computer algebra in the service of mathematical physics and number theory* (computers in mathematics, Stanford, ca, 1986), in Lecture Notes in Pure and Applied Math., New York, Dekker, **125**, 109 – 232, 1990
- [CNP93] B. Candelpergher, J.-C. Nosmas, F. Pham, *Approche de la résurgence*, Actualités Mathématiques, Hermann, Paris, 1993
- [CL55] E. A. Coddington, N. Levinson, *Theory of ordinary differential equations*, Mc Graw-Hill Book Company, INC New York, 1955
- [Del94] E. Delabaere, *Introduction to the Ecalle theory*, Computer Algebra and Differential Equations, E. Tournier, éd., Cambridge University Press, 59 – 101, 1994

- [Del97] E. Delabaere, *Un peu d'asymptotique*, Publications Pédagogiques, Université de Nice-Sophia Antipolis, Pupé n°28, janvier 1997
- [Del01] E. Delabaere, *Asymptotique complexe : méthodes résurgentes*, Cours de DEA, Université d'Angers, 2001
- [D70] P. Deligne, *Equations différentielles à points singuliers réguliers*, Lecture Notes in Mathematics, **163**, Springer-Verlag, 1970
- [D73] P. Deligne, in S.G.A. 7.2, *Monodromy groups in algebraic geometry*, exposés n°13 et 14, Lecture Notes in Mathematics, **340**, Springer-Verlag, 82 – 164, 1973
- [E81-1] J. Ecalle, *Les fonctions résurgentes, tome I : les algèbres de fonctions résurgentes*, Publications Mathématiques d'Orsay, n°81 – 05, 1981
- [E81-2] J. Ecalle, *Les fonctions résurgentes, tome II : les fonctions résurgentes appliquées à l'itération*, Publications Mathématiques d'Orsay, n°81 – 06, 1981
- [E85] J. Ecalle, *Les fonctions résurgentes, tome III : l'équation du pont et la classification analytique des objets locaux*, Publications Mathématiques d'Orsay, n°85 – 05, 1985
- [E87] J. Ecalle, *Résurgence et accélération*, Cours de 3^{ème} cycle, Orsay, 1987
- [E92] J. Ecalle, *Introduction aux fonctions analysables et preuve constructive de la conjecture de Dulac*, Actualités Mathématiques, Hermann, Paris, 1992
- [GR00] I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, *Table of integrals, series and products*, Academic Press, 2000
- [H83] A. Hilali, *Réductibilité d'un système différentiel linéaire*, Numerische Mathematik, Springer-Verlag, **41**, 1 – 17, 1983
- [H87] A. Hilali, *Solutions formelles de systèmes différentiels linéaires au voisinage d'un point singulier*, Thèse, Université Joseph Fourier, Grenoble, juin 1987
- [Im90] G. K. Immink, *A note on the relationship between Stokes multipliers and formal solutions of analytic differential equations*, Journal of Mathematical Analysis, **21**, 782 – 792, 1990
- [In56] E. L. Ince, *Ordinary differential equations*, Dover Publications, Inc., New York, 1956
- [J78] W. B. Jurkat, *Meromorphe differentialgleichungen*, Lecture Notes in Mathematics, **637**, Springer-Verlag, 1978
- [JLP76-1] W. B. Jurkat, D. A. Lutz, A. Peyerimhoff, *Birkhoff invariants and effective calculations for meromorphic linear differential equations I*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **53**, 438 – 470, 1976
- [JLP76-2] W. B. Jurkat, D. A. Lutz, A. Peyerimhoff, *Birkhoff invariants and effective calculations for meromorphic linear differential equations II*, Houston Journal of Mathematics, **2**, 207 – 238, 1976
- [Ka83] M. Kashiwara, *Systems of microdifferential equations*, Progress in Mathematics, **34**, Birkhäuser, Boston, 1983

- [Le00] E. Leroy, *Sur les séries divergentes et les fonctions définies par un développement de Taylor*, Annales de la Faculté de Toulouse, 317 – 430, 1900
- [L-R90-1] M. Loday-Richaud, *Calcul des invariants de Birkhoff des systèmes d'ordre deux*, Funkcialaj Ekvacioj, **33**, 161 – 225, 1990
- [L-R90-2] M. Loday-Richaud, *Introduction à la multisommabilité*, Gazette des Mathématiciens, Société Mathématique de France, **44**, 41 – 63, 1990
- [L-R94] M. Loday-Richaud, *Stokes phenomenon, multisummability and differential Galois groups*, Annales de l'Institut Fourier, Grenoble, **44**, fascicule 3, 849 – 906, 1994
- [L-R95] M. Loday-Richaud, *Solutions formelles des systèmes différentiels linéaires méromorphes et sommation*, Expositiones Mathematicae, **13**, 116–162, 1995
- [L-R01] M. Loday-Richaud, *Rank reduction, normal forms and Stokes matrices*, Expositiones Mathematicae, **19**, 229 – 250, 2001
- [Lu72] D. A. Lutz, *On the reduction of rank of linear differential systems*, Pacific Journal of Mathematics, **42**, n°1, 153 – 164, 1972
- [Lu79] D. A. Lutz, *Birkhoff invariants and meromorphic differential equations*, in Equations différentielles et systèmes de Pfaff dans le champ complexe (R. Gérard et J.-P. Ramis), Lecture Notes in Mathematics, **712**, Springer-Verlag, 66 – 76, 1979
- [LS97] D. A. Lutz, R. Schäfke, *Calculating connection coefficients for meromorphic differential equations*, Complex Variables, **34**, 145 – 170, 1997
- [Mal74] B. Malgrange, *Sur les points singuliers des équations différentielles*, L'Enseignement Mathématique, **20**, fascicules 1 – 2, 147 – 176, 1974
- [Mal79] B. Malgrange, *Remarques sur les équations différentielles à points singuliers irréguliers*, in Lecture Notes in Mathematics, Equations différentielles et systèmes de Pfaff dans le champ complexe, édité par R. Gérard et J.-P. Ramis, n°712, Springer-Verlag, 77 – 86, 1979
- [Mal85] B. Malgrange, *Introduction aux travaux de J. Ecalle*, L'Enseignement Mathématique, **31**, 261 – 282, 1985
- [Mal89] B. Malgrange, *Equations différentielles linéaires et transformation de Fourier : une introduction*, Ensaios Matemáticos, Sociedade Brasileira de Matemática, **1**, 5 – 39, 1989
- [Mal91-1] B. Malgrange, *Fourier transform and differential equations*, Recent Developments in Quantum Mechanics, A. Boutet de Monvel et al. (eds.), Kluwer Academic Publishers, 33 – 48, 1991
- [Mal91-2] B. Malgrange, *Equations différentielles à coefficients polynomiaux*, Progress in Mathematics, **96**, Birkhäuser, Boston, 1991
- [Mal95] B. Malgrange, *Sommation des séries divergentes*, Expositiones Mathematicae, **13**, 163 – 222, 1995
- [MalR92] B. Malgrange, J.-P. Ramis, *Fonctions multisommables*, Annales de l'Institut Fourier, Grenoble, **42**, fascicules 1 – 2, 353 – 368, 1992

- [MR82] J. Martinet, J.-P. Ramis, *Problèmes de modules pour des équations différentielles non linéaires du premier ordre*, Publications Mathématiques de l'I.H.E.S., **55**, 63 – 164, 1982
- [MR89] J. Martinet, J.-P. Ramis, *Théorie de Galois différentielle et resommation*, Computer Algebra and Differential Equations, E. Tournier, éd., Academic Press, 117 – 214, 1989
- [MR91] J. Martinet, J.-P. Ramis, *Elementary acceleration and multisummability*, Annales de l'Institut Henri Poincaré, **54**, n°4, 331 – 401, 1991
- [Mo60] J. Moser, *The order of a singularity in Fuchs' theory*, Mathematische Zeitschrift, **72**, 379 – 398, 1960
- [Ne19] F. Nevanlinna, *Zur theorie der asymptotischen potenzreihen*, Ann. Acad. Scient. Fennicae, ser. A, Fom XII, 1 – 81, 1919
- [OD98] A. B. Olde Daalhuis, *On the computation of Stokes multipliers via hyperasymptotics*, In Resurgent Functions and Convolution Integral Equations, Proc. Symp. Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University, Kyoto, 12-14 january 1998, 1998
- [Olv97] F. W. J. Olver, *Asymptotics and special functions*, AKP Classics, 1997
- [P86] H. Poincaré, *Sur les intégrales irrégulières des équations linéaires*, Acta Mathematica, **8**, 295 – 344, 1886, in *Oeuvres de Henri Poincaré, Tome I*, Gauthier-Villars, Paris, 290 – 332, 1928, réimpression éd. Jacques Gabay, 2004
- [Ra80] J.-P. Ramis, *Les séries k -sommables et leurs applications*, Lecture Notes in Physics, Springer-Verlag, Berlin, **126**, 1980
- [Ra84] J.-P. Ramis, *Théorèmes d'indices Gevrey pour les équations différentielles ordinaires*, Memoirs of the American Mathematical Society, **48**, n°296, 1984
- [Ra93] J.-P. Ramis, *Séries divergentes et théories asymptotiques*, Société Mathématique de France, Panoramas et Synthèses, **121**, 1993
- [RS89] J.-P. Ramis, Y. Sibuya, *Hukuhara domains and fundamental existence and uniqueness theorems for asymptotic solutions of Gevrey type*, Asymptotic Analysis, **2**, 39 – 94, 1989
- [S.G.A.7] Séminaire de Géométrie Algébrique, *Monodromy groups in algebraic geometry*, Lecture Notes in Mathematics, **288**, Springer-Verlag, 1973
- [SKK73] M. Sato, T. Kawai, M. Kashiwara, *Microfunctions and pseudo-differential equations*, Lecture Notes in Mathematics, **287**, Springer-Verlag, 264 – 529, 1973
- [S86] L. Sauvage, *Sur les solutions régulières d'un système d'équations différentielles*, Annales Scientifiques de l'E.N.S., Paris, **3**, 391 – 404, 1886
- [Sau06] D. Sauzin, *Resurgent functions and splitting problems*, à paraître dans RIMS Koukyuroku, Kyoto
- [Si76] Y. Sibuya, *Linear differential equations in the complex domain : problems of analytic continuation*, Kinokuniya, Tokyo, 1976

- [Si90] Y. Sibuya, *Linear differential equations in the complex domain : problems of analytic continuation*, Translations of Mathematical Monographs, **82**, American Mathematical Society, Providence, RI, 1990
- [Sla60] L. J. Slater, *Confluent hypergeometric functions*, Cambridge University Press, London and New York, 1960
- [Sla66] L. J. Slater, *Generalized hypergeometric functions*, Cambridge University Press, London and New York, 1966
- [Tu55] H. L. Turriffin, *Convergent solutions for ordinary linear homogeneous differential equations in the neighborhood of an irregular singular point*, Acta Mathematica, **93**, 27 – 66, 1955
- [Tu63] H. L. Turriffin, *Reducing the rank of ordinary differential equations*, Duke Math. J., **30**, 271 – 274, 1963
- [vdH99] J. van der Hoeven, *Fast evaluation of holonomic functions*, Theoretical Computer Science, **210**, 199 – 215, 1999
- [vdH01] J. van der Hoeven, *Fast evaluation of holonomic functions near and in regular singularities*, Journal of Symbolic Computation, **31**, 717 – 743, 2001
- [vdH05] J. van der Hoeven, *Efficient accelero-summation of holonomic functions*, Prépublication, Université Paris-Sud, 2005
- [Was65] W. Wasow, *Asymptotic expansions for ordinary differential equations*, Dover Publications, Inc., New York, 1965
- [Wat11] G. N. Watson, *A theory of asymptotic series*, Philosophical Transactions of the Royal Society of London, série A, volume CCXI, 279 – 313, 1911
- [Yoc] J.-C. Yoccoz, *Cours de topologie, calcul différentiel, équation différentielle pour la licence MAF*, Université Paris-Sud, Centre Scientifique d'Orsay