

Université de Grenoble

HABILITATION A DIRIGER DES RECHERCHES

Discipline : Mathématiques Appliquées

**Equations de transport, Level Set et mécanique eulérienne.
Application au couplage fluide-structure.**

présentée par

Emmanuel MAITRE

le 26 novembre 2008

Après avis des rapporteurs :

M. Y. BRENIER	Directeur de Recherche	Université de Nice
M. T. COLIN	Professeur	Université de Bordeaux
M. T.Y. HOU	Professeur	Caltech, Pasadena, USA
M. C. VERDIER	Directeur de Recherche	Université de Grenoble

Devant la commission d'examen constituée de :

M. E. BONNETIER	Professeur	Université de Grenoble
M. Y. BRENIER	Directeur de Recherche	Université de Nice
M. T. COLIN	Professeur	Université de Bordeaux
M. G.-H. COTTET	Professeur	Université de Grenoble
M. Y. MADAY	Professeur	Université Paris VI
Mme A. RAOULT	Professeure	Université Paris-Descartes
M. C. VERDIER	Directeur de Recherche	Université de Grenoble
M. P. WITOMSKI	Professeur	Université de Grenoble

Equation de transport, Level Set et mécanique eulérienne. Application au couplage fluide-structure.

Mémoire d'habilitation à diriger des recherches

Université de Grenoble

Emmanuel Maitre*

14 janvier 2009

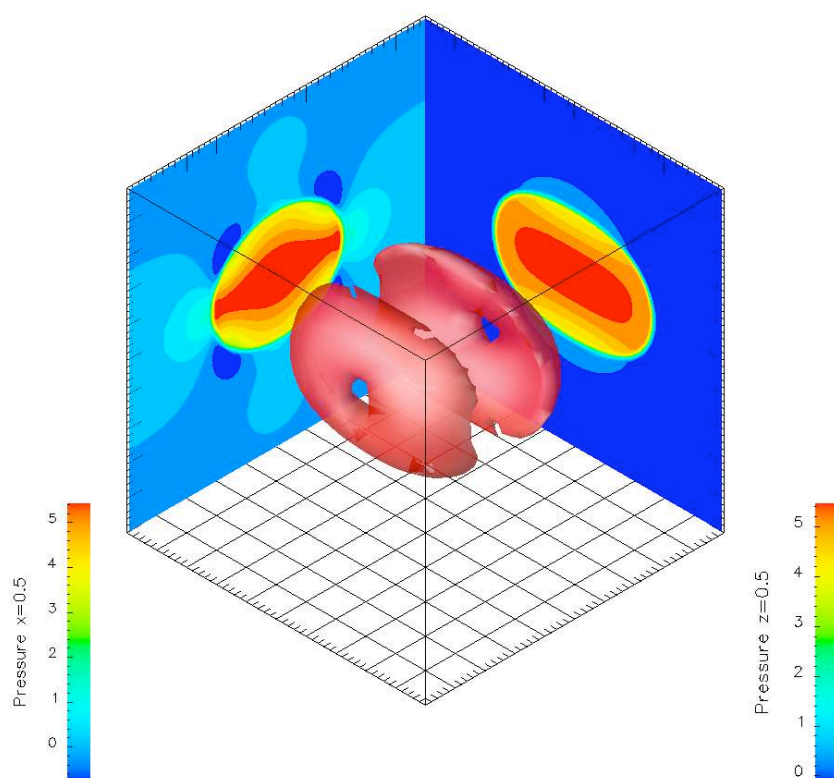


FIGURE 1 – Surface d'iso-vorticité lors de la relaxation d'une membrane élastique immergée

*Emmanuel.Maitre@imag.fr, <http://ljk.imag.fr/membres/Emmanuel.Maitre/>

Table des matières

1	Introduction	4
2	Analyse numérique des équations à double non linéarité [A9]	5
2.1	Introduction et motivations	5
2.2	Notion de <i>bonne</i> solution	6
2.3	Schémas existants	7
2.4	Algorithme itératif d’Halpern	7
2.5	Convergence de l’algorithme	8
2.6	Tests numériques	9
2.7	Conclusion	10
3	Autour du transport neutronique [A11, A7]	11
3.1	Les équations et leur résolution sans splitting	11
3.1.1	Les équations	11
3.1.2	Résolution itérative sans splitting (Source Iteration)	12
3.2	Splitting de l’opérateur de transport	13
3.3	Méthode du résidu minimal	14
3.3.1	Algorithme	14
3.3.2	Convergence	16
3.4	Conclusion	17
4	Mécanique des textiles [A10]	18
4.1	Introduction	18
4.2	Origine et justification mécanique du modèle	19
4.3	Modèle régularisé et existence d’un minimiseur	20
4.4	Mise en oeuvre numérique	21
5	Méthode Level Set et mécanique des milieux continus [A5, A4, A3, A2, A14]	23
5.1	Motivations	23
5.2	Elasticité lagrangienne extensionnelle d’une membrane immergée	24
5.2.1	Quelques notations	24
5.2.2	Conservation du volume : incompressibilité	25
5.2.3	Conservation de la masse	25
5.2.4	Conservation de la quantité de mouvement de la surface élastique	26
5.2.5	Conservation de la quantité de mouvement du milieu continu	27
5.3	Elasticité eulérienne extensionnelle d’une membrane immergée	29
5.3.1	Représentation Level Set	29
5.3.2	Déformations et Level Set	30
5.3.3	Energie et force élastiques en Level Set	33
5.3.4	Modèle multiphysique	34
5.3.5	Existence d’une solution au modèle multiphysique	35
5.3.6	Ingrédients numériques	36
5.3.7	Stabilité numérique du couplage	39
5.3.8	Exemple d’application : motilité cellulaire et instabilité paramétrique	40
5.4	Cas d’une membrane inextensible en flexion	41

5.4.1	Obtention de la force de courbure	41
5.4.2	Liens avec la méthode de champ de phase et la théorie du second gradient	43
5.4.3	Exemples d'application : vésicules phospholipidiques	44
5.5	Interaction fluide-structure : cas générique	46
5.5.1	Petit rappel d'élasticité eulérienne	46
5.5.2	Cas isotrope	48
5.5.3	Cas anisotrope transverse	49
5.5.4	Modèle multiphysique du couplage fluide-structure	51
5.5.5	Application à la simulation de la contraction d'un cardiomyocyte isolé	52
5.6	Liens avec d'autres modèles	53
5.6.1	Modèle de transport optimal	53
5.6.2	Modèle de Born-Infeld	55
6	Méthode Level Set et optimisation de fonctionnelles définies sur une surface	
	[A1]	57
6.1	Introduction et motivations	57
6.2	Longueur et aire entourée par la courbe	58
6.3	Choix de la direction de descente	59
6.4	Algorithme de minimisation	60
6.5	Lien avec la courbure géodésique	60
6.6	Quelques exemples	61
7	Conclusion et perspectives	63

1 Introduction

En guise d'introduction je retrace ci-dessous brièvement les directions de recherche dans lesquelles je me suis investi ces dernières années en renvoyant aux publications associées. La suite du document reprend plus en détail certains de ces thèmes, en laissant de côté volontairement ceux qui m'ont semblé plus marginaux.

Après mon doctorat, mes recherches dans le domaine des équations aux dérivées partielles et de la simulation numérique, s'étaient traduites par des publications sur une classe d'équations à double non linéarité, et sur une équation de transport linéaire avec conditions aux limites. Cette dernière intervenait dans mon travail dans le cadre d'un embryon de méthode level set pour la localisation d'un front dans la modélisation et simulation de l'injection d'un plastique fondu dans un moule (publication [A13]). Le terme embryon correspond au fait que la fonction level set n'était utilisée que pour localiser la position de l'interface et non pour modéliser une force de tension superficielle comme dans [46].

En septembre 1998, mon recrutement à l'Université de Haute-Alsace en tant que Maître de Conférences m'a amené à collaborer avec S. Akesbi sur son thème de recherche, à savoir la mise au point de schémas performants pour la résolution de l'équation du transport neutronique (publications [A12, A11, A7]). D'autre part je me suis intéressé à un problème d'élasticité non-linéaire en grands déplacements modélisant le déplacement d'un textile, en co-encadrant la thèse de N. Faré, avec A. Brillard (publication [A10]). Enfin j'ai poursuivi mes recherches sur les équations à double non-linéarité, tant du point de vue théorique, en publiant un nouvel article sur le sujet en collaboration avec P. Witomski, que du point de vue numérique en mettant au point un nouveau schéma de résolution adapté au cas dégénéré (publications [A8, A9, A6]).

En septembre 2002 j'ai obtenu une mutation vers l'Université Joseph Fourier sur un poste dont le profil était clairement orienté vers les sciences du vivant. Il s'agissait en particulier de développer les activités du LMC (maintenant devenu laboratoire LJK) dans cette direction et de renforcer les liens avec le laboratoire TIMC. Dans cette direction j'ai collaboré avec G.-H. Cottet et nos collègues de TIMC à la mise au point d'une nouvelle méthode de modélisation et de résolution des problèmes de couplages fluide-structure (publications [A5, A4, A3]), appliqué à la modélisation des membranes cellulaires (publications [B17, B16]) et de la contraction myocardique (publications [B15, A2]). Cette collaboration s'est matérialisée sous la forme d'un projet financé localement dont j'étais co-responsable, et par une ACI Nouvelles Interfaces des Mathématiques dont j'étais coordinateur (arrivée à échéance en septembre 2007). Enfin nous co-encadrons avec avec G.-H. Cottet deux thèses sur le sujet (Claire Bost et Thomas Milcent, soutenances en octobre 2008).

Parallèlement j'ai participé à un groupe de travail avec E. Bonnetier, A. Raoult et des physiciens du laboratoire LSP (de l'équipe de Chaouqi Misbah) sur la modélisation du comportement de vésicules phospholipidiques dans les écoulements cisailés (travail en fin de rédaction), et avec John Stockie (U. Vancouver) sur des questions d'instabilité paramétrique dans le couplage membrane-fluide (travail en cours).

Enfin lors du premier semestre 2007 j'ai rendu visite à Fadil Santosa, Professeur à l'Université du Minnesota à Minneapolis, et expert en level set et optimisation. A l'occasion de ce séjour nous avons mis au point une méthode pour la minimisation de fonctionnelles d'énergies définies pour des courbes se déplaçant sur une surface [A1]). Le but de cette collaboration est à terme la reconstruction des courbes de niveau du potentiel d'activation sur la surface du myocarde à partir de mesures dans le ventricule.

2 Analyse numérique des équations à double non linéarité [A9]

2.1 Introduction et motivations

Mon intérêt pour les équations à double non linéarité remonte à mon travail de thèse. Une partie de ce travail concernait l'étude d'une équation en pression intervenant dans la modélisation de l'injection d'un plastique fondu dans l'empreinte d'un moule [87]. La faible épaisseur du moule permettait en effet par intégration dans l'épaisseur, et une hypothèse cinématique de type Hele-Shaw, de ramener l'équation de Navier-Stokes à la résolution d'une équation en pression. Cette équation moyennant un changement de fonction inconnue pouvait s'écrire comme une équation doublement non linéaire de la forme

$$\frac{d}{dt}\mathcal{B}(u) + \mathcal{A}(u) = f \quad (1)$$

où \mathcal{B} est un opérateur de superposition et \mathcal{A} un opérateur elliptique de type calcul des variations. De nombreuses publications sur ce type d'équations ont vu le jour depuis les pionniers [102] et [63] jusqu'à très récemment [23, 103]. Tout le problème abordé dans [A8] est de prouver l'existence de solutions de (1) dans le cas qui nous intéressait en pratique, à savoir celui où \mathcal{B} peut dégénérer et ne pas apporter toute la compacité en temps classiquement engendrée par $\frac{du}{dt}$ dans une équation parabolique, alors que l'opérateur \mathcal{A} n'est pas pseudo-monotone au sens des équations elliptiques. Il s'agit d'une équation elliptique-parabolique. Nous avons pour cette classe d'équations défini une notion de pseudo-monotonie *ad hoc*. La méthode par semigroupes [29] a trouvé dans ce type d'équation un champ d'application initié par F. Simondon [105] puis plus récemment développé par Ph. Bénilan et P. Wittbold [30, 31] ainsi que F. Otto [97]. Enfin des articles sur les solutions renormalisés sont parus très récemment [23, 103] et affaiblissent encore les hypothèses sur \mathcal{B} pour obtenir l'existence.

À partir des travaux [30, 31] nous nous sommes intéressés à l'approximation numérique de ces équations. Nous proposons et étudions un schéma numérique pour approcher la *bonne* solution d'une équation elliptique-parabolique non linéaire. Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^d , $d \geq 1$, et $Q = (0, T) \times \Omega$, pour $T > 0$. Soit b une fonction continue, croissante au sens large sur \mathbb{R} , telle que $b(0) = 0$. Pour $v_0 \in L^1(\Omega)$ vérifiant $v_0(x) \in \overline{b(\mathbb{R})}$ p.p. sur Ω , et $f \in L^1(Q)$, il existe d'après [30] une bonne solution (exacte) du problème aux limites

$$(EP) \begin{cases} \frac{\partial b(u)}{\partial t} - \operatorname{div} a(u, \nabla u) = f & \text{sur } Q, \\ u = 0 & \text{sur } (0, T) \times \partial\Omega, \\ b(u)(0) = v_0 & \text{sur } \Omega, \end{cases}$$

sous l'hypothèse

$$(H1) \begin{cases} (a(z, \xi) - a(z, 0)) \cdot \xi \geq \lambda(b(z))|\xi|^p & \text{pour tout } (z, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \\ & \text{avec } |\xi| \geq R(b(z)), \\ |a(z, \xi)| \leq \Lambda(z)(1 + |\xi|^{p-1}) & \text{pour tout } (z, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d, \end{cases}$$

où $\lambda > 0$, $\Lambda, R \geq 0$ sont des fonctions continues et $1 < p < \infty$.

Par définition d'une *bonne* solution, celle-ci peut-être approchée par la solution d'une discrétisation en temps de l'équation (EP). Nous proposons une méthode numérique itérative

pour résoudre cette équation discrétisée, et nous prouvons sa convergence même dans le cas où b dégénère. Ceci constitue une amélioration par rapport aux schémas existants [70] qui supposent b strictement croissante.

L'analyse numérique de ce type de problème a été initiée par [43] puis par [86] dans le cas où b^{-1} est lipschitzienne et l'équation écrite sous la forme milieu poreux. Le schéma fut adapté ensuite à une forme plus générale de l'équation des milieux poreux dans [69, 74], puis W. Jäger and J. Kačur [70] et J. Kačur [75] abordèrent l'approximation numérique de (EP) . Cependant la convergence de leur schéma numérique n'était prouvée que dans le cas d'une fonction b strictement croissante et lipschitzienne, ou dans le cas particulier où a ne dépend de u que par $b(u)$. Ces hypothèses ne sont pas respectées dans le cadre de notre équation en pression.

Nous avons donc développé une méthode numérique dans [A9] qui fonctionne sous l'hypothèse supplémentaire que b soit localement lipschitzienne et demeure, au moins suffisamment loin de l'origine, entre deux fonctions linéaires strictement croissantes :

(H2) b est localement lipschitzienne sur \mathbb{R} et

$$\exists K \geq 0, \exists(\ell, L), 0 < \ell \leq L, \forall r \in \mathbb{R}, |r| \geq K, \min(\ell r, Lr) \leq b(r) \leq \max(\ell r, Lr)$$

En pratique cela signifie que b peut avoir des paliers, donc l'équation être complètement elliptique si u prend ses valeurs dans une zone où b est constante, mais ces paliers doivent être de longueur bornée. En retour cette hypothèse permettra d'obtenir une estimation L^∞ sur u .

2.2 Notion de *bonne solution*

Sous les hypothèses (H1) et (H2) l'existence d'une solution faible était ouvert (sauf en dimension 1, dans [31]) jusqu'à récemment grâce aux résultats sur les solutions renormalisées de P. Wittbold et co-auteurs [23, 103]. La notion de solution que nous avons utilisée est donc celle de *bonne solution* [30] : Pour un entier N on note $t_n = nh$, $n = 0, \dots, N$ la subdivision de $[0, T]$ en N petits intervalles de longueur $h = \frac{T}{N}$ (voir la remarque ci-dessous concernant le pas constant de la subdivision). Une bonne solution de (EP) est une fonction u vérifiant $v = b(u) \in C([0, T]; L^1(\Omega))$, $v(0) = v_0$ et, pour tout $\varepsilon > 0$, telle qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ telle que pour tout

$$\begin{aligned} f_1, \dots, f_N \in L^\infty(\Omega) \text{ vérifiant } \sum_n \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|f(t) - f_{n+1}\|_1 dt \leq h, \\ u_0 \in L^\infty(\Omega) \text{ tel que } \|v_0 - b(u_0)\|_1 \leq h, \end{aligned}$$

il existe (u_1, \dots, u_N) vérifiant pour $n = 0, \dots, N - 1$

$$\begin{cases} \frac{b(u_{n+1}) - b(u_n)}{h} - \operatorname{div} a(u_{n+1}, \nabla u_{n+1}) = f_{n+1} \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega) \\ u_{n+1} \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega). \end{cases} \quad (2)$$

et telle que $\|v(t) - b(u_{n+1})\|_1 \leq \varepsilon$ pour tout $t \in (t_n, t_{n+1}]$, $n = 0, \dots, N - 1$.

Remarque 1 *La véritable notion de bonne solution vérifie plus que ces propriétés car la subdivision introduite dans sa définition n'a pas à être à pas constant. Nous avons présenté notre algorithme dans le cas d'un pas constant par simplicité, mais celui-ci pourrait être modifié pour en faire une méthode adaptative.*

2.3 Schémas existants

La méthode pour résoudre (EP) d'un point de vue numérique repose dans [70] sur la résolution de l'équation

$$b'(u)u_t - \operatorname{div} a(u, \nabla u) = f \quad (3)$$

par le schéma suivant : pour N entier et $h = \frac{T}{N}$ on note u_n l'approximation de $u(t_n)$. Etant donné u_n , pour obtenir u_{n+1} on calcule d'abord la solution θ_{n+1} du problème elliptique

$$\mu_n(\theta_{n+1} - u_n) - h \operatorname{div} a(u_n, \nabla \theta_{n+1}) = hf(t_{n+1}) \quad (4)$$

avec conditions aux limites de Dirichlet, où $\mu_n \in L^\infty(\Omega)$ doit vérifier

$$\left\| \mu_n - \frac{b_d((1-\alpha)u_n + \alpha\theta_{n+1}) - b_d(u_n)}{\theta_{n+1} - u_n} \right\|_\infty < h.$$

Puis u_{n+1} est obtenu par la relaxation

$$u_{n+1} = (1-\alpha)u_n + \alpha\theta_{n+1}.$$

La fonction b_d est une régularisation de b : $b_d(s) = b(s) + h^d s$; $d \in (0, \frac{1}{2})$ et α , proche de 1 sont les paramètres de la méthode. Le coefficient μ_n est obtenu numériquement par l'itération

$$\mu_n^{k+1} = \frac{b_d((1-\alpha)u_n + \alpha\theta_{n+1}^k) - b_d(u_n)}{\theta_{n+1}^k - u_n}$$

où θ_{n+1}^k est la solution de (4) avec $\mu_n = \mu_n^k$. L'algorithme est prouvé convergent lorsque b est strictement croissante et lipschitzienne. Le schéma que nous présentons maintenant est stable même si b' est identiquement nul sur un ouvert, ou ne satisfait pas une condition de Lipschitz globale (cf (H2)).

2.4 Algorithme itératif d'Halpern

Etant donné f_1, \dots, f_N, u_0 , on s'intéresse maintenant à la résolution de (2). Remarquons que dans ce type de problème, la condition initiale est donnée sur $b(u)$ et non u , car en général on a pas la continuité en t de la solution u de (EP). Si b a des paliers, la valeur de u n'est donc pas déterminée. Pour la même raison, le schéma explicite

$$\begin{cases} \frac{b(u_{n+1}) - b(u_n)}{h} - \operatorname{div} a(u_n, \nabla u_n) = f_{n+1}, & n = 0, \dots, N-1 \\ b(u_0) = v_0, \end{cases}$$

peut être facilement résolu en $v_{n+1} := b(u_{n+1})$ mais rien ne dit que v_{n+1} resterait dans l'image de b pour qu'on puisse récupérer u_{n+1} , et même si c'était le cas, v_{n+1} pourrait avoir plusieurs antécédents. Il est donc nécessaire de résoudre le schéma directement en u . Pour cela nous proposons le schéma itératif suivant pour obtenir u_{n+1} à partir de u_n :

$$(S) \quad \begin{cases} \text{Soit } u_{n+1}^0 \in L^\infty(\Omega) \text{ (par exemple } u_{n+1}^0 = u_n), \text{ résoudre pour } k = 0, 1, \dots, \\ u_{n+1}^{k+1} - \rho \operatorname{div} a(u_{n+1}^{k+1}, \nabla u_{n+1}^{k+1}) = \lambda_k u_{n+1}^k - \frac{\rho}{h} (b(\lambda_k u_{n+1}^k) - b(u_n)) + \rho f_{n+1} \end{cases}$$

où $\rho > 0$ est un paramètre donné, et (λ_k) une suite de $]0, 1[$ telle que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = 1, \quad \prod_{k \geq 0} \lambda_k = 0, \quad \sum_{k \geq 0} |\lambda_{k+1} - \lambda_k| < \infty. \quad (5)$$

Un choix possible est par exemple $\lambda_k = 1 - \frac{1}{k+1}$. L'introduction de λ_k dans le schéma précédent est inspirée de l'algorithme de B. Halpern [64] amélioré par P.-L. Lions [84] et plus récemment par H. Bauschke [26]. En effet, dans le cas d'un b dégénéré, l'itération (S) avec $\lambda_k = 1$ est Lipschitzienne de constante 1 mais non contractante. L'idée est donc de rendre suffisamment contractante l'itération pour qu'elle converge, mais en faisant tendre la constante vers 1 pour que la solution du problème soit celle du cas non contractant.

Remarque 2 Comparons (S) (avec $\lambda_k = 1$) avec le schéma de Jäger and Kačur rappelé en 2.3 dans le cas simple où $\alpha = 1$ et sans régularisation de b . Alors $\theta_{n+1} = u_{n+1}$, $\mu_n^{k+1} = \frac{b(u_{n+1}^k) - b(u_n)}{u_{n+1}^k - u_n}$ et l'itération pour obtenir u_{n+1}^{k+1} de u_{n+1}^k s'écrit

$$\mu_n^{k+1}(u_{n+1}^{k+1} - u_n) - h \operatorname{div} a(u_n, \nabla u_{n+1}^{k+1}) = hf(t_{n+1}).$$

En posant $\rho_n^{k+1} = \frac{h}{\mu_n^{k+1}}$ on a

$$u_{n+1}^{k+1} - \rho_n^{k+1} \operatorname{div} a(u_n, \nabla u_{n+1}^{k+1}) = u_n + \rho_n^{k+1} f(t_{n+1}).$$

Par conséquent notre schéma apparaît comme une correction de celui-ci. Le premier avantage est que nous n'avons pas à calculer les coefficients μ_n^{k+1} pour lequel on doit tester si $u_{n+1}^k = u_n$. D'autre part le schéma de Jäger et Kačur peut se comporter mal lorsque u est discontinue en t . En effet, dans ce cas, l'estimation sur la dérivée de b dans l'expression de μ_n^{k+1} n'a pas de sens. Au contraire, les tests numériques que nous avons pratiqué montrent un bon comportement de notre algorithme dans ce cas.

2.5 Convergence de l'algorithme

Tout d'abord nous montrons que sous les hypothèses $(H1) - (H2)$ il existe une solution u_{n+1}^{k+1} à l'équation intervenant dans (S) . Pour cela nous tronquons la dépendance en u de a , utilisons un résultat classique de [85] puis montrons que u est borné indépendamment du niveau de troncature, de sorte que l'existence est assurée pour l'équation non tronquée. Pour prouver la convergence de la suite complète (et non d'une sous-suite) on suppose de plus

$$(UC) \quad \begin{cases} \forall f \in L^\infty(\Omega) \text{ il existe au plus une solution de} \\ u \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega), \quad b(u) - \operatorname{div} a(u, \nabla u) = f \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega). \end{cases}$$

Cette hypothèse est par exemple vérifiée si a est strictement elliptique.

Nous prouvons alors le résultat de convergence suivant qui donne une borne explicite pour le choix de ρ dans l'algorithme (S) en fonction des données du problème.

Proposition 1 *Supposons $(H1)(H2)$ et (UC) . Soit M défini par*

$$M = \max(\|u_{n+1}^0\|_\infty, \frac{1}{\ell} \|hf_{n+1} + b(u_n)\|_\infty, \frac{2K}{1 - \frac{\rho\ell}{h}}, \frac{2\frac{\rho}{h}}{1 - \frac{\rho\ell}{h}} \max_{[-K,K]} |b|)$$

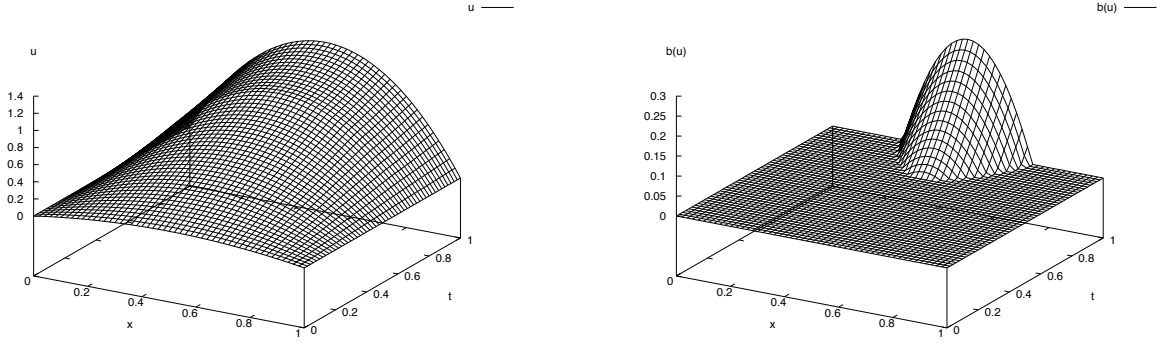


FIGURE 2 – Cas dégénéré où $b(u) = 0$ pour $|u| \leq 1$ et linéaire en dehors.

où K est définie dans (H2). Soit L_M la constante de Lipschitz de b sur $[-M, M]$. Alors pour $\rho < \min(\frac{h}{L}, \frac{2h}{L_M})$ le schéma itératif (S) converge, et

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u_{n+1}^k = u_{n+1} \quad \text{fortement dans } L^1(\Omega),$$

où u_{n+1} vérifie (2).

Notons que bien qu'un peu compliquée, la borne sur ρ est très facilement calculable afin de garantir la convergence de l'algorithme. La constante M apparaît en fait en estimant $\|u_{n+1}^k\|_\infty$ indépendamment de k , dans le lemme 6.2 de [A9].

Etudions enfin la convergence temporelle de notre schéma. Dans [70], la convergence de la fonction constante par morceaux définie par $u_N(t) = u_{n+1}$ on $(t_n, t_{n+1}]$ vers la solution faible $u(t)$ lorsque le pas de temps tend vers zéro est prouvée. Dans notre formulation, cette convergence est incluse dans la définition de la *bonne* solution : Lorsque la convergence en k est obtenue, alors par définition $b(u_{n+1})$ approche $b(u)$ sur $(t_n, t_{n+1}]$ à ε près. Si b n'est pas dégénéré cela donne des informations sur u_{n+1} . A l'opposé on remarque que si $b = 0$ la notion de bonne solution est très dégénérée car toute fonction mesurable en est une ! Cependant sous certaines hypothèses supplémentaires sur a , il est prouvé dans [30] qu'il existe une solution faible w de (EP) telle que $b(w) = b(u)$ presque partout. Dans ce cas la convergence de notre schéma se fait vers cette solution faible.

2.6 Tests numériques

Le critère d'arrêt pour les tests ci-dessous est $\frac{\|u^{k+1} - u^k\|_2}{\|u^{k+1}\|_2} \leq 10^{-6}$ où $\|\cdot\|_2$ est la norme euclidienne. Nous montrons d'abord que notre schéma converge pour des situations où b est dégénérée, en considérant $b(u) = 0$ pour $|u| \leq 1$, $b(u) = u - 1$ pour $u > 1$ et $b(u) = u + 1$ pour $u < -1$, avec $u_0(x) = \frac{1}{2}x(1-x)$ (donc $v_0(x) = b(u_0(x)) = 0$) et $f(x, t) = 10t + 1$. La valeur de u_0 ne joue ici aucun rôle, si ce n'est à $t = 0$, pour assurer la continuité de u . Nous sommes ici dans un cas complètement dégénéré car dans la zone de départ b est identiquement nul.

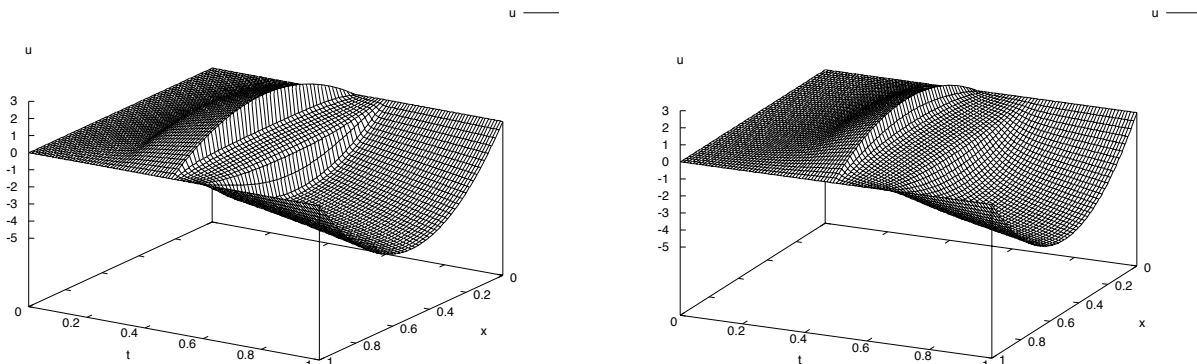


FIGURE 3 – Lorsque u présente une discontinuité naturelle, notre algorithme (gauche) et celui de Jäger and Kačur (droite).

On peut calculer le temps exact à partir duquel $\|u(t)\|_\infty$ atteint 1 ce qui fait apparaître la dérivée en temps dans l'équation et correspond à un changement elliptique vers parabolique. On trouve $t_c = 0.7$, ce qui est corroboré par la figure 2.

Nous avons comparé dans ce cas l'algorithme de [70] avec le nôtre avec comme paramètres $\alpha = 1$, et $d = 5$. Nous avons obtenu à convergence les mêmes résultats avec une convergence plus rapide de leur algorithme.

Dans un cas où u peut devenir discontinu, par contre, nous avons montré que notre algorithme était plus performant. On considère b impaire définie sur \mathbb{R}^+ par $b(r) = 1$ pour $r > 1$, et $b(r) = -r^2 + 2r$ pour $0 \leq r < 1$. Avec $f(x, t) = 40t$ pour $t < 0.5$, et $-40t$ pour $t \geq 0.5$, ainsi que $u_0 = v_0 = 0^1$. L'important dans cet exemple est que la discontinuité de f a lieu alors que (EP) est elliptique (car $u > 1$), donc u a une discontinuité temporelle aussi, à $t = 0.5$, et retombe dans $[-1, 1]$ où l'équation est parabolique. Tant que u reste dans l'intervalle $[-1, 1]$, l'équation demeure parabolique puis redevient elliptique, ce qui se traduit par une dépendance plus directe de u en f . Nous avons eu du mal à faire converger l'algorithme concurrent [70] puisque nous avons dû le relaxer $\alpha = 0.9$ et considérer une régularisation for en h^d avec $d = 0.2$. Pour des valeurs plus faibles la convergence n'avait pas lieu pour $t = 0.5$. Le résultat est un lissage de la discontinuité de u qui n'est pas conforme au caractère discontinu de la solution. Sur la figure 3 nous avons comparé les graphes de u obtenus par les deux méthodes.

2.7 Conclusion

En conclusion nous avons mis au point un algorithme permettant le calcul de solutions d'équations elliptiques-paraboliques dans des cas très dégénérés. Il a été comparé à des solutions exactes connues et à l'algorithme de référence [70] qu'il surpasse dans le cas où la solution u peut connaître des discontinuités temporelles. Des travaux poursuivant cette étude ont récemment été publiés [106].

1. dans [A9] le saut a lieu à $t = 0.6$ contrairement à ce qui est indiqué. Il s'agissait du premier exemple choisi, puis il m'a semblé plus naturel de choisir 0.5 mais le remplacement de graphiques en rapport n'a pas été fait.

3 Autour du transport neutronique [A11, A7]

Les algorithmes efficaces pour la résolution de l'équation de transport neutronique ont fait l'objet de nombreuses publications (voir [115, 62, 22, 78, 92, 77, 88, 89] et bibliographie). Certains, introduits et analysés par Samir Akesbi (Université de Mulhouse) et ses co-auteurs [19, 20, 21], utilisent un splitting de l'opérateur de transport tenant compte de ses caractéristiques [18]. Notre travail a porté sur l'introduction d'un nouvel algorithme basé sur cette décomposition et l'adaptation en dimension infinie de l'algorithme du résidu minimal [79]. Des développements sur ce sujet ont été publiés très récemment [115, 116].

Nous présentons parallèlement les cas où l'espace des vitesses est de dimension 1 (slab geometry) et 2 (plane geometry), le splitting étant plus simple dans le premier cas que dans le second. Notons que ces deux situations sont considérées dans les publications, car elles correspondent à des géométries différentes du réacteur. Commençons par présenter les équations du transport neutronique.

3.1 Les équations et leur résolution sans splitting

3.1.1 Les équations

Dimension 1 Soit $L > 0$ et $\Omega = (0, L) \times (-1, 1)$. Etant donné un terme source $S \in L^2_+(\Omega)$, on cherche $f : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ solution de l'équation de transport

$$(P_1) \quad \begin{cases} Tf(x, \mu) = Kf(x, \mu) + S(x, \mu) & \text{dans } \Omega, \\ f(0, \mu) = 0 & \text{pour } \mu \in I_1 := (0, 1), \\ f(L, \mu) = 0 & \text{pour } \mu \in I_2 := (-1, 0), \end{cases}$$

où $Tf(x, \mu) = \mu \frac{\partial f}{\partial x}(x, \mu) + \sigma(x)f(x, \mu)$ avec

$$\mathcal{D}(T) = \left\{ f \in L^2(\Omega) : \mu \frac{\partial f}{\partial x}(x, \mu) \in L^2(\Omega), f(0, \mu) = f(L, -\mu) = 0 \text{ pour } \mu > 0 \right\},$$

et K l'opérateur intégral de noyau *positif* k :

$$Kf(x, \mu) = \int_{-1}^1 k(x, \mu, \mu')f(x, \mu')d\mu'.$$

On fait les hypothèses suivantes (L^1_+ représente le cône positif de L^1) :

(A1) $\sigma \in L^1_+(0, L)$.

(A2) $(\mu, \mu') \rightarrow k(\mu, \mu') \in L^2_+((-1, 1)^2)$.

(A3) Si k est symétrique et pair et σ constant, on suppose :

$$\exists c < 1, \left(\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 k(\mu, \mu')^2 d\mu d\mu' \right)^{\frac{1}{2}} \leq \sigma c.$$

Les hypothèses du cas général sont données dans [A12], et sont satisfaites par les noyaux rencontrés usuellement en neutronique.

(A4) $k(\mu, \mu') = \sum_{l=1}^{N_k} a_l(\mu)a_l(\mu')$.

Dimension 2 Soit D un ouvert borné de \mathbb{R}^2 à frontière lipschitzienne ∂D , et $Q = D \times B$ où $B = B(0, 1) = \{\Omega \in \mathbf{R}^2, \|\Omega\|_2 < 1\}$. La normale sortante $\mathbf{n}(x)$ à ∂D existe presque partout, et on définit

$$\Gamma^- := \{(x, \Omega) \in \partial D \times B, \Omega \cdot \mathbf{n}(x) < 0\}.$$

Etant donné un terme source $S \in L^2_+(Q)$, on cherche $f : Q \rightarrow \mathbf{R}$ solution de

$$(P_2) \quad \begin{cases} Tf(x, \Omega) = Kf(x, \Omega) + S(x, \Omega) & \text{dans } Q, \\ f(x, \Omega) = 0 & \text{sur } \Gamma^-, \end{cases}$$

où T est l'opérateur de transport, $Tf(x, \Omega) = \Omega \cdot \nabla_x f(x, \Omega) + \sigma(x)f(x, \Omega)$ dont le domaine est

$$\mathcal{D}(T) = \{f \in L^2(Q) : \Omega \cdot \nabla_x f \in L^2(Q), f = 0 \text{ on } \Gamma^-\},$$

et K est un opérateur intégral à noyau *positif* k :

$$Kf(x, \Omega) = \int_B k(x, \Omega, \Omega') f(x, \Omega') d\Omega'.$$

Comme dans le cas ci-dessus on suppose

(A1) $\sigma \in L^\infty(D)$, $\exists \sigma_0 > 0$, $\sigma(x) \geq \sigma_0$ p.p. sur D .

(A2) $k(x, \Omega, \Omega') = k(x, \Omega', \Omega)$ et k est positif.

(A3) $\exists c \in [0, 1)$, $\forall i \in \{1, 2, 3, 4\}$, $\int_{B_i} k(x, \Omega, \Omega') d\Omega' \leq \frac{\sigma_0 c}{4}$ p.p. sur Q , où B_i est le i ème quart du disque B , voir figure 4.

(A4) $k(x, \Omega, \Omega') = C(x) \sum_{l=1}^{N_k} a_l(\Omega) a_l(\Omega')$.

En dimension 1 ou 2, l'hypothèse (A4) n'est pas utilisée pour prouver la convergence de l'algorithme. Cependant, elle est indispensable numériquement pour que le splitting soit exploitable [21, 18].

3.1.2 Résolution itérative sans splitting (Source Iteration)

Comme on le voit immédiatement, le problème numérique posé par la résolution de (P_1) et (P_2) est que l'opérateur intégral couple les vitesses. La méthode la plus élémentaire pour résoudre (P_1) ou (P_2) est donc basée sur une itération où on explicite la partie figurant dans l'opérateur intégral. Etant donné $f^0 \in \mathcal{D}(T)$, on résout successivement jusqu'à convergence, pour $n = 0, 1, \dots$

$$(P_s) \quad \begin{cases} Tf^{n+1} = Kf^n + S & \text{dans } \Omega, \\ f^{n+1} \in \mathcal{D}(T). \end{cases}$$

Cet algorithme est très simple à mettre en oeuvre. Cependant lorsqu'on s'approche du cas critique ($c \approx 1$), intéressant en pratique, l'algorithme (P_s) converge extrêmement lentement. Des méthodes d'accélération de convergence de type diffusion synthétique (DSA) qui ont été proposées par [78, 24] et [22] donnent d'excellents résultats. Elles sont néanmoins difficiles à implémenter dans le cas où le noyau k dépend fortement de μ (en $1D$), et les preuves de convergence sont obtenues sur des versions discrétisées en μ [77, 88] ou avec un noyau tronqué

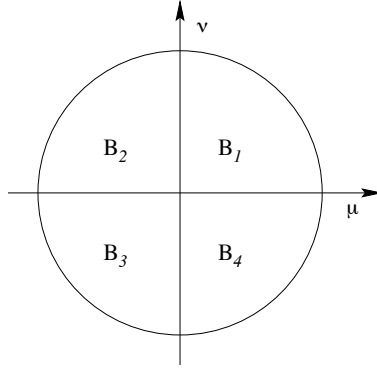


FIGURE 4 – Décomposition de l'espace des vitesses B en dimension 2.

[92, 77]. A notre connaissance, la seule preuve théorique d'accélération de la convergence a été obtenue dans le cas non physique de conditions aux limites réflexives par des méthodes de transformées de Fourier [78]. Dans notre travail, nous prouvons que l'algorithme de résolution, basé sur le splitting exposé ci-dessous, converge indépendamment de la discrétisation choisie pour l'opérateur de transport, et pour des conditions aux limites non réflexives. Notons qu'en plus il est possible d'accélérer nos algorithmes par diffusion synthétique.

3.2 Splitting de l'opérateur de transport

Le splitting proposé correspond à décomposer l'opérateur intégral en opérateurs agissant sur des domaines de vitesse disjoints choisis de sorte qu'on puisse résoudre alternativement, et en fait en pratique parallèlement, des problèmes posés sur des domaines plus petits.

Dimension 1. Soit k_{ij} , $i, j \in \{1, 2\}$ les noyaux positifs définis par

$$k_{ij}(x, \mu, \mu') = k(\mu, \mu') \times \mathbf{1}_{\Omega_i}(x, \mu) \times \mathbf{1}_{\Omega_j}(x, \mu'),$$

avec $\Omega_1 = (0, L) \times (0, 1)$, $\Omega_2 = (0, L) \times (-1, 0)$, et $\mathbf{1}_{\Omega_i}$ la fonction indicatrice de Ω_i . On introduit les opérateurs intégraux $K_{i,j}$ associés :

$$K_{ij}(f)(x, \mu) = \int_{-1}^1 k_{ij}(x, \mu, \mu') f(x, \mu') d\mu'.$$

Comme nous avons $K_{ij}(f) = K_{ij}(f \cdot \mathbf{1}_{\Omega_j}) \mathbf{1}_{\Omega_i}$, l'opérateur K se décompose en $K = K_{11} + K_{12} + K_{21} + K_{22}$. Nous remarquons que K_{ij} est un opérateur $L^2(\Omega)$, qui n'utilise que les valeurs de f sur Ω_j , et qui produit une fonction $K_{ij}f$ à support dans Ω_i .

La solution de (P_1) est donc décomposable en $f = f_1 + f_2$ avec $f_1, f_2 \in \mathcal{D}(T)$ solutions de

$$\begin{pmatrix} T - K_{11} & -K_{12} \\ -K_{21} & T - K_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \end{pmatrix}, \quad (6)$$

où $S_i = S \times \mathbf{1}_{\Omega_i}$ et on a $f_i = f \mathbf{1}_{\Omega_i}$, $i = 1, 2$ (cf [21]).

Dimension 2. Soit K_{ij} , $i, j \in \{1, \dots, 4\}$ les opérateurs intégraux de noyaux

$$k_{ij}(x, \Omega, \Omega') = k(x, \Omega, \Omega') \times \mathbf{1}_{Q_i}(x, \Omega) \times \mathbf{1}_{Q_j}(x, \Omega'),$$

avec $Q_i = D \times B_i$, B_i étant le i ème quart du disque unité (voir figure 4) et $\mathbf{1}_{Q_i}(x, \Omega)$ la fonction indicatrice de Q_i . Comme nous avons $K_{ij}(f) = K_{ij}(f \cdot \mathbf{1}_{Q_j}) \mathbf{1}_{Q_i}$, l'opérateur K se décompose

en $K = \sum_{i,j=1}^4 K_{ij}$. L'opérateur K_{ij} est un opérateur de $L^2(Q)$, dont la valeur ne dépend que de la valeur de f sur Q_j , et tel que $K_{ij}f$ est à support dans Q_i .

La solution de (P_2) se décompose en $f = f_1 + f_2 + f_3 + f_4$ avec $f_1, f_2, f_3, f_4 \in \mathcal{D}(T)$ solutions de

$$\begin{pmatrix} T - K_{11} & -K_{12} & -K_{13} & -K_{14} \\ -K_{21} & T - K_{22} & -K_{23} & -K_{24} \\ -K_{31} & -K_{32} & T - K_{33} & -K_{34} \\ -K_{41} & -K_{42} & -K_{43} & T - K_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{pmatrix} \quad (7)$$

où $S_i = S \times \mathbf{1}_{Q_i}$, et nous avons $f_i = f \times \mathbf{1}_{Q_i}$ pour $i \in \{1, \dots, 4\}$ (cf [18]).

Gain apporté Le gain du splitting n'est pas évident à première vue. Il tient au fait que sous l'hypothèse (A4), les opérateurs de la forme $T - K_{ii}$ sont inversibles avec un coût numérique quasi égal à l'inversion de T . C'est la contribution essentielle de [21, 18]. A partir de cette avancée algorithmique diverses méthodes itératives ont été développées. La plus simple est de procéder à une itération de type Jacobi et porte le nom de méthode MSI (Modified Source Iteration). Dans [21], il est montré qu'on peut implémenter la méthode SOR sur cette matrice d'opérateurs, et les résultats sont très bons, à ceci près qu'il est nécessaire de trouver le paramètre optimal de relaxation, ce qui peut être très long, notamment à proximité du cas critique. Nous avons donc cherché à mettre en oeuvre une méthode itérative sans paramètre mais plus performante que les itérations classiques. Nous nous sommes penchés vers la méthode du résidu minimal, la matrice n'étant pas symétrique.

3.3 Méthode du résidu minimal

3.3.1 Algorithme

Nous présentons la méthode en dimension 2, le cas de la dimension 1 étant analogue et plus simple. Nous multiplions tout d'abord toutes les équations par T^{-1} ce qui donne

$$\begin{pmatrix} I - \theta_{11} & -\theta_{12} & -\theta_{13} & -\theta_{14} \\ -\theta_{21} & I - \theta_{22} & -\theta_{23} & -\theta_{24} \\ -\theta_{31} & -\theta_{32} & I - \theta_{33} & -\theta_{34} \\ -\theta_{41} & -\theta_{42} & -\theta_{43} & I - \theta_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{S}_1 \\ \widetilde{S}_2 \\ \widetilde{S}_3 \\ \widetilde{S}_4 \end{pmatrix},$$

où on a posé $\theta_{ij} = T^{-1}K_{ij}$ et $\widetilde{S}_i = T^{-1}S_i$. Nous préconditionnons alors la matrice par sa diagonale, en la multipliant

$$\begin{pmatrix} (I - \theta_{11})^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (I - \theta_{22})^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (I - \theta_{33})^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (I - \theta_{44})^{-1} \end{pmatrix},$$

ce qui mène à la matrice

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} I & -(I - \theta_{11})^{-1}\theta_{12} & -(I - \theta_{11})^{-1}\theta_{13} & -(I - \theta_{11})^{-1}\theta_{14} \\ -(I - \theta_{22})^{-1}\theta_{21} & I & -(I - \theta_{22})^{-1}\theta_{23} & -(I - \theta_{22})^{-1}\theta_{24} \\ -(I - \theta_{33})^{-1}\theta_{31} & -(I - \theta_{33})^{-1}\theta_{32} & I & -(I - \theta_{33})^{-1}\theta_{34} \\ -(I - \theta_{44})^{-1}\theta_{41} & -(I - \theta_{44})^{-1}\theta_{42} & -(I - \theta_{44})^{-1}\theta_{43} & I \end{pmatrix}$$

et au second membre

$$B = \begin{pmatrix} (I - \theta_{11})^{-1}\widetilde{S}_1 \\ (I - \theta_{22})^{-1}\widetilde{S}_2 \\ (I - \theta_{33})^{-1}\widetilde{S}_3 \\ (I - \theta_{44})^{-1}\widetilde{S}_4 \end{pmatrix}$$

Nous préciserons ci-dessous comment calculer les inverses des opérateurs ci-dessus. On veut alors résoudre le système $\mathcal{A}F = B$, avec $F = {}^t(f_1, f_2, f_3, f_4) \in \mathcal{D}(T)^4$. On note \langle, \rangle le produit scalaire de $(L^2(Q))^4$, défini par $\langle F, G \rangle = (f_1, g_1) + (f_2, g_2) + (f_3, g_3) + (f_4, g_4)$ où $(,)$ est le produit scalaire standard de $L^2(Q)$. De la même manière, $\|\cdot\|_2$ représentera la norme de $(L^2(Q))^4$ associée à ce produit scalaire.

L'algorithme du résidu minimal [79, 25] correspond à minimiser $\mathcal{E}(F) = \|B - \mathcal{A}F\|_2^2$, et prend la forme de l'itération suivante :

Soit $f^0 \in \mathcal{D}(T)$, $F^0 = (f^0 \mathbf{1}_{Q_i})_{i=1, \dots, 4}$, $R^0 = B - \mathcal{A}F^0$, $P^0 = R^0$, $Q^0 = \mathcal{A}P^0$.

Tant que $\|R^k\|_2 > \varepsilon$ faire

Debut

$$\begin{aligned} \alpha^k &= \frac{\langle R^k, Q^k \rangle}{\langle Q^k, Q^k \rangle} \\ F^{k+1} &= F^k + \alpha^k P^k \\ R^{k+1} &= R^k - \alpha^k Q^k \\ \beta^{k+1} &= -\frac{\langle \mathcal{A}R^{k+1}, Q^k \rangle}{\langle Q^k, Q^k \rangle} \\ P^{k+1} &= R^{k+1} + \beta^{k+1} P^k \\ Q^{k+1} &= \mathcal{A}R^{k+1} + \beta^{k+1} Q^k \end{aligned}$$

Fin

Pour que l'algorithme ci-dessus soit implémentable, il faut préciser comment calculer les produits de la forme \mathcal{A} fois un vecteur, car \mathcal{A} contient des inverses d'opérateurs intégraux.

Soit $g \in \mathcal{D}(T)$, $\mathcal{G} = (g \mathbf{1}_{Q_i})_{i=1, \dots, 4}$ et voyons à quels calculs correspond l'obtention de $\mathcal{Z} = (z_1, z_2, z_3, z_4)$ tel que

$$\mathcal{Z} = \mathcal{A}\mathcal{G}.$$

Par composante, pour $i = 1, \dots, 4$, nous devons calculer

$$z_i = g_i - \sum_{j \neq i} (I - \theta_{ii})^{-1} \theta_{ij} g_j,$$

soit en appliquant $T(I - \theta_{ii}) = T - K_{ii}$ à l'équation i ,

$$(T - K_{ii})(g_i - z_i) = \sum_{j \neq i} K_{ij} g_j. \quad (8)$$

C'est justement ce type d'équation qui peut être calculé numériquement à un coût proche de la résolution d'une équation de transport par T [18], sous l'hypothèse (A4).

3.3.2 Convergence

Pour prouver la convergence de l'algorithme, nous avons besoin d'estimer inférieurement la forme quadratique associée à la matrice d'opérateurs \mathcal{A} . En effet, il est connu (adaptation directe de [79]) que l'algorithme du résidu minimal produit une suite de résidus vérifiant l'estimation

$$\mathcal{E}(F^{k+1}) \leq \mathcal{E}(F^k) \left(1 - \frac{\langle R^k, \mathcal{A}R^k \rangle \langle R^k, \mathcal{A}R^k \rangle}{\langle R^k, R^k \rangle \langle \mathcal{A}R^k, \mathcal{A}R^k \rangle} \right). \quad (9)$$

Dans [A12, A7] nous démontrons les estimations suivantes au moyen d'estimations sur l'opérateur de transport T et les noyaux intégraux K_{ii} :

Proposition 2 *Sous les hypothèses (A1)-(A3) l'opérateur \mathcal{A} a une partie symétrique définie positive et vérifie*

$$\begin{aligned} \text{cas 1D :} \quad & \forall F \in \mathcal{D}(T)^2, \langle \mathcal{A}F, F \rangle \geq \frac{1-c}{1-\frac{c}{2}} \|F\|_2^2, & \langle \mathcal{A}F, F \rangle & \geq \frac{1-\frac{c}{2}}{1+(\frac{c}{2})^2} \langle \mathcal{A}F, \mathcal{A}F \rangle \\ \text{cas 2D :} \quad & \forall F \in \mathcal{D}(T)^4, \langle \mathcal{A}F, F \rangle \geq \frac{1-c}{1-\frac{c}{4}} \|F\|_2^2, & \langle \mathcal{A}F, F \rangle & \geq \frac{1-\frac{c}{4}}{1+\frac{c}{2}} \langle \mathcal{A}F, \mathcal{A}F \rangle. \end{aligned}$$

Nous avons donc le résultat de convergence suivant :

Proposition 3 *Sous les hypothèses (A1)-(A3), la méthode du résidu minimal converge, c'est à dire que F^k converge vers l'unique solution de (6) ou (7), et le résidu décroît de la manière suivante pour $k \geq 0$:*

$$\begin{aligned} \text{cas 1D :} \quad & \mathcal{E}(F^{k+1}) \leq \mathcal{E}(F^k) \left(1 - \frac{1-c}{1+(\frac{c}{2})^2} \right) \\ \text{cas 2D :} \quad & \mathcal{E}(F^{k+1}) \leq \mathcal{E}(F^k) \left(1 - \frac{1-c}{1+\frac{c}{2}} \right). \end{aligned}$$

Les résultats ci-dessous prouvent la convergence de la méthode lorsque $c < 1$. Cependant on constate en pratique numériquement que l'algorithme converge pour des valeurs $c > 1$, au contraire d'autres méthodes. En dimension deux nous avons constaté la convergence de la méthode pour $\sigma = 50$ jusqu'à $c < 4$. Figure 5 nous comparons notre méthode pour $\sigma = 50$ avec la méthode SOR. Notons que celle-ci nécessite le calcul d'un paramètre optimal dont le coût n'est pas pris en compte dans le graphique. En dimension 1 il est clair que la méthode SOR explose pour c proche de 1, et le graphique 6 prouve qu'il en est de même dans le cas de la dimension 2. La méthode du résidu minimal permet quant à elle de dépasser $c = 1$. Enfin nous illustrons sur la figure 7 le bon comportement de notre algorithme pour des valeurs grandes de σ . En fait l'algorithme converge de plus en plus rapidement, contrairement à SOR.

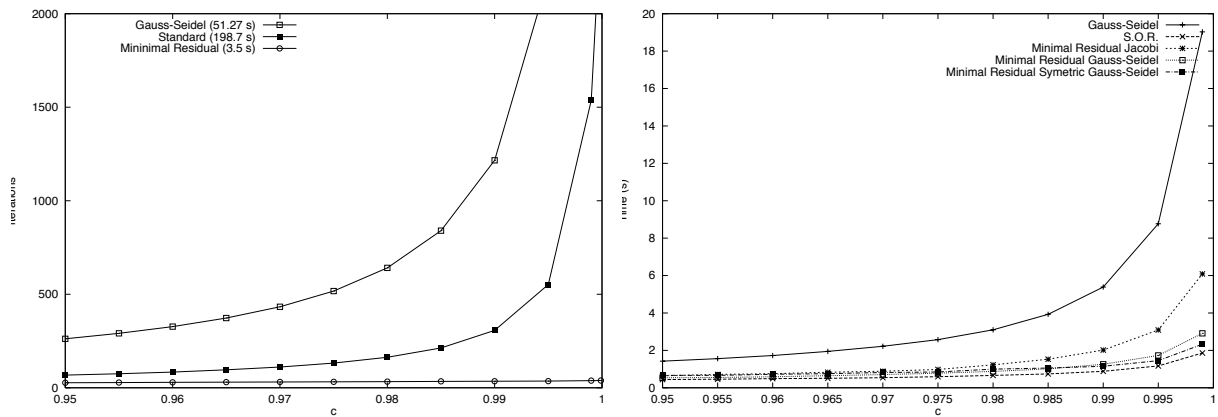


FIGURE 5 – Comparaison du coût de calcul à $\sigma = 50$ jusqu'à $c = 0.999$. Gauche : cas 1D. Droite : cas 2D pour différentes implémentations de la résolution de (8)

3.4 Conclusion

En conclusion nous avons mis au point une méthode aussi efficace que SOR en dessous du cas critique, ne nécessitant pas de calcul de paramètre optimal, et convergeant même au delà (expérimentalement). Sa mise en oeuvre est aussi simple que la méthode standard et est naturellement parallélisable. Enfin elle pourrait encore être accélérée par diffusion synthétique. Un point intéressant serait de prouver qu'effectivement la méthode converge pour $c > 1$, ce qui serait le seul résultat de ce type pour une méthode de résolution de l'équation du transport neutronique, à ma connaissance. Très récemment Samir Akesbi et Abdelkader Tizaoui ont implémenté une méthode de type GMRes qui semble améliorer encore ces résultats [116].

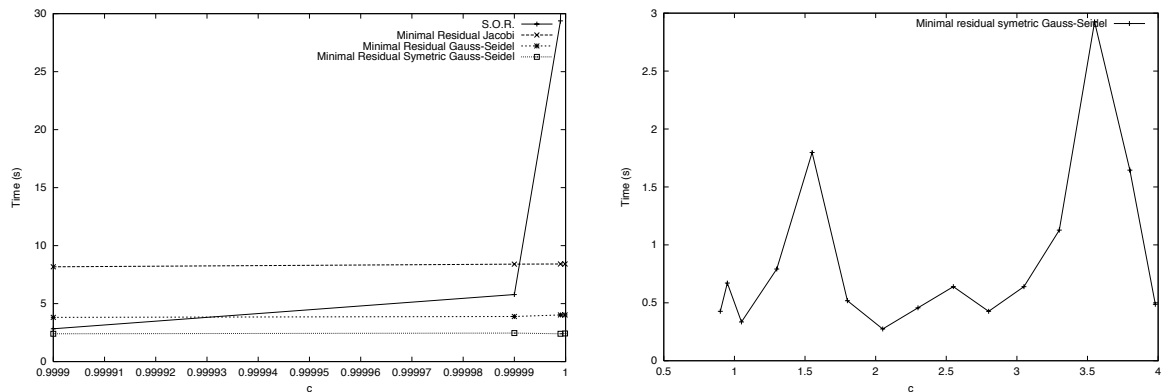


FIGURE 6 – Comparaison dans le cas 2D du coût de calcul à $\sigma = 50$ au voisinage de $c = 1$ et comportement pour $1 < c < 4$

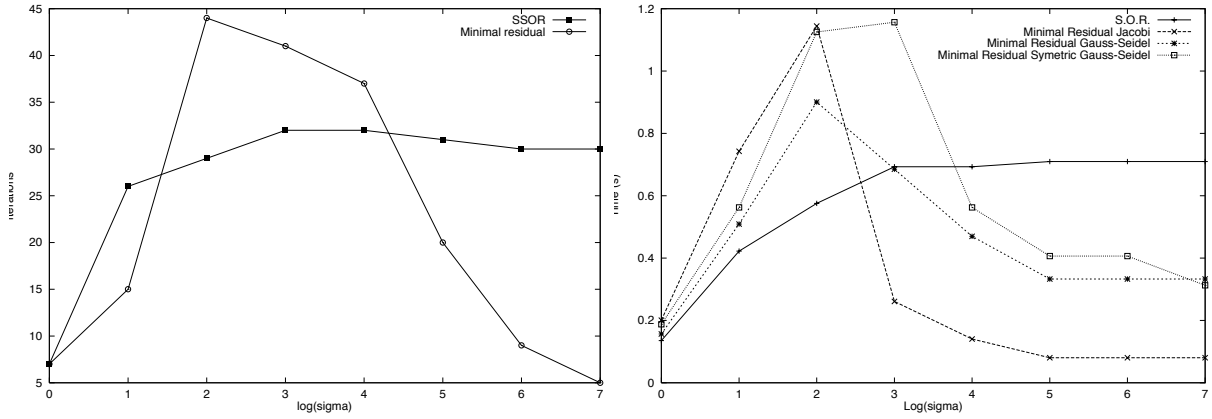


FIGURE 7 – Comparaison du temps CPU à $c = 0.98$, pour de grandes valeurs de σ .

4 Mécanique des textiles [A10]

4.1 Introduction

Ce thème de recherche a été développé conjointement avec Nadjombé Faré durant sa thèse à l'Université de Mulhouse. La présence de l'École Nationale Supérieure d'Ingénieur Textile de Mulhouse et de collaborations avec des experts de ce domaine, a justifié que l'on développe des modèles permettant une simulation réaliste de ces matériaux très particuliers.

Un problème académique est celui du drapé, c'est à dire l'ensemble des plis que forme un textile soumis à son seul poids, et maintenu sur une partie de son bord. Il existe même des machines quantifiant le drapé d'un textile : nombre de plis, et aire de l'ombre produite par le tissu lorsqu'on l'éclaire par au-dessus. Nous nous sommes donc intéressés à la mise au point d'un modèle qui permette la simulation de ce phénomène.

Dans ce contexte, le tissu n'étant soumis qu'à son propre poids, il paraît raisonnable que l'étirement du tissu dans le sens des fibres soit négligé. Ainsi le modèle que nous étudions ici ne tient compte que de l'extension du tissu en cisaillement membranaire et de sa flexion (c'est un modèle membrane-flexion).

Dans ce qui suit, les indices grecs $\alpha, \beta \dots$ prennent les valeurs 1 et 2 et nous adoptons la convention de sommation par rapport aux indices répétés. Nous désignons par $f_{,\alpha}$ la dérivée partielle d'une fonction f par rapport à la variable x_α et par $f_{,\alpha\beta}$ ses dérivées secondes. Si X désigne un vecteur de \mathbb{R}^3 , $\|X\|$ est sa norme euclidienne ; le produit vectoriel entre deux vecteurs u et v est noté $u \wedge v$, et le produit scalaire $u \cdot v$. La norme $\|\cdot\|_2$ représentera, suivant son argument, la norme sur $L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$ ou sur $L^2(\Omega, \mathbb{R})$. Enfin nous désignerons par C toutes les constantes dans les estimations, sans les différencier.

Nous supposons que le tissu occupe initialement un domaine $\Omega \times \{0\}$ de \mathbb{R}^3 où $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ est un ouvert borné de frontière de classe C^1 par morceaux. Nous désignons par Γ_0 une partie de mesure non nulle du bord $\partial\Omega$ de Ω où le tissu est fixé. La configuration de référence coïncide avec cette configuration initiale et un point X y est repéré dans un repère fixe (e_1, e_2, e_3) par $X = \varphi_0(x_1, x_2) = (x_1, x_2, 0)$. Une déformation admissible de la configuration initiale est une application φ suffisamment régulière, injective de Ω à valeur dans \mathbb{R}^3 i.e. :

$$\varphi : \begin{cases} \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ x = (x_1, x_2) \rightarrow \varphi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x)) \end{cases}$$

vérifiant :

- (i) $\|\varphi_{,1}\| = 1, \|\varphi_{,2}\| = 1$ (inextensionnalité dans le sens des fibres),
- (ii) $\|\varphi_{,1} \wedge \varphi_{,2}\| \geq C_0$, où $0 < C_0 \leq 1$ dépend du tissu considéré.

Remarque 3 1. La condition (ii) signifie que les fibres de chaîne et de trame du tissu ne peuvent pas complètement s'aligner.

2. D. Coutand [52] considère le cas d'une coque avec $C_0 = 1$, c'est-à-dire sans cisaillement. Nous nous sommes placés dans le cas d'une configuration initiale plane mais le cas des coques pourrait être traité de façon analogue sans difficulté supplémentaire. Nous utilisons fondamentalement les techniques introduites dans [52] et [50].

4.2 Origine et justification mécanique du modèle

Dans [A10] nous partons dans un premier temps d'un modèle tridimensionnel où le tissu occupe un domaine $\Theta = \Omega \times]-h, +h[\subset \mathbb{R}^3$. L'épaisseur $h > 0$ du tissu étant très petite, nous nous plaçons sous l'hypothèse cinématique de Cosserat à un directeur inextensible en considérant que les déformations de la configuration initiale (plane) sont de la forme :

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = \varphi(x_1, x_2) + x_3 t(x_1, x_2)$$

où $t(x_1, x_2)$ est unitaire.

En calculant le tenseur des déformations tridimensionnel de Green-Saint Venant, on obtient

$$E_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\varphi_{,\alpha} \cdot \varphi_{,\beta} - \delta_{\alpha\beta}) + \frac{1}{2}x_3(\varphi_{,\alpha} \cdot t_{,\beta} + \varphi_{,\beta} \cdot t_{,\alpha}) + \frac{1}{2}x_3^2 t_{,\alpha} \cdot t_{,\beta} \quad E_{3\alpha} = \frac{1}{2}\varphi_{,\alpha} \cdot t \quad E_{33} = 0.$$

En tronquant à l'ordre un en x_3 , trois tenseurs de déformations interviennent dans l'expression de E : le tenseur de déformation en membrane, le tenseur de déformation en flexion et le tenseur de déformation en cisaillement transverse :

$$\begin{cases} e_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}(\varphi_{,\alpha} \cdot \varphi_{,\beta} - \delta_{\alpha\beta}) \\ \chi_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}(\varphi_{,\alpha} \cdot t_{,\beta} + \varphi_{,\beta} \cdot t_{,\alpha}) \\ \gamma_\alpha &= \frac{1}{2}\varphi_{,\alpha} \cdot t \end{cases}$$

où $\delta_{\alpha\beta}$ est le symbole de Kronecker.

De part sa structure, nous supposons que le tissu se déforme sans cisaillement transverse, ce qui revient à annuler le dernier tenseur, c'est-à-dire $\gamma_\alpha = \frac{1}{2}\varphi_{,\alpha} \cdot t = 0$. Dans ce cas le directeur t devient la normale extérieure à la surface moyenne du tissu que nous noterons désormais $N(\varphi)$. En dérivant γ , on peut éliminer t de l'expression du tenseur $\chi_{\alpha\beta}$ qui devient : $\chi_{\alpha\beta} = -\varphi_{,\alpha\beta} \cdot N(\varphi)$.

Nous avons supposé que la loi de comportement du matériau est linéaire et de la forme $\Sigma_{ij} = R_{ijkl} E_{kl}$, où Σ est le second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff, et R la matrice de rigidité (coefficients d'élasticité) du tissu considéré comme un matériau orthotrope.

A l'équilibre élastique l'application du principe des travaux virtuels (voir [48][49], [76]), en tenant compte de l'intégration suivant l'épaisseur du second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff, et de l'hypothèse (i), nous obtenons l'énergie suivante :

$$I(\varphi) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[G(\varphi_{,1} \cdot \varphi_{,2})^2 + d_{\alpha\beta} (\varphi_{,\alpha\beta} \cdot N(\varphi))^2 \right] dx - \int_{\Omega} \sigma g \varphi_3 dx$$

Nous signalons que sous cette forme, nous n'avons pu obtenir de résultat d'existence de solutions car la fonctionnelle $I(\varphi)$ n'est vraisemblablement pas coercive. En effet si on considère une suite minimisante φ^n dans l'ensemble des déformations admissibles, les termes de la suite $\varphi_{,\alpha\alpha}^n \cdot \varphi_{,\beta\beta}^n$ avec $\alpha \neq \beta$ semblent délicats à contrôler. Pour pallier ce manque de coercivité de la fonctionnelle $I(\varphi)$, nous avons considéré un terme régularisant provenant de la variation de l'angle de cisaillement. Nous avons par ailleurs consulté un spécialiste du textile², pour qui la variation d'angle de cisaillement est une grandeur qu'il est raisonnable de voir apparaître dans un tel modèle.

4.3 Modèle régularisé et existence d'un minimiseur

En rajoutant ce terme régularisant, nous obtenons un modèle mécanique bidimensionnel, que nous étudions mathématiquement ci-dessous, et dont l'énergie de déformation est donnée par :

$$W(\varphi) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[G(\varphi_{,1} \cdot \varphi_{,2})^2 + g_{\alpha} ((\varphi_{,1} \cdot \varphi_{,2})_{,\alpha})^2 + d_{\alpha\beta} (\varphi_{,\alpha\beta} \cdot N(\varphi))^2 \right] dx - \int_{\Omega} \sigma g \varphi_3 dx$$

où $N(\varphi) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$, $N(\varphi) = \frac{\varphi_{,1} \wedge \varphi_{,2}}{\|\varphi_{,1} \wedge \varphi_{,1}\|}$ est la normale à la surface, $g_{\alpha} > 0$, $d_{\alpha\beta} > 0$ et $G > 0$ sont des coefficients d'élasticité du tissu, $\sigma > 0$ est la densité surfacique du tissu et $g > 0$ la gravité. Par la suite on écrira simplement N pour $N(\varphi)$.

Le premier terme de la fonctionnelle représente l'énergie de déformation en cisaillement de membrane, le second terme est celui de la variation de l'angle de cisaillement, le troisième l'énergie de déformation en flexion et le dernier terme l'énergie potentielle.

Notons que la fonctionnelle W n'est pas convexe par rapport à la variable vectorielle φ . Nous étudions W sur un ensemble des déformations admissibles V (non convexe), $V \subset H^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$ défini par :

$$V = \{ \varphi \in H^2(\Omega, \mathbb{R}^3) : \|\varphi_{,1}\| = \|\varphi_{,2}\| = 1, \|\varphi_{,1} \wedge \varphi_{,2}\| \geq C_0 \text{ dans } \Omega \text{ et } \varphi = \varphi_0 \text{ sur } \Gamma_0 \}$$

muni de la norme de l'espace $H^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$. Nous cherchons à prouver l'existence d'une déformation $\varphi \in V$ telle que $W(\varphi) = \inf_V W$.

Dans [A10] nous prouvons l'existence d'un minimiseur pour cette énergie en procédant en quatre étapes. Dans la première nous montrons que W est une fonctionnelle propre et nous établissons une inégalité de coercivité, dans la deuxième nous établissons des estimations *a priori* qui mènent à une convergence faible dans H^2 d'une sous-suite minimisante de W . L'étape trois consiste à passer à la limite dans les termes non linéaires de W . Enfin la quatrième étape est consacrée à prouver une faible semi-continuité inférieure de W et à la déduction du résultat.

2. Ron Postle, invité par l'Ecole Nationale Supérieure d'Ingénieurs Textiles de Mulhouse.

Proposition 4 *Il existe $\varphi \in V$ telle que $W(\varphi) = \inf_V W$.*

La démonstration utilise l'idée de [50] et [52] de dériver les contraintes de V afin d'en tirer des estimations sur les dérivées d'ordre supérieur de φ . L'apport des termes émanant de l'énergie liée à la variation de l'angle de cisaillement permet de contrôler les dérivées secondes $\varphi_{,\alpha\beta}^n$ dans $L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$ et par conséquent φ^n dans $H^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$.

Ce résultat prouve donc que l'infimum de W sur V est atteint pour une déformation $\varphi \in V$. Pour autant ceci n'exclut pas que W puisse prendre des valeurs plus petites pour d'autres déformations n'appartenant pas à V . Cependant, pour les textiles que nous avons considéré (tissés), V semble être une classe raisonnable de déformations puisque les fibres sont quasiment inextensibles mais peuvent pivoter les unes par rapport aux autres (cisaillement).

4.4 Mise en oeuvre numérique

Nous avons mis en oeuvre une méthode de descente pour minimiser l'énergie et produire ainsi une simulation du laché de tissu. Celle-ci peut être visualisée dans le cas d'un tissu très souple posé sur le coin d'une table rectangulaire sur

<http://www-ljk.imag.fr/membres/Emmanuel.Maitre/Drape/>.

Notons toutefois que la dynamique n'est pas réaliste, au contraire nous affichons les étapes successives menant d'une configuration au repos plane à un état d'énergie quasi-minimale. Pour rendre compte de la dynamique réelle, il aurait fallu tenir compte de l'inertie du textile, et surtout des forces de pression de l'air environnant. Dans ce contexte multiphysique, avec les outils que nous avons développé maintenant pour l'élasticité d'une membrane élastique immergée, nous pourrions sans doute améliorer les résultats présentés ici (à noter cependant que la modélisation Level Set d'une membrane orthotrope n'est pas triviale). Malheureusement le contexte a fait que Nadjombé n'était pas en position d'obtenir un poste et j'ai par conséquent préféré abandonner cet axe de recherche. La figure 8 regroupe les résultats que nous avons obtenues en 2002, elle comprend plusieurs cas tests : le cas d'un coin de table rectangulaire avec des tissus plus ou moins souples, le cas d'une table plane ronde, et le cas d'un obstacle sphérique. Il n'y a pas de gestion de collision, ce qui provoque dans le cas d'une sphère un résultat non physique.

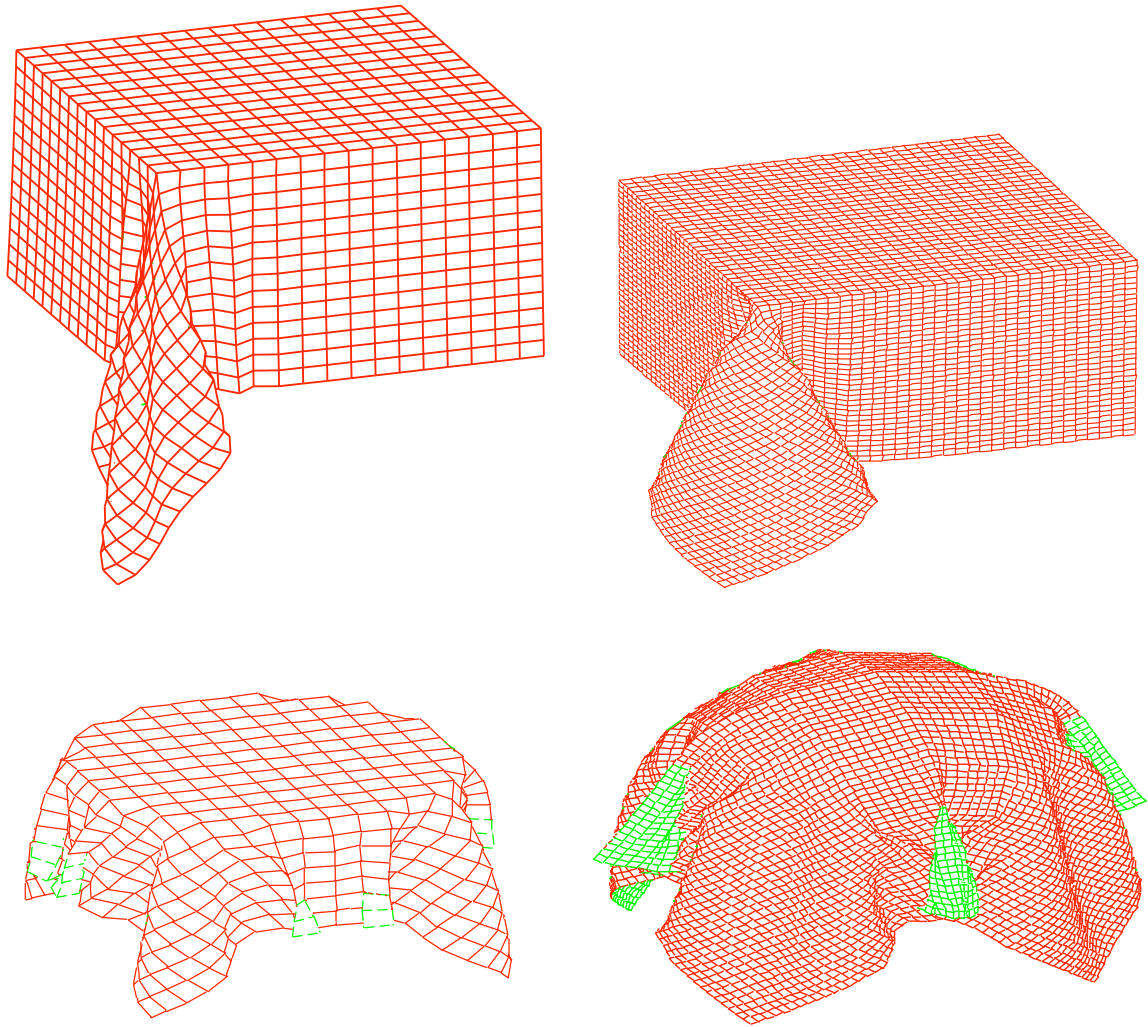


FIGURE 8 – Quatre exemple de drapé : un tissu souple et un tissu moins souple sur le coin d'une table rectangulaire ; un tissu posé sur une table ronde ; un tissu posé sur une sphère.

5 Méthode Level Set et mécanique des milieux continus [A5, A4, A3, A2, A14]

5.1 Motivations

Nous nous sommes intéressés à la modélisation de problèmes de mécanique des milieux continus, notamment de problèmes de couplages fluide-structure intervenant dans un contexte biologique.

Notre premier champ d'investigations concernait le mouvement d'une membrane cellulaire oscillante, étudiée par le laboratoire TIMC. Dans ce cas la membrane avait une élasticité simple et son aire variait. L'application visée était l'étude du mouvement des cellules au moyens de protrusions membranaires. Le modèle mécanique est donc une membrane élastique, réagissant à un changement d'aire, immergée dans un fluide. Nous faisons donc ici abstraction des éventuels autres composants biologiques de la cellule.

Certaines membranes ont une élasticité dégénérée. C'est le cas des membranes phospholipidiques constituées d'une bi-couche de molécules possédant une tête hydrophile et une queue hydrophobe. Ces phospholipides mis en solution expérimentalement ont tendance à s'agglomérer pour former des vésicules phospholipidiques. Nos collègues physiciens du laboratoire LSP étudient ces objets d'un point de vue théorique et expérimental. De part la nature de la membrane, celle-ci ne peut connaître de changement d'aire significatif avant de rompre. Par contre elle présente une résistance à la flexion. Nous avons donc ici un modèle mécanique comportant une membrane élastique immergée, d'aire constante, réagissant à un changement de courbure locale.

Enfin des objets autres que des membranes interviennent en biologie. C'est le cas des cardiomyocytes, ces briques de base du myocarde. Nos collègues du laboratoire TIMC étudient l'auto-oscillation des cardiomyocytes isolés dans un boîtier de Pétri rempli de liquide biologique. Il s'agit ici d'un objet élastique actif (se contractant) immergé dans un fluide, bien qu'ici le couplage avec le fluide extérieur soit d'une importance secondaire.

Comme nous le voyons dans ces trois exemples d'applications, nous avons été amenés à développer des techniques de modélisation pour traiter des problèmes où une structure élastique d'un certain type est immergée dans un fluide contenu lui-même dans un domaine fixe. D'où l'idée de développer un modèle multi-physique, au sens où nous voulons procéder comme si le fluide et la structure n'étaient que deux constituants d'un même corps viscoélastique réagissant différemment aux contraintes appliquées selon si le point de l'espace considéré est en fait fluide ou élastique. Cette volonté se heurte au problème du choix de coordonnées à effectuer. En effet il y a une incompatibilité entre l'écriture lagrangienne usuelle de l'élasticité et la formulation eulérienne de la mécanique des fluides.

Cette difficulté se rencontre à tous les niveaux en couplage fluide-structure. Elle est responsable des difficultés rencontrés pour établir des résultats d'existence pour des problèmes à grands déplacements (étant entendu que l'hypothèse des petits déplacements revient à confondre en partie les repères eulériens et lagrangiens). Numériquement elle est aussi la raison d'être de la méthode ALE permettant d'écrire les équations fluides et élastiques dans leurs repères respectifs. Du point de vue théorique, les travaux récents de Coutand et Shkoller [53] permettent d'obtenir l'existence d'une solution sous des hypothèses assez faibles par rapport aux résultats obtenus auparavant, en écrivant tout le problème en coordonnées lagrangiennes. Notre approche au contraire a été d'écrire les équations du fluide et de la structure

élastique en coordonnées eulériennes et de transformer le problème en l'étude de l'écoulement d'un fluide complexe de type Korteweg généralisé. Nous sommes persuadés qu'en sciences du vivant, où à l'inverse de l'aéronautique les contraintes échangées entre la structure et le fluide sont assez faibles, mais les déplacements importants, cette approche est prometteuse.

Nous la développons ci-dessous.

5.2 Élasticité lagrangienne extensionnelle d'une membrane immergée

La représentation lagrangienne de l'élasticité d'une surface étant plus naturelle, on commence par partir de celle-ci afin d'aboutir à la formulation eulérienne. On considère une surface élastique non fermée régulière $\tilde{\Gamma}$ dans une configuration au repos, représentée par un paramétrage régulier $\theta : [0, M]^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $M > 0$. Par extensionnelle on entend qu'elle ne réagit qu'à une déformation dans son plan (pas à sa flexion), et plus spécifiquement par une variation d'aire locale (et donc pas au cisaillement dans son plan tangent). Le fait qu'elle ne soit pas affectée par le cisaillement est réaliste tant que l'on considère des membranes phospholipidiques, car celles-ci sont constituées d'une bi-couche de molécules pouvant glisser les unes par rapport aux autres au sein d'une même couche. Par contre le nombre de molécules par couche étant constant, l'aire locale est conservée ce que nous allons modéliser par une membrane réagissant très fortement au changement d'aire. Enfin nous ne considérons pas la flexion pour l'instant, bien que ce soit un aspect important du problème, afin d'obtenir un premier modèle simple, que l'on complétera ensuite. Nous avons volontairement considéré une membrane non fermée pour pouvoir la représenter paramétriquement, alors que les objets biologiques que nous considérons sont en général fermés. Cependant la modélisation eulérienne présentée dans un second temps apportera un moyen élégant de s'affranchir de cette hypothèse.

La masse surfacique de la membrane dans cette configuration est notée $\lambda_\theta(r, s)$. Cette surface se déplace entre les instants $t = 0$ et $t = T$, et l'on note Γ_t , sa position au temps t . En particulier Γ_0 est sa position initiale, et $\Gamma_0 \neq \tilde{\Gamma}$ en général, si la surface n'est pas initialement au repos. Notons $(r, s) \rightarrow \gamma_0(r, s)$ et $(r, s) \rightarrow \lambda_0(r, s)$ un paramétrage régulier et une masse surfacique pour Γ_0 tels que $\lambda_0 |\gamma_{0,r} \times \gamma_{0,s}| = \lambda_\theta |\theta_r \times \theta_s|$. Soit $\gamma : [0, M]^2 \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^3$ le paramétrage régulier de Γ_t transporté par le champ de vitesse du milieu continu, c'est à dire $\gamma(r, s, t) = X(t; \gamma_0(r, s))$ ou de manière équivalente la solution du système différentiel :

$$\begin{cases} \gamma_t(r, s, t) = u(\gamma(r, s, t), t), & (r, s) \in [0, M]^2, t \in]0, T] \\ \gamma(r, s, 0) = \gamma_0(r, s), & (r, s) \in [0, M]^2. \end{cases} \quad (10)$$

La surface Γ_t , est immergée dans un fluide newtonien incompressible et homogène de densité ρ_f et de viscosité μ . Cet exemple correspond à se donner une masse volumique globale :

$$\rho = \rho_f + \lambda \delta_{\Gamma_t}$$

où δ_{Γ_t} est la mesure portée par la courbe Γ_t , définie par

$$\forall h \in \mathcal{C}_0^0(\Omega), \quad \langle \delta_{\Gamma_t}, h \rangle = \int_{\Gamma_t} h(x) d\sigma.$$

5.2.1 Quelques notations

Dans la suite nous utiliserons souvent les courbes caractéristiques du champ de vitesse du milieu continu. On notera $(x, t) \rightarrow X(x, t)$ les caractéristiques (resp. $(x, t) \rightarrow Y(x, t)$

les caractéristiques rétrogrades) solutions de $X_t = u(X, t)$ et $X(0, x) = x$ (resp. $Y_t + u \cdot \nabla Y = 0$ et $Y(0, x) = x$). Sous des hypothèses de régularité sur u (par exemple $W^{1, \infty}$ en espace) $x \rightarrow X(x, t)$ et $x \rightarrow Y(x, t)$ sont deux difféomorphismes inverses l'un de l'autre : $X(Y(x, t), t) = x$ et $Y(X(x, t), t) = x$. Leurs jacobiens ne s'annulent donc pas et si on note $J(x, t) = \det \nabla Y(x, t)$, on a $J_t + u \cdot \nabla J = -J \operatorname{div} u$.

5.2.2 Conservation du volume : incompressibilité

Un milieu est dit incompressible si tout ouvert ω se déforme en un ouvert $\omega(t) = X(\omega, t)$ de même mesure pour tout t . On a donc

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega(t)} dx = 0$$

d'où en appliquant la formule de Reynolds, $\int_{\omega(t)} \operatorname{div} u dx = 0$ et ceci pour tout $\omega(t)$. D'où la condition d'incompressibilité :

$$\operatorname{div} u = 0$$

D'après la formule de dérivation de J on voit que cette condition s'écrit aussi $J = 1$.

5.2.3 Conservation de la masse

Considérons un volume élémentaire contenu dans un ouvert $\omega \subset \Omega$. Soit Γ_ω^0 la partie éventuellement vide de Γ_0 rencontrant ω . Soit $K \subset [0, M]^2$ tel que $\gamma_0(K) = \Gamma_\omega^0$. On pose $\omega(t) = X(\omega, t)$ (c'est un ouvert car X est un difféomorphisme) et $\Gamma_\omega(t) = X(\Gamma_\omega^0, t)$. La masse dans $\omega(t)$ est conservée. On a donc

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega(t)} \rho = 0$$

ce qui donne dans notre exemple

$$\frac{d}{dt} \left\{ \rho_f \operatorname{mes}(\omega(t)) + \int_K \lambda(r, s, t) |\gamma_r \times \gamma_s| dr ds \right\} = 0$$

D'après l'incompressibilité ci-dessus et l'homogénéité du fluide, $\rho_f \operatorname{mes}(\omega(t))$ est constante, donc

$$\int_K \frac{\partial}{\partial t} (\lambda(r, s, t) |\gamma_r \times \gamma_s|) dr ds = 0$$

Comme le domaine est quelconque, K l'est aussi, donc

$$\frac{\partial}{\partial t} (\lambda(r, s, t) |\gamma_r \times \gamma_s|) = 0 \tag{11}$$

Cette relation intégrée s'écrit $\lambda(r, s, t) |\gamma_r \times \gamma_s| = \lambda(r, s, 0) |\gamma_r^0 \times \gamma_s^0| = \lambda_\theta(r, s) |\theta_r \times \theta_s|$. La quantité connue, mesurée sur une balance est cette dernière densité surfacique.

5.2.4 Conservation de la quantité de mouvement de la surface élastique

Nous avons fait l'hypothèse que la membrane ne réagissait qu'à une variation d'aire (et non au cisaillement membranaire ou à la flexion). Par conséquent une énergie naturelle associée devrait dépendre de son aire locale par rapport à l'aire de la configuration au repos. On pose donc

$$\mathcal{E}[\gamma] = \int_{[0,M]^2} E \left(\frac{|\gamma_r \times \gamma_s|}{|\theta_r \times \theta_s|} \right) dr ds \quad (12)$$

où $r \rightarrow E(r)$ est une loi de comportement donnée. L'exemple le plus simple est une loi quadratique tronquée : $E(r) = \lambda \max(r - 1, 0)^2$. Cette loi a été justifiée par un passage à la limite sur un corps élastique mince suivant une loi de Saint Venant - Kirchhoff [82]. Ecrivons alors la dérivée temporelle de cette énergie lors du déplacement de la membrane :

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}[\gamma] = \int_{[0,M]^2} E' \left(\frac{|\gamma_r \times \gamma_s|}{|\theta_r \times \theta_s|} \right) \frac{|\gamma_r \times \gamma_s|_t}{|\theta_r \times \theta_s|} dr ds.$$

Sachant que $\gamma_t = u(\gamma, t)$ et u à divergence nulle, on montre dans [A5] que

$$(\gamma_r \times \gamma_s)_t = -\nabla u^T (\gamma_r \times \gamma_s)$$

ce qui donne immédiatement en notant $N(r, s) = \frac{\gamma_r \times \gamma_s}{|\gamma_r \times \gamma_s|}$,

$$\begin{aligned} |\gamma_r \times \gamma_s|_t &= -\frac{(\gamma_r \times \gamma_s)^T \nabla u (\gamma_r \times \gamma_s)}{|\gamma_r \times \gamma_s|} = -|\gamma_r \times \gamma_s| (N(r, s) \otimes N(r, s)) : \nabla u \\ &= |\gamma_r \times \gamma_s| (\mathbb{I} - N(r, s) \otimes N(r, s)) : \nabla u = |\gamma_r \times \gamma_s| \operatorname{div}_{\Gamma_t} u \end{aligned}$$

en utilisant $\mathbb{I} : \nabla u = \operatorname{div} u = 0$ et la définition de la divergence surfacique. Donc la dérivée cherchée s'écrit

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}[\gamma] = \int_{[0,M]^2} E' \left(\frac{|\gamma_r \times \gamma_s|}{|\theta_r \times \theta_s|} \right) \frac{|\gamma_r \times \gamma_s|}{|\theta_r \times \theta_s|} (\operatorname{div}_{\Gamma_t} u)(\gamma, t) dr ds.$$

On voit donc apparaître la mesure de surface $d\sigma = |\gamma_r \times \gamma_s| dr ds$ et on peut utiliser la formule d'intégration par parties sur les variétés sans bord :

$$\int_{\Gamma_t} \nabla_{\Gamma_t} f \cdot u d\sigma + f \operatorname{div}_{\Gamma_t} u d\sigma = \int_{\Gamma_t} \kappa f u \cdot n d\sigma,$$

où κ est la courbure moyenne de la variété. Nous avons écrit pour simplifier la formule sans les termes de bord, alors que justement on a pris un paramétrage et il y a un bord. On suppose donc que ces termes s'annulent. Ceci correspond à supposer qu'il n'y a pas d'énergie associée au bord de la membrane élastique. Nous ne voulons pas introduire la complication d'une énergie de bord car notre but est de modéliser des objets fermés, donc sans bord. L'étape lagrangienne est une introduction à la modélisation eulérienne qui permettra de s'affranchir des limitations liées à la paramétrisation de la membrane. Cette intégration par partie donne :

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}[\gamma] = - \int_{\Gamma_t} [\nabla_{\Gamma_t} T(r, s) - T(r, s) \kappa N(r, s)] \cdot u d\sigma$$

où $T(r, s) = E' \left(\frac{|\gamma_r \times \gamma_s|}{|\theta_r \times \theta_s|} \right) \frac{1}{|\theta_r \times \theta_s|}$. Or d'après le principe des puissances virtuelles, la puissance des efforts internes à la membrane correspond justement à l'opposée de la variation temporelle d'énergie, si bien que la force élastique par unité de surface s'écrit

$$F(r, s, t) = \nabla_{\Gamma_t} T(r, s) - T(r, s) \kappa N(r, s) \quad (13)$$

c'est à dire selon une partie tangentielle et une partie normale. La loi de conservation de la quantité de mouvement s'écrit donc pour une unité de surface élastique

$$(|\gamma_r \times \gamma_s| \lambda(r, s, t) \gamma_t(r, s, t))_t = (F(r, s, t) + f_e(r, s, t)) |\gamma_r \times \gamma_s|$$

où $\lambda(r, s, t)$ est la masse surfacique de la courbe, et f_e la densité surfacique de force extérieure exercée sur la membrane. Pour cette dernière force on ne considérera que la gravité, soit $\lambda(r, s, t)g$. Ceci s'écrit aussi, d'après la conservation de la masse de la courbe,

$$\lambda(r, s, t) |\gamma_r \times \gamma_s| \gamma_{tt}(s, t) = (F(r, s, t) + \lambda(r, s, t)g) |\gamma_r \times \gamma_s| \quad (14)$$

5.2.5 Conservation de la quantité de mouvement du milieu continu

Reprenons les notations introduites dans le paragraphe sur la conservation de la masse. La quantité de mouvement totale du volume $\omega(t)$ est donnée par

$$\int_{\omega(t)} \rho u dx = \int_{\omega(t)} \rho_f u dx + \int_{\Gamma_{\omega(t)}} \lambda u d\sigma = \int_{\omega(t)} \rho_f u dx + \int_K \lambda |\gamma_r \times \gamma_s| \gamma_t dr ds$$

Pour la première intégrale, qui correspond au fluide seul, la dérivée en temps de la quantité de mouvement d'une portion $\omega(t)$ de milieu multiphysique est égale par principe à la somme des forces appliquées sur $\omega(t)$. Ces forces sont de deux natures : les forces volumiques et les forces surfaciques. Pour les premières on ne considérera que la gravité $\rho_f g$. Les secondes sont d'après l'hypothèse sur les actions de contact et le théorème de Cauchy (cf Duvaut [54] ou Ciarlet [48]) de la forme σn où σ est le tenseur des contraintes de Cauchy et n la normale sortante à $\partial\omega(t)$. D'autre part nous venons de calculer la dérivée de l'intégrande de la seconde intégrale. D'où

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega(t)} \rho u dx = \int_{\omega(t)} \rho_f g dx + \int_{\partial\omega(t)} \sigma n d\sigma + \int_K (F(r, s, t) + \lambda(r, s, t)g) |\gamma_r \times \gamma_s| dr ds$$

d'où en utilisant la formule de Reynolds et le théorème de la divergence,

$$\int_{\omega(t)} \rho (u_t + u \cdot \nabla u) dx = \int_{\omega(t)} \rho_f g dx + \int_{\Gamma_{\omega(t)}} \lambda(r, s, t) g d\sigma + \int_{\omega(t)} \operatorname{div} \sigma dx + \int_{\Gamma_{\omega(t)}} F(r, s, t) d\sigma$$

Pour le domaine fluide σ est fonction du tenseur vitesses de déformations donné par

$$D(u) = \frac{1}{2} (\nabla u + \nabla u^t).$$

En particulier le fluide est dit newtonien si la fonction est affine. Pour un écoulement incompressible, on a

$$\sigma = -p \mathbb{I}_d + 2\mu D(u)$$

où p est la pression et μ la viscosité du fluide.

Modèle frontière immergée Formellement, on obtient donc une équation de Navier-Stokes non homogène avec une force surfacique et une masse volumique comportant une contribution surfacique. On l'écrit sous la forme synthétique suivante

$$\begin{cases} (\rho_f + \lambda\delta_{\Gamma_t})(u_t + u \cdot \nabla u) - 2 \operatorname{div} \mu D(u) + \nabla p \\ \quad = \{\nabla_{\Gamma_t} T(r, s) - T(r, s)\kappa N(r, s)\} \delta_{\Gamma_t} + (\rho_f + \lambda\delta_{\Gamma_t})g & \text{sur } \Omega \times]0, T[\\ \operatorname{div} u = 0 & \text{sur } \Omega \times]0, T[\\ \gamma_t = u(\gamma, t) & \text{sur } [0, M] \times]0, T[\end{cases}$$

où on a rappelé l'équation (10) régissant le déplacement de la courbe élastique.

Cette formulation correspond exactement à la formulation frontière immergée de Peskin [98, 99] bien qu'elle soit présentée sous une forme différente et pour une membrane élastique plutôt qu'une collection volumique de fibres. En effet en reprenant les notations de Peskin la méthode de frontière immergée revient à employer un mélange de variables eulérienne et lagrangienne. Les variables eulériennes sont celles du fluide et les lagrangiennes suivent la courbe (ou surface) élastique. L'interaction entre les quantités eulériennes et lagrangiennes est fait grâce à une mesure de Dirac discrète. Avec les abus de notation de [99], et en les adaptant au cas d'une membrane élastique (termes en $|\theta_r \times \theta_s|$) :

Méthode de frontière immergée : Description *eulérienne* de la vitesse du milieu continu et *lagrangienne* de la structure élastique immergée (constituée d'une famille de fibres élastiques), interpolée sur le domaine eulérien.

- ▶ Un champ de vitesse eulérien $(x, t) \in \Omega \times [0, T] \rightarrow u(x, t)$.
- ▶ $(r, s, t) \in U \times [0, T] \rightarrow \gamma(r, s, t)$ la position des points de la structure élastique Γ_t .
- ▶ La densité de forces par rapport à la mesure de surface (r, s) dans la configuration de référence est une fonction connue $F_\theta(r, s, t)$.
- ▶ La masse surfacique dans la configuration de référence est une fonction connue $\lambda_\theta(r, s, t)$.
- ▶ Les équations du mouvement (couplage par contrainte) :

$$(\rho_f + \Lambda)(u_t + u \cdot \nabla u) - \nu \Delta u + \nabla p = f \quad (15)$$

$$\operatorname{div} u = 0 \quad (16)$$

$$f(x, t) = \int_U |\theta_r \times \theta_s| F_\theta(r, s, t) \delta(x - \gamma(r, s, t)) dr ds \quad (17)$$

$$\Lambda(x, t) = \int_U |\theta_r \times \theta_s| \lambda_\theta(r, s, t) \delta(x - \gamma(r, s, t)) dr ds \quad (18)$$

$$\gamma_t = u(\gamma(r, s, t), t) = \int_\Omega u(x, t) \delta(x - \gamma(r, s, t)) dx \quad (19)$$

$$F_\theta(r, s, t) = \mathcal{F}_\theta[\gamma(r, s, t)] \quad (20)$$

L'équation (17) convertit la force lagrangienne dans le domaine eulérien ; l'équation (19) convertit le champ de vitesse eulérien en un vitesse sur les points lagrangiens de la structure. Si on écrit la signification précise de (17) en considérant une fonction test $\psi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ et

en intégrant sur Ω on a

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f(x, t) \psi(x, t) dx &= \int_U |\theta_r \times \theta_s| F_{\theta}(r, s, t) \int_{\Omega} \delta(x - \gamma(r, s, t)) \psi(x, t) dx dr ds \\ &= \int_U |\theta_r \times \theta_s| F_{\theta}(r, s, t) \psi(\gamma(r, s, t), t) dr ds = \int_{\Gamma_t} F_{\theta}(r, s, t) \frac{|\theta_r \times \theta_s|}{|\gamma_{,r} \times \gamma_{,s}|} \psi(x, t) d\sigma \end{aligned}$$

donc formellement

$$f(x, t) = \frac{|\theta_r \times \theta_s|}{|\gamma_{,r} \times \gamma_{,s}|} F_{\theta}(r, s, t) \delta_{\Gamma_t} = F(r, s, t) \delta_{\Gamma_t}$$

si F représente une densité surfacique de force dans la configuration déformée. De même d'après (18), Λ est une mesure définie par

$$\Lambda(x, t) = \frac{|\theta_r \times \theta_s|}{|\gamma_{,r} \times \gamma_{,s}|} \lambda_{\theta}(r, s, t) \delta_{\Gamma_t} = \lambda(r, s, t) \delta_{\Gamma_t}, \quad \text{avec } x = \gamma(r, s, t).$$

Ceci nous ramène exactement à la forme obtenue précédemment après avoir choisit une loi de comportement pour F .

La méthode de frontière immergée décrite ci-dessus est très simple et attractive. Cependant, le passage incessant entre les coordonnées eulériennes et lagrangiennes induit des problèmes de conservation de volume. En effet l'interpolation du champ de vitesse n'est pas à divergence nulle, donc l'advection des marqueurs avec ce champ produit potentiellement des changements de volume. C'est un point faible connu de la méthode et il a été étudié et pallié dans [100, 81, 80], au prix d'un abandon de la simplicité de la méthode. Le but premier de la formulation eulérienne que nous avons introduite dans [A5, A4] était de conserver la simplicité de la méthode en proposant une localisation eulérienne de la membrane qui évite le va-et-vient entre les deux systèmes de coordonnées. La méthode de frontière immergée dans sa forme originelle ci-dessus peut être implémentée pour garantir l'ordre 2 dans le cas d'interfaces épaisses, mais d'ordre 1 dans le cas d'interfaces sans épaisseur [61]. Des études de stabilité ont été proposées [34, 35, 111].

Notons que notre formulation eulérienne permettra de s'affranchir des difficultés de paramétrisation des objets fermés et du problème de la viscosité variable, qui n'est pas pris en compte dans la méthode IBM. C'est un point important car nos modèles de cellules sont souvent considérées avec un contraste de viscosité entre l'intérieur et l'extérieur, la viscosité plus importante à l'intérieur étant une manière expéditive de rendre compte de la présence de matériel biologique dans la cellule.

5.3 Elasticité eulérienne extensionnelle d'une membrane immergée

5.3.1 Représentation Level Set

Nous allons maintenant changer notre mode de représentation de l'interface pour contourner les écueils de la représentation lagrangienne. On représente Γ_t , que l'on suppose maintenant fermée³ par l'intermédiaire d'une fonction auxiliaire $\phi : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ de sorte que

$$\Gamma_t = \{x \in \Omega, \quad \phi(x, t) = 0\}.$$

3. Il est possible de lever cette hypothèse moyennant l'ajout d'une autre fonction auxiliaire, mais encore une fois les objets physiques que nous voulons considérer sont fermés.

Comme $\phi(\gamma(r, s, t), t) = 0$ sur $[0, M]^2 \times [0, T]$, et $\gamma_t = u(\gamma, t)$, on a en dérivant par rapport à t

$$\phi_t(\gamma(r, s, t), t) + u(\gamma(r, s, t), t) \cdot \nabla \phi(\gamma(r, s, t), t) = 0$$

La méthode Level Set [96] consiste alors à se donner une fonction initiale ϕ_0 représentant Γ_0 et à chercher une fonction ϕ qui vérifie l'équation ci-dessus sur tout le domaine :

$$\begin{cases} \phi_t + u \cdot \nabla \phi = 0 & \text{sur } \Omega \times]0, T[\\ \phi = \phi_0 & \text{sur } \Omega \times \{0\}. \end{cases} \quad (21)$$

On choisit souvent la fonction ϕ_0 comme la distance signée à l'interface :

$$\phi_0(x) = \begin{cases} -\text{dist}(x, \Gamma_0) & \text{si } x \text{ est à l'intérieur de } \Gamma_0 \\ \text{dist}(x, \Gamma_0) & \text{si } x \text{ est à l'extérieur de } \Gamma_0 \end{cases}$$

Avec le choix de signe de ϕ_0 fait ci-dessus, la normale extérieure au domaine entouré par Γ_t , ainsi que sa courbure s'expriment en chacun de ses points en fonction de ϕ comme suit :

$$n(x) = \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \quad \kappa(x) = \text{div} \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|}$$

5.3.2 Déformations et Level Set

Ce qui est plus original et que nous avons démontré dans [A5] est que dans le cas d'un écoulement incompressible, l'étirement de la surface est enregistré par la fonction φ , ce qui va nous permettre de reformuler tout le problème avec cette fonction. Il y a plusieurs manières de démontrer ce fait assez intuitif, qui se généralise d'ailleurs au cas d'écoulements compressibles en faisant intervenir le jacobien J (cet aspect a été développé récemment dans [41, 42] dans le cadre de la modélisation de la croissance tumorale ainsi que dans [27]). On peut partir de l'étirement en paramétrique comme dans [A5] et démontrer que $|\nabla \phi|$ vérifie la même équation, à savoir

$$|\nabla \phi|_t + u \nabla |\nabla \phi| = -|\nabla \phi| \frac{\nabla \phi^T \nabla u \nabla \phi}{|\nabla \phi|^2} = -|\nabla \phi| \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \otimes \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} : \nabla u \quad (22)$$

Cependant j'ai un faible pour la démonstration plus intrinsèque qui se résume en les deux propositions suivantes.

Lemme 1 *Soit $\phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ lipschitzienne sur \mathbb{R}^d et $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ intégrable. On suppose qu'il existe $\eta_0 > 0$ tel que $\inf_{\text{ess}_{|\phi| < \eta_0}} |\nabla \phi| > 0$. Alors pour $\eta \in]0, \eta_0[$,*

$$\int_{|\phi(x)| < \eta} g(x) dx = \int_{-\eta}^{\eta} \int_{\phi(x)=\nu} g(x) |\nabla \phi|^{-1} d\sigma d\nu$$

Démonstration. Dans [57], proposition 3 page 118, il est montré sous ces hypothèses que

$$\frac{d}{ds} \left(\int_{\phi > s} g(x) dx \right) = - \int_{\phi=s} g |\nabla \phi|^{-1} d\sigma \quad \text{p.p. } s$$

Le résultat ci-dessus s'en déduit facilement en posant $s = -t$ et en prenant ϕ et $-\phi$ dans cette formule puis en ajoutant les deux nouvelles identités. On les intègre alors de $-\eta$ à η .

Une démonstration plus intuitive est de décomposer au voisinage de x le volume dx sous la forme $dx = d\sigma \times dh$, où dh est compté suivant la normale $\frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}$ et on remarque que

$$\nu \pm d\nu := \phi(x \pm dh \frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}) = \phi(x) \pm dh|\nabla\phi| + O(dh^2)$$

d'où $dx = |\nabla\phi|^{-1}d\sigma d\nu$. □

En faisant l'hypothèse de régularité suivante sur les lignes de niveau de ϕ ,

$$(H_\phi) \quad \forall t \in [0, T], \forall f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n), \quad s \rightarrow \int_{\{|\phi(x,t)| < s\}} f(x)dx \text{ est } \mathcal{C}^1 \text{ au voisinage de } s = 0$$

nous avons le résultat suivant :

Proposition 5 *Soit $u : \mathbb{R}^d \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ de classe \mathcal{C}^1 avec $\operatorname{div} u = 0$ et ϕ solution \mathcal{C}^1 de $\phi_t + u \cdot \nabla\phi = 0$, $\phi = \phi_0$ avec $|\nabla\phi| \geq \alpha > 0$ au voisinage de $\{\phi = 0\}$ et vérifiant (H_ϕ) . Alors pour toute fonction f continue à support compact,*

$$\int_{\{\phi_0(\xi)=0\}} f(\xi)|\nabla\phi_0|^{-1}(\xi)d\sigma(\xi) = \int_{\{\phi(x,t)=0\}} f(Y(x,t))|\nabla\phi|^{-1}(x,t)d\sigma(x) \quad (23)$$

ce qui signifie que $|\nabla\phi|/|\nabla\phi_0|$ représente la variation de mesure surfacique de Γ_t par rapport à Γ_0 .

Démonstration. L'hypothèse (H_ϕ) entraîne d'après le lemme précédent que l'application

$$s \rightarrow \int_{\{\phi_0=s\}} f(\xi)|\nabla\phi_0|^{-1}(\xi)d\sigma(\xi)$$

est continue. Donc d'après le lemme 1,

$$\int_{\{\phi_0(\xi)=0\}} f(\xi)|\nabla\phi_0|^{-1}(\xi)d\sigma(\xi) = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{1}{\eta} \int_{-\frac{\eta}{2}}^{\frac{\eta}{2}} \int_{\phi_0=\nu} f(\xi)|\nabla\phi_0|^{-1}(\xi)d\sigma(\xi)d\nu = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{1}{\eta} \int_{|\phi^0| < \frac{\eta}{2}} f(\xi)d\xi$$

On effectue le changement de variables $\xi = Y(x, t)$ dont le jacobien $J(x, t)$ vaut 1 car $\operatorname{div} u = 0$. Comme ϕ vérifie l'équation de transport on a $\phi^0(Y(x, t)) = \phi(x, t)$ et donc

$$\int_{\{\phi_0(\xi)=0\}} f(\xi)d\sigma(\xi) = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{1}{\eta} \int_{|\phi(x,t)| < \frac{\eta}{2}} f(Y(x, t))dx$$

ce qui donne le résultat annoncé d'après le lemme 1. □

Remarque 4 *Une autre démonstration de la proposition précédente est possible en utilisant la formule de dérivation de Reynolds pour les surfaces. Profitons de l'occasion pour traiter le cas compressible. En effet d'après la formule, pour une fonction g de classe \mathcal{C}^1 ,*

$$\frac{d}{dt} \int_{\{\phi(x,t)=0\}} g(x, t)d\sigma = \int_{\{\phi(x,t)=0\}} g_t + \operatorname{div}(gu) - g[\nabla u]n \cdot n d\sigma$$

et sur la surface $\{\phi = 0\}$ on a d'après (22)

$$[\nabla u]n \cdot n = [\nabla u] \frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|} \cdot \frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|} = -\frac{1}{|\nabla\phi|} (|\nabla\phi|_t + u \cdot \nabla|\nabla\phi|)$$

En regroupant les termes on a donc

$$\frac{d}{dt} \int_{\{\phi(x,t)=0\}} g(x,t) d\sigma = \int_{\{\phi(x,t)=0\}} ((g|\nabla\phi|)_t + u \cdot \nabla(g|\nabla\phi|)) \frac{1}{|\nabla\phi|} + g \operatorname{div} u d\sigma$$

D'autre part on a $J_t^{-1} + u \cdot \nabla J^{-1} = J^{-1} \operatorname{div} u$, ce qui substitué dans $\operatorname{div} u$ donne

$$\frac{d}{dt} \int_{\{\phi(x,t)=0\}} g(x,t) d\sigma = \int_{\{\phi(x,t)=0\}} ((gJ^{-1}|\nabla\phi|)_t + u \cdot \nabla(gJ^{-1}|\nabla\phi|)) \frac{J}{|\nabla\phi|} d\sigma$$

On applique alors cette formule avec $g(x,t) = f(Y(x,t))J(x,t)|\nabla\phi|^{-1}(x,t)$, en calculant

$$(gJ^{-1}|\nabla\phi|)_t + u \cdot \nabla(gJ^{-1}|\nabla\phi|) = f(Y)_t + u \cdot \nabla[f(Y)] = 0$$

car $f(Y)$ est la fonction f transportée. On a donc

$$\frac{d}{dt} \int_{\{\phi(x,t)=0\}} f(Y(x,t))J(x,t)|\nabla\phi|^{-1}(x,t) d\sigma = 0$$

ce qui revient après intégration entre 0 et t à la formule (23), si $J = 1$. Dans le cas compressible on retrouve les résultats de [42, 27] qui expriment l'étirement comme $J^{-1}|\nabla\phi|$.

Remarque 5 Du point de vue théorie de la mesure la formule (23) traduit simplement le fait que la mesure $|\nabla\phi|^{-1}(x)\delta_{\{\phi_0=0\}}$ est l'image de $|\nabla\phi|^{-1}(x,t)\delta_{\{\phi=0\}}$ par le difféomorphisme $x \rightarrow Y(x,t)$.

Corollaire 1 En 2D, on se donne un paramétrage $s \in [0, M] \rightarrow \gamma(s, 0) \in \mathbb{R}^2$ de $\Gamma(0)$ et qui se transporte en un paramétrage $s \rightarrow \gamma(s, t)$ de $\Gamma(t)$. Après expression de la mesure surfacique en fonction du paramétrage on a du fait de $Y(\gamma(s, t), t) = \gamma(s, 0)$:

$$\int_0^M f(\gamma(s, 0))|\nabla\phi_0|^{-1}(\gamma(s, 0))|\gamma_s|(s, 0) ds = \int_0^M f(\gamma(s, 0))|\nabla\phi|^{-1}(\gamma(s, t), t)|\gamma_s|(s, t) ds$$

pour toute fonction f continue et à support compact. D'où

$$\frac{|\nabla\phi|(\gamma(s, t), t)}{|\nabla\phi_0|(\gamma(s, 0))} = \frac{|\gamma_s(s, t)|}{|\gamma_s(s, 0)|}$$

En 3D, si $(r, s) \in \omega \rightarrow \gamma(r, s, t) \in \mathbb{R}^3$ est un (morceau de) paramétrage de $\Gamma(t)$, alors comme là encore $Y(\gamma(r, s, t), t) = \gamma(r, s, 0)$ on a

$$\begin{aligned} \int_{\omega} f(\gamma(r, s, 0))|\nabla\phi_0|^{-1}(\gamma(r, s, 0))|\gamma_r \times \gamma_s|(r, s, 0) dr ds \\ = \int_{\omega} f(\gamma(r, s, 0))|\nabla\phi|^{-1}(\gamma(r, s, t), t)|\gamma_r \times \gamma_s|(r, s, t) dr ds \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{|\nabla\phi|(\gamma(r, s, t), t)}{|\nabla\phi_0|(\gamma(r, s, 0))} = \frac{|\gamma_r \times \gamma_s|(r, s, t)}{|\gamma_r \times \gamma_s|(r, s, 0)}$$

En pratique, on construit ϕ_0 d'une part de sorte que sa ligne de niveau zéro représente Γ_0 , et d'autre part de manière à ce que

$$|\nabla\phi_0|(\gamma(r, s, 0)) = \frac{|\gamma_r \times \gamma_s|(r, s, 0)}{|\theta_r \times \theta_s|(r, s)}$$

ce qui correspond à la variation d'aire entre la configuration initiale et la configuration au repos. On a alors

$$|\nabla\phi|(\gamma(r, s, t), t) = \frac{|\gamma_r \times \gamma_s|(r, s, t)}{|\theta_r \times \theta_s|(r, s)}$$

Si la variation d'aire initiale ne dépend pas de (r, s) , ce qui est le cas fréquent d'une membrane élastique uniformément étirée, il suffit d'initialiser ϕ_0 à cet étirement fois la distance signée à la surface.

5.3.3 Energie et force élastiques en Level Set

Nous sommes donc en position de formuler l'énergie élastique d'une membrane en fonction de la fonction Level Set. A ceci près que nous devons nous occuper de la représentation de l'intégrale de surface dans notre formulation. On pourrait donc introduire une énergie analogue à (12) en posant (pour une surface à étirement constant et égal à 1 au repos)

$$\mathcal{E}[\phi] = \int_{\{\phi=0\}} E(|\nabla\phi|) \frac{1}{|\nabla\phi|} d\sigma$$

puis dériver cette énergie par rapport au temps pour identifier la force élastique singulière (voir à ce sujet la thèse de Thomas Milcent [90]). On pourrait alors mettre en oeuvre une méthode de type éléments finis pour donner un sens à cette mesure, ce qui est fait dans [34, 35] dans le cadre de la méthode de frontière immergée classique. Cependant nous avons choisit, comme dans la méthode Level Set usuelle, d'approcher la mesure surfacique par une mesure non singulière, qui la régularise. Ceci permet de mettre ensuite en oeuvre une méthode de type différences finies plus simple et performante au niveau temps de calcul par l'utilisation de solveurs rapides des équations de Poisson. Dans ce but nous avons le lemme suivant (démontré dans [A4]) qui permet de déterminer une approximation volumique d'une mesure de Dirac portée par une hypersurface localisée par Level Set :

Proposition 6 *Soit $r \rightarrow \zeta(r)$ une fonction continue à support dans $[-1, 1]$, telle que $r \rightarrow \frac{1}{\varepsilon}\zeta(\frac{r}{\varepsilon})$ converge vers δ_0 au sens des distributions. Alors sous l'hypothèse (H_ϕ) , lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$,*

$$\frac{1}{\varepsilon}\zeta\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right) |\nabla\phi| \rightharpoonup \delta_{\{\phi=0\}} \quad \text{dans } \mathcal{M}(\mathbb{R}^d).$$

On voit donc qu'une approximation volumique raisonnable de $\delta_{\{\phi=0\}}$ est donnée par $|\nabla\phi|\frac{1}{\varepsilon}\zeta\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right)$, ce qui permet de définir une énergie régularisée par

$$\mathcal{E}_\varepsilon(\phi) = \int_{\Omega} E(|\nabla\phi|) \frac{1}{\varepsilon}\zeta\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right) dx. \quad (24)$$

Remarque 6 Cette approximation n'est pas aussi anodine qu'elle pourrait paraître. En effet nous avons remplacé un objet purement géométrique, $\delta_{\{\phi=0\}}$, indépendant du choix de ϕ représentant l'interface, par un objet qui en dépend. Ceci est la source de difficultés numériques dans la méthode Level Set, et sans doute de problème de stabilité de cette méthode dans certaines situations. Nous verrons plus loin comment pallier les difficultés et quel genre d'instabilités nous avons observé (pour ce dernier point on pourra se reporter à la thèse de Claire Bost [37]).

Remarque 7 Thomas Milcent a démontré dans sa thèse [90] la consistance de cette approximation (dans le cas d'une énergie beaucoup plus générale) par rapport à l'obtention de la force élastique par dérivation. C'est à dire la force qu'on obtient par dérivation de l'énergie régularisée, converge lorsque ε tend vers 0 vers la force qu'on obtient en dérivant l'énergie singulière.

En dérivant cette énergie on obtient à un gradient près (voir [A3] pour le détail du calcul)

$$F_\varepsilon(x, t) = \operatorname{div} \left(E'(|\nabla\phi|) |\nabla\phi| \left(\mathbb{I} - \frac{\nabla\phi \otimes \nabla\phi}{|\nabla\phi|^2} \right) \frac{1}{\varepsilon} \zeta\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right) \right). \quad (25)$$

Si on développe la divergence on peut obtenir après quelques calculs

$$F_\varepsilon(x, t) = \left\{ \mathbb{P}_{\nabla\phi^\perp} (\nabla[E'(|\nabla\phi|)]) - E'(|\nabla\phi|) \kappa(\phi) \frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|} \right\} |\nabla\phi| \frac{1}{\varepsilon} \zeta\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right)$$

ce qui est conforme à l'expression (13) obtenue en variables lagrangiennes. Les termes de gradient n'ont pas d'importance dans le cas incompressible car un gradient ne travaille pas sur un déplacement à volume constant et nul au bord.

5.3.4 Modèle multiphysique

Soit $H(r) = \int_{-\infty}^r \zeta(s) ds$. On a $H(r) = 0$ pour $r < -1$, et $H(r) = 1$ pour $r > 1$. On pose finalement

$$\rho(\phi) = \rho_1 + H\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right)(\rho_2 - \rho_1) + \lambda_\theta \frac{1}{\varepsilon} \zeta\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right)$$

en supposant dorénavant que λ_θ est constant, et

$$\mu(\phi) = \mu_1 + H\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right)(\mu_2 - \mu_1)$$

On obtient alors le modèle (écrit ici pour $f = 0$) : Trouver (u, ϕ) solution sur $\Omega \times]0, T[$ de

$$\begin{cases} \rho(\phi)(u_t + u \cdot \nabla u) - \operatorname{div}(\mu(\phi)D(u) - E'(|\nabla\phi|) |\nabla\phi| \frac{\nabla\phi \otimes \nabla\phi}{|\nabla\phi|^2} \frac{1}{\varepsilon} \zeta\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right)) + \nabla\pi = 0 \\ \operatorname{div} u = 0 \\ \phi_t + u \cdot \nabla\phi = 0 \end{cases}$$

Il est à noter que $\rho(\phi)$ vérifie aussi l'équation de transport donc de conservation car $\operatorname{div} u = 0$. Nous avons donc modélisé l'interaction d'un fluide avec une membrane élastique comme l'écoulement d'un fluide complexe dont le tenseur des contraintes est modifié au voisinage de la surface. Ce modèle est à rapprocher de celui des fluides de Korteweg [114] et c'est

d'ailleurs à partir de cette remarque que nous pourrons attaquer l'existence d'une solution à ce problème. Le point de départ est l'égalité d'énergie suivante qui est une simple conséquence de l'obtention de la force élastique :

Proposition 7 *Si ϕ est telle que $|\phi| > \varepsilon$ sur $\partial\Omega$, nous avons*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho_{\varepsilon}(\phi(x, T)) u^2(x, T) dx + \int_0^T \int_{\Omega} \mu(\phi) D(u)^2 dx dt + \int_{\Omega} E(|\nabla\phi|) \frac{1}{\varepsilon} \zeta\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right) dx \\ = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho_{\varepsilon}(\phi_0(x)) u_0^2(x) dx + \int_{\Omega} E(|\nabla\phi_0|) \frac{1}{\varepsilon} \zeta\left(\frac{\phi_0}{\varepsilon}\right) dx \end{aligned} \quad (26)$$

5.3.5 Existence d'une solution au modèle multiphysique

Pour simplifier et seulement dans cette sous-section, on se place dans le cas $\varepsilon = 1$, $\rho_1 = \rho_2$, $\mu_1 = \mu_2$ et considère le modèle multiphysique introduit ci-dessus :

$$\rho(\phi) (u_t + (u \cdot \nabla)u) - \mu \Delta u + \nabla \pi = -\operatorname{div}(\Sigma(\phi, \nabla\phi)) \quad (27)$$

$$\phi_t + u \cdot \nabla \phi = 0 \quad (28)$$

$$\operatorname{div}(u) = 0, \quad (29)$$

où

$$\rho(\phi) = \bar{\rho} + \lambda \zeta(\phi) \quad (30)$$

et $\bar{\rho}, \lambda > 0$ sont la densité du fluide et la densité surfacique de la membrane. Le tenseur des contraintes Σ s'exprime en fonction de la loi de comportement E de la membrane par

$$\Sigma(\phi, \nabla\phi) = \frac{E'(|\nabla\phi|)}{|\nabla\phi|} \zeta(\phi) \nabla\phi \otimes \nabla\phi \quad (31)$$

On se donne des conditions initiales sur u et ϕ

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \phi(x, 0) = \phi_0(x) \quad (32)$$

et des conditions aux limites de Dirichlet homogène pour u (notre résultat s'étend au cas de conditions aux limites périodiques) : $u = 0$ sur $\partial\Omega$. Il n'y a donc pas de condition aux limites pour ϕ dans l'équation de transport. On supposera que

$$r \rightarrow E'(r) \in \mathcal{C}^1([0, +\infty)). \quad (33)$$

Par exemple le cas d'une réponse linéaire (le matériau est toujours géométriquement non linéaire) est donné par $E'(r) = \lambda(r - 1)$. Notons que notre formulation contient les fluides de type Korteweg [114] comme cas particulier, avec $E'(r) = r$, la fonction level set jouant le rôle de la densité. En effet si on introduit dans ce cas une primitive Z de $\sqrt{\zeta}$ et qu'on pose $\psi = Z(\phi)$ on a

$$\Sigma(\phi, \nabla\phi) = \zeta(\phi) \nabla\phi \otimes \nabla\phi = \nabla\psi \otimes \nabla\psi.$$

La fonction ψ est toujours solution de l'équation de transport et comme $\operatorname{div}(\nabla\psi \otimes \nabla\psi) = \Delta\psi \nabla\psi + D^2\psi \nabla\psi = \Delta\psi \nabla\psi + \frac{1}{2} \nabla|\nabla\psi|^2$, on obtient le terme source de Korteweg usuel [114] (à un gradient près absorbé par la pression).

Dans [A3] on prouve le résultat d'existence suivant.

Théorème 1 Soit Ω un ouvert borné connexe et régulier de \mathbb{R}^3 . Soit $p > 3$, et $\phi_0 \in W^{2,p}(\Omega)$, tel que $|\nabla\phi_0| \geq \alpha > 0$ dans un voisinage de $\{\phi_0 = 0\}$, et $u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega)$, avec $\operatorname{div} u_0 = 0$. Alors il existe $T^* > 0$ ne dépendant que des données initiales tel qu'une solution de (27), (28), (29) existe dans $[0, T^*]$ avec

$$\phi \in L^\infty(0, T^*; W^{2,p}(\Omega)), \quad u \in L^\infty(0, T^*; W_0^{1,p}(\Omega)) \cap L^p(0, T^*; W^{2,p}(\Omega)), \quad \nabla\pi \in L^p(0, T^*; L^p(\Omega)).$$

La démonstration est basée sur un argument de compacité. Nous commençons par construire une suite de problèmes régularisés en introduisant un retard temporel dans la vitesse (méthode utilisée aussi dans [44]) et une régularisation spatiale de la fonction level set. Nous obtenons ensuite des estimations en utilisant notamment les résultats de Solonnikov [110] sur le problème de Stokes dans L^p . L'utilisation des espaces de Sobolev avec $p > 3$, au lieu du cadre Hilbertien plus simple, permet de gagner en régularité grâce aux injections de Sobolev (notamment $W^{1,p} \subset L^\infty$ pour la vitesse) sans avoir à monter en ordre dans les dérivées en espace. Cela permet d'éviter de dériver les équations plusieurs fois.

5.3.6 Ingrédients numériques

Réinitialisation ou renormalisation de ϕ ? Supposons qu'un milieu de codimension une, ou l'interface entre deux milieux soit repérée par la ligne de niveau zéro d'une fonction ϕ que l'on advecte par un champ de vitesse calculé par ailleurs. Lorsqu'il s'agit simplement de localiser l'interface entre les deux milieux, seule la ligne de niveau zéro de ϕ pour tout temps intervient, et la norme de son gradient, à condition qu'elle ne s'annule pas, importe peu. Par contre dès que l'on veut se servir de ϕ pour mesurer une distance à l'interface afin d'y localiser une force, on se rend compte qu'il n'y a aucune raison pour que ϕ soit une distance pour tout temps. D'ailleurs on a même montré dans le cas d'une structure de codimension une que $|\nabla\phi|$ représentait localement le changement de mesure (longueur, surface), si bien qu'on est sûr *a priori* que $|\nabla\phi| \neq 1$ pour $t > 0$. Or une distance est justement telle que la norme de son gradient vaut 1 partout où il est défini.

A partir de cette constatation, plusieurs approches sont possibles. La première consiste à redresser ϕ en une distance à chaque pas de temps. Ceci peut être fait par exemple en résolvant l'équation d'Hamilton-Jacobi suivante

$$\frac{\partial\phi}{\partial\tau} + \operatorname{sgn}(\phi_0)(|\nabla\phi| - 1) = 0. \quad (34)$$

dont on cherche un état stationnaire. En pratique, du fait de l'hyperbolicité de cette équation, le redressement de ϕ est propagé à partir de $\phi = 0$ si bien qu'il suffit de quelques itérations pour avoir $|\nabla\phi| \approx 1$ au voisinage de $\phi = 0$. En effet, l'équation ci-dessus peut être écrite comme une équation de transport avec second membre :

$$\frac{\partial\phi}{\partial\tau} + \operatorname{sgn}(\phi_0) \frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|} \cdot \nabla\phi = -\operatorname{sgn}(\phi_0). \quad (35)$$

Ainsi les caractéristiques sont issues de $\phi_0 = 0$ et perpendiculaires à cette interface. On peut effectivement montrer que cette équation ne modifie pas la ligne de niveau zéro de la fonction initiale (i.e. $\{\phi = 0\} = \{\phi^0 = 0\}$ pour tout t). L'inconvénient de cette approche est déjà qu'il

faut résoudre cette équation supplémentaire qui d'autre part peut induire numériquement un petit déplacement de l'interface [56]. Elle est de plus responsable de la perte de volume attribuée à tort à la méthode level set par de nombreux auteurs. La raison est que le champ de vitesse équivalent $\text{sgn}(\phi_0) \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|}$ n'est pas à divergence nulle, et ceci d'autant plus que la courbure de l'interface est importante. Il va donc localement changer le volume et ceci a vraisemblablement des conséquences sur la conservation du volume à l'intérieur de $\{\phi = 0\}$. Une batterie de méthodes pour pallier ce problème ont été mises en oeuvre : ajouter une contrainte de volume [112, 113], rajouter des particules de chaque côté de l'interface [56] ou carrément relever ou baisser la fonction level-set [109, 108]! Enfin dans notre cas une réinitialisation nous ferait perdre les informations mécaniques (étirement) contenues dans $\nabla \phi$, si bien qu'il faudrait réinitialiser cet étirement à chaque pas pour pouvoir continuer à utiliser la méthode décrite dans les paragraphes précédents.

Une autre méthode consiste à transporter ϕ en dehors de l'interface de manière à ce que l'on ait toujours $|\nabla \phi| = 1$. Une méthode, introduite initialement par Osher et ses co-auteurs d'après une idée d'Evans et Spruck, puis reprise par Gomes et Faugeras et récemment par Delfour et Zolésio, consiste à déterminer ϕ comme la solution de

$$\phi_t(x, t) + (u \cdot \nabla \phi)(x - \phi \nabla \phi(x), t) = 0$$

ce qui revient à l'équation de transport sur l'interface, et dont la solution est toujours une fonction distance, si la fonction initiale l'est. Malheureusement cette équation est non locale et délicate à utiliser numériquement. D'autre part il faut disposer par ailleurs de l'étirement de la structure qui du coup n'est plus porté par ϕ .

Nous avons choisi de conserver ϕ sans réinitialisation à une distance, de sorte qu'il porte une information d'étirement. Il nous faut alors un moyen de récupérer à partir de ϕ la distance à $\{\phi = 0\}$. Dans cette direction G.-H. Cottet a remarqué que si $d(x, t)$ désigne la distance signée à la courbe $\{\phi = 0\}$, la quantité $\frac{\phi}{|\nabla \phi|}$ approche d au voisinage de l'interface. En effet pour $d(x)$ assez petit le point $x - d(x)\nabla d(x)$ est sur cette courbe donc $\phi(x - d(x)\nabla d) = 0$. En effectuant un développement au voisinage de $d(x) = 0$ on montre que

$$d(x) = \frac{\phi}{|\nabla \phi|}(x) + o(\phi)$$

On a donc un moyen simple d'estimer la distance d'un point x suffisamment voisin de $\{\phi = 0\}$ à cette courbe, en divisant la valeur de ϕ par celle de son gradient. La fonction $\psi(x) = \frac{\phi}{|\nabla \phi|}(x)$ est, à l'ordre un en ϕ , de gradient unitaire. D'autre part sa ligne de niveau zéro coïncide avec celle de ϕ . Donc d'après la proposition 6, on a

$$\frac{1}{\varepsilon} \zeta \left(\frac{\psi}{\varepsilon} \right) |\nabla \psi| \rightharpoonup \delta_{\{\psi=0\}} = \delta_{\{\phi=0\}} \quad \text{dans } \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$$

Or $|\nabla \psi| = 1 + o(\phi)$ ce qui justifie l'approximation de $\delta_{\{\phi=0\}}$ par

$$\frac{1}{\varepsilon} \zeta \left(\frac{\phi}{\varepsilon |\nabla \phi|} \right)$$

qui au premier ordre en ϕ , représente une approximation de la masse de Dirac dont le support reste de largeur 2ε . En pratique on prend ε de l'ordre de quelques pas d'espace (typiquement $\varepsilon = 1, 5dx$).

Pour tester la capacité de la renormalisation ci-dessus à permettre un calcul correct de la largeur d'interface, nous empruntons l'exemple de [56] où un champ de vitesse donné, de type vortex, transporte une interface en l'étirant. Nous comparons alors l'allure de l'interface obtenue par rapport à un suivi d'interface à haute résolution, et la précision du calcul de la longueur de la courbe. Ce calcul de longueur représente ici un prototype de force surfacique qu'il s'agit de bien calculer. Dans la figure 9, la courbe supérieure est la courbe de référence obtenue en suivant un grand nombre de marqueurs. Les courbes solides sont obtenues par notre méthode de renormalisation et les courbes en pointillés par réinitialisation. Les tests sont menés avec 64, 128 et 256 points. Il apparaît clairement que la méthode de renormalisation est une contrepartie tout à fait performante à la méthode de réinitialisation. Un autre exemple

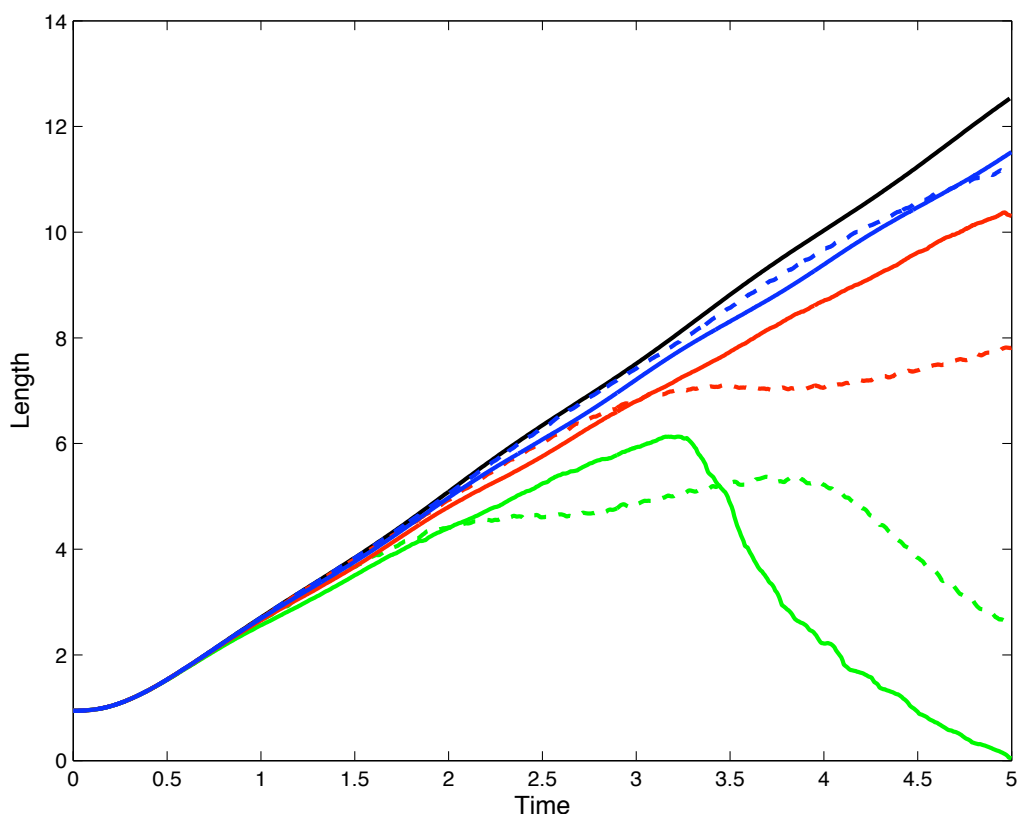


FIGURE 9 – Comparaison de la réinitialisation et de la renormalisation

frappant de ce bon comportement de la renormalisation est sur le test proposé par [107] pour introduire une nouvelle manière d'approcher la mesure de Dirac. Dans cet article l'auteur construit deux fonctions de Dirac discrètes approchant la mesure à l'ordre 1 et 2, puis calcule la longueur d'une ellipse dont l'orientation est aléatoirement choisie pour éviter les effets de grille. L'erreur moyenne commise est alors enregistrée. Nous constatons sur le tableau ci-dessous que la renormalisation se situe, au niveau précision, au même niveau que la première approximation proposée par l'auteur, et constitue donc, au vu de sa simplicité, une alternative efficace pour approcher une mesure de surface dans la méthode level set. Une étude complète

de l'approximation des fonctions de Dirac a été menée dans [55].

Pas de discrétisation	Smereka 1		Renormalisation		Smereka 2	
	Erreur Rel.	Ordre	Erreur Rel.	Ordre	Erreur Rel.	Ordre
0.2	9.38×10^{-3}		1.5×10^{-1}		2.68×10^{-3}	
0.1	2.23×10^{-3}	2.07	5×10^{-3}		5.49×10^{-4}	2.29
0.05	8.12×10^{-4}	1.46	1.3×10^{-3}	1.9	1.32×10^{-4}	2.05
0.025	2.71×10^{-4}	1.58	3×10^{-4}	2.1	2.90×10^{-5}	2.18
0.0125	7.58×10^{-5}	1.83	8×10^{-5}	1.9	7.79×10^{-6}	1.90
0.00625	3.04×10^{-5}	1.32	2×10^{-5}	2	1.84×10^{-6}	2.08

Méthodes numériques utilisées Dans tous les simulations que nous avons développées, nous avons toujours utilisé les mêmes ingrédients à quelques variantes près. Les équations de Navier-Stokes sont discrétisées par une méthode de différences finies sur un maillage de MAC où les inconnues pression et vitesse sont disposées de telle sorte que la divergence de la vitesse est nulle au niveau discret. Cela permet de respecter la contrainte de volume de manière très précise. La contrainte d'incompressibilité est résolue par une méthode de projection de type Chorin. Les équations de transport sont résolues en utilisant un schéma WENO5. Nous utilisons par défaut un schéma décalé c'est à dire que nous explicitons le couplage entre l'équation de transport en ϕ et l'équation de Navier-Stokes.

5.3.7 Stabilité numérique du couplage

Le modèle que nous discrétisons contient donc en second membre des équations de Navier-Stokes un terme de force qui peut être exprimé sous la forme suivante (équivalente à la forme divergence) :

$$F(x, t) = \lambda \left\{ \mathbb{P}_{\nabla\phi^\perp} (\nabla|\nabla\phi|) - (|\nabla\phi| - 1)\kappa(\phi) \frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|} \right\} |\nabla\phi| \frac{1}{\varepsilon} \zeta\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right).$$

où $\mathbb{P}_{\nabla\phi^\perp}$ est le projecteur sur le plan tangent, $\kappa(\phi)$ la courbure moyenne, et λ la rigidité de la membrane(nous ne considérons pas ici les forces de courbure). Nous nous sommes placés dans le cas $E'(r) = \lambda(r - 1)$. Comme les termes de convection sont explicités nous avons une condition de CFL classique à respecter. D'autre part, nous devons écrire une condition de type CFL mais pour cette force élastique de sorte qu'en un pas de temps, elle ne produise pas un déplacement supérieur à une maille d'espace. Ce type de condition supplémentaire se stabilité a été calculé initialement par Brackbill [38] dans le cas d'un écoulement diphasique en estimant la vitesse des ondes de capillarité. Dans [108], cette condition est retrouvée par un raisonnement plus clair que nous avons adapté à notre force élastique. Nous trouvons une condition de stabilité de la forme

$$\Delta t < \Delta t_e = \sqrt{\frac{\rho\alpha}{\lambda|\nabla\phi|(2|\nabla\phi| - 1)}} h^{\frac{3}{2}}$$

où $\varepsilon = \alpha h$ est la largeur d'interface. Cette condition correspond à celle de [38], à une constante près, si on considère que $|\nabla\phi| = 1$ and $\alpha = 1$. Dans notre cas cependant nous constatons que la largeur numérique de l'interface intervient ainsi que l'étirement de la membrane. Cette

condition peut devenir très restrictive lorsque λ est grand (c'est le cas par exemple dans le cas des vésicules phospholipidiques), car elle se comporte en $h^{\frac{3}{2}}$.

D'un autre côté, Paul Vigneaux dans sa thèse et dans un article cosigné avec Cédric Galusinski [60, 59] mets en évidence une condition de stabilité pour des régimes à faible nombre de Reynolds et grande tension de surface (le cas de la micro-fluidique). Dans ce cas la condition est de la forme, si on néglige l'inertie devant les forces visqueuses

$$C \frac{\mu}{\sigma} h$$

où μ est la viscosité et σ la tension de surface. Dans ce régime où l'inertie est négligée on obtient donc une condition moins restrictive en terme d'ordre.

Dans sa thèse [37] Claire Bost fait le point sur ces conditions de stabilité en introduisant un problème $1D$ simplifié mais qui semble contenir ces deux types de conditions. A partir d'une analyse de Fourier de cette équation elle trouve une condition de stabilité qui est compatible avec les deux précédentes.

Une question importante pour la stabilité des problèmes de couplage fluide-structure est la conservation d'une certaine énergie discrète, après discrétisation temporelle et/ou spatiale. Ce type de question a été abordé dans la méthode ALE [58, 45] et dans le cadre de la théorie du second gradient [71] par Jamet *et al* [72]. Ces derniers ont introduits une méthode pour assurer une conservation d'énergie au niveau discret et ont ainsi supprimé des courants parasites intervenant dans les simulations lorsque le coefficient de tension de surface devient important. Dans le contexte de la méthode de frontière immergée, les questions de stabilité ont été étudiées par [117, 111, 34, 35], qui ont défini des schémas explicites, semi-implicite et complètement implicite et ont étudié leur stabilité. En particulier [34, 35] dans le cadre d'une méthode de frontière immergée traitée par éléments finis avec le terme d'interface non étalé, mettent au point une méthode explicite stable sous une condition de stabilité de type Brackbill (il n'y a pas de convection non linéaire) et une méthode implicite inconditionnellement stable (en $2D$). D'un autre coté toujours dans le cas de la dimension 2, T. Y. Hou and Z. Shi [66, 67] proposent une représentation de l'interface par l'abscisse curviligne et l'angle du vecteur tangent et mènent une analyse spectrale qui leur permet de proposer un schéma semi-implicite toujours stable sous une condition de type Brackbill.

Dans le cadre de sa thèse Claire Bost a tenté de mettre au point des schémas numériques qui conservent une énergie discrète. Nous nous heurtons au problème de l'étalement de la force par la fonction cut-off, source d'une non linéarité supplémentaire. Nous pouvons effectivement proposer un schéma, mais dans lequel nous ne pouvons plus contrôler la largeur numérique d'interface. Notons que ce problème de largeur d'interface est présent aussi dans la méthode de champ de phase ou du second gradient, dans lesquelles on introduit un terme *ad hoc* pour la conserver.

5.3.8 Exemple d'application : motilité cellulaire et instabilité paramétrique

Différents tests ont été menés afin de valider notre code de calcul [A4, A3]. Nous présentons ici une application de notre méthode à l'étude des protrusions cellulaires. C'est un sujet en développement conjointement avec John Stockie (U. Vancouver). Les cellules, pour se déplacer par exemple, créent des déformations de membrane qu'on appelle protrusions. Le mécanisme à l'origine de cette force n'est pas unanimement reconnu dans la communauté biologiste. Il

est attribué à la polymérisation/dépolymérisation de brins d'actine au voisinage de la paroi, mais ce mécanisme est modélisé de différente manière selon les auteurs (cf [93, 36] et leur bibliographies), notamment comme un milieu continu diphasique, ou viscoélastique, ou à l'opposé comme un réseau microscopique organisé. N'ayant pas les moyens de prendre part à ce débat nous nous sommes intéressés à un article de Cortez, Peskin, Stockie et Varela dans lequel on étudie l'instabilité paramétrique du système formé d'une membrane élastique 2D immergée dans un fluide. L'instabilité paramétrique d'un système est bien connue des (ex-)amateurs de balançoire. C'est en effet en changeant la longueur du pendule de manière périodique, à partir de l'état d'équilibre légèrement perturbé, qu'on arrive à se balancer quasiment sans effort. On pourrait donc imaginer que la variation d'un paramètre (la raideur) du système couplé membrane/fluide pourrait engendrer une instabilité. C'est ce qui est démontré en dimension deux dans [51] et à l'étude en dimension trois dans le cadre de notre collaboration avec John Stockie. De là à conclure que les protrusions cellulaires pourraient être le résultat combiné d'une force de polymérisation et d'une instabilité, c'est une autre histoire.

En tout cas d'un point de vue mécanique, les tests numériques 3D menés avec notre modèle de membrane immergée montrent clairement qu'une membrane sphérique légèrement perturbée selon un certain mode, si sa rigidité fluctue périodiquement à une fréquence bien choisie, peut exhiber une instabilité, c'est à dire des déplacements très grands par rapport à la perturbation initiale. Nous insistons bien sur le fait qu'il ne s'agit pas d'une résonance suite à l'application d'une force (nous ne poussons pas la balançoire!). Ainsi si on ne perturbe pas la membrane sphérique initialement, elle ne bougera pas quelque soit la variation de sa raideur. Quelques exemples sont disponibles en vidéo sur ma page personnelle. L'exemple ci-dessous est académique : il correspond à une membrane immergée de raideur 1 dans un fluide à Reynolds 100 (ce qui n'est pas réaliste pour la micro-fluidique). La membrane sphérique est perturbée de la manière suivante : on considère un méridien de cette sphère qu'on perturbe par une oscillation en $\cos(4\theta)$ d'amplitude 2.5%. Puis on considère la surface de révolution associée à ce méridien. La raideur de la membrane varie périodiquement au tour de 1 entre 0.5 et 1.5. Les images page suivante montrent la membrane immergée déformée. Les couleurs sur la surface codent son étirement local. Les coupes du champ de pression au milieu de la membrane sont représentés aux bords de la boîte. Le fluide n'est pas représenté.

5.4 Cas d'une membrane inextensible en flexion

5.4.1 Obtention de la force de courbure

Dans le cadre de l'étude du comportement à l'équilibre ou dans un écoulement en cisaillement de vésicules phospholipidiques, les méthodes ci-dessus permettent de proposer une alternative intéressante aux méthodes de champs de phase [32]. Dans l'étude de tels phénomènes, la surface "élastique" est quasi-inextensible, et ce sont les forces de courbure qui pilotent la forme géométrique et le comportement des vésicules. En pratique, on considère une membrane avec un coefficient de raideur très important dans la loi de comportement $r \rightarrow E'(r)$, ce qui correspond à pénaliser le changement d'aire, et on ajoute une énergie de courbure. On peut considérer la forme générale suivante pour celle-ci :

$$\mathcal{G}_\varepsilon(\phi) = \int_{\Omega} G(\kappa(\phi)) |\nabla \phi| \frac{1}{\varepsilon} \zeta\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right) dx$$

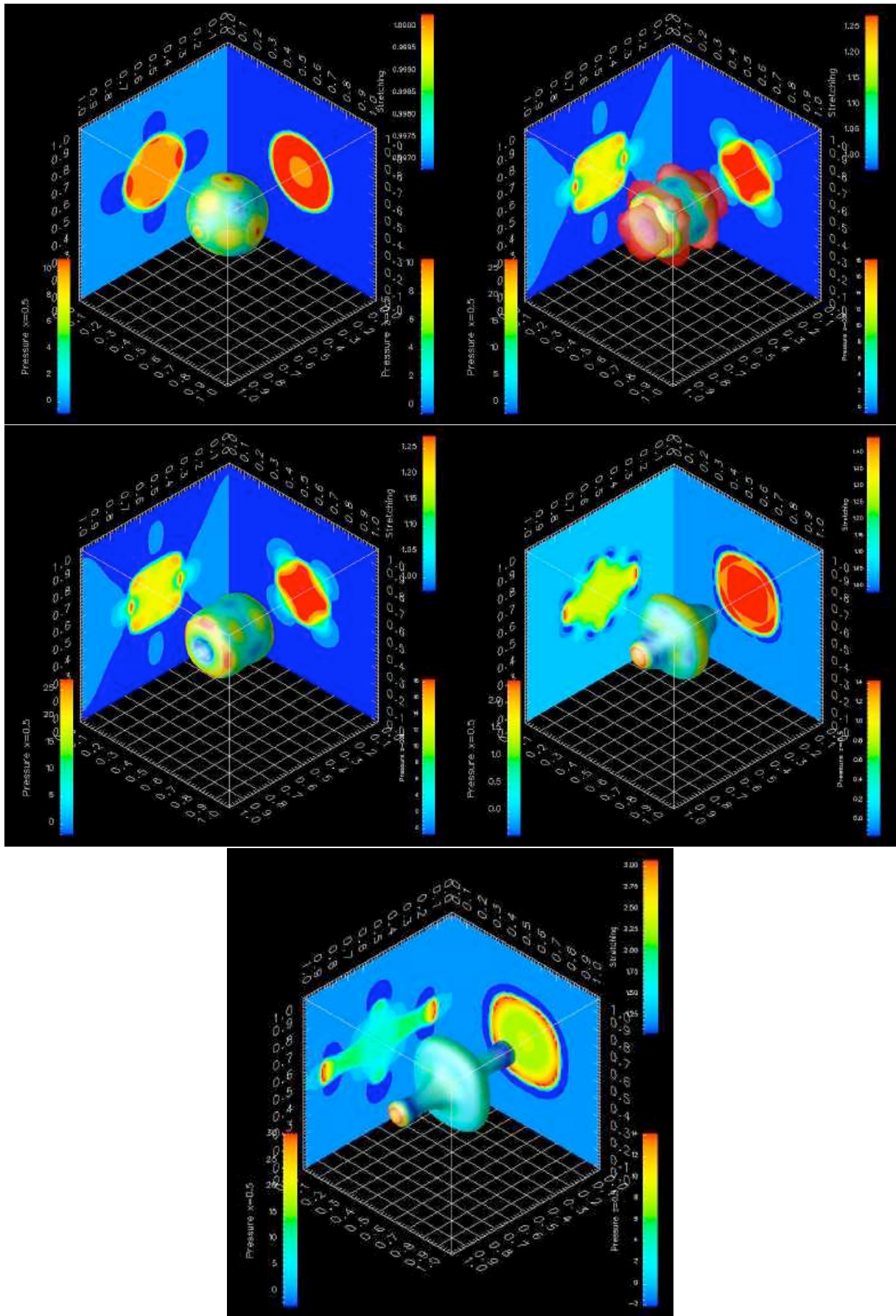


FIGURE 10 – Instabilité paramétrique d'une membrane immergée.

le cas le plus standard correspondant à $G(r) = \frac{1}{2}r^2$. Comme précédemment la dérivée temporelle de l'énergie de courbure correspond au signe près à la puissance des forces de courbure $H_\varepsilon(x, t)$, et nous avons

$$\frac{d}{dt}\mathcal{G}_\varepsilon(\phi) = d\mathcal{G}_\varepsilon(\phi)(\phi_t) = d\mathcal{G}_\varepsilon(\phi)(-u \cdot \nabla\phi) = - \int_{\Omega} H_\varepsilon(x, t) \cdot u dx \quad (36)$$

ce qui donne par identification (voir cours M2R, et article en préparation [A14]) :

$$H_\varepsilon(x, t) = \operatorname{div} \left[-G(\kappa(\phi)) \frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|} + \frac{1}{|\nabla\phi|} \mathbb{P}_{\nabla\phi^\perp} (\nabla[|\nabla\phi|G'(\kappa(\phi))]) \right] \frac{1}{\varepsilon} \zeta\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right) \nabla\phi.$$

Il est possible de déterminer une forme en divergence des forces de courbure qui fait apparaître dans le tenseur sous la divergence la projection de la seconde forme fondamentale sur le plan tangent à la surface. On trouve dans [A14] l'expression $H_\varepsilon(x, t) = \operatorname{div} \sigma_c^\varepsilon$ avec

$$\sigma_c^\varepsilon = \left\{ |\nabla\phi| \left[G(\kappa(\phi)) \mathbb{I} + \frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|} \otimes \nabla G'(\kappa(\phi)) \right] \left(\mathbb{I} - \frac{\nabla\phi \otimes \nabla\phi}{|\nabla\phi|^2} \right) - G'(\kappa(\phi)) \left(\mathbb{I} - \frac{\nabla\phi \otimes \nabla\phi}{|\nabla\phi|^2} \right) D^2\phi \left(\mathbb{I} - \frac{\nabla\phi \otimes \nabla\phi}{|\nabla\phi|^2} \right) \right\} \frac{1}{\varepsilon} \zeta\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right) \quad (37)$$

5.4.2 Liens avec la méthode de champ de phase et la théorie du second gradient

Le comportement de vésicules dans un écoulement en cisaillement, reproduisant la situation des globules rouges dans les vaisseaux sanguins, a été étudiée extensivement au laboratoire de Spectrométrie Physique à Grenoble par J. Beaucourt, Th. Biben, C. Misbah et leurs co-auteurs [32, 28, 33] et expérimentalement par M. Mader et T. Podgorski. On pourra se reporter à la page personnelle de C. Misbah pour une liste complète des publications de leur équipe sur ce thème.

La méthode utilisée est une méthode de champ de phase (appelée "champ advecté") qui est assez proche de la méthode Level Set. Nous avons donc échangé nos idées ces dernières années régulièrement. Nous sommes sur le point de soumettre un article de comparaison entre les deux approches [A14]. Les différences entre les deux méthodes sont les suivantes. Tout d'abord la fonction eulérienne Φ repérant l'interface prend ses valeurs entre 0 et 1. Elle est en fait constante sauf au voisinage de l'interface où elle varie régulièrement mais rapidement de 0 à 1. L'épaisseur de la transition est un paramètre ε de la méthode comparable à celui intervenant en Level Set. D'ailleurs la fonction de phase Φ pourrait être comparée à $H(\frac{\phi}{\varepsilon})$. Une intégrale de surface ne fait donc pas intervenir la fonction ζ mais le gradient de Φ , ce qui revient au même compte tenu que $H' = \zeta$. La différence fondamentale n'est donc pas dans ce choix de représentation anecdotique mais dans l'équation qui va régir l'évolution de Φ . Là où en Level Set la fonction est simplement advectée, avec les avantages (enregistrement de l'étirement) et les inconvénients (changement de pente et nécessité de renormaliser) que cela présente, la fonction de phase est solution d'une équation de transport corrigée par des termes assurant que son profil reste d'épaisseur constante. Typiquement Φ va vérifier :

$$\Phi_t + u \cdot \nabla\Phi = \varepsilon_\Phi(\Phi(1 - \Phi^2) + \varepsilon^2(\Delta\Phi + c|\nabla\Phi|)) \quad (38)$$

les termes du second membre de cette équation ayant pour but de maintenir Φ aux deux valeurs 0 et 1, et pour les derniers de respecter un profil donné d'épaisseur ε . Dans les publications

initiales [32], les termes correctifs ont été, sauf erreur, trouvés de manière heuristique. D'autre part une équation supplémentaire est à ajouter pour calculer l'étirement, puisque celui-ci n'est pas inclus dans la fonction de phase. Récemment D. Jamet et C. Misbah [73] ont appliqué la théorie du second gradient en introduisant un potentiel thermodynamique pour le problème multiphysique. Ce potentiel admet pour variables Φ , son gradient et l'étirement. En dérivant ce potentiel ils obtiennent les forces de membrane et de courbure et nous avons montré dans [A14] que les forces de courbures coïncident (elles sont géométriques) et que celles de membrane peuvent être identifiées moyennant le choix d'une loi de comportement de la forme $E'(r) = \lambda \ln r$ dans la méthode Level Set (quasiment linéaire pour des déformations faibles).

Sur un plan numérique, au delà des comparaisons quantitatives sur les deux méthodes, une étude sur la stabilité numérique des schémas associés dans le cas d'interfaces très rigides reste à faire. Si la méthode Level Set semble plus naturelle par la simplicité du transport de la fonction ϕ , il reste à investiguer quelles sont les conséquences de la représentation de la mesure de Dirac inhérente à cette formulation, sur la stabilité du couplage. Nous avons réfléchi avec Claire Bost à des schémas conservant une énergie discrète et sur lesquels on dispose toujours d'un contrôle de la taille numérique d'interface, mais sans franc succès pour l'instant.

5.4.3 Exemples d'application : vésicules phospholipidiques

Comme exemple d'application nous avons le cas statique où il s'agit de déterminer les formes d'équilibre de vésicules phospholipidiques. Le problème est alors de déterminer une surface d'aire donnée entourant un volume donné et minimisant sa courbure moyenne. Le taux de remplissage est le paramètre qui détermine la forme d'équilibre. Il est défini comme le rapport de l'aire de la vésicule sur l'aire d'une sphère de même volume. D'après l'inégalité isopérimétrique c'est donc un nombre τ inférieur ou égal à 1 et valant 1 si la vésicule est une sphère. Pour des valeurs proches de 1, les formes d'équilibres sont des ellipsoïdes, qui lorsque le taux décroît prennent de plus en plus une forme de cacahuète. Une bifurcation a lieu pour des valeurs plus faibles de τ où une forme d'équilibre ressemblant à un beignet (où à un globule rouge) apparaît. Pour des valeurs du taux très faibles, on a des invaginations assez extravagantes [104] mais observées dans certaines pathologies liées aux globules rouges. La figure 11 reproduit des calculs menés sur le modèle ci-dessus par Thomas Milcent dans sa thèse [90] et ont été publiés dans [A2].

Le cas dynamique est plus riche, puisque le comportement des vésicules dans un écoulement en cisaillement dépend du rapport des viscosités des fluides intérieur et extérieurs. Ainsi pour une viscosité du fluide intérieur égale ou légèrement supérieure à celle du fluide extérieur, la vésicule s'oriente suivant un certain angle (fonction du rapport) puis sa membrane a un mouvement de chenille de char ("tank treading", le fluide intérieur étant entraîné. Etant donné la forme allongée de la vésicule, ce mouvement interne dissipe nécessairement de l'énergie. Au delà d'un certain rapport de viscosité, il devient énergétiquement plus avantageux que la vésicule dans son ensemble se mette en rotation, le fluide intérieur ne dissipant alors plus d'énergie. On assiste à un mouvement de "tumbling". Ces différents régimes ont été étudiés en détail dans [32, 28, 91].

Il est important dans le cas dynamique d'adimensionnaliser les équations pour pouvoir isoler les paramètres pertinents du modèle. Ainsi si on reprend l'équation de quantité de

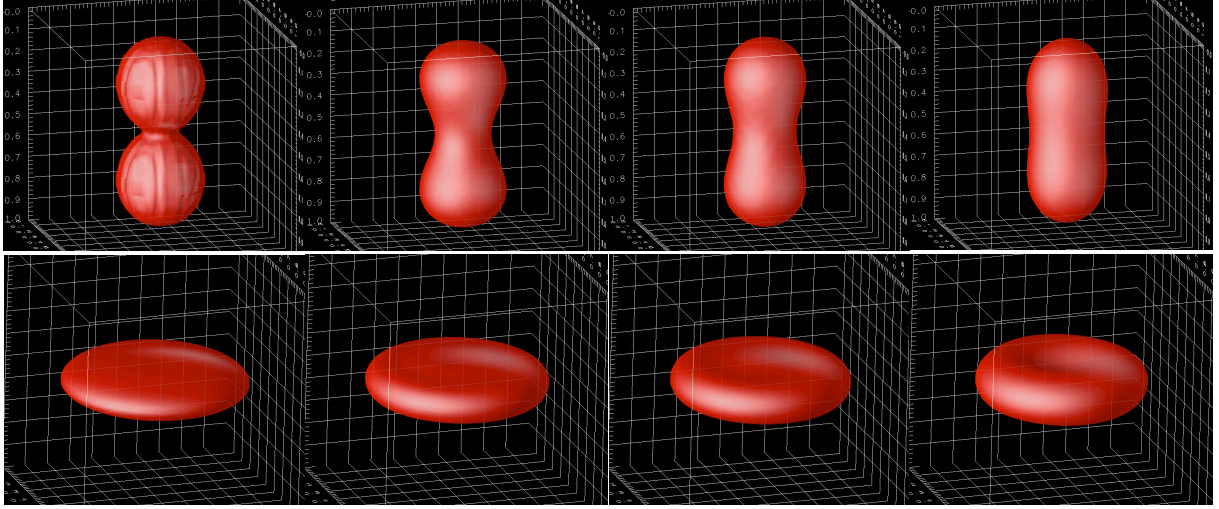


FIGURE 11 – Calcul des formes optimales d'équilibre de vésicules phospholipidiques. En haut : $\eta = 0.8$, en bas : $\eta = 0.586$. De l'initialisation à l'état d'équilibre de gauche à droite. Calculs par Thomas Milcent.

mouvement

$$\rho(u_t + u \cdot \nabla u) - \operatorname{div}(\mu D(u)) + \nabla p = \left\{ \nabla[E'(|\nabla\phi|)] - \operatorname{div} \left[E'(|\nabla\phi|) \frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|} \right] \frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|} \right. \\ \left. + \operatorname{div} \left[-G(\kappa(\phi)) \frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|} + \frac{1}{|\nabla\phi|} \mathbb{P}_{\nabla\phi^\perp} (\nabla[|\nabla\phi|G'(\kappa(\phi))]) \right] \frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|} \right\} |\nabla\phi| \frac{1}{\varepsilon} \zeta \left(\frac{\phi}{\varepsilon} \right)$$

On considère une longueur L , une vitesse U , une densité ρ_{ref} et une viscosité μ_{ref} . On pose alors $x = Lx'$, $u = Uu'$, $t = (L/U)t'$, $\rho = \rho_{\text{ref}}\rho'$, $\mu = \mu_{\text{ref}}\mu'$, $p = \rho_{\text{ref}}U^2p'$, $\phi = L\phi'$, et $\varepsilon = L\varepsilon'$. En dérivant on trouve,

$$u_t = \frac{U^2}{L}u'_t, \quad \nabla u = \frac{U}{L}\nabla'u', \quad D(u) = \frac{U}{L}D'(u'), \quad \operatorname{div}(\mu D(u)) = \frac{U\mu_{\text{ref}}}{L^2} \operatorname{div}'(rD'(u')), \\ \nabla p = \frac{\rho_{\text{ref}}U^2}{L} \nabla'p', \quad \nabla\phi = \nabla\phi', \quad c(\phi) = \frac{1}{L}c'(\phi')$$

où $c(\phi)$ désigne la courbure. Ceci donne en grandeurs adimensionnalisées (en omettant les '), pour des lois de la forme $E(r) = \frac{1}{2}\lambda(r-1)^2$ et $G(r) = \frac{1}{2}r^2$,

$$\rho(u_t + u \cdot \nabla u) - \frac{1}{Re} \operatorname{div}(rD(u)) + \nabla p = \left\{ \frac{1}{We} \left[\nabla[E'(|\nabla\varphi|)] - \operatorname{div} \left[E'(|\nabla\varphi|) \frac{\nabla\varphi}{|\nabla\varphi|} \right] \frac{\nabla\varphi}{|\nabla\varphi|} \right] \right. \\ \left. + \frac{1}{C_k} \operatorname{div} \left[-G(\kappa(\phi)) \frac{\nabla\varphi}{|\nabla\varphi|} + \frac{1}{|\nabla\varphi|} \mathbb{P}_{\nabla\varphi^\perp} (\nabla[|\nabla\varphi|G'(\kappa(\phi))]) \right] \frac{\nabla\varphi}{|\nabla\varphi|} \right\} |\nabla\varphi| \frac{1}{\varepsilon} \zeta \left(\frac{\varphi}{\varepsilon} \right)$$

où

$$Re = \frac{LU\rho_{\text{ref}}}{\mu_{\text{ref}}}, \quad We = \frac{\rho_{\text{ref}}U^2L}{\lambda}, \quad C_k = \frac{\rho_{\text{ref}}U^2L^3}{\kappa}$$

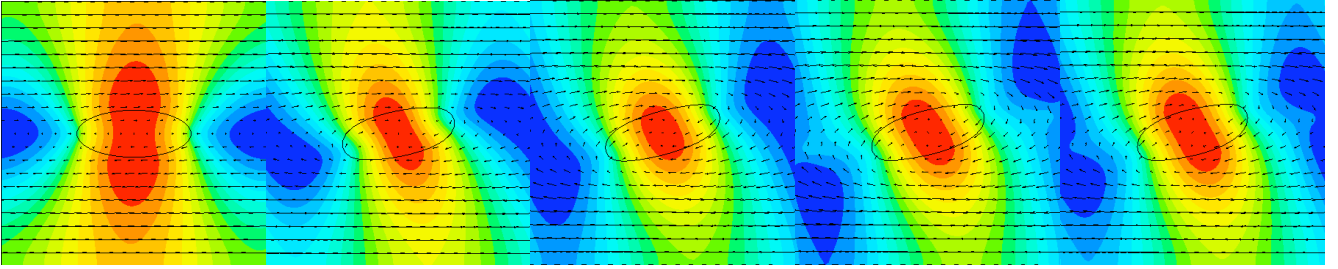


FIGURE 12 – Mouvement de tank-treading d’une vésicule dans un écoulement en cisaillement. Rapport des viscosités intérieure/extérieure : 1. Les couleurs représentent les isobares.

Dans un écoulement cisailé la quantité importante est le taux de cisaillement γ , à partir duquel on exprime la vitesse caractéristique $U = \gamma L$. En remplaçant $LU\rho_{\text{ref}}$ par $Re\mu_{\text{ref}}$ dans W_e et C_k on obtient finalement

$$Re = \frac{LU\rho_{\text{ref}}}{\mu_{\text{ref}}}, \quad W_e = Re \frac{\mu_{\text{ref}}\gamma L}{\lambda}, \quad C_k = Re \frac{\mu_{\text{ref}}\gamma L^3}{\kappa}$$

ce qui correspond aux paramètres de [28] avec $Re = 1$ dans W_e et C_k (dans cet article l’équation considérée est Stokes). Le comportement de la vésicule est donc complètement déterminé lorsqu’on se donne ces trois paramètres.

Ci-dessous nous reproduisons les résultats de simulation correspondant aux deux situations les plus génériques (une situation intermédiaire entre tank-treading et tumbling a été mise en évidence par [91]). Sur la figure 12, qui correspond aux paramètres $Re = 0.0001$, $W_e = 0.000025$, $C_k = 0.25$, rapport de viscosités 1, taux de remplissage 0.7, on observe que la vésicule s’incline et atteint une position stationnaire.

Au contraire sur la figure 13 qui correspond aux mêmes paramètres mais avec un rapport de viscosités de 4 (la viscosité intérieure 4 fois plus grande que précédemment), on observe le phénomène de tumbling. Si au lieu de multiplier la viscosité intérieure par 4 on divise celle de l’extérieur par 4, (paramètres $Re = 0.0004$, $W_e = 0.000025$, $C_k = 0.25$, rapport de viscosité 4) il y a aussi tumbling mais comme le fluide extérieur est moins visqueux la forme d’équilibre bi-concave de la vésicule apparaît mieux (figure 14).

5.5 Interaction fluide-structure : cas générique

Nous considérons maintenant le cas où le corps élastique immergé n’est plus une structure mince mais au contraire un solide élastique de même dimension que le fluide.

5.5.1 Petit rappel d’élasticité eulérienne

Rappelons que nous nous plaçons dans le cas incompressible (qui nous intéresse particulièrement dans le contexte biologique) mais que l’approche que nous développons pourrait s’étendre au cas compressible moyennant des Jacobiens bien placés, comme on l’a remarqué dans le cas des membranes (remarque 4 page 31). On considère pour l’instant qu’un corps élastique incompressible occupe tout le domaine Ω , le couplage fluide-structure étant réintroduit ensuite. Comme le champ des vitesses est incompressible et s’annule sur $\partial\Omega$, nous sommes dans le cas particulier où la configuration de référence et la configuration déformée

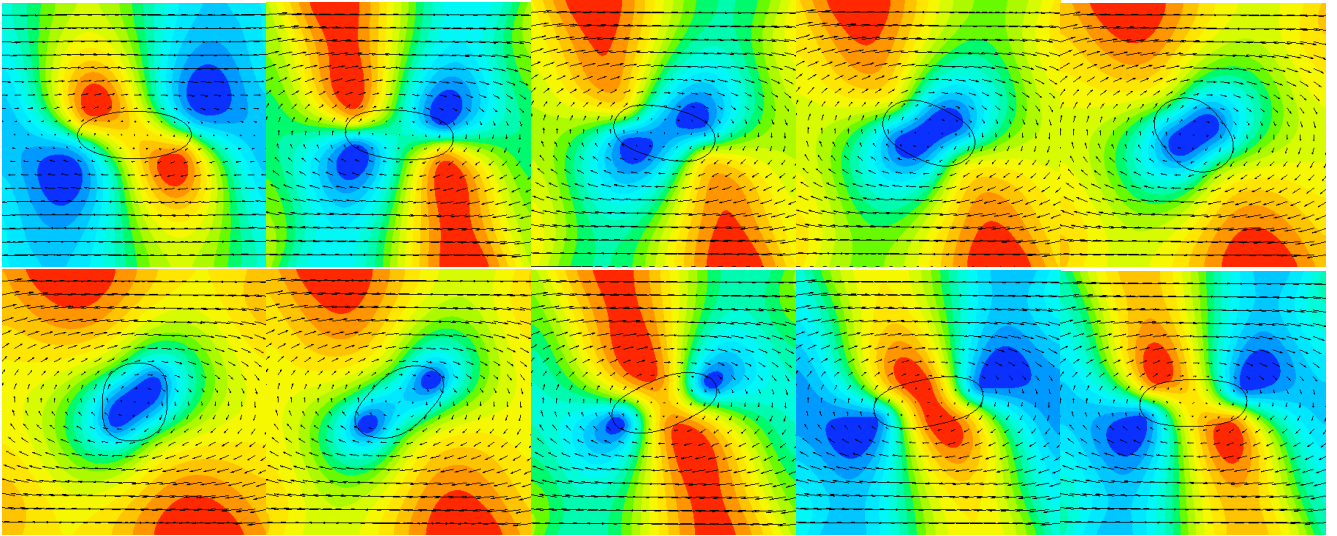


FIGURE 13 – Mouvement de tumbling d’une vésicule dans un écoulement en cisaillement. Rapport des viscosités intérieure/extérieure : 4. Reynolds : 10^{-4} . Les couleurs représentent les isobares.

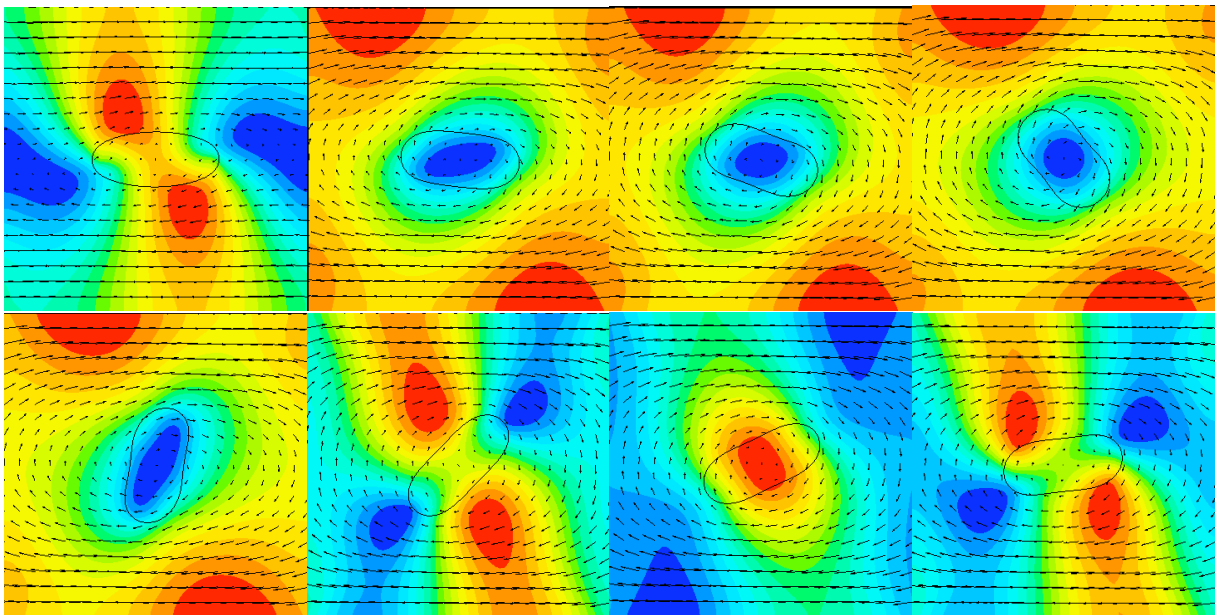


FIGURE 14 – Mouvement de tumbling d’une vésicule dans un écoulement en cisaillement. Rapport des viscosités intérieure/extérieure : 4. Reynolds : 4.10^{-4} . Les couleurs représentent les isobares.

occupent la même région de l'espace, ce qui rend plus aisée une formulation eulérienne. Soit $\tau \rightarrow X(\tau; x, t)$ les caractéristiques du champ u . On pose pour simplifier $X(\xi, t) := X(t; \xi, 0)$. On considère aussi les caractéristiques rétrogrades $Y(x, t) := X(0; x, t)$. Un point important de notre approche est de remarquer que les caractéristiques rétrogrades vérifient une équation de transport vectorielle :

$$Y_t + u \cdot \nabla Y = 0, \quad Y(0) = x. \quad (39)$$

La première chose à savoir écrire en élasticité est la manière dont les distances changent pendant la déformation. A ce titre la présentation classique lagrangienne de l'élasticité commence souvent par le petit calcul suivant. Si ξ et $\xi + d\xi$ sont deux points (matériels) infiniment voisins dans la configuration initiale, ils se situent après déformation en $X(\xi, t)$ et $X(\xi + d\xi, t)$ qui sont distants de $|X(\xi, t) - X(\xi + d\xi, t)|^2 \approx d\xi^T \nabla X^T \nabla X d\xi$ à l'ordre 1. Le tenseur $C = \nabla X^T \nabla X(\xi)$ permet donc de mesurer les variations de distance. A l'inverse dans une formulation eulérienne on considère deux points (de l'espace) x et $x + dx$ et on se demande à quelle distance se trouvaient, à l'instant initial, deux points matériels qui à l'instant t sont en x et $x + dx$. On mesure donc $|Y(x, t) - Y(x + dx, t)|^2 \approx dx^T (\nabla Y^T \nabla Y)(x) dx = dx^T (\nabla X \nabla X^T)^{-1}(\xi) dx$ à l'ordre 1, avec $\xi = Y(x, t)$. On voit apparaître le tenseur $B = \nabla X \nabla X^T(\xi) = \nabla Y^{-1} \nabla Y^{-T}(x)$ pour mesurer cette distance. Il est donc naturel de voir intervenir ce tenseur B , plutôt que C , dans les équations d'élasticité eulérienne.

De fait, il est assez sympathique de voir que B et B^{-1} vérifient des équations eulériennes, à savoir

$$B_t + u \cdot \nabla B = \nabla u B + B \nabla u^T \quad B_t^{-1} + u \cdot \nabla B^{-1} = -\nabla u^T B^{-1} - B^{-1} \nabla u. \quad (40)$$

alors qu'on ne peut obtenir une telle forme en dérivant C .

5.5.2 Cas isotrope

Dès lors sous des hypothèses classiques d'indifférence matérielle et d'isotropie, l'énergie s'exprime (voir [A3] pour plus de détails) en fonction des invariants de B . En incompressible ($\det B = 1$) ceux-ci se réduisent à $\text{tr } B$ et $\text{tr } B^{-1}$, et l'énergie prend la forme :

$$E = \frac{1}{2} \int_{\Omega} W(\text{tr } B, \text{tr } B^{-1}) dx$$

où $(a, b) \rightarrow W(a, b)$ est une fonction donnée. Par conséquent en appliquant notre méthode de dérivation temporelle et d'identification avec la puissance d'une force, nous obtenons le tenseur des contraintes associé à cette énergie :

$$\sigma = -p\mathbb{I} + \frac{\partial W}{\partial a}(\text{tr } B, \text{tr } B^{-1})B - \frac{\partial W}{\partial b}(\text{tr } B, \text{tr } B^{-1})B^{-1}. \quad (41)$$

Celui-ci correspond à l'expression figurant dans [94] modulo l'utilisation du théorème de Cayley-Hamilton qui donne dans le cas incompressible s'écrit $B^{-1} = \text{tr } B^{-1}\mathbb{I} - (\text{tr } B)B + B^2$. Nous avons donc le résultat suivant.

Proposition 8 *La déformation d'un solide élastique, incompressible, isotrope, et vérifiant l'axiome d'indifférence matérielle est gouvernée par le système suivant :*

$$\begin{cases} \rho(u_t + u \cdot \nabla u) - \operatorname{div}(\alpha_1 B - \alpha_2 B^{-1}) + \nabla p = f, & \text{sur } \Omega \times]0, T[, \\ \operatorname{div} u = 0, & \text{sur } \Omega \times]0, T[, \\ Y_t + u \cdot \nabla Y = 0, \quad B = \nabla Y^{-1} \nabla Y^{-T}, & \text{sur } \Omega \times]0, T[, \\ u = 0, & \text{sur } \partial\Omega \times]0, T[, \\ u = u_0, \quad Y = id, & \text{sur } \Omega \times \{0\}. \end{cases}$$

où les α_i sont des fonctions de $(\operatorname{tr} B, \operatorname{tr} B^{-1})$ définies comme les dérivées partielles d'une énergie W .

Par exemple dans le cas d'une loi de Saint-Venant Kirchhoff on a

$$\alpha_1 = \frac{\lambda_1 + 2\lambda_2}{4}(\operatorname{tr} B - 3) + 2\lambda_2, \quad \alpha_2 = -\frac{\lambda_2}{2}.$$

où les λ_i sont les coefficients de Lamé du matériau.

La remarque suivante est importante du point de vue de l'implémentation numérique. Rappelons que

$$B = \nabla Y^{-1} \nabla Y^{-T} = \nabla X \nabla X^T = \sum_{i=1}^3 X_{,\xi_i} \otimes X_{,\xi_i}.$$

Par définition, $\nabla Y_j \cdot X_{,\xi_i} = \delta_{ij}$. Par incompressibilité $\det \nabla Y = 1$, et donc nous avons l'expression suivante de $X_{,\xi_i}$ dans le domaine eulérien

$$X_{,\xi_1} = \nabla Y_2 \times \nabla Y_3, \quad X_{,\xi_2} = \nabla Y_3 \times \nabla Y_1, \quad X_{,\xi_3} = \nabla Y_1 \times \nabla Y_2. \quad (42)$$

Ceci permet de calculer B dans notre modèle à partir de combinaisons algébriques simples de dérivées partielles de Y . D'autre part, cela fournit une interprétation de B comme la somme de projecteurs sur des lignes où deux fonctions niveau différentes sont constantes (on utilisera ceci au 5.6.2 pour relier cette équation d'élasticité aux équations de Born-Infeld Augmentées à la manière de [39]).

5.5.3 Cas anisotrope transverse

Nous nous sommes intéressés au cas anisotrope pour deux raisons : d'une part pour pouvoir modéliser le cardiomyocyte, qui peut être considéré comme un milieu élastique avec une direction privilégiée selon laquelle la contraction a lieu. D'autre part pour mener une étude asymptotique de notre modèle de solide élastique vers le modèle de la membrane développé en 5.3.4. Soit $\tau(y)$ une direction privilégiée (au temps $t = 0$), on suppose que le matériau est invariant par rotation autour de τ et par changement de τ en $-\tau$. Alors d'après [94], la fonction d'énergie ne dépend plus simplement que des invariants $\operatorname{tr} C, \operatorname{tr} C^{-1}$ du tenseur des déformations mais aussi, (en coordonnées lagrangienne) de $\tau^T C \tau$ et $\tau^T C^2 \tau$. On remarque d'abord que d'après le théorème de Cayley-Hamilton on peut remplacer ce dernier invariant par $\tau^T C^{-1} \tau$. On verra ci-dessous que dans notre formulation level-set cet invariant aura une interprétation mécanique plus directe. L'énergie admet donc l'expression générale suivante :

$$E = \int_{\Omega} W(\operatorname{tr} C, \operatorname{tr} C^{-1}, \tau(y)^T C \tau(y), \tau^T(y) C^{-1} \tau(y)) dy.$$

Les invariants de B et C sont les mêmes, et après changement de variable $y = Y(x, t)$ on obtient en notant $\tau(Y)$ l'expression $\tau(Y(x, t))$,

$$E = \int_{\Omega} W(\text{tr } B, \text{tr } B^{-1}, |\nabla Y^{-1}(x, t)\tau(Y)|^2, |\nabla Y^T(x, t)\tau(Y)|^2) dx.$$

En appliquant à nouveau notre méthode de dérivation on trouve alors le tenseur des contraintes suivant :

$$\sigma = -p\mathbb{I} + \frac{\partial W}{\partial a} B - \frac{\partial W}{\partial b} B^{-1} - \frac{\partial W}{\partial c} \nabla Y^T \tau \otimes \nabla Y^T \tau + \frac{\partial W}{\partial d} \nabla Y^{-1} \tau \otimes \nabla Y^{-1} \tau.$$

Dans le cas d'un matériau à fibre comme le cardiomyocyte, τ représentera donc la direction de la fibre. La quantité $|\nabla Y^{-1}(x, t)\tau(Y)|$ représente l'étirement dans la direction de la fibre. Considérons maintenant un matériau élastique d'une certaine épaisseur, occupant initialement la portion d'espace entre deux lignes de niveau d'une fonction ϕ (c'est à dire une membrane épaisse). On peut alors considérer comme vecteur préférentiel $\tau(y) = \nabla \phi_0(y)$. Soit la fonction transportée $\phi(x, t) = \phi_0(Y(x, t))$ on a

$$\begin{aligned} \nabla Y^T \tau(Y) &= \nabla Y^T \nabla \phi_0(Y) = \nabla \phi(x, t) \\ \nabla Y^{-1} \tau(Y) &= \nabla Y^{-1} \nabla \phi_0(Y) = \nabla Y^{-1} \nabla Y^{-T} \nabla Y^T \nabla \phi_0(Y) = B \nabla \phi(x, t). \end{aligned}$$

Par conséquent, $|B \nabla \phi|$ représente l'étirement suivant la direction $\nabla \phi_0(Y)$ alors que $|\nabla \phi|$ représente l'étirement dans la direction $\nabla \phi$, ou encore le changement d'aire de $\phi = 0$ en incompressible, comme on l'a montré dans la proposition 5. Bien entendu ces deux directions ne coïncident pas en général. Cette distinction est rendue plus aisée par cette représentation Level Set, qui fournit une forme plus simple du tenseur des contraintes (par comparaison à (73) de [94], p. 79, ou (6.209) dans [65], p. 269) :

$$\sigma = -p\mathbb{I} + \frac{\partial W}{\partial a} B - \frac{\partial W}{\partial b} B^{-1} - \frac{\partial W}{\partial c} \nabla \phi \otimes \nabla \phi + \frac{\partial W}{\partial d} B \nabla \phi \otimes B \nabla \phi. \quad (43)$$

On a donc le résultat de représentation suivant :

Proposition 9 *La déformation d'un matériau isotrope transverse de direction $\nabla \phi_0(y)$, où ϕ_0 est une fonction distance, est pilotée par les équations suivantes*

$$\begin{cases} \rho(u_t + u \cdot \nabla u) - \text{div } \sigma = f, & \text{on } \Omega \times]0, T[, \\ \text{div } u = 0, & \text{on } \Omega \times]0, T[, \\ Y_t + u \cdot \nabla Y = 0, & \text{on } \Omega \times]0, T[, \\ \varphi(x, t) = \varphi_0(Y(x, t)), & \text{on } \Omega \times]0, T[, \\ u = 0, & \text{on } \partial\Omega \times]0, T[, \\ u = u_0, \quad Y = id, & \text{on } \Omega \times \{0\}. \end{cases}$$

où σ est donnée par (43) et les α_i sont des fonctions de $|\nabla Y|^2, |\nabla Y^{-1}|^2, |\nabla \phi|^2, |B \nabla \phi|^2$ définies comme les dérivées partielles d'une densité d'énergie W .

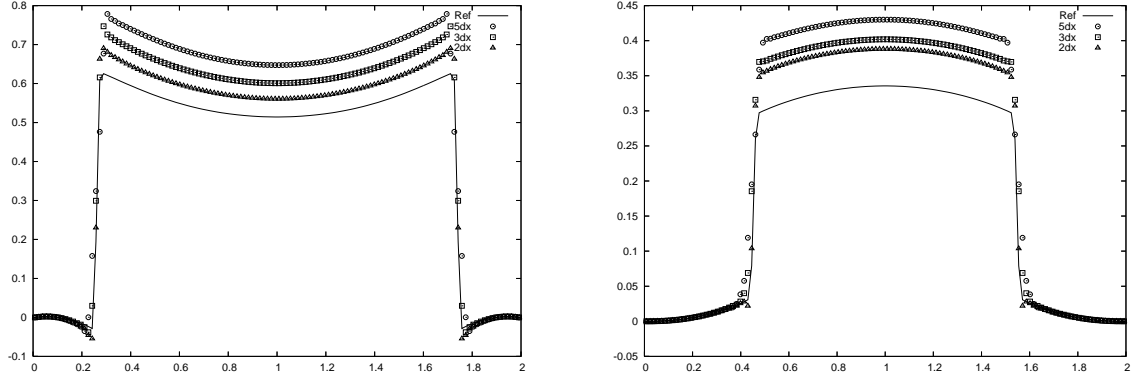


FIGURE 15 – Convergence des profils de pression d’un solide mince annulaire immergé à $t = 0.2$ (gauche) et $t = 2.2$ (droite) vers le profil de référence (membrane) lorsque la largeur d’interface ε diminue

A noter qu’Annie Raoult a fait le point et débroussaillé récemment le domaine des énergies anisotropes, notamment sur le nombre d’invariants qu’il est nécessaire et suffisant de prendre en fonction du groupe de symétrie que le matériau possède [101].

Une autre remarque concerne la question de l’existence pour ce modèle. La principale différence avec le modèle de membrane immergée est l’absence de dissipation dans la partie élastique. Si par contre on considère un solide visco-élastique immergé, il est assez direct de généraliser notre résultat d’existence de solution sous des hypothèses de régularité des coefficients α_i .

Enfin nous avons montré dans [A3] qu’en dimension deux, le tenseur des contraintes (43) s’exprime en fonction des deux derniers termes, soit

$$\sigma = -p\mathbb{I} - \beta_1(|\nabla\phi|, |B\nabla\phi|)\nabla\phi \otimes \nabla\phi + \beta_2(|\nabla\phi|, |B\nabla\phi|)B\nabla\phi \otimes B\nabla\phi. \quad (44)$$

En passant à la limite formellement dans l’épaisseur du matériau, on retrouve alors le modèle de la membrane immergée, un fait que nous avons corroboré numériquement en considérant une suite de solide élastiques annulaires de plus en plus minces et en observant, figure 15 la convergence des profils de pression.

5.5.4 Modèle multiphysique du couplage fluide-structure

Soit $\Omega_F(t)$ et $\Omega_S(t)$ les domaines fluide et solide et $\Sigma(t)$ leur interface. On suppose que $\Sigma(0)$ est représentée par la ligne de niveau zéro d’une fonction Ψ_0 et que Ψ_0 est positive dans $\Omega_S(0)$. Les densités du fluide et du solide sont notées ρ_F et ρ_S . La formulation générale de l’interaction fluide-structure que nous proposons est la suivante [A3]

Proposition 10 *Avec les notations ci-dessus, le modèle multiphysique d’interaction fluide-*

structure est donnée par les équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho(\Psi)(u_t + u \cdot \nabla u) - \operatorname{div} (H(\Psi)\sigma_S + (1 - H(\Psi))\sigma_F) = f, & \text{dans } \Omega \times]0, T[\\ \operatorname{div} u = 0 & \text{dans } \Omega \times]0, T[, \\ Y_t + u \cdot \nabla Y = 0 & \text{dans } \Omega \times]0, T[, \\ \varphi(x, t) = \varphi_0(Y(x, t)) , \quad \Psi(x, t) = \Psi_0(Y(x, t)) & \text{dans } \Omega \times]0, T[, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times]0, T[, \\ u = u_0, \quad \Psi = \Psi_0, \quad Y = Id & \text{sur } \Omega \times \{0\}. \end{array} \right.$$

où, $\rho(\Psi) = H(\Psi)\rho_S + (1 - H(\Psi))\rho_F$, $\sigma_F = -pI + 2\mu D(u)$ est le tenseur fluide, et σ_S est le tenseur des contraintes élastique. Dans le cas isotrope, σ_S est donnée par (41). Pour un solide isotrope transverse avec direction privilégiée $\tau(y) = \nabla\phi_0(y)$, σ_S est donnée par (43) avec $\varphi(x, t) = \varphi_0(Y(x, t))$.

5.5.5 Application à la simulation de la contraction d'un cardiomyocyte isolé

Dans [95] Okada *et al* étudient le mécanisme de la propagation d'une vague calcique dans un cardiomyocyte et la contraction qui en résulte. Ils présentent des simulations 3D utilisant le modèle de propagation de vagues calciques introduit par Subramanian et al (2002), et le modèle de contraction de Negroni et Lascano (1996). Le cardiomyocyte est représenté comme un milieu hyperélastique obéissant à la loi de comportement hyperélastique de St-Venant-Kirchoff. Sa structure microscopique est décrite par un choix d'éléments finis correspondant à la géométrie des objets biologiques : myofibrilles, lignes Z , ... Le résultat est une simulation certes en adéquation avec l'expérience, mais au prix d'un calcul de 37 heures pour une seconde de simulation. Nous proposons ici une modélisation alternative, basée sur notre formulation eulérienne de l'élasticité du cardiomyocyte.

Les mesures effectuées à Montpellier sur des cardiomyocytes de rat par les médecins collaborant avec TIMC nous permettent de nous baser sur une géométrie réelle. Nous considérons donc le système constitué d'un cardiomyocyte immergé dans un fluide et décrivons le problème d'interaction fluide structure en variables eulériennes. D'autre part nous utilisons la dynamique calcique introduite par Goldbeter et décrivant le système CICR (voir [A2] pour un exposé plus détaillé et des références). Cette dynamique calcique intervient dans la partie active du tenseur des contraintes qui est dirigée selon le vecteur τ . En pratique, le tenseur des contraintes que nous considérons est

$$\sigma = -p\mathbb{I} + \alpha_1 B - \alpha_2 B^{-1} + (\alpha_4 + T_0\gamma(Z))\nabla Y^{-1}\tau \otimes \nabla Y^{-1}\tau.$$

où Z est la solution du système de réaction-diffusion CICR dans la partie solide. Z est la concentration de calcium et $\gamma(Z)$ est une fonction seuil déclenchant une contraction si Z prend une valeur suffisamment grande. Deux cas sont possibles : soit Z est spatialement uniforme et la contraction est déclenchée dans tout le cardiomyocyte. C'est le cas physiologique. Soit Z se propage comme une onde, ce qui correspond à la situation d'un cardiomyocyte isolé.

Contraction uniforme d'un cardiomyocyte cylindrique incompressible Pour tester notre code de calcul, nous avons commencé par résoudre le problème dans le cas d'un cardiomyocyte cylindrique et pour une contraction homogène. La simulation présentée ici est

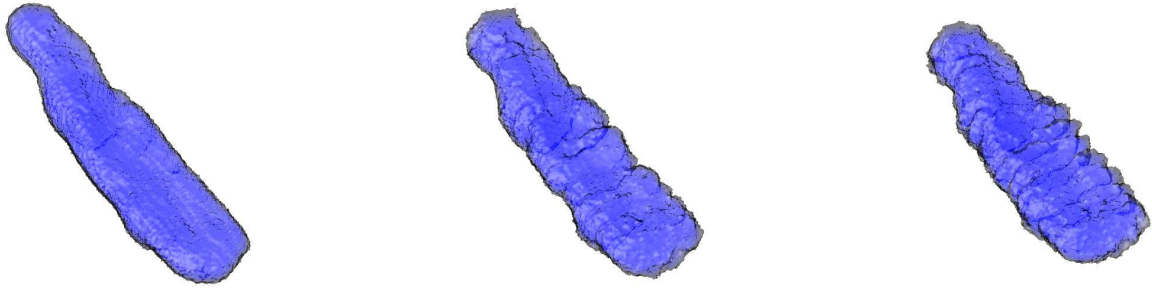


FIGURE 16 – Contraction uniforme d’un cardiomyocyte résultant d’un largage homogène de calcium

fait sur une grille MAC de taille 100^3 et une contraction demande 3 heures de calcul sur un ordinateur de type PC AMD 64 à 3 GHz tournant sous linux 64 bits.



Simulation en géométrie réelle Un intérêt fort de notre méthode est que l’interface compliquée du cardiomyocyte n’est pas maillée de manière adaptative. Une fonction niveau la représente. Il n’y a donc aucun coût supplémentaire à considérer une forme initiale de cardiomyocyte issue de mesures expérimentales par microscopie (figure 16). Dans le cas de la propagation d’une vague calcique, la contraction est notamment moins importante (figure 17). Les données biologiques sont celles du tableau dans [A2].

5.6 Liens avec d’autres modèles

5.6.1 Modèle de transport optimal

Dans [40], Y. Brenier établit un lien entre le transport optimal et les équations de Bousinesq qu’il généralise ensuite. Soit Ω un domaine borné connexe de \mathbb{R}^d et y^0 une application de Ω dans \mathbb{R}^d . Le problème de transport optimal considéré est de chercher, parmi tous les réarrangements y de y^0 celui qui minimise le coût

$$\int_{\Omega} |y(x) - x|^2 dx.$$

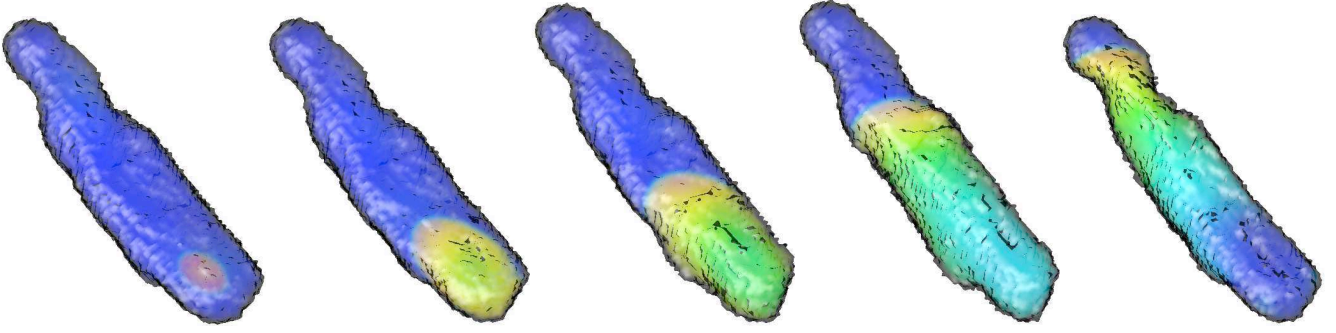


FIGURE 17 – Vague calcique se propageant dans un cardiomyocyte. La couleur représente la concentration calcique. Temps total de la simulation : 1s

Pour cela le modèle AHT (Angenent-Haker-Tannenbaum) consiste à résoudre le système suivant jusqu'à l'état stationnaire :

$$\partial_t y + (v \cdot \nabla)y = 0, \quad (45)$$

$$-\Delta v + \nabla p = y, \quad \text{div } v = 0, \quad (46)$$

avec la condition initiale $y(x, 0) = y^0$ et une condition aux limites de Dirichlet homogène pour v , ce qui fournit une solution $(y, v, p) = (y(x, t), v(x, t), p(x, t)) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$. A la limite lorsque $t \rightarrow +\infty$, on espère avoir le comportement attendu sachant que la solution du système ci-dessus vérifie [40] :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \frac{1}{2} |y(t, x) - x|^2 dx = - \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx. \quad (47)$$

Y. Brenier introduit alors une généralisation de (45-46) qui contient les équations de Boussinesq de la mécanique des fluides. Ce système s'écrit

$$\epsilon(\partial_t v + (v \cdot \nabla)v) - \Delta v + \nabla p = F(x, y), \quad \text{div } v = 0, \quad (48)$$

$$\partial_t y + (v \cdot \nabla)y = G(x, y), \quad (49)$$

où F et G sont des fonctions régulières. Le cas Boussinesq s'obtient en considérant $\epsilon = \rho_0$, $G = 0$ et $F(x, y) = y$, y étant une fonction vectorielle n'ayant qu'une composante non nulle. Cette composante est égale à $g\delta\rho$, $\rho_0 + \delta\rho$ étant la décomposition de la densité utilisée dans ce modèle.

Nous remarquons que notre modèle de membrane immergée (ou de solide immergé) est similaire à (48-49), avec $G = 0$ et F dépendant de $(x, y, \nabla y, \nabla^2 y)$. On peut reformuler notre problème de membrane immergée, par exemple, sous la forme sans inertie

$$\partial_t y + (v \cdot \nabla)y = 0, \quad \phi = \phi^0(y),$$

$$-\Delta v + \nabla p = \text{div} \left(E'(|\nabla\phi|) |\nabla\phi| \frac{\nabla\phi \otimes \nabla\phi}{|\nabla\phi|^2} \frac{1}{\epsilon} \zeta \left(\frac{\phi}{\epsilon} \right) \right), \quad \text{div } v = 0,$$

avec la condition initiale $y(0, x) = y^0(x)$ et une condition aux limites de Dirichlet homogène sur v . Le problème de transport optimal associé est alors de déterminer parmi tous les

réarrangements y de y^0 celui qui minimise

$$\int_{\Omega} E(|\nabla\phi|(x)) \frac{1}{\varepsilon} \zeta\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right) dx \text{ avec } \phi(x) = \phi^0(y(x)).$$

5.6.2 Modèle de Born-Infeld

Dans [39], les auteurs partent d'une version non conservative des équations de Born-Infeld (BI). Ces équations, à la limite pour des champ faibles, redonnent les équations de Maxwell. Y. Brenier a remarqué qu'on pouvait augmenter ce système d'équations pour obtenir le système ABI (Augmented Born-Infeld) en ajoutant des lois de conservation de combinaisons d'inconnues du système BI. Ces équations s'écrivent sous forme non conservative

$$\begin{aligned} \tau_t + u \cdot \nabla \tau - \tau \operatorname{div} u &= 0, \\ u_t + u \cdot \nabla u - b \cdot \nabla b - d \cdot \nabla d - \tau \cdot \nabla \tau &= 0, \\ b_t + u \cdot \nabla b - b \cdot \nabla u + \tau \nabla \times d &= 0, \\ d_t + u \cdot \nabla d - d \cdot \nabla u - \tau \nabla \times b &= 0. \end{aligned}$$

A la limite pour des champs d'intensité forte, ce qui correspond à $\tau = 0$, on obtient les équations

$$\begin{aligned} u_t + u \cdot \nabla u - b \cdot \nabla b - d \cdot \nabla d &= 0, \\ b_t + u \cdot \nabla b - b \cdot \nabla u &= 0, \\ d_t + u \cdot \nabla d - d \cdot \nabla u &= 0, \end{aligned}$$

D'un autre coté, reprenons notre équations fondamentale des caractéristiques rétrogrades (toujours sous l'hypothèse incompressible)

$$Y_t + u \cdot \nabla Y = 0,$$

avec la condition initiale $Y(x, 0) = x$. Un calcul élémentaire montre que

$$(\nabla Y^{-T})_t + u \cdot \nabla (\nabla Y^{-T}) = \nabla Y^{-T} \nabla u^T$$

et en appliquant la divergence matricielle (vecteur des divergences des vecteurs lignes) on montre que $\operatorname{div}(\nabla Y^{-T})$ vérifie une équation de transport, ce qui compte tenu de sa valeur nulle au départ nous donne $\operatorname{div}(\nabla Y^{-T}) = 0$ (voir [83]). Or $\nabla Y^{-T} = (\nabla Y_2 \times \nabla Y_3, \nabla Y_3 \times \nabla Y_1, \nabla Y_1 \times \nabla Y_2)^T$ si bien qu'on a⁴

$$\operatorname{div}(\nabla Y_i \times \nabla Y_j) = 0 \quad \forall i, j \tag{50}$$

Sachant que

$$(\nabla Y_i)_t + u \cdot \nabla (\nabla Y_i) + \nabla u^T \nabla Y_i = 0$$

on a aussi en raisonnant comme dans la démonstration du lemme 3.1 de [A5],

$$(\nabla Y_i \times \nabla Y_j)_t + u \cdot (\nabla Y_i \times \nabla Y_j) = \nabla u (\nabla Y_i \times \nabla Y_j) = (\nabla Y_i \times \nabla Y_j) \cdot \nabla u. \tag{51}$$

4. en fait $\operatorname{div}(\nabla a \times \nabla b) = 0$ pour tout couple de champs scalaires (a, b) réguliers.

D'autre part en utilisant la décomposition de B selon (42) et en considérant le modèle isotrope de la proposition 8 avec $\alpha_1 = 1$ et $\alpha_2 = 0$ on a

$$u_t + u \cdot \nabla u - \operatorname{div} \left(\sum_{i < j} (\nabla Y_i \times \nabla Y_j) \otimes (\nabla Y_i \times \nabla Y_j) \right) + \nabla p = 0.$$

Compte tenu de (50) on a en utilisant $\operatorname{div}(a \otimes b) = b \cdot \nabla a + (\operatorname{div} b)a$,

$$u_t + u \cdot \nabla u - \sum_{i < j} (\nabla Y_i \times \nabla Y_j) \cdot \nabla (\nabla Y_i \times \nabla Y_j) + \nabla p = 0. \quad (52)$$

On constate qu'on retrouve le modèle ABI sous forme non conservative avec pression si on choisit deux des trois champs. Ceci est l'analogie eulérien incompressible de l'équation des membranes de [39] et on retrouve l'élasticité spatiale avec les trois champs ou les cordes avec un seul champ.

6 Méthode Level Set et optimisation de fonctionnelles définies sur une surface [A1]

6.1 Introduction et motivations

Ce travail est en collaboration avec Fadil Santosa de l'Université du Minnesota, Minneapolis. La motivation est l'identification de la polarisation à la surface du myocarde à partir de mesures effectuées à l'intérieur du ventricule, dans le cadre d'une collaboration qu'il entretient avec une société biomédicale. Pour déterminer une anomalie dans cette polarisation, souvent conséquence d'un accident cardiaque, les praticiens introduisent par une artère de l'aîne un ballonnet sonde relié à un câble et qui remonté jusque dans le ventricule permet de mesurer le potentiel électrique. A partir de cette information le but est de reproduire la propagation de l'onde de polarisation/dépolarisation qui est à l'origine de la contraction des myocytes. Il s'agit d'un problème mal posé puisque qu'il revient à résoudre le problème de Cauchy pour l'équation de Poisson. En effet on connaît sur la surface du ballonnet le potentiel et sa dérivée normale, et on cherche à déterminer le potentiel sur la surface du myocarde. Les approches par régularisation de Tikhonov classiquement mises en oeuvre pour ce type de problèmes se sont avérées peu satisfaisantes. Dans ce contexte il est en effet souvent plus efficace de restreindre l'ensemble dans lequel on cherche l'objet à identifier. D'où l'idée (de Fadil) de rechercher le potentiel électrique à la surface du myocarde comme un champ ne prenant que deux valeurs polarisé/dépolarisé. On se ramène ainsi à identifier non plus un champ de potentiel, mais une courbe à la surface du myocarde séparant deux domaines de polarisations différentes. C'est donc naturellement que la méthode Level Set intervient dans ce contexte, plutôt qu'une représentation paramétrique, car cette courbe de polarisation peut bien sûr devenir non connexe et changer de topologie. On sait en effet depuis [47] qu'il est possible de localiser par Level Set non pas une hypersurface mais un objet de codimension 2 grâce à deux fonctions au lieu d'une. Cependant cela nous amène à transformer, dans le cas de \mathbb{R}^3 , le déplacement d'un objet de dimension 1 en la résolution d'un problème 3D, ce qui est peu efficace.

Nous avons donc eu l'idée de proposer une méthode hybride : la surface du myocarde qui se déforme peu et ne change pas de topologie serait représentée par un paramétrage lagrangien, et la courbe sur cette surface serait représentée par Level Set, mais dans l'espace 2D des paramètres lagrangiens de la surface (qui est un carré). On aurait ainsi une méthode eulérienne dans un ouvert carré de dimension 2 pour représenter un objet 1D sur une surface de \mathbb{R}^3 .

Dans un premier temps nous avons mis en place et étudié numériquement la méthode pour un exemple académique (le problème isopérimétrique sur une surface). La mise en application dans notre problème d'identification est un travail en cours.

On considère donc une surface régulière S incluse dans un ouvert borné Ω de \mathbb{R}^3 . On note Γ une courbe tracée sur cette surface. On cherche à minimiser la longueur de la courbe, notée $\ell(\Gamma)$, alors que la portion de surface délimitée par Γ sur S reste d'aire constante. Le problème d'optimisation s'écrit donc

$$\min_{\text{Aire}(\Gamma)=C} \ell(\Gamma).$$

Quelques notations :

$$- \gamma(r, s) : J^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ est la paramétrisation de } S, \text{ dont les composantes sont } \gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)^T.$$

- $\nabla = (\partial_r, \partial_s)^T$. Le gradient cartésien 3D est noté ∇_x .
- $\varphi(r, s) = 0$ est la fonction level-set représentant la courbe Γ dans l'espace des paramètres.
- $\nabla\gamma = \begin{pmatrix} \gamma_{1,r} & \gamma_{1,s} \\ \gamma_{2,r} & \gamma_{2,s} \\ \gamma_{3,r} & \gamma_{3,s} \end{pmatrix}$, $\nabla\gamma^T = \begin{pmatrix} \gamma_{1,r} & \gamma_{2,r} & \gamma_{3,r} \\ \gamma_{1,s} & \gamma_{2,s} & \gamma_{3,s} \end{pmatrix}$.
- $\nabla \times \gamma = \begin{pmatrix} -\gamma_{1,s} & \gamma_{1,r} \\ -\gamma_{2,s} & \gamma_{2,r} \\ -\gamma_{3,s} & \gamma_{3,r} \end{pmatrix}$, $\nabla \times \gamma^T = \begin{pmatrix} -\gamma_{1,s} & -\gamma_{2,s} & -\gamma_{3,s} \\ \gamma_{1,r} & \gamma_{2,r} & \gamma_{3,r} \end{pmatrix}$.
- $\nabla\varphi = (\varphi_r, \varphi_s)^T$, et $\nabla \times \varphi = (-\varphi_s, \varphi_r)^T$.

Comme la surface S est supposée fixe, on choisit de la représenter paramétriquement : soit J un intervalle de \mathbb{R} et $\gamma : J^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tel que

$$S = \{x \mid x = \gamma(r, s), \quad (r, s) \in J^2\}.$$

Nous allons considérer le problème de minimisation comme un flot, en déplaçant la courbe d'un état initial à un état d'énergie minimal (au moins localement). Par conséquent on introduit un paramètre temporel artificiel et on dénote par Γ_t la position de la courbe à l'instant t . Cette courbe est représentée via une fonction Level Set dans l'espace J^2 . Soit $\varphi : J^2 \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\Gamma_t = \{x \mid x = \gamma(r, s), \quad \varphi(r, s, t) = 0\}.$$

On considère deux cas :

- (i) S a un bord mais Γ_t reste à distance de ce bord. On suppose donc $\varphi > \alpha > 0$ sur ∂J^2 .
- (ii) S n'a pas de bord. Dans ce cas γ est pris périodique en r et s .

Une généralisation évidente pour S est de considérer un cylindre tronqué auquel cas γ est périodique dans une direction et φ est contrainte à être strictement positive sur le bord de l'espace des paramètres correspondant à l'autre direction. Tout ce qui suit s'applique à ce cas là aussi.

Pour déplacer la courbe, nous allons transporter $\varphi(r, s, t)$ grâce à un champ de vitesse. Ce champ sera choisit de sorte à faire décroître l'énergie de la courbe au cours du temps, puis sera projeté de sorte que l'aire sur la surface ne varie pas. Tout d'abord nous devons exprimer la longueur de la courbe et l'aire entourée par celle-ci avec notre choix de représentation.

6.2 Longueur et aire entourée par la courbe

En partant d'un paramétrage de la courbe dans \mathbb{R}^3 il est facile de calculer sa longueur et de l'exprimer en fonction de γ et φ . On montre dans [A1] que la longueur de la courbe vérifie

$$\begin{aligned} \ell(\Gamma_t) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{J^2} \left| \nabla\gamma \frac{\nabla \times \varphi}{|\nabla\phi|} \right| |\nabla\phi| \frac{1}{\varepsilon} \zeta\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right) drds \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{J^2} |\nabla\gamma \nabla \times \varphi| \frac{1}{\varepsilon} \zeta\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right) drds. \end{aligned}$$

On considère donc, pour $\varepsilon > 0$ fixé, la longueur approchée de Γ_t comme fonctionnelle à minimiser :

$$\ell_\varepsilon(\Gamma_t) = \int_{J^2} |\nabla\gamma \nabla \times \varphi| \frac{1}{\varepsilon} \zeta\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right) drds = \int_{J^2} |\nabla \times \gamma \nabla\varphi| \frac{1}{\varepsilon} \zeta\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right) drds. \quad (53)$$

Si la surface est plane on a $|\nabla \times \gamma \nabla \varphi| = |\nabla \varphi|$ et on retrouve la formule usuelle.

L'aire entourée par Γ_t sur S est de la même manière approchée par

$$A_\varepsilon(\Gamma_t) := \int_{J^2} \left(1 - H\left(\frac{\varphi}{\varepsilon}\right)\right) |\gamma_{,r} \times \gamma_{,s}| dr ds.$$

où $H(r) = \int_{-\infty}^r \zeta(s) ds$ est une fonction de Heaviside régularisée. Finalement notre problème régularisé s'écrit

$$\min_{\Gamma_t} \ell_\varepsilon(\Gamma_t) \quad \text{sous la contrainte } A_\varepsilon(\Gamma_t) = C. \quad (54)$$

Nous voulons donc conserver cette aire lors d'un déplacement de la courbe par un champ de vitesse w ce qui correspond à l'équation de transport

$$\varphi_t + w \cdot \nabla \varphi = 0. \quad (55)$$

En écrivant que la dérivée de A_ε par rapport à t ne varie pas on obtient comme condition sur w

$$\operatorname{div}(|\gamma_{,r} \times \gamma_{,s}| w) = 0. \quad (56)$$

6.3 Choix de la direction de descente

Par analogie avec la mécanique eulérienne que nous avons développé ci-dessous, nous cherchons une force fictive $F(\varphi)$ telle que

$$\frac{d\ell_\varepsilon(\Gamma_t)}{dt} = - \int_{J^2} F(\varphi) \cdot w dr ds. \quad (57)$$

Après des calculs assez laborieux on trouve dans [A1] l'expression suivante :

$$F(\varphi) = - \operatorname{div} \left(\nabla \times \gamma^T \frac{\nabla \times \gamma \nabla \varphi}{|\nabla \times \gamma \nabla \varphi|} \right) \frac{1}{\varepsilon} \zeta\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right) \nabla \varphi. \quad (58)$$

L'idée maintenant est de choisir w colinéaire à cette force et de la projeter comme on le fait dans les équations de Stokes pour respecter la contrainte (56). On pose donc

$$w = \frac{F}{|\gamma_{,r} \times \gamma_{,s}|^2} - \frac{\nabla p}{|\gamma_{,r} \times \gamma_{,s}|}. \quad (59)$$

avec la "pression" p telle que

$$\Delta p = \operatorname{div} \left(\frac{F}{|\gamma_{,r} \times \gamma_{,s}|} \right). \quad (60)$$

Le choix des poids dans w permet d'obtenir une équation de Poisson pour la pression, et une énergie décroissante, un autre choix faisant apparaître un opérateur elliptique plus général. Cette simplicité permet ensuite d'utiliser des solveurs rapides à base de FFT (la librairie FISHPACK) pour résoudre cette équation.

En remplaçant F par son expression en fonction de w dans (57) on trouve grâce aux conditions aux limites qu'on a imposé

$$\frac{d\ell_\varepsilon(\Gamma_t)}{dt} = - \int_{J^2} |\gamma_{,r} \times \gamma_{,s}|^2 |w|^2 dr ds \leq 0.$$

On voit donc qu'en déplaçant la courbe avec le champ w , celle-ci voit sa longueur diminuer, et qu'elle s'arrête de diminuer si, et seulement si, w s'annule.

6.4 Algorithme de minimisation

Nous devons donc résoudre les équations suivantes :

$$\varphi_t + w \cdot \nabla \varphi = 0, \quad (61)$$

$$w + \frac{1}{|\gamma_{,r} \times \gamma_{,s}|} \nabla p = \frac{1}{|\gamma_{,r} \times \gamma_{,s}|^2} F(\varphi), \quad (62)$$

$$\operatorname{div}(|\gamma_{,r} \times \gamma_{,s}| w) = 0. \quad (63)$$

La condition de divergence nulle peut être implémentée très simplement par une méthode de projection de type Chorin en procédant à l'itération suivante dans sa version la plus simple :

$$\begin{aligned} \frac{\varphi^{n+1} - \varphi^n}{\delta t} + w^n \cdot \nabla \varphi^n &= 0, \\ \tilde{w}^{n+1} &= \frac{1}{|\gamma_{,r} \times \gamma_{,s}|^2} F(\varphi^{n+1}), \\ \Delta p^{n+1} &= \operatorname{div}(|\gamma_{,r} \times \gamma_{,s}| \tilde{w}^{n+1}), \\ w^{n+1} &= \tilde{w}^{n+1} - \frac{1}{|\gamma_{,r} \times \gamma_{,s}|} \nabla p^{n+1}. \end{aligned}$$

On peut bien sûr penser à des schémas temporels plus avancés.

6.5 Lien avec la courbure géodésique

Nous faisons le lien ici avec des considérations géométriques de ce problème. Le problème isopérimétrique est bien connu dans le plan où la solution est le cercle. Néanmoins, pour des surfaces quelconques, il n'est en fait toujours pas complètement résolu [68], et n'admet même parfois aucune solution. Le cas de la sphère et du parabolôïde sont néanmoins résolus (dans les années 90 seulement) et les minimiseurs sont des cercles. Il y a un lien avec les courbes à courbure géodésique constante. Donc il serait naturel que dans la force F ci-dessus apparaisse cette quantité. Après quelques calculs il apparaît que la courbure géodésique de la courbe Γ_t s'exprime avec nos notations comme

$$|\gamma_{,r} \times \gamma_{,s}| \kappa_g = \operatorname{div} \left(\nabla \times \gamma^T \frac{\nabla \times \gamma \nabla \varphi}{|\nabla \times \gamma \nabla \varphi|} \right). \quad (64)$$

Nous avons donc la forme équivalente suivante pour la force (57) :

$$F(\varphi) = -|\gamma_{,r} \times \gamma_{,s}| \kappa_g \frac{1}{\varepsilon} \zeta \left(\frac{\varphi}{\varepsilon} \right) \nabla \varphi. \quad (65)$$

On peut prouver alors que notre algorithme, produit à la limite une courbe à courbure géodésique constante. En effet nous avons vu que la longueur de la courbe cesse de diminuer si et seulement si w s'annule, ce qui dans (62) donne

$$\frac{1}{|\gamma_{,r} \times \gamma_{,s}|} \nabla p = \frac{1}{|\gamma_{,r} \times \gamma_{,s}|^2} F(\varphi).$$

Remarquons que la force ne s'annule pas car elle tend toujours à diminuer la longueur de la courbe mais en est empêchée par la contrainte d'incompressibilité. D'après (65) nous avons donc

$$\nabla p = -\kappa_g \frac{1}{\varepsilon} \zeta \left(\frac{\varphi}{\varepsilon} \right) \nabla \varphi = -\kappa_g \nabla \left[H \left(\frac{\varphi}{\varepsilon} \right) \right] \quad (66)$$

Pour que le second membre de cette égalité soit un gradient, il faut et il suffit que κ_g soit constant sur les lignes de niveau de φ , ce qui signifie bien en particulier que Γ_t est de courbure géodésique constante.

6.6 Quelques exemples

L'avantage d'avoir transformé notre problème d'optimisation presque en un problème de mécanique est de pouvoir réutiliser les méthodes qui marchent efficacement pour les équations de Stokes. Nous discrétisons donc notre carré de paramètres par un maillage MAC ce qui permet lors de l'étape de projection de garantir une divergence nulle du champ de vitesse (au sens de (56)) de manière exacte au niveau discret, comme nous le prouvons dans [A1]. Par conséquent nous sommes garantis au moins de respecter numériquement la contrainte d'aire. Ceci est important car toute perte de volume engendrerait immédiatement une diminution de longueur, que l'on minimise. Ainsi un algorithme produisant une énergie plus faible pourrait paraître meilleur alors qu'en fait la raison pour laquelle la longueur est plus faible est une non conservation du volume. Nous présentons figure 18 un premier exemple sans changement de topologie, dans le cas du parabolöide dont nous savons d'après [68] que le minimiseur est un cercle horizontal. Dans le cas d'un hyperboloïde, ainsi que pour un cylindre, un changement de topologie peut survenir. Pour le cylindre si la courbe de départ a une surface supérieure à celle de la section le minimiseur global est constitué de deux courbes. C'est ce que nous illustrons dans la figure 19. D'autres exemples figurent dans l'article ainsi que sur <http://www-ljk.imag.fr/membres/Emmanuel.Maitre/Levelset/> où on peut visualiser une animation des étapes de minimisation.

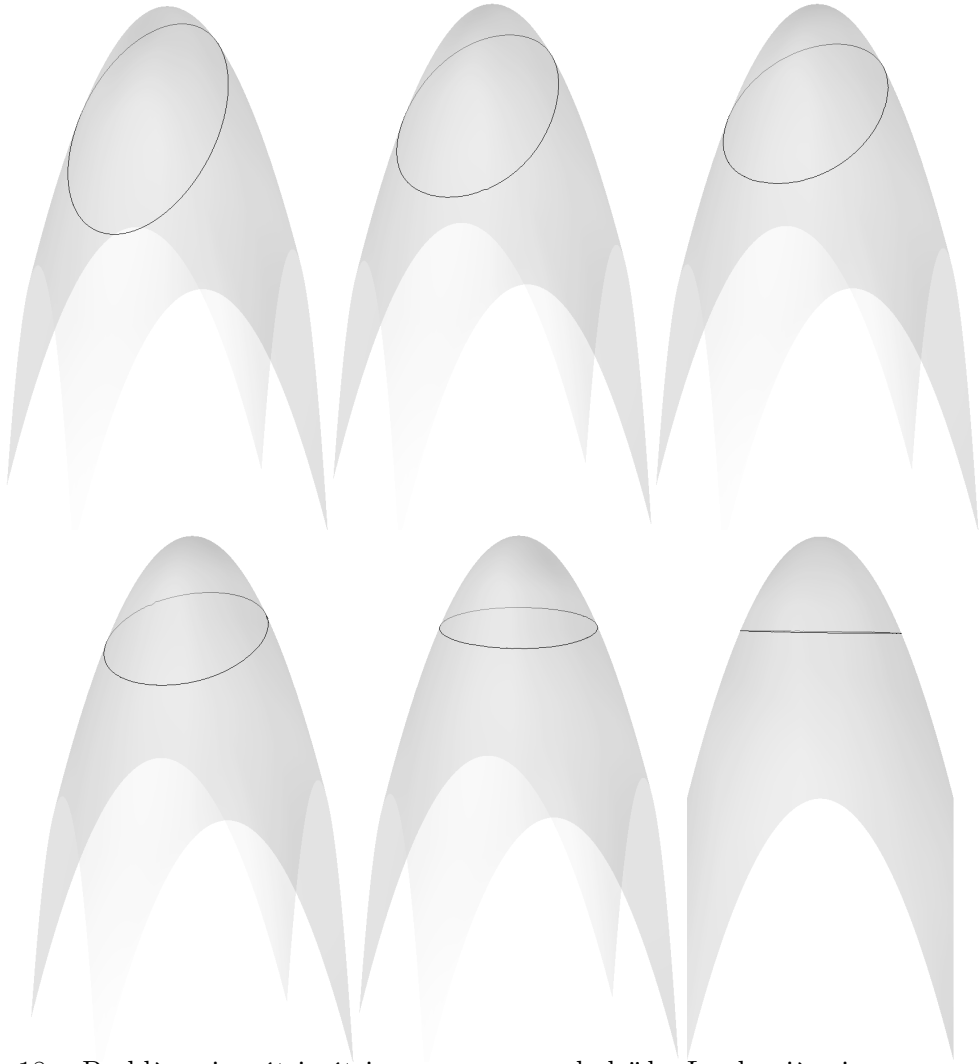


FIGURE 18 – Problème isopérimétrique sur un parabolöide. La dernière image montre sans perspective l'état final.

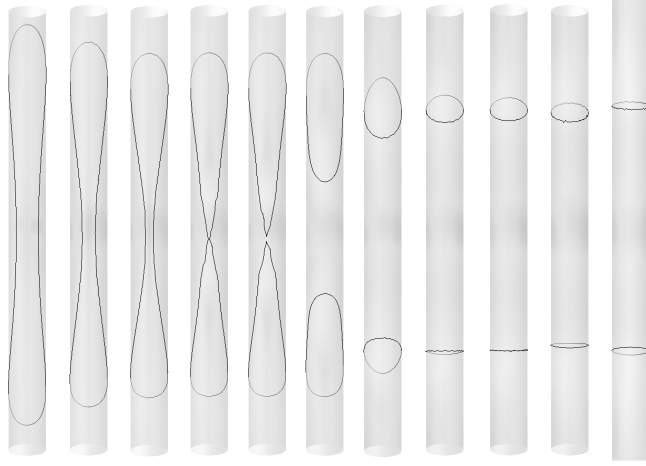


FIGURE 19 – Problème isopérimétrique sur un cylindre de faible rayon. La dernière image sans perspective illustre la symétrie du résultat.

7 Conclusion et perspectives

Mon travail a porté principalement sur des questions de modélisation de phénomènes physiques ou biologiques avec souvent une préoccupation sur l'efficacité de tels modèles du point de vue numérique. De ce point de vue il apparaît que la modélisation eulérienne en mécanique des milieux continus n'a pas attiré autant d'attention qu'elle mériterait, au regard de sa simplicité conceptuelle et d'implémentation. Ceci est notamment vrai dans la modélisation en sciences du vivant où le concept de milieu multiphysique est particulièrement pertinent. J'ai donc plusieurs pistes pour continuer mes recherches dans ce domaine.

Une première concerne la prise en compte d'une élasticité complète dans un modèle eulérien de membrane élastique. Jusqu'à présent, nous sommes capables de décrire la déformation d'une membrane élastique ne réagissant qu'à un changement d'aire. C'est effectivement le cas des vésicules phospholipidiques, mais celles-ci rappelons-le ne sont qu'un modèle physique des globules rouges. Or les hématies ont en dessous de leur membrane bi-couche de phospholipides, un réseau de filaments de spectrine et d'actine qui apporte effectivement une résistance au cisaillement membranaire. Les formes d'équilibre statiques des globules obtenues avec notre modèle simplifié semblent raisonnables. Cependant pour une modélisation 3D réaliste de leur comportement dans un écoulement en cisaillement, cette résistance jouera vraisemblablement un rôle qu'il convient d'explorer. Le même type de modèle pourrait d'ailleurs être pertinent pour la modélisation de tissus non isotropes. Nous sommes donc en train de développer ce type de modélisation, en collaboration avec le LSP.

Les questions de stabilité en couplage fluide-structure sont centrales, comme en attestent les nombreuses publications sur ce thème, toutes méthodes confondues. Claire Bost dans sa thèse a proposé un modèle $1D$ simple permettant de retrouver les conditions de stabilité

usuellement utilisées. La mise au point de schémas numériques performants et stables reste un enjeu important. Dans ce contexte il semble à première vue que l'influence de la discrétisation des termes singuliers dans les méthodes multiphysiques soit non nulle. Cela nous ramène à des questions de représentation eulérienne que nous avons abordées dans nos comparaisons Level Set/Champ de phase/Second gradient [A14]. Sur un thème connexe nous collaborons avec John Stockie sur l'étude de l'instabilité paramétrique $3D$ d'une membrane immergée exposée ci-dessus.

L'identification de la polarisation instantannée du myocarde que nous proposons d'implémenter à partir du travail mené avec Fadil Santosa est déjà en cours et nous disposons d'un modèle dans le cas $2D$ qu'il nous reste à valider. Plus généralement je m'interroge sur l'utilisation de cette méthode de Level Set dans l'espace des paramètres dans le cas où la variété est l'espace des états d'un système dynamique. Peut-on écrire des algorithmes d'optimisation de type descente pour optimiser les trajectoires d'un système dynamique de cette manière là ?

Enfin et de manière plus globale nous avons développé avec Georges-Henri Cottet ces dernières années plusieurs techniques de type multiphysique pour traiter des problèmes d'interaction fluide-structure élastique, mais aussi fluide-solide rigide dont je n'ai pas fait mention dans ce document (il s'agit notamment travail de thèse de Claire Bost). Toutes ces techniques ont vocation à former un ensemble cohérent qui prendrait la forme d'une bibliothèque de calcul à disposition des chercheurs intéressés. Pour l'instant Iker Bellicot intègre le code correspondant à l'instabilité paramétrique d'une membrane dans le logiciel SOFA, développé par François Faure de l'équipe INRIA évansion de notre laboratoire. Notre ambition est de proposer via ce support un cadre pour le non spécialiste afin de modéliser l'interaction d'un fluide avec plusieurs objets rigides ou élastiques, à des fins de simulation physique ou de réalité virtuelle.

L'aspect implémentation numérique est le point d'orgue à une phase de modélisation dans laquelle j'ai beaucoup apprécié les discussions avec mes collègues physiciens notamment Chaouqi Misbah et Philippe Peyla. Ainsi je suis convaincu que les analogies entre modèles, dont la multiphysique est issue, sont sources de reformulations pouvant mener à de nouveaux angles d'attaque mathématiques et/ou numériques.

Liste de publications⁵ et bibliographie

— Revues internationales —

- [A1] Emmanuel Maitre and Fadil Santosa. Level set methods for optimization problems involving geometry and constraints II. Optimization over a fixed surface. *J. Comp. Phys.*, 2008. sous presse.
- [A2] Emmanuel Maitre, Thomas Milcent, Georges-Henri Cottet, Annie Raoult, and Yves Usson. Applications of level set methods in computational biophysics. *Math. Comput. Model.*, 2008. sous presse.
- [A3] Georges-Henri Cottet, Emmanuel Maitre, and Thomas Milcent. Eulerian formulation and level set models for incompressible fluid-structure interaction. *ESAIM-Math. Model. Numer. Anal.*, 42 :471–492, 2008.
- [A4] Georges-Henri Cottet and Emmanuel Maitre. A level set method for fluid-structure interactions with immersed surfaces. *Math. Models Meth. Appl. Sci.*, 16(3) :415–438, 2006.
- [A5] Georges-Henri Cottet and Emmanuel Maitre. A level-set formulation of immersed boundary methods for fluid-structure interaction problems. *C. R. Math.*, 338(7) :581–586, 2004.
- [A6] Emmanuel Maitre. On a nonlinear compactness lemma in $L^p(0, T; B)$. *Int. J. Math. Math. Sci.*, 2003(27) :1725–1730, 2003.
- [A7] Samir Akesbi and Emmanuel Maitre. Theoretical and numerical analysis of a minimal residual solver for 2D Boltzmann transport equation. *J. Comput. Appl. Math.*, 150(2) :357–374, 2003.
- [A8] Emmanuel Maitre and Patrick Witomski. A pseudo-monotonicity adapted to doubly nonlinear elliptic-parabolic equations. *Nonlinear Anal.-Theory Methods Appl.*, 50(2) :223–250, 2002.
- [A9] Emmanuel Maitre. Numerical analysis of nonlinear elliptic-parabolic equations. *ESAIM-Math. Model. Numer. Anal.*, 36(1) :143–153, 2002.
- [A10] Nadjombé Faré and Emmanuel Maitre. Existence de solutions pour un modèle de drapé d’un tissu. *C. R. Acad. Sci., Paris, Sér. I, Math.*, 333(10) :967–972, 2001.
- [A11] Samir Akesbi and Emmanuel Maitre. Minimal residual method applied to the transport equation. *Numer. Algorithms*, 26(3) :235–249, 2001.
- [A12] Samir Akesbi and Emmanuel Maitre. Méthode du résidu minimal en dimension infinie pour l’équation de transport neutronique. *C. R. Acad. Sci., Paris, Sér. I, Math.*, 330(5) :385–390, 2000.
- [A13] Emmanuel Maitre and Patrick Witomski. Transport equation with boundary conditions for free surface localization. *Numer. Math.*, 84(2) :275–303, 1999.
- [A14] E. Maitre, E. Bonnetier, C. Misbah, P. Peyla, and A. Raoult. Comparison between advected-field and level-set methods in the study of vesicle dynamics. *en préparation*, 2009.

5. les pdf sont disponibles sur <http://ljk.imag.fr/membres/Emmanuel.Maitre/pdf/>

— Conférences invitées —

- [B15] Georges-Henri Cottet, Emmanuel Maitre, and Thomas Milcent. *An Eulerian method for fluid-structure interaction with biophysical applications*. European Conference on Computational Fluid Dynamics, ECCOMAS CFD 2006, Delft, Pays-Bas, September 2006. Conférence de mini-symposium invitée.
- [B16] Georges-Henri Cottet and Emmanuel Maitre. *A combined level-set / immersed boundary approach to describe the motion of an elastic curve in a fluid*. EUCOR Workshop on fluid-structure coupling, Mulhouse, France, October 2003. Conférence invitée.
- [B17] Georges-Henri Cottet, Emmanuel Maitre, and Philippe Tracqui. *Cell Dynamics : From a 1D model to a Combined Level Set-Immersed Boundary Approach*. International Symposium on Modeling of Physiological Flows, Lausanne, Suisse, September 2003. Conférence invitée.

— Bibliographie —

- [18] S. Akesbi. Splitting d'opérateur pour l'équation de transport neutronique en géométrie bidimensionnelle plane. *ESAIM : M2AN*, 34(6) :1109–1122, 2000.
- [19] S. Akesbi, M.R. Laydi, and M. Mokhtar-Kharroubi. Décomposition d'opérateurs et accélération de la convergence en neutronique. *C.R. Acad. Sci. Paris*, 319 :765–770, 1994.
- [20] S. Akesbi, M.R. Laydi, and M. Mokhtar-Kharroubi. Schemes and acceleration in transport theory. *To appear in Journ. of Transport Theory and Statistical Physics*, 1999.
- [21] S. Akesbi and M. Nicolet. Nouveaux algorithmes performants en théorie du transport. *M2AN*, 32(3) :341–358, 1998.
- [22] R. E. Alcouffe, B. A. Clark, and E. W. Larsen. The diffusion-synthetic acceleration of transport iterations, with application to a radiation hydrodynamics problem. In *Multiple time scales (A86-47618 23-64)*. Orlando, FL, Academic Press, Inc., pages 73–111, 1985.
- [23] K. Ammar and P. Wittbold. Existence of renormalized solutions of degenerate elliptic-parabolic problems. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh : Section A Mathematics*, 133 :477–496, 2003.
- [24] S. F. Ashby, P. N. Brown, M. R. Dorr, and A. C. Hindmarsh. A linear algebraic analysis of diffusion synthetic acceleration for the boltzmann transport equation. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 32(1) :128–178, 1995.
- [25] O. Axelsson. *Iterative solution methods*. Cambridge University Press, New York, NY, USA, 1994.
- [26] H. Bauschke. The approximation of fixed points of composition of nonexpansive mappings in Hilbert space. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 202 :150–159, 1996.
- [27] J. T. Beale and J. Strain. Locally corrected semi-lagrangian methods for stokes flow with moving elastic interfaces. *J. Comp. Phys.*, 227(8) :3896–3920, 2008.
- [28] J. Beaucourt, F. Rioual, T. Séon, T. Biben, and C. Misbah. Steady to unsteady dynamics of a vesicle in a flow. *Physical Review E*, 69(1) :011906, 2004.
- [29] Ph. Bénilan, M.G. Crandall, and A. Pazy. Nonlinear evolution equations in Banach spaces. *preprint book to appear*, 1991.

- [30] Ph. Bénilan and P. Wittbold. On mild and weak solutions of elliptic-parabolic problems. *Adv. Diff. Equ.*, 1 :1053–1073, 1996.
- [31] Ph. Bénilan and P. Wittbold. Sur un problème parabolique-elliptique. *Mathematical Modelling and Numerical Analysis (M2AN)*, 33(1) :121–127, 1999.
- [32] T. Biben and C. Misbah. Tumbling of vesicles under shear flow within an advected field approach. *Physical Review E*, 67 :031908, 2003.
- [33] T. Biben, K. Kassner, and C. Misbah. Phase-field approach to three-dimensional vesicle dynamics. *Physical Review E*, 72(4) :041921, 2005.
- [34] D. Boffi, L. Gastaldi, and L. Heltai. Numerical stability of the finite element immersed boundary method. *M3AS*, 17 :1479–1505, 2007.
- [35] D. Boffia, L. Gastaldi, and L. Heltai. Stability results and algorithmic strategies for the finite element approach to the immersed boundary method, preprint available on <http://www.ing.unibs.it/~gastaldi/paper.html>. *Proceeding of the Sixth European Conference on Numerical Mathematics and Advanced Applications*, pages 557–566, 2005.
- [36] S. Bohnet, R. Ananthakrishnan, A. Mogilner, J.-J. Meister, and A. Verkhovskiy. Weak force stalls protrusion at the leading edge of the lamellipodium. *Biophys. J.*, 90 :1810–1820, 2006.
- [37] C. Bost. *Méthodes Level-Set et pénalisation pour le calcul d'interactions fluide-structure*. Thèse de l'Université de Grenoble, oct 2008.
- [38] J. Brackbill, D. Kothe, and C. Zemach. A continuum method for modelling surface tension. *J. Comput. Phys.*, 100 :335–354, 1992.
- [39] Y. Brenier and W.-A. Yong. Derivation of particle, string, and membrane motions from the born–infeld electromagnetism. *Journal of Mathematical Physics*, 46(6) :062305, 2005.
- [40] Y. Brenier. Optimal transport, convection, magnetic relaxation and generalized bousinesq equations. *preprint HAL*, <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00202710/fr/>, 2008.
- [41] D. Bresch, Th. Colin, E. Grenier, B. Ribba, O. Saut, O. Singh, and C. Verdier. Quelques méthodes de paramètre d'ordre avec applications à la modélisation de processus cancéreux. *ESAIM : Proceedings*, 18 :163–180, 2007.
- [42] D. Bresch, T. Colin, E. Grenier, B. Ribba, and O. Saut. Computational modeling of solid tumor growth : the avascular stage. *soumis*, 2009.
- [43] A. Berger, H. Brézis, and J. Rogers. A numerical method for solving the problem $u_t - \Delta f(u) = 0$. *RAIRO Modél. Math. Anal. Numér.*, 13 :297–312, 1979.
- [44] L. Caffarelli, R. Kohn, and L. Nirenberg. Partial regularity of suitable weak solutions of the Navier-Stokes equations. *Comm. Pure and Applied Math.*, 35 :771–831, 1982.
- [45] P. Causin, J.-F. Gerbeau, and F. Nobile. Added-mass effect in the design of partitioned algorithms for fluid-structure problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194 :4506–4527, 2005.
- [46] Y.C. Chang, T.Y. Hou, B. Merriman, and S. Osher. A level set formulation of eulerian interface capturing methods for incompressible fluid flows. *J. Comp. Phys.*, 124 :449–464, 1996.

- [47] L.-T. Cheng, P. Burchard, B. Merriman, and S. J. Osher. Motion of curves constrained on surfaces using a level set approach. *J. Comp. Phys.*, 175 :604–644, 2002.
- [48] P.G. Ciarlet. *Elasticité tridimensionnelle*. Masson, 1985.
- [49] P.G. Ciarlet. *Mathematical Elasticity II, Theory of plates*. North Holland, 1997.
- [50] P.G. Ciarlet and D.Coutand. An existence theorem for nonlinearly elastic flexural shells. *J. Elasticity*, 50 :261–277, 1998.
- [51] R. Cortez, C.S. Peskin, J.M. Stockie, and D. Varela. Parametric resonance in immersed elastic boundaries. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 65(2) :494–520, 2004.
- [52] D. Coutand. Existence d’un minimiseur pour le modèle proprement invariant de plaque en flexion non linéairement élastique. *C.R.Acad.Sci, Paris, série I*, 324 :245–248, 1997.
- [53] D. Coutand and S. Shkoller. Motion of an elastic solid inside an incompressible viscous fluid. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 176 :25–102, 2005.
- [54] G. Duvaut. *Mécanique des milieux continus*. Dunod, 1998.
- [55] B. Engquist, A.-K. Tornberg, and R. Tsai. Discretization of dirac delta functions in level set methods. *Journal of Computational Physics*, 207(1) :28–51, 2005.
- [56] D. Enright, R. Fedkiw, J. Ferziger, and I. Mitchell. A hybrid particle level-set method for improved interface capturing. *J. Comput. Phys.*, 183 :83–116, 2002.
- [57] L.C. Evans and R. Gariepy. *Measure theory and fine properties of functions*. CRC Press, 1992.
- [58] M. Fernandez, J.-F. Gerbeau, and C. Grandmont. A projection semi-implicit scheme for the coupling of an elastic structure with an incompressible fluid. *International journal for numerical methods in engineering*, 69(4) :794–821, 2007.
- [59] C. Galusinski and P. Vigneaux. Level-Set method and stability condition for curvature-driven flows. *C. R. Acad. Sci. Paris, Series I - Mathematics*, 344(11) :703–708, 2007.
- [60] C. Galusinski and P. Vigneaux. On stability condition for bifluid flows with surface tension : application to microfluidics. *J. Comp. Phys.*, 227(12) :6140–6164, 2008.
- [61] B.E. Griffith and C.S. Peskin. On the order of accuracy of the immersed boundary method : Higher order convergence rates for sufficiently smooth problems. *J. Comp. Phys.*, 208 :75–105, 2005.
- [62] E. Girardi. *Couplage de méthodes et décomposition de domaine pour la résolution de l’équation du transport des neutrons*. CEA Cadarache / Thèse de doctorat d’état de l’Université Evry Val d’Essone, 2004.
- [63] O. Grange and F. Mignot. Sur la Résolution d’une Équation et d’une Inéquation Paraboliques non Linéaires. *J. Funct. Anal.*, 11 :77–92, 1972.
- [64] B. Halpern. Fixed points of nonexpansive mappings. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 73 :957–961, 1967.
- [65] G. A. Holzapfel. *Nonlinear solid mechanics : a continuum approach for engineering*. Wiley, 2000.
- [66] T. Y. Hou and Z. Shi. Removing the stiffness of elastic force from the immersed boundary method for the 2D Stokes equations. *in press for J. of Comp. Phys.*, 2008.

- [67] T. Y. Hou and Z. Shi. An efficient semi-implicit immersed boundary method for the Navier-Stokes equations. *in press for J. of Comp. Phys.*, 2008.
- [68] H. Howards, M. Hutchings, and F. Morgan. The isoperimetric problem on surfaces. *The American Mathematical Monthly*, 106(5) :430–439, 1999.
- [69] W. Jäger and J. Kačur. Solution of Porous Medium Type Systems by Linear Approximation Schemes. *Numer. Math.*, 60 :407–427, 1991.
- [70] W. Jäger and J. Kačur. Solution of Doubly Nonlinear and Degenerate Parabolic Problems by Relaxation Schemes. *M²AN*, 29(5) :605–627, 1995.
- [71] D. Jamet, O. Lebaigue, N. Coutris, and J.M. Delhay. The Second Gradient Method for the Direct Numerical Simulation of Liquid–Vapor Flows with Phase Change. *J. of Comp. Phys.*, 169 :624–651, 2001.
- [72] D. Jamet, D. Torres, and J.U. Brackbill. On the theory and computation of surface tension : the elimination of parasitic currents through energy conservation in the second-gradient method. *J. of Comp. Phys.*, 182 :262–276, 2002.
- [73] D. Jamet and C. Misbah. Towards a thermodynamically consistent picture of the phase-field model of vesicles : Local membrane incompressibility. *Physical Review E*, 76(5) :051907, 2007.
- [74] J. Kačur, A. Handlovičová, and M. Kačurová. Solution of Nonlinear Diffusion Problems by Linear Approximation Schemes. *SIAM J. Numer. Anal.*, 30(6) :1703–1722, 1993.
- [75] J. Kačur. Solution of Some Free Boundary Problems by Relaxation Schemes. *SIAM J. Numer. Anal.*, 36(1) :290–316, 1999.
- [76] T.J. Kang and W.R. Yu. Drape simulation of woven fabric by using finite-element method. *J. Text. Inst.*, 86(4), 1995.
- [77] K. M. Khattab and E. W. Larsen. Synthetic acceleration methods for linear transport problems with highly anisotropic scattering. *Nuclear Science and Engineering*, 107(3) :217–227, 1991.
- [78] E.W. Larsen. Unconditionally stable diffusion-synthetic acceleration methods for the slab geometry discrete-ordinates equations. *Nucl. Sci. and Eng.*, parts I-II, 1988.
- [79] P. Lascaux and R. Théodor. *Analyse numérique matricelle appliquée à l’art de l’ingénieur*, volume 2. Masson, 1987.
- [80] L. Lee and R.J. Leveque. An immersed interface method for incompressible navier-stokes equations. *SIAM J. Sci. Comp.*, 25(3) :832–856, 2003.
- [81] R. J. LeVeque and Z. Li. Immersed interface methods for Stokes flow with elastic boundaries or surface tension. *SIAM J. Sci. Comput.*, 18(3) :709–735, 1997.
- [82] H. Le Dret and A. Raoult. The membrane shell model in nonlinear elasticity : A variational asymptotic derivation. *J. Nonlinear Sci.*, 6(1) :59–84, 1996.
- [83] F.-H. Lin, C. Liu, and P. Zhang. On hydrodynamics of viscoelastic fluids. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 58(11) :1427–1471, 2005.
- [84] P.-L. Lions. Approximation de points fixes de contractions. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A.*, 284 :1357–1359, 1977.
- [85] J.-L. Lions. *Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites Non Linéaires*. Dunod, 1969.

- [86] E. Magenes, R.H. Nochetto, and C. Verdi. Energy Error Estimates for a Linear Scheme to Approximate Nonlinear Parabolic Problems. *RAIRO Modél. Math. Anal. Numér.*, 21(4) :655–678, 1987.
- [87] E. Maitre. *Sur une classe d'équations à double non linéarité : application à la simulation numérique d'un écoulement visqueux compressible*. Thèse, Université Grenoble I, 1997.
- [88] T.A. Manteuffel and K.J. Ressel. Least-squares finite-element solution for the neutronic transport equation in diffusive regimes. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 35(2) :806–835, 1998.
- [89] T. Manteuffel, S. McCormick, J. Morel, and G. Yang. A fast multigrid algorithm for isotropic transport problems ii. with absorption. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 17(6) :1449–1474, 1996.
- [90] T. Milcent. *Formulation eulerienne du couplage fluide structure, analyse mathématique et applications en biomécanique*. Thèse de l'Université de Grenoble, nov 2008.
- [91] C. Misbah. Vacillating breathing and tumbling of vesicles under shear flow. *Physical Review Letters*, 96(2) :028104, 2006.
- [92] J. E. Morel and T. A. Manteuffel. An angular multigrid acceleration technique for s_n equations with highly forward-peaked scattering. *Nuclear Science and Engineering*, 107 :330–342, 1991.
- [93] D. Ölz, C. Schmeiser, and V. Small. Modelling of the Actin-cytoskeleton in symmetric lamellipodial fragments. *to appear in Cell Adhesion & Migration*, 2008.
- [94] R.W. Ogden. *Nonlinear elasticity, anisotropy, material stability and residual stresses in soft tissue (edited by G.A. Holzapfel and R.W. Ogden)*. CISM Course and Lectures Series 441, Springer, 2003.
- [95] J. Okada, S. Sugiura, S. Nishimura, and T. Hisada. Three-dimensional simulation of calcium waves and contraction in cardiomyocytes using the finite element method. *Am. J. Physiol. Cell. Physiol.*, 288 :C510–C522, 2005.
- [96] S. Osher and R. P. Fedkiw. *Level set methods and Dynamic Implicit Surfaces*. Springer, 2003.
- [97] F. Otto. L^1 -Contraction and Uniqueness for Quasilinear Elliptic-Parabolic Equations. *J. Differential Equations*, 131 :20–38, 1996.
- [98] C.S. Peskin. Numerical analysis of blood flow in the heart. *J. Comp. Phys.*, 25 :220–252, 1977.
- [99] C.S. Peskin. The immersed boundary method. *Acta Numerica*, 11 :479–517, 2002.
- [100] S. Peskin and B.F. Printz. Improved volume conservation in the computation of flows with immersed boundaries. *J. Comput. Phys.*, 105 :33–46, 1993.
- [101] A. Raoult. Symmetry groups in nonlinear elasticity : An exercise in vintage mathematics. *preprint HAL - CCSD, <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00275450/en/>*, 2008.
- [102] P.A. Raviart. Sur la Résolution de Certaines Équations Paraboliques non Linéaires. *J. Funct. Anal.*, 5 :299–328, 1970.
- [103] K. Sbihi and P. Wittbold. Existence of renormalized solutions for a nonlinear Stefan problem. *Comptes Rendus Mathématique*, 345(11) :629–632, Déc. 2007.

- [104] U. Seifert K. Berndl and R. Lipowsky. Shape transformations of vesicles : Phase diagram for spontaneous- curvature and bilayer-coupling models. *Phys. Rev. A*, 44(2) :1182–1202, 1991.
- [105] F. Simondon. Sur l'équation $b(u)_t - \operatorname{div} a(u, \nabla u) = 0$ par la méthode des semi-groupes dans L^1 . Séminaire d'analyse non linéaire, Laboratoire de Mathématiques de Besançon, 1984.
- [106] M. Slodička. Approximation of a nonlinear degenerate parabolic equation via a linear relaxation scheme. *Comptes Rendus Mathématique*, 21(2) :191–212, 2005.
- [107] P. Smereka. The numerical approximation of a delta function with application to level-set methods. *J. Comp. Phys.*, 211 :77–90, 2003.
- [108] A. Smolianski. Finite-element/level-set/operator-splitting (FELSOS) approach for computing two-fluid unsteady flows with free moving interfaces. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 48(3) :231–269, 2005.
- [109] A. Smolianski. Numerical Modeling of Two-Fluid Interfacial Flows. *PhD Thesis, University of Jyväskylä*, http://www.math.unizh.ch/user/antsmol/pdf/phd_thesis.pdf, 2001.
- [110] V.A. Solonnikov. Estimates for solutions of nonstationary Navier-Stokes equations. *J. Soviet Math.*, 8(4) :467–529, 1977.
- [111] J. Stockie. Analysis of stiffness in the immersed boundary method and implications for time-stepping schemes. *J. Comp. Phys.*, 154 :41–64, 1999.
- [112] M. Sussman, E. Fatemi, P. Smereka, , and S. Osher. An improved level set method for incompressible two-phase flows. *Comp. Fluids*, 27 :663–680, 1998.
- [113] M. Sussman and E. Fatemi. An efficient, interface-preserving level set redistancing algorithm and its application to interfacial incompressible fluid flow. *SIAM J. Sci. Comp.*, 20(4) :1165–1191, 1999.
- [114] M. Sy, D. Bresch, F. Guillén-González, J. Lemoine, and M.A. Rodríguez-Bellido. Local strong solution for the incompressible korteweg model. *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I*, 342 :169–174, 2006.
- [115] A. Tizaoui. *Principe de préconditionnement et de décomposition d'opérateurs pour l'équation de transport neutronique*. Thèse de l'Université de Haute-Alsace - Mulhouse, 2005.
- [116] A. Tizaoui and S. Akasbi. Gmres algorithm and symmetric gauss-seidel preconditioning solver for 2-d boltzmann transport equation. *J. Fusion Energ.*, 27 :225–232, 2008.
- [117] C. Tu and C.S. Peskin. Stability and instability in the computation of flows with moving immersed boundaries : A comparison of three methods. *SIAM J. Sci. Statist. Comput.*, 13 :1361–1376, 1992.