HAL open science

Approche variationnelle des lois de Griffith et de Paris via des modèles non-locaux d'endommagement : étude théorique et mise en oeuvre numérique

Hanen Amor

▶ To cite this version:

Hanen Amor. Approche variationnelle des lois de Griffith et de Paris via des modèles non-locaux d'endommagement : étude théorique et mise en oeuvre numérique. Modélisation et simulation. Université Paris-Nord - Paris XIII, 2008. Français. NNT : . tel-00352989

HAL Id: tel-00352989

https://theses.hal.science/tel-00352989v1

Submitted on 14 Jan 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Thèse de Doctorat de l'Université Paris XIII

Spécialité : Mécanique numérique

présentée par

Hanen Amor

pour obtenir le grade de docteur de l'Université Paris XIII

Approche variationnelle des lois de Griffith et de Paris via des modèles non-locaux d'endommagement : Étude théorique et mise en œuvre numérique

---

Soutenue le le 25 juin 2008 devant le jury composé de :

⋆ ⋆ ⋆

Rapporteurs	:	M. Ahmed Benallal	
		M. Fréderic Feyel	
Examinateurs	:	M. Radhi Abdelmoula	
		M. Blaise Bourdin	
		M. Jia Li	*Président du jury*
		M. Eric Lorentz	
		M. Jean - Jacques Marigo	*Directeur de thèse*

Thèse préparée au sein du
Laboratoire des Propriétés Mécaniques et Thermodynamiques des Matériaux (CNRS UPR 9001), Université XIII
et de
l'Institut Jean le Rond d'Alembert (CNRS UMR 7190), Université Pierre et Marie Curie

Mis en page avec la classe thloria.

Remerciements

Je tiens tout d'abord à exprimer ma profonde gratitude et ma sincère reconnaissance à Monsieur Jean-Jacques MARIGO qui m'a encadré pendant cette thèse. Je le remercie pour sa grande disponibilité, sa patience, ses précieux conseils et son optimisme contagieux. Je le remercie aussi pour les sujets passionnants vers lesquels il m'a dirigé et toute l'aide qu'il m'a fournit et grâce à laquelle j'ai pu mener à terme ce travail. Je lui en suis infiniment reconnaissante.

J'exprime toute ma gratitude à deux personnes qui ont également participer à ce travail de recherche avec beaucoup d'implication : Radhi ABDELMOULA et Corrado MAURINI. Je les remercie d'avoir su partager leur expérience et leur passion notamment dans le domaine numérique.

J'adresse mes remerciements les plus respectueux à mes rapporteurs, Monsieur Ahmed BENALLAL et Monsieur Fréderic FEYEL qui m'ont fais l'honneur d'accepter de rapporter sur cette thèse, je les remercie du temps qu'ils ont consacré à la lecture de ce travail. Merci également aux autres membres du jury qui ont accepté de juger ce travail : Messieurs Blaise BOURDIN, Jia LI et Eric LORENTZ

Je remercie pour leur camaraderie et leur bonne humeur tous les doctorants, post-doctorants, jeunes chercheurs qui ont partagé mon quotidien qui n'était heureusement pas fait que de recherche : Andrée, Pierre-Emmanuel, Kim, Renaud, Jerôme, Jean François, Miguel, Beatrice, Hichem, Thibault, Thao, Ibrahima, Aurélie, Anis, Yves, Fathi, Farid, Mehdi, Abdallah, Fabienne, Carole, Simon, Sebastien, Anne, Audrey, Rassika, Lili, Olivier, ... et tout ce que je n'ai pas cité mais le coeur y est vraiment.

Vient le tour des mes amies et soeurs sans qui la vie en prendrait un sacré coup : Assouma, Cyrinti, Hajoura, Maymoun, Nadou^2, Radia, Layloun et Thouthou. Merci pour tout.

Mes derniers mots vont à mes parents et à ma belle famille qui m'ont soutenu en toutes circonstances. Un grand merci à ma maman qui a supporté mon humeur parfois désagréable le matin surtout lors de mes moments de doute ; mon papa le premier a avoir cru en moi; mon grand frère pour son soutien et son amitié. Je voudrais remercier du font du coeur l'homme de ma vie mon mari 7amdoun pour sa présence à mes côtés, son soutien infini et sa positivité au quotidien.

Encore MERCI à TOUS

À mon père
À ma mère
À mon ♡ 7amdoun

“ Dans la mesure où les lois mathématiques ont à voir avec la réalité,
elles ne sont pas certaines,
et dans la mesure où elles sont certaines,
elles n'ont rien à voir avec la réalité. ”
Albert Einstein, La géométrie et l'expérience, *p. 3 (1941).*

Approche variationnelle des lois de Griffith et de Paris via des modèles non-locaux d'endommagement : étude théorique et mise en œuvre numérique

Résumé

L'objet de cette thèse est l'étude théorique et la mise en œuvre numérique de l'approche variationnelle des lois de Griffith (rupture fragile) et de Paris (fatigue) pour la propagation de fissures. Cette approche est basée sur un principe de moindre énergie. L'énergie totale d'une structure est la somme de l'énergie élastique et d'un potentiel de dissipation. En rupture fragile avec une énergie de surface de type Griffith, ce potentiel est proportionnel à la surface de l'ensemble des fissures. La propagation de fissures par fatigue dans le cas d'une lois de type Paris est obtenue en utilisant comme potentiel de dissipation une fonction puissance de la surface de fissuration.

La régularisation de ces énergies en vue d'une implémentation numérique amène à des modèles d'endommagement non-locaux (i.e. ceux dont l'énergie contient des termes avec gradient d'endommagement).

Dans un premier temps, à travers l'exemple unidimensionnel de la barre en traction, une étude comparative est faite sur différentes familles de modèles d'endommagement. Nous avons mis en évidence que ces modèles d'endommagement se comportent différemment en termes de minima-locaux. Il s'avère que la relation contrainte-déformation ne suffit pas à définir une loi de comportement mais qu'une autre relation reliant la stabilité des solutions homogènes à la taille du domaine s'avère tout aussi essentielle.

Nous avons ensuite éliminé la symétrie de comportement en traction-compression pour prendre en compte la non interpénétration des lèvres des fissures. Ce résultat est obtenu en ne faisant porter l'endommagement que sur la partie en traction et en cisaillement de l'énergie de déformation.

Enfin, nous avons présenté la formulation variationnelle de la fatigue de type Paris que nous avons implémenté numériquement en utilisant des modèles d'endommagement non-locaux.

Des résultats numériques sont présentés et discutés aussi bien dans le cadre de la rupture fragile que dans celui de la rupture par fatigue.

Mots-clés : Approche variationnelle - Mécanique de la rupture - Fatigue - Γ-convergence - Modèles d'endommagement non-locaux - Éléments finis - Optimisation.

Table des matières

Introduction générale **1**

1
État de l'art et choix stratégiques **5**

1.1 État de l'art 6
1.1.1 Généralités 6
1.1.2 Approche locale 7
1.1.3 Approche globale 8
1.1.4 Modélisation des discontinuités 10
1.2 La théorie de Griffith de la rupture fragile revisitée 12
1.2.1 Cadre de l'étude 12
1.2.2 Le modèle de rupture fragile 13
1.3 La formulation variationnelle de la rupture fragile 15
1.3.1 Position du Problème 16
1.3.2 Formulation variationnelle forte 16
1.3.3 Formulation variationnelle faible et théorème d'existence 17
1.4 Régularisation par des modèles d'endommagement non-locaux 18
1.4.1 Le modèle de rupture fragile : choix de la résolution 18
1.4.2 La régularisation de la rupture fragile au sens de la Γ-convergence : approximation par des fonctionnelles elliptiques 18
1.4.3 Les modèles d'endommagement non-locaux 20

2
Étude de modèles d'endommagement non-locaux : la barre en traction **27**

Introduction 28
2.1 Présentation du problème et formulation variationnelle 28
2.2 Problème d'évolution 29
2.2.1 Cas général 29
2.2.2 Cas particulier : quelques familles de modèles d'endommagement 32

2.2.3 Problème incrémental 38
2.3 Possibilité de non existence avec forces imposées : champs limités 38
2.4 Non unicité et critère de stabilité 39
2.4.1 Non Unicité 39
2.4.2 Critère de stabilité 42
2.5 Étude des réponses homogènes et de leur stabilité, effets d'échelles 44
2.5.1 Les réponses homogènes 44
2.5.2 Études de leur stabilité : effets d'échelles 47
2.6 Étude de solutions non homogènes 54
2.6.1 Cas général 55
2.6.2 Cas particulier de quelques familles de modèles d'endommagement 57
2.6.3 Bilan 63
Conclusion 63

3
Enrichissement du modèle : la non interpénétration des lèvres de fissures 65

Introduction 66
3.1 La prise en compte du caractère unilatéral 66
3.1.1 Rappels : modes de rupture 66
3.1.2 Quelques modèlisations 67
3.2 Le problème de la régularisée 68
3.2.1 Mécanisme de régularisation 68
3.2.2 Comparaison traction-compression 69
3.3 Ouverture en cisaillement plan de la fissure 69
3.3.1 Décomposition de l'énergie élastique 70
3.3.2 Modèle d'endommagement déviatorique 71
3.3.3 Illustration sur un problème 2D 72
3.3.4 Bilan 75
3.4 Tous les modes d'ouvertures possibles 75
3.4.1 Objectifs 76
3.4.2 Modèle d'endommagement avec prise en compte du contact unilatéral . . 76
3.4.3 Illustration sur un problème 2D 77
3.4.4 Bilan 79
Conclusion 79

4
Formulation variationnelle de la Fatigue et régularisation **81**

Introduction . . . 82
4.1 Rupture par fatigue . . . 82
4.1.1 Introduction à la fatigue . . . 82
4.1.2 Propagation de fissures par fatigue : loi de Paris . . . 83
4.1.3 Modèles basés sur les forces cohésives . . . 86
4.2 Insuffisance de la théorie de Griffith . . . 87
4.2.1 Rupture sous chargement monotone . . . 87
4.2.2 Rupture sous chargement cyclique . . . 87
4.3 Modèles de forces cohésives et loi de Paris . . . 88
4.3.1 Mise en œuvre du modèle . . . 89
4.3.2 La loi de fatigue limite . . . 90
4.4 Formulation variationnelle des lois de Paris et leur régularisation . . . 91
4.4.1 Formulation variationnelle des lois de fatigue limites et régularisation . . . 91
4.4.2 Généralisation au cas de n fissures . . . 96
Conclusion . . . 100

5
Implémentation et Simulation numérique **101**

Objectifs . . . 102
5.1 Modèle d'endommagement : mise en œuvre numérique . . . 102
5.1.1 Les propriétés de la fonctionnelle d'Ambrosio et Tortorelli . . . 102
5.1.2 L'algorithme de minimisations alternées . . . 105
5.1.3 Rôle des différents paramètres . . . 108
5.1.4 Discrétisation et implémentation numérique . . . 109
5.1.5 La question de l'irréversibilité . . . 110
5.2 Modèles d'endommagement : simulation numérique et influence des paramètres . 111
5.2.1 Essai de la barre en traction . . . 111
5.2.2 Influence du modèle d'endommagement . . . 114
5.2.3 Influence de k_η . . . 115
5.2.4 Taille du maillage . . . 117
5.2.5 Les conditions aux limites sous le champ d'endommagement . . . 118
5.2.6 Rôle de la longueur interne et effets d'échelles . . . 119
5.3 Essai de traction sur une matrice avec une fibre rigide . . . 121
5.3.1 Géométrie, chargement et paramètres . . . 122
5.3.2 Simulation 1 : la matrice de base . . . 123

5.3.3 Simulation 2 : variation de la taille de la matrice 124
5.3.4 Simulation 3 : variation de la fibre 125
5.3.5 Effets d'échelle 126
5.4 Le contact unilatéral 127
5.4.1 Les lacunes de la précédente régularisée 127
5.4.2 Ouverture en cisaillement plan de la fissure 129
5.4.3 Tous les modes d'ouverture sont possibles 131
5.5 Le problème de Fatigue 135
5.5.1 Principaux résultats théoriques 135
5.5.2 Algorithme de résolution pour le cas de propagation d'une fissure 135
5.5.3 Simulations numériques 137
5.5.4 Perspectives 144

Conclusion générale & Perspectives **147**

Annexe

A
Quelques rappels **149**

A.1 Rappels sur la mesure de Hausdorff 149
A.2 Les espaces BV et SBV 149
A.3 Le théorème de compacité dû à Ambrosio 151

B
Étude de solutions non homogènes : calculs pour le modèle 4

C
Calculs de la barre en Traction/compression

C.1 Essai de barre en Traction 157
C.2 Essai de barre en Compression 159

Bibliographie **161**

Introduction générale

Depuis des siècles l'homme s'efforce à construire un monde qui lui ressemble, un monde composé de structures de plus en plus complexes et grandes ainsi que de technologies de plus en plus sophistiquées et avancées. Durant les trois derniers siècles les fers, les aciers et les ciments ont progressivement remplacé le bois et l'argile comme matériaux structuraux de bases.
Malgré leurs hautes précisions, les structures réalisées avec ces matériaux ont connu des accidents très importants, dont l'origine était une rupture inattendue de ces structures due entre autres aux phénomènes de fatigue. L'un des premiers incidents enregistré sur une grande structure est la rupture d'une chaîne du pont Montrose en Grande Bretagne (en 1830). Depuis, un nombre important d'incidents sur d'autres ponts ont été notés. On cite pour exemple la Catastrophe du Silver Bridge, à Point Pleasant (en 1967), le King's Bridge à Melbourne (en 1962) peu de temps après l'achèvement des travaux, une travée s'est effondrée par rupture fragile. Et dernièrement, en France, l'effondrement inattendu du terminal 2E à l'aéroport Charles de Gaulle dû à une rupture brutale et rapide après l'apparition de la fissure, a provoqué un vent de panique dans la population et les touristes. Mais les incidents ne s'arrêtent pas qu'aux ponts, puisqu'on dénombre aussi de nombreux accidents ferroviaires dus à une rupture brutale des essieux, des roues ou encore des rails. De nombreux accidents arrivent sur des pipelines, des pétroliers, ou encore sur des avions. En 1950, deux avions Comet se sont brisés à haute altitude à cause d'une rupture par fatigue sur les trous des rivets près des hublots qui étaient de forme carrée. En 2003, la navette spatiale Columbia, au cours de la mission, se détruit durant la phase de rentrée atmosphérique, cet accident serait dû au détachement d'une pièce qui aurait percuté l'aile de la navette provoquant ainsi un choc qui détériora gravement la structure même de l'aile entraînant ainsi la désintégration de la navette *etc.*

La compréhension fine et le développement des outils de simulation numérique des phénomènes de Rupture sont devenus nécessaires afin d'évaluer le risque d'amorçage et de propagation de défauts dans les structures dans le but d'anticiper d'éventuels incidents liés soient à un matériau à risque, à une forme non optimale d'une structure, au vieillissement des structures, *etc.*

Jusqu'ici, il n'existe pas de cadre général de la Mécanique de la Rupture[1] basée sur une formulation unique et permettant de rendre compte des divers phénomènes observés. L'habitude des ingénieurs est d'adopter la loi de Griffith [Gri21] "à court terme" (sous chargement monotone)

[1] la détermination de l'évolution d'une ou plusieurs fissures dans une structure en fonction du chargement auquel elle est soumise

et les modèles phénoménologiques de Paris [PE63] "à long terme" (sous chargement cyclique).

Cependant il est connu que la loi de Griffith possède quelques lacunes dont celle non admissible d'être inapte à rendre compte de l'apparition de fissures. De même, les lois de fatigue utilisées sont essentiellement d'origine phénoménologique, leur forme et les paramètres à identifier peuvent changer d'un problème à l'autre sans que l'on soit capable de dire de façon claire ce qui est dû au matériau, à la géométrie et au chargement.

Francfort et Marigo [FM98] présentent une description détaillée des insuffisances de la théorie de Griffith, dans le cadre de la rupture fragile[2]. Ils postulent que la loi d'évolution de la fissure consiste à chercher le champ de déplacement qui minimise, à chaque instant et parmi tous les états de fissuration possibles, l'énergie totale de la structure que l'on force de ce fait à se trouver dans un état d'équilibre stable. Pour la fatigue, Jaubert et Marigo [JM06] proposent une autre formulation variationnelle. Cette dernière est obtenue en conservant un principe de moindre énergie, mais en remplaçant l'énergie de surface de type Griffith par une énergie dépendant du saut de déplacement sur les lèvres de la fissure et en introduisant une condition d'irréversibilité. Par passage à la limite, lorsque la longueur interne du modèle est petite devant les dimensions de la structure, une loi de type Paris est obtenue.

Les travaux de thèse de Bourdin, sur un plan numérique (régularisation des discontinuités), ont permis d'illustrer les capacités de cette nouvelle approche[3] à pallier pour une part importante aux lacunes de la théorie de Griffith initiale. De plus, par Γ-convergence, Bourdin a prouvé que, lorsque le paramètre du modèle (η) tend vers zéro, le minimum global de la fonctionnelle régularisée[4] converge vers celui de la fonctionnelle de rupture fragile. Cependant, ce résultat de convergence ne s'applique pas forcément aux minima locaux et un des objectifs de ce travail sera de comparer différents modèles d'endommagement non-locaux[5] et de mettre en évidence à travers un exemple académique qu'ils se comportent différemment. Sur le plan numérique, dans ses travaux, Bourdin soulève le problème de symétrie de comportement en traction-compression, le phénomène d'interpénétration des lèvres des fissures n'est pas pris en compte dans sa modélisation, on se propose ici d'établir un modèle capable de rendre compte du phénomène de contact unilatéral. Enfin, nous proposons d'établir une régularisée au modèle variationnelle de rupture par fatigue proposé par Jaubert et Marigo afin de tester sa capacité à prédire l'évolution de fissures.

Ce manuscrit est organisé en cinq chapitres :

Chapitre 1 : *État de l'art et choix stratégiques* : ce chapitre permettra de présenter le cadre de notre travail et de le situer parmi ceux développés dans la littérature. Dans une première partie, on effectuera un bref survol des principales techniques utilisées pour modéliser l'évolution de fissures dans les milieux continus. Une seconde partie sera consacrée, en se restreignant au cadre des matériaux fragiles, à la formulation du modèle théorique sur laquelle s'appuieront les chapitres suivants. Enfin, nous dresserons le cadre numérique que nous avons décidé d'adopter pour la résolution du problème de rupture fragile : la régularisation par des modèles d'endommagement non-locaux.

[2] la rupture fragile se limite à l'étude de la fissuration des milieux continus supposés élastiques
[3] approche de Francfort et Marigo [FM98]
[4] fonctionnelle elliptique d'Ambrosio et Tortorelli introduite pour les problèmes d'imageries
[5] i.e. ceux dont l'énergie contient des termes avec gradient d'endommagement

Chapitre 2 : *Étude de modèles d'endommagement non-locaux : la barre en traction* : ce chapitre a pour but de dégager des propriétés génériques liées aux différents modèles d'endommagement pris et cela par le biais de l'étude d'un exemple académique : la barre en traction. Dans un premier temps, nous présenterons le problème et sa formulation variationnelle. Par la suite nous introduirons le problème d'évolution puis nous comparerons les résultats d'existence, d'unicité et de stabilité des solutions obtenues sur différentes familles de modèles d'endommagement. L'accent est tout particulièrement mis sur la notion de stabilité des états homogènes[6] et des états non homogènes[7]. Il s'avère que ces propriétés sont décisives quant à l'évaluation de la pertinence d'un modèle d'ednommagement.

Chapitre 3 : *Enrichissement du modèle : la non interpénétration des lèvres des fissures* : L'objet de ce chapitre est de remédier aux lacunes des régularisées introduites dans le chapitre précédent à savoir l'interpénétration des lèvres des fissures. Pour ce faire dans un premier temps, nous donnerons un panorama non exhaustif de quelques modèles développés dans la littérature pour la prise en compte du caractère unilatéral. Puis, on apportera d'autres régularisées, tout en suivant l'idée introduite par Ambrosio et Tortorelli, qui pourront rendre compte de tous les modes d'ouvertures possibles. Nous commencerons par mettre en évidence les lacunes dues au choix de la régularisée, en montrant à travers l'exemple académique de la barre en traction/compression les problèmes induits par ce type de régularisée. Enfin, nous introduirons successivement un nouveau modèle d'endommagement qui rendra compte que de l'ouverture en cisaillement plan et un autre nouveau modèle qui pourra rendre compte de tous les modes d'ouvertures possibles.

Chapitre 4 : *Formulation variationnelle de la Fatigue et régularisation* : L'objectif de ce chapitre est de présenter la formulation variationnelle de la fatigue et de régularisée ce problème en s'inspirant de l'idée d'Ambrosio et Tortorelli. Dans un premier temps, on reviendra sur la phénoménologie de la fatigue en introduisant la fatigue de type Paris et la fatigue basée sur la notion de forces cohésives. Par la suite, on rappellera en quoi l'approche de Griffith reste inapte à prédire le phénomène de fatigue et comment il est possible de changer de formulation pour rendre compte des phénomènes de fatigue. Pour finir, nous établirons la formulation variationnelle des lois de Paris dont nous introduirons la régularisée.

Chapitre 5 : *Implémentation et Simulation numérique* : le cinquième et dernier chapitre est l'occasion de présenter l'implémentation numérique de quelques modèles d'endommagement que nous avons introduits au chapitre 2. Tout d'abord, on commencera par rappeler la régularisée d'Ambrosio et Tortorelli (par une fonctionnelle elliptique) initialement introduite pour les problèmes d'imageries et adaptée par Bourdin [Bou98] pour la rupture fragile, on exposera les propriétés de cette fonctionnelle, l'algorithme de minimisations alternées que nous avons adopté pour la résolution, le rôle des différents paramètres présents dans la régularisée, puis nous terminerons par l'implémentation numérique de ce modèle. Par la suite, nous discuterons de la simulation numérique de ces modèles d'endommagement non-locaux et de l'influence des différents paramètres présents et nous finirons par l'introduction de l'irréversibilité dans le modèle. Puis, on montrera comment l'ajout de la non interpénétration des lèvres des fissures (le contact unilatéral) a été pris en compte dans la mise en œuvre numérique et cela en introduisant une régularisée permettant un mode d'ouverture en cisaillement plan dans un premier temps puis une

[6] dans un cadre général et au travers de quelques exemples
[7] par une étude qualitative du plan de phase

autre régularisée permettant tout les modes d'ouvertures. Enfin, on abordera la mise en œuvre numérique de la fatigue lors de propagation d'une fissure, puis on essaiera d'apporter quelques éléments d'implémentations, possibles concernant la propagation de plusieurs fissures.

Chapitre 1

État de l'art et choix stratégiques

Sommaire

1.1 État de l'art 6

1.1.1 Généralités 6

1.1.2 Approche locale 7

1.1.3 Approche globale 8

1.1.4 Modélisation des discontinuités 10

1.2 La théorie de Griffith de la rupture fragile revisitée 12

1.2.1 Cadre de l'étude 12

1.2.2 Le modèle de rupture fragile 13

1.3 La formulation variationnelle de la rupture fragile 15

1.3.1 Position du Problème 16

1.3.2 Formulation variationnelle forte 16

1.3.3 Formulation variationnelle faible et théorème d'existence 17

1.4 Régularisation par des modèles d'endommagement non-locaux . . . 18

1.4.1 Le modèle de rupture fragile : choix de la résolution 18

1.4.2 La régularisation de la rupture fragile au sens de la Γ-convergence : approximation par des fonctionnelles elliptiques 18

1.4.3 Les modèles d'endommagement non-locaux 20

L'objet de ce chapitre est de situer, dans un premier temps, ce travail de recherche parmi un grand nombre d'études développées dans la littérature, puis de décrire le cadre théorique sur lequel s'appuieront les chapitres suivants.

1.1 État de l'art

Le domaine de la mécanique de la rupture est si vaste qu'il serait présomptueux de vouloir en présenter tous les aspects, il est donc nécessaire de bien préciser les limites de cette étude bibliographique. Pour ce faire, on présentera dans un premier temps quelques généralités dans le domaine de la modélisation de la mécanique de la rupture et de l'endommagement. Par la suite, on distinguera deux approches concernant l'étude des fissures : l'approche dite locale et l'approche dite globale. Et on terminera cette étude par un panorama de quelques méthodes employées pour la modélisation numérique de la rupture.

1.1.1 Généralités

1.1.1.1 Mécanique de la rupture et la mécanique de l'endommagement

Lorsqu'une structure est soumise à des sollicitations d'origines différentes, il existe des limites[8] propres à chaque structure, qu'elle ne doit pas dépasser, sous peine d'endommager le matériau et de provoquer sa rupture. Deux approches peuvent être utilisées :

- **La mécanique de la rupture** qui a pour objet l'étude du comportement mécanique d'une structure en présence de fissures macroscopiques. Elle peut être abordée soit par une étude de ces champs mécaniques au voisinage de la pointe d'une fissure ou à travers une étude énergétique du solide fissuré. La mécanique de la rupture est une discipline relativement récente puisque les premiers travaux remontent aux années 1920 avec les travaux de Griffith [Gri21].
- **La mécanique de l'endommagement** qui a pour objet de décrire de façon continue la dégradation progressive du matériau due à l'apparition ou/et à la croissance de micro-fissures ou de micro-cavités présentes dans le matériau. Cette approche récente, initialement introduite par Kachanov, a été reprise et développée par de nombreux auteurs tels que Chaboche, Lemaitre [LC85], Bui [Bui78], Needleman [Nee91], etc... Lorsque les microfissures, les microcavités créées par l'apparition et/ou la croissance des défauts sont de taille assez grande, cette façon d'aborder le problème n'est plus valable, et il faut alors utiliser la mécanique de la rupture.

Le choix pour utiliser l'une des deux approches dépend essentiellement de l'étude que l'on désire effectuer.

1.1.1.2 Mécanique linéaire et non-linéaire de la rupture

La mécanique de la rupture se propose de décrire les étapes d'amorçage et de propagation de la fissuration. Selon le comportement du matériau durant la propagation d'une fissure, on distingue deux types de rupture (pour plus de détails, on renvoie le lecteur aux ouvrages de référence sur le sujet comme par exemple [Suq06], [Leb03]) :

- **Rupture fragile** est caractérisée par l'absence de déformation plastique macroscopique[9], et donc par la propagation des fissures avec faible consommation d'énergie. Le matériau

[8] en contraintes ou en déformations
[9] mécanique linéaire de la rupture

fragile subit alors une rupture brutale par la propagation d'une fissure venant "déchirer" l'éprouvette.
- **Rupture ductile** est caractérisée par la présence de déformation plastique non négligeable[10]. Le matériau ductile subit une déformation plastique très importante autour de la zone pré-fissurée avant de rompre.

Même si l'étude de la mécanique non linéaire est en pleine expansion, la majorité des résultats obtenus d'un point de vue numérique concerne la rupture fragile. Notre étude sera donc basée sur une analyse élastique du champ des contraintes, en admettant les hypothèses générales de l'élasticité linéaire classique. En ce qui concerne les ruptures obtenues par fatigue, elles couvrent également un domaine de recherche important et elles seront abordées plus en détails dans les chapitres suivants.

Dans notre étude, on se placera dans le cas de matériaux homogènes et isotropes. On se limitera de plus, à l'étude de la propagation quasi-statique de fissures. On rappelle néanmoins que pour des problèmes à chargement rapide[11], il devient nécessaire de prendre en compte les termes d'inertie dans la formulation et dans la résolution du problème : on parle alors de propagation dynamique des fissures. Le choix du quasi-statique est motivé par le fait qu'en dynamique il y a nécessité de temps de calculs beaucoup plus longs.

Concernant l'étude des fissures, on peut distinguer deux approches :
- **L'approche locale** est caractérisée par une étude des champs de contraintes et de déformations au voisinage du front de fissure.
- **L'approche globale ou énergétique** est caractérisée par l'étude du comportement global de la structure fissurée sur le plan énergétique.

1.1.2 Approche locale

L'approche locale consiste à déterminer les paramètres en mécanique de la rupture à l'aide des champs de contraintes et de déformations locaux en pointe de fissure. Pour définir ces champs en pointe de fissure, on introduit alors la notion de facteurs d'intensité des contraintes. Ces champs sont fortement perturbés par la singularité créée par la pointe de fissure.

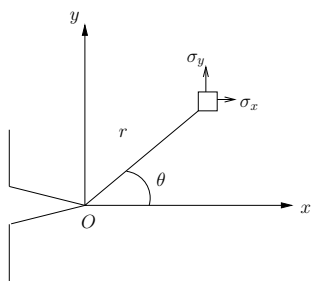

FIG. 1.1 – Au voisinage de la fissure

Les facteurs d'intensité des contraintes ont été introduits par G.R. Irwin [Irw58], ils correspondent à des cinématiques particulières du mouvement des fissures. Dans le cas d'un milieu linéairement

[10] mécanique non linéaire de la rupture
[11] ou lorsque les vitesses de propagation de fissures sont très importantes

élastique et isotrope, les contraintes et les déformations au voisinage d'une fissure admettent un développement asymptotique dont le terme singulier s'écrit :

$$\sigma_{ij} = K_l \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^a(\theta) \qquad \varepsilon_{ij} = K_l \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} g_{ij}^a(\theta)$$

où K_l est le facteur d'intensité des contraintes en mode l , avec l=I, II ou III. Les fonctions f et g donnent la répartition angulaire. Enfin, r et θ sont les coordonnées polaires (cf figure 1.1).

Le premier à mettre en évidence le caractère singulier et un comportement asymptotique des contraintes proportionnelles à $r^{-\frac{1}{2}}$ est Williams [Wil57]. En mode I pur, l'état local des contraintes pouvant être caractérisé à l'aide d'un seul paramètre K_I, Irwin [Irw58] postule alors une valeur critique de ce paramètre K_{I_c} (ténacité du matériau) comme critère de rupture. L'inconvénient d'un tel critère est qu'il focalise l'attention sur le caractère singulier des champs qui n'est physiquement pas valable.

De plus, en mécanique linéaire élastique de la rupture le comportement des matériaux est décrit de façon simple. Cependant, lorsque la fissure s'accompagne d'une forte déformation plastique, il n'est plus possible de se placer dans le cadre de la mécanique linéaire de la rupture, c'est le cas en fatigue où certains phénomènes sont liés à la variation de taille de la zone plastique (cf figure 1.2) en tête de fissure qui ne peut donc plus être négligée.

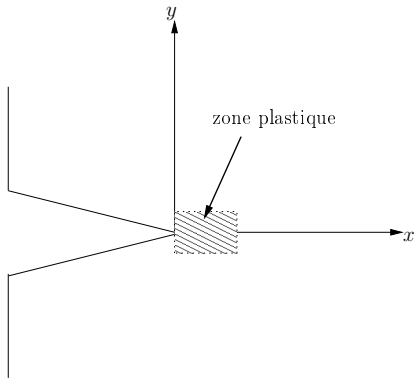

FIG. 1.2 – Zone plastique en pointe de fissure

L'approche locale basée sur la seule analyse des contraintes en pointe de fissure peut être contestée sur le plan physique. Une autre approche dite globale permet d'analyser la propagation de fissures sur un plan énergétique : c'est l'approche énergétique.

1.1.3 Approche globale

Dans cette section, on se propose de rappeler ce qui est fréquent d'appeler l'approche globale de la rupture ou approche énergétique (on se limitera à la mécanique linéaire de la rupture[12], pour avoir plus de précision on renvoie le lecteur aux articles de Rice [Ric67]).

[12] c'est-à-dire lorsque le comportement du matériau est linéaire élastique

L'approche globale de la rupture a pour objet de décrire l'évolution des fissures (phénomène dissipateur d'énergie) dans un milieu continu en fonction du chargement auquel il est soumis.[13]

Griffith [Gri21] construit, dès 1920, un modèle de fissuration qui tient en deux hypothèses

- à chaque fissure est associée une énergie de surface qui est proportionnelle à l'aire créée.
- le critère de propagation des fissures est basé sur un bilan d'énergie : une fissure se propage si l'énergie que restituerait le milieu, lors d'un accroissement virtuel infinitésimal de la fissure, compense l'énergie de surface que nécessiterait sa création et que, au contraire, la fissure ne se propage pas si cette restitution n'est pas suffisante.

Dans le cadre bidimensionnel, la fissure étant caractérisée par sa longueur ℓ, on introduit alors le taux de restitution d'énergie qui représente l'énergie nécessaire pour faire progresser la fissure d'une longueur unité. Cela correspond à la décroissance de l'énergie potentielle totale pour passer d'une configuration initiale à une autre où la fissure se serait propagée :

$$G = -\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \ell} = -\frac{\partial}{\partial \ell}(\mathcal{E}_{el} + \mathcal{E}_{ext}) \tag{1.1}$$

et dont la valeur positive critique G_c est une caractéristique intrinsèque du matériau. Dans (1.1) $\mathcal{E}_{el}$ représente l'énergie de déformation élastique et $\mathcal{E}_{ext}$ l'énergie potentielle des forces extérieures. Le champ $\mathcal{P}$ désigne l'énergie potentielle de la structure à l'équilibre, sa dépendance explicite en t provient de la dépendance en temps du chargement.

Le critère de Griffith de propagation de fissure, s'écrit alors :

$$G \leq G_c \quad \text{l'inégalité stricte signifie qu'il n'y a pas de propagation} \tag{1.2}$$

En considérant que l'énergie potentielle est une fonction dérivable de la longueur de fissure ℓ, le problème régissant l'évolution de cette longueur en fonction du temps t s'écrit, suivant Griffith

$$\text{trouver } t \to \ell, \text{ tel que } \quad \dot{\ell} \geq 0, \quad (G - G_c)\dot{\ell} = 0 \tag{1.3}$$

les différentes conditions correspondent respectivement à la condition initiale, à l'irréversibilité de la fissuration, au critère de Griffith et à la condition de non propagation tant que la restitution d'énergie n'est pas suffisante.

Enfin, on rappelle que Irwin a montré le lien possible qui relie les facteurs d'intensités de contraintes avec le taux de restitution d'énergie[14] par :

$$G = \frac{K_I^2 + K_{II}^2}{E_1} + \frac{K_{III}^2}{2\mu} \qquad \text{où} \begin{cases} E_1 = E & \text{en contraintes planes} \\ E_1 = \dfrac{E}{1-\nu^2} & \text{en déformations planes} \end{cases}$$

où E et ν désignent respectivement le module d'Young et le coefficient de Poisson du matériau considéré et quant à μ c'est le module de cisaillement.

Au voisinage de la pointe d'une fissure, il est également possible d'étudier la singularité du champ des contraintes grâce à certaines intégrales de contour déduites de la loi de conservation

[13] puisque l'on s'est placé dans le cadre de la mécanique linéaire de la rupture, le comportement du matériau est élastique linéaire

[14] dans le cadre de problèmes élastiques

de l'énergie [Esh68]. Elles ont la particularité d'être équivalentes au taux de restitution d'énergie, et d'être indépendantes du contour d'intégration choisi (pour plus de détails, on renvoie le lecteur aux ouvrages de référence sur le sujet comme par exemple Rice [Ric67], Bui [Bui78],...).

Conclusion
L'approche globale de la mécanique de la rupture est un cadre théorique qui permet de focaliser l'attention sur les bases physiques essentielles de la fissuration des structures. En effet, il y a dans cette approche d'étude globale une description de la propagation d'une fissure qui implique toute la structure et le chargement extérieur auquelle elle est soumise.

1.1.4 Modélisation des discontinuités

La mise en œuvre numérique de la rupture fait l'objet de nombreux travaux, au niveau de la représentation des discontinuités, de l'évolution de la fissuration, etc.

La méthode des éléments finis semble être la plus utilisée pour la simulation numérique des problèmes en mécanique des solides. Cependant, la représentation du champ de déplacement ou de sa dérivée lorsqu'ils sont discontinus est très difficile à mettre en œuvre. Dans la méthode standard des éléments finis (dite aussi méthode de relâchement de noeuds), on se donne *a priori* le trajet de fissuration. On dédouble les nœuds sur le trajet. Les nœuds en vis à vis ont même déplacement tant que le critère de rupture n'est pas atteint. Le problème se complique quand le trajet n'est pas connu *a priori*. Alors, le maillage doit se conformer aux surfaces de discontinuités ce qui rend sa construction délicate. De plus, la position de la fissure pouvant évoluer dans le temps (propagation, bifurcation, ...) un remaillage à chaque pas de temps devient indispensable. De plus, les problèmes s'accentuent dès lors que l'on passe à la modélisation de l'évolution de fissures tridimensionnelles.

Devant cette difficulté, de nombreuses techniques ont vu le jour. Loin de vouloir donner un panorama exhaustif de tous ces modèles de la littérature, on se contentera de présenter quelques approches, basées sur la méthode des éléments finis, pour la représentation numérique de la fissure.

1.1.4.1 Modèles d'interfaces

Les modèles d'interface[15] développés par exemple par [[Fey03], [Lav04], ...] s'appuient sur le modèle de Dugdale-Barenblatt [[Bar62], [Dug60]], modèle dont la loi de comportement fait intervenir la force et le saut de déplacement entre deux parties d'un domaine. Ce dernier suppose l'existence d'une zone d'élaboration en pointe de fissure à l'intérieur de laquelle des forces cohésives attractives résistent à la séparation des lèvres de la fissure.

La loi de comportement à l'intérieur de cette zone d'épaisseur nulle définit le modèle de la zone cohésive (cf figure 1.3), et consiste en général en une relation liant les contraintes d'ouverture avec l'ouverture elle-même, c'est-à-dire que l'énergie de surface dépend du saut déplacement à travers les lèvres d'une fissure.

D'un point de vue éléments finis les éléments d'interface sont modélisés par des quadrangles d'épaisseur nulle (dégénérés en segment). Si on connaît *a priori* le trajet de propagation, alors

[15] dits aussi modèles de zones cohésives ou encore modèles de joints

on modélise la fissure par ces quadrangles d'épaisseur nulle. L'avantage de cette méthode est de représenter une discontinuité sans sortir du cadre classique de la théorie des éléments finis.

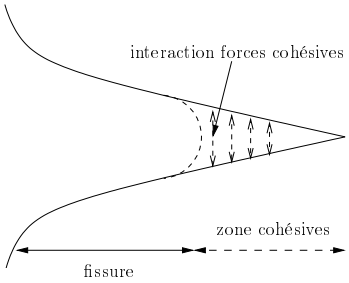

FIG. 1.3 – Schéma de la fissure et de la zone cohésive

1.1.4.2 Modèles basés sur la partition de l'unité

Le concept de partition de l'unité (Partition of Unity Method) a été introduit par Babuska et Melenk [MB96]. Les auteurs cherchent à améliorer la qualité de la solution fournie par la méthode des éléments finis non pas en raffinant le maillage, mais en injectant, dans la base de fonctions utilisées pour approximer le problème, des fonctions *a priori* proches de la solution attendue[16].

Cette méthode s'applique donc particulièrement bien à tout problème présentant une singularité ou une couche limite dans sa solution. La prise en compte de la discontinuité est effectuée en enrichissant l'interpolation des champs de déplacement sur chacun des nœuds dont le support est traversé par une surface de discontinuité : cette approximation du champ de déplacement peut s'écrire de la manière suivante :

$$u(x) \approx \sum_i u_i \Phi_i(x) + \sum_j \hat{u_j} \Psi(x) \Phi_j(x)$$

où $\Phi_i(x)$ désigne les fonctions de forme classique (éléments finis) et Ψ la fonction de Heaviside est définie uniquement sur la surface de discontinuité. Cette approximation semble être une bonne idée si on veut approcher les singularités de la solution sans *a priori* raffiner la discrétisation. L'approximation est ainsi enrichie sans aucun rajout de points dans la discrétisation mais comme un degré supplémentaire du problème global (à condition toutefois de connaître certaines caractéristiques de la solution *a priori* et de pouvoir gérer les propagations des fissures).

À titre d'exemple, on cite la méthode X-FEM (eXtended Finite Element Method), développée par Belytschko et Black [BB99] ou encore Moës [MDB99], qui est basée sur la partition de l'unité. Cette méthode permet de prendre en compte des évolutions de fissures partout dans le domaine et dans toutes les directions indépendamment *a priori* du maillage, il est ainsi possible de modéliser n'importe quelle évolution géométrique de fissure sans remaillage : la fissure est considérée comme une surface de discontinuité, et des enrichissements particuliers sont introduits pour modéliser la pointe de fissure établis à partir de développements asymptotiques du champ de déplacement.

[16] c'est-à-dire une forme de discontinuité puisque le champ est *a priori* discontinu

1.1.4.3 Modèles régularisés

D'autres approches traitent les difficultés liées aux discontinuités en régularisant ces dernières. Basée sur la théorie de Griffith revisitée par Francfort et Marigo [FM98], la fissure est remplacée par une zone endommagée dont la taille est contrôlée par un petit paramètre η et dont les propriétés sont fonction d'une variable d'endommagement. Cela revient à régulariser le problème par un problème dont les solutions sont suffisamment régulières pour pouvoir être approchées par une discrétisation éléments finis. On cite en référence les travaux de thèse et articles de Bourdin [[Bou98], [BFM00], ...].

Cette approche, permet de prédire l'amorçage et la propagation de zones endommagées, n'importe où dans la structure, en s'appuyant sur des résultats mathématiques complexes et en invoquant des notions de Γ-convergence de la solution régularisée vers la solution discontinue lorsque η tend vers zéro .

On ne détaillera pas plus ce modèle ici puisque c'est le modèle que nous avons décidé de développer dans cette thèse, on reviendra donc plus longuement sur ce modèle dans les sections suivantes.

1.2 La théorie de Griffith de la rupture fragile revisitée

L'objectif de cette section est, en se restreignant au cadre des matériaux fragiles, d'énoncer les principes généraux qui vont gouverner la propagation de fissures dans une structure soumise à un chargement quelconque.

1.2.1 Cadre de l'étude

Le premier à avoir étudier la rupture d'un point de vue énergétique est Griffith en 1920, et quatre vingt ans plus tard sa théorie reste la plus utilisée en mécanique de la rupture. Son modèle de fissuration tient en deux hypothèses que nous avons énoncées dans la première section de ce chapitre. Malgré toute l'ingéniosité que présente cette théorie on ne peut pas ignorer qu'elle présente des lacunes pour pouvoir être considérée comme la bonne modélisation du phénomène de rupture, utilisable dans toutes les situations. Francfort et Marigo [FM98] présentent une description détaillée des insuffisances de cette théorie, dont les trois principales sont :

- Problème de l'amorçage des fissures : peut-on faire apparaître une fissure sur une structure saine ? Il est connu que la théorie de Griffith est incapable de rendre compte de l'apparition d'une fissure dans un milieu sain sauf en présence de forte singularité.

- Problème du trajet spatial de fissuration : les critères de branchement ne sont pas pris en compte. En l'absence d'hypothèse sur le trajet de la fissure, il faut aux moins deux équations[17] pour le déterminer. Le critère de Griffith ne nous donne qu'une équation, ce qui implique la nécessité d'autres critères pour déterminer la direction du trajet spatial.

- Problème du trajet temporel de fissuration : comment rendre compte des trajets temporels discontinus ? La théorie ne permet pas de modéliser les évolutions brutales de propagation de fissures : c'est-à-dire des évolutions irrégulières avec le chargement. Aucune prédiction

[17] en 2D : une équation pour la longueur et une autre pour la direction de la fissure

de la distance d'arrêt de la fissure est fournie dans le modèle.

La théorie de Griffith [Gri21], limite la liberté d'évolution de la fissure. Faut-il pour autant renoncer à cette théorie macroscopique de la rupture ? Francfort et Marigo [FM98] répondent à cette question et proposent donc d'aménager la théorie de Griffith pour la rendre fonctionnelle dans une gamme plus large de situations. C'est cette approche que l'on se propose de suivre dans la section suivante (on rappelle que cette théorie a fait l'objet de nombreuses extensions depuis, le lecteur intéressé pourra se référer à [[Bil00], [Cha01], [Lav04], [Jau06], [BM08], [Dum08]] pour ne citer que celles-là).

1.2.2 Le modèle de rupture fragile

La mécanique linéaire élastique de la rupture, cadre de cette étude et de cette thèse, se penche plus particulièrement sur la fissuration des corps constitués, en dehors des points de discontinuité, d'un matériau élastique. Sous l'hypothèse de petites déformations, on suppose par conséquent que les lois de comportement reliant les déformations et les contraintes sont linéaires. On se place ainsi dans la catégorie des matériaux dits *fragiles*[18]. Peuvent être rangés dans cette famille de matériaux, les céramiques, les verres, voire les bétons et les bois...

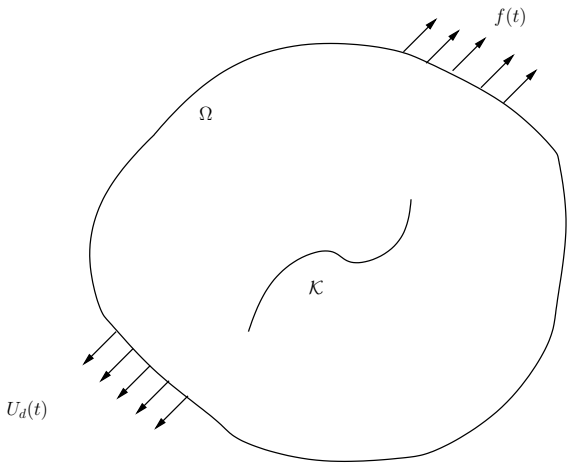

FIG. 1.4 – Problème général

On se propose de simplifier au maximum les difficultés liées au matériau, à la structure ou encore au chargement. Ainsi, on restreindra cette étude à des matériaux élastiques linéaires, homogènes et isotropes. Il faut noter que ces hypothèses de simplification du modèle sont prises pour pouvoir résoudre analytiquement les différents exemples. Cependant, rien ne nous empêche de considérer des lois de comportement plus complexes, toutefois, il faut se rappeler que cela n'apportera rien aux différentes propriétés génériques que l'on dégagera.

On considère un domaine Ω occupé par le matériau, la structure est à N-dimensions (N=1,2 ou 3) et la frontière $\partial\Omega$ est supposée régulière (cf figure 1.4). On introduit l'ensemble $\mathcal{K}$ des points de discontinuités caractérisant l'état de fissuration, celui-ci peut être vide auquel cas le matériau

[18] c'est-à-dire ceux qui se comportent de façon élastique linéaire

est alors considéré comme sain.

On se place dans le cadre quasi-statique, le matériau se comporte élastiquement et les déformations restent petites, c'est-à-dire que le tenseur des déformations linéarisées se réduit à :

$$\varepsilon(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^t)$$

où u dénote le champ de déplacement. Afin de tenir compte des fissures dans la structure, on considère une famille de champs de déplacement admissibles plus large que celle habituellement utilisée en élasticité classique. Enfin, on note $\mathcal{U}$ l'ensemble constitué par des champs de déplacement cinématiquement admissibles, réguliers par morceaux : continus et dérivables partout sur $\Omega \setminus \mathcal{K}$ et qui autorisent les sauts de u.

La loi de comportement en tout point x du milieu continu est caractérisée par un potentiel élastique fonction strictement convexe et coercive en ε. Ainsi, l'énergie potentielle du milieu fissuré à l'équilibre associée au champ de déplacement $u \in \mathcal{U}$ est définie comme la différence entre l'énergie élastique et du travail des efforts extérieurs $\mathcal{F}(u)$.

$$\mathcal{P}(u) = \int_{\Omega\setminus\mathcal{K}} \frac{1}{2} A_0 \varepsilon(u) \cdot \varepsilon(u) dx - \mathcal{F}(u) \tag{1.4}$$

où A_0 est le tenseur de rigidité.

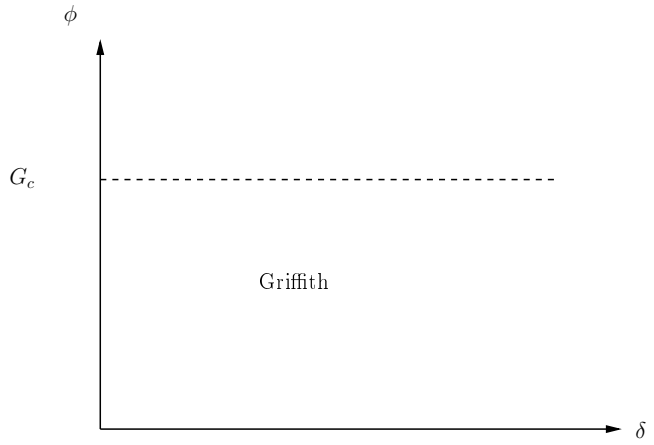

FIG. 1.5 – densité d'énergie de surface de Griffith

Griffith associe à toute fissure une énergie proportionnelle à sa longueur (en 2D), le coefficient de proportionnalité n'étant rien d'autre que le taux de restitution d'énergie critique du matériau G_c. Cela revient à dire que la densité d'énergie de surface ϕ (cf figure 1.5) est indépendante du saut de déplacement sur les lèvres de la fissure. Elle est nulle en zéro et égale au taux de restitution d'énergie critique du matériau G_c ailleurs. Si on note δ l'ouverture des lèvres de la fissure, la densité d'énergie s'écrit alors :

$$\phi(\delta) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \delta = 0 \\ G_c & \text{si} \quad \delta > 0 \end{cases} \tag{1.5}$$

Ainsi l'énergie de surface de Griffith s'écrit $\{G_c \text{ longueur}(\mathcal{K})\}$ si $\mathcal{K}$ est rectifiable, sinon on utilise la métrique de Hausdorff (pour plus de détails, on renvoit le lecteur vers [FM98]) :

$$\delta(\mathcal{K}) = G_c \; H^1(\mathcal{K}) \tag{1.6}$$

L'énergie totale de la structure, qui est par définition la somme de l'énergie potentielle et de l'énergie de surface du solide élastique, s'écrit :

$$\mathcal{G}_0(u, \mathcal{K}) = \int_{\Omega \setminus \mathcal{K}} \frac{1}{2} A_0 \varepsilon(u) \cdot \varepsilon(u) dx - \mathcal{F}(u) + G_c H^1(\mathcal{K}) \tag{1.7}$$

Ces définitions s'étendent en dimension quelconque, et l'énergie totale de la structure s'écrit :

$$\mathcal{G}_0(u, \mathcal{K}) = \int_{\Omega \setminus \mathcal{K}} \frac{1}{2} A_0 \varepsilon(u) \cdot \varepsilon(u) dx - \mathcal{F}(u) + G_c H^{n-1}(\mathcal{K}) \tag{1.8}$$

où H^{n-1} est la mesure de Hausdorff de dimension $n-1$ et n dimension de l'espace.

Il reste alors à écrire le problème d'évolution de $\mathcal{K}$. En effet, la rupture est par nature un phénomène dissipatif qui s'accompagne d'irréversibilité. L'irréversibilité est l'impossibilité pour une fissure de disparaître. On se limitera cependant à l'étude de problème quasi-statique, c'est-à-dire que l'on considère que le système est à chaque instant en état d'équilibre.

L'évolution de la fissure consiste à chercher, comme le postulent Francfort et Marigo [[FM98], [FM02]], le champ de déplacement u qui minimise, à chaque instant et parmi tous les états de fissuration possibles, l'énergie totale de la structure que l'on force de ce fait à se trouver dans un état d'équilibre stable. Malgré l'existence de cette formulation continue en temps, on se limitera à une loi d'évolution discrétisée en temps (ce qui revient à discrétiser le chargement), qui se prête mieux à la mise en œuvre numérique.

Dans ce cadre, on considère alors une suite croissante de discrétisation en temps. On note $\mathcal{U}_i$, u_i et $\mathcal{K}_i$ les suites respectives des espaces de déplacements admissibles, de déplacements et des états de fissuration à l'instant t_i. Alors, pour tout i, u_i et $\mathcal{K}_i$ vérifient le critère de minimisation de l'énergie totale donné par :

$$\mathcal{G}_0(u_i, \mathcal{K}_i) = \min_{u \in \mathcal{U}_i, \; \mathcal{K} \supseteq \mathcal{K}_i} \mathcal{G}_0(u, \mathcal{K}) \tag{1.9}$$

où $(\mathcal{K} \supseteq \mathcal{K}_i)$ représente le caractère irréversible du phénomène de fissuration.

1.3 La formulation variationnelle de la rupture fragile

On se propose dans cette section de dresser la formulation variationnelle du problème de rupture fragile. Dans un premier temps, on rappellera la position du problème de rupture fragile. Puis, on dressera la formulation variationnelle forte et les difficultés liées à l'établissement d'existence de minimiseurs. Enfin, on rappellera l'existence de solutions au problème de mécanique de la rupture fragile, à l'aide d'une formulation faible, sur l'espace des fonctions spéciales à variations bornées (SBV) dont on rappellera les définitions essentielles en annexe.

1.3.1 Position du Problème

On se propose dans cette sous-section de préciser les limites de cette théorie. Avec ce modèle, nous ne pouvons pas envisager tous les chargements possibles. En effet, il existe une limitation du modèle puisque nous ne pouvons prendre en compte que des conditions aux limites de types déplacements imposés, ou de bord libre.

En effet, vouloir imposer des forces volumiques reviendrait alors à la minimisation, à un mouvement de corps rigide près, de :

$$\mathcal{G}_0(u, \mathcal{K}) \tag{1.10}$$

Le minimum de cette énergie est $-\infty$ et est atteint indépendamment de l'intensité de la force (sauf pour des ténacités bien choisies). Ceci n'est pas acceptable d'un point de vue mécanique, et la prise en compte de forces, qu'elles soient surfaciques ou volumiques reste à l'heure actuelle un problème ouvert pour le modèle étudié. On se limitera donc à des problèmes de déplacements imposés et de bord libre où (1.8) se réduit à :

$$E(u, \mathcal{K}) = \int_{\Omega \setminus \mathcal{K}} \frac{1}{2} A_0 \varepsilon(u) \cdot \varepsilon(u) dx + G_c H^{n-1}(\mathcal{K}) \tag{1.11}$$

Il reste alors à définir les bons espaces pour déterminer l'existence de minimum pour cette fonctionnelle, et pour ce faire, nous avons introduit quelques définitions en annexe (A).

1.3.2 Formulation variationnelle forte

Dans cette sous-section, on cherche à établir *l'existence* de solutions au problème de mécanique de la rupture fragile donnée par sa formulation variationnelle (1.11). L'existence de minimiseur pour cette fonctionnelle est *a priori* très compliquée car elle traduit un problème non convexe qui met en jeu deux objets $(u, \mathcal{K})$ de nature très différente.

Il faut maintenant obtenir l'existence de minimiseurs de la fonctionnelle. La grande difficulté est de donner un sens à la fonctionnelle autrement dit de traduire les bons espaces de définition de (1.11) pour en montrer l'existence de solution. Le choix d'espace le plus simple auquel on pourrait penser est :

$$\mathcal{C} = \big\{(u, \mathcal{K}) \quad : \quad u \in C^1(\Omega), \quad \mathcal{K} \text{ compact } \subset \Omega\big\} \tag{1.12}$$

Mais au vue de la complexité liée d'une part au problème non convexe à traiter et les questions de régularités de $\mathcal{K}$ d'autre part, nous allons nous concentrer sur l'existence de minimiseurs par une approche directe. Cette approche consiste à trouver une suite minimisante. Pour ce faire, on choisit d'affaiblir l'espace C en :

$$\mathcal{C}' = \big\{(u, \mathcal{K}) \quad : \quad u \in \mathcal{W}^{1,2}(\Omega), \quad \mathcal{K} \text{ compact } \subset \Omega\big\} \tag{1.13}$$

avec

$$\mathcal{W}^{1,2}(\Omega) = \big\{f \in L^2(\Omega), \quad \nabla f \in L^2(\Omega)\big\} \tag{1.14}$$

Trouver un minimiseur sur l'ensemble $\mathcal{C}'$ reste cependant équivalent à le faire sur $\mathcal{C}$. Essayons de voir pourquoi trouver un minimiseur sur l'ensemble $\mathcal{C}'$ reste vrai aussi dans l'ensemble $\mathcal{C}$. Pour cela, nous allons supposer connu un minimiseur $(u, \mathcal{K})$ dans $\mathcal{C}'$, alors en regardant la variation par rapport à u pour un accroissement $\varphi \in C_0^1(\Omega \setminus \mathcal{K})$, on obtient :

$$E(u + h\varphi, \mathcal{K}) = E(u, \mathcal{K}) + h\nabla E(u, \mathcal{K})(\varphi, \mathcal{K}) + ...$$

d'où

$$\nabla E(u,\mathcal{K})(\varphi,\mathcal{K}) = \lim_{h\to 0} \frac{E(u+h\varphi,\mathcal{K}) - E(u,\mathcal{K})}{h} = 0$$

On remarquera que ce dernier calcul est un calcul classique des variations, d'où

$$\nabla E(u,\mathcal{K})(\varphi,\mathcal{K}) = \int_\Omega A_0\varepsilon(u)\cdot\varepsilon(\varphi)dx = 0$$

Après intégration par partie, on obtient le problème elliptique suivant vérifié par u :

$$\begin{cases} \text{div } \sigma = 0 \\ \sigma\cdot n = 0 \end{cases}$$

où $\sigma = A_0\varepsilon(u)$. En utilisant les propriétés de régularisation des opérateurs elliptiques (si on prend $u \in \mathcal{W}^{1,p}(\Omega)$ pour tout $p < \infty$ alors $u \in C^{1,\alpha}(\Omega)$, avec $\alpha < 1$), on se ramène à minimiser le problème sur $\mathcal{C}$ moyennant quelques développements supplémentaires.

Maintenant que l'on a affaibli l'espace en $\mathcal{W}^{1,2}(\Omega)$, on peut essayer d'utiliser un argument direct : on choisit une suite minimisante $(u_n,\mathcal{K}_n)$ et afin de pouvoir utiliser les arguments classiques de compacité on borne u. Ainsi, on peut considérer que la suite minimisante (u_n) est bornée et on peut en extraire une sous-suite convergente au sens faible dans $\mathcal{W}^{1,2}(\Omega)$. De plus comme $(\mathcal{K}_n)$ est une suite d'espaces compacts équibornés, on peut là aussi en extraire une sous-suite convergente pour la métrique de Hausdorff. On a traité les cas séparément et on aimerait pouvoir conclure par un argument de semi-continuité inférieure de la fonctionnelle. Or l'application $\mathcal{K} \to \mathcal{H}^{n-1}(\mathcal{K})$ ne garantie pas la semi-continuité inférieure. Et malheureusement, on ne peut pas conclure.

1.3.3 Formulation variationnelle faible et théorème d'existence

Pour remédier à ce problème De Giorgi a proposé une nouvelle approche en introduisant une formulation faible du problème. Pour $u \in SBV(\mathcal{R}^N)$, on cherche à minimiser la fonctionnelle

$$E(u) = \int_\Omega \frac{1}{2}A_0\varepsilon(u)\cdot\varepsilon(u)dx + G_c\mathcal{H}^1(\mathcal{S}_u) \tag{1.15}$$

où $\mathcal{S}_u$ est l'ensemble des points de discontinuités de u. L'intérêt de cette fonctionnelle est le résultat de compacité d'Ambrosio qui permet de conclure. Nous le redonnons ici dans sa forme appliquée :

Théorème 1.1 *Soit (u_n) une suite de $SBV(\Omega)$ telle que $E^r_{AG}(u_n) \le C < \infty$ pour tout n, alors on peut extraire une sous-suite $(u_{\varphi(n)})$ et $u \in SBV(\Omega)$ telle que :*

$$u_{\varphi(n)} \to u$$

$$\nabla u_{\varphi(n)} \rightharpoonup \nabla u \textit{ faiblement dans } L^1(\Omega)$$

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 \le \liminf_{n\to 0} \int_\Omega |\nabla u_{\varphi(n)}|^2$$

$$\mathcal{H}^1(\mathcal{S}_u) \le \liminf_{n\to 0} \mathcal{H}^1(\mathcal{S}_{u_{\varphi(n)}})$$

Nous disposons alors de tous les outils nécessaires pour conclure à l'existence de minimiseurs pour la fonctionnelle de rupture. Il reste, à ce stade, à démontrer que ce minimiseur u peut conduire à un minimiseur $(u, \mathcal{K})$ par exemple en posant $\mathcal{K} = \overline{\mathcal{S}_u}$.

Lorsque $\mathcal{K} = \mathcal{S}_u$ montrer que $u \in C^1(\Omega \setminus \mathcal{K})$ est sensiblement identique à ce que nous avons fait précédemment. Par contre le travail sur $\mathcal{K}$ est très difficile et la preuve revient à De Giorgi -Carriero-Leaci [DGCA89]. L'idée principale vient du fait que comme u est un minimiseur, il impose alors à son ensemble de saut $\mathcal{S}_u$ de n'être ni trop "large" ni trop "creux". Ainsi, on peut obtenir un résultat du type $H((\overline{\mathcal{S}_u} \setminus \mathcal{S}_u) \cap \Omega) = 0$ qui permet de dire que $(u, \overline{\mathcal{S}_u})$ est optimal et de conclure cette section.

1.4 Régularisation par des modèles d'endommagement non-locaux

L'objectif de cette section est de dresser le cadre numérique que nous avons décidé d'adopter pour la résolution du problème de rupture fragile. Dans un premier temps, nous expliquerons pourquoi nous avons fait le choix de régulariser le problème au sens de la Γ-convergence. Par la suite, on présentera l'approximation de ce problème par des fonctionnelles elliptiques. Enfin, on tentera de montrer que cette régularisation peut être interprétée, d'un point de vue mécanique, comme un authentique modèle d'endommagement non-local.

1.4.1 Le modèle de rupture fragile : choix de la résolution

La difficulté d'utilisation pratique de la formulation variationnelle précédente donnée par (1.15) tient au fait qu'il faut envisager *a priori* tous les états de fissuration possibles, autrement dit de construire des champs de déplacements discontinus sur des surfaces de discontinuité arbitraires.

La méthode des éléments finis classique ne le permet pas et les méthodes d'éléments finis étendues ne peuvent pas aujourd'hui être suffisamment développées pour traiter tous les trajets spatio-temporels de fissuration. Pour pallier à cette difficulté, on peut suivre l'idée introduite par Ambrosio et Tortorelli [[AT90], [AT92]] en segmentation d'images pour le problème de Mumford-Shah [MS89] et régulariser la fonctionnelle énergie du problème de rupture.

D'un point de vue mécanique, cette régularisation consiste à approcher les modèles de rupture par des modèles d'endommagement non-locaux (c'est-à-dire ceux dont l'énergie contient des termes avec gradient d'endommagement). Ce faisant, cela revient à remplacer la surface de discontinuité du champ de déplacement (la fissure) par des zones de petites tailles dans lesquelles le gradient de déplacement est grand (zones endommagées). On peut ainsi travailler avec des éléments finis classiques.

1.4.2 La régularisation de la rupture fragile au sens de la Γ-convergence : approximation par des fonctionnelles elliptiques

La formulation faible du problème de rupture fragile a permis d'envisager une mise en œuvre numérique. Cette mise en œuvre numérique est basée sur une approximation de type fonctionnelle elliptique. D'autres approximations de la formulation faible du problème de rupture fragile basée sur la régularisation sont possibles, on cite à titre d'exemple les approximations par perturbation du second ordre ou encore les approximations par moyenne. Le lecteur intéressé pourra trouver

toutes ces régularisées dans les ouvrages de Braides [[Bra98], [Bra02]].

La difficulté est de trouver un moyen d'exprimer la convergence des approximations vers le problème initial de rupture fragile. Nous donnons alors simplement le type de convergence souhaitée sous la forme de la définition suivante due à De-Giorgi.

Définition 1.2 Γ-*convergence*
On considère une suite de fonctionnelle $(F_n) : X \to \overline{\mathcal{R}}$ *pour une topologie* τ. *On dit que cette suite est* Γ-*convergente pour la topologie* τ *si*

1. *Pour tout* $x \in X$ *et pour toute suite* (x_n) *convergente vers* x

$$F(x) \leq \liminf_{n \to +\infty} F_n(x_n)$$

2. *Pour tout* $x \in X$ *il existe une suite* (x_n) *convergente vers* x *telle que*

$$F(x) \geq \limsup_{n \to +\infty} F_n(x_n)$$

Dans la suite on se contentera, pour la mise en œuvre numérique, d'utiliser des approximations par des fonctionnelles elliptiques. L'une des premières a été introduite tout d'abord par L. Ambrosio et V.M. Tortorelli [AT90] comme approximation de la fonctionnelle de Mumford-Shah [MS89], par le biais de la notion de Γ-convergence de De Giorgi [DM93]. Nous donnons ici cette fonctionnelle :

Approximation Ambrosio-Tortorelli
On introduit une seconde variable α et deux paramètres k_η et η positifs et pour tout $u \in H^1(\Omega)$ vérifiant les conditions aux limites et tout $\alpha \in H^1(\Omega; [0,1])$, on définit la fonctionnelle :

$$T(u,\alpha) = \int_\Omega \frac{1}{2}((1-\alpha)^2 + k_\eta) A_0 \varepsilon(u) \cdot \varepsilon(u) dx + G_c \int_\Omega \left(\eta |\nabla \alpha|^2 + \frac{1}{4\eta} \alpha^2 \right) dx$$

Dans Braides [Bra98], une forme plus générale est donnée concernant la mise en œuvre numérique par des fonctionnelles elliptiques :

Approximation générale par des fonctionnelles elliptiques
On introduit une seconde variable α et deux paramètres k_η et η positifs et pour tout $u \in H^1(\Omega)$ vérifiant les conditions aux limites et tout $\alpha \in H^1(\Omega; [0,1])$, on définit la fonctionnelle :

$$G(u,\alpha) = \int_\Omega \frac{1}{2}(v(\alpha)^2 + k_\eta) A_0 \varepsilon(u) \cdot \varepsilon(u) dx + G_c \int_\Omega \left(\eta |\nabla \alpha|^2 + \frac{w_1(\alpha)}{\eta} \right) dx \tag{1.16}$$

La Γ-convergence dans L^2 de cette fonctionnelle vers la fonctionnelle mère est prouvée quand $\eta \to 0$[19].

Proposition 1.3 $G(u,\alpha)$ Γ-*converge vers* E *à condition que* $v(\alpha)$, $w_1(\alpha)$ *et* k_η *satisfassent les conditions suivantes :*

1. $v(\alpha)$ *est une fonction continue décroissante et ne s'annulant seulement qu'en 1 c'est-à-dire aux endroits où il y aura fissuration.*

[19] on reviendra dans le chapitre 5 sur la mise en œuvre numérique de ce problème et sur le rôle de η et k_η

2. *$w_1(\alpha)$ est une fonction croissante qui s'annule pour $\alpha = 0$ et dont l'intégrale est finie, de plus pour des questions de normalisation dues à la Γ-convergence :* $4\int_0^1 \sqrt{w_1(\alpha)}d\alpha = 1$
3. *k_η doit être très petit devant η*

Ainsi, par Γ-convergence, il est possible de prouver que, lorsque le paramètre η tend vers 0, le minimum global de la fonctionnelle régularisée G converge vers celui de E sous les conditions énoncées par la proposition (1.3).

Cependant, ce résultat de convergence ne s'applique pas forcément aux minima locaux. Un des objectifs du travail qui va suivre est d'interpréter cette régularisation comme des authentiques modèles d'endommagement non-locaux. Par le biais de ce choix, η n'est plus considéré comme un paramètre purement numérique qui a la dimension d'une longueur introduite par la régularisée, mais devient une longueur caractéristique du matériau[20].

1.4.3 Les modèles d'endommagement non-locaux

La régularisée générale par des fonctionnelles elliptiques donnée par (1.16) peut être interprétée comme un authentique modèle d'endommagement non-local. Ce modèle à son tour peut encore se généraliser par :

$$G(u,\alpha) = \int_\Omega \frac{1}{2}A(\alpha)\varepsilon(u)\cdot\varepsilon(u)dx + \int_\Omega \left(G_c\eta|\nabla\alpha|^2 + \frac{w(\alpha)}{\eta}\right)dx - \mathcal{F}(u) \tag{1.17}$$

où α est le champ d'endommagement, $A(\alpha)$ est le tenseur de rigidité affecté par l'endommagement, $w(\alpha)$ entre dans la définition de la densité volumique d'énergie dissipée et η est un paramètre qui a la dimension d'une longueur, caractéristique du matériau. L'introduction des forces volumiques ne pose plus de problème puisqu'il est question de la recherche de minimums locaux à la fonctionnelle.

L'endommagement décrit l'évolution des phénomènes entre l'état vierge et l'amorçage de la fissure macroscopique. On le représente par une variable interne représentative de l'état de détérioration de la matière. On prend le parti d'en rendre compte de façon "effective" c'est-à-dire de façon macroscopique. Ce paramètre est une variable continue ($\in [0,1]$), on parlera auquel cas d'endommagement progressif.

L'objectif à présent est de développer des modèles d'endommagement non-locaux non applicables à un matériau précis, mais plutôt des modèles représentatifs de cette famille de modèles d'endommagement fragiles régularisés. Pour ce faire, on propose de faire des choix très simples tout en dégageant les propriétés génériques que nous allons développer à la section suivante.

1.4.3.1 Leur construction

La construction d'un modèle d'endommagement fragile standard régularisé se résume en le choix :

- du paramètre d'endommagement représenté par la variable α dont la nature dépend de la complexité du modèle envisagé, dans notre cas, pour des modèles isotropes, cette variable est un scalaire,
- de la dépendance de la relation contrainte-déformation vis-à-vis de ce paramètre,

[20] cette notion de longueur caractéristique sera mis en évidence lors de l'étude de stabilité des états d'équilibres

- de la loi d'évolution du paramètre.

Ainsi, la construction se résume en le choix du paramètre α et des deux fonctions $\alpha \mapsto A(\alpha)$ et $\alpha \mapsto w(\alpha)$. Il faut maintenant préciser comment les propriétés mécaniques des modèles d'endommagement non-locaux se traduisent en termes des fonctions $A(\alpha)$ et $w(\alpha)$ (pour plus de détails, on renvoie le lecteur vers les travaux de Lemaitre et Chaboche [LC78], de Francfort et Marigo [FM93]).

Les propriétés d'écrouissage

Les lois d'écrouissage sont les règles qui caractérisent l'évolution du domaine d'élasticité[21] au cours de la déformation "inélastique"[22] (cf figure 1.6). Les propriétés d'écrouissage des modèles d'endommagement[23] sont elles-mêmes liées à des propriétés de convexité de la fonction d'élasticité $\alpha \mapsto A(\alpha)$.

En faisant référence à la figure (1.6), σ représente le champs des contraintes et ε le champs des déformations, l'écrouissage étant représenté par le signe de $d\sigma/d\varepsilon$. On parlera d'écrouissage positif ou durcissement si la quantité $d\sigma/d\varepsilon$ est positive, et on parlera d'écrouissage négatif ou adoucissement si la quantité $d\sigma/d\varepsilon$ est négative. Quant à la quantité $d\varepsilon/d\alpha$, elle traduit l'évolution de l'endommagement et doit donc être strictement positive. Comme $d\varepsilon/d\alpha > 0$, l'étude du signe $d\sigma/d\varepsilon$ revient à l'étude du signe de $d\sigma/d\alpha$.

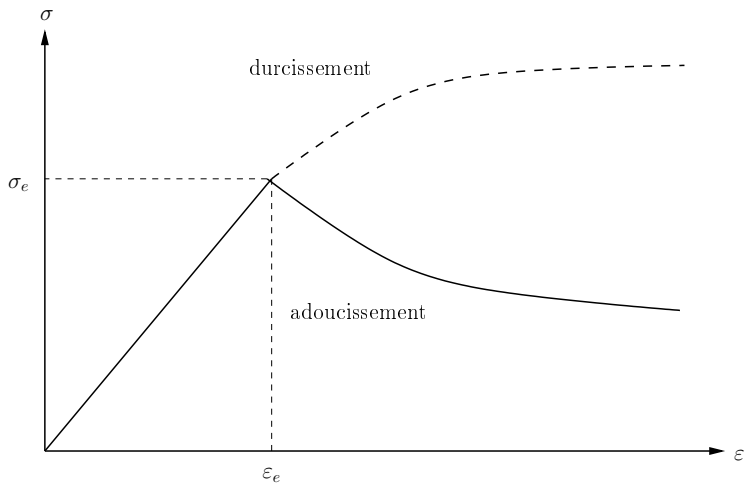

FIG. 1.6 – Courbe contraintes-déformations

Propriétés des fonctions A et w

Le matériau doit avoir une élasticité positive, soit $A(\alpha) > 0$. Cette condition peut aussi s'écrire de façon équivalente : $s(\alpha) = A(\alpha)^{-1} > 0$, où $s(\alpha)$ désigne le tenseur de souplesse du matériau dans un état d'endommagement α. En effet, la positivité de la fonction A est équivalente à la

[21] domaine à l'intérieur duquel le comportement est linéaire, c'est-à-dire la relation entre les contraintes et les déformations est linéaire

[22] domaine à l'intérieur duquel le comportement est non linéaire, ce qui se traduit par une relation non linéaire entre les contraintes et les déformations

[23] le domaine d'élasticité dans l'espace des contraintes croît avec l'endommagement ou non

positivité de la souplesse.

Puisque le matériau s'assouplit en dissipant de l'énergie quant il s'endommage, on doit alors vérifier : $A'(\alpha) < 0$ (ou encore $s'(\alpha) > 0$) et $w'(\alpha) > 0$. En effet, on doit avoir perte de rigidité du matériau lorsque ce dernier s'endommage, c'est-à-dire que lorsque l'endommagement augmente la rigidité du matériau diminue. Cela se traduit mathématiquement par la décroissance de la fonction A en α. La relation $A'(\alpha) < 0$ induit alors, en terme de souplesse, que $s'(\alpha) > 0$ car $s'(\alpha) = -\dfrac{A'(\alpha)}{A^2(\alpha)}$. Et enfin, on doit avoir $w'(\alpha) > 0$ car plus l'endommagement augmente et plus la dissipation s'amplifie aussi.

On doit avoir écrouissage en déformation ($d\varepsilon/d\alpha > 0$) pour des états d'endommagement homogènes[24], c'est-à-dire $\dot{\alpha} > 0$[25]. Le critère d'évolution de l'endommagement est donc atteint et il est donné par la relation $\dfrac{1}{2}A'(\alpha)\varepsilon \cdot \varepsilon + \dfrac{w'(\alpha)}{\eta} = 0$[26]. On en déduit que $\sqrt{-\dfrac{\eta A'}{2w'}} = \dfrac{1}{\varepsilon}$, et en dérivant cette expression, on obtient $\left(\sqrt{-\dfrac{\eta A'}{2w'}}\right)' = -\dfrac{1}{\varepsilon^2}\dfrac{d\varepsilon}{d\alpha}$. La condition d'écrouissage en déformation, est alors équivalente à $-\left(\sqrt{-\dfrac{A'}{w'}}\right)' > 0$, soit A'/w' doit être une fonction croissante en α.

On voudrait aussi que pour ces mêmes états d'endommagement homogènes s'/w' soit une fonction croissante de α. On sait que $\sigma = A(\alpha)\varepsilon$, donc le critère peut se récrire en terme de σ et on obtient $\dfrac{1}{2}\dfrac{A'(\alpha)}{A^2(\alpha)}\sigma \cdot \sigma + \dfrac{w'(\alpha)}{\eta} = 0$, en se rappelant que $s' = -\dfrac{A'(\alpha)}{A^2(\alpha)}$, le critère s'écrit $\sqrt{\dfrac{\eta s'}{2w'}} = \dfrac{1}{\sigma}$. En dérivant cette expression, on obtient alors : $\left(\sqrt{\dfrac{\eta s'}{2w'}}\right)' = -\dfrac{1}{\sigma^2}\dfrac{d\sigma}{d\alpha}$. Puisque on doit avoir adoucissement en contrainte, on en déduit alors $\left(\sqrt{\dfrac{s'}{w'}}\right)' > 0$, soit s'/w' une fonction croissante en α.

La construction de modèles d'endommagement se résume désormais à la prise en compte des conditions suivantes :

$$\begin{array}{lcl}
\textbf{Élasticité positive} & : & A(\alpha) > 0, \quad s(\alpha) = A(\alpha)^{-1} > 0; \\
\textbf{Assouplissement et dissipation} & : & A'(\alpha) < 0, \quad s'(\alpha) > 0, \quad w'(\alpha) > 0; \\
\textbf{Écrouissage en déformation} & : & w'(\alpha)A''(\alpha) - w''(\alpha)A'(\alpha) > 0; \\
\textbf{Adoucissement en contrainte} & : & w'(\alpha)s''(\alpha) - w''(\alpha)s'(\alpha) > 0.
\end{array} \tag{1.18}$$

1.4.3.2 Les propriétés énergétiques : problème d'évolution, problème incrémental

Nous avons vu que pour une structure quelconque, l'énergie totale est donnée par la relation (1.17). Cette relation est définie pour tout couple (u, α) dans $\mathcal{C}_t \times \mathcal{D}$ avec $\mathcal{C}_t$ et $\mathcal{D}$ désignant respectivement l'ensemble des champs de déplacement cinématiquement admissibles et l'ensemble

[24] les états d'endommagement homogènes sont des solutions observables du problème d'évolution, ils se caractérisent par l'endommagement uniforme de tous les points de la structure

[25] le point ici désigne la dérivée par rapport au temps : $\dot{\alpha} = d\alpha/dt$

[26] cette relation sera démontrée par la suite dans la section 2.4.1.2

des champs d'endommagement admissibles. La densité d'énergie est alors donnée par :

$$\mathcal{W}(\varepsilon(u),\alpha) = \frac{1}{2}A(\alpha)\varepsilon(u)\cdot\varepsilon(u) + \frac{w(\alpha)}{\eta} + G_c\eta\nabla\alpha^2 \tag{1.19}$$

où le premier terme est l'énergie élastique volumique, et les deux suivants représentent l'énergie volumique dissipée.

Il nous reste alors à déterminer le problème quasi-statique d'évolution. Ce dernier consiste à chercher, à chaque instant t, les champs de déplacement u_t , d'endommagement α_t vérifiant les équations d'équilibre, les conditions aux limites, les conditions initiales et la loi d'évolution de l'endommagement. Autrement dit, en minimisant l'énergie totale[27], tout d'abord à t fixé, mais aussi à α fixé, on obtient le champ de déplacement u_t à l'équilibre, à cet instant, pour cet état de défaut. Puis en l'injectant dans l'expression de l'énergie totale, on détermine le champ α_t à l'instant t à l'aide de la loi d'évolution.

Il est plus facile d'établir et de faire une étude du problème incrémental, c'est-à-dire le problème obtenu après discrétisation en temps, que le problème d'évolution qui techniquement reste plus compliqué à étudier. Pour le construire, il faut remplacer la variable temps qui est une variable continue par une suite discrétisée en temps fini. Ainsi on parlera d'itération en pas de temps i. Le problème incrémental consiste alors à trouver pour chaque itération i, les champs de déplacement et d'endommagement que l'on indexera par i (u_i,α_i), et qui doivent vérifier :

$$\begin{cases} (u_i,\alpha_i) \in \mathcal{C}_i \times \mathcal{D} \\ G_i'(u_i,\alpha_i)(v-u_i,\beta-\alpha_i) \geq 0 \quad \forall (v,\beta) \in \mathcal{C}_i \times \mathcal{D} \end{cases} \tag{1.20}$$

avec, en notant $P = G_i$:

$$\begin{aligned} P'(u,\alpha)(\hat{v},\hat{\beta}) &= P_u'(\hat{v}) + P_\alpha'(\hat{\beta}) \\ &= \int_\Omega A(\alpha)\varepsilon(u)\cdot\varepsilon(\hat{v})dx - \mathcal{F}(\hat{v}) \\ &+ \int_\Omega \left((\frac{1}{2}A'(\alpha)\varepsilon(u)\cdot\varepsilon(u) + \frac{w'(\alpha)}{\eta})\hat{\beta} + 2G_c\eta\nabla\alpha\nabla\hat{\beta} \right) dx \end{aligned} \tag{1.21}$$

où $P'(u,\alpha)(\hat{v},\hat{\beta})$ désigne la dérivée Gâteaux de G en (u,α) dans la direction $(\hat{v},\hat{\beta})$, et $\mathcal{C}_i$ et $\mathcal{D}$ désignent respectivement l'ensemble des champs de déplacement cinématiquement admissibles et l'ensemble des champs d'endommagement admissibles à l'itération i.

Remarque:
Les différents problèmes sont couplés entre eux, en effet la solution à l'itération $i+1$ dépend de la solution à l'itération i, ainsi la résolution se fait par induction à partir de la donnée α_0 du champ d'endommagement initial.

1.4.3.3 Recherche de minima locaux

On se propose dans cette section de donner quelques définitions ou propriétés utiles à l'étude du problème incrémental. Autrement dit, on se propose de donner les outils nécessaires à la

[27] nous rappelons ici que l'on envisage uniquement des évolutions quasi-statiques, c'est-à-dire que l'inertie n'est pas prise en compte, le temps est donc paramétré par des incréments de chargement

recherche de minimums-locaux de l'énergie totale de la structure.

La recherche d'un minimum local revient à trouver un état d'équilibre localement stable, les propriétés de stabilité d'un état d'équilibre dépendent du chargement courant[28] mais pas de l'ensemble du processus de chargement. Commençons par donner une définition précise de la stabilité locale des états d'équilibre d'une structure. Autrement dit, une condition nécessaire et suffisante pour qu'un déplacement admissible soit un minimum local.

Définition 1.4 *On dira qu'un déplacement admissible u d'une structure Ω, soumise à un chargement, est un état d'équilibre localement stable s'il existe un voisinage de u (au sens de la norme choisie) tel que l'énergie totale de la structure $\mathcal{E}$ dans cet état soit inférieur à l'énergie totale de la structure dans tout état admissible de son voisinage :*

$$\exists\ \eta(u) > 0, \forall v \text{ admissible } \|v - u\| \leq \eta(u), \quad v \neq u \quad \mathcal{E}(u) < \mathcal{E}(v)$$

Pour la recherche de minimum local, deux étapes sont nécessaires. La première consiste à chercher à quelles conditions un état de la structure est à l'équilibre : c'est la condition nécessaire de minimum local. La deuxième étape consiste en l'étude de la stabilité des états d'équilibre : c'est la condition suffisante de minimum local.

Lorsqu'il n'y a pas unicité de la configuration d'équilibre d'un système sous une sollicitation donnée, l'étude de leur stabilité fournit un critère de sélection.

Définition 1.5 *On dira que la structure Ω est stable au temps t dans son état (u, α) si et seulement si (u, α) est un minimum local <u>unilatéral</u> de l'énergie totale $\mathcal{P}_t$ sur $\mathcal{C}_t \times \mathcal{D}$. En d'autres termes, on ne peut pas trouver dans un voisinage de (u, α) un état (v, β) admissible avec $\beta \geq \alpha$ ayant une énergie plus petite de celle de l'état (u, α).*

Proposition 1.6

> **Condition nécessaire** *d'ordre 2 sur la stabilité d'un état d'équilibre :*
> *Un état d'équilibre sera localement stable seulement si $\mathcal{P}''(u, \alpha)(v, \beta) \geq 0$ pour toutes fonctions (v, β) régulières par morceaux et vérifiant la condition d'ordre 1 $\mathcal{P}'(u, \alpha)(v, \beta) = 0$*
> **Condition suffisante** *d'ordre 2 sur la stabilité d'un état d'équilibre :*
> *Un état d'équilibre sera localement stable seulement si $\mathcal{P}''(u, \alpha)(v, \beta) > 0$ pour toutes fonctions (v, β) régulières par morceaux et vérifiant la condition d'ordre 1 $\mathcal{P}'(u, \alpha)(v, \beta) = 0$*

Preuve:
Soit (u, α) un état d'équilibre, soit (v, β) des fonctions régulières par morceaux vérifiant les conditions aux limites du problème. On définit alors $u + hv$ un déplacement admissible et $\alpha + h\beta$ un endommagement admissible avec $h > 0$ suffisamment petit. Alors l'énergie totale de la structure est deux fois dérivables en (u, α) dans la direction (v, β) et en effectuant son développement limité à l'ordre 2, on obtient :

$$\mathcal{P}(u + hv, \alpha + h\beta) - \mathcal{P}(u, \alpha) = h\mathcal{P}'(u, \alpha)(v, \beta) + \frac{h^2}{2}\mathcal{P}''(u, \alpha)(v, \beta) + O(h^3) \tag{1.22}$$

[28] sous l'hypothèse de quasi-staticité, le temps est paramétré par des incréments de chargement

Par définition, $\mathcal{P}'(u,\alpha)(v,\beta) \geq 0$. La condition pour que (u,α) soit un minimum local est $\mathcal{P}(u+hv,\alpha+h\beta) \geq \mathcal{P}(u,\alpha)$, cette condition est vérifiée, pour h petit, dans les directions (v,β) telles que $\mathcal{P}'(u,\alpha)(v,\beta) > 0$. Dans le cas où $\mathcal{P}'(u,\alpha)(v,\beta) = 0$, il faudra alors étudier le terme de second ordre. Pour de telles directions le développement limité à l'ordre deux devient :

$$\mathcal{P}(u+hv,\alpha+h\beta) - \mathcal{P}(u,\alpha) = \frac{h^2}{2}\mathcal{P}''(u,\alpha)(v,\beta) + O(h^3) \tag{1.23}$$

et la condition nécessaire pour que l'état (u,α) soit un minium local est $\mathcal{P}''(u,\alpha)(v,\beta) \geq 0$ pour h suffisamment petit. C'est la condition d'ordre 2 sur la stabilité locale des états d'équilibre.

◇

Remarques:

- Il est important de rappeler que le caractère de stabilité d'un état est étroitement lié au type de sollicitation imposée à la structure. Ainsi, un même état pourra être stable dans des conditions de déplacement imposé et instable pour des conditions de force imposée.
- Si la dérivée seconde s'avérait être nulle, il faudrait faire une étude plus poussée et aller chercher la dérivée troisième[29].

[29] on se contentera pour notre étude sur la stabilité du calcul de la dérivée seconde

Chapitre 2

Étude de modèles d'endommagement non-locaux : la barre en traction

Sommaire

Introduction **28**

2.1 Présentation du problème et formulation variationnelle **28**

2.2 Problème d'évolution **29**

2.2.1 Cas général 29

2.2.2 Cas particulier : quelques familles de modèles d'endommagement 32

2.2.3 Problème incrémental 38

2.3 Possibilité de non existence avec forces imposées : champs limités . **38**

2.4 Non unicité et critère de stabilité **39**

2.4.1 Non Unicité 39

2.4.2 Critère de stabilité 42

2.5 Étude des réponses homogènes et de leur stabilité, effets d'échelles **44**

2.5.1 Les réponses homogènes 44

2.5.2 Études de leur stabilité : effets d'échelles 47

2.6 Étude de solutions non homogènes **54**

2.6.1 Cas général 55

2.6.2 Cas particulier de quelques familles de modèles d'endommagement . . . 57

2.6.3 Bilan 63

Conclusion **63**

Introduction

L'objet de ce chapitre est de dégager des propriétés génériques liées aux différents modèles d'endommagement pris, pour cela, on prendra pour exemple l'étude de la barre en traction. Dans un premier temps, nous présenterons le problème et sa formulation variationnelle. Par la suite nous introduirons le problème d'évolution puis nous comparerons les résultats d'existence, d'unicité et de stabilité des solutions obtenues sur différentes familles de modèles d'endommagement dont l'une a la particularité d'avoir la même réponse contrainte-déformation alors que ses propriétés de stabilité sont différentes. L'accent est tout particulièrement mis sur la notion de stabilité des états homogènes[30] et des états non homogènes[31]. Il s'avère que ces propriétés sont décisives quant à l'évaluation de la pertinence d'un modèle.

2.1 Présentation du problème et formulation variationnelle

On considère une barre élastique homogène dont la configuration naturelle de référence est $\Omega = (0, L)$ (cf figure 2.1). Cette barre est encastrée à son extrémité $x = 0$ et soumise à un déplacement contrôlé croissant à l'autre extrémité $x = L$.

$$u(0) = 0 \quad \text{et} \quad u(L) = tL \tag{2.1}$$

La déformation moyenne imposée t joue le rôle du temps. Le module d'Young de la barre est E_0, et la loi de comportement affectée par l'endommagement s'écrit simplement :

$$\sigma = A(\alpha)u'$$

où u' désigne la dérivée spatiale de u. Ici, on suppose que la barre est homogène, donc, E_0 est une constante indépendante de x et A ne dépend pas explicitement de x mais uniquement que de α.

FIG. 2.1 – Barre en traction

Pour effectuer l'étude de cette exemple, on choisit un modèle d'endommagement non-local unidimensionnel dans lequel la variable d'endommagement est représentée par α. Le comportement de la structure au point x est caractérisé par une densité d'énergie de déformation $\mathcal{W}$ qui dépend des déformations u', de l'endommagement α et du gradient d'endommagement α'. Cette dernière est donnée par la relation suivante :

$$\mathcal{W}(u', \alpha, \alpha') = \frac{1}{2}A(\alpha)u'^2 + \frac{w(\alpha)}{\eta} + G_c\eta\alpha'^2 \tag{2.2}$$

Le critère d'endommagement de la barre est obtenu à partir de la formulation variationnelle du problème. On se propose, dans un premier temps, de rappeler brièvement les ingrédients de base de cette dernière.

[30] dans un cadre général et au travers de quelques exemples
[31] par une étude qualitative du plan de phase

Soient $\mathcal{C}_t$ et D respectivement l'espace affine des champs de déplacement admissibles au temps t et l'espace des cônes convexes des endommagements admissibles :

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{C}_t & = & \{v \in H^1(0,L) \quad : \quad v(0)=0, \quad v(L)=tL\} \\ D & = & \{\beta \in H^1(0,L) \quad : \quad \beta(x) \geq 0\} \end{array} \tag{2.3}$$

où $H^1(0,L)$ désigne l'espace de Sobolev d'ordre 1 défini sur $(0,L)$. Cet espace contient toutes les fonctions de carré intégrable définies sur $(0,L)$ et dont le carré des dérivées premières est intégrable.

Pour des raisons de simplicité, les forces extérieures seront considérées nulles ici. Ainsi, pour tout état (u,α) admissible au temps t, l'énergie totale de la barre s'écrit :

$$\mathcal{P}_t(u,\alpha) = \int_0^L \mathcal{W}(u',\alpha,\alpha')dx \tag{2.4}$$

Notons que l'énergie de déformation $\mathcal{P}_t$ dépend du gradient d'endommagement. Il s'agit maintenant d'établir une loi d'évolution de l'endommagement, au niveau de la structure[32].

2.2 Problème d'évolution

2.2.1 Cas général

Le problème quasi-statique d'évolution postulé consiste à chercher, à chaque *instant* t les champs de déplacement $u_t \in \mathcal{C}_t$ et d'endommagement $\alpha_t \in D$ vérifiant les équations d'équilibre, les conditions aux limites, les conditions initiales et la loi d'évolution de l'endommagement[33], autrement dit, vérifiant :

$$\mathcal{P}'_t(u_t,\alpha_t)(v-\dot{u}_t,\beta-\dot{\alpha}_t) \geq 0 \qquad \forall (v,\beta) \in \mathcal{C}_1 \times D \tag{2.5}$$

où $\dot{u}_t$ et $\dot{\alpha}_t$ désignent respectivement les dérivées en temps du champs de déplacement et du champ d'endommagement, quant à $\mathcal{C}_1$, il désigne l'ensemble de vitesses cinématiquement admissibles à l'instant t.

En supposant que la barre est saine au temps $t=0$, c'est-à-dire que la barre ne présente aucune fissure ni de défaut au temps $t=0$, le problème d'évolution s'écrit :

$$\begin{array}{c} \text{Pour } t>0, \text{ trouver un état } (u_t,\alpha_t) \in \mathcal{C}_t \times D \text{ tel que} \\ (\dot{u}_t,\dot{\alpha}_t) \in \mathcal{C}_1 \times D \quad \text{ et } \quad \mathcal{P}'_t(u_t,\alpha_t)(v-\dot{u}_t,\beta-\dot{\alpha}_t) \geq 0 \ \forall (v,\beta) \in \mathcal{C}_1 \times D \end{array} \tag{2.6}$$

avec $\alpha(x)=0$ comme condition initiale pour $t=0$ et l'expression de $\mathcal{P}'_t(u_t,\alpha_t)$ est donnée par :

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{P}'_t(u_t,\alpha_t)(\hat{v},\hat{\beta}) & = & \displaystyle\int_0^L A(\alpha_t)u'_t\hat{v}'dx \\ & + & \displaystyle\int_0^L (\frac{1}{2}A'(\alpha_t)u_t'^2 + \frac{w'(\alpha_t)}{\eta})\hat{\beta}dx \\ & + & \displaystyle\int_0^L 2G_c\eta\alpha'_t\hat{\beta}'dx \end{array} \tag{2.7}$$

[32] loi non locale

[33] cette loi d'évolution de l'endommagement sera explicitée dans le suite

Pour des raisons d'équilibre, la contrainte σ est nécessairement uniforme dans la barre.
En effet, en insérant $\beta = \dot{\alpha}_t$ et $v = \dot{u}_t + w$, avec $w \in H_0^1(0,L) = \{w \in H^1(0,L) : \ w(0) = 0, \ w(L) = 0\}$, dans (2.6), on obtient la formulation variationnelle de l'équilibre de la barre :

$$\int_0^L A(\alpha_t) u_t' w' dx = 0 \quad \forall w \in H_0^1(0,L) \tag{2.8}$$

On intègre par partie, l'équation précédente, et on obtient :

$$\int_0^L (A(\alpha_t) u_t')' w dx = 0 \quad \forall w \in H_0^1(0,L)$$

Cette équation étant vraie pour tout w, on obtient :

$$(A(\alpha_t)u_t')' = 0 \quad \text{ce qui implique} \quad A(\alpha_t)u_t' = cste \quad \text{or} \quad \sigma = A(\alpha_t)u_t'$$

donc le tenseur des contraintes est constant. En intégrant l'équation précédente et en tenant compte des conditions limites (2.1), on en déduit que :

$$tL = u_t(L) - u_t(0) = \int_0^L \sigma s(\alpha_t) dx$$

Dans la suite et par souci d'allégement des notations, on introduit la moyenne de g sur $[0,L]$ que l'on note $< g >$ et on désigne par $s(\alpha_t)(= A^{-1}(\alpha_t))$ le tenseur de souplesse de la barre. La contrainte et la déformation dans la barre sont alors récrites sous la forme condensée suivante :

$$\sigma = tL \frac{1}{< s(\alpha_t) >} \quad \text{et} \quad u_t' = tL \frac{s(\alpha_t)}{< s(\alpha_t) >} \tag{2.9}$$

Dans l'équation qui régit le problème d'évolution, on peut éliminer u_t et ainsi rester avec une fonctionnelle ne dépendant que de la variable d'endommagement. En effet, en insérant $v = \dot{u}_t$ dans (2.6) et utilisant l'expression de u_t donnée dans (2.9), on aboutit ainsi à une loi d'évolution, pour l'endommagement, sous la forme d'une inéquation variationnelle :

$$\mathcal{P}'(\alpha_t)(\hat{\beta}) = \int_0^L \left(\frac{1}{2}\sigma^2 \frac{A'(\alpha_t)}{A^2(\alpha_t)} \hat{\beta} + \frac{w'(\alpha_t)}{\eta} \hat{\beta} + 2G_c \eta \alpha_t' \hat{\beta}' \right) dx \geq 0 \quad \forall \hat{\beta} \geq 0 \tag{2.10}$$

Proposition 2.1 *Le problème d'évolution* (2.10) *est équivalent à :*

$$\textbf{Condition d'irréversibilité} \ : \ \dot{\alpha}_t \geq 0 \tag{2.11}$$

$$\textbf{Critère si } \dot{\alpha}_t = 0 \textbf{ alors} \ : \ \frac{\sigma^2}{2} \frac{A'(\alpha_t)}{A(\alpha_t)^2} + \frac{w'(\alpha_t)}{\eta} - 2G_c \eta \alpha_t'' \geq 0 \tag{2.12}$$

$$\textbf{C. L.} \ : \ \alpha_t'(0) \leq 0 \ et \ \alpha_t'(L) \geq 0 \tag{2.13}$$

$$\textbf{Critère si } \dot{\alpha}_t > 0 \textbf{ alors} \ : \ \frac{\sigma^2}{2} \frac{A'(\alpha_t)}{A(\alpha_t)^2} + \frac{w'(\alpha_t)}{\eta} - 2G_c \eta \alpha_t'' = 0 \tag{2.14}$$

$$\textbf{C. L.} \ : \ \alpha_t'(0) = 0 \ et \ \alpha_t'(L) = 0 \tag{2.15}$$

Preuve:
Après intégration par partie de l'équation (2.10), on obtient :

$$\mathcal{P}'(\alpha_t)(\hat{\beta}) = \int_0^L \left(\frac{1}{2}\sigma^2 \frac{A'(\alpha_t)}{A^2(\alpha_t)} + \frac{w'(\alpha_t)}{\eta} - 2G_c \eta \alpha_t'' \right) \hat{\beta} dx + 2 \left[G_c \eta \alpha_t' \hat{\beta} \right]_0^L \geq 0 \tag{2.16}$$

ce qui peut encore s'écrire comme :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}'(\alpha_t)(\beta - \dot{\alpha}_t) &= \int_0^L \left(\frac{1}{2}\sigma^2 \frac{A'(\alpha_t)}{A^2(\alpha_t)} + \frac{w'(\alpha_t)}{\eta} - 2G_c\eta\alpha_t'' \right)(\beta - \dot{\alpha}_t)dx \\ &+ 2\left[G_c\eta\alpha_t'(\beta - \dot{\alpha}_t)\right]_0^L \geq 0 \end{aligned} \tag{2.17}$$

En tenant compte de l'irréversibilité de l'endommagement, qui se traduit par $\dot{\alpha}_t = \dfrac{d\alpha_t}{dt} \geq 0$, deux cas doivent être étudiés :

1. Cas $\dot{\alpha}_t = 0$: comme β doit satisfaire la définition de l'espace D, cette dernière est toujours positive ainsi, l'inéquation variationnelle implique :

$$\frac{1}{2}\sigma^2 \frac{A'(\alpha_t)}{A^2(\alpha_t)} + \frac{w'(\alpha_t)}{\eta} - 2G_c\eta\alpha_t'' \geq 0 \text{ dans } (0, L) \tag{2.18}$$

   avec les conditions aux limites :

$$\alpha_t'(0) \leq 0 \text{ et } \alpha_t'(L) \geq 0$$

2. Cas $\dot{\alpha}_t > 0$: en choisissant différentes fonctions test[34] β à savoir $\beta = 2\dot{\alpha}_t$ et $\beta = \dfrac{1}{2}\dot{\alpha}_t$ avec β nulle au bord, l'inéquation variationnelle se transforme en une équation variationnelle qui s'écrit :

$$\frac{1}{2}\sigma^2 \frac{A'(\alpha_t)}{A^2(\alpha_t)} + \frac{w'(\alpha_t)}{\eta} - 2G_c\eta\alpha_t'' = 0 \text{ dans } (0, L) \tag{2.19}$$

   avec les conditions aux limites :

$$\alpha_t'(0) = 0 \text{ et } \alpha_t'(L) = 0$$

◇

Pour plus de détails le lecteur intéressé pourra se référer à [Lue73].

Remarques:

- La condition aux limites en α_t' n'est pas mentionnée de manière explicite dans la définition de la formulation variationnelle. En revanche, elle a été déduite de la démonstration donnée ci dessus. Sa vérification est donc une conséquence directe de la satisfaction de la formulation faible.
- On pourrait évidemment forcer d'autres conditions aux limites sur le champ d'endommagement. Par exemple, on peut imposer à α_t d'être nulle sur le bord ce qui obligerait la structure à ne pas s'endommager sur le bord. Même si l'apparition de telles conditions aux limites restent tout à fait concevables, leur prise en compte entraînerait leur apparition dans l'espace de définition et compliquerait alors les calculs. On se limitera donc ici aux conditions dites naturelles obtenues par la satisfaction de la formulation faible.

Corollaire 2.2 *Le critère d'évolution de l'endommagement peut aussi s'écrire :*

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{\alpha}\left(\frac{\sigma^2}{2}\frac{A'(\alpha_t)}{A(\alpha_t)^2} + \frac{w'(\alpha_t)}{\eta} - 2G_c\eta\alpha_t'' \right) &= 0 \quad \textit{dans } (0, L) \\ \dot{\alpha}\alpha_t' &= 0 \quad \textit{en } x = 0 \textit{ et en } x = L \end{aligned} \right. \tag{2.20}$$

[34] raisonnement classique en calcul des variations

Preuve:
La preuve de ce Corollaire découle directement de la Proposition (2.1).

◇

2.2.2 Cas particulier : quelques familles de modèles d'endommagement

On propose dans la suite d'introduire quelques familles de modèles d'endommagement non-locaux afin de faciliter les calculs analytiques et numériques dans un premier temps puis pour en faire une étude comparative dans un second temps. On montrera aussi que ces modèles d'endommagement non-locaux se comportent sensiblement différemment en terme de minima locaux.

$$
\begin{array}{llll}
\textbf{Modèle 1} & : & A(\alpha) = \dfrac{E_0}{(1+\alpha)^2} & \text{et} \quad w(\alpha) = G_c\alpha \\
\textbf{Modèle 2} & : & A(\alpha) = E_0(1-\alpha)^2 & \text{et} \quad w(\alpha) = G_c\dfrac{\alpha^2}{4} \\
\textbf{Modèle 3} & : & A(\alpha) = E_0(1-\alpha)^2 & \text{et} \quad w(\alpha) = G_c\left(\dfrac{3}{8}\right)^2\alpha \\
\textbf{Modèle 4} & : & A(\alpha) = E_0(1-\alpha) & \text{et} \quad w(\alpha) = G_c\dfrac{\alpha^2}{4} \\
\textbf{Modèle 5} & : & A(\alpha) = E_0(1-\alpha)^p & \text{et} \quad w(\alpha) = k_c\left(\dfrac{3}{8}\right)^2\left(1-\sqrt{(1-\alpha)^p}\right) \text{ et } p>0
\end{array}
$$

La première famille de modèles[35] a été construite de sorte que les calculs analytiques puissent être développés, l'endommagement variant de 0 à $+\infty$. On remarque que cette famille ne respecte pas les propriétés liées à la $\Gamma-$convergence, données par la proposition (1.3). Cependant, elle reste un cas de modèle d'endommagement non-local *facile*[36] à étudier. Les familles de modèles (2), (3) et (4) respectent cette fois les propriétés de $\Gamma-$convergence et sont numériquement implémentables, pour ces modèles l'endommagement varie de 0 à 1. La famille de modèle (5), indexée par p, et dont l'endommagement varie de 0 à 1, a été construite de sorte que tous (quel que soit p) donnent la même réponse contrainte-déformation.

Remarques:

- La première famille de modèle d'endommagement ne respecte pas les propriétés liées à la $\Gamma-$convergence car l'endommagement varie de 0 à $+\infty$ et par conséquent la fonction w n'est pas d'intégrale finie[37].
- Le deuxième modèle a été introduit par Ambrosio et Torterelli [AT90] comme la régularisée du problème de segmentation d'image dit problème de Mumford et Shah [**?**] (ce dernier a fait l'objet de nombreuses études de la part de l'école italienne de De Giorgi on cite entre autres : Ambrosio, Dal Maso, Tortorelli [[AT92], [DM93], [DMMS92]]). Puis ce modèle a été repris par Bourdin pour régulariser les problèmes de mécanique de la rupture fragile. Facile d'implémentation numérique, il reste le modèle le plus utilisé en matière de régularisation puisque la variable d'endommagement α est définie naturellement dans $W^{1,2}(\Omega = [0,L];[0,1])$.

[35] pour plus de détails on renvoie le lecteur intéressé vers [FM93], [BM07]

[36] la facilité est intimement liée au fait qu'un certain nombre de calculs analytiques peuvent s'effectuer avec ce modèle

[37] ce qui viole l'une des propriétés de la proposition 1.3

- Le troisième et le quatrième modèles ont été introduits de manière heuristique. Ces modèles possèdent les bonnes propriétés de Γ-convergence, néanmoins d'un point de vue numérique, ils présentent une difficulté[38], en effet, la variable d'endommagement α est définie dans $W^{1,2}(\Omega = [0, L]; [0, 1])$ et les contraintes sur α doivent être pris dans la modèlisation du problème.
- La cinquième famille de modèles respecte la propriété de normalisation qui permettra la Γ-convergence vers le bon modèle de rupture. En effet, la constante $k_c = k\ G_c$ (dont l'expression sera explicitée ultérieurement) a été introduite afin de vérifier ces propriétés.

Dans les parties suivantes, nous allons regarder pour chaque modèles : dans un premier temps les propriétés d'écrouissage puis par la suite le critère d'endommagement.

On rappelle que le critère d'endommagement pour des états homogènes[39], c'est-à-dire des états d'endommagement ne dépendant pas de la variable d'espace x ($\alpha_t' = 0$), est donné par la relation suivante :

$$\frac{1}{2}A'(\alpha_t)\varepsilon^2 + \frac{w'(\alpha_t)}{\eta} = 0 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon^2 = -2\frac{w'(\alpha_t)}{\eta A'(\alpha_t)}$$

Ainsi, la relation contrainte-déformation est donnée par :

$$\sigma = A(\alpha_t)\varepsilon \quad \Rightarrow \quad \sigma^2 = -2A^2(\alpha_t)\frac{w'(\alpha_t)}{\eta A'(\alpha_t)} \quad \Rightarrow \quad \sigma = \sqrt{2\frac{w'(\alpha_t)}{\eta s'(\alpha_t)}}$$

On rappelle que la relation $\dfrac{d\varepsilon}{d\alpha} > 0$ traduit l'écrouissage en déformation positif alors que la relation $\dfrac{d\sigma}{d\alpha} < 0$ traduit l'écrouissage en contrainte négatif. Dès lors, nous allons détailler ces calculs et par conséquent expliciter les propriétés de chaque modèle.

2.2.2.1 Le Modèle 1

Les fonctions A, w, A' et w' sont données par les expressions suivantes :

$$A(\alpha) = \frac{E_0}{(1+\alpha)^2} \quad \Rightarrow \quad A'(\alpha) = -2\frac{E_0}{(1+\alpha)^3} \quad \text{et} \quad w(\alpha) = G_c\alpha \quad \Rightarrow \quad w'(\alpha) = G_c$$

En remplaçant ces expressions dans celle de l'écrouissage en déformation et celle de l'écrouissage en contrainte, nous obtenons :

$$\frac{d\varepsilon}{d\alpha} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{G_c}{\eta E_0}(1+\alpha)} > 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{d\sigma}{d\alpha} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{G_c E_0}{\eta}\frac{1}{(1+\alpha)^3}} < 0$$

Au vu des résultats, ce modèle est adoucissant. Le problème d'évolution de l'endommagement de ce modèle est donné par :

$$\begin{aligned}
\textbf{Condition d'irréversibilité} &: \dot{\alpha}_t \geq 0 \\
\textbf{Critère si } \dot{\alpha}_t = 0 \textbf{ alors} &: -2G_c\eta\alpha_t'' - \frac{\sigma^2}{E_0}\alpha_t \geq \frac{\sigma^2}{E_0} - \frac{G_c}{\eta} \\
\textbf{C. L.} &: \alpha_t'(0) \leq 0 \text{ et } \alpha_t'(L) \geq 0 \\
\textbf{Critère si } \dot{\alpha}_t > 0 \textbf{ alors} &: -2G_c\eta\alpha_t'' - \frac{\sigma^2}{E_0}\alpha_t = \frac{\sigma^2}{E_0} - \frac{G_c}{\eta} \\
\textbf{C. L.} &: \alpha_t'(0) = 0 \text{ et } \alpha_t'(L) = 0
\end{aligned}$$

[38] par rapport au modèle précédent
[39] tel que $\dot{\alpha}_t > 0$

2.2.2.2 Le Modèle 2

Pour ce second modèle, les fonctions A, w, A' et w' sont données par les expressions suivantes :

$$A(\alpha) = E_0(1-\alpha)^2 \quad \Rightarrow \quad A'(\alpha) = -2E_0(1-\alpha) \quad \text{et} \quad w(\alpha) = G_c\frac{\alpha^2}{4} \quad \Rightarrow \quad w'(\alpha) = G_c\frac{\alpha}{2}$$

En injectant ces expressions dans celles des écrouissages en déformation et en contrainte, nous obtenons :

$$\frac{d\varepsilon}{d\alpha} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{G_c}{2\eta E_0}\frac{1}{\alpha(1-\alpha)^3}} > 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{d\sigma}{d\alpha} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{G_c E_0}{2\eta}}\frac{((1-\alpha)^2(1-4\alpha))}{\sqrt{\alpha(1-\alpha)^3}}$$

L'écrouissage en contrainte est négatif si et seulement si $(1-4\alpha) < 0$, autrement dit ce modèle présente deux phases : une première phase où le modèle est durcissant tant que l'endommagement est inférieur à $\frac{1}{4}$ et une seconde phase où il devient adoucissant pour un endommagement supérieur à $\frac{1}{4}$. Le problème d'évolution de l'endommagement de ce modèle est donné par :

$$\begin{aligned}
\textbf{Condition d'irréversibilité} &: \dot{\alpha}_t \geq 0 \\
\textbf{Critère si } \dot{\alpha}_t = 0 \textbf{ alors} &: -\frac{\sigma^2}{E_0}\frac{1}{(1-\alpha_t)^3} + \frac{G_c}{2\eta}\alpha_t - 2G_c\eta\alpha_t'' \geq 0 \\
\textbf{C. L.} &: \alpha_t'(0) \leq 0 \text{ et } \alpha_t'(L) \geq 0 \\
\textbf{Critère si } \dot{\alpha}_t > 0 \textbf{ alors} &: -\frac{\sigma^2}{E_0}\frac{1}{(1-\alpha_t)^3} + \frac{G_c}{2\eta}\alpha_t - 2G_c\eta\alpha_t'' = 0 \\
\textbf{C. L.} &: \alpha_t'(0) = 0 \text{ et } \alpha_t'(L) = 0
\end{aligned}$$

2.2.2.3 Le Modèle 3

Les expressions des fonctions A, w, A' et w' sont données par les relations suivantes :

$$A(\alpha) = E_0(1-\alpha)^2 \quad \Rightarrow \quad A'(\alpha) = -2E_0(1-\alpha) \quad \text{et} \quad w(\alpha) = G_c\left(\frac{3}{8}\right)^2\alpha \quad \Rightarrow \quad w'(\alpha) = G_c\left(\frac{3}{8}\right)^2$$

En injectant ces expressions dans celles de l'écrouissage en déformation et de l'écrouissage en contrainte, nous obtenons :

$$\frac{d\varepsilon}{d\alpha} = \frac{3}{16}\sqrt{\frac{G_c}{\eta E_0}\frac{1}{(1-\alpha)^3}} > 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{d\sigma}{d\alpha} = -\frac{9}{16}\sqrt{\frac{G_c E_0}{\eta}(1-\alpha)} < 0$$

C'est un modèle adoucissant. Le problème d'évolution de l'endommagement de ce modèle est donné par :

$$\begin{aligned}
\textbf{Condition d'irréversibilité} &: \dot{\alpha}_t \geq 0 \\
\textbf{Critère si } \dot{\alpha}_t = 0 \textbf{ alors} &: -\frac{\sigma^2}{E_0}\frac{1}{(1-\alpha_t)^3} + \frac{G_c}{\eta}\left(\frac{3}{8}\right)^2 - 2G_c\eta\alpha_t'' \geq 0 \\
\textbf{C. L.} &: \alpha_t'(0) \leq 0 \text{ et } \alpha_t'(L) \geq 0 \\
\textbf{Critère si } \dot{\alpha}_t > 0 \textbf{ alors} &: -\frac{\sigma^2}{E_0}\frac{1}{(1-\alpha_t)^3} + \frac{G_c}{\eta}\left(\frac{3}{8}\right)^2 - 2G_c\eta\alpha_t'' = 0 \\
\textbf{C. L.} &: \alpha_t'(0) = 0 \text{ et } \alpha_t'(L) = 0
\end{aligned}$$

2.2.2.4 Le Modèle 4

Les fonctions A, w, A' et w' sont données par les expressions suivantes :

$$A(\alpha) = E_0(1-\alpha) \quad \Rightarrow \quad A'(\alpha) = -E_0 \quad \text{et} \quad w(\alpha) = G_c\frac{\alpha^2}{4} \quad \Rightarrow \quad w'(\alpha) = G_c\frac{\alpha}{2}$$

En remplaçant ces expressions dans celle de l'écrouissage en déformation et celle de l'écrouissage en contrainte, nous obtenons :

$$\frac{d\varepsilon}{d\alpha} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{G_c}{\eta E_0}\frac{1}{\alpha}} > 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{d\sigma}{d\alpha} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{G_c E_0}{\eta}}\frac{((1-\alpha)(1-3\alpha))}{\sqrt{\alpha(1-\alpha)^2}}$$

L'écrouissage en contrainte est négatif si et seulement si $(1-3\alpha) < 0$, autrement dit ce modèle présente, comme le modèle 2, deux phases : une première phase où le modèle sera durcissant tant que l'endommagement est inférieur à $\frac{1}{3}$ et une seconde phase où il devient adoucissant pour un endommagement supérieur à $\frac{1}{3}$. Le problème d'évolution de l'endommagement de ce modèle est donné par :

$$\begin{aligned}
\textbf{Condition d'irréversibilité} &: \dot{\alpha}_t \geq 0 \\
\textbf{Critère si } \dot{\alpha}_t = 0 \textbf{ alors} &: -\frac{\sigma^2}{2E_0}\frac{1}{(1-\alpha_t)^2} + \frac{G_c}{2\eta}\alpha_t - 2G_c\eta\alpha_t'' \geq 0 \\
\textbf{C. L.} &: \alpha_t'(0) \leq 0 \text{ et } \alpha_t'(L) \geq 0 \\
\textbf{Critère si } \dot{\alpha}_t > 0 \textbf{ alors} &: -\frac{\sigma^2}{2E_0}\frac{1}{(1-\alpha_t)^2} + \frac{G_c}{2\eta}\alpha_t - 2G_c\eta\alpha_t'' = 0 \\
\textbf{C. L.} &: \alpha_t'(0) = 0 \text{ et } \alpha_t'(L) = 0
\end{aligned}$$

2.2.2.5 La famille de Modèles 5

Cette famille de modèles a été construite de sorte que tous (quel que soit l'indice p) donnent la même réponse contrainte-déformation que le modèle 3. Pour construire cette famille, on considère le modèle (3), son équation d'évolution (dans le cas de solution homogène) est donnée par :

$$\frac{1}{2}\eta A'(\alpha)\varepsilon^2 + w'(\alpha) = 0$$

d'où

$$(1-\alpha) = \left(\frac{3}{8}\right)^2 \frac{G_c}{\eta E_0}\frac{1}{\varepsilon^2}$$

Ainsi la relation contrainte déformation du modèle (3) est donnée par :

$$\sigma = E_0\left(\frac{3}{8}\right)^4\left(\frac{G_c}{\eta E_0}\right)^2\frac{1}{\varepsilon^3}$$

Or la famille de modèles (5) a pour tenseur de rigidité $A(\alpha) = E_0(1-\alpha)^p$, cette fonction est indexée par p, et l'expression du tenseur des contraintes est alors donnée par :

$$\sigma = E_0(1-\alpha)^p\varepsilon = E_0\left(\frac{3}{8}\right)^4\left(\frac{G_c}{\eta E_0}\right)^2\frac{1}{\varepsilon^3}$$

On en déduit que l'expression de tenseur des déformations en fonction de l'endommagement est donnée par :

$$\varepsilon^2 = \left(\frac{3}{8}\right)^2 \frac{G_c}{\eta E_0}(1-\alpha)^{-\frac{p}{2}}$$

Il nous reste à déterminer la fonction w, cette dernière est donnée par la loi d'évolution, c'est-à-dire :

$$w' = -\frac{1}{2}\eta A' \varepsilon^2$$

d'où :

$$w' = \frac{p}{2} G_c \left(\frac{3}{8}\right)^2 (1-\alpha)^{\frac{p}{2}-1}$$

Après intégration et en utilisant la propriété $w(0) = 0$ que doit vérifier la fonction w, on obtient :

$$w(\alpha) = \left(\frac{3}{8}\right)^2 G_c \left(1 - \sqrt{(1-\alpha)^p}\right)$$

Remarque:
Ce modèle a bien la même réponse contrainte-déformation, cependant il a perdu la propriété de normalisation qui permet une convergence vers la bonne énergie de surface, à savoir :

$$4\int_0^1 \sqrt{w(\alpha)}d\alpha = 1$$

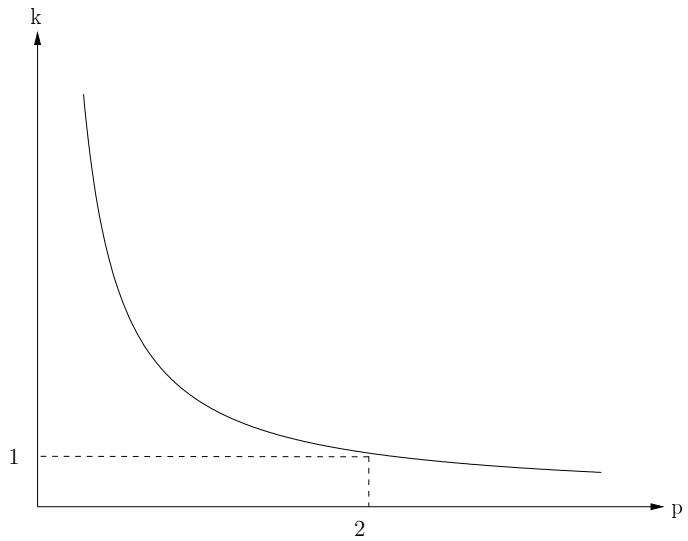

FIG. 2.2 – Représentation de la constante k en fonction de l'indice p

Pour y remédier on propose d'introduire une autre expression de w

$$w(\alpha) = \left(\frac{3}{8}\right)^2 k_c(1 - \sqrt{(1-\alpha)^p}) \quad \Rightarrow \quad k_c = kG_c$$

Il reste donc à calculer l'expression de k du modèle, pour ce faire, il faut que :

$$k = \left(\frac{2}{3}\frac{1}{\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1 - \sqrt{(1-\alpha)^p}}d\alpha}\right)^2$$

Cette constante k permet la normalisation de la fonctionnelle w afin d'avoir Γ-convergence de l'énergie totale vers le problème de rupture. On remarque que hormis pour certaines valeurs de p, le calcul analytique semble être très difficile (voir impossible), le calcul numérique de cette intégrale s'impose. Pour ce faire, il suffit d'utiliser l'une des nombreuses méthodes d'intégration qui existent dans la littérature (cf figure 2.2 où nous avons représenté la constante k en fonction de l'indice p).

Remarque:
En prenant $p = 2$ dans la famille de modèles (5), on obtient $k = 1$ et on retombe ainsi sur le modèle (3).

Pour cette famille de modèles, les fonctions A, w, A' et w' sont données par les expressions suivantes :

$$A(\alpha) = E_0(1-\alpha)^p \quad \Rightarrow \quad A'(\alpha) = -pE_0(1-\alpha)^{p-1}$$

et

$$w(\alpha) = k_c\left(\frac{3}{8}\right)^2\left(1 - \sqrt{(1-\alpha)^p}\right) \quad \Rightarrow \quad w'(\alpha) = k_c\frac{p}{2}\left(\frac{3}{8}\right)^2(1-\alpha)^{\frac{p}{2}-1}$$

En combinant ces expressions avec les propriétés d'écrouissage en déformation et en contrainte, nous obtenons :

$$\frac{d\varepsilon}{d\alpha} = \frac{3p}{32}\sqrt{\frac{k_c}{\eta E_0}}(1-\alpha)^{\frac{p}{4}-1} > 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{d\sigma}{d\alpha} = -\frac{9p}{32}\sqrt{\frac{k_c E_0}{\eta}}(1-\alpha)^{\frac{3p}{4}-1} < 0$$

On en déduit que ce modèle est adoucissant et le problème d'évolution de l'endommagement est donné par :

$$\begin{aligned}
\textbf{Condition d'irréversibilité} &: \dot{\alpha}_t \geq 0 \\
\textbf{Critère si } \dot{\alpha}_t = 0 \textbf{ alors} &: -\frac{\sigma^2 p}{2E_0}(1-\alpha_t)^{-p-1} + \left(\frac{3}{8}\right)^2\frac{k_c p}{2\eta}(1-\alpha_t)^{\frac{p}{2}-1} - 2k_c\eta\alpha_t'' \geq 0 \\
\textbf{C. L.} &: \alpha_t'(0) \leq 0 \text{ et } \alpha_t'(L) \geq 0 \\
\textbf{Critère si } \dot{\alpha}_t > 0 \textbf{ alors} &: -\frac{\sigma^2 p}{2E_0}(1-\alpha_t)^{-p-1} + \left(\frac{3}{8}\right)^2\frac{k_c p}{2\eta}(1-\alpha_t)^{\frac{p}{2}-1} - 2k_c\eta\alpha_t'' = 0 \\
\textbf{C. L.} &: \alpha_t'(0) = 0 \text{ et } \alpha_t'(L) = 0
\end{aligned}$$

2.2.3 Problème incrémental

Le problème d'évolution pose des difficultés d'ordre technique, puisqu'il s'agit d'un problème continu en temps. L'établissement de résultats précis d'existence, d'unicité et de régularité des solutions semble donc être difficile. Il est par contre plus facile d'en établir sur le problème incrémental, c'est-à-dire le problème obtenu après discrétisation en temps[40]. D'un point de vue numérique, c'est le problème incrémental qui est toujours résolu.

Pour construire ce problème incrémental, il suffit de remplacer la variable de temps continu t par une suite (discrète) de temps que l'on notera aussi t, on parlera alors d'étape ou de pas de temps t. Le problème incrémental consiste alors à trouver, les champs u_i et α_i (à t fixé au temps t_i) vérifiant :

$$\mathcal{P}_i'(u_i, \alpha_i)(v - u_i, \beta - \alpha_i) \geq 0 \qquad \forall (v, \beta) \in \mathcal{C}_1 \times D \tag{2.21}$$

En utilisant l'expression de u_i et grâce à l'équilibre de la barre à l'instant t_i, la dérivée première directionnelle est une forme linéaire définie sur $H^1(0, L)$ par

$$\mathcal{P}'(\alpha)(\beta) = \int_0^L \left(\frac{1}{2} \frac{t^2 L^2}{< s(\alpha) >^2} \frac{A'(\alpha)}{A^2(\alpha)} \beta + \frac{w'(\alpha)}{\eta} \beta + 2G_c \eta \alpha' \beta' \right) dx \geq 0 \tag{2.22}$$

Ainsi, les problèmes aux différentes étapes sont couplés, la solution à une étape dépend de la solution à l'étape précédente. Leur résolution se fait donc par induction à partir de la donnée α_0 du champ d'endommagement initial.

2.3 Possibilité de non existence avec forces imposées : champs limités

L'objectif de cette section est d'établir un résultat de non existence des solutions au problème incrémental. Pour cela, nous envisageons une structure à forces volumiques imposées, constituée d'un matériau adoucissant. La structure ne pourra pas supporter n'importe quel chargement et on se retrouve ainsi avec une contrainte de charge limite. Pour montrer ce résultat, nous reprenons le même exemple de la barre en traction, fixée à une extrémité mais soumise à une force à son autre extrémité et les forces extérieures linéiques seront prises nulles.

L'équilibre impose que la contrainte soit uniforme sur toute la barre. En appelant cette dernière σ, le critère d'endommagement s'écrit :

$$\frac{\sigma^2}{2} \frac{A'(\alpha)}{A(\alpha)^2} + \frac{w'(\alpha)}{\eta} - 2G_c \eta \alpha'' \geq 0 \quad \text{dans } (0, L) \tag{2.23}$$

En utilisant l'expression de la souplesse, ce critère peut encore se lire comme :

$$-\frac{\sigma^2}{2} s'(\alpha) + \frac{w'(\alpha)}{\eta} - 2G_c \eta \alpha'' \geq 0 \quad \text{dans } (0, L) \tag{2.24}$$

En intégrant cette équation sur le domaine $[0, L]$, on obtient :

$$-\frac{\sigma^2}{2} < s' > + \frac{< w' >}{\eta} - 2G_c \eta < \alpha'' > \geq 0 \tag{2.25}$$

[40] le problème obtenu est pour un temps t fixé

Puisque les conditions aux limites vérifient $\alpha'(0) = 0$ et $\alpha'(L) = 0$, alors $< \alpha'' >= 0$, ce qui nous conduit à :

$$\sigma^2 \leq \frac{2}{\eta} \frac{< w' >}{< s' >} = h(\alpha) \tag{2.26}$$

Or on sait que pour un matériau adoucissant, l'écrouissage en contrainte est négatif, ce qui nous implique que la dérivée de la fonction h est elle aussi négative et que par conséquent $\frac{< w' >}{< s' >}$ est une fonction décroissante. Son maximum est atteint en $\alpha = 0$. On a donc la majoration suivante :

$$\sigma^2 \leq 2 \frac{w'(0)}{\eta s'(0)} = \sigma_0^2 \tag{2.27}$$

Ainsi, on constate que la barre ne pourra supporter une traction plus grande que celle obtenue par la contrainte critique de premier endommagement c'est-à-dire σ_0. Autrement dit, comme les contraintes ne peuvent sortir du domaine d'élasticité initial, la structure ne pourra pas supporter n'importe quel force.

2.4 Non unicité et critère de stabilité

La non unicité est facile à mettre en évidence puisque le problème incrémental est mal posé et peut admettre une infinité de solutions. Pour le montrer, il suffit de reprendre le problème de traction simple de la barre à déplacement imposé. Il est alors possible de construire une infinité de solutions au problème incrémental, en jouant sur les zones avec décharge élastique. En réalité tout provient du fait que l'on ne contrôle pas la déformation en chaque point de la barre, mais seulement la déformation moyenne de cette dernière. Et comme pour un même niveau de contrainte, plusieurs valeurs de la déformation sont possibles, on peut engendrer ainsi une infinité de solutions.

Il reste alors la question de la stabilité des solutions. Cette non unicité de solution serait supportable si le critère de stabilité permettait d'en rejeter et d'en retenir quelques-unes. Afin de mieux comprendre ce qui se passe, on se propose de détailler le calcul de ces différentes réponses et d'introduire le critère de stabilité pour le problème de la barre.

2.4.1 Non Unicité

Pour notre exemple de la barre en traction, fixée à une extrémité et soumise à un déplacement imposé à son autre extrémité et avec des forces extérieures linéiques nulles, la réponse est d'abord élastique. Puis à un instant t_c tous les points de la barre atteignent le seuil d'endommagement et donc sont susceptibles de s'endommager. A partir de cet instant, on peut envisager différentes solutions comme par exemple la solution uniforme ou encore une solution avec localisation de l'endommagement. Revenons tout d'abord sur la solution élastique.

2.4.1.1 La réponse élastique

Au début, la réponse est évidemment élastique. La barre est saine donc l'endommagement est nul ($\alpha(x) = 0$). De plus, pendant cette phase on a $\dot{\alpha} = 0$. Ainsi, l'équilibre nous donne :

$$u' = tL \frac{s(\alpha)}{< s(\alpha) >} \quad \text{or} \quad \alpha(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad u' = tL \frac{1}{< 1 >} = t \tag{2.28}$$

En injectant la relation obtenue par l'équilibre, la loi seuil devient :

$$\frac{1}{2}A'(\alpha)t^2 + \frac{w'(\alpha)}{\eta} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad t^2 \leq -\frac{2}{\eta}\frac{w'(\alpha)}{A'(\alpha)} \tag{2.29}$$

d'où :

$$t^2 \leq -\frac{2}{\eta}\frac{w'(0)}{A'(0)} = t_c^2 \tag{2.30}$$

Quand $t > t_c$, la réponse élastique n'est plus viable et nécessairement la barre s'endommage. Toutefois, du fait de l'adoucissement, plusieurs évolutions sont possibles. Commençons par envisager la réponse homogène.

2.4.1.2 La réponse homogène

L'état homogène est caractérisé par un champ de déplacement linéaire $u(x) = tx$ et un champ d'endommagement uniforme (indépendant de x) $\alpha(x) = \alpha$. On se place à un instant t où le critère d'endommagement est atteint en tout point de la barre. Dans ce cas $\dot{\alpha} > 0$ et $\alpha'(x) = 0$, ainsi le critère seuil est donné par l'égalité suivante :

$$\frac{1}{2}A'(\alpha)u'^2 + \frac{w'(\alpha)}{\eta} = 0 \tag{2.31}$$

d'où

$$\varepsilon^2 = u'^2 = t^2 = -2\frac{w'(\alpha)}{\eta A'(\alpha)} \tag{2.32}$$

Comme le tenseur des contraintes est égal à $A(\alpha)\varepsilon(u)$, on obtient

$$\sigma^2 = 2\frac{w'(\alpha)}{\eta s'(\alpha)}$$

2.4.1.3 La réponse avec localisation de l'endommagement

La complexité à mettre en évidence cette localisation est uniquement liée au fait que le problème d'évolution général est très compliqué à étudier analytiquement. C'est pour cela que par la suite nous nous contenterons de faire cette étude[41] sur la classe de modèle (1)[42]. Pour ce modèle, le critère d'endommagement s'écrit :

$$\textbf{Condition d'irréversibilité} \quad : \quad \dot{\alpha} \geq 0 \tag{2.33}$$

$$\textbf{Critère si } \dot{\alpha} = 0 \textbf{ alors} \quad : \quad -2G_c\eta\alpha'' - \frac{\sigma^2}{E_0}\alpha \geq \frac{\sigma^2}{E_0} - \frac{G_c}{\eta} \tag{2.34}$$

$$\textbf{C. L.} \quad : \quad \alpha'(0) \leq 0 \text{ et } \alpha'(L) \geq 0 \tag{2.35}$$

$$\textbf{Critère si } \dot{\alpha} > 0 \textbf{ alors} \quad : \quad -2G_c\eta\alpha'' - \frac{\sigma^2}{E_0}\alpha = \frac{\sigma^2}{E_0} - \frac{G_c}{\eta} \tag{2.36}$$

$$\textbf{C. L.} \quad : \quad \alpha'(0) = 0 \text{ et } \alpha'(L) = 0 \tag{2.37}$$

[41] naissance de pustule sur un domaine de la barre

[42] l'étude de cette réponse avec localisation de l'endommagement sera donnée pour les autres modèles numériquement dans la section 2.6

On cherche maintenant une solution où la barre s'endommage sur un petit intervalle de longueur variable que l'on notera $2d$ centré en un point fixe arbitraire que l'on notera x_0 (cf figure 2.3). L'endommagement est nul à l'extérieur de ce segment. Comme le champ d'endommagement est continu, aux extrémités, le champ d'endommagement et sa dérivée spatiale sont nuls.

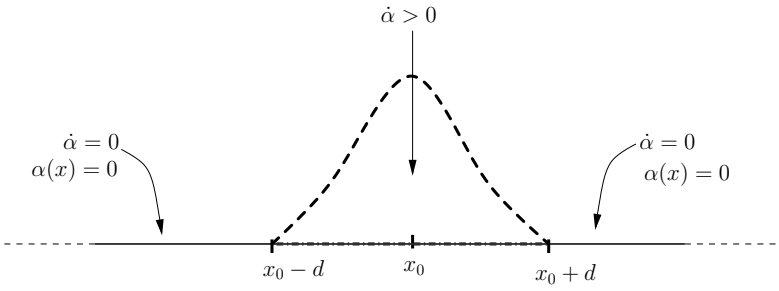

FIG. 2.3 – Croissance d'un pustule

Dans l'intervalle $[x_0 - d, x_0 + d]$[43], le critère d'endommagement est une égalité. En posant $\xi^2 = \dfrac{\sigma^2}{2\eta G_c E_0}$, ce critère s'écrit :

$$\textbf{Critère} \quad : \quad \alpha'' + \xi^2\alpha = -\xi^2 + \frac{1}{2\eta^2} \tag{2.38}$$

$$\textbf{C. L.} \quad : \quad \alpha(x_0 \pm d) = 0 \text{ et } \alpha'(x_0 \pm d) = 0 \tag{2.39}$$

C'est une équation différentielle d'ordre deux dont la solution générale est de la forme :

$$\alpha(x) = \frac{1}{2\eta^2\xi^2} - 1 + A\cos(\xi(x - x_0)) + B\sin(\xi(x - x_0)) \tag{2.40}$$

Avec les conditions aux limites :

$$\alpha(x_0 \pm d) = \alpha'(x_0 \pm d) = 0,$$

la répartition de l'endommagement, qui est un pustule de largeur $2d$, s'écrit :

$$1 + \alpha(x) = \frac{1}{2\eta^2\xi^2} + \left(\frac{1}{2\eta^2\xi^2} - 1\right)\cos(\xi(x - x_0)) \tag{2.41}$$

avec

$$d = \frac{\pi}{\xi}$$

soit encore :

$$\alpha(x) = 2\left(\frac{1}{2\eta^2\xi^2} - 1\right)\cos^2(\frac{\pi}{2d}(x - x_0)) \tag{2.42}$$

avec

$$d = \frac{\pi}{\xi}$$

[43] c'est-à-dire l'intervalle où le seuil d'endommagement est atteint

Remarques:

- Le pustule a une largeur initiale $2d = 2\pi\xi$ non nulle et indépendante du centre x_0, ce qui exige que la longueur de la barre soit supérieure à $2\pi\xi$ pour que le pustule puisse naître, d'où $\sigma \geq \frac{2\pi}{L}\sqrt{2\eta G_c E_0}$ et d'après la contrainte sur σ obtenue lors du calcul de la phase élastique, on en déduit que η doit être assez petit pour que cette condition soit vérifiée.
- De plus, en prenant x_0 suffisamment proche du milieu de la barre, on a construit une solution autre que la solution uniforme au problème d'évolution (pour t voisin de t_c). En réalité lorsque l'on construit cette solution (indépendante du choix du centre x_0), on en construit une infinité.

Avec le temps, ce pustule va s'étendre (d croît) et s'amplifier (α croît). Il va atteindre un des deux bords à un instant que l'on peut calculer grâce à (2.9). Il peut alors continuer à évoluer tout en gardant sa forme de pustule mais en déplaçant son centre ou alors ce pustule peut continuer à augmenter sur ces bords jusqu'à revenir vers une solution uniforme. On peut même envisager la croissance de demi-pustules aux extrémités de la barre. On peut aussi envisager la naissance d'un pustule à partir d'une réponse homogène, c'est-à-dire une bifurcation de la branche homogène.

2.4.2 Critère de stabilité

Comme nous avons pu le voir à la section précédente, une infinité de solutions à ce problème d'évolution est engendrée. Cette non unicité de la solution n'est pas un problème si un critère nous permet d'en selectionner quelques unes. Le critère de stabilité permettrait de faire cette sélection. Introduit au chapitre 1, nous proposons ici de rappeler les principales propriétés de ce dernier.
L'énergie totale s'écrit :

$$\mathcal{P}(u,\alpha) = \int_0^L (\frac{1}{2}A(\alpha)u'^2 + \frac{w(\alpha)}{\eta} + G_c\eta\alpha'^2)dx \tag{2.43}$$

Cette fonctionnelle est 2 fois différentiables en u, α. On la développe alors au second ordre[44] autour de l'état (u, α), et on obtient :

$$\mathcal{P}(u+hv,\alpha+h\beta) - \mathcal{P}(u,\alpha) = h\mathcal{P}'(u,\alpha)(v,\beta) + \frac{1}{2}h^2\mathcal{P}''(v,\beta) + O(h^3) \tag{2.44}$$

La dérivée première est une forme linéaire donnée par :

$$\mathcal{P}'(u,\alpha)(v,\beta) = \mathcal{P}'_u(u,\alpha)(v) + \mathcal{P}'_\alpha(u,\alpha)(\beta) \tag{2.45}$$

En utilisant l'équilibre de la barre, c'est-à-dire $\mathcal{P}'_u(u,\alpha)(v) = 0$, on obtient :

$$\mathcal{P}'(u,\alpha)(v,\beta) = \int_0^L \left(\frac{1}{2}A'(\alpha)u'^2 + \frac{w'(\alpha)}{\eta} - 2G_c\eta\alpha''\right)\beta dx \tag{2.46}$$

La dérivée seconde est une forme quadratique donnée par :

$$\mathcal{P}''(u,\alpha)(v,\beta) = P''_{uu}(u,\alpha)(v,v) + 2P''_{u\alpha}(u,\alpha)(v,\beta) + P''_{\alpha\alpha}(u,\alpha)(\beta,\beta) \tag{2.47}$$

[44] le prime désigne la dérivée spatiale

En développant les calculs, cette dérivée peut s'écrire :

$$\begin{aligned}\mathcal{P}''(u,\alpha)(v,\beta) &= \int_0^L A(\alpha)v'^2dx + 2\int_0^L A'(\alpha)u'v'\beta dx \\ &+ \int_0^L \left(\frac{1}{2}A''(\alpha)u'^2 + \frac{w''(\alpha)}{\eta}\right)\beta^2 dx \\ &+ \int_0^L 2G_c\eta\beta'^2 dx\end{aligned} \tag{2.48}$$

En utilisant encore une fois l'équilibre de la barre, cette dérivée seconde peut se lire :

$$\begin{aligned}\mathcal{P}''(u,\alpha)(v,\beta) &= \int_0^L A(\alpha)(v' - \beta s'(\alpha)A(\alpha)\varepsilon)^2 dx \\ &- \int_0^L \left(\frac{1}{2}s''(\alpha)(A(\alpha)\varepsilon)^2 - \frac{w''(\alpha)}{\eta}\right)\beta^2 dx \\ &+ \int_0^L 2G_c\eta\beta'^2 dx\end{aligned} \tag{2.49}$$

En effet, on sait que :

$$s' = -\frac{A'}{A^2} \quad \text{et} \quad s'' = -\frac{A''}{A^2} + 2\frac{A'^2}{A^3}$$

d'où

$$A' = -s'A^2 \quad \text{et} \quad A'' = -s''A^2 + 2s'^2A^3$$

On injecte ces expressions dans l'équation (2.48) et on obtient :

$$\begin{aligned}\mathcal{P}''(u,\alpha)(v,\beta) &= \int_0^L A(\alpha)v'^2dx \\ &- 2\int_0^L s'(\alpha)A^2(\alpha)u'v'\beta dx \\ &+ \int_0^L \left(\frac{1}{2}(2s'^2(\alpha)A^3(\alpha) - s''(\alpha)A^2(\alpha))u'^2 + \frac{w''(\alpha)}{\eta}\right)\beta^2 dx \\ &+ \int_0^L 2G_c\eta\beta'^2 dx\end{aligned} \tag{2.50}$$

d'où

$$\begin{aligned}\mathcal{P}''(u,\alpha)(v,\beta) &= \int_0^L A(\alpha)v'^2 - 2A^2(\alpha)s'(\alpha)u'v'\beta + A^3(\alpha)s'^2(\alpha)u'^2\beta^2 dx \\ &+ \int_0^L \left(\frac{w''(\alpha)}{\eta} - \frac{1}{2}s''(\alpha)A^2(\alpha)u'^2\right)\beta^2 dx \\ &+ \int_0^L 2G_c\eta\beta'^2 dx\end{aligned} \tag{2.51}$$

On remarque que la première intégrale est un carré parfait, ce qui nous donne l'expression (2.49). La dérivée première étant identiquement nulle, il s'agit d'étudier le signe de la dérivée seconde afin d'étudier la stabilité des états (u,α). Dans la suite, nous allons regarder d'abord le cas de la réponse élastique.

Stabilité de la réponse élastique
Les états d'équilibre élastiques (lorsqu'ils existent), c'est-à-dire ceux pour lesquels aucun point de la structure n'a atteint le critère d'endommagement sont stables. En effet, si (u, α) est un état homogène en phase élastique alors $u(x) = tx$ et $\alpha(x) = 0$, ainsi la dérivée première peut se lire :

$$\mathcal{P}'(u,\alpha)(v,\beta) = \int_0^L \left(\frac{1}{2}A'(0)u'^2 + \frac{w'(0)}{\eta}\right)\beta dx \tag{2.52}$$

de plus, cette dérivée est strictement positive pour β non nul, en effet

$$\mathcal{P}'(u,\alpha)(v,\beta) = \left(\frac{1}{2}A'(0)t^2 + \frac{w'(0)}{\eta}\right)\int_0^L \beta dx$$

On peut conclure que tout état homogène en phase élastique est un état stable. Autrement dit, les états d'équilibre élastiques sont des minima locaux.

2.5 Étude des réponses homogènes et de leur stabilité, effets d'échelles

Dans cette section, nous allons étudier la stabilité des états homogènes, c'est-à-dire ceux tels que les déformations et l'endommagement ne dépendent pas du point x. D'un point de vue pratique, la stabilité des états homogènes est essentielle pour l'identification expérimentale de la loi de comportement. On mettra en évidence, en particulier, les effets d'échelles qui interviennent dans les calculs de stabilité. Nous allons rappeler dans un premier temps les propriétés de la réponse homogène pour toutes les familles de modèles d'endommagement que nous avons introduites précédemment.

2.5.1 Les réponses homogènes

Pour un état homogène (u, α), c'est-à-dire $(u(x) = tx, \alpha(x) = \alpha_H)$, la dérivée première de l'énergie totale de la barre s'écrit

$$\mathcal{P}'(u,\alpha_H)(v,\beta) = \left(\frac{1}{2}A'(\alpha_H)u'^2 + \frac{w'(\alpha_H)}{\eta}\right)\int_0^L \beta dx \tag{2.53}$$

La condition $\mathcal{P}'(u,\alpha_H)(v,\beta) \geq 0$, nous induit le critère d'endommagement suivant :

$$\frac{1}{2}A'(\alpha_H)t^2 + \frac{w'(\alpha_H)}{\eta} \geq 0 \quad \text{dans } (0, L) \tag{2.54}$$

Remarque:
Suivant que l'inégalité dans (2.54) est stricte ou qu'il y a égalité, le seuil d'endommagement sera atteint respectivement nulle part ou partout dans la structure. Les premiers états (avec inégalité stricte) sont les états élastiques, alors que les deuxièmes (avec égalité) sont les états en phase d'endommagement.

La dérivée première (2.53) est nulle si (u, α_H) est un état homogène en phase d'endommagement et si β est non nulle. Ainsi, à l'instant t_c où le critère d'endommagement est atteint en tout point de la barre. On a :

$$\frac{1}{2}A'(\alpha_H)t^2 + \frac{w'(\alpha_H)}{\eta} = 0 \quad \text{pour} \quad t^2 \geq t_c^2 = -2\frac{w'(0)}{\eta A'(0)} \tag{2.55}$$

En reprenant les familles de modèles, nous obtenons :

Le Modèle 1

Le segment linéaire correspond à la réponse élastique : cette réponse est viable tant que $t \leq t_c = \sqrt{\dfrac{G_c}{\eta E_0}}$.
La diminution correspond à la branche d'endommagement uniforme : cette réponse est possible lorsque $t > t_c$.
L'expression de la contrainte est donnée par $\sigma = E_0 \left(\dfrac{G_c}{\eta E_0}\right)^{\frac{2}{3}} t^{-\frac{1}{3}}$ et l'expression de l'endommagement est donnée par $\alpha_H = \left(\dfrac{\eta E_0}{G_c} t^2\right)^{\frac{1}{3}} - 1$.

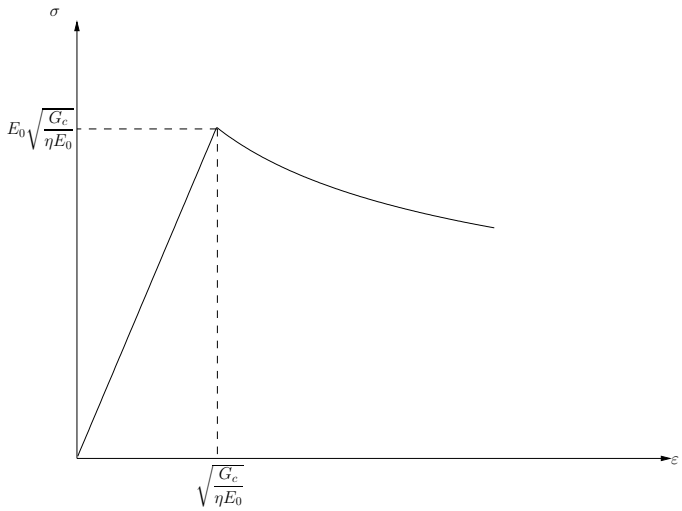

FIG. 2.4 – Réponse élastique et homogène de la barre

Le Modèle 2

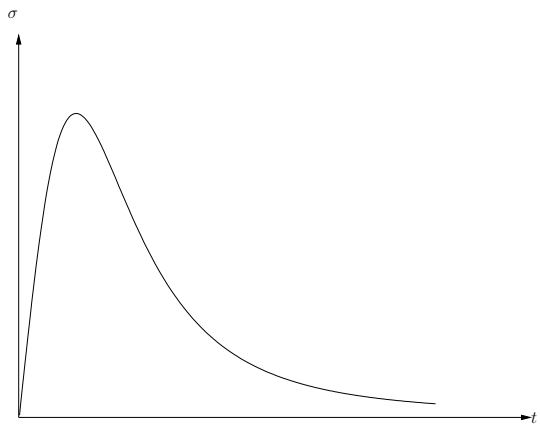

FIG. 2.5 – Réponse homogène de la barre

Ce modèle n'admet pas de réponse élastique puisque $t_c = 0$.
La courbe de la figure 2.5 est celle associée à la réponse uniforme : cette réponse est viable lorsque $t > 0$.
L'expression de la contrainte est donnée par $\sigma = E_0 \left(\dfrac{G_c}{G_c + 2\eta E_0 t^2}\right)^2 t$ et l'expression de l'endommagement est donnée par $\alpha_H = \dfrac{2\eta E_0 t^2}{G_c + 2\eta E_0 t^2}$.
Ainsi le modèle et d'abord durcissant et redevient adoucissant dés lors que $t > \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{3}{2}\dfrac{G_c}{\eta E_0}}$.

Le Modèle 3

Le segment linéaire correspond à la réponse élastique : cette réponse est observable tant que $t \leq t_c = \dfrac{3}{8}\sqrt{\dfrac{G_c}{\eta E_0}}$.

La diminution correspond à la branche d'endommagement uniforme : cette réponse est possible lorsque $t > t_c$.

L'expression de la contrainte est donnée par $\sigma = E_0 \left(\left(\dfrac{3}{8}\right)^2 \dfrac{G_c}{\eta E_0 t^2} \right)^2 t$ et l'expression de l'endommagement est donnée par $\alpha_H = 1 - \left(\dfrac{3}{8}\right)^2 \dfrac{G_c}{\eta E_0 t^2}$.

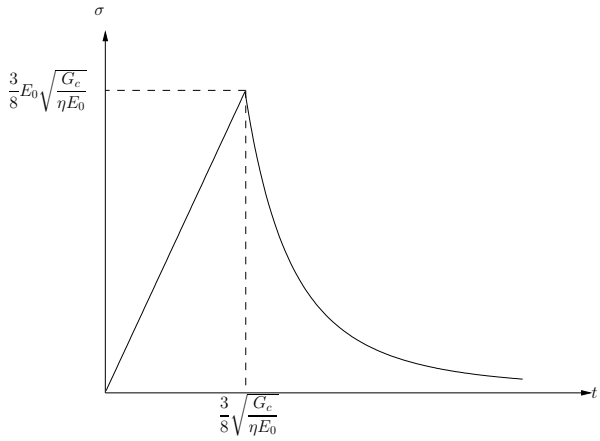

FIG. 2.6 – Réponse élastique et homogène de la barre

Le Modèle 4

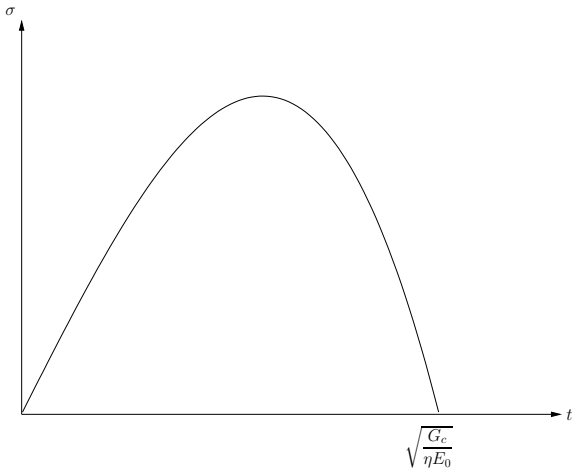

FIG. 2.7 – Réponse homogène de la barre

Ce modèle n'admet pas de réponse élastique puisque $t_c = 0$.

La courbe de la figure 2.7 est celle associée à la réponse uniforme : cette réponse est viable lorsque $t > 0$.

L'expression de la contrainte est donnée par $\sigma = E_0 \left(1 - \dfrac{\eta E_0}{G_c} t^2\right) t$ et l'expression de l'endommagement est donnée par $\alpha_H = \dfrac{\eta E_0}{G_c} t^2$. De plus, ce modèle doit satisfaire la condition $\alpha_H \in [0, 1]$, c'est-à-dire que l'on doit satisfaire $t < \sqrt{\dfrac{G_c}{\eta E_0}}$.

Ainsi le modèle et d'abord durcissant et redevient adoucissant dés lors que $\sqrt{\dfrac{1}{3}\dfrac{G_c}{\eta E_0}} < t < \sqrt{\dfrac{G_c}{\eta E_0}}$.

La famille de Modèle 5

Le segment linéaire correspond à la réponse élastique : cette réponse existe tant que $t \leq t_c = \frac{3}{8}\sqrt{\frac{k_c}{\eta E_0}}$.
La diminution correspond à la branche d'endommagement uniforme : cette réponse est viable lorsque $t > t_c$.
L'expression de la contrainte est donnée par $\sigma = E_0 \left(\left(\frac{3}{8}\right)^2 \frac{k_c}{\eta E_0 t^2} \right)^2 t$ et l'expression de l'endommagement est donnée par $\alpha_H = 1 - \left(\left(\frac{3}{8}\right)^4 \left(\frac{k_c}{\eta E_0 t}\right)^2 \right)^{\frac{1}{p}}$.

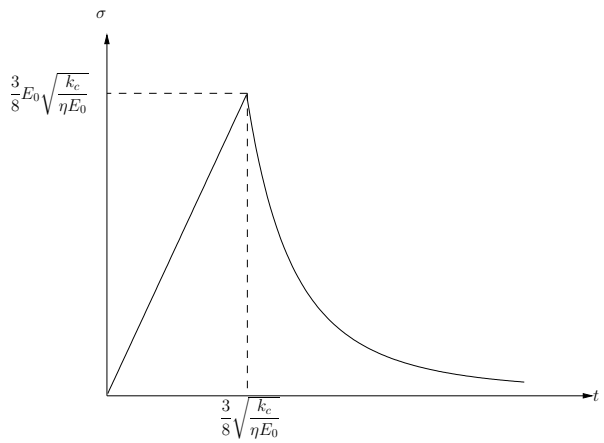

FIG. 2.8 – Réponse élastique et homogène de la barre

2.5.2 Études de leur stabilité : effets d'échelles

Dans cette sous-section, nous allons étudier la stabilité des états homogènes associés à $u(x) = tx$, $\alpha(x) = \alpha_H$. Pour ce faire, nous allons dans un premier temps effectuer les calculs de stabilité dans le cas général, c'est-à-dire des calculs sans expliciter les fonctions $A(\alpha)$ et $w(\alpha)$. On montrera que la stabilité de tels états tient essentiellement à la taille du domaine. Puis, dans un second temps, nous appliquerons ces calculs de stabilité sur nos cinq familles de modèles.

2.5.2.1 Cas général

Il s'agit de voir si l'état homogène est stable. Le critère d'endommagement pour de tels états est donné par :

$$\frac{1}{2}A'(\alpha_H)\varepsilon_H^2 + \frac{w'(\alpha_H)}{\eta} = 0 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_H^2 = -2\frac{w'(\alpha_H)}{\eta A'(\alpha_H)} \tag{2.56}$$

Cela se traduit par une dérivée première de l'énergie totale nulle. On doit donc s'intéresser au terme d'ordre 2 : $\mathcal{P}''$ pour statuer de la stabilité de l'état homogène. L'expression de la dérivée seconde de l'énergie totale de la structure dans une direction (v, β) est donnée par :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}''(u, \alpha_H)(v, \beta) &= \int_0^L A(\alpha_H)(v' - \beta s'(\alpha_H)A(\alpha_H)\varepsilon)^2 dx \\ &- \left(\frac{1}{2}s''(\alpha_H)(A(\alpha_H)\varepsilon)^2 - \frac{w''(\alpha_H)}{\eta}\right)\int_0^L \beta^2 dx \\ &+ \int_0^L 2\eta G_c \beta'^2 dx \end{aligned} \tag{2.57}$$

En introduisant les quantités suivantes : $A_H = A(\alpha_H)$, $\sigma_H = A_H\varepsilon_H$ et $e_H = s'(\alpha_H)A_H\varepsilon_H$, la

dérivée seconde (2.57) peut se lire comme :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}''(u,\alpha_H)(v,\beta) &= \int_0^L A_H(v'-\beta e_H)^2 dx + \int_0^L 2\eta G_c \beta'^2 dx \\ &- (\frac{1}{2}s''(\alpha_H)\sigma_H^2 - \frac{w''(\alpha_H)}{\eta}) \int_0^L \beta^2 dx \end{aligned} \tag{2.58}$$

Remarques:

- Le premier et le deuxième termes sont positifs car ce sont des intégrales de carré alors que le troisième terme (avec le signe -) est négatif compte tenu de la condition d'adoucissement (1.18).
- Pour établir des résultats de stabilité, on raisonnera par la suite sur le signe de la somme des deux premiers termes. En effet, si on peut trouver une direction admissible (v,β) et h[45]> 0 tels que cette somme soit négative alors l'état sera instable. Si cette somme est strictement positive pour toute direction admissible (v,β) et pour h assez petit, on conclura à la stabilité de l'état.

La dérivée première étant identiquement nulle, il s'agit d'étudier le signe de la dérivée seconde. Pour cela nous introduisons le quotient de Rayleigh défini quand $\beta \neq 0$, par :

$$\mathcal{R}(v,\beta) = \frac{\displaystyle\int_0^L A_H(v'-\beta e_H)^2 + 2\eta G_c \beta'^2 dx}{\displaystyle\int_0^L \beta^2 dx} \tag{2.59}$$

L'objectif sera de trouver le minimum de ce quotient, en effet, si on note :

$$\lambda(\varepsilon_H,\alpha_H,[0,L]) = \min_{C_0\times D} \mathcal{R}(v,\beta) \tag{2.60}$$

alors les états homogènes en phase d'endommagement seront :

- **Stables :** si $0 < \lambda(\varepsilon_H,\alpha_H,[0,L]) < (\frac{1}{2}s''(\alpha_H)\sigma_H^2 - \frac{w''(\alpha_H)}{\eta})$
- **Instables :** si $0 < (\frac{1}{2}s''(\alpha_H)\sigma_H^2 - \frac{w''(\alpha_H)}{\eta}) < \lambda(\varepsilon_H,\alpha_H,[0,L])$

Remarque:
L'infimum du quotient de Rayleigh obtenu dépend de l'état homogène considéré et aussi du domaine Ω, c'est-à-dire de la longueur de la barre.

Nous nous proposons alors de montrer que la stabilité de tels états tient essentiellement à la taille du domaine. En effet, on peut avancer qu'il existe une taille critique L_c (dépendant de l'état homogène) en-deçà de laquelle l'état homogène est stable et au delà de laquelle il devient instable. Pour montrer cela, nous considérons un état homogène et une famille de domaines homothétiques ne se différenciant que par leurs tailles, nous posons :

$$\Omega = L\Omega_1 \quad \text{d'où} \quad [0,L] = L[0,1] \tag{2.61}$$

[45] cf preuve de la proposition 1.6 pour la définition de la variable h

le domaine Ω_1 étant le domaine de référence : sa taille est normalisée. Moyennant le changement de variable suivant :

$$y = \frac{x}{L} \tag{2.62}$$

on peut renvoyer tous les domaines sur le domaine de référence. Ce changement de variable implique la normalisation du champ de déplacement suivant la règle suivante : $v(x) = Lv(y)$, les champs d'endommagement étant des scalaires, ils se retrouvent seulement transportés, c'est-à-dire $\beta(x) = \beta(y)$. Ainsi, le quotient de Rayleigh normalisé peut se mettre sous la forme :

$$\mathcal{R}(v,\beta) = \frac{\displaystyle\int_0^1 A_H(v' - \beta e_H)^2 + 2\frac{\eta G_c}{L^2}\beta'^2 dy}{\displaystyle\int_0^1 \beta^2 dy} \tag{2.63}$$

les couples (v, β) vivant dans l'espace normalisé $\mathcal{C}_0 \times D$.

Proposition 2.3 *Le minimum du quotient de Rayleigh est donné par :*

$$\lambda(\varepsilon_H, \alpha_H, [0,1]) = \min\{\lambda_1; \lambda_2\} = \min\left\{\frac{2w'(\alpha_H)s'(\alpha_H)}{\eta s(\alpha_H)}; \left(\frac{2^3\pi^2 G_c}{\eta L^2}\frac{s'(\alpha_H)^2 w'(\alpha_H)^2}{s(\alpha_H)^2}\right)^{\frac{1}{3}}\right\} \tag{2.64}$$

Preuve:
On doit résoudre le problème de minimisation suivant :

$$\lambda = \min_{\substack{v,\beta \\ \begin{cases} v(0)=0 \\ v(1)=0 \\ \beta \geq 0 \end{cases}}} \frac{\displaystyle\int_0^1 A_H(v' - \beta e_H).(v' - \beta e_H)dy + 2\frac{\eta G_c}{L^2}\int_0^1 \beta'^2 dy}{\displaystyle\int_0^1 \beta^2 dy} \tag{2.65}$$

La minimisation de (2.65) par rapport à la variable v nous induit

$$\int_0^1 A_H(v' - \beta e_H).w' dy = 0 \quad \forall w \in H_0^1(0,1) \tag{2.66}$$

On intègre l'équation précédente par partie, et on obtient :

$$\int_0^1 (A_H(v' - \beta e_H))' w dy = 0 \quad \forall w \in H_0^1(0,1)$$

d'où $(A_H(v' - \beta e_H))' = 0$ ainsi $A_H(v' - \beta e_H) = cste$ donc $v' = -\beta e_H + \dfrac{cste}{A_H}$.
En intégrant cette expression et en tenant compte des conditions limites sur v, on obtient : $cste = -A_H e_H \displaystyle\int_0^1 \beta dy$, d'où l'expression de v' donnée par :

$$v' = -e_H \int_0^1 \beta dy + \beta e_H \tag{2.67}$$

L'élimination de v de la fonctionnelle nous donne l'expression suivante :

$$\mathcal{R}(\beta) = \frac{A_H e_H^2 \left(\int_0^1 \beta dy\right)^2 + 2\frac{\eta G_c}{L^2}\int_0^1 \beta'^2 dy}{\int_0^1 \beta^2 dy} \tag{2.68}$$

le problème de minimisation (2.65) se ramène à :

$$\lambda = \min_{\beta \geq 0} \mathcal{R}(\beta) \tag{2.69}$$

La minimisation suivant β nous induit

$$\mathcal{R}'(\beta)(\gamma - \beta) \geq 0 \quad \forall \gamma \geq 0 \tag{2.70}$$

en posant $\delta = \gamma - \beta$, on obtient

$$A_H e_H^2 \int_0^1 \beta dx \int_0^1 \delta dy + 2\frac{\eta G_c}{L^2}\int_0^1 \beta'\delta' dy - \lambda \int_0^1 \beta\delta dy \geq 0 \quad \forall \delta \geq 0 \tag{2.71}$$

soit après intégration par parties,

$$\int_0^1 \left(A_H e_H^2 \int_0^1 \beta dy - \lambda\beta - 2\frac{\eta G_c}{L^2}\beta''\right)\delta dy + 2\frac{\eta G_c}{L^2}\left[\beta'\delta\right]_0^1 \geq 0 \quad \forall \delta \geq 0 \tag{2.72}$$

De cette équation, nous obtenons deux cas à étudier

1. Soit $\beta(y) > 0$ alors :

$$A_H e_H^2 \int_0^1 \beta dy - \lambda\beta - 2G_c\frac{\eta}{L^2}\beta'' = 0 \qquad \text{et} \qquad \beta'(0) = 0 \quad \text{et} \quad \beta'(1) = 0$$

2. Soit $\beta(y) = 0$ sur $J \subset [0,1]$ (avec $mes(J) \neq 0$) alors :

$$A_H e_H^2 \int_{[0,1]\setminus J} \beta dy - \lambda\beta - 2G_c\frac{\eta}{L^2}\beta'' \geq 0 \qquad \text{et} \qquad \beta'(0) \leq 0 \quad \text{et} \quad \beta'(1) \geq 0$$

Cas 1 : Soit $\beta(y) > 0$ partout, on a à résoudre l'équation différentielle suivante

$$\begin{cases} 2\frac{\eta G_c}{L^2}\beta'' + \lambda\beta = A_H e_H^2 \int_0^1 \beta dy \\ \beta'(0) = 0 \quad \text{et} \quad \beta'(1) = 0 \end{cases}$$

On pose alors $k = \int_0^1 \beta dy$, et on obtient après résolution et en tenant compte des conditions limites :

$$\beta(y) = \frac{A_H e_H^2 k}{\lambda} + A\cos(\sqrt{\frac{\lambda}{2\eta G_c}}Ly) \qquad \text{avec} \qquad A = 0 \quad \text{ou} \quad \sqrt{\frac{\lambda}{2\eta G_c}}L = \pi \tag{2.73}$$

On a ainsi deux sous-cas à étudier :

a. Soit $A = 0$, alors $\beta = \dfrac{A_H e_H^2 k}{\lambda}$, en injectant cette expression dans celle du quotient de Rayleigh donnée par (2.69), on obtient $\lambda = A_H e_H^2 = \lambda_1$

b. Soit $\sqrt{\dfrac{\lambda}{2\eta G_c}} L = \pi \Rightarrow \lambda = 2\eta G_c \left(\dfrac{\pi}{L}\right)^2$, en injectant cette expression dans celle de (2.73), on obtient encore une fois $\lambda = A_H e_H^2 = \lambda_1$

Cas 2 : Soit $\beta(y) = 0$ dans une région et $\beta(y) > 0$ ailleurs. Au vu de l'équation qui régit β, nous allons supposer la création d'une demi cloche sur l'intervalle $[0, d]$ (β est non nulle sur cet intervalle $[0, d]$ et nulle sur $[d, 1]$. On a à résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} 2\dfrac{\eta G_c}{L^2}\beta'' + \lambda\beta = A_H e_H^2 k & \text{sur } [0, d] \\ \beta'(0) = 0 \quad \text{et} \quad \beta'(d) = 0 \quad \text{et} \quad \beta(d) = 0 \end{cases}$$

On obtient après résolution :

$$\beta(y) = \begin{cases} \dfrac{A_H e_H^2 k}{\lambda} + \dfrac{A_H e_H^2 k}{\lambda}\cos(\dfrac{\pi}{d}y) & \text{sur} \quad [0, d] \\ 0 & \text{sur} \quad [d, 1] \end{cases} \quad \text{avec} \quad \sqrt{\frac{\lambda}{2\eta G_c}} L d = \pi$$

d'où $d = \dfrac{\pi}{L}\sqrt{\dfrac{2\eta G_c}{\lambda}}$, de plus, $k = \displaystyle\int_0^1 \beta(y)dy = \int_0^d \beta(y)dy$, d'où $d = \dfrac{\lambda}{A_H e_H^2}$. En égalisant les deux expressions obtenues pour d, on obtient $\lambda = \lambda_2$

◇

Proposition 2.4 *Au vu de la proposition 2.3, on peut conclure avec le résultat de stabilité suivant :*

- **Si** $\lambda_1 \leq \lambda_2$ *alors le minimum du quotient de Rayleigh est* λ_1 *mais puisque :*
$$\lambda_1 > \frac{1}{2}s''(\alpha_H)\sigma_H.\sigma_H - \frac{w''(\alpha_H)}{\eta}$$
alors l'état homogène est toujours stable.
- **Si** $\lambda_2 > \lambda_1$ *alors le minimum du quotient de Rayleigh est* λ_2 *et l'état homogène est stable si et seulement si* $\lambda_2 > \dfrac{1}{2}s''(\alpha_H)\sigma_H.\sigma_H - \dfrac{w''(\alpha_H)}{\eta}$.

Proposition 2.5 *L'expression de la longueur critique de la barre en fonction de* α *est donnée par :*

$$L_c(\alpha)^2 = \frac{2^3\pi^2 G_c s'(\alpha)^5 w'(\alpha)^2}{s(\alpha)^2(s''(\alpha)w'(\alpha) - s'(\alpha)w''(\alpha))^3}\eta^2 \tag{2.74}$$

Preuve:
Dans le cas où $\lambda_2 > \lambda_1$, alors l'état homogène est stable si et seulement si :

$$\lambda_2 > \frac{1}{2}s''(\alpha_H)\sigma_H.\sigma_H - \frac{w''(\alpha_H)}{\eta}$$

Soit :

$$\left(\frac{2^3\pi^2 G_c}{\eta L^2}\frac{s'(\alpha_H)^2 w'(\alpha_H)^2}{s(\alpha_H)^2}\right)^{\frac{1}{3}} > \frac{1}{2}s''(\alpha_H)\sigma_H.\sigma_H - \frac{w''(\alpha_H)}{\eta}$$

d'où l'expression de la longueur critique.

◇

2.5.2.2 Cas particuliers : quelques familles de modèles d'endommagement

Nous nous proposons dans cette sous-section de dégager les propriétés de stabilité des solutions homogènes de chaque modèle, en explicitant l'expression de la longueur critique.

Le Modèle 1

On trouve

$$L_c^2 = \left(2^5\pi^2\eta^2(1+\alpha)\right)$$

et

$$\varepsilon^2 = \frac{G_c}{\eta E_0}(1+\alpha)^3$$

soit la relation suivante entre la longueur critique et la déformation

$$L_c(\varepsilon) = \sqrt{2^5\pi^2\eta^2\left(\frac{\eta E_0}{G_c}\right)^{\frac{1}{3}}\varepsilon^{\frac{1}{3}}}$$

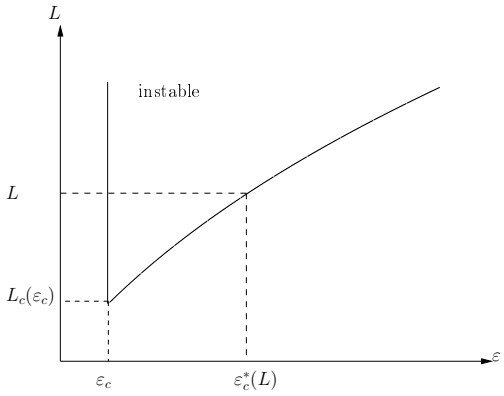

FIG. 2.9 – L_c vs. déformation moyenne

D'après l'expression de la longueur critique, une barre de longueur L :
- Si $L < L_c(\varepsilon_c)$, alors l'état homogène est stable pour tout ε
- Si $L > L_c(\varepsilon_c)$, alors l'état homogène est stable pour $\varepsilon < \varepsilon_c$ ou $\varepsilon > \varepsilon_c^*(L)$.

Le Modèle 2

On trouve

$$L_c^2 = 2^6\pi^2\eta^2\left(\frac{\alpha^2(1-\alpha)}{(4\alpha-1)^3}\right)$$

et

$$\varepsilon^2 = \frac{G_c}{2\eta E_0}\frac{\alpha}{1-\alpha}$$

soit la relation suivante entre la longueur critique et la déformation

$$L_c(\varepsilon) = 2^3\pi\eta\sqrt{\frac{k\varepsilon^4}{(3\varepsilon^2-k)^3}}$$

avec $k = \dfrac{G_c}{2\eta E_0}$

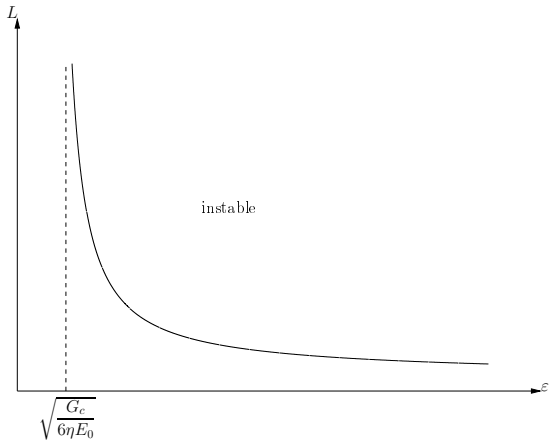

FIG. 2.10 – L_c vs. déformation moyenne

D'après les propriétés de ce modèle, la longueur critique décroît avec la déformation. Dès que l'état homogène est instable, il le reste.

Le Modèle 3

On trouve

$$L_c^2 = \frac{2^5\pi^2\eta^2}{3^3\left(\frac{3}{8}\right)^2}(1-\alpha)$$

et

$$\varepsilon^2 = \left(\frac{3}{8}\right)^2 \frac{G_c}{\eta E_0}\frac{1}{1-\alpha}$$

soit la relation suivante entre la longueur critique et la déformation

$$L_c(\varepsilon) = \sqrt{\frac{2^5\pi^2}{3^3}\frac{\eta G_c}{E_0}}\frac{1}{\varepsilon}$$

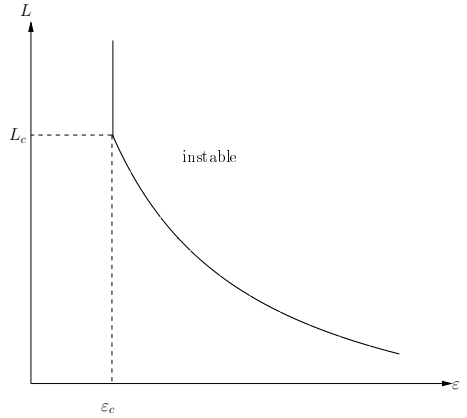

FIG. 2.11 – L_c vs. déformation moyenne

D'après l'expression de la longueur critique, une barre de longueur L plus petite que $L_c(\varepsilon)$ soumise à une déformation moyenne ε croissante réagira d'abord élastiquement (tant que $\varepsilon < \varepsilon_c$), puis, dans une deuxième phase, s'endommagera de façon homogène car l'état homogène est stable tant que $L < L_c(\varepsilon)$ puis ce dernier deviendra instable si $L > L_c(\varepsilon)$, puisque la longueur critique décroît avec la déformation. Dès que l'état homogène est instable il le reste et il ne redeviendra jamais stable.

Le Modèle 4

On trouve

$$L_c^2 = 2^4\pi^2\eta^2\left(\frac{\alpha^2(1-\alpha)}{(3\alpha-1)^3}\right)$$

et

$$\varepsilon^2 = \frac{G_c}{\eta E_0}\alpha$$

soit la relation suivante entre la longueur critique et la déformation

$$L_c(\varepsilon) = 2^2\pi\eta\sqrt{\frac{k^2\varepsilon^4(1-k\varepsilon^2)}{(3k\varepsilon^2-1)^3}}$$

avec $k = \dfrac{\eta E_0}{G_c}$.

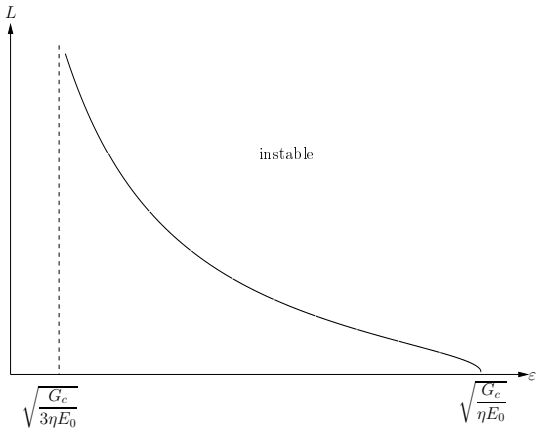

FIG. 2.12 – L_c vs. déformation moyenne

D'après les propriétés de ce modèle, la longueur critique décroît avec la déformation. Lorsque l'état homogène est instable il le reste pour toujours.

La famille de Modèle 5

En posant $c = \left(\frac{3}{8}\right)^2 k_c$, on trouve :

$$L_c(\alpha)^2 = \frac{2^4\pi^2\eta^2}{c}\frac{p}{(\frac{p}{2}+2)^3}(1-\alpha)^{-\frac{p}{2}+2}$$

et

$$\varepsilon^2 = \frac{c}{\eta E_0}(1-\alpha)^{-\frac{p}{2}}$$

soit la relation suivante entre la longueur critique et la déformation

$$L_c(\varepsilon) = 2^2\pi\eta\sqrt{\frac{p}{c(\frac{p}{2}+2)^3}\left(\frac{c}{\eta E_0}\right)^{\frac{4}{p}-1}}\varepsilon^{1-\frac{4}{p}}$$

On est tenté de penser que puisque ces modèles ont la même réponse contrainte-déformation, ils devraient avoir aussi les mêmes propriétés de stabilité. Et pourtant, leurs propriétés de stabilité diffèrent puisqu'elles dépendent de l'indice p. En effet, pour $p > 4$, la longueur critique croît avec la déformation, alors que pour $p < 4$ la longueur critique décroît avec la déformation (cf. figures 2.13 et 2.14).

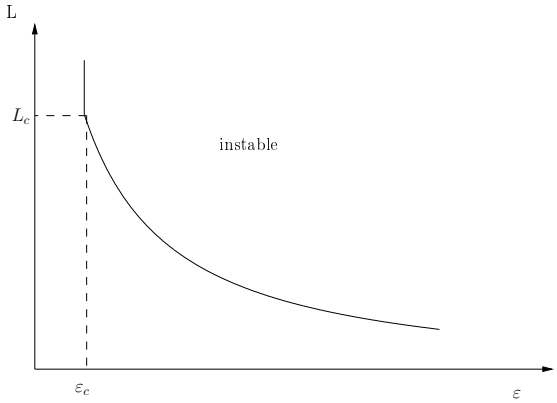

FIG. 2.13 – L_c vs. déformation moyenne p<4

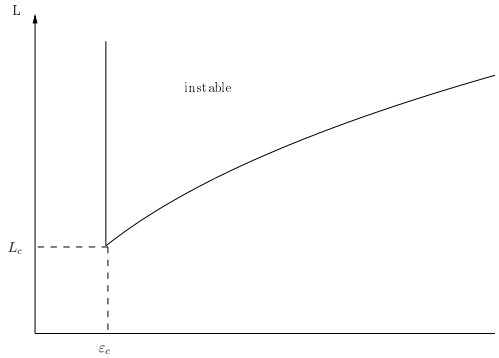

FIG. 2.14 – L_c vs. déformation moyenne p>4

2.6 Étude de solutions non homogènes

Dans cette section, on se propose de faire une étude qualitative des états non homogènes, c'est-à-dire ceux qui ne sont pas homogènes et tels que l'endommagement se localise pour donner naissance à un pustule. Pour ce faire, nous allons étudier l'équation différentielle du second ordre obtenue grâce à la détermination du problème d'évolution. On montrera qu'après intégration cette équation peut se ramener à une équation différentielle du premier ordre que l'on étudiera pour quelques familles de modèles d'endommagement afin de dégager quelques propriétés sur les états non homogènes.

2.6.1 Cas général

Dans les calculs précédents, nous avons montré que le problème d'évolution qui gouverne le champ d'endommagement se ramenait à une équation différentielle du second ordre dont la fonction inconnue est α, donnée par :

$$\frac{\sigma^2}{2}\frac{A'(\alpha)}{A(\alpha)^2} + \frac{w'(\alpha)}{\eta} - 2G_c\eta\alpha'' = 0 \tag{2.75}$$

où le prime désigne la dérivée spatiale[46] et σ est donné par la relation (2.9).
En utilisant le tenseur de souplesse, cette équation peut aussi se lire :

$$-\frac{\sigma^2}{2}s'(\alpha) + \frac{w'(\alpha)}{\eta} - 2G_c\eta\alpha'' = 0 \tag{2.76}$$

Puisque l'on s'intéresse à l'étude des solutions non homogènes (c'est-à-dire α' n'est pas nul sur toute la barre), on peut multiplier l'équation (2.76) par α', et on obtient :

$$\alpha'\left(-\frac{\sigma^2}{2}s'(\alpha) + \frac{w'(\alpha)}{\eta} - 2G_c\eta\alpha''\right) = 0 \tag{2.77}$$

d'où

$$\frac{d}{dx}\left(-\frac{\sigma^2}{2}s(\alpha) + \frac{w(\alpha)}{\eta} - G_c\eta(\alpha')^2\right) = 0 \tag{2.78}$$

En intégrant cette équation, il nous vient l'équation différentielle du premier ordre suivante :

$$-\frac{\sigma^2}{2}s(\alpha) + \frac{w(\alpha)}{\eta} - G_c\eta(\alpha')^2 = \theta \tag{2.79}$$

où θ est la constante d'intégration qui dépend du champ d'endommagement α. Cette dernière est déterminée grâce aux conditions aux limites. En effet, aux endroits où le matériau est sain l'endommagement est nul alors $s(0) = \dfrac{1}{E_0}$, $w(0) = 0$ et $\alpha' = 0$, d'où on en déduit que :

$$\theta = -\frac{\sigma^2}{2E_0} \tag{2.80}$$

Remarque:
Cette construction de la constante n'est absolument pas en contradiction avec le fait que nous essayons de comprendre la stabilité des solutions non homogènes. En effet, lorsque l'endommagement se localise et donne lieu à la naissance d'un pustule (cf figure 2.15), ce dernier occupe un petit intervalle de la barre. À l'extérieur de cet intervalle l'endommagement est nul. Du fait de la continuité du champ d'endommagement, on obtient alors cette constante d'intégration donnée par la relation (2.80).

En injectant la relation (2.80) dans (2.79), on obtient :

$$-\frac{\sigma^2}{2}s(\alpha) + \frac{w(\alpha)}{\eta} - G_c\eta(\alpha')^2 = -\frac{\sigma^2}{2E_0} \tag{2.81}$$

[46] c'est-à-dire d/dx

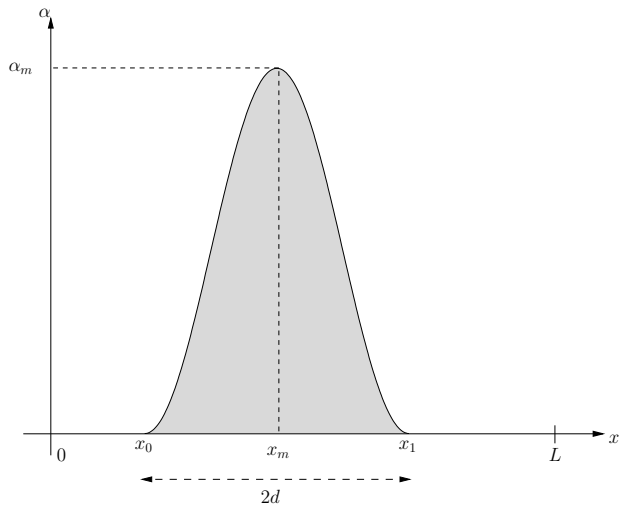

FIG. 2.15 – Naissance et caractérisation d'un pustule sur l'intervalle $[x_0, x_1]$

ce qui peut s'écrire :

$$G_c\eta(\alpha')^2 = \frac{\sigma^2}{2}\left(\frac{1}{E_0} - s(\alpha)\right) + \frac{w(\alpha)}{\eta} \tag{2.82}$$

soit encore

$$(\eta\alpha')^2 = \frac{1}{G_c}\left\{\eta\frac{\sigma^2}{2}\left(\frac{1}{E_0} - s(\alpha)\right) + w(\alpha)\right\} \tag{2.83}$$

Cette équation est donc de la forme $(\eta\alpha')^2 = F(\alpha)$, ce qui peut aussi s'exprimer par le système suivant :

$$\begin{cases} F(\alpha) \geq 0 \\ \eta\alpha' = \pm\sqrt{F(\alpha)} \end{cases} \tag{2.84}$$

avec

$$F(\alpha) = \frac{1}{G_c}\left\{\eta\frac{\sigma^2}{2}\left(\frac{1}{E_0} - s(\alpha)\right) + w(\alpha)\right\} \tag{2.85}$$

Définition 2.6
On appelle plan de phase le plan décrit par les variables α' et α.

Le système donné par (2.84) se ramène à une équation reliant les variables α' à α. Grâce à cette courbe dans le plan de phase, on peut retrouver la variable d'espace x et reconstruire ainsi les états d'endommagement non homogènes. En effet, comme :

$$\alpha' = \frac{d\alpha}{dx}, \quad \text{d'où} \quad \eta\frac{d\alpha}{dx} = \pm\sqrt{F(\alpha)} \tag{2.86}$$

on obtient alors la relation suivante :

$$dx = \mp\eta\frac{d\alpha}{\sqrt{F(\alpha)}} \tag{2.87}$$

En intégrant cette équation, on retrouve la variable d'espace en fonction de l'endommagement. En effet, en utilisant les notations données dans la figure 2.15, l'intégration de l'équation (2.87) nous donne :

$$\int_{x_0}^{x_m} 1dx = \mp\frac{\eta}{2}\int_0^{\alpha_m}\frac{d\alpha}{\sqrt{F(\alpha)}} \tag{2.88}$$

d'où

$$x_m = x_0 \mp \frac{\eta}{2} \int_0^{\alpha_m} \frac{d\alpha}{\sqrt{F(\alpha)}} \tag{2.89}$$

Nous nous proposons dans la sous-section suivante de faire une étude du plan de phase et de reconstruire les solutions non homogènes de quelques familles de modèles d'endommagement.

2.6.2 Cas particulier de quelques familles de modèles d'endommagement

2.6.2.1 Le Modèle 1

Pour le modèle 1 les fonctions A et w sont données par

$$A(\alpha) = \frac{E_0}{(1+\alpha)^2} \quad , \quad w(\alpha) = G_c\alpha \quad \text{et} \quad \alpha \in [0, +\infty]$$

En injectant ces expressions dans celle de $F(\alpha)$ donnée par (2.85), nous obtenons :

$$\begin{aligned} F(\alpha) &= \frac{1}{G_c}\left\{\eta\frac{\sigma^2}{2E_0}\left(1-(1+\alpha)^2\right) + G_c\alpha\right\} \\ &= b\left(1-(1+\alpha)^2\right) + \alpha \qquad \text{avec } b = \eta\frac{\sigma^2}{2G_cE_0} \end{aligned} \tag{2.90}$$

Dans la figure 2.16, nous avons représenté la fonction $F(\alpha) \geq 0$, paramétrée par la variable b, du modèle 1 en fonction de α.

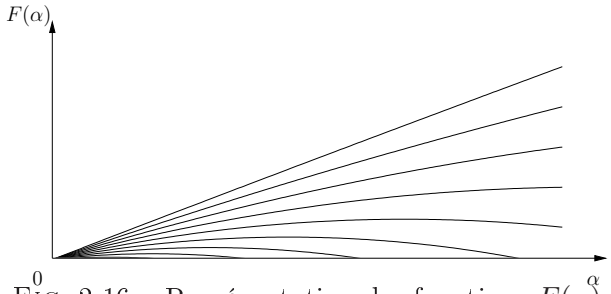

FIG. 2.16 – Représentation des fonctions $F(\alpha)$

Dans la figure 2.17, nous avons représenté la fonction α', paramétrée par la variable b, du modèle 1 en fonction de α. Ces courbes représentent les trajectoires de l'endommagement dans le plan de phase.

Remarque:
La relation $F(\alpha) = 0$ représente les positions d'équilibre de la fonction F[47], en effet : $F(\alpha) = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha' = 0$.

Par la suite, nous allons étudier les propriétés de la fonction F afin de déterminer celles des solutions non homogènes du modèle 1.

Les propriétés de F
La fonction F est strictement concave puisque la dérivée seconde est toujours négative. La fonction F s'annule deux fois, en : $\alpha = 0 \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{1}{b} - 2$.
Nous distinguons alors deux situations :

[47] c'est-à-dire les solutions homogènes

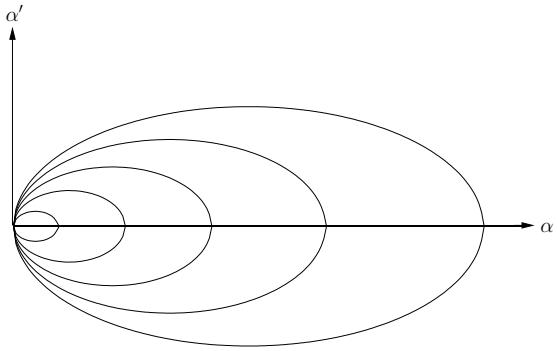

FIG. 2.17 – Plan de phase de l'endommagement α

1. Soit $\frac{1}{b} - 2 = 0$ d'où $b = \frac{1}{2}$ alors la fonction F admet 0 comme maximum et la seule trajectoire de phase de α est réduite au point critique $(0, 0)$ et le seul endommagement possible est l'endommagement homogène.
2. Soit $\frac{1}{b} - 2 > 0$ d'où $b < \frac{1}{2}$ alors la fonction F coupe l'axe des abscisses en 0 et en $\frac{1}{b} - 2$, son maximum est atteint en $\frac{1}{2b} - 1$ strictement positif. Les trajectoires de phases de α sont des ellipses fermées de centre $(\frac{1}{2b} - 1, 0)$ (cf figure 2.17). Les états d'endommagement non homogènes sont stables[48].

Reconstruction de la localisation de l'endommagement pour le modèle 1

Pour reconstruire ces solutions non homogènes (les pustules), nous devons résoudre numériquement l'équation (2.89) appliquée au modèle 1. Nous avons tracé ce résultat, paramétré par la variable b, dans la figure 2.18. Comme on peut le remarquer, sur cette figure, ces pustules ont une forme de cloche, ils s'étalent et grossissent, résultat que l'on retrouve lors de leurs constructions analytiques présentées en amont de ce chapitre.

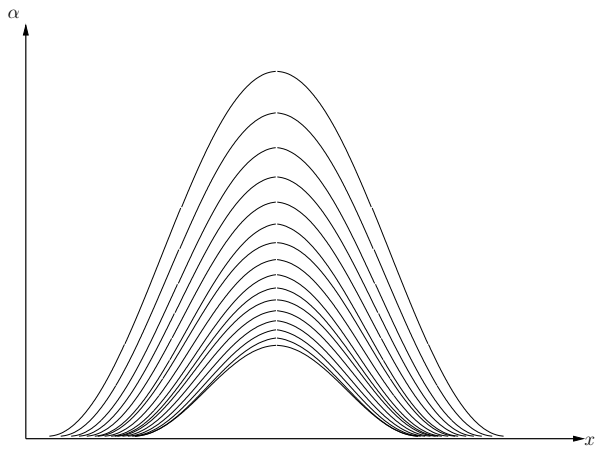

FIG. 2.18 – Reconstruction de l'endommagement du modèle 1

[48] au sens de la définition donnée au chapitre 1

2.6.2.2 Le Modèle 2

Pour le modèle 2 les fonctions A et w sont données par

$$A(\alpha) = E_0(1-\alpha)^2 \quad , \quad w(\alpha) = G_c\frac{\alpha^2}{4} \quad \text{et} \quad \alpha \in [0,1]$$

En remplaçant ces fonctions par leurs expressions dans celle de $F(\alpha)$ donnée par (2.85), nous obtenons :

$$\begin{aligned} F(\alpha) &= \frac{1}{G_c}\left\{\eta\frac{\sigma^2}{2E_0}\left(1-\frac{1}{(1-\alpha)^2}\right)+G_c\frac{\alpha^2}{4}\right\} \\ &= b\left(1-\frac{1}{(1-\alpha)^2}\right)+\frac{\alpha^2}{4} \qquad \text{avec } b=\eta\frac{\sigma^2}{2G_cE_0} \end{aligned} \tag{2.91}$$

Sur la figure 2.19, nous avons représenté la fonction $F(\alpha) \geq 0$, paramétrée par la variable b, du modèle 2 en fonction de α. On notera que la valeur $\alpha = 1$ n'est jamais atteinte dans ce modèle.

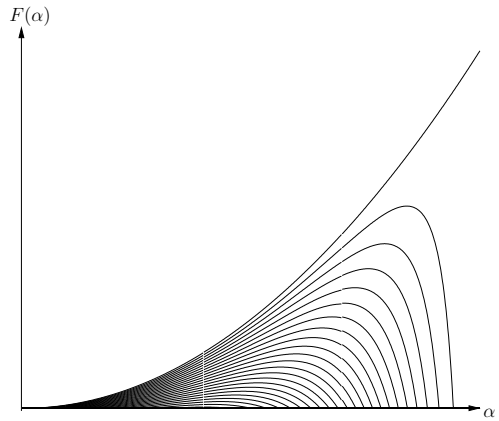

FIG. 2.19 – Représentation des fonctions $F(\alpha)$

Sur la figure 2.20, nous avons représenté la fonction α', paramétrée par la variable b, du modèle 2 en fonction de α.
Par la suite, nous allons étudier les propriétés de la fonction F afin de déterminer celles des solutions non homogènes du modèle 2.

Les propriétés de F
En calculant les dérivées successive de F, nous obtenons

$$F'(\alpha) = \frac{-2b}{(1-\alpha)^3}+\frac{\alpha}{2} \qquad \text{et} \qquad F''(\alpha) = \frac{-6b}{(1-\alpha)^4}+\frac{1}{2}$$

La dérivée seconde de la fonction F s'annule en $\alpha_1 = 1-(12b)^{\frac{1}{4}}$, comme $\alpha \in [0,1]$, alors $0 < b \leq \frac{1}{12}$. Ainsi, la dérivée seconde a les propriétés suivantes :

α	0		α_1		1
F''		$+$	0	$-$	

Au vu de ce tableau, La dérivée première de la fonction F est croissante sur $[0,\alpha_1]$ puis elle décroît sur $[\alpha_1,1]$ et on a $F'(\alpha_1) = F_1$ avec $-\frac{1}{6} \leq F_1 < \frac{1}{2}$.
On distingue deux cas : soit F_1 est positive, soit F_1 est négative :

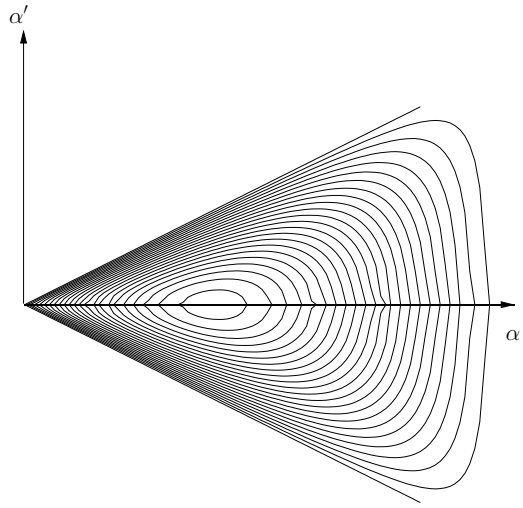

FIG. 2.20 – Plan de phase de l'endommagement α

1. Soit F_1 est négative alors la fonction F est aussi négative et le seul endommagement possible est l'endommagement homogène nul.
2. Soit F_1 est positive alors la fonction F a les propriétés suivantes :

α	0		α_2		α_3		1
F'		$-$	0	$+$	0	$-$	
F	0	$\searrow$	m_2	$\nearrow$	M_3	$\searrow$	$-\infty$

La fonction F atteint son maximum en α_3 valeur positive et les trajectoires de phases de α sont des courbes fermées (cf figure 2.20). La localisation, état d'endommagement possible, est alors un état stable.

Reconstruction de la localisation de l'endommagement pour le modèle 2

Pour reconstruire ces solutions non homogènes[49], nous devons résoudre numériquement l'équation (2.89) appliquée au modèle 2. Nous avons tracé ce résultat, paramétré par la variable b, dans la figure 2.21. Il semble qu'il y ait une grande différence de forme du pustule entre le modèle 1 et le modèle 2, dès son apparition ce pustule atteint presque la valeur 1 sans jamais la dépasser et ensuite il ne fait que s'étaler.

Remarque:
Le modèle 4 a les mêmes propriétés de stabilité que ce dernier modèle. Les calculs sont donnés en annexe B.

[49] les pustules

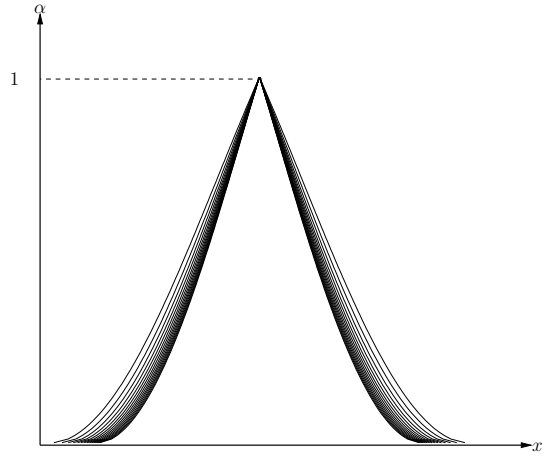

FIG. 2.21 – Reconstruction de l'endommagement du modèle 2

2.6.2.3 Le Modèle 3

Pour le modèle 3 les fonctions A et w sont données par

$$A(\alpha) = E_0(1-\alpha)^2 \quad , \quad w(\alpha) = G_c\left(\frac{3}{8}\right)^2 \alpha \quad \text{et} \quad \alpha \in [0,1]$$

En injectant ces expressions dans celle de $F(\alpha)$ donnée par (2.85), cela nous conduit à :

$$\begin{aligned} F(\alpha) &= \frac{1}{G_c}\left\{\eta\frac{\sigma^2}{2E_0}\left(1-\frac{1}{(1-\alpha)^2}\right) + G_c\left(\frac{3}{8}\right)^2\alpha\right\} \\ &= b\left(1-\frac{1}{(1-\alpha)^2}\right) + \left(\frac{3}{8}\right)^2\alpha \qquad \text{avec } b = \eta\frac{\sigma^2}{2G_cE_0} \end{aligned} \tag{2.92}$$

Dans la figure 2.22, nous avons représenté la fonction $F(\alpha) \geq 0$, paramétrée par la variable b, du modèle 3 en fonction de α. On notera que la valeur $\alpha = 1$ n'est jamais atteinte dans ce modèle.

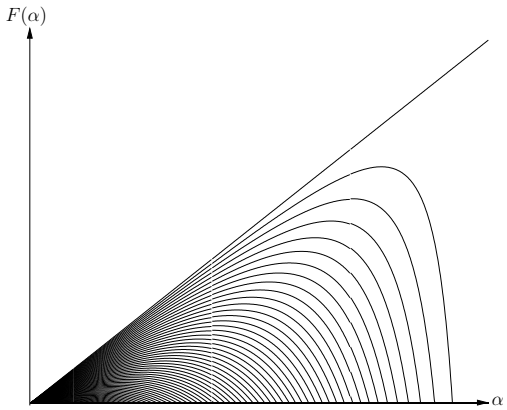

FIG. 2.22 – Représentation des fonctions $F(\alpha)$

Sur la figure 2.23, nous avons représenté la fonction α', paramétrée par la variable b, du modèle 3 en fonction de α. Ces courbes représentent les trajectoires de l'endommagement dans le plan de phase.

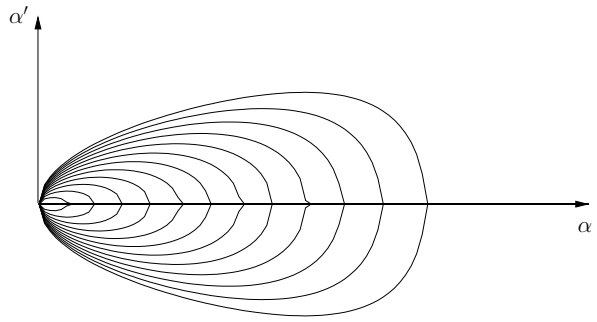

FIG. 2.23 – Plan de phase de l'endommagement α

Par la suite, nous allons étudier les propriétés de la fonction F afin de déterminer celles des solutions non homogènes du modèle 3.

Les propriétés de F
La fonction F s'annule trois fois, en :

$$\alpha = 0 \qquad \text{et} \qquad \alpha = 1 - \frac{1}{2c}\left\{b \pm \sqrt{b^2 + 4cb}\right\} \quad \text{avec} \quad c = \left(\frac{3}{8}\right)^2$$

En calculant les dérivées successives de F, nous obtenons

$$F'(\alpha) = \frac{-2b}{(1-\alpha)^3} + \left(\frac{3}{8}\right)^2 \qquad \text{et} \qquad F''(\alpha) = \frac{-6b}{(1-\alpha)^4}$$

La fonction F est strictement concave puisque la dérivée seconde est toujours négative. Le seul cas important à étudier est donnée par la relation $-2b+c \geq 0$, maximum de la dérivée première. Nous distinguons deux cas de figure :

1. Soit $-2b + c = 0$ alors la fonction F admet 0 comme maximum et la seule trajectoire de phase de α est réduite au point critique $(0, 0)$ et le seul endommagement possible est l'endommagement homogène.
2. Soit $-2b+c > 0$ alors la fonction F coupe l'axe des abscisse en 0 et en $1-\frac{1}{2c}\left\{b + \sqrt{b^2 + 4cb}\right\}$, son maximum est atteint en $1 - \left(\frac{2b}{c}\right)^{\frac{1}{3}}$ strictement positif. Les trajectoires de phases de α sont des courbes fermées (cf figure 2.23). Les états d'endommagement non homogènes sont stables.

Reconstruction de la localisation de l'endommagement pour le modèle 3

Pour reconstruire ces solutions non homogènes (les pustules), nous devons résoudre numériquement l'équation (2.89) appliquée au modèle 3. Nous avons tracé ce résultat, paramétré par la variable b, dans la figure 2.24. Il semble qu'il y ait une grande différence de forme du pustule entre le modèle 1 et le modèle 3, dès son apparition ce pustule atteint presque la valeur 1 sans jamais la dépasser et ensuite il ne fait que s'étaler.

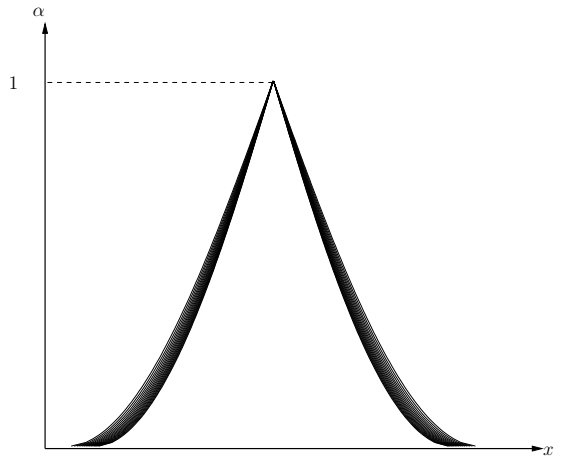

FIG. 2.24 – Reconstruction de l'endommagement du modèle 3

2.6.3 Bilan

On constate une différence entre le modèle 1 et les 3 autres. En effet, tout d'abord les formes des pustules sont différentes puisque seul le modèle 1 nous donne des cloches en forme de cosinus. De plus dans les autres modèles le pustule atteint quasiment 1 dès son apparition et il ne fait que s'étaler ensuite. Alors que dans le cas du modèle 1 le pustule grossit et s'étale.

Conclusion

L'un des objectifs de ce travail était de faire une étude comparative entre différents modèles d'endommagement non-locaux et de voir s'ils se comportaient différemment en termes de minima-locaux. Pour ce faire, une analyse du problème d'évolution de la barre en traction (problème unidimensionnel) a été menée. Une analyse dans le cas général de la stabilité des états homogènes[50] et une étude quantitative des états non homogènes[51] ont été faites dans ce chapitre.

Il a été mis en évidence que pour certains modèles d'endommagement, les états homogènes n'étaient pas toujours stables, mais que pour certains modèles d'endommagement, ils pouvaient redevenir stables. Tout les modèles d'endommagement se comportent différemment en termes de minima-locaux et il s'avère que la relation contrainte-déformation ne suffit pas à définir une loi de comportement modélisée par les fonctions $A(\alpha)$ et $w(\alpha)$ mais une autre relation reliant la stabilité des solutions homogènes à la taille du domaine s'avère tout aussi essentielle quant à l'identification de ces lois de comportement : ce sont les problèmes d'effets d'échelles.

Sur un plan purement numérique, nous retiendrons le modèle 2 (d'Ambrosio et Tortorelli implémenté par Bourdin dans ces travaux de thèse [Bou98]) et le modèle 3 pour les applications numériques qui suivront dans la thèse. Ce choix est motivé par les propriétés en terme de minima locaux qu'ils dégagent et par leurs facilités d'implémentation numérique.

[50] solutions possibles au problème d'évolution
[51] autres solutions possibles au problème d'évolution

Chapitre 3

Enrichissement du modèle : la non interpénétration des lèvres de fissures

Sommaire

Introduction **66**

3.1 La prise en compte du caractère unilatéral **66**

3.1.1 Rappels : modes de rupture 66

3.1.2 Quelques modèlisations 67

3.2 Le problème de la régularisée **68**

3.2.1 Mécanisme de régularisation 68

3.2.2 Comparaison traction-compression 69

3.3 Ouverture en cisaillement plan de la fissure **69**

3.3.1 Décomposition de l'énergie élastique 70

3.3.2 Modèle d'endommagement déviatorique 71

3.3.3 Illustration sur un problème 2D 72

3.3.4 Bilan 75

3.4 Tous les modes d'ouvertures possibles **75**

3.4.1 Objectifs 76

3.4.2 Modèle d'endommagement avec prise en compte du contact unilatéral . 76

3.4.3 Illustration sur un problème 2D 77

3.4.4 Bilan 79

Conclusion **79**

Introduction

Sur le plan numérique, dans ses travaux, Bourdin soulève le problème de symétrie de comportement en traction-compression, le phénomène d'interpénétration des lèvres des fissures n'a pas été pris en compte dans sa modélisation. L'objet de ce chapitre est de remédier aux lacunes de ce problème et aux régularisées introduites aux chapitres précédents basées sur la même modélisation faites par Bourdin. En effet, malgré l'originalité de cette régularisation, elle reste inapte à rendre compte de tous les modes d'ouvertures possibles et pire encore puisqu'elle permet l'interpénétration des lèvres des fissures lors de l'essai de compression.

On se propose dans ce chapitre, dans un premier temps, de donner un panorama non exhaustif de quelques modèlisations développés dans la littérature pour la prise en compte du caractère unilatéral. Puis, tout en suivant l'idée introduite par Ambrosio et Tortorelli, on apportera d'autres modèles d'endommagement qui pourront rendre compte de tous les modes d'ouvertures possibles. Pour ce faire, nous allons dans un premier temps revenir sur les lacunes dûes au choix de la régularisée, en montrant à travers l'exemple académique de la barre en traction/compression les problèmes induits par ce type de régularisée. Par la suite, on introduira un nouveau modèle d'endommagement qui rendra compte que de l'ouverture en mode II. Et enfin, nous introduirons un modèle qui sera capable de rendre compte de tous les modes d'ouvertures possibles. Dans les deux dernières sections, on essaiera aux travers d'une application et d'arguments heurestiques d'apporter une justification quant aux réponses attendues de ces modèles.

3.1 La prise en compte du caractère unilatéral

3.1.1 Rappels : modes de rupture

La fissuration se manifeste par la séparation irréversible d'un milieu continu en deux parties, appelées lèvres de la fissure, ce qui introduit une discontinuité au sens des déplacements. Dans le cadre de la mécanique de la rupture fragile, c'est-à-dire dans le cadre de l'élasticité linéarisée, les mouvements possibles des lèvres de chaque fissure sont des combinaisons de trois modes indépendants (cf figure 3.1) :

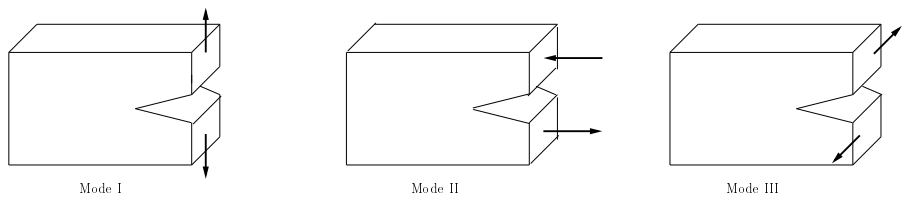

Fig. 3.1 – Modes de rupture

- Mode I : ouverture (ou clivage) : les surfaces de la fissure se déplacent dans des directions opposées et perpendiculairement au plan de fissure.
- Mode II : cisaillement plan : les surfaces de la fissure se déplacent dans le même plan et dans une direction perpendiculaire au front de fissure.

- Mode III : cisaillement antiplan : les surfaces de la fissure se déplacent dans le même plan et dans une direction parallèle au front de la fissure.

On rappelle, que en mode I pur, l'état local des contraintes est caractérisé à l'aide d'un seul paramètre K_I[52], alors que en mode II pur l'état local des contraintes est caractérisé à l'aide d'un seul paramètre K_{II}[53].

Le comportement d'une fissure est différent selon que nous sollicitons la structure en traction ou en compression, en effet :
- en traction, les lèvres de la fissure ont plus un mouvement d'ouverture : elles s'écartent.
- en compression, les lèvres de la fissure rentrent en contact : il faut éviter l'interpénétration.

D'un point de vue mathématique la fissure est définie comme une surface de discontinuité du champ de déplacement. Cette discontinuité est appelée le saut de déplacement : $[\![u]\!]$. En effet, initialement les lèvres de la fissures sont confondues, on fixe alors deux points en vis à vis sur les lèvres de la fissure. Ces deux points sont initialement confondus et ont le même déplacement. Lors d'un mouvement, les deux points s'éloignent l'un de l'autre et cette différence de déplacement s'appelle le saut de déplacement.

De plus, nous avons souligné que dans le cadre de l'élasticité linéarisée, les déformations sont suffisamment petites pour que l'hypothèse de petites perturbations soit légitime. Ainsi, on définit une normale extérieur aux lèvres de la fissure et la condition de contact unilatéral[54], se traduit par :

$$[\![u]\!].n \geq 0,$$

c'est-à-dire que la composante normale du saut de déplacement est positive.
Le caractère unilatéral de l'endommagement impose un certain nombre de contraintes quant à l'écriture des lois de comportements. On se propose de dresser dans la sous-section suivante un panorama non exhaustif de ce qui se développe pour la prise en compte de ce caractère unilatéral.

3.1.2 Quelques modèlisations

L'approche, basée sur l'endommagement progressif des matériaux, a été introduite par Lemaitre et Chaboche [LC78]. Cette approche récente a été reprise et développée par de nombreux auteurs tels que Marigo [[Mar81], [Mar00]] ou encore Lorentz [Lor99], [LA03]. La construction d'un modèle d'endommagement conduit à faire des choix que nous avons exposés au chapitre 1, et se résume aux choix du paramètre d'endommagement α et des deux fonctions $\alpha \mapsto A(\alpha)$ et $\alpha \mapsto w(\alpha)$ qui détermineront à leur tour la loi de comportement dans laquelle doit intervenir le caractère unilatéral du comportement de la fissure.

La prise en compte de l'effet unilatéral dans la loi de comportement semble compliquer le problème de la modélisation. En effet, si pour un essai de base de traction sur une structure sa prise en compte est facile, elle devient complexe dès que l'on considère des structures sous chargements quelconques. La difficulté majeure est de pouvoir différencier les chargements en traction et en compression.

[52] c'est-à-dire $K_I \neq 0,\ K_{II} = 0$
[53] c'est-à-dire $K_I = 0,\ K_{II} \neq 0$
[54] autrement dit, la condition de non interpénétration des lèvres de la fissure

La prise en compte de cet effet unilatéral a fait l'objet de nombreux travaux. On cite pour exemple les travaux de Lemaitre et Ladevèze [LL84] (dans le cadre de matériaux endommageables isotropes) qui consistent en la décomposition du tenseur des déformations totales en une partie négative et une autre positive définies dans le repère propre des déformations totales. Ces expressions sont reportées dans celle de l'énergie élastique volumique, qui à son tour se décompose en deux parties, une liée à la traction et une autre à la compression. Il faut alors porter l'endommagement que sur la partie de l'énergie liée à la traction pour une évolution en traction. Pour une évolution en traction et en compression, il est classique d'introduire deux variables d'endommagement une pour la traction et une autre pour la compression qui affecteront respectivement la partie de l'énergie liée à la traction et celle liée à la compression. Une telle séparation entre le phénomène de la traction et celui de la compression semble être peu physique puisque l'on introduit deux variables d'endommagement différentes pour modéliser un même phénomène.

D'autres modèles ont été développés afin de modéliser cet effet unilatéral dans les modèles d'endommagement isotropes ou même pour des modèles d'endommagement plus complexes, on cite [MR90], [FN93], [Cha92], [HD96], [God05], sans oublier les remarquables travaux de l'école italienne [LRC07], [DPM07].

Afin de prendre en compte cet effet unilatéral dans le modèle, on se propose de suivre l'idée introduite par Ambrosio et Tortorelli. Mais tout d'abord on se propose dans la section suivante de revenir sur les lacunes dûes à la régularisée première en montrant, à travers l'exemple académique de la barre en traction/compression, les problèmes induits par ce type de régularisée.

3.2 Le problème de la régularisée

3.2.1 Mécanisme de régularisation

L'objectif de la mécanique de la rupture est de décrire l'apparition et l'évolution d'une ou plusieurs fissures, c'est-à-dire de surfaces libres à l'intérieur du matériau qui ont le droit d'apparaître *a priori* n'importe où dans la structure. Dans l'approche variationnelle, cela revient à minimiser l'énergie totale de la structure. La détermination des minimiseurs si toutefois ils existent pour le problème de rupture n'est pas plus simple car c'est un problème non convexe qui met en jeu deux objets de natures très différentes $(u, \mathcal{K})$: les déplacements u à valeurs vectorielles[55] et les fissures[56] $\mathcal{K}$, ensemble compact.

Nous avons vu que la difficulté liée à l'utilisation de cette formulation variationnelle tient au fait qu'il faut envisager *a priori* tous les états de fissuration possibles. Pour pallier à cette difficulté, nous avons approché le modèle de rupture par des modèles d'endommagement non-locaux en suivant l'idée introduite par Ambrosio et Tortorelli en segmentation d'images. On rappelle ici l'expression de cette fonctionnelle :

$$G(u,\alpha) = \int_\Omega \frac{1}{2} A(\alpha)\varepsilon(u)\cdot\varepsilon(u)dx - \mathcal{F}(u) + \int_\Omega \left(G_c\eta|\nabla\alpha|^2 + \frac{w(\alpha)}{\eta} \right) dx \tag{3.1}$$

D'un point de vue mécanique, la régularisation revient à remplacer la surface de discontinuité du champ de déplacement (la fissure) par des zones de petites tailles dans lesquelles le gradient de

[55] dans le cas unidimensionnel ou les cas antiplan, on parlera de déplacements à valeurs scalaires
[56] lieu où u peut être discontinu

déplacement est grand (zones endommagées). Les fissures sont donc approchées par des bandes endommagées.

Contrairement au problème d'imagerie dont le seul souci est de déterminer les contours actifs d'une image, le problème de la mécanique de la rupture est plus complexe. Ainsi, adapter la fonctionnelle d'Ambrosio et Tortorelli généralisée semble être une mauvaise idée puisqu'il semble que tous les phénomènes naturels tels que le contact, la non interpénétration des lèvres de la fissure, la refermeture des fissures n'ont pas été pris en compte dans la régularisée.

Afin de mettre en évidence l'incapacité de cette régularisée à modéliser le phénomène de non interpénétration des lèvres des fissures, on se propose, à travers l'exemple de la barre en traction/compression, de développer les calculs et ainsi de mettre en évidence les lacunes du modèle proposé. Ces calculs ont été effectués en annexe C afin de ne pas alourdir la bonne compréhension de ce chapitre.

3.2.2 Comparaison traction-compression

Dans cette section, on se propose de comprendre le problème lié au choix du modèle d'endommagement. Pour ce faire, on propose de résumer l'exemple de la barre soumise à un essai de traction et la barre soumise à un essai de compression.

Pour les deux essais, la loi d'évolution est restée la même ce qui induit que le champ d'endommagement reste le même puisque c'est la même loi qui le gouverne. Alors que le champ de déplacement lui a changé de signe, en effet, pour l'essai de la barre en traction :

$$u' = tL\frac{s(\alpha)}{< s(\alpha) >}$$

alors que pour l'essai de la barre en compression

$$u' = -tL\frac{s(\alpha)}{< s(\alpha) >}$$

Cette symétrie de comportement en traction-compression est valable dans n'importe quelle situation et pas seulement en 1D. Ceci a des conséquences fâcheuses pour l'utilisation de ce modèle d'endommagement comme approximation d'un modèle de rupture. En effet, on trouvera nécessairement des zones endommagées identiques en traction et en compression et par conséquent "à la limite"[57] une fissuration identique en traction et en compression.

Ceci n'est manifestement pas raisonnable. En mécanique de la rupture la dissymétrie traction-compression provient de l'impossibilité de l'interpénétration des lèvres des fissures. On en rend compte dans la modélisation grâce à la condition de contact unilatéral[58] sur les lèvres. Il s'agit donc d'introduire une condition unilatéral similaire dans nos modèles d'endommagement.

3.3 Ouverture en cisaillement plan de la fissure

L'adaptation de la régularisée, introduite par Ambrosio et Tortorelli pour le problème de Mumford-Shah, au problème de rupture pose un problème. En effet, contrairement aux problèmes d'image-

[57] à la limite lorsque $\eta \to 0$ nous avons l'apparition de la discontinuité c'est-à-dire apparition des fissures

[58] $[\![u]\!].n \geq 0$

rie, interviennent en mécanique différents phénomènes naturels tels que les problèmes de contact, la non interpénétration des fissures, ...

Dans le modèle de Bourdin, le tenseur de rigidité a été affecté de façon linéaire par l'endommagement, ce qui semble être *a priori* une mauvaise idée puisque nous avons mis en évidence dans la section précédente et à travers l'exemple de la barre soumise soit à une traction, soit à une compression une symétrie de comportement de la variable endommagement en traction-compression. Cette symétrie du comportement reste vraie dans n'importe quelle situation et pas seulement en 1D. Ce qui implique, dans le cas de la compression, "à la limite" l'interpénétration des fissures et donc que $[\![u]\!].n$ peut être de signe quelconque. Ainsi, la direction à prendre dans l'étude qui va suivre est de ne pas affecter linéairement le tenseur de rigidité par l'endommagement.

3.3.1 Décomposition de l'énergie élastique

Dans le cas de matériaux isotropes, cadre de notre travail, les tenseurs de raideur et de souplesse s'expriment en fonction de deux constantes matérielles λ_0 et μ_0 et les relations entre contraintes et déformations prennent les formes suivantes :

$$\sigma = \lambda_0 \ \mathbf{tr} \ \varepsilon \mathcal{I} + 2\mu_0 \varepsilon \tag{3.2}$$

λ_0 et μ_0 sont les constantes de Lamé et $\mathcal{I}$ est la matrice identité (même dimension que l'espace de travail).

Une autre écriture de la relation (3.2) peut être obtenue en raisonnant sur les parties sphériques et déviatoriques des tenseurs de contraintes et de déformations. Pour un tenseur symétrique du second ordre C, on considère la décomposition :

$$C = C^s + C^d \quad \text{avec} \quad C^s = \frac{1}{n}(\ \mathbf{tr}\ C)\mathcal{I} \quad et \quad \text{tr}\ C^d = 0 \tag{3.3}$$

La décomposition en partie sphérique et déviateur d'un tenseur symétrique d'ordre 2 est une décomposition orthogonale au sens suivant : les tenseurs sphériques[59] forment un espace vectoriel (de dimension 1) tandis que les tenseurs déviatoriques appartiennent à l'espace vectoriel orthogonal (de dimension 5), il résulte :

$$C = C^s + C^d, \quad \text{avec} \quad C^s : C^d = 0 \tag{3.4}$$

En appliquant cette décomposition aux tenseurs de contraintes et des déformations, on obtient les expressions suivantes :

$$\begin{array}{rclcrcl} \varepsilon & = & \varepsilon^s + \varepsilon^d & \text{avec} & \varepsilon^s & = & \frac{1}{n}(\mathbf{tr}\ \varepsilon)\mathcal{I} \\ \sigma & = & \sigma^s + \sigma^d & \text{avec} & \sigma^s & = & \frac{1}{n}(\mathbf{tr}\ \sigma)\mathcal{I} \end{array} \tag{3.5}$$

où n est la dimension de l'espace de travail.

Remarque:
La partie déviatorique des contraintes mesure l'écart de l'état de contraintes avec un état de pression hydrostatique. En particulier, les états de cisaillement plan sont entièrement contenus

[59] c'est-à-dire des tenseurs de la forme $p\mathcal{I}$, avec $p \in R$

dans la partie déviatorique des contraintes : $\mathbf{tr}\ \sigma^d = 0$. On rappelle que les états de cisaillement plan (en dimension 2) sont représentés par un tenseur des contraintes dont la forme est donné par :

$$\sigma = \begin{bmatrix} 0 & \tau \\ \tau & 0 \end{bmatrix}$$

En injectant les nouvelles expressions des tenseurs de contraintes et de déformations dans celle de l'énergie élastique volumique, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}A_0\varepsilon\cdot\varepsilon &= \frac{1}{2}A_0(\varepsilon^d+\varepsilon^s)\cdot(\varepsilon^d+\varepsilon^s) \\ &= \frac{1}{2}\left(A_0\varepsilon^s.\varepsilon^s + A_0\varepsilon^d.\varepsilon^d\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\kappa_0(\mathbf{tr}\ \varepsilon)^2 + 2\mu_0\varepsilon^d:\varepsilon^d\right) \end{aligned} \tag{3.6}$$

avec $\kappa_0 = \left(\lambda_0 + \dfrac{2\mu_0}{n}\right)$ le module de compressibilité du solide isotrope et n dimension de l'espace de travail.

Remarque:

Dans le cas de l'élasticité linéaire isotrope, si le tenseur des déformations est purement déviatorique alors le tenseur des contraintes est aussi déviatorique et est proportionnel au tenseur des déformations avec le facteur $2\mu_0$. Les parties déviatoriques des contraintes et des déformations sont liées par

$$\sigma^d = 2\mu_0\varepsilon^d$$

3.3.2 Modèle d'endommagement déviatorique

Une fois l'énergie élastique volumique séparée en deux parties : une partie sphérique et autre partie déviatorique, nous allons faire porter l'endommagement que sur la partie déviatorique. Ainsi, la forme générale de la fonctionnelle régularisée peut se lire :

$$\begin{aligned} G(u,\alpha) &= \int_\Omega \frac{1}{2}\left(A(\alpha)\varepsilon^d(u)\cdot\varepsilon^d(u) + A_0\varepsilon^s(u)\cdot\varepsilon^s(u)\right)dx - \mathcal{F}(u) \\ &+ \int_\Omega \left(G_c\eta|\nabla\alpha|^2 + \frac{w(\alpha)}{\eta}\right)dx \end{aligned} \tag{3.7}$$

avec $A(\alpha) = (g(\alpha)+k_\eta)A_0$ et $g(\alpha)$ fonction définie dans le chapitre 1(proposition 1.3).

Afin de comprendre ce modèle d'endommagement nous devons nous placer dans le cas où nous aurions l'apparition d'une nouvelle zone endommagée : dans cette zone le terme $A(\alpha)$ est quasi nul pour le modèle limite, mais dans cette zone le terme sphérique de l'énergie volumique reste fini. Comme la divergence de u est bornée, cela empêche l'apparition, à la limite lorsque $\eta \to 0$, d'une discontinuité de déplacement normal. On aura donc, à la limite, $[\![u]\!].n = 0$. La discontinuité sera sûrement tangentielle, ce qui se traduit en d'autres termes par des des ouvertures qu'en mode II[60].

[60] notons que la preuve de $\Gamma-$convergence de cette régularisée vers le problème de rupture où les seules ouvertures possibles sont en cisaillement pur reste un problème ouvert

Dans la section suivante, nous allons illustrer sur un problème 2D et par des arguments heuristiques que cette régularisée converge à la limite vers un problème de rupture où le seul mode d'ouverture possible est le mode de cisaillement pur.

3.3.3 Illustration sur un problème 2D

Objectif

On veut montrer qu'en prenant le modèle d'endommagement où la variable d'endommagement n'affecte que la partie déviatorique de l'énergie de déformation, alors "à la limite", on converge[61], vers un modèle de rupture où la discontinuité des déplacements sera purement tangentielle sur les fissures.

Méthode

Pour ce faire, on utilise un argument "heuristique" qui n'est pas une vraie démonstration de Γ-convergence mais qui permet quand même de comprendre le fonctionnement du modèle.

Cadre

On se place en 2D, à déplacement contrôlé avec des forces extérieures qui sont nulles. Ainsi, on considère une structure élastique homogène dont la configuration naturelle de référence est Ω (cf figure 3.2), cette structure est encastrée sur une partie de son bord que l'on notera $\partial\Omega_{D1}$ et est soumise à un déplacement $U_d(t)$ de signe quelconque sur une autre extrémité $\partial\Omega_{D2}$. On suppose que la structure est homogène.

$$u = 0 \text{ sur } \partial\Omega_{D1} \quad \text{et} \quad u = U_d(t) \text{ sur } \partial\Omega_{D2}$$

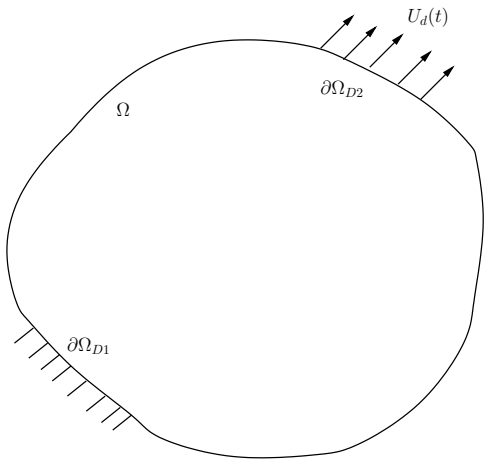

FIG. 3.2 – Schéma du domaine Ω et du chargement

On considère le modèle d'endommagement caractérisé par une densité d'énergie $W_\eta(\nabla u, \alpha, \nabla\alpha)$ donné par

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(\nabla u, \alpha, \nabla\alpha) &= \mu_0 \left(g(\alpha) + k_\eta\right) \varepsilon^d(u) : \varepsilon^d(u) + \frac{1}{2}\kappa_0 \left(\mathbf{div}\ u\right)^2 \\ &+ \frac{w(\alpha)}{\eta} + G_c \eta \nabla\alpha^2 \end{aligned} \tag{3.8}$$

[61] c'est-à-dire lorsque $\eta \to 0$

où η est un petit paramètre, et on rappelle que $\mathbf{tr}\ \varepsilon(u) = \mathbf{div}\ u$.

Calcul
Considérons le problème de minimisation

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \\ u \in \mathcal{C} \\ \alpha \geq 0 \end{array} \right. \quad \mathcal{P}_\eta(u,\alpha) = \int_\Omega W_\eta(\nabla u, \alpha, \nabla\alpha)dx \tag{3.9}$$

où $\mathcal{C}$ est l'ensemble des déplacements admissibles, c'est-à-dire l'ensemble des déplacements vérifiant les conditions aux limites du champ u.

$$\mathcal{C} = \left\{ u \in H^1(\Omega) \quad : \quad u = 0 \text{ sur } \partial\Omega_{D1}, \text{ et } u = U_d(t) \text{ sur } \partial\Omega_{D2} \right\}$$

Soit (u_η, α_η) un minimiseur. On va supposer qu'il a la structure suivante :

L'endommagement se concentre dans des bandes de faible épaisseur (cf figure 3.3)

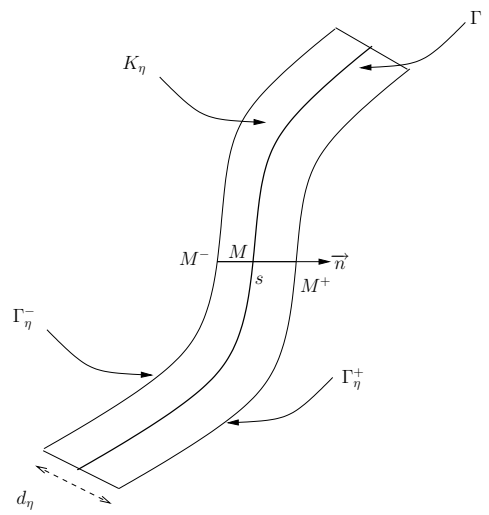

FIG. 3.3 – Endommagement se concentrant dans une bande

Appelons K_η une telle bande (que l'on supposera compact) et supposons qu'elle ait une épaisseur tendant vers 0 quand $\eta \to 0$. On note Γ la courbe constituant "le milieu" de la bande. On aura $\alpha = 0$ à l'extérieur de K_η et $\alpha = 1$ sur Γ.

Si s désigne l'abscisse curviligne de Γ, et $\overrightarrow{n}(s)$ la normale orientée à Γ, on appelle respectivement M_η^-, M et M_η^+ les points de Γ_η^-, Γ et Γ_η^+ tels que M ait l'abscisse curviligne s, $\overrightarrow{MM_\eta^+} = \dfrac{d_\eta}{2}\overrightarrow{n}(s)$ et $\overrightarrow{MM_\eta^-} = -\dfrac{d_\eta}{2}\overrightarrow{n}(s)$.
Posons

$$[\![u_\eta]\!].n = [\![u_\eta^1]\!] = u_\eta(M_\eta^+) - u_\eta(M_\eta^-)$$

Nous allons montrer que

$$\lim_{\eta\to 0} [\![u_\eta]\!].n = 0$$

Remarquons tout d'abord que comme u_η est un minimiseur, on a

$$\int_{K_\eta} (\ \mathbf{div}\ u_\eta)^2 dx \leq B$$

où B désigne une constante positive indépendante de η.
En effet, on a nécessairement

$$\mathcal{P}_\eta(u_\eta, \alpha_\eta) \leq \mathcal{P}_\eta(U, 0) \tag{3.10}$$

où U est un relèvement[62] vérifiant la condition à la limite en déplacement. Comme

$$\mathcal{P}_\eta(U,0) = \int_\Omega \mu_0 \left(g(0) + k_\eta\right) \varepsilon^d(U) : \varepsilon^d(U) + \frac{1}{2}\kappa_0 \ (\mathbf{div}\ U)^2 + \frac{w(0)}{\eta} dx,$$

de plus $w(0) = 0$, $g(0) = 1$ et que k_η converge vers 0 lorsque η tend vers 0, on en déduit :

$$\mathcal{P}_\eta(U,0) \leq B$$

Puisque les différents termes de l'énergie sont positifs, on obtient alors :

$$\int_\Omega (\mathbf{div}\ u_\eta)^2 \leq B$$

et donc en particulier

$$\int_{K_\eta} (\mathbf{div}\ u_\eta)^2 \leq B$$

En utilisant le théorème de la divergence, on calcule :

$$\int_{K_\eta} \mathbf{div}\ u_\eta dx = \int_{\partial K_\eta} u_\eta . n ds = \int_\Gamma [\![u_\eta^1]\!] ds + \int_{d_\eta} [\![u_\eta^2]\!] ds$$

Or

$$\int_{d_\eta} [\![u_\eta^2]\!] ds \leq \left(\int_{d_\eta} ([\![u_\eta^2]\!])^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{\mathrm{mes}(d_\eta)} \ \rightarrow \ 0 \quad \text{quand } \eta \rightarrow 0$$

De plus,

$$\begin{aligned} |\int_{K_\eta} \mathbf{div}\ u_\eta dx| &\leq \int_{K_\eta} |\mathbf{div}\ u_\eta| dx \\ &\leq \left(\int_{K_\eta} (\mathbf{div}\ u_\eta)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{\mathrm{mes}(K_\eta)} \\ &\leq \sqrt{B} \sqrt{\mathrm{mes}(K_\eta)} \ \rightarrow \ 0 \quad \text{quand } \eta \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Ainsi à la limite quand $\eta \rightarrow 0$, on a

$$\int_\Gamma [\![u_\eta^1]\!] ds = 0$$

Mais puisque cette relation est vraie pour tout Γ, on obtient à la limite :

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} [\![u_\eta]\!] . n = 0$$

[62] indépendant de η

3.3.4 Bilan

Dans cette partie, nous avons construit un modèle d'endommagement qui permet des ouvertures en cisaillement plan et cela indépendamment du type de sollicitation que peut subir la structure. En effet, que la structure soit soumise à un essai de traction ou à un essai de compression la seule ouverture possible pour la fissure est un mode en cisaillement plan.

Malgré l'avantage que présente ce modèle par rapport au précédent, il reste inapte à rendre compte de tous les modes d'ouvertures possibles (ouvertures en mode-II seulement). Afin de pendre en compte l'effet unilatéral tel qu'il a été défini dans la section précédente, il faudra changer encore une fois de régularisée. Autrement dit, il faut construire un modèle d'endommagement qui soit apte à rendre compte de tous les modes d'ouvertures possibles sans avoir d'interpénétration des lèvres des fissures.

3.4 Tous les modes d'ouvertures possibles

Dans un premier temps, nous avons introduit une régularisée, que nous appellerons modèle de base, copiée sur les problèmes d'imagerie[63]. Ce modèle consistait à affecter linéairement l'énergie de déformation par l'endommagement. Cependant, avec ce type de régularisée nous avons remarqué que sous une sollicitation de type traction ou de type compression, la réponse du champ d'endommagement solution reste inchangée, alors que le champ de déplacement solution change de signe, ce qui conduit "à la limite" une interpénétration des lèvres de la fissure[64], ce qui est évidement pas admissible physiquement.

Puis dans un second temps, nous avons abandonné ce modèle en faveur d'un autre, que nous appellerons modèle déviatorique, qui permet uniquement "à la limite" des ouvertures en cisaillement plan. Cette régularisée consiste à affecter uniquement la partie déviatorique de l'énergie de déformation par l'endommagement. Nous avons remarqué que sous une sollicitation de type traction, la réponse du champ d'endommagement solution n'est plus la même que celle donné par le modèle de base. En effet, comme l'endommagement n'est porté que par la partie déviatorique, alors "à la limite" si une fissure naissait, elle pourrait s'ouvrir qu'en cisaillement plan, c'est-à-dire avec la caractéristique d'avoir un saut normal de déplacement nul. Malgré les avantages de ce modèle, sous une sollicitation de type traction, la réponse du champ d'endommagement solution, comme dans le cas d'une sollicitation de type compression. "À la limite", si une fissure naissait, elle pourrait s'ouvrir qu'en cisaillement plan.
L'ensemble de ces résultats est présenté dans le tableau 3.1, dans la première colonne se situent les différents modèles traités, dans la seconde et la troisième colonne respectivement sont récapitulées les réponses du champ d'endommagement en traction et en compression de ces modèles.

Remarque:
Il est évident que l'endommagement d'une structure soumise à une sollicitation ne peut se comporter de la même manière en traction ou en compression sous peine de voir l'interpénétration des lèvres des fissures.

[63] problème de Mumford-Shah
[64] autrement dit, le saut de déplacement normal peut avoir un signe quelconque

Modèle	Traction	Compression
Modèle de base	**bonne réponse**	mauvaise réponse
Modèle déviatorique	mauvaise réponse	**bonne réponse**

TAB. 3.1 – Récapitulatif des réponses des modèles d'endommagement proposés en amont

3.4.1 Objectifs

Pour remédier au problème de la non prise en compte de l'effet unilatéral, il faut changer de nouveau la régularisée en faveur d'une troisième qui prendrait en compte cet effet. En fait, au vu du tableau précédent on remarque que pour une sollicitation de type traction il faut utiliser le modèle de base alors que pour une sollicitation de type compression il faut utiliser le modèle déviatorique[65].

Il faut donc trouver un critère de sélection des modèles. Pour ce faire, on doit regarder le signe de la trace des déformations ($\mathbf{tr}\ \varepsilon(u)$). Physiquement, cette quantité représente le changement de volume d'un élément car la trace des déformations est égale à la divergence du déplacement ($\mathbf{tr}\ \varepsilon(u) = \mathbf{div}(u)$). Si cette trace est positive, alors il faut utiliser le modèle de base sinon c'est le modèle déviatorique qu'il faut utiliser. On se propose dans la suite de modéliser mathématiquement ce phénomène et de proposer un modèle d'endommagement correspondant.

3.4.2 Modèle d'endommagement avec prise en compte du contact unilatéral

On peut décomposer tout nombre réel x en une partie positive x^+ et une autre partie négative x^-, données par les relations suivantes :

$$x^+ = \begin{cases} x & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad x^- = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \geq 0 \\ x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

et on a toujours :

$$x = x^+ + x^- \qquad \text{et} \qquad x^2 = (x^+)^2 + (x^-)^2$$

En appliquant ces formules à la trace du tenseur des déformations, on obtient :

$$\mathbf{tr}\ \varepsilon(u) = (\mathbf{tr}\ \varepsilon(u))^+ + (\mathbf{tr}\ \varepsilon(u))^- \tag{3.11}$$

d'où

$$(\mathbf{tr}\ \varepsilon(u))^2 = \left((\mathbf{tr}\ \varepsilon(u))^+\right)^2 + \left((\mathbf{tr}\ \varepsilon(u))^-\right)^2 \tag{3.12}$$

En réécrivant l'énergie élastique volumique tout en gardant la décomposition déviatorique de cette dernière, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} A_0 \varepsilon \cdot \varepsilon &= \frac{1}{2}\left(2\mu_0 \varepsilon^d : \varepsilon^d + \kappa_0 (\mathbf{tr}\ \varepsilon)^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(2\mu_0 \varepsilon^d : \varepsilon^d + \kappa_0 \left((\mathbf{tr}\ \varepsilon(u))^+\right)^2 + \kappa_0 \left((\mathbf{tr}\ \varepsilon(u))^-\right)^2\right) \end{aligned} \tag{3.13}$$

[65] cette distinction entre traction/compression ne semble pas être raisonnable puisque lorsque la structure est soumise à un chargement quelconque, le choix du modèle devient difficile

Une fois l'énergie élastique volumique réécrite, nous allons faire porter l'endommagement uniquement sur les deux premiers termes de cette énergie. Autrement dit, le carré de la partie négative de la trace des déformations ne sera pas affecté par l'endommagement. Ainsi, la forme générale de la fonctionnelle régularisée peut se lire :

$$\begin{aligned} G(u,\alpha) &= \int_\Omega \frac{1}{2}\left(g(\alpha)+k_\eta\right)\left(2\mu_0\varepsilon^d:\varepsilon^d+\kappa_0\left((\mathbf{tr}\ \varepsilon(u))^+\right)^2\right)dx \\ &+ \int_\Omega \frac{1}{2}\kappa_0\left((\mathbf{tr}\ \varepsilon(u))^-\right)^2 dx - \mathcal{F}(u) \\ &+ \int_\Omega \left(G_c\eta|\nabla\alpha|^2+\frac{w(\alpha)}{\eta}\right)dx \end{aligned} \tag{3.14}$$

Remarque:
Grâce à cette nouvelle régularisée, nous allons pouvoir prendre en compte l'effet unilatéral dans le modèle. Cependant, cette régularisée présente l'inconvénient d'ajouter une non linéarité supplémentaire dans le modèle. En effet, la différentielle seconde de la fonctionnelle n'est pas continue.

Afin de comprendre cette régularisée nous devons nous placer dans le cas où nous aurions une fissure : dans la zone endommagée le terme $g(\alpha)+k_\eta$ est quasi nul pour le modèle limite, mais dans cette zone le carré de la partie négative de la trace des déformations[66] reste fini. Comme la partie négative de la divergence du déplacement $((\text{div } u)^-)$ est bornée, cela empêche l'apparition, à la limite lorsque $\eta \to 0$, l'interpénétration des lèvres des fissures. On aura donc à la limite, $[\![u]\!].n \geq 0$[67].

Dans la section suivante, nous allons illustrer sur un problème 2D et par des arguments heuristiques que cette régularisée converge à la limite vers un problème de rupture où l'effet unilatéral est pris en compte dans le modèle.

3.4.3 Illustration sur un problème 2D

Objectif
On veut montrer qu'en prenant le modèle d'endommagement où la variable d'endommagement affecte tout les termes de l'énergie de déformation sauf le carré de la partie négative de la trace des déformations, que l'on a convergence "à la limite" du modèle, c'est-à-dire lorsque $\eta \to 0$, vers un modèle de rupture où l'effet unilatéral de la fissure est pris en compte de façon naturelle dans le modèle.

Méthode
Pour ce faire, on utilise un argument "heuristique" qui n'est pas une vraie démonstration de $\Gamma-$convergence mais qui permet quand même de comprendre le fonctionnement du modèle.

Cadre
On se place en 2D, à déplacements contrôlés avec des forces extérieures nulles.

[66] un des termes de l'énergie volumique

[67] la preuve de $\Gamma-$convergence de cette régularisée vers le problème de rupture où l'effet unilatéral est une relation naturelle du modèle reste un problème ouvert

On considère le modèle d'endommagement caractérisé par $W_\eta(\nabla u, \alpha, \nabla\alpha)$ donné par

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(\nabla u, \alpha, \nabla\alpha) &= (g(\alpha) + k_\eta)\left(\mu_0 \varepsilon^d(u) : \varepsilon^d(u) + \frac{1}{2}\kappa_0 \left((\mathbf{div}\ u)^+\right)^2\right) \\ &+ \frac{1}{2}\kappa_0 \left((\mathbf{div}\ u)^-\right)^2 \\ &+ \frac{w(\alpha)}{\eta} + G_c \eta \nabla\alpha^2 \end{aligned} \tag{3.15}$$

où η est un petit paramètre.

Calcul
Considérons le problème de minimisation

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \\ v \in \mathcal{C} \\ \alpha \geq 0 \end{array} \right. \quad \mathcal{P}_\eta(u, \alpha) = \int_\Omega W_\eta(\nabla u, \alpha, \nabla\alpha) dx \tag{3.16}$$

où $\mathcal{C}$ est l'ensemble des déplacements admissibles.

Soit (u_η, α_η) un minimiseur. On va supposer qu'il a la structure suivante :

L'endommagement se concentre dans les bandes de faible épaisseur (cf figure 3.3)

Nous garderons les mêmes notations que celles introduites dans la section 3.3.3, et nous allons montrer que

$$\lim_{\eta \to 0} [\![u_\eta]\!].n \geq 0$$

Remarquons tout d'abord que comme u_η est un minimiseur, on a

$$\int_{K_\eta} \left((\mathbf{div}\ u_\eta)^-\right)^2 dx \leq D$$

où D désigne une constante positive indépendante de η.
En effet, on a nécessairement

$$\mathcal{P}_\eta(u_\eta, \alpha_\eta) \leq \mathcal{P}_\eta(U, 0) \tag{3.17}$$

où U est un relèvement (indépendant de η) vérifiant la condition à la limite en déplacement. Comme

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_\eta(U, 0) &= \int_\Omega (g(0) + k_\eta)\left(\mu_0 \varepsilon^d(U) : \varepsilon^d(U) + \frac{1}{2}\kappa_0 \left((\mathbf{div}\ U)^+\right)^2\right) dx \\ &+ \int_\Omega \frac{1}{2}\kappa_0 \left((\mathbf{div}\ U)^-\right)^2 + \frac{w(0)}{\eta} dx, \end{aligned} \tag{3.18}$$

de plus $w(0) = 0$, $g(0) = 1$ et comme k_η converge vers 0 lorsque η tend vers 0, on a alors :

$$\mathcal{P}_\eta(U, 0) \leq D$$

Comme les différents termes de l'énergie sont positifs, nous obtenons

$$\int_\Omega \left((\mathbf{div}\ u_\eta)^-\right)^2 \leq D$$

et donc en particulier

$$\int_{K_\eta} (\ (\mathbf{div}\ u_\eta)^-)^2 \leq D$$

On envisage ensuite 2 cas :

Cas 1 : $\mathbf{div}\ u_\eta \geq 0$ dans K_η

Cas 2 :$\mathbf{div}\ u_\eta \leq 0$ dans K_η

Dans le cas 1, on a :

$$0 \leq \int_{K_\eta} \mathbf{div}\ u_\eta dx \leq \int_{\partial K_\eta} u_\eta . n dx$$

ce qui nous permet de déduire qu'à la limite :

$$\lim_{\eta \to 0} [\![u_\eta]\!].n \geq 0$$

Dans le cas 2, on a :

$$\mathbf{div}\ u_\eta = (\mathbf{div}\ u_\eta)^-$$

et on peut, ainsi, reprendre le raisonnement du paragraphe 3.3.3, puisque

$$\begin{aligned} |\int_{K_\eta} (\mathbf{div}\ u_\eta)^- dx| &\leq \int_{K_\eta} |(\mathbf{div}\ u_\eta)^-| dx \\ &\leq \left(\int_{K_\eta} ((\mathbf{div}\ u_\eta)^-)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{\text{mes}(K_\eta)} \\ &\leq \sqrt{D}\sqrt{\text{mes}(K_\eta)} \ \to\ 0 \quad \text{quand } \eta \to 0 \end{aligned}$$

Et on obtient à la limite

$$\lim_{\eta \to 0} [\![u_\eta]\!].n = 0$$

3.4.4 Bilan

Dans cette section, nous avons construit un modèle d'endommagement qui permet d'avoir tous les modes d'ouvertures possibles avec interdiction d'interpénétration des lèvres des fissures. Cependant, ce modèle présente un inconvénient supplémentaire puisqu'il ajoute de la non linéarité causée par l'affectation par l'endommagement, uniquement, de la déformation positive de l'énergie volumique.

Conclusion

L'un des objectifs du travail qui a été réalisé était d'introduire une nouvelle régularisée capable de rendre compte de tous les phénomènes de rupture afin de remédier aux lacunes du premier modèle. Contrairement au problème d'imagerie, dont le seul souci est de déterminer les contours actifs d'une image, le problème de la mécanique de la rupture est plus complexe. Une adaptation directe n'est pas possible dans le cas du problème de rupture. En effet, la rupture comporte des phénomènes naturels tels que le contact, la non interpénétration des lèvres de la fissure, la refermeture des fissures ...

Le principe est de suivre l'idée d'Ambrosio et Tortorelli et d'introduire l'effet unilatéral dans le modèle, c'est-à-dire interdire l'interpénétration des lèvres de la fissure en introduisant la condition naturelle : le saut normal de déplacement aux lèvres de la fissure doit être positif ou nul. Pour ce faire, dans un premier temps, nous avons abandonné la première régularisée en faveur d'une autre qui permet de n'avoir que des ouvertures en cisaillement plan, ce qui la rend inapte à rendre compte de tous les modes d'ouvertures possibles. Puis, par la suite, nous avons remplacé cette dernière par une régularisée qui permet cette fois tous les modes d'ouvertures possibles.

Cependant, cette nouvelle et originale régularisée présente un inconvénient d'un point de vue pratique, puisqu'elle ajoute de la non linéarité supplémentaire dans le modèle, correspondant à la présence de parties positives. La différentielle seconde de la fonctionnelle n'est plus continue et cela nécessite la résolution d'un problème non linéaire[68].

[68] l'implémentation numérique de ces régularisées sera mise en œuvre et détaillée dans le chapitre 5

Chapitre 4

Formulation variationnelle de la Fatigue et régularisation

Sommaire

Introduction **82**

4.1 Rupture par fatigue **82**

4.1.1 Introduction à la fatigue 82

4.1.2 Propagation de fissures par fatigue : loi de Paris 83

4.1.3 Modèles basés sur les forces cohésives 86

4.2 Insuffisance de la théorie de Griffith **87**

4.2.1 Rupture sous chargement monotone 87

4.2.2 Rupture sous chargement cyclique 87

4.3 Modèles de forces cohésives et loi de Paris **88**

4.3.1 Mise en œuvre du modèle 89

4.3.2 La loi de fatigue limite 90

4.4 Formulation variationnelle des lois de Paris et leur régularisation . **91**

4.4.1 Formulation variationnelle des lois de fatigue limites et régularisation . 91

4.4.2 Généralisation au cas de n fissures 96

Conclusion **100**

Introduction

L'objet de ce chapitre est de présenter la formulation variationnelle de la fatigue et de régulariser ce problème en s'inspirant de l'idée introduite par Ambrosio et Tortorelli [AT90].

Dans un premier temps, on reviendra sur la phénoménologie de la fatigue en introduisant la fatigue, puis en rappelant la fatigue de type Paris et enfin en présentant la fatigue basée sur la notion de forces cohésives. Dans une seconde partie, on rappellera en quoi l'approche de Griffith reste inapte à prédire le phénomène de fatigue. Puis, sera rappelé comment il est possible de changer cette formulation pour rendre compte des phénomènes de fatigue. Enfin, nous établirons la formulation variationnelle des lois de Paris dont nous introduirons la régularisée.

4.1 Rupture par fatigue

Le domaine de la mécanique de la rupture par fatigue est lui aussi très vaste, il est donc impossible de présenter une analyse exhaustive de la bibliographie sur ce domaine. Il existe un nombre considérable d'approches de ce phénomène. Pour plus de détails, le lecteur intéressé pourra se référer à l'ouvrage de Suresh [Sur98].

4.1.1 Introduction à la fatigue

4.1.1.1 Quelques définitions

La fatigue est un processus qui sous l'action de contraintes ou déformations cycliques, répétées ou alternées, conduit à la modification des propriétés locales d'un matériau et pouvant entraîner la formation de défauts ou de fissures et éventuellement la rupture de la structure. La contrainte ou déformation maximale pour lesquelles le processus est activé sont inférieures à la résistance à la traction du matériau, autrement dit la propagation de fissures (ou de défauts) de fatigue est une propagation de fissures sous-critique c'est-à-dire telles que $G < G_c$. Autrement dit, la fatigue est la réponse d'un matériau soumis à une sollicitation qui fluctue au cours du temps (sans jamais dépasser une sollicitation maximale qui occasionnerait sa rupture en traction) et qui engendre son endommagement progressif.

Ce processus est décomposé en différentes étapes principales que nous citons :

- Évolution microstructurale (l'endommagement) : il y a formation de micro-fissures : c'est la germination des défauts.
- Amorçage d'une fissure : cette formation peut représenter 80% à 90% de la durée de vie de la structure. Durant cette phase, rien ne peut être perçu de l'extérieur et pourtant la structure subit des modifications internes.
- Croissance des fissures : propagation lente de la fissure, on se trouve à ce stade à 20% voire 10% de la durée de vie de la structure.
- Rupture finale rapide : propagation brutale due à l'instabilité qui amène à la ruine totale de la structure.

Pour prédire le comportement en fatigue c'est-à-dire le nombre de cycles avant rupture d'une structure, on distingue plusieurs facteurs :

- L'intensité maximale de la sollicitation (chargement ou déformation imposé)
- L'amplitude de cette sollicitation

- Le milieu dans lequel la structure est utilisée

4.1.1.2 Mécanisme de fatigue

Lorsque l'on exerce une contrainte comme par exemple une traction sur une structure, cette dernière commence par s'endommager par déformation plastique, à partir d'une contrainte appelée limite élastique. En théorie, il suffirait de rester en dessous de cette contrainte pour éviter l'endommagement de la structure. Mais dans la pratique et dans la vie réelle, ce n'est pas le cas. En effet, lors d'une sollicitation cyclique, il y a une concentration locale de contraintes essentiellement due aux angles ou entailles de la structure, aux trous et aux précipités. On dépasse alors localement la limite élastique, et à partir d'un certain moment la zone endommagée ne peut plus supporter les déformations, même faibles. Elle finit par amorcer une fissure qui s'agrandit dès que le matériau est sollicité et cela mène rapidement à la rupture finale de la structure.

Comme on peut le constater, ce phénomène de rupture par fatigue est différent des autres phénomènes de rupture, en effet, il se distingue par :

- Une zone de fatigue[69] : sous chargement cyclique, dans une structure, une fissure peut naître pour des valeurs de chargement à chaque cycle qui sont inférieures à la force de rupture statique. Cela est dû à la concentration locale de contrainte.
- Une zone d'endurance illimitée[70] : pour des valeurs du chargement maximal à chaque cycle assez faibles, on n'observe aucune apparition de fissure même après un nombre infini de cycles. Dans cette zone d'endurance illimitée, sous faible contrainte, la rupture ne se produit pas avant un nombre de cycles infinis. Un des essais le plus courants pour rendre compte de ce phénomène est celui permettant d'obtenir la courbe de Wöhler (ou courbe S-N : Stress-Number of cycles, ou courbe d'endurance).

4.1.1.3 D'un point de vue physique

D'un point de vue physique, on peut observer deux zones : une zone de fissuration par fatigue (en début de fissure) et une zone de rupture finale et brutale (en fin de fissure). L'importance de ces zones dépend de l'amplitude du chargement appliqué à la structure. En effectuant un zoom, on observe des stries globalement parallèles, correspondant à la propagation de la fissure à chaque sollicitation, puis une zone d'arrachement, correspondant à la rupture finale. Sur la première zone, on note la présence de stries parallèles, l'expérience montre qu'il y a une correspondance entre une strie et un cycle : plus les stries sont écartées et plus l'amplitude du chargement est grande, mais cela dépend aussi du type de matériau dont est constituée la structure : matériau fragile ou matériau ductile [Sur98].

4.1.2 Propagation de fissures par fatigue : loi de Paris

4.1.2.1 Cas général

Les modèles classiques de propagation de fissures par fatigue donnent l'évolution de la vitesse de propagation en fonction du chargement appliqué en pointe de fissure par une approche empirique. Le modèle le plus utilisé est celui de Paris et Erdogan [PE63]. Ces derniers à partir de la mécanique linéaire élastique de la rupture, font l'analyse suivante : les contraintes au voisinage d'une fissure, au cours d'un cycle de chargement, sont connues dès que l'on connaît les valeurs maximales et

[69] ou endurance limitée
[70] ou zone de sécurité

minimales du facteur d'intensité des contraintes au cours de ce cycle. Ainsi, pour ce modèle un essai de fissuration est suffisant pour caractériser l'évolution de la vitesse de propagation en fonction de la variation du facteur d'intensité des contraintes (cf figure 4.1).

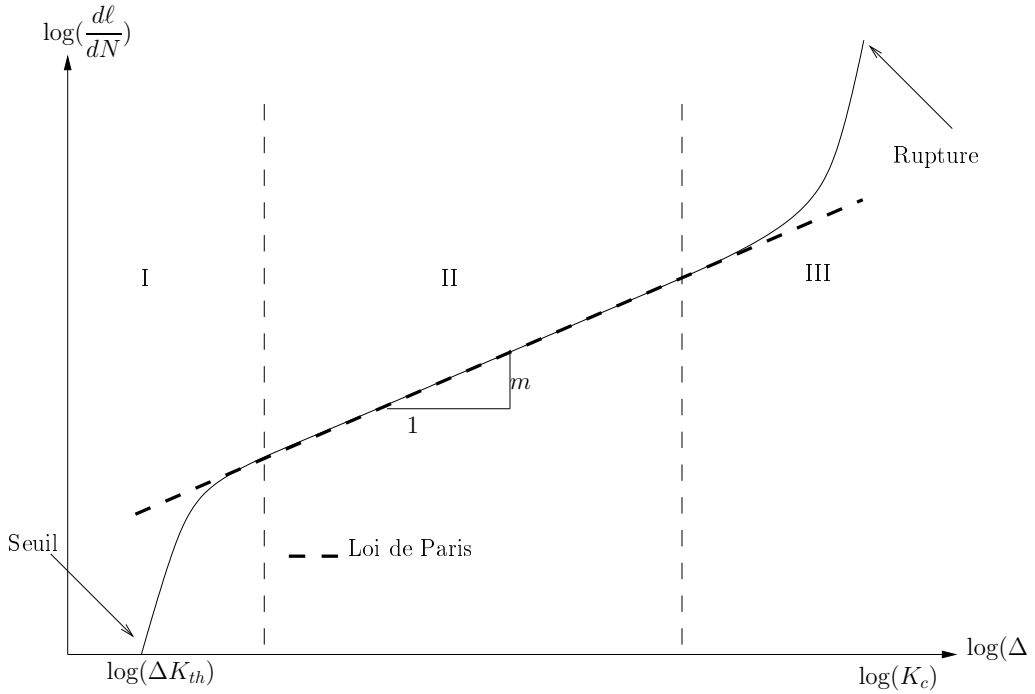

FIG. 4.1 – Schéma de la vitesse de propagation de fissure en fonction de la variation du facteur d'intensité des contraintes

À l'analyse des résultats expérimentaux, on postule donc que :

$$\frac{d\ell}{dN} = f(\Delta K)$$

où ℓ est la longueur de fissure et N est le nombre de cycles, ΔK est la variation du facteur d'intensité des contraintes au cours du cycle. Cette dépendance peut se résumer en trois régimes suivant la valeur de la variation du facteur d'intensité des contraintes (cf figure 4.1) :

- Régime I : En-deçà du régime II, la vitesse de propagation est inférieure à celle de Paris (régime I). Dans ce régime, la vitesse diminue rapidement quand ΔK diminue et la fissure finit par présenter des vitesses de fissuration difficilement détectables (elle est considérée comme impossible si $\Delta K \leq \Delta K_{th}$ et on parle alors de notion de seuil).
- Régime II : le régime central dit de Paris est un régime pour lequel la vitesse de fissuration est une fonction puissance de la variation du facteur d'intensité des contraintes.
- Régime III : Au delà du régime central, la vitesse de propagation est supérieure à celle prévue dans le régime de Paris car la fissure se propage d'une manière instable, on parle alors de rupture totale de la structure si $\Delta K \geq K_c$.

Remarque:
Lors de cycles de chargements "complexes", la variation du facteur d'intensité des contraintes n'est pas le seul paramètre à gouverner le taux de propagation d'une fissure en fatigue, il y a aussi le rapport de charge, défini comme le rapport des sollicitations minimales et maximales

au cours d'un cycle de chargement, qui peut être exprimé en fonction de la valeur maximale du facteur d'intensité des contraintes.

4.1.2.2 La loi de Paris

De nombreuses lois ont été proposées pour décrire l'évolution de la propagation de fissures de fatigue dans le régime II (cf figure 4.1). Mais cinquante ans plus tard, la loi phénoménologique proposée par Paris reste la plus utilisée par les ingénieurs. Cette loi relie le taux de fissuration à la variation du facteur des contraintes par la loi puissance suivante :

$$\frac{d\ell}{dN} = C\Delta K^m$$

où C et m sont deux paramètres du matériau définissant respectivement la position et la pente de la droite de Paris. Ils sont déterminés par des expériences de base sur des éprouvettes et ils dépendent entre autres des propriétés du matériau, du rapport de charge, du mode de chargement (pour plus de détails, on renvoie le lecteur vers l'ouvrage de Suresh [Sur98]).

Cependant, cette loi est limitée entre autres aux

- chargements d'amplitudes constantes et de rapport de charge nul : en effet, l'expérience montre qu'une surcharge peut "bloquer" momentanément une fissure ou au moins retarder de façon importante (selon l'amplitude de la surcharge) la durée de vie d'une structure. De même, la loi de Paris est inapte à rendre compte de l'influence du rapport de charge sur la vitesse de propagation de la fissure. Ces deux phénomènes sont expliqués par le processus de fermeture de fissures (cf [Elb70] pour plus de détails).
- fissures longues : en effet, il est montré expérimentalement que, à ΔK donné, les fissures "courtes" se propagent plus rapidement que les fissures longues. De même, il est observé qu'elles se propagent à des valeurs de ΔK inférieures au seuil de propagation ΔK_{th}, les causes de cet effet sont un peu floues, mais, il semble admis que dans cette configuration, la zone plastique précédant la fissure ne peut plus être négligée.

En résumé, la loi de Paris est ainsi restreinte aux problèmes où la déformation plastique en tête de fissure est négligeable. Dans le cas contraire les outils de la mécanique linéaire élastique de la rupture ne sont plus applicables. Ceci conduit à l'incapacité à rendre compte du phénomène de fermeture de fissure en cours de décharge.

Néanmoins, à ce jour, il n'existe aucune théorie permettant de prédire à elle seule le taux de croissance d'une fissure de fatigue. C'est pourquoi la loi de Paris continue à avoir un tel succès, même si elle fournit plus un schéma de données qu'une capacité de prédiction de la fissuration, puisque, pour chaque nouveau problème, il faut déterminer les constantes C et m.

Par la suite on étudiera l'évolution temporelle des fissures par fatigue en utilisant la loi de Paris donnée par la relation suivante :

$$\frac{d\ell}{dT} = C\Delta K^m$$

où T représente le temps homogénéisé.

4.1.3 Modèles basés sur les forces cohésives

La loi de Paris constitue un outil efficace pour modéliser des lois de fissuration par fatigue. Toutefois, et comme rappelé précédemment, cette loi est incapable de rendre compte de l'amorçage d'une fissure et n'est applicable que si la structure possède une fissure ou un défaut préexistant. De même, elle devient inadéquate lorsque la taille de la zone non-linéaire en tête de fissure[71] n'est plus négligeable par rapport aux autres dimensions de la structure fissurée. Pour pallier à ces difficultés, d'autres modèles basés sur les forces cohésives ont vu le jour.

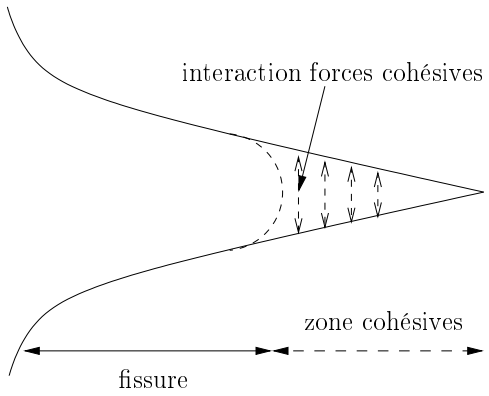

FIG. 4.2 – Schéma de la fissure et de la zone cohésive

Ces modèles de forces cohésives (cf figure 4.2) sont des modèles d'interface. Les premiers modèles ont été introduits par Dugdale [Dug60] et Barenblatt [Bar62]. Ils ont été introduits pour remédier aux problèmes de singularités en tête de fissure. Issus principalement d'observations expérimentales en pointe de fissure telles que l'apparition de micro-fissures, la croissance de cavités ou le développement de zones de plastification, ils permettent de faire la transition entre le milieu sain et une vraie fissure.

Sous chargement monotone
De façon formelle, un modèle de forces cohésives revient à considérer la présence d'une zone d'élaboration de la fissure en amont de la pointe de fissure dans laquelle des forces cohésives attractives T résistent à la séparation des lèvres de la fissure caractérisée par le saut de déplacement $[\![u]\!]$. Autrement dit, c'est une relation entre le déplacement relatif et la force d'interaction entre les lèvres d'une fissure. On recense dans la littérature de nombreuses lois, on cite à titre d'exemple le modèle de Needleman [Nee87] (travaux de référence dans le cadre de chargements monotones).

Sous chargement cyclique
Pour l'étude de la rupture de fatigue, c'est-à-dire pour l'étude d'un problème sous chargement cyclique, Needleman [Nee91] suggère des modèles de forces cohésives irréversibles. En effet, la description précédente n'est plus suffisante pour des chargements cycliques car pour des forces appliquées qui sont plus faibles que la résistance cohésive, la zone cohésive aura une durée de vie infinie. Cependant, par expérience, on peut observer que sous chargement cyclique les matériaux se fissurent à des niveaux de contrainte plus bas que la contrainte de rupture statique. Cela est

[71] comme la zone plastique ou la zone de microfissuration

essentiellement dû à l'usure des matériaux, et pour en rendre compte, il est nécessaire de ne plus considérer des lois cohésives réversibles mais irréversibles [Jau06].

4.2 Insuffisance de la théorie de Griffith

Si la théorie de Griffith était suffisante pour rendre compte de la rupture sous chargement monotone croissant, elle est en revanche inapte à prédire le phénomène de fatigue, c'est-à-dire à rendre compte de la rupture sous chargement cyclique (d'amplitude constante ou même variable). On se propose dans cette section de mettre en évidence cette insuffisance, dans un premier temps on rappellera la loi d'évolution de la fissuration d'une structure soumise à un chargement monotone, puis sous chargement cyclique on montrera pourquoi la formulation est inapte à prédire ce phénomène de fatigue.

4.2.1 Rupture sous chargement monotone

L'énergie totale de la structure est, par définition, la somme de son énergie potentielle et de son énergie de surface :

$$\mathcal{E}(u) = \mathcal{P}(u) + \mathcal{S}(u) \tag{4.1}$$

Dans le cas de Griffith, l'énergie de surface est donnée par la relation $\mathcal{S}(u) = G_c\mathcal{H}^{n-1}(\mathcal{S}_u)$ avec $\mathcal{S}_u$ l'ensemble des points où u est discontinu.

L'évolution de la fissuration consiste à rechercher, comme postulé par Francfort et Marigo [FM98], le champ u admissible qui minimise, à chaque instant et parmi tous les états de fissuration possibles, l'énergie totale de la structure, que l'on force de ce fait à se trouver dans un état d'équilibre stable. Ils traitent ainsi les fissures comme des surfaces de discontinuités et ils rendent compte de leurs évolutions par un critère énergétique.

Dans cette version revisitée on s'affranchit, *a priori*, de postuler le nombre de fissures et leurs trajets respectifs. En notant $\mathcal{C}$ l'ensemble des champs cinématiquement admissibles, le problème de minimisation s'écrit :

$$\begin{gathered} \text{Trouver} \quad u \in \mathcal{C} \\ \text{tel que} \quad \exists\, \eta > 0, \quad \|v - u\| \leq \eta \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E}(u) < \mathcal{E}(v) \end{gathered} \tag{4.2}$$

avec $\mathcal{E}$ donné par l'expression (4.1).

De plus, l'irréversibilité induit l'interdiction aux lèvres des fissures de se "recoller", dans le cas de Griffith la fissure étant définitivement créée dès lors qu'il y a discontinuité dans le champ de déplacement.

4.2.2 Rupture sous chargement cyclique

Si la théorie précédente est suffisante pour des structures soumises à un chargement monotone, elle devient impossible dès lors que l'on se place sous chargement cyclique d'amplitude constante, puisqu'elle ne peut absolument pas rendre compte du phénomène de fatigue (introduit par le chargement cyclique (cf figure 4.3)).

Afin de mettre en évidence cette incapacité, nous allons considérer une structure 2D soumise un à chargement cyclique de type déplacement contrôlé d'amplitude constante U et nous nous

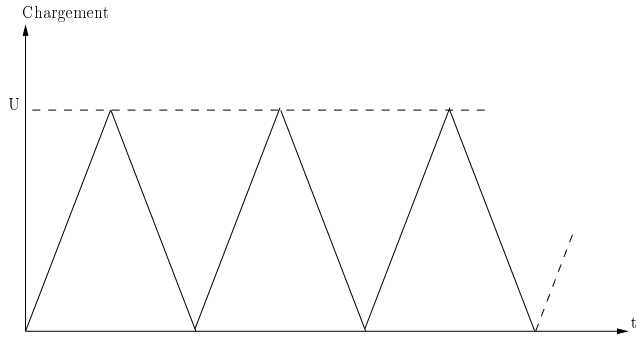

FIG. 4.3 – Chargement cyclique

plaçons dans le cas où le rapport de charge est nul[72].

En supposant qu'à chaque pas de temps i correspond un chemin de chargement (charge, décharge, recharge, etc...). À la fin de la première montée en charge, le champ de déplacement solution u_1 sera celui qui vérifiera le problème incrémental (4.2), c'est-à-dire

$$\begin{gathered} \text{Trouver} \quad u_1 \in \mathcal{C}_1 \\ \text{tel que} \quad \exists \eta > 0, \quad \|v - u_1\| \leq \eta \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E}_1(u_1) < \mathcal{E}_1(v) \quad \forall v \in \mathcal{C}_1 \end{gathered} \tag{4.3}$$

où $\mathcal{C}_1$ correspond à l'ensemble des champs de déplacement cinématiquement admissibles à la fin de la première montée en charge.
Du fait de l'irréversibilité à la décharge, l'expression de u_2 est égale à celle de u_1 puisque les lèvres des fissures ne peuvent se "recoller".
À la fin de la seconde montée en charge, on voit rapidement que le problème de minimisation que l'on traite est en tout point similaire à (4.3), l'énergie totale $\mathcal{E}_3$ ayant la même expression que $\mathcal{E}_1$. De même, on doit rechercher la solution u_3 dans l'ensemble $\mathcal{C}_3$ égal à $\mathcal{C}_1$. Ainsi, la solution u_3 est égale à la solution u_1.
La solution n'évolue donc pas après le premier cycle : il y a adaptation en un cycle.

4.3 Modèles de forces cohésives et loi de Paris

Jaubert et Marigo dans [JM06] proposent une autre formulation variationnelle, cette dernière est obtenue en conservant un principe de moindre énergie, mais en remplaçant l'énergie de surface de type Griffith par une énergie dépendant du saut de déplacement sur les lèvres de la fissure et en introduisant une condition d'irréversibilité. Par passage à la limite, lorsque la longueur interne du modèle est petite devant les dimensions de la structure, une loi de type Paris est obtenue.

Ainsi, à partir d'une formulation unique, ils peuvent rendre compte de différents phénomènes observés comme la propagation de fissure à court terme[73] : le modèle de Griffith ; ou encore la propagation de fissure à long terme[74] : les modèles phénoménologiques de Paris.

[72] c'est-à-dire que le rapport entre la charge minimale et la charge maximale (égale à U) est nul, donc la charge minimale est nulle
[73] sous chargement monotone
[74] sous chargement cyclique

Mais tout d'abord, revenons sur les différents choix faits par les auteurs pour retrouver une loi de fatigue de type Paris.

4.3.1 Mise en œuvre du modèle

L'hypothèse de Griffith qui consiste à dire que l'énergie de surface est proportionnelle à la longueur de la fissure avec un coefficient de proportionnalité égal au taux de restitution de l'énergie critique du matériau G_c, permet de décrire la discontinuité matérielle de manière très simpliste, en effet, elle engendre certains défauts comme la singularité des contraintes en front de fissure.

Pour remédier à ces problèmes liés au type d'énergie choisie, Barenblatt fait l'hypothèse d'une zone cohésive[75]. Il suppose, ainsi, dans le cadre de matériaux fragiles, que dans cette zone les lèvres de la fissure ne sont pas complètement séparées, des forces dites cohésives s'opposent à cette séparation. Son modèle semble être justifié, prenant l'exemple d'un morceau de tissu synthétique que l'on essaye de déchirer alors au front de la déchirure (fissure) on remarque bien une zone de déchirure et une autre zone en pointe de la déchirure dans laquelle les fils ne sont pas totalement rompus. Ainsi, dans ce modèle et lorsque la séparation entre les fissures est assez importante, c'est-à-dire lorsqu'elle dépasse une valeur critique caractéristique du matériau, les forces cohésives s'annulent et on a ainsi une réelle discontinuité des lèvres.

Le choix le plus simple est le modèle de Dugdale, cas particulier de l'énergie de surface de type Barenblatt. Dans ce modèle, les forces s'opposant à l'ouverture de la fissure sont constantes dans toute la zone d'élaboration.

Écriture générale de l'énergie de surface
En notant δ l'ouverture non nulle de la fissure, l'énergie de surface associée à un champ $u \in \mathcal{C}$ cinématiquement admissible s'écrit :

$$\mathcal{S}(u) = \int_{\mathcal{S}_u} \Phi(\delta(u(x), n(x)) dH^{n-1}(x) \tag{4.4}$$

où Φ est la fonction de densité d'énergie de surface qui dépend de l'ouverture δ elle-même dépendante du saut de déplacement et de l'orientation de la surface de discontinuité par son vecteur normal unitaire n.
Cependant, l'introduction d'une énergie de surface ne suffit pas puisqu'il y a toujours adaptation en un cycle si l'on n'introduit pas une condition d'irréversibilité. En effet, il ne faut plus faire dépendre l'énergie de surface du saut de déplacement entre les lèvres mais de l'accumulation de saut de déplacement au cours du temps. Cela revient à introduire une mémoire dans le modèle.

Ainsi la formulation de Jaubert et Marigo pour rendre compte de la fatigue repose sur trois ingrédients :

- un principe de moindre énergie,
- une énergie de surface de type Dugdale-Barenblatt,
- une condition d'irréversibilité.

[75] *process zone* en anglais

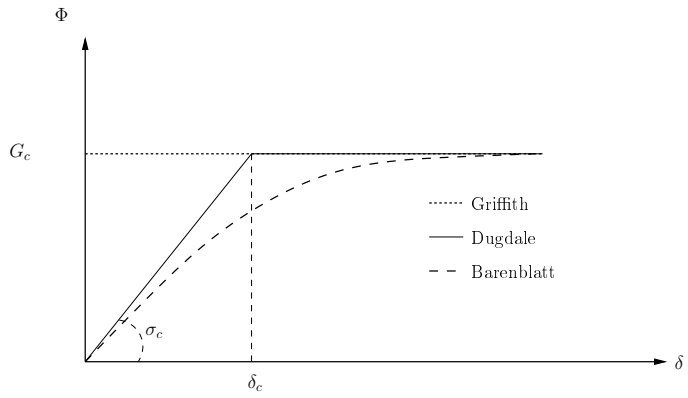

FIG. 4.4 – Densité d'énergie de surface en fonction de l'ouverture

4.3.2 La loi de fatigue limite

Cas du problème de décollement d'un film
Dans le cadre du décollement d'un film mince soumis à un chargement cyclique, Jaubert et Marigo montrent que leur modèle basé sur l'approche variationnelle et muni donc des ingrédients énoncés au paragraphe précédent[76] conduit au décollement progressif du film avec une zone cohésive au front de la fissure et est, ainsi, capable de rendre compte des phénomènes de fatigue.

Par le biais de cet exemple, les auteurs mettent en évidence une loi limite de fatigue permettant d'obtenir implicitement le taux de propagation du décollement en fonction du taux de restitution d'énergie :

$$\dot{\ell} = f(G) \tag{4.5}$$

Cette loi limite est obtenue en analysant le comportement asymptotique[77] de la solution du problème d'évolution du film mince en décollement (et de son arrachement).

Il est important de noter que cette loi limite recouvre non seulement une loi de Paris mais qu'elle contient aussi la loi de Griffith, en effet la fonction $f(G)$ est une fonction croissante de 0 à une valeur $\dot{\ell}_c$ lorsque G croît de 0 à G_c (par valeur inférieure). Pour $G = G_c$, $\dot{\ell}$ est indéterminé et peut prendre n'importe quelle valeur supérieure ou égale à $\dot{\ell}_c$.
Pour des valeurs de G petites devant G_c, $f(G)$ se comporte comme une loi puissance. Précisément, on aboutit à

$$\dot{\ell} \simeq \dot{\ell}_0 \left(\frac{G}{G_c}\right)^{\frac{3}{2}}$$

autrement dit une loi de Paris avec la puissance 3 (puisque $G \sim K^2$).

Une fois cette loi limite obtenue, les auteurs montrent que le problème de décollement par fatigue

[76] c'est-à-dire en adoptant une énergie de surface de type Dugdale dépendant d'une variable mémoratrice de l'ouverture et en minimisant l'énergie totale du film à chaque pas de temps du chargement discrétisé

[77] autrement dit lorsque la dimension de la structure est très grande devant la longueur interne du matériau, c'est-à-dire un comportement lorsque $\varepsilon \to 0$, où ε est la longueur interne de la zone cohésive

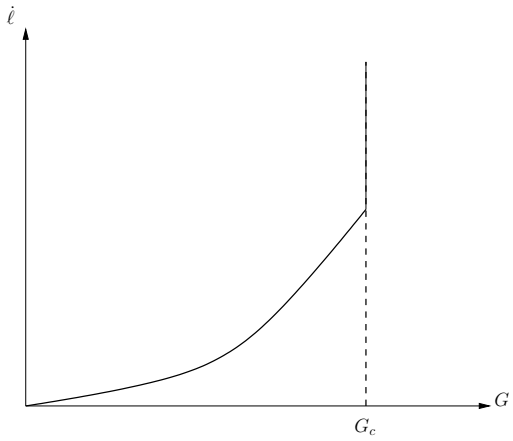

FIG. 4.5 – Comportement de la loi limite

revient à résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} \dot{\ell} &= f(G) \quad \text{avec} \quad G \leq G_c \\ G &= -\dfrac{d\mathcal{P}(\ell)}{d\ell} \quad \text{avec} \quad \mathcal{P} : \text{énergie potentielle} \end{cases} \tag{4.6}$$

4.4 Formulation variationnelle des lois de Paris et leur régularisation

Jaubert dans [Jau06] met en évidence à travers des exemples "académiques" des lois de fatigue limites qui englobent à la fois la loi de Griffith et la loi de Paris en considérant le comportement asymptotique du problème d'évolution de la fissuration lorsque la dimension de la structure est très grande devant la longueur interne du matériau. En retour, cette loi limite peut s'écrire sous une forme variationnelle que l'on explicitera par la suite.

4.4.1 Formulation variationnelle des lois de fatigue limites et régularisation

4.4.1.1 Modèle de décollement d'un film

Dans le cas de l'exemple du décollement d'un film mince, Jaubert a montré que le taux de décollement $\dot{\ell}$ et le taux de restitution d'énergie G sont reliés par la relation implicite suivante

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left\langle 2\sqrt{G(T)} - k\dot{\ell}(T) \right\rangle^2 = 4 \tag{4.7}$$

où T est le nombre de cycles, qui peut être considéré comme une pseudo variable de temps, ℓ désigne la longueur de la zone décollée.

Remarque:
La formule (4.7) est une loi de Griffith lorsque $G = 1$ (c'est-à-dire $G = G_c$ avec les dimensions) et une loi de Paris $\dot{\ell} = f(G)$ lorsque $G < 1$.

La loi donnée par (4.7) peut s'écrire comme une loi standard généralisée, c'est-à-dire en termes d'un potentiel de dissipation, et plus précisément, le potentiel de dissipation $\mathcal{D}$ se déduit de la fonction de fatigue f et est donné par

$$\mathcal{D}(\dot{\ell}) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^{\dot{\ell}} f^{-1}(\lambda)d\lambda & \text{si} \quad \dot{\ell} \leq 2 \\ \displaystyle\int_0^{2} f^{-1}(\lambda)d\lambda + (\dot{\ell} - 2) & \text{si} \quad \dot{\ell} \geq 2 \end{cases} \tag{4.8}$$

La loi d'évolution peut aussi s'écrire

$$\dot{\ell} = \arg\min_{\lambda \geq 0} \{\mathcal{D}(\lambda) - G\lambda\} \tag{4.9}$$

En discrétisant le paramètre T en introduisant un pas de cycles ΔT, en appelant $\Delta\ell$ l'incrément de décohésion durant les cycles compris entre T et $T + \Delta T$, la longueur de décohésion passant de ℓ à $\ell + \Delta\ell$, comme $G = -\mathcal{P}'(\ell)$ et comme l'énergie potentielle est une fonction convexe de ℓ, alors le problème continu précédent peut être approché par le problème de minimisation suivant :

$$\frac{\Delta\ell}{\Delta T} = \arg\min_{\lambda \geq 0} \left\{ \frac{1}{\Delta T} \left(\mathcal{P}(\ell + \lambda\Delta T) - \mathcal{P}(\ell) \right) + \mathcal{D}(\lambda) \right\} \tag{4.10}$$

En notant ℓ_i la longueur de la zone décollée au pas de temps T_i, le problème incrémental, pour déterminer la longueur ℓ_{i+1} au temps $T_{i+1} = T_i + \Delta T$, peut aussi s'écrire :

$$\begin{aligned} &\text{Pour } i \geq 1 \quad \text{trouver } \ell_{i+1} \text{ minimiseur sur } \{\ell : \ell \geq \ell_i\} \text{ de} \\ &\qquad\qquad \mathcal{P}(\ell) + \Delta T \mathcal{D}\left(\frac{\ell - \ell_i}{\Delta T}\right) \\ &\text{avec } \ell_0 = 0 \end{aligned} \tag{4.11}$$

L'intérêt de ce problème est multiple :

1. ΔT représente l'incrémentation du temps homogénéisé et peut être choisi grand puisqu'il correspond à un "paquet" de cycles de la loi de Paris.
2. Tout ce qui se passe au cours d'un cycle a été intégré une fois pour toutes dans le potentiel de dissipation $\mathcal{D}$.
3. Le problème "spatial" de détermination du champ d'ouverture en fonction de la longueur de décohésion est un problème linéaire, puisqu'il revient à adopter l'hypothèse de Griffith quant à l'interaction entre les lèvres des fissures.
4. Par rapport au modèle avec une énergie de surface de type Griffith, la différence tient au potentiel de dissipation $\mathcal{D}$ puisqu'elle peut être une fonction non linéaire de la longueur de décohésion.
5. Le potentiel de dissipation est indépendant de l'amplitude du cycle.

La démarche précédente peut se généraliser à des structures quelconques dans la mesure où l'on se donne le potentiel de dissipation associé à la loi de fatigue limite. On se propose dans la section suivante de présenter sa généralisation dans le cas d'une fissure avec un trajet prédéfini.

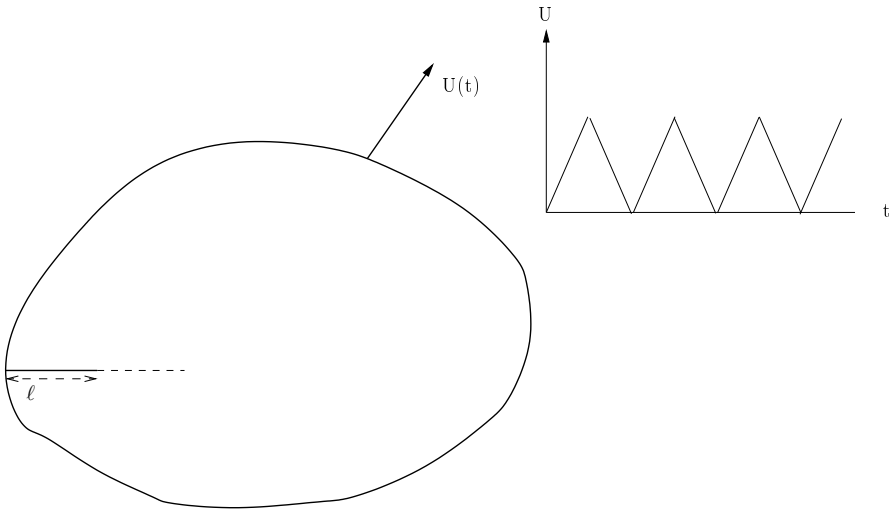

FIG. 4.6 – Structure homogène et élastique avec une prè-fissure soumise à un chargement cyclique

4.4.1.2 Généralisation en 2D avec une fissure de trajet donné

On s'intéresse à la création et à la propagation d'une fissure dans une structure bidimensionnelle homogène (cf figure 4.6), au comportement élastique, soumise à un chargement cyclique d'amplitude constante, c'est-à-dire un chargement dont l'intensité croît en charge de 0 jusqu'à une valeur maximale et décroît en décharge jusqu'à 0. On suppose que cette fissure est débouchante d'un côté, que son trajet spatial est connu *a priori* et donc que le seul paramètre géométrique restant à déterminer est sa longueur ℓ, c'est-à-dire la position de sa pointe.

Pour un chargement et un matériau donnés, le potentiel de dissipation est une fonction noté $\mathcal{D}(\ell)$, *a priori*, et comme pour le problème du décollement du film on peut s'attendre à ce que ce potentiel de dissipation soit une fonction convexe de $\dot{\ell}$, nulle en 0 et à croissance linéaire à l'infini afin de retrouver la loi de Griffith pour des chargements suffisamment élevés.

L'énergie potentielle $\mathcal{P}(\ell)$ s'obtient en résolvant le problème élastostatique correspondant à la structure fissurée sur une longueur ℓ que l'on note Ω_ℓ, et soumise au chargement d'amplitude maximale caractérisé par l'ensemble des champs admissibles $\mathcal{C}(\ell)$ et le travail des efforts extérieurs donné $F(v)$:

$$\mathcal{P}(\ell) = \min_{v \in \mathcal{C}(\ell)} \left\{ \int_{\Omega_\ell} \frac{1}{2} A_0 \varepsilon(v) \cdot \varepsilon(v) dx - F(v) \right\} \tag{4.12}$$

Remarquons que si ces forces ne sont pas nulles alors l'énergie potentielle de la structure peut ne pas être définie puisque il y a présence d'un puits d'énergie, c'est-à-dire que son infimum est $-\infty$. Par exemple, pour des longueurs de fissures trop importantes, séparant la structure en plusieurs morceaux, il y a perte d'équilibre car pour de telles longueurs la structure rompt et le problème de la propagation de fissures ne se pose plus. Cette considération interdit que l'on pose le problème de la propagation en termes de recherche du "minimum absolu" de l'énergie et elle doit être affaiblie en la recherche de "minimum relatif".

On obtient alors le problème incrémental suivant :

$$\begin{aligned} &\text{Pour } i \geq 1 \qquad \text{trouver } \ell_{i+1} \text{ minimiseur relatif sur } \{\ell : \ell \geq \ell_i\} \text{ de} \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \mathcal{P}(\ell) + \Delta T \mathcal{D}\left(\frac{\ell - \ell_i}{\Delta T}\right) \\ &\text{avec } \ell_0 \text{ donné} \end{aligned} \tag{4.13}$$

Il faut maintenant généraliser cette formulation dans le cas où le trajet de fissuration est inconnu, c'est l'objet de la section suivante.

4.4.1.3 Généralisation en 2D avec une fissure de trajet inconnu

Dans cette section, on se propose de généraliser la formulation variationnelle précédente dans le cas où le trajet spatial de la fissure n'est pas prédéfini. Pour ce faire, on considère une structure Ω quelconque homogène au comportement élastique et qui est sollicitée par un chargement cyclique d'amplitude maximale constante.

1. Il faut remplacer le paramètre ℓ par l'ensemble $\mathcal{K}$ des points de discontinuité caractérisant l'état de fissuration. Le supplément de fissuration à chaque itération est la différence $(\mathcal{K} \setminus \mathcal{K}_i)$.
2. À cause de l'irréversibilité, l'ensemble $\mathcal{K}$ doit contenir $\mathcal{K}_i$.
3. L'énergie potentielle associée à l'état de fissuration $\mathcal{K}$ s'obtient en résolvant le problème d'élastostatique correspondant à la structure fissurée de $\mathcal{K}$ et soumise à un chargement cyclique d'amplitude constante, cette énergie $\mathcal{P}(\mathcal{K})$ s'écrit :

$$\mathcal{P}(\mathcal{K}) = \min_{u \in \mathcal{C}(\mathcal{K})} \left\{ \int_{\Omega_{\mathcal{K}}} \frac{1}{2} A_0 \varepsilon(u) \cdot \varepsilon(u) dx - F(u) \right\} \tag{4.14}$$

Le problème incrémental de la formulation variationnelle du problème pour un trajet spatial où la fissure n'est pas prédéfinie peut s'écrire :

$$\begin{aligned} &\text{Pour } i \geq 1 \qquad \text{trouver } \mathcal{K}_{i+1} \text{ minimiseur relatif sur } \{\mathcal{K} : \mathcal{K} \supset \mathcal{K}_i\} \text{ de} \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \mathcal{P}(\mathcal{K}) + \Delta T \mathcal{D}\left(\frac{\mathcal{H}^1(\mathcal{K} \setminus \mathcal{K}_i)}{\Delta T}\right) \\ &\text{avec } \mathcal{K}_0 \text{ donnée} \end{aligned} \tag{4.15}$$

où $\mathcal{H}^1$ est la mesure de Hausdorff de dimension 1. $\mathcal{K} \setminus \mathcal{K}_i$ désigne le supplément de fissuration à chaque itération i.

L'intérêt de cette formulation est multiple :

1. On ne suppose rien *a priori* sur la fissure et sa forme.
2. On utilise un seul modèle pour étudier l'amorçage et/ou la propagation de fissure.
3. Cette formulation variationnelle peut être régularisée par des modèles d'endommagement non-locaux comme dans le cadre de la rupture fragile.

4.4.1.4 Régularisation par des modèles d'endommagement non-locaux

Comme on a pu le montrer au paragraphe précèdent, la loi limite peut se mettre sous forme variationnelle et cela revient à minimiser l'énergie totale suivante[78] :

$$\mathcal{F}_i(u,\mathcal{K}) = \int_{\Omega\backslash\mathcal{K}} \frac{1}{2} A_0 \varepsilon(u)\cdot\varepsilon(u)dx + \Delta T\ \mathcal{D}\left(\frac{\mathcal{H}^{n-1}(\mathcal{K}\backslash\mathcal{K}_i)}{\Delta T}\right) \tag{4.16}$$

où $\mathcal{K}_i$ est la fissure créée à la fin du $i^{ème}$ cycle, ΔT un petit paramètre réel positif et n est la dimension de l'espace. On remarque que cette nouvelle formulation ne diffère de la formulation de celle de Francfort et Marigo (c'est-à-dire de celle de Griffith), que par la fonction $\mathcal{D}$ qui joue le rôle du potentiel de dissipation (fonction positive et convexe de la nouvelle surface de fissuration créée).

Remarque:
Dans le cas de la loi de Griffith, le potentiel de dissipation $\mathcal{D}$ est une application linéaire en la variable $\mathcal{H}^{n-1}$, alors que dans le cas d'une loi de type Paris (donc une loi de fatigue) $\mathcal{D}$ est alors une fonction puissance positive et convexe.

Le problème incrémental au temps $T_{i+1} = T_i + \Delta T$ revient à chercher l'état $(u,\mathcal{K})$ parmi tous les champs de déplacement admissibles et de fissures $\mathcal{K} \supseteq \mathcal{K}_i$ (condition d'irréversibilité des fissures) qui minimisent le problème

$$\min_{u\in\mathcal{C}(\mathcal{K})\ ,\ \mathcal{K}\supseteq\mathcal{K}_i} \mathcal{F}_i(u,\mathcal{K}) \tag{4.17}$$

La difficulté d'utilisation pratique des formulations variationnelles pour la rupture monotone ou la rupture sous un phénomène de fatigue tient au fait qu'il faut envisager *a priori* tous les "états de fissuration" possibles, autrement dit de construire des champs de déplacement discontinus sur des surfaces de discontinuité arbitraires. Il s'agit là d'une difficulté majeure. La méthode des éléments finis classiques ne le permet pas et les méthodes d'éléments finis étendues ne peuvent pas aujourd'hui être suffisamment développées pour traiter tous les trajets spatio-temporels de fissuration.

Pour pallier à cette difficulté, nous avons décidé encore une fois de suivre l'idée d'Ambrosio et Tortorelli en segmentation d'images et de régulariser la fonctionnelle énergie (objet des chapitres 2 et 3 dans le cas de la rupture fragile) par des modèles d'endommagement non-locaux. Dans ce cas (c'est-à-dire la fatigue), une régularisée possible de l'énergie totale peut s'écrire :

$$\mathcal{F}_i^\eta(u,\alpha) \quad = \quad \int_\Omega \frac{1}{2} A(\alpha)\varepsilon(u)\cdot\varepsilon(u)dx + \Delta T\ \mathcal{D}\left(\mathcal{S}_\eta(\alpha) - \mathcal{S}_\eta(\alpha_{i-1})\right) \tag{4.18}$$

où

$$\mathcal{S}_\eta(\alpha) = \int_\Omega \left(\eta\nabla\alpha\cdot\nabla\alpha + \frac{w(\alpha)}{\eta}\right)dx.$$

avec η un paramètre qui a la dimension d'une longueur. Ici, la notion de fatigue est intimement liée à la notion de chargement cyclique. Ainsi, si on réfléchit en cycle : i représente le numéro de cycle et ΔT est sa période. En choisissant des fonctions $A(\alpha)$ et $w(\alpha)$ avec les bonnes propriétés de Γ-convergence, alors lorsque η tend vers 0, l'énergie régularisée $\mathcal{F}_i^\eta(u,\alpha)$ converge au sens de la Γ-convergence vers $\mathcal{F}_i(u,\mathcal{K})$ car $\mathcal{S}_\eta(\alpha)$ converge vers $\mathcal{H}^{n-1}(\mathcal{K})$.

[78] ici, il est question de la régularisation pour le modèle adapté pour la propagation d'une seule fissure, toutefois cette formulation que nous donnons est aussi bien valable en 2D qu'en 3D

Les champs de déplacement et d'endommagement, solutions du problème au cycle i (instant), sont déterminés comme minima locaux de la fonctionnelle (4.18). La minimisation se fait donc par rapport au couple (u, α) simultanément et l'irréversibilité exige que l'endommagement ne peut que croître, et la condition d'irréversibilité de l'endommagement nous donne :

$$\alpha_i \geq \alpha_{i-1}$$

où $(i-1)$ désigne la solution à l'instant précédent.

L'introduction de la régularisation remplace la fissure par des zones endommagées. Cette modification est très importante car mathématiquement on élimine le champ de déplacement discontinu en introduisant une seconde variable : l'endommagement. Ainsi, on pourra manipuler des champs parfaitement continus. Pour résoudre numériquement ce problème, on pourrait penser aux méthodes de type différences finies ou des méthodes de type éléments finis. En regardant de plus près la fonctionnelle, on s'aperçoit que cette dernière n'est pas convexe en les variables (u, α). Néanmoins, si l'on fixe une des deux variables et que l'on minimise la fonctionnelle par rapport à l'autre variable : la fonctionnelle résultat est alors convexe. Il faut donc utiliser un algorithme de minimisations alternées là aussi[79].
À première vue, on pourrait penser que l'algorithme est trivial à gérer et que le problème est évident, mais la réalité est toute autre. En effet, les étapes successives de ces minimisations alternées présentent des difficultés de niveaux différents :

- La minimisation par rapport à u à α fixé est simple. Il s'agit d'un problème standard de minimisation d'une fonction quadratique (cela revient à résoudre un système linéaire). Principalement, cette simplification est liée au fait que la fonction α affecte l'élasticité de façon linéaire. Mais on a pu voir au chapitre 3 que cette façon de faire doit être abandonnée en faveur d'une autre qui a la vertu de prendre l'effet unilatéral dans sa régularisée ce qui manifestement n'est pas facile à gérer.
- La minimisation par rapport à α à u fixé est un problème plus complexe. En effet, tout d'abord, on doit gérer une fonction non-linéaire en la variable α, la non linéarité étant introduite par le potentiel de dissipation (la convexité est encore garantie par les propriétés du potentiel de dissipation). Puis, du fait de l'introduction de cette loi de comportement, on doit aussi gérer l'espace dans lequel vit l'endommagement, à savoir $[0, 1]$. Enfin, on doit aussi introduire l'irréversibilité de la fissure (notez que la deuxième et troisième contraintes se résument en l'introduction des inégalités $\alpha_i \leq \alpha \leq 1$). Cela se ramène à la résolution d'un problème non linéaire sous contraintes d'inégalités.

4.4.2 Généralisation au cas de n fissures

Cette section se veut critique par rapport au modèle qui est présenté. En effet, si ce dernier est suffisant pour rendre compte de la propagation d'une fissure dans une structure, il est inadapté dans le cas de la propagation de plusieurs fissures dont le trajet est inconnu. Dans la formulation, il faut raisonner en termes de composantes connexes de nouvelles surfaces fissurées et il faut additionner leurs contributions dans le potentiel de dissipation qui par ailleurs est sur-additif.

[79] algorithme dont nous discuterons plus en détails dans le chapitre 5)

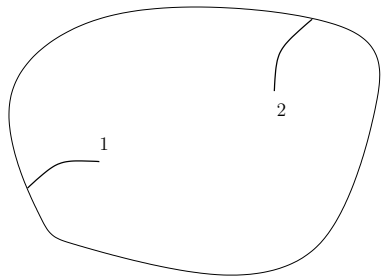

FIG. 4.7 – Structure homogène et élastique avec deux pré-fissures

4.4.2.1 Cas de n fissures en 2D avec trajet prédéfini

Nous allons essayer d'établir dans cette section que la formulation (4.13) n'est à utiliser que pour étudier la propagation d'une seule fissure. Nous donnerons par la suite la "bonne formulation" à utiliser dans le cas de n fissures.

Pour ce faire, nous allons nous placer dans le cas où n est égal à 2. On considère donc deux fissures le long d'un chemin de fissuration prédéfini ℓ, soient ℓ_1 et ℓ_2 désignant la position de chaque pointe macroscopique de chacune des fissures (cf figure 4.7). L'énergie potentielle de ce problème, obtenue en résolvant le problème d'élastostatique est donnée par l'expression $\mathcal{P}(\ell_1, \ell_2)$. Étudions le problème incrémental à la première itération. Ce dernier s'écrit alors, si le potentiel de dissipation est le même pour l'ensemble des deux fissures[80] :

$$\begin{gathered}\text{trouver } \ell_1 \text{ et } \ell_2 \text{ minimiseur sur } \{\ell_1, \ell_2 : \ell_1 \geq \ell_1^0 \text{ et } \ell_2 \geq \ell_2^0\} \text{ de} \\ \mathcal{P}(\ell_1, \ell_2) + \Delta T \mathcal{D}\left(\frac{\ell_1 - \ell_1^0 + \ell_2 - \ell_2^0}{\Delta T}\right)\end{gathered} \tag{4.19}$$

donc on doit chercher :

$$\begin{gathered}\min \qquad \mathcal{P}(\ell_1, \ell_2) + \Delta T \mathcal{D}\left(\frac{\ell_1 - \ell_1^0 + \ell_2 - \ell_2^0}{\Delta T}\right) \\ \left\{\begin{array}{l}\ell_1 \geq \ell_1^0 \\ \ell_2 \geq \ell_2^0\end{array}\right.\end{gathered} \tag{4.20}$$

Il s'agit d'un problème de minimisation avec contraintes d'inégalités, les conditions de Kuhn-Tucker ou conditions de Karush-Kuhn-Tucker permettent de résoudre des problèmes d'optimisation sous contraintes d'inégalités, et les conditions de premier ordre (conditions nécessaires) pour résoudre ce problème (en minimisant dans un premier temps par rapport à la variable ℓ_1, puis dans un second temps par rapport à la variable ℓ_2), sont données par :

$$\begin{array}{ll}\left(\frac{\partial \mathcal{P}(\ell_1, \ell_2)}{\partial \ell_1} + \mathcal{D}'\left(\frac{\ell_1 - \ell_1^0 + \ell_2 - \ell_2^0}{\Delta T}\right)\right)(\lambda_1 - \ell_1) \geq 0 & \forall \lambda_1 \geq \ell_1^0 \\ \left(\frac{\partial \mathcal{P}(\ell_1, \ell_2)}{\partial \ell_2} + \mathcal{D}'\left(\frac{\ell_1 - \ell_1^0 + \ell_2 - \ell_2^0}{\Delta T}\right)\right)(\lambda_2 - \ell_2) \geq 0 & \forall \lambda_2 \geq \ell_2^0\end{array} \tag{4.21}$$

[80] on se donne ℓ_1^0 et ℓ_2^0 les longueurs initiales respectives des fissures ℓ_1 et ℓ_2)

ce qui peut encore se lire comme :

$$\begin{aligned} &\left(-G_1 + \mathcal{D}'\left(\frac{\ell_1 - \ell_1^0 + \ell_2 - \ell_2^0}{\Delta T}\right)\right)(\lambda_1 - \ell_1) \geq 0 \qquad \forall \lambda_1 \geq \ell_1^0 \\ &\left(-G_2 + \mathcal{D}'\left(\frac{\ell_1 - \ell_1^0 + \ell_2 - \ell_2^0}{\Delta T}\right)\right)(\lambda_2 - \ell_2) \geq 0 \qquad \forall \lambda_2 \geq \ell_2^0 \end{aligned} \tag{4.22}$$

En regardant la première équation de ce système, on obtient alors deux cas (grâce aux calculs classiques des variations) :

1. soit $\ell_1 = \ell_1^0 \quad \Rightarrow \quad G_1 \leq \mathcal{D}'\left(\frac{\ell_1 - \ell_1^0 + \ell_2 - \ell_2^0}{\Delta T}\right)$
2. ou $\ell_1 > \ell_1^0 \quad \Rightarrow \quad G_1 = \mathcal{D}'\left(\frac{\ell_1 - \ell_1^0 + \ell_2 - \ell_2^0}{\Delta T}\right)$

En regardant cette fois la deuxième équation, on obtient :

1. soit $\ell_2 = \ell_2^0 \quad \Rightarrow \quad G_2 \leq \mathcal{D}'\left(\frac{\ell_1 - \ell_1^0 + \ell_2 - \ell_2^0}{\Delta T}\right)$
2. ou $\ell_2 > \ell_2^0 \quad \Rightarrow \quad G_2 = \mathcal{D}'\left(\frac{\ell_1 - \ell_1^0 + \ell_2 - \ell_2^0}{\Delta T}\right)$

Il y a donc quatre cas :

1. Soient $\ell_1 = \ell_1^0$ et $\ell_2 = \ell_2^0$, alors il n'y a pas eu d'avancée de fissure.

2. Soit uniquement la fissure 1 portée par ℓ_1 a avancé, ce qui veut dire que $\ell_1 > \ell_1^0$ et $\ell_2 = \ell_2^0$, donc on obtient : $G_1 = \mathcal{D}'\left(\frac{\ell_1 - \ell_1^0 + \ell_2 - \ell_2^0}{\Delta T}\right)$ et $G_2 \leq \Delta T \mathcal{D}'(\ell_1 - \ell_1^0 + \ell_2 - \ell_2^0)$, et ainsi on obtient $G_2 \leq G_1$.

3. Soit uniquement la fissure 2 portée par ℓ_2 a avancé : ce qui veut dire que $\ell_1 = \ell_1^0$ et $\ell_2 > \ell_2^0$, donc on obtient : $G_1 \leq \mathcal{D}'\left(\frac{\ell_1 - \ell_1^0 + \ell_2 - \ell_2^0}{\Delta T}\right)$ et $G_2 = \mathcal{D}'\left(\frac{\ell_1 - \ell_1^0 + \ell_2 - \ell_2^0}{\Delta T}\right)$, et ainsi on obtient $G_1 \leq G_2$.

4. Soient les fissures 1 et 2 portées respectivement par ℓ_1 et ℓ_2 ont avancé ce qui veut dire que $\ell_1 > \ell_1^0$ et $\ell_2 > \ell_2^0$, donc on obtient : $G_1 = \mathcal{D}'\left(\frac{\ell_1 - \ell_1^0 + \ell_2 - \ell_2^0}{\Delta T}\right)$ et $G_2 = \mathcal{D}'\left(\frac{\ell_1 - \ell_1^0 + \ell_2 - \ell_2^0}{\Delta T}\right)$, et ainsi on obtient $G_1 = G_2$ et donc le seul moyen pour que les deux fissures avancent est d'avoir un même taux de restitution d'énergie.

En résumé, les deux fissures avancent simultanément si et seulement si G_1 est égal à G_2. Cette condition est trop forte puisque seules les fissures qui ont le plus grand G se propagent (propagation "iso-G"). Il faut donc changer la formulation dans le cas de plusieurs fissures. Il semble que la "bonne formulation" soit :

Pour $i \geq 1$ trouver ℓ_{i+1} minimiseur relatif sur $\{\ell : (\ell_1, ..., \ell_n) \geq (\ell_1^i, ..., \ell_n^i)\}$ de

$$\mathcal{P}(\ell_1, ..., \ell_n) + \Delta T \sum_{k=1}^{n} \mathcal{D}\left(\frac{\ell_k - \ell_k^i}{\Delta T}\right)$$

avec $(\ell_1^0, ..., \ell_n^0)$ donné

(4.23)

En effet, avec cette nouvelle formulation, toutes les fissures se propagent en suivant leur taux de restitution d'énergie respectifs.

4.4.2.2 Critique du modèle

Nous allons montrer, dans cette section, qu'il est nécessaire de décomposer les nouvelles surfaces fissurées en composantes connexes. Pour ce faire, et toujours par souci de simplification, nous allons nous placer pour $n = 2$. On considère deux structures identiques non connectées entre elles soumises au même chargement cyclique.

On s'attend évidemment à ce que la réponse soit identique dans chaque structure et indépendante du nombre de structures considérées. En prenant pour potentiel de dissipation le potentiel de la réunion des surfaces nouvellement fissurées et en admettant que la fissuration est identique dans chaque structure, le problème posé sur l'ensemble des deux structures se présenterait comme suit :

$$\min_{\mathcal{K}:\mathcal{K}\supset\mathcal{K}_i} 2\mathcal{P}(\mathcal{K}) + \Delta T\ \mathcal{D}(2\frac{\mathcal{H}^{n-1}(\mathcal{K}\setminus\mathcal{K}_i)}{\Delta T}) \tag{4.24}$$

La solution de ce problème de minimisation dépend du nombre de structures que nous avons pris en compte sauf si $\mathcal{D}$ est une fonction linéaire, c'est-à-dire que nous sommes en présence d'une énergie de surface de type Griffith. Par contre, en découpant les nouvelles surfaces fissurées en composantes connexes, la solution redevient indépendante du nombre de structures.

4.4.2.3 Généralisation pour des fissures à trajet inconnu

Dans cette section, on essaie de généraliser la formulation variationnelle précédente au cas où le trajet spatial de la fissure n'est pas prédéfini. Pour ce faire, on considère une structure Ω quelconque homogène, au comportement élastique et qui est sollicitée par un chargement cyclique d'amplitude maximale constante. Le problème incrémental de la formulation variationnelle du problème pour des trajets de fissuration inconnus peut s'écrire :

$$\begin{aligned} &\text{Pour } i \geq 1 \qquad \text{trouver } \mathcal{K}_{i+1} \text{ minimiseur relatif sur } \{\mathcal{K} : \mathcal{K} \supset \mathcal{K}_i\} \text{ de} \\ &\qquad\qquad \mathcal{P}(\mathcal{K}) + \Delta T\ \textstyle\sum_{k\in K(\mathcal{K}\setminus\mathcal{K}_i)} \mathcal{D}(\frac{1}{\Delta T}\mathcal{H}^{n-1}\left((\mathcal{K}\setminus\mathcal{K}_i)^k\right)) \\ &\text{avec } \mathcal{K}_0 \text{ donnée} \end{aligned} \tag{4.25}$$

où $K(\mathcal{K})$ est l'ensemble des composantes connexes de $\mathcal{K}$ et $\mathcal{K}^k$ la $k^{ème}$ composante connexe de $\mathcal{K}$.

Les difficultés mathématiques
La nécessité de raisonner en termes de composantes connexes de nouvelles surfaces fissurées et d'additionner leurs contributions dans le potentiel de dissipation par ailleurs sur-additif posent des problèmes d'ordre mathématique.
En effet, il n'est pas facile de donner un sens à la notion de composantes connexes des surfaces de discontinuité de champs de déplacements, champs qui sont à variation bornée, puisqu'il s'agit de trouver les supports des pointes des fissures.
De plus, même si l'on arrivait à lui donner un sens "simple", le passage à la régularisation quant à lui semble être difficile. En effet, la notion de pointes de fissures est difficilement modélisable en termes de champ d'endommagement puisqu'il est question, ici, de bande de fissuration.

Conclusion

Si la théorie de Griffith est suffisante pour rendre compte de la rupture sous chargement monotone croissant, elle est en revanche inapte à prédire le phénomène de fatigue. A. Jaubert et J.-J. Marigo proposent dans [JM06], une autre formulation variationnelle. Cette dernière est obtenue en conservant un principe de moindre énergie, mais en remplaçant l'énergie de surface de type Griffith par une énergie dépendant du saut de déplacement sur les lèvres de la fissure et en introduisant une condition d'irréversibilité. Par passage à la limite, lorsque la longueur interne du modèle est petite devant les dimensions de la structure, une loi de type Paris est obtenue. En retour, cette loi limite peut s'écrire sous forme variationnelle dans le cas d'une fissure à trajet inconnu et cela revient à minimiser l'énergie suivante :

$$\mathcal{F}_i(u,\mathcal{K}) = \int_{\Omega\backslash\mathcal{K}} \frac{1}{2} A_0 \varepsilon(u)\cdot\varepsilon(u)dx + \Delta T\ \mathcal{D}\left(\mathcal{H}^{n-1}(\mathcal{K}\backslash\mathcal{K}_i)\right) \tag{4.26}$$

Afin de résoudre numériquement ce problème, cette énergie est régularisée par des modèles d'endommagement non-locaux, en suivant les idées introduites dans les chapitres précédents[81].

[81] dont l'implémentation numérique sera mise en œuvre et détaillée dans le chapitre 5

Chapitre 5

Implémentation et Simulation numérique

Sommaire

Objectifs **102**

5.1 Modèle d'endommagement : mise en œuvre numérique **102**

5.1.1 Les propriétés de la fonctionnelle d'Ambrosio et Tortorelli 102

5.1.2 L'algorithme de minimisations alternées 105

5.1.3 Rôle des différents paramètres 108

5.1.4 Discrétisation et implémentation numérique 109

5.1.5 La question de l'irréversibilité 110

5.2 Modèles d'endommagement : simulation numérique et influence des paramètres **111**

5.2.1 Essai de la barre en traction 111

5.2.2 Influence du modèle d'endommagement 114

5.2.3 Influence de k_η 115

5.2.4 Taille du maillage 117

5.2.5 Les conditions aux limites sous le champ d'endommagement 118

5.2.6 Rôle de la longueur interne et effets d'échelles 119

5.3 Essai de traction sur une matrice avec une fibre rigide **121**

5.3.1 Géométrie, chargement et paramètres 122

5.3.2 Simulation 1 : la matrice de base 123

5.3.3 Simulation 2 : variation de la taille de la matrice 124

5.3.4 Simulation 3 : variation de la fibre 125

5.3.5 Effets d'échelle 126

5.4 Le contact unilatéral **127**

5.4.1 Les lacunes de la précédente régularisée 127

5.4.2 Ouverture en cisaillement plan de la fissure 129

5.4.3 Tous les modes d'ouverture sont possibles 131

5.5 Le problème de Fatigue **135**

5.5.1 Principaux résultats théoriques 135

5.5.2 Algorithme de résolution pour le cas de propagation d'une fissure 135

5.5.3 Simulations numériques 137

5.5.4 Perspectives 144

Objectifs

L'objet de ce chapitre est de présenter l'implémentation numérique de quelques modèles d'endommagement que nous avons introduits aux chapitres 2, 3 et 4.
Tout d'abord, on commencera par rappeler la régularisée d'Ambrosio et Tortorelli (par une fonctionnelle elliptique) initialement introduite pour les problèmes d'imageries et adaptée par Bourdin [Bou98] à la rupture fragile. On exposera les propriétés de cette fonctionnelle, l'algorithme de minimisations alternées que nous avons adopté pour la résolution, le rôle des différents paramètres présents dans la régularisée. Nous terminerons par décrire l'implémentation numérique de ce modèle.
Par la suite, nous discuterons de la simulation numérique de ces modèles d'endommagement non-locaux et de l'influence des différents paramètres présents et nous finirons par l'introduction de l'irréversibilité dans le modèle. Ensuite, on montrera comment l'ajout de la non interpénétration des lèvres des fissures (le contact unilatéral) a été pris en compte dans la mise en œuvre numérique et cela en introduisant une régularisée permettant un mode d'ouverture en cisaillement plan puis une autre régularisée permettant tout les modes d'ouvertures.
Enfin, on abordera la mise en œuvre numérique de la fatigue lors de la propagation d'une fissure, puis on essaiera d'apporter quelques éléments d'implémentations possibles concernant la propagation de plusieurs fissures.

5.1 Modèle d'endommagement : mise en œuvre numérique

5.1.1 Les propriétés de la fonctionnelle d'Ambrosio et Tortorelli

Ambrosio et Tortorelli ont proposé en 90 [AT92] une famille de fonctionnelles elliptiques qui approche au sens de la Γ-convergence la fonctionnelle Mumford Shah[82]. Cette régularisée a été adaptée par Bourdin pour les problèmes de la mécanique de la rupture fragile. On rappelle que l'idée principale consiste à introduire une nouvelle variable α définie dans $[0,1]$ qui contrôle l'endommagement de la structure. Cette fonctionnelle paramétrée par η est définie par :

$$\mathcal{A}_\eta(u,\alpha) = \int_\Omega \frac{1}{2}\left((1-\alpha)^2 + k_\eta)A_0\varepsilon(u)\cdot\varepsilon(u)\right)dx + G_c\left(\int_\Omega \frac{\alpha^2}{4\eta} + \eta\nabla\alpha\cdot\nabla\alpha dx\right) \tag{5.1}$$

où $\eta > 0$ est un paramètre qui tend vers 0, $k_\eta > 0$ une quantité infinitésimale qui décroît vers 0 plus vite que η, u est le champ de déplacement défini dans $W^{1,2}(\Omega)$[83] et α défini dans $W^{1,2}(\Omega;[0,1])$. Il est montré dans [Bou98] que la fonctionnelle $\mathcal{A}_\eta$ converge au sens de la Γ-convergence vers le problème de rupture fragile lorsque $\eta \to 0$. Par la preuve de la Γ-limite la première intégrale de l'énergie converge vers l'énergie élastique alors que la deuxième converge vers l'énergie de surface. Et par construction, le champ α convergera vers 1 dans les zones endommagées[84] et zéro ailleurs.

Compte tenue de la présence du terme $\left((1-\alpha)^2 + k_\eta\right)A_0\varepsilon(u)\cdot\varepsilon(u)$, la fonctionnelle $\mathcal{A}_\eta$ n'est pas convexe en le couple (u,α), mais cependant, on remarque qu'en général la fonctionnelle est convexe en chacune des variables séparément. Autrement dit, à u fixé, la fonctionnelle est convexe en α et, à α fixé, la fonctionnelle est convexe en u. Ainsi, en fixant l'un des champs, la recherche du minimum par rapport à l'autre variable est très facile puisque chacun des problèmes devient

[82] la fonctionnelle de segmentation d'image

[83] On note habituellement $W^{k,p}$ l'espace des fonctions $f : \Omega \Rightarrow R$ qui sont mesurables, k fois dérivables au sens des distributions, et telles que les dérivées successives soient dans $L^p(\Omega)$.

[84] fissures à la limite lorsque le paramètre $\eta \to 0$

un problème linéaire par rapport à la variable en question.

Il s'agit de minimiser cette fonctionnelle dans une classe de fonctions introduites précédemment :

$$\begin{array}{l} \min\limits_{u,\alpha} \mathcal{A}_\eta(u,\alpha) \\ \text{avec } u \text{ : cinématiquement admissible avec le chargement} \\ \text{avec } \alpha \text{ : champ d'endommagement appartenant à [0,1]} \end{array} \tag{5.2}$$

Les travaux d'Ambrosio et Tortorelli conclus avec des résultats d'existence d'un minimum pour la fonctionnelle (5.1), mais en général il n'y a pas unicité de ce dernier. La fonctionnelle (5.1) a une propriété qui s'avère utile pour les développements numériques ; car elle permet de résoudre des problèmes de minimisations sans contraintes.

Proposition 5.1
Si on minimise (5.1) *par rapport à* $\alpha \in \mathcal{R}$ *(sans contrainte), alors le minimiseur est automatiquement dans l'intervalle* $[0,1]$.

Preuve:
Soit $(\bar{u},\bar{\alpha})$, le couple minimiseur de l'énergie $\mathcal{A}_\eta$, pour montrer que le minimiseur est automatiquement dans l'intervalle $[0,1]$, nous allons distinguer deux cas :

- Cas 1 : $\bar{\alpha} > 1$
  On pose alors $\tilde{\alpha} = \min(\bar{\alpha}, 1)$ (cf figure 5.1), et nous allons montrer que si $\bar{\alpha}$ est le minimiseur, alors il est forcement égal à $\tilde{\alpha}$.

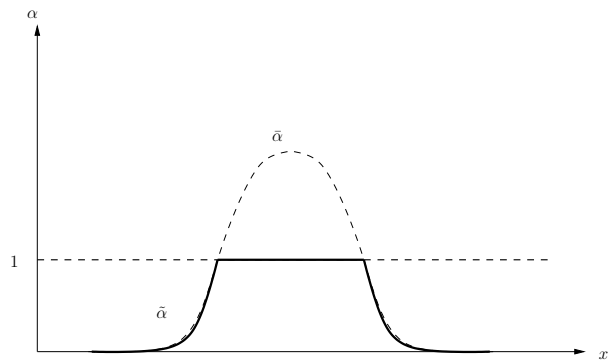

FIG. 5.1 – L'endommagement $\tilde{\alpha}$

Puisque $(\bar{u},\bar{\alpha})$ est le couple minimiseur de l'énergie, alors :

$$\mathcal{A}_\eta(\bar{u},\bar{\alpha}) \leq \mathcal{A}_\eta(\bar{u},\alpha) \quad \forall\ (u,\alpha)\ \in\ (\mathcal{C}\times D)$$

Comme la relation précédente est vraie pour tout état $(u,\alpha) \in (\mathcal{C}\times D)$, elle est en particulier vraie pour $\tilde{\alpha}$, on pose alors $\alpha = \tilde{\alpha}$, on obtient ainsi :

$$\mathcal{A}_\eta(\bar{u},\bar{\alpha}) \leq \mathcal{A}_\eta(\bar{u},\tilde{\alpha})$$

Il nous reste alors à montrer que $\mathcal{A}_\eta(\bar{u},\tilde{\alpha}) \leq \mathcal{A}_\eta(\bar{u},\bar{\alpha})$. Comme :

$$\tilde{\alpha} = \begin{cases} \bar{\alpha} & \text{si} \quad \bar{\alpha} \leq 1 \\ 1 & \text{si} \quad \bar{\alpha} \geq 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \nabla\tilde{\alpha} = \begin{cases} \nabla\bar{\alpha} & \text{si} \quad \bar{\alpha} \leq 1 \\ 0 & \text{si} \quad \bar{\alpha} \geq 1 \end{cases} \quad p.p.$$

donc

$$(\nabla\tilde{\alpha})^2 \leq (\nabla\bar{\alpha})^2 \ p.p. \qquad \text{d'où} \qquad \int_\Omega \eta\nabla\tilde{\alpha}\nabla\tilde{\alpha}dx \leq \int_\Omega \eta\nabla\bar{\alpha}\nabla\bar{\alpha}dx$$

de plus

$$\tilde{\alpha}^2 \leq \bar{\alpha}^2 \qquad \text{d'où} \qquad \int_\Omega \frac{\tilde{\alpha}^2}{4\eta}dx \leq \int_\Omega \frac{\bar{\alpha}^2}{4\eta}dx$$

et enfin

$$-\tilde{\alpha} = \max(-1, -\bar{\alpha}) \quad \Rightarrow \quad 1 - \tilde{\alpha} = \max(0, 1 - \bar{\alpha})$$

soit

$$0 \leq (1-\tilde{\alpha})^2 \leq (1-\bar{\alpha})^2 \quad \Rightarrow \quad (1-\tilde{\alpha})^2 + k_\eta \leq (1-\bar{\alpha})^2 + k_\eta$$

d'où

$$\int_\Omega \frac{1}{2}((1-\tilde{\alpha})^2 + k_\eta)A_0\varepsilon(u).\varepsilon(u)dx \leq \int_\Omega \frac{1}{2}((1-\bar{\alpha})^2 + k_\eta)A_0\varepsilon(u).\varepsilon(u)dx$$

ainsi

$$\mathcal{A}_\eta(\bar{u}, \tilde{\alpha}) \leq \mathcal{A}_\eta(\bar{u}, \bar{\alpha})$$

Donc $\tilde{\alpha}$ est un minimiseur. Mais comme $\mathcal{A}_\eta$ est strictement convexe par rapport à α, à $\bar{u}$ fixé, le minimiseur est unique et donc $\tilde{\alpha} = \bar{\alpha}$.

- Cas 2 : $\bar{\alpha} < 0$
  On pose maintenant $\tilde{\alpha} = \max(\bar{\alpha}, 0)$ (cf figure 5.2), et nous allons montrer que si $\bar{\alpha}$ est le minimiseur alors il est forcement égal à $\tilde{\alpha}$.

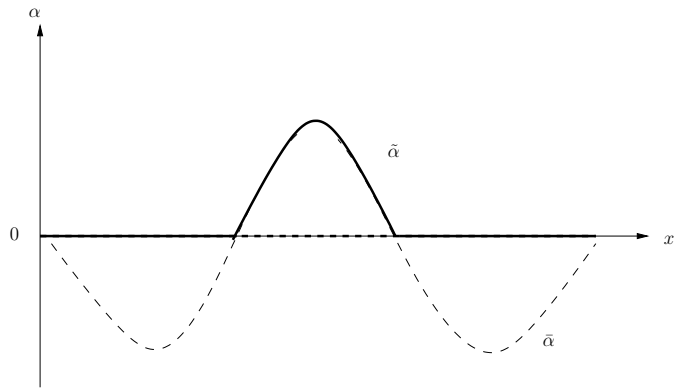

FIG. 5.2 – L'endommagement $\tilde{\alpha}$

Comme $(\bar{u}, \bar{\alpha})$ est le couple minimiseur de l'énergie, alors :

$$\mathcal{A}_\eta(\bar{u}, \bar{\alpha}) \leq \mathcal{A}_\eta(\bar{u}, \tilde{\alpha})$$

Il reste donc à montrer que $\mathcal{A}_\eta(\bar{u}, \tilde{\alpha}) \leq \mathcal{A}_\eta(\bar{u}, \bar{\alpha})$, or

$$\tilde{\alpha} = \begin{cases} \bar{\alpha} & \text{si} \quad \bar{\alpha} \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad \bar{\alpha} \leq 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \nabla\tilde{\alpha} = \begin{cases} \nabla\bar{\alpha} & \text{si} \quad \bar{\alpha} \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad \bar{\alpha} \leq 0 \end{cases} \quad p.p.$$

donc

$$(\nabla\tilde{\alpha})^2 \leq (\nabla\bar{\alpha})^2 \ p.p. \qquad \text{d'où} \qquad \int_\Omega \eta\nabla\tilde{\alpha}\nabla\tilde{\alpha}dx \leq \int_\Omega \eta\nabla\bar{\alpha}\nabla\bar{\alpha}dx$$

de plus

$$0 \leq \tilde{\alpha}^2 \leq \bar{\alpha}^2 \qquad \text{d'où} \qquad \int_\Omega \frac{\tilde{\alpha}^2}{4\eta} dx \leq \int_\Omega \frac{\bar{\alpha}^2}{4\eta} dx$$

et enfin

$$0 \leq (1-\tilde{\alpha})^2 \leq (1-\bar{\alpha})^2 \quad \Rightarrow \quad (1-\tilde{\alpha})^2 + k_\eta \leq (1-\bar{\alpha})^2 + k_\eta$$

d'où

$$\int_\Omega \frac{1}{2}((1-\tilde{\alpha})^2 + k_\eta) A_0 \varepsilon(u).\varepsilon(u) dx \leq \int_\Omega \frac{1}{2}((1-\bar{\alpha})^2 + k_\eta) A_0 \varepsilon(u).\varepsilon(u) dx$$

ainsi

$$\mathcal{A}_\eta(\bar{u}, \tilde{\alpha}) \leq \mathcal{A}_\eta(\bar{u}, \bar{\alpha})$$

Donc $\tilde{\alpha}$ est un minimiseur. Mais comme $\mathcal{A}_\eta$ est strictement convexe par rapport à α, à $\bar{u}$ fixé, le minimiseur est unique et donc $\tilde{\alpha} = \bar{\alpha}$.
En conslusion, le minimiseur de $\mathcal{A}_\eta$ par rapport à α, à $\bar{u}$ fixé, est dans l'intervalle $[0, 1]$.

◇

5.1.2 L'algorithme de minimisations alternées

Comme $\mathcal{A}_\eta$ n'est pas convexe en le couple (u, α), mais elle est convexe en chacune des variables séparément, l'idée est alors de construire un algorithme pour résoudre numériquement ce problème basée sur le principe de minimisations alternées. Ainsi, il y a une succession de minimisations par rapport à chaque variable jusqu'à convergence. Nous sommes dans l'impossibilité de prouver la convergence de cette méthode de minimisation, néanmoins cet algorithme est un algorithme de descente (cf proposition 5.2) et donc nous sommes assurés de la convergence de la méthode vers un couple (u_k, α_k) point stationnaire de la fonctionnelle (cf [Bou07]).

Ainsi, le fait d'avoir fixé une variable et de minimiser par rapport à l'autre variable, a permis implicitement de linéariser chaque problème. Notons $\mathcal{A}'_\eta(u, \alpha).(v, 0)$ la différentielle de $\mathcal{A}_\eta$ par rapport à u dans la direction v et $\mathcal{A}'_\eta(u, \alpha).(0, \beta)$ la différentielle de $\mathcal{A}_\eta$ par rapport à α dans la direction β. On a alors :

$$\mathcal{A}'_\eta(u, \alpha).(v, 0) = \int_\Omega \left((1-\alpha)^2 + k_\eta) A_0 \varepsilon(u) \cdot \varepsilon(v)\right) dx \quad \text{et} \tag{5.3}$$

$$\mathcal{A}'_\eta(u, \alpha).(0, \beta) = \int_\Omega \left(-(1-\alpha)\beta) A_0 \varepsilon(u) \cdot \varepsilon(u)\right) dx + G_c \left(\int_\Omega \frac{\alpha\beta}{2\eta} + 2\eta \nabla\alpha \cdot \nabla\beta dx\right) \tag{5.4}$$

Algorithme 1 L'algorithme de minimisation est alors

1. *Initialisation*
   (a) Fixer les paramètres de ce modèle : η, la longueur interne du modèle d'endommagement ; k_η, un reste de rigidité (paramètre qui assure l'existence et unicité du problème en déplacement) ; h, la taille du maillage ; δ, la tolérance de convergence du modèle d'endommagement ; $\bar{u}_k$, discrétisation du déplacement imposé ; α_0, choisir un "bon" point de départ
   (b) Soit $k = 0$ et $(u^0, \alpha^0) := (u^k, \alpha^k)$ (k est la discrétisation du déplacement).
2. *Itération i*
   (a) Calculer $u^k_{i+1} := \arg\min_u \mathcal{A}_\eta(u, \alpha^k_i)$ sous la contrainte $u = \bar{u}_k$ sur $\partial_u\Omega$.

(b) Calculer $\alpha_{i+1}^k := \arg\min_\alpha \mathcal{A}_\eta(u_{i+1}^k, \alpha)$

3. *fin*
   (a) Répéter l'étape 2 jusqu'à ce que $\|\alpha_{i+1}^k - \alpha_i^k\|_\infty \leq \delta$.
   (b) poser $(u^{k+1}, \alpha^{k+1}) := (u_{i+1}^k, \alpha_{i+1}^k)$.
   (c) Calculer l'énergie, enregistrer les données et revenir à la phase d'initialisation du pas suivant

5.1.2.1 Algorithme de descente

Proposition 5.2
L'algorithme de minimisations alternées est un algorithme de descente.

Preuve:
En fixant l'un des champs, l'énergie totale est une fonction convexe par rapport à l'autre variable, on peut alors utiliser l'algorithme de minimisations alternées qui peut se lire :

(i) Minimiser par rapport à u à α fixé
(ii) Minimiser par rapport à α à u fixé

On se place au pas k, connaissant (u^{k-1}, α^{k-1}), on cherche à calculer (u^k, α^k), pour cela nous allons construire une suite (u_i^k, α_i^k), $i \geq 0$ avec $\alpha_0^k = \alpha^{k-1}$, on se place à l'itération $i+1$

(i) On minimise $\mathcal{A}_\eta$ par rapport à u pour $\alpha = \alpha_i^k$, puisque il y a existence et unicité du minimum à cette itération[85], on obtient alors que le minimum u_{i+1}^k vérifie :

$$\mathcal{A}_\eta(u_{i+1}^k, \alpha_i^k) \leq \mathcal{A}_\eta(v, \alpha_i^k) \quad \forall\ v\ \in \mathcal{C}$$

C'est un problème d'élasticité linéaire qui correspond à l'état d'endommagement α_i^k

(ii) On minimise $\mathcal{A}_\eta$ par rapport à α pour $u = u_{i+1}^k$, comme on a existence et unicité du minimum à cette itération, il en résulte que le minimum α_{i+1}^k vérifie :

$$\mathcal{A}_\eta(u_{i+1}^k, \alpha_{i+1}^k) \leq \mathcal{A}_\eta(u_{i+1}^k, \beta) \quad \forall\ \beta\ \in \mathcal{D}$$

C'est un problème quadratique qui correspond au déplacement u_{i+1}^k

On peut alors à ce stade affirmer que cet algorithme est un algorithme de descente de l'énergie totale, car

$$\mathcal{A}_\eta(u_{i+1}^k, \alpha_{i+1}^k) \leq \mathcal{A}_\eta(u_{i+1}^k, \beta) \qquad \text{d'après } (ii)$$

Cette expression est vraie pour tout champ β et en l'occurrence pour les champs β égaux à α_i^k, d'où

$$\mathcal{A}_\eta(u_{i+1}^k, \alpha_{i+1}^k) \leq \mathcal{A}_\eta(u_{i+1}^k, \alpha_i^k)$$

$$\mathcal{A}_\eta(u_{i+1}^k, \alpha_i^k) \leq \mathcal{A}_\eta(v, \alpha_i^k) \qquad \text{d'après } (i)$$

Cette expression est vraie pour tout v et en l'occurrence pour $v = u_i^k$, d'où

$$\mathcal{A}_\eta(u_{i+1}^k, \alpha_i^k) \leq \mathcal{A}_\eta(u_i^k, \alpha_i^k)$$

[85] cela est possible uniquement par la présence du terme k_η dans la fonctionnelle qui permet la cœrcivité de la forme bilinéaire présente dans l'expression de $\mathcal{A}_\eta$

d'où :

$$\mathcal{A}_\eta(u_{i+1}^k, \alpha_{i+1}^k) \leq \mathcal{A}_\eta(u_i^k, \alpha_i^k)$$

Donc la suite des énergies $i \mapsto \mathcal{A}_\eta(u_i^k, \alpha_i^k)$ est décroissante et bornée inférieurement.

◇

5.1.2.2 Possibilités de convergence de l'algorithme vers des solutions non stables

On peut alors montrer que l'algorithme converge, c'est-à-dire que (u_i^k, α_i^k) converge vers (u^k, α^k) [Bou07]. Néanmoins, nous n'avons aucune certitude que le couple (u^k, α^k) soit un minimum local. Pour le prouver, on introduit de le contre exemple de la barre en traction. On montre alors que lorsque l'on prend comme point de départ une solution homogène, alors pour toutes les minimisations alternées qui suivront, la réponse de l'algorithme sera encore une solution homogène.

Soit une barre unidimensionnelle élastique[86] homogène dont la configuration naturelle de référence est $\Omega = (0,1)$, elle est encastrée à son extrémité $x = 0$ $(u(0) = 0)$ et soumise à un déplacement contrôlé croissant à l'autre extrémité $x = 1$ $(u(1) = t)$, l'énergie régularisée s'écrit alors :

$$\mathcal{A}_\eta(u, \alpha) = \int_0^1 \frac{1}{2}((1-\alpha)^2 + k_\eta)u'^2 dx + \int_0^1 \frac{\alpha^2}{4\eta} + \eta(\alpha')^2 dx$$

Les conditions d'optimalitées d'ordre (1), sont données :
pour le problème en déplacement par :

$$\mathcal{A}'_\eta(u, \alpha)(v, 0) = \int_0^1 ((1-\alpha)^2 + k_\eta)u'v' dx = 0 \tag{5.5}$$

d'où

$$u' = t\frac{(1-\alpha)^2 + k_\eta}{\displaystyle\int_0^1 (1-\alpha)^2 + k_\eta dx} \tag{5.6}$$

pour le problème en endommagement par :

$$\mathcal{A}'_\eta(u, \alpha)(0, \beta) = \int_0^1 -(1-\alpha)\beta u'^2 dx + \int_0^1 \frac{\alpha\beta}{2\eta} + 2\eta\alpha'\beta' dx = 0 \tag{5.7}$$

d'où

$$-2\eta\alpha'' + \frac{\alpha}{2\eta} - (1-\alpha)u'^2 = 0 \quad \text{avec} \quad \alpha'(0) = 0 \quad \text{et} \quad \alpha'(1) = 0 \tag{5.8}$$

Nous allons dérouler analytiquement l'algorithme de minimisations alternées sur cet exemple. On considère tout d'abord que le champ d'endommagement à l'itération i du temps k est homogène[87] c'est-à-dire :

$$\alpha_i^k = \alpha_H$$

alors à l'itération $i+1$ du temps k, le problème de minimisation en u nous donne la solution suivante :

$$u_{i+1}^k(x) = t_k x$$

[86] le module d'Young et la énacité sont pris unitaire
[87] l'endommagement homogène pouvant être pris nul

on injecte alors cette solution dans le problème de minimisation en α, et on obtient après résolution de l'équation différentielle d'ordre 2 (5.8) (le choix du type de conditions limites en α est très important dans cette résolution) :

$$\alpha_{i+1}^k(x) = \frac{t_k^2}{t_k^2 + \frac{1}{2\eta}}$$

On notera que cette solution est homogène et indépendante du pas de temps d'avant, et par conséquent, il y a convergence de l'algorithme de minimisations alternées en deux itérations vers une solution homogène si le "point" de départ est un champ homogène. Or on sait que la solution homogène n'est pas toujours un minimum local (cf chapitre 2). Il faudrait alors intégrer la condition de stabilité[88] que doit vérifier le minimum local[89].

Néanmoins, comme d'un point de vue numérique, pour des raisons d'arrondis, une solution homogène ne peut exister le champ d'endommagement homogène fini par être instable et on a localisation (numériquement) de l'endommagement et convergence vers un point stationnaire.

5.1.3 Rôle des différents paramètres

Dans cette partie, nous ne faisons que décrire le rôle joué par les paramètres du modèle sans donner leurs influences sur le modèle, nous reviendrons dans la section 5.2 plus en détail sur l'ajustement de ces paramètres et leurs influences.

- k_η est un petit paramètre, son introduction est *a priori* purement numérique puisque il nous assure l'existence et l'unicité du problème en déplacement, en effet sa présence empêche que le problème en déplacement soit mal posé. Supposons que $k_\eta =$ soit nul, alors la matrice sera mal conditionnée et la résolution du système linéaire qui lui est associée divergera. Le problème en déplacement devient mal posé car l'existence et l'unicité de la solution ne sont plus garanties. Au contraire, si k_η est trop grand alors trop de rigidité restera dans le système ce qui polluera la solution et par conséquent polluera aussi l'énergie élastique qui sera surestimée au détriment de la restitution de l'énergie de la fissure. Le choix de ce paramètre est donc un compromis entre la stabilité numérique et un calcul non pollué par rapport au problème de rupture.

- Il faut ensuite ajuster le paramètre η, son influence dans le calcul de l'énergie est très importante. Ce paramètre doit être pris suffisamment proche de zéro car c'est dans ce sens que les résultats théoriques ont été établis si le modèle est vu comme un problème de rupture. De plus, η doit aussi être fixé en rapport avec la taille caractéristique du maillage : $h << \eta$ ce qui interdit de le prendre trop petit. Notons que ce paramètre devient une longueur caractéristique du matériau si le modèle est vu comme un authentique modèle d'endommagement. Dans ce cas il est fixé et on doit adapter le pas du maillage h en conséquence.

- Reste le choix du point de départ α_0. Faute d'unicité de la minimisation, l'algorithme sera sensible au choix de α_0. Pour le premier pas de temps dans un système en temps discret, on peut choisir $\alpha_0 = 0$, on peut aussi choisir un champ d'endommagement "multi-endommagé" (de manière aléatoire). Pour les pas de temps suivants, on peut choisir soit la réinitialisation

[88] condition d'ordre deux
[89] travail en perspective

à zéro du champ d'endommagement, un champ d'endommagement "multi-endommagé" ou alors de repartir du champ d'endommagement au pas de temps précédent.

5.1.4 Discrétisation et implémentation numérique

5.1.4.1 Problèmes numériques

L'implémentation numérique de l'algorithme de minimisations alternées décrit ci-dessus se traduit en deux étapes fondamentales :

- La discrétisation de la fonctionnelle par des éléments finis.
- Le choix des méthodes d'optimisations pour les différentes étapes de minimisations alternées.

Les deux problèmes de minimisations sont suffisamment réguliers pour pouvoir être approchés par une discrétisation type éléments finis. Ainsi, le domaine Ω sera discrétisé sur un maillage non structuré[90] comprenant un certain nombre de nœuds que l'on discutera. On approxime les espaces fonctionnels de déplacement et d'endommagement par des espaces discrets de dimensions finies indexés par h qui désigne ici la taille de maille caractéristique. La résolution de ces deux problèmes se fera par des éléments finis $P1$ Lagrange, c'est-à-dire que les champs de déplacement u_i et le champ d'endommagement α seront approximés par un polynôme de degré 1 sur chaque éléments, ces derniers sont composés de triangles à 3 nœuds avec 1 point d'intégration et 3 degrés de liberté par nœuds.

La solution du problème en déplacement : étape 2 (a) de l'algorithme

Ce problème est la solution d'un problème classique de l'élasticité linéaire et ne présente ici aucune difficulté particulière. En effet, à l'itération i du "temps" k, α_i^k est connu et on cherche à calculer le champ u donné par $u_{i+1}^k = \arg\min_u \mathcal{A}_\eta(u, \alpha_i^k)$ (c'est-à-dire $\mathcal{A}'_\eta(u,\alpha).(v,0) = 0$ $\forall\ v$ cinématiquement admissible), ce qui se ramène bien à la résolution d'un système linéaire du type $AX = B$. Si on note m le nombre d'éléments du maillage, alors la matrice A est de dimension $2m \times 2m$ et l'inconnue X et le vecteur B sont tous deux de dimensions $2m$. L'introduction des conditions aux limites en déplacement sont introduites par la méthode de pénalisation. Enfin, pour résoudre ce problème, on a utilisé une méthode itérative classique comme le gradient conjugué préconditionné.

La solution du problème en endommagement : étape 2 (b) de l'algorithme

Ce problème est aussi très facile à mettre en œuvre numériquement. Comme la contrainte sur l'espace de définition de l'endommagement[91] est automatiquement vérifiée, cette étape est la solution d'un problème classique linéaire et ne présente ici aucune difficulté particulière. En effet, à l'itération $i+1$ du "temps" k, u_{i+1}^k est connu puisqu'il a été donné par l'étape 2 (a) et on cherche à calculer le champ α donné par $\alpha_{i+1}^k = \arg\min_\alpha \mathcal{A}_\eta(u_{i+1}^k, \alpha)$ (c'est-à-dire $\mathcal{A}'_\eta(u,\alpha).(0,\beta) = 0 \quad \forall\ \beta \in H^1(\Omega)$), ce qui se ramène bien à la résolution d'un système linéaire du type $AX = B$. Si on note m le nombre d'éléments du maillage, alors la matrice A est de

[90] Lussardi et Negri établissent dans [LN07] un lien entre la formulation continue et la formulation discrétisée de la rupture fragile lorsque l'on prend un maillage structuré. Ils montrent ainsi, une dépendance au maillage de la convergence de la fonctionnelle discrétisée vers la continue. Plus précisément, le modèle limite est en général un modèle de rupture anisotrope.

[91] $\alpha \in [0,1]$

dimension $m \times m$, le vecteur B et l'inconnu X sont tous deux de dimensions m. Pour résoudre ce problème, on a utilisé une méthode itérative classique (gradient conjugué préconditionné) car c'est un problème d'optimisation quadratique sans contrainte (ou avec contrainte d'égalité introduite par pénalisation[92]).

Cependant le choix de la méthode d'optimisation change dès lors que le problème change. En effet, l'introduction de l'irréversibilité de l'endommagement change le problème d'optimisation puisque cela devient un problème d'optimisation quadratique avec contrainte d'inégalité ($\alpha \geq \alpha_{i-1}$). L'extension au cas du contact unilatéral ou encore la fatigue, introduit des fonctionnelles convexes non linéaires respectivement avec des contraintes d'égalité ou des contraintes d'inégalité. On se retrouve alors face à des problèmes d'optimisations plus complexe à gérer et à résoudre. Ces problèmes seront résolus en faisant appel à des librairies d'optimisations adaptées pour des problèmes à large échelle[93]. Les fonctions et algorithmes utilisés seront détaillés par la suite pour chaque problème spécifique.

5.1.4.2 Implémentations numériques

Le code de calcul a été implémenté initialement en langage C++ puis nous avons développé une autre version Matlab[94]. Les simulations présentées dans ce chapitre sont obtenues avec la version Matlab du code, qui nous offre les avantages suivants :

- utilisation immédiate de librairie d'algèbre linéaire,
- disponibilité et facilité d'utilisation d'une librairie avec des algorithmes d'optimisations préprogrammés (*toolbox* optimization),
- facilité de visualisions et analyses de résultats *postprocessing* avec l'utilisation d'un seul environnement pour le traitement de toutes les tâches,
- vitesse comparable aux programmes en C++ en utilisant des fonctions compilées en C (mex files) pour l'exécution des tâches itératives tels que les assemblages de matrices ce qui se traduit par un gain de temps jusqu'à 100 fois par rapport aux fonctions M file de Matlab.

Le temps de calcul typique demandé par les problèmes traités dans ce chapitre vont de quelques dizaine de minutes (pour des problèmes de rupture fragile résolus pour une discrétisation à 10000 éléments) à quelques heures (pour une discrétisation à 200000 éléments). La non linéarité due à la prise en compte du contact unilatéral dans le modèle de rupture fragile et à la solution des problèmes de fatigue augmente le temps de calculs à quelques heures (pour une discrétisation à 10000 éléments) et environ 24 heures (pour une discrétisation à 200000 éléments).

5.1.5 La question de l'irréversibilité

Comme on peut le voir sur l'algorithme 1 introduit par Bourdin, la notion d'irréversibilité de la fissure[95] est absente. Comme la minimisation de (5.1) par rapport à α assure au minimiseur

[92] lorsque l'une des parties de la structure est soumise à un endommagement nul (surface collée)

[93] On cite en référence [CL94] et [CL96b]

[94] la version présente du code est non parallélisée. En perspective, une parallélisation du code pourra se faire en utilisant des librairies d'algèbre linéaire et d'optimisation préparallélisée telles que PETSc (The Portable, Extensible Toolkit for Scientific Computation : http ://www.mcs.anl.gov/petsc) et TAO(The Toolkit for Advanced Optimization : http ://www.mcs.anl.gov/tao)

[95] c'est-à-dire l'exclusion d'auto-guérison de la fissure lorsque la charge augmente

d'êtr automatiquement dans l'intervalle $[0, 1]$, alors l'idée de Bourdin dans [Bou98] consiste à introduire l'irréversibilité en imposant des conditions de type Dirichlet aux nœuds endommagés [96]. Cette idée, même si elle parait astucieuse, introduit une discontinuité du champ d'endommagement et ne résout pas complètement le problème de l'irréversibilité.

L'introduction systématique de l'irréversibilité dans le problème de minimisation en endommagement demande la résolution d'un problème avec contrainte d'inégalité due à l'irréversibilité de l'endommagement. Dans le cas de la fonctionnelle d'Ambrosio et Tortorelli (5.1), le problème en endommagement (5.4) avec irréversibilité de ce dernier devient un problème de minimisation de fonctionnelle quadratique sous contrainte d'inégalité, qui peut se mettre sous la forme suivante :

$$\min_X \frac{1}{2} X^T A X + B^T X \quad \text{tel que } \alpha_{k-1} \leq X$$

Ce problème de minimisation est un problème convexe en la variable α, il y a donc existence et unicité de la solution de ce dernier. Pour le résoudre, nous avons utilisé la fonction préprogrammée *quadprog* de la *toolbox* de Matlab, qui est basée sur un algorithme adapté aux problèmes à large échelle, la convergence de cette fonction préprogrammée est assurée et pour n'importe quel point de départ.

5.2 Modèles d'endommagement : simulation numérique et influence des paramètres

Dans cette section, nous allons présenter les résultats de quelques simulations numériques effectuées sur un problème à deux dimensions. On cherchera, à travers l'essai de la barre en traction uniaxial, à mettre en avant l'influence des paramètres du modèle d'endommagement.

5.2.1 Essai de la barre en traction

5.2.1.1 Géométrie, chargement et paramètres

Essai de traction uniaxial sur une plaque rectangulaire. Les deux bord de la plaque sont en contact sans frottement, de plus, la plaque est soumise à un déplacement nul à son extrémitée gauche alors qu'elle est soumise à un déplacement contrôlé croissant à son extrémitée opposée. Sur ses deux bords l'endommagement sera considéré nul (le problème des conditions limites sur l'endommagement sera discuté dans la section 5.2.5), les autres parties sont laissées libres.

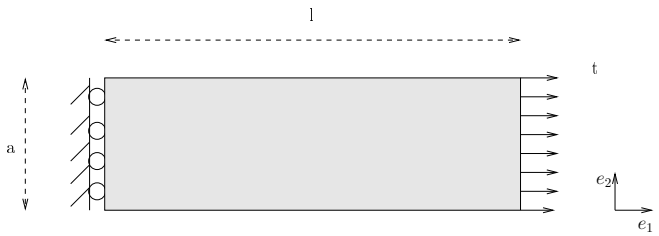

FIG. 5.3 – Géométrie et chargement

[96] c'est-à-dire aux nœuds qui auraient atteint la valeur 1 pour le champ α

Dans la configuration de référence, le corps occupe une région rectangulaire de longueur l et de largeur a.

$$\Omega := \{x = (x_1, x_2), \quad |x_1| < l \quad |x_2| < a\}$$

Nous considérons que la frontière gauche de la plaque est en contact sans frottement avec un support rigide fixe

$$\begin{cases} u_1(x) = 0 \\ \sigma_{12} = 0 \end{cases} \qquad \text{si } x_1 = 0$$

et que la partie droite de la plaque est en contact sans frottement avec un support rigide soumis à un déplacement égal à te_1

$$\begin{cases} u_1(x) = te_1 \\ \sigma_{12} = 0 \end{cases} \qquad \text{si } x_1 = l$$

t étant le paramètre de chargement que l'on discrétisera par la suite.
Pour ne pas risquer l'apparition d'un endommagement sur les frontières où nous avons appliquées les contraintes en déplacement, nous allons imposer au champ d'endommagement d'être nul sur ces frontières. Dans nos simulations, nous prenons

$$a = 0.1 \quad \text{et} \quad l = 1$$

Pour cet exemple, le matériau est considéré purement élastique, et aura les caractéristiques sans dimensions suivantes :

- module d'Young $E = 100$
- coefficient de Poisson $\nu = 0.33$
- ténacité $G_c = 1$

5.2.1.2 Rappels des résultats théoriques

Pour le cas de la barre en traction uniaxiale, nous disposons des résultats théoriques obtenus au chapitre 2 avec un modèle unidimensionnel. Nous avons mis en évidence que la notion de stabilité des états homogènes[97] est intimement liée à la taille du domaine[98]. Pour les modèles 2 et 3, cas qui nous intéressent ici, les états homogènes sont donnés par :

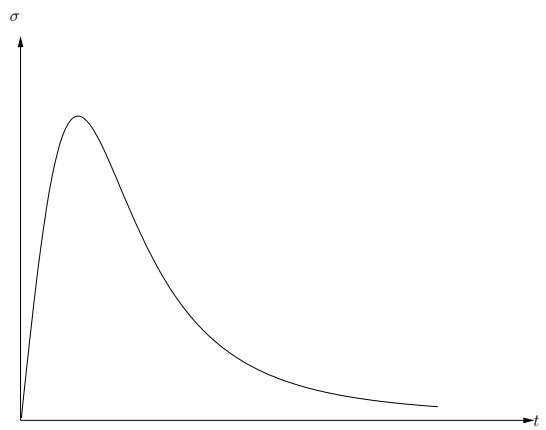

FIG. 5.4 – Réponse homogène

Modèle 2 : Modèle Ambrosio et Tortorelli

Ce modèle n'admet pas de réponse élastique puisque $t_c = 0$.
Cette figure est celle associée à la réponse uniforme pour $t > 0$.
On rappelle que ce modèle devient adoucissant dès lors que $t > \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}\frac{G_c}{\eta E_0}}$.

[97] $u(x) = tx$, $\alpha(x) = \alpha_H$
[98] problème d'effets d'échelles

Modèle 3 : Modèle AM

Le segment linéaire correspond à la réponse élastique.
La diminution correspond à la branche d'endommagement uniforme, elle existe dès lors que $t > t_c = \frac{3}{8}\sqrt{\frac{G_c}{\eta E_0}}$.

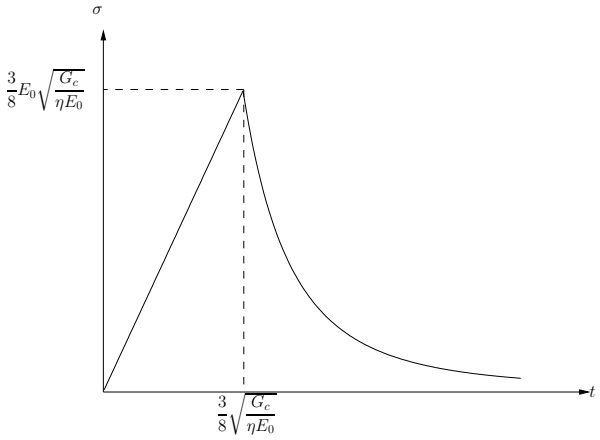

FIG. 5.5 – Réponse élastique et homogène

En particulier, nous avons pu mettre en évidence qu'il existe une taille critique L_c (dépendant de l'état homogène) en deçà de laquelle l'état homogène est stable et au delà de laquelle il devient instable. Pour les modèles 2 et 3, l'expression de cette taille critique est donnée par :

Modèle 2 : Modèle Ambrosio et Tortorelli

L'expression de la longueur critique de la barre en fonction de α est donnée par

$$L_c^2 = 2^6\pi^2\eta^2\left(\frac{\alpha^2(1-\alpha)}{(4\alpha-1)^3}\right)$$

et la relation entre la longueur critique et la déformation est donnée par :

$$L_c(\varepsilon) = 2^3\pi\eta\sqrt{\frac{k\varepsilon^4}{(3\varepsilon^2-k)^3}} \text{ avec } k = \frac{G_c}{2\eta E_0}$$

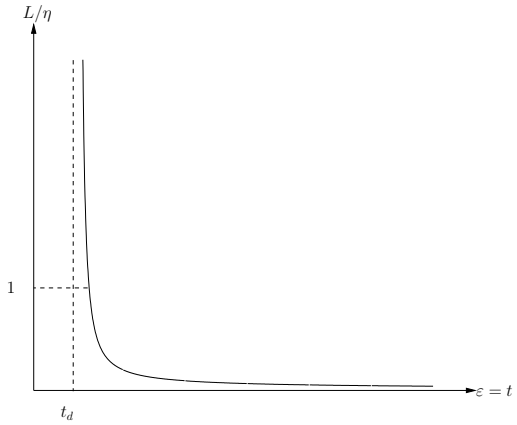

FIG. 5.6 – L_c

Modèle 3 : Modèle AM

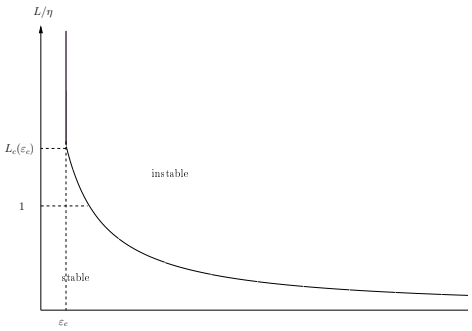

FIG. 5.7 – L_c

L'expression de la longueur critique de la barre en fonction de α est donnée par

$$L_c^2 = \frac{2^5\pi^2\eta^2}{3^3\,(3/8)^2}(1-\alpha)$$

La relation entre la longueur critique et la déformation est donnée par :

$$L_c(\varepsilon) = \sqrt{\frac{2^5\pi^2}{3^3}\frac{\eta G_c}{E_0}}\frac{1}{\varepsilon}$$

5.2.2 Influence du modèle d'endommagement

Si on regarde la régularisée comme un modèle d'endommagement, au chapitre 2 nous avons pu mettre en évidence que le choix des fonctions $\alpha \mapsto A(\alpha)$ et $\alpha \mapsto w(\alpha)$ est intimement lié aux propriétés d'écrouissage des modèles. Ainsi, après l'étude faite au chapitre 2, nous avons choisi d'utiliser un autre modèle que celui adopté par Bourdin dans ses travaux [Bou98]. Pour ce modèle, les fonctions A et w sont données par :

$$A(\alpha) = ((1-\alpha)^2 + k_\eta)A_0 \quad \text{et} \quad w(\alpha) = G_c \frac{9}{64}\alpha$$

Ainsi, la nouvelle fonctionnelle paramétrée par η est définie par :

$$\mathcal{R}_\eta(u,\alpha) = \int_\Omega \frac{1}{2}\left((1-\alpha)^2 + k_\eta)A_0\varepsilon(u)\cdot\varepsilon(u)\right)dx + G_c\left(\int_\Omega \frac{9}{64}\frac{\alpha}{\eta} + \eta\nabla\alpha.\nabla\alpha dx\right) \tag{5.9}$$

On rappelle que la fonctionnelle $\mathcal{R}_\eta$ a les bonnes propriétés pour Γ-converger vers le modèle de Griffith puisque le coefficient $\frac{9}{64}$ introduit dans l'énergie dissipée par l'endommagement homogène permet la convergence de la seconde intégrale de la fonctionnelle $\mathcal{R}_\eta$ vers la longueur de la fissure (cf proposition 1.3).

On cherche alors à résoudre le problème de minimisation suivant :

$$\begin{aligned}
&\min_{u,\alpha} \mathcal{R}_\eta(u,\alpha) \\
&\text{avec } u \in \mathcal{U} = \left\{u \in W^{1,2}(\Omega) \quad \text{tel que } u = \bar{u} \text{ sur } \partial_d\Omega\right\} \\
&\text{avec } \alpha \in W^{1,2}(\Omega;[0,1]) \text{ et sous irréversibilité de l'endommagement}
\end{aligned} \tag{5.10}$$

On a là encore l'existence d'un minimum mais pas l'unicité de ce dernier. Cette fonctionnelle est non convexe par rapport au couple (u,α). Elle reste néanmoins toujours une fonctionnelle convexe en u à α fixé ou en α à u fixé. Ainsi on peut continuer à utiliser l'algorithme de minimisations alternées (cf Algorithme 1).

On remarque ici une autre contrainte, en effet contrairement à la première fonctionnelle, le minimiseur en α n'est plus automatiquement compris dans l'intervalle $[0,1]$, car à l'inverse de la dissipation quadratique pour le modèle précédent, le fait d'avoir une dissipation linéaire nous enlève cette propriété que possède le modèle d'Ambrosio et Tortorelli. Si l'on minimise ce problème sur le champ α, sans contrainte, alors l'assurance que le minimiseur est inférieur à 1 par contre l'autre borne n'est quant à elle plus vérifiée.

Toutefois, comme il faut tenir compte de l'irréversibilité et chercher un champ d'endommagement supérieur au champ de l'itération précédente[99], la bonne contrainte à retenir dans le problème de minimisation se traduit par la relation :

$$\alpha \geq \alpha^{k-1}$$

Pour illustrer nos observations et afin de mettre en évidence la différence entre les deux modèles d'endommagement, nous proposons par la suite deux simulations numériques avec les paramètres suivants :

$$h = 2.10^{-3} \quad \eta = 2.10^{-2} \quad k_\eta = 10^{-5} \quad \text{avec} \quad 9000 \text{ éléments}$$

[99] ce qui revient à intégrer la condition $\alpha \geq \alpha^{k-1}$

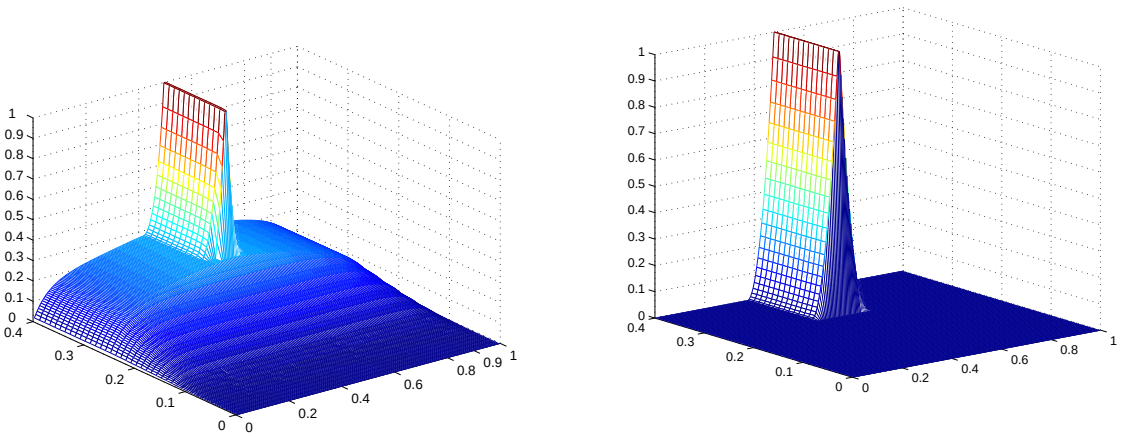

FIG. 5.8 – À gauche champ d'endommagement moyen calculé avec le modèle d'Ambrosio et Tortorelli et à droite champ d'endommagement moyen calculé avec notre modèle

On représente sur la figure 5.8, en fonction du paramètre de chargement t, l'évolution du champ d'endommagement calculé sur la ligne $x_2 = 0$ et obtenu avec les deux modèles d'endommagement[100].
On observe que lorsque nous utilisons le modèle d'Ambrosio et Tortorelli, l'endommagement croît progressivement dès le premier pas de chargement et finit par se localiser[101]. Comme nous avons imposé la non création d'endommagement aux bords de la barre[102], l'endommagement obtenu n'est donc pas homogène.
Avec le modèle AM, l'endommagement reste d'abord nul[103]. Puis par la suite, ce dernier se localise brutalement au milieu de la barre et continu à s'étaler sur cette dernière.

Remarques:

- Dans les deux modèles, la condition d'irréversibilité est bien prise compte.
- Au vu des propriétés mécaniques du modèle AM, plus appropriés pour la simulation des phénomènes de rupture fragile, nous l'utiliserons pour toutes nos simulations futures.

Dans les simulations qui vont suivre, nous définissons l'énergie élastique[104] comme étant la quantité $\mathcal{P}(u,\alpha)$ et l'énergie de surface comme étant la quantité $S(\alpha)$ données par les expressions suivantes :

$$\mathcal{P}(u,\alpha) = \int_\Omega \frac{1}{2}\left((1-\alpha)^2 + k_\eta\right) A_0\varepsilon(u).\varepsilon(u)dx \qquad S(\alpha) = \int_\Omega \frac{\alpha^2}{4\eta} + \eta\nabla\alpha^2 dx$$

l'énergie totale est la somme des deux énergies précédentes.

5.2.3 Influence de k_η

k_η est un petit paramètre. Il est introduit *a priori* pour assurer l'existence et l'unicité du problème de minimisation en déplacement. Il s'avère que si ce dernier est trop grand, il peut alors polluer

[100] le modèle d'Amborsio et Tortorelli à gauche sur la figure 5.8 et notre modèle nommé *AM* à droite sur la même figure
[101] création d'un pustule situé au milieu de la barre
[102] cela se traduit par des conditions limites du type Dirichlet : endommagement nul
[103] c'est la phase élastique
[104] *Bulk energy*

la solution par rapport au problème de rupture puisqu'une certaine rigidité reste dans le système, ce qui entraîne une surestimation de l'énergie élastique au détriment de la restitution de l'énergie de la fissure.
Pour l'illustrer, nous avons effectué les deux simulations numériques avec les paramètres suivants :

$$h = 2.10^{-3} \quad \eta = 5.10^{-2} \quad \text{avec} \quad 9000 \text{ éléments}$$

pour la première simulation, nous posons $k_\eta = 5.10^{-2}$

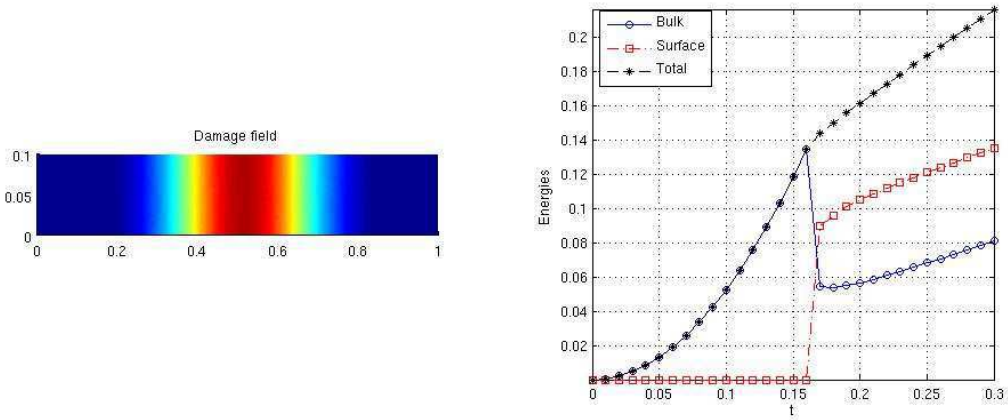

FIG. 5.9 – À gauche champ d'endommagement correspondant à la localisation de ce dernier et à droite énergies de surface, élastique et totale de la barre en traction pour $k_\eta = 5.10^{-2}$

pour la seconde simulation, nous posons $k_\eta = 10^{-5}$

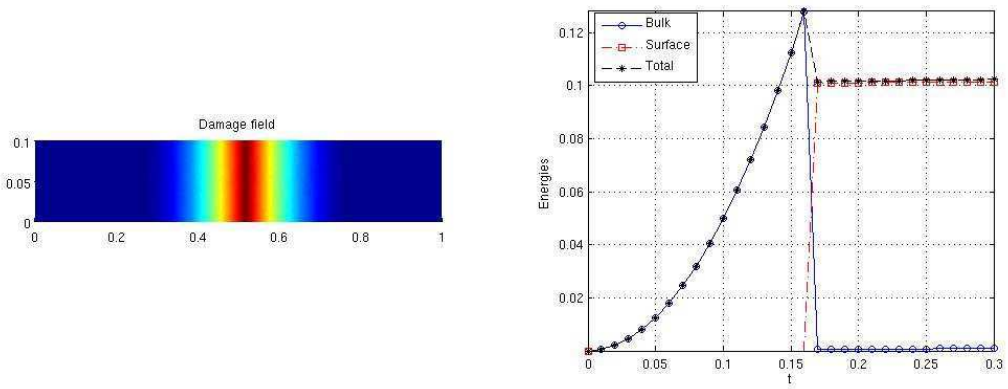

FIG. 5.10 – À gauche champ d'endommagement correspondant à la localisation de ce dernier et à droite énergies de surface, élastique et totale de la barre en traction pour $k_\eta = 10^{-5}$

On rappelle que les régularisées ont été construites de sorte que lorsque la structure rompt, alors l'énergie élastique disparaît pour ne laisser dans l'énergie totale que l'énergie de surface. Au vu de cette simulation, on observe (cf figure de droite de 5.9) que l'énergie élastique n'est pas nulle lors de la localisation de l'endommagement. De plus, comme le paramètre k_η est grand, l'endommagement se localise seulement partiellement (cf figure de gauche de 5.9). Aussi, on constate que lénergie de surface est perturbée puisqu'elle continue à croître même après localisation, cela s'explique par la mauvaise approche du problème de rupture.
Contrairement à la première expérience, pour la seconde simulation, l'énergie élastique est nulle après localisation (cf figure de droite de 5.10). Cette dernière a lieu sur une bande (cf figure de

gauche de 5.10). Enfin, l'énergie de surface est bien évaluée pour la seconde simulation puisque cette dernière converge bien et elle est égale à $G_c \times \text{longueur}(\mathcal{K}) = G_c \times a$ pour le présent choix de G_c et a.

5.2.4 Taille du maillage

Le choix du paramètre h, taille caractéristique du maillage, est aussi un compromis entre la valeur du paramètre η et la capacité maximale du processeur à effectuer les calculs. Néanmoins ce dernier doit respecter une des propriétés de Γ-convergence de la régularisée vers le problème de rupture fragile : $h << \eta$. Cette contrainte sur h limite inférieurement la valeur de η. Dans la pratique, h sera souvent fixé en compatibilité avec les ressources des calculs.
Pour les deux simulations qui vont suivre, nous fixons les paramètres numériques suivants :

$$\eta = 5.10^{-2} \quad k_\eta = 10^{-5}$$

Pour la première simulation, nous posons $h = 9.10^{-2}$ avec un maillage à 1000 éléments

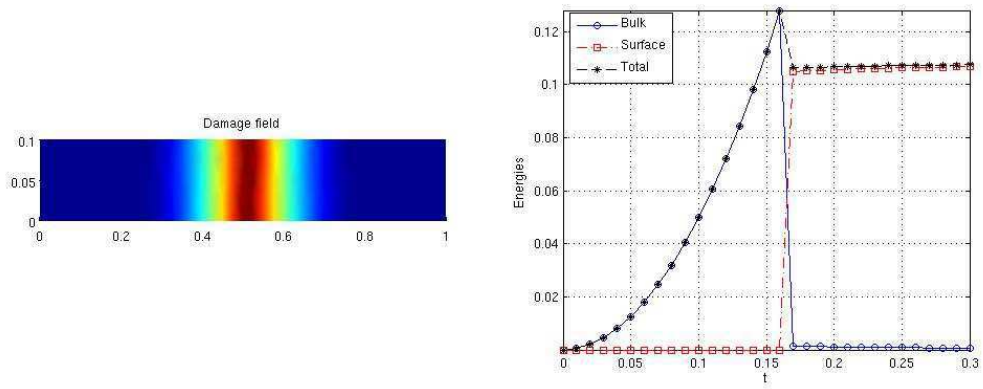

FIG. 5.11 – À gauche champ d'endommagement lors de sa localisation et à droite les différentes énergies de la structure avec $h = 9.10^{-2}$.

Pour la seconde simulation, nous posons $h = 1.10^{-2}$ avec un maillage à 9000 éléments

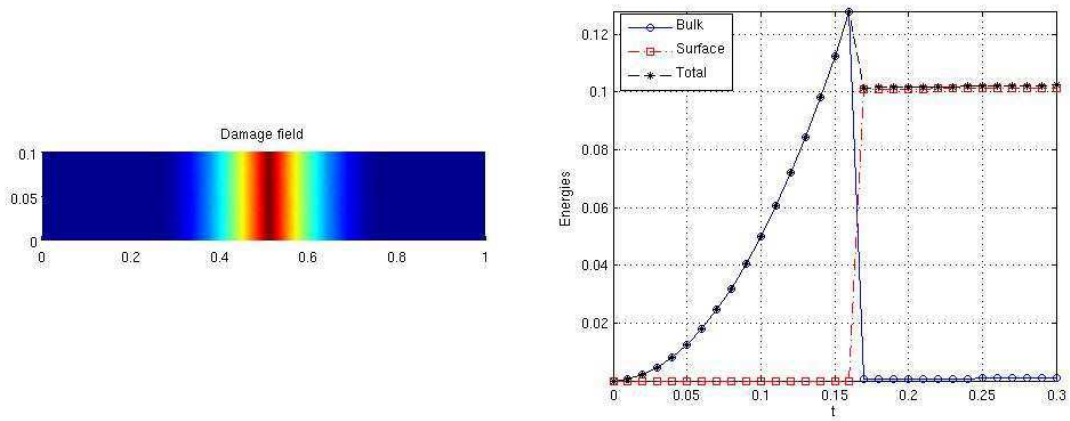

FIG. 5.12 – À gauche champ d'endommagement lors de sa localisation et à droite les différentes énergies de la structure avec $h = 1.10^{-2}$.

Pour la première simulation, nous observons que l'énergie du surface converge vers une énergie surestimée par rapport à l'énergie de surface réelle, alors que pour la seconde simulation cette dernière est bien estimée. La seule différence entre ces deux calculs est due à la discrétisation du maillage et donc au choix de la taille caractéristique de ce dernier, on peut donc conclure que la discrétisation du maillage doit être adaptée au paramètre η afin de ne pas surestimer l'énergie de surface lors de la localisation.
Dans la suite et pour satisfaire cette contrainte, nous utiliserons des maillages pouvant aller jusqu'à 200000 éléments environ.

5.2.5 Les conditions aux limites sous le champ d'endommagement

Pour éviter la localisation de l'endommagement sur les bords de la structure où s'appliquent les contraintes en déplacements[105], Bourdin introduit dans [Bou98] un domaine logique en opposition au domaine physique. On rappelle que le domaine physique est le domaine de référence alors que le domaine logique est le domaine référence auquel a été ajouté une extension sur les parois où s'appliquent les contraintes en déplacement pour éviter la localisation sur ses bords. Cette extension doit être proportionnelle à η pour permettre la localisation et ainsi une bonne estimation de l'énergie de surface.
Au lieu de faire apparaître un domaine logique, il suffirait d'appliquer un endommagement nul[106] sur les bords de la structure où s'appliquent les contraintes en déplacement. Cette condition a le même effet que la précédente puisqu'elle évite la localisation[107] de l'endommagement sur ces bords. Cette dernière est plus facile à mettre en œuvre et est équivalente puisqu'il n'y pas de modification de la structure, ce qui peut devenir une tâche difficile pour des structures dont la géométrie est plus complexe.

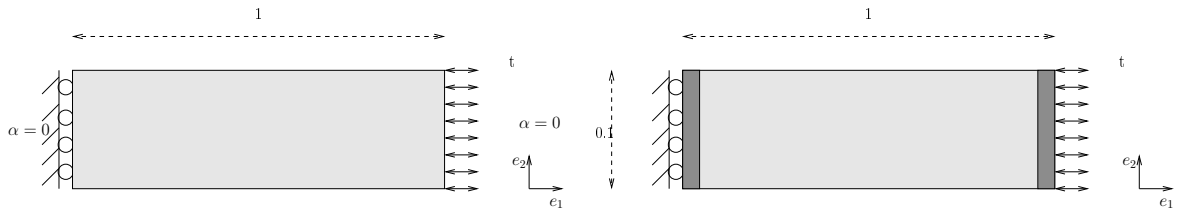

FIG. 5.13 – Géométries et chargements : à gauche le domaine physique et à droite le domaine logique de la barre

Pour illustrer cela, nous proposons deux simulations numériques, une sur le domaine logique et l'autre sur le domaine physique avec l'astuce précédente sur le champ d'endommagement, avec les paramètres suivants :

$$k_\eta = 10^{-5} \quad \eta = 5.10^{-2} \quad h = 1.10^{-3}$$

Comme on peut le voir sur les courbes d'énergies des figures 5.14 et 5.15, les résultats sont parfaitement similaires avec les deux méthodes. On conclut que l'introduction du domaine logique est inutile dans les calculs puisqu'il peut être remplacé par le domaine physique avec des conditions limites en endommagement nulles.

[105] c'est-à-dire déchirement de la parois où s'appliquent les contraintes
[106] $\alpha = 0$
[107] remarquons que si toutefois la structure voudrait s'endommager sur ces bords cette condition ne l'empêcherait pas puisque cela se ferait quant même

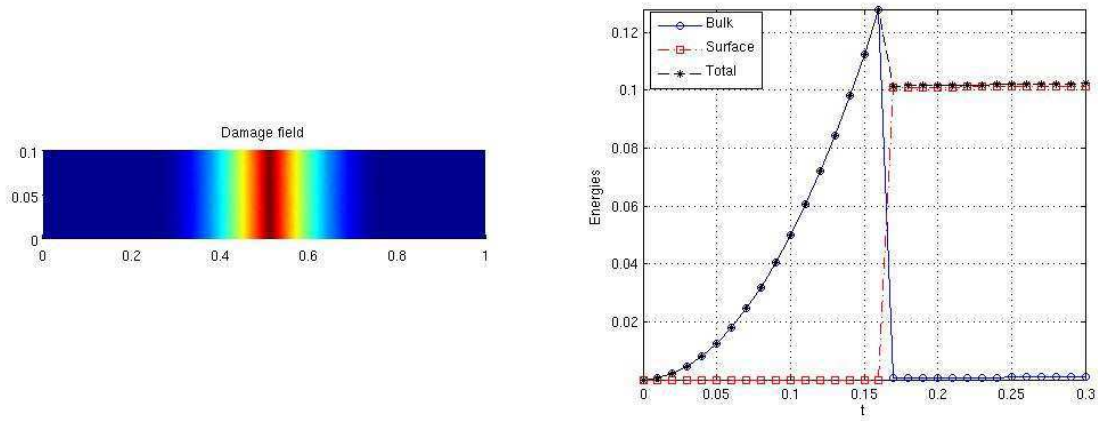

FIG. 5.14 – Champ d'endommagement lors de la localisation et courbes d'énergies obtenues avec une simulation sur le domaine physique

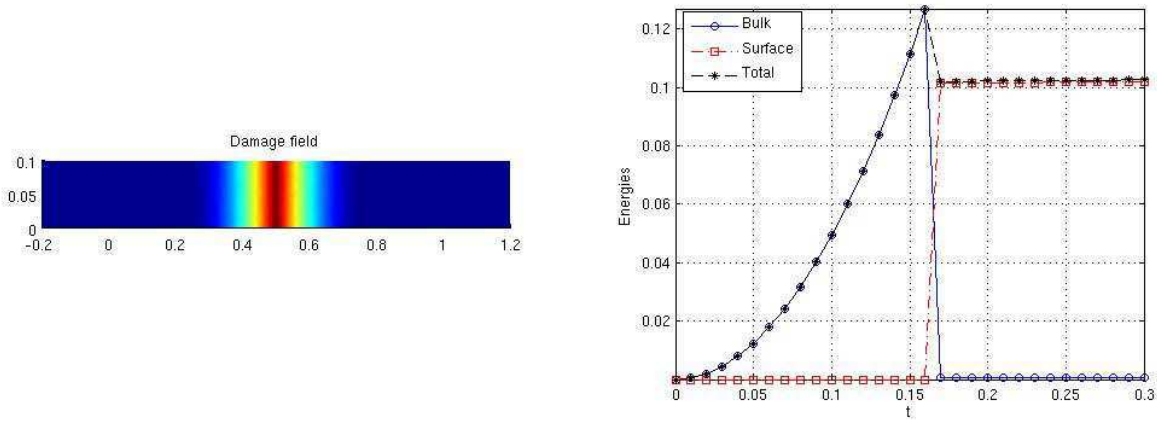

FIG. 5.15 – Champ d'endommagement lors de la localisation et courbes d'énergies obtenues avec une simulation sur le domaine logique

5.2.6 Rôle de la longueur interne et effets d'échelles

Nous présentons, dans cette partie, les simulations effectuées sur l'essai de la barre en traction. Nous comparons les résultats obtenus ainsi avec ceux des calculs théoriques et nous mettons en évidence les effets d'échelles et le rôle du paramètre η. Pour illustrer nos observations et afin de mettre en évidence les effets d'échelles et le rôle du paramètre η, nous fixons les paramètres numériques suivants :

$$h = 2.10^{-3} \quad \eta = 2.10^{-2} \quad k_\eta = 10^{-5} \quad \text{avec} \quad 9000 \text{ éléments}$$

Sur la figure 5.16, nous comparons les résultats théoriques et numériques de la réponse force-déplacement. La branche analytique correspond à la réponse homogène tandis que la branche numérique correspond à la réponse des forces versus le déplacement imposé obtenue après simulation numérique de la barre en traction. Nous observons que notre algorithme prédit correctement la localisation de l'endommagement. Pour les deux modèles, on constate peu de différence entre la solution analytique et la solution numérique jusqu'à la localisation.
Pour le modèle d'Ambrosio et Tortorelli (cf figure de droite 5.16), on constate qu'il y a localisation dès l'apparition de la phase adoucissante, cela s'explique par le fait que numériquement,

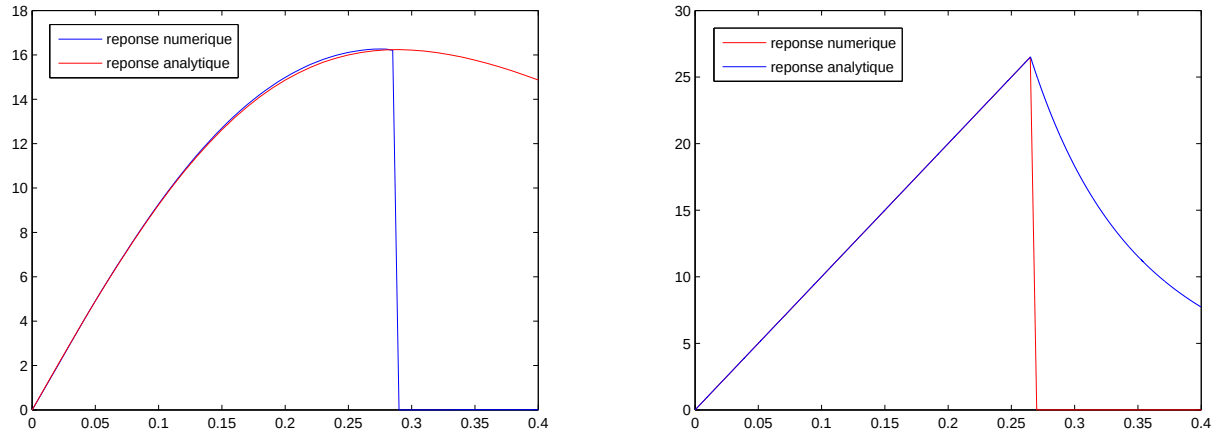

FIG. 5.16 – Réponse forces vs. déplacement, comparaison entre les solutions analytiques et numériques à droite le modèle d'Ambrosio et Tortorelli et à gauche le modèle AM

la solution homogène ne peut pas être captée par le code dès la première itération puisque nous l'avons polluer par l'application des conditions limites en endommagement nuls sur les bords où s'appliquent les contraintes en déplacement. À l'opposé, la solution analytique est obtenue avec les conditions aux limites naturelles en endommagement[108].
Pour le modèle AM (cf figure de gauche 5.16), nous observons que l'endommagement se localise dès lors que la solution élastique n'est plus viable, là encore, cela s'explique par les mêmes raisons que celles du modèle précédent.

Afin de comprendre le rôle joué par le paramètre η, nous allons par la suite effectuer une autre simulation numérique. Cette dernière consiste faire varier η, à longueur de barre et taille caractéristique du maillage[109] fixées, afin d'observer son influence dans le modèle. Nous avons représenté ces résultats dans la figure 5.17, nous cherchons numériquement quand l'endommagement se localise dans la barre[110] et nous le comparons à la solution analytique donnée par la limite durcissante/adoucissante pour le modèle Ambrosio et Tortorelli et la limite élastique pour le notre modèle.
Avce notre modèle, nous observons (cf figure 5.17) un parfait accord entre la solution analytique et numérique tandis que avec le modèle d'Ambrosio et Tortorelli nous observons un légèr écart entre ces deux solutions, ce dernier pouvant être expliqué par le fait que nous avons introduit d'autres conditions aux limites en endommagement que les conditions naturelles.

On peut alors distinguer une différence entre la vision numérique de ces modèles et la vision mécanique. En effet, si le modèle d'endommagement est vu comme une régularisée du modèle de Griffith, le paramètre η doit tendre vers 0 pour avoir Γ-convergence et si ce modèle est vu comme un authentique modèle d'endommagement, η a le rôle d'une longueur caractéristique du modèle et ne doit pas être le plus petit possible puisqu'il est donné par la loi de comportement du matériau. En effet, dans ce cas, η est lié à σ_c par la limite élastique du matériau. Par exemple, pour le "polymethyl methacrilate (PMMA)", le module d'Young $E_0 = 2.3GPa$, le coefficient

[108] $\alpha(0)' = 0$ et $\alpha(L)' = 0$
[109] (suffisamment petite afin de vérifier la relation $h \ll \eta$
[110] points de discontinuités dans les courbes de la figure 5.16

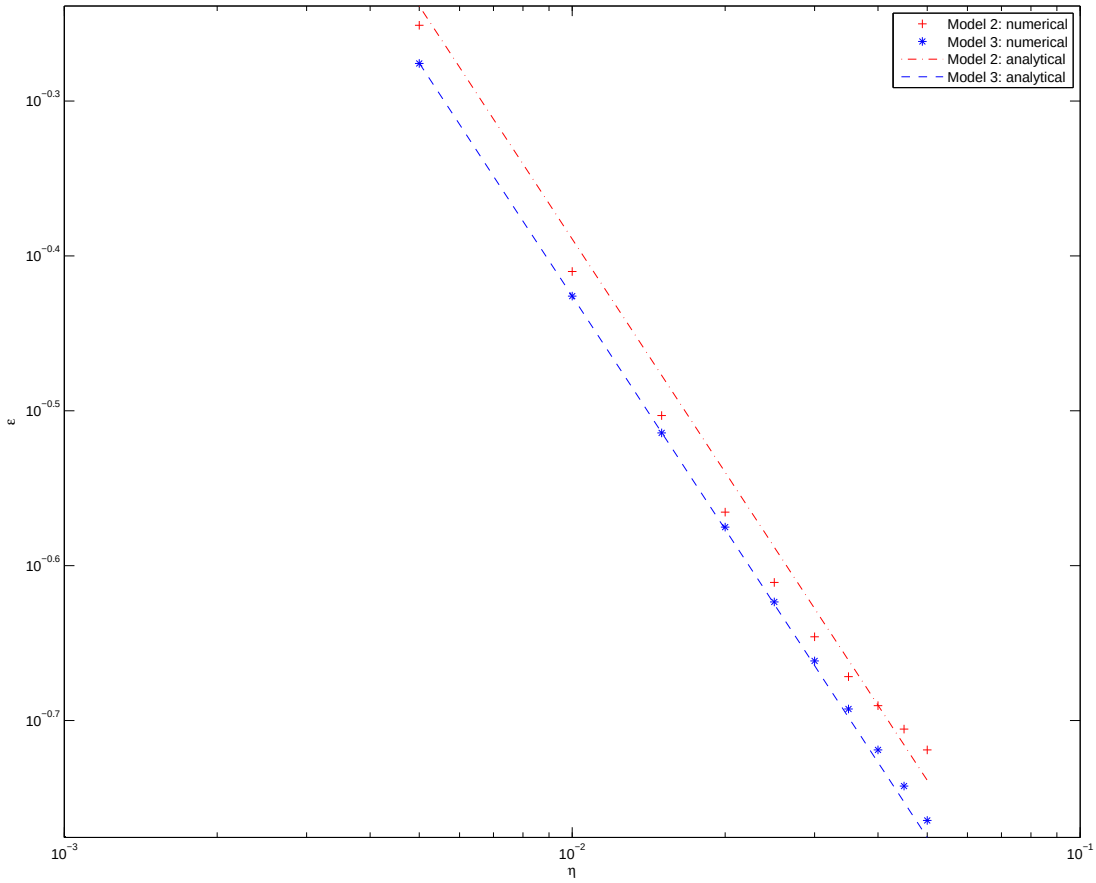

FIG. 5.17 – Déplacement critique en fonction de η, comparaison des solutions analytiques et numériques obtenues avec le modèle Ambrosio et Tortorelli et le modèle AM. Ces droites sont théoriquement proportionnelles à $1/\sqrt{\eta}$.

de poisson $\nu = 0.36$, la ténacité $G_c = 394 J/m^2$ et la résistance $\sigma_c = 12 MPa$, la longueur caractéristique η peut être fixée en utilisant les formules données dans la section 5.2.1.2, ce qui nous donne la contrainte limite dans l'essai de la barre en traction.

$$\begin{aligned} \eta &= 0.0010488m \quad \text{pour le Modèle 2 : Modèle Ambrosio et Tortorelli} \\ &= 0.0008849m \quad \text{pour le Modèle 3 : Modèle AM} \end{aligned} \tag{5.11}$$

Mais cette longueur caractéristique est généralement petite devant les dimensions de la structure. En envisageant alors des structures de plus en plus grandes, le rapport η/L tend vers 0 la vision mécanique rejoint la vision numérique. Autrement dit, pour un matériau donné, en faisant varier L et en faisant tendre η/L vers 0, on étudie les effets d'échelles.

5.3 Essai de traction sur une matrice avec une fibre rigide

On se propose, dans cette section, de reprendre l'essai de traction sur une matrice avec une fibre rigide introduit dans les travaux de thèse de Bourdin [Bou98] et l'article de Del Piero [DPM07]. Cet exemple est remarquable puisque l'on peut observer une large gamme de comportements associés à la fissure telles que : évolution progressive, évolution brutale, trajet complexe,...

5.3.1 Géométrie, chargement et paramètres

Il s'agit d'un essai de traction verticale sur une plaque carrée renforcée par une fibre circulaire rigide. Cette fibre reste fixe tandis qu'un champ de déplacement uniforme δ est imposé sur la partie supérieure de la plaque, les autres parties sont laissées libres.

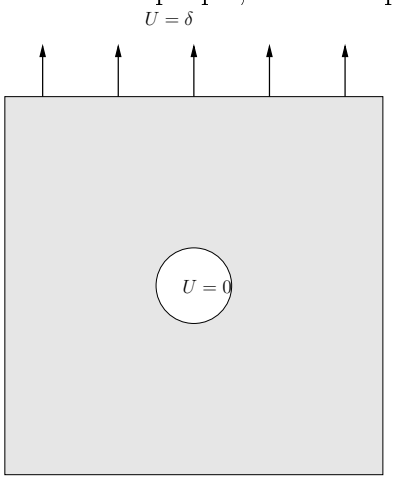

FIG. 5.18 – Géométrie et chargement

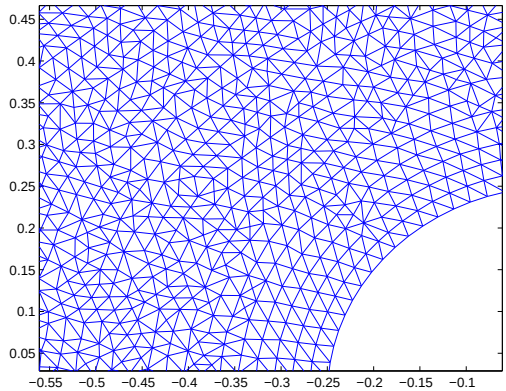

FIG. 5.19 – Maillage non structuré type pour les simulations numériques

Dans la configuration de référence, le corps occupe une région rectangulaire de longueur a et de largeur l avec une inclusion circulaire de rayon r.

$$\Omega = \left\{x = (x_1, x_2), \quad |x_1| < l/2 \quad |x_2| < a/2 \quad (x_1^2 + x_2^2) > r\right\}$$

Nous considérons que la fibre circulaire est tenue fixe :

$$u(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{si } (x_1^2 + x_2^2) \leq r$$

et que la partie supérieure du carré est soumise à une traction uniaxiale

$$u_2(x) = \delta e_2 \qquad \text{si } x_2 = a/2$$

δ est le paramètre de chargement qui sera discrétisé par la suite. Pour ne pas risquer l'apparition d'un endommagement sur les frontières où nous avons appliquées nos conditions limites nous allons imposer un champ d'endommagement nul sur ces frontières. Pour cet exemple, le matériau sera considéré purement élastique, et aura les caractéristiques suivantes (en unité S.I.) :

- $\lambda = \mu = 2.2 \times 10^6 N/cm$
- ténacité $G_c = 0.1 \times 10^6 N$

Pour les paramètres numériques, nous prenons :

$$k_\eta = 10^{-7} \quad \eta = 10^{-1} cm \quad h = 5.10^{-3} cm$$

Nous montrons à travers la figure 5.19, le type de maillage que nous avons utilisé pour nos simulations.

Par la suite, nous discutons les résultats de trois simulations numériques obtenus par le modèle AM. On rappelle ici que tous les paramètres matériaux et numériques restent identiques durant toutes les simulations suivantes, seule la géométrie de référence diffère.

5.3.2 Simulation 1 : la matrice de base

Dans notre première simulation, nous prenons

$$a = 3cm \quad , \quad l = 3cm \quad \text{et} \quad r = 0.5cm$$

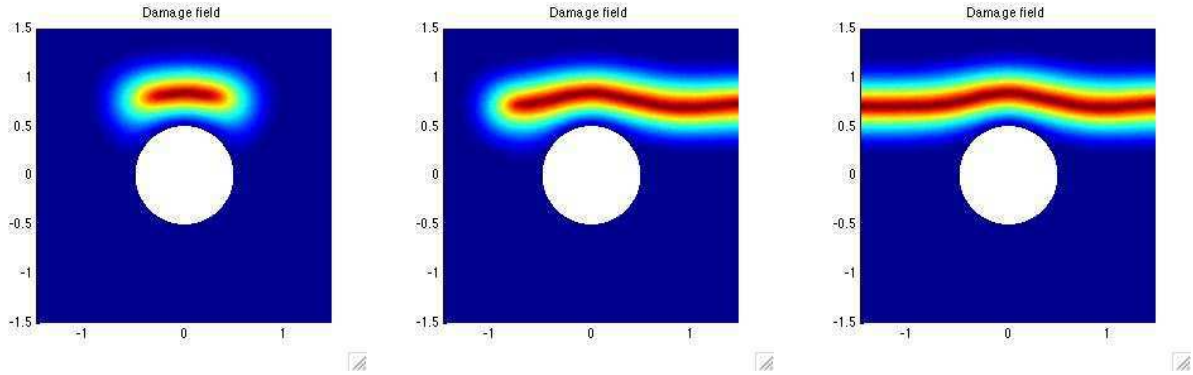

FIG. 5.20 – Champ d'endommagement à différents pas de chargements

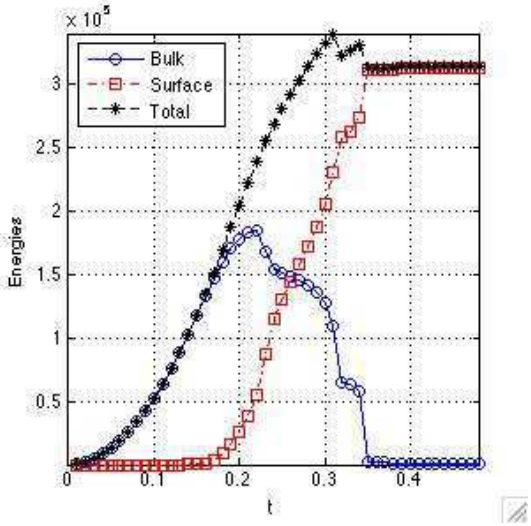

FIG. 5.21 – Énergies de surface, élastique et totale

Nous observons que tant que le chargement est inférieur à 0.18, la matrice reste purement élastique. Une fois ce chargement dépassé, un endommagement ce concentre au-dessus de la fibre progressivement. Une fois la charge 0.21 atteinte, une "fissure" se créée de longueur finie qui progresse ensuite de manière symétrique en fonction du chargement. Cette fissure choisit de se propager brutalement à droite une fois la charge 0.31 atteinte, puis se propage dans la direction opposée. Une fois la charge 0.35 atteinte, la matrice est alors "coupée" en deux. Nous noterons que l'énergie potentielle atteint 0 dès lors que la matrice est séparée. Comme k_η est très petit, l'énergie potentielle ne croît plus après "fissuration".

5.3.3 Simulation 2 : variation de la taille de la matrice

Pour notre seconde simulation, nous prenons

$$a = 3cm \quad , \quad l = 2cm \quad \text{et} \quad r = 0.5cm$$

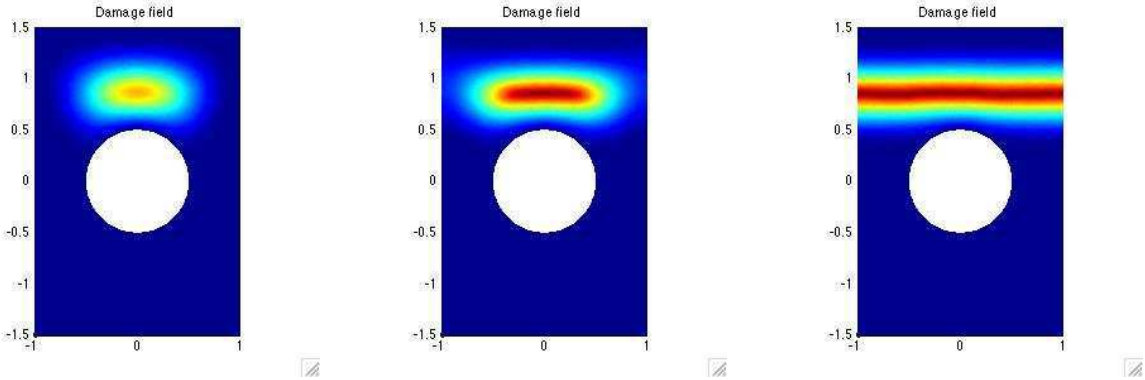

FIG. 5.22 – Champ d'endommagement à différent pas de chargements

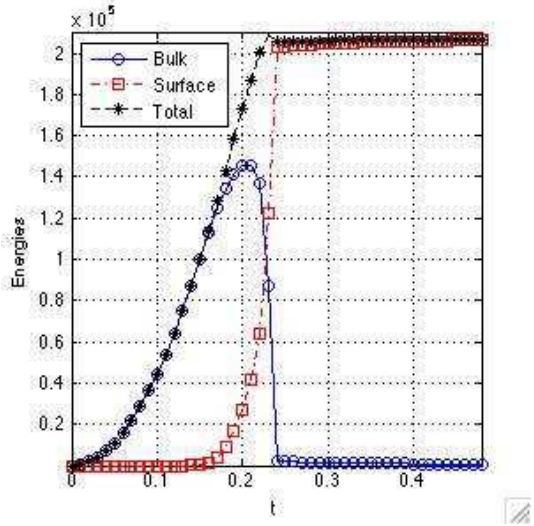

FIG. 5.23 – Énergies de surface, élastique et totale

Pour cette si simulation la taille[111] de la matrice été réduite en largeur. Nous observons que tant que le chargement est inférieur à 0.18, la matrice reste purement élastique. Une fois ce chargement dépassé, un endommagement ce concentre au-dessus de la fibre progressivement. Une fois la charge 0.21 atteinte, une "fissure" se créée et se propage symétriquement et de manière brutale : la matrice est alors coupée en deux. Nous noterons l'absence de "palier" (cf figure 5.23) dans les calculs d'énergies car il s'agit ici de propagation brutale de la "fissure".

[111] la différence par rapport à la simulation 1

5.3.4 Simulation 3 : variation de la fibre

Pour la troisième simulation, nous prenons

$$a = 3cm \quad , \quad l = 3cm \quad \text{et} \quad r = 0.25cm$$

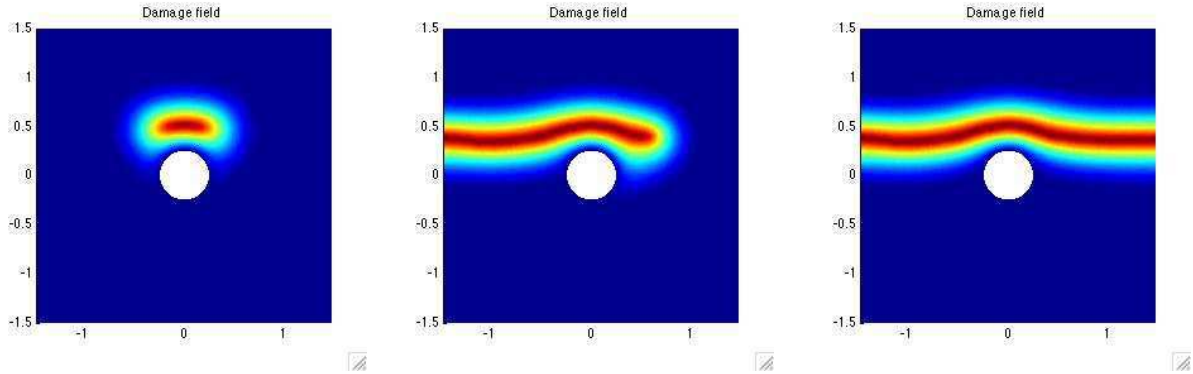

FIG. 5.24 – Champ d'endommagement à différents pas de chargements

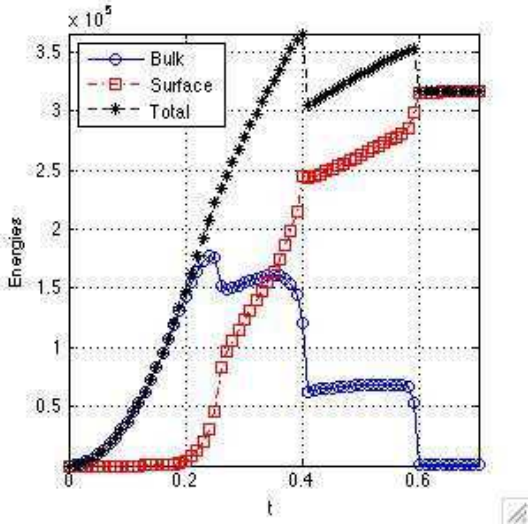

FIG. 5.25 – Énergies de surface, élastique et totale

Dans cette simulation, la taille de la matrice reste la même que celle de la première simulation par contre le rayon de la fibre a été réduit de moitié pour voir son influence sur les résultats numériques, cependant, ce dernier reste grand par rapport à la variable η. Nous observons que tant que le chargement est inférieur à 0.18, la solution reste parfaitement élastique. Une fois ce chargement dépassé, un endommagement ce concentre au-dessus de la fibre progressivement. Une fois la charge 0.22 atteinte, une "fissure" se créée de longueur finie qui progresse symétriquement en fonction du chargement. Cette fissure choisit de se propager brutalement à gauche une fois la charge 0.4 atteinte, puis se propage dans la direction opposée pour la charge 0.6. La matrice est alors coupée en deux. Nous noterons la présence de palier dans le calcul de l'énergie potentielle. Ces paliers correspondent au différents moments de propagation de la fissure.

5.3.5 Effets d'échelle

Pour cette dernière simulation, nous prenons la même géométrie que celle de la simulation 3 :

$$a = 3cm \quad , \quad l = 3cm \quad \text{et} \quad r = 0.25cm$$

mais cette fois nous raffinons le maillage en prenant $h = 10^{-3}$ et $\eta = 10^{-2}$

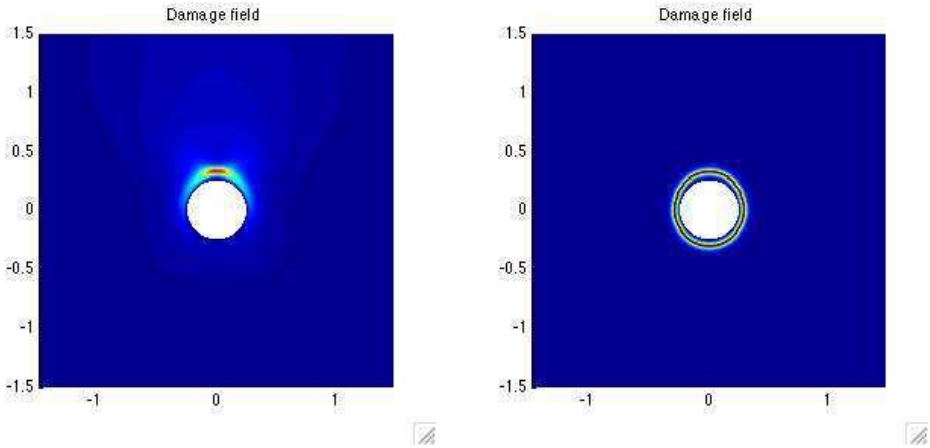

FIG. 5.26 – Champ d'endommagement à différent pas de chargements

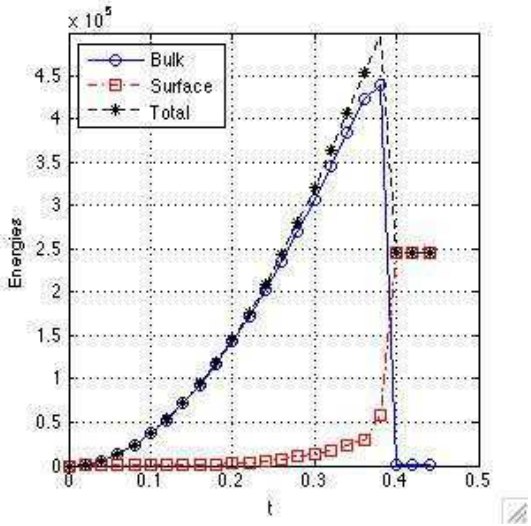

FIG. 5.27 – Énergies de surface, élastique et totale

La différence par rapport à la simulation 3 tient au fait que nous avons raffinée le maillage pour pouvoir prendre un paramètre η plus petit. Nous observons une différence par rapport à la simulation précédente, puisque pour cette simulation l'endommagement ce concentre autour de la fibre. Nous observons que tant que le chargement est inférieur à 0.22, la matrice reste purement élastique. Une fois ce chargement dépassé, un endommagement ce concentre au-dessus de la fibre progressivement. Une fois la charge 0.4 atteinte, une "fissure" se créée brutalement et se propage autour de la fibre, séparant ainsi la fibre et la matrice. Nous mettons, à travers cette simulation, en évidence les effets d'échelles puisque η est très petit devant les dimensions de la structure. Cet effet d'échelle est typique des modèles d'endommagement non-locaux.

5.4 Le contact unilatéral

Dans cette section, nous proposons de mettre en œuvre numériquement les effets de contact unilatéral. Dans un premier temps, nous rappellerons les principaux résultats théoriques et comment nous avons modifié les régularisées précédentes pour prendre en compte la non interpénétration des lèvres des fissures (cf chapitre 3). Puis ensuite, nous nous attarderons sur sa mise en œuvre numérique et proposerons des algorithmes de résolution. Enfin, nous détaillerons et discuterons les résultats numériques obtenus sur l'essai de traction/compression d'une matrice avec une fibre rigide.

5.4.1 Les lacunes de la précédente régularisée

À travers l'exemple de la barre unidimensionnel en traction puis en compression, nous avons mis en évidence une symétrie de comportement en traction-compression (cf section 3.2.2). Nous proposons d'illustrer ce point à travers l'exemple de l'essai de traction/compression de la matrice avec fibre rigide. Nous garderons pour toutes les simulations qui vont suivre les même paramètres matériaux. Pour les paramètres numériques, nous avons pris :

$$k_\eta = 10^{-7} \quad \eta = 10^{-1}cm \quad h = 5.10^{-3}cm$$

et pour la géométrie, nous avons fixé

$$a = 3cm \quad , \quad l = 3cm \quad \text{et} \quad r = 0.5cm$$

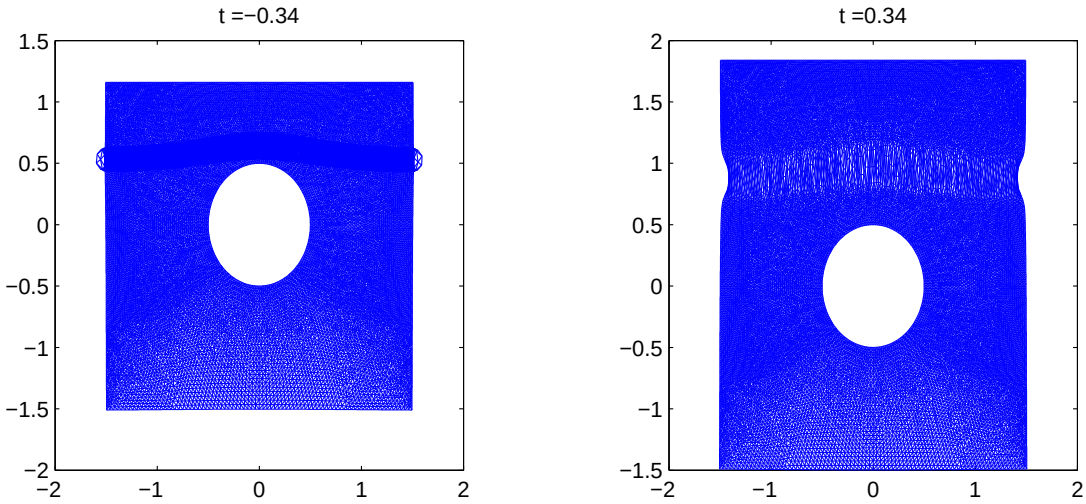

FIG. 5.28 – Champ de déplacement de la matrice avec fibre rigide : traction à droite et compression à gauche

Nous observons à travers le champ de déplacement donné par la figure (5.28) la superposition de qualques mailles du maillages lors de l'essai de compression : c'est le phénomène d'interpénétration des lèvres de la fissure

Nous observons sur la figure (5.29) une parfaite symétrie dans les calculs d'énergies entre l'essai de traction et compression.

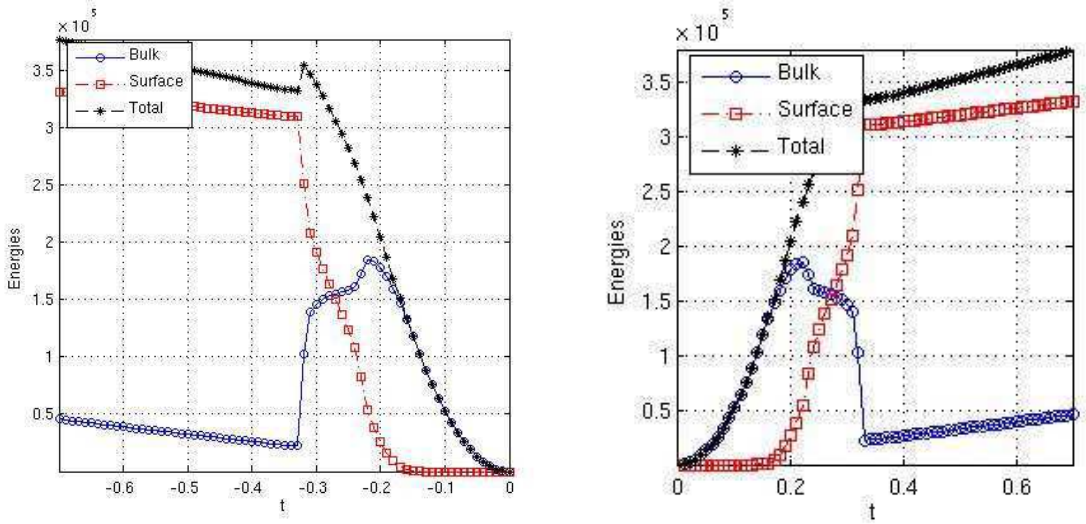

FIG. 5.29 – Énergies de surface, élastique et totale de la matrice avec fibre rigide : (à droite) en traction (à gauche) en compression

Comme on peut l'observer sur la figure (5.30), le champ d'endommagement reste le même. Cette symétrie de comportement en traction-compression n'est manifestement pas raisonnable. Ce qui est problématique lors de l'utilisation de ce modèle d'endommagement comme approximation d'un modèle de rupture, puisque à la limite, on trouvera nécessairement des fissurations identiques en traction et en compression.

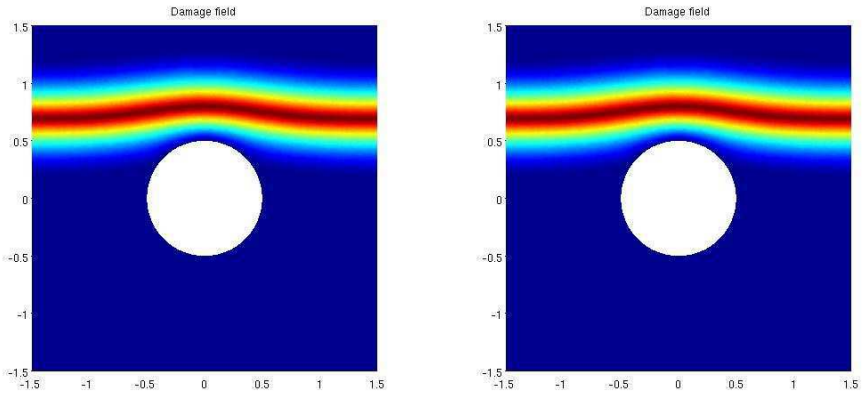

FIG. 5.30 – Champ d'endommagement de la matrice avec fibre rigide : (à droite) en traction (à gauche) en compression

5.4.2 Ouverture en cisaillement plan de la fissure

Dans cette section, nous proposons de mettre en œuvre numériquement le modèle proposé pour des ouvertures en cisaillement plan. Comme il a été montré dans le chapitre 3, nous séparons l'énergie volumique en une partie sphérique et une autre déviatorique et nous faisons porter l'endommagement que sur la partie déviatorique. La nouvelle fonctionnelle régularisée paramétrée par η s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_\eta(u,\alpha) &= \int_\Omega \frac{1}{2}\Big(A(\alpha)\varepsilon^d(u)\cdot\varepsilon^d(u) + A_0\varepsilon^s(u)\cdot\varepsilon^s(u)\Big)\,dx \\ &+ G_c\left(\int_\Omega \frac{9}{64}\frac{\alpha}{\eta} + \eta\nabla\alpha\cdot\nabla\alpha dx\right) \end{aligned} \tag{5.12}$$

avec α champ d'endommagement compris dans l'intervalle $[0,1]$, ce qui peut s'écrire aussi :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_\eta(u,\alpha) &= \int_\Omega \frac{1}{2}\Big(2\mu_0((1-\alpha)^2+k_\eta)\varepsilon^d(u):\varepsilon^d(u) + \kappa_0(\text{ tr }\varepsilon(u))^2\Big)\,dx \\ &+ G_c\left(\int_\Omega \frac{9}{64}\frac{\alpha}{\eta} + \eta\nabla\alpha\cdot\nabla\alpha dx\right) \end{aligned} \tag{5.13}$$

5.4.2.1 Algorithme de résolution

Le problème de minimisation consiste alors à chercher les minimas de cette fonctionnelle pour tout déplacement cinématiquement admissible et pour tout champ d'endommagement irréversible. Ce dernier est résolu là aussi avec un algorithme de minimisations alternées car la fonctionnelle $\mathcal{M}_\eta$ reste non convexe par rapport au couple (u,α) mais elle ne perd pas sa convexité par rapport à u à α fixé et inversement. Chaque problème de minimisation admet une unique solution, en effet pour le problème de minimisation par rapport u à α fixé on a là encore introduit le paramètre numérique k_η pour permettre l'existence et l'unicité de la solution en déplacement, et pour le problème de minimisation par rapport α à u fixé la cœrcivité de la forme bilinéaire suffit pour avoir existence et unicité de la solution.

La minimisation en u à α fixé

Ce problème de minimisation par rapport à u à α fixé est la solution d'un problème classique linéaire et ne présente ici aucune difficulté particulière. Il est résolvable de la même manière que le problème précédent.

La minimisation en α à u fixé

Le problème de minimisation par rapport à α à u fixé est aussi très facile à mettre en œuvre numériquement. Cette étape ne diffère en rien par rapport à ce qui a été expliqué précédemment, puisque il s'agit là d'un problème de minimisation d'une fonctionnelle quadratique sous contrainte d'inégalité, qui peut sse mettre sous la forme suivante :

$$\min_X \frac{1}{2}X^TAX + B^TX \quad \text{tel que } \alpha_{k-1} \leq X$$

Pour le résoudre, nous avons utilisé la fonction préprogrammée *quadprog* de la *toolbox* de Matlab. La convergence de cette fonction est à nouveau assurée puisqu'il y a existence et unicité du

minimiseur.

Les paramètres du modèle jouent le même rôle. Néanmoins, pour ce modèle d'endommagement, nous remarquerons que le paramètre k_η joue un rôle plus complexe. En particulier, on observe numériquement que pour des valeurs trop petites de k_η, on peut avoir des phénomènes d'instabilités et des problèmes de convergences. Ces instabilités sont aussi observées par Del Piero dans ses travaux [DPM07].

En effet, si k_η est trop petit l'algorithme risque de ne plus converger et les déplacements transverses deviennent alors instables. Ces problèmes sont probablement dus au fait d'avoir une matrice de rigidité qui devient mal conditionnée. En effet, sur la partie déviatorique des déformations, l'énergie est de l'ordre de k_η alors que sur la partie isotrope l'énergie est de l'ordre de 1. En revanche s'il est assez "grand" ces phénomènes d'instabilités des déplacements sont limités, et l'algorithme converge correctement. Cependant, si k_η est trop grand alors il y aura à nouveau trop de rigidité résiduelle ce qui pollue l'énergie élastique qui se retrouve surestimée par rapport à la restitution de l'énergie de la fissure.

En conclusion ce paramètre est de nouveau un compromis entre la stabilité des déplacements transverses lors de la résolution du problème de minimisation et la non surestimation de l'énergie élastique.

5.4.2.2 Simulation numérique : matrice de base

Nous reprenons dans cette section la simulation numérique 1 de l'essai de la matrice en traction/compression avec fibre rigide avec les mêmes paramètres matériaux et numériques.

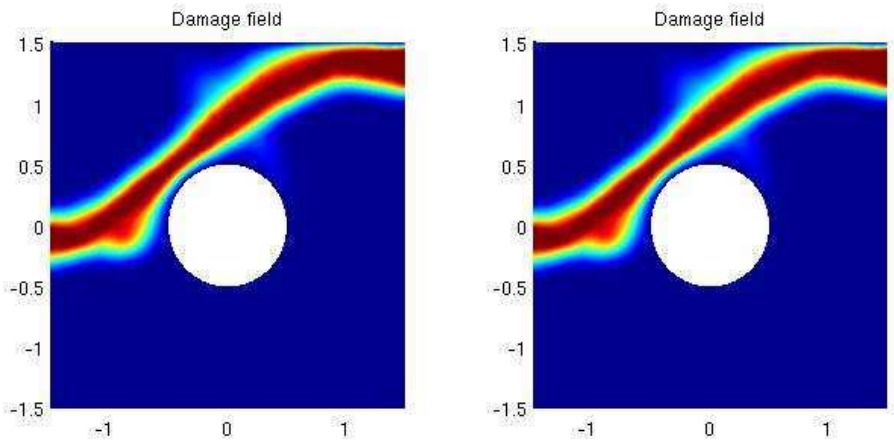

FIG. 5.31 – Champ d'endommagement de la matrice avec fibre rigide : (à droite) en traction (à gauche) en compression

Comme on peut l'observer sur la figure (5.31), le champ d'endommagement présente une parfaite symétrie de comportement en traction-compression. Ce qui induit "à la limite" des fissurations identiques en traction et en compression, mais cette fois les fissurations sont en mode II (voir figure 5.31).

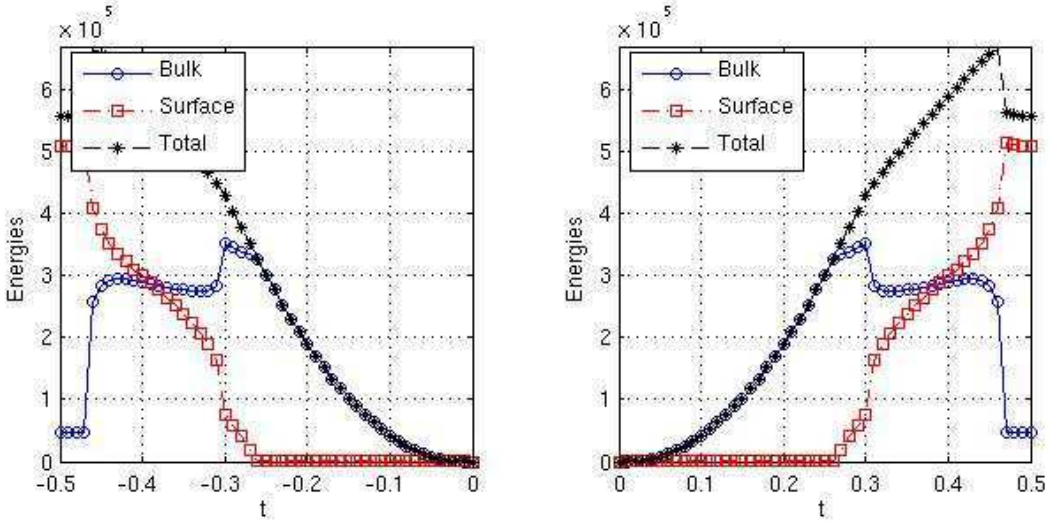

FIG. 5.32 – Énergies de surface, élastique et totale de la matrice avec fibre rigide : (à droite) en traction (à gauche) en compression

Cependant, ce modèle, par rapport au précédent, reste inapte à rendre compte de tous les modes d'ouvertures possibles (ouverture en mode-II seulement). De plus, il favorise, lui aussi, une symétrie de comportement en traction-compression qui reste physiquement inacceptable puisqu'une structure soumise à une sollicitation ne se comportera pas de la même manière si cette sollicitation est de type traction ou de type compression.

5.4.3 Tous les modes d'ouverture sont possibles

Dans cette section, nous proposons de mettre en œuvre numériquement le modèle proposé pour modéliser la rupture fragile avec prise en compte du contact unilatéral, c'est-à-dire, la non interpénétration des lèvres des fissures lors de la fissuration (cf section 3.4). Pour ce modèle, nous avons séparé l'énergie élastique volumique, en partie déviatorique et partie sphérique en mettant en évidence la trace positive du tenseur de déformations et sa trace négative dans la partie sphérique. Cette énergie élastique volumique peut se lire :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}A_0\varepsilon\cdot\varepsilon &= \frac{1}{2}\left(2\mu_0\varepsilon^d:\varepsilon^d+\kappa_0(\mathbf{tr}\ \varepsilon)^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(2\mu_0\varepsilon^d:\varepsilon^d+\kappa_0\left((\mathbf{tr}\ \varepsilon(u))^+\right)^2+\kappa_0\left((\mathbf{tr}\ \varepsilon(u))^-\right)^2\right) \end{aligned} \tag{5.14}$$

Nous faisons porter l'endommagement sur tous les termes de cette énergie élastique à l'excepter de la partie négative de la trace des déformations. Le nouveau modèle d'endommagement peut se lire :

$$\begin{aligned} G_\eta(u,\alpha) &= \int_\Omega \frac{1}{2}\left(g(\alpha)+k_\eta\right)\left(2\mu_0\varepsilon^d:\varepsilon^d+\kappa_0\left((\mathbf{tr}\ \varepsilon(u))^+\right)^2\right)dx \\ &+ \int_\Omega \frac{1}{2}(\kappa_0+k_\eta)\left((\mathbf{tr}\ \varepsilon(u))^-\right)^2dx \\ &+ \int_\Omega \left(G_c\eta|\nabla\alpha|^2+\frac{w(\alpha)}{\eta}\right)dx \end{aligned} \tag{5.15}$$

Il nous reste alors à chercher les minima de cette fonctionnelle pour tout déplacement cinématiquement admissible et pour tout champ d'endommagement irréversible.

5.4.3.1 Algorithme de résolution

Grâce à cette nouvelle régularisée, nous allons pouvoir prendre en compte les effets unilatéraux dans le modèle. Cependant, cette régularisée présente l'inconvénient d'ajouter une non linéarité supplémentaire dans le modèle que nous illustrons dans la suite en calculant les différentielles première et seconde de $\mathcal{G}_\eta$ par rapport à u à α fixé :
la différentielle première se lit :

$$\begin{aligned} \mathcal{G}'_\eta(u,\alpha).v &= \int_\Omega 2\mu_0((1-\alpha)^2+k_\eta)\left(\varepsilon^d(u):\varepsilon^d(v)+\kappa_0(\langle \mathbf{tr}\ \varepsilon(u)\rangle^+)(\ \mathrm{tr}\ \varepsilon(v))\right)dx \\ &+ \int_\Omega (\kappa_0+k_\eta)(\langle \mathbf{tr}\ \varepsilon(u)\rangle^-)(\ \mathrm{tr}\ \varepsilon(v))dx \end{aligned} \tag{5.16}$$

et la différentielle seconde de s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{G}''_\eta(u,\alpha).v.v &= \int_\Omega 2\mu_0((1-\alpha)^2+k_\eta)\left(\varepsilon^d(v):\varepsilon^d(v)+\kappa_0\chi^+(\ \mathrm{tr}\ \varepsilon(u))(\ \mathrm{tr}\ \varepsilon(v))^2\right)dx \\ &+ \int_\Omega (\kappa_0+k_\eta)\chi^-(\ \mathrm{tr}\ \varepsilon(u))(\ \mathrm{tr}\ \varepsilon(v))^2dx \end{aligned} \tag{5.17}$$

avec

$$\chi^+(\ \mathrm{tr}\ \varepsilon(u)) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \mathrm{tr}\ \varepsilon(u) > 0 \\ 0 & \text{si} \quad \mathrm{tr}\ \varepsilon(u) \leq 0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \chi^-(\ \mathrm{tr}\ \varepsilon(u)) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \mathrm{tr}\ \varepsilon(u) \geq 0 \\ 1 & \text{si} \quad \mathrm{tr}\ \varepsilon(u) < 0 \end{cases}$$

En effet, la différentielle seconde par rapport à u n'est pas continue et cela introduit de la non linéarité dans le problème de minimisation en u à α fixé. Néanmoins, il est possible d'utiliser l'algorithme de minimisations alternées à cause de la convexité des fonctionnelles par rapport à u à α fixé et inversement.

La minimisation en u à α fixé
Le problème de minimisation en u à α fixé est plus complexe à gérer, car la fonctionnelle (5.15) est non linéaire en u. Les variations première et seconde de cette fonctionnelle, en u à α fixé sont données respectivement par les expressions (5.16) et (5.17). Comme la différentielle seconde est positive pour toute fonction test v (à cause de la présence de k_η dans l'expression de la fonctionnelle), la fonctionnelle reste convexe par rapport à u à α fixé. Mais la différentielle seconde n'est pas continue à cause de la présence de partie positive et négative dans la fonctionnelle.

Pour résoudre ce problème, nous avons opté pour le choix d'une fonction préprogrammée sous la *toolbox* Matlab. En effet, il s'agit là de l'optimisation d'une fonctionnelle non linéaire, convexe et dont la différentielle seconde est discontinue. Nous avons utilisé la fonction préprogrammée *fmincon* de la *toolbox* de Matlab, qui est basée sur la résolution d'une suite de problèmes d'optimisations quadratiques SQP[112] jusqu'à convergence. Pour utiliser cette fonction, nous fournissons la valeur de la fonction à optimiser, son gradient et son Hessian autour de chaque état de déplacement u_i. On remarquera au passage que la convexité de la fonctionnelle nous assure existence et unicité de la solution.

[112] sequential quadratic programming

5.4.3.2 Simulation numérique 3 : variation de la fibre

Nous reprenons dans cette section la simulation numérique 3 de l'essai de la matrice en traction/compression avec fibre rigide, nous prenons soins de ne faire varier aucuns des paramètres.

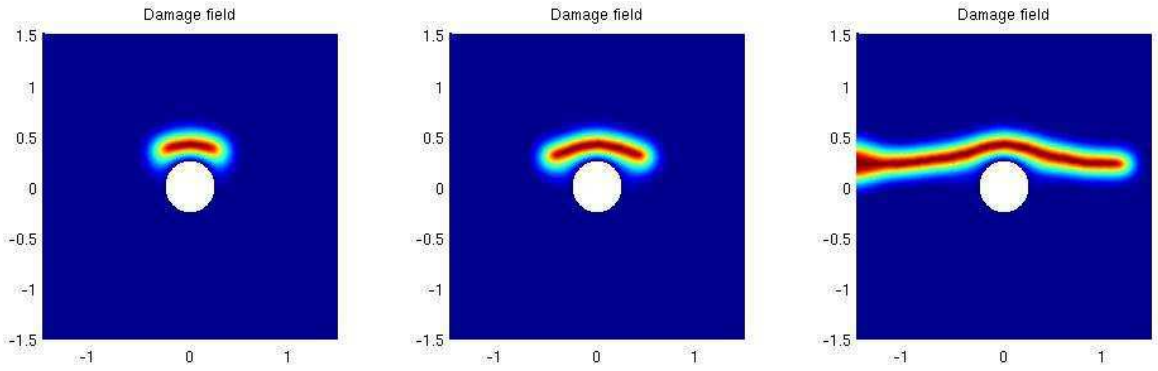

FIG. 5.33 – Champ d'endommagement de la matrice avec fibre rigide pour un essai de traction

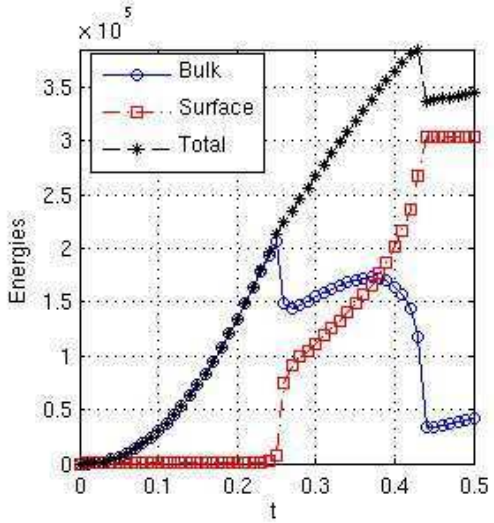

FIG. 5.34 – Énergies de surface, élastique et totale de la matrice avec fibre rigide : en traction

Comme on peut l'observer sur la figure (5.33), le champ d'endommagement présente les mêmes caractéristiques que celles obtenues avec le modèle de Bourdin, puisque nous avons, comme dans le cas précédent, une ouverture de la "fissure" en mode I.

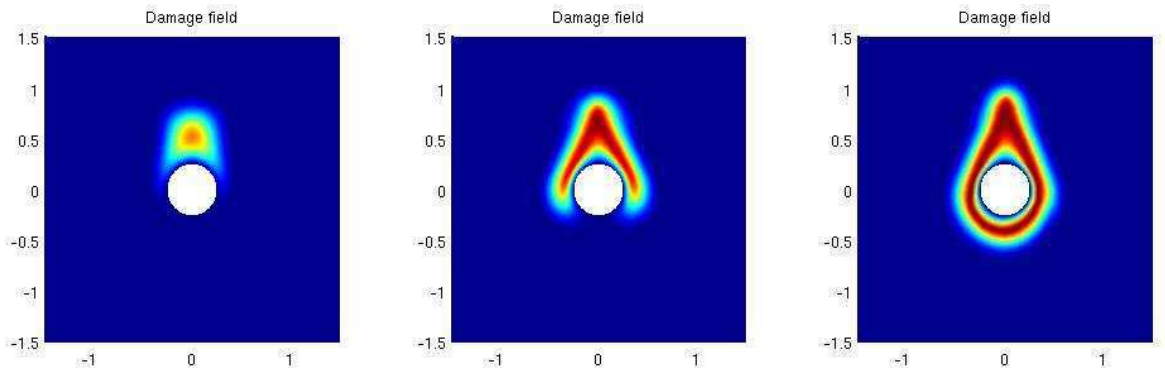

FIG. 5.35 – Champ d'endommagement de la matrice avec fibre rigide pour un essai de compression

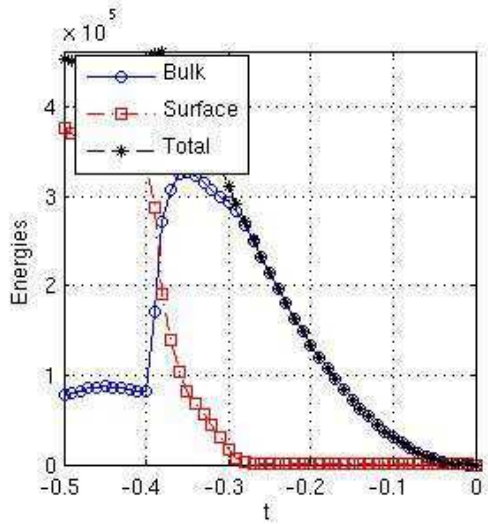

FIG. 5.36 – Énergies de surface, élastique et totale de la matrice avec fibre rigide : en compression

Comme on peut le noter sur la figure 5.35, la réponse en endommagement donne un résultat différent en compression. Nous observons que tant que le chargement est inférieur à -0.3, la matrice reste purement élastique. Une fois ce chargement dépassé, un endommagement se concentre au-dessus de la fibre progressivement et se propage progressivement autour de la fibre rigide. Lorsque la charge -0.4 est atteinte une "fissure" se crée autour de la fibre. On remarque aussi, qu'après cette charge l'endommagement continu à progresser dans la zone supérieure de la matrice. Nous noterons que l'énergie potentielle ne décroît pas jusqu'à zéro, cela est due au fait que l'endommagement continu à croître et que probablement la phase de fissuration ne s'est pas encore terminé.

5.5 Le problème de Fatigue

Dans cette section, nous proposons de mettre en œuvre numériquement le modèle de fatigue. Dans un premier temps, nous rappellerons les principaux résultats théoriques. Puis ensuite, nous nous attarderons sur sa mise en œuvre numérique et proposerons des algorithmes de résolution pour le problème de la minimisation. Enfin, nous détaillerons et discuterons des résultats numériques obtenus sur l'essai d'arrachement et déchirement d'une barre sous chargement cyclique.

5.5.1 Principaux résultats théoriques

La loi de Paris pour la propagation d'une fissure de longueur l_i sur un trajet de fissuration imposé entre le temps T_i et $T_{i+1} = T_i + \Delta T$ peut se mettre sous la forme :

$$\frac{\Delta \ell}{\Delta T} = C \left(\frac{G(\ell_i)}{G_c} \right)^m \tag{5.18}$$

où G est le taux de restitution d'énergie associé à la fissure ℓ_i pour l'amplitude maximale du chargement cyclique. On rappelle que ici ΔT représente un incrément de temps "homogénéisé", ce dernier doit être très supérieur à la période du chargement cyclique[113] qui est la cause des effets de fatigue.

On a montré dans le chapitre 4, que cette loi de propagation, pour des trajets de fissuration inconnus, peut se mettre sous forme variationnelle donnée par la relation suivante :

$$\begin{aligned} &\text{Pour } i \geq 1 \qquad \text{trouver } \mathcal{K}_{i+1} \text{ minimiseur relatif sur } \{\mathcal{K} : \mathcal{K} \supset \mathcal{K}_i\} \text{ de} \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \mathcal{P}(\mathcal{K}) + \Delta T \mathcal{D} \left(\frac{\mathcal{H}^1 \left(\mathcal{K} \setminus \mathcal{K}_i \right)}{\Delta T} \right) \\ &\text{avec } \mathcal{K}_0 \text{ donnée} \end{aligned} \tag{5.19}$$

avec

$$\mathcal{P}(\mathcal{K}) = \min_{u \in \mathcal{C}(\mathcal{K})} \left\{ \int_{\Omega_\mathcal{K}} \frac{1}{2} A_0 \varepsilon(u) \cdot \varepsilon(u) dx \right\}$$

soit encore :

$$\mathcal{F}_i(u, \mathcal{K}) = \int_{\Omega/\mathcal{K}} \frac{1}{2} A_0 \varepsilon(u) \cdot \varepsilon(u) dx + \Delta T \mathcal{D} \left(\frac{\mathcal{H}^1 \left(\mathcal{K} \setminus \mathcal{K}_i \right)}{\Delta T} \right) \tag{5.20}$$

5.5.2 Algorithme de résolution pour le cas de propagation d'une fissure

Après une régularisation de la fonctionnelle (5.20) par un procédé identique à celui introduit pour le problème de la rupture fragile, on peut rendre compte de la propagation par fatigue d'une fissure sans se donner *a priori* son trajet. Ce modèle d'endommagement peut se lire :

$$\mathcal{F}_i^\eta(u, \alpha) \quad = \quad \int_\Omega \frac{1}{2} A(\alpha) \varepsilon(u) . \varepsilon(u) dx + \Delta T \ \mathcal{D} \left((\mathcal{S}_\eta(\alpha) - \mathcal{S}_\eta(\alpha_{i-1})) \right) \tag{5.21}$$

où

$$\mathcal{S}_\eta(\alpha) = \int_\Omega \left(\frac{9}{64} \frac{\alpha}{\eta} + \eta \nabla \alpha \cdot \nabla \alpha \right) dx.$$

Le problème de minimisation consiste alors à chercher les minimas de cette fonctionnelle pour tout déplacement cinématiquement admissible et pour tout champ d'endommagement irréversible.

[113] à amplitude constante

Compte tenu de la connaissance du champ de déplacement et du champ d'endommagement au temps T_i, il faut trouvé au temps $T_{i+1} = T_i + \Delta T$ le minimum relatif de la fonctionnelle discrétisée sous une contrainte d'irréversibilité de l'endommagement. Le problème de minimisation est résolu là aussi avec un algorithme de minimisations alternées car le potentiel de dissipation $\mathcal{D}$ est une fonction convexe positive. L'algorithme pour résoudre ce problème de minimisation s'écrit alors :

Algorithme 2

1. *Initialisation*
   (a) Fixer les paramètres de ce modèle : η, la longueur interne du modèle d'endommagement ; k_η, un résidu de rigidité (paramètre qui assure l'existence et unicité du problème en déplacement) ; T_i, le temps à l'instant i ; ΔT, le pas de discrétisation en temps ; h, la taille du maillage ; δ, la tolérance de convergence du modèle d'endommagement ; α_0, un "bon" point de départ
   (b) Soit $k = 0$ et $(u^0_{i+1}, \alpha^0_{i+1}) := (u_i, \alpha_i)$.
2. *itération k :*
   (a) $k = k + 1$.
   (b) Calculer $u^k_{i+1} := \arg\min_u \mathcal{F}^\eta_i(u, \alpha^{k-1}_{i+1})$ sous la contrainte $u = u_0$ sur $\partial_u\Omega$.
   (c) Calculer $\alpha^k_{i+1} := \arg\min_\alpha \mathcal{F}^\eta_i(u^k_{i+1}, \alpha)$ sous la contrainte $\alpha_i \leq \alpha$.
3. *fin*
   (a) Répéter l'étape 2 jusqu'à ce que $\|\alpha_{i+1} - \alpha_i\|_\infty \leq \delta$.
   (b) Soit $(u_{i+1}, \alpha_{i+1}) := (u^k_{i+1}, \alpha^k_{i+1})$.
   (c) Enregistrement des données à la fin de chaque itération en temps

ΔT est l'incrémentation temporelle du temps homogénéisé de la loi de Paris.

La minimisation en α à u fixé étape 2 (c) de l'algorithme 2
Ce problème de minimisation est un peu plus compliqué à mettre en œuvre numériquement que les problèmes précédent puisqu'il s'agit d'un problème de minimisation sous contrainte du type inégalité d'une fonctionnelle non-linéaire mais convexe. En effet, à l'itération $i + 1$ du cycle k, u^k_{i+1} est connu puisqu'il a été donné par l'étape 2 (b) et on cherche à calculer le champ α donné par $\alpha^k_{i+1} = \arg\min_\alpha, \mathcal{F}^\eta_i(u, \alpha^k_i)$ sous la contrainte $\alpha \geq \alpha^{k-1}$.
Après avoir calculé le champ de déplacement à l'itération $i+1$ du cycle k, l'objectif est de calculer le champ de d'endommagement qui minimise l'énergie totale à l'itération $i + 1$ du cycle k. Le problème se formule de la façon suivante :

$$\text{Chercher } \alpha^k_{i+1} \text{ minimum local de } \mathcal{F}^\eta_i(u^k_{i+1}, *) \tag{5.22}$$

Ce problème de minimisation en endommagement (5.22), avec irréversibilité de ce dernier, se ramène à la résolution du problème suivant : :

$$\min_X \frac{1}{2} X^T A X + \mathcal{D}((X - X_i)^T C (X - X_i)) + B^T X \quad \text{tel que } \alpha_{k-1} \leq X$$

L'écriture ci-dessus met en évidence la possibilité de définir la fonctionnelle à minimiser seulement par deux matrices A et C de dimensions $n \times n$ et d'un vecteur B de dimension n, où n est le

nombre de degré de liberté de la variable endommagement. Ce fait s'avère pratique d'un point de vue numérique vu que seul les matrices A et C et le vecteur B sont assemblés par éléments finis.
Pour résoudre ce problème de minimisation, on utilise la fonction préprogrammée *fmincon* de la *toolbox* optimisation de Matlab. Cette fonction est basée sur un algorithme du type Trust-Region[114] adapté aux problèmes à larges échelles (pour plus de détails on renvoie le lecteur vers [BSSG88], [CL96a] ou encore [Ste83]). La convexité de la fonctionnelle[115] avec irréversibilité de l'endommagement nous assure l'existence et unicité de la solution.

5.5.3 Simulations numériques

Dans cette section nous allons présenter les résultats de quelques simulations numériques effectuées sur des problèmes à deux dimensions. On cherchera, dans un premier temps, à valider nos résultats numériques avec des résultats théoriques obtenus pour l'essai d'arrachement sur une plaque. Puis par la suite, on cherchera à travers l'exemple de déchirement d'une plaque de dégager les mécanismes intervenant au cours du processus de fissuration en fatigue ce qui permettra d'évaluer le modèle de fatigue.

5.5.3.1 Essai de traction

Géométrie et chargement

Il s'agit d'un essai de fatigue sur une plaque rectangulaire de longueur L et de largeur l préfissurée initialement d'une fissure de longueur L_0, un chargement cyclique d'amplitude u_m est imposé sur la partie supérieur de la plaque, la partie inférieure de la plaque est tenue fixe, tandis que les autres parties sont laissées libres.

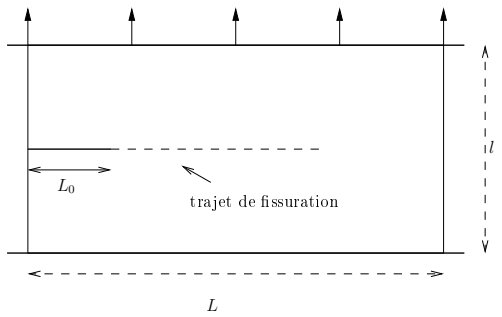

FIG. 5.37 – Géométrie et chargement

Dans la configuration de référence, le corps occupe un rectangle de longueur L est de largeur l.

$$\Omega = \{x = (x_1, x_2), \quad |x_1| < L \quad |x_2| < l\}$$

avec une préfissure de longueur L_0

$$\mathcal{K}_0 = \{x = (x_1, x_2), \quad |x_1| < L_0 \quad x_2 < L/2\}$$

Nous considérons que la frontière de bas du rectangle est tenue fixe

$$u(x) = 0 \quad \text{si } x_2 = 0$$

et que la partie supérieure du rectangle est soumise à un chargement cyclique d'amplitude u_m

$$u_2(x) = u_m \quad \text{si } x_2 = L$$

[114] large-scale Trust-Region algorithm
[115] car le potentiel de dissipation $\mathcal{D}$ est une fonction convexe et positive de la fissure créée

Pour ne pas risquer l'apparition d'un endommagement sur les frontières où nous avons appliquées nos conditions limites en déplacement nous allons imposer au champ d'endommagement d'y être nul.
Dans nos simulations, nous prenons

$$L = 1, \quad l = 0.6 \quad \text{et} \quad L_0 = 0.1$$

Paramètres matériaux
Pour cet exemple, le matériau sera considéré purement élastique, et aura les caractéristiques sans dimensions suivantes :

- module d'Young $E = 100$
- coefficient de Poisson $\nu = 0.33$
- ténacité $G_c = 1$.
- $\Delta T = 10^{-1}$

Paramètres numériques
Pour les paramètres numériques du modèles k_η et pour un maillage dont la taille caratéristique est h nous avons pris les valeurs suivantes :

$$h = 5.10^{-3} \quad k_\eta = 10^{-4} \quad \text{et} \quad \eta = 2.10^{-2}$$

Nous avons pris un maillage non structuré composé de 16000 éléments triangulaires à trois nœuds (fixes au cours des itérations).

Loi de fatigue
Pour retrouver une évolution en accord avec la loi de Paris définie en début de cette section, on considère le potentiel de dissipation $\mathcal{D}$, comme étant une loi puissance donnée par l'expression suivante :

$$\mathcal{D}(x) = \frac{C}{1 + 1/m} \left(\frac{1}{C}\right)^{1+1/m} (x)^{1+1/m}$$

Ici, nous avons pris $C = 1$ et $m = 1/2$.

Résultats numériques

Pour cette première expérience, nous avons imposé un déplacement cyclique sur le bord supérieur de l'éprouvette et fixé le bord inférieur, les autres bords sont laissés libres. Cet essai a été choisi pour valider le modèle variationnel avec le code numérique. La figure 5.38 traduit l'évolution du champ d'endommagement et la déformation de la structure. Ce calcul a été obtenu par notre code de calcul.

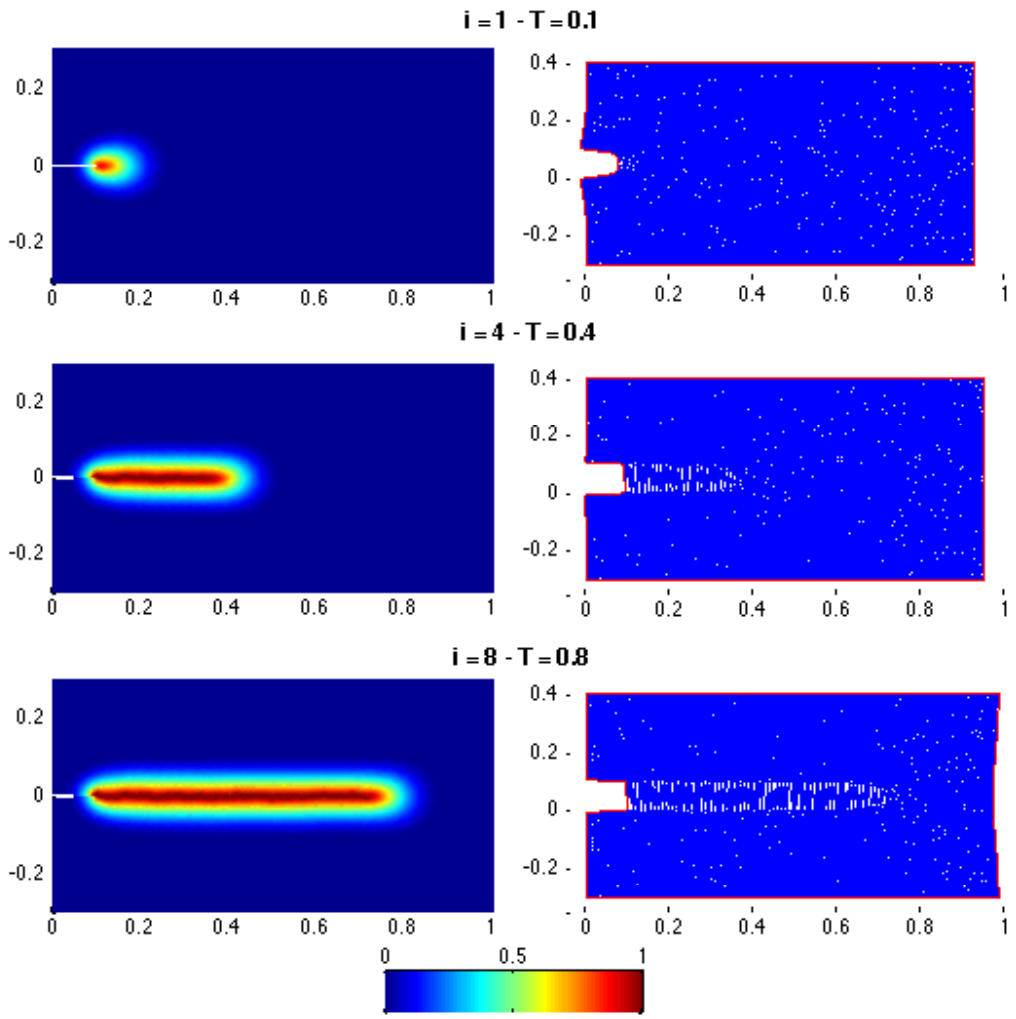

FIG. 5.38 – Traction avec $u_m = 0.1$: champ d'endommagement et maillage déformé

Remarque:

- Comme nous pouvions le prévoir la propagation de la fissure suit un chemin rectiligne au centre de l'éprouvette.
- Dès le premier cycle, il y a endommagement. Cela semble être correct puisque la loi de comportement de ce modèle nous assure que même pour des taux de restitution d'énergie "petit", la fissure peut se propage.

Pour valider nos résultats nous avons utilisé une méthode d'éléments finis classique en élasticité linéaire (sous Comsol). Ici, on effectue des calculs de taux de restitution d'énergie G en fonction de la longueur de fissure à trajet de fissuration imposé. Pour ce faire, on utilise la méthode classique des intégrales de contours. La connaissance de $G(\ell)$ (voir aussi la figure 5.44) nous permet de prédire l'évolution de la fissure sur la base de la loi de Paris (5.18). Nous comparons les résultats obtenus pour la longueur de fissure en fonction du temps avec ceux obtenus par notre code de calcul. Nous observons sur la figure 5.39 le parfait accord entre les calculs Comsol et nos résultats numériques, ce qui permet de valider notre modèle de fatigue.

Pour cette comparaison, la longueur de fissure dans le modèle d'endommagement a été estimée par l'énergie de surface $S_\eta(\alpha)$, donnée par la relation $\mathcal{S}_\eta(\alpha) = \int_\Omega \left(\frac{9}{64}\frac{\alpha}{\eta} + \eta \nabla\alpha \cdot \nabla\alpha \right) dx$.

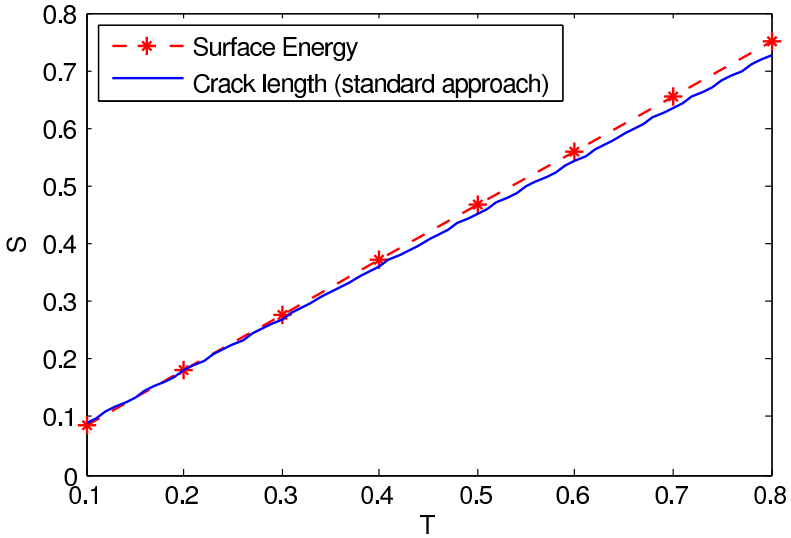

FIG. 5.39 – Traction avec $u_m = 0.1$: énergie de surface du modèle d'endommagement $S_\eta(\alpha)$ vs. la longueur de fissure calculée par intégration de la loi de Paris (avec Comsol : taux de restitution d'énergie calculé) et de l'énergie de surface du modèle d'endommagement.

5.5.3.2 Essai de déchirement

Géométrie et chargement

Il s'agit d'un essai de déchirement sur une plaque rectangulaire de longueur L et de largeur l préfissurée initialement d'une fissure de longueur L_0, un chargement cyclique d'amplitude u_m de part et d'autre de la fissure, la partie de droite de la plaque est fixe, tandis que les autres parties sont laissées libres.

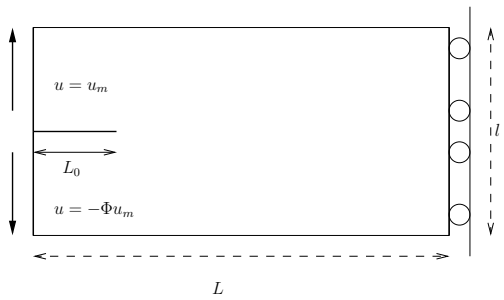

FIG. 5.40 – Géométrie et chargement

Dans la configuration de référence, le corps occupe un rectangle de longueur L est de largeur l.

$$\Omega = \{x = (x_1, x_2), \quad |x_1| < L \quad |x_2| < l\}$$

avec une préfissure de longueur L_0

$$\mathcal{K}_0 = \{x = (x_1, x_2), \quad |x_1| < L_0 \quad x_2 < L/2\}$$

Nous considérons que la frontière droite du rectangle est tenue fixe

$$u(x) = 0 \quad \text{si } x_1 = L$$

et que la partie gauche du rectangle est soumise à une déchirure cyclique

$$u_2(x) = u_m \quad \text{si } x_1 = 0 \text{ et } L/2 < x_2 < L$$

et

$$u_2(x) = -\Phi u_m \quad \text{si } x_1 = 0 \text{ et } 0 < x_2 < L/2$$

où Φ est un coefficient variable pour désymétriser le chargement.
Pour ne pas risquer l'apparition d'un endommagement sur les frontières où nous avons appliquées nos conditions limites en déplacement, nous allons imposer au champs d'endommagement d'y être nul.
Dans nos simulations, nous prendrons les mêmes paramètres matériaux et numériques ainsi que le même potentiel de dissipation que l'essai de traction introduit au-dessus.

Résultats numériques

Pour cette seconde expérience, choisie pour sa richesse en terme de propagation à trajet complexe, nous avons bloqué le déplacement horizontal à l'extrémité droite de la plaque puis nous avons imposé un déchirement à déplacement contrôlé (cf figure 5.40) sur le bord opposé, avec la possibilité d'avoir une disymétrie de l'ouverture.

Pour le cas d'un chargement parfaitement symétrique ($\Phi = 1$), le trajet de fissuration trouvé par minimisations alternées de la fonctionnelle est représenté en figure 5.41. La bande endommagée se propage initialement sur un trajet rectiligne, qui devient ensuite instable et finit par créer une bifurcation. Bien que ce résultat apparaisse intéressant, il faut remarquer que le potentiel de dissipation pris en compte ici cesse d'être valide d'un point de vue théorique lorsque l'on a la présence simultanée de plusieurs pointes de "fissures". L'étude de ce type de trajet bifurqué demandera un approfondissement théorique et un approfondissement d'un point de vue modélisation.

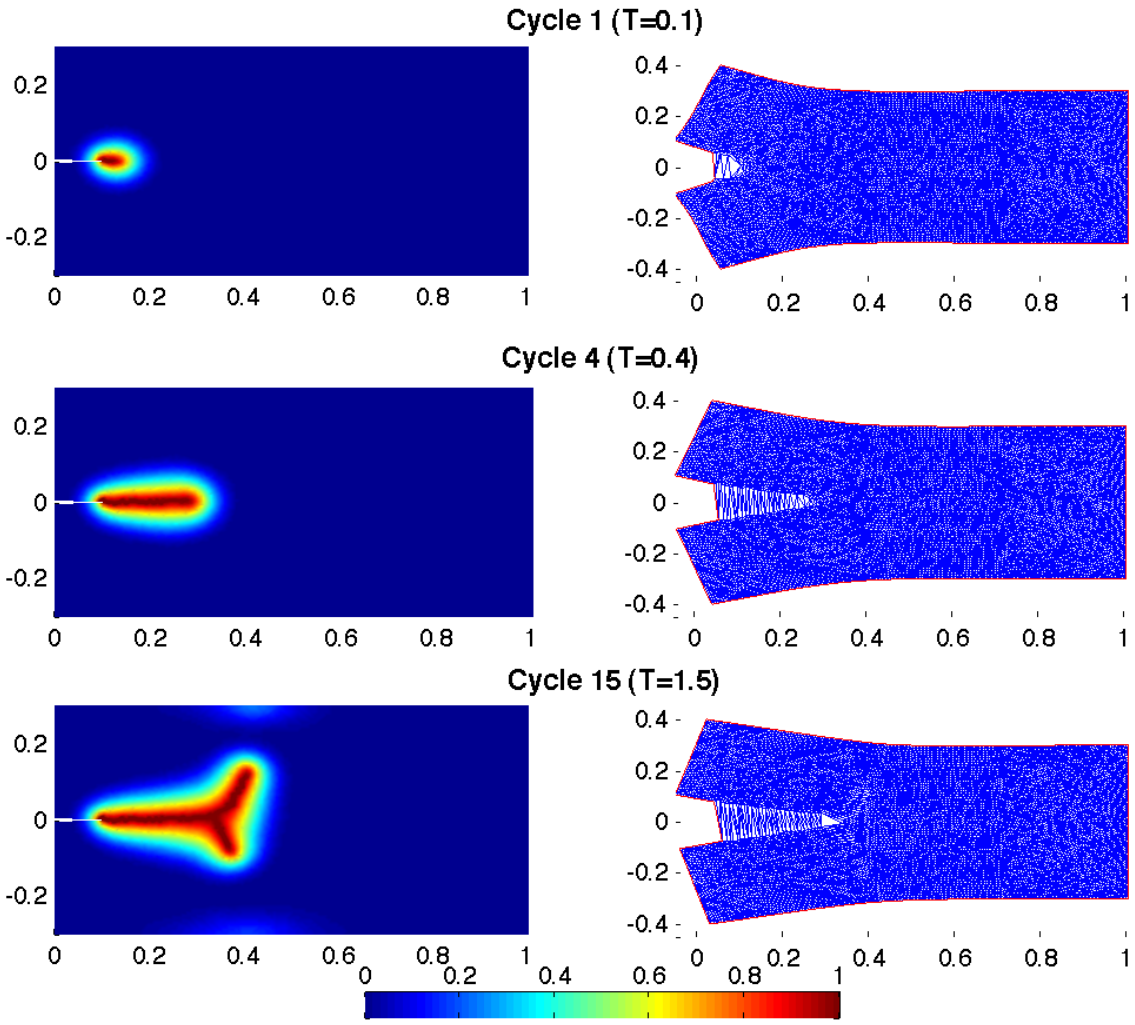

FIG. 5.41 – Champt d'endommagement et maillage déformé pour le cas de déchirement avec un chargement (cyclique) symétrique d'amplitude $u_m = 0.1$.

Néanmoins, les résultats du présent modèle restent valables lorsque l'on introduit une asymétrie[116] dans le chargement puisque cette dernière va permettre à l'endommagement de suivre l'une des deux directions de propagations possibles(cf figure 5.40). On montre dans la figure 5.42 le champ d'endommagement obtenus au cycle 15.

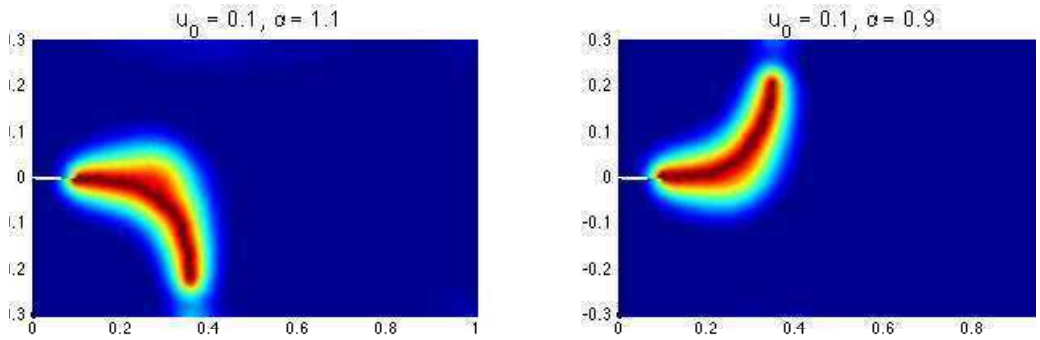

FIG. 5.42 – Champ d'endommagement avec un déchirement à chargement asymétrique.

La figure 5.43 représente l'énergie de surface et l'énergie élastique pour chaque pas de chargement. La propagation de fissure[117] s'effectue en échange d'une diminution de l'énergie élastique.

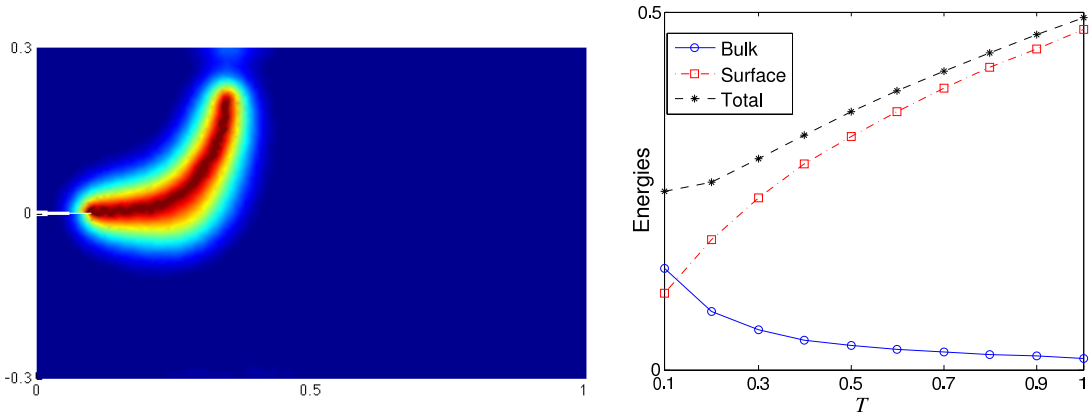

FIG. 5.43 – Énergies de surface et élastique pour le déchirement dans le cas chargement ($u_m = 0.1$) asymétrique avec $\Phi = 0.9$.

Nous avons tracé pour les deux cas de chargements (cf figure 5.44), le taux de restitution d'énergie en fonction de la longueur de fissure[118]. Ce calcul a été fait avec un code aux éléments finis

[116] c'est-à-dire en imposant un poid différent dans l'ouverture de déchirement
[117] c'est-à-dire création de l'énergie de surface
[118] on impose encore une fois un trajet de fissuration rectiligne

standard en élasticité linéaire (Comsol[119]). On remarquera que pour un trajet rectiligne, pour le cas de la traction le taux de restitution de l'énergie est presque constant mais différent de zéro alors que pour le cas du déchirement, il tend rapidement vers zéro.

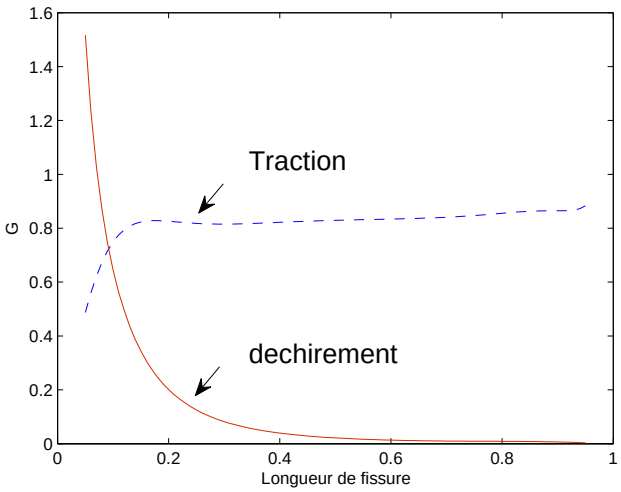

FIG. 5.44 – Taux de restitution d'énergie pour un trajet de fissuration rectiligne.

À partir de la courbe du taux de restitution d'énergie en figure 5.44, on remarquera que l'instabilité du trajet rectiligne était prévisible. Lorsque la longueur de fissure augmente, le taux de restitution d'énergie pour le trajet rectiligne tend vers zéro et la propagation en ligne droite est donc de plus en plus difficile.

5.5.4 Perspectives

Dans le chapitre 4, nous avons rappelé la formulation variationnelle souhaitable dans le cas de multifissuration d'une structure par fatigue. Dans cette formulation il y a nécessité de raisonner en termes de composantes connexes de nouvelles surfaces fissurées et d'additionner leur contribution dans le potentiel de dissipation. En effet, il n'est pas facile de donner un sens à la notion de composantes connexes des surfaces de discontinuité de champ de déplacement. Dans sa forme la plus générale l'énergie régularisée s'écrit :

$$\mathcal{F}_i^\eta(u,\alpha) \quad = \quad \int_\Omega \frac{1}{2} A(\alpha)\varepsilon(u).\varepsilon(u)dx + \Delta T \sum_{k\in\mathcal{K}(\alpha\backslash\alpha_i)} D(\Big(\mathcal{S}_\eta(\alpha^k) - \mathcal{S}_\eta(\alpha_{i-1}^k)\Big)) \tag{5.23}$$

où (k joue le rôle d'indice et représente la pointe de fissure numéro k)

$$\mathcal{S}_\eta(\alpha^k) = \int_\Omega \left(\frac{9}{64}\frac{\alpha_k}{\eta} + \eta\nabla\alpha_k \cdot \nabla\alpha_k\right) dx.$$

Comme les fissures ont le droit de naître *a priori* n'importe où dans la structure il s'agit de trouver les supports des pointes des fissures et de gérer à chaque cycle de fatigue la création de ces nouvelles surfaces. Cette notion de pointes de fissures est difficilement modélisable en terme de champ d'endommagement puisqu'il est question de bande de fissuration.

[119] http ://www.comsol.fr/

Une idée serait d'analyser à la fin de chaque cycle le champ d'endommagement α et d'extraire les informations quantitatives de ce champ qui permettront de différencier les fissures les unes des autres et ainsi de pouvoir associer à chaque pointe de fissure différente, un potentiel de dissipation différent.

Cette analyse peut-être décomposée en plusieurs étapes successives :

- l'extraction de fissures s'appuyant sur la séparation des données du champ α
- l'analyse de ces données et l'association à chaque fissure un potentiel différent

Phase de filtrage

En appliquant un simple seuillage de niveau d'endommagement, on peut faire une extraction de l'information par région. Ainsi, toutes les régions de la structure dont les niveaux d'endommagements sont compris entre deux seuils sont considérées comme des zones "positives" et tous les autres comme des zones "mortes".

Étiquetage en composantes connexes

La dernière étape avant d'effectuer l'affectation du potentiel de dissipation consiste à distinguer les différentes fissures pour ce champ. L'opération consiste à attribuer un numéro unique à tous les éléments appartenant à un même objet.

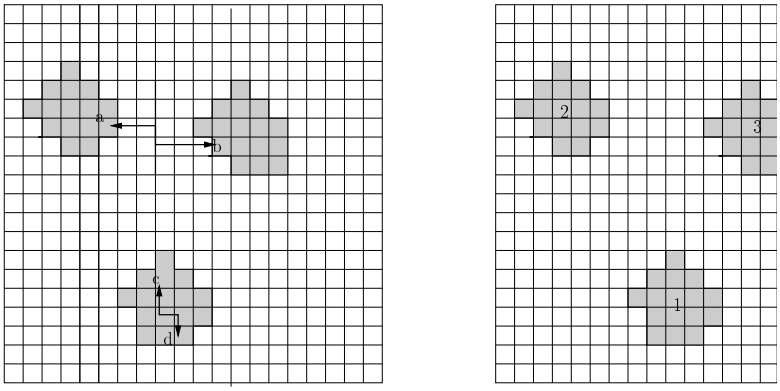

Fig. 5.45 – Composantes connexes

Ainsi, sur la figure 5.45, on définit la notion de composante connexe. Pour différencier les différentes "fissures", il suffirait de faire un étiquetage préalable différents pour chaque fissure. Cela consiste donc à attribuer à chacune des régions séparées (composantes connexes) une étiquette[120] (cf figure 5.45).

Remarque:

- Dans cette régularisée nous n'avons pas pris en compte la non interpénétration des lèvres des fissures.

[120] c'est-à-dire un numéro unique qui sera attribué à chacune des zones endommagées appartenant à une même composante connexe

- La modification de la fonctionnelle n'enlève pas le caractère de non convexité par rapport au couple (u, α). Quant à la convexité par rapport à u à α fixé et inversement reste vraie au vue des propriétés du potentiel de dissipation, et ainsi l'algorithme de minimisations alternées reste utilisable même dans ce cas.
- La vraie différence est qu'il faut différencier chaque pointe et lui associée un potentiel de dissipation. Autrement dit, la plus grande difficulté est d'étiqueter chacune des zones endommagées appartenant à une même composante connexe du champ d'endommagement créé à l'itération courante afin de lui associer par la suite un potentiel de dissipation.
- Le problème en α est un problème non linéaire sous contrainte à résoudre plus compliqué que le précédent puisqu'il faut localiser chaque pointe.

Conclusion générale & Perspectives

Le travail présenté dans cette thèse s'est articulé autour de trois grandes parties ; revenons rapidement sur les principaux résultats :

- L'un des objectifs premiers de ce travail était de faire une étude comparative entre différents modèles d'endommagement non-locaux et de voir qu'ils se comportent différemment en termes de minima-locaux. Une analyse du problème d'évolution, une analyse dans le cas général de la stabilité des états homogènes (solutions possibles au problème d'évolution) et une étude quantitative des états non homogènes (autres solutions possibles au problème d'évolution) ont été réalisées à travers l'exemple "académique" unidimensionnel de la barre en traction. Nous avons introduit quelques familles de modèles d'endommagement et nous avons mis en évidence que ces modèles d'endommagement se comportent différemment en terme de minima-locaux. Et il s'avère que la relation contrainte-déformation ne suffit pas à définir une loi de comportement mais qu'une autre relation reliant la stabilité des solutions homogènes à la taille du domaine s'avère tout aussi essentielle quant à l'identification de ces lois de comportement.

- Sur un plan numérique, nous avons implémenté deux modèles d'endommagement :
  Modèle d'Ambrosio et Tortorelli adapté par Bourdin dans ses travaux de thèse, pour le problème de rupture fragile, dont la loi de comportement est donnée par la relation :

  $$A(\alpha) = ((1-\alpha)^2 + k_\eta)A_0 \quad \text{et} \quad w(\alpha) = \frac{\alpha^2}{4\eta}$$

  Et le modèle AM, qui possède une phase élastique et par conséquent se rapproche plus d'un modèle de rupture fragile, dont la loi de comportement est donnée par :

  $$A(\alpha) = ((1-\alpha)^2 + k_\eta)A_0 \quad \text{et} \quad w(\alpha) = \frac{9}{64}\frac{\alpha}{\eta}$$

  Nous avons ensuite introduit l'irréversibilité de l'endommagement dans les deux modèles. Ces deux modèles se comportent de façon symétrique en traction-compression, ce problème avait déjà été soulèvé par Bourdin dans ses travaux de thèse. Le phénomène d'interpénétration des lèvres des fissures n'est pas pris en compte dans les deux modélisations précédentes, car le modèle d'Ambrosio et Tortorelli avait été initialement introduit pour les problèmes d'imagerie dont le seul souci est de déterminer les contours actifs d'une image. Dans le cas de la mécanique de la rupture, le problème est plus complexe puisqu'il comporte des phénomènes naturels tels que le contact, la non interpénétration des lèvres de la fissure, la refermeture des fissures, *etc.* Un autre objectif du travail réalisé était d'introduire une nouvelle régularisée capable de rendre compte de tous les phénomènes de rupture afin de remédier aux lacunes de la première modélisation. Nous avons suivi l'idée d'Ambrosio et

Tortorelli en introduisant l'effet de contact unilatéral (le saut normal de déplacement aux lèvres de la fissures doit être positif ou nul) de manière naturelle.
Pour ce faire, nous avons abandonné la première régularisée en faveur d'une autre qui permet de n'avoir que des ouvertures en cisaillement plan, ce qui la rend inapte à rendre compte de tous les modes d'ouvertures possibles.

$$A(\alpha) = ((1-\alpha)^2 + k_\eta)A_0\varepsilon^d(u)\cdot\varepsilon^d(u) + (1. + k_\eta)A_0\varepsilon^s(u)\cdot\varepsilon^s(u)$$

Puis, nous avons remplacé cette dernière par une régularisée qui permet cette fois tous les modes d'ouvertures possibles.

$$A(\alpha) = ((1-\alpha)^2 + k_\eta)(A_0\varepsilon^d(u)\cdot\varepsilon^d(u) + \kappa_0\left((\mathbf{tr}\ \varepsilon(u))^+\right)^2) + \kappa_0\left((\mathbf{tr}\ \varepsilon(u))^-\right)^2$$

Cette nouvelle et originale régularisée présente un inconvénient d'un point de vue pratique puisqu'elle ajoute de la non linéarité supplémentaire dans le modèle, correspondant à la présence de partie positive. Nous avons ensuite proposé une mise en œuvre numérique. Et enfin, nous avons présenté et détaillé les résultats obtenus par cette méthode.

- Si la théorie de Griffith est suffisante pour rendre compte de la rupture sous chargement monotone croissant, elle est en revanche inapte à prédire le phénomène de fatigue. A. Jaubert et J.-J. Marigo proposent une autre formulation variationnelle que nous avons régularisée en utilisant des modèles d'endommagement non-locaux. Nous nous sommes ensuite concentrés sur les aspects numériques et plus précisement sur la mise en œuvre numérique de ce nouveau modèle. Des cas simples ont permis de le valider tandis que des essais plus élaborés ont testé sa capacité à reproduire des évolutions de fissures réalistes aux vues de la géométrie et du chargement appliqué.

Par ailleurs, les résultats présentés ici soulèvent un certain nombre d'interrogations et devront être complétés pour mieux comprendre les phénomènes en jeu.

- Tout d'abord d'un point de vue théorique, nous avons, à travers l'exemple "académique" unidimensionnel de la barre en traction, étudié la stabilité des états homogènes sur quelques familles de modèles d'endommagement. Mais la condition de stabilité d'ordre deux n'a pas été intégrée dans tous les calculs (stabilité des états non homogènes) pour verifier si nous sommes bien sur un minimum local unilatéral. Par ailleurs, des recherches industrielles (EDF R&D) sont d'ores et déjà en cours afin d'étudier la stabilité dans le cadre du GDR MOMAS.

- La modélisation de la fatigue par une formulation énergétique semble donner des résultats intéressants d'un point de vue théorique. Cependant, leur mise en œuvre numérique semble être plus compliquée lorsqu'il s'agit de propagation de plusieurs fissures dans la structure. En effet, l'introduction de fronts de fissures semble être difficile à modéliser en terme d'endommagement. Le passage 3D pose aussi les mêmes difficultés.

- Pour finir, il serait intéressant pour des simulations futures de pouvoir comparer nos résultats numériques obtenus en Fatigue avec des calculs qui sollicitent la loi cohésive développée dans les travaux de Laverne (cf [Lav08]).

Annexe A

Quelques rappels

A.1 Rappels sur la mesure de Hausdorff

On commence dans un premier temps par redonner la définition de la mesure de Hausdorff qui est nécessaire à la définition de la fonctionnelle de Rupture dans son cadre générale.

Définition A.3 Mesure de Hausdorff
Soient $\mathcal{K}$, $\eta \in [0, +\infty]$ et $A \in \mathcal{R}^n$. La mesure de Hausdorff $\mathcal{K}$-dimensionnelle de A est donnée par

$$\mathcal{H}^k(A) = \lim_{\eta \to 0} \mathcal{H}^k_\eta(A)$$

où

$$\mathcal{H}^k_\eta(A) = \frac{w_k}{2^k} \inf \left\{ \sum_{i \in I} |diam(A_i)|^k, \quad diam(A_i) \leq \eta, \quad A \subset \cup_{i \in I} A_i \right\}$$

pour tout recouvrement fini $(A_i)_{i \in I}$, w_k est un facteur de normalisation :

$$w_k = \pi^{\frac{k}{2}} \Gamma(1 + \frac{k}{2})$$

où $\Gamma(t) = \displaystyle\int_0^\infty s^{t-1} e^{-s} ds$

Le facteur de normalisation w_k permet de faire coïncider la mesure de Hausdorff $\mathcal{H}^N$ sur $\mathcal{R}^N$ avec la mesure de Lebesgue. Il correspond pour $k \geq 1$ (entier) au volume de la boule unité de $\mathcal{R}^k$.

Une fois cette définition donnée, on doit décrire les espaces sur lesquels nous définissons le problème de rupture : les espaces BV et SBV, des espaces dont la définition est loin d'être exhaustive, on renvoie le lecteur aux ouvrages de référence sur le sujet comme par exemple [EG92], [Giu84].

A.2 Les espaces BV et SBV

Définition A.4 Espace BV(Ω)
Nous définissons l'espace BV(Ω), l'espace des fonctions à variations bornées, par

$$BV(\Omega) = \left\{ u \in L^1(\Omega); \quad \int_\Omega |Du| < \infty \right\}$$

En fait, il faut comprendre Du comme la dérivée au sens des distributions associée à la forme linéaire :

$$L(\phi) = \int_\Omega u \ div \ \phi dx \quad \phi \in C_0^1(\Omega, \mathcal{R}^N)$$

Soit u une fonction de $L^1(\Omega)$, on définit Du son gradient au sens des distributions qui est une mesure de Radon et sa variation totale est calculée comme suit :

$$\int_\Omega |Du| = \sup \left\{ \int_\Omega u \ div \ \phi dx, \quad \phi \in C_0^1(\Omega, \mathcal{R}^N), \quad |\phi|_{L^\infty(\Omega)} \leq 1 \right\}$$

Un sous-ensemble $S \subset \mathcal{R}^N$ a un périmètre fini si sa fonction caractéristique $u = 1_S$ est à variation bornée, c'est à dire :

$$\int_\Omega |Du| = \sup \left\{ \int_S div \ \phi dx, \quad \phi \in C_0^1(\Omega, \mathcal{R}^N), \quad |\phi|_{L^\infty(\Omega)} \leq 1 \right\} < \infty$$

On peut démontrer que si le bord de S est suffisamment régulier, cette définition correspond avec la notion de périmètre en dimension 2 et à l'aire en dimension 3. Ainsi, *a priori* cet espace semble être le bon espace pour notre problème. L'espace BV a plein de propriétés fondamentales que nous n'exposerons pas ici. Cependant, il y en a une très importante qui est la décomposition.

Proposition A.5 *Soit Ω un ouvert borné lipchitzien. Alors l'espace BV vérifie la décomposition : Du peut être décomposé en la somme d'une mesure régulière et d'une mesure singulière*

$$Du = \nabla u dx + D_s u$$

où $\nabla u(x) \in L^1(\Omega)$ est la dérivée de Radon Nikodym par rapport à la mesure de Lebesgue autrement dit elle représente la partie absolument continue de Du par rapport à la mesure de Lebesgue, et $D_s u$ est la partie singulière c'est à dire $D_s u \perp dx$, soit encore $D_s u$ et dx sont disjoints.

On remarquera que si $u \in C^1$ alors la partie régulière coïncide avec la dérivée usuelle, d'où l'abus de notation que nous avons employé.

En fait, il est possible d'aller encore plus loin en ce qui concerne cette décomposition car Ambrosio a démontré que la partie singulière $D_s u$ pouvait être décomposée en une composante de "saut" et une composante de "Cantor".
Afin de définir ces deux notions, nous allons commencer par introduire quelques définitions. Soient u^+ et u^- respectivement la limite supérieure approchée et la limite inférieure approchée du champ u.

Si $u \in L^1(\Omega)$, alors pour presque tout x on a

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |u(x) - u(y)| dy = 0$$

où $B(x,r)$ est la boule de centre x et de rayon r.
Les points qui vérifient cette égalité sont appelés les points de Lebesgue, on dit aussi que sur ces points u est approximativement continue. En effet, si l'égalité est vérifiée on a alors :

$$u(x) = \lim_{r \to 0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} u(y) dy$$

et que $u(x) = u^+(x) = u^-(x)$.
Une fois cela défini, il nous reste encore d'autres points. Pour cela on définit $\mathcal{S}_u$ l'ensemble des points de saut comme le complémentaire pour la mesure de Hausdorff $\mathcal{H}^{N-1}$ des points de Lebesgue.

$$\mathcal{S}_u = \left\{x \in \Omega, \quad \text{tel que } u^-(x) \leq u^+(x)\right\}$$

On montre que cet ensemble est rectifiable et on peut ainsi définir la normale n_u à $\mathcal{S}_u$ en chaque point x.

Puis restent les derniers points que l'on définit comme ensemble des points de Cantor. Cet ensemble est en d'autres termes le complémentaire des deux ensembles introduits précédemment pour la mesure de Du. Cet ensemble a la particularité d'être un ensemble non dénombrable mais négligeable au sens de la mesure de Lebesgue.

Ainsi, le résultat fondamental d'Ambrosio est la décomposition suivante

$$Du = \nabla u dx + (u^+ - u^-) n_u \mathcal{H}^{N-1} S_u + C_u = \nabla u dx + \Upsilon_u + C_u$$

où Υ_u est la mesure du saut, et la variation totale se lit comme :

$$\int_\Omega |Du| = \int_\Omega |\nabla u|(x) dx + \int_{\mathcal{S}_u} |u^+ - u^-)| d\mathcal{H}^{N-1} + \int_{\Omega - \mathcal{S}_u} |C_u|$$

A partir de cet espace on définit un autre espace : SBV comme un sous espace de BV

Définition A.6 *L'espace $SBV(\Omega)$ est le sous ensemble de $BV(\Omega)$ tel que l'ensemble de Cantor est vide.*

A.3 Le théorème de compacité dû à Ambrosio

Le résultat fondamental de l'espace SBV est un théorème de compacité dû à Ambrosio

Théorème A.7 *Soit $(u_i) \in SBV(\Omega)$ une sous suite de fonctions spéciales à variations bornées dans Ω telle que*

1. *la suite (u_i) est uniformément bornée pour la norme BV (donc relativement compacte pour la topologie faible $*$),*
2. *les gradients approchés ∇u_i sont équi-intégrables (donc relativement compacts pour la topologie L^1)*
3. *il existe une fonction $f : [0, \infty) \to [0, \infty]$ telle que*

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(t)}{t} = +\infty \quad \text{et} \quad \sup_k \int_{\mathcal{S}_{u_i}} f(|u_i^+ - u_i^-|) d\mathcal{H}^{N-1} < \infty \quad \forall i$$

Alors on peut extraire une sous-suite u_i convergente vers u dans $SBV(\Omega)$. De plus la composante de Lebesgue et celle de saut convergent séparément.

Annexe B

Étude de solutions non homogènes : calculs pour le modèle 4

Pour le modèle 4 les fonctions A et w sont données par

$$A(\alpha) = E_0(1-\alpha) \quad , \quad w(\alpha) = G_c\frac{\alpha^2}{4} \quad \text{et} \quad \alpha \in [0,1]$$

En injectant ces expressions dans celle de $F(\alpha)$ donnée par (2.85), nous obtenons :

$$\begin{aligned} F(\alpha) &= \frac{1}{G_c}\left\{\eta\frac{\sigma^2}{2E_0}\left(1-\frac{1}{(1-\alpha)}\right)+G_c\frac{\alpha^2}{4}\right\} \\ &= b\left(1-\frac{1}{(1-\alpha)}\right)+\frac{\alpha^2}{4} \qquad \text{avec } b=\eta\frac{\sigma^2}{2G_cE_0} \end{aligned} \tag{B.1}$$

Dans la figure B.1, nous avons représenté la fonction $F(\alpha) \geq 0$, paramétrée par la variable b, du modèle 3 en fonction de α. On notera que la valeur $\alpha = 1$ n'est jamais atteinte dans ce modèle.

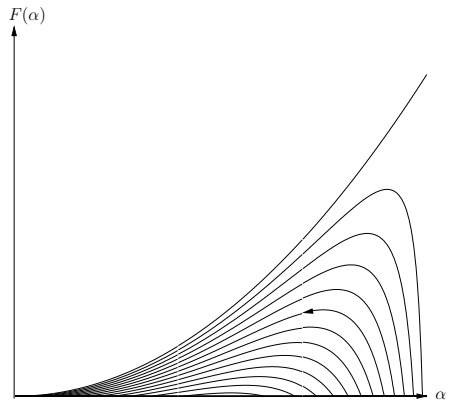

FIG. B.1 – Représentation des fonctions $F(\alpha)$

Sur la figure B.2, nous avons représenté la fonction α', paramétrée par la variable b, du modèle 4 en fonction de α.
Par la suite, nous allons étudier les propriétés de la fonction F afin de déterminer celles des solutions non homogènes du modèle 4.

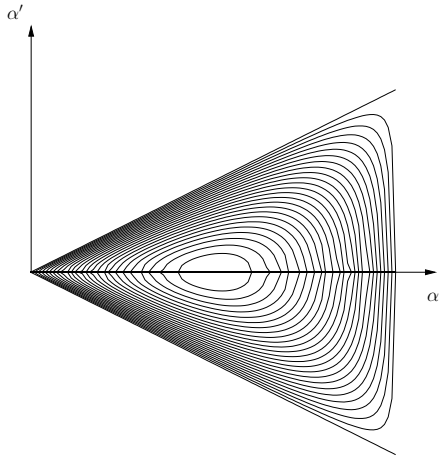

FIG. B.2 – Plan de phase de l'endommagement α

Les propriétés de F
En calculant les dérivées successives de F, nous obtenons

$$F'(\alpha) = \frac{-b}{(1-\alpha)^2} + \frac{\alpha}{2} \qquad \text{et} \qquad F''(\alpha) = \frac{-2b}{(1-\alpha)^3} + \frac{1}{2}$$

La dérivée seconde de la fonction F s'annule en $\alpha_1 = 1-(4b)^{\frac{1}{3}}$, comme $\alpha \in [0,1]$, alors $0 < b \leq \frac{1}{4}$. Ainsi, la dérivée seconde a les propriétés suivantes :

α	0		α_1		1
F''		$+$	0	$-$	

Au vu de ce tableau, La dérivée première de la fonction F est croissante sur $[0, \alpha_1]$ puis elle décroît sur $[\alpha_1, 1]$ et on a $F'(\alpha_1) = F_1$ avec $-\frac{1}{4} \leq F_1 < \frac{1}{2}$. On distingue deux cas : soit F_1 est positive, soit F_1 est négative :

1. Soit F_1 est négative alors la fonction F est aussi négative et le seul endommagement possible est l'endommagement homogène nul.
2. Soit F_1 est positive alors la fonction F a les propriétés suivantes :

α	0		α_2		α_3		1
F'		$-$	0	$+$	0	$-$	
F	0	$\searrow$	m_2	$\nearrow$	M_3	$\searrow$	$-\infty$

La fonction F atteint son maximum en α_3 valeur positive et les trajectoires de phases de α sont des courbes fermées (cf figure B.2) et les états d'endommagement homogènes possible sont stables.

Reconstruction de la localisation de l'endommagement pour le modèle 4

Pour reconstruire ces solutions non homogènes (les pustules), nous devons résoudre numériquement l'équation (2.89) appliquée au modèle 4. Nous avons tracé ce résultat, paramétré par la

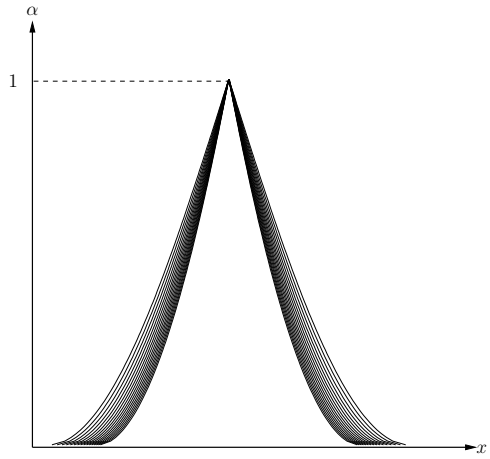

Fig. B.3 – Reconstruction de l'endommagement du modèle 4

variable b, dans la figure B.3. Il semble qu'il y ait une grande différence de forme du pustule entre le modèle 1 et le modèle 4, dès son apparition ce pustule atteint presque la valeur 1 sans jamais la dépasser et ensuite il ne fait que s'étaler.

Annexe C

Calculs de la barre en Traction/compression

C.1 Essai de barre en Traction

On considère une barre élastique homogène dont la configuration naturelle de référence est $(0, L)$, cette barre est encastrée à son extrémité $x = 0$ et soumise à un déplacement croissant à l'autre extrémité $x = L$.

$$u(0) = 0 \quad \text{et} \quad u(L) = tL$$

où t joue le rôle du temps, paramètre positif croissant. Le module d'Young de la barre est noté E , et la relation de comportement affectée par l'endommagement s'écrit :

$$\sigma = (g(\alpha) + k_\eta)Eu' = E(\alpha)u'$$

avec u' est la dérivée spatiale de u. On suppose que la barre est homogène, donc, E est une constante indépendante de x.

FIG. C.1 – La barre en traction

On considérera pour cet exemple que les forces extérieures sont nulles. De plus, on choisit un modèle d'endommagement non-local unidimensionnel. Ainsi, le comportement de la structure au point x est caractérisé par le travail des déformations $\mathcal{W}$ qui dépend de l'endommagement et qui est donné par la relation :

$$\mathcal{W}(u', \alpha, \alpha') = \frac{1}{2}E(\alpha)u'^2 + \frac{w(\alpha)}{\eta} + G_c\eta\alpha'^2 \tag{C.1}$$

Pour tout état (u, α) admissible au temps t, l'énergie totale de la barre s'écrit :

$$\mathcal{P}(u, \alpha) = \int_0^L W(u', \alpha, \alpha')dx \tag{C.2}$$

Pour comprendre ce qui se passe, nous allons déterminer le critère d'endommagement de la barre obtenu grâce à la formulation variationnelle du problème. Pour ce faire, on introduit $\mathcal{C}_t$ et D, respectivement l'espace affine des champs de déplacement admissible et l'espace des cônes convexe des endommagements admissibles au temps t, donnés par :

$$\begin{array}{rcll} \mathcal{C}_t & = & \{v \in H^1(0,L) & : \quad v(0)=0, \quad v(L)=tL\} \\ D & = & \{\beta \in H^1(0,L) & : \quad \beta(x) \geq 0\} \end{array} \tag{C.3}$$

En supposant que la barre est saine au temps $t=0$, c'est-à-dire que la barre ne présente aucune fissure ni de défaut au temps $t=0$, le problème quasi-statique d'évolution de la barre en traction consiste à chercher à chaque instant t, les champs de déplacement $u \in \mathcal{C}_t$ et d'endommagement $\alpha \in D$ vérifiant :

$$\begin{array}{c} \text{Pour } t>0, \text{ trouver un état } (u,\alpha) \in \mathcal{C}_t \times D \text{ tel que} \\ (\dot{u},\dot{\alpha}) \in \mathcal{C}_1 \times D \quad \text{ et } \quad \mathcal{P}'(u,\alpha)(v-\dot{u},\beta-\dot{\alpha}) \geq 0 \ \forall (v,\beta) \in \mathcal{C}_1 \times D \end{array} \tag{C.4}$$

et l'expression de $\mathcal{P}'(u,\alpha)$ est donnée par :

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{P}'(u,\alpha)(\hat{v},\hat{\beta}) & = & \displaystyle\int_0^L E(\alpha)u'\hat{v}'dx \\ & + & \displaystyle\int_0^L (\frac{1}{2}E(\alpha)'u'^2 + \frac{w'(\alpha)}{\eta})\hat{\beta}dx + \int_0^L 2G_c\eta\alpha'\hat{\beta}'dx \end{array} \tag{C.5}$$

En insérant $\beta = \dot{\alpha}$ et $v = \dot{u} + w$, avec $w \in H_0^1(0,L)$, dans (C.4), la formulation variationnelle de l'équilibre de la barre est donnée par :

$$\int_0^L E(\alpha)u'w'dx = 0 \quad \forall w \in H_0^1(0,L) \tag{C.6}$$

Après intégration par partie, et par raisonnement classique du calcul des variations, on obtient :

$$\sigma = \frac{tL}{< s(\alpha) >}$$

et

$$u' = tL\frac{s(\alpha)}{< s(\alpha) >} \tag{C.7}$$

où pour simplifier l'écriture on introduit la moyenne de s sur $[0,L]$ par la notation $< s(\alpha) >$ où $s(\alpha)$ le tenseur de souplesse de la barre inverse du tenseur des contraintes.
On insère alors la solution u' donnée par la relation (C.7) dans l'énergie totale qui devient ainsi fonction de l'endommagement. L'expression de l'énergie totale est donnée par :

$$\mathcal{P}(\alpha) = \int_0^L \left(\frac{1}{2}t^2L^2\frac{s(\alpha)}{< s(\alpha) >^2} + \frac{w(\alpha)}{\eta} + G_c\eta\alpha'^2\right)dx \tag{C.8}$$

En utilisant la notation de la moyenne, l'expression de l'énergie totale s'écrit :

$$\mathcal{P}(\alpha) = \frac{1}{2}t^2L^2\frac{1}{< s(\alpha) >} + \frac{< w(\alpha) >}{\eta} + G_c\eta < \alpha'^2 > \tag{C.9}$$

On écrit alors le problème d'évolution lié à cette formulation qui ne dépend que de la variable d'endommagement comme

$$\mathcal{P}'(\alpha).\hat{\beta} = \int_0^L \left(-\frac{1}{2}t^2L^2\frac{s'(\alpha)}{< s(\alpha) >^2}\hat{\beta} + \frac{w'(\alpha)}{\eta}\hat{\beta} + 2G_c\eta\alpha'\hat{\beta}'\right)dx \tag{C.10}$$

Après intégration par partie, on obtient :

$$\mathcal{P}'(\alpha).\hat{\beta} = \int_0^L \left(-\frac{1}{2}t^2L^2\frac{s'(\alpha)}{< s(\alpha) >^2} + \frac{w'(\alpha)}{\eta} - 2G_c\eta\alpha'' \right)\hat{\beta}dx + 2\left[G_c\eta\alpha'\hat{\beta}\right]_0^L \tag{C.11}$$

et le problème d'évolution peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}'(\alpha).(\beta - \dot{\alpha}) &= \int_0^L \left(-\frac{1}{2}t^2L^2\frac{s'(\alpha)}{< s(\alpha) >^2} + \frac{w'(\alpha)}{\eta} - 2G_c\eta\alpha'' \right)(\beta - \dot{\alpha})dx \\ &+ 2\left[G_c\eta\alpha'(\beta - \dot{\alpha})\right]_0^L \geq 0 \end{aligned} \tag{C.12}$$

En tenant compte de l'irréversibilité de l'endommagement qui se traduit par $\dot{\alpha} = \dfrac{d\alpha}{dt} \geq 0$, deux cas doivent être étudiés :

1. Cas $\dot{\alpha} = 0$ comme β doit satisfaire la définition de l'espace D, cette dernière est toujours positive ainsi, l'inéquation variationnelle implique :

$$-\frac{1}{2}t^2L^2\frac{s'(\alpha)}{< s(\alpha) >^2} + \frac{w'(\alpha)}{\eta} - 2G_c\eta\alpha'' \geq 0 \text{ dans } (0, L) \tag{C.13}$$

   avec les conditions aux limites :

$$\alpha'(0) \leq 0 \text{ et } \alpha'(L) \geq 0$$

2. Cas $\dot{\alpha} > 0$, en jouant sur la fonction test β (raisonnement classique en calcul des variations) à savoir en posant une fois $\beta = 2\dot{\alpha}$ et une autre fois $\beta = \dfrac{1}{2}\dot{\alpha}$, l'inéquation variationnelle se transforme en une équation variationnelle qui s'écrit :

$$-\frac{1}{2}t^2L^2\frac{s'(\alpha)}{< s(\alpha) >^2} + \frac{w'(\alpha)}{\eta} - 2G_c\eta\alpha'' = 0 \text{ dans } (0, L) \tag{C.14}$$

   avec les conditions aux limites :

$$\alpha'(0) = 0 \text{ et } \alpha'(L) = 0$$

C.2 Essai de barre en Compression

On considère une barre élastique homogène dont la configuration naturelle de référence est $(0, L)$, cette barre est encastrée à son extrémité $x = 0$ et soumise à un déplacement de compression croissante à l'autre extrémité $x = L$.

$$u(0) = 0 \quad \text{et} \quad u(L) = -tL$$

où t joue le rôle du temps, paramètre positif croissant. Le module d'Young de la barre est noté E, et la relation de comportement affectée par l'endommagement s'écrit simplement :

$$\sigma = (g(\alpha) + k_\eta)Eu' = E(\alpha)u'$$

avec u' est dérivée spatiale de u. On suppose que la barre est à nouveau homogène. Le problème

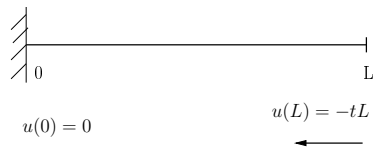

FIG. C.2 – La Barre en compression

quasi-statique d'évolution de la barre en compression consiste à chercher à chaque instant t, les champs de déplacement $u \in \mathcal{C}_t$ et d'endommagement $\alpha \in D$ vérifiant :

$$\begin{array}{c} \text{Pour } t > 0, \text{ trouver un état } (u, \alpha) \in \mathcal{C}_t \times D \text{ tel que} \\ (\dot{u}, \dot{\alpha}) \in \mathcal{C}_1 \times D \quad \text{et} \quad \mathcal{P}'(u, \alpha)(v - \dot{u}, \beta - \dot{\alpha}) \geq 0 \ \forall (v, \beta) \in \mathcal{C}_1 \times D \end{array} \tag{C.15}$$

Dans ce problème le seul changement vient du signe de t. En effet, la condition imposée à l'extrémité $x = L$ est donnée par $u(L) = -tL$. Ainsi ce changement de signe nous implique que l'expression du déplacement solution de ce problème est donnée par :

$$u' = -tL \frac{s(\alpha)}{< s(\alpha) >} \tag{C.16}$$

et

$$\sigma = -\frac{tL}{< s(\alpha) >}$$

Quant au critère d'endommagement, lui ne change pas puisque le changement de signe de t n'affecte pas le problème d'évolution.

Bibliographie

[AT90] L. Ambrosio & V. Tortorelli – « Approximation of functionals depending on jumps by elliptic functionals via gamma-convergence », *Comm. Pure Appl. Math* **43** (1990), no. 8, p. 999–1036.

[AT92] — , « On the approximation of functionals depending on jumps by quadratic, elliptic functionals », *Boll. Un. Mat. Ital* (1992), p. 105–123.

[Bar62] G. I. Barenblatt – « The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture », *Adv. Appl. Mech.* (1962), p. 55–129.

[BB99] T. Belytschko & T. Black – « Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing », *Int. J. Num. Meth. Eng.* **45** (1999), no. 5, p. 601–620.

[BFM00] B. Bourdin, G. Francfort & J.-J. Marigo – « Numerical experiments in revisited brittle fracture », *J. Mech. Phys. Solids* **48** (2000), no. 1, p. 797–826.

[Bil00] F. Bilteryst – *Une approche énergétique de la décohésion et de la multifissuration dans les composites*, Thèse de doctorat de l'Université Pierre et Marie Curie, 2000.

[BM07] A. Benallal & J.-J. Marigo – « Bifurcation and stability issues in gradient theories with softening », *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering* **15** (2007), no. 1, p. 283–295.

[BM08] G. Bourdin, B. Francfort & J. Marigo – « The variational approach to fracture », *Journal of Elasticity* **91** (2008), no. 1, p. 5–148.

[Bou98] B. Bourdin – *Une méthode variationelle en mécanique de la rupture, théorie et applications numériques*, Thèse de doctorat de l'Université Paris 13, 1998.

[Bou07] — , « Numerical implementation of the variational formulation of brittle fracture », *Interfaces Free Bound* **9** (2007), p. 411–430.

[Bra98] A. Braides – *Approximation of free-discontinuity problems*, Springer, Berlin, 1998.

[Bra02] A. Braides – *Gamma-convergence for beginners*, Oxford University Press, 2002.

[BSSG88] R. Byrd, R. Schnabel, G. Shultz & E. Giusti – « Approximate solution of the trust region problem by minimization over two-dimensional subspaces », *Mathematical Programming* **40** (1988), p. 247–263.

[Bui78] H. Bui – *Mécanique de la rupture fragile*, Masson, 1978.

[Cha92] J. Chaboche – « Damage induced anisotropy : On the difficulties associated with the active/passive unilateral condition », *International Journal of Damage Mechanics* **1** (1992), no. 2, p. 148.

[Cha01] M. Charlotte – *Modèles discrets de rupture*, Thèse de doctorat de l'Université Pierre et Marie Curie, 2001.

[CL94] T. Coleman & Y. Li – « On the convergence of reflective newton methods for large-scale nonlinear minimization subject to bounds », *Mathematical Programming* **67** (1994), no. 2, p. 189–224.

[CL96a] — , « An interior, trust region approach for nonlinear minimization subject to bounds », *SIAM Journal on Optimization* **6** (1996), p. 418–445.

[CL96b] — , « A reflective newton method for minimizing a quadratic function subject to bounds on some of the variables », *SIAM Journal on Optimization* **6** (1996), no. 4, p. 1040–1058.

[DGCA89] E. De-Giorgi, M. Carriero & L. A. – « Existence theorem for a minimum problem with free discontinuity set », *Arch. Rational. Mech. Anal.* (1989), no. 108, p. 195–218.

[DM93] G. Dal-Maso – « An introduction to $\gamma-$convergence », *Birkhäuser, Boston* (1993).

[DMMS92] G. Dal Maso, J. Morel & S. Solimini – « A variational method in image segmentation : Existence and approximation results », *Acta Mathematica* **168** (1992), no. 1, p. 89–151.

[DPM07] G. Del Piero, G. Lancioni & R. Mach – « A variational model for fracture mechanics : numerical experiments », *J. Mech. Phys. Solids* **55** (2007), p. 2513–2537.

[Dug60] D. Dugdale – « Yielding of steel sheets containing slits », *J. Mech. Phys. Solids* **8** (1960), no. 2, p. 100–104.

[Dum08] P. Dumouchel – *Propagation brutale de fissures et effets dynamiques : application industrielle à la notion de longueur d'arrêt*, Thèse de doctorat de l'Université Pierre et Marie Curie, 2008.

[EG92] L. Evans & R. Gariepy – *Measure theory and fine properties of functions*, CRC Press, Boca Raton, 1992.

[Elb70] W. Elber – « Fatigue crack closure under cyclic tension », *Engineering Fracture Mechanics* **2** (1970), p. 37–45.

[Esh68] J. Eshelby – « The continuum theory of lattice defects », *Solid Stat. Physics* **2** (1968), p. 79–144.

[Fey03] F. Feyel – « Application des modèles d'interface pour la simulation de l'endommagement puis de la rupture », *Tiré à part- Office national d'études et de recherches aérospatiales* (2003).

[FM93] G. Francfort & J. Marigo – « Stable damage evolution in a brittle continuous medium », *European journal of mechanics. A. Solids* **12** (1993), no. 2, p. 149–189.

[FM98] G. Francfort & J.-J. Marigo – « Revisiting brittle fracture as an energy minimization problem », *J. Mech. Phys. Solids* **46** (1998), no. 8, p. 1319–1342.

[FM02] G. Francfort & J. Marigo – « Vers une théorie énergétique de la rupture fragile », *Comptes rendus. Mécanique* **330** (2002), no. 4, p. 225–233.

[FN93] M. Frémond & B. Nedjar – « Endommagement et principe des puissances virtuelles », *Compte rendu Acad. Sci.* **317** (1993), no. 2, p. 857–864.

[Giu84] E. Giusti – *Minimal surfaces and functions of bounded variation*, Birkhüser, Boston, 1984.

[God05] V. Godard – *Modélisation de l'endommagement anisotrope du béton avec prise en compte de l'effet unilatéral : application à la simulation des enceintes de confinement nucléaires.*, Thèse de doctorat de l'Université Pierre et Marie Curie, 2005.

[Gri21] A. Griffith – « The phenomena of rupture and flow in solids », *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character* **221** (1921), p. 163–198.

[HD96] D. Halm & A. Dragon – « A model of anisotropic damage by mesocrack growth ; unilateral effect », *International Journal of Damage Mechanics* **5** (1996), no. 4, p. 384.

[Irw58] G. Irwin – « Fracture », *In Handlbuchdes Physik* (1958), no. 6, p. 551–590.

[Jau06] A. Jaubert – *Approche variationelle de la fatigue*, Thèse de doctorat de l'Université Paris 13, 2006.

[JM06] A. Jaubert & J.-J. Marigo – « Justification of Paris-type fatigue laws from cohesive forces model via a variational approach », *Contin. Mech. Thermodyn.* **18** (2006), no. 1-2, p. 23–45.

[LA03] E. Lorentz & S. Andrieux – « Analysis of non-local models through energetic formulations », *International Journal of Solids and Structures* **40** (2003), no. 12, p. 2905–2936.

[Lav04] J. Laverne – *Formulation energétique de la rupture par des modèles de forces cohésives : Considérations théoriques et implantations numériques*, Thèse de doctorat de l'Université Paris 13 (24 novembre 2004), 2004.

[Lav08] J. Laverne – « Un modèle cohésif de propagation de fissures par fatigue », *Rapport interne EDF (AMA)* (2008).

[LC78] J. Lemaitre & J. Chaboche – « Aspect phénoménologique de la rupture par endommagement », *Journal de Mécanique Appliquée* **2** (1978), p. 317–365.

[LC85] — , *Mécanique des matériaux solides*, Bordas, 1985.

[Leb03] J. Leblond – *Mécanique de la rupture fragile et ductile*, Hermès science publications, 2003.

[LL84] P. Ladeveze & J. Lemaitre – « Damage effective stress in quasi-unilateral material conditions », *IUTAM Congress, Lyngby Danemark* (1984).

[LN07] L. Lussardi & M. Negri – « Convergence of nonlocal finite element energies for fracture mechanics », *Numerical Functional Analysis and Optimization* **28** (2007), no. 1/2, p. 83–109.

[Lor99] E. Lorentz – *Lois de comportement à gradients de variables internes : constructions, formulation variationnelle et mise en œuvre*, Thèse de doctorat LMT-Cachan, Université Paris 6, 1999.

[LRC07] G. Lancioni & G. F. Royer-Carfagni – « Theoretical prediction of the crack paths in the damaged ashlars of the french panthéon », *Rapport interne* (2007).

[Lue73] D. Luemberger – *Introduction to linear and non-linear programming*, Addison Wesley Publ. Comp., Reading, MA., 1973.

[Mar81] J.-J. Marigo – « Formulation d'une loi d'endommagement d'un matériau élastique », *Compte rendu Acad. Sc.* **292** (1981), p. 1309–1312.

[Mar00] — , « L'endommagement et la rupture : hier, aujourd'hui et demain », *Rapport technique, IPSI* (2000), no. 8, p. 1319–1342.

[MB96] J. Melenk & I. Babuska – « The partition of unity finite element method : Basic theory and applications », *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng* **136** (1996), p. 289–314.

[MDB99] N. Moes, J. Dolbow & T. Belytschko – « A finite element method for crack growth without remeshing », *Int. J. Numer. Meth. Engng* **46** (1999), no. 1, p. 131–150.

[MR90] Y. Mazars, J. Berthaud & S. Ramtani – « The unilateral behaviour of damaged concrete », *Engineering Fracture Mechanics* **35** (1990), no. 4/5, p. 629–1635.

[MS89] D. Mumford & J. Shah – *Optimal approximations by piecewise smooth functions and associated variational problems*, vol. 42, 1989.

[Nee87] A. Needleman – « A continuum model for void nucleation by inclusion debonding », *Journal of applied mechanics* **54** (1987), no. 3, p. 525–531.

[Nee91] — , « Micromechanical modelling of interfacial decohesion », *Ultramicroscopy(The Netherlands)* **40** (1991), no. 3, p. 203–214.

[PE63] P. C. Paris & F. Erdogan – « A critical analysis of crack propagation laws », *Journal of Basic Engineering* **85** (1963), p. 528–534.

[Ric67] J. Rice – *A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks*, Division of Engineering, Brown University and United States and Division of Engineering and Advanced Research Projects Agency, 1967.

[Ste83] T. Steihaug – « The conjugate gradient method and trust regions in large scale optimization », *Optimization toolbox* **20** (1983), p. 626–637.

[Suq06] P. Suquet – *Rupture et plasticité*, École polytechnique (France), 2006.

[Sur98] S. Suresh – *Fatigue of materials*, Cambridge University Press, 1998.

[Wil57] M. L. Williams – « On the stress distribution at the base of a stationary crack », *J. Appl. Mech.* **79** (1957), p. 109–114.