



Sur l'observation de l'état des systèmes dynamiques non linéaires

Ali Zemouche

► To cite this version:

Ali Zemouche. Sur l'observation de l'état des systèmes dynamiques non linéaires. Automatique / Robotique. Université Louis Pasteur - Strasbourg I, 2007. Français. ⟨NNT : ⟩. ⟨tel-00353220⟩

HAL Id: tel-00353220

<https://theses.hal.science/tel-00353220v1>

Submitted on 15 Jan 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

Sur l'observation de l'état des systèmes dynamiques non linéaires

Soutenue publiquement le 30 Mars 2007

Membres du jury

Directeur de Thèse :	Mohamed BOUTAYEB, Professeur, Université Louis Pasteur, Strasbourg
Rapporteur Interne :	Michel de MATHELIN, Professeur, Université Louis Pasteur, Strasbourg
Rapporteur Externe :	Jean-Jacques SLOTINE, Professeur, Institut de Technologie de Massachusetts, USA
Rapporteur Externe :	Olivier BERNARD, Chargé de Recherche, HDR, INRIA Sophia-Antipolis
Examinatrice :	Gabriela Iuliana BARA, Maître de Conférences, Université Louis Pasteur, Strasbourg
Examineur :	Mondher FARZA, Maître de Conférences, Université de Caen, Caen

Remerciements

Ce travail a été réalisé au Laboratoire des Sciences de l'Image, de l'Informatique et de la Télédétection (LSIIT), au sein de l'équipe AVR (Automatique, Vision et Robotique) dirigée par Monsieur le Professeur Michel De Mathelin que je remercie pour m'avoir accueilli au sein de son groupe de recherche et mis à ma disposition les moyens nécessaires pour mener cette thèse à son terme.

Je remercie très chaleureusement mon directeur de thèse, Mohamed Boutayeb, Professeur à l'Université Louis Pasteur Strasbourg I, pour avoir dirigé mes travaux et m'avoir fait découvrir le monde de la recherche. Merci pour vos échanges scientifiques, vos conseils et votre rigueur. Merci pour votre soutien scientifique et humain. Je voudrais aussi vous remercier d'avoir cru en mes capacités et de m'avoir fourni d'excellentes conditions me permettant d'aboutir à la production de cette thèse. Cette thèse n'aurait vu le jour sans votre confiance et votre générosité.

Je tiens à remercier également mon encadrante de thèse, Gabriela Iuliana Bara d'avoir accepté d'encadrer ce travail tout au long de ces trois années. Je la remercie aussi pour ses relectures efficaces des différents écrits.

J'exprime également mes remerciements aux membres du jury, qui ont accepté d'évaluer mon travail de thèse. Merci à Monsieur Michel De Mathelin, Professeur à l'Université Louis Pasteur Strasbourg I, d'avoir accepté d'être au même temps rapporteur interne et président du jury de cette thèse, et à Messieurs Jean Jacques Slotine de l'Institut de Technologie de Massachusetts (MIT, Boston) et Olivier Bernard, habilité à diriger des recherches à l'INRIA Sophia Antipolis d'avoir accepté d'être les rapporteurs externes de ce manuscrit. Leurs remarques et suggestions lors de la lecture de mon rapport m'ont permis d'apporter des améliorations à la qualité de ce dernier. J'adresse également mes remerciements à Monsieur Mondher Farza, Maître de Conférences à l'Université de Caen pour avoir accepté d'examiner mon mémoire et de faire partie de mon jury de thèse.

Je tiens aussi à remercier mes collègues de l'équipe AVR pour leur soutien durant ses années passées avec eux.

J'adresse mes vifs remerciements à tous mes amis, thésards ou non, pour leur sympathie et la bonne ambiance : Adlane et sa femme Haoua, Ahmed et sa femme Yosra, Chadi et sa femme Waod, Mohamed, Hua yunjie, Estelle, Karima et Sarah. Je n'oublie pas non plus mes autres amis parmi lesquels je remercierai Boualem et Alexandra, Saïd et Laurence, Himane et les deux Rabah. Merci plus particulièrement à Youcef et Hamitouche pour leur déplacement de Paris jusqu'à Strasbourg. Je remercie particulièrement Alexandra pour sa relecture efficace du manuscrit.

Toute ma gratitude et mes chaleureux remerciements vont à ma famille et à ma belle famille. Je remercie plus particulièrement et sincèrement ma grand-mère.

Enfin, je ne remercierai sans doute jamais assez ma très chère épouse, qui a su faire preuve d'une grande patience, de compréhension et m'a accompagné et soutenu de façon permanente dans les moments difficiles tout au long de ces années.

*À ma très chère épouse Samia
À ma famille et à ma belle famille
À tous ceux qui comptent pour moi*

Table des matières

Introduction générale	1
-----------------------	---

Chapitre 1

État de l'art sur les observateurs d'état des systèmes non linéaires

1.1	Introduction	6
1.2	Rappels et généralités	6
1.2.1	Stabilité des systèmes dynamiques : Stabilité de Lyapunov	6
1.2.2	Méthode directe de Lyapunov	8
1.2.3	Stabilité des systèmes à retard	9
1.2.4	Analyse de la contraction	10
1.3	Observateurs d'état des systèmes non linéaires	12
1.3.1	Principe d'estimation d'état	12
1.3.2	Observabilité des systèmes non linéaires	15
1.3.3	Les différents types d'observateurs : état de l'art	17
1.4	Conclusion	28

Chapitre 2

Synthèse d'observateurs d'état des systèmes à temps continu

2.1	Introduction	32
2.2	Approche basée sur le DMVT : Transformation en LPV	32
2.2.1	Préliminaires et formulation du problème	32

2.2.2	Procédure de synthèse d'observateur	35
2.2.3	Observateur avec gain affine	38
2.2.4	Systèmes à sorties non linéaires	39
2.2.5	Systèmes non différentiables	41
2.3	Extension au filtrage H_∞ : observateur robuste	45
2.3.1	Synthèse d'observateur H_∞	46
2.4	Extension au cas des systèmes à entrées inconnues	48
2.5	DMVT et Observateur de Luenberger Généralisé (OLG)	51
2.5.1	Position du problème	52
2.5.2	Synthèse d'observateur	53
2.5.3	Exemple numérique	56
2.5.4	Cas des systèmes à entrées inconnues	58
2.6	Conclusion	59

Chapitre 3

Synthèse d'observateurs d'état des systèmes à temps discret

3.1	Introduction	62
3.2	Synthèse d'observateurs à temps discret : première approche	62
3.2.1	Position du problème	62
3.2.2	Synthèse de l'observateur	63
3.2.3	Première amélioration : utilisation de nouvelles fonctions de Lyapunov	65
3.2.4	Deuxième amélioration : utilisation d'un observateur de Luenberger généralisé (OLG)	69
3.2.5	Extension à la restauration d'entrées inconnues	73
3.3	Transformation en LPV à l'aide du DMVT : seconde approche	75
3.3.1	Formulation du Problème	75
3.3.2	Méthode de synthèse d'observateur	77
3.3.3	Exemple numérique	77
3.4	Conclusion	79

Chapitre 4

Extensions aux systèmes à retard

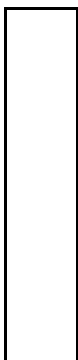
4.1	Introduction	82
4.2	Première méthode : transformation en LPV	82
4.2.1	Formulation du problème	82
4.2.2	Procédure de synthèse d'observateur	84
4.2.3	Cas des systèmes non différentiables	87

4.3	Deuxième méthode : utilisation des OLGs	91
4.3.1	Formulation du problème	91
4.3.2	Synthèse d'observateur	93
4.3.3	Exemple	94
4.4	Systèmes à temps discret	96
4.4.1	Formulation du problème	96
4.4.2	Conditions de synthèse de l'observateur	98
4.5	Conclusion	99
Chapitre 5		
Application à la synchronisation et au cryptage/décryptage		
5.1	Introduction	102
5.2	Sur les systèmes chaotiques	102
5.2.1	Caractérisation globale du chaos	102
5.2.2	Quelques exemples de systèmes chaotiques	104
5.3	Communiquer avec le chaos	107
5.3.1	Synchronisation des systèmes chaotiques	108
5.3.2	Quelques techniques de cryptage/décryptage	110
5.4	Applications : transmission d'images	113
5.4.1	Utilisation de la méthode avec deux lignes de transmission	113
5.4.2	Synchronisation et décryptage simultanément	115
5.5	Conclusion	119
Conclusion générale		121
Annexes		
Annexe A		
Quelques rappels mathématiques		
A.1	Théorie des Matrices	126
A.2	Rappels sur la Convexité	126
Annexe B		
Références Personnelles		
Bibliographie		133

Table des figures

1.1	Principe d'estimation d'état.	13
2.1	Convergence asymptotique de l'état (ligne continue) vers son estimé (ligne pointillée).	37
2.2	Le comportement asymptotique de l'erreur d'estimation.	46
2.3	Exemple 1 : Comportement asymptotique de l'erreur et de l'état du système. . . .	57
3.1	Exemple 2 : Le comportement asymptotique de l'erreur d'estimation.	65
3.2	Le comportement asymptotique de l'erreur d'estimation	69
3.3	Le Comportement de l'erreur d'estimation.	73
3.4	La convergence asymptotique.	78
4.1	Evolution exponentielle de l'erreur d'estimation.	87
4.2	Le comportement de l'erreur d'estimation.	90
4.3	La convergence exponentielle de l'erreur d'estimation.	95
5.1	Evolution dans le temps pour deux conditions initiales très proches.	103
5.2	Evolution dans le temps d'un système chaotique, comparé à une sinusoïde.	103
5.3	Système chaotique de <i>Lorenz</i>	104
5.4	Système chaotique de <i>Rössler</i>	105
5.5	Le circuit électrique de <i>Chua</i>	105
5.6	L'attracteur chaotique de <i>Chua</i>	106
5.7	Système chaotique de <i>Henon</i>	107
5.8	Principe de Pecora-Carroll.	109
5.9	Principe de synchronisation à base d'observateurs.	110
5.10	Schéma de communication par addition.	110

5.11 Schéma de communication par décalage.	111
5.12 Schéma de communication en utilisant les cryptosystèmes chaotiques.	112
5.13 Schéma de communication à deux lignes de transmission.	112
5.14 Image originale.	114
5.15 Image cryptée.	115
5.16 Composantes de l'erreur de synchronisation.	116
5.17 Image décryptée.	117
5.18 Images originale et décryptée après augmentation de la taille.	118
5.19 Images cryptée et décryptée.	118



Notations et acronymes

Ensembles

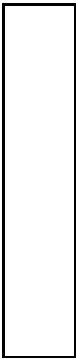
$\mathbb{R}$	Ensemble des nombres réels
$\mathbb{R}^+$	Ensemble des nombres réels positifs
$\mathbb{N}$	Ensemble des entiers naturels
$\mathbb{N}^*$	Ensemble des entiers naturels non nuls
$\mathbb{R}^s$	Espace réel euclidien de dimension s
$\mathbb{R}^{r \times s}$	Ensemble des matrices réelles de dimension $r \times s$
$\mathcal{B}_r$	Boule de $\mathbb{R}^n$ de rayon $r > 0$, avec $n \in \mathbb{N}^*$
$\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}^s)$	Ensemble des fonctions continues sur $[a, b]$ dans $\mathbb{R}^s$
L_2^s	Ensemble des vecteurs fonctions de $\mathbb{R}^s$ carrées intégrables sur $\mathbb{R}^+$
l_2^s	Ensemble des suites vectorielles de $\mathbb{R}^s$ carrées sommables sur $\mathbb{N}$
$Co(x, y)$	Ensemble convexe défini par $Co(x, y) := \left\{ \lambda x + (1 - \lambda)y, 0 \leq \lambda \leq 1 \right\}$.

Matrices et normes

$M > 0$ ($M \geq 0$)	Matrice M symétrique définie (resp. semi-définie) positive
$M < 0$ ($M \leq 0$)	Matrice M symétrique définie (resp. semi-définie) négative
I_s (I)	Matrice identité de dimension $s \times s$ (resp. appropriée)
$0_{r \times s}$ (0)	Matrice nulle de dimension $r \times s$ (resp. appropriée)
M^T	Transposée de la matrice M
M^{-1}	Inverse de la matrice M
$\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ (\star) & M_{22} \end{pmatrix}$	Matrice symétrique, le symbole $(\star)$ représente M_{12}^T
$\lambda_{\min}(M)$ (resp. $\lambda_{\max}(M)$)	Valeur propre minimale (resp. maximale) de M
$\sigma_{\min}(M)$	Valeur singulière minimale de M
$\ x\ $	Norme euclidienne du vecteur x
$\ x\ _{L_2^s}$	Norme L_2^s de x , définie par $\ x\ _{L_2^s} := \left(\int_0^\infty \ x(t)\ ^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$
$\ x\ _{l_2^s}$	Norme l_2^s de x , définie par $\ x\ _{l_2^s} := \left(\sum_{k=0}^\infty \ x(k)\ ^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}$.

Acronymes

EKF	Filtre de Kalman étendu (Extended Kalman Filter)
LMI	Inégalité matricielle linéaire (Linear Matrix Inequality)
LTI	Linéaire à Temps Invariant
LPV	Linéaire à paramètres variants
LTV	Linéaire à temps variants
SCI	Sensibilité aux Conditions Initiales
SISO	Entrée simple sortie simple (Single Input Single Output)
MIMO	Entrée multiple sortie multiple (Multiple Input Multiple Output)
OLG	Observateur de Luenberger généralisé
DMVT	Théorème des accroissements finis (Differential Mean Value Theorem)



Introduction générale

Une bonne maîtrise d'un procédé passe en général par une bonne information sur ce procédé. Les variables directement mesurées ne couvrant généralement pas la totalité des grandeurs susceptibles de décrire le comportement du procédé (les états), on peut se poser le problème de reconstruction de l'information non directement mesurée au moyen de celle disponible : c'est le rôle de l'observateur, ou estimateur d'état. Le principe est le suivant : Le procédé étant modélisé comme un système dynamique soumis à l'action de grandeurs externes (entrées) faisant varier un ensemble de grandeurs mesurées (sorties), l'observateur consiste en un système dynamique auxiliaire dont les entrées sont les entrées/sorties mesurées du procédé, et les sorties sont supposées donner une estimation de son état interne.

Contexte du travail

Au cours des dernières décennies, une part importante des activités de recherche en automatique s'est focalisée sur le problème de l'observation de l'état des systèmes dynamiques non linéaires. Ceci est motivé par le fait que l'estimation de l'état est une étape importante voir indispensable pour la synthèse de lois de commande, pour le diagnostic ou la supervision des systèmes industriels. Récemment, d'autres applications telles que la synchronisation et le décryptage dans les systèmes de communication, sont devenues l'un des secteurs de recherche les plus dynamiques. Dans ce contexte, nous avons mené des travaux de recherche sur l'estimation de l'état et des entrées inconnues d'une classe de systèmes non linéaires avec ou sans retards. Les premières approches utilisées pour l'estimation de l'état des systèmes dynamiques non linéaires sont basées sur des techniques d'approximation, citons le célèbre Filtre de Kalman Etendu. Le gain de l'estimateur est calculé, à chaque instant, par rapport à une approximation au premier ordre de l'équation de l'état et de l'équation de mesure. Dans de nombreux cas pratiques, cette approche donne des résultats relativement satisfaisants. Notons que malgré des conditions peu restrictives d'applicabilité, ces approches souvent locales, souffrent cependant d'une grande sensibilité aux

conditions initiales et aux erreurs de modélisation. Il existe très peu de résultats sur la stabilité des estimateurs et encore moins lorsque ils sont utilisés pour la commande. La deuxième approche concerne la classe des systèmes non linéaires composés d'une partie non linéaire satisfaisant la condition de Lipschitz et une partie linéaire où A, C est supposée observable. Cette technique a l'avantage d'être simple à implanter car le gain de l'observateur, quand il existe, est constant. Cependant, les conditions de convergence sont fortement restrictives et ne concernent que les systèmes avec des constantes de Lipschitz très faibles. La dernière approche consiste à se ramener à un système linéaire ou bilinéaire modulo une injection de sortie par un changement de coordonnées non linéaire. Ces approches s'appliquent sous des conditions restrictives de linéarisation ou de bi-linéarisation, d'autant plus que la robustesse aux perturbations et aux incertitudes a été peu étudiée. Récemment, une nouvelle conception d'observateurs d'état a été établie (observateur de Luenberger généralisé (OLG)). Cette conception consiste à ajouter à l'observateur de Luenberger un deuxième gain dans la partie non linéaire du système. Cependant, cette technique est applicable sur une classe réduite de systèmes non linéaires.

Objectifs du travail de thèse

Les principaux objectifs de cette thèse sont :

1. Développement de nouvelles méthodes de synthèse d'observateurs pour la classe des systèmes non linéaires, notamment les systèmes lipschitziens. L'objectif est d'établir des conditions de synthèse non restrictives du point de vue de faisabilité par rapport à des résultats existant dans la littérature.
2. Proposition de nouvelles structures d'observateurs en se basant sur celles développées récemment dans la littérature. Le but est d'étendre l'applicabilité des méthodes que nous avons obtenues à des classes plus larges de systèmes dynamiques, à savoir les systèmes non lipschitziens.
3. Recherche de nouvelles fonctions de Lyapunov qui permettent d'obtenir des conditions de synthèse d'observateurs non contraignantes : généralisation de la fonction de Lyapunov quadratique standard en tenant compte de la non-linéarité du système étudié.
4. Application des méthodes obtenues à la restitution d'informations utiles dans les systèmes de communications chaotiques : synchronisation et décryptage dans les réseaux de télécommunication.

Structure du mémoire

Après quelques rappels, sur les notions de stabilité et d'observabilité, indispensables et nécessaires à la compréhension de ce manuscrit, le **chapitre 1** présente un état de l'art sur les différentes méthodes existantes concernant la conception d'observateurs pour les systèmes non linéaires. Cinq méthodes ont été présentées de façon non exhaustive, leur classification n'est pas unique.

L'une des contributions principales de notre travail de recherche, présentée dans le **chapitre 2** de ce rapport de thèse, réside dans l'utilisation du Théorème des Accroissements Finis (DMVT :

Differential Mean Value Theorem, pour le sigle anglais) qui permet de ramener le problème d'estimation d'état d'un système dynamique non linéaire à un problème de stabilité d'un système Linéaire à Paramètres Variant (LPV). En fait, le DMVT intervient au niveau de la dynamique de l'erreur d'estimation (qui définit un système non linéaire quelconque) afin de la transformer en un système LPV dont la stabilité asymptotique implique la convergence asymptotique de l'erreur d'estimation vers zéro. En s'inspirant des techniques LPV, des conditions de stabilité sous forme d'Inégalités Linéaires Matricielles (LMIs) ont été obtenues. Des généralisations ont été obtenues pour les systèmes non différentiables, les systèmes partiellement LPV et les systèmes à sorties non linéaires. L'utilisation de la théorie H_∞ nous a permis d'adapter notre approche au cas des systèmes affectés par un bruit borné. Une conception d'un observateur robuste a été détaillée dans le manuscrit. Des conditions de synthèse du gain de l'observateur, tenant compte de la robustesse au bruit, ont été établies. En utilisant quelques transformations, cette technique a été ensuite étendue aux systèmes à entrées inconnues, à savoir l'estimation de l'état et des entrées inconnues (simultanément) avec des conditions de synthèse moins restrictives que celles développées dans la littérature.

Une deuxième méthode a été également présentée dans le **chapitre 2** du manuscrit. Cette méthode repose sur l'utilisation d'une nouvelle structure de l'observateur, basée sur un OLG. Cette structure permet de compléter les résultats développés dans la littérature d'une part, et d'autre part, elle permet d'étendre la méthode basée sur la transformation en LPV à une classe plus large de systèmes, à savoir les systèmes non lipschitziens.

Nous avons également développé des techniques spécifiques aux systèmes non linéaires lipschitziens à temps discret. Les résultats, détaillés dans le **chapitre 3**, que nous avons obtenus sont très intéressants. En effet, cette classe de systèmes est peu étudiée par la communauté scientifique. Peu de méthodes ont été établies dans la littérature. La contribution principale se situe dans l'utilisation de fonctions de Lyapunov plus générales qui ont permis d'obtenir des conditions de synthèse moins restrictives que celles obtenues antérieurement. Une amélioration de ce résultat a été ensuite proposée. Cette amélioration repose sur l'utilisation d'un observateur de Luenberger généralisé (OLG) et l'écriture du système étudié sous une forme plus détaillée, c'est à dire, la spécification de la matrice de distribution de la non-linéarité dans le système, B , et la matrice de distribution de l'état dans la non-linéarité, H . En fait, l'injection de ces matrices dans le système et l'utilisation d'un OLG permettent d'éliminer l'effet de la constante de Lipschitz et rendent les conditions de synthèse moins contraignantes dans la plupart des cas. Il est à signaler également que la spécification des matrices B et H joue un rôle très important sur la faisabilité des conditions de synthèse. En effet, l'absence de la matrice H signifie que la méthode de synthèse ne distingue pas un système, dont la non-linéarité dépend de l'état entier, d'un autre dont qu'une partie de l'état est présente dans la non-linéarité. La matrice H aussi permet d'aboutir à des conditions de synthèse qui font la différence entre un système dont toutes les composantes comportent des non-linéarités et un autre dont la non-linéarité n'intervient que sur quelques composantes. Une application de cette méthode à la restauration des entrées inconnues a été directement envisagée. Notons qu'une extension directe, au cas des systèmes à temps discret, de la technique de transformation en LPV, à l'aide du DMVT, présentée dans le **chapitre 2** a été aussi abordée dans le **chapitre 3**.

Les extensions des résultats des **chapitres 2** et **3**, au cas des systèmes à retard, ont été présentées dans le **chapitre 4**. Ces extensions ont été obtenues grâce à l'utilisation d'une fonction de Lyapunov-Krasovskii particulière. Les conditions de synthèse établies sont exprimées sous forme d'inégalités linéaires matricielles (LMIs) non restrictives par rapport à celles données par beaucoup d'approches existantes dans la littérature.

Afin de valider certaines procédures de synthèse d'observateurs développées dans les **chapitres 2** et **3**, nous avons proposé dans le **chapitre 5** une application à la synchronisation et au décryptage dans les systèmes de communications chaotiques. Pour cela, nous avons choisi comme application la transmission d'images couleurs. Pour réaliser cette application, deux techniques ont été utilisées : la première est la méthode à deux lignes de transmission, et la seconde s'inspire des observateurs à entrées inconnues.

État de l'art sur les observateurs d'état des systèmes non linéaires

Sommaire

1.1	Introduction	6
1.2	Rappels et généralités	6
1.2.1	Stabilité des systèmes dynamiques : Stabilité de Lyapunov	6
1.2.2	Méthode directe de Lyapunov	8
1.2.3	Stabilité des systèmes à retard	9
1.2.4	Analyse de la contraction	10
1.3	Observateurs d'état des systèmes non linéaires	12
1.3.1	Principe d'estimation d'état	12
1.3.2	Observabilité des systèmes non linéaires	15
1.3.3	Les différents types d'observateurs : état de l'art	17
1.4	Conclusion	28

1.1 Introduction

Le but de ce chapitre est de présenter d'une part quelques rappels indispensables et nécessaires à la compréhension de ce mémoire, et d'autre part un état de l'art sur les différentes méthodes de construction d'observateurs pour les systèmes non linéaires.

La section 1.2 regroupe un ensemble de définitions relatives à la stabilité (le concept de stabilité considéré est celui de Lyapunov) et à l'observabilité des systèmes dynamiques non linéaires (notion d'observabilité et principe d'estimation d'état). Contrairement aux systèmes linéaires, l'observabilité des systèmes non linéaires est liée aux entrées et aux conditions initiales. Nous rappelons ici la définition basée sur le concept d'indistinguabilité des états.

La section 1.3 fournit un état de l'art sur les différentes techniques de conception d'observateurs pour les systèmes non linéaires. Nous allons voir qu'il n'existe pas de méthode universelle pour la synthèse d'observateurs, et les approches envisageables sont soit une approximation des algorithmes linéaires, soit des algorithmes non linéaires spécifiques. Nous présentons quelques algorithmes d'observation d'une façon non exhaustive, leur classification n'est pas unique.

1.2 Rappels et généralités

1.2.1 Stabilité des systèmes dynamiques : Stabilité de Lyapunov

Dans cette première partie, nous rappelons quelques concepts sur la stabilité des systèmes dynamiques. Les systèmes à temps continu, les systèmes à temps discret et les systèmes à retard seront tous abordés. La notion de stabilité d'un système dynamique caractérise le comportement de ses trajectoires autour des points d'équilibre. L'analyse de la stabilité d'un système dynamique permet donc d'étudier l'évolution de sa trajectoire d'état lorsque l'état initial est proche d'un point d'équilibre.

La stabilité au sens de Lyapunov est une théorie générale valable pour toute équation différentielle. Cette notion signifie que la solution d'une équation différentielle initialisée au voisinage d'un point d'équilibre en reste suffisamment proche.

Cas des systèmes à temps continu

Considérons la classe des systèmes non linéaires décrits par l'équation dynamique :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t), \quad x(t_0) = x_0 \quad (1.1)$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ et $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ continue. Nous désignons par x_e un point d'équilibre de (1.1) tel que $f(x_e, t) = 0, \forall t \geq t_0$, et par $x(t, t_0, x_0)$ la solution à l'instant $t \geq t_0$ du système (1.1) initialisée en x_0 à l'instant t_0 .

Comme le contenu de ce mémoire ne concerne que la stabilité d'une erreur d'estimation, alors nous supposons que le système (1.1) possède un unique point d'équilibre $x_e = 0$. Ceci nous mène à présenter les définitions de la stabilité du système (1.1) autour de l'origine.

Définition 1.2.1. (Stabilité) L'origine est un point d'équilibre stable au sens de Lyapunov pour (1.1) si $\forall \varepsilon > 0, \forall t_0 \geq 0$, il existe un scalaire positif $\delta(\varepsilon, t_0)$ tel que :

$$\|x_0\| < \delta(\varepsilon, t_0) \Rightarrow \|x(t, t_0, x_0)\| < \varepsilon, \forall t \geq t_0.$$

On dit que l'origine est instable dans le cas contraire. ■

Définition 1.2.2. (Stabilité uniforme) L'origine est un point d'équilibre uniformément stable pour (1.1) si $\forall \varepsilon > 0$, il existe un scalaire positif $\delta(\varepsilon)$ tel que :

$$\|x_0\| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow \|x(t, t_0, x_0)\| < \varepsilon, \forall t \geq t_0.$$

■

Définition 1.2.3. (Attractivité) L'origine est un point d'équilibre attractif pour (1.1) si $\forall \varepsilon > 0$, il existe un scalaire positif $\delta(t_0)$ tel que :

$$\|x_0\| < \delta(t_0) \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} (x(t, t_0, x_0)) = 0, \forall t \geq t_0.$$

Lorsque $\delta(t_0) = +\infty$, on dit que l'origine est globalement attractive. ■

Définition 1.2.4. (Stabilité asymptotique) L'origine est un point d'équilibre asymptotiquement (resp. globalement asymptotiquement) stable pour (1.1) s'il est stable et attractif (resp. globalement attractif). ■

Définition 1.2.5. (Stabilité exponentielle) L'origine est un point d'équilibre localement exponentiellement stable pour (1.1) s'il existe deux constantes strictement positives α et β telles que :

$$\|x(t, t_0, x_0)\| \leq \alpha \exp(-\beta(t - t_0)), \forall t \geq t_0, \forall x_0 \in \mathcal{B}_r.$$

Lorsque $\mathcal{B}_r = \mathbb{R}^n$, on dit que l'origine est globalement exponentiellement stable. ■

Cas des systèmes à temps discret

Dans le cas des systèmes à temps discret, nous considérons le système analogue suivant :

$$x(k+1) = f(x(k), k), \quad x(k_0) = x_0 \tag{1.2}$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ et $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ continue. Nous désignons par $x(k, k_0, x_0)$ la solution à l'instant $k \geq k_0$ du système (1.2) initialisée en x_0 à l'instant k_0 .

Les définitions précédentes restent valables pour les systèmes à temps discret de la forme (1.2). Cependant, concernant la stabilité exponentielle, il convient d'apporter la définition suivante :

Définition 1.2.6. (Stabilité exponentielle) L'origine est un point d'équilibre localement exponentiellement stable pour (1.2) s'il existe des constantes $\alpha > 0$ et $0 < \rho < 1$ telles que :

$$\|x(k, k_0, x_0)\| \leq \alpha \|x_0\| \rho^{(k-k_0)}, \quad \forall k \geq k_0 \geq 0, \quad \forall x_0 \in \mathcal{B}_r.$$

Lorsque $\mathcal{B}_r = \mathbb{R}^n$, on dit que l'origine est globalement exponentiellement stable. ■

L'utilisation des définitions précédentes, pour démontrer la stabilité de (1.1) (resp. (1.2)) autour de son point d'équilibre exige la résolution explicite de l'équation différentielle (1.1) (resp. l'équation aux différences (1.2)), ce qui est souvent très difficile voir impossible dans la plupart des cas. De ce fait, la méthode directe de Lyapunov permet de contourner cet obstacle. Cette méthode consiste à définir une fonction particulière dont l'existence garantit la stabilité.

1.2.2 Méthode directe de Lyapunov

La méthode directe de Lyapunov permet d'analyser la stabilité d'un système autour de son point d'équilibre sans le résoudre explicitement [100]. L'existence d'une fonction particulière fournit des informations sur la stabilité du système.

Définition 1.2.7. Soit $V(x, t) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction continue. V est dite propre définie positive si :

1. $\forall t \in \mathbb{R}^+, \forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0 \quad V(x, t) > 0;$
2. $\forall t \in \mathbb{R}^+, V(x, t) = 0 \Rightarrow x = 0;$
3. $\forall t \in \mathbb{R}^+, \lim_{\|x\| \rightarrow \infty} V(x, t) = \infty.$

■

Définition 1.2.8. (Fonction de Lyapunov) Une fonction $V(x, t)$ de classe C^1 est une fonction de Lyapunov locale (resp. globale) au sens large pour le système (1.1) si elle est propre définie positive et s'il existe un voisinage de l'origine $\mathcal{V}_0$ tel que $\forall x \in \mathcal{V}_0$ (resp. $x \in \mathbb{R}^n$) :

$$\dot{V}(x, t) = \frac{\partial V(x, t)}{\partial t} + \left(\frac{\partial V(x, t)}{\partial x} \right) f(x(t), t) \leq 0.$$

Si $\dot{V}(x, t) < 0$, alors V est appelée fonction de Lyapunov au sens strict pour (1.1). ■

Définition 1.2.9. (Méthode directe de Lyapunov) Si le système (1.1) admet une fonction de Lyapunov locale au sens large (resp. au sens strict) alors l'origine est un point d'équilibre localement stable (resp. asymptotiquement stable).

Ce résultat peut être validé globalement $\forall x \in \mathbb{R}^n$. ■

Définition 1.2.10. (Stabilité exponentielle) L'origine de (1.1) est localement exponentiellement stable s'il existe des constantes $\alpha, \beta, \gamma > 0$, $p \geq 0$ et une fonction $V(x, t) : \mathcal{V}_0 \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ de classe C^1 telles que, $\forall x \in \mathcal{V}_0$:

1. $\alpha \|x\|^p \leq V(x, t) \leq \beta \|x\|^p;$

$$2. \dot{V}(x, t) < -\gamma V(x, t).$$

Si $\mathcal{V}_0 = \mathbb{R}^n$, alors l'origine de (1.1) est globalement exponentiellement stable. ■

Remarque 1.2.11. En choisissant la fonction de Lyapunov quadratique $V(x, t) = x^T P x$, $P = P^T > 0$, le système linéaire $\dot{x}(t) = Ax(t)$ est globalement exponentiellement stable à l'origine si et seulement si P est la solution de l'équation $A^T P + PA = -Q$, pour une matrice Q définie positive. ■

Pour le cas des systèmes à temps discret, la méthode directe de Lyapunov est directement transposable. Cependant, la notion de stabilité exponentielle dans le cas temps discret s'énonce comme suit :

Définition 1.2.12. (Stabilité exponentielle) L'origine de (1.2) est localement exponentiellement stable s'il existe une fonction propre définie positive $V(x_k, k) : \mathcal{B}_r \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, $V(0, k) = 0$, et des constantes α, β et $0 < \gamma < 1$ telles que, $\forall x_0 \in \mathcal{B}_r$ et $\forall k \geq k_0 \geq 0$:

$$1. \alpha \|x_k\|^2 \leq V(x, t) \leq \beta \|x_k\|^2;$$

2. La suite de Lyapunov $\{V(x_k, k)\}_{k=k_0, \dots}$ est strictement décroissante, i.e :

$$\Delta V(x_k, k) = V(x_{k+1}, k+1) - V(x_k, k) \leq -\gamma V(x_k, k)$$

où

$$x_{k+1} = x(k+1, k_0, x_0) = f(x(k+1), k+1).$$

Si $\mathcal{B}_r = \mathbb{R}^n$, alors l'origine de (1.2) est globalement exponentiellement stable. ■

Remarque 1.2.13. En choisissant la fonction de Lyapunov quadratique $V(x_k, k) = x_k^T P x_k$, $P = P^T > 0$, le système linéaire $x_{k+1} = Ax_k$ est globalement exponentiellement stable à l'origine si et seulement si P est la solution de l'équation $A^T P A - P = -Q$, pour une matrice Q définie positive. ■

1.2.3 Stabilité des systèmes à retard

Dans cette partie, nous présentons uniquement la notion de stabilité exponentielle (concernant les systèmes à temps continu) utilisée dans ce manuscrit pour les systèmes à retard. Pour les autres types de stabilité, veuillez voir [56].

Afin de simplifier la présentation des définitions de stabilité des systèmes à retards, nous considérons la classe des systèmes avec un seul retard définie par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x_t(\theta), t), & t \geq t_0 \\ x_{t_0}(\theta) = \phi(\theta), & \forall \theta \in [-\tau, 0] \end{cases} \quad (1.3)$$

où $x_t(\theta) \in \mathcal{C} = \mathcal{C}([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$ est l'état du système à l'instant $t + \theta$, $x(t)$ est l'état du système à l'instant t , ϕ est la fonction initiale du système (1.3).

Définition 1.2.14. (Stabilité exponentielle) L'origine est un point d'équilibre exponentiellement stable pour (1.3) s'il existe des constantes $\alpha > 0$ et $\gamma > 0$ telles que pour toute solution $x(t, t_0, \phi)$, $\phi \in \mathcal{C}$:

$$\|x(t, t_0, \phi)\| \leq \gamma \exp(-\alpha(t - t_0)), \forall t \geq t_0, \forall \phi \in \mathcal{C}.$$

La constante α est appelée le taux de convergence. ■

Cette définition exige la connaissance explicite de la solution de (1.3), ce qui est souvent difficile à réaliser. Ci-après, nous présentons une définition particulière, au sens de Lyapunov, qui découle du théorème de Lyapunov-Krasovskii [70].

Définition 1.2.15. (Stabilité exponentielle) Le système (1.3) est exponentiellement stable à l'origine s'il existe des constantes $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma, p > 0$ et une fonction $V(x_t, t) : \mathcal{C} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ telles que :

1. $\alpha \|x(t)\|^p \leq V(x_t, t) \leq \beta \|x_t\|^p$;
2. $\dot{V}(x_t, t) \leq -\gamma V(x_t, t)$, $\forall x_t \in \mathbb{R}^n$, $\forall t \geq t_0$.

■

Remarque 1.2.16. La théorie de la contraction est un outil récent permettant l'étude de la stabilité des trajectoires des systèmes non linéaires. Cet outil appartient à la classe des méthodes de stabilité incrémentale. Nous disposons de quelques articles et livres qui reprennent en détail toutes les définitions [76], [77], [107], [64].

Dans [63], la définition originale (classique) de la théorie de la contraction a été prolongée dans le but d'incorporer d'une façon explicite l'entrée (la commande) du système considéré. Une telle prolongation est appelée "contraction universelle". Dans la suite, on présentera un peu plus en détail cette théorie. ■

1.2.4 Analyse de la contraction

On considère un système dynamique sous la forme générale (1.1). En supposant que la non-linéarité f est continûment différentiable, on aboutit à la relation différentielle exacte suivante :

$$\delta \dot{x} = \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \delta x \quad (1.4)$$

où δx est le déplacement virtuel (un déplacement infinitésimal en fixant le temps [107]).

En dérivant $\delta x^T \delta x$ par rapport au temps, on obtient

$$\frac{d}{dt}(\delta x^T \delta x) = 2\delta x^T \delta \dot{x} = 2\delta x^T \frac{\partial f}{\partial x} \delta x.$$

Si $\lambda_{\max}(x, t)$ est la valeur propre maximale de la partie symétrique de la jacobienne $\frac{\partial f}{\partial x}$ (i.e., la valeur propre de $\frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f^T}{\partial x} \right)$), alors

$$\frac{d}{dt}(\delta x^T \delta x) \leq 2\lambda_{\max} \delta x^T \delta x$$

et par conséquent

$$\|\delta x\| \leq \|\delta x_0\| e^{\int_0^t \lambda_{\max}(x,s) ds}. \quad (1.5)$$

Supposons maintenant que $\lambda_{\max}(x, t)$ est uniformément strictement négative (i.e., $\exists \beta > 0, \forall x, \forall t \geq 0, \lambda_{\max}(x, t) \leq -\beta < 0$). D'après l'équation (1.5) tout déplacement infinitésimal converge exponentiellement vers zéro. D'où la définition suivante :

Définition 1.2.17. *Etant donné le système (1.1), une région de l'espace d'état est appelée "région de contraction" si la jacobienne $\frac{\partial f}{\partial x}$ est uniformément définie négative dans cette région.* ■

Par $\frac{\partial f}{\partial x}$ uniformément définie négative on sous-entend que

$$\exists \beta > 0, \forall x, \forall t \geq 0, \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f^T}{\partial x} \right) \leq -\beta I < 0.$$

Théorème 1.2.18. *Toute trajectoire de (1.1), initialisée dans une boule de rayon constant centrée autour d'une trajectoire donnée et contenue dans une région de contraction, reste dans cette boule et converge exponentiellement vers cette trajectoire.*

En outre, la convergence globale vers la trajectoire donnée est assurée si l'espace d'état entier est une région de contraction. ■

Ce résultat suffisant de convergence exponentielle peut être vu comme une version renforcée du théorème de Krasovskii classique sur la convergence asymptotique globale.

Le vecteur δx peut être également exprimé en utilisant le changement de coordonnées différentielles

$$\delta z = \Theta \delta x \quad (1.6)$$

avec $\Theta(x, t)$ une matrice carrée. Par conséquent,

$$\delta z^T \delta z = \delta x^T \mathbb{M} \delta x \quad (1.7)$$

où $\mathbb{M}(x, t) = \Theta^T \Theta$ représente une métrique symétrique et continûment différentiable. En calculant la dynamique de δz (ou la dynamique virtuelle), on a

$$\frac{d}{dt} \delta z = F \delta z \quad (1.8)$$

avec

$$F = \left(\dot{\Theta} + \Theta \frac{\partial f}{\partial x} \right) \Theta^{-1}. \quad (1.9)$$

En suivant le même raisonnement que le Théorème 1.2.18, la convergence exponentielle de δz (et donc de δx) vers zéro peut être déterminée dans des régions avec F uniformément définie négative.

L'équation (1.8) peut être réécrite de façon équivalente, en fonction de la coordonnée δx , comme suit :

$$\Theta^T \frac{d}{dt} \delta z = \left(\mathbb{M} \frac{\partial f}{\partial x} + \Theta^T \dot{\Theta} \right) \delta x \quad (1.10)$$

et donc

$$\frac{d}{dt}(\delta x^T \mathbb{M} \delta x) = \delta x^T \left(\frac{\partial f^T}{\partial x} \mathbb{M} + \dot{\mathbb{M}} + \mathbb{M} \frac{\partial f}{\partial x} \right) \delta x. \quad (1.11)$$

Par conséquent, on peut conclure à la convergence exponentielle vers une trajectoire simple dans des régions où $\left(\frac{\partial f^T}{\partial x} \mathbb{M} + \mathbb{M} \frac{\partial f}{\partial x} + \dot{\mathbb{M}} \right) \leq -\beta_{\mathbb{M}} \mathbb{M}$, où $\beta_{\mathbb{M}}$ est une constante strictement positive. Ceci amène à remplacer la définition 1.2.17 (qui correspond à $\Theta = \mathbb{M} = I$) par la définition plus générale suivante :

Définition 1.2.19. *Etant donné le système (1.1), une région de l'espace d'état est appelée "région de contraction" par rapport à la métrique uniformément définie positive $\mathbb{M}(x, t) = \Theta^T \Theta$, si F est uniformément définie négative ou $\left(\frac{\partial f^T}{\partial x} \mathbb{M} + \mathbb{M} \frac{\partial f}{\partial x} + \dot{\mathbb{M}} \right) \leq -\beta_{\mathbb{M}} \mathbb{M}$, dans cette région. ■*

On obtient ainsi le théorème plus général suivant :

Théorème 1.2.20. *Toute trajectoire de (1.1), initialisée dans une boule de rayon constant par rapport à la métrique uniformément définie positive $\mathbb{M}(x, t)$ centrée autour d'une trajectoire donnée et contenue dans une région de contraction par rapport à la métrique uniformément définie positive $\mathbb{M}(x, t)$, reste dans cette boule et converge exponentiellement vers cette trajectoire. En outre, la convergence globale vers la trajectoire donnée est assurée si l'espace d'état entier est une région de contraction par rapport à la métrique uniformément définie positive $\mathbb{M}(x, t)$. ■*

1.3 Observateurs d'état des systèmes non linéaires

Cette section consiste en une introduction au problème d'observation d'état des systèmes non linéaires. Nous présentons le principe d'estimation d'état, quelques définitions sur la notion d'observabilité et un état de l'art sur les différentes techniques de conception d'observateurs pour les systèmes non linéaires.

1.3.1 Principe d'estimation d'état

Un observateur consiste en un système dynamique auxiliaire ($\mathcal{O}$) dont les entrées sont les entrées/sorties mesurées d'un système ($\mathcal{S}$), et les sorties sont supposées donner une estimation de son état, selon le schéma décrit sur la Figure 1.1.

Comme la suite de ce mémoire concerne les systèmes à temps continu et à temps discret, nous utilisons la notation unifiée suivante pour décrire un système dynamique ($\mathcal{S}$) :

$$\sigma_x = f(x, u) \quad (1.12a)$$

$$y = h(x, u) \quad (1.12b)$$

où

$$\sigma_x(t) = \begin{cases} \dot{x}(t), & t \in \mathbb{R}_+ & \text{dans le cas temps continu} \\ x(t+1), & t \in \mathbb{N} & \text{dans le cas temps discret} \end{cases}$$

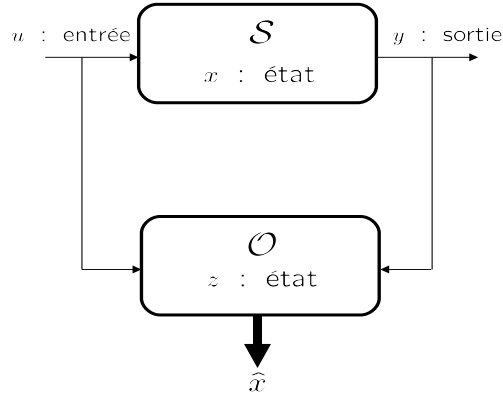


FIG. 1.1 – Principe d'estimation d'état.

Définition 1.3.1. Le système dynamique ($\mathcal{O}$) décrit par les équations

$$\sigma_z = \Phi(z, u, y) \quad (1.13a)$$

$$\hat{x} = \Psi(z, u, y) \quad (1.13b)$$

$z \in \mathbb{R}^s$, est un observateur asymptotique local pour le système (S) si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

1. $x(0) = \hat{x}(0) \Rightarrow x(t) = \hat{x}(t) \quad \forall t \geq 0$;
2. Il existe un voisinage ouvert $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ de l'origine tel que :

$$x(0) - \hat{x}(0) \in \Omega \Rightarrow \|x(t) - \hat{x}(t)\| \rightarrow 0 \text{ quand } t \rightarrow +\infty.$$

Si $\|x(t) - \hat{x}(t)\|$ tend exponentiellement vers zéro, le système ($\mathcal{O}$) est dit observateur exponentiel de (S).

Lorsque $\Omega = \mathbb{R}^n$, le système ($\mathcal{O}$) est dit observateur global de (S). ■

La condition 2 signifie que l'erreur d'estimation doit être asymptotiquement stable. Un système pour lequel un observateur de la forme (1.13) existe et tel que la condition 2 soit satisfaite est dit détectable.

Quant à la condition 1, elle signifie que si l'observateur ($\mathcal{O}$) et le système (S) possèdent tous les deux le même état initial, alors l'état estimé de ($\mathcal{O}$) devrait être égal à l'état réel du système (S) à tout instant.

Si l'état estimé $\hat{x}$ est égal à z , alors (1.13) peut être remplacée par :

$$\sigma_{\hat{x}} = \Phi(\hat{x}, u, y) \quad (1.14)$$

La condition 1 peut être exprimée par

$$\hat{x} = x \Rightarrow \sigma_x = \sigma_{\hat{x}}$$

ce qui est équivalent à

$$\hat{x} = x \Rightarrow \Phi(\hat{x}, u, y) = f(\hat{x}, u).$$

Par conséquent, sans perte de généralité, (1.14) peut se réécrire comme suit :

$$\sigma_{\hat{x}} = f(\hat{x}, u) + \kappa(\hat{x}, u, y)$$

où

$$\hat{x} = x \Rightarrow \kappa(\hat{x}, u, y) = 0. \quad (1.15)$$

Une fonction κ qui contient le facteur $x - \hat{x}$ satisfait (1.15), mais puisque x n'est pas mesuré, ceci n'est pas possible. Cependant, $\hat{x} = x \Rightarrow h(\hat{x}, u) = h(x, u) = y$, donc nous pouvons prendre une fonction κ de la forme :

$$\kappa(\hat{x}, u, y) = K(\hat{x}, u, y)(y - \hat{y})$$

où $\hat{y} = h(\hat{x}, u)$.

L'observateur peut donc s'exprimer comme suit :

$$\sigma_{\hat{x}} = f(\hat{x}, u) + K(\hat{x}, u, y)(y - \hat{y}) \quad (1.16a)$$

$$\hat{y} = h(\hat{x}, u) \quad (1.16b)$$

La plupart des structures d'observateurs proposées dans ce mémoire sont sous la forme (1.16).

Observateur d'ordre réduit

Pour les systèmes sans couplage direct entre l'entrée et la sortie, i.e : $y = h(x)$, il est possible de trouver une transformation d'état de façon à ce que les sorties forment une partie du nouveau vecteur d'état. En supposant que la jacobienne de l'application de sortie $\frac{\partial h(x)}{\partial x}$ soit de plein rang p , il est toujours possible de trouver une matrice constante T telle que la transformation

$$\begin{bmatrix} \xi \\ y \end{bmatrix} = \Theta(x) = \begin{bmatrix} Tx \\ h(x) \end{bmatrix}$$

soit localement inversible (voir [103]). Le système transformé s'écrit :

$$\sigma_{\xi} = \varphi(\zeta, u, y)$$

$$\sigma_y = \eta(\xi, u, y)$$

$$y = C[\xi \ y]^T$$

où

$$\varphi(\zeta, u, y) = Tf(x, u) \Big|_{x=\Theta^{-1}([\xi \ y]^T)}$$

$$\eta(\xi, u, y) = \frac{\partial h(x, u)}{\partial x} f(x, u) \Big|_{x=\Theta^{-1}([\xi \ y]^T)}$$

et

$$C = [0_{p \times (n-p)} \ I_p].$$

L'observateur d'ordre réduit joue un rôle important. En effet, puisque y est mesuré, il n'est pas besoin d'être estimé, ce qui réduit la dimension du vecteur d'état estimé de n à $n - p$.

1.3.2 Observabilité des systèmes non linéaires

Avant d'entamer une procédure de conception d'observateur pour un système dynamique, il est important et nécessaire de s'assurer que l'état de ce dernier peut être estimé à partir des informations sur l'entrée et la sortie. L'observabilité d'un système est la propriété qui permet de dire si l'état peut être déterminé uniquement à partir de la connaissance des signaux d'entrée et de sortie. Dans le cas des systèmes non linéaires, la notion d'observabilité est liée aux entrées et aux conditions initiales. Dans cette section, une définition plus précise d'observabilité sera donnée dans le cas des systèmes à temps continu de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u), \\ y = h(x, u) \end{cases} \quad (1.17)$$

avec $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$.

Définition 1.3.2. (Indistinguabilité) Soient $y_u^0(t), t \geq 0$ et $y_u^1(t), t \geq 0$ deux signaux de sortie générés par l'application du signal d'entrée $u(t), t \geq 0$ au système (1.17) avec les conditions initiales x^0 et x^1 , respectivement. On dit que x^0 et x^1 sont indistinguables si

$$y_u^0(t) = y_u^1(t), \forall t \geq 0, \text{ pour tout entrée } u.$$

Dans le cas contraire, on dit que x^0 et x^1 sont distinguables. ■

Définition 1.3.3. (Observabilité) Le système (1.17) est dit observable en x^0 si x^0 est distinguable de tout $x \in \mathbb{R}^n$. En outre, le système (1.17) est observable si $\forall x^0 \in \mathbb{R}^n$, x^0 est distinguable. ■

Si nous supposons que u et y sont connus, les dérivées de u et y peuvent être évaluées. Dans ce cas, le concept d'observabilité peut être interprété de manière claire. Pour un système SISO, nous définissons

$$y' = [y \ \dot{y} \ \ddot{y} \ \dots \ y^{(n-1)}]^T$$

et

$$u' = [u \ \dot{u} \ \ddot{u} \ \dots \ u^{(n-1)}]^T.$$

Chaque dérivée $y^{(i)}$ est une fonction de x et $u, \dot{u}, \dots, u^{(i)}$, et donc aussi une fonction de x et u' si $i \leq n - 1$.

Soit ψ_i une fonction définie par

$$y^{(i)} = \psi_i(x, u').$$

La dérivée de $y^{(i)}$ est alors donnée par

$$y^{(i+1)} = \left[\frac{\partial \psi_i(x, u')}{\partial x} \right] f(x, u) + \left[\frac{\partial \psi_i(x, u')}{\partial u'} \right] \frac{du'}{dt}$$

ce qui est, par définition, $\psi_{i+1}(x, u')$ si $i+1 \leq n-1$. En définissant l'opérateur linéaire $\mathcal{M}_f$ par :

$$(\mathcal{M}_f \psi)(x, u') = \left[\frac{\partial \psi(x, u')}{\partial x} \right] f(x, u) + \left[\frac{\partial \psi(x, u')}{\partial u'} \right] \frac{du'}{dt}$$

alors y' s'écrit :

$$y' = \omega(x, u'),$$

où

$$\omega(x, u') = \begin{bmatrix} h(x, u) \\ (\mathcal{M}_f h)(x, u) \\ \vdots \\ (\mathcal{M}_f^{n-1} h)(x, u) \end{bmatrix} \quad (1.18)$$

est la matrice d'observabilité.

Si la matrice d'observabilité (1.18) est inversible, i.e : il existe ω^{-1} telle que

$$x = \omega^{-1}(y', u')$$

alors le système correspondant est observable. En outre, si la jacobienne de la matrice d'observabilité,

$$\Omega(x, u') = \frac{\partial \omega(x, u')}{\partial x},$$

est inversible en x^0 , alors il existe un voisinage $\mathcal{V}_{x^0}$ de x^0 sur lequel ω est inversible. Dans ce cas, le système correspondant est localement observable, ce qui signifie que x^0 est distinguable de tous les points de $\mathcal{V}_{x^0}$.

Pour les systèmes multi-sorties, c'est-à-dire $y \in \mathbb{R}^p, p > 1$, la notion d'observabilité peut être investiguée d'une manière similaire.

Soit

$$N = [n_1 \ n_2 \ \dots \ n_p]^T$$

un vecteur d'entiers positifs, avec $\sum_{i=1}^{i=p} n_i = n$.

Définissons

$$y = [y_1 \ y_2 \ \dots \ y_p]^T,$$

et

$$h(x, u) = [h_1(x, u) \ h_2(x, u) \ \dots \ h_p(x, u)]^T.$$

En posant

$$\omega_j(x, u') = \begin{bmatrix} h_j(x, u) \\ (\mathcal{M}_f h_j)(x, u) \\ \vdots \\ (\mathcal{M}_f^{n_j-1} h_j)(x, u) \end{bmatrix},$$

les dérivées de y^j jusqu'à l'ordre n_j sont

$$[y_j \ \dot{y}_j \ \dots \ y_j^{(n_j)}]^T = \omega_j(x, u').$$

La matrice d'observabilité pour les systèmes multi-sorties est alors définie par :

$$\omega_N(x, u') = \begin{bmatrix} \omega_1(x, u') \\ \omega_2(x, u') \\ \vdots \\ \omega_q(x, u') \end{bmatrix}.$$

S'il existe N tel que $\omega_N(x, u')$ soit inversible, alors l'état x peut être déterminé à partir de u' , y , et les dérivées de chaque y_j jusqu'à l'ordre n_j . De ce fait, le système correspondant est observable.

Dans le domaine non linéaire, il existe plusieurs façons de définir la notion d'observabilité. En lien avec le concept d'indistinguabilité des états, une définition très fréquente a été établie dans [58]. Des résultats importants ont été établis dans [46] et [87] pour une classe spéciale de systèmes affines en la commande. Pour plus de détails sur les différents types de définitions sur l'observabilité des systèmes non linéaires, nous renvoyons le lecteur à [58], [102] [87] et [14].

Remarque 1.3.4. *Le concept d'observabilité cité précédemment peut être étendu directement à la classe des systèmes à temps discret. Différents types de définitions ont été abordés dans [85].* ■

1.3.3 Les différents types d'observateurs : état de l'art

Initialement les systèmes abordés ont été les systèmes linéaires, pour lesquels les observateurs de Kalman et Luenberger ont donné de bons résultats. Le filtre de Kalman est utilisé dans le cas des systèmes stochastiques en minimisant la matrice de covariance de l'erreur d'estimation, et l'observateur de Luenberger a été utilisé pour les systèmes linéaires déterministes.

Dans le cas des systèmes non linéaires, l'observation d'état est un peu plus délicate et il n'existe pas, à l'heure actuelle, de méthode universelle pour la synthèse d'observateurs. Les approches envisageables sont soit une extension des algorithmes linéaires, soit des algorithmes non linéaires spécifiques. Dans le premier cas, l'extension est basée sur une linéarisation du modèle autour d'un point de fonctionnement. Pour le cas d'algorithmes non linéaires spécifiques, les nombreuses recherches menées sur ce sujet (voir [106], [81]) ont donné naissance à de nombreux algorithmes d'observation. Nous présenterons ces algorithmes dans la suite de ce chapitre.

1. *Méthodes de transformations non linéaires* : Cette technique fait appel à un changement de coordonnées afin de transformer un système non linéaire en un système linéaire. Une

fois qu'une telle transformation est faite, l'utilisation d'un observateur de type Luenberger suffira pour estimer l'état du système transformé, et donc l'état du système original en utilisant le changement de coordonnées inverse.

2. *Observateurs étendus* : Dans ce cas, le calcul du gain de l'observateur se fait à partir du modèle linéarisé autour d'un point de fonctionnement. C'est par exemple le cas du filtre de Kalman étendu et l'observateur de Luenberger étendu.
3. *Observateurs à grand gain* : Ce type d'observateurs est utilisé en général pour les systèmes lipschitziens. Son nom est dû au fait que le gain de l'observateur choisi est suffisamment grand pour compenser la non-linéarité du système.
4. *Observateurs de Luenberger généralisés (OLG)* : C'est un nouveau type d'observateurs qui a été proposé récemment pour la classe des systèmes monotones. Cette nouvelle conception consiste à ajouter à l'observateur de Luenberger un deuxième gain à l'intérieur de la partie non linéaire du système.
5. *Observateurs basés sur la théorie de la contraction* : Ce type d'observateurs, comme son nom l'indique, est basé sur la théorie de la contraction utilisée comme outil d'analyse de la convergence. Cette technique mène à de nouvelles conditions de synthèse différentes de celles fournies par les techniques précédentes.

Ci-après, nous présentons un peu plus en détails ces cinq méthodes.

Méthodes de transformations non linéaires

Cette technique consiste à transformer, à l'aide d'un changement de coordonnées, un système non linéaire en un système linéaire modulo une injection de sortie. Une fois qu'un tel changement de coordonnées est obtenu, l'utilisation d'un observateur de type Luenberger (corrigé par l'injection de sortie) suffira pour estimer l'état du système transformé, et donc l'état du système non linéaire original en utilisant le changement de coordonnées inverse.

L'un des premiers travaux réalisés dans ce domaine est proposé dans [71], où le système autonome de la forme

$$\dot{x} = f(x) \quad (1.19a)$$

$$y = h(x) \quad (1.19b)$$

est transformé, par un changement de coordonnées non linéaire $z = \Phi(x)$, en un système linéaire sous la forme canonique observable suivante :

$$\dot{z} = A_c z + \lambda(y) \quad (1.20a)$$

$$y = C_c z \quad (1.20b)$$

où A_c et C_c sont sous la forme duale de Brunovsky, i.e :

$$A_c = \begin{bmatrix} 0_{n-1} & I_{n-1} \\ 0 & 0_{n-1}^T \end{bmatrix}, \quad C_c = \begin{bmatrix} 1 & 0_{n-1}^T \end{bmatrix}.$$

L'observateur de Luenberger correspondant à (1.20) est donné par :

$$\dot{\hat{z}} = A_c \hat{z} + \lambda(y) + K(y - C_c \hat{z}), \quad (1.21)$$

dont la dynamique de l'erreur $\varepsilon = z - \hat{z}$ est linéaire et s'écrit :

$$\dot{\varepsilon} = (A_c - K C_c) \varepsilon. \quad (1.22)$$

Le calcul du gain K se fait par un placement de pôles.

Ce travail a été étendu dans [72] au cas des systèmes à sorties multiples et la transformation non linéaire a été généralisée comme suit :

$$z = \Phi(x), \quad (1.23)$$

$$v = \Psi(y). \quad (1.24)$$

où v est la transformation de la sortie y à l'aide du changement de coordonnées non linéaire $\Psi(\cdot)$. Les conditions sous lesquelles une telle transformation existe ont été établies. Cependant, trois problèmes sont liés à cette approche :

1. La classe des systèmes pour lesquels une telle transformation existe est très restreinte ;
2. La procédure d'obtention d'une telle transformation est très compliquée ;
3. Dans le cas des systèmes avec entrées (systèmes commandés), le système transformé contient toutes les dérivées des entrées.

Dans [66], le système

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (1.25a)$$

$$y = h(x, u) \quad (1.25b)$$

a été considéré. Dans ce cas, le système transformé sous forme canonique généralisée est défini par :

$$\dot{z} = A_c z + \lambda(y, u') \quad (1.26a)$$

$$v = C_c z \quad (1.26b)$$

où $u' = \begin{bmatrix} u & \dot{u} & \dots & u^{(n)} \end{bmatrix}^T$. La transformation non linéaire utilisée est

$$z = \Phi(x, u'),$$

$$v = \Psi(x, u').$$

En supposant que les dérivées de l'entrée u sont disponibles, la structure de l'observateur suggéré est :

$$\dot{\hat{z}} = A_c \hat{z} + \lambda(y, u') + K(v - \hat{v}) \quad (1.27a)$$

$$\hat{v} = C_c \hat{z}. \quad (1.27b)$$

La dynamique de l'erreur est donnée par (1.22).

D'autres généralisations aux systèmes à sorties multiples ont été proposées dans [112], [99] et [59]. Un algorithme simplifié permettant de calculer la transformation convenable, pour le cas des systèmes autonomes, a été conçu dans [92]. Des conditions nécessaires et suffisantes d'existence de la transformation pour les systèmes mono-sortie ont été données dans [51]. Ces résultats ont été généralisés dans [93] aux systèmes à sorties multiples, et un algorithme de calcul du changement de variables a été donné.

Une des raisons pour laquelle la classe des systèmes qui peuvent être transformés sous forme linéaire observable est restreinte est due au fait que la sortie doit être linéaire comme dans (1.20b) et (1.26b). Cette condition est relaxée dans [65] pour la classe des systèmes autonomes mono-sortie. L'idée est de transformer le système (1.19), en utilisant le changement de variables $z = \Phi(x)$, en

$$\dot{z} = Az + Ly \quad (1.28a)$$

$$y = \eta(z) \quad (1.28b)$$

où $\eta(z) = h(x)|_{x=\Phi^{-1}(z)}$. L'observateur s'écrit :

$$\dot{\hat{z}} = A\hat{z} + Ly, \quad (1.29)$$

et la dynamique de l'erreur $\varepsilon = z - \hat{z}$ est

$$\dot{\varepsilon} = A\varepsilon. \quad (1.30)$$

La transformation Φ est choisie de façon à obtenir une matrice A avec des propriétés souhaitables.

Afin de surmonter la difficulté d'obtention de la transformation convenable, indépendamment des travaux précédents, une nouvelle approche a été présentée dans [16] pour la classe des systèmes non linéaires autonomes et mono-sortie. Une méthode constructive basée sur des techniques de synthèse linéaires a été proposée. Les conditions nécessaires et suffisantes d'existence de la forme canonique ont été énoncées dans [73]. Plusieurs extensions de cette approche au cas des systèmes non linéaires commandés et multi-sorties sont données dans [118], [117] et [18].

Observateurs étendus

Il est possible d'étendre quelques techniques linéaires à des systèmes non linéaires, ceci en calculant le gain de l'observateur à partir du modèle linéarisé autour d'un point de fonctionnement. C'est par exemple le cas du filtre de Kalman étendu et l'observateur de Luenberger étendu que nous citons un peu plus en détail dans la suite.

A) Filtre de Kalman Etendu (EKF)

Le filtre de Kalman étendu est l'une des techniques d'estimation les plus populaires et largement étudiées dans le domaine d'estimation d'état des systèmes dynamiques non linéaires. Ce

filtre étendu consiste à utiliser les équations du filtre de Kalman standard au modèle non linéaire linéarisé par la formule de Taylor au premier ordre.

Ce filtre étendu a été appliqué avec succès sur différents types de procédés non linéaires. Malheureusement, les preuves de stabilité et de convergence établies dans le cas des systèmes linéaires, ne peuvent être étendues de manière générale au cas des systèmes non linéaires. Dans un environnement déterministe, une preuve de la convergence du filtre de Kalman étendu a été établie dans [24] et [23] pour la classe des systèmes non linéaires à temps discret. Cependant, cette convergence n'est que locale. L'analyse de la convergence de cet estimateur reste, à l'heure actuelle, un problème ouvert. Les nombreuses recherches qui ont été menées sur ce sujet ont donné naissance à de nombreuses publications et ouvrages [35], [55], [33], [32], [101], [29], [25], [24], [7].

Avant d'introduire le fameux filtre de Kalman étendu, nous avons besoin de présenter l'estimateur de Kalman standard pour les systèmes linéaires à temps variant (LTV).

– **Cas des systèmes LTV à temps continu** : Pour le système LTV de la forme

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u + v_1(t) \quad (1.31a)$$

$$y = C(t)x + v_2(t) \quad (1.31b)$$

l'estimateur de Kalman standard est donné par :

$$\dot{\hat{x}} = A(t)\hat{x} + B(t)u + PC^T(t)R^{-1}(y - C(t)\hat{x}) \quad (1.32)$$

où P est la solution symétrique et définie positive de l'équation de Riccati suivante :

$$\dot{P} = AP + PA^T + Q - PC^T R^{-1} CP. \quad (1.33)$$

– **Cas des systèmes LTV à temps discret** : Pour le système LTV de la forme

$$x_{k+1} = A_k x_k + B_k u_k + v_k \quad (1.34a)$$

$$y_k = C_k x_k + w_k \quad (1.34b)$$

l'estimateur de Kalman standard est donné par :

$$\hat{x}_{k+1} = \hat{x}_{k+1/k} + K_{k+1} (y_{k+1} - C_{k+1} \hat{x}_{k+1/k}); \quad (1.35a)$$

$$P_{k+1} = \left(P_{k+1/k}^{-1} + C_{k+1}^T R_{k+1}^{-1} C_{k+1} \right)^{-1}; \quad (1.35b)$$

$$K_{k+1} = P_{k+1/k} C_{k+1}^T \left(C_{k+1} P_{k+1/k} C_{k+1}^T + R_{k+1} \right)^{-1} \quad (1.35c)$$

où

$$\hat{x}_{k+1/k} = A_k \hat{x}_k + B_k u_k; \quad (1.36a)$$

$$P_{k+1/k} = A_k P_k A_k^T + Q_k; \quad (1.36b)$$

où $P_0 = \mu I_n > 0$. $\hat{x}_{k+1}$ et $\hat{x}_{k+1/k}$ sont l'estimation et la prédiction de l'état x_{k+1} . Les matrices

P_{k+1} et $P_{k+1/k}$ sont les covariances des erreurs d'estimation et de prédiction. Q_k et R_{k+1} sont des matrices de pondération dépendant des variables stochastiques v_k et w_k .

Le filtre de Kalman étendu [61] est une extension directe du filtre de Kalman standard en remplaçant les matrices d'état et de sortie, A, C du système linéaire (1.31) ou (1.34) par les jacobiniennes des non-linéarités du système en question.

Considérons le système non linéaire suivant :

$$\dot{x} = f(x, u) + v(t) \quad (1.37a)$$

$$y = h(x, u) + w(t) \quad (1.37b)$$

L'EKF s'exprime de la manière suivante :

$$\dot{\hat{x}} = f(\hat{x}, u) + PH(\hat{x}, u)R^{-1}(y - h(\hat{x}, u)) \quad (1.38a)$$

$$\dot{P} = F(\hat{x}, u)P + PF(\hat{x}, u)^T + Q - PH(\hat{x}, u)^T R^{-1}H(\hat{x}, u)P \quad (1.38b)$$

où

$$F(\hat{x}, u) = \frac{\partial f}{\partial x}(\hat{x}, u);$$

$$H(\hat{x}, u) = \frac{\partial h}{\partial x}(\hat{x}, u).$$

Ce type d'estimateur a été utilisé dans [64]. Dans le cas des systèmes à temps discret de la forme :

$$x_{k+1} = f(x_k, u_k) + G_k v_k \quad (1.39a)$$

$$y_k = h(x_k, u_k) + D_k w_k \quad (1.39b)$$

l'EKF est donné par :

$$\hat{x}_{k+1} = \hat{x}_{k+1/k} + K_{k+1} e_{k+1} \quad (1.40)$$

où

$$P_{k+1} = (I_n - K_{k+1}H_{k+1})P_{k+1/k}; \quad (1.41a)$$

$$\hat{x}_{k+1/k} = f(\hat{x}_k, u_k); \quad (1.41b)$$

$$P_{k+1/k} = F_k P_k F_k^T + Q_k; \quad (1.41c)$$

$$K_{k+1} = P_{k+1/k} H_{k+1}^T (H_{k+1} P_{k+1/k} H_{k+1}^T + R_{k+1})^{-1}; \quad (1.41d)$$

$$e_{k+1} = y_{k+1} - h(\hat{x}_{k+1/k}, u_{k+1}); \quad (1.41e)$$

$$F_k = F(\hat{x}_k, u_k) = \frac{\partial f}{\partial x}(\hat{x}_k, u_k); \quad (1.41f)$$

$$H_k = H(\hat{x}_k, u_k) = \frac{\partial h}{\partial x}(\hat{x}_k, u_k) \quad (1.41g)$$

où $P_0 = \mu I_n > 0$.

Il est courant (ceci n'a encore été démontré) de choisir en pratique, pour l'optimalité du filtre de Kalman étendu, Q_k et R_{k+1} comme les matrices de covariance des bruits du système et des

mesures, i.e :

$$Q_k = G_k G_k^T, \quad R_{k+1} = D_{k+1} D_{k+1}^T.$$

Ce choix est valable sous certaines conditions [8]. Dans un contexte déterministe, la synthèse de Q_k et R_{k+1} joue un rôle primordial dans l'amélioration des performances du filtre de Kalman étendu. Pour plus de détails sur ce dernier point, nous invitons le lecteur à consulter [41], [40], [29], [97] et [98].

B) Observateur de Luenberger étendu

L'observateur de Luenberger étendu intervient, soit au niveau du système original avec un gain constant, soit par le biais d'un changement de coordonnées avec un gain dépendant de l'état à estimer. Dans le premier cas, un modèle linéarisé est nécessaire, et le gain de l'observateur est calculé par placement de pôles. Ce type d'observateur ne peut être utilisé que lorsque l'on est sûr que l'état restera au voisinage de l'état d'équilibre. Pour cette raison, cette méthode n'est pas très utilisée, parce que son utilisation peut être compromise par les instabilités qui peuvent se révéler si l'on s'éloigne du point de fonctionnement. Dans le deuxième cas, comme nous l'avons mentionné précédemment, les méthodes de changement de coordonnées ne concernent qu'une classe restreinte de systèmes non linéaires. En effet, beaucoup d'approches utilisant les changements de coordonnées nécessitent l'intégration d'un ensemble d'équations aux dérivées partielles non linéaires, ce qui est souvent très délicat à réaliser. De ce fait, l'utilisation de solutions approchées est envisageable.

Observateurs à grand gain : Approche de Thau et ses généralisations

Une méthode directe de conception d'observateur est d'utiliser un retour de sortie linéaire. Cette approche, introduite initialement dans [105], s'applique sur la classe des systèmes non linéaires s'écrivant sous la forme suivante :

$$\dot{x} = Ax + \phi(x, u) \tag{1.42a}$$

$$y = Cx \tag{1.42b}$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ et $y \in \mathbb{R}^p$ représentent respectivement les vecteurs d'état, des entrées et des sorties du système. La paire (A, C) est détectable et la non-linéarité, ϕ satisfait la propriété de Lipschitz par rapport à x :

$$\|\phi(x, u) - \phi(\hat{x}, u)\| \leq \gamma_\phi \|x - \hat{x}\|, \quad \forall x, \hat{x} \in \mathbb{R}^n \text{ et } \forall u \in \mathbb{R}^m \tag{1.43}$$

où γ_ϕ est la constante de Lipschitz de la fonction ϕ .

Ce type d'observateurs est relativement classique en observation des systèmes non linéaires. Son nom est dû au fait que le gain de l'observateur choisi est suffisamment grand pour compenser la non linéarité du système.

L'observateur de type Luenberger correspondant à (1.42) est de la forme :

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + \phi(\hat{x}, u) + K(y - C\hat{x}) \quad (1.44)$$

La dynamique de l'erreur d'estimation $\varepsilon = x - \hat{x}$ est donnée par l'équation :

$$\dot{\varepsilon} = (A - KC)\varepsilon + \phi(x, u) - \phi(\hat{x}, u) \quad (1.45)$$

L'objectif est de déterminer sous quelles conditions le gain K peut garantir la stabilité de l'erreur d'estimation ε en zéro.

La méthode de Thau [105] fournit une condition suffisante de stabilité asymptotique de l'erreur d'estimation (1.45). Le résultat de cette méthode est donné par le théorème suivant :

Théorème 1.3.5. ([105]) *Considérons le système (1.42) et l'observateur (1.44). Si le gain d'observation K est choisi tel que*

$$\gamma_\phi < \frac{\lambda_{\min}(Q)}{2\lambda_{\max}(P)} \quad (1.46)$$

où $\lambda_{\min}(S)$ et $\lambda_{\max}(S)$ désignent respectivement les valeurs propres minimale et maximale de la matrice carrée S , les matrices $P = P^T > 0$ et $Q = Q^T > 0$ désignent les solutions de l'équation de Lyapunov :

$$(A - KC)^T P + P(A - KC) + Q = 0 \quad (1.47)$$

alors l'erreur d'estimation (1.45) est exponentiellement stable. ■

La preuve de ce théorème est basée sur l'utilisation de la fonction de Lyapunov standard

$$V = V(\varepsilon) = \varepsilon^T P \varepsilon.$$

Pour plus de détails sur la preuve du Théorème 1.3.5, nous invitons le lecteur à consulter [105].

Il a été démontré dans [89] que le rapport $\frac{\lambda_{\min}(Q)}{2\lambda_{\max}(P)}$ est maximal si $Q = I_n$. Le problème est donc réduit à choisir un gain K qui satisfait

$$\gamma_\phi < \frac{1}{2\lambda_{\max}(P)} \quad (1.48)$$

où

$$(A - KC)^T P + P(A - KC) = -I_n.$$

L'approche de Thau n'est pas une méthode de synthèse systématique. Elle permet seulement de vérifier la convergence de l'observateur (1.44), *a posteriori*. En effet, le choix des matrices P , Q et K qui satisfont l'inégalité (1.46) n'est pas direct. Par exemple, le placement des valeurs propres de $(A - KC)$ dans le demi-plan gauche n'implique pas que la condition (1.46) est satisfaite. Il n'existe aucune relation spécifique entre les valeurs propres de $(A - KC)$ et $\lambda_{\max}(P)$, ceci a été prouvé dans [95] par un simple exemple numérique.

Ce type d'observateurs a été largement étudié dans la littérature par de nombreux chercheurs

spécialistes dans le domaine de l'observation d'état. Une méthode constructive a été proposée par Raghavan dans [95], où une solution explicite et systématique du choix du gain de l'observateur est établie. Cette solution est illustrée dans le théorème suivant :

Théorème 1.3.6. ([95]) *Considérons le système(1.42) et l'observateur(1.44). S'il existe $\epsilon > 0$ tel que l'équation de Riccati*

$$AP + PA^T + P\left(\gamma_\phi^2 I_n - \frac{1}{\epsilon} C^T C\right)P + I_n + \epsilon I_n = 0 \quad (1.49)$$

admette une solution P symétrique définie positive, alors le gain

$$K = \frac{1}{2\epsilon} PC^T \quad (1.50)$$

stabilise asymptotiquement la dynamique de l'erreur d'estimation (1.45). ■

Cependant, cet algorithme n'est pas efficace pour toutes les paires (A, C) observables et malheureusement ne donne pas d'informations sur les conditions que doit vérifier la matrice $(A - KC)$ afin d'assurer la stabilité de l'erreur d'estimation. Nous avons vu que le placement des valeurs propres de $(A - KC)$ dans le demi-plan gauche est certainement insuffisant.

Dans [116], l'auteur a suggéré une procédure de conception liée directement à la matrice $(A - KC)$. Dans cette procédure, le choix du gain K tel que

$$\sigma_{\min}(A - KC) > \gamma_\phi \quad (1.51)$$

assure l'inégalité (1.48). Les valeurs singulières de $(A - KC)$ jouent, en effet, un rôle sur la convergence de l'observateur. Malheureusement, ce résultat est en général incorrect. Ceci a été démontré par un contre exemple dans [96].

L'inexactitude du résultat précédent est intuitivement compréhensible. En effet, les valeurs singulières d'une matrice déterminent si cette matrice est proche d'être singulière. Une matrice pourrait être proche d'être singulière, mais ses valeurs propres restent proches de l'axe imaginaire. Cette distinction a été clarifiée après la nouvelle méthode proposée dans [96]. En effet, dans [96], Rajamani a établi un nouveau résultat permettant de corriger le précédent. Ce résultat est résumé dans le théorème suivant qui fournit des conditions nécessaires et suffisantes que doit vérifier la matrice $(A - KC)$ afin de justifier la convergence de l'observateur.

Théorème 1.3.7. ([96]) *Considérons le système(1.42) et l'observateur(1.44), avec (A, C) observable et ϕ satisfait (1.43). Alors, l'erreur d'estimation est asymptotiquement stable si le gain K peut-être choisi tel que $(A - KC)$ soit stable et*

$$\min_{\omega \geq 0} \left(\sigma_{\min}(A - KC - j\omega I_n) \right) > \gamma_\phi \quad (1.52)$$

où j est tel que $j^2 = -1$. ■

La démonstration complète de ce théorème est donnée en trois étapes dans [96].

D'autres méthodes de synthèse d'observateurs ont été développées spécialement pour la classe des systèmes uniformément observables [47], [20] et [19]. Ces méthodes utilisent un changement de variables pour se ramener à un système de la forme (1.42). Une fois le système transformé, l'utilisation d'un observateur à grand gain est systématique. Ce type d'observateurs a été appliqué à une classe de systèmes biologiques et à des procédés biotechnologiques dans [47], [45] et [15].

Observateurs de Luenberger Généralisés (OLG)

Récemment, une nouvelle conception d'observateurs a été proposée dans [4], [6], [5], [3], [43] et [44]. La classe des systèmes concernés par cette nouvelle conception consiste à ajouter à l'observateur de Luenberger un deuxième retour de sortie linéaire à l'intérieur de la partie non linéaire du système. Cette approche concerne les systèmes décrits par les équations suivantes :

$$\dot{x} = Ax + G\gamma(Hx) + \varrho(y, u) \quad (1.53a)$$

$$y = Cx. \quad (1.53b)$$

L'observateur d'état proposé a la structure suivante :

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + G\gamma\left(H\hat{x} + K(y - C\hat{x})\right) + \varrho(y, u) + L(y - C\hat{x}). \quad (1.54)$$

Des conditions de convergence de l'observateur (1.54) ont été établies dans [4] et [5]. Ce résultat concerne les systèmes pour lesquels la fonction non linéaire γ satisfait les hypothèses suivantes :

1. chaque composante γ_i est une fonction scalaire à variable scalaire, i.e :

$$\gamma_i = \gamma_i\left(\sum_{j=1}^{j=n} H_{ij}x_j\right), i = 1, \dots, r. \quad (1.55)$$

2. Toutes les composantes de γ sont des fonctions non décroissantes, i.e :

$$0 \leq \frac{\gamma_i(v) - \gamma_i(w)}{v - w}, \forall v \neq w \in \mathbb{R}. \quad (1.56)$$

En utilisant (1.53) et (1.54), la dynamique de l'erreur d'estimation $\varepsilon = x - \hat{x}$ s'écrit :

$$\dot{\varepsilon} = (A - LC)\varepsilon + G\left(\gamma(v) - \gamma(w)\right) \quad (1.57)$$

où

$$v = Hx \text{ et } w = H\hat{x} + K(y - C\hat{x}).$$

Ces conditions de convergence sont illustrées dans le théorème suivant :

Théorème 1.3.8. *L'erreur d'estimation (1.57) est exponentiellement stable à l'origine s'il existe une*

matrice $P = P^T > 0$, une constante $\nu > 0$ et une matrice diagonal $\Lambda > 0$ tel que l'inégalité

$$\begin{bmatrix} (A - LC)^T P + P(A - LC) + \nu I_n & PG + (H - KC)^T \Lambda \\ G^T P + \Lambda(H - KC) & 0 \end{bmatrix} \leq 0 \quad (1.58)$$

soit satisfaite. ■

Cette technique a été étendue dans [43] et [44] au cas des systèmes monotones multi-variables. Des conditions de convergence analogues ont été obtenues. De nouvelles conditions suffisantes de synthèse des gains K et L ont été proposées dans [6] pour une classe de systèmes dont la non-linéarité est une fonction scalaire à variable scalaire. Ce résultat est plus général que le précédent, puisqu'il prend en compte les bornes du terme $\frac{\gamma(v) - \gamma(w)}{v - w}$ quand elles existent, c'est à dire quand la non-linéarité satisfait la condition

$$0 \leq \frac{\gamma(v) - \gamma(w)}{v - w} \leq b, \forall v \neq w \in \mathbb{R}. \quad (1.59)$$

Dans ce cas, en exploitant la condition (1.59), les auteurs ont établi le théorème suivant :

Théorème 1.3.9. *L'observateur d'état (1.54) converge exponentiellement s'il existe une matrice $P = P^T > 0$, une constante $\nu > 0$ et une matrice diagonal $\Lambda > 0$ telles que l'inégalité*

$$\begin{bmatrix} (A - LC)^T P + P(A - LC) + \nu I_n & PG + (H - KC)^T \\ G^T P + (H - KC) & -\frac{2}{b} \end{bmatrix} \leq 0 \quad (1.60)$$

soit satisfaite. ■

Cette dernière inégalité est moins restrictive que (1.58). En effet, dans (1.58) il est nécessaire d'avoir $PG + (H - KC)^T \Lambda = 0$ à cause de la présence d'un zéro sur la diagonale. Ceci rend l'inégalité (1.58) contraignante. Cependant, dans (1.60), le zéro sur la diagonale est remplacé par $-\frac{2}{b}$, ce qui n'impose pas à $PG + (H - KC)^T$ d'être nul. Notons qu'en particulier, pour $b = +\infty$, nous retrouvons l'inégalité (1.58).

Observateurs basés sur la théorie de la contraction

Cette technique, nouvelle en observation d'état, a été introduite dans [76], [77], [78], [64], [79] et [42]. Le principe de la méthode est le suivant :

Etant donné un système non linéaire de la forme :

$$\dot{x} = f(x, t) \quad (1.61a)$$

$$y = h(x, t) \quad (1.61b)$$

l'observateur correspondant est l'observateur classique de Luenberger :

$$\dot{\hat{x}} = f(\hat{x}, t) + L(y - \hat{y}) \quad (1.62a)$$

$$\hat{y} = h(\hat{x}, t) \quad (1.62b)$$

L'objectif est de déterminer la matrice L telle que le système général suivant soit contractant :

$$\dot{X} = f(X, t) + L(y - h(X, t)). \quad (1.63)$$

En effet, si le système (1.63) est contractant, alors, d'après le Théorème 1.2.20, les deux solutions particulières x et $\hat{x}$ de (1.63) convergent exponentiellement l'une vers l'autre.

En utilisant la théorie de la contraction, le système (1.63) est contractant si la valeur propre maximale de la partie symétrique de la matrice suivante est négative :

$$\frac{\partial f}{\partial X}(X, t) - L \frac{\partial h}{\partial X}(X, t).$$

De façon générale, le système (1.63) est contractant s'il existe une métrique $\mathbb{M}(X, t)$ et une constante positive $\beta_{\mathbb{M}}$ telles que

$$\left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial X} - L \frac{\partial h}{\partial X} \right)^T \mathbb{M} + \mathbb{M} \left(\frac{\partial f}{\partial X} - L \frac{\partial h}{\partial X} \right) + \dot{\mathbb{M}} \right\} \leq -\beta_{\mathbb{M}} \mathbb{M}. \quad (1.64)$$

Dans le cas où $\mathbb{M}$ est constante, l'inégalité (1.64) devient

$$\left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial X} - L \frac{\partial h}{\partial X} \right)^T \mathbb{M} + \mathbb{M} \left(\frac{\partial f}{\partial X} - L \frac{\partial h}{\partial X} \right) \right\} \leq -\beta_{\mathbb{M}} \mathbb{M}. \quad (1.65)$$

En posant $S = L^T \mathbb{M}$ dans (1.65), on obtient l'inégalité suivante :

$$\frac{\partial f}{\partial X}^T \mathbb{M} + \mathbb{M} \frac{\partial f}{\partial X} - \frac{\partial h}{\partial X}^T S - S^T \frac{\partial h}{\partial X} + \beta_{\mathbb{M}} \mathbb{M} \leq 0. \quad (1.66)$$

Par conséquent, si la condition (1.66) est soluble pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, alors le gain

$$L = \mathbb{M}^{-1} S^T$$

rend le système (1.63) contractant. De ce fait, les deux solutions x et $\hat{x}$ de (1.63) convergent exponentiellement l'une vers l'autre.

La théorie de la contraction a été appliquée à plusieurs types d'observateurs tels que le filtre de Kalman étendu [64] et les observateurs PD [76]. Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur aux articles [76], [77], [78], [79] et [42]. Des conditions sous forme de LMI ont été établies dans [78] et une analogie avec les systèmes LTV est également proposée dans [76] et [42]. Cette théorie a été utilisée aussi dans [13] comme outil d'analyse de convergence dans le contexte de la synchronisation des systèmes de communications chaotiques.

1.4 Conclusion

Ce chapitre a été consacré d'une part à quelques rappels sur des concepts relatifs à la stabilité (stabilité au sens de Lyapunov, théorie de la contraction) et à l'observabilité (rappels sur quelques définitions sur la notion d'observabilité et formulation du principe d'estimation d'état).

D'autre part, nous avons présenté un état de l'art qui regroupe la plupart des techniques de conception d'observateurs pour les systèmes non linéaires à temps discret et à temps continu. Pour cette classe générale de systèmes, nous avons vu qu'il n'existe pas, à l'heure actuelle, de méthode universelle pour la synthèse d'observateurs. Les approches développées à ce jour sont soit une approximation des algorithmes linéaires (linéarisation autour d'un point de fonctionnement), soit des algorithmes non linéaires spécifiques pour certaines classes de systèmes.

Synthèse d'observateurs d'état des systèmes à temps continu

Sommaire

2.1	Introduction	32
2.2	Approche basée sur le DMVT : Transformation en LPV	32
2.2.1	Préliminaires et formulation du problème	32
2.2.2	Procédure de synthèse d'observateur	35
2.2.3	Observateur avec gain affine	38
2.2.4	Systèmes à sorties non linéaires	39
2.2.5	Systèmes non différentiables	41
2.3	Extension au filtrage H_∞ : observateur robuste	45
2.3.1	Synthèse d'observateur H_∞	46
2.4	Extension au cas des systèmes à entrées inconnues	48
2.5	DMVT et Observateur de Luenberger Généralisé (OLG)	51
2.5.1	Position du problème	52
2.5.2	Synthèse d'observateur	53
2.5.3	Exemple numérique	56
2.5.4	Cas des systèmes à entrées inconnues	58
2.6	Conclusion	59

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous proposons deux méthodes de synthèse d'observateurs. La première consiste à transformer le problème d'estimation d'état d'un système non linéaire à un problème de stabilité d'un système Linéaire à Paramètres Variants (LPV). L'idée est basée sur l'utilisation du théorème des accroissements finis (the Differential Mean Value Theorem (DMVT) pour le sigle anglais) qui permet de transformer la dynamique de l'erreur d'estimation (qui définit un système non linéaire quelconque) en un système LPV. En se basant sur les techniques LPV [12], [11], des conditions de stabilité sous forme de LMIs ont été obtenues. Des extensions ont été également établies dans le cas des systèmes à sorties non linéaires et une classe particulière de systèmes non différentiables. Une version de cette méthode, qui tient compte de la robustesse aux bruits qui affectent la dynamique et la sortie du système, a ensuite été élaborée. En utilisant quelques transformations, nous avons pu généraliser la méthode proposée à l'estimation de l'état et des entrées inconnues (simultanément).

La deuxième méthode proposée dans ce chapitre est basée sur un observateur de Luenberger généralisé (OLG). Cette technique fait intervenir le DMVT qui permet d'étendre les travaux développés dans [4] et [6] à une classe plus large de systèmes non linéaires. Une nouvelle condition de synthèse d'observateurs a été obtenue. Une extension, au cas des systèmes à entrées inconnues, est également obtenue.

2.2 Approche basée sur le DMVT : Transformation en LPV

Dans cette section nous présentons une méthode de construction d'observateurs d'état pour les systèmes non linéaires. La contribution principale réside dans l'utilisation du théorème des accroissements finis (DMVT). Ce dernier permet de ramener le problème d'estimation d'état d'un système non linéaire quelconque à un problème de stabilité d'un système LPV.

2.2.1 Préliminaires et formulation du problème

Préliminaires

Avant d'introduire la classe des systèmes non linéaires concernée, nous avons besoin d'énoncer les deux théorèmes suivants :

Théorème 2.2.1. *(Le DMVT pour des fonctions scalaires)*

Soit $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $a, b \in \mathbb{R}^n$. Supposons que φ soit différentiable sur $Co(a, b)$. Alors, il existe une constante $z \in Co(a, b)$, $z \neq a$, $z \neq b$ tel que :

$$\varphi(a) - \varphi(b) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(z)(a - b) \quad (2.1)$$

■

Démonstration : La preuve de ce théorème est basée sur le théorème des accroissements finis classique pour les fonctions scalaires à variable scalaire qui lui même découle du fameux théorème de Rolle. □

Remarque 2.2.2. *Le DMVT est incorrect dans le cas des fonctions vectorielles. Ceci veut dire qu'on peut pas toujours trouver une seule constante $z \in Co(a, b)$ telle que l'équation (2.1) soit vérifiée. En effet, on peut construire facilement des contre-exemples.* ■

Afin d'obtenir une équation similaire à (2.1), on peut imaginer l'existence de plusieurs constantes $z_i \in Co(a, b)$ pour $i = 1, \dots, q$ où q est le nombre de composantes de la fonction non linéaire en question. Pour ceci, nous proposons de procéder comme suit :

Soit

$$E_s = \{e_s(i) \mid e_s(i) = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^T, i = 1, \dots, s.\}$$

la base canonique de $\mathbb{R}^s$ pour tout $s \geq 1$. Considérons la fonction vectorielle

$$\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^q.$$

Cette fonction peut toujours s'écrire sous la forme

$$\varphi(x) = [\varphi_1(x), \dots, \varphi_q(x)]^T$$

où $\varphi_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est la i^{me} composante de φ .

D'après la définition de E_s , on peut écrire

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^q e_q(i) \varphi_i(x).$$

En appliquant le Théorème 2.2.1 sur chaque fonction scalaire φ_i et en utilisant le fait que

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x}(\cdot) = \sum_{j=1}^n e_n^T(j) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(\cdot)$$

on obtient le théorème suivant :

Théorème 2.2.3. *(Le DMVT pour des fonctions vectorielles)*

Soit $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^q$. Soit $a, b \in \mathbb{R}^n$. Supposons que φ soit différentiable sur $Co(a, b)$. Il existe alors des constantes $z_1, \dots, z_q \in Co(a, b)$, $z_i \neq a$, $z_i \neq b$ pour $i = 1, \dots, q$ tel que :

$$\varphi(a) - \varphi(b) = \left(\sum_{i,j=1}^{q,n} e_q(i) e_n^T(j) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(z_i) \right) (a - b) \quad (2.2)$$

■

Formulation du problème

Considérons la classe des systèmes non linéaires décrite par les équations suivantes :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bf(x(t), y(t), u(t)) \quad (2.3a)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (2.3b)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état du système, $u \in \mathbb{R}^m$ le vecteur d'entrée et $y \in \mathbb{R}^p$ le vecteur de sortie. A , B et C sont des matrices constantes de dimensions appropriées. La fonction $f(x, y, u) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^q$ est différentiable par rapport à x . Supposons de plus que la fonction f satisfasse l'hypothèse suivante :

Hypothèse 2.2.4.

$$a_{ij} \leq \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x, y, u) \leq b_{ij}, \quad \forall x, y, u \quad (2.4)$$

■

pour tout $i = 1, \dots, q$ et $j = 1, \dots, n$, avec a_{ij} et b_{ij} des constantes réelles.

L'observateur d'état correspondant à (2.3) est de type Luenberger. L'équation d'état de cet observateur est donnée par :

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bf(\hat{x}(t), y(t), u(t)) + K(y(t) - C\hat{x}(t)) \quad (2.5)$$

où $\hat{x}$ représente l'état estimé de x .

L'objectif principal est de déterminer la matrice K telle que l'erreur d'estimation

$$\varepsilon(t) = x(t) - \hat{x}(t) \quad (2.6)$$

converge asymptotiquement vers zéro. La dynamique de l'erreur est donnée par l'équation suivante :

$$\dot{\varepsilon}(t) = (A - KC)\varepsilon(t) + B\delta f_t \quad (2.7)$$

où

$$\delta f_t = f(x(t), y(t), u(t)) - f(\hat{x}(t), y(t), u(t)). \quad (2.8)$$

En appliquant le Théorème 2.2.3 sur la fonction $x \mapsto f(x(t), y(t), u(t))$, nous déduisons qu'il existe des constantes $z_i(t) \in Co(x(t), \hat{x}(t))$ pour tout $i = 1, \dots, q$ telles que :

$$\delta f_t = \left(\sum_{i,j=1}^{q,n} e_q(i) e_n^T(j) \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(z_i(t), y(t), u(t)) \right) \varepsilon(t).$$

Pour des raisons de simplifications, nous introduisons les notations suivantes :

$$h_{ij}(t) = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(z_i(t), y(t), u(t)) \quad (2.9a)$$

$$H_{ij}^q = e_q(i) e_n^T(j) \quad \text{for } 1 \leq i \leq q \text{ and } 1 \leq j \leq n \quad (2.9b)$$

$$h = (h_{11}, \dots, h_{1n}, \dots, h_{qn}) \quad (2.9c)$$

$$\mathcal{A}(h(t)) = A + B \sum_{i,j=1}^{q,n} h_{ij}(t) H_{ij}^q \quad (2.9d)$$

De ce fait, la dynamique de l'erreur d'estimation se réécrit comme suit :

$$\dot{\varepsilon}(t) = \left(\mathcal{A}(h(t)) - KC \right) \varepsilon(t). \quad (2.10)$$

L'équation (2.10) définit un système LPV.

D'après l'hypothèse (2.2.4), le paramètre $h(t)$ évolue dans un domaine borné $\mathcal{H}_{q,n}$ dont les 2^{qn} éléments sont définis par l'ensemble

$$\mathcal{V}_{\mathcal{H}_{q,n}} = \left\{ \alpha = (\alpha_{11}, \dots, \alpha_{1n}, \dots, \alpha_{qn}) \mid \alpha_{ij} \in \{a_{ij}, b_{ij}\} \right\} \quad (2.11)$$

2.2.2 Procédure de synthèse d'observateur

En s'inspirant des techniques LPV [12], [11], de nouvelles conditions suffisantes de convergence de l'observateur proposé sont obtenues. Ces conditions sont exprimées sous forme d'inégalités linéaires matricielles (LMIs).

Théorème 2.2.5. ([124]) *l'erreur d'estimation $\varepsilon(t)$ converge asymptotiquement vers zéro s'il existe des matrices $P = P^T > 0$ et R de dimensions appropriées telles que les LMIs suivantes soient satisfaites :*

$$\mathcal{A}^T(\alpha)P - C^T R + P\mathcal{A}(\alpha) - R^T C < 0, \quad \forall \alpha \in \mathcal{V}_{\mathcal{H}_{q,n}}. \quad (2.12)$$

Par conséquent, le gain K sera donné par $K = P^{-1}R^T$. ■

Démonstration : Afin d'étudier la convergence asymptotique de l'erreur d'estimation, nous considérons la fonction de Lyapunov quadratique suivante :

$$V(t) = V(\varepsilon(t)) = \varepsilon^T(t)P\varepsilon(t)$$

où P est une matrice symétrique définie positive.

L'erreur d'estimation converge asymptotiquement vers zéro si $V(t) > 0$ et $\dot{V}(t) < 0$ pour tout $\varepsilon(t) \neq 0$.

Nous avons

$$\dot{V}(t) = \varepsilon^T(t)F(h(t))\varepsilon(t)$$

où

$$F(h(t)) = \left(\mathcal{A}(h(t)) - KC \right)^T P + P \left(\mathcal{A}(h(t)) - KC \right).$$

La condition $V(t) > 0$ est satisfaite car la matrice P est définie positive. La condition $\dot{V}(t) < 0$ est vérifiée si

$$F(h(t)) < 0 \text{ for all } h(t) \in \mathcal{H}_{q,n}.$$

Comme la fonction matricielle F est affine en $h(t)$, en utilisant le principe de convexité [31], nous déduisons que $\dot{V}(t) < 0$ à condition que :

$$F(\alpha) < 0, \quad \forall \alpha \in \mathcal{V}_{\mathcal{H}_{q,n}}. \quad (2.13)$$

Si on utilise la notation $R = L^T P$, on constate que la condition (2.13) est équivalente à (2.12). L'erreur d'estimation est donc asymptotiquement stable si les inégalités (2.12) sont satisfaites avec P définie positive. Cette dernière condition permet l'inversion de P et par conséquent le calcul du gain K par $P^{-1}R^T$. $\square$

Remarque 2.2.6. *Il n'est pas difficile d'obtenir les bornes supérieures et inférieures des fonctions $h_{ij}(\cdot)$ dans le domaine $\mathcal{H}_{q,n}$. En effet, pour beaucoup de systèmes non linéaires, les termes $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\cdot)$ sont bornés, ce qui permet de déduire directement et sans difficulté les bornes a_{ij} et b_{ij} . Par exemple, pour la plupart des systèmes lipschitziens abordés dans la littérature abondante, ces bornes apparaissent aisément.* $\blacksquare$

Exemple numérique

Pour montrer la performance de l'approche précédente, on propose une application numérique. Considérons un robot flexible [88] dont le modèle dynamique est un système non linéaire qu'on peut mettre sous la forme (2.3) avec les paramètres :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -48.6 & -1.25 & 48.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 19.5 & 0 & -19.5 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad f(x, y, u) = -3.33 \sin(\theta_l),$$

où

$$x = \begin{bmatrix} \theta_m & \omega_m & \theta_l & \omega_l \end{bmatrix}^T$$

avec θ_m la position angulaire du moteur, ω_m la vitesse angulaire du moteur, θ_l la position angulaire du bras et ω_l la vitesse angulaire du bras.

L'application de l'approche proposée nous donne :

$$h_{1j}(t) = 0 \quad \text{pour tout } j = 1, 2, 4;$$

$$h_{13}(t) = -3.33 \cos(z_3(t)).$$

L'ensemble des sommets $\mathcal{V}_{\mathcal{H}_{1,4}}$ peut être réduit à

$$\mathcal{V}_{\mathcal{H}_{1,4}} = \{-3.33, +3.33\},$$

et donc nous avons deux LMIs à résoudre afin de déduire le gain de l'observateur assurant la convergence asymptotique de l'erreur d'estimation vers zéro.

Les LMIs (2.12) fournissent les solutions suivantes :

$$P = \begin{bmatrix} 5.4786 & -0.2172 & -1.7595 & 0.1330 \\ -0.2172 & 0.0649 & -0.2061 & 0.0671 \\ -1.7595 & -0.2061 & 3.4710 & -0.3989 \\ 0.1330 & 0.0671 & -0.3989 & 0.3164 \end{bmatrix},$$

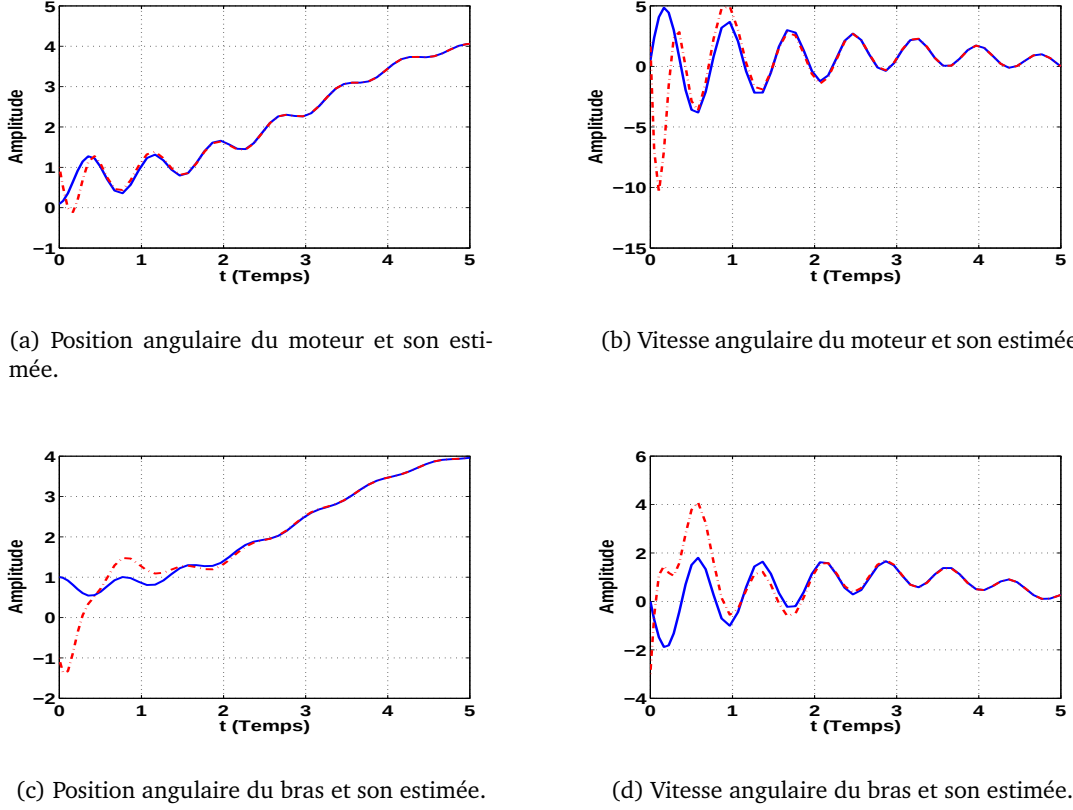


FIG. 2.1 – Convergence asymptotique de l'état (ligne continue) vers son estimé (ligne pointillée).

$$R = \begin{bmatrix} 14.2797 & 3.9211 & -11.1406 & 1.2633 \end{bmatrix}$$

et donc

$$L = \begin{bmatrix} 12.5131 \\ 156.2855 \\ 9.8934 \\ -21.9507 \end{bmatrix}.$$

Les résultats des simulations numériques sont illustrés sur la Figure 2.1.

Remarque 2.2.7. Dans la méthode précédente, nous avons proposé un observateur avec un gain constant. Ceci est dû au fait que les paramètres $h_{ij}(t)$ sont inconnus à cause des constantes $z_i(t)$ qui découlent du théorème des accroissements finis. Il est connu dans la littérature que pour les systèmes LPV à paramètres mesurables ou connus, on utilise toujours un observateur affine qui dépend de ces paramètres, afin de réduire le conservatisme dû au gain constant. Nous envisageons de proposer dans la section suivante, un observateur avec un gain affine pour une classe particulière de systèmes non linéaires qui regroupe la classe des systèmes LPV. ■

2.2.3 Observateur avec gain affine

Nous allons montrer que sous une hypothèse supplémentaire, nous pouvons utiliser un gain affine. L'objectif du gain affine est de réduire le conservatisme de l'approche proposée, dans le sens où les conditions de stabilité deviennent moins restrictives. Avant de présenter l'observateur correspondant au système (2.3), nous introduisons une hypothèse supplémentaire qui définit la classe des systèmes concernés.

Hypothèse 2.2.8. Supposons qu'il existe un sous ensemble $S \subset \{1, \dots, q\} \times \{1, \dots, n\}$ tel que :

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x, y, u) = g_{ij}(y, u) \neq 0, \forall (i, j) \in S. \quad (2.14)$$

■

Cette hypothèse signifie que $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x, y, u)$ est indépendant de x pour tout $(i, j) \in S$. De plus, elle n'est pas restrictive. En effet, la classe des systèmes satisfaisant la condition (2.14) inclue une variété étendue de systèmes chaotiques tels que le système de Lorenz et le système de Rössler présentés dans [74]. En dehors de ces systèmes, nous mentionnons que la condition (2.14) est vérifiée par la classe des systèmes étudiée dans [9].

Remarque 2.2.9. L'hypothèse 2.2.8 ne signifie guère que la fonction f est totalement affine en x . En effet, le sous ensemble S peut être strictement inclus dans l'ensemble $\{1, \dots, q\} \times \{1, \dots, n\}$, i.e : $S \subsetneq \{1, \dots, q\} \times \{1, \dots, n\}$. Pour clarifier cette remarque, on propose un exemple d'une telle fonction : Soit $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^2$ une fonction définie par :

$$f(x, y, u) = \begin{bmatrix} \sin(x_1) + yx_2 \\ \cos(x_1) \end{bmatrix}.$$

Cette fonction n'est pas affine en x à cause des termes $\sin(x_1)$ et $\cos(x_1)$. Nous avons $\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = y$, et donc $S = \{(1, 2)\} \subsetneq \{1, 2\} \times \{1, 2\} = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$. ■

Sous l'hypothèse 2.2.8, nous proposons l'observateur correspondant à (2.3) décrit par :

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bf(\hat{x}(t), y(t), u(t)) + L(y(t), u(t))(y(t) - C\hat{x}(t)) \quad (2.15)$$

avec

$$L(y(t), u(t)) = L_0 + \sum_{(i,j) \in S} g_{ij}(y(t), u(t))L_{ij}.$$

L'objectif principal consiste à déterminer les matrices L_0 et L_{ij} pour tout $(i, j) \in S$ de façon à ce que l'erreur d'estimation

$$\varepsilon(t) = x(t) - \hat{x}(t) \quad (2.16)$$

converge asymptotiquement vers zéro.

La dynamique de l'erreur s'écrit :

$$\dot{\varepsilon}(t) = (A - L(y(t), u(t))C)\varepsilon(t) + B\delta f_t. \quad (2.17)$$

En utilisant (2.8) et les notations (2.9) de la section 2.2.1, l'équation (2.17) se réécrit sous la forme suivante :

$$\dot{\varepsilon}(t) = \left(\mathcal{A}(h(t)) - L(y(t), u(t))C \right) \varepsilon(t). \quad (2.18)$$

Dans ce cas, on a $h_{ij}(t) = g_{ij}(y(t), u(t))$ pour tout $(i, j) \in S$, et par conséquent pour $\alpha \in \mathcal{V}_{\mathcal{H}_{q,n}}$, on a $\alpha_{ij} \in \{\underline{g}_{ij}, \bar{g}_{ij}\}$ pour tout $(i, j) \in S$, avec

$$\underline{g}_{ij} = \min_t \left(g_{ij}(y(t), u(t)) \right),$$

$$\bar{g}_{ij} = \max_t \left(g_{ij}(y(t), u(t)) \right).$$

Théorème 2.2.10. *Sous l'hypothèse 2.2.8, l'erreur d'estimation (2.18) converge asymptotiquement vers zéro s'il existe des matrices $P = P^T > 0$, R_0 et R_{ij} , $(i, j) \in S$ de dimensions appropriées telles que les LMIs suivantes soient solubles :*

$$\mathcal{A}^T(\alpha)P - C^T \left(R_0 + \sum_{(i,j) \in S} \alpha_{ij} R_{ij} \right) + P\mathcal{A}(\alpha) - \left(R_0^T + \sum_{(i,j) \in S} \alpha_{ij} R_{ij}^T \right) C < 0 \quad \forall \alpha \in \mathcal{V}_{\mathcal{H}_{q,n}}. \quad (2.19)$$

Par conséquent, les gains L_0 et L_{ij} sont donnés par $L_0 = P^{-1}R_0^T$ et $L_{ij} = P^{-1}R_{ij}^T$ pour tout $(i, j) \in S$. ■

Remarque 2.2.11. *L'introduction d'un gain affine (une idée très classique dans la littérature LPV) dans le cas des systèmes satisfaisant l'hypothèse 2.2.8 permet d'obtenir des conditions de stabilité moins contraignantes. Ceci signifie que les LMIs (2.19) sont moins restrictives que les LMIs (2.12). En effet, il y a plus de degrés de liberté dans (2.19) que dans (2.12). ■*

2.2.4 Systèmes à sorties non linéaires

Considérons une classe plus générale de systèmes non linéaires avec sorties non linéaires :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bf(x(t), y(t), u(t)) \quad (2.20a)$$

$$y(t) = g(x(t), u(t)). \quad (2.20b)$$

La fonction f satisfait (2.4) et $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^p$ vérifie l'hypothèse suivante :

Hypothèse 2.2.12. *Supposons que la fonction g satisfasse la condition suivante :*

$$\bar{a}_{ij} \leq \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x, u) \leq \bar{b}_{ij}, \quad \forall x, u \quad (2.21)$$

pour tout $i = 1, \dots, p$ et $j = 1, \dots, n$, avec $\bar{a}_{ij}$ et $\bar{b}_{ij}$ des constantes réelles. ■

L'observateur d'état que nous considérons est sous la forme suivante :

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bf(\hat{x}(t), y(t), u(t)) + K \left(y(t) - g(\hat{x}(t), u(t)) \right) \quad (2.22)$$

La dynamique de l'erreur d'estimation $\varepsilon(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ s'écrit :

$$\dot{\varepsilon}(t) = A\varepsilon(t) + B\delta f_t - K\delta g_t \quad (2.23)$$

où

$$\delta g_t = g(x(t), u(t)) - g(\hat{x}(t), u(t)) \quad (2.24)$$

En appliquant le Théorème 2.2.3 sur la fonction $x \mapsto g(x, u)$ nous déduisons qu'il existe des vecteurs $\bar{z}_i(t) \in Co(x(t), \hat{x}(t))$ pour tout $i = 1, \dots, p$ tels que

$$\delta g_t = \left(\sum_{i,j=1}^{p,n} \rho_{ij}(t) H_{ij}^p \right) \varepsilon(t) \quad (2.25)$$

avec

$$\rho_{ij}(t) = \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(\bar{z}_i(t), u(t)) \text{ et } H_{ij}^p = e_p(i) e_n^T(j).$$

En utilisant (2.8), (2.9) et les notations

$$\rho = (\rho_{11}, \dots, \rho_{1n}, \dots, \rho_{pn}) \quad (2.26a)$$

$$\mathcal{G}(\rho(t)) = \sum_{i,j=1}^{p,n} \rho_{ij}(t) H_{ij}^p \quad (2.26b)$$

l'équation (2.23) se réécrit sous forme d'un système LPV comme suit :

$$\dot{\varepsilon}(t) = (\mathcal{A}(h(t)) - K\mathcal{G}(\rho(t)))\varepsilon(t) \quad (2.27)$$

où $h(t)$ et $\mathcal{A}(h(t))$ sont définis dans (2.9). Le problème d'estimation d'état devient donc un problème de stabilité du système LPV défini dans (2.27).

Comme dans la section 2.2.1, l'hypothèse 2.2.12 implique que le paramètre $\rho(t)$ évolue dans un domaine borné $\mathcal{F}_{p,n}$ pour lequel l'ensemble des 2^{pn} sommets est donné par :

$$\mathcal{W}_{\mathcal{F}_{p,n}} = \left\{ \beta = (\beta_{11}, \dots, \beta_{1n}, \dots, \beta_{pn}) \mid \beta_{ij} \in \{\bar{a}_{ij}, \bar{b}_{ij}\} \right\}.$$

En s'inspirant des techniques LPV, on obtient, sous les hypothèses 2.2.4 et 2.2.12, le théorème suivant qui constitue les conditions de synthèse de l'observateur proposé. Ces conditions sont exprimées sous forme de LMIs.

Théorème 2.2.13. *L'erreur d'estimation $\varepsilon(t)$ est asymptotiquement stable s'il existe deux matrices $P = P^T > 0$ et R de dimensions appropriées telles que les LMIs suivantes soient solubles :*

$$\mathcal{A}^T(\alpha)P - \mathcal{G}(\beta)^T R + P\mathcal{A}(\alpha) - R^T \mathcal{G}(\beta) < 0, \quad \forall \alpha \in \mathcal{V}_{\mathcal{H}_{q,n}}, \quad \forall \beta \in \mathcal{W}_{\mathcal{F}_{p,n}}. \quad (2.28)$$

De ce fait, le gain K est donné par $K = P^{-1}R^T$. ■

Démonstration : Supposons, tout d'abord, qu'il existe deux matrices $P = P^T > 0$ et R telles

que les conditions (2.28) soient solubles. Faisons appel à la fonction de Lyapunov suivante :

$$V(t) = V(\varepsilon(t)) = \varepsilon^T(t)P\varepsilon(t).$$

L'erreur d'estimation converge asymptotiquement vers zéro si $V(t) > 0$ et $\dot{V}(t) < 0$. Puisque la matrice P est définie positive alors la condition $V(t) > 0$ est satisfaite pour tout $\varepsilon(t) \neq 0$. Cependant, il reste à montrer que $\dot{V}(t) < 0$ est satisfaite.

Après calcul, on obtient :

$$\dot{V}(t) = \varepsilon^T(t) \left[\mathcal{A}(h(t))^T P - \mathcal{G}(\rho(t))^T K^T P + P\mathcal{A}(h(t)) - PK\mathcal{G}(\rho(t)) \right] \varepsilon(t).$$

En utilisant la notation $R = K^T P$,

$$\dot{V}(t) = \varepsilon^T(t) \left[\mathcal{A}(h(t))^T P - \mathcal{G}(\rho(t))^T R + P\mathcal{A}(h(t)) - R^T \mathcal{G}(\rho(t)) \right] \varepsilon(t).$$

La condition $\dot{V}(t) < 0$ est satisfaite si la fonction matricielle

$$\Psi(h(t), \rho(t)) = \mathcal{A}(h(t))^T P - \mathcal{G}(\rho(t))^T R + P\mathcal{A}(h(t)) - R^T \mathcal{G}(\rho(t))$$

est définie négative pour tout $h(t) \in \mathcal{H}_{q,n}$ et pour tout $\rho(t) \in \mathcal{F}_{p,n}$. La fonction Ψ est convexe en h et ρ , puisqu'elle est affine en ces deux paramètres. D'après le principe de convexité, Ψ est définie négative sur $\mathcal{H}_{q,n} \times \mathcal{F}_{p,n}$ si elle est définie négative sur $\mathcal{V}_{\mathcal{H}_{q,n}} \times \mathcal{W}_{\mathcal{F}_{p,n}}$, ce qui signifie que

$$\Psi(\alpha, \beta) < 0, \quad \forall \alpha \in \mathcal{V}_{\mathcal{H}_{q,n}}, \quad \forall \beta \in \mathcal{W}_{\mathcal{F}_{p,n}}. \quad (2.29)$$

Comme les inégalités (2.29) sont équivalentes aux inégalités (2.28), on déduit que $\dot{V}(t) < 0$ pour tout $\varepsilon(t) \neq 0$ et d'où la stabilité asymptotique de l'erreur d'estimation. $\square$

Remarque 2.2.14. La méthode de transformation en LPV introduite dans ce chapitre ainsi que l'approche basée sur la théorie de la contraction sont conceptuellement très proches mais différentes. En effet, la première est basée sur le DMVT (version vectorielle) en utilisant la théorie classique de Lyapunov comme outil d'analyse de convergence. En revanche, la deuxième approche utilise la théorie de la contraction basée sur la notion de déplacement virtuel (définie dans le chapitre 1) qui lui même utilise implicitement le théorème des valeurs intermédiaires. ■

Remarque 2.2.15. Les résultats précédents ne peuvent être appliqués aux systèmes pour lesquels la partie non linéaire n'est pas différentiable. Dans la section suivante, nous généralisons cette approche à une classe particulière de systèmes non linéaires et non différentiables. ■

2.2.5 Systèmes non différentiables

Introduction et préliminaires

Dans le cas des systèmes non différentiables, le DMVT n'est plus applicable, nous utilisons alors une nouvelle manière pour transformer la dynamique de l'erreur d'estimation en un système LPV. Ceci mène à des conditions de stabilité identiques à celles du Théorème 2.2.5.

Avant de formuler le problème et donner la classe des systèmes concernée, nous introduisons d'abord les deux propositions suivantes :

Proposition 2.2.16. *Considérons une fonction $\Phi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$. Il existe toujours une fonction $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ telle que :*

$$\Phi(v) - \Phi(w) = \varphi(v, w)(v - w), \quad \forall v, w \in \mathbb{R}. \quad (2.30)$$

■

Démonstration : Considérons la fonction φ définie par :

$$\varphi(v, w) = \begin{cases} 0 & \text{si } v = w \\ \frac{\Phi(v) - \Phi(w)}{v - w} & \text{sinon } v \neq w \end{cases} \quad (2.31)$$

Si $v = w$, on a $\Phi(v) - \Phi(w) = 0$, d'où l'égalité (2.30). Si $v \neq w$, nous pouvons toujours écrire

$$\Phi(v) - \Phi(w) = \frac{\Phi(v) - \Phi(w)}{v - w}(v - w),$$

ce qui signifie que la fonction définie par (2.31) satisfait (2.30) pour tout $v, w \in \mathbb{R}$. □

Proposition 2.2.17. *Soit $\Phi : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^q$ une fonction telle que*

$$\Phi(x) = \begin{bmatrix} \Phi_1(H_1 x) \\ \vdots \\ \Phi_q(H_q x) \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

où $H_i^T \in \mathbb{R}^n$, pour tout $i \in \{1, \dots, q\}$. Il existe q fonctions $\varphi_i : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ telles que :

$$\Phi(x) - \Phi(z) = \left(\sum_{i=1}^{i=q} \varphi_i(v_i, w_i) G_i \right) (x - z), \quad \forall x, z \in \mathbb{R}^n, \quad (2.33)$$

où

$$v_i = H_i x, \quad w_i = H_i z, \quad G_i = e_q(i) H_i, \quad (2.34)$$

où $e_q(i)$ est un élément de la base canonique E_q de $\mathbb{R}^q$. ■

Démonstration : On sait qu'on peut toujours écrire $\Phi(x)$ sous la forme :

$$\Phi(x) = \sum_{i=1}^{i=q} e_q(i) \Phi_i(H_i x).$$

Donc

$$\Phi(x) - \Phi(z) = \sum_{i=1}^{i=q} e_q(i) (\Phi_i(H_i x) - \Phi_i(H_i z)).$$

D'après la Proposition 2.2.16 et les notations (2.34), nous déduisons qu'il existe $\varphi_i : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ tel que :

$$\Phi_i(v_i) - \Phi_i(w_i) = \varphi_i(v_i, w_i)(v_i - w_i).$$

D'où

$$\Phi(x) - \Phi(z) = \left(\sum_{i=1}^{i=q} \varphi_i(v_i, w_i) G_i \right) (x - z).$$

□

Formulation du problème

Considérons la classe des systèmes non linéaires décrite par les équations dynamiques suivantes :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bf(x(t), y(t), u(t)) \quad (2.35a)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (2.35b)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état du système, $u \in \mathbb{R}^m$ le vecteur d'entrée et $y \in \mathbb{R}^p$ le vecteur de sortie. A , B et C sont des matrices constantes de dimensions appropriées. L'application $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^q$ possède la forme particulière suivante :

$$f(x(t), y(t), u(t)) = \begin{bmatrix} f_1(H_1 x(t), y(t), u(t)) \\ \vdots \\ f_q(H_q x(t), y(t), u(t)) \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

avec $H_i^T \in \mathbb{R}^n$ pour tout $i \in \{1, \dots, q\}$.

Hypothèse 2.2.18. Supposons que les fonctions f_i satisfassent la propriété de Lipschitz

$$|f_i(v, y, u) - f_i(w, y, u)| \leq \gamma_i |v - w|, \quad \forall v, w \in \mathbb{R} \quad (2.37)$$

pour tout $u(t) \in \mathbb{R}^m$ et $y(t) \in \mathbb{R}^p$. ■

L'observateur d'état correspondant que nous considérons ici est le suivant :

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bf(\hat{x}(t), y(t), u(t)) + K(y(t) - C\hat{x}(t)) \quad (2.38)$$

Le problème d'estimation d'état consiste à trouver une matrice K qui stabilise la dynamique de l'erreur d'estimation

$$\varepsilon(t) = x(t) - \hat{x}(t) \quad (2.39)$$

La dynamique de l'erreur s'écrit :

$$\dot{\varepsilon}(t) = (A - KC)\varepsilon(t) + B\delta f_t \quad (2.40)$$

avec

$$\delta f_t = f(x(t), y(t), u(t)) - f(\hat{x}(t), y(t), u(t)) \quad (2.41)$$

En appliquant la Proposition 2.2.17 sur la fonction $x \mapsto f(x, y, u)$, on obtient

$$\delta f_t = \left(\sum_{i=1}^{i=q} \psi_{i,y,u}(H_i x(t), H_i \hat{x}(t)) G_i \right) \varepsilon(t) \quad (2.42)$$

où les fonctions $\psi_{i,y,u}$ sont données par la Proposition 2.2.16 et sont sous la forme (2.31).

D'après (2.31) et la propriété de Lipschitz (2.37), on a

$$\left| \psi_{i,y,u}(H_i x(t), H_i \hat{x}(t)) \right| \leq \gamma_i \quad (2.43)$$

En posant

$$\rho_i(t) = \psi_{i,y,u}(H_i x(t), H_i \hat{x}(t)) \quad (2.44a)$$

$$\rho(t) = (\rho_1(t), \dots, \rho_q(t)) \quad (2.44b)$$

$$\mathcal{A}(\rho(t)) = A + \sum_{i=1}^{i=q} \rho_i(t) B G_i \quad (2.44c)$$

la dynamique de l'erreur d'estimation se réécrit sous la forme :

$$\dot{\varepsilon}(t) = (\mathcal{A}(\rho(t)) - KC) \varepsilon(t) \quad (2.45)$$

qui définit un système LPV.

Selon (2.43), le paramètre $\rho(t)$ évolue dans un domaine borné $\mathcal{H}_q$ de 2^q sommets définis par l'ensemble :

$$\mathcal{V}_{\mathcal{H}_q} = \{ \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_q) \mid \alpha_i \in \{-\gamma_i, \gamma_i\} \} \quad (2.46)$$

Les conditions suffisantes pour que l'erreur d'estimation soit asymptotiquement stable autour de l'origine sont présentées dans le théorème suivant :

Théorème 2.2.19. ([122]) *L'erreur d'estimation $\varepsilon(t)$ converge asymptotiquement vers zéro s'il existe deux matrices $P = P^T > 0$ et R de dimensions appropriées telles que les LMIs (2.47) soient solubles :*

$$\mathcal{A}^T(\alpha)P - C^T R + P\mathcal{A}(\alpha) - R^T C < 0, \quad \forall \alpha \in \mathcal{V}_{\mathcal{H}_q}. \quad (2.47)$$

Le gain K sera donné par $K = P^{-1}R^T$. ■

Remarque 2.2.20. Les LMIs (2.47) sont identiques aux LMIs (2.12). En revanche, nous avons montré que le résultat de la section 2.2.2 peut être étendu à une classe particulière de systèmes non linéaires et non différentiables. ■

Remarque 2.2.21. De la même manière que la section 2.2.4, nous pouvons étendre ce résultat à des systèmes avec sorties non linéaires. Les conditions de stabilité seront toujours les mêmes. Nous pouvons aussi considérer un gain affine sous réserve d'une condition supplémentaire du type (2.14).

La condition équivalente à (2.14) dans le cas des systèmes non différentiables est :

$$\exists S \subset \{1, \dots, q\} \text{ tel que } \psi_{i,y,u} = g_i(y, u) \neq 0, \forall i \in S. \quad (2.48)$$

Le gain affine s'écrit donc :

$$L(y(t), u(t)) = L_0 + \sum_{i \in S} g_i(y(t), u(t)) L_i.$$

■

Exemple numérique

Considérons le système chaotique de *Chua* décrit par les paramètres suivants :

$$A = \begin{bmatrix} -\alpha(1+b) & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & -\gamma \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -\alpha \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

et

$$f(x(t), y(t), u(t)) = \frac{1}{2}(a-b)(|x_1 + E| - |x_1 - E|).$$

La matrice de sortie du système est $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

La constante de Lipschitz de la fonction non différentiable f est $\gamma_1 = |a-b|$.

Avec l'approche proposée, on a

$$G_1 = H_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Pour les valeurs numériques suivantes :

$$\alpha = -75, \quad \beta = 31.25, \quad \gamma = -3.125,$$

$$a = -2.40, \quad b = -0.98, \quad E = 1,$$

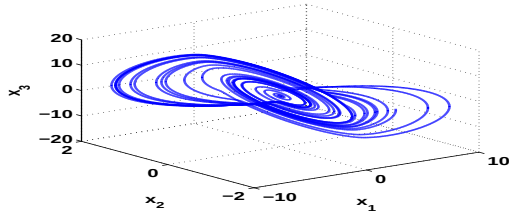
les LMIs (2.19) fournissent le gain :

$$K = \begin{bmatrix} 555.98 & -98.65 & -573.81 \end{bmatrix}^T.$$

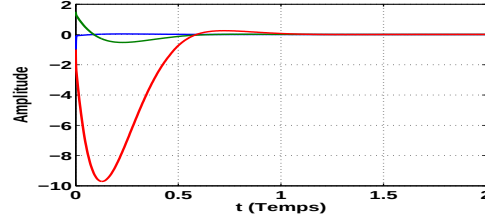
Les simulations numériques sont illustrées dans la Figure 2.2.

2.3 Extension au filtrage H_∞ : observateur robuste

Dans cette section, nous proposons une extension des résultats de la section précédente au cas des systèmes comportant des bruits dans la dynamique et la sortie du système. Pour simplifier



(a) Attracteur chaotique de Chua.



(b) Erreur d'estimation.

FIG. 2.2 – Le comportement asymptotique de l'erreur d'estimation.

la présentation, nous considérons les systèmes décrits par :

$$\dot{x} = Ax + Bf(x, y, u) + W_1\omega \quad (2.49a)$$

$$y = Cx + W_2\omega \quad (2.49b)$$

où W_1 et W_2 sont des matrices constantes de dimensions appropriées et $\omega \in L_2^s$ le vecteur des perturbations borné.

Le fait d'introduire le même bruit ω dans la dynamique du système et sur la sortie y n'induit aucune restriction. En effet, la dimension du vecteur $\omega \in \mathbb{R}^s$ est quelconque et les matrices W_1 et W_2 peuvent être différentes et de dimensions appropriées. Il est par conséquent inutile d'introduire un autre vecteur de perturbation différent de ω . Si on remplace dans la dynamique du système le terme $W_1\omega$ par Ev_1 et $W_2\omega$ par Dv_2 sur la sortie, alors on peut toujours se ramener au système (2.49) en posant $W_1 = [E \ 0]$, $W_2 = [0 \ D]$ et $\omega = [v_1^T \ v_2^T]^T$.

2.3.1 Synthèse d'observateur H_∞

L'objectif est de reconstruire l'état x du système (2.49) avec une certaine précision malgré la présence du bruit ω . Cette précision sera déterminée de façon optimale. Sa valeur dépend des paramètres du système en question. L'observateur proposé est présenté comme suit :

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bf(\hat{x}, y, u) + K(y - C\hat{x}) \quad (2.50)$$

Problème de conception d'observateur H_∞ robuste :

Étant donné le système (2.49) et l'observateur (2.50), le problème de conception d'observateur H_∞ robuste revient à déterminer la matrice K telle que les conditions suivantes soient vérifiées :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = 0 \text{ pour } \omega(t) = 0 \quad (2.51)$$

$$\|\varepsilon(t)\|_{L_2} \leq \lambda \|\omega(t)\|_{L_2} \text{ pour } \omega(t) \neq 0 \text{ et } \varepsilon(0) = 0. \quad (2.52)$$

où $\varepsilon = x - \hat{x}$ représente l'erreur d'estimation et λ un scalaire positif à déterminer.

Afin de satisfaire les conditions (2.51) et (2.52), il suffit de faire appel à la théorie de Lyapunov. Il s'agit de trouver une fonction de Lyapunov V telle que

$$\dot{V} + \varepsilon^T \varepsilon - \lambda^2 \omega^T \omega < 0 \quad (2.53)$$

L'expression de la dynamique de l'erreur s'écrit, après transformation en LPV à l'aide du DMVT, comme suit :

$$\dot{\varepsilon} = \left(\mathcal{A}(h(t)) - KC \right) \varepsilon + \left(W_1 - KW_2 \right) \omega. \quad (2.54)$$

où $\mathcal{A}(\cdot)$ et $h(\cdot)$ ont été définis dans (2.9). Sous l'hypothèse (2.2.4) ($h(\cdot)$ borné), l'analyse de la stabilité a donné lieu au théorème suivant :

Théorème 2.3.1. ([123]) *Le problème H_∞ , défini par (2.51)-(2.52), lié au système (2.49) et à l'observateur (2.50) est soluble s'il existe un scalaire positif λ et deux matrices $P = P^T > 0$ et R de dimensions appropriées, solutions du problème d'optimisation convexe suivant :*

$$\text{Min } (\mu = \lambda^2) \text{ sous contrainte } \text{Block-Diag} \left(\Gamma(\alpha^1), \Gamma(\alpha^2), \dots, \Gamma(\alpha^{2^{qn}}) \right) < 0, \alpha^j \in \mathcal{V}_{\mathcal{H}_{q,n}}. \quad (2.55)$$

avec

$$\Gamma(\alpha^j) = \begin{bmatrix} \mathcal{A}^T(\alpha^j)P - C^T R + P \mathcal{A}(\alpha^j) - R^T C + I_n & P W_1 - R^T W_2 \\ (\star) & -\lambda^2 I_s \end{bmatrix}, \quad (2.56)$$

où $\mathcal{V}_{\mathcal{H}_{q,n}}$ est défini dans (2.2.1).

Une fois que (2.55) est résolu, le gain K sera donné par $K = P^{-1} R^T$. ■

Démonstration : Il suffit de trouver une fonction de Lyapunov V telle que l'inégalité (2.53) soit vérifiée. La fonction de Lyapunov candidate est

$$V = \varepsilon^T P \varepsilon.$$

Après calcul de la dérivée de V , on obtient

$$\dot{V} + \varepsilon^T \varepsilon - \lambda^2 \omega^T \omega = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \omega \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathcal{M}(P, K, h(t)) & P(W_1 - KW_2) \\ (\star) & -\lambda^2 I_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \omega \end{bmatrix}.$$

avec

$$\mathcal{M}(P, K, h(t)) = \left(\mathcal{A}(h(t)) - KC \right)^T P + P \left(\mathcal{A}(h(t)) - KC \right) + I_n.$$

En effectuant le changement de variable $R = K^T P$, on déduit que

$$\dot{V} + \varepsilon^T \varepsilon - \lambda^2 \omega^T \omega = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \omega \end{bmatrix}^T \Gamma(h(t)) \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \omega \end{bmatrix}$$

où

$$\Gamma(h(t)) = \begin{bmatrix} \mathcal{A}(h(t))^T P - C^T R + P \mathcal{A}(h(t)) - R^T C + I_n & P W_1 - R^T W_2 \\ (\star) & -\lambda^2 I_s \end{bmatrix}$$

Comme la matrice $\mathcal{A}(\cdot)$ est convexe en $h(\cdot)$, $\Gamma(\cdot)$ l'est aussi, et d'après le principe de convexité, l'inégalité (2.53) est vérifiée si la matrice $\Gamma(\alpha)$ est définie négative pour tout $\alpha \in \mathcal{V}_{\mathcal{H}_{q,n}}$, ce qui est équivalent à

$$\text{Block-Diag}\left(\Gamma(\alpha^1), \Gamma(\alpha^2), \dots, \Gamma(\alpha^{2^{qn}})\right) < 0, \quad \alpha^j \in \mathcal{V}_{\mathcal{H}_{q,n}}. \quad (2.57)$$

L'obtention d'une meilleure précision revient à minimiser le niveau de performance λ sous la contrainte (2.57), ce qui mène au problème d'optimisation convexe (2.55). $\square$

2.4 Extension au cas des systèmes à entrées inconnues

L'objectif de cette section est de généraliser l'approche basée sur le DMVT au cas des systèmes à entrées inconnues. Le problème considéré ici concerne l'estimation simultanée de l'état et des entrées inconnues. La généralisation proposée permet d'améliorer l'approche proposée dans [28] en terme de faisabilité des conditions de synthèse. En effet, les conditions établies dans [28] semblent ne pas être directes à cause du choix *a priori* d'une certaine matrice stable qui permet de linéariser les conditions de convergence. En revanche, la méthode proposée dans cette section fournit directement des conditions de synthèse sous forme de LMIs.

On considère la classe de systèmes dynamiques dont le modèle est le suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + f(x, u, y) \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad (2.58)$$

où $u \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur des entrées inconnues à estimer simultanément avec l'état $x \in \mathbb{R}^n$ du système. La fonction non linéaire $f(x, u, y) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \mapsto \mathbb{R}^n$ est différentiable par rapport à x et u . La matrice D est de plein rang colonne.

Afin de définir la classe des systèmes concernés, nous avons besoin d'introduire l'hypothèse suivante :

Hypothèse 2.4.1. Supposons que la fonction $f(\cdot, \cdot, \cdot)$ satisfasse la condition suivante :

$$\underline{\rho}_{ij} \leq \frac{\partial f_i}{\partial \zeta_j}(\zeta, y) \leq \bar{\rho}_{ij}, \quad \forall \zeta \in \mathbb{R}^{n+m}, y \in \mathbb{R}^p, i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, n+m \quad (2.59)$$

où

$$\zeta = \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}.$$

■

Notons que cette hypothèse n'est pas restrictive. En effet, elle est satisfaite pour la plupart des systèmes chaotiques. D'autre part, cette hypothèse peut être considérée comme une reformulation de la condition de Lipschitz. Cette reformulation permet d'aboutir à des conditions de

synthèse moins restrictives que celles obtenues, en utilisant directement la propriété de Lipschitz avec des majorations de types inégalités de *Cauchy-Schwartz* et les inégalités de *Young*. Afin de simplifier la présentation, nous préservons les mêmes notations que [28].

$$E = \begin{bmatrix} I_n & 0 \end{bmatrix} \quad (2.60a)$$

$$M = \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} \quad (2.60b)$$

$$H = \begin{bmatrix} C & D \end{bmatrix}. \quad (2.60c)$$

Puisque D est de plein rang colonne, alors la matrice $\left(\begin{bmatrix} E \\ H \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} E \\ H \end{bmatrix} \right)^{-1}$ existe.

Posons à présent

$$\begin{bmatrix} P & Q \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} E \\ H \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} E \\ H \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} E \\ H \end{bmatrix}^T \quad (2.61)$$

avec P et Q sont des matrices réelles de dimensions respectives $(n+m) \times n$ et $(n+m) \times p$. Nous déduisons de (2.61) que

$$PE + QH = I_{n+m}. \quad (2.62)$$

La structure de l'observateur d'état que nous considérons ici est de la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{z} = Nz + Ly + Pf(z + Qy, y) \\ \hat{\zeta} = z + Qy \end{cases} \quad (2.63)$$

où $\hat{\zeta}$ dénote l'estimé de ζ .

L'objectif est de trouver des conditions qui permettent de synthétiser les matrices N et L telles que $\hat{\zeta}$ converge asymptotiquement vers ζ , ce qui mène à estimer simultanément l'état du système (2.58) et l'entrée inconnue u .

Considérons, maintenant, le vecteur d'erreur

$$\varepsilon = \hat{\zeta} - \zeta. \quad (2.64)$$

Compte tenu du fait que $y = H\zeta$, nous obtenons :

$$\varepsilon = z + (QH - I_{n+m})\zeta. \quad (2.65)$$

De même, d'après (2.58), l'équation de l'erreur devient

$$\dot{\varepsilon} = z - PE\zeta. \quad (2.66)$$

Après quelques transformations, la dynamique de l'erreur s'écrit :

$$\dot{\varepsilon} = N\varepsilon + (N + FH - PM)\zeta + P\delta f \quad (2.67)$$

avec

$$\delta f = f(\hat{\zeta}, y) - f(\zeta, y) \quad (2.68)$$

et

$$F = L - NQ. \quad (2.69)$$

Si nous prenons

$$N = PM - FH \quad (2.70)$$

alors la dynamique de l'erreur devient

$$\dot{\varepsilon} = (PM - FH)\varepsilon + P\delta f. \quad (2.71)$$

En utilisant le DMVT [124], nous transformons le système (2.71) en un système LPV. Par conséquent, d'après le Théorème 2.2.3 (le DMVT), $\exists \eta_i \in Co(\zeta, \hat{\zeta})$ pour tout $i = 1, \dots, n$, tels que :

$$\delta f = \left(\sum_{i,j=1}^{n,n+m} H_{ij} \frac{\partial f_i}{\partial \zeta_j}(\eta_i, y) \right) \varepsilon. \quad (2.72)$$

où

$$H_{ij} = e_n(i)e_n^T(j), \quad i, j = 1, \dots, n+m.$$

En utilisant les notations

$$\rho_{ij}(t) = \frac{\partial f_i}{\partial \zeta_j}(\eta_i, y) \quad (2.73a)$$

$$\rho(t) = \left(\rho_{11}(t), \dots, \rho_{1n}(t), \rho_{21}(t), \dots, \rho_{n(n+m)}(t) \right) \quad (2.73b)$$

$$\mathcal{M}(\rho(t)) = PM + \sum_{i,j=1}^{n,n+m} \rho_{ij}(\eta_j, y) PH_{ij}, \quad (2.73c)$$

l'équation de l'erreur devient un système LPV qui s'écrit :

$$\dot{\varepsilon} = (\mathcal{M}(\rho(t)) - FH)\varepsilon. \quad (2.74)$$

Le but est de déterminer la matrice F telle que l'erreur $\varepsilon(t)$ converge asymptotiquement vers zéro.

L'hypothèse 2.4.1 implique que le paramètre $\rho(t)$ évolue dans un domaine borné $\mathcal{H}_{n,m}$ dont les $2^{n(n+m)}$ sommets sont définis par l'ensemble :

$$\mathcal{V}_{\mathcal{H}_{n,m}} = \left\{ \alpha = \left(\alpha_{11}, \dots, \alpha_{n(n+m)} \right) \mid \alpha_{ij} \in \{\underline{\rho}_{ij}, \bar{\rho}_{ij}\} \right\} \quad (2.75)$$

où

$$\bar{\rho}_{ij} = \max_t \left(\rho_{ij}(t) \right) \text{ et } \underline{\rho}_{ij} = \min_t \left(\rho_{ij}(t) \right).$$

A ce stade, nous énonçons un théorème qui fournit les conditions de synthèse des matrices N et L de l'observateur (2.63).

Théorème 2.4.2. ([120]) *L'erreur $\varepsilon(t)$ converge asymptotiquement vers zéro s'il existe des matrices $S = S^T > 0$ et R de dimensions appropriées telles que les LMIs suivantes soient solubles :*

$$\mathcal{M}^T(\alpha)S - H^T R + S\mathcal{M}(\alpha) - R^T H < 0, \forall \alpha \in \mathcal{V}_{\mathcal{H}_n}. \quad (2.76)$$

Après résolution de ces LMIs, les matrices F , N et L sont données par :

$$F = S^{-1}R^T \quad (2.77)$$

$$N = PM - FH \quad (2.78)$$

$$L = F + NQ \quad (2.79)$$

■

Démonstration : La preuve de ce théorème est identique à celle du Théorème (2.2.5). Il suffit de remplacer dans ce dernier les matrices $\mathcal{A}(\cdot)$, C , P par $\mathcal{M}(\cdot)$, H , S respectivement. □

Remarque 2.4.3. *En terme de comparaison avec le résultat présenté dans [28], nous citons les avantages suivants :*

1. *La méthode proposée est systématique. En effet, les gains N et L de l'observateur sont donnés directement par les LMIs proposées (2.76).*
2. *Analytiquement, nous pouvons montrer que les conditions (2.76) sont moins contraignantes que celles données dans [28]. En effet, avec l'approche proposée ici, on a l'équivalence entre les conditions (2.76) et $\dot{V}(\varepsilon) < 0$, $\forall \varepsilon \neq 0$.*

■

2.5 DMVT et Observateur de Luenberger Généralisé (OLG)

Récemment, une nouvelle conception d'observateurs pour une classe de systèmes non linéaires a été présentée dans [4] et [44]. Cette conception consiste à ajouter à l'observateur de Luenberger un deuxième gain dans la partie non linéaire du système. La condition de stabilité exprimée en terme de LMI n'est pas restrictive. La technique est appliquée à une classe de systèmes dont la non-linéarité est monotone et multi-variables. Le seul inconvénient est la présence d'un élément nul sur la diagonale de la LMI obtenue. En effet, cet élément impose à un certain terme dépendant des variables d'être nul, ce qui est souvent difficile à satisfaire. Cet obstacle a été surmonté dans [6]. En revanche, ceci ne concerne qu'une classe restreinte de systèmes pour lesquels la non-linéarité est une fonction scalaire à variable scalaire.

Dans cette section, en faisant intervenir le DMVT, nous avons pu améliorer les travaux concernant cette nouvelle technique. La méthode proposée ici traite la non-linéarité du système composante par composante et exploite les bornes des éléments de la jacobienne quand elles existent.

2.5.1 Position du problème

Considérons la classe des systèmes non linéaires suivante :

$$\dot{x} = Ax + Bf(x, y, u) \quad (2.80a)$$

$$y = Cx \quad (2.80b)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état du système, $u \in \mathbb{R}^m$ le vecteur d'entrée et $y \in \mathbb{R}^p$ le vecteur de sortie. A , B et C sont des matrices constantes de dimensions appropriées. La fonction f est différentiable par rapport à x et s'écrit sous la forme générale suivante :

$$f(x, y, u) = \begin{bmatrix} f_1(H_1 x, y, u) \\ \vdots \\ f_q(H_q x, y, u) \end{bmatrix} \quad (2.81)$$

avec $H_i \in \mathbb{R}^{s_i \times n}$ pour tout $i \in \{1, \dots, q\}$. Sans perte de généralité, nous supposons que la matrice B est de plein rang colonne et que $f_i \neq f_j$ pour tout $i \neq j$.

On introduit l'hypothèse suivante :

Hypothèse 2.5.1. Supposons que les fonctions $f_i, i = 1, \dots, q$, satisfont la double inégalité ci-après :

$$a_{ij} \leq \frac{\partial f_i}{\partial v_j^i}(v^i, y, u) \leq b_{ij}, \forall v^i \in \mathbb{R}^{s_i}, y \in \mathbb{R}^p, u \in \mathbb{R}^m \quad (2.82)$$

où

$$v^i = H_i x.$$

■

Remarque 2.5.2. Sans perte de généralité, nous supposons que $a_{ij} = 0$ pour tout $i = 1, \dots, q$ et $j = 1, \dots, s$, où $s = \max_{1 \leq i \leq q} (s_i)$. En effet, s'il existe deux sous ensembles $S_1 \subset \{1, \dots, q\}$ et $S_2 \subset \{1, \dots, s\}$ tels que $a_{ij} \neq 0$ pour tout $(i, j) \in S_1 \times S_2$, alors nous pourrions considérer une nouvelle fonction

$$\tilde{f}(x, y, u) = f(x, y, u) - \left(\sum_{(i,j) \in S_1 \times S_2} a_{ij} H_{ij} H_i \right) x$$

avec

$$H_{ij} = e_q(i) e_{s_i}^T(j).$$

La fonction $\tilde{f}$ satisfait (2.82) avec $\tilde{a}_{ij} = 0$ et $\tilde{b}_{ij} = b_{ij} - a_{ij}$. Dans ce cas, nous écrirons alors (2.80) comme suit :

$$\dot{x} = \tilde{A}x + B\tilde{f}(x, y, u)$$

avec

$$\tilde{A} = A + B \sum_{(i,j) \in S_1 \times S_2} a_{ij} H_{ij} H_i.$$

■

L'observateur d'état que nous proposons ici a la structure suivante :

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + B\bar{f}(\hat{x}, y, u) + L(y - C\hat{x}) \quad (2.83a)$$

$$\bar{f}_i(\hat{x}, y, u) = f_i(H_i\hat{x} + K_i(y - C\hat{x}), y, u) \quad (2.83b)$$

où $\bar{f}_i$ représente la $i^{\text{ème}}$ composante de $\bar{f}$.

Le but principal est de trouver les matrices $L \in \mathbb{R}^{n \times p}$ et $K_i \in \mathbb{R}^{s_i \times p}$ pour $i = 1, \dots, q$, telles que l'erreur d'estimation

$$\varepsilon = x - \hat{x} \quad (2.84)$$

soit asymptotiquement stable.

La dynamique de l'erreur (2.84) est donnée par :

$$\dot{\varepsilon} = (A - LC)\varepsilon + B(f(x, y, u) - \bar{f}(\hat{x}, y, u)) \quad (2.85)$$

En utilisant le DMVT (voir Théorème 2.2.3) nous déduisons qu'il existe $z_i \in Co(v^i, w^i)$ pour tout $i = 1, \dots, q$ tels que :

$$f(x, y, u) - \bar{f}(\hat{x}, y, u) = \sum_{i=1}^{i=q} \sum_{j=1}^{j=s_i} h_{ij}(t) H_{ij} \chi_i \quad (2.86)$$

où

$$\chi_i = (H_i - K_i C)\varepsilon \quad (2.87a)$$

$$H_{ij} = e_q(i) e_{s_i}^T(j) \quad (2.87b)$$

$$h_{ij}(t) = \frac{\partial f_i}{\partial v_j^t}(z_i(t), y, u) \quad (2.87c)$$

$$v^i = H_i x, \quad w^i = H_i \hat{x} + K_i(y - C\hat{x}) \quad (2.87d)$$

$$v^i - w^i = (H_i - K_i C)\varepsilon. \quad (2.87e)$$

En utilisant les notations (2.87a), (2.87b), (2.87c), (2.87d), (2.87e), la dynamique de l'erreur d'estimation (2.85) devient :

$$\dot{\varepsilon} = (A - LC)\varepsilon + B \sum_{i=1}^{i=q} \sum_{j=1}^{j=s_i} h_{ij}(t) H_{ij} \chi_i. \quad (2.88)$$

2.5.2 Synthèse d'observateur

Nous présentons la méthode de synthèse des gains de l'observateur assurant la convergence exponentielle de l'erreur d'estimation vers zéro. L'analyse de la stabilité est étudiée en utilisant la théorie de Lyapunov qui permet d'obtenir des conditions exprimées sous forme de LMIs.

Théorème 2.5.3. ([125]) *L'erreur d'estimation (2.84) converge exponentiellement vers zéro s'il existe un scalaire positif α et des matrices $P = P^T > 0$, R , K_i , $i = 1, \dots, q$ de dimensions appropriées*

tels que l'inégalité linéaire matricielle suivante soit satisfaite :

$$\begin{bmatrix} \mathcal{M}(P, R, \alpha) & \mathcal{N}_1(P, K_1) & \cdots & \mathcal{N}_{s_q}(P, K_q) \\ (\star) & -\beta_{11}I_{s_1} & 0 & \cdots \\ \vdots & \cdots (\star) & \ddots & 0 \cdots \\ (\star) & \cdots & (\star) & -\beta_{q s_q}I_{s_q} \end{bmatrix} \leq 0 \quad (2.89a)$$

(2.89b)

$$\mathcal{M}(P, R, \alpha) = A^T P + P A - C^T R - R^T C + \alpha I_n \quad (2.89c)$$

$$\mathcal{N}_j(P, K_i) = P B H_{ij} + (H_i - K_i C)^T \quad (2.89d)$$

$$\beta_{ij} = \frac{2}{b_{ij}}. \quad (2.89e)$$

Le gain L est alors donné par $L = P^{-1} R^T$ et les gains K_i sont des solutions libres de la LMI (2.89a).

■

Démonstration : Considérons la fonction de Lyapunov quadratique candidate

$$V = \varepsilon^T P \varepsilon.$$

La dérivée de V s'écrit :

$$\dot{V} = \varepsilon^T \left[(A - LC)^T P + P(A - LC) \right] \varepsilon + 2\varepsilon^T P B \sum_{i=1}^{i=q} \sum_{j=1}^{j=s_i} h_{ij}(t) H_{ij} \chi_i$$

D'après (2.82) nous savons que

$$\frac{1}{h_{ij}(t)} \geq \frac{1}{b_{ij}} \text{ pour tout } i = 1, \dots, q \text{ et } j = 1, \dots, s_i.$$

Alors

$$(h_{ij}(t)\chi_i)^T (h_{ij}(t)\chi_i) \left(\frac{1}{h_{ij}(t)} - \frac{1}{b_{ij}} \right) \geq 0$$

ce qui implique

$$\chi_i^T (h_{ij}(t)\chi_i) - \frac{1}{b_{ij}} (h_{ij}(t)\chi_i)^T (h_{ij}(t)\chi_i) \geq 0.$$

En posant

$$\zeta_{ij} = h_{ij}(t)\chi_i,$$

nous obtenons l'inégalité

$$\sum_{i=1}^{i=q} \sum_{j=1}^{j=s_i} \left(\chi_i^T \zeta_{ij} - \frac{1}{b_{ij}} \zeta_{ij}^T \zeta_{ij} \right) \geq 0. \quad (2.90)$$

Donc, d'après (2.90) nous avons

$$\dot{V} \leq \dot{V} + 2 \sum_{i=1}^{i=q} \sum_{j=1}^{j=s_i} \left(\chi_i^T \zeta_{ij} - \frac{1}{b_{ij}} \zeta_{ij}^T \zeta_{ij} \right) \quad (2.91)$$

En utilisant (2.87a), l'inégalité (2.91) est équivalente à

$$\dot{V} + \alpha \|\varepsilon\|^2 \leq \begin{bmatrix} \varepsilon^T & \zeta^T \end{bmatrix} \mathbb{M} \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \zeta \end{bmatrix} \quad (2.92)$$

avec

$$\mathbb{M} = \begin{bmatrix} \mathcal{M}(P, R, \alpha) & \mathcal{N}_1(P, K_1) & \cdots & \mathcal{N}_{s_q}(P, K_q) \\ (\star) & -\beta_{11} I_{s_1} & 0 & \cdots \\ \vdots & \cdots (\star) & \ddots & 0 \cdots \\ (\star) & \cdots & (\star) & -\beta_{qs_q} I_{s_q} \end{bmatrix}$$

et

$$\zeta = [\zeta_{11}, \dots, \zeta_{1s_1}, \zeta_{21}, \dots, \zeta_{qs_q}]^T.$$

Puisque (2.89a) implique $\mathbb{M} \leq 0$ alors

$$\dot{V} \leq -\alpha \|\varepsilon\|^2. \quad (2.93)$$

D'après (2.93) et le fait que

$$\lambda_{\min}(P) \|\varepsilon\|^2 \leq V \leq \lambda_{\max}(P) \|\varepsilon\|^2,$$

on déduit que

$$\|\varepsilon(t)\| \leq \gamma \|\varepsilon(0)\| e^{-\beta t} \quad (2.94)$$

avec

$$\gamma = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}}, \quad \beta = \frac{\alpha}{2\lambda_{\max}(P)}.$$

L'inégalité (2.94) signifie que l'erreur d'estimation converge exponentiellement vers zéro. Ceci complète la preuve du Théorème 2.5.3. $\square$

Remarque 2.5.4. Dans l'inégalité (2.82) on peut avoir $b_{ij} = +\infty$. Dans ce cas, l'inégalité (2.89a) est satisfaite si $PBH_{ij} + (H_i - K_i C)^T = 0$. Cependant, pour tout $i \in \{1, \dots, q\}$ fixe, pour que (2.89a) soit vérifiée il est nécessaire d'avoir un seul indice j pour lequel $b_{ij} = +\infty$. En effet, considérons deux indices j_1 et j_2 tels que $b_{ij_1} = b_{ij_2} = +\infty$. Ceci signifie que :

$$PBH_{ij_1} + (H_i - K_i C)^T = 0$$

$$PBH_{ij_2} + (H_i - K_i C)^T = 0$$

ce qui implique que $PB(H_{ij_1} - H_{ij_2}) = 0$. En utilisant la définition des H_{ij} , nous déduisons que cette dernière égalité est satisfaite si et seulement si la $i^{\text{ème}}$ colonne de la matrice B est nulle, ce qui contredit le fait que B est de plein rang colonne. $\blacksquare$

2.5.3 Exemple numérique

Afin de valider les performances de la méthode proposée, nous présentons un exemple numérique pour lequel les méthodes développées dans [4], [6], [5], [3], [43], [44] et [124] ne sont pas applicables à cause de la non faisabilité des conditions de synthèse. L'exemple est choisi de façon à avoir un terme $b_{ij} = +\infty$. Notons que la plupart des approches développées dans la littérature ne peuvent pas traiter cet exemple. En effet, le système proposé n'est ni lipschitzien ni à état borné. Il comporte deux composantes non linéaires, la première est monotone, et la seconde lipschitzienne. Ce système s'écrit sous la forme (2.80) avec les paramètres suivants :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$H_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$f_1(H_1x, y, u) = \frac{1}{3}(x_1 - x_2)^3,$$

$$f_2(H_2x, y, u) = 0.1 \sin(x_1) \sin(x_3).$$

En utilisant l'approche proposée, on obtient :

$$0 \leq h_{11}(t) \leq +\infty,$$

$$-0.1 \leq h_{21}(t) \leq 0.1,$$

$$-0.1 \leq h_{22}(t) \leq 0.1,$$

$$H_{11} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad H_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad H_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

D'après la Remarque 2.5.2, nous devons résoudre la LMI (2.89a) avec

$$\tilde{A} = A + a_{21}BH_{21}H_2 + a_{22}BH_{22}H_2,$$

et

$$\tilde{b}_{21} = b_{21} - a_{21}, \quad \tilde{b}_{22} = b_{22} - a_{22}.$$

Après la résolution de la LMI (2.89a), nous avons les gains suivants :

$$P = \begin{bmatrix} 10 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 3 & 8 & 4 \end{bmatrix}^T,$$

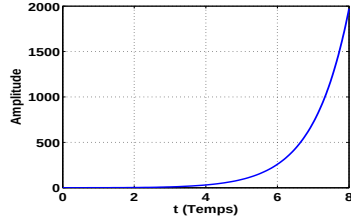
$$K_1 = -1, \quad K_2 = \begin{bmatrix} 0.49 & -0.54 \end{bmatrix}^T.$$

Comme $b_{11} = +\infty$, nous devons avoir $PBH_{11} + (H_1 - K_1C)^T = 0$, ce qui est bien le cas.

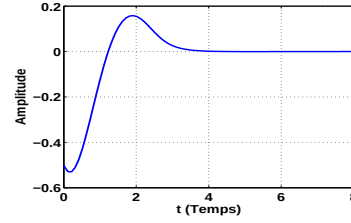
En effet,

$$PBH_{11} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ et } (H_1 - K_1 C)^T = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = -PBH_{11}.$$

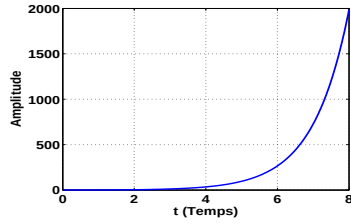
Le comportement asymptotique de l'erreur et de l'état du système est représenté à la Figure 2.3.



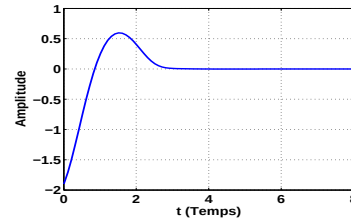
(a) La composante x_1 de l'état du système.



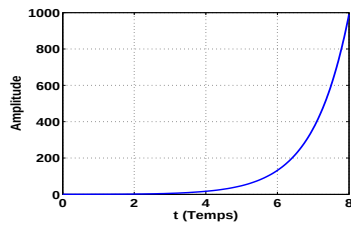
(b) La convergence de $(x_1 - \hat{x}_1)$.



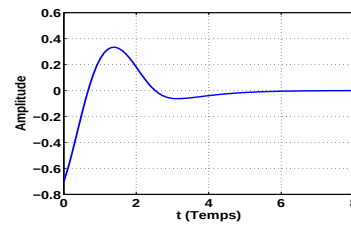
(c) La composante x_2 de l'état du système.



(d) La convergence de $(x_2 - \hat{x}_2)$.



(e) La composante x_3 de l'état du système.



(f) La convergence de $(x_3 - \hat{x}_3)$.

FIG. 2.3 – Exemple 1 : Comportement asymptotique de l'erreur et de l'état du système.

2.5.4 Cas des systèmes à entrées inconnues

Comme dans la section 2.4, cette méthode utilisant un observateur de type Luenberger généralisé, peut facilement être généralisée au cas des systèmes à entrées inconnues.

Pour éviter les répétitions, nous reprenons le même modèle de systèmes (2.58) et les mêmes notations (2.60)-(2.61) que la section 2.4. La fonction $f(x, u, y)$ peut toujours être mise sous la forme :

$$f(x, u, y) = \begin{bmatrix} f_1(H_1 x, F_1 u, y) \\ \vdots \\ f_n(H_n x, F_n u, y) \end{bmatrix}, \quad H_i \in \mathbb{R}^{s_i \times n}, \quad F_i \in \mathbb{R}^{r_i \times m}. \quad (2.95)$$

L'observateur proposé s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{z} = Nz + Ly + P\bar{f}(\hat{\zeta}, y) \\ \bar{f}_i(\hat{\zeta}, y) = f_i(v^i, y), \quad i = 1, \dots, n \\ v^i = \bar{H}_i \hat{\zeta} + K_i(y - H\hat{\zeta}) \\ \hat{\zeta} = z + Qy \end{cases} \quad (2.96)$$

où

$$\bar{H}_i = \begin{bmatrix} H_i & 0_{s_i \times m} \\ 0_{r_i \times n} & F_i \end{bmatrix}.$$

En utilisant les mêmes transformations (2.64)-(2.70), on obtient la dynamique de l'erreur :

$$\dot{\varepsilon} = (PM - FH)\varepsilon + P\delta f \quad (2.97)$$

avec

$$\delta f = f(\zeta, y) - \bar{f}(\hat{\zeta}, y).$$

En outre, l'utilisation du DMVT permet d'écrire δf sous la forme :

$$\delta f = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{j=1}^{j=s_i+r_i} \bar{h}_{ij}(t) \bar{H}_{ij} \bar{\chi}_i \quad (2.98)$$

où

$$\bar{\chi}_i = (\bar{H}_i - K_i H)\varepsilon \quad (2.99a)$$

$$\bar{H}_{ij} = e_n(i) e_{(s_i+r_i)}^T(j) \quad (2.99b)$$

$$\bar{h}_{ij}(t) = \frac{\partial f_i}{\partial v_j^i}(z_i(t), y) \quad (2.99c)$$

$$v^i = \bar{H}_i \hat{\zeta}, \quad w^i = \bar{H}_i \hat{\zeta} + K_i(y - H\hat{x}) \quad (2.99d)$$

$$w^i = \bar{H}_i \hat{\zeta} + K_i(y - H\hat{x}) \quad (2.99e)$$

$$z_i(t) \in Co(v^i, w^i). \quad (2.99f)$$

La dynamique de l'erreur d'estimation (2.97) devient :

$$\dot{\varepsilon} = (PM - FH)\varepsilon + P \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{j=1}^{j=s_i+r_i} \bar{h}_{ij}(t) \bar{H}_{ij} \bar{\chi}_i. \quad (2.100)$$

Comme dans la section 2.5.1, nous supposons, sans perte de généralité, que les fonctions $h_{ij}(\cdot)$ sont positives bornées, i.e :

$$0 \leq h_{ij}(t) \leq b_{ij}. \quad (2.101)$$

La synthèse des gains N, L et $K_i, i = 1, \dots, n$, est assurée par le théorème suivant :

Théorème 2.5.5. *L'erreur d'estimation converge exponentiellement vers zéro s'il existe un scalaire positif α et des matrices $S = S^T > 0$, R , $K_i, i = 1, \dots, n$ de dimensions appropriées tels que l'inégalité linéaire matricielle suivante soit satisfaite :*

$$\begin{bmatrix} \mathcal{M}(S, R, \alpha) & \mathcal{N}_1(S, K_1) & \cdots & \mathcal{N}_{s_n+r_n}(S, K_n) \\ (\star) & -\beta_{11}I_{s_1+r_1} & 0 & \cdots \\ \vdots & \cdots (\star) & \ddots & 0 \cdots \\ (\star) & \cdots & (\star) & -\beta_{n(s_n+r_n)}I_{s_n+r_n} \end{bmatrix} \leq 0 \quad (2.102a)$$

$$(2.102b)$$

$$\mathcal{M}(S, R, \alpha) = (PM)^T S + S(PM) - H^T R - R^T H + \alpha I_{n+m} \quad (2.102c)$$

$$\mathcal{N}_j(S, K_i) = SP\bar{H}_{ij} + (\bar{H}_i - K_i H)^T \quad (2.102d)$$

$$\beta_{ij} = \frac{2}{b_{ij}}. \quad (2.102e)$$

Les gains K_i sont donnés directement en résolvant la LMI (2.102a). Les matrices F , N et L sont calculés par :

$$F = S^{-1}R^T,$$

$$N = PM - FH$$

et

$$L = F + NQ.$$

■

2.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté deux méthodes de synthèse d'observateurs d'état des systèmes non linéaires. La première utilise le DMVT pour ramener le problème d'estimation d'état d'un système dynamique non linéaire à un problème de stabilité d'un système LPV. En effet, le DMVT intervient au niveau de la dynamique de l'erreur d'estimation, afin de la transformer en un système LPV dont la stabilité asymptotique implique la convergence asymptotique de l'erreur d'estimation vers zéro. Des conditions de stabilité sous forme de LMIs ont été obtenues.

L'utilisation du théorème des accroissements finis au problème d'observation d'état des systèmes

dynamiques non linéaires est une technique possédant deux avantages. Premièrement, elle permet d'améliorer les approches développées dans la littérature dans le sens où les conditions de convergence sont moins contraignantes et faciles à résoudre numériquement vu qu'elles s'expriment sous forme de LMIs. Deuxièmement, cette technique peut être appliquée à une classe large de systèmes non linéaires, tels que les systèmes lipschitziens et les systèmes chaotiques.

La deuxième méthode développée dans ce chapitre est basée sur un observateur de type Luenberger généralisé combiné avec le DMVT. Cette combinaison permet d'améliorer les travaux développés dans la littérature [4], [6], [5], [3], [43], [44]. Une nouvelle condition de synthèse d'observateur moins contraignante a été obtenue. En effet, la non-linéarité du système est traitée d'une façon détaillée (composante par composante) et les bornes de certains éléments de la jacobienne, quand elles existent, ont été exploitées. L'avantage de cette deuxième méthode par rapport à la première (transformation en LPV) se trouve dans le fait qu'elle est applicable à des systèmes de type (2.3) où $x(\cdot)$ et $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\cdot)$ ne sont pas bornés.

Synthèse d'observateurs d'état des systèmes à temps discret

Sommaire

3.1	Introduction	62
3.2	Synthèse d'observateurs à temps discret : première approche	62
3.2.1	Position du problème	62
3.2.2	Synthèse de l'observateur	63
3.2.3	Première amélioration : utilisation de nouvelles fonctions de Lyapunov	65
3.2.4	Deuxième amélioration : utilisation d'un observateur de Luenberger généralisé (OLG)	69
3.2.5	Extension à la restauration d'entrées inconnues	73
3.3	Transformation en LPV à l'aide du DMVT : seconde approche	75
3.3.1	Formulation du Problème	75
3.3.2	Méthode de synthèse d'observateur	77
3.3.3	Exemple numérique	77
3.4	Conclusion	79

3.1 Introduction

Malgré l'intérêt donné, durant ces dernières décennies, au problème d'observation d'état des systèmes non linéaires, peu d'attention a été prêtée aux systèmes à temps discret. On ne trouve dans la littérature qu'un nombre réduit de méthodes destinées à l'étude de cette classe de systèmes. L'une d'entre elles consiste en l'utilisation du filtre de Kalman étendu (EKF) [23], [98], [27]. Dans un contexte déterministe, l'EKF est l'une des techniques d'estimation les plus utilisées, et il s'adresse à une large classe de systèmes. Cependant, il est connu que la stabilité de cet estimateur n'est garantie que localement.

Notons que la plupart des approches concernant la classe des systèmes lipschitziens à temps continu ne peuvent être transposées directement au cas des systèmes à temps discret. En effet, dans la variation de la fonction de Lyapunov, il apparaît un terme additif (positif) empêchant de compléter la procédure de synthèse.

Dans ce chapitre, nous abordons le problème de synthèse d'observateurs d'état des systèmes non linéaires lipschitziens à temps discret. Deux approches sont proposées : la première utilise la condition de Lipschitz conjointement avec l'inégalité classique de Lyapunov. Deux extensions sont établies. La première fait appel à de nouvelles fonctions de Lyapunov et la deuxième exige une nouvelle conception de l'observateur, à savoir un observateur de Luenberger généralisé (OLG). La seconde approche, basée sur le DMVT, est une extension directe de celle développée dans le chapitre 2. Elle permet de réduire le problème d'estimation d'état d'un système non linéaire à un problème de stabilité d'un système LPV.

3.2 Synthèse d'observateurs à temps discret : première approche

3.2.1 Position du problème

Considérons l'ensemble des systèmes non linéaires suivant :

$$x(k+1) = Ax(k) + f(x(k), y(k)) \quad (3.1a)$$

$$y(k) = Cx(k) \quad (3.1b)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état du système et $y \in \mathbb{R}^p$ le vecteur de sortie. A et C sont des matrices constantes de dimensions appropriées. $f(x, y) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \mapsto \mathbb{R}^n$ est une application non linéaire lipschitzienne par rapport à x , c'est-à-dire :

$$\|f(x_1, y) - f(x_2, y)\| \leq \gamma \|x_1 - x_2\| \quad (3.2)$$

pour tout $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ et $\gamma > 0$ indépendant de y .

L'observateur d'état correspondant au système (3.1) est de type Luenberger et il s'écrit de la manière suivante :

$$\hat{x}(k+1) = A\hat{x}(k) + f(\hat{x}(k), y(k)) + L(y(k) - C\hat{x}(k)) \quad (3.3)$$

où $\hat{x}(k)$ est l'état estimé de $x(k)$.

En définissant l'erreur d'estimation par $\varepsilon(k) = x(k) - \hat{x}(k)$ et en utilisant (3.1) et (3.3), la

dynamique de l'erreur d'estimation est décrite par :

$$\varepsilon(k+1) = (A - LC)\varepsilon(k) + \delta f_k \quad (3.4)$$

où

$$\delta f_k = f(x(k), y(k)) - f(\hat{x}(k), y(k)).$$

Le problème de la synthèse de l'observateur (3.3) revient à déterminer le gain constant L , assurant la convergence asymptotique de l'erreur d'estimation vers zéro.

3.2.2 Synthèse de l'observateur

Comme nous l'avons mentionné plus haut, le problème principal dans le cas des systèmes à temps discret est la présence d'un terme additif positif qui apparaît au niveau de la variation de la fonction de Lyapunov. Pour éviter cet obstacle, nous avons utilisé un nouvel artifice de calcul en réécrivant la propriété de Lipschitz autrement. Ceci mène au théorème suivant :

Théorème 3.2.1. ([10]) *L'erreur d'estimation converge asymptotiquement vers l'origine s'il existe deux matrices $P = P^T > 0$ et R de dimensions appropriées et un scalaire positif τ tel que la LMI suivante soit satisfaite :*

$$\begin{bmatrix} -P + \tau\gamma^2 I_n & A^T P - C^T R & A^T P - C^T R \\ (\star) & P - \tau I_n & 0 \\ (\star) & (\star) & -P \end{bmatrix} < 0 \quad (3.5)$$

et alors le gain L est donné par $L = P^{-1}R^T$. ■

Démonstration : Nous allons montrer que sous la condition (3.5) l'erreur d'estimation converge asymptotiquement vers l'origine.

Considérons la fonction de Lyapunov quadratique suivante :

$$V(\varepsilon(k)) = \varepsilon(k)^T P \varepsilon(k).$$

Alors, la variation de la fonction de Lyapunov est :

$$\Delta V = \varepsilon(k)^T \left((A - LC)^T P (A - LC) - P \right) \varepsilon(k) + 2\varepsilon(k)^T (A - LC)^T P \delta f_k + \delta f_k^T P \delta f_k.$$

où

$$\Delta V = V(\varepsilon(k+1)) - V(\varepsilon(k)).$$

La fonction de Lyapunov proposée garantit la stabilité asymptotique de l'erreur d'estimation si

- $V(\varepsilon(k)) > 0$ pour tout $\varepsilon(k) \neq 0$
- $\Delta V < 0$ pour toutes les trajectoires possibles de (3.4).

La condition $V(\varepsilon(k)) > 0$ est satisfaite car la matrice P est définie positive. Donc, il reste à montrer que $\Delta V < 0$.

Nous avons

$$\Delta V = \begin{bmatrix} \varepsilon(k)^T & \delta f_k^T \end{bmatrix} \Omega \begin{bmatrix} \varepsilon(k) \\ \delta f_k \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

où

$$\Omega = \begin{bmatrix} (A - LC)^T P (A - LC) - P & (A - LC)^T P \\ P(A - LC) & P \end{bmatrix}.$$

D'autre part, d'après la condition de Lipschitz (3.2), nous déduisons que

$$\delta f_k^T \delta f_k \leq \gamma^2 \varepsilon(k)^T \varepsilon(k)$$

ce qui est équivalent à

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \varepsilon(k)^T & \delta f_k^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\gamma^2 I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon(k) \\ \delta f_k \end{bmatrix} \leq 0. \quad (3.7)$$

Comme le scalaire Γ est négatif ou nul alors

$$\Delta V \leq \Delta V - \tau \Gamma = \begin{bmatrix} \varepsilon(k)^T & \delta f_k^T \end{bmatrix} \left(\Omega - \tau \begin{bmatrix} -\gamma^2 I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \varepsilon(k) \\ \delta f_k \end{bmatrix}$$

Explicitement, nous avons

$$\Omega_\tau = \Omega - \tau \begin{bmatrix} -\gamma^2 I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (A - LC)^T P (A - LC) - P + \tau \gamma^2 I_n & (A - LC)^T P \\ P(A - LC) & P - \tau I_n \end{bmatrix}.$$

D'où en utilisant le complément de Schur et la notation $PL = R^T$, l'inégalité $\Omega_\tau < 0$ est équivalente à (3.5), ce qui signifie que $\Delta V < 0$ et donc l'erreur d'estimation converge asymptotiquement vers zéro. $\square$

Exemple numérique

Afin de tester notre solution, nous proposons l'exemple numérique défini par les paramètres suivants :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 + aT \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

et

$$f(x(k), y(k)) = \begin{bmatrix} 0 & -ay(k)^2 x_2(k) - y(k)^3 + b \cos(ck) \end{bmatrix}^T,$$

où $a = 0.2$, $b = 5.8$ et $c = 3$.

Notons que cet exemple est le modèle discret du système de *Van Der Pol* obtenu par la méthode de discrétisation d'*Euler* avec un pas de discrétisation $T = 0.01$ seconde. La constante de Lipschitz de f est $\gamma = 0.01$. La LMI (3.5) du Théorème 3.2.1 nous permet de calculer le gain de l'observateur suivant :

$$L = \begin{bmatrix} 1.0649 & 6.3407 \end{bmatrix}^T.$$

La figure 3.1(b) montre la convergence asymptotique de l'erreur d'estimation vers zéro. Le diagramme de phase du système de Van Der Pol est illustré sur la figure 3.1(a).

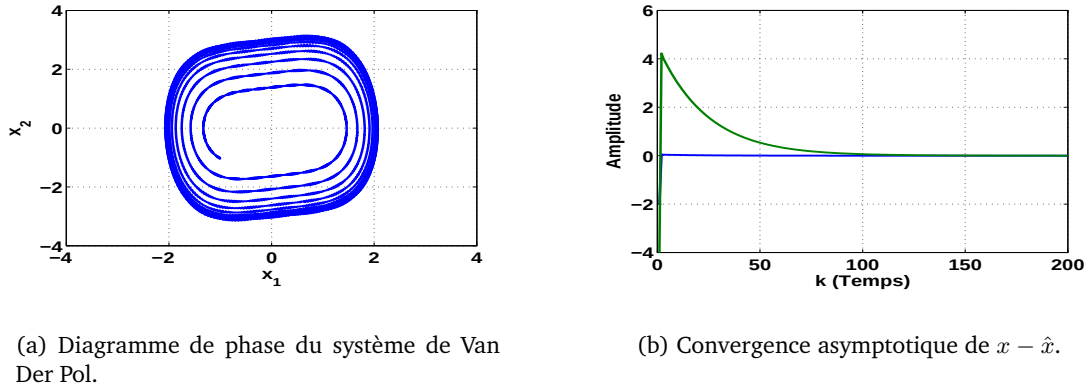


FIG. 3.1 – Exemple 2 : Le comportement asymptotique de l'erreur d'estimation.

Remarque 3.2.2. La condition de synthèse d'observateur présentée dans le Théorème 3.2.1 est obtenue par injection de la condition de Lipschitz dans l'inégalité de stabilité de Lyapunov classique. ■

Remarque 3.2.3. Si la condition LMI du Théorème 3.2.1 est satisfaite, alors les blocs $(1, 1)$ et $(2, 2)$ de (3.5) seront définis négatifs. Ceci signifie que

$$\tau\gamma^2 I_n < P < \tau I_n,$$

ce qui implique que $\gamma < 1$. Cette condition nécessaire réduit l'applicabilité du Théorème 3.2.1 à une classe particulière de systèmes lipschitziens avec une constante de Lipschitz inférieure à 1. C'est le cas de la classe des systèmes ayant une partie non linéaire appelée fonction contractante. ■

Dans la suite de cette section, nous proposons deux améliorations du résultat précédent. La première utilise de nouvelles fonctions de Lyapunov tandis que la deuxième nécessite une nouvelle conception de l'observateur, à savoir un observateur de Luenberger généralisé.

3.2.3 Première amélioration : utilisation de nouvelles fonctions de Lyapunov

Grâce à deux nouvelles fonctions de Lyapunov, nous présentons deux théorèmes qui fournissent des conditions de synthèse d'observateur moins restrictives que celles imposées dans le Théorème 3.2.1.

Théorème 3.2.4. ([121]) L'erreur d'estimation converge asymptotiquement vers l'origine s'il existe des scalaires $\epsilon > 0, \alpha > 0, \beta \in \mathbb{R}$ et des matrices $P = P^T > 0, Q = Q^T$ et R de dimensions

appropriées tel que les inégalités suivantes soient satisfaites :

$$-P + \beta Q + (1 + \epsilon)\alpha\gamma^2 I < 0 \quad (3.8a)$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{\epsilon}{1+\epsilon}P - \frac{\beta}{1+\epsilon}Q & A^T P - C^T R & A^T P - C^T R \\ PA - R^T C & P - \alpha I & 0 \\ PA - R^T C & 0 & -P \end{bmatrix} < 0 \quad (3.8b)$$

Quand les inégalités admettent une solution, alors le gain K sera donné par $L = P^{-1}R^T$. ■

Démonstration : Pour démontrer ce Théorème, nous introduisons la fonction de Lyapunov définie par :

$$V_k = V(\varepsilon(k)) = \varepsilon(k)^T D \varepsilon(k) + \alpha \delta f_k^T \delta f_k$$

où

$$D = \frac{\epsilon}{1+\epsilon}P + \frac{\beta}{1+\epsilon}Q.$$

Nous montrons que sous les conditions (3.8), $V_k > 0$ et $V_{k+1} - V_k < 0$ pour tout $\varepsilon(k) \neq 0$.

La condition $V_k > 0$ est satisfaite. En effet, d'après (3.8b) et le fait que $P = P^T$ et $Q = Q^T$, conduit à ce que $D = D^T > 0$. Puisque $\alpha > 0$ alors $V_k > 0$. Nous avons également

$$\lambda_{\min}(D)\|\varepsilon(k)\|^2 \leq V_k \leq (\lambda_{\max}(D) + \alpha\gamma^2)\|\varepsilon(k)\|^2.$$

Il reste à montrer que la fonction de Lyapunov V_k est strictement décroissante, i.e :

$$\Delta V = V_{k+1} - V_k < 0, \quad \forall \varepsilon(k) \neq 0.$$

On a

$$\Delta V = \varepsilon(k+1)^T D \varepsilon(k+1) + \alpha \delta f_{k+1}^T \delta f_{k+1} - \varepsilon(k)^T D \varepsilon(k) - \alpha \delta f_k^T \delta f_k.$$

D'après (3.8a) et la condition de Lipschitz (3.2), on obtient :

$$\alpha \delta f_{k+1}^T \delta f_{k+1} \leq \alpha\gamma^2 \varepsilon(k+1)^T \varepsilon(k+1) \leq \varepsilon(k+1)^T \left(\frac{1}{1+\epsilon}P - \frac{\beta}{1+\epsilon}Q \right) \varepsilon(k+1).$$

D'où

$$\Delta V \leq \varepsilon(k+1)^T P \varepsilon(k+1) - \varepsilon(k)^T D \varepsilon(k) - \alpha \delta f_k^T \delta f_k. \quad (3.9)$$

En utilisant (3.4) et (3.9), on aura :

$$\Delta V \leq \begin{bmatrix} \varepsilon(k)^T & \delta f_k^T \end{bmatrix} M \begin{bmatrix} \varepsilon(k) \\ \delta f_k \end{bmatrix},$$

avec

$$M = \begin{bmatrix} (A - LC)^T P (A - LC) - D & (A - LC)^T P \\ P(A - LC) & P - \alpha I \end{bmatrix}.$$

Avec la notation $R = L^T P$ et le complément de Schur (voir Annexe A), nous déduisons de (3.8b) que $M < 0$. Donc, $\Delta V < 0$ pour tout $\varepsilon(k) \neq 0$, ce qui complète la preuve du Théorème 3.2.4. $\square$

Synthèse des gains

Dans ce paragraphe, nous fournissons quelques directives pour calculer le gain déduit des inégalités matricielles (3.8). Tout d'abord, notons que dans le Théorème 3.2.4 nous avons obtenu des inégalités matricielles où les inconnues sont : les matrices P, Q et R et les scalaires positifs ϵ, α et β . Après la détermination de P et Q , le gain de l'observateur (3.3) est déduit par $L = P^{-1} R^T$. Afin d'éviter la bilinéarité du problème (problème non convexe), nous procédons comme suit :

1. On fixe *a priori* ϵ et β ;
2. On résout les inégalités (3.8a)-(3.8b) en fonction de P, Q, R et α .

A l'aide d'une autre nouvelle fonction de Lyapunov, nous arrivons à obtenir de nouvelles conditions de synthèse d'observateur énoncées dans le théorème suivant :

Théorème 3.2.5. (voir [121] et [119]) *L'erreur d'estimation converge asymptotiquement vers l'origine s'il existe deux scalaires $\alpha > 0, \beta > 0$ et des matrices $P = P^T > \alpha I_n, Q = Q^T > 0$ et R de dimensions appropriées tel que la LMI suivante soit satisfaite :*

$$\begin{bmatrix} -P + \beta\gamma^2 I_n & \eta(A^T P - C^T R) & 0 & A^T P - C^T R \\ (\star) & \eta P - Q - \beta I_n & 0 & 0 \\ (\star) & (\star) & Q - \alpha I_n & 0 \\ (\star) & (\star) & (\star) & -\frac{1}{\eta} P \end{bmatrix} < 0 \quad (3.10)$$

où

$$\eta = 1 + \gamma^2.$$

■

Démonstration : Considérons la fonction de Lyapunov suivante :

$$V_k = \varepsilon^T(k) P \varepsilon(k) + \delta f_k^T Q \delta f_k.$$

D'après (3.2), nous déduisons que

$$\lambda_1 \|\varepsilon(k)\|^2 \leq V_k \leq \lambda_2 \|\varepsilon(k)\|^2.$$

avec

$$\lambda_1 = \lambda_{\min}(P) \text{ and } \lambda_2 = \lambda_{\max}(P) + \gamma^2 \lambda_{\max}(Q).$$

Après avoir calculé $\Delta V = V_{k+1} - V_k$, on obtient

$$\Delta V = \begin{bmatrix} \varepsilon(k)^T & \delta f_k^T & \delta f_{k+1}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (A - LC)^T P (A - LC) - P & (A - LC)^T P & 0 \\ P(A - LC) & P - Q & 0 \\ 0 & 0 & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon(k) \\ \delta f_k \\ \delta f_{k+1} \end{bmatrix}$$

D'après la condition (3.2)

$$\beta\gamma^2\varepsilon^T(k)\varepsilon(k) - \beta\Delta f_k^T \Delta f_k \geq 0, \quad \forall \beta > 0,$$

ce qui peut se réécrire comme suit :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon(k)^T & \delta f_k^T & \delta f_{k+1}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta\gamma^2 I_n & 0 & 0 \\ 0 & -\beta I_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon(k) \\ \delta f_k \\ \delta f_{k+1} \end{bmatrix} \geq 0. \quad (3.11)$$

De plus, du fait que $P > \alpha I_n$, on a

$$\gamma^2\varepsilon^T(k+1)P\varepsilon(k+1) - \alpha\delta f_{k+1}^T \delta f_{k+1} > \alpha\gamma^2\varepsilon^T(k+1)\varepsilon(k+1) - \alpha\delta f_{k+1}^T \delta f_{k+1} \geq 0.$$

La dynamique de l'erreur (3.4) nous donne :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon(k)^T & \delta f_k^T & \delta f_{k+1}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma^2(A-LC)^T P(A-LC) & \gamma^2(A-LC)^T P & 0 \\ \gamma^2 P(A-LC) & \gamma^2 P & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon(k) \\ \delta f_k \\ \delta f_{k+1} \end{bmatrix} \geq 0. \quad (3.12)$$

Les inégalités (3.11) et (3.12) impliquent :

$$\Delta V \leq \begin{bmatrix} \varepsilon(k)^T & \delta f_k^T & \delta f_{k+1}^T \end{bmatrix} \mathbb{M} \begin{bmatrix} \varepsilon(k) \\ \delta f_k \\ \delta f_{k+1} \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

où

$$\mathbb{M} = \begin{bmatrix} \eta(A-LC)^T P(A-LC) - P + \beta\gamma^2 I_n & \eta(A-LC)^T P & 0 \\ \eta P(A-LC) & \eta P - Q - \beta I_n & 0 \\ 0 & 0 & Q - \alpha I_n \end{bmatrix}.$$

En utilisant le complément de Schur et la notation $L = P^{-1}R^T$, l'inégalité $\mathbb{M} < 0$ est équivalente à (3.10). Par conséquent, $\Delta V < 0$, ce qui signifie que l'erreur d'estimation converge asymptotiquement vers zéro. $\square$

Remarque 3.2.6. Notons que dans les Théorèmes 3.2.5 et 3.2.4, la contrainte $\gamma < 1$ a été éliminée grâce à l'utilisation de nouvelles fonctions de Lyapunov. Cet avantage est illustré numériquement ci-dessous. $\blacksquare$

Exemple numérique

Pour montrer l'intérêt de cette amélioration, nous proposons un exemple pour lequel la constante de Lipschitz est supérieure à 1. Considérons le système décrit par les paramètres suivants :

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2.5 \end{bmatrix}, \quad a = -0.42$$

et

$$f(x(k), y(k)) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{5}{4} \tanh(x_1(k)) \end{bmatrix}^T.$$

La constante de Lipschitz correspondant à ce système est $\gamma = 1.25$.

Il est évident que le Théorème 3.2.1 n'est pas applicable. En effet la condition nécessaire $\gamma < 1$ n'est pas satisfaite. En revanche, l'application du Théorème 3.2.5 nous donne, après la résolution de la LMI (3.10), le gain

$$L = \begin{bmatrix} 0.1247 & 0.0004 \end{bmatrix}^T.$$

L'erreur d'estimation est illustrée dans la Figure 3.2.

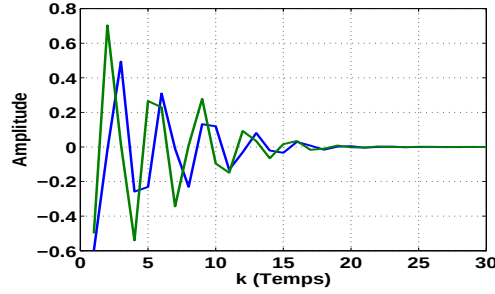


FIG. 3.2 – Le comportement asymptotique de l'erreur d'estimation

3.2.4 Deuxième amélioration : utilisation d'un observateur de Luenberger généralisé (OLG)

Notons que dans le cas des systèmes avec constantes de Lipschitz assez importantes, les conditions de synthèse précédentes deviennent contraignantes dans le sens où elles offrent difficilement des solutions, ceci a été constaté numériquement. Afin de surmonter cet obstacle, nous proposons une autre conception de l'observateur. Une telle conception est appelée *observateur de Luenberger généralisé (OLG)*. Grâce à cette nouvelle structure de l'observateur l'effet de la constante de Lipschitz est éliminé et les conditions de synthèse deviennent non contraignantes. Dans cette section, on modifie légèrement la classe des systèmes (3.1), afin d'avoir une nouvelle forme plus détaillée. L'équation des systèmes à étudier s'écrit donc sous la forme détaillée suivante :

$$x(k+1) = Ax(k) + Bf(Hx(k), y(k)) + c \quad (3.14a)$$

$$y(k) = Cx(k) \quad (3.14b)$$

où B, H sont des matrices de dimensions appropriées, $c \in \mathbb{R}^n$ et f est une fonction non linéaire lipschitzienne de constante de Lipschitz $\gamma > 0$. Les matrices B et H jouent un rôle important sur la faisabilité des conditions de synthèse de l'observateur. B est appelée matrice de distribution de la non-linéarité dans le système et H est la matrice de distribution de l'état dans la non-linéarité du système. Le fait de ne pas spécifier la matrice B signifie qu'au niveau des conditions

de synthèse, il n'y a aucune différence entre un système dont la non-linéarité est présente sur toutes les composantes et un système qui ne possède que quelques composantes non linéaires. De même, l'absence de la matrice H signifie que la méthode de synthèse ne distingue pas un système, dont la non-linéarité dépend de l'état entier, d'un système dont la non-linéarité ne dépend que d'une partie de l'état.

Considérons un OLG correspondant au système (3.14). Cet observateur s'écrit :

$$\hat{x}(k+1) = A\hat{x}(k) + Bf\left(z(k), y(k)\right) + L\left(y(k) - C\hat{x}(k)\right) + c \quad (3.15a)$$

$$z(k) = H\hat{x}(k) + K\left(y(k) - C\hat{x}(k)\right) \quad (3.15b)$$

L'objectif est de trouver les gains K et L tels que l'erreur d'estimation $\varepsilon(k) = x(k) - \hat{x}(k)$ converge asymptotiquement vers zéro. La dynamique de l'erreur d'estimation est donnée par :

$$\varepsilon(k+1) = (A - LC)\varepsilon(k) + B\Delta f_k \quad (3.16)$$

où

$$\Delta f_k = f\left(Hx(k), y(k)\right) - f\left(z(k), y(k)\right)$$

Comme la fonction f est de constante de Lipschitz γ alors nous déduisons que

$$\|\Delta f_k\| \leq \gamma \|(H - KC)\varepsilon(k)\| \quad (3.17)$$

L'introduction du gain K sert à réduire l'effet de la constante de Lipschitz γ .

A ce stade, nous énonçons le théorème ci-après qui fournit les conditions suffisantes de convergence de l'erreur d'estimation vers zéro.

Théorème 3.2.7. ([127]) *L'erreur d'estimation converge asymptotiquement vers zéro s'il existe des scalaires $\alpha > 0, \beta > 0$ et des matrices $P = P^T > 0, Q = Q^T > 0, R$ et K de dimensions appropriées tels que les inégalités suivantes soient satisfaites :*

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{\alpha}I_s & H - KC \\ (H - KC)^T & -P \end{bmatrix} < 0 \quad (3.18)$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{\beta\gamma^2}I_s & H - KC & 0 & 0 & 0 \\ (H - KC)^T & -P & \eta\mathcal{N}(P, R)B & 0 & \mathcal{N}(P, R) \\ 0 & (\star) & \mathcal{L}(P, Q, \beta) & 0 & 0 \\ 0 & (\star) & (\star) & Q - \alpha I_q & 0 \\ 0 & (\star) & (\star) & (\star) & -\frac{1}{\eta}P \end{bmatrix} < 0 \quad (3.19)$$

avec

$$\mathcal{N}(P, R) = A^T P - C^T R \quad (3.20a)$$

$$\mathcal{L}(P, Q, \beta) = \eta B^T P B - Q - \beta I_q \quad (3.20b)$$

$$\eta = 1 + \gamma^2. \quad (3.20c)$$

Quand ces inégalités admettent une solution, le gain L est donné par $L = P^{-1}R^T$ et la matrice K est une solution libre des inégalités (3.18) et (3.19). ■

Démonstration : La preuve de ce théorème est similaire à celle du Théorème 3.2.5. Il suffit d'utiliser convenablement le complément de Schur. La fonction de Lyapunov candidate est

$$V_k = \varepsilon^T(k) P \varepsilon(k) + \Delta f_k^T Q \delta f_k.$$

Le calcul de $\Delta V = V_{k+1} - V_k$ permet d'obtenir

$$\Delta V = \xi_k^T \begin{bmatrix} (A - LC)^T P (A - LC) - P & (A - LC)^T P B & 0 \\ B^T P (A - LC) & B^T P B - Q & 0 \\ 0 & 0 & Q \end{bmatrix} \xi_k \quad (3.21)$$

où

$$\xi_k^T = \begin{bmatrix} \varepsilon^T(k) & \Delta f_k^T & \Delta f_{k+1}^T \end{bmatrix}.$$

D'après (3.17), $\forall \beta > 0$, on a

$$\beta \gamma^2 \varepsilon^T(k) (H - KC)^T (H - KC) \varepsilon(k) - \beta \Delta f_k^T \Delta f_k \geq 0. \quad (3.22)$$

En utilisant le complément de Schur, l'inégalité (3.18) est équivalente à

$$P > \alpha (H - KC)^T (H - KC). \quad (3.23)$$

Les conditions (3.17) et (3.23), impliquent :

$$\gamma^2 \varepsilon^T(k+1) P \varepsilon(k+1) - \alpha \Delta f_{k+1}^T \Delta f_{k+1} \geq 0. \quad (3.24)$$

La combinaison des inégalités (3.22), (3.24) et (3.21) donne l'inégalité suivante :

$$\Delta V \leq \xi_k^T \mathbb{M} \xi_k \quad (3.25)$$

avec

$$\mathbb{M} = \begin{bmatrix} \eta(A - LC)^T P (A - LC) - P + \beta \gamma^2 (H - KC)^T (H - KC) & \eta(A - LC)^T P B & 0 \\ \eta B^T P (A - LC) & \eta B^T P B - Q - \beta I_q & 0 \\ 0 & 0 & Q - \alpha I_q \end{bmatrix}.$$

A l'aide du complément de Schur et la notation $R = L^T P$, l'inégalité $\mathbb{M} < 0$ est équivalente à (3.19).

Par conséquent, sous les conditions (3.18) et (3.19), $\Delta V < 0$, et donc l'erreur d'estimation converge asymptotiquement vers zéro. $\square$

Remarque 3.2.8. Notons que les inégalités (3.18) et (3.19) ne sont pas linéaires par rapport aux inconnues $P, Q, R, K, \alpha, \beta$. Afin de les rendre linéaires, nous proposons de fixer a priori les variables scalaires inconnues $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ ensuite on résout (3.18) et (3.19) en fonction des variables P, Q, R et K pour désigner les gains L et K . Le gain K est une solution directe de (3.18) et (3.19) et $L = P^{-1}R^T$. $\blacksquare$

Exemple numérique

Dans le but de montrer l'efficacité du nouvel observateur, nous proposons un système pour lequel la LMI (3.10) n'est pas satisfaite tandis que l'injection du second gain K et la spécification des deux matrices B et H permettent de réduire l'effet de la constante de Lipschitz. Pour ce faire, nous considérons le système chaotique de Lozi décrit par :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & b \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

et

$$f(Hx, y) = 1 - a|x_1|.$$

Ce système possède un comportement chaotique pour $a = 1.4$ et $b = 0.3$. La constante de Lipschitz de f est $\gamma = a = 1.4$. Il est clair que la LMI (3.10) n'est pas satisfaite. En effet, la constante de Lipschitz est supérieure à 1. De plus, en utilisant la toolbox LMI de MATLAB, la LMI (3.10) a été trouvée insatisfaite. Cependant, à l'aide d'un OLG et la spécification des matrices B et H , la convergence de l'erreur a été établie. Pour $\alpha = \beta = 1$, fixés a priori, les inégalités (3.18) et (3.19) donnent les solutions suivantes :

$$P = \begin{bmatrix} 0.4275 & 0.0390 \\ 0.0390 & 0.7420 \end{bmatrix},$$

$$R = \begin{bmatrix} -0.0249 & 0.4567 \end{bmatrix},$$

$$Q = 0.6781, \quad K = 0.6028$$

et

$$L = \begin{bmatrix} -0.1149 \\ 0.6215 \end{bmatrix}.$$

Le diagramme de phase du système et l'erreur d'estimation sont illustrés dans la Figure 3.3.

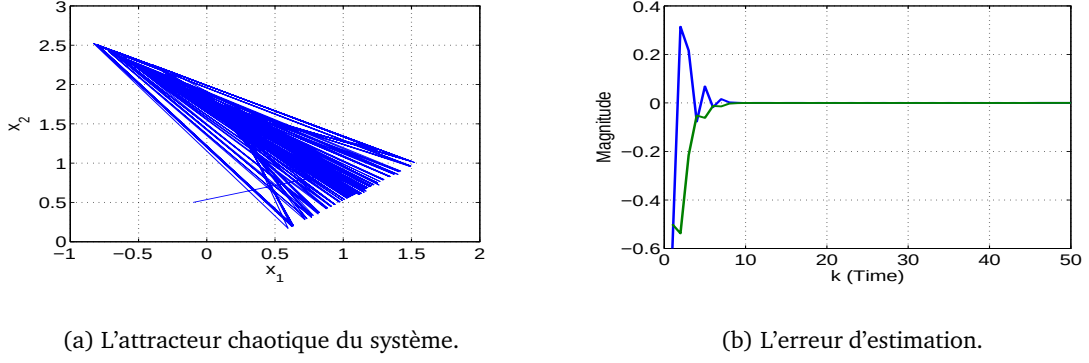


FIG. 3.3 – Le Comportement de l'erreur d'estimation.

3.2.5 Extension à la restauration d'entrées inconnues

Considérons le système à entrées inconnues dont le modèle s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + A_u u(k) + Bf(H_x x(k), H_u u(k), y(k)) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases} \quad (3.26)$$

où $x(k) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $u(k) \in \mathbb{R}^m$ le vecteur des entrées inconnues et $y(k) \in \mathbb{R}^p$ le vecteur de sortie. A, A_u, B, C, D, H_x et H_u sont des matrices constantes de dimensions appropriées. La fonction $f : \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2} \times \mathbb{R}^p \mapsto \mathbb{R}^q$ est lipschitzienne, i.e. :

$$\|f(v, w, y) - f(\hat{v}, \hat{w}, y)\| \leq \kappa_f \left\| \begin{bmatrix} v - \hat{v} \\ w - \hat{w} \end{bmatrix} \right\| \quad (3.27)$$

$\forall v, w, \hat{v}, \hat{w}$ et y . La matrice D est de plein rang colonne, i.e. :

$$\text{rang}(D) = m.$$

Nous introduisons les notations suivantes

$$E = \begin{bmatrix} I_n & 0_{\mathbb{R}^n \times m} \end{bmatrix} \quad (3.28a)$$

$$M = \begin{bmatrix} A & A_u \end{bmatrix} \quad (3.28b)$$

$$H = \begin{bmatrix} C & D \end{bmatrix} \quad (3.28c)$$

$$H_{x,u} = \begin{bmatrix} H_x & 0_{\mathbb{R}^{d_1 \times m}} \\ 0_{\mathbb{R}^{d_2 \times n}} & H_u \end{bmatrix} \quad (3.28d)$$

$$\zeta = \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}. \quad (3.28e)$$

On pose

$$\begin{bmatrix} S & T \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} E \\ H \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} E \\ H \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} E \\ H \end{bmatrix}^T \quad (3.29)$$

avec S et T deux matrices de dimensions $(n+m) \times n$ et $(n+m) \times p$ respectivement.

D'après l'équation (3.29), on a

$$SE + TH = I_{n+m}. \quad (3.30)$$

Notons que ce problème d'observateur d'état à entrées inconnues a été étudié dans [22] en utilisant le filtre de Kalman étendu (EKF) comme observateur d'état. Cependant, il a été prouvé dans [29] que l'EKF n'est que localement stable dans le cas des systèmes non linéaires à temps discret. La méthode de synthèse développée dans la section 3.2.4 permet d'obtenir la convergence globale de l'erreur d'estimation vers zéro. L'observateur proposé est un OLG qui s'écrit :

$$\begin{cases} z(k+1) = Nz(k) + Ly(k) + SBf(v(k), y(k)) \\ v(k) = H_{x,u}\hat{\zeta}(k) + K(y(k) - H\hat{\zeta}(k)) \\ \hat{\zeta}(k) = z(k) + Ty(k) \end{cases} \quad (3.31)$$

L'objectif principal est de déterminer les matrices N , L et K telles que l'erreur

$$\varepsilon(k) = \hat{\zeta}(k) - \zeta(k)$$

converge asymptotiquement vers l'origine.

En reprenant les mêmes développements que dans la section 2.4, nous obtenons

$$\varepsilon(k+1) = N\varepsilon(k) + (N + FH - SM)\zeta(k) + SB\delta f \quad (3.32)$$

où

$$\delta f = f(v(k), y(k)) - f(H_{x,s}\zeta(k), y(k)) \quad (3.33)$$

et

$$F = L - NT. \quad (3.34)$$

Si on pose

$$N = SM - FH \quad (3.35)$$

alors, la dynamique de l'erreur devient

$$\varepsilon(k+1) = (SM - FH)\varepsilon(k) + SB\delta f. \quad (3.36)$$

En s'inspirant des résultats de la section 3.2.4, nous énonçons le théorème suivant :

Théorème 3.2.9. ([127]) *L'erreur d'estimation est asymptotiquement stable s'il existe deux scalaires $\alpha > 0, \beta > 0$ et des matrices $P = P^T > 0, Q = Q^T > 0$ et K de dimensions appropriées*

tels que les inégalités matricielles ci-dessous soient satisfaites :

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{\alpha}I_{(d_1+d_2)} & H_{x,u} - KH \\ (H_{x,u} - KH)^T & -P \end{bmatrix} < 0 \quad (3.37)$$

et

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{\beta\kappa_f^2}I_{(d_1+d_2)} & H_{x,u} - KH & 0 & 0 & 0 \\ (\star) & -P & (SM)^T P(SB) - H^T R(SB) & 0 & (SM)^T P - H^T R \\ (\star) & (\star) & \eta(SB)^T P(SB) - Q - \beta I_q & 0 & 0 \\ (\star) & (\star) & (\star) & Q - \alpha I_q & 0 \\ (\star) & (\star) & (\star) & (\star) & -\frac{1}{\eta}P \end{bmatrix} < 0 \quad (3.38)$$

où $\eta = 1 + \kappa_f^2$.

La matrice F est égale à $P^{-1}R^T$. Les gains N et L sont déduits des équations (3.34) et (3.35) et le gain K est une solution libre des inégalités (3.37) et (3.38). ■

Démonstration : La preuve de ce théorème est similaire à celle du Théorème 3.2.7. □

3.3 Transformation en LPV à l'aide du DMVT : seconde approche

Dans cette section, nous proposons une extension directe de la méthode développée dans la section 2.2 du chapitre 2. Elle utilise le DMVT afin de transformer la dynamique de l'erreur d'estimation en un système LPV. Pour pouvoir comparer cette technique avec les résultats précédents de ce chapitre, nous allons considérer une classe de systèmes lipschitziens. Cependant, la condition de Lipschitz est traduite sous une autre forme.

3.3.1 Formulation du Problème

Considérons la classe des systèmes non linéaires définie par les équations suivantes :

$$x(k+1) = Ax(k) + Bf(x(k), y(k), u(k)) \quad (3.39a)$$

$$y(k) = Cx(k) \quad (3.39b)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état du système, $u \in \mathbb{R}^m$ le vecteur d'entrée et $y \in \mathbb{R}^p$ le vecteur de sortie. A , B et C sont des matrices constantes de dimensions appropriées. $f(x, y, u) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^n$ est une application non linéaire différentiable par rapport à x .

Supposons que la fonction f satisfasse la condition suivante :

$$a_{ij} \leq \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x, y, u) \leq b_{ij}, \quad \forall x, y, u \quad (3.40)$$

pour tout $i = 1, \dots, q$ et $j = 1, \dots, n$.

Il est à noter que la classe des systèmes vérifiant la propriété (3.40) contient une large variété de systèmes traités dans la littérature, à savoir la classe des systèmes lipschitziens différentiables [96], [88], [74], [2], [9], [129].

L'observateur d'état correspondant au système (3.39) est donné par :

$$\hat{x}(k+1) = A\hat{x}(k) + Bf(\hat{x}(k), y(k), u(k)) + L(y(k) - C\hat{x}(k)) \quad (3.41)$$

où $\hat{x}(k)$ représente l'estimé de l'état $x(k)$.

La dynamique de l'erreur d'estimation $\varepsilon(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ s'écrit :

$$\varepsilon(k+1) = (A - LC)\varepsilon(k) + B(f(x(k), y(k), u(k)) - f(\hat{x}(k), y(k), u(k))). \quad (3.42)$$

Toutes les approches développées dans la littérature pour la classe des systèmes lipschitziens reposent sur des majorations fortes en essayant de dominer le terme $f(x(t), y(t), u(t)) - f(\hat{x}(t), y(t), u(t))$, en utilisant directement la condition de Lipschitz. Cette technique de majoration directe fournit des conditions de synthèse restrictives. Pour cela, nous avons établi une nouvelle méthode qui aboutit à des conditions de synthèse moins contraignantes. Cette méthode consiste à utiliser le DMVT qui permet de transformer la dynamique de l'erreur d'estimation en un système LPV. Puisque la fonction f est différentiable par rapport à x , le DMVT est applicable (voir Théorème 2.2.3) sur la fonction $x \mapsto f(x, y, u)$. D'après le Théorème 2.2.3, il existe $z_i(t) \in Co(x(t), \hat{x}(t))$, pour tout $i = 1, \dots, q$, tel que :

$$f(x(k), y(k), u(k)) - f(\hat{x}(k), y(k), u(k)) = \left(\sum_{i,j=1}^{q,n} e_q(i) e_n^T(j) \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(z_i(k), y(k), u(k)) \right) \varepsilon(k).$$

Nous définissons les notations suivantes :

$$h_{ij}(k) = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(z_i(k), y(k), u(k)) \quad (3.43a)$$

$$H_{ij}^q = e_q(i) e_n^T(j) \text{ pour } 1 \leq i \leq q \text{ et } 1 \leq j \leq n \quad (3.43b)$$

$$h = (h_{11}, \dots, h_{1n}, \dots, h_{qn}) \quad (3.43c)$$

$$\mathcal{A}(h(k)) = A + B \sum_{i,j=1}^{q,n} h_{ij}(k) H_{ij}^q. \quad (3.43d)$$

En utilisant ces notations, l'équation de l'erreur d'estimation (3.42) devient :

$$\varepsilon(k+1) = (\mathcal{A}(h(k)) - LC)\varepsilon(k). \quad (3.44)$$

L'équation dynamique (3.44) définit donc un système LPV.

D'après la propriété (3.40), nous déduisons que le vecteur des paramètres $h(k)$ évolue dans un

domaine borné $\mathcal{H}_{q,n}$ pour lequel les 2^q sommets sont définis par :

$$\mathcal{V}_{\mathcal{H}_{q,n}} = \left\{ \alpha = (\alpha_{11}, \dots, \alpha_{1n}, \dots, \alpha_{qn}) \mid \alpha_{ij} \in \{a_{ij}, b_{ij}\} \right\}.$$

3.3.2 Méthode de synthèse d'observateur

En s'inspirant des techniques LPV (voir [11] pour plus de détails), on obtient des conditions suffisantes de convergence de l'erreur d'estimation. Ces conditions, exprimées en terme de LMIs, permettent de synthétiser le gain L . On a le théorème suivant :

Théorème 3.3.1. ([124]) *L'erreur d'estimation $\varepsilon(k)$ converge asymptotiquement vers zéro s'il existe des matrices $P = P^T > 0$ et R de dimensions appropriées telles que les LMIs suivantes soient satisfaites :*

$$\begin{bmatrix} -P & \mathcal{A}^T(\alpha)P - C^T R \\ (\star) & -P \end{bmatrix} < 0, \quad \forall \alpha \in \mathcal{V}_{\mathcal{H}_{q,n}}. \quad (3.45)$$

Quand ces LMIs sont satisfaites, le gain d'observateur L sera donné par $L = P^{-1}R^T$. ■

Démonstration : Considérons la fonction de Lyapunov suivante :

$$V(k) = V(\varepsilon(k)) = \varepsilon^T(k)P\varepsilon(k).$$

La variation de cette fonction s'écrit comme :

$$\Delta V = V(k+1) - V(k) = \varepsilon(k)^T \left((\mathcal{A}(h(k)) - LC)^T P (\mathcal{A}(h(k)) - LC) - P \right) \varepsilon(k).$$

D'après la définition de la stabilité au sens de Lyapunov, ΔV doit être définie négative afin de garantir la convergence asymptotique de l'erreur d'estimation. En utilisant le complément de Schur, $\Delta V < 0$ si

$$F(h(k)) = \begin{bmatrix} -P & \mathcal{A}^T(h(k))P - C^T R \\ (\star) & -P \end{bmatrix} < 0.$$

Le principe de convexité permet de déduire que $\Delta V < 0$ si F est définie négative sur $\mathcal{V}_{\mathcal{H}_{q,n}}$, ce qui est équivalent à l'inégalité (3.45). Comme P est définie positive, nous pouvons calculer le gain L par $P^{-1}R^T$. □

3.3.3 Exemple numérique

Nous illustrons les performances de cette dernière méthode à l'aide du modèle discret du système chaotique de *Lorenz* précédemment étudié dans [74] et [28]. Ce système, obtenu par la méthode de discrétisation d'*Euler*, est décrit par les matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 - 10T & 10T & 0 \\ 28T & 1 - T & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \frac{8}{3}T \end{bmatrix}, \quad B = T \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

et la fonction non linéaire

$$f(x(k), y(k), u(k)) = \begin{bmatrix} y(k)x_3(k) \\ y(k)x_2(k) \end{bmatrix}.$$

où $T = 0.001$ est le pas de discrétisation.

En appliquant l'approche proposée, nous obtenons $h_{ij}(t) = 0$ pour tout $(i, j) \neq (1, 3), (2, 2)$ et $h_{22}(t) = h_{13}(t) = y(t)$ pour tout $t > 0$. Nous avons donc deux LMIs à résoudre avec $a_{22} = -9.1974$ et $b_{22} = 19.9613$. Les LMIs (3.45), nous fournissent le gain

$$L = \begin{bmatrix} 1.4282 & 12.9770 & 1.6781 \end{bmatrix}^T.$$

Les résultats de la simulation numérique sont illustrés par la Figure 3.4.

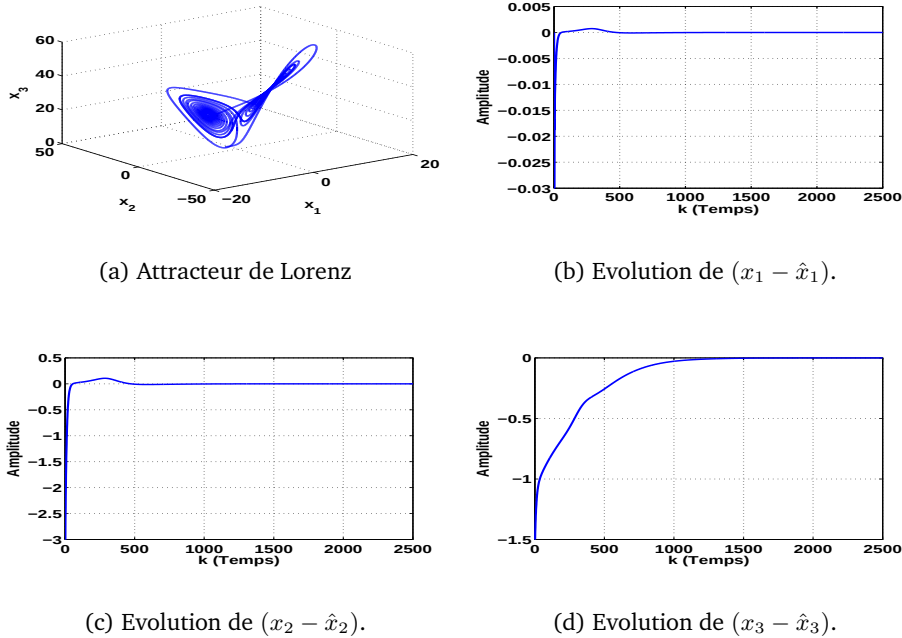


FIG. 3.4 – La convergence asymptotique.

Remarque 3.3.2. Comme dans le Chapitre 2, même dans le cas des systèmes à temps discret, cette méthode de transformation en LPV à l'aide du DMVT peut être étendue à d'autres classes de systèmes non linéaires, à savoir les systèmes à sorties non linéaires, les systèmes non différentiables et les systèmes partiellement affines où l'on peut proposer un gain d'observateur affine. La méthode peut également être généralisée au cas des systèmes avec des incertitudes dans la dynamique et sur la sortie du système. Elle est également extensible à la restauration d'entrées inconnues. ■

3.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté deux approches de synthèse d'observateurs d'état des systèmes non linéaires lipschitziens à temps discret.

La première consiste à utiliser la condition de Lipschitz conjointement avec l'inégalité classique de Lyapunov. Ceci permet d'obtenir un terme positif ainsi ajouté à la variation de la fonction de Lyapunov. Ensuite, deux améliorations ont été établies en utilisant respectivement des nouvelles fonctions de Lyapunov et un observateur de Luenberger généralisé (OLG). Une généralisation au cas des systèmes à entrées inconnues a été également abordée.

La deuxième méthode est basée sur le DMVT qui permet de mettre la dynamique de l'erreur sous une forme LPV. Cette méthode nécessite la traduction de la condition de Lipschitz sous forme de la condition (3.40), afin d'aboutir à des conditions de synthèse moins restrictives.

En utilisant des techniques LPV [12], [11], des conditions de synthèse d'observateur ont été obtenues. Ces conditions sont exprimées sous forme de LMIs non restrictives et faciles à résoudre numériquement.

Extensions aux systèmes à retard

Sommaire

4.1 Introduction	82
4.2 Première méthode : transformation en LPV	82
4.2.1 Formulation du problème	82
4.2.2 Procédure de synthèse d'observateur	84
4.2.3 Cas des systèmes non différentiables	87
4.3 Deuxième méthode : utilisation des OLGs	91
4.3.1 Formulation du problème	91
4.3.2 Synthèse d'observateur	93
4.3.3 Exemple	94
4.4 Systèmes à temps discret	96
4.4.1 Formulation du problème	96
4.4.2 Conditions de synthèse de l'observateur	98
4.5 Conclusion	99

4.1 Introduction

L'analyse et la synthèse des systèmes à retard deviennent de plus en plus des sujets de recherche en constante évolution, comme peut le montrer la littérature abondante. Ceci est principalement dû au fait que le retard est fréquemment rencontré dans les systèmes technologiques et peut affecter leur fonctionnement de manière significative. Dans le cas des systèmes linéaires, l'analyse de la stabilité aussi bien que le problème d'observateurs d'état ont été largement étudiés [26], [27], [21], [48], [90], [82], [68], [67], [109], [94], [17].

Contrairement au cas linéaire, très peu de résultats ont été établis dans le cas non linéaire. Parmi ces quelques résultats, on trouve l'approche développée par *Germani et al.* dans [49] et [50]. Dans [80], une autre méthode a été proposée, en utilisant des preuves élégantes pour l'analyse de la stabilité d'une classe de systèmes à retard. Une approche alternative, présentée dans [1], concerne les systèmes avec des non-linéarités lipschitziennes. Il s'agit d'une généralisation des résultats obtenus pour une classe de systèmes non linéaires standards [95], [96]. Cependant, la condition de synthèse d'observateur semble restrictive.

Dans ce chapitre, on présente deux méthodes de synthèse d'observateurs d'état des systèmes non linéaires à retard. La première est une extension de la technique de transformation en LPV à l'aide du DMVT aux cas des systèmes à retard. Des conditions de synthèse ont été obtenues en utilisant une fonction de Lyapunov-Krasovskii particulière, utilisée antérieurement dans [82] pour les systèmes linéaires. Ces conditions sont exprimées sous forme d'inégalités matricielles qui deviennent par la suite linéaires (LMIs), en fixant *a priori* une variable scalaire inconnue. En terme de faisabilité, les conditions de synthèse obtenues par l'approche proposée sont moins contraignantes que celles établies dans [1] ainsi que celles données par toutes les approches concernant la classe des systèmes lipschitziens.

La deuxième méthode utilise simultanément le DMVT et les observateurs de Luenberger généralisés (OLGs). Avec cette technique, une nouvelle condition de synthèse d'observateurs sous forme de LMI est obtenue. Ce résultat peut être considéré comme une amélioration de la première méthode. En effet, la nouvelle condition de synthèse est applicable même si le système concerné est à jacobienne non bornée, ce qui n'est pas le cas pour la méthode de transformation en système LPV.

4.2 Première méthode : transformation en LPV

4.2.1 Formulation du problème

Considérons la classe des systèmes non linéaires à retard suivante :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_\tau x_\tau(t) + Bf\left(x(t), x_\tau(t), y(t)\right) \quad (4.1a)$$

$$y(t) = Cx(t). \quad (4.1b)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état du système, $u \in \mathbb{R}^m$ le vecteur d'entrée et $y \in \mathbb{R}^p$ le vecteur de sortie. A , A_τ , B et C sont des matrices constantes de dimensions appropriées. La fonction

$f(x, x_\tau, y) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^q$ est différentiable par rapport à $x(t)$ et $x_\tau(t)$ avec

$$x_\tau(t) = x(t - \tau).$$

Pour des raisons de simplicité, on suppose sans perte de généralité que $x(t)$ est constant sur l'intervalle $[-\tau, 0]$.

La classe des systèmes non linéaires concernée est définie par l'hypothèse suivante :

Hypothèse 4.2.1. *Supposons que la fonction non linéaire, f , satisfasse les conditions suivantes :*

$$a_{ij} \leq \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x, x_\tau, y) \leq b_{ij}, \quad \forall x, x_\tau, y \quad (4.2a)$$

$$a_{ij}^\tau \leq \frac{\partial f_i}{\partial x_{\tau j}}(x, x_\tau, y) \leq b_{ij}^\tau, \quad \forall x, x_\tau, y. \quad (4.2b)$$

pour tout $i = 1, \dots, q$ et $j = 1, \dots, n$.

■

Notons ainsi $z_\tau(t) = z(t - \tau)$ pour tout vecteur z .

L'observateur d'état correspondant à (4.1) s'écrit :

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + A_\tau \hat{x}_\tau(t) + Bf(\hat{x}(t), \hat{x}_\tau(t), y(t)) + L(y(t) - \hat{y}(t)) + L_\tau(y_\tau(t) - \hat{y}_\tau(t)) \quad (4.3a)$$

$$\hat{y}(t) = C\hat{x}(t). \quad (4.3b)$$

L'objectif est de trouver deux gains L et L_τ tels que l'erreur d'estimation $\varepsilon(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ converge exponentiellement vers zéro. La dynamique de l'erreur d'estimation est :

$$\dot{\varepsilon}(t) = (A - LC)\varepsilon(t) + (A_\tau - L_\tau C)\varepsilon_\tau(t) + B\delta f. \quad (4.4)$$

avec

$$\delta f = f(x(t), x_\tau(t), y(t)) - f(\hat{x}(t), \hat{x}_\tau(t), y(t)).$$

En posant

$$X(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ x_\tau(t) \end{bmatrix}, \quad \hat{X}(t) = \begin{bmatrix} \hat{x}(t) \\ \hat{x}_\tau(t) \end{bmatrix}$$

et en utilisant le Théorème 2.2.3 (le DMVT), on déduit qu'il existe $z_i(t) \in Co(X(t), \hat{X}(t))$, pour tout $i = 1, \dots, q$, tel que :

$$\delta f = S_{q,n}(t)\varepsilon(t) + S_{q,n}^\tau(t)\varepsilon_\tau(t),$$

où

$$S_{q,n}(t) = \sum_{i,j=1}^{q,n} e_q(i)e_n^T(j) \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(z_i(t), y(t)),$$

et

$$S_{q,n}^\tau(t) = \sum_{i,j=1}^{q,n} e_q(i)e_n^T(j) \frac{\partial f_i}{\partial x_{\tau j}}(z_i(t), y(t)).$$

En utilisant les notations

$$\begin{aligned}
 h_{ij}(t) &= \frac{\partial f_i}{\partial x_j(t)}(z_i(t)), \text{ pour } i = 1, \dots, q \text{ et } j = 1, \dots, n, \\
 h(t) &= (h_{11}(t), \dots, h_{1n}(t), \dots, h_{qn}(t)), \\
 h_{ij}^\tau(t) &= \frac{\partial f_i}{\partial x_j(t-\tau)}(z_i(t)), \text{ pour } i = 1, \dots, q \text{ et } j = 1, \dots, n, \\
 h^\tau(t) &= (h_{11}^\tau(t), \dots, h_{1n}^\tau(t), \dots, h_{qn}^\tau(t)), \\
 \mathcal{A}(h(t)) &= A + BS_{q,n}(t)
 \end{aligned}$$

et

$$\mathcal{B}(h^\tau(t)) = A_\tau + BS_{q,n}^\tau(t),$$

la dynamique de l'erreur d'estimation (4.4) devient

$$\dot{\varepsilon}(t) = \left(\mathcal{A}(h(t)) - LC \right) \varepsilon(t) + \left(\mathcal{B}(h^\tau(t)) - L_\tau C \right) \varepsilon_\tau(t). \quad (4.5)$$

D'après l'hypothèse 4.2.1, le vecteur des paramètres, $h(t)$ (resp. $h^\tau(t)$) évolue dans un domaine borné $\mathcal{H}_{q,n}$ (resp. $\mathcal{H}_{q,n}^\tau$) pour lequel les 2^{qn} sommets sont définis par :

$$\mathcal{V}_{\mathcal{H}_{q,n}} = \left\{ \alpha = (\alpha_{11}, \dots, \alpha_{1n}, \dots, \alpha_{qn}) \mid \alpha_{ij} \in \{a_{ij}, b_{ij}\} \right\}$$

$$(\text{resp. } \mathcal{V}_{\mathcal{H}_{q,n}^\tau} = \left\{ \beta = (\beta_{11}, \dots, \beta_{1n}, \dots, \beta_{qn}) \mid \beta_{ij} \in \{a_{ij}^\tau, b_{ij}^\tau\} \right\}).$$

Nous présenterons dans la section suivante la méthode proposée pour la synthèse d'observateur. L'analyse de la stabilité est basée sur une fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii particulière.

4.2.2 Procédure de synthèse d'observateur

Les conditions de synthèse proposées pour la classe des systèmes (4.1) sont énoncées dans le théorème suivant :

Théorème 4.2.2. ([126]) *L'observateur d'état (4.3) est exponentiellement convergent s'il existe un scalaire $\omega > 0$ et des matrices $P = P^T > 0$, $Q = Q^T > 0$, R et R_τ de dimensions appropriées tels que les inégalités matricielles suivantes soient satisfaites :*

$$\mathcal{M}(P, Q, \alpha, \beta) + \omega \mathcal{N}(P) - \mathcal{L}(R, R_\tau) < 0, \forall \alpha \in \mathcal{V}_{\mathcal{H}_{q,n}}, \forall \beta \in \mathcal{V}_{\mathcal{H}_{q,n}^\tau}. \quad (4.6)$$

où

$$\mathcal{M}(P, Q, \alpha, \beta) = \begin{bmatrix} \mathcal{A}^T(\alpha)P + P\mathcal{A}(\alpha) + Q & P\mathcal{B}(\beta) \\ (\star) & -e^{-\omega\tau}Q \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

$$\mathcal{N}(P) = \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{L}(R, R_\tau) = \begin{bmatrix} C^T R + R^T C & R_\tau C \\ (\star) & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.8)$$

Quand les inégalités sont satisfaites, les matrices L et L_τ seront données par

$$L = P^{-1}R^T \text{ et } L_\tau = P^{-1}R_\tau.$$

■

Démonstration : Pour démontrer ce résultat, nous faisons appel à la fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii suivante :

$$V(t) = V(\varepsilon(t)) = \varepsilon^T(t)P\varepsilon(t) + e^{-\omega t} \int_{t-\tau}^t e^{\omega\theta} \varepsilon^T(\theta)Q\varepsilon(\theta)d\theta.$$

A ce stade, on peut calculer la dérivée de $V(t)$ par :

$$\begin{aligned} \dot{V} = & \varepsilon^T \left\{ \left(\mathcal{A}(\rho(t)) - LC \right)^T P + P \left(\mathcal{A}(\rho(t)) - LC \right) + Q \right\} \varepsilon \\ & + \varepsilon^T \left\{ \left(\mathcal{B}(\rho^\tau(t)) - L_\tau C \right)^T P + P \left(\mathcal{B}(\rho^\tau(t)) - L_\tau C \right) \right\} \varepsilon_\tau \\ & - e^{-\omega\tau} \varepsilon_\tau^T Q \varepsilon_\tau - \omega e^{-\omega t} \int_{t-\tau}^t e^{\omega\theta} \varepsilon^T(\theta)Q\varepsilon(\theta)d\theta. \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} \dot{V} + \omega V = & \varepsilon^T \left\{ \left(\mathcal{A}(\rho(t)) - LC \right)^T P + P \left(\mathcal{A}(\rho(t)) - LC \right) + Q \right\} \varepsilon \\ & + \varepsilon^T \left\{ \left(\mathcal{B}(\rho^\tau(t)) - L_\tau C \right)^T P + P \left(\mathcal{B}(\rho^\tau(t)) - L_\tau C \right) \right\} \varepsilon_\tau \\ & - e^{-\omega\tau} \varepsilon_\tau^T Q \varepsilon_\tau \end{aligned}$$

En utilisant les notations $R = L^T P$, $R_\tau = P L_\tau$ et (4.7)-(4.8), on déduit que :

$$\dot{V}(t) + \omega V(t) = \xi^T(t) \left[\mathcal{M}(P, Q, h(t), h^\tau(t)) + \omega \mathcal{N}(P) - \mathcal{L}(R, R_\tau) \right] \xi(t),$$

où

$$\xi^T(t) = \begin{bmatrix} \varepsilon^T(t) & \varepsilon_\tau^T(t) \end{bmatrix}.$$

D'après le principe de convexité, si la condition (4.6) est satisfaite, alors

$$\mathcal{M}(P, Q, h(t), h^\tau(t)) + \omega \mathcal{N}(P) - \mathcal{L}(R, R_\tau) < 0,$$

pour tout $h(t) \in \mathcal{H}_{q,n}$ et $h^\tau(t) \in \mathcal{H}^\tau_{q,n}$.

D'où,

$$\dot{V}(t) + \omega V(t) < 0. \tag{4.9}$$

Cette inégalité signifie que

$$V(t) \leq V(0)e^{-\omega t}.$$

Compte tenu du fait que

$$\lambda_{\min}(P) \|\varepsilon(t)\|^2 \leq V(t)$$

alors

$$\|\varepsilon(t)\| \leq \sqrt{\frac{V(0)}{\lambda_{\min}(P)}} e^{-\frac{\omega}{2}t} \quad (4.10)$$

ce qui implique que l'observateur (4.3) est exponentiellement convergent. $\square$

Exemple

Considérons le système décrit sous la forme (4.1) par les paramètres suivants :

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad A_\tau = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0.3 \\ 0.5 & 0 & 0.3 \\ 0.3 & 0.3 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

et

$$f(x, x_\tau, y) = \begin{bmatrix} \frac{x_1(t-0.1)}{\sqrt{1+x_1^2(t-0.1)}} & \frac{x_2(t)}{\sqrt{1+x_2^2(t)}} \end{bmatrix}^T.$$

Nous avons

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_j}(x, x_\tau, y) = 0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_j}(x, x_\tau, y) = 0, \quad \forall j = 1, 2, 3$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_{\tau 1}}(x, x_\tau, y) = \frac{1}{\left(1 + x_1^2(t-0.1)\right)^{\frac{1}{3}}},$$

et

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x, x_\tau, y) = \frac{1}{\left(1 + x_2^2(t)\right)^{\frac{1}{3}}}.$$

D'où

$$0 \leq h_{22}(t) \leq 1 \quad \text{et} \quad 0 \leq h_{11}^\tau(t) \leq 1.$$

En résolvant les inégalités (4.6) avec $\omega = 1$, nous obtenons les gains suivants :

$$L = \begin{bmatrix} 11.9232 & 4.2041 & 1.4261 \end{bmatrix}^T,$$

$$L_\tau = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0.3 \end{bmatrix}^T.$$

Les résultats de simulation sont illustrés sur la Figure 4.1.

Remarque 4.2.3. Notons que le résultat précédent ne peut pas être appliqué aux systèmes non différentiables. En revanche, pour une classe particulière de systèmes non différentiables, l'approche développée a pu être généralisée grâce à une nouvelle méthode qui permet de mettre la dynamique de l'erreur d'estimation sous une forme LPV. Ceci mène à des conditions de synthèse identiques à celles du Théorème 4.2.2. $\blacksquare$

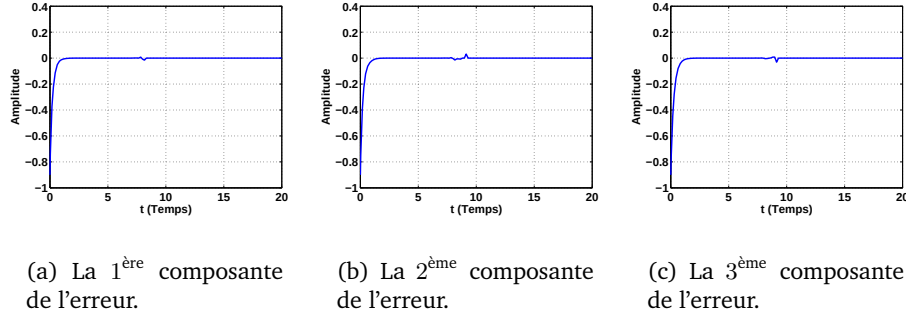


FIG. 4.1 – Evolution exponentielle de l'erreur d'estimation.

4.2.3 Cas des systèmes non différentiables

Considérons la classe des systèmes non linéaires suivante :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_\tau x_\tau(t) + Bf(x(t), y(t), u(t)) + Gg(x_\tau(t), y(t), u(t)) \quad (4.11a)$$

$$y(t) = Cx(t). \quad (4.11b)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état du système, $u \in \mathbb{R}^m$ le vecteur d'entrée et $y \in \mathbb{R}^p$ le vecteur de sortie. A , A_τ , B , G et C sont des matrices constantes de dimensions appropriées. Supposons que les fonctions f et g puissent s'écrire sous la forme suivante :

$$f(x(t), y(t), u(t)) = \begin{bmatrix} f_1(H_1 x(t), y(t), u(t)) \\ \vdots \\ f_q(H_q x(t), y(t), u(t)) \end{bmatrix}, \quad g(x_\tau(t), y(t), u(t)) = \begin{bmatrix} g_1(F_1 x_\tau(t), y(t), u(t)) \\ \vdots \\ g_s(F_s x_\tau(t), y(t), u(t)) \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

avec $H_i^T \in \mathbb{R}^n$ pour tout $i \in \{1, \dots, q\}$ et $F_i^T \in \mathbb{R}^n$ pour tout $i \in \{1, \dots, s\}$.

Les fonctions $f_i, i = 1, \dots, q$ sont lipschitziennes par rapport à $x(t)$ avec des constantes de Lipschitz $\gamma_i, i = 1, \dots, q$. De même, les fonctions $g_i, i = 1, \dots, s$ sont lipschitziennes par rapport à $x(t)$ avec les constantes de Lipschitz κ_i .

L'observateur d'état correspondant à (4.11) s'écrit comme :

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) + A_\tau \hat{x}_\tau(t) + Bf(\hat{x}(t), y(t), u(t)) + L(y(t) - C\hat{x}(t)) \\ &\quad + Gg(\hat{x}_\tau(t), y(t), u(t)) + L_\tau(y_\tau(t) - C\hat{x}_\tau(t)) \end{aligned} \quad (4.13)$$

La dynamique de l'erreur d'estimation, $\varepsilon(t) = x(t) - \hat{x}(t)$, est donnée par :

$$\dot{\varepsilon}(t) = (A - LC)\varepsilon(t) + (A_\tau - L_\tau C)\varepsilon_\tau(t) + B\delta f_t + G\delta g_t, \quad (4.14)$$

où

$$\delta f_t = f(x(t), y(t), u(t)) - f(\hat{x}(t), y(t), u(t)), \quad (4.15)$$

$$\delta g_t = g(x_\tau(t), y(t), u(t)) - g(\hat{x}_\tau(t), y(t), u(t)). \quad (4.16)$$

Dans ce cas nous ne pouvons pas appliquer le DMVT, car les fonctions f et g ne sont pas nécessairement différentiables. La forme particulière (4.12) des non-linéarités nous permet d'utiliser un nouvel artifice de calcul, afin de transformer l'équation dynamique de l'erreur d'estimation en un système LPV. Nous résumons cet artifice en deux propositions.

Proposition 4.2.4. *Pour tout $i \in \{1, \dots, q\}$, il existe une fonction $\psi_{i,y,u} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :*

$$f_i(v, y, u) - f_i(w, y, u) = \psi_{i,y,u}(v, w)(v - w), \quad (4.17)$$

$$|\psi_{i,y,u}(v, w)| \leq \gamma_i, \quad \forall v, w \in \mathbb{R}. \quad (4.18)$$

■

Démonstration : La preuve de cette Proposition est donnée dans [122].

Indication : Il suffit de définir la fonction $\psi_{i,y,u}(\cdot, \cdot)$ comme suit :

$$\psi_{i,y,u}(v, w) = \begin{cases} 0 & \text{if } v = w \\ \frac{f_i(v, y, u) - f_i(w, y, u)}{v - w} & \text{if } v \neq w \end{cases} \quad (4.19)$$

□

Proposition 4.2.5. *Pour tout $x, z \in \mathbb{R}^n$, il existe des fonctions $\psi_{i,y,u} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, q$, telles que :*

$$\delta f = \left(\sum_{i=1}^{i=q} \psi_{i,y,u}(v_i, w_i) G_i \right) (x - z) \quad (4.20)$$

où

$$\delta f = f(x, y, u) - f(z, y, u) \quad (4.21)$$

$$v_i = H_i x, \quad w_i = H_i z, \quad G_i = e_q(i) H_i. \quad (4.22)$$

■

Les deux propositions précédentes sont valables pour la fonction g ainsi que pour toute fonction s'écrivant sous la forme (4.12).

D'après la Proposition 4.2.5, il existe des fonctions $\psi_i, i = 1, \dots, q$ et des fonctions $\varphi_j, j = 1, \dots, s$ telles que

$$\delta f_t = \left(\sum_{i=1}^{i=q} \psi_{i,y,u}(H_i x(t), H_i \hat{x}(t)) G_i \right) \varepsilon(t) \quad (4.23)$$

$$\delta g_t = \left(\sum_{j=1}^{j=s} \varphi_{j,y,u}(F_j x_\tau(t), F_j \hat{x}_\tau(t)) E_j \right) \varepsilon_\tau(t) \quad (4.24)$$

avec

$$E_j = e_s(j)F_j \quad (4.25)$$

et

$$|\varphi_{j,y,u}(v, w)| \leq \kappa_j, \quad \forall v, w \in \mathbb{R}. \quad (4.26)$$

Nous introduisons les notations suivantes :

$$\rho_i(t) = \psi_{i,y,u}(H_i x(t), H_i \hat{x}(t)), \quad \rho(t) = (\rho_1(t), \dots, \rho_q(t)) \quad (4.27)$$

$$\sigma_j(t) = \varphi_{j,y,u}(F_j x_\tau(t), F_j \hat{x}_\tau(t)), \quad \sigma(t) = (\sigma_1(t), \dots, \sigma_s(t)), \quad (4.28)$$

$$\mathcal{A}(\rho(t)) = A + \sum_{i=1}^{i=q} \rho_i(t) B G_i, \quad \mathcal{G}(\sigma(t)) = A_\tau + \sum_{j=1}^{j=s} \sigma_j(t) G E_j \quad (4.29)$$

Le vecteur des paramètres ρ (resp. σ) évolue dans un domaine borné $\mathcal{H}_q$ (resp. $\mathcal{H}_s^\tau$) pour lequel les 2^q (resp. 2^s) sommets sont définis par l'ensemble suivant :

$$\mathcal{V}_{\mathcal{H}_q} = \{\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_q) \mid \alpha_i \in \{-\gamma_i, \gamma_i\}\} \quad (4.30)$$

(resp.

$$\mathcal{V}_{\mathcal{H}_s^\tau} = \{\beta = (\beta_1, \dots, \beta_s) \mid \beta_j \in \{-\kappa_j, \kappa_j\}\}.) \quad (4.31)$$

En utilisant les notations (4.23), (4.24), (4.27), (4.28), (4.9), l'équation de l'erreur (4.14) devient :

$$\dot{\varepsilon}(t) = (\mathcal{A}(\rho(t)) - LC)\varepsilon(t) + (\mathcal{G}(\sigma(t)) - L_\tau C)\varepsilon_\tau(t) \quad (4.32)$$

L'équation (4.32) définit un système LPV à retard. En se basant sur les techniques LPV (voir [111] et [104]), nous obtenons le théorème suivant :

Théorème 4.2.6. *L'observateur d'état (4.13) est exponentiellement convergent s'il existe un scalaire $\omega > 0$ et des matrices $P = P^T > 0$, $Q = Q^T > 0$, R et R_τ de dimensions appropriées tels que les inégalités matricielles suivantes soient satisfaites :*

$$\mathcal{M}(P, Q, \alpha, \beta) + \omega \mathcal{N}(P) - \mathcal{L}(R, R_\tau) < 0, \quad \forall \alpha \in \mathcal{V}_{\mathcal{H}_q}, \quad \forall \beta \in \mathcal{V}_{\mathcal{H}_s^\tau}. \quad (4.33)$$

où

$$\mathcal{M}(P, Q, \alpha, \beta) = \begin{bmatrix} \mathcal{A}^T(\alpha)P + P\mathcal{A}(\alpha) + Q & P\mathcal{G}(\beta) \\ (\star) & -e^{-\omega\tau}Q \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

$$\mathcal{N}(P) = \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{L}(R, R_\tau) = \begin{bmatrix} C^T R + R^T C & R_\tau C \\ C^T R_\tau^T & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.35)$$

Dans ce cas, les matrices L et L_τ sont données par $L = P^{-1}R^T$ et $L_\tau = P^{-1}R_\tau$. ■

Remarque 4.2.7. *Les conditions du Théorème 4.2.6 sont identiques à celles du Théorème 4.2.2. Ceci signifie que pour la classe particulière de systèmes à retard 4.11 satisfaisant 4.12, l'utilisation de la Proposition 4.2.5 est plus générale que le DMVT. En effet, la Proposition 4.2.5 est valable*

même si la non-linéarité du système n'est pas différentiable, contrairement au DMVT qui s'applique seulement aux systèmes différentiables. ■

Exemple

Comme exemple de système non différentiable, nous proposons le système chaotique de *Chua* modifié (voir [108]). Ce système est décrit sous la forme (4.11) par les paramètres suivants :

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{(\frac{1}{R} + G_b)}{C_1} & \frac{1}{RC_1} & 0 \\ \frac{1}{RC_2} & -\frac{1}{RC_2} & \frac{1}{C_2} \\ 0 & -\frac{1}{L} & -\frac{R_0}{L} \end{bmatrix}, \quad A_\tau = 0_{\mathbb{R}^{n \times n}}, \quad B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \epsilon \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$f(x(t), y(t), u(t)) = \frac{1}{2}(G_a - G_b)(|x_1 + E| - |x_1 - E|), \quad \text{et} \quad g(x_\tau(t), y(t), u(t)) = \sin(\sigma x_1(t - \tau)).$$

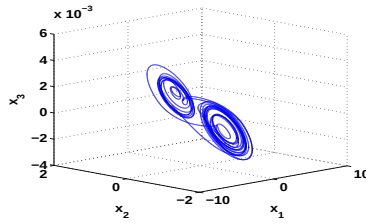
Nous avons $H_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ et $F_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Les constantes de Lipschitz des fonctions f et g sont respectivement $\gamma_1 = |G_a - G_b|$ et $\kappa_1 = \sigma$. Ce système possède un comportement chaotique pour les valeurs numériques suivantes :

$$R = 1950, \quad C_1 = 10^{-8}, \quad C_2 = 10^{-7}, \quad L = 18.68 \cdot 10^{-3}, \quad R_0 = 16, \quad E = 1$$

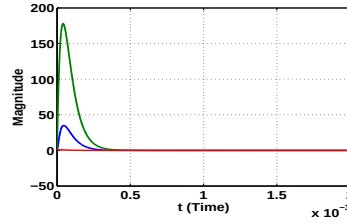
$$G_a = -0.75 \cdot 10^{-3}, \quad G_b = -0.41 \cdot 10^{-3}, \quad \tau = 0.001, \quad \epsilon = 0.2, \quad \sigma = 0.5.$$

En résolvant les inégalités (4.33) avec $\omega = 200$, nous obtenons

$$L = 10^4 \begin{bmatrix} 24.9130 & 18.8075 & -0.0046 \end{bmatrix}^T, \quad L_\tau = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}.$$



(a) Attracteur de *Chua* modifié.



(b) Evolution de l'erreur d'estimation.

FIG. 4.2 – Le comportement de l'erreur d'estimation.

4.3 Deuxième méthode : utilisation des OLGs

La méthode précédente concerne les systèmes à retard dont les non-linéarités sont à jacobien bornées. En revanche, dans cette section, nous proposerons une amélioration en utilisant les OLGs. Ceci permettra d'aboutir à des conditions de synthèse applicables à des systèmes à jacobien non bornés.

4.3.1 Formulation du problème

Considérons la classe des systèmes non linéaires à retard suivante :

$$\dot{x} = Ax + A_\tau x_\tau + Bf(x, y, u) + Gg(x_\tau, y, u) \quad (4.36a)$$

$$y = Cx. \quad (4.36b)$$

Comme les non-linéarités $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^q$ et $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^r$ sont quelconque, alors nous pouvons toujours écrire f et g sous la forme générale suivante :

$$f(x, y, u) = \begin{bmatrix} f_1(H_1 x, y, u) \\ \vdots \\ f_q(H_q x, y, u) \end{bmatrix}, \quad g(x_\tau, y, u) = \begin{bmatrix} g_1(F_1 x_\tau, y, u) \\ \vdots \\ g_r(F_r x_\tau, y, u) \end{bmatrix}, \quad H_i \in \mathbb{R}^{q_i \times n}, \quad F_i \in \mathbb{R}^{r_i \times n} \quad (4.37)$$

Avant d'introduire notre observateur d'état, nous avons besoin d'une hypothèse qui définit la classe des systèmes concernée par cette approche.

Hypothèse 4.3.1. Supposons que les fonctions f et g satisfassent les conditions suivantes :

$$a_{ij} \leq \frac{\partial f_i}{\partial v_j^i}(v^i, y, u) \leq b_{ij}, \quad \forall v^i \in \mathbb{R}^{q_i}, y \in \mathbb{R}^p, u \in \mathbb{R}^m, \quad (4.38a)$$

$$a_{ij}^\tau \leq \frac{\partial g_i}{\partial v_j^{\tau i}}(v^{\tau i}, y, u) \leq b_{ij}^\tau, \quad \forall v^{\tau i} \in \mathbb{R}^{r_i}, y \in \mathbb{R}^p, u \in \mathbb{R}^m. \quad (4.38b)$$

■

L'observateur d'état que nous proposons ici est de la forme suivante :

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + A_\tau \hat{x}_\tau + B\bar{f}(\hat{x}, y, u) + G\bar{g}(\hat{x}_\tau, y, u) + L(y - C\hat{x}) + L_\tau(y_\tau - C\hat{x}_\tau), \quad (4.39a)$$

$$\bar{f}_i(\hat{x}, y, u) = f_i(H_i \hat{x} + K_i(y - C\hat{x}), y, u), \quad i = 1, \dots, q, \quad (4.39b)$$

$$\bar{g}_i(\hat{x}_\tau, y, u) = g_i(F_i \hat{x}_\tau + K_i^\tau(y - C\hat{x}_\tau), y, u), \quad i = 1, \dots, r. \quad (4.39c)$$

où $\bar{f}_i$ (respectivement $\bar{g}_i$) est la $i^{\text{ème}}$ composante de $\bar{f}$ (respectivement $\bar{g}$).

La dynamique de l'erreur d'estimation $\varepsilon = x - \hat{x}$ est donnée par :

$$\dot{\varepsilon} = (A - LC)\varepsilon + (A_\tau - L_\tau C)\varepsilon_\tau + B(f(x, y, u) - \bar{f}(\hat{x}, y, u)) + G(g(x_\tau, y, u) - \bar{g}(\hat{x}_\tau, y, u)). \quad (4.40)$$

En utilisant le DMVT (Théorème 2.2.3), nous déduisons qu'il existe $z_i \in Co(v^i, w^i)$ pour tout $i = 1, \dots, q$ et $z_i^\tau \in Co(v^{\tau i}, w^{\tau i})$ pour tout $i = 1, \dots, r$ tel que

$$f(x, y, u) - \bar{f}(\hat{x}, y, u) = \sum_{i=1}^{i=q} \sum_{j=1}^{j=q_i} h_{ij}(t) H_{ij}^q \chi_i \quad (4.41)$$

$$g(x_\tau, y, u) - \bar{g}(\hat{x}_\tau, y, u) = \sum_{i=1}^{i=r} \sum_{j=1}^{j=r_i} h_{ij}^\tau(t) H_{ij}^r \chi_i^\tau \quad (4.42)$$

$$\chi_i = (H_i - K_i C) \varepsilon, \quad \chi_i^\tau = (F_i - K_i^\tau C) \varepsilon_\tau \quad (4.43a)$$

$$H_{ij}^q = e_q(i) e_{s_i}^T(j), \quad H_{ij}^r = e_r(i) e_{s_i}^T(j) \quad (4.43b)$$

$$h_{ij}(t) = \frac{\partial f_i}{\partial v_j^i}(z_i(t), y, u), \quad h_{ij}^\tau(t) = \frac{\partial g_i}{\partial v_j^{\tau i}}(z_i^\tau(t), y, u) \quad (4.43c)$$

$$v^i = H_i x, \quad w^i = H_i \hat{x} + K_i(y - C \hat{x}) \quad (4.43d)$$

$$v^{\tau i} = F_i x_\tau, \quad w^{\tau i} = F_i \hat{x}_\tau + K_i^\tau(y_\tau - C \hat{x}_\tau) \quad (4.43e)$$

$$v^i - w^i = (H_i - K_i C) \varepsilon, \quad v^{\tau i} - w^{\tau i} = (F_i - K_i^\tau C) \varepsilon_\tau. \quad (4.43f)$$

Par conséquent, d'après (4.39)-(4.43), la dynamique de l'erreur d'estimation (4.40) s'écrit :

$$\dot{\varepsilon} = (A - LC) \varepsilon + (A_\tau - L_\tau C) \varepsilon_\tau + \sum_{i=1}^{i=q} \sum_{j=1}^{j=q_i} h_{ij}(t) B H_{ij}^q \chi_i + \sum_{i=1}^{i=r} \sum_{j=1}^{j=r_i} h_{ij}^\tau(t) G H_{ij}^r \chi_i^\tau. \quad (4.44)$$

Remarque 4.3.2. Sans perte de généralités, nous supposons que f et g satisfont (4.38a) et (4.38b) avec $a_{ij} = 0$ pour tout $i = 1, \dots, q, j = 1, \dots, \bar{q}$ et $a_{ij}^\tau = 0$ pour tout $i = 1, \dots, r, j = 1, \dots, \bar{r}$, où $\bar{q} = \max_{1 \leq i \leq q} (q_i)$ et $\bar{r} = \max_{1 \leq i \leq r} (r_i)$. En effet, s'il existe des sous ensembles S_1, S_2 et S_1^τ, S_2^τ tels que $a_{ij} \neq 0, \forall (i, j) \in S_1 \times S_2$ et $a_{ij}^\tau \neq 0, \forall (i, j) \in S_1^\tau \times S_2^\tau$, alors nous pouvons considérer les fonctions

$$\tilde{f}(x, y, u) = f(x, y, u) - \left(\sum_{(i,j) \in S_1 \times S_2} a_{ij} H_{ij}^q H_i \right) x,$$

$$\tilde{g}(x_\tau, y, u) = g(x_\tau, y, u) - \left(\sum_{(i,j) \in S_1^\tau \times S_2^\tau} a_{ij}^\tau H_{ij}^r F_i \right) x_\tau,$$

qui vérifient (4.38a) et (4.38b) avec $\tilde{a}_{ij} = 0, \tilde{b}_{ij} = b_{ij} - a_{ij}$ et $\tilde{a}_{ij}^\tau = 0, \tilde{b}_{ij}^\tau = b_{ij}^\tau - a_{ij}^\tau$. Nous réécrivons dans ce cas l'équation (4.36a) sous la forme suivante :

$$\dot{x} = \tilde{A}x + \tilde{A}_\tau x_\tau + B \tilde{f}(x, y, u) + G \tilde{g}(x_\tau, y, u),$$

avec

$$\tilde{A} = A + B \sum_{(i,j) \in S_1 \times S_2} a_{ij} H_{ij}^q H_i,$$

$$\tilde{A}_\tau = A_\tau + G \sum_{(i,j) \in S_1^\tau \times S_2^\tau} a_{ij}^\tau H_{ij}^r F_i.$$

Remarque 4.3.3. Notons que l'hypothèse 4.3.1 n'est pas restrictive. En effet, d'une part, on trouve dans la littérature une multitude de systèmes vérifiant cette hypothèse. D'autre part, comme nous allons le voir plus tard, la méthode proposée est valable même si $b_{ij} = +\infty$. ■

4.3.2 Synthèse d'observateur

Dans cette section, nous énonçons un théorème qui fournit des conditions de synthèse de notre observateur. Ces conditions sont exprimées sous forme d'inégalités matricielles.

Théorème 4.3.4. ([128]) *L'observateur d'état (4.39) est exponentiellement convergent s'il existe un scalaire $\omega > 0$ et des matrices $P = P^T > 0$, $Q = Q^T > 0$, R , R_τ , $K_i, i = 1, \dots, q$ et $K_{\tau i}, i = 1, \dots, r$ de dimensions appropriées tels que l'inégalité matricielle suivante soit soluble :*

$$\begin{bmatrix} \mathcal{M}(P, R, \omega) & PA_\tau - R_\tau C & \mathbb{N}(P, K_1, \dots, K_q) & \mathbb{L}(P) \\ (\star) & -e^{-\tau\omega} Q & 0 & \Sigma(K_{\tau 1}, \dots, K_{\tau r}) \\ (\star) & (\star) & -\Lambda & 0 \\ (\star) & (\star) & (\star) & -\Lambda^\tau \end{bmatrix} \leq 0 \quad (4.45)$$

avec

$$\mathcal{M}(P, R, \omega) = A^T P + P A - C^T R - R^T C + \omega P + Q, \quad (4.46a)$$

$$\mathbb{N}(P, K_1, \dots, K_q) = [\mathcal{N}_1(P, K_1) \cdots \mathcal{N}_{q_1}(P, K_1) \mathcal{N}_1(P, K_2) \cdots \mathcal{N}_{q_q}(P, K_q)], \quad (4.46b)$$

$$\mathcal{N}_j(P, K_i) = P B H_{ij}^q + (H_i - K_i C)^T, \quad (4.46c)$$

$$\mathbb{L}(P) = P G [H_{11}^r \cdots H_{1r_1}^r H_{21}^r \cdots H_{rr_r}^r], \quad (4.46d)$$

$$\Sigma(K_{\tau 1}, \dots, K_{\tau r}) = [\Sigma_1(K_{\tau 1}) \cdots \Sigma_r(K_{\tau r})], \quad (4.46e)$$

$$\Sigma_i(K_{\tau i}) = \underbrace{[(F_i - K_{\tau i} C)^T \cdots (F_i - K_{\tau i} C)^T]_{r_i \text{ fois}}}, \quad (4.46f)$$

$$\Lambda = \text{bloc-diag}(\beta_{11} I_{q_1}, \dots, \beta_{1q_1} I_{q_1}, \beta_{21} I_{q_2}, \dots, \beta_{qq_q} I_{q_q}), \quad (4.46g)$$

$$\Lambda^\tau = \text{bloc-diag}(\beta_{11}^\tau I_{r_1}, \dots, \beta_{1r_1}^\tau I_{r_1}, \beta_{21}^\tau I_{r_2}, \dots, \beta_{rr_r}^\tau I_{r_r}), \quad (4.46h)$$

$$\beta_{ij} = \frac{2}{b_{ij}}, \quad \beta_{ij}^\tau = \frac{2}{b_{ij}^\tau}. \quad (4.46i)$$

A partir de (4.45), les matrices L et L_τ sont données par

$$L = P^{-1} R^T \quad \text{et} \quad L_\tau = P^{-1} R_\tau.$$

et les gains $K_i, i = 1, \dots, q$ et $K_{\tau i}, i = 1, \dots, r$ sont des solutions directes de (4.45). ■

Démonstration : La preuve utilise la même fonction de Lyapunov-Krasovskii précédente. En

exploitant (4.38a) et (4.38b), on obtient les inégalités suivantes :

$$S_q = \sum_{i=1}^{i=q} \sum_{j=1}^{j=q_i} \left(\chi_i^T \zeta_{ij} - \frac{1}{b_{ij}} \zeta_{ij}^T \zeta_{ij} \right) \geq 0, \quad (4.47a)$$

$$S_q^\tau = \sum_{i=1}^{i=r} \sum_{j=1}^{j=r_i} \left(\chi_i^{\tau T} \zeta_{ij}^\tau - \frac{1}{b_{ij}^\tau} \zeta_{ij}^{\tau T} \zeta_{ij}^\tau \right) \geq 0. \quad (4.47b)$$

où

$$\zeta_{ij} = h_{ij}(t) \chi_i, \quad \zeta_{ij}^\tau = h_{ij}^\tau(t) \chi_i^\tau.$$

Ceci implique que

$$\dot{V} + \omega V \leq \dot{V} + \omega V + 2(S_q + S_q^\tau),$$

ce qui est équivalent à

$$\dot{V} + \omega V \leq \begin{bmatrix} \varepsilon^T & \varepsilon_\tau^T & \zeta^T & \zeta^{\tau T} \end{bmatrix} \mathbb{M} \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon_\tau \\ \zeta \\ \zeta^\tau \end{bmatrix}, \quad (4.48)$$

où

$$\mathbb{M} = \begin{bmatrix} \mathcal{M}(P, R, \omega) & PA_\tau - R_\tau C & \mathbb{N}(P, K_1, \dots, K_q) & \mathbb{L}(P) \\ (\star) & -e^{-\tau\omega} Q & 0 & \Sigma(K_{\tau 1}, \dots, K_{\tau r}) \\ (\star) & (\star) & -\Lambda & 0 \\ (\star) & (\star) & (\star) & -\Lambda^\tau \end{bmatrix},$$

$$\zeta = [\zeta_{11}^T, \dots, \zeta_{1q_1}^T, \zeta_{21}^T, \dots, \zeta_{qq_q}^T]^T, \quad \text{et} \quad \zeta^{\tau T} = [\zeta_{11}^{\tau T}, \dots, \zeta_{1r_1}^{\tau T}, \zeta_{21}^{\tau T}, \dots, \zeta_{rr_r}^{\tau T}]^T,$$

et $\mathcal{M}(P, R, \omega)$, $\mathbb{N}(P, K_1, \dots, K_q)$, $\mathbb{L}(P)$, $\Sigma(K_{\tau 1}, \dots, K_{\tau r})$, Λ et Λ^τ sont définis par (4.46).

L'inégalité $\mathbb{M} \leq 0$ est identique à (4.45), ce qui signifie que l'erreur d'estimation est exponentiellement convergente. $\square$

Remarque 4.3.5. Dans (4.38a), nous pouvons avoir $b_{ij} = +\infty$ (fonctions non lipschitziennes). Dans ce cas, pour que l'inégalité (4.45) soit vérifiée il est nécessaire d'avoir

$$PBH_{ij}^q + (H_i - K_i C)^T = 0.$$

■

4.3.3 Exemple

Nous reprenons le système proposé dans la section 2.5.3 modifié, en ajoutant une partie non linéaire dépendant du retard. Ce système est défini par les matrices

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_\tau = 0_{\mathbb{R}^{3 \times 3}}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \epsilon \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$H_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, F_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

et les non-linéarités

$$f_1(H_1 x, y, u) = \frac{1}{3}(x_1 - x_2)^3, f_2(H_2 x, y, u) = 0.5 \sin(x_1) \sin(x_3),$$

$$g_1(x_\tau, y, u) = \sqrt{1 + x_{\tau 1}^2},$$

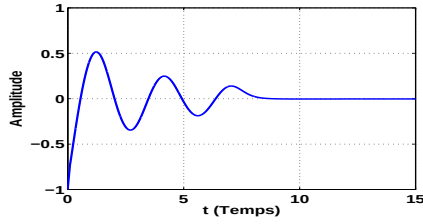
où $\epsilon = \tau = 0.1$.

Les inégalités (4.45) fournissent les solutions suivantes :

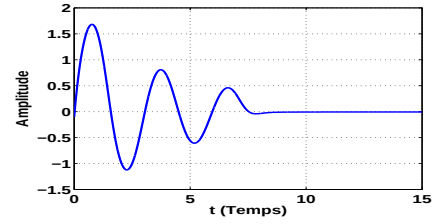
$$P = \begin{bmatrix} 10 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 12.5834 & -3.2229 & 1.6643 \\ -3.2229 & 1.2688 & -0.6672 \\ 1.6643 & -0.6672 & 0.3903 \end{bmatrix},$$

$$L = \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \\ 4 \end{bmatrix}, L_\tau = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, K_1 = -1, K_2 = \begin{bmatrix} 0.5610 \\ -0.3168 \end{bmatrix}, K_{\tau 1} = 1.$$

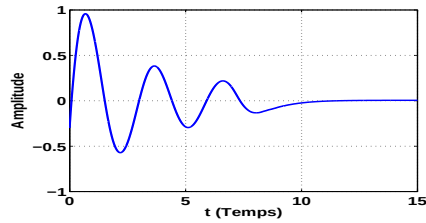
La Figure 4.3 représente le comportement asymptotique de l'erreur d'estimation.



(a) 1^{ère} composante de l'erreur.



(b) 2^{ème} composante de l'erreur.



(c) 3^{ème} composante de l'erreur.

FIG. 4.3 – La convergence exponentielle de l'erreur d'estimation.

Remarque 4.3.6. Les inégalités (4.6), (4.33) et (4.45) sont non linéaires par rapports à leurs variables à cause des couplages ωP et $e^{-\omega\tau}Q$. Afin de les rendre linéaires (LMIs), nous proposons de fixer a priori la variable scalaire ω . Nous déduisons de l'inégalité (4.10) que la rapidité de convergence de l'erreur d'estimation dépend de ω . Plus grand est ω , plus rapide est la convergence de l'erreur d'estimation vers zéro. La synthèse d'observateurs devient donc un problème d'optimisation avec contraintes linéaires dont l'objectif est de maximiser ω . Les contraintes sont les inégalités (4.6), (4.33) et (4.45) selon la classe du système à étudier et la méthode de synthèse utilisée.

■

4.4 Systèmes à temps discret

Dans cette section, nous abordons le problème de synthèse d'observateurs d'une classe de systèmes à retard à temps discret. Une généralisation de la méthode présentée dans la section 3.2.4 du chapitre 3 sera mise en oeuvre.

4.4.1 Formulation du problème

Considérons le système sous la forme détaillée suivante :

$$x(k+1) = Ax(k) + A_d x_d(k) + Bf\left(Hx(k), H_d x_d(k), y(k)\right) + c \quad (4.49a)$$

$$y(k) = Cx(k) \quad (4.49b)$$

où les matrices constantes A, A_d, B, C, H, H_d et c sont de dimensions adéquates et la fonction $f : \mathbb{R}^{s_1} \times \mathbb{R}^{s_2} \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ est lipschitzienne de constante de Lipschitz γ_f , i.e :

$$\left\| f\left(z_1, z_2, y\right) - f\left(\hat{z}_1, \hat{z}_2, y\right) \right\| \leq \gamma_f \left\| \begin{bmatrix} z_1 - \hat{z}_1 \\ z_2 - \hat{z}_2 \end{bmatrix} \right\|, \quad \forall z_1, z_2, \hat{z}_1, \hat{z}_2, y. \quad (4.50)$$

Nous proposons l'observateur d'état suivant :

$$\begin{aligned} \hat{x}(k+1) &= A\hat{x}(k) + A_d \hat{x}_d(k) + Bf\left(v(k), w(k), y(k)\right) + c \\ &\quad + L\left(y(k) - C\hat{x}(k)\right) + L_d\left(y_d(k) - C\hat{x}_d(k)\right) \end{aligned} \quad (4.51a)$$

$$v(k) = H\hat{x}(k) + K^1\left(y(k) - C\hat{x}(k)\right) + K_d^1\left(y_d(k) - C\hat{x}_d(k)\right) \quad (4.51b)$$

$$w(k) = H_d \hat{x}_d(k) + K^2\left(y(k) - C\hat{x}(k)\right) + K_d^2\left(y_d(k) - C\hat{x}_d(k)\right). \quad (4.51c)$$

La dynamique de l'erreur d'estimation est donnée par :

$$\varepsilon(k+1) = (A - LC)\varepsilon(k) + (A_d - L_d C)\varepsilon_d(k) + B\delta f_k \quad (4.52)$$

où

$$\delta f_k = f\left(Hx(k), H_d x_d(k), y(k)\right) - f\left(v(k), w(k), y(k)\right).$$

D'après (4.50), nous obtenons

$$\|\delta f_k\| \leq \gamma_f \left\| \begin{bmatrix} (H - K^1 C)\varepsilon(k) - K_d^1 C\varepsilon_d(k) \\ (H_d - K_d^2 C)\varepsilon_d(k) - K^2 C\varepsilon(k) \end{bmatrix} \right\|. \quad (4.53)$$

4.4.2 Conditions de synthèse de l'observateur

Les conditions de synthèse, exprimées sous forme de LMI, sont données dans le théorème suivant :

Théorème 4.4.1. *L'erreur d'estimation est asymptotiquement stable s'il existe un scalaire $\alpha > 0$ et des matrices $P = P^T > 0$, R, R_d, K^1, K^2, K_d^1 et K_d^2 de dimensions appropriées tels que la LMI suivante soit satisfaite :*

$$\begin{bmatrix} -P + Q & 0 & A^T P B - C^T R B & A^T P - C^T R & \gamma_f^2 (\alpha H - \bar{K}^1 C)^T & \gamma_f^2 (\bar{K}^2 C)^T \\ (\star) & -Q & A_d^T P B - C^T R_d B & A_d^T P - C^T R_d & \gamma_f^2 (\bar{K}_d^1 C)^T & \gamma_f^2 (\alpha H_d - \bar{K}_d^2 C)^T \\ (\star) & (\star) & B^T P B - \alpha I_q & 0 & 0 & 0 \\ (\star) & (\star) & (\star) & -P & 0 & 0 \\ (\star) & (\star) & (\star) & (\star) & -\alpha \gamma_f^2 I_{s_1} & 0 \\ (\star) & (\star) & (\star) & (\star) & (\star) & -\alpha \gamma_f^2 I_{s_2} \end{bmatrix} < 0 \quad (4.54)$$

Les gains L, L_d, K^1, K^2, K_d^1 et K_d^2 sont donnés par :

$$L = P^{-1} R^T, \quad L_d = P^{-1} R_d^T$$

$$K^1 = \frac{1}{\alpha} \bar{K}^1, \quad K^2 = \frac{1}{\alpha} \bar{K}^2,$$

$$K_d^1 = \frac{1}{\alpha} \bar{K}_d^1, \quad K_d^2 = \frac{1}{\alpha} \bar{K}_d^2.$$

■

Démonstration : Considérons la fonction de Lyapunov-Krasovskii suivante :

$$V_k = \varepsilon^T(k) P \varepsilon(k) + \sum_{i=1}^{i=d} \left(\varepsilon^T(k-i) Q \varepsilon(k-i) \right). \quad (4.55)$$

En utilisant la dynamique (4.52), nous obtenons

$$V_{k+1} - V_k = \zeta_k^T \mathbb{M}_1 \zeta_k$$

où

$$\mathbb{M}_1 = \begin{bmatrix} (A - LC)^T P (A - LC) - P + Q & (A - LC)^T P (A_d - L_d C) & (A - LC)^T P B \\ (\star) & (A_d - L_d C)^T P (A_d - L_d C) - Q & (A_d - L_d C)^T P B \\ (\star) & (\star) & B^T P B \end{bmatrix}$$

$$\zeta_k^T = \begin{bmatrix} \varepsilon^T(k) & \varepsilon_d^T(k) & \delta f_k^T \end{bmatrix}.$$

En utilisant les notations

$$\bar{K}^1 = \alpha K^1, \quad \bar{K}^2 = \alpha K^2, \quad \bar{K}_d^1 = \alpha K_d^1, \quad \bar{K}_d^2 = \alpha K_d^2,$$

la condition (4.53) peut s'écrire de la manière suivante :

$$\zeta_k^T \mathbb{M}_2 \zeta_k \geq 0 \quad (4.56)$$

où

$$\mathbb{M}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha \gamma_f^2} \mathbb{M}_3 & 0 \\ 0 & -\alpha I_q \end{bmatrix}$$

et

$$\mathbb{M}_3 = \begin{bmatrix} (\alpha H - \bar{K}^1 C)^T (\alpha H - \bar{K}^1 C) + (\bar{K}^2 C)^T (\bar{K}^2 C) & (\alpha H - \bar{K}^1 C)^T (\bar{K}_d^1 C) + (\bar{K}^2 C) (\alpha H_d - \bar{K}_d^2 C) \\ (\star) & (\alpha H_d - \bar{K}_d^2 C)^T (\alpha H_d - \bar{K}_d^2 C) + (\bar{K}_d^1 C)^T (\bar{K}_d^1 C) \end{bmatrix}.$$

Par conséquent

$$V_{k+1} - V_k \leq \zeta_k^T (\mathbb{M}_1 + \mathbb{M}_2) \zeta_k. \quad (4.57)$$

En utilisant le complément de Schur et les notations $R = L^T P$, $R_d = L_d^T P$, l'inégalité $\mathbb{M}_1 + \mathbb{M}_2 < 0$ est équivalente à (4.54). Ceci signifie que sous les conditions du Théorème 4.4.1, la fonction V_k est strictement décroissante et donc l'erreur d'estimation est asymptotiquement stable. $\square$

4.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé deux méthodes de synthèse d'observateurs. La première est une extension de l'approche basée sur le DMVT proposée dans le Chapitre 2 au cas des systèmes à retard. Cette approche consiste à transformer la dynamique de l'erreur d'estimation en un système LPV avec retard. Les systèmes concernés forment une classe de systèmes dont les non-linéarités sont à jacobien bornées.

La deuxième méthode utilise une nouvelle structure de l'observateur. Cette structure, de type Luenberger généralisé, permet d'obtenir des conditions de synthèse applicables à une classe plus large de systèmes, à savoir les systèmes non lipschitziens.

Toutes les conditions de synthèse présentées dans ce chapitre sont exprimées sous forme d'inégalités matricielles que l'on peut rendre linéaires (LMIs) en fixant *a priori* une variable scalaire positive.

En terme de comparaison, nous concluons les points suivants :

1. Dans le cas où les termes $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ et $\frac{\partial g_i}{\partial x_{\tau_j}}$ sont bornés, il est préférable d'utiliser le Théorème 4.2.2 (ou bien le Théorème 4.2.6 pour les systèmes non différentiables).
2. S'il existe des termes $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ non bornés et tels que $0 \leq \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \leq +\infty$, alors nous sommes dans l'obligation d'utiliser le Théorème 4.3.4 sous réserve qu'une solution existe.

Nous avons également abordé, dans la dernière section de ce chapitre, les systèmes à retard à temps discret. Une extension de la méthode présentée dans la section 3.2.4 du chapitre 3 a été établie en utilisant une fonction de *Lyapunov-Krasovskii* classique. Les conditions de synthèse proposées contiennent plus de degrés de liberté, ce qui les rend moins contraignantes.

Application à la synchronisation et au cryptage/décryptage

Sommaire

5.1	Introduction	102
5.2	Sur les systèmes chaotiques	102
5.2.1	Caractérisation globale du chaos	102
5.2.2	Quelques exemples de systèmes chaotiques	104
5.3	Communiquer avec le chaos	107
5.3.1	Synchronisation des systèmes chaotiques	108
5.3.2	Quelques techniques de cryptage/décryptage	110
5.4	Applications : transmission d'images	113
5.4.1	Utilisation de la méthode avec deux lignes de transmission	113
5.4.2	Synchronisation et décryptage simultanément	115
5.5	Conclusion	119

5.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons une application des résultats introduits dans les chapitres précédents à la synchronisation et au décryptage dans les systèmes de communications chaotiques. Nos résultats interviennent au niveau de la synchronisation qui constitue une étape centrale dans les schémas de communications. Nous avons choisi la transmission d'images comme application.

Avant de donner les résultats des simulations numériques en utilisant nos méthodes de synthèse d'observateurs (synchronisation), nous commençons par une brève introduction aux systèmes chaotiques, suivie d'une section sur les systèmes de communication chaotiques. Dans cette section, nous faisons un état de l'art sur l'utilisation du chaos dans les systèmes de communication. En suite, nous présentons deux principales méthodes de synchronisation des systèmes chaotiques et quelques techniques de cryptage/décryptage existantes dans la littérature.

5.2 Sur les systèmes chaotiques

Cette section est consacrée aux systèmes chaotiques, exploités couramment dans les schémas de communication chaotiques. L'étude théorique approfondie du chaos est loin d'être l'objectif de ce mémoire. Nous nous limitons à définir brièvement le phénomène chaotique apparaissant dans un système dynamique déterministe. Nous nous contentons de donner une définition globale suivie de quelques exemples de systèmes chaotiques célèbres.

5.2.1 Caractérisation globale du chaos

Quelques systèmes physiques se comportent de manière chaotique. Parmi ces systèmes, on peut citer l'atmosphère, un robinet qui goutte, un pendule excité dans un champ magnétique... Ces quelques systèmes se démarquent par leurs dimensions et l'origine de leurs mouvements.

Il existe plusieurs définitions possibles du chaos. Ces définitions ne sont pas toutes équivalentes, mais elles convergent vers certains points communs caractérisant ainsi le chaos. Ci-dessous, nous présentons quelques caractéristiques qui permettent de comprendre qualitativement les points marquants d'un système chaotique.

Sensibilité aux conditions initiales (SCI)

Tout d'abord, les systèmes chaotiques sont extrêmement sensibles aux perturbations. On peut illustrer ce fait par *l'effet papillon*, popularisé par le météorologue *Edward Lorenz*.

L'évolution d'un système dynamique chaotique est imprédictible en ce sens qu'elle est sensible aux conditions initiales. Ainsi, deux trajectoires de phases initialement voisines s'écartent toujours l'une de l'autre, et ceci quelle que soit leur proximité initiale. Il est en particulier clair que la moindre erreur ou simple imprécision sur la condition initiale interdit de décider à tout temps quelle sera la trajectoire effectivement suivie et, en conséquence, de faire une prédiction autre que statistique sur le devenir à long terme du système. Ainsi, bien que l'on traite de systèmes déterministes, il est impossible de prévoir à long terme leurs comportements. La seule manière est d'opérer effectivement l'évolution du système. Si cette simulation se fait informatiquement,

un problème de précision sur les conditions initiales se pose alors : de petites erreurs d'arrondissement dues à la précision du type de la variable codant ces conditions initiales peuvent exponentiellement s'amplifier de telle sorte que la trajectoire de phases obtenue n'est pas représentative de la réalité.

Illustrons ce phénomène de SCI par une simulation numérique. On affecte à un système chaotique deux conditions initiales très proches. Dans un premier temps, les deux systèmes évoluent de la même manière ; mais, très vite, leur comportement devient différent. Ceci est illustré dans la figure suivante.

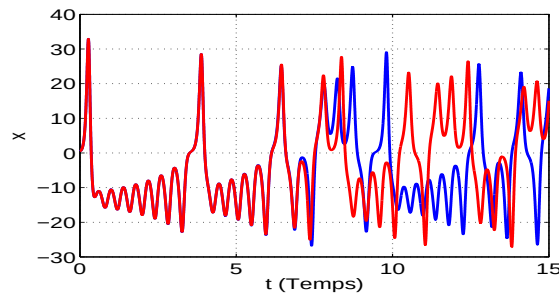


FIG. 5.1 – Evolution dans le temps pour deux conditions initiales très proches.

Aspect aléatoire

Les courbes précédentes (Figure 5.1) illustrent la sensibilité aux conditions initiales. Cependant, une autre caractéristique des systèmes chaotiques peut être observée sur les courbes précédentes. En effet, un système chaotique évolue d'une manière qui semble aléatoire. La courbe suivante permet de comparer une évolution simple, périodique et donc prédictible d'un système classique avec l'évolution plus complexe, non périodique et non prédictible d'un système chaotique.

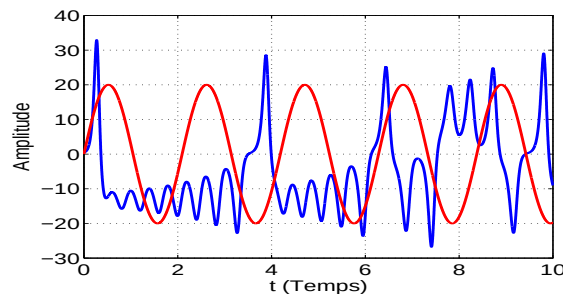


FIG. 5.2 – Evolution dans le temps d'un système chaotique, comparé à une sinusoïde.

Ainsi, les systèmes chaotiques semblent évoluer de manière aléatoire. En tout cas, on ne peut

prévoir facilement quelle sera leur évolution dans le temps.

Notons que les systèmes chaotiques obéissent tout de même aux lois de la physique. Si on se place dans l'approximation de la physique classique, on peut affirmer que le système est totalement déterministe. Il ne faut donc pas se laisser abuser par le caractère *a priori* aléatoire qui ne dénote qu'une complexité du système.

5.2.2 Quelques exemples de systèmes chaotiques

Dans cette section, nous présentons quelques exemples de systèmes chaotiques les plus célèbres.

Exemples de systèmes à temps continu

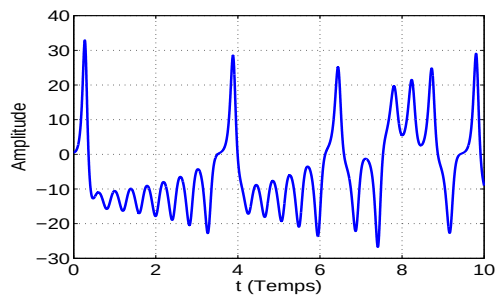
Les exemples considérés sont : le système de *Lorenz*, le système de *Rössler* et le système de *Chua*.

Système de Lorenz

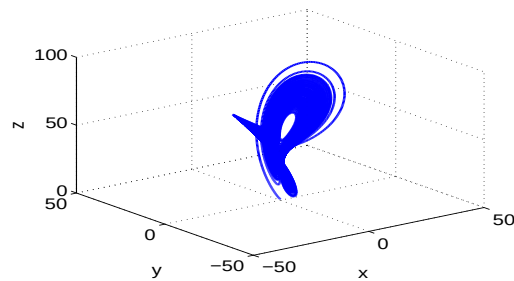
Le système de Lorenz est un exemple célèbre de système différentiel au comportement chaotique pour certaines valeurs de paramètres. Ce système est défini par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = -rx - y - xz \\ \dot{z} = -bz + xy \end{cases} \quad (5.1)$$

Ci-dessous l'attracteur de *Lorenz* (l'espace des phases) et la coordonnée x obtenus à partir des valeurs numériques $\sigma = 10$, $r = \frac{8}{3}$ et $b = 28$.



(a) La première coordonnée, x .



(b) Attracteur chaotique de *Lorenz*.

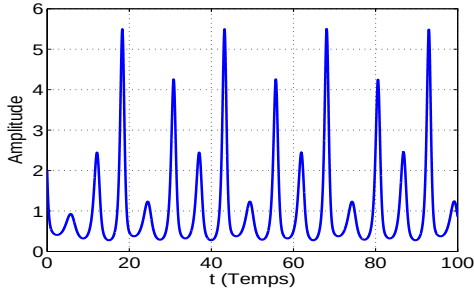
FIG. 5.3 – Système chaotique de *Lorenz*.

Système de Rössler

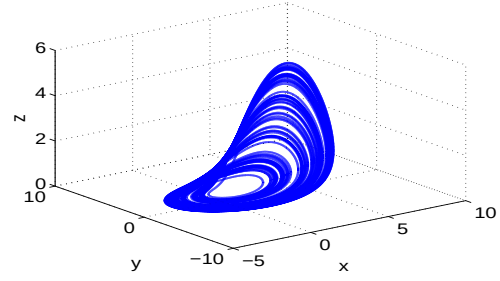
Les équations de ce système sont les suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x} = -(y + z) \\ \dot{y} = x + ay \\ \dot{z} = b + z(x - c) \end{cases} \quad (5.2)$$

Ce système, qui a été proposé par l'Allemand *Otto Rössler*, est lié à l'étude de l'écoulement des fluides ; il découle des équations de *Navier-Stokes*. Les équations de ce système ont été découvertes à la suite de travaux en cinétique chimique. Pour une simulation numérique, nous prenons $a = 0.398$, $b = 2$ et $c = 4$. Nous obtenons l'évolution dans le temps de la coordonnée z et l'attracteur de *Rössler* dans la figure ci-dessous.



(a) La troisième coordonnée, z .



(b) Attracteur chaotique de *Rössler*.

FIG. 5.4 – Système chaotique de *Rössler*.

Système de Chua

Le système de *Chua* est à la base un circuit électrique dont le schéma est donné dans la Figure 5.5.

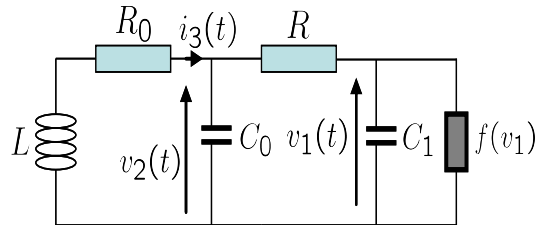


FIG. 5.5 – Le circuit électrique de *Chua*.

Ce simple circuit électrique, développé par *Leon Chua*, possède une dynamique chaotique. La dynamique de ce circuit peut être décrite par les équations d'état suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{1}{C_1 R}(x_1 - x_2) + \frac{1}{C_1} f(x_1) \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{C_2 R}(x_1 - x_2) + \frac{1}{C_2} x_3 \\ \dot{x}_3 = \frac{1}{L} x_2 + \frac{R_0}{L} x_3 \end{cases} \quad (5.3)$$

avec

$$f(x_1) = G_b x_1 + \frac{1}{2}(G_a - G_b)(|x_1 + E| - |x_1 - E|)$$

et

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ i_3 \end{bmatrix}.$$

Le portrait de phases de ce système est donné sur la Figure 5.6.

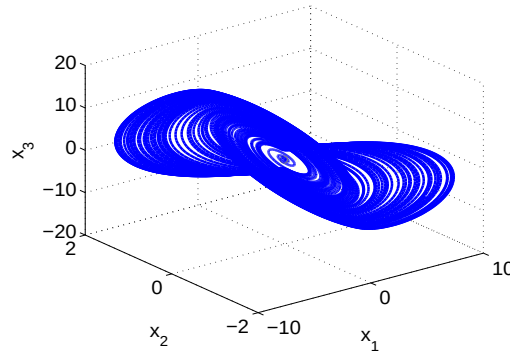


FIG. 5.6 – L'attracteur chaotique de *Chua*.

Après quelques transformations simples, ce système peut s'écrire sous une autre forme, appelée *forme sans dimension* du circuit de *Chua* :

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha(y - x - f(x)) \\ \dot{y} = x - y + z \\ \dot{z} = -\beta y - \gamma z \end{cases} \quad (5.4)$$

où α, β, γ sont des constantes et f représente la fonction caractéristique de la diode de *Chua*, qui est donnée par

$$f(x) = bx + \frac{1}{2}(a - b)(|x + 1| - |x - 1|).$$

avec $a < b < 0$ sont deux constantes.

Exemples de systèmes à temps discret

Système de Henon

Le système de *Hénon* est un modèle proposé en 1976 par le mathématicien *Michel Hénon*. Il s'agit d'un système qui introduit des itérations dans le plan. Ces itérations sont définies par les relations suivantes.

$$\begin{cases} x_{k+1} = a - x_k^2 + by_k \\ y_{k+1} = x_k \end{cases} \quad (5.5)$$

Le portrait de phases (l'attracteur) ainsi que la première coordonnée, x , du système sont représentés sur la Figure 5.7 pour $a = 1.4$ et $b = 0.3$.

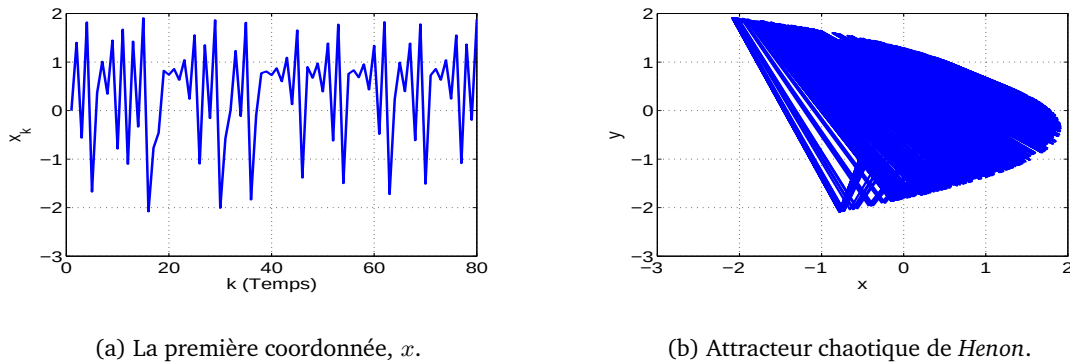


FIG. 5.7 – Système chaotique de *Henon*.

Il existe d'autres systèmes chaotiques discrets. Nous citons le système de Lozi qui consiste en le système de Henon pour lequel la non-linéarité x_k^2 est remplacée par $|x_k|$.

5.3 Communiquer avec le chaos

L'idée d'utilisation du chaos dans les systèmes de communication a été inspirée de la découverte de Pecora-Carroll en 1990 [91]. Ils ont montré que deux systèmes chaotiques identiques avec des conditions initiales différentes peuvent éventuellement se synchroniser s'ils sont couplés d'une certaine manière convenable, c'est à dire sous certaines conditions. Le développement des systèmes de communication utilisant le chaos a commencé donc avec des schémas de synchronisation très simples de circuits électroniques, visant pour le cryptage et la reconstruction simultanés d'un signal d'information. Pour plus de détails, voir [57], [37].

Dans la suite, nous introduisons quelques définitions et résultats concernant la synchronisation des systèmes chaotiques. En effet, la synchronisation joue un rôle primordial dans les schémas de communication.

5.3.1 Synchronisation des systèmes chaotiques

Dans le contexte de la communication, nous signifions par synchronisation qu'un *système esclave* se force à se synchroniser avec un *système maître*. Le *système maître* peut être décrit par un système différentiel

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \text{ dans le cas continu,}$$

ou par une équation aux différences

$$x(k+1) = f(x(k)), \text{ dans le cas discret}$$

avec le vecteur d'état $x \in \mathbb{R}^n$, la condition initiale $x(0)$ et une sortie $y = h(x)$.

Par analogie, le *système esclave* est défini par le système différentiel

$$\dot{\hat{x}}(t) = \hat{f}(\hat{x}(t), y(t)), \text{ dans le cas continu,}$$

ou par une équation aux différences

$$\hat{x}(k+1) = \hat{f}(\hat{x}(k), y(k)), \text{ dans le cas discret}$$

avec le vecteur d'état $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ et la condition initiale $\hat{x}(0)$.

Nous disons que le *système maître* se synchronise avec le *système esclave* si

$$\lim_{+\infty} \|x - \hat{x}\| = 0 \quad (5.6)$$

pour tout $(x(0), \hat{x}(0)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Ce type de synchronisation est appelé *synchronisation d'état*. Il existe deux méthodes principales de synchronisation d'état que nous présentons en détails ci-dessous :

Auto-synchronisation : Principe de Pecora-Carroll

Certains systèmes chaotiques possèdent la propriété d'auto-synchronisation, c'est-à-dire qu'on peut les décomposer en deux sous-systèmes, l'un *maître*, l'autre *esclave*. Ces derniers peuvent se synchroniser sous l'effet d'un couplage avec un signal commun.

Dans le schéma de synchronisation proposé par Pecora et Carroll [91], un système chaotique

$$\dot{x} = f(x) \quad (5.7)$$

avec une sortie scalaire $y = h(x)$ est décomposé en deux sous-systèmes dont les états sont x_1 et x_2 respectivement :

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \quad (5.8)$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_2, y) \quad (5.9)$$

où

$$x = \begin{bmatrix} x_1^T & x_2^T \end{bmatrix}^T.$$

Le système est partitionné de façon à ce que les Exposants de Lyapunov Conditionnels (ELCs) [91] du sous-système (5.9) soient positifs.

Qualitativement, les ELCs caractérisent la stabilité de (5.9). Si tous les ELCs sont négatifs, alors la trajectoire $x_2(t)$ est asymptotiquement stable [91]. Ceci signifie que les états de plusieurs copies du sous-système (5.9) se synchroniseront à l'aide du même signal $y(t)$.

En particulier, on considère le système décrit par :

$$\dot{\hat{x}}_2 = f_2(\hat{x}_2, y) \quad (5.10)$$

Si les ELCs de ce système sont tous négatifs et $\hat{x}_2(0)$ est suffisamment proche de $x_2(0)$, alors l'état $\hat{x}_2$ converge asymptotiquement vers x_2 , i.e :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x_2 - \hat{x}_2\| = 0.$$

En gros, le problème dans le principe de Pecora-Carroll est de trouver une décomposition (5.8)-(5.9) convenable, c'est à dire telle que les ELCs de (5.9) soient négatifs.

Ce principe, qui a été initié par Pecora et Carroll [91] en 1990 et ensuite repris dans beaucoup de papiers tels que [34] et [69], peut être résumé par la figure 5.8.

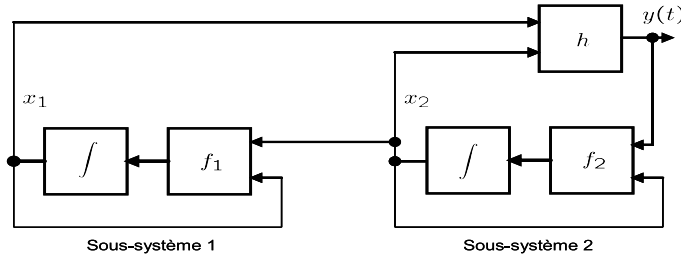


FIG. 5.8 – Principe de Pecora-Carroll.

Synchronisation à base d'observateurs

Après la découverte de Pecora-Carroll [91], le problème de synchronisation a été rapidement relié au problème plus général de l'observation d'état non linéaire classique [83], [84], [86]. Dans cette approche, Le système *maître* est un système chaotique quelconque et le système *esclave* est un observateur d'état correspondant. La Figure 5.9 illustre ce principe de synchronisation. Cette approche est fréquemment utilisée dans la littérature, le lecteur peut se référer à de nombreuses publications telles que [54], [52], [53], [38], [74], [60], [75], [120], [9], [122].

Pour ce principe, nous disons que l'émetteur et le récepteur se synchronisent si le système $\dot{\hat{x}} = \hat{f}(\hat{x}, u)$ est un observateur convergent pour le système $\dot{x} = f(x, u)$, $y = h(x)$. Autrement dit, le problème de synchronisation revient à déterminer une fonction $\hat{f}$ telle que :

$$\|x(t) - \hat{x}(t)\| \rightarrow 0, \text{ quand } t \rightarrow +\infty.$$

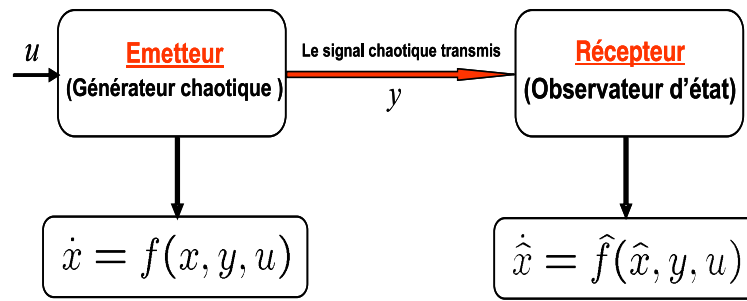


FIG. 5.9 – Principe de synchronisation à base d'observateurs.

5.3.2 Quelques techniques de cryptage/décryptage

On dispose dans la littérature de différents schémas de communications chaotiques nécessitant la synchronisation. Dans [113], l'auteur a présenté toutes les techniques existantes, génération par génération. Il existe de nombreuses techniques de cryptage/décryptage utilisant comme étape centrale la synchronisation du chaos [113]. Parmi ces techniques, nous citons les quatre principales suivantes :

Masquage par addition (*The additive chaos masking scheme*)

Cette technique développée en 1993 [36] est illustrée par la figure 5.10. Elle consiste en deux systèmes chaotiques identiques, l'émetteur et le récepteur. Le signal chaotique $c(t)$ est l'une des variables d'état du système dans l'émetteur. Le message d'information (le signal utile qui doit être crypté) $m(t)$, qui est typiquement très faible devant $c(t)$, est ajouté au signal $c(t)$ et donne le signal transmis $s(t)$. Comme $c(t)$ est très complexe et $m(t)$ est beaucoup plus petit que $c(t)$, alors il est difficile de séparer $m(t)$ du signal $s(t)$ sans connaître $c(t)$.

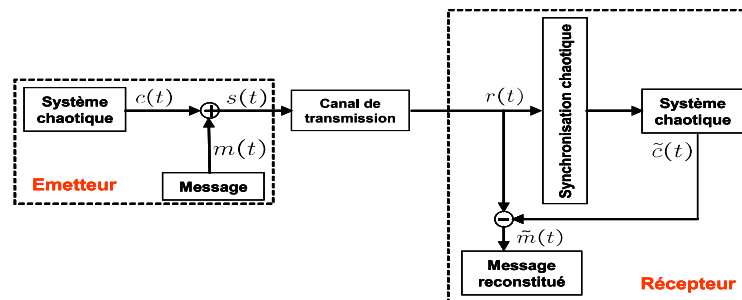


FIG. 5.10 – Schéma de communication par addition.

Masquage par décalage (*The chaos shift keying*)

La méthode de décalage illustrée par la figure 5.11 a été réservée à la transmission de messages numériques [39]. Dans ce schéma de communication, le message d'information est utilisé pour commuter le signal transmis entre deux attracteurs chaotiques statistiquement similaires, qui sont utilisés respectivement pour coder le bit 0 et le bit 1 du message d'information numérique. Ces deux attracteurs sont générés par deux systèmes chaotiques de même structure et de paramètres différents. A la réception, le signal reçu est utilisé pour produire un système chaotique identique à ceux de l'émetteur. Le message d'information est restitué par application d'un filtre passe-bas et ensuite un seuillage de l'erreur de synchronisation $e(t)$.

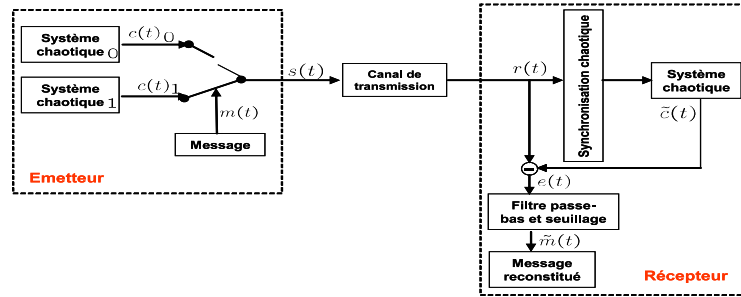


FIG. 5.11 – Schéma de communication par décalage.

Les cryptosystèmes chaotiques

Cette génération de systèmes de communication représentée à la figure 5.12 a été développée en 1997 [115]. Cette méthode combine la technique de cryptographie classique et la synchronisation du chaos afin d'améliorer le degré de sécurité à un niveau beaucoup plus élevé que les précédentes.

Dans un cryptosystème chaotique, le message $m(t)$ est crypté par une règle de cryptage, $e(\cdot)$, avec un signal clé, $k(t)$, qui est généré par le système chaotique de l'émetteur. Le signal masqué, $y(t)$, est ensuite injecté dans le système chaotique afin de changer sa dynamique et la rendre plus complexe. Une autre variable d'état du système chaotique, $s(t)$, est transmise à travers un canal de transmission publique accessible par l'intrus. Puisque l'intrus n'a pas accès à la clé chaotique, $k(t)$, alors il est très difficile de déduire $m(t)$ de $s(t)$. Au niveau du récepteur, le signal reçu $r(t) = s(t) + n(t)$, où $n(t)$ est le bruit du canal, est utilisé pour synchroniser les deux systèmes chaotiques de l'émetteur et du récepteur. Une fois que la synchronisation est achevée, les signaux $k(t)$ et $y(t)$ seront reconstruits par $\tilde{k}(t)$ et $\tilde{y}(t)$ respectivement. En utilisant la règle de décryptage, $d(\cdot)$, et les signaux reconstruits $\tilde{k}(t)$ et $\tilde{y}(t)$, alors le message d'information peut être restitué par $\tilde{m}(t)$.

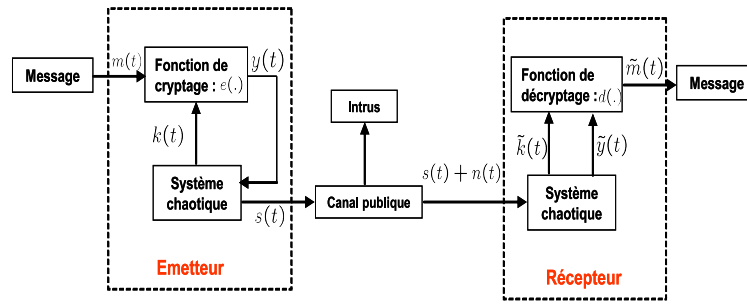


FIG. 5.12 – Schéma de communication en utilisant les cryptosystèmes chaotiques.

Système de communication avec deux lignes de transmission

Pour cette technique, les deux étapes, synchronisation et cryptage, sont indépendantes. En effet, deux lignes de transmission sont utilisées. La première sert à synchroniser l'émetteur et le récepteur, tandis que la deuxième est utilisée pour le cryptage.

En gros, ce nouveau schéma de communication est composé de trois étapes : 1) cryptage ; 2) synchronisation ; et 3) décryptage. Dans la première étape, une fonction fortement non linéaire Φ est utilisée pour crypter simultanément le message confidentiel $s(t)$ et l'état chaotique $x(t)$. Le signal crypté $s_c(t)$ est ensuite envoyé à travers un canal de transmission vers le récepteur. Dans la deuxième étape, un signal chaotique $y = h(x)$ est transmis via un deuxième canal de transmission séparé du premier. Ce signal y est utilisé seulement pour la synchronisation, et ne contient aucune information du message $s(t)$. Dans la troisième et la dernière étape, l'estimé $z(t)$ de l'état $x(t)$, généré par le récepteur chaotique (construit par le processus de la synchronisation) et la fonction de décryptage Ψ sont utilisés pour reproduire l'estimé approximatif $s_d(t)$ du message confidentiel $s(t)$. Une description systématique de cette procédure est illustrée par la figure 5.13. Pour un exemple de fonctions Φ et Ψ , le lecteur peut se référer à [62].

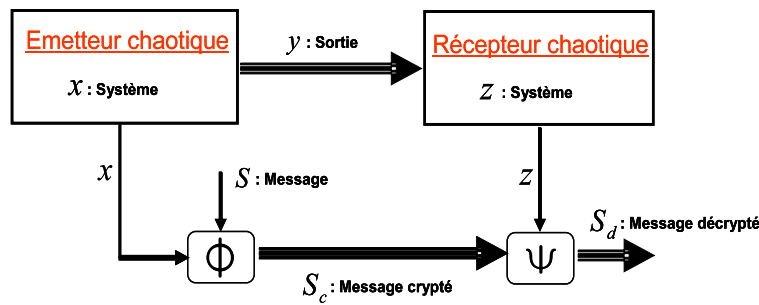


FIG. 5.13 – Schéma de communication à deux lignes de transmission.

Remarque 5.3.1. *Mis à part les techniques abordées précédemment, il existe une autre génération de cryptage/décryptage, connue sous le nom de modulation chaotique, proposée entre 1993 et 1995. Il y a deux façons différentes de moduler le message avec la porteuse chaotique. La pre-*

mière appelée modulation des paramètres [114] utilise le message pour changer les paramètres de l'émetteur chaotique. Quant à la deuxième méthode, appelée modulation non-autonome [110], elle utilise le message pour changer l'espace de phase de l'émetteur chaotique. ■

5.4 Applications : transmission d'images

Dans cette section, nous présentons une application des méthodes proposées dans ce manuscrit à la synchronisation et au décryptage dans les systèmes de communications chaotiques. Deux techniques de cryptage/décryptage sont utilisées. La première est la méthode avec deux lignes de transmission représentées à la figure 5.13. Afin de synchroniser l'émetteur et le récepteur, on utilise la méthode de synchronisation à base d'observateurs. La procédure de synthèse du gain de l'observateur utilisée est celle proposée dans la section 2.2.2 du chapitre 2 (Théorème 2.2.5). La seconde technique est basée sur les observateurs à entrées inconnues. Dans ce cas, on utilise un système à temps discret et la procédure de synthèse des gains proposée dans le Théorème 3.2.9 du chapitre 3. Il s'agit de la restauration de l'état et de l'entrée inconnue du système. Ici, l'entrée inconnue joue le rôle du signal d'information confidentielle à crypter.

Dans les deux cas, il s'agit de la transmission d'images comme application.

Afin de réaliser le processus de transmission d'une image, les transformations suivantes sont nécessaires :

1. A partir d'une image en couleurs, on génère un signal à une dimension en concaténant les lignes des trois matrices définissant l'image pour obtenir un seul vecteur. L'utilisation de la fonction "reshape" du logiciel MATLAB permet d'avoir cette transformation.
2. Les coefficients du vecteur formé sont ensuite normalisés, pour obtenir un signal $s(t) \in [0, 1]$.

5.4.1 Utilisation de la méthode avec deux lignes de transmission

Pour commencer, on garde les mêmes notations que la figure 5.13. Dans cette première technique, on a choisi comme émetteur chaotique le système de Rössler (voir la section 5.2) décrit par les équations :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -(x_2 + x_3) \\ \dot{x}_2 = x_1 + ax_2 \\ \dot{x}_3 = b + x_3(x_1 - c) \end{cases} \quad (5.11)$$

où $a = 0.398$, $b = 2$ et $c = 4$.

L'image originale choisie pour la transmission est représentée à la figure 5.14.

Processus de cryptage

La fonction de cryptage utilisée est la suivante :

$$\Phi(x, s) = \arctan(x_1^2 + s) + x_2. \quad (5.12)$$



FIG. 5.14 – Image originale.

L'image correspondant au signal crypté (envoyé à travers un canal de transmission vers le récepteur), $s_c = \Phi(x, s)$, est représentée à la figure 5.15.

Processus de synchronisation

Cette étape est utilisée pour la conception du récepteur. On choisit comme signal de sortie $y = x_3$, i.e. $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Ce signal, ne contenant aucune information du message s , est utilisé seulement pour la synchronisation. Il est envoyé via un deuxième canal de transmission séparé du premier.

Les états initiaux de l'émetteur et du récepteur sont les suivants :

$$x_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}^T,$$

$$z_0 = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}^T.$$

En utilisant les LMIs (2.12) du Théorème 2.2.5, on trouve le gain suivant pour l'observateur (2.5) :

$$L = \begin{bmatrix} 303.7043 & -179.9254 & 76.7712 \end{bmatrix}^T.$$

La figure 5.16 montre la convergence vers zéro des trois composantes de l'erreur de synchronisation $x - z$. La variable x représente l'état de l'émetteur et z est l'état du récepteur.

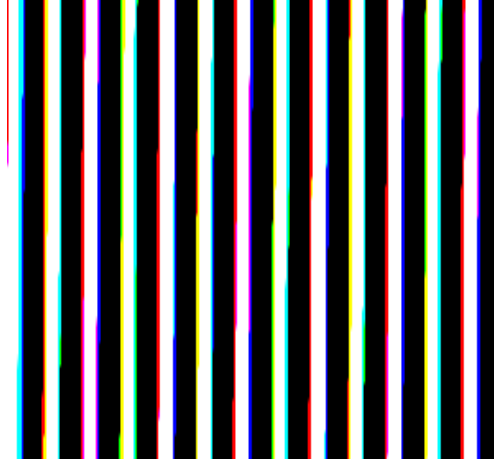


FIG. 5.15 – Image cryptée.

Processus de décryptage

Cette étape sert à reconstruire l'image de départ. La fonction de décryptage Ψ , l'inverse de Φ par rapport à s , est définie par :

$$\boxed{\Psi(z, s_c) = \tan(s_c - z_2) - z_1^2} \quad (5.13)$$

où z_1 et z_2 sont respectivement la première et la deuxième composante de l'état z du récepteur. La figure 5.17 montre l'image correspondant au signal $s_d = \Psi(z, s_c)$ reconstruit.

On constate d'après la figure 5.17 une perte d'informations provenant des conditions initiales inconnues de l'émetteur. Afin de palier cette limitation, on a choisi d'augmenter la taille de l'image originale par ajout d'une partie vide à l'entrée (pixels noirs ou blancs, selon l'image utilisée). Les figures 5.18(a) et 5.18(b) représentent respectivement l'image originale et l'image reconstruite après augmentation de la taille.

La figure 5.18(b) montre que l'image est bien reconstruite. Seuls les pixels ajoutés à l'entrée de l'image originale ont subi une perte d'informations.

5.4.2 Synchronisation et décryptage simultanément

Dans cette seconde technique, l'état de l'émetteur et le signal d'information correspondant à l'image à transmettre sont reconstruits simultanément. La technique s'inspire des observateurs à entrées inconnues étudiés dans la section 3.2.5. Les entrées inconnues jouent le rôle du signal

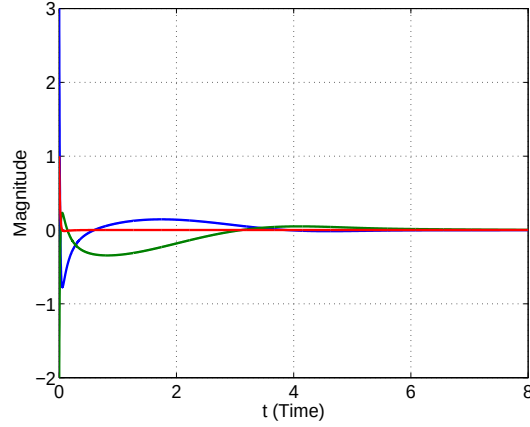


FIG. 5.16 – Composantes de l'erreur de synchronisation.

d'information. Le système chaotique correspondant à l'émetteur est la version discrete du système de *Lorenz* obtenue par la méthode de discrétisation d'*Euler* avec un pas de discrétisation $h = 0.01$ s. Ce système s'écrit après ajout du signal d'information sous la forme (3.26) avec les paramètres suivants :

$$A = \begin{bmatrix} 1 - 10h & 10h & 0 \\ 28h & 1 - h & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \frac{8}{3}h \end{bmatrix}, \quad A_u = h \begin{bmatrix} 30 \\ 28 \\ 10 \end{bmatrix},$$

$$B = h \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad H_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$H_u = 1, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = 1$$

et la fonction non linéaire

$$f\left(H_x x(k), H_u u(k), y(k)\right) = \begin{bmatrix} -y(k)x_3(k) - y(k)u(k) \\ y(k)x_2(k) + y(k)u(k) \end{bmatrix}.$$

La variable u est le signal à une dimension correspondant à l'image originale représentée à la figure 5.14. Le système chaotique correspondant au récepteur est l'observateur (3.31).

Les états initiaux de l'émetteur et du récepteur sont les suivants :

$$x_0 = \begin{bmatrix} -0.1 & 0.5 & 0.1 \end{bmatrix}^T, \quad u_0 = 0,$$

$$z_0 = \begin{bmatrix} 0.5 & 1 & -1 & 0.1 \end{bmatrix}^T.$$

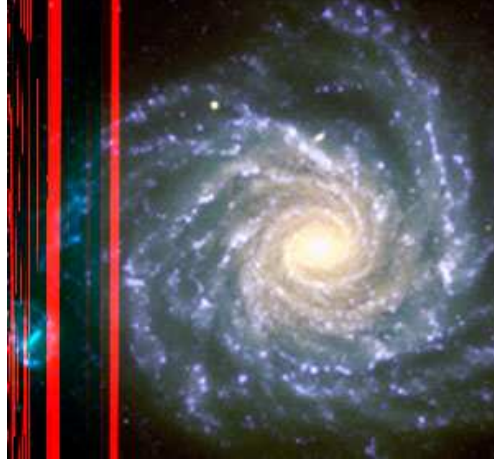


FIG. 5.17 – Image décryptée.

En utilisant les inégalités matricielles (3.37)-(3.38) du Théorème 3.2.9 du chapitre 3, on trouve les gains suivants pour l'observateur (3.31) :

$$N = \begin{bmatrix} 0.3000 & 0.1000 & 0 & -0.3000 \\ 0 & 0.9900 & 0 & 0 \\ -0.0500 & 0 & 0.9733 & 0.0500 \\ -0.3000 & -0.1000 & 0 & 0.3000 \end{bmatrix},$$

$$L = \begin{bmatrix} 0.3000 \\ 0.2800 \\ 0.1000 \\ -0.3000 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.5 \end{bmatrix}.$$

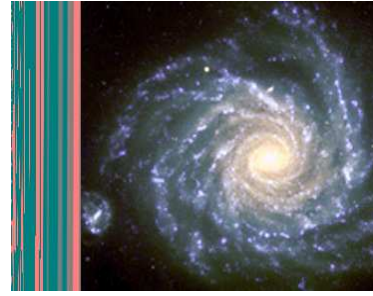
Les matrices auxiliaires sont :

$$P = \begin{bmatrix} 1.6948 & -0.0269 & -0.0046 & -0.0854 \\ -0.0269 & 1.9032 & 0.0015 & 0.0269 \\ -0.0046 & 0.0015 & 1.9038 & 0.0046 \\ -0.0854 & 0.0269 & 0.0046 & 1.6948 \end{bmatrix},$$

$$Q = \begin{bmatrix} 0.5388 & 0 \\ 0 & 0.5388 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$



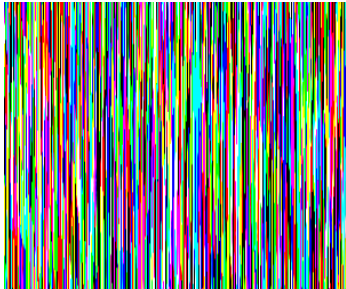
(a) Image originale augmentée.



(b) Image décryptée.

FIG. 5.18 – Images originale et décryptée après augmentation de la taille.

Les figures 5.19(a) et 5.19(b) montrent respectivement l'image envoyée à travers un canal de transmission (l'image cryptée) et l'image décryptée. D'après la figure 5.19(b), l'image est bien reconstruite. Elle présente seulement quelques pixels incorrects à l'entrée de l'image, qui sont dûs à la non connaissance des conditions initiales.



(a) Image cryptée.



(b) Image décryptée.

FIG. 5.19 – Images cryptée et décryptée.

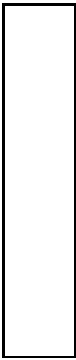
Remarque 5.4.1. *Il est à signaler que les problèmes de sécurité dans les systèmes de communications chaotiques ne sont pas considérés dans ce manuscrit. Il s'agit d'une application de certaines procédures de synthèse d'observateurs proposées dans ce mémoire aux problèmes de synchronisation.*

■

5.5 Conclusion

Dans ce chapitre, après une introduction aux systèmes chaotiques et un état de l'art sur la synchronisation et les différentes techniques de cryptage/décryptage en utilisant le chaos, une application de nos méthodes de synthèse d'observateurs est présentée dans la section 5.4. Deux techniques de cryptage/décryptage sont utilisées : la première est la méthode avec deux lignes de transmission. La procédure de synthèse du gain de l'observateur utilisée pour la synchronisation de l'émetteur et le récepteur est celle proposée dans la section 2.2.2 du chapitre 2 (Théorème 2.2.5). La seconde technique est inspirée des observateurs à entrées inconnues. Dans ce cas, on a utilisé la méthode de synthèse des gains proposée dans le Théorème 3.2.9 du chapitre 3. Il s'agit de la restauration de l'état et de l'entrée inconnue du système considéré. On a utilisé un système à temps discret pour valider les résultats du chapitre 3. L'entrée inconnue est le signal d'information à transmettre.

Dans les deux cas, le signal d'information correspond à une image.



Conclusion générale

Durant cette thèse, nous avons proposé plusieurs méthodes de synthèse d'observateurs d'état des systèmes non linéaires qui permettent d'améliorer les résultats existant dans la littérature. Ces méthodes réduisent le conservatisme de certaines techniques mentionnées dans le **chapitre 1**, dans le sens où les conditions de synthèse sont moins contraignantes et applicables à une classe plus large de systèmes non linéaires.

L'une des contributions principales de notre travail de recherche, présentée dans le **chapitre 2**, réside dans l'utilisation du Théorème des Accroissements Finis (DMVT) qui permet de ramener le problème d'estimation d'état d'un système dynamique non linéaire à un problème de stabilité d'un système Linéaire à Paramètres Variant (LPV). En fait, le DMVT intervient au niveau de la dynamique de l'erreur d'estimation (qui définit un système non linéaire quelconque) afin de la transformer en un système LPV. En se basant sur les techniques LPV reportées dans la littérature, des conditions de stabilité sous forme d'Inégalités Linéaires Matricielles (LMIs) ont été obtenues. Des généralisations ont été obtenues pour les systèmes non différentiables, les systèmes partiellement LPV et les systèmes à sorties non linéaires. L'utilisation de la théorie H_∞ nous a permis d'adapter notre approche au cas des systèmes affectés par un bruit borné. Une conception d'un observateur robuste a été détaillée dans le **chapitre 2**. Des conditions de synthèse du gain de l'observateur, tenant compte de la robustesse au bruit, ont été établies. Cette technique a été ensuite étendue aux systèmes non linéaires à entrées inconnues, à savoir l'estimation de l'état et des entrées inconnues (simultanément) avec des conditions de synthèse non contraignantes.

Une deuxième méthode a été également présentée dans le **chapitre 2**. Cette dernière repose sur l'utilisation d'une nouvelle structure de l'observateur, basée sur les observateurs de Luenberger généralisés. Cette structure permet de compléter les résultats développés dans [44] d'une part, et d'autre part elle permet d'étendre la méthode basée sur la transformation en LPV à une

classe plus large de systèmes. Une version de cette méthode de transformation en système LPV a été présentée dans le **chapitre 3** pour le cas des systèmes à temps discret.

Nous avons également développé des techniques spécifiques aux systèmes non linéaires lipschitziens à temps discret. Les résultats, détaillés dans le **chapitre 3**, que nous avons obtenus sont intéressants. En effet, cette classe de systèmes est peu étudiée par la communauté scientifique. Peu de méthodes ont été établies dans la littérature. La contribution principale se situe dans la construction de nouvelles fonctions de *Lyapunov* qui ont permis d'obtenir des conditions de synthèse moins restrictives que celles obtenues antérieurement. Une amélioration de ce résultat a été ensuite proposée. Cette amélioration repose sur l'utilisation d'un OLG et l'écriture du système étudié sous une forme plus détaillée, c'est-à-dire, la spécification de la matrice B de distribution de la non-linéarité dans le système, et la matrice H de distribution de l'état dans la non-linéarité. En fait, l'injection de ces matrices dans le système et l'utilisation d'un OLG permettent d'éliminer l'effet de la constante de Lipschitz et rendent les conditions de synthèse moins contraignantes et satisfaites dans la plupart des cas. Il est à signaler également que la spécification des matrices B et H joue un rôle très important sur la faisabilité des conditions de synthèse. En effet, l'absence de la matrice H signifie que la méthode de synthèse ne distingue pas un système, dont la non-linéarité dépend de l'état entier, d'un autre dont une partie de l'état est présente dans la non-linéarité. Une application de cette méthode à la restauration d'entrées inconnues a été directement envisagée.

Grâce à une fonctionnelle de *Lyapunov-Krasovskii* particulière, une généralisation, des résultats obtenus dans les **chapitres 2** et **3**, à des systèmes non linéaires à retard a été présentée dans le **chapitre 4**.

Dans le **chapitre 5**, après un bref état de l'art sur la synchronisation et les différentes techniques de cryptage/décryptage dans les systèmes de communications chaotiques, une application à la transmission d'images a été présentée. Deux techniques ont été utilisées : la première est la méthode à deux lignes de transmission (figure 5.13), et la seconde s'inspire des observateurs à entrées inconnues. L'objectif de cette application est de valider certaines méthodes de synthèse d'observateurs développées dans ce manuscrit.

Ce travail ouvre la voie à d'autres développements qui restent ouverts notamment en ce qui concerne la recherche de nouvelles fonctions de *Lyapunov* qui permettent de réduire le conservatisme des approches actuellement disponibles dans la littérature. Une autre voie concerne la recherche d'une nouvelle structure d'observateurs qui permet l'applicabilité de nos résultats à des classes plus larges de systèmes non linéaires.

L'hypothèse sous laquelle la méthode de transformation en système LPV en utilisant le DMVT est la bornitude de la jacobienne de la fonction non linéaire f , c'est à dire $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\cdot)$ doivent être des fonctions bornées. Cet obstacle a ouvert deux voies de recherche qui sont actuellement à l'étude. Ces deux voies sont les suivantes :

1. Systèmes à état borné : Il existe plusieurs systèmes dynamiques pour lesquels la jacobienne de la non-linéarité n'est pas bornée et pourtant l'état du système est borné, c'est le cas

des systèmes chaotiques par exemple. Pour cette classe de systèmes, nous avons pensé à construire un ensemble de systèmes dynamiques à états bornés basé sur le système original. La question qui se pose est comment choisir un élément de cet ensemble dont l'état convergera vers l'état du système original ?

2. Systèmes à état non borné : Pour cette classe de systèmes, nous sommes à la recherche d'une transformation non linéaire générale qui puisse transformer le système en un autre dont la jacobienne de la nouvelle non-linéarité soit bornée. Une fois que la transformation est obtenue, nous utilisons la méthode de transformation en LPV pour estimer l'état du système transformé et puis utiliser la transformation inverse pour estimer l'état du système de départ.

La résolution de ces deux problèmes permet d'établir une méthode de synthèse d'observateurs pour une classe large de systèmes non linéaires, avec des conditions de synthèse non contraignantes.

Quelques rappels mathématiques

Sommaire

A.1	Théorie des Matrices	126
A.2	Rappels sur la Convexité	126

A.1 Théorie des Matrices

Cette annexe regroupe des rappels sur quelques notions mathématiques utilisées dans ce mémoire.

Définition A.1.1. Une matrice symétrique $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est dite :

1. *définie positive* $S > 0$ ssi $x^T S x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$.
2. *semi-définie positive* $S \geq 0$ ssi $x^T S x \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$.
3. *définie négative* $S < 0$ ssi $x^T S x < 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$.
4. *semi-définie négative* $S \leq 0$ ssi $x^T S x \leq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$.

■

Complément et lemme de Schur

Ici, nous présentons brièvement le complément et le lemme de Schur utilisés dans le chapitre 3.

Définition A.1.2. (Complément de Schur [30]) Pour une matrice A inversible, le complément de Schur de A , dans la matrice M donnée par :

$$M := \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

est la matrice $D - CA^{-1}B$.

■

Définition A.1.3. (Lemme de Schur [30]) Pour $A = A^T$ et $C = C^T$,

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B^T & C \end{pmatrix} > 0$$

si et seulement si

$$C - B^T A^{-1} B > 0 \text{ si } A > 0$$

ou de façon équivalente, si et seulement si

$$A - BC^{-1}B^T > 0 \text{ si } C > 0.$$

■

A.2 Rappels sur la Convexité

Comme notre nouvelle approche basée sur le DMVT requière principalement le principe de convexité, alors nous présentons dans cette section quelques définitions et propriétés sur les ensembles convexes, les fonctions convexes et le principe de convexité lui même.

Définition A.2.1. (Ensemble convexe) Un ensemble E est dit convexe si

$$\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in E$$

pour tout $x_1, x_2 \in E$ et pour tout $0 \leq \lambda \leq 1$. ■

Géométriquement, ceci signifie que tout segment liant deux points quelconques appartenant à un ensemble convexe est inclus dans cet ensemble.

Définition A.2.2. (Fonction convexe) Une fonction $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est dite convexe si

$$\varphi(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda \varphi(x_1) + (1 - \lambda)\varphi(x_2)$$

pour tout $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ et pour tout $0 \leq \lambda \leq 1$.

La fonction φ est strictement convexe si et seulement si

$$\varphi(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) < \lambda \varphi(x_1) + (1 - \lambda)\varphi(x_2)$$

pour tout $x_1 \neq x_2$ et pour tout $0 < \lambda < 1$. ■

Références Personnelles

Sommaire

Revues internationales avec comité de lecture

- **A. Zemouche** and M. Boutayeb. *Observer design for Lipschitz nonlinear systems. The discrete-time case*. IEEE Transactions on Circuits & Systems II : Analog and Digital Signal Processing, 53(8) : 777–781, 2006.
- **A. Zemouche**, M. Boutayeb, and G. I. Bara. *Observers for a Class of Lipschitz Systems with Extension to H_∞ Performance Analysis*. Systems & Control Letters, 2007.
- **A. Zemouche**, M. Boutayeb, and G. I. Bara. *Observer Design for a Class of Lipschitz Time-Delay Systems*. International Journal of Modelling, Identification and Control (IJMIC), Special Issue on : Observers for Nonlinear Systems.

Conférences internationales avec comité de lecture

- **A. Zemouche**, M. Boutayeb, and G. I. Bara. *Nonlinear observers for lipschitz discrete-time systems. Application to synchronization and input recovery*. In 2007 European Control Conference ECC'07, Kos, Greece, July 2007.
- **A. Zemouche**, M. Boutayeb, and G. I. Bara. *Observer Design for a Class of Nonlinear Time-Delay Systems*. In 2007 American Control Conference ACC'07, New York City, USA, July 2007.
- **A. Zemouche**, M. Boutayeb, and G. I. Bara. *Observers design for a class of nonlinear systems*. In 45th IEEE Conference on Decision and Control CDC 2006, San Diego, California, USA, December 2006.
- **A. Zemouche**, M. Boutayeb, and G. I. Bara. *On observers design for nonlinear time-delay systems*. In 2006 American Control Conference ACC'06, Minneapolis, Minnesota, USA, June 2006.
- **A. Zemouche** and M. Boutayeb. *Synchronization by observer based approach for a class of nonlinear chaotic systems*. In 1st IFAC Conference on Analysis and Control of Chaotic Systems, CHAOS'06, Reims, France, 28-30 June 2006.
- **A. Zemouche** and M. Boutayeb. *Nonlinear observers design for synchronization and information recovery in communication systems*. In Second IEEE-EURASIP International Symposium on Communications, Control and Signal Processing, Marrakech, Morocco, March 2006.
- **A. Zemouche**, M. Boutayeb, and G. I. Bara. *Observer design for nonlinear systems : An approach based on the differential mean value theorem*. In 44th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference CDC-ECC 2005, Seville, Spain, December 2005.
- G. I. Bara, **A. Zemouche**, and M. Boutayeb. *A new approach for the observer-based synchronization of chaotic systems*. In 16th IFAC World Congress, Prague, July 2005.
- G. I. Bara, **A. Zemouche**, and M. Boutayeb. *Observer synthesis for Lipschitz discrete-time systems*. In IEEE International Symposium on Circuits and Systems, Japan, Kobe, May 2005.

Conférence nationale avec comité de lecture

- **A. Zemouche**, G. I. Bara, and M. Boutayeb. *Synchronisation par une approche basée-observateur pour les systèmes non linéaires lipschitziens à temps discret*. In Journées Doctorales et Nationales du GDR MACS du CNRS, JDMACS-JNMACS, Lyon, France, September 2005.

Revue internationale en cours de soumission

- **A. Zemouche**, M. Boutayeb, and G. I. Bara. *H_∞ Filtering Based Synchronization for a Class of Nonlinear Systems*. IEEE Transaction on Signal Processing. (En révision)
- **A. Zemouche** and M. Boutayeb. *Observer Synthesis Method for a Class of Lipschitz Nonlinear Systems with Some Extensions*. IEEE Transaction on Automatic Control. (En préparation)
- **A. Zemouche** and M. Boutayeb. *Nonlinear Observers for Lipschitz Discrete-Time Systems. Application to Robust Synchronization and Unknown Input Recovery*. IEEE Transaction on Circuits & Systems I. (En préparation)

Conférence internationale en cours de soumission

- **A. Zemouche** and M. Boutayeb. *A New Observer design method for a Class of Lipschitz Nonlinear Discrete-Time Systems with Time-Delay. Extension to H_∞ Performance Analysis*. In 46th IEEE Conference on Decision and Control CDC 2007, New Orleans, USA, December 2007. (Soumis)



Bibliographie

- [1] W. Aggoune, M. Boutayeb, and M. Darouach. Observers design for a class of nonlinear systems with time-varying delay. In *38th IEEE Conference on Decision and Control CDC 1999*, Phoenix, Arizona, USA, December 1999.
- [2] A. Alessandri. Design of observers for Lipschitz nonlinear systems using LMI. *NOLCOS, IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems, Stuttgart, Germany*, 2004.
- [3] M. Arcak. A global separation theorem for a new class of nonlinear observers. In *41th IEEE Conference on Decision and Control CDC 2002*, Las Vegas, Nevada, USA, December 2002.
- [4] M Arcak and P. Kokotovic. Nonlinear observers : A circle criterion design. In *38th IEEE Conference on Decision and Control CDC 1999*, Phoenix, Arizona, USA, December 1999.
- [5] M Arcak and P. Kokotovic. Nonlinear observers : A circle criterion design and robustness analysis. *Automatica*, 37(12) :1923–1930, 2001.
- [6] M Arcak and P. Kokotovic. Observer-based control of systems with slope-restricted nonlinearities. *IEEE Trans. Automatic Control*, 46(7) :1–5, 2001.
- [7] D. Aubry, M. Boutayeb, and M. Darouach. Observateurs de type Kalman étendu pour les systèmes non linéaires temps discret. application à une machine asynchrone. In *Colloque Inter-GDR Thème Commande des Entraînements Electriques, Paris, France*, 1998.
- [8] D. Aubry, M. Boutayeb, and M. Darouach. On extended Kalman type observers design with application to the ball and beam system. In *5th IFAC Symposium of the 15th IMACS Nonlinear Systems- NOLCOS 2001, Saint-Petersburg, Russia*, pages 1431–1436, 2001.
- [9] G. I. Bara, A. Zemouche, and M. Boutayeb. A new approach for the observer-based synchronization of chaotic systems. In *16th IFAC World Congress, Prague, July 2005*.
- [10] G. I. Bara, A. Zemouche, and M. Boutayeb. Observer synthesis for Lipschitz discrete-time

- systems. In *IEEE International Symposium on Circuits and Systems*, Japan, Kobe, May 2005.
- [11] G.I. Bara. State estimation of linear parameter-varying systems. *PhD Thesis, National Polytechnic Institute of Lorraine*, 2001.
- [12] G.I. Bara, J. Daafouz, F. Kratz, and J. Ragot. Parameter dependent state observer design for affine LPV systems. *Int. J. of Control*, 74(16) :1601–1611, 2001.
- [13] M. Benallouch, E. Laroche, M. Boutayeb, and J.-J. E.Slotine. Nonlinear observer design for synchronization and information recovery in communication systems using contraction theory. In *2007 European Control Conference ECC'07*, Kos, Greece, July 2007.
- [14] O. Bernard and J. L. Gouzé. State estimation for bioprocesses. In *lecture notes : Mathematical Control Theory*, Trieste, ICTP, 2002.
- [15] O. Bernard, G. Sallet, and A. Sciandra. Nonlinear observers for a class of biological systems : Application to validation of a Phytoplanktonic growth model. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 43(8) :1056–1065, 1998.
- [16] D. Bestle and M. Zeitz. Canonical form observer design for nonlinear time-variable systems. *International Journal of Control*, 38(2) :419–431, 1983.
- [17] K. P. M. Bhak and H. N. Koivo. An observer theory for time-delay systems. *IEEE Transaction on Automatic Control*, 21(4) :266–269, 1976.
- [18] J. Birk and M. Zeitz. Extended Luenberger observer for nonlinear multi-variable systems. *International Journal of Control*, 47(6) :1823–1836, 1988.
- [19] G. Bornard, F. Celle-Couenne, and G. Gilles. *Observabilité et observateurs*. chapitre 3. systèmes non linéaires. tome 1 : Modélisation-Estimation. *Masson*, 1993.
- [20] G. Bornard and H. Hammouri. A high gain observer for a class of uniformly observable systems. In *Proceedings of the 30th IEEE Conference on Decision and Control*, Brighton, England, 1991.
- [21] M. Boutayeb. Observers design for linear time-delay systems. *Systems and Control Letters*, 44 :103–109, 2001.
- [22] M. Boutayeb. Synchronization and input recovery in digital non-linear systems. *IEEE Trans. Circuits Syst. II :Express Brief*, 51(8) :393–399, 2004.
- [23] M. Boutayeb and D. Aubry. A strong tracking extended Kalman observer for nonlinear discrete-time systems. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 44(8) :1550–1556, 1999.
- [24] M. Boutayeb, D. Aubry, and M. Darouach. Robust observers design for a class of nonlinear discrete-time systems. In *Proceedings of the 4th European Control Conference*, Bruxelles, Belgique, 1997.
- [25] M. Boutayeb, D. Aubry, M. Darouach, and P. M. Frank. Observers design for nonlinear descriptor systems. In *Proceedings of the 15th IMACS World Congress*, Berlin, Allemagne, 1997.
- [26] M. Boutayeb and M. Darouach. A kalman type observer for discrete-time systems with multiple delays. In *37th IEEE Conference on Decision and Control CDC 2006*, Tampa-Florida, USA, December 1998.

-
- [27] M. Boutayeb and M. Darouach. A reduced order observer for nonlinear discrete-time systems. *Systems & Control Letters*, 39 :141–151, 2000.
 - [28] M. Boutayeb, M. Darouach, and H. Rafaralahy. Generalized state-space observers for chaotic synchronization and secure communication. *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, 49(3) :345–349, 2002.
 - [29] M. Boutayeb, H. Rafaralahy, and M. Darouach. Convergence analysis of the extended Kalman filter used as an observer for nonlinear deterministic discrete-time systems. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 42(4) :581–586, 1997.
 - [30] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan. Linear matrix inequalities in system and control theory. In *SIAM Studies in Applied Mathematics*, Philadelphia, USA, 1994.
 - [31] S. Boyd and L. Vandenberghe. Convex optimization with engineering applications. *Lecture Notes, Stanford University, Stanford*, 2001.
 - [32] E. Brookner. Tracking and Kalman filtering made easy. *John Wiley & Sons*, 1998.
 - [33] R. Brown and P Hwang. Introduction to random signals and applied Kalman filtering : with Matlab exercises and solutions. *John Wiley & Sons, Third Edition*, 1997.
 - [34] T.L. Carroll and L.M. Pecora. Synchronizing chaotic circuits. *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, 38(4) :453–456, 1991.
 - [35] G. Chen. Approximate Kalman filtering. *World Scientific series in approximations and decompositions*, 1993.
 - [36] K. M. Cuomo, A. V. Oppenheim, and S. H. Strogatz. Synchronization of lorenz-based chaotic circuits with applications to communications. *IEEE Trans. Circuits Syst. II*, 40(10) :626–633, 1993.
 - [37] P. Curran and L. Chua. Absolute stability theory and the synchronization problem. *Int. J. of Bifurcation and Chaos*, 7(6) :1375–1382, 1997.
 - [38] A De Angeli, R Genesio, and A Tesi. Dead-beat chaos synchronization in discrete-time systems. *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, 42(1) :54–56, 1995.
 - [39] H. Dedieu, M. P. Kennedy, and M. Hasler. Chaos shift keying : modulation and demodulation of a chaotic carrier using self-synchronizing chua’s circuits. *IEEE Trans. Circuits Syst. II*, 40(10) :634–642, 1993.
 - [40] F. Deza, D. Bossanne, E. Busvelle, J. P. Gauthier, and D. Rakotopara. Exponential observers for nonlinear systems. *IEEE Trans. Automatic Control*, 38(3) :482–484, 1993.
 - [41] F. Deza, E. Busvelle, J. P. Gauthier, and D. Rakotopara. High gain estimation for nonlinear systems. *Systems & Control letters*, 18, 1992.
 - [42] K. El Rifai and J.J.E. Slotine. Compositional contraction analysis of hybrid nonlinear systems. *IEEE. Trans. Aut. Control*, 2006.
 - [43] X. Fan and M. Arcak. Nonlinear observer design for systems with multivariable monotone nonlinearities. In *41th IEEE Conference on Decision and Control CDC 2002*, Las Vegas, Nevada, USA, December 2002.
 - [44] X. Fan and M Arcak. Observer design for systems with multivariable monotone nonlinearities. *Systems and Control Letters*, 50 :319–330, 2003.

- [45] M. Farza, K. Busawon, and H. Hammouri. Simple nonlinear observers for on-line estimation of Kinetic rates in bioreactors. *Automatica*, 34(3) :301–318, 1993.
- [46] J. P. Gauthier and G. Bornard. Observability for any $u(t)$ of a class of nonlinear systems. *IEEE Trans. Automatic Control*, 26(4) :922–926, 1994.
- [47] J. P. Gauthier, H. Hammouri, and S. Othman. A simple observer for nonlinear systems. Applications to bioreactors. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 37(6) :875–880, 1992.
- [48] A. Germani, C. Manes, and P. Pepe. Numerical solution for optimal regulation of stochastic hereditary systems with multiple discrete delays. In *34th IEEE Conference on Decision and Control CDC 2006*, New Orleans, Louisiana, USA, December 1995.
- [49] A. Germani, C. Manes, and P. Pepe. A state observer for nonlinear delay systems. In *37th IEEE Conference on Decision and Control CDC 2006*, Tampa-Florida, USA, December 1998.
- [50] A. Germani and P. Pepe. A state observer for nonlinear delay systems. 2004.
- [51] A. Glumineau, C. H. Moog, and F. Plestan. New algebro-geometric conditions for the linearization by input-output injection. *IEEE Trans. Automatic Control*, 41(4) :598–603, 1996.
- [52] G. Grassi and S. Mascolo. Nonlinear observer design to synchronize hyperchaotic systems via a scalar signal. *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, 44(10) :1011–1014, 1997.
- [53] G. Grassi and S. Mascolo. Synchronizing hyperchaotic systems by observer design. *IEEE Trans. Circuits Syst. II*, 46(4) :478–483, 1999.
- [54] G. Grassi and D.A. Miller. Theory and experimental realization of observer-based discrete-time hyperchaos synchronization. *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, 49(3) :373–378, 2002.
- [55] M. Grewal and A. Andrews. Kalman filtering : Theory and practice. *Prentice Hall*, 1993.
- [56] K. Gu, V.L. Kharitonov, and J. Chen. *Stability of time-delay systems*. Birkhäuser, 2003.
- [57] M. Hasler. Engineering chaos for encryption and broadband communication. *Phil. Trans. Royal Soc. London, A*, 353 :115–126, 1995.
- [58] R. Herman and J. Krener. Nonlinear controllability and observability. *IEEE Trans. Automatic Control*, 22(5) :728–740, 1977.
- [59] M. Hou and A.C. Pugh. Observer with linear error dynamics for nonlinear multi output systems. *Systems and Control Letters*, 37(1) :1–9, 1999.
- [60] H.J.C. Huijberts, T. Lilge, and H. Nijmeijer. Nonlinear discrete-time synchronization via extended observers. *I. J. of Bifurcation and Chaos*, 11(7) :1997–2006, 2001.
- [61] A. H. Jazwinski. Stochastic processes and filtering theory. *New York Academic*, 1970.
- [62] Z. P. Jiang. A note on chaotic secure communication systems. *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, 49(1) :92–96, 2002.
- [63] J. Jouffroy. A simple extension of contraction theory to study incremental stability properties. In *2003 European Control Conference ECC'03*, Cambridge, United Kingdom, September 2003.
- [64] J. Jouffroy and J.-J. E. Slotine. Methodological remarks on contraction theory. *IEEE conference on Decision and control*, pages 2537–2543, 2004.

-
- [65] N. Kazantzis and C. Kravaris. Nonlinear observer design using Lyapunov's auxiliary theorem. *Systems & Control Letters*, 34(5) :241–247, 1998.
 - [66] H. Keller. Nonlinear observer design by transformation into a generalized observer canonical form. *International Journal of Control*, 46(6) :1915–1930, 1987.
 - [67] V.L. Kharitonov. Robust stability analysis of time delay systems : A survey. *Annu. Rev. Control*, 23 :185–196, 1999.
 - [68] V.L. Kharitonov and A.P. Zhabko. Lyapunov-krasovskii approach for robust stability of time delay systems. *Automatica*, 39 :15–20, 2003.
 - [69] G. Kolumbán, M. P. Kennedy, and L. O. Chua. The role of synchronization in digital communications using chaos : Part II : Chaotic modulation and chaotic synchronization. *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, 45(11) :1129–1140, 1998.
 - [70] N.N. Krasovskii. *Stability of motion*. Stanford University Press, Stanford CA, USA (translation by J. Brenner), 1963.
 - [71] A. J. Krener and A. Isidori. Linearization by output injection and nonlinear observers. *Systems and Control Letters*, 3(1) :47–52, 1983.
 - [72] A. J. Krener and W. Respondek. Nonlinear observer with linearizable error dynamics. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 23(2) :197–216, 1985.
 - [73] C. W. Li and L. W. Tao. Observing nonlinear time-variable systems through a canonical form observer. *International Journal of Control*, 44(6) :1703–1713, 1987.
 - [74] T.L. Liao and N.S. Huang. An observer-based approach for chaotic synchronization with applications to secure communications. *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, 46(9) :1144–1150, 1999.
 - [75] T. Lilge. *Nonlinear discrete-time observers for synchronization problems*, volume 244. Springer verlag edition, 1999. New directions in nonlinear observer design.
 - [76] J. Lohmiller and J.-J. E. Slotine. On contraction analysis for nonlinear systems. *Automatica*, 34(6) :683–696, 1998.
 - [77] J. Lohmiller and J.-J. E. Slotine. Control system design for mechanical systems using contraction theory. *IEEE Trans. Aut. Control*, 45(5) :984–989, 2000.
 - [78] W. Lohmiller and J.J.E. Slotine. Nonlinear process control using contraction theory. *A.I.Ch.E. Journal*, 2000.
 - [79] W. Lohmiller and J.J.E. Slotine. Contraction analysis of nonlinear distributed systems. *International Journal of Control*, 2005.
 - [80] F. Mazenc and S. I. Niculescu. Lyapunov stability analysis for nonlinear delay systems. In *39th IEEE Conference on Decision and Control CDC 2000*, Sydney, Australia, December 2000.
 - [81] E. A. Misawa and J. K. Hedrick. Nonlinear observers-a state of the art survey. *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 111 :344–352, 1989.
 - [82] S. Mondié and V.L. Kharitonov. Exponential estimates for retarded time-delay systems : An lmi approach. *IEEE Transaction on Automatic Control*, 50(2) :268–273, 2005.

- [83] O. Morgül and E. Solak. Observer based synchronization of chaotic systems. *Phys. Rev. E.*, 54 :4802–4811, 1996.
- [84] O. Morgül and E. Solak. On the synchronization of chaotic systems by using state observations. *Int. J. Bifurcations Chaos*, 7(6) :1307–1322, 1997.
- [85] H. Nijmeijer. Observability of autonomous discret-time nonlinear systems : a geometric approach. *Int. J. of Control*, 36 :862–874, 1982.
- [86] H. Nijmeijer and I. M. Y. Mareels. An observer looks at synchronization. *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, 44(10) :882–890, 1997.
- [87] H. Nijmeijer and A. J. Van der Schaft. Nonlinear dynamical control systems. *Spring-Verlag*, 1990.
- [88] P. R. Pagilla and Y. Zhu. Controller and observer design for Lipschitz nonlinear systems. In *IEEE American Control Conference ACC'04*, Boston, Massachusetts, USA, July 2004.
- [89] R. V. Patel and M. Toda. Quantitative measures of robustness in multivariable systems. In *American Control Conference, San-Francisco, USA*, 1980.
- [90] A. E. Pearson and Y. A. Fiagbedzi. An observer for time lag systems. *IEEE Transaction on Automatic Control*, 34(8) :775–777, 1989.
- [91] L.M. Pecora and T.L. Carroll. Synchronization in chaotic systems. *Phys. Rev. Lett.*, 64(8) :821–824, 1990.
- [92] A. R. Phelps. On constructing nonlinear observers. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 29(3) :516–534, 1991.
- [93] F. Plestan and A. Glumineau. Linearization by generalized input-output injection. *Systems and Control Letters*, 31(2) :115–128, 1997.
- [94] K. M. Przyluski and A. Sosnowski. On observers for linear discrete-time systems with delays and unknown disturbances. *Systems and Control Letters*, 13 :165–170, 1989.
- [95] S. Raghavan and J. K. Hedrick. Observer design for a class of nonlinear systems. *Int. J. of Control*, 59(2) :515–528, 1994.
- [96] R Rajamani. Observers for Lipschitz nonlinear systems. *IEEE Trans. Automatic Control*, 43(3) :397–401, 1998.
- [97] K. Reif, F. Sonnemann, and R. Unbehauen. An EKF based nonlinear observer with a prescribed degree of stability. *Automatica*, 34(9) :1119–1123, 1998.
- [98] K. Reif, F. Sonnemann, and R. Unbehauen. Nonlinear state observation using H_∞ -filtering riccati design. *IEEE Trans. Automatic Control*, 44(1) :203–208, 1999.
- [99] J. Rudolph and M. Zeitz. A block triangular nonlinear observer normal form. *Systems and Control Letters*, 23 :1–8, 1994.
- [100] Jean-Jacques Slotine and Weiping Li. *Applied nonlinear control*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, January 1991.
- [101] Y. Song and J. W. Grizzle. Th extended Kalman filter as a local asymptotic observer for discrete-time nonlinear systems. *Journal of Mathematical Systems Estimation and Control*, 5(1) :59–78, 1995.

-
- [102] E. D. Sontag. A concept of local observability. *Systems and Control Letters*, 5(1) :41–47, 1984.
- [103] M. Soroush. Nonlinear state observer design with application to reactors. *Chemical Engineering Science*, 52(3) :387–404, 1997.
- [104] K. Tan and K. M. Grigoriadis. $L_2 - L_2$ and $L_2 - L_\infty$ Output feedback control of time-delayed LPV systems. In *39th IEEE Conference on Decision and Control CDC 2000*, 2000.
- [105] F. E. Thau. Observing the state of nonlinear dynamic systems. *Int. J. of Control*, 17(3) :471–479, 1973.
- [106] B. L. Walcott, M. J. Corless, and S. H. Zak. Comparative study of nonlinear state observation techniques. *Int. J. of Control*, 45(6) :2109–2132, 1987.
- [107] W. Wang and J.-J.E. Slotine. On partial contraction analysis for coupled nonlinear oscillators. *Biological Cybernetics*, 92(1), 2004.
- [108] X.F. Wang, G.-Q. Zhong, K.-S. Tang, K.F. Man, and Z.-F. Liu. Generating chaos in chua’s circuit via time-delay feedback. *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, 48(9) :1151–1156, 2001.
- [109] K. Watanabe. Finite spectrum assignment and observer for multivariable systems with commensurate delays. *IEEE Transaction on Automatic Control*, 31(6) :543–550, 1986.
- [110] C. W. Wu and L. O. Chua. A simple way to synchronize chaotic systems with applications to secure communication systems. *Int. J. of Bifur. Chaos*, 3 :1619–1627, 1994.
- [111] F. Wu and K. M. Grigoriadis. LPV systems with parameter-varying time delays : analysis and control. *Automatica*, 37 :221–229, 2001.
- [112] X. H. Xia and W. B. Gao. Nonlinear observer design by observer error linearization. *SIAM J. Control and Optimization*, 27(1) :199–216, 1989.
- [113] Tao Yang. A survey of chaotic secure communication systems. *International Journal of Computational Cognition*, 2(2) :81–130, 2004.
- [114] Tao Yang and L. O. Chua. Secure communication via chaotic parameter modulation. *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, 43(9) :817–819, 1996.
- [115] Tao Yang, C. W. Wu, and L. O. Chua. Cryptography based on chaotic systems. *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, 44(5) :469–472, 1997.
- [116] S. H. Zak. On the stabilization and observation of nonlinear/uncertain dynamic systems. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 35(5) :397–401, 1990.
- [117] M. Zeitz. Comments on ‘comparative study of nonlinear state observation techniques’. *Int. J. of Control*, 46(5) :1861–1863, 1987.
- [118] M. Zeitz. The extended Luenberger observer for nonlinear systems. *Systems and Control Letters*, 9 :149–156, 1987.
- [119] A. Zemouche, G. I. Bara, and M. Boutayeb. Synchronisation par une approche basée-observateur pour les systèmes non linéaires lipschitziens à temps discret. In *Journées Doctorales et Nationales du GDR MACS du CNRS, JDMACS-JNMACS*, Lyon, France, September 2005.

- [120] A. Zemouche and M. Boutayeb. Nonlinear observers design for synchronization and information recovery in communication systems. In *Second IEEE-EURASIP International Symposium on Communications, Control and Signal Processing*, Marrakech, Morocco, March 2006.
- [121] A. Zemouche and M. Boutayeb. Observer design for Lipschitz nonlinear systems. The discrete-time case. *IEEE Transactions on Circuits & Systems II : Analog and Digital Signal Processing*, 53(8) :777–781, 2006.
- [122] A. Zemouche and M. Boutayeb. Synchronization by observer based approach for a class of nonlinear chaotic systems. In *1st IFAC Conference on Analysis and Control of Chaotic Systems, CHAOS'06*, Reims, France, 28-30 June 2006.
- [123] A. Zemouche, M. Boutayeb, and G. I. Bara. Observers for a class of Lipschitz systems with extension to H_∞ performance analysis. *Submitted to Systems & Control Letters*.
- [124] A. Zemouche, M. Boutayeb, and G. I. Bara. Observer design for nonlinear systems : An approach based on the differential mean value theorem. In *44th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference CDC-ECC 2005*, Seville, Spain, December 2005.
- [125] A. Zemouche, M. Boutayeb, and G. I. Bara. Observers design for a class of nonlinear systems. In *45th IEEE Conference on Decision and Control CDC 2006*, San Diego, California, USA, December 2006.
- [126] A. Zemouche, M. Boutayeb, and G. I. Bara. On observers design for nonlinear time-delay systems. In *2006 American Control Conference ACC'06*, Minneapolis, Minnesota, USA, June 2006.
- [127] A. Zemouche, M. Boutayeb, and G. I. Bara. Nonlinear observers for lipschitz discrete-time systems. Application to synchronization and input recovery. In *2007 European Control Conference ECC'07*, Kos, Greece, July 2007.
- [128] A. Zemouche, M. Boutayeb, and G. I. Bara. Observer design for a class of nonlinear time-delay systems. In *2007 American Control Conference ACC'07*, New York, USA, July 2007.
- [129] F. Zhu and Z. Han. A note on observers for Lipschitz nonlinear systems. *IEEE Trans. Automatic Control*, 47(10) :1751–1754, 2002.

Résumé

L'objectif de cette thèse était de développer des méthodes de synthèse d'observateurs offrant des conditions de synthèse non contraignantes. Trois méthodes ont été proposées et différentes classes de systèmes ont été traitées. La première est la méthode de transformation en système LPV basée sur l'utilisation du théorème des accroissements finis (DMVT). Cette technique, qui fournit des conditions de synthèse non restrictives, est étendue à plusieurs classes de systèmes non linéaires tels que les systèmes non différentiables, les systèmes à sorties non linéaires, les systèmes à entrées inconnues, les systèmes à retard et les systèmes à temps discret. La seule limitation liée à la méthode est le fait qu'elle n'est applicable que pour des non-linéarités à jacobienne bornées. Afin de surmonter cette limitation, une deuxième méthode est obtenue en combinant la technique du DMVT avec une nouvelle structure d'observateurs de type Luenberger généralisés. Grâce à cette structure, de nouvelles conditions de synthèse sont établies. Ces conditions sont valables même si la jacobienne de la non-linéarité n'est pas bornée.

Par ailleurs, une nouvelle méthode de synthèse d'observateurs spécifique aux systèmes à temps discret est également proposée. Cette méthode utilise la condition de Lipschitz conjointement avec la fonction de Lyapunov standard. Des améliorations, qui permettent d'obtenir des conditions de synthèse non contraignantes, sont ensuite proposées en faisant appel à une nouvelle fonction de Lyapunov plus générale (qui tient compte de la non-linéarité du système) et à un observateur de Luenberger généralisé (OLG) qui permet de réduire l'effet de la constante de Lipschitz.

Enfin, les résultats obtenus sont validés par une application à la synchronisation et au cryptage/décryptage dans les systèmes de communications chaotiques.

Mots-clés: observateurs non linéaires, stabilité au sens de Lyapunov, systèmes à temps discret, systèmes à retard, synchronisation des systèmes chaotiques, synthèse $\mathcal{H}_\infty$, principe de convexité, théorème des accroissements finis, systèmes LPV, LMI

Abstract

The objective of this thesis was to develop observers synthesis methods providing nonrestrictive synthesis conditions. Three methods are proposed and different classes of systems are treated. The first one is the method of transformation into LPV system based on the use of the Differential Mean Value Theorem (DMVT). This technique, which provides nonrestrictive synthesis conditions, is extended to several classes of nonlinear systems such as nondifferentiable systems, systems with nonlinear outputs, systems with unknown inputs, time-delay systems and discrete-time systems. The only limitation related to this method lies in the fact that it is applicable only for nonlinearities with bounded jacobian. In order to overcome this limitation, a second method is obtained by combining the DMVT technique with a new structure of generalized Luenberger observers. Thanks to this structure, new synthesis conditions are established. These conditions are valid even if the jacobian of the nonlinearity is not bounded.

In addition, a new observers synthesis method for discrete-time systems is also proposed. This method uses conjointly the Lipschitz condition with the Lyapunov standard function. Improvements, which allow to obtain nonrestrictive synthesis conditions, are proposed by using a new more general Lyapunov function (which takes account of the nonlinearity of the system) and with a generalized Luenberger observer (OLG) which allows to reduce the effect of the Lipschitz constant.

Finally, the obtained results are validated by an application to synchronization and encoding/decoding in chaotic communication systems.

Keywords: nonlinear observers, Lyapunov stability, discrete-time systems, time-delay systems, synchronization of chaotic systems, $\mathcal{H}_\infty$ filtering, convexity principle, differential mean value theorem, LPV systems, LMI

