



**HAL**  
open science

# Modélisation du comportement dynamique couplé rotor-stator d'une turbine en situation accidentelle

Sébastien Roques

► **To cite this version:**

Sébastien Roques. Modélisation du comportement dynamique couplé rotor-stator d'une turbine en situation accidentelle. Mécanique [physics.med-ph]. Ecole Centrale de Nantes (ECN), 2007. Français. NNT: . tel-00353938

**HAL Id: tel-00353938**

**<https://theses.hal.science/tel-00353938>**

Submitted on 16 Jan 2009

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ÉCOLE DOCTORALE  
MÉCANIQUE, THERMIQUE ET GENIE CIVIL

Année 2007

N° B.U. :

**Thèse de Doctorat**

***Diplôme délivré conjointement par  
l'École Centrale de Nantes et l'Université de Nantes***

Spécialité : GÉNIE MÉCANIQUE

Présentée et soutenue publiquement par :

Sébastien ROQUES

le 17 décembre 2007

à l'École Centrale de Nantes

**Titre**

**MODÉLISATION DU COMPORTEMENT DYNAMIQUE COUPLE  
ROTOR-STATOR D'UNE TURBINE EN SITUATION  
ACCIDENTELLE**

**Jury**

Président :	Bernard PESEUX	Professeur, École Centrale de Nantes
Rapporteurs :	Bruno COCHELIN Régis DUFOUR	Professeur, École Centrale de Marseille Professeur, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon
Examineurs :	Patrice CARTRAUD Didier COMBESCURE Christophe PIERRE Carlo Maria STOISSER	Professeur, École Centrale de Nantes Ingénieur de recherche, CEA Saclay Professeur, McGill University Ingénieur de recherche, EDF R&D

---

Directeur de thèse : Patrice CARTRAUD

Laboratoire : Institut de Recherche en Génie Civil et Mécanique, École Centrale de Nantes

Co-encadrant : Christophe PIERRE

Laboratoire : Structural Dynamics and Vibration, McGill University

N° ED 0367-...



# Remerciements

Partir de néant ou d'un niveau de connaissance donné sur une thématique spécifique et tenter d'apporter une réflexion et une contribution techniques avancées, voici l'objectif d'un travail de thèse. Les trois années de recherche, dont le doctorant dispose, ressemblent alors à un grand moment de solitude où l'on s'évertue à trouver des solutions rigoureuses et innovantes, tant bien que mal, et où l'on apprend à savourer avec réserve la plus petite trouvaille du moment. Cette expérience s'avère fondatrice car elle pousse le futur docteur à se dépasser constamment et à réfléchir de manière plus critique sur son propre travail, et plus généralement sur sa propre existence et le monde qui l'entoure. Cependant, un doctorat ne peut s'accomplir par la seule passion. L'entourage compte pour beaucoup dans la réussite d'une thèse, même si trop souvent sa contribution paraît invisible. Ainsi, c'est en me retournant sur ses années passées que vient le temps de ma reconnaissance envers ses personnes.

Je souhaite donc remercier toutes les personnes qui m'ont soutenu au cours de ces années, à commencer par les Professeurs Bernard PESEUX de l'École Centrale de Nantes et Christophe PIERRE de l'Université McGill, ainsi qu'aux ingénieurs d'EDF R&D, Christophe VARE et Carlo Maria STOISSER qui sont à l'origine de cette thèse et qui ont cru en mon potentiel.

Ma profonde gratitude s'adresse au docteur Mathias LEGRAND ainsi qu'au professeur Patrice CARTRAUD pour la disponibilité, la patience, les conseils, les critiques constructives ainsi que la bonne humeur dont ils ont su faire preuve à mon égard. Leurs esprits vifs et brillants ont su me donner matière à méditer aussi bien scientifiquement qu'humainement.

Une part non négligeable de ma reconnaissance va aux membres du GeM pour l'ambiance agréable et joyeuse qu'ils ont maintenu au cours de ces trois années et pour la disponibilité sans faille pour répondre à mes questions techniques ou administratives.

Je salue également mes camarades de l'Université du Michigan ainsi qu'à l'Université McGill pour leur accueil au sein de l'équipe de recherche du professeur Christophe PIERRE. Une pensée amicale pour le professeur Steven W. SHAW de l'Université de l'État du Michigan pour ses conseils et sa sympathie lors de mon séjour à Ann Arbor.

Je n'oublie pas mes collègues du département Analyses Mécaniques et Acoustique de EDF

R&D à Clamart pour la bonne ambiance et les moments de rigolade aux pauses café que l'on a partagé. CARYN ALLAIN ainsi que Carlo STOISSER sont vivement remerciés pour avoir toujours été là, et ce pour quelques motifs que ce soit.

Une mention spéciale est attribuée aux doctorants Alain BATAILLY, Céline DUBOIS et Steven MARGUET pour les moments inoubliables passés en leur compagnie. Présents aussi bien à des moments où le moral du chercheur est au beau fixe que pendant les périodes de profond doute ou d'errance, ils brillent de part leurs qualités personnelles et sont les alliés de ma réussite et plus encore : de véritables amis!

À ses personnes si chères, s'ajoutent mes parents et frères, présents dès mes premiers pas, qui m'ont accompagnés et aidés du début à la fin.

Enfin, je remercie les membres du jury, les professeurs Régis DUFOUR de l'INSA de Lyon et Bruno COCHELIN de l'École Centrale de Marseille ainsi que Didier COMBESCURE du CEA de Saclay pour l'intérêt porté à mon travail.

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Mise en équation d'un transitoire de vitesse</b>	<b>9</b>
1.1 État de l'art des modèles	11
1.2 Modèle de ligne d'arbres	13
1.2.1 Définition des repères	14
1.2.2 Disque	16
1.2.3 Arbre	17
1.2.4 Balourd	17
1.2.5 Travail des efforts extérieurs	19
1.2.5.1 Palier	19
1.2.5.2 Pesanteur	19
1.2.5.3 Couples agissant sur le GTA	19
1.3 Modèle de diaphragme	20
1.3.1 Couronne intérieure rigide à 2 d.d.l. – Carters C1 et C2	21
1.3.2 Diaphragme flexible – Carter C3	22
1.4 Équations du mouvement	25
1.4.1 Discrétisation spatiale des structures	25
1.4.1.1 Ligne d'arbres	25
1.4.1.2 Carter C3	27
1.4.2 Mise en équation du mouvement	27
1.4.2.1 Équations de LAGRANGE	27
1.4.2.2 Conditions aux limites, conditions initiales	29
1.5 Conclusion	30
<b>2 Modélisation de l'interaction</b>	<b>31</b>
2.1 Mécanique du contact	32
2.1.1 Généralités	32
2.1.1.1 Définition des normales de contact	33
2.1.1.2 Mesure du jeu entre les structures	33
2.1.1.3 Traitement des contraintes de contact	34
2.1.2 Application au système rotor-stator	39
2.1.2.1 Couronne intérieure rigide à 2 d.d.l.	41
2.1.2.2 Diaphragme flexible planaire	43
2.1.2.3 Diaphragme flexible en 3-D	44
2.2 Stratégie de résolution en temps	45
2.2.1 Méthodes issues d'un développement de Taylor	46
2.2.2 Méthodes des résidus pondérés	47
2.2.3 Procédure d'intégration temporelle retenue	48

2.2.3.1	Discussions préliminaires . . . . .	48
2.2.3.2	Algorithme retenu . . . . .	51
2.3	Conclusion . . . . .	53
<b>3</b>	<b>Transitoire de vitesse avec un modèle simple de rotor sans contact</b>	<b>55</b>
3.1	Discussions préliminaires . . . . .	55
3.2	Repères bibliographiques et comparaison . . . . .	56
3.2.1	Présentation du rotor asymétrique . . . . .	57
3.2.2	Résultats . . . . .	60
3.3	Influence des couplages sur la réponse du rotor . . . . .	63
3.3.1	Présentation du modèle . . . . .	63
3.3.2	Résultats . . . . .	65
3.3.2.1	Faible balourd . . . . .	66
3.3.2.2	Grand Balourd . . . . .	70
3.4	Conclusion . . . . .	74
<b>4</b>	<b>Simulation d'un transitoire de vitesse avec interaction rotor-stator</b>	<b>77</b>
4.1	Couronne rigide fixe (C1) et couronne rigide mobile (C2) . . . . .	78
4.1.1	Modèle sans torsion . . . . .	78
4.1.2	Prise en compte de la torsion . . . . .	88
4.1.3	Conclusion intermédiaire . . . . .	96
4.2	Carter flexible C3 plan . . . . .	96
4.2.1	Hypothèse de détection de contact 1 . . . . .	96
4.2.2	Hypothèse de détection de contact 2 . . . . .	98
4.2.3	Comparaison des résultats pour le carter C3 plan . . . . .	108
4.3	Carter C3 en 3-D . . . . .	111
4.4	Conclusion . . . . .	115
	<b>Conclusion générale</b>	<b>117</b>
	<b>Références</b>	<b>121</b>
<b>A</b>	<b>Caractéristiques dynamiques des paliers circulaires</b>	<b>127</b>
<b>B</b>	<b>Solutions analytiques de loi de vitesse de rotation pour des cas particuliers</b>	<b>131</b>
<b>C</b>	<b>Influence des effets thermiques sur la réponse dynamique du rotor</b>	<b>133</b>
<b>D</b>	<b>Étude sur un cas-test de contact</b>	<b>135</b>

# Introduction

Les travaux de cette thèse, co-financés par l'Association Nationale de la Recherche Technique, s'inscrivent dans le cadre d'un partenariat entre le département Analyses Mécaniques et Acoustique d'EDF R&D, le pôle Structures et Simulations du laboratoire GeM de l'École Centrale Nantes, le laboratoire « Vibrations et Acoustique » de l'Université du Michigan et le laboratoire « Dynamiques des Structures et Vibration » de l'Université McGill de Montréal.

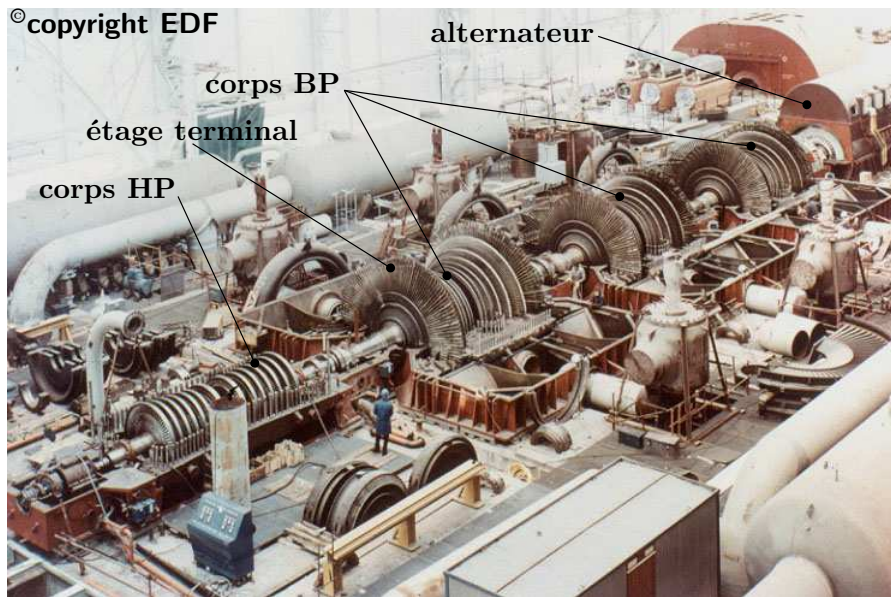
## Contexte industriel

Appartenant au circuit secondaire d'une centrale nucléaire, le groupe turbo-alternateur (GTA) a pour rôle de transformer l'énergie thermique contenue dans la vapeur en énergie électrique. Deux exemples de GTA sont donnés ci-après : celui de la centrale de Flamanville (cf. figure 1) et un GTA lors d'une phase de maintenance (cf. figure 2). Une



**Figure 1** - Salle des machines de la centrale nucléaire de Flamanville (Manche)





**Figure 2** - *Opération de maintenance sur un GTA de la centrale nucléaire de Bugey*

turbine d'un parc nucléaire est constituée d'un corps haute pression (HP), éventuellement d'un corps moyenne pression (MP) et de plusieurs corps basse pression (BP), tournant à 1500 tr/min à régime nominal (soit 25 Hz), ces derniers étant accouplés à un alternateur triphasé.

Une des étapes du dimensionnement d'un GTA est de vérifier si la ligne d'arbres est capable de supporter un accident de référence qui correspond à la perte d'une ailette d'un étage terminal de corps basse pression. Après détection du départ d'ailette, la turbine qui

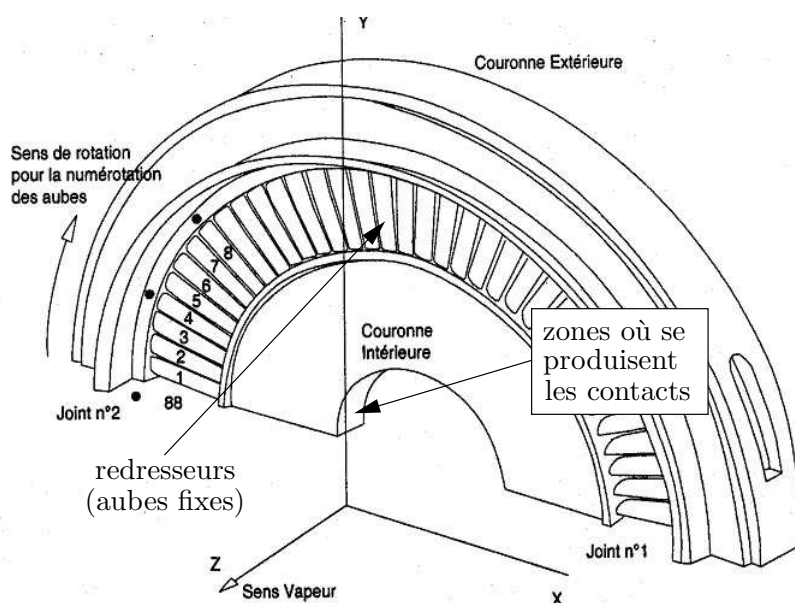


**Figure 3** - *Rotor de la centrale thermique classique de Porcheville (Yvelines)*

opérait à régime nominal est déclenchée automatiquement : les organes d'admission de vapeur qui alimentent le rotor sont fermés, la ligne d'arbres ralentit par frottement dû au

fluide environnant jusqu'à l'arrêt, et la turbine est déconnectée du réseau (découplage de l'alternateur).

Le balourd important correspondant à la perte d'ailette terminale (de l'ordre de  $90 \text{ kg} \cdot \text{m}$ ) provoque de fortes vibrations de la turbine, notamment au voisinage de certaines vitesses de rotation pour lesquelles la réponse vibratoire du GTA est maximale : ces vitesses de rotation sont appelées *vitesse critiques* et on ne peut pas les éviter lors de l'arrêt accidentel du rotor qui passe de sa vitesse nominale à une vitesse nulle. Des simulations réalisées par EDF montrent que, au passage des vitesses critiques, la force d'excitation, et par conséquent le niveau vibratoire, sont tels que des contacts peuvent se produire entre le rotor et le stator en plusieurs points de la ligne d'arbres, en particulier au niveau des étanchéités équipant les diaphragmes. La figure 4 présente la géométrie d'un diaphragme, le contact pouvant avoir lieu entre la couronne intérieure et la périphérie de l'arbre.



**Figure 4** - Représentation schématique d'un secteur de  $180^\circ$  d'un diaphragme

Durant le déclenchement de la turbine, les phénomènes observés se classent en deux catégories : le ralentissement accidentel de la ligne d'arbres en l'absence de contact et les interactions entre le rotor et les diaphragmes. Dans le premier cas, on observe :

- une réponse transitoire de la ligne d'arbres : la vapeur environnante au sein de la turbine ralentit par friction le rotor et des modèles simples permettent d'approcher l'évolution de la vitesse de rotation du rotor au cours du temps ;
- un comportement non linéaire des paliers : si les déplacements de l'arbre au niveau des paliers deviennent trop importants sous l'effet d'un grand balourd, il s'ensuit un écrasement du film d'huile et donc un comportement non linéaire (dégradation brutale des propriétés d'amortissement accompagnée d'une forte augmentation de la raideur).

Dans le cas de contacts rotor-stator, il faut ajouter aux phénomènes précédents :

- une décélération angulaire importante du rotor : du fait des frottements entre le rotor et le stator, la turbine est fortement ralentie, ce qui a un effet important sur le comportement dynamique du rotor, en particulier lors du passage des vitesses critiques. La décélération angulaire est alors inconnue et doit être calculée ;
- une réponse dynamique couplée du rotor et des diaphragmes : des cas de coïncidence modale peuvent apparaître si les structures ont des fréquences propres communes ;
- des déformations thermiques : étant donné les vitesses relatives très élevées au niveau du contact, l'échauffement local du rotor crée un balourd thermique et donc peut nuire à l'intégrité du GTA ;
- des déformations irréversibles et endommagements : cela arrive suite à des contacts où les efforts mis en jeu sont élevés.

Notons aussi que le contact a une influence sur les paliers, dans la mesure où les contacts limitent la flexion du rotor et vont donc diminuer les déplacements au niveau du palier.

## Démarche actuelle de calcul accidentel

Lors de la commande ou de l'achat de nouveaux matériels, EDF s'assure que les paliers supportant la ligne d'arbres sont capables de résister à un ralentissement accidentel. La méthodologie suivante est alors adoptée pour vérifier le dimensionnement du groupe turbo-alternateur :

1. dans un premier temps, une **modélisation linéaire des paliers** est adoptée, et une série de **calculs harmoniques sans contact**, couvrant les vitesses de rotation allant de la vitesse nominale à une vitesse inférieure à la vitesse critique, est menée sur le rotor. L'objectif de ce calcul est double : il permet d'identifier les vitesses critiques et de repérer les paliers les plus chargés qui nécessiteront ensuite d'être modélisés en non linéaire ;
2. la **réponse transitoire** de la turbine dans les instants qui suivent immédiatement la perte d'ailette est calculée en maintenant une **vitesse de rotation nominale** : il n'y a **pas de contact** rotor-stator. Les **paliers** les plus chargés qui ont été repérés à l'étape précédente ont un comportement **non linéaire**. Les conditions initiales sont définies par les conditions « machine tournant à vitesse nominale sous poids propre » et une aube se détache à  $t = 0$  s. Cette étape a pour but d'estimer l'effort maximal vu par les paliers dans les instants qui précèdent le déclenchement de la turbine ;
3. des **calculs transitoires pour des vitesses de rotation constantes** autour de la vitesse critique sont ensuite réalisés dans le domaine temporel en utilisant des

**modèles non linéaires de paliers.** Le calcul temporel d'un ralentissement réel ne peut pas être mené en pratique, car il conduirait à des temps de calcul prohibitifs du fait de la non linéarité palier et de la décroissance de la vitesse de rotation en situation accidentelle, qui est inconnue. Ceci est dû d'une part à la non linéarité du comportement des paliers et d'autre part aux contacts éventuels entre le rotor et les diaphragmes qui ne permettent pas d'évaluer de façon simple la vitesse de rotation. Aussi, la simulation du ralentissement est-elle réalisée **sans contact**, à partir de calculs menés à vitesse constante, en faisant varier la valeur de celle-ci de proche en proche. Les conditions initiales du premier calcul avec une vitesse de rotation suffisamment éloignée de la vitesse critique sont celles obtenues par une modélisation linéaire de paliers. Ensuite, les conditions initiales des calculs suivants correspondent aux résultats du calcul non linéaire précédent, dont la vitesse de rotation est relativement proche. Pour chacun de ces calculs, une solution en régime permanent est obtenue au bout de quelques cycles et l'effort des paliers retenu est alors le maximum vu sur le dernier cycle de rotation. L'effort au palier qui sera comparé à la valeur limite fixée par le dimensionnement est le maximum des efforts obtenus pour chaque vitesse de rotation ;

4. pour tous les calculs de l'étape 3, les excentricités maximales pour chaque nœud de la ligne d'arbres sont relevées, puis comparées aux jeux existant entre le rotor et le stator. Il est alors possible d'identifier le ou les points de contact éventuels à prendre en compte. Un calcul réalisé avec un code éléments finis permet alors l'identification de la raideur statique de ces points de contact : des efforts ponctuels sont exercés en plusieurs points de la couronne intérieure et l'équilibre statique permet de déduire des coefficients de raideur équivalents au stator ;
5. à partir des raideurs statiques identifiées, des points de contact sont ajoutés dans le modèle de la ligne d'arbres et l'étape 3 (calculs à **vitesse de rotation constante**) est reprise avec ce modèle complet où les **paliers** sont **modélisés en linéaire**. La **prise en compte des contacts** modifie la dynamique d'ensemble et par conséquent les chargements aux paliers : si les efforts aux paliers sont inférieurs aux limites de dimensionnement, la tenue de la ligne d'arbres en situation accidentelle est vérifiée.

Dans la phase de vérification de tenue des paliers, deux aspects *a priori* contradictoires semblent gouverner le comportement accidentel d'une ligne d'arbres. D'un côté, on observe au passage des vitesses critiques une amplification des efforts aux paliers, due à la perte d'amortissement résultant de l'écrasement du film d'huile. La démarche de vérification décrite précédemment permet de répondre à ce problème. De l'autre, l'effet dynamique non linéaire d'un transitoire de vitesse, correspondant à une accélération angulaire non nulle, se traduit par une modification de la rigidité du système dynamique et par un décalage des fréquences critiques. Il apparaît donc que les calculs à vitesse de rotation

constante ne sont pas satisfaisants. On constate enfin qu'aucun des calculs précédents ne considère à la fois un transitoire de vitesse, *i.e.* une simulation réalisée avec une vitesse de rotation variable, et la prise en compte du contact.

Pour une démarche plus robuste et réaliste de vérification du dimensionnement, il s'agit de prendre en compte les phénomènes suivants, actuellement négligés :

- le ralentissement de la ligne d'arbres résultant du contact frottant. Ceci permet de traiter correctement la décélération en transitoire. C'est bien en abordant ce point que le deuxième aspect gouvernant la vérification de la tenue des paliers (décélération en transitoire) peut être alors traité ;
- le couplage dynamique rotor-diaphragme ;
- l'excitation dynamique du diaphragme qui accompagne les chocs ;
- l'excitation en torsion de la ligne d'arbres, liée à l'action de freinage : ce dernier point permettra de vérifier que les plateaux d'accouplement, qui assurent la liaison entre les différents corps de la turbine, résistent lors d'un ralentissement accidentel.

## Objectifs de la thèse

Ce travail de recherche se propose donc d'étudier le comportement dynamique couplé rotor-stator lors d'un ralentissement accidentel afin d'enrichir la démarche actuelle d'EDF. La vitesse de rotation de l'arbre n'est plus considérée comme constante et doit être calculée en fonction des efforts agissant sur ce dernier (frottement d'origine fluide et frottement dû au contact). La finalité du sujet proposé par EDF R&D est plus précisément de dégager éventuellement des marges sur la tenue des paliers lors du dimensionnement.

Le premier objectif de cette thèse est la modélisation d'un ralentissement accidentel sans contact. Les conditions initiales correspondent aux conditions normales de fonctionnement d'une turbine à vitesse nominale sous poids propre. À un instant donné, une ailette terminale se détache à la position la plus défavorable. La ligne d'arbres est déconnectée du réseau électrique et ralentit jusqu'à l'arrêt complet de la machine sous l'effet de frottement dû à la présence de fluides dans la turbine. Cependant, à l'approche des vitesses critiques, les jeux de conception entre l'arbre et le diaphragme sont consommés sous l'effet du grand balourd. Il faut donc représenter le comportement dynamique du stator et coupler sa réponse avec celle du rotor au moyen des efforts de contact, ce qui représente le second objectif de ce travail.

---

## Organisation du mémoire

Le **chapitre 1** est consacré au développement d'un modèle monodimensionnel de rotor où les variables à calculer sont les déplacements d'une poutre dans un espace tri-dimensionnel et la position angulaire du rotor. Un tel modèle n'existant pas dans la littérature, on rappelle au travers de repères bibliographiques les caractéristiques des modèles existants avant de proposer un nouveau modèle. Partant d'une formulation énergétique, les équations du mouvement pour le rotor sont établies pour un transitoire de vitesse et sont d'ores et déjà non linéaires même sans considérer le contact. En parallèle, on présente différentes modélisations pour le carter.

Le **chapitre 2** aborde la mécanique du contact et traite de la résolution temporelle d'un problème d'interaction rotor-stator. Les différentes méthodes qui permettent de calculer les efforts de contact sont présentées dans un cadre général, puis particularisées à notre étude. Le choix du schéma d'intégration temporelle, qui ne peut être fait indépendamment de la méthode retenue pour le calcul des forces de contact, est discuté avant de proposer un algorithme adapté au système d'équations non linéaires à résoudre.

Des transitoires de vitesse sans contact sur des modèles simples de rotor sont ensuite présentés dans le **chapitre 3**. N'ayant pas de solution de référence ni de données expérimentales pour les cas de contact rotor-stator, l'équation qui permet de calculer la vitesse de rotation de l'arbre est simplifiée et une solution analytique est alors disponible. Des simulations linéaires de transitoires qui utilisent la loi en vitesse angulaire précédemment obtenue constituent une base de comparaison pour valider l'implémentation du modèle non linéaire dans un outil numérique. Est également étudiée dans ce chapitre l'influence des non linéarités du modèle.

Le **chapitre 4** porte sur l'étude des cas d'interaction, le diaphragme étant représenté par différents modèles de complexité croissante. La fiabilité des résultats numériques issus de l'intégration temporelle est évaluée en étudiant leur évolution en fonction du pas de temps. La convergence des différentes quantités d'intérêt telles que la vitesse de rotation du rotor, les déplacements de la ligne d'arbres ainsi que les efforts (paliers et contact) est montrée. La sensibilité de la réponse d'ensemble à certains paramètres comme le coefficient de friction ou les caractéristiques du modèle de diaphragme sera également investiguée.

Enfin ce mémoire se conclut par un bilan de nos travaux et les perspectives qu'il ouvre.



# 1

---

## Mise en équation d'un transitoire de vitesse

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>État de l'art des modèles</b>	<b>11</b>
<b>1.2</b>	<b>Modèle de ligne d'arbres</b>	<b>13</b>
1.2.1	Définition des repères	14
1.2.2	Disque	16
1.2.3	Arbre	17
1.2.4	Balourd	17
1.2.5	Travail des efforts extérieurs	19
<b>1.3</b>	<b>Modèle de diaphragme</b>	<b>20</b>
1.3.1	Couronne intérieure rigide à 2 d.d.l. – Carters C1 et C2	21
1.3.2	Diaphragme flexible – Carter C3	22
<b>1.4</b>	<b>Équations du mouvement</b>	<b>25</b>
1.4.1	Discretisation spatiale des structures	25
1.4.2	Mise en équation du mouvement	27
<b>1.5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>30</b>

---

Une des conditions pour valider le dimensionnement d'un groupe turbo-alternateur (GTA) effectué par le constructeur est de contrôler si la turbine est capable de résister à un accident de référence. Cette vérification est réalisée par EDF. Partant d'une configuration où la ligne d'arbres opère à régime nominal, on considère le départ d'une ailette appartenant au dernier étage d'un des corps basse pression : l'alimentation en vapeur de la turbine est alors immédiatement arrêtée et la présence de fluides va progressivement arrêter la ligne d'arbres par frottement. La perte d'une ailette terminale engendre un balourd très important qui entraîne à la fois une amplification du comportement vibratoire du rotor et une augmentation des efforts transmis aux paliers (organes supportant la ligne d'arbres). Il s'agit alors de vérifier que les chargements aux paliers ne dépassent pas la valeur limite de dimensionnement.

Si l'on souhaite modéliser le comportement d'un GTA, l'élanement du rotor ainsi que les niveaux vibratoires de l'arbre observés sur site nous permettent de considérer un modèle



de poutre en rotation. Des modèles de rotors flexibles, qui incluent les phénomènes de flexion-traction-torsion et l'effet gyroscopique, sont disponibles dans la littérature avec l'hypothèse que la vitesse de rotation, aussi appelée vitesse angulaire dans ce mémoire, est imposée [LAL 98]. En régime nominal, la ligne d'arbres n'est pas entraînée par un moteur mais par un flux de vapeur entrant. D'autre part, un couple électromagnétique résistant s'exerce lorsque l'alternateur est couplé au réseau électrique. En pratique, la vitesse de rotation cible est obtenue via un asservissement par l'ouverture d'une série de soupapes qui régulent le débit de la veine vapeur. Cependant, notre cas d'étude s'attache à modéliser un transitoire de vitesse dans une configuration accidentelle, c'est-à-dire où il n'y a ni couple moteur en entrée, la veine vapeur étant fermée, ni couple résistant en aval de la ligne d'arbres sachant que cette dernière n'est plus reliée au réseau électrique. En fait, les seuls couples agissant sur l'arbre sont ceux d'origine fluide (fluides aérodynamiques et fluides de type newtonien) et le couple de friction en cas de contact rotor-stator. Un tel modèle n'est cependant pas disponible dans les travaux sur la dynamique des rotors.

Lorsque les vibrations de la ligne d'arbres augmentent, notamment lors des passages de vitesses critiques, le rotor peut entrer en contact au niveau des étanchéités équipant les diaphragmes. Ce dernier correspond à un étage aubagé fixe dont la fonction principale est de redresser le flux de vapeur dans la turbine en minimisant les pertes de rendement. Actuellement, la représentation du comportement couplé du rotor flexible et du stator a recours, la plupart du temps, à des systèmes de type *masse-ressort* qui sont peu représentatifs du comportement tridimensionnel des diaphragmes mais permettent de limiter les temps de calcul. L'utilisation d'un modèle 3-D pour le diaphragme est plutôt privilégiée pour étudier le comportement en statique ou dynamique linéaire du carter, mais s'avère coûteuse pour traiter les cas d'interaction. Du fait du nombre d'équations à résoudre, des méthodes de réduction modale sont souvent appliquées pour réduire drastiquement les temps de calcul lorsque la réponse est dominée par quelques modes propres sélectionnés avec le plus grand soin. Un niveau de modélisation intermédiaire, de type poutre dans un espace 3-D, traitant les cas d'interaction arbre-diaphragme n'a cependant pas encore été proposé.

Ainsi, le but premier de ce chapitre est de proposer une modélisation permettant d'étudier un transitoire de vitesse d'une turbine pour laquelle la vitesse de rotation de l'arbre devient une inconnue supplémentaire. Dans un premier temps, les modèles de rotor existant dans la littérature sont présentés afin d'en dégager les principaux ingrédients pour représenter un transitoire de vitesse d'une turbine en situation accidentelle. On s'intéresse ensuite à la modélisation du stator, appelé également diaphragme dans cette thèse : des modèles simples, rigides ou flexibles, ont été développés en se basant sur la géométrie du carter pour mieux représenter le comportement du diaphragme. Les énergies cinétique et de déformation sont alors calculées pour chaque structure. Enfin, la méthode des éléments

finis ainsi que les équations de LAGRANGE sont appliquées pour obtenir les équations du mouvement du rotor et du stator.

## 1.1 État de l'art des modèles

Lorsque les premières turbines ont été mises en service (fin XIX<sup>e</sup> - début XX<sup>e</sup> siècle), des premières observations ont permis d'appréhender la notion de fréquence de résonance pour un rotor et également d'autres effets indésirables comme l'effet « NEWKIRK » se caractérisant par des balourds thermiques sur la ligne d'arbres suite à une interaction rotor-stator. La compréhension de la dynamique des rotors a donné naissance à des modèles de complexité variable.

Ainsi les premiers modèles mathématiques qui ont été étudiés sont connus sous le nom de rotor de JEFFCOTT [CHI 93], mais aussi de LAVAL<sup>1</sup> ou encore de FÖPPL<sup>2</sup>. Comme l'illustre la figure 1.1, le rotor de JEFFCOTT est constitué d'un arbre flexible « sans masse » monté sur appuis simples (paliers rigides) et d'un disque placé en son milieu dont le centre de gravité ne coïncide pas avec le centre géométrique (présence d'un balourd). Considérant initialement deux degrés de liberté (déplacements du centre du disque), ce modèle a été largement étendu par la suite pour prendre en compte l'amortissement interne, les paliers flexibles, l'effet gyroscopique. . . Ce type de modèle peut être représentatif pour des rotors courts, qui sont plus rigides, comme par exemple un banc d'essai en laboratoire, mais ne convient pas pour décrire le comportement vibratoire des turbines modernes, qui sont des structures élancées.

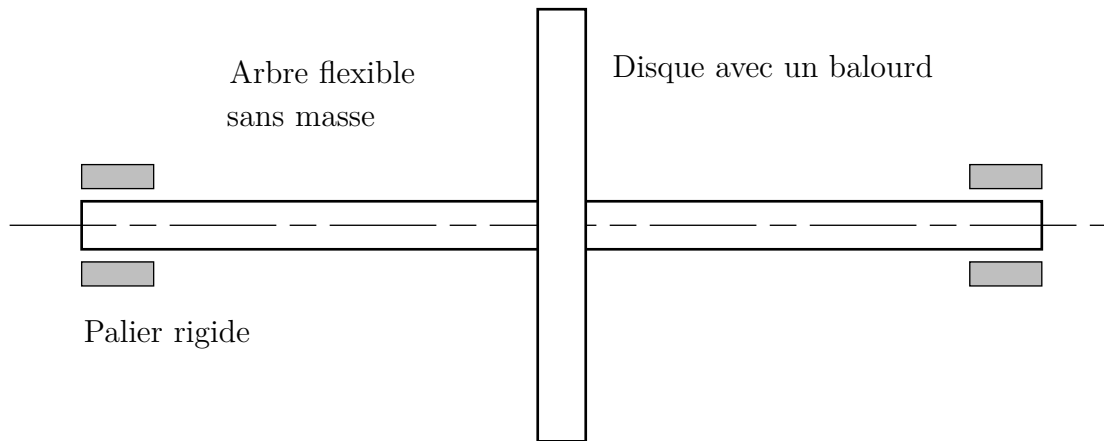
De nombreux auteurs ont traité des cas de contact rotor-stator sur ces modèles simples, comme CHOY [CHO 87], KIM [KIM 96] GANESAN [GAN 96], CHU [CHU 97, CHU 98] ou encore MUSZYNSKA [MUS 05]. Mentionnons également EDWARDS *et al* [EDW 99] (rotor rigide sur paliers flexibles) et SUN *et al* [ZC 03] (rotor de JEFFCOTT) qui ont montré que le couplage flexion-torsion n'est pas négligeable dans les cas de contact frottant et devait être considéré pour une meilleure représentation de l'interaction.

Le système d'équations issu de la dynamique des structures ne possède pas en général de solution analytique. Avec le développement des moyens de calcul, diverses méthodes numériques ont pu être appliquées. Les méthodes de RAYLEIGH-RITZ et pseudo-

---

1. Le modèle de Jeffcott est connu sur le continent européen sous le nom de rotor de Laval en hommage à Carl GUSTAF DE LAVAL, ingénieur suédois, qui fit fonctionner une turbine à vapeur en régime super-critique en 1889.

2. August FÖPPL fut le premier à étudier le modèle de LAVAL en 1895 démontrant que le rotor pouvait opérer en régime super-critique, *i.e.* au-delà de la première vitesse critique. Henry JEFFCOTT publia une conclusion similaire en 1919 mais les travaux de FÖPPL tombèrent aux oubliettes.



**Figure 1.1** - Rotor de Jeffcott-Laval

modale [LAL 98], qui fournissent une approximation des premiers modes de la structure, ou encore la méthode des éléments finis, ont été appliquées pour mieux représenter le comportement des rotors flexibles.

Cependant, les analyses citées précédemment considèrent une vitesse de rotation imposée. Dans la plupart des cas, les études sont réalisées à vitesse angulaire constante : en cas d'interaction rotor-stator, ceci implique une augmentation d'énergie à fournir en amont de la turbine pour maintenir la vitesse de rotation constante, ce qui ne correspond pas au cas de la situation accidentelle qui nous préoccupe ici. Il existe des travaux où la vitesse angulaire n'est pas constante, elle est cependant imposée selon une loi en vitesse de type linéaire ou exponentielle [LAL 98]. Ces études permettent de mettre en évidence l'effet transitoire dans la réponse du rotor :

- l'amplitude des vibrations du rotor au passage d'une vitesse critique est d'autant plus faible que l'accélération angulaire en valeur absolue est importante, aussi bien en phase d'accélération que de ralentissement. En effet, plus le rotor passe rapidement la vitesse critique, moins ce dernier *voit* la résonance du système ;
- la fréquence critique de la ligne d'arbres est légèrement en retard par rapport à la fréquence de résonance calculée en régime harmonique, *i.e.* pour une vitesse constante. Ainsi, pour une montée en vitesse, les vitesses critiques sont inférieures à la fréquence de résonance, et supérieures en phase de décélération. Ce retard est d'autant plus grand que l'accélération angulaire en valeur absolue est importante.

À notre connaissance, les seuls travaux dans lesquels une vitesse de rotation est variable, sont ceux de DAI [DAI 02] qui a proposé un modèle simple à quatre degrés de liberté pour lequel la vitesse de rotation est calculée en fonction des couples moteur et de frottement dû au contact rotor-stator.

Ce travail de thèse a pour but d'étudier des transitoires de vitesse en condition accidentelle d'un groupe turbo-alternateur. Dès lors, la problématique industrielle requiert :

- un modèle de rotor considérant le couplage flexion-torsion, les effets gyroscopiques et une vitesse de rotation instantanée à calculer en fonction des frottements d'origine fluide et du couple de friction de contact ;
- un modèle simplifié de diaphragme permettant d'étudier son influence sur le comportement dynamique de la turbine.

L'objet de ce présent chapitre est donc de développer une modélisation de chacune des structures : le modèle de rotor est présenté indépendamment de celui du stator car le couplage des deux structures est l'objet du chapitre 2.

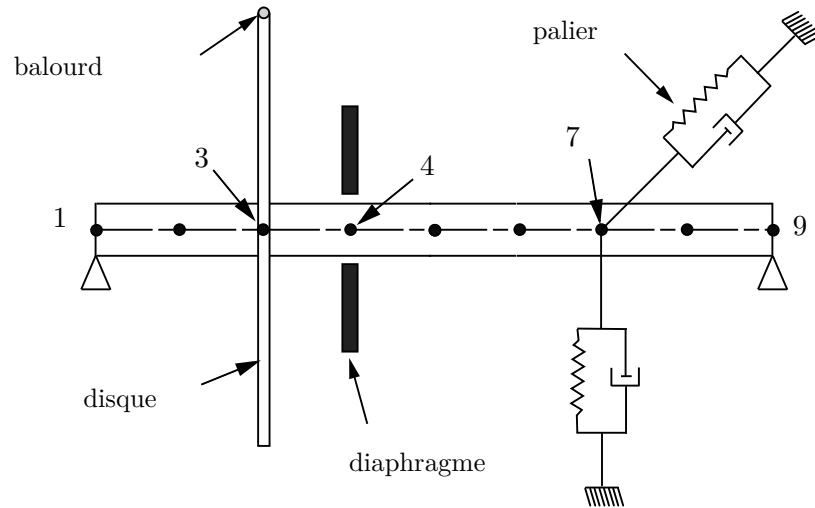
## 1.2 Modèle de ligne d'arbres

La partie tournante du groupe turbo-alternateur est composée d'arbres sur lesquels sont montées des roues aubagées. Les différents corps de la ligne d'arbres sont supportés par des paliers. La longueur de la turbine peut dépasser 50 m, pour un diamètre d'arbre de 1 m en moyenne et son poids excède la centaine de tonnes. La table de groupe sur laquelle repose le GTA est considérée infiniment rigide dans ce mémoire. Le rotor est donc présenté tout en ayant conscience des hypothèses, et donc des limitations, de son modèle.

Comme mentionné précédemment, la turbine est suffisamment élancée pour la représenter par des poutres de TIMOSHENKO en rotation. *De facto*, en considérant une section droite du rotor rigide, il est impossible de représenter finement le comportement local de l'interface de contact. En effet, le contact peut produire localement des déformations plastiques, de l'endommagement ainsi que des déformations thermiques qui seraient aisément prises en compte par un modèle 3-D. L'arbre ne pouvant être parfaitement équilibré, la présence de balourds résiduels sur la ligne d'arbres est prise en compte en ajoutant des masses ponctuelles. L'ajout d'un balourd important sur l'arbre constitue la modélisation de la perte d'une aube sur un des disques. On choisit de représenter les étages aubagés par des disques rigides circulaires, ce qui ne permet pas d'étudier par exemple les couplages entre la flexion de la roue aubagée et la torsion de l'arbre ou encore l'effet du désaccordage sur la dynamique d'ensemble. Enfin, les équations de REYNOLDS décrivant le comportement non linéaire du film d'huile des paliers ont été linéarisées pour en déduire des coefficients de raideur et d'amortissement équivalents [FRE 90].

La figure 1.2 illustre un exemple d'arbre comprenant chacun des éléments : les appuis simples peuvent être vus comme des paliers infiniment rigides et peuvent être évidemment remplacés par des éléments paliers plus réalistes.

Après avoir introduit les repères nécessaires à la description de la cinématique de la ligne



**Figure 1.2** - Exemple de modèle de turbine et son maillage associé

d'arbres, la méthodologie utilisée pour modéliser le GTA peut se résumer ainsi :

1. écrire les énergies cinétiques et de déformation pour chacun des composants du rotor ;
2. discrétiser spatialement les différents éléments par la méthode des éléments finis ;
3. dériver les énergies calculées selon les équations de LAGRANGE ;
4. assembler les équations du mouvement obtenu pour chaque élément pour représenter la dynamique des structures.

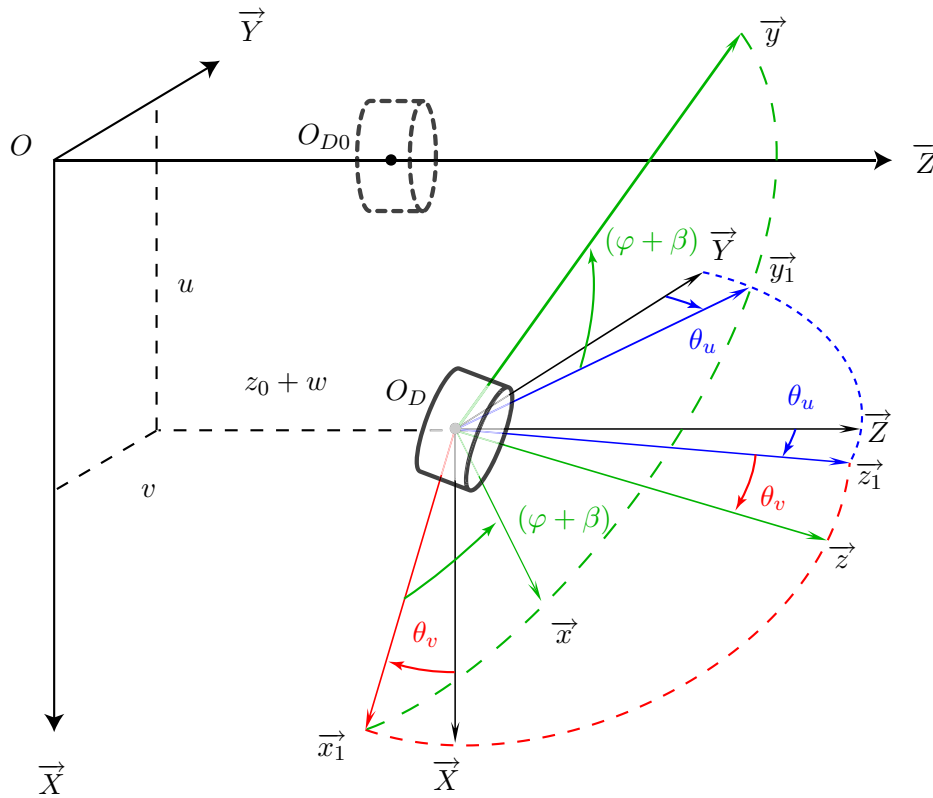
### 1.2.1 Définition des repères

De manière générale et afin de décrire la dynamique d'un système mécanique, l'étape préliminaire et nécessaire de la modélisation consiste à définir les paramètres et les repères associés au mouvement de la structure. Ainsi les repères correspondant à une poutre dans l'espace tri-dimensionnel sont présentés sur la figure 1.3 où :

- $\vec{Z}$  est l'axe neutre du rotor dans sa configuration initiale ;
- $\vec{X}$  et  $\vec{Y}$  sont les axes principaux d'inertie du rotor considéré ;
- $u$ ,  $v$  et  $w$  sont respectivement les déplacements suivant les axes  $\vec{X}$ ,  $\vec{Y}$  et  $\vec{Z}$  du point d'intersection entre la section droite et l'axe neutre de la ligne d'arbre ;
- $R_g(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$  est le repère absolu lié à une section droite de la poutre (configuration initiale) ;
- $R_1(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  est un repère intermédiaire de rotation ;
- $R(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  est le repère lié à la section droite de la poutre (configuration déformée).

Le passage du repère  $R_g$  au repère  $R$  se fait par trois rotations successives correspondant aux angles d'Euler :

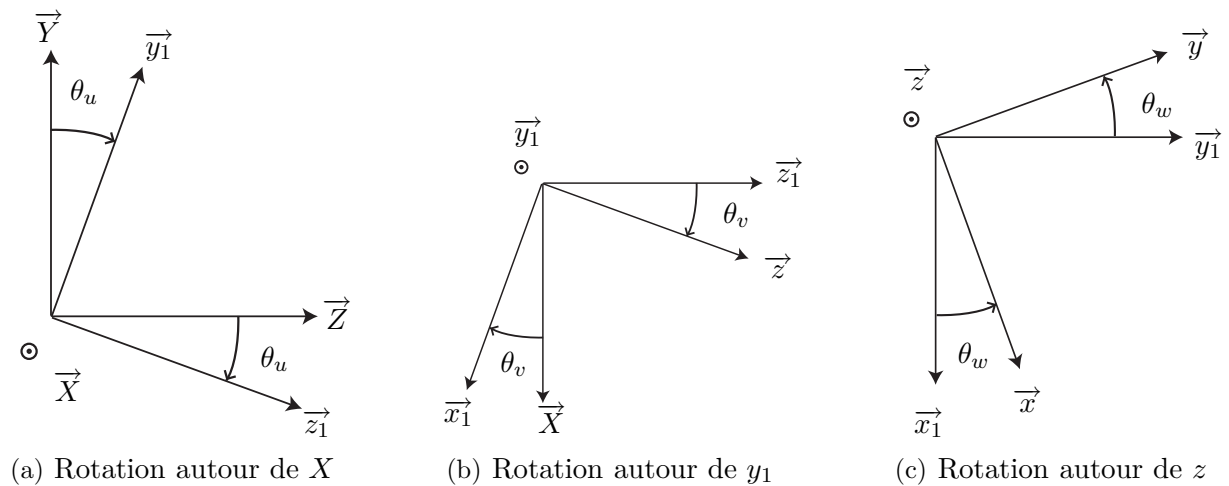
- rotation autour de  $\vec{X}$  :  $\theta_u$  (précession) ;



**Figure 1.3** - Notations pour un disque (convention utilisée par EDF)

- rotation autour de  $\vec{y}_1$  :  $\theta_v$  (nutation) ;
- rotation autour de  $\vec{z}$  :  $\theta_w = \varphi + \beta$  (rotation propre).

La rotation propre de la poutre  $\theta_w$  est alors composée de la rotation de corps rigide de l'arbre  $\varphi$  et de l'angle de torsion  $\beta$ .



**Figure 1.4** - Passage de  $R_g$  à  $R$

**Calcul du vecteur instantané de rotation du repère  $R$  par rapport au repère  $R_g$**

Par définition, la vitesse de rotation du solide s'écrit :

$$\vec{\Omega} = \dot{\theta}_u \vec{X} + \dot{\theta}_v \vec{y}_1 + (\dot{\varphi} + \dot{\beta}) \vec{z} \tag{1.1}$$

avec les relations de passages entre les différents repères :

$$\begin{cases} \vec{X} = \cos \theta_v \cdot \vec{x}_1 + \sin \theta_v \cdot \vec{z} \\ \vec{x}_1 = \cos(\varphi + \beta) \cdot \vec{x} - \sin(\varphi + \beta) \cdot \vec{y} \\ \vec{y}_1 = \cos(\varphi + \beta) \cdot \vec{x} + \sin(\varphi + \beta) \cdot \vec{y} \end{cases} \quad (1.2)$$

Ainsi les composantes de la vitesse de rotation dans le repère  $R$  sont données par :

$$\vec{\Omega}_{R/R_g}^R = \begin{cases} \dot{\theta}_u \cos \theta_v \cos(\varphi + \beta) + \dot{\theta}_v \sin(\varphi + \beta) \\ -\dot{\theta}_u \cos \theta_v \sin(\varphi + \beta) + \dot{\theta}_v \cos(\varphi + \beta) \\ \dot{\varphi} + \dot{\beta} + \dot{\theta}_u \sin \theta_v \end{cases} \quad (1.3)$$

### 1.2.2 Disque

Considérons un disque circulaire infiniment rigide soumis à une vitesse de rotation variable. Le disque étant indéformable, il en résulte une énergie de déformation nulle. En utilisant les notations introduites sur la figure 1.3, le champ de déplacement associé au disque est :

$$\vec{OO}_D = \vec{OO}_{D0} + \vec{u} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ z_0 \end{Bmatrix}_{R_g} + \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}_{R_g} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w + z_0 \end{Bmatrix}_{R_g}$$

Par application de la formule de HUYGENS, l'énergie cinétique du disque s'obtient en ajoutant l'énergie de translation du solide à l'énergie de rotation :

$$2E_c^D|_{R_g} = M_D \vec{V}_{O_D}^{R_g} \cdot \vec{V}_{O_D}^{R_g} + \vec{\Omega}_{R/R_g}^R \cdot ([J_{|O_D}] \cdot \vec{\Omega}_{R/R_g}^R)$$

où les différentes quantités sont :

- $M_D$  la masse du disque ;
- $\vec{V}_{O_D}^{R_g} = \frac{d}{dt} \vec{OO}_D|_{R_g}$  le vecteur vitesse instantané avec  $O$  fixe dans  $R_g$  ;
- $[J_{|O_D}]$  l'opérateur d'inertie du disque. Les axes principaux du disque étant  $x$ ,  $y$  et  $z$  et compte tenu des symétries, l'opérateur d'inertie s'écrit :

$$[J_{|O_D}] = \begin{bmatrix} I_{Dx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{Dx} & 0 \\ 0 & 0 & I_{Dz} \end{bmatrix}$$

Tous calculs faits, l'expression exacte de l'énergie cinétique est :

$$\begin{aligned} 2E_c^D = M_D [\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2] + I_{Dx} [\dot{\theta}_u^2 \cos^2 \theta_v + \dot{\theta}_v^2] \\ + I_{Dz} [\dot{\theta}_u^2 \sin^2 \theta_v + (\dot{\varphi} + \dot{\beta})^2 + 2(\dot{\varphi} + \dot{\beta}) \dot{\theta}_u \sin \theta_v] \end{aligned} \quad (1.4)$$

En se plaçant dans le cadre des petites perturbations, cette quantité peut être approchée par un développement limité en considérant toutes les quantités angulaires,  $\varphi$  exceptée, et leurs dérivées, petites devant l'unité. Il est classique de travailler avec des équations de mouvement linéarisées, obtenues à partir des énergies développées à l'ordre 2. Dans le cas présent, une telle approximation se traduirait par l'oubli de termes issus de l'effet gyroscopique  $\dot{\varphi}\dot{\theta}_u\theta_v$  ainsi que du couplage faible entre les différentes vibrations de la turbine  $\dot{\beta}\dot{\theta}_u\theta_v$ . C'est pourquoi nous développons cette énergie en gardant les termes d'ordre 3. Dès lors, on obtient :

$$2E_c^D = M_D [\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2] + I_{Dx} [\dot{\theta}_u^2 + \dot{\theta}_v^2] + I_{Dz} \left[ (\dot{\varphi} + \dot{\beta})^2 + 2(\dot{\varphi} + \dot{\beta})\dot{\theta}_u\theta_v \right] \quad (1.5)$$

On peut également remarquer dans l'équation (1.5), le couplage fort entre la position angulaire et la vibration de torsion avec le terme de rotation propre totale  $(\dot{\varphi} + \dot{\beta})$ . Par la suite, on étudiera les modèles de turbine avec ou sans torsion.

### 1.2.3 Arbre

L'arbre est modélisé par une poutre de TIMOSHENKO en rotation. La formulation générale de l'énergie cinétique de l'arbre est obtenue par extension du cas du disque [LAL 98] : l'énergie d'une tranche de poutre, de longueur infinitésimale  $dz$ , est celle d'un disque de même dimension (cf. équation (1.5)). Ainsi, en intégrant cette formule sur la longueur de l'arbre, il vient :

$$E_c = \frac{\rho}{2} \int_0^l \left[ S (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) + I_x (\dot{\theta}_u^2 + \dot{\theta}_v^2) + I_p \left( (\dot{\varphi} + \dot{\beta})^2 + 2(\dot{\varphi} + \dot{\beta})\dot{\theta}_u\theta_v \right) \right] dz \quad (1.6)$$

L'énergie de déformation d'une poutre de TIMOSHENKO en rotation [CHO 92] est égale à :

$$2E_d = \int_0^l \left[ ES w_{,z}^2 + EI_x (\theta_{u,z}^2 + \theta_{v,z}^2) + GI_p \beta_{,z}^2 + kGS \left( (u_{,z} - \theta_v)^2 + (v_{,z} + \theta_u)^2 \right) \right] dz \quad (1.7)$$

où  $k$  est le facteur de correction pour la rigidité en cisaillement.

### 1.2.4 Balourd

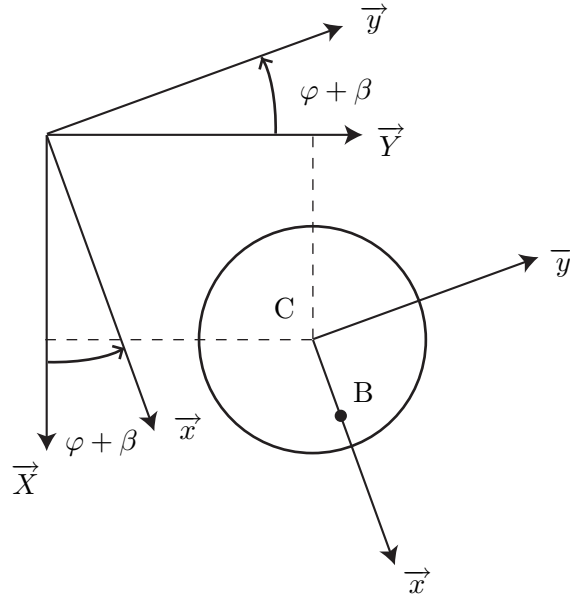
On choisit de représenter la perte d'une ailette, ou un balourd résiduel provenant de l'équilibrage imparfait du rotor, en introduisant un balourd sous forme de masse ponctuelle  $m_b$ , situé à une distance  $r_b$  de l'axe de rotation.



En considérant les notations introduites dans la figure 1.5, le champ de déplacement associé au balourd est déterminé par :

$$\overrightarrow{OB}_{|R_g} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CB} = \left\{ \begin{array}{c} u + r_b \cos(\varphi + \beta) \\ v + r_b \sin(\varphi + \beta) \\ w + z_C \end{array} \right\}_{R_g}$$

Ainsi la vitesse du balourd est :



**Figure 1.5** - Notation pour un balourd

$$\overrightarrow{V}_{B|R_g} = \left\{ \begin{array}{c} \dot{u} - r_b (\dot{\varphi} + \dot{\beta}) \sin(\varphi + \beta) \\ \dot{v} + r_b (\dot{\varphi} + \dot{\beta}) \cos(\varphi + \beta) \\ \dot{w} \end{array} \right\}_{R_g}$$

Le balourd étant considéré comme une masse ponctuelle, son énergie interne est nulle. L'expression de l'énergie cinétique du balourd est donnée par la relation suivante :

$$2E_c^B = m_b \|\overrightarrow{V}_{B|R_g}\|^2$$

soit :

$$2E_c^B = m_b \left[ \dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2 + r_b^2 (\dot{\varphi} + \dot{\beta})^2 + 2r_b (\dot{\varphi} + \dot{\beta}) (\dot{v} \cos(\varphi + \beta) - \dot{u} \sin(\varphi + \beta)) \right] \quad (1.8)$$

L'équation (1.8) montre que le balourd excite le rotor en torsion et fait apparaître un couplage fort entre l'angle de torsion et la position angulaire de l'arbre. L'angle de torsion  $\beta$  pourrait être négligé devant la position angulaire  $\varphi$ , soit  $\varphi + \beta \simeq \varphi$  dans l'équation (1.8), mais il a été choisi de ne pas utiliser cette approximation.

### 1.2.5 Travail des efforts extérieurs

Les différentes forces externes qui s'appliquent sur le rotor sont présentées dans cette section. On considère ainsi l'effort des paliers qui supportent la ligne d'arbres, la pesanteur et les couples qui s'exercent sur l'arbre.

#### 1.2.5.1 Palier

Dans une turbine du parc nucléaire, la ligne d'arbres est supportée par des paliers fluides. D'après les études précédentes EDF concernant les situations accidentelles, certains paliers fluides, où les amplitudes des vibrations deviennent excessives, adoptent un comportement non linéaire, notamment lors du passage des vitesses critiques où le film d'huile est écrasé. En prenant en compte le contact avec le stator, la déflexion de l'arbre est réduite. Ainsi, en première approche, un comportement des paliers linéaire de paliers peut être retenu, ce comportement étant fonction de la vitesse de rotation. En particulier, avec l'hypothèse des petits déplacements, les coefficients de raideur et d'amortissement peuvent être calculés en linéarisant les équations de REYNOLDS autour de la position d'équilibre (cf. annexes A). Puis en calculant le travail virtuel  $\delta W_{\text{paliers}}$  des forces externes agissant sur l'arbre, il vient :

$$\delta W_{\text{paliers}} = \begin{bmatrix} F_u & F_v \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta u \\ \delta v \end{Bmatrix}$$

avec  $F_u$  et  $F_v$  les composantes de la force généralisée agissant sur les paliers. Après linéarisation, ces forces sont réécrites sous forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} F_u \\ F_v \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_{xx}^p & k_{xy}^p \\ k_{yx}^p & k_{yy}^p \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} d_{xx}^p & d_{xy}^p \\ d_{yx}^p & d_{yy}^p \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{Bmatrix} \quad (1.9)$$

avec les termes de matrices raideur et amortissement décrits par des fonctions linéaires par morceaux de la vitesse de rotation.

#### 1.2.5.2 Pesanteur

L'effort statique qui représente la gravité peut être ajouté au modèle : après intégration des forces de volume pour l'élément considéré, le travail de la force de pesanteur s'écrit :

- pour un disque rigide circulaire :  $\delta W_{\text{gravité}} = M_D g \delta u$
- pour une poutre en rotation :  $\delta W_{\text{gravité}} = \int_0^l \rho g S \delta u dz$

#### 1.2.5.3 Couples agissant sur le GTA

Lors de son fonctionnement, la turbine est soumise à des frottements dus à la présence de vapeur. Ainsi, le travail des forces fluides  $\delta W_{\text{fluides}}$  s'écrit :

$$\delta W_{\text{fluides}} = C(t) \delta \varphi \quad (1.10)$$

Il faut alors expliciter le couple  $C(t)$ . Ce dernier peut être décomposé  $C(t) = C_{\text{entrée}} + C_{\text{fluides}} + C_{\text{contact}} + C_{\text{sortie}}$ . Le premier terme, qui s'applique généralement à l'« entrée » de la ligne d'arbres, correspond à un couple moteur entraînant la turbine en rotation. Le couple  $C_{\text{sortie}}$  correspond par exemple à un couple résistant d'origine électromagnétique provenant de l'alternateur lorsque ce dernier produit de l'électricité. Ensuite, il faut expliciter les couples d'origine fluide  $C_{\text{fluides}} = C_{\text{newt}} + C_{\text{aero}}$ . Des modèles de friction de type aérodynamique et de type fluide newtonien ont été étudiés antérieurement par EDF [FOR 93] :

- couple résistant de type fluide newtonien :  $C_{\text{newt}} = -A_{\text{newt}} \dot{\varphi}$  ;
- couple résistant de type fluide aérodynamique :  $C_{\text{aero}} = -A_{\text{aero}} \dot{\varphi}^2$ .

$A_{\text{newt}}, A_{\text{aero}}$  sont des constantes positives qui dépendent de la pression du vide condenseur et de l'inertie totale de la turbine. Ces dernières, identifiées sur site par EDF, sont confidentielles. Enfin, le couple provenant du contact frottant est explicité dans le chapitre 2.

La formulation présentée est suffisamment générale pour étudier aussi bien une montée en vitesse qu'un ralentissement accidentel en conservant la possibilité de contacts :

#### montée en vitesse :

Dans cette configuration, seuls les balourds résiduels sont retenus. Une turbine du parc nucléaire n'est pas entraînée par un moteur mais par un flux de vapeur : l'ouverture du clapet d'admission de vapeur est asservie en vitesse. De plus, des couples résistants d'origine électromagnétique agissent sur l'alternateur et dépendent de nombreuses variables comme la vitesse de rotation de l'arbre, l'excentricité du rotor, la charge requise par le réseau électrique... Dans ce travail, on ramène l'ensemble de ses actions à :

- un couple moteur  $C_{\text{entrée}} = C_{\text{max}} \geq 0$  en amont de la ligne d'arbres, qui est choisi constant et égal à  $C_{\text{max}}$  ;
- un couple résistant (alternateur) à l'autre extrémité de l'arbre : afin d'obtenir un profil de vitesse de type exponentielle, on utilise la formule  $C_{\text{sortie}} = -C_{\text{max}} \frac{\dot{\varphi}}{\Omega_{\text{nom}}}$ .

Dans ce cas de figure, les couples de frottements fluides sont négligeables.

#### ralentissement accidentel :

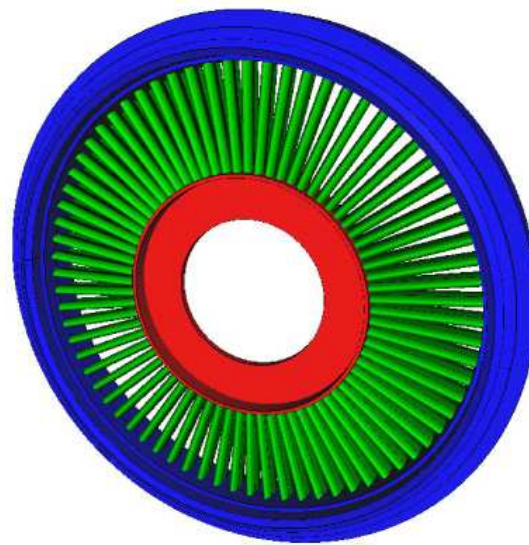
Correspondant à notre cas d'étude où la turbine étant déconnectée du réseau électrique, il vient  $C_{\text{entrée}} = C_{\text{sortie}} = 0$ . Ainsi, seuls les couples résistants d'origine fluide sont conservés.

## 1.3 Modèle de diaphragme

Un diaphragme de corps basse pression (voir figure 1.6(a)) a pour fonction principale le redressement du flux de vapeur dans la turbine. La figure 1.6(b) illustre les différents éléments qui constituent un diaphragme réel : une couronne extérieure solidaire de la table de groupe (en bleu), des ailettes de longueur maximale (en vert), dont la fonction principale est de redresser le flux de vapeur circulant dans la turbine pour en optimiser le rendement, et une couronne intérieure (en rouge) dont le rayon intérieur est choisi proche de celui du rotor pour assurer l'étanchéité. Dans l'optique d'avoir des calculs raisonnables



(a) Diaphragme réel



(b) Représentation schématique

**Figure 1.6** - *Diaphragme d'un corps basse pression*

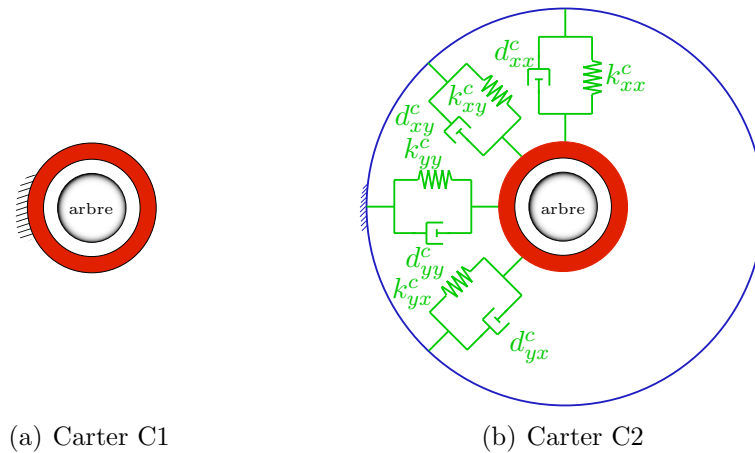
en terme de temps CPU, différentes modélisations à partir d'éléments 1-D ont été utilisées afin d'étudier l'influence du carter sur la réponse dynamique de la turbine. Par la suite, les termes « stator » ou « carter » désigneront le diaphragme.

### 1.3.1 Couronne intérieure rigide à 2 d.d.l. – Carters C1 et C2

Les premiers modèles utilisés sont des modèles plans simples : la couronne interne est supposée massive et indéformable, et elle est soit fixe (carter C1, cf. figure 1.7(a)), soit avec un système de « ressorts-amortisseurs » (carter C2, cf. figure 1.7(b)) pour autoriser les déplacements du diaphragme dans le plan.

Le modèle C1 est essentiellement utilisé pour valider l'algorithme de contact qui sera introduit dans le chapitre 2. Le modèle C2, qui est une extension du modèle C1, a déjà été utilisé dans une étude antérieure EDF [CLE 03] : il permet d'avoir une représentation

simplifiée d'un diaphragme réel mais nécessite une étude préalable pour calculer les coefficients de raideur et d'amortissement par un code éléments finis de mécanique générale, comme le *Code\_Aster*<sup>3</sup> par exemple.



**Figure 1.7** - Modèles de carter C1 et C2

### 1.3.2 Diaphragme flexible – Carter C3

Afin de mieux décrire le comportement dynamique du diaphragme flexible, un modèle avec des éléments 1-D (cf. figure 1.8(b)) a été développé : la couronne intérieure, dont les dimensions de la section sont petites devant le rayon moyen, est représentée par des poutres courbes utilisant la théorie des milieux curvilignes et les ailettes par des poutres droites. Le choix des poutres courbes pour la couronne interne se justifie lors de la gestion du contact (cf. figure 1.8(a)) : si une discrétisation linéaire était retenue, les normales de contact seraient discontinues au niveau des nœuds et le jeu inter-structurel serait incorrectement calculé. Une méthode pour pallier ces problèmes consiste à utiliser des fonctions splines cubiques [ARN 00] pour rendre plus régulière la surface de contact et mieux approcher la courbure de la couronne. Cependant, la reconstruction systématique des splines peut s'avérer coûteuse et donc n'a pas été retenue. L'utilisation conjointe de la théorie des milieux curvilignes et d'une discrétisation spatiale cubique permet de régler les problèmes de gestion de contact pour des géométries circulaires.

#### Couronne intérieure : poutres courbes

La couronne interne, située dans le plan  $(\vec{x}, \vec{y})$  en configuration non déformée, est illustrée sur la figure 1.9. En tant que structure élancée, l'hypothèse d'EULER-BERNOULLI est retenue. Dès lors, les déformations d'une poutre courbe [PES 89, DUB 98] s'écrivent

3. en téléchargement libre à l'adresse suivante <http://www.code-aster.org/>

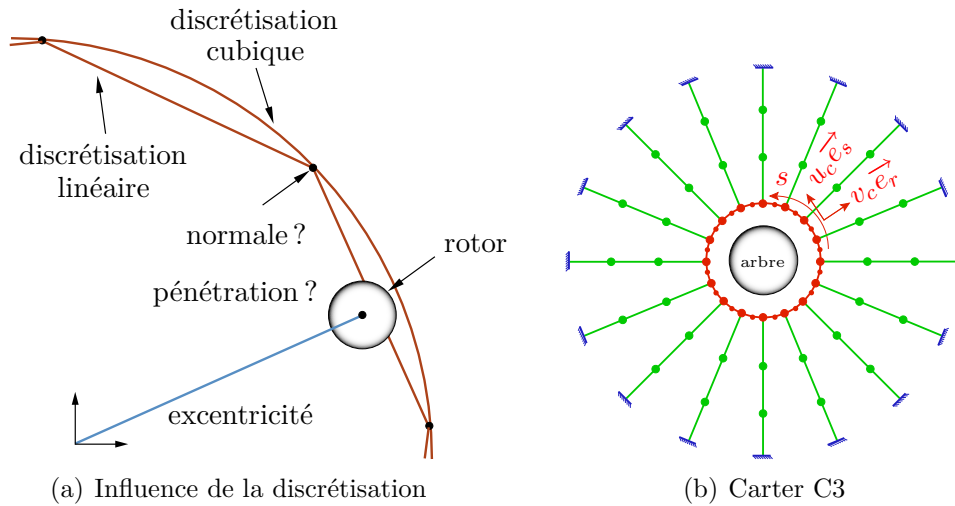


Figure 1.8 - Discretisation du diaphragme

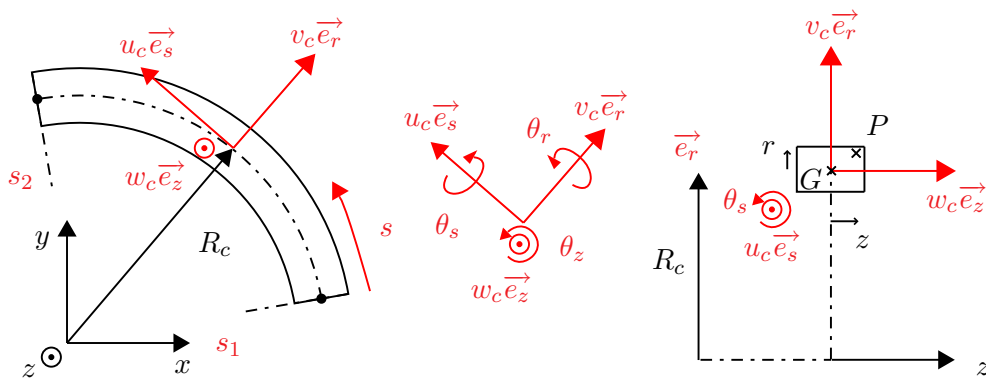


Figure 1.9 - Notations pour les poutres courbes

comme suit :

$$\begin{cases} \varepsilon_{ss} = \frac{1}{R_c + r} (v_c + (R_c + r) u_{c,s} - r R_c v_{c,ss} + z (\theta_s - R_c w_{c,ss})) \\ \gamma_{rs} = \frac{z}{R_c + r} (R_c \theta_{s,s} + w_{c,s}) \\ \gamma_{zs} = \frac{-r}{R_c + r} (R_c \theta_{s,s} + w_{c,s}) \end{cases} \quad (1.11)$$

où  $u_c$  et  $v_c$  correspondent respectivement aux déplacements radial et tangentiel du point se trouvant sur la fibre neutre comme le montrent les figures 1.8(b) et 1.9. Le déplacement dans la direction axiale est noté  $w_c$ . Enfin, les rotations dans un espace 3-D sont introduites sur la figure 1.9. La variable curviligne est notée  $s$  et le rayon moyen de la couronne intérieure,  $R_c$ .

En effectuant un développement limité au premier ordre en  $r$  et en  $z$  avec l'hypothèse  $r \ll R_c$ , la déformation  $\varepsilon_{ss}$  de l'équation (1.11) devient :

$$\varepsilon_{ss} = \left( \frac{v_c}{R_c} + u_{c,s} \right) - \left( \frac{v_c}{R_c^2} + v_{c,ss} \right) r + z \left( \frac{\theta_s}{R_c} - w_{c,ss} \right) + O(r^2) + O(rz) \quad (1.12)$$

Le comportement du matériau du diaphragme est supposé linéaire élastique, *i.e.*  $\sigma_{ss} = E_c \varepsilon_{ss}$ ,  $\tau_{rs} = G_c \gamma_{rs}$  et  $\tau_{zs} = G_c \gamma_{zs}$  (Loi de Hooke), où  $E_c$  et  $G_c$  sont les modules d'Young et de cisaillement. L'énergie de déformation  $E_d^c$  pour un élément poutre courbe est ensuite obtenue par intégration sur un volume élémentaire. Sachant que la section droite de la poutre courbe est rectangulaire et uniforme, il vient :

$$\begin{aligned} 2E_d^c = E_c \int_{s_1}^{s_2} \left[ S_c \left( \frac{v_c}{R_c} + u_{c,s} \right)^2 + I_{cr} \left( w_{c,ss} - \frac{\theta_s}{R_c} \right)^2 \right. \\ \left. + I_{cz} \left( \frac{v_c}{R_c^2} + v_{c,ss} \right)^2 + \frac{G_c J_c}{E_c} \left( \theta_{s,s} + \frac{w_{c,s}}{R_c} \right)^2 \right] ds \end{aligned} \quad (1.13)$$

où  $I_{cr}$ ,  $I_{cz}$ ,  $J_c$  et  $S_c$  représentent respectivement les moments principaux quadratiques, le moment d'inertie polaire et la surface de la section droite d'une poutre courbe. Enfin, l'énergie cinétique est égale à :

$$2E_c^c = \rho_c \int_{s_1}^{s_2} \left[ S_c (\dot{u}_c^2 + \dot{v}_c^2 + \dot{w}_c^2) + I_{cr} \dot{w}_{c,s}^2 + I_{cz} \left( \frac{\dot{u}_c}{R_c} - \dot{v}_{c,s} \right)^2 + I_{cp} \dot{\theta}_s^2 \right] ds \quad (1.14)$$

avec :

$$I_{cp} = \frac{h_c b_c^3}{3} \left[ 1 - \frac{192 b_c}{\pi^5 h_c} \sum_{i=0}^n \frac{\tanh \left( (2i+1) \frac{\pi h_c}{2 b_c} \right)}{(2i+1)^5} \right] \quad (1.15)$$

où  $n \rightarrow \infty$ . Cependant, l'approximation  $n = 5$  est déjà très correcte [BAZ 87].

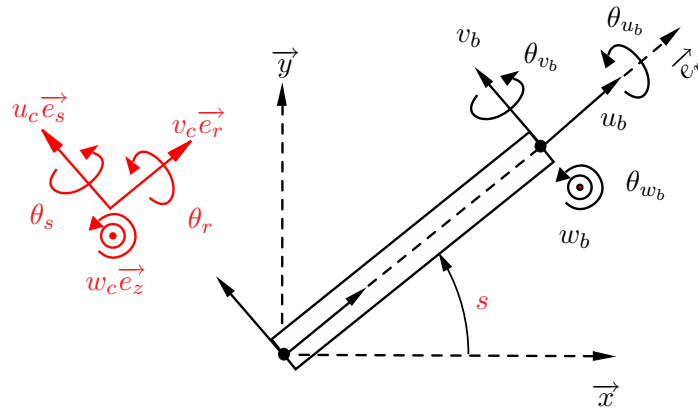


Figure 1.10 - Notations pour les ailettes

### Ailettes : poutres droites

L'hypothèse d'EULER-BERNOULLI est également utilisée pour les ailettes. Les énergies [DUB 98] peuvent être obtenues comme cas particulier des équations (1.6) et (1.7) : la poutre n'étant pas en rotation, la vitesse angulaire est nulle et les termes de cisaillement sont négligés. Avec les notations introduites par la figure 1.10, il vient :

$$\begin{cases} 2E_c^b = \rho \int_0^l \left[ S^b (\dot{u}_b^2 + \dot{v}_b^2 + \dot{w}_b^2) + I_z^b \dot{\theta}_{w_b}^2 + I_y^b \dot{\theta}_{v_b}^2 + I_x^b \dot{\theta}_{u_b}^2 \right] dx \\ 2E_d^b = \int_0^l \left[ ES^b u_{b,x}^2 + EI_z^b \dot{\theta}_{w_b,x}^2 + EI_y^b \dot{\theta}_{v_b,x}^2 + GJ^b \dot{\theta}_{u_b,x}^2 \right] dx \\ \theta_{w_b} = v_{b,x} \text{ et } \theta_{v_b} = -w_{b,x} \end{cases} \quad (1.16)$$

où  $I_z^b$ ,  $I_y^b$ ,  $I_x^b$ ,  $J^b$  et  $S_c$  sont respectivement les moments d'inertie principaux, le module de torsion et la surface de la section droite rectangulaire.

La modélisation du raccord entre les poutres courbes et droites est obtenue en utilisant les conditions cinématiques provenant de l'hypothèse d'EULER-BERNOULLI :

$$\theta_{w_b} = \theta_z = \frac{u_c}{R_c} - v_{c,s} \quad \text{et} \quad \theta_{u_b} = \theta_r = w_{c,s} \quad (1.17)$$

Signalons enfin que les ailettes de redressement d'un diaphragme réel sont vrillées et inclinées et donc un couplage flexion/traction existe. Cependant, pour des raisons de simplicité dans la modélisation, ce dernier n'a pas été pris en compte dans ce modèle C3.

## 1.4 Équations du mouvement

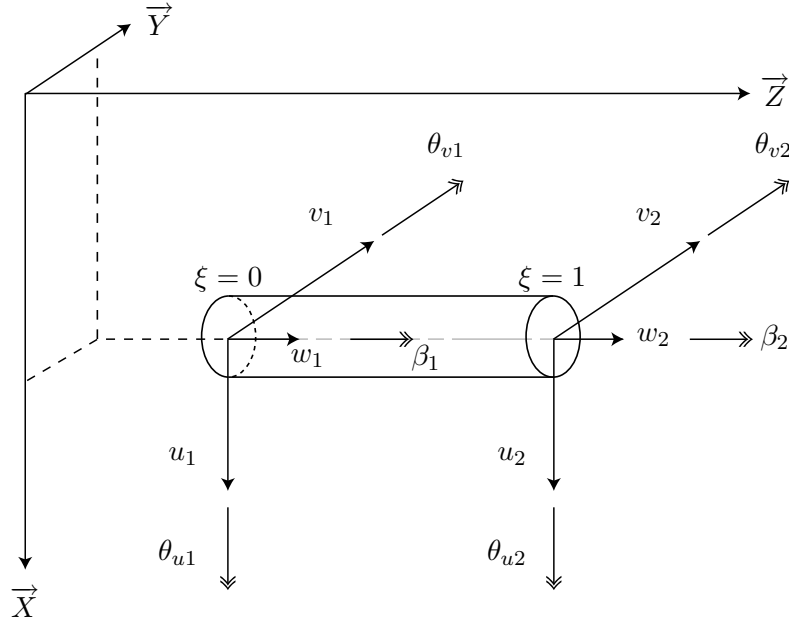
Les parties flexibles du système rotor-stator sont discrétisées par la méthode des éléments finis. Les différents éléments utilisés sont présentés ci-dessous. Enfin les équations du mouvement sont obtenues par application du principe de LAGRANGE.



### 1.4.1 Discrétisation spatiale des structures

#### 1.4.1.1 Ligne d'arbres

Les notations pour une poutre élément fini en rotation sont introduites dans la figure 1.11. Les déplacements de traction/compression et de torsion sont discrétisés par des fonctions



**Figure 1.11** - Notations pour l'élément fini rotor

de forme linéaires classiques. En posant  $\xi = \frac{z}{l} \in [0, 1]$  pour se ramener à un élément fini parent et  $q = \{w, \beta\}$  le déplacement axial ou l'angle de torsion, il vient :

$$q(\xi) = [1 - \xi \ \xi] \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix}$$

Pour la flexion, l'interpolation est définie dans le plan  $(\vec{X}, \vec{Z})$  :

$$\begin{Bmatrix} u(\xi) \\ \theta_v(\xi) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{11}(\xi) & N_{12}(\xi) & N_{13}(\xi) & N_{14}(\xi) \\ N_{21}(\xi) & N_{22}(\xi) & N_{23}(\xi) & N_{24}(\xi) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ \theta_{v1} \\ u_2 \\ \theta_{v2} \end{Bmatrix}$$

Dans le plan  $(\vec{Y}, \vec{Z})$ , c'est l'interpolation suivante qui est utilisée :

$$\begin{Bmatrix} v(\xi) \\ \theta_u(\xi) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{11}(\xi) & -N_{12}(\xi) & N_{13}(\xi) & -N_{14}(\xi) \\ N_{21}(\xi) & -N_{22}(\xi) & N_{23}(\xi) & -N_{24}(\xi) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_{u1} \\ v_2 \\ \theta_{u2} \end{Bmatrix}$$

Les fonctions de forme de type HERMITE modifié  $N_{ij}$  [CHE 92] d'un élément fini parent sont :

$$\begin{aligned}
N_{11}(\xi) &= \frac{1 + \lambda(1 - \xi) - 3\xi^2 + 2\xi^3}{1 + \lambda} & N_{12}(\xi) &= \xi \frac{1 + \frac{\lambda}{2}(1 - \xi) - 2\xi + \xi^2}{1 + \lambda} \\
N_{13}(\xi) &= \xi \frac{\lambda + 3\xi - 2\xi^2}{1 + \lambda} & N_{14}(\xi) &= \xi \frac{-\frac{\lambda}{2}(1 - \xi) - \xi + \xi^2}{1 + \lambda} \\
N_{21}(\xi) &= 6\xi \frac{\xi - 1}{(1 + \lambda)} & N_{22}(\xi) &= \frac{1 + \lambda(1 - \xi) - 4\xi + 3\xi^2}{1 + \lambda} \\
N_{23}(\xi) &= -6\xi \frac{\xi - 1}{(1 + \lambda)} & N_{24}(\xi) &= \frac{\lambda\xi - 2\xi + 3\xi^2}{1 + \lambda}
\end{aligned} \tag{1.18}$$

Le coefficient  $\lambda$  caractérise l'influence des déformations de cisaillement transverse et dépend de la géométrie de la section droite de la poutre et des propriétés du matériau du rotor :  $\lambda = \frac{12EI}{kGSl^2}$ .

#### 1.4.1.2 Carter C3

Les ailettes sont discrétisées en poutres droites d'EULER-BERNOULLI avec des éléments finis classiques à 6 degrés de liberté (d.d.l.) par nœud. La couronne intérieure du carter C3 est discrétisée en éléments finis poutre courbe à 7 d.d.l. par nœud ( $u_c, u_{c,s}, v_c, v_{c,s}, w_c, w_{c,s}$  et  $\theta_s$ ) avec les polynômes cubiques d'HERMITE en  $s$  pour les déplacements en  $u, v$  et  $w$ . Notant  $\zeta = \frac{s}{l_c} \in [0, 1]$ , les fonctions de forme cubiques de l'élément parent s'écrivent comme suit :

$$\begin{aligned}
N_1(\zeta) &= 1 - 3\zeta^2 + 2\zeta^3 & N_2(\zeta) &= \zeta(1 - 2\zeta + \zeta^2) \\
N_3(\zeta) &= \zeta(3\zeta - 2\zeta^2) & N_4(\zeta) &= \zeta(-\zeta + \zeta^2)
\end{aligned}$$

où  $l_c$  représente la longueur de l'élément fini. Ainsi le champ de déplacement discrétisé devient, pour un élément dont les nœuds sont notés 1 et 2 :

$$\begin{cases} u_c(\zeta) = N_1(\zeta)u_1 + N_2(\zeta)u_{1,s} + N_3(\zeta)u_2 + N_4(\zeta)u_{2,s} \\ v_c(\zeta) = N_1(\zeta)v_1 + N_2(\zeta)v_{1,s} + N_3(\zeta)v_2 + N_4(\zeta)v_{2,s} \\ w_c(\zeta) = N_1(\zeta)w_1 + N_2(\zeta)w_{1,s} + N_3(\zeta)w_2 + N_4(\zeta)w_{2,s} \end{cases}$$

Pour la rotation  $\theta_s$ , une fonction de forme linéaire est utilisée :

$$\theta_s(\zeta) = (1 - \zeta)\theta_{s1} + \zeta\theta_{s2}$$

## 1.4.2 Mise en équation du mouvement

### 1.4.2.1 Équations de Lagrange

Après réécriture puis sommation des énergies de chacun des éléments constituant la ligne d'arbres, on applique les équations de LAGRANGE dont la forme générale est la suivante :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_c}{\partial \dot{u}_i} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial u_i} + \frac{\partial E_d}{\partial u_i} = F_{|u_i}^{\text{ext}} \quad (1.19)$$

où  $E_c$  et  $E_d$  sont respectivement les énergies cinétique et de déformation d'une structure (ligne d'arbres ou diaphragme),  $u_i$ , une composante du vecteur assemblé  $\mathbf{u}$  des déplacements généralisés de flexion, traction et torsion. Le terme  $F_{|u_i}^{\text{ext}}$  représente les efforts extérieurs exercés sur  $u_i$ .

Par souci de clarté, les équations du mouvement pour le rotor sont présentées, dans un premier temps, sans torsion. Après avoir assemblé les matrices élémentaires de chaque composant, un système de la forme suivante est obtenu :

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \dot{\varphi} \mathbf{D}_2 \dot{\mathbf{u}} + (\mathbf{K}_1 + \ddot{\varphi} \mathbf{K}_2) \mathbf{u} &= -\mathbf{K}_{\text{palier}} \mathbf{u} - \mathbf{D}_{\text{palier}} \dot{\mathbf{u}} \\ &+ \sum_{i=1}^{N_{\text{balourd}}} m_b^i r_b^i \left[ (\ddot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi) \mathbf{F}_{|\vec{X}}^i + (-\ddot{\varphi} \cos \varphi + \dot{\varphi}^2 \sin \varphi) \mathbf{F}_{|\vec{Y}}^i \right] \end{aligned} \quad (1.20)$$

et :

$$I_{\text{totale}} \ddot{\varphi} + \ddot{\mathbf{u}}^T \tilde{\mathbf{M}} \mathbf{u} + \dot{\mathbf{u}}^T \tilde{\mathbf{M}} \dot{\mathbf{u}} + \sum_{i=1}^{N_{\text{balourd}}} m_b^i r_b^i \left[ \cos \varphi \left( \ddot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{F}_{|\vec{Y}}^i \right) - \sin \varphi \left( \ddot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{F}_{|\vec{X}}^i \right) \right] = C(t) \quad (1.21)$$

où l'inertie totale de la turbine vaut :

$$I_{\text{totale}} = \sum_{i=1}^{N_{\text{poutres}}} \rho I_p l^i + \sum_{i=1}^{N_{\text{balourds}}} m_b^i r_b^i{}^2 + \sum_{i=1}^{N_{\text{disques}}} I_{DZ}^i \quad (1.22)$$

Les vecteurs assemblés  $\mathbf{F}_{|\vec{X}}^i$  et  $\mathbf{F}_{|\vec{Y}}^i$  représentent respectivement les vecteurs unitaires dans la direction  $\vec{X}$  et  $\vec{Y}$  pour chaque balourd.

L'équation (1.20) correspond à l'équation du mouvement que l'on obtient en imposant la loi de vitesse angulaire [VAR 97, LAL 98] :  $\mathbf{M}$  est la matrice masse du rotor,  $\dot{\varphi} \mathbf{D}_2$  la matrice gyroscopique,  $\mathbf{K}_1$  la matrice raideur d'une poutre de Timoshenko et  $\mathbf{K}_2$  la matrice raideur issue des termes gyroscopiques. Les forces qui apparaissent au second membre correspondent aux efforts aux paliers et aux forces d'excitation dues aux balourds.

Enfin, l'équation (1.21) permet de calculer la position angulaire de la ligne d'arbres en fonction des efforts  $F_{|\varphi}$  qui lui sont appliqués (couple moteur  $C(t)$ , couple de friction  $C_{\text{friction}}$  dû à la présence de fluides dans la turbine). On constate que les termes issus de la dérivation de l'énergie cinétique des balourds (cf. équation (1.8)) introduisent un couplage entre la position angulaire et les déplacements généralisés du rotor : ce couplage

sera faible s'il s'agit de balourds résiduels, *i.e.*  $m_b^i r_b^i$  très petit, soit fort dans le cas des grands balourds.

Lorsque la torsion est prise en compte, il faut adapter les équations (1.20) et (1.21) en y ajoutant les termes issus de la dérivation des énergies du disque (cf. équation (1.5)) et de l'arbre (cf. équation (1.6)). Dans ces expressions, on distingue trois termes à dériver :

- $\dot{\beta}^2$  qui correspond à la vibration de torsion d'une poutre classique ;
- $\dot{\beta}\dot{\varphi}$  qui traduit le couplage entre le mouvement de rotation rigide et l'angle de torsion ;
- le terme du 3<sup>e</sup> ordre issu du couplage gyroscopique  $\dot{\beta}\dot{\theta}_u\theta_v$ .

Seul le dernier de ces trois termes, une fois les équations de LAGRANGE calculées, ne peut être mis sous forme matricielle : il faut alors calculer à chaque instant ces termes, élément par élément, ce qui s'avère coûteux en temps CPU pour de grands rotors.

Une constatation peut être faite sur l'amortissement de la structure : la matrice issue des termes gyroscopiques, ainsi que la matrice  $\mathbf{D}_{\text{palier}}$ , apportent de l'amortissement aux équations dynamiques de flexion, mais les vibrations de torsion ou de traction ne sont pas amorties. Pour éviter des oscillations d'origine numérique lors de la simulation, on incorpore dans la formulation de l'amortissement de type RAYLEIGH aussi bien pour le rotor en traction/torsion que pour le diaphragme. Par ailleurs, dans notre cas d'études, le rotor est en position horizontale et il n'y a aucune source d'excitation extérieure en traction/compression : le déplacement associé à cette vibration est nul ( $w = 0$ ) et ceci permet donc de diminuer le nombre d'inconnues à calculer.

En ce qui concerne les équations du mouvement du stator, elles prennent la forme bien connue suivante :

$$\mathbf{M}_d \ddot{\mathbf{u}}_d + \mathbf{D}_d \dot{\mathbf{u}}_d + \mathbf{K}_d \mathbf{u}_d = \mathbf{0}$$

où  $\mathbf{u}_d$  représente le vecteur assemblé des déplacements généralisés du diaphragme. Les matrices  $\mathbf{M}_d$ ,  $\mathbf{D}_d$ ,  $\mathbf{K}_d$  sont respectivement les matrices masse, amortissement et raideur. Il est rappelé ici qu'au stade actuel de la modélisation, le contact rotor-stator n'est pas pris en compte. Dans le cas contraire, cf. chapitre 2, le couplage entre les structures est réalisé par le biais des efforts de contact entre les équations relatives à la ligne d'arbres et au diaphragme.

#### 1.4.2.2 Conditions aux limites, conditions initiales

Afin d'éliminer les mouvements de corps rigide de la ligne d'arbres, au moins deux paliers, rigides ou fluides, sont nécessaires comme conditions aux limites. La condition aux limites en torsion est définie comme suit : sachant qu'en situation accidentelle, la turbine est déconnectée de l'alternateur et n'ayant pas de moteur qui l'entraîne ( $C_{\text{entrée}} = C_{\text{sortie}} = 0$  dans l'équation (1.10)), les extrémités de la ligne d'arbres sont libres. En statique, il faut bloquer la rotation de corps rigide. Cependant, en dynamique, les termes d'inertie

permettent de régulariser les équations du mouvement. Ainsi les extrémités de l'arbre sont laissées libres en torsion.

Les conditions initiales restent à déterminer selon les deux cas de figure :

- montée en vitesse : la turbine est au repos, ce qui se traduit par des déplacements et une vitesse angulaire nuls à l'instant initial.
- ralentissement accidentel : les conditions initiales sont issues de la définition d'une situation accidentelle. À  $t = t_0$ , après avoir détecté le départ d'une ailette sur une ligne d'arbres opérant à régime nominal, on déclenche l'arrêt accidentel de la machine en fermant la veine vapeur qui alimente la turbine et en la déconnectant du réseau électrique. Les conditions initiales correspondent donc à l'état de la turbine opérant à régime nominal en déplacement et en vitesse à  $t = t_0$ . L'ailette manquante est représentée par un balourd important (de l'ordre de 90 kg·m), introduit à  $t = t_0$ .

## 1.5 Conclusion

Ce chapitre a permis de mettre en équation un transitoire de vitesse d'un groupe turbo-alternateur en considérant la vitesse angulaire du rotor variable. En définissant les repères qui décrivent la cinématique du rotor, la théorie de la mécanique du solide donne l'énergie d'un disque en rotation. L'énergie cinétique d'une poutre en rotation a été déduite par extension de l'énergie cinétique du disque. Les efforts extérieurs comme les paliers linéaires, la présence de vapeur, la pesanteur, sont ajoutés au modèle. La formulation énergétique écrite pour chacun des composants de la ligne d'arbres est discrétisée spatialement par la méthode des éléments finis pour les structures flexibles. Enfin, les équations du mouvement sont obtenues par application des équations de LAGRANGE. Il faut souligner ici que le fait d'avoir une vitesse de rotation inconnue complique de façon importante les équations et est à l'origine de nombreux couplages et non linéarités. Les équations du mouvement sont établies de manière générale et peuvent simuler aussi bien une montée en vitesse qu'un ralentissement. Les conditions initiales ainsi que les couples extérieurs agissant sur la turbine sont par ailleurs présentés pour les deux cas de figure, même si ces travaux de recherche se focalisent sur l'étude des ralentissements accidentels.

Il s'agit maintenant de résoudre ces équations pour calculer la réponse non linéaire de la ligne d'arbres. Le chapitre suivant est dédié à la prise en compte de la non linéarité de contact ainsi qu'à la résolution temporelle qui sont intimement liées.

---

# Modélisation de l'interaction

## Sommaire

---

<b>2.1 Mécanique du contact</b> . . . . .	<b>32</b>
2.1.1 Généralités . . . . .	32
2.1.2 Application au système rotor-stator . . . . .	39
<b>2.2 Stratégie de résolution en temps</b> . . . . .	<b>45</b>
2.2.1 Méthodes issues d'un développement de Taylor . . . . .	46
2.2.2 Méthodes des résidus pondérés . . . . .	47
2.2.3 Procédure d'intégration temporelle retenue . . . . .	48
<b>2.3 Conclusion</b> . . . . .	<b>53</b>

---

Après avoir établi, dans le cadre des petites perturbations, les équations dynamiques du rotor et du stator dans le chapitre 1, il s'agit maintenant de coupler la réponse des deux structures au moyen des efforts de contact. Le système d'équations à résoudre pour le rotor étant non linéaire, une procédure d'intégration temporelle adaptée à notre cas d'étude est introduite.

Les problèmes non linéaires en mécanique peuvent être classés en trois catégories [BEL 00] :

- la non linéarité de type comportement qui porte sur la loi de comportement du matériau : plasticité, endommagement. . .
- la non linéarité de type géométrique qui est prise en compte dans le cas de grandes déformations ou de grands déplacements, *i.e.* lorsque la configuration déformée ne peut plus être confondue avec la configuration non déformée ;
- la non linéarité de type contact pour laquelle il faut traiter les phases d'adhérence et de décollement. Pour ces dernières, il y a encore deux sous-catégories selon que le frottement est pris en compte ou pas.

La non linéarité de type contact est probablement une des non linéarités les plus difficiles à traiter car elle doit gérer des changements brusques de comportement au passage contact/perte de contact et au passage adhérence/glissement. Même si elle a motivé de nombreux travaux depuis l'explosion des moyens numériques, elle fait l'objet encore aujourd'hui de nombreuses recherches.

Lors du traitement numérique du contact, on distingue les aspects suivants qui constitueront l'articulation de ce chapitre :

1. la théorie de la mécanique du contact regroupant la cinématique du contact, qui traite la détection du contact, et les méthodes possibles pour calculer les forces du contact ;
2. la résolution en dynamique avec un schéma temporel adapté, pour résoudre les équations non linéaires en satisfaisant les contraintes de contact.

## 2.1 Mécanique du contact

Si la notion de contact entre deux corps est probablement la plus intuitive à comprendre en mécanique, sa mise en oeuvre d'un point de vue numérique l'est beaucoup moins [LAU 03, WRI 02].

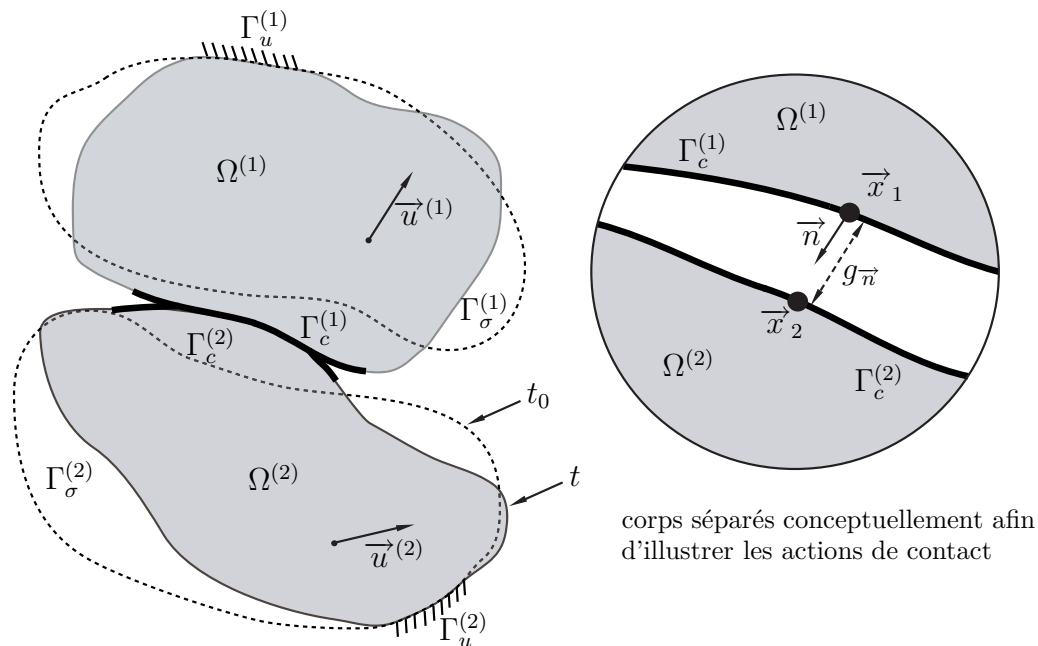
### 2.1.1 Généralités

Par souci de clarté, la mécanique du contact est présentée en se restreignant à deux corps déformables  $\Omega_{i=1,2}^{(i)}$ , initialement séparés, qui viennent en contact comme l'illustre la figure 2.1. La frontière respective de chaque corps  $\partial\Omega^{(i)}$  est partitionnée en trois sous-frontières :  $\Gamma_c^{(i)}$  où se produisent potentiellement les contacts,  $\Gamma_\sigma^{(i)}$  où s'applique les efforts extérieurs et  $\Gamma_u^{(i)}$  où les déplacements sont imposés. Ces trois sous-domaines doivent vérifier les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} \partial\Omega^{(i)} = \Gamma_\sigma^{(i)} \cup \Gamma_u^{(i)} \cup \Gamma_c^{(i)} \\ \Gamma_\sigma^{(i)} \cap \Gamma_u^{(i)} = \Gamma_\sigma^{(i)} \cap \Gamma_c^{(i)} = \Gamma_c^{(i)} \cap \Gamma_u^{(i)} = \emptyset \end{cases} \quad (2.1)$$

Les champs de déplacements dans la configuration courante sont notés  $\vec{u}^{(i)}$ . La modélisation d'un problème en mécanique du contact se décompose en quatre étapes :

1. Définition des surfaces potentiellement en contact  $\Gamma_c^{(i)}$  : en effet, le lieu du contact n'est pas toujours connu notamment pour les cas de problèmes évoluant en grands déplacements ou en grandes déformations. À défaut d'information sur la déformée envisageable des structures, on impose généralement  $\Gamma_c^{(i)}$  comme étant la frontière entière du domaine  $\Omega^{(i)}$ . Dans le cas contraire, on sélectionne les sous-régions concernées par le contact, ce qui a pour effet de diminuer significativement le nombre de conditions de contact et par la même occasion le temps de calcul ;
2. Définition des normales de contact  $\vec{n}$  : toujours sortantes, elles imposent la direction normale de séparation des deux corps ;



**Figure 2.1** - Notations pour la formulation des équations du contact

3. Évaluation du jeu entre les structures : cette étape permet de vérifier si la condition d'impenétrabilité (en terme mathématique  $\Omega^{(1)} \cap \Omega^{(2)} = \emptyset$ ) est violée ou pas. Son calcul peut s'avérer rapidement coûteux si la géométrie des corps déformés évolue rapidement ;
4. Calcul des efforts de contact dans les directions normale et tangentielle si le frottement est considéré.

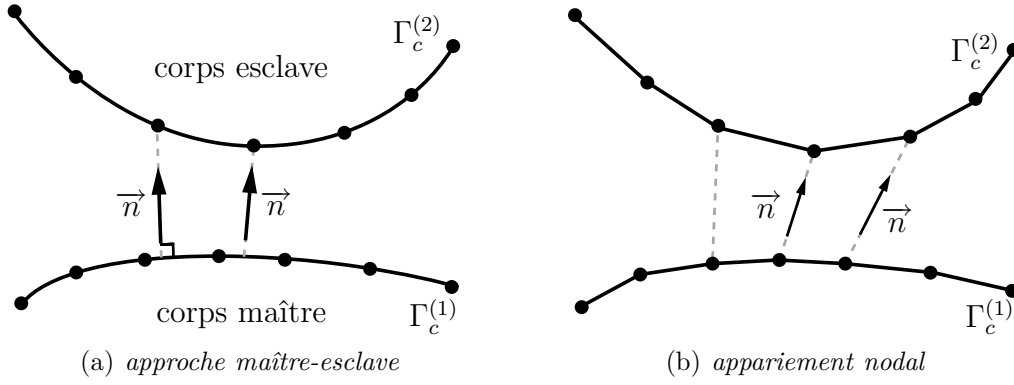
### 2.1.1.1 Définition des normales de contact

Parmi les diverses méthodes de détection de contact (cf. point 2), l'approche maître-esclave [BEL 00] a été retenue dans ce travail : elle permet d'imposer la déformation d'un corps, par exemple  $\Omega^{(2)}$  (appelé esclave par la suite), par rapport au corps maître,  $\Omega^{(1)}$ , comme l'illustre la figure 2.2(a). En raisonnant sur une structure maillée, cette approche ne se limite pas à imposer des forces aux nœuds d'un maillage, comme le ferait une méthode d'appariement nodal (cf. figure 2.2(b)), mais offre aussi la possibilité d'avoir le contact au milieu d'élément : la force de contact équivalente généralisée est redistribuée aux nœuds grâce aux fonctions de forme associées à l'élément considéré.

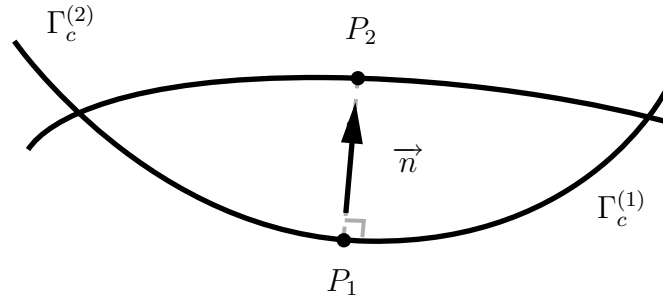
### 2.1.1.2 Mesure du jeu entre les structures

Pour un point matériel  $P_1$  appartenant à la surface de contact  $\Gamma_c^{(1)}$ , la fonction distance normale  $g_{\vec{n}}$  entre les deux structures (cf. point 3) est égale à la distance  $\|\overrightarrow{P_1 P_2}\|$  où  $P_2$  est le projeté du point  $P_1$  suivant  $\vec{n}$  sur  $\Gamma_c^{(2)}$  comme l'illustre la figure 2.3. En adoptant le formalisme lagrangien total où la position d'un nœud dans la configuration courante  $\vec{x}_i$





**Figure 2.2** - Définition de la normale de contact  $\vec{n}$



**Figure 2.3** - Fonction jeu avec l'approche maître-esclave

s'exprime comme la somme de la position initiale  $\vec{X}_i$  et du déplacement  $\vec{u}_i(\vec{X}_i, t)$ , il est possible d'explicitier la fonction  $g_{\vec{n}}$  :

$$g_{\vec{n}} = g_{\vec{n}0} + \left( \vec{u}^{(2)}(\vec{X}^{(2)}) - \vec{u}^{(1)}(\vec{X}^{(1)}) \right) \cdot \vec{n} \quad (2.2)$$

$g_{\vec{n}0}$  représente la distance minimale  $P_1P_2$  à l'instant initial soit :

$$g_{\vec{n}0} = \min_{\vec{X}_S \in \Gamma_c^{(2)}} \left( \vec{X}^{(1)} - \vec{X}_S \right) \cdot \vec{n} \quad (2.3)$$

Pour chaque point situé sur l'interface de contact  $\Gamma_c^{(2)}$ , il faut vérifier les conditions de contact : aussi appelées conditions de SIGNORINI (cf. figure 2.4(a)), elles traduisent entre autres la condition de non-pénétrabilité entre les deux corps. Ainsi en notant  $\sigma_N$  l'effort surfacique de contact dans la direction normale  $\vec{n}$ , il vient :

$$\begin{aligned} \sigma_N &\geq 0 && \text{sur } \Gamma_c^{(i)} \text{ (traction impossible)} \\ g_{\vec{n}} &\geq 0 && \text{condition de non-pénétration } \forall t \\ \sigma_N g_{\vec{n}} &= 0 && \text{équation de compatibilité} \end{aligned} \quad (2.4)$$

### 2.1.1.3 Traitement des contraintes de contact

Le problème de contact est analogue à un problème d'optimisation avec contraintes, où les équations de SIGNORINI (2.4) correspondent aux conditions d'optimalité de KARUSH,

KUHN et TUCKER [MIN 86] : pour un problème de contact en statique, la fonctionnelle à minimiser est l'énergie de déformation d'une structure déformable sujette au contact.

Dans les cas de contact unilatéral sans friction, la littérature, [BEL 00, WRI 02] par exemple, met à disposition différentes méthodes pour calculer les forces dans la direction normale (cf. point 4). En mécanique des milieux continus, l'approche généralement utilisée pour présenter les méthodes de contact est d'ajouter des termes de contact dans le principe des travaux virtuels. Les différentes méthodes de traitement des forces de contact sont illustrées en considérant leurs formes semi-discrétisées<sup>1</sup> par la méthode des éléments finis.

En prenant l'exemple d'un système mécanique classique, la structure déformable est discrétisée spécialement par la méthode des éléments finis<sup>2</sup>. Ainsi l'équation du mouvement s'écrit :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} + \mathbf{F}^{\text{contact}} = \mathbf{F}^{\text{ext}} \quad (2.5)$$

où  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{K}$  représentent respectivement les matrices masse, amortissement et raideur. Les forces extérieures généralisées sont notées  $\mathbf{F}^{\text{ext}}$ . En ce qui concerne les forces de contact  $\mathbf{F}^{\text{contact}}$ , elles sont obtenues en considérant une des méthodes ci-dessous :

1. la méthode des multiplicateurs de LAGRANGE [BEL 91] : les inégalités de contact de Signorini sont alors parfaitement respectées étant donné que les conditions de KUHN et TUCKER sont une généralisation des multiplicateurs de LAGRANGE. Le problème de contact unilatéral est reporté sur les efforts inconnus  $\boldsymbol{\lambda}$  par dualisation. Ils doivent alors satisfaire les équations discrétisées (2.6) où  $\mathbf{C}_N$  correspond à la matrice de contraintes de contact obtenue dans la direction normale et l'exposant  $T$  à l'opérateur de transposition de matrices.

$$\begin{cases} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} + \mathbf{C}_N^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{F}^{\text{ext}} \\ \mathbf{C}_N [\mathbf{X} + \mathbf{u}] = \mathbf{0} \end{cases} \quad (2.6)$$

Cette méthode engendre l'augmentation de la taille du problème mécanique du fait de l'écriture des équations cinématiques de contact à satisfaire, soit autant que de multiplicateurs : ceci peut s'avérer coûteux pour des systèmes à grand nombre de variables. Habituellement, les équations (2.6) sont réécrites sous forme matricielle, en considérant la nouvelle variable  $\mathbf{Y} = (\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})$ . Sous cette forme, l'inconvénient est que des zéros apparaissent sur la diagonale de la nouvelle matrice de rigidité : cette dernière n'est ainsi plus définie positive, empêchant, par exemple, toute résolution par une méthode de type CHOLESKY.

2. les méthodes de pénalité : elles « régularisent » les inégalités de contact (2.4) et transforment le problème de contact en un problème d'optimisation sans contrainte. Deux types de méthodes peuvent être distinguées :

---

1. Le terme de « semi-discrétisation » correspond à la discrétisation spatiale d'une structure par la méthode des éléments finis.

2. Il est supposé ici que le lecteur est familier avec la méthode des éléments finis [BAT 90, HUG 00]

- extérieure [WRI 02], aussi appelée « méthode de pénalité » par abus de langage : probablement la plus répandue dans les codes commerciaux, elle autorise une « légère » pénétration entre les structures, ce qui n'est pas physique. L'équation du mouvement associée à la pénalité extérieure s'écrit :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} + \int_{\Gamma_c} \mathbf{N}^T p(g_{\mathbf{n}}) H(-g_{\vec{n}}) d\Gamma_c = \mathbf{F}^{\text{ext}} \quad (2.7)$$

où  $p$  est une fonction de pénalisation et  $H$  correspond à la fonction de HEAVISIDE définie comme suit :

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Le système d'équations (2.7) peut aussi se réécrire sous la forme suivante :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{u}} + [\mathbf{K} + \mathbf{K}_c(p(g_{\mathbf{n}}))] \mathbf{u} = \mathbf{F}^{\text{ext}} \quad (2.8)$$

La fonction  $p$  la plus classique statue que la réaction normale est proportionnelle à la valeur de la pénétration entre les structures, soit  $p(g_{\mathbf{n}}) = K_N \min(g_{\mathbf{n}}, 0)$  où  $K_N > 0$ , homogène à une raideur, est appelé coefficient de pénalité comme l'illustre la figure 2.4(b). Il est possible d'enrichir cette fonction de pénalisation de diverses façons en adoptant un profil linéaire par morceaux, quadratique, cubique. Sa facilité d'implantation et sa simplicité en font son succès, mais elle introduit de l'erreur sur les résultats obtenus : l'effort de contact est sans cesse sous- ou surestimé et donc les résultats sont peu fiables. Une étude de sensibilité est donc requise sur la valeur du coefficient de pénalisation  $K_N$ <sup>3</sup>, afin de s'assurer de la qualité des résultats. Si des valeurs trop élevées sont utilisées, les conditions de Signorini seront satisfaites, mais cela causera des problèmes de conditionnement de matrices et de stabilité pour certains schémas de résolution temporelle<sup>4</sup>. En effet, la valeur de pénalisation va rigidifier la structure conduisant à une réponse structurelle à très haute fréquence ;

- intérieure [ODE 82], aussi appelée « méthode de barrière » : impose une force de contact empêchant les corps de se contacter ( $g_{\mathbf{n}} > 0$ ), ce qui introduit un couplage non physique entre les deux structures. Cette méthode maintient active toutes les contraintes de contact, contrairement aux méthodes de LAGRANGE ou de pénalité extérieure qui sont de type combinatoire, ce qui en fait un avantage. En reprenant les notations introduites pour les pénalités extérieures, on en déduit que la fonction de pénalisation  $p$  tend vers  $+\infty$  lorsque  $g_{\vec{n}} \rightarrow 0$ . Ainsi la forme matricielle des équations du mouvement s'écrit :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} + \int_{\Gamma_c} \mathbf{N}^T p(g_{\mathbf{n}}) d\Gamma_c = \mathbf{F}^{\text{ext}} \quad (2.9)$$

---

3. Le coefficient de pénalité  $K_N$  est habituellement choisi entre 1 et 1000 fois la valeur du module d'Young du matériau.

4. Une valeur élevée de  $K_N$  entraîne, pour un schéma explicite, une diminution importante du pas de temps critique.

Pouvant conduire à des problèmes de mauvais conditionnement, comme les pénalités extérieures, cette méthode est rarement utilisée pour des problèmes de contact, à moins d'être couplée avec une méthode des Lagrangiens augmentés.

3. les méthodes dites hybrides ou mixtes :

- méthode de Lagrangiens perturbés [WRI 02] : pour pallier aux problèmes des Lagrangiens classiques évoqués ci-dessus (matrice de raideur non définie positive), cette méthode a été développée en modifiant les contraintes de contact par des termes de pénalité extérieure. Une légère erreur est introduite lors du calcul de la fonction distance entre les structures du fait de la pénalisation. L'équation du mouvement semi-discrétisée s'écrit alors :

$$\begin{cases} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} + \mathbf{C}_N^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{F}^{\text{ext}} \\ \mathbf{C}_N \mathbf{u} - \mathbf{G}_p \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0} \end{cases} \quad (2.10)$$

La matrice  $\mathbf{G}_p$  est issue des termes de pénalisation. Pour plus de détails, le lecteur se référera aux ouvrages suivants [BEL 00]. Cette formulation n'est cependant valide que pour les problèmes de contact sans frottement et les cas d'adhérence [WRI 02]. Si l'on souhaite traiter le cas des glissements, il faut utiliser la méthode des multiplicateurs de LAGRANGE ou une méthode des pénalités ;

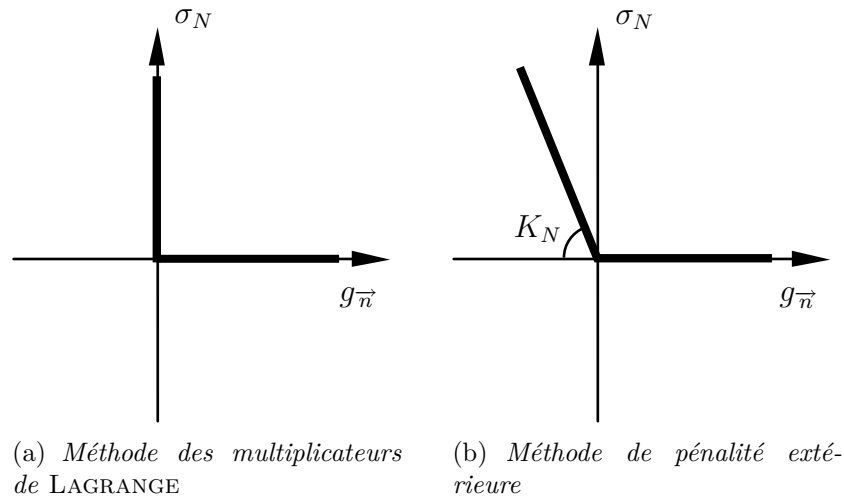
- méthode de Lagrangiens augmentés [LAU 03] : cette dernière approche combine les avantages des Lagrangiens classiques et des méthodes des pénalités, *i.e.* la condition de non-pénétration respectée et le problème non linéaire équivalent à un problème d'optimisation sans contrainte. Le système d'équations à résoudre s'écrit alors :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{u}} + [\mathbf{K} + \mathbf{P}_c] \mathbf{u} + \mathbf{C}_N^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{F}^{\text{ext}} \quad (2.11)$$

Une résolution itérative de type algorithme d'USZAWA [SIM 92] permet de converger vers la solution du problème de contact. Le coefficient de pénalité n'introduit pas d'erreur sur la solution mais il conditionne la vitesse de convergence de l'algorithme.

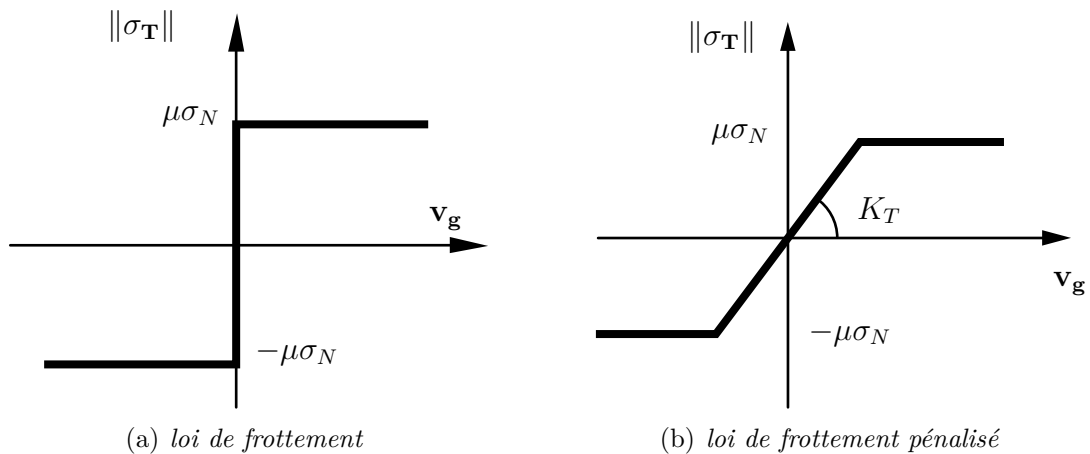
Le traitement du contact vient d'être présenté dans la direction normale. On s'intéresse maintenant au cas du contact frottant qui nécessite de calculer la force dans la direction tangentielle. Lorsqu'on ajoute le frottement dans le problème, il n'existe pas de formule universelle pour décrire les comportements des interfaces de contact. Les nombreux modèles développés le sont souvent pour une application donnée et donc non généralisables [BEL 00]. La plus utilisée et la plus simple est la loi de COULOMB-AMONTONS (cf. figure 2.5(a)) :

$$\begin{aligned} \|\sigma_{\mathbf{T}}\| &\leq \mu \sigma_N \\ \|\sigma_{\mathbf{T}}\| &< \mu \sigma_N \Rightarrow \mathbf{v}_{\mathbf{g}} = 0 \\ \|\sigma_{\mathbf{T}}\| &= \mu \sigma_N \Rightarrow \exists \alpha > 0 \text{ tel que } \mathbf{v}_{\mathbf{g}} = \alpha \frac{\sigma_{\mathbf{T}}}{\|\sigma_{\mathbf{T}}\|} \end{aligned} \quad (2.12)$$



**Figure 2.4** - Représentation du contact unilatéral sans frottement

où  $\sigma_T$  et  $v_g$  représentent respectivement l'effort tangentiel la vitesse relative de glissement. Cette loi fait intervenir un coefficient  $\mu$ , appelé coefficient de COULOMB. Pendant la phase



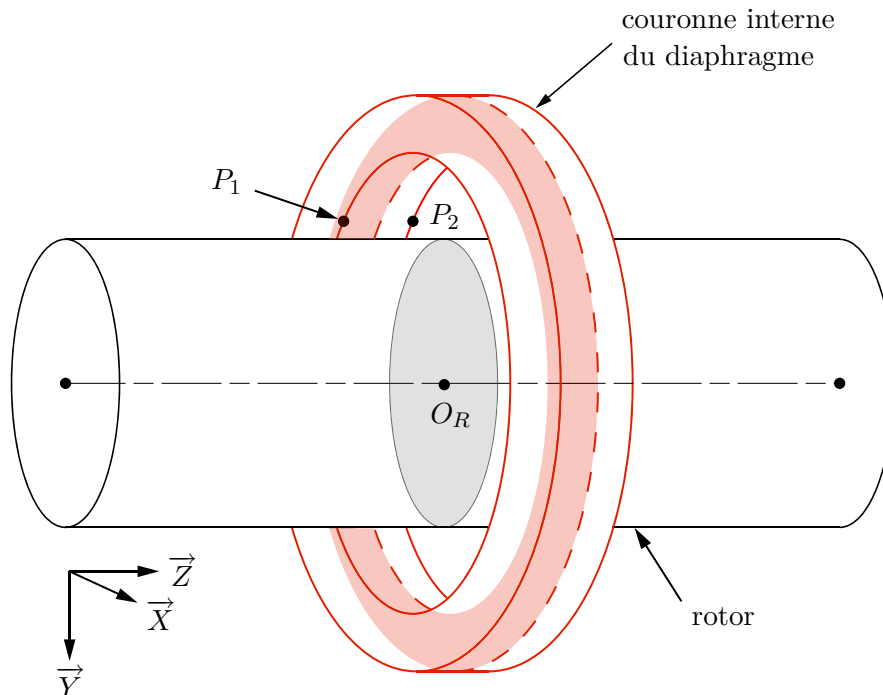
**Figure 2.5** - Illustration de la loi de contact de Coulomb

d'adhérence ou de collement, la vitesse relative des deux corps est nulle. Lorsque la force tangentielle dépasse une certaine valeur seuil, les deux corps glissent l'un par rapport à l'autre (phase de glissement), et la vitesse relative des deux corps, non nulle, renseigne sur la direction de la force tangentielle. La réaction tangentielle est alors égale, en valeur absolue, à  $\mu$  fois la réaction normale.

La loi de COULOMB peut être également pénalisée supprimant ainsi la phase d'adhérence. La figure 2.5(b) donne l'exemple d'une loi de friction qui a été pénalisée de façon linéaire. D'autres modèles tentent de décrire le comportement de la friction à l'échelle microscopique (équations constitutives locales du matériau) ou à l'échelle mésoscopique (équations approchant le comportement local de l'interface de contact) mais cela nécessite une bonne connaissance des propriétés matérielles de la surface de contact. Ces types de modélisation ne seront pas retenus dans le cadre de la thèse.

### 2.1.2 Application au système rotor-stator

Il s'agit de particulariser le cadre général<sup>5</sup> de la mécanique du contact au cas qui nous intéresse. La figure 2.6 représente les structures étudiées dans ce mémoire dans une configuration où les corps sont au repos : le rotor vient en contact avec la couronne interne du diaphragme. Si l'on considère un modèle 3-D (plus riche en terme de modélisation



**Figure 2.6** - Représentation 3-D des structures pouvant rentrer en contact

mais plus coûteux), le contact est surfacique et il est possible d'étudier localement l'effet du contact d'un point de vue mécanique et thermique (échauffement dû à la friction, déformations locales de l'arbre). Cependant, les modèles de rotor et de stator étant monodimensionnels<sup>6</sup> dans un espace 3-D, on se ramène à un contact de type nœud-segment. Les sections droites du rotor et de la couronne flexible restent rigides lors du contact : cette hypothèse forte ne permet pas d'étudier la propagation d'ondes de contact du fait de la modélisation retenue, ni les déformations locales des sections. Elle est cependant cohérente avec notre objectif de modélisation de la dynamique d'ensemble du système rotor-stator. Le contact a lieu sur la frontière du rotor, *i.e.* sur le bord de la section droite des poutres, et non sur la fibre neutre : la déformée courante des structures doit être reconstruite, ce qui est l'inconvénient des modèles filaires par rapport à un modèle 3-D. Sur ce point, on peut s'appuyer sur les travaux de P. WRIGGERS *et al.* [WRI 97, ZAV 00, LIT 02] qui ont

5. Le lecteur trouvera une mine de références bibliographiques, suivant le problème contact qu'il traite, dans la synthèse dédiée aux algorithmes de contact de N. G. BOURAGO [BOU 05]

6. Les calculs 3-D en dynamique avec contact seraient prohibitifs en temps de calcul. En effet, la simulation d'un ralentissement accidentel d'une turbine, lorsqu'il n'y a pas de contact, dure au plus 20 minutes en temps réel, soit un nombre excessif de pas de temps d'intégration.

étudié le contact entre deux poutres, toutes deux à section droite circulaire ou rectangulaire. Le lieu du point de contact entre les structures est obtenu en minimisant la fonction distance  $g_{\vec{n}}$ . Une fois le lieu de contact trouvé, on peut alors calculer les forces de contact. Par rapport à notre cas d'étude, il suffit de réadapter cette méthodologie aux poutres à section circulaire venant en contact avec des poutres à section rectangulaire. Cependant, on ne considère qu'un seul point de contact sur la circonférence de la section droite du rotor.

Les quatre étapes générales évoquées précédemment sont adaptées aux modèles développés dans le chapitre 1 :

1. Définition des surfaces potentiellement en contact : la démarche actuellement adoptée par EDF permet de prédire parmi les différents diaphragmes celui où aura lieu le contact, ou tout du moins le premier impact. Il est alors choisi d'imposer le contact en une seule position axiale<sup>7</sup> du rotor (point  $O_R$  sur la figure 2.6). Ce point correspond simplement à l'intersection entre la ligne neutre du rotor et le plan de la section moyenne du stator ;
2. Définition des normales de contact : l'approche maître-escale est retenue. Concernant le choix du corps maître, l'arbre est plus raide et plus massif que le diaphragme et sa géométrie plus régulière que celle de la couronne intérieure : il apparaît naturellement comme le corps maître. De plus, il n'est pas possible de considérer le diaphragme comme maître étant donné que, pour un point de contact sur la couronne interne du diaphragme, on ne peut pas définir la normale sortante  $\vec{n}$  sur les bords de la couronne interne (point  $P_1$  par exemple sur la figure 2.6) ;
3. Évaluation du jeu disponible entre les structures : la fonction jeu  $g_{\vec{n}}$  dépend de la description géométrique de la couronne interne et est donc particularisée pour les différents carters (cf. sections suivantes) ;
4. Calcul des efforts de contact : pour éviter d'introduire d'erreur cumulative sur les résultats comme le ferait une méthode de pénalité, les multiplicateurs de LAGRANGE sont retenus pour le calcul des forces dans les directions normale et tangentielle. Un cas particulier du système d'équations (2.12) est utilisé pour modéliser le contact frottant : seul le glissement entre les structures est retenu dans l'écriture de la loi de COULOMB.

Le contact ayant lieu sur la circonférence de la section droite de l'arbre, il faut transporter le torseur des efforts de contact au centre géométrique du rotor  $O_R$ , faisant ainsi apparaître le couple de friction  $C_{\text{fric}} = -\mu R_r \|\vec{\lambda}_N\|$  (cf. [DH 56]). Dans ce qui suit, les efforts de contact dans la direction normale et tangentielle seront notés  $\vec{\lambda}_N = \lambda_N \vec{n}$  et

---

7. La généralisation du contact sur plusieurs sections du rotor est triviale et ne demande qu'un effort de programmation.

$\vec{\lambda}_T$  avec  $\|\vec{\lambda}_T\| = \mu\lambda_N$ . Ainsi le problème de dynamique à résoudre, par exemple pour le diaphragme, est le suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} + \mathbf{C}_{NT}^T\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{F}^{\text{ext}} \\ \mathbf{C}_N[\mathbf{X} + \mathbf{u}] = \mathbf{0} \end{cases} \quad (2.13)$$

où  $\mathbf{C}_{NT}$  est la matrice des contraintes de contact dans la direction normale à laquelle sont ajoutés les termes provenant de la friction.

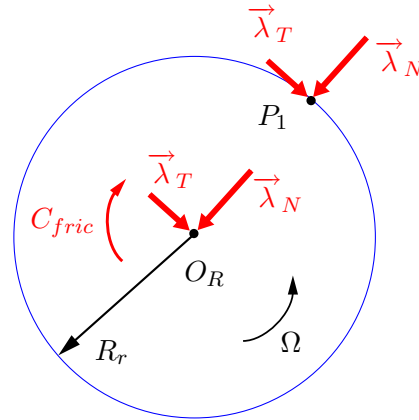


Figure 2.7 - Transport des forces de contact agissant sur le rotor

### 2.1.2.1 Couronne intérieure rigide à 2 d.d.l.

Le diaphragme est représenté par un anneau rigide fixe (carter C1) ou non (carter C2), restant dans le plan  $(\vec{X}, \vec{Y})$  et dont le centre géométrique coïncide avec celui du rotor dans l'état non déformé. En se référant aux notations introduites par la figure 1.3, les rotations  $(\theta_u, \theta_v)$  de la section droite du rotor sont négligées lors de la détection du contact : ceci revient à dire que la section droite du rotor reste dans le plan  $(\vec{X}, \vec{Y})$ . Le rotor venant en

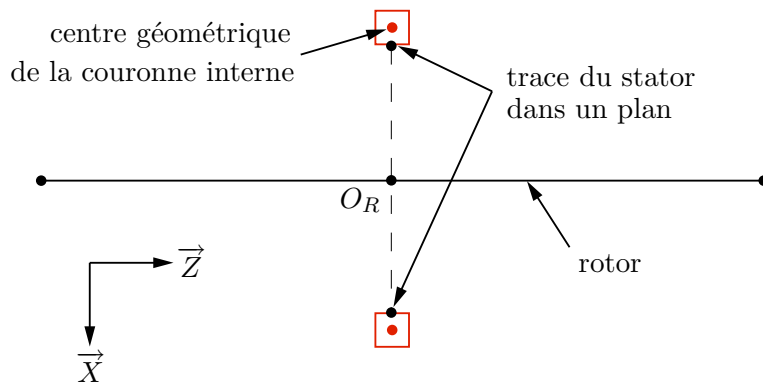


Figure 2.8 - Vue en coupe du rotor et du diaphragme C2

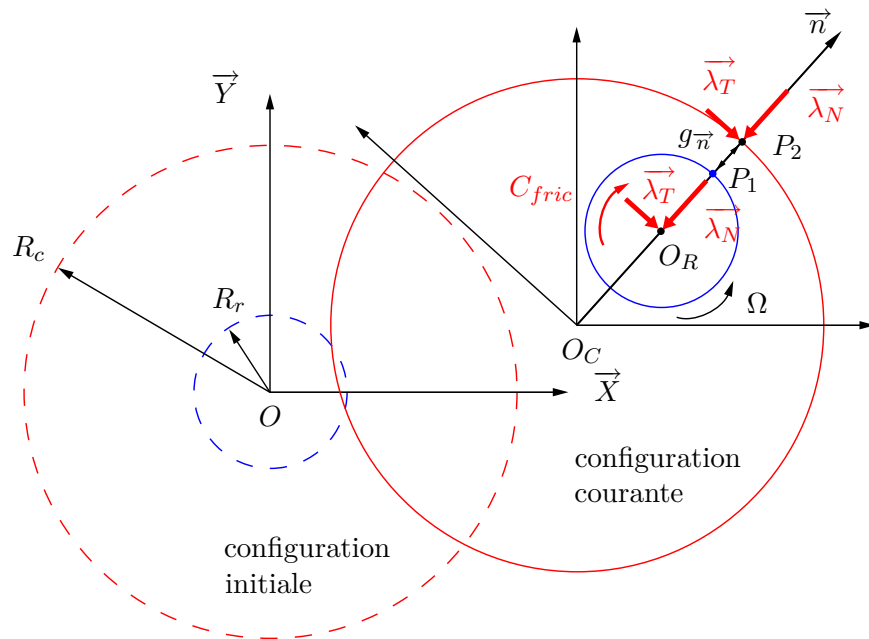
contact avec le bord intérieur de la couronne du diaphragme comme l'illustre la figure 2.8, le contact rotor-stator se ramène à un contact entre deux cercles. Ainsi, la fonction distance  $g_{\vec{n}} = \|\vec{P}_1\vec{P}_2\|$ , comme l'illustre la figure 2.9, se calcule de façon analytique.



En notant  $\overrightarrow{OO_R} = u_1 \overrightarrow{X} + v_1 \overrightarrow{Y}$  pour repérer la position du centre du rotor dans la configuration courante et  $\overrightarrow{OO_C} = u_2 \overrightarrow{X} + v_2 \overrightarrow{Y}$  pour celle du centre de la couronne interne du diaphragme, il vient, sachant que les points  $O_C, O_R, P_1$  et  $P_2$  sont alignés :

$$g_{\vec{n}} = \|\overrightarrow{P_1 O_R} + \overrightarrow{O_R O_C} + \overrightarrow{O_C P_2}\| = g_{\vec{n}_0} - \sqrt{(u_2 - u_1)^2 + (v_2 - v_1)^2} \quad (2.14)$$

avec  $g_{\vec{n}_0} = R_c - R_r$  le jeu initial où  $R_r$  et  $R_c$  sont les rayons respectifs de la section droite du rotor et du carter. Le cas du carter C1 correspond au cas particulier  $u_2 = 0 = v_2$ .

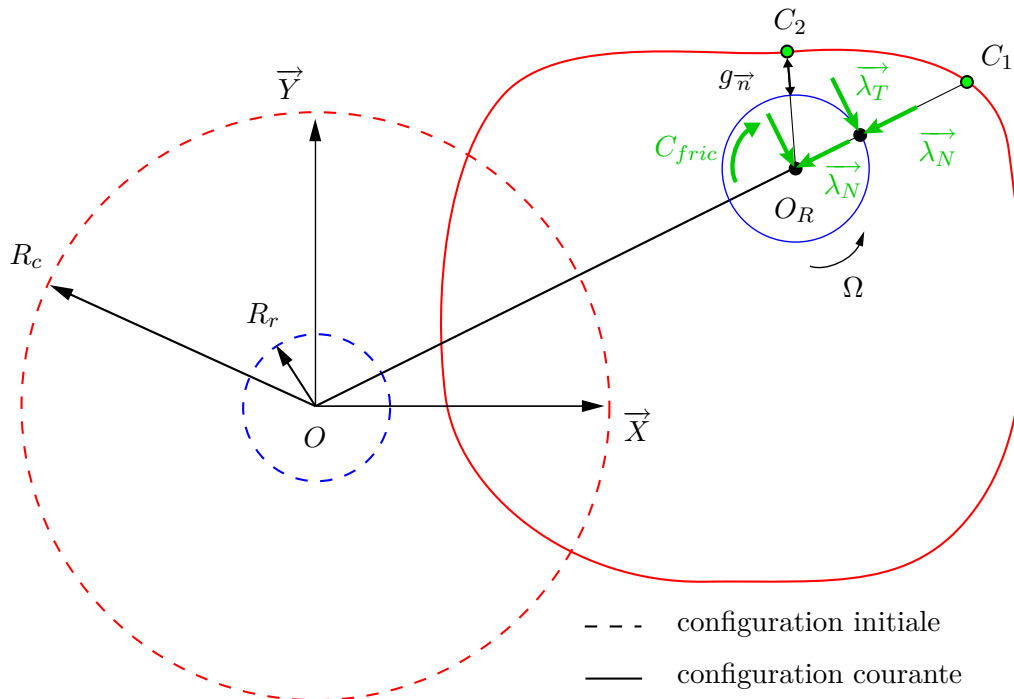


**Figure 2.9** - Détection du contact pour les carters C1 et C2

### 2.1.2.2 Diaphragme flexible planaire

Le carter C3 est modélisé par des poutres courbes pour la couronne interne et des poutres droites pour les ailettes : on fait l'approximation que ce stator se déforme dans le plan  $(\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y})$ . Le fait de considérer une structure flexible complexifie la recherche du point de contact : ce dernier, situé sur la surface intérieure de la couronne interne, peut être calculé de manière analytique mais son expression est alors non linéaire. Afin de trouver un compromis entre la précision du calcul et le temps CPU, une approximation a été étudiée pour le calcul de la fonction distance entre les structures. On aura donc deux cas :

1. calcul approché (cas 1) : on suppose que le point de contact appartenant au carter (point  $C_1$  sur la figure 2.10) a la même position angulaire que le centre géométrique du rotor. Cette hypothèse, simple d'implantation, est valable pour détecter le premier impact de façon satisfaisante car le carter ne s'est pas encore déformé. L'erreur commise après les premiers instants d'interaction sera étudiée sur des cas tests (cf. chapitre 4) ;



**Figure 2.10** - Détection du contact pour le carter  $C_3$

2. calcul analytique (cas 2) : les coordonnées du point  $C_2$  (cf. figure 2.10) sont obtenues en minimisant la fonction jeu  $g_{\vec{n}}$ , laquelle est calculée en reconstruisant la déformée de la couronne à l'aide des fonctions de formes.

Dans les deux cas, la fonction jeu prend la forme :

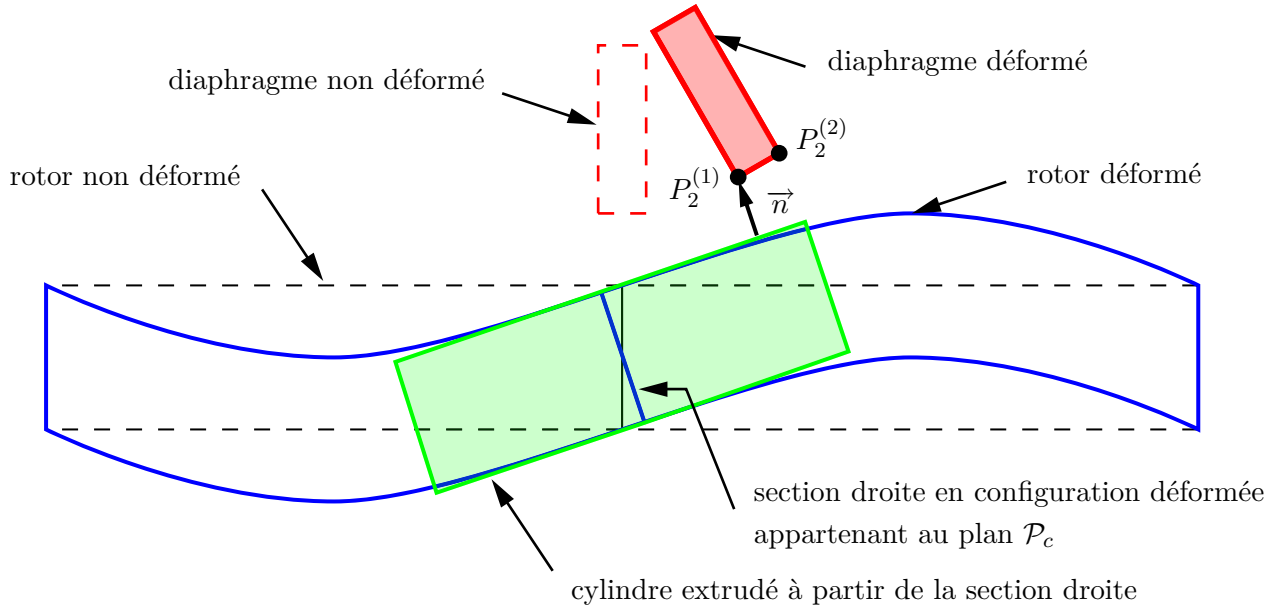
$$g_{\vec{n}} = \|\overrightarrow{O_R C_i}\| - R_r \text{ avec } i=1,2 \quad (2.15)$$

### 2.1.2.3 Diaphragme flexible en 3-D

On autorise le diaphragme précédent à se déformer dans  $\mathbb{R}^3$ . Afin d'éviter une recherche coûteuse du lieu du contact, des hypothèses sur le contact ont été émises. La procédure utilisée est présentée comme suit :

1. Dans la configuration déformée du rotor (cf. figure 2.11), on se place dans le plan contenant la section droite du rotor, noté  $\mathcal{P}_c$ , en considérant les rotations successives  $(\theta_u, \theta_v)$  (cf. figure 1.3). Par extrusion de cette section droite dans la direction orthogonale à  $\mathcal{P}_c$ , on obtient un cylindre. On se ramène ainsi à un contact entre un cylindre rigide et un tore rectangulaire flexible. La normale sortante  $\vec{n}$  de contact est dans le plan de contact  $\mathcal{P}_c$  ;
2. Reconstruction du champ de déplacement de la couronne interne : puisque la section droite de la couronne interne est supposée rigide, le contact a nécessairement lieu sur l'un des coins intérieurs de la couronne (points  $P_2^{(1)}$  ou  $P_2^{(2)}$  sur la figure) soit deux cercles potentiels de contact sur la structure ;
3. Projection des cercles de contact sur le plan de contact  $\mathcal{P}_c$  ;

4. Recherche non linéaire du point de contact : on se ramène alors au calcul exact développé précédemment pour le diaphragme flexible planaire. La fonction distance  $g_{\vec{n}}$  est calculée analytiquement pour tout point appartenant aux cercles de contact et ensuite minimisée.



**Figure 2.11** - Détection du contact pour le carter C3 dans un espace 3-D (vue en coupe dans le plan contenant la normale de contact  $\vec{n}$ )

## 2.2 Stratégie de résolution en temps

Lorsqu'il s'agit de traiter un problème de contact en dynamique, le calcul des forces de contact et le schéma d'intégration temporelle ne peuvent être choisis indépendamment. Sachant qu'il n'est presque jamais possible de résoudre analytiquement les équations de la dynamique, deux approches sont classiquement utilisées dans la littérature [GÉR 97] :

- la méthode de décomposition modale : les équations du système mécanique, après réécriture dans la base tronquée des modes propres, sont découplées. Cette méthode est fortement usitée pour les structures dont la réponse dynamique est dominée par quelques modes propres prépondérants : il faudra bien sûr veiller à sélectionner les modes en question pour obtenir une bonne précision sur les calculs. Cependant, cette méthode ne s'applique que très rarement aux problèmes non linéaires ;
- les méthodes d'intégration directe : couramment utilisées pour les systèmes linéaires et pouvant être étendues aux cas non linéaires, elles sont adaptées pour étudier les réponses dynamiques de structures déformables possédant un large contenu fréquentiel. Connaissant l'état de la structure à l'instant initial  $t_0$ , *i.e.*  $u(t = t_0) = u_0$  et  $\dot{u}(t = t_0) = \dot{u}_0$ , l'équation du mouvement (2.5) donne l'évolution du champ des déplacements généralisés

$u(t)$  ainsi que ses dérivées temporelles, et ce  $\forall t$ . L'intégration temporelle directe consiste alors à calculer en un nombre fini d'instants  $\dots, t_{n-1}, t_n, t_{n+1}, \dots$  la réponse dynamique de la structure. L'intervalle de temps entre deux instants  $\Delta t > 0$  peut être alors fixe ou pas. Par la suite, les quantités connues à l'instant  $t_n$  sont indicées  $_n$ , et le pas de temps  $\Delta t$  sera constant<sup>8 9</sup>. Le but de l'intégration directe est donc de calculer les inconnues du problème à l'instant  $t_{n+1} = t_n + \Delta t$ , sachant que ces dernières sont connues à l'instant  $t_n$  ainsi qu'aux instants antérieurs. Par souci de clarté, les schémas temporels sont d'abord présentés dans un cadre linéaire, *i.e.* sans les forces de contact, avant de discuter de leur extension aux cas non linéaires.

Cette section a pour but de présenter brièvement deux grandes méthodes d'intégration directe : celle issue d'un développement de Taylor et celle basée sur les résidus pondérés, analogue à la méthode des éléments finis. Enfin, la procédure d'intégration utilisée durant cette thèse sera détaillée.

### 2.2.1 Méthodes issues d'un développement de Taylor

Comme son nom l'indique, la méthode repose sur un développement limité des inconnues à calculer. Toute fonction  $f$ , dérivable  $n$  fois, peut en effet être approchée au voisinage d'un instant  $t$  par un développement polynômial de TAYLOR à l'ordre  $n$  :

$$f(t + \tau) = f(t) + \tau f'(t) + \frac{\tau^2}{2} f''(t) + \sum_{i=3}^n \frac{\tau^i}{i!} f^{(i)}(t)$$

où  $f^{(i)}(t)$  correspond à la  $i$ -ème dérivée temporelle de la fonction  $f$ . Ainsi, en ne conservant que les termes du troisième ordre en déplacement et du second ordre en vitesse, il vient :

$$\begin{cases} \mathbf{u}_{n+\tau} = \mathbf{u}_n + \tau \dot{\mathbf{u}}_n + \frac{\tau^2}{2} \ddot{\mathbf{u}}_n + \frac{\tau^3}{6} \dddot{\mathbf{u}}_n \\ \dot{\mathbf{u}}_{n+\tau} = \dot{\mathbf{u}}_n + \tau \ddot{\mathbf{u}}_n + \frac{\tau^2}{2} \dddot{\mathbf{u}}_n \end{cases} \quad (2.16)$$

Pour supprimer les dérivées temporelles troisièmes en déplacement, on introduit les paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  [GÉR 97] :

$$\begin{cases} \mathbf{u}_{n+\tau} = \mathbf{u}_n + \tau \dot{\mathbf{u}}_n + \frac{\tau^2}{2} \left( (1 - \beta) \ddot{\mathbf{u}}_n + \beta \ddot{\mathbf{u}}_{n+\tau} \right) \\ \dot{\mathbf{u}}_{n+\tau} = \dot{\mathbf{u}}_n + \tau \left( (1 - \alpha) \ddot{\mathbf{u}}_n + \alpha \ddot{\mathbf{u}}_{n+\tau} \right) \end{cases} \quad (2.17)$$

---

8. Les schémas à pas de temps adaptatif ne sont ni présentés ni utilisés dans cette étude car ils perdent la précision au second ordre des schémas temporels à pas fixe. Des estimateurs d'erreur sont alors nécessaires pour contrôler la qualité de la solution calculée à chaque pas de temps et il n'est donc pas garanti que ce type de schéma soit systématiquement plus rapide, notamment pour des systèmes fortement non linéaires tels que les problèmes de contact [BOY 03].

9. Les schémas d'intégration hybrides qui alternent les schémas explicite et implicite n'ont pas été retenus du fait de leur complexité d'implantation. Pour plus de détails, le lecteur se référera à la thèse de L. NOELS [NOE 04]

En réécrivant les équations du mouvement semi-discrétisées à l'instant  $t_n + \tau$ , il vient :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_{n+\tau} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{u}}_{n+\tau} + \mathbf{K}\mathbf{u}_{n+\tau} = \mathbf{F}_{n+\tau}^{ext} \quad (2.18)$$

puis en réinjectant les expressions de l'équation (2.17), on obtient le système matriciel suivant :

$$\left( \mathbf{M} + \alpha\tau\mathbf{D} + \frac{\beta\tau^2}{2}\mathbf{K} \right) \mathbf{u}_{n+\tau} = \frac{\beta\tau^2}{2}\mathbf{F}_{n+\tau}^{ext} + \mathbf{M} \left( \mathbf{u}_n + \tau\dot{\mathbf{u}}_n + \frac{\tau^2}{2}(1-\beta)\ddot{\mathbf{u}}_n \right) + \mathbf{D} \left( \alpha\tau\mathbf{u}_n + \frac{\tau^2}{2}(2\alpha-\beta)\dot{\mathbf{u}}_n + \frac{\tau^3}{2}(\alpha-\beta)\ddot{\mathbf{u}}_n \right) \quad (2.19)$$

En posant  $\tau = \theta\Delta t$ , on retrouve alors deux schémas classiques d'intégration temporelle :

- $\theta = 1$  soit  $\tau = \Delta t$  correspond à la famille des schémas d'intégration de NEWMARK pour lesquels les inconnues sont calculées au pas de temps  $t_{n+1}$ . Les coefficients  $\alpha$  et  $\beta$  sont appelés dans la littérature paramètres de NEWMARK. L'erreur en amplitude du schéma est pilotée par  $\alpha$  et l'erreur relative de périodicité par  $\beta$  ;
- si  $\theta > 1$ , on obtient le schéma inconditionnellement stable de WILSON<sup>10</sup>.

La stabilité des schémas de NEWMARK dépend des paramètres  $(\alpha, \beta)$ <sup>11</sup> :

- si  $\alpha < 1/2$ , le schéma est instable  $\forall\beta$  ;
- si  $\alpha \geq 1/2$ , le schéma est
  - inconditionnellement stable si  $\beta \geq (\alpha + 1/2)^2/2$  : en choisissant par exemple  $\alpha = \beta = 1/2$ , on retrouve le schéma implicite à accélération constante, ou encore le schéma à accélération linéaire avec  $\alpha = 1/2$  et  $\beta = 1/3$  ;
  - conditionnellement stable si  $\beta < (\alpha + 1/2)^2/2$ . En prenant  $\alpha = 1/2$ , on obtient les schémas explicites des différences finies centrées avec  $\beta = 0$  ou de FOX-GOODWIN avec  $\beta = 1/6$ .

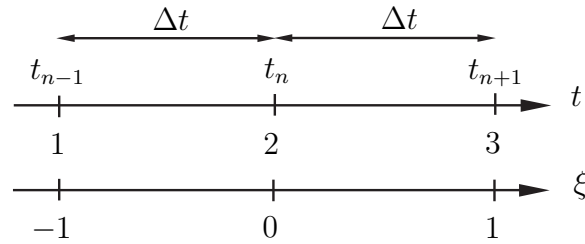
## 2.2.2 Méthodes des résidus pondérés

Cette approche consiste à approcher le déplacement  $\mathbf{u}(t)$  par une solution s'exprimant en fonction des instants  $t_{n-1}$ ,  $t_n$  et  $t_{n+1}$  comme l'illustre la figure 2.12. Dès lors, en posant  $\xi = \frac{t_{n+1} - t_n}{\Delta t} = \frac{t_n - t_{n-1}}{\Delta t}$ , le champ de déplacement est discrétisé par la formule  $\mathbf{u}(t) = \vec{n}(\xi)\bar{\mathbf{u}}$ , où le vecteur  $\bar{\mathbf{u}}$  est donné par  $\bar{\mathbf{u}} = [\mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n, \mathbf{u}_{n+1}]^T$ . Les fonctions d'interpolation  $\vec{n}$  sont calculées comme pour la méthode des éléments finis en sachant que :

$$\begin{cases} \mathbf{u}(t = t_{n-1}) &= \mathbf{u}_{n-1} &= \mathbf{u}(\xi = -1) \\ \mathbf{u}(t = t_n) &= \mathbf{u}_n &= \mathbf{u}(\xi = 0) \\ \mathbf{u}(t = t_{n+1}) &= \mathbf{u}_{n+1} &= \mathbf{u}(\xi = 1) \end{cases} \quad (2.20)$$

10. Classiquement,  $\theta$  prend la valeur 1,4 et les paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  correspondent au cas d'accélération linéaire. Ce schéma est inconditionnellement stable pour  $\theta \geq 1,32$

11. Les valeurs données correspondant aux cas des systèmes non-amortis. En règle générale, des valeurs « raisonnables » d'amortissement structurel ont un effet stabilisant sur le schéma alors que des valeurs excessives ont l'effet inverse (« rigidification » de la structure)



**Figure 2.12** - Discrétisation temporelle dans la méthode des résidus pondérés

ainsi, pour l'interpolation polynômiale, il vient  $\vec{n}(\xi) = [(\xi(\xi - 1))/2, 1 - \xi^2, (\xi(\xi + 1))/2]$ . Enfin, les dérivées temporelles du déplacement sont calculées simplement :

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = \vec{n}_{,t}(\xi)^T \bar{\mathbf{u}} \quad \text{et} \quad \ddot{\mathbf{u}}(t) = \vec{n}_{,tt}(\xi)^T \bar{\mathbf{u}} \quad (2.21)$$

avec  $\vec{n}_{,t}(\xi) = \frac{d\vec{n}(\xi)}{dt}$  et  $\vec{n}_{,tt}(\xi) = \frac{d^2\vec{n}(\xi)}{dt^2}$ . La méthode des résidus pondérés est utilisée pour annuler le résidu des équations du mouvement à l'aide d'une fonction de pondération  $W$  :

$$\int_{-1}^1 W(\xi) (\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} - \mathbf{F}^{\text{ext}}) d\xi = 0, \quad \forall W(\xi) \quad (2.22)$$

Après intégration de l'équation (2.22) en substituant les inconnues temporelles par leurs solutions approchées, on obtient un système matriciel :

$$\begin{aligned} \left( \frac{\mathbf{M}}{\Delta t^2} + \theta_1 \frac{\mathbf{D}}{\Delta t} + \frac{\theta_2}{2} \mathbf{K} \right) \mathbf{u}_{n+1} = & \frac{\theta_2}{2} \mathbf{F}_{n+1}^{\text{ext}} + \left( \frac{1}{2} - \theta_2 + \theta_1 \right) \mathbf{F}_n^{\text{ext}} + \left( \frac{1}{2} - \theta_1 + \frac{\theta_2}{2} \right) \mathbf{F}_{n-1}^{\text{ext}} \\ & + \left( 2 \frac{\mathbf{M}}{\Delta t^2} + (2\theta_1 - 1) \frac{\mathbf{D}}{\Delta t} + \left( \theta_2 - \theta_1 - \frac{1}{2} \right) \mathbf{K} \right) \mathbf{u}_n \\ & - \left( \frac{\mathbf{M}}{\Delta t^2} + (\theta_1 - 1) \frac{\mathbf{D}}{\Delta t} + \left( \frac{\theta_2}{2} - \theta_1 + \frac{1}{2} \right) \mathbf{K} \right) \mathbf{u}_{n-1} \end{aligned} \quad (2.23)$$

$$\text{où } \theta_1 = \frac{\int_{-1}^1 W(\xi)(\xi + 1/2) d\xi}{\int_{-1}^1 W(\xi) d\xi} \quad \text{et} \quad \theta_2 = \frac{\int_{-1}^1 W(\xi)\xi(\xi + 1) d\xi}{\int_{-1}^1 W(\xi) d\xi}.$$

La formulation des résidus pondérés à trois points est équivalente au schéma de NEW-MARK. Pour cela, il suffit de choisir les fonctions de pondération  $W$  appropriées : par exemple, la fonction de DIRAC  $W(\xi) = \delta(\xi)$  redonne le schéma explicite des différences finies centrées (DFC).

### 2.2.3 Procédure d'intégration temporelle retenue

Il s'agit maintenant de choisir le schéma à utiliser pour résoudre les équations du mouvement, sachant que la méthode des multiplicateurs de LAGRANGE est d'ores et déjà retenue. Compte tenu de la littérature existante, une discussion préalable sera menée pour arrêter le choix sur le schéma temporel et enfin l'algorithme sera présenté.

### 2.2.3.1 Discussions préliminaires

Les **schémas implicites** ont l'intérêt d'être inconditionnellement stables pour les problèmes linéaires et présentent l'avantage de calculer les forces, les déplacements ainsi que ses dérivées temporelles au même instant. Cependant, une étude [GIR 99] a montré que la qualité des résultats issus d'un schéma de NEWMARK dépend des paramètres  $\alpha$  et  $\beta$ . De plus, pour les problèmes non linéaires tels que les cas de contact, ce critère de stabilité inconditionnelle cesse d'être valable (les hautes fréquences ne sont pas amorties). Afin de stabiliser ces dernières, il faut introduire de la dissipation numérique [FUN 03] dans la méthode de NEWMARK : ceci est réalisé en prenant  $\alpha > 1/2$ , mais la précision du schéma est alors dégradée au premier ordre par rapport au pas de temps. En d'autres termes, les méthodes de NEWMARK ne permettent pas d'introduire de l'amortissement numérique sans dégrader la précision du schéma. Pour pallier à ce problème limitant pour les problèmes non linéaires, HILBER-HUGHES-TAYLOR (HHT) [HIL 77] ont étendu la famille des schémas de NEWMARK en pondérant linéairement les forces internes (élastique et amortissement), ainsi que les forces externes à l'aide d'un paramètre  $\alpha_{HHT} > 0$ . WOODBOSSAK-ZIENKIEWICZ (WBZ) [WOO 80] ont eux choisi d'interpoler les forces d'inertie avec un paramètre  $\alpha_{WBZ} > 0$ . Enfin CHUNG et HULBERT ont proposé une généralisation en combinant les deux méthodes, ce qui conduit au système :

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \left[ (1 - \alpha_{WBZ}) \ddot{\mathbf{u}}_{n+1} + \alpha_{WBZ} \ddot{\mathbf{u}}_n \right] + \mathbf{D} \left[ (1 - \alpha_{HHT}) \dot{\mathbf{u}}_{n+1} + \alpha_{HHT} \dot{\mathbf{u}}_n \right] \\ + \mathbf{K} \left[ (1 - \alpha_{HHT}) \mathbf{u}_{n+1} + \alpha_{HHT} \mathbf{u}_n \right] = \left[ (1 - \alpha_{HHT}) \mathbf{F}_{n+1}^{ext} + \alpha_{HHT} \mathbf{F}_n^{ext} \right] \end{aligned} \quad (2.24)$$

Les valeurs assurant la stabilité inconditionnelle sont données par  $\alpha \geq 1/2 - \alpha_{WBZ} + \alpha_{HHT}$ ,  $\alpha_{WBZ} \leq \alpha_{HHT} \leq 1/2$  et  $\beta \geq (\alpha + 1/2)^2/2$ . Une précision du seconde ordre est atteinte lorsque  $\alpha = 1/2 - \alpha_{WBZ} + \alpha_{HHT}$  et la condition  $\beta = (1 - \alpha_{WBZ} + \alpha_{HHT})^2/4$  permet de maximiser la dissipation des hautes fréquences. Tout l'art consiste alors à trouver un jeu de coefficients convenable correspondant aux phénomènes que l'on souhaite décrire.

Les **schémas explicites** [GÉR 97, BEL 00], plus précisément les différences finies centrées, se prêtent bien aux problèmes non linéaires de dynamique rapide. Dans le cas linéaire, on obtient une évaluation directe de l'accélération en inversant la matrice masse et on en déduit la vitesse et le déplacement. Ces schémas doivent satisfaire la condition de COURANT nécessaire pour assurer leurs stabilités : en éléments finis, cette condition s'écrit  $\Delta t < 2/\omega_{\max}$  où  $\omega_{\max}$  correspond à la plus grande pulsation propre du système. Cependant, l'inversion de la matrice masse peut s'avérer coûteuse pour les systèmes à grand nombre de degrés de liberté : si la matrice masse est « lumpée »<sup>12</sup>, la résolution des équations du mouvement devient triviale. L'extension au cas non linéaire est immédiate

12. Les coefficients de la matrice masse  $\mathbf{M}$  sont concentrés sur la diagonale. La matrice « lumpée »  $\tilde{\mathbf{M}}$  se calcule alors comme suit :  $\tilde{\mathbf{M}}_{ii} = \sum_j \mathbf{M}_{ij}$  et  $\tilde{\mathbf{M}}_{ij} = 0$  si  $i \neq j$ .

car les forces non linéaires peuvent être calculées explicitement. Cependant, dans le cas du contact, il apparaît un décalage d'un pas de temps entre l'estimation de l'accélération et la prise en compte des efforts de contact, qui reste mineur si l'on applique un algorithme de type prédiction-correction pour le problème de dynamique rapide. CARPENTER *et al.* [CAR 91] ont proposé un algorithme de ce type pour traiter les problèmes de contact. Basé sur les différences finies centrées, ce dernier propose de calculer dans un premier temps la réponse de la structure sans considérer le contact, puis les multiplicateurs de LAGRANGE sont calculés en cas de pénétration entre les structures afin de corriger la solution prédite.

Un avantage de la combinaison du schéma différences finies centrées avec les multiplicateurs de LAGRANGE est que la limite de stabilité du schéma reste théoriquement inchangée par rapport au cas linéaire comme le montre [BEL 91] : le pas de temps critique est donc égal au pas de temps critique de la structure ayant la plus forte pulsation propre. Cependant, l'expérience dans le domaine de la simulation numérique préconise de se placer légèrement en dessous de la condition de COURANT. Ce type d'algorithme a donné de bons résultats pour les problèmes de contact-impact comme le montre les travaux de M. LEGRAND [LEG 05] ou encore de L. BAILLET [BAI 96] et donc motive son utilisation dans ces travaux de thèse. Les équations correspondant à cet algorithme sont maintenant présentées.

En écrivant les équations du mouvement (2.18) à un instant donnée  $t_n$ , les dérivées temporelles des déplacements généralisés sont calculées par le schéma différences finies centrées comme suit :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{u}}_n = \frac{\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_{n-1}}{2\Delta t} \\ \ddot{\mathbf{u}}_n = \frac{\mathbf{u}_{n+1} - 2\mathbf{u}_n + \mathbf{u}_{n-1}}{\Delta t^2} \end{cases} \quad (2.25)$$

Ensuite, la résolution du problème se fait en trois étapes, le contact étant de type nœud-ligne :

1. **prédiction** des déplacements :

Le schéma des différences finies centrées donne une prédiction du champ de déplacement (indicée  $p$ ) en résolvant l'équation du mouvement (2.19) (avec  $(\alpha = 0, \beta = 1/2)$ ) sans les forces de contact :

$$\mathbf{u}_{n+1,p} = \left[ \frac{\mathbf{M}}{\Delta t^2} + \frac{\mathbf{D}}{2\Delta t} \right]^{-1} \left( \mathbf{F}_n^{\text{ext}} + \left[ \frac{2\mathbf{M}}{\Delta t^2} - \mathbf{K} \right] \mathbf{u}_n + \left[ \frac{\mathbf{D}}{2\Delta t} - \frac{\mathbf{M}}{\Delta t^2} \right] \mathbf{u}_{n-1} \right) \quad (2.26)$$

2. **détection** des pénétrations :

il faut vérifier la condition de non-pénétration provenant de la méthode des lagrangiens (2.4) en calculant la fonction jeu  $\mathbf{g}_{n+1,p}$  avec le déplacement prédit.

3. **correction**<sup>13</sup> des déplacements :

---

13. L'étape de corrections a lieu seulement si une pénétration est détectée.



Les lagrangiens dans la direction normale sont calculés de façon à annuler la pénétration détectée :

$$\mathbf{g}_{n+1,c} = \mathbf{C}_N^T \mathbf{u}_{n+1,c} + \mathbf{g}_{n+1,p} = \mathbf{0} \quad (2.27)$$

De plus, il faut corriger simultanément la fonction jeu et le déplacement avec les efforts de contact normal et tangentiel, de dernier étant issu de la loi de Coulomb dans sa phase glissante. En terme mathématique, cela revient à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} \left[ \frac{\mathbf{M}}{\Delta t^2} + \frac{\mathbf{D}}{2\Delta t} \right] \mathbf{u}_{n+1,c} + \mathbf{C}_{NT} \boldsymbol{\lambda}_{n+1} = \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_N^T \mathbf{u}_{n+1,c} + \mathbf{g}_{n+1,p} = \mathbf{0} \end{cases} \quad (2.28)$$

Ce système d'équations est trivial à résoudre mais on constate qu'il faut inverser une matrice non symétrique à chaque pas de temps. Le champ de déplacement corrigé (indiqué  $c$ ) est alors calculé comme suit :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\lambda}_{n+1} = \left[ \mathbf{C}_N^T \left[ \frac{\mathbf{M}}{\Delta t^2} + \frac{\mathbf{D}}{2\Delta t} \right]^{-1} \mathbf{C}_{NT} \right]^{-1} \mathbf{g}_{n+1,p} \\ \mathbf{u}_{n+1,c} = - \left[ \frac{\mathbf{M}}{\Delta t^2} + \frac{\mathbf{D}}{2\Delta t} \right]^{-1} \mathbf{C}_{NT} \boldsymbol{\lambda}_{n,n+1} \end{cases} \quad (2.29)$$

### 2.2.3.2 Algorithme retenu

L'algorithme de CARPENTER a été présenté dans le cadre des petites perturbations où les matrices raideur et amortissement sont constantes. Or, dans les équations (1.20) établies dans le chapitre 1, ces matrices dépendent des dérivées temporelles de la position angulaire du fait de la prise en compte des effets gyroscopiques. Le résolution d'un système d'équations couplées impose l'utilisation d'un algorithme de résolution non linéaire. Ce dernier, « HYBRD », est issu de la librairie gratuite Minpack<sup>14</sup> et permet de trouver le zéro d'une fonctionnelle non linéaire à plusieurs variables : il résout le problème de contact en annulant le résidu des équations du mouvement par une méthode itérative de type quasi-NEWTON, plus précisément une modification de l'algorithme hybride de POWELL.

On rappelle que les inconnues  $a(t)$  correspondent aux déplacements généralisés du rotor  $\mathbf{u}$ , à la position angulaire du rotor  $\varphi$  et aux déplacements généralisés du diaphragme  $\mathbf{u}_d$ . Ainsi, à un instant donné  $t_i$ , on énonce les différentes étapes pour résoudre les équations du mouvement discrétisées :

1. étape de prédiction : afin d'accélérer la convergence du solveur, il est préférable de donner un candidat proche de la solution non linéaire. Pour ce faire, on utilise une

---

14. Disponible à l'adresse suivante : <http://www.netlib.org/minpack/>. Pour les utilisateurs de MATLAB, le lecteur peut se référer à la fonction « fsolve » de la boîte à outils « Optimisation » <http://www.mathworks.com/access/helpdesk/help/toolbox/optim/>

hypothèse classique de la dynamique des rotors qui consiste à dire que l'accélération angulaire du rotor est localement linéaire. En reprenant les notations du chapitre 1, cela se traduit par  $\ddot{\varphi}_{i+1} = 2\ddot{\varphi}_i - \ddot{\varphi}_{i-1}$  permettant ainsi le calcul de  $\varphi_{i+1}$  et  $\dot{\varphi}_{i+1}$  avec les équations (2.25).

2. étape de résolution non linéaire : on cherche la solution du problème en annulant le résidu des équations du mouvement avec contact. Ainsi, pour chaque itération  $r$  du solveur, on doit calculer :
  - la fonction jeu  $\mathbf{g}_{i+1,p}^r$  : selon le diaphragme considéré, on calcule la fonction distance entre les structures à partir de la solution prédite  $\mathbf{u}_{i+1,p}^r$  pour chacun des lieux de contact. Si les structures ne sont pas en contact, alors les multiplicateurs de LAGRANGE sont nuls. Dans le cas contraire, on doit évaluer les efforts de contact ;
  - les forces de contact : la condition de non-pénétration (2.27) doit être respectée, ce qui donne la direction du lagrangien  $\lambda_N$ . La réaction tangentielle est obtenue par la loi de COULOMB en phase glissante en considérant le signe de la vitesse relative entre les deux structures. Enfin le couple de friction est égal au produit de la force tangentielle par le bras de levier. L'hypothèse émise lors du calcul du lagrangien est que la position angulaire candidate soit au voisinage de la solution non linéaire pour le calcul de la matrice de contact du rotor.
  - calcul du résidu : on forme le résidu des équations du mouvement discrétisées à l'instant  $t_i$ . Si la norme euclidienne du vecteur résidu est inférieure à la tolérance fixée par l'utilisateur, le calcul a convergé. Dans le cas contraire, on propose un nouveau candidat pour l'itération  $r + 1 \leq r_{\max}$  jusqu'à la convergence du solveur,  $r_{\max}$  correspondant au nombre maximal d'itérations du solveur ;
3. incrémentation du pas de temps  $t_{i+1} = t_i + \Delta t$  et des variables temporelles  $a_{i-1} \leftarrow a_i$  puis  $a_i \leftarrow a_{i+1}$ .

À chaque pas de temps, les matrices gyroscopique et de raideur, qui dépendent respectivement de la vitesse et de l'accélération angulaire sont mises à jour. Les résultats sont alors sauvegardés régulièrement pour analyser les transitoires de vitesse. Un critère d'arrêt additionnel a été ajouté lorsque le rotor s'arrête ou si le couple de friction est suffisamment important pour stopper le rotor ou l'entraîner en sens inverse, ce qui se traduit par la condition  $\varphi_{i+1} \leq \varphi_i$ .

La procédure de résolution temporelle utilisée est présentée ci-après (cf. algorithme 1).

**Initialisation** des vecteurs déplacements généralisés du rotor  $\mathbf{u}$  et du diaphragme  $\mathbf{u}_d$ , et de la position angulaire  $\varphi$  aux instants  $t_0$  et  $t_1$

**Pour**  $i$  de 1 à  $i_{fin}$  **faire**

**Prédiction** à l'instant  $t_i$  de  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{u}_d$  et  $\varphi$

**Tant que** ( $\| \text{Résidu des équations du mouvement} \|^2 \leq \varepsilon$ ) **faire**

**Si** ( $g_n^r > 0$  (pas de pénétration)) **Alors**

            |  $\lambda_N^r = 0$

**Sinon**

**Calcul des multiplicateurs de Lagrange**

**Correction** avec les forces de contact, agissant sur le rotor, dans les directions normale  $\lambda_N^r$ , tangentielle avec  $\|\lambda_T^r\| = \mu\lambda_N^r$  et le couple de friction  $C_{fric}^r = -\mu R_r \lambda_N^r$ . La force du contact agissant sur le diaphragme est égale à celle agissant sur le rotor en norme mais opposée en direction (principe d'action réaction).

**Fin Si**

**Si** ( $r \leq r_{max}$ ) **Alors**

            | Nouveau candidat pour l'itération  $r + 1$  :  $(\mathbf{u}_{i+1}^{r+1}, \varphi_{i+1}^{r+1}, \mathbf{u}_{d,i+1}^{r+1})$

**Sinon**

            | Arrêt du solveur itératif

**Fin Si**

**Fait**

**Si** ( $\varphi_{i+1} < \varphi_i$ ) **Alors**

        | arrêt du calcul

**Fin Si**

**Sauvegarde des résultats**

**Incrémentation du temps**  $t_{i+1} = t_i + \Delta t$

**Fin Pour**

Algorithme 1: Résolution temporelle de l'interaction rotor-stator

## 2.3 Conclusion

Ce chapitre porte sur les méthodes disponibles pour traiter la non linéarité de contact qui combine à la fois le calcul de la force de contact et la manière dont cette dernière est prise en compte dans une procédure d'intégration temporelle.

La méthode des pénalités, très simple d'implantation dans un code, induit une approximation de la solution non linéaire. Ainsi, afin d'éviter de propager une erreur cumulative qu'engendrerait une telle méthode, les multiplicateurs de LAGRANGE ont été retenus pour leur respect des conditions d'impénétrabilité, au prix d'un temps de calcul plus élevé.

Le problème des schémas implicites dans le domaine non linéaire est que, sans précaution aucune, on obtient des résultats erronés surtout avec l'emploi des multiplicateurs de LA-

GRANGE. Des améliorations ont été apportées pour les problèmes de type impact/contact à condition de choisir soigneusement les paramètres de NEWMARK. Les schémas explicites sont, quant à eux, particulièrement adaptés aux problèmes où les non linéarités évoluent rapidement comme dans les cas de contact. Les travaux antérieurs sur les problèmes de contact ont permis de retenir le schéma différences finies centrées combiné aux lagrangiens pour la précision des résultats obtenus.

L'algorithme présenté dans ce chapitre a été implanté dans une maquette en fortran 90 développée durant cette thèse. Le chapitre suivant se propose de le valider en le comparant à un modèle de rotor où la vitesse de rotation est imposée. Cette étape de vérification est nécessaire avant de pouvoir analyser les cas de contact rotor-stator.



---

# Transitoire de vitesse avec un modèle simple de rotor sans contact

## Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Discussions préliminaires . . . . .</b>	<b>55</b>
<b>3.2</b>	<b>Repères bibliographiques et comparaison . . . . .</b>	<b>56</b>
3.2.1	Présentation du rotor asymétrique . . . . .	57
3.2.2	Résultats . . . . .	60
<b>3.3</b>	<b>Influence des couplages sur la réponse du rotor . . . . .</b>	<b>63</b>
3.3.1	Présentation du modèle . . . . .	63
3.3.2	Résultats . . . . .	65
<b>3.4</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>74</b>

---

Dans les chapitres précédents, nous avons présenté les cadres théorique et numérique utiles à la résolution d'un transitoire de vitesse avec interaction rotor-stator. L'étape suivante consiste habituellement à vérifier sur des exemples simples ou des « cas-tests » que les développements apportés permettent de retrouver des résultats de référence. Comme mentionné dans le chapitre 1, même sans contact rotor-stator, aucun modèle de rotor flexible avec vitesse angulaire variable n'est disponible dans la littérature à notre connaissance. Des validations du code sont donc nécessaires et effectuées ici sur un rotor en comparant les résultats du modèle non linéaire à ceux obtenus avec un modèle linéaire où la vitesse de rotation est imposée.

## 3.1 Discussions préliminaires

Pour valider le code développé, les modèles de M. LALANNE [LAL 98] et C. VARE [VAR 97], ont été utilisés et implantés dans notre maquette numérique. Ils ont été établis pour un

rotor où seules les vibrations de flexion sont considérées, et dont la position angulaire ainsi que ses dérivées temporelles sont imposées. Cela signifie que la position angulaire n'est plus une variable, à la différence de la modélisation que nous avons développée au chapitre 1. Dans l'optique de trouver une équivalence entre ce modèle linéaire et notre modèle non linéaire pour une situation de ralentissement, on se propose de simplifier l'équation (1.21), qui permet de calculer la variable angulaire  $\varphi$ , en découplant la position angulaire des déplacements généralisés du rotor : ceci revient à ne retenir que les forces d'origine fluide et à négliger les couplages issus du balourd et de l'effet gyroscopique. En reprenant les notations utilisées pour définir les couples agissant sur l'arbre de la section 1.2.5.3, l'équation (1.21) est réécrite selon le cas de figure considéré :

– montée en vitesse :

$$I_{\text{totale}} \ddot{\varphi} = C_{\text{max}} \left( 1 - \frac{\dot{\varphi}}{\dot{\varphi}_{\text{consigne}}} \right) \quad (3.1)$$

où  $\dot{\varphi}_{\text{consigne}}$  représente la vitesse de rotation en régime permanent.

– ralentissement accidentel :

$$I_{\text{totale}} \ddot{\varphi} = -A_{\text{aero}} \dot{\varphi}^2 - A_{\text{newt}} \dot{\varphi} \quad (3.2)$$

Il s'avère alors que la position angulaire de l'arbre ainsi que ses dérivées temporelles peuvent être obtenues analytiquement pour ces deux situations et sont données dans l'annexe B. Le cas de la montée en vitesse d'une turbine est présenté uniquement pour le rotor de LALANNE-VARE : il sera comparé par la suite à une phase de ralentissement pour montrer l'effet dynamique d'un transitoire de vitesse. L'équation (3.2) correspond alors à l'équation de vitesse angulaire d'un cylindre rigide en rotation sur appuis simples. Si seul le frottement fluide de type fluide newtonien est retenu, alors la solution analytique de l'équation (3.2) est une branche d'exponentielle, ce qui correspond exactement aux cas d'étude de LALANNE-VARE. Par conséquent, on va être amené à comparer les solutions :

- de notre modèle non linéaire qui résout simultanément les équations (1.20) et (1.21) ;
- et du modèle linéaire dans lequel on calcule les déplacements généralisés du rotor avec l'équation (1.20) en imposant la position angulaire  $\varphi$ , ainsi que ses dérivées temporelles, connues analytiquement en fonction du temps après résolution de l'équation (3.1) pour une montée en vitesse ou (3.2) pour un ralentissement accidentel.

Pour ces deux modèles, les équations sont résolues par un schéma explicite différences finies centrées.

## 3.2 Repères bibliographiques et comparaison

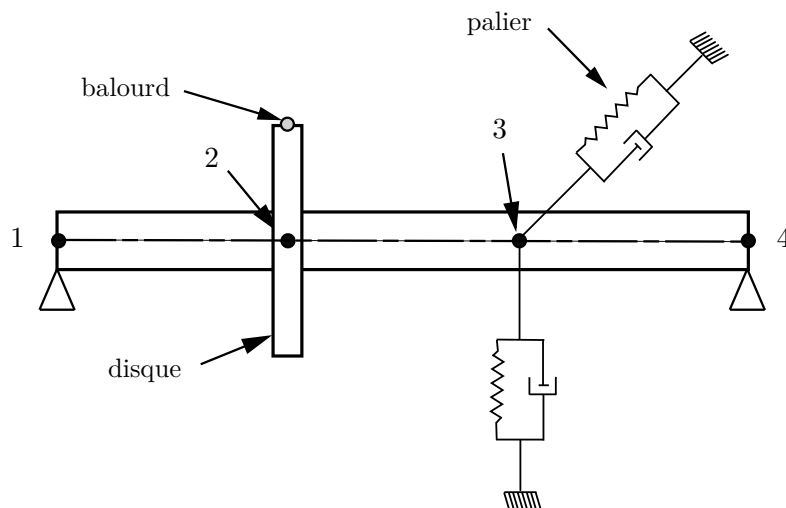
Les modèles linéaires [VAR 97, LAL 98] sont repris pour analyser les transitoires de vitesse et valider le modèle non linéaire. Après avoir rappelé les principales caractéristiques du

rotor, les résultats sont présentés et les modélisations comparées.

### 3.2.1 Présentation du rotor asymétrique

Le rotor asymétrique (cf. figure 3.1) a été étudié en considérant différentes discrétisations spatiales :

1. modèle de LALANNE : la méthode de RAYLEIGH-RITZ est appliquée. Ceci revient à contraindre la déformée du rotor par le biais d'une « fonction déplacement ». Dans le cas présent, cette fonction correspond au premier mode propre d'une poutre en flexion reposant sur appuis simples. La vitesse de rotation de l'arbre est imposée ;
2. modèle de VARE : le rotor est discrétisé spatialement par la méthode des éléments finis et la vitesse de rotation est imposée ;
3. modèle non linéaire : le rotor est flexible comme pour le modèle de VARE mais la vitesse angulaire est cette fois-ci calculée.



**Figure 3.1** - Modèle de rotor asymétrique utilisé pour comparer les résultats de la bibliographie

Les caractéristiques mécaniques associées à ce rotor sont rappelées dans le tableau 3.1. Une analyse modale de ce rotor est réalisée pour les différentes modélisations en utilisant les diagrammes de CAMPBELL, qui donnent l'évolution des fréquences propres en fonction de la vitesse de rotation du rotor. Le diagramme de CAMPBELL permet de déterminer les vitesses critiques et est obtenu en recherchant les valeurs propres de l'équation (1.20), pour une vitesse de rotation constante, en réécrivant cette dernière sous sa forme d'état :

$$\frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} \mathbf{X} \\ \dot{\mathbf{X}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1} [\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_{\text{palier}}] & -\mathbf{M}^{-1} [\mathbf{D}_1 + \mathbf{D}_{\text{palier}} + \varphi \mathbf{D}_2] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{X} \\ \dot{\mathbf{X}} \end{Bmatrix} \quad (3.3)$$

Le terme de vitesse critique, ou de fréquence critique, pour un rotor est utilisé lorsque la vitesse de rotation de la turbine coïncide avec une de ses fréquences de résonance : les



(a) Disque					
Rayon intérieur	0,01 m	Rayon extérieur	0,15 m		
Épaisseur	0,03 m	Masse volumique	7800 kg/m <sup>3</sup>		
(b) Arbre					
Longueur totale	0,4 m	Rayon	0,01 m	$k$	6/7
Masse volumique	7800 kg/m <sup>3</sup>	$E$	200 GPa	$\nu$	0,3
(c) Balourd					
Masse	10 <sup>-4</sup> kg	Déphasage initial	0 rad		
Distance à la fibre neutre de l'arbre		0,15 m			
(d) Palier					
Raideur	$k_{xx}^p$	2 · 10 <sup>5</sup> N/m	$k_{xy}^p$	0 N/m	
	$k_{yx}^p$	0 N/m	$k_{yy}^p$	5 · 10 <sup>5</sup> N/m	
Amortissement	$c_{xx}^p$	4 · 10 <sup>3</sup> N·s/m	$c_{xy}^p$	0 N·s/m	
	$c_{yx}^p$	0 N·s/m	$c_{yy}^p$	10 <sup>4</sup> N·s/m	

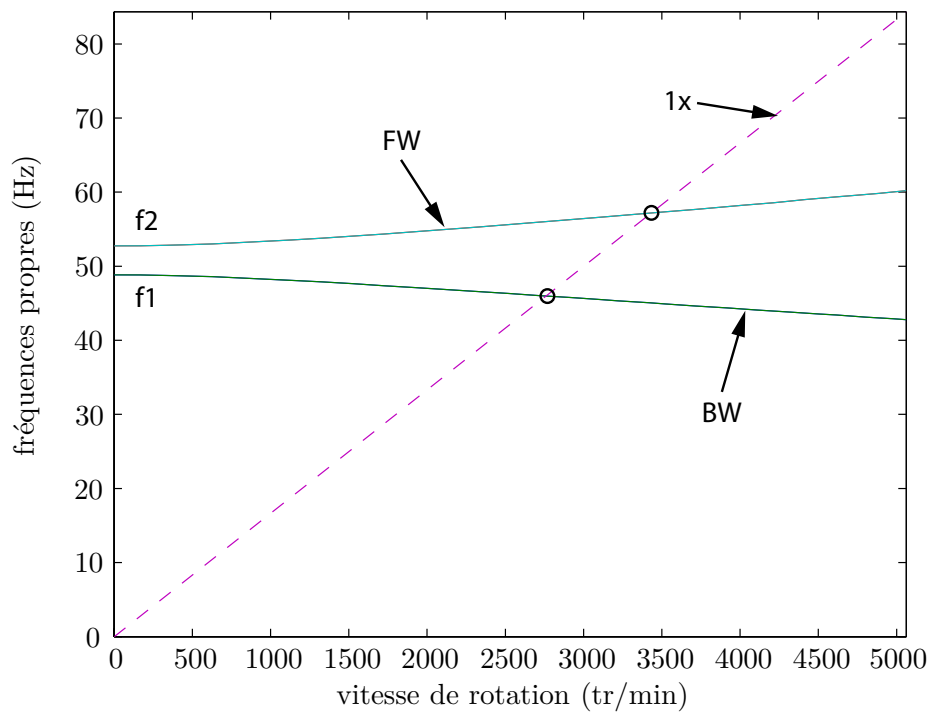
**Tableau 3.1** - Caractéristiques mécaniques du modèle de LALANNE-VARE

fréquences critiques sont obtenues en recherchant les intersections de la droite en pointillé, notée 1X, correspondant à la fréquence de rotation, avec le réseau de courbes de fréquences de résonance (cf. cercles noirs sur les figures 3.2 et 3.3). Le dédoublement des fréquences de résonance est dû à la matrice gyroscopique qui dépend de la vitesse de rotation. Ce dédoublement permet également de connaître le sens de la précession, directe ou inverse<sup>1</sup>.

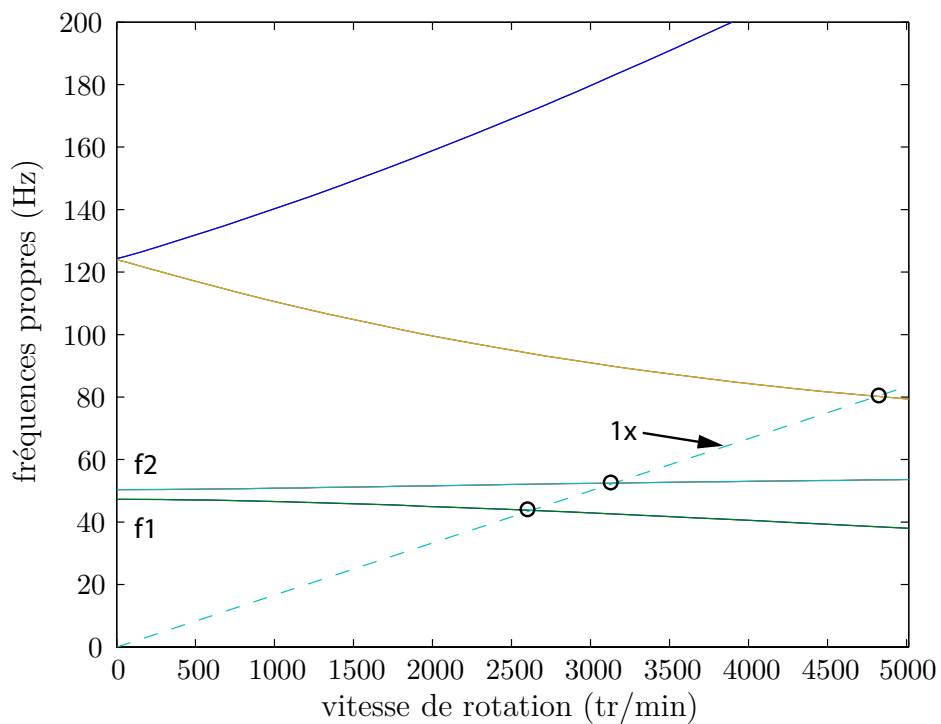
Il est rappelé ici que le diagramme de CAMPBELL n'a de sens que dans le domaine linéaire comme l'illustre l'équation (3.3). À cet égard, les fréquences critiques du rotor pour les transitoires de vitesse sont très proches des fréquences du système linéaire. En effet, lorsque la turbine accélère ou décélère, la matrice de raideur du système dépend en plus de l'accélération angulaire dû à l'effet gyroscopique : des calculs prenant en compte cet effet dynamique ont montré une très faible variation des vitesses critiques par rapport au régime nominal ( $\ddot{\varphi} = 0$ ). Ceci s'explique par l'ordre de grandeur des termes gyroscopiques ajoutés à la matrice de raideur.

On constate que le rotor est plus rigide avec la méthode de RAYLEIGH-RITZ (cf. figure 3.2) qu'avec la méthode éléments finis (cf. figure 3.3) : les déplacements sont projetés sur une base modale tronquée qui n'est pas suffisamment riche pour estimer correctement la réponse du rotor flexible. Dans le cas présent, la fonction déplacement choisie apporte une raideur artificielle au rotor.

1. La précession directe (respectivement inverse) correspond au cas où l'orbite du rotor est décrite dans le même sens que (respectivement le sens opposé à) la rotation de l'arbre



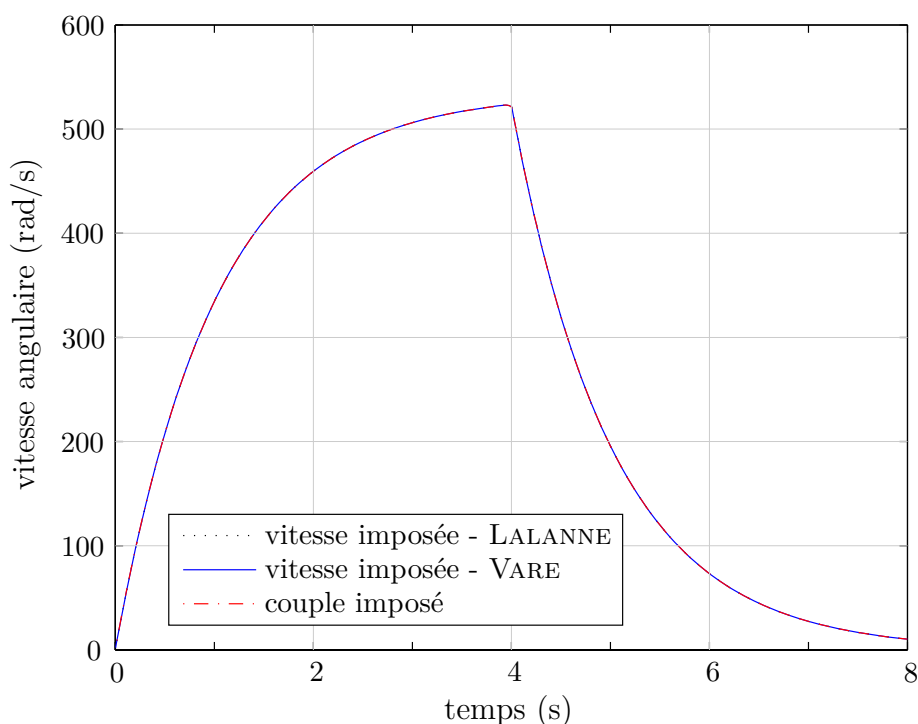
**Figure 3.2** - Diagramme de CAMPBELL du rotor issu des travaux de LALANNE



**Figure 3.3** - Diagramme de CAMPBELL du rotor issu des travaux de VARE

### 3.2.2 Résultats

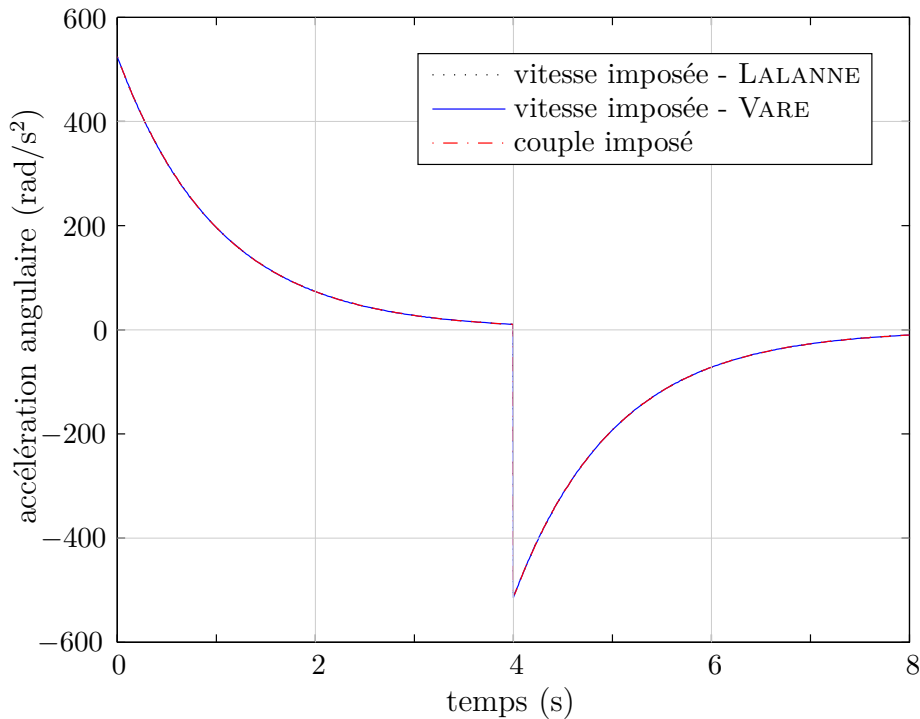
Le rotor est excité par un balourd dont les caractéristiques sont rappelées dans le tableau 3.1. La vitesse de rotation, imposée ou calculée selon la modélisation considérée, est tracée sur la figure 3.4 : le rotor est soumis à une montée en vitesse suivie d'un ralentissement. Pour le modèle non linéaire, on impose un couple moteur en amont de l'arbre et un couple résistant en aval pour obtenir un profil de vitesse de type exponentielle pour  $0 \leq t < 4$  s. À l'instant  $t = 4$  s, on cesse d'entraîner l'arbre en rotation et on impose un frottement de type fluide newtonien pour obtenir l'équivalence avec les modèles à vitesse imposée durant la phase de ralentissement.



**Figure 3.4** - Vitesse angulaire pour le rotor asymétrique

Les simulations de transitoire de vitesse sont comparées pour un pas de temps  $\Delta t = 10^{-5}$  s qui garantit la stabilité du schéma explicite pour les différentes modélisations. Les résultats présentés ci-après sont les mêmes pour des pas de temps inférieurs. Afin de comparer quantitativement les différentes modélisations, le tableau 3.2 regroupe les valeurs numériques importantes pour les phases de montée en vitesse et de ralentissement.

On constate tout d'abord sur les figures 3.4 et 3.5 que notre algorithme permet de trouver la solution analytique sur la variable  $\varphi$  avec une excellente précision. L'excentricité calculée pour chacun des modèles est illustrée sur les figures 3.6 et 3.7. On constate dans un premier temps que les écarts entre la méthode de RAYLEIGH-RITZ et la méthode éléments finis classique sont importants. Pour le modèle de LALANNE, la base modale est incomplète pour représenter correctement la réponse dynamique du rotor flexible. Avec la fonction



**Figure 3.5** - Accélération angulaire pour le rotor asymétrique

déplacement choisie, la résonance de l'arbre apparaît à une fréquence plus élevée, avec une amplitude plus faible de réponse, puisque le rotor est plus rigide. Ensuite, on remarque une parfaite correspondance des résultats de la modélisation linéaire de VARE avec le modèle non linéaire. La discrétisation spatiale des deux rotors est identique et les vitesses et accélérations angulaires sont équivalentes entre les modèles linéaire et non linéaire : le fait de trouver les mêmes résultats permet donc de valider partiellement notre maquette numérique.

Ce rotor asymétrique permet également d'appréhender l'effet dynamique d'un transitoire de vitesse :

- la résonance du rotor est observée pour une vitesse de rotation supérieure (respectivement inférieure) à la fréquence propre obtenue par lecture des diagrammes de Campbell lors d'une phase de démarrage (respectivement phase de ralentissement) ;
- l'amplitude des vibrations lors de la résonance est plus faible si l'accélération angulaire (en valeur absolue) est importante. En effet, plus le rotor passe rapidement à travers la vitesse critique, moins ce dernier « voit » la résonance du système.

Toutes ses observations corroborent les conclusions établies par C. VARE [VAR 97] lors d'un passage des vitesses critiques en transitoire de vitesse.

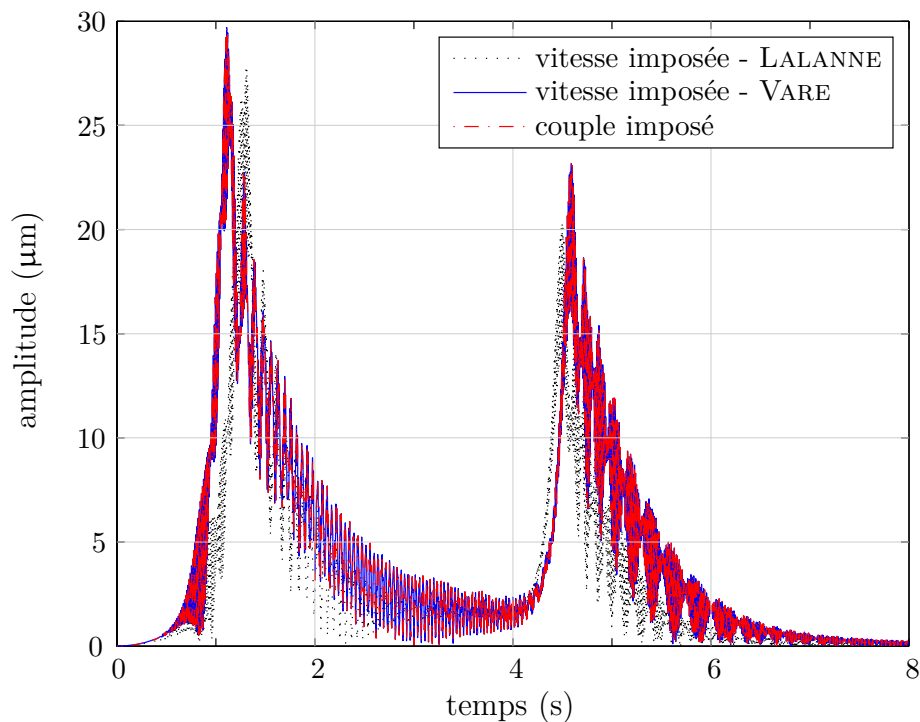
(a) Montée en vitesse

Modèle	LALANNE	VARE	non linéaire
fréquence propre (Hz)	57,18	52,46	52,46
instant de la résonance (s)	1,31	1,11	1,11
amplitude de résonance (m)	$2,78 \cdot 10^{-5}$	$2,97 \cdot 10^{-5}$	$2,97 \cdot 10^{-5}$
fréquence de résonance (Hz)	61,64	56,45	56,45
accélération angulaire ( $\text{rad}\cdot\text{s}^{-2}$ )	144,28	176,31	176,31

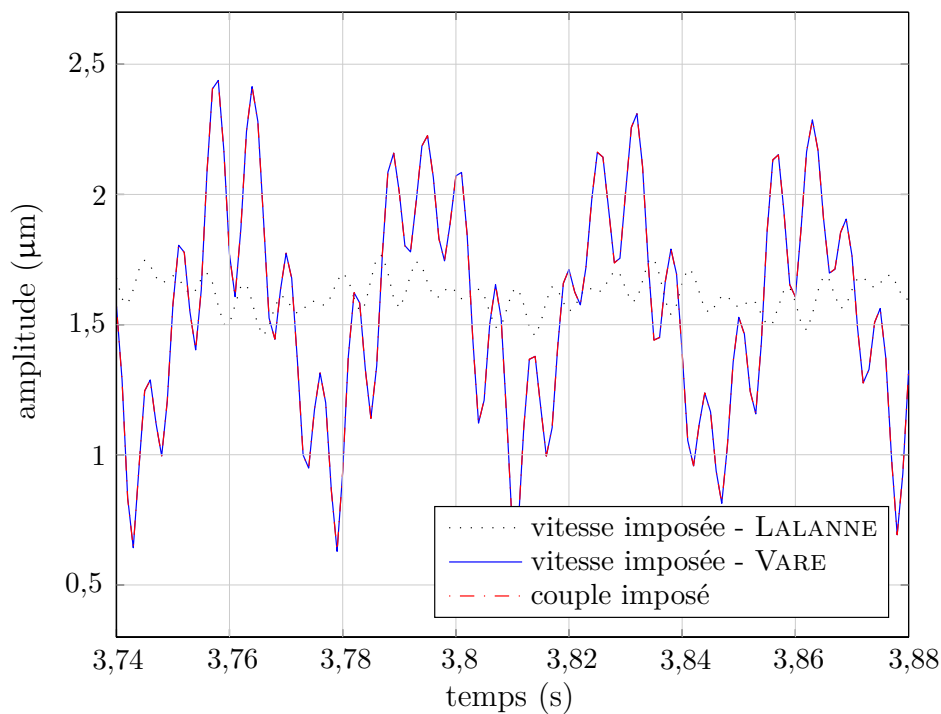
(b) Ralentissement

Modèle	LALANNE	VARE	non linéaire
fréquence propre (Hz)	57,18	52,46	52,46
instant de la résonance (s)	4,50	4,59	4,59
amplitude de résonance (m)	$2,03 \cdot 10^{-5}$	$2,32 \cdot 10^{-5}$	$2,32 \cdot 10^{-5}$
fréquence de résonance (Hz)	51,08	46,66	46,66
accélération angulaire ( $\text{rad}/\text{s}^2$ )	-315,46	-288,19	-288,19

**Tableau 3.2** - Résumé des résultats pour la comparaison entre modèles linéaires et non linéaire.



**Figure 3.6** - Excentricité du disque pour le rotor asymétrique



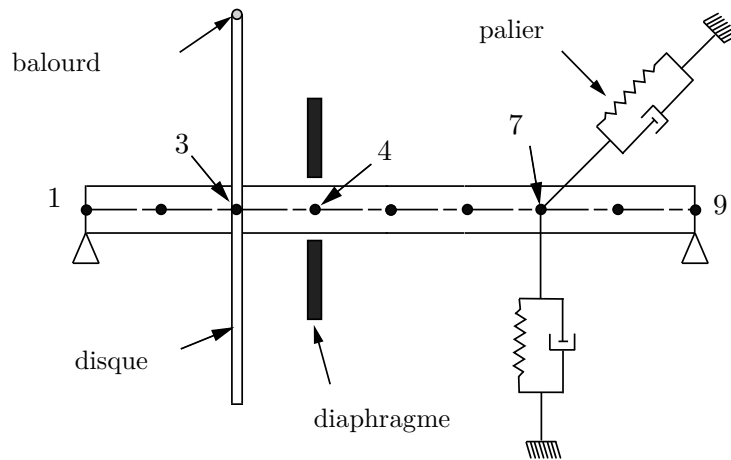
**Figure 3.7** - Excentricité du disque (zoom) pour le rotor asymétrique

### 3.3 Influence des couplages sur la réponse du rotor

Les équations du mouvement établies dans le chapitre 1 sont non linéaires et font ressortir des couplages forts dus à la présence de balourds sur une ligne d'arbres (des termes de couplage d'ordre 1 dans l'équation (1.21)) et des couplages plus faibles provenant des effets gyroscopiques. Dans cette section, il est proposé d'étudier l'influence du balourd sur la réponse du rotor dans le cas où la torsion est négligée. Les résultats issus du modèle non linéaire sont comparés aux travaux de LALANNE, en imposant une loi en vitesse équivalente et en intégrant avec le même schéma explicite.

#### 3.3.1 Présentation du modèle

Le modèle académique d'arbre flexible de cette section est illustré sur la figure 3.8. Les caractéristiques de ce rotor simple sont rappelées dans le tableau 3.3 : la première fréquence de résonance du système a été choisie proche de celle d'une turbine réelle. Une analyse modale de ce rotor est donnée par le diagramme de CAMPBELL sur la figure 3.9.



**Figure 3.8** - *Modèle simple de turbine utilisé pour tester les algorithmes*

(a) Disque

Rayon intérieur	0,5 m	Rayon extérieur	1 m
Épaisseur	0,1 m	Masse volumique	7860 kg/m <sup>3</sup>

(b) Arbre

Longueur totale	10 m	Rayon	0,5 m	$k$	9/10
Masse volumique	7860 kg/m <sup>3</sup>	$E$	200 GPa	$\nu$	0,3

(c) Palier

Raideur	$k_{xx}^p$	$2 \cdot 10^5$ N/m	$k_{xy}^p$	0 N/m
	$k_{yx}^p$	0 N/m	$k_{yy}^p$	$5 \cdot 10^5$ N/m
Amortissement	$c_{xx}^p$	$4 \cdot 10^3$ N·s/m	$c_{xy}^p$	0 N·s/m
	$c_{yx}^p$	0 N·s/m	$c_{yy}^p$	$10^4$ N·s/m

**Tableau 3.3** - *Caractéristiques mécaniques du modèle simple*

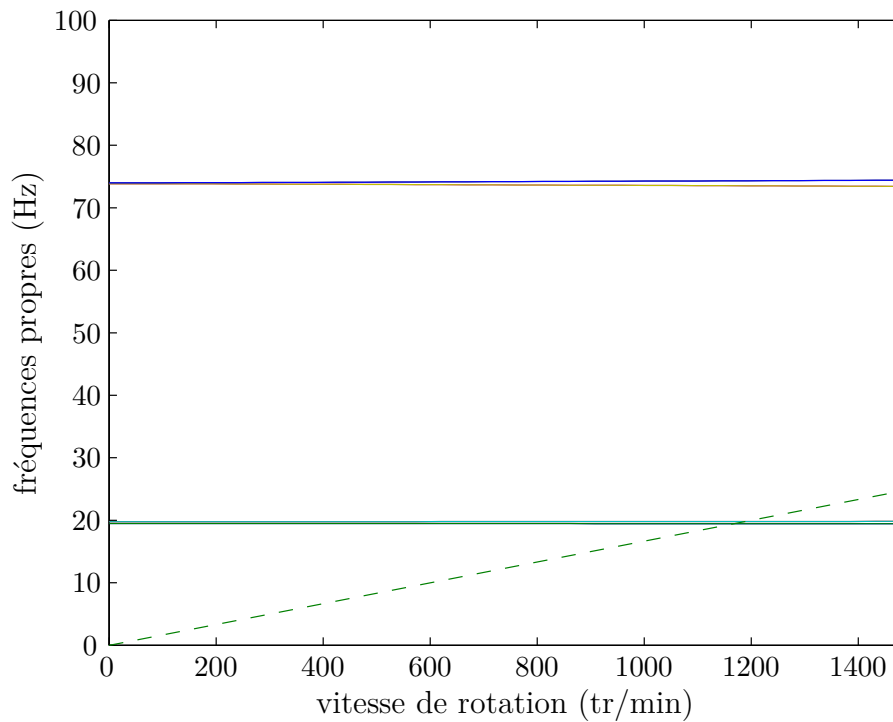


Figure 3.9 - Diagramme de Campbell du modèle simple

### 3.3.2 Résultats

Afin de mettre en évidence l'influence des couplages existant dans le modèle non linéaire, notamment celui introduit par la présence de balourds, on choisit d'étudier les résultats issus de l'intégration temporelle pour un balourd « léger » et un grand balourd correspondant à la perte d'une ailette. En calculant la pulsation propre maximale du rotor pour la plage de vitesses de rotation correspondant à notre étude, on obtient un pas de temps critique de  $1,391 \cdot 10^{-4}$  s. Cette valeur limite n'est cependant valable que pour une modélisation linéaire. Le pas de temps doit être choisi sensiblement inférieur à cette dernière valeur pour s'assurer de la stabilité du schéma [BEL 91]. Ainsi, les résultats des simulations sont présentés pour un pas de temps  $\Delta t = 10^{-5}$  s, les conclusions restant les mêmes pour des pas de temps inférieurs. Par souci de clarté, la vitesse angulaire *imposée* correspond au cas linéaire alors que la vitesse *calculée* correspond au modèle développé dans cette thèse.

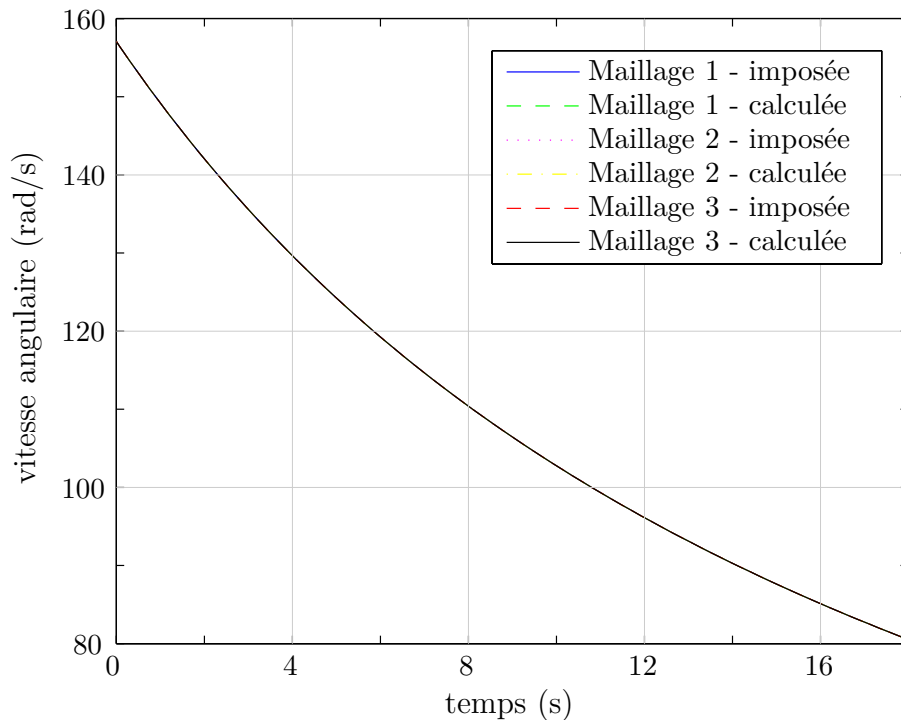
On se propose également d'étudier la sensibilité au maillage : deux autres maillages ont été considérés pour tester leur convergence. Le maillage 1, illustré sur la figure 3.8, est raffiné une première fois en doublant le nombre d'éléments arbre pour aboutir au maillage 2. De même, le maillage 3 est obtenu en doublant le nombre d'éléments arbre du maillage 2. Les valeurs des frottements fluides sont choisies de telle sorte que le rotor, initialement au régime nominal de 1500 tr/min, ralentit en passant une vitesse critique, et ceci avec un temps de simulation raisonnable.



### 3.3.2.1 Faible balourd

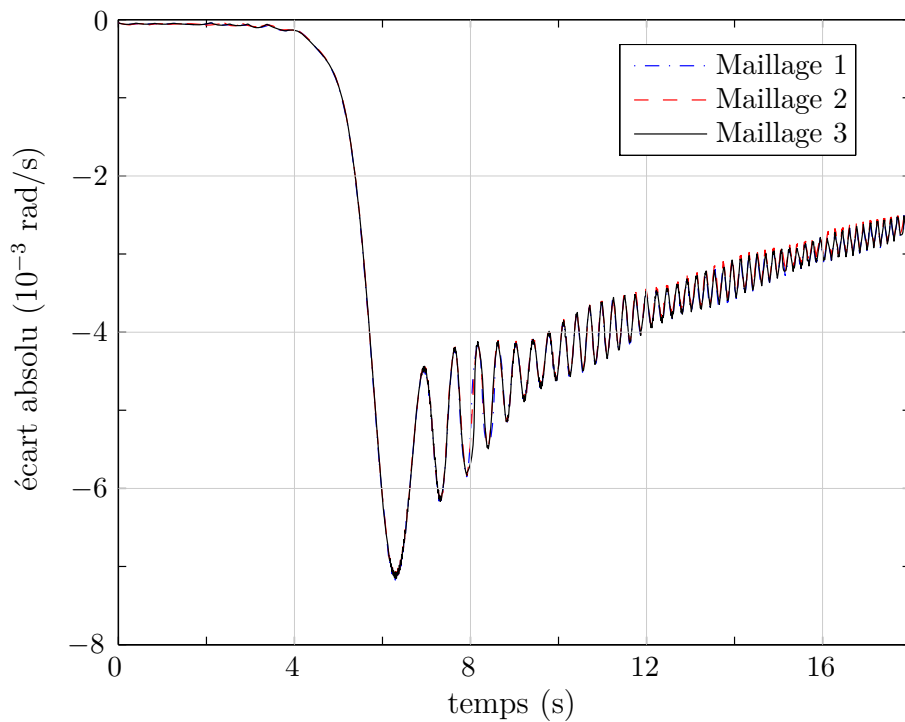
Dans un premier temps, il a été imposé un balourd dont la masse  $m_b$  vaut 5 kg à une distance  $r_b$  égale à 1 m par rapport au centre géométrique de la ligne d'arbres.

La vitesse calculée par le modèle non linéaire, illustrée figure 3.10, s'avère bien approchée par l'équation (3.2), au moins avant de franchir la première vitesse critique. La figure 3.11

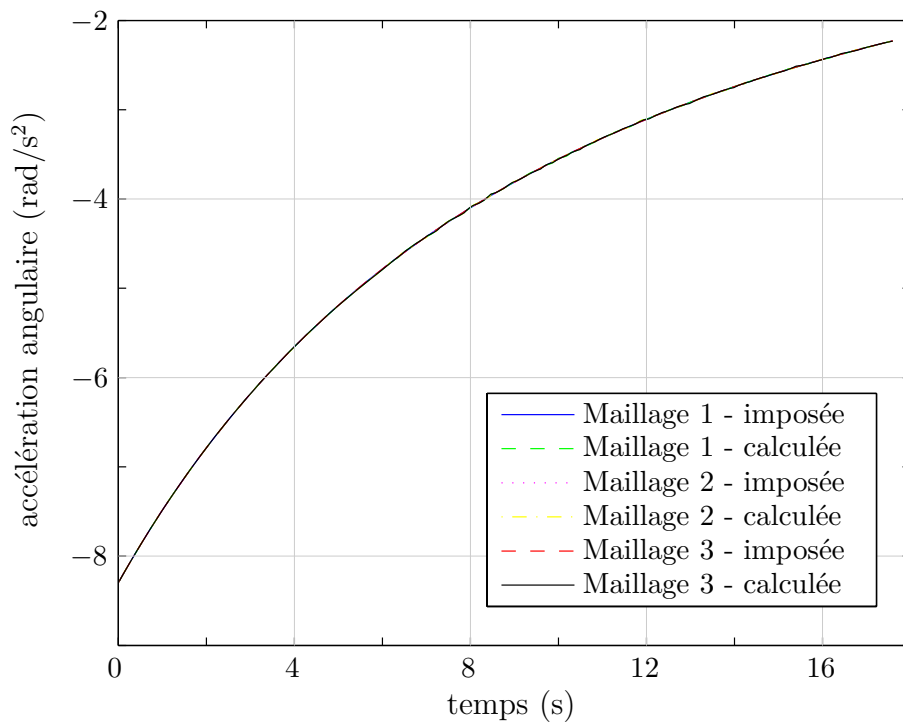


**Figure 3.10** - Comparaison des vitesses angulaires d'un rotor obtenues par les modèles linéaire et non linéaire pour différents maillages

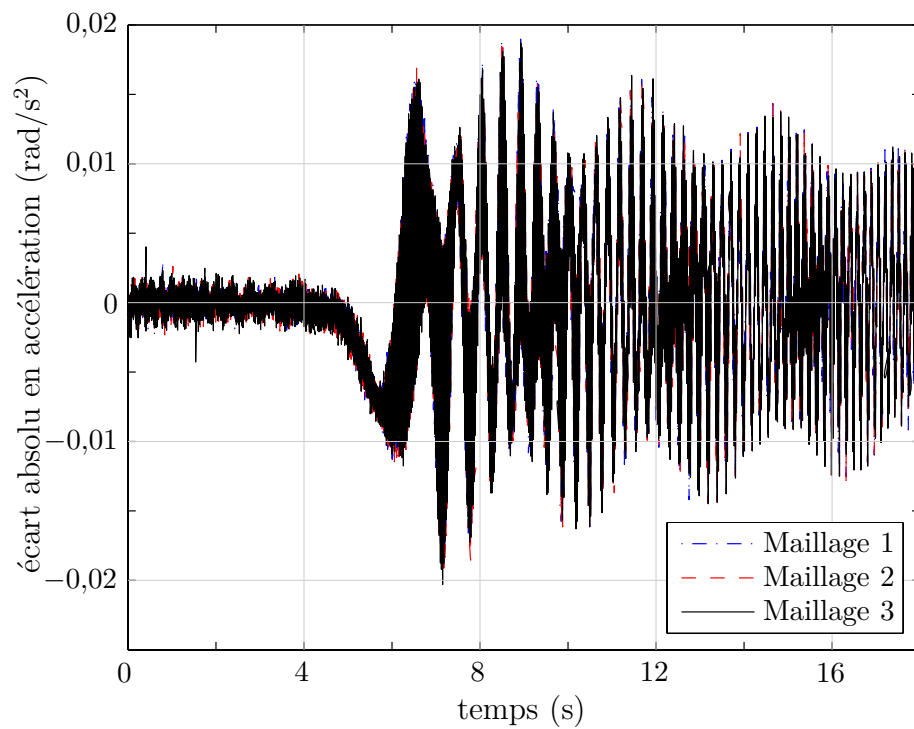
montre les écarts existants entre les modèles non linéaire et linéaire du fait de l'approximation sur l'équation (1.21). Cependant l'ordre de grandeur des écarts observés, inférieur à  $8 \cdot 10^{-3}$  rad/s, reste très faible par rapport à celui de la vitesse de rotation. L'accélération angulaire calculée par le modèle non linéaire est tracée sur la figure 3.12. Le couplage entre les déplacements généralisés du rotor et la position angulaire de l'arbre fait apparaître des écarts plus importants dans le calcul de l'accélération angulaire par rapport à une modélisation linéaire, cf. figure 3.13, mais l'ordre de grandeur de ces derniers reste inférieur à 0,4% pour un faible balourd. Une corrélation satisfaisante entre les modèles linéaire et non linéaire est constatée en observant les déplacements du nœud 2 appartenant au maillage 1 (cf. figures 3.14 et 3.15). Par ailleurs, les résultats obtenus avec les trois discrétisations spatiales différentes ont permis de montrer l'indépendance des résultats vis-à-vis du maillage. En analysant le déplacement (cf. figure 3.14) au moyen d'une transformée de FOURIER, le résultat est dépeint figure 3.16 : le spectre fréquentiel de la réponse du rotor contient les fréquences de résonance du modèle ainsi que la fréquence d'excitation correspondant aux balourds, qui s'avère être la fréquence de rotation de l'arbre. En effet, la



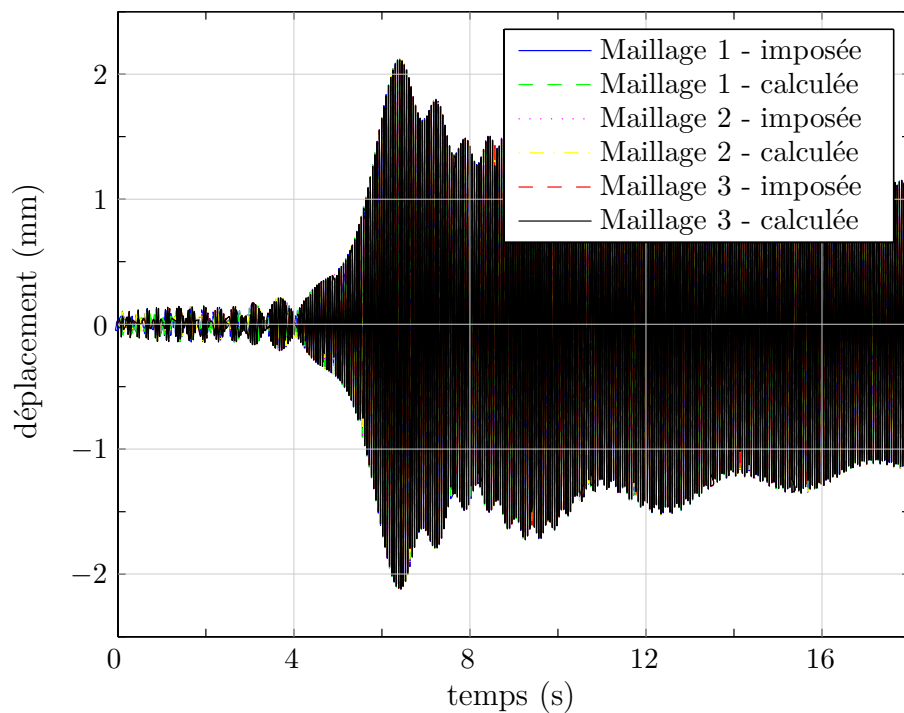
**Figure 3.11** - Écart absolu entre la vitesse angulaire calculée par le modèle non linéaire et celle imposée au modèle linéaire pour différents maillages



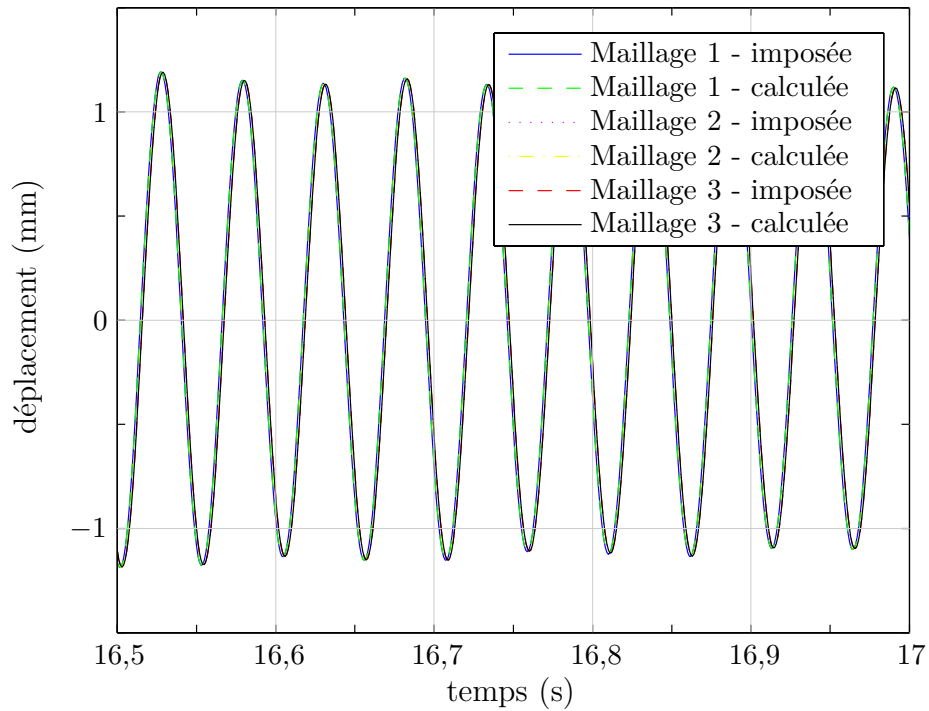
**Figure 3.12** - Comparaison des accélérations angulaires d'un rotor obtenues par les modèles linéaire et non linéaire pour différents maillages



**Figure 3.13** - Écart absolu entre l'accélération angulaire d'un rotor calculée par le modèle non linéaire pour différents maillages par rapport au modèle linéaire où la loi de vitesse est imposée

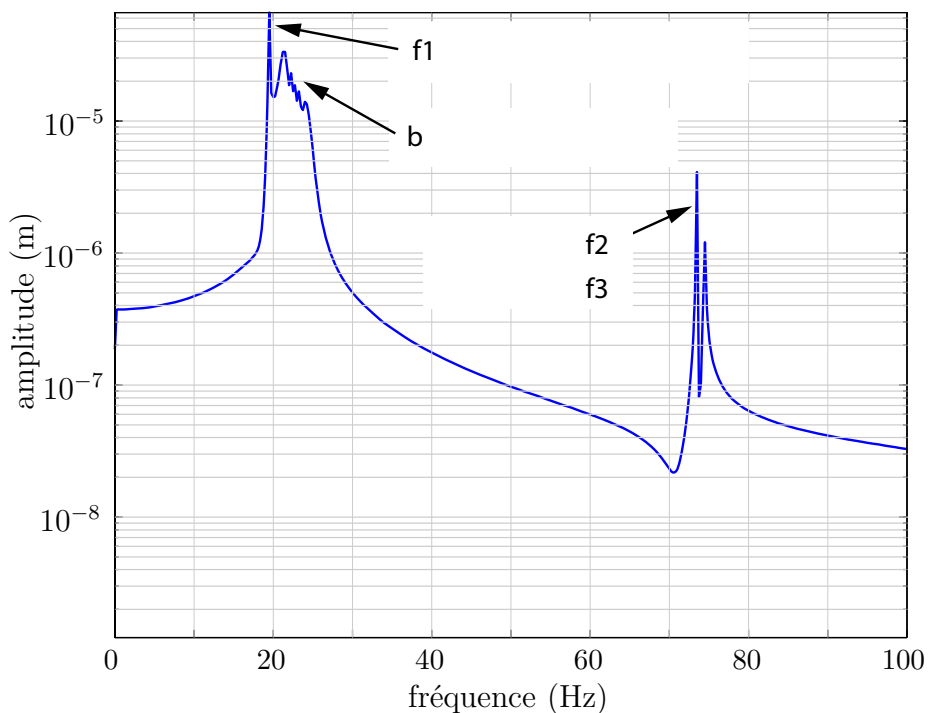


**Figure 3.14** - Déplacements d'un rotor sans contact entre les modèles linéaires et non linéaire



**Figure 3.15** - Zoom sur les déplacements d'un rotor sans contact, après avoir passé la vitesse critique, entre les modèles linéaire et non linéaire

réponse d'une structure soumise à une excitation est composée de la solution de l'équation du mouvement homogène, soit d'oscillations libres amorties, et de la solution particulière de l'équation complète, soit d'oscillations forcées dues aux balourds qui est une excitation synchrone, *i.e.* tournant à la vitesse de rotation. Les résultats obtenus par le modèle non



**Figure 3.16** - Contenu fréquentiel de la réponse non linéaire du rotor

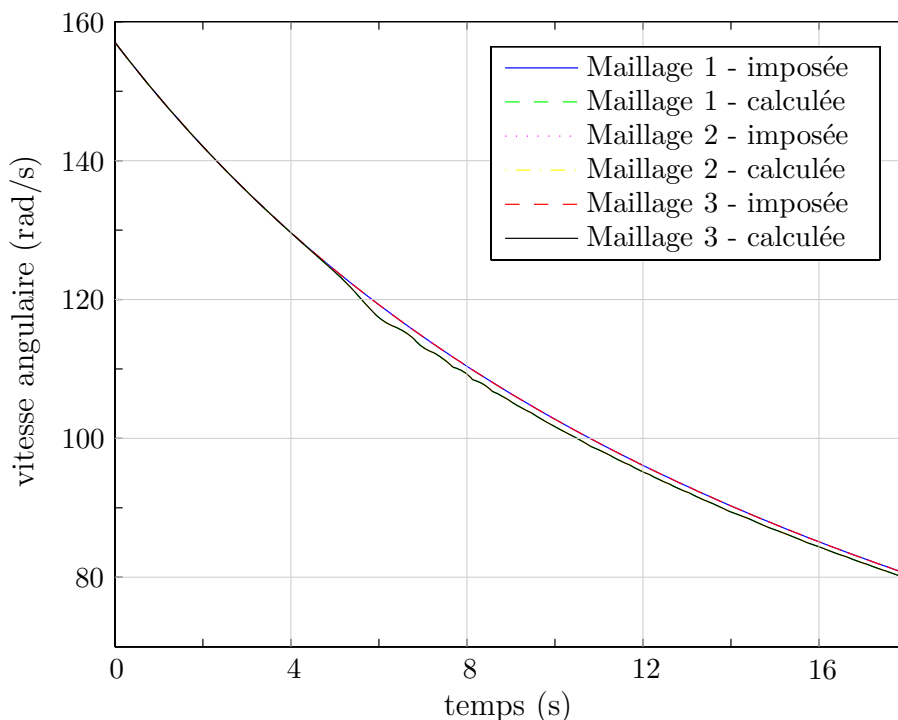
linéaire pour un balourd léger sont très satisfaisants au vu de la comparaison avec le cas linéaire : les déplacements ainsi que la vitesse de rotation sont bien estimés. Le couplage issu de la formulation génère des oscillations, qui n'existent pas dans le modèle linéaire : ces dernières restent d'amplitude faible et n'influencent pas sur le calcul des déplacements.

### 3.3.2.2 Grand Balourd

La masse du balourd, située à l'extrémité du disque  $r_b = 1$  m, est maintenant portée à 45 kg, ce qui correspond à un balourd équivalent à la perte d'une ailette terminale.

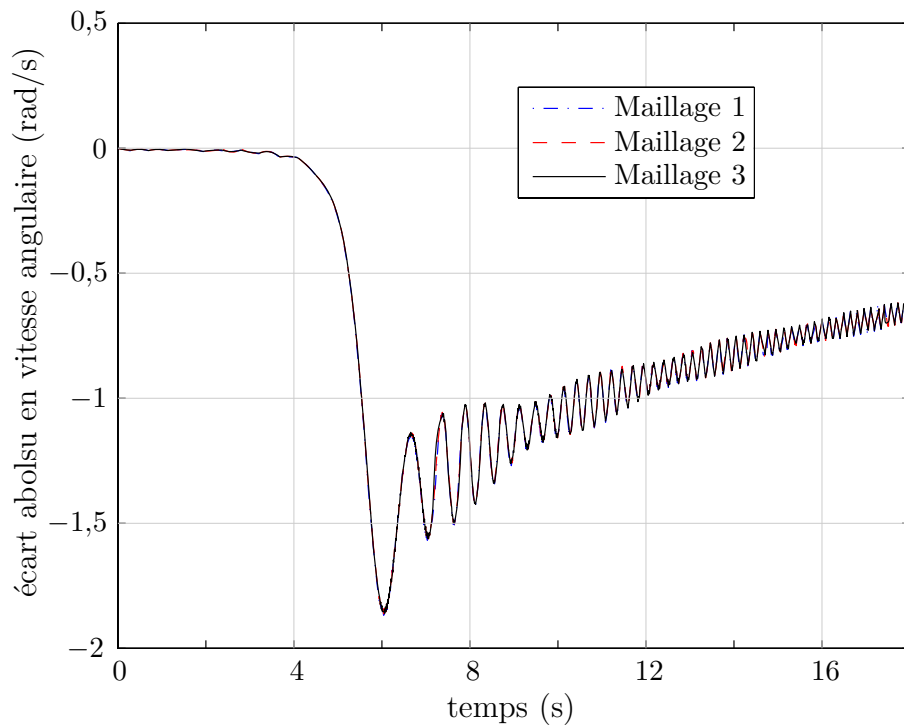
Les simulations effectuées montrent une fois encore l'indépendance des résultats au maillage. Toutefois, dans le cas présent, on constate des écarts significatifs par rapport à la réponse du rotor avec une loi en vitesse obtenue après résolution de l'équation (3.2). Au passage de la vitesse critique, les amplitudes de vibrations sont telles que le couplage dû au balourd est mis en exergue.

La vitesse de rotation obtenue par le modèle non linéaire, tracée sur la figure 3.17, diffère de la loi en vitesse imposée étant donné que les couplages non linéaires ne sont plus négligeables, même si l'écart en vitesse angulaire observé sur la figure 3.18 est en dessous de 2%. On constate que l'accélération angulaire (cf. figure 3.19) oscille autour de celle impo-

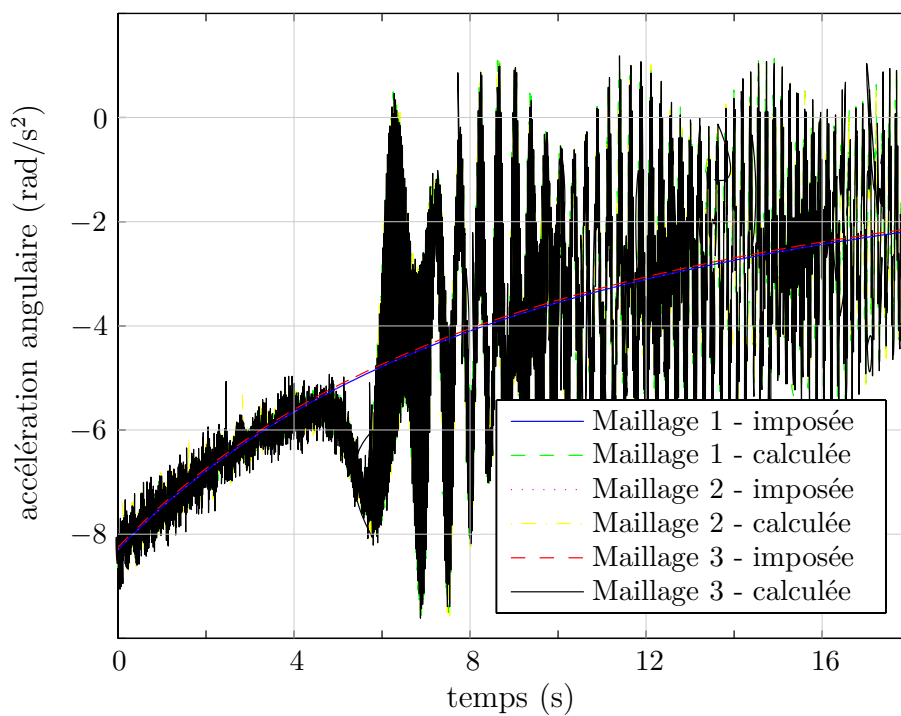


**Figure 3.17** - Comparaison des vitesses angulaires des deux modèles en présence de grand balourd

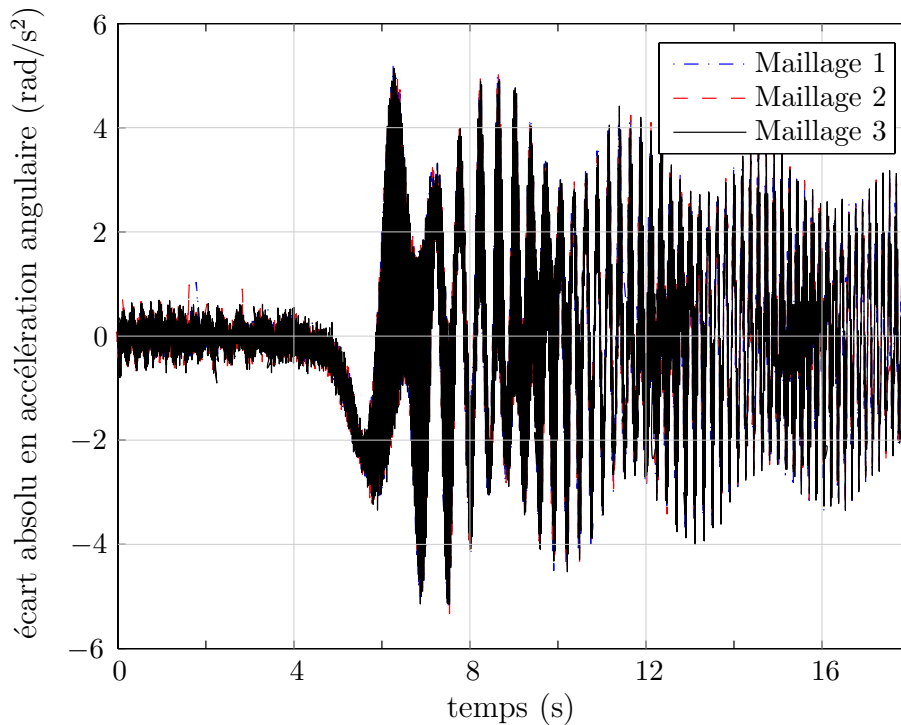
sée au modèle linéaire et que les écarts entre les deux courbes 3.20 tendent à disparaître après avoir passé la vitesse critique. Quant aux déplacements de la ligne d'arbres, ils diffèrent entre les modèles linéaire et non linéaire, conséquence directe des écarts en vitesse



**Figure 3.18** - Écart absolu entre la vitesse angulaire calculée par le modèle non linéaire et celle imposée au modèle linéaire pour différents maillages en présence de grand balourd



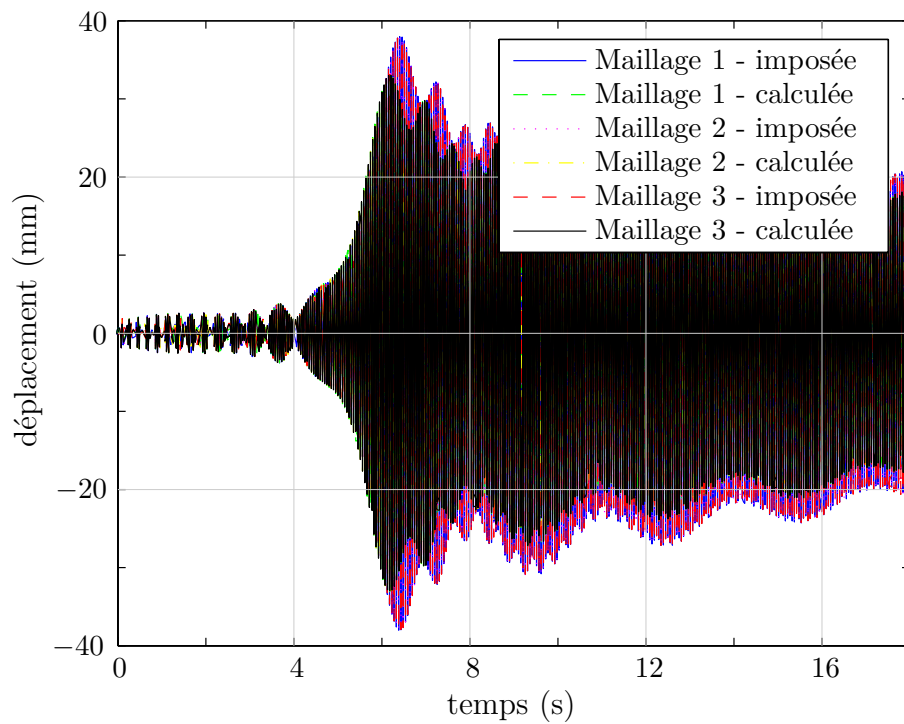
**Figure 3.19** - Comparaison des accélérations angulaires d'un rotor obtenues par les modèles linéaire et non linéaire pour différents maillages en présence de grand balourd



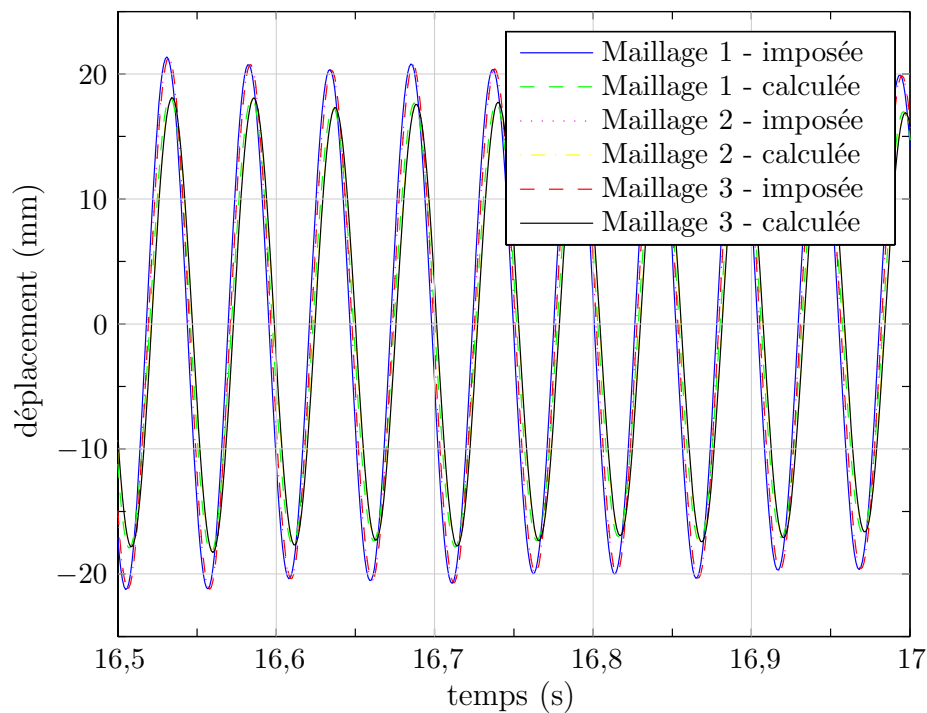
**Figure 3.20** - Écart absolu entre l'accélération angulaire d'un rotor calculée par le modèle non linéaire en présence de grand balourd pour différents maillages par rapport au modèle linéaire

et en accélération angulaire, comme le montrent les figures 3.21 et 3.22. Une remarque peut être formulée concernant l'effet dynamique d'un transitoire de vitesse : l'amplitude maximale des déplacements du rotor est observée à  $t = 6,155$  s soit une vitesse de rotation de  $116,74$  rad/s (soit  $18,58$  Hz). La résonance du système apparaît ainsi à une vitesse de rotation inférieure à la première vitesse critique du rotor, égale à  $122,34$  rad/s (soit  $19,47$  Hz) d'après le diagramme de CAMPBELL : ce phénomène de décalage de fréquence de résonance pour un transitoire de vitesse avait déjà été mis en évidence par C. VARE [VAR 97]. Le contenu fréquentiel de la réponse non linéaire reste cohérent par rapport au diagramme de CAMPBELL.

Les efforts au palier sont illustrés sur la figure 3.23. La force maximale observée, qui est alors égale à  $2,003$  MN, est comparée en temps normal à la valeur admissible par le dimensionnement du palier. Dans notre cas, les coefficients des paliers sont choisis arbitrairement et ne correspondent pas à un palier réel. Cette valeur doit donc être interprétée de façon qualitative et sera comparée aux efforts aux paliers dans la cas où le contact est pris en compte (cf. chapitre 4).

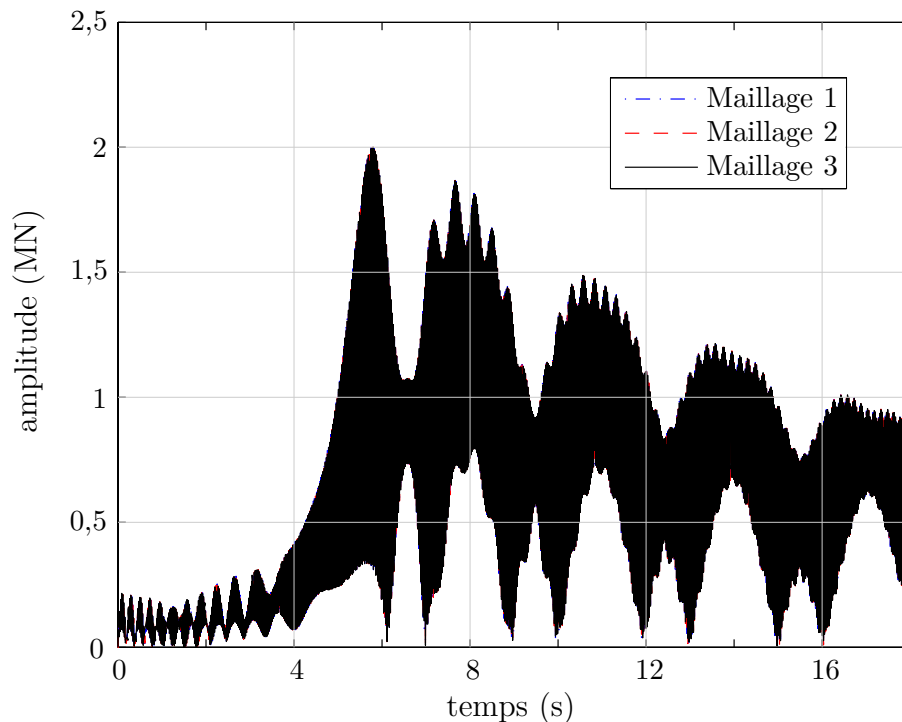


**Figure 3.21** - Comparaison des déplacements d'un rotor sans contact, après avoir passé la vitesse critique, entre les modèles linéaire et non linéaire en présence d'un grand balourd



**Figure 3.22** - Zoom sur les déplacements d'un rotor sans contact entre les modèles linéaires et non linéaire en présence d'un grand balourd





**Figure 3.23** - *Effort au palier sans contact pour les différents maillages en présence d'un grand balourd*

### 3.4 Conclusion

Ce chapitre avait pour objectif de valider dans un cas sans contact la maquette numérique associée à la modélisation non linéaire développée dans ce mémoire. Pour ce faire, les résultats issus de notre modélisation non linéaire sont comparés, qualitativement et quantitativement, à ceux obtenus par un modèle linéaire.

Dans un premier temps, un modèle linéaire de rotor simple issu de la littérature est utilisé pour tester la modélisation non linéaire développée dans cette thèse. On dispose alors de la solution numérique pour le cas linéaire, où la vitesse angulaire est imposée, qui sert de solution de référence. Ces résultats sont comparés à ceux obtenus avec le modèle non linéaire pour lequel la vitesse de rotation est calculée. Il a été montré que notre maquette numérique redonne avec une très bonne précision la solution linéaire et que les résultats obtenus sont cohérents avec ceux de la littérature (effets dynamiques d'un transitoire de vitesse et spectre fréquentiel). Ceci constitue donc une validation de nos travaux pour le cas sans contact. L'influence des non linéarités présentes dans notre modèle sur la réponse du système a ensuite été étudiée. Il a été ainsi mis en évidence la nécessité d'intégrer ces non linéarités en présence d'un grand balourd. Enfin, une étude de sensibilité des résultats au maillage a également été effectuée.

La prochaine étape consiste donc à prendre en compte tous les phénomènes présents lors d'un ralentissement accidentel de turbine, dont le contact frottant entre le rotor et le

diaphragme.



---

# Simulation d'un transitoire de vitesse avec interaction rotor-stator

## Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Couronne rigide fixe (C1) et couronne rigide mobile (C2)</b> . . .	<b>78</b>
4.1.1	Modèle sans torsion . . . . .	78
4.1.2	Prise en compte de la torsion . . . . .	88
4.1.3	Conclusion intermédiaire . . . . .	96
<b>4.2</b>	<b>Carter flexible C3 plan</b> . . . . .	<b>96</b>
4.2.1	Hypothèse de détection de contact 1 . . . . .	96
4.2.2	Hypothèse de détection de contact 2 . . . . .	98
4.2.3	Comparaison des résultats pour le carter C3 plan . . . . .	108
<b>4.3</b>	<b>Carter C3 en 3-D</b> . . . . .	<b>111</b>
<b>4.4</b>	<b>Conclusion</b> . . . . .	<b>115</b>

---

Le chapitre 3 nous a permis de valider l'implémentation du modèle non linéaire en étudiant des transitoires de vitesse sur des rotors, c'est-à-dire dans des situations sans contact rotor-stator. En reprenant le modèle simple de rotor (cf. figure 3.8), les différents types de diaphragme qui ont été présentés dans le chapitre 1 viennent maintenant compléter la modélisation de la turbine. Le grand balourd utilisé dans la section 3.3.2.2 ( $m_b = 45$  kg et  $r_b = 1$  m) excite suffisamment la ligne d'arbres en flexion pour consommer entièrement le jeu de conception entre les deux structures. Ainsi, ce chapitre a pour but de tester la robustesse de l'algorithme de gestion du contact, en vue de passer à des applications industrielles, lors du calcul de la réponse couplée rotor-stator avec les différents modèles de diaphragme et en prenant en compte (ou non) la torsion du rotor.

Trois types de diaphragmes plans ont été envisagés pour étudier le contact. Les carters les plus simples sont composés d'une couronne intérieure rigide avec ou sans possibilité de déplacement dans le plan (carters C1 et C2). Ils ont été implémentés en premier pour vérifier les algorithmes de contact étant donné que, pour ce type de stator, on obtient des

expressions exactes des matrices de contact. Un modèle de diaphragme flexible (carter C3) a été ensuite développé avec deux versions afin d'avoir une représentation plus réaliste de l'interaction.

## 4.1 Couronne rigide fixe (C1) et couronne rigide mobile (C2)

Le carter C1, qui est une couronne rigide fixe, peut être vu comme une frontière mathématique et fut le premier modèle utilisé pour tester l'algorithme de contact. Quant au carter C2 (cf. section 1.3.1), issu d'une étude précédemment menée par EDF, il autorise le déplacement dans le plan de la couronne interne. Les caractéristiques mécaniques du modèle C2 sont rappelées dans le tableau 4.1. Ainsi, le carter C1 correspond à un cas particulier du carter C2, *i.e.* lorsque les raideurs du support de l'anneau rigide sont infinies. Les résultats des simulations d'un ralentissement accidentel sont présentés en choisissant de retenir ou pas la torsion dans la réponse du rotor.

Matrice de raideur			
$k_{xx}^c$	$4 \cdot 10^9 \text{ N/m}$	$k_{xy}^c$	$0 \text{ N/m}$
$k_{yx}^c$	$0 \text{ N/m}$	$k_{yy}^c$	$4 \cdot 10^9 \text{ N/m}$
Matrice d'amortissement			
$c_{xx}^c$	$3,8 \cdot 10^5 \text{ N}\cdot\text{s/m}$	$c_{xy}^c$	$0 \text{ N}\cdot\text{s/m}$
$c_{yx}^c$	$0 \text{ N}\cdot\text{s/m}$	$c_{yy}^c$	$3,8 \cdot 10^5 \text{ N}\cdot\text{s/m}$
Matrice masse			
$m_{xx}^c$	$10^4 \text{ N}\cdot\text{s}^2/\text{m}$	$m_{xy}^c$	$0 \text{ N}\cdot\text{s}^2/\text{m}$
$m_{yx}^c$	$0 \text{ N}\cdot\text{s}^2/\text{m}$	$m_{yy}^c$	$10^4 \text{ N}\cdot\text{s}^2/\text{m}$

**Tableau 4.1** - Caractéristiques mécaniques du carter C2

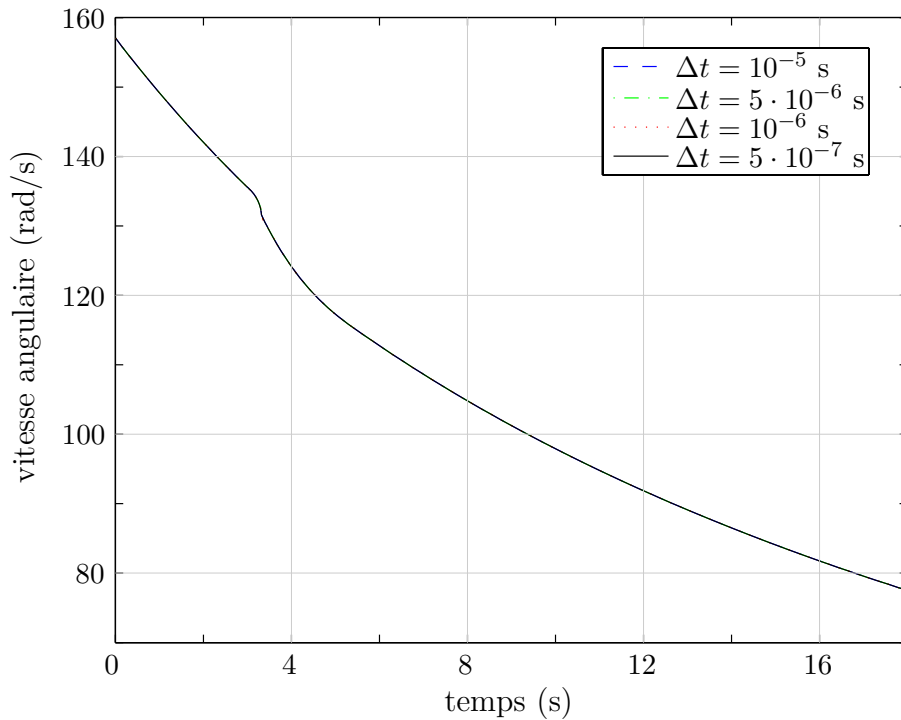
### 4.1.1 Modèle sans torsion

Une façon d'évaluer l'algorithme de contact est d'étudier la sensibilité des résultats à la valeur du pas de temps. Les équations du mouvement sans considérer la vibration de torsion sont donc intégrées en temps en considérant quatre pas de temps, inférieurs au pas de temps critique de la turbine :  $\Delta t = 10^{-5} \text{ s}$ ,  $5 \cdot 10^{-6} \text{ s}$ ,  $10^{-6} \text{ s}$  et  $5 \cdot 10^{-7} \text{ s}$ . La fréquence d'échantillonnage des résultats est choisie à 1000 Hz pour limiter le volume de valeurs à stocker. Les résultats seront présentés d'abord pour le carter C1 puis C2.

En observant les instants qui précèdent le premier contact, on constate une convergence des

résultats par rapport au pas de temps de toutes les inconnues du système (les déplacements généralisés, la vitesse et l'accélération angulaire. . .) et les écarts observés sur ces quantités sont de l'ordre du zéro numérique. Ces résultats confirment ceux établis dans le chapitre 3.

À l'approche de la fréquence de résonance de la turbine, le jeu initial de 8 mm entre les structures est entièrement consommé (cf. figure 4.2). Si on examine la vitesse de rotation, illustrée sur la figure 4.1, on obtient bien le ralentissement escompté dû au contact frottant entre l'arbre et le carter C1. L'écart relatif observé en vitesse angulaire, inférieur à 0,05%,

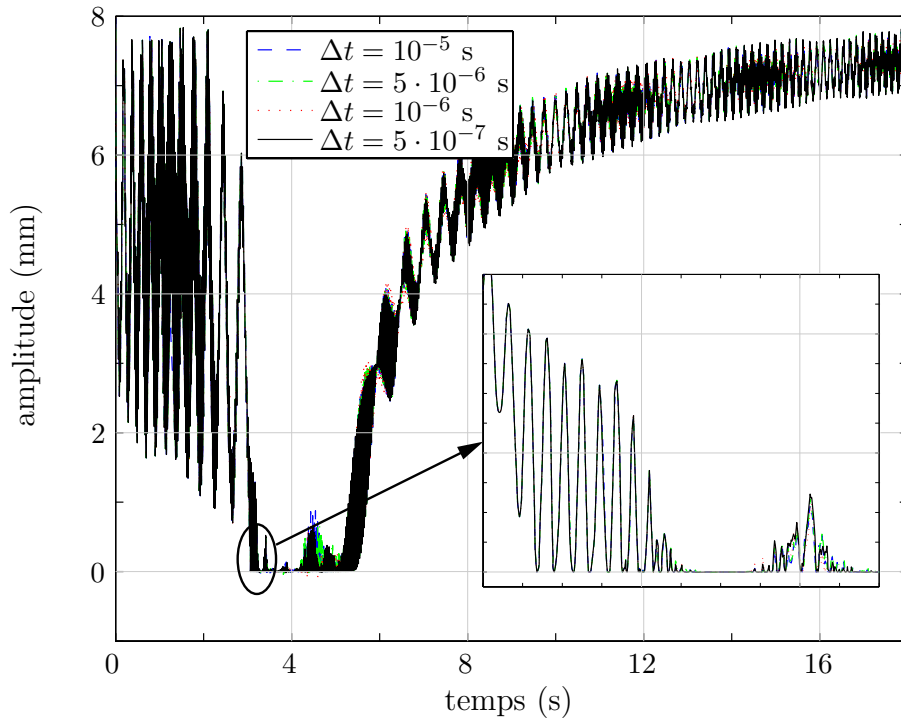


**Figure 4.1** - Vitesse angulaire avec le carter C1 pour différents pas de temps sans considérer la torsion

reste résiduel pour un problème aussi fortement non linéaire. L'explication de cet écart en vitesse de rotation est intrinsèque à la discrétisation du temps continu : la détection du premier contact conditionne en effet la réponse dynamique de la turbine et diffère donc selon le pas de temps. Les pas de temps choisis étant très petits, ces écarts sont donc confinés comme le montre la fonction jeu disponible entre les structures sur la figure 4.2.

On constate également que l'algorithme de contact s'efforce de garantir la condition d'im-pénétrabilité des structures. En effet, les multiplicateurs de LAGRANGE dépendent de la pénétration inter-structurale, obtenue lors de l'étape de prédiction, qui doit être annulée. Le calcul des lagrangiens nécessite l'inversion d'une matrice, fonction de la matrice gyroscopique, qui dépend de la vitesse angulaire à calculer (cf. équation (2.28)). La vitesse de rotation étant inconnue lors de la correction par les efforts de contact, on choisit d'évaluer la matrice gyroscopique à partir de la vitesse angulaire prédite sous l'hypothèse de non contact, ce qui constitue une approximation. Ensuite, l'inversion de la matrice de contact

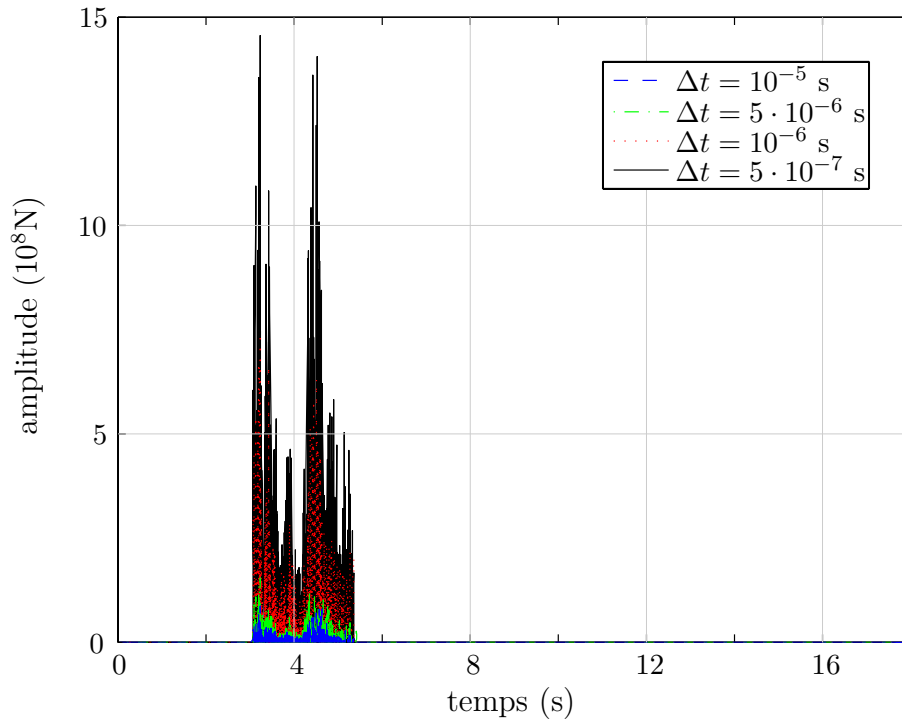
pour le calcul des multiplicateurs de LAGRANGE dépend de la précision machine. Et enfin la réponse du rotor au transitoire de vitesse est conditionnée par la précision du solveur, qui est imposée par l'utilisateur, pour la résolution du problème non linéaire. Cependant, les simulations montrent que les pénétrations résiduelles observées restent négligeables.



**Figure 4.2** - *Fonction jeu en considérant le carter C1 avec différents pas de temps - cas sans torsion*

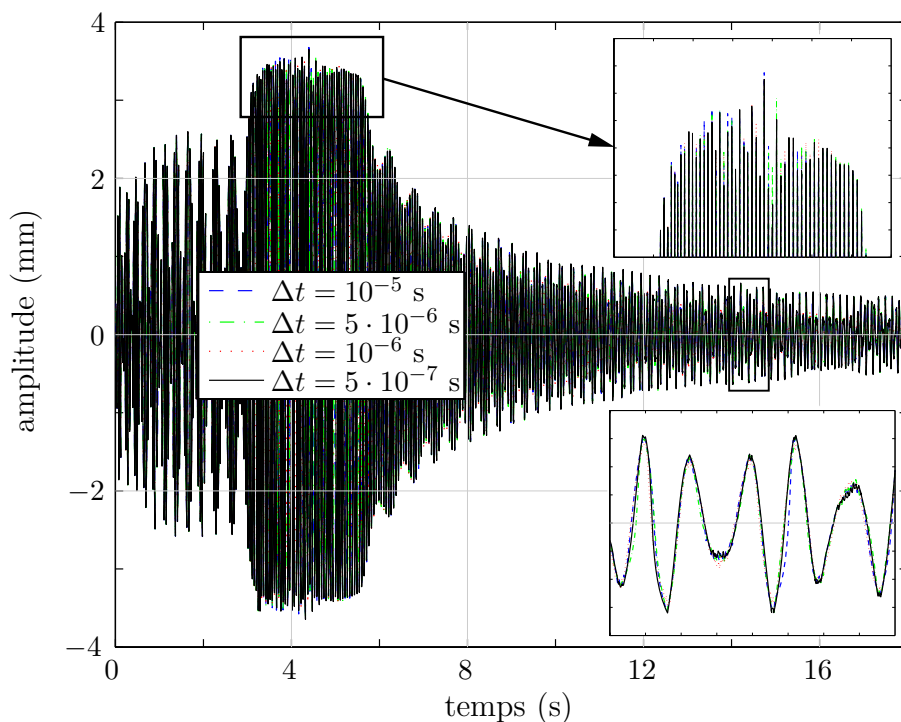
Les contacts rotor-stator sont essentiellement de type impact comme le montre la figure 4.2. Cela signifie que très souvent le contact a lieu sur de très brèves durées – un ou deux pas de temps – et ce même si on réduit la valeur du pas de temps (division par 20 dans le cas présent). Ceci résulte du fait que le carter C1 est rigide : le contact se produit entre un corps rigide (le carter) et un rotor flexible, mais dont la section droite est supposée indéformable (hypothèse de poutre). Ce type de contact rigide-rigide engendre donc naturellement des phénomènes de rebonds. Comme cela est montré sur un cas simple dans l'annexe D, les valeurs des forces de contact à l'instant d'un impact dépendent de la discrétisation temporelle et augmentent lorsque le pas de temps diminue (cf. figure 4.3). Ces valeurs n'ont donc pas de signification physique et les seules grandeurs fiables sont les déplacements généralisés du rotor et leur vitesse, que l'on soit proche ou non du lieu de contact. De plus, les efforts au palier sont bien évalués : en effet, ces derniers sont calculés par l'équation (1.9) et sont linéairement dépendants des déplacements généralisés de la turbine ainsi que de leurs premières dérivées temporelles.

D'autre part, un incrément de temps inférieur au pas de temps critique pour un schéma explicite conduit à des oscillations numériques autour de la solution exacte du problème,



**Figure 4.3** - Effort de contact en considérant le carter C1 avec différents pas de temps - cas sans torsion

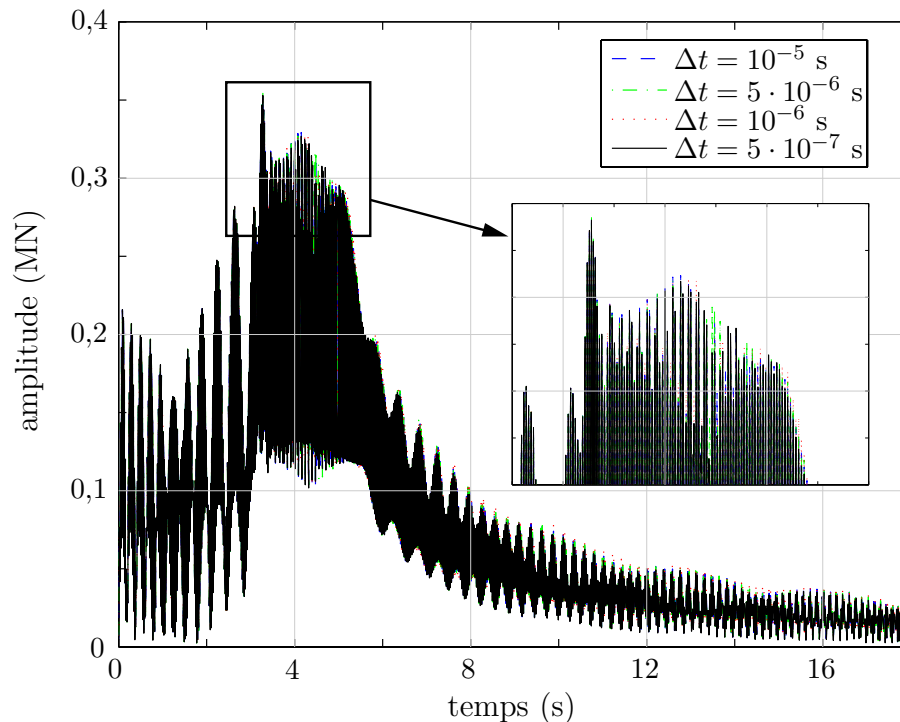
et cela même pour un cas linéaire comme le montre GÉRADIN [GÉR 97] dans le cas de l'impact d'une barre. Cependant, la convergence des déplacements de la ligne d'arbres est obtenue : un exemple est donné figure 4.4 où le déplacement du nœud 2 (cf. figure 3.8) de la ligne d'arbres est tracé pour différents pas de temps.



**Figure 4.4** - Déplacement vertical du nœud 2 du rotor en considérant le carter C1 avec différents pas de temps - cas sans torsion



Le chargement au palier est ensuite reconstruit en utilisant l'équation (1.9) et tracé sur la figure 4.5. Une diminution significative des efforts au palier est constatée grâce au contact par rapport au cas sans contact où la force maximale valait 2,003 MN (cf. section 3.3.2.2) : le diaphragme ayant pour rôle de limiter les déplacements du rotor, on peut s'attendre intuitivement à observer des efforts plus faibles aux paliers<sup>1</sup>. On constate également que la



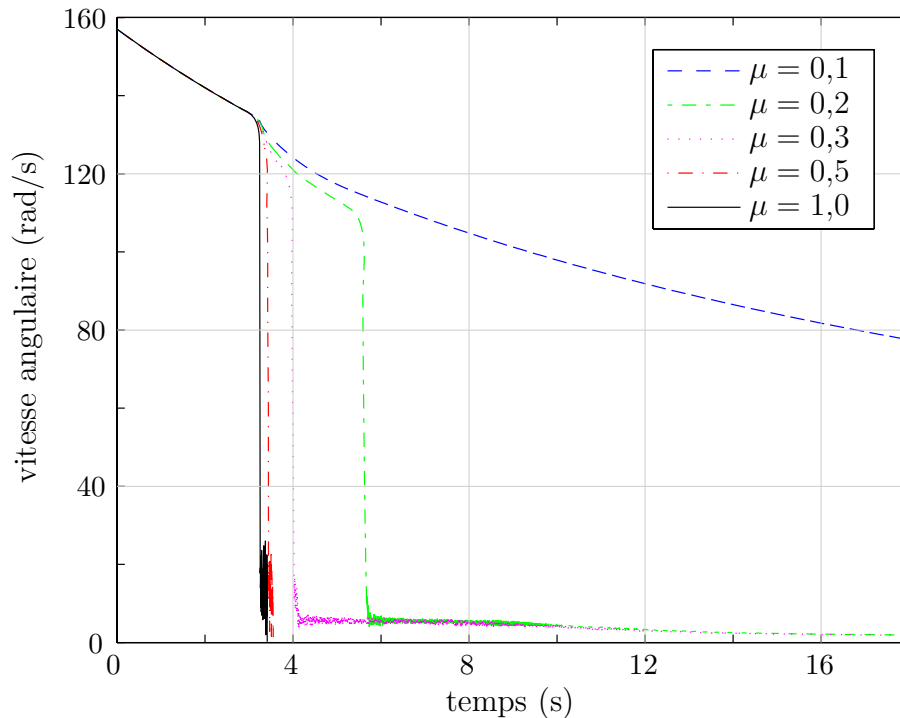
**Figure 4.5** - Effort au palier situé au nœud 7 du rotor en contact avec le carter C1 pour différents pas de temps - cas sans torsion

pénétration résiduelle, due à des erreurs d'origine numérique, a tendance à diminuer avec le pas de temps (cf. tableau 4.2). Ceci s'explique par une meilleure détection du contact lorsque l'incrément de temps diminue et une pénétration prédite plus faible à corriger, même si ce n'est pas tout à fait le cas pour  $\Delta t = 5 \cdot 10^{-7}$  s.

L'influence du coefficient de friction sur les résultats a été étudiée pour quelques valeurs. Les résultats de cette étude de sensibilité sont représentés sur la figure 4.6. On remarque aisément que plus le coefficient de friction est élevé, plus la décélération angulaire est importante. En effet, le couple de friction est proportionnel au coefficient de friction  $\mu$ , d'où une dépendance triviale. Le fait d'augmenter ce paramètre a permis d'observer le phénomène de précession inverse : ce dernier correspond au cas où l'orbite du rotor décrit une trajectoire dans le sens opposé à sa rotation propre. L'apparition de précession inverse dépend de plusieurs paramètres tels que la masse du balourd, la vitesse relative entre les deux structures dans la direction tangentielle, le coefficient de friction... Connu comme

1. Il n'existe pas de démonstration théorique de l'effet bénéfique du contact sur les efforts aux paliers, mais les simulations confirment cette conjecture.

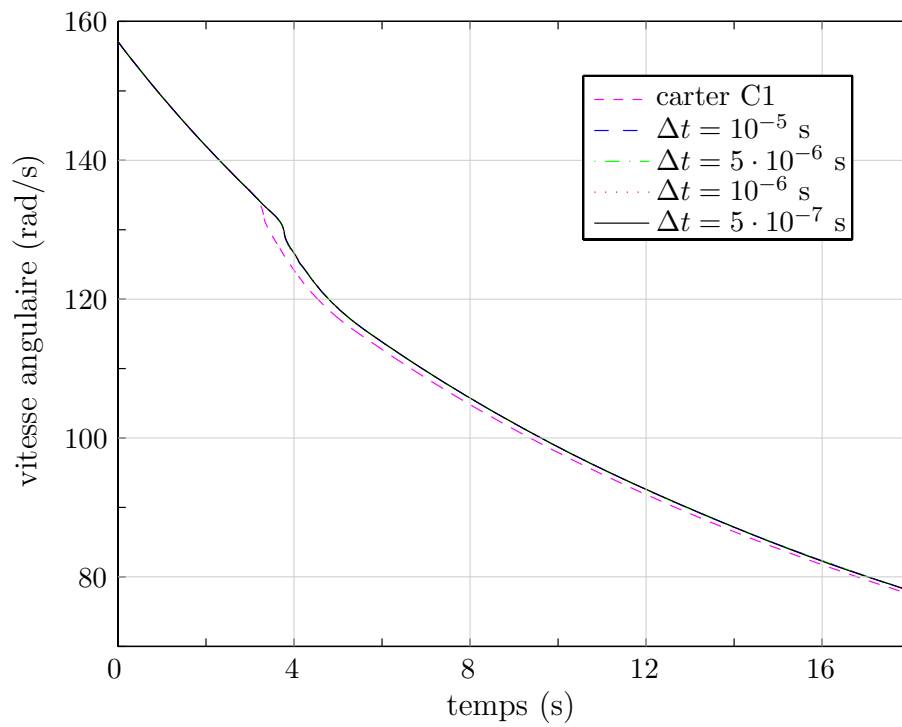
étant le phénomène le plus destructeur [MUS 89], le lecteur pourra se référer pour plus de détail aux mémoires de thèse de A. BARTHA [BAR 00] et F. FATARELLA [FAT 99], les travaux de CHOY [CHO 87] ou encore de CHOI [CHO 02] pour n'en citer que quelques uns. Ainsi, la valeur du coefficient de frottement  $\mu$ , généralement comprise entre 0,1 et 0,2, devra être choisie avec précaution.



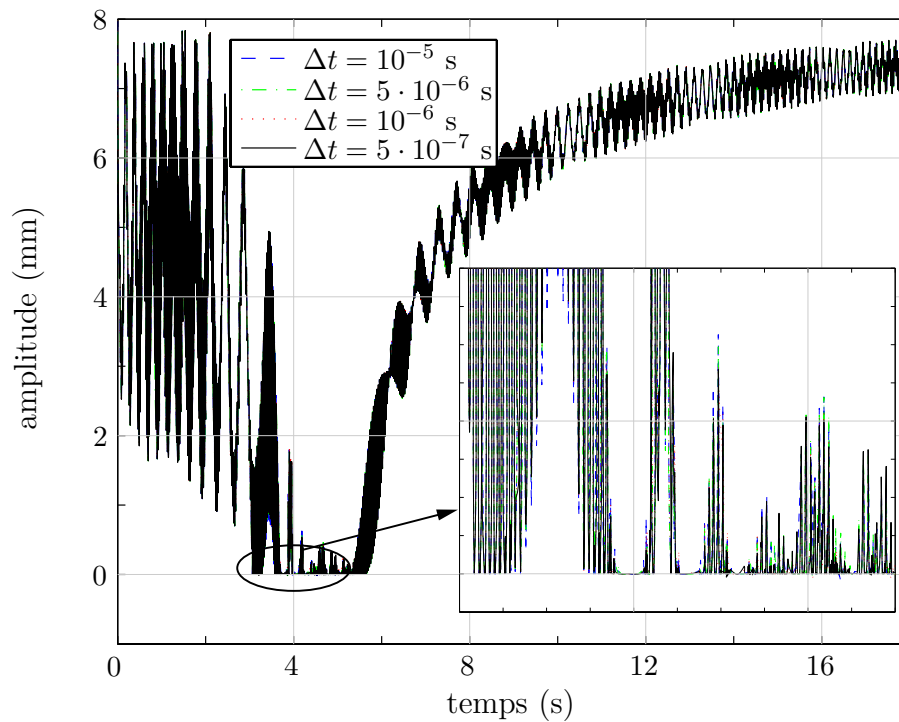
**Figure 4.6** - Influence du coefficient de friction avec le carter C1 en ne considérant pas la torsion

Les résultats précédents sont cohérents d'un point de vue qualitatif, et le carter C1 infiniment rigide est maintenant remplacé par le diaphragme C2. On procède de la même manière dans la présentation des résultats. Le fait d'autoriser un déplacement dans le plan de la couronne massive modifie la dynamique du contact. Ainsi la vitesse de rotation, calculée par l'algorithme non linéaire, est illustrée sur la figure 4.7. Puisque le diaphragme peut se déplacer dans le plan, l'impact du rotor sur le carter sépare les structures après le premier contact, comme l'illustre la figure 4.8 représentant la fonction jeu disponible entre l'arbre et le diaphragme. Le contact étant moins persistant, le rotor ralentit moins brutalement que dans le cas du carter rigide C1.

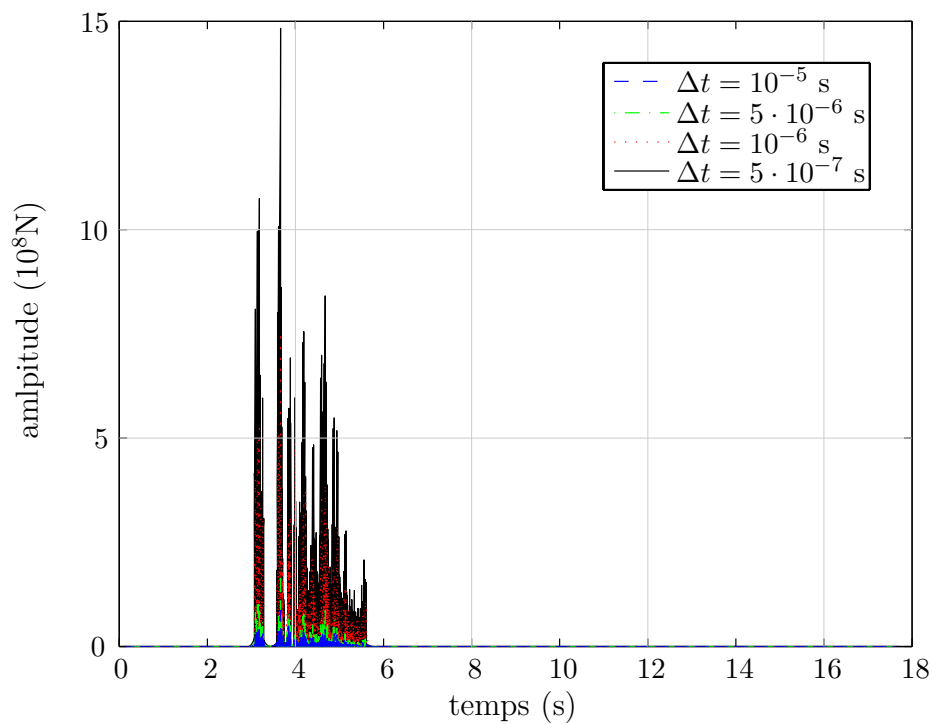
Comme dans le cas du stator rigide et fixe, la prédominance d'impacts dans la réponse du rotor ne permet pas de connaître l'effort de contact vrai vu par le carter C2 comme le montre la figure 4.9. Malgré cela, la convergence des déplacements vis-à-vis du pas de temps, illustrée sur la figure 4.10, est maintenue. Les efforts aux paliers obtenus avec le carter C2 sont comparés à ceux calculés avec le carter C1 pour un pas de temps  $\Delta t = 10^{-5}$  s. Ainsi la figure 4.11 permet d'illustrer l'influence du modèle de diaphragme choisi



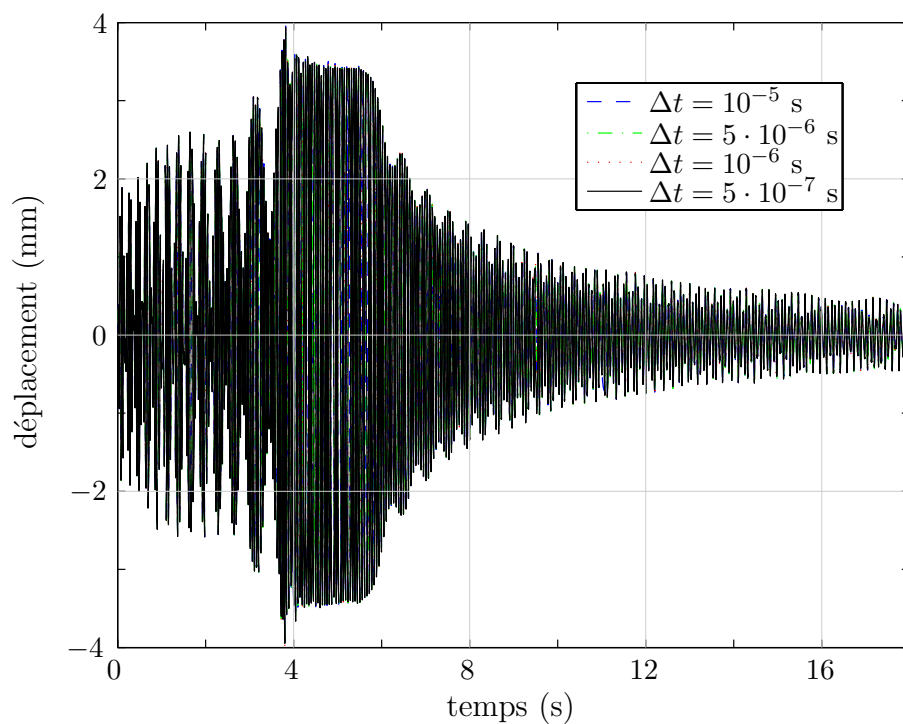
**Figure 4.7** - Vitesse angulaire calculée lors de l'interaction avec le carter C2 pour différents pas de temps (comparaison avec la vitesse angulaire obtenue avec le carter C1 pour  $\Delta t = 10^{-5}$  s) - cas sans torsion



**Figure 4.8** - Distance entre le rotor et le carter C2 pour différents pas de temps - cas sans torsion

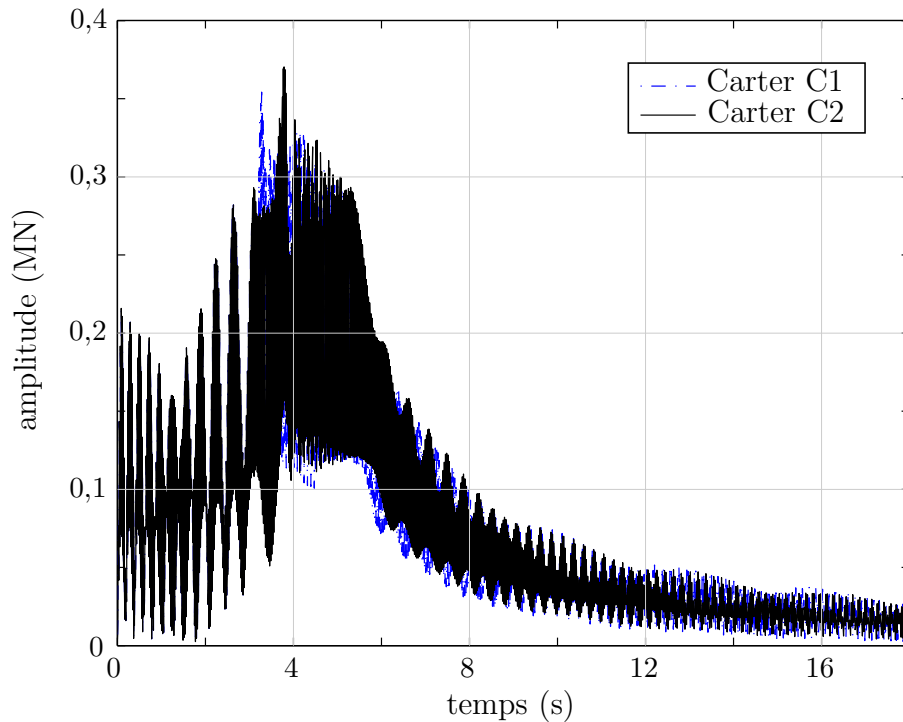


**Figure 4.9** - Efforts de contact avec le carter C2 pour différents pas de temps - cas sans torsion



**Figure 4.10** - Déplacement vertical du nœud 2 du rotor en considérant le carter C2 avec différents pas de temps - cas sans torsion

sur le chargement des paliers. Le diaphragme C1 étant rigide et fixe, les déplacements au palier de la ligne d'arbres, calculés par l'outil numérique, sont plus faibles que pour le stator C2 : ce dernier, autorisant le déplacement dans le plan, augmente de fait la déflexion de l'arbre. Par conséquent, il est normal de constater que les efforts aux paliers sont plus élevés pour le diaphragme C2 sachant que la modélisation du palier est linéaire.



**Figure 4.11** - Comparaison des efforts au palier obtenus avec les carters C1 et C2 pour  $\Delta t = 10^{-5}$  s - cas sans torsion

Au moyen d'une transformée de FOURIER classique entre  $t = 0$  et  $t = 3,5$  s (c'est-à-dire après la prise de contact), l'analyse fréquentielle du déplacement des structures au niveau du contact arbre-diaphragme est illustrée sur la figure 4.13. En comparant ces résultats au spectre fréquentiel de chacune des structures<sup>2</sup> en l'absence de contact pour  $t \in [0, 3$  s] (cf. figure 4.12), il apparaît que, dans le cas du contact, le spectre fréquentiel des deux structures est composé de la fréquence propre du carter (100,6 Hz), des fréquences propres du rotor dans le cas où il n'y a pas contact, ainsi que des fréquences de réponse communes aux deux structures. Ces dernières correspondent au spectre des efforts de contact, illustrant ainsi le couplage des structures.

Le tableau 4.2 regroupe les principaux résultats obtenus pour les carters C1 et C2 dans le cas sans torsion. Les efforts aux paliers calculés ne varient que légèrement pour les différents pas de temps considérés et on constate encore que la pénétration résiduelle

2. Avant le premier contact, la réponse du stator est nulle. Ainsi, le spectre fréquentiel du diaphragme C2 tracé sur la figure 4.12 correspondant à la réponse libre du stator après avoir subi un impact.

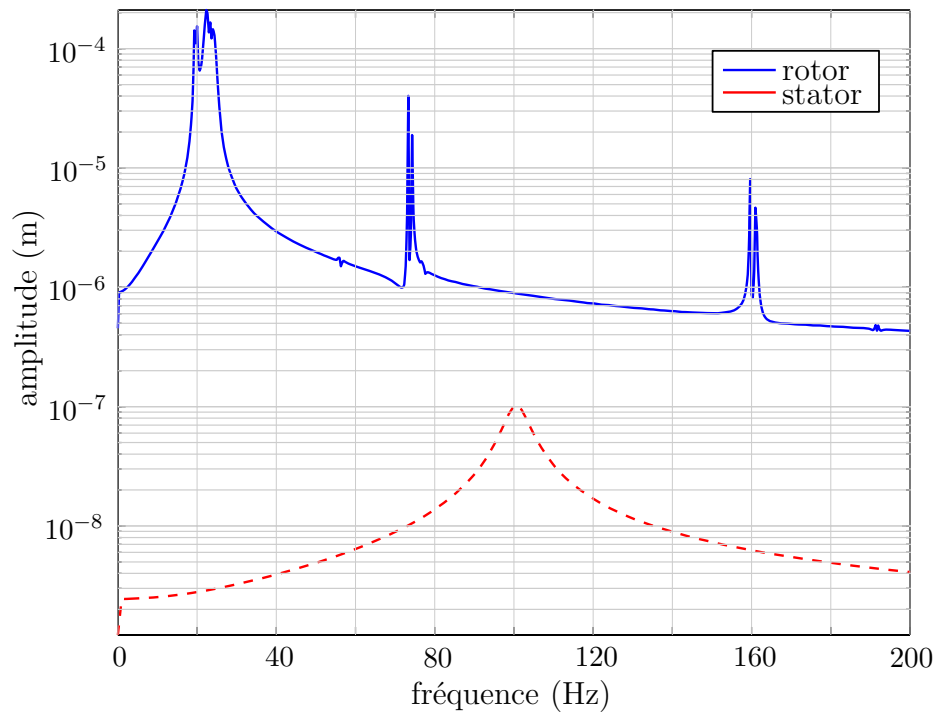


Figure 4.12 - Spectre fréquentiel de la réponse du rotor et du diaphragme C2 sans contact

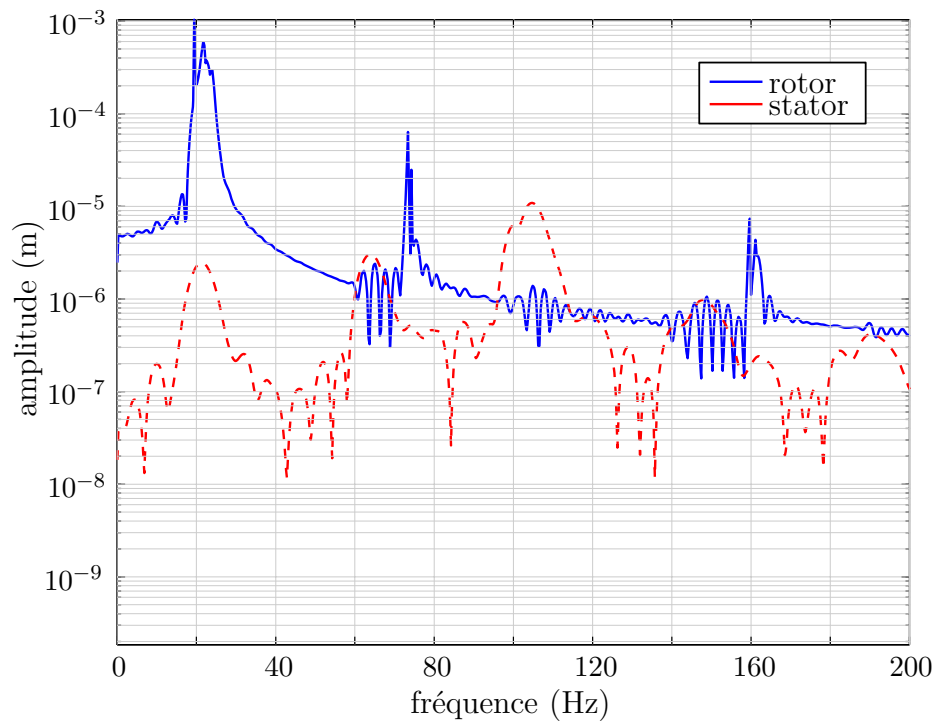


Figure 4.13 - Spectre fréquentiel de la réponse couplé rotor-stator avec le diaphragme C2

diminue avec le pas de temps.

(a) Carter C1			
$\Delta t$ (s)	Temps CPU (s)	Effort maximal au palier ( $10^5\text{N}$ )	Pénétration résiduelle ( $\mu\text{m}$ )
$10^{-5}$	2007	3,5424	0,76720
$5 \cdot 10^{-6}$	4389	3,5490	0,22468
$10^{-6}$	24292	3,5309	0,01492
$5 \cdot 10^{-7}$	47980	3,5296	0,01636
(b) Carter C2			
$\Delta t$ (s)	Temps CPU (s)	Effort maximal au palier ( $10^5\text{N}$ )	Pénétration résiduelle ( $\mu\text{m}$ )
$10^{-5}$	2012	3,7041	0,74075
$5 \cdot 10^{-6}$	4431	3,7437	0,14734
$10^{-6}$	22458	3,7343	0,00836
$5 \cdot 10^{-7}$	44186	3,7295	0,00451

**Tableau 4.2** - Résumé des résultats pour les carters C1 et C2 - cas sans torsion

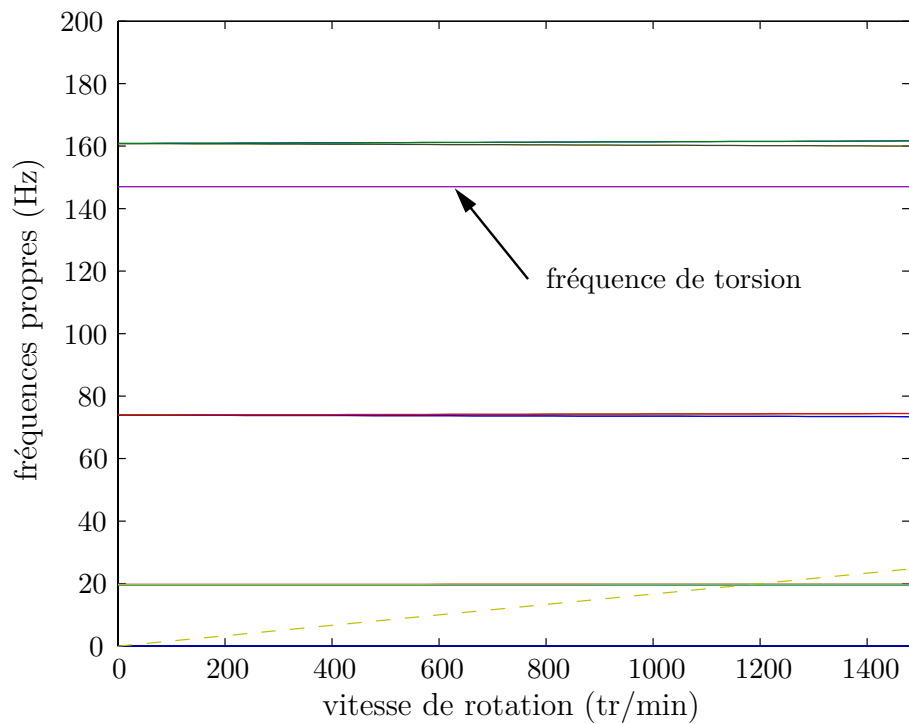
### 4.1.2 Prise en compte de la torsion

La torsion est maintenant prise en compte dans les équations du mouvement et les résultats sont présentés de manière analogue à la section précédente. L'objectif consiste alors à évaluer l'importance des phénomènes associés à la torsion sur la réponse du rotor, pour savoir si ces derniers pourront être éventuellement négligés par la suite.

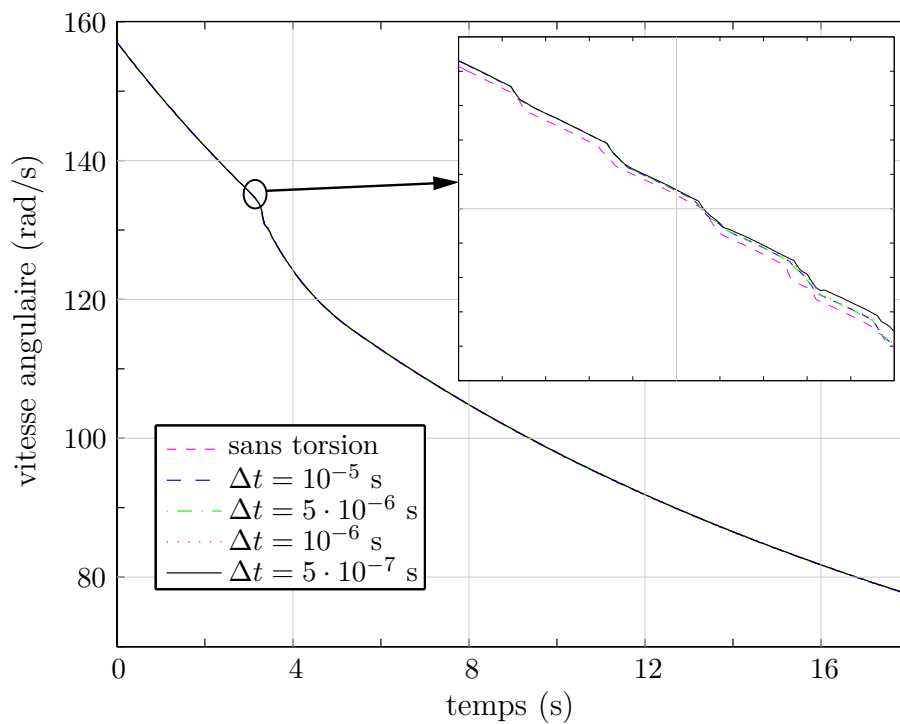
Le diagramme de CAMPBELL est donné figure 4.14 : aux fréquences propres de flexion (cf. figure 3.9) viennent s'ajouter celles de torsion (1<sup>ère</sup> fréquence à 147.05 Hz) ainsi qu'un mode de rotation rigide à 0 Hz, étant donné que l'arbre est libre en rotation.

La vitesse angulaire obtenue avec le carter C1 est comparée à celle calculée précédemment où la torsion était omise (cf. figure 4.15). La vitesse angulaire est similaire pour les différents pas de temps et la solution calculée avec torsion semble osciller autour de la vitesse de rotation obtenue par le modèle sans torsion : ceci s'explique par le couplage fort entre la torsion et l'accélération angulaire du rotor. La convergence des déplacements est encore obtenue (cf. figure 4.16) et la condition de pénétration respectée comme l'illustre la figure 4.17.

L'algorithme non linéaire permet de calculer l'accélération angulaire d'une section droite du rotor, illustrée dans la figure 4.18, ainsi que l'angle de torsion (cf. figure 4.19), mais ces quantités diffèrent selon les pas de temps. Le couplage fort entre l'accélération angu-

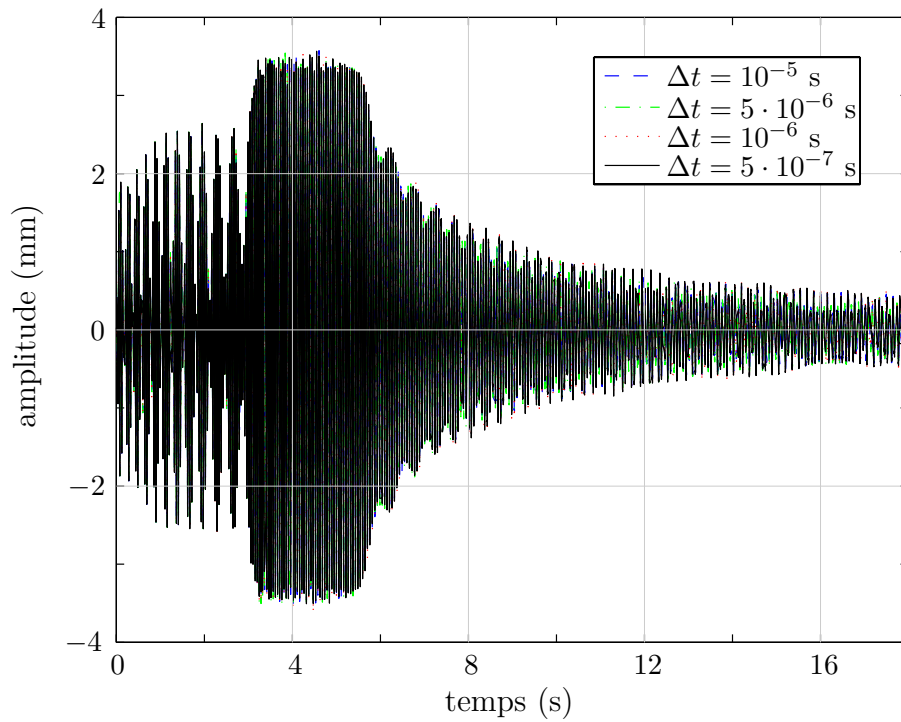


**Figure 4.14** - Diagramme de Campbell du modèle simple avec prise en compte de la torsion

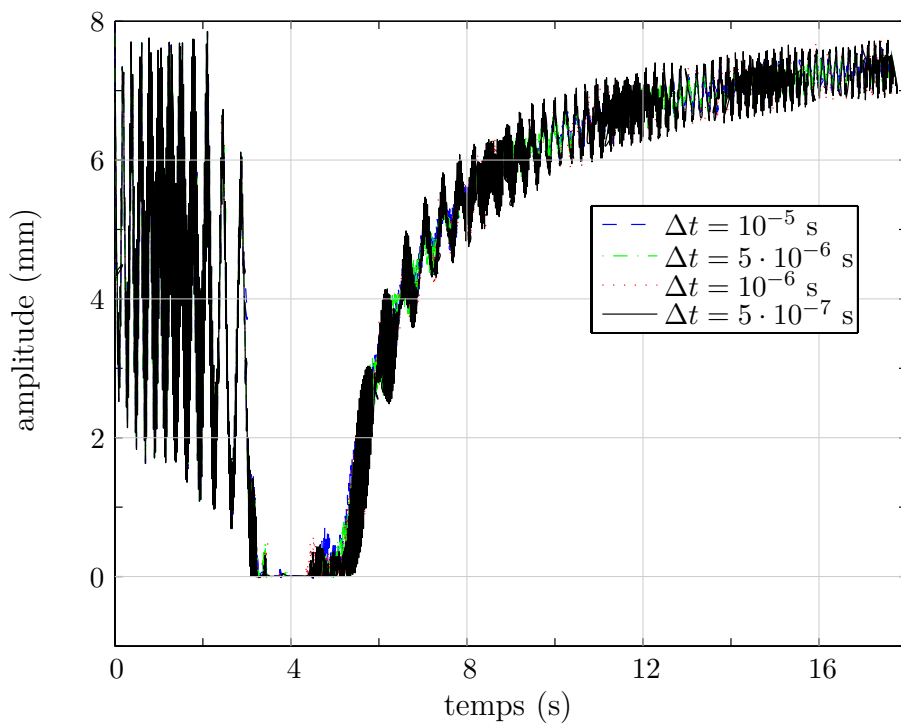


**Figure 4.15** - Vitesse angulaire avec le carter C1 pour différents pas de temps en considérant la vibration de torsion



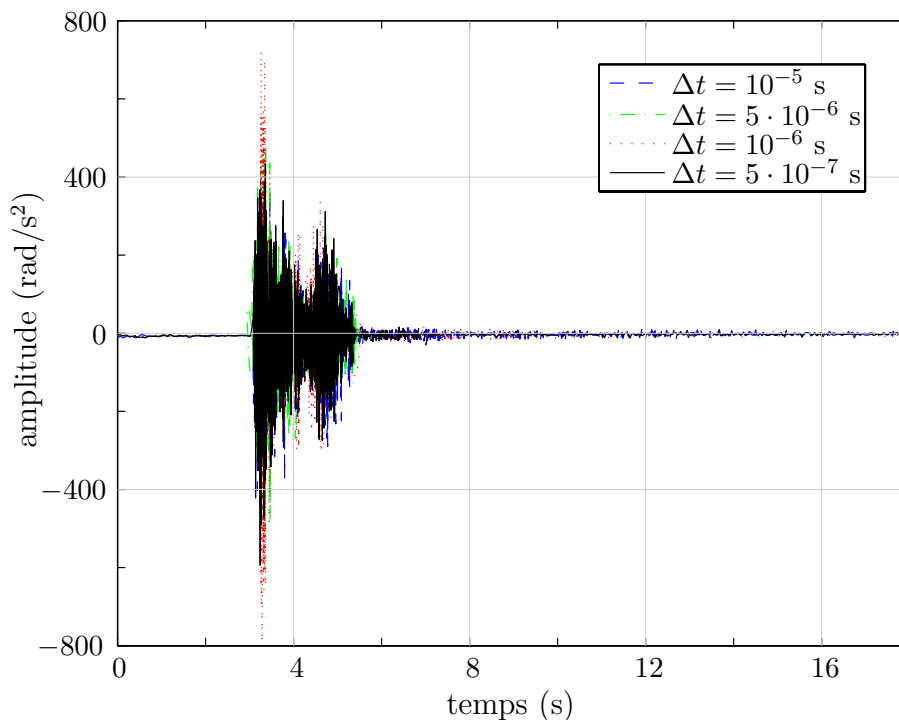


**Figure 4.16** - Déplacement vertical du nœud 2 du rotor en considérant le carter C1 avec différents pas de temps - cas avec torsion



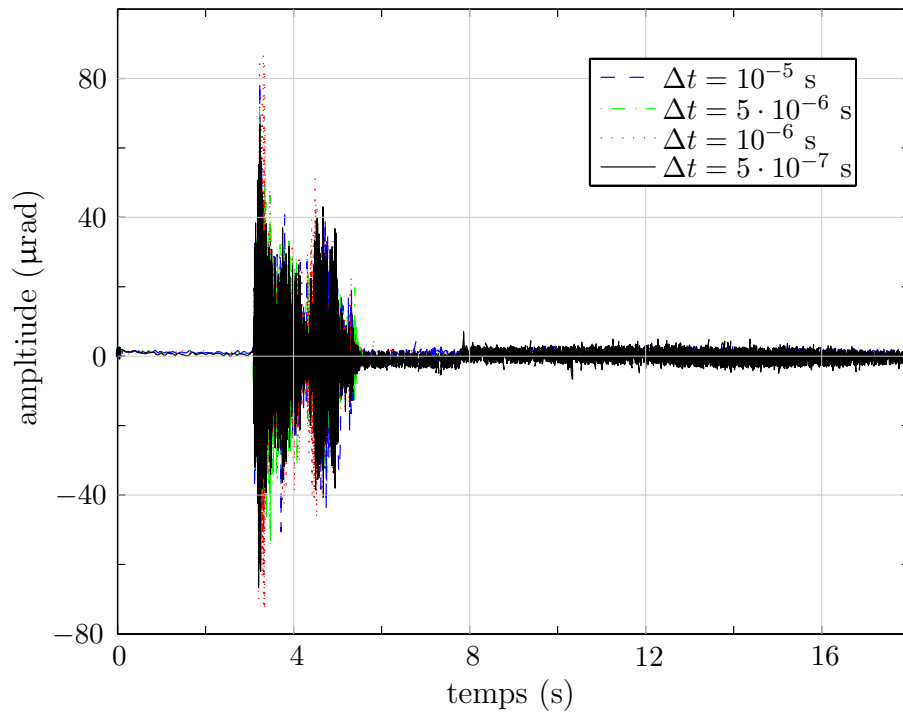
**Figure 4.17** - Fonction jeu en considérant le carter C1 avec différents pas de temps - cas avec torsion

laire  $\dot{\varphi}$  et l'accélération de torsion  $\ddot{\beta}$ , auquel s'ajoute un couplage faible entre la variable de torsion et les petites rotations de flexion du rotor d'une part (effets gyroscopiques dans l'équation (1.6)) et les déplacements de flexion de la ligne d'arbres d'autre part (cf. équation (1.8)), rendent complexe l'analyse du cas où la torsion est considérée. Des analyses fréquentielles au moyen de transformées de FOURIER ont été réalisées sur la réponse de la ligne d'arbres. Ainsi, comme dans le cas sans torsion, le contenu fréquentiel de la réponse du rotor en flexion correspond au diagramme de CAMPBELL. Les fréquences de la vibration de torsion (cf. figure 4.19) sont données sans contact figure 4.20 et avec contact figure 4.21. Avant l'interaction rotor-stator, le contenu fréquentiel de torsion fait apparaître la pulsation propre de torsion et d'autres composantes : ces dernières correspondent aux termes non linéaires provenant de la modélisation, mais il faut relativiser leur influence sachant qu'ils sont du second ordre. Lorsque le contact frottant a lieu, on voit que la réponse en torsion est dominée par le premier mode propre de torsion. On remarque également une autre contribution importante à 133,3 Hz qui est probablement associée aux non linéarités présentes dans le modèle, mais qui ne vient pas du contact car présente aussi avant son apparition, cf. figure 4.20.

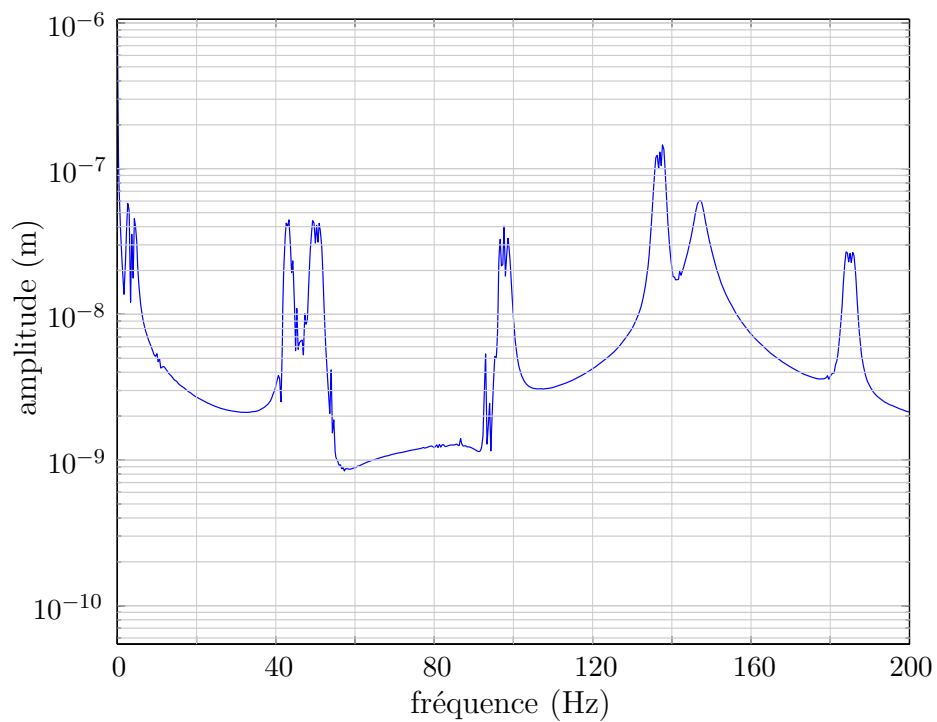


**Figure 4.18** - Accélération angulaire totale  $\dot{\varphi} + \dot{\beta}$  de la section en amont du rotor avec le carter C1 pour différents pas de temps - cas avec torsion

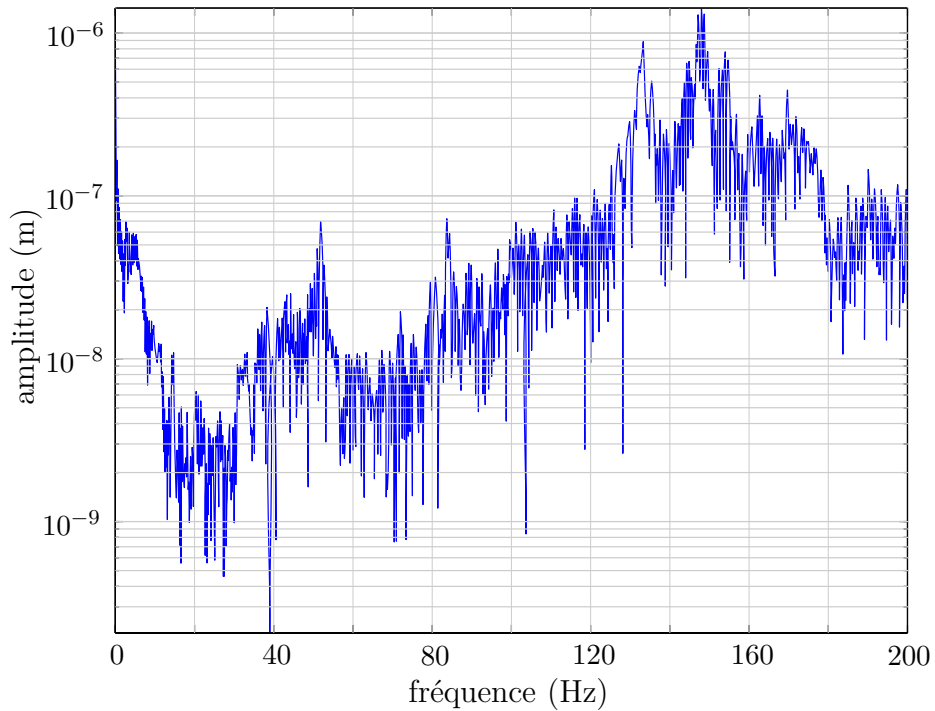
Les simulations ont ensuite été lancées en considérant le carter C2. Les conclusions obtenues sur le diaphragme rigide restent valables pour le stator C2. Ainsi, la convergence des déplacements vis-à-vis du pas de temps ainsi que celle de la vitesse angulaire demeurent, comme l'illustrent les figures 4.22. et 4.23. On constate que l'angle de torsion, dépeint sur la figure 4.25, atteint des valeurs plus faibles par rapport à celui calculé avec le modèle C1.



**Figure 4.19** - Angle de torsion avec le carter C1 pour différents pas de temps

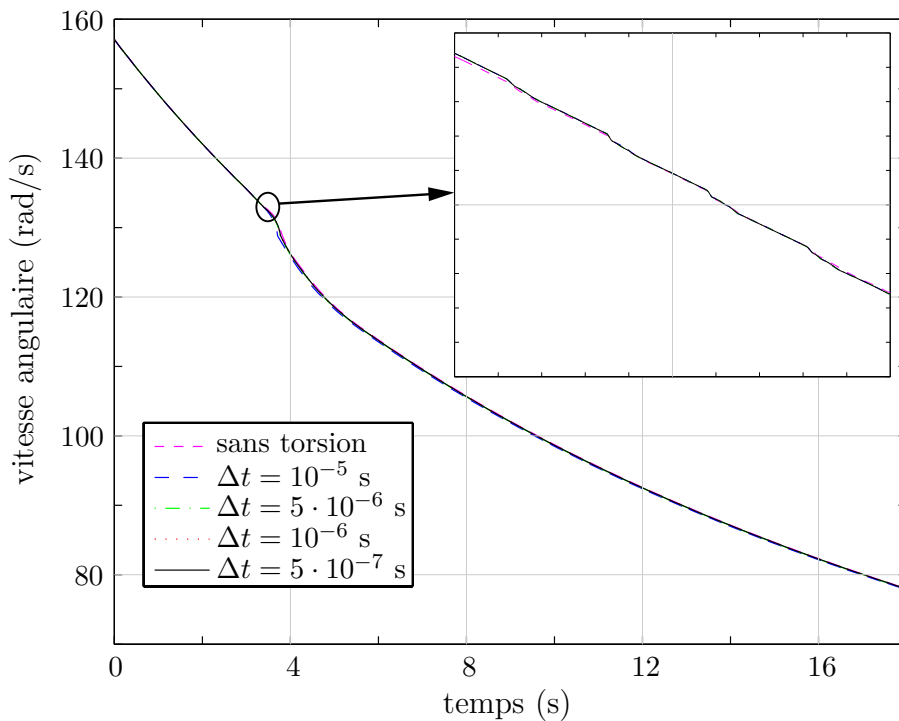


**Figure 4.20** - Spectre fréquentiel de l'angle de torsion du rotor sans contact avec le carter C1



**Figure 4.21** - Spectre fréquentiel de l'angle de torsion du rotor avec contact rotor-carter C1

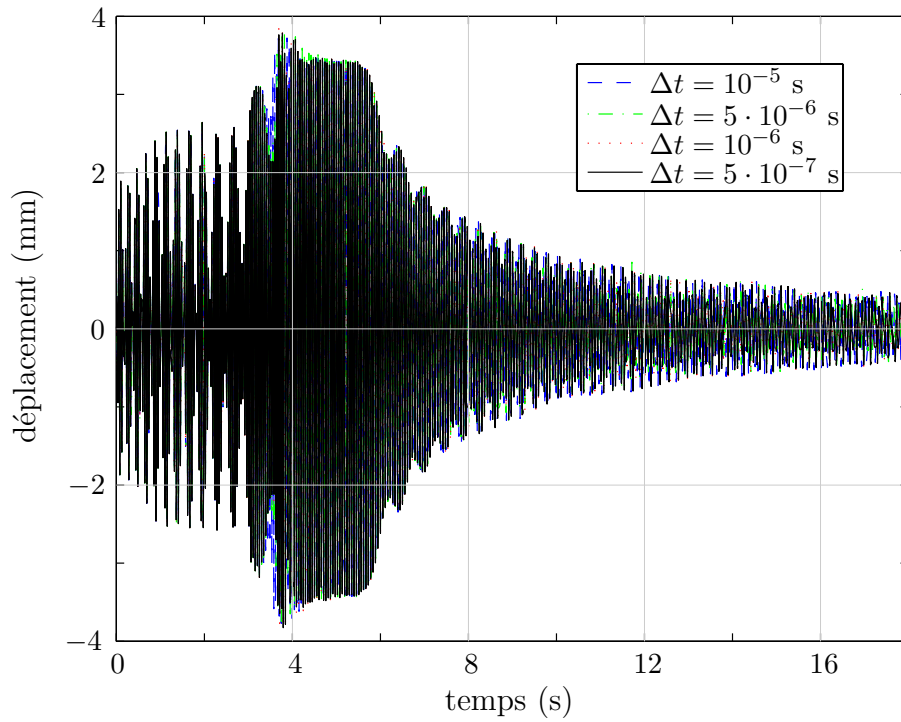
Ceci s'explique par des contacts plus brefs entre l'arbre et le diaphragme (cf. figure 4.24) car ce dernier est mobile. La condition d'imperméabilité entre les structures est une fois



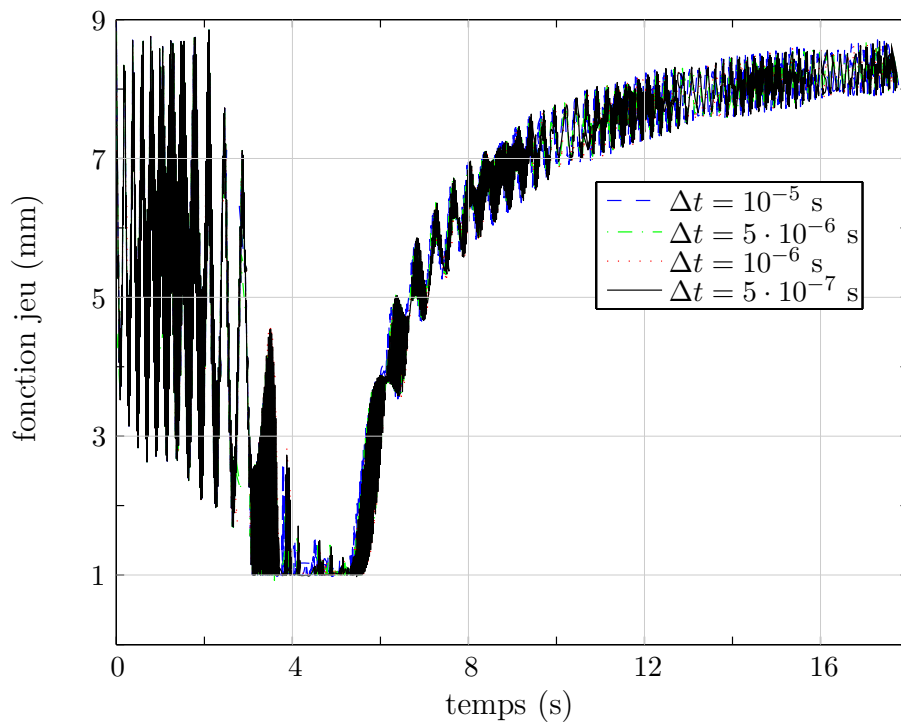
**Figure 4.22** - Vitesse angulaire du rotor en contact avec le carter C2 - cas avec torsion

encore respectée.

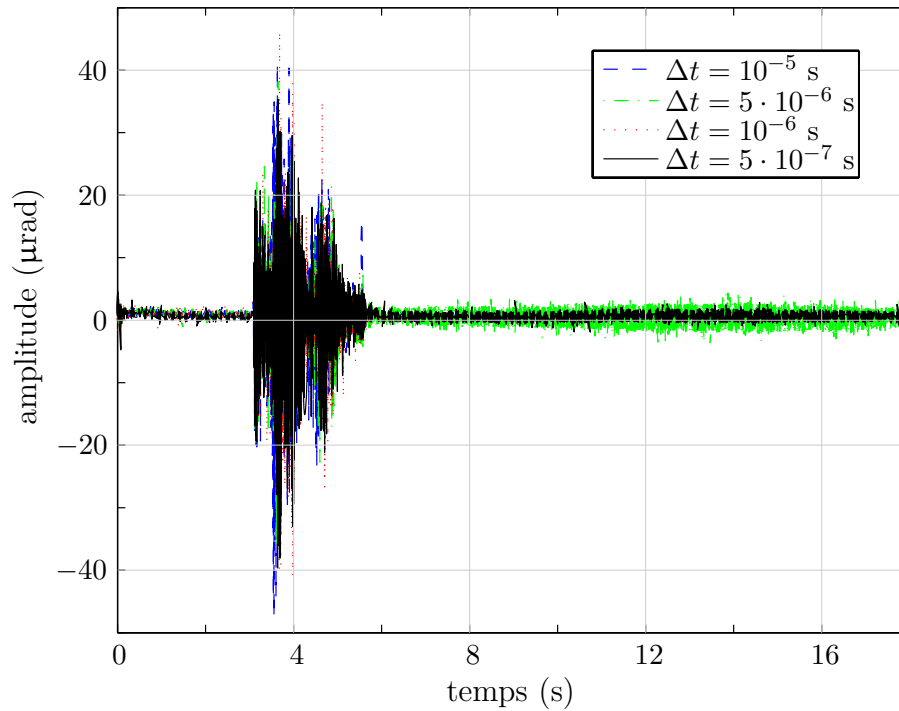
Les résultats obtenus pour les carters C1 et C2 avec la torsion sont récapitulés dans le



**Figure 4.23** - Déplacement du nœud 2 de rotor avec la carter C2 - cas avec torsion



**Figure 4.24** - Fonction distance entre le rotor et le carter C2 lorsque la vibration de torsion est considérée



**Figure 4.25** - Angle de torsion calculé lors de contacts avec le carter C2

tableau 4.3. Pour un modèle donné de diaphragme, les efforts aux paliers ne varient que très peu pour les pas de temps considérés, et la tendance sur l'évolution décroissante de la pénétration résiduelle au fur et à mesure que le pas de temps diminue est confirmée.

(a) Carter C1			
$\Delta t$ (s)	Temps CPU (s)	Effort maximal au palier ( $10^5\text{N}$ )	Pénétration résiduelle ( $\mu\text{m}$ )
$10^{-5}$	2738	3,4427	0,69885
$5 \cdot 10^{-6}$	5456	3,4632	0,24114
$10^{-6}$	26684	3,4244	0,00807
$5 \cdot 10^{-7}$	53111	3,5539	0,00205
(b) Carter C2			
$\Delta t$ (s)	Temps CPU (s)	Effort maximal au palier ( $10^5\text{N}$ )	Pénétration résiduelle ( $\mu\text{m}$ )
$10^{-5}$	2882	3,4134	0,73717
$5 \cdot 10^{-6}$	5674	3,3756	0,30637
$10^{-6}$	28148	3,4628	0,00864
$5 \cdot 10^{-7}$	56131	3,4237	0,00501

**Tableau 4.3** - Résumé des résultats pour les carters C1 et C2 - cas avec torsion

### 4.1.3 Conclusion intermédiaire

Les simulations effectuées avec des modèles simples de diaphragme ont permis de mettre en évidence la convergence des résultats vis-à-vis du pas de temps concernant les déplacements et la vitesse de rotation calculée en fonction des efforts qui s'exercent sur la turbine. Cependant, les impacts étant dominants dans la réponse du rotor, on ne peut pas évaluer de façon fiable les efforts de contact.

Lorsque la formulation avec la vibration de torsion est utilisée, l'algorithme non linéaire calcule une solution en torsion à contenu fréquentiel très riche. Par rapport au modèle sans torsion, on constate également que le temps CPU avec torsion est sensiblement plus élevé, alors que les efforts aux paliers, qui permettent de vérifier le dimensionnement d'une turbine, sont très proches. Par conséquent, les calculs seront effectués ultérieurement en ne considérant pas la torsion.

## 4.2 Carter flexible C3 plan

Pour avoir une meilleure représentation de l'interaction (cf. section 1.3.2), un modèle de diaphragme flexible est maintenant utilisé. Composé d'une couronne intérieure flexible (poutres courbes) et d'aubes fixes (poutres courbes), les caractéristiques mécaniques du diaphragme sont données dans le tableau 4.4. Différentes approximations ont été proposées pour localiser le point de contact (cf. section 2.1.2.2). L'influence de chacune d'entre elles à la discrétisation temporelle est tout d'abord étudiée, les résultats étant par la suite comparés. L'objectif est de diminuer le temps CPU, tout en conservant une bonne précision sur les quantités d'intérêt.

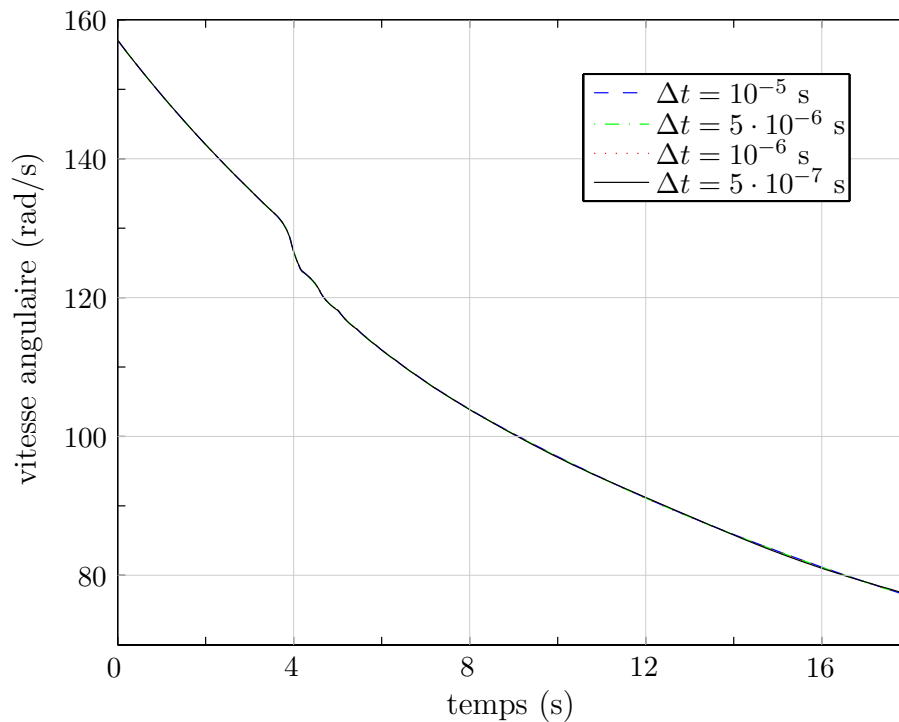
### 4.2.1 Hypothèse de détection de contact 1

Pour éviter dans un premier temps une recherche non linéaire du point de contact, on suppose que le lieu du contact sur le diaphragme a la même position angulaire que le centre du rotor. La simplicité de cette hypothèse en terme de programmation en fait une approximation peu coûteuse en temps de calcul.

Une fois implantée dans l'outil numérique, on constate qu'une fois encore la vitesse de rotation calculée, illustrée sur la figure 4.26, est similaire pour les différents pas de temps étudiés. Lors du transitoire de vitesse, on note des phases de contact persistant entre l'arbre et le diaphragme. Par conséquent, durant cette période, l'accélération angulaire (cf. figure 4.27), ainsi que les forces de contact (cf. figure 4.28) ont convergé vis-à-vis

(a) Propriétés matérielles de la couronne et des ailettes			
Module d'Young	$E_c$	200 GPa	
Coefficient de Poisson	$\nu_c$	0,3	
Masse volumique	$\rho_c$	7860 kg/m <sup>3</sup>	
(b) Couronne intérieure (poutres courbes)			
Rayon moyen $R_c$ :	0,5830m	Jeu initial	8mm
<i>Section droite</i> :	Largeur	10 <sup>-2</sup> m	
	Hauteur	10 <sup>-1</sup> m	
(c) Ailettes (poutres droites)			
Longueur d'une aube :	1,6m		
<i>Section droite</i> :	Largeur	4 · 10 <sup>-2</sup> m	
	Hauteur	12 · 10 <sup>-2</sup> m	

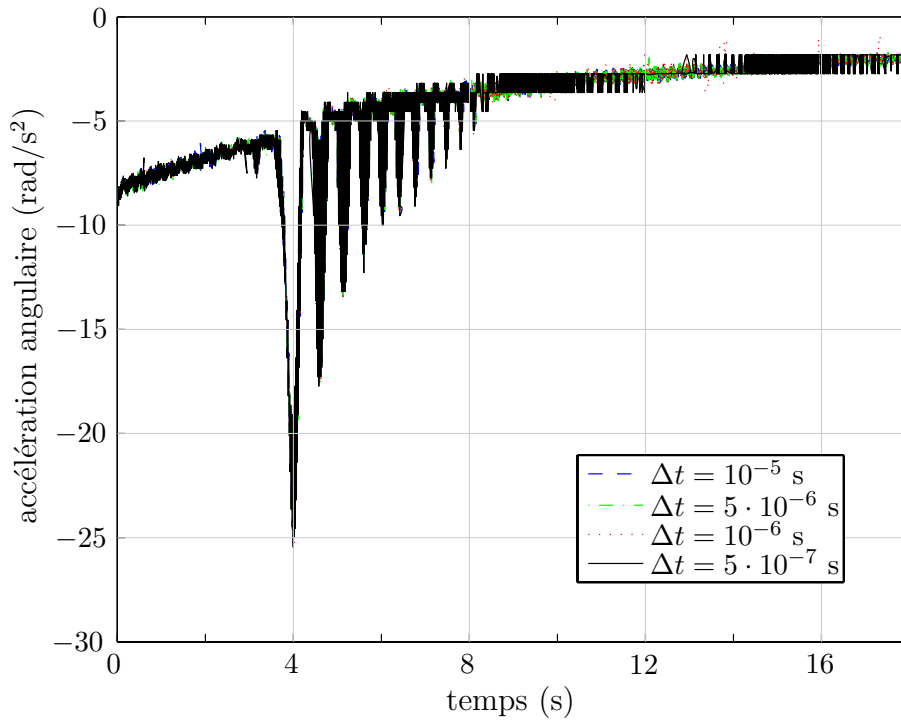
**Tableau 4.4** - Caractéristique mécanique du carter C3



**Figure 4.26** - Vitesse angulaire avec l'hypothèse 1 de détection de contact pour le carter C3 plan



du pas de temps. Le fait de considérer un carter flexible améliore la représentation du carter par rapport aux modèles rigides, et se traduit par des contacts moins sévères, c'est-à-dire avec un contact continu entre les structures pendant au moins quelques pas de temps consécutifs. De fait, les problèmes numériques avec les modèles de carter précédents disparaissent, et les lagrangiens calculés permettent d'évaluer avec précision les efforts de contact vus par les structures (cf. annexe D). Néanmoins, de légères perturbations en accélération angulaire subsistent après l'interaction avec le pas de temps  $\Delta t = 5 \cdot 10^{-7}$  s.



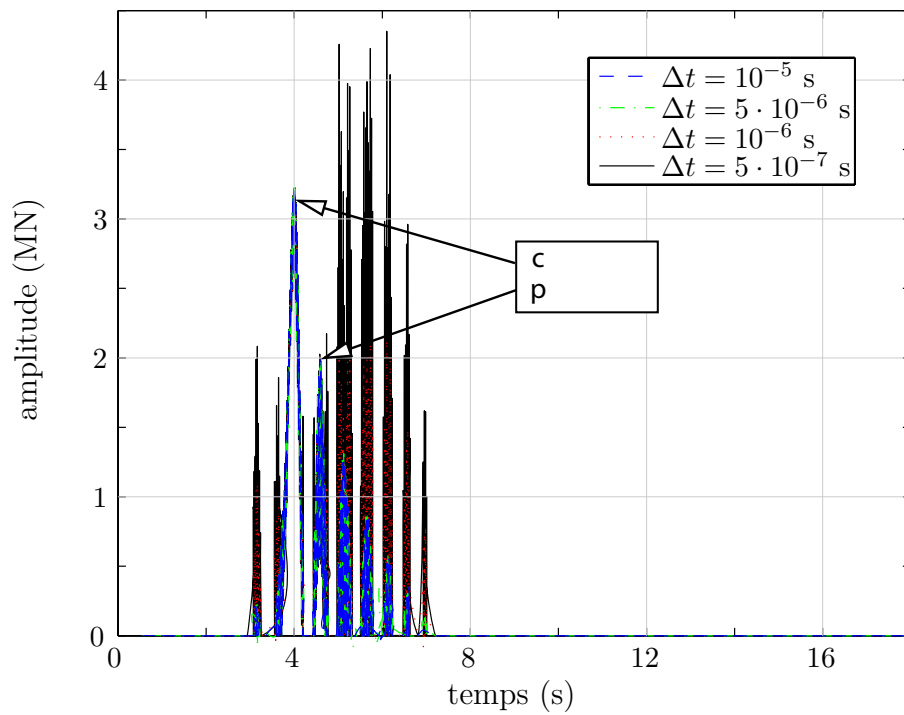
**Figure 4.27** - Accélération angulaire avec l'hypothèse 1 de détection de contact pour le carter C3 plan

La distance entre les structures en considérant l'approximation sur le point de contact du carter est illustrée sur la figure 4.29 : on observe des pénétrations résiduelles après correction par les multiplicateurs de LAGRANGE. Cependant, ces dernières restent négligeables, d'autant plus qu'elles disparaissent à mesure que le pas de temps diminue.

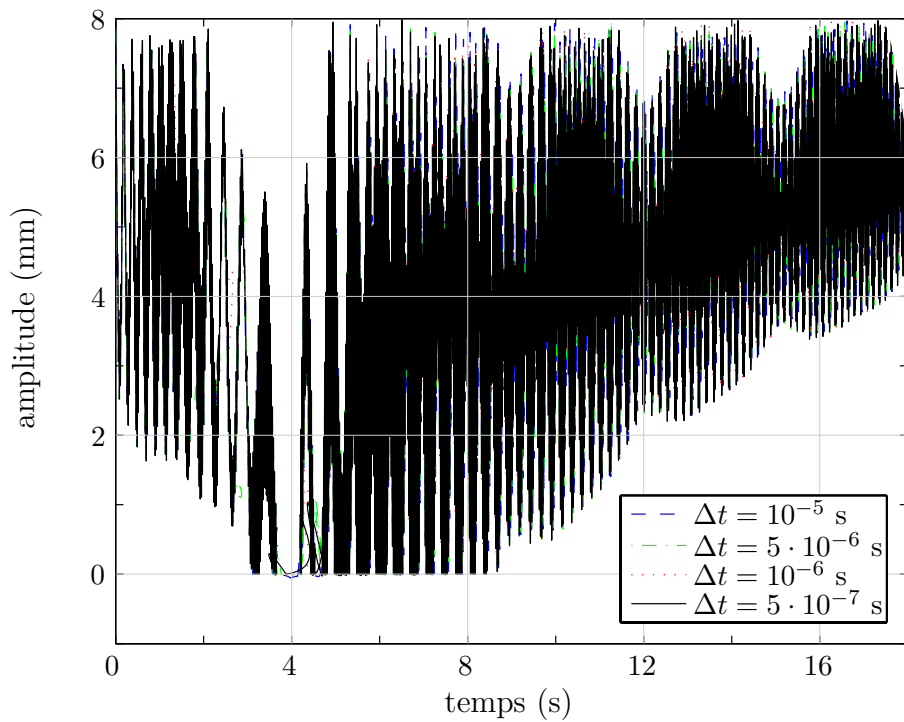
Enfin la convergence des déplacements de la ligne d'arbres (cf. figure 4.30) est obtenue, de même que celle des efforts au palier, voir figure 4.31.

## 4.2.2 Hypothèse de détection de contact 2

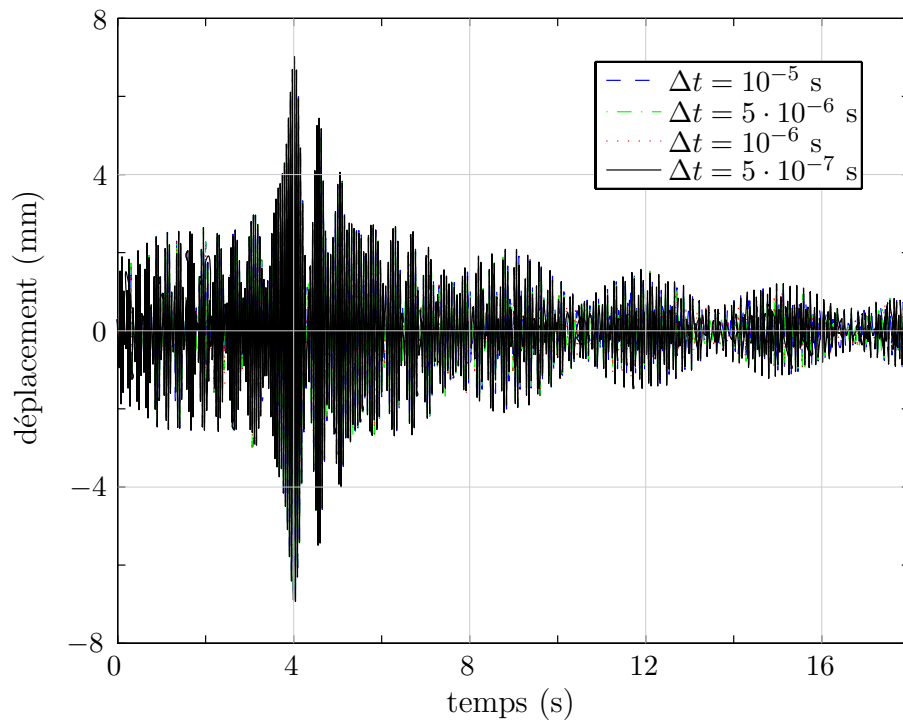
On effectue maintenant une recherche non linéaire du point de contact. Étant donné qu'il n'y a qu'un seul point de contact, on scanne chaque élément de la couronne interne du diaphragme, dans la configuration courante, pour savoir quel point du carter minimise globalement la fonction distance entre les structures. Cependant, la solution du problème



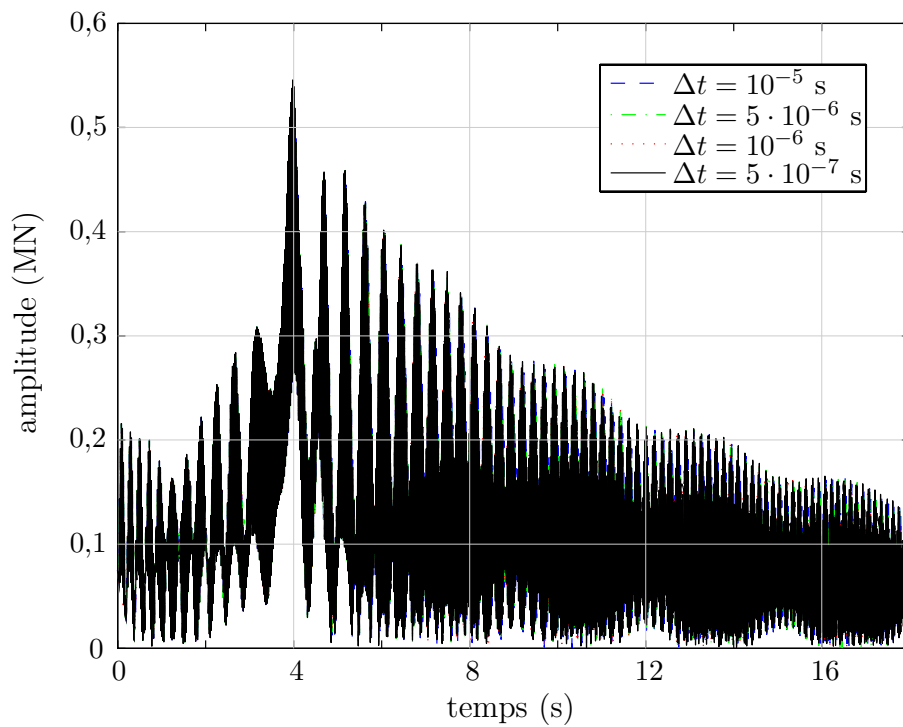
**Figure 4.28** - Effort de contact avec l'hypothèse 1 de détection de contact pour le carter C3 plan



**Figure 4.29** - Fonction jeu avec l'hypothèse de détection de contact 1 pour le carter C3 plan



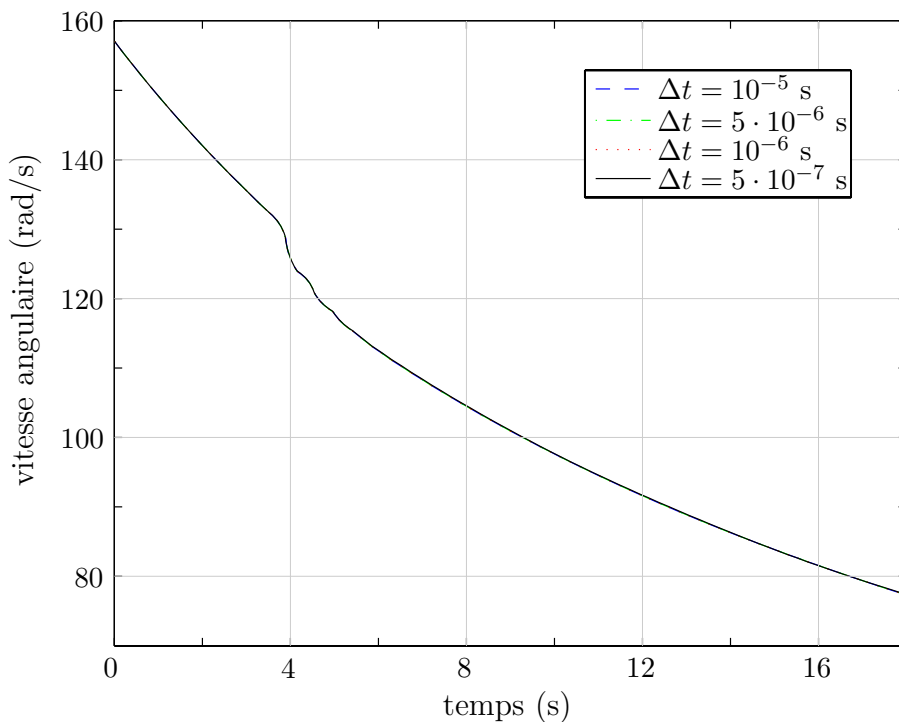
**Figure 4.30** - Déplacement du nœud 2 de la ligne d'arbres avec l'hypothèse de détection de contact 1 pour le carter C3 plan



**Figure 4.31** - Effort au palier avec l'hypothèse de détection de contact 1 pour le carter C3 plan

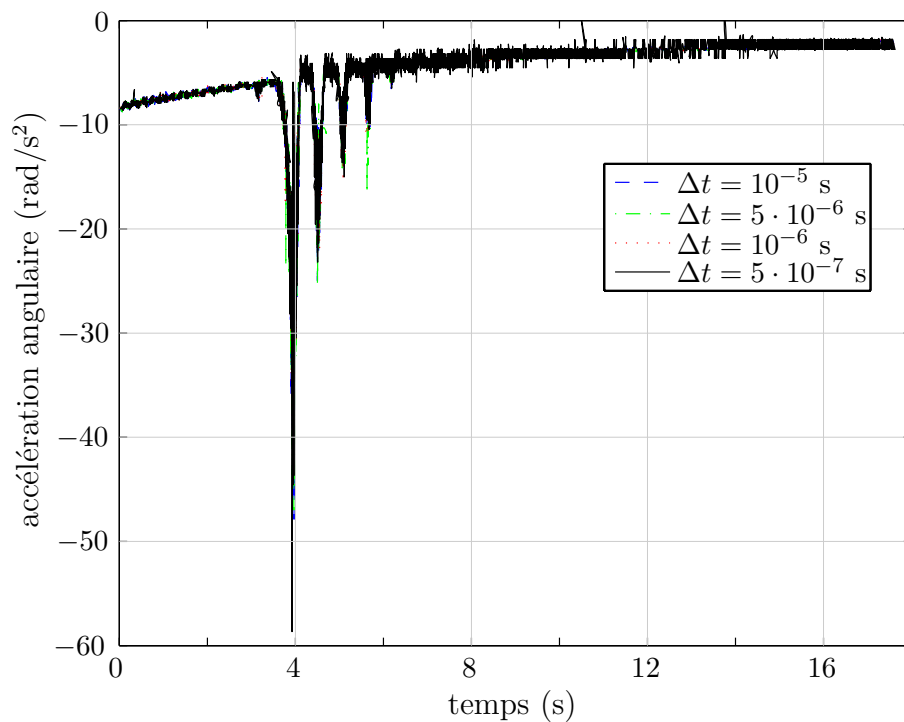
d'interaction rotor-stator nécessite, pour un pas de temps donné, de mettre à jour la position du point de contact dans le solveur itératif car le lieu du contact évolue en permanence avec la déformation du carter. Cette boucle sur les éléments de la couronne intérieure peut s'avérer extrêmement coûteuse car il faut recalculer à chaque itération le point de contact. Elle peut aussi poser des problèmes de convergence de calcul sachant que le point de contact change d'une itération à l'autre. Une alternative plus économe consiste à trouver le point de contact obtenu lors de l'étape de prédiction de l'algorithme temporel et à conserver sa position dans le solveur non linéaire.

Dans un premier temps, on s'intéresse à ce cas où la position du point de contact n'est pas mise à jour dans le solveur itératif. L'outil numérique permet alors de calculer la vitesse de rotation (cf. figure 4.32), les déplacements de la ligne d'arbres (cf. figure 4.36) ainsi que les efforts aux paliers, donnés figure 4.37. Des oscillations pour l'accélération angulaire, illustrée figure 4.33, subsistent en fin de calcul pour le pas de temps  $\Delta t = 5 \cdot 10^{-7}$  s .

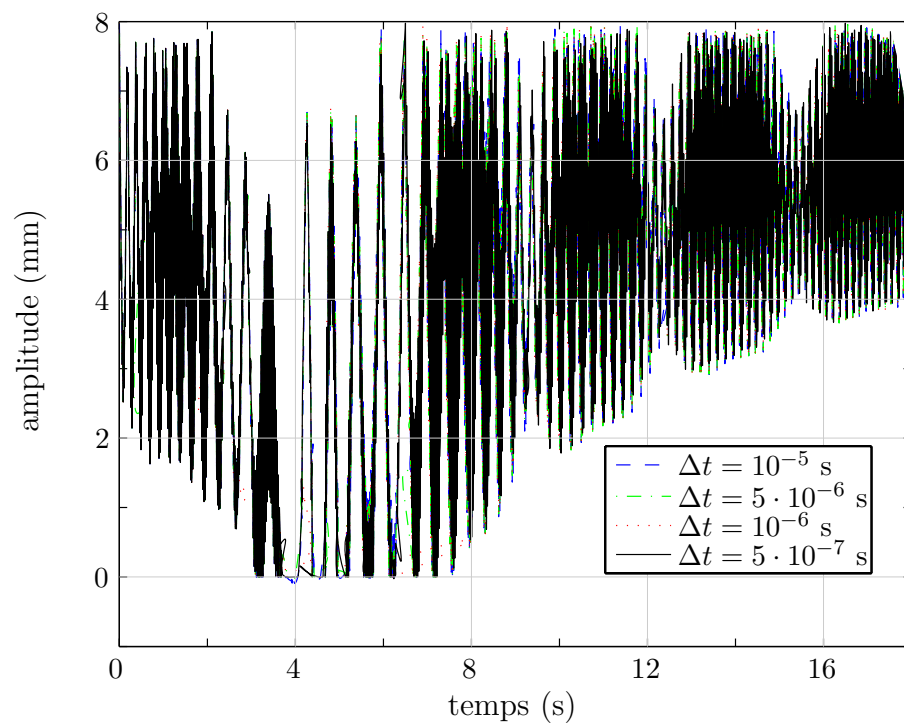


**Figure 4.32** - *Vitesse angulaire avec l'hypothèse de détection de contact 2, sans mise à jour du point de contact dans le solveur itératif, pour le carter C3 plan*

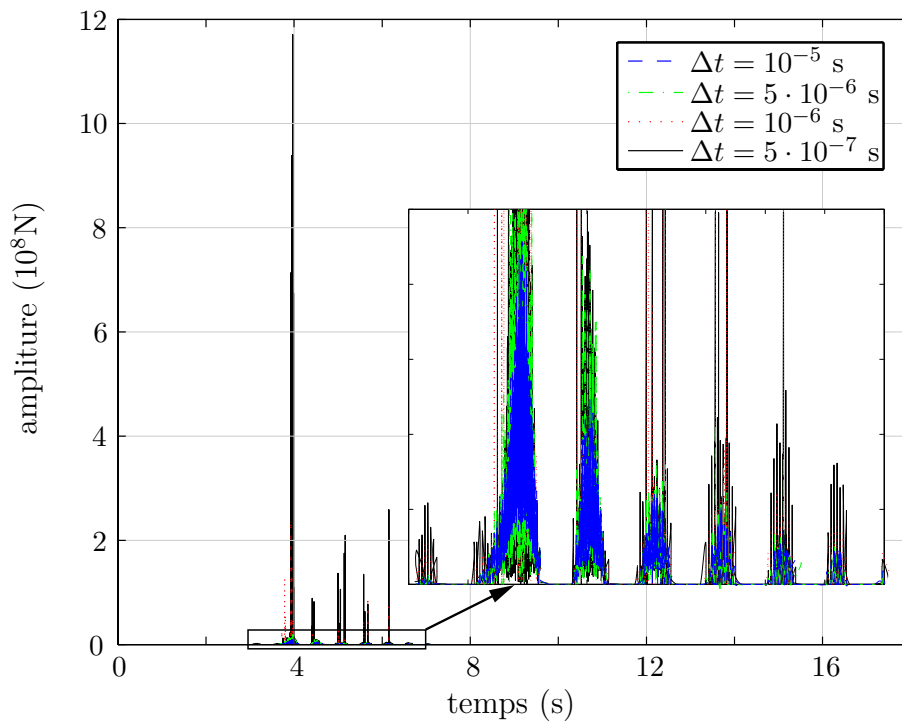
Le jeu disponible entre les deux structures flexibles est dépeint dans la figure 4.34 et le lagrangien dans la figure 4.35. L'effort de contact est plus élevé que celui calculé avec la première approximation sur la détection du contact. D'autre part, on constate que l'effort de contact calculé dépend de la valeur du pas de temps, bien que pourtant les contacts aient lieu pendant une durée finie. Ce phénomène est attribué à l'approximation sur la position du contact, qui rend la comparaison des résultats difficile pour des pas de temps différents.



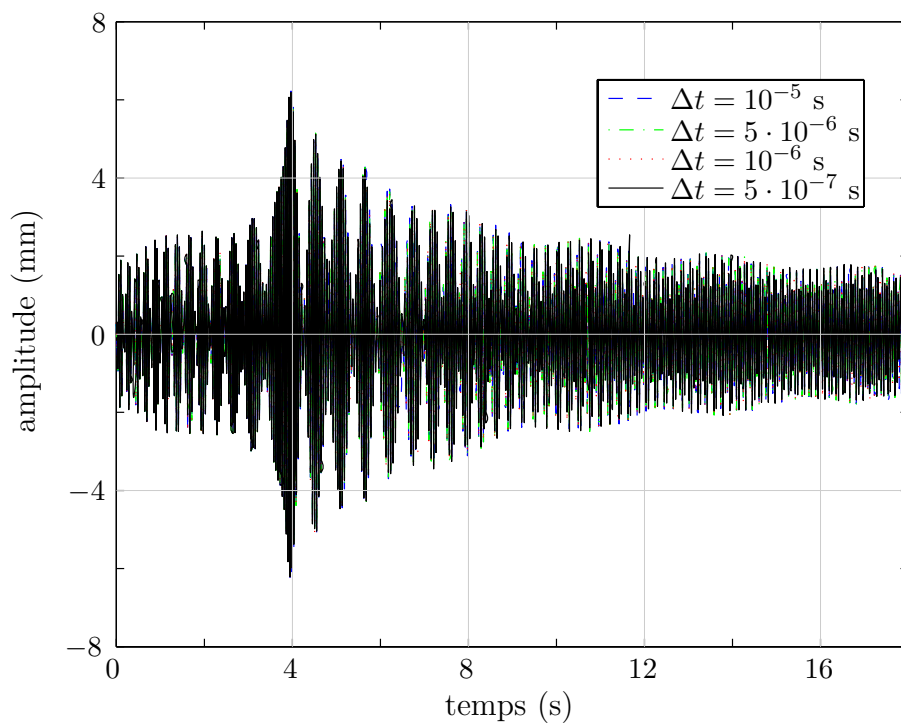
**Figure 4.33** - Accélération angulaire avec l'hypothèse de détection de contact 2, sans mise à jour du point de contact dans le solveur itératif, pour le carter C3 plan



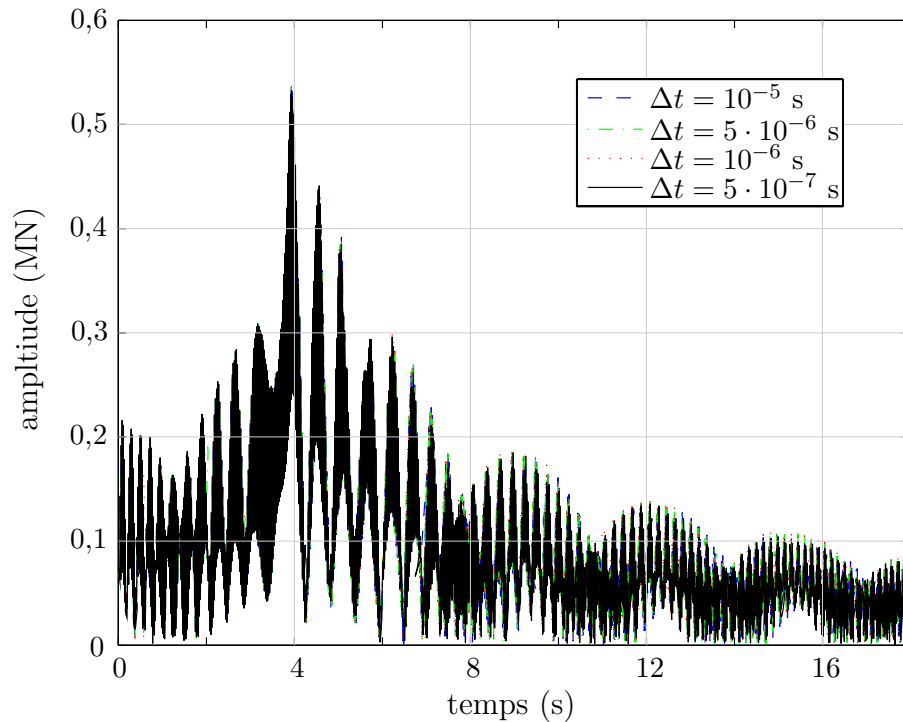
**Figure 4.34** - Jeu exact avec l'hypothèse de détection de contact 2, sans mise à jour du point de contact dans le solveur itératif, pour le carter C3 plan



**Figure 4.35** - Effort de contact avec l'hypothèse de détection de contact 2, sans mise à jour du point de contact dans le solveur itératif, pour le carter C3 plan



**Figure 4.36** - Déplacement du nœud 2 de la ligne d'arbres avec l'hypothèse de détection de contact 2, sans mise à jour du point de contact dans le solveur itératif, pour le carter C3 plan



**Figure 4.37** - Effort au palier avec l'hypothèse de détection de contact 2, sans mise à jour du point de contact dans le solveur itératif, pour le carter C3 plan

On choisit maintenant de mettre à jour la position du point de contact dans le solveur itératif et on présente les résultats de manière analogue. Ainsi, la vitesse de rotation et les déplacements calculés sont donnés dans les figures 4.38 et 4.42 : ces quantités sont convergées vis-à-vis du pas de temps. De même, l'effort maximum au palier, illustré sur la figure 4.43, est évalué de façon fiable.

Cependant, il faut distinguer deux aspects dans la réponse couplée des structures :

- la façon dont évolue le contact sur plusieurs pas de temps consécutifs : ceci permet de déterminer si le phénomène est de type impact ou contact persistant. Dans ce dernier cas, la position du contact reste dans le voisinage de celle correspondant à l'incrément de temps précédent ;
- le traitement numérique du contact à l'intérieur d'un pas de temps donné : le lieu du point de contact peut alors changer radicalement entre deux itérations de l'algorithme de résolution non linéaire. Étant donné que le rayon extérieur de l'arbre est proche de celui de la couronne intérieure du diaphragme, il peut en résulter un comportement de type impact si la couronne interne se déforme.

Il en résulte que les forces de contact (cf. figure 4.41) ou encore l'accélération angulaire (cf. figure 4.39) dépendent du pas de temps.

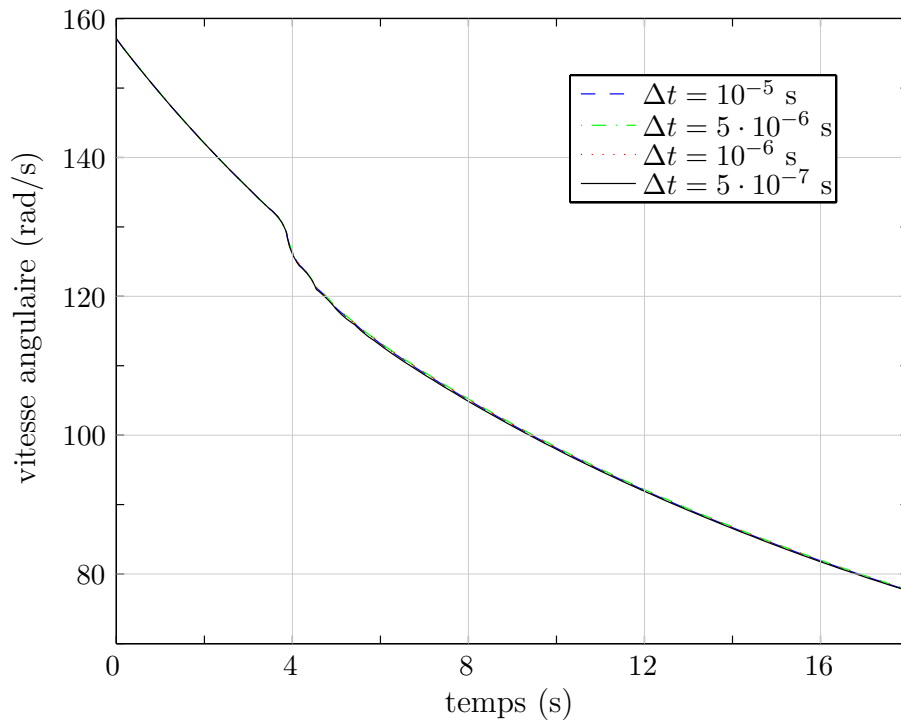


Figure 4.38 - Vitesse angulaire avec une détection exacte du contact pour le carter C3 plan

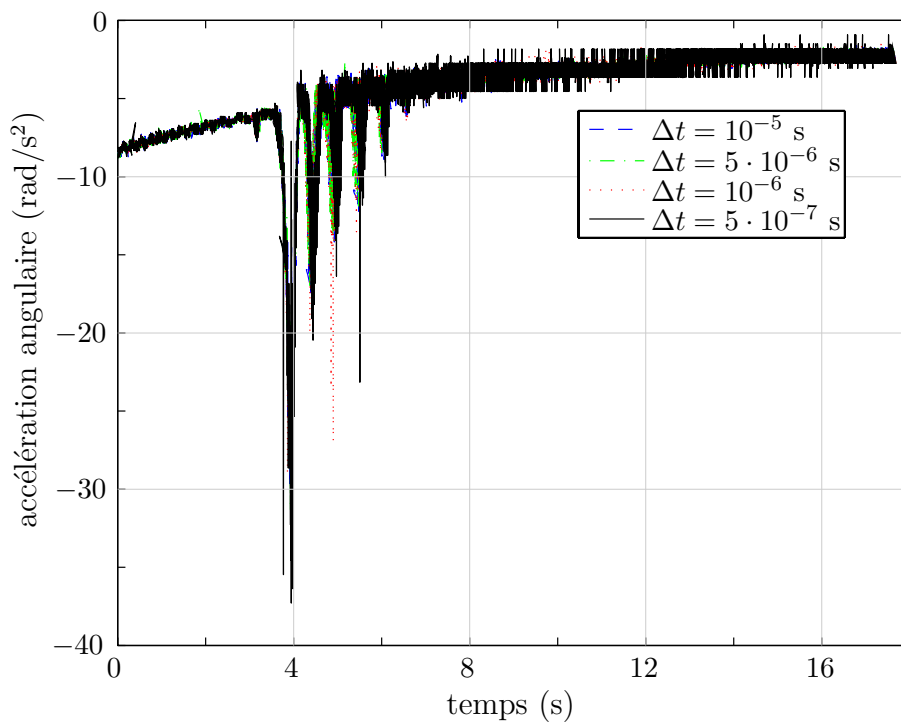


Figure 4.39 - Accélération angulaire avec une détection exacte du contact pour le carter C3 plan



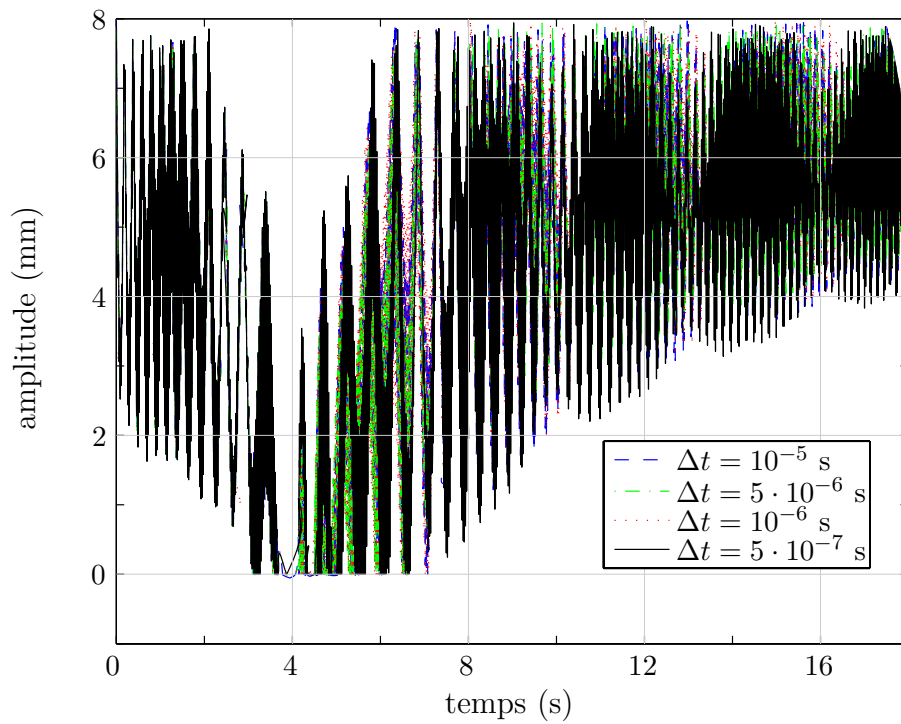


Figure 4.40 - Fonction jeu avec une détection exacte du contact pour le carter C3 plan

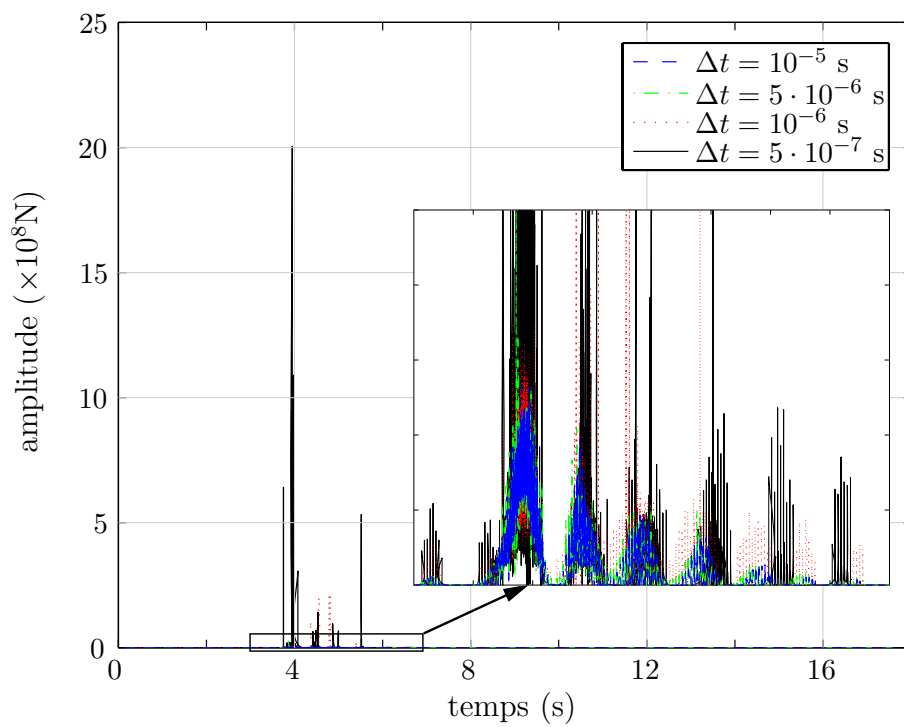
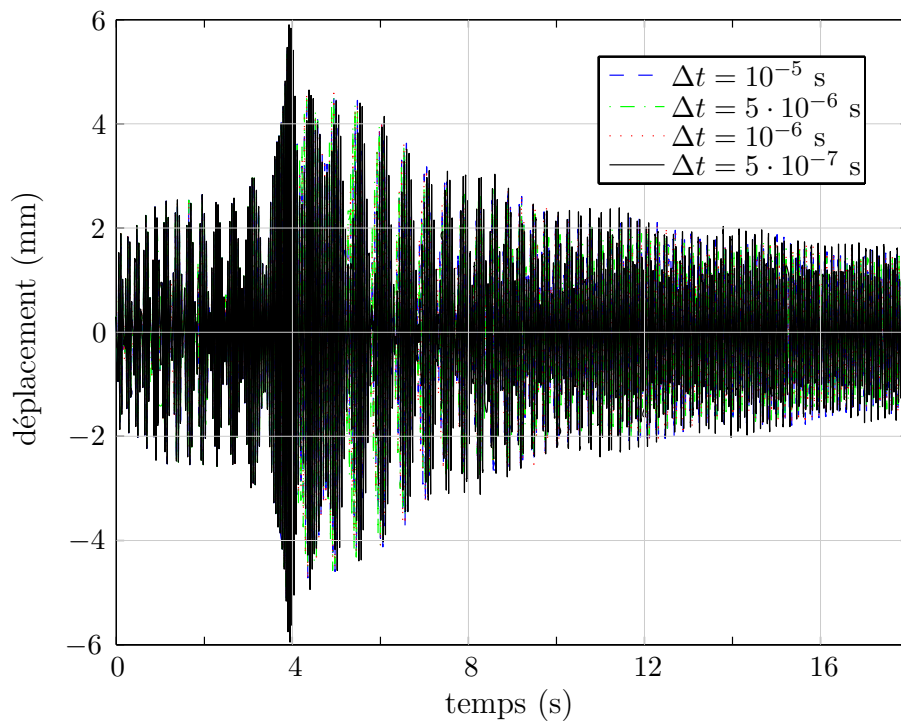
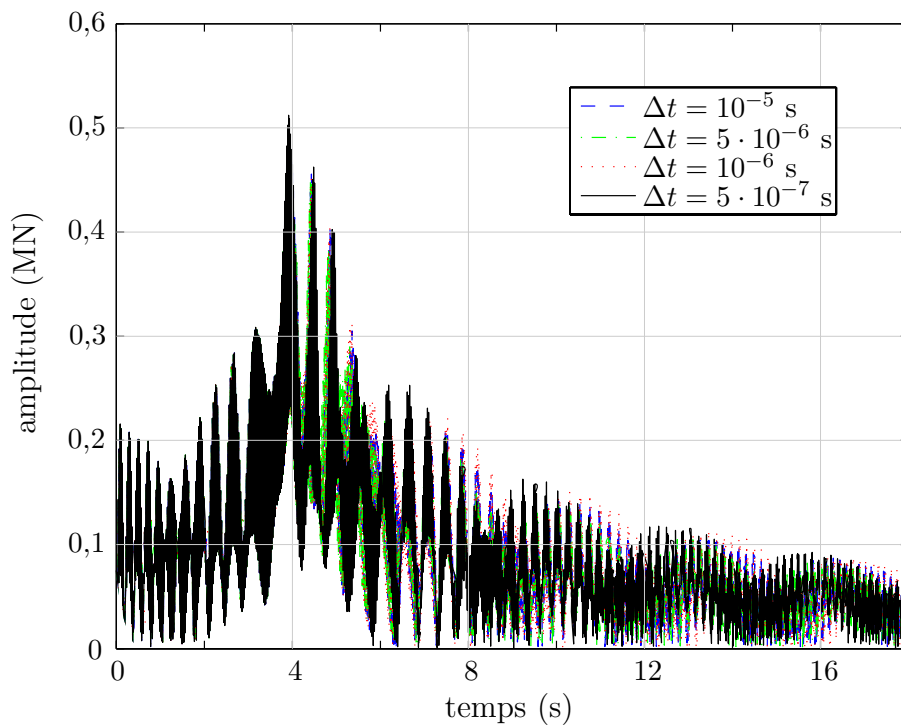


Figure 4.41 - Effort de contact avec une détection exacte du contact pour le carter C3 plan



**Figure 4.42** - Déplacement du nœud 2 de la ligne d'arbres avec une détection exact du contact pour le carter C3 plan

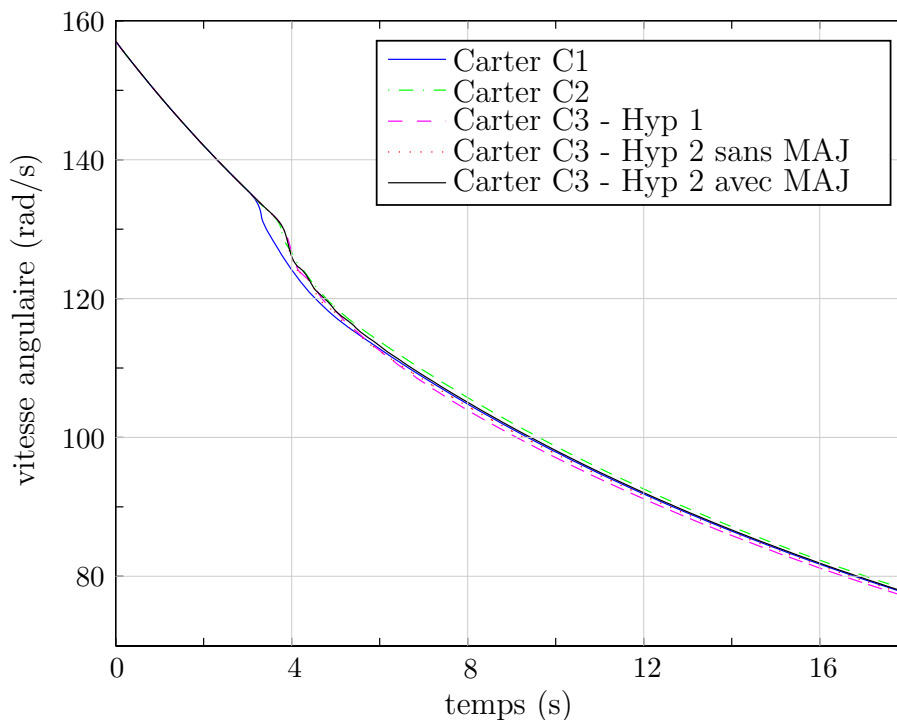


**Figure 4.43** - Effort au palier avec une détection exact du contact pour le carter C3 plan

### 4.2.3 Comparaison des résultats pour le carter C3 plan

Les résultats précédents ont été obtenus selon deux niveaux d'approximations pour la détection de contact. La première, notée Hyp 1, suppose que le point de contact a la même position angulaire que le centre géométrique du rotor. La seconde calcule exactement le lieu du contact lors de l'étape de prédiction dans la procédure d'intégration temporelle : la position de ce dernier peut alors être réactualisée dans le processus itératif de l'algorithme de résolution non linéaire (Hyp 2 - avec MAJ) ou non (Hyp 2 - sans MAJ). L'influence de l'hypothèse sur la détection du contact est maintenant étudiée.

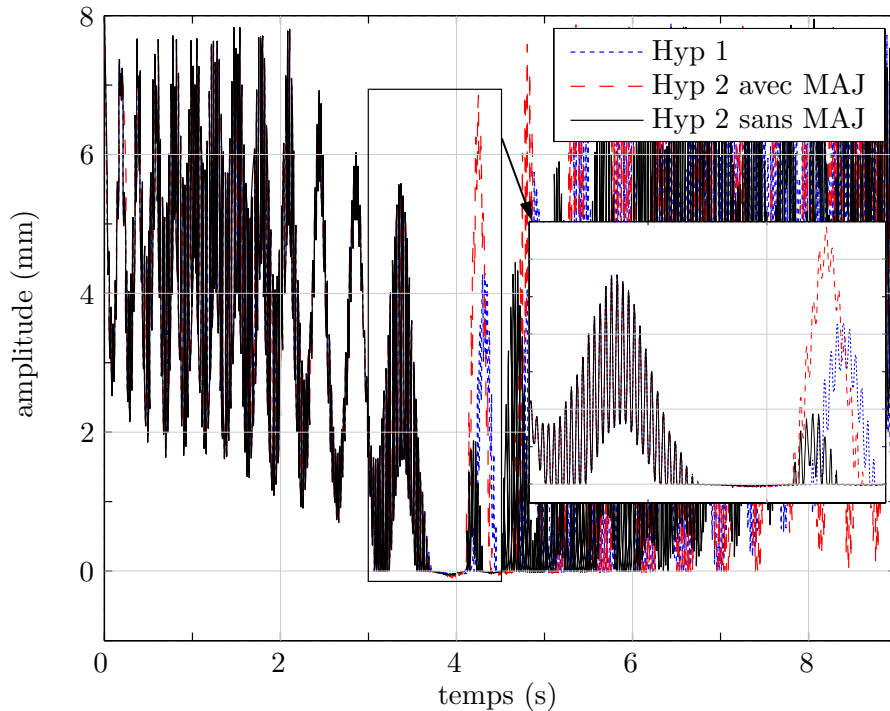
Les vitesses angulaires calculées avec les précédentes modélisations sont tracées sur la figure 4.44. On constate ainsi que la vitesse de rotation obtenue est similaire pour les diaphragmes C2 et C3. Le carter C1 étant infiniment rigide, ce modèle correspond au cas de contact le plus dur, et donc à la décélération angulaire la plus élevée. Les distances rotor-



**Figure 4.44** - Comparaison des vitesses angulaires calculés pour les différents carters plan - cas sans torsion

stator pour les différentes approximations sur la détection de contact sont superposées sur la figure 4.45. Dans un premier temps, on observe une succession de rebonds du rotor, et dans ce cas, on retrouve les mêmes résultats quelle que soit l'hypothèse de contact retenue. En cas de contact prolongé, la position du point de contact évolue au cours du temps soit de proche en proche sur la couronne intérieure du diaphragme soit brutalement si cette dernière se déforme suffisamment. Des différences sur le calcul du jeu apparaissent alors après cette phase de contact prolongée en fonction du pas de temps, modifiant ainsi la dynamique d'ensemble de la turbine. Ne pouvant prédire la durée de l'interaction rotor-

stator, l'approximation « Hyp 2 » doit être retenue car l'interaction sera modélisée plus précisément si la position du point de contact est exacte.



**Figure 4.45** - Fonction jeu calculée pour les différentes approximations sur la détection du contact pour le diaphragme C3

Les résultats obtenus pour chacune des approximations émises sur la détection du contact pour le diaphragme C3 sont regroupés dans le tableau 4.5. La première hypothèse de calcul (Hyp 1) permet d'obtenir des résultats rapidement au détriment d'une faible surestimation des efforts aux paliers (de l'ordre de 10%) si on se réfère au calcul exact. La seconde approximation (Hyp 2 - sans MAJ) offre une détection du contact améliorée, tout en conservant des temps de calcul raisonnables. En effet, les temps CPU restent comparables à ceux obtenus avec la première hypothèse. Il faut cependant choisir un pas de temps de telle sorte que la pénétration après correction soit négligeable. Un calcul exact (Hyp 2 - avec MAJ) est possible mais avec un temps CPU prohibitif pour un gain faible sur l'estimation des quantités d'intérêts. Dès lors, un compromis satisfaisant entre la précision des résultats et le temps de simulation est alors obtenu pour l'approximation « Hyp 2 - sans MAJ ».

On examine maintenant l'évolution des résultats selon le modèle de carter utilisé. Pour  $\Delta t = 10^{-5}$  s, on constate que les efforts maximaux au palier sont sous-évalués de façon importante pour les carters avec couronne rigide C1 et C2 (respectivement  $3,54 \cdot 10^5$  N et  $3,70 \cdot 10^5$  N) par rapport au modèle de diaphragme flexible ( $5,36 \cdot 10^5$  N pour Hyp 2 - sans MAJ). Comme nous l'avons déjà mentionné, l'utilisation d'un carter rigide a pour effet de surestimer les efforts de contact, et par voie de conséquence de sous-estimer les efforts

(a) Hypothèse de détection de contact 1

$\Delta t$ (s)	Temps CPU (s)	Effort maximal au palier ( $10^5$ N)	Pénétration résiduelle ( $\mu\text{m}$ )
$10^{-5}$	7742	5,4562	58,864349
$5 \cdot 10^{-6}$	15918	5,4513	15,320521
$10^{-6}$	80629	5,4522	0,6292297
$5 \cdot 10^{-7}$	161265	5,4547	0,1577812

(b) Hypothèse de détection de contact 2 - sans mise à jour du lieu de contact dans le solveur itératif

$\Delta t$ (s)	Temps CPU (s)	Effort maximal au palier ( $10^5$ N)	Pénétration résiduelle ( $\mu\text{m}$ )
$10^{-5}$	6845	5,3608	123,54830
$5 \cdot 10^{-6}$	14071	5,3511	30,47979
$10^{-6}$	71371	5,3491	1,01442
$5 \cdot 10^{-7}$	142594	5,3288	0,40395

(c) Hypothèse de détection de contact 2 - calcul exact

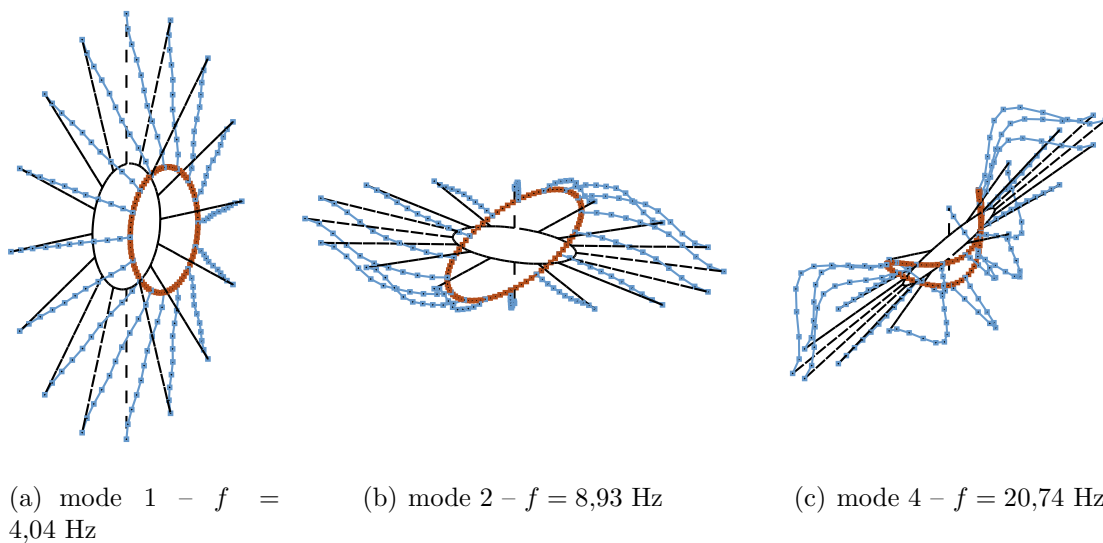
$\Delta t$ (s)	Temps CPU (s)	Effort maximal au palier ( $10^5$ N)	Pénétration résiduelle ( $\mu\text{m}$ )
$10^{-5}$	24743	4,9468	67,534829
$5 \cdot 10^{-6}$	49996	4,8993	15,901729
$10^{-6}$	249842	4,9571	5,715838
$5 \cdot 10^{-7}$	477114	5,1220	0,233041

**Tableau 4.5** - Résumé des résultats pour le carter C3 avec les différentes hypothèses de contact

au palier. Ces résultats montrent la nécessité de considérer le carter C3 si l'on souhaite évaluer avec précision les efforts au palier.

### 4.3 Carter C3 en 3-D

On se propose d'améliorer encore la modélisation du carter. On lève la restriction du mouvement plan de carter en autorisant le déplacement axial du diaphragme. Pour les simulations, les propriétés matérielles et géométriques du précédent carter flexible sont utilisées (cf. tableau 4.4). Une analyse modale permet de déterminer les fréquences propres du carter 3-D et les modes propres associés (cf. figure 4.46). Étant donné la symétrie cyclique<sup>3</sup> du carter, on obtient des paires de modes propres à fréquence identique, les premiers et derniers exceptés, qui sont des modes simples. Par exemple, le premier mode propre est un mode dit « parapluie » du fait de la forme de la déformée (flexion en phase de toutes les ailettes sans déformation de la couronne interne). Cette rapide analyse nous



**Figure 4.46** - Quelques modes propres du carter C3 en 3-D

indique que le premier mode plan de cette structure tridimensionnelle est le 25<sup>e</sup> mode. De plus, en se référant au diagramme de CAMPBELL correspondant au rotor étudié, on constate que les fréquences propres du diaphragme sont différentes de celles du rotor : il ne peut donc y avoir une coïncidence vibratoire.

Les résultats sont présentés comme précédemment. Au moment de la rédaction de ce

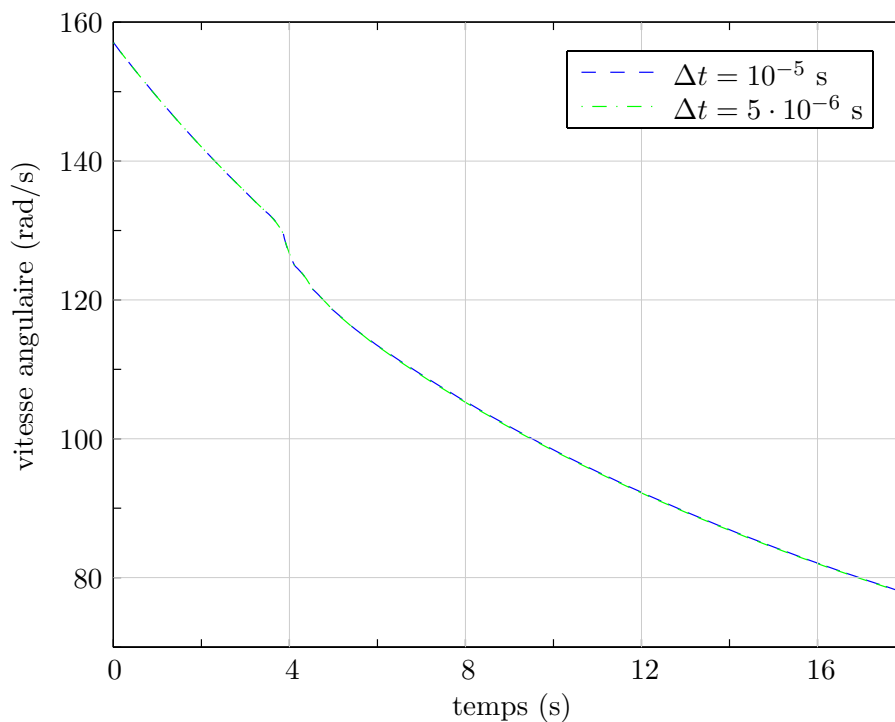
3. Pour plus d'informations sur la symétrie cyclique, le lecteur pourra se référer à la thèse de R. BLADH [BLA 01]

Mode	1	2 et 3	4 et 5	6 et 7	8 et 9	...	25
Fréquence (Hz)	4,04	8,93	20,74	25,59	26,36	...	85,50

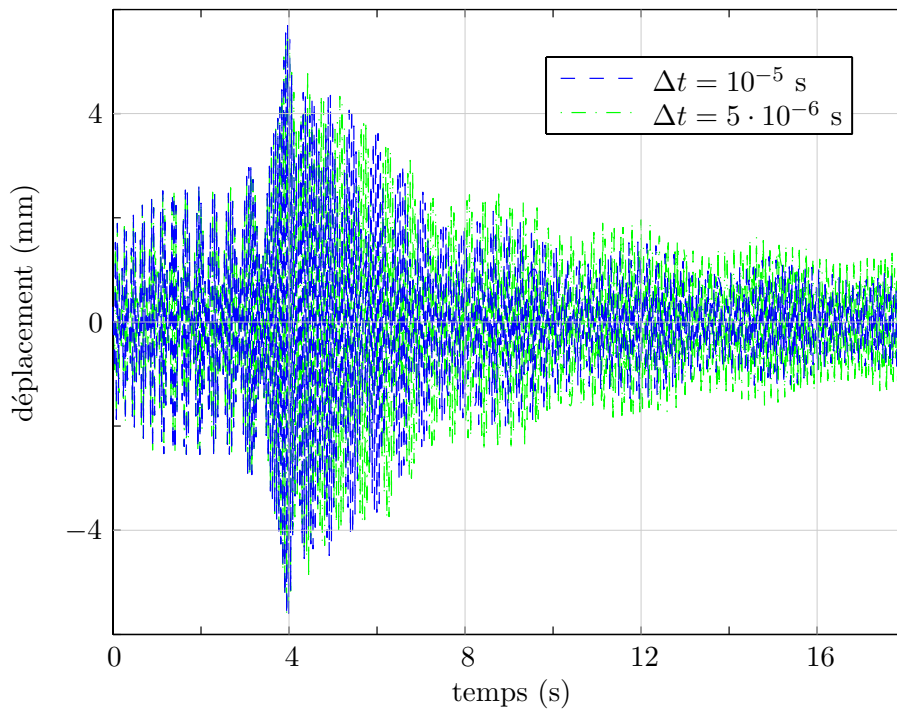
**Tableau 4.6** - Fréquences propres du diaphragme étudié

mémoire, seules deux simulations ont pu être réalisées, compte tenu de la mise au point récente de la dernière version du programme et du temps de calcul nécessaire pour cette simulation (environ 53 heures de simulation pour  $\Delta t = 10^{-5}$  s). La vitesse de rotation calculée est illustrée sur la figure 4.47. On constate que les déplacements (cf. figure 4.48) diffèrent selon le pas de temps et les simulations ne permettent pas de dire si le pas de temps  $\Delta t = 5 \cdot 10^{-6}$  s est suffisamment petit pour considérer que le déplacement a convergé. Toutefois on s'assure que les conditions de non-pénétration sont respectées (cf. figure 4.49). Par ailleurs, les lagrangiens, dépeints dans la figure 4.50, restent du même ordre de grandeur que pour le carter flexible planaire. Il en est de même pour les efforts aux paliers, tracés figure 4.51.

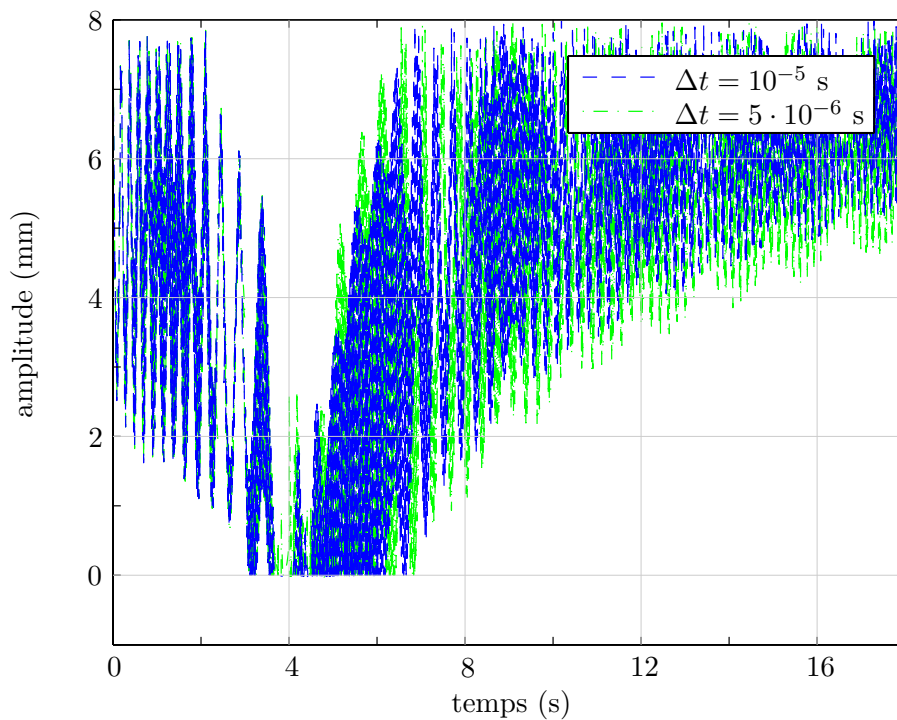
Cependant, il y a un problème avec l'accélération angulaire (cf. figure 4.52) : cette quantité est fortement perturbée par des oscillations très haute fréquence mais le plus gênant reste le fait que l'accélération angulaire prend des valeurs positives qui sont physiquement impossibles lors d'un ralentissement accidentel. Le code numérique n'étant pas à l'abri d'une erreur humaine, le code source sera revu dans les semaines à venir.



**Figure 4.47** - Vitesse de rotation calculée pour le carter C3 en 3-D avec différents pas de temps - cas sans torsion

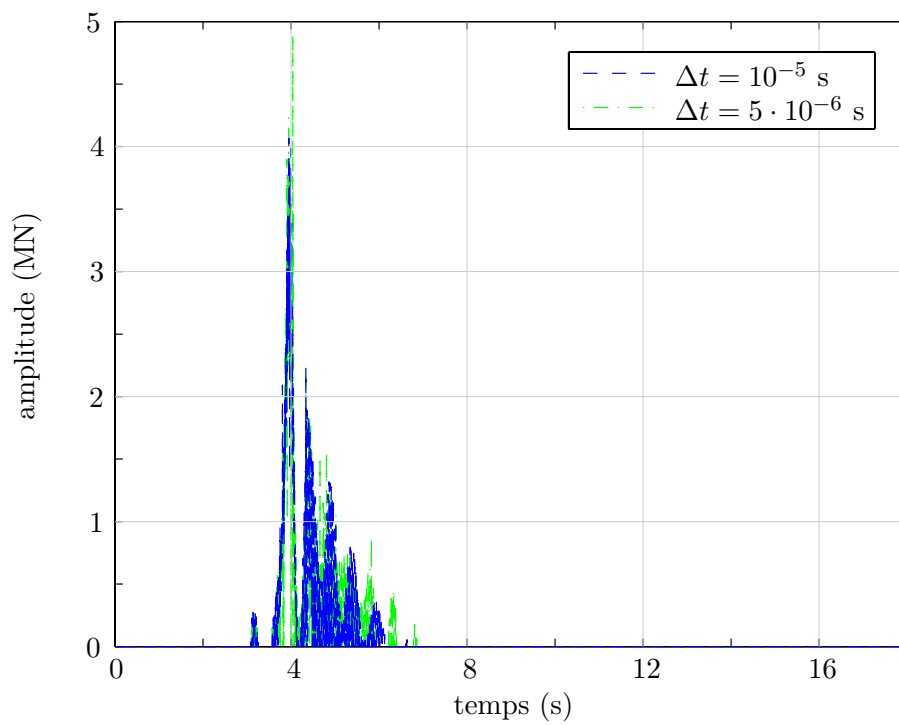


**Figure 4.48** - Déplacement du nœud 2 pour le carter C3 en 3-D avec différents pas de temps - cas sans torsion

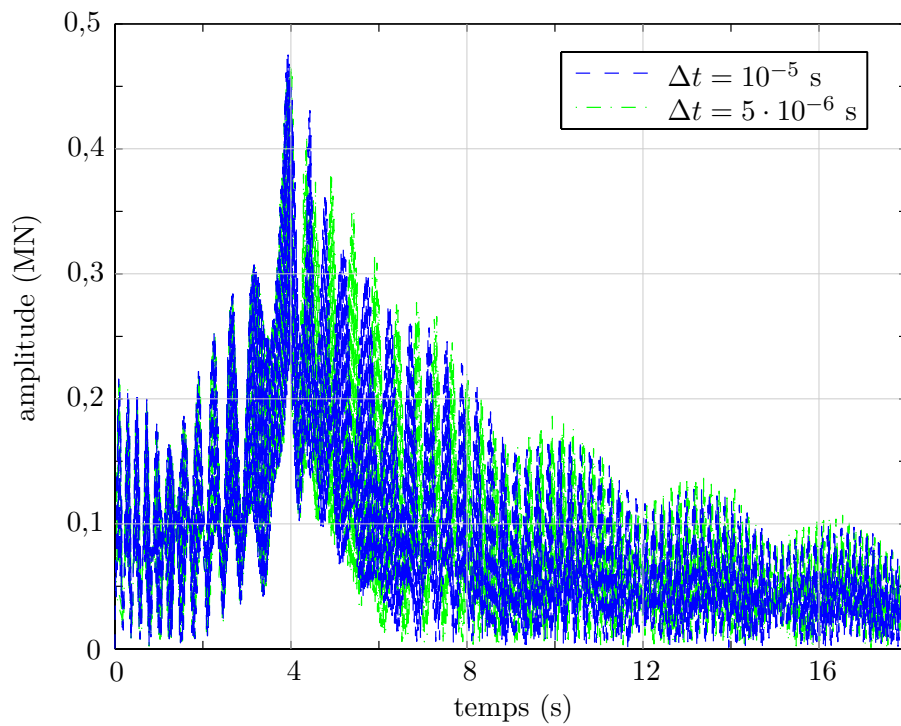


**Figure 4.49** - Fonction jeu en considérant le carter C4 avec différents pas de temps - cas sans torsion

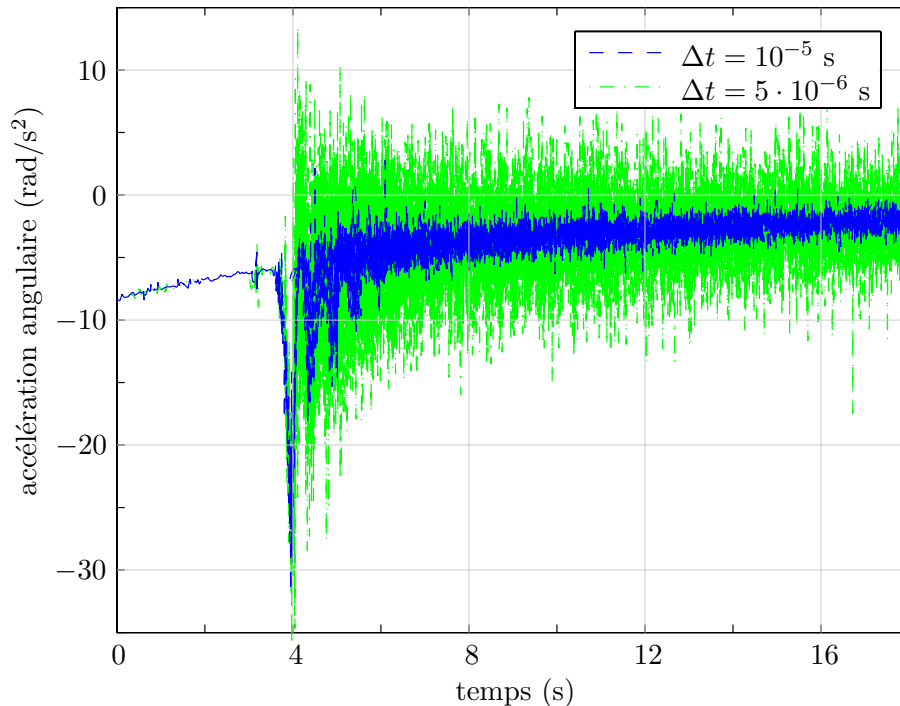




**Figure 4.50** - Force de contact calculée pour le carter C4 avec différents pas de temps - cas sans torsion



**Figure 4.51** - Effort au palier pour le carter C4 avec différents pas de temps - cas sans torsion



**Figure 4.52** - Décélération angulaire calculée pour le carter C3 en 3-D avec différents pas de temps - cas sans torsion

## 4.4 Conclusion

Des transitoires de vitesse avec interaction rotor-stator ont été étudiés dans ce chapitre. L'accent a été mis sur l'influence du modèle de diaphragme avec une détection du contact adaptée à chacun d'entre eux, ainsi que sur la sensibilité des résultats à la vibration de torsion et au coefficient de friction. D'autre part, dans l'objectif de réduire les temps CPU, des approximations ont été proposées pour le traitement numérique du contact.

Différents calculs ont été réalisés pour évaluer la qualité des résultats issus de la résolution du problème non linéaire. Ceci a été effectué en étudiant principalement la variation des résultats en fonction du pas de temps. Il a d'abord été contrôlé que l'algorithme de contact permet de satisfaire la condition d'impénétrabilité des structures. Les simulations ont aussi montré une convergence vis-à-vis du pas de temps des déplacements généralisés du rotor et de la vitesse de rotation, et ce quel que soit le modèle de diaphragme utilisé. Cependant, le schéma d'intégration temporelle ne permet pas d'évaluer précisément les quantités d'accélération lors de l'interaction arbre-diaphragme, ainsi que les efforts de contact, lors du premier contact entre les deux corps : la convergence de ces quantités est obtenue à condition que le contact soit prolongé sur plusieurs incréments de temps.

Nous avons ensuite étudié l'évolution des résultats en fonction des paramètres de modélisation : représentation du carter et déformation de torsion. Les simulations réalisées avec des couronnes rigides, fixe ou non, montrent que les quantités d'intérêt calculées (dépla-

cements généralisés, efforts aux paliers, vitesse de rotation...) varient peu selon que la torsion est prise en compte ou pas. La connaissance de l'angle de torsion permet d'obtenir une estimation des contraintes en torsion sur la ligne d'arbres, mais la forte non linéarité du système d'équations à résoudre ne facilite pas l'interprétation fréquentielle des vibrations de torsion. Par la suite, il a donc été choisi de ne réaliser que des simulations sans torsion.

Les résultats obtenus sur les différents modèles de diaphragmes, de complexité croissante, conduisent aux conclusions suivantes :

- Couronne rigide fixe (C1) : ce type de carter offre le temps de calcul le plus petit. Le fait de bloquer la couronne interne contraint cependant de manière excessive la déflexion du rotor. Ainsi, les efforts maximaux aux paliers calculés pour ce modèle constitueront une borne inférieure des chargements dynamiques réels ;
- Couronne rigide vibrante (C2) : ce modèle améliore un peu le modèle précédent. En autorisant un déplacement dans le plan, la déflexion de l'arbre est plus importante et par conséquent l'effort aux paliers l'est également. La simplicité de la modélisation permet de conserver des temps de calculs raisonnables et d'avoir une évaluation plus réaliste des chargements sur la ligne d'arbres. Cependant, le fait de considérer rigide la couronne engendre des phénomènes de rebonds répétés qui s'avèrent non physiques et qui, de surcroît, ne permettent pas d'évaluer avec précision les efforts de contact ;
- Diaphragme flexible (C3) : ce diaphragme flexible se base sur une modélisation unidimensionnelle éléments finis. Le nombre d'inconnues à calculer devient plus important, ce qui a un impact direct sur le temps de calcul. La déformation de la couronne complique la détection du contact : plusieurs approximations sont alors proposées. Il ressort des résultats que la recherche non linéaire du point de contact lors de l'étape de prédiction, sans mise à jour dans le processus itératif, donne un compromis intéressant entre le temps CPU et l'évaluation des efforts sur la turbine. De plus, pour le cas d'un grand balourd, les contacts persistants rotor-stator sont observés : on retrouve le phénomène de « full annular rubbing » décrit dans [MUS 05].

D'autre part, la comparaison des efforts au palier montre que les valeurs obtenues avec les carters munis d'une couronne rigide (C1 et C2) sont très inférieures à celle calculées avec le carter flexible. Par conséquent, du point de vue du dimensionnement, il est nécessaire d'utiliser des modèles de diaphragme flexible. Ces modèles ont en outre l'avantage de rendre le contact rotor-stator moins sévère et donc de réduire les problèmes numériques issus du traitement du contact.

# Conclusion générale

## Bilan des travaux

La présentation de ce mémoire a pour l'essentiel suivi l'ordre chronologique. Notre propos était de développer un modèle physique et numérique capable d'étudier les transitoires de vitesse du système couplé rotor-diaphragme en vue du dimensionnement des groupes turbo-alternateurs.

Pour ce faire, les cadres théorique et numérique ont été établis pour l'analyse d'un transitoire de vitesses avec contact rotor-stator, où la vitesse de rotation de l'arbre n'est plus imposée mais calculée en fonction des couples agissant sur l'arbre, ce qui conduit à de fortes non linéarités et des couplages entre les déplacements généralisés du rotor et la position angulaire de l'arbre. Suivant l'approche proposée par [CAR 91], un algorithme temporel a été développé pour résoudre le système non linéaire correspondant aux équations du mouvement : la méthode des multiplicateurs de LAGRANGE combinée au schéma explicite des différences finies centrées a été utilisée pour calculer la réponse dynamique des structures.

L'implantation des algorithmes de contact dans une maquette numérique a permis d'étudier dans un premier temps, à des fins de validation, la réponse d'un rotor sans considérer le contact, étant donné qu'il n'existe pas à notre connaissance de solution de référence pour notre problème de contact ni de donnée expérimentale d'un transitoire de vitesse avec interaction rotor-stator. On obtient une excellente comparaison entre les résultats issus du modèle non linéaire et ceux d'un modèle éléments finis de rotor où la loi de vitesse est imposée.

À ce niveau, nous avons mené des études visant à déterminer la pertinence de la prise en compte de la torsion dans le modèle et une modélisation réaliste du diaphragme. D'autre part, nous avons cherché à contrôler la qualité numérique des résultats obtenus, tout en ayant le souci de réduire les temps de calcul. Les conclusions ont été établies au vu de l'évolution des quantités d'intérêt, sachant que les principales sont la vitesse de rotation de l'arbre, ses déplacements et vitesses généralisés et les efforts au palier.

Les résultats des différents calculs ont montré que la torsion avait une incidence très faible

sur les quantités d'intérêt. En ce qui concerne les modèles de diaphragme, ceux avec une couronne rigide présentent l'inconvénient de conduire à une sous-estimation des efforts au palier. En outre, la physique locale du contact est mal restituée, ce qui se traduit par des rebonds non représentatifs d'une structure flexible. Les modèles avec carter déformable sont de ce point de vue plus satisfaisants, même si les problèmes de contact dynamique abordés dans ce travail sont difficiles à traiter numériquement. Nous avons d'autre part montré qu'il était possible de faire certaines approximations sur la détection du contact, ce qui permet de diminuer le temps de calcul, sans dégrader la précision des calculs.

À ce stade du travail, l'outil numérique prédit de manière qualitative et quantitative la réponse couplée rotor-stator et plus précisément des efforts aux paliers. Ce travail de recherche complète ainsi la démarche actuelle d'EDF R&D pour vérifier le dimensionnement de la turbine. Au lieu de considérer une vitesse de rotation constante avec des paliers non linéaires ou avec des non linéarités de contact, cette thèse propose la résolution des transitoires de vitesse avec contact rotor-stator, avec prise en compte des effets gyroscopiques et du couplage flexion/torsion. L'approche ainsi développée pourra permettre de calculer les chargements dynamiques aux paliers sur des applications industrielles et de connaître des marges de sécurité sur les ralentissements accidentels.

## Perspectives

À court terme, des essais expérimentaux sur le banc d'essai EURoPE d'EDF R&D vont être réalisés avec un contact rotor-diaphragme. Initialement prévu en troisième année de thèse, le caractère destructif de ces essais a nécessité plusieurs vérifications de sécurité, entraînant des retards conséquents. L'objectif est de comparer les données expérimentales avec les résultats issus de l'outil numérique dans l'optique de valider le modèle non linéaire développé.

Dans le calcul du ralentissement accidentel, c'est le traitement numérique du contact qui est le plus coûteux en temps de simulation, car la détection du contact et le calcul des forces sont calculés à chaque itération. Des optimisations de code sont donc envisageables pour diminuer le temps CPU. Par exemple, la recherche non-linéaire du point de contact est réalisée actuellement sur tous les éléments poutres courbes : en calculant la fonction distance uniquement sur les nœuds de la couronne interne du diaphragme, le nœud associé à la fonction distance minimale appartiendra à l'élément en contact. Par conséquent, on se limitera à rechercher le contact sur les deux éléments connexes et non pas sur toute la couronne intérieure.

D'un point de vue modélisation, les cas d'interaction arbre-diaphragme flexible n'ont pas été traités, par manque de temps, en prenant en compte la torsion. Le cadre théorique ayant déjà été développé, son implantation dans l'outil numérique ne relève que d'un effort de programmation. Si dans ce mémoire les diaphragmes étudiés sont à symétrie de révolution, les algorithmes de contact pourraient facilement être appliqués sur des diaphragmes constitués de secteurs disjoints et ne nécessitent qu'un effort de programmation. Un autre apport dans la représentation de la dynamique d'ensemble serait de modéliser la table de groupe, sur laquelle repose la turbine. Par ailleurs, si l'hypothèse de paliers linéarisés n'est plus valide, *i.e.* lors de l'écrasement du film d'huile, on pourrait coupler le modèle de rotor avec le code CADYAC d'EDF, ou plus précisément le module de paliers EDYOS. Enfin, si l'on s'intéresse au contact d'un point de vue local pour prendre en compte les effets thermiques, les déformations irréversibles ou l'endommagement, il faudra revoir la théorie développée dans ce mémoire qui s'appuie sur des modèles de poutres. Il faudra alors utiliser des modèles 3-D pour le rotor et/ou le diaphragme, avec des problèmes prévisibles en temps de calcul.



# Références

- [ARN 00] ARNOULT E., *Modélisation Numérique et Approche Expérimentale du Contact en Dynamique : Application au Contact Aubes/Carter de Turboréacteur*. Thèse, École Centrale de Nantes, Nantes, France, janvier 2000.
- [BAI 96] BAILLET L., BRUNET M., ET BERTHIER Y., “Experimental and numerical dynamic modelling of ironing process”, *Journal of Materials Processing Technology*, Vol. 60, No. 1-4, pp. 677–684, 1996.
- [BAR 00] BARTHA A. R., *Dry friction backward whirl of rotors*. Thèse, Swiss Federal Institute of Technology, Zurich, Switzerland, 2000.
- [BAT 90] BATOZ J. L. ET DHATT G., *Modélisation des structures par éléments finis*, Vol. 1. Hermès, 1990.
- [BAZ 87] BAZERGUI A., BUI-QUOC T., BIRON A., MCINTYRE G., ET LABERGE C., *Résistance des matériaux*. École Polytechnique de Montréal, édition corrigée, 1987.
- [BEL 91] BELYTSCHKO T. ET NEAL M. O., “Contact-impact by the pinball algorithm with penalty and Lagrangian methods”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 31, No. 3, pp. 547–572, 1991.
- [BEL 00] BELYTSCHKO T., LIU W. K., ET MORAN B., *Nonlinear finite elements for continua and structures*. Chichester, England; New York : John Wiley, 2000.
- [BLA 01] BLADH R., *Efficient Predictions of the Vibratory Response of Mistuned Bladed Disks by Reduced Order Modeling*. Thèse, The University of Michigan, Ann Arbor, USA, 2001.
- [BOU 05] BOURAGO N. G. ET KUKUDZHANOV V. N., “A review of contact algorithms”, *Mechanics of Solids*, Vol. 1, pp. 44–85, 2005.
- [BOY 03] BOYERE E., JACQUART G., ET LEGER A.-C., *Algorithmes d'intégration directe de l'opérateur DYNA\_LINE\_TRAN - Document R5.05.02*. EDF-R&D/AMA, EDF-Pôle Industrie/CNPE du Tricastin, EDF-R&D/TESE, 2003.
- [CAR 91] CARPENTER N. J., TAYLOR R. L., ET KATONA M. G., “Lagrange constraints for transient finite element surface contact”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 32, No. 1, pp. 103–128, 1991.



- [CHE 92] CHEN L.-W. ET KU D.-M., “Dynamic stability of a Cantilever shaft-disk system.”, *Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 114, pp. 326–329, 1992.
- [CHI 93] CHILDS D. W., *Turbomachinery rotordynamics : phenomena, modeling, and analysis*. New York : Wiley, 1993.
- [CHO 02] CHOI Y. S., “Investigation on the whirling motion of full annular rotor rub” , *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 258, No. 1, pp. 191–198, 2002.
- [CHO 87] CHOY F. K. ET PADOVAN J., “Non-linear transient analysis of rotor-casing rub events”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 113, No. 3, pp. 529–545, 1987.
- [CHO 92] CHOY S. H., PIERRE C., ET ULSOY A. G., “Consistent modelling of rotating Timoshenko shafts subject to axial loads”, *Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 114, pp. 249–259, 1992.
- [CHU 97] CHU F. ET ZHANG Z., “Periodic, quasi-periodic and chaotic vibrations of a rub-impact rotor system supported on oil film bearings”, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 35, No. 10-11, pp. 963–973, 1997.
- [CHU 98] CHU F. ET ZHANG Z., “Bifurcation and chaos in a rub-impact Jeffcott rotor system”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 210, No. 1, pp. 1–18, 1998.
- [CLE 03] CLEMENT J.-C., “Projet MACADAM – Influence de la prise en compte du contact rotor-stator sur l’estimation des efforts aux paliers des GTA CP2 et 1300 MW en situation accidentelle”, *Rapport interne EDF R&D – HT-65/03/038/A*, 2003.
- [DAI 02] DAI X., JIN Z., ET ZHANG X., “Dynamic behavior of the full rotorstop rubbing : numerical simulation and experimental verification”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 251, No. 5, pp. 807–822, 2002.
- [DH 56] DEN HARTOG J. P., *Mechanical vibrations*. New York : McGraw-Hill, 4th ed., 1956.
- [DIM 73] DIMAROGONAS A. D., “Newkirk effect - thermally induced dynamic instability of high speed rotors”, *International Gas Turbine Conference*, pp. 1–11, 1973.
- [DUB 98] DUBIGEON S., *Mécanique des Milieux Continus*. Lavoisier, Tec & Doc, Nantes, 1998.
- [EDW 99] EDWARDS S., LEES A. W., ET FRISWELL M. I., “The influence of torsion on rotor/stator contact in rotating machinery”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 225, No. 4, pp. 767–778, 1999.
- [FAT 99] FATARELLA F., *On the Dynamics of Reverse Whirl Due to Rotor/Stator Interaction*. Thèse, Imperial College of Science, Technology & Medicine, London, England, July 1999.
- [FOR 93] FORTIN T., “Modélisation de ralentissement de GTA”, *Rapport interne EDF R&D – HP-65/93/189*, 1993.

- 
- [FRE 90] FRENE J., NICOLAS D., DEGUEURCE B., BERTHE D., ET GODET M., *Lubrification hydrodynamique – Paliers et Butées*. Paris : Collection de la Direction des Études et Recherches d'Électricité de France, 1990.
- [FUN 03] FUNG T. C., “Numerical dissipation in time-step integration algorithms for structural dynamic analysis”, *Progress in Structural Engineering and Materials*, Vol. 5, No. 3, pp. 167–180, 2003.
- [GAN 96] GANESAN R., “Dynamic response and stability of a rotor-support system with non-symmetric bearing clearances”, *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 31, No. 6, pp. 781–798, 1996.
- [GÉR 97] GÉRADIN M. ET RIXEN D., *Mechanical vibrations : theory and application to structural dynamics*. Chichester, England ; New York : John Wiley, 2nd ed., 1997.
- [GIR 99] GIRAUDON-GUILLOTEAU I., *Modélisation du Contact en Dynamique : Construction d'un Élément Simplifié de Contact et Application à l'Interaction Rotor/Stator*. Thèse, École Centrale de Nantes, Nantes, France, novembre 1999.
- [HIL 77] HILBER H. M., HUGHES T. J. R., ET TAYLOR R. L., “Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics”, *Earthquake engineering and structural dynamics*, Vol. 5, No. 3, pp. 283–292, 1977.
- [HUG 00] HUGHES T. J. R., *The finite element method - Linear static and dynamic finite element analysis*. Dover Publications Inc., 2000.
- [KEL 80] KELLENBERGER W., “Spiral vibrations due to the seal rings in turbogenerators thermally induced interaction between rotor and stator”, *Journal of Mechanical Design*, Vol. 102, pp. 177–184, 1980.
- [KIM 96] KIM Y. B. ET NOAH S. T., “Quasi-periodic response and stability analysis for a non-linear Jeffcott rotor”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 190, No. 2, pp. 239–253, 1996.
- [LAL 98] LALANNE M. ET FERRARIS G., *Rotordynamics prediction in engineering*. Chichester ; New York : John Wiley, 2nd ed., 1998.
- [LAU 03] LAURSEN T. A., *Computational contact and impact mechanics : fundamentals of modeling interfacial phenomena in nonlinear finite element analysis*. Berlin : Springer, 2003.
- [LEG 05] LEGRAND M., *Modèles de prédiction de l'interaction rotor/stator dans un moteur d'avion*. Thèse, École Centrale de Nantes, Nantes, France, mars 2005.
- [LIT 02] LITEWKA P. ET WRIGGERS P., “Frictional contact between 3D beams”, *Computational Mechanics*, Vol. 28, No. 1, pp. 26–39, 2002.
- [MAG 06] MAGNAIN B., *Développement d'algorithmes et d'un code de calcul pour l'étude des problèmes de l'impact et du choc*. Thèse, Université d'Évry - Val d'Essonne, Évry, France, novembre 2006.

- [MIN 86] MINOUX M., *Mathematical programming : theory and algorithms*. Chichester – West Sussex; New York : Wiley, 1986.
- [MUS 89] MUSZYNSKA A., “Rotor-To-Stationary Element Rub-Related Vibration Phenomena in Rotating Machinery – Literature Survey”, *The Shock and Vibration Digest*, Vol. 21, pp. 3–11, March 1989.
- [MUS 05] MUSZYNSKA A., *Rotordynamics*. Boca Raton : Taylor & Francis, 2005.
- [NOE 04] NOELS L., *Contributions aux algorithmes d'intégration temporelle conservant l'énergie en dynamique non-linéaire des structures*. Thèse, Université de Liège - Faculté des Sciences Appliquées, Liège, Belgique, septembre 2004.
- [ODE 82] ODEN J. T. ET KIM S. J., “Interior penalty methods for finite element approximations of the Signorini problem in elastostatics”, *Computers & Mathematics with Applications*, Vol. 8, No. 1, pp. 35–56, 1982.
- [PES 89] PESEUX B., *Contribution à l'étude des structures partiellement ou totalement immergées en matériau homogène ou composite*. Thèse de doctorat d'état ès sciences, Ecole Nationale Supérieure de Mécanique, Nantes, France, 1989.
- [RAO 96] RAO J. M., *Rotor Dynamics*. New Delhi, India : New age International, third edition ed., 1996.
- [SIM 92] SIMO J. C. ET LAURSEN T. A., “An augmented lagrangian treatment of contact problems involving friction”, *Computers & Structures*, Vol. 42, No. 1, pp. 97–116, 1992.
- [VAN 88] VANCE J. M., *Rotordynamics of turbomachinery*. New York : Wiley, 1988.
- [VAR 97] VARE C., “Etude des transitoires de vitesse en dynamique des lignes d'arbres”, *Rapport interne EDF R&D – HP-54/97/039/B*, 1997.
- [WOO 80] WOOD W. L., BOSSAK M., ET ZIENKIEWICZ O. C., “An alpha modification of Newmark's method”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 15, No. 10, pp. 1562–1566, 1980.
- [WRI 97] WRIGGERS P. ET ZAVARISE G., “On contact between three-dimensional beams undergoing large deflections”, *Communications in numerical methods in engineering*, Vol. 13, No. 6, pp. 429–438, 1997.
- [WRI 02] WRIGGERS P., *Computational contact mechanics*. Chichester, England; Hoboken, NJ : J. Wiley & Sons, 2002.
- [ZAV 00] ZAVARISE G. ET WRIGGERS P., “Contact with friction between beams in 3-D space”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 49, No. 8, pp. 977–1006, 2000.
- [ZC 03] ZHENG-CE S., JIAN-XUE X., TONG Z., ET NING T., “Study on influence of bending-torsion coupling in an impacting-rub rotor system”, *Applied Mathematics and Mechanics*, Vol. 24, No. 11, pp. 1316–1323, 2003.



---

# Caractéristiques dynamiques des paliers circulaires

Le rotor d'une machine tournante a pour rôle de transformer l'énergie thermique de la réaction nucléaire en électricité. Dans le cas des groupes turbo-alternateurs, il est supporté par des paliers hydrodynamiques qui ne peuvent être considérés comme passifs mais comme des éléments qui influent dans la dynamique de la ligne d'arbres. En effet, le film d'huile a des propriétés de raideur et d'amortissement qui varient selon le régime de fonctionnement de la turbine, *i.e.* de l'excentricité du rotor et de la vitesse de rotation (notamment aux vitesses critiques), et contrôlent la stabilité de l'ensemble. Le comportement non linéaire des paliers peut être approché par une représentation linéaire de l'équation de REYNOLDS. Afin de comprendre la manière dont on obtient les coefficients de raideurs et d'amortissements pour un film d'huile, le cas particulier des paliers circulaires est présenté.

## Équation de Reynolds en régime dynamique

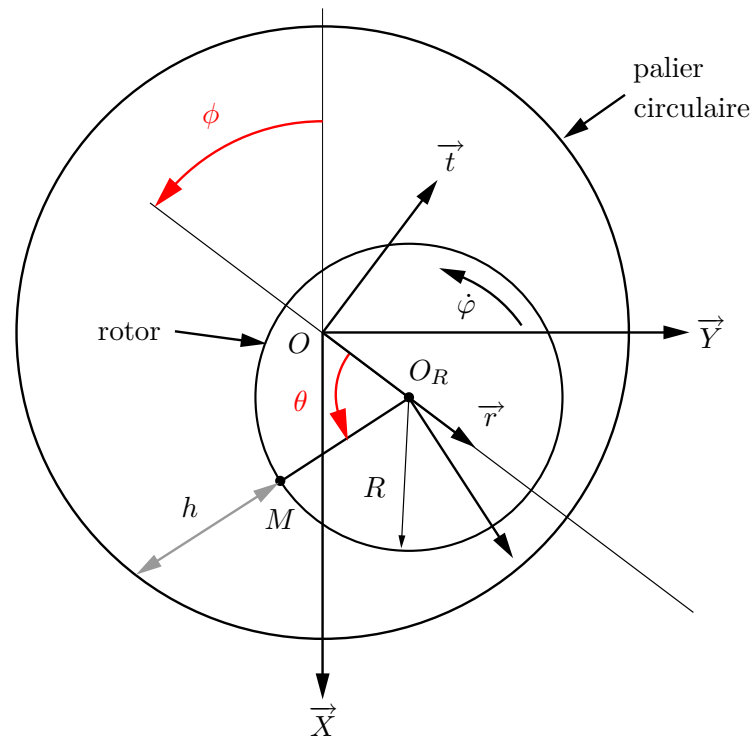
Les notations utilisées dans cette annexe sont présentées dans la figure A.1. On suppose que le coussinet du palier est fixe, *i.e.* son centre (point  $O$ ) est supposé fixe. La position du centre de l'arbre  $O_R$  peut alors être repérée par ses coordonnées polaires :

$$\overrightarrow{OO_R} = x\overrightarrow{X} + y\overrightarrow{Y} = e\overrightarrow{r} \text{ et } \phi = (\overrightarrow{X}, \overrightarrow{r}) \quad (\text{A.1})$$

où  $e$  correspond à l'excentricité du rotor. En introduisant la coordonnée angulaire  $\theta$ , l'épaisseur  $h$  du film d'huile, pour un point  $M$  quelconque du rotor, est égale à :

$$h = C + e \cos \theta = C (1 + \varepsilon \cos \theta) \quad (\text{A.2})$$

où  $C$  représente le jeu radial initial et  $\varepsilon = e/C$  l'excentricité relative du rotor. Ainsi, avec les notations précédemment introduites, la pression du film  $p = p(\theta, z)$  est obtenue en



**Figure A.1** - Représentation schématique d'un palier circulaire

résolvant l'équation de Reynolds [FRE 90] :

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 6 \left[ (\dot{\varphi} - 2\dot{\phi}) \frac{dh}{d\theta} + 2\dot{e} \cos(\theta) \right] \quad (\text{A.3})$$

## Modélisation linéaire des paliers

Les réactions aux paliers sont généralement obtenues après avoir intégré le champ de pression calculé à partir de l'équation non linéaire (A.3). Dès lors, la résolution simultanée des équations du mouvement du rotor et du comportement hydrodynamique de chaque palier s'avère complexe et coûteuse en temps de calcul. Il est alors possible de simplifier les équations en supposant que le rotor est parfaitement rigide et que les déplacements de l'arbre se limitent au voisinage d'une position d'équilibre statique. En indiquant  ${}_0$  les quantités au voisinage de la position d'équilibre statique et en considérant le cadre des petites perturbations (petits déplacements  $(x, y)$  et petites vitesses  $(\dot{x}, \dot{y})$ ), les composantes

des forces aux paliers s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} F_x(x+x_0, y+y_0, \dot{x}, \dot{y}) = F_x(x_0, y_0, 0, 0) + x \left[ \frac{\partial F_x}{\partial x} \right]_0 + y \left[ \frac{\partial F_x}{\partial y} \right]_0 \\ \phantom{F_x(x+x_0, y+y_0, \dot{x}, \dot{y}) = F_x(x_0, y_0, 0, 0)} + \dot{x} \left[ \frac{\partial F_x}{\partial \dot{x}} \right]_0 + \dot{y} \left[ \frac{\partial F_x}{\partial \dot{y}} \right]_0 + \dots \\ F_y(x+x_0, y+y_0, \dot{x}, \dot{y}) = F_y(x_0, y_0, 0, 0) + x \left[ \frac{\partial F_y}{\partial x} \right]_0 + y \left[ \frac{\partial F_y}{\partial y} \right]_0 \\ \phantom{F_y(x+x_0, y+y_0, \dot{x}, \dot{y}) = F_y(x_0, y_0, 0, 0)} + \dot{x} \left[ \frac{\partial F_y}{\partial \dot{x}} \right]_0 + \dot{y} \left[ \frac{\partial F_y}{\partial \dot{y}} \right]_0 + \dots \end{array} \right. \quad (\text{A.4})$$

En se limitant au premier ordre, les forces exercées par le fluide sur le rotor, suite aux déplacements du centre du rotor, peuvent se mettre sous forme matricielle :

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} F_x(x+x_0, y+y_0, \dot{x}, \dot{y}) - F_x(x_0, y_0, 0, 0) \\ F_y(x+x_0, y+y_0, \dot{x}, \dot{y}) - F_y(x_0, y_0, 0, 0) \end{Bmatrix} \\ &= - \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} \\ k_{yx} & k_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} d_{xx} & d_{xy} \\ d_{yx} & d_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

avec  $k_{ij} = -\frac{\partial F_i}{\partial x_j}$  et  $d_{ij} = -\frac{\partial F_i}{\partial \dot{x}_j}$  qui correspondent respectivement aux raideurs et aux amortissements dus au film d'huile. Ces coefficients peuvent être calculés analytiquement en fonction de la géométrie du palier, que l'on peut retrouver dans les travaux de diverses auteurs [VAN 88, CHI 93, RAO 96].



# B

---

## Solutions analytiques de loi de vitesse de rotation pour des cas particuliers

L'équation (1.21) qui permet de calculer la vitesse de rotation de l'arbre est simplifiée en négligeant les couplages entre la position angulaire et les déplacements généralisés du rotor et sans considérer le contact. Ainsi, il vient :

$$I_{\text{totale}} \ddot{\varphi} = C_{\text{entrée}} + C_{\text{fluides}} + C_{\text{sortie}} \quad (\text{B.1})$$

Il est alors possible de résoudre analytiquement cette équation pour des cas particuliers. Ici seules deux solutions sont présentées :

### montée en vitesse :

Considérons un arbre soumis en amont à un couple moteur constant  $C_{\text{entrée}} = C_{\text{max}}$  et un couple résistant en aval de la forme  $C_{\text{sortie}} = -\frac{C_{\text{max}}}{\dot{\varphi}_{\text{consigne}}} \dot{\varphi}$  où la vitesse angulaire  $\dot{\varphi}_{\text{consigne}} \neq 0$  représente la vitesse de rotation que l'on souhaite atteindre en régime permanent. Les frottements fluides sont négligés et l'équation (B.1) devient :

$$I_{\text{totale}} \ddot{\varphi} = C_{\text{max}} \left( 1 - \frac{\dot{\varphi}}{\dot{\varphi}_{\text{consigne}}} \right)$$

avec les conditions initiales suivantes :  $\varphi(t=0) = \varphi_0$  et  $\dot{\varphi}(t=0) = \dot{\varphi}_0$ . Cette équation possède une solution triviale en branche d'exponentielle :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi(t) = \dot{\varphi}_{\text{consigne}} \left[ t + \frac{I_{\text{totale}} \dot{\varphi}_{\text{consigne}}}{C_{\text{max}}} \left( \exp \left( -\frac{C_{\text{max}}}{I_{\text{totale}} \dot{\varphi}_{\text{consigne}}} t \right) - 1 \right) \right] + \dot{\varphi}_0 t + \varphi_0 \\ \dot{\varphi}(t) = \dot{\varphi}_{\text{consigne}} \left[ 1 - \exp \left( -\frac{C_{\text{max}}}{I_{\text{totale}} \dot{\varphi}_{\text{consigne}}} t \right) \right] + \dot{\varphi}_0 \\ \ddot{\varphi}(t) = \frac{C_{\text{max}}}{I_{\text{totale}}} \exp \left( -\frac{C_{\text{max}}}{I_{\text{totale}} \dot{\varphi}_{\text{consigne}}} t \right) \end{array} \right.$$



**ralentissement accidentel :**

Dans ce cas de figure, il n'y a ni couple moteur ni couple résistant, soit  $C_{\text{entrée}} = C_{\text{sortie}} = 0$ . Le rotor ralentit alors sous la seule action de frottements de type fluide newtonien et aérodynamique. L'équation (B.1) s'écrit donc :

$$I_{\text{totale}} \ddot{\varphi} = -A_{\text{aero}} \dot{\varphi}^2 - A_{\text{newt}} \dot{\varphi}$$

avec les conditions initiales suivantes :  $\varphi(t=0) = \varphi_0$  et  $\dot{\varphi}(t=0) = \dot{\varphi}_0$ .

En introduisant les constantes suivantes  $A_1 = \frac{A_{\text{newt}}}{I_{\text{totale}}}$ ,  $B_1 = \frac{A_{\text{aero}}}{I_{\text{totale}}}$  et  $C_1 = \frac{A_{\text{newt}}}{A_{\text{aero}}} = \frac{A_1}{B_1}$ , il est possible d'obtenir une formule analytique de la loi de vitesse angulaire en considérant trois cas de figure :

1. Si l'on ne considère que les frottements de type fluide newtonien, *i.e.*  $A_{\text{aero}} = 0 \neq A_{\text{newt}}$ , nous obtenons :

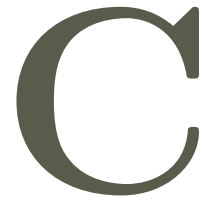
$$\begin{cases} \varphi(t) = \frac{\dot{\varphi}_0}{A_1} [1 - \exp(-A_1 t)] + \varphi_0 \\ \dot{\varphi}(t) = \dot{\varphi}_0 \exp(-A_1 t) \\ \ddot{\varphi}(t) = -A_1 \dot{\varphi}_0 \exp(-A_1 t) \end{cases}$$

2. Lorsque les frottements de type aérodynamique sont uniquement retenus, soit  $A_{\text{newt}} = 0 \neq A_{\text{aero}}$ , il vient :

$$\begin{cases} \varphi(t) = \frac{1}{B_1} \ln(1 + B_1 \dot{\varphi}_0 t) + \varphi_0 \\ \dot{\varphi}(t) = \frac{\dot{\varphi}_0}{1 + B_1 \dot{\varphi}_0 t} \\ \ddot{\varphi}(t) = -\frac{\dot{\varphi}_0^2}{B_1 (1 + B_1 \dot{\varphi}_0 t)^2} \end{cases}$$

3. Le cas général où  $A_{\text{aero}} \neq 0$  et  $A_{\text{newt}} \neq 0$  conduit aux formules suivantes :

$$\begin{cases} \varphi(t) = \frac{1}{B_1} \ln \left\{ \frac{\dot{\varphi}_0}{C_1} \left[ \left( 1 + \frac{C_1}{\dot{\varphi}_0} \right) \exp(A_1 t) - 1 \right] \right\} - C_1 t + \varphi_0 \\ \dot{\varphi}(t) = \frac{C_1}{\left( 1 + \frac{C_1}{\dot{\varphi}_0} \right) \exp(A_1 t) - 1} \\ \ddot{\varphi}(t) = -\frac{C_1}{\left[ \left( 1 + \frac{C_1}{\dot{\varphi}_0} \right) \exp(A_1 t) - 1 \right]^2} \left( 1 + \frac{C_1}{\dot{\varphi}_0} \right) A_1 \exp(A_1 t) \end{cases}$$



# Influence des effets thermiques sur la réponse dynamique du rotor

Très tôt, des études ont reporté l'influence des effets thermiques dus au contact frottant dans les turbomachines. Ce phénomène est connu sous le nom de l'« effet NEWKIRK » : NEWKIRK constata que lorsque des frottements entre le rotor et le stator ont lieu pour une vitesse en dessous de la vitesse critique de la turbine, les vibrations induites tendent à augmenter au cours du temps. D'autres auteurs confirmèrent plus tard que les vibrations peuvent augmenter en amplitude et en phase, engendrant des « vibrations spirales ». En effet, le contact génère un échauffement local des deux structures, chaleur qui par la suite peut être transmise au fluide environnant. Ceci crée donc un balourd thermique qui vient se rajouter aux autres sources d'excitations possibles comme des balourds massiques. Pour une vitesse légèrement en-dessous de la vitesse critique, le balourd thermique, qui apparaît avec une phase de moins de  $90^\circ$  au niveau du « hot spot » (position radiale où les contraintes de traction sont maximales), vient amplifier les vibrations synchrones du rotor initiées par le « heavy spot » (balourd massique). Du fait de l'augmentation du niveau de vibrations, le contact frottant s'intensifie générant ainsi un échauffement thermique plus important et ainsi de suite. Une fois le seuil de plasticité atteint dans la turbine, l'arbre est déformé en forme d'arc de façon irréversible : dès lors, la ligne d'arbres endommagée doit être remplacée entraînant de ce fait des frais importants à la charge de l'exploitant.

KELLENBERGER [KEL 80] fut le premier à proposer un modèle aussi bien qualitatif que quantitatif pour décrire le rubbing par balourd thermique. Il introduisit des paramètres décrivant les flux de chaleur entrant et sortant de la ligne d'arbres. Ainsi ces paramètres permettent de modéliser l'aspect thermique du rubbing conduisant aux vibrations spirales de la turbine.

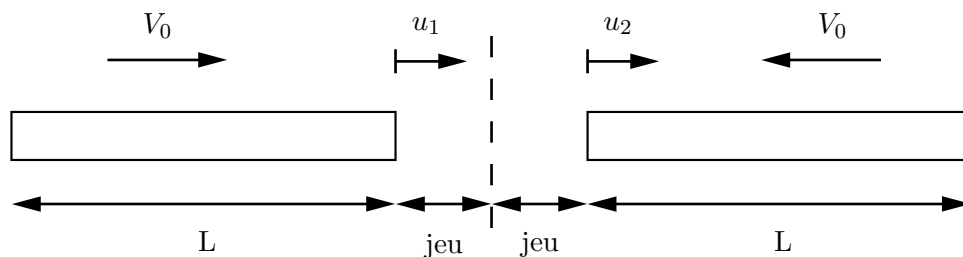
DIMAROGONAS [DIM 73] identifia un type supplémentaire de vibrations du rotor relié à l'aspect thermique : un mode oscillant apparaissant pendant la transition entre le mode spiral et le régime permanent.

Les effets précédemment cités, qui sont liés à l'échauffement thermique, sont particulièrement importants pour les turbines de grande dimension ayant une inertie thermique élevée.

# D

## Étude sur un cas-test de contact

Cette annexe s'intéresse au problème de contact sur deux cas simples afin de mettre en exergue les limites associées au schéma différences finies centrées. À cet effet, l'exemple de l'impact de deux barres élastiques, dont les notations sont introduites dans la figure D.1, a été implémenté dans un maquette MATLAB en reprenant les travaux de CARPENTER *et al.* [CAR 91]. Ce cas particulier est un des rares problèmes de contact à présenter une solution analytique [MAG 06].



**Figure D.1** - Représentation schématique de l'impact unidimensionnel de deux barres

Les deux barres sont identiques en terme de géométrie et de matériau et leurs caractéristiques mécaniques, cf. tableau D.1, sont issues de [CAR 91].

module d'Young $E$	206,84 GPa	masse volumique $\rho$	7844,1 kg/m <sup>3</sup>
longueur $L$	0,254 m	section droite $S$	$6,4516 \cdot 10^{-4}$ m <sup>2</sup>
jeu	$2,54 \cdot 10^{-4}$ m	vitesse initiale $V_0$	5,1359 m/s

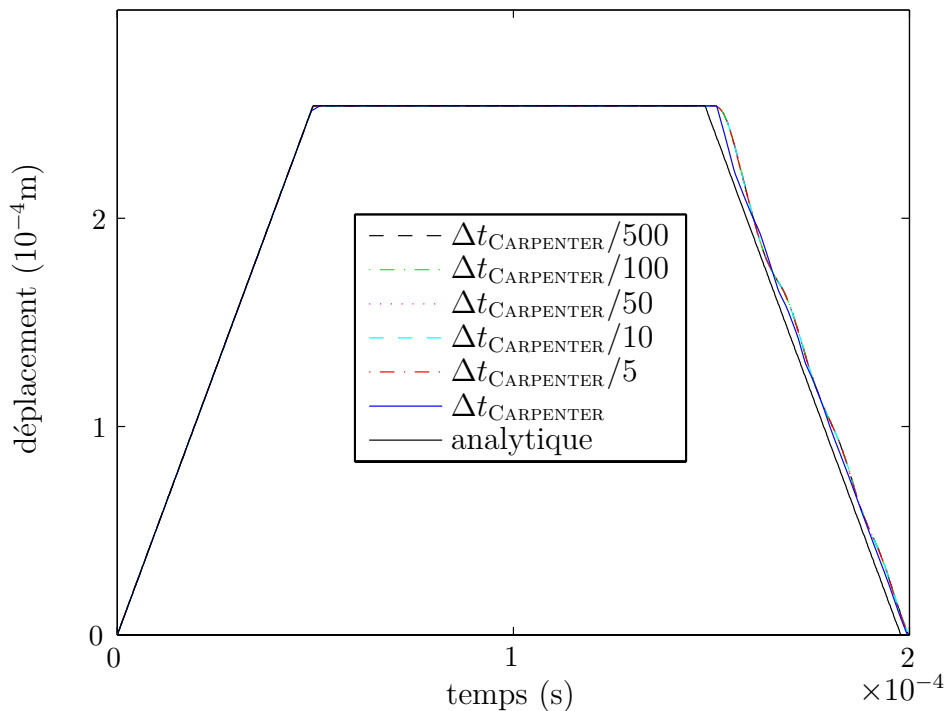
**Tableau D.1** - Caractéristiques mécaniques des barres

Soit deux barres identiques projetées initialement à une vitesse  $V_0$  l'une contre l'autre. Dans un premier temps, les barres se déplacent sans se déformer avant de s'impacter. Le contact génère une onde de compression qui se propage dans les deux barres et ces dernières se séparent lorsque le train d'ondes a fait un aller retour.

Ces trois phases se traduisent mathématiquement comme suit :

1. pour  $t < t_{\text{impact}} = jeu/V_0$  : le déplacement du nœud  $u_1$  préposé au contact vaut  $u_1 = V_0 t$  et sa vitesse  $\dot{u}_1 = V_0$ . Le déplacement de la barre de droite  $u_2$  déduit de la symétrie du problème. Enfin, vu qu'il n'y a pas contact, le multiplicateur de LAGRANGE est nul, soit  $\lambda = 0$ ;
2. pour  $t_{\text{impact}} \leq t < t_{\text{séparation}}$ , le déplacement du nœud en contact est égal à  $u_1 = jeu$  et la vitesse des nœuds à l'interface de contact est nulle ( $\dot{u}_1 = 0$ ). Le lagrangien est égal à  $\lambda = -V_0 S \sqrt{E\rho}$ ;
3. pour  $t > t_{\text{séparation}} = jeu/V_0 + 2L\sqrt{\rho/E}$ , les barres se séparent à une vitesse constante  $\dot{u}_1 = -V_0$  et le lagrangien est nul. Le déplacement du nœud en extrémité de la barre vaut  $u_1 = 2V_0 \left( jeu/V_0 + L\sqrt{\rho/E} - t/2 \right) = -V_0 (t - t_{\text{séparation}})$ .

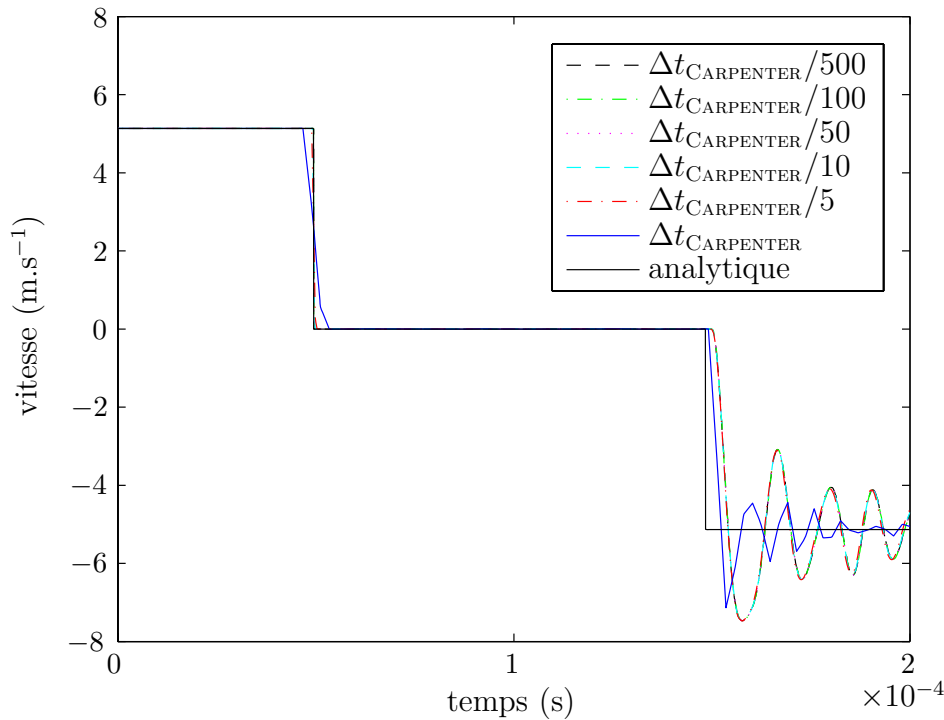
Cette solution analytique est comparée à une modélisation éléments finis des barres qui sont discrétisées en 20 éléments de même longueur élémentaire. L'impact des barres élastiques est traité numériquement avec le schéma différences finies centrées, combiné avec la méthode des multiplicateurs de LAGRANGE. On s'assure que la condition de COURANT est respectée pour la stabilité du schéma temporel, ce qui revient à  $\Delta t \leq \Delta t_{\text{CFL}} = L/c$  où  $c$  représente la célérité de l'onde dans le matériau ( $c = \sqrt{E/\rho}$ ). On se propose d'étudier l'influence du pas de temps sur la réponse dynamique des barres. En récupérant le pas de temps utilisé par CARPENTER *et al.*, soit  $\Delta t_{\text{CARPENTER}} = 2,226 \cdot 10^{-6}$  s, on choisit des fractions de ce pas de temps, et les résultats obtenus sont comparés à la solution analytique du problème d'impact.



**Figure D.2** - Influence du pas de temps sur le déplacement  $u_1$

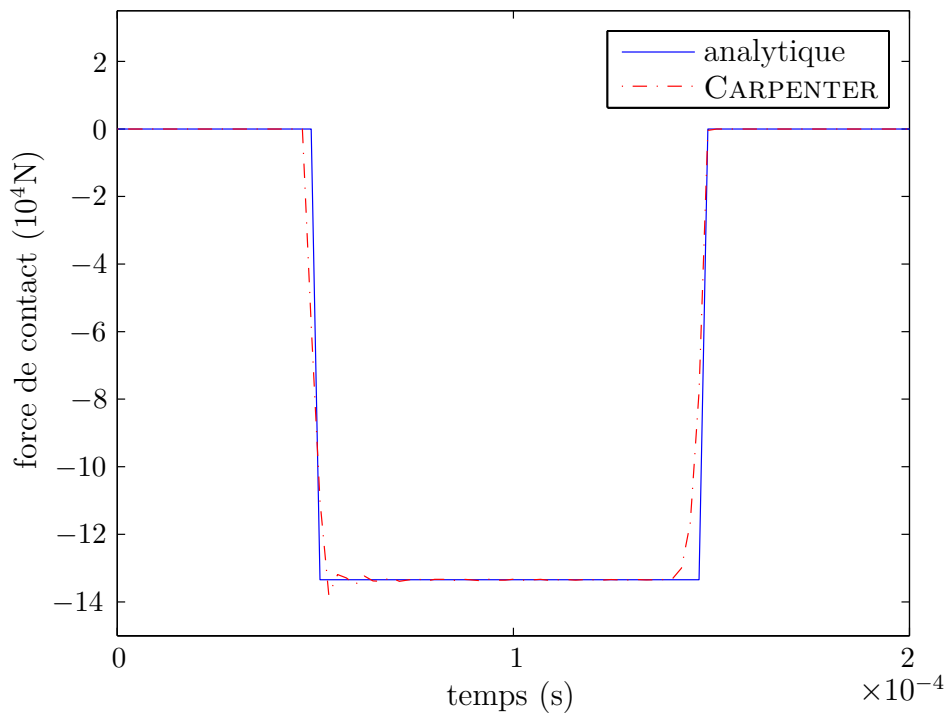
Comme l'illustre la figure D.2, l'algorithme de contact estime correctement le déplacement

ment  $u_1$  du nœud situé à l'extrémité de la barre de gauche. En raffinant la discrétisation temporelle, on converge vers une solution numérique légèrement différente de la solution analytique, et on approche de mieux en mieux le saut en vitesse correspondant à  $t = t_{\text{impact}}$  (cf. figure D.3). Cependant, la figure D.5) qui représente le legrangien met en exergue une nette dépendance de temps sur l'effort au pas de contact pour le premier instant de contact (cf. figure D.6), par rapport à la solution analytique tracée sur la figure D.4. On remarque néanmoins que les lagrangiens ont convergé pour les pas de temps suivants, pendant lesquels le contact est prolongé comme l'illustre la figure D.7.



**Figure D.3** - Influence du pas de temps sur la vitesse  $\dot{u}_1$

En fait, lors de l'impact, la vitesse des barres en valeur absolue passe théoriquement de  $V_0$  à 0 m/s, ce qui rend cette quantité non différentiable à  $t = t_{\text{impact}}$ . Ainsi, l'accélération de la barre est donc non définie à l'instant du premier contact. Numériquement, l'accélération peut s'interpréter comme une singularité pour laquelle on obtient une valeur finie qui dépendra de la discrétisation temporelle. Si l'on avait choisi de calculer la vitesse par un schéma explicite où la vitesse vaut  $\dot{u}_1^t = \frac{u_1^t - u_1^{t-\Delta t}}{\Delta t}$ , l'accélération aurait été égale à  $\ddot{u}_1^t = \frac{\dot{u}_1^{t+\Delta t/2} - \dot{u}_1^{t-\Delta t/2}}{\Delta t} = \frac{0 - V_0}{\Delta t}$  : l'accélération tend alors vers l'infini si le pas de temps diminue. Dans notre cas, le schéma différences finies centrées calcule la vitesse par la formule  $\dot{u}_1^t = \frac{u_1^{t+\Delta t} - u_1^{t-\Delta t}}{2\Delta t}$ . Ainsi, en considérant le pas de temps qui précède le contact, la vitesse de la barre n'est plus égale à  $V_0$  et l'accélération ne vaut pas 0 m/s<sup>2</sup> car ces quantités sont calculées avec le déplacement évalué à l'instant d'après : ceci n'est pas physique mais le décalage numérique dans la réponse de la barre reste cependant mineur



**Figure D.4** - *Effort de contact analytique comparé à la solution calculée par CARPENTER*

étant donné l'ordre de grandeur du pas de temps. Comme le montre la figure D.8, on observe quand même une augmentation de la décélération avec la diminution de  $\Delta t$ , moins importante qu'avec la formule précédente en vitesse. Enfin, il faut vérifier l'équilibre dynamique de la structure : pour compenser l'augmentation de l'accélération, la force de contact doit également augmenter.

On retiendra de l'analyse de cet exemple que les déplacements et les vitesses sont bien approchés même lors du contact. Si le contact est prolongé, la force de contact sera bien calculée. En revanche, la valeur du lagrangien à l'instant de l'impact n'a pas de sens.

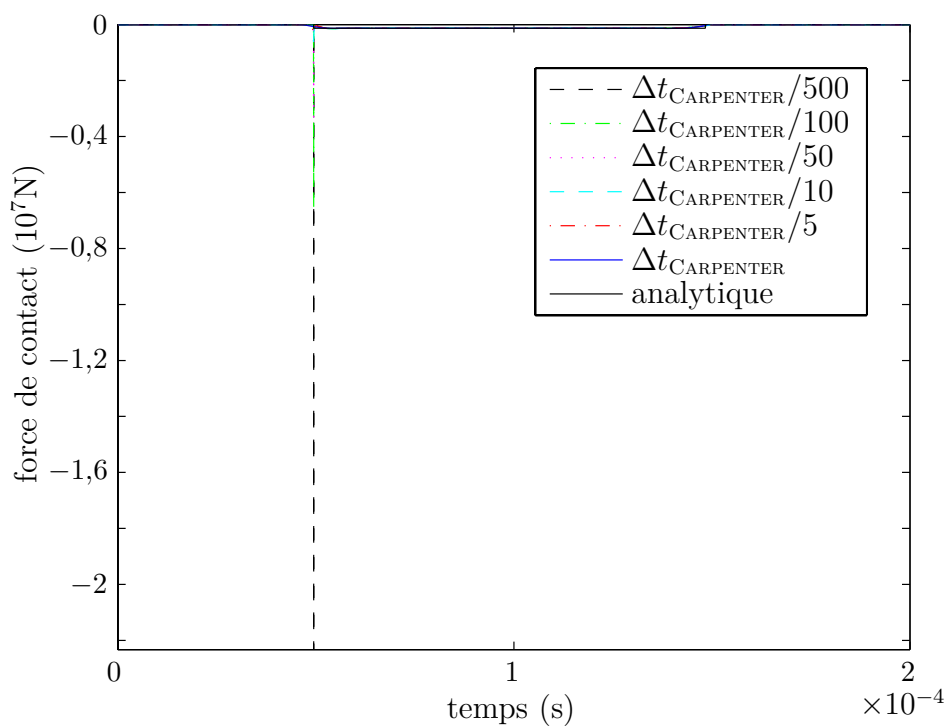


Figure D.5 - Influence du pas de temps sur les efforts de contact

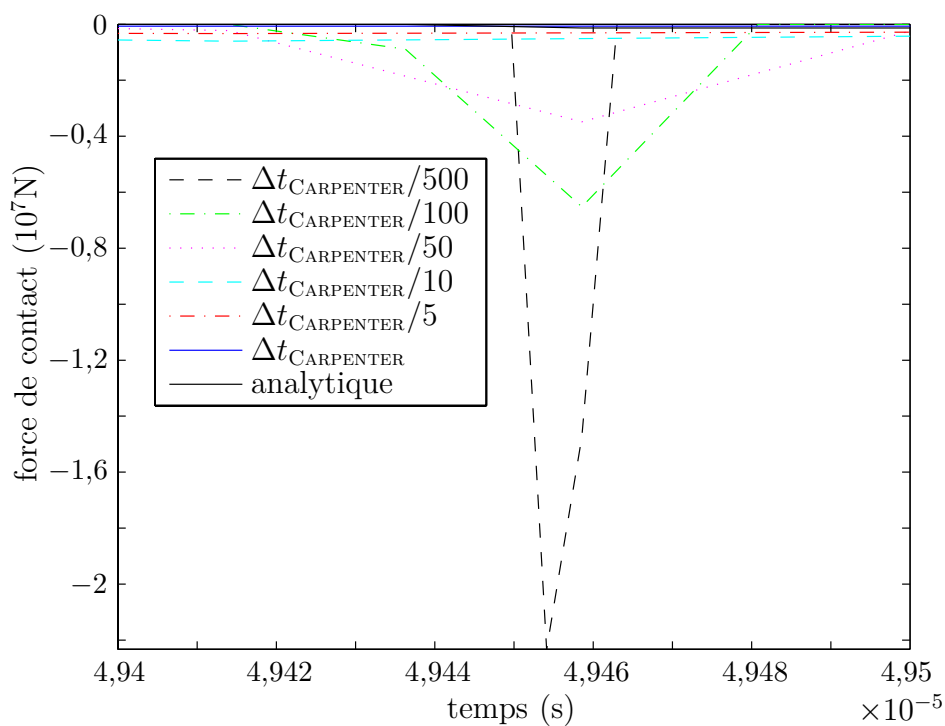
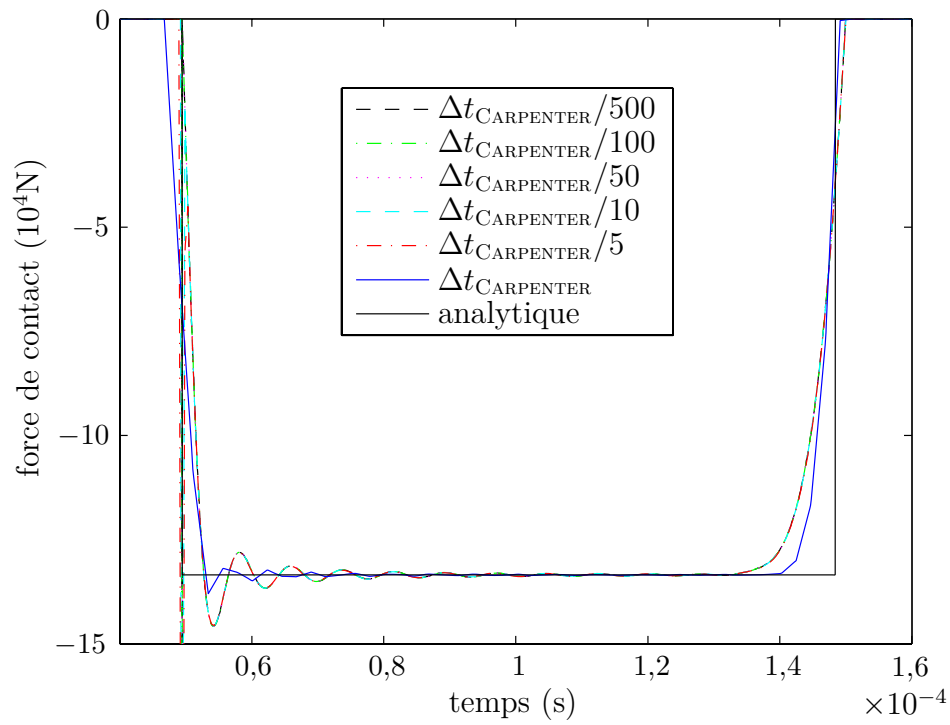
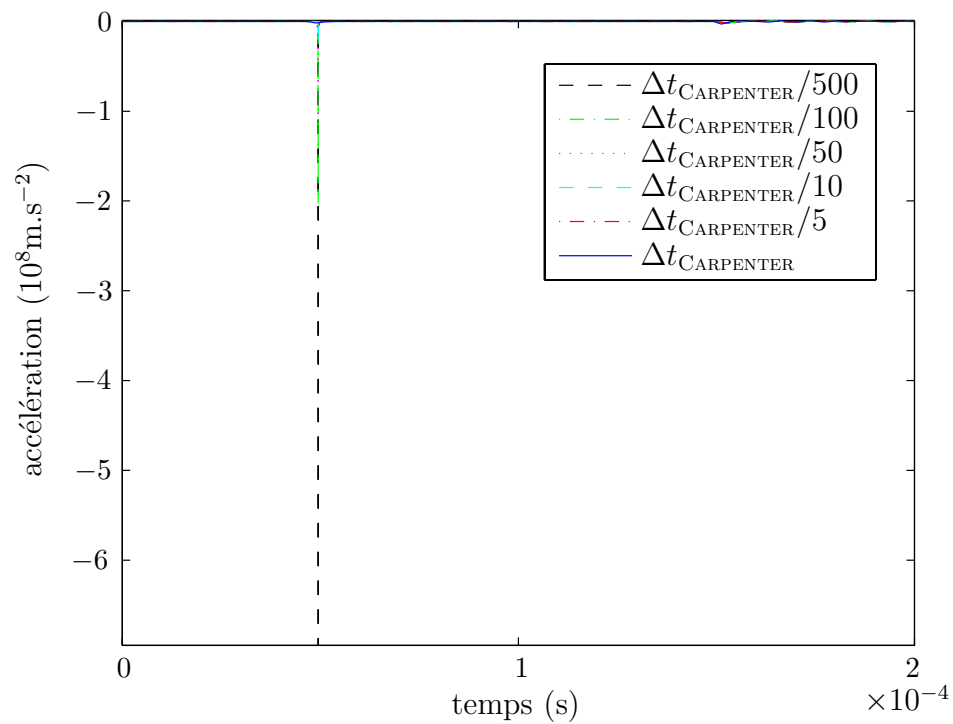


Figure D.6 - Influence de l'effort de contact à l'instant du premier contact pour différents pas de temps





**Figure D.7** - Convergence des efforts de contact après le premier contact pour différents pas de temps



**Figure D.8** - Accélération  $\ddot{u}_1$  pour différents pas de temps

