



HAL
open science

**Vers des spécifications formelles : Fondements
Mathématiques et Informatiques pour la Géométrie
Dynamique**
Bernard Genevès

► **To cite this version:**

Bernard Genevès. Vers des spécifications formelles : Fondements Mathématiques et Informatiques pour la Géométrie Dynamique. Interface homme-machine [cs.HC]. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 2004. Français. NNT : . tel-00354048

HAL Id: tel-00354048

<https://theses.hal.science/tel-00354048>

Submitted on 18 Jan 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE

présentée par

Bernard GENEVES

pour l'obtention du titre de

Docteur de l'université Joseph Fourier – Grenoble 1

spécialité informatique

Vers des spécifications formelles :
Fondements Mathématiques et Informatiques
pour la Géométrie Dynamique

21 décembre 2004

Jury :

M. Laurent	TRILLING	Président
M. Roger	CUPPENS	Rapporteur
M. Thomas	GAWLICK	Rapporteur
M. Sylvestre	GALLOT	Examineur
M Jean-Marie	LABORDE	Directeur

Les droits de propriétés sur les produits Cabri appartiennent à l'entreprise Cabrilog. Les droits de propriété sur les algorithmes utilisés par Cabri appartiennent à l'entreprise Cabrilog.

Remerciements

C'est l'équipe de recherche autour de Cabri, le Cahier de Brouillon Informatique, qui a hébergé ce travail ; et c'est le créateur et l'inspirateur de Cabri, Jean-Marie Laborde, qui l'a dirigé.

Sans son inspiration, ses idées visionnaires, son énergie créative, rien de ce qui suit n'aurait existé.

Qu'il en soit ici chaleureusement remercié.

Soient remerciés aussi les rapporteurs, pour leurs remarques et critiques constructives, leurs améliorations, et qui, en lisant mon texte, ont su le dépasser et me montrer l'horizon au-delà.

Merci à mon ami Sylvestre Gallot, pour tout ce que j'ai pu découvrir grâce au travail que nous avons fait ensemble.

Et soient remerciés avec lui tous ceux qui m'ont accompagné et aidé dans cette aventure, par leurs conseils, leur aide, leur enthousiasme, qui sont dans l'équipe de recherche animée par Colette Laborde, ou qui ont travaillé autour de Cabri et sont restés tout près, ou sont partis parfois très loin.

Merci à tous mes amis de Toulouse et de Cahors, qui continuent à m'accompagner.

Et merci à ma famille, qui s'est tant dévouée.

Abstract

Toward Formal Specifications: Mathematical and Computational Foundations for Dynamic Geometry

This work is a mathematical and algorithmic study which aims at preparing an axiomatization or a specification of dynamic geometry. Problems in dynamic geometry arise with the dynamic behaviour of multiple intersections of curves, and partially defined geometric objects. Recent studies have shown that continuous moves are not fully compatible with determinism of dynamic behaviours. This work details this crucial aspect. Using techniques out of the scope of discrete geometry, it is shown that the dynamic behaviour of circle intersections presents unavoidable singularities.

An attempt to extend this result to conic intersections is described. Propositions intended to unify the algorithmic aspects for handling partially defined objects, such as points on objects, are presented, starting from the mathematical framework to the operational implementation. This work also shows that the basic mathematical concept of unsigned area does not intrinsically support moves, unlike signed area. By allowing the specification of algorithms to process the dynamic behavior of circle intersections, this work sets a first quality step for evaluating dynamic geometry software, with respect to their mathematical correctness. Several implementations of this work are included in Cabri 2 Plus. At the theoretical level, this work revisits the problem of the nature of dynamic figures.

Résumé

Vers des spécifications formelles : Fondements Mathématiques et Informatiques pour la Géométrie Dynamique

Ce travail est une étude algorithmique et mathématique préparant une axiomatisation ou une spécification de la géométrie dynamique.

Le comportement dynamique des intersections de courbes, dans le cas où elles sont multiples, et la gestion algorithmique d'objets géométriques sous-déterminés posent problème. Il est connu depuis peu que la continuité des déplacements et le déterminisme des comportements dynamiques ne sont pas entièrement compatibles ; ce travail précise ce point essentiel : par des procédés globaux qui sortent du cadre de la géométrie discrète, il est montré que le comportement dynamique des intersections de cercles présente des singularités inévitables, qui sont énumérées. Une tentative est faite pour étendre ce résultat aux intersections de coniques.

Des propositions pour unifier le traitement algorithmique d'objets sous-déterminés, comme les points sur objet, sont présentées, depuis le cadre mathématique jusqu'à l'implémentation effective. Ce travail montre aussi qu'il existe des concepts mathématiques de base, comme la notion d'aire non signée, dont la justification ultime ne supporte pas le mouvement, au contraire de la notion d'aire signée. En permettant la spécification des algorithmes traitant du comportement dynamique des intersections de cercles, ce travail établit un premier niveau de qualité pour les logiciels de géométrie dynamique, permettant de juger leur cohérence mathématique. Plusieurs des implémentations réalisées sont présentes dans Cabri2 Plus, logiciel largement diffusé par l'entreprise Cabrilog. Au niveau théorique, ce travail repose différemment la question de la nature des figures dynamiques, en particulier de la nature mathématique précise des lieux géométriques en géométrie dynamique.

Vers des spécifications formelles :
Fondements Mathématiques et
Informatiques
pour la Géométrie Dynamique.

Bernard GENEVÈS

21 décembre 2004

Table des matières

Introduction	2
1 Qu'est-ce que la géométrie dynamique ?	9
1.1 Continuité vs déterminisme	10
1.2 Nature des lieux géométriques	11
1.3 La notion de figure dynamique	16
1.4 La conjecture d'isotopie	17
1.5 Autour du théorème d'universalité de Mnev	21
1.6 Le cas du plan projectif complexe	23
1.7 Vers une théorie de la complexité ?	24
2 Hilbert et les fondements	29
2.1 L'aire des polygones simples	30
2.2 L'aire arithmétique	36
2.3 L'aire algébrique	37
3 Intersections dynamiques	40
3.1 Pourquoi les intersections ?	40
3.2 La courbe d'Archytas	41
3.3 Le paradoxe de la géométrie dynamique	44
3.4 Distinguer les intersections	47
3.5 Réels et imaginaires	51

3.6	L'axe radical	52
3.7	L'espace des cercles et droites du plan	55
3.8	Les intersections de cercles	59
3.9	Les cercles du plan projectif	65
3.10	Coniques	68
3.11	Les intersections de coniques	74
4	Dynamique des objets composites	78
4.1	Point sur segment hyperbolique	79
4.2	Géométrie projective et stabilité à l'infini	80
4.3	Point sur objet et paramétrisation	82
4.4	Points sur objets et transformations	84
4.5	Points sur objet : un critère	86
4.6	Image sur un objet	90
4.7	Autres géométries	99
4.8	Des transformations bijectives	104
4.9	Conclusion	106
5	Conclusion	107
5.1	Annexe	110

Introduction

La géométrie Euclidienne a certainement été le premier travail où tous les postulats de base se voulaient explicités ; depuis cette lointaine époque, Hilbert a réécrit des fondements pour la géométrie [73, 4] ; au-delà de ces axiomatisations, Tarski, vers 1930, a démontré la décidabilité de la géométrie élémentaire réelle [116, 66], dans les années 70, Collins a élaboré un algorithme, la décomposition cylindrique, pour effectuer la décision, Wu a découvert une autre méthode, beaucoup plus efficace, et démontré mécaniquement plusieurs centaines de théorèmes [122].

La géométrie semble ainsi bien fondée, et sur des bases qui permettent des constructions informatiques fécondes ; la géométrie sert toujours de cadre pour de très nombreuses études sur la mécanisation de l'inférence, nous n'avons rappelé que quelques étapes ; puisque les propriétés des figures de géométrie ne dépendent pas de l'emplacement ni de la taille de la figure, puisqu'elles sont en général invariantes par rotation et homothétie, ces propriétés ne vont pas dépendre d'un mouvement quel qu'il soit ; il est donc tentant de penser que la géométrie dynamique, qui mêle géométrie et mouvement, ne devrait pas poser de trop gros problèmes d'axiomatisation ; il serait très important de trouver pour ces axiomes une formulation acceptable et utile pour des informaticiens, ce qu'on appelle des spécifications, et si possible des spécifications formelles.

Tel était bien le premier objectif visé pour cette thèse : "Spécifications

formelles de la géométrie dynamique".

Cependant, caractériser la géométrie dynamique n'est pas caractériser la géométrie, et de réels problèmes subsistent, qui ne permettent pas, à notre sens, d'en arriver déjà au stade des spécifications formelles. Ces problèmes n'ont pas trait aux propriétés et théories qui constituent la géométrie proprement dite ; ce sont des problèmes en amont de la géométrie, des problèmes qui se posent au concepteur de logiciel, aussi bien de géométrie dynamique que de représentation graphique pour la conception assistée, voire de visualisation scientifique dès que celle-ci inclut le mouvement ; ainsi, dans une figure en mouvement, une partie des éléments géométriques sont des données, possédant en général plusieurs degrés de liberté, par exemple les points libres directement manipulables par l'utilisateur ; d'autres éléments sont dépendants, liés aux précédents par des propriétés contraignantes. Or la position de ces derniers n'est pas toujours définie de manière unique ; la position est définie de manière unique, dans le cadre de la géométrie dynamique, en particulier lorsque la construction est effectuée à la règle seule ; dans le cas contraire, elle n'est pas toujours définie de manière unique : par exemple un cercle peut couper une droite en deux points ; or comment distinguer ces deux points, donner à chacun une individualité, afin que jamais leurs rôles ne puissent s'échanger ? Le concepteur doit intervenir pour décider des méthodes qui rendront unique chaque instance de la construction à tracer : c'est une des facettes du "tracing problem" [86] ou "persistant naming problem" [77].

Ce problème apparaît clairement pour les intersections multiples, mais aussi en d'autres circonstances ; si l'on admet qu'on puisse directement manipuler une droite, comment le concepteur devra-t-il gérer les points posés sur cette droite ? Le problème est ici que la droite AB est identique à la droite BA, du point de vue des propriétés globales de la droite ; cependant, la position d'un point posé sur la droite n'est pas une propriété globale de la droite ; il faut donc plus pour gérer des points sur une droite que pour

gérer une droite globalement, en fait l'axiomatique n'est plus la même, et les deux objets droite AB et droite BA doivent être distingués, quant à leurs mouvements ; quels sont alors les principes qui devront guider les choix du programmeur ?

Ces principes ressortent de l'algorithmique, de la mathématique pour les propriétés géométriques, mais aussi d'une vision plus globale de la géométrie dynamique ; par exemple, des décisions sont nécessaires, comme le choix de privilégier déterminisme ou continuité du comportement dynamique des constructions, ou bien d'inclure ou non un procédé d'abstraction tel que les macro-constructions.

Une décision est par exemple le choix de fusionner ou non les points qui coïncident géométriquement mais ont des définitions différentes. Une telle décision a évidemment des conséquences d'ordre didactique — des définitions différentes doivent-elles être identifiées, ne plus pouvoir être distinguées —, et surtout des conséquences sur l'interface : la fusion enlève bien des ambiguïtés ; mais il importe aussi de concevoir les conséquences algorithmiques : nous verrons qu'une telle fusion pourrait remettre en cause la conception des macro-constructions, telles qu'elles existent actuellement dans Cabri2. Or l'existence des macro-constructions, et la gestion afférente des menus, sont à nos yeux une partie essentielle, un élément déterminant dans la définition de la géométrie dynamique, dans la mesure où celle-ci doit pouvoir supporter des possibilités de modélisation variées, et en particulier différentes sortes de géométries.

Certaines de ces questions, comme la continuité du comportement des constructions géométriques, supposent une connaissance mathématique préalable du comportement des objets de base dans le mouvement ; or des connaissances de cette nature sont parfois relativement récentes ; un exemple est fourni par les différentes formes de pentagones simples dont les angles sont donnés ; celles-ci peuvent être paramétrées par les points d'un pentagone du plan hyperbolique [118, 7]. Sur la figure est représenté un penta-

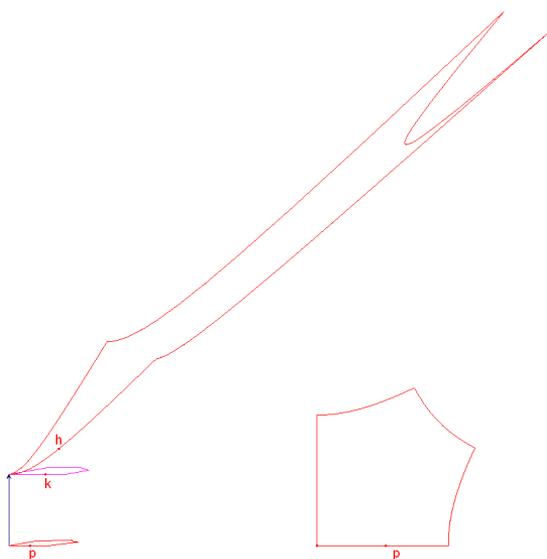


FIG. 1 – Le pentagone régulier à cinq angles droits dans trois modèles du plan hyperbolique

gone régulier à cinq angles droits du plan hyperbolique ; il est représenté dans trois modèles, dans le disque de Poincaré, vu en vraie grandeur, puis en perspective, dans le disque de Klein vu en perspective aussi, et sur une nappe de l'hyperboloïde de révolution de l'espace. L'intérieur de ce pentagone régulier paramètre les formes de pentagones simples à angles tous égaux entre eux du plan ordinaire ; chaque point du pentagone hyperbolique correspond à une forme de pentagone usuel.

Ces paramétrages de formes se généralisent à tous les polygones à angles fixés [7], et, par une transformation de Schwarz-Christoffel adéquate, à tous les polygones à côtés de longueurs fixées [82]. Paramétrer toutes les formes d'objets géométriques simples est intéressant pour la géométrie dynamique, car cela peut fournir un point de vue sur le concept de figure dynamique en général, et sa complexité éventuelle.

Afin de se donner les moyens de prendre des décisions convenables en matière de définition de la géométrie dynamique, il faut connaître les conséquences de chaque choix, et ceci suppose une étude préalable, l'étude des fondements ; ce sera l'objet de ce travail, dont le titre est :

"vers des spécifications formelles : fondements informatiques et mathématiques de la géométrie dynamique."

Ce sujet semble toutefois très ambitieux. Ce travail n'abordera que quelques-uns des problèmes qui se posent pour fonder la géométrie dynamique :

- Qu'est-ce que la géométrie dynamique, en quoi diffère-t-elle des géométries connues ? Quel est son domaine, quelles sont ses applications ?
- La nature d'une figure de géométrie dynamique : peut-on spécifier une figure dynamique ? De quelles manières ?
- La géométrie dynamique introduit des comportements dynamiques qui n'ont pas d'équivalent en géométrie usuelle, ainsi le comportement des points sur objet ; ce comportement correspond au type de

géométrie représentée. Que doit-il être en général ? Peut-il, doit-il être modifiable ?

- La dynamique des intersections, quand elles sont multiples, pose de difficiles problèmes d’ambiguïté. Leur comportement, dans le cas des cercles, illustre un des problèmes essentiels en géométrie dynamique ; comment gérer le cas plus difficile des coniques ? Celui des courbes plus générales que sont les lieux géométriques ?
- La représentation du mouvement en géométrie présuppose une simulation informatique des nombres ; or plusieurs représentations informatiques des nombres existent, qui répondent à des problèmes spécifiques. Quels problèmes se posent pratiquement en géométrie dynamique, quelles solutions peut-on adopter ?

Pratiquement, nous n’aborderons pas le dernier point faute de temps de rédaction, et bien que ce soit un des endroits où nous sommes intervenus dans la programmation de l’une des versions de Cabri. Ce travail, effectué dans l’équipe de recherche qui conçoit et développe des environnements de géométrie dynamique pour l’apprentissage et la modélisation en mathématiques et sciences physiques, est centré sur Cabri2 et son successeur Cabri2 Plus ; nous avons en effet contribué, modestement, au code de Cabri2 Plus, pour ce qui concerne quelques évolutions concernant les intersections ainsi que le calcul et le tracé des coniques.

Chapitre 1

Qu'est-ce que la géométrie dynamique ?

J.M. Laborde, dans [87], décrit un cadre d'étude afin d'énoncer les questions que posent les fondements de la géométrie dynamique, discipline où il est à la fois créateur, inspirateur, et auteur des principales réalisations logicielles.

J. Richter-Gebert et U. Kortenkamp ont aussi élaboré, en même temps que leur logiciel Cinderella, des études sur les fondements de la géométrie dynamique.

T. Gawlick a entamé une étude systématique des concepts et des problèmes essentiels de la géométrie dynamique, dont il expose en particulier les conséquences didactiques.

Une autre étude de la géométrie dynamique a été menée indépendamment par R. Cuppens, étude des spécifications du point de vue utilisateur, et aussi étude constructive du point de vue du mathématicien, illustrant par des constructions explicites beaucoup de thèmes parmi les plus importants du domaine d'application mathématique de la géométrie dynamique.

La géométrie dynamique donne de véritables outils informatiques, au sens où de tels outils peuvent être utilisés pour d'autres usages que ceux

initialement conçus, permettant des traitements nouveaux, posant des problèmes nouveaux, obligeant à revisiter avec un regard nouveau des domaines que l'on croyait connus. Ainsi, S. Gallot et l'auteur ont réalisé des présentations à l'aide de Cabri de problèmes touchant aux géométries sur des polyèdres [49, 61, 62], cf. Annexe.

L'étude qui suit est centrée sur une problématique de fondements, et de ce fait orientée suivant les précédents points de vue ; d'autres points de vue sur la géométrie dynamique ont aussi leur intérêt ; ainsi en est-il des relations complexes entre la visualisation des figures et la démonstration des propriétés qui sous-tendent ces figures, entre la géométrie dynamique et, de façon générale, la preuve ; ce point de vue est notamment illustré par des travaux comme [17, 23], sous la direction de L. Trilling, reliant assez directement les spécifications d'une figure à sa réalisation, à l'aide d'un système de programmation déclaratif.

Un autre point de vue particulièrement important sur la géométrie dynamique, est l'étude de ses usages du point de vue de l'apprentissage, du point de vue didactique [91]. C'est certainement le point de vue essentiel pour l'enseignement.

1.1 Continuité vs déterminisme

Selon Gawlick, le paradoxe essentiel de la géométrie dynamique est le fait qu'il est impossible de réaliser dans un logiciel de géométrie dynamique à la fois un comportement dynamique continu, et un comportement dynamique déterministe, pour tous les objets géométriques. Ce phénomène a tout d'abord été publié par U. Kortenkamp [Kor] ; l'implémentation de Cinderella est faite en privilégiant la continuité, l'implémentation de Cabri a été faite en privilégiant le déterminisme ; la question concerne en fait les points d'intersection de deux objets géométriques, lorsque l'intersection en question est multiple, lorsqu'elle contient au moins deux points, c'est pourquoi la présentation détaillée est faite dans le chapitre consacré

au comportement dynamique des intersections.

1.2 Constructibilité et nature des lieux géométriques

Le Constructeur Universel d'Equations de L'Encyclopédie de D'Alembert ¹ réalisait à la fin du XVIIIème siècle le principe de résolution des équations par une méthode qui empruntait à la géométrie, à la mécanique, au mouvement, mais aussi à la théorie des fonctions, issue de l'évolution générale de la mathématique à cette époque, en sortant donc du cadre géométrique des Anciens et d'Euclide [21, 33].

Ce Constructeur implémente géométriquement à la manière de Descartes les opérations de base de l'algèbre ; une implémentation du constructeur dans Cabri rend ainsi constructibles à la règle seule les courbes qu'il est capable de tracer comme lieux géométriques ; ceci pose alors la question : quelles courbes peut-on ainsi tracer ? Or toutes les courbes qui représentent une fonction polynomiale à une variable, de degré donné, sont clairement représentables par ce procédé, au moins sur un intervalle borné ; le point courant de la courbe est alors construit uniquement à la règle comme fonction d'un point sur segment. Tracer une courbe comme un lieu géométrique constitue-t-il une opération recevable au sens de la constructibilité à la règle et au compas ?

Les affirmations qui précèdent sont-elles contradictoires avec ce que Gauss [51] et ses successeurs nous ont appris sur la constructibilité à la règle et au compas ? Une réponse est que le fait de savoir construire le point courant d'une courbe ne donne pas les points d'intersection de cette courbe avec une autre courbe, ou avec une droite quelconque ; seuls sont

¹J-M Laborde a dirigé la réalisation d'un exemplaire du Constructeur, présenté en particulier aux Journées Nationales APMEP 1996 à Albi, 25-27 oct. - selon lui, l'attribution à D'Alembert est douteuse

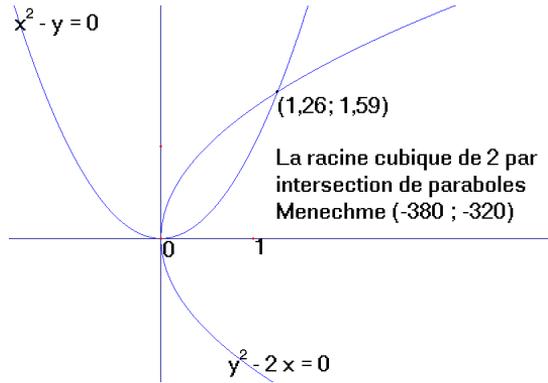


FIG. 1.1 – La racine cubique de 2 est constructible avec conique, mais pas avec règle et compas

obtenus les points constructibles à la règle et appartenant à la courbe.

Par exemple, les deux paraboles utilisées par Ménechme se coupent au point de coordonnées (x, y) telles que :

$$x^2 = y$$

$$y^2 = 2x$$

d'où $x^4 = 2x$ c'est-à-dire $x^3 = 2$; ainsi $x = \sqrt[3]{2}$ et $y = \sqrt[3]{4}$.

Le point ayant ces coordonnées (x, y) n'est pas constructible à la règle et au compas ; il est ici obtenu par intersection de deux objets coniques ; il n'est pas l'image par une construction à la règle d'un point rationnel de la droite repérée par les points 0 et 1 de la figure.

Les points construits à la règle depuis les points d'un segment comprennent déjà tous les points images des points rationnels du segment, il y en a une infinité, et ceci explique que le tracé du lieu permette de représenter la courbe ; la question est de savoir si la construction qui permet de représenter la courbe fournit les points nécessaires aux constructions ultérieures ; pour donner un exemple, si les deux coniques de Ménechme

avaient été tracée par le constructeur de D'Alembert, ou par la même technique, les deux lieux correspondant aux coniques auraient donné visuellement l'impression de se couper, comme sur la figure actuelle, mais le point d'intersection n'aurait pas été construit, n'aurait pas été obtenu par les constructions à la règle.

Dans Cabri2, l'intersection de lieux n'étant pas accessible par le logiciel en général, l'impossibilité d'obtenir le point de concours apparent des lieux aurait correspondu exactement aux propriétés mathématiques de la construction ; au contraire, la construction par des coniques fournit le point ; ainsi, Cabri2 a un comportement parfaitement cohérent vis-à-vis des propriétés des objets construits, les lieux géométriques n'étant pas des objets de base pour les constructions.

Cabri2 Plus introduit une nouvelle possibilité : l'intersection d'un objet avec un lieu devient accessible ; il est clair que cette possibilité permet de construire des points inaccessibles par construction à la règle seule, ou à la règle et au compas, ou avec des coniques. Les lieux deviennent des objets à part entière, du point de vue des constructions statiques. Ainsi, il devient possible d'accéder à de nouveaux objets géométriques, de résoudre beaucoup plus facilement des problèmes ; cette nouvelle extension va évidemment considérablement augmenter la puissance de l'outil informatique dans la recherche et la résolution de problèmes.

La reconfiguration des menus a été utilisée par R. Cuppens pour faire le point d'une manière nouvelle sur les différentes questions de constructibilité en géométrie Euclidienne [29, 30] ; l'outil "traceur de coniques" est introduit et utilisé dans [34] ; d'autres auteurs, dont l'auteur de ces lignes [13], ont prolongé ces constructions ; [1] contient à la fois une étude théorique et des constructions élégantes.

Cabri2 permet de construire des approximations de courbes fractales ; l'intersection d'un lieu avec de tels objets aura nécessairement un comportement dynamique difficile à maîtriser. La puissance et la généralité de l'outil "intersection avec un lieu" en limitent inévitablement le comportement dynamique.

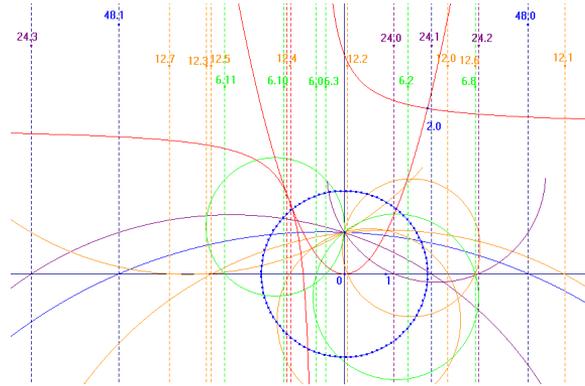


FIG. 1.2 – Une construction du polygone régulier à 97 côtés dans "Constructions with conics" [13]

T. Gawlick a étudié la question de la constructibilité des courbes en géométrie dynamique, en s'appuyant en particulier sur le théorème de Lüroth qui caractérise l'existence d'une représentation paramétrique rationnelle des courbes algébriques en fonction du genre, c'est-à-dire en fonction du degré et des caractéristiques des points singuliers.

Par exemple, une cubique plane n'est rationnelle que si elle a un point singulier ; Gawlick produit alors une cubique, construite à l'occasion d'un problème géométrique simple, un lieu d'orthocentre d'un triangle, qui ne semble pas présenter de point singulier ; comment expliquer sa construction, qui en donne une représentation paramétrique rationnelle à partir d'une droite ?

Voici un exemple analogue, celui de la courbe d'équation $y = x^3$ qui peut être obtenue comme lieu géométrique à partir du Constructeur Universel d'Equations, avec un point courant construit à la règle seule ; cette courbe est de degré trois, et elle a des représentations paramétriques rationnelles, par exemple celle mentionnée ci-dessus ; en tant que cubique, elle a nécessairement un point singulier ; où se trouve-t-il ? Est-il imaginaire ? La projection stéréographique ci-dessus de cette courbe ne montre pas de

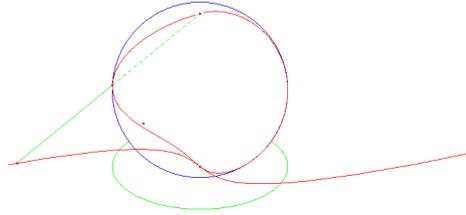


FIG. 1.3 – Projection stéréographique de la courbe $y = x^3$

particularité à l'infini ; cependant, le modèle de complétion à l'infini donné par la projection stéréographique est réduit à un point ; si on homogénéise l'équation de la courbe, $yz^2 = x^3$, et qu'on l'étudie à l'infini, on s'aperçoit qu'elle n'a qu'un point d'intersection avec la droite de l'infini, de coordonnées $z = 0 \ x = 0 \ y = 1$; pour $y = 1$, la courbe se réduit à $z^2 = x^3$, et la courbe a en fait un point singulier, un point de rebroussement, à l'infini.

On comprend que cette situation est générale, et que les graphes de fonctions polynômes de degré n à une variable sont, en tant que courbes algébriques, des courbes rationnelles ayant un point singulier d'ordre $n - 1$ à l'infini.

Gawlick a également proposé un moyen de contourner le "persistent naming problem" des CAD ainsi dénommé par C. Hoffman, qui sera étudié dans le chapitre sur le comportement dynamique des intersections ; il observe la grande généralité des constructions à la règle seule, et leur intérêt pour éviter les ambiguïtés produites par les intersections avec cercles et coniques ; en outre, il observe que des données préalables riches donnent le moyen de dépasser les limitations inhérentes à ces constructions ; il retrouve ainsi dans le contexte de la géométrie dynamique des idées exprimées par Poncelet [104, p.131], et également exploitées par R. Cuppens.

La série d'ouvrages [29, 31, 33] contient sous forme de constructions une étude très riche tout d'abord des spécifications de la géométrie dynamique du point de vue de l'utilisateur, ensuite de la plupart des thèmes

mathématiques qui constituent le domaine d'élection de la géométrie dynamique. Ainsi sont étudiés les théorèmes classiques de la géométrie, les questions de constructibilité au travers de l'exemple des polygones réguliers qui servit à Gauss pour introduire le sujet, et à l'aide des menus réduits, le tracé des courbes algébriques et transcendentes, les transformations classiques et moins classiques, comme l'inversion isogonale, les systèmes articulés, la géométrie dite supérieure depuis Chasles, les propriétés des coniques et des cubiques, etc. Par exemple, R. Cuppens examine les possibilités d'obtention à la règle de points d'intersections de conique quand certains de ceux-ci sont connus ; il propose en interprétant Chasles, des méthodes de tracé des cubiques, utilisant des correspondances homographiques entre faisceaux de courbes, ce qui constitue une application élaborée de la méthode théorisée par Gawlick.

1.3 La notion de figure dynamique

La notion de figure dynamique a fait l'objet de nombreuses analyses ; il faut citer la distinction entre dessin et figure, la figure étant définie par des propriétés géométriques, le dessin en étant seulement une réalisation ; une réalisation ou une instance ; une instance signifie que la figure est une classe d'équivalence de dessins, le dessin un représentant d'une classe ; si on munit ces objets d'une topologie, la figure dynamique telle que définie par Gawlick [54], est un chemin continu sur l'ensemble des dessins.

Les propriétés géométriques qui définissent la figure, deviennent ses spécifications, dès lors qu'elles sont énoncées dans un langage précis ; savoir passer des spécifications à des spécifications informatiques peut permettre ensuite la construction automatisée d'une figure dynamique, si l'on sait programmer un système déclaratif [17, 23, 5].

La définition d'une figure dynamique comme un chemin continu sur un ensemble de dessins géométriques répondant à la même spécification pose le problème de savoir si l'espace de ces dessins est connexe par arcs,

c'est-à-dire si on peut y joindre deux points quelconques par un chemin continu ; or ceci est la "conjecture d'isotopie", question posée en 1956 par Ringel [110].

1.4 La conjecture d'isotopie

J-M Laborde [87] précise :

Deux familles de points du plan affine $\{x_1, \dots, x_n\}$ et $\{y_1, \dots, y_n\}$ sont des configurations orientées équivalentes, ou ont le même type combinatoire orienté, si tous les triplets $\{x_i, x_j, x_k\}$ et $\{y_i, y_j, y_k\}$ ont la même orientation, c'est-à-dire si localement tous les paysages sont identiques.

Pour une figure donnée (spécification) F , si φ et γ sont deux réalisations de F , basées sur les points libres $\{A_i\}$ et $\{B_i\}$, existe-t-il un chemin continu de A vers A' tel que $\varphi(A')$ se superpose à $\gamma(B)$?

"As we will see in the next paragraph, the answer is probably not so easy, and, at the very least, it is not possible to deduce a positive answer from the isotopy hypothesis once it has been disproved in its most general form."

La conjecture d'isotopie énonce que l'on peut déformer continûment tous les x_i en les y_i par une isotopie du plan dans lui-même, de façon qu'à chaque étape intermédiaire toutes les orientations locales soient préservées ; en d'autres termes, l'espace des états d'une configuration orientée de points est un espace topologique connexe. Cette conjecture, énoncée par Ringel en 1956 [110], a été infirmée par le théorème de Mnev en 1985 [99] ; voici un contre-exemple explicite, construit avec un minimum de points.

La construction qui suit est faite dans le plan projectif réel, interprétant un exemple de Richter-Gebert [109] ; les quatre premiers points 1, 2, 3, 4 sont les points de base, fixés arbitrairement, sous la condition que trois d'entre eux ne soient pas alignés ; le point 5 est pris sur la droite joignant 3 et 4 ; tous les autres points s'en déduisent, par concours de droites, les droites joignant des points construits précédemment. Si les quatre points

1, 2, 3, 4 sont fixés, le seul degré de liberté de la construction est du au mouvement du point 5 sur la droite joignant 3 et 4.

Or, quand on déplace le point 5 sur sa droite, la droite 12-13 enveloppe une conique à laquelle appartient le point 0, intersection des droites 1-3 et 2-4 ; le point 0 est un point de tangence particulier de la droite 12-13 ; cette position particulière correspond à une position t du point 5 sur la droite 3-4, aisément constructible, au prix d'un ajout de droite et point. Que le point 5 soit d'un côté ou de l'autre de la position t , la configuration de points correspondante a toutes ses orientations identiques ; cependant, lorsque le point 5 est exactement en t , les points 12, 13 et 0 sont alignés ; dans cette position particulière, la configuration des points 1, 2, ..., 13, 0 n'est plus du même type que lorsque 5 n'est pas exactement en t .

Les quatre premiers points de la construction sont placés à une transformation homographique du plan projectif près ; pour interpréter le type topologique de l'espace des états de cette construction, ignorer la variabilité de ces quatre points revient à extraire un facteur homéomorphe au groupe projectif du plan, lequel est connexe ; considérant donc que l'état est déterminé par la position du seul point 5, l'espace des états de cette configuration

- est paramétré par la position du point 5 sur la droite 3-4,
- a un ensemble de paramètres constitué de deux intervalles symétriques autour de t ,
- est non connexe, puisque l'ensemble des paramètres est formé de deux intervalles disjoints.

Les intervalles de variation de 5 sont limités par t d'une part et par des positions de 5 qui alignent les points 1, 3 et 12 ou bien 2, 4 et 13 d'autre part ; au-delà de ces positions limites de 5, une partie des bases de la configuration voient leur sens changer, et la configuration orientée est modifiée, remplacée par une autre.

Cet exemple d'espace des états non connexe d'une configuration orientée contredit la "conjecture d'isotopie" ; cette conjecture énonçait que deux familles d'un même nombre de points, présentant des orientations iden-

tiques de tous leurs triplets de points homologues, devraient pouvoir être transformées l'une en l'autre par une isotopie, c'est-à-dire liées l'une à l'autre par un chemin continu dans l'espace des états de cette configuration commune. Dans l'exemple, le seul chemin continu qui existe entre certaines configurations sort de l'espace.

En 1985, le théorème de Mnev ruine le principe de cette conjecture, en établissant que les configurations orientées de points peuvent avoir un type d'homotopie quelconque ; la démonstration de Mnev est constructive, elle conduit à des contre-exemples explicites, mais avec un nombre de points élevé ; Mnev construit spécifiquement un contre-exemple à 19 points, puis Suvorov [117] en donne un avec 14 points ; en regard, Finashin [46] démontre que la conjecture reste valable pour les configurations n'ayant pas plus de 8 points. Le statut de la conjecture pour les familles orientées de 9 à 13 points reste indéfini à ce jour, à notre connaissance.

Une réponse positive à la conjecture d'isotopie aurait donné un cadre théorique pour fonder la notion de figure dynamique : en particulier, le paradoxe d'incompatibilité entre continuité et déterminisme n'aurait pas pu se présenter.

La réponse de Mnev à la conjecture d'isotopie est que les espaces d'états des configurations de points orientées peuvent avoir un type topologique quelconque, en particulier l'espace d'états peut ne pas être connexe, et le chemin demandé ci-dessus n'existe donc pas en général ; l'exemple précédent montre que le problème de non-connexité peut se présenter pour des configurations à faible nombre de points. Cette situation pose problème quant à la notion de figure dynamique ; en effet, un chemin continu sur un espace d'états de configuration orientée pourrait ne pas traverser toutes les composantes connexes de l'espace des états ; il s'agit d'examiner les conséquences pour la géométrie dynamique de cette situation

- du point de vue de la visualisation des instances d'une figure :
manque-t-il des formes de figures ? obtient-on assez de formes différentes ?
- du point de vue des conséquences : ce que l'on voit est-il assez

générique pour qu'on puisse en tirer des conjectures, des certitudes ? L'idée est que la géométrie dynamique donne normalement accès à une composante connexe, ou bien à des composantes connexes seulement séparées par des frontières franchissables, d'épaisseur nulle, telles que dans l'exemple précédent.

L'exemple donné permet de répondre à la première question : une seule composante connexe de l'espace des configurations ne fournit pas toutes les formes possibles de figures : il suffit de manipuler la figure dynamique de l'exemple pour le vérifier.

D'autres questions se posent immédiatement :

1. La démonstration de Mnev s'applique aux configurations orientées du plan projectif réel ; que peut-on dire du cas du plan projectif complexe ? C'est-à-dire, que peut-on dire en ce qui concerne Cinderella ?
2. Dans le cas des constructions usuelles, ou des démonstrations des théorèmes usuels, les composantes connexes des systèmes d'équations algébriques correspondantes sont-elles toujours comme les chambres d'un appartement, avec des cloisons franchissables ?
3. Passer d'une composante connexe à une autre signifie une discontinuité ; de quel type est celle-ci ? Est-elle accessible à la géométrie dynamique ? Un comportement discontinu serait-il dans la nature des choses pour un logiciel de géométrie dynamique ?

Une question intéressante serait de trouver un exemple de problème géométrique "classique" dont l'espace des états est non connexe, avec une véritable séparation entre les composantes connexes (i.e. que les adhérences des composantes aient une intersection vide) ; compte tenu du fait que la démonstration de Mnev a surpris, il est tentant d'émettre une conjecture : les questions de géométrie "classiques" ont un espace de configurations connexe ; une autre manière de formuler cette question est : une propriété est mathématiquement intéressante, ou bien correspond à un énoncé de théorème "classique", si une construction qui la représente a un espace de configurations connexe. Une autre propriété, non équivalente, sans

doute plus aisée à tester, serait que l'espace des configurations soit une variété algébrique irréductible.

Un réponse positive, ou bien un contre-exemple, fournirait des réponses aux questions précédentes.

1.5 Autour du théorème d'universalité de Mnev

Descartes, dans la première page de "La Géométrie" (1637), enseigne "comment le calcul d'arithmétique se rapporte aux opérations de géométrie", c'est-à-dire comment toutes les opérations, addition, soustraction, multiplication, division, extraction de racines carrées, peuvent être réalisées par des constructions géométriques.

Cette même idée, qui, depuis plus de trois siècles, aurait pu paraître usée, se retrouve dans la démonstration du "théorème d'universalité" de Mnev (1985)[99] pour les configurations planes orientées, du "théorème d'universalité" pour les polytopes en dimension quatre de Richter-Gebert (1996)[107, 108], ainsi que pour les études des espaces de configuration des systèmes articulés et des arrangements de droites du plan des années quatre-vingt-dix, notamment par Millson-Kapovich (1994-2001).

Descartes montre que, lorsque des variables sont représentées par des grandeurs géométriques, disons des segments orientés, il est possible de construire les segments correspondants aux sommes et produits de ces variables au moyen de configurations de droites. Une courbe ou une surface algébrique est définie par une équation polynômiale ; si l'on construit dans le plan la configuration de droites qui correspond à cette équation par les règles de Descartes, en convenant d'une représentation des variables par des points convenables, la variation de ces points va engendrer différentes positions de la configuration de droites ; Mnev [99] montre qu'on peut réaliser la construction quelle que soit la complexité de la variété algébrique réelle donnée, d'une manière telle que l'espace de toutes les configurations de droites ainsi obtenues est un reflet de la variété algébrique donnée, et en

conserve une partie des propriétés.

Le théorème de Mnev est plus général que cette description simplifiée, et s'applique à un ensemble défini par des égalités et inégalités strictes entre polynômes. La construction de Mnev préserve le type d'homotopie, ce qui implique que les espaces de configurations de droites ainsi obtenus peuvent avoir le type d'homotopie de n'importe quel complexe simplicial, et donc être d'une complexité extraordinaire, ils ont une capacité de représentation "universelle".

Un polytope est l'enveloppe convexe d'une famille finie de points ; c'est aussi l'ensemble des solutions bornées d'un système d'inéquations linéaires ; la structure combinatoire, sommets, arêtes, faces,..., des polytopes se complique avec l'augmentation de la dimension et du nombre de sommets ; la propriété d'universalité des configurations de points et droites s'étend aux polytopes, où la complexité de la structure combinatoire correspond à la complexité des propriétés d'incidence des configurations de droites. Cette extension due à Mnev [99], repose sur la dualité de Gale, qui établit une correspondance entre polytopes et configurations de points [66, 69, 43]. En 1996, Richter-Gebert démontre par une construction directe que l'universalité est déjà obtenue avec les polytopes de l'espace de dimension quatre [107, 108, 110, 66].

Millson et Kapovich utilisent une correspondance construite sur les mêmes principes entre des variétés algébriques et les arrangements de droites du plan ; leur utilisation de cette correspondance est cette fois en sens inverse ; ils utilisent les propriétés des espaces de configuration de droites du plan pour restreindre les types de groupes qui pourraient être le groupe fondamental d'une variété.

La théorie de Mnev a étonné lors de sa présentation ; en effet, elle implique une variabilité énorme des types d'arrangements de droites du plan, pour peu que le nombre de droites soit important ; ceci contredit certainement l'intuition courante, expérience reposant il est vrai sur des figures comportant un faible nombre de droites. Le théorème de Richter-Gebert établit également un contraste surprenant entre les propriétés des polytopes

en dimension quatre et celles des polytopes en dimension trois ; un théorème de Steinitz (1922) montre en effet que la structure combinatoire des polytopes en dimension trois se plonge dans le plan, ou sur la sphère, ils sont donc tous contractibles et n'ont chacun qu'une seule réalisation spatiale ; le théorème s'énonce ainsi : les graphes d'arêtes des polytopes de dimension trois sont exactement les graphes planaires 3-connexes ².

1.6 Le cas du plan projectif complexe

L'idée que les propriétés et les théorèmes se prolongent au-delà de leur cadre de validité apparente, que cette extension unifie des phénomènes séparés, que l'on peut l'utiliser pour obtenir des démonstrations et même effectuer des découvertes, cette idée se rencontre sous divers habillages à diverses époques, mais elle a été énoncée et utilisée systématiquement et avec profondeur par J.V. Poncelet [104] au début du XIX^{ème} siècle, qui l'a donnée sous forme d'un principe : le principe de continuité.

Cette extension des propriétés géométriques se fait à l'aide des concepts d'éléments à l'infini, d'éléments imaginaires et d'éléments idéaux ; Poncelet n'était pas le premier à utiliser les éléments à l'infini en géométrie, mais il l'a fait avec une virtuosité inconnue avant lui, utilisant en particulier ce qui sera par la suite algébrisé sous forme du plan projectif et de l'espace projectif ; il a également utilisé des éléments imaginaires, et aussi utilisé ou introduit le terme d'éléments idéaux.

Les auteurs de Cinderella ont identifié les propriétés de ce principe de continuité avec les propriétés du prolongement analytique ; trois points se dégagent particulièrement de leur travaux :

- il faut quitter le domaine réel ; le domaine de validité naturel du prolongement analytique est le domaine de la variable complexe.

²un graphe est planaire s'il admet une réalisation plane sans croisement des arêtes ; un graphe est 3-connexe s'il reste connexe même après extraction d'une paire quelconque de sommets

- la continuité en jeu est la continuité au sens d'Euler, c'est-à-dire l'analyticité ; les fonctions continues en ce sens sont en fait les fonctions analytiques de la variable complexe, dont le domaine de définition naturel s'étend sur une surface de Riemann,
- la continuité et le déterminisme des constructions sont incompatibles : il faut privilégier l'un ou l'autre, on ne peut maintenir les deux simultanément jusqu'à leurs conséquences.

L'opposition entre déterminisme et continuité sera illustrée et commentée dans l'étude sur le comportement dynamique des intersections.

1.7 Vers une théorie de la complexité pour la géométrie dynamique ?

Les constructions géométriques peuvent se décrire de façon purement algorithmique ; par exemple, la construction du cercle circonscrit d'un triangle peut se décrire ainsi :

Point A

Point B

Point C

Triangle ABC

d1 : Droite médiatrice(A,B)

d2 : Droite médiatrice(A,C)

O : intersection(d1,d2)

Cercle(O,A)

Ce programme est un "Straight Line Program" [2], c'est-à-dire un programme sans branchement ; l'absence de branchement implique l'absence

de répétition ; chaque ligne est fonction uniquement des données introduites dans les lignes précédentes ; dans l'exemple, on peut aisément distinguer les points libres, A, B, C, ou "entrées" du programme, et les "sorties", qui sont tous les autres objets, points, droites, cercles, triangles, produits par des outils de construction géométrique recensés dans une liste finie à partir des entrées et des précédentes constructions (dans le cas présent, la liste est constituée de tous les items de construction des menus de Cabri) ; ce type de programme est un modèle utilisé en théorie de la complexité [2, 93].

Richter-Gebert et Kortenkamp ont imaginé un modèle de programme un peu plus général que les SLP, les "Geometric Straight Line Program", qui inclut en plus des SLP un certain indéterminisme ; l'indéterminisme provient d'une construction possédant deux réalisations géométriques distinctes, considérées comme indistinguables ; dans le texte de Richter-Gebert et Kortenkamp, ce sont les deux bissectrices d'une paire de droites, mais ce pourrait aussi bien être les deux points d'intersection d'une droite et d'un cercle ; les auteurs définissent aussi des chemins continus entre instances d'une construction géométrique ; cela leur permet de démontrer des résultats de complexité :

- Le "persistant naming problem" ou "tracing problem" est NP-difficile.
- Il est NP-difficile de décider si deux instances d'une même figure dynamique sont connectables par une déformation continue (sont dans la même composante connexe de l'espace des configurations).

Ces résultats approfondissent les questions que se posait Lemoine dans sa "géométopographie" [95].

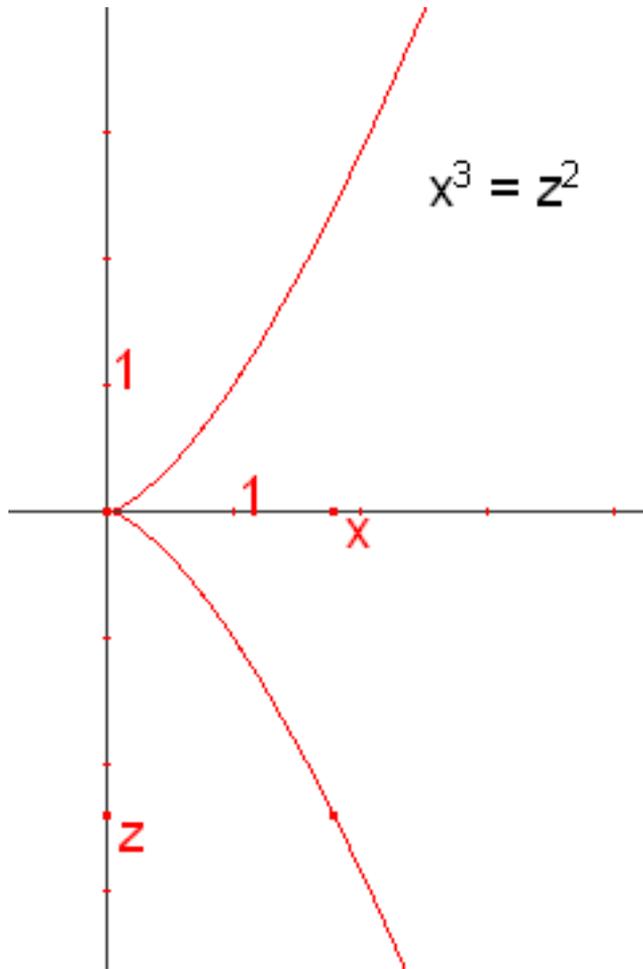


FIG. 1.4 – Un point de rebroussement pour $x^3 = z^2$

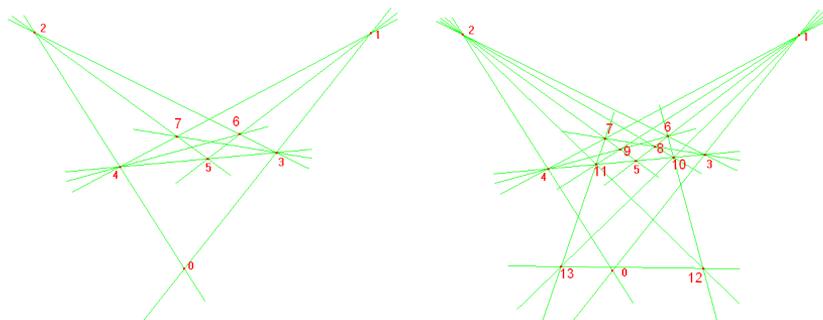


FIG. 1.5 – Détail de la construction

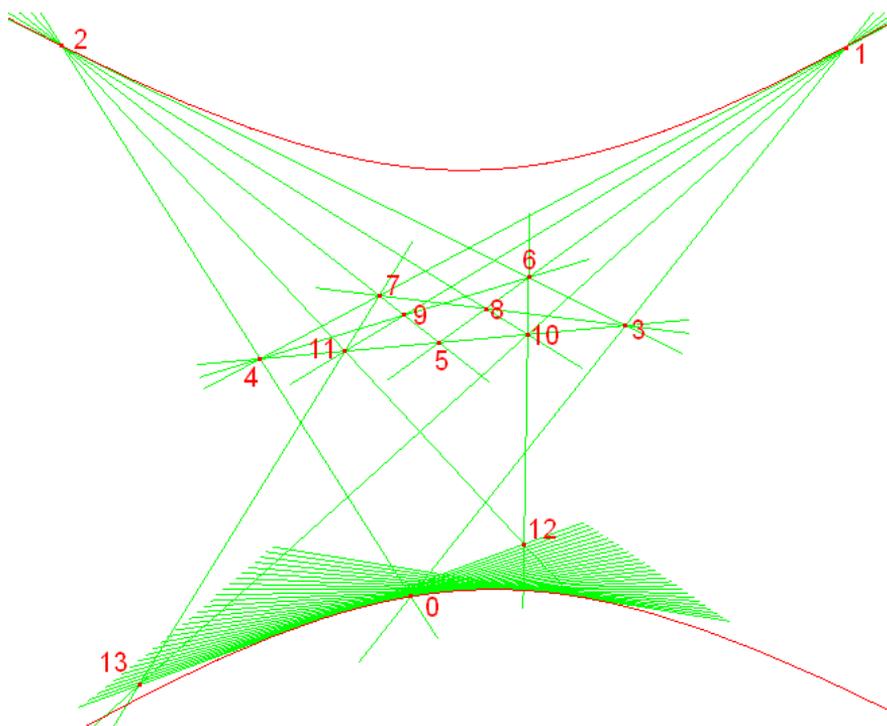


FIG. 1.6 – La droite 12-13 enveloppe une conique contenant les points 0, 1 et 2

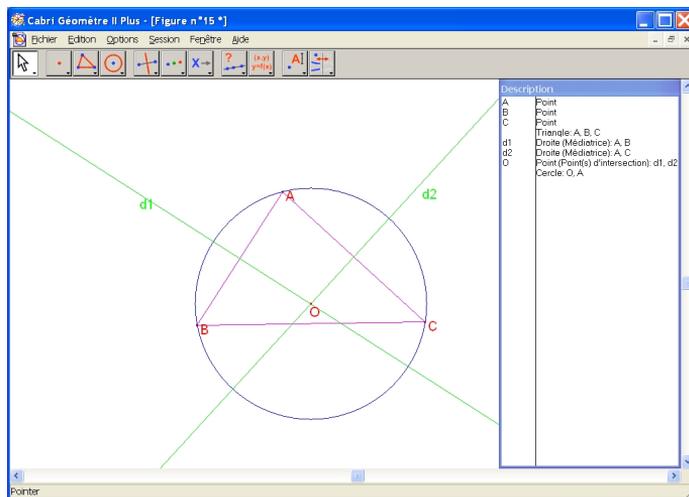


FIG. 1.7 – La description de la figure est un programme de construction

Chapitre 2

Hilbert et les fondements

Fonder la géométrie dynamique oblige à repenser des questions basiques de la géométrie, en général sous un angle nouveau. Un exemple est la notion d'aire pour les polygones du plan ; cette notion ne pose évidemment aucun problème qui puisse retenir l'attention d'un mathématicien, contrairement aux problèmes qui ont amené à la fin du XIX^{ème} et au début du XX^{ème} siècle à la création de la théorie des ensembles, à l'invention de l'intégrale de Lebesgue, et à toute l'analyse telle que nous la connaissons actuellement.

Cette notion d'aire ne pose aucune ambiguïté, au moins pour les polygones simples, c'est-à-dire les polygones dont les côtés ne se recoupent pas entre eux ; par côté du polygone, il faut ici entendre un segment joignant deux sommets consécutifs ; par exemple, les polygones convexes sont simples. Le livre de Hilbert sur les principes fondamentaux de la géométrie développe une théorie de l'aire pour les polygones simples.

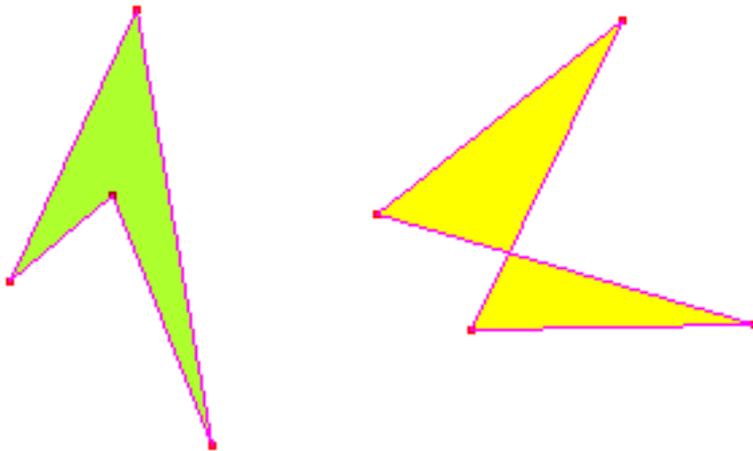


FIG. 2.1 – Un polygone simple non convexe, et un polygone croisé

2.1 L'aire des polygones simples selon Hilbert

Le problème que pose et résoud Hilbert est de déterminer la base axiomatique minimale nécessaire à la démonstration de la théorie des aires des polygones ; en particulier, il cherche à déterminer l'utilité exacte de l'axiome d'Archimède ; il développe donc sa théorie aussi loin qu'il peut sans utiliser ce dernier axiome. L'introduction du terme "relation d'équivalence" dans ce qui suit est anachronique, mais facilite le discours et surtout est parfaitement conforme à la démarche hilbertienne.

Dans un premier temps, Hilbert introduit la relation "être de même aire" sans définir de mesure d'aire. Pour cela, il considère que deux polygones ont même aire ("flächengleich") s'ils sont décomposables en triangles deux à deux congruents ; c'est une relation d'équivalence entre polygones simples ; la transitivité, qui énonce que deux polygones équivalents à un même troisième le sont entre eux, s'établit en raffinant les décomposi-

tions ; le polygone équivalent aux deux autres est le siège de deux décompositions, que l'on intersecte entre elles, produisant une décomposition en polygones simples, que l'on redécompose en triangles ; chacun des deux polygones donnés voit sa propre décomposition raffinable à l'identique, produisant ainsi les triangles congruents et l'équivalence cherchée.

Toutefois, Hilbert ne se satisfait pas de ces développements ; il a construit précédemment un exemple de géométrie non archimédienne en considérant un corps de fonctions à une indéterminée sur le corps des rationnels, plus précisément sur une extension des rationnels fermée pour la racine carrée ; l'indéterminée est inaccessible à la comparaison avec les nombres, et c'est ce qui entraîne l'absence de la propriété d'Archimède ; Hilbert en déduit deux triangles de même base et même hauteur non équidécomposables ; pour cela, il prend un triangle ordinaire, de base et hauteur unité, construit sur origine et unités, et un autre triangle, de même base et même hauteur, mais dont le dernier sommet, situé sur une parallèle à la base, a une coordonnée inaccessible par addition répétée de l'unité. Il en conclut que l'égalité des aires par décomposition en triangles congruents, de deux triangles de même base et même hauteur, exige l'axiome d'Archimède. Hilbert assouplit alors la relation d'équivalence entre polygones ; il intro-

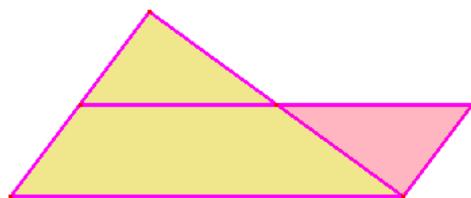


FIG. 2.2 – Le triangle équivaut par addition à un parallélogramme.

duit une nouvelle relation étendant la précédente : deux polygones simples ont même contenu ("inhaltsgleich") si on peut leur rajouter des polygones égaux au sens précédent, de telle sorte que les polygones composés soient égaux au sens précédent. Dans sa traduction du texte de Hilbert, Lau-

gel (1900) remplace "flächengleich" par "égaux par addition" et "inhalts-gleich" par "égaux par soustraction". Cette nouvelle relation est aussi une équivalence, généralisant la précédente : deux polygones égaux par addition sont égaux par soustraction ; Hilbert, reprenant la démarche d'Euclide, observe aussi que deux triangles de même base et même hauteur sont égaux par soustraction : cette fois, la propriété d'Archimède n'est plus nécessaire. Cependant, quelques questions subsistent ; en voici deux qui, pour Hilbert,

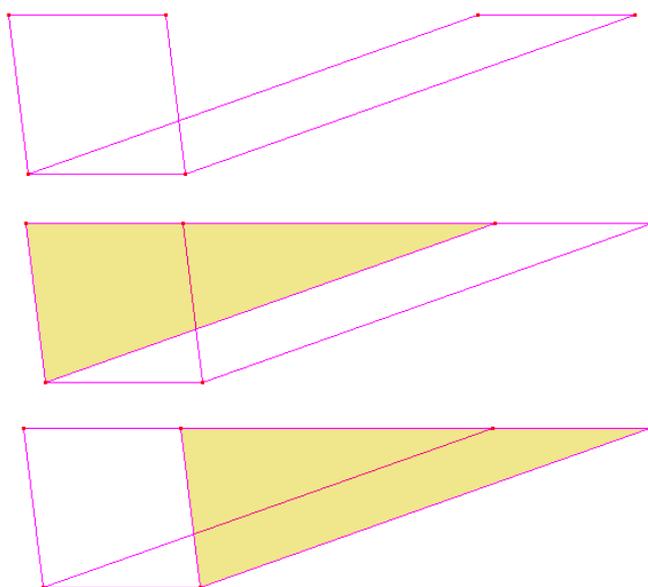


FIG. 2.3 – Le raisonnement d'Euclide prouve l'égalité par soustraction de deux parallélogrammes ayant base et hauteur communes, en utilisant dans ce cas de figure l'égalité de deux triangles auxiliaires, la soustraction d'un triangle commun et l'ajout d'un dernier triangle.

résumant les autres : tous les polygones ont-ils la même aire (auquel cas la théorie serait vide) ? si deux triangles de même base sont égaux par soustraction, ont-ils même hauteur ? Pour y répondre, Hilbert définit une

mesure d'aire, à partir de son "calcul segmentaire" ; l'égalité des mesures d'aire équivaut à l'égalité par soustraction, et les opérations sur les segments fournissent les propriétés souhaitées. Le calcul segmentaire repose sur le théorème de Pascal, mais n'utilise pas la propriété d'Archimède ; ainsi est résolu le problème et la théorie s'achève. Or Hilbert ne définit pas l'aire des polygones non simples ; ce n'est pas que cet aspect de la théorie soit inintéressant ou stérile, mais il est hors sujet du travail de Hilbert, qui consistait à isoler les différents éléments d'une base axiomatique, en montrant leurs rôles respectifs ; la question de l'aire des polygones non simples ne met pas en jeu le socle axiomatique. Et la théorie de l'aire des polygones simples suffit aux développements ultérieurs de la géométrie, en ce qui concerne les démonstrations des théorèmes fondamentaux, comme le théorème de Thalès.

Quelques remarques s'imposent, du point de vue de la géométrie dynamique ; Euclide a construit l'édifice logique, en identifiant les questions et rédigeant les solutions ; Hilbert a identifié le rôle de chaque démonstration, en mettant à nu les fondations ; la géométrie dynamique apporte un nouvel éclairage de ces notions ; du point de vue de la géométrie dynamique, la première notion d'équivalence entre polygones simples n'est pas robuste : le déplacement des sommets d'un polygone peut détruire une triangulation interne, en rendant extérieurs certains triangles intérieurs ; en revanche, la deuxième notion d'équivalence est compatible avec les contraintes de la géométrie dynamique ; or c'est elle qui résout la difficulté rencontrée d'abord par Euclide, et identifiée par Hilbert comme correspondant à l'utilisation de la propriété d'Archimède. Naturellement, ceci suggère très fortement une interrogation : est-il possible de créer une simulation dynamique *de géométrie non archimédienne* ? Dans un premier temps, il semble que l'impossibilité de mesurer toutes les grandeurs d'un même type avec la même unité empêche toute simulation en sciences physiques, ce qui rendrait une telle géométrie parfaitement inutile ; mais dans un second temps, la possibilité de disposer simultanément de plusieurs échelles non comparables pour une même grandeur ne paraît plus aussi

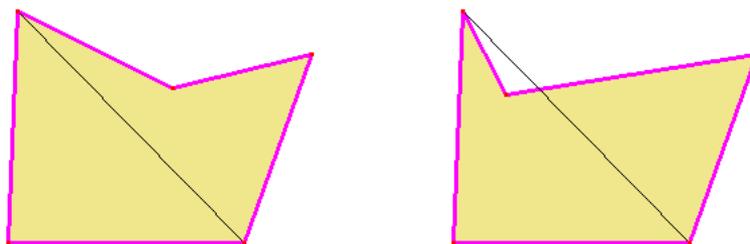


FIG. 2.4 – Une triangulation ne résiste pas au mouvement

futile ou factice ; l'obstacle essentiel à l'utilisation d'une telle géométrie est qu'elle semble contredire l'expérience quotidienne. En réalité, Hilbert dit que l'on peut calculer et comparer des aires, alors même que les longueurs ne sont pas comparables ; certainement, c'est ce que signifie le fait que l'aire soit un invariant affine, alors que la longueur est un invariant euclidien, la structure euclidienne étant plus riche que la structure affine ; pratiquement, il est possible de calculer un déterminant de deux vecteurs, soit l'aire orientée d'un parallélogramme, connaissant les coordonnées des sommets ; bien sûr, la mesure de cette aire dépend des unités choisies sur chaque axe ; toutefois le rapport de deux telles aires rapportées aux mêmes unités est invariant quand on modifie les unités ; donc il n'est pas nécessaire de relier entre elles ces unités, c'est-à-dire d'avoir une unité indépendante de la direction, une structure euclidienne, pour donner un sens au calcul et à la comparaison des aires. Il n'est pas nécessaire d'avoir la notion de cercle pour définir et calculer un rapport d'aires, la notion de parallèles suffit. Il est classique que la méthode des aires est essentiellement équivalente à ce qui s'appelle en France le théorème de Thalès, mais pour en extraire la conséquence que l'on peut définir des géométries non archimédiennes, avec les notions de parallèles et d'aire, il fallait être Hilbert.

Dans une telle géométrie non archimédienne, il paraît possible de définir des angles égaux, et de traiter les liens avec le parallélisme des droites,

mais non de définir la notion de mesure d'angle.

Hilbert démontre l'existence de l'aire des polygones simples, il prend soin de rendre la notion opératoire pour les démonstrations, en donnant un procédé de calcul d'aire des triangles ; mais aucune formule algébrique donnant l'aire des polygones n'apparaît, aucun algorithme n'est donné ; sans doute, cette question est hors sujet, mais il y a une autre raison : donner une telle formule suppose une définition de l'aire plus étendue ; en effet, une formule ne devrait pas être sensible aux changements de forme des polygones, donc devrait être robuste aux contraintes de la géométrie dynamique, c'est-à-dire également valable pour des polygones croisés.

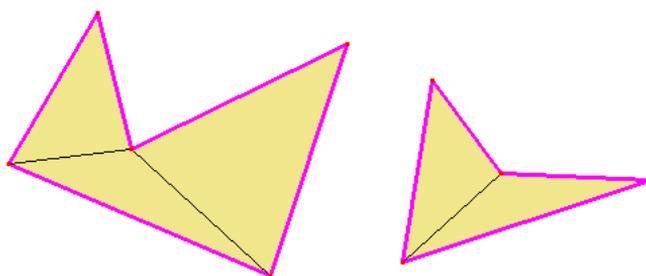


FIG. 2.5 – Triangulations de polygones

Or la question de l'aire des polygones non simples, dits aussi croisés, est d'une nature différente. Ces polygones ne séparent pas le plan en deux composantes connexes comme les courbes homéomorphes au cercle du théorème de Jordan ; deux extensions de la notion d'aire définie pour les polygones simples apparaissent assez naturellement, une qui sera qualifiée d'arithmétique et une autre d'algébrique.

2.2 L'aire arithmétique

L'aire arithmétique ne prend que des valeurs positives ou nulles ; le polygone croisé découpe le plan en plusieurs composantes connexes dont une seule est non bornée, l'extérieur du polygone ; l'air arithmétique est l'aire du complémentaire de cette composante non bornée ; en d'autres termes, c'est l'aire du polygone dont on aurait comblé tous les trous intérieurs.

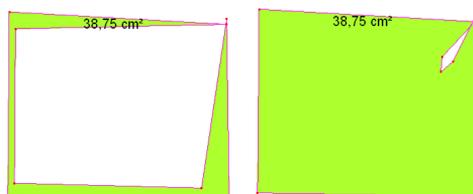


FIG. 2.6 – Un polygone croisé, et le même avec le trou bouché, ont la même aire arithmétique

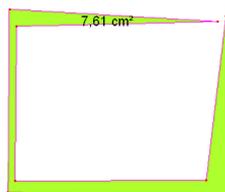


FIG. 2.7 – L'aire arithmétique d'un polygone voisin peut être très différente

L'aire arithmétique n'est pas continue : deux polygones voisins peuvent avoir des aires fort différentes. Le fait que deux polygones soient voisins signifie qu'ils ont le même nombre de sommets, et que leurs sommets respectifs sont proches, à une isométrie près. On peut représenter les polygones à n sommets de même centre par le sous-espace vectoriel de $(\mathbb{R}^2)^n$ des suites $u_i, 1 \leq i \leq n$ de n vecteurs du plan de somme nulle $\sum u_i = 0$, muni de sa topologie, si on veut préciser cette notion de voisinage.

Cette aire pose donc des problèmes difficiles de calcul au voisinage des points de discontinuités ; certains de ces points, susceptibles d'être utilisés fréquemment, ont fait l'objet d'un travail de développement d'algorithmes spécifiques par Ivan Havel et J-M Laborde ; la difficulté de traitement due au comportement de la quantité est repoussée au niveau algorithmique.

Le calcul de l'aire arithmétique d'un polygone peut se ramener à déterminer un autre polygone, simple, qui délimite le bord entre le polygone donné et son extérieur ; l'idée est que tout ce qui se passe à l'intérieur est ignoré quant au calcul de l'aire. Un algorithme possible utilise la détermination intermédiaire des sommets de l'enveloppe convexe du polygone donné ; ceci donne ceux des sommets du polygone initial qui seront sommets du polygone simple dont on veut évaluer l'aire ; un parcours d'arêtes du polygone de départ à partir des sommets sélectionnés génère alors les côtés et d'éventuels nouveaux sommets du polygone simple.

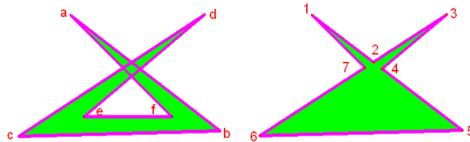


FIG. 2.8 – Un polygone, et le polygone simple construit par l'algorithme de calcul de l'aire arithmétique

2.3 L'aire algébrique

L'aire algébrique fait référence à une orientation du bord du polygone, définie par l'ordre dans lequel sont donnés les sommets lors de la définition du polygone. Lorsque le polygone orienté est simple, c'est-à-dire une courbe de Jordan, il sépare le plan en deux composantes connexes, une bornée, l'autre non, l'intérieur et l'extérieur ; L'aire algébrique est l'aire de l'intérieur, comptée positivement lorsque la portion de plan est à gauche

du bord, quand on parcourt le bord dans le sens trigonométrique, négativement sinon. L'aire ainsi définie est additive ; lorsque le polygone n'est pas simple, imaginons de le trianguler, à la manière de Hilbert ; les triangles recevront chacun l'orientation définie globalement pour le polygone par son bord ; l'aire du polygone est alors la somme des aires algébriques des triangles orientés ; il faut bien sûr comme Hilbert démontrer que l'aire résultat ne dépend pas des choix de triangles.

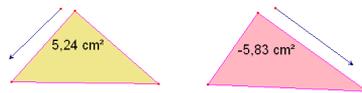


FIG. 2.9 – L'aire orientée

L'additivité de l'aire, une propriété normale pour une aire orientée, est à prendre au sens strict ; ainsi, deux aires de signes opposés peuvent se compenser, et si le polygone repasse plusieurs fois sur une même zone avec la même orientation, l'aire de cette zone est comptée autant de fois que de passage ; bien que cette propriété puisse paraître perturbante, c'est seulement une extension de la relation de Chasles à la dimension deux ; exprimons le lien avec l'intégrale, que l'on sait liée au calcul d'aire ; la formule

$$\int_a^b dF = F(b) - F(a)$$

a une généralisation naturelle à deux variables :

$$\int \int_Q dw = \int_{\partial Q} w$$

où Q , intérieur du polygone P , joue le rôle de l'intervalle $[a, b]$; P lui-même, bord orienté de Q , joue le rôle des extrêmités de l'intervalle accompagnées de leur signe ; w est une forme différentielle définie (et continument dérivable) sur Q ; c'est une combinaison linéaire de dx et dy , dont les composantes sont des fonctions à deux variables x et y , continument dérivables

sur le polygone et son intérieur ; dw en est la dérivée extérieure.

$$w = udx + vdy$$

$$dw = d(udx + vdy) = \frac{\partial u}{\partial y} dydx + \frac{\partial v}{\partial x} dx dy = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy$$

Cette dernière formule, particularisée à l'aire, et écrite en termes finis pour un polygone, va donner l'aire orientée cherchée. Pour $u(x, y) = y$ et $v(x, y) = -x$, cela donne : $\frac{\partial u}{\partial y} = 1$ et $\frac{\partial v}{\partial x} = -1$

$$\int \int_Q 2dx dy = \int_P ydx - xdy$$

Le double de l'aire cherchée est donc donné par

$$\int_P ydx - xdy = \int_P y(x + dx) - x(y + dy)$$

et si la masse est concentrée aux n sommets d'un polygone, de coordonnées (x_i, y_i) :

$$2A = \sum_{i=1}^{i=n} y_i x_{i+1} - x_i y_{i+1}$$

avec la règle $x_{n+1} = x_1, y_{n+1} = y_1$. Il n'était bien sûr pas nécessaire de faire appel à une formule aussi compliquée pour dériver ce résultat ; en revanche, il est important de voir que cette formule redonne la précédente par passage à la limite lorsque le nombre de sommets tend vers l'infini, c'est-à-dire que c'est cette formule qui fait un lien naturel avec l'intégration des fonctions et des formes différentielles.

Chapitre 3

Intersections dynamiques

3.1 Pourquoi les intersections ?

Cette étude des intersections commence par l'exemple d'une courbe imaginée par Archytas de Tarente (430-360 av J.C.) pour construire une double moyenne proportionnelle, et décrite par lui comme l'intersection de deux courbes en déplacement synchronisé ; de façon générale, la trajectoire de l'intersection de deux objets géométriques mobiles est potentiellement un objet d'une nature géométrique nouvelle ; ce chapitre étudie le comportement des intersections de courbes lorsque celles-ci sont déplacées ; la difficulté essentielle qui fait l'objet du chapitre, apparaît lorsque les intersections sont multiples ; lorsque l'utilisateur d'un logiciel de géométrie dynamique déplace les points de base, le logiciel redessine les points dépendants ; comment programmer le choix entre les différentes intersections, afin de ne pas les confondre ni les échanger, ou les retrouver sans erreur lorsqu'elles réapparaissent après une zone d'inexistence ? Quelles sont les règles qui guident alors le choix du programmeur, alors que celui-ci ne connaît pas la nature géométrique ni les propriétés de la courbe à tracer, puisque celle-ci peut être d'une nature nouvelle, différente ?

Ce chapitre étudie la situation mathématique d'un point de vue algorithmique, afin de fonder une stratégies de programmation pour traiter le problème ; sur la cinquantaine de logiciels de géométrie dynamique actuellement disponibles, nous en trouvons seulement deux qui traitent véritablement cette question en proposant des solutions élaborées, d'ailleurs différentes.

L'étude s'appuie sur la conception de figure dynamique comme chemin continu dans un espace d'instances, telle que formalisée par Gawlick [55] ; par ordre de complexité croissante, tout d'abord le type d'homotopie de l'espace des paires de cercles du plan projectif réel est obtenu, la même question est recherchée pour des paires de coniques, ceci pour fonder des stratégies de programmation ; la logique voudrait qu'ensuite la question soit élargie aux intersections de lieux géométriques, où des hypothèses simplificatrices a priori sont nécessaires, mais le sujet est à l'évidence difficile, et beaucoup de questions restent ouvertes.

3.2 La courbe d'Archytas

Le problème de Delos, ou duplication du cube, est la recherche d'un cube de volume double d'un cube donné ; il peut se ramener à l'obtention d'une double moyenne proportionnelle : $x^3 = 2a^3$ est conséquence de

$$\frac{2a}{y} = \frac{y}{x} = \frac{x}{a}$$

La solution de ce problème n'est pas constructible à la règle et au compas, Archytas introduit le mouvement pour dépasser cette difficulté, qui devait être déjà ressentie comme telle ; en effet, cercles et droites, ou cercles et cercles ne peuvent donner par intersection que deux points chaque fois ; on ne peut donc construire par intersections de cercles que les solutions d'équations du second degré, ou d'équations obtenues par superposition d'équations de degré deux telles les équations bicarrées ; ce n'est pas le

cas des équations de degré trois, ni d'une équation dont serait solution $\sqrt[3]{2}$. La solution d'Archytas de Tarente, fait intervenir une courbe gauche qui serait la plus ancienne courbe non plane attestée, d'après Chasles [24].

En termes modernes, la courbe d'Archytas (Figure 3.3) est intersection d'un cylindre et d'un tore qui lui est tangent ; la double moyenne proportionnelle est obtenue par intersection de la courbe et d'un cône.

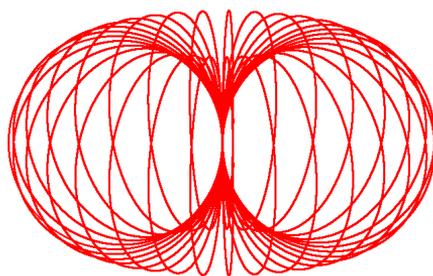


FIG. 3.1 – Le tore d'Archytas

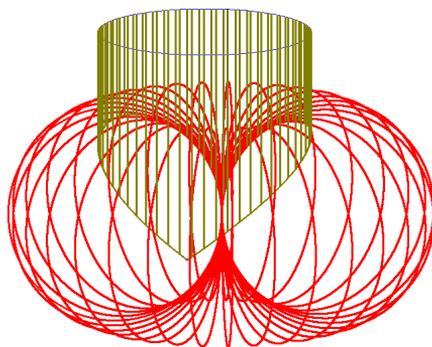


FIG. 3.2 – Tore et cylindre

Selon les commentateurs, la description donnée par Archytas est dynamique : il fait tourner un demi-cercle et un triangle simultanément ; dans un

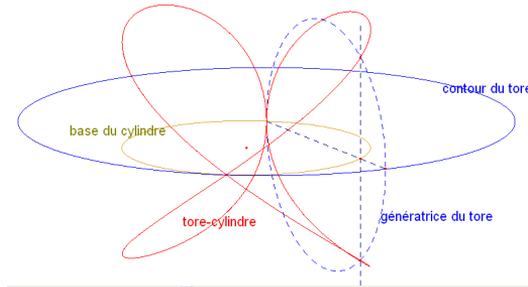


FIG. 3.3 – La courbe d’intersection et sa construction

triangle rectangle, la hauteur relative à l’angle droit est moyenne proportionnelle entre les segments qu’elle découpe sur l’hypoténuse ; les triangles d’Archytas sont rectangles par inscription dans des cercles, leur agencement et leurs dimensions sont obtenus dynamiquement, par rotation simultanée des cercles.

Le type de procédé perspectif utilisé pour ces figures tridimensionnelles mérite commentaire. Les figures tridimensionnelles sont des images planes d’objets de l’espace, nécessairement ambiguës, et ce d’autant plus qu’elles sont réduites au tracé de lignes et dépouillées de tout contexte ; ce dépouillement, cette austérité des figures géométriques visent à concentrer l’attention sur les relations entre objets et non sur les objets eux-mêmes. Dans le cas des objets tridimensionnels, cette austérité est aussi la conséquence de la difficulté à réaliser des effets suggérant bien la dimension manquante. Enfin les procédés de perspective utilisés paraissent conventionnels, car les raisons mathématiques qui guidaient leurs choix sont parfois tombées dans l’oubli.

Les figures précédentes sont faites en perspective dite isométrique ; il s’agit d’une projection parallèle, l’axe de projection étant perpendiculaire au plan de projection ; la projection parallèle conserve les rapports de distance de points alignés et le parallélisme, ce qui tend à simplifier et alléger les constructions. Ainsi, en projection parallèle, les images des faces d’un

cube sont des parallélogrammes ; pour l'image d'un cube, il est préféré en général un axe de projection oblique par rapport au plan de projection, de façon à ce que plusieurs faces soient simultanément visibles, pour mieux suggérer le cube, tout en conservant une face du cube parallèle au plan de projection ; la face parallèle au plan de projection conserve ses angles et ses dimensions, son image projetée reste donc un carré, ce qui contribue à diminuer l'ambiguïté de ce type de représentation. Ce procédé classique, dénommé perspective cavalière, introduit des images difficiles à réaliser concrètement par des éclairages et des ombres, bien que ce soit théoriquement possible ; de ce fait, il est peu réaliste, et apparaît comme conventionnel.

Pour les corps ronds, comme ceux de la figure d'Archytas, il est préférable de choisir un axe de projection perpendiculaire au plan de projection, donc d'abandonner la perspective cavalière ; ainsi, pour une sphère, le contour apparent coïncidera avec l'intersection de la sphère avec le plan de projection, et sera un cercle plutôt que l'ellipse à laquelle conduirait la perspective cavalière. En effet, l'absence d'arêtes des corps ronds fait que l'interprétation de la figure va reposer sur la forme du contour apparent, il est important que celle-ci suggère au plus près les propriétés géométriques que l'on veut évoquer.

3.3 Le paradoxe de la géométrie dynamique : déterminisme et continuité

Dans la question du comportement dynamique des intersections multiples, la disparition suivie de la réapparition de certains points pose question : comment reconnaître les différents points, les distinguer entre eux ?

Si on ne pouvait retrouver chaque point en remettant en l'état une figure, le déterminisme des constructions serait violé, et la géométrie dynamique ne vérifierait pas cet axiome de l'expérimentation scientifique,

que dans les mêmes conditions, les mêmes effets doivent avoir lieu ; les expériences ne seraient plus reproductibles. Or l'utilisation principale des logiciels de géométrie dynamique est l'apprentissage, il est essentiel qu'un environnement de géométrie dynamique soit un environnement expérimental, au sens où l'observation expérimentale peut conduire à découverte, et où une conjecture peut donner lieu à réfutation dès lors qu'on sait réaliser des expériences pour la tester ; dans une telle problématique, la reproductibilité est indispensable, le déterminisme au sens de [87] est essentiel.

Cette question du déterminisme a été étudiée, et précisément opposée à la continuité des constructions [Kor, 55]. La continuité signifie qu'un point, ou un élément géométrique, ne peut pas subitement disparaître d'un endroit pour apparaître simultanément ailleurs ; en particulier, la continuité est un des facteurs essentiels qui permet à l'utilisateur d'identifier les points et les éléments géométriques au cours des déplacements.

Le déterminisme correspond à la stabilité non plus des objets géométriques mais des propriétés de ces objets, et des raisonnements que l'on tient dessus. Peut-être le terme de stabilité ne convient-il pas, nous l'entendons au sens suivant ; les figures géométriques ne sont dessinables que parce qu'elles présentent une certaine stabilité : un triangle peut être presque rectangle, si l'un des angles est presque droit ; alors le théorème de Pythagore y sera presque vérifié : en écrivant les égalités comme des différences, si un angle diffère peu d'un droit, le côté opposé verra le carré de sa longueur différer peu de la somme des deux autres carrés ; bien sûr, ceci est l'indication claire que le carré de la longueur d'un côté est fonction continue des deux autres carrés et de l'angle opposé ; mais surtout, on sait désormais que le dessin d'un triangle rectangle, même approximatif, va permettre d'y lire la relation de Pythagore, avec une certaine précision ; toute la géométrie peut se dessiner et se vérifier avec une certaine précision. Assurément, ceci est à la fois l'origine du succès des figures en géométrie, et de la nécessité d'utiliser aussi des raisonnements, voire des raisonnements indépendants de toute figure, de tout dessin.

La continuité assure l'identité des objets géométriques, le déterminisme

permet l'expérimentation et le raisonnement scientifique ; le problème -le paradoxe de la géométrie dynamique, selon Gawlick- est que dans certaines situations, les deux deviennent incompatibles [Kor, 56] ; Gawlick exprime

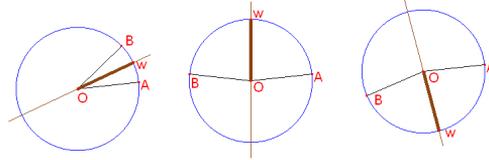


FIG. 3.4 – Comportement déterministe de la bissectrice

clairement cette incompatibilité, notamment par l'exemple suivant : la bissectrice intérieure Ow d'un angle au centre \widehat{AOB} d'un cercle se déplace afin de se conformer au déplacement du côté OB ; celui-ci fait un tour complet et revient à sa position de départ.

- si la bissectrice a un comportement continu, comme dans Cinderella, elle fait un demi-tour ; mais alors le déterminisme n'est plus respecté, à la position de départ de l'angle \widehat{AOB} correspondent deux positions de w . .
- si la bissectrice a un comportement déterministe, comme dans Cabri, elle "saute" pour rester en position de bissectrice intérieure de l'angle \widehat{AOB} plus petit qu'un angle plat.

L'angle de Cinderella est un angle de droites, l'angle de Cabri est un angle de demi-droites. Bien entendu, le résultat ne dépend pas d'un choix de définition des angles ; c'est la définition des angles qui, dans chaque logiciel, est conforme aux règles régissant le comportement dynamique global, la continuité pour l'un, le déterminisme pour l'autre. Il est clair que la bissectrice doit bien se trouver quelque part, qu'il n'y a que ces deux possibilités, et qu'elles sont exclusives l'une de l'autre. Il n'y a que ces deux possibilités, parce qu'il n'y a que ces deux définitions d'angle. Il est possible d'introduire des définitions d'angles orientés ; ceci modifie la plage sur laquelle les angles sont définis, en l'augmentant par rapport aux angles

non orientés ; mais cela ne change rien au fond du problème. Les angles de demi-droites orientés sont les angles des rotations, les angles de droites orientés permettent d'énoncer en termes d'angles le fait que la composée de deux symétries axiales est une rotation, l'angle de la rotation étant alors le double de l'angle des droites des symétries.

En utilisant une machinerie plus lourde, la "mesure" des angles, plus précisément l'exponentielle complexe, il est également possible d'analyser cette situation en observant que la bissectrice a son comportement décrit par la fonction racine carrée dans le domaine complexe $z \mapsto \sqrt{z}$ [Kor] ; l'origine du plan complexe est un point de branchement pour cette fonction, et découper la surface de Riemann de cette fonction autour de l'origine produit un ruban de Möbius à un seul côté, ainsi que le représente Gawlick [56].

3.4 Distinguer les intersections

On a l'intuition de pouvoir toujours distinguer les deux points d'intersection de deux cercles, au moins localement, et même de pouvoir étendre continûment le long d'une trajectoire cette résolution de l'ambiguïté entre intersections ; est-ce que deux telles déterminations par continuité le long de deux courbes différentes amèneront au même résultat ? Existe-t-il un domaine maximal où un tel prolongement ne dépendrait pas du trajet suivi ? Si oui, ce domaine s'étend-il au plan entier ? S'étend-il au plan complété par la droite de l'infini ? La question serait simple si deux courbes, représentant des trajectoires de figures dynamiques, tracées toutes deux sur l'espace des intersections de cercles pouvaient être déformées continûment l'une dans l'autre ; alors le procédé utilisé pour distinguer les intersections sur une des trajectoires se transformerait continûment en un procédé ayant la même capacité sur l'autre trajectoire. Une première étape sera donc de déterminer le type d'homotopie de l'espace des paires de cercles du plan euclidien complété d'une droite à l'infini.

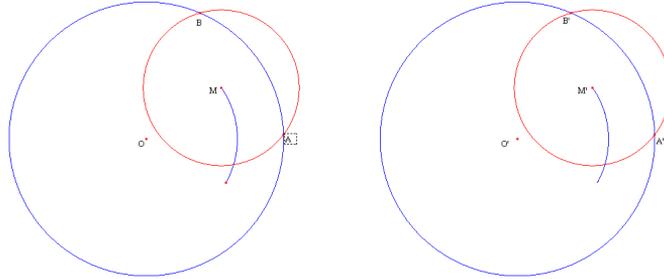


FIG. 3.5 – Deux comportements des intersections.

Sur cette figure, le cercle C_1 de centre O est fixe, le point m est mobile sur un arc de cercle ; un cercle de centre m recoupe C_1 en A et B ; le cercle de centre m est défini comme passant par le point A , pris sur le cercle C_1 , de sorte que A est fixe ; l'autre point d'intersection B étant symétrique de A par rapport à la droite des centres, le sens du couple de vecteurs (Om, AB) est alors direct ou non, suivant la position de m par rapport à la droite (OA) .

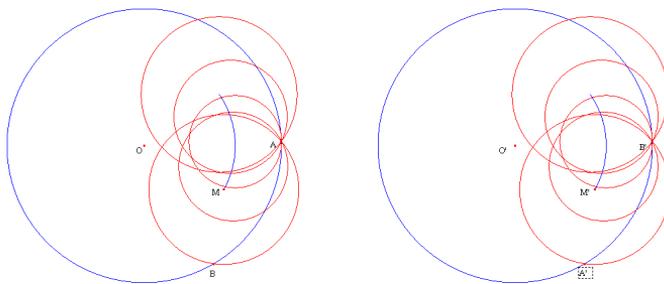


FIG. 3.6 – Deux comportements des intersections : détail.

La seconde partie de la figure¹ comporte aussi un cercle fixe de centre

¹Mes remerciements à R. Cuppens pour cette figure améliorée

O' , recoupé en A' et B' par un cercle mobile de centre m' ; mais cette fois, le sens du triplet $A'O'B'$ est indépendant de la position du point m' ; ici, le cercle de centre m' est défini par son centre et un point périphérique, tous deux images par une translation des constituants du cercle précédent ; le point périphérique n'est pas défini comme point sur le cercle extérieur.

Les deux figures présentent des apparences très voisines ; elles ont le même état initial et le même état final des données, les centres et les rayons des cercles ont le même comportement ; mais les résultats des constructions, c'est-à-dire les points d'intersection des cercles, sont dans un cas échangés par rapport à la droite des centres, et dans l'autre cas, restent fixes par rapport à la droite des centres. Les configurations initiales sont les mêmes, et si l'on ne regarde pas le comportement des points d'intersection, les configurations finales sont aussi les mêmes ; Il s'agit donc de deux trajectoires tracées sur l'espace des couples de cercles, différentes seulement par le comportement des intersections ; comme l'orientation du vecteur joignant les points d'intersection est restée constante dans un cas et a changé dans l'autre, ces deux trajectoires ne peuvent se déduire continûment l'une de l'autre, les deux chemins ne sont pas homotopes.

La différence de position est inessentielle, elle facilite simplement la vision, les deux constructions pourraient être réalisées au même endroit, avec des points périphériques superposés mais distincts ; la différence essentielle de conception entre les deux constructions est que dans un cas, un des points d'intersection est pris comme un point sur un cercle, et utilisé comme point périphérique pour définir l'autre cercle : un des cercles est construit à partir d'un point de l'autre cercle ; nous utiliserons une locution spéciale pour ce type de point, il sera désigné par l'expression "point commun aux deux cercles" ; l'autre point est une intersection ordinaire ; dans l'autre construction, les deux intersections sont définies comme des intersections ordinaires.

Cet exemple semble montrer que l'espace des configurations de deux cercles tel qu'utilisé en géométrie dynamique ne serait pas simplement connexe ; cependant, à la manière de Riemann, peut-on le fendre pour le

rendre simplement connexe, afin de construire un algorithme déterministe pour la gestion des intersections de cercles ?

D'un point de vue algorithmique, les deux situations précédentes sont très différentes ; le cas où les deux cercles ont un point commun fixe pourrait être qualifié de facile, bien plus difficile est l'autre cas où les deux points d'intersection se déplacent, et ont le même comportement ; dans le cas où les deux cercles ont un point fixe A en commun, celui-ci est un point de base de l'un des cercles (au moins), et est donc identifié - algorithmiquement parlant - comme un élément constitutif de ce cercle ; le point B est seulement *l'autre* intersection, ce qui suffit pour le déterminer. Dans le cas où aucune des intersections n'est un constituant de l'un des cercles, rien ne vient distinguer a priori les deux points d'intersection, sauf la propriété géométrique "le couple de vecteurs $\vec{AB}, \vec{OO'}$ a une orientation localement constante".

Le fait que l'un des points commun soit un constituant d'un cercle est justiciable d'un algorithme spécifique, que nous considérerons comme plus simple, puisqu'alors les deux intersections sont distinguées. En effet, il ne peut y avoir qu'un seul point périphérique d'un cercle qui soit un constituant de ce cercle, au sens informatique du terme ; si ce constituant est en même temps un point sur l'autre cercle, ou un constituant de l'autre cercle, il est commun aux deux cercles par construction ; de ce fait, l'autre point d'intersection est défini sans ambiguïté ; ce cas mis à part, il reste à étudier les situations où les deux intersections ne sont pas distinguables par leur rôle dans la construction, mais uniquement par des propriétés géométriques. La propriété d'orientation vue ci-dessus est un bon candidat pour distinguer les points, mais quelle est la nature de cette propriété ? est-ce seulement une propriété locale, peut-on en déduire une propriété globale cohérente ? Comment faut-il la prolonger dans les cas singuliers, c'est-à-dire lorsque les intersections se confondent, ou lorsque les centres se confondent ? Nous cherchons bien sûr une propriété géométrique, c'est-à-dire une propriété globale, et non une simple propriété topologique, de validité locale ; la question de l'orientation du couple de vecteurs cesse de

se poser quand les deux points d'intersection se confondent, par exemple si les deux cercles se séparent ; mais lorsque les deux cercles se rencontrent, qu'on choisisse à nouveau la même orientation, comme dans Cabri, ou bien chaque fois l'orientation opposée, comme dans Cinderella, c'est la même propriété d'orientation qui finalement est en jeu même si c'est de manière implicite ; et la question reste posée : quel est le domaine de validité de cette propriété envisagée globalement ?

3.5 Réels et imaginaires

Le programmeur ne peut pas se satisfaire d'une méthode de suivi continu des intersections de deux cercles en déplacement l'un par rapport à l'autre, il lui faut aussi gérer la disparition suivie de la réapparition de ces intersections. Deux cercles se coupent en A et B, puis se séparent : A et B cessent d'exister ; enfin, les deux cercles se retrouvent : A et B réapparaissent, mais qui est A, et qui est B ?

Dans la manière même dont la question est posée, l'existence et l'individualité des points A et B sont postulées, au travers de leurs pérégrinations éventuelles ; plus que cela, on suppose l'identité de chaque point maintenue par une logique sous-jacente, par un processus rationnel, compréhensible, susceptible d'une description rationnelle, plus précisément algorithmique ; et c'est ce processus que l'on souhaite étudier ; la manière dont cette question est décrite peut surprendre, mais elle relève d'une attitude de philosophie mathématique traditionnelle, qu'on pourrait qualifier de platonicienne, dans la mesure où l'on reconnaît au cours de l'étude de l'objet mathématique qu'il préexistait à son invention ; la question se pose réellement, car on ne sait pas, à cette étape du raisonnement, s'il existe un procédé *algorithmique* répondant au problème.

Cette logique sous-jacente, qui conserve à chaque point son identité, dut-il ne plus exister, serait plus facile à penser si les points disparus continuaient à exister sous un autre mode ; nos points d'intersection vont devenir

imaginaires au lieu d'inexistants. Poncelet, au début du XIX^{ème} siècle, a systématisé l'emploi de ces points idéaux, en même temps que des points à l'infini [104] ; il a d'ailleurs mis en garde contre une confusion entre points idéaux et points imaginaires, qui étaient également en train de conquérir droit de cité à cette époque ; dans le cas présent, la notion de points imaginaires suffira cependant. l'idée est donc de conserver un regard sur les intersections afin de continuer à les distinguer même lorsqu'elles ne sont plus réelles ; et cela, grâce à une construction réelle qui a la même propriété vis à vis des points d'intersection lorsqu'ils sont imaginaires que lorsqu'ils sont réels. l'utilisation des imaginaires dans une réflexion théorique sur la géométrie dynamique a déjà réalisée par U. Kortenkamp [Kor], avec le même objectif : conserver la continuité des constructions ; nous n'irons cependant pas jusqu'aux mêmes conclusions, car nous n'identifierons pas comme [Kor] continuité et analyticité (ou "continuité forte au sens d'Euler").

3.6 L'axe radical

Le résultat ² suivant est classique [25] ;

Théorème 1 (axe radical) *Etant donnés deux cercles distincts, l'ensemble des points du plan d'égale puissance par rapport aux deux cercles est une droite ; l'intersection de cette droite avec un quelconque des deux cercles égale l'intersection des deux cercles.*

Nous allons donner une construction de l'axe radical.

Les points M communs aux deux cercles de centres et rayons O et R, O' et R', vérifient :

$$\begin{cases} OM^2 = R^2 \\ O'M^2 = R'^2 \end{cases}$$

²Chasles énonce que le nom "axe radical" a été proposé en 1813 par M. Gaultier

Ce qui équivaut à :

$$\begin{cases} OM^2 & = & R^2 \\ OM^2 - O'M^2 & = & R^2 - R'^2 \end{cases}$$

La différence vise à la disparition des termes quadratiques ; la partie linéaire qui subsiste s'interprète en remplaçant les constantes : en supposant les deux cercles non concentriques, introduisons l'inverse Ω' du centre O' par rapport au cercle de rayon R :

$$R^2 = \overrightarrow{O\Omega'} \cdot \overrightarrow{OO'}$$

et l'inverse Ω de O par rapport à l'autre cercle :

$$R'^2 = \overrightarrow{O'\Omega} \cdot \overrightarrow{O'O}$$

$OM^2 - O'M^2 = R^2 - R'^2$ s'écrit alors

$$(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{O'M}) \cdot (\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{O'M}) = \overrightarrow{O\Omega'} \cdot \overrightarrow{OO'} - \overrightarrow{O'\Omega} \cdot \overrightarrow{O'O}$$

soit encore $\overrightarrow{OO'} \cdot (\overrightarrow{\Omega'M} + \overrightarrow{\Omega M}) = 0$

En désignant par J le milieu de $\Omega\Omega'$, ceci devient $\overrightarrow{OO'} \cdot \overrightarrow{JM} = 0$; si les centres O et O' sont distincts, ceci est l'équation d'une droite, la médiatrice du segment dont chaque extrémité est l'inverse du centre d'un cercle par rapport à l'autre cercle. La définition des inverses est écrite pour que l'argument soit valide même si les rayons R ou R' s'annulent, par exemple si R s'annule, Ω' est égal à O ; il reste à traiter le cas des cercles concentriques distincts, les points d'intersection sont alors imaginaires, ce sont en fait les points cycliques, et la droite qui les contient est la droite de l'infini. L'argument est encore valable en dimension quelconque, en remplaçant le mot "droite" par hyperplan, ou plan en dimension trois. En résumé, pour construire l'axe radical de deux cercles, il suffit de construire pour chaque cercle l'inverse de son centre par rapport à l'autre cercle, la droite cherchée est la médiatrice des deux points obtenus.

Une conséquence de l'unicité de la droite axe radical est qu'elle permet de suivre continûment les intersections lorsque celles-ci sont imaginaires : c'est bien là le principe de continuité de Poncelet, et critiqué par Cauchy ; la critique était que les limites du domaine de validité du "principe" restaient inconnues ; ce sont bien ces limites que nous étudions, et sur lesquelles reposeront en définitive les algorithmes.

L'assertion "suivre les intersections lorsqu'elles deviennent imaginaires" suppose à strictement parler une extension du précédent théorème à des points imaginaires ; les points d'un cercle sont les points de puissance nulle par rapport à ce cercle ; de ce fait, étendre le résultat précédent aux intersections imaginaires des cercles, en définissant précisément ces dernières, ne poserait pas de difficulté ; toutefois, ce raffinement ne nous sera pas utile ; en effet, l'axe radical emporte une information suffisante, et cette information subsiste même lorsque les intersections cessent d'être réelles.

L'axe radical de deux cercles est perpendiculaire à la droite des centres ; en ordonnant les centres, on oriente la droite qui les porte ; cette orientation et celle du plan permettent d'orienter l'axe radical : on choisit son orientation de façon qu'il fasse avec l'axe des centres un repère direct ; cette dernière orientation permet de discriminer les deux points d'intersection des cercles, et inversement, distinguer les deux points d'intersection des deux cercles, par exemple en les ordonnant, revient à orienter l'axe radical. Pour justifier ce procédé, il faudrait montrer que deux trajectoires quelconques des cercles et de leurs intersections, aboutissent toujours à la même orientation de l'axe radical.

Les deux exemples donnés au début semblent prouver le contraire ; mais dans un cas de figure, les deux points d'intersection A et B des cercles se confondent, tandis que dans l'autre cas, les deux points sont toujours distincts ; lorsque les deux points se confondent, l'axe radical coïncide avec la tangente commune aux deux cercles ; l'orientation de l'axe radical ne change pas ; mais dans ce cas de figure, les points A et B, par leur construction, ne vérifient pas la règle déduite de l'orientation de l'axe radical ; la règle est ici bafouée, parce que le point A est identifié comme un consti-

tuant d'un des cercles, et B est l'autre intersection, et c'est cette autre règle qui s'impose ; ceci indique que l'espace des intersections de cercles n'est pas simplement connexe. Toutefois, il est aisé de discerner l'impact sur la structure du groupe fondamental du cas vu ci-dessus où un point (B) traverse la position de l'autre (A) : ce cas contribue pour un facteur du type Z_2 ; il est possible de quotienter le groupe fondamental par cette action, et d'étudier ce qui subsiste.

Le problème se repose ensuite en ces termes : quelles sont les singularités de l'application qui à un couple de cercles associe leur axe radical orienté ? peut-on prolonger continûment cette application là où elle n'est pas définie ? On étudie maintenant la topologie et le type d'homotopie de l'espace des paires de cercles.

3.7 L'espace des cercles et droites du plan

Le résultat de ce paragraphe : L'espace C des cercles et droites du plan affine est homéomorphe à l'espace projectif réel tridimensionnel, privé de l'intérieur d'une boule ; son groupe fondamental est Z_2 . La méthode utilise la projection stéréographique pour ramener les cercles et droites aux cercles sur la sphère, eux-mêmes représentés ensuite par les points de l'espace extérieurs à la sphère.

L'espace des cercles et droites du plan devient un espace homogène d'un groupe classique si le plan est complété d'un point à l'infini ; une réalisation géométrique de cette situation consiste à plonger le plan dans une sphère par une projection stéréographique. Une projection stéréographique du plan sur la sphère peut s'interpréter comme la restriction d'une inversion de l'espace.

les droites du plan correspondent aux cercles de la sphère passant par le pôle, et les cercles du plan aux cercles de la sphère ne passant pas par le pôle.

Dans la projection stéréographique, le centre d'un cercle du plan, qui

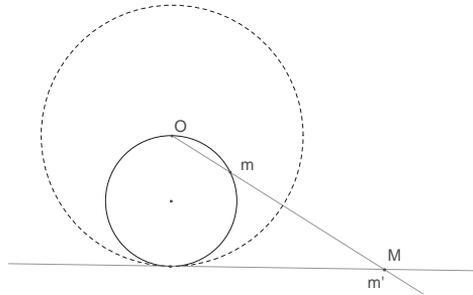


FIG. 3.7 – La projection stéréographique est une inversion.

est le milieu des segments diamétraux, est le conjugué du point à l'infini par rapport aux extrémités du diamètre, et se projette donc sur la sphère comme le conjugué du pôle par rapport aux projetés des extrémités de diamètre ; lorsqu'une des extrémités de diamètre part à l'infini, ou que son projeté va coïncider avec le pôle, le conjugué du pôle vient aussi se confondre avec le pôle, et les droites sont de ce fait des cercles dont le centre est à l'infini ; en ce sens, deux droites sont toujours concentriques.

Il reste donc à décrire l'espace des cercles tel qu'il se présente sur la sphère ; une méthode géométrique simple consiste à associer à chaque cercle tracé sur la sphère le sommet du cône tangent à la sphère le long de ce cercle, c'est-à-dire le pôle de ce cercle dans la transformation par polaire réciproque par rapport à la sphère ; les points qui correspondent aux droites, le cas particuliers des cercles passant par le pôle, sont les points du plan tangent à la sphère au pôle ; l'intérêt de cette correspondance est qu'elle associe un point de l'espace à chaque cercle, et surtout que deux points voisins correspondent à deux cercles voisins ; le cas des grands cercles de la sphère, dont chacun définit un cylindre tangent et non un cône, conduit à l'utilisation des points à l'infini ; observons que deux cylindres de directions voisines, c'est-à-dire de points à l'infini voisins, correspondent à

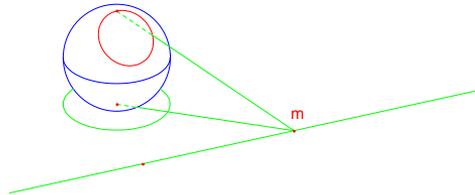


FIG. 3.8 – Droite en projection stéréographique.

deux grands cercles voisins et inversement : la correspondance est un homéomorphisme.

L'espace des cercles est donc représenté par une partie de l'espace tridimensionnel ; il s'agit de l'extérieur de la sphère, complété du plan à l'infini et de la sphère elle-même ; les points du plan à l'infini correspondent aux grands cercles, les points de la sphère correspondent aux cercles-points de rayon nul. Cet espace, muni de la topologie induite par celle de l'espace projectif tri-dimensionnel, est homéomorphe à l'espace des cercles et droites du plan, et a le même type d'homotopie.

Pour obtenir le groupe fondamental de cet espace C , il suffit de considérer l'espace projectif tri-dimensionnel P^3 tout entier, et de lui retirer l'intérieur de la sphère S^2 , cette extraction d'une boule ouverte de dimension trois ne modifie pas le groupe fondamental ; le groupe fondamental est celui de l'espace projectif réel tridimensionnel RP^3 , soit Z_2 . L'espace C^2 des paires de cercles a donc pour groupe fondamental $Z_2 \times Z_2$.

Le groupe fondamental de l'espace projectif RP^3 est $Z_2 \simeq \{+1, -1, \times\}$, et cela peut s'interpréter dans le revêtement universel, la sphère S^3 ; si l'on joint par un chemin γ deux points antipodaux de S^3 , ce chemin se projette dans RP^3 en une boucle basée en un point, non homotope à l'identité ; le

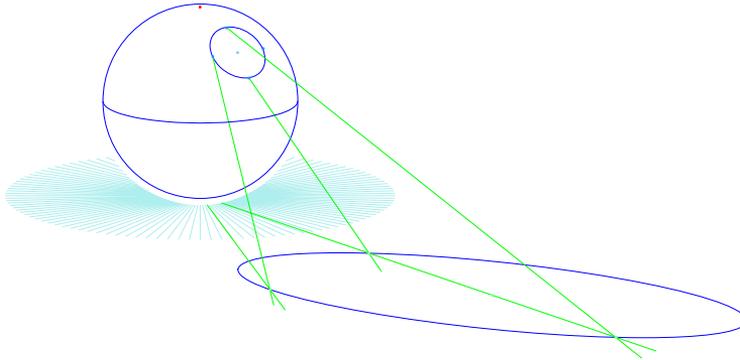
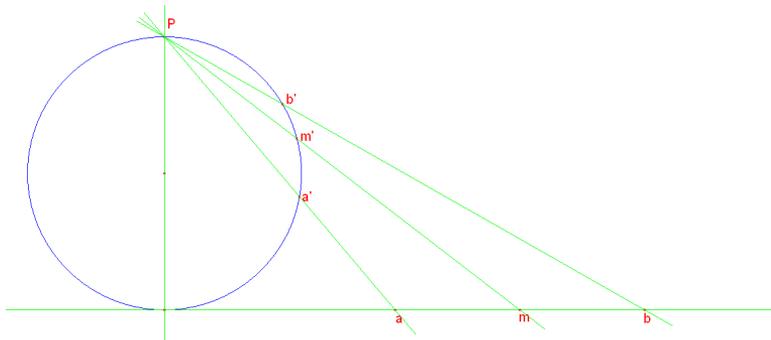


FIG. 3.9 – Cercle en projection stéréographique.



composée de γ avec lui-même, ou plutôt avec son image par l'antipodie, qui lui est homotope, est une boucle dans S^3 , homotope à l'identité puisque S^3 est simplement connexe. Ainsi dans le groupe des chemins sur RP^3 , il n'y a qu'un chemin non nul, et celui-ci, composé avec lui-même, s'annule.

Le revêtement universel de C^2 est $S^3 \times S^3$, et C^2 est homéomorphe à $S^3 \times S^3 / Z_2 \times Z_2$; ceci signifie que si l'on choisit arbitrairement un point de base dans C^2 , représentant une paire de cercles, l'ensemble des circuits qui partent de ce point et y reviennent se répartit en quatre classes, les circuits homotopes à l'identité, et trois autres, non homotopes à l'identité, mais

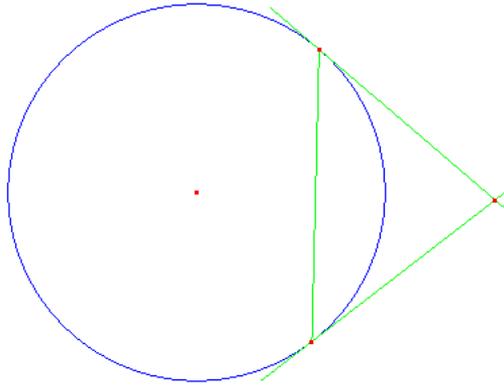


FIG. 3.10 – La correspondance cercle \mapsto point

tels que si on les suit deux fois de suite, le circuit résultant est homotope à l'identité ; le groupe fondamental de C^2 est $Z_2 \times Z_2 = \{\epsilon, a\} \times \{\epsilon, b\}$ avec a, b tels que $a^2 = b^2 = \epsilon$, c'est aussi $Z_2 \times Z_2 = \{(\epsilon, \epsilon), (a, \epsilon), (\epsilon, b), (a, b)\}$ le "ViertelGruppe" de Klein.

3.8 Les intersections de cercles

Au sens traditionnel et Euclidien du terme, les points communs à deux cercles ne sont définis que lorsque les deux cercles sont distincts ; le concept d'intersection de la théorie des ensembles étend cette notion au cas où les deux cercles sont identiques, cas représenté par la diagonale Δ de C^2 , un cas qu'il faut mettre à part dans notre analyse. Cette diagonale est contenue dans la réunion de l'ensemble des paires de cercles concentriques, dont elle est un retract par déformation ("deformation retract") ; la rétraction, sur des paires de cercles, consiste à ramener continûment le rayon du second cercle au rayon du premier cercle ; pour que cette définition de rétraction soit générale, il convient de la définir pour les projections des cercles sur

la sphère S^2 , auquel cas le cas des droites est également traité, puisque les droites du plan sont les cercles de la sphère qui passent par le pôle ; ceci définit une rétraction des paires de cercles concentriques vers la diagonale Δ , qui transforme continûment le second cercle de la paire en le premier ; la propriété de rétract par déformation demande plus : il faut une homotopie de l'identité vers la rétraction, homotopie laissant invariante Δ ; le point est que la rétraction fait bien varier de zéro à un le coefficient qui égalise les deux rayons, mais ce coefficient est spécifique de chaque paire de cercles, alors qu'une homotopie utilise un seul coefficient global, le même pour tout le monde ; la réponse consiste à remplacer dans l'expression de la rétraction chaque coefficient k spécifique par une expression

$$k \times \alpha + 1 - \alpha$$

où α est un même coefficient global variant de zéro à un ; lorsque α vaut un, cela donne la rétraction, lorsque α vaut $\frac{1}{2}$, la transformation ne fait que la moitié du chemin en laissant la diagonale invariante, lorsque α vaut zéro, rien ne bouge, la transformation est l'identité, et les propriétés de continuité sont celles de la rétraction, ce qui donne bien l'homotopie cherchée. L'ensemble des paires de cercles concentriques est lui-même un retract d'un voisinage ouvert de la diagonale, la rétraction consistant à amener le centre du second cercle à coïncider avec le centre du premier, l'homotopie s'obtenant par un procédé analogue au précédent, suivant un chemin géométrique au lieu de numérique.

La diagonale Δ de C^2 est visiblement homéomorphe à (C) donc a le même groupe fondamental, soit Z_2 ; l'espace quotient C^2/Δ , dans lequel la diagonale est identifiée à un point, est aussi homéomorphe à (C) ; le fait que le groupe fondamental de C^2/Δ soit Z_2 peut aussi s'obtenir ainsi :

- le groupe fondamental de C^2 est commutatif, donc isomorphe au groupe d'homologie :

$$\pi_1(C^2) \xrightarrow{\simeq} H_1(C^2)$$

– la présence des rétractions donne la suite exacte longue :

$$\dots \longrightarrow H_2(\mathbb{C}^2/\Delta) \longrightarrow H_1(\Delta) \longrightarrow H_1(\mathbb{C}^2) \longrightarrow H_1(\mathbb{C}^2/\Delta) \xrightarrow{\partial} 0$$

dans laquelle les groupes H_1 sont tous les trois isomorphes aux π_1 , et $H_2(\mathbb{C}^2/\Delta)$ est isomorphe à $H_2(\mathbb{C}) \xrightarrow{\simeq} H_2(\mathbb{P}^3)$ donc nul :

$$0 \longrightarrow \pi_1(\Delta) \longrightarrow \pi_1(\mathbb{C}^2) \longrightarrow \pi_1(\mathbb{C}^2/\Delta) \longrightarrow 0$$

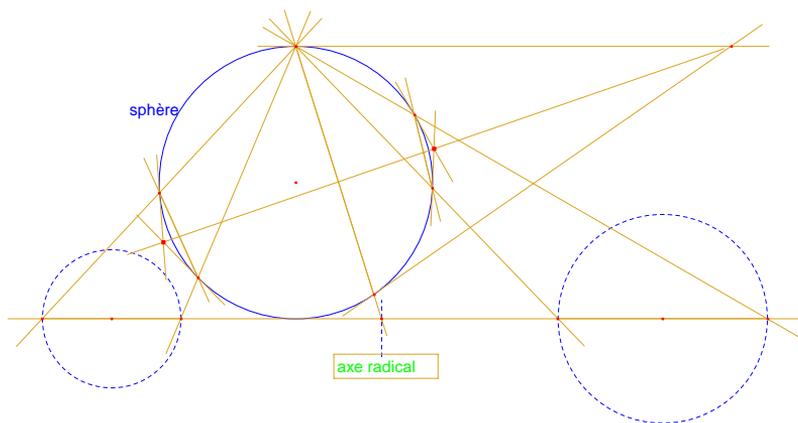
La diagonale Δ est une partie de l'espace des paires de cercles où les points d'intersection des cercles au sens Euclidien ne sont pas définis ; c'est pour cela qu'on la fait apparaître comme un point, elle sera un "point singulier" du calcul relatif à ces points d'intersection.

Dans sa thèse [Kor], Kortenkamp observe que le comportement des intersections de cercles dans Cabri est discontinu lorsqu'on fait passer deux cercles de même rayon par une position où ils sont concentriques, c'est-à-dire lors de la traversée de ce qui vient d'être qualifié de "point singulier" ; cet auteur ne se pose pas la question de l'éventuelle nécessité de cette singularité, et ne peut se la poser ; en effet, il considère que le comportement des intersections doit être toujours continu ; du reste, à cette fin, il propose une méthode très intéressante, en imaginant que le mouvement des points en géométrie dynamique suit les propriétés des fonctions analytiques complexes ; ainsi le mouvement des intersections avec des cercles dans Cinderella simule le suivi d'une branche de fonction analytique, "à la Puiseux", comme si les points se déplaçaient sur une surface de Riemann à deux feuilletés. Quoique cette conception soit originale et riche de potentialités, elle n'est pas la seule possible, ce qui est heureux car elle ne permet pas de résoudre certains problèmes comportant une orientation privilégiée, ni de simuler certains phénomènes classiques de la physique, accessibles seulement par la géométrie réelle. En effet, une des conséquences de ce comportement est qu'avec le mouvement, on obtient automatiquement toutes les solutions pour les équations du second degré, ou les empilements de telles équations comme les équations bicarrées ; or, pour certains problèmes, il

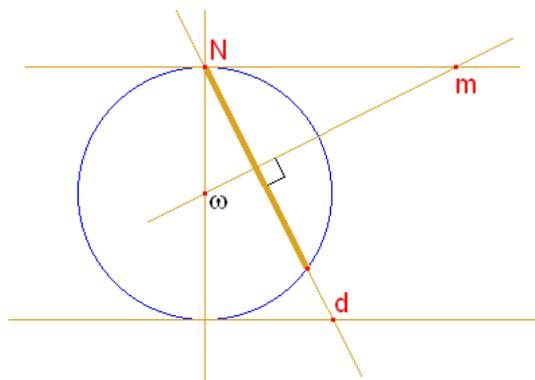
importe de pouvoir sélectionner, n'obtenir qu'une partie des solutions ; un exemple simple est le maximum : on veut pouvoir n'obtenir que la plus grande solution, par exemple uniquement la solution positive et non la négative ; en d'autres termes, l'ordre est essentiel, or l'ordre est perdu dans le domaine complexe.

Dans l'espace C des cercles et droites, les droites sont représentées par les points du plan Q tangent au pôle à la sphère S^2 , y compris sa droite de l'infini ; pour chaque point de l'espace $C^2 - \Delta - Q^2$, c'est-à-dire pour chaque paire de cercles distincts, on définit l'axe radical. Chaque cercle est représenté par un point extérieur à la sphère, une paire de cercles distincts définit deux points distincts, par lesquels passe une droite ; cette droite n'est pas contenue dans Q ; le point ar à l'intersection de cette droite avec le plan Q , éventuellement à l'infini, correspond à l'axe radical des deux cercles. Lorsque les cercles sont concentriques, le point ar est le pôle N , centre de la projection stéréographique. En effet, si les deux cercles C et C' se coupent, leurs projetés C_p et C'_p sur la sphère se coupent, disons en A et B ; les sommets des trois cônes tangents à la sphère le long de C_p , C'_p et du projeté de l'axe radical appartiennent aux plans tangents à la sphère en A et B , donc aussi à leur droite d'intersection. Un raisonnement "à la Poncelet" permet d'étendre le résultat au cas où les cercles ne se coupent plus : si, par déplacement des cercles, les points A et B deviennent imaginaires, les plans tangents sont aussi imaginaires mais leur droite d'intersection, qui passe par les deux points réels, sommets des cônes appuyés sur C_p et C'_p , est réelle, et elle passe encore par le sommet du cône correspondant à l'axe radical... Ainsi, les points correspondants à l'axe radical remplissent le plan tangent à la sphère au pôle, y compris la droite de l'infini.

Ainsi, l'ensemble des points représentant un axe radical est Q , un plan complété d'une droite à l'infini, homéomorphe au plan projectif ; cela même dans le cas où le plan dans lequel sont pris les cercles est complété seulement d'un point à l'infini : ce résultat ne dépend que des points du plan à distance finie. la question est ensuite d'orienter l'axe radical, et d'examiner le comportement de cette orientation lors de déplacements des cercles ;



dans le cas de deux cercles de centres distincts, l'orientation est aisée à définir à partir du vecteur qui joint le premier centre au second, et de l'orientation du plan usuel, non complété à l'infini. Un problème survient pour les cercles concentriques ; l'axe radical est alors représenté dans l'espace C par le pôle de la sphère, ce qui fournit une nouvelle preuve qu'il se trouve dans ce cas à l'infini du plan des cercles.



Grâce à cette représentation, il est possible de paramétrer les axes radicaux par les points du plan Q , le point N correspondant aux axes radicaux

des cercles concentriques ; pour un point m donné dans le plan Q , la droite correspondante dans le plan usuel P est orthogonale à Nm ; cette assertion est encore valide si m est à l'infini du plan Q , m représentant alors une direction de droite, à laquelle sera orthogonale la droite du plan P ; une orientation de cette droite est alors un vecteur non nul orthogonal dans P à Nm ; un tel vecteur peut être défini comme un vecteur unitaire directement perpendiculaire à Nm pour une orientation arbitraire du plan P . Or ceci définit pour tout point m , y compris les points à l'infini du plan Q , sauf pour m confondu avec N , un champ de vecteur continu. N est un point singulier de ce champ de vecteurs.

Si on rapporte l'ensemble $Q - Q_\infty$ des points à distance finie de Q à un repère orthonormal d'origine N , le champ a pour coordonnées $\frac{(-y,x)}{\sqrt{x^2+y^2}}$, puisqu'il est orthogonal au champ radial $\frac{(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$. L'indice du champ en N est donc 1. Comme Q est homéomorphe au plan projectif RP^2 , un théorème de Poincaré-Hopf appliqué à ce champ de vecteur indique que la somme des indices en tous les points singuliers doit être la caractéristique d'Euler du plan projectif réel, soit 1. Ce théorème implique que tout champ sur Q a au moins un point singulier : la singularité de notre champ en N est inévitable, il n'existe pas de prolongement non nul et continu du champ.

Ceci signifie que l'orientation de l'axe radical de deux cercles ne peut pas être partout définie continûment, et que la position cercles concentriques contient nécessairement une singularité de cette orientation. Or le fait de distinguer l'un de l'autre les deux intersections de deux cercles permet d'orienter la droite qui les joint, l'axe radical ; ainsi, le comportement de Cabri vis-à-vis des intersections de cercles, un échange des intersections pour une paire de cercles de même rayon passant par une position concentrique, est un reflet fidèle de la mathématique sous-jacente.

La singularité peut être analysée plus finement ; Gawlick [58, 59] note qu'une étude directe de convergence prouve que si deux cercles de même rayon se traversent, en passant par une position où les centres coïncident, la position de sortie de l'axe radical dépend du chemin suivi ; il n'y a donc

pas d'extension *continue* possible à ce cas pour la fonction qui à deux cercles associe leur axe radical ; notre approche montre que si deux cercles de rayons différents tendent vers une position où les centres coïncident, les rayons restant distincts, l'axe radical tend vers la droite de l'infini. Ces assertions sont aisément illustrées par le comportement dynamique des figures jointes 3.8.

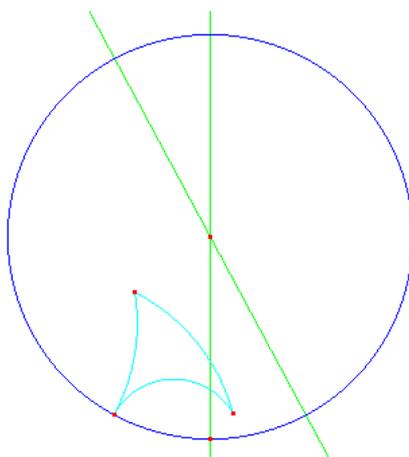
Ainsi les analyses sur la simulation du mouvement en physique par M.J. Gonzalez-Lopez et par T. Gawlick [65, 55] trouvent une justification complémentaire. Ces analyses évoquent le comportement dynamique d'un système articulé à deux bras d'égale longueur, et, s'appuyant sur les possibilités de simulation de Cabri, différentes manières de simuler ce comportement ; le fait essentiel, qui est le sujet de ces analyses, est la multiplicité des comportements possibles ; cette multiplicité a des conséquences pour la simulation de mouvements physiques.

3.9 Les cercles du plan projectif

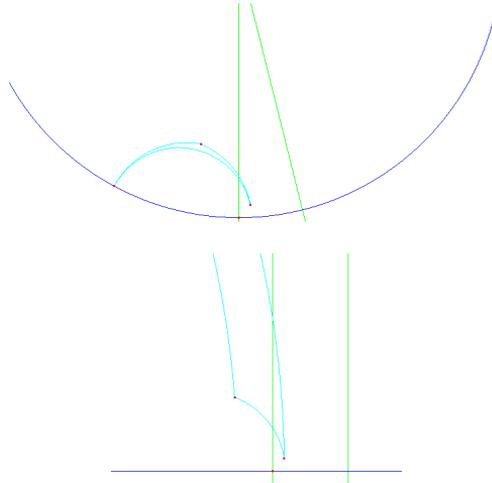
Il est nécessaire d'avoir une géométrie complète, si possible, afin d'éviter cas particuliers et singularités dans les énoncés ; en ce qui concerne les cercles, compléter le plan par un seul point à l'infini serait plus simple que de le compléter par une droite à l'infini. En effet, dans le premier cas, l'objet d'étude reste toujours un cercle ou une droite, le groupe des transformations correspondant est le groupe de Mœbius, de structure connue, et l'espace est homogène sous son action. Dans le second cas, les cercles se scindent en deux droites lorsqu'un de leurs éléments part à l'infini ; or une paire de droites n'a pas le même type topologique qu'un cercle, elle a seulement le même degré ; et cet espace de "cercles" n'est pas homogène, puisque les cercles dont certains des éléments sont à l'infini ne sont pas de même type topologique que les autres.

Cela amène la question de la pertinence du choix du plan complété par une droite à l'infini comme espace ambiant pour la géométrie dynamique

des cercles. Voici un exemple, intéressant dans le contexte de la géométrie dynamique, pour illustrer cette question ; l'exemple consiste à transformer progressivement le disque unité en le demi-plan supérieur, ou vice-versa, *tout en conservant les constructions faites* ; on passe ainsi d'une version du modèle hyperbolique de Poincaré à une autre, par une déformation continue, ce qui constitue une illustration suggestive du théorème de la représentation conforme de Riemann ; ceci est possible dans Cabri, lorsque le cercle limite du disque de Poincaré voit son centre partir à l'infini, alors qu'un point périphérique du cercle reste fixé ; le cercle se scinde alors en deux droites, la droite de l'infini, et une droite passant par le point périphérique et orthogonale à la direction dans laquelle est parti le centre. Cette dernière droite est la frontière visible du demi-plan ; l'intérieur du disque est alors transformé en le demi-plan. En outre, Cabri préserve les constructions, au sens où les constructions faites dans le modèle du disque deviennent des constructions valides dans le modèle du demi-plan, et vice-versa. Cet exemple indique l'intérêt qu'il y a à utiliser en géométrie dyna-



mique le plan complété par une droite à l'infini, plutôt que par un point à l'infini, y compris pour ce qui concerne les cercles. *Cela met aussi en question le type topologique comme type de base pour les objets géométriques*



de la géométrie dynamique ; un autre choix, qui a également sa pertinence, est d'aller chercher en géométrie algébrique des concepts aptes à décrire comme objet unique les cercles et les paires de droites que deviennent ces cercles à l'infini ; l'idée est que ce sont les théorèmes de la géométrie démontrés à propos des objets qui importent, non l'apparence des objets eux-mêmes ; dans cette direction, un choix est de décrire les constructions utilisées en géométrie dynamique comme des objets de base : Kortenkamp utilise pour cela les "straight line programs", c'est-à-dire les programmes sans branchement, un concept utilisé en théorie de la complexité algorithmique ; ce sont les problèmes liés à la visualisation dans le mouvement qui imposent un regard topologique

Cependant, pour l'étude de la topologie de l'espace des cercles et droites, il est plus efficace d'étudier d'abord le cas des cercles du plan complété par un point à l'infini (la "sphère de Riemann") ; en effet, cette étude est simplifiée par le fait que l'espace des cercles est alors homogène, au sens où les cercles sont les mêmes en chaque point de cet espace. Dans une deuxième étape, il suffit d'"éclater" le point à l'infini en l'ensemble des droites tangentes à la sphère au point en question pour prolonger les résultats dans le

cadre voulu.

En "éclatant" le point à l'infini, la sphère de Riemann devient le plan complété d'une droite à l'infini, homéomorphe à RP^2 ; il s'introduit alors d'autres types de courbes, obtenues comme limites de cercles dont un point tend vers l'infini ; comme le plan projectif réel est une structure adéquate pour une étude algébrique, étudions ces limites de cercles par leurs équations ; une équation d'un "cercle" généralisé est limite d'équations de cercles, une équation qui ne dépasse pas le second degré, et qui s'annule sur les points cycliques ; si un tel "cercle" a un point à l'infini réel, en plus des points cycliques, il contient nécessairement la droite de l'infini ; contenant une droite, ces "cercles" sont dégénérés en deux droites, distinctes ou confondues, dont l'une au moins est la droite de l'infini.

Les images par projection stéréographique sur la sphère de ces "cercles à l'infini" sont les cercles passant par le pôle et le pôle lui-même ; ce sont simplement les images des droites du plan, et ce qui correspond à la droite de l'infini. Inversement, le pôle correspond à la droite de l'infini, et à tous les cercles-points à l'infini.

Pour ce qui concerne l'axe radical d'une paire de cercles, "l'éclatement" du point à l'infini de la sphère crée un ensemble de nouveaux "cercles" pour lesquels la définition de l'axe radical pose problème ; a fortiori, la question du maintien de l'orientation de l'axe lors d'un passage d'un des cercles par une position dégénérée pose aussi problème. On observe effectivement dans Cabri une discontinuité.

3.10 Coniques

Une conique est coupée par une droite en deux points au plus, et deux coniques distinctes peuvent avoir jusqu'à quatre points communs ; il n'y a qu'un seul type de conique propre dans le plan projectif, contre trois dans le plan affine ; l'étude du type d'homotopie de l'espace des paires de coniques commence donc par le cas projectif ; comme le résultat semble

dépendre a priori des cas singuliers, il convient de définir avec précision ce que l'on appellera conique, en particulier les cas limites.

La question n'est pas complètement simple, ainsi le plan projectif admet une dualité, les axiomes du plan projectif étant invariants par le remplacement point \longleftrightarrow droite ; il conviendrait que les définitions et propriétés des objets géométriques satisfassent aussi à ces contraintes, et si possible aussi le comportement dynamique ; or, une conique a une équation du second degré ; lorsque l'équation est irréductible, la conique est propre, c'est par exemple une ellipse, une parabole ou une hyperbole dans le cas affine ; une équation non irréductible se scinde en facteurs du premier degré, et représente une paire de droites ; une paire de droites correspond par dualité à une paire de points, il faudrait donc que les cas limites des coniques projectives définies tangentiellement contiennent ce cas limite où la conique se réduit à deux points. Pris au pied de la lettre ceci semble entrer en conflit avec la définition des coniques par cinq points, de même que la conique formée de deux droites ne semble pas définissable par cinq droites.

On comprend que la dualité si importante en géométrie projective pose quelques problèmes pour ce qui est de l'extension de la définition des coniques au cas impropre ; ainsi, si une équation de conique s'écrit en coordonnées homogènes :

$${}^tX.A.X = 0$$

où A est une matrice symétrique 3×3 , X la matrice des coordonnées homogènes d'un point, une équation de la conique tangentielle duale s'écrit :

$${}^tX.A^{-1}.X = 0$$

ce qui n'est défini que si la matrice A est de rang maximum, c'est-à-dire si la conique est propre ; ce problème de rang ne se pose pas pour les points et droites, pour lesquels la matrice représentative est de rang 1, les matrices de rang zéro étant par ailleurs exclues : il n'y a pas de point ou droite "impropre" ou "dégénéré".

Il est possible d'imaginer d'autres interfaces de définition pour les coniques que la définition à cinq points qui est utilisée dans Cabri et Cinderella, les deux logiciels de géométrie dynamique qui disposent d'un traitement des coniques ; une telle interface devrait toutefois satisfaire à plusieurs conditions :

- d'interprétation immédiate, évidente,
- d'une généralité suffisante pour permettre l'introduction des cas particuliers,
- de facilité de manipulation.

Deux points définissent une droite, trois points définissent un cercle, il est assez naturel de passer par cinq points pour définir une conique. L'avantage de passer par des points est qu'en géométrie dynamique, le point est l'élément de base de la manipulation, sans qu'aucune explication supplémentaire soit nécessaire. La création d'un point est elle-même une opération de base, elle a un coût négligeable pour l'utilisateur, au niveau cognitif.

La définition par points donne une grande généralité au type de courbe construit, permettant pour les coniques l'accès à l'essentiel des situations importantes ; par exemple, on peut illustrer le théorème de Pascal, et il est possible de passer continûment à son cas particulier appelé théorème de Pappus, en alignant des points de base de la conique support ; ces théorèmes ne sont pas choisis au hasard : il est indispensable de pouvoir les illustrer si on prétend traiter les coniques.

les définitions bifocales des coniques, ou par foyer et directrice ne vérifient pas cette dernière caractéristique : on ne peut pas passer du théorème de Pascal au cas particulier Pappus. La définition par équation du second degré ne permet pas la manipulation directe, et introduit un registre supplémentaire, l'algèbre. D'autres définitions encore seraient possibles, points invariants d'homographies, etc., mais requièrent beaucoup de connaissances de la part de l'utilisateur, des procédés ou des interfaces compliqués, et ne se prêtent pas à la manipulation directe.

Bien sûr, deux points ne définissent pas toujours une droite, ni trois points un cercle ; il les faut en position générale, distincts pour la droite,

non alignés pour le cercle ; une conique définie par cinq points existera si et seulement si quatre des cinq points ne sont pas alignés, et les cinq points sont deux à deux distincts. Examinons les cas limite de coniques pour cette définition par cinq points.

Donnons-nous cinq points qui définissent une conique ; le système d'équations qui permet de calculer une équation de la conique à partir des coordonnées des cinq points s'écrit :

$$\sum_{1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq 3, i \leq j} a_{ij} x_{ki} y_{kj} \quad 1 \leq k \leq 5$$

Les coordonnées homogènes des 5 points sont notées x_{k1}, x_{k2}, x_{k3} , ce sont les données, les coefficients a_{ij} recherchés sont les inconnues de notre problème, à déterminer à un facteur près. Il y a cinq équations, chacune traduisant l'appartenance d'un point à la conique, et on recherche six coefficients, déterminés à un facteur global près.

Si quatre parmi ces cinq points sont alignés ou si deux des points sont confondus, ce système linéaire n'est plus de rang maximum ; en effet, si deux des points sont confondus, deux lignes du système sont identiques, ce qui diminue d'une unité le rang ; si quatre des points sont alignés, une équation solution supposée du système doit être divisible par l'équation de la droite contenant les quatre points et déterminée par les quatre lignes du système correspondant à ces points ; le reste de l'équation supposée est alors du premier degré, représentant une droite passant par le dernier point, mais n'est pas déterminable univoquement par une seule condition, la seule ligne subsistant dans le système ne suffisant pas à déterminer les différents coefficients de l'équation de droite ; le système des cinq équations n'est alors pas à solution unique, donc n'est pas de rang maximum.

Inversement, si tous les points sont distincts et si aucun groupe de quatre n'est aligné, le système définit une équation unique, de deux droites sécantes ou parallèles si un groupe de trois points est aligné, de conique propre sinon. Ainsi, les cas limite de coniques non définies par cinq points correspondent aux cas suivants :

1. deux des cinq points coïncident,
2. au moins quatre des cinq points sont alignés.

Les six coefficients de l'équation, définis à un facteur près, sont des coordonnées homogènes dans un espace projectif de dimension cinq, où chaque équation de conique est un point de l'espace ; tous les vecteurs de cet espace ne correspondent pas à des équations de coniques définies par points ; sont possibles :

- une équation de conique propre,
- une équation produit d'équations de deux droites sécantes ou parallèles distinctes.

Sont impossibles :

- une équation de droite double, cas limite de droites parallèles,
- une équation de point, cas limite de cercle dont le rayon tend vers zéro en géométrie affine,
- une équation de cercle à rayon imaginaire, ou de conique n'ayant aucun point réel.

La droite double ne peut pas intervenir, puisque les cinq points donnés seraient alors alignés sur une seule droite. D'autres cas limite ne sont pas répertoriés ici, parce qu'ils interviennent seulement dans le cas des coniques affines : un segment, cas limite d'ellipse dont le petit axe tend vers zéro, le grand axe restant fixe, par exemple.

On observe dans cette discussion qu'il existe un cas limite de cercle qui n'est pas définissable par cinq points, la droite de l'infini double. Pour tous les autres cas, un cercle est une conique. En pratique, dans Cabri, la droite double de l'infini n'est pas explicitement considérée comme un cercle, pour éviter le phénomène précédent, elle n'a pas d'équation spécifique, mais elle est néanmoins gérée, comme un élément "non défini", sur lequel des constructions peuvent subsister [87] p.11.

Toutes ces équations sont des formes quadratiques réelles, lesquelles peuvent être classées par leur rang et leur signature ; en coordonnées homogènes (x, y, z) , la forme quadratique a trois valeurs propres, qui sont

positives, ou négatives, ou nulles ; la liste des cas s'établit ainsi :

rang	signature	forme algébrique	géométrie
1		x^2 ou y^2 ou z^2	une droite double $x = 0$ ou $y = 0$ ou $z = 0$
2	++ ou --	$x^2 + y^2$ ou $x^2 + z^2$ ou $y^2 + z^2$	un point $(0; 0; 1)$ ou $(0; 1; 0)$ ou $(1; 0; 0)$
2	+- ou -+	$x^2 - y^2$	deux droites sécantes $x - y = 0; x + y = 0$ ou $y - z = 0; y + z = 0$ ou $z - x = 0; z + x = 0$
3	+ + + ou - - -	$x^2 + y^2 + z^2$	rien, le vide
3	+ + - ou + - -	$x^2 + y^2 - z^2$ ou $x^2 - y^2 + z^2$ ou $-x^2 + y^2 + z^2$	conique propre

On pourrait être surpris de ne pas voir l'équation de ce qui sera en affine une parabole ; elle s'y trouve : une telle équation $x^2 + y$ s'écrirait $x^2 + yz$ après passage en coordonnées homogènes ; or

$$yz = \frac{1}{4}[(y+z)^2 - (y-z)^2] = u^2 - v^2$$

et la parabole est une conique propre.

Ceci donne une liste d'équations réduites ; il resterait à construire les matrices symétriques des formes quadratiques correspondantes, puis à réunir les classes de similitude des matrices obtenues pour avoir une description plus précise de l'espace des équations concernées. Ceci est faisable [98] ; toutefois, le résultat s'annonce plus compliqué que le résultat correspondant pour les équations de coniques projectives complexes, où les notions de rang et de déterminant suffisent pour déterminer le résultat. Pour les

coniques complexes, le résultat classique est : dans l'espace projectif des matrices symétriques 3×3 , de dimension cinq, l'ouvert des matrices de rang trois, de déterminant non nul (les coniques propres), réuni aux matrices de rang inférieur, qui est une hypersurface cubique (le déterminant y est nul)(les paires de droites), lui-même privé de l'ensemble des matrices de rang un, la "surface de Veronese", une variété de dimension deux (les droites doubles).

Comme pour les cercles, il serait instructif de connaître le type d'homotopie des paires de coniques réelles, au moins dans le cas projectif.

3.11 Les intersections de coniques

Deux coniques se coupent en général en quatre points ; comme Descartes l'a montré dans "La Géométrie", les intersections de coniques résolvent les équations du troisième et du quatrième degré, mais non celles de degré plus élevé ; Descartes précise même qu'il convient d'utiliser les intersections de coniques seulement pour les équations qui ne se réduisent pas au second degré, comme les bicarrées.

Si l'on voulait utiliser pour les intersections entre deux coniques une technique analogue à celle de Cinderella pour les cercles, il faudrait simuler le mouvement de points sur des surfaces de Riemann à quatre feuillettes ; cela poserait des problèmes, en particulier si l'équation à résoudre présente une symétrie interne, que l'on souhaite respecter, certaines solutions ne devant alors pas être échangées ; une autre objection à l'utilisation de cette technique est qu'il est parfois délicat de prévoir ce qui va se passer dans Cinderella lorsque des constructions reposent sur des intersections avec des cercles, et que cela le sera encore plus pour des intersections avec des coniques à cause de la multiplicité des cas ; le comportement dynamique des figures deviendrait alors très difficile à lire et à interpréter en terme d'invariants.

Puisque les cercles sont des cas particuliers de coniques, il est impos-

sible que les intersections de coniques puissent se gérer sans discontinuité dans un logiciel déterministe. Voici une description simplifiée de la gestion actuelle dans Cabri2 Plus, pour le seul cas où il n'y a pas de constituants communs, ce qui est le cas défavorable pour la survenue d'une discontinuité ; les points d'intersection sont considérés comme des points sur une des coniques, et paramétrés à l'aide d'une droite tournante autour d'un point de cette conique ; ce point est par exemple le premier constituant de la première conique ; les points d'intersection sont alors repérés par la pente de la droite tournante ; les quatre points d'intersection, lorsqu'ils sont quatre, sont ainsi associés à quatre pentes, et l'hypothèse est que *les points ne se croisent pas* sur la conique, c'est-à-dire que l'ordre des quatre pentes est invariant, ce qui permet d'identifier sans difficulté les quatre points ; la discontinuité de cette gestion apparaît avec la discontinuité de la fonction qui à une droite associe sa pente, lorsque la droite passe en tournant autour de l'origine par la position de l'axe des ordonnées ; dans Cabri2, cet axe avait une direction fixe (verticale), dans Cabri2 Plus, il est tangent à la conique. En résumé, les points d'intersection dépendent continuellement des deux coniques, ou de leurs constituants, sauf lorsque l'un des points d'intersection franchit le point de tangence de la droite repère, le premier constituant de la première conique. Dans ce dernier cas, les points se trouvent renommés pour retrouver une disposition des noms identiques à celle précédant le franchissement : l'invariant de dénomination n'est plus l'invariant de l'utilisateur.

A l'image de ce qui a été fait avec la paramétrisation de l'axe radical des paires de cercles, nous avons mené une étude sur les possibles configurations du quadrilatère formé par les points d'intersection de deux coniques, en partant des idées de R. Cuppens interprétant Chasles [31] ; un cas simple se produit lorsqu'il n'y a que deux points d'intersections réels ; alors il existe deux "cordes communes", des droites réelles joignant les points d'intersection, une joignant les points réels, l'autre les points imaginaires ; le comportement de cette dernière dans les déplacements des coniques permet de prévoir la réapparition des deux dernières intersections,

plus précisément le suivi de l'orientation de cette droite permet d'évaluer si les intersections ont été échangées ou pas, par rapport aux points restés réels. Lorsque les coniques deviennent des cercles, la droite joignant les points imaginaires devient la droite de l'infini, la droite joignant les points réels devient l'axe radical.

Une telle étude vise à obtenir de manière détaillée la complexité des configurations observables, et surtout à examiner et si possible caractériser les circonstances d'éventuels échanges. En pratique, il est très rare cependant qu'une telle généralité soit utilisée ; dans la plupart des exemples, en particulier en modélisation de phénomènes physiques, on n'a besoin que de deux, parfois trois intersections, le quatrième point étant commun ; dans le cas d'un point commun, si l'on était certain de l'absence de croisement des intersections, il suffirait de placer l'origine du repère des intersections, c'est-à-dire le point de discontinuité dans la gestion actuelle, sur le point commun pour qu'il n'y ait plus de discontinuité ; le problème est que s'il y a croisement, ce sera précisément dans ce cas-là, comme notre exemple avec deux cercles 3.6 l'a montré.

Un autre dispositif semble plus prometteur, mais celui-ci demandera plus de travail ; il s'agirait d'implémenter les arcs de coniques, à l'instar des arcs de cercle déjà présents ; outre leur utilité propre, la question de la stabilité des intersections de coniques s'en trouverait certainement améliorée ; en effet, l'arc de conique ne recouvre pas toute la conique (on enlève le "cut locus" de la variété) ; si l'on place le "point de discontinuité" sur la conique hors de l'arc, le saut éventuel d'un point d'intersection de cette conique avec une autre conique ne concernera jamais un point de l'arc ; l'utilisateur saura ainsi que les points sur arc ont un comportement continu, il lui suffira de couper une conique avec un arc de conique, c'est-à-dire de choisir lui-même l'arc convenant à sa situation ; en d'autres termes la responsabilité des choix convenant à la situation, afin d'éviter une discontinuité, serait dévolue à l'utilisateur ! Plus exactement, l'utilisateur aurait une maîtrise beaucoup plus directe et plus simple lui permettant de s'adapter à son cas, puisqu'un algorithme général recouvrant tous les cas ne peut

exister. Rappelons que cette situation de "responsabilisation" est celle prévalant pour les cercles de Cabri, où un croisement des intersections ne peut se produire que lorsqu'un des points est un point commun, tel que défini précédemment ; en dehors de ce cas, Cabri est programmé pour que les intersections ne se croisent jamais ; le croisement est donc réalisable, au prix d'une construction explicite.

Chapitre 4

Dynamique des objets composites

Parmi les questions qui se posent au concepteur en géométrie dynamique, questions qui n'ont pas d'équivalent en géométrie "figée", figure le problème de la gestion du mouvement des objets sur lesquels on n'a qu'une information partielle, les objets en partie contraints par leur propriétés géométriques, mais non entièrement déterminés ; tels sont les points sur segment, plus généralement les objets liés à un autre objet, dénommés "sur" un objet, mais disposant cependant de certains degrés de liberté ; ces degrés de liberté permettent à l'utilisateur d'intervenir, par exemple sur la position relative du point sur son segment ; en même temps, ces degrés de liberté posent question quant à ce que doit faire le système en cas de déformation du support.

Un premier exemple montre que la question est liée au type de géométrie représentée ; puisque toutes les géométries usuelles se plongent dans la géométrie projective, la question se pose tout d'abord des liens de celle-ci avec la géométrie dynamique ; le fait qu'en géométrie projective plane, points et droites bénéficient d'un égal statut, au regard du principe de dualité, devrait imposer que les points et les droites de la géométrie dynamique bénéficient d'un égal statut au regard de leurs possibilités dynamiques ; or la manipulation directe non limitée aux points, mais étendue aux droites,

contraint, ainsi que la suite le détaillera, à un choix de géométrie pour la représentation interne informatique qui n'est pas la géométrie projective.

La discussion du comportement dynamique des points sur objet s'appuie sur deux idées : la possibilité d'une interprétation du mouvement par une transformation classique, et le respect d'un critère de concourance lors des déformations du support.

La discussion est ensuite étendue au comportement des images portées par un quadrilatère, présageant une discussion analogue en dimension trois, pour les points ou les droites sur les faces d'un polyèdre.

L'introduction d'autres géométries que la géométrie euclidienne plane, en particulier le passage d'un modèle de géométrie à un autre, implique des comportements adaptés des points sur objet ; ceci conduit à s'interroger sur la réversibilité de ce passage, et donc des transformations, et plus généralement des procédés de construction.

4.1 Comportement dynamique de point sur segment hyperbolique

Dans le modèle du disque de Poincaré pour le plan hyperbolique, un segment de droite hyperbolique est représenté par un arc de cercle euclidien ; imaginons de créer un point P sur ce segment hyperbolique ; puis faisons subir au segment une isométrie hyperbolique ; on s'attend à ce que tous les éléments du segment subissent la même isométrie, en particulier le point P ; ensuite, déplaçons les extrémités de ce segment hyperbolique, le segment va changer de place, et sa longueur hyperbolique va être éventuellement modifiée ; comment faudrait-il programmer le déplacement du point pour que celui-ci reste sur le segment, et continue à y apparaître à une place similaire à celle qu'il occupait dans l'ancienne situation ? Y a-t-il une transformation connue qui puisse jouer le rôle de l'isométrie précédente ? En géométrie dynamique euclidienne, l'invariant préservé dans le mouve-

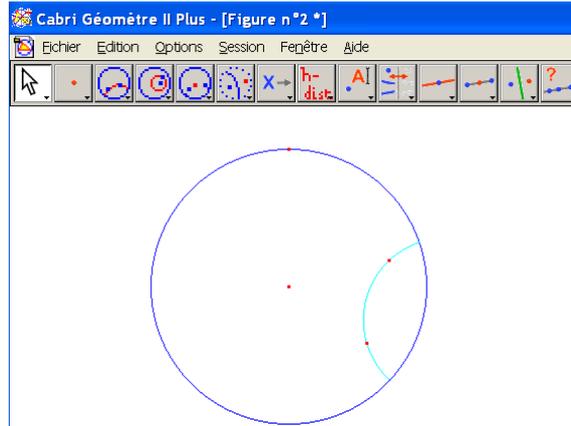


FIG. 4.1 – Droite hyperbolique dans le modèle de Poincaré

ment est le rapport des distances du point aux extrémités du segment.

En fait, la question est posée en géométrie hyperbolique, hors contexte de la géométrie élémentaire, pour souligner que la programmation d'un logiciel de géométrie suppose l'étude préalable des propriétés géométriques mises en jeu, et que d'autre part, le comportement dynamique des points sur objet traduit les propriétés de la géométrie simulée. La cohérence globale de la géométrie simulée impose un comportement spécifique des points sur objet, étudié dans ce qui suit.

4.2 Géométrie projective et stabilité à l'infini

Les publications sur la géométrie dynamique s'accordent sur le fait que la géométrie représentée doit être la géométrie projective ; il est connu depuis le XIXème siècle que les géométries usuelles y sont représentables ; elle apparait comme un cadre suffisamment général pour que la validité des théorèmes ne soit pas remis en cause par un simple déplacement d'un point de base ; la justification de la nécessité de traiter aussi les éléments à l'in-

fini apparait assez bien ; en effet, la possibilité du mouvement des parties d'une figure pourrait faire devenir parallèles deux droites, et faire évanouir leur éventuel point commun ; que celui-ci conserve cependant une forme d'existence peut simplifier le point de vue du programmeur, mais surtout celui de l'utilisateur, car la figure subsiste même en cas de passage à l'infini de l'un de ses éléments, et ainsi sa lisibilité reste intacte ; au contraire, la disparition d'une partie de la figure due au passage à l'infini d'un élément de construction peut être très difficile à interpréter pour peu que cet élément ne soit pas l'objet de l'attention principale, mais seulement un auxiliaire de construction, voire un auxiliaire caché.

Cependant, la géométrie projective ne permet de géométrie dynamique que celle des points ; il est impossible de manipuler et de déplacer directement les droites du plan projectif ; ce qui reste de la notion de droite une fois celle-ci rendue "projective" ne permet plus une telle manipulation.

Nous ne connaissons qu'un seul logiciel de géométrie dynamique qui implémente une géométrie projective, c'est-à-dire qui ne différencie pas entre les éléments à l'infini et les autres éléments ; il s'agit de Cinderella (Cendrillon en allemand), qui en fait implémente la géométrie projective complexe du plan et en montre la partie réelle ; dans Cinderella, on ne peut voir et déplacer que les éléments réels, par exemple les points cycliques du plan ne sont pas réels donc pas manipulables, ce qui ne permet pas de modifier la structure euclidienne, ainsi la notion de longueur ne peut pas être modifiée, les cercles restent toujours des cercles ; Cabri implémente la géométrie usuelle du plan, disons la géométrie affine réelle du plan, complétée par une droite à l'infini ; les éléments à l'infini y ont un statut d'objets à l'infini, distinct du statut des objets à distance finie, ils ne sont ni visibles ni manipulables.

4.3 Point sur objet et paramétrisation

Dans le plan usuel, observons les conséquences de quelques manipulations de géométrie dynamique ; donnons-nous deux points distincts A et B ; il passe une droite et une seule par ces deux points ; dans Cabri, on peut tracer la droite passant par A et B, puis celle passant par B et A, mais Cabri n'en crée qu'une : Cabri "sait" que par deux points ne passe qu'une droite. Déplaçons les points afin d'échanger les positions respectives de A et B ; ce faisant, nous n'avons pas changé la droite euclidienne AB ; pendant l'échange, la droite est déplacée, à la fin de l'opération, elle a repris la place qu'elle occupait auparavant ; l'équation de la droite est la même avant et après l'interversion de A et B.

Cependant, imaginons un point C sur la droite AB, disons un peu plus près de B que de A. Dans l'interversion de A et de B, C conserve les propriétés qui l'ont défini : il reste sur la droite AB, un peu plus près de B que de A. Puisque C conserve sa place sur la droite AB, sa position dans le plan est modifiée par l'échange de A et B.

Ainsi, dans le déplacement des objets géométriques, les points conservent leur existence en tant que points et leur individualité ; en particulier, leur mouvement est nécessairement continu en fonction des mouvements des objets libres déplacés.

Cette primauté de la géométrie des points sur celle des droites, et la dépendance continue des points par rapport aux objets libres, a pour corollaire une orientation des droites et des objets linéaires, orientation plus ou moins implicite pour l'utilisateur.

Supporter les points sur objets et programmer leur déplacement impose de disposer d'un "repère mobile" ; en géométrie euclidienne, le segment est l'objet typique ; le point sur segment est défini par le rapport de ses distances aux extrémités du segment, ce rapport constitue sa coordonnée dans le repère défini par les extrémités du segment. Le segment est alors implicitement orienté ; la même situation se retrouve pour les droites, et impose à celles-ci une orientation implicite ; ainsi, les outils construi-

sant des droites, comme "perpendiculaire", "parallèle", "bissectrice", etc. construisent en fait des droites avec un repère ; la géométrie n'est plus projective au sens habituel, mais une géométrie de droites orientées ; l'espace des droites non orientées du plan est homéomorphe au plan projectif, non orientable et non simplement connexe ; l'espace des droites orientées du plan est homéomorphe à la sphère S^2 , orientable et simplement connexe.

Décrivons les conséquences pour la géométrie dynamique du fait de choisir une représentation interne non orientée des droites, correspondant à une implémentation directe de la géométrie projective ; heuristiquement, le fait de ne conserver que l'image globale de la droite, disons seulement une équation dans un repère fixé, ne permet pas ensuite de retrouver une position de point sur la droite, ni de distinguer deux points A et B de la droite après déplacement de celle-ci ; s'il y avait un point sur la droite avant déplacement, ses coordonnées satisfont à l'équation de la droite, il y aura un point sur la droite après déplacement, dont les coordonnées satisferont la nouvelle équation, mais on ne saura pas où se trouve le point sur la droite, et la question elle-même n'a guère de sens ; la droite elle-même est homéomorphe à un cercle, et en terme de positionnement de points sur la droite, la seule affirmation concernant des positions différentes susceptibles d'être distinguées, concerne deux paires de points, qui peuvent être entrelacées ou non.

A l'inverse, le fait de pouvoir suivre deux points de la droite au cours du déplacement de celle-ci a pour conséquence que l'objet "droite dynamique" est orientable, que l'on peut lui attribuer une orientation et suivre celle-ci continûment au cours du déplacement. La simple connexité de l'espace des droites orientées signifie que deux trajectoires de droites dynamiques qui partiraient d'une même position, et aboutiraient également à une position identique, peuvent être continûment déformées l'une dans l'autre.

la seule exception dans Cabri à la règle de l'orientation implicite est le cas de la droite de l'infini ; en effet, celle-ci n'est pas conçue comme manipulable, il n'y a donc pas de raison apparente de lui conférer une orientation

particulière ; ainsi, l'orientation d'une droite qui passe par la position de la droite de l'infini est "oubliée".

4.4 Points sur objets et transformations

Lors du déplacement d'un objet, le déplacement des points sur objet définit une transformation de l'image de l'objet en position de départ vers l'image de l'objet en position d'arrivée, une bijection de la source vers la cible ; une question se pose naturellement : cette transformation est-elle une transformation classique, c'est-à-dire se prolonge-t-elle au plan tout entier ?

La question n'est pas de pouvoir déplacer les objets de Cabri par un déplacement, translation ou rotation, ou déformés par une homothétie, ou les deux simultanément par une similitude directe ; cela peut se faire dans Cabri par un des pointeurs de déplacement appliqué à un objet pris dans sa totalité. Le comportement de tous les points de la figure y compris les points sur objet est alors cohérent avec la transformation.

La question est de savoir si une déformation d'un objet induite par le déplacement d'un seul point ou élément de base, les autres restant fixes, est géométriquement équivalente à l'application à l'objet d'une transformation classique.

C'est le cas pour une droite, qui peut toujours être considérée comme obtenue par un déplacement, ou par une homothétie ; une droite définie par un point et une direction, est transformée par une translation si son point de base est déplacé, sa direction restant fixe, ou par une rotation si sa direction est modifiée, son point de base restant fixe ; une droite définie par deux points est transformée par une homothétie si un des point de base est déplacé, l'autre restant fixe ; chaque fois, le type de transformation définit implicitement le comportement dynamique des points sur la droite ; dans ce cas, les éléments de base de la droite constituent un repère de la droite, origine et vecteur de base, ou bien deux points constituant un repère af-

fine ou barycentrique de la droite ; c'est bien sûr par rapport à ce repère que les points sur la droite vont être repérés, ce qui suffit à déterminer leur comportement dynamique, et dans ce cas, l'interprétation en termes de transformation devient presque superflue.

Le cas des autres éléments rectilignes, segment, demi-droite est similaire ; le cas des cercles, des triangles ou des coniques justifie cependant l'analyse en terme de transformations ; deux triangles non aplatis sont images l'un de l'autre par une transformation affine du plan. Deux cercles non réduits à un point sont toujours images l'un de l'autre par au moins une homothétie ; deux coniques propres quelconques sont images l'une de l'autre par au moins une tranformation projective, qui conserve l'alignement.

les cercles de Cabri sont définis par centre et rayon, ou bien par centre et point périphérique ; la définition du cercle par trois points ne fait pas partie des constructions de base offertes par le logiciel ; et en effet, deux triplets de points du plan non alignés sont images l'un de l'autre par une transformation affine du plan, mais cette transformation n'envoie pas le cercle circonscrit au premier triangle sur le cercle circonscrit au second, elle transforme le premier cercle en une ellipse ; pour l'utilisateur, ceci se traduit par le fait que si un cercle est défini par trois point, son déplacement par la manipulation d'un des point est très difficile : amener le cercle à passer par un point donné, régler son rayon à une taille precrite, ou amener son centre en un endroit donné, sont des opérations singulièrement difficiles.

Ainsi une déformation d'un objet conséquence du déplacement d'un point de base de l'objet, les autres points de base restant fixes, ne correspond pas toujours à la restriction d'une transformation d'un autre objet englobant, a fortiori à la restriction d'une transformation du plan.

4.5 Comportement dynamique des points sur objet : un critère

Un critère pour le comportement dynamique des points sur objets est que si trois droites sont définies par des points sur objet, et qu'elles soient concourantes, alors les points sur objet devraient être tels que ces trois droites restent concourantes après déplacement ou déformation de l'objet.

Comment définir le comportement dynamique des points sur une conique ? Le critère ci-dessus est que si trois droites sont définies par des points sur coniques, et qu'elles sont concourantes, ces droites devraient rester concourantes après déplacement ou déformation de la conique.

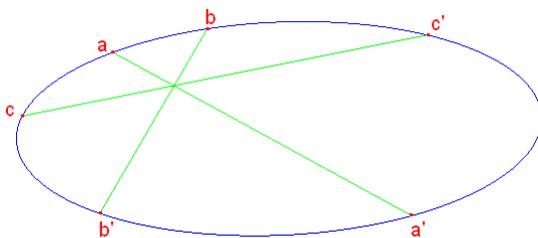


FIG. 4.2 – Le concours des trois droites définies par des points sur conique doit être préservé lors des déformations de la conique

si on interprète la déformation de la conique comme l'application d'une transformation projective aux points constituant la conique, il suffit que la paramétrisation des points sur conique soit invariante par cette transformation projective pour que ce critère de concurrence soit satisfait ; cette condition serait réalisée si la paramétrisation était donnée par des fonctions rationnelles du premier degré par rapport aux coordonnées des constituants de la conique. Voici deux paramétrisations qui satisfont à cette condition :

- Soient trois points A,B,C parmi les constituants de la conique, la droite tournant autour de A recoupe la conique en un point générique M ; la trace P de AM sur la droite BC peut servir de paramètre pour le point M. la

droite BC doit être complétée par un point à l'infini correspondant au point de la conique sur la parallèle à BC passant A (pour une quadrique de l'espace, ce qui jouerait le rôle de la droite BC serait un plan, que la droite AM couperait en un point P, paramètre du point M ; pour définir les paramètres de tous les points de la quadrique, il faudrait compléter ce plan à l'infini ; ce complément devrait en général être homéomorphe à une conique) - Soient A,B,C,D,E les cinq points constituant de la conique ; la construction de l'hexagone du théorème de Pascal effectuée à partir des cinq sommets A,B,C,D,E et d'une droite tournant autour de E, cinquième côté virtuel de l'hexagone, fournit un sixième point M générique de la conique.

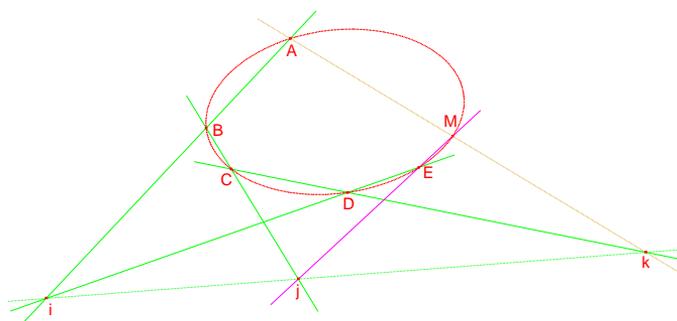


FIG. 4.3 – l'hexagone de Pascal

En cas de conique propre déformée en une conique propre, ces paramétrisations remplissent toutes deux leur rôle ; mais la géométrie dynamique n'est pas simple, et il est indispensable de considérer les cas limites, où les points constituant de la conique passent par des positions d'alignement. Pour que la conique soit définie, il est nécessaire que, parmi les cinq points constituant, il n'y en ait pas quatre alignés ; si cette condition est vérifiée, trois points peuvent néanmoins être alignés, et la conique consiste en deux droites distinctes, l'une contenant trois points constituant, l'autre les deux restants ; avec le cas de l'ellipse circulaire, le cas des deux droites

distinctes est le seul cas limite de conique définissable par cinq points ; les cas de deux droites distinctes complique la structure de données qui doit maintenir les points sur objet, puisqu'il faut deux droites et non plus une seule, et qu'il faut gérer les fonctions de transition.

Pour les arcs de cercle, la question est intéressante, puisque les déplacements, homothéties ou similitudes ne transforment pas un arc de cercle donné en un autre arc de cercle donné en général ; en effet, ces transformations conservent les angles, or les deux arcs de cercles donnés n'ont pas nécessairement la même ouverture d'angle ; les transformations affines ou projectives plus générales transforment un cercle en conique ; or cette conique ne peut être un cercle, sinon les points cycliques seraient conservés, et les transformations seraient des similitudes, dont on vient d'voir quelles ne conviennent pas.

Une idée consiste alors à ramener chacun des arcs de cercles à un segment de droite par une inversion ; on sait passer d'un segment à l'autre par une similitude ; la composée de ces trois transformations est une transformation dite circulaire, appartenant au groupe de Möbius du plan complété par un point à l'infini.

Ce procédé conduit à une paramétrisation des arcs de cercle, qui n'est pas définie par un angle, comme celle utilisée pour les cercles ; afin de préciser la différence entre la paramétrisation des cercles par l'angle, qui est une fonction transcendante, et une paramétrisation rationnelle par inversion, ou projection stéréographique, la figure 4.4 montre un arc ramené par projection stéréographique au segment de tangente correspondant.

En fait une inversion convenablement choisie suffirait à transformer un arc donné en autre arc donné ; en effet, l'inversion conserve les cercles (ou droites) mais ne conserve pas le centre des cercles ; une inversion ne conserve donc pas l'ouverture d'angle d'un arc, bien que conservant les angles inscrits ; ceci explique que par un choix adéquat, le rayon du cercle d'inversion correspondant au rapport des rayons cible et source, il est possible de régler indépendamment la position du centre d'inversion pour ajuster le rapport des ouvertures d'angles.

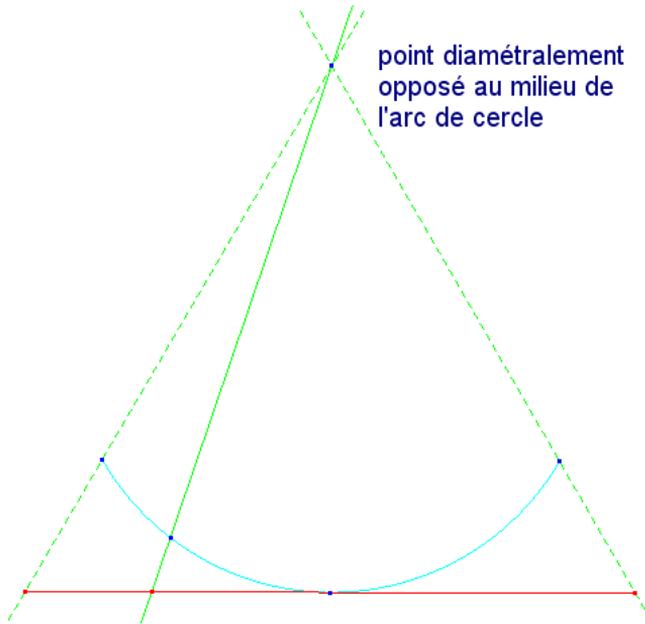


FIG. 4.4 – Projection stéréographique d'un arc de cercle

En outre, cette utilisation de l'inversion va permettre de conserver le concours de trois segments joignant des points sur arcs ; il suffit de montrer cette propriété pour une inversion, puisque ces transformations engendrent le groupe circulaire, et que la propriété se transmet au composé si elle est vérifiée par les composants. Cette propriété est surprenante, car ce n'est pas simplement l'image du point de concours que l'on observe, les trois cordes sur arc concourantes par hypothèse ont pour images trois arcs concourants, nécessairement, mais en outre les cordes joignant les extrémités de ces arcs *sont concourantes !* 4.5. Or en général, les cordes de trois arcs concourants ne sont pas concourantes : la condition que ces cordes sous-tendent des arcs eux-mêmes inverses de cordes concourantes d'un cercle est contraignante.

Ceci suggère que les points sur arc soient effectivement gérés par inver-

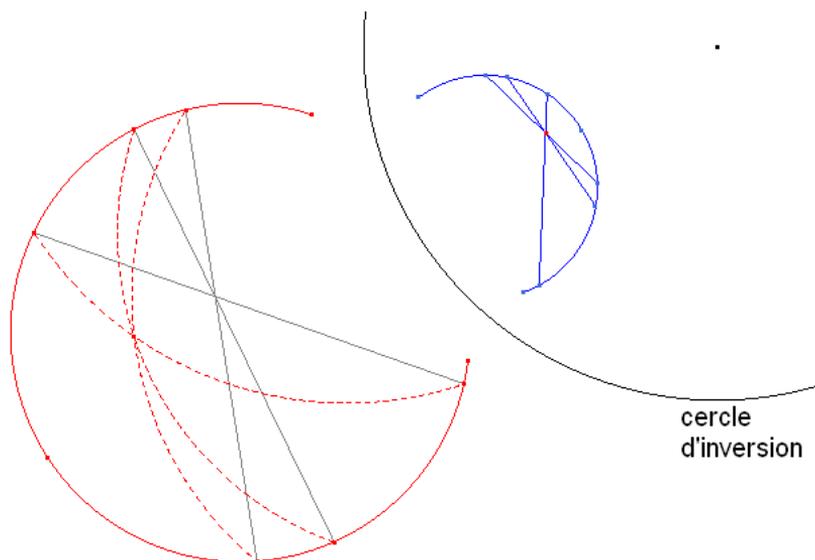


FIG. 4.5 – Arcs et cordes

sion, c'est-à-dire par une paramétrisation rationnelle comme sur la figure, et non par conservation d'un angle, une paramétrisation transcendante qui ne respecte pas les concours souhaités.

4.6 Image sur un objet

Emporter une image numérisée sur un objet géométrique est concevable de différentes manières : Un point pourra emporter une image, une image fixée sur les extrémités d'un segment sera déplacée et éventuellement étirée avec le segment ; enfin une image numérisée se présente habituellement dans un rectangle ; si le rectangle peut prendre la forme d'un quadrilatère quelconque, l'image pourrait suivre la forme du quadrilatère et changer de forme en conséquence ; ceci soulève un problème du même

type que le comportement dynamique des points sur un objet géométrique déformable ; en fait ce n'est que l'extension de ce problème des points sur objet à un contexte de géométrie tridimensionnelle : quel sera le comportement dynamique des points posés sur une face de polyèdre déformable ?

Précisément, nous allons discuter la question d'une image disposée dans un quadrilatère, et de son redessin lorsque les sommets du quadrilatère sont déplacés. L'image, par exemple une photographie ou un tableau, est conservée dans un rectangle ABCD ; soient MNPQ les sommets du quadrilatère sur lequel doit s'insérer l'image ; la position des quatre sommets détermine complètement les côtés du quadrilatère, la question est de déterminer également chacun des points de l'intérieur au sens suivant : on veut retranscrire la photographie dans le quadrilatère, c'est-à-dire définir une application du rectangle, intérieur compris, sur le quadrilatère, intérieur compris aussi. L'application est définie sur les quatre sommets :

$$(A, B, C, D) \longmapsto (M, N, P, Q)$$

La question est alors : comment prolonger l'application ainsi définie à tout le bord et l'intérieur ? On peut chercher comme précédemment un prolongement sous la forme d'une transformation de tout le plan, qui serait définie par les images de quatre points non alignés ; une transformation projective, qui respecte l'alignement, satisfait à cette condition ; en outre, cette condition détermine univoquement la transformation.

Toutefois, le fait que les transformations projectives conservent l'alignement, qu'elles échangent éventuellement les éléments finis et infinis du plan euclidien, et que toutes les transformations projectives possibles sont ici concernées, peut avoir des conséquences surprenantes en ce qui concerne l'image du rectangle ; par exemple, on s'attend à ce que l'intérieur du rectangle soit transformé en l'intérieur du quadrilatère, parce que la transformation est continue, et que l'intérieur et l'extérieur sont les deux composantes connexes découpées dans le plan par le rectangle encadrant l'image ; mais où se trouve "l'intérieur" du quadrilatère cible ?



FIG. 4.6 – Image dans un quadrilatère

La notion d'intérieur n'est pas adaptée à notre objectif, parce qu'elle n'est pas projective ; un quadrilatère qui serait tracé sur une sphère illustre déjà une partie du problème : de quel côté est l'intérieur ? Sur la sphère, il faudrait orienter le quadrilatère pour opérer une distinction entre "ce qui est à droite quand on avance sur le bord orienté" et "ce qui est à gauche". La question de la distinction intérieur/extérieur pour le rectangle contenant l'image ne se pose pas, le rectangle sépare le plan en deux composantes connexes, l'une contient l'image, c'est l'intérieur, l'autre contient la droite de l'infini, c'est l'extérieur ; mais pour le quadrilatère $MNPQ$, il en va différemment, contrairement au rectangle donné, les sommets sont des points libres, ils pourraient partir à l'infini, un côté du quadrilatère pourrait traverser la droite de l'infini. Le plan projectif n'est pas homéomorphe à une sphère, et n'est pas orientable ; un quadrilatère non croisé découpe le plan projectif en deux composantes connexes, l'une homéomorphe à un disque, l'autre homéomorphe à un ruban de Möbius ; les deux composantes sont donc topologiquement distinctes, et il est nécessaire de savoir laquelle reçoit l'image ; le moyen le plus simple pour savoir où va l'image est d'utiliser les droites diagonales du quadrilatère.

Les diagonales du rectangle ont leur point de concours dans l'image, à

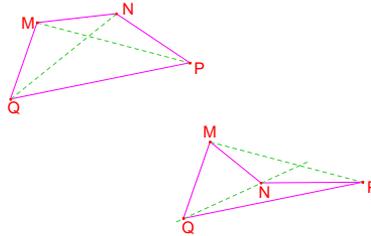


FIG. 4.7 – Diagonales de quadrilatère

l'intérieur du rectangle ; il suffit d'observer le point de concours des diagonales du quadrilatère $MNPQ$, qui est donc un point de l'image et est conservé par la transformation projective, pour déterminer où la transformation projective va envoyer l'image. En fait le point de concours des diagonales traverse le bord du quadrilatère au moment où celui-ci passe de l'état convexe à l'état non-convexe, et inversement ; si $MNPQ$ est non convexe, on voit que l'image remplit tout l'écran, à l'exception d'une partie limitée par le quadrilatère.

L'algorithme d'affichage évalue le plus petit rectangle de côtés parallèles au bord de l'écran contenant les quatre sommets du quadrilatère ; ce rectangle d'affichage est coupé au bord de la fenêtre active, même si certains sommets sont hors fenêtre active ("clipping") ; l'algorithme inverse la (matrice de la) transformation projective qui envoie l'image sur le quadrilatère ; puis il parcourt le rectangle d'affichage ligne par ligne, et évalue la transformation inverse sur chaque pixel, afin de calculer s'il correspond à un pixel de l'image, pour le cas échéant en afficher la couleur.

Dans cet algorithme, une partie des calculs est effectuée une fois pour toute l'image, et une autre partie est répétée pour chacun des pixels ; c'est cette dernière qui est critique pour que la manipulation directe reste possible même avec des images ; la partie coûteuse en temps de calcul, l'inversion de la matrice de la transformation, est ici calculée une seule fois par affichage de l'image, et la partie répétée sur chaque pixel reste raisonnable,

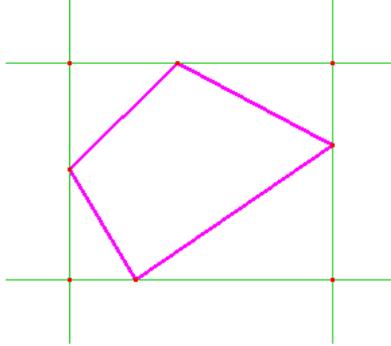


FIG. 4.8 – Rectangle d’affichage

ce qui conduit à un affichage relativement fluide sur les machines actuelles.

Voici un autre procédé que la transformation projective pour générer une image sur quadrilatère avec une apparence et un comportement dynamique assez différents ; l’application du rectangle sur le quadrilatère est définie sur les sommets du rectangle, auxquels elle donne pour images les sommets du quadrilatère ; on peut la prolonger de manière naturelle aux côtés du quadrilatère en respectant les rapports de distance, par une application affine :

$$(1 - t)A + tB \longmapsto (1 - t)M + tN, 0 \leq t \leq 1$$

Le milieu du segment AB a pour image le milieu du segment MN des images de A et B , le point au tiers de AB a pour image le point au tiers de MN , etc. La même idée peut s’employer sur tout le rectangle $ABCD$, de manière bilinéaire :

$$(1-s)((1-t)A+tD)+s((1-t)B+tC) \longmapsto (1-s)((1-t)M+tQ)+s((1-t)N+tP)$$

$$0 \leq t \leq 1, 0 \leq s \leq 1$$

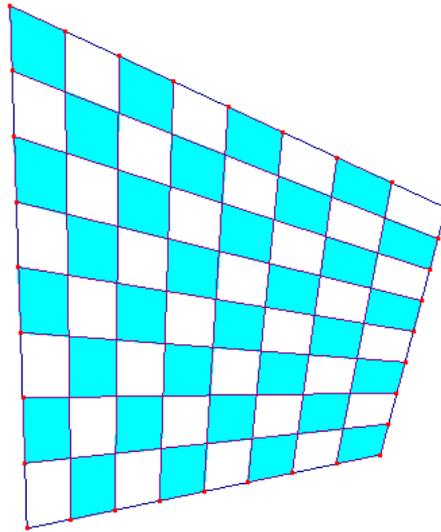


FIG. 4.9 – Un drapeau pour Indianapolis

en faisant courir simultanément deux points sur les deux côtés AD et BC avec le paramètre t , et en décrivant le segment qui les joint avec un autre paramètre s .

Cette forme de répartition bilinéaire de l'image remplit l'intérieur du quadrilatère, qu'il soit convexe ou non ; lorsque le quadrilatère n'est plus convexe, les segments joignant les côtés opposés remplissent l'intérieur mais passent aussi en partie à l'extérieur, où ils enveloppent une parabole.

Pour l'algorithme d'affichage, il est nécessaire d'évaluer, en fonction des coordonnées du point courant R dans le rectangle cible, le couple de paramètres (s, t) , qui sont les coordonnées de l'antécédant de R dans le rectangle de l'image de départ.

$$R_{st} = (1 - s)(1 - t)M + (1 - s)tQ + s(1 - t)N + stP$$

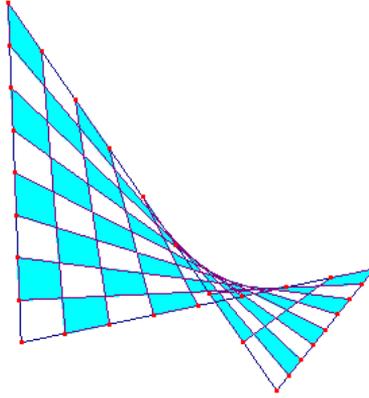


FIG. 4.10 – Quadrilatère croisé

En prenant M comme origine, les deux équations aux coordonnées sont

$$X = sX_1 + tX_3 + stU$$

$$Y = sY_1 + tY_3 + stV$$

L'élimination de s entre les deux équations fournit une équation numérique du second degré pour t :

$$t^2(UY_3 - VX_3) + t(X_1Y_3 - X_3Y_1 - UY + VX) + XY_1 - YX_1 = 0$$

la résolution de l'équation en fonction de t pour x, y donnés fournit le point E_{st} antécédent de R . il faut vérifier que les solutions donnent t entre 0 et 1 et aussi s entre 0 et 1. Trois cas sont possibles

- pas de solutions (discriminant négatif ou pas de t entre 0 et 1 ou pas de s entre 0 et 1) alors le point $R_{x,y}$ est hors image.
- une solution s, t ; le point E_{st} est l'antécédent, et sa couleur est celle cherchée pour R .

- deux solutions s, t ; il y a deux points E_{st} , et on n'en affiche qu'un seul, qu'il faut choisir. c'est là où le polygone se replie sur lui-même, là où la feuille de papier s'enroule sur elle-même.

Pour choisir entre les deux points E_{st} , quand le polygone est non convexe :

- le polygone a deux diagonales MP et NQ , autour desquelles il peut se replier. Les points avec deux antécédents sont à l'intérieur de deux triangles qui se superposent en partie.
- Il y a quatre triangles formés avec trois des sommets, et qui peuvent se superposer :
 - MNQ et NPQ qui ont en commun la diagonale NQ , d'équation $s + t = 1$.
 - MNP et MPQ qui ont en commun la diagonale MP , d'équation $s = t$.

Cette diagonale de décision est aussi la courbe séparatrice entre l'image et le fond, c'est un arc de parabole, comme le montrent les équations en X, Y correspondant à $s = t$ ou $s = 1 - t$. L'équation en X, Y de la parabole s'obtient aussi en écrivant que les deux points E_{st} coïncident, c'est-à-dire que le discriminant de l'équation du second degré en t est nul :

$$(X_1 Y_3 - X_3 Y_1 - UY + VX)^2 - 4(UY_3 - VX_3)(XY_1 - YX_1) = 0$$

Une réflexion un peu plus géométrique sur cette parabole fait ressortir que les segments variables lui sont tous tangents ; la description donnée fait correspondre un segment à chaque valeur de t , et un point sur ce segment à chaque valeur de s ; cependant, les équations font jouer à s et t des rôles parfaitement symétriques, et on pourrait considérer d'autres segments, chacun définis pour une valeur de s , et sur lesquels t désignerait un point ; ces nouveaux segments sont aussi bien tangents à la même parabole que les précédents ; comme les côtés du quadrilatère $MNPQ$ sont des segments particuliers, ils sont aussi tangents à la parabole, qui est donc l'unique parabole tangente aux quatre côtés du quadrilatère donné (comme

toute parabole, elle est aussi tangente à la droite de l'infini, ce qui donne cinq conditions la définissant complètement en tant que conique).

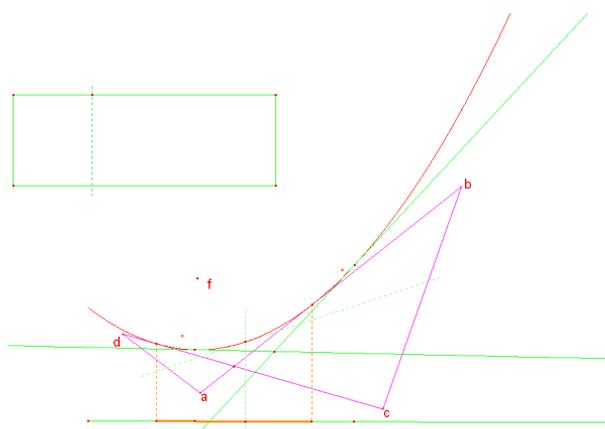


FIG. 4.11 – La parabole tangente aux côtés du quadrilatère

L'algorithme d'affichage comporte des opérations plus coûteuses à répéter pour chaque pixel que l'algorithme précédent ; une recherche d'optimisation a été menée ; ne pouvant réduire la quantité de calculs à mener pour chaque pixel affichable, l'optimisation a consisté à réduire le nombre de pixels parcourus, en particulier à éviter les calculs sur les régions dont on pouvait a priori prévoir qu'elles ne contribueraient pas à l'affichage de l'image ; le calcul évite donc l'extérieur du quadrilatère, à l'exception de la zone de débordement de l'image, entre le quadrilatère et la parabole ; il a donc fallu étudier la position prévisible de la parabole, des figures dynamique dans Cabri ont été construites et utilisées à cette fin. Finalement, l'algorithme optimisé explore l'intérieur du quadrilatère s'il est convexe, sinon d'un hexagone convexe qui contient la quadrilatère et la zone entre quadrilatère et parabole.

la figure 4.11 montre un lien avec la géométrie computationnelle ; la même figure est interprétée par [93],[106],[42] comme une correspondance

entre hyperplans (figurés par leur trace, ici les tangentes à la parabole) et disques (figurés par des intervalles sur la directrice de la parabole); cette correspondance permet de transformer un algorithme de construction d'un arrangement d'hyperplans en un algorithme de construction d'un diagramme de Voronoi ; notre usage de cette figure correspond à une autre interprétation : un parcours du produit des disques (figuré par le rectangle) fournit un balayage du polytope limité par les hyperplans (figuré par le quadrilatère) par une famille de segments de droites à 1 paramètre ; les extrémités des segments sont réparties de manière proportionnelle, une propriété invariante par projection parallèle.

4.7 Autres géométries, et réversibilité des constructions

Simuler des géométries non-euclidiennes en géométrie dynamique, et disposer d'un micro-monde de constructions non-euclidiennes est possible depuis plusieurs années [Laborde, Univ d'été 96], [Kor] ; l'intérêt pédagogique d'un tel environnement est clairement démontré, par exemple en formation des maîtres [97]. Il est aussi possible de simuler efficacement d'autres géométries : en particulier la géométrie des droites sur les polyèdres peut être utilisée comme une remarquable introduction aux géométries riemanniennes ¹ ; l'une des bases de la définition des droites sur les polyèdres, donc de la distance et de toute la géométrie, est le dépliement du polyèdre suivant plusieurs patrons ; une ligne s'interprète comme une droite du polyèdre s'il existe un patron du polyèdre suivant lequel la ligne est une droite au sens usuel de la géométrie plane ; une telle définition, convenablement posée, peut être efficacement simulée en géométrie dynamique, permettant expérimentation, mesure et vérification des propriétés, par exemple des somme des angles des "triangles" tracés sur un polyèdre ;

¹travail commun avec S. Gallot, cf Annexe

un lien peut être fait avec le défaut d'angle de ceux des sommets du polyèdre qui sont à l'intérieur du triangle orienté ; l'interprétation de ce défaut d'angle comme une courbure permet de qualifier le type de géométrie, et conduit à la formule de Gauss-Bonnet, qui relie courbure totale et caractéristique d'Euler, c'est-à-dire type topologique du polyèdre :

$$\text{somme des courbures en chaque point} = 2\pi \times \text{Caractéristique d'Euler}$$

La caractéristique d'Euler est le nombre de faces diminué du nombre d'arêtes et augmenté du nombre de sommets d'une triangulation.

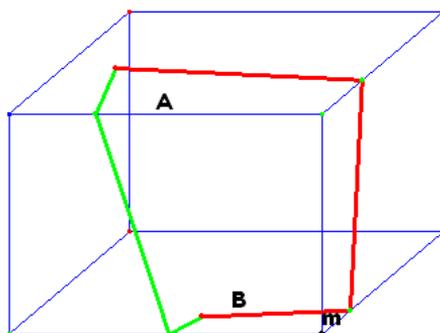


FIG. 4.12 – Les points A et B sont joints par deux lignes tracées sur le polyèdre

Le sujet ainsi abordé est d'une ampleur considérable, méritant de très nombreuses manipulations et expérimentations ; cependant la réalisation avec Cabri II d'un micro-monde réellement satisfaisant dans ce domaine continue à poser des problèmes ; la géométrie plane est bien adaptée aux problèmes de patrons, mais la gestion des simulations de figures tridimensionnelles de polyèdres reste difficile à maîtriser, et les résultats ne sont pas toujours satisfaisants, tant s'en faut, en raison de la difficulté de la représentation d'objets spatiaux ; surtout il reste difficile de concevoir des outils de construction adaptés au type de problèmes qui se posent ; notamment le

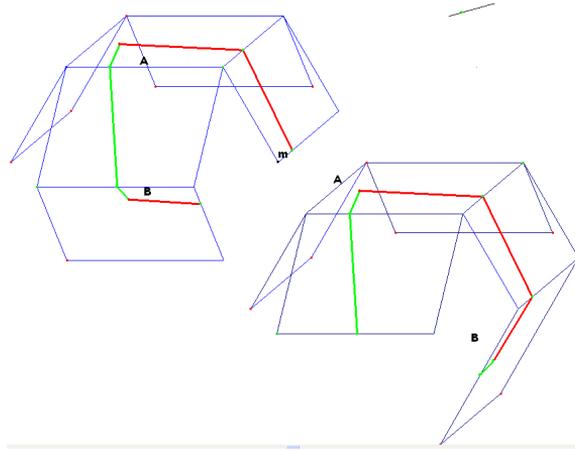


FIG. 4.13 – Le polyèdre est déplié en deux patrons différents

tracé des segments de droite sur polyèdre gagnerait à être automatisé, en particulier aux changements de faces, mais la question est délicate ; comment définir en général les propriétés des objets sur une face de polyèdre, comment implémenter la contrainte de rester dans une face, comment faire face à tous les cas qui se présentent lors d'un changement de face, pour obtenir un procédé automatisable en macro-construction ?

Une réponse partielle à cette question est peut-être en voie d'obtention, dans un contexte voisin ; certaines de nos constructions relatives à la projection stéréographique, du plan vers la sphère et de la sphère vers le plan permettent de manipuler des "points sur sphère". Il est facile de construire le projeté d'un point du plan vers la sphère, il l'est moins de se donner un point sur la sphère et d'en construire le projeté sur le plan ; c'est néanmoins possible [63], même si la construction n'est pas immédiate, et ceci donne du sens au questionnement précédent relatif aux points sur face de polyèdre.

le point sur sphère est un point libre, à partir duquel est réalisée la construction de son projeté sur le plan ; le projeté n'existe plus lorsque le

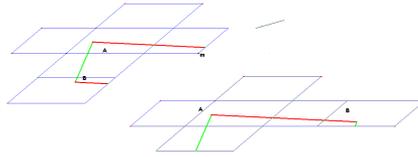


FIG. 4.14 – Les lignes joignant A et B satisfont à la définition des droites du polyèdre.

La géométrie d'un cube n'est pas euclidienne : il y a plus d'une droite joignant deux points.

"point sur sphère" n'est pas dans le disque qui figure la sphère ; en réalité, la représentation de la sphère est ambiguë : un point sur sphère représente deux points de l'espace sur la sphère, l'un sur la face avant, l'autre sur la face arrière, mais les deux faces sont indistinguables en projection ; le procédé de construction dynamique utilisé permet d'obtenir les deux projetés sur le plan correspondant aux deux points sur sphère ; toutefois, on peut décider de n'en construire qu'un, par exemple celui correspondant au point sur la face visible de la sphère, en convenant que la face arrière est cachée. la construction utilise les propriétés de la représentation axonométrique choisie pour représenter la sphère, et la résolution d'un problème de géométrie plane auquel il est possible de ramener la construction. Il est nécessaire de savoir construire une ellipse concentrique à un cercle, passant par deux points donnés et tangente au cercle², problème qui admet deux solutions distinguables dynamiquement. Le "point sur sphère" est manipulable, ou peut être utilisé pour générer d'autres constructions. Par exemple, il est possible de tracer une "droite" passant par deux points sur sphère ; on peut réaliser une construction directe, mais il est facile de concevoir qu'on peut utiliser les projetés sur le plan des points sur sphère, tracer la droite qui les joint, et projeter cette droite sur la sphère, cette dernière projection étant dans le sens facile de la construction. Le comportement dyna-

²solutions dues à M. Acosta et C. Payan

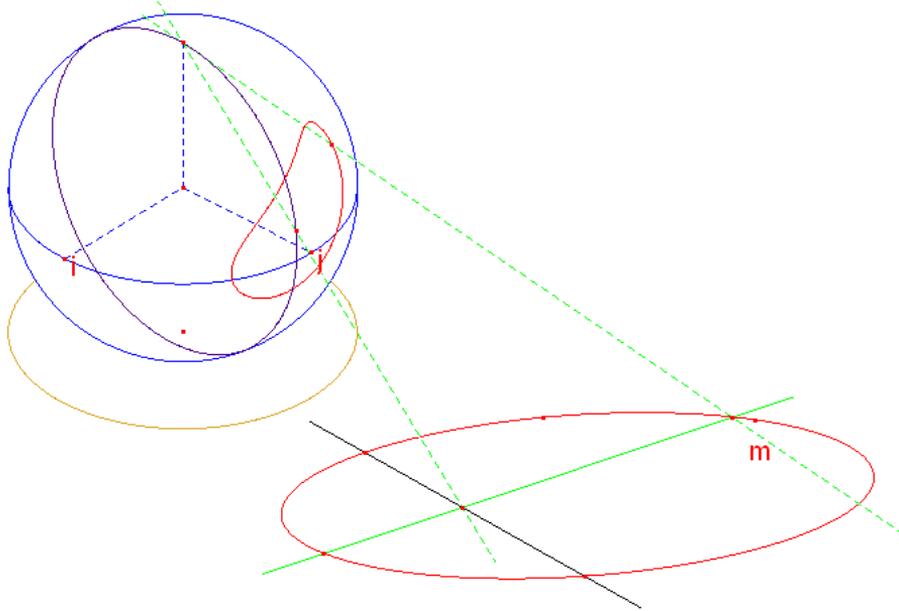


FIG. 4.15 – Une conique et sa représentation paramétrique rationnelle en projection stéréographique

mique des points sur objet est dépendant du type de géométrie représenté ; l'exemple du point sur segment hyperbolique, entre autres, suggère une extension possible de la géométrie dynamique : rendre "dynamiquement bijectives" les transformations.

L'idée est issue d'une demande de J.M. Laborde d'étudier la possibilité de réversibilité des constructions ; l'exemple paradigmatique de réversibilité est le comportement du milieu d'un segment ; le milieu est fonction des extrêmités du segment ; le mouvement du milieu est donc fonction du mouvement des extrêmités ; normalement, un point construit en fonction d'autres éléments est uniquement déterminé par ces éléments ; en particulier, son mouvement est totalement fonction de ces éléments, aucun autre

mouvement n'est possible que par un mouvement des éléments dont il est fonction : la fonction est à sens unique ; la suggestion de J.M Laborde, effectivement implémentée dans une des premières versions de Cabri II, est de réaliser la réversibilité au sens où l'utilisateur peut manipuler le milieu, les extrémités s'adaptant alors, de façon que la propriété de milieu reste satisfaite ; la possibilité d'être manipulé n'est plus alors entièrement contrainte par la chronologie de la construction.

Le fait de ne plus faire associer complètement la possibilité d'être manipulé à l'historique de la construction, signifie que la logique du comportement dynamique ne serait plus déterminé par la logique de la construction ; en réalité, il existe déjà une forme de réversibilité dans Cabri : par exemple un triangle est fonction de ses sommets, mais on peut déplacer l'objet triangle globalement, et bien sûr, les sommets suivent. Toutefois, l'actuelle réversibilité est très peu sensible, et l'introduction d'une véritable réversibilité serait sans aucun doute un changement considérable, dont les conséquences didactiques méritent certainement d'être pesées avec soin. En effet, la traduction de la dépendance de construction par l'impossibilité de mouvement est très contraignante, et de ce fait peut être avantageusement utilisée, tant pour étudier les dépendances de type hypothèse-conclusion que les dépendances fonctionnelles. A l'inverse, une forme de réversibilité pourrait apporter une grande souplesse de réalisation, autorisant beaucoup plus facilement la recherche de problèmes.

4.8 Des transformations bijectives

Une bien plus grande facilité de construction, et une puissance de résolution plus importante seraient accessibles, si les transformations du plan, qui sont mathématiquement bijectives, étaient dynamiquement bijectives, au sens où elles seraient fonctionnelles dans le sens réciproque aussi bien que dans le sens direct. Le point image pourrait être manipulé autant que le point source, dès lors que le point source serait libre.

Une deuxième possibilité serait alors d'autoriser la même facilité pour des transformations construites ; on atteindrait alors la possibilité de réaliser plusieurs modèles, de construire dans le modèle le plus adapté, et de manipuler dans le modèle le plus facile à interpréter visuellement ; ceci permettrait vraisemblablement aussi de répondre à la question soulevée par Y Martin à propos de géométrie elliptique, et d'objets géométriques non connexes ; en effet, il suffirait de construire les objets dans un modèle où ils sont connexes.

Pour ce qui est de l'interface dans Cabri, on pourrait convenir que toute macro dont l'icône est rangée dans la colonne des transformations possède la propriété de bijection, ou d'isomorphisme ; la correspondance bijective échangerait le premier paramètre et le premier résultat ; ceci soulève quelques problèmes de programmation intéressants, qui justifient que le problème soit approfondi.

Ainsi, il serait nécessaire que les macros inversibles soient effectivement inversées, et que les non-inversibles soient refusées à l'insertion dans la colonne des inversibles. Les constructions géométriques sont représentées de manière interne dans le logiciel par des graphes orientés acycliques ; orientés, puisque la construction part des données pour aller aux construits ; acycliques, car la construction est finie ; or la présence de cycles rend le parcours du graphe, qui réalise la construction, potentiellement illimité ; enfin, la condition pour le graphe orienté d'être acyclique suffit à assurer l'unicité du chemin et donc l'unicité de l'antécédent ; la constructibilité n'est toutefois pas assurée ; par exemple, construisons l'orthocentre d'un triangle ; la correspondance

$$\text{premier sommet} \mapsto \text{orthocentre}$$

les autres sommets étant fixés, est alors bijective ; et il est facile de reconstruire le premier sommet à partir de deux sommets et de l'orthocentre ; cependant, si à la place de l'orthocentre était donné le centre du cercle inscrit, la question deviendrait sensiblement plus délicate, et certainement pas

à réponse unique ; il faudrait prévoir que le procédé de résolution machine, sans doute du type point fixe, soit limité a priori à une région du plan à estimer.

4.9 Conclusion

Rappelons que Cabri est, à notre connaissance, le seul logiciel qui admet les points sur conique ; il est clair que ceci est dû au fait que Cabri est l'un des seuls logiciels de géométrie dynamique qui ait bénéficié d'une conception aussi réfléchie, tant du point de vue des questions mathématiques qui se posent que des points de vue informatiques concernés.

La question des points sur une face de polyèdre, ou des segments de droite joignant des points sur des faces de polyèdre distinctes, illustre la difficulté d'étendre ces notions de points sur objet, tout en soulignant la nécessité de construire ces concepts si l'on souhaite continuer à développer de véritables micro-mondes d'expérimentation et d'apprentissage, parce que l'on ne veut pas se contenter de regarder se dérouler des films ou des images animées par d'autres, parce qu'on ne croit pas à l'apprentissage par la contemplation.

Chapitre 5

Conclusion

Tout d'abord est présenté l'état de l'art en ce qui concerne les fondements mathématiques de la géométrie dynamique ; ces fondements reposent sur les travaux qui ont mené à la réalisation des différents logiciels Cabri, sous la direction de Jean-Marie Laborde ; plusieurs ouvrages ont été publiés sur le sujet par Roger Cuppens, tant du point de vue des spécifications, qu'une approche constructive des principaux problèmes sous-jacents ; la question a été renouvelée par le travail de J. Richter-Gebert et U. Kortenkamp , tant par la réalisation de Cinderella que par les avancées théoriques ; enfin T. Gawlick a pu reposer les problèmes, et synthétiser les apports, y compris les siens. Nous discutons notamment le concept de figure dynamique, central pour la géométrie dynamique, en regard de la solution négative de la conjecture d'isotopie. Un autre lien avec des recherches contemporaines nous semble intéressant, le lien avec les "modules" des courbes, un thème initié par Riemann.

L'étude qui suit sur l'aire des polygones est motivée par le besoin de justifier l'introduction dans Cabri2 Plus d'un concept d'aire algébrique pour les polygones, en plus du concept d'aire arithmétique présent dans Cabri2. Une réflexion sur ce concept d'aire et ses relations avec les axiomes de la géométrie ainsi que son insertion dans les mathématiques en géné-

ral paraissait nécessaire. Pour un exemple d'application, c'est ce concept d'aire algébrique qui fournit une structure hyperbolique à l'espace des formes de polygones à angles fixés, déjà mentionné [118, 7] ; c'est en utilisant cette aire algébrique que l'on peut réaliser un paramétrage dynamique des formes de pentagones simples, au travers d'un des modèles classiques du plan hyperbolique.

L'étude du comportement dynamique des intersections est au coeur des fondements de la géométrie dynamique ; ce domaine est certainement trop vaste et trop difficile pour être clos en une seule thèse ; cependant, nous aurions aimé avancer un peu plus , en particulier sur la question des intersections de coniques. Nous avons voulu démontrer que l'essentiel des difficultés apparaissait déjà dans le cas des intersections avec les cercles ; nous avons donc abordé la question sous plusieurs angles, en donnant une structure adéquate à l'espace des paires de cercles, puis en étudiant le comportement dynamique de l'axe radical orienté d'un couple de cercles, c'est-à-dire d'un objet géométrique capable d'emporter l'information nécessaire pour que la gestion des points d'intersection de deux cercles soit déterministe. Nous donnons un modèle géométrique simple qui permet d'étudier en toute généralité les éventuelles singularités de l'application qui à une paire de cercles associe leur axe radical orienté. L'étape suivante est d'étendre l'un de ces points de vue au cas plus compliqué des coniques. Enfin se pose la question de définir un cadre pour exprimer les spécifications du comportement dynamique des intersections de lieux géométriques. Ces deux dernières questions comportent plusieurs aspects encore ouverts.

Nous avons réalisé dans Cabri une simulation d'un nouveau type d'objet, les arcs de coniques [63] ; la simulation est une étape préalable à une implémentation ; cette dernière semble pouvoir apporter une interface plus sympathique pour les utilisateurs de Cabri qui ont besoin de points d'intersection de coniques.

La question du comportement dynamique des points sur objet n'avait pas fait l'objet, à notre connaissance, de publications ; nous avons donné un cadre mathématique simple pour unifier les propriétés des points sur

objet ; il s'agit d'interpréter le mouvement de l'objet support par une transformation du plan qui respecte la géométrie sous-jacente ; lorsque ceci est possible, c'est-à-dire lorsque la transformation de l'objet s'étend en une transformation du plan, ceci explique précisément le devenir des points sur objet ; cette étude suggère en particulier un comportement nouveau pour les points sur arc de cercle ; la question du comportement dynamique des points sur objet est directement liée au type de géométrie que l'on souhaite illustrer ; ceci est particulièrement sensible dans les travaux cités en Annexe (voir aussi [61, 62]), où sont illustrées des propriétés de géométries sur des polyèdres de l'espace.

5.1 Annexe

A cette étude est annexé un document support de conférence introduisant des propriétés des surfaces de l'espace et des géométries qui vivent sur elles, par l'étude de surfaces polyédrales ; cette étude passe par la manipulation de surfaces en papier et de figures Cabri2. De nombreuses notions peuvent ainsi être introduites d'une manière particulièrement séduisante, et en même temps rigoureuse ; les géométries polyédrales sont ici définies par leurs droites ; la définition de ces "droites" s'établit progressivement, d'abord par minimisation globale de la distance, jusqu'à l'obtention de la définition par la minimisation locale de la distance, définition qui apparaît nécessaire pour une surface particulière, "l'origami" ; ce dernier exemple illustre les propriétés des surfaces à courbure négative ; dans ce texte, la problématique de la courbure n'est traitée qu'implicitement. Certaines propriétés non euclidiennes des géométries sur les polyèdres sont mises en évidence, éclairant par contraste les propriétés euclidiennes du plan.

Cette étude, qui est le résultat d'un travail commun avec S. Gallot [49], a inspiré d'autres présentations [61, 62].

Un des problèmes que pose cette étude est la réalisation des figures dynamiques ; en effet, la simulation des effets tridimensionnels nécessite en particulier une forme de gestion de points sur une face d'un polyèdre, ainsi que de segments de "droites" joignant deux points situés sur des faces distinctes d'un polyèdre ; la réalisation pratique de ces simulations montre que les spécifications de ces "points sur face" et de ces "droites sur polyèdres" posent des problèmes ; l'apparition récente de Cabri3D donne une certaine urgence à la réflexion sur ces questions.

Bibliographie

- [1] *Nombres (2-3)-constructibles*, J.M. Arnaudies, P. Delezoide, *Advances in Mathematics*, 158, p. 169-252, 2001.
- [2] *The Design and Analysis of Computer Algorithms*, Alfred V. Aho, John E. Hopcroft, Jeffrey D. Ullman, Addison-Wesley, Bell Telephone Laboratories, 1974.
- [3] *Méthodes matricielles, Introduction à la complexité algébrique*, Jounaïdi Abdeljaoued, Henri Lombardi, Springer, SMAI, 2004.
- [4] *L'axiomatique de Hilbert et l'enseignement de la géométrie au Collège et au Lycée*, Gilbert Arsac, Irem de Lyon, Aleas Editeur, 15 Quai Lassagne, Lyon, 1998.
- [5] *Dynamic Geometry and Declarative Geometric Programming*, Richard Allen and Laurent Trilling, in : *Geometry Turned on*, King, Schattschneider eds., p. 193-197, MAA Publications, 1997.
- [6] *Compilateurs, Principes, techniques et outils*, Alfred Aho, Ravi Sethi, Jeffrey Ullman, Addison-Wesley (Bell Laboratories) 1986, traduction Inter-Editions 1991, Dunod 2000.
- [7] *Polygones du plan et polyèdres hyperboliques*, Christophe Bavard et Etienne Ghys, *Geometriae Dedicatae*, 43, 207-224, Kluwer Academic Publishers, Netherlands, 1992.
- [8] *Cabri-géomètre*, Yves Baulac, Franck Bellemain, Jean-Marie Laborde, Nathan Logiciels, Paris, 1988.

- [9] *Conception, réalisation et expérimentation d'un logiciel d'aide à l'enseignement de la géométrie : Cabri-géomètre*, Franck Bellemain, thèse, Imag, Grenoble, 1992.
- [10] *géométrie*, Marcel Berger, Tomes 1-5, Cedic-Nathan, 1977, 2nd ed. 1979.
- [11] *Manifolds all of whose Geodesics are Closed*, Arthur L. Besse, Springer, 1978.
- [12] *Éléments de géométrie mécanique*, P. Balbiani, V. Dugat, L. Farinas del Cerro, A. Lopez, Hermès, 1994.
- [13] *Constructions using conics*, Eric Bainville, Bernard Geneves, The Mathematical Intelligencer, Summer 2000, p. 60-72.
- [14] *Pourquoi la règle et le compas ?*, Rudolph Bkouche, Joëlle Delattre, In : Histoire de Problèmes, Histoire des Mathématiques, Irem, Ellipses, 1993.
- [15] *Géométrie algébrique réelle*, J. Bochnak, M. Coste, M.-F. Roy, Springer, 1987.
- [16] *Redefining Geometrical Exactness, Descartes' Transformation of the Early Modern Concept of Construction*, Henk J.M. Bos, Springer, 2001.
- [17] *Construction automatique de figures géométriques et Programmation Logique avec Contraintes*, Denis Bouhineau, thèse, Imag, Grenoble, 1997.
- [18] *Mathematical developments arising from HILBERT PROBLEMS*, ed. Felix Browder, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, Vol XXVIII, part 1-2, AMS, 1976.
- [19] *Algorithmic Geometry*, J.D. Boissonnat, M. Yvinec, Edisciences 1995, Cambridge University Press 1998.
- [20] *Géométrie*, Michel Carral, Ellipses, 1995.

- [21] *De D'Alembert à Cabri-géomètre : le constructeur universel d'équations*, Roger Cuppens et Michel Carral, In : Actes de l'Université d'été "Apprentissage et enseignement de la géométrie avec ordinateur : Utilisation du logiciel Cabri-géomètre en classe", Grenoble, 1993.
- [22] *Introduction to Knot Theory*, Richard H. Crowell, Ralph H. Fox, Springer, 1963.
- [23] *Conception et mise en oeuvre d'un système déclaratif de géométrie dynamique*, Stéphane Channac, thèse, Imag, Grenoble, 1999.
- [24] *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*, Michel Chasles, 1837, Jacques Gabay, <http://gallica.bnf.fr>.
- [25] *Traité de Géométrie Supérieure*, Michel Chasles, 1852, 1880, <http://gallica.bnf.fr>.
- [26] *Ideals, Varieties and Algorithms*, David Cox, John Little, Donal O'Shea, Springer, 2nd ed., 1992, 1997.
- [27] *Introduction à l'algorithmique*, Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, Ronald R. Rivest, Clifford Stein, MIT Press 1990, 2001, Dunod 1994, 2002.
- [28] *Projective Geometry*, H.S.M. Coxeter, Springer, 2nd ed., 1963, 1974, 1987.
- [29] *Faites de la Géométrie en jouant avec Cabri-Géomètre*, Roger Cuppens, tome 1, n°104, APMEP, Paris, 1996.
- [30] *Faites de la Géométrie en jouant avec Cabri-Géomètre*, Roger Cuppens, tome 2, n° 105, APMEP, Paris, 1996.
- [31] *Faites de la Géométrie supérieure en jouant avec Cabri-Géomètre II*, Roger Cuppens, tome 1, n°124, APMEP, Paris, 1999.
- [32] *Faites de la Géométrie supérieure en jouant avec Cabri-Géomètre II*, Roger Cuppens, tome 2, n° 125, APMEP, Paris, 1999.

- [33] *Avec Cabri-Géomètre II, Jouez... et Faites de la Géométrie !*, Roger Cuppens, tome 1, n°136, APMEP, Paris, 2002.
- [34] *Avec Cabri-Géomètre II, Jouez... et Faites de la Géométrie !*, Roger Cuppens, tome 2, n°137, APMEP, Paris, 2003.
- [35] *Découvrir les géométries non Euclidiennes en jouant avec Cabri-Géomètre II : la géométrie hyperbolique*, Roger Cuppens, tome 1, n°160, APMEP, Paris, 2004.
- [36] *Découvrir les géométries non Euclidiennes en jouant avec Cabri-Géomètre II : la géométrie elliptique*, Roger Cuppens, tome 2, à paraître, APMEP, Paris.
- [37] *Défense et illustration de la géométrie de Poncelet*, Roger Cuppens, in : Bulletin de l'APMEP, n° 453, p.582-596, Paris, septembre-octobre 2004.
- [38] *La Géométrie*, René Descartes, 1637; ed. J. Gabay, 1991; <http://gallica.bnf.fr/>
- [39] *Abrégé d'histoire des mathématiques 1700-1900*, ed. Jean Dieudonné, I et II, Hermann, 1978.
- [40] *cours de géométrie algébrique*, Jean Dieudonné, 1 et 2, PUF, 1974.
- [41] *Qualité des calculs sur ordinateur, vers des arithmétiques plus fiables ?*, Marc Daumas et Jean-Michel Muller, Masson, 1997.
- [42] *Algorithms in Combinatorial Geometry*, Herbert Edelsbrunner, Springer, 1987.
- [43] *The Projective Geometry of the Gale Transform*, David Eisenbud and Sorin Popescu, preprint, 1997.
- [44] *Curves and Surfaces for CAGD, A Practical Guide*, Gerald Farin, Morgan Kaufmann, fifth edition Academic Press 2002.
- [45] *Computer Graphics, Principles and Practice*, Foley, Van Dam, Feiner, Hughes, 2nd ed. in C, Addison-Wesley, 1990, 1996.

- [46] *Configurations of seven points in RP^3* , S.M. Finashin, In : Topology and Geometry, Rohlin Seminar, O.Y. Viro, Lecture Notes in Mathematics 1346, p.501-526, Springer, 1986.
- [47] *A Topological Picturebook*, George K. Francis, Springer, 1987.
- [48] *Algebraic Topology, a first course*, William Fulton, Springer, 1995.
- [49] *Géométries*, Sylvestre Gallot, In : Encyclopédie philosophique universelle, P.U.F., Paris, 1988.
- [50] *Solving Problems in Scientific Computing Using Maple and Matlab*, Walter Gander, Jiri Hrebicek, Springer, 1993, 1995.
- [51] *Recherches arithmétiques*, C.F. Gauss, traduction en français de "Disquisitiones arithmeticae" par A.-C.-M. Pouillet-Delisle, 1807. Disponible sur <http://gallica.bnf.fr>
- [52] *Zur mathematischen Modellierung des Dynamischen Zeichenblatt*, Thomas Gawlick, in : Zeichnung, Figur, Zugfigur, Mathematische und Didaktische Aspekte Dynamischer Geometrie Software, H-J Elschenbroich, Th. Gawlick, H-W Henn, Hildesheim, Franzbecker, 2001.
- [53] *Exploration reell algebraischer Kurven mit DGS und CAS*, Thomas Gawlick, in : Zeichnung, Figur, Zugfigur, Mathematische und Didaktische Aspekte Dynamischer Geometrie Software, H-J Elschenbroich, Th. Gawlick, H-W Henn, Hildesheim, Franzbecker, 2001.
- [54] *Zum Figurbegriff in der Dynamischen Geometrie*, Thomas Gawlick, 2001.
- [55] *Dynamische Linealkonstruktionen*, Thomas Gawlick, occasionnal paper 184, Universität Bielefeld, Institut für Didaktik der Mathematik, 2003.
- [56] *Über die Mächtigkeit dynamischer Konstruktionen mit verschiedenen Werkzeugen*, Thomas Gawlick, occasionnal paper 185, Universität Bielefeld, Institut für Didaktik der Mathematik, 2003.

- [57] *Towards a Theory of Visualization by Dynamic Geometry Software, Paradigms, Phenomena, Principles*, Thomas Gawlick, ICME 10, 2004.
- [58] *Konstruktion und Kontinuität in der Dynamische Geometrie*, Thomas Gawlick, à paraître.
- [59] *Poncelet vs Klein - two mathematical approaches to solve the continuity problem of Dynamic Geometry*, Thomas Gawlick, Séminaire "Cercle des géomètres disparus", Grenoble, 20-12-2004.
- [60] *Compilateurs*, Dick Grune, Henri E. Bal, Criel J.H. Jacobs, Koen G. Langendoen, John Wiley and Sons, 2000, Dunod, 2002.
- [61] *Polyeder mit Cabri : eine Einführung in nicht Euklidische Geometrien*, Bernard Genevès, In : H.-J. Elschenbroich, TH. Gawlick, H.-H. Henn *Zeichnung-Figur-Zugfigur*, Mathematische und didaktische Aspekte Dynamischer Geometrie Software (pp.77-82) Hildesheim, Berlin : Verlag Franzbecker, 2001.
- [62] *Cabri et la géométrie sur les polyèdres*, Bernard Genevès, conférence plénière au Congrès international CabriWorld 2, Montréal, 2001.
- [63] *A propos de la représentation de la sphère*, Bernard Genevès, Communication à CabriWorld2004, Rome, 8-12 sep 2004.
- [64] *Riemannian Geometry*, Sylvestre Gallot, Dominique Hulin, Jacques Lafontaine, Springer, 2nd ed., 1993.
- [65] *Using dynamic geometry software to simulate physical motion*, Maria Jose Gonzales-Lopez, International Journal of Computers for Mathematical Learning, vol. 6(2), p. 127-142, 2001.
- [66] *Handbook of Discrete and Computational Geometry*, ed. J.E. Goodman, J. O'Rourke, CRC Press, 1997.
- [67] *Linear Differential Equations and Group Theory from Riemann to Poincaré*, Jeremy J. Gray, Birkhäuser, 2nd ed., 1986, 2000.

- [68] *Lectures on Algebraic Topology*, Marvin J. Greenberg, Benjamin, 1967.
- [69] *Convex Polytopes*, Branko Grünbaum, John Wiley and Sons, 1967.
- [70] *Automated Deduction in Geometry*, ed. X-S. Gao, D. Wang, L. Yang, Proceedings of the Second International Workshop, ADG'98, Beijing, China, August 1998, Lecture Notes In Artificial Intelligence 1669, Springer.
- [71] *Algebraic Topology*, Allen Hatcher, 2001 : <http://www.math.cornell.edu/hatcher>
- [72] *Introduction to Maple*, André Heck, Springer, 1993.
- [73] *Grundlagen der Geometrie*, David Hilbert, 1899, trad. Laugel 1900 : <http://gallica.bnf.fr>
- [74] *Simulation of drawing machines on Cabri-II and its dual algebraic symbolisation : Descartes' machine and algebraic inequality*, Hoyos Veronica, Capponi Bernard, Geneves Bernard, In Proceedings of the First Conference of the European Society for Research in Mathematics Education, Vol. II, Forschung Institut für Mathematikdidaktik, Osnabrück, 1999.
- [75] *Anschauliche Geometrie*, David Hilbert, Stephan Cohn-Vossen, Springer, 1932 (reed. 1996).
- [76] *Computer aided Geometric Design*, Josef Hoschek, Dieter Lasser, Teubner 1989, A.K. Peters 1993.
- [77] *Solid modeling*, Christoph M. Hoffmann, in : Handbook of Discrete and Computational Geometry, ed. J. E. Goodman, J. O'Rourke, CRC Press, p.863-880, 1997.
- [78] *The Geometer's Sketchpad*, Nick Jackiw, Key Curriculum Press, Berkeley, 1990-95.
- [79] *Planar Linkages and Algebraic Sets*, Henry C. King, disponible à : arXiv :math.AG/9807023 4 juil. 1998.

- [80] *Semiconfiguration Spaces of Planar Linkages*, Henry C. King, disponible à : arXiv :math.GT/9810130 20 oct. 1998.
- [81] *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert*, Felix Klein, Vol I und II, 1926 und 1927, reprinted by Chelsea, New York, 1967, AMS.
- [82] *On the moduli space of polygons in the euclidean plane*, Michael Kapovich and John Millson, Journal of Diff. Geom. 42, N 1, p. 133-164, 1995.
- [83] *Moduli Spaces of Linkages and Arrangements*, Michael Kapovich and John Millson, preprint, 1998. In : *Advances in Geometry*, ed. J.L. Brylinski, Progress in Mathematics, Birkhäuser.
- [84] *Universality theorems for configuration spaces of planar linkages*, Michael Kapovich and John Millson, preprint, 2001.
- [Kor] *Foundations of Dynamic Geometry*, Ulli Kortenkamp, Ph. Dissertation, Eth Zürich, 1999.
- [85] *Grundlagen dynamischer Geometrie*, Ulli Kortenkamp, Jürgen Richter-Gebert, In : H.-J. Elschenbroich, TH. Gawlick, H.-H. Henn *Zeichnung-Figur-Zugfigur*, Mathematische und didaktische Aspekte Dynamischer Geometrie Software, Hildesheim, Berlin : Verlag Franzbecker, 2001.
- [86] *Decision Complexity in Dynamic Geometry*, Ulli Kortenkamp, Jürgen Richter-Gebert, ADG 2000.
- [87] *Some issues raised by the development of implemented Dynamic Geometry as with Cabri-Géomètre*, Jean-Marie Laborde, plenary lecture at the 13th European Conference on Computational Geometry, March 15-17 1999.
- [88] *Spécification informelle pour un Cahier de Brouillon Informatique pour la géométrie*, Jean-Marie Laborde, In : *Environnements Interactifs d'Apprentissage avec Ordinateurs*, Eyrolles, Paris, 1995.

- [89] *Explorations en géométries non euclidiennes*, Jean-Marie Laborde, In : Actes de l'Université d'été "Cabri-géomètre, de l'ordinateur à la calculatrice, De nouveaux outils pour l'enseignement de la géométrie", Grenoble, 1996.
- [90] *Exploring Non-Euclidean Geometry in a Dynamic Geometry Environment like Cabri-geomètre* Jean-Marie Laborde, In : Geometry Turned On, King, Schatschneider Eds, MAA Publication 1997, Providence, MA, pp. 185-191.
- [91] *Interaction between instrumental and mathematical knowledge in Cabri-Geometry* Laborde Colette, Cabriworld 3, Roma, Italie, 9-12 septembre 2004
- [92] *Cabri Geometry II*, Jean-Marie Laborde, Franck Bellemain, SW, Texas Instruments, Dallas 1995-99.
- [93] *Handbook of Theoretical Computer Science, A, Algorithms and Complexity*, ed. J. van Leeuwen, Elsevier and The MIT Press, 1990.
- [94] *Handbook of Theoretical Computer Science, B, Formal models and semantics*, ed. J. van Leeuwen, Elsevier and The MIT Press, 1990.
- [95] *Géométrie ou art des constructions géométriques*, Emile Lemoins, Scientia, n°18, Ed. C. Naud, 1902. Disponible sur <http://gallica.bnf.fr>
- [96] *La réalisation des logiciels graphiques interactifs*, Michel Lucas, Travaux dirigés de l'école d'été d'informatique tenue au Bréau-sans-Nappe du 7 au 27 juillet 1979, Eyrolles, 1982.
- [97] *thèse*, Yves Martin, thèse, Grenoble, 2003.
- [98] *Eléments de géométrie, actions de groupes*, Rached Mneimné, Casini, Paris, 1997.
- [99] *The Universality Theorems on the Classification Problem of Configuration Varieties and Convex Polytopes Varieties*, N.E. Mnev, In : Topology and Geometry, Rohlin Seminar, O.Y. Viro, Lecture Notes in Mathematics 1346, p.527-543, Springer, 1986.

- [100] *Graphs on Surfaces*, Bojan Mohar and Carsten Thomassen, John Hopkins University Press, 2001.
- [101] *Elementary Functions, algorithms and implementation*, Jean-Michel Muller, Birkhäuser, 1997.
- [102] *Algebraic Geometry I - Complex Projective Varieties*, David Mumford, Springer, 1976.
- [103] *Investigation des équations différentielles linéaires à l'aide du logiciel Cabri Géomètre*, A. Ouassarrah, B. Genevès, In : Actes du Congrès international CabriWorld 2, Montréal, 2001.
- [104] *Traité des propriétés projectives des figures*, Jean-Victor Poncelet, 1822. éditions Jacques Gabay, Paris.
- [105] *Numerical Recipes in C, The Art of Scientific Computing Second Edition*, William H. Press, Saul A. Teukolsky, William T. Vetterling, Brian P. Flannery, Cambridge University Press, 1988, 1992, 93, 94, 95, 97, 2002.
- [106] *Computational Geometry : an Introduction*, Franco P. Preparata, Michael Ian Shamos, Springer, 1985.
- [107] *Realization spaces of 4-Polytopes are Universal*, Jürgen Richter-Gebert, Habilitationsschrift, Berlin, 1995.
- [108] *Realization spaces of Polytopes*, Jürgen Richter-Gebert, Berlin, 1996.
- [109] *Two interesting matroids*, J. Richter-Gebert, Documenta Mathematica, Journal der DMV, 1, p.137-148, 1996.
- [110] *The Universality Theorems for oriented Matroids and Polytopes*, J. Richter-Gebert, Berlin, 1999.
- [111] *Complexity issues in Dynamic Geometry*, J. Richter-Gebert, U. Kortenkamp, in : Proceedings of the Smafest 2000 in honor of Steven Smales' 70th birthday, <http://www.cinderella.de/papers/complexity.pdf>

- [112] *Cinderella*, Jürgen Richter-Gebert, Ulrich Kortenkamp, Henri Crapo, 1996-2003, <http://www.cinderella.de>
- [113] *Derive*, Albert Rich, Joan Rich, David Stoutemyer, Soft Warehouse, Nathan Logiciels, 1988-1990.
- [114] *Computational Algebraic Geometry*, Hal Schenck, London Mathematical Society, 2003.
- [115] *Basic Algebraic Geometry*, I.R. Shafarevich, 1972, Springer, trad. 1974, 1977.
- [116] *Corps et Modèles*, Hourya Sinaceur, Mathesis, Vrin, Paris, 1991.
- [117] *Isotopic but not rigidly isotopic plane systems of straight lines*, P. Suvorov, In : *Topology and Geometry, Rohlin Seminar*, O.Y. Viro, *Lecture Notes in Mathematics* 1346, p.545-555, Springer, 1986.
- [118] *Three-Dimensional Geometry and Topology*, William Thurston, Princeton University Press, 1997.
- [119] *Etude historique et épistémologique des coniques et leur implémentation informatique dans le logiciel Cabri-géomètre*, Jana Trgalova, thèse, Imag, Grenoble, 1992.
- [120] *Dynamic Projective Geometry*, Harald Winroth, Ph Dissertation, Stockholm, mars 1999.
- [121] *Mathematica, A System for Doing Mathematics by Computer*, Stephen Wolfram, Wolfram Research, Addison-Wesley, 1988-1991.
- [122] *Mechanical Theorem Proving in Geometries*, Wen-tsün Wu, Springer, 1984, english translation by Xiaofan Jin and Dongming Wang, Springer 1994.

Table des figures

1	Le pentagone régulier à cinq angles droits dans trois modèles du plan hyperbolique	6
1.1	La racine cubique de 2 est constructible avec conique, mais pas avec règle et compas	12
1.2	Une construction du polygone régulier à 97 côtés dans "Constructions with conics" [13]	14
1.3	Projection stéréographique de la courbe $y = x^3$	15
1.4	Un point de rebroussement pour $x^3 = z^2$	26
1.5	Détail de la construction	27
1.6	La droite 12-13 enveloppe une conique contenant les points 0, 1 et 2	27
1.7	La description de la figure est un programme de construction	28
2.1	Un polygone simple non convexe, et un polygone croisé . .	30
2.2	Le triangle équivaut par addition à un parallélogramme. . .	31
2.3	Le raisonnement d'Euclide prouve l'égalité par soustraction de deux parallélogrammes ayant base et hauteur communes, en utilisant dans ce cas de figure l'égalité de deux triangles auxiliaires, la soustraction d'un triangle commun et l'ajout d'un dernier triangle.	32
2.4	Une triangulation ne résiste pas au mouvement	34
2.5	Triangulations de polygones	35

2.6	Un polygone croisé, et le même avec le trou bouché, ont la même aire arithmétique	36
2.7	L'aire arithmétique d'un polygone voisin peut être très différente	36
2.8	Un polygone, et le polygone simple construit par l'algorithme de calcul de l'aire arithmétique	37
2.9	L'aire orientée	38
3.1	Le tore d'Archytas	42
3.2	Tore et cylindre	42
3.3	La courbe d'intersection et sa construction	43
3.4	Comportement déterministe de la bissectrice	46
3.5	Deux comportement des intersections.	48
3.6	Deux comportement des intersections : détail.	48
3.7	La projection stéréographique est une inversion.	56
3.8	Droite en projection stéréographique.	57
3.9	Cercle en projection stéréographique.	58
3.10	La correspondance cercle \mapsto point	59
4.1	Droite hyperbolique dans le modèle de Poincaré	80
4.2	Le concours des trois droites définies par des points sur conique doit être préservé lors des déformations de la conique	86
4.3	l'hexagone de Pascal	87
4.4	Projection stéréographique d'un arc de cercle	89
4.5	Arcs et cordes	90
4.6	Image dans un quadrilatère	92
4.7	Diagonales de quadrilatère	93
4.8	Rectangle d'affichage	94
4.9	Un drapeau pour Indianapolis	95
4.10	Quadrilatère croisé	96
4.11	La parabole tangente aux côtés du quadrilatère	98

4.12	Les points A et B sont joints par deux lignes tracées sur le polyèdre	100
4.13	Le polyèdre est déplié en deux patrons différents	101
4.14	Les lignes joignant A et B satisfont à la définition des droites du polyèdre. <i>La géométrie d'un cube n'est pas euclidienne : il y a plus d'une droite joignant deux points.</i>	102
4.15	Une conique et sa représentation paramétrique rationnelle en projection stéréographique	103

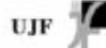


Surfaces en papier et Géométries non-Euclidiennes

Sylvestre GALLOT et Bernard GENEVES

IREM de Grenoble

Institut Fourier-Mathématiques pures
& Equipe IAM-Laboratoire Leibniz-Imag



La géométrie après Euclide

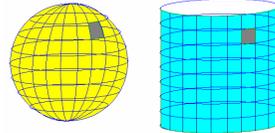
- La géométrie Euclidienne est une construction logique et déductive qui s'appuie sur des propriétés primitives, les axiomes.
- En modifiant un axiome qui posait question, Lobatchevski, Bólyai et Gauss ont pu reconstruire d'autres géométries logiquement cohérentes.
- La sphère, le cube, les polyèdres fournissent des exemples concrets, sur lesquels il est possible de définir une distance et de développer une géométrie qui n'obéit plus à certains axiomes d'Euclide.
- Dans ces géométries, que sont les droites ? Quels axiomes d'Euclide ne sont pas satisfaits ? Quel serait le point de vue du physicien ? Et, en fait, qu'est-ce qu'une géométrie ? Y a-t-il un point de vue unifiant ?

• Document annexé



Aplatir une sphère

- Toute tentative pour développer un morceau de sphère sur un plan entraîne soit des **déchirures** (faire l'expérience avec une écorce d'orange) soit des distorsions et des **déformations** qui modifient la longueur des courbes et les distances entre points de la surface.

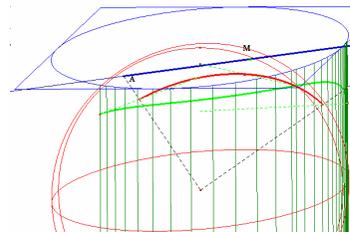
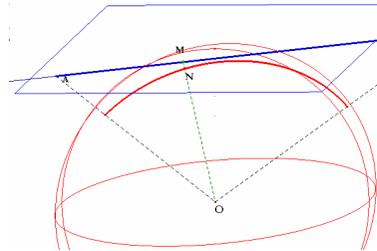


- Ces distorsions et déformations se rencontrent inévitablement en cartographie. A titre d'exemple, regardons ces déformations dans le système cartographique le plus connu : [la projection de Mercator](#).



Distorsions

Ces distorsions entraînent une déformation des « droites » de la sphère : après projection de Mercator sur le cylindre, puis déroulement de la carte cylindrique dans le plan, les droites de la sphère **ne sont pas des droites du plan**. La sphère n'est pas une surface développable. On ne peut pas la "repasser" sans faire des plis, des déchirures ou des distorsions.

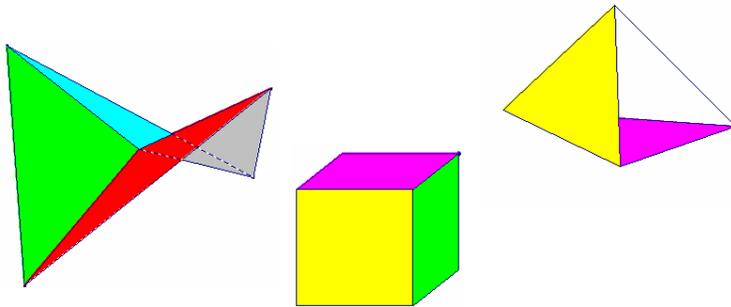


• Document annexé



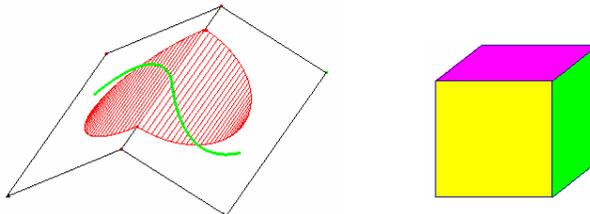
Qu'est-ce qu'un polyèdre ?

- C'est une surface obtenue par recollement (le long de leurs côtés) de polygones du plan.



Développer un polyèdre

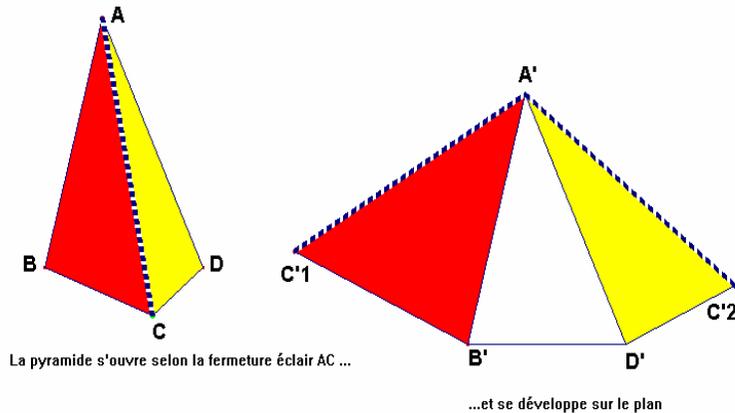
- Dans une surface polyédrale, tout point M admet-il un voisinage qui s'envoie sans distorsion (c'est à dire sans modification de la longueur des courbes ni des distances) sur un morceau du plan ? **Quand M est sur une face c'est clair. Est-ce encore vrai quand M est situé sur une arête?**



• Document annexé



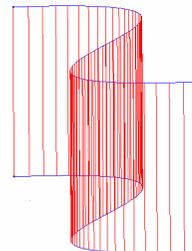
Développer d'autres polyèdres



Surfaces en papier

- Prenez un morceau de feuille de papier, mettez-la à plat sur la table et tracez une ou plusieurs courbes sur cette feuille. Déformez ensuite cette feuille pour obtenir un cylindre, une surface ondulée, une surface en forme de toit, etc... Ces déformations ont-elles modifié la longueur des courbes que vous aviez tracées? Imaginez un développement de la surface que vous venez d'obtenir.

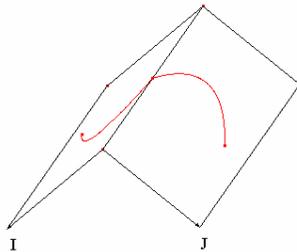
- On pourra s'exercer sur les surfaces en papier disponibles dans la corbeille.





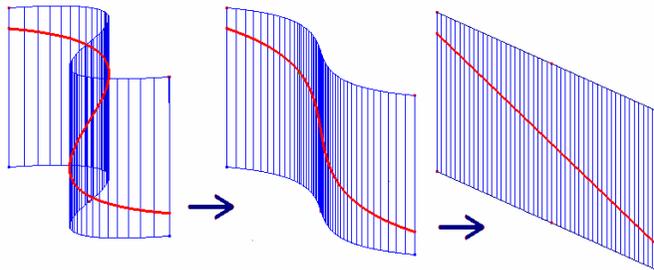
Surfaces polyédrales en papier

- Les surfaces polyédrales peuvent être réalisées avec du papier (en découpant, en collant et en pliant), c'est la raison pour laquelle le développement n'introduit aucune modification de la longueur des courbes que vous pouvez tracer sur la surface.



Droites sur une surface

Est droite toute courbe qui, au voisinage de chacun de ses points, admet un développement qui envoie la portion de courbe sur une portion de droite du plan.



Les courbes rouges sont des droites, comme on peut s'en apercevoir en développant la surface.

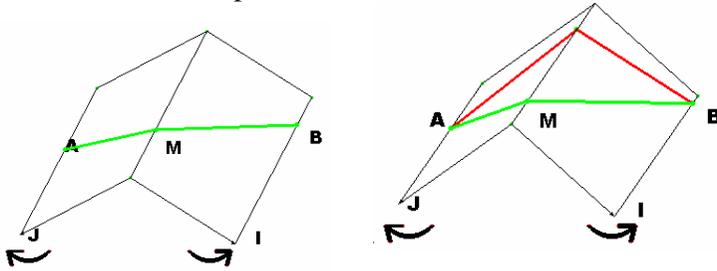
On pourra trouver une version papier de ces surfaces dans la corbeille, sur lesquelles on pourra s'exercer.

• Document annexé



Droites sur un polyèdre

- Est droite toute courbe qui, au voisinage de **chacun** de ses points, admet un développement qui envoie la portion de courbe sur une portion de droite du plan.

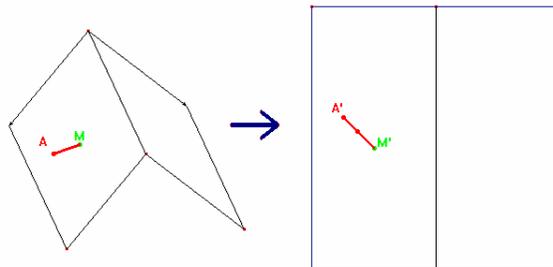


On pourra s'exercer sur les surfaces en papier disponibles dans la corbeille.



Prolonger une droite

- Pour prolonger un segment AM tracé sur la surface polyédrale de gauche, développer la portion de surface sur le plan de droite, prolonger le segment A'M' obtenu dans cette portion de plan, et revenir à la surface.



On pourra s'exercer sur les surfaces en papier disponibles dans la corbeille

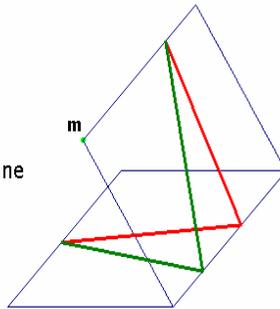
• Document annexé



Un Test...

Laquelle des deux lignes est une droite du polyèdre ?

La verte ou la rouge ?

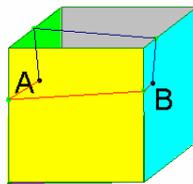


Développez pour le vérifier...



La Géométrie du parallélépipède n'est pas Euclidienne

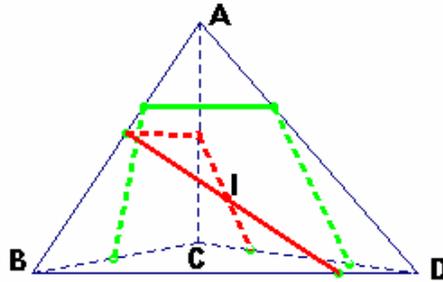
- En effet, il existe plusieurs droites qui passent par les deux points A et B



- La difficulté est de démontrer réellement que les deux courbes verte et rouge sont deux droites.
Voici une démonstration visuelle...

• Document annexé

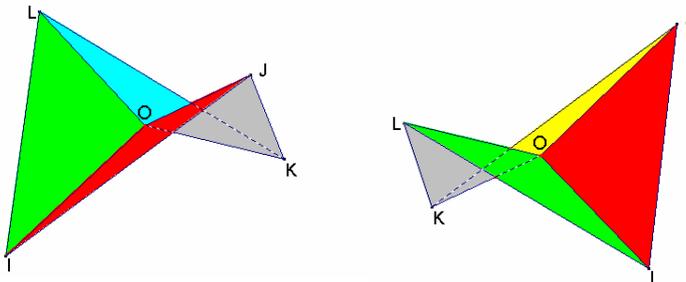
La Géométrie de la pyramide n'est pas Euclidienne



Par le point I ne passe aucune parallèle à la droite verte...

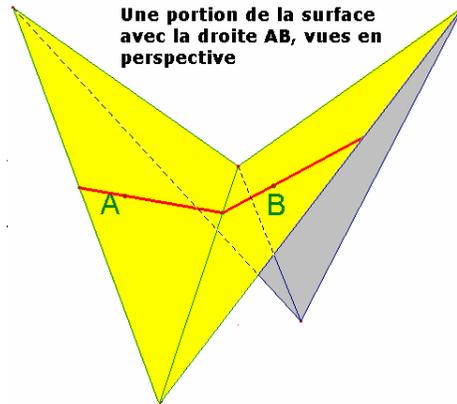
Une surface en papier : «L'origami»

L'origami est obtenu en recollant le long de leurs côtés quatre triangles isocèles IOL, IOJ, JOK, LOK, dont l'angle au sommet O est supérieur à 90° .



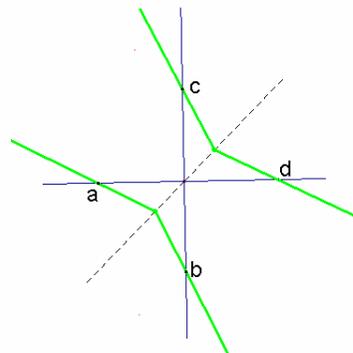
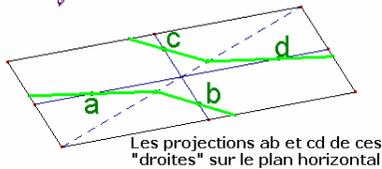
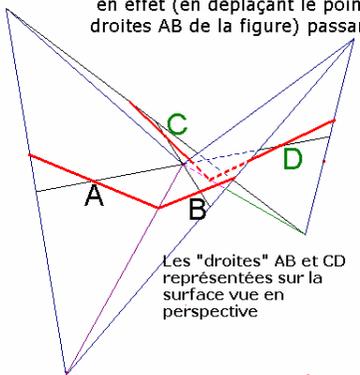


Droites de l'origami



La Géométrie de l'origami ne vérifie pas le célèbre axiome d'Euclide :

en effet (en déplaçant le point B) on obtient un grand nombre de droites (les droites AB de la figure) passant par A et qui ne rencontrent pas la droite CD.



On vérifiera qu'elles ne se rencontrent pas ; donc les droites AB et CD de la surface ne se rencontreraient pas (même quand on bouge B)





Au fait, qu'est-ce qu'une géométrie ?

- Au XIX^{ème} siècle, il y avait un hiatus entre deux manières de pratiquer la géométrie :
 1. la méthode axiomatique « à la Euclide » applicable par exemple à la géométrie euclidienne, à la géométrie sphérique, à la géométrie de Lobachevsky

Dans ce point de vue, une géométrie est la donnée d'un espace X , de ses « droites », de la longueur des segments de ces « droites », etc... plus un certain nombre de conditions : les « axiomes » de la géométrie Euclidienne par exemple.

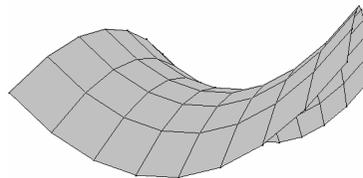
2. L'autre point de vue a son origine dans la pratique courante de la géométrie des surfaces...



2. L'autre point de vue a son origine dans la pratique courante de la géométrie des surfaces...

... c'est-à-dire la géométrie des surfaces dans l'espace tridimensionnel, comme l'ellipsoïde ou la surface du globe terrestre modélisée par Gauss dans sa cartographie du Danemark.

Dans ce deuxième cas, on admet de pouvoir travailler avec des surfaces « bosselées » ou « déformées », c'est-à-dire où la géométrie n'est pas la même du voisinage d'un point au voisinage d'un autre point.



Pour le point de vue du physicien, tournez la page...



Point de vue de physicien

Du point de vue du physicien, dans la modélisation axiomatique traditionnelle de la géométrie, deux observateurs situés en deux points différents sont équivalents, c'est-à-dire qu'ils ont la même perception de la géométrie de l'espace ; dans le cas des surfaces (éventuellement bosselées), deux observateurs situés en deux points différents ont une perception différente de la géométrie.



Quel point de vue avons nous suivi jusqu'ici ?

- Quel point de vue avons-nous privilégié lorsque nous avons décidé que, sur un polyèdre, est droite toute courbe dont chaque point admet un développement local (sans distorsion) sur une portion de plan qui envoie chaque portion de la courbe sur une portion de droite ?



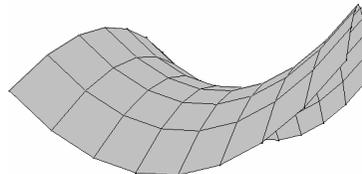
Quel point de vue avons nous suivi jusqu'ici ?

- *Quel point de vue avons-nous privilégié lorsque nous avons décidé que, sur un polyèdre, est droite toute courbe dont chaque point admet un développement local (sans distorsion) sur une portion de plan qui envoie chaque portion de la courbe sur une portion de droite ?*
- C'est le point de vue axiomatique que nous avons adopté, puisque nous nous sommes donnés l'espace et ses droites... (nous avons d'ailleurs des problèmes avec les droites passant par les sommets, pourquoi?).
- Y-a-t-il un autre point de vue qui engloberait géométrie axiomatique et géométrie des surfaces?



Riemann

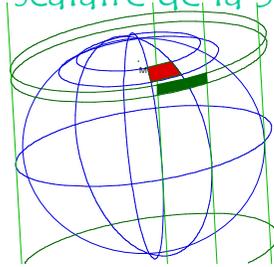
L'apport de Riemann et de ses successeurs a été d'unifier les deux points de vue en admettant que l'axiomatique (ou plutôt la manière de la quantifier) puisse varier d'un point à un autre. Observons que, dans le cas euclidien, toute l'axiomatique peut se résumer à la donnée d'un seul objet mathématique : le produit scalaire. Pour définir une géométrie « à la Riemann » dans le cas général, il suffit d'admettre que ce produit scalaire varie avec le point.



• Document annexé



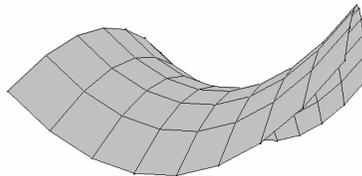
Les distorsions de la projection de Mercator, sont des variations du produit scalaire de la sphère.



- La projection de Mercator entraîne des distorsions d'autant plus fortes qu'on se rapproche des pôles. Pour compenser ce phénomène, il faut que la norme d'un vecteur libre de la carte ne soit pas la même suivant qu'on se trouve en un point de la carte proche de l'équateur ou proche d'un pôle.



La géométrie d'une surface décrite à travers les variations du produit scalaire



Chaque point de la surface admet un voisinage qu'on peut cartographier en le projetant sur le plan horizontal ou sur un plan vertical; l'idée est toujours de décrire le produit scalaire dans la carte ainsi obtenue