



HAL
open science

Etude numérique des écoulements tridimensionnels dans des cuves cylindriques rotor-stator

Emerson Barbosa

► **To cite this version:**

Emerson Barbosa. Etude numérique des écoulements tridimensionnels dans des cuves cylindriques rotor-stator. Dynamique des Fluides [physics.flu-dyn]. Université d'Evry-Val d'Essonne, 2002. Français. NNT: . tel-00354646

HAL Id: tel-00354646

<https://theses.hal.science/tel-00354646>

Submitted on 20 Jan 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ D'ÉVRY-VAL-D'ESSONNE
U.F.R. DE SCIENCES ET TECHNOLOGIES

Thèse de doctorat

Discipline : **MÉCANIQUE**
Option : **Mécanique des Fluides**

Présentée et soutenue publiquement par :

Emerson DALLIA BARBOSA

le 13 Septembre 2002

Pour obtenir le grade de

Docteur de l'Université d'Évry-Val-d'Essonne

Titre :

**Étude numérique des écoulements tridimensionnels dans des
cavités rotor-stator cylindriques**

Devant la commission d'examen composée de :

M. Olivier DAUBE	Professeur, Université d'Évry-Val-d'Essonne	Directeur de thèse
M. Patrick BONTOUX	Directeur de Recherches, LMSNM-CNRS, Marseille	Rapporteur
M. Guy LAURIAT	Professeur, Université de Marne-la-Vallée	Rapporteur
M. Pierre NEDELLEC	Professeur, Université d'Évry-Val-d'Essonne	Président
M. Andreas SPOHN	Maître de conférences, LEA-ENSMA, Poitiers	Examinateur
Mme Caroline NORE	Maître de conférences, Université de Paris 11	Examinatrice

Je dédie ce mémoire à ma mère, à mon père, à Georges et à Madame Alberte Aubert.

Remerciements

Ce travail a été réalisé au Laboratoire de Mécanique et d'Énergétique d'Évry (LMEE) du Centre d'Études en Mécanique d'Ile-de-France (CEMIF) à l'Université d'Évry-Val-d'Essonne. Je voudrais d'abord remercier Monsieur René Jean Gibert, alors directeur du CEMIF, de m'avoir accueilli pour effectuer ce travail de thèse.

Je suis particulièrement reconnaissant à mon directeur de thèse Monsieur Olivier Daube de m'avoir confié ce travail qui a été très enrichissant pour moi, tant du point de vue scientifique que méthodologique. Je le remercie pour sa confiance, son soutien durant ses années et pour m'avoir fait profiter de ses nombreuses compétences.

J'exprime mes sincères remerciements à Messieurs Pierre Nedellec et Patrick Bontoux qui m'ont fait l'honneur de rapporter cette thèse. Je tiens à remercier chaleureusement Monsieur Guy Lauriat pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail durant plus de trois ans, pour sa disponibilité et ses nombreux conseils si précieux. J'exprime toute ma reconnaissance à Madame Caroline Nore et Monsieur Andreas Spohn qui ont accepté d'examiner cette thèse et qui m'ont fait bénéficier de leurs réflexions très pertinentes.

Je voudrais ensuite remercier l'IDRIS pour les attributions d'heures de calcul sur la machine NEC-SX5 dont a bénéficié ce travail (projet 1312). Je remercie également toute l'assistance IDRIS pour leur aide et leur gentillesse.

Je ne saurais oublier de remercier, dans ces quelques lignes, tous mes collègues de l'IUP pour la sympathie dont ils ont fait preuve à mon égard. Mes plus vifs remerciements vont à Monsieur Gérard Porcher et Mademoiselle Madiha Bouafia avec qui j'ai enseigné en tant que moniteur et ATER.

J'adresse aussi un amical salut à tous les enseignants-chercheurs et doctorants du Laboratoire d'Étude des Transferts d'Énergie et de Matière (LETEM) de l'Université de Marne-la-Vallée avec lesquels la collaboration a été aussi fructueuse que les rapports chaleureux.

Je dédie une mention spéciale aux cohabitationnistes de bureau Olivier Le Maître, Gaëtan de Gassowski et Vincent Loret pour l'ambiance plus que sympathique dans laquelle s'est déroulée cette thèse. J'associe également à ces remerciements Grégory Turbelin, Jean-Michel Cros, Pierre Ngae, Gabriel Poloniecki et Michel Grignon dont j'ai tant apprécié l'amitié.

Ma reconnaissance va également à mon ami Farid Attoui pour l'aide qu'il m'a apporté au début de ce travail.

Merci aussi à tous ceux qui ont été présents le jour de la soutenance, aux absents qui m'ont soutenu par la pensée, et à tous les cordons bleus (mes parents, Mesdames Sylvianne Rat et Patricia Marciniak, ainsi que Mademoiselle Céline Durand) qui m'ont permis de réaliser le pot qui a suivi.

Enfin, je conclus mes remerciements en adressant ma profonde reconnaissance à Messieurs Daniel André, Nicolas Billy, Pierre Nedellec, Pascal Monceau et Jean Desbois qui ont été mes enseignants du DEUG à la Maîtrise à l'Université d'Évry-Val-d'Essonne, et qui sont à l'origine de ma passion pour les Sciences Physiques.

ÉTUDE NUMÉRIQUE DES ÉCOULEMENTS TRIDIMENSIONNELS DANS DES CAVITÉS ROTOR-STATOR CYLINDRIQUES

Résumé

L'écoulement d'un fluide visqueux incompressible dans une cuve cylindrique rotor-stator est étudié. Ces écoulements ont fait l'objet de récents travaux numériques tridimensionnels pour des rapports d'aspect $h > 1.75$. On propose une étude numérique de la rupture de l'axisymétrie de l'écoulement dans une cavité de rapport d'aspect réduit ($h = 1$ et 1.5) et des nombres de Reynolds $Re < 8500$.

Les équations de Navier-Stokes sont résolues par un code vitesse-pressure en coordonnées cylindriques qui repose sur des méthodes aux différences finies du second ordre. Deux approches numériques sont mises en œuvre pour mener cette investigation.

– L'une consiste à linéariser les équations autour d'un écoulement de base axisymétrique stationnaire. Les conditions initiales résultent de la superposition de l'écoulement de base et d'une perturbation aléatoire. Cette analyse de stabilité linéaire permet de déterminer le premier seuil de criticalité et met en évidence le mode azimutal k_c le plus instable.

– L'autre consiste à intégrer les équations du mouvement avec différentes conditions initiales : (i) soit un écoulement de base axisymétrique stationnaire perturbé aléatoirement, (ii) soit un état où le fluide est au repos, (iii) soit un régime établi trouvé pour une autre valeur de Re .

L'analyse de stabilité non-linéaire (i) montre que le développement d'un mode k_c est responsable d'une bifurcation de Hopf super-critique lorsque Re dépasse une première valeur critique. L'écoulement de base bascule alors vers des solutions instationnaires de période T , dont les caractéristiques spatiales dépendent de la valeur de k_c . L'axisymétrie de l'écoulement n'est brisée que lorsque $k_c \neq 0$. Dans ce cas, les solutions super-critiques sont des ondes qui exhibent une invariance par rotation d'angle $2\pi/k_c$ autour de l'axe et qui tournent avec une période azimutale $T_{RWk_c} = k_c \times T$. L'écoulement subit ensuite d'autres bifurcations et les caractéristiques spatio-temporelles des ondes tournantes bifurquées sont présentées en détails. L'utilisation d'autres conditions initiales (ii)–(iii) met en évidence des branches de solutions multiples : il apparaît que la convergence vers l'une ou l'autre des solutions possibles dépend de la façon dont est répartie l'énergie cinétique de départ.

Mots-clés

mécanique des fluides / écoulement en rotation / brisure de l'axisymétrie / transition / simulation numérique directe

NUMERICAL SIMULATION OF THREE-DIMENSIONAL FLOWS IN A ROTATING LID-CYLINDER CAVITY

Abstract

The flow in a cylindrical tank filled with an incompressible viscous fluid is considered. The motion is due to the rotation of one lid at constant angular velocity. Recent three-dimensional computations have been recently performed for aspect ratios $h > 1.75$. The aim of this work is the numerical investigation of the symmetry-breaking of the flow in a cavity of reduced aspect ratio ($h = 1$ and 1.5) and Reynolds numbers $Re < 8500$.

The resolution of the Navier-Stokes equations in velocity-pressure formulation written in cylindrical coordinates is accomplished using second-order finite differences methods. Two methodologies have been applied to study the loss of axisymmetry.

– The governing equations cast in perturbation form with respect to an axisymmetric steady base flow, in linearized form, are solved starting from a randomly distributed initial perturbation. This linear stability analysis allows for the determination of the first threshold and highlights the most unstable azimuthal mode k_c .

– The integration of the full Navier-Stokes equations is carried out starting from initial conditions that may be either a randomly distributed initial perturbation (i) or a rest state (ii) or an instantaneous field from a previous computation (iii).

The nonlinear stability analysis (i) shows that a supercritical Hopf bifurcation involving a dominant azimuthal mode k_c occurs when Re exceeds a first threshold. Solutions of the first branch are periodic, having associated period T , and their spatial structure depends on the value k_c . Axisymmetry is broken beyond the bifurcation only when $k_c \neq 0$. In this case, the result is a wave which rotates around the axis with a period $T_{RWk_c} = k_c \times T$. The flow undergoes then subsequent bifurcations as Re is increased. The characteristics of the bifurcated rotating waves are presented in details. Starting from other initial conditions (ii)–(iii) highlights regions of hysteresis : the reached branch depends on the way the initial kinetic energy is distributed.

Key words

fluid mechanics / swirling flow / symmetry-breaking / transition / direct numerical simulation

Table des matières

I	Généralités et étude bibliographique	1
1	Introduction	3
1.1	Écoulements tournants	3
1.2	Configurations géométriques	4
1.2.1	Systèmes de Taylor-Couette	4
1.2.2	Disques libres et cavités inter-disques ouvertes	6
1.2.3	Cavités inter-disques fermées	7
1.3	Plan du mémoire	9
2	Cuves cylindriques rotor-stator	11
2.1	Description du système	11
2.1.1	Configuration géométrique et paramètres de contrôle	11
2.1.2	Description de l'écoulement	12
2.2	Étude bibliographique	14
2.2.1	Travaux expérimentaux	14
2.2.2	Simulations numériques axisymétriques	15
2.2.2.1	Solutions stationnaires	15
2.2.2.2	Solutions instationnaires	16
2.2.2.3	Études de stabilité linéaire	17
2.2.3	Simulations numériques tridimensionnelles	18
2.2.3.1	Études de stabilité linéaire	18
2.2.3.2	Solutions tridimensionnelles	19
2.3	Objectifs de l'étude	22
3	Formulation continue	25
3.1	Formulation primitive	25

3.2	Adimensionnement	26
3.3	Conditions aux limites	27
3.4	Formulation rotationnelle	27
3.5	Formulations perturbatives	29
II	Méthodes numériques	33
4	Formulation discrète	35
4.1	Introduction	35
4.2	Marche en temps	36
4.2.1	Schéma semi-implicite	36
4.2.2	Méthode de projection	37
4.2.2.1	Étape de prédiction	37
4.2.2.2	Étape de projection	38
4.2.2.3	Remarques sur la méthode de projection	38
4.3	Discrétisation en espace	39
4.3.1	Maillage et espaces discrets	40
4.3.2	Discrétisation des opérateurs différentiels d'ordre un en espace	42
4.3.2.1	Divergence et gradient discrets adjoints	42
4.3.2.2	Rotationnel discret	44
4.3.2.3	Composante axiale du rotationnel discret sur l'axe	46
4.3.2.4	Remarques	46
4.3.3	Discrétisation des opérateurs différentiels d'ordre deux en espace . .	47
4.3.3.1	Laplacien scalaire discret	47
4.3.3.2	Discrétisation du terme de diffusion	48
4.3.3.3	Discrétisation du terme non-linéaire de convection	49
4.4	Résolution des systèmes discrets	50
4.4.1	Composante axiale du rotationnel discret sur l'axe	51
4.4.2	Problèmes de type Helmholtz pour u et v	51
4.4.3	Problèmes de type Helmholtz pour w	52
4.4.4	Problèmes de type Poisson pour Φ	52
4.4.5	Calcul des seconds membres	53
4.5	Méthodologies	54

5	Validation du code de calcul	57
5.1	Solutions axisymétriques stationnaires	57
5.2	Solutions axisymétriques instationnaires dans une cuve de rapport d'aspect $h = 2$	61
5.2.1	Approche linéaire	61
5.2.2	Approche non-linéaire	62
5.3	Solutions tridimensionnelles	64
5.3.1	Cuve de rapport d'aspect $h = 1.75$	64
5.3.2	Cuve de rapport d'aspect $h = 2$	65
5.3.3	Cuve de rapport d'aspect $h = 3$	66
 III Simulation numérique directe des écoulements dans un cylindre soumis à la rotation		 71
6	Étude de l'écoulement dans une cuve de rapport d'aspect $h = 1$	73
6.1	Analyse linéaire	73
6.1.1	Premier seuil de stabilité	73
6.1.2	Au delà du premier seuil de stabilité	75
6.2	Analyse non-linéaire	76
6.2.1	Première bifurcation	76
6.2.1.1	Perte de la stationnarité	79
6.2.1.2	Perte de l'axisymétrie	80
6.2.1.3	Apparition d'une onde azimutale tournante	85
6.2.2	Seconde bifurcation	87
6.2.2.1	Instationnarité des solutions	89
6.2.2.2	Perte de la symétrie d'ordre deux	89
6.2.2.3	Onde azimutale tournante	93
6.3	Discussions	95
6.3.1	Localisation spatiale et couplages des modes	95
6.3.2	Analyse des fréquences	99
6.4	Solutions multiples	100
6.4.1	Démarrages impulsifs du rotor	100
6.4.2	Accélération et décélération du rotor	100
6.5	Onde azimutale tournante modulée	102

6.5.1	Modulation d'intensité	105
6.5.2	Précession des structures	105
6.6	Conclusions	112
7	Étude de l'écoulement dans une cuve de rapport d'aspect $h = 1.5$	115
7.1	Analyse linéaire	115
7.1.1	Premier seuil de stabilité	115
7.1.2	Au delà du premier seuil	117
7.2	Analyse non-linéaire	119
7.2.1	Première bifurcation	119
7.2.1.1	Perte de la stationnarité	121
7.2.1.2	Perte de l'axisymétrie	122
7.2.1.3	Apparition d'une onde azimutale tournante	124
7.2.2	Mode opératoire	126
7.2.3	Seconde bifurcation	126
7.2.3.1	Perte de la symétrie d'ordre deux	127
7.2.3.2	Instationnarité des solutions	128
7.2.4	Troisième bifurcation	129
7.2.5	Quatrième bifurcation	133
7.2.6	Onde azimutale tournante modulée	137
7.2.6.1	Modulation d'intensité	137
7.2.6.2	Précession des structures	137
7.3	Solutions multiples	140
7.3.1	Démarrages impulsifs du rotor	142
7.3.2	Accélération et décélération du rotor	143
7.4	Conclusions	145
IV	Conclusion générale	149
V	Annexes	157
A	Opérateurs différentiels en coordonnées cylindriques	159
B	Quelques rappels sur les séries de Fourier	163

C Diagrammes de référence	167
D Performances numériques	171
Références bibliographiques	173

Table des figures

1.1	Image satellite d'un ouragan au large des côtes américaines (Floride).	3
1.2	Visualisations expérimentales des écoulements de Taylor-Couette en situations rotor-stator. <i>De gauche à droite</i> : écoulement laminaire de Couette, rouleaux axisymétriques de Taylor, ondulations azimuthales, écoulement de Taylor-Couette superposé à un écoulement axial.	5
1.3	Deux exemples d'écoulements inter-disques visualisés expérimentalement par G. Gauthier, P. Gondret et M. Rabaud . (a) Situation rotor-stator : cercles concentriques se propageant depuis la périphérie vers le centre. (b) Contra-rotation : superposition des réseaux de spirales positives et négatives.	7
2.1	Représentation schématique d'une cuve rotor-stator cylindrique ($h = H/R_o \geq 1$).	12
2.2	(a) Schéma de l'écoulement dans un plan (r, z) . L'écoulement principal est représenté par les flèches bleues et les zones de recirculation secondaires sont tracées en vert. Les couches limites d'Ekman (1), de Stewartson (2) et de Bödewadt (3) sont représentées par des pointillés rouges. (b) Visualisation expérimentale d'un éclatement tourbillonnaire en milieu confiné réalisée par Spohn . Ce document a été fourni par l'auteur.	13
2.3	Maillage dans une section normale à l'axe du cylindre utilisé par Sotiropoulos & Ventikos (2001) . Cette image est une reproduction de la figure 1.(b) p.158 de la publication [65].	21
3.1	Système de coordonnées cylindriques.	28
4.1	Positionnement des variables de type MAC. (a) Les mailles dites régulières sont celles pour lesquelles $m > 0$. (b) Les mailles dites axiales sont telles que $m = 0$	41
4.2	Boucles L permettant de construire les composantes du rotationnel discret à partir du théorème de Stokes.	45
4.3	Boucle L permettant de construire la composante axiale du rotationnel discret sur l'axe à partir du théorème de Stokes.	46

5.1	Représentation schématique des longueurs caractéristiques d'une bulle de recirculation.	58
5.2	$h = 2$: (a) Énergie cinétique E' de la perturbation au cours du temps en régime linéaire pour $Re \in [2560, 2580]$. Représentation semi-logarithmique. (b) Influence du maillage sur la valeur de Re_c	62
5.3	$h = 2, Re = 2650$: (a) Variations temporelles de la composante axiale w' de la perturbation de vitesse au cours du temps au point ($r = 0.75, z = 0.5h$) en régime non-linéaire. (b) Densité énergétique spectrale correspondante pour $t \in [800, 1600]$ en représentation semi-logarithmique.	63
5.4	$h = 1.75, Re = 1850$: (a) Éclatement tourbillonnaire stationnaire. Iso-surface nulle et les iso-lignes de la composante axiale w du champ de vitesse total dans un plan méridien. (b) Énergies cinétiques modales $E'(k)$ au cours du temps en régime non-linéaire. Représentation semi-logarithmique.	64
5.5	$h = 2, Re = 1854$: Éclatements tourbillonnaires stationnaires. Iso-surface nulle et les iso-lignes de la composante axiale w du champ de vitesse total dans un plan méridien.	65
5.6	$h = 2$: Énergies cinétiques modales $E'(k)$ au cours du temps en régime linéaire pour $Re = 2525$ (a) et $Re = 2575$ (b). Représentations semi-logarithmiques.	65
5.7	$h = 3, Re = 2850$: Énergies cinétiques modales $E'(k)$ au cours du temps en régime non-linéaire. Représentations semi-logarithmiques.	66
5.8	$h = 3, Re = 2850$: Iso-lignes/valeurs de la composante axiale de la vitesse dans le plan $z = 0.8h$ pour l'écoulement total w (a) et la perturbation w' (b). Les zones bleues (rouges) correspondent aux valeurs positives (négatives).	67
5.9	$h = 3, Re = 2850$: Iso-lignes de la composante axiale w de la vitesse totale dans cinq plans méridiens séparés par un angle de $\pi/8$. Les iso-lignes continues (discontinues) sont positives (négatives).	67
5.10	$h = 3, Re = 2850$: Iso-lignes de la composante axiale w de la vitesse totale dans le plan $z = 0.8h$ au cours d'une période $T \simeq 2.35$ tours. Chaque figure correspond au temps $t = t_0 + iT/6$, avec $i = 0, \dots, 6$	68
6.1	$h = 1$: Énergies cinétiques modales $E'(k)$ au cours du temps en régime linéaire. (a) $k = 2, Re$ variable. (b) k variable, $Re = 2550$. Représentations semi-logarithmiques.	74
6.2	$h = 1, k = 2$: (a) Détermination de Re_{c1} par extrapolation pour $M = 100$. (b) Influence du maillage sur la valeur extrapolée de Re_{c1}	75
6.3	$h = 1$: Taux de croissance τ_k des cinq premiers modes de Fourier en fonction du nombre de Reynolds. Calculs linéarisés autour de l'écoulement de base.	76
6.4	$h = 1$: Énergies cinétiques modales $E'(k)$ au cours du temps en régime non-linéaire pour $Re = 2410$ (a) et $Re = 2510$ (b). Représentations semi-logarithmiques.	77

6.5	$h = 1$: (a) Illustration du ralentissement critique via l'énergie cinétique du mode $k = 2$ au cours du temps en régime non-linéaire pour $Re \in [2510, 2550]$. Représentations semi-logarithmiques. (b) Variations de $\mathcal{A}^2(v')$ avec Re pour les trois signaux de référence au voisinage de la criticalité.	78
6.6	$h = 1, Re = 2550$: Variations temporelles de la composante azimutale v' de la perturbation de vitesse au point $A(r = 0.5, \theta = 0, z = 0.5h)$	79
6.7	$h = 1, Re = 2550$: Densités énergétiques spectrales du signal 6.6 (a) et des composantes de Fourier correspondantes (b) pour $t \in [500, 800]$. Représentations semi-logarithmiques.	79
6.8	$h = 1, Re = 2550$: Énergies cinétiques modales $E'(k)$ au cours du temps en régime linéaire (a) et non-linéaire (b). Représentations semi-logarithmiques. .	80
6.9	$h = 1, Re = 2550$: Variations temporelles de la composante azimutale v' de la perturbation de vitesse aux points $(r = 0.5, \theta, z = 0.5h)$. La position azimutale θ de chaque point diffère d'un angle $\pi/2$	82
6.10	$h = 1, Re = 2550$: Iso-lignes de la composante radiale de la vitesse dans le plan $z = 0.8h$ pour l'écoulement total u (a) et la perturbation u' (b). Les iso-lignes continues (discontinues) sont positives (négatives) et le zéro est en traits gras.	82
6.11	$h = 1, Re = 2550$: Iso-lignes de la composante axiale de la vitesse pour l'écoulement total w (a) et la perturbation w' (b). Les quatre semi-plans méridiens sont séparés d'un angle $\pi/2$. Les iso-lignes continues (discontinues) sont positives (négatives). L'axe $r = 0$ est à gauche.	83
6.12	$h = 1, Re = 3000$: Iso-surfaces des composantes (u', v', w') de la perturbation de vitesse (a-c-e) et des composantes (η', ω', ζ') de la perturbation de tourbillon (b-d-f).	84
6.13	$h = 1, Re = 3000$: Iso-lignes/valeurs de la composante azimutale v' de la perturbation de vitesse dans le plan $z = 0.5h$ au cours d'une période $T_1 = 12$ tours. Chaque figure correspond au temps $t = 412 + iT_1/4$, avec $i = 0, \dots, 4$	86
6.14	$h = 1, Re = 3000$: Profil de la composante azimutale v' de la perturbation de vitesse à différents instants sur trois circonférences (r, θ, z) . De haut en bas : $(0.25, \theta, 0.2h)$, $(0.5, \theta, 0.5h)$ et $(0.75, \theta, 0.8h)$. La flèche indique le sens de propagation de l'onde tournante associée au mode azimutal $k = 2$	87
6.15	$h = 1$: Énergies cinétiques modales $E'(k)$ au cours du temps en régime non-linéaire pour $Re = 4020$ (a) et $Re = 4025$ (b). Représentations semi-logarithmiques.	88
6.16	$h = 1, Re = 4300$: Variations temporelles de la composante azimutale v' de la perturbation de vitesse au point $B(r = 0.8, \theta = 0, z = 0.8h)$	89
6.17	$h = 1, Re = 4300$: Densités énergétiques spectrales du signal 6.16 (a) et des composantes de Fourier correspondantes (b) pour $t \in [200, 600]$. Représentations semi-logarithmiques.	90

6.18	$h = 1, Re = 4100$: Variations temporelles de la composante azimutale v' de la perturbation de vitesse aux points ($r = 0.5, \theta, z = 0.5h$). La position azimutale θ de chaque point diffère d'un angle $2\pi/3$	90
6.19	$h = 1, Re = 4300$: Iso-lignes de la composante radiale de la vitesse dans le plan $z = 0.8h$ pour l'écoulement total u (a) et la perturbation u' (b). Les iso-lignes continues (discontinues) sont positives (négatives) et le zéro est en traits gras.	91
6.20	$h = 1, Re = 4500$: Iso-surfaces des composantes (u, v, w) du champ de vitesse total ($a-c-d$) et des composantes (η, ω, ζ) du champ de tourbillon total ($b-d-e$).	92
6.21	$h = 1, Re = 4500$: Iso-lignes/valeurs de la composante azimutale v' de la perturbation de vitesse dans le plan $z = 0.5h$ au cours d'une période $T_2 = 19.6$ tours. Chaque figure correspond au temps $t = 501 + iT_2/4$, avec $i = 0, \dots, 4$	94
6.22	$h = 1, Re = 4500$: Profil de la composante azimutale v' de la perturbation de vitesse à différents instants sur deux circonférences (r, θ, z) . <i>De haut en bas</i> : $(0.5, \theta, 0.5h)$ et $(0.75, \theta, 0.8h)$. La flèche indique le sens de propagation de l'onde tournante associée au mode azimutal $k = 3$	95
6.23	$h = 1, Re = 3000$, et 4500 : Iso-surfaces des composantes (u', v', w') de la perturbation de vitesse représentant 60% du maximum (<i>en rouge</i>) et du minimum (<i>en bleu</i>).	96
6.24	$h = 1, Re = 3000$: Énergies cinétiques modales $E'(k)$ au cours du temps en régime linéaire (a) et non-linéaire (b). Représentations semi-logarithmiques.	97
6.25	$h = 1, Re = 3000$: Iso-lignes de l'énergie cinétique $E'(k)$ des modes $k = 2$ et $k = 3$ en régime linéaire dans un semi-plan méridien. L'axe $r = 0$ est à gauche.	97
6.26	$h = 1, Re = 3500$: Iso-lignes de l'énergie cinétique des modes $k = 0$ à $k = 4$ en régime linéaire dans un semi-plan méridien. L'axe $r = 0$ est à gauche.	98
6.27	$h = 1$: Récapitulatif des fréquences caractéristiques trouvées pour la perturbation. Les calculs ont été initialisés avec des conditions de type CI_b	99
6.28	$h = 1$: Mise en évidence des sauts entre les branches de solutions f_1 et f_2 en augmentant (<i>en haut</i>) et en diminuant (<i>en bas</i>) progressivement la rotation du disque inférieur.	102
6.29	$h = 1$: Voir 6.30 pour la légende.	103
6.30	$h = 1$: Branches de solutions atteintes lorsque les simulations sont réalisées avec des conditions initiales CI_b (<i>en pointillés verts</i>), CI_0 (<i>flèches verticales bleues</i>), CI^+ (<i>en traits rouges</i>) et CI^- (<i>en traits noirs</i>).	104
6.31	$h = 1, Re = 7500$: Énergie cinétique totale de la perturbation (a) et énergies cinétiques spectrales $E'(k)$ des quatre premiers modes de Fourier (b et c) au cours du temps en régime non-linéaire. Représentations semi-logarithmiques.	106

6.32	$h = 1, Re = 7500$: Densités énergétiques spectrales des énergies cinétiques totale et spectrale $E'(k = 1)$ pour $t \in [1000, 2000]$. Représentations semi-logarithmiques.	106
6.33	$h = 1, Re = 7500$: Iso-lignes des énergies cinétiques modales $E'(k = 0)$ (à gauche) et $E'(k = 2)$ (à droite) dans un plan méridien au cours d'une période $T_{\text{MOD}} \simeq 3.75$ tours. Chaque figure correspond au temps $t = 1600 + iT_{\text{MOD}}/3$, avec $i = 0, \dots, 3$. L'axe $r = 0$ est à gauche.	107
6.34	$h = 1, Re = 7500$: Iso-lignes/valeurs de la composante azimutale v' de la perturbation de vitesse dans le plan $z = 0.8h$ au cours d'une période $T_{\text{MOD}} = 3.75$ tours. Chaque figure correspond au temps $t = 1601.8 + iT_{\text{MOD}}/4$, avec $i = 0, \dots, 4$	108
6.35	$h = 1, Re = 7500$: Variations temporelles de la composante azimutale v' de la perturbation de vitesse au point $C(r = 0.75, \theta = 0, z = 0.75h)$	109
6.36	$h = 1, Re = 7500$: Comparaison des densités énergétiques spectrales pour $t \in [500, 800]$. (a) Signal 6.35. (b–e) Coefficients spectraux associés au signal 6.35 pour les modes $k = 0$ à $k = 3$. (f) Énergie cinétique totale de la perturbation. Représentations semi-logarithmiques.	110
6.37	$h = 1, Re = 7500$: Iso-lignes/valeurs de la composante azimutale v' de la perturbation de vitesse dans le plan $z = 0.8h$ au cours de dix périodes $T_{\text{MOD}} = 3.75$ tours. Chaque figure correspond au temps $t = 1601.8 + iT_{\text{MOD}}$, avec $i = 0, \dots, 10$	111
7.1	$h = 1.5$: Énergies cinétiques modales $E'(k)$ au cours du temps en régime linéaire. (a) $k = 2$ et Re variable. (b) k variable et $Re = 2600$. Représentations semi-logarithmiques.	116
7.2	$h = 1.5, k = 2$: (a) Détermination de Re_{c1} par extrapolation pour $M = 100$. (b) Influence du maillage sur la valeur extrapolée de Re_{c1}	116
7.3	$h = 1.5$: Taux de croissance τ_k des cinq premiers modes azimutaux en fonction du nombre de Reynolds. Calculs linéarisés autour de l'écoulement de base.	118
7.4	$h = 1.5, Re = 3300$: Iso-lignes de l'énergie cinétique $E'(k)$ des modes $k = 0$ à $k = 3$ en régime linéaire dans le plan (r, z) . L'axe $r = 0$ est à gauche.	118
7.5	$h = 1.5$: Énergies cinétiques modales $E'(k)$ au cours du temps en régime non-linéaire pour $Re = 2550$ (a) et $Re = 2650$ (b). Représentations semi-logarithmiques.	120
7.6	$h = 1.5$: (a) Illustration du ralentissement critique via l'énergie cinétique du mode $k = 2$ au cours du temps en régime non-linéaire pour $Re \in [2610, 2700]$. Représentations semi-logarithmiques. (b) Variations de $\mathcal{A}^2(v')$ avec Re pour les trois signaux de référence au voisinage de la criticalité.	120
7.7	$h = 1.5, Re = 2650$: Variations temporelles de la composante azimutale v' de la perturbation de vitesse au point $C(r = 0.6, \theta = 0, z = 0.96h)$	121

7.8	$h = 1.5, Re = 2650$: Densités énergétiques spectrales du signal 7.7 (a) et des composantes de Fourier correspondantes (b) pour $t \in [1000, 4000]$. Représentations semi-logarithmiques.	122
7.9	$h = 1.5, Re = 2650$: Iso-lignes de la composante radiale de la vitesse dans le plan $z = 0.9h$ pour l'écoulement total u (a) et la perturbation u' (b). Les iso-lignes continues (discontinues) sont positives (négatives) et le zéro est en traits gras.	123
7.10	$h = 1.5, Re = 2650$: Iso-surfaces des composantes (u', v', w') de la perturbation de vitesse. Les zones grises (rouges) représentent 1% (15%) du maximum.	123
7.11	$h = 1.5, Re = 2650$: Profil de la composante azimutale v' de la perturbation de vitesse à différents instants sur la circonférence ($r = 0.6, \theta, z = 0.9h$). La flèche indique le sens de propagation de l'onde tournante associée au mode azimutal $k = 2$	124
7.12	$h = 1.5, Re = 2650$: Iso-lignes/valeurs de la composante azimutale v' de la perturbation de vitesse dans le plan $z = 0.9h$ au cours d'une période $T_1 = 166$ tours. Chaque figure correspond au temps $t = 4000 + iT_1/5$, avec $i = 0, \dots, 4$	125
7.13	$h = 1.5$: Énergies cinétiques modales $E'(k)$ au cours du temps en régime non-linéaire pour $Re = 3275$ (a) et $Re = 3300$ (b). Représentations semi-logarithmiques.	127
7.14	$h = 1.5, Re = 3300$: Variations temporelles de la composante azimutale v' de la perturbation de vitesse au point $D(r = 0.8, \theta = 0, z = 0.8h)$	128
7.15	$h = 1.5, Re = 3300$: Densité énergétique spectrale du signal 7.14 pour $t \in [400, 800]$. Représentation semi-logarithmique.	129
7.16	$h = 1.5$: Énergies cinétiques modales $E'(k)$ au cours du temps en régime non-linéaire pour $Re = 3600$ (a) et $Re = 3700$ (b). Représentations semi-logarithmiques.	130
7.17	$h = 1.5$: Variations temporelles de la composante azimutale v' de la perturbation de vitesse au point $D(r = 0.8, \theta = 0, z = 0.8h)$ pour $Re = 3600$ (a) et $Re = 3700$ (b).	131
7.18	$h = 1.5$: Densités énergétiques spectrales des signaux 7.17 pour $t \in [400, 800]$. (a) $Re = 3600$. (b) $Re = 3700$. Représentations semi-logarithmiques.	131
7.19	$h = 1.5, Re = 3900$: Iso-lignes/valeurs de la composante azimutale v' de la perturbation de vitesse dans le plan $z = 0.8h$ au cours d'une période $T_3 = 10$ tours. Chaque figure correspond au temps $t = 800 + iT_3/5$, avec $i = 0, \dots, 5$	132
7.20	$h = 1.5$: Énergies cinétiques modales $E'(k)$ au cours du temps en régime non-linéaire pour $Re = 4200$ (a) et $Re = 4300$ (b). Représentations semi-logarithmiques.	134
7.21	$h = 1.5$: Variations temporelles de la composante azimutale v' de la perturbation de vitesse au point $D(r = 0.8, \theta = 0, z = 0.8h)$ pour $Re = 4200$ (a) et $Re = 4300$ (b).	134

7.22	$h = 1.5$: Densités énergétiques spectrales des signaux 7.21 pour $t \in [400, 800]$. (a) $Re = 4200$. (b) $Re = 4300$. Représentations semi-logarithmiques.	135
7.23	$h = 1.5, Re = 4300$: Iso-lignes/valeurs de la composante azimutale v' de la perturbation de vitesse dans le plan $z = 0.8h$ au cours d'une période $T_4 = 25$ tours. Chaque figure correspond au temps $t = 800 + iT_4/5$, avec $i = 0, \dots, 5$	136
7.24	$h = 1.5, Re = 6000$: Énergie cinétique totale de la perturbation au cours du temps en régime non-linéaire. Représentation semi-logarithmique.	138
7.25	$h = 1.5, Re = 6000$: Comparaison des densités énergétiques spectrales pour $t \in [800, 3200]$. (a) Signal 7.24. (b) Signal 7.27. (c) Coefficients spectraux associés au signal 7.27 pour les modes $k = 1$ et $k = 3$. Représentations semi-logarithmiques.	138
7.26	$h = 1.5, Re = 6000$: Iso-lignes/valeurs de la composante azimutale v' de la perturbation de vitesse dans le plan $z = 0.8h$ au cours d'une période $T_{MOD} = 1.86$ tours. Chaque figure correspond au temps $t = 3200 + iT_{MOD}/4$, avec $i = 0, \dots, 4$	139
7.27	$h = 1.5, Re = 6000$: Variations temporelles de la composante azimutale v' de la perturbation de vitesse au point $D(r = 0.8, \theta = 0, z = 0.8h)$	140
7.28	$h = 1.5, Re = 6000$: Iso-lignes/valeurs de la composante azimutale v' de la perturbation de vitesse dans la section axiale $z = 0.8h$ au cours de 6 périodes $T_{MOD} = 1.86$ tours. Chaque figure correspond au temps $t = 3200 + iT_{MOD}$, avec $i = 0, \dots, 5$	141
7.29	$h = 1.5, Re = 6000$: Énergie cinétique totale de la perturbation au cours du temps. Représentation semi-logarithmique.	143
7.30	Voir Fig. 7.31 pour la légende.	146
7.31	$h = 1.5$: Branches de solutions atteintes lorsque les simulations sont réalisées avec des conditions initiales de type CI_b (en verts), CI_0 (flèches verticales bleues); CI^+ (en traits rouges) et CI^- (en traits noirs).	147
C.1	Régimes d'écoulements stationnaires ou non, avec ou sans éclatement tourbillonnaire. Résultats expérimentaux d' Escudier (1984) . Ce diagramme est une reproduction de la figure 7 p.195. de la publication [23].	167
C.2	Nombres de Reynolds critiques Re_{cr} pour les cinq premiers modes azimutaux k en fonction du rapport d'aspect $\gamma = H/R$. Résultats numériques de Gelfgat, Bar-Yoseph & Solan (2001) . Ce diagramme correspond à la figure 1 p.370 de la publication [28]. Ce document a été fourni par A. Y. Gelfgat	168
C.3	Fréquences critiques ω_{cr} pour les cinq premiers modes azimutaux k en fonction du rapport d'aspect $\gamma = H/R$. Résultats numériques de Gelfgat, Bar-Yoseph & Solan (2001) . Ce diagramme correspond à la figure 2 p.371 de la publication [28]. Ce document a été fourni par A. Y. Gelfgat	169

Liste des tableaux

2.1	Analyse de stabilité linéaire de Lopez et al. [40] comparée aux observations expérimentales de Stevens et al. [68].	18
5.1	Voir Tab. 5.2 pour la légende.	59
5.2	Dimensions caractéristiques de l'éclatement tourbillonnaire stationnaire pour des valeurs de h dans l'intervalle $[1.5, 3.25]$. Comparaisons entre les valeurs numériques (Num.) et les valeurs expérimentales (Exp.). Les points d'interrogation signifient que les longueurs caractéristiques ne sont pas disponibles dans la littérature. Les tirets indiquent que les zones de recirculation n'ont pas été observées.	60
5.3	$h = 2$: Nombre de Reynolds critiques et fréquence au seuil. Comparaison entre les valeurs numériques (Num.) et expérimentales (Exp.) publiées. Les points d'interrogation signifient que les données ne sont pas disponibles dans les articles cités. Les valeurs étoilées ont été directement mesurées sur le diagramme de référence donné dans l'annexe C.	63
6.1	$h = 1$: Variations du seuil de stabilité linéaire du mode $k = 2$ en fonction du maillage.	75
6.2	$h = 1, Re = 3000$: Valeurs maximales et minimales des fluctuations par rapport à l'écoulement de base. Composantes (u', v', w') de la vitesse et (η', ω', ζ') du tourbillon.	81
6.3	$h = 1, Re = 4500$: Valeurs maximales et minimales du champ total. Composantes (u, v, w) de la vitesse et (η, ω, ζ) du tourbillon.	93
6.4	$h = 1, Re = 4500$: Valeurs maximales et minimales des composantes (u', v', w') de la perturbation de vitesse.	97
6.5	$h = 1, Re = 7500$: Fréquence fondamentale des quatre premiers modes de Fourier de la perturbation.	110
7.1	$h = 1.5$: Variations du seuil de stabilité linéaire du mode $k = 2$ en fonction du maillage.	117
7.2	$h = 1.5$: Ordres de grandeur des seuils de stabilité linéaire pour les premiers modes azimutaux. Comparaison avec les valeurs mesurées sur le diagramme de Gelfgat et al. [28] (voir l'annexe C).	118

7.3 $h = 1.5, Re = 2650$: Valeurs maximales et minimales des composantes
(u', v', w') de la perturbation de vitesse. 124

D.1 Performances numériques des calculs tridimensionnels de stabilité non-linéaire. 171

Première partie

Généralités et étude bibliographique

Chapitre 1

Introduction

1.1 Écoulements tournants

Depuis près d'un siècle, la dynamique des fluides visqueux en rotation constitue un axe de recherche incontournable de la Mécanique des Fluides. L'engouement suscité par ce type d'écoulements chez les théoriciens, les expérimentateurs et de nos jours par les numériciens s'explique par :

- *L'omni-présence des écoulements tournants dans la nature*, sur une gamme de dimensions caractéristiques extrêmement vaste. On les rencontre par exemple en géophysique (courants marins), en météorologie (dynamique des écoulements atmosphériques, voir Fig. 1.1) ou en astrophysique (étude des écoulements gazeux autour des étoiles).

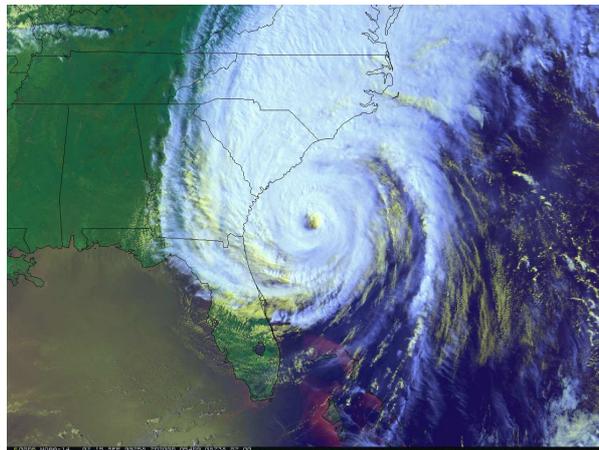


FIG. 1.1 – Image satellite d'un ouragan au large des côtes américaines (Floride).

- *Les développements industriels*. En effet, des applications technologiques aussi nombreuses que variées exploitent la mise en rotation des liquides ou des gaz dans des systèmes à géométries cylindriques (c'est-à-dire des configurations qui exhibent une symétrie autour d'un axe). Dès lors, la communauté scientifique leur a consacré de nombreux travaux : une connaissance

approfondie des transferts de masse et de chaleur impliqués dans les machines tournantes (comme les turbomachines) a permis d'améliorer le rendement de tels dispositifs ainsi que la durée de vie des pièces qui les composent.

- *Le caractère fondamental de ces écoulements en rotation*, qui en fait d'excellents candidats pour la compréhension des phénomènes d'instabilités et l'étude des scénarios de transition depuis un régime laminaire vers les régimes turbulents. Les écoulements tournants dans des géométries relativement simples ont fait l'objet d'un grand nombre de travaux théoriques.

Dans le cadre de notre travail, notre propos est d'étudier les écoulements de fluides visqueux incompressibles dans des configurations géométriques composées d'un cylindre stationnaire fermé par deux couvercles co-axiaux. Le mouvement est engendré par la rotation de l'un des disques à vitesse angulaire constante. En ce qui nous concerne, le rapport entre la hauteur du cylindre et le rayon des couvercles sera supérieur ou égal à un. En particulier, nous nous sommes concentrés sur l'apparition d'instabilités tridimensionnelles responsables de la brisure de l'axisymétrie de tels écoulements. Cette investigation est réalisée par voie de simulations numériques directes.

Mais auparavant, les principales classes d'écoulements tournants rencontrées dans la littérature sont brièvement passées en revue (§1.2). Pour clore ce chapitre d'introduction, nous annoncerons le plan du mémoire (§1.3). Nous signalons dès à présent que l'aspect thermique ne sera pas abordé ici.

1.2 Configurations géométriques

1.2.1 Systèmes de Taylor-Couette

Les publications consacrées aux écoulements de Taylor-Couette sont incontestablement les plus abondantes dans la littérature. Le système étudié est l'espace annulaire entre deux cylindres co-axiaux de rayon R_i et R_e (avec $R_i < R_e$) rempli d'un fluide visqueux. La mise en mouvement du fluide est engendrée par la rotation de l'un ou des deux cylindres. Sur les photographies de la figure 1.2, on visualise différentes topologies de type Taylor-Couette ¹.

Dans ses travaux, **Taylor (1923)** [70] a examiné analytiquement la stabilité d'un écoulement confiné entre deux cylindres concentriques en rotation différentielle. Les parois cylindriques sont supposées infiniment longues et séparées par une largeur d'entrefer $e = R_e - R_i$ faible devant leur rayon. Il a montré que la stabilité de ces écoulements est gouvernée par un paramètre sans dimension Ta , appelé nombre de Taylor. Celui-ci tient compte de la géométrie du système (e, R_e, R_i), des vitesses angulaires des cylindres et de la viscosité cinématique du fluide ν . L'auteur a confirmé ce résultat par voie d'expériences en situation rotor-stator où le

¹Photographies téléchargées depuis le site "www.geocities.com/evolutionweb/boek/H6.htm#taylor", mais le nom de l'auteur n'y figure pas.

cylindre externe est fixe. Sa conclusion est la suivante : lorsque le nombre de Taylor dépasse une valeur critique Ta_c , l'écoulement circulaire bifurque vers un écoulement périodique dans la direction axiale qui combine un mouvement circonférentiel et des cellules de Taylor (i.e. : une paire de tourbillons de Taylor adjacents contra-rotatifs).

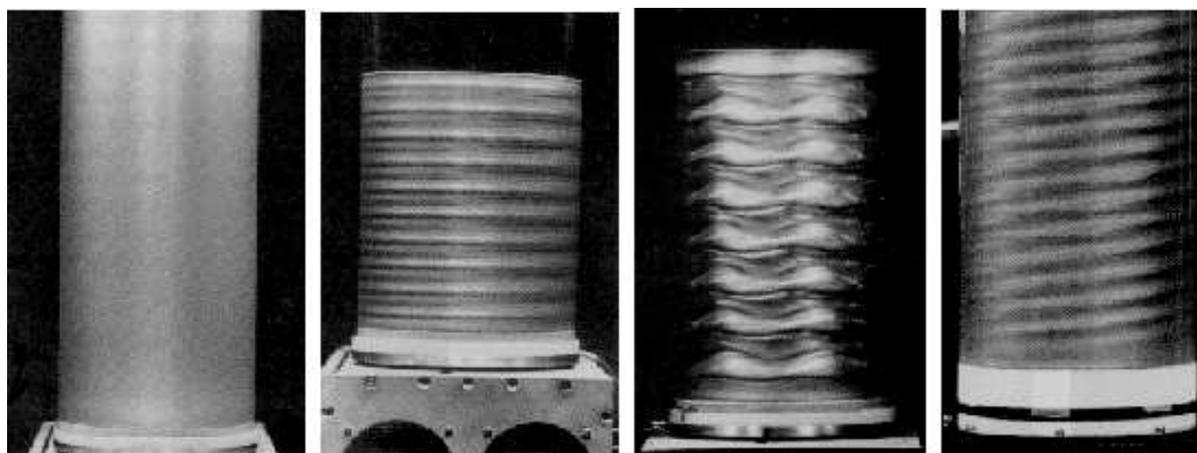


FIG. 1.2 – Visualisations expérimentales des écoulements de Taylor-Couette en situations rotor-stator. *De gauche à droite* : écoulement laminaire de Couette, rouleaux axisymétriques de Taylor, ondulations azimuthales, écoulement de Taylor-Couette superposé à un écoulement axial.

L'augmentation de Ta déstabilise les tourbillons de Taylor au point de rompre l'axisymétrie des états périodiques. Une seconde transition s'est donc produite et les écoulements bifurqués sont décrits de la façon suivante. Aux structures spatiales précédentes se superposent des ondes instationnaires qui se propagent suivant la direction azimuthale dans le sens de la rotation. **Coles (1965)** [13] puis **Cognet (1968)** [12] ont visualisé ces mouvements doublement périodiques par le biais d'expériences. **Cognet** a décrit l'apparition des régimes aperiodiques comme le résultat d'une cascade infinie d'instabilités, de sorte que chaque nouvelle instabilité introduit sa fréquence caractéristique dans la dynamique du fluide. Ce scénario de transition multi-périodique vers la turbulence a été rapporté par **Landau (1944)**.

Au delà du premier point de bifurcation Ta_c , la multiplicité des solutions axisymétriques périodiques a été observée expérimentalement par **Burkhalter & Koschmieder (1974)** [10] en démarrant brusquement la rotation du cylindre intérieur d'une part, et numériquement par **Alziary & Grillaud (1978)** [5] en choisissant diverses conditions initiales d'autre part. Les écoulements super-critiques se distinguent les uns des autres par le nombre de cellules.

Enfin, il existe dans la littérature des travaux relatant la combinaison d'un écoulement de Taylor-Couette rotor-stator (seule la paroi interne tourne à une vitesse angulaire constante) avec :

- Un écoulement axial de type Poiseuille : par exemple, les visualisations expérimentales de **Raguin, Shannon & Georgiadis (2001)** [54] ont montré qu'un faible débit engendre l'inclinaison et le rétrécissement des tourbillons de Taylor. Les investigateurs ont égale-

ment noté que la vitesse de progression des tourbillons dans la direction axiale est plus élevée que celle du débit imposé.

- Un forçage sinusoïdal au cours du temps : soit le cylindre interne oscille périodiquement le long de l'axe, soit le cylindre externe oscille périodiquement autour de l'axe. Dans un très récent papier, **Lopez & Marques (2002)** [38] s'attachent à explorer par voie numérique les bifurcations subies par ces écoulements modulés.
- La contra-rotation de la paroi externe : ce cas reste encore mal connu, mais les calculs tridimensionnels de **Czarny, Serre, Bontoux & Lueptow (2001)** [17] ont mis en évidence l'existence de structures spiralées complexes.

1.2.2 Disques libres et cavités inter-disques ouvertes

Historiquement, les premières investigations ont porté sur des configurations géométriques ouvertes composées d'un disque de rayon infini en rotation dans un fluide d'extension infinie dans la direction normale au disque. Le disque et le fluide peuvent tourner indépendamment l'un de l'autre. Dans ce contexte idéalisé, **Von Kármán (1921)** a déterminé analytiquement des solutions générales aux équations de Navier-Stokes sous l'hypothèse de similarité.

Plus tard, **Bödewadt (1940)** [9] a montré la présence d'une couche limite centripète sur un disque stationnaire de rayon infini placé dans un fluide visqueux en rotation. Ensuite, la situation inverse a été examinée par **Ekman (1950)** [22] : ses travaux ont montré l'existence d'une couche limite centrifuge sur un disque d'extension radiale infinie qui tourne dans un fluide visqueux au repos.

Les investigations qui ont suivi se sont concentrées sur les scénarios de transition pour des écoulements plus réalistes avec des disques de rayon fini. Dans ce cadre, **Wilkinson & Malik (1985)** [76] ont décrit l'apparition deux types de topologie en rouleaux organisés en spirales dans une couche limite de type **Ekman**. Une façon de les différencier consiste à comparer l'angle α formé par l'axe des rouleaux et la direction azimutale :

- Les structures de type I correspondent à des spirales stationnaires par rapport à la rotation du disque et $\alpha \in [10^\circ, 15^\circ]$.
- Les structures de type II prennent la forme de spirales instationnaires animées d'un mouvement centrifuge et $\alpha \in [-20^\circ, 0^\circ]$.

Les études de stabilité linéaire ont révélé que ces structurations pouvaient être perçues comme la manifestation d'une instabilité inflexionnelle pour le type I et visqueuse pour le type II. Par ailleurs, les travaux expérimentaux de **Savas (1987)** [57] ont montré l'existence de structures spatiales de type I dans les écoulements de type **Bödewadt**.

Par la suite, les recherches se sont orientées vers des écoulements entre deux disques co-axiaux parallèles d'extension radiale finie dont l'un est en rotation. Ces configurations rotor-stator ont soulevé une célèbre polémique opposant **Batchelor (1951)** [6] et **Stewartson (1953)** [69] dont l'objet fût l'existence [6] ou non [69] d'une couche limite sur le stator. En fait, il s'avère que

ces deux solutions sont possibles : les configurations fermées paraissent plus propices aux solutions de type **Batchelor**, alors que l'absence de ceinture périphérique est favorable au développement d'une solution de type **Stewartson**.

Les cas académiques précédents préfigurent les deux classes d'écoulements tournants dont nous allons parler maintenant.

1.2.3 Cavités inter-disques fermées

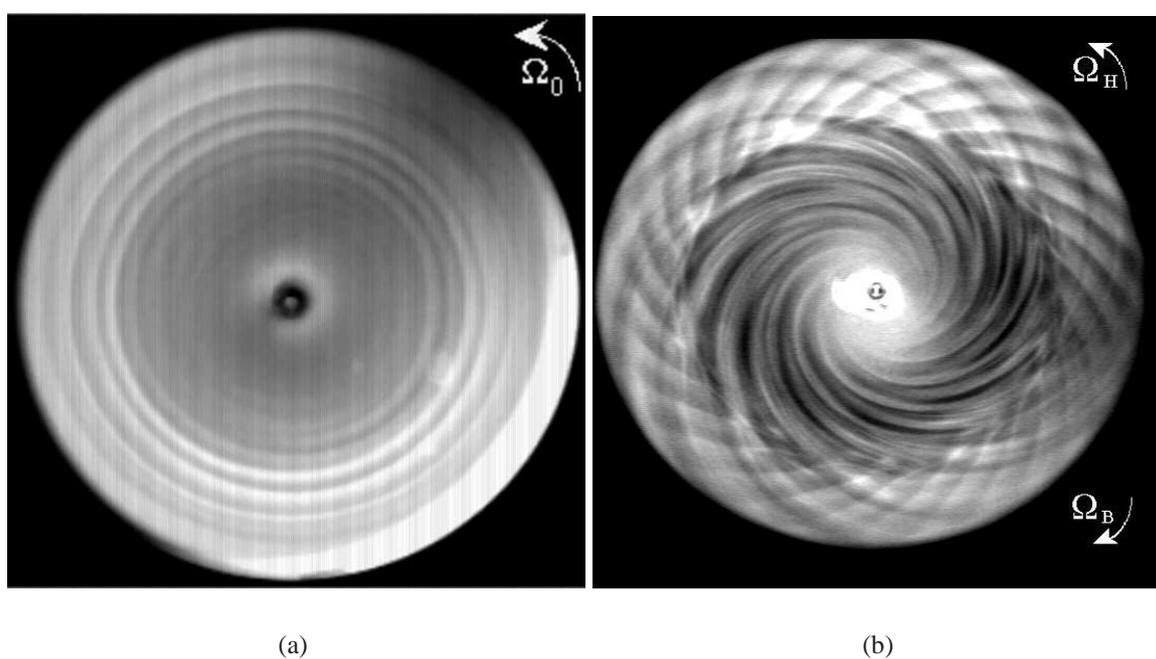


FIG. 1.3 – Deux exemples d'écoulements inter-disques visualisés expérimentalement par **G. Gauthier, P. Gondret et M. Rabaud**. (a) Situation rotor-stator : cercles concentriques se propageant depuis la périphérie vers le centre. (b) Contra-rotation : superposition des réseaux de spirales positives et négatives.

Les géométries inter-disques se composent de deux disques horizontaux d'axe commun fermés à leur périphérie par un bandeau vertical fixe. Le rayon des couvercles R et la distance H qui les sépare (entrefer) sont tels que le rapport d'aspect $h = H/R$ soit plus petit que l'unité. Lorsque la rotation d'un des disques est faible, les couches limites décrites ci-dessus sont jointes (solutions dites de **Couette**). Au contraire, l'augmentation de la rotation engendre l'amincissement puis la séparation des couches limites (solutions dites de **Batchelor**). Dans ce cas, le fluide localisé autour de l'axe de symétrie est en rotation solide.

Dans le cadre des écoulements rotor-stator (un seul disque tourne à vitesse angulaire constante),

Cousin-Ritemard, Daube & Le Quéré (1998,1999) se sont attachés à élucider la nature de la première bifurcation qui, curieusement, conduit directement aux régimes chaotiques. Dans cette optique, les auteurs ont examiné les solutions trouvées en intégrant les équations de Navier-Stokes axisymétriques stationnaires [15, 16] et instationnaires [14].

Récemment, **Daube & Le Quéré (2002)** [21] se sont focalisés sur ce problème en menant une analyse de stabilité linéaire dans une cavité dont le rapport de forme h est fixé à 0.1. Par le biais de calculs axisymétriques, ils montrent que la première bifurcation présente des aspects sous-critiques et qu'aucun cycle limite n'est observé au voisinage du seuil de stabilité linéaire. En outre, des solutions aperiodiques existent en deçà du point de transition.

Les investigations expérimentales de **Gauthier, Gondret & Rabaud (2001)** [26] corroborent la nature très instable des écoulements inter-disques. En combinant les vitesses angulaires de rotation des deux disques et en effectuant des visualisations de l'écoulement par nappe laser, les auteurs ont fait apparaître une grande variété de structures. En situation rotor-stator, des ondes propagatives circulaires ont été observées (Fig. 1.3.a) alors qu'en contra-rotation, les motifs sont des spirales positives et/ou négatives (Fig. 1.3.b) éventuellement superposées à des ondes axisymétriques ².

Lopez, Hart, Marques, Kittelman & Shen (2002) [41] se sont intéressés aux écoulements de fluides dans une cavité contra-rotative de rapport d'aspect $h = 0.5$. En particulier, les simulations tridimensionnelles et les visualisations expérimentales s'accordent sur la coexistence d'ondes azimutales tournantes associées aux modes $m = 4$ et 5 pour certaines valeurs du différentiel de rotation des disques.

Des simulations numériques tridimensionnelles de l'écoulement dans une cavité inter-disque avec un moyeu central ont également été effectuées. Par exemple, la publication de **Serre, Crespo del Arco & Bontoux (1999)** [58] apporte des éléments nouveaux quant à la nature de l'instabilité des couches limites dans ces systèmes. Pour certaines combinaisons des paramètres de contrôle (i.e. : le nombre de Reynolds, dont la définition est donnée au chapitre suivant, et le rapport entrefer/rayon), la topologie de l'écoulement se compose de paires de rouleaux progressant sous forme de bras spiralés. L'analyse de leur inclinaison α par rapport à une normale à l'axe de rotation suggère que ces structures tridimensionnelles oscillatoires sont analogues aux instabilités de type I et II dont nous avons déjà parlé précédemment.

Dans la littérature, on trouve des travaux expérimentaux et numériques relatant l'écoulement d'un fluide visqueux incompressible dans des cuves cylindriques rotor-stator. De telles configurations géométriques peuvent être décrites comme des cavités inter-disques rotor-stator pour lesquelles la distance séparant les deux couvercles est plus grande que leur rayon (i.e. : $h = H/R \geq 1$). Dans le cadre de ce travail, c'est précisément sur cette classe d'écoulements en rotation que nous nous sommes focalisés : le prochain chapitre leur est entièrement consacré.

²Photographies téléchargées depuis le site "www.ariane.fast.u-psud.fr/rabaud/Recherches/Disques.html"

Remarque – Les systèmes de Taylor-Couette et les écoulements inter-diques ne seront donc pas abordés dans la suite du manuscrit. Néanmoins, il est intéressant de noter que toutes ces configurations géométriques peuvent être traitées numériquement en adaptant le même code de calcul.

1.3 Plan du mémoire

Ce premier chapitre d'introduction a permis de resituer notre étude dans le contexte des écoulements en rotation. Nous avons choisi d'organiser ce mémoire de thèse de la manière suivante.

- Le chapitre 2 concerne les écoulements entraînés par un disque en rotation au fond d'une cuve stationnaire. Après avoir décrit ce système, nous proposerons une analyse bibliographique donnant un aperçu des connaissances actuelles sur la dynamique de ces écoulements. En outre, les objectifs de notre étude seront précisés dans ce chapitre.
- Le chapitre 3 est consacré à la mise en équation du problème. Les équations d'évolution sont résolues numériquement par les techniques détaillées au chapitre 4.
- Au chapitre 5, les calculs présentés sont comparés à quelques résultats de la littérature, ce qui nous a permis de valider la méthode utilisée.
- Dans les chapitres 6 et 7, nous rapportons l'analyse des calculs tridimensionnels pour des cuves cylindriques dont le rapport d'allongement axial h est fixé à 1 puis 1.5. En particulier, on s'appliquera à donner des informations concernant la rupture spontanée de l'axisymétrie de l'écoulement d'une part, et à caractériser les structurations spatio-temporelles des différentes solutions atteintes d'autre part.
- La dernière partie de ce mémoire constitue la conclusion générale de ce travail et quelques perspectives seront proposées.

Chapitre 2

Cuves cylindriques rotor-stator

Comme nous l'avons déjà précisé au chapitre précédent, ce mémoire porte sur la simulation des écoulements tridimensionnels dans une enceinte cylindrique de type rotor-stator. Dans la première partie de ce chapitre, nous donnons une esquisse des systèmes envisagés ainsi que les paramètres de contrôle (§2.1). Ensuite, nous présentons quelques résultats de la littérature obtenus par le biais d'expériences ou de simulations numériques axisymétriques et, plus récemment, tridimensionnelles (§2.2). Ces publications rendent compte des progrès réalisés dans la compréhension de la dynamique de ces écoulements, mais elles montrent également que certaines questions restent ouvertes. Celles-ci ont motivé la présente investigation (§2.3).

2.1 Description du système

2.1.1 Configuration géométrique et paramètres de contrôle

On considère une enceinte cylindrique de hauteur H et de rayon R_o complètement remplie d'un fluide visqueux incompressible¹. La cavité se compose d'un bandeau périphérique fixe et de deux couvercles fermant le cylindre. La mise en mouvement du fluide (c'est-à-dire le forçage externe) est due à la rotation de l'un des couvercles à une vitesse angulaire constante, notée Ω_o .

Par convention, nous représenterons toujours la cuve rotor-stator comme sur la figure 2.1. Le bandeau périphérique est placé verticalement (suivant l'axe z) et les disques sont en position horizontale. Le disque moteur est celui du bas (en $z = 0$) et tourne dans le sens trigonométrique lorsque celui-ci est observé depuis le haut de la cuve.

L'écoulement engendré par la rotation du couvercle inférieur est gouverné par :

- Un paramètre géométrique : le rapport de forme $h = \frac{H}{R_o}$

¹Le champ de vitesse est solénoïdal ou encore le taux de dilatation volumique est identiquement nul en tout point de l'écoulement et à tout instant.

➤ Un paramètre dynamique : le nombre de Reynolds de rotation $Re = \frac{R_o^2 \Omega_0}{\nu}$

où ν désigne la viscosité cinématique du fluide. Nous aurons l'occasion de revenir sur ces paramètres de contrôle au chapitre suivant.

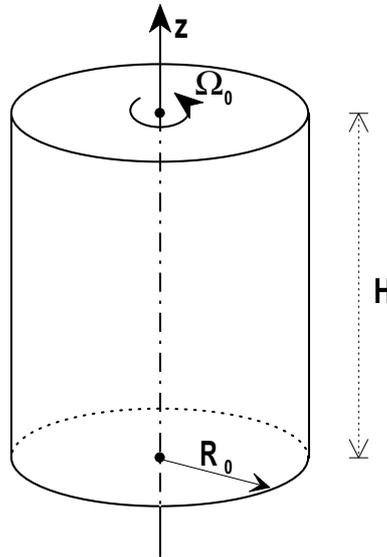


FIG. 2.1 – Représentation schématique d'une cuve rotor-stator cylindrique ($h = H/R_o \geq 1$).

2.1.2 Description de l'écoulement

Dans une telle configuration géométrique, le mouvement du fluide résulte de la superposition d'un écoulement principal dans la direction azimutale et d'une recirculation secondaire méridionale (Fig. 2.2.a). Les différentes couches limites qui apparaissent sont les suivantes :

- La couche limite centrifuge dite d'**Ekman** liée au disque tournant. Son épaisseur est de l'ordre de $Re^{-0.5}$.
- La couche limite dite de **Stewartson** liée à la ceinture périphérique immobile.
- La couche limite centripète dite de **Bödewadt** liée au couvercle stationnaire.

Les principaux aspects de cet écoulement sont les suivants. Une couche limite, dite d'Ekman, se développe juste au dessus du couvercle en rotation à la vitesse angulaire constante Ω_0 . La superposition des effets centrifuges et de la force de Coriolis déplacent radialement le fluide en spirale vers la périphérie et l'entraîne au dessus du disque moteur. La composante azimutale de la vitesse augmente avec la position radiale sur le couvercle tournant et décroît lorsqu'on s'en éloigne dans la direction axiale. La combinaison de ce déplacement spirale avec la présence de la paroi verticale fixe donne lieu à un écoulement secondaire dans le plan méridien. Au cours du temps, le fluide va acquérir suffisamment de quantité de mouvement pour atteindre le voisinage du couvercle stationnaire où se développe une couche limite dite de Bödewadt, dans laquelle l'écoulement subit un mouvement radial centripète en spirale. Le

fluide décélère depuis la périphérie vers l'axe de rotation. Sous l'action du pompage d'Ekman, le fluide regagne le couvercle inférieur avec un mouvement tourbillonnaire autour de l'axe du cylindre.

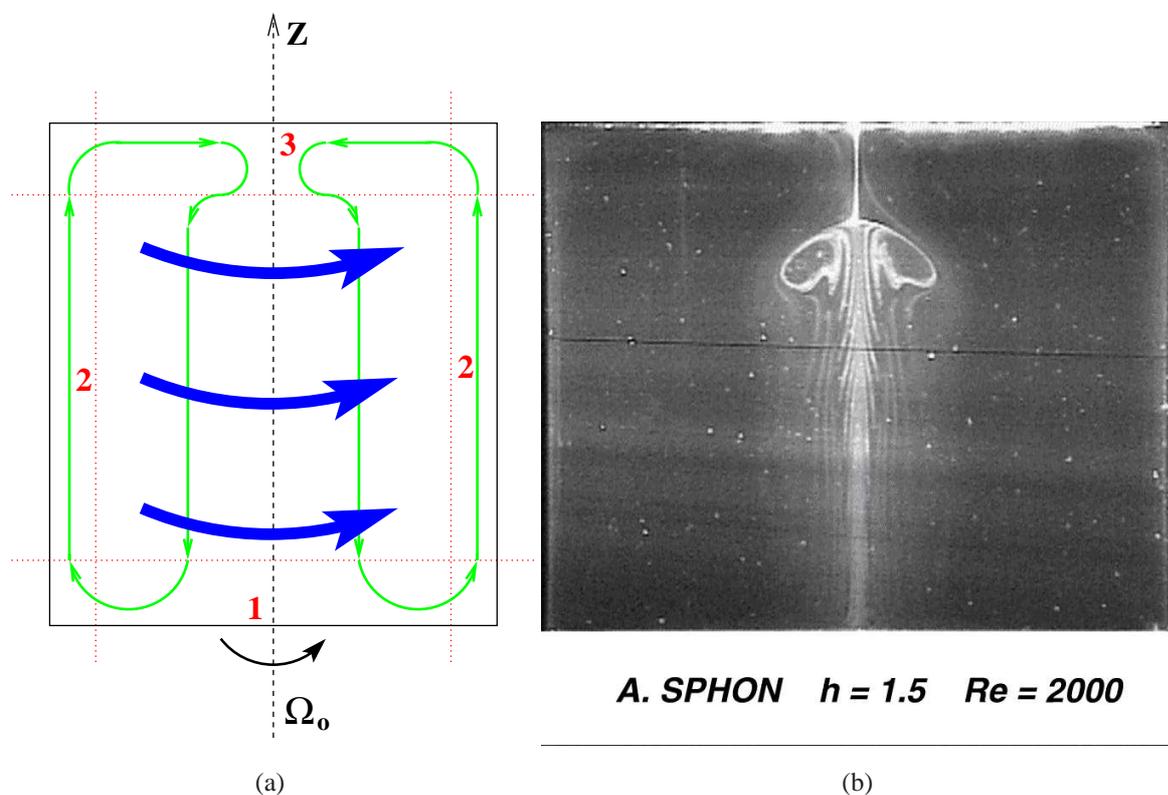


FIG. 2.2 – (a) Schéma de l'écoulement dans un plan (r, z) . L'écoulement principal est représenté par les flèches bleues et les zones de recirculation secondaires sont tracées en vert. Les couches limites d'Ekman (1), de Stewartson (2) et de Bödewadt (3) sont représentées par des pointillés rouges. (b) Visualisation expérimentale d'un éclatement tourbillonnaire en milieu confiné réalisée par Spohn. Ce document a été fourni par l'auteur.

Suivant les combinaisons (Re, h) , un ou plusieurs points d'arrêt peuvent apparaître sur l'axe du cylindre en aval desquels se développe un bulbe de recirculation d'extension finie, comme le montre la photographie 2.2.b. Certains chercheurs ont assimilé ces bulles à des phénomènes très importants en aérodynamique : **les éclatements tourbillonnaires**. En aéronautique, l'apparition d'éclatements tourbillonnaires sur le bord d'attaque des ailes delta provoque une chute dramatique des performances aérodynamiques des avions de grande manœuvrabilité. Par ailleurs, certaines technologies exploitent les éclatements tourbillonnaires confinés (comme les chambres de combustion) et leur fonctionnement peut être optimisé en contrôlant les zones de recirculation. Ceci va de pair avec une bonne compréhension fondamentale de ce phénomène.

Dès lors, cette configuration géométrique a connu un regain d'intérêt, car elle est considérée

comme propice pour élucider ce phénomène complexe. On peut argumenter cette idéalisation de la façon suivante. D'une part, les éclatements tourbillonnaires y apparaissent à des nombres de Reynolds relativement peu élevés. D'autre part, le fluide est complètement enfermé et les conditions aux limites sont parfaitement définies. Les éclatements tourbillonnaires confinés ont été mis en évidence expérimentalement par **Spohn (1991)** [66] dans des configurations à surface libre et par **Pereira & Sousa (1999)** [51, 52] dans des configurations où le rotor a une forme conique. Toutefois, de telles géométries ne seront pas abordées ici.

2.2 Étude bibliographique

2.2.1 Travaux expérimentaux

Vogel (1968) [75] a entrepris les premières investigations expérimentales sur les écoulements de fluides visqueux dans des enceintes cylindriques rotor-stator. Il a visualisé des zones de recirculation pour certaines combinaisons des paramètres $h \simeq 2$ et $Re \in [1500, 3000]$. Un colorant fluorescent (fluorescéine) est injecté à partir d'un tube au centre du disque immobile. Les particules sont transportées le long de l'axe de rotation puis se répandent dans les zones de recirculation. Les lignes d'émission sont alors visualisées dans des tranches lumineuses en utilisant un laser et sont ensuite photographiées.

Plus tard, **Escudier (1984)** [23] a confirmé les résultats expérimentaux de **Vogel** et a étendu cette étude pour d'autres valeurs de Re et h . Il a replacé ainsi l'apparition de ces zones de recirculation dans le contexte des phénomènes d'éclatements tourbillonnaires en leur attribuant un caractère essentiellement axisymétrique. L'auteur a résumé les différents régimes d'écoulements observés sur un diagramme dans l'espace des paramètres. Celui-ci (voir Fig. C.1 en annexe) fournit principalement deux types d'informations :

- Dans le cas d'un écoulement stationnaire, une, deux, ou trois bulles de recirculation apparaissent le long de l'axe de rotation. Ces bulles sont caractérisées par l'existence de points d'arrêt le long de cet axe, précédant une zone où le sens de la vitesse axiale s'inverse.
- L'écoulement devient instationnaire pour des nombres de Reynolds supérieurs à une certaine valeur critique Re_c . Dans ce cas, aucune information relative à la structure de l'écoulement n'est disponible.

Spohn, Mory & Hopfinger (1998) [67] ont réalisé une série d'expériences dans des cuves cylindriques pour lesquelles le couvercle inférieur est en rotation. L'étude est menée pour une gamme de rotation couvrant les régimes stationnaires et instationnaires. La formation de l'éclatement tourbillonnaire, sa topologie et la structure de l'écoulement qui l'entoure sont examinées en détail dans deux configurations géométriques : l'une est à surface libre alors que l'autre est fermée par un disque immobile.

Dans cette étude, les marqueurs sont injectés dans le fluide de deux façons différentes. L'une consiste à introduire un colorant fluorescent depuis le centre du couvercle supérieur immobile

(comme l'ont fait **Vogel** puis **Escudier**). L'autre consiste à émettre des traceurs par électrolyse d'un fil d'étain. Un premier fil est placé sur un périmètre du cylindre au voisinage du couvercle moteur. Un deuxième fil est circonférence du disque stationnaire. Ce procédé offre une meilleure résolution et permet d'injecter les particules de façon quasi-axisymétrique. Une nappe lumineuse permet alors de visualiser la distribution de marqueurs en suspension dans un plan. La technique PIV (Images de Particules par Vélocimétrie) est appliquée pour mesurer les champs de vitesse : une caméra vidéo fournit deux images successives dans un plan de mesure et le champ de vitesse est reconstruit par corrélations d'images.

Leurs photographies montrent que la bulle de recirculation qui se forme le long de l'axe de symétrie pour les paramètres de contrôle $Re = 1850$ et $h = 1.75$ est ouverte et non-axisymétrique en aval, alors que l'écoulement est encore stationnaire. Ces résultats surprennent car les calculs axisymétriques instationnaires de **Lopez & Perry (1992)** [37] ont montré que les lignes de courant dans la bulle sont fermées lorsque l'écoulement est stationnaire, alors que les éclatements tourbillonnaires ouverts sont la conséquence d'oscillations périodiques des zones de recirculation. Pour **Lopez** et ses collaborateurs, ces désaccords sont la conséquence d'imperfections du dispositif expérimental. Enfin, **Spohn et al.** montrent que les séparations de la couche limite sur la paroi verticale sont responsables des asymétries observées.

Stevens, Lopez & Cantwell (1998) [68] explorent la nature des oscillations des écoulements instationnaires dans une cuve dont le rapport d'aspect est fixé à $h = 2.5$. D'un point de vue expérimental, les marqueurs sont émis depuis le centre du couvercle fixe et les visualisations de l'écoulement sont obtenues par fluorescence induite par nappe laser dans un plan méridien. Ils détectent alors trois branches de solutions correspondant à trois périodes distinctes. La première branche connecte des solutions axisymétriques périodiques ($2\pi T_1 = 36$ tours) pour des nombres de Reynolds dans l'intervalle $[2700, 3500]$. Lorsque Re dépasse la valeur 3500, une seconde branche d'états non-axisymétriques périodiques ($2\pi T_3 = 28$ tours) apparaît. En outre, il existe une troisième branche à cheval sur les deux précédentes, soit $Re \in [3200, 3700]$, constituée de solutions non-axisymétriques quasi-périodiques avec une période fondamentale $2\pi T_2 = 57$ tours et une faible modulation de fréquence. Cette dernière semble très sensible aux variations du nombre de Reynolds et de ce fait, les auteurs n'ont pas pu la déterminer précisément. À l'instar de **Sørensen & Christensen** [63] (paragraphe suivant), **Stevens et al.** observent des sauts entre les branches T_1 et T_2 , puis entre les branches T_2 et T_3 . L'existence de branches de solutions multiples est également confirmée par leurs calculs axisymétriques instationnaires.

2.2.2 Simulations numériques axisymétriques

2.2.2.1 Solutions stationnaires

Les premières analyses par voie numérique ont porté sur la résolution des équations de Navier-Stokes axisymétriques stationnaires. Formellement :

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \quad , \quad \forall f$$

où f est une variable dépendante quelconque. S'il est vrai que l'hypothèse d'axisymétrie est restrictive, il n'en demeure pas moins vrai qu'elle a permis une bonne compréhension des phénomènes observés expérimentalement. La formulation des équations de Navier-Stokes en termes de fonction de courant, vorticité azimutale et vitesse azimutale s'avère bien adaptée aux simulations axisymétriques. Nous aurons l'occasion d'argumenter ce point au chapitre 3. L'intégration des opérateurs aux dérivées partielles spatiales est réalisée soit par des méthodes spectrales de Galerkin, soit par des méthodes de différences finies d'ordre quatre.

Les calculs de **Lugt & Abboud (1987)** [43] sont en accord avec les conclusions d'**Escudier** en ce qui concerne le nombre de bulles de recirculation et leurs dimensions caractéristiques. Les auteurs concluent que l'apparition des éclatements tourbillonnaires est due à un gradient de pression qui s'oppose à l'écoulement axial en $r = 0$. Par ailleurs, l'influence d'un gradient de température sur le développement des éclatements tourbillonnaires est explorée en résolvant l'équation de conservation de l'énergie sous l'hypothèse de **Boussinesq**².

2.2.2.2 Solutions instationnaires

Par la suite, les chercheurs ont abandonné le modèle stationnaire en utilisant des algorithmes de marche en temps, basés par exemple sur un schéma ADI de Peaceman et Racheford. En particulier, les calculs axisymétriques instationnaires ont mis en évidence la nature instable de ces écoulements.

Daube & Sørensen (1989) [18] étudient la transition depuis un écoulement axisymétrique stationnaire vers des écoulements axisymétriques périodiques dans une cavité de rapport de forme $h = 2$. La gamme de nombres de Reynolds explorée est [2400, 5000]. Ils montrent que des solutions instationnaires apparaissent au delà de la valeur critique $Re_c \simeq 2400$ via une bifurcation de Hopf super-critique. Cette valeur numérique est inférieure à la valeur 2600 trouvée expérimentalement par **Escudier**. En outre, leurs simulations révèlent l'existence de deux branches distinctes de solutions correspondant à deux fréquences fondamentales f_1 et f_2 , respectivement égales à 0.25 et 0.3 fois la fréquence de rotation du disque entraînant le fluide. Les solutions appartiennent à la branche f_1 pour $Re \in [2400, 3500]$ tandis que pour $Re > 4250$, les solutions sont connectées par la branche f_2 . Le passage d'une branche à l'autre s'effectue par des sauts décrivant une boucle d'hystérésis.

L'étude numérique précédente est poursuivie par **Sørensen & Christensen (1995)** [63]. Leurs investigations portent sur la transition depuis un état axisymétrique stationnaire vers le chaos pour des nombres de Reynolds compris entre 500 et 8000. D'après leurs simulations, il s'avère que plusieurs solutions instationnaires coexistent dans cette gamme de rotation et qu'une telle multiplicité ne peut être mise en évidence en faisant varier le paramètre dynamique de façon monotone. Leurs calculs sont donc menés de sorte que l'état asymptotique de la solution précédente constitue la condition initiale pour le calcul suivant. La route vers les régimes aperiodiques décrite dans ce papier fait apparaître trois pulsations fondamentales, soient $f^I \in [0.238, 0.246]$, $f^{II} \in [0.167, 0.174]$ et $f^{III} \in [0.303, 0.309]$. Celles-ci se répartissent sur

²Cette hypothèse consiste à dire que les variations de la masse volumique du fluide avec la température ne sont prises en compte que dans le terme de poussée d'Archimède.

quatre gammes de Re . **Sørensen & Christensen** identifient les différentes bifurcations impliquées dans ce scénario de transition en comparant les fréquences des états asymptotiques de part et d'autre des sauts. Enfin, lorsque le nombre de Reynolds franchit la valeur 6939, des régimes non-périodiques apparaissent via un scénario de type **Ruelle-Takens**³.

2.2.2.3 Études de stabilité linéaire

Une autre approche consiste à calculer un écoulement de base axisymétrique stationnaire u_b , stable ou instable, par une méthode itérative de type Newton, puis à étudier la stabilité linéaire d'une telle solution vis-à-vis d'une perturbation axisymétrique infinitésimale u_p . Dans ce but, les solutions u des équations de Navier-Stokes axisymétriques instationnaires sont recherchées par voie numérique en supposant que u s'écrive de la façon suivante pour les temps longs :

$$u(r, z, t) = u_b(r, z) + e^{\lambda t} u_p(r, z)$$

Il s'ensuit que le problème se réduit au calcul du spectre des valeurs propres $\lambda = \sigma \pm i\omega$ de l'opérateur linéaire des équations de Navier-Stokes (c'est-à-dire le Jacobien). La mise en œuvre d'une méthode d'Arnoldi permet ensuite d'extraire du spectre les valeurs propres de plus grand module. Dès que la partie réelle d'une valeur propre dominante (au moins une) devient positive, la solution de base est linéairement instable. Soulignons le fait qu'une telle approche exclut le développement d'instabilités non-axisymétriques.

Gelfgat, Bar-Yoseph & Solan (1996) [27] ont mené une analyse de stabilité linéaire pour des rapports d'aspect compris entre 1 et 3. Les simulations ont prouvé que les écoulements de base axisymétriques stationnaires accèdent aux régimes oscillatoires via une bifurcation de Hopf super-critique. Enfin, l'apparition et la disparition des éclatements tourbillonnaires ne sont pas liées à la perte de stabilité de la solution de base, mais résultent d'une évolution continue de l'écoulement méridional à mesure que le nombre de Reynolds est augmenté. Ces conclusions viennent confirmer les investigations précédentes, en particulier celle menée par **Tsitverblit (1993)** [72].

Les expériences de **Stevens et al.** [68] ainsi que les simulations numériques tridimensionnelles de **Blackburn & Lopez** [7] (voir section suivante) dans une cuve telle que $h = 2.5$ ont reporté l'existence de solutions périodiques multiples pour des nombres de Reynolds compris entre 2500 et 4000. L'origine de cette multiplicité a motivé une récente analyse de stabilité linéaire par **Lopez, Marques & Sanchez (2001)** [40]. Leurs conclusions, résumées dans le tableau 2.1, sont en très bon accord avec celles de **Stevens et al.**.

³**Ruelle, Takens & Newhouse (1978)** objectent le scénario multi-périodique avancé par **Landau**. Ils montrent qu'un système dynamique ne peut présenter de solutions stables inscrites dans un tore T^3 , c'est-à-dire ayant trois fréquences incommensurables.

$h = 2.5$			
Lopez <i>et al.</i> (2001)		Stevens <i>et al.</i> (1998)	
Re	λ	Re	Solutions observées
[2707, 3300]	$\sigma_1 > \sigma_{2,3}$	[2707, 3400]	Axisymétriques périodiques T_1
[3200, 3400]	$\sigma_1 \simeq \sigma_2 \simeq \sigma_3$	[3200, 3650]	Non-axisymétriques quasi-périodiques T_2
> 3300	$\sigma_3 > \sigma_{1,2}$	> 3600	Non-axisymétriques périodiques T_3

TAB. 2.1 – Analyse de stabilité linéaire de **Lopez *et al.*** [40] comparée aux observations expérimentales de **Stevens *et al.*** [68].

L'analyse de stabilité linéaire montre que trois paires de valeurs propres complexes conjuguées $\lambda_{j \in [1,3]}$ se distinguent du spectre pour des nombres de Reynolds compris entre 2500 et 4000. La partie réelle σ_1 devient positive au point $Re_c = 2707$ et témoigne du fait que la solution de base devient linéairement instable en franchissant cette valeur critique. Ce résultat est conforme aux données publiées antérieurement. La valeur propre λ_2 n'est jamais dominante, mais il existe une gamme de Re dans laquelle les trois parties réelles ont des taux de croissance comparables. Des interactions non-linéaires sont donc susceptibles de se développer dans cet intervalle et peuvent expliquer l'observation de solutions quasi-périodiques en laboratoire. D'autre part, les auteurs ont également réalisé des simulations axisymétriques non-linéaires et les structurations spatiales sont quasiment identiques à celles associées aux valeurs propres dominantes. Enfin, **Lopez *et al.*** affirment que l'instabilité des modes est initiée par des tourbillons de Görtler⁴ qui sont transportés le long de la ceinture périphérique fixe par l'écoulement de base jusqu'au disque immobile où se créent des effets centrifuges importants.

2.2.3 Simulations numériques tridimensionnelles

2.2.3.1 Études de stabilité linéaire

L'analyse de stabilité linéaire est une étape préliminaire très précieuse avant d'entreprendre les simulations numériques directes tridimensionnelles. Un avantage majeur de cette approche est la détermination des paramètres de contrôle critiques de la première transition en sollicitant beaucoup moins de ressources informatiques.

Dans un second papier, **Gelfgat, Bar-Yoseph & Solan (2001)** [28] ont étudié la stabilité linéaire d'un état de base axisymétrique stationnaire face à des perturbations infinitésimales tridimensionnelles. L'approximation spatiale combine un développement en série de Fourier dans la direction azimutale et une méthode spectrale de Galerkin dans le plan méridien. Le problème tridimensionnel complet de la stabilité est alors remplacé par une séquence de problèmes quasi-bidimensionnels pour chaque mode de Fourier k . Les principaux résultats de cette étude sont regroupés dans un diagramme (Fig. C.2 en annexe) qui représente les courbes

⁴Ce sont des tourbillons contra-rotatifs alignés dans le sens de l'écoulement. Leur origine est liée au déséquilibre entre le gradient radial de pression et les effets centrifuges.

de stabilité linéaire des modes $k \in [0, 5]$ dans l'espace des paramètres (Re, h) , avec $h \in [1, 3.5]$ et $Re \in [2000, 5000]$. On en tire les informations suivantes :

- Même si les instabilités non-axisymétriques sont permises, l'instabilité axisymétrique $k = 0$ est la plus critique pour $1.63 \leq h \leq 2.76$. Ces simulations corroborent les observations d'**Escudier** pour la même gamme de rapport d'aspect. Contrairement aux investigations de **Spohn et al.**, ces résultats indiquent que l'écoulement est encore axisymétrique stationnaire pour les paramètres $h = 1.75$ et $Re = 1850$.
- En dehors de cette gamme, les instabilités non-axisymétriques sont dominantes : le mode le plus instable est $k = 2$ pour $h \leq 1.63$, puis $k = 3$ ou 4 lorsque $h \geq 2.76$.

D'autre part, les auteurs soulignent certains désaccords avec les expériences d'**Escudier** pour des configurations à $h \geq 3$:

- Lorsque $h = 1.63$, l'instabilité non-axisymétrique devient axisymétrique. Au contraire, l'instabilité axisymétrique devient non-axisymétrique à partir de la valeur $h = 2.76$. Cette dernière valeur est légèrement inférieure à celle trouvée par **Escudier** ($h = 3$).
- Il s'avère que les seuils de stabilité numériques sont plus bas.
- **Escudier** affirme que la précession des éclatements tourbillonnaires constitue la première manifestation de l'instationnarité. Celle-ci semble correspondre à l'instabilité d'un mode $k = 1$, alors que **Gelfgat et al.** prédisent un mode $k = 3$ ou 4 dominant.

2.2.3.2 Solutions tridimensionnelles

L'observation de non-axisymétries par le biais d'expériences a fait couler beaucoup d'encre et les résultats expérimentaux ont parfois été montrés du doigt (fiabilité des installations compte tenu de la sensibilité de ces écoulements aux bruits, techniques de visualisation). Des questions concernant la brisure de l'axisymétrie de l'écoulement sont restées sans réponses. De ce fait, quelques chercheurs, essentiellement **Lopez** puis **Sotiropoulos**, se sont proposés d'en expliquer les mécanismes par voie de calculs tridimensionnels. Ces investigations sont étroitement liées aux progrès continus des moyens informatiques (temps de calculs, capacité de stockage, outils numériques de visualisations 3D) qui ont permis d'envisager une approche numérique raisonnable de ces problèmes dans les trois directions de l'espace.

Lopez et ses différents collaborateurs (voir ci-dessous) résolvent les équations de Navier-Stokes tridimensionnelles instationnaires en coordonnées cylindriques. Leurs investigations sont réalisées au moyen d'un code de calcul vitesse-pression dont les principaux ingrédients sont les suivants. La discrétisation spatiale combine les polynômes de Legendre dans le plan méridien (r, z) et une décomposition en série de Fourier dans la direction azimutale. La marche en temps est fondée sur un schéma semi-implicite d'ordre deux et l'incompressibilité du fluide est traité par un algorithme de projection.

Pour le rapport d'allongement $h = 3$, les calculs en perturbations de **Marques & Lopez (2001)** [47] indiquent que la solution de base axisymétrique stationnaire subit une bifurcation de Hopf super-critique au point $Re_c = 2730$: les solutions super-critiques correspondent alors à une onde tournante $k = 4$. Ces résultats confirment ceux de **Gelfgat et al.** [28]. **Marques & Lopez** montrent que le domaine spatial affecté par le mode $k = 4$ est éloigné de l'axe. En

augmentant le nombre de Reynolds jusqu'à 2900, une bifurcation de Naimark-Sacker⁵ super-critique se produit et une seconde fréquence associée au mode $k = 1$ apparaît. Ce mode se manifeste sous forme d'une précession des éclatements tourbillonnaires (conformément aux observations d'**Escudier**) et est localisé au voisinage de l'axe. Les investigateurs concluent qu'il n'y a pas de désaccord à proprement parler entre les calculs linéaires de **Gelfgat et al.** et les observations d'**Escudier**. En effet, les expériences réalisées par **Escudier** se concentrent sur le comportement des éclatements tourbillonnaires autour de l'axe : le mode azimutal $k = 4$ n'est donc pas détecté.

Les calculs en perturbations menés par **Blackburn & Lopez (2000)** [7] dans une cuve de rapport d'allongement axial $h = 2.5$ corroborent et approfondissent les travaux expérimentaux de **Stevens et al.** [68]. Une première publication concerne l'étude des solutions trouvées pour les nombres de Reynolds 3000, 3500 et 4000. Ces solutions sont obtenues en perturbant un écoulement de base au repos par une excitation aléatoire d'amplitude 10^{-8} sur le mode $k = 1$. L'analyse de l'évolution temporelle de l'énergie cinétique spectrale leur permet de formuler les conclusions suivantes :

- Pour $Re = 3000$, la solution est un cycle limite axisymétrique (branche T_1).
- Pour $Re = 3500$, la solution est une onde tournante modulée associée au mode $k = 5$ et ses harmoniques (branche T_2). La modulation de période vaut $2\pi T_{\text{mod}} \simeq 1325$ tours.
- Pour $Re = 4000$, la solution est aussi une onde tournante (branche T_3), mais celle-ci est associée aux nombres d'ondes $6n$ et ne présente pas de modulation de fréquence.

Les auteurs soulignent le fait que ces ondes tournantes restent fortement couplées à la composante axisymétrique de l'écoulement. **Blackburn & Lopez (2001)** [8] consacrent une seconde publication à l'examen détaillé de la dynamique des trois branches de solutions instationnaires précédentes.

Les récents travaux de **Marques, Lopez & Shen (2002)** [48] ont mis en évidence l'existence d'un point fixe double situé à $Re = 2626.6$ et $h = 1.583$. Ce point correspond à l'intersection entre la courbe de stabilité linéaire du mode $k = 0$ et celle du mode $k = 2$ sur le diagramme de **Gelfgat et al.**, c'est-à-dire $h = 1.63$ [28]. **Marques et al.** ont montré qu'il existe un voisinage du point double dans lequel les cycles limites de nombre d'onde $k = 2$ et les cycles limites axisymétriques coexistent. En outre, les passages depuis l'onde tournante associée au mode azimutal $k = 2$ vers les solutions axisymétriques périodiques (et inversement) s'opèrent via des bifurcations dites de Naimark-Sacker. Pour les auteurs, ce phénomène est révélateur de la compétition entre deux mécanismes. Ces derniers sont identifiés en analysant la topologie tridimensionnelle de l'écoulement d'une part, et la localisation spatiale de l'énergie cinétique spectrale moyenne d'autre part. La naissance de l'onde tournante semble liée à l'impact sur le disque immobile du jet tourbillonnaire issu de la couche limite centrifuge. La couche limite centripète est alors déstabilisée et provoque la rupture de la symétrie axiale. Lorsque le fluide est juste dévié par le couvercle fixe, la symétrie $SO(2)$ ⁶ est préservée et l'instationnarité résulte de la collision de l'écoulement avec lui-même près de l'axe.

⁵Il s'agit d'une bifurcation de Hopf entre cycles limites.

⁶Axisymétrie.

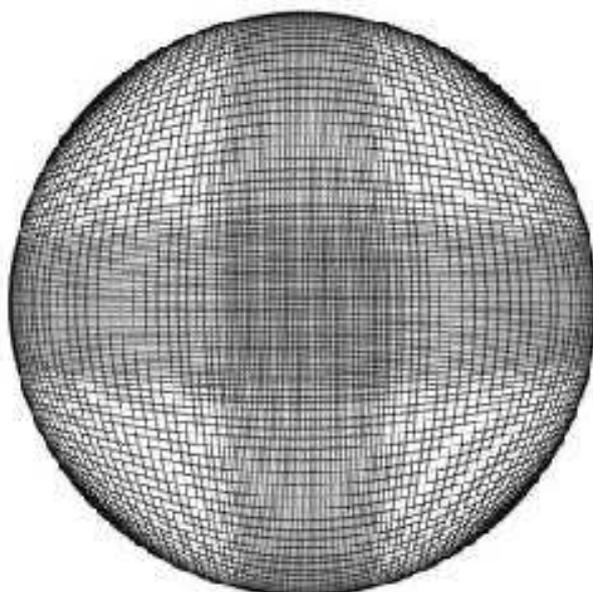


FIG. 2.3 – Maillage dans une section normale à l’axe du cylindre utilisé par **Sotiropoulos & Ventikos (2001)**. Cette image est une **reproduction** de la figure 1.(b) p.158 de la publication [65].

Sotiropoulos & Ventikos (1998) [64] explorent numériquement la tridimensionnalisation de l’écoulement dans une cuve telle que $h = 2$. Dans cette étude, ils montrent que l’écoulement obtenu pour $Re = 2100$ est stationnaire avec deux bulles de recirculation et présente des asymétries, contrairement aux expériences publiées. Ces asymétries naissent dans la couche limite du bandeau périphérique sous forme de structures spiralées situées en aval du disque tournant. D’après les auteurs, de telles non-axisymétries ne peuvent pas être détectées par des visualisations dans les plans méridiens, conduisant ainsi à des fausses conclusions sur la symétrie de l’écoulement. D’autre part, les simulations menées pour $Re = 3750$ pendant quelques dizaines de tours permettent aux auteurs de conclure que la transition depuis un éclatement tourbillonnaire stationnaire de type bulle vers une structure tourbillonnaire instationnaire organisée en spirales est due à la naissance de paires de tourbillons verticaux contra-rotatifs de type Taylor-Görtler dans la couche limite instable du cylindre fixe. Ces hélices verticales interagissent avec les zones de recirculation jusqu’à provoquer la disparition de tous les points d’arrêt sur l’axe.

Dans une autre publication, **Sotiropoulos & Ventikos (2001)** [65] montrent que leur code de calcul est capable de reproduire numériquement toutes les non-axisymétries observées expérimentalement par **Spohn et al.** [67]. De plus, les auteurs examinent l’origine de la rupture de symétrie axiale en calculant les trajectoires tridimensionnelles des particules et proposent l’interprétation suivante : les asymétries sont dues au développement de quatre paires de tourbillons verticaux contra-rotatifs dans la couche limite de Stewartson. Ces spirales perturbent l’axisymétrie de la couche limite liée au couvercle immobile à partir de laquelle émane le cœur tourbillonnaire et, par voie de conséquence, engendre la topologie tridimensionnelle de l’éclatement tourbillonnaire. Pour discrétiser les équations du mouvement, les auteurs utilisent un maillage régulier dans la direction axiale. Dans le plan normal à l’axe du cylindre, la grille cur-

viligne est telle que les mailles se resserrent à mesure que l'on se rapproche des parois solides et de l'axe de rotation. Il est important de souligner qu'un tel maillage (voir Fig. 2.3) présente clairement une symétrie d'ordre quatre. Dès lors, ce maillage peut introduire des modes azimutaux tridimensionnels non-physiques et ne semble pas adapté à l'investigation des mécanismes de brisure de l'axisymétrie. Il est donc légitime de poser la question suivante : cette grille peut-elle être à l'origine de l'apparition prématurée des non-axisymétries observées numériquement par les auteurs pour les paramètres $h = 1.75$ et $Re = 1850$? On tentera d'apporter une réponse à cette question au chapitre 5.

Les calculs complètement tridimensionnels de **Serre & Bontoux (2001)** [60] ont pour but d'explorer la structure de l'écoulement dans une cavité cylindrique dont le rapport d'aspect est supérieur à tous ceux rencontrés dans les publications précédentes : $h = 4$. Cette grande cuve a été sélectionnée pour réduire les effets stabilisants du confinement axial. Les solutions tridimensionnelles sont calculées par une méthode pseudo-spectrale de collocation Chebyshev-Fourier Galerkin. Un schéma aux différences finies semi-implicite du second ordre (schéma Euler retardé et extrapolation Adams-Bashforth) assure l'intégration temporelle. Le couplage vitesse-pression est traité par une méthode de projection améliorée. L'amélioration consiste à introduire une pression préliminaire à chaque pas de temps, permettant ainsi de diminuer le glissement pariétal sur les frontières. Le problème de la singularité sur l'axe de rotation est évité en effectuant un changement de fonctions primitives de façon à imposer une valeur nulle naturelle en $r = 0$:

$$\tilde{\Psi} = r \Psi \quad \text{avec} \quad \Psi = (u, v, w, p)$$

La solution trouvée pour $Re = 4500$ est axisymétrique instationnaire. Celle-ci s'avère stable vis-à-vis d'une perturbation aléatoire. En augmentant la rotation jusqu'à la valeur $Re = 6500$, des structures spatiales exhibant une périodicité azimutale d'ordre huit apparaissent et témoignent de la nature tridimensionnelle de l'écoulement. Enfin, pour cette combinaison des paramètres de contrôle, un éclatement tourbillonnaire a été mis en évidence sur l'axe de la cavité. Par la suite, une analyse approfondie de ces écoulements a fait l'objet de l'article [62].

2.3 Objectifs de l'étude

Cette analyse bibliographique révèle que la tridimensionnalisation des écoulements de fluides visqueux incompressibles, engendrés par la rotation de l'un des couvercles de la cuve, est toujours un sujet controversé. En outre, l'origine des solutions multiples qui coexistent pour certaines combinaisons des paramètres de contrôle ainsi que leurs interactions ne sont pas encore complètement élucidées. S'il est vrai que **Lopez** et ses collaborateurs ont intensément étudié ce problème, il n'en demeure pas moins vrai que leurs investigations numériques et expérimentales concernent essentiellement les grands rapports d'aspect ($h \simeq 2.5$).

Dans le cadre de ce travail, nous nous sommes fixés deux objectifs.

- Le premier objectif est le développement d'un outil d'investigation efficace. Il s'agit d'un code de calcul intégrant les équations de Navier-Stokes tridimensionnelles instationnaires pour un fluide incompressible. Ces équations sont formulées en termes de vitesse-pression et sont projetées dans un repère cylindrique.

L'intégration des opérateurs aux dérivées partielles en espace est basée sur une approche mixte qui combine une méthode aux différences finies dans le plan méridien et les développements en série de Fourier dans la direction périodique.

L'une des principales difficultés numériques du 3D, expliquant sans doute la faible quantité de publications sur ce sujet, est la prise en compte de l'axe de symétrie dans le domaine de calcul. En fait, l'axe $r = 0$ est perçu comme une singularité non-intégrable introduite par l'utilisation des coordonnées cylindriques. Une façon naturelle de prendre en compte l'axe de symétrie dans la discrétisation spatiale consiste à mettre en œuvre une méthode aux différences finies développée par **Hyman & Shashkov (1997)** [30]. Celle-ci utilise un maillage décalé de type MAC combiné avec une application systématique des théorèmes de Gauss et de Stokes pour définir les opérateurs divergence et rotationnel, tandis que l'opérateur gradient est défini par la propriété d'être le négatif adjoint de la divergence. En procédant ainsi, on évite l'introduction de conditions aux limites artificielles en $r = 0$.

La marche en temps est fondée sur un schéma aux différences finies semi-implicite du second ordre (schéma Euler retardé et extrapolation Adams-Bashforth). Une technique de projection est mise en œuvre pour traiter l'incompressibilité du fluide.

- Le second objectif consiste à utiliser ce code de calcul dans le but d'apporter des éléments nouveaux sur la compréhension des mécanismes responsables de la brisure de l'axisymétrie d'un écoulement engendré par la rotation d'un disque au fond d'une cuve cylindrique.

Nous avons noté que les travaux relatant l'écoulement dans des cavités de petits rapports de forme sont encore rares dans la littérature actuelle. Dans ce mémoire, nous allons considérer des enceintes cylindriques rotor-stator dont le rapport d'aspect h est fixé à 1 (chapitre 6) puis 1.5 (chapitre 7). La dynamique de l'écoulement est explorée pour des nombres de Reynolds Re en deçà de 8500 pour lesquels l'écoulement est laminaire.

Cette investigation est menée en analysant la stabilité, linéaire ou non, d'un écoulement de base axisymétrique stationnaire – stable ou instable – vis-à-vis d'une perturbation aléatoire instantanée. La façon dont évolue l'énergie cinétique modale de la perturbation initiale au cours du temps détermine la stabilité ou non de l'écoulement de base. En cas d'instabilité, l'examen des propriétés spatiales et temporelles des solutions trouvées permet de conclure sur la rupture ou la conservation de l'axisymétrie.

Enfin, les équations de Navier-Stokes instationnaires complètes (c'est-à-dire qu'elles ne sont pas écrites sous forme perturbative) sont également intégrées en partant de différentes conditions initiales pour sonder la non-unicité des solutions.

Chapitre 3

Formulation continue

Dans ce chapitre, on commence par rappeler les équations de Navier-Stokes pour un fluide visqueux incompressible (§3.1-§3.4) que nous sommes amenés à résoudre pour atteindre les objectifs fixés au chapitre précédent. Ensuite, ces équations sont présentées sous leurs formes perturbatives linéaire et non-linéaire (§3.5).

3.1 Formulation primitive

Dans ce mémoire, nous adoptons les conventions suivantes : les grandeurs en caractères gras représentent des quantités vectorielles et les variables dimensionnées sont surmontées d'une barre. D'un point de vue purement dynamique, l'écoulement est entièrement déterminé par la connaissance des variables primitives en tout point du fluide et à chaque instant. Ces variables sont le champ de vecteur vitesse $\bar{\mathbf{V}}$ et la pression $\bar{\mathcal{P}}$ qui vérifient les équations de Navier-Stokes ci-dessous :

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \bar{\mathbf{V}} = 0 \\ \rho \left[\frac{\partial \bar{\mathbf{V}}}{\partial t} + (\bar{\mathbf{V}} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{V}} \right] = -\nabla \bar{\mathcal{P}} + \mu \nabla^2 \bar{\mathbf{V}} \\ + \text{Conditions aux Limites} \\ + \text{Conditions Initiales} \end{array} \right. \quad (3.1)$$

La première équation découle de la conservation de la masse pour un fluide incompressible de masse volumique uniforme ρ . La deuxième équation exprime la conservation de la quantité de mouvement, et μ désigne la viscosité dynamique du fluide considéré. Les conditions aux limites et les conditions initiales pour chaque variable dépendante seront discutées plus loin. Les différents termes qui interviennent dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement sont :

- Le terme non-linéaire de convection : $(\bar{\mathbf{V}} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{V}}$

- Les efforts de pression : $\nabla \bar{\mathcal{P}}$
- Le terme de diffusion : $\mu \nabla^2 \bar{\mathbf{V}}$

3.2 Adimensionnement

Les équations de Navier-Stokes (3.1) sont rendues adimensionnelles en choisissant R_o comme longueur caractéristique et $R_o \Omega_o$ comme vitesse de référence. Dès lors, nous construisons un temps caractéristique $1/\Omega_o$ et une pression de référence $\rho R_o^2 \Omega_o^2$. Il s'ensuit que la version non-dimensionnée du système (3.1) s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \\ \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = -\nabla \mathcal{P} + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{V} \\ + \text{Conditions aux Limites} \\ + \text{Conditions Initiales} \end{array} \right. \quad (3.2)$$

Le paramètre de similitude Re est le nombre de Reynolds. Celui-ci représente une mesure de l'importance relative des forces d'inertie et des termes de viscosité au sein du fluide :

$$Re = \frac{R_o^2 \Omega_o}{\nu}$$

où $\nu = \mu/\rho$ est la viscosité cinématique du fluide. Lorsque $Re \ll 1$, les forces d'origine visqueuse sont prépondérantes. Si $Re \gg 1$, nous nous attendons à ce que les effets d'inertie soient prépondérants. Le non-dimensionnement des équations du mouvement ne met pas en évidence la sensibilité de l'écoulement de fluide vis-à-vis de la géométrie de son contenant. Cette dépendance s'exprime via la prise en compte d'un second nombre sans dimension que l'on appelle le rapport d'aspect (ou de forme) :

$$h = \frac{H}{R_o}$$

Dans la suite, les composantes radiale, azimutale et axiale de la vitesse sont respectivement notées u , v et w . Le système d'équations (3.2) doit être complété par des conditions aux limites et des conditions initiales. Dans cette étude, diverses conditions initiales ont été employées : celles-ci seront précisées lors de la présentation des résultats numériques. Les conditions aux limites quant à elles font l'objet de la section suivante.

3.3 Conditions aux limites

Dans la suite du texte, on utilisera les notations suivantes : $\mathcal{D} = [0, 1] \times [0, 2\pi] \times [0, h]$ est le domaine à l'intérieur de la cuve et Γ désigne la frontière de ce domaine. Les conditions aux limites sur la vitesse sont de type Dirichlet et expriment l'adhérence du fluide aux parois :

$$\mathbf{V}_\Gamma : \begin{cases} \mathbf{V} = \mathbf{0} & \text{sur le bandeau extérieur et le disque supérieur} & z > 0 \\ u = w = 0 & \text{sur le disque tournant} & z = 0 \\ v = r & \text{sur le disque tournant} & z = 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

D'autre part, le problème est naturellement muni de conditions de périodicité dans la direction azimutale compte tenu de la géométrie cylindrique de la cavité. Pour chacune des variables dépendantes φ , il vient :

$$\varphi(\theta + 2\pi) = \varphi(\theta) \quad , \quad \forall \theta$$

Enfin, il est important de noter que les solutions recherchées peuvent être non-symétriques et instationnaires en dépit du fait que les précédentes conditions aux limites sont axisymétriques et stationnaires.

Remarques – Dans la littérature concernant la dynamique des fluides en rotation dans des configurations cylindriques, les équations du mouvement sont le plus souvent formulées :

- Avec le champ de vitesse \mathbf{V} et la pression P .
- Avec la fonction de courant ψ , la composante azimutale de la vorticité ω et la composante azimutale de la vitesse v .

La formulation (ψ, ω, v) n'est utilisable que dans le cadre des écoulements axisymétriques (voir par exemple [43, 34, 72]) et assure de implicitement la contrainte d'incompressibilité. En outre, elle permet d'éviter les problèmes liés au champ de pression, et des méthodes numériques efficaces ont été mises au point pour pallier le manque de conditions aux limites sur la vorticité, comme par exemple la technique de la matrice d'influence de bord : pour une description détaillée de cette méthode, le lecteur pourra consulter la publication de **Daube (1992)** [20]. En ce qui concerne les écoulements tridimensionnels, la formulation (ψ, ω, v) est beaucoup moins attrayante : elle implique la résolution d'un opérateur Laplacien pour chacune des composantes du potentiel vecteur, ainsi qu'une équation de transport pour chaque composante du tourbillon, soit un total de six équations. Il s'ensuit que la formulation (\mathbf{V}, P) , pour laquelle quatre équations doivent être résolues, est manifestement plus adaptée au traitement des écoulements non-axisymétriques.

3.4 Formulation rotationnelle

À présent, nous nous attachons à reformuler les équations du mouvement de façon à ramener leur discrétisation spatiale à la mise en œuvre d'opérateurs différentiels discrets du premier ordre qui reproduisent au niveau discret les mêmes propriétés que leurs analogues continus. Les opérateurs différentiels discrets du second ordre sont alors obtenus en composant ceux du

premier ordre. Ces points seront détaillés au chapitre 4. La formulation rotationnelle est basée sur l'utilisation de la relation vectorielle suivante :

$$\nabla (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A})$$

Le terme non-linéaire de convection apparaît en faisant $\mathbf{A} = \mathbf{B} = \mathbf{V}$ dans l'expression précédente et on introduit le vecteur vorticité $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{V}$:

$$(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = \nabla \frac{\mathbf{V}^2}{2} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}$$

Les équations de Navier-Stokes (3.2) deviennent alors :

$$\mathbb{S} : \begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{V} = 0 & \text{sur } \mathcal{D} \\ \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V} = -\nabla P + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{V} & \text{sur } \mathcal{D} \\ \mathbf{V} = \mathbf{V}_\Gamma & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (3.4)$$

où $P = \mathcal{P} + \mathbf{V}^2/2$ désigne la pression motrice ¹.

Remarque – Dans le cas d'un fluide incompressible, le terme non-linéaire de convection ne produit pas d'énergie. D'après **Primak (1995)** [53], cette propriété est préservée au niveau discret en écrivant ce terme sous la forme $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}$.

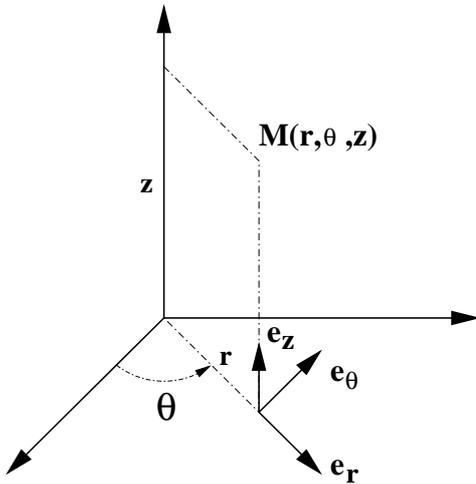


FIG. 3.1 – Système de coordonnées cylindriques.

La symétrie axiale de l'enceinte suggère naturellement l'usage des coordonnées cylindriques (r, θ, z) qui sont rappelées sur la figure 3.4. D'autre part, la résolution spatiale au voisinage des frontières est meilleure que celle permise par l'utilisation des coordonnées cartésiennes. En revanche, il s'avère que ce choix présente l'inconvénient d'introduire dans les équations du mouvement des termes en $1/r$, référencés comme une singularité non-intégrable du système cylindrique en $r = 0$. Nous aurons l'occasion de revenir sur ce point important au moment

¹On l'appelle aussi pression totale ou pression dynamique

de l'approximation spatiale. La projection du système d'équations vectorielles (3.4) sur la base $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z)$ d'un repère cylindrique fournit le système d'équations scalaires aux dérivées partielles ci-dessous :

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \frac{\partial ru}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + \omega w - \zeta v = -\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{Re} (\nabla^2 \mathbf{V})_r \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \zeta u - \eta w = -\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \frac{1}{Re} (\nabla^2 \mathbf{V})_\theta \\ \frac{\partial w}{\partial t} + \eta v - \omega u = -\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{Re} (\nabla^2 \mathbf{V})_z \end{cases} \quad (3.5)$$

Les composantes du vecteur vorticité $\boldsymbol{\omega}(\eta, \omega, \zeta)$ ont été introduites afin d'exprimer le terme non-linéaire de convection dans chacune des directions du repère :

$$\eta = \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \omega = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial r}, \quad \zeta = \frac{1}{r} \frac{\partial rv}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \quad (3.6)$$

Le terme de diffusion quant à lui sera réécrit de la manière suivante (voir l'annexe A) :

$$\begin{aligned} (\nabla^2 \mathbf{V})_r &= -(\nabla \times \nabla \times \mathbf{V})_r = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial ru}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial rv}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \right) \right] \\ (\nabla^2 \mathbf{V})_\theta &= -(\nabla \times \nabla \times \mathbf{V})_\theta = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial rv}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial ru}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u}{r} \right) \right] \\ (\nabla^2 \mathbf{V})_z &= -(\nabla \times \nabla \times \mathbf{V})_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Dans les équations précédentes, le lecteur notera que les termes entre crochets se simplifient respectivement en $2v/r^2$ et $-2u/r^2$: on retrouve alors les expressions usuelles du Laplacien vectoriel de la vitesse en coordonnées cylindriques. La formulation retenue, visiblement plus compliquée, est en fait plus adaptée à la discrétisation spatiale des équations de Navier-Stokes (voir chapitre 4).

3.5 Formulations perturbatives

En Mécanique des Fluides, la notion de stabilité des écoulements est fondamentale dans la mesure où les fluides sont sans cesse soumis à des perturbations d'origines diverses. À titre d'exemple, les défauts de paroi, les vibrations mécaniques des installations expérimentales ou encore le bruit thermique perturbent les écoulements. Il est donc légitime d'explorer la réponse

d'un écoulement à l'égard de petites perturbations.

D'un point de vue numérique, les perturbations sont introduites arbitrairement sur l'écoulement étudié et l'évolution temporelle de l'excitation de départ est examinée. L'écoulement est dit stable si les perturbations initiales s'amortissent au cours du temps. Au contraire, l'écoulement est dit instable lorsque les perturbations de départ sont amplifiées au cours du temps : celles-ci peuvent alors générer un nouvel écoulement.

Dans ce mémoire, nous nous proposons d'étudier les mécanismes responsables de la brisure de l'axisymétrie des écoulements dans une cavité cylindrique rotor-stator en faisant varier les paramètres de contrôle (Re, h) . Cette investigation est menée en supposant qu'une solution des équations de Navier-Stokes (3.4) se décompose sous la forme d'un écoulement de base axisymétrique stationnaire (\mathbf{V}_o, P_o) et d'une perturbation asymétrique instationnaire (\mathbf{V}', P') :

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(r, \theta, z, t) &= \mathbf{V}_o(r, z) + \mathbf{V}'(r, \theta, z, t) \\ P(r, \theta, z, t) &= P_o(r, z) + P'(r, \theta, z, t) \end{aligned} \quad (3.8)$$

L'écoulement de base axisymétrique stationnaire est solution du système d'équations \mathbb{S}_o :

$$\mathbb{S}_o : \begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{V}_o = 0 & \text{sur } \mathcal{D}_o \\ \boldsymbol{\omega}_o \times \mathbf{V}_o = -\nabla P_o + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{V}_o & \text{sur } \mathcal{D}_o \\ \mathbf{V}_o = \mathbf{V}_\Gamma & \text{sur } \Gamma_o \end{cases}$$

avec :

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}_o}{\partial \theta} = 0 \quad \frac{\partial \mathbf{V}_o}{\partial \theta} = 0 \quad \frac{\partial P_o}{\partial \theta} = 0$$

$\mathcal{D}_o = [0, 1] \times [0, h]$ est le domaine d'intégration et Γ_o désigne sa frontière. En insérant les relations (3.8) dans les équations de Navier-Stokes (3.4), puis en tenant compte du système \mathbb{S}_o , nous obtenons les équations qui gouvernent l'évolution de la perturbation :

$$\mathbb{S}'_{\mathcal{NL}} : \begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{V}' = 0 & \text{sur } \mathcal{D} \\ \frac{\partial \mathbf{V}'}{\partial t} + \boldsymbol{\omega}_o \times \mathbf{V}' + \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{V}_o + \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{V}' = -\nabla P' + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{V}' & \text{sur } \mathcal{D} \\ \mathbf{V}' = \mathbf{0} & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

L'analyse de **stabilité non-linéaire** consiste à résoudre ce système afin de mettre en évidence les propriétés d'amplification ou d'amortissement de la solution de base. L'analyse **stabilité linéaire** consiste à supposer que les fluctuations autour de la solution de base ont une amplitude infinitésimale. Le terme quadratique $\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{V}'$ du système $\mathbb{S}'_{\mathcal{NL}}$ est alors négligeable devant les deux autres produits vectoriels du terme non-linéaire de convection. Dès lors, nous sommes

amenés à résoudre les équations de Navier-Stokes linéarisées autour de l'écoulement de base :

$$\mathbb{S}'_{\mathcal{L}} : \begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{V}' = 0 & \text{sur } \mathcal{D} \\ \frac{\partial \mathbf{V}'}{\partial t} + \boldsymbol{\omega}_o \times \mathbf{V}' + \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{V}_o = -\nabla P' + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{V}' & \text{sur } \mathcal{D} \\ \mathbf{V}' = \mathbf{0} & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

Enfin, en dehors des conditions aux limites et de la forme du terme non-linéaire de convection, les équations de Navier-Stokes complètes (\mathbb{S}) d'une part, et les équations de Navier-Stokes en perturbations ($\mathbb{S}'_{\mathcal{L}}$ et $\mathbb{S}'_{\mathcal{NL}}$) d'autre part, sont identiques. Il s'ensuit que les mêmes techniques numériques seront mises en œuvre pour les intégrer. Le système \mathbb{S}_o quant à lui fait l'objet d'un traitement particulier dont nous reparlerons plus loin.

Deuxième partie

Méthodes numériques

Chapitre 4

Formulation discrète

4.1 Introduction

Ce chapitre a pour but de présenter l'ensemble des techniques numériques qui ont permis la construction d'un code de calcul 3D résolvant les équations de Navier-Stokes pour un fluide visqueux incompressible. On rappelle ces équations ci-dessous :

$$\mathbb{S} : \begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{V} = 0 & \text{sur } \mathcal{D} \\ \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{NL} = -\nabla P + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{V} & \text{sur } \mathcal{D} \\ \mathbf{V} = \mathbf{V}_\Gamma & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

où le sigle \mathbf{NL} désigne le terme non-linéaire de convection :

$$\mathbf{NL} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}$$

La prise en compte de l'axe de symétrie $r = 0$ dans le domaine d'intégration constitue l'une des principales difficultés numériques rencontrées lorsque les équations de Navier-Stokes sont résolues en coordonnées cylindriques. Cela explique sans doute le nombre restreint de travaux publiés jusqu'à présent sur ce sujet. Dès lors, différentes alternatives ont été proposées afin de contourner cette complexité.

Les systèmes de coordonnées cartésiennes ou bien curvilignes au voisinage de l'axe $r = 0$ ont été préférés par certains auteurs. Toutefois, **Sotiropoulos & Ventikos (2001)** [65] ont souligné le fait que de telles approches semblent favoriser l'apparition de modes azimutaux dépourvus de sens physique.

Une autre alternative consiste à forcer une condition aux limites sur l'axe du cylindre. À titre d'exemple, les simulations tridimensionnelles menées par **Verzicco & Orlandi (1996)** [74] reposent sur un schéma aux différences finies en coordonnées cylindriques. Les inconnues du problème sont le flux radial $q_r = r u$ et les composantes azimutale v et axiale w de la vitesse. Le positionnement de ces variables est de type MAC. Il s'ensuit que le flux radial q_r n'apparaît plus sur l'axe de symétrie. Ce propos est formellement incorrect car il est question d'un flux $q_r|_{r=0}$ à travers une arête et non pas à travers une surface. Ce changement de variable conduit

cependant à une formulation discrète des équations du mouvement qui, en définitive, est la bonne.

Compte tenu de la géométrie du système, les séries de Fourier sont communément utilisées pour l'intégration spatiale en azimut. Le problème de la singularité sur l'axe revient alors à déterminer les conditions aux limites adéquates en $r = 0$ pour chacun des modes de Fourier : pour les détails, le lecteur pourra consulter l'article de **Gelfgat, Bar-Yoseph & Solan (2001)** [28]. À notre sens, cette alternative n'est pas rigoureuse puisque les composantes radiale et azimutale de la vitesse n'ont aucune signification physique au centre d'un repère cylindrique. Cette difficulté peut être surmontée dans le cadre d'une approximation spectrale. Par exemple, **Xin, Le Quéré & Daube (1997)** [77] ont choisi comme points de collocation les points Gauss-Radau.

La suite de ce chapitre est consacrée à la présentation de notre algorithme de résolution des équations du mouvement. L'intégration en temps découle d'un schéma aux différences finies semi-implicite du second ordre et le couplage vitesse-pression est traité par un algorithme de projection (§4.2). La méthode aux différences finies développée par **Hyman & Shashkov (1997)** [30] est mise en œuvre afin d'intégrer les opérateurs aux dérivées partielles en espace. Cette méthode permet de traiter *naturellement* la singularité en $r = 0$ d'une part, et d'assurer l'équivalence entre la formulation discrète et la formulation continue des équations de Navier-Stokes d'autre part (§4.3). Les séries de Fourier sont préférées aux différences finies dans la direction azimutale, du fait de la périodicité naturelle des solutions recherchées sur une circonférence. Les systèmes discrets résultants sont résolus par une technique de diagonalisation partielle par rapport à la direction axiale. Le terme non-linéaire de convection est calculé dans l'espace physique afin d'éviter les produits de convolution (§4.4). Ce chapitre se termine par quelques précisions sur la façon de conduire numériquement les analyses de stabilité linéaire et non-linéaire (§4.5).

4.2 Marche en temps

4.2.1 Schéma semi-implicite

On rappelle que \mathcal{D} et Γ désignent respectivement le domaine d'intégration et sa frontière. Soit Δt un pas de temps suffisamment petit pour représenter l'évolution du système. Puisque nous nous proposons d'étudier numériquement la transition à l'instationnarité d'un écoulement dans un cylindre soumis à la rotation, nous utilisons un schéma semi-implicite d'ordre deux pour avancer dans le temps. Ce dernier combine les deux ingrédients suivants :

- La dérivée temporelle est approchée par un schéma aux différences finies décentré amont d'ordre deux (Euler retardé). Pour toute variable f :

$$\left(\frac{\partial f^{n+1}}{\partial t}\right) = \frac{3f^{n+1} - 4f^n + f^{n-1}}{2\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t^2)$$

- Afin de préserver la stabilité numérique de l'algorithme lorsque le pas de temps est augmenté, le terme linéaire de diffusion et le gradient pression sont traités implicitement. Le terme non-linéaire de convection est quant à lui déterminé à partir d'une extrapolation temporelle d'ordre deux de type Adams-Bashforth :

$$NL^{n+1} = 2NL^n - NL^{n-1} + \mathcal{O}(\Delta t^2)$$

Le système d'équations (3.4) au temps $(n+1)\Delta t$ est donc le suivant :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{V}^{n+1} = 0 & \text{sur } \mathcal{D} \\ (\sigma \mathbf{I} - \nabla^2) \mathbf{V}^{n+1} = -Re \nabla P^{n+1} + \mathbf{S}^{n,n-1} & \text{sur } \mathcal{D} \\ \mathbf{V}^{n+1} = \mathbf{V}_\Gamma & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (4.1)$$

\mathbf{I} désigne l'opérateur identité et le facteur σ vaut $3Re/2\Delta t$. Le terme source \mathbf{S} est constitué des termes convectifs et d'une partie des termes de dérivation temporelle :

$$\mathbf{S}^{n,n-1} = Re (-2NL^n + NL^{n-1}) + \frac{\sigma}{3} (4\mathbf{V}^n - \mathbf{V}^{n-1}) \quad (4.2)$$

4.2.2 Méthode de projection

Dans le cas d'un écoulement incompressible gouverné par les équations (4.1), la pression est une grandeur implicite qui doit rester libre de s'ajuster afin de maintenir le champ de vitesse solénoïdal en tout point et à chaque instant. Ce couplage vitesse-pression est traité numériquement par une méthode de projection apparentée aux algorithmes de **Goda (1979)** [29]. Le schéma de projection conduit à la résolution d'équations aux dérivées partielles du second ordre de type Helmholtz et type Poisson à chaque itération en temps. Deux étapes sont nécessaires pour y parvenir.

4.2.2.1 Étape de prédiction

L'étape de prédiction consiste à relâcher la contrainte d'incompressibilité pour calculer un champ de vitesse provisoire, noté \mathbf{V}^* . Celui-ci est solution d'un problème similaire de type Helmholtz dans lequel la pression utilisée est celle du pas de temps précédent $n\Delta t$:

$$\begin{cases} (\sigma \mathbf{I} - \nabla^2) \mathbf{V}^* = -Re \nabla P^n + \mathbf{S}^{n,n-1} & \text{sur } \mathcal{D} \\ \mathbf{V}^* = \mathbf{V}_\Gamma & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (4.3)$$

Ce champ de vitesse prédit vérifie l'équation de conservation de la quantité de mouvement et possède les bonnes conditions aux limites. En revanche, il n'y a aucune raison pour que celui-ci soit à divergence nulle.

4.2.2.2 Étape de projection

L'étape suivante consiste alors à projeter le champ \mathbf{V}^* dans l'espace des champs de vecteurs à divergence nulle. Ceci revient à évaluer une correction \mathbf{V}^c que l'on doit apporter au champ provisoire pour garantir l'incompressibilité du fluide et donc, obtenir une approximation de la solution $\underline{\mathbf{V}}^{n+1}$ du système initial (4.1). On préfère écrire la correction sous la forme $\mathbf{V}^c = \nabla\phi$. Il vient :

$$\underline{\mathbf{V}}^{n+1} = \mathbf{V}^* + \nabla\phi \quad (4.4)$$

La relation ci-dessus s'interprète comme la décomposition du champ de vitesse provisoire \mathbf{V}^* en une partie solénoïdale $\underline{\mathbf{V}}^{n+1}$ et une partie irrotationnelle \mathbf{V}^c . En exprimant la divergence de la relation (4.4), on montre que le potentiel correcteur ϕ est solution d'une équation de type Poisson avec des conditions aux limites de type Neumann homogène :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \nabla\phi = -\nabla \cdot \mathbf{V}^* & \text{dans } \mathcal{D} \\ \frac{\partial\phi}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

Les conditions aux limites sur la fonction correctrice sont obtenues en effectuant le produit scalaire entre la relation (4.4) et la direction \mathbf{n} normale à la paroi, puis en appliquant sur le champ de vitesse \mathbf{V}^* la condition de non-glissement du fluide sur la frontière du domaine. Il ne nous reste plus qu'à déterminer la pression P^{n+1} : on montre que ϕ est proportionnel à la différence de deux champs de pression successifs dans le temps. En effet, l'expression (4.4) est reportée dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement du système (4.1) et on utilise la relation ci-dessous :

$$\nabla^2 (\nabla\phi) = \nabla (\nabla^2\phi)$$

Puisque la pression n'est définie qu'à une constante près, il reste après intégration :

$$P^{n+1} = P^n - \left(\frac{3\phi}{2\Delta t} + \frac{\nabla \cdot \mathbf{V}^*}{Re} \right)$$

4.2.2.3 Remarques sur la méthode de projection

Nous formulons à présent quelques remarques en ce qui concerne la méthode de projection.

- ❶ La méthode de projection ci-dessus présente toutefois un inconvénient. En effet, le champ de vitesse $\underline{\mathbf{V}}^{n+1}$ obtenu :

- ✓ est admissible d'un point de vue dynamique dans la mesure où il vérifie l'équation de conservation de la quantité de mouvement :

$$(\sigma\mathbf{I} - \nabla^2) \underline{\mathbf{V}}^{n+1} = -Re \nabla P^{n+1} + \mathbf{S}^{n,n-1} \quad \text{sur } \mathcal{D}$$

- ✓ est admissible d'un point de vue cinématique car il est à divergence nulle :

$$\nabla \cdot \underline{\mathbf{V}}^{n+1} = 0 \quad \text{sur } \mathcal{D}$$

✓ possède les bonnes composantes normales de la vitesse sur le bord :

$$\underline{\mathbf{V}}^{n+1} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{V}_\Gamma \cdot \mathbf{n} \quad \text{sur } \Gamma$$

✗ n'a pas les bonnes composantes tangentiellles de la vitesse sur le bord *a priori* :

$$\underline{\mathbf{V}}^{n+1} \times \mathbf{n} \neq \mathbf{V}_\Gamma \times \mathbf{n} \quad \text{sur } \Gamma$$

Ce dernier point est à l'origine d'une faible vitesse de glissement artificielle sur les frontières. On parle alors de couche limite numérique.

- ② Montrons que cette couche limite numérique a une influence moindre sur la solution si le pas de temps est suffisamment petit. En utilisant par exemple un schéma d'ordre un pour la dérivée temporelle, il vient :

$$\left(\mathbf{I} - \frac{\Delta t}{Re} \nabla^2 \right) \underline{\mathbf{V}}^{n+1} = \underline{\mathbf{V}}^n - \Delta t (2\mathbf{NL}^n + \mathbf{NL}^{n-1}) - \Delta t \nabla P^{n+1}$$

L'équation similaire qui en résulte est la suivante :

$$\left(\mathbf{I} - \frac{\Delta t}{Re} \nabla^2 \right) \mathbf{V}^* = \mathbf{V}^* - \Delta t (2\mathbf{NL}^n + \mathbf{NL}^{n-1}) - \Delta t \nabla P^n$$

Il est clair que $\mathbf{V}^* \simeq \underline{\mathbf{V}}^n$ lorsque $\Delta t \rightarrow 0$. En combinant ce dernier résultat avec la relation (4.4) écrite sur la paroi dans les directions tangentiellles, nous obtenons :

$$\underline{\mathbf{V}}^{n+1} \times \mathbf{n} \simeq \underline{\mathbf{V}}^n \times \mathbf{n} + \nabla \phi \times \mathbf{n} \quad \text{sur } (\Gamma)$$

Autrement dit, le terme de glissement pariétal $\nabla \phi \times \mathbf{n}$ est proche de zéro lorsque le pas de temps Δt est suffisamment petit.

- ③ La mise en œuvre d'une technique de matrice d'influence de bord permet d'obtenir une solution \mathbf{V}^{n+1} sans couche limite numérique, contrairement au champ de vitesse précédent $\underline{\mathbf{V}}^{n+1}$. Nous avons eu recours à cette méthode pour calculer uniquement des solutions axisymétriques. Dans le cas des écoulements tridimensionnels, la vitesse sur le bord compte deux composantes tangentiellles, ce qui rend l'extension de cette technique plus délicate.

La suite est consacrée au calcul numérique des solutions \mathbf{V}^* et ϕ des problèmes elliptiques décrits ci-dessus. Pour simplifier, le champ de vitesse non-solénoïdal est noté \mathbf{V} .

4.3 Discrétisation en espace

Dans la plupart des cas, les meilleurs résultats numériques sont ceux obtenus lorsque le modèle discret préserve les propriétés fondamentales du modèle continu qui gouverne le problème physique. De ce fait, les versions continues et discrètes des opérateurs différentiels intervenant dans les équations de Navier-Stokes doivent obéir aux mêmes lois (i.e. : identités intégrales, relations usuelles d'analyse vectorielle). **Hyman & Shashkov (1997)** [30] ont montré qu'il est possible d'obtenir une divergence, un gradient et un rotationnel discrétisés qui sont des approximations à l'ordre deux de leurs analogues continus en procédant ainsi :

- ⇒ Discrétisation du domaine de calcul sur une grille qui s'ajuste ¹ à l'application du théorème de Stokes. D'après **Hyman & Shashkov**, il s'avère que la grille MAC répond tout à fait à ce critère.
- ⇒ Définition de l'espace des champs de vecteurs discrets \mathcal{HS} et celui des fonctions scalaires discrètes HC.
- ⇒ Définition des produits scalaires discrets $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur les espaces \mathcal{HS} et HC.
- ⇒ Obtention des analogues discrets d'opérateurs aux dérivées partielles spatiales sans erreur de troncature.

4.3.1 Maillage et espaces discrets

Le domaine d'intégration $\mathcal{D} = [0, 1] \times [0, 2\pi] \times [0, h]$ est discrétisé sur un maillage uniforme dont les incréments d'espace sont les suivants :

$$\Delta r = 1/M \quad , \quad \Delta\theta = 2\pi/N \quad , \quad \Delta z = 1/J \quad (4.5)$$

où $M + 1$, $N + 1$ et $J + 1$ sont respectivement les nombres de points discrets dans les directions radiale, azimutale et axiale. En outre, la convention ci-dessous est utilisée pour désigner les inconnues discrétisées :

$$f_{m,l,j}^n = f(r_m, \theta_l, z_j, t_n) = f(m\Delta r, l\Delta\theta, j\Delta z, n\Delta t) \quad , \quad \forall f \quad (4.6)$$

Le traitement numérique spatiale est considérablement facilité par l'orthogonalité du système de coordonnées cylindriques. Le positionnement des variables dépendantes discrètes est de type MAC (voir Fig. 4.1) :

- Les composantes du vecteur vitesse prennent place au milieu des faces et perpendiculairement à ces dernières :
 - La composante radiale u est localisée aux nœuds $(m, l + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}) \forall m \neq 0$.
 - La composante azimutale v est positionnée aux nœuds $(m + \frac{1}{2}, l, j + \frac{1}{2})$.
 - La composante axiale w est située aux nœuds $(m + \frac{1}{2}, l + \frac{1}{2}, j)$.
- Les composantes du vecteur tourbillon prennent place au milieu des arêtes et parallèlement à ces dernières :
 - La composante radiale η est localisée aux nœuds $(m + \frac{1}{2}, l, j)$.
 - La composante azimutale ω est positionnée aux nœuds $(m, l + \frac{1}{2}, j) \forall m \neq 0$.
 - La composante axiale ζ est située aux nœuds $(m, l, j + \frac{1}{2}) \forall m$.
- Les quantités scalaires comme la pression P , le potentiel correcteur ϕ ou la divergence du champ de vitesse sont évaluées aux centres des mailles $(m + \frac{1}{2}, l + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2})$.

¹Un tel maillage est dit "logiquement rectangulaire" dans [30] : il fournit les objets géométriques – volumes, surfaces et contours – indispensables à la mise en œuvre des théorèmes de Gauss et Stokes au niveau discret.

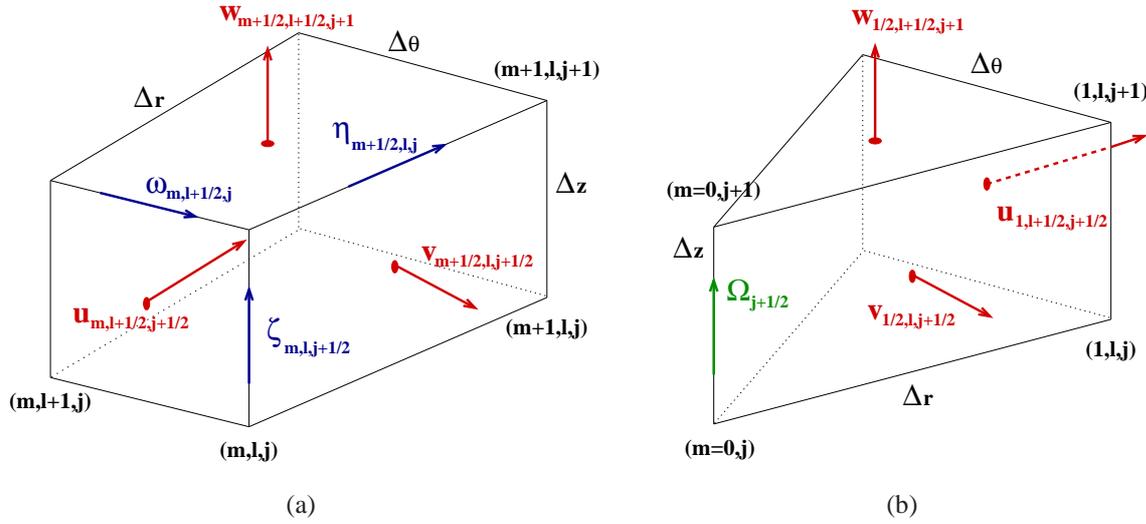


FIG. 4.1 – Positionnement des variables de type MAC. (a) Les mailles dites régulières sont celles pour lesquelles $m > 0$. (b) Les mailles dites axiales sont telles que $m = 0$.

Nous insistons sur le fait que la composante axiale de la vorticité est la **seule et unique** quantité du problème définie sur l'axe de symétrie $r = 0$. La grille MAC nous conduit à définir les espaces discrets qui suivent :

- Soit \mathcal{HS} , l'espace des champs de vecteurs discrets dont les composantes sont localisées au milieu des faces et perpendiculairement à ces dernières :

$$\mathcal{HS} = \left\{ \underline{\mathbf{U}} = \left(u_{m+1, l+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}, v_{m+\frac{1}{2}, l, j+\frac{1}{2}}, w_{m+\frac{1}{2}, l+\frac{1}{2}, j} \right) \right\}$$

- Soit \mathcal{HL} , l'espace des champs de vecteurs discrets dont les composantes sont localisées au milieu des arêtes et parallèlement à ces dernières :

$$\mathcal{HL} = \left\{ \underline{\mathbf{W}} = \left(\eta_{m+\frac{1}{2}, l, j}, \omega_{m, l+\frac{1}{2}, j}, \zeta_{m, l, j+\frac{1}{2}} \right) \right\}$$

- Soit \mathcal{HN} , l'espace des fonctions discrètes localisées sur les sommets des mailles :

$$\mathcal{HN} = \left\{ \psi = (\psi_{m, l, j}) \right\}$$

- Soit \mathcal{HC} , l'espace des fonctions discrètes localisées au centre des mailles :

$$\mathcal{HC} = \left\{ \phi = \left(\phi_{m+\frac{1}{2}, l+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} \right) \right\}$$

L'espace \mathcal{HS} est muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{HS}}$ ci-dessous :

$$\begin{aligned}
2\langle \underline{\mathbf{U}}, \underline{\mathbf{U}}' \rangle_{\mathcal{HS}} &= r_1 u_{1,l+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} u'_{1,l+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \\
&+ \sum_{m=1}^{m=M-1} \sum_{l=0}^{l=N-1} \sum_{j=0}^{j=J-1} \left(r_{m+1} u_{m+1,l+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} u'_{m+1,l+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + r_m u_{m,l+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} u'_{m,l+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \right) \\
&+ \sum_{m=0}^{m=M-1} \sum_{l=0}^{l=N-1} \sum_{j=0}^{j=J-1} r_{m+\frac{1}{2}} \left[\left(v_{m+\frac{1}{2},l+1,j+\frac{1}{2}} v'_{m+\frac{1}{2},l+1,j+\frac{1}{2}} + v_{m+\frac{1}{2},l,j+\frac{1}{2}} v'_{m+\frac{1}{2},l,j+\frac{1}{2}} \right) \right. \\
&\quad \left. + \left(w_{m+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},j+1} w'_{m+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},j+1} + w_{m+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},j} w'_{m+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},j} \right) \right] \quad (4.7)
\end{aligned}$$

Cette relation n'est autre que la formulation au niveau discret du produit scalaire continu de deux vecteurs \mathbf{V} et \mathbf{V}' :

$$\langle \mathbf{V}, \mathbf{V}' \rangle = \iiint_{\mathbf{V}} \mathbf{V} \cdot \mathbf{V}' dV \quad (4.8)$$

De la même façon, l'espace HC est équipé du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\text{HC}}$ dont la définition discrète est :

$$\langle \phi, \phi' \rangle_{\text{HC}} = \sum_{m=0}^{m=M-1} \sum_{l=0}^{l=N-1} \sum_{j=0}^{j=J-1} r_{m+\frac{1}{2}} \phi_{m+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \phi'_{m+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \quad (4.9)$$

Bien évidemment, l'écriture continue correspondante est :

$$\langle \phi, \phi' \rangle = \iiint_{\mathbf{V}} \phi \phi' dV \quad (4.10)$$

Les espaces discrets précédents sont reliés entre eux par les opérateurs divergence, gradient et rotationnel discrétisés dont nous allons parler dans la section suivante.

4.3.2 Discrétisation des opérateurs différentiels d'ordre un en espace

4.3.2.1 Divergence et gradient discrets adjoints

Dans leur version continue, l'opérateur divergence $\nabla \cdot$ et l'opérateur gradient ∇ vérifient le théorème de Stokes généralisé (ou identité de l'intégration par parties) :

$$\boxed{\iiint_{\mathbf{V}} \phi \nabla \cdot \mathbf{V} dV = - \iiint_{\mathbf{V}} \nabla \phi \cdot \mathbf{V} dV + \iint_{\partial \mathbf{S}} \phi \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS} \quad (4.11)$$

où le second membre est un terme de frontière. Cette relation indique que les opérateurs $\nabla \cdot$ et $-\nabla$ sont **adjoints** par rapport aux produits scalaires continus (4.8) et (4.10). L'objectif est de disposer d'opérateurs divergence et gradient sous forme discrète qui remplissent les conditions suivantes :

- ❶ Les opérateurs discrets obéissent à une version discrète de l'identité (4.11).

- ② L'analogue discret du terme de frontière doit être une bonne approximation de sa version continue.

Dans le cadre de notre problème, les conditions aux limites (3.3) justifie la nullité du terme limite et nous n'avons plus à nous préoccuper de la deuxième condition.

Divergence

La définition de l'opérateur divergence est basée sur le théorème de Gauss :

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{V} \, dV = \iint_{\partial S} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} \, dS \quad (4.12)$$

où \mathbf{n} représente un vecteur unitaire sortant normal à la surface ∂S . La divergence discrète correspondante est l'application $\overline{\mathbf{D}}_S$ qui à tout champ de vecteur discret $\underline{\mathbf{U}}$ de \mathcal{HS} associe une fonction scalaire discrète ϕ de HC :

$$\overline{\mathbf{D}}_S : \begin{cases} \mathcal{HS} & \mapsto \text{HC} \\ \underline{\mathbf{U}} & \mapsto \overline{\mathbf{D}}_S(\underline{\mathbf{U}}) = \mathbf{D} \end{cases}$$

La transcription discrète de la divergence est obtenue en appliquant la relation (4.12) sur les volumes et les surfaces fermées de la figure 4.1. Il vient :

- Pour les mailles régulières ($m > 0$) :

$$\begin{aligned} r_{m+\frac{1}{2}} \mathbf{D}_{m+\frac{1}{2}, l+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} &= \frac{r_{m+1} u_{m+1, l+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} - r_m u_{m, l+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}}{\Delta r} + \frac{v_{m+\frac{1}{2}, l+1, j+\frac{1}{2}} - v_{m+\frac{1}{2}, l, j+\frac{1}{2}}}{\Delta \theta} \\ &+ \frac{w_{m+\frac{1}{2}, l+\frac{1}{2}, j+1} - w_{m+\frac{1}{2}, l+\frac{1}{2}, j}}{\Delta z} \end{aligned}$$

- Pour les mailles axiales ($m = 0$) :

$$r_{\frac{1}{2}} \mathbf{D}_{\frac{1}{2}, l+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} = \frac{r_1 u_{1, l+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}}{\Delta r} + \frac{v_{\frac{1}{2}, l+1, j+\frac{1}{2}} - v_{\frac{1}{2}, l, j+\frac{1}{2}}}{\Delta \theta} + \frac{w_{\frac{1}{2}, l+\frac{1}{2}, j+1} - w_{\frac{1}{2}, l+\frac{1}{2}, j}}{\Delta z}$$

Gradient

Comme nous l'avons déjà mentionné via la relation (4.11), l'opérateur gradient discret $\overline{\mathbf{G}}$ est défini comme étant le négatif adjoint de l'opérateur divergence discrète $\overline{\mathbf{D}}_S$. Formellement :

$$\langle \phi, \overline{\mathbf{D}}_S(\underline{\mathbf{U}}) \rangle_{\text{HC}} = -\langle \overline{\mathbf{G}}(\phi), \underline{\mathbf{U}} \rangle_{\mathcal{HS}}$$

Conformément aux travaux de **Hyman & Shashkov** [30], il s'ensuit que la version discrétisée du gradient est l'application $\overline{\mathbf{G}}$ qui à toute fonction scalaire discrète ϕ de HC associe un champ de vecteur discret $\underline{\mathbf{U}}$ de \mathcal{HS} :

$$\overline{\mathbf{G}} : \begin{cases} \text{HC} & \mapsto \mathcal{HS} \\ \phi & \mapsto \overline{\mathbf{G}}(\phi) \end{cases}$$

avec :

$$\overline{G}(\phi) : \begin{cases} \frac{\phi_{m+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - \phi_{m-\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}{\Delta r} & \text{aux nœuds } (m, l + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}) \\ \frac{1}{r_{m+\frac{1}{2}}} \frac{\phi_{m+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - \phi_{m+\frac{1}{2},l-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}{\Delta \theta} & \text{aux nœuds } (m + \frac{1}{2}, l, j + \frac{1}{2}) \\ \frac{\phi_{m+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - \phi_{m+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}{\Delta z} & \text{aux nœuds } (m + \frac{1}{2}, l + \frac{1}{2}, j) \end{cases}$$

4.3.2.2 Rotationnel discret

Le support permettant de définir l'opérateur rotationnel est le théorème de Stokes :

$$\boxed{\iint_{\partial S} \nabla \times \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} \, dS = \oint_L \mathbf{V} \cdot d\mathbf{l}} \quad (4.13)$$

où ∂S est la surface qui s'appuie sur le contour L , \mathbf{n} est un vecteur unitaire sortant normal à ∂S et $d\mathbf{l}$ est un vecteur unitaire tangent à L . D'un point de vue discret, le rotationnel est application \overline{D}_S de \mathcal{HS} vers \mathcal{HL} qui à tout champ de vecteur discret \underline{U} fait correspondre un champ de vecteur discret \underline{W} :

$$\overline{C}_S : \begin{cases} \mathcal{HS} & \mapsto \mathcal{HL} \\ \underline{U} & \mapsto \overline{C}_S(\underline{U}) = \underline{W} \end{cases}$$

Chaque composante discrète du rotationnel est obtenue en appliquant la relation (4.13) sur une surface fermée et une boucle adéquate L indiquée sur la figure 4.2. Il en résulte les expressions suivantes :

➤ Pour la composante radiale η de la vorticité (Fig. 4.2.a) :

$$\eta_{m+\frac{1}{2},l,j} = \frac{1}{r_{m+\frac{1}{2}}} \frac{w_{m+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},j} - w_{m+\frac{1}{2},l-\frac{1}{2},j}}{\Delta \theta} - \frac{v_{m+\frac{1}{2},l,j+\frac{1}{2}} - v_{m+\frac{1}{2},l,j-\frac{1}{2}}}{\Delta z} \quad (4.14)$$

➤ Pour la composante azimutale ω de la vorticité (Fig. 4.2.b) :

$$\omega_{m,l+\frac{1}{2},j} = \frac{u_{m,l+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - u_{m,l+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}{\Delta z} - \frac{w_{m+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},j} - w_{m-\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},j}}{\Delta r} \quad (4.15)$$

➤ Pour la composante axiale ζ de la vorticité (Fig. 4.2.c) :

$$\zeta_{m,l,j+\frac{1}{2}} = \frac{r_{m+\frac{1}{2}}v_{m+\frac{1}{2},l,j+\frac{1}{2}} - r_{m-\frac{1}{2}}v_{m-\frac{1}{2},l,j+\frac{1}{2}}}{r_m \Delta r} - \frac{u_{m,l+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - u_{m,l-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}{r_m \Delta \theta} \quad (4.16)$$

La formule (4.16) n'est valable que sur les mailles régulières. En ce qui concerne les mailles adjacentes à l'axe de rotation, une attention particulière est nécessaire.

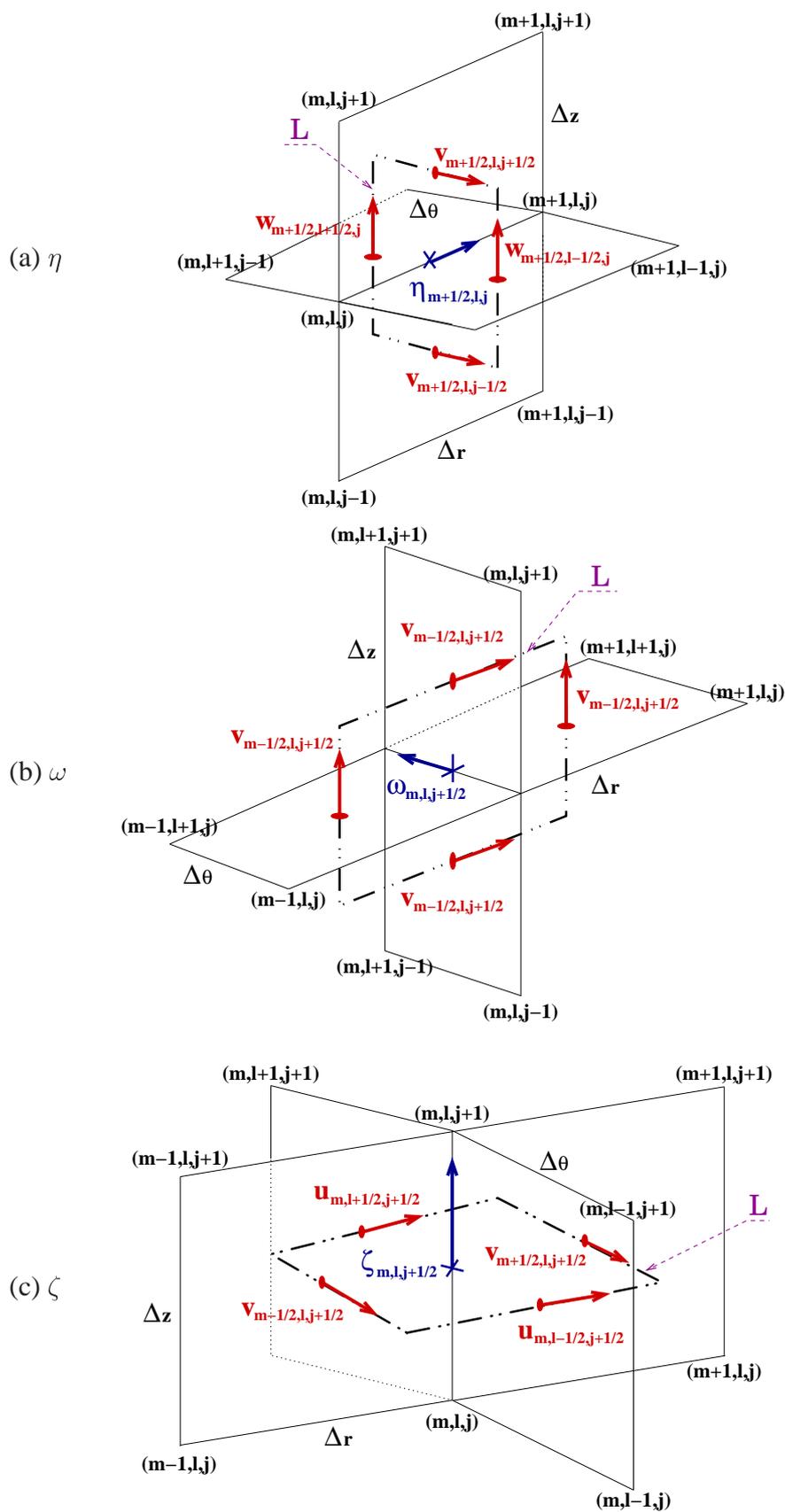


FIG. 4.2 – Boucles L permettant de construire les composantes du rotationnel discret à partir du théorème de Stokes.

4.3.2.3 Composante axiale du rotationnel discret sur l'axe

Comme nous l'avons déjà souligné, la vorticité suivant z est la seule quantité du problème définie sur l'axe de rotation, en dépit du fait que le système de coordonnées cylindriques soit singulier en $r = 0$. Dès lors, le traitement sur l'axe apparaît comme un point crucial de la méthode numérique. Par analogie avec ce qui précède, la composante axiale du rotationnel sur l'axe – notée $\Omega_{j+\frac{1}{2}}$ – est déterminée par la version discrète du théorème de Stokes que nous appliquons sur le contour fermé L de la figure 4.3. Il vient :

$$\pi \left(\frac{\Delta r}{2} \right)^2 \Omega_{j+\frac{1}{2}} = \frac{\Delta r}{2} \Delta \theta \sum_{l=0}^{l=N-1} v_{\frac{1}{2},l,j+\frac{1}{2}}$$

Nous reformulons cette dernière expression en utilisant la relation (4.5) pour $\Delta \theta$:

$$\Omega_{j+\frac{1}{2}} = \frac{4}{\Delta r} \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{l=N-1} v_{\frac{1}{2},l,j+\frac{1}{2}} = \frac{4}{\Delta r} \bar{v}_{\frac{1}{2},l,j+\frac{1}{2}} \quad (4.17)$$

où \bar{v} est la valeur moyenne de v le long de la boucle L . Aucune approximation n'est requise en $r = 0$ et nous sommes assurés que le problème est posé correctement.

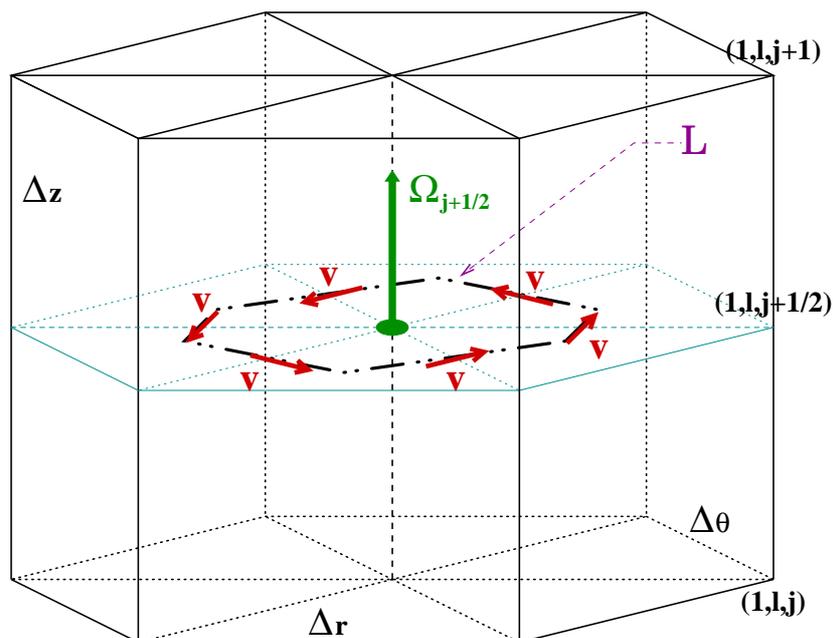


FIG. 4.3 – Boucle L permettant de construire la composante axiale du rotationnel discret sur l'axe à partir du théorème de Stokes.

4.3.2.4 Remarques

- ❶ Par construction, on peut démontrer (voir [30]) que la nullité du rotationnel d'un gradient est vérifiée au niveau discret :

$$\bar{C}_S(\bar{G}(\phi)) = 0 \quad , \quad \forall \phi \in \text{HC}$$

- ② De la même façon, il est possible de définir une divergence discrète $\overline{\mathbf{D}}_L$ sur \mathcal{HL} de sorte que la composition de la divergence et du rotationnel soit nulle au niveau discret :

$$\overline{\mathbf{D}}_L(\overline{\mathbf{C}}_S(\underline{\mathbf{U}})) = 0 \quad , \quad \forall \underline{\mathbf{U}} \in \mathcal{HS}$$

- ③ Soulignons le fait que les expressions de la divergence $\overline{\mathbf{D}}_S(\underline{\mathbf{U}})$, du gradient $\overline{\mathbf{G}}(\phi)$ et du rotationnel $\overline{\mathbf{C}}_S(\underline{\mathbf{U}})$ (en $r \neq 0$) sont celles que l'on obtiendrait en appliquant aux versions continues une discrétisation spatiale de type différences finies centrées précise au second d'ordre.

4.3.3 Discrétisation des opérateurs différentiels d'ordre deux en espace

4.3.3.1 Laplacien scalaire discret

L'utilisation d'un algorithme de projection pour traiter le couplage vitesse-pression implique la résolution d'une équation de Poisson pour la fonction correctrice ϕ (§4.2.2). La version discrétisée du Laplacien scalaire est obtenue en composant les analogues discrets des opérateurs divergence et gradient :

$$\overline{\mathbf{L}}(\phi) = \overline{\mathbf{D}}_S(\overline{\mathbf{G}}(\phi))$$

c'est-à-dire :

- Pour les mailles régulières ($m > 0$) :

$$\frac{1}{r_{m+\frac{1}{2}}} \frac{1}{\Delta r} \left(r_{m+1} \frac{\phi_{m+\frac{3}{2}, l+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} - \phi_{m+\frac{1}{2}, l+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}}{\Delta r} - r_m \frac{\phi_{m+\frac{1}{2}, l+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} - \phi_{m-\frac{1}{2}, l+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}}{\Delta r} \right)$$

- Pour les mailles axiales ($m = 0$) :

$$\frac{1}{r_{\frac{1}{2}}} \frac{1}{\Delta r} \left(r_1 \frac{\phi_{\frac{3}{2}, l+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} - \phi_{\frac{1}{2}, l+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}}{\Delta r} \right)$$

Pour simplifier, les formulations discrètes ci-dessus ne concernent que les dérivées radiales. Comme nous l'avons déjà mentionné, le gradient discret est construit de manière à ce qu'il soit le négatif adjoint de la divergence discrétisée. Ceci implique que l'analogue discret de l'opérateur Laplacien scalaire vérifie la propriété d'autoadjonction vis-à-vis du produit scalaire sur l'espace discret HC :

$$\langle \overline{\mathbf{L}}(\phi), \phi' \rangle_{\text{HC}} = \langle \phi, \overline{\mathbf{L}}(\phi') \rangle_{\text{HC}}$$

4.3.3.2 Discrétisation du terme de diffusion

Au chapitre précédent, nous avons établi la reformulation du terme de diffusion en terme de rotationnel du rotationnel de la vitesse. Définissons alors un rotationnel discret $\overline{\mathbf{C}}_L$ sur \mathcal{HL} à valeur dans \mathcal{HS} :

$$\overline{\mathbf{C}}_L : \begin{cases} \mathcal{HL} & \mapsto \mathcal{HS} \\ \underline{\mathbf{W}} & \mapsto \overline{\mathbf{C}}_L(\underline{\mathbf{W}}) = \underline{\mathbf{U}} \end{cases}$$

Il s'ensuit que l'analogue discret du terme de diffusion est obtenu en combinant les opérateurs $\overline{\mathbf{C}}_L$ et $\overline{\mathbf{C}}_S$ précédents et que le positionnement de ses composantes coïncide avec celui des composantes de la vitesse :

$$\overline{\mathbf{C}}_L(\overline{\mathbf{C}}_S(\underline{\mathbf{U}})) = (\text{CCU}, \text{CCV}, \text{CCW})$$

Par analogie avec le cas continu (les détails sont dans l'annexe A), il faut ensuite insérer la version discrète de l'équation de continuité (§4.3.2.1) dans ces expressions. Finalement, la transcription au niveau discret des composantes de l'opérateur $(\nabla \times \nabla \times)$ est la suivante :

➤ Pour les mailles régulières ($m > 0$) :

$$\begin{aligned} \text{CCU}_{m,l+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = & \\ & -\frac{1}{\Delta r} \left(\frac{1}{r_{m+\frac{1}{2}}} \frac{r_{m+1}u_{m+1,l+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - r_m u_{m,l+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}{\Delta r} - \frac{1}{r_{m-\frac{1}{2}}} \frac{r_m u_{m,l+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - r_{m-1}u_{m-1,l+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}{\Delta r} \right) \\ & + \frac{1}{\Delta r} \left[\left(\frac{r_{m+\frac{1}{2}}}{r_m^2} - \frac{1}{r_{m+\frac{1}{2}}} \right) \frac{v_{m+\frac{1}{2},l+1,j+\frac{1}{2}} - v_{m+\frac{1}{2},l,j+\frac{1}{2}}}{\Delta \theta} - \left(\frac{r_{m-\frac{1}{2}}}{r_m^2} - \frac{1}{r_{m-\frac{1}{2}}} \right) \frac{v_{m-\frac{1}{2},l+1,j+\frac{1}{2}} - v_{m-\frac{1}{2},l,j+\frac{1}{2}}}{\Delta \theta} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{CCV}_{m+\frac{1}{2},l,j+\frac{1}{2}} = & \\ & -\frac{1}{\Delta r} \left(\frac{1}{r_{m+1}} \frac{r_{m+\frac{3}{2}}v_{m+\frac{3}{2},l,j+\frac{1}{2}} - r_{m+\frac{1}{2}}v_{m+\frac{1}{2},l,j+\frac{1}{2}}}{\Delta r} - \frac{1}{r_m} \frac{r_{m+\frac{1}{2}}v_{m+\frac{1}{2},l,j+\frac{1}{2}} - r_{m-\frac{1}{2}}v_{m-\frac{1}{2},l,j+\frac{1}{2}}}{\Delta r} \right) \\ & -\frac{1}{\Delta r} \left[\left(\frac{r_{m+1}}{r_{m+\frac{1}{2}}^2} - \frac{1}{r_{m+1}} \right) \frac{u_{m+1,l+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - u_{m+1,l-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}{\Delta \theta} - \left(\frac{r_m}{r_{m+\frac{1}{2}}^2} - \frac{1}{r_m} \right) \frac{u_{m,l+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - u_{m,l-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}{\Delta \theta} \right] \end{aligned}$$

$$\text{CCW}_{m+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},j} = -\frac{1}{r_{m+\frac{1}{2}}} \frac{1}{\Delta r} \left(r_{m+1} \frac{w_{m+\frac{3}{2},l+\frac{1}{2},j} - w_{m+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},j}}{\Delta r} - r_m \frac{w_{m+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},j} - w_{m-\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},j}}{\Delta r} \right)$$

➤ Pour les mailles axiales ($m = 0$) :

$$\begin{aligned} \text{CCU}_{1,l+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = & -\frac{1}{\Delta r} \left(\frac{1}{r_{\frac{3}{2}}} \frac{r_2 u_{2,l+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - r_1 u_{1,l+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}{\Delta r} \right) \\ & + \frac{1}{\Delta r} \left[\left(\frac{r_{\frac{3}{2}}}{r_1^2} - \frac{1}{r_{\frac{3}{2}}} \right) \frac{v_{\frac{3}{2},l+1,j+\frac{1}{2}} - v_{\frac{3}{2},l,j+\frac{1}{2}}}{\Delta \theta} - \left(\frac{r_{\frac{1}{2}}}{r_1^2} - \frac{1}{r_{\frac{1}{2}}} \right) \frac{v_{\frac{1}{2},l+1,j+\frac{1}{2}} - v_{\frac{1}{2},l,j+\frac{1}{2}}}{\Delta \theta} \right] \end{aligned}$$

$$\text{CCV}_{\frac{1}{2},l,j+\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\Delta r} \left(\frac{1}{r_1} \frac{r_{\frac{3}{2}}^3 v_{\frac{3}{2},l,j+\frac{1}{2}} - r_{\frac{1}{2}}^3 v_{\frac{1}{2},l,j+\frac{1}{2}}}{\Delta r} - \Omega_{j+\frac{1}{2}} \right) - \frac{1}{\Delta r} \left[\left(\frac{r_1}{r_{\frac{1}{2}}^2} - \frac{1}{r_1} \right) \frac{u_{1,l+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - u_{1,l-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}{\Delta \theta} \right]$$

$$\text{CCW}_{\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},j} = -\frac{1}{r_{\frac{1}{2}}} \left(\frac{w_{\frac{3}{2},l+\frac{1}{2},j} - w_{\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},j}}{\Delta r} \right)$$

où les termes en $\partial^2/\partial\theta^2$ et $\partial^2/\partial z^2$ n'ont pas été notés dans le but d'alléger les formules. En appliquant de façon rigoureuse les théorèmes de Gauss et de Stokes, nous parvenons à une discrétisation naturelle sans introduire de conditions aux limites artificielles sur l'axe $r = 0$ qui de surcroît n'ont aucun sens.

4.3.3.3 Discrétisation du terme non-linéaire de convection

Le champ de vitesse $\underline{\mathbf{U}}$ et le terme non-linéaire de convection $\underline{\mathbf{NL}} = \underline{\mathbf{W}} \times \underline{\mathbf{U}}$ discrétisés appartiennent au même espace discret \mathcal{HS} et doivent satisfaire la relation d'orthogonalité qui suit :

$$\langle \underline{\mathbf{U}}, \underline{\mathbf{NL}} \rangle_{\mathcal{HS}} = 0 \quad (4.18)$$

Une discrétisation adéquate des termes non-linéaires est alors la suivante :

➤ Pour la composante radiale NLU :

$$\begin{aligned} \text{NLU}_{m,l+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2} \left(\omega_{m,l+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \bar{w}_{m,l+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + \omega_{m,l+\frac{1}{2},j} \bar{w}_{m,l+\frac{1}{2},j} \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \left(\zeta_{m,l+1,j+\frac{1}{2}} \bar{v}_{m,l+1,j+\frac{1}{2}} - \zeta_{m,l,j+\frac{1}{2}} \bar{v}_{m,l,j+\frac{1}{2}} \right) \end{aligned}$$

où nous avons introduit les moyennes pondérées suivantes :

$$\begin{aligned} \bar{v}_{m,l,j+\frac{1}{2}} &= \frac{r_{m+\frac{1}{2}} v_{m+\frac{1}{2},l,j+\frac{1}{2}} + r_{m-\frac{1}{2}} v_{m-\frac{1}{2},l,j+\frac{1}{2}}}{2r_m} \\ \bar{w}_{m,l+\frac{1}{2},j} &= \frac{r_{m+\frac{1}{2}} w_{m+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},j} + r_{m-\frac{1}{2}} w_{m-\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},j}}{2r_m} \end{aligned}$$

➤ Pour la composante azimutale NLV :

$$\begin{aligned} \text{NLV}_{m+\frac{1}{2},l,j+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2} \left(\zeta_{m+1,l,j+\frac{1}{2}} \bar{u}_{m+1,l,j+\frac{1}{2}} + \zeta_{m,l,j+\frac{1}{2}} \bar{u}_{m,l,j+\frac{1}{2}} \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \left(\eta_{m+\frac{1}{2},l,j+\frac{1}{2}} \bar{w}_{m+\frac{1}{2},l,j+\frac{1}{2}} - \eta_{m+\frac{1}{2},l,j} \bar{w}_{m+\frac{1}{2},l,j} \right) \end{aligned}$$

avec les conventions ci-dessous :

$$\bar{u}_{m,l,j+\frac{1}{2}} = \frac{u_{m,l+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + u_{m,l-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}{2}, \quad \bar{w}_{m+\frac{1}{2},l,j} = \frac{w_{m+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},j} + w_{m+\frac{1}{2},l-\frac{1}{2},j}}{2}$$

➤ Pour la composante axiale NLW :

$$\begin{aligned} \text{NLW}_{m+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},j} &= \frac{1}{2} \left(\eta_{m+\frac{1}{2},l+1,j} \bar{v}_{m+\frac{1}{2},l+1,j} + \eta_{m+\frac{1}{2},l,j} \bar{v}_{m+\frac{1}{2},l,j} \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \left(\omega_{m+1,l+\frac{1}{2},j} \bar{u}_{m+1,l+\frac{1}{2},j} - \omega_{m,l+\frac{1}{2},j} \bar{u}_{m,l+\frac{1}{2},j} \right) \end{aligned}$$

Les expressions de \bar{u} et \bar{v} sont données par :

$$\bar{u}_{m,l+\frac{1}{2},j} = \frac{u_{m,l+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + u_{m,l+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}{2}, \quad \bar{v}_{m+\frac{1}{2},l,j} = \frac{v_{m+\frac{1}{2},l,j+\frac{1}{2}} + v_{m+\frac{1}{2},l,j-\frac{1}{2}}}{2}$$

4.4 Résolution des systèmes discrets

Une méthode de projection a été mise en œuvre afin de traiter le problème du couplage entre la vitesse et la pression dans les équations de Navier-Stokes (§4.2.2). À chaque pas de temps, nous devons donc résoudre une équation de type Helmholtz pour chaque composante de la vitesse (prédiction), ainsi qu'une équation de type Poisson pour la fonction correctrice (projection). Ces équations sont discrétisées en espace par des méthodes de différences finies, exposées dans la section 4.3. Néanmoins, la géométrie cylindrique suggère naturellement l'utilisation d'une représentation spectrale dans la direction azimutale : chaque variable Ψ est représentée par une décomposition en série de Fourier (des rappels sont proposés dans l'annexe B) :

$$\Psi(r, \theta, z) = \hat{\Psi}^0 + \sum_{k=1}^{k=N/2-1} \hat{\Psi}^k(r, z) \cos(k\theta) + \hat{\Psi}^{N-k}(r, z) \sin(k\theta)$$

L'intérêt de combiner les différences finies dans le plan méridien (r, z) et l'approche spectrale dans la direction périodique θ est le suivant. Le problème elliptique tridimensionnel portant sur une quantité physique $\Psi(r, \theta, z)$ est remplacé par une succession de N problèmes elliptiques quasi-bidimensionnels dont les nouvelles inconnues sont les coefficients spectraux $\hat{\Psi}^k(r, z)$. En fait, on compte $N/2$ problèmes elliptiques pour $\hat{\Psi}^k$ en identifiant toutes les contributions en cosinus et $N/2$ problèmes elliptiques pour son conjugué $\hat{\Psi}^{N-k}$ en identifiant toutes les contributions en sinus. Il en résulte une diminution des efforts de calcul et la possibilité de mettre en œuvre des algorithmes performants, analogues à ceux des calculs axisymétriques.

Pour chaque mode de Fourier k et chaque valeur d'indice axial j , les problèmes elliptiques discrétisés prennent la forme de systèmes matriciels penta-diagonaux (pour u et v , §4.4.2) et tri-diagonaux (pour w et Φ , §4.4.3). La technique de **diagonalisation partielle** suivant la direction axiale est employée pour résoudre ces systèmes. Sans entrer dans les détails (disponibles dans [20] par exemple), cette technique consiste à calculer les solutions spectrales de ces systèmes discrets dans la base propre de l'opérateur d'évolution axial $\partial^2/\partial z^2$. Dans cette nouvelle base, l'inversion des systèmes matriciels est effectuée via une décomposition LU. Les changements base canonique/base propre et réciproquement sont réalisés par FFT (transformée de Fourier rapide). En outre, ces dernières permettent d'alléger les temps de calcul

puisque le nombre d'opérations requis pour une FFT est de l'ordre de $N \log N$, alors qu'un produit matriciel en exige N^2 .

L'espace physique et l'espace de Fourier sont connectés par la matrice de passage \mathbf{M} (donnée dans l'annexe B) et sa transposée. Afin de nous affranchir des produits de convolution, le terme non-linéaire de convection est évalué dans l'espace physique en utilisant $3N/2$ modes de Fourier pour pallier au repliement des modes (aliasing).

4.4.1 Composante axiale du rotationnel discret sur l'axe

En combinant l'expression de la composante axiale $\Omega_{j+\frac{1}{2}}$ du rotationnel discret sur l'axe (§4.3.2.3) et la définition du mode zéro \widehat{v}^0 de la composante azimutale de la vitesse (annexe B), il vient :

$$\Omega_{j+\frac{1}{2}} = \frac{4}{\Delta r} \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{l=N-1} v_{\frac{1}{2},l,j+\frac{1}{2}} = \frac{4}{\Delta r} \widehat{v}_{\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^0 \quad (4.19)$$

4.4.2 Problèmes de type Helmholtz pour u et v

Pour chaque onde de Fourier k , les nouvelles inconnues spectrales $(\widehat{u}^k, \widehat{v}^{N-k})$ sont les solutions d'un système de deux équations couplées. Pour les mailles régulières ($m > 0$), nous avons le résultat suivant :

$$\begin{cases} A_{m+1} \widehat{u}_{m+1}^k + B_{m+\frac{1}{2}} \widehat{v}_{m+\frac{1}{2}}^{N-k} + C_m \widehat{u}_m^k + D_{m-\frac{1}{2}} \widehat{v}_{m-\frac{1}{2}}^{N-k} + E_{m-1} \widehat{u}_{m-1}^k = \widehat{S} r_m^k \\ A_{m+\frac{3}{2}} \widehat{v}_{m+\frac{3}{2}}^{N-k} + B_{m+1} \widehat{u}_{m+1}^k + C_{m+\frac{1}{2}} \widehat{v}_{m+\frac{1}{2}}^{N-k} + D_m \widehat{u}_m^k + E_{m-\frac{1}{2}} \widehat{v}_{m-\frac{1}{2}}^{N-k} = \widehat{S} \theta_{m+\frac{1}{2}}^{N-k} \end{cases}$$

où la prise en compte des conditions aux limites de type Dirichlet (3.3) est faite au niveau du vecteur second membre. La résolution d'un tel système nécessite l'inversion d'une matrice penta-diagonale d'ordre $(2N+1) \times (2N+1)$ pour toutes les harmoniques non-nulles puisque cette matrice devient tri-diagonale lorsque $k = 0$. Les diagonales ont pour expression :

$$\begin{aligned} A_m &= -\frac{1}{\Delta r^2} \frac{r_m}{r_{m-\frac{1}{2}}} \quad , \quad B_m = \frac{k}{\Delta r} \left(\frac{r_m}{r_{m-\frac{1}{2}}^2} - \frac{1}{r_m} \right) \\ C_m &= \sigma + \frac{k^2}{r_m^2} + \gamma + \frac{1}{\Delta r^2} \left(\frac{r_m}{r_{m+\frac{1}{2}}} + \frac{r_m}{r_{m-\frac{1}{2}}} \right) \\ D_m &= -\frac{k}{\Delta r} \left(\frac{r_m}{r_{m+\frac{1}{2}}^2} - \frac{1}{r_m} \right) \quad , \quad E_m = -\frac{1}{\Delta r^2} \frac{r_m}{r_{m+\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

γ désigne les valeurs propres de l'opérateur d'évolution axial $\partial^2/\partial z^2$. Le traitement particulier sur les mailles adjacentes à l'axe de symétrie ($m = 0$) apporte quelques modifications, soit :

$$\begin{cases} A_2 \widehat{u}_2^k + B_{\frac{3}{2}} \widehat{v}_{\frac{3}{2}}^{N-k} + C_1 \widehat{u}_1^k + D_{\frac{1}{2}} \widehat{v}_{\frac{1}{2}}^{N-k} = \widehat{S}r_1^k \\ A_{\frac{3}{2}} \widehat{v}_{\frac{3}{2}}^{N-k} + B_1 \widehat{u}_1^k + C_{\frac{1}{2}} \widehat{v}_{\frac{1}{2}}^{N-k} = \widehat{S}\theta_{\frac{1}{2}}^{N-k} \end{cases}$$

où la diagonale centrale C est définie par la relation ci-dessous :

$$C_1 = \sigma + \frac{k^2}{r_1^2} + \gamma + \frac{1}{\Delta r^2} \frac{r_1}{r_{\frac{3}{2}}}$$

Il faut ensuite effectuer un travail analogue pour le système d'inconnues conjuguées $(\widehat{u}^{N-k}, \widehat{v}^k)$. On montre alors qu'il suffit simplement de changer k en $-k$ dans l'expression des matrices B et D.

4.4.3 Problèmes de type Helmholtz pour w

De la même façon, la formulation matricielle du problème discret d'inconnue \widehat{w}^k s'écrit, pour chaque mode k :

$$A_{m+\frac{3}{2}} \widehat{w}_{m+\frac{3}{2}}^k + B_{m+\frac{1}{2}} \widehat{w}_{m+\frac{1}{2}}^k + C_{m-\frac{1}{2}} \widehat{w}_{m-\frac{1}{2}}^k = \widehat{S}z_{m+\frac{1}{2}}^k$$

Le spectre du terme source $\widehat{S}z^k$ contient les conditions aux limites (3.3) et la matrice tri-diagonale de dimension $N \times N$ est constituée des éléments ci-dessus :

$$A_{m+\frac{3}{2}} = -\frac{1}{\Delta r^2} \frac{r_{m+\frac{1}{2}}}{r_{m+1}}, \quad B_{m+\frac{1}{2}} = \sigma + \frac{k^2}{r_{m+\frac{1}{2}}^2} + \gamma + \frac{1}{\Delta r^2} \frac{r_{m+1} + r_m}{r_{m+\frac{1}{2}}}, \quad C_{m-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\Delta r^2} \frac{r_m}{r_{m+\frac{1}{2}}}$$

Un résultat similaire est obtenu avec le problème portant sur la quantité conjuguée \widehat{w}^{N-k} .

4.4.4 Problèmes de type Poisson pour Φ

Dans le paragraphe 4.3.3.1, nous avons construit l'opérateur Laplacien scalaire discrétisé à partir des analogues discrets de la divergence et du gradient. En reportant dans ces résultats la décomposition en série de Fourier de la fonction correctrice Φ , nous obtenons deux expressions matricielles. Pour chaque harmonique k , les coefficients spectraux $\widehat{\Phi}^k$ et $\widehat{\Phi}^{N-k}$ sont calculés en inversant une matrice tri-diagonale d'ordre $N \times N$:

$$A_{m+\frac{3}{2}} \widehat{\Phi}_{m+\frac{3}{2}}^k + B_{m+\frac{1}{2}} \widehat{\Phi}_{m+\frac{1}{2}}^k + C_{m-\frac{1}{2}} \widehat{\Phi}_{m-\frac{1}{2}}^k = \widehat{S}\Phi_{m+\frac{1}{2}}^k$$

avec les diagonales suivantes :

$$A_{m+\frac{3}{2}} = \frac{1}{\Delta r^2} \frac{r_{m+1}}{r_{m+\frac{1}{2}}}, \quad B_{m+\frac{1}{2}} = \frac{k^2}{r_{m+\frac{1}{2}}^2} - \gamma - \frac{1}{\Delta r^2} \frac{r_{m+1} + r_m}{r_{m+\frac{1}{2}}}, \quad C_{m-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\Delta r^2} \frac{r_m}{r_{m+\frac{1}{2}}}$$

La prise en compte des conditions aux limites de type Neumann homogène dans la direction radiale est faite au niveau de la matrice B. Le second membre est égal à l'opposé de la divergence du champ de vitesse intermédiaire \mathbf{V} dont on connaît les composantes (§4.4.2 et §4.4.3). En combinant l'approximation de Fourier pour le potentiel correcteur Φ et la discrétisation spatiale de l'opérateur divergence (§4.3.2.1), nous avons :

$$\begin{aligned} \widehat{S\Phi}_{m+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^k &= -\frac{r_{m+1}\widehat{u}_{m+1,j+\frac{1}{2}}^k - r_m\widehat{u}_{m,j+\frac{1}{2}}^k}{r_{m+\frac{1}{2}}\Delta r} - \frac{k}{r_{m+\frac{1}{2}}}\widehat{v}_{m+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{N-k} - \frac{\widehat{w}_{m+\frac{1}{2},j+1}^k - \widehat{w}_{m+\frac{1}{2},j}^k}{r_{m+\frac{1}{2}}\Delta z} \\ \widehat{S\Phi}_{m+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{N-k} &= -\frac{r_{m+1}\widehat{u}_{m+1,j+\frac{1}{2}}^{N-k} - r_m\widehat{u}_{m,j+\frac{1}{2}}^{N-k}}{r_{m+\frac{1}{2}}\Delta r} + \frac{k}{r_{m+\frac{1}{2}}}\widehat{v}_{m+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^k - \frac{\widehat{w}_{m+\frac{1}{2},j+1}^{N-k} - \widehat{w}_{m+\frac{1}{2},j}^{N-k}}{r_{m+\frac{1}{2}}\Delta z} \end{aligned}$$

Remarque – Les indices j suivant z n'ont pas été notés dans les quatre expressions encadrées ci-dessus dans le but d'alléger la formulation.

4.4.5 Calcul des seconds membres

Le terme source est traité de la manière suivante :

- Nous disposons du spectre de chaque composante de la vitesse aux pas de temps $n\Delta t$ et $(n-1)\Delta t$. Nous en déduisons les coefficients de Fourier pour les trois composantes de la vorticité.
- Les vecteurs spectraux précédents sont multipli es par la matrice de passage \mathbf{M} . Dans l'espace physique, nous calculons alors les composantes discrètes de l'opérateur de convection NLU, NLV et NLW. Celles-ci sont passées dans l'espace de Fourier par produit matriciel avec la transposée de \mathbf{M} .
- Les coefficients spectraux des composantes $(\widehat{S_r}^k, \widehat{S_\theta}^k, \widehat{S_z}^k)$ du terme sources sont obtenus à partir de l'équation (4.2). Ensuite, il faut ajouter au terme source le gradient discret appliqu e à l'approximation spectrale de la pression au temps $n\Delta t$. Les systèmes matriciels penta-diagonaux et tri-diagonaux peuvent donc être résolus par diagonalisation partielle suivant z .
- Les coefficients $\widehat{S\Phi}^k$ sont calcul es, ce qui nous permet d'obtenir le spectre de la fonction correctrice.
- Le champ de vitesse et le champ de pression sont d etermin es dans l'espace de Fourier pour chaque mode k au temps $(n+1)\Delta t$. La solution est obtenue dans l'espace physique en effectuant à nouveau une multiplication matricielle.

4.5 Méthodologies

Nous nous proposons d'éclairer les mécanismes responsables de la rupture spontanée de la symétrie axiale de l'écoulement par voie de simulations numériques directes. Dans ce but, la stabilité linéaire et non-linéaire d'un écoulement de base axisymétrique stationnaire, vis-à-vis d'une excitation instantanée non-axisymétrique, est analysée.

De telles approches débutent par la simulation des écoulements de base, stables ou instables, par une méthode de Newton préconditionnée proposée par **Tuckerman (1989)** [73]. Sans entrer dans les détails, la mise en œuvre de cette technique consiste en deux étapes. D'abord, une simulation axisymétrique instationnaire fournit une bonne estimation de départ. Ensuite, l'itéré suivant est obtenu via des algorithmes connus sous l'appellation GMRES², dont le préconditionnement permet d'accélérer la convergence. Enfin, l'ensemble des solutions de base est obtenu en augmentant progressivement le nombre de Reynolds, de sorte que l'état asymptotique de l'une sert de condition initiale pour le calcul suivant.

La condition initiale utilisée pour les calculs en perturbations résulte de la superposition d'une solution de base axisymétrique stationnaire et d'un champ de vitesse aléatoire solénoïdal. La perturbation est générée de la manière suivante :

- ⇒ Pour le mode zéro de la perturbation :
 - $\hat{u}'_0 = \hat{w}'_0 = 0$
 - $\hat{v}'_0 = random$
- ⇒ Pour les modes non-nuls de la perturbation :
 - $\hat{u}'_k, \hat{w}'_k = random$
 - $\hat{u}'_{N-k}, \hat{w}'_{N-k} = random$
 - $\hat{v}'_k = \frac{1}{k} \left(\frac{\partial r \hat{u}'_{N-k}}{\partial r} + r \frac{\partial \hat{w}'_{N-k}}{\partial z} \right)$
 - $\hat{v}'_{N-k} = -\frac{1}{k} \left(\frac{\partial \hat{u}'_k}{\partial r} + r \frac{\partial \hat{w}'_k}{\partial z} \right)$

Il s'ensuit que l'ensemble {solution de base + excitation} est bien à divergence nulle. **Par commodité, ces conditions initiales seront notées CI_b dans la suite du mémoire.**

La résolution des équations du mouvement sous forme perturbative (§3.5) permet d'explorer l'évolution de la perturbation initiale au cours du temps lorsque le mécanisme déstabilisant (i.e. : la rotation du disque moteur) augmente d'intensité. Si la perturbation s'amortit à mesure que le temps s'écoule, l'écoulement de base est stable. Lorsque l'écoulement évolue vers une ou plusieurs solutions différentes de l'écoulement de base, celui-ci est instable. L'existence de solutions multiples est sondée en intégrant les équations de Navier-Stokes complètes avec différentes conditions initiales :

- **Conditions CI_0** : Démarrage impulsif du rotor, le fluide est initialement au repos.
- **Conditions CI^+** : Accélération progressive du rotor, on part d'un régime établi trouvé pour une valeur de Re plus petite.

²Generalized Minimal RESiduals

- **Conditions CI^-** : Décélération progressive du rotor, on part d'un régime établi trouvé pour une valeur de Re plus grande.

Les régimes d'écoulements atteints, éventuellement multiples, sont identifiés par l'analyse du comportement temporel de l'énergie cinétique $E'(k)$ calculée dans l'espace spectral pour chaque mode azimutal k . Celle-ci est normalisée par rapport à l'énergie cinétique E_0 de la solution de base, qui est de l'ordre de 10^{-2} :

$$\frac{E'(k)}{E_0} = \frac{\iint_{\partial S} \widehat{\mathbf{V}}'^k \cdot \widehat{\mathbf{V}}'^{N-k} r dS}{\iint_{\partial S} \mathbf{V}_o \cdot \mathbf{V}_o r dS}$$

où $dS = dr dz$ est un élément de surface dans le plan méridien. En vertu du théorème de Parseval, l'énergie cinétique E de l'écoulement normalisée par rapport à E_0 est donnée par :

$$\frac{E}{E_0} = \sum_{k=0}^{k=N/2-1} \frac{E'(k)}{E_0}$$

La nature instationnaire de l'écoulement est caractérisée en examinant l'évolution temporelle de la composante azimutale v' de la perturbation de vitesse en un point de contrôle.

Sauf mention contraire, les maillages mis en œuvre se composent de $N = 32$ points dans la direction périodique. **Tous les calculs ont été réalisés de sorte que le nombre de mailles dans la direction radiale M et celui dans la direction axiale J vérifient systématiquement la relation :**

$$J = h \times M$$

D'autre part, l'amplitude de la perturbation initiale est fixée à la valeur 10^{-3} et le pas de temps Δt est égal à 0.005. Le temps est exprimé en nombre de tours effectués par le couvercle en rotation.

Chapitre 5

Validation du code de calcul

L'objet de ce chapitre est de valider les techniques numériques explicitées au chapitre 4 avant d'aborder les problèmes de brisure spontanée de l'axisymétrie. Dans ce but, nos calculs sont comparés à quelques résultats numériques et expérimentaux de la littérature.

5.1 Solutions axisymétriques stationnaires

Les éclatements tourbillonnaires confinés, qui apparaissent sur l'axe de symétrie pour certaines combinaisons des paramètres de contrôle, sont communément caractérisés par trois longueurs normalisées par rapport à la hauteur H de la cuve : l désigne la distance séparant le disque immobile et le premier point d'arrêt sur l'axe, s est l'extension axiale de la bulle et e représente son épaisseur suivant la direction radiale. Celles-ci sont schématisées sur la figure 5.1. Dans la perspective de valider leurs simulations axisymétriques [43, 72, 36] et tridimensionnelles [65, 60] de façon plus quantitative, certains auteurs ont relevé ces dimensions caractéristiques sur les photographies de visualisations expérimentales [23, 25, 67] et les ont comparées à leurs valeurs numériques.

Dans cette section, nous rapportons nos mesures de la taille et de la localisation relatives des bulles de recirculation pour différents taux de rotation et quatre rapports de forme dans la gamme des régimes axisymétriques permanents : $h = 1.5, 1.75$ et 2 dans le tableau 5.1, puis $h = 2.5$ et 3.25 dans le tableau 5.2. Nos résultats découlent de la résolution des équations de Navier-Stokes axisymétriques stationnaires en utilisant la méthode de Newton préconditionnée développée par **Tuckerman** [73]. Les maillages bidimensionnels mis en œuvre sont tels que $M = 200$ afin d'effectuer une comparaison équitable avec les résultats obtenus sur des grilles non-uniformes. Celles-ci concentrent davantage de nœuds autour de l'axe et semblent plus adaptées à ce genre d'investigation.

Les longueurs l et s sont aisément déterminées en repérant les coordonnées z le long de l'axe de symétrie pour lesquelles la composante axiale $w(r, z)$ de la vitesse change de signe. Cette

dernière est approchée par la relation d'extrapolation quadratique suivante :

$$w(0, z) = \frac{9w(r_{\frac{1}{2}}, z) - w(r_{\frac{3}{2}}, z)}{8}$$

Nous définissons le contour \mathcal{C} de la zone d'écoulement inverse ¹ comme étant l'ensemble des circonférences sur lesquelles le flux de vitesse axiale s'annule. De ce fait, il s'ensuit que la plus grande d'entre elles constitue l'épaisseur de l'éclatement tourbillonnaire. Formellement :

$$\mathcal{C} = \left\{ (r_e, z_e) / \int_{r=0}^{r=r_e} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} w r d\theta dr = 0, z_e \in s \right\} \quad \text{et} \quad e = \text{Max} \{r_e\}$$

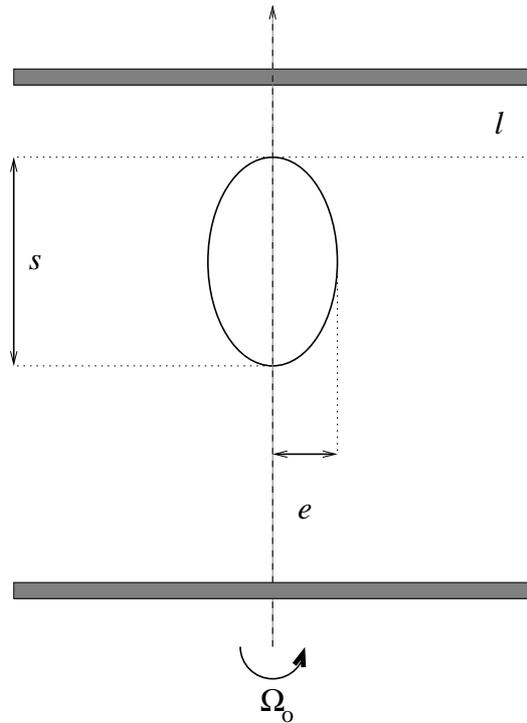


FIG. 5.1 – Représentation schématique des longueurs caractéristiques d'une bulle de recirculation.

En dépit du fait que notre grille soit à pas d'espace $(\Delta r, \Delta z)$ constants, nos mesures de l/H et s/H sont manifestement en excellent accord avec ce qui avait été observé auparavant par le biais d'expériences ou de simulations numériques. Conformément aux visualisations expérimentales, l'accroissement du paramètre dynamique Re se traduit par une diminution de la distance l/H séparant le couvercle stationnaire et le premier point d'arrêt sur l'axe, ainsi qu'un étirement de la longueur axiale s/H des zones d'écoulement inverse.

¹Lorsque l'écoulement est supposé axisymétrique et que la formulation (ψ, ω, v) est adoptée, le contour \mathcal{C} de la bulle correspond à l'iso-ligne où la fonction de courant est nulle.

				Bulle	l/H	s/H	e/H
$h = 1.5$							
$Re = 1256$	Escudier	[23]	Exp.	1	0.34	0.13	?
	Tsitverblit	[72]	Num.	1	0.34	0.13	?
	Barbosa			1	0.339	0.132	0.109
$Re = 1492$	Escudier	[23]	Exp.	1	0.27	0.12	?
	Tsitverblit	[72]	Num.	1	0.27	0.12	?
	Barbosa			1	0.268	0.120	0.134
$h = 1.75$							
$Re = 1850$	Spohn <i>et al.</i>	[67]	Exp.	1	0.19	0.108	0.126
	Sotiropoulos & Ventikos	[65]	Num.	1	0.2	0.116	0.137
	Barbosa			1	0.203	0.127	0.139
$h = 2$							
$Re = 1492$	Escudier	[23]	Exp.	1	0.34	0.06	0.041
	Lugt & Abboud	[43]	Num.	1	0.31	0.09	?
	Tsitverblit	[72]	Num.	1	0.34	0.07	?
	Sotiropoulos	[65]	Num.	1	0.323	0.064	0.041
	Barbosa			1	0.335	0.083	0.048
$Re = 1854$	Escudier	[23]	Exp.	1	0.21	0.16	0.113
				2	0.52	0.07	0.019
	Lugt	[43]	Num.	1	0.20	0.14	?
				2	0.44	?	?
	Tsitverblit	[72]	Num.	1	0.21	0.17	?
				2	0.50	?	?
	Sotiropoulos & Ventikos	[65]	Num.	1	0.21	0.176	0.113
				2	0.464	0.081	0.020
	Barbosa			1	0.209	0.177	0.113
				2	0.476	0.082	0.022
$Re = 2100$	Fujimura <i>et al.</i>	[25]	Exp.	1	0.18	?	?
				2	–	–	–
	Sotiropoulos & Ventikos	[65]	Num.	1	0.175	0.105	0.117
				2	0.386	0.128	0.093
	Serre & Bontoux	[60]	Num.	1	0.180	0.130	0.116
				2	–	–	–
	Barbosa			1	0.175	0.159	0.128
				2	0.398	0.118	0.034

TAB. 5.1 – Voir Tab. 5.2 pour la légende.

				Bulle	l/H	s/H	e/H
$h = 2.5$							
$Re = 1994$	Escudier [23] Exp.	1	0.24	0.06	?		
		2	0.54	0.08	?		
	Lugt & Abboud [43] Num.	1	0.20	0.08	?		
		2	0.43	0.17	?		
	Tsitverblit [72] Num.	1	0.24	0.07	?		
		2	0.53	0.08	?		
	Barbosa	1	0.245	0.069	0.048		
		2	0.535	0.091	0.028		
$Re = 2126$	Escudier [23] Exp.	1	0.2	0.09	?		
		2	0.45	0.16	?		
	Tsitverblit [72] Num.	1	0.2	0.1	?		
		2	0.45	0.17	?		
	Lopez [36] Num.	1	0.2	0.1	?		
		2	0.45	0.17	?		
	Barbosa	1	0.205	0.095	0.069		
		2	0.451	0.168	0.046		
$Re = 2494$	Escudier [23] Exp.	1	0.15	0.41	?		
	Tsitverblit [72] Num.	1	0.15	0.42	?		
	Lopez [36] Num.	1	0.16	0.41	?		
	Barbosa	1	0.150	0.426	0.098		
$h = 3.25$							
$Re = 2752$	Escudier [23] Exp.	1	0.18	0.04	?		
		2	0.43	0.25	?		
		3	?	?	?		
	Lugt & Abboud [43] Num.	1	0.15	0.07	?		
		2	0.32	0.30	?		
		3	–	–	–		
	Tsitverblit [72] Num.	1	0.18	0.04	?		
		2	0.42	0.26	?		
		3	–	–	–		
	Barbosa	1	0.186	0.044	0.036		
		2	0.428	0.250	0.022		
		3	–	–	–		

TAB. 5.2 – Dimensions caractéristiques de l'éclatement tourbillonnaire stationnaire pour des valeurs de h dans l'intervalle $[1.5, 3.25]$. Comparaisons entre les valeurs numériques (Num.) et les valeurs expérimentales (Exp.). Les points d'interrogation signifient que les longueurs caractéristiques ne sont pas disponibles dans la littérature. Les tirets indiquent que les zones de recirculation n'ont pas été observées.

Pour le couple de paramètres ($h = 1.75, Re = 1850$), nous constatons une surestimation de l'extension axiale de la bulle de l'ordre de 18% par rapport à la mesure expérimentale de **Spohn et al.**, et de 9% vis-à-vis du résultat numérique de **Sotiropoulos & Ventikos**. D'autre part, les calculs présentés viennent corroborer la faible quantité de données disponibles dans la littérature quant à l'épaisseur des éclatements tourbillonnaires confinés.

Pour une cavité de rapport de forme 2 et un nombre de Reynolds 2100, nos résultats ainsi que les travaux cités s'accordent sur la position du premier point d'arrêt, soit $l \simeq 0.175H$. En revanche, nos valeurs de s/H et e/H pour la première bulle s'avèrent supérieures à celles rapportées par **Serre & Bontoux** d'une part, et celles de **Sotiropoulos & Ventikos** d'autre part. À l'instar de ces deux derniers auteurs, nous avons mis en évidence une seconde zone de recirculation. Les résultats présentés confirment à 3% près la localisation du second point fixe obtenue par **Sotiropoulos & Ventikos**, mais l'absence de données ne permet pas de trancher en faveur de l'une ou l'autre étude en ce qui concerne les deux autres grandeurs caractéristiques.

Enfin, nous nous sommes intéressés aux écoulements axisymétriques dans une enceinte de rapport d'aspect est égal à 3.25. Pour cette configuration, **Escudier** a visualisé des structures composées de trois éclatements tourbillonnaires lorsque le nombre de Reynolds vaut 2752. Cependant, l'ensemble des investigations numériques, y compris la notre, ne détectent pas la troisième zone de recirculation. En revanche, les simulations tridimensionnelles de **Serre [59]** font apparaître trois éclatements tourbillonnaires pour $Re = 2750$ dans une cavité légèrement plus haute ($h \simeq 3.33$).

5.2 Solutions axisymétriques instationnaires dans une cuve de rapport d'aspect $h = 2$

5.2.1 Approche linéaire

Dans cette section, on considère un écoulement de fluide engendré par la rotation d'un disque tournant au fond d'une cuve cylindrique dont le rapport d'allongement axial h est fixé à 2. Nous nous proposons de retrouver le nombre de Reynolds critique Re_c au dessus duquel les solutions deviennent instationnaires. Dans cette perspective, les équations de Navier-Stokes axisymétriques instantanées, linéarisées autour d'un état de base axisymétrique permanent, ont été résolues. L'énergie cinétique E' de la perturbation est tracée en fonction du temps sur la figure 5.2.a pour des nombres de Reynolds compris entre 2560 et 2580. Le maillage utilisé est tel que $M = 200$. Il apparaît que le taux de croissance τ de la perturbation est négatif tant que le paramètre Re reste en deçà de 2570. Cela signifie que l'écoulement de base est stable vis-à-vis des perturbations axisymétriques puisque celles-ci sont amorties à mesure que le temps s'écoule. En revanche, τ change de signe au delà de $Re = 2575$: en augmentant la rotation, les perturbations initiales ont été amplifiées de façon exponentielle et l'écoulement de base est déstabilisé. Ces observations révèlent la présence d'un seuil de stabilité linéaire situé

dans l'intervalle $[2570, 2575]$ pour $M = 200$.

Dans le but de mettre en évidence l'influence de la discrétisation en espace sur ce résultat, la procédure précédente a été renouvelée pour deux maillages plus grossiers : nous avons trouvé $Re_c \in [2550, 2555]$ pour $M = 100$ et $Re_c \in [2565, 2570]$ pour $M = 160$. Il est clair qu'une précision moindre en espace tend à sous-estimer la valeur du point de transition. Ces trois encadrements sont ensuite rapportés sur le diagramme $(1/M, Re)$ de la figure 5.2.b. Une valeur théorique du taux de rotation est alors obtenue par extrapolation quadratique (car l'approximation spatiale mise en œuvre est du second ordre) en $1/M = 0$. Finalement, la lecture graphique donne $Re_c \in [2590, 2595]$.

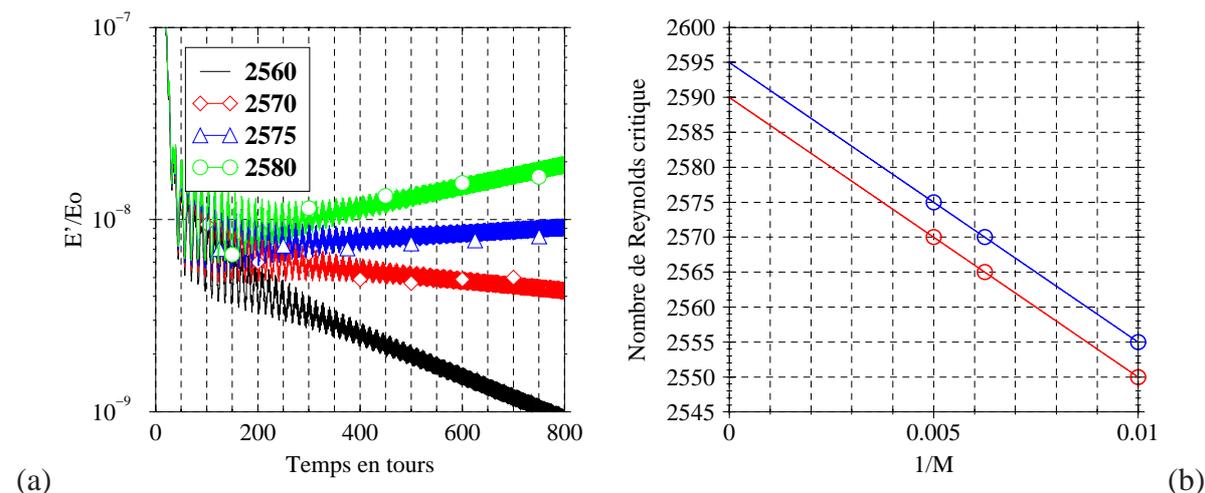


FIG. 5.2 – $h = 2$: (a) Énergie cinétique E' de la perturbation au cours du temps en régime linéaire pour $Re \in [2560, 2580]$. Représentation semi-logarithmique. (b) Influence du maillage sur la valeur de Re_c .

5.2.2 Approche non-linéaire

À présent, les termes non-linéaires des équations de Navier-Stokes ne sont plus négligés. Il est connu – voir par exemple **Daube & Sørensen** [18] – que la transition depuis les écoulements stationnaires vers les régimes instationnaires s'opère via une bifurcation de Hopf super-critique.

Le caractère oscillatoire périodique des écoulements super-critiques est illustré en considérant par exemple la solution à $Re = 2650 > Re_c$, obtenue avec un maillage tel que $M = 160$. Le comportement temporel quasi-sinusoïdal de la composante axiale w de la perturbation de vitesse au point de contrôle ($r = 0.75, z = 0.5h$) est donnée sur la figure 5.3. La fréquence fondamentale f du cycle limite est alors déterminée par une analyse de Fourier de ce signal : au voisinage du point de bifurcation, f vaut 0.236 fois la fréquence du rotor. Le tableau comparatif 5.3 permet de conclure que nos résultats obtenus par le biais de simulations numériques instationnaires sous l'hypothèse d'axisymétrie coïncident avec l'ensemble des travaux publiés pour le rapport d'aspect $h = 2$.

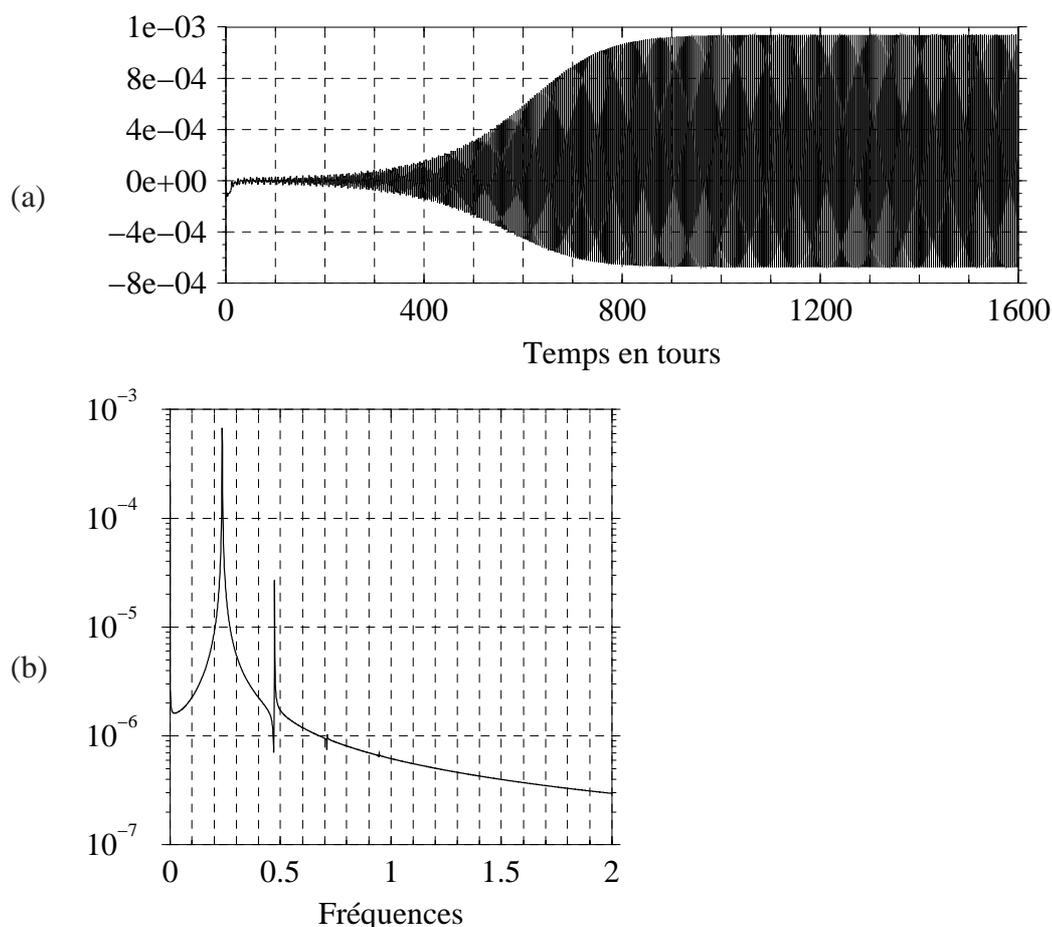


FIG. 5.3 – $h = 2$, $Re = 2650$: (a) Variations temporelles de la composante axiale w' de la perturbation de vitesse au cours du temps au point ($r = 0.75$, $z = 0.5h$) en régime non-linéaire. (b) Densité énergétique spectrale correspondante pour $t \in [800, 1600]$ en représentation semi-logarithmique.

$h = 2$			Re_c	f
Escudier	[23]	Exp.	2593*	?
Tsitverblit	[72]	Num.	[2530, 2560]	?
Sørensen & Christensen	[63]	Num.	2540	0.238
Gelfgat <i>et al.</i>	[28]	Num.	2580*	0.236*
Barbosa			[2590, 2595]	0.236

TAB. 5.3 – $h = 2$: Nombre de Reynolds critiques et fréquence au seuil. Comparaison entre les valeurs numériques (Num.) et expérimentales (Exp.) publiées. Les points d'interrogation signifient que les données ne sont pas disponibles dans les articles cités. Les valeurs étoilées ont été directement mesurées sur le diagramme de référence donné dans l'annexe C.

5.3 Solutions tridimensionnelles

Ce chapitre s'achève par quelques calculs en perturbations afin de valider l'algorithme de résolution des équations de Navier-Stokes tridimensionnelles instationnaires. En particulier, notre propos est d'examiner la réponse linéaire ou non d'un écoulement de base axisymétrique stationnaire, lorsque celui-ci est perturbé par un champ de vitesse aléatoire qui dépend du temps. L'approximation spatiale est réalisée sur une grille constituée de $M = 100$ mailles dans la direction radiale et $N = 32$ points dans la direction périodique.

5.3.1 Cuve de rapport d'aspect $h = 1.75$

L'écoulement de fluide dans une cuve cylindrique de rapport de forme $h = 1.75$, engendré par la rotation de l'un des couvercles, est étudié pour $Re = 1850$. L'examen de la figure 5.4.a montre que l'écoulement est constitué d'une seule zone de recirculation. Celle-ci est représentée par l'iso-surface nulle de la composante axiale w du champ de vitesse total (i.e. : écoulement de base + perturbations).

D'autre part, l'évolution temporelle des énergies cinétiques $E'(k)$ de la perturbation est rapportée sur la figure 5.4.b. Il s'avère que l'écoulement de base est stable puisque tous les modes azimutaux k de la perturbation décroissent de façon exponentielle à mesure que le temps s'écoule. Ce résultat stipule la stationnarité d'une part et l'axisymétrie d'autre part de l'écoulement pour cette combinaison des paramètres de contrôle. L'ensemble des études numériques publiées s'accorde sur ce point, à l'exception de celle menée par **Sotiropoulos & Ventikos** [65].

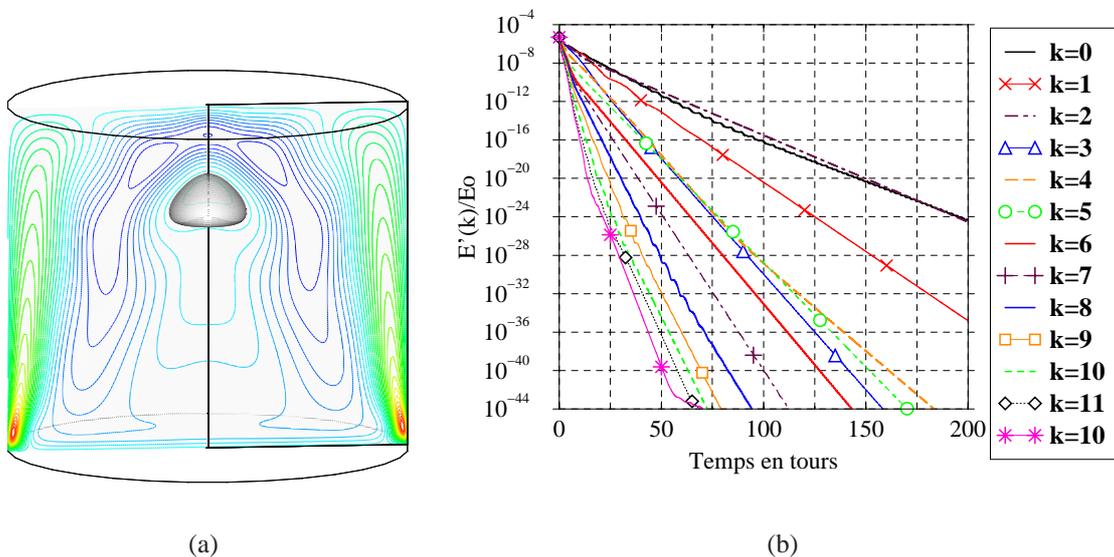


FIG. 5.4 – $h = 1.75$, $Re = 1850$: (a) Éclatement tourbillonnaire stationnaire. Iso-surface nulle et les iso-lignes de la composante axiale w du champ de vitesse total dans un plan méridien. (b) Énergies cinétiques modales $E'(k)$ au cours du temps en régime non-linéaire. Représentation semi-logarithmique.

5.3.2 Cuve de rapport d'aspect $h = 2$

Le rapport d'allongement axial h est porté à la valeur 2. Lorsque le nombre de Reynolds vaut 1854, les simulations tridimensionnelles en perturbations mettent en évidence deux éclatements tourbillonnaires le long de l'axe $r = 0$ (voir Fig. 5.5), en accord avec les conclusions énoncées précédemment dans le tableau 5.1.

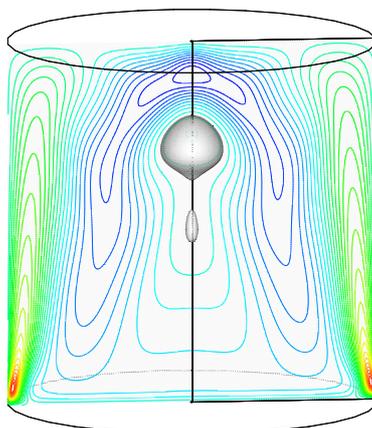


FIG. 5.5 – $h = 2$, $Re = 1854$: Éclatements tourbillonnaires stationnaires. Iso-surface nulle et les iso-lignes de la composante axiale w du champ de vitesse total dans un plan méridien.

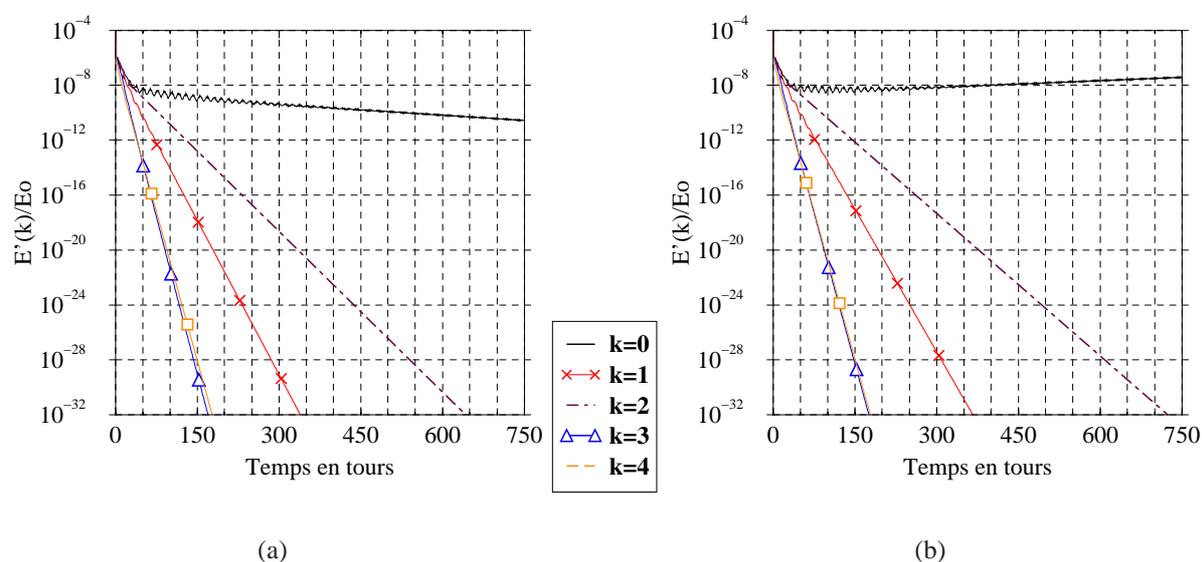


FIG. 5.6 – $h = 2$: Énergies cinétiques modales $E'(k)$ au cours du temps en régime linéaire pour $Re = 2525$ (a) et $Re = 2575$ (b). Représentations semi-logarithmiques.

On s'intéresse à l'évolution temporelle de l'énergie cinétique modale $E'(k)$ en régime linéaire pour deux valeurs du nombre de Reynolds. Lorsque $Re = 2525$ (Fig. 5.6.a), il apparaît que la

contribution énergétique des cinq premiers modes azimutaux de la perturbation tend à s'annuler et de ce fait, la solution de base reste stable. Il n'en est plus de même si le disque moteur est accéléré. Pour $Re = 2575$ (Fig. 5.6.b), nous constatons que le taux de croissance du mode axisymétrique $k = 0$ est positif : celui-ci est donc le mode le plus instable linéairement. En dépit du fait que le développement d'instabilités tridimensionnelles est autorisé, il s'avère que l'écoulement de base conserve son axisymétrie mais devient instationnaire en franchissant une valeur critique dans l'intervalle $[2525, 2575]$.

5.3.3 Cuve de rapport d'aspect $h = 3$

Une onde azimutale tournante apparaît lorsque l'axisymétrie de l'écoulement est brisée par une bifurcation. Cet aspect remarquable a été rapporté par **Knobloch (1994)** [33] et plus récemment par **Marques & Lopez (2001)** [47] par le biais de simulations numériques tridimensionnelles. Dès lors, nous nous sommes attachés à mettre en évidence l'onde tournante pour la combinaison ($h = 3, Re = 2850$) et dans cette perspective, une analyse de stabilité non-linéaire est présentée.

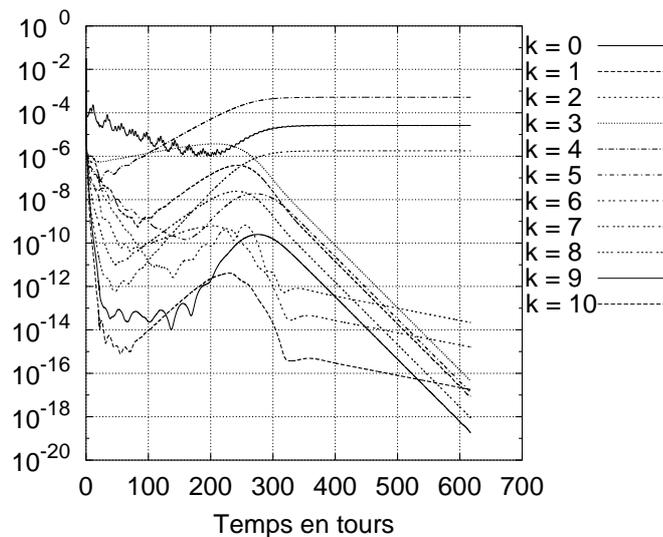


FIG. 5.7 – $h = 3, Re = 2850$: Énergies cinétiques modales $E'(k)$ au cours du temps en régime non-linéaire. Représentations semi-logarithmiques.

Sur la figure 5.7, l'évolution temporelle de l'énergie cinétique $E'(k)$ de la perturbation est tracée pour les dix premiers modes de Fourier. Après une longue phase transitoire d'environ 300 tours, l'énergie du mode $k = 4$ d'une part, et celle des modes $k = 0$ et $k = 8$ par voie d'interactions non-linéaires d'autre part, saturent à un niveau fini. Les autres modes azimutaux quant à eux sont amortis exponentiellement au cours du temps. Compte tenu des temps de calculs nécessaires pour ce grand rapport d'aspect, nous n'avons pas cherché à déterminer le nombre de Reynolds critique Re_c de façon plus précise.

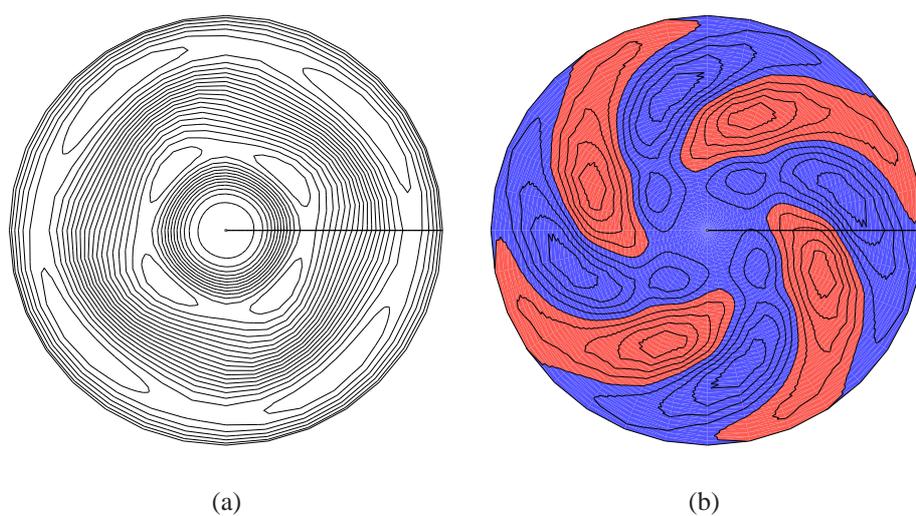


FIG. 5.8 – $h = 3$, $Re = 2850$: Iso-lignes/valeurs de la composante axiale de la vitesse dans le plan $z = 0.8h$ pour l'écoulement total w (a) et la perturbation w' (b). Les zones bleues (rouges) correspondent aux valeurs positives (négatives).

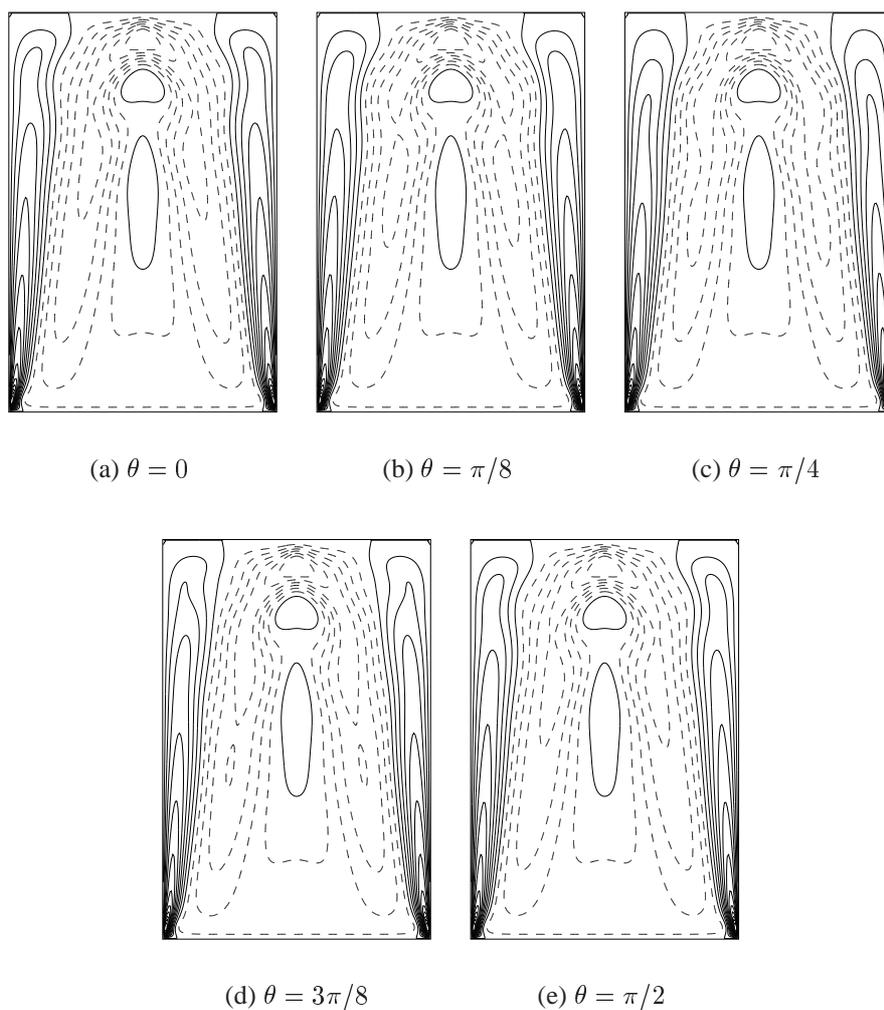


FIG. 5.9 – $h = 3$, $Re = 2850$: Iso-lignes de la composante axiale w de la vitesse totale dans cinq plans méridiens séparés par un angle de $\pi/8$. Les iso-lignes continues (discontinues) sont positives (négatives).

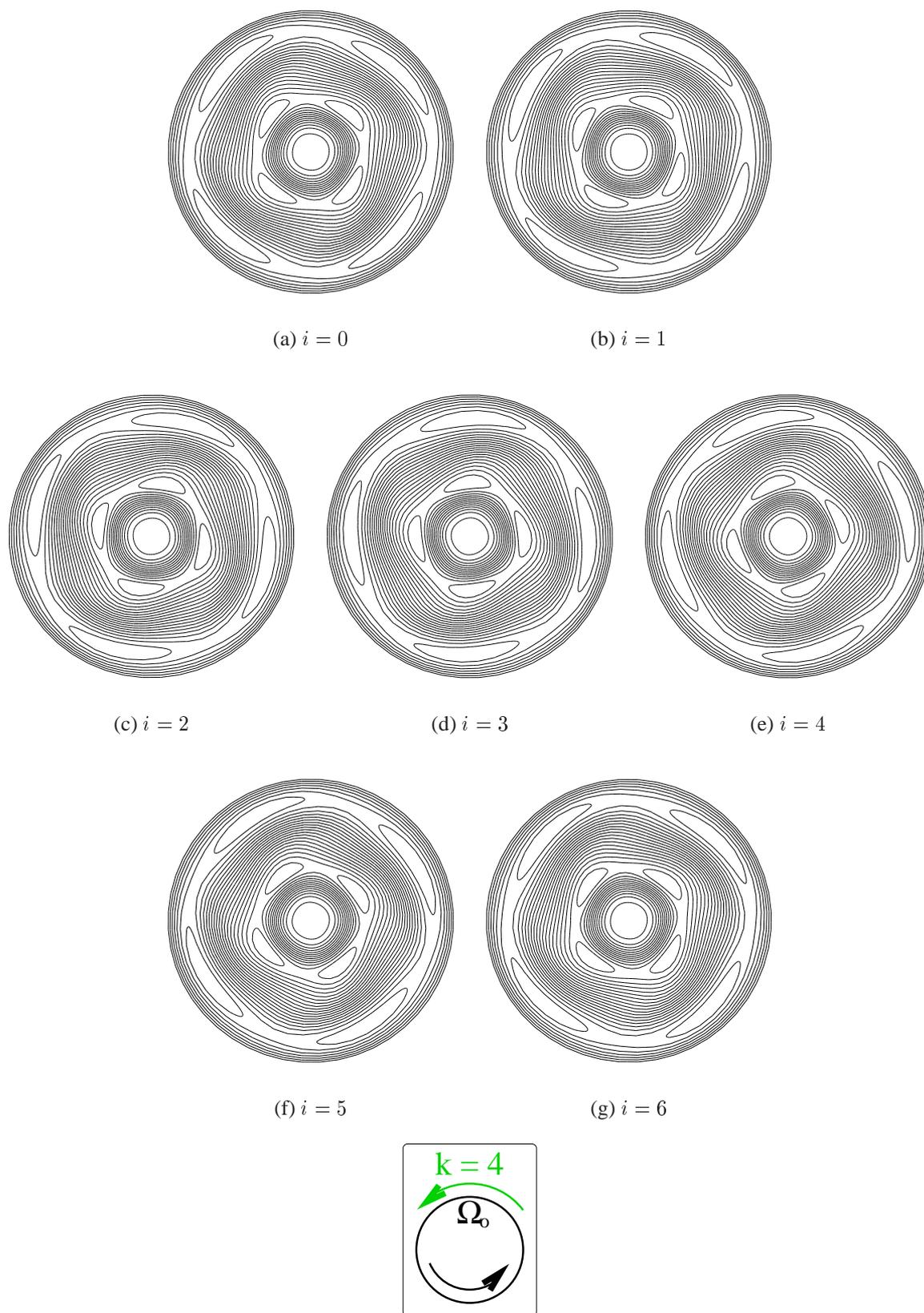


FIG. 5.10 – $h = 3$, $Re = 2850$: Iso-lignes de la composante axiale w de la vitesse totale dans le plan $z = 0.8h$ au cours d'une période $T \simeq 2.35$ tours. Chaque figure correspond au temps $t = t_0 + iT/6$, avec $i = 0, \dots, 6$.

Néanmoins, les résultats présentés sont en bon accord avec l'étude de stabilité linéaire réalisée par **Gelfgat et al.** [28]. En effet, leurs calculs prédisent que le mode $k = 4$ est le premier à devenir linéairement instable en franchissant le seuil de criticalité $Re_c = 2839$

À présent, plusieurs figures sont proposées afin de corroborer la présence d'un mode azimutal $k = 4$ dominant :

- Fig. 5.8.a : Les iso-lignes de la composante axiale w du champ de vitesse total sont projetées dans la section $z = 0.8h$. Des structures spatiales quadratiques sont clairement mises en évidence.
- Fig. 5.8.b : On trace les iso-lignes/valeurs de la composante axiale w' de perturbation de vitesse dans le plan $z = 0.8h$. L'alternance des zones bleues ($w' > 0$) et rouges ($w' < 0$) exhibe une périodicité azimutale d'ordre quatre.
- Fig. 5.9 : Les iso-lignes de w sont représentées dans cinq plans méridiens dont le positionnement en azimut diffère d'un angle $\pi/8$. Conformément à ce qui vient d'être dit, l'écoulement est invariant par rotation d'angle $\pi/2$ autour de l'axe.

Le comportement temporel en régime établi de la solution super-critique obtenue à $Re = 2850$ a été analysée. Nous avons relevé la fréquence fondamentale f suivante :

$$\text{fréquence } f = 0.4255 \text{ tours}^{-1} \iff \text{période } T = 1/f = 2.35 \text{ tours}$$

Ce résultat est en bon accord avec la fréquence critique $f_c = 0.4386$ trouvée par **Gelfgat et al.** [28]. Une manière d'illustrer l'onde azimutale tournante associée au mode $k = 4$ consiste à visualiser la figure 5.8.a au cours d'une période T à différents instants (voir Fig. 5.9). Cette séquence temporelle rend bien compte de la précession azimutale des structures spatiales avec une période $T_{RW4} = 4 \times T$, compte tenu de la symétrie d'ordre quatre du motif. En outre, l'onde de mode $k = 4$ tourne dans le même sens que le couvercle moteur, mais avec une vitesse angulaire plus faible.

Cette étude qualitative et quantitative permet de conclure que nous disposons d'une méthode numérique efficace (voir annexe D) pour explorer la tridimensionnalisation des écoulements dans une cuve cylindrique avec un fond tournant. Cette investigation, présentée aux chapitres suivants, est menée par le biais de deux approches complémentaires. L'une repose sur les analyses de stabilité, linéaire ou non, d'un écoulement de base axisymétrique stationnaire. L'autre consiste à résoudre les équations de Navier-Stokes complètes (c'est-à-dire sous forme non-perturbative) avec différents processus d'initialisation.

Troisième partie

Simulation numérique directe des écoulements dans un cylindre soumis à la rotation

Chapitre 6

Étude de l'écoulement dans une cuve de rapport d'aspect $h = 1$

Dans ce chapitre, nous présentons les simulations numériques directes d'un écoulement de fluide visqueux incompressible dans une cuve cylindrique rotor-stator, dont le rapport de forme est fixé à 1. Notre propos est d'apporter une meilleure connaissance des phénomènes physiques qui engendrent la brisure de l'axisymétrie de l'écoulement lorsque la rotation du couvercle inférieur augmente. Dans cette perspective, la stabilité d'un écoulement de base axisymétrique stationnaire est explorée. Les approches linéaire (§6.1) et non-linéaire (§6.2) sont présentées. La localisation spatiale des modes azimutaux est discutée (§6.3) et l'existence de solutions multiples est mise en évidence en utilisant divers processus d'initialisation (§6.4). Ensuite, nous montrons que des ondes azimutales tournantes modulées apparaissent pour des nombres de Reynolds supérieurs à 6300 (§6.5). Une synthèse des résultats obtenus est proposée en fin de chapitre (§6.6).

6.1 Analyse linéaire

Dans ce paragraphe, nous déterminons le premier seuil de stabilité linéaire Re_{c1} , puis nous analysons l'évolution linéaire des perturbations initiales lorsque $Re > Re_{c1}$. Ces résultats sont comparés à ceux obtenus par **Gelfgat et al.** [28]. Conformément aux notations introduites en §4.5, **les conditions initiales mises en œuvre sont de type CI_b** .

6.1.1 Premier seuil de stabilité

Sur la figure 6.1 sont tracées :

- (a) : L'évolution temporelle de l'énergie cinétique $E'(k)$ du mode $k = 2$ pour des valeurs de Re comprises entre 2430 et 2460, avec $\Delta Re = 5$
- (b) : L'énergie cinétique $E'(k)$ des modes $k = 0$ à $k = 5$ au cours du temps pour $Re = 2550$.

Ces figures révèlent que le mode azimutal $k = 2$ est le premier à devenir instable linéaire lorsqu'une certaine valeur critique du nombre de Reynolds Re_{c1} dans l'intervalle $[2445, 2450]$ est franchie. Lorsque les valeurs de Re sont super-critiques ($Re > Re_{c1}$), l'amplification des perturbations initiales se manifeste par un comportement asymptotique strictement croissant à mesure que le temps s'écoule : l'état de base est donc instable linéaire. Au contraire, les perturbations initiales régressent exponentiellement tant que les valeurs de Re restent sous-critiques ($Re < Re_{c1}$) : dans ce cas, l'écoulement de base est stable linéaire.

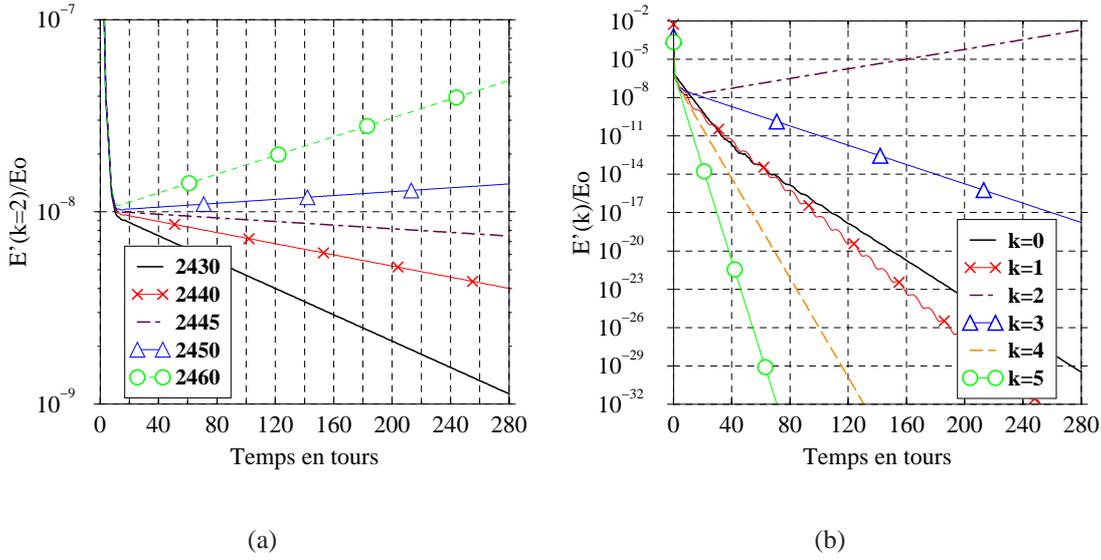


FIG. 6.1 – $h = 1$: Énergies cinétiques modales $E'(k)$ au cours du temps en régime linéaire. (a) $k = 2$, Re variable. (b) k variable, $Re = 2550$. Représentations semi-logarithmiques.

Le calcul direct des solutions pour quelques nombres de Reynolds permet seulement de donner un encadrement du seuil de stabilité linéaire du nombre d'onde $k = 2$. Sachant que ce seuil est exactement atteint lorsque le taux de croissance τ_2 du mode azimutal $k = 2$ est nul, il est possible de déterminer plus précisément la valeur de Re_{c1} en procédant de la façon suivante. Pour au moins trois valeurs de Re légèrement super-critiques, τ_2 est calculé en mesurant la pente de l'asymptote $E'(k = 2)$. Comme le montre la figure 6.2.a, il s'avère que ces points sont alignés et de ce fait, les variations de τ_2 sont proportionnelles à l'écart au seuil $Re - Re_{c1}$. Il s'ensuit que la valeur critique du nombre de Reynolds est obtenue par l'extrapolation à zéro de cette droite : il vient $Re_{c1} = 2447.35$ lorsque le maillage utilisé est tel que $M = 100$. Pour nous assurer que cette valeur n'est pas biaisée par la discrétisation numérique, nous avons répété ce traitement pour deux grilles plus fines (voir Tab. 6.1) : $M = 160$ puis 200 . Au vu de ces résultats, nous constatons que l'utilisation d'un maillage trop grossier sous-estime le seuil de stabilité linéaire. On peut concevoir cette sous-estimation comme l'introduction d'une viscosité artificielle puisque Re est inversement proportionnel à la viscosité cinématique ν . Le schéma de discrétisation spatiale étant d'ordre deux, on suppose que les nombres de Reynolds critiques calculés pour chaque valeur de M obéissent à la relation quadratique suivante :

$$Re_{c1}\left(\frac{1}{M}\right) = Re_{c1}^{th} + \frac{a_1}{M} + \frac{a_2}{M^2}$$

Il est manifeste que la valeur théorique Re_{c1}^{th} est atteinte lorsque M devient infiniment grand. Pour $1/M = 0$, il suffit de lire sur la figure 6.2.b :

$$Re_{c1}^{\text{th}} = 2473.03$$

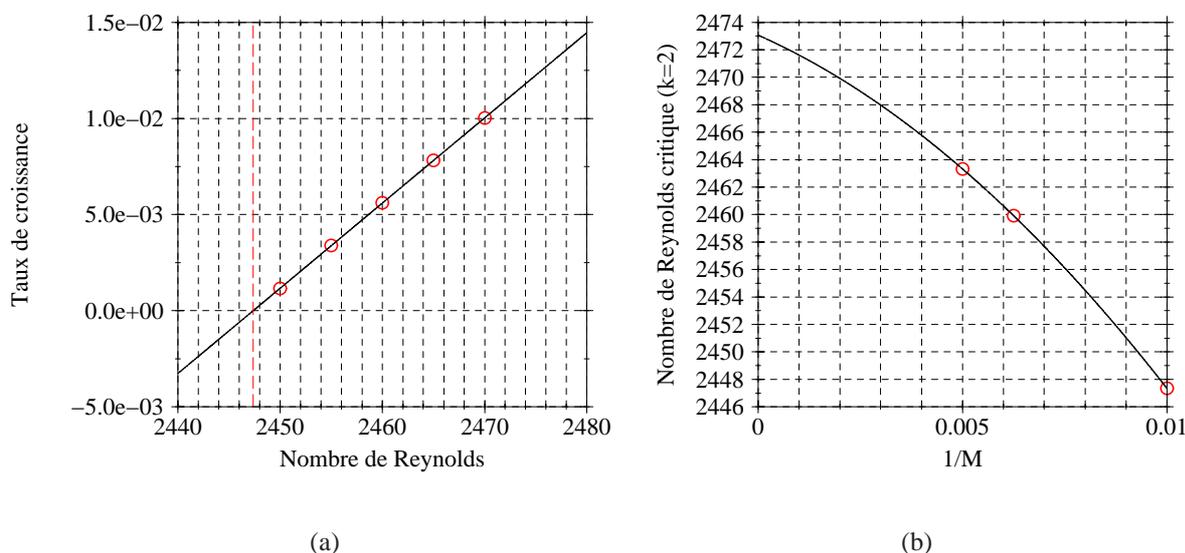


FIG. 6.2 – $h = 1$, $k = 2$: (a) Détermination de Re_{c1} par extrapolation pour $M = 100$. (b) Influence du maillage sur la valeur extrapolée de Re_{c1} .

M	100	160	200
Re_{c1}	2447.35	2459.92	2463.33

TAB. 6.1 – $h = 1$: Variations du seuil de stabilité linéaire du mode $k = 2$ en fonction du maillage.

Cette valeur est en excellent accord avec la valeur numérique $Re_c = 2471$ trouvée par **Gelfgat et al.** [28]. En outre, l'erreur relative entre notre seuil théorique et celui que nous avons obtenu pour le maillage $M = 100$ est égale à 1%. Pour les calculs qui suivent, nous avons donc retenu $M = 100$ mailles dans la direction radiale (et donc $J = h \times M$ mailles dans la direction axiale).

6.1.2 Au delà du premier seuil de stabilité

Ensuite, notre attention s'est portée sur les variations du taux de croissance τ_k des modes azimutaux $k = 0$ à $k = 5$ de la perturbation en fonction du nombre de Reynolds, lorsque

celui-ci prend des valeurs comprises entre 2400 et 7100. Conformément au graphique 6.3, l'ordre suivant lequel ces modes deviennent instables linéairement est : $k = 2, 3, 0, 1, 4$ et 5 . Pour déterminer rigoureusement le seuil de stabilité linéaire de ces modes, il faudrait procéder par extrapolation, comme nous l'avons fait pour $k = 2$ dans la section 6.1.1. Cependant, une approximation du seuil de stabilité linéaire de chaque mode est directement obtenue en relevant la valeur de Re pour laquelle τ_k s'annule. En procédant ainsi, le nombre de Reynolds critique du mode $k = 3$ vaut environ 2830 et celui du mode $k = 0$ est environ égal 3130. Ces résultats se sont avérés en très bon accord avec les prédictions de **Gelfgat et al.** [28]. D'autre part, nous constatons que les courbes τ_2 et τ_3 se croisent au point $Re_{\mathcal{L}} \simeq 3833$: $\tau_2 > \tau_3$ pour $Re < Re_{\mathcal{L}}$, alors que cette situation s'inverse dès que $Re > Re_{\mathcal{L}}$.

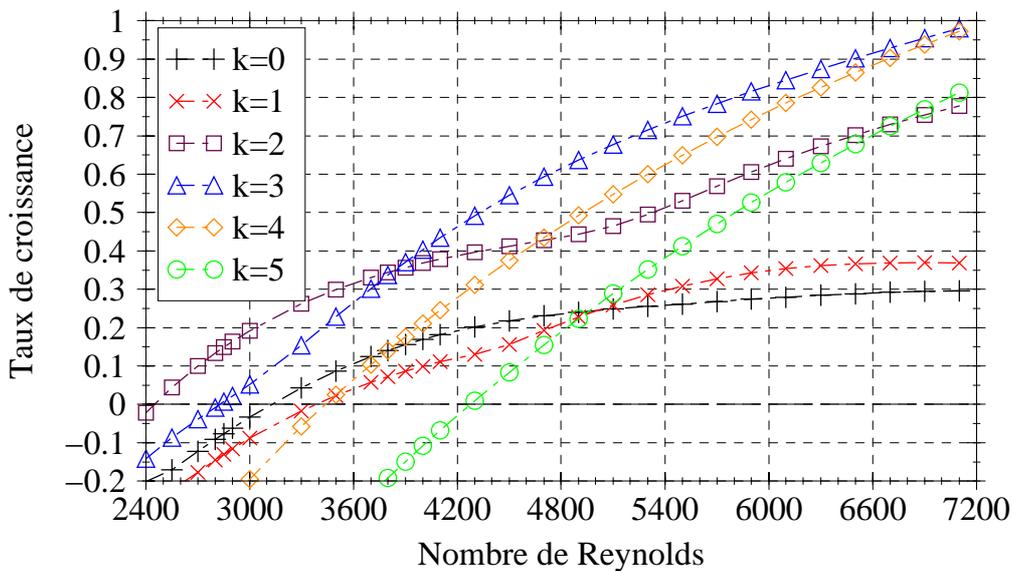


FIG. 6.3 – $h = 1$: Taux de croissance τ_k des cinq premiers modes de Fourier en fonction du nombre de Reynolds. Calculs linéarisés autour de l'écoulement de base.

Dans la suite, les deux premières bifurcations de codimension 1 sont examinées.

6.2 Analyse non-linéaire

Considérons à présent le régime non-linéaire. Comme dans le cas précédent, les simulations ont été menées avec des conditions initiales de type CI_b .

6.2.1 Première bifurcation

L'évolution temporelle des énergies cinétiques $E'(k = 0, \dots, 12)$ pour deux valeurs du nombre de Reynolds est donnée sur la figure 6.4. Lorsque Re vaut 2410 (a), les calculs non-linéaires

montrent la stabilité de la solution de base vis-à-vis de la perturbation initiale puisque celle-ci est amortie exponentiellement pour tous les modes azimutaux. Cependant, nous remarquons que le mode $k = 2$ s'avère le plus dangereux dans le sens où son taux de croissance est le plus élevé. En revanche, pour $Re = 2510$ (b), les simulations non-linéaires indiquent que l'écoulement de base devient instable vis-à-vis des modes $k = 2n$ de la perturbation de départ. En effet, l'examen de la figure 6.4.b révèle que ces modes azimutaux saturent sans osciller à un niveau d'énergie fini à partir de 1500 tours. Cette absence de fluctuations est un premier signe révélateur de la présence d'une onde azimutale tournante d'intensité constante. Ce point sera abordé en détail dans la suite. Le niveau d'énergie cinétique maximal vaut 7.104×10^{-6} et correspond au mode $k = 2$: c'est donc le mode dominant. Pour les modes azimutaux $k = 2n$ tels que $n \neq 1$, la saturation s'établit au moins à deux décades en dessous du maximum. Les modes impairs de l'excitation initiale disparaissent rapidement au cours du temps. Il en résulte que l'écoulement de base est instable lorsqu'une valeur critique du nombre de Reynolds Re_{c1} dans l'intervalle $[2410, 2510]$ est franchie.

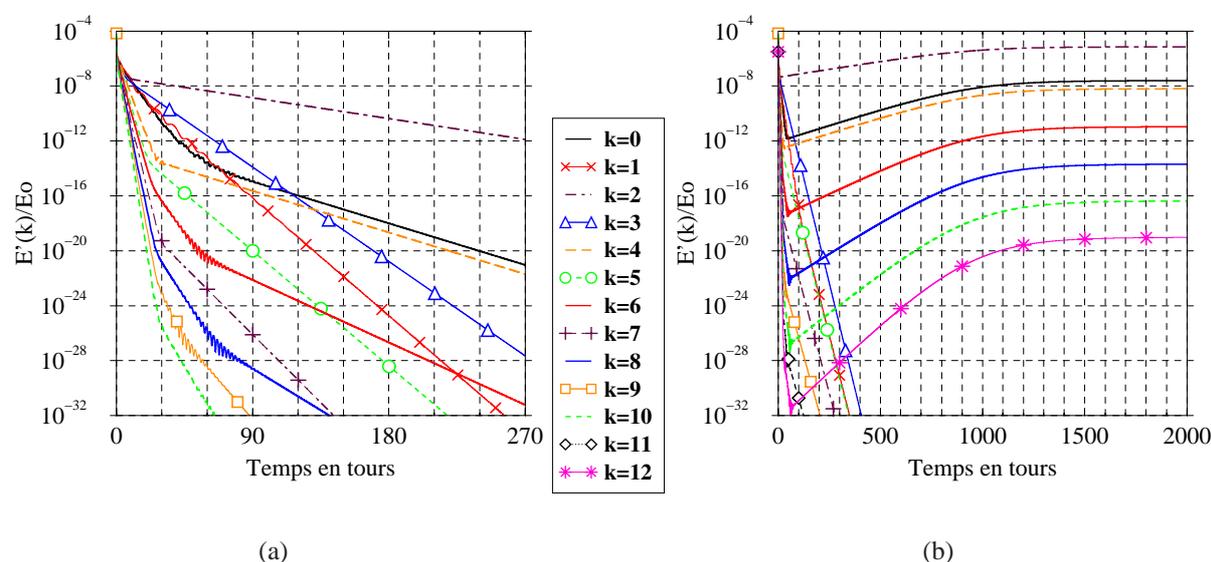


FIG. 6.4 – $h = 1$: Énergies cinétiques modales $E'(k)$ au cours du temps en régime non-linéaire pour $Re = 2410$ (a) et $Re = 2510$ (b). Représentations semi-logarithmiques.

Mais avant d'analyser en détail cette perte de stabilité, nous allons procéder à une détermination plus précise du premier seuil de stabilité non-linéaire. Sur la figure 6.5.a, nous remarquons que le temps nécessaire aux modes $2n$ ($n \in \mathbb{N}$) pour saturer est d'autant plus long que l'on est proche du déclenchement de l'instabilité. Ceci n'est pas sans rappeler un phénomène de ralentissement critique et nous porte à penser que le mode $k = 2$ devient dominant via une bifurcation de Hopf super-critique. De telles bifurcations ont déjà été rapportées dans un grand nombre de publications ([18, 63, 48, 47] pour ne citer qu'eux). Dans ce cas, l'amplitude $\mathcal{A}(f)$ des oscillations d'une variable dépendante f croît comme la racine carrée de l'écart au point de bifurcation $|Re - Re_{c1}|^{1/2}$, du moins au voisinage de Re_{c1} . Il suffit donc de mesurer $\mathcal{A}^2(f)$ en régime établi pour trois valeurs de Re légèrement super-critiques et l'extrapolation à zéro de la droite obtenue fournit une estimation du seuil de criticalité. Nous avons choisi comme

signal de référence f l'évolution temporelle de la composante azimutale v' de la perturbation de vitesse aux points de contrôle ($r = 0.75, \theta = 0, z = 0.8h$), ($r = 0.7, \theta = 0, z = 0.7h$) et ($r = 0.5, \theta = 0, z = 0.5h$).

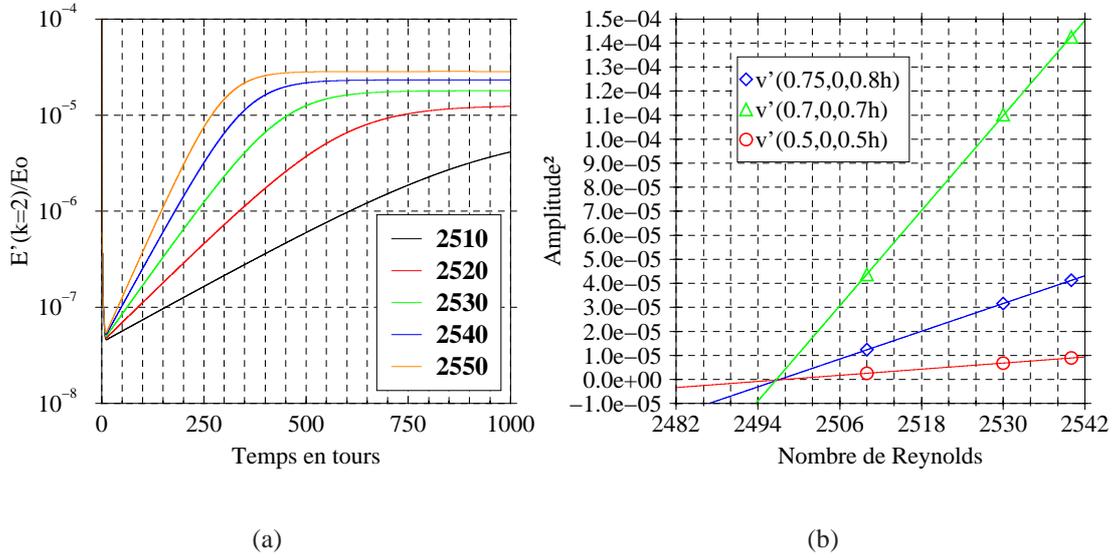


FIG. 6.5 – $h = 1$: (a) Illustration du ralentissement critique via l'énergie cinétique du mode $k = 2$ au cours du temps en régime non-linéaire pour $Re \in [2510, 2550]$. Représentations semi-logarithmiques. (b) Variations de $\mathcal{A}^2(v')$ avec Re pour les trois signaux de référence au voisinage de la criticalité.

Sur la figure 6.5.b, nous reportons les points représentatifs de $\mathcal{A}^2(f)$ de ces signaux pour les nombres de Reynolds 2510, 2530 et 2540. La mise en œuvre de la démarche précédente fait apparaître trois fonctions affines, ce qui confirme la nature supposée de la transition. Les trois valeurs du nombre de Reynolds critique rapportées par l'extrapolation de chaque signal se sont avérées très proches. Finalement, il vient :

$$Re_{c1} = 2497.265 \pm 0.575$$

À maillage équivalent, c'est-à-dire $M = 100$, le décalage par rapport à l'estimation linéaire est de 2.3%. Dans ce qui suit, nous allons montrer que la bifurcation de Hopf super-critique modifie profondément la dynamique de l'écoulement de base axisymétrique stationnaire. En effet, celui-ci passe sur une branche de solutions tridimensionnelles instationnaires après franchissement du point critique Re_{c1} . Cette perte de stabilité se manifeste par l'apparition d'une onde tournante associée au mode azimutal $k = 2$. La perte de la stationnarité et la brisure de la symétrie axiale qui en résultent sont maintenant étudiées en détail en choisissant deux solutions super-critiques : $Re = 2550$ et $Re = 3000$.

6.2.1.1 Perte de la stationnarité

Les variations temporelles de la composante azimutale v' de la perturbation de vitesse au point de contrôle $A(r = 0.5, \theta = 0, z = 0.5h)$ sont analysées. Pour $Re = 2550 > Re_{c1}$, la figure 6.6 rend bien compte du caractère oscillatoire périodique de v' après un temps de saturation de l'ordre de 500 tours. Lorsque le régime est établi, le signal de référence présente des fluctuations d'amplitude égale à 3.32×10^{-3} autour de la valeur moyenne -3.3×10^{-5} . Cette dernière est faible devant la valeur de la composante azimutale de la vitesse de base au point A , soit 0.116. La densité énergétique spectrale du signal $v'(A)$ en régime établi est tracée sur la figure 6.7.a. et on en tire l'information suivante :

$$\text{fréquence } f_1 = 0.08 \text{ tours}^{-1} \iff \text{période } T_1 = 1/f_1 = 12.5 \text{ tours}$$

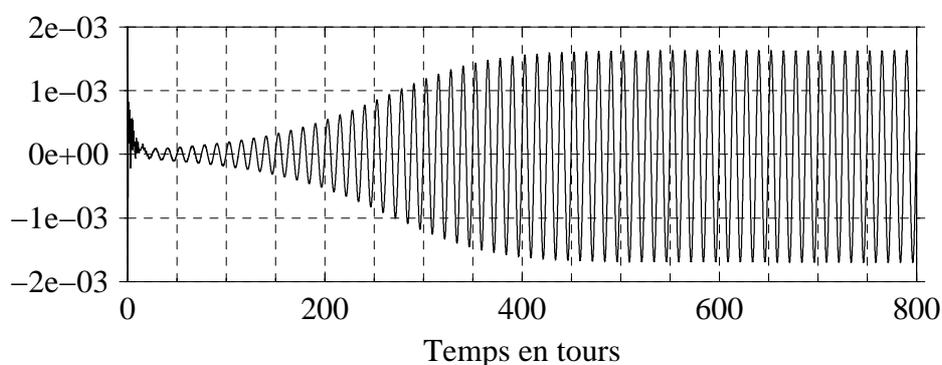


FIG. 6.6 – $h = 1$, $Re = 2550$: Variations temporelles de la composante azimutale v' de la perturbation de vitesse au point $A(r = 0.5, \theta = 0, z = 0.5h)$.

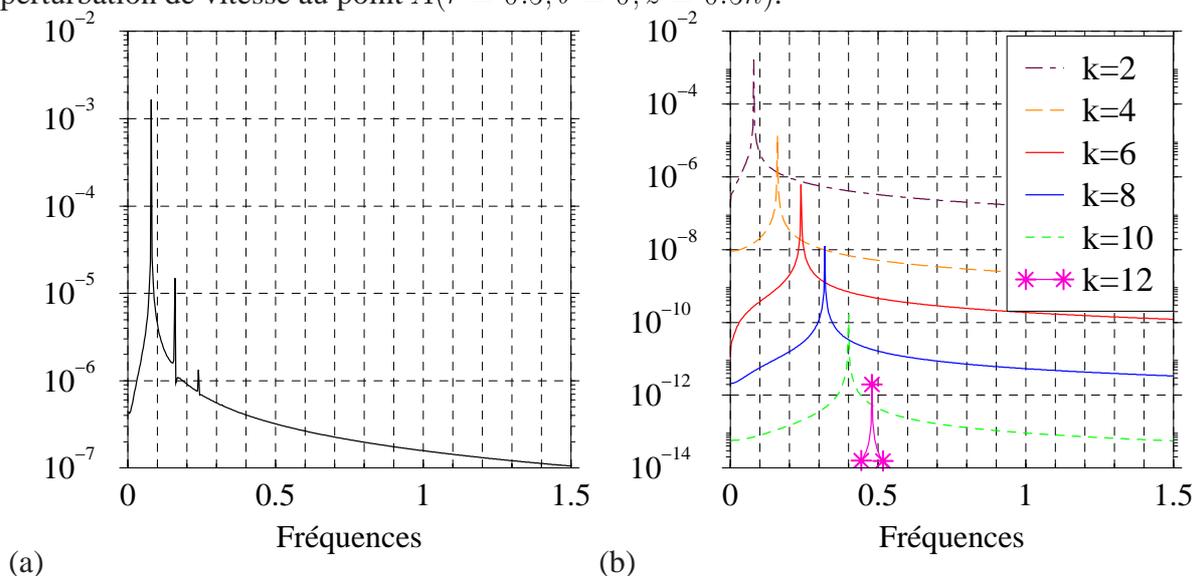


FIG. 6.7 – $h = 1$, $Re = 2550$: Densités énergétiques spectrales du signal 6.6 (a) et des composantes de Fourier correspondantes (b) pour $t \in [500, 800]$. Représentations semi-logarithmiques.

Ce résultat est en excellent accord avec la fréquence critique calculée par **Gelfgat *et al.*** [28] : pour le mode $k = 2$, $\omega_{cr} = 0.0766$ tours $^{-1}$ lorsque $Re_{cr} = 2471$. La faible différence entre ces résultats vient du fait qu'à $Re = 2550$, on commence à s'éloigner du point de bifurcation. D'autre part, l'amplitude de la première harmonique est cent fois plus faible que celle de la raie fondamentale : ceci témoigne du caractère quasi-sinusoïdal de la solution super-critique. En outre, une analyse de Fourier des variations temporelles des coefficients spectraux $\hat{v}'_k(A)$ associés au signal physique $v'(A)$ a également été menée (voir Fig. 6.7.b). Soit n , un entier naturel non-nul : nous remarquons que la composante nf_1 du spectre de Fourier de $v'(A)$ et la composante $f_{k=2n}$ du spectre de puissance de \hat{v}'_k ont la même abscisse. Une telle coïncidence indique que les structures spatiales tournent sans se déformer, du moins sur la circonférence où se situe le point de contrôle A . Nous aurons l'occasion de revenir sur ce point plus loin.

6.2.1.2 Perte de l'axisymétrie

L'évolution temporelle de l'énergie cinétique $E'(k)$ de la perturbation pour $Re = 2550$, en régime linéaire (a) et non-linéaire (b), est tracée sur la figure 6.8. Les calculs non-linéaires indiquent que les solutions correspondant aux nombres de Reynolds 2510 et 2550 ont des comportements similaires : le nombre d'onde $k = 2$ est dominant et l'écoulement de base est stable vis-à-vis des modes $k = 2n+1$ de la perturbation initiale. Ce comportement est confirmé par les calculs linéaires puisque l'énergie cinétique de tous les modes tend asymptotiquement vers le zéro de la machine, exceptée celle du mode $k = 2$ qui affiche un taux d'accroissement positif. En régime non-linéaire, il s'avère que le mode le plus critique distribue de l'énergie à ses harmoniques par couplages non-linéaires.

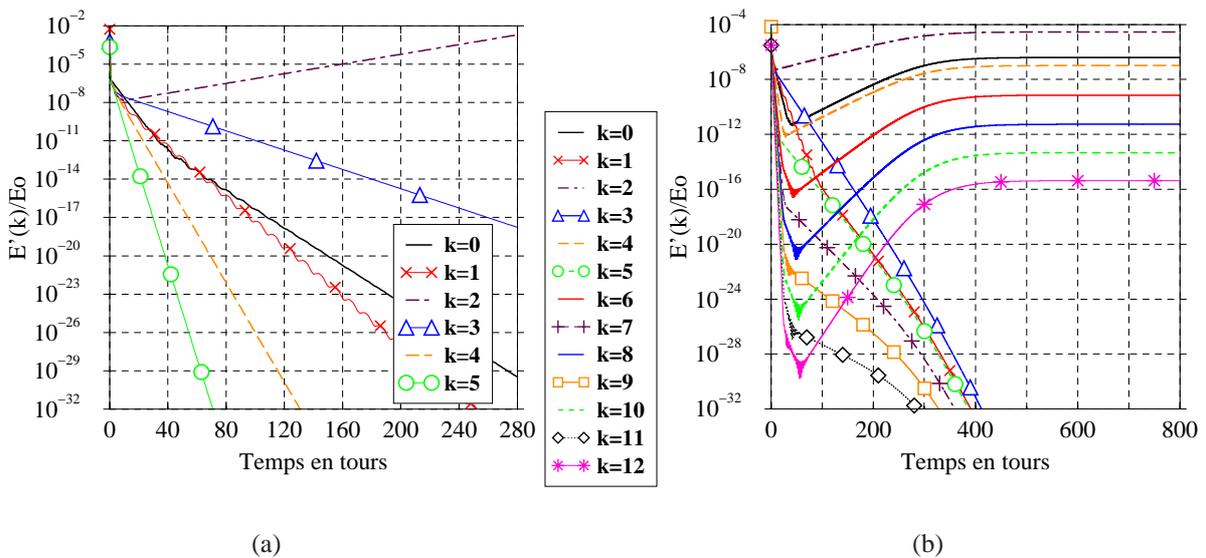


FIG. 6.8 – $h = 1$, $Re = 2550$: Énergies cinétiques modales $E'(k)$ au cours du temps en régime linéaire (a) et non-linéaire (b). Représentations semi-logarithmiques.

D'une manière générale, si le mode de Fourier le plus instable k_c n'est pas axisymétrique, alors l'écoulement présente une symétrie axiale d'ordre k_c , c'est-à-dire que la solution est invariante par rotation d'angle $2\pi/k_c$ autour de l'axe $r = 0$. Dans la suite, on s'attache à prouver que la rupture spontanée de l'axisymétrie de la solution de base se manifeste par la prédominance du mode azimutal $k = 2$.

Sur la figure 6.9, nous montrons l'évolution temporelle de la composante azimutale v' de la perturbation de vitesse en quatre points de contrôle. Ces points ont les mêmes positions radiale et axiale, soient $r = 0.5$ et $z = 0.5h$, mais dont leur positionnement azimutal diffère d'un angle $\pi/2$. On constate que les signaux temporels en $\theta = 0$ et $\theta = \pi$ (respectivement $\theta = \pi/2$ et $\theta = 3\pi/2$) se superposent, alors que les signaux temporels en $\theta = 0$ et $\theta = \pi/2$ (respectivement $\theta = \pi$ et $\theta = 3\pi/2$) sont en opposition de phase. Nous en déduisons que l'écoulement est invariant par rotation d'angle π autour de l'axe de symétrie, conformément à ce qui a été dit précédemment.

Ces résultats sont également confirmés par l'observation des figures suivantes :

- Fig. 6.10 : Les iso-lignes de la composante radiale u du champ de vitesse total (a) et celles de la composante radiale u' des fluctuations de la vitesse par rapport à l'écoulement de base (b) sont projetées dans le plan $z = 0.8h$.
- Fig. 6.11 : Les iso-lignes de la composante axiale w du champ de vitesse total (a) et celles de la composante axiale w' des fluctuations de la vitesse par rapport à l'écoulement de base (b) sont représentées dans quatre semi-plans méridiens séparés d'un angle $\pi/2$. Pour faciliter la comparaison, les iso-lignes correspondent à $\text{Max}\{w\} \times i/25$ et $\text{Min}\{w\} \times i/25$ pour $i \in [0, 25]$. De même pour w' .

Aussi bien pour le champ de vitesse total (a) que pour la perturbation (b), ces figures exhibent nettement des structures spatiales avec une périodicité azimutale d'ordre deux, compte tenu de l'alternance des zones positives (en traits continus) et négatives (en traits discontinus).

Par ailleurs, on visualise sur la figure 6.12 les iso-surfaces des composantes (u', v', w') de la perturbation de vitesse et celles des composantes (η', ω', ζ') de la perturbation de tourbillon. Les iso-surfaces de u', v' et w' représentent 1% du maximum alors que les iso-surfaces de η', ω' et ζ' correspondent à 5% du maximum (voir Tab. 6.2 pour les valeurs). Ces figures mettent clairement en évidence la complexité des structures spatiales spiralées ainsi que la symétrie axiale d'ordre deux associée au mode azimutal dominant $k = 2$.

Perturbation	Maximum	Minimum
u'	1.847×10^{-2}	-1.984×10^{-2}
v'	2.319×10^{-2}	-3.406×10^{-2}
w'	7.810×10^{-2}	-1.467×10^{-2}
η'	0.613	-0.661
ω'	0.968	-0.812
ζ'	0.336	-0.327

TAB. 6.2 – $h = 1$, $Re = 3000$: Valeurs maximales et minimales des fluctuations par rapport à l'écoulement de base. Composantes (u', v', w') de la vitesse et (η', ω', ζ') du tourbillon.

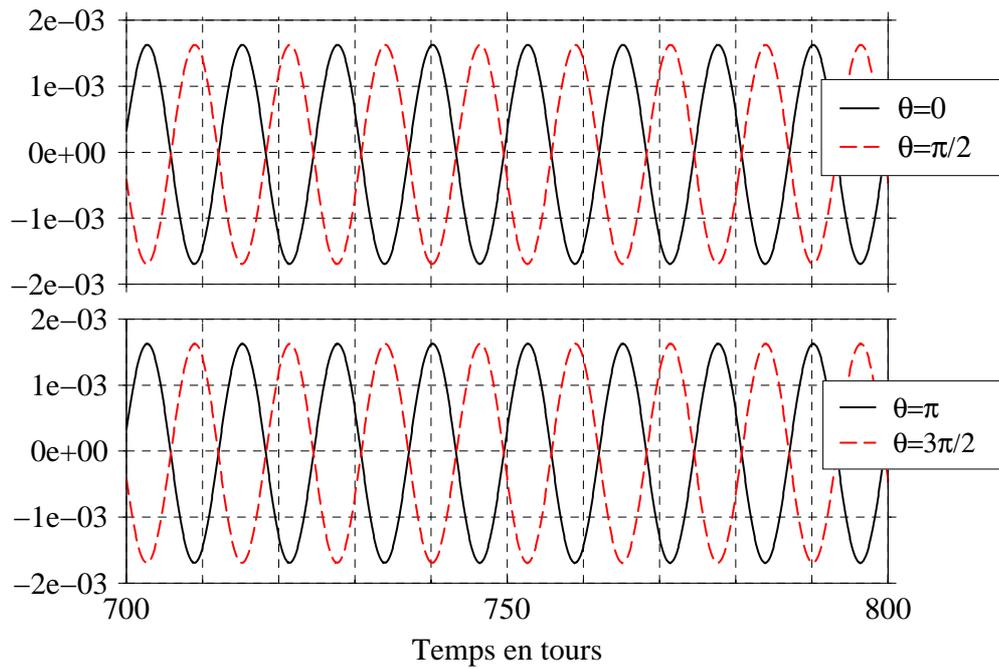


FIG. 6.9 – $h = 1$, $Re = 2550$: Variations temporelles de la composante azimutale v' de la perturbation de vitesse aux points ($r = 0.5, \theta, z = 0.5h$). La position azimutale θ de chaque point diffère d'un angle $\pi/2$.

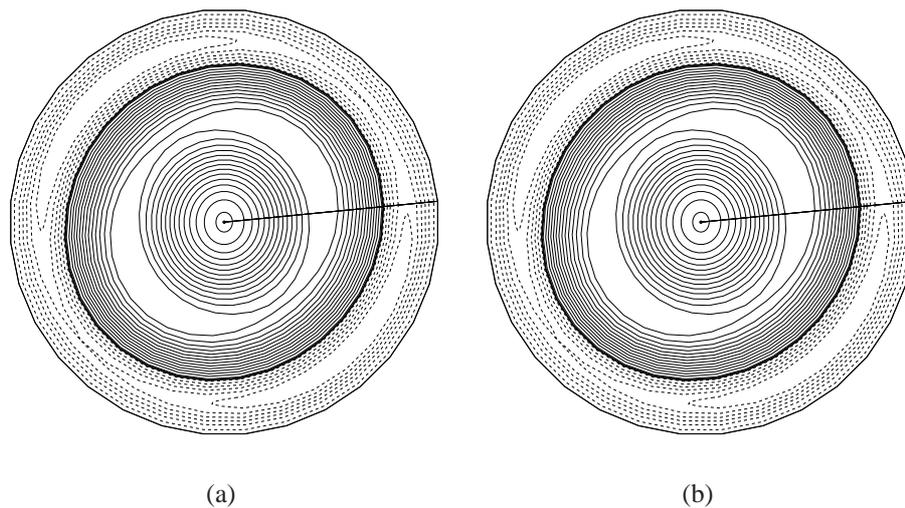


FIG. 6.10 – $h = 1$, $Re = 2550$: Iso-lignes de la composante radiale de la vitesse dans le plan $z = 0.8h$ pour l'écoulement total u (a) et la perturbation u' (b). Les iso-lignes continues (discontinues) sont positives (négatives) et le zéro est en traits gras.

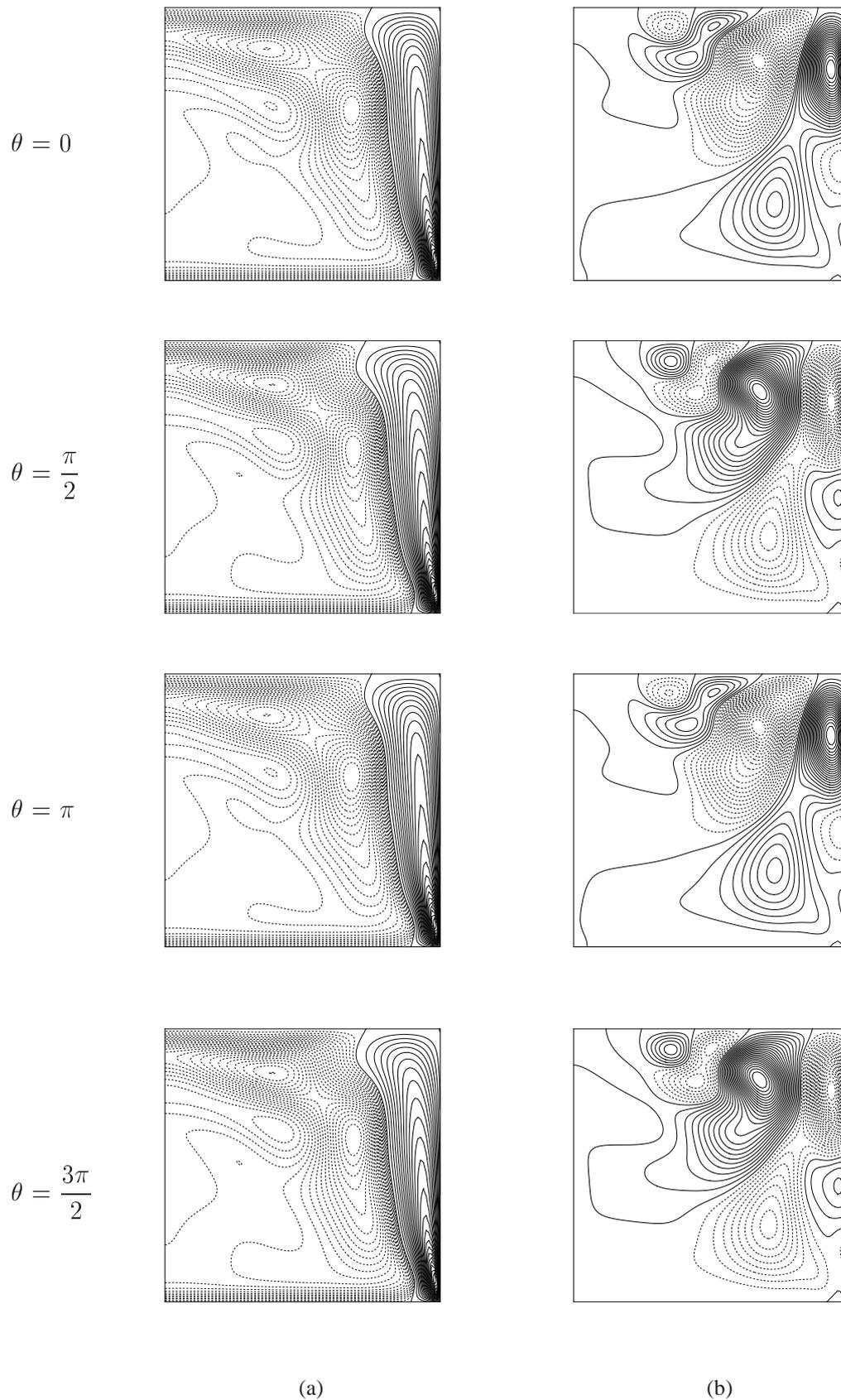


FIG. 6.11 – $h = 1$, $Re = 2550$: Iso-lignes de la composante axiale de la vitesse pour l'écoulement total w (a) et la perturbation w' (b). Les quatre semi-plans méridiens sont séparés d'un angle $\pi/2$. Les iso-lignes continues (discontinues) sont positives (négatives). L'axe $r = 0$ est à gauche.

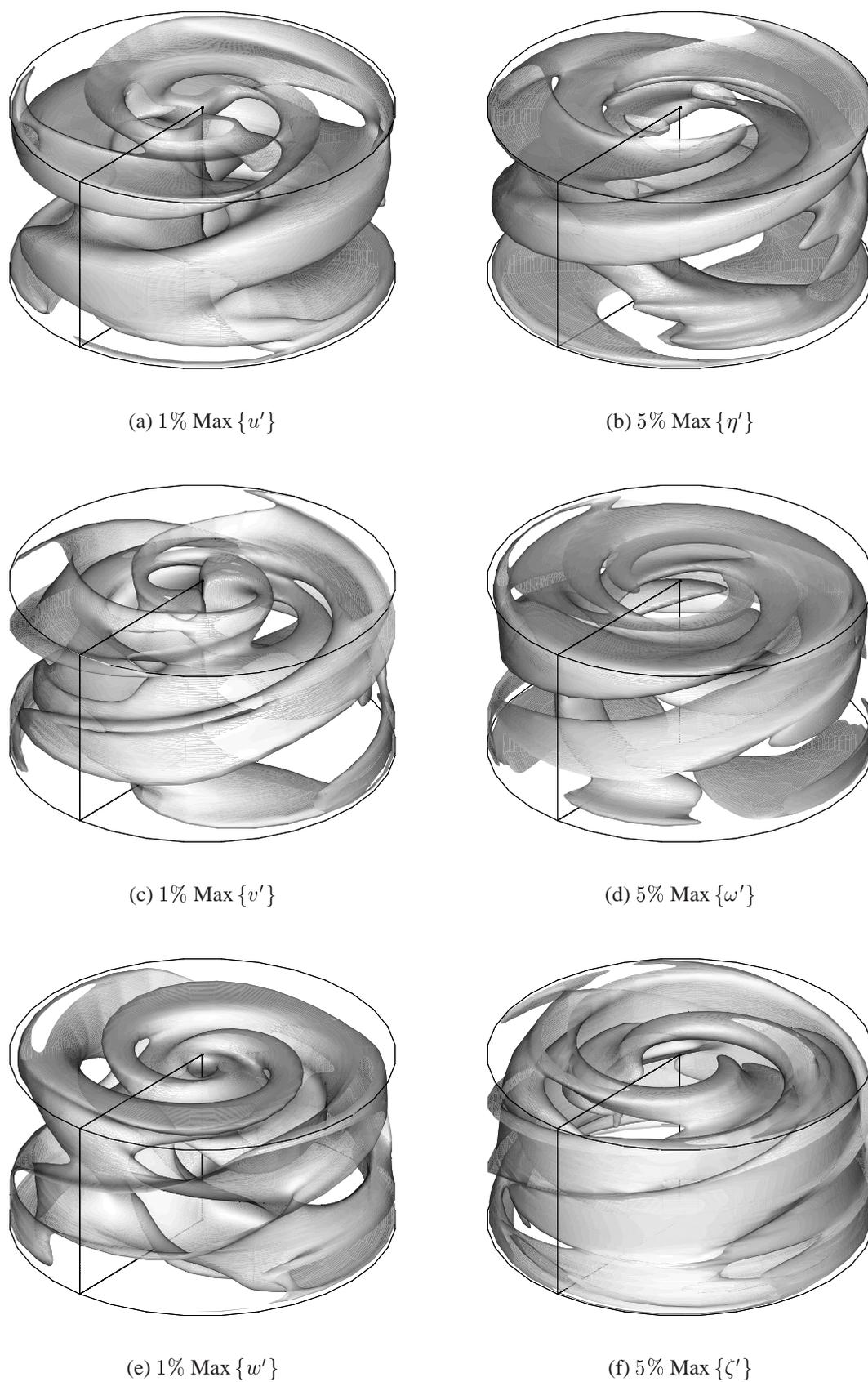


FIG. 6.12 – $h = 1$, $Re = 3000$: Iso-surfaces des composantes (u', v', w') de la perturbation de vitesse (a-c-e) et des composantes (η', ω', ζ') de la perturbation de tourbillon (b-d-f).

6.2.1.3 Apparition d'une onde azimutale tournante

Par construction, l'écoulement de base est invariant par translation en temps (stationnarité) et par rotation autour de l'axe du cylindre (axisymétrie ou encore symétrie $SO(2)$). D'après **Knobloch** [33], la façon dont un système en rotation perd sa stabilité d'une part, et l'évolution non-linéaire des instabilités qui en découlent d'autre part, sont déterminées par les propriétés d'invariance de ce système. Précisément, lorsque la solution de base subit une bifurcation de Hopf, la symétrie $SO(2)$ peut être soit préservée, soit brisée. Dans le premier cas, l'état axisymétrique qui en résulte est un cycle limite. Dans le second cas, la rupture spontanée de la symétrie axiale apparaît sous la forme d'une onde azimutale qui tourne en bloc.

Dans ce qui précède, certaines indications nous ont déjà permis de déceler la présence d'une onde azimutale tournante. L'onde tournante associée au mode $k = 2$, notée S_2 dans la suite, est mise en évidence de la manière suivante : les iso-lignes/valeurs de la composante azimutale v' de la perturbation de vitesse sont tracées dans le plan $z = 0.5h$ pour cinq phases de la précession. En examinant la séquence temporelle 6.13, on constate que le passage d'une figure à l'autre s'effectue par rotation d'angle constant autour de l'axe. Ceci révèle un mouvement de rotation rigide des structures spatiales associées au mode dominant $k = 2$, avec une période $T_{RW2} = 2 \times T_1 = 2/f_1$ ($T_1 = 12$ tours pour $Re = 3000$) compte tenu de la symétrie axiale d'ordre deux. D'autre part, il faut remarquer que cette perturbation tourne dans le sens indirect et donc qu'elle s'oppose à la rotation du disque moteur. Cette observation est corroborée par l'analyse de stabilité linéaire de **Gelfgat et al.** : pour $h = 1$ et $Re_c = 2471$, les auteurs indiquent que la propagation azimutale de l'onde s'effectue dans le même sens que le couvercle tournant, mais celui-ci est situé en $z = h$ dans leur étude.

D'une manière générale, la valeur absolue de la vitesse angulaire de phase Ω_φ pour une onde tournante associée au mode azimutal $k_c \neq 0$ instable est définie de la façon suivante :

$$|\Omega_\varphi| = \frac{2\pi f_c}{k_c} \quad (6.1)$$

où f_c désigne la fréquence critique des oscillations. Lorsque $k_c = 0$, nous rappelons qu'il n'y a pas d'onde tournante. La relation ci-dessus est appliquée à la solution correspondant à $Re = 3000$ pour laquelle $k_c = 2$ et $f_c = 0.083$ tours $^{-1}$. Il vient :

$$|\Omega_\varphi| = 0.2607 \times \Omega_o \text{ tours}^{-1}$$

Une façon simple de s'assurer que la précession du mode dominant $k = 2$ est solide consiste à déterminer la vitesse angulaire de phase pour trois circonférences (r, θ, z) différentes, par exemple $(0.25, \theta, 0.2h)$, $(0.5, \theta, 0.5h)$ et $(0.75, \theta, 0.8h)$. Pour cela, le profil de v' suivant θ est représenté pour trois phases de la précession. Dès lors, les trois valeurs recherchées de Ω_φ sont mesurées en relevant les coordonnées $(\theta_{1,2}, t_{1,2})$ de deux extremums sur la figure 6.14 – il faut aussi tenir compte du sens de propagation – puis en effectuant l'opération ci-dessous :

$$\Omega_\varphi = \frac{\theta_1 - \theta_2}{t_1 - t_2} \quad (6.2)$$

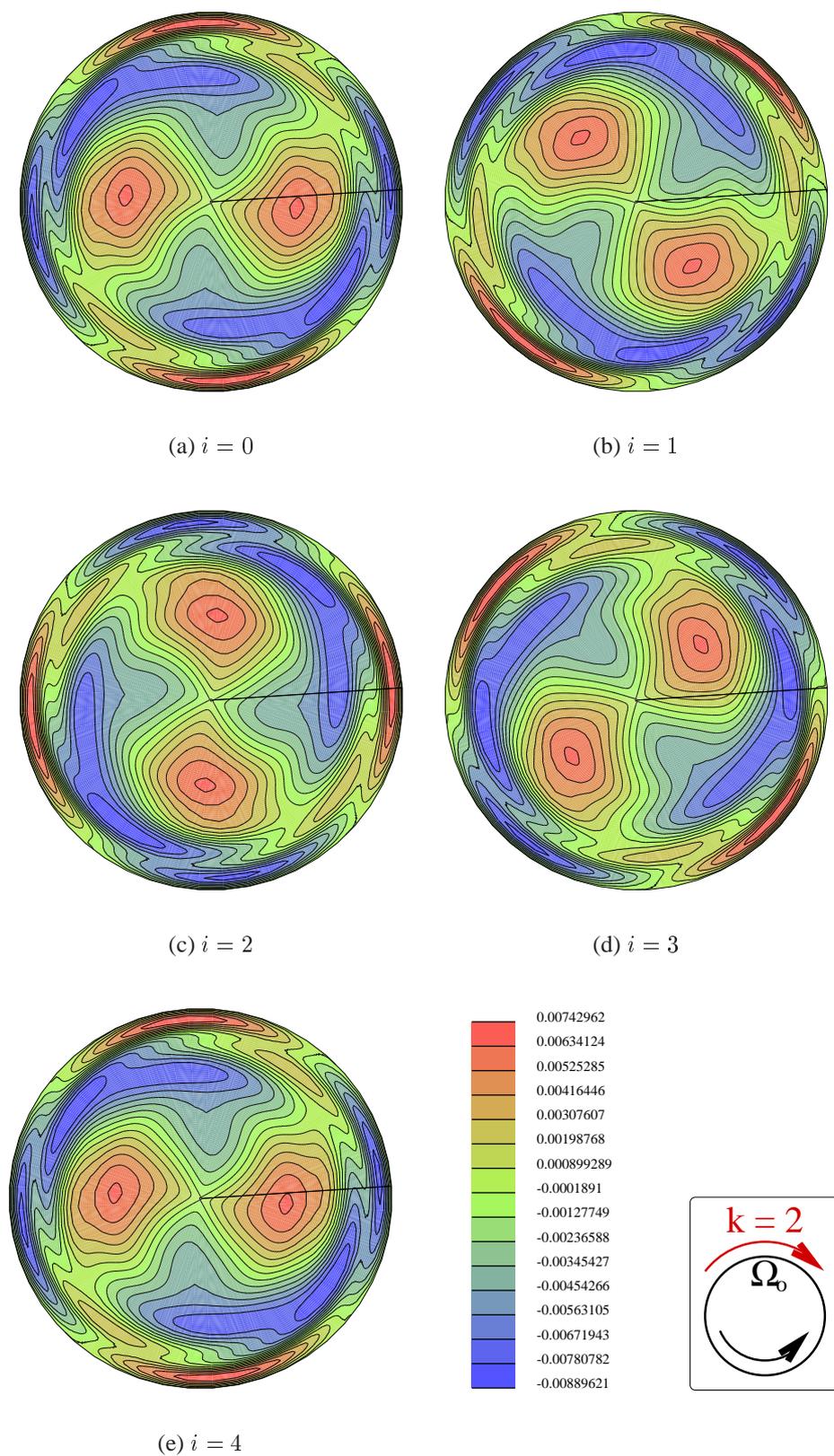


FIG. 6.13 – $h = 1$, $Re = 3000$: Iso-lignes/valeurs de la composante azimutale v' de la perturbation de vitesse dans le plan $z = 0.5h$ au cours d'une période $T_1 = 12$ tours. Chaque figure correspond au temps $t = 412 + iT_1/4$, avec $i = 0, \dots, 4$.

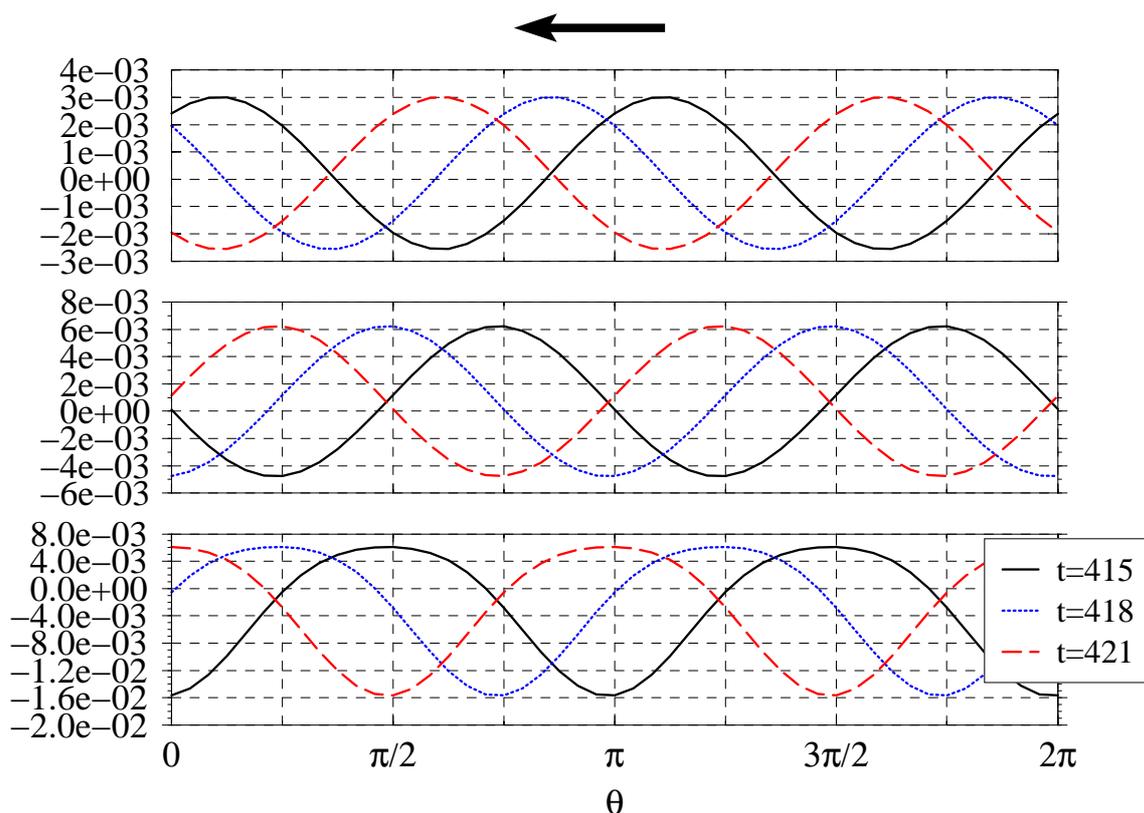


FIG. 6.14 – $h = 1$, $Re = 3000$: Profil de la composante azimutale v' de la perturbation de vitesse à différents instants sur trois circonférences (r, θ, z) . De haut en bas : $(0.25, \theta, 0.2h)$, $(0.5, \theta, 0.5h)$ et $(0.75, \theta, 0.8h)$. La flèche indique le sens de propagation de l'onde tournante associée au mode azimutal $k = 2$.

Les trois vitesses angulaires de phase qui découlent de ce traitement se sont avérées identiques, soit $\Omega_\varphi = -0.2618 \times \Omega_o$ tours $^{-1}$, conformément au résultat précédent. En conclusion, il apparaît très clairement que les structures spatiales associées au mode $k = 2$ tournent en bloc dans le sens inverse du forçage dynamique (disque inférieur) avec une vitesse angulaire moindre. Si le taux de rotation Re est encore augmenté, une seconde bifurcation va se mettre en place : celle-ci est analysée dans la section suivante.

6.2.2 Seconde bifurcation

Le taux de rotation Re est accru et l'évolution temporelle des énergies cinétiques modales $E'(k)$ des solutions obtenues est examinée. Nous constatons que seule l'énergie cinétique des modes azimutaux $k = 2n$, $n \in \mathbb{N}$, sature à un niveau fini pour $Re = 4020$ (Fig. 6.15.a). En outre, une analyse de Fourier (non-montrée) a confirmé la périodicité de cette solution d'une part, et son appartenance à la branche T_1 (soit 11.79 tours) d'autre part. En revanche, un changement de comportement est observé lorsque $Re = 4025$ (Fig. 6.15.b) puisqu'il n'y

a que les modes de Fourier $k = 3n$ qui saturent à un niveau fini au cours du temps. Le mode $k = 3$ est le plus critique : au delà de 75 tours, $E'(k = 3)$ atteint un palier à 2×10^{-4} , ce qui représente la quasi-totalité de l'énergie cinétique de la perturbation. L'énergie des modes $k \neq 3n$ chute exponentiellement à mesure que le temps s'écoule. Nous en déduisons que les cycles limites non-axisymétriques de la branche f_1 subissent une bifurcation en franchissant une seconde valeur critique :

$$Re_{c2} \in [4020, 4025]$$

Il est important de noter qu'aucun signe de ralentissement critique n'a été détecté lors de ce changement de régime. Dès lors, nous sommes en droit de penser que cette deuxième transition présente un caractère sous-critique : nous reviendrons sur ce point en fin de chapitre. Par ailleurs, nous pressentons d'emblée la présence d'une onde tournante d'intensité constante, dans la mesure où l'énergie cinétique du mode azimutal $k = 3$ (et celle de ses harmoniques par couplages non-linéaires) sature sans fluctuer au cours du temps.

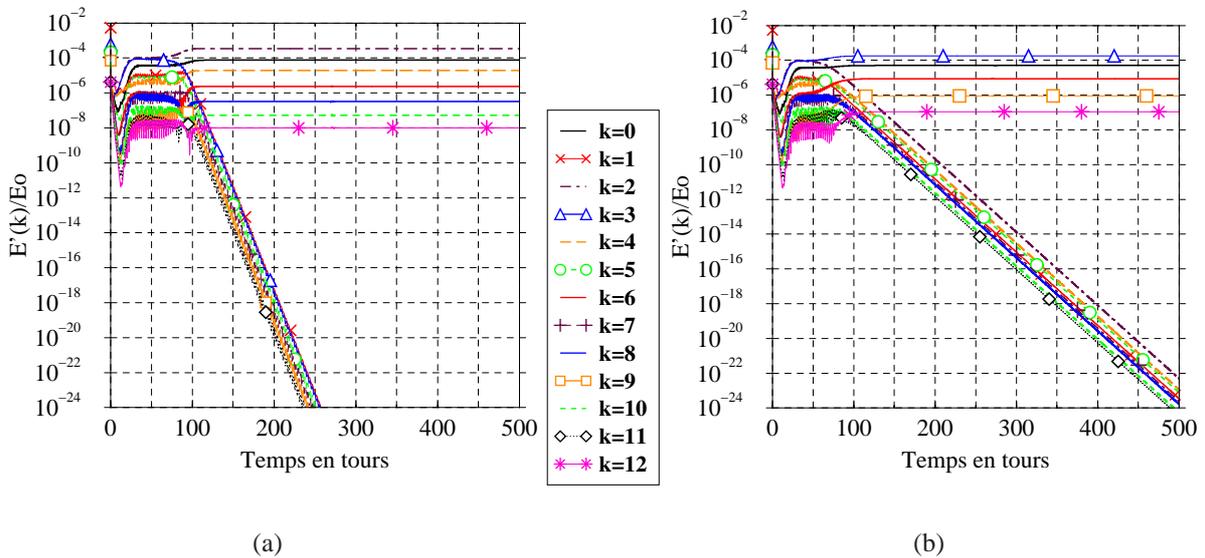


FIG. 6.15 – $h = 1$: Énergies cinétiques modales $E'(k)$ au cours du temps en régime non-linéaire pour $Re = 4020$ (a) et $Re = 4025$ (b). Représentations semi-logarithmiques.

Enfin, nous remarquons que le second seuil de criticalité Re_{c2} (transition $k = 2$ dominant $\rightarrow k = 3$ dominant en régime non-linéaire) et le point de croisement $Re_{\mathcal{L}} \simeq 3833$ (transition $\tau_2 > \tau_3 \rightarrow \tau_2 < \tau_3$ en régime linéaire) ont des valeurs qui ne diffèrent que de 5%. Il s'ensuit que les comportements non-linéaires observés précédemment peuvent *a priori* s'expliquer de la façon suivante : lorsque l'on adopte des conditions initiales de type CI_b et qu'une bifurcation se produit, la perturbation semble sélectionner le mode azimutal le plus instable linéairement.

Dans la suite, on s'applique à montrer que cette seconde bifurcation provoque la transition des cycles limites dont la symétrie axiale est d'ordre deux (branche T_1) vers des cycles limites dont la symétrie axiale est d'ordre trois (branche T_2). La branche T_2 est ensuite caractérisée en analysant les solutions super-critiques trouvées pour $Re = 4300$ et $Re = 4500$.

6.2.2.1 Instationnarité des solutions

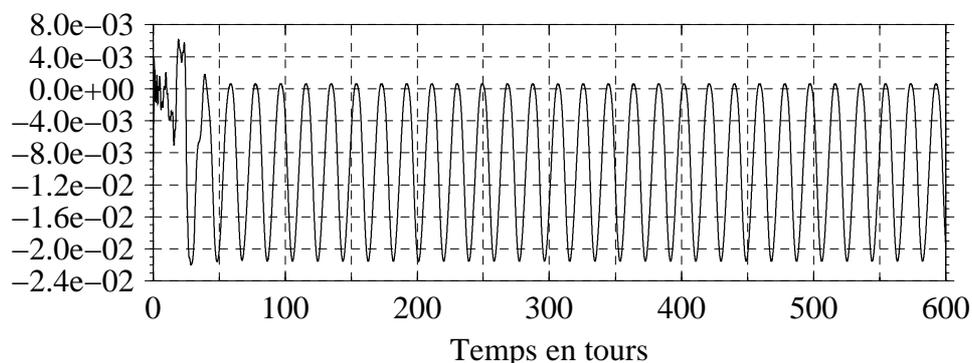


FIG. 6.16 – $h = 1$, $Re = 4300$: Variations temporelles de la composante azimutale v' de la perturbation de vitesse au point $B(r = 0.8, \theta = 0, z = 0.8h)$.

Sur la figure 6.16, on présente les variations temporelles des fluctuations de la vitesse azimutale v' par rapport à l'écoulement de base, au point de contrôle $B(r = 0.8, \theta = 0, z = 0.8h)$, pour le nombre de Reynolds $Re = 4300 > Re_{c2}$. Cette figure fait apparaître deux phases. Pendant la phase transitoire qui dure environ une centaine de tours, la perturbation sélectionne le mode azimutal qui a le taux de croissance le plus important, c'est-à-dire $k = 3$ d'après le diagramme 6.3. Ensuite, la phase de saturation met en évidence le comportement oscillatoire périodique de la solution. La valeur moyenne et l'amplitude de ce signal sont respectivement égales à -1.04×10^{-2} et 2.22×10^{-2} . La vitesse azimutale de l'écoulement de base en ce même point vaut 0.20. La fréquence fondamentale des oscillations est extraite de la densité énergétique spectrale du signal $v'(B)$. D'après la figure 6.17.a, il vient :

$$\text{fréquence } f_2 = 0.054 \text{ tours}^{-1} \iff \text{période } T_2 = 1/f_2 = 18.52 \text{ tours}$$

Nous notons que la solution correspondant à $Re = 4300$ n'est pas purement sinusoïdale compte tenu de la présence de la première harmonique. L'analyse de Fourier des coefficients spectraux $\hat{v}'_k(B)$ associés au signal physique $v'(B)$ est représentée sur la figure 6.17.b pour les modes azimutaux super-critiques $k = 3n, n > 1$. L'étude de ce graphique permet de conclure sur l'existence d'une précession rigide, du moins sur la circonférence où se situe le point de contrôle.

Lorsque les valeurs du nombre de Reynolds sont comprises entre Re_{c1} et Re_{c2} , nous avons vu que les solutions sont des cycles limites appartenant à la branche f_1 . Lorsque $Re > Re_{c2}$, les solutions sont des cycles limites appartenant à la branche f_2 . Le passage d'une branche à l'autre s'effectue par une bifurcation dite de Naimark-Sacker, c'est-à-dire une bifurcation de Hopf entre des cycles limites. Celle-ci brise la symétrie axiale d'ordre deux des solutions S_2 .

6.2.2.2 Perte de la symétrie d'ordre deux

Dans cette section, nous concentrons notre attention sur l'impact de la bifurcation de Naimark-Sacker sur la symétrie d'ordre deux caractérisant les solutions de la première branche.

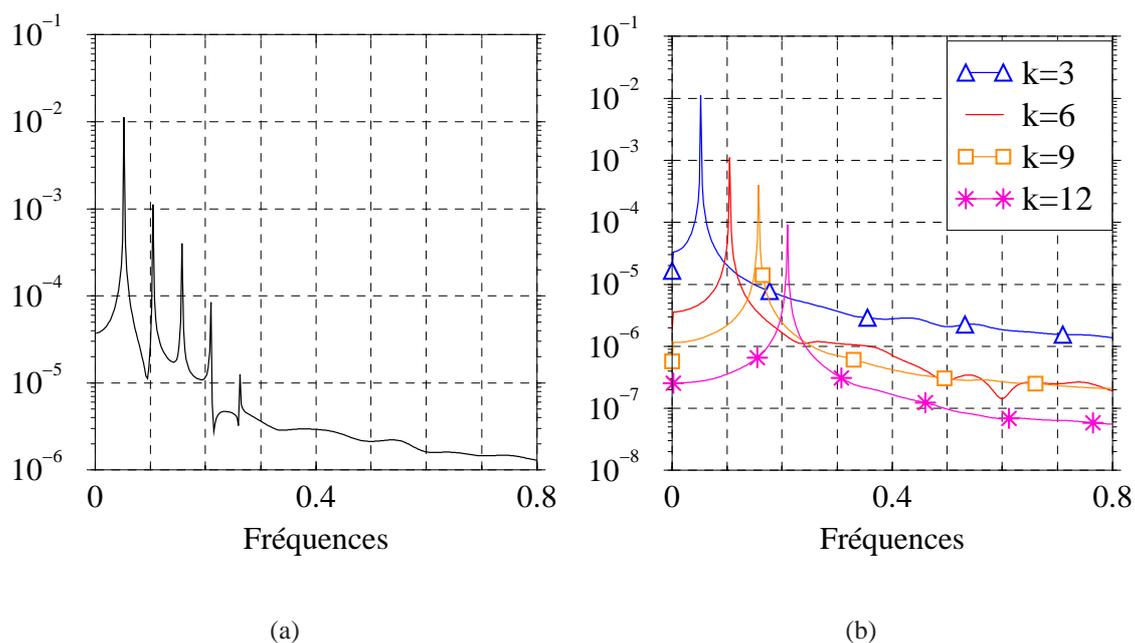


FIG. 6.17 – $h = 1$, $Re = 4300$: Densités énergétiques spectrales du signal 6.16 (a) et des composantes de Fourier correspondantes (b) pour $t \in [200, 600]$. Représentations semi-logarithmiques.

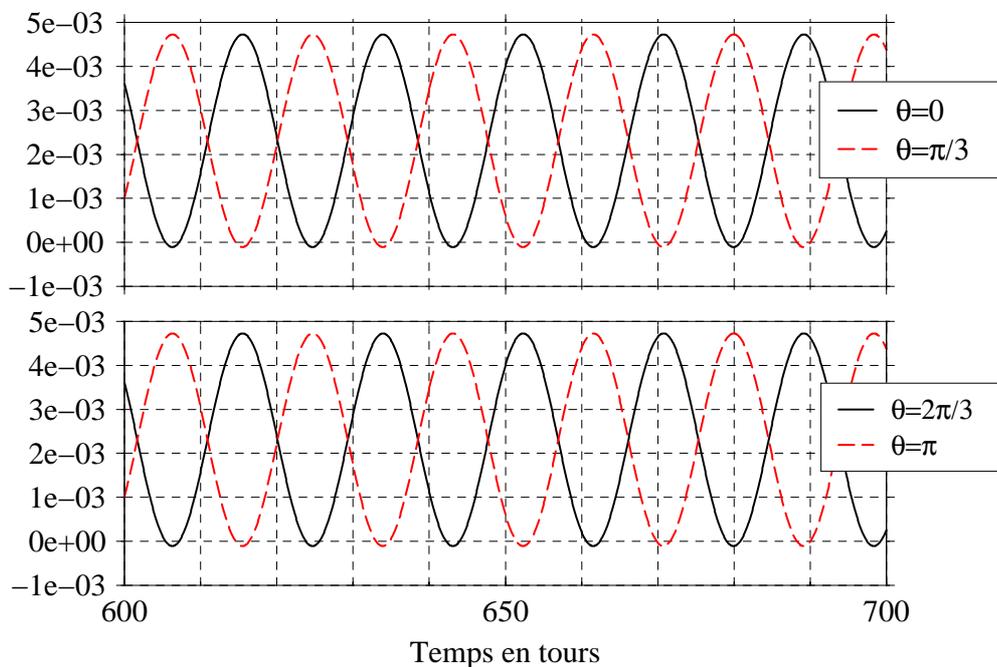


FIG. 6.18 – $h = 1$, $Re = 4100$: Variations temporelles de la composante azimutale v' de la perturbation de vitesse aux points ($r = 0.5, \theta, z = 0.5h$). La position azimutale θ de chaque point diffère d'un angle $2\pi/3$.

À cet effet, on visualise l'évolution temporelle de v' pour quatre points de contrôle situés en $r = 0.5$ et $z = 0.5h$, mais dont la position azimutale θ diffère d'un angle $2\pi/3$ (Fig. 6.18). D'après cette figure :

- Les signaux temporels en $\theta = 0$ et $\theta = 2\pi/3$ (respectivement $\theta = \pi/3$ et $\theta = \pi$) se superposent.
- Les signaux temporels en $\theta = 0$ et $\theta = \pi/3$ (respectivement $\theta = 2\pi/3$ et $\theta = \pi$) sont en opposition de phase.

Au vu de ces figures, il est manifeste que la branche de solutions T_2 possède une propriété d'invariance par rotation d'angle $2\pi/3$ autour de l'axe du cylindre. Cette caractéristique est également corroborée par l'examen des figures qui suivent :

- Fig. 6.19.a : Les iso-lignes de la composante radiale u de la vitesse pour l'écoulement complet sont projetées dans le plan $z = 0.8h$. Des structures spatiales triangulaires sont observées.
- Fig. 6.19.b : Les iso-lignes de la composante radiale u' des fluctuations de la vitesse par rapport à la solution de base sont tracées dans la section $z = 0.8h$. Nous distinguons un motif, composé d'une zone positive et d'une zone négative, qui se répète trois fois à la périphérie de l'enceinte.
- Fig. 6.20 : Les iso-surfaces des composantes (u, v, w) du champ de vitesse total et celles des composantes (η, ω, ζ) du champ de tourbillon total (voir Tab. 6.3 pour les valeurs) exhibent clairement une périodicité azimutale d'ordre trois, liée au mode dominant $k = 3$.

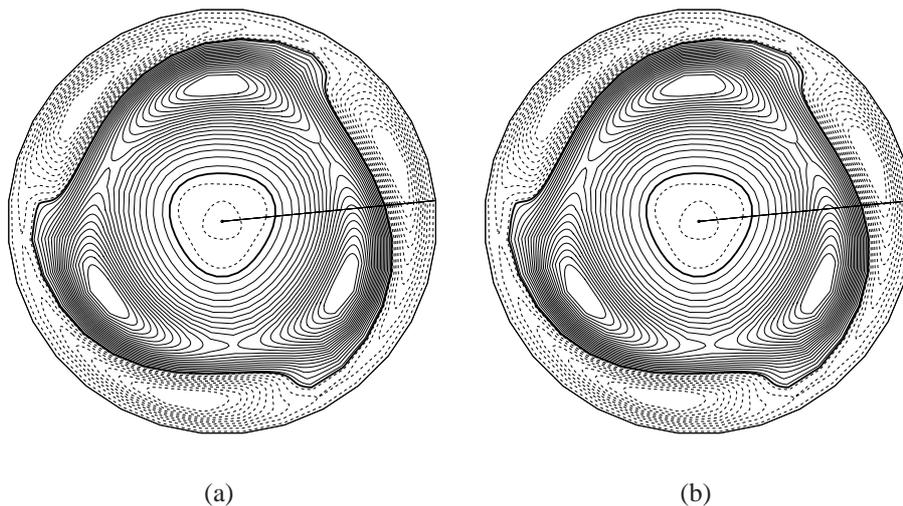


FIG. 6.19 – $h = 1$, $Re = 4300$: Iso-lignes de la composante radiale de la vitesse dans le plan $z = 0.8h$ pour l'écoulement total u (a) et la perturbation u' (b). Les iso-lignes continues (discontinues) sont positives (négatives) et le zéro est en traits gras.

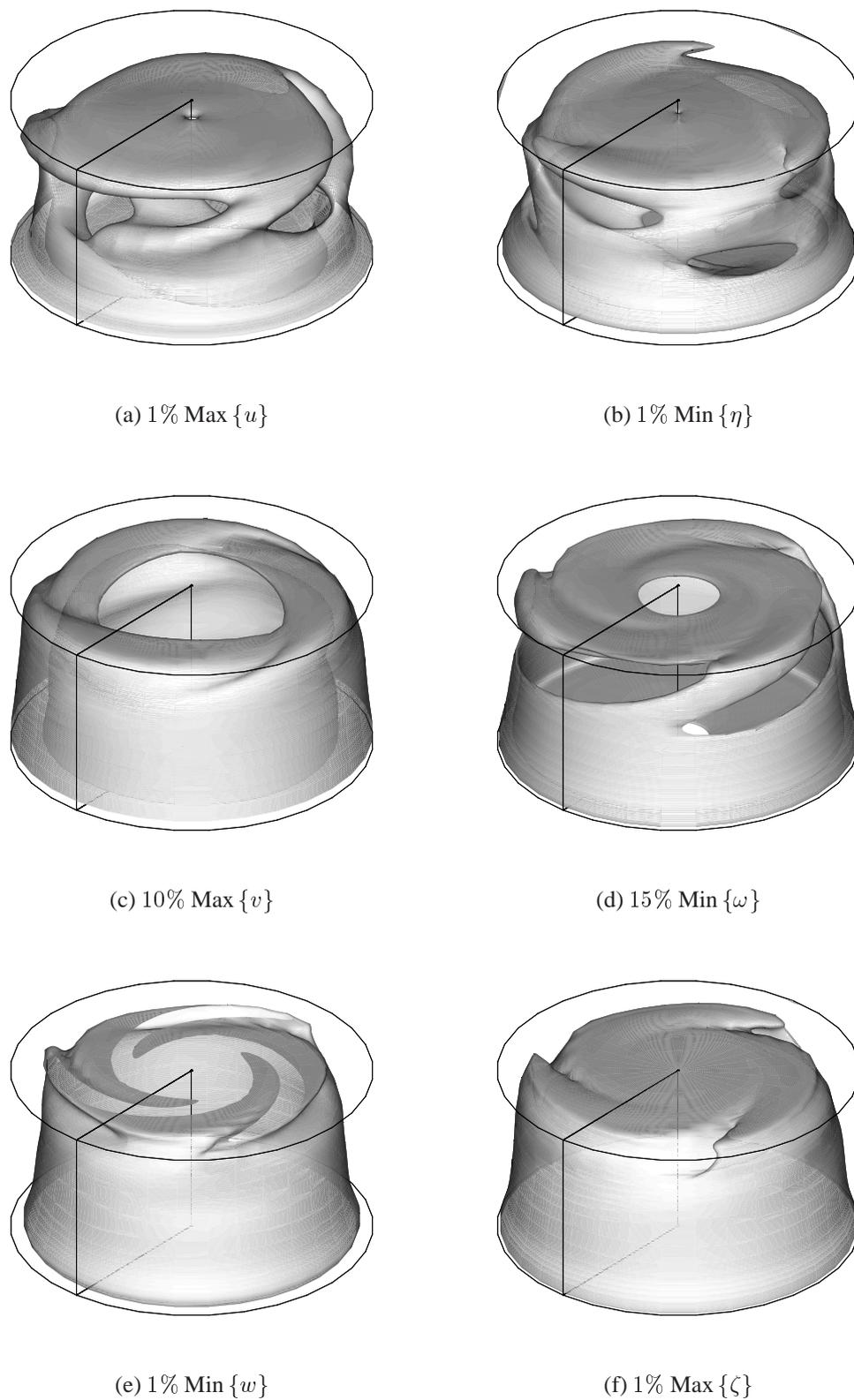


FIG. 6.20 – $h = 1$, $Re = 4500$: Iso-surfaces des composantes (u, v, w) du champ de vitesse total (a-c-d) et des composantes (η, ω, ζ) du champ de tourbillon total (b-d-e).

Champ total	Maximum	Minimum
u	0.158	-0.116
v	0.873	-1.306×10^{-3}
w	0.138	-4.184×10^{-2}
η	49.729	-1.315
ω	14.209	-5.284
ζ	8.899	-72.250

TAB. 6.3 – $h = 1$, $Re = 4500$: Valeurs maximales et minimales du champ total. Composantes (u, v, w) de la vitesse et (η, ω, ζ) du tourbillon.

6.2.2.3 Onde azimutale tournante

Il est légitime de se demander quelles sont les conséquences de cette seconde bifurcation sur l'onde azimutale tournante S_2 . Pour apporter une réponse à cette question, nous avons examiné la solution correspondant au nombre de Reynolds 4500 et plus particulièrement, les iso-lignes/valeurs de la composante azimutale v' de la perturbation de vitesse dans le plan $z = 0.5h$. Ces fluctuations sont visualisées aux instants $t = 412 + iT_2/4$ sur la figure 6.21. Une telle stroboscopie rend bien compte de la précession des structures spatiales associées au mode dominant $k = 3$. La précession s'effectue avec une période $T_{RW3} = 3 \times T_2 = 3/f_2$, et $T_2 = 19.6$ tours lorsque $Re = 4500$. Ceci prouve qu'il existe toujours une onde azimutale tournante après franchissement du second point critique Re_{c2} .

Il est connu (voir [33]) qu'une solution $SO(2)$ peut éventuellement bifurquer vers une onde tournante : à présent, on sait qu'une solution qui n'a pas la symétrie $SO(2)$ peut également transiter vers une onde tournante.

Dans le cas présent, il s'avère que la seconde bifurcation a pour conséquence d'inverser le sens de propagation des structures spatiales. En effet, l'onde tournante associée au mode azimutal $k = 3$ (nous la désignerons par le sigle S_3) tourne dans le même sens que le couvercle moteur, c'est-à-dire dans le sens direct. En outre, la vitesse angulaire de phase Ω_φ de la précession est calculée de deux manières différentes. La première consiste à reprendre la définition 6.1. La seconde consiste à tracer plusieurs profils de v' suivant la direction périodique (nous n'en présentons que deux sur la figure 6.22) et à utiliser l'expression 6.2 : nous avons constaté que la valeur de Ω_φ n'affiche aucune dépendance vis-à-vis de la position où la mesure est effectuée. Finalement :

$$\Omega_\varphi = 0.1068 \times \Omega_o \text{ tours}^{-1}$$

Nous venons de montrer que les structurations spatiales associées au nombre d'onde $k = 3$ se propagent en bloc en azimut dans le sens de la rotation du disque inférieur. Toutefois, la vitesse angulaire de phase reste faible devant la vitesse angulaire d'entraînement Ω_o .

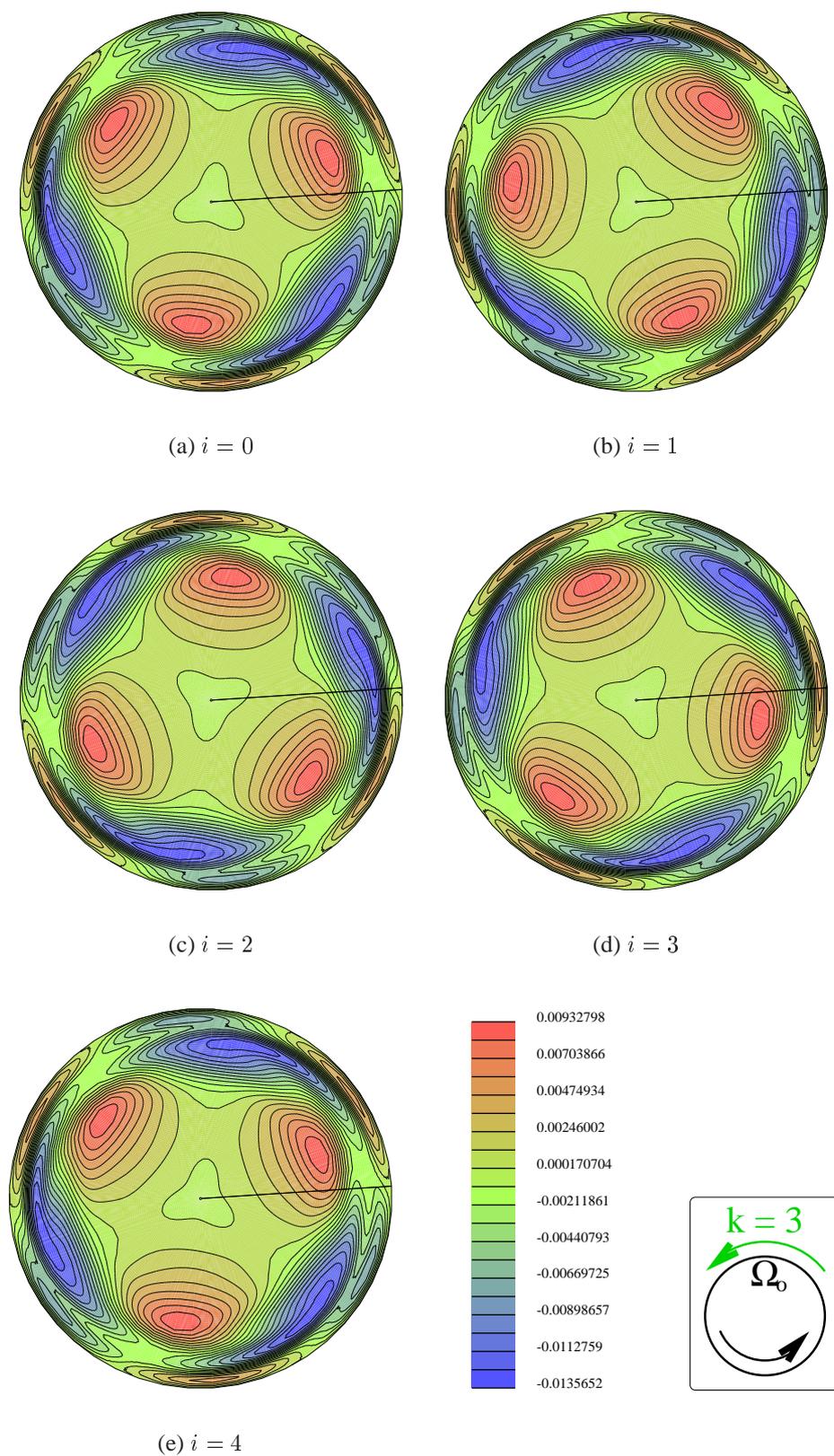


FIG. 6.21 – $h = 1$, $Re = 4500$: Iso-lignes/valeurs de la composante azimutale v' de la perturbation de vitesse dans le plan $z = 0.5h$ au cours d'une période $T_2 = 19.6$ tours. Chaque figure correspond au temps $t = 501 + iT_2/4$, avec $i = 0, \dots, 4$.

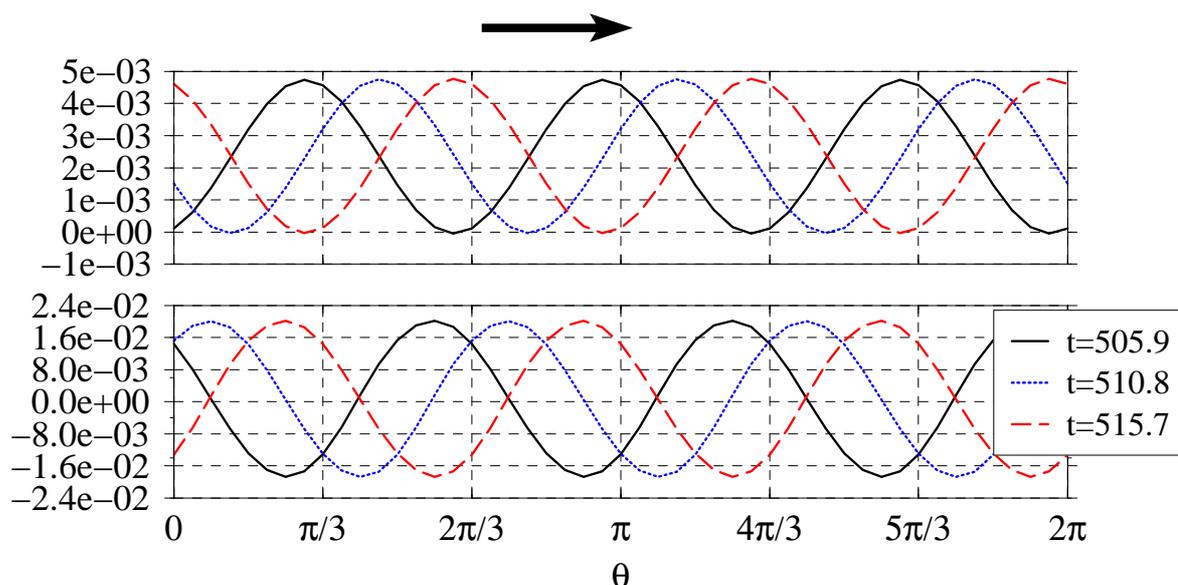


FIG. 6.22 – $h = 1$, $Re = 4500$: Profil de la composante azimutale v' de la perturbation de vitesse à différents instants sur deux circonférences (r, θ, z) . De haut en bas : $(0.5, \theta, 0.5h)$ et $(0.75, \theta, 0.8h)$. La flèche indique le sens de propagation de l'onde tournante associée au mode azimutal $k = 3$.

6.3 Discussions

6.3.1 Localisation spatiale et couplages des modes

Comme nous l'avons déjà mentionné, le mode de Fourier le plus critique contient la quasi-totalité de l'énergie cinétique de la perturbation. De ce fait, une façon simple de mettre en évidence la localisation spatiale des modes $k = 2$ (branche T_1) et $k = 3$ (branche T_2) consiste à tracer les iso-surfaces correspondant à 60% du maximum et du minimum pour chacune des composantes (u', v', w') de la perturbation de vitesse (consulter les tableaux 6.2 et 6.4 pour les valeurs). La figure 6.23 concerne les nombres de Reynolds 3000 et 4500. Les iso-surfaces rouges correspondent à 60% du maximum, alors que les iso-surfaces bleues représentent 60% du minimum. De telles visualisations tridimensionnelles montrent que la perturbation apparaît principalement dans le coin supérieur du cylindre vers le bandeau périphérique, c'est-à-dire dans une région où les effets de la rotation du couvercle moteur sont les moins intenses et où l'écoulement secondaire est dévié vers l'axe de rotation. Cette zone semble correspondre cinématiquement à l'impact d'un jet tourbillonnaire sur le disque immobile. Récemment, de telles observations ont été rapportées par **Marques et al.** [47, 48].

À présent, notre propos est d'examiner le couplage non-linéaire entre les modes azimutaux et dans ce but, on considère la solution à $Re = 3000$ obtenue par un calcul en perturbations avec des conditions de type CI_b . Une analyse de Fourier des variations temporelles de v' en régime non-linéaire, au point de contrôle $A(r = 0.5, \theta = 0, z = 0.5h)$, a permis de conclure que les états correspondant aux nombres de Reynolds 2550 ($T_1 = 12.5$ tours) et 3000 ($T_1 = 12$ tours) sont connectés par la même branche de solutions non-axisymétriques instationnaires.

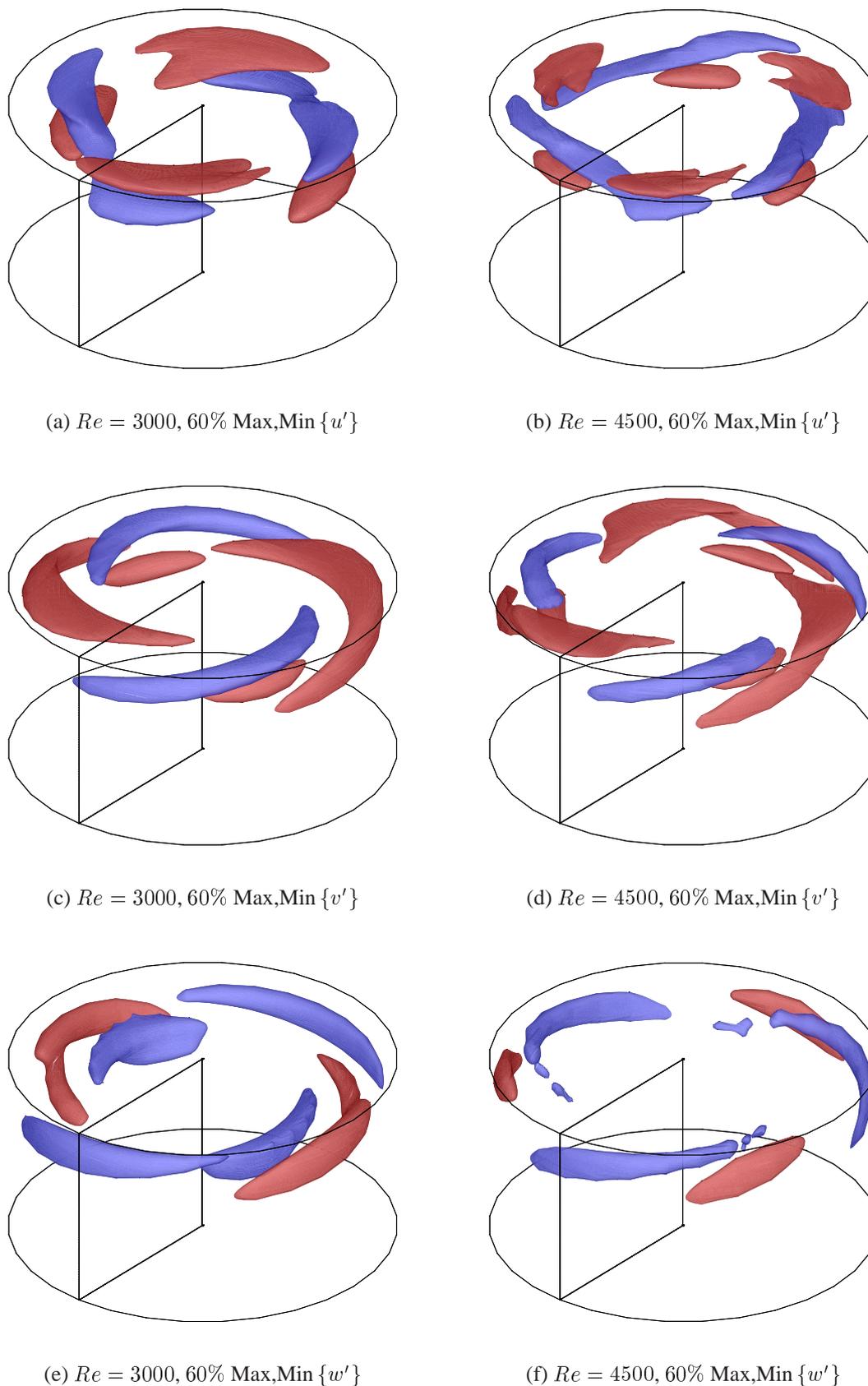


FIG. 6.23 – $h = 1$, $Re = 3000$, et 4500 : Iso-surfaces des composantes (u', v', w') de la perturbation de vitesse représentant 60% du maximum (*en rouge*) et du minimum (*en bleu*).

Perturbation	Maximum	Minimum
u'	2.281×10^{-2}	-2.638×10^{-2}
v'	2.771×10^{-2}	-4.970×10^{-2}
w'	2.929×10^{-2}	-2.362×10^{-2}

TAB. 6.4 – $h = 1, Re = 4500$: Valeurs maximales et minimales des composantes (u', v', w') de la perturbation de vitesse.

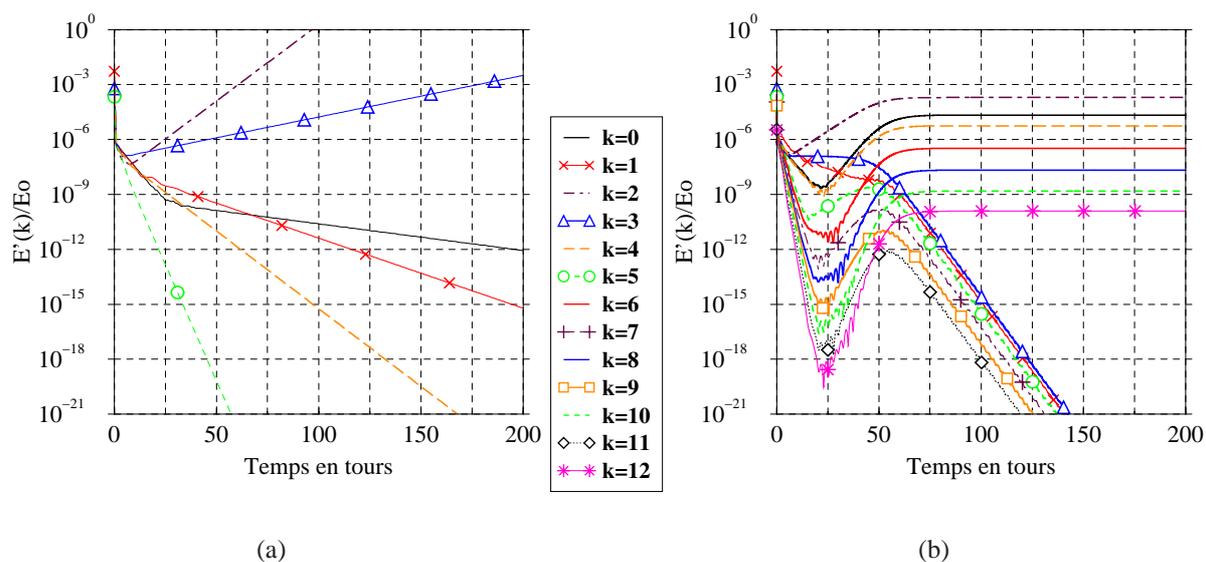


FIG. 6.24 – $h = 1, Re = 3000$: Énergies cinétiques modales $E'(k)$ au cours du temps en régime linéaire (a) et non-linéaire (b). Représentations semi-logarithmiques.

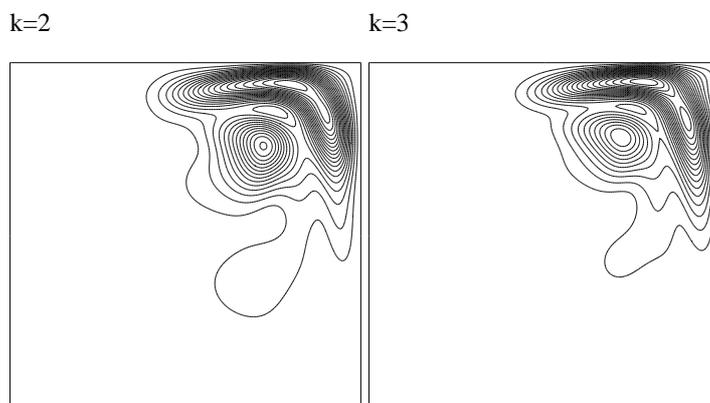


FIG. 6.25 – $h = 1, Re = 3000$: Iso-lignes de l'énergie cinétique $E'(k)$ des modes $k = 2$ et $k = 3$ en régime linéaire dans un semi-plan méridien. L'axe $r = 0$ est à gauche.

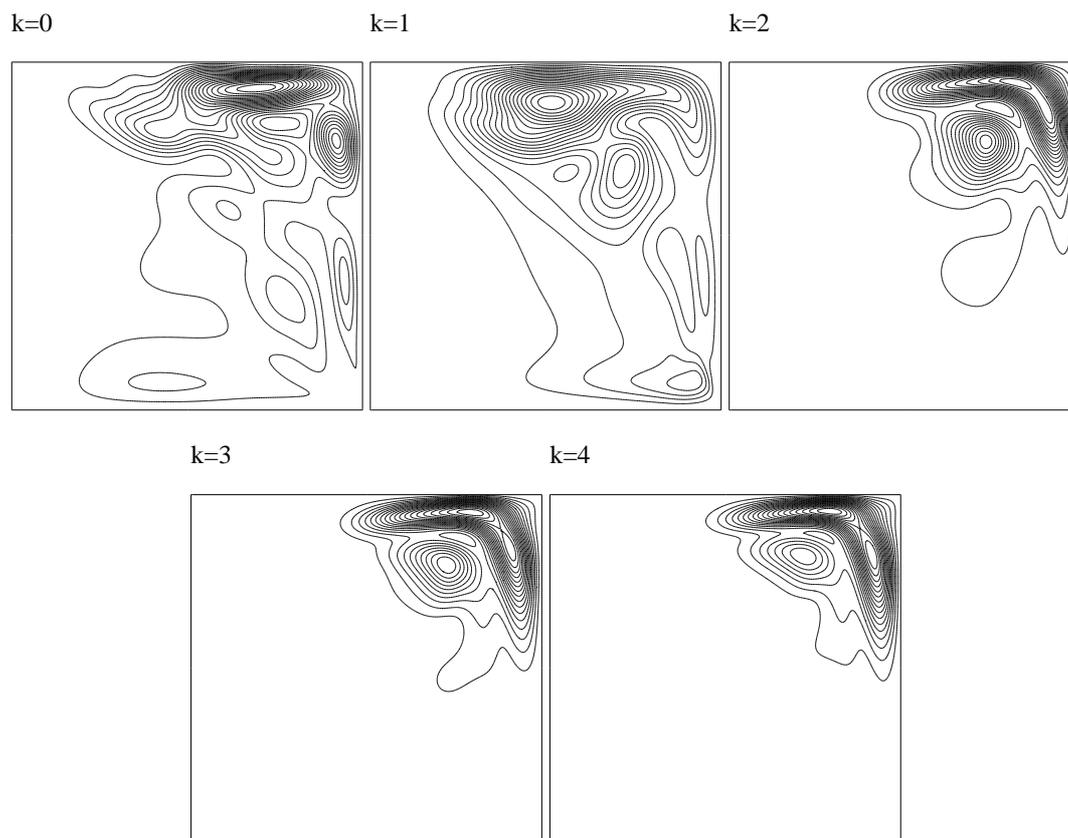


FIG. 6.26 – $h = 1$, $Re = 3500$: Iso-lignes de l'énergie cinétique des modes $k = 0$ à $k = 4$ en régime linéaire dans un semi-plan méridien. L'axe $r = 0$ est à gauche.

Ce résultat est corroboré par l'étude du comportement temporel des énergies cinétiques $E'(k)$, données sur la figure 6.24.a. En effet, comme pour le cas à $Re = 2510$, les simulations non-linéaires montrent que les modes impairs de la perturbation de départ s'amortissent, alors que le mode $k = 2$ et ses harmoniques restent maîtres. En s'éloignant de la criticalité, on note que le niveau de saturation maximum devient plus élevé (2×10^{-5}) et que ce maximum est atteint plus rapidement ($t > 75$ tours). En revanche, on peut être surpris de voir que le mode azimutal $k = 3$ est instable linéairement (Fig. 6.24.b), bien que ce dernier soit inexistant en régime non-linéaire.

Cette apparente contradiction peut s'expliquer en examinant la figure 6.25 où sont tracées vingt iso-lignes des énergies cinétiques $E'(k = 2)$ et $E'(k = 3)$ en régime linéaire dans un semi-plan méridien. Conformément aux observations précédentes, il s'avère que la localisation spatiale du mode $k = 2$ et celle du mode $k = 3$ coïncident : ces deux modes sont instables linéairement et peuvent interagir par couplages non-linéaires. Lorsque $Re = 3000$, le mode qui possède le taux de croissance le plus faible ($k = 3$) est alors effacé par le mode dominant ($k = 2$) au terme de cette compétition énergétique. Dans le but de confirmer cette explication, l'analyse précédente est répétée pour $Re = 3500$. En régime non-linéaire, les simulations montrent que les énergies cinétiques modales des solutions à $Re = 3000$ (Fig. 6.24) et $Re = 3500$ (non-montrée ici) se comportent de façon analogue au cours du temps et rendent bien compte de la prédominance du mode $k = 2$. Par contre, les comportements linéaires de ces solutions ne

sont plus les mêmes puisque les quatre premiers modes azimutaux affichent désormais un taux de croissance strictement positif lorsque $Re = 3500$ (voir Fig. 6.3). La représentation des iso-lignes de $E'(k)$ dans un plan (r, z) est donnée sur la figure 6.26 pour $k \in [0, 4]$. Celle-ci fournit les informations suivantes. D'une part, nous remarquons que la localisation spatiale du mode $k = 2$ et celle du mode $k = 3$ demeurent pratiquement inchangée, malgré l'augmentation de la vitesse d'entraînement azimutal. D'autre part, les modes $k = 0, 3$, et 4 – instables linéairement – sont situés dans la même région que le nombre d'onde le plus critique $k = 2$. On note que seule la concentration des iso-lignes du mode $k = 1$ – instable linéairement – semble plus éloignée du bandeau périphérique par rapport aux autres valeurs de k . Toutefois, l'interaction spatiale avec le mode maître reste possible.

6.3.2 Analyse des fréquences

Pour chaque solution trouvée, la période fondamentale a été mesurée par calcul direct (i.e. : passages successifs par une même valeur) et par analyse de Fourier d'un signal temporel de référence : deux branches d'états ont alors été identifiées. Ces fréquences sont récapitulées sur la figure 6.27 pour des valeurs du nombre de Reynolds comprises entre 2500 et 4900. En deçà de $Re = 4020$, la précession du nombre d'onde $k = 2$ (solutions S_2) est caractérisée par une pulsation $f_{RW2} = f_1/2$. La valeur de f_1 croît lentement de 0.079 tours^{-1} pour $Re = 2500$ à 0.085 tours^{-1} pour $Re = 4020$. Au delà de $Re = 4025$, l'onde S_3 associée au mode azimutal $k = 3$ tourne avec une fréquence $f_{RW3} = f_2/3$. La valeur de f_2 décroît lentement depuis 0.054 tours^{-1} pour $Re = 4025$ jusqu'à 0.050 tours^{-1} pour $Re = 4900$. Le diagramme (f, Re) montre également que les pulsations sont quasiment constantes au voisinage du second point de bifurcation. Cette dépendance de la fréquence avec le taux de rotation est cohérente avec les observations formulées par Sørensen & Christensen [63].

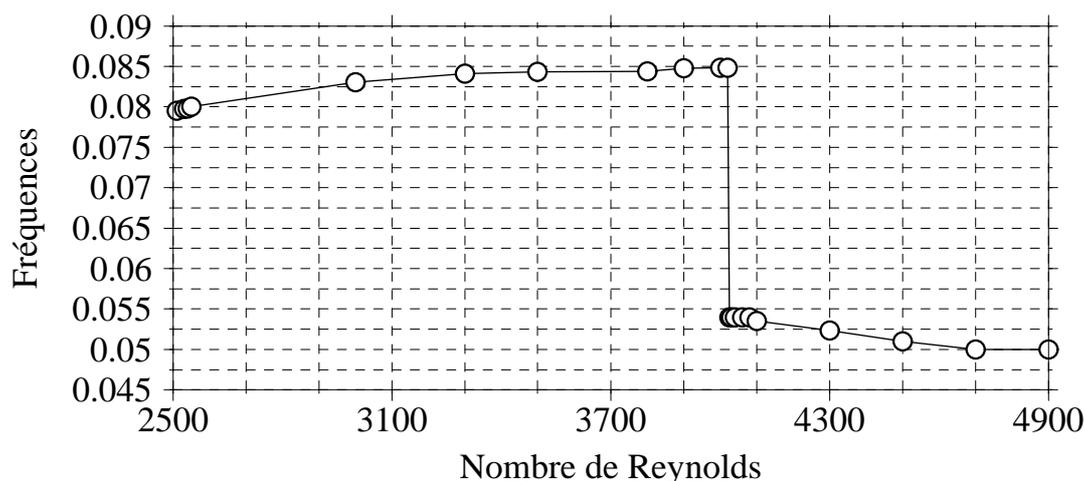


FIG. 6.27 – $h = 1$: Récapitulatif des fréquences caractéristiques trouvées pour la perturbation. Les calculs ont été initialisés avec des conditions de type CI_b .

6.4 Solutions multiples

Dans ce qui précède, l'accent a été mis sur l'analyse de stabilité non-linéaire d'un écoulement de base axisymétrique stationnaire vis-à-vis de perturbations tridimensionnelles instantanées. **Ces calculs ont été initialisés avec des conditions de type CI_b .** Pour mémoire, ce sigle désigne des conditions de départ qui résultent de la superposition d'un écoulement de base axisymétrique stationnaire et d'un champ de vitesse non-axisymétrique par construction. S'il est vrai qu'une telle approche a permis de caractériser les branches de cycles limites non-axisymétriques S_2 et S_3 (tracées en pointillés verts sur les diagrammes 6.29 et 6.30), il n'en demeure pas moins vrai qu'aucune information concernant l'existence possible de solutions multiples n'est dispensée. D'autre part, l'interprétation physique de cette méthodologie pose problème. En effet, les écoulements de base sont obtenus en utilisant une méthode de Newton préconditionnée [73] qui autorise le calcul de solutions axisymétriques stationnaires stables, **même lorsque que celles-ci sont instables.** Il est donc légitime de se demander si de telles solutions peuvent être observées par le biais d'expériences en laboratoire. Dans l'optique d'éclairer ces points, les équations de Navier-Stokes complètes (c'est-à-dire sous forme non-perturbative) sont résolues avec différentes conditions initiales.

6.4.1 Démarrages impulsifs du rotor

Dans un premier temps, les calculs tridimensionnels complets sont initialisés avec un état qui correspond au repos du fluide : **ces conditions de départ sont notées CI_0 dans la suite.** Ces simulations s'apparentent aux expériences en laboratoire suivant lesquelles le disque moteur est mis en rotation de façon impulsive. Quelques-uns des calculs réalisés sont schématisés par des flèches verticales bleues sur le diagramme 6.29. Il s'avère que les solutions trouvées en intégrant les équations du mouvement, soit en formulation complète en partant du fluide au repos, soit en perturbations avec des conditions initiales CI_b , possèdent les mêmes propriétés spatio-temporelles. La transition depuis les ondes S_2 vers les ondes S_3 est observée au nombre de Reynolds $Re_{2,3} \in [3800, 3900]$, c'est-à-dire au voisinage du second point de bifurcation $Re_{c_2} \in [4020, 4025]$ que nous avons obtenu via l'analyse de stabilité non-linéaire. De plus, la valeur de $Re_{2,3}$ (transition $S_2 \rightarrow S_3$) et celle du point de croisement $Re_{\mathcal{L}}$ (transition $\tau_2 > \tau_3 \rightarrow \tau_3 > \tau_2$ en régime linéaire) ne diffèrent que de 0.5%. Ceci porte à croire que la bifurcation est gouvernée par le mode azimutal qui a le taux de croissance le plus élevé, lorsque les conditions initiales sont de type CI_0 .

6.4.2 Accélération et décélération du rotor

Il est connu que l'existence possible de solutions multiples ne peut être dégagée en faisant varier le nombre de Reynolds de façon monotone (voir par exemple [63]). Dès lors, on réalise numériquement l'expérience suivante.

(1) – Une première simulation à $Re = 2800$, menée en prenant des conditions de départ de type CI_0 , converge vers une onde tournante S_2 associée au mode azimutale $k = 2$ (flèche verticale bleue sur la figure 6.30). Celle-ci initialise le calcul pour un nombre de Reynolds Re^+ supérieur à 2800. Après amortissement des effets transitoires, un instantané de Re^+ constitue l'état initial pour la simulation suivante à $Re^{++} > Re^+$, de sorte que $Re^{++} - Re^+ = 100$. Ce processus d'accélération progressive du rotor, **noté** CI^+ , est effectué jusqu'à la valeur $Re = 5500$ pour laquelle la solution est une onde azimutale tournante S_3 . Sur la figure 6.28 (*en haut*), la transition depuis la branche où le mode $k = 2$ est dominant vers celle où le mode $k = 3$ est maître, est détectée en traçant l'évolution temporelle des énergies cinétiques modales $E^l(k = 2)$ et $E^l(k = 3)$. Aucun changement de comportement n'est décelé en augmentant le nombre de Reynolds depuis 2800 jusqu'à 5000 : le mode de Fourier $k = 2$ et ses harmoniques (non-montrées) sont maîtres alors que pour tous les autres modes, l'énergie cinétique reste à la valeur zéro de la machine. En revanche, lorsque le taux de rotation passe de 5000 à 5100, il apparaît deux phases transitoires. La première phase est relativement longue ($\simeq 1200$ tours) et montre que les énergies des modes $k \neq 2n$, stables jusqu'à présent, se mettent à croître avec le même taux de croissance. Dès lors, l'ensemble des modes azimutaux disposent d'un niveau d'énergie comparable. Cette situation est instable et une seconde phase plus brève (environ 360 tours) se met en place. On assiste à la sélection puis à la saturation des modes azimutaux $k = 3n$ (seule la contribution $n = 1$ est montrée), alors que les autres modes disparaissent. Cet examen permet de conclure que le saut $S_2 \rightarrow S_3$ se produit au point $Re_{2,3} \in [5000, 5100]$. On peut penser que le processus d'initialisation CI^+ apporte suffisamment d'énergie au mode $k = 2$ pour résister au mode $k = 3$ qui a pourtant le taux de croissance le plus élevé en régime linéaire. Ceci peut expliquer la présence d'ondes S_2 au delà du point de croisement $Re_{\mathcal{L}}$.

(2) – La suite de l'expérience consiste à reprendre la démarche détaillée ci-dessus dans le sens des nombres de Reynolds décroissants, en partant de la solution S_3 trouvée à $Re = 5500$: $5500 > Re^- > Re^{--}$ avec $Re^- - Re^{--} = 100$, et ainsi de suite jusqu'à la valeur $Re = 2800$ pour laquelle la solution est une onde azimutale tournante S_2 de la branche f_1 . Ce processus d'initialisation, **que nous noterons** CI^- , correspond en fait à une décélération progressive du rotor. La série de calculs qui en résulte est schématisée sur le diagramme 6.28 (*en bas*). Lorsque le disque entraînant le fluide est peu à peu décéléré de $Re = 4000$ à $Re = 3700$, il s'avère que les seules contributions énergétiques sont celles des modes azimutaux $k = 3n$. Le saut $S_3 \rightarrow S_2$ apparaît au point $Re_{3,2} \in [3600, 3700]$ car le nombre d'onde $k = 2$ est dominant en deçà de cette valeur. Notons que la valeur de $Re_{3,2}$ concorde à 5% près avec celle du point de croisement $Re_{\mathcal{L}}$: il est donc raisonnable d'interpréter les résultats obtenus avec des conditions CI^- en terme de taux de croissance linéaire dominant.

Finalement, les processus d'initialisation CI^+ et CI^- font ressortir la présence d'une boucle d'hystérésis, ce qui va dans le sens d'une bifurcation de Naimark-Sacker sous-critique. En définitive, trois gammes de nombres de Reynolds se distinguent au vu du diagramme 6.30 :

- $Re < 3600$ – Les calculs convergent vers des ondes π -périodiques en espace qui se propagent dans la direction azimutale avec une période $T_{RW2} = 2 \times T_1$. Ce résultat est cohérent avec les calculs linéarisés : le taux de croissance du mode $k = 2$ est le plus élevé dans cette gamme.

- $Re \in [3700, 5000]$ – Dans la région d’hystérésis, les cycles limites S_2 et S_3 coexistent. La branche de solutions atteinte dépend de la façon dont est distribuée l’énergie cinétique initiale.
- $Re > 5100$ – Les solutions sont des ondes invariantes par symétrie d’ordre trois, qui tournent autour de l’axe avec une période $T_{RW_3} = 3 \times T_2$. L’analyse de stabilité linéaire révèle que le mode azimutal $k = 3$ a le taux de croissance le plus élevé dans cet intervalle. Les approches linéaire et non-linéaire semblent coïncider pour ces valeurs du paramètre Re .

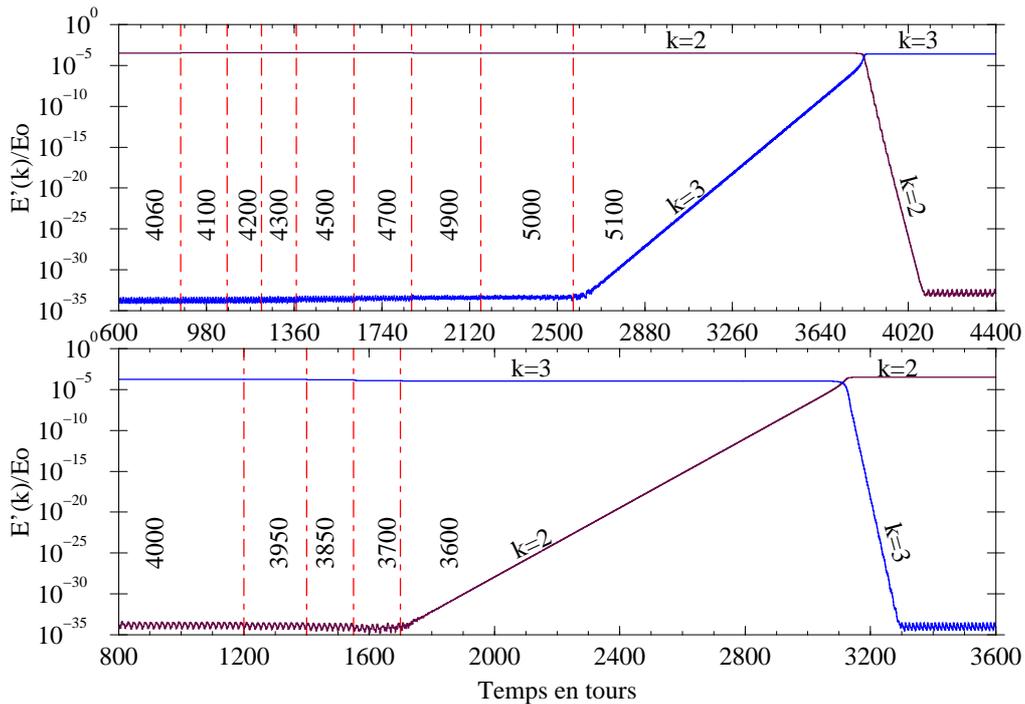


FIG. 6.28 – $h = 1$: Mise en évidence des sauts entre les branches de solutions f_1 et f_2 en augmentant (*en haut*) et en diminuant (*en bas*) progressivement la rotation du disque inférieur.

6.5 Onde azimutale tournante modulée

Dans ce paragraphe, notre propos est d’étudier les conséquences de l’augmentation du nombre de Reynolds sur les structures spatio-temporelles des ondes tournantes S_3 associées au mode azimutal $k = 3$. Dans ce but, une succession de calculs non-linéaires en perturbations a été réalisée avec des conditions initiales de type CI^+ : on part d’un instantané à $Re = 5600$ puis le disque inférieur est progressivement accéléré. Lorsque $Re > 6300$, une nouvelle transition a lieu. Les ondes S_3 convergent alors vers des ondes azimutales tournantes modulées, désignées par le sigle S_{MOD} dans la suite du texte.

FIG. 6.29 – $h = 1$: Voir 6.30 pour la légende.

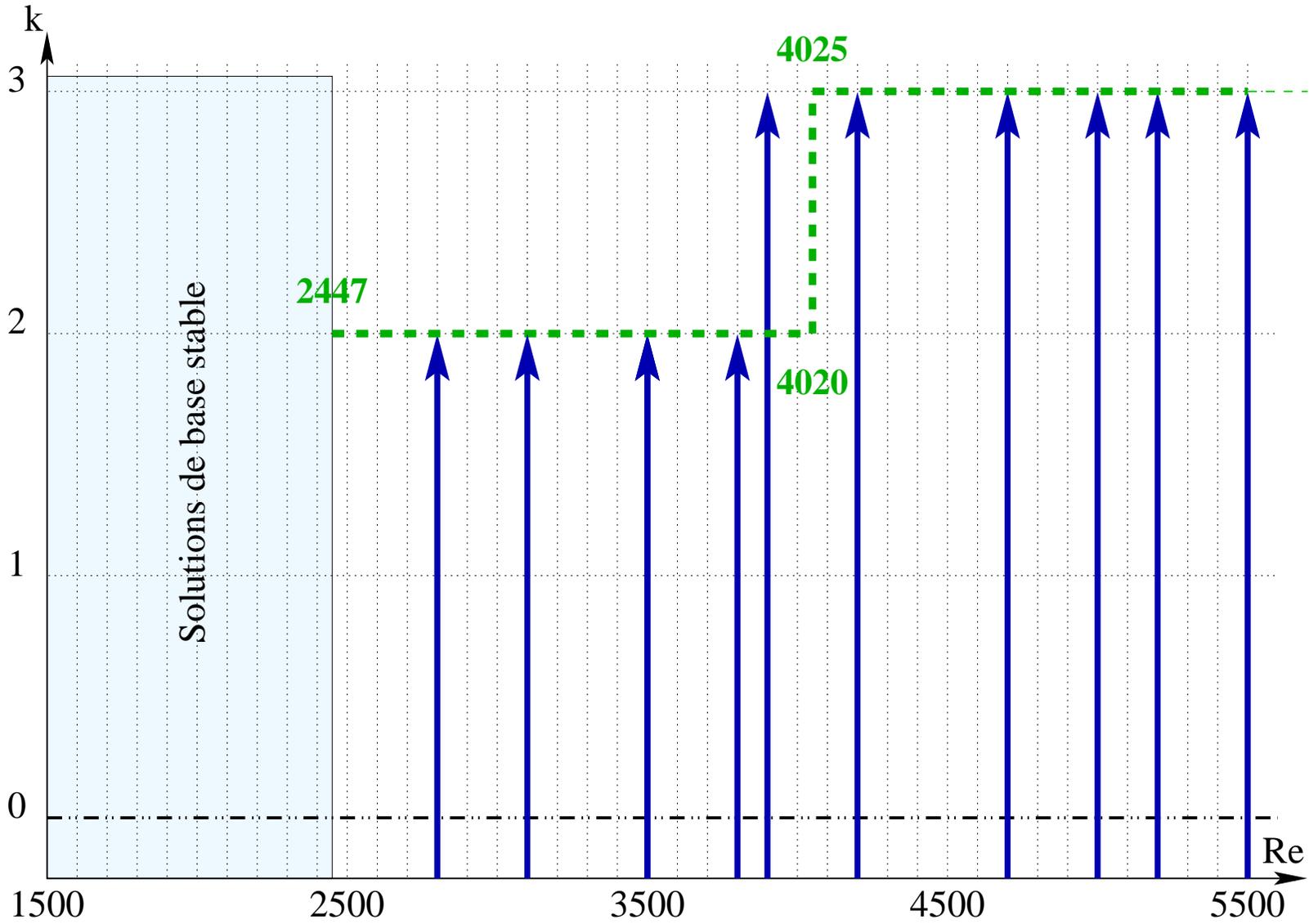
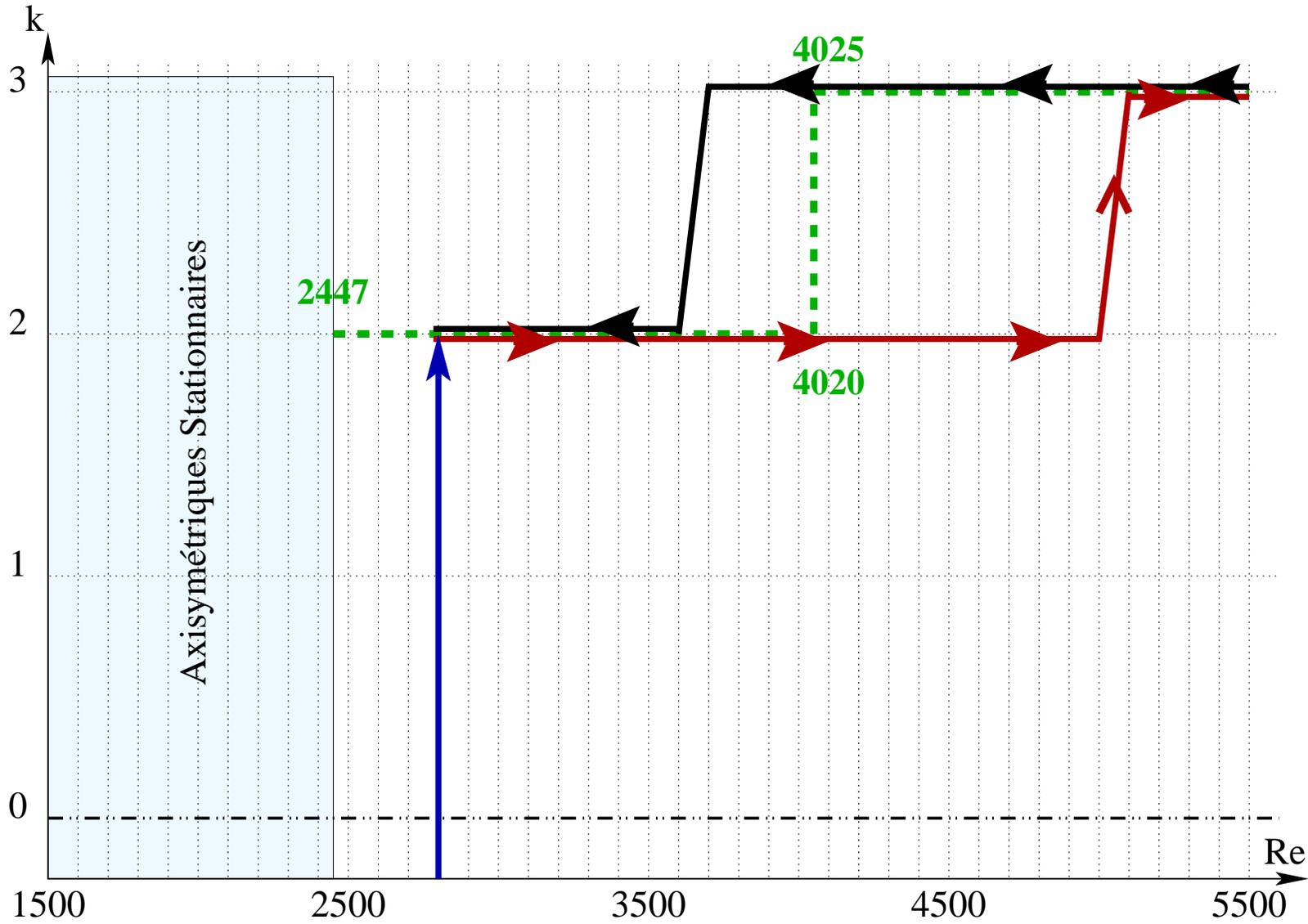


FIG. 6.30 – $h = 1$: Branches de solutions atteintes lorsque les simulations sont réalisées avec des conditions initiales CI_b (en pointillés verts), CI_0 (flèches verticales bleues), CI^+ (en traits rouges) et CI^- (en traits noirs).



Pour décrire ces écoulements complexes, la solution trouvée pour $Re = 7500$ est examinée. Classiquement, la grille se doit d'être affinée lorsque Re est accru ($M = 160$ et $N = 48$) et la stabilité de l'algorithme impose la réduction du pas de temps ($1/\Delta t = 320$ tours $^{-1}$).

6.5.1 Modulation d'intensité

L'évolution temporelle de l'énergie cinétique de la perturbation est étudiée. Sur la figure 6.31.a, nous constatons que l'énergie cinétique totale sature à un niveau fini. Par ailleurs, le palier énergétique exhibe un caractère oscillatoire de faible amplitude constamment égale à 3.8×10^{-5} , autour de la valeur moyenne 6.35×10^{-4} . En régime établi, les énergies cinétiques modales $E'(k)$ présentent un comportement similaire. Il est important de remarquer l'absence de mode dominant. Toutefois, les modes azimutaux $k = 0$ et $k = 3$ ont un contenu énergétique prépondérant devant celui des autres contributions. De ce fait, les niveaux d'énergies cinétiques spectrales correspondant aux modes $k > 3$ ne sont pas montrés sur les figures 6.31.b et 6.31.c. L'analyse de Fourier de l'énergie cinétique totale de la perturbation est rapportée sur la figure 6.32 et une pulsation fondamentale f_{MOD} est mise en évidence :

$$\text{fréquence } f_{\text{MOD}} = 0.2666 \text{ tours}^{-1} \iff \text{période } T_{\text{MOD}} = 1/f_{\text{MOD}} = 3.75 \text{ tours}$$

Sur le graphique 6.32, la présence des quatre premières harmoniques rend compte du comportement non-purement sinusoïdal des fluctuations de l'énergie cinétique totale. En outre, la comparaison des spectres de puissance des signaux d'énergies cinétiques totale et modales a révélé que les pics ont les mêmes abscisses, soient $f = n f_{\text{MOD}}$ avec $n > 0$. Afin de préserver la clarté du graphique, seule l'analyse de Fourier du mode $k = 1$ a été tracée sur la figure 6.32. Il s'ensuit que l'intensité de la perturbation est faiblement modulée avec une période $T_{\text{MOD}} = 3.75$ tours. Pour s'en convaincre, il suffit de visualiser les figures suivantes :

- Fig. 6.33 – Les iso-lignes de l'énergie cinétique spectrale $E'(k)$ sont tracées dans un semi-plan méridien pour quatre phases telles que $t = 1600 + iT_{\text{MOD}}/3$, avec $i = 0, \dots, 3$. En particulier, de telles visualisations ont révélé que les modes azimutaux qui contiennent le moins d'énergie cinétique (i.e. : $k \neq 0, 3$) sont ceux pour lesquels les fluctuations d'intensité sont les plus marquées. Seules les énergies $E'(k = 0)$ et $E'(k = 2)$ ont été représentées.
- Fig. 6.34 – Les iso-lignes/valeurs des fluctuations de la vitesse azimutale v' par rapport à l'écoulement de base sont projetées dans le plan $z = 0.8h$ aux instants $t = 1601.8 + iT_{\text{MOD}}/4$, avec $i = 0, \dots, 4$. Les topologies observées peuvent être décrites comme des structures spatiales associées au nombre d'onde $k = 3$, dégradées par la participation des modes $k \neq 3n$. Cette observation est cohérente avec le fait que $k = 3$ est le mode de Fourier non-nul qui renferme le plus d'énergie cinétique.

6.5.2 Précession des structures

S'il est vrai que les résultats numériques exposés précédemment ont permis de dégager un phénomène de modulation d'intensité de la perturbation, il n'en demeure pas moins vrai qu'un

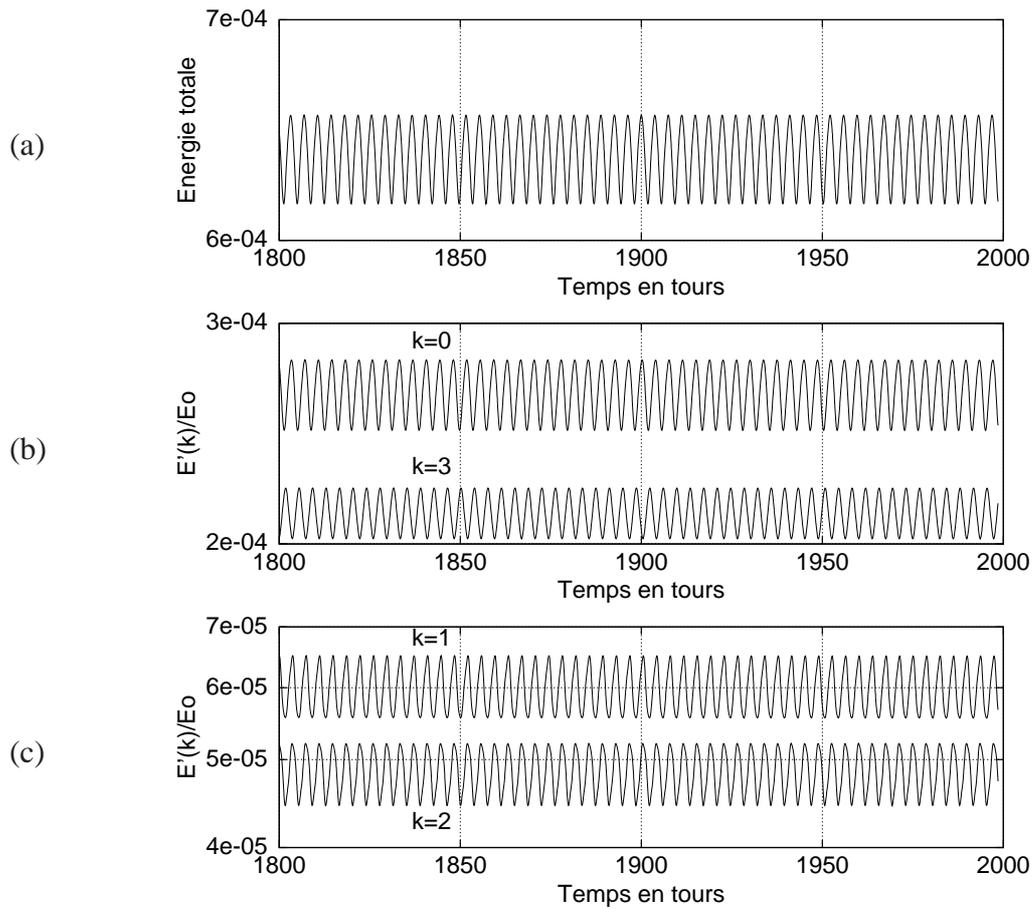


FIG. 6.31 – $h = 1$, $Re = 7500$: Énergie cinétique totale de la perturbation (a) et énergies cinétiques spectrales $E'(k)$ des quatre premiers modes de Fourier (b et c) au cours du temps en régime non-linéaire. Représentations semi-logarithmiques.

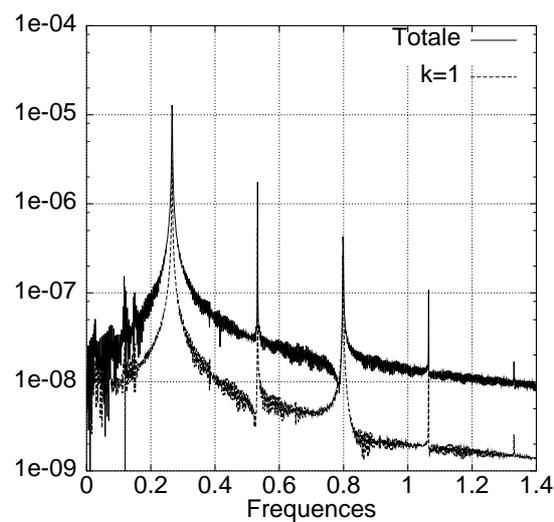


FIG. 6.32 – $h = 1$, $Re = 7500$: Densités énergétiques spectrales des énergies cinétiques totale et spectrale $E'(k = 1)$ pour $t \in [1000, 2000]$. Représentations semi-logarithmiques.

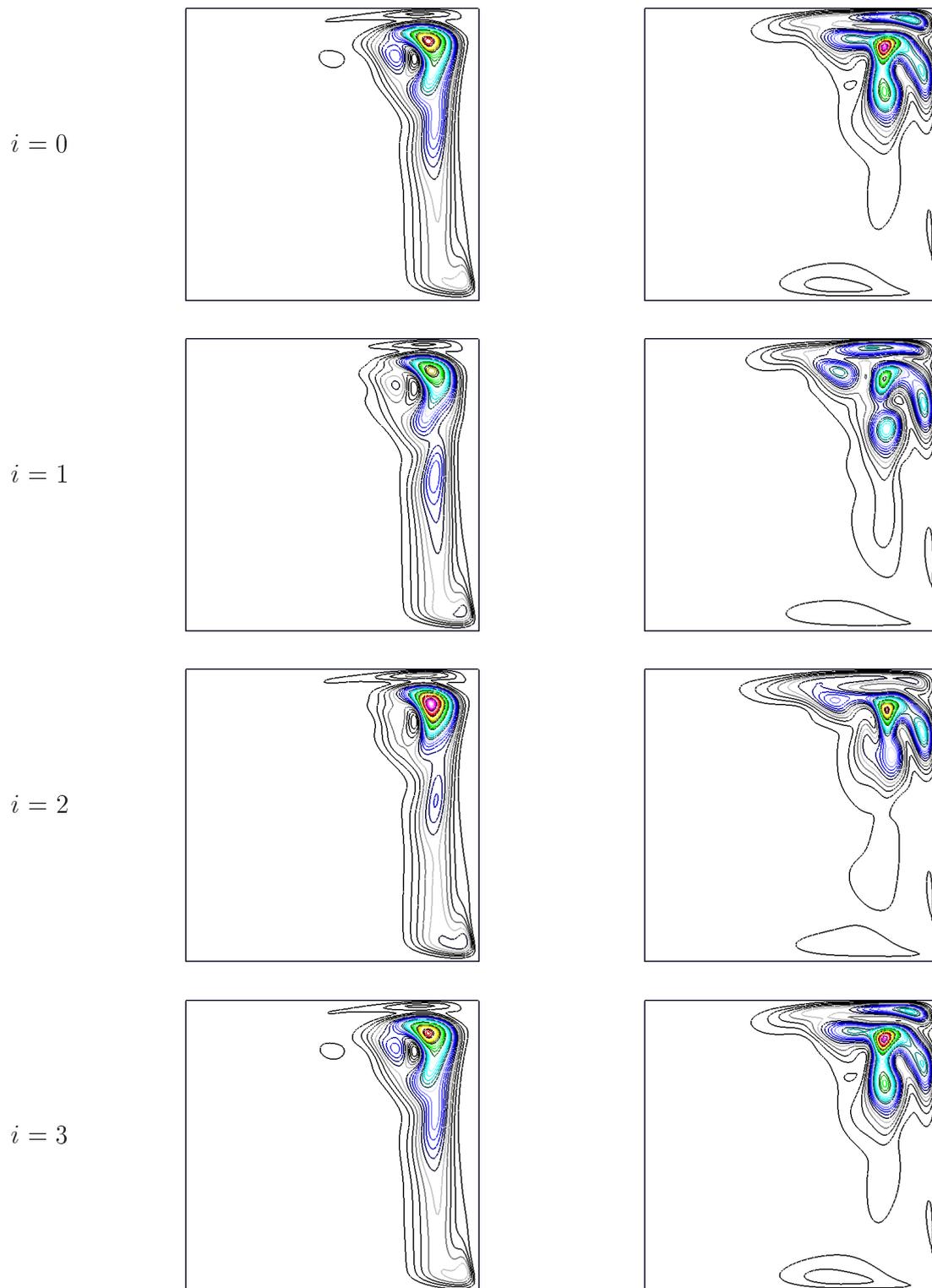


FIG. 6.33 – $h = 1$, $Re = 7500$: Iso-lignes des énergies cinétiques modales $E'(k = 0)$ (à gauche) et $E'(k = 2)$ (à droite) dans un plan méridien au cours d'une période $T_{\text{MOD}} \simeq 3.75$ tours. Chaque figure correspond au temps $t = 1600 + iT_{\text{MOD}}/3$, avec $i = 0, \dots, 3$. L'axe $r = 0$ est à gauche.

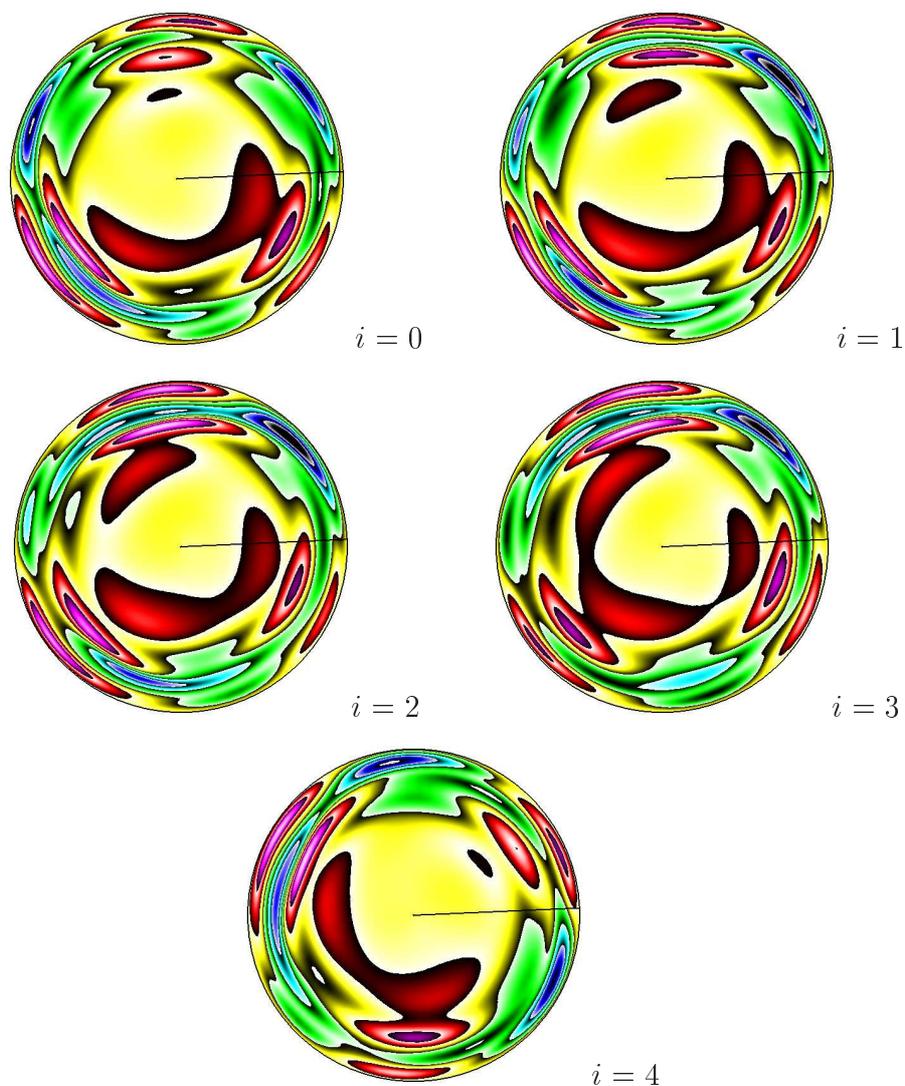


FIG. 6.34 – $h = 1$, $Re = 7500$: Iso-lignes/valeurs de la composante azimutale v' de la perturbation de vitesse dans le plan $z = 0.8h$ au cours d'une période $T_{\text{MOD}} = 3.75$ tours. Chaque figure correspond au temps $t = 1601.8 + iT_{\text{MOD}}/4$, avec $i = 0, \dots, 4$.

éventuel mouvement de précession ne peut être décelé de cette manière. Notre attention s'est alors portée sur l'analyse d'un signal de référence, comme par exemple celui de la figure 6.35 qui représente les variations temporelles de la composante azimutale v' de la perturbation de vitesse au point $C(r = 0.75, \theta = 0, z = 0.75h)$.

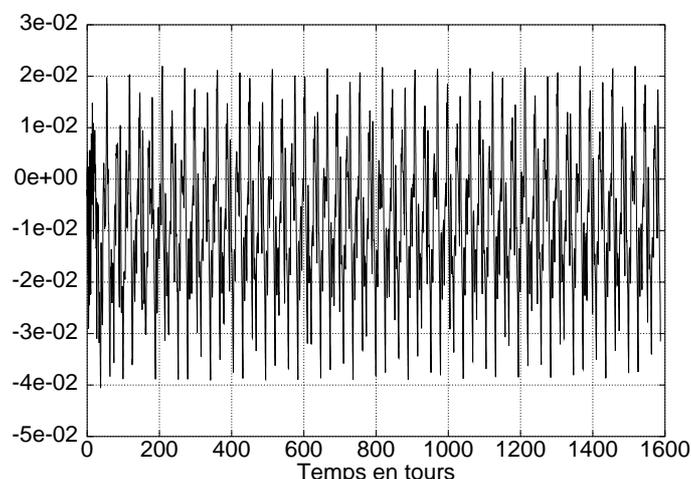


FIG. 6.35 – $h = 1$, $Re = 7500$: Variations temporelles de la composante azimutale v' de la perturbation de vitesse au point $C(r = 0.75, \theta = 0, z = 0.75h)$.

Au premier abord, le spectre de puissance qui en résulte a une allure relativement complexe (voir Fig. 6.36.a). Pour pousser plus avant la discussion, on donne également sur la même figure :

- Fig. 6.36.b à 6.36.e : La densité énergétique spectrale des coefficients $\hat{v}'_k(C)$ associés au signal physique $v'(C)$ pour $k = 0, \dots, 3$.
- Fig. 6.36.f : Le spectre de Fourier de l'énergie cinétique totale.

Le signal temporel correspondant au nombre d'onde axisymétrique de la perturbation est mono-périodique : celui-ci oscille à la même fréquence que la modulation d'intensité, c'est-à-dire f_{MOD} . Les spectres associés aux modes azimutaux non-axisymétriques témoignent de la bi-périodicité des signaux de références \hat{v}'_k . Pour chaque mode k non-nul, deux pulsations de base de rapport irrationnel sont relevées : f_{MOD} et $f_{\text{MRW}k}$. En définitive, les différentes raies observées sur les spectres de \hat{v}'_k sont référées par la relation :

$$\forall k \quad f = \begin{cases} f_{\text{MRW}k} + n f_{\text{MOD}} \\ (n + 1) f_{\text{MOD}} - f_{\text{MRW}k} \end{cases} \quad n \geq 0$$

Compte tenu du caractère linéaire des séries de Fourier, toutes ces contributions se superposent et forment la densité énergétique spectrale du signal physique $v'(C)$. Les valeurs de $f_{\text{MRW}k}$ sont récapitulées dans le tableau 6.5. Pour le mode azimutal prépondérant $k = 3$, il vient :

fréquence $f_{\text{MRW}3} = 0.325 \text{ tours}^{-1} \iff$ période $T_{\text{MRW}3} = 1/f_{\text{MRW}3} = 3.08 \text{ tours}$

Il s'ensuit que le phénomène de modulation d'intensité de la perturbation s'accompagne d'un mouvement de précession caractérisé par une pulsation $f_{\text{MRW}3}$.

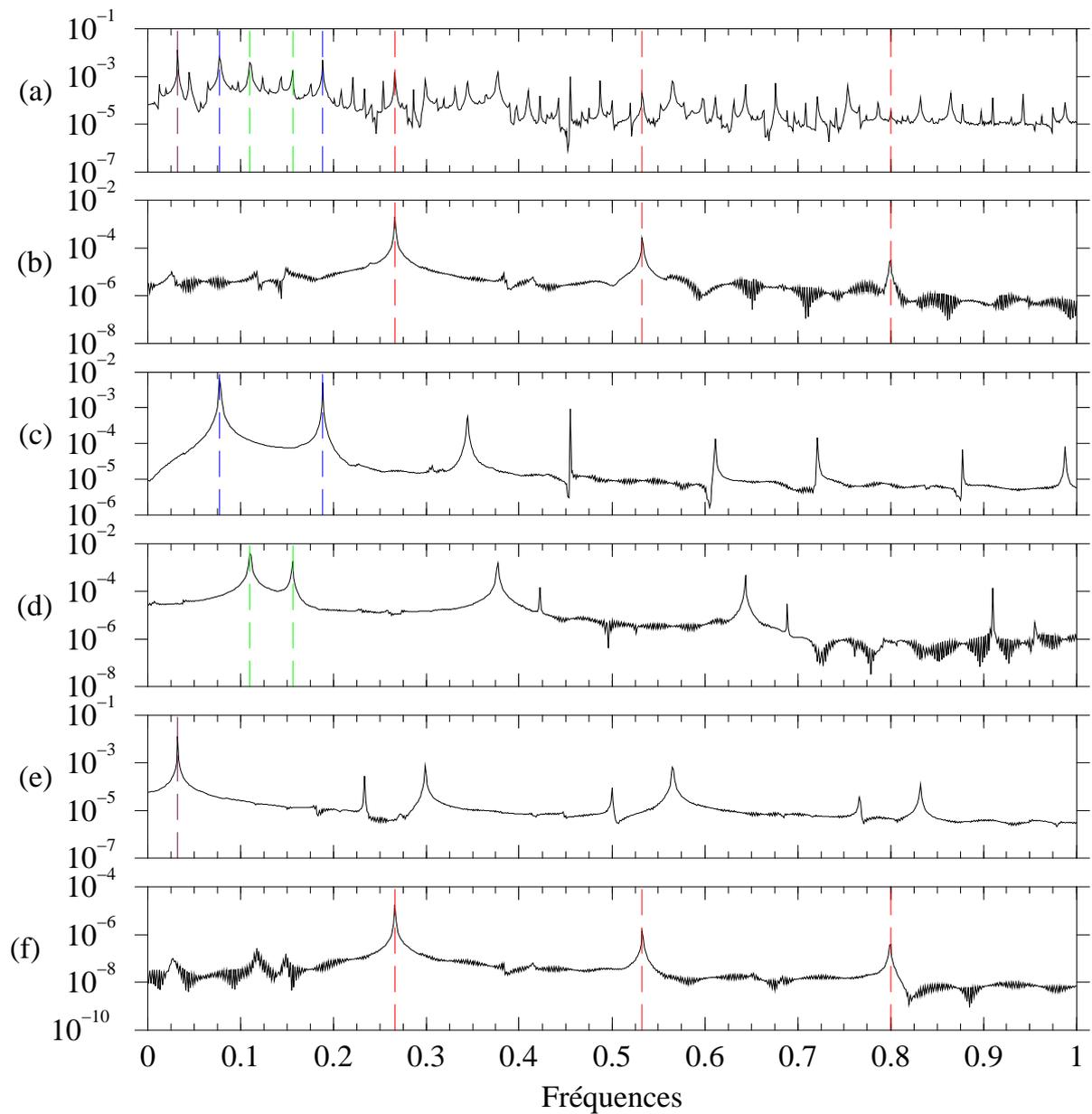


FIG. 6.36 – $h = 1$, $Re = 7500$: Comparaison des densités énergétiques spectrales pour $t \in [500, 800]$. (a) Signal 6.35. (b–e) Coefficients spectraux associés au signal 6.35 pour les modes $k = 0$ à $k = 3$. (f) Énergie cinétique totale de la perturbation. Représentations semi-logarithmiques.

Modes	$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$
f_{MRWk}	$f_{MOD} = 0.2662$	0.7750	1.1000	$f_{MRW3} = 0.3250$

TAB. 6.5 – $h = 1$, $Re = 7500$: Fréquence fondamentale des quatre premiers modes de Fourier de la perturbation.

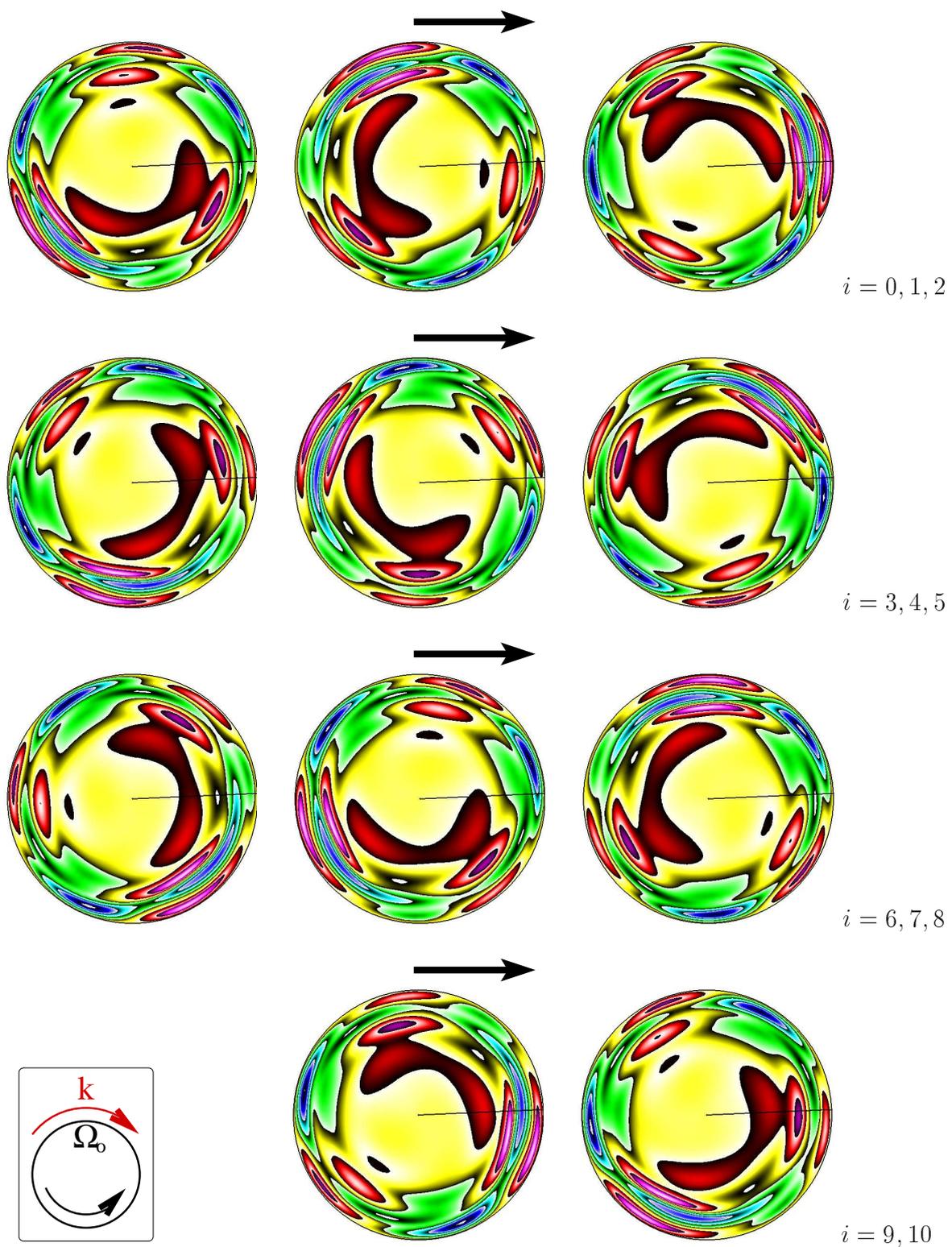


FIG. 6.37 – $h = 1$, $Re = 7500$: Iso-lignes/valeurs de la composante azimutale v' de la perturbation de vitesse dans le plan $z = 0.8h$ au cours de dix périodes $T_{\text{MOD}} = 3.75$ tours. Chaque figure correspond au temps $t = 1601.8 + iT_{\text{MOD}}$, avec $i = 0, \dots, 10$.

Il n'est pas aisé de déterminer la présence ou non d'un mouvement de précession en azimut en observant la stroboscopie de la figure 6.34, à cause de la modulation d'intensité. Une manière simple de mettre en évidence la propagation des structures spatiales consiste à sélectionner le motif correspondant à $i = 0$ sur la figure 6.34, puis à suivre son évolution pendant plusieurs périodes T_{MOD} . L'examen de la séquence temporelle de la figure 6.37 permet de conclure sur l'existence d'une onde azimutale tournante modulée (ou non-pure) qui s'oppose au rotor. Il est intéressant de noter que l'onde S_{MOD} (liée à la **prépondérance** du mode $k = 3$) et l'onde S_3 (liée à la **prédominance** du mode $k = 3$) ne tournent pas dans le même sens. D'autres calculs non-linéaires en perturbations ont montré la présence d'ondes modulées S_{MOD} jusqu'à $Re = 8500$. Pour cette valeur du nombre de Reynolds, la fréquence de modulation f_{MOD} est égale à 2.33 tours^{-1} . En augmentant la rotation du disque inférieur, nous avons constaté que les paliers d'énergies cinétiques spectrales $E'(k)$ se resserrent, ce qui suggère de fortes interactions non-linéaires entre les modes.

6.6 Conclusions

Tout au long de cette section, nous nous sommes intéressés à la tridimensionnalisation de l'écoulement entraîné par un disque en rotation au fond d'une cuve cylindrique stationnaire de rapport d'allongement axial $h = 1$. Cette étude a été réalisée en résolvant les équations de Navier-Stokes :

- sous forme perturbative non-linéaire avec des conditions initiales CI_b (état de base + perturbations aléatoires) ;
- sous forme complètes en prenant des conditions de départ CI_0 (démarrage impulsif du rotor), CI^+ et CI^- (accélération et décélération du disque moteur).

Pour clore ce chapitre, nous passons en revue les différentes solutions atteintes.

Les calculs non-linéaires en perturbations montrent que l'écoulement de base axisymétrique stationnaire devient instable vis-à-vis d'excitations tridimensionnelles lorsque le nombre de Reynolds franchit la valeur critique $Re_{c1} \simeq 2497$. Au delà de ce point, le mode azimutal $k = 2$ est responsable d'une bifurcation de Hopf super-critique qui brise la symétrie $SO(2)$ de l'écoulement de base. Les solutions super-critiques sont des ondes tournantes π -périodiques en espace qui se propagent dans la direction azimutale avec une fréquence caractéristique $f_{\text{RW2}} = f_1/2$. De telles solutions (S_2) se maintiennent jusqu'à $Re = 3600$. Les simulations complètes viennent corroborer ces résultats. Dans cette gamme de Re , la présence d'ondes S_2 est indépendante du processus d'initialisation et peut s'expliquer par le fait que le mode azimutal $k = 2$ a le taux de croissance linéaire le plus important.

Lorsque les valeurs de Re sont comprises entre 3700 et 5000, il existe plusieurs solutions au problème. Les unes sont des cycles limites non-axisymétriques S_2 de la branche f_1 . Les autres sont des ondes tournantes associées au mode azimutal $k = 3$. De telles solutions (S_3) se caractérisent par des structures spatiales présentant une symétrie d'ordre trois qui tournent avec une fréquence $f_{\text{RW3}} = f_2/3$.

- Lorsque l'initialisation des calculs est de type CI_b , les cycles limites S_2 basculent vers les états S_3 dès que le nombre de Reynolds dépasse un second point de bifurcation Re_{c2} dans l'intervalle $[4020, 4025]$.
- Si le rotor est progressivement décéléré depuis un instantané de la solution S_3 trouvée pour $Re = 5500$, il apparaît que la branche f_2 se poursuit en deçà de la valeur critique Re_{c2} . En effet, le saut $S_3 \rightarrow S_2$ a lieu pour $Re_{3,2} \in [3600, 3700]$.
- En prenant comme état de départ le régime établi de la solution S_2 obtenue pour $Re = 2800$ puis en accélérant le rotor, il s'avère que la branche de solution f_1 se prolonge bien au delà du seuil de criticalité Re_{c2} . Un second saut est relevé pour $Re_{2,3} \in [5000, 5100]$.
- Lorsque la mise en rotation du couvercle inférieur se fait brusquement, le saut $S_2 \rightarrow S_3$ est observée à $Re_{2,3} \in [3800, 3900]$.

Tant que le taux de rotation du disque moteur appartient à l'intervalle $[5100, 6100]$, seuls les cycles limites non-axisymétriques S_3 sont observés, indépendamment des conditions initiales mises en œuvre. Par ailleurs, l'expérimentation numérique a permis de dégager la présence d'une branche de solutions asymétriques à intensité modulée à partir de $Re = 6300$. Ces états sont caractérisés par la prépondérance du mode azimutal $k = 3$ et se maintiennent au moins jusqu'à $Re = 8500$.

Enfin, la boucle d'hystérésis nous porte à croire que la bifurcation de Naimark-Sacker est sous-critique. Dans cette région, soit $Re \in [3700, 5000]$, la convergence des calculs vers l'une ou l'autre des solutions possibles est fonction des conditions initiales, c'est-à-dire de la façon dont est répartie l'énergie cinétique de départ. Dès lors, il apparaît que les calculs linéarisés autour de la solution de base ne permettent pas d'élucider *systématiquement* les changements de comportement observés en régime non-linéaire : le nombre d'onde qui a le taux de croissance le plus élevé en régime linéaire n'est pas toujours celui qui domine la bifurcation en régime non-linéaire.

Chapitre 7

Étude de l'écoulement dans une cuve de rapport d'aspect $h = 1.5$

Ici, les objectifs fixés sont les mêmes que ceux du chapitre 6, à la différence que le rapport de forme de la cavité cylindrique est à présent fixé à 1.5. Notre attention s'est portée sur la réponse linéaire (§7.1) ou non (§7.2) d'un écoulement de base axisymétrique stationnaire vis-à-vis d'une perturbation aléatoire. En outre, nous aborderons la question de la non-unicité des solutions (§7.3) en résolvant les équations de Navier-Stokes complètes avec différentes conditions initiales. Le chapitre se termine par une synthèse des résultats obtenus (§7.4).

7.1 Analyse linéaire

Dans cette section, notre propos est de déterminer le premier seuil de criticalité Re_{c1} puis d'examiner le développement linéaire des modes azimutaux au delà de Re_{c1} . Les équations de Navier-Stokes linéarisées autour d'un état de base axisymétrique stationnaire sont résolues avec des conditions initiales de type CI_b .

7.1.1 Premier seuil de stabilité

On s'intéresse au devenir des perturbations initiales au cours du temps lorsque le nombre de Reynolds est augmenté. Sur la figure 7.1, nous présentons l'évolution temporelle de l'énergie cinétique modale $E'(k)$ de la perturbation. Le taux de croissance τ_k des modes k est examiné dans les deux cas suivants :

- Fig. 7.1.a : $k = 2$ et $2500 \leq Re \leq 2525$. Il s'avère que $\tau_2 < 0$ pour $Re < 2510$, alors que $\tau_2 > 0$ dès que $Re > 2515$.
- Fig. 7.1.b : $0 \leq k \leq 4$ et $Re = 2600$. Il apparaît que $\tau_k < 0$, sauf pour $k = 2$.

Ces observations permettent de conclure que le mode $k = 2$ est le premier à devenir instable linéairement et que son seuil de stabilité linéaire Re_{c1} appartient à l'intervalle $[2510, 2515]$. En

dépassant cette valeur critique, l'écoulement de base devient instable face aux perturbations. Par ailleurs, il est possible d'évaluer la valeur de Re_{c1} de façon plus précise en reprenant la procédure utilisée en §6.1.1. Celle-ci repose sur le fait que le seuil de criticalité d'un mode est exactement atteint lorsque son taux de croissance est nul. τ_2 est alors mesuré pour des nombres de Reynolds légèrement au dessus du seuil, soit $Re \in [2515, 2535]$. Ces mesures sont ensuite portées sur la figure 7.2.a et décrivent une droite. L'extrapolation à zéro de cette droite fournit directement la valeur du seuil de stabilité linéaire du mode dominant $k = 2$: $Re_{c1} = 2512.32$ si l'approximation spatiale est menée sur une grille telle que $M = 100$.

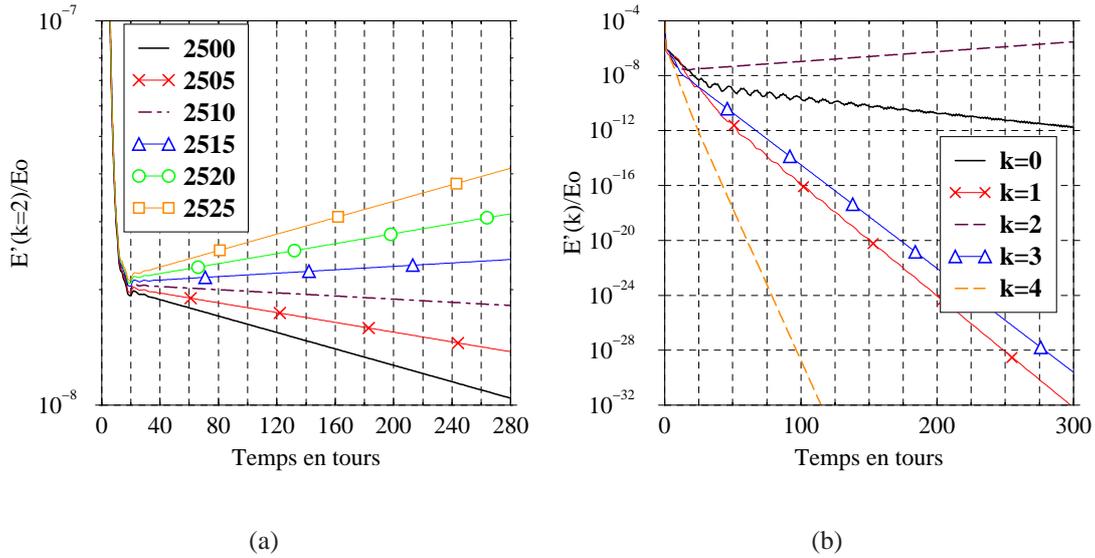


FIG. 7.1 – $h = 1.5$: Énergies cinétiques modales $E'(k)$ au cours du temps en régime linéaire. (a) $k = 2$ et Re variable. (b) k variable et $Re = 2600$. Représentations semi-logarithmiques.

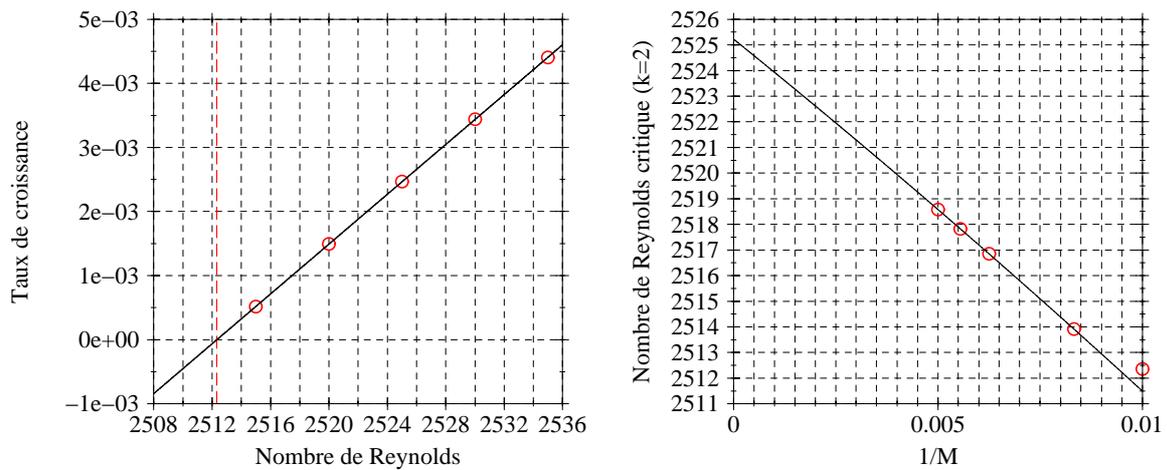


FIG. 7.2 – $h = 1.5, k = 2$: (a) Détermination de Re_{c1} par extrapolation pour $M = 100$. (b) Influence du maillage sur la valeur extrapolée de Re_{c1} .

M	120	160	180	200
Re_{c1}	2513.91	2516.85	2517.80	2518.58

TAB. 7.1 – $h = 1.5$: Variations du seuil de stabilité linéaire du mode $k = 2$ en fonction du maillage.

Le tableau 7.1 met en évidence la sensibilité de la valeur de Re_{c1} vis-à-vis du nombre de mailles M utilisées dans la direction radiale. Comme le montre la figure 7.2.b, il s'avère que Re_{c1} est une fonction quadratique de $1/M$, car des schémas d'ordre deux en espace sont mis en œuvre pour l'intégration spatiale des équations du mouvement. Il s'ensuit que la valeur théorique du seuil de criticalité Re_{c1}^{th} est atteinte lorsque les mailles sont infiniment fines, c'est-à-dire lorsque $1/M$ est nul. En définitive, l'extrapolation à zéro de la parabole donne :

$$Re_{c1}^{\text{th}} = 2525.23$$

L'erreur relative entre le seuil de stabilité linéaire trouvé pour $M = 100$ et le seuil de stabilité linéaire théorique n'est que de 0.5%. De plus, notre valeur théorique est en très bon accord avec la valeur que nous avons relevée sur le diagramme de **Gelfgat et al.** [28] : $Re_c \simeq 2520$, suivant la précision permise par la lecture graphique (voir l'annexe C). Désormais, nous retiendrons le maillage avec $M = 100$ mailles dans la direction radiale pour effectuer l'ensemble des simulations numériques à $h = 1.5$.

7.1.2 Au delà du premier seuil

Le taux de croissance τ_k des modes $k = 0$ à $k = 5$ de la perturbation initiale en régime linéaire est représenté en fonction du nombre de Reynolds (Fig. 7.3). Ce diagramme permet d'établir l'ordre suivant lequel les modes de Fourier deviennent successivement instables linéairement dans la gamme $Re \in [2500, 5500]$. Une estimation du seuil de stabilité linéaire de chaque mode k est obtenue par lecture graphique de la valeur d'annulation de τ_k . Comme le montre le tableau récapitulatif 7.2, cette procédure conduit à des résultats qui sont en bon accord avec les prédictions numériques de **Gelfgat et al.** puisque l'erreur relative reste inférieure à 2.3%. Par ailleurs, trois gammes de Re séparées par deux points de croisement se distinguent. Soit $Re_{\mathcal{L}}$ le point de croisement entre les courbes de τ_2 et τ_0 . Le point d'intersection entre les courbes de τ_0 et τ_3 est quant à lui noté $Re'_{\mathcal{L}}$. D'après le graphique 7.3, $Re_{\mathcal{L}} \simeq 3017$, alors que $Re'_{\mathcal{L}} \simeq 4096$. Il apparaît que :

- $\tau_2 > \tau_0$ lorsque $Re < Re_{\mathcal{L}}$: le mode azimutal $k = 2$ est le plus instable linéairement.
- $\tau_0 > \{\tau_2, \tau_3\}$ lorsque $Re_{\mathcal{L}} < Re < Re'_{\mathcal{L}}$: le mode axisymétrique est à présent le plus critique.
- $\tau_3 > \tau_0$ dès que $Re > Re'_{\mathcal{L}}$: le mode de Fourier $k = 3$ devient le plus instable en régime linéaire.
- Il faut noter que τ_3 et τ_2 sont très proches pour $Re \in [4200, 5200]$: l'écart relatif entre ces valeurs est inférieur à 1%.

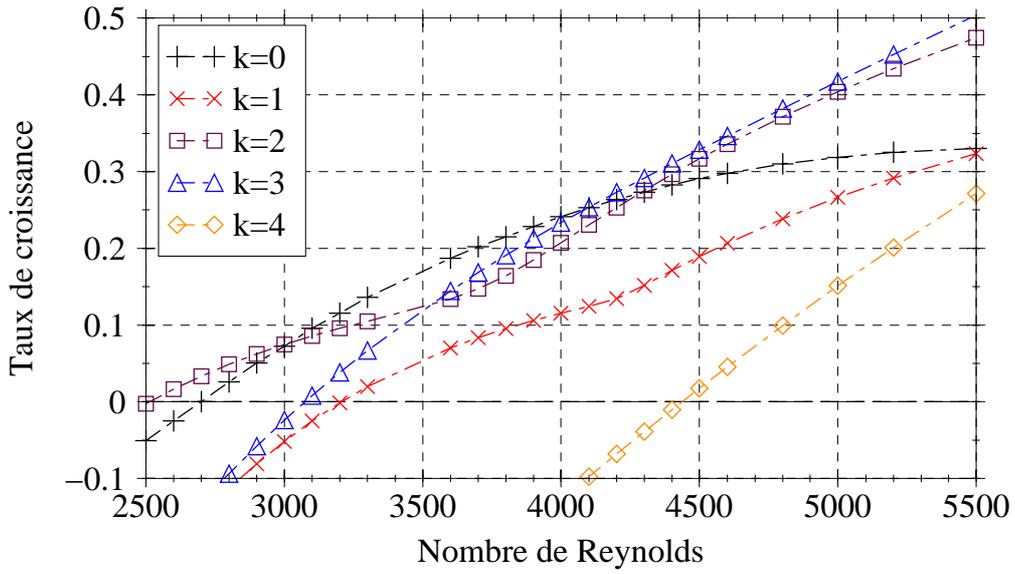


FIG. 7.3 – $h = 1.5$: Taux de croissance τ_k des cinq premiers modes azimutaux en fonction du nombre de Reynolds. Calculs linéarisés autour de l'écoulement de base.

		Modes k			
		0	3	1	4
Re_c	Barbosa	2700	3075	3200	4435
	Gelfgat <i>et al.</i> [28]	2730	3120	3220	4540

TAB. 7.2 – $h = 1.5$: Ordres de grandeur des seuils de stabilité linéaire pour les premiers modes azimutaux. Comparaison avec les valeurs mesurées sur le diagramme de **Gelfgat et al.** [28] (voir l'annexe C).

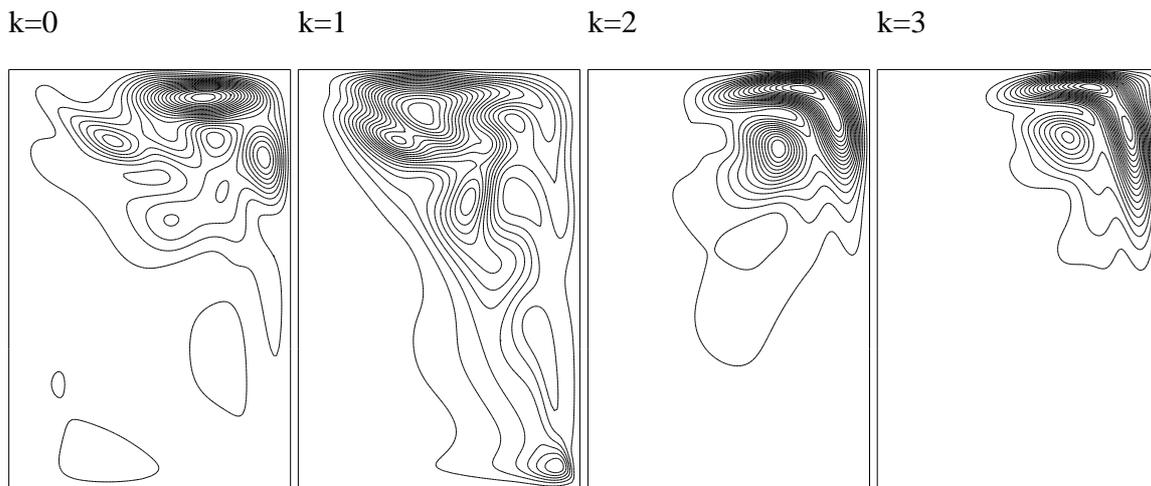


FIG. 7.4 – $h = 1.5, Re = 3300$: Iso-lignes de l'énergie cinétique $E'(k)$ des modes $k = 0$ à $k = 3$ en régime linéaire dans le plan (r, z) . L'axe $r = 0$ est à gauche.

Lorsque $Re = 3300$, le graphique précédent indique que les modes $k = 0$ à $k = 3$ de la perturbation sont tous instables linéairement et pour chacun d'eux, les iso-lignes de l'énergie cinétique $E'(k)$ sont tracées dans un semi-plan méridien (r, z) . L'analyse de la figure 7.4 révèle que $E'(k = 0)$, $E'(k = 2)$ et $E'(k = 3)$ sont concentrées dans le coin supérieur externe du semi-plan. Une telle concomitance des localisations spatiales suggère de fortes interactions entre ces modes et de ce fait, le mode dont le taux de croissance est le plus élevé finit par s'imposer au détriment des autres. En outre, la comparaison des figures 6.26 – obtenues pour $h = 1$ – et 7.4 montre que la localisation des modes azimutaux est inchangée, sinon par une dilatation proportionnelle à 1.5. Comme nous l'avons déjà remarqué pour $h = 1$, les iso-lignes de $E'(k = 1)$ sont décalées vers l'axe de rotation.

Jusqu'à présent, nous avons examiné l'évolution temporelle des perturbations d'amplitudes infinitésimales et nous avons noté leur croissance exponentielle en cas d'instabilité de l'état de base. Il est clair que cette croissance ne peut se poursuivre indéfiniment, car l'amplitude des perturbations va augmenter et les termes non-linéaires ne pourront plus être négligés. De ce fait, la section suivante est consacrée à l'étude du développement non-linéaire des premières instabilités.

7.2 Analyse non-linéaire

Les résultats exposés dans cette section ont été obtenus en initialisant les équations de Navier-Stokes sous forme perturbative non-linéaire avec des conditions de type CI_b .

7.2.1 Première bifurcation

L'évolution des énergies cinétiques modales $E'(k)$ au cours du temps est tracée sur la figure 7.5 pour deux valeurs du nombre de Reynolds. Lorsque celui-ci vaut 2550 (*a*), on observe la relaxation exponentielle de tous les modes de la perturbation. Il en résulte que l'écoulement de base est stable et par voie de conséquence, ses propriétés d'invariances par translation arbitraire dans le temps et par symétrie d'angle quelconque autour de l'axe sont conservées. Par contre pour $Re = 2650$ (*b*), nos calculs montrent que les non-linéarités engendrent l'amplification puis la saturation des modes azimutaux $k = 2n$ ($n \in \mathbb{N}$) à partir de 1600 tours. En outre, le mode $k = 2$ est maître car son niveau d'énergie cinétique vaut 1.627×10^{-5} , c'est-à-dire près de 99% de l'énergie cinétique totale de la perturbation initiale. Les modes $k = 2n + 1$ quant à eux n'apportent aucune contribution énergétique et disparaissent après quelques centaines de tours. Ce changement qualitatif de comportement, induit par l'augmentation de Re , est la signature d'une première bifurcation. Le seuil de criticalité Re_{c1} se situe dans l'intervalle $[2550, 2650]$.

On peut naturellement transposer ici le raisonnement déjà fait en §6.2.1 pour accéder à une détermination plus précise du premier nombre de Reynolds critique en régime non-linéaire. La figure 7.6.a rend bien compte du ralentissement de la dynamique à mesure que l'on s'approche Re_{c1} par valeurs supérieures : la bifurcation est alors supposée super-critique.

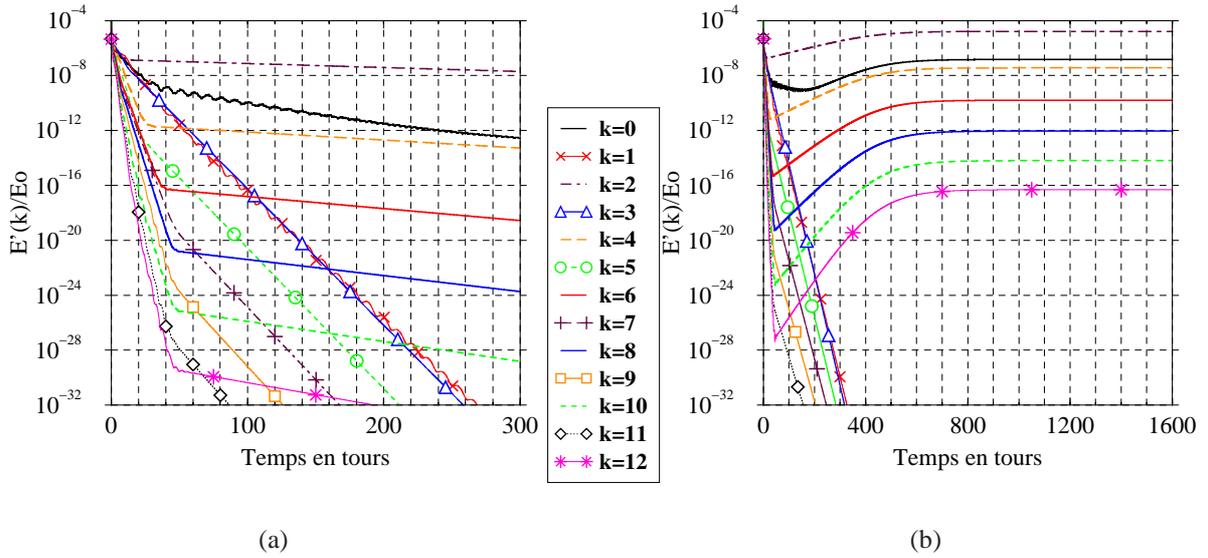


FIG. 7.5 – $h = 1.5$: Énergies cinétiques modales $E'(k)$ au cours du temps en régime non-linéaire pour $Re = 2550$ (a) et $Re = 2650$ (b). Représentations semi-logarithmiques.

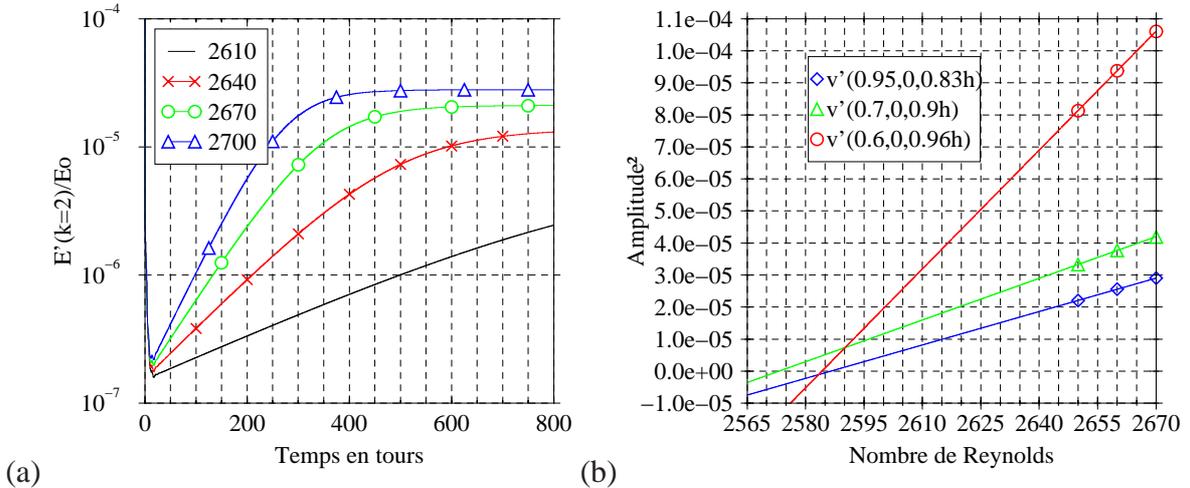


FIG. 7.6 – $h = 1.5$: (a) Illustration du ralentissement critique via l'énergie cinétique du mode $k = 2$ au cours du temps en régime non-linéaire pour $Re \in [2610, 2700]$. Représentations semi-logarithmiques. (b) Variations de $\mathcal{A}^2(v')$ avec Re pour les trois signaux de référence au voisinage de la criticalité.

Soit \mathcal{A}^2 , le carré de l'amplitude de la composante azimutale v' de la perturbation de vitesse. Cette quantité est mesurée aux points $(r = 0.95, \theta = 0, z = 0.83h)$, $(r = 0.7, \theta = 0, z = 0.9h)$ et $(r = 0.6, \theta = 0, z = 0.96h)$. Cette opération est réalisée pour des nombres de Reynolds légèrement supérieures à Re_{c1} , soient 2650, 2660 et 2670. La figure 7.6.b laisse clairement apparaître trois droites et par conséquent, le carré de amplitude $\mathcal{A}^2(v')$ se comporte

comme l'écart au seuil $|Re - Re_{c1}|$: la nature supposée de la bifurcation s'avère donc exacte. L'extrapolation à zéro de ces trois droites donne trois valeurs voisines pour le nombre de Reynolds critique, soit :

$$Re_{c1} = 2579.785 \pm 6.665$$

Enfin, le décalage entre les estimations linéaire et non-linéaire est égal à 2.1%. Comme pour $h = 1$, nous avons choisi d'aborder séparément les deux facettes de la perte de stabilité de l'écoulement de base, à savoir l'apparition d'instationnarités et la rupture de l'axisymétrie.

7.2.1.1 Perte de la stationnarité

Il est naturel de s'intéresser aux variations temporelles des solutions au delà du premier point de transition. Dans ce but, nous considérons la solution trouvée pour $Re = 2650 > Re_{c1}$. L'évolution temporelle de la composante azimutale v' de la perturbation de vitesse au point de contrôle $C(r = 0.6, \theta = 0, z = 0.96h)$ est donnée sur la figure 7.7. On assiste à la naissance d'un cycle limite et de ce fait, nous pouvons en déduire que l'écoulement de base devient instable via une bifurcation de Hopf super-critique. D'autre part, on constate que la durée du transitoire dépasse 800 tours et que la période caractéristique des états super-critiques est remarquablement longue. Au point C , le signal v' oscille autour de la valeur moyenne -1.35×10^{-4} avec une amplitude égale à 4.51×10^{-3} . Pour fixer les idées, la vitesse azimutale de l'écoulement de base vaut 7.64×10^{-2} en ce point.

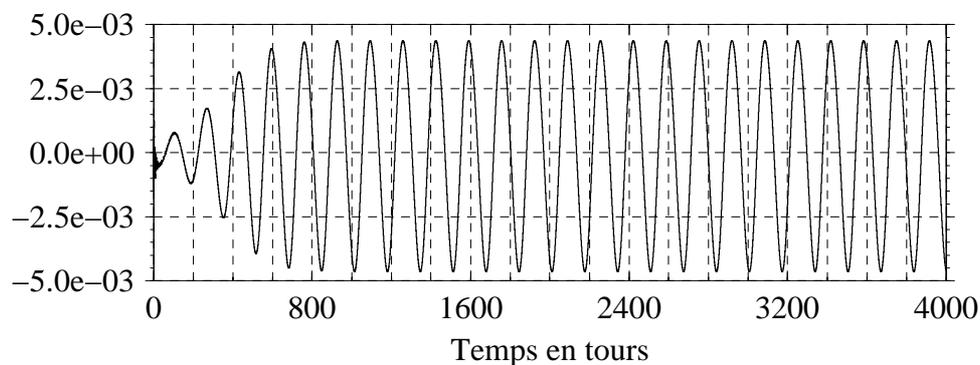


FIG. 7.7 – $h = 1.5$, $Re = 2650$: Variations temporelles de la composante azimutale v' de la perturbation de vitesse au point $C(r = 0.6, \theta = 0, z = 0.96h)$.

Une façon simple de caractériser l'instationnarité des solutions trouvées pour $Re > Re_{c1}$ consiste à calculer la densité énergétique spectrale d'un signal de référence, par exemple les variations temporelles de $v'(C)$. Le spectre de Fourier correspondant est présenté sur la figure 7.8.a. Celui-ci rend bien compte du caractère quasi-sinusoïdal des oscillations dans la mesure où l'amplitude des deux premiers pics ne diffère que d'une décade. Lorsque $Re = 2650$, la pulsation fondamentale est très faible :

$$\text{fréquence } f_1 = 0.006 \text{ tours}^{-1} \iff \text{période } T_1 = 1/f_1 = 166.06 \text{ tours}$$

Nous avons également constaté l'allongement de T_1 lorsque Re tend vers le seuil de stabilité non-linéaire par la droite. Les investigations de **Gelfgat et al.** confirment nos observations. En effet, leur diagramme des pulsations critiques (reproduit dans l'annexe C) montre que la fréquence critique du mode $k = 2$ pour $h = 1.5$ est nulle, ou du moins très proche de zéro compte tenu de la lecture graphique. Enfin, la figure 7.8.b représente le spectre des coefficients de Fourier $\hat{v}'_k(C)$ associés à $v'(C)$ pour les premiers modes azimutaux super-critiques.

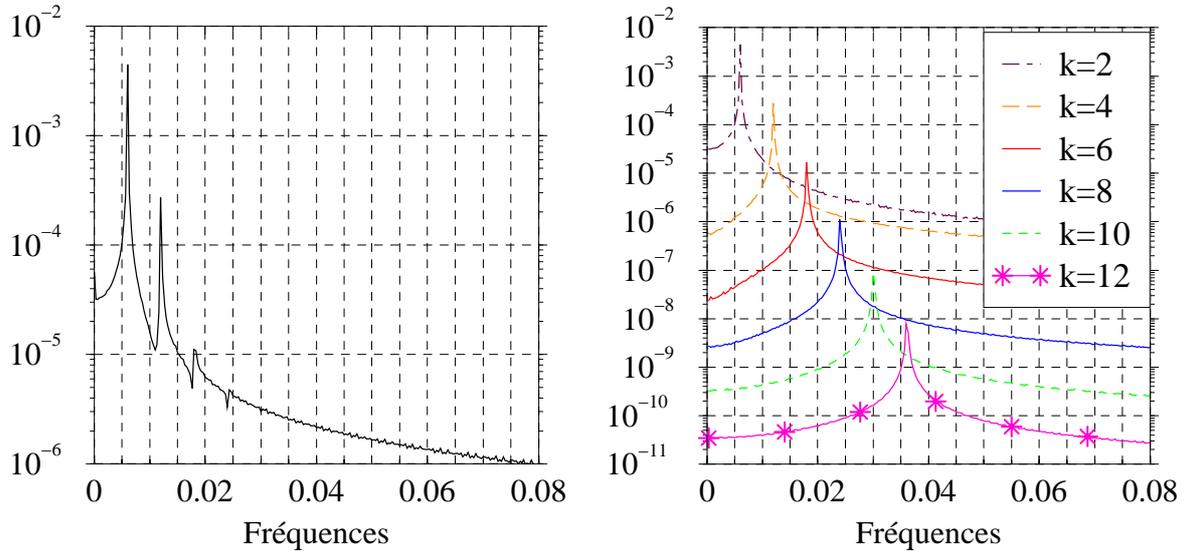


FIG. 7.8 – $h = 1.5$, $Re = 2650$: Densités énergétiques spectrales du signal 7.7 (a) et des composantes de Fourier correspondantes (b) pour $t \in [1000, 4000]$. Représentations semi-logarithmiques.

La comparaison de ces spectres d'une part, et le fait que les énergies cinétiques des modes $k = 2n$ saturent sans osciller d'autre part (voir Fig. 7.5.a), permet d'ores et déjà d'affirmer que la rotation des structures spatiales s'effectue sans déformation. Ce point sera détaillé ultérieurement.

7.2.1.2 Perte de l'axisymétrie

D'après ce qui précède, le mode azimutal $k = 2$ est responsable de la bifurcation de Hopf super-critique que subit l'écoulement de base axisymétrique stationnaire lorsque le nombre de Reynolds dépasse la valeur critique $Re_{c1} = 2579.78$. Celle-ci correspond au seuil d'apparition des régimes simultanément instationnaires et tridimensionnels. L'objet de ce paragraphe est de mettre en évidence numériquement la brisure de la symétrie $SO(2)$. Par exemple, les figures qui suivent illustrent distinctement la topologie non-axisymétrique de la solution super-critique correspondant à $Re = 2650$:

- Fig. 7.9.a : Les iso-lignes de la composante radiale u du champ vitesse complet sont projetées dans le plan $z = 0.9h$.
- Fig. 7.9.b : Les iso-lignes de la composante radiale u' des fluctuations de la vitesse par rapport à la solution de base sont tracées dans le plan $z = 0.9h$.

➤ Fig. 7.10 : On donne les iso-surfaces des composantes (u', v', w') de la perturbation de vitesse (voir Tab. 7.3 pour les valeurs).

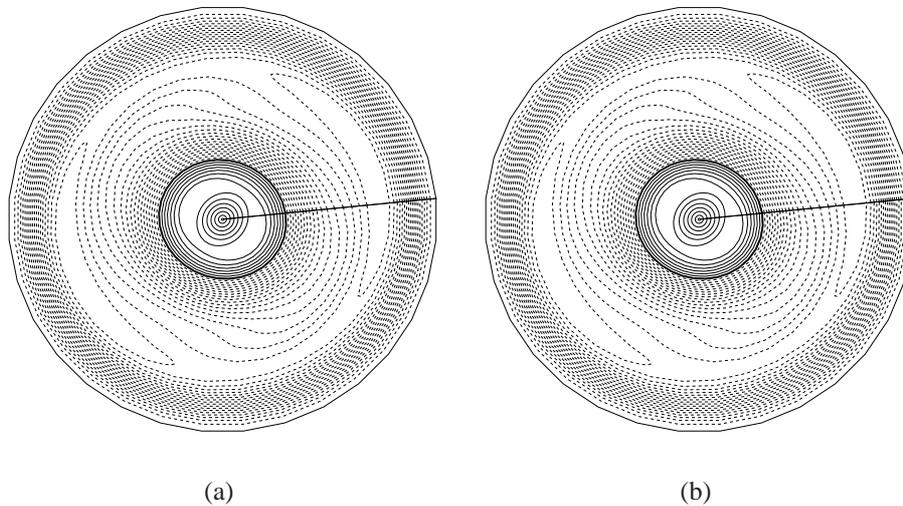


FIG. 7.9 – $h = 1.5$, $Re = 2650$: Iso-lignes de la composante radiale de la vitesse dans le plan $z = 0.9h$ pour l'écoulement total u (a) et la perturbation u' (b). Les iso-lignes continues (discontinues) sont positives (négatives) et le zéro est en traits gras.

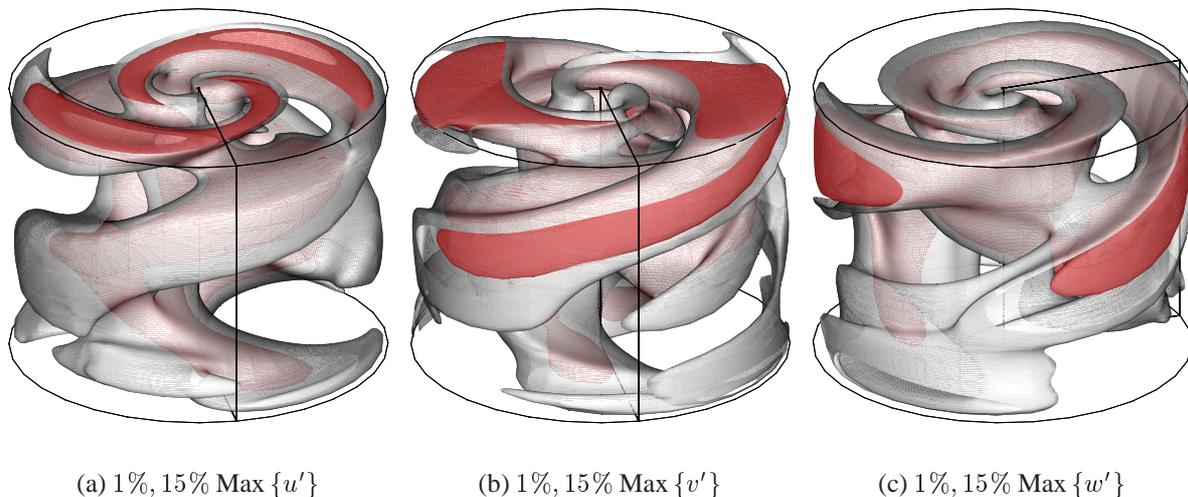


FIG. 7.10 – $h = 1.5$, $Re = 2650$: Iso-surfaces des composantes (u', v', w') de la perturbation de vitesse. Les zones grises (rouges) représentent 1% (15%) du maximum.

Il est manifeste que ces visualisations exhibent une périodicité azimutale d'ordre deux et témoignent de la prédominance du mode $k = 2$ de la perturbation initiale. Dans une récente publication, **Marques et al.** [48] ont effectué des simulations numériques tridimensionnelles pour les paramètres de contrôle $h = 1.58$ et $Re = 2750$: ils ont mis en évidence des topologies similaires à celles de la figure 7.10.

Jusqu'à présent, l'instationnarité et la rupture de l'axisymétrie ont été exposées séparément par

souci de clarté. Cependant, ces deux caractéristiques se manifestent simultanément sous forme d'une onde azimutale tournante de faible intensité dès que le nombre de Reynolds dépasse le seuil de stabilité non-linéaire Re_{c1} .

Perturbation	Maximum	Minimum
u'	4.621×10^{-3}	-4.752×10^{-3}
v'	5.728×10^{-3}	-6.395×10^{-3}
w'	4.476×10^{-3}	-4.250×10^{-2}

TAB. 7.3 – $h = 1.5$, $Re = 2650$: Valeurs maximales et minimales des composantes (u' , v' , w') de la perturbation de vitesse.

7.2.1.3 Apparition d'une onde azimutale tournante

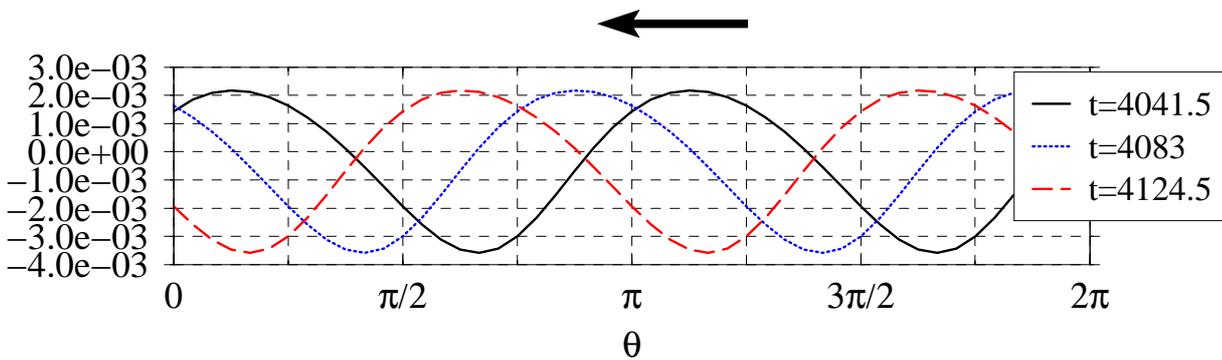


FIG. 7.11 – $h = 1.5$, $Re = 2650$: Profil de la composante azimutale v' de la perturbation de vitesse à différents instants sur la circonférence ($r = 0.6$, θ , $z = 0.9h$). La flèche indique le sens de propagation de l'onde tournante associée au mode azimutal $k = 2$.

À présent, on s'applique à montrer la présence d'une onde tournante lorsque $Re > Re_{c1}$. Dans cette optique, la solution trouvée pour $Re = 2650$ est analysée. Les iso-lignes/valeurs de la composante azimutale v' de la perturbation de vitesse sont tracées dans le plan $z = 0.9h$ au cours d'une période $T_1 = 166$ tours (Fig. 7.12). L'observation de cette stroboscopie permet de conclure que les structures spatiales associées au mode azimutal dominant $k = 2$ tournent autour de l'axe de la cuve avec une période $T_{RW2} = 2 \times T_1 = 2/f_1$. En outre, cette précession s'effectue dans le sens indirect et s'oppose donc à la rotation du couvercle inférieur. La vitesse angulaire de phase Ω_φ est déterminée soit en appliquant la relation 6.1, soit à partir du profil des fluctuations de vitesse azimutale $v'(r = 0.6, \theta, z = 0.9h)$ pris à trois instants différents (Fig. 7.11). Pour le nombre de Reynolds 2650, nous obtenons le résultat ci-dessous :

$$\Omega_\varphi = -0.019 \times \Omega_o \text{ tours}^{-1}$$

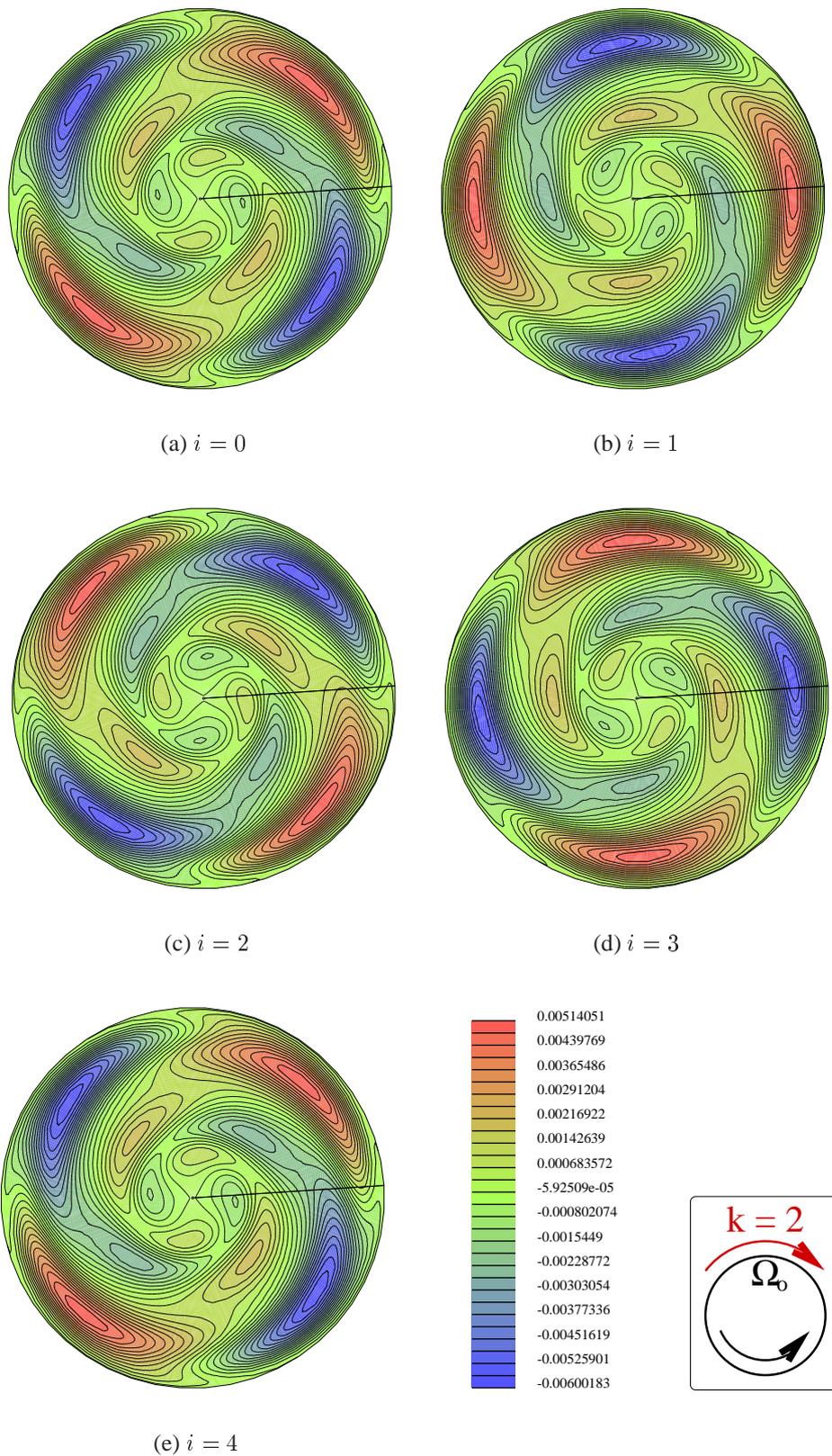


FIG. 7.12 – $h = 1.5$, $Re = 2650$: Iso-lignes/valeurs de la composante azimutale v' de la perturbation de vitesse dans le plan $z = 0.9h$ au cours d'une période $T_1 = 166$ tours. Chaque figure correspond au temps $t = 4000 + iT_1/5$, avec $i = 0, \dots, 4$.

Au vu des investigations de **Knobloch** [33] et des remarques émises dans le chapitre précédent, il n'est pas nécessaire de redémontrer que la précession associée au nombre d'onde $k = 2$ est solide. En augmentant le nombre de Reynolds, l'écoulement ne reste pas sur la branche de solutions T_1 : il subit plusieurs transitions que nous allons présenter dans les paragraphes qui suivent.

7.2.2 Mode opératoire

Suivant la valeur du nombre de Reynolds, l'écoulement de base axisymétrique stationnaire ne répond pas de la même manière aux modes azimutaux de la perturbation. Dans les sections 7.2.3 à 7.2.5, nous passons en revue les différentes instabilités atteintes dans une gamme de Re qui s'étend depuis Re_{c1} jusqu'à 6000. Les divers changements de comportement sont identifiés puis caractérisés en étudiant les marqueurs suivants :

- Fig. 7.13, 7.16 et 7.20 : L'évolution temporelle de l'énergie cinétique $E'(k)$ des douze premiers modes azimutaux de la perturbation initiale.
- Fig. 7.14, 7.17 et 7.21 : On choisit comme signal de référence les variations temporelles des fluctuations de vitesse azimutale $v'(D)$ par rapport à l'écoulement de base au point de contrôle. $D(r = 0.8, \theta = 0, z = 0.8h)$.
- Fig. 7.15, 7.18 et 7.22 : Le spectre de puissance du signal de référence.
- Fig. 7.19 et 7.23 : La séquence temporelle des iso-lignes/valeurs de v' dans le plan $z = 0.8h$.

Pour des raisons de coût numérique, nous n'avons pas cherché à déterminer précisément les seuils de criticalité. Les maillages mis en œuvre se composent de $M = 100$ mailles dans la direction radiale. Ces précisions nous permettent d'exposer nos résultats de façon plus synthétique en évitant les répétitions inutiles dans le texte.

7.2.3 Seconde bifurcation

$Re = 3275$

Comme pour $Re = 2650$, nous constatons la décroissance exponentielle des modes impairs, ainsi que la saturation de l'énergie cinétique des modes pairs à un niveau fini au cours du temps (Fig. 7.13.a). La plus importante contribution énergétique est celle du nombre d'onde $k = 2$: $E'(k = 2) = 1.039 \times 10^{-4}$. D'autre part, nous constatons que la saturation de l'énergie $E'(k = 0)$ s'établit plus tardivement que celle des autres modes azimutaux : ce point annonce un changement de comportement des solutions. Enfin, l'analyse de Fourier d'un signal de référence (non-montrée) a confirmé que les solutions correspondant aux nombres de Reynolds 2650 ($T_1 = 166$ tours) et 3275 ($T_1 = 78.95$ tours) sont connectées par la même branche.

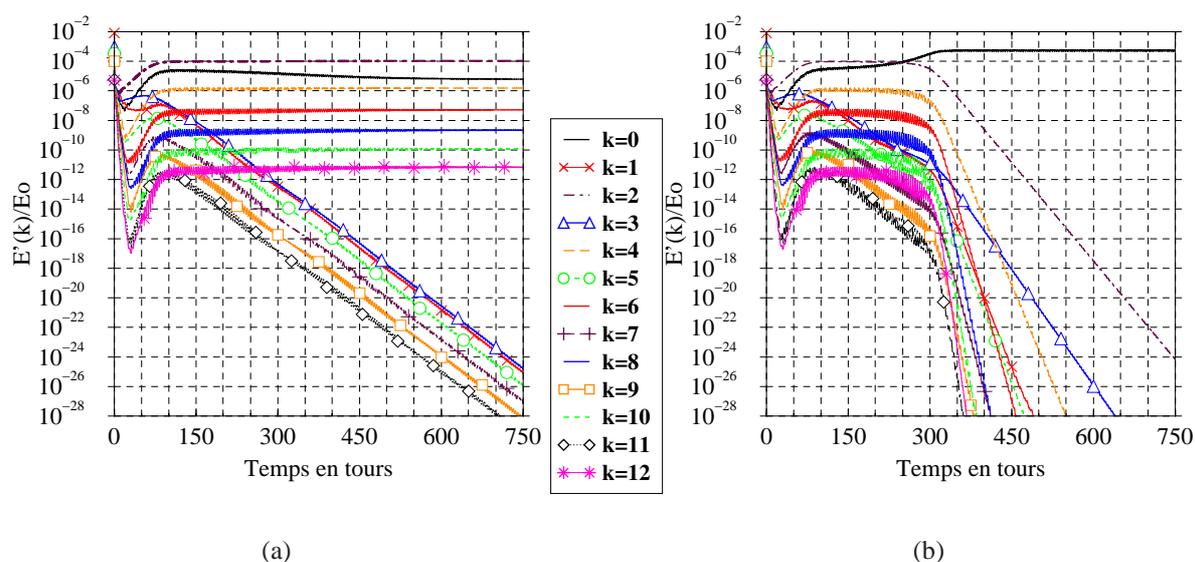


FIG. 7.13 – $h = 1.5$: Énergies cinétiques modales $E'(k)$ au cours du temps en régime non-linéaire pour $Re = 3275$ (a) et $Re = 3300$ (b). Représentations semi-logarithmiques.

$Re = 3300$

À présent, la figure 7.13.b est analysée. Jusqu'à 250 révolutions du disque moteur, les énergies cinétiques modales se comportent de façon analogue au cas précédent au cours du temps : le mode azimutal $k = 2$ est dominant, mais cette situation est instable. En effet, le mode axisymétrique de la perturbation initiale s'accapare du contenu énergétique des autres modes de Fourier par couplages non-linéaires entre 250 et 350 tours. Bien évidemment, la relaxation de l'ex-mode dominant $k = 2$ est plus lente que celle des autres modes non-nuls. Au delà de cette phase transitoire, il apparaît que le mode zéro est maître et contient la totalité de l'énergie cinétique de l'excitation de départ : $E'(k=0) = 5.04 \times 10^{-4}$. Un second point de bifurcation Re_{c2} a donc été dépassé :

$$Re_{c2} \in [3275, 3300]$$

7.2.3.1 Perte de la symétrie d'ordre deux

Nous rappelons que l'écoulement complet résulte de la superposition d'un écoulement de base axisymétrique stationnaire et d'une perturbation tridimensionnelle dont la seule contribution spectrale est celle du mode $k = 0$ lorsque $Re > Re_{c2}$. Ceci nous permet de conclure sur le rétablissement de la symétrie $SO(2)$ de l'écoulement. Ce résultat est assez surprenant. En effet, nous avons perturbé un écoulement de base axisymétrique stationnaire qui s'est avéré instable vis-à-vis des modes pairs de l'excitation initiale lorsque $Re > Re_{c1}$. En augmentant le taux de rotation du couvercle inférieur, nous nous attendons à ce que les mécanismes qui déstabilisent la symétrie $SO(2)$ soient plus intenses. Or, dans le cas présent, il n'en est rien puisque les modes $k = 2n$ redeviennent stables en franchissant Re_{c2} .

D'autre part, l'écart relatif entre Re_{c_2} (transition $k = 2$ dominant $\rightarrow k = 0$ dominant en régime non-linéaire) et le point de croisement $Re_{c_1} \simeq 3017$ (transition $\tau_2 > \tau_0 \rightarrow \tau_2 < \tau_0$ en régime linéaire) est de l'ordre de 8%. Expliquer le retour vers les écoulements à symétrie $SO(2)$ par le fait que le taux de croissance du mode axisymétrique devient plus important que celui du mode azimutal $k = 2$ est ici discutable.

7.2.3.2 Instationnarité des solutions

Les caractéristiques temporelles des écoulements axisymétriques qui apparaissent au delà du second point de transition sont décelées en examinant l'évolution temporelle de $v'(D)$ lorsque $Re = 3000$. D'après la figure 7.14, le régime établi apparaît à partir de 400 tours : la valeur moyenne et l'amplitude des oscillations non-sinusoïdales sont alors respectivement égales à -6.5×10^{-3} et 4.15×10^{-2} . À titre indicatif, la vitesse de l'écoulement de base en azimut est égale à 0.148 au point D . Le spectre de puissance du signal de référence est donné sur la figure 7.15. Celle-ci met en évidence une assemblée de raies correspondant aux pulsations $n f_2$, avec $n > 1$. Pour $Re = 3300$, il vient :

$$\text{fréquence } f_2 = 0.243 \text{ tours}^{-1} \iff \text{période } T_2 = 1/f_2 = 4.12 \text{ tours}$$

Nous en déduisons qu'au delà de Re_{c_2} , les cycles limites non-axisymétriques de la branche T_1 transitent vers les cycles limites axisymétriques de la branche T_2 via une bifurcation de Naimark-Sacker (Hopf entre cycles limites). Par ailleurs, l'absence de ralentissement critique suggère que cette seconde transition est sous-critique. Nous aborderons ce point plus tard.

Lorsque $Re > Re_{c_2}$, tout se passe en définitive comme si nous avons un écoulement de base axisymétrique instationnaire. Les paragraphes suivants sont consacrés au devenir des cycles limites axisymétrique de la branche f_2 lorsque le paramètre de contrôle Re prend des valeurs de plus en plus grandes.

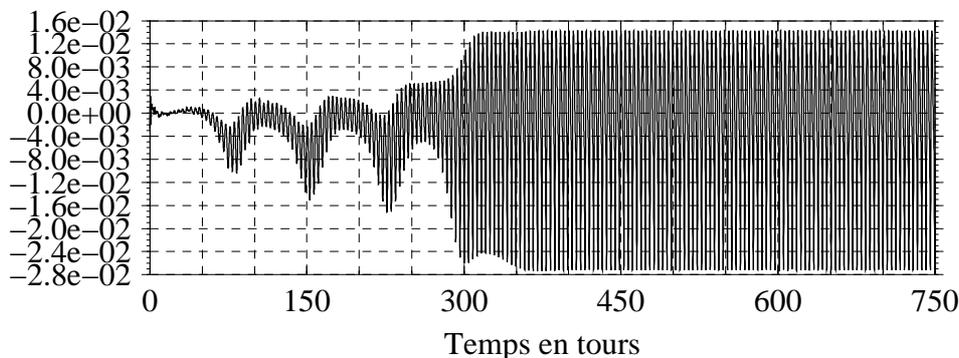


FIG. 7.14 – $h = 1.5$, $Re = 3300$: Variations temporelles de la composante azimutale v' de la perturbation de vitesse au point $D(r = 0.8, \theta = 0, z = 0.8h)$.

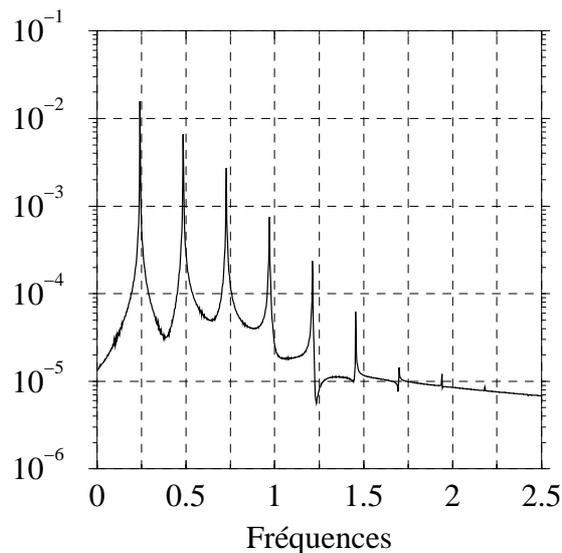


FIG. 7.15 – $h = 1.5$, $Re = 3300$: Densité énergétique spectrale du signal 7.14 pour $t \in [400, 800]$. Représentation semi-logarithmique.

7.2.4 Troisième bifurcation

$Re = 3600$

L'examen du graphe 7.16.a révèle que le mode zéro renferme l'intégralité de l'énergie cinétique de la perturbation initiale, soit 6.64×10^{-4} . Il s'ensuit que l'axisymétrie de l'écoulement est encore préservée à $Re = 3600$. Par ailleurs, nous remarquons que le nombre d'onde $k = 3$ disparaît plus lentement que les autres modes azimutaux non-nuls : ceci annonce une nouvelle transition. Par ailleurs, la prédominance du mode $k = 0$ témoigne de l'instationnarité de la solution. Celle-ci est clairement mise en évidence sur la figure 7.17.a : le signal de référence $v'(D)$ présente un caractère oscillatoire d'amplitude égale à 2.4×10^{-2} autour de la valeur moyenne -4.65×10^{-3} . La densité énergétique spectrale correspondante (Fig. 7.18.a) fournit la période caractéristique $T_2 = 1/f_2 = 4.13$ tours. D'autre part, il s'avère que les oscillations ne sont pas sinusoïdales, vu que l'amplitude de la raie fondamentale et celle de la première harmonique ne diffèrent que d'un facteur deux. En définitive, ces éléments nous permettent de conclure que les états correspondant aux nombres de Reynolds 3300 et 3600 sont connectés par la même branche f_2 .

$Re = 3700$

Sur la figure 7.16.b, le régime établi correspondant à $Re = 3700$ témoigne de la prédominance du nombre d'onde $k = 3$. L'énergie cinétique $E'(k = 3)$ sature à la valeur 1.08×10^{-4} sans fluctuer, c'est-à-dire près de 84% de l'énergie cinétique totale de la perturbation de départ. On

assiste simultanément à la relaxation exponentielle des modes azimutaux qui ne sont pas des harmoniques du mode maître. Compte tenu de ces observations, nous pouvons affirmer que les cycles limites $SO(2)$ de la branche f_2 subissent une bifurcation en franchissant un troisième seuil de criticalité Re_{c_3} :

$$Re_{c_3} \in [3600, 3700]$$

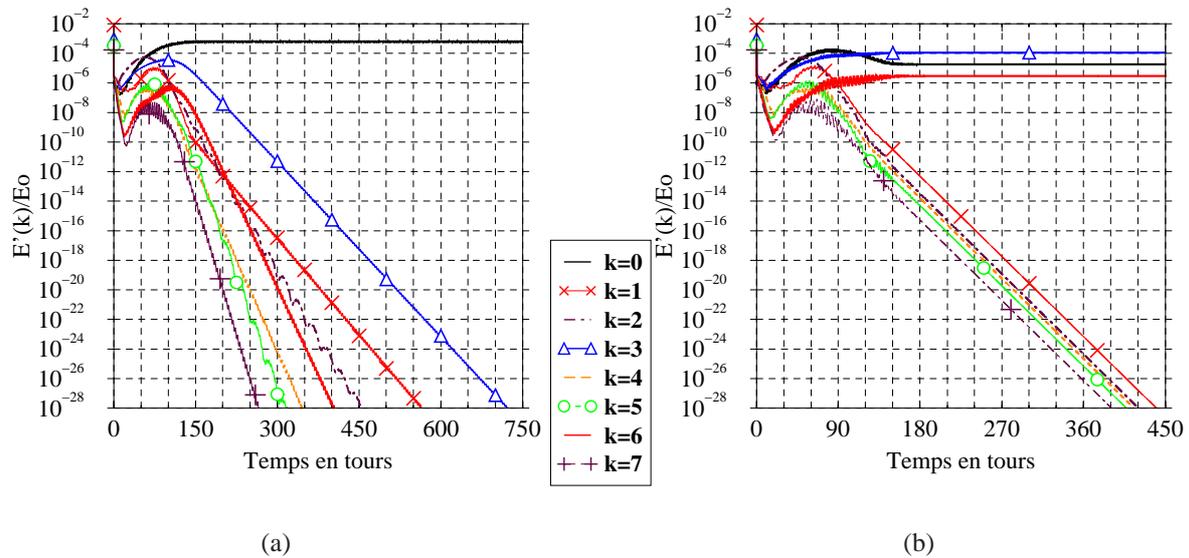


FIG. 7.16 – $h = 1.5$: Énergies cinétiques modales $E'(k)$ au cours du temps en régime non-linéaire pour $Re = 3600$ (a) et $Re = 3700$ (b). Représentations semi-logarithmiques.

À présent, on s'applique à donner les propriétés spatio-temporelles des solutions trouvées pour des nombres de Reynolds excédant la valeur Re_{c_3} . Dans ce but, le signal de référence $v'(D)$, donné sur la figure 7.17.b, est examiné. Nous constatons que $v'(D)$ est deux ordres de grandeur inférieure à la composante azimutale de la vitesse de l'écoulement de base au point D : -3.87×10^{-3} en moyenne contre 0.154. Conformément au spectre de puissance du signal de référence (Fig. 7.18.b), les oscillations de la perturbations sont monochromatiques :

$$\text{fréquence } f_3 = 0.1025 \text{ tours}^{-1} \iff \text{période } T_3 = 1/f_3 = 9.76 \text{ tours}$$

Il en découle que la symétrie $SO(2)$ des solutions de la branche f_2 est brisée via bifurcation de Naimark-Sacker dès que le nombre de Reynolds dépasse la valeur critique Re_{c_3} . Les solutions super-critiques, notées S_3 , sont des ondes azimutales tournantes (**Knobloch**, [33]) associées au mode $k = 3$.

Afin d'illustrer le propos précédent, nous avons considéré un autre état de la branche f_3 : $Re = 3900$. Sur la figure 7.19, nous visualisons la précession d'un motif invariant par symétrie axiale d'angle $2\pi/3$ au cours d'une période $T_3 = 10$ tours. Il s'avère que de telles structures se propagent sans se déformer suivant la direction azimutale et dans le même sens que le forçage dynamique. En outre, la période de précession est $T_{RW3} = 3 \times T_3 = 3/f_3$.

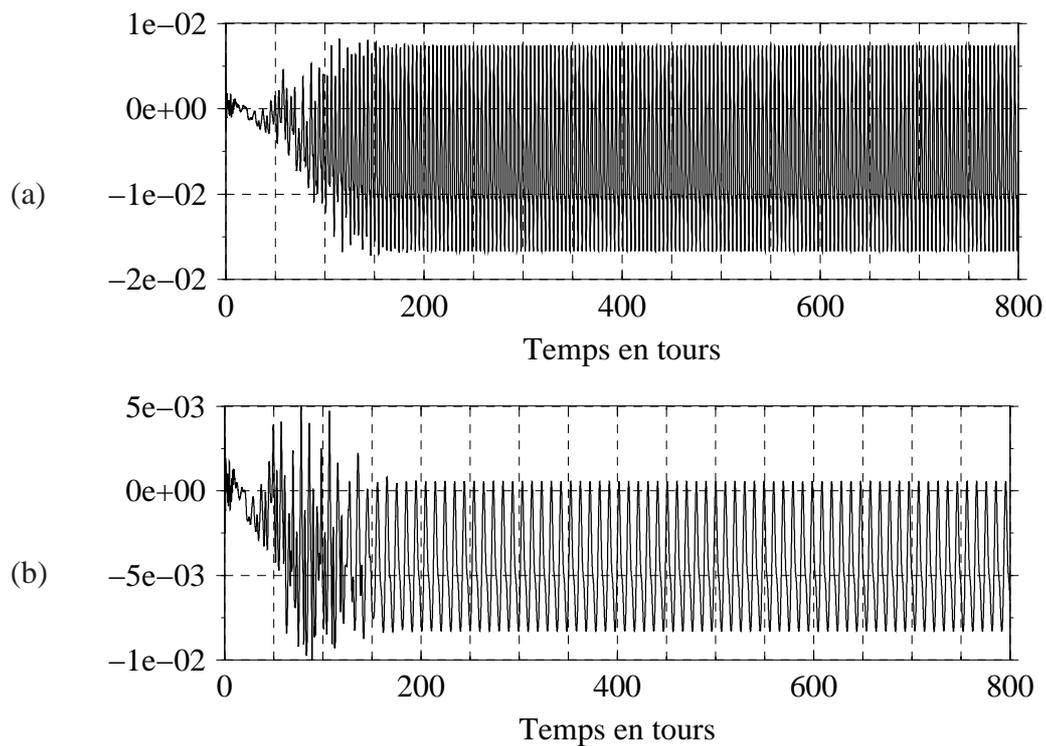


FIG. 7.17 – $h = 1.5$: Variations temporelles de la composante azimutale v' de la perturbation de vitesse au point D ($r = 0.8, \theta = 0, z = 0.8h$) pour $Re = 3600$ (a) et $Re = 3700$ (b).

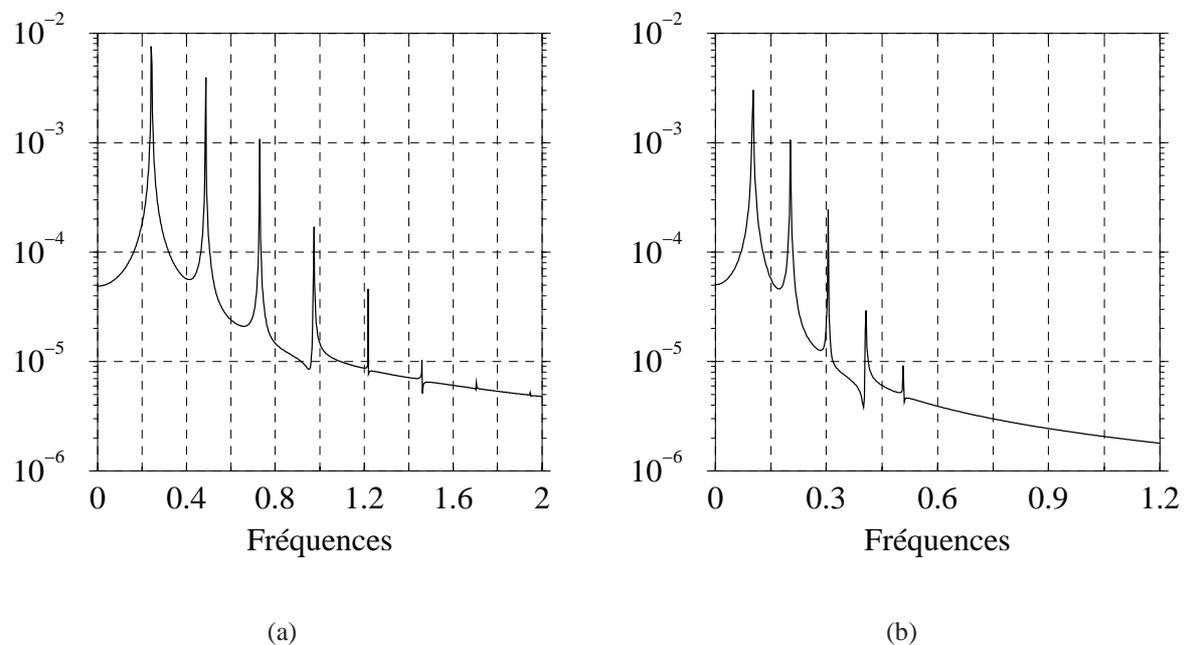


FIG. 7.18 – $h = 1.5$: Densités énergétiques spectrales des signaux 7.17 pour $t \in [400, 800]$. (a) $Re = 3600$. (b) $Re = 3700$. Représentations semi-logarithmiques.

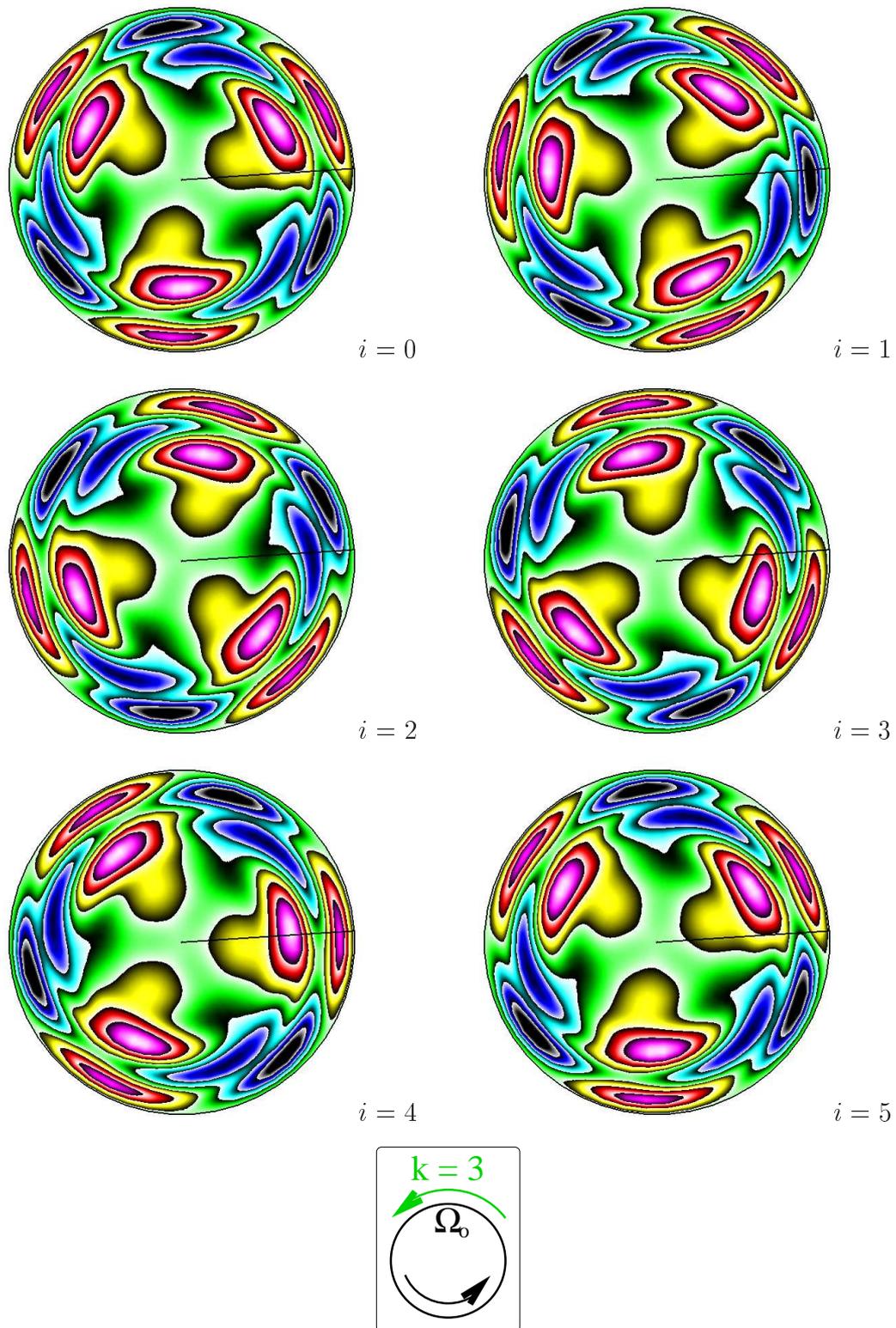


FIG. 7.19 – $h = 1.5$, $Re = 3900$: Iso-lignes/valeurs de la composante azimutale v' de la perturbation de vitesse dans le plan $z = 0.8h$ au cours d'une période $T_3 = 10$ tours. Chaque figure correspond au temps $t = 800 + iT_3/5$, avec $i = 0, \dots, 5$.

En régime linéaire (§7.1.2), nous avons montré l'existence d'un point de croisement $Re'_c \simeq 4096$, au delà duquel le taux de croissance τ_3 du mode azimutal $k = 3$ devient plus élevé que le taux de croissance τ_0 du mode axisymétrique. Il apparaît que la valeur de Re'_c et celle de Re_{c3} sont trop éloignées (écart relatif $\simeq 12\%$) pour que l'on puisse interpréter la bifurcation $SO(2) \rightarrow S_3$ en terme de taux de croissance dominant.

7.2.5 Quatrième bifurcation

$Re = 4200$

La figure 7.20.a témoigne du fait que le mode prédominant est encore $k = 3$ pour $Re = 4200$. Effectivement, son contenu énergétique correspond au niveau de saturation maximum dès 150 tours, soit $E'(k = 3) = 1.60 \times 10^{-4}$. Par ailleurs, le signal de référence $v'(D)$ fait apparaître un comportement périodique d'amplitude 1.27×10^{-2} autour d'une valeur moyenne égale à -6.58×10^{-3} (Fig. 7.20.a). Au point de contrôle D , on rappelle que la vitesse de l'écoulement de base dans la direction azimutale vaut 0.159. La période fondamentale des oscillations est déterminée par une analyse de Fourier : sur le graphe 7.21, nous relevons $T_3 = 1/f_3 = 10.256$ révolutions du couvercle inférieur. Il s'ensuit que les solutions trouvées appartiennent à la branche f_3 lorsque que le paramètre de contrôle Re prend des valeurs comprises entre 3700 et 4200.

$Re = 4300$

La simulation réalisée à $Re = 4300$ converge vers un état présentant des caractéristiques en espace et en temps très différentes des solutions S_3 de la branche f_3 . En effet, la figure 7.20.b rend bien compte du développement non-linéaire des modes azimutaux $k = 2n$ à mesure que le temps s'écoule. En régime établi ($t > 120$ tours), nous remarquons que le niveau le plus élevé d'énergie cinétique est celui du mode $k = 2$ et vaut 2.57×10^{-4} . Ses harmoniques se partagent les 25% restant de l'énergie cinétique totale de la perturbation initiale, dont 20% pour le mode axisymétrique. Nous avons déjà rencontré ce genre de comportement pour des nombres de Reynolds dans l'intervalle $[Re_{c1}, Re_{c2}]$ (ondes S_2 de la branche f_1). Finalement, ces observations mettent en évidence l'existence d'un quatrième nombre de Reynolds critique Re_{c4} :

$$Re_{c4} \in [4200, 4300]$$

D'après le graphique 7.21.b, il est manifeste que la solution obtenue est oscillatoire. Le signal de référence $v'(D)$ fluctue au cours du temps avec une amplitude égale à 1.4×10^{-2} autour de la valeur moyenne -7.37×10^{-3} . Bien entendu, ces mesures sont faibles devant l'amplitude de la vitesse azimutale de l'écoulement de base prise au même point, soit 0.160. D'autre part, la fréquence fondamentale f_4 des oscillations est extraite de la figure 7.22.b où nous avons tracé le spectre de puissance de $v'(D)$:

$$\text{fréquence } f_4 = 0.04 \text{ tours}^{-1} \iff \text{période } T_4 = 1/f_4 = 25 \text{ tours}$$

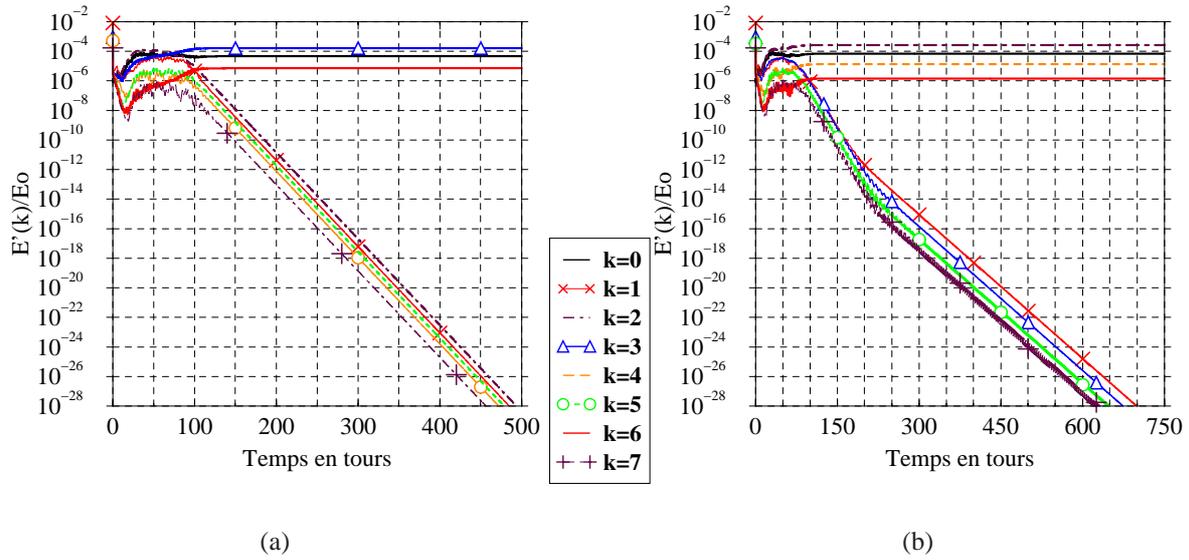


FIG. 7.20 – $h = 1.5$: Énergies cinétiques modales $E'(k)$ au cours du temps en régime non-linéaire pour $Re = 4200$ (a) et $Re = 4300$ (b). Représentations semi-logarithmiques.

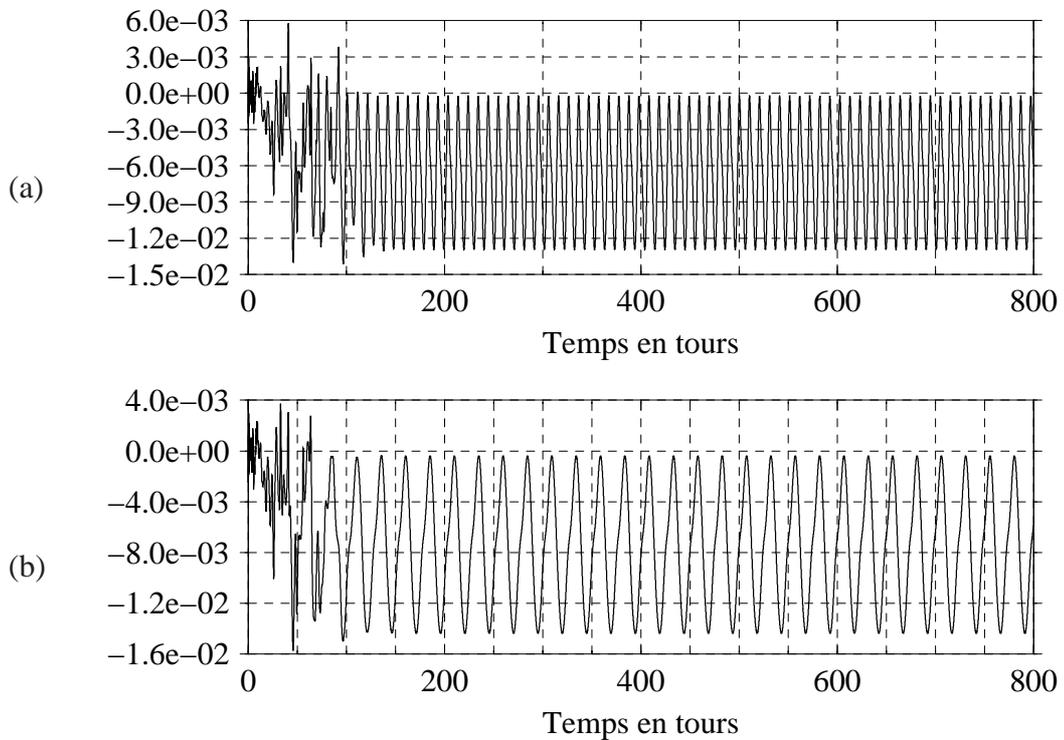


FIG. 7.21 – $h = 1.5$: Variations temporelles de la composante azimutale v' de la perturbation de vitesse au point $D(r = 0.8, \theta = 0, z = 0.8h)$ pour $Re = 4200$ (a) et $Re = 4300$ (b).

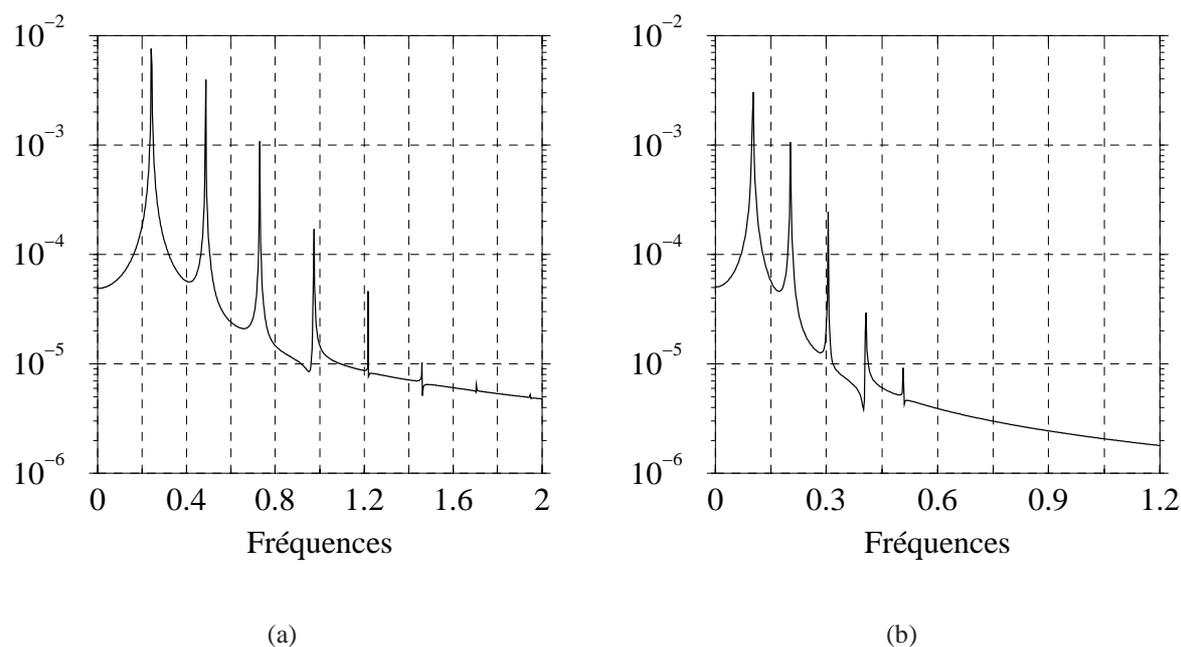


FIG. 7.22 – $h = 1.5$: Densités énergétiques spectrales des signaux 7.21 pour $t \in [400, 800]$. (a) $Re = 4200$. (b) $Re = 4300$. Représentations semi-logarithmiques.

Il est important de noter que cette fréquence caractéristique est bien plus grande que celle de la branche f_2 où le mode de Fourier $k = 2$ était dominant pour la première fois, c'est-à-dire pour $Re \in [Re_{c1}, Re_{c2}]$. Ce point constitue un critère de distinction entre les branches f_1 et f_4 de même mode dominant. Ce qui vient d'être exposé permet d'énoncer la conclusion suivante : les cycles limites associés au nombre d'onde $k = 3$ (branche f_3) basculent vers les cycles limites associés au nombre d'onde $k = 2$ (branche f_4) lorsque le nombre de Reynolds dépasse le point de bifurcation Re_{c4} . Les ondes tournantes S_3 disparaissent alors pour laisser place à des solutions qui sont encore des ondes tournantes désignées par le sigle S_2 . Comme on peut le voir sur la figure 7.23, les structures spatiales exhibent une périodicité azimutale d'ordre deux. De plus, ces structures suivent un mouvement de rotation rigide opposé à l'entraînement du rotor, avec une période de précession $T_{RW4} = 4 \times T_4 = 4/f_4$. Nos calculs ont révélé que ces solutions S_2 se maintiennent jusqu'à $Re = 4600$.

L'apparition des ondes tournantes S_2 est *a priori* cohérente avec les calculs linéarisés autour de l'écoulement de base. Au paragraphe 7.1.2, nous avons souligné le fait que les modes $k = 2$ et $k = 3$ ont des taux de croissance très voisins pour des nombres de Reynolds dans l'intervalle $[4200, 5200]$. Ainsi, nous sommes en droit de penser que l'une ou l'autre de ces instabilités tridimensionnelles est susceptible de se développer en régime non-linéaire.

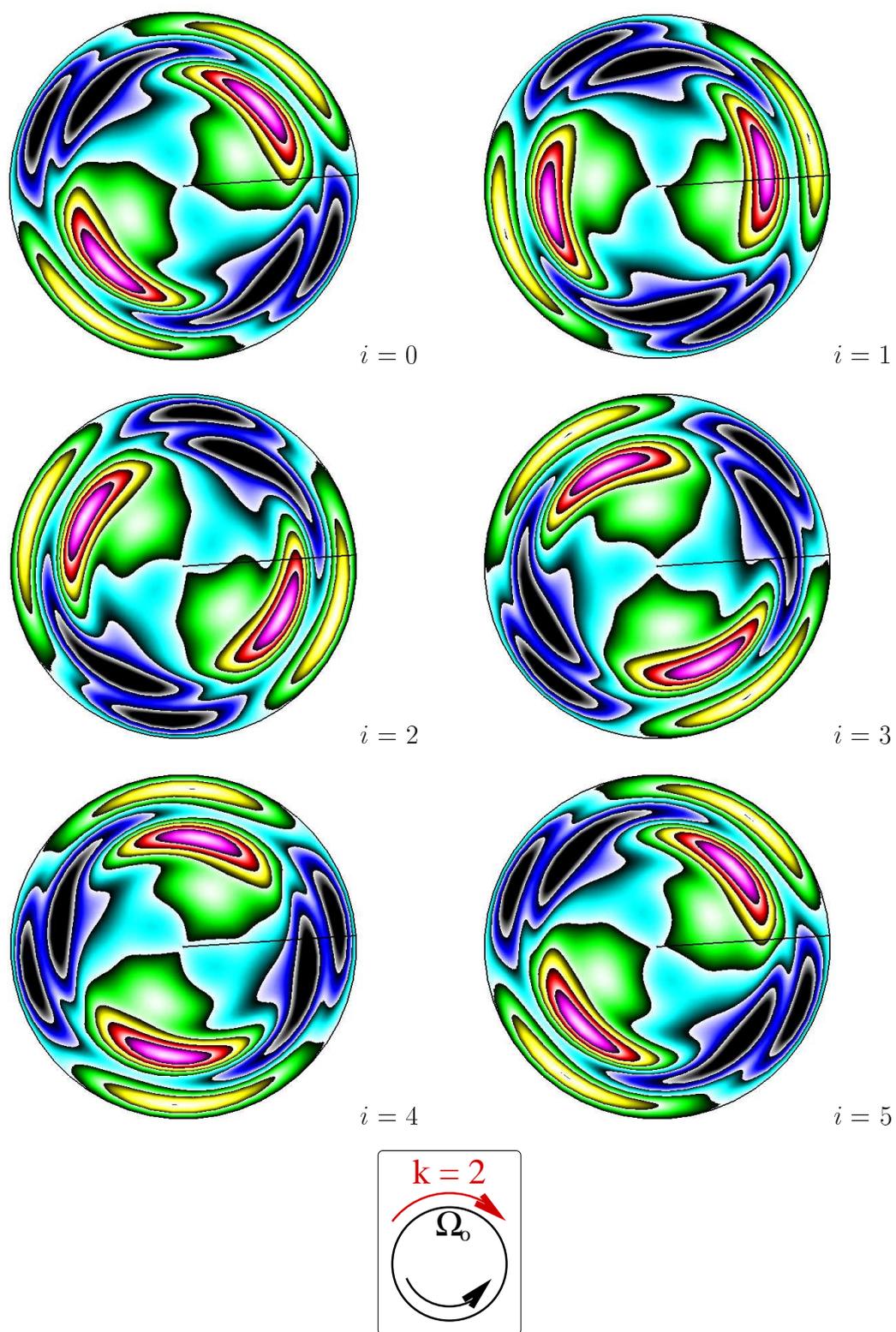


FIG. 7.23 – $h = 1.5$, $Re = 4300$: Iso-lignes/valeurs de la composante azimutale v' de la perturbation de vitesse dans le plan $z = 0.8h$ au cours d'une période $T_4 = 25$ tours. Chaque figure correspond au temps $t = 800 + iT_4/5$, avec $i = 0, \dots, 5$.

7.2.6 Onde azimutale tournante modulée

Pour $Re > 4600$ s'instaurent des ondes azimutales tournantes à amplitude modulée, que l'on notera S_{MOD} dans la suite. À titre d'exemple, celle correspondant à $Re = 6000$ est analysée en détail dans ce paragraphe.

7.2.6.1 Modulation d'intensité

En étudiant la façon dont évoluent les énergies cinétiques spectrales $E'(k)$ au cours du temps (figure non-montrée), nous avons constaté que l'ensemble des modes de la perturbation initiale saturent à un niveau d'énergie fini, dont le plus élevé correspond à $k = 2$. Cette observation permet d'affirmer que les états S_2 , pour lesquels le mode $k = 2$ est **dominant**, transitent vers des états S_{MOD} , pour lesquels le mode $k = 2$ est **prépondérant**. D'autre part, les niveaux de saturation présentent un comportement oscillatoire périodique, contrairement à ce qui avait été observé jusqu'ici. Cette caractéristique très remarquable des états S_{MOD} est analysée de façon plus quantitative via l'évolution temporelle de l'énergie cinétique totale de la perturbation (Fig. 7.24). En régime établi, celle-ci fluctue autour d'une valeur moyenne égale à 9×10^{-4} avec une amplitude qui vaut 1.3×10^{-5} . Le spectre de puissance de ce signal (Fig. 7.25.a) témoigne du fait que l'intensité de la perturbation varie rapidement au cours du temps :

$$\text{fréquence } f_{MOD} = 0.5375 \text{ tours}^{-1} \iff \text{période } T_{MOD} = 1/f_{MOD} = 1.86 \text{ tours}$$

Une façon simple de corroborer cette conclusion consiste à représenter les iso-lignes/valeurs de v' dans le plan $z = 0.8h$ aux instants $t = t_0 + iT_{MOD}/4$ (Fig. 7.26). La stroboscopie résultante exhibe clairement une déformation continue des structures spatiales au cours une période T_{MOD} . Chaque visualisation semble correspondre à un motif spatial π -périodique en azimut – ce qui est cohérent avec la prépondérance du nombre d'onde $k = 2$ – mais dont la pureté est altérée par la participation non-linéaire des modes $k \neq 2n$.

7.2.6.2 Précession des structures

Venons-en maintenant à l'examen de la figure 7.27, où sont données les variations temporelles de la composante azimutale $v'(D)$ de la perturbation de vitesse au point de contrôle $D(r = 0.8, \theta = 0, z = 0.8h)$. En dehors du caractère quasi-périodique de l'instationnarité qui ressort nettement de ce graphique, aucune autre information ne peut être dégagée directement. À cet égard, on rapporte sur la figure 7.25.b la densité énergétique spectrale du signal physique $v'(D)$. Celle-ci est comparée à la densité énergétique spectrale des signaux spectraux $\hat{v}'_k(D)$: par souci de clarté, seules les contributions des modes $k = 1$ et $k = 2$ de la perturbation sont portées sur la figure 7.25.c. Il apparaît que le spectre de $v'(D)$ résulte de la superposition des spectres de \hat{v}'_k , conformément au caractère linéaire de la décomposition en série de Fourier. Ces figures rendent bien compte de la mono-périodicité des oscillations du nombre d'onde axisymétrique, et de la bi-périodicité des fluctuations des modes de Fourier non-nuls.

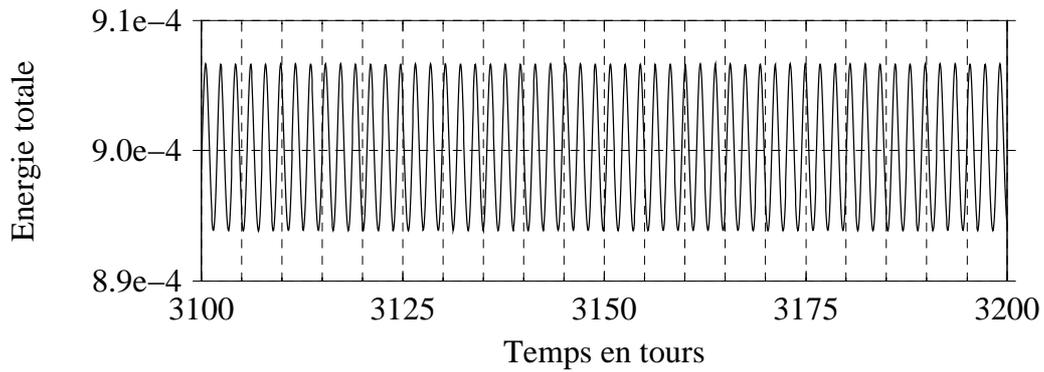


FIG. 7.24 – $h = 1.5$, $Re = 6000$: Énergie cinétique totale de la perturbation au cours du temps en régime non-linéaire. Représentation semi-logarithmique.

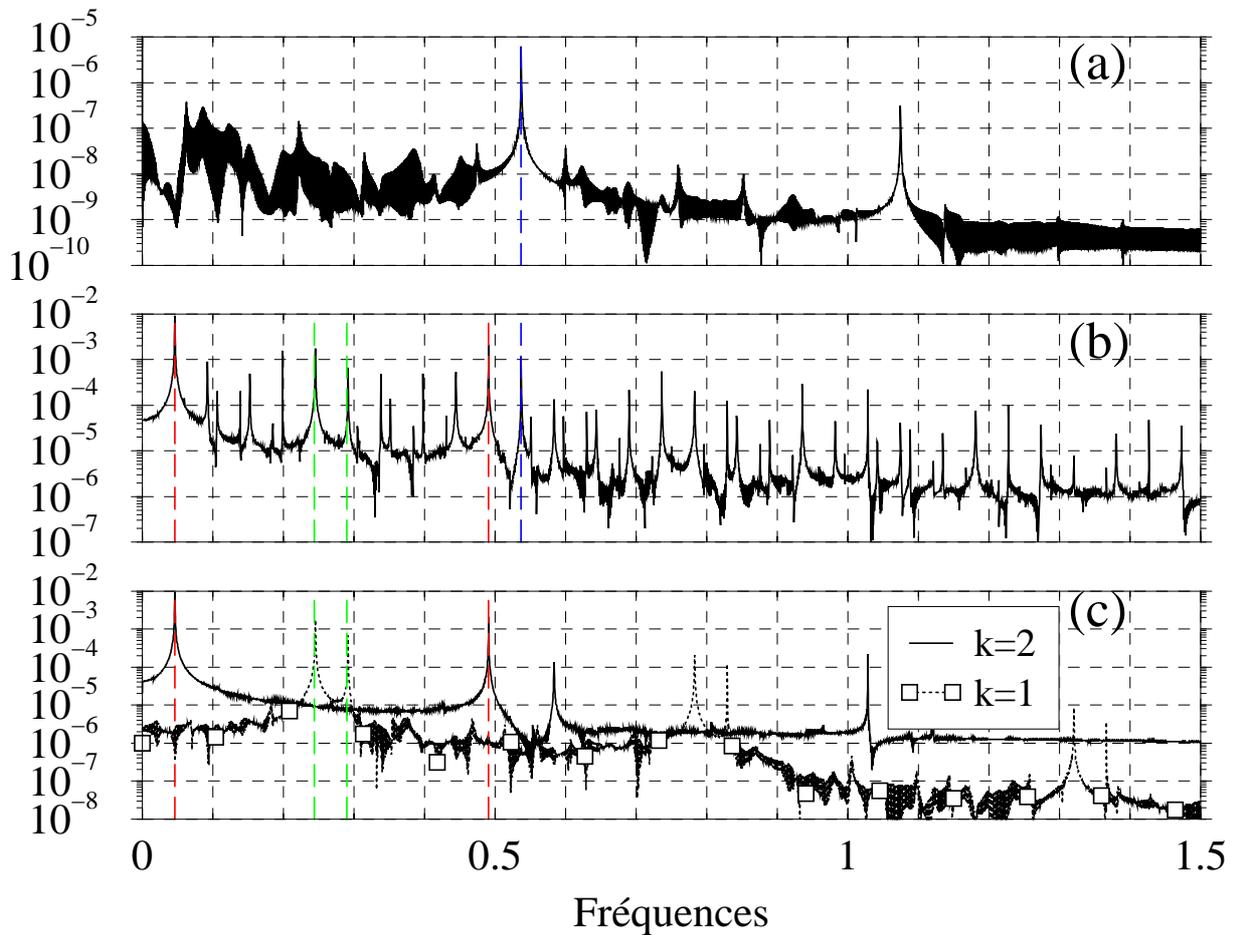


FIG. 7.25 – $h = 1.5$, $Re = 6000$: Comparaison des densités énergétiques spectrales pour $t \in [800, 3200]$. (a) Signal 7.24. (b) Signal 7.27. (c) Coefficients spectraux associés au signal 7.27 pour les modes $k = 1$ et $k = 3$. Représentations semi-logarithmiques.

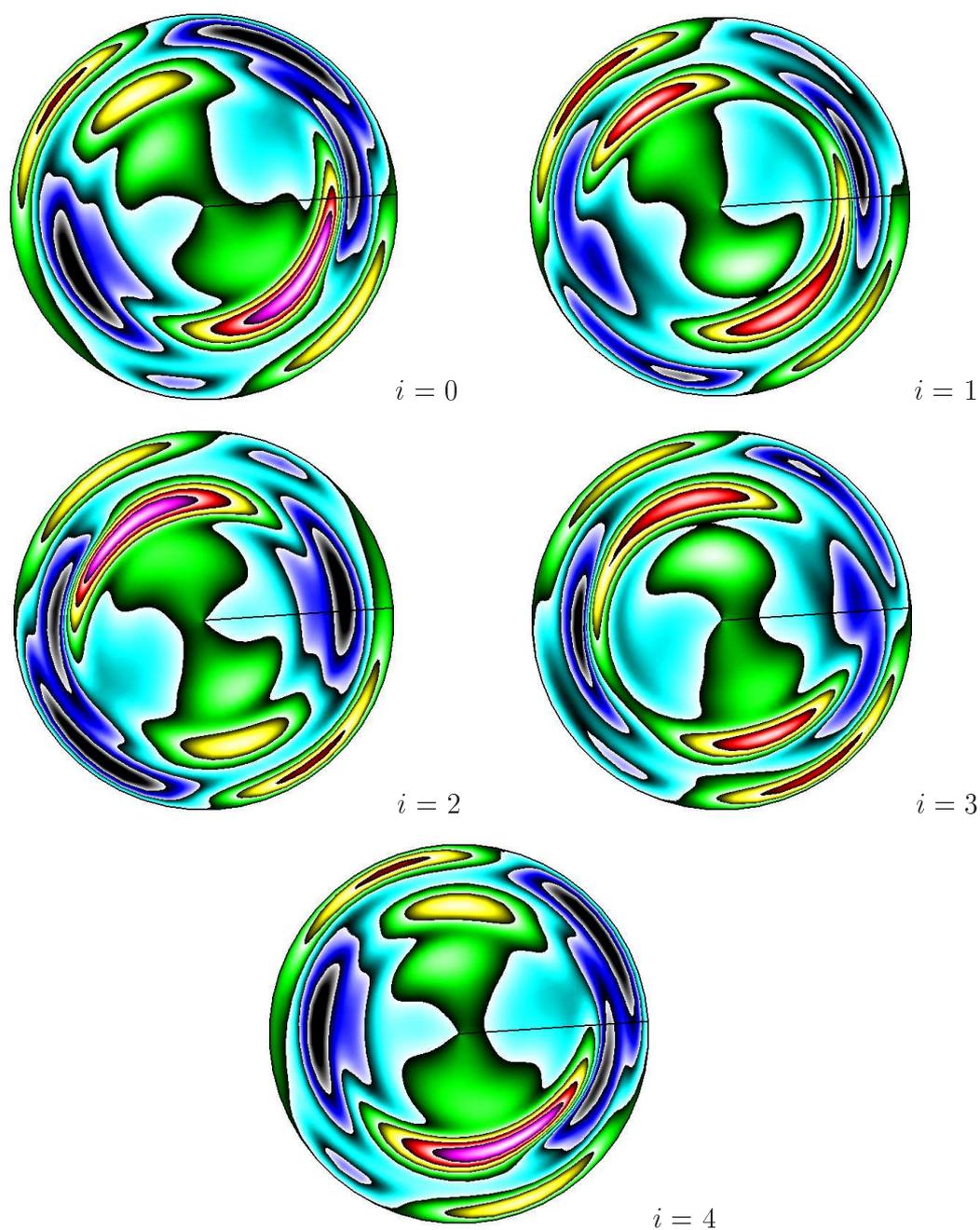


FIG. 7.26 – $h = 1.5$, $Re = 6000$: Iso-lignes/valeurs de la composante azimutale v' de la perturbation de vitesse dans le plan $z = 0.8h$ au cours d'une période $T_{\text{MOD}} = 1.86$ tours. Chaque figure correspond au temps $t = 3200 + iT_{\text{MOD}}/4$, avec $i = 0, \dots, 4$.

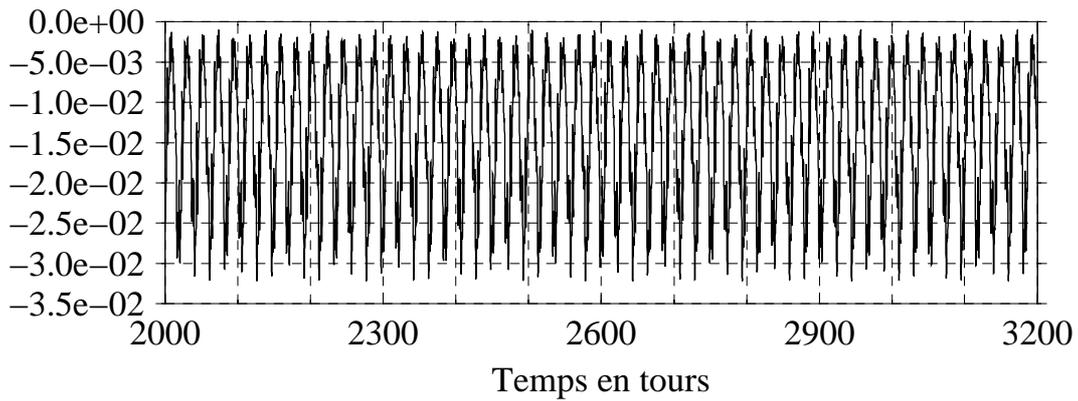


FIG. 7.27 – $h = 1.5$, $Re = 6000$: Variations temporelles de la composante azimutale v' de la perturbation de vitesse au point $D(r = 0.8, \theta = 0, z = 0.8h)$.

D'une manière générale, les pics relevés pour chacune des contributions spectrales sont situés aux fréquences suivantes :

$$\forall k \quad f = \begin{cases} f_{\text{MRW}k} + n f_{\text{MOD}} \\ (n + 1) f_{\text{MOD}} - f_{\text{MRW}k} \end{cases} \quad n \geq 0$$

Pour le mode azimutal prépondérant $k = 2$, nous avons relevé la valeur suivante :

$$\text{fréquence } f_{\text{MRW}2} = 0.0462 \text{ tours}^{-1} \iff \text{période } T_{\text{MRW}2} = 1/f_{\text{MRW}2} = 21.645 \text{ tours}$$

Ce résultat montre qu'au phénomène de modulation d'intensité de la perturbation se superpose un mouvement de précession caractérisé par une pulsation $f_{\text{MRW}2}$. Les variations de l'intensité de la perturbation ne permettent pas de dégager explicitement un mouvement de rotation autour de l'axe sur la première stroboscopie (Fig. 7.26). Afin d'y remédier, la procédure suivante a été mise en œuvre : le motif correspondant à $i = 0$ sur la figure 7.26 est fixé puis suivi pendant six périodes T_{MOD} . La séquence temporelle qui en découle est présentée sur la figure 7.28 et témoigne de la présence d'une onde azimutale tournante. Aussi bien dans sa version pure S_2 que dans sa version modulée S_{MOD} , l'onde tournante associée au mode $k = 2$ se propage dans la direction azimutale en s'opposant à la rotation du couvercle inférieur.

7.3 Solutions multiples

Dans les sections précédentes, la stabilité non-linéaire d'un écoulement de base axisymétrique stationnaire vis-à-vis d'une perturbation aléatoire (conditions initiales CI_b) a été explorée en détail. Suivant la valeur du nombre de Reynolds, nous avons montré que le développement non-linéaire de certains modes azimutaux a pour effet de faire basculer l'écoulement de base

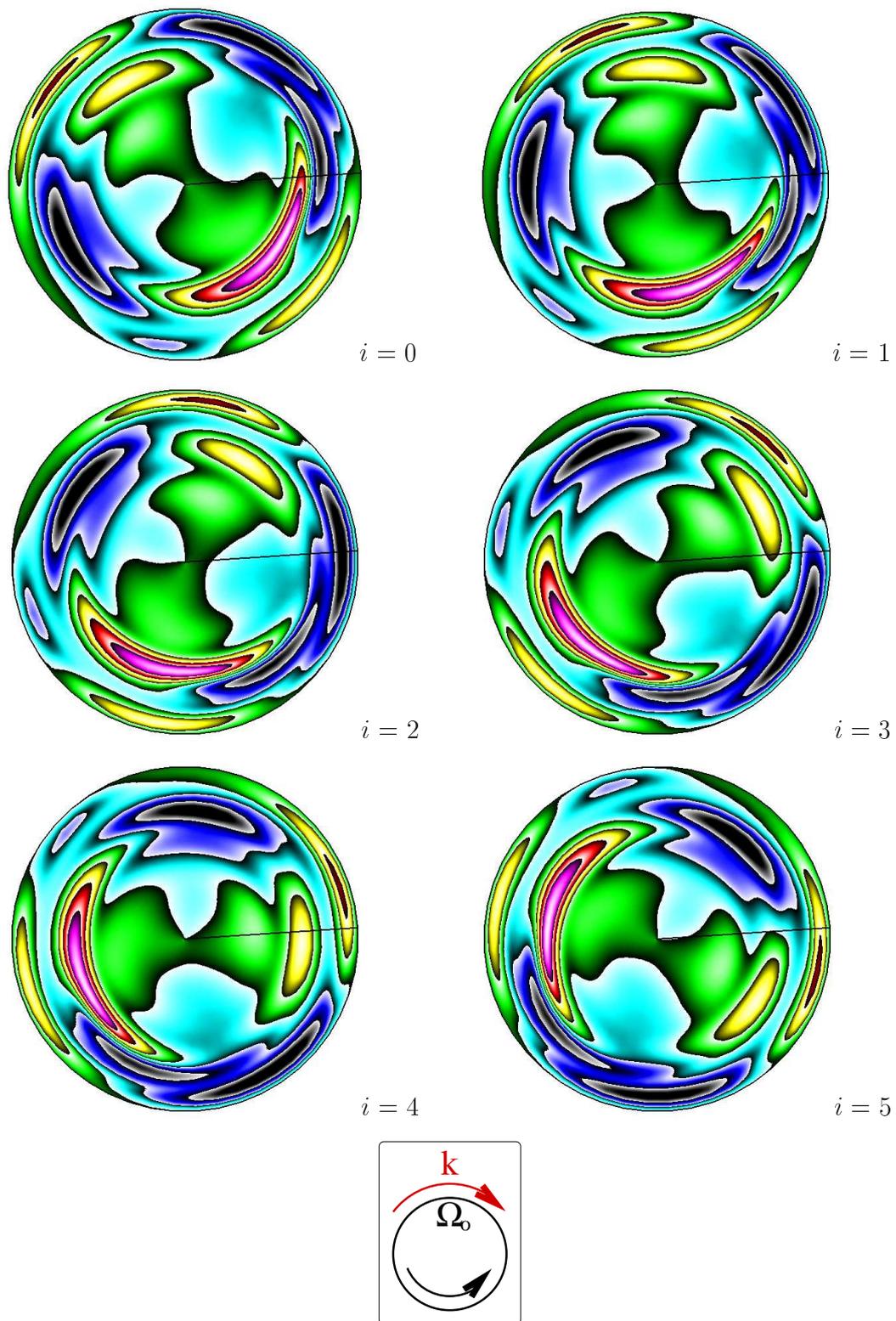


FIG. 7.28 – $h = 1.5$, $Re = 6000$: Iso-lignes/valeurs de la composante azimutale v' de la perturbation de vitesse dans la section axiale $z = 0.8h$ au cours de 6 périodes $T_{\text{MOD}} = 1.86$ tours. Chaque figure correspond au temps $t = 3200 + iT_{\text{MOD}}$, avec $i = 0, \dots, 5$.

vers des régimes d'écoulements instationnaires qui sont soit axisymétrique, soit invariants par rotation d'angle π ou $2\pi/3$ autour de l'axe de la cuve, soit des solutions non-axisymétriques à amplitude modulée. Les différentes branches de solutions trouvées sont récapitulées sur les diagrammes 7.30 et 7.31 (en traits verts). Il va de soi que ces états sont possibles puisqu'ils sont formellement solutions des équations de Navier-Stokes. En revanche, l'expérimentateur est dans l'impossibilité de mener une telle investigation, car contrairement au numéricien, il ne dispose pas systématiquement d'un écoulement de base axisymétrique stationnaire. En définitive, on voit mal *a priori* comment les solutions décrites ci-dessus peuvent être observées par le biais d'expériences. D'autre part, les calculs non-linéaires en perturbations, initialisés avec des conditions de type CI_b , ne nous renseignent en rien sur la multiplicité des solutions pouvant exister.

Ainsi, ces remarques nous ont amenées à entreprendre la résolution des équations de Navier-Stokes tridimensionnelles complètes (i.e. : sous forme non-perturbative) en adoptant d'autres processus d'initialisation. Ces simulations ont mis en évidence différentes branches d'états illustrées sur les figures 7.30 et 7.31. Les solutions trouvées sont systématiquement comparées avec celles décrites dans les sections précédentes en examinant l'évolution temporelle des énergies cinétiques totale et modales, ainsi que le spectre de puissance d'un signal de référence. Les solutions sont identiques lorsqu'elles sont caractérisées par le même mode dominant et par la même fréquence fondamentale.

Dans la suite du texte, nous utiliserons couramment les sigles $SO(2)$, S_2 et S_3 pour faire référence aux solutions correspondant respectivement aux cycles limites de nombre d'onde dominant $k = 0$, $k = 2$ et $k = 3$. Par ailleurs, S_{MOD} désignera les solutions caractérisées par une modulation d'amplitude. Enfin, on précise que de telles notations concernent aussi bien l'écoulement complet que les fluctuations autour de l'écoulement de base.

7.3.1 Démarrages impulsifs du rotor

Dans la perspective de répondre aux questions précédentes, nous avons simulé des situations expérimentales où le fluide est au repos et la rotation du couvercle inférieur est démarrée de façon impulsive (**conditions initiales** CI_0). De tels calculs sont représentés sur le diagramme 7.30 par des flèches verticales bleues. Comme en témoigne la figure 7.30, les simulations tridimensionnelles menées avec des conditions de départ de type CI_b ou CI_0 convergent le plus souvent vers les mêmes régimes d'écoulements. Les principales différences relevées sont les suivantes :

- Les solutions $SO(2)$ de la branche f_2 sont mises en évidence dès $Re = 3000$ avec des conditions initiales CI_0 . Ces solutions ne sont attendues qu'à partir de $Re = 3300$ lorsque l'initialisation est de type CI_b .
- Les calculs complets en partant du repos révèlent que les solutions S_3 de la branche f_3 n'apparaissent qu'à partir de $Re = 4000$ et sont présentes au moins jusqu'à $Re = 5000$. De ce fait, la branche f_4 de cycles limites S_2 n'est pas décelée avec les démarrages impulsifs.
- Le seuil d'apparition des états à amplitude modulée S_{MOD} est plus élevé si les conditions de départ CI_0 sont adoptées (au delà de $Re = 5000$).

Revenons sur ce dernier point. Les équations de Navier-Stokes ont été résolues pour $Re = 6000$ en partant du fluide au repos. Le calcul converge vers une solution S'_{MOD} qui est très différente des solutions S_{MOD} trouvées en menant une analyse de stabilité non-linéaire avec des conditions initiales CI_b (§7.2.6). Dans le cas où l'initialisation est de type CI_0 , il s'avère que la solution S'_{MOD} est encore une onde azimutale tournante qui présente une symétrie axiale d'ordre trois, comme les ondes pures S_3 . En effet, l'examen de l'évolution temporelle des énergies $E'(k)$ (non-montrée) met en évidence la prédominance du mode $k = 3$, alors que tous les modes de Fourier saturent à un niveau d'énergie fini lorsque l'initialisation est de type CI_b . Contrairement aux ondes S_3 , les ondes S'_{MOD} sont caractérisées par une modulation d'amplitude, comme en témoignent les oscillations périodiques de l'énergie cinétique totale de l'écoulement au cours du temps (Fig. 7.29). D'après le spectre de puissance de ce signal (non-montré), la fréquence de modulation f'_{MOD} vaut 0.088 fois la fréquence de rotation du disque moteur : cette valeur est nettement inférieure à la fréquence f_{MOD} donnée par les calculs en perturbations en partant d'une condition CI_b .

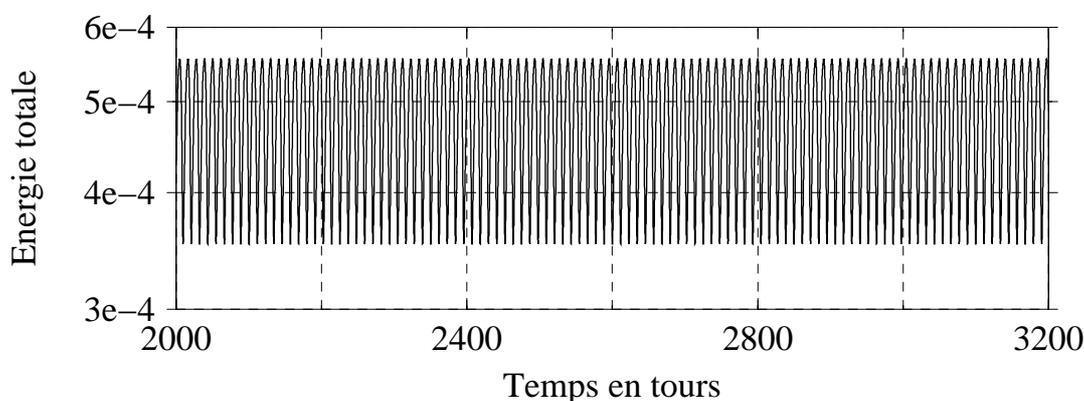


FIG. 7.29 – $h = 1.5$, $Re = 6000$: Énergie cinétique totale de la perturbation au cours du temps. Représentation semi-logarithmique.

7.3.2 Accélération et décélération du rotor

Les éventuels phénomènes d'hystérésis sont sondés en réalisant l'expérience suivante par voie de simulations numériques directes. On considère une cavité de rapport d'aspect $h = 1.5$ complètement remplie d'un fluide au repos. Le couvercle inférieur est impulsivement mis en rotation avec une vitesse angulaire telle que le nombre de Reynolds soit égal à 2800. Cette opération est schématisée par une flèche verticale bleue sur le diagramme 7.31. Lorsque le régime s'établit, nous observons une onde tournante S_2 appartenant à la branche f_1 .

(1) – Dans un premier temps, l'expérience consiste à accélérer progressivement la rotation du disque moteur (**conditions initiales** CI^+). D'un point de vue pratique, un instantané de la solution trouvée pour un nombre de Reynolds Re constitue la condition de départ pour le

calcul à $Re + 100$. Bien évidemment, nous prenons soin d'attendre que les effets transitoires s'amortissent au cours du temps avant de passer au nombre de Reynolds suivant. En définitive, les différentes branches de solutions atteintes ainsi que les sauts qui les séparent sont représentés en traits continus rouges sur le diagramme 7.31. On identifie des cycles limites S_2 lorsque les valeurs du paramètre Re sont prises dans les intervalles $[2800, 3300]$ (branche f_1) et $[4400, 4600]$ (branche f_4). Un point remarquable est la présence de solutions $SO(2)$ connectées par la branche f_2 pour $Re \in [3400, 4300]$. Au delà de $Re = 4600$, nous avons constaté la croissance particulièrement lente des modes azimuthaux esclaves de la perturbation. En raison des temps de calculs prohibitifs, le nombre de Reynolds est augmenté de façon plus abrupt (de 4600 à 5000) : les solutions S_{MOD} apparaissent alors clairement et se maintiennent au moins jusqu'à $Re = 5500$.

(2) – *A contrario*, la seconde étape de l'expérience consiste à prendre comme condition de départ un instantané de l'état S_{MOD} trouvé pour $Re = 5500$, puis à effectuer une décélération progressive du rotor (**conditions initiales CI^-**). La succession de simulations qui en résulte est rapportée en traits continus noirs sur le diagramme 7.31. Lorsque Re passe de 5500 à 5000, les calculs complets convergent vers des ondes tournantes à amplitude modulée S_{MOD} . La solution S_{MOD} à $Re = 5000$ constitue la condition de départ pour le calcul à $Re = 4600$. Dans ce cas, le régime établi correspond à une onde tournante S_2 appartenant à la branche f_4 . De telles solutions sont trouvées pour des nombres de Reynolds dans l'intervalle $[3900, 4600]$. Nous poursuivons ce processus de ralentissement et les solutions mises en évidence sont des cycles limites $SO(2)$ (branche f_2) tant que le nombre de Reynolds est dans la gamme $[2800, 3800]$. Lorsqu'un instantané de la solution obtenue pour $Re = 2800$ est pris pour initialiser le calcul à $Re = 2700$, on remarque que le taux de croissance du nombre d'onde $k = 2$ est très faible mais positif, ce qui suggère un changement de comportement. Cette hypothèse est amplement justifiée puisque la solution $SO(2)$ bascule vers un cycle limite S_2 de la branche f_1 après une phase transitoire relativement longue (près de 3000 révolutions du disque moteur). Par contre, il est intéressant de noter qu'aucune onde S_2 n'est décelée si le régime établi correspondant à $Re = 2800$ constitue la condition initiale pour la simulation à $Re = 2600$: dans ce cas, l'écoulement redevient directement axisymétrique stationnaire. L'expérience se termine par un dernier calcul permettant de revenir au point de départ S_2 à $Re = 2800$, depuis l'onde S_2 obtenue pour $Re = 2700$.

Cette expérience numérique rend bien compte de la présence de deux boucles d'hystérésis lorsque $Re \in [2700, 3400]$ et $Re \in [3800, 4400]$, ce qui laisse penser que les deuxième et troisième bifurcations de Naimark-Sacker sont sous-critiques. Dans ces intervalles coexistent des structures spatiales exhibant une symétrie axiale d'ordre deux ou trois.

Entre ces deux boucles vient s'intercaler un gamme de Re où l'écoulement est axisymétrique instationnaire.

Par ailleurs, on rappelle que les ondes tournantes S_3 associées au mode azimuthal $k = 3$ (branche f_4) ont été observées en initialisant les calculs en perturbations avec des conditions CI_b (en pointillés verts sur le diagramme 7.31). Nous attirons l'attention du lecteur sur le fait que de telles solutions n'ont pas été détectées lorsque les simulations numériques complètes sont réalisées avec des conditions initiales de type CI^+ et CI^- . Pour confirmer cette remarque, nous avons résolu les équations de Navier-Stokes complètes pour $Re = 3800$ (les calculs en perturbations – CI_b – prédisent une solution S_3 pour cette valeur de Re) en prenant comme

condition de départ un instantané de la solution S_2 à $Re = 2800$. En dépit d'une augmentation brutale du taux de rotation, le régime établi qui en découle est encore un état $SO(2)$.

7.4 Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons exploré la façon dont se brise l'axisymétrie d'un écoulement dans une cuve cylindrique rotor-stator de rapport d'allongement axial $h = 1.5$.

Dans un premier temps, les équations du mouvement, sous forme perturbative non-linéaire, sont résolues en partant d'une condition initiale de type CI_b (superposition d'un écoulement de base et d'une perturbation aléatoire). Plusieurs branches de solutions sont mises en évidence par ce processus. L'écoulement de base axisymétrique stationnaire devient instable lorsque le nombre de Reynolds franchit une première valeur critique $Re_{c1} \simeq 2580$. Apparaissent alors des ondes tournantes S_2 associées au mode azimutal dominant $k = 2$. Les solutions S_2 sont observées jusqu'à $Re = 3275$. Lorsque le nombre de Reynolds prend des valeurs comprises entre 3300 et 3600, les solutions trouvées sont des cycles limites axisymétriques. L'axisymétrie des solutions précédentes est ensuite brisée par une bifurcation de Naimark-Sacker, gouvernée par le mode azimutal $k = 3$. Les ondes tournantes S_3 qui en résultent sont observées dans l'intervalle $[3700, 4200]$. Les solutions S_3 basculent alors vers une branche d'ondes tournantes S_2 , dont la période de précession est beaucoup plus faible que la période des cycles limites S_2 qui avaient été décelés dans la gamme $Re \in [2580, 3275]$. Enfin, l'augmentation du taux de rotation engendre l'apparition d'une branche d'états asymétriques S_{MOD} caractérisés par une modulation d'amplitude.

Afin d'élucider ces résultats, nous avons analysé la stabilité linéaire de d'un écoulement de base axisymétrique stationnaire à l'égard des perturbations aléatoires. Il s'avère que la première bifurcation est gouvernée par le nombre d'onde qui a le taux de croissance τ_k le plus élevé, c'est-à-dire $k = 2$. En revanche, une telle interprétation semble beaucoup moins évidente pour les instabilités suivantes, d'autant plus que certains changements de comportement observés en régime non-linéaire se déclenchent dans des gammes de rotation où deux voire trois modes azimutaux ont des taux de croissance linéaire relativement proches.

D'autre part, nous avons intégré les équation de Navier-Stokes complètes en mettant en œuvre différentes conditions de départ qui correspondent soit à un démarrage impulsif (CI_0), soit à une accélération (CI^+) ou une décélération (CI^-) progressive du disque entraînant le fluide. De telles simulations ont clairement démontré que les propriétés en temps et en espace des solutions obtenues dépendent du processus d'initialisation. Toutefois, les calculs s'accordent sur les deux points suivants, indépendamment des conditions initiales utilisées :

- Le rétablissement de la symétrie $SO(2)$ depuis une solution non-axisymétrique lorsque les valeurs du nombre de Reynolds sont comprises entre 3400 et 3600.
- L'existence d'une branche d'ondes azimutales tournantes à amplitude modulée au delà de $Re = 5000$.

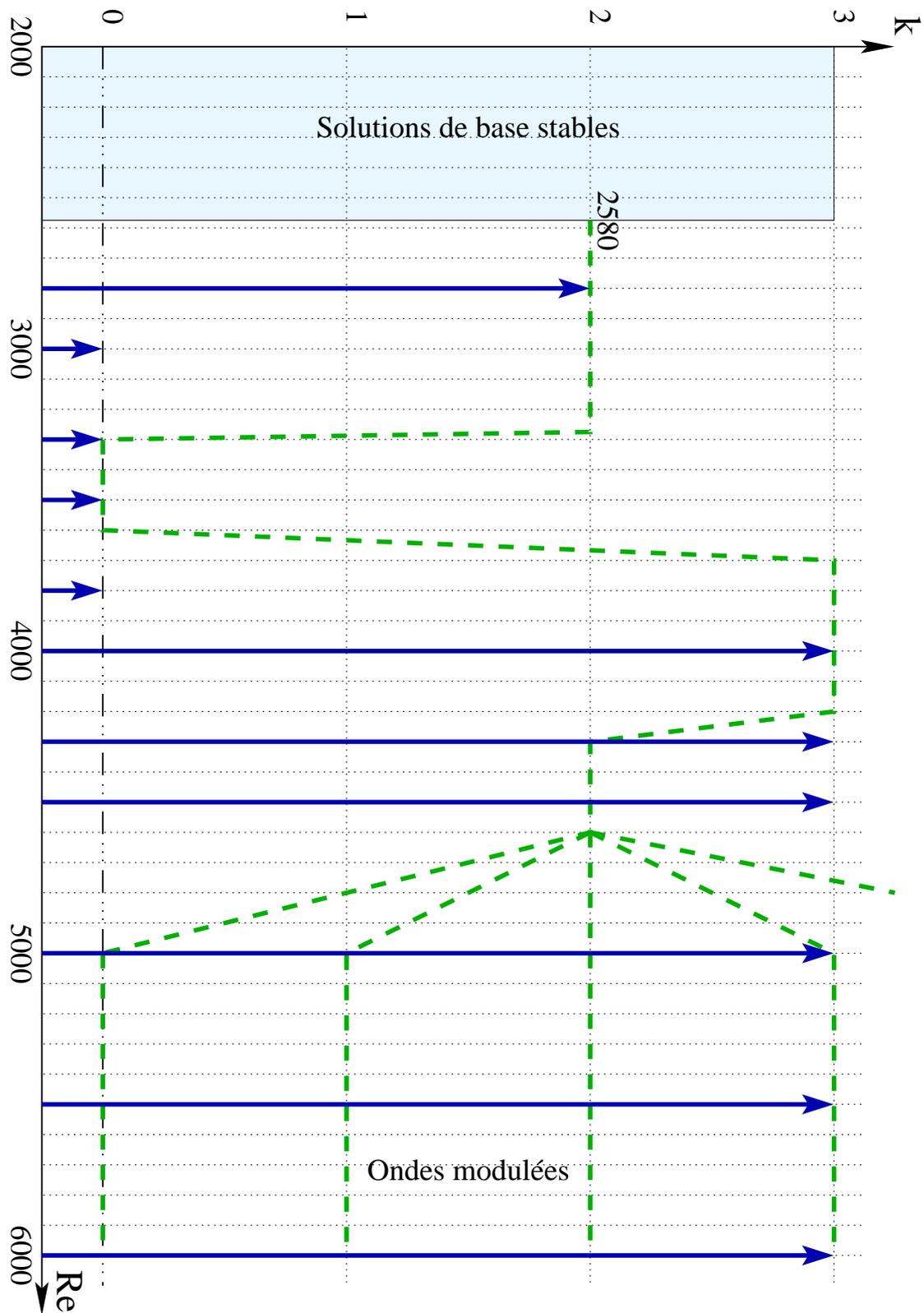
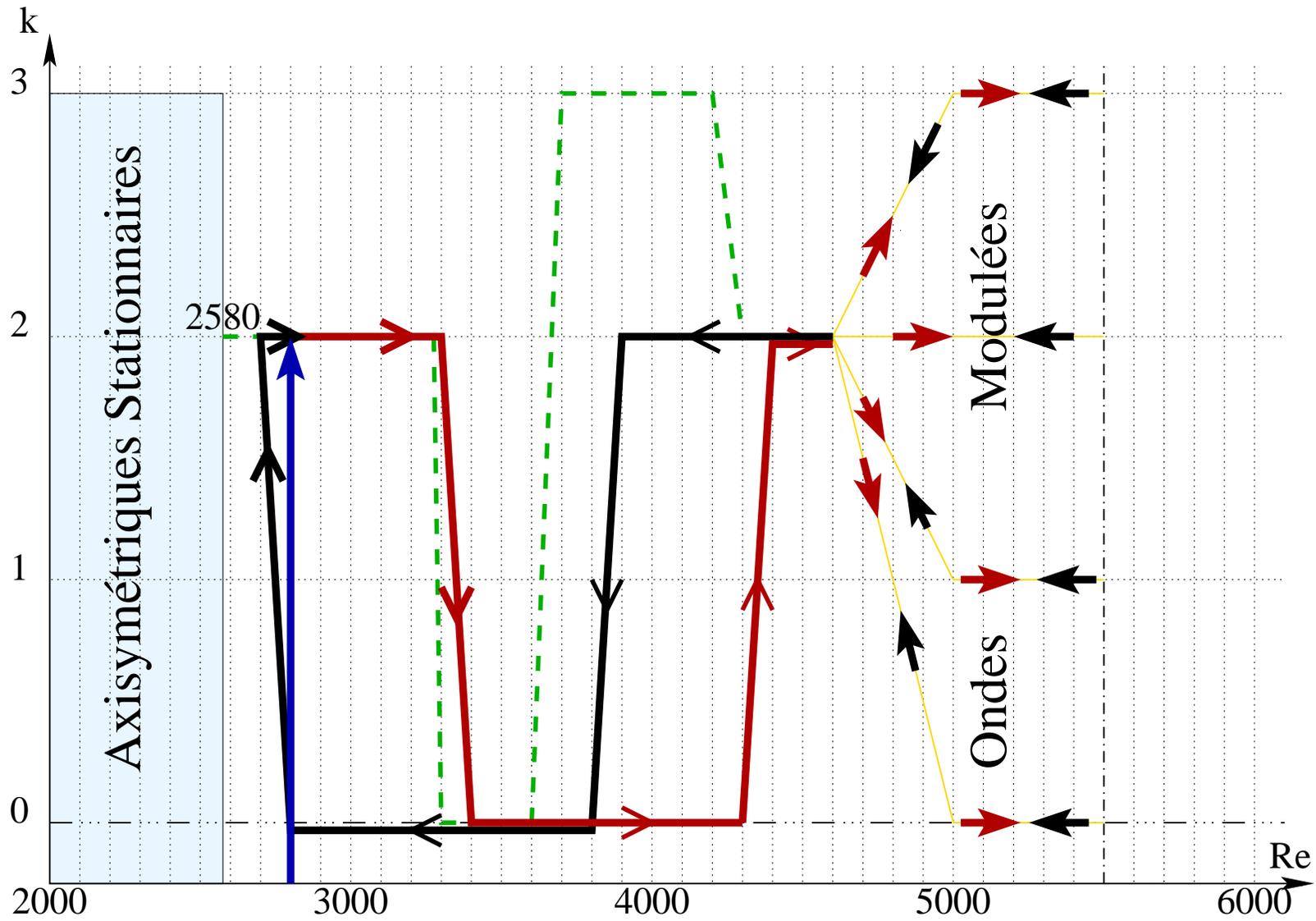


FIG. 7.30 – Voir Fig. 7.31 pour la légende.

FIG. 7.31 – $h = 1.5$: Branches de solutions atteintes lorsque les simulations sont réalisées avec des conditions initiales de type CI_b (en verts), CI_0 (flèches verticales bleues); CI^+ (en traits rouges) et CI^- (en traits noirs).



Il est important de souligner l'intérêt de l'analyse de stabilité non-linéaire. Une telle approche repose sur le calcul d'un écoulement de base axisymétriques stationnaires, même lorsqu'ils sont instables, ce qui est difficilement concevable d'un point de vue expérimental. Pourtant, les calculs non-linéaires en perturbations initialisés par des conditions de type CI_b ont permis de déceler **toutes** les branches de solutions, ce qui n'est pas le cas avec des simulations complètes à caractère plus réalistes (conditions initiales CI_0 , CI^+ et CI^-).

Quatrième partie
Conclusion générale

Ce mémoire porte sur l'étude de la tridimensionnalisation d'un écoulement de fluide visqueux incompressible entraîné par la rotation d'un disque (contrôlée par le nombre de Reynolds $Re = R_o^2 \Omega_o / \nu$) au fond d'une cavité cylindrique stationnaire de rapport d'aspect $h = H/R_o$. Cette investigation est réalisée par voie de simulations numériques directes.

Dans cette perspective, il a d'abord fallu développer un outil numérique efficace permettant la simulation de ces écoulements tridimensionnels. Il s'agit d'un code de calcul en formulation vitesse-pression résolvant les équations de Navier-Stokes tridimensionnelles instationnaires en coordonnées cylindriques. La marche en temps repose sur un schéma aux différences finies semi-implicite du second ordre (schéma Euler retardé pour les termes diffusifs/extrapolation Adams-Bashforth pour les termes convectifs). Le couplage vitesse-pression est traité au moyen d'un algorithme de projection. Néanmoins, on se heurte à une difficulté majeure qui est la prise en compte de l'axe de symétrie $r = 0$ dans le domaine d'intégration. Cette difficulté est évitée *de façon naturelle* en utilisant une méthode aux différences finies proposées par **Hyman & Shashkov** [30] : les opérateurs divergence et rotationnel discrétisés sont obtenus en appliquant la transcription discrète des théorèmes de Gauss et de Stokes, alors que l'opérateur gradient discret est défini comme le négatif adjoint de la divergence discrète. On s'assure ainsi que les opérateurs discrets et continus possèdent les mêmes propriétés (chapitre 4).

Dans ce travail, nous avons abordé le problème de la brisure spontanée de l'axisymétrie pour des cuves cylindriques telles que $h = 1$ et $h = 1.5$. Ce choix est motivé par le fait que la littérature actuelle est particulièrement pauvre en ce qui concerne les écoulements dans une configuration de petit rapport de forme. La gamme des taux de rotation explorée est telle que $Re < 8500$. Deux approches numériques différentes, mais complémentaires, ont été mises en œuvre pour intégrer les équations de Navier-Stokes tridimensionnelles instationnaires.

- (i) L'une consiste à linéariser ces équations autour d'un écoulement de base axisymétrique stationnaire. Les conditions initiales, notées CI_b , correspondent à la superposition d'un état de base et d'une perturbation aléatoire. On s'intéresse alors aux propriétés d'amortissement ou d'amplification de l'écoulement de base (étude de stabilité linéaire).
- (ii) L'autre consiste à intégrer les équations complètes avec différentes conditions initiales : soit un écoulement de base axisymétrique stationnaire perturbé aléatoirement (CI_b) dans le cadre d'une analyse de stabilité non-linéaire, soit un état où le fluide est au repos (CI_0). Un autre processus d'initialisation consiste à prendre le régime établi d'une solution trouvée pour une valeur de Re inférieure (conditions CI^+) ou supérieure (conditions CI^-) à celle que l'on considère pour la simulation actuelle, en perturbations ou non.

Synthèse des résultats (chapitres 6 et 7)

Pour chaque valeur de h , notre analyse de stabilité linéaire s'est avérée en excellent accord avec celle récemment menée par **Gelfgat, Bar-Yoseph & Solan** [28]. Une telle approche du problème est intéressante car elle permet de déterminer le premier seuil de criticalité $Re_{c1}(h)$ et fait apparaître le mode de Fourier k_c de la perturbation initiale qui a le taux de croissance le plus élevé.

L'analyse de la stabilité non-linéaire montre que le développement d'un nombre d'onde k_c est responsable d'une première bifurcation de Hopf super-critique lorsque le paramètre de contrôle Re dépasse une première valeur critique $Re_{c1}(h)$: au décalage non-linéaire près, celle-ci coïncide avec la valeur critique émanant des calculs linéaires en perturbations. L'état de base bascule alors vers une branche de solutions instationnaires de période T_{k_c} , dont les caractéristiques spatiales dépendent de la valeur du mode dominant k_c . Plus précisément, la symétrie $SO(2)$ – ou axisymétrie – de l'écoulement de base n'est brisée que lorsque le mode maître k_c est non-nul. Dans ce cas, les solutions super-critiques sont des ondes qui :

- exhibent une invariance par rotation d'angle $2\pi/k_c$ autour de l'axe $r = 0$;
- tournent en bloc autour de l'axe avec une période $T_{rwk_c} = k_c \times T_{k_c}$, compte tenu de la symétrie d'ordre k_c .

Ces conclusions sont conformes aux investigations théoriques de **Knobloch** [33]. Pour les deux valeurs de h que nous avons choisies, le nombre d'onde le plus instable est $k_c = 2$. Les différentes visualisations proposées illustrent clairement la topologie tridimensionnelle de telles solutions (notées S_2). Ces structures sont similaires à celles récemment publiées par **Marques, Lopez & Shen** [48]. Par ailleurs, nous avons noté que la précession des ondes S_2 s'oppose à la rotation du disque inférieur. En particulier pour $h = 1.5$, ces solutions S_2 sont caractérisées par une fréquence fondamentale très faible. Ceci est en accord avec les travaux numériques de **Gelfgat et al.** [28].

L'expérimentation numérique a montré qu'une seconde bifurcation, dite de Naimark-Sacker (bifurcation de Hopf entre cycles limites), conduit les cycles limites non-axisymétriques S_2 vers d'autres cycles limites lorsque la valeur du nombre de Reynolds dépasse un seuil de criticalité $Re_{c2}(h)$. C'est ici que commencent les différences de comportements en espace et en temps entre les solutions correspondant à $h = 1$ et celles trouvées pour $h = 1.5$:

$h = 1$

Les calculs convergent vers des solutions qui sont encore des ondes azimutales tournantes. Ce résultat est loin d'être une évidence : s'il est vrai que les ondes tournantes sont éventuellement attendues lorsqu'un état $SO(2)$ subit une bifurcation [33], il n'en demeure pas moins vrai qu'aucune information n'est dispensée quant à leur apparition depuis un état non-axisymétrique. En outre, les structures spatiales observées présentent une périodicité azimutale d'ordre trois, du fait de la prédominance du mode de Fourier $k_c = 3$. Ces ondes (S_3) tournent dans le même sens que le forçage dynamique.

$h = 1.5$

Un point remarquable est le rétablissement de l'axisymétrie de l'écoulement lorsque $Re > Re_{c2}$. En effet, les cycles limites non-axisymétriques S_2 disparaissent pour laisser place à des cycles limites $SO(2)$ qui sont associés à la prédominance mode de Fourier $k_c = 0$ de l'excitation de départ.

L'analyse de stabilité linéaire a révélé que ces changements de comportement se manifestent dans des gammes de nombres de Reynolds où le mode dominant k_c en régime non-linéaire, est également celui qui possède le taux de croissance le plus élevé en régime linéaire. Dès lors, on peut penser *a priori* que la perturbation sélectionne le mode azimutal qui a le taux de

croissance le plus important. Toutefois, une telle interprétation s'est avérée discutable lorsque la rotation est augmentée.

En continuant d'accroître le paramètre de contrôle Re , l'analyse de stabilité non-linéaire menée pour $h = 1$ indique que les solutions tridimensionnelles S_3 se maintiennent. En revanche pour $h = 1.5$, nos investigations ont mis en évidence deux nouvelles bifurcations de Naimark-Sacker. La première bifurcation a pour effet de rompre l'axisymétrie des cycles limites $SO(2)$ et, comme le prévoit **Knobloch (1994)** [33], les solutions atteintes sont effectivement des ondes tournantes. Celles-ci sont associées au mode azimutal $k_c = 3$ de la perturbation. Les solutions S_3 basculent ensuite vers une branche d'ondes azimutales tournantes S_2 qui se distinguent des premières solutions S_2 par la valeur de la pulsation fondamentale.

Pour des nombres de Reynolds plus grands, nous avons relevé la présence d'une branche de solutions (notées S_{MOD}) qui se distingue des précédentes solutions de la façon suivante. D'une part, l'écoulement de base axisymétrique stationnaire est instable vis-à-vis de l'ensemble des modes de Fourier de la perturbation initiale. Dès lors, il n'y a plus **prédominance**, mais plutôt **prépondérance** d'un nombre d'onde k_c non-nul : les calculs montrent que $k_c = 3$ pour $h = 1$, alors que $k_c = 2$ pour $h = 1.5$. D'autre part, l'intensité de la perturbation oscille au cours du temps. En définitive, de telles solutions correspondent à des ondes azimutales tournantes modulées.

Les renseignements précédents ont été obtenus en initialisant les calculs en perturbations avec des conditions de type CI_b . Toutefois, cette approche numérique n'est pas adaptée pour rendre compte de la non-unicité des solutions pouvant exister : ce genre d'investigation ne peut être réalisée en faisant varier le nombre de Reynolds de façon monotone. À cet égard, nous avons mis en œuvre les processus d'initialisation CI^+ et CI^- qui s'interprètent comme une accélération et une décélération du rotor. Apparaît alors une boucle d'hystérésis entre les branches de solutions S_2 et S_3 pour $h = 1$ (Fig. 6.30), puis deux boucles d'hystérésis entre les branches de solutions $SO(2)$ et S_2 lorsque $h = 1.5$ (Fig. 7.31). De telles observations suggèrent que les bifurcations de Naimark-Sacker sont sous-critiques.

D'autre part, il nous a paru légitime de se poser la question suivante : un expérimentateur peut-il observer l'ensemble des solutions rapportées dans ce mémoire ? Nous avons cherché à lever cette interrogation en intégrant les équations de Navier-Stokes complètes pour plusieurs valeurs de Re , en optant pour des conditions initiales de type CI_0 . Ces simulations peuvent être rapprochées aux situations expérimentales où la rotation du disque inférieur démarre de manière impulsive. Il s'avère que les simulations numériques complètes menées avec les conditions initiales CI_0 convergent le plus souvent vers les solutions obtenues par les calculs non-linéaires en perturbations (Fig. 6.29 et 7.30). En particulier pour la configuration à $h = 1.5$, seule une branche de solutions sur cinq n'a pas été décelée.

Cette investigation avait pour objectif de fournir des éléments nouveaux sur la manière dont se brise l'axisymétrie de l'écoulement lorsque le paramètre de contrôle Re est augmenté. Nous avons montré que l'écoulement subit plusieurs bifurcations qui ont pour effet de rompre, de

préservé, ou encore de rétablir l'axisymétrie de l'écoulement. En outre, les caractéristiques en espace et en temps des solutions trouvées dépendent des paramètres de contrôle (Re, h) . Ces caractéristiques sont également très sensibles aux conditions initiales. Par ailleurs, nos simulations ont confirmé et approfondi certains résultats de la littérature concernant les ondes azimutales tournantes, ce qui prouve la capacité de notre code de calcul à simuler ces écoulements complexes. Finalement, il apparaît que ce travail va dans le sens des objectifs fixés. Bien entendu, des questions restent ouvertes en ce qui concerne les mécanismes responsables de la rupture de l'axisymétrie, justifiant des investigations ultérieures.

Perspectives

L'exploitation du code de calcul actuel nous permet d'envisager plusieurs perspectives à court terme, sans modifications conceptuelles de l'algorithme

Dans ce travail, seules les cavités de rapport d'aspect $h = 1$ et $h = 1.5$ ont été explorées. Pour la plus grande de ces valeurs, nous avons noté que l'écoulement est plus riche en termes de multiplicité des solutions. Quoi qu'il en soit, aucune conclusion concernant l'influence du confinement axial sur le processus de tridimensionnalisation ne peut être dégagée à partir de deux valeurs de h . Par conséquent, il est naturel d'étudier les régimes d'écoulements dans des cuves rotor-stator telles que $h < 1.75$: ces configurations ont été peu traitées jusqu'à présent.

D'autre part, la mise en œuvre d'un maillage non-uniforme est à prévoir dans le cadre d'une poursuite d'études à grande rotation. Les structures spatiales seront mieux représentées dans les couches limites, et des nouveaux renseignements sur la transition vers les régimes non-axisymétriques pourront être obtenus.

Lorsque les origines de la rupture de la symétrie $SO(2)$ seront élucidées, nous pourrons alors introduire une complication supplémentaire : l'aspect thermique. Dans certains dispositifs expérimentaux par exemple, la rotation du disque moteur peut provoquer un échauffement local du fluide : il est légitime de se demander quelle en est l'influence sur l'apparition des non-axisymétries.

D'autre part, on dispose d'une certaine latitude sur le choix des configurations géométriques à étudier (surface libre, contra-rotation [49], ... voir chapitre 1).

D'autres perspectives sont envisageables à plus long terme.

D'un point de vue des applications, un de nos objectifs est l'extension du code de calcul actuel pour la simulation des écoulements de Taylor-Couette entre deux cônes. Cette configuration est intéressante aussi bien pour les développements industriels que sur le plan fondamental. Pourtant à ce jour, on ne compte que quelques travaux expérimentaux sur ce sujet [50]. Par

ailleurs, nous pouvons envisager d'étudier les écoulements de fluides non-newtoniens.

D'un point de vue plus fondamental, une analyse de la stabilité des solutions instationnaires, axisymétriques ou non, serait d'intérêt pour avancer une explication concernant les sauts d'une branche de cycles limites à une autre. Cependant, la mise en pratique de ce genre d'analyse nécessite des moyens informatiques considérables en temps et en mémoire.

Cinquième partie

Annexes

Annexe A

Opérateurs différentiels en coordonnées cylindriques

Les équations de Navier-Stokes non-dimensionnées pour un fluide visqueux incompressible sont les suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \\ \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = -\nabla \mathcal{P} + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{V} \\ + \text{conditions aux limites} \end{array} \right.$$

où les inconnues sont le champ de vitesse \mathbf{V} et le champ de pression \mathcal{P} (description eulérienne). Cette annexe se compose de quelques rappels d'analyse vectorielle qui permettent de réécrire les équations de Navier-Stokes sous la forme équivalente suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \\ \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\nabla \times \mathbf{V}) \times \mathbf{V} = -\nabla P - \frac{1}{Re} \nabla \times \nabla \times \mathbf{V} \\ + \text{conditions aux limites} \end{array} \right.$$

Les opérateurs différentiels, exprimés dans le système de coordonnées cylindriques, sont également rappelés.

Opérateur divergence $\nabla \cdot$

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{1}{r} \frac{\partial ru}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

Opérateur gradient ∇

$$\nabla \mathcal{P} = \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial z} \mathbf{e}_z$$

Opérateur rotationnel $\nabla \times$

$$\nabla \times \mathbf{V} = \boldsymbol{\omega}(\eta, \omega, \zeta) \quad \left\{ \begin{array}{l} \eta = \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{\partial v}{\partial z} \\ \omega = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial r} \\ \zeta = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial r v}{\partial r} - \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \end{array} \right.$$

$\boldsymbol{\omega}$ est le vecteur vorticité.

Opérateur de convection $(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V}$

Le terme non-linéaire de convection est réécrit en utilisant la relation d'analyse vectorielle qui suit :

$$\nabla (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A})$$

dans laquelle \mathbf{A} et \mathbf{B} désignent deux vecteurs quelconques. Lorsque $\mathbf{A} = \mathbf{B} = \mathbf{V}$, il vient :

$$(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = \nabla \frac{\mathbf{V}^2}{2} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}$$

Le gradient qui apparaît dans le second membre de la relation ci-dessus est ajouté au gradient de pression des équations de Navier-Stokes. Nous définissons alors la pression motrice P de la façon suivante :

$$P = \mathcal{P} + \frac{\mathbf{V}^2}{2}$$

Opérateur de diffusion $\nabla^2 \mathbf{V}$

L'opérateur de diffusion se réduit à l'opérateur Laplacien vectoriel ∇^2 appliqué au champ de vitesse \mathbf{V} . Pour un champ de vecteur \mathbf{A} quelconque, l'analyse vectorielle fournit le résultat ci-dessous :

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla \times \nabla \times \mathbf{A}$$

Ensuite, nous écrivons cette relation pour le champ de vitesse \mathbf{V} en tenant compte de la contrainte d'incompressibilité, soit :

$$\nabla^2 \mathbf{V} = -\nabla \times \nabla \times \mathbf{V}$$

Les composantes du rotationnel du rotationnel de la vitesse sont les suivantes :

$$\begin{aligned} (\nabla \times \nabla \times \mathbf{V})_r &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial r v}{\partial r} - \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial r} \right) \\ (\nabla \times \nabla \times \mathbf{V})_\theta &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial r v}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \\ (\nabla \times \nabla \times \mathbf{V})_z &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial z} - r \frac{\partial w}{\partial r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

L'équation de continuité est introduite dans les expressions qui précèdent :

$$\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{r} \frac{\partial r u}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}$$

Finalement, nous obtenons :

$$\begin{aligned} (\nabla \times \nabla \times \mathbf{V})_r &= -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial r u}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial r v}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \right) \right] \\ (\nabla \times \nabla \times \mathbf{V})_\theta &= -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial r v}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial r u}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u}{r} \right) \right] \\ (\nabla \times \nabla \times \mathbf{V})_z &= -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \end{aligned}$$

Les termes entre crochets se simplifient respectivement en $2v/r^2$ et $-2u/r^2$. En multipliant les expressions précédentes par -1 , nous retrouvons alors les formules classiques du Laplacien vectoriel $\nabla^2 \mathbf{V}$ en coordonnées cylindriques.

Opérateur Laplacien scalaire ∇^2

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}$$

Autres résultats de l'analyse vectorielle

$$\nabla \cdot \nabla \phi = \nabla^2 \phi \quad , \quad \forall \phi$$

$$\nabla^2 (\nabla \phi) = \nabla (\nabla^2 \phi) \quad , \quad \forall \phi$$

$$\nabla \times (\nabla \phi) = 0 \quad , \quad \forall \phi$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \quad , \quad \forall \mathbf{A}$$

Annexe B

Quelques rappels sur les séries de Fourier

Notre approximation spatiale combine la méthode des différences finies dans les directions non-périodiques (voir §4.3) et une approche pseudo-spectrale dans la direction azimutale. En effet, la géométrie impose naturellement une période 2π aux solutions Ψ des équations de Navier-Stokes. Sous des hypothèses de régularité suffisantes (i.e. : continuité et dérivabilité en tout point du domaine d'intégration), il est possible de définir une série de Fourier convergente dont la somme est égale à Ψ :

$$\Psi(r, \theta, z) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \hat{\phi}^k(r, z) \exp(ik\theta) \quad , \quad \Psi = u, v, w, \phi$$

Soit $\tilde{\Psi}$, la restriction de Ψ à un sous-espace vectoriel de dimension finie N . L'approximation de Fourier dans la direction azimutale consiste alors à écrire chaque fonction Ψ comme une série tronquée à l'ordre N :

$$\tilde{\Psi}(r, \theta, z) = \sum_{k=-N/2}^{k=N/2-1} \hat{\phi}^k(r, z) \exp(ik\theta)$$

Compte tenu des conventions (4.6), la formulation discrète de cette troncature est immédiate :

$$\tilde{\Psi}_{m,l,j} = \sum_{k=-N/2}^{k=N/2-1} \hat{\phi}_{m,j}^k \exp(ik\theta_l) \quad (\text{B.1})$$

Le coefficient spectral discret $\hat{\phi}_k$ associé au mode k est alors obtenu en inversant la relation (B.1) :

$$\hat{\phi}_{m,j}^k = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{l=N} \tilde{\Psi}_{m,l,j} \exp(-ik\theta_l) \quad , \quad \forall k \quad (\text{B.2})$$

L'équation (B.1) est réécrite en regroupant deux à deux les termes correspondant à deux valeurs opposées de k . Pour indice l dans l'intervalle $[0, N - 1]$, nous avons :

$$\tilde{\Psi}_{m,l,j} = \hat{\Psi}_0 + \sum_{k=1}^{k=N/2-1} \hat{\Psi}_{m,j}^k \cos(k\theta_l) + \hat{\Psi}_{m,j}^{N-k} \sin(k\theta_l) \quad (\text{B.3})$$

où nous avons introduit :

la relation (B.3) est alors remplacée par celle qui suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\Psi}_{m,l,j} = \hat{\Psi}_0 + \sum_{k=1}^{k=N/2-1} \hat{\Psi}_{m,j}^k \cos(\alpha k \theta_l) + \hat{\Psi}_{m,j}^{N-k} \sin(\alpha k \theta_l) \\ \theta_l^\alpha = \frac{2\pi l}{\alpha N} \quad , \quad l = 0, \dots, N + 1 \end{array} \right.$$

Cette périodicité de la solution sur une section angulaire $2\pi/\alpha$ ne modifie que les expressions des dérivations azimutales : il faut alors multiplier le second membre des relations (B.4) par α .

- ② L'utilisation d'un maillage décalé impose la définition d'une seconde matrice de passage correspondant aux indices demi-entiers $l + \frac{1}{2}$.

Annexe C

Diagrammes de référence

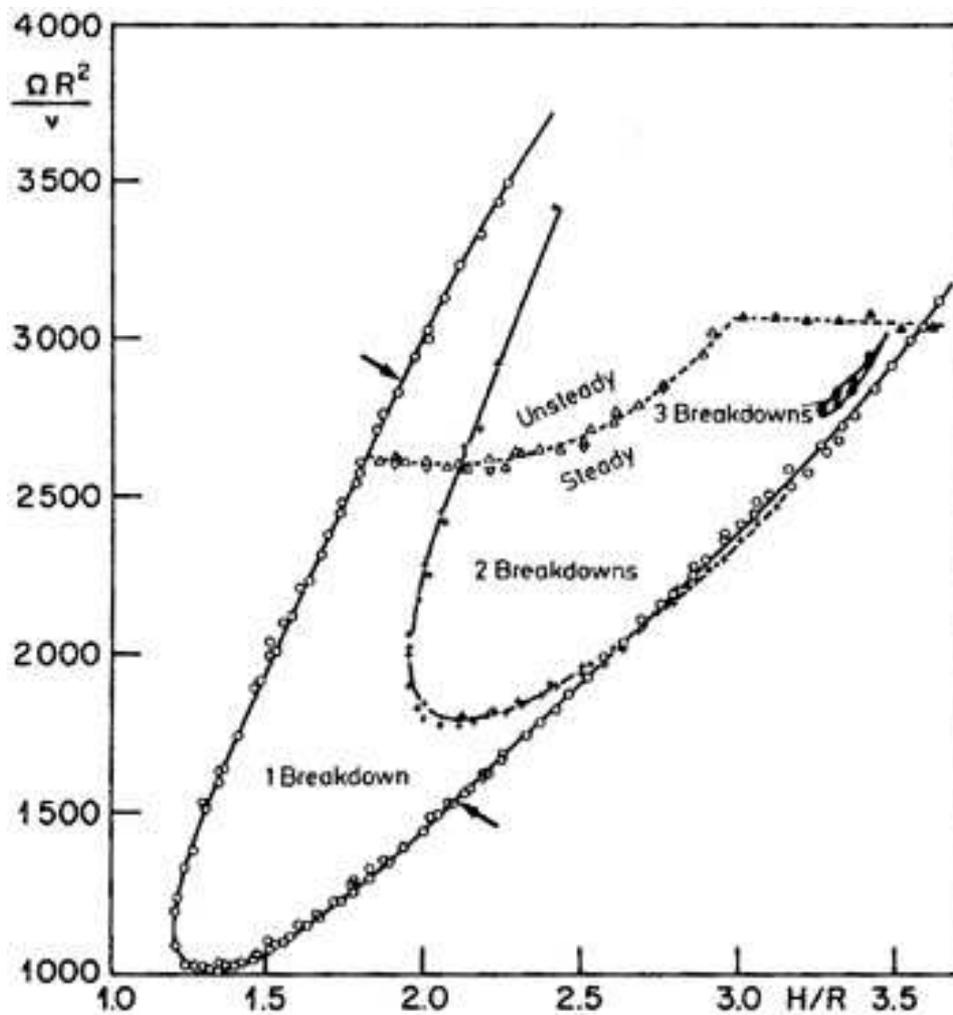


FIG. C.1 – Régimes d'écoulements stationnaires ou non, avec ou sans éclatement tourbillonnaire. Résultats expérimentaux d'Escudier (1984). Ce diagramme est une **reproduction** de la figure 7 p.195. de la publication [23].

FIG. C.2 – Nombres de Reynolds critiques Re_{cr} pour les cinq premiers modes azimutaux k en fonction du rapport d'aspect $\gamma = H/R$. Résultats numériques de **Gelfgat, Bar-Yoseph & Solan (2001)**. Ce diagramme correspond à la figure 1 p.370 de la publication [28]. Ce document a été fourni par **A. Y. Gelfgat**.

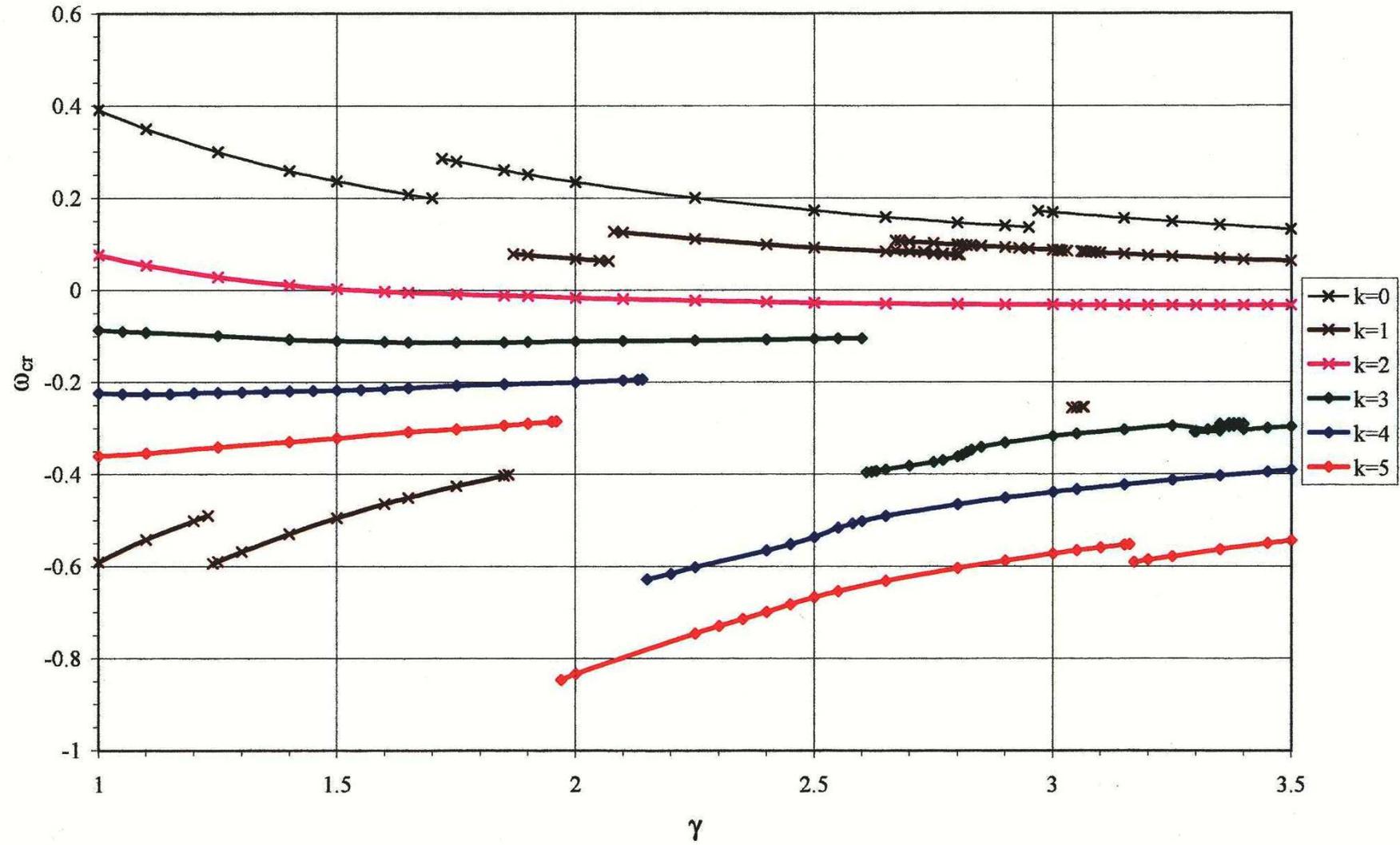
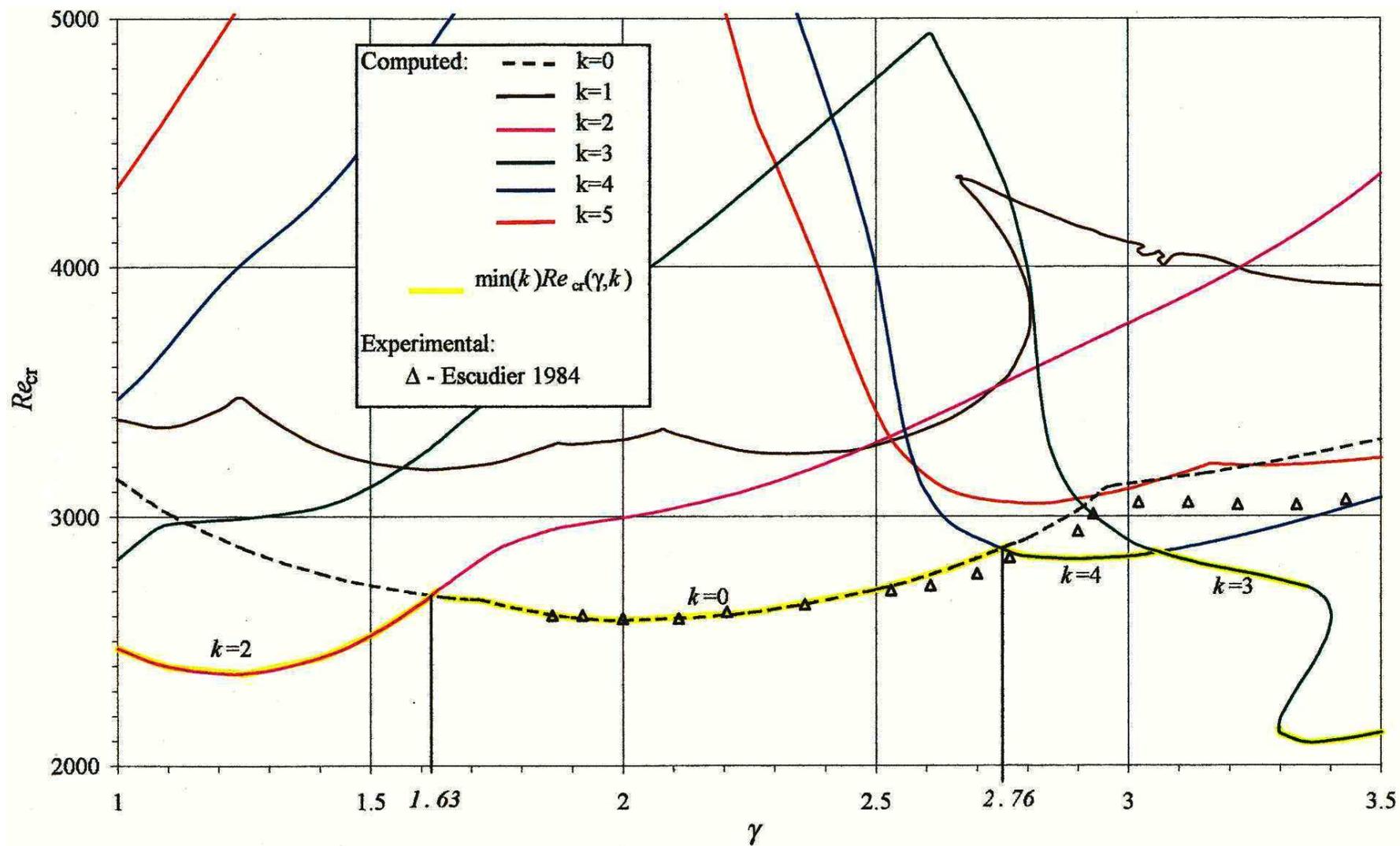


FIG. C.3 – Fréquences critiques ω_{cr} pour les cinq premiers modes azimutaux k en fonction du rapport d'aspect $\gamma = H/R$. Résultats numériques de **Gelfgat, Bar-Yoseph & Solan (2001)**. Ce diagramme correspond à la figure 2 p.371 de la publication [28]. Ce document a été fourni par **A. Y. Gelfgat**.



Annexe D

Performances numériques

Les calculs présentés dans ce mémoire ont été réalisés sur la machine vectorielle UQBAR de l'IDRIS (Orsay, France). Il s'agit d'un système NEC constitué d'une grappe de trois super-calculateurs (ou trois nœuds) SX5 possédant une architecture parallèle munie de processeurs vectoriels :

- un nœud à 16 processeurs et 128 Go de mémoire partagée
- un nœud à 16 processeurs et 64 Go de mémoire partagée
- un nœud à 6 processeurs et 32 Go de mémoire partagée

La mémoire du système est physiquement distribuée entre chaque nœud et partagée au sein d'un même nœud entre tous les processeurs. La puissance crête d'un processeur est de 8 Gflops.

Dans le tableau TAB. D.1, nous donnons quelques indications concernant les temps de calcul et les performances de notre code. On désigne par :

- Tours : temps en nombre de tours effectués par le rotor,
- Grille = $(M + 1) \times N \times (J + 1)$: nombre de points de calcul,
- Niter = $\frac{\text{Tours}}{\Delta t}$: nombre d'itérations en temps,
- CPU : temps CPU : temps consommé en seconde,
- Mflops : nombre d'opérations flottantes par seconde,
- Perf = $\frac{\text{CPU}}{\text{Grille} \times \text{Niter}}$: performance du code, c'est-à-dire le temps de calcul en seconde nécessaire par pas de temps et par point de calcul.

h	Re	Grille	Δt^{-1}	Tours	Niter	Mflops	CPU	Perf
1.0	3000	$161 \times 32 \times 161$	200	50	10000	5045	2887.62	3.481×10^{-7}
1.5	2800	$161 \times 32 \times 241$	400	100	40000	5574	15757.33	3.173×10^{-7}

TAB. D.1 – Performances numériques des calculs tridimensionnels de stabilité non-linéaire.

Bibliographie

- [1] E. BARBOSA & O. DAUBE (2001). A finite differences method in cylindrical coordinates for 3D incompressible flows. *4th ECCOMAS Computational Fluid Dynamics Conference*. Swansea, UK, September 4–7, 2001(avec acte de 20 pages).
- [2] E. BARBOSA & O. DAUBE (2001). Numerical investigation of the stability of the 3D flow in a cylindrical container with a rotating lid. *426th EUROMECH & ERCOFTAC Colloquium on Swirling Flows*. Bergen–Tromsø, Norway, September 16–20, 2001(sans acte.).
- [3] E. BARBOSA & O. DAUBE (2002). A finite differences method for 3D incompressible flows in cylindrical coordinates. *Submitted to Comp. & Fluids*.
- [4] E. BARBOSA & O. DAUBE (2002). Solutions multiples pour les écoulements tridimensionnels en rotation. *C. R. Acad. Sci. Paris* **3**, 1–6.
-
- [5] T. DE ROQUEFORT ALZIARY & G. GRILLAUD (1978). Computation of Taylor vortex flow by a transient implicit method. *Comput. Fluids* **6**, 259–269.
- [6] G. K. BATCHELOR (1951). Note on a class of solutions of the Navier-Stokes equations representing steady rotationally-symmetric flows. *Quart. Journ. Mech. and Applied Math.* **4**, 29–41.
- [7] H. M. BLACKBURN & J. M. LOPEZ (2000). Symmetry breaking of the flow in a cylinder driven by a rotating endwall. *Phys. Fluids* **12** (11), 2698–2701.
- [8] H. M. BLACKBURN & J. M. LOPEZ (2002). Modulated rotating waves in an enclosed swirling flow. *J. Fluid Mech.* **465**, 33–58.
- [9] U. T. BÖDEWADT (1940). Die Drehströmung über festem Grunde. *Z. Angew. Math. Mech.* **20**, 241–253.
- [10] J. E. BURKHALTER & E. L. KOSHMEIDER (1974). Steady supercritical Taylor vortices after sudden starts. *Physics of Fluids* **17** (11), 1929–1935
- [11] R. M. CLEVER & F. H. BUSSE (2000). Convection in a low Prandtl number fluid layer rotating about a vertical axis. *Eur. J. Mech. B - Fluids* **19**, 213–227.
- [12] G. COGNET (1968). Contribution à l'étude de l'écoulement de Couette par la méthode polographique. *Thèse de doctorat de l'Université de Nancy*.
- [13] D. COLES (1965). Transitions in circular Couette flows. *J. Fluid Mech.* **21**, 385–425.
- [14] N. COUSIN-RITTEMARD, O. DAUBE & P. LE QUÉRÉ (1998). Sur la nature de la première bifurcation des écoulements interdisques. *C. R. Acad. Sci. Paris* **326**, 359–366.

- [15] N. COUSIN-RITTEMARD, O. DAUBE & P. LE QUÉRÉ (1999). Description des couches limites des écoulements interdusques en configuration rotor-stator. *C. R. Acad. Sci. Paris* **327**, 215–220.
- [16] N. COUSIN-RITTEMARD, O. DAUBE & P. LE QUÉRÉ (1999). Structuration de la solution stationnaire des écoulements interdusques en configuration rotor-stator. *C. R. Acad. Sci. Paris* **327**, 221–226.
- [17] O. CZARNY, E. SERRE, P. BONTOUX & R. M. LUEPTOW (2001). Identification of complex flows in Taylor-Couette counter-rotating cavities. *C. R. Acad. Sci. Paris* **329**, 727–733.
- [18] O. DAUBE & J. N. SØRENSEN (1989). Simulation numérique de l'écoulement périodique axisymétrique dans une cavité cylindrique. *C. R. Acad. Sci. Paris* **308**, 463–469.
- [19] O. DAUBE (1991). Numerical simulation of axisymmetric vortex breakdown in a closed cylinder. *Lectures in Applied Mathematics* **28**, 131–152.
- [20] O. DAUBE (1992). Resolution of the 2D Navier-Stokes equations in velocity-vorticity form by means of an influence matrix technique. *J. Comput. Phys.* **103**, 402–414.
- [21] O. DAUBE & P. LE QUÉRÉ (2002). Numerical investigation of the first bifurcation for the flow in a rotor-stator cavity of radial aspect 10. *Comp. & Fluids* **31**, 481–494.
- [22] V. EKMAN (1950). On the influence of the Earth's rotation on ocean currents. *Ark. Math. Ast. Fys.* **2**, 1–52.
- [23] M. P. ESCUDIER (1984). Observations of the flow produced in a cylindrical container by a rotating endwall. *Experiments in Fluids* **2**, 189–196.
- [24] C. A. F. FLETCHER (1991). Computational techniques for fluid dynamics. Volumes I & II, Springer-Verlag, Berlin.
- [25] K. FUJIMURA, H. S. KOYAMA & J. M. HYUN (1997). Time-dependent vortex breakdown in a cylinder with a rotating lid. *ASME J. Fluids Engrg.* **119**, 450–453.
- [26] G. GAUTHIER, P. GONDRET & M. RABAUD (2001). Structures de l'écoulement entre deux disques tournants. *XV^{ème} Congrès Français de Mécanique*. Nancy, France, 3–7 Septembre 2001.
- [27] A. Y. GELFGAT, P. Z. BAR-YOSEPH, & A. SOLAN (1996). Stability of confined swirling flow with and without vortex breakdown. *J. Fluid Mech.* **311**, 1–36.
- [28] A. Y. GELFGAT, P. Z. BAR-YOSEPH, & A. SOLAN (2001). Three-dimensional instability of axisymmetric flow in a rotating lid-cylinder enclosure. *J. Fluid Mech.* **438**, 363–377.
- [29] K. GODA (1979). A multistep technique with implicit difference schemes for calculating two or three dimensional cavity flows. *J. Comput. Phys.* **30**, 76–95.
- [30] J. M. HYMAN & M. SHASHKOV (1997). Natural discretizations for the divergence, gradient and curl on logically rectangular grids. *Comp. Math. Applic.* **33**, 81–104.
- [31] R. JACQUES (1997). Simulations numériques d'écoulements transitionnels et turbulents dans des configurations de type rotor-stator. *Thèse de doctorat de l'Université Paris XI, Orsay*.

- [32] K. KHELLAF (1994). Étude numérique de la convection thermique mixte dans les systèmes annulaires cylindriques tournants. *Thèse de doctorat du Conservatoire National des Arts et Métiers, Paris*.
- [33] E. KNOBLOCH (1994). Bifurcations in rotating systems. *Lectures on Solar Planetary Dynamos* (ed. M. R. E. Poctor & A. D. Gilbert). Cambridge University Press, 331–372.
- [34] J. M. LOPEZ (1989). Unsteady vortex breakdown in an enclosed cylinder flow. *Tenth Australasian Fluids Mechanics Conference*. University of Melbourne, December 1989, Paper 9A-1.
- [35] J. M. LOPEZ & G. L. BROWN (1989). Physical mechanisms of vortex breakdown. *Tenth Australasian Fluids Mechanics Conference*. University of Melbourne, December 1989, Paper 12B-3.
- [36] J. M. LOPEZ (1990). Axisymmetric vortex breakdown. Part 1. Confined swirling flow. *J. Fluid Mech.* **221**, 533–552.
- [37] J. M. LOPEZ & A. D. PERRY (1992). Axisymmetric vortex breakdown. Part 2. Onset of periodic flow and chaotic advection. *J. Fluid Mech.* **234**, 449–471.
- [38] J. M. LOPEZ & F. MARQUES (2002). Modulated Taylor-Couette flow : onset of spiral modes. *Theor. Comp. Fluid Dynamics* **16**, 59–69.
- [39] J. M. LOPEZ & F. MARQUES (2001). Dynamic of 3-tori in a periodically forced Navier-Stokes flow. *Phys. Rev. Lett.* **85**, 972–975.
- [40] J. M. LOPEZ, F. MARQUES & J. SANCHEZ, (2001). Oscillatory modes in an enclosed swirling flow. *J. Fluid Mech.* **439**, 109–129.
- [41] J. M. LOPEZ, J. E. HART, F. MARQUES, S. KITTELMAN & J. SHEN, (2002). Instability and mode interactions in a differentially-driven rotating cylinder. *J. Fluid Mech.* **462**, 383–409.
- [42] O. LUCCA-NEGRO & T. O'DOHERTY, (2000). Vortex breakdown : a review. *Prog. Energy Combust. Sci.* **27**, 431–481.
- [43] H. J. LUGT & M. ABOUD (1987). Axisymmetric vortex breakdown with and without temperature effects in a container with a rotating lid. *J. Fluid Mech.* **179**, 179–200.
- [44] Y. MADAY & C. BERNARDI (1992). Approximations spectrales de problèmes aux limites elliptiques. *Mathématiques et Applications* **10**, SMAI, Springer-Verlag.
- [45] P. MANNEVILLE (1998). Systèmes dynamiques et chaos. *Cours de D.E.A. 1998–1999*.
- [46] A. MANGIN (1990). Expérimentations numériques des phénomènes tourbillonnaires. *Thèse de doctorat de l'Université de Paris VI*.
- [47] F. MARQUES & J. M. LOPEZ (2001). Precessing vortex breakdown mode in an enclosed cylinder flow. *J. Fluid Mech.* **179**, 179–200.
- [48] F. MARQUES, J. M. LOPEZ & J. SHEN (2002). Mode interactions in an enclosed swirling flow : a double Hopf between azimuthal wavenumbers 0 and 2. *J. Fluid Mech.* **455**, 263–281.
- [49] C. NORE, L. S. TUCKERMAN, O. DAUBE & S. XIN (2002). The 1 : 2 mode interaction in exactly counter-rotating von Kármán swirling flow. *Submitted to J. Fluid Mech.*

- [50] M. N. NOUI-MEHIDI, N. OHMURA & K. KATAOKA (2001). An experimental investigation of flow mode selection in a conical Taylor-Couette system. *Int. J. Fluid Dynamics* **5** (Article 1), 1–16.
- [51] J. C. F. PEREIRA & J. M. M. SOUSA (1997). Steady and transient topologies of confined vortex breakdown generated by a rotating cone. *Optical Diagnostics in Engineering* **2**, 61–70.
- [52] J. C. F. PEREIRA & J. M. M. SOUSA (1999). Confined vortex breakdown generated by a rotating cone. *J. Fluid Mech.* **385**, 287–323.
- [53] V. G. PRIMAK (1995). Pseudospectral algorithms for Navier-Stokes simulation of turbulent flows in cylindrical geometries with coordinate singularity. *J. Comp. Phys.* **30**, 366–379.
- [54] L. G. RAGUIN, M. SHANNON & J. G. GEORGIADIS (2001). Dispersion radiale et axiale dans les écoulements de Taylor-Couette et Poiseuille. *Heat. Mass. Trans.* **44**, 3295–3306.
- [55] N. ROBIDOUX (1996). A new method of construction of adjoint gradients and divergences on logically rectangular smooth grids. *Finite volumes for complex applications : problems and perspectives, First International Symposium* Rouen, France, July 15–18, 1996.
- [56] J. SANCHEZ, F. MARQUES & J. M. LOPEZ (2001). A continuation and bifurcation technique for Navier-Stokes flows. *J. Comp. Phys.* **180**, 78–98.
- [57] O. SAVAS (1987). Stability of Bödewadt flows. *J. Fluid Mech.* **183**, 77–94.
- [58] E. SERRE E. CRESPO DEL ARCO & P. BONTOUX (1999). Instabilité tridimensionnelle dans une cavité inter-disque de type rotor-stator. *C. R. Acad. Sci. Paris* **327**, 1139–1146.
- [59] E. SERRE (2000). Instabilités de couche limite dans des écoulements confinés en rotation. Simulation numérique directe par une méthode spectrale de comportements complexes. *Thèse de doctorat de l'Université de Aix-Marseille II*.
- [60] E. SERRE & P. BONTOUX (2001). Éclatement tourbillonnaire dans une cavité rotor-stator cylindrique. *C. R. Acad. Sci. Paris* **329**, 671–677.
- [61] E. SERRE, P. BONTOUX & R. KOTARBA (2001). Numerical simulation of the transition in the three-dimensional rotating flows with walls : Boundary layer instability. *Int. J. Fluid Dynamics* **5** (Article 2), 17–30.
- [62] E. SERRE & P. BONTOUX (2002). Vortex breakdown in a three-dimensional swirling flow. *J. Fluid Mech.* **459**, 347–370.
- [63] J. N. SØRENSEN & E. A. CHRISTENSEN (1995). Direct numerical simulation of rotating fluid flow in a closed cylinder. *Phys. Fluids* **7** (4), 764–778.
- [64] F. SOTIROPOULOS & Y. VENTIKOS (1998). A finite-difference scheme for three-dimensional incompressible flows in cylindrical coordinates. *Int. J. Heat & Fluid Flow* **19**, 446–458.
- [65] F. SOTIROPOULOS & Y. VENTIKOS (2001). The three-dimensional structure of a confined flow generated by a rotating disc. *J. Fluid Mech.* **426**, 155–175.
- [66] A. SPOHN (1991). Écoulement et éclatement tourbillonnaires engendrés par un disque tournant dans un enceinte cylindrique. *Thèse de doctorat de l'Université Joseph Fourier, Grenoble*.

- [67] A. SPOHN, M. MORY & E. J. HOPFINGER (1998). Experiments on vortex breakdown in a confined flow generated by a rotating disc. *J. Fluid Mech.* **370**, 73–99.
- [68] J. L. STEVENS, J. M. LOPEZ & B. J. CANTWELL (1998). Oscillatory flow states in an enclosed cylinder with a rotating endwall. *J. Fluid Mech.* **389**, 101–118.
- [69] K. STEWARTSON (1953). On the flow between two rotating axial disks. *Proc. Camb. Phil. Soc.* **49**, 333–341.
- [70] G. I. TAYLOR (1923). Stability of viscous liquid contained between two rotating cylinders. *Phil. Trans. Roy. Soc., London Ser. A*, **223**, 289–343.
- [71] R. M. TOUIHRI, H. BENHADID & D. HENRY (1999). On the onset of convective instabilities in cylindrical cavities heated from below. I. Pure thermal case. *Phys. Fluids* **11** (8), 2078–2088.
- [72] N. TSITVERBLIT (1993). Vortex breakdown in a cylindrical container in the light of continuation of steady solution. *Fluid Dyn. Res.* **11**, 19–35.
- [73] L. S. TUCKERMAN (1989). Steady-state solving via Stokes preconditioning. Recursion relations for elliptic operators. *Lectures notes in Physics*, 573–577, (ed. D. L. Dwoyer, M. Y. Hussaini & R. G. Voigt), Springer, New-York.
- [74] R. VERZICCO & P. ORLANDI (1996). A finite-difference scheme for three-dimensional incompressible flows in cylindrical coordinates. *J. Comput. Phys.* **123**, 402–414.
- [75] H. U. VOGEL (1968). Experimentelle ergebnisse über die laminare strömung in einen zylindrischen gehäuse mit darin rotierender scheinbe. *Tech. Rep.*, Bericht 6, Max-Planck-Inst.
- [76] S. P. WILKINSON & M. R. MALIK (1985). Stability experiments in the flow over a rotating disk. *AIAA J.* **23**, 588–595.
- [77] S. XIN, P. LE QUÉRE & O. DAUBE (1997). Natural convection in differentially heated horizontal cylinder : effects of Prandtl number on flow structure and instability. *Phys. Fluids* **9** (4), 1014–1033.

Résumé – L'écoulement d'un fluide visqueux incompressible dans une cuve cylindrique rotor-stator est étudié. Ces écoulements ont fait l'objet de récents travaux numériques tridimensionnels pour des rapports d'aspect $h > 1.75$. On propose une étude numérique de la rupture de l'axisymétrie de l'écoulement dans une cavité de rapport d'aspect réduit ($h = 1$ et 1.5) et des nombres de Reynolds $Re < 8500$.

Les équations de Navier-Stokes sont résolues par un code vitesse-pression en coordonnées cylindriques qui repose sur des méthodes aux différences finies du second ordre. Deux approches numériques sont mises en œuvre pour mener cette investigation.

- L'une consiste à linéariser les équations autour d'un écoulement de base axisymétrique stationnaire. Les conditions initiales résultent de la superposition de l'écoulement de base et d'une perturbation aléatoire. Cette analyse de stabilité linéaire permet de déterminer le premier seuil de criticalité et met en évidence le mode azimutal k_c le plus instable.
- L'autre consiste à intégrer les équations du mouvement avec différentes conditions initiales : (i) soit un écoulement de base axisymétrique stationnaire perturbé aléatoirement, (ii) soit un état où le fluide est au repos, (iii) soit un régime établi trouvé pour une autre valeur de Re .

L'analyse de stabilité non-linéaire (i) montre que le développement d'un mode k_c est responsable d'une bifurcation de Hopf super-critique lorsque Re dépasse une première valeur critique. L'écoulement de base bascule alors vers des solutions stationnaires de période T , dont les caractéristiques spatiales dépendent de la valeur de k_c . L'axisymétrie de l'écoulement n'est brisée que lorsque $k_c \neq 0$. Dans ce cas, les solutions super-critiques sont des ondes qui exhibent une invariance par rotation d'angle $2\pi/k_c$ autour de l'axe et qui tournent avec une période azimutale $T_{RWk_c} = k_c \times T$. L'écoulement subit ensuite d'autres bifurcations et les caractéristiques spatio-temporelles des ondes tournantes bifurquées sont présentées en détails. L'utilisation d'autres conditions initiales (ii)–(iii) met en évidence des branches de solutions multiples : il apparaît que la convergence vers l'une ou l'autre des solutions possibles dépend de la façon dont est répartie l'énergie cinétique de départ.

Mots-clés – mécanique des fluides / écoulement en rotation / brisure de l'axisymétrie / transition / simulation numérique directe

Title – NUMERICAL SIMULATION OF THREE-DIMENSIONAL FLOWS IN A ROTATING LID-CYLINDER CAVITY

Abstract – The flow in a cylindrical tank filled with an incompressible viscous fluid is considered. The motion is due to the rotation of one lid at constant angular velocity. Recent three-dimensional computations have been recently performed for aspect ratios $h > 1.75$. The aim of this work is the numerical investigation of the symmetry-breaking of the flow in a cavity of reduced aspect ratio ($h = 1$ and 1.5) and Reynolds numbers $Re < 8500$.

The resolution of the Navier-Stokes equations in velocity-pressure formulation written in cylindrical coordinates is accomplished using second-order finite differences methods. Two methodologies have been applied to study the loss of axisymmetry.

- The governing equations cast in perturbation form with respect to an axisymmetric steady base flow, in linearized form, are solved starting from a randomly distributed initial perturbation. This linear stability analysis allows for the determination of the first threshold and highlights the most unstable azimuthal mode k_c .
- The integration of the full Navier-Stokes equations is carried out starting from initial conditions that may be either a randomly distributed initial perturbation (i) or a rest state (ii) or an instantaneous field from a previous computation (iii).

The nonlinear stability analysis (i) shows that a supercritical Hopf bifurcation involving a dominant azimuthal mode k_c occurs when Re exceeds a first threshold. Solutions of the first branch are periodic, having associated period T , and their spatial structure depends on the value k_c . Axisymmetry is broken beyond the bifurcation only when $k_c \neq 0$. In this case, the result is a wave which rotates around the axis with a period $T_{RWk_c} = k_c \times T$. The flow undergoes then subsequent bifurcations as Re is increased. The characteristics of the bifurcated rotating waves are presented in details. Starting from other initial conditions (ii)–(iii) highlights regions of hysteresis : the reached branch depends on the way the initial kinetic energy is distributed.

Key words – fluid mechanics / swirling flow / symmetry-breaking / transition / direct numerical simulation