



HAL
open science

Modélisation des instabilités en géomécanique, application aux glissements de terrains

F. Prunier

► **To cite this version:**

F. Prunier. Modélisation des instabilités en géomécanique, application aux glissements de terrains. Mécanique [physics.med-ph]. Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG, 2008. Français. NNT: . tel-00355769

HAL Id: tel-00355769

<https://theses.hal.science/tel-00355769>

Submitted on 23 Jan 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

INSTITUT POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE

N° attribué par la bibliothèque :

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

THÈSE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'Institut Polytechnique de Grenoble

Spécialité « 2MGE » :

Matériaux, Mécanique, Génie civil, Electrochimie

préparée au laboratoire S , S , S - R

dans le cadre de *l'Ecole Doctorale « I-MEP2 » :*

Ingénierie - Matériaux Mécanique Energétique Environnement Procédés Production

présentée et soutenue publiquement par

Florent P

le 25 novembre 2008

**Modélisation des instabilités en géomécanique,
application aux glissements de terrains**

Directeur de thèse : Félix D

Co-directeur de thèse : Farid L

JURY

M. Patrick	B	Professeur à l'ENPC	Président
M. Manuel	P	Professeur à l'université de Madrid	Rapporteur
M. Lyesse	L	Professeur à l'EPFL	Rapporteur
M. Félix	D	Professeur à Grenoble INP	Directeur de thèse
M. Farid	L	Chargé de recherche à l'INERIS (H.D.R.)	Co-directeur de thèse
M. Frédéric	C	Chargé de recherches FNRS à l'université de Liège	Examineur
M. Frédéric	D	Professeur à Grenoble INP	Examineur

Remerciements

Voici le moment d'apporter un point final à ce manuscrit et à ma vie d'étudiant reconnue en temps que telle. Après la baisse de pression liée à la soutenance, j'aimerais remercier ceux qui ont su m'aider pour mener à bien mes premiers travaux de recherche, et passer cette épreuve dans de bonnes conditions.

Je tiens à remercier en premier lieu mon directeur de thèse Félix Darve, qui a su me faire confiance après un simple entretien le dernier week-end de juillet 2005, alors que je n'avais pas encore soutenu mon stage de Master 2, et que durant ma formation d'ingénieur en mécanique, je n'avais jamais entrevu les thématiques du génie civil et encore moins de la géotechnique. Durant toute cette période cela a été un vrai plaisir pour moi, de pouvoir échanger et travailler avec lui. Au delà du niveau scientifique élevé qu'il a su m'apporter, c'est probablement plus encore pour ses qualités humaines, sa passion de la recherche et son inébranlable optimisme que je dois le remercier.

Je remercie en outre cordialement Farid Laouafa, mon co-encadrant qui malgré la distance géographique nous séparant, a su aussi orienter mes recherches, et répondre à certains de mes doutes.

Mes sincères remerciements vont aussi à tous les membres du jury, qui se sont donné la peine de se déplacer et d'évaluer mon travail : monsieur Patrick de Buhan, a accepté de présider ce jury, messieurs Manuel Pastor et Lyesse Laloui ont pris le temps de lire en profondeur mon manuscrit, de l'évaluer et de le corriger en partie, Monsieur Frédéric Collin a accepté l'invitation, et m'a aidé tout au long de cette période dans l'utilisation du code Lagamine, et enfin Frédéric Dufour, qui en arrivant sur Grenoble, s'est intéressé à mes activités, et en acceptant de poursuivre avec moi durant mes six derniers mois au laboratoire, permet que ce travail ne soit pas un volet qui se ferme sur les trois années passées, mais une porte qui s'ouvre sur une probable future carrière dans le monde de la recherche.

Enfin, je remercie très chaleureusement tous les membres du laboratoire 3S-R avec qui les contacts sont toujours amicaux et sympathiques. Les réunions *gâteaux* et *croissants* une fois par semaine, ainsi que certaines réunions *au sommet* avec un cercle certes un peu plus restreint de participants mais incluant toutes catégories du personnel (permanents et doctorants) sont un bon exemple de la bonne ambiance générale qui y règne. Même si cela peut paraître anodin, il me semble que des relations interpersonnelles simples et amicales sont très importantes, voir nécessaires au bon fonctionnement du laboratoire et de la recherche. Si on fait l'hypothèse non démontrée mais apparemment souvent vérifiée que les problèmes principaux relatifs au travail sont plus d'ordre humain et relationnel que d'ordre technique, alors une des clefs de la réussite tient ici.

Ce mémoire de thèse synthétise trois années de recherches dédiées à la modélisation numérique des instabilités et ruptures se produisant dans les géomatériaux et ouvrages comme les glissements de terrains. L'approche considérée dans ces modélisations relève de la mécanique des milieux continus et est fondée sur l'exploitation de lois de comportement phénoménologiques et l'utilisation d'un code aux éléments finis. L'étude de ces instabilités est effectuée grâce au critère de Hill (Hill (1958)) qui est basée sur le signe du travail du second ordre. Après un chapitre bibliographique sur les lois de comportements pour matériaux granulaires et sur les critères de stabilité matérielle, le second chapitre est dédié à l'étude du critère du travail du second ordre local par une analyse au niveau du comportement d'un point matériel. Le troisième chapitre propose une étude de ce critère à l'échelle d'une structure, et repose sur l'analyse aux valeurs propres et vecteurs propres de la partie symétrique de la matrice de rigidité globale issue d'un calcul par éléments finis. Enfin, dans le dernier chapitre nous présentons les modélisations de deux glissements de terrains : Petacciato en Italie, et Ballendaz en Savoie, qui se sont manifestés après des périodes de fortes pluies. L'association d'un modèle hydro-mécanique couplé prenant en compte la saturation partielle des sols, et du critère du travail du second ordre a permis de décrire correctement les surfaces de ruptures observées in situ.

Mots Clefs : géomatériaux, élasto-plasticité, modèles incrémentaux non linéaires, instabilités matérielles, bifurcation, rupture diffuse, rupture localisée, critère de Hill, stabilité des pentes, risques naturels, éléments finis, valeurs propres, vecteurs propres

Abstract

This Ph.D. manuscript synthesises three years of research dedicated to the numerical modelling of instabilities and failures which occur in geomaterials and structures like landslides. The considered approach in these modellings is based on the continuum mechanics and considers phenomenological constitutive models implemented in finite element codes. Instabilities are studied with the help of Hill's criterion (Hill (1958)) which is based on the sign of the second order work. After a bibliographical chapter about granular material constitutive models and material stability criteria, the second chapter deals with the local second order work criterion and the analysis is performed at the material point level. The third chapter suggests a study at the structure scale, built on eigenvalues and eigenvectors analysis of the symmetrical part of the global tangent stiffness matrix arising from finite element computation. Finally, in the latest chapter, we present the modelling of two landslides : Petacciato in Italy, and Ballendaz in Savoie, which occurred after strong rainy periods. The use of a coupled hydro-mechanical model taking in account the partial saturation of soils, and of the second order work criterion allowed to describe accurately the slip surfaces observed in situ.

Key words : geomaterials, elasto-plasticity, incrementally non linear model, material instabilities, bifurcation, localised mode of failure, diffuse mode of failure, Hill's criterion, slope stability, natural hazard, finite elements, eigenvalues, eigenvectors

Table des matières

Remerciements	i
Résumé	ii
Abstract	v
Table des matières	vii
Liste des figures	xi
Liste des tableaux	xvi
Introduction	1
Chapitre 1 Étude bibliographique	5
1.1 Introduction	5
1.2 Définitions	5
1.3 Exemples de ruptures dans les géomatériaux	8
1.3.1 Essais homogènes de laboratoires	8
1.3.2 Glissements de terrains	9
1.4 Modélisation du comportement des géomatériaux	13
1.4.1 Généralités : grandes classes de lois de comportement	13
1.4.1.1 Comportement élastique	13
1.4.1.2 Comportement élasto-plastique	14
1.4.1.3 Digression sur l'expérience des deux ballons : explication qualitative	16
1.4.1.4 Comportement de milieux fluides simples	18
1.4.2 Lois de comportement pour les matériaux non visqueux	19
1.4.2.1 Généralités sur l'écriture de lois élasto-plastiques	19
1.4.2.2 Modèle élasto-plastique Plasol	21
1.4.2.3 Modèles de plasticité généralisée de Pastor-Zienkiewicz	24
1.4.2.4 Modèles incrémentaux de Darve	28

1.5	Stabilité matérielle ou bifurcation dans les géomatériaux	31
1.5.1	Limite de plasticité et critère de plasticité	31
1.5.2	Critère de localisation de Rice	32
1.5.3	Condition suffisante de stabilité de Hill : travail du second ordre	33
1.6	Conclusion	34
Chapitre 2	Bifurcation au niveau du point matériel : travail du second ordre local	35
2.1	Introduction	35
2.2	Limite du domaine de bifurcation, cônes d'instabilité pour les problèmes 2D .	36
2.2.1	Cas de l'axisymétrie	36
2.2.2	Cas de la déformation plane	41
2.2.3	Études supplémentaires en axisymétrie	43
2.2.3.1	Décomposition du travail du second ordre en partie sphérique et déviatoire	43
2.2.3.2	Comparaisons de cônes d'instabilité pour les lois Plasol, Pastor et INL .	46
2.3	Généralisation dans le cas tridimensionnel	49
2.3.1	Équation de base : cônes et domaine de bifurcation 3D	49
2.3.1.1	Étude analytique	49
2.3.1.2	Résultats numériques	51
2.3.2	Interprétation physique	62
2.3.2.1	Règle de rupture généralisée	62
2.3.3	Simulation de la rupture diffuse par des essais de laboratoire	66
2.4	conclusion	68
Chapitre 3	Analyse de la bifurcation à l'échelle de l'ouvrage	71
3.1	Introduction	71
3.2	Présentation générale du code Lagamine	71
3.3	Travaux du second ordre local et global : intégration numérique	75
3.4	Analyse de la matrice de rigidité	77
3.4.1	Compression triaxiale drainée homogène	77
3.4.2	Modélisation axisymétrique d'une fondation sur un massif de sol	83
3.4.3	Étude d'une pente soumise à une fondation superficielle	88
3.4.4	conclusion	95
Chapitre 4	Modélisation de glissements de terrains	97
4.1	Introduction	97
4.2	Comportement hydro-mécanique dans les milieux poreux non saturés	97

4.2.1	Physique élémentaire de l'eau dans les sols non saturés	97
4.2.1.1	Comportement statique	97
4.2.1.2	Transfert dans les milieux poreux	100
4.2.2	Modèle utilisé dans Lagamine	101
4.2.2.1	Courbe de rétention d'eau	101
4.2.2.2	Perméabilité	102
4.2.2.3	Couplage hydro-mécanique : contrainte effective	103
4.3	Modélisation des glissements de Petacciato et Ballandaz	104
4.3.1	Phénomène physique à modéliser : principe de la modélisation	104
4.3.2	Présentation de Petacciato et modélisation	105
4.3.3	Présentation de Ballandaz et modélisation	111
4.3.4	Conclusion	121
	Conclusions	121
	Annexes	128
	Chapitre A Comparaison de V_0 avec dU_f pour un sol dense	129
	Chapitre B Granulométrie par diffraction laser: sol de Ballandaz	131
	Bibliographie	131

Liste des figures

1.1	Illustration des définitions de stabilité dans le cas d'une position d'équilibre : (a) stabilité marginale ou indifférente, (b) stabilité asymptotique, (c) instabilité	6
1.2	Rupture par bande de cisaillement lors d'un triaxial drainé sur sable dense (Desrues et Chambon (2002)) d'après (Colliat-Dangus (1986))	9
1.3	Exemple de liquéfaction lors d'un essai triaxial non-drainé, causée par une "perturbation" après le pic de q (Servant <i>et al.</i> (2005))	9
1.4	Exemple de dégâts causés par le glissement de terrain de Petacciato en 1996.	10
1.5	Aperçu des coulées de boue torrentielles qui ont détruit une bonne partie de Quindici le 5 mai 1998.	11
1.6	Ouvrage géotechnique construit à la suite de cet évènement (source personnelle).	11
1.7	Glissement de terrain qui détruisit San Juan del Grijalva et obstrua le fleuve le 5 novembre 2007. Photos actuellement disponibles sur : www.cfe.gob.mx	12
1.8	Évolution des travaux d'excavation permettant la remise en service du fleuve et de ses installations hydroélectriques. Photos actuellement disponibles sur : www.cfe.gob.mx	12
1.9	Courbe caractéristique issue d'un essai de traction simple sur un ruban de caoutchouc. Tiré de Royis (2005)	14
1.10	Courbe issue d'un essai de traction simple sur une barre d'acier doux HA8 servant au ferrailage des bétons. Tiré d'un tp effectué à l'IUT GC de Grenoble en 2007	15
1.11	Dispositif expérimental pour l'étude de la mise en équilibre d'un système à deux ballons	16
1.12	Courbe de traction "idéale" d'un caoutchouc de ballon de baudruche.	17
1.13	Courbe pression-volume "qualitative" d'un ballon de baudruche tracée avec $R_0 = 20$ mm, $e_0 = 0.2$ mm et $P_0 = 0$	18
1.14	Rhéomètre de Couette. Figure tirée de Royis (2005)	19
1.15	Surfaces limites de Mohr-Coulomb, Drücker Prager and Van Eekelen dans le plan déviatoire pour $\varphi_c = \varphi_e = 19^\circ$	22
1.16	Exemple de loi hyperbolique d'écrouissage pour deux valeurs de B_p ($\varphi_0 = 30^\circ$, $\varphi_f = 35^\circ$)	22
1.17	Exemple de réponse à un chemin tiraxial drainé pour un matériau dense : modèle Plasol.	23
1.18	Exemple de réponse à un chemin tiraxial drainé pour un matériau lâche : modèle Plasol.	23
1.19	Exemple de réponse à un chemin tiraxial drainé pour un matériau dense : modèle Pastor.	27
1.20	Exemple de réponse à un chemin tiraxial drainé pour un matériau lâche : modèle Pastor.	28
1.21	Définition des axes pour un chemin triaxial généralisé	29
1.22	Exemple de réponse à un chemin tiraxial drainé pour un matériau dense : modèle INL.	30
1.23	Exemple de réponse à un chemin tiraxial drainé pour un matériau lâche : modèle INL.	30

1.24	Principe de superposition d'un mode de déformation en bande de cisaillement.	33
2.1	Réponse d'un sable lâche de Hostun à un chemin triaxial non drainé (Meghachou (1993))	36
2.2	Réponse d'un sable dense de Hostun aux chemins proportionnels en déformation avec le modèle INL d'après Darve <i>et al.</i> (2004).	38
2.3	Cônes d'instabilité pour les lois de Darve le long de chemins triaxiaux drainés d'après Darve <i>et al.</i> (2004). En haut pour un sable de Hostun dense, et en bas pour un sable de Hostun lâche. Les deux droites continues représentent le critère de Mohr-Coulomb, et la ligne en pointillés l'axe hydrostatique. La limite du domaine de bifurcation est donnée par une ligne non représentée qui joint les centres des premiers cônes.	40
2.4	Principe de l'algorithme de recherche des cônes d'instabilité dans le plan de Rendulic.	40
2.5	Réponse d'un sable dense de Hostun aux chemins proportionnels en déformation avec le modèle INL d'après Khoa <i>et al.</i> (2006).	42
2.6	Projection des cônes d'instabilité dans le plan (σ_1, σ_3) obtenus le long de chemins triaxiaux drainés en déformations planes pour un sable dense de Hostun simulés avec la loi INL. Les deux droites continues représentent le critère de Mohr-Coulomb, et la ligne en pointillés l'axe tel que $\sigma_1 = \sigma_3$. La limite du domaine de bifurcation est donnée par une ligne non représentée qui joint les centres des premiers cônes.	43
2.7	Représentation circulaire de d^2W_n , d^2W_{dn} et d^2W_{sn} dans un plan $(d\sigma_1, \sqrt{2} d\sigma_3)$ avec $d\sigma_1 \equiv 90^\circ$ et $\sqrt{2} d\sigma_3 \equiv 0^\circ$. Simulation faite sur un sable lâche de Hostun avec la loi INL le long d'un chemin triaxial drainé pour trois valeurs de $\eta = q/p$: $\eta \in [0.49, 1.16, 1.23]$. Le cercle unité correspond à $d^2W = 0$	44
2.8	Représentation circulaire de d^2W_n , d^2W_{dn} et d^2W_{sn} dans un plan $(d\sigma_1, \sqrt{2} d\sigma_3)$ avec $d\sigma_1 \equiv 90^\circ$ et $\sqrt{2} d\sigma_3 \equiv 0^\circ$. Simulation faite sur un sable dense de Hostun avec la loi INL le long d'un chemin triaxial drainé pour trois valeurs de $\eta = q/p$: $\eta \in [0.88, 1.50, 1.71]$. Le cercle unité correspond à $d^2W = 0$	45
2.9	Calibration du modèle Plasol pour le sol de Petacciato.	47
2.10	Cônes du modèle Plasol pour le sol de Petacciato.	47
2.11	Calibration du modèle de Pastor pour le sol de Petacciato.	47
2.12	Cônes du modèle de Pastor pour le sol de Petacciato.	48
2.13	Calibration du modèle INL pour le sol de Petacciato.	48
2.14	Cônes du modèle INL pour le sol de Petacciato.	49
2.15	Domaine de bifurcation 3D pour les modèles de Darve. ($8L \equiv$ octolinéaire)	52
2.16	Déviateurs pour lesquels les cônes des modèles non linéaires et octolinéaires sont comparés.	52
2.17	Cônes d'instabilité pour un sable dense de Hostun obtenus le long d'un chemin triaxial drainé. (a) octolinéaire, (b) non linéaire	53
2.18	Cônes d'instabilité tracés après un chemin suivant une direction fixée du plan déviatoire pour le modèle octolinéaire.	54
2.19	Cônes d'instabilité tracés après un chemin suivant une direction fixée du plan déviatoire pour le modèle non linéaire.	55
2.20	Ouverture des cônes pour le modèle octolinéaire, $z =$ cote sur l'axe du cône, $a =$ demi grand axe de l'ellipse, $b =$ demi petit axe de l'ellipse, $S =$ surface de l'ellipse. Sur la figure (a) sont représentés les points mécaniques où une recherche de cônes a été effectuée.	56
2.21	Ouverture des cônes pour le modèle octolinéaire, $z =$ cote sur l'axe du cône, $a =$ demi grand axe de l'ellipse, $b =$ demi petit axe de l'ellipse, $S =$ surface de l'ellipse. Sur la figure (a) sont représentés les points mécaniques où une recherche de cônes a été effectuée.	57

2.22	Angle entre l'axe des cônes et la direction à l'origine pour les états mécaniques considérés sur la figure F . 2.18.	57
2.23	Cônes d'instabilité obtenus le long d'un chemins tiraxial drainé et représentés dans l'espace des incréments de déformation pour le modèle de Nicot. $\eta = 2.056$	58
2.24	Cônes d'instabilité obtenus le long d'un chemin tiraxial drainé et représentés dans l'espace des incréments de déformation pour le modèle de Nicot. $\eta = 2.062$	59
2.25	Cônes d'instabilité obtenus le long d'un chemin tiraxial drainé et représentés dans l'espace des incréments de déformation pour le modèle de Nicot. $\eta = 2.080$	59
2.26	Cônes d'instabilité obtenus le long d'un chemin tiraxial drainé et représenté dans l'espace des incréments de déformation pour les modèles de Darve. (a) octolinéaire, (b) non linéaire.	60
2.27	Comparaison du contour des cônes d'instabilité entre le modèle octolinéaire et le modèle micro-mécanique de Nicot.	61
2.28	Comparaison du contour des cônes d'instabilité entre le modèle non linéaire et le modèle micro-mécanique de Nicot.	61
2.29	Réponse aux chemins proportionnels en déformations avec le modèle octoliénaire. . .	62
2.30	Réponse aux chemins proportionnels en contraintes avec le modèle octoliénaire après une compression triaxiale.	64
2.31	Réponses dans des plans d'invariants au chemin proportionnel en contraintes pour un sable lâche.	66
2.32	Cônes d'instabilité pour ce sable lâche le long de triaxiaux drainés et le long du trajet imposé en figure F . 2.31. (b) est un zoom de (a) autour du trajet de chargement étudié. . .	67
2.33	Cônes d'instabilité pour ce sable lâche le long du trajet imposé en figure F . 2.31. (b) est un zoom de (a) autour du pic de $\varepsilon_1 - \frac{2\varepsilon_3}{R_2}$	67
2.34	Variations de volumes et apparition du premier cône.	68
3.1	Recherche d'un point fixe avec la méthode de Newton : $x_{i+1} = x_i + \frac{f_c - f(x_i)}{f'(x_i)}$	72
3.2	Algorithme d'intégration des modèles de comportement utilisé dans Lagamine. . . .	73
3.3	Algorithme implicite d'intégration de la loi Plasol : étape 3 de l'algorithme général. .	74
3.4	Maillage initial et déformé. La pression de confinement initiale est : $p_0 = 500 \text{ kPa}$; dp est l'incrément de contraintes appliqué à chaque étape.	78
3.5	Réponse du matériau au triaxial drainé.	79
3.6	Cônes d'instabilités dans le plan de Rendulic.	79
3.7	Évolution des valeurs propres au cours du chargement pour la géométrie à un élément (détail à droite).	79
3.8	Évolution des valeurs propres au cours du chargement pour la géométrie à quatre éléments (détail à droite).	80
3.9	Évolution des plus petites valeurs propres au cours du chargement pour la géométrie à cinquante-six éléments (détail à droite).	80
3.10	Vecteur propre associé à la première valeur propre nulle de K_s superposée avec l'incrément de déplacement à la rupture : cas du triaxial homogène.	82
3.11	Vecteur propre associé à la première valeur propre nulle de K_s superposée avec l'incrément de déplacement courant : cas du triaxial homogène.	82
3.12	Évolution de l'erreur de direction entre V_{min} et dU_f au cours d'un triaxial drainé. . .	83
3.13	Description de la géométrie et des conditions aux limites du problème. dp est l'incrément de contraintes appliqué à chaque incrément (déformée à droite).	84
3.14	Évolution des plus petites valeurs propres de K_s : cas de la fondation circulaire. . . .	84
3.15	Isovaleurs de d^2W_n : cas de la fondation circulaire.	85
3.16	Comparaison des vecteurs V_0 et dU_f : cas de la fondation circulaire.	86

3.17	Comparaison des vecteurs V_0 et dU_0 : cas de la fondation circulaire.	86
3.18	Évolution de l'erreur entre les directions de V_{min} et dU_f : cas de la fondation circulaire.	87
3.19	Évolution de D^2W_n avec le chargement : cas de la fondation circulaire.	87
3.20	Description de la géométrie et des conditions aux limites du problème. dp est l'incrément de contraintes appliqué à chaque incrément (déformée en dessous).	89
3.21	Évolution des plus petites valeurs de K_s : cas de la pente.	89
3.22	Isovaleurs de d^2W_n : cas de la pente.	90
3.23	Comparaison des vecteurs V_0 et dU_f : cas de la pente.	91
3.24	Comparaison des vecteurs V_0 et dU_0 : cas de la fondation circulaire.	92
3.25	Évolution de l'erreur entre les directions de V_{min} et dU_f : cas de la pente.	93
3.26	Évolution de D^2W_n avec le chargement : cas de la pente.	93
3.27	Superposition du vecteur V_0 avec les isovaleurs de d^2W_n : cas de la pente.	94
3.28	Superposition du vecteur V_0 avec les isovaleurs de $\dot{\epsilon}_p^{eq}$: cas de la pente.	94
4.1	Comportement des argiles en fonction de leur teneur en eau : limites d'Atterberg.	98
4.2	Les régimes de l'eau dans le sol. D'après Soulié (2005).	98
4.3	Illustration du phénomène de capillarité.	99
4.4	Courbe de rétention d'eau d'un sable argileux selon Cronney (1952). Tiré de Delage et Cui (2000).	100
4.5	Courbe classique de perméabilité de l'eau en fonction du degré de saturation.	102
4.6	Évolution de χ en fonction du degré de saturation pour différents types de sol : Jennings et Burland (1962)	104
4.7	Conditions aux limites pour imposer le niveau d'eau.	105
4.8	Situation géographique de Petacciato.	106
4.9	Carte des investigations géologiques et géotechniques : site de Petacciato.	107
4.10	Coupe morphologique à modéliser : site de Petacciato.	108
4.11	Maillage de la coupe de Petacciato.	109
4.12	Courbe de rétention d'eau "typique" d'une argile (Fleureau <i>et al.</i> (2002)) utilisée pour le sol de Petacciato.	109
4.13	Isovaleurs de d^2W_n pour différents niveaux de la nappe phréatique : site de Petacciato.	110
4.14	Situation géographique de Ballendaz.	111
4.15	Conduite forcée EDF sous la route : site de Ballendaz.	112
4.16	Pont de la route sur le ruisseau de Ballendaz.	112
4.17	Situation du forage d'où proviennent les essais matériaux : site de Ballendaz.	113
4.18	Essais triaxiaux non drainés sur échantillon in situ : site de Ballendaz.	114
4.19	Essais triaxiaux non drainés sur échantillon remanié : site de Ballendaz.	115
4.20	Courbe de rétention d'eau pour le sol de Ballendaz.	116
4.21	Maillage de la coupe de Ballendaz.	117
4.22	Isovaleurs de l'angle de frottement mobilisé pour le site Ballendaz.	119
4.23	Isovaleurs de d^2W_n pour le site Ballendaz.	120
A.1	Réponse du matériau au triaxial drainé.	129
A.2	Vecteur propre associé à la première valeur propre nulle de K_s superposée avec l'incrément de déplacement à la rupture: cas du triaxial homogène.	130
A.3	Évolution de l'erreur de direction entre V_{min} et dU_f au cours d'un triaxial drainé.	130
B.1	Courbe granulométrique obtenus par diffraction laser de l'échantillon DAZ01.	132
B.2	Courbe granulométrique obtenus par diffraction laser de l'échantillon DAZ02.	133

Liste des tableaux

2.1	Caractéristiques générales du sol de Petacciato.	46
3.1	Erreur entre les directions des vecteurs V_0, dU_f et V_0, dU_0 d'autre part : cas du triaxial homogène.	81
3.2	Principales caractéristiques du sol.	83
3.3	Erreur entre les directions des vecteurs V_0, dU_f et V_0, dU_0 d'autre part : cas de la fondation circulaire.	87
3.4	Principales caractéristiques du sol.	88
3.5	Erreur entre les directions des vecteurs V_0, dU_f et V_0, dU_0 d'autre part : cas de la pente.	88
4.1	Paramètres de calibration.	106
4.2	Paramètres de rétention d'eau.	107
4.3	Paramètres de calibration des échantillons in situ.	115
4.4	Paramètres de calibration des échantillons remaniés.	116
4.5	Paramètres de rétention d'eau.	116
4.6	Paramètres du substratum rocheux.	117
4.7	Paramètres du sol considéré pour la simulation.	118
A.1	Principales caractéristiques du sol.	129

Introduction

Dans cette thèse, effectuée au sein du laboratoire 3S-R, nous proposons une façon d’appréhender la rupture dans les géomatériaux, et plus spécifiquement dans les sols. Les applications présentées se limitent, quant à elles, à l’analyse de la stabilité des pentes : talus, glissements de terrains. L’approche considérée est basée sur l’exploitation des résultats de la mécanique des milieux continus. Avec ce formalisme, l’utilisation des outils numériques joue un rôle prépondérant dans la résolution, souvent approchée, des équations issues de cette théorie. Néanmoins, avant de continuer sur des aspects plus techniques et pointus, de la manière de décrire mécaniquement et numériquement ces modes de rupture, je voulais revenir sur la notion de modèle dans son sens large.

Dans un cadre général, l’encyclopédie Universalis, donne la définition suivante du mot *modèle*. Pour Platon, le *modèle*, ou en grec le *paradigme* (*παράδειγμα*), est la forme idéale sur laquelle les existences sont réglées. Un peu plus tard, du fait de l’avancement des technologies, et de la méthodologie des sciences, le modèle est d’abord la “maquette”, l’objet réduit et maniable qui reproduit en lui, sous une forme simplifiée, les propriétés d’un objet de grandes dimensions. Ces deux définitions, semblent a priori antagonistes. Le modèle technique inverse la situation du modèle platonicien, puisqu’il est la réalisation concrète, au lieu d’être l’idée réalisable. Cependant, ces deux points de vue sont parfois très liés, à tel point qu’en fait, un bouclage continu existe entre la maquette physique et la perception que l’on se fait du phénomène (ou de l’objet). Par itérations successives, la maquette vient enrichir le modèle abstrait qui à son tour propose des idées ou orientations nouvelles pour une maquette plus pertinente. Cela est d’autant plus vrai lorsque les phénomènes à décrire ou modéliser, sont en grande partie perceptibles par nos 5 sens. Dans le cas contraire, en général le modèle purement théorique préfigure l’observation concrète, la réalisation technique venant parfois plusieurs siècles après. Dans le cas, “la terre est ronde”, c’est Parménide d’Élée (VI^e – V^e siècle Av. J.C.) qui formule, a priori, le premier l’hypothèse que la terre est sphérique. Puis il faudra attendre Platon (428 – 348 Av. J.C.) pour que cette hypothèse soit admise dans le monde grec. Pour notre monde occidental, on peut peut-être dater l’origine de cette redécouverte avec Galilée (1564-1642) et Képler (1571-1630). Il aura fallu finalement attendre le 24 octobre 1946 pour avoir, semble-t-il, le premier cliché de la terre vue de l’espace. Cette photo a été prise grâce à un missile V2 allemand lancé par les américains depuis la base de White Sands au Nouveau Mexique. Pour revenir à des considérations plus concrètes sur le sujet, l’état limite à la rupture des sols est très classiquement représenté par un modèle de Mohr-Coulomb, les paramètres décrivant ce modèle étant C (cohésion) et ϕ (angle de frottement). Cependant, même si ce modèle est probablement l’un des plus simples décrivant correctement la li-

mite à la rupture d'un sol, ces paramètres ne sont pas plus "physiques" que d'autres provenant de modèles décrivant eux aussi correctement cette limite de rupture.

Cet aparté étant fait, revenons sur la description de la rupture dans les géomatériaux. Les matériaux étudiés dans cette thèse sont supposés non visqueux : leur comportement ne dépend pas ou très peu des vitesses de chargement. Classiquement, le comportement de ces matériaux est décrit dans le cadre de la théorie de l'élasto-plasticité. Historiquement, cette théorie a beaucoup été développée pour le cas des matériaux associés. Un matériau associé, est un matériau dont le comportement peut être décrit par un tenseur élasto-plastique tangent symétrique (Hill (1967), Mandel (1966), Mróz (1963), Mróz (1966)). Dans ces conditions, la limite à la rupture d'un tel matériau est décrite par la limite de plasticité. Cette limite est atteinte lorsque le déterminant de l'opérateur tangent s'annule. Cependant, les sols sont des matériaux fortement non associés. Dans les modèles classiques, la perte de symétrie de l'opérateur tangent est souvent décrite par un angle de dilataance à la rupture différent de l'angle de frottement à la rupture. Dans ces conditions, il a été démontré analytiquement et observé expérimentalement que des ruptures peuvent se produire strictement à l'intérieur de cette limite de plasticité (Lade (1992), Nova (1991), Darve et Chau (1987), Darve et Vardoulakis (2004)). Dans cette thèse nous nous préoccupons principalement de ces ruptures ou instabilités qui peuvent se produire strictement à l'intérieur du critère de limite de plasticité.

Dans le **chapitre 1**, qui constitue un état de l'art sur la description des instabilités et ruptures dans les géomatériaux, des définitions de ces deux concepts ainsi que de la bifurcation sont proposés dans un cadre assez général. A titre illustratif, quelques exemples de ruptures dans les géomatériaux sont aussi détaillés dans le cas d'essais de laboratoires et dans des cas réels comme les glissements de terrains. Pour la description de tels phénomènes, il est nécessaire de disposer de modèles reproduisant correctement le comportement des matériaux. Ainsi, trois lois de comportement pour sols, reposant sur des formalismes assez différents, sont analysées :

- le modèle Plassol (Barnichon (1998)), implémenté dans le code E.F. Lagamine (modèle élasto-plastique classique à un potentiel)
- le modèle de plasticité généralisé de Pastor (Pastor *et al.* (1990))
- les modèles incrémentaux de Darve (Darve et Labanieh (1982))

Enfin, la notion de stabilité dans le cadre de notre étude est un peu plus détaillée. La définition de Lyapunov (Lyapunov (1907)) adaptée au cadre de la mécanique des milieux continus est rappelée, et nous décrivons aussi les critères classiques permettant de statuer sur la stabilité matérielle dans les géomatériaux, le plus usité par les ingénieurs étant probablement le critère de limite de plasticité. Cependant, il est maintenant largement admis qu'un certain nombre de ruptures se produit strictement à l'intérieur de cette limite. C'est pourquoi nous présentons aussi le critère de localisation de Rice (Rice (1976), Rudnicki et Rice (1975)) qui est souvent utilisé pour les matériaux avec modèle d'endommagement. Néanmoins, dans le cas des sols, des ruptures se produisent aussi sans présenter de mode de déformation particulier. On les appelle ruptures diffuses. Or le critère de Hill (Hill (1958)) permet de détecter les premiers états instables pour les matériaux non visqueux lorsque les effets de masses et d'inertie sont négligeables. Dans le cas contraire, des instabilités par flottement peuvent se produire avant (Chambon *et al.* (2004), Challamel (2007)), mais ces effets ne sont pas étudiés dans ce document : uniquement des chargements quasi statiques sont considérés. C'est pourquoi nous utilisons ce critère pour modéliser les instabilités dans les sols. Si cette condition de stabilité permet de détecter tous les états instables dans le cadre de notre étude, elle ne permet néanmoins pas, de donner a priori le mode de rupture engendré.

Dans le **chapitre 2**, nous proposons une analyse de la bifurcation dans les géomatériaux au niveau du point matériel en se basant sur la condition de Hill. Dans un premier temps, des résultats obtenus pour les cas axisymétriques et de déformations planes sont rappelés. Puis nous proposons une généralisation pour les cas tridimensionnels. Il est notamment montré, qu'au delà d'une certaine

limite dans l'espace des contraintes ou des déformations, des cônes de directions de chargements instables se développent. Cette limite, est appelée limite du domaine de bifurcation, et ces cônes, cônes d'instabilités. Les équations de la limite du domaine de bifurcation, ainsi que celle des cônes d'instabilités sont données dans l'espace des contraintes principales à trois dimensions, dans un cadre général. Des représentations géométriques de cette limite et de ces cônes sont également exposées pour les modèles incrémentaux de Darve. Enfin, une interprétation physique de ces cônes, basée principalement sur la notion de contrôlabilité de Nova (Nova (1991), Nova (1994)), est proposée. Nous montrons que lorsqu'un point matériel se trouve dans un état mécanique situé dans le domaine de bifurcation, si la direction de chargement suit une direction incluse dans un cône, une généralisation de la règle d'écoulement peut être faite et sera appelée "règle de rupture".

Quant au **chapitre 3**, il offre une étude de la bifurcation au niveau de la structure ou de l'ouvrage. Pour ceci, la méthode des éléments finis est adoptée. Les travaux de Pastor permettent d'avoir une bonne idée sur la façon de traiter les problèmes de structures en géomécanique avec cette méthode : Pastor *et al.* (1997), Quecedo *et al.* (2000), Fernandez Merodo *et al.* (2004), Pastor et Tamagnini (2004). Une présentation générale du code utilisé est effectuée dans un premier temps : c'est le code Lagamine (Lagamine (2007)) développé à l'université de Liège. Nous rappelons ensuite, comment le travail du second ordre est implémenté numériquement au niveau local, et évoquons aussi comment Khoa (Khoa (2005)) proposa d'intégrer numériquement cette quantité sur toute la structure. En effet, ce n'est pas parce qu'au niveau local, un point matériel est instable, que toute la structure l'est aussi. L'intégration sur toute la structure du travail du second ordre permet, selon Hill, de statuer sur la stabilité globale de cette dernière. Néanmoins, pour étudier cette stabilité globale, nous proposons une approche basée sur l'analyse des modes propres de la partie symétrique de la matrice de rigidité globale de la structure. Cette analyse permet, entre autre, de se rattacher un peu plus facilement par analogie ou équivalence à celle faite au niveau du point matériel.

Finalement, dans le **chapitre 4**, nous appliquons les travaux présentés dans les chapitres précédents à la modélisation de glissements de terrains réels. Dans les deux cas étudiés, les glissements de terrains se sont produits après des périodes de fortes pluies, ou sont liés à des phénomènes hydrauliques complexes. Afin de prendre en compte ces conditions de chargement, nous utilisons un modèle hydromécanique couplé pour sols non saturés, implémenté dans Lagamine. Quelques concepts généraux sur les milieux poreux non saturés sont rappelés, et le modèle utilisé est détaillé. À partir de là, les glissements de Petacciato en Italie (LESSLOSS-Report (2004)), et de Ballandaz en Savoie sont présentés. La modélisation du glissement de Petacciato s'est effectuée dans le cadre du projet européen Lessloss, et celle de Ballandaz dans le cadre du projet ANR-RGCU Sigma encore en cours. Dans ces deux applications, l'étude de stabilité se fait grâce au calcul des travaux du second ordre locaux (à chaque point d'intégration). L'analyse aux valeurs propres, encore dans ses premiers développements, doit être étendue pour prendre en compte les degrés de libertés liés au comportement hydraulique des sols.

1.1 Introduction

L'étude bibliographique comporte quatre parties principales, qui décrivent les idées, concepts et outils sur lesquels reposent les travaux de cette thèse. Dans un premier temps, des définitions de la stabilité, rupture, perte d'unicité et bifurcation sont rappelées. Puis, quelques exemples de ruptures dans les géomatériaux sont présentés afin d'illustrer les phénomènes étudiés. Comme le comportement des matériaux est central dans la description de ces phénomènes, nous proposons de passer en revue trois lois phénoménologiques basées sur des concepts relativement différents. Enfin, dans la quatrième partie on précise comment la stabilité matérielle ou les bifurcations sont étudiées dans les géomatériaux.

1.2 Définitions

Ces travaux de thèse s'articulent autour de quatre notions principales : **rupture, stabilité, perte d'unicité, bifurcation**. C'est pourquoi il est nécessaire de définir ces mots, et en particulier dans le contexte de la géomécanique. Néanmoins, les définitions données par le Larousse Maxipoche 2008 sont à chaque fois rappelées pour donner l'idée générale et éventuellement l'étymologie de ces mots. Il est tout de même à noter que le terme *Maxipoche* indique qu'il ne s'agit pas de l'encyclopédie, mais qu'il est préférable de disposer d'un sac pour transporter son dictionnaire préféré, que de poches aussi grandes soient-elles.

Rupture : La définition du Larousse est la suivante :

(lat. ruptura) fait de se rompre sous l'effet d'un choc.

et pour *rompre*, on trouve :

(*lat. rumpere*) *Casser quelque chose en deux ou plusieurs morceaux ou Faire céder sous l'effet d'une forte pression.*

Le fait de séparer un objet en deux ou plusieurs morceaux semble essentiel. Cependant, une pièce mécanique peut présenter des fissures macroscopiques, et se maintenir d'un seul tenant. La dernière définition semble donc plus appropriée. En mécanique des matériaux, la rupture caractérise l'état limite de contrainte que peut soutenir un échantillon du matériau étudié. Au point de rupture, la charge ne peut plus être augmentée, et les déplacements et vitesses de déformations peuvent, le cas échéant, devenir très grands.

Stabilité : Définition du dictionnaire :

(*Lat. adj. stabilis, vb. stare : être debout*) *Caractère de ce qui est stable, de ce qui tend à conserver son équilibre.*

ou encore :

Caractère de ce qui se maintient sans profondes variations.

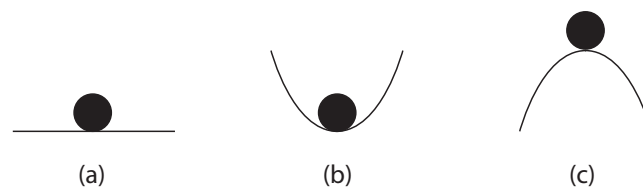
Cette deuxième définition correspond tout à fait à celle utilisée par les physiciens ou mécaniciens. D'un point de vue mathématique, la définition qui fait référence, a été énoncée par Lyapunov (Lyapunov, 1907), et se traduit de la façon suivante :

Un système est stable si toute sollicitation bornée produit une réponse bornée.

Néanmoins, la définition couramment donnée dans les cours de physique ou de mécanique du secondaire est la suivante :

Un système est stable si, écarté de sa position (ou trajectoire) d'origine, il tend à y revenir.

Cette définition correspond à celle de la stabilité asymptotique au sens de Lyapunov. L'état d'un système ni instable, ni asymptotiquement stable, est stable marginalement. La figure F . 1.1 illustre ces



F . 1.1 – *Illustration des définitions de stabilité dans le cas d'une position d'équilibre : (a) stabilité marginale ou indifférente, (b) stabilité asymptotique, (c) instabilité*

définitions pour le cas de la stabilité d'une position d'équilibre. Pour traduire de façon mathématique ces définitions, on étudie l'équation suivante :

$$\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}, t) \quad (1.1)$$

avec $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$, le vecteur caractérisant l'état du système (par exemple les positions ou les variables d'état P, V, T du système), et \underline{f} une fonction vectorielle non linéaire. Lorsque $\dot{\underline{x}}$ ne dépend pas explicitement du temps, on parle de systèmes autonomes. Le système défini par l'équation (1.1) est stable si :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall (\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*, \exists (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \text{ tels que} \\ \left\| \underline{x}(t_0) - \underline{x}_0(t_0) \right\| < \alpha_1 \text{ et } \left\| \dot{\underline{x}}(t_0) - \dot{\underline{x}}_0(t_0) \right\| < \alpha_2 \\ \implies \\ \left\| \underline{x}(t) - \underline{x}_0(t) \right\| < \varepsilon_1 \text{ et } \left\| \dot{\underline{x}}(t) - \dot{\underline{x}}_0(t) \right\| < \varepsilon_2, \quad \forall t > t_0 \end{array} \right. \quad (1.2)$$

avec \underline{x}_0 , l'état initial du système. De la même façon, le système est asymptotiquement stable s'il est stable et vérifie de plus :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left\| \underline{x}(t) - \underline{x}_0(t) \right\| = 0, \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \left\| \dot{\underline{x}}(t) - \dot{\underline{x}}_0(t) \right\| = 0 \quad (1.3)$$

Pour le cas d'une position d'équilibre, on a $\dot{\underline{x}}_0 = 0 \forall t \geq t_0$, et après changement de variable, on peut se ramener à $\underline{x}_0 = 0$.

Perte d'unicité : En mécanique des matériaux, la perte d'unicité correspond à la violation du principe de déterminisme. Ce principe stipule que si on applique à un échantillon un chemin de sollicitation donné, le chemin de réponse est alors unique. Par exemple, sur un essai triaxial drainé effectué sur un sable dense, au pic du déviateur de contraintes il y a perte d'unicité. En considérant le même échantillon et le même mode opératoire, la réponse (en terme de déviateur et de variation de volume) de ce dernier après le pic varie d'un essai à l'autre. Lorsqu'on modélise un matériau élasto-plastique par une loi macroscopique incrémentale, le déterminant de la matrice de comportement s'annule à ce pic.

Bifurcation : définition du dictionnaire :

(lat. adj. *bifurcus* : fourchu) *Division en deux branches, deux axes rappelant une fourche.*

ou

Point ou voie qui se divise en deux.

ou

Changement d'orientation.

Dans son ouvrage intitulé *Stabilité et mécanique non linéaire*, Quoc-Son (Quoc Son (2000)) commence son chapitre introductif sur les bifurcations de la manière suivante :

Ce chapitre est une introduction à la théorie de bifurcation. En bifurcation statique, on étudie les courbes d'équilibre d'un système évolutif dépendant d'un paramètre de contrôle.

Pour ce faire, on repart de l'équation (1.1) dans laquelle on fait intervenir un paramètre de contrôle $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}, \lambda, t) \quad (1.4)$$

Les équilibres du système, aussi appelés points fixes, sont donc donnés par :

$$\underline{f}(\underline{x}, \lambda, t) = 0 \quad \forall t > 0 \quad (1.5)$$

L'ensemble des équilibres forment éventuellement une courbe dans l'espace (\underline{x}, λ) appelé généralement espace des phases par les physiciens (Staufner *et al.* (1999)). Considérant ceci, la définition de la

bifurcation selon Quoc-Son est la suivante :

Un point d'équilibre est un point de bifurcation statique s'il est le point d'au moins deux courbes d'équilibre.

Ainsi la notion de fourche ou de branche du dictionnaire reparaît ici. Je ne détaillerai pas beaucoup plus cette notion d'un point de vue mathématique ou physique. Le terme de bifurcation est apparu assez récemment dans la deuxième partie du XX^e siècle avec le développement de la théorie des catastrophes (Thom (1972)) et celles sur le chaos. Néanmoins, la littérature à ce sujet est assez vaste, mais parfois (et peut être trop?) difficile à lire pour un scientifique non spécialiste du sujet. Voici quelques autres ouvrages traitant de bifurcation en mécanique : (Thomson et Hunt (1973), Bazant et Cedolin (1991), Vardoulakis et Sulem (1995) et Petryk (1999)). Pour finir avec cette définition, je citerai une phrase issue du chapitre *Systèmes dynamiques et chaos* tirée du *Cours de Physique de Newton à Mandelbrot* (Staufer *et al.* (1999)) :

Une bifurcation ressemble à une "transition de phase" de la dynamique, où l'on passe d'un régime stationnaire à un autre qualitativement différent.

La dynamique étant décrite ici par l'équation (1.4). Menant des études sur la bifurcation dans les géomatériaux sans utiliser explicitement cette équation, nous retiendrons qu'une bifurcation est un changement soudain et discontinu du mode de réponse (mode de déformation par exemple) tout en maintenant une évolution continue et graduelle des paramètres de chargements.

1.3 Exemples de ruptures dans les géomatériaux

Après avoir donné des définitions assez générales pour les domaines de la physique et de la mécanique, nous entrons à présent un peu plus dans le vif du sujet, avec des exemples de ruptures dans les sols. Ces ruptures observées à la fois d'un point de vue expérimental et aussi sur des sites naturels permettent d'appréhender les phénomènes mis en jeu et d'avoir une idée des paramètres physiques importants à prendre en compte lors d'une modélisation (analytique ou numérique par exemple).

1.3.1 Essais homogènes de laboratoires

Les essais de laboratoire les plus classiques permettant de modéliser le comportement du matériau jusqu'à la rupture dans des échantillons de sol supposés homogènes sont les tests triaxiaux de révolution. Lors d'un essai triaxial drainé pratiqué sur un sable dense, la courbe contrainte déviatoire (q) déformation axiale (ε_1), fait apparaître un pic. À ce pic, une ou plusieurs bandes de cisaillement apparaissent généralement et traduisent un mode de rupture localisé. L'idée de séparation en deux ou plusieurs parties, tirée du dictionnaire (section 1.1) est ici exacte. La Figure F . 1.2 illustre ces propos. Néanmoins, dans les sols, il est également possible d'observer un autre mode de rupture appelé diffus, qui peut être considéré comme le complémentaire du mode localisé. L'adjectif diffus, caractérise un effondrement sans apparition sensible de fissuration ou de localisation de déformations. Les cas d'effondrements par liquéfaction sont des ruptures diffuses. Un essai triaxial non drainé effectué sur un sable (très) lâche permet de mettre en évidence ce type de rupture. Si l'essai est contrôlé en déformations, il est possible de le poursuivre jusqu'à l'annulation des contraintes effectives de manière



F . 1.2 – Rupture par bande de cisaillement lors d'un triaxial drainé sur sable dense (Desrues et Chambon (2002)) d'après (Colliat-Dangus (1986))

continue (sans accélération significative des déformations). Si la force axiale est pilotée, l'échantillon s'effondre de façon brutale au pic du déviateur (q) mais toujours sans figure de localisation (Sladen *et al.* (1985), Lindenberg et Koning (1981), Khoa *et al.* (2006), Darve *et al.* (2007)). Un exemple d'un



F . 1.3 – Exemple de liquéfaction lors d'un essai triaxial non-drainé, causée par une "perturbation" après le pic de q (Servant *et al.* (2005))

tel effondrement est présenté sur la figure F . 1.3. Si les ruptures en mode localisé semblent largement plus étudiées avec les nombreuses recherches sur les aciers, bétons, roches et certaines argiles (Griffith (1920), Irwin (1958), Rice (1968)), les applications présentées dans cette thèse traiteront principalement d'exemples où un mode diffus s'est produit. Comme nous le verrons plus tard, il n'en reste pas moins que la théorie développée s'applique aussi aux ruptures en mode localisé.

1.3.2 Glissements de terrains

Les applications dans cette thèse portent essentiellement sur les glissements de terrains. Quelques photos et exemples sont présentés ici. La première application sur laquelle j'ai été amené à travailler, est celle du glissement qui a eu lieu en Italie sur la commune de Petacciato au bord de la côte adria-

tique. Ce site, qui a connu plusieurs petits mouvements tout au long du XX^e siècle, fit l'objet d'une importante réactivation le 14 mars 1996. La zone affectée par ce mouvement s'étend sur 7 km le long de la côte, et 2 km en amont dans les terres. La surface de rupture a été estimée fluctuer entre 70 et 90 m de profondeur. Tout ceci a causé d'importants dégâts matériels sur les infrastructures situées dans cette zone : routes, chemins de fer, bâtiments... alors que la pente moyenne du site n'est que de 6°. La figure F . 1.4 montre des exemples de destruction d'infrastructure. Pour modéliser les pro-



F . 1.4 – Exemple de dégâts causés par le glissement de terrain de Petacciato en 1996.

blèmes liés à la stabilité des pentes, plusieurs approches ont été développées depuis le début du XX^e siècle. Parmi les plus classiques on trouve les différentes variantes de la méthode des tranches (Fellenius (1936), Bishop (1955)). Une synthèse de ces méthodes peut être trouvée dans Espinoza *et al.* (1992) et Duncan (1996)). De manière générale, cette méthode consiste à faire l'équilibre statique de n tranches de sols pouvant glisser le long d'une surface de glissement définie a priori. Puis grâce aux développements de la mécanique des milieux continus, des approches cinématiques de calcul de rupture et d'analyse limites plus rigoureuses ont vues le jour (Coussy et Salençon (1979), Salençon (1983)). Dès lors, l'utilisation de méthodes numériques comme les éléments finis s'est démocratisée (Sloan (1988), Sloan (1989), Pastor *et al.* (1997), Pastor *et al.* (1999)). Dans le cas de sites constitués de matériaux granulaires la stabilité des pentes est en générale décrite dans le cadre de la théorie de la plasticité avec de plus en plus la prise en compte de couplages multiphysiques comme par exemple des modèles hydro-mécaniques couplés non saturés (Alonso *et al.* (1990), Tamagnini (2004)). Malgré, des modèles toujours plus proche de la physique à décrire, la question de la définition d'un critère de rupture reste encore ouverte. Dans beaucoup de cas, le critère de limite de plasticité fait office de critère de rupture. Or il est maintenant largement reconnu que des ruptures se produisent avant d'atteindre cette limite. D'ailleurs, avec une pente de seulement 6° en moyenne pour le glissement de Petacciato, il est peu probable qu'un tel critère permette de prédire la phase de déclenchement de ce glissement. C'est pourquoi il est important d'appliquer un critère de stabilité dans ce genre de modélisation : un état d'équilibre peut être stable ou instable. Enfin, bien que les ouvrages géotechniques présentés sur les photos montrent des fissures marquées, le mode de rupture observé dans le sol était plutôt de type diffus, avec un certain nombre d'effondrements dus à une augmentation des pressions interstitielles dans le sol après d'importants événements pluvieux.

Lors d'une école doctorale dans la région de Naples en Italie en 2006, nous avons eu l'occasion de visiter le site de Sarno et Quindici. Sur ces collines, situées à l'est du Vésuve et chargées en roches pyroclastiques, un important flot de boues torrentielles s'est déclenché le 5 mai 1998 et réussit à sauter une petite colline censée protéger un hôpital et des habitations. Lors de cet événement, 161 personnes succombèrent. La photo F . 1.5 donne un aperçu de l'ampleur du drame qui s'est déroulé sur Quindici. Actuellement toute la partie haute du village est laissée à l'abandon à cause du risque potentiel, et un ouvrage a été construit comme on peut le voir sur la photo F . 1.6. Pendant cette visite, les chercheurs et experts commentant le site, ont eu du mal à cacher leur scepticisme quant à



F . 1.5 – Aperçu des coulées de boue torrentielles qui ont détruit une bonne partie de *Quindici* le 5 mai 1998.



F . 1.6 – Ouvrage géotechnique construit à la suite de cet évènement (source personnelle).

l'efficacité réelle de cet ouvrage. De plus, du fait de l'émotion causée par un tel évènement, beaucoup d'argent public a été investi rapidement sur ce site, alors que la région connaît beaucoup d'autres sites à risques constitués du même genre de matériaux.

Enfin, je terminerai sur un glissement de terrain qui a eu lieu dans l'état du Chiapas au Mexique. Comme pour le glissement de Petacciato, il s'est aussi produit après une forte période de pluies et sous une très faible pente moyenne (8°). Comme on peut le voir sur les photos F . 1.7 et F . 1.8, le 5 novembre 2007, un important volume - environ 500 m de large pour 1 km de long - s'est déplacé sur 500 m, a rasé un village, puis obstrué le fleuve Grijalva sur lequel sont construits trois barrages : deux en amont du bouchon - Malpasso et Chicoasen - et un en aval - Peñitas -.

La liste des glissements de terrains spectaculaires qui ont causé d'importants dégâts matériels



F . 1.7 – Glissement de terrain qui détruisit San Juan del Grijalva et obstrua le fleuve le 5 novembre 2007. Photos actuellement disponibles sur : www.cfe.gob.mx.



21/12/2007



11/03/2008

F . 1.8 – Évolution des travaux d'excavation permettant la remise en service du fleuve et de ses installations hydroélectriques. Photos actuellement disponibles sur : www.cfe.gob.mx.

et humains est malheureusement assez longue. Je me suis donc cantonné à présenter ces quelques

cas sur lesquels j'ai été amené à travailler ou échanger (visite ou séminaire) et qui, dans les cas de Petacciato et San Juan del Grijalva, ne pouvaient pas être expliqués par les méthodes classiques de modélisation.

1.4 Modélisation du comportement des géomatériaux

Le nom géomatériaux est un terme générique qui désigne divers matériaux naturels ou utilisés pour les constructions génie civils comme les sols, roches, bétons ou neige. Dans cette thèse nous nous intéresserons qu'aux matériaux constitués d'assemblages granulaires (sables et certaines argiles). La science de ces matériaux est assez jeune¹ (deuxième moitié du XX^e siècle) et connaît actuellement d'importants développements. Les matériaux granulaires sont composés d'un grand nombre de grains souvent petits mais néanmoins macroscopiques (en général supérieur au dixième de millimètre). Le comportement de tels matériaux reste à mon sens fascinant, car selon les conditions de chargement, ils présentent des comportements très variés. Dans cette thèse on s'attache surtout à leur comportement "statique" qui présente des caractéristiques de type solide, alors que sous certaines conditions, ces matériaux peuvent s'écouler avec des caractéristiques de type "fluide". Il est aussi intéressant de noter que dans la description de leur écoulement, la température n'est pas un paramètre de contrôle contrairement aux fluides. En effet, les vitesses de déplacement des grains sont en général de l'ordre du cm/s, ce qui correspond à des énergies cinétiques supérieures à 10^{-12} J (Staufer *et al.* (1999)). Donc l'énergie thermique $k_B T$ responsable du mouvement brownien dans les fluides est ici négligeable : $k_B \approx 10^{-23}$ J/K. Enfin, la loi de conservation de l'énergie ne s'applique pas non plus, car dans leur mouvement, les grains se heurtent de façon inélastiques et des déperditions sous forme de chaleur se produisent.

Nous allons, dans un premier temps, présenter les grandes classes de loi de comportements, puis, dans un second temps, détailler les lois de comportement pour matériaux non visqueux rentrant dans le cadre de notre étude. Trois lois particulières pour sols élasto-plastiques seront aussi présentées : modèle Plasol (Barnichon (1998)), modèle de Pastor-Zienkiewicz (Pastor *et al.* (1990)) et modèles de Darve (Darve et Labanieh (1982)).

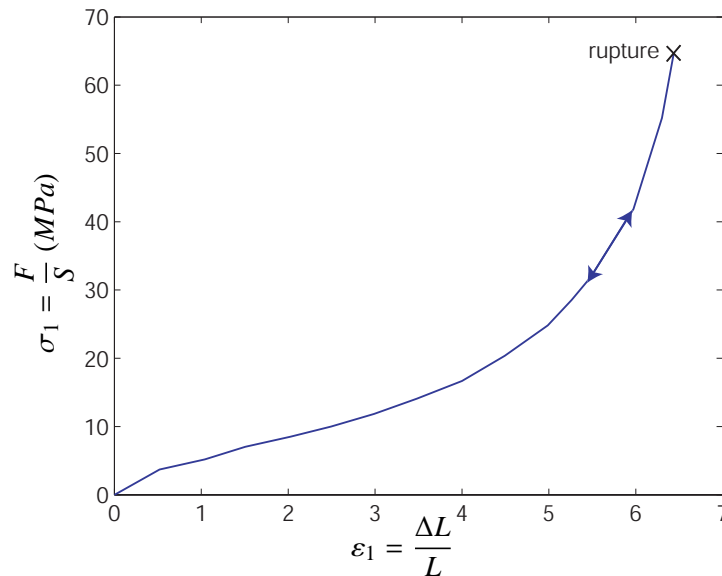
1.4.1 Généralités : grandes classes de lois de comportement

Cette partie n'a pas la prétention de passer en revue toutes les lois de comportement des corps déformables qui peuvent exister, mais simplement de donner une idée qualitative ou intuitive des phénomènes physiques caractérisant les comportements les plus classiques.

1.4.1.1 Comportement élastique

Un matériau élastique est caractérisé par un comportement réversible, ou identique en charge-décharge, avant la rupture. Dans beaucoup de cas, les essais permettant de décrire ce comportement sont des essais uniaxiaux de traction ou de compression simple. La courbe réponse est étudiée dans un plan $(\sigma_1 - \varepsilon_1)$ définissant la contrainte axiale (F/S) et la déformation axiale ($\Delta L/L$). La correspondance entre σ_1 et ε_1 est bijective, mais pas forcément linéaire. La figure F . 1.9 illustre le comportement typique d'un ruban de caoutchouc. On voit ici que les déformations sont grandes (presque 700%)

1. ou plutôt connaît une seconde jeunesse après les travaux fondateurs de Coulomb, Rankine et Reynolds (C. Coulomb (1773), Rankine (1857), Reynolds (1885)).



F . 1.9 – Courbe caractéristique issue d’un essai de traction simple sur un ruban de caoutchouc. Tiré de Royis (2005)

et que la réponse est fortement non linéaire. À ma connaissance, la plupart des modèles élastiques sont de plus hyperélastiques. C’est-à-dire que les contraintes s’exerçant sur le matériau découlent d’une fonction d’énergie de déformation W telle que :

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad (i,j) \in \llbracket 1,3 \rrbracket \times \llbracket 1,3 \rrbracket \quad (1.6)$$

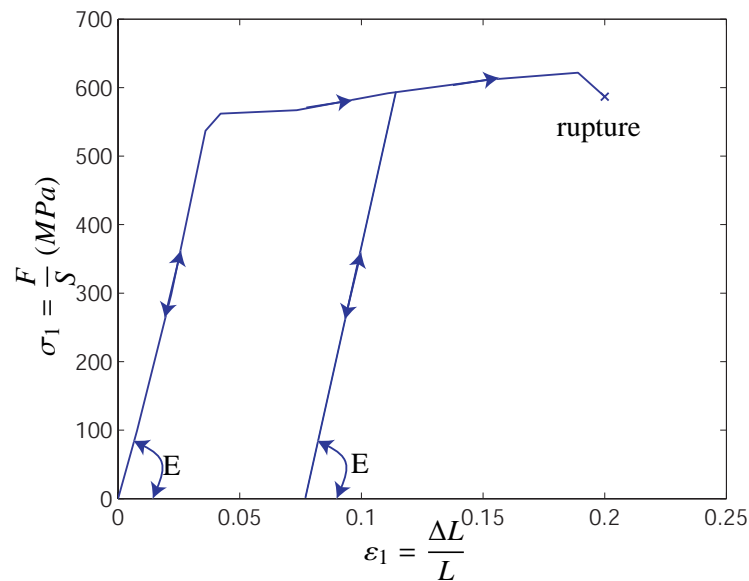
Dans ces conditions, le tenseur $\underline{\underline{M}}$ liant les incréments de contraintes aux incréments de déformations vérifie la symétrie majeure en plus des symétries mineures. En utilisant les notations :

$$d\sigma_{ij} = M_{ijkl} d\varepsilon_{kl} \quad (1.7)$$

cela signifie que $M_{ijkl} = M_{klij}$. Les symétries mineures sont assurées par les symétries des tenseurs de contraintes et déformations. Les milieux de type Cosserat (Cosserat et Cosserat (1909)), qui autorisent un tenseur de contraintes non symétrique, ne sont pas du tout abordés dans cette thèse. Une loi élastique qui ne s’appuie pas sur un potentiel élastique est dite hypoélastique. Dans ce cas, $\underline{\underline{M}}$ ne vérifie plus la symétrie majeure et des dissipations internes d’énergie peuvent se produire. Si, à ma connaissance, il n’existe pas de matériaux réels décrits par de telles lois, elles peuvent néanmoins servir de base de départ pour des modèles de matériaux élasto-plastiques qui font l’objet du paragraphe suivant.

1.4.1.2 Comportement élasto-plastique

Historiquement, la théorie de l’élastoplasticité s’est essentiellement développée avec l’étude du comportement des matériaux métalliques et plus particulièrement des aciers. Pour présenter les caractéristiques mécaniques principales d’un tel matériau, nous allons étudier la courbe réponse typique d’un acier doux en traction simple (F . 1.10). Cette figure F . 1.10 amène les commentaires qui suivent. Supposé dans un état initialement vierge, le comportement du matériau est d’abord réversible : élastique linéaire jusqu’à sa limite d’élasticité (ici environ 530 MPa). Puis au-delà de cette limite, le comportement devient en partie irréversible avec des déformations permanentes appelées

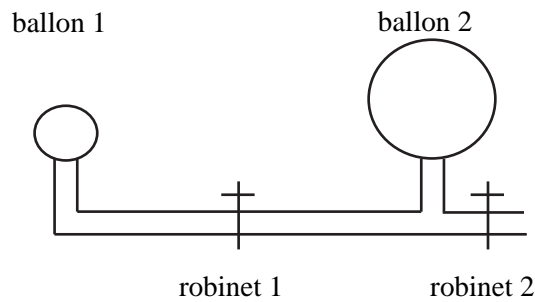


F . 1.10 – Courbe issue d'un essai de traction simple sur une barre d'acier doux HA8 servant au ferrailage des bétons. Tiré d'un tp effectué à l'IUT GC de Grenoble en 2007

déformations plastiques. Entre la limite élastique et le pic (ici à environ 620 MPa), le comportement du matériau évolue avec l'histoire du chargement. C'est la phase d'écrouissage. Tout au long de cette phase, une décharge se produit de façon élastique avec la même pente que celle de la phase élastique initiale. Ceci est vrai pour la plupart des matériaux métalliques. Le pic de cette courbe définit la limite à la rupture en traction simple du matériau. En continuant le chargement après ce pic, la contrainte diminue jusqu'à la rupture effective de la barre (barre scindée en deux). Cette baisse de contrainte est due à un phénomène de striction (étranglement de la barre) lié à un régime transitoire instable (non reproductible d'un essai à l'autre) conduisant à la rupture effective. Cette partie de la courbe n'est, dans ce cas-ci, pas caractéristique du comportement du matériau. La dernière caractéristique importante des matériaux élasto-plastiques, est que l'évolution de leur comportement ne dépend que de l'histoire du chargement (temps traduisant la chronologie des évènements), mais pas des vitesses de chargement (temps physique).

Si un tel exemple permet de poser les concepts de base de l'élastoplasticité, ce comportement ne se généralise pas de manière générale. Les aciers possèdent finalement un comportement assez simple. Leur comportement en traction ou compression est à peu près identique, ils présentent une phase élastique linéaire et leur déformation se fait à volume constant y compris dans la phase d'écrouissage. Dans le cas des géomatériaux, les comportements en traction-compression sont très différents, la phase élastique n'existe souvent pas, et à défaut est souvent non linéaire. Enfin des variations de volumes complexes (non monotones) peuvent se produire au cours d'un chargement monotone. Lors d'un essai triaxial drainé sur un sable dense, une phase de contractance est suivie d'une phase de dilatance.

Pour finir sur cette partie, je voulais aborder la question de l'existence de pics que présentent certains matériaux sur leur courbe contrainte-déformation. On parle dans ces cas-ci, d'écrouissage positif (hardening) pour la phase plastique ante pic, et d'écrouissage négatif ou de radoucissement (softening) pour la phase post pic. Cette observation amène la réflexion suivante : est-ce que la partie de la courbe située après ce pic est caractéristique du comportement du matériau? Cette question est à mon sens encore ouverte pour de nombreux cas, et fait d'ailleurs parfois l'objet de débats passionnés. En effet, dans le cas des aciers, cette phase est due à un phénomène de striction. Dans le cas d'un essai triaxial drainé sur sable dense, une fois passé le pic de $q = \sigma_1 - \sigma_3$ une localisation en bande de cisaillement se manifeste, et donc l'essai n'est plus homogène. Pour le cas d'un essai triaxial sur sable



F . 1.11 – Dispositif expérimental pour l'étude de la mise en équilibre d'un système à deux ballons

lâche, on admet généralement que le pic est atteint de façon asymptotique. Néanmoins on observe souvent expérimentalement un pic peu marqué. Le faible radoucissement observé, qui a priori n'est pas dû à une localisation, est-il réellement constitutif ou structurel? Cette question m'a fait penser à une expérience simple et amusante que l'on peut faire avec deux ballons de baudruche identiques (la couleur n'a pas d'importance pour l'expérience). Le dispositif expérimental est présenté sur la figure F . 1.11. À l'état initial, les deux robinets sont fermés, et le ballon 1 est moins gonflé que le ballon 2. La question posée étant : comment évolue le système lorsqu'on ouvre le robinet 1? La réponse prématurée serait de dire que le gros va se vider dans le petit jusqu'à une position d'équilibre où les deux ballons ont un volume identique. En fait, bien que cette solution existe, il existe aussi une solution où le petit ballon se vide dans le gros avec une position d'équilibre où le petit reste plus petit, et le gros plus gros. Cela est dû au fait, que la courbe pression-volume de gonflage d'un ballon présente un pic. Donc selon l'état initial des deux ballons sur cette courbe, les deux possibilités sont envisageables. Il reste tout de même à noter que cette courbe est "réversible" à cause du comportement élastique du caoutchouc. De plus cette courbe n'est pas caractéristique du comportement du matériau, qui ressemble un peu plus à celui montré en figure F . 1.9. Ce pic est donc dû à un effet structurel. Une explication qualitative de cette expérience est donnée au paragraphe suivant. C'est pourquoi, il me semble légitime de se poser la question sur la nature des radoucissements observés en élastoplasticité : constitutif, structurel ou instabilité menant à la rupture?

1.4.1.3 Digression sur l'expérience des deux ballons : explication qualitative

Pour cette étude, on se donne une loi de comportement sur le caoutchouc des ballons de baudruche en figure F . 1.12. L'hypothèse de ballons sphériques est admise. On appelle par ailleurs R le rayon intérieur d'un ballon, e son épaisseur avec $e \ll R$, et P la pression d'air intérieure. On notera respectivement R_0 , e_0 et $P_0 = 0$ le rayon, l'épaisseur et la pression à l'état vierge d'un ballon.

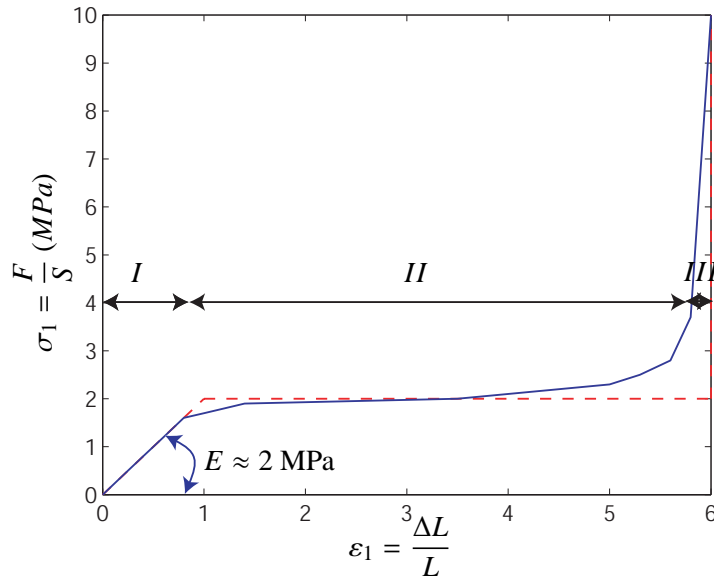
On cherche, avec ces hypothèses, à donner la courbe pression volume d'un ballon sphérique. Dans un premier temps, on va déterminer le champ de contrainte dans le ballon en fonction de P , R et e , puis grâce à la relation $\sigma = f(\varepsilon)$, la courbe pression rayon ou pression volume.

Pour avoir une idée approchée de champ de contrainte, nous faisons le raisonnement du "chaudronnier" qui consiste à écrire l'équilibre d'une demi-sphère. Nous avons donc :

$$\pi \left((R + e)^2 - R^2 \right) \sigma = P \vec{S} \cdot \vec{e}_z = \pi R^2 P \quad (1.8)$$

avec S la surface d'une demi-sphère et \vec{e}_z le vecteur unitaire normal au plan de la demi-sphère. En négligeant le terme en e^2 , il vient :

$$\sigma = \frac{P R}{2e} \quad (1.9)$$



F . 1.12 – Courbe de traction "idéale" d'un caoutchouc de ballon de baudruche.

Puis en faisant l'hypothèse d'une déformation à volume constant (comme pour les aciers), on a de plus : $R^2 e = R_0^2 e_0$. D'où :

$$\sigma = \frac{P R_0}{2 e_0} \left(\frac{R}{R_0} \right)^3 \quad (1.10)$$

En considérant des grandes déformations, il vient :

$$\varepsilon = \ln \left(\frac{R}{R_0} \right) \quad (1.11)$$

Pour continuer on fait, dans un premier temps, l'hypothèse que l'on se trouve dans la zone élastique linéaire *I* du caoutchouc, puis on vérifiera a posteriori que la partie de la courbe pression-volume qui nous intéresse fait bien partie de cette zone du comportement. Dans ces conditions, $\sigma = E \varepsilon$, et il vient :

$$P = \frac{2 e_0 E}{R_0} \ln \left(\frac{R}{R_0} \right) \left(\frac{R_0}{R} \right)^3 \quad (1.12)$$

ou encore :

$$P = \frac{2 e_0 E}{3} \left(\frac{4\pi}{3V_0} \right)^{\frac{1}{3}} \ln \left(\frac{V}{V_0} \right) \left(\frac{V_0}{V} \right) \quad (1.13)$$

Ce résultat donne la courbe pression-volume illustrée sur la figure F . 1.13. En calculant la dérivée logarithmique de la relation (1.13), on détermine la valeur de la déformation au pic :

$$\frac{V_{pic}}{V_0} = \exp(1) \approx 2.7 \rightarrow \varepsilon_{pic} = \frac{1}{3} \quad (1.14)$$

Le pic est donc clairement atteint dans le domaine élastique linéaire *I* de la figure F . 1.12. En considérant que la fin du domaine linéaire se situe à $\sigma_l = 2$ MPa, avec $E = 2$ MPa, on trouve $\varepsilon_{linéaire}^{maxi} = 1$ soit $V_{linéaire}^{maxi}/V_0 \approx 20$. Toute la courbe présentée en figure F . 1.13 se trouve dans le domaine linéaire et correspond aux hypothèses émises.

Pour finir avec cette réflexion sur le radoucissement, on voit sur cette application que le pic de P est dû à la variation de l'épaisseur du ballon au cours du chargement, et non au comportement du matériau qui est élastique linéaire dans ce domaine de sollicitations. C'est pourquoi je me posais la question de savoir si le léger radoucissement que l'on peut parfois observer lors d'un triaxial drainé

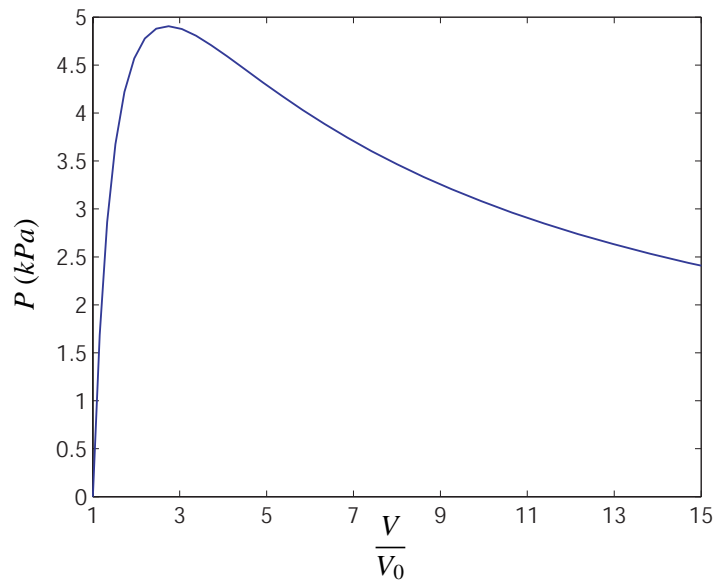


Fig. 1.13 – Courbe pression-volume "qualitative" d'un ballon de baudruche tracée avec $R_0 = 20 \text{ mm}$, $e_0 = 0.2 \text{ mm}$ et $P_0 = 0$.

sur sable lâche était effectivement dû au comportement du matériau, ou à un effet de variations géométriques importantes à ce stade de l'essai. Dans ce cas le radoucissement serait structurel et non constitutif.

1.4.1.4 Comportement de milieux fluides simples

Dans cette section sont présentés les comportements de fluides les plus élémentaires. Bien que les milieux fluides à proprement parler ne sont pas du tout abordés dans cette thèse, certains matériaux solides peuvent avoir des caractéristiques fluides (viscosité dans certains polymères ou argiles) avec parfois des transitions solides-liquides. La présentation donnée ci-après est largement inspirée du Chapitre 4 du livre de Royis (Royis (2005)).

1. **Fluide parfait** : Un fluide est parfait ou non visqueux lorsque le tenseur des contraintes de Cauchy est indépendant du tenseur taux de déformation. Dans ces conditions, on a toujours (à l'équilibre comme en mouvement) :

$$\underline{\underline{\sigma}} = -p \underline{\underline{I}} \quad (1.15)$$

où $\underline{\underline{I}}$ est le tenseur unité, et la pression p est reliée à la masse volumique ρ et à la température T par une équation d'état :

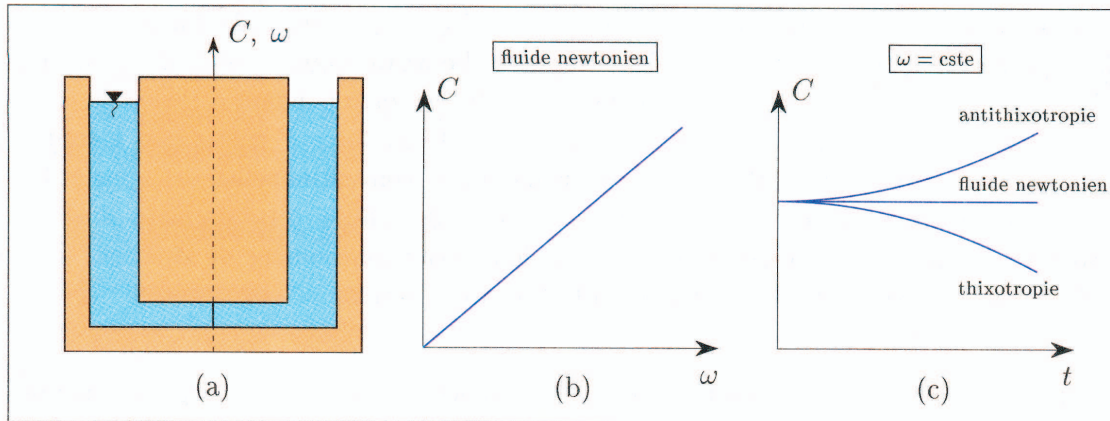
$$F(p, \rho, T) = 0 \quad (1.16)$$

2. **Fluide visqueux** : Un fluide visqueux vérifie la même relation (1.15) qu'un fluide parfait au repos, mais lorsqu'il est mis en mouvement, des contraintes visqueuses dépendantes du taux de déformation (dus aux vitesses relatives entre particules fluides), viennent s'ajouter à cet état de contraintes isotropes. On a alors :

$$\underline{\underline{\sigma}} = -p \underline{\underline{I}} + \mathcal{F}(\underline{\underline{D}}) \quad (1.17)$$

avec $\underline{\underline{D}}$ le tenseur taux de déformations, et où \mathcal{F} vérifie $\mathcal{F}(\underline{\underline{0}}) = \underline{\underline{0}}$. L'appareil le plus classique pour mesurer cette viscosité est probablement le rhéomètre de Couette présenté sur la figure

F . 1.14. Un récipient axisymétrique accueille le fluide à étudier, puis on fait tourner un rotor,



F . 1.14 – Rhéomètre de Couette. Figure tirée de Royis (2005)

et on mesure le couple C nécessaire pour entretenir une vitesse angulaire ω donnée. Un fluide est qualifié de newtonien lorsque la relation liant C à ω est linéaire. Certains fluides voient le couple nécessaire à maintenir une vitesse de rotation constante diminuer avec le temps (ils se fluidifient). Ils sont alors qualifiés de thixotrope lorsqu'ils retrouvent leurs propriétés initiales après un long temps de repos, et de partiellement thixotrope s'ils ne retrouvent pas intégralement ces propriétés. Ce phénomène peut être assez fréquent, notamment dans le cas de certains vases appelées communément sables mouvants. L'effet inverse, appelé antithixotropie, est apparemment moins fréquent. Enfin, le terme de rhéopexie est employé pour désigner un système thixotrope qui se solidifie sous l'effet d'un mouvement doux et régulier.

1.4.2 Lois de comportement pour les matériaux non visqueux

1.4.2.1 Généralités sur l'écriture de lois élasto-plastiques

Dans cette partie nous présentons comment les lois de comportement non visqueuses sont formulées de manière incrémentale. L'ensemble des positions occupées par des particules d'un corps à l'instant τ est noté $\phi(\mathbf{X}, \tau)$, avec \mathbf{X} les coordonnées d'un point matériel à l'instant initial. L'application ϕ représente l'histoire du mouvement du corps. Le principe de déterminisme (Germain (1973), Stutz (1987)) stipule que si on applique à un matériau un chemin de sollicitation donné, alors le chemin de réponse est déterminé unique. Dans ces conditions, l'état de contraintes $\sigma(t)$ au temps t est une fonctionnelle \mathcal{F} de l'histoire de l'application linéaire tangente \mathbf{F} . \mathbf{F} est la matrice jacobienne des positions $\phi(\mathbf{X}, \tau)$. Ainsi :

$$\sigma(t) = \mathcal{F}[\mathbf{F}(\tau)] \quad \text{avec} \quad -\infty < \tau \leq t \quad (1.18)$$

La fonctionnelle \mathcal{F} ayant pour argument une fonction tensorielle dépendante du temps ne peut, dans certains cas, être explicitée : en particulier pour des transformations irréversibles (viscosité ou plasticité). Dès lors, la connaissance de l'état de déformation $\mathbf{F}(\tau)$ ne permet pas de déterminer l'état de contrainte. Une façon de contourner ce problème est d'écrire les lois de comportement de façon incrémentale. Le principe de déterminisme incrémental est alors le suivant : si on applique un petit incrément sollicitation au matériau pendant un intervalle de temps dt , l'incrément de réponse est

déterminée unique. On a alors :

$$F_h(d\varepsilon, d\sigma, dt) = 0 \quad (1.19)$$

avec F_h une fonction dépendant de l'histoire des sollicitations via le paramètre de mémoire h , qui contient des scalaires ou des grandeurs tensorielles. F_h doit satisfaire le principe d'objectivité, et n'est en général pas linéaire. Comme les matériaux visqueux ne sont pas traités dans cette thèse, le temps n'est plus qu'une chronologie. Dans ces conditions, F_h est régulière, et la relation (1.19) peut s'écrire :

$$d\varepsilon = G(d\sigma) \quad (1.20)$$

Les propriétés de la fonction tensorielle G sont les suivantes :

1. G est homogène de degré 1 :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}^+, G(\lambda d\sigma) = \lambda G(d\sigma) \quad (1.21)$$

2. G est non linéaire :

$$\exists (d\sigma_1, d\sigma_2) \in \mathbb{R}^6 \times \mathbb{R}^6, G(d\sigma_1 + d\sigma_2) \neq G(d\sigma_1) + G(d\sigma_2) \quad (1.22)$$

en particulier,

$$\forall d\sigma \in \mathbb{R}^6, G(-d\sigma) \neq -G(d\sigma) \quad (1.23)$$

3. G est anisotrope pour le cas de matériaux anisotropes.

Grâce à l'identité d'Euler² nous avons :

$$G_i(d\sigma) = \frac{\partial G_i}{\partial (d\sigma_j)} d\sigma_j, \quad (i, j) \in \llbracket 1, 6 \rrbracket \times \llbracket 1, 6 \rrbracket \quad (1.24)$$

avec les tenseurs $d\sigma$ et $d\varepsilon$ écrits sous forme de vecteurs colonnes à six lignes. La convention de sommation de l'indice répété est respectée. En posant :

$$M_{ij}(d\sigma) = \frac{\partial G_i}{\partial (d\sigma_j)}, \quad (i, j) \in \llbracket 1, 6 \rrbracket \times \llbracket 1, 6 \rrbracket \quad (1.25)$$

nous obtenons la relation :

$$d\varepsilon_i = M_{ij}(d) d\sigma_j, \quad (i, j) \in \llbracket 1, 6 \rrbracket \times \llbracket 1, 6 \rrbracket \quad (1.26)$$

avec :

$$d = \frac{d\sigma}{\|d\sigma\|} \quad (1.27)$$

Les 6×6 fonctions M_{ij} sont homogènes de degré zéro par rapport aux six variables $d\sigma_j$. La matrice M , appelée matrice constitutive tangente, n'est pas à proprement parler un tenseur³, car elle dépend de la direction des incréments de contraintes. Cette dépendance directionnelle caractérise l'aspect incrémentalement non linéaire de toute loi élasto-plastique. Les lois élastiques sont incrémentalement linéaires, alors que les lois élasto-plastiques sont au moins incrémentalement linéaires par morceaux. Cette remarque, nous permet d'introduire une notion peut être pas si classique en élasto-plasticité : les zones tensorielles.

2. pour une fonction de deux variables homogènes de degré 1, elle s'écrit : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y}$.

3. excepté dans le cas élastique

Définition : Une zone tensorielle, est une partie de l'espace des sollicitations pour laquelle, la relation constitutive incrémentale est linéaire.

Une loi élasto-plastique classique à une seule surface de charge possède deux zones tensorielles : une en charge plastique, et la seconde élastique en décharge.

Dans la suite, nous nous proposons de détailler trois modèles élasto-plastiques pour sols. Le premier est un modèle classique avec un potentiel, mais néanmoins non associé, et les deux autres reposent sur des formalismes un peu plus originaux.

1.4.2.2 Modèle élasto-plastique Plasol

Cette loi élasto-plastique non associée est basée sur la surface limite proposée par Van Eekelen (Van Eekelen (1980)). On note I_σ , $I_{2\sigma}$ et $I_{3\sigma}$ les premier, deuxième et troisième invariants des contraintes respectivement.

$$I_\sigma = \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}); \quad I_{2\sigma} = \text{tr}(s^2); \quad I_{3\sigma} = \text{tr}(s^3) \quad \text{avec} \quad s = \boldsymbol{\sigma} - \frac{I_\sigma}{3}\mathbf{1} \quad (1.28)$$

où $\text{tr}(\mathbf{x}) = \sum x_{ii}$ et $\mathbf{1}$ est le tenseur unité. Le troisième invariant est caractérisé par l'angle de Lode ϑ .

$$\cos 3\vartheta = \frac{\sqrt{6}I_{3\sigma}}{\sqrt{(I_{2\sigma})^3}} \quad (1.29)$$

L'expression de la surface de charge de Van Eekelen est la suivante :

$$f = \sqrt{I_{2\sigma}} + m \left(I_\sigma - \frac{3c}{\tan \varphi_c} \right) = 0 \quad (1.30)$$

où c est la cohésion, φ_c l'angle de frottement pour un chemin triaxial drainé en compression et m un coefficient définit par :

$$m = a(1 + b \sin 3\vartheta)^n \quad (1.31)$$

Les paramètres a et b sont des fonctions de l'angle de frottement en compression φ_c et en extension φ_e :

$$b = \frac{\left(\frac{r_c}{r_e}\right)^{\frac{1}{n}} - 1}{\left(\frac{r_c}{r_e}\right)^{\frac{1}{n}} + 1}, \quad a = \frac{r_c}{(1 + b)^n} \quad (1.32)$$

où r_c et r_e sont les rayons réduits en compression et en extension respectivement pour des tests triaxiaux.

$$r_c = \frac{2 \sin \varphi_c}{\sqrt{3}(3 - \sin \varphi_c)}, \quad r_e = \frac{2 \sin \varphi_e}{\sqrt{3}(3 + \sin \varphi_e)} \quad (1.33)$$

L'exposant n contrôle la convexité de la surface de charge. D'après les conclusions de Van Eekelen (Van Eekelen (1980)), la valeur par défaut $n = -0.229$ permet d'assurer cette convexité dans la plupart des cas. Une comparaison entre les surfaces d'écoulement de Mohr-Coulomb, Drucker Prager et Van Eekelen est présentée dans le plan déviatoire sur la figure F . 1.15 pour une valeur donnée de φ_c . Comme on peut le voir, cette surface est assez proche de celle de Mohr-Coulomb tout en étant plus régulière. Le potentiel plastique dépend des trois variables d'écrouissage φ_c , φ_e et c , qui évoluent

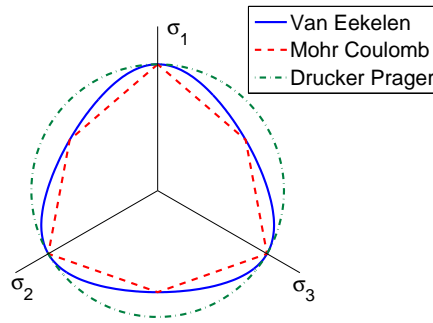


FIG. 1.15 – Surfaces limites de Mohr-Coulomb, Drucker Prager and Van Eekelen dans le plan déviatoire pour $\varphi_c = \varphi_e = 19^\circ$

de façon hyperbolique avec ε_{eq}^p la déformation plastique équivalente de Von Mises. De plus, la forme de cette évolution est fonction de deux constantes B_p et B_c fixées par l'utilisateur en entrée du calcul.

$$\varepsilon_{eq}^p = \int_0^t \dot{\varepsilon}_{eq}^p dt = \int_0^t \sqrt{\frac{2}{3} \text{tr}(\dot{\varepsilon})^2} dt \quad \text{avec} \quad \dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^p - \frac{\text{tr}(\dot{\varepsilon}^p)}{3} \mathbf{1} \quad (1.34)$$

$$\begin{cases} \varphi_c = \varphi_{c0} + \frac{(\varphi_{cf} - \varphi_{c0}) \varepsilon_{eq}^p}{B_p + \varepsilon_{eq}^p} \\ \varphi_e = \varphi_{e0} + \frac{(\varphi_{ef} - \varphi_{e0}) \varepsilon_{eq}^p}{B_p + \varepsilon_{eq}^p} \\ c = c_0 + \frac{(c_f - c_0) \varepsilon_{eq}^p}{B_c + \varepsilon_{eq}^p} \end{cases} \quad (1.35)$$

Ces paramètres B_p et B_c représentent, respectivement, les valeurs de la déformation plastique équivalente pour laquelle la moitié de l'écroissage sur l'angle de frottement et la cohésion est atteint (Figure 1.16).

Ce modèle, permet en outre de travailler en plasticité non associée. La surface d'écoulement est

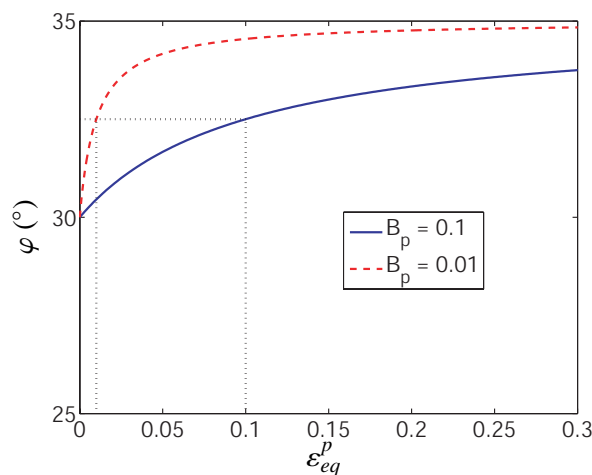


FIG. 1.16 – Exemple de loi hyperbolique d'écroissage pour deux valeurs de B_p ($\varphi_0 = 30^\circ$, $\varphi_f = 35^\circ$)

définie avec le même formalisme que la surface de charge :

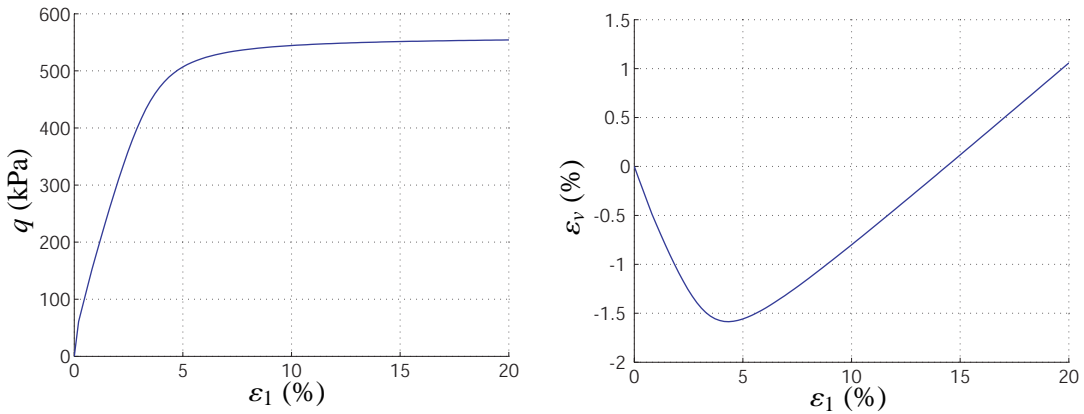
$$g = \sqrt{I_{2\sigma}} + m' \left(I_{\sigma} - \frac{3c}{\tan \varphi_c} \right) = 0 \quad (1.36)$$

où m' est obtenu de la même manière que m , mais en remplaçant φ_c et φ_e courant par ψ_c et ψ_e , les angles de dilatance en compression et extension dans l'expression de m . Dans ce modèle, ψ_c et ψ_e évoluent de façon identique à φ_c et φ_e au cours du chargement :

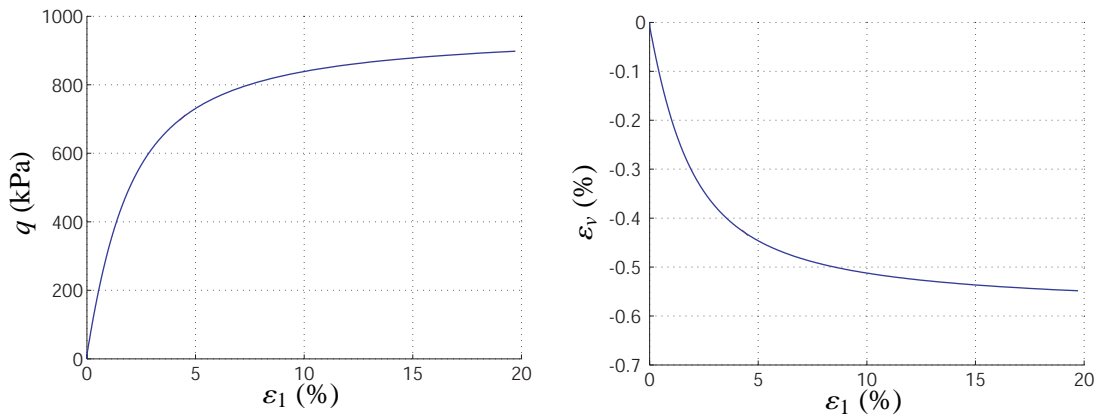
$$\begin{cases} \varphi_c - \psi_c = cte_1 & cte_1 \in \mathbb{R} \\ \varphi_e - \psi_e = cte_2 & cte_2 \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (1.37)$$

Ainsi, uniquement les valeurs des angles de dilatance à la rupture sont à renseigner en entrée.

Une fois les surfaces de charge et d'écoulement ainsi que les règles d'évolution des paramètres d'écrouissage décrites, les concepts de l'élasto-plasticité classiques s'appliquent normalement. Pour finir, ce modèle ne permet pas de décrire le radoucissement. Lors de la calibration, on cherche à reproduire le comportement avant pic. Ce modèle reste le plus simple des trois présentés avec 13 paramètres de calibration au total, dont 10 principaux pour définir des chemins en compression monotone.



F . 1.17 – Exemple de réponse à un chemin tiraxial drainé pour un matériau dense : modèle Plasol.



F . 1.18 – Exemple de réponse à un chemin tiraxial drainé pour un matériau lâche : modèle Plasol.

1.4.2.3 Modèles de plasticité généralisée de Pastor-Zienkiewicz

La description de ces lois faite ici est une synthèse de l'article Pastor *et al.* (1990) et du chapitre 4 du livre Zienkiewicz *et al.* (1999). Pour développer leur formalisme de plasticité généralisée, Pastor et Zienkiewicz repartent de l'expression générale (1.26). Pour conserver les notations des auteurs, la matrice constitutive \mathbf{M} sera notée \mathbf{C} . Une des façon les plus simples pour décrire les irréversibilités, et de tenir compte de la dépendance en \mathbf{d} de \mathbf{C} , est de définir un vecteur \mathbf{n} unitaire de l'espace des incréments de contraintes tel que :

$$\begin{cases} \|\mathbf{n}\| = 1 \\ {}^t\mathbf{n} \, d\boldsymbol{\sigma} > 0 \text{ (charge)} \\ {}^t\mathbf{n} \, d\boldsymbol{\sigma} < 0 \text{ (décharge)} \\ {}^t\mathbf{n} \, d\boldsymbol{\sigma} = 0 \text{ (chargement neutre)} \end{cases} \quad \begin{cases} \text{et } d\boldsymbol{\varepsilon}_L = \mathbf{C}_L \, d\boldsymbol{\sigma} \\ \text{et } d\boldsymbol{\varepsilon}_U = \mathbf{C}_U \, d\boldsymbol{\sigma} \end{cases} \quad (1.38)$$

Les indices L et U servent à distinguer "loading" et "unloading". En définissant :

$$\begin{cases} \mathbf{C}_L = \mathbf{C}^e + \frac{1}{H_L} \mathbf{n}_{gL} \otimes \mathbf{n} \\ \mathbf{C}_U = \mathbf{C}^e + \frac{1}{H_U} \mathbf{n}_{gU} \otimes \mathbf{n} \end{cases} \quad (1.39)$$

la continuité avec le chargement neutre est assurée car :

$$d\boldsymbol{\varepsilon}_L = \mathbf{C}^e \, d\boldsymbol{\sigma} = d\boldsymbol{\varepsilon}_U \quad (1.40)$$

\mathbf{n}_{gL} et \mathbf{n}_{gU} sont des tenseurs arbitraires de norme 1 et de même dimension que \mathbf{n} , et $H_{L/U}$ sont deux fonctions scalaires définies comme les modules plastiques en charge et décharge. Ainsi, avec ce formalisme nous avons aussi une décomposition en partie élastique plus plastique des déformations :

$$\begin{cases} d\boldsymbol{\varepsilon}^e = \mathbf{C}^e \, d\boldsymbol{\sigma} \\ d\boldsymbol{\varepsilon}^p = \frac{1}{H_{L/U}} (\mathbf{n}_{gL/U} \otimes \mathbf{n}) \, d\boldsymbol{\sigma} \end{cases} \quad (1.41)$$

Enfin, le radoucissement observé pour certains géomatériaux peut être défini de la façon suivante :

$$\begin{cases} d\boldsymbol{\varepsilon}_L = \mathbf{C}_L \, d\boldsymbol{\sigma} & \text{pour } {}^t\mathbf{n} \, d\boldsymbol{\sigma}^e > 0 \text{ (charge)} \\ d\boldsymbol{\varepsilon}_U = \mathbf{C}_U \, d\boldsymbol{\sigma} & \text{pour } {}^t\mathbf{n} \, d\boldsymbol{\sigma}^e < 0 \text{ (décharge)} \end{cases} \quad (1.42)$$

avec

$$d\boldsymbol{\sigma}^e = \mathbf{C}^{e-1} \, d\boldsymbol{\varepsilon} \quad (1.43)$$

Le terme de plasticité généralisée tient au fait qu'une surface de charge n'est jamais explicitement définie. Néanmoins, les équations gardent la même forme qu'en élasto-plasticité classique. D'ailleurs Pastor et Zienkiewicz (Pastor *et al.* (1990)) proposent une forme de surface de charge dans leur modèle pour sable par intégration de \mathbf{n} . De ce formalisme, deux modèles ont été proposés par les auteurs, l'un s'appliquant plutôt aux argiles, et l'autre aux sables.

Modèle proposé pour les argiles :

Dans la suite de la description de ces modèles, les notations classiques suivantes sont utilisées :

$$\begin{cases} d\varepsilon_v = -\text{tr}(d\boldsymbol{\varepsilon}) \\ d\varepsilon_s = \sqrt{\frac{2}{3}} \, d\boldsymbol{\varepsilon} : d\boldsymbol{\varepsilon} \\ d\boldsymbol{\varepsilon} = \text{dev}(d\boldsymbol{\varepsilon}) = d\boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{3} d\varepsilon_v \mathbf{1} \end{cases} \quad (1.44)$$

p' et q sont définis de façon similaire avec le tenseur des contraintes. Pour obtenir une règle d'écoulement, une dilatance est définie de la façon suivante :

$$d_g = \frac{d\varepsilon_v^p}{d\varepsilon_s^p} = (1 + \alpha)(M_g - \eta) \quad (1.45)$$

avec $\eta = q/p'$, M_g la pente de la ligne d'état critique dans le plan $p' - q$ et α une constante liée au matériau (à calibrer). Ainsi, la direction arbitraire \mathbf{n}_g est donnée par :

$${}^t \mathbf{n}_g = (n_{gv}, n_{gs}) \quad (1.46)$$

avec

$$\begin{cases} n_{gv} = \frac{d_g}{\sqrt{1 + d_g^2}} \\ n_{gs} = \frac{1}{\sqrt{1 + d_g^2}} \end{cases} \quad (1.47)$$

Pour ce modèle, la direction \mathbf{n} est définie de telle sorte que la règle d'écoulement soit associée. D'où :

$$\mathbf{n} = \mathbf{n}_g \quad (1.48)$$

Le module plastique est défini sur des essais de consolidation isotrope dans lesquels, les incréments de déformation volumique élastique et totale sont donnés par :

$$\begin{cases} d\varepsilon_v^e = \frac{\kappa}{1 + e} \frac{dp'}{p'} \\ d\varepsilon_v = \frac{\lambda}{1 + e} \frac{dp'}{p'} \end{cases} \quad (1.49)$$

d'où :

$$d\varepsilon_v^p = \frac{\lambda - \kappa}{1 + e} \frac{dp'}{p'} \quad (1.50)$$

en utilisant la relation :

$$d\varepsilon^p = \frac{1}{H_L} (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) : d\boldsymbol{\sigma} \quad (1.51)$$

on a :

$$d\varepsilon_v^p = \frac{1}{H_L} dp' \quad (1.52)$$

Donc pour ce type de chemins,

$$H_L = \frac{1 + e}{\lambda - \kappa} p' = H_0 p' \quad (1.53)$$

Pour généraliser cette expression de H_L à des conditions plus générales, Pastor et Zienkiewicz, supposent que H_L dépende de η de façon décroissante jusqu'à atteindre la valeur 0 sur la ligne d'état critique ($\eta = q/p' = M$). De cette façon,

$$H_L = H_0 p' f(\eta) \quad (1.54)$$

avec $f(\eta) = 1$ quand $\eta = 0$ et $f(\eta) = 0$ quand $\eta = M$. La fonction proposée pour f est la suivante :

$$f(\eta) = \left(1 - \frac{\eta}{M}\right)^\mu \frac{(1 + d_0^2)}{(1 + d^2)} \text{sign}\left(1 - \frac{\eta}{M}\right) \quad (1.55)$$

avec $d_0 = (1 + \alpha) M$ et $\mu = 2$ pour la plupart des argiles.

Jusqu'ici le comportement n'a été décrit que pour des conditions axisymétriques. Pour le généraliser à des conditions 3D, il est proposé de faire dépendre M de l'angle de Lode ϑ .

$$M = \frac{18 M_c}{18 + 3 (1 - \sin(3\vartheta))} \quad (1.56)$$

avec M_c la pente de la ligne d'état critique obtenue sur un essai triaxial en compression drainée. Les constantes élastiques sont supposées dépendre de p' de la façon suivante :

$$\begin{cases} d\varepsilon_s^e = \frac{1}{G_0} \frac{p'_0}{p'} dq \\ d\varepsilon_v^e = \frac{1}{K_{ev0}} \frac{p'_0}{p'} dp' \end{cases} \quad (1.57)$$

avec

$$K_{ev0} = p'_0 \frac{1 + e}{\kappa} \quad (1.58)$$

Enfin, pour décrire le comportement d'argiles surconsolidées, une fonction prenant en compte l'histoire du chargement a été ajoutée dans l'expression du module plastique :

$$\zeta = p' \left\{ 1 - \left(\frac{1 + \alpha}{\alpha} \right) \frac{\eta}{M} \right\}^{\frac{1}{\alpha}} \quad (1.59)$$

Ce module s'écrit maintenant :

$$H_L = H_0 p' (f(\eta) + g(\xi)) \left(\frac{\zeta_{max}}{\zeta} \right)^\gamma \quad (1.60)$$

ζ_{max} est la valeur maximum de ζ atteinte au cours du chargement.

$$g(\xi) = \beta \exp(-\beta \xi) \quad (1.61)$$

avec :

$$\beta = \beta_0 \left(1 - \frac{\zeta}{\zeta_{max}} \right) \quad (1.62)$$

et

$$\begin{cases} \xi = \int d\xi \\ d\xi = \sqrt{de^p} : de^p \end{cases} \quad (1.63)$$

Modèle proposé pour les sables :

Dans ce cas-ci, la règle d'écoulement peut être non associée, donc :

$$\mathbf{n} \neq \mathbf{n}_g \quad (1.64)$$

\mathbf{n}_g est défini de la même façon que dans le cas des argiles. Quant à \mathbf{n} il est défini avec le même formalisme, mais de manière distincte. Ainsi on a :

$${}^t \mathbf{n} = (n_v, n_s) \quad (1.65)$$

avec

$$\begin{cases} n_v = \frac{d_f}{\sqrt{1 + d_f^2}} \\ n_s = \frac{1}{\sqrt{1 + d_f^2}} \end{cases} \quad (1.66)$$

et

$$d_f = (1 + \alpha)(M_f - \eta) \quad (1.67)$$

Enfin, le module d'écroissage voit son expression changée, et devient :

$$H_L = H_0 p' H_f (H_v + H_s) \quad (1.68)$$

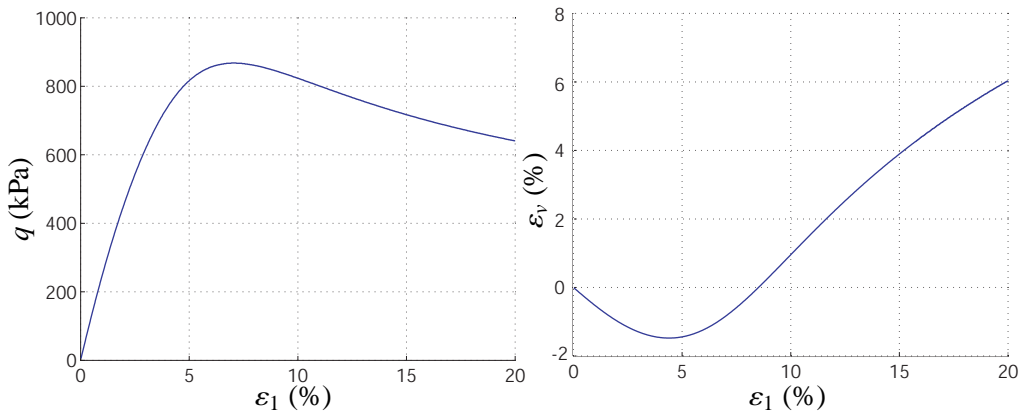
avec

$$\begin{cases} H_f = \left(1 - \frac{\eta}{\eta_f}\right)^4 \\ H_v = \left(1 - \frac{\eta}{M_g}\right) \\ H_s = \beta_0 \beta_1 \exp(-\beta_0 \xi) \end{cases} \quad (1.69)$$

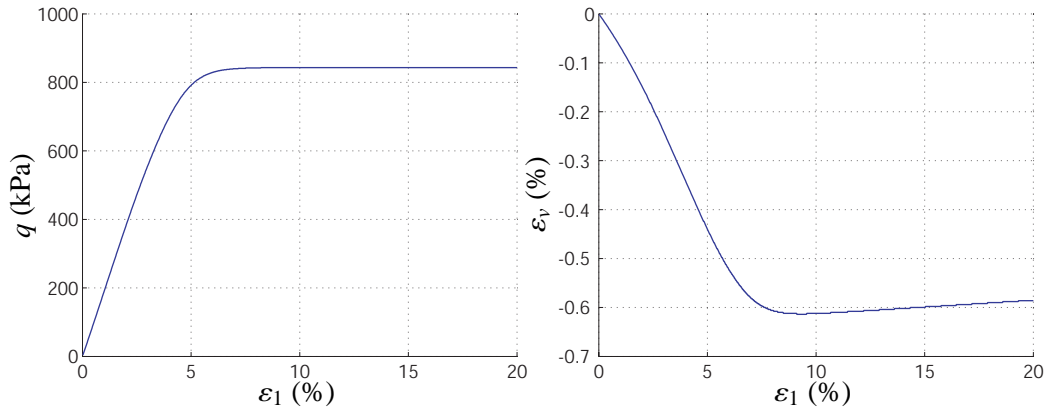
et

$$\eta_f = \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) M_f \quad (1.70)$$

Il est intéressant de noter, que ce modèle tel que formulé ici permet de prendre en compte le radoucissement lors de la simulation d'un triaxial drainé sur sable dense par exemple. Néanmoins, comme il a été formulé pour des sables, aucun paramètre ne permet de définir la cohésion qui est par défaut nulle. Cela peut être limitatif, pour un modèle aussi raffiné, car un certain nombre de sols réels ne sont ni totalement des argiles, ni totalement des sables, et comme nous le verrons dans la suite, il est impératif d'avoir une loi non associée pour décrire certaines instabilités observées dans les sols même en partie cohésifs. Pour finir sur une remarque pratique, ce modèle nécessite 20 constantes de calibration dont 10 principales pour définir des chemins monotones en compression.



F . 1.19 – Exemple de réponse à un chemin triaxial drainé pour un matériau dense : modèle Pastor.



F . 1.20 – Exemple de réponse à un chemin triaxial drainé pour un matériau lâche : modèle Pastor.

1.4.2.4 Modèles incrémentaux de Darve

En repartant de l'expression (1.26), il est possible d'effectuer un développement de Taylor des fonctions M_{ij} au voisinage d'une direction donnée \mathbf{d}^0 (par exemple définissant celle d'un triaxial drainé en compression piloté en contraintes).

$$M_{ij}(\mathbf{d}) = M_{ij}(\mathbf{d}^0) + (d_k - d_k^0) \frac{\partial M_{ij}}{\partial d_k}(\mathbf{d}^0) + o(\|\mathbf{d}\|^2) \quad k \in \{1..6\} \quad (1.71)$$

En regroupant les termes constants et ceux du premier ordre, nous récrivons (1.71) de la manière suivante :

$$M_{ij}(\mathbf{d}) = M_{ij}^1 + M_{ijk}^2 d_k + o(\|\mathbf{d}\|^2) \quad (1.72)$$

En substituant cette expression de M dans l'équation (1.26), nous obtenons l'écriture générale des lois incrémentalement non linéaires du second ordre⁴ :

$$d\varepsilon_i = M_{ij}^1 d\sigma_j + \frac{1}{\|\mathbf{d}\sigma\|} M_{ijk}^2 d\sigma_j d\sigma_k \quad (1.73)$$

Pour obtenir l'expression générale de la loi incrémentalement non linéaire de Darve (dite loi INL2), trois hypothèses supplémentaires sont posées :

1. M est orthotopique
2. $d\sigma_j d\sigma_k = 0 \forall d\sigma_k \neq d\sigma_j$
3. les modules de cisaillements sont incrémentalement linéaires. Le développement non linéaire n'affecte que les termes reliant les $d\varepsilon_{ii}$ aux $d\sigma_{ii}$.

Sur des chemins définis en axes principaux, la loi INL s'écrit :

$$\begin{pmatrix} d\varepsilon_1 \\ d\varepsilon_2 \\ d\varepsilon_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} [N^+ + N^-] \begin{pmatrix} d\sigma_1 \\ d\sigma_2 \\ d\sigma_3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2\|\mathbf{d}\sigma\|} [N^+ - N^-] \begin{pmatrix} d\sigma_1^2 \\ d\sigma_2^2 \\ d\sigma_3^2 \end{pmatrix} \quad (1.74)$$

4. Le développement de Taylor s'arrête au premier ordre, mais cela fournit des termes en $d\sigma$ du second ordre

avec

$$\mathbf{N}^{\pm} = \begin{bmatrix} 1 & \nu_{21}^{\pm} & \nu_{31}^{\pm} \\ \frac{E_1^{\pm}}{E_1^{\pm}} & -\frac{1}{E_2^{\pm}} & -\frac{1}{E_3^{\pm}} \\ \nu_{12}^{\pm} & 1 & \nu_{32}^{\pm} \\ -\frac{1}{E_1^{\pm}} & \frac{E_2^{\pm}}{E_2^{\pm}} & -\frac{1}{E_3^{\pm}} \\ \nu_{13}^{\pm} & \nu_{23}^{\pm} & 1 \\ -\frac{1}{E_1^{\pm}} & -\frac{1}{E_2^{\pm}} & \frac{1}{E_3^{\pm}} \end{bmatrix} \quad (1.75)$$

Les coefficients E_i^+ , ν_{ij}^+ et E_i^- , ν_{ij}^- sont définis sur des chemins triaxiaux généralisés lorsque $d\sigma_i > 0$ et $d\sigma_i < 0$ respectivement. La relation est continue en $d\sigma_i = 0$ (Gudehus, 1979). Pour retrouver une description générale de l'élasticité non linéaire anisotrope, il suffit de poser :

$$\mathbf{N}^+ = \mathbf{N}^- = \mathbf{N} \quad (1.76)$$

Dans le cas unidimensionnel, la relation (1.74) dégénère de la façon suivante :

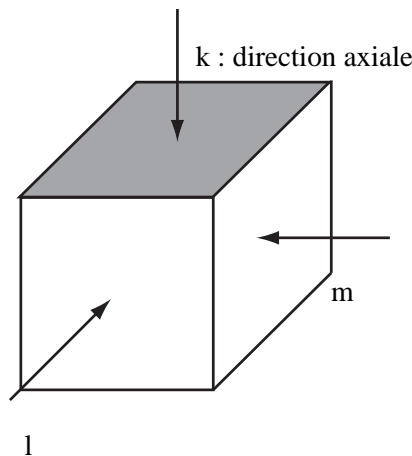
$$d\varepsilon = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{E^+} + \frac{1}{E^-} \right) d\sigma + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{E^+} - \frac{1}{E^-} \right) |d\sigma| \quad (1.77)$$

Par extrapolation, le modèle octolinéaire a été dérivé avec le même formalisme que pour la loi INL :

$$\begin{pmatrix} d\varepsilon_1 \\ d\varepsilon_2 \\ d\varepsilon_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} [\mathbf{N}^+ + \mathbf{N}^-] \begin{pmatrix} d\sigma_1 \\ d\sigma_2 \\ d\sigma_3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} [\mathbf{N}^+ - \mathbf{N}^-] \begin{pmatrix} |d\sigma_1| \\ |d\sigma_2| \\ |d\sigma_3| \end{pmatrix} \quad (1.78)$$

Cette loi possède huit zones tensorielles (d'où son nom) délimitées par les trois plans orthogonaux ($d\sigma_i = 0$, $i = 1..3$) de l'espace des incréments de contraintes.

Enfin, cette loi est phénoménologique, donc les matrices \mathbf{N}^+ et \mathbf{N}^- sont construites à l'aide d'une classe de sollicitations particulières qui sont les chemins triaxiaux généralisés. Sur ces chemins (F . 1.21), les contraintes latérales (σ_l , σ_m) restent constantes, alors que la contrainte axiale (σ_k) augmente (compression) ou diminue (extension). Sur ces chemins, le comportement du sol est totalement



F . 1.21 – Définition des axes pour un chemin triaxial généralisé

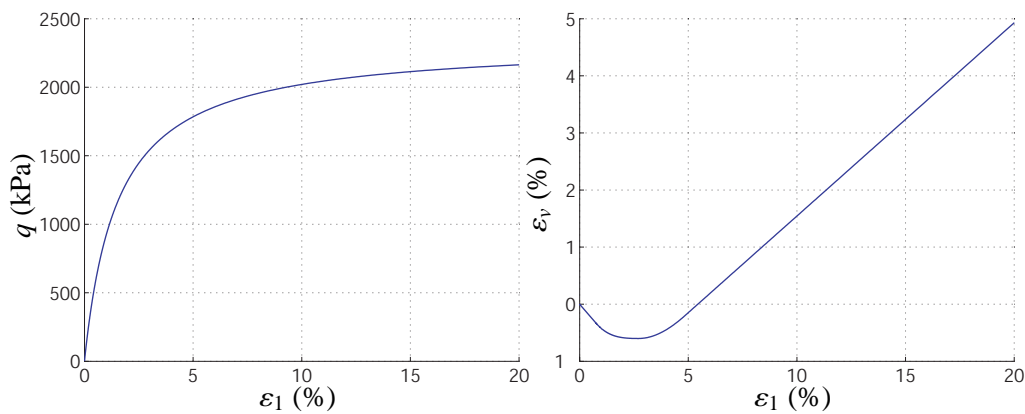
défini par une relation contrainte-déformation axiale plus deux fonctions exprimant les déformations latérales. On a alors trois fonctions notées f , g et h :

$$\begin{cases} \sigma_k = f(\varepsilon_k, \sigma_l, \sigma_m) \\ \varepsilon_l = g(\varepsilon_k, \sigma_l, \sigma_m) \\ \varepsilon_m = h(\varepsilon_k, \sigma_l, \sigma_m) \end{cases} \quad (1.79)$$

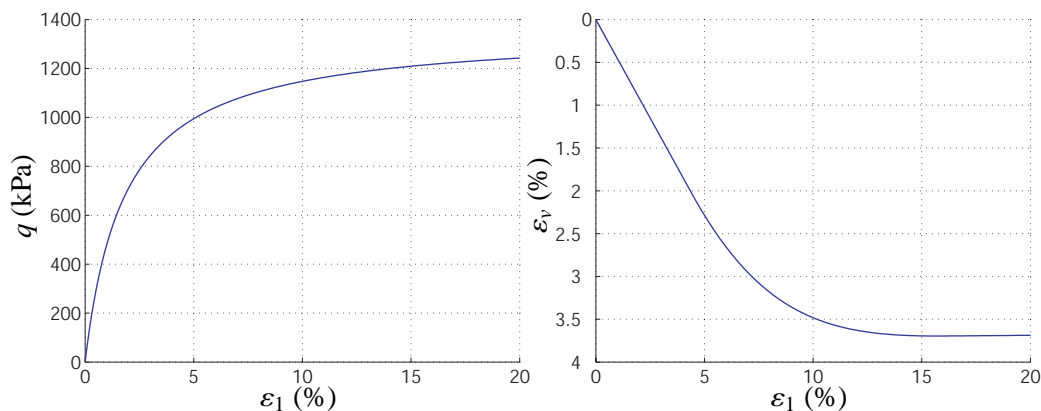
De ces expressions, dérivent celles des modules d'Young tangent (E_k) et des coefficients de Poisson tangents (ν_{kl} et ν_{km}) :

$$\left\{ \begin{array}{l} E_k = \left(\frac{\partial f}{\partial \varepsilon_k} \right)_{\sigma_l, \sigma_m} \\ \nu_{kl} = - \left(\frac{\partial g}{\partial \varepsilon_k} \right)_{\sigma_l, \sigma_m} \\ \nu_{km} = - \left(\frac{\partial h}{\partial \varepsilon_k} \right)_{\sigma_l, \sigma_m} \end{array} \right. \quad (1.80)$$

La réponse à une sollicitation quelconque est obtenue par interpolation des réponses aux six chemins triaxiaux généralisés (trois en compression et trois en extension) grâce aux relations (1.74) et (1.78) pour les modèles de Darve. Pour ce qui est de l'évolution des modules d'Young et coefficients de Poisson tangents avec les paramètres de mémoires, cela est décrit dans Darve et Labanieh (1982), Darve *et al.* (1995) ou en français dans Chau (1986). À noter qu'il est pratiquement indispensable de disposer du manuel de calibration Chau (1986), pour définir les 25 paramètres de calibration. Mais afin de rassurer le futur thésard néophyte, "seulement" 15 (non toutes indépendantes) sont nécessaires pour décrire des chemins monotones en compression.



F . 1.22 – Exemple de réponse à un chemin tiraxial drainé pour un matériau dense : modèle INL.



F . 1.23 – Exemple de réponse à un chemin tiraxial drainé pour un matériau lâche : modèle INL.

1.5 Stabilité matérielle ou bifurcation dans les géomatériaux

Dans cette partie une synthèse des méthodes permettant d'analyser la stabilité matérielle de matériaux élasto-plastiques est proposée. Les instabilités liées à des effets géométriques (comme le flambage dans des poutres élancées) ou dues à des effets dynamiques (effets de masses et d'inerties provoquant des instabilités par flottement) ne sont pas abordées dans cette thèse. Nous nous intéressons uniquement aux instabilités pouvant provenir de caractéristiques particulières du comportement du matériau. Dans ces conditions, il est nécessaire de reformuler en partie la définition de Lyapunov, telle qu'énoncée au paragraphe 1.2, pour l'appliquer dans ce cadre :

Un état de contrainte-déformation est stable, si pour tout incrément de sollicitation \mathbf{ds} , la réponse associée du matériau \mathbf{dr} reste bornée.

Cette définition correspond à celle de la stabilité marginale appliquée au cadre de la mécanique des milieux continus. D'un point de vue mathématique elle se traduit sous la forme :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \eta \in \mathbb{R}_+^* \quad \text{tel que} \quad \|\mathbf{ds}\| < \eta \Rightarrow \|\mathbf{dr}\| < \varepsilon \quad (1.81)$$

D'après cette définition, les états limites de contraintes (définissant la rupture) pour un matériau sont à la fois des points d'instabilités et de bifurcation. En effet, une petite perturbation en charge mène à la ruine de l'échantillon : on passe d'un régime quasi statique à un régime dynamique de la réponse du matériau.

1.5.1 Limite de plasticité et critère de plasticité

La théorie de l'élasto-plasticité, s'est beaucoup développée durant la première moitié du XX^e siècle avec les travaux de :

- Tresca (Tresca (1864)) : règle d'écoulement basée sur le maximum de la contrainte de cisaillement
- Von Mises : règle d'écoulement basée sur une limite du second invariant des contraintes, puis définition d'un potentiel plastique avec règle de normalité (Von Mises (1928))
- Prandtl : décomposition en partie élastique plus plastique des déformations pour des conditions de contraintes planes (Prandtl (1924))
- Reuss : idem pour des conditions 3D (Reuss (1930))
- Melan : notion d'écrouissage (Melan (1938))
- Drücker (Drücker et Prager (1952)) qui introduisit beaucoup des concepts de l'élasto-plasticité classique : surface de charge, règle de consistance, notion de charge, décharge et chargement neutre
- et Hill (Hill (1950)) : cadre mathématique de la théorie

Dans ce contexte historique, les développements ont largement été appliqués au travers des matériaux métalliques qui vérifient la règle de normalité (matériaux associés). Dans ces conditions, la matrice de comportement $\underline{\underline{M}}$ qui relie les incréments de contraintes aux incréments de déformations est symétrique.

$$\underline{\underline{d\sigma}} = \underline{\underline{M}} \underline{\underline{d\varepsilon}} \quad (1.82)$$

Avec cette hypothèse, la limite de rupture est donnée par la condition :

$$\det(\underline{\underline{M}}) = 0 \quad (1.83)$$

qui indique que $\underline{d}\sigma$ s'annule pour $\underline{d}\varepsilon$ non nul. Cette condition constitue ainsi un critère d'instabilité pour les matériaux associés. Si cette expression est classique, il faut néanmoins ajouter la remarque suivante : $\underline{\underline{M}}$ n'est pas à proprement parler un tenseur, mais un opérateur non linéaire dépendant dans ce cas-ci de $\underline{d}\varepsilon$:

$$\underline{d} = \frac{d\varepsilon}{\|d\varepsilon\|} \quad (1.84)$$

Pour les modèles incrémentalement linéaires par morceaux, il est possible de calculer un déterminant dans chaque zone tensorielle. Le déterminant qui s'annule le premier avec la condition supplémentaire que le vecteur propre associé à la valeur propre nulle appartienne à la zone tensorielle du calcul, correspond à la condition (1.83) écrite avec des notations abusives. La condition additionnelle sur le vecteur propre est importante, car si elle n'est pas vérifiée, cela signifie que le déterminant s'annule dans une partie de l'espace des sollicitations dont le comportement du matériau est décrit par la matrice d'une autre zone tensorielle. Dorénavant, on considèrera que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \det(\underline{\underline{K}}(\underline{d})) = 0 \\ \iff \\ \min_{i=1\dots n} (\det(\underline{\underline{K}}^i)) = \det(\underline{\underline{K}}^j) = 0 \text{ avec } \underline{u}_0^j \subset Z_j \end{array} \right. \quad (1.85)$$

pour tout opérateur $\underline{\underline{K}}$ incrémentalement linéaire par morceaux. Z_i , ($i = 1\dots n$) dénote les zones tensorielles, et \underline{u}_0^i , ($i = 1\dots n$) le vecteur propre associé à la première valeur propre qui s'annule. Pour le cas des modèles de type INL, ces notions peuvent probablement être étendues avec une infinité de zones tensorielles (une par direction de l'espace des incréments de sollicitations), et c'est d'ailleurs ce qui est fait numériquement avec le modèle INL de Darve, mais il faudrait peut être étendre de façon propre la notion de déterminant si cela est possible, voir enrichir la théorie dans le cas contraire.

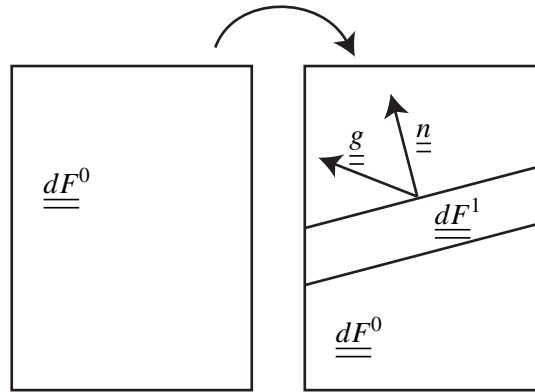
Cependant, comme vu dans la partie 1.3, des ruptures peuvent se produire strictement à l'intérieur de la limite de plasticité définie par l'équation (1.83), pour des matériaux non associés. Pour de tels matériaux, comme les sols, roches, bétons..., ce critère ne constitue plus un critère de stabilité adapté.

1.5.2 Critère de localisation de Rice

Un certain nombre de ruptures qui se produisent avant le critère de plasticité présentent un mode localisé. La déformation de l'échantillon initialement homogène s'est localisée dans une bande de cisaillement ou de compaction par exemple. Pour décrire un tel phénomène, Rice (Rudnicki et Rice (1975), Rice (1976)) cherche les conditions permettant d'obtenir une solution alternative faisant apparaître une bande localisée sur un problème initialement homogène. La première condition traduit la discontinuité du champ de déplacement à l'intérieur et à l'extérieur de la bande. La seconde traduit la continuité du champ de contraintes sur la frontière de la bande. La figure F . 1.24 illustre ces deux conditions. Pour ce qui est de la condition cinématique, Thomas (Thomas (1961)) a démontré que la relation reliant le gradient des incréments de déformations à l'intérieur et à l'extérieur de la bande s'écrit de la manière suivante :

$$\underline{\underline{dF}}^1 = \underline{\underline{dF}}^0 + \underline{g} \otimes \underline{n} \quad (1.86)$$

avec $\underline{n} \in \mathbb{R}^3$ un vecteur normal à la bande, et $\underline{g} \in \mathbb{R}^3$ un vecteur quelconque traduisant l'intensité du mécanisme de déformation dans la bande. Quant à la condition statique, qui résulte de l'équilibre ou



F . 1.24 – Principe de superposition d'un mode de déformation en bande de cisaillement.

de la continuité des contraintes sur la facette de la bande, elle s'exprime comme suit :

$$\underline{d\sigma}^1 \underline{n} = \underline{d\sigma}^0 \underline{n} \quad (1.87)$$

Enfin, en utilisant la relation constitutive :

$$d\sigma_{ij} = M_{ijkl} dF_{kl} \quad (1.88)$$

combinée avec les deux conditions (1.86) et (1.87), nous obtenons :

$$\exists \underline{n} \neq \underline{0}, \exists \underline{g} \neq \underline{0} \quad \text{tels que} \quad (M_{ijkl} n_i n_l) g_k = 0 \quad (1.89)$$

D'où la condition de localisation de Rice : Une bande de localisation peut être solution du problème initialement homogène si :

$$\det(\underline{L}) = \det(n_i M_{ijkl} n_l) = 0 \quad (1.90)$$

(\underline{L}) étant appelé le tenseur acoustique. Dans le cas de matériaux élasto-plastiques, la notion de déterminant prend celle définie par l'expression (1.85).

1.5.3 Condition suffisante de stabilité de Hill : travail du second ordre

Si le critère de Rice permet de décrire les ruptures en mode localisé, nous avons vu que sous certaines conditions des effondrements se produisent à l'intérieur de la limite de plasticité, sans présenter ce type de mode. Elles sont appelées ruptures diffuses (ou en mode diffus). Hill (Hill (1958)) a énoncé un critère suffisant de stabilité pour les solides élasto-plastiques en état d'équilibre et soumis à des charges mortes.

$$\int_V \delta s_{ij} d\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) dV > 0 \quad \forall \left\| d\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \right\| \neq 0 \quad (1.91)$$

avec :

- V le volume occupé par le solide à l'instant t
- s_{ij} le tenseur nominal des contraintes qui est le transposé du tenseur de Piola-Kirchhoff
- $d\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$ l'incrément du gradient des déplacements cinématiquement admissible

Dans l'hypothèse des petites déformations et en négligeant les effets géométriques, cette condition se simplifie de la façon suivante :

$$\int_V d\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} dV > 0 \quad \forall \|d\varepsilon\| \neq 0 \quad (1.92)$$

avec $d\sigma_{ij}$ et $d\varepsilon_{ij}$ les composantes des incréments des tenseur de contraintes de Cauchy et tenseur des déformations infinitésimales respectivement. Si l'on s'intéresse uniquement aux instabilités d'ordre rhéologique, c'est-à-dire celles qui se produisent sur des échantillons homogènes, ou au niveau d'un point matériel, l'expression (1.92) fournit celle du critère du travail du second ordre :

$$d^2W = d\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} > 0 \quad \forall \|d\varepsilon\| \neq 0 \quad (1.93)$$

C'est cette expression que nous analyserons en détail dans le chapitre suivant. En fonction des hypothèses émises et de l'échelle à laquelle on travaille, ces critères sont des conditions suffisantes de stabilité. Dans le cas où elles sont violées, l'instabilité est conditionnelle. Pour ce qui est de l'équation (1.93), les conditions pour lesquelles l'instabilité se manifeste sont explicitées dans le chapitre suivant. Néanmoins, ce critère permet de détecter toutes les instabilités potentielles, mais pas de définir a priori les modes de rupture qui peuvent être engendrés.

Pour finir avec les généralités sur ce critère, il est intéressant de noter que lorsque le critère de Rice est vérifié pour une direction de bande \underline{n} , alors la condition (1.93) est violée à l'intérieur de cette bande (Nicot (2008)). En effet :

$$\left\{ \begin{array}{l} \det(n_i M_{ijkl} n_l) = 0, \quad \text{avec } \underline{n} \neq \underline{0} \\ \iff \\ \exists \underline{g} \neq \underline{0}, (M_{ijkl} n_i n_l) g_k = 0 \\ \implies \\ g_j (n_i M_{ijkl} n_l) g_k = 0 \end{array} \right. \quad (1.94)$$

Or en posant :

$$\underline{d\varepsilon} = \frac{1}{2} (\underline{g} \otimes \underline{n} + \underline{n} \otimes \underline{g}) \quad (1.95)$$

$\underline{d\varepsilon}$ est non nul et symétrique par construction, et :

$$d\varepsilon_{ij} M_{ijkl} d\varepsilon_{kl} = \frac{1}{4} (n_i g_j + n_j g_i) M_{ijkl} (n_k g_l + n_l g_k) = n_i g_j M_{ijkl} n_l g_k \quad (1.96)$$

grâce aux symétries mineures de la matrice constitutive. D'où :

$$\det(n_i M_{ijkl} n_l) = 0 \implies d\varepsilon_{ij} M_{ijkl} d\varepsilon_{kl} = d\varepsilon_{ij} d\sigma_{ij} = 0 \quad (1.97)$$

dans la bande localisation.

1.6 Conclusion

Dans cette section nous avons passé en revue trois conditions de bifurcations pour les matériaux élasto-plastiques. Le critère de limite de plasticité est tout à fait adapté pour les matériaux associés, mais n'est plus suffisant dans le cas contraire. De plus nous avons montré avec la relation (1.97) que le critère du travail du second ordre constituait une borne inférieure pour les critères de localisation de Rice et de limite de plasticité. En effet, la condition de Rice permet de déceler les bifurcations matérielles uniquement en mode localisé. C'est pourquoi dans cette thèse nous nous intéressons plus particulièrement à la condition de Hill. Néanmoins, si cette condition semble pouvoir révéler les premières bifurcations, elle ne permet pas de définir a priori les modes de rupture potentielle engendré.

Bifurcation au niveau du point matériel : travail du second ordre local

2.1 Introduction

Ce chapitre se focalise sur l'analyse du critère du travail du second ordre local énoncé dans le paragraphe 1.5.3 via l'équation (1.93). La signification physique de cette condition ainsi que son lien étroit avec la relation,

$$\det(\underline{\underline{M}}_s) = 0$$

où

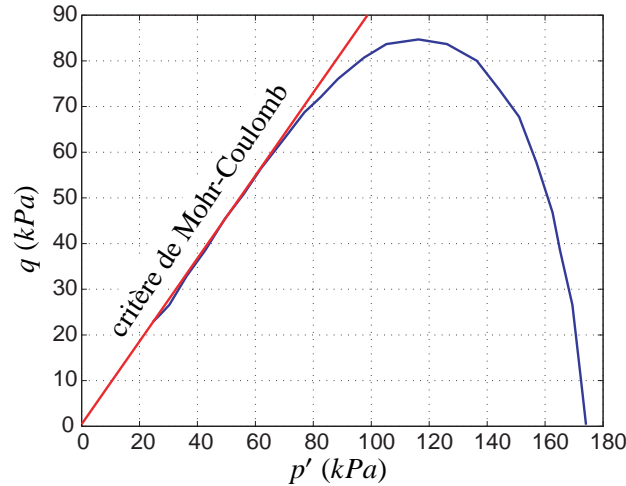
$$\underline{\underline{M}}_s = \frac{1}{2}(\underline{\underline{M}} + {}^t \underline{\underline{M}})$$

sont détaillés. On rappelle par ailleurs que la notion de déterminant prend la signification de la relation (1.85) pour les lois incrémentales linéaires par morceaux. Dans une première partie, les résultats obtenus dans des conditions bidimensionnelles -axisymétrie et déformations planes- sont rappelées et permettent d'introduire les notions de cônes d'instabilités et de limites de domaine de bifurcation. La structure des raisonnements qui ont abouti à ces résultats est préservée et identique à celle proposée dans les articles suivants : Darve *et al.* (2004), Khoa *et al.* (2006). Néanmoins, il me semble, que la compréhension d'une telle approche requiert déjà une bonne assimilation de la problématique traitée et de la notion de règle de rupture. En effet, pour analyser le travail du second ordre local, des chemins proportionnels en déformations sont introduits au préalable. L'explication physique de ce choix vient en amont de l'analyse de la condition elle-même. Dans une seconde partie, les cônes d'instabilité tridimensionnels ainsi que le domaine de bifurcation tridimensionnel sont présentés en partant directement de l'équation (1.93). La généralisation de chemins proportionnels en déformations ou en contraintes n'est présentée qu'ensuite. Les notions de contrôlabilité (Nova (1994)) ou de maintenabilité (Nicot et Darve (2006)) sont aussi rappelées, et des résultats de simulation de rupture pour un essai homogène de laboratoire sont présentés.

2.2 Limite du domaine de bifurcation, cônes d'instabilité pour les problèmes 2D

2.2.1 Cas de l'axisymétrie

L'idée d'introduire des chemins proportionnels en déformation comme évoqué dans l'introduction, vient probablement de l'analyse de l'exemple typique de l'essai triaxial non drainé sur sable lâche. En effet, la réponse du sable à cet essai présente un pic en $q = \sigma_1 - \sigma_3$. Or l'expérience montre



F . 2.1 – Réponse d'un sable lâche de Hostun à un chemin triaxial non drainé (Meghachou (1993))

qu'à ce pic, si un "petit" incrément de force axiale est ajouté, l'échantillon s'effondre. Cet état de contrainte-déformation est instable au sens de Lyapunov. En axisymétrie, le travail du second ordre s'écrit comme suit :

$$d^2W = d\sigma_1 d\varepsilon_1 + 2 d\sigma_3 d\varepsilon_3 \quad (2.1)$$

Avec la condition de chemin isochorique ($d\varepsilon_1 + 2 d\varepsilon_3 = 0$), il vient :

$$d^2W = dq d\varepsilon_1 \quad (2.2)$$

Au pic de q , le chemin devient aussi instable au sens de Hill. Il l'est de plus, sur toute la branche descendante de la courbe, car après le pic, $d^2W < 0$. Dans la suite, on va montrer qu'il est possible de généraliser la notion de règle d'écoulement pour un tel état de contraintes-déformations. En axisymétrie, la relation constitutive peut s'écrire de la manière suivante pour une zone tensorielle donnée¹.

$$\begin{bmatrix} d\varepsilon_1 \\ \sqrt{2} d\varepsilon_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\sqrt{2}\frac{\nu_{31}}{E_3} \\ -\sqrt{2}\frac{\nu_{13}}{E_1} & \frac{1-\nu_{33}}{E_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\sigma_1 \\ \sqrt{2} d\sigma_3 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Sur un tel chemin, il est possible de construire l'opérateur constitutif $\underline{\underline{P}}$ grâce à la relation (2.3), tel que :

$$\begin{bmatrix} dq \\ d\varepsilon_v \end{bmatrix} = \underline{\underline{P}} \begin{bmatrix} d\varepsilon_1 \\ d\sigma_3 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

1. cf paragraphe 1.4.2.1

Comme en condition de sollicitation nous avons $d\varepsilon_v = 0$, au pic de q il vient :

$$\underline{\underline{P}} \begin{bmatrix} d\varepsilon_1 \\ d\sigma_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \det(\underline{\underline{P}}) = 0 \quad (2.5)$$

Cette relation généralise la notion de règle d'écoulement en une "règle de rupture". À cet état, il y a perte d'unicité. La réponse en $(d\varepsilon_1, d\sigma_3)$ est indéterminée, mais la direction de ce vecteur est fixée par le vecteur propre associé à la valeur propre nulle de $\underline{\underline{P}}$.

L'analyse faite dans le cas du triaxial non drainé, peut se généraliser pour d'autres chemins de sollicitations. Le signe du travail du second ordre dépend de façon intrinsèque de la direction des sollicitations, et de la direction de la réponse induite.

$$\text{sign}(d^2W) = \text{sign}\left(\frac{d^2W}{\|d\sigma\| \|d\varepsilon\|}\right) = \text{sign}(d^2W_n) \quad (2.6)$$

d^2W_n est appelé le travail du second ordre normalisé et caractérise le cosinus de l'angle entre les vecteurs contraintes et déformations. À un état de contraintes-déformations donné, il est donc nécessaire d'envisager toutes les directions de sollicitations possibles afin de savoir si le travail du second ordre est susceptible de s'annuler. Voici d'où vient l'idée d'introduire des chemins proportionnels en déformation qui vont permettre de couvrir toutes les directions de l'espace des incréments de déformations, depuis un état donné (Laouafa et Darve (2002), Darve *et al.* (2004)).

$$\begin{cases} d\varepsilon_1 = cst & cst \in \mathbb{R}^* \\ d\varepsilon_2 = d\varepsilon_3 \\ d\varepsilon_1 + 2R d\varepsilon_3 = 0 & R \in \mathbb{R}^* \end{cases} \quad (2.7)$$

Pour $R = 1$, on reconnaît la direction du triaxial non drainé, alors que pour $R \in]0; 1[$ les chemins sont contractants, et pour $R \in]1; +\infty[$, les chemins sont dilatants. La réponse de ces chemins est donnée dans des plans d'invariants sur la figure F . 2.2. Pour étudier le signe du travail du second ordre sur de tels chemins, on peut le réécrire comme suit :

$$d^2W = \left(d\sigma_1 - \frac{d\sigma_3}{R}\right) d\varepsilon_1 + \frac{d\sigma_3}{R} (d\varepsilon_1 + 2Rd\varepsilon_3) \quad (2.8)$$

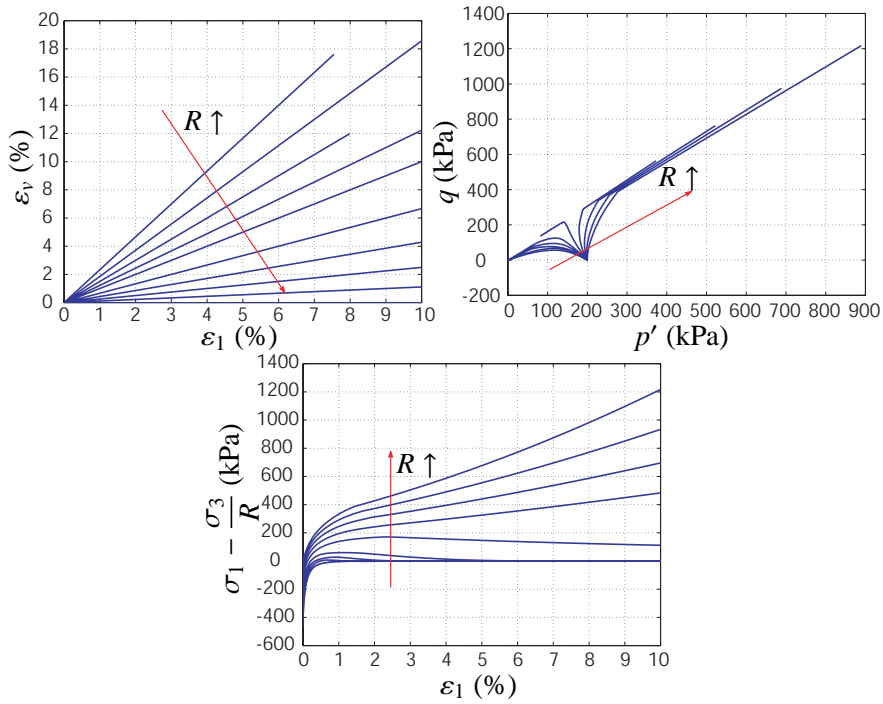
et la relation constitutive de la manière suivante :

$$\begin{bmatrix} d\sigma_1 - \frac{d\sigma_3}{R} \\ d\varepsilon_1 + 2Rd\varepsilon_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 & 2R \frac{E_1}{E_3} \nu_{31} - 1 \\ 1 - 2R \nu_{13} & \frac{2R^2}{E_3} (1 - \nu_{33} - 2 \nu_{13} \nu_{31}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\varepsilon_1 \\ \frac{d\sigma_3}{R} \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

Au pic de $\sigma_1 - \frac{\sigma_3}{R}$, le même raisonnement que sur l'exemple du non drainé peut être fait, et il vient $d^2W = 0$ ainsi que $\det(\underline{\underline{S}}) = 0$ avec $\underline{\underline{S}}$ la matrice de la relation constitutive (2.9). La condition $\det(\underline{\underline{S}}) = 0$ est équivalente à :

$$2 \frac{E_1}{E_3} (1 - \nu_{33}) R^2 - 2 \left(\nu_{13} + \frac{E_1}{E_3} \nu_{31} \right) R + 1 = 0 \quad (2.10)$$

et donne ainsi l'équation des cônes d'instabilité dans l'espace des incréments de déformation. En effet cette équation (2.10) est un polynôme du second degré en $R = -\frac{d\varepsilon_1}{2 d\varepsilon_3}$. Lorsque (2.10) n'a pas de solutions réelles, l'état de contraintes-déformations est inconditionnellement stable, alors que



F . 2.2 – Réponse d'un sable dense de Hostun aux chemins proportionnels en déformation avec le modèle INL d'après Laouafa et Darve (2002). $R \in [0.3, 0.35, 0.4, 0.45, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1]$

dans le cas contraire, l'instabilité se manifeste pour les directions comprises à l'intérieur des directions données par les deux racines R_1 et R_2 de l'équation (2.10). Dans le cas de lois incrémentales linéaires, il existe donc toujours deux cônes symétriques par rapport au centre, $d\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0}$ ou $d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$, selon l'espace considéré. Ainsi la condition *suffisante* de stabilité de Hill porte sur les directions de sollicitations. Pour un point potentiellement instable, l'instabilité ne se manifeste que pour les directions de sollicitations inscrites dans les cônes. Dans le cas de lois incrémentalement linéaires par morceaux, ces cônes doivent être coupés à la limite de leur zone tensorielle. De plus, la condition directionnelle est double, puisqu'à la fois liée aux zones tensorielles, et à l'existence de solutions de l'équation (2.10) dans la zone tensorielle considérée. Après avoir introduit la notion de cônes d'instabilité, il est possible de définir la limite du domaine de bifurcation comme étant l'ensemble des états de contraintes-déformations pour lesquels il existe une unique direction instable. Cette condition est remplie lorsque :

- le discriminant Δ du polynôme de l'équation (2.10) s'annule,
- la racine double R_0 associée indique une direction inscrite dans la zone tensorielle supposée,
- les deux premières conditions ne sont remplies que dans une seule zone tensorielle.

On peut montrer dès lors, que Δ est proportionnel et de signe opposé à $\det(\underline{\underline{M}}_s)$:

$$\Delta = -2 \left(\frac{1 - \nu_{33} - 2 \nu_{13} \nu_{31}}{E_3} \right)^2 \det(\underline{\underline{M}}_s) \quad (2.11)$$

avec $\underline{\underline{M}}_s$ la partie symétrique de la matrice constitutive telle que :

$$\begin{bmatrix} d\sigma_1 \\ \sqrt{2} d\sigma_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{1 - \nu_{33} - 2 \nu_{31} \nu_{13}} \begin{bmatrix} E_1 (1 - \nu_{33}) & \sqrt{2} E_1 \nu_{31} \\ \sqrt{2} E_3 \nu_{13} & E_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\varepsilon_1 \\ \sqrt{2} d\varepsilon_3 \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

Ainsi, la limite du domaine de bifurcation est donnée par la condition :

$$\det(\underline{\underline{M_s}}) = 0 \quad (2.13)$$

et l'existence de cônes d'instabilité ouverts par :

$$\det(\underline{\underline{M_s}}) < 0 \quad (2.14)$$

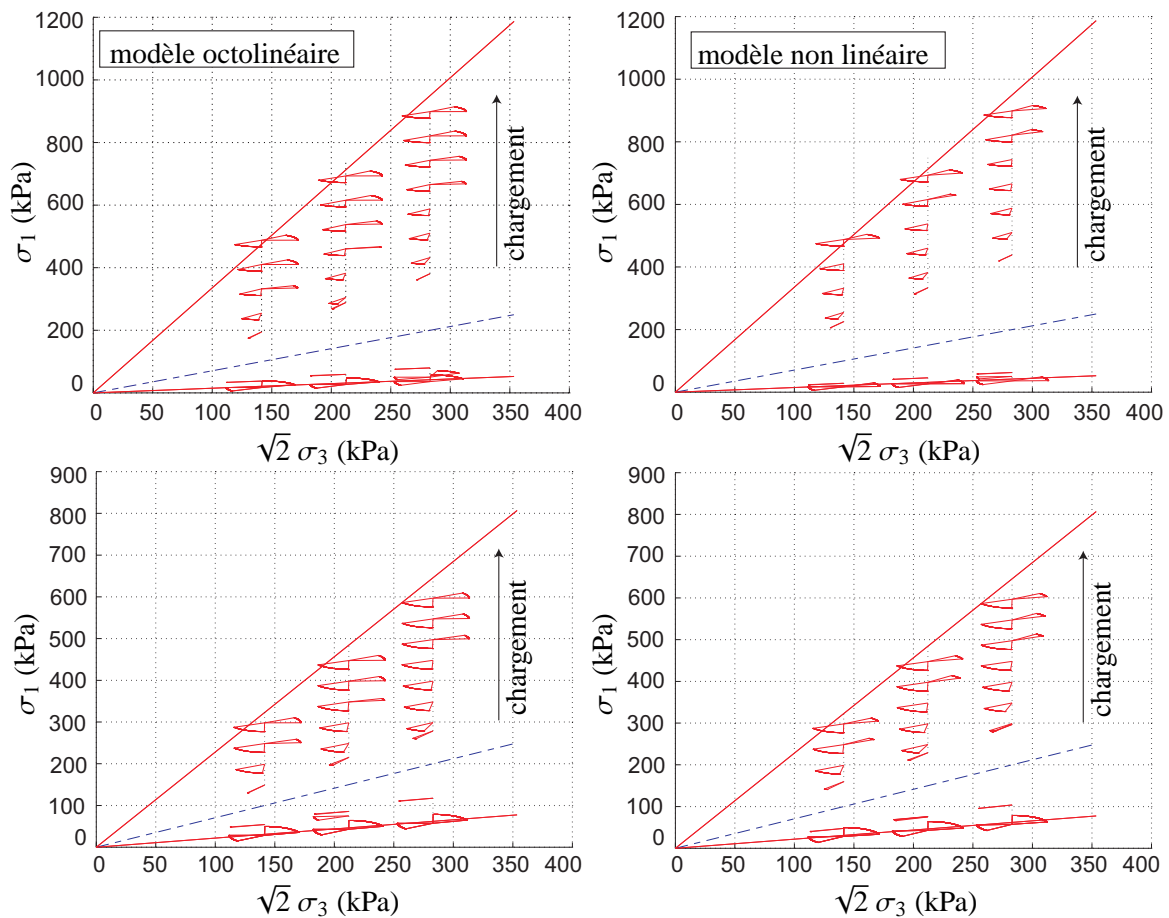
Comme dernière remarque sur cette analyse, il est possible de donner directement l'équation des cônes car $d^2W = {}^t d\sigma d\varepsilon = {}^t d\varepsilon \underline{\underline{M_s}} d\varepsilon$. L'analyse de la relation :

$${}^t d\varepsilon \underline{\underline{M_s}} d\varepsilon = 0 \quad (2.15)$$

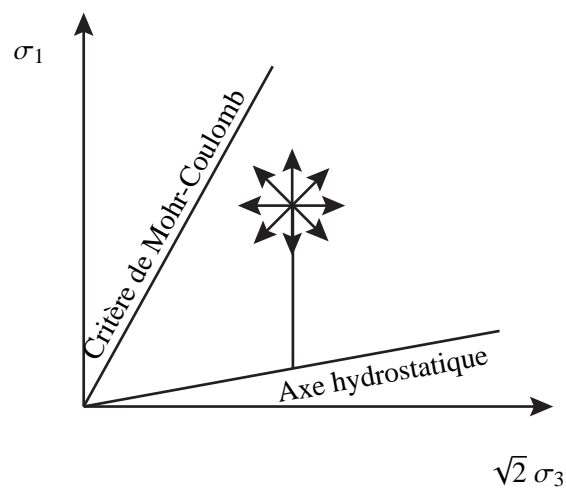
fournit tous les éléments sur la stabilité de l'état étudié :

- pas de solution : point inconditionnellement stable,
- solution dégénérée, une droite, soit une seule direction instable : point situé sur la limite du domaine de bifurcation,
- solution non dégénérée, intersection des deux droites, soit un cône ouvert de directions instables.

Néanmoins, de cette manière, le lien avec l'existence d'une règle de rupture généralisée n'est pas directe. La figure F . 2.3 présente les cônes d'instabilité dans le plan de Rendulic pour les lois de Darve le long de chemins triaxiaux drainés. Pour tracer ces cônes, une première méthode serait de résoudre numériquement dans chaque zone tensorielle l'équation (2.10), ou sa transformée par l'opérateur constitutif pour une représentation dans l'espace des incréments de contraintes. Cependant nous présentons aussi les cônes d'instabilité avec le modèle INL qui possède une infinité de zones tensorielles (une pour chaque direction de sollicitation). La deuxième solution est d'utiliser l'algorithme qui permet de tracer les enveloppes réponses de Gudehus (Gudehus (1979)). Pour un état de contraintes-déformations donné, on impose un incrément de sollicitation unitaire dans une direction fixée, puis on vérifie le signe du travail du second ordre induit par l'incrément de réponse. En répétant ce schéma pour toutes les directions de l'espace des incréments de sollicitations, on obtient les cônes d'instabilité en ce point matériel. La figure F . 2.4 illustre ce processus le long d'un chemin triaxial drainé.



F . 2.3 – Cônes d'instabilité pour les lois de Darve le long de chemins triaxiaux drainés d'après Darve et al. (2004). En haut pour un sable de Hostun dense, et en bas pour un sable de Hostun lâche. Les deux droites continues représentent le critère de Mohr-Coulomb, et la ligne en pointillés l'axe hydrostatique. La limite du domaine de bifurcation est donnée par une ligne non représentée qui joint les centres des premiers cônes.



F . 2.4 – Principe de l'algorithme de recherche des cônes d'instabilité dans le plan de Rendulic.

2.2.2 Cas de la déformation plane

Le cas de la déformation plane est intéressant, puisque finalement toutes les modélisations de stabilités de pentes dans cette thèse se font sous cette hypothèse. Dans cette partie, le formalisme utilisé dans la section précédente est largement repris. En considérant que les déformations évoluent dans le plan ($\varepsilon_1, \varepsilon_3, \varepsilon_2 = 0$), la condition de déformation plane donne :

$$d\sigma_2 = \frac{E_2}{E_1} \nu_{12} d\sigma_1 + \frac{E_2}{E_3} \nu_{32} d\sigma_3 \quad (2.16)$$

Dans une zone tensorielle donnée, la relation constitutive peut s'écrire dans le plan :

$$\begin{bmatrix} d\varepsilon_1 \\ d\varepsilon_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1 - \nu_{12} \nu_{21}}{E_1} & -\frac{\nu_{31} + \nu_{21} \nu_{32}}{E_3} \\ -\frac{\nu_{13} + \nu_{12} \nu_{23}}{E_1} & \frac{1 - \nu_{23} \nu_{32}}{E_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\sigma_1 \\ d\sigma_3 \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

Pour l'étude du travail du second ordre, les chemins proportionnels en déformation sont les suivants :

$$\begin{cases} d\varepsilon_1 = cst & cst \in \mathbb{R}^* \\ d\varepsilon_2 = 0 \\ d\varepsilon_1 + R d\varepsilon_3 = 0 & R \in \mathbb{R}^* \end{cases} \quad (2.18)$$

Le problème aux variables conjuguées qui permet de faire le lien entre l'annulation du travail du second ordre et une règle de rupture généralisée pour ces chemins est le suivant :

$$\begin{bmatrix} d\sigma_1 - \frac{d\sigma_3}{R} \\ d\varepsilon_1 + R d\varepsilon_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_1}{1 - \nu_{12} \nu_{21}} & -\frac{E_1 (\nu_{31} + \nu_{21} \nu_{32})}{E_3 (1 - \nu_{12} \nu_{21})} R - 1 \\ 1 - \frac{\nu_{13} + \nu_{12} \nu_{23}}{1 - \nu_{12} \nu_{21}} R & \frac{D E_1 R^2}{(1 - \nu_{12} \nu_{21})} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\varepsilon_1 \\ \frac{d\sigma_3}{R} \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

avec

$$D = \frac{1}{E_1 E_3} (1 - \nu_{12} \nu_{21} - \nu_{23} \nu_{32} - \nu_{13} \nu_{31} - \nu_{12} \nu_{23} \nu_{31} - \nu_{13} \nu_{32} \nu_{21}) \quad (2.20)$$

le déterminant de la matrice constitutive (2.17). La réponse des chemins est présentée sur la figure F . 2.5. Au pic de $\sigma_1 - \frac{\sigma_3}{R}$, le travail du second ordre s'annule, et :

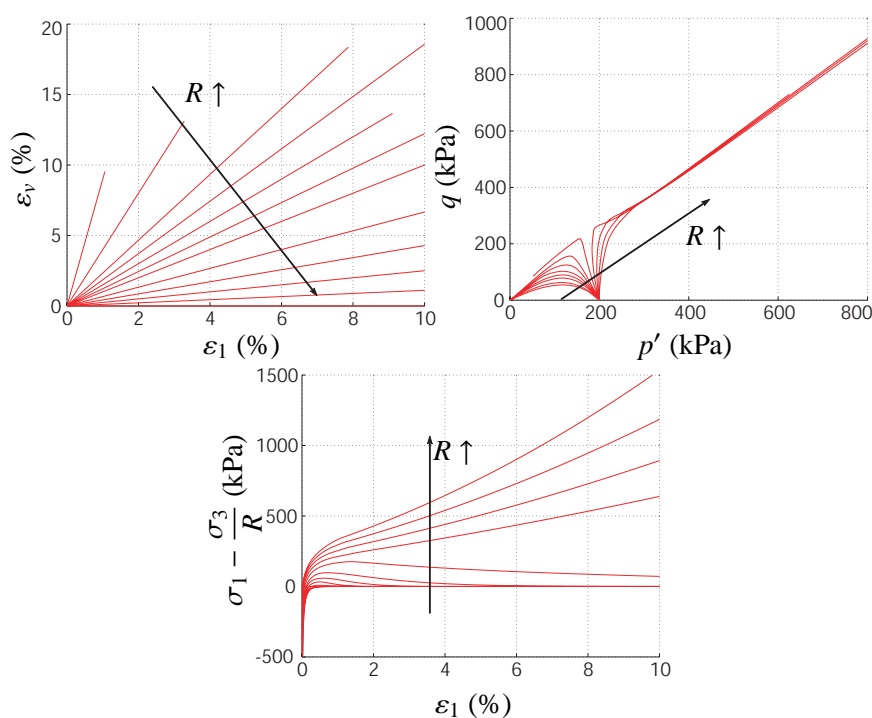
$$\det(\underline{\underline{S}}) = 0 \quad (2.21)$$

avec $\underline{\underline{S}}$ la matrice de la relation (2.19). L'équation (2.21) est celle des cônes dans l'espace des incréments déformations en fonction de R . Dans ce cas-ci il faut noter en outre que si le problème est 2D, car la solution est déterminée avec deux paramètres, $(d\varepsilon_1, d\varepsilon_3)$ ou $(d\sigma_1, d\sigma_3)$ par exemple, l'état de contrainte est 3D et par conséquent les cônes dans l'espace des incréments de contraintes aussi. Si on réécrit l'équation des cônes en fonction des incréments de contraintes grâce à la relation constitutive, nous avons en fait la projection des cônes en contraintes dans le plan $(d\sigma_1, d\sigma_3)$. Enfin, de la même manière que pour le cas axisymétrique, la limite du domaine de bifurcation est donnée par :

$$\det(\underline{\underline{M}}_s) = 0 \quad (2.22)$$

avec $\underline{\underline{M}}_s$ la partie symétrique de la relation suivante :

$$\begin{bmatrix} d\sigma_1 \\ d\sigma_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} \frac{(1 - \nu_{23} \nu_{32})}{E_3} & \frac{(\nu_{31} + \nu_{21} \nu_{32})}{E_3} \\ \frac{(\nu_{13} + \nu_{12} \nu_{23})}{E_1} & \frac{(1 - \nu_{12} \nu_{21})}{E_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\varepsilon_1 \\ d\varepsilon_3 \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

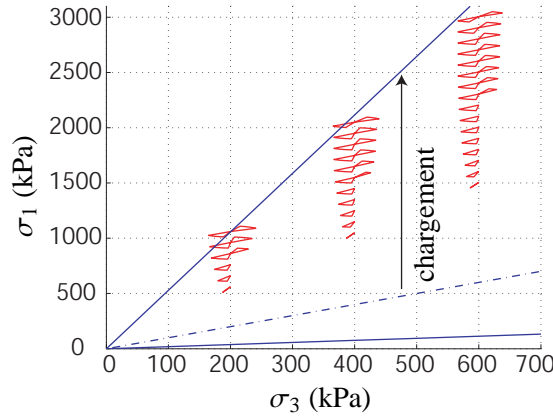


F . 2.5 – Réponse d'un sable dense de Hostun aux chemins proportionnels en déformation avec le modèle INL d'après Khoa et al. (2006). $R \in [0.1, 0.2, 0.3, 0.35, 0.4, 0.45, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1]$

Sur la figure F . 2.6 sont présentées les projections des cônes d'instabilité en contraintes dans le plan (σ_1, σ_3) . Ces cônes ont été obtenus le long de chemins triaxiaux drainés en déformations planes pour un sable dense de Hostun simulé avec la loi INL. Le chemin simulé est décrit de la manière suivante :

$$\begin{cases} d\sigma_1 = cst & cst \in \mathbb{R}_+^* \\ d\sigma_3 = 0 \\ \varepsilon_2 = 0 \end{cases} \quad (2.24)$$

Sur la figure F . 2.6, on peut voir qu'il existe aussi un large domaine de bifurcation ouvert avant le critère de plasticité limite pour des problèmes en déformation planes modélisés avec le modèle INL de Darve. De même qu'en conditions axisymétriques, une fois atteint un niveau de déviateur suffisant pour entrer dans le domaine de bifurcation, les premières directions instables s'ouvrent dans le sens d'une décharge des contraintes. Pour ce qui est des cônes d'instabilités observés dans le sens d'une charge avec ce modèle, ils font encore débat sur leur réalité physique. Néanmoins, il faut retenir que dans des conditions de déformation planes qui seront considérées dans la suite pour des calculs élément finis, un domaine de bifurcation important, ainsi qu'un nombre non négligeable de directions instables existent d'atteindre le critère de limite de plasticité.



F .2.6 – Projection des cônes d'instabilité dans le plan (σ_1, σ_3) obtenus le long de chemins triaxiaux drainés en déformations planes pour un sable dense de Hostun simulés avec la loi INL. Les deux droites continues représentent le critère de Mohr-Coulomb, et la ligne en pointillés l'axe tel que $\sigma_1 = \sigma_3$. La limite du domaine de bifurcation est donnée par une ligne non représentée qui joint les centres des premiers cônes.

2.2.3 Études supplémentaires en axisymétrie

Dans ce paragraphe, nous allons présenter deux études additionnelles faites dans le cas de l'axisymétrie. La première vise à étudier l'influence des parties sphériques et déviatoires du travail du second ordre sur son signe. La seconde compare les cônes d'instabilité et les domaines de bifurcations des trois lois présentées dans l'étude bibliographique : modèle INL, modèle de Pastor pour les sables, modèle Plasol.

2.2.3.1 Décomposition du travail du second ordre en partie sphérique et déviatoire

Pour faire cette décomposition, on notera :

$$dp = \frac{1}{3} \text{tr}(\underline{d\sigma}) \quad \text{et} \quad \underline{\underline{d\sigma_d}} = \underline{\underline{d\sigma}} - dp \underline{\underline{1}} \quad (2.25)$$

ainsi que :

$$d\varepsilon_v = \text{tr}(\underline{d\varepsilon}) \quad \text{et} \quad \underline{\underline{d\varepsilon_d}} = \underline{\underline{d\varepsilon}} - \frac{d\varepsilon_v}{3} \underline{\underline{1}} \quad (2.26)$$

De cette façon on a :

$$d^2W = \underline{\underline{d\sigma}} : \underline{\underline{d\varepsilon}} = \underline{\underline{d\sigma_d}} : \underline{\underline{d\varepsilon_d}} + dp d\varepsilon_v = d^2W_d + d^2W_s \quad (2.27)$$

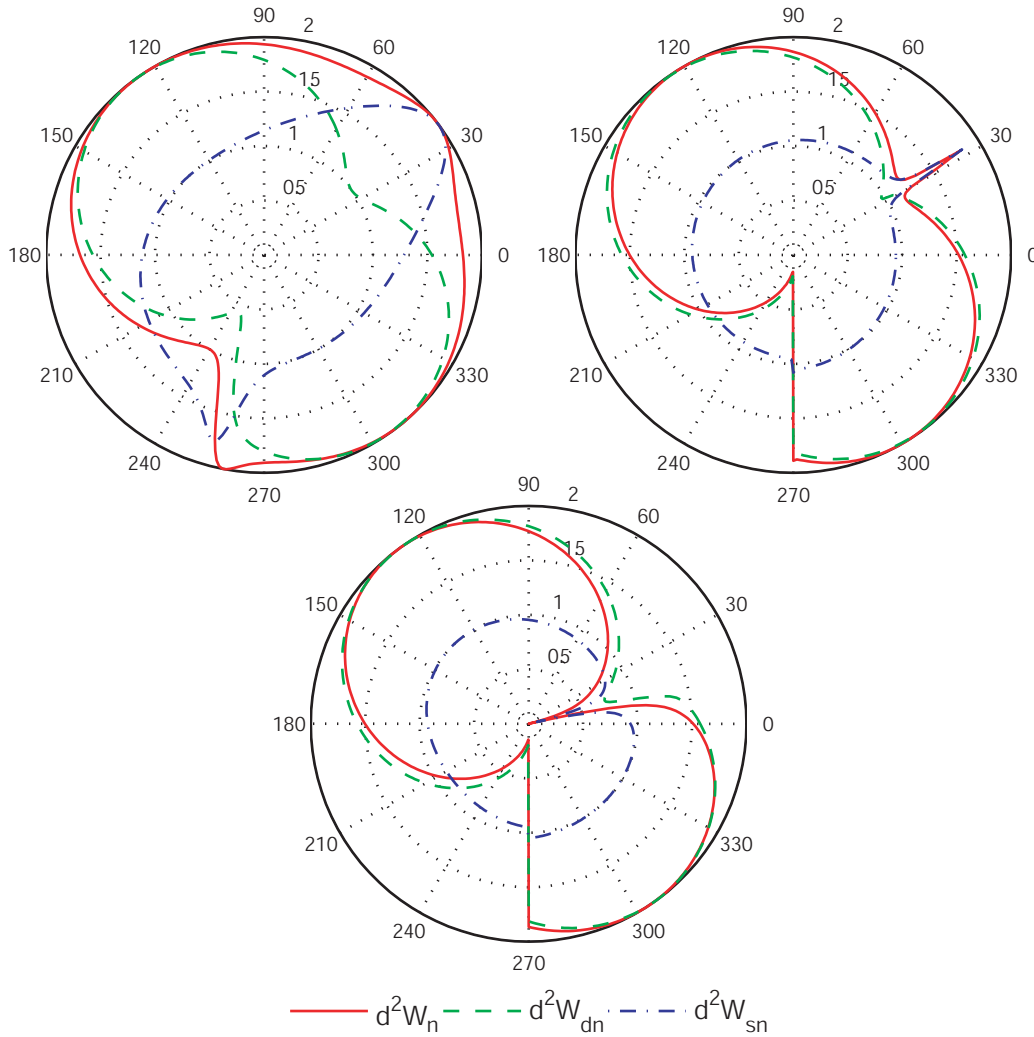
avec d^2W_d et d^2W_s les parties déviatoires et sphériques du travail du second ordre. Pour étudier l'influence de chacun des termes sur les instabilités, nous réutilisons la méthode des enveloppes de Gudehus, présenté sur la figure F .2.4, et traçons les quantités d^2W_n , d^2W_{dn} et d^2W_{sn} en représentation circulaire dans un plan $(d\sigma_1, \sqrt{2} d\sigma_3)$ pour un niveau déviatoire $\eta = q/p$ donné.

$$d^2W_n = \frac{d^2W}{\|\underline{\underline{d\sigma}}\| \|\underline{\underline{d\varepsilon}}\|}, \quad d^2W_{dn} = \frac{d^2W_d}{\|\underline{\underline{d\sigma}}\| \|\underline{\underline{d\varepsilon}}\|}, \quad d^2W_{sn} = \frac{d^2W_s}{\|\underline{\underline{d\sigma}}\| \|\underline{\underline{d\varepsilon}}\|} \quad (2.28)$$

Les figures F .2.7 et F .2.8 présentent ces résultats pour des sables lâche et dense de Hostun respectivement. Pour augmenter la lisibilité d'une telle représentation les normes des quantités représentées

ont été augmentées d'un rayon arbitraire $r_0 = 1$. Dans ces conditions les différents travaux du second ordre s'annulent sur le cercle de rayon 1, et non au centre du repère. Comme d^2W_n caractérise l'angle entre les vecteurs contraintes et déformations :

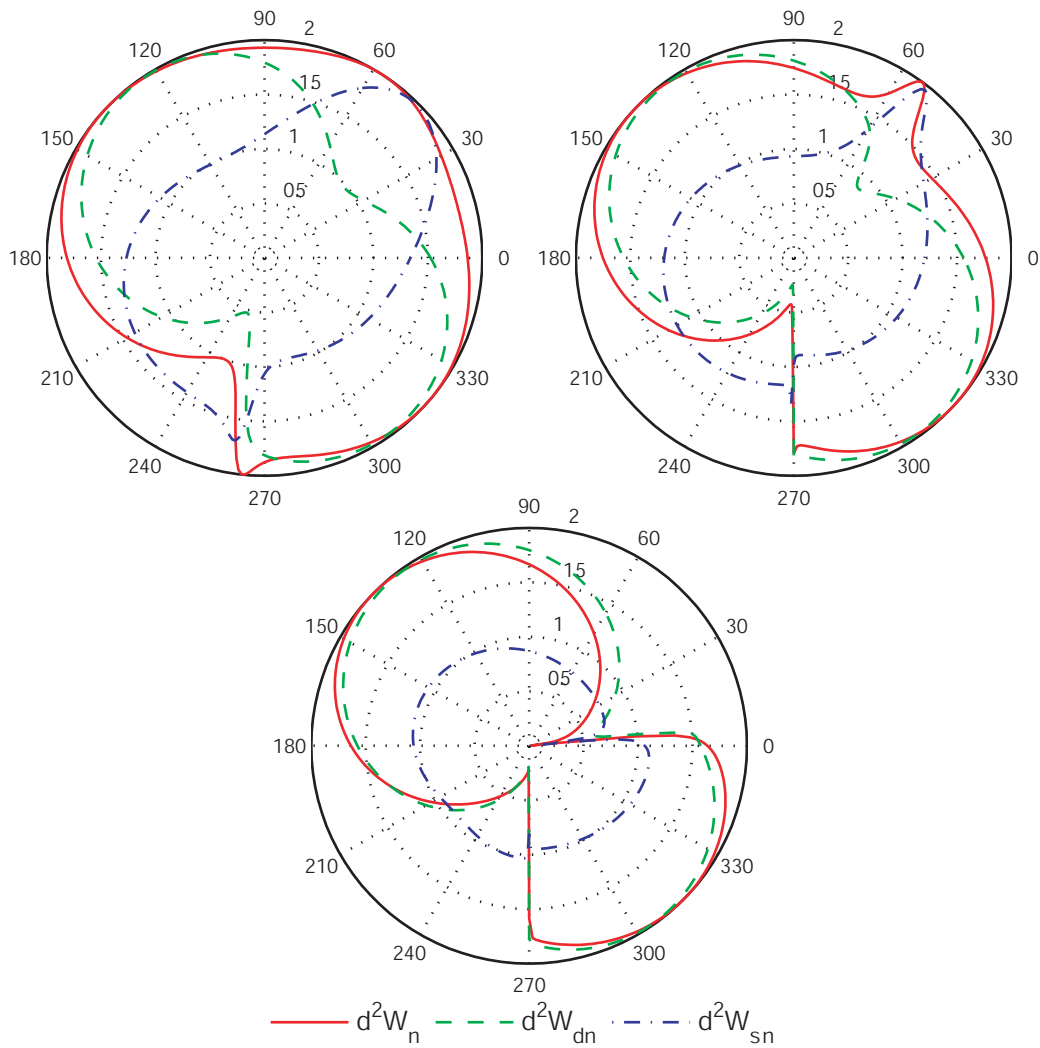
- $r = 2 \Rightarrow d^2W_n = 1 \Rightarrow \underline{d\sigma}, \underline{d\varepsilon}$ colinéaires et de même sens,
- $r = 1 \Rightarrow d^2W_n = 0 \Rightarrow \underline{d\sigma}, \underline{d\varepsilon}$ perpendiculaires,
- $r = 0 \Rightarrow d^2W_n = -1 \Rightarrow \underline{d\sigma}, \underline{d\varepsilon}$ colinéaires et de sens opposé.



F . 2.7 – Représentation circulaire de d^2W_n , d^2W_{dn} et d^2W_{sn} dans un plan $(d\sigma_1, \sqrt{2} d\sigma_3)$ avec $d\sigma_1 \equiv 90^\circ$ et $\sqrt{2} d\sigma_3 \equiv 0^\circ$. Simulation faite sur un sable lâche de Hostun avec la loi INL le long d'un chemin triaxial drainé pour trois valeurs de $\eta = q/p$: $\eta \in [0.49, 1.16, 1.23]$. Le cercle unité correspond à $d^2W = 0$.

En analyse de ces figures, il semble que ce soit la partie déviatoire qui est déstabilisante (comme on l'attendait). Ceci est d'autant plus vrai pour les faibles niveaux de déviateur. Néanmoins, pour les fortes valeurs de η , même si d^2W_d est plus fortement négatif que d^2W_s quand ils le sont tous les deux, les cônes de d^2W_s sont largement plus ouverts. Donc la partie sphérique ne joue pas toujours un rôle stabilisateur, et notamment pour les forts ratios q/p .

D'autre part, les cônes présentés pour les deux types de sable sont qualitativement assez semblables : ils s'ouvrent à peu près dans les mêmes directions et avec des ouvertures de même ordre.



F . 2.8 – Représentation circulaire de d^2W_n , d^2W_{dn} et d^2W_{sn} dans un plan $(d\sigma_1, \sqrt{2} d\sigma_3)$ avec $d\sigma_1 \equiv 90^\circ$ et $\sqrt{2}d\sigma_3 \equiv 0^\circ$. Simulation faite sur un sable dense de Hostun avec la loi INL le long d'un chemin triaxial drainé pour trois valeurs de $\eta = q/p$: $\eta \in [0.88, 1.50, 1.71]$. Le cercle unité correspond à $d^2W = 0$.

Simplement ils ne sont pas atteints pour les mêmes niveaux de déviateurs car les matériaux sont différents. Ainsi, pour ce type de chemins, la densité initiale du matériau et l'évolution des variations de volume, ne sont peut être pas prépondérantes sur la façon dont se développent les instabilités.

Pour finir avec ce paragraphe, lors d'essais de laboratoires, on travaille souvent en conditions axisymétriques, donc les instabilités ou ruptures sont souvent quantifiées en fonction du ratio q/p . En effet, sous cette condition, il n'y a qu'une seule façon d'imposer un déviateur. Néanmoins, dans des conditions plus générales, pour un niveau pression-déviateur fixé, l'angle de Lode est aussi très important vis-à-vis de la rupture. Le critère de Mohr-Coulomb dans un plan déviatoire illustre parfaitement ce fait. Dans la prochaine partie où des conditions 3D sont considérées, nous verrons que les cônes d'instabilité sont aussi influencés par cet angle de Lode.

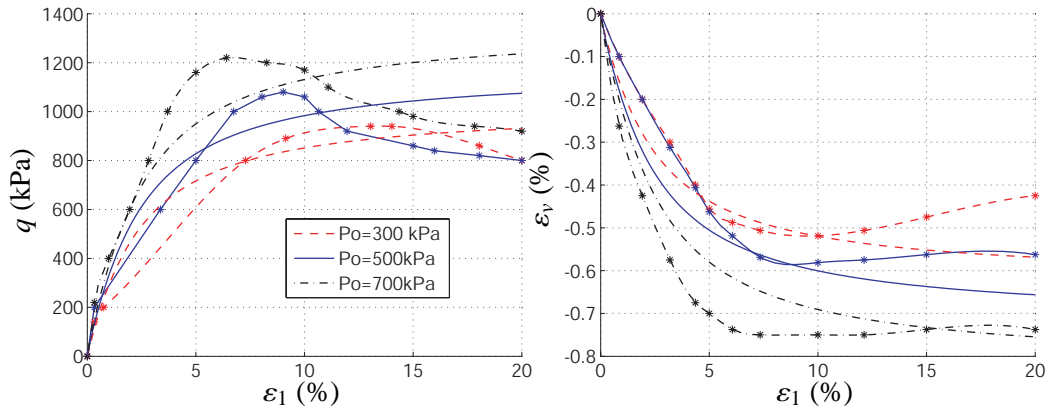
2.2.3.2 Comparaisons de cônes d'instabilité pour les lois Plasol, Pastor et INL

La comparaison des cônes d'instabilité pour ces trois modèles, est faite le long de chemins triaxiaux drainés pour un sol particulier : celui du site de Petacciato. Les caractéristiques générales de l'échantillon (non remanié, ni resaturé) ayant servi à faire l'essai sont données dans le tableau T . 2.1. Néanmoins les vitesses de sollicitations de l'essai n'ont pas été renseignées dans le rapport du SGI (LESSLOSS-Report (2004)). Cela permet non seulement de comparer les modèles vis-à-

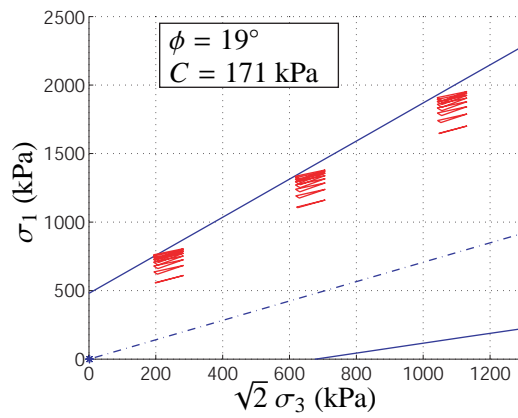
caractéristiques granulométriques	
grosses particules ($\phi > 2 \text{ mm}$)	0.0%
sables ($0.06 < \phi < 2 \text{ mm}$)	6.1%
limons ($0.002 < \phi < 0.06 \text{ mm}$)	55.7%
argiles ($\phi < 0.002 \text{ mm}$)	38.2%
caractéristiques générales	
masse spécifique des grains (γ_s)	2.74 g/cm^3
indice des vides initial (e)	0.517
degré de saturation initial (S_r)	99.90%
limite de liquidité (LL)	58.41%
limite de plasticité (LP)	21.44%

T . 2.1 – Caractéristiques générales du sol de Petacciato.

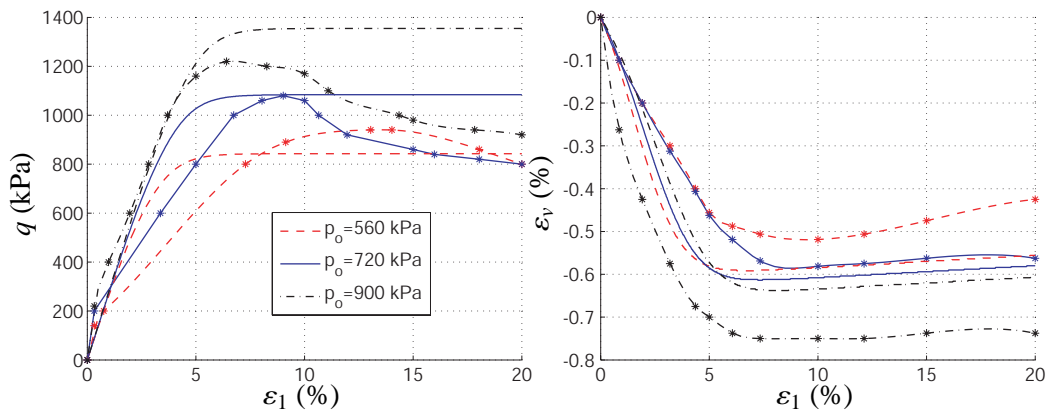
vis du travail du second ordre, mais aussi de les confronter à une calibration peu aisée. En effet, cette argile limoneuse présente des caractéristiques apparemment peu communes : présence d'un pic marqué dans le plan ($q - \varepsilon_1$), et phase de dilatance quasi inexistante. Les figures F . 2.9 à F . 2.14 présentent les réponses de chaque modèle ainsi que leurs cônes d'instabilité dans le plan de Rendulic.



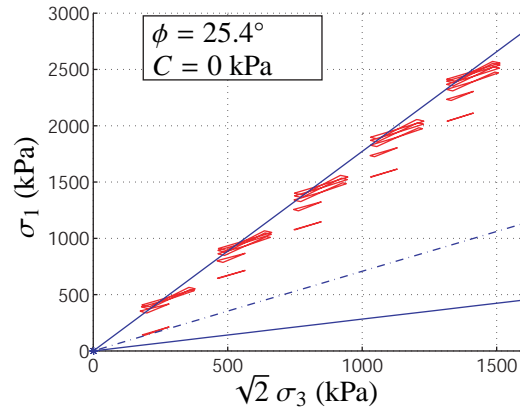
F . 2.9 – Calibration du modèle Plasol pour le sol de Petacciato.



F . 2.10 – Cônes du modèle Plasol pour le sol de Petacciato.

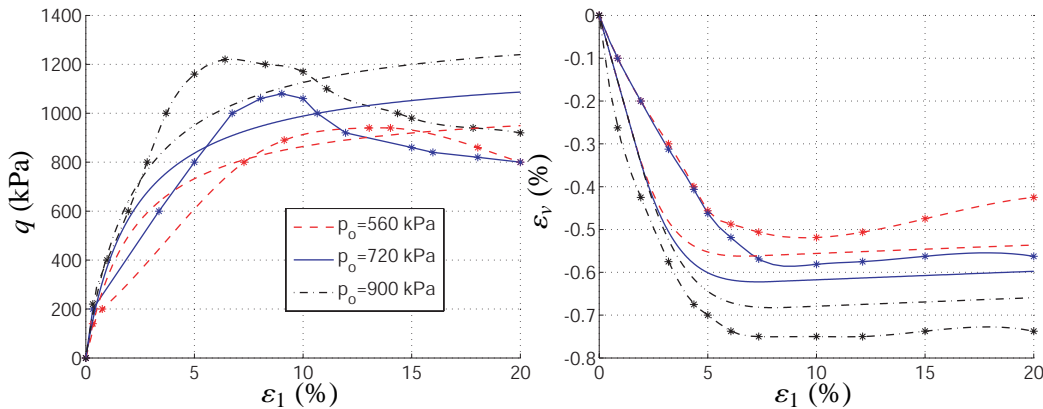


F . 2.11 – Calibration du modèle de Pastor pour le sol de Petacciato.



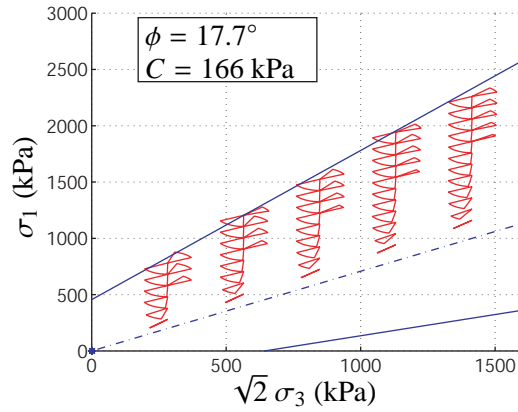
F . 2.12 – Cônes du modèle de Pastor pour le sol de Petacciato.

Concernant la calibration, juste quelques caractéristiques principales ont cherché à être reproduites : pente initiale, valeur au pic et respect de la contractance observée. Pour ce type de problème, les incertitudes sur la caractérisation spatiale du milieu constituant un site sont en général grandes. De plus, les échantillons prélevés étant souvent assez hétérogènes, il est illusoire de chercher à reproduire précisément le comportement d'un matériau sur un essai particulier. Enfin, pour le modèle de Pastor, nous avons préféré conserver l'allure du comportement volumique, que de reproduire la phase radoucissante.



F . 2.13 – Calibration du modèle INL pour le sol de Petacciato.

Pour ce qui est des cônes, nous remarquons que chaque modèle prévoit des directions de chargement instable en décharge ($d\sigma_1 < 0$, $d\sigma_3 < 0$), au-delà d'un certain déviateur. Ces directions instables peuvent être aisément expliquées qualitativement avec le modèle d'un patin frottant solide-rigide plan, soumis à deux charges mortes : l'une tangentielle \vec{T} et la deuxième normale \vec{N} . À l'état initial, le patin est à l'équilibre avec la condition $T < f N$ (f étant le coefficient de frottement solide), puis on applique un incrément de force $d\vec{F}$ parallèle à \vec{N} tel que $T = f (N + dF)$. Avec une condition cinématique de non décollement du patin, il vient : $d\vec{F} d\vec{U} = 0$ (avec $d\vec{U}$ le déplacement engendré). Quant au cône supérieur ($d\sigma_1 > 0$, $d\sigma_3 > 0$), observé sur les modèles de Darve et de Pastor, il est plus difficilement explicable qualitativement. Néanmoins, Sibille (Sibille (2007)) a aussi vérifié une diminution significative du travail du second ordre normalisé dans ce secteur avec des éléments discrets. Ces résultats doivent encore être confirmés ou infirmés, car les simulations par éléments discrets étant très longues, l'investigation numérique des cônes n'a été faite que de dix degrés en dix degrés, et pour des ratios $\eta = q/p$ tous inférieurs à 1. Le mieux serait même d'effectuer quelques essais de laboratoire dans une



F . 2.14 – Cônes du modèle INL pour le sol de Petacciato.

direction moyenne incluse dans ces cônes. Cela a déjà été fait dans le cas des cônes inférieurs avec des essais triaxiaux drainés suivis d'une phase à déviateur constant en décharge (Darve *et al.* (2004), Khoa *et al.* (2006), Darve *et al.* (2007)). Si l'existence de tels cônes est vérifiée expérimentalement, ou à défaut grâce aux éléments discrets, cela signifie que le modèle Plasol ne peut modéliser tous les types d'instabilités matérielles. Dans le cas contraire, les modèles de Darve et de Pastor seraient trop pessimistes.

2.3 Généralisation dans le cas tridimensionnel

2.3.1 Équation de base : cônes et domaine de bifurcation 3D

2.3.1.1 Étude analytique

À présent, nous allons étudier la condition (1.93) du travail du second ordre pour des sollicitations tridimensionnelles, mais toujours avec l'hypothèse de coaxialité : la base principale des contraintes coïncide avec celle des déformations. Dans ce paragraphe, nous utiliserons les notations suivantes : $\underline{\underline{M}}$ est la matrice telle que $\underline{d\sigma} = \underline{\underline{M}} \underline{d\varepsilon}$, et $\underline{\underline{N}} = \underline{\underline{M}}^{-1}$. L'expression de $\underline{\underline{N}}$ est donc fournie par la relation (1.75). De plus nous utiliserons des vecteurs \underline{du} et \underline{dv} , combinaisons linéaires de $d\sigma_i$ et $d\varepsilon_i$ respectivement :

$$\underline{du} = \underline{\underline{T}}_\varepsilon \underline{d\varepsilon} \quad \text{et} \quad \underline{dv} = \underline{\underline{T}}_\sigma \underline{d\sigma} \quad (\underline{du}, \underline{dv}) \in \mathbb{R}^6 \times \mathbb{R}^6 \quad (2.29)$$

Afin d'imposer un chemin de chargement en contrôlant certaines des composantes de \underline{du} et \underline{dv} , nous utiliserons la décomposition suivante :

$$\underline{du} = \begin{bmatrix} du_1 \\ du_2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \underline{dv} = \begin{bmatrix} dv_1 \\ dv_2 \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

avec \underline{du}_1 et \underline{dv}_1 de dimension m ($m < 6$), et \underline{du}_2 et \underline{dv}_2 de dimension $6 - m$. Grâce à $\underline{\underline{M}}$ ou $\underline{\underline{N}}$, il est ainsi possible de construire la relation constitutive généralisée suivante :

$$\begin{bmatrix} du_1 \\ dv_2 \end{bmatrix} = \underline{\underline{S}} \begin{bmatrix} dv_1 \\ du_2 \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

Par exemple, pour le cas du triaxial non drainé piloté en force, $[\underline{du}_1, \underline{dv}_2] = [dq, d\varepsilon_v]$ et $[\underline{dv}_1, \underline{du}_2] = [d\varepsilon_1, d\sigma_3]$. Ainsi, $[\underline{du}_1, \underline{dv}_2]$ et $[\underline{dv}_1, \underline{du}_2]$ sont des variables mixtes et conjuguées du travail du second ordre. Par conséquent :

$$d^2W = \underline{du}_1 \underline{dv}_1 + \underline{du}_2 \underline{dv}_2 = \underline{d\sigma} \underline{d\varepsilon} \quad (2.32)$$

or

$$d^2W = 0 \Leftrightarrow \underline{d\sigma} \underline{N} \underline{d\sigma} = 0 \Leftrightarrow \underline{d\sigma} \underline{N_s} \underline{d\sigma} = 0 \quad (2.33)$$

ou encore

$$d^2W = 0 \Leftrightarrow \underline{d\varepsilon} \underline{M} \underline{d\varepsilon} = 0 \Leftrightarrow \underline{d\varepsilon} \underline{M_s} \underline{d\varepsilon} = 0 \quad (2.34)$$

En utilisant l'expression (2.33), nous obtenons celle des cônes d'instabilité dans l'espace à trois dimension des incréments de contraintes :

$$\frac{d\sigma_1^2}{E_1} + \frac{d\sigma_2^2}{E_2} + \frac{d\sigma_3^2}{E_3} - \left(\frac{\nu_{12}}{E_1} + \frac{\nu_{21}}{E_2} \right) d\sigma_1 d\sigma_2 - \left(\frac{\nu_{32}}{E_3} + \frac{\nu_{23}}{E_2} \right) d\sigma_3 d\sigma_2 - \left(\frac{\nu_{13}}{E_1} + \frac{\nu_{31}}{E_3} \right) d\sigma_1 d\sigma_3 = 0 \quad (2.35)$$

Le membre de gauche de cette équation (2.35) est une quadrique en $d\sigma_i$, sans termes constants ni termes du premier degré. Cette équation est celle d'un cône elliptique lorsque la quadrique n'est pas dégénérée. La nature réelle des solutions de cette équation dépend du signe de $\det(\underline{N_s})$. Si nous appelons $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ les valeurs propres de $\underline{N_s}$, et faisons l'hypothèse que :

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 \quad (2.36)$$

quatre cas distincts sont possibles :

1. $\lambda_1 > 0$: $\det(\underline{N_s}) > 0$. Excepté la solution triviale ($d\sigma_1 = d\sigma_2 = d\sigma_3 = 0$), l'équation (2.35) n'est jamais remplie. Toutes les directions de chargement mènent à un travail du second ordre positif. L'état de contraintes-déformations est inconditionnellement "stable".
2. $\lambda_1 = 0$: $\det(\underline{N_s}) = 0$. L'équation (2.35) admet une droite, dans la direction du vecteur propre associé à λ_1 , comme solution. Le travail du second ordre s'annule dans cette direction.
3. $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$: $\det(\underline{N_s}) < 0$. L'équation (2.35) admet un cône elliptique comme solution. Le travail du second ordre s'annule pour les directions situées sur le cône, et est négatif pour les directions situées à l'intérieur du cône.
4. $\lambda_1 < 0, \lambda_2 = 0$: $\det(\underline{N_s}) = 0$. L'équation (2.35) admet deux plans sécants comme solution.

Si nous supposons de plus que les valeurs propres, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, sont positives à l'état vierge de contraintes et évoluent de manière continue avec le paramètre de chargement, la limite du domaine de bifurcation est alors aussi obtenue avec la condition : $\det(\underline{N_s}) = 0$. Cette analyse est rigoureusement exacte pour les lois incrémentalement linéaires, soit dans tous les cas de l'élasticité : linéaire, non linéaire, hypoélasticité ou hyperélasticité. Pour les modèles élasto-plastiques, la condition 1 doit être remplie dans toutes les zones tensorielles, alors que les conditions 2 à 4 doivent être remplies dans au moins une des zones (en prenant la précaution qu'elle soit remplie effectivement dans les directions appartenant à la zone considérée), et la notion de déterminant prend celle de la relation (1.85).

Pour finir avec cette étude analytique, et avant de présenter des résultats numériques, nous allons montrer ici que l'analyse peut être menée indifféremment en travaillant avec le tenseur \underline{M} ou

son inverse $\underline{\underline{N}}$. En effet, si pour la condition de limite de plasticité caractérisée par $\det(\underline{\underline{M}}) = 0$ nous sommes confrontés au problème suivant :

$$\det(\underline{\underline{M}}) = 0 \neq \det(\underline{\underline{N}}) = 0 \quad (2.37)$$

nous allons montrer que cette équivalence est conservée pour les parties symétriques de ces matrices :

$$\det(\underline{\underline{M}}_s) = 0 \Leftrightarrow \det(\underline{\underline{N}}_s) = 0 \quad (2.38)$$

Pour des problèmes 2×2 ou 3×3 il est assez aisé d'établir que :

$$\det(\underline{\underline{M}}_s) = \frac{\det(\underline{\underline{N}}_s)}{(\det(\underline{\underline{N}}))^2}, \quad (2.39)$$

Il est alors ensuite possible de démontrer cette relation pour une dimension $n \times n$ quelconque. Nicot (Nicot (2008)), proposa la démonstration rapide suivante :

$$\underline{\underline{N}} \cdot \underline{\underline{M}}_s = \frac{1}{2} \underline{\underline{M}}^{-1} (\underline{\underline{M}} + {}^t \underline{\underline{M}}) = \frac{1}{2} (\underline{\underline{I}} + \underline{\underline{N}} \cdot {}^t \underline{\underline{N}}^{-1}) \quad (2.40)$$

et d'autre part,

$$\underline{\underline{N}}^{-1} \cdot \underline{\underline{N}}_s = \frac{1}{2} (\underline{\underline{I}} + \underline{\underline{N}}^{-1} \cdot {}^t \underline{\underline{N}}) \quad (2.41)$$

Comme $\det(\underline{\underline{A}}) = \det({}^t \underline{\underline{A}})$ quelle que soit la matrice $\underline{\underline{A}}$, il vient :

$$\det(\underline{\underline{N}} \cdot \underline{\underline{M}}_s) = \det\left(\frac{1}{2} (\underline{\underline{I}} + \underline{\underline{N}} \cdot {}^t \underline{\underline{N}})\right) = \det(\underline{\underline{N}}^{-1} \cdot \underline{\underline{N}}_s) \quad (2.42)$$

qui est équivalent à l'équation (2.39).

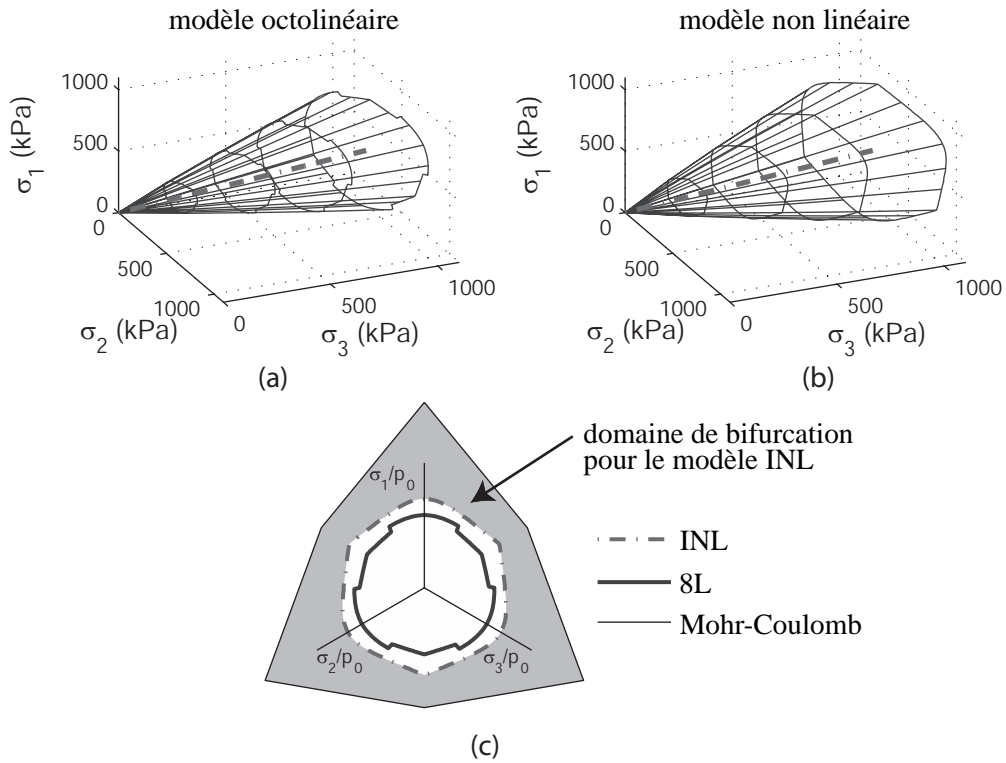
Pour le cas des matériaux associés, $\underline{\underline{M}}_s = \underline{\underline{M}}$ et $\underline{\underline{N}}_s = \underline{\underline{N}}$. L'équation (2.39) donne :

$$\det(\underline{\underline{M}}) = \frac{1}{\det(\underline{\underline{N}})} \quad (2.43)$$

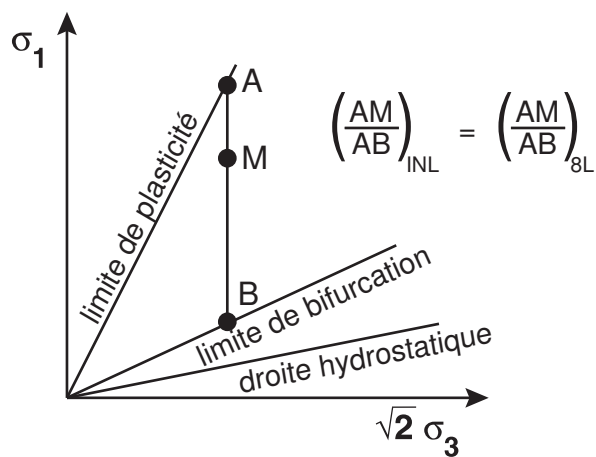
et reste vraie, mais la relation (2.38) n'est plus vérifiée. La condition de limite de plasticité ne peut jamais être exprimée de façon duale en considérant indifféremment $\underline{\underline{M}}$ ou $\underline{\underline{N}}$.

2.3.1.2 Résultats numériques

Nous présentons dans cette section une série de résultats numériques issus de l'étude précédente. Sur la figure F . 2.15 sont représentées les limites des domaines de bifurcation 3D des modèles de Darve pour un sable de Hostun dense. Elles ont été tracées grâce à des chemins suivant une direction donnée du plan déviatoire. En outre, on émet l'hypothèse que ces limites sont indépendantes du chemin de sollicitations suivi. Sur la figure F . 2.17 sont présentés les cônes d'instabilité 3D pour les modèles de Darve le long de chemins triaxiaux drainés pour un sable dense de Hostun. Les déviateurs pour lesquels les cônes sont comparés, ne sont pas identiques. En effet, comme vu sur la figure F . 2.15, les limites des domaines de bifurcation ne sont pas les mêmes avec les deux modèles, même pour des paramètres de calibration identiques. Dès lors, nous avons trouvé plus pertinent de les

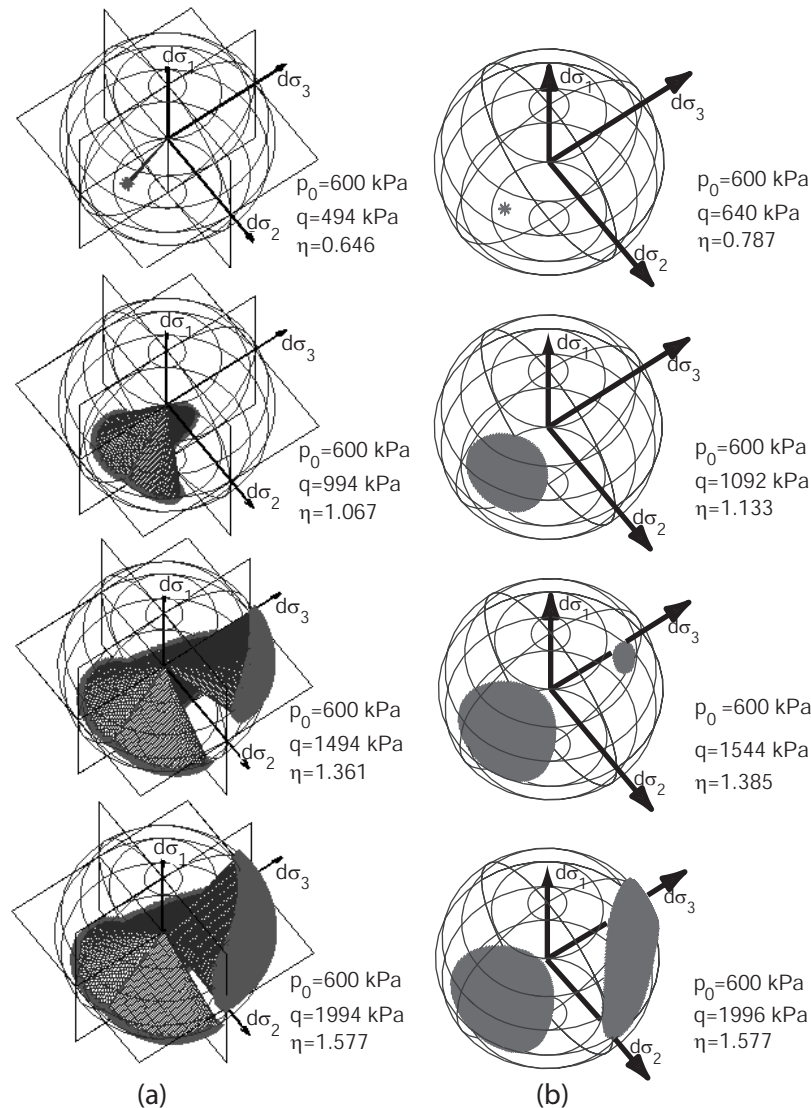


F .2.15 – *Domaine de bifurcation 3D pour les modèles de Darve. (8L \equiv octolinéaire)*



F .2.16 – *Déviateurs pour lesquels les cônes des modèles non linéaires et octolinéaires sont comparés.*

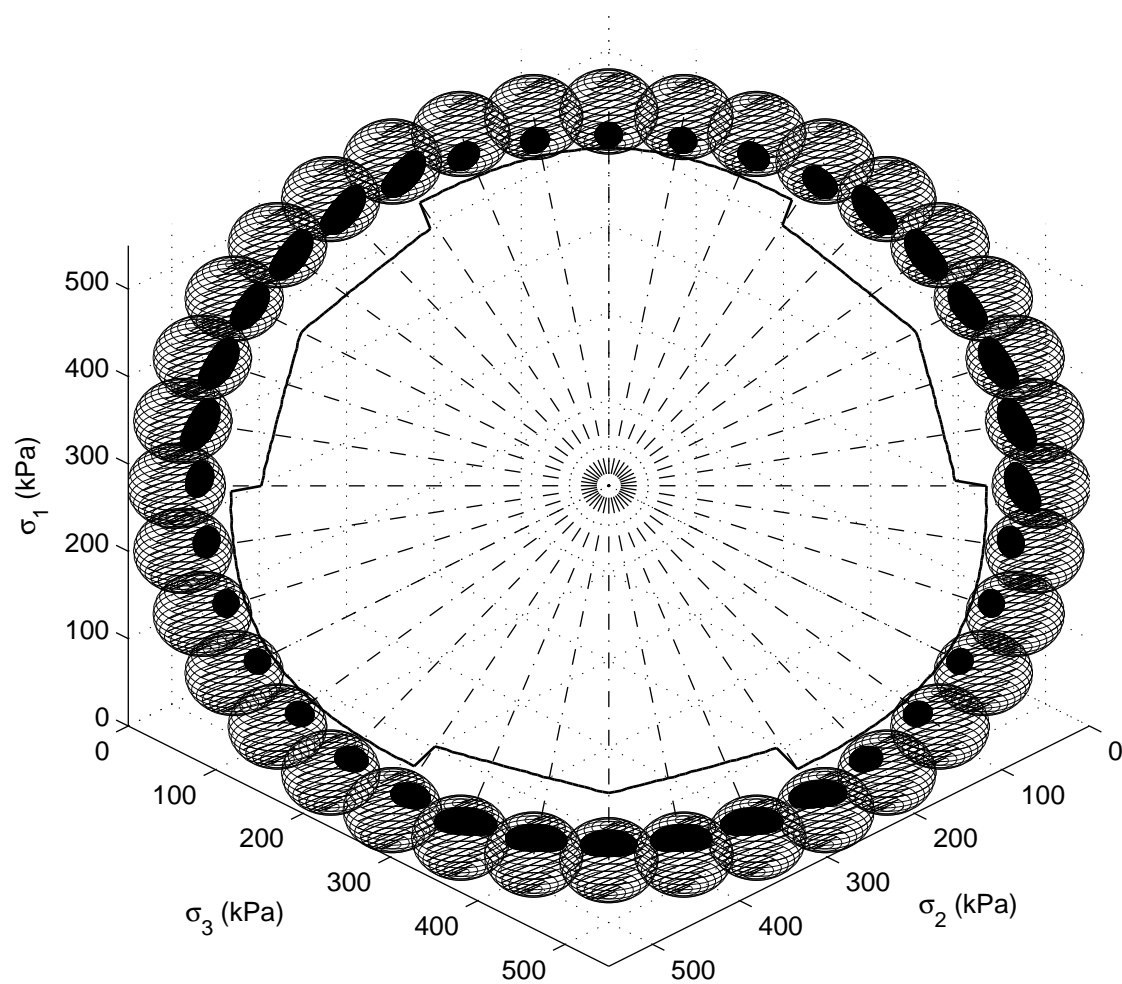
comparer à des niveaux identiques à ceux présentés sur la figure F . 2.16. Pour les cônes du modèle octolinéaire, nous voyons clairement qu'ils sont en fait l'union de cônes elliptiques provenant des différentes zones tensorielles matérialisées par les plans orthogonaux. Le maillage représente le résultat de l'équation (2.35), et le nuage de points le résultat de la recherche numérique basée sur celle des enveloppes réponses de Gudehus F . 2.4. Pour le modèle non linéaire, uniquement les résultats numériques peuvent être présentés. La structure de cône elliptique disparaît, car chaque point du nuage est un cône elliptique infiniment petit.



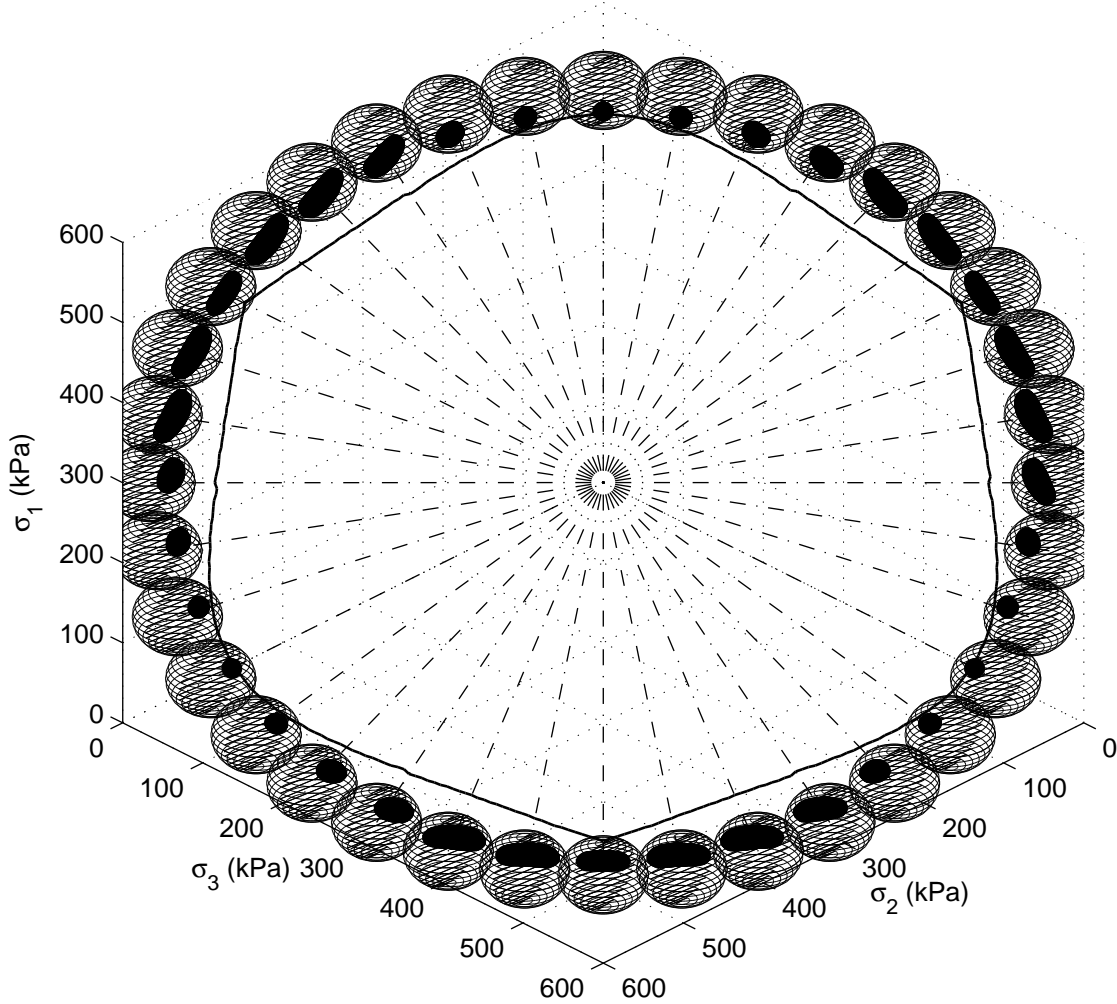
F . 2.17 – Cônes d'instabilité pour un sable dense de Hostun obtenus le long d'un chemin triaxial drainé. (a) octolinéaire, (b) non linéaire

Dans la suite nous présentons des cônes d'instabilité un peu plus particuliers. Ils ont été tracés pour un niveau de pression et de déviateur donné après un chemin suivant une direction fixée du plan déviatoire. Cela permet de considérer de réelles conditions tridimensionnelles : aussi bien pour les cônes que pour les chemins considérés. Pour maintenir la clarté des figures, le niveau déviatoire choisi pour représenter les cônes est suffisamment élevé pour se trouver dans le domaine de bifurcation, mais aussi suffisamment faible pour qu'un seul cône s'ouvre. Les figures F . 2.18 et F . 2.19

présentent ces résultats. Bien que la représentation semble plane dans le plan déviatoire, ces figures sont tridimensionnelles, mais vues depuis une direction parallèle à l'axe hydrostatique.



F . 2.18 – Cônes d'instabilité tracés après un chemin suivant une direction fixée du plan déviatoire pour le modèle octoliéaire : $p_o = 600 \text{ kPa}$, $\|d\sigma_d\| = 350 \text{ kPa}$ ou $q = 428.6 \text{ kPa}$, avec $q = \sqrt{\frac{3}{2}} \|d\sigma_d\|$.



F . 2.19 – Cônes d'instabilité tracés après un chemin suivant une direction fixée du plan déviatoire pour le modèle non linéaire : $p_o = 600 \text{ kPa}$, $\|d\sigma_d\| = 400 \text{ kPa}$ ou $q = 489.9 \text{ kPa}$, avec $q = \sqrt{\frac{3}{2}} \|d\sigma_d\|$.

Les caractéristiques de ces cônes sont périodiques en fonction de l'angle de Lode ϑ et ne dépendent que du troisième invariant car p et q sont fixés. En effet, les chemins de sollicitations sont définis comme suit :

$$\begin{cases} d\sigma_1 = \alpha \sqrt{\frac{2}{3}} \cos(\vartheta) \\ d\sigma_2 = -\alpha \left(\frac{1}{\sqrt{6}} \cos(\vartheta) + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(\vartheta) \right) \\ d\sigma_3 = -\alpha \left(\frac{1}{\sqrt{6}} \cos(\vartheta) - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(\vartheta) \right) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \vartheta = \text{angle de Lode} \\ \alpha = \text{cte} \in \mathbb{R}_+^* \end{array} \quad (2.44)$$

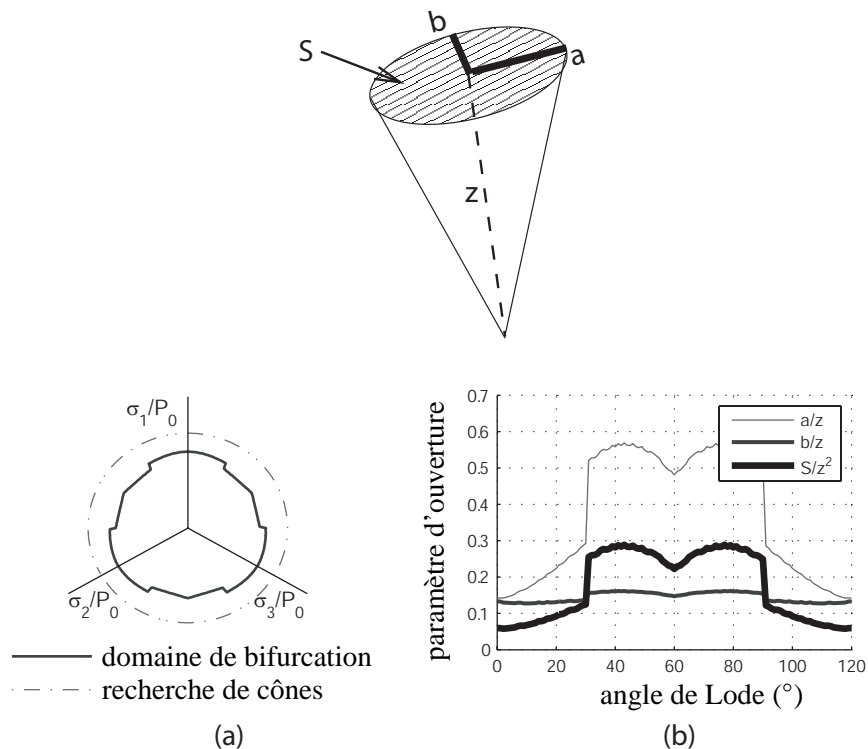
Ainsi, pour $\vartheta' = \vartheta + 120^\circ$ nous avons cette permutation circulaire :

$$\begin{cases} d\sigma_1 \rightarrow d\sigma_3 \\ d\sigma_3 \rightarrow d\sigma_2 \\ d\sigma_2 \rightarrow d\sigma_1 \end{cases} \quad (2.45)$$

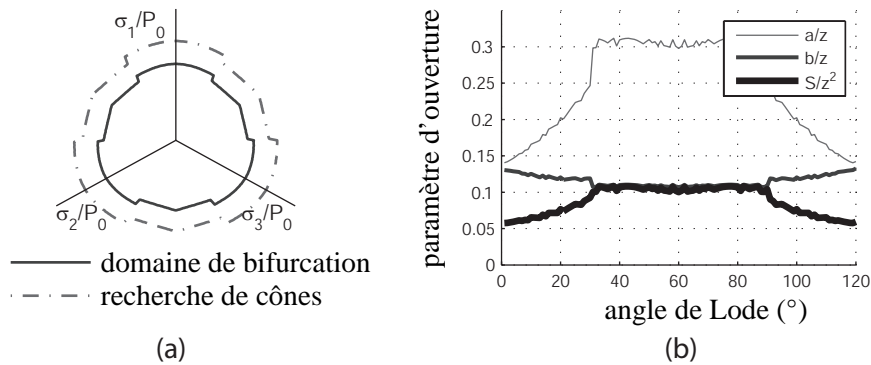
et pour $\vartheta' = 120^\circ - \vartheta$, ($\vartheta \in [0^\circ; 120^\circ]$) nous avons la symétrie suivante :

$$\begin{cases} d\sigma_1 \rightarrow d\sigma_2 \\ d\sigma_2 \rightarrow d\sigma_1 \\ d\sigma_3 \rightarrow d\sigma_3 \end{cases} \quad (2.46)$$

Par conséquent, les cônes sont les mêmes modulo 120° et symétriques par rapport à l'axe de 60° modulo 120° . Qualitativement, on peut observer que l'ouverture des cônes augmente brusquement pour les angles de Lode supérieurs à 30° . Cette "discontinuité" aurait pu être expliquée en remarquant que l'angle correspond à un changement de zone tensorielle pour le modèle octolinéaire. Néanmoins, on observe le même phénomène avec le modèle non linéaire. Une deuxième explication possible serait de dire que les cônes sont plus ouverts lorsque le point matériel se trouve plus éloigné de la limite du domaine de bifurcation. Cependant cela n'explique pas la discontinuité observée pour $\vartheta = 30^\circ$. Pour le modèle octolinéaire, il est possible de vérifier quantitativement les observations précédentes. La figure F . 2.20, montre que l'ouverture des cônes dépend beaucoup de l'angle de Lode pour des états à p et q constants. Pour ce qui est de la remarque sur la distance vis-à-vis de la limite du domaine de bifurcation, la figure F . 2.21 prouve que ce paramètre de distance n'est pas l'unique facteur influençant l'ouverture des cônes. Certes, les différences d'ouvertures sont plus faibles que sur la figure



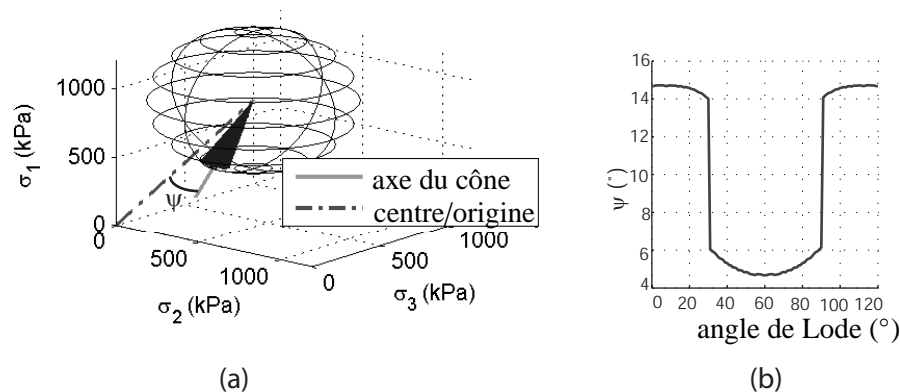
F . 2.20 – Ouverture des cônes pour le modèle octolinéaire, z = cote sur l'axe du cône, a = demi grand axe de l'ellipse, b = demi petit axe de l'ellipse, S = surface de l'ellipse. Sur la figure (a) sont représentés les points mécaniques où une recherche de cônes a été effectuée.



F . 2.21 – Ouverture des cônes pour le modèle octolinéaire, $z =$ cote sur l'axe du cône, $a =$ demi grand axe de l'ellipse, $b =$ demi petit axe de l'ellipse, $S =$ surface de l'ellipse. Sur la figure (a) sont représentés les points mécaniques où une recherche de cônes a été effectuée.

F . 2.20, mais toujours non constantes en fonction de ϑ . La discontinuité pour $\vartheta = 30^\circ$ est d'ailleurs toujours présente. Compte tenu de ces résultats, la façon d'appliquer un déviateur à un matériau est aussi très importante quant aux instabilités matérielles qui peuvent se développer. Le ratio $\eta = q/p$, très souvent utilisé en axisymétrie, ne suffit plus à lui tout seul, pour définir les états critiques dans les problèmes tridimensionnels.

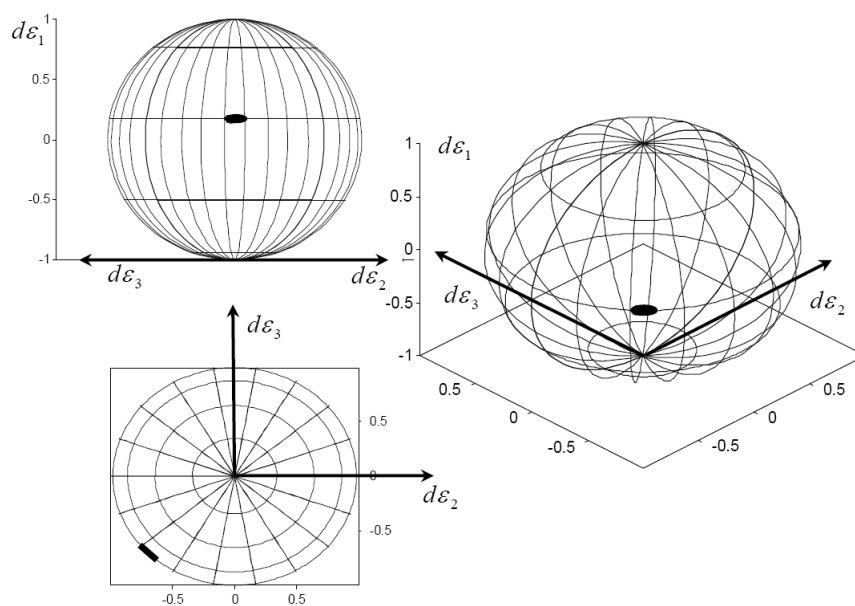
Pour finir avec l'analyse sur ces deux figures F . 2.18 et F . 2.19, il avait été remarqué : Darve *et al.* (2004) et Khoa *et al.* (2006), que les premiers cônes étaient à peu près orientés vers l'origine de l'espace des contraintes. Cette observation n'avait été faite que qualitativement. La figure F . 2.22 prouve que ceci n'est pas tout à fait vrai et que l'angle de Lode influence, de façon non négligeable, l'orientation générale des cônes.



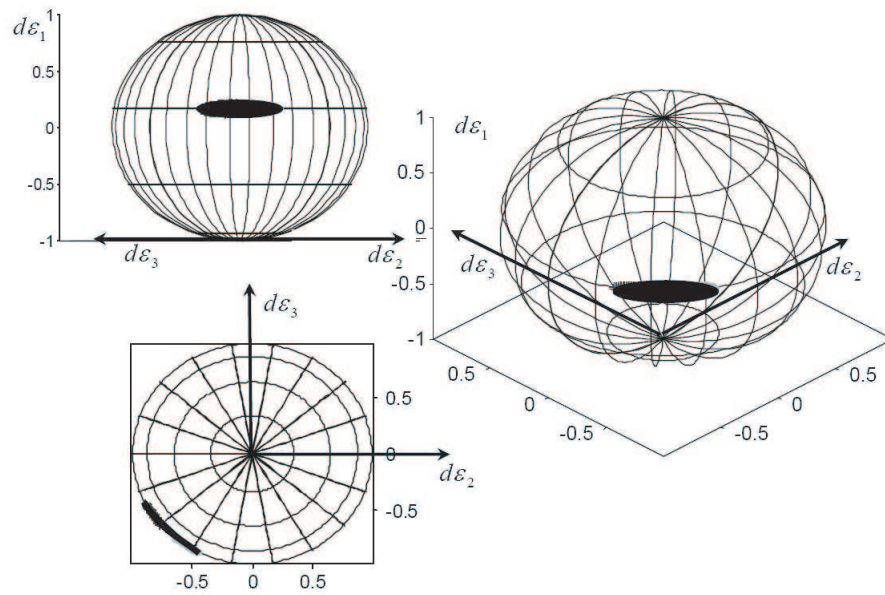
F . 2.22 – Angle entre l'axe des cônes et la direction à l'origine pour les états mécaniques considérés sur la figure F . 2.18.

Enfin, les résultats ci-dessous, permettent de confronter ceux obtenus avec les lois de Darve, à

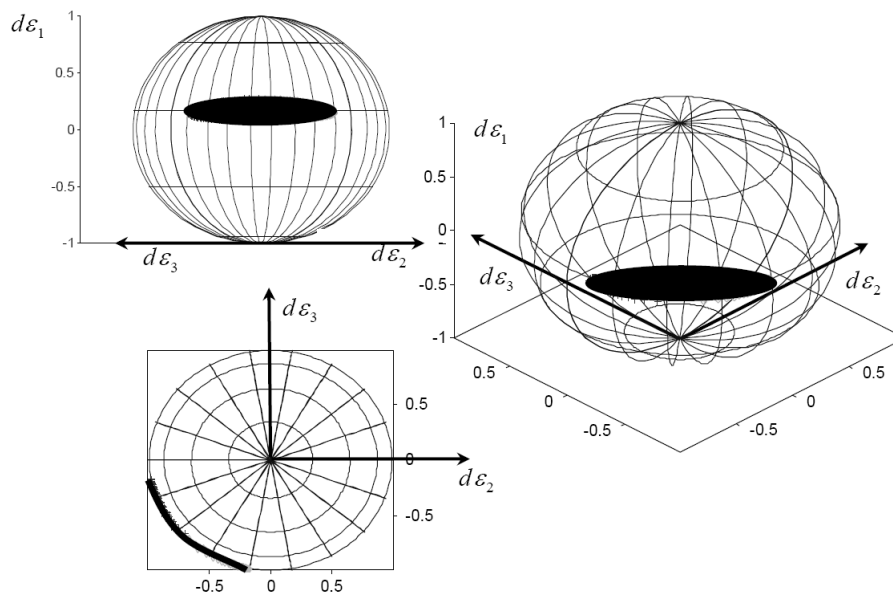
d'autres obtenus avec le modèle micro-mécanique de Nicot, initialement développé pour représenter le comportement de la neige, puis aussi de divers matériaux granulaires. Ce modèle n'est pas détaillé dans cette thèse, car je ne l'ai jamais utilisé, mais il est possible de se référer à : Nicot (2003), Nicot (2004a), Nicot (2004b). Les comparaisons faites ici, ne peuvent être que d'ordre qualitatif, car le modèle de Nicot n'a pas été calibré sur le sable de Hostun. Il est, toutefois, intéressant de noter que les cônes d'instabilité se développent à peu près dans les mêmes directions de chargement et s'ouvrent de façon semblable. Ainsi, peut-on conclure que ces cônes d'instabilité définissent une physique de rupture plus ou moins intrinsèque dans les matériaux granulaires. Le seul regret vient du fait que, sur ces simulations, le modèle de Nicot ne fait pas apparaître de cônes dans les secteurs où $d\varepsilon_1 < 0$ qui correspondent au cône observé dans le secteur ($d\sigma_1 > 0, d\sigma_2 > 0, d\sigma_3 > 0$) avec les modèles de Darve. Il serait, à l'avenir, très intéressant de vérifier expérimentalement si certaines de ces directions de chargement mènent, effectivement, à des instabilités avant le critère de rupture.



F . 2.23 – Cônes d'instabilité obtenus le long d'un chemins tiraxial drainé et représentés dans l'espace des incréments de déformation pour le modèle de Nicot. $\eta = 2.056$.



F . 2.24 – Cônes d'instabilité obtenus le long d'un chemin tiraxial drainé et représentés dans l'espace des incréments de déformation pour le modèle de Nicot. $\eta = 2.062$.



F . 2.25 – Cônes d'instabilité obtenus le long d'un chemin tiraxial drainé et représentés dans l'espace des incréments de déformation pour le modèle de Nicot. $\eta = 2.080$.

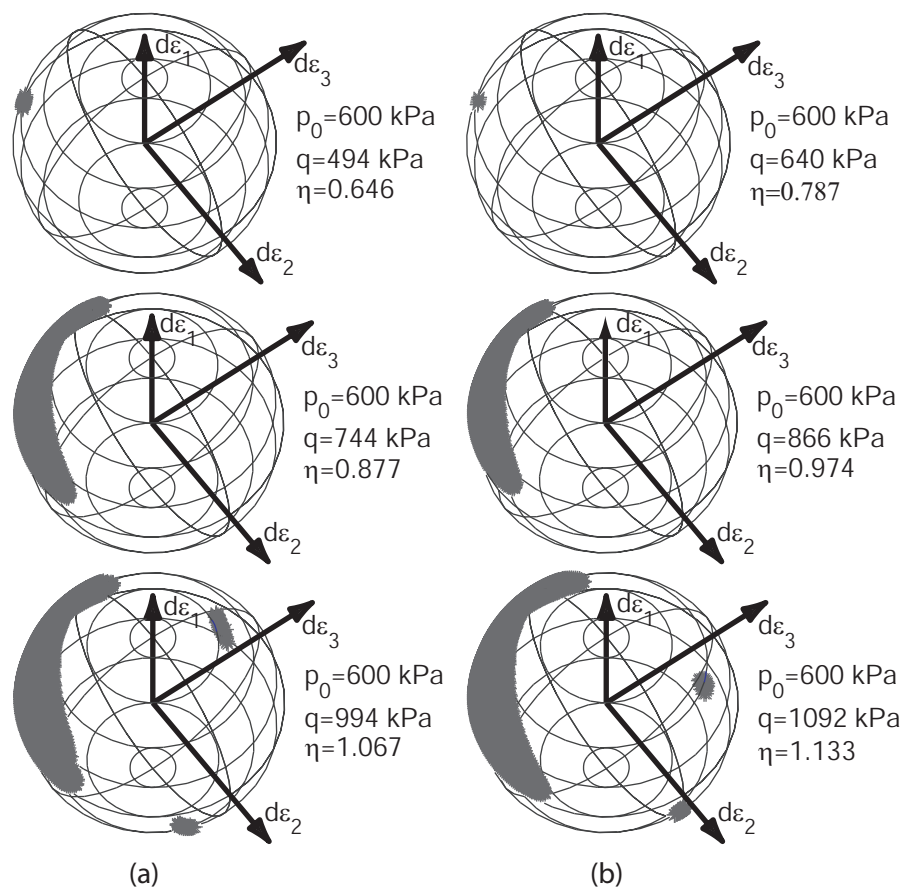
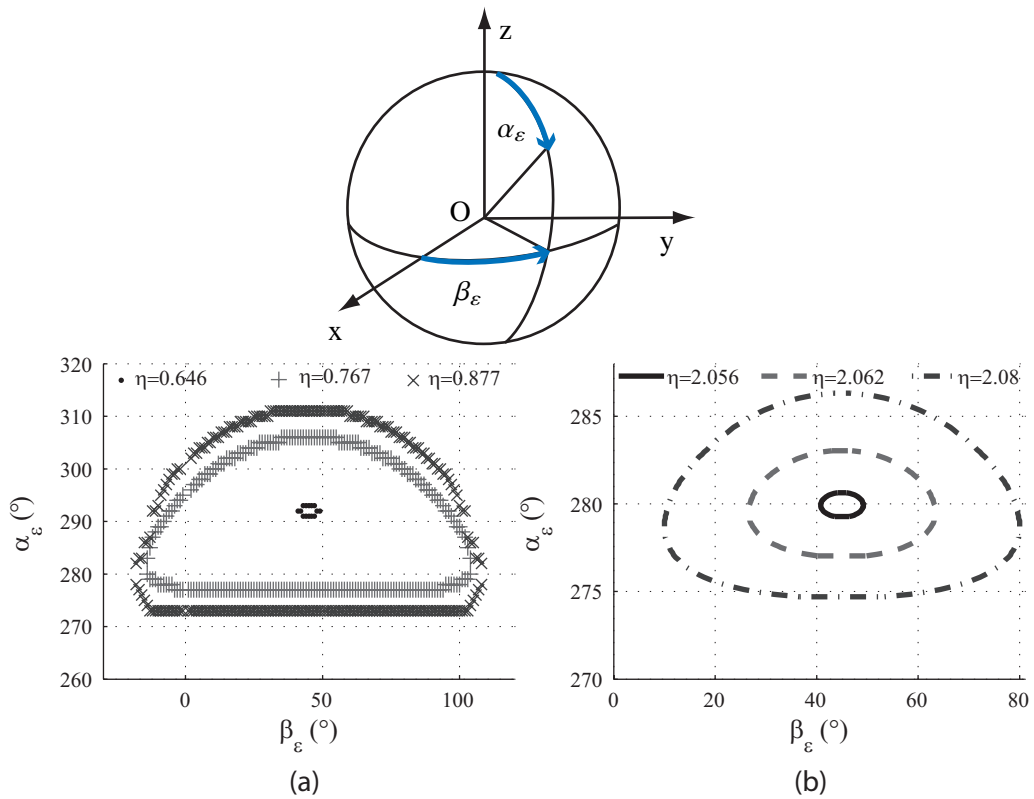
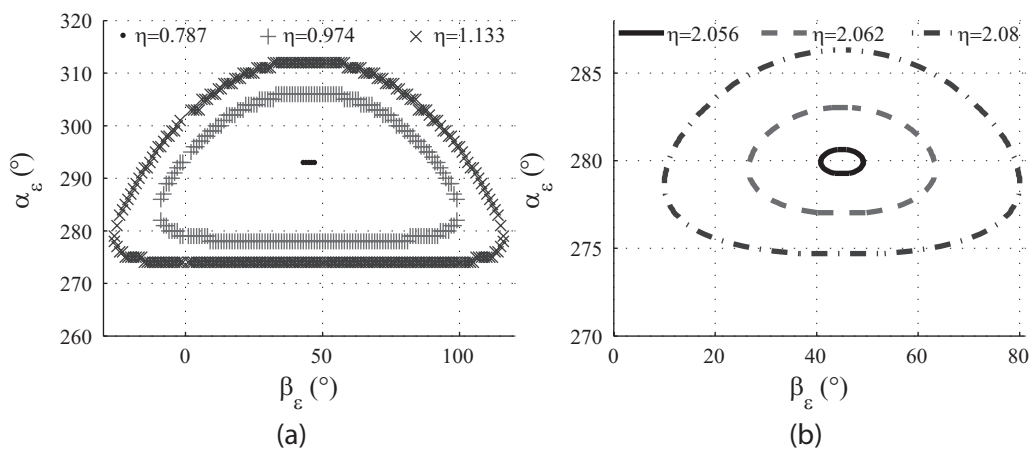


Fig. 2.26 – Cônes d'instabilité obtenus le long d'un chemin tiraxial drainé et représentés dans l'espace des incréments de déformation pour les modèles de Darve. (a) octolinéaire, (b) non linéaire.



F . 2.27 – Comparaison du contour des cônes d'instabilité entre le modèle octolinéaire et le modèle micro-mécanique de Nicot.



F . 2.28 – Comparaison du contour des cônes d'instabilité entre le modèle non linéaire et le modèle micro-mécanique de Nicot.

2.3.2 Interprétation physique

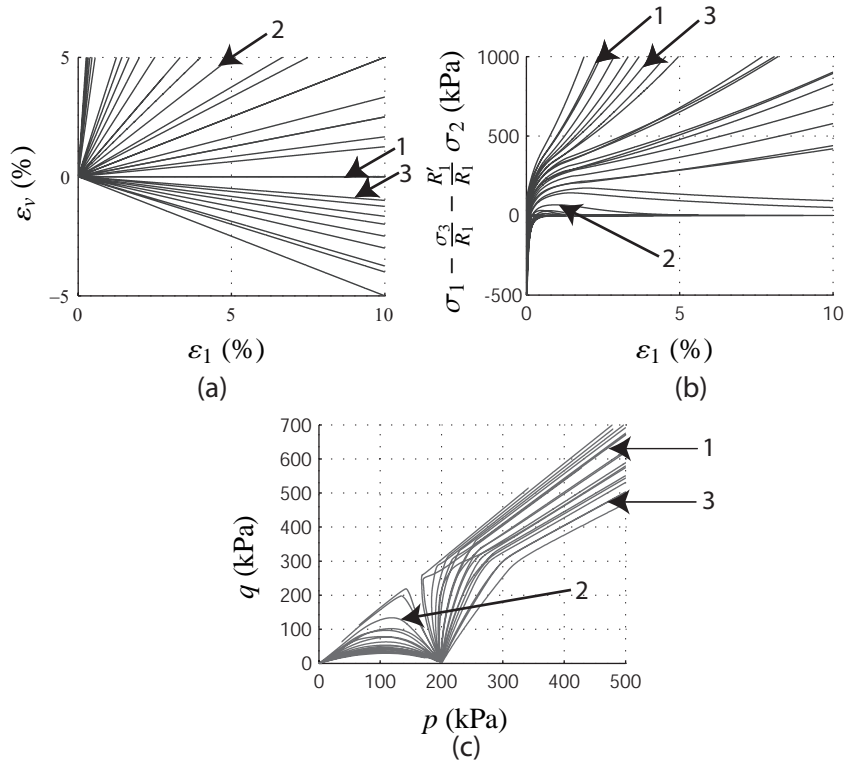
2.3.2.1 Règle de rupture généralisée

Nous avons déjà vu, pour des conditions bidimensionnelles, que l'annulation du travail du second ordre, sur un chemin de sollicitations particulier, correspond à l'existence d'un pic dans un plan de variables conjuguées, et qu'une règle de rupture généralisée pouvait être définie à ce pic. Nous allons à présent étendre cette approche aux cas tridimensionnels et définir des chemins proportionnels en déformations, mais également en contraintes, permettant de parcourir tout l'espace des incréments de déformations et respectivement de contraintes.

Dans un premier temps considérons les chemins proportionnels en déformation suivants :

$$\begin{cases} d\varepsilon_1 = cst & cst \in \mathbb{R}^* \\ d\varepsilon_1 + R_1 d\varepsilon_3 = 0 & R_1 \in \mathbb{R}^* \\ d\varepsilon_2 - R'_1 d\varepsilon_3 = 0 & R'_1 \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (2.47)$$

La figure F . 2.29, présente une partie de ces chemins dans des plans d'invariants. Le travail du



F . 2.29 – Réponse aux chemins proportionnels en déformations avec le modèle octoliénaire. $R_1 \in [0.1; 2]$ et $R'_1 \in [0; 1]$. $q = \sqrt{\frac{3}{2}} \|\underline{\underline{\sigma_d}}\|$. 1 : $r = 2$, $r' = 1$, 2 : $r = 0.8$, $r' = 0.6$, 3 : $r = 1.2$, $r' = 0$.

second ordre peut être exprimé de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
 d^2W &= d\sigma_1 d\varepsilon_1 + d\sigma_2 d\varepsilon_2 + d\sigma_3 d\varepsilon_3 \\
 &= \left(d\sigma_1 - \frac{d\sigma_3}{R_1} - \frac{R'_1}{R_1} d\sigma_2 \right) d\varepsilon_1 \\
 &\quad + (d\varepsilon_1 + R_1 d\varepsilon_3) \left(\frac{d\sigma_3}{R_1} + \frac{R'_1}{R_1} d\sigma_2 \right) \\
 &\quad + (d\varepsilon_2 - R'_1 d\varepsilon_3) d\sigma_2
 \end{aligned} \tag{2.48}$$

et une matrice constitutive généralisée peut être construite :

$$\begin{bmatrix} d\sigma_1 - \frac{d\sigma_3}{R_1} - \frac{R'_1}{R_1} d\sigma_2 \\ d\varepsilon_1 + R_1 d\varepsilon_3 \\ d\varepsilon_2 - R'_1 d\varepsilon_3 \end{bmatrix} = \underline{\underline{S_1}} \begin{bmatrix} d\varepsilon_1 \\ \frac{d\sigma_3}{R_1} + \frac{R'_1}{R_1} d\sigma_2 \\ d\sigma_2 \end{bmatrix} \tag{2.49}$$

Compte tenu des conditions cinématiques de la relation (2.47), au pic de $\left(\sigma_1 - \frac{\sigma_3}{R_1} - \frac{R'_1}{R_1} \sigma_2 \right)$ sur certaines des courbes de la figure F . 2.29, le travail du second ordre s'annule, et nous avons aussi :

$$\underline{\underline{S_1}} \begin{bmatrix} d\varepsilon_1 \\ \frac{d\sigma_3}{R_1} + \frac{R'_1}{R_1} d\sigma_2 \\ d\sigma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.50}$$

d'où la "règle de rupture". En émettant l'hypothèse que l'ordre de multiplicité de la valeur propre nulle est toujours égal à 1, le vecteur $\left(d\varepsilon_1; \frac{d\sigma_3}{R_1} + \frac{R'_1}{R_1} d\sigma_2; d\sigma_2 \right)$ reste indéterminé, mais sa direction est fixée par le vecteur propre associé à la valeur propre nulle. Cette direction constitue la règle d'écoulement généralisée, appelée "règle de rupture".

Comme on l'a vu dans la section 2.3.1.1, une analyse duale peut être faite sans restrictions, et est d'ailleurs plus commode avec les modèles de Darve. Ainsi nous définissons les chemins proportionnels en contraintes suivants :

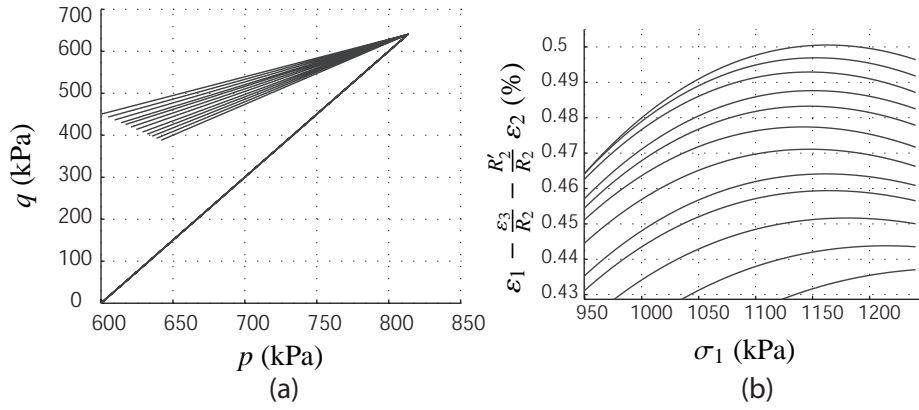
$$\begin{cases} d\sigma_1 = cst & cst \in \mathbb{R}^* \\ d\sigma_1 + R_2 d\sigma_3 = 0 & R_2 \in \mathbb{R}^* \\ d\sigma_2 - R'_2 d\sigma_3 = 0 & R'_2 \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{2.51}$$

Une relation constitutive généralisée peut être :

$$\begin{bmatrix} d\varepsilon_1 - \frac{d\varepsilon_3}{R_2} - \frac{R'_2}{R_2} d\varepsilon_2 \\ d\sigma_1 + R_2 d\sigma_3 \\ d\sigma_2 - R'_2 d\sigma_3 \end{bmatrix} = \underline{\underline{S_2}} \begin{bmatrix} d\sigma_1 \\ \frac{d\varepsilon_3}{R_2} + \frac{R'_2}{R_2} d\varepsilon_2 \\ d\varepsilon_2 \end{bmatrix} \tag{2.52}$$

La réponse de ces chemins dans des plans d'invariants est présentée sur la figure F . 2.30. Avant de suivre ces chemins proportionnels, une phase de compression triaxiale a été au préalable appliquée, car avec ce type de chemins, il est plus délicat d'entrer dans le domaine de bifurcation, uniquement après une phase consolidation isotrope. Au pic de $\left(\varepsilon_1 - \frac{\varepsilon_3}{R_2} - \frac{R'_2}{R_2} \varepsilon_2 \right)$, le déterminant de $\underline{\underline{S_2}}$ ainsi que le travail du second ordre s'annulent. On remarquera que la disposition des axes est un peu inhabituelle : déformations en fonction des contraintes. Pour calculer $\det(\underline{\underline{S_2}})$, la relation (2.52) est réécrite comme suit :

$$\begin{bmatrix} dv_1 \\ du_2 \end{bmatrix} = \underline{\underline{S_2}} \begin{bmatrix} du_1 \\ dv_2 \end{bmatrix} \tag{2.53}$$



F . 2.30 – Réponse aux chemins proportionnels en contraintes avec le modèle octoliénaire après une compression triaxiale à $p_o = 600$ kPa et $q = 640$ kPa. $R_2 \in [-3.5; -2.5]$ et $R'_2 \in [0.8; 1.2]$.

$$q = \sqrt{\frac{3}{2}} \|\underline{\underline{\sigma_d}}\|.$$

et deux autres matrices $\underline{\underline{\alpha}}$ et $\underline{\underline{\beta}}$ sont définies telles que :

$$\begin{bmatrix} dv_1 \\ du_2 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\alpha}} d\underline{\underline{\sigma}} \quad (2.54)$$

et

$$\begin{bmatrix} du_1 \\ dv_2 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\beta}} d\underline{\underline{\sigma}} \quad (2.55)$$

Ainsi nous avons :

$$\underline{\underline{S_2}} = \underline{\underline{\alpha}} \underline{\underline{\beta}}^{-1} \quad (2.56)$$

et

$$\det(\underline{\underline{S_2}}) = \frac{\det(\underline{\underline{\alpha}})}{\det(\underline{\underline{\beta}})} \quad (2.57)$$

avec :

$$\underline{\underline{\alpha}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} \left(1 + \frac{\nu_{13}}{R_2} + \frac{R'_2}{R_2} \nu_{12} \right) & \frac{-1}{E_2} \left(\frac{R'_2}{R_2} + \nu_{21} - \frac{\nu_{23}}{R_2} \right) & \frac{-1}{E_3} \left(\frac{1}{R_2} + \nu_{31} - \frac{R'_2}{R_2} \nu_{32} \right) \\ 1 & 0 & R_2 \\ 0 & 1 & -R'_2 \end{bmatrix} \quad (2.58)$$

et

$$\underline{\underline{\beta}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{E_1} \left(\frac{\nu_{13}}{R_2} + \frac{R'_2}{R_2} \nu_{12} \right) & \frac{1}{E_2} \left(\frac{R'_2}{R_2} - \frac{\nu_{23}}{R_2} \right) & \frac{1}{E_3} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{R'_2}{R_2} \nu_{32} \right) \\ \frac{-\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & \frac{-\nu_{32}}{E_3} \end{bmatrix} \quad (2.59)$$

Finalement l'expression de $\det(\underline{\underline{S_2}})$ est :

$$\det(\underline{\underline{S_2}}) = \frac{1}{E_1 (1 - \nu_{32} \nu_{23})} \left(\begin{array}{l} E_2 E_3 R_2^2 + E_1 E_3 R_2'^2 + E_3 (E_2 \nu_{12} + E_1 \nu_{21}) R_2 R_2' \\ + E_2 (E_1 \nu_{31} + E_3 \nu_{13}) R_2 - E_1 (E_3 \nu_{23} + E_2 \nu_{32}) R_2' + E_1 E_2 \end{array} \right) \quad (2.60)$$

qu'il est possible de réécrire :

$$\det(\underline{\underline{S}}_2) = A R_2^2 + B R_2'^2 + C R_2 R_2' + D R_2 + E R_2' + F \quad (2.61)$$

L'équation, $\det(\underline{\underline{S}}) = 0$, est celle d'une conique en R_2 et R_2' . En remplaçant R_2 et R_2' par $-d\sigma_1/d\sigma_3$ et $d\sigma_2/d\sigma_3$ grâce à la relation (2.51), nous obtenons l'équation suivante des cônes d'instabilité :

$$A d\sigma_1^2 + B d\sigma_2^2 + F d\sigma_3^2 - C d\sigma_1 d\sigma_2 + E d\sigma_2 d\sigma_3 - D d\sigma_1 d\sigma_3 = 0 \quad (2.62)$$

En appelant $\underline{\underline{M}}^*$ la matrice de cette forme quadratique, nous obtenons (2.62) identique à :

$$\underline{\underline{d\sigma}}^t \underline{\underline{M}}^* \underline{\underline{d\sigma}} = 0 \quad (2.63)$$

avec :

$$\underline{\underline{M}}^* = \frac{1}{E_1 (1 - \nu_{32} \nu_{23})} \begin{bmatrix} E_2 E_3 & \frac{-E_3}{2} (E_2 \nu_{12} + E_1 \nu_{21}) & \frac{-E_2}{2} (E_3 \nu_{13} + E_1 \nu_{31}) \\ & E_1 E_3 & \frac{-E_1}{2} (E_3 \nu_{23} + E_2 \nu_{32}) \\ \text{sym.} & & E_1 E_2 \end{bmatrix} \quad (2.64)$$

De là on peut remarquer que :

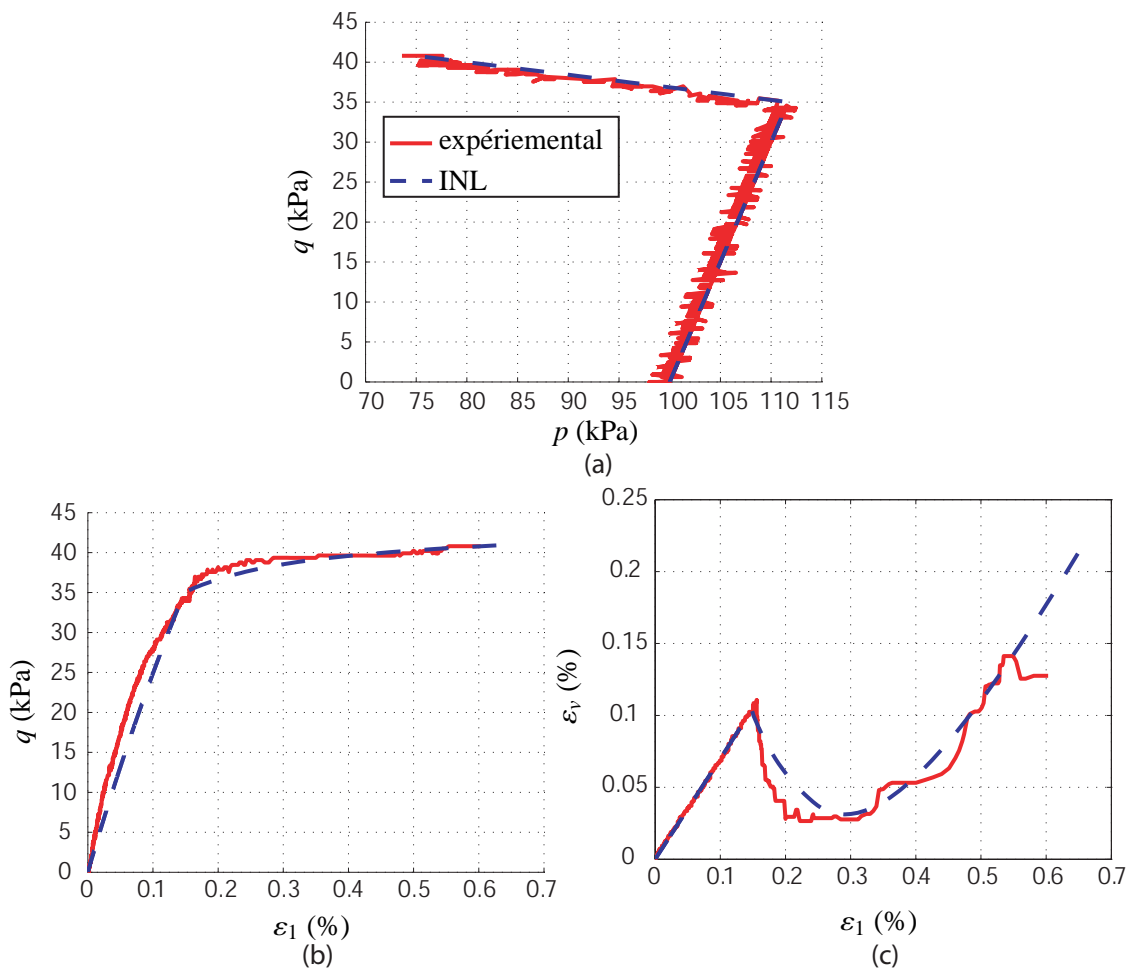
$$\underline{\underline{M}}^* = \frac{E_2 E_3}{1 - \nu_{32} \nu_{23}} \underline{\underline{N}}_s \quad (2.65)$$

Comme récapitulatif sur ce qui vient d'être écrit, lorsque R_2 et R_2' sont fixés, la condition $\det(\underline{\underline{S}}_2) = 0$ indique qu'il existe un pic dans un plan de variables conjuguées, qu'une règle de rupture généralisée peut être définie et que le travail du second ordre s'annule à cet état sur ce chemin. Lorsque R_2 et R_2' sont des variables permettant de décrire toute la sphère des incréments des sollicitations, la condition $\det(\underline{\underline{S}}_2) = 0$ est équivalente à $\underline{\underline{d\sigma}}^t \underline{\underline{N}}_s \underline{\underline{d\sigma}} = 0$, et donne l'équation des cônes d'instabilité pour un état de contraintes-déformations donné.

Enfin, il faut préciser, que lorsque le travail du second ordre s'annule sur un chemin particulier, ou lorsqu'un pic est atteint, la rupture de l'échantillon ne se produit pas nécessairement. La rupture est effective si la bonne variable de contrôle est choisie. Dans le cas des chemins proportionnels en contrainte, si la variable de contrôle est $\left(d\varepsilon_1 - \frac{d\varepsilon_3}{R_2} - \frac{R_2'}{R_2} d\varepsilon_2\right)$, alors la rupture se manifeste au pic de $\left(\varepsilon_1 - \frac{\varepsilon_3}{R_2} - \frac{R_2'}{R_2} \varepsilon_2\right)$. En effet, on cherche à augmenter cette quantité alors que le matériau ne le permet pas de façon homogène. En revanche, si la variable duale $d\sigma_1$ est pilotée, alors l'essai se poursuivra de façon homogène et quasi-statique après le pic. Il n'en reste pas moins que tous les états, atteints depuis ce pic, sont instables sur ce chemin considéré. Une "petite" perturbation, ou un changement de variable de contrôle induirait cette rupture effective. Tout ceci correspond à la notion de *contrôlabilité* introduite par Nova lors de travaux précurseurs et fondateurs sur les instabilités et bifurcations dans les géomatériaux (Nova (1991), Nova (1994), Imposimato et Nova (2001), Nova (2004)). Un chemin est contrôlable lorsque la réponse est reproductible d'un essai à l'autre. La notion de *maintenabilité*, introduite par Nicot (Nicot et Darve (2006), Nicot *et al.* (2007)) dans un formalisme un peu différent, est finalement identique à la notion de *contrôlabilité*. Nicot a introduit cette notion en partant du constat qu'un point matériel développe de l'énergie cinétique lorsqu'il s'effondre. En fonction des paramètres de contrôle, un état de contraintes-déformations est maintenable ou non s'il se trouve dans le domaine de bifurcation et que l'on cherche à lui appliquer une sollicitation à l'intérieur d'un cône d'instabilité.

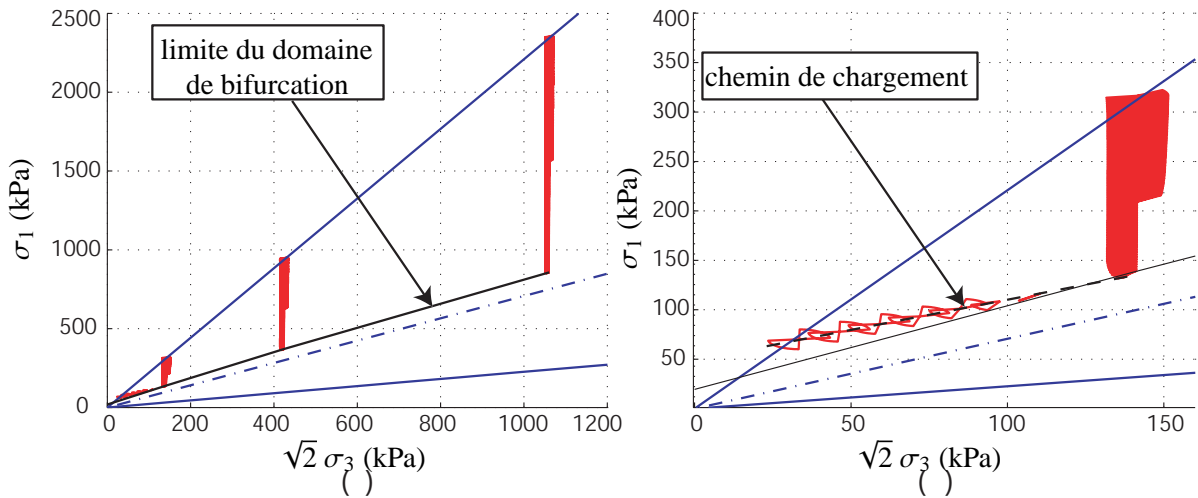
2.3.3 Simulation de la rupture diffuse par des essais de laboratoire

Une application expérimentale des travaux présentés juste avant est proposée ici. L'essai considéré est un chemin proportionnel en contraintes axisymétrique effectué sur un sable lâche. Il est précédé d'une compression triaxiale drainée qui s'arrête pour un déviateur situé avant la limite du domaine de bifurcation. Ainsi le chemin proportionnel démarre à l'extérieur du domaine de bifurcation et se finit à l'intérieur. Du fait de la symétrie axiale, $R'_2 = 1$, et le rapport choisi est $R_2 = -0.85$ avec $d\sigma_1 < 0$. On cherche une direction incluse dans un cône en décharge. Ce chemin, n'est finalement pas si éloigné de ceux à q constants en décharge déjà étudiés à plusieurs reprises (Darve *et al.* (2004), Khoa *et al.* (2006), Darve *et al.* (2007)...): $R'_2 = 1$, $R_2 = -1$ et $d\sigma_1 < 0$. Les essais expérimentaux ont été effectués au LPMM à l'université de Metz par l'équipe de Daouadji. Puis les courbes expérimentales ont été calibrées avec le modèle INL de Darve. La figure F . 2.31 présente la réponse du matériau à ce chemin. Une fois les courbes calibrées, les cônes d'instabilité ont été tracés



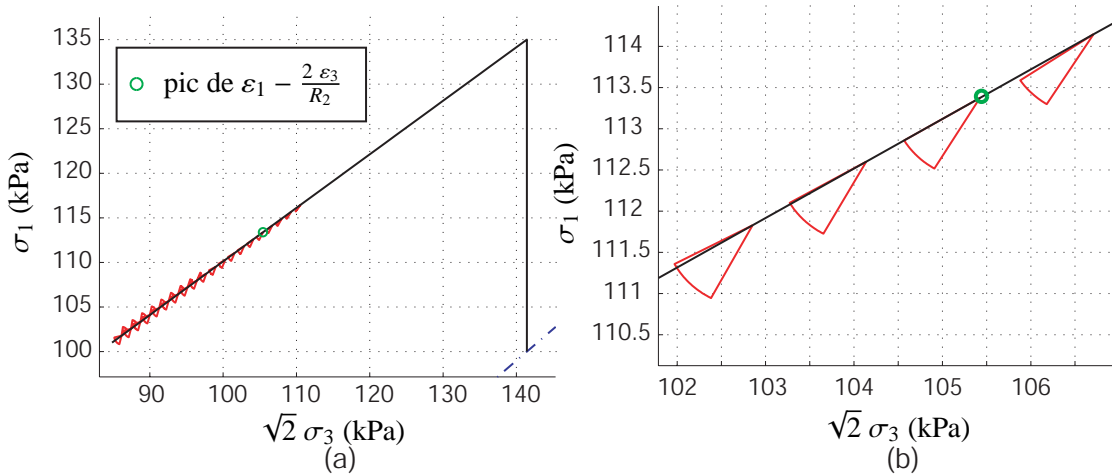
F . 2.31 – Réponses dans des plans d'invariants au chemin proportionnel en contraintes pour un sable lâche.

avec le modèle INL sur des chemins triaxiaux drainés, et sur le chemin considéré, afin de vérifier sur cet exemple que la limite du domaine de bifurcation ne fluctue pas en fonction du type de sollicitations appliquées. En négligeant les erreurs numériques, cette hypothèse peut être vérifiée sur la figure F . 2.32. La figure F . 2.33 se focalise uniquement sur les cônes développés sur le chemin de sollicitation de l'étude : $R'_2 = 1$, $R_2 = -0.85$ et $d\sigma_1 < 0$. On peut voir clairement, qu'au début, les points



F . 2.32 – Cônes d’instabilité pour ce sable lâche le long de triaxiaux drainés et le long du trajet imposé en figure F . 2.31. (b) est un zoom de (a) autour du trajet de chargement étudié.

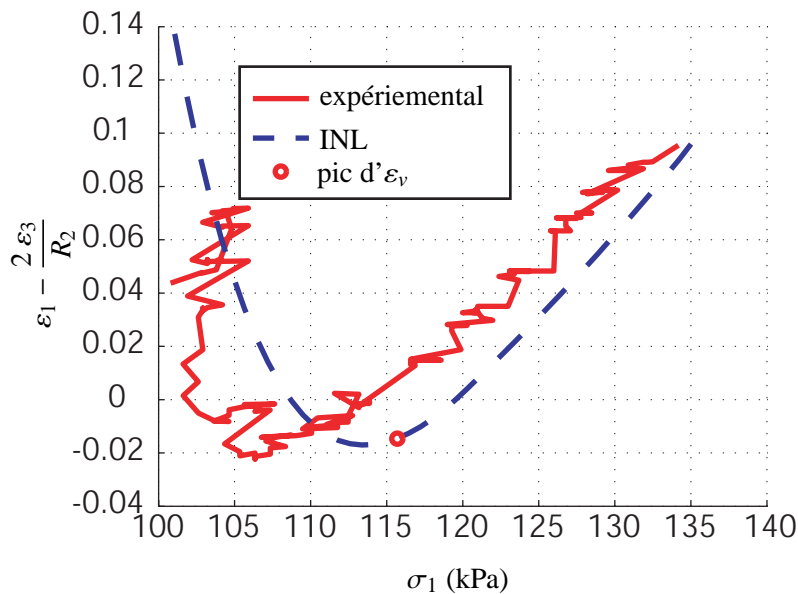
mécaniques sont situés à l’extérieur du domaine de bifurcation, puis avec l’apparition de la première direction instable on entre dans le domaine de bifurcation. Néanmoins, les états pour lesquels on voit les quatre premiers cônes représentés, ne sont pas instables sur ce chemin. En effet la direction de chargement est à l’extérieur des cônes. Le premier point instable est marqué par un petit cercle qui indique l’annulation du travail du second ordre sur le chemin considéré. L’annulation a lieu exactement au moment où la direction du chemin se trouve sur la limite d’un cône. Pour les états suivants, le travail du second ordre est négatif, et on peut voir que la direction du chemin est située à l’intérieur des cônes d’instabilité. La dernière figure F . 2.34 permet d’introduire une remarque sur un lien ou



F . 2.33 – Cônes d’instabilité pour ce sable lâche le long du trajet imposé en figure F . 2.31. (b) est un zoom de (a) autour du pic de $\varepsilon_1 - \frac{2\varepsilon_3}{R_2}$.

non entre variations de volumes et instabilités. D’un point de vue expérimental, on pourrait tout à fait conclure que le travail du second ordre s’annule au pic de ε_v . Néanmoins cela n’est pas tout à fait vrai. Le pic de ε_v se situe, en réalité, avant le pic de $\varepsilon_1 - \frac{2\varepsilon_3}{R_2}$ qui correspond à l’annulation du travail du second ordre. Dans ce cas-ci, les deux pics sont proches car le chemin considéré n’est pas si éloigné

d'un chemin à q constant pour lequel le travail du second ordre s'annule effectivement au pic de ε_v . Au risque de choquer des expérimentateurs et micromécaniciens, il me semble que le développement



F . 2.34 – Variations de volumes et apparition du premier cône.

d'instabilités matérielles dans les géomatériaux n'a pas grand chose à voir avec les variations de volume. En effet, sur un essai triaxial drainé sur sable dense par exemple, les cônes commencent à se développer dans la phase contractante, et continuent de se développer de la même façon dans la phase dilatante. Pour un matériau lâche, les cônes ne semblent pas se développer de manière totalement différente que pour le matériau dense. Il me semble, mais cela reste à vérifier, que si on construisait un modèle élasto-plastique classique basé sur une surface de charge de type Mohr-coulomb, et une règle d'écoulement utilisant une surface de type Von-Mises, les variations de volume seraient ainsi toujours nulles, mais des cônes d'instabilité se développeraient aussi avant le critère de plasticité, car la règle de normalité n'est pas vérifiée, et induit dès lors une matrice constitutive non symétrique. En revanche, une loi élasto-plastique associée de type Mohr-Coulomb, implique des variations de volumes du matériau, si les conditions limites le permettent, et aucune instabilité matérielle ne peut se développer avant la limite de plasticité, car la matrice constitutive reste toujours symétrique. Il me semble donc, que si l'on veut relier les instabilités à une certaine physique des comportements des matériaux, il faut chercher à expliquer du mieux possible comment se caractérise "physiquement" la non associativité de certains matériaux.

2.4 conclusion

Dans ce chapitre une étude approfondie du critère du travail du second ordre local a été menée. Cette condition permet de détecter les instabilités matérielles pour les matériaux élasto-plastiques. Pour des matériaux associés (vérifiant la règle de normalité), nous avons vu que ce critère est atteint en même temps que le critère de limite de plasticité. En revanche, pour les matériaux non associés, il peut être atteint non seulement avant la limite de plasticité, mais aussi avant le critère de localisation de Rice (cf équation (1.97)).

D'un point de vue général, le signe du travail du second ordre dépend essentiellement des directions de sollicitations : après un chemin de chargement quelconque, un point matériel est stable au

sens du travail du second ordre si aucune direction de l'espace des incréments de contraintes ou de l'espace des incréments de déformations, ne permet d'annuler cette quantité. Dans le cas contraire, le point matériel est potentiellement instable. L'instabilité n'est effective que lorsque le chemin de chargement empreinte l'une des directions instables. L'ensemble des directions instables existant en un point matériel constitue un cône appelé cône d'instabilité. L'ensemble des états de contraintes-déformations pour lesquels ce cône se réduit à une seule direction instable est appelée limite du domaine de bifurcation.

Lorsqu'un modèle incrémentalement linéaire par morceaux est considéré (c'est la très grande majorité des cas), les cônes d'instabilités sont des cônes elliptiques dans l'espace incrémental des contraintes ou des déformations, et de sommet l'origine de cet espace (cf équation (2.35)). La limite du domaine de bifurcation ainsi que des cônes d'instabilités ont été présentés pour les modèles de Darve.

Enfin, il est important de noter qu'instabilité n'est pas synonyme de rupture. Lorsqu'un matériau est soumis à un trajet de chargement suivant une direction instable, la rupture effective dépend des paramètres de contrôle du chemin. En effet, nous avons vu que lorsque le travail du second ordre s'annule, cela signifie qu'il existe un pic pour l'une des variables de chargement. À ce pic une règle d'écoulement généralisée peut être définie. Si dans cet essai la variable exhibant un pic est pilotée, alors la rupture sera effective, car on cherche à augmenter la valeur de cette variable alors que le matériau demande à ce qu'elle diminue. Inversement si c'est la variable duale qui est pilotée, alors le pic peut être franchi sans rupture. Cependant, après ce pic, le chemin de sollicitation reste instable : une petite perturbation dans les paramètres de contrôle mène instantanément à la rupture.

Analyse de la bifurcation à l'échelle de l'ouvrage

3.1 Introduction

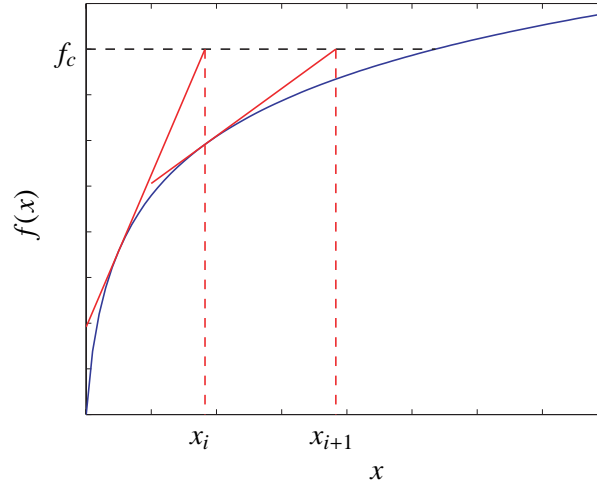
Après avoir étudié le travail du second ordre local dans le chapitre précédent, nous proposons, à présent, une méthode pour analyser la condition de Hill (1.91), grâce à une discrétisation par éléments finis d'un problème aux limites. Pour mener cette étude, nous avons utilisé le code Lagamine développé dans le département M.S.M. (Mécanique de matériaux, Stabilité des constructions, Mécanique des structures) de l'université de Liège : Cescotto (1983), Charlier (1987), Habraken (1989), Wang (1993), Barnichon (1998), Collin (2003). Dans une première partie des descriptions succinctes des méthodes de résolution et de l'algorithme général du code sont présentées. Dans une deuxième partie, nous exposons comment le travail du second ordre local s'intègre sur tout un volume via les éléments finis. La façon de normaliser le travail du second ordre global proposée par Khoa (Khoa (2005)) est rappelée. Cela permet de suivre son évolution au cours d'un chargement. De cette manière, le travail du second ordre normalisé, noté D^2W_n , peut être assimilé à un coefficient de sécurité. Dans la dernière partie de ce chapitre, nous proposons d'investiguer la condition (1.91) grâce à l'étude de la partie symétrique de la matrice de rigidité. Ceci est fait avec le même formalisme que dans le cas local, où nous étions amenés à étudier la partie symétrique du tenseur constitutif.

3.2 Présentation générale du code Lagamine

Le but de ce paragraphe, n'est pas de détailler la théorie des éléments finis. La littérature à ce sujet est très vaste, et il est possible de se référer à des ouvrages classiques : Zienkiewicz (2006), Dhatt *et al.* (2005). Nous proposons juste de présenter les principes de base sur lesquels reposent ce code ainsi que son schéma d'intégration temporel.

Dans cette thèse nous utilisons des éléments isoparamétriques : soit des rectangles à quatre nœuds et quatre points d'intégration, soit des triangles à 6 nœuds et 7 points d'intégration. La descrip-

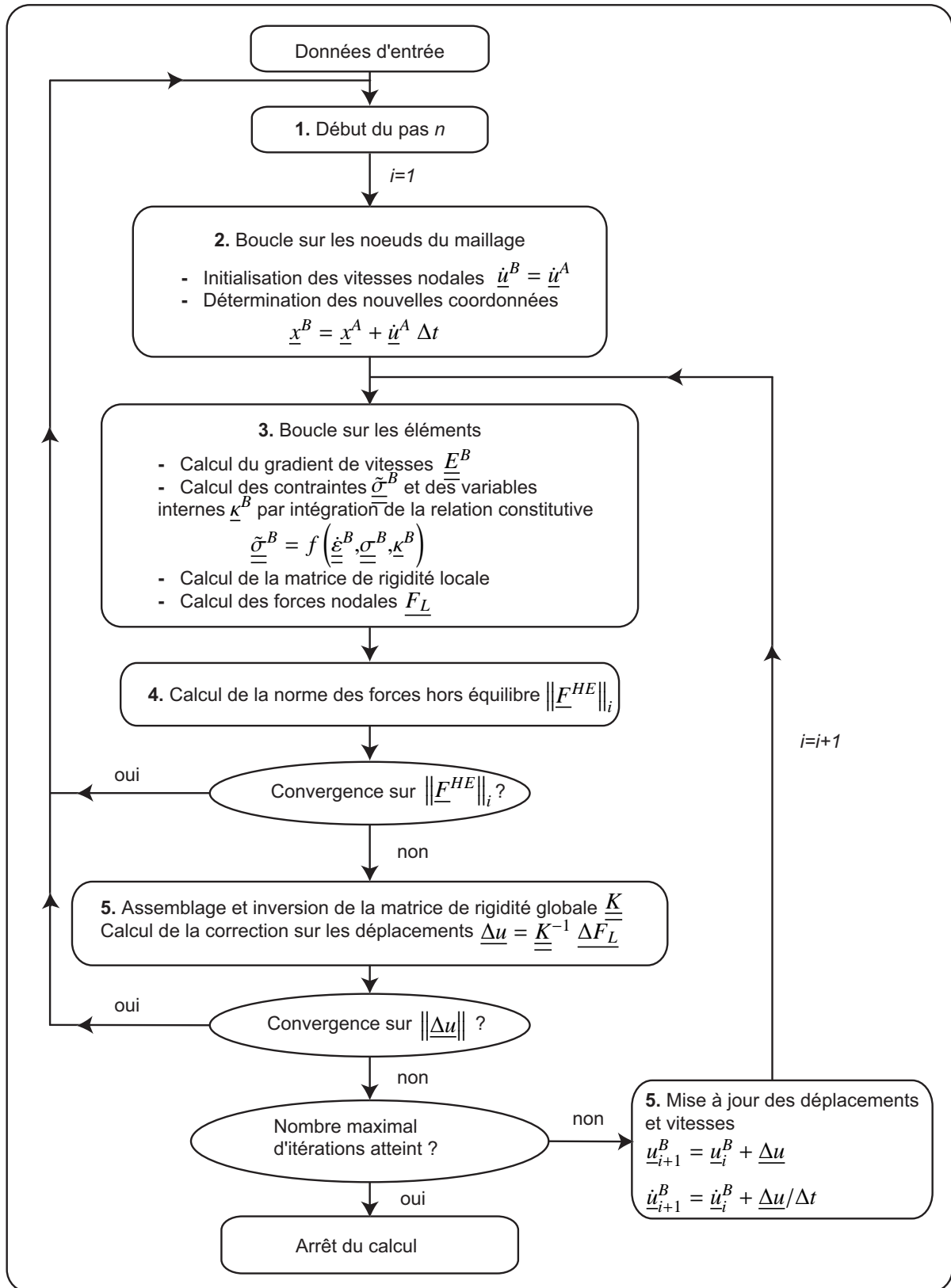
tion des déplacements se fait dans un référentiel lagrangien réactualisé. Ainsi, lorsqu'un chargement est discrétisé en plusieurs étapes, la configuration de référence est celle du début de l'étape. La résolution de systèmes non linéaires (du fait du comportement du matériau par exemple) se fait avec la méthode de Newton-Raphson classique. De cette façon, à la fin du processus itératif permettant de calculer un pas de chargement, un opérateur tangent est trouvé. Ceci est important pour les travaux menés dans le paragraphe 3.4. La figure F . 3.2, présente l'algorithme général d'intégration des lois



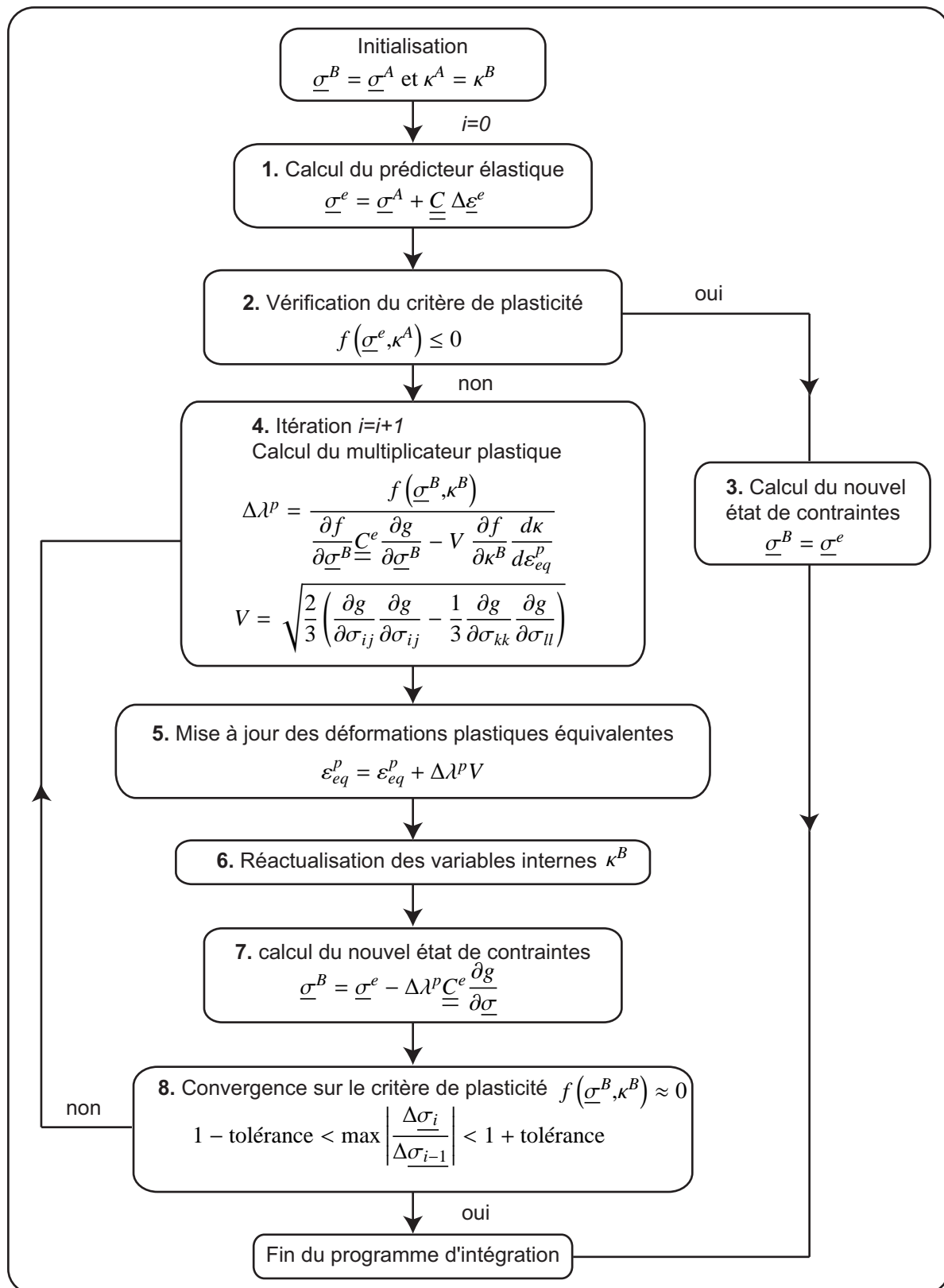
F . 3.1 – Recherche d'un point fixe avec la méthode de Newton : $x_{i+1} = x_i + \frac{f_c - f(x_i)}{f'(x_i)}$.

de comportement dans le code. L'étape 3 de cet algorithme qui consiste à intégrer une loi particulière est développé pour la loi Plasol sur la figure F . 3.3. Sur ces deux figures, les notations suivantes sont utilisées :

- exposant A , désigne les variables de la configuration actuelle au début d'un pas de chargement,
- exposant B , désigne les variables de la nouvelle configuration en fin de pas de chargement,
- i , itérations de Newton pour calculer les nouvelles variables dans un pas de chargement,
- \underline{x} , vecteur des inconnues nodales,
- \underline{u} , vecteur des déplacements nodaux,
- $\underline{\dot{u}}$, vitesses de déplacement (dans notre cas il correspond aux incréments de déplacements, car le comportement est non visqueux),
- \underline{E} , gradient des vitesses : $\underline{E} = \frac{\partial \underline{\dot{u}}}{\partial \underline{x}}$,
- $\underline{\tilde{\sigma}}$, contraintes objectives de Jauman : $\underline{\tilde{\sigma}} = \underline{\dot{\sigma}} - \underline{\omega} \underline{\sigma} - \underline{\sigma} {}^t \underline{\omega}$ avec $\underline{\omega} = \frac{1}{2} \left(\underline{E} - {}^t \underline{E} \right)$,
- $\underline{\kappa}$, vecteur des variables internes,
- \underline{F}_L , forces nodales,
- \underline{F}^{HE} , forces nodales hors équilibre : différence entre les forces nodales intérieures (énergétiquement équivalentes aux contraintes) et les forces nodales extérieures (énergétiquement équivalentes aux forces imposées et aux réactions d'appui).



F .3.2 – Algorithme d'intégration des modèles de comportement utilisé dans Lagamine.



F . 3.3 – Algorithme implicite d'intégration de la loi Plaso : étape 3 de l'algorithme général.

3.3 Travaux du second ordre local et global : intégration numérique

Dans cette partie nous allons étudier un peu plus en détail la condition (1.92) portant sur le travail du second ordre intégré sur tout un volume. On appellera travail du second ordre global cette quantité et la notons D^2W . Dans un schéma aux éléments finis, il est possible d'intégrer le travail du second ordre local de la même manière qu'on intègre le principe des travaux virtuels :

$$D^2W = \int_V d\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} dV = \sum_{e=1}^{nel} \sum_{k=1}^{npi} {}^t d\sigma_k \cdot d\varepsilon_k \cdot \omega_k \cdot j_e \quad (3.1)$$

avec :

- nel , le nombre d'éléments,
- npi , le nombre de points d'intégration d'un élément,
- ω_k , le poids affecté au point d'intégration k (quadrature de Gauss),
- j_e , le déterminant de la matrice jacobienne de la transformation de l'élément e .

Sur cette quantité intégrée, il faut faire plusieurs remarques. Telle qu'elle est écrite, il est évident, que nous nous intéresserons à son signe sur le chemin imposé par les conditions aux limites. Il est impensable de vouloir faire l'équivalent de recherches directionnelles pour un problème non homogène. Néanmoins, Hill (Hill (1958)) dans cet article stipule que lorsque $D^2W \leq 0$, le solide est "potentiellement" instable. Avec la définition de la stabilité donnée dans la bibliographie, on pourrait dire que pour un tel état, le solide est instable sur le chemin suivi, puisqu'aucune recherche directionnelle n'est faite et que nous prenons en compte les incréments courants de contraintes et déformations tels qu'ils sont fournis par les calculs après convergence. En revanche, la rupture ou l'effondrement de la structure, lui, n'est pas obligatoire. En faisant le parallèle avec l'étude menée au niveau rhéologique, il est probable que cette rupture effective soit conditionnée par le type de contrôle imposé aux limites : combinaison de forces et déplacements. D'autre part, Sibille (Sibille (2007)), avec une méthode aux éléments discrets a simulé l'effondrement d'échantillons numériques en perturbant l'un de ces éléments. Même si l'étude était menée pour observer ce qui se passait d'un point de vue rhéologique, ne peut-on considérer qu'un échantillon d'éléments discrets ne constitue pas déjà une structure? Il semblerait donc, que lorsque le travail du second ordre global s'annule sur un chemin particulier, une "petite" perturbation causerait la rupture effective du solide.

Le travail du second ordre global est un scalaire qui permet de statuer sur la stabilité d'une structure. Il est donc intéressant de pouvoir suivre son évolution au cours d'un chargement. Néanmoins, la condition de Hill ne porte que sur le signe de D^2W . C'est pourquoi il est nécessaire de normaliser cette quantité afin que son intensité ait aussi un sens "physique" vis-à-vis de la stabilité. La quantité normalisée peut être, dès lors, assimilée à un coefficient de sécurité. Khoa (Khoa (2005)) propose l'expression suivante pour normaliser D^2W :

$$D^2W_n = \frac{D^2W}{\sum_e \sum_k \omega_k j_e \sum_e \sum_k \| {}^t d\sigma_k \| \| d\varepsilon_k \|} \quad (3.2)$$

Lors d'un calcul par éléments finis, l'évolution des isovaleurs du travail du second ordre normalisé local (d^2W_n : cf relation (2.6)) permet de voir comment se propagent les zones instables au cours du chargement. L'évolution du travail du second ordre global normalisé (D^2W_n) indique le moment où la structure, dans sa globalité, devient instable.

À présent, nous nous intéressons au lien entre le travail du second ordre global et la partie

symétrique de la matrice de rigidité $\underline{\underline{K}}$ d'une structure (Laouafa (2007)). Les notations suivantes sont utilisées :

- $\underline{\underline{M}}_k$, désigne la matrice constitutive au point d'intégration k ,
- $\underline{\underline{du}}_e$, correspond au vecteur incrément de déplacement nodal de l'élément e ,
- $\underline{\underline{B}}_e^k$, est l'opérateur qui lie les déplacements nodaux de l'élément e aux déformations calculées aux points d'intégration dans e ,
- $\underline{\underline{K}}_e$ symbolise la matrice rigidité élémentaire.

De cette manière, le travail du second ordre local s'écrit :

$${}^t d\sigma_k \underline{\underline{d\varepsilon}}_k = {}^t d\varepsilon_k \underline{\underline{M}}_k \underline{\underline{d\varepsilon}}_k \quad (3.3)$$

$$= {}^t du_e \underline{\underline{B}}_e^k \underline{\underline{M}}_k \underline{\underline{B}}_e^k \underline{\underline{du}}_e \quad (3.4)$$

Ainsi, l'intégration sur tout le volume se fait de la manière suivante :

$$\begin{aligned} D^2W &= \sum_e \sum_k j_e \cdot \omega_k \cdot \left({}^t du_e \underline{\underline{B}}_e^k \underline{\underline{M}}_k \underline{\underline{B}}_e^k \underline{\underline{du}}_e \right) \\ &= \sum_e \sum_k {}^t du_e \left(j_e \cdot \omega_k \underline{\underline{B}}_e^k \underline{\underline{M}}_k \underline{\underline{B}}_e^k \right) \underline{\underline{du}}_e \\ &= \sum_e {}^t du_e \underline{\underline{K}}_e \underline{\underline{du}}_e \\ &= {}^t dU \underline{\underline{K}} \underline{\underline{dU}} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Comme à l'état d'équilibre, la condition suivante est vérifiée,

$$\underline{\underline{K}} \underline{\underline{dU}} = \underline{\underline{dF}} \quad (3.6)$$

il vient alors :

$$D^2W = {}^t dU \underline{\underline{dF}} = {}^t dU \underline{\underline{K}} \underline{\underline{dU}} = {}^t dU \underline{\underline{K}}_s \underline{\underline{dU}} \quad (3.7)$$

avec $\underline{\underline{dF}}$ et $\underline{\underline{dU}}$ les vecteurs incréments de forces et de déplacements nodaux globaux respectivement. Avec cette dernière expression, on voit le parallèle que l'on est tenté de faire avec ce qui se passe d'un point de vue rhéologique comme étudié au chapitre précédent. Néanmoins la question reste beaucoup plus complexe. De la même manière que pour la matrice constitutive, l'opérateur $\underline{\underline{K}}$ est incrémentalement non linéaire et dépend des directions de sollicitations. Une extension de la notion de zone tensorielle serait vaine pour un problème non homogène. Cependant nous avons quand même voulu analyser cette matrice $\underline{\underline{K}}_s$ dans le paragraphe suivant. Lorsque le déterminant de cette matrice s'annule pour la première fois, cela implique qu'il existe une direction de sollicitation pour laquelle ${}^t dU \underline{\underline{dF}} = 0$ dans l'état considéré. Le problème majeur, est qu'il reste quasi impossible de vérifier si cette direction peut être atteinte dans l'ensemble des zones tensorielles de l'opérateur $\underline{\underline{K}}$ dans lesquelles l'analyse est faite. Le pari que l'on fait ici, est que cette direction de sollicitation n'est pas trop "éloignée" de celle imposée par les conditions aux limites, et qu'elle a une forte probabilité d'être atteinte avec l'opérateur tangent $\underline{\underline{K}}$. Cette matrice tangente correspond à celle du solide linéaire de comparaison de Hill (Hill (1959)). Pour des lois élasto-plastiques à une surface de charge, la condition

$$\det(\underline{\underline{K}}_s) = 0,$$

$\underline{\underline{K}}_s$ étant la partie symétrique de la matrice du solide linéaire de comparaison, constitue une borne inférieure de la condition

$$\det(\underline{\underline{\mathcal{K}}}_s) = 0,$$

$\underline{\underline{\mathcal{K}_s}}$ étant la partie symétrique de l'opérateur non linéaire (dans ce cas-ci, la notion de déterminant prend celle de la relation (1.85)). En effet, un cône de directions globales instables ne peut exister que si un ou plusieurs points se trouvent dans la zone tensorielle de charge plastique. Lorsque $\det(\underline{\underline{\mathcal{K}_s}})$ s'annule, une direction instable globale est détectée avec le vecteur propre associé à la valeur propre nulle. Si cette direction peut être atteinte avec la matrice tangente $\underline{\underline{K}}$, alors $\det(\underline{\underline{\mathcal{K}_s}})$ s'annule aussi, sinon, $\det(\underline{\underline{\mathcal{K}_s}})$ est positif et ne s'annulera que plus tard. Ce raisonnement ne tient plus dans le cas de lois élasto-plastiques plus générales, car des directions instables peuvent être détectées dans d'autres zones tensorielles. Par exemple, pour un cas homogène avec le modèle octolinéaire, si nous ne faisons l'analyse spectrale qu'avec l'opérateur de la zone tensorielle du triaxial drainé, nous ne verrions que les cônes supérieurs qui exhibent les directions de sollicitations instables les moins éloignées du chemin suivi, mais aussi déjà largement incluses dans le domaine de bifurcation.

En connaissance de ces restrictions, nous allons mener une étude de cette matrice $\underline{\underline{K}_s}$ pour différents problèmes aux limites, avec le code Lagamine et la loi de comportement Plasol.

3.4 Analyse de la matrice de rigidité

Dans cette partie, nous proposons une analyse de la matrice de rigidité pour trois simulations classiques. La première est celle d'une compression triaxiale drainée homogène. Dans la seconde, nous étudions le cas d'une fondation superficielle agissant sur un massif axisymétrique. Puis le cas d'une pente, sous hypothèse de déformations planes, soumis à une fondation superficielle, est étudiée. Pour toute cette étude, nous adopterons les notations suivantes :

- l'indice s désigne les parties symétriques des matrices,
- $\underline{\underline{M}}$: opérateur constitutif utilisé dans le chapitre 2,
- λ : valeurs propres de $\underline{\underline{M}_s}$,
- $\underline{\underline{v}}$: vecteurs propres de $\underline{\underline{M}_s}$,
- $\underline{\underline{K}}$: matrice de rigidité tangente globale : calculée à la dernière itération de Newton,
- Λ : valeurs propres de $\underline{\underline{K}_s}$,
- $\underline{\underline{V}}$: vecteurs propres de $\underline{\underline{K}_s}$,
- l'indice min ou max désigne la plus petite, respectivement la plus grande, valeur propre ou son vecteur propre associé,
- l'indice 0 correspond à la première annulation de Λ_{min} ,
- l'indice $min0$ correspond à la plus petite valeur propre lorsqu'elles sont toutes positives, sinon à la plus grande négative ou nulle,
- $\underline{\underline{V}}_0$: vecteur propre associé à Λ_0 ,
- $\underline{\underline{dU}}_0$: incrément de déplacement global calculé au même incrément que $\underline{\underline{V}}_0$,
- $\underline{\underline{dU}}_f$: incrément de déplacement global calculé à la divergence du calcul considéré comme représentatif du point de rupture.

3.4.1 Compression triaxiale drainée homogène

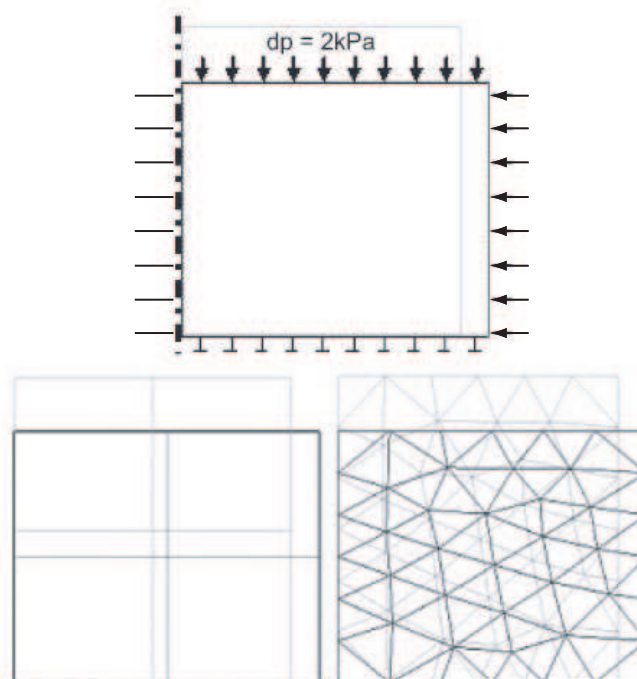
L'étude d'un cas homogène permet de corroborer les résultats obtenus par éléments finis avec ceux obtenus avec la loi de comportement. La principale difficulté correspond à l'existence de zones

tensorielles. Comme le cas est homogène, il est possible de parler de zones tensorielles pour l'opérateur tangent $\underline{\underline{K}}$. En effet, une fois la phase d'érouissage atteinte, je n'ai pas modifié le code pour construire à chaque pas de calcul le second opérateur correspondant à la décharge élastique par exemple. Ceci n'est en fait pas nécessaire avec la loi Plasol (ou avec la plupart des lois élasto-plastiques à un seul potentiel), car sur ce modèle, la décharge se fait de façon hyperélastique. Il n'y a donc pas de possibilités pour qu'un cône de directions instables s'ouvre dans cette zone. L'hypothèse émise pour s'affranchir de ce problème, est que les cônes d'instabilité de la loi Plasol sont entièrement contenus dans la zone tensorielle de charge plastique (il n'y a pas besoin de les tronquer).

La géométrie considérée ici est un carré axisymétrique de dimension 1×1 (Figure 3.4). Afin de vérifier aussi que la taille ou le type de maillage n'a pas d'influence sur l'analyse aux valeurs propres de $\underline{\underline{K}}_s$, nous avons considéré les trois maillages suivants :

- un élément Q4 avec quatre points d'intégration : le nombre de degrés de liberté est de 4,
- quatre éléments Q4 avec quatre points d'intégration : le nombre de degrés de liberté est de 12,
- cinquante-six éléments T6 avec sept points d'intégration, le nombre de degrés de liberté est de 204.

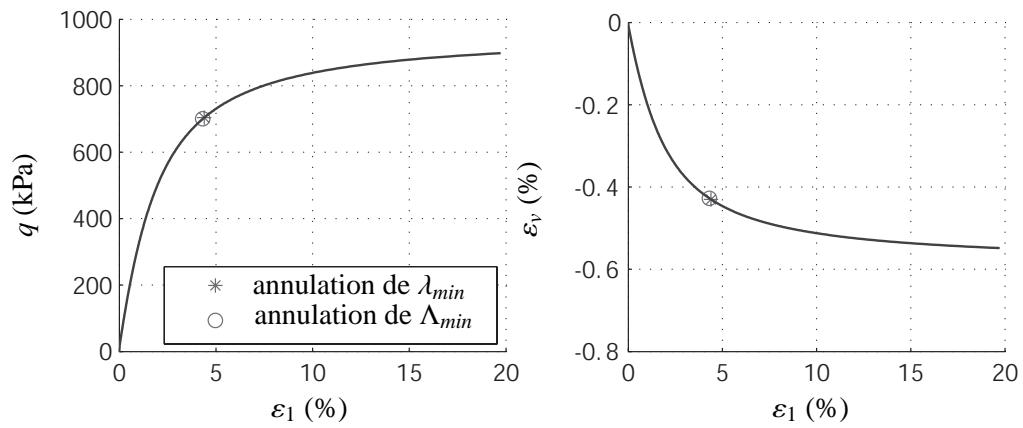
La géométrie initiale, ainsi que celle déformée à la fin du calcul (considéré comme l'état de rupture) sont présentées sur la figure F . 3.4. Le comportement du matériau est donné sur la figure F . 3.5, et



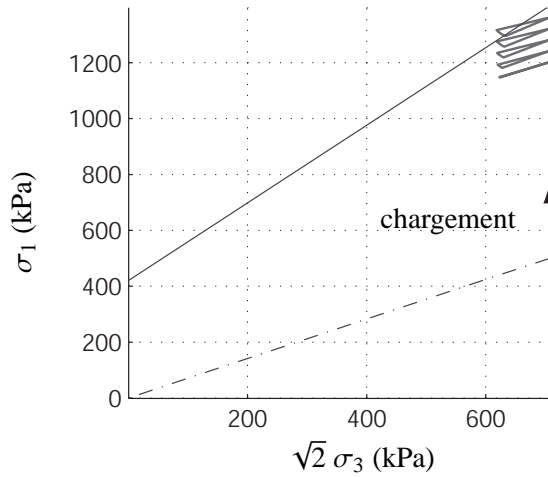
F . 3.4 – Maillage initial et déformé. La pression de confinement initiale est : $p_0 = 500 \text{ kPa}$; dp est l'incrément de contraintes appliqué à chaque étape.

les cônes d'instabilité obtenus sur la figure F . 3.6.

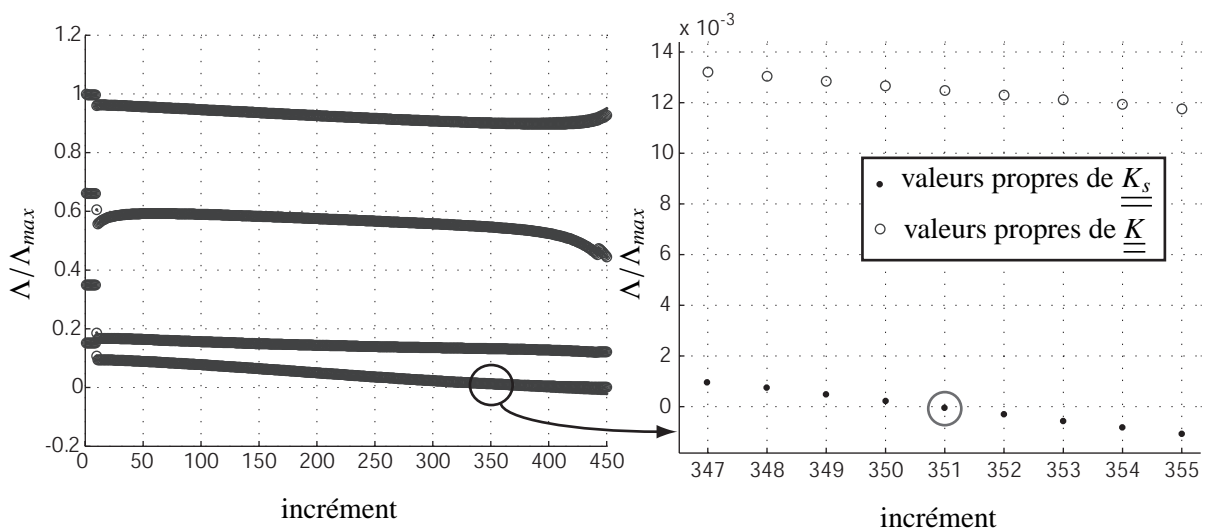
Étudions, à présent, les propriétés des valeurs propres de $\underline{\underline{K}}_s$ pour chaque discrétisation. Les figures F . 3.7, F . 3.8, et F . 3.9, donnent, respectivement, l'évolution des plus petites de ces valeurs propres pour chaque maillage. Ainsi on vérifie que la plus petite valeur propre s'annule au même pas de chargement pour les différents maillages. Ce qui est plus important, est le fait que Λ_{min} s'annule au même instant que celui où apparaît la première direction instable de la loi de comportement. Nous



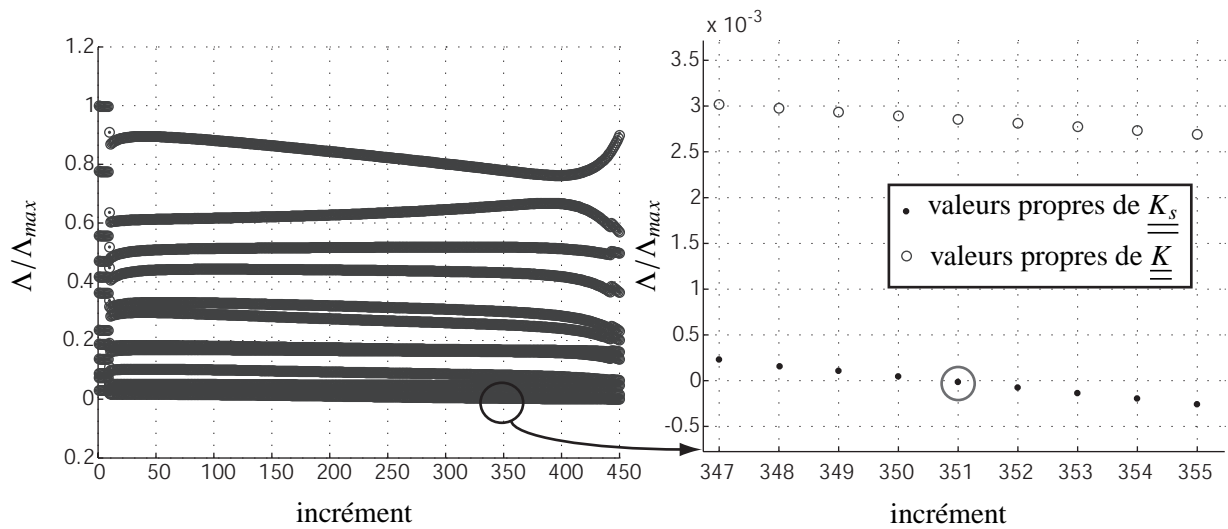
F . 3.5 – Réponse du matériau au triaxial drainé.



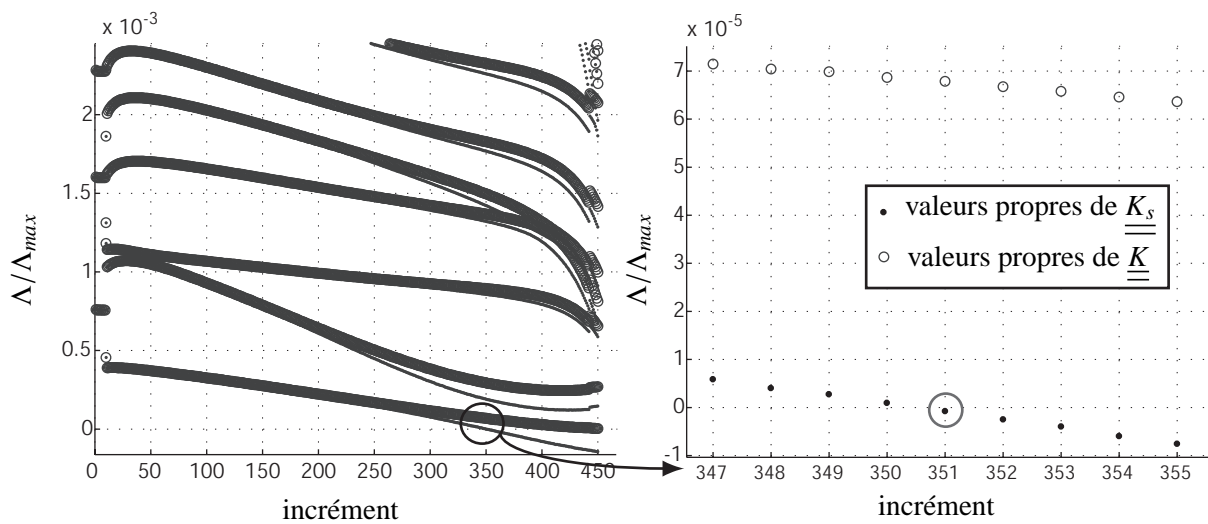
F . 3.6 – Cônes d'instabilités dans le plan de Rendulic.



F . 3.7 – Évolution des valeurs propres au cours du chargement pour la géométrie à un élément (détail à droite).



F . 3.8 – Évolution des valeurs propres au cours du chargement pour la géométrie à quatre éléments (détail à droite).



F . 3.9 – Évolution des plus petites valeurs propres au cours du chargement pour la géométrie à cinquante-six éléments (détail à droite).

avons vérifié que la formulation globale correspond à celle locale pour les problèmes homogènes : Λ_{min} s'annule au même instant que λ_{min} , soit encore $\det(\underline{K}_s)$ s'annule au même instant que $\det(\underline{M}_s)$. Pour être très précis, $\det(\underline{K}_s)$ s'annule au pas 351 et $\det(\underline{M}_s)$ au pas 352. Mais cela est dû à un manque de précision dans notre algorithme de recherche de cônes, car ce premier "cône" est déjà ouvert de 1° . Ces états de contraintes-déformations ont été indiqués sur les courbes du comportement du matériau (figure F . 3.5).

Après avoir vérifié les résultats concernant la limite du domaine de bifurcation, regardons ce que nous donne \underline{V}_0 le vecteur propre associé à la première valeur propre qui s'annule Λ_0 . Comme nous étudions la formulation suivante :

$$\underline{K}_s \underline{V} = \Lambda \underline{V} \quad (3.8)$$

\underline{V}_0 est homogène à un incrément de déplacement. En faisant le parallèle avec les résultats du chapitre précédent, ce vecteur donne la première direction de chargement instable en terme de déplacement. De plus, nous avons remarqué que ce vecteur était quasiment colinéaire à l'incrément de déplacement \underline{dU}_f qui est supposé caractériser le mode de rupture :

$$\frac{\underline{V}_0}{\|\underline{V}_0\|} \approx \frac{\underline{dU}_f}{\|\underline{dU}_f\|} \quad (3.9)$$

Ce résultat semble prouver que le premier incrément de déplacement "instable" décrit correctement le mode de rupture sur un chargement monotone. Cela implique par ailleurs, que pour la loi Plasol, la première direction instable en déformations est proche de celle de la règle d'écoulement à la rupture. Sur la figure F . 3.10, nous avons superposé \underline{V}_0 et \underline{dU}_f pour observer ce résultat d'un point de vue qualitatif. D'un point de vue quantitatif, nous avons défini une fonction permettant de mesurer l'erreur entre deux directions de vecteurs (\underline{V}_1 et $\underline{V}_2 \in \mathbb{R}^n$) :

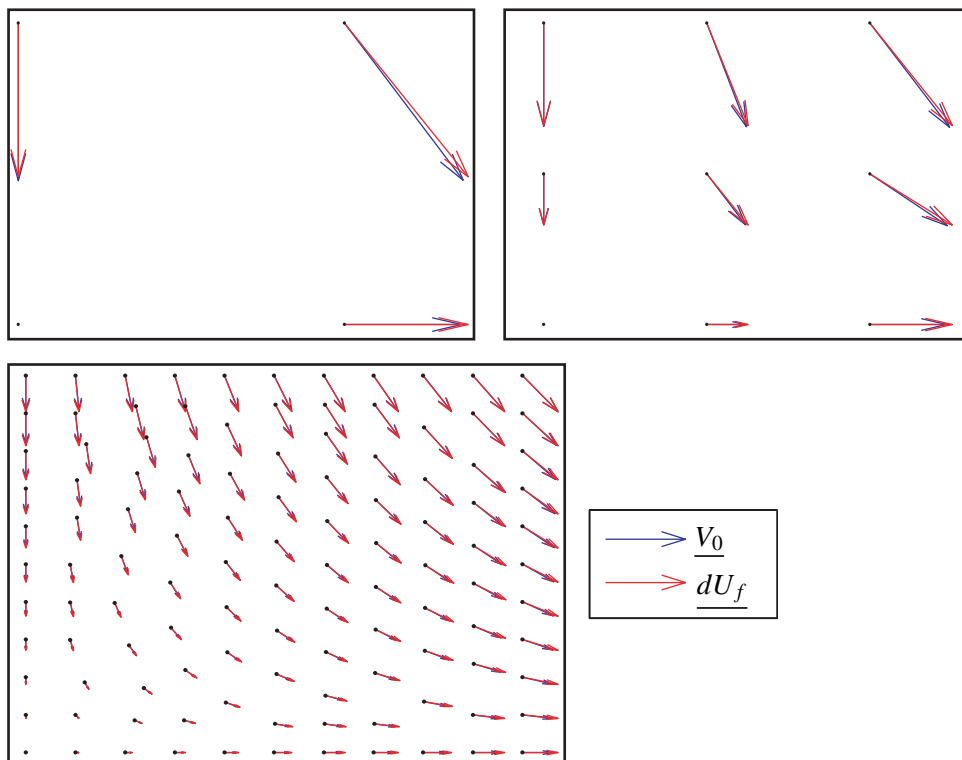
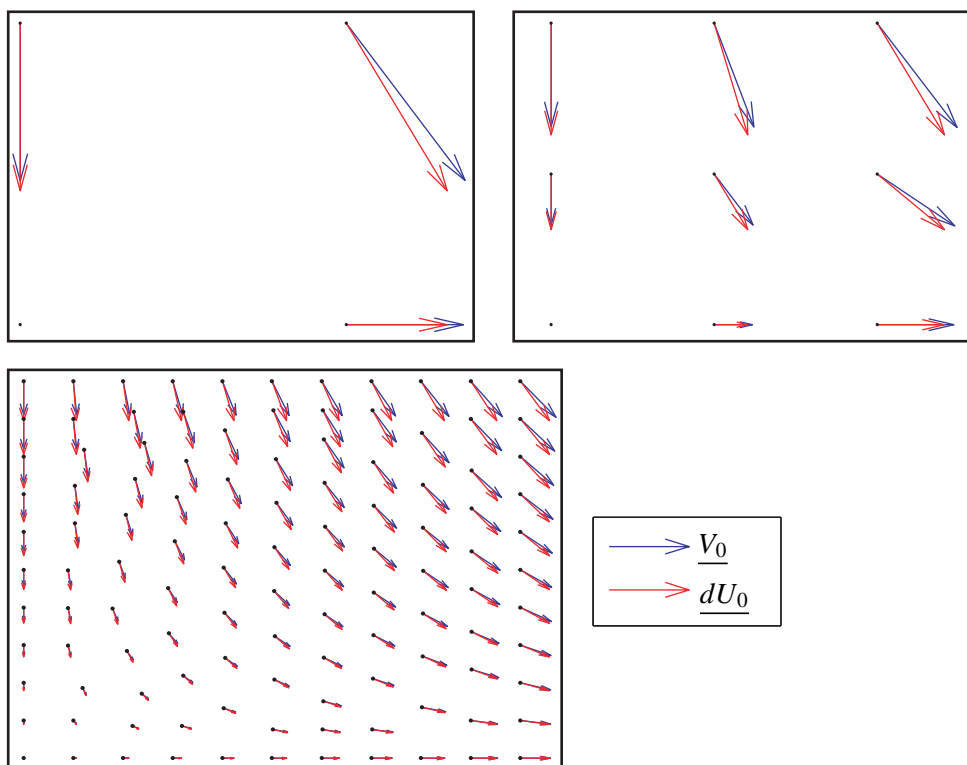
$$er(\underline{V}_1, \underline{V}_2) = \left(1 - \left| \frac{\underline{V}_1 \cdot \underline{V}_2}{\|\underline{V}_1\| \|\underline{V}_2\|} \right| \right) 100 \quad (3.10)$$

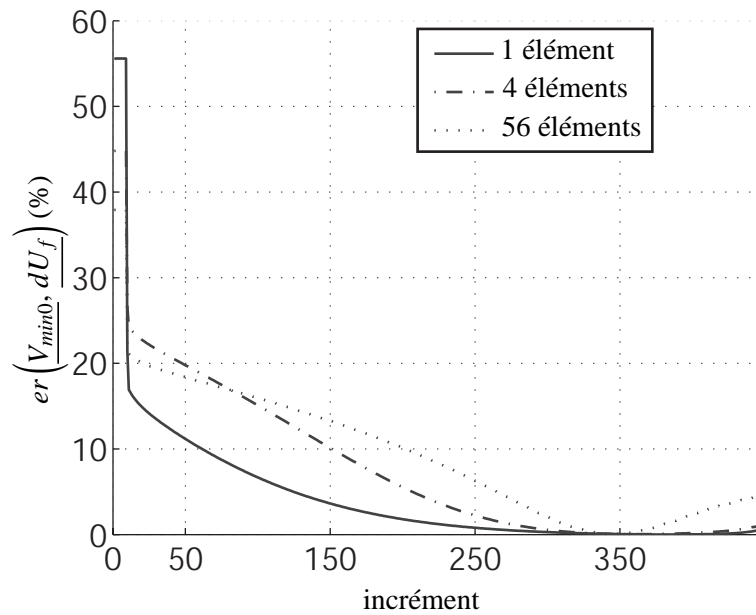
Avec cette expression, lorsque $er(\underline{V}_1, \underline{V}_2) = 100\%$, les deux vecteurs sont orthogonaux, et lorsque $er(\underline{V}_1, \underline{V}_2) = 0\%$, les deux vecteurs sont colinéaires. On ne cherche pas à distinguer le signe du produit scalaire, car un vecteur propre est défini à une constante multiplicative près. Afin de bien vérifier que nous comparons les directions \underline{V}_0 et \underline{dU}_f , nous présentons aussi l'erreur de direction entre \underline{V}_0 et \underline{dU}_0 sur la figure F . 3.11. Le tableau T . 3.1, donne $er(\underline{V}_0, \underline{dU}_f)$ et $er(\underline{V}_0, \underline{dU}_0)$ pour les trois maillages considérés. Enfin, nous présentons aussi l'évolution de $er(\underline{V}_{min0}, \underline{dU}_f)$ au cours du chargement (\underline{V}_{min0}

maillage	$c_1 = er(\underline{V}_0, \underline{dU}_f)$	$c_2 = er(\underline{V}_0, \underline{dU}_0)$	c_2/c_1	$er(\underline{dU}_f, \underline{dU}_0)$
1 Q4	0.06%	0.48%	8	0.87%
4 Q4	0.06%	0.51%	8.5	0.87%
56 T6	0.11%	0.68%	6.2	0.86%

T . 3.1 – Erreur entre les directions de \underline{V}_0 , \underline{dU}_f et \underline{V}_0 , \underline{dU}_0 et \underline{dU}_f , \underline{dU}_0 .

est la plus petite valeur propre lorsqu'elles sont toutes positives, sinon la plus grande négative). Il peut être observé que le minimum de cette fonction est atteint à peu près lorsque $\det(\underline{K}_s)$ s'annule. Il faut noter de plus que les résultats ci-dessus, ont aussi été observés avec différents jeux de paramètres de

F . 3.10 – \underline{V}_0 superposé avec \underline{dU}_f .F . 3.11 – \underline{V}_0 superposé avec \underline{dU}_0 .



F . 3.12 – Évolution de $er\left(\underline{V}_{min0}, \underline{dU}_f\right)$ au cours du chargement. $\det\left(\underline{K}_s\right)$ s'annule à l'incrément 351 (voir F . 3.7, F . 3.8, F . 3.9).

la loi Plasol. L'annexe A montre que dans le cas d'un sol dense, \underline{V}_0 est aussi colinéaire à \underline{dU}_f et donne l'évolution de $er\left(\underline{V}_{min0}, \underline{dU}_f\right)$ au cours du chargement.

Après avoir obtenu ces résultats intéressants pour un cas homogène, la question de savoir si \underline{V}_0 peut donner une estimation du mode de rupture pour des problèmes non homogènes reste ouverte. Afin de donner des éléments de réponse à cette question, une analyse du cas d'une fondation agissant sur un massif axisymétrique, puis sur une pente heuristique sont proposées dans les paragraphes 3.4.2 et 3.4.3 respectivement.

3.4.2 Modélisation axisymétrique d'une fondation sur un massif de sol

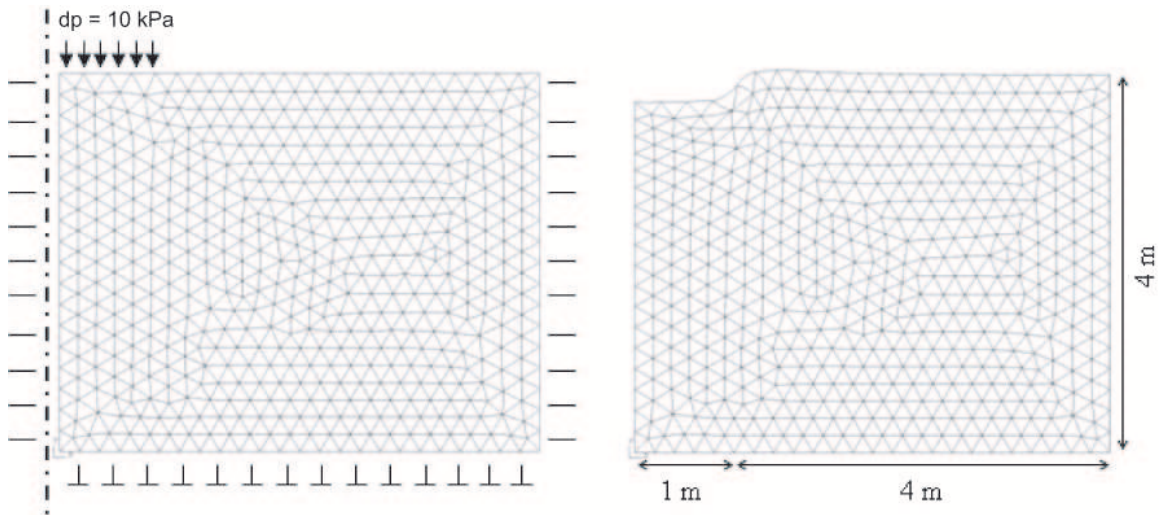
L'action de la fondation est simulée par une pression agissant sur une partie de la surface du massif. La géométrie, les conditions aux limites ainsi que la déformée à la divergence du calcul sont présentées sur la figure F . 3.13. Les noeuds sur le fond sont totalement fixés, et ceux sur les bords latéraux sont bloqués dans la direction horizontale. Les principales caractéristiques du sol sont les suivantes :

$E = 95 \text{ MPa}$	$C = 30 \text{ kPa}$
$\nu = 0.21$	$\phi = 15^\circ$
$\rho = 2740 \text{ kg/m}^3$	$\psi = 0^\circ$

T . 3.2 – Principales caractéristiques du sol.

À titre indicatif, la charge maximale admissible, pour un tel problème, peut être calculée avec la formule suivante :

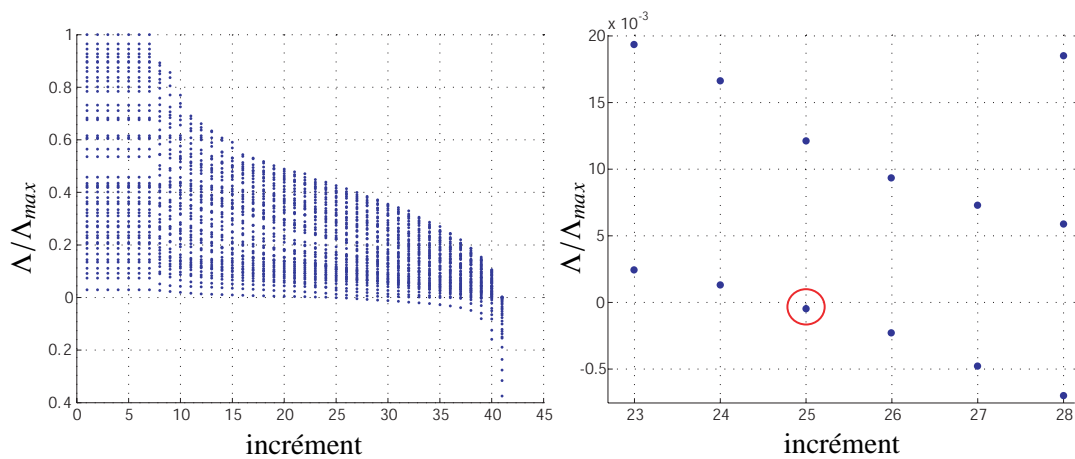
$$q_{lim} = \frac{1}{2} s_\gamma \gamma B N_\gamma(\phi) + s_c C N_c(\phi) + s_q q N_q(\phi) \quad (3.11)$$



F . 3.13 – Description de la géométrie et des conditions aux limites du problème. dp est l'incrément de contraintes appliqué à chaque incrément (déformée à droite).

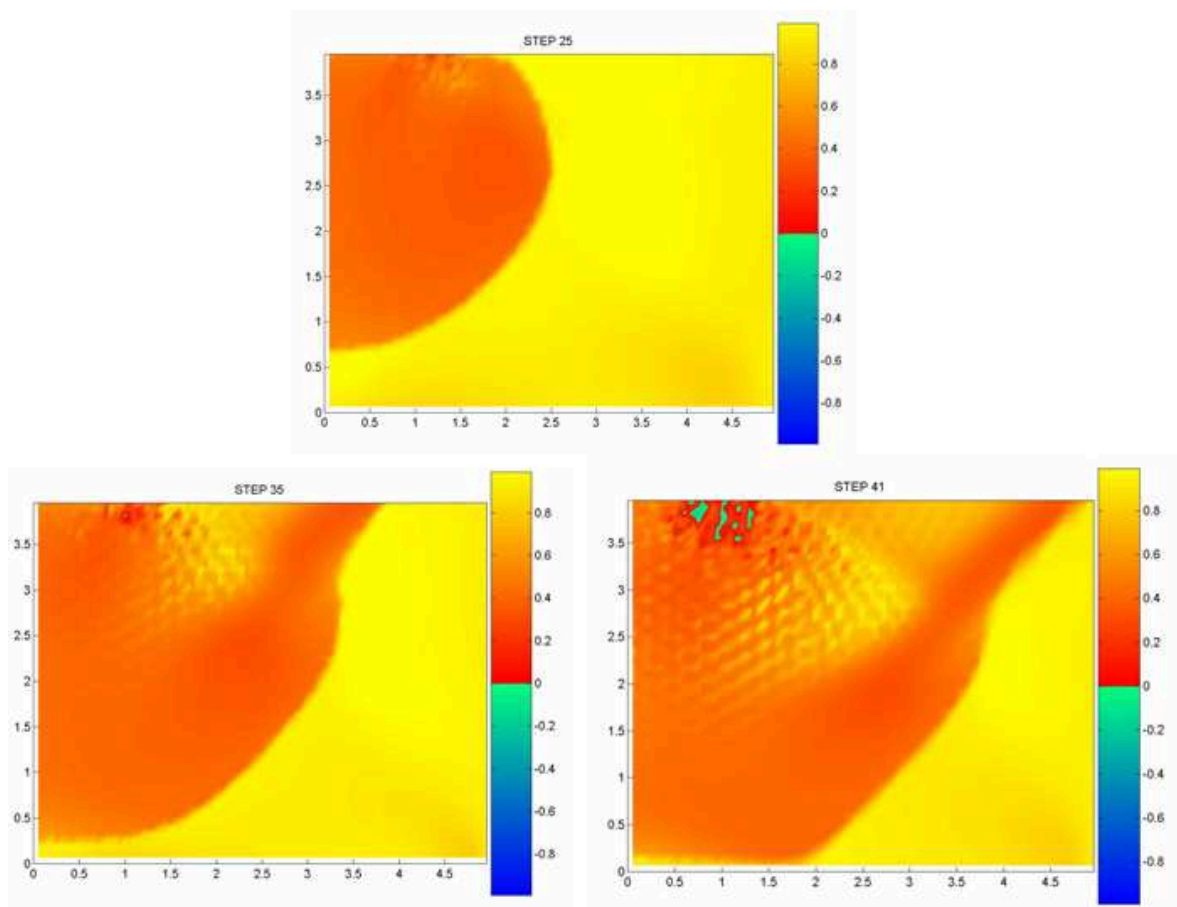
Pour une fondation circulaire, $s_\gamma = 0.6$, $s_c = 1.3$ et $s_q = 1$ (Davis et Booker (1973), Matar et Salençon (1979)). Comme la profondeur de la fondation est nulle, $q = 0$. De plus B désigne le diamètre de la fondation, et γ le poids volumique du sol. Avec la formule (ou l'abaque) de Caquot et Kérisel (Caquot et Kérisel (1966)), $N_\gamma(15^\circ) = 1.4$ et $N_c(15^\circ) = 11$. Dans ces conditions, $q_{lim} = 440.508 \text{ kPa}$, ce qui correspond à la valeur fournie par le calcul éléments finis : 410 kPa .

Sur la figure F . 3.14 on peut suivre l'évolution des plus petites valeurs propres \underline{K}_s durant le chargement. La plus petite d'entre elles s'annule au pas n° 25, bien avant la divergence du calcul qui a lieu au pas n° 41. Lorsque Λ_{min} s'annule, cela signifie qu'une direction de chargement, pour



F . 3.14 – Évolution des plus petites valeurs propres de \underline{K}_s . À droite : un zoom autour de Λ_0 .

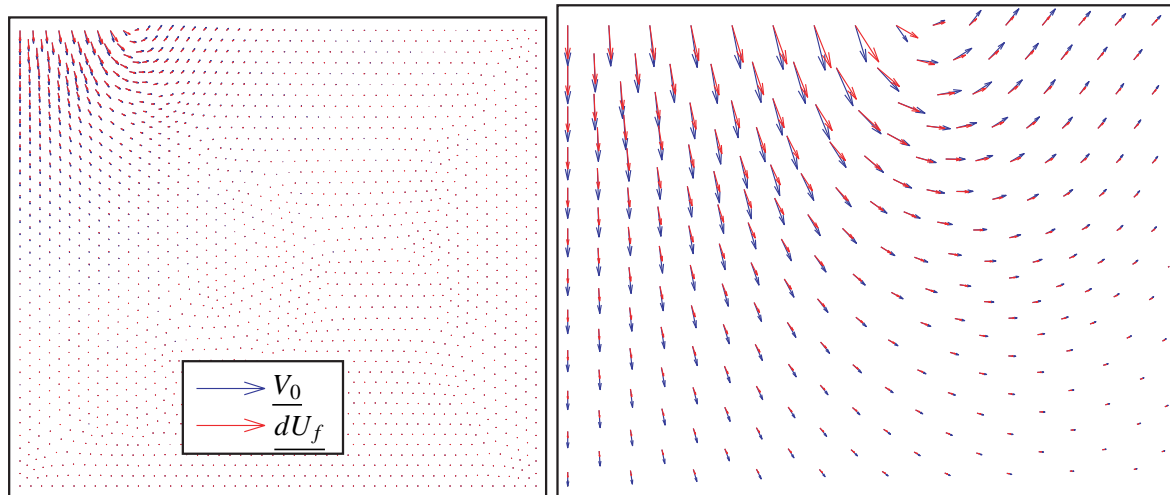
laquelle la rupture peut être atteinte, existe (ceci moyennant la discussion et hypothèses sur les zones tensorielles activées). De plus, grâce à la figure F . 3.15, on peut voir que Λ_0 est atteinte même avant la première annulation de d^2W_n à un seul des points d'intégration. La connaissance de l'évolution des valeurs propres de \underline{K}_s nous indique le moment où certaines directions de chargement peuvent mener la structure dans un état instable, alors que l'évolution des isovaleurs de d^2W_n nous renseigne sur les



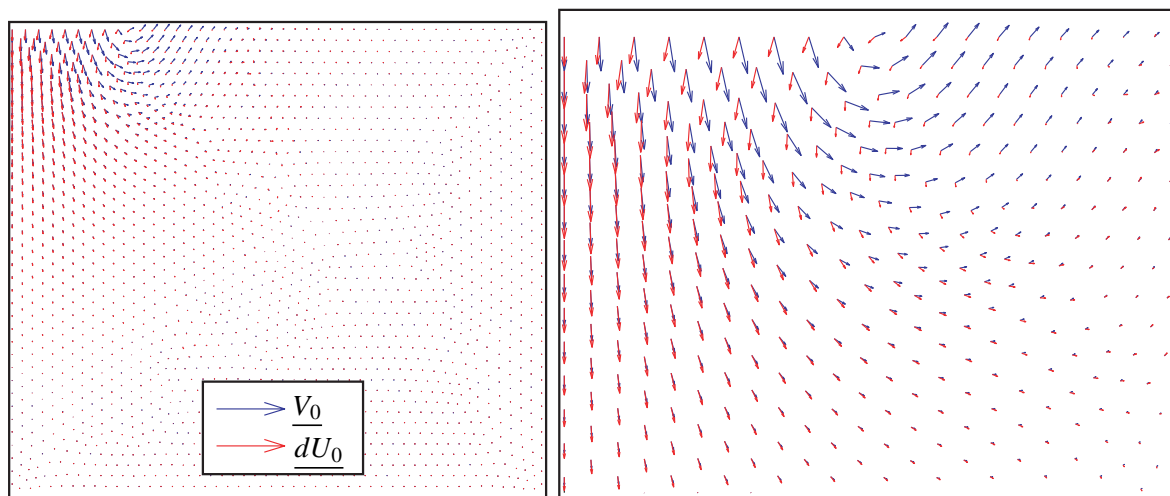
F . 3.15 – Isovaleurs de d^2W_n à trois points caractéristiques de la simulation : annulation de Λ_{min} , première annulation de d^2W_n , et divergence du calcul.

zones où se développent les instabilités au cours du chargement appliqué par les conditions limites.

Concernant les vecteurs propres de \underline{K}_s , les figures F . 3.16 et F . 3.17 montrent de manière qualitative l'écart de direction entre \underline{V}_0 et \underline{dU}_f d'une part, et entre \underline{V}_0 et \underline{dU}_0 d'autre part. Ces résultats



F . 3.16 – Comparaison de \underline{V}_0 avec \underline{dU}_f . À droite : un zoom sur la zone affectée par le chargement.



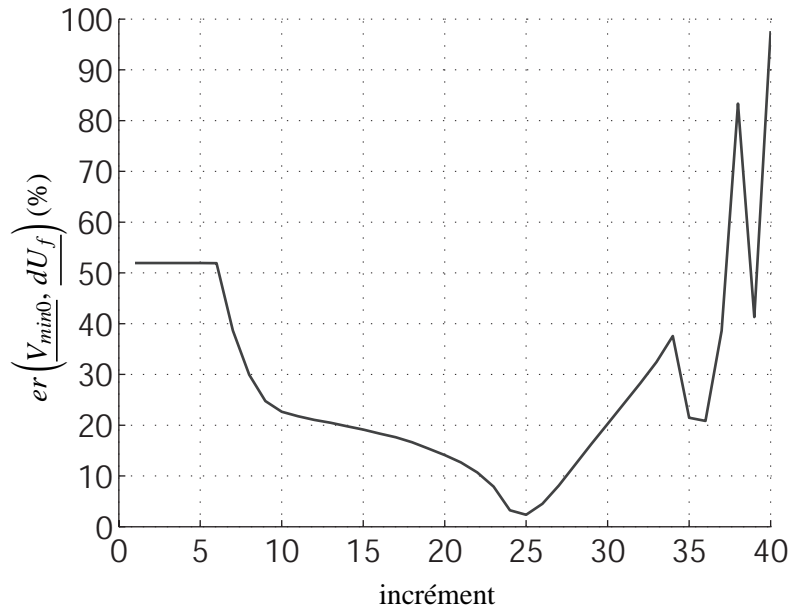
F . 3.17 – Comparaison de \underline{V}_0 avec \underline{dU}_0 . À droite : un zoom sur sur la zone affectée par le chargement.

sont aussi présentés de manière quantitative dans le tableau T . 3.3 avec les valeurs de $er(\underline{V}_0, \underline{dU}_f)$ et $er(\underline{V}_0, \underline{dU}_0)$. De la même manière que dans le cas homogène, \underline{V}_0 donne une bonne estimation du mode de rupture.

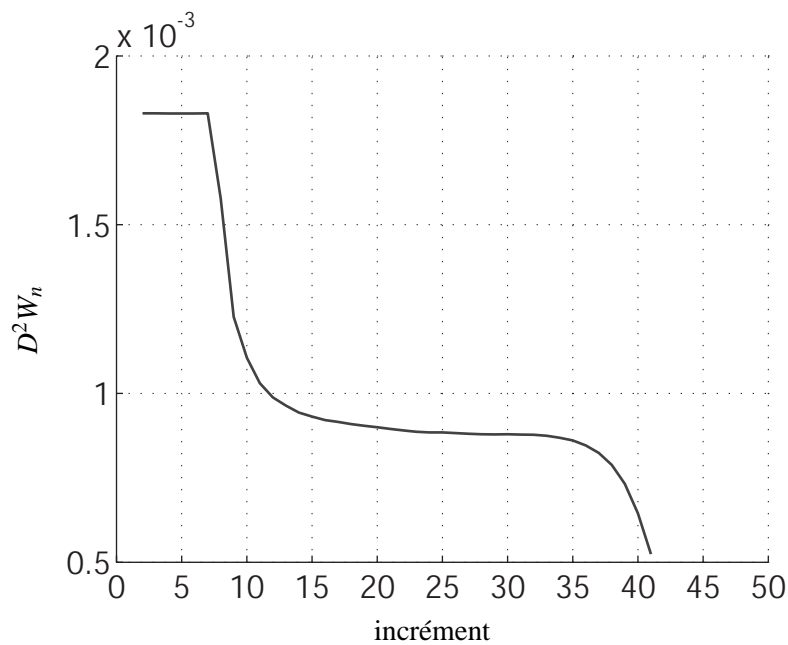
Le dernier résultat qui sera discuté sur cette simulation, est l'évolution du travail du second ordre global D^2W_n , qui doit nous renseigner sur la stabilité globale de la structure au cours du chargement. Comme $D^2W = {}^t dU dF$, et que \underline{K} est a priori non symétrique, cette quantité devrait s'annuler avant, ou au moins au même moment que la divergence du calcul. Malgré une forte diminution cette annulation n'a pas eu lieu. Ceci est peut être lié à des problèmes numériques de convergence.

$c_1 = er(\underline{V}_0, \underline{dU}_f)$	$c_2 = er(\underline{V}_0, \underline{dU}_0)$	c_2/c_1	$er(\underline{dU}_f, \underline{dU}_0)$
3.22 %	18.57 %	5.77	28.70 %

T . 3.3 – Erreur entre $\underline{V}_0, \underline{dU}_f$, et $\underline{V}_0, \underline{dU}_0$, et $\underline{dU}_f, \underline{dU}_0$.



F . 3.18 – Évolution de $er(\underline{V}_{min}, \underline{dU}_f)$ avec le chargement. $\det(\underline{K}_s)$ s'annule à l'incrément 25 (voir F . 3.14).



F . 3.19 – Évolution de D^2W_n avec le chargement.

3.4.3 Étude d'une pente soumise à une fondation superficielle

Pour analyser ce problème, exactement la même approche que précédemment est adoptée. La géométrie et les conditions aux limites sont présentées sur la figure F . 3.20. Le sol considéré reste le même :

$E = 95 \text{ MPa}$	$C = 30 \text{ kPa}$
$\nu = 0.21$	$\phi = 15^\circ$
$\rho = 2740 \text{ kg/m}^3$	$\psi = 0^\circ$

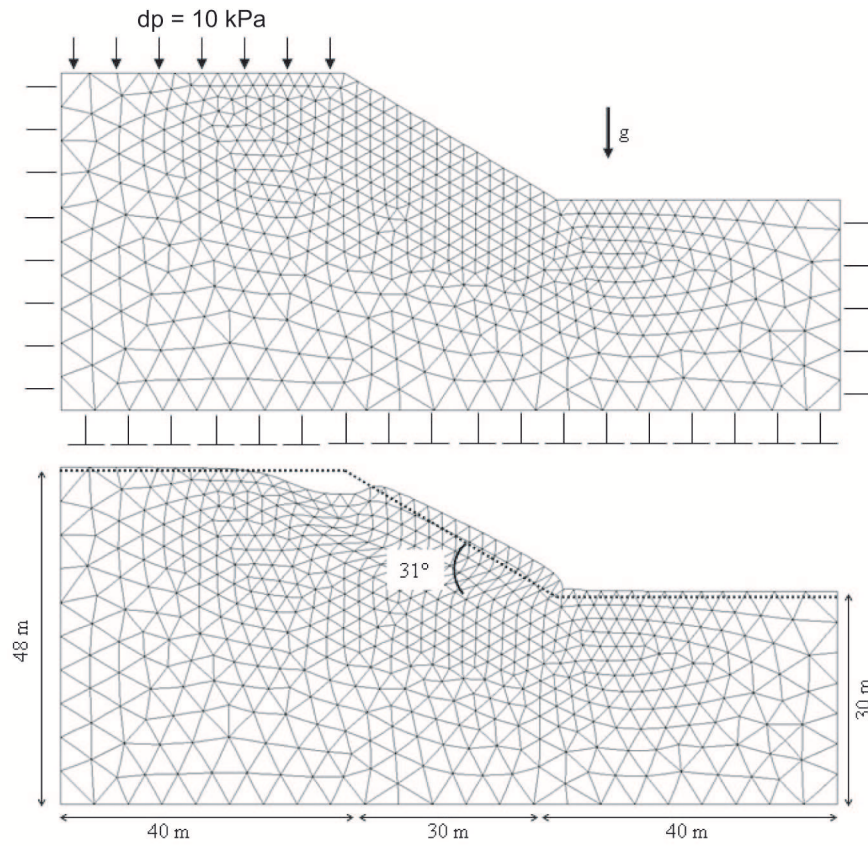
T . 3.4 – Principales caractéristiques du sol.

Les résultats sont présentés au travers des figures F . 3.21 à F . 3.27. Les observations et analyses sont identiques au paragraphe précédent : le déterminant de $\underline{\underline{K}}_s$ s'annule très rapidement au pas $n^\circ 5$ même avant la première annulation du travail du second ordre local en un point de la pente (pas $n^\circ 13$), et le vecteur propre associé à la première valeur propre nulle de $\underline{\underline{K}}_s$, semble un bon candidat pour décrire le mode de rupture final. Néanmoins, la prédiction de ce mode de rupture avec \underline{V}_0 n'est pas aussi bonne d'un point de vue quantitatif (T . 3.5). En effet, on peut observer sur la figure F . 3.25 que l'estimation donnée par \underline{V}_0 est plus pessimiste que le mode de rupture effectivement calculé avec \underline{dU}_f . Mais malgré ces imperfections, cette prédiction faite par \underline{V}_0 reste physiquement acceptable. D'ailleurs, \underline{V}_0 semble reproduire de façon plus correcte que \underline{dU}_f la surface de glissement indiquée par les isovaleurs du travail du second ordre d^2W_n , ou par les isovaleurs de la déformation plastique équivalente $\dot{\epsilon}_p^{eq}$. Les figures F . 3.27 et F . 3.28 illustrent ces propos.

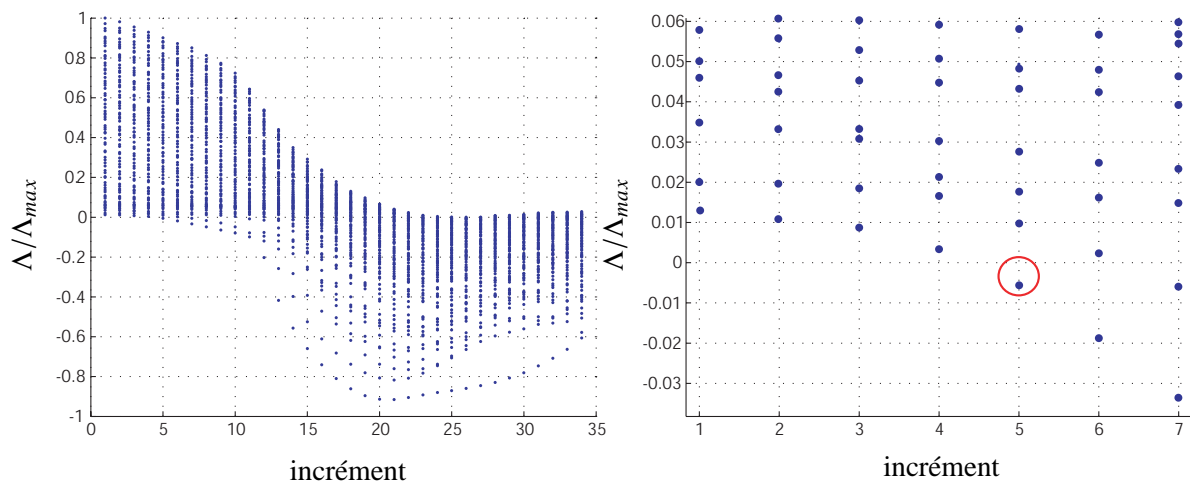
Concernant l'évolution du travail du second ordre global, comme pour le cas précédent, il ne s'annule pas avant la divergence du calcul, mais tend vers zéro de manière assez rapide. Si on fait l'hypothèse qu'en supprimant les erreurs numériques, cette quantité s'annule à la fin du calcul, c'est à dire lorsque $\det(\underline{\underline{K}})$ s'annule, cela signifie que le chemin suivi imposé par les conditions aux limites, ne suit jamais une direction instable avant d'arriver sur la limite de plasticité en un point donné.

$c_1 = er(\underline{V}_0, \underline{dU}_f)$	$c_2 = er(\underline{V}_0, \underline{dU}_0)$	c_2/c_1	$er(\underline{dU}_f, \underline{dU}_0)$
39.12%	95.77%	2.5	98.23%

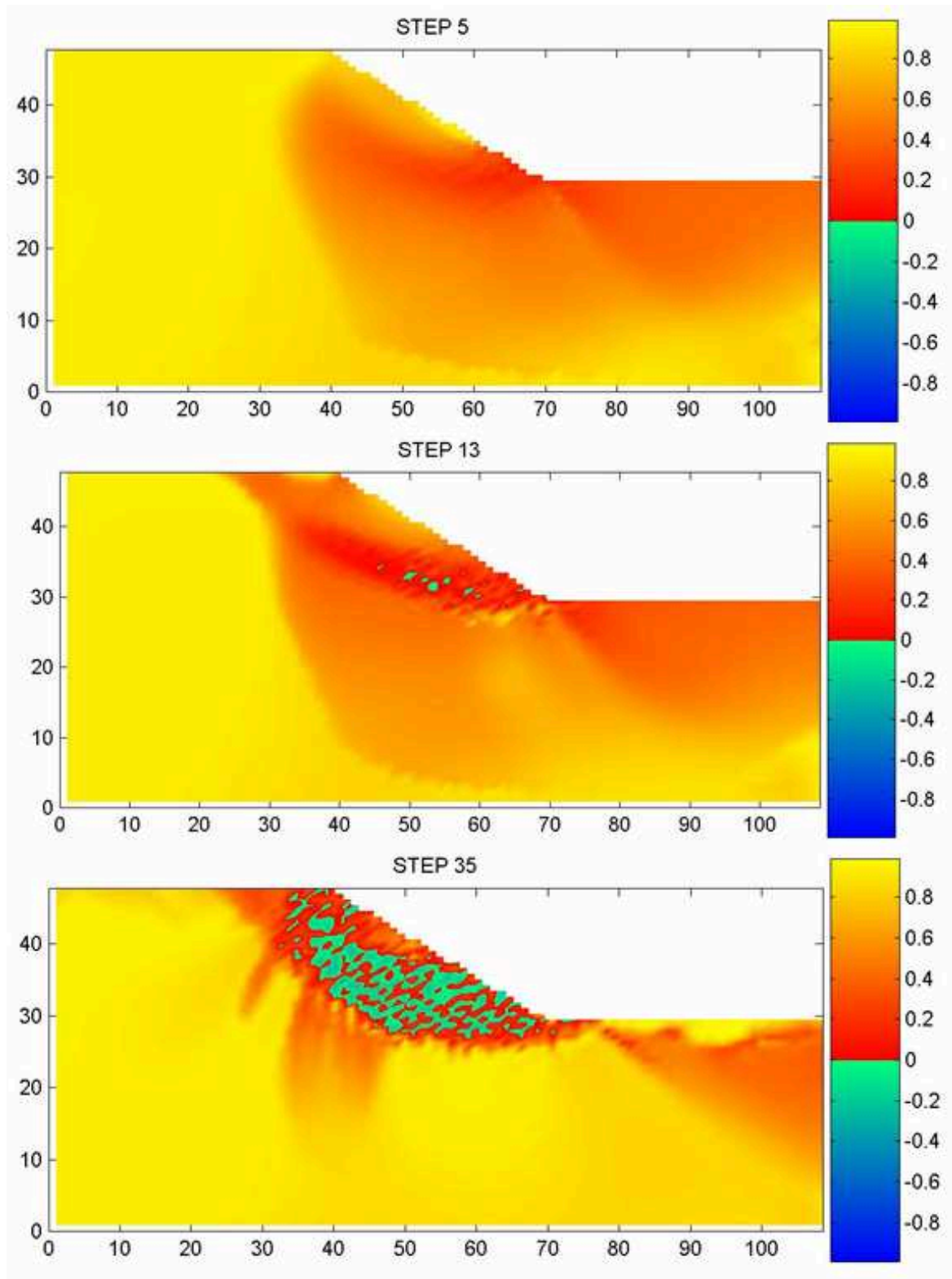
T . 3.5 – Erreur entre les directions de \underline{V}_0 , \underline{dU}_f et \underline{V}_0 , \underline{dU}_0 et \underline{dU}_f , \underline{dU}_0 .



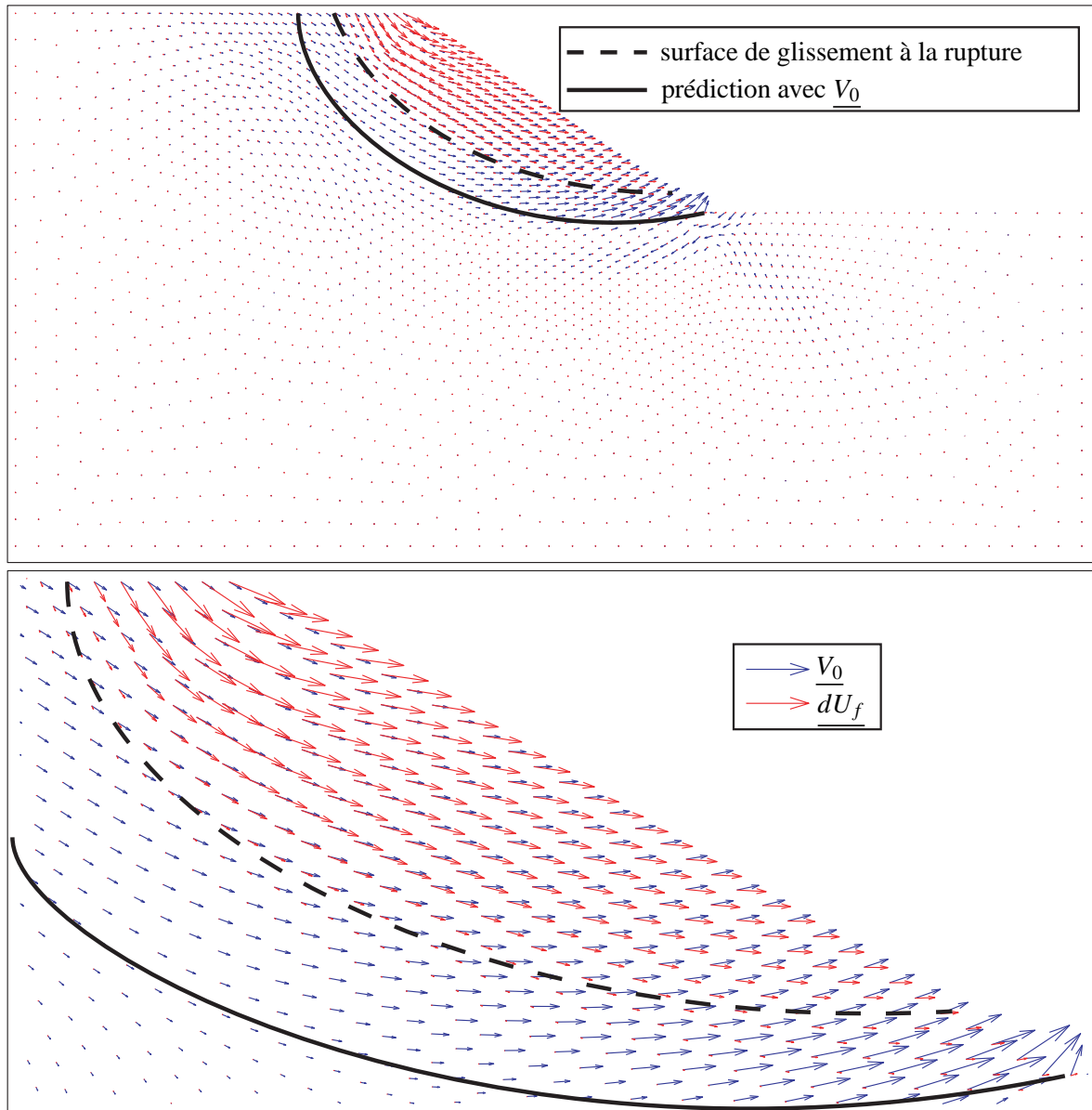
F . 3.20 – Description de la géométrie et des conditions aux limites du problème. dp est l'incrément de contraintes appliqué à chaque incrément (déformée en dessous).



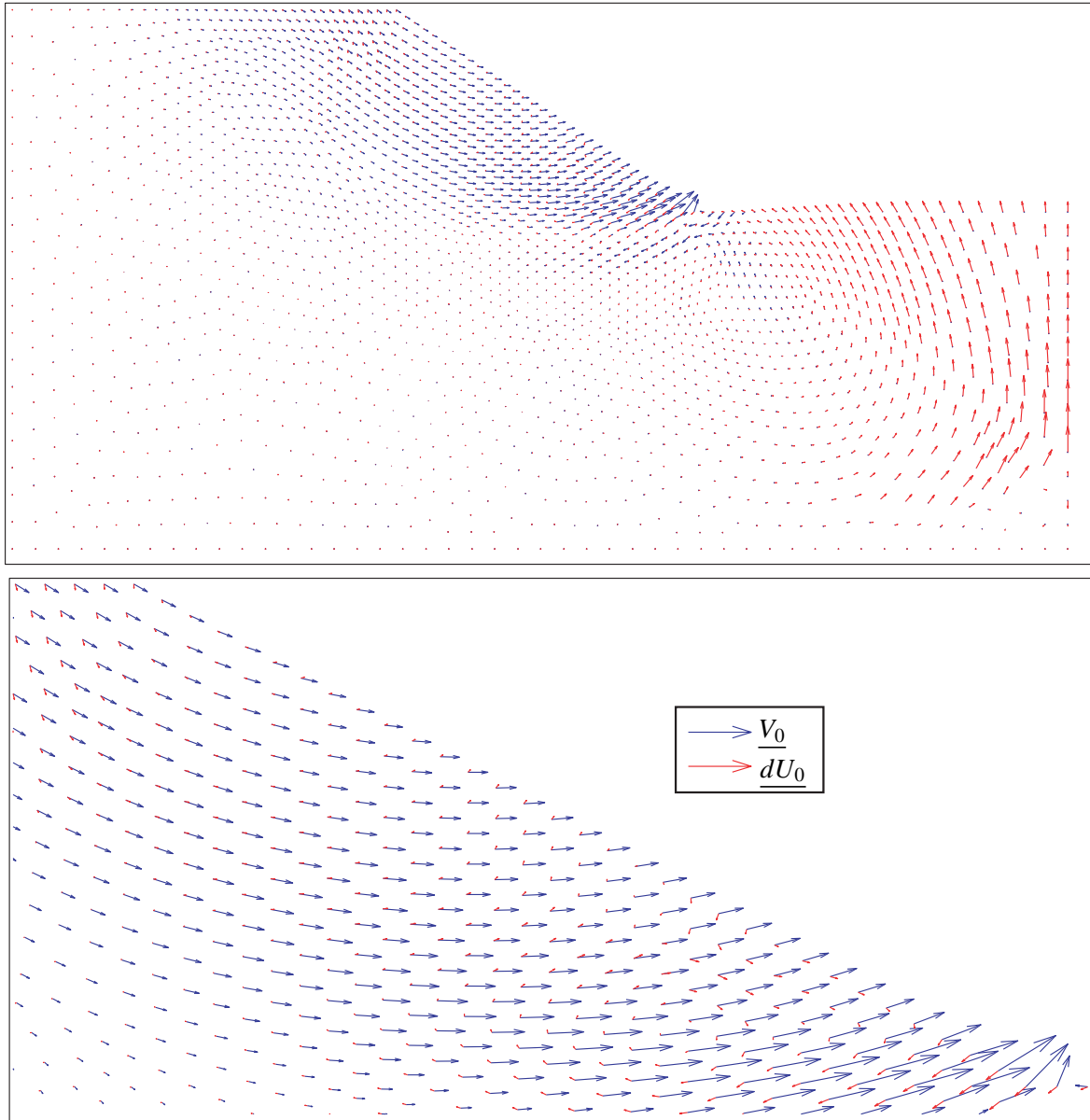
F . 3.21 – Évolution des plus petites valeurs propres de $\underline{\underline{K_s}}$. À droite : un zoom autour de Λ_0 .



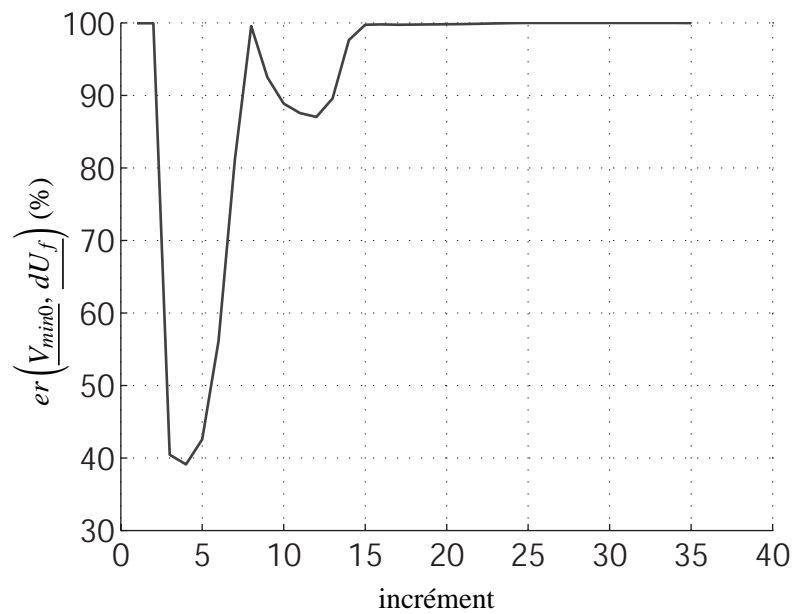
F . 3.22 – Isovaleurs de d^2W_n à trois points caractéristiques de la simulation : annulation de Λ_{min} , première annulation de d^2W_n , et divergence du calcul.



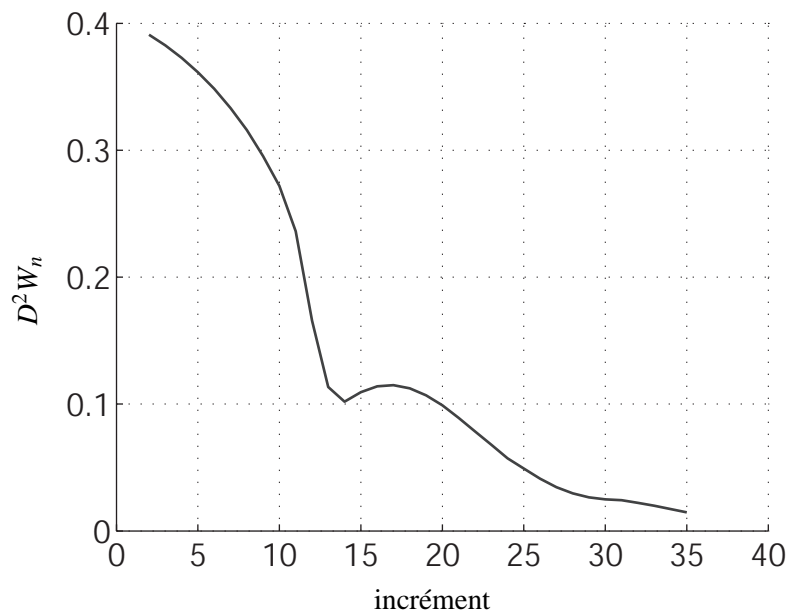
F .3.23 – Comparaison de V_0 avec dU_f . En dessous : un zoom sur la zone affectée par le chargement.



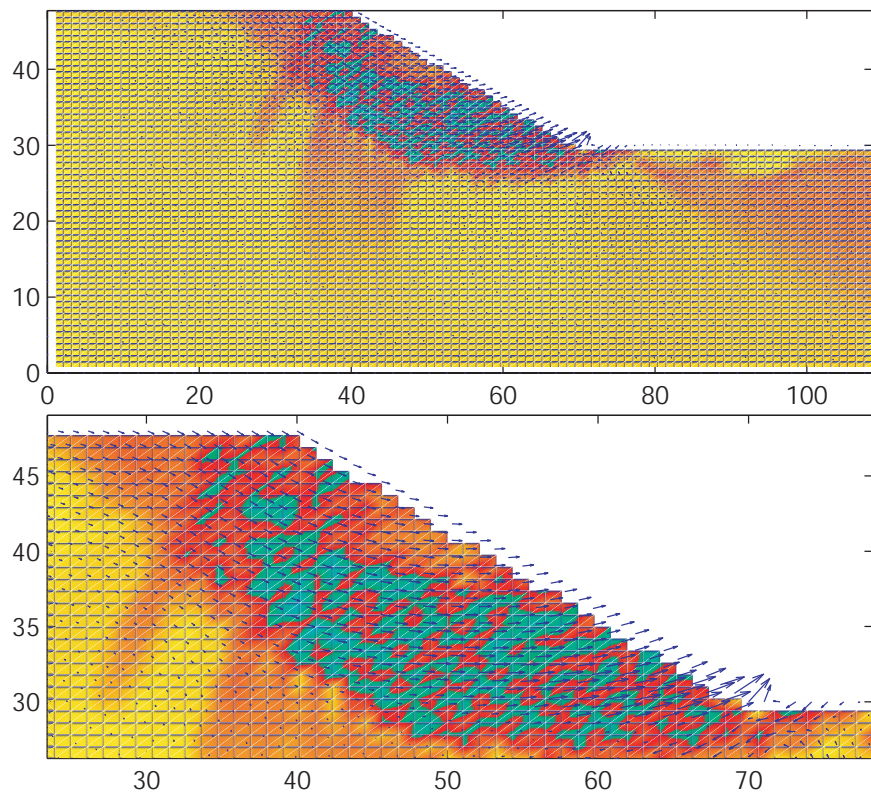
F . 3.24 – Comparaison de \underline{V}_0 avec \underline{dU}_0 . En dessous : un zoom sur sur la zone affectée par le chargement.



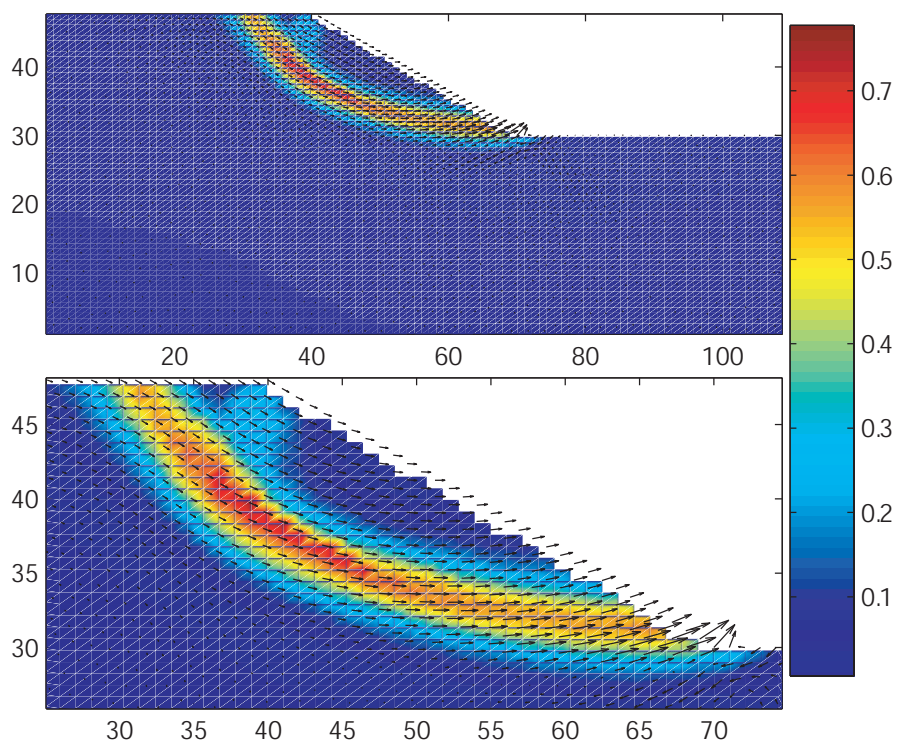
F . 3.25 – Évolution de $er(V_{min0}, dU_f)$ avec le chargement. Le déterminant de $\underline{\underline{K_s}}$ s'annule à l'incrément 5 (cf F . 3.21).



F . 3.26 – Évolution de D^2W_n avec le chargement.



F . 3.27 – Superposition de \underline{V}_0 avec les isovaleurs de $d^2 W_n$.



F . 3.28 – Superposition de \underline{V}_0 avec les isovaleurs de ϵ_p^{eq} .

3.4.4 conclusion

Du fait de l'existence des zones tensorielles pour les matériaux incrémentalement linéaires par morceaux, les valeurs propres et vecteurs propres de la partie symétrique d'une matrice de rigidité tangente, ne sont a priori, pas aisés à analyser. Néanmoins, comme évoqué dans la section 3.3, pour les lois élasto-plastiques à un potentiel avec critère de décharge élastique, la première annulation de $\det(\underline{\underline{K}}_s)$ correspond à une borne inférieure de la première instabilité potentielle pouvant être atteinte. Cependant, cette annulation est atteinte bien avant l'état limite de rupture prédit par le calcul. D'un point de vue prédictif, le critère

$$\det(\underline{\underline{K}}_s) = 0$$

est atteint de façon trop précoce pour "s'alarmer" sur la perte de stabilité de la structure. En effet, il faudrait d'une part que la direction du vecteur propre associé à la valeur propre nulle puisse être atteinte avec cet opérateur tangent, et d'autre part qu'elle coïncide avec la direction de chargement imposée. Dans ces conditions la rupture ne serait effective que pour un jeu de variables de chargement adéquat. L'évolution des isovaleurs du travail du second ordre local reste un outil performant pour décrire l'expansion des zones instables, mais demeure d'ordre qualitatif.

Le résultat qui relance tout l'intérêt de l'analyse modale, est l'observation faite avec la loi Plisol, sur la quasi coïncidence des directions du vecteur propre associé à la première valeur propre nulle de $\det(\underline{\underline{K}}_s)$ (première direction de chargement instable), et de l'incrément de déplacement à la divergence du calcul (règle d'écoulement). Ce résultat est difficile à expliquer théoriquement. Si, à l'avenir, on arrive à montrer que cette propriété est intrinsèque aux matériaux granulaires, alors il sera intéressant de comprendre ce qu'elle traduit physiquement. De plus ce type d'analyse pourrait permettre éventuellement de réduire les temps de calcul en obtenant une bonne description du mode de rupture sur la frontière du domaine de bifurcation, avant que la rupture elle-même ne se produise. Toutefois, ce dernier point n'est pas sûr d'être vérifié avec des maillages fins où le calcul des modes propres seul peut s'avérer long.

Modélisation de glissements de terrains

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons une application des travaux présentés précédemment, où nous souhaitons modéliser l'initiation de la rupture pour deux glissements de terrains réels. Pour les deux applications traitées, les effets hydrauliques de l'eau contenue dans le sol sont déterminants vis-à-vis de la stabilité des pentes modélisées. En plus des effets gravitaires, l'évolution du niveau d'eau dans le massif constitue, d'ailleurs, le principal paramètre de chargement de ces simulations. De fait, nous présentons succinctement dans une première section, les interactions qui peuvent se produire entre les différentes phases, solide, liquide et gazeuse, d'un milieu poreux. Le modèle permettant de prendre en compte une partie de ces effets dans le code Lagamine est ensuite détaillé. La modélisation des glissements de Petacciato (Italie) et Ballandaz (Savoie), n'est présentée que dans une seconde section.

4.2 Comportement hydro-mécanique dans les milieux poreux non saturés

4.2.1 Physique élémentaire de l'eau dans les sols non saturés

4.2.1.1 Comportement statique

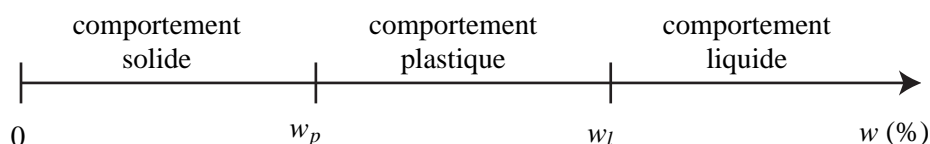
Comme remarque préliminaire à ce paragraphe, le terme *non saturé* désigne les milieux partiellement saturés, c'est-à-dire pouvant être constitués de trois phases : solide, liquide et gazeuse. Les sols saturés, ne sont constitués que de deux phases : solides et liquides, et se comportent de la même manière que les sols secs si l'on tient compte de la notion de contrainte effective introduite par Terzaghi (Terzaghi (1936)).

L'état et le comportement d'un échantillon de sol non saturé est souvent caractérisé grâce à sa

teneur en eau :

$$w = \frac{m_w}{m_s} \quad (4.1)$$

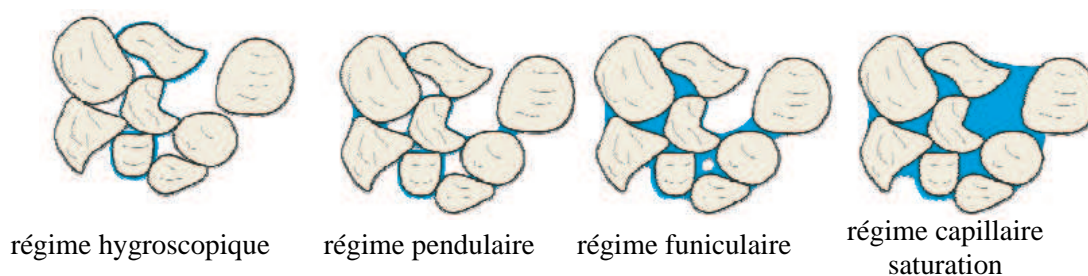
avec m_w et m_s les masses de liquide et des particules solides respectivement. Pour les argiles, on définit, d'ailleurs, des teneurs en eau de transition de phase, appelées limites d'Atterberg. w_p et w_l



F . 4.1 – Comportement des argiles en fonction de leur teneur en eau : limites d'Atterberg.

sont les limites de transition *solide-plastique* d'une part, et *plastique-liquide* d'autre part. Le terme *plastique* désigne, dans ce cas-ci, un comportement de type *pâte à modeler* plutôt visco-plastique, et non un comportement elasto-plastique.

En fonction de la teneur en eau contenue dans un sol, on distingue quatre régimes hydriques caractérisant la répartition du liquide dans la matrice solide. La figure F . 4.2 définit ces régimes. Lorsque la teneur en eau est très faible, les particules d'eau ne sont présentes qu'autour des grains solides sous forme adsorbée¹ : c'est le régime hygroscopique. En augmentant la teneur en eau, des ponts liquides entre deux grains peuvent se former par capillarité, c'est le régime pendulaire. Lorsque la teneur en eau est suffisamment grande pour que la phase liquide soit continue, on parle de régime funiculaire. Enfin, le régime capillaire correspond au moment où les pores sont saturés sans présence d'air (ou uniquement sous forme de bulles dans la phase liquide). Pour quantifier l'interaction solide-

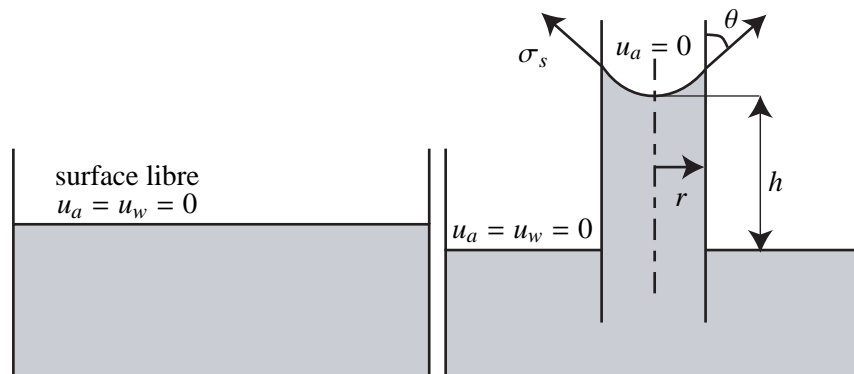


F . 4.2 – Les régimes de l'eau dans le sol. D'après Soulié (2005).

liquide, en fonction des différents régimes hydriques, dans un sol non saturé, des courbes de rétention d'eau sont construites. Ces courbes donnent, pour un échantillon de sol donné, la succion en fonction du degré de saturation, ou la pression capillaire en fonction du degré de saturation. Ces courbes caractérisent le comportement de l'eau dans un sol. Afin de comprendre un peu mieux la physique d'interaction entre les phases solide, liquide et gazeuse, nous rappelons ici comment sont interprétés les phénomènes de capillarité, et définissons ensuite la succion.

Les phénomènes de capillarité se produisent à l'interface d'une phase liquide et gazeuse, et sont en général illustrés grâce à l'expérience présentée sur la figure F . 4.3. Pour modéliser cette montée d'eau dans le tube et expliquer la forme du ménisque, on introduit la notion de tension superficielle : grandeur homogène à une force par unité de longueur qui permet de produire cet effet. En faisant l'équilibre des forces dues à la pression de l'eau (u_w), de l'air (u_a) et de la tension superficielle (σ_s),

1. L'adsorption est un phénomène physique de surface qui permet à certaines particules de gaz ou de liquide de se joindre à des particules solides sans modification de leur composition, alors qu'une particule absorbée par une autre est modifiée par réaction physico-chimique.



F . 4.3 – Illustration du phénomène de capillarité.

à l'interface eau/air, nous obtenons la loi de Jurin² :

$$u_a - u_w = \frac{2 \sigma_s \cos(\theta)}{r} \quad (4.2)$$

Avec l'hypothèse que u_a est égale à la pression atmosphérique définie comme nulle, u_w est négative à l'interface (et dans tout le tube jusqu'à s'annuler sur la surface libre). De plus au niveau de cette interface, il y a un saut de pression entre u_a et u_w . En 1805, Laplace généralisa cette loi pour des géométries quelconques :

$$\Delta p = \sigma_s \operatorname{div}(\vec{n}) \quad (4.3)$$

où \vec{n} est la normale à la surface du ménisque, et Δp la différence de pression à l'interface entre les deux phases. La différence $u_a - u_w$ est appelée pression capillaire et notée p_c . Parfois, elle est notée s en référence au terme de succion. Néanmoins, la définition de la succion est plus complexe, et traduit le potentiel de l'eau dû à tous les effets physico-chimiques mis en jeu dans le milieu non saturé. La définition donnée de cette quantité dans le livre de Coussy et Fleureau (Coussy et Fleureau (2002)) est la suivante :

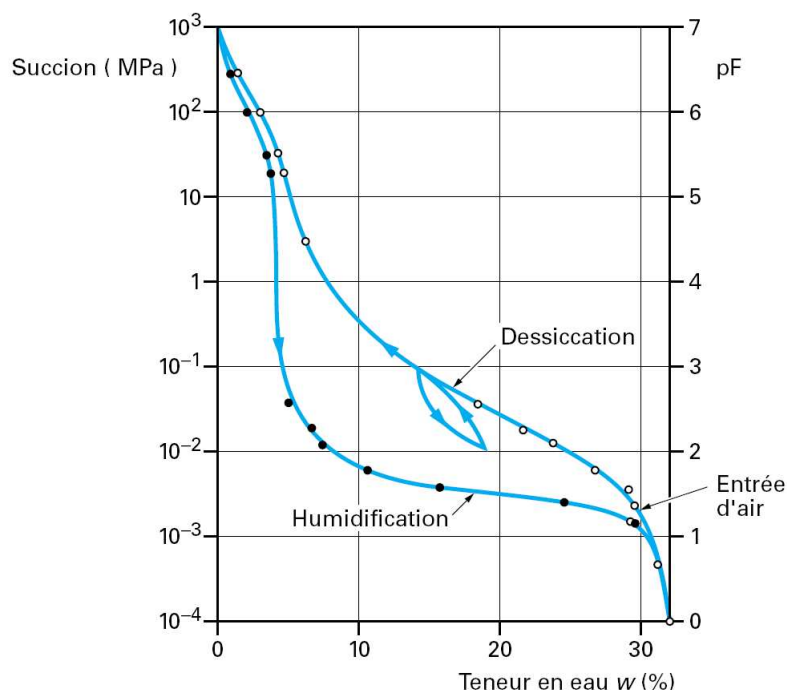
La succion est définie en agronomie comme la dépression qu'il faut, dans un système isotherme, appliquer à l'eau libre pour amener son potentiel à la même valeur que celui de l'eau contenue dans un échantillon de sol libéré de toute contrainte extérieure.

Cependant, dans certains sols comme les argiles, selon que l'on mesure la dépression $p_c = u_a - u_w$ avec une eau pure ou une eau chargée en sels, cette mesure sera différente. Dans le premier cas, nous obtiendrons la succion totale notée s , alors que dans le second cas nous obtiendrons une valeur notée s' telle que : $s' = s - s_o$, où s_o est appelée pression osmotique et caractérise la contribution des sels dissous par osmose (réaction chimique). Plus explicitement, Delage et Cui (Delage et Cui (2000)) définissent le potentiel de l'eau de la manière suivante :

$$\psi = \psi_p + \psi_g + \psi_m + \psi_o \quad (4.4)$$

avec ψ_p le potentiel dû aux pressions extérieures, ψ_g le potentiel dû à la gravité, ψ_m le potentiel matriciel prenant en compte les effets capillaire et d'adsorption, et ψ_o le potentiel osmotique. Généralement, lorsque les phénomènes de pression osmotiques sont négligeables (comme dans les sables) ou négligés, la pression capillaire p_c coïncide avec la succion s . Un exemple de courbe de rétention d'eau est présenté sur la figure F . 4.4. Comme on peut le voir, le comportement de l'eau dans le milieu

2. médecin anglais (1684-1750) qui a établi cette loi en 1718.



F . 4.4 – Courbe de rétention d'eau d'un sable argileux selon Cronley (1952). Tiré de Delage et Cui (2000).

poreux n'est pas réversible, et dépend du chemin suivi : phénomène d'hystérèse entre les phases de mouillage ou de drainage. Il faut noter de plus que ce comportement dépend fortement de la porosité d'une part : plus la porosité est forte, plus l'hystérèse est marquée, et de la distribution granulométrique d'autre part. De là, on aperçoit la complexité des phénomènes mis en jeu, si l'on veut modéliser un milieu poreux non saturé élasto-plastique enclin à être déformé.

4.2.1.2 Transfert dans les milieux poreux

Les équations développées dans ce paragraphe pour décrire l'écoulement de l'eau dans un milieu non saturé proviennent de celles développées dans le cas des milieux saturés. Ces équations ont ensuite été étendues pour tenir compte de la non saturation. Dans le cas des milieux saturés, l'écoulement est en général décrit par la loi de Darcy :

$$\underline{v} = -k \underline{\nabla}(h) \quad (4.5)$$

avec \underline{v} la vitesse moyenne de l'écoulement du fluide à travers le milieu, et h la charge hydraulique définie de la manière suivante :

$$h = \frac{p}{\rho g} + z \quad (4.6)$$

avec ρ la masse volumique du fluide, p la pression du fluide due aux actions autres que la gravité, et z la hauteur d'eau (piézométrique). Cette relation provient de l'équation de Bernoulli dans laquelle l'énergie cinétique a été négligée devant les deux autres termes (on néglige les vitesses locales de l'eau dans le milieu). La constante k est appelée perméabilité isotrope (homogène à une longueur par unité de temps), et dépend des caractéristiques granulométriques du sol ainsi que de la masse volumique et

de la viscosité du fluide. De manière générale on donne plutôt la perméabilité intrinsèque d'un sol :

$$k_{int} = k \frac{\mu}{\rho g} \quad (4.7)$$

qui ne dépend plus que de la granulométrie. μ est la viscosité dynamique du fluide en ($P_a s$) par exemple. Ainsi, k_{int} est homogène à une distance au carré. L'équation de conservation de la masse pour un fluide incompressible, qui traduit le fait que la quantité de fluide qui entre dans le milieu poreux est égale à la quantité qui en sort, est la suivante :

$$\text{div}(\underline{v}) = 0 \quad (4.8)$$

Pour les sols non saturés, le coefficient de perméabilité k dépend de la saturation (ou teneur en eau) (Li (2000)), et la loi de Darcy généralisée devient :

$$\underline{v} = -k(S_r) \underline{\nabla}(h) \quad (4.9)$$

avec S_r le degré de saturation définit comme le ratio entre le volume des vides et le volume d'eau. Quant à l'équation de conservation, elle doit prendre en compte les variations de teneur en eau. Toujours en considérant l'eau incompressible, elle peut adopter la forme suivante :

$$\text{div}(\underline{v}) = -\frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (4.10)$$

avec θ la teneur en volumique :

$$\theta = n S_r \quad (4.11)$$

La variable n désigne la porosité définit comme le rapport entre le volume des vide et le volume total (vide plus particules solides). Le membre de droite de cette équation (4.10) est aussi appelé terme d'emménagement. Lorsque l'on fait l'hypothèse que les particules solides sont indéformables, nous avons la relation suivante :

$$\frac{\partial n}{\partial t} = (1 - n) \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} \quad (4.12)$$

et le terme d'emménagement peut prendre la forme suivante (Collin (2003)) :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = S_r \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} + n \frac{\partial S_r}{\partial p_c} \frac{\partial p_c}{\partial t} \quad (4.13)$$

Enfin, en substituant les expressions de \underline{v} et $\partial \theta / \partial t$ dans la relation (4.10), nous obtenons l'équation de Richards :

$$\text{div} \left(k(S_r) \underline{\nabla}(h) \right) = S_r \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} + n \frac{\partial S_r}{\partial p_c} \frac{\partial p_c}{\partial t} \quad (4.14)$$

Cette équation, qui permet de décrire les écoulement dans les milieux non saturés, fait intervenir deux caractéristiques importantes du comportement du fluide :

- la courbe de rétention d'eau qui relie le degré de saturation à la pression capillaire,
- les variations de la perméabilité avec la teneur en eau.

4.2.2 Modèle utilisé dans Lagamine

4.2.2.1 Courbe de rétention d'eau

Du fait de la complexité du comportement qu'il faut de plus intégrer dans l'équation de Richards, les modèles continus décrivant les courbes de rétention d'eau ne prennent, en général, pas en compte

les effets hystérétiques présentés plus haut. Très récemment Nuth et Laloui (Nuth et Laloui (2008a)) ont proposés un modèle et une méthode numérique pour prendre en compte cet effet. Sinon, depuis la deuxième moitié du XX^e siècle un certain nombre d'expressions analytiques sans hystérésis ont été proposés. Voici deux approches classiques :

Brooks et Corey (1966)

$$S_r = S_{r0} + \frac{1 - S_{r0}}{(p_c)^\alpha} \quad (4.15)$$

et Van Genuchten (1980)

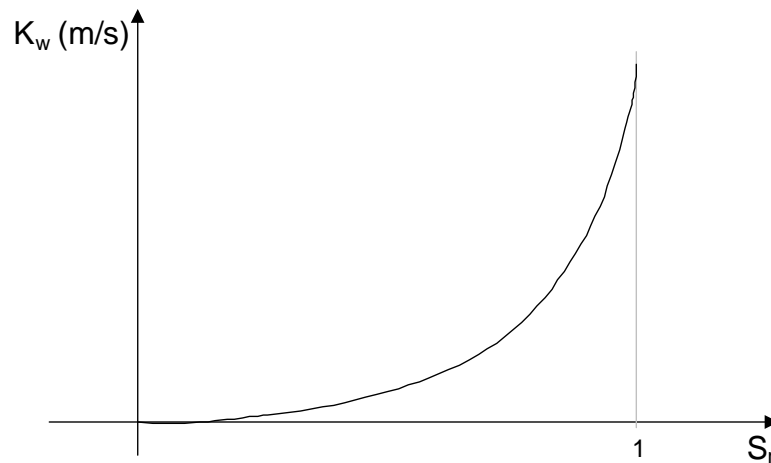
$$S_r = S_{r0} + \frac{1 - S_{r0}}{(1 + (\alpha p_c)^\beta)^\delta} \quad (4.16)$$

Dans ces expressions, S_r désigne le degré de saturation (ratio entre le volume d'eau et le volume des vides), S_{r0} le degré de saturation résiduel obtenu après une phase de drainage suffisamment longue (n'est pas forcément nul pour des sols où les phénomènes d'adsorptions sont élevés), et α , β , δ des paramètres de calibration. Pour diminuer le nombre de paramètres dans l'expression de Van Genuchten, on utilise souvent : $\delta = 1 - 1/\beta$. Dans lagamine, nous utilisons l'expression de Van Genuchten avec cette valeur particulière de δ :

$$S_r = S_{r0} + \frac{1 - S_{r0}}{(1 + (\alpha p_c)^\beta)^{1-1/\beta}} \quad (4.17)$$

4.2.2.2 Perméabilité

Indépendamment du fait qu'elle dépende de la teneur en eau ou du degré de saturation, la perméabilité peut être décrite par un tenseur pour prendre en compte l'anisotropie du milieu. Cependant l'hypothèse d'isotropie de la perméabilité est faite ici. La figure F . 4.5 montre une courbe typique de la perméabilité de l'eau en fonction du degré de saturation d'un milieu. De cette forme, plusieurs



F . 4.5 – Courbe classique de perméabilité de l'eau en fonction du degré de saturation.

modèles ont été proposés pour l'eau, soit en fonction du degré de saturation, soit en fonction de la succion :

Imray, 1954 :

$$k = k_0 \left(\frac{S_r - S_{r0}}{1 - S_{r0}} \right)^3 \quad (4.18)$$

Gardner, 1958 :

$$k = \frac{k_0}{1 + (a s)^b} \quad (4.19)$$

Scott, 1963 :

$$k = k_0 (1 - n(1 - S_r))^3 \quad (4.20)$$

Brooks et Corey (1966) :

$$k = k_0 \quad \text{si } s \leq s_b \quad k = k_0 \left(\frac{s}{s_b}\right)^n \quad \text{si } s > s_b \quad (4.21)$$

Dans le cas de nos études, le modèle utilisé reste plus simple :

$$\boxed{k = S_r k_0} \quad (4.22)$$

avec k_0 la perméabilité du milieu lorsqu'il est totalement saturé.

4.2.2.3 Couplage hydro-mécanique : contrainte effective

Pour les sols saturés, Terzaghi (Terzaghi (1936)) introduisit le concept de contrainte effective pour décrire le couplage entre les effets hydrauliques et mécaniques d'un milieu saturé : *la contrainte effective est une fonction de la contrainte totale et de la pression interstitielle de l'eau, contrôlant les effet mécaniques dus à une modification de l'état de contrainte auquel est soumis un élément de sol.*

$$\sigma' = F(\sigma, u_w) \quad (4.23)$$

Il postula que la contrainte totale appliquée à l'échantillon était la somme de la pression interstitielle du liquide et d'une contrainte effective reprise par le squelette solide :

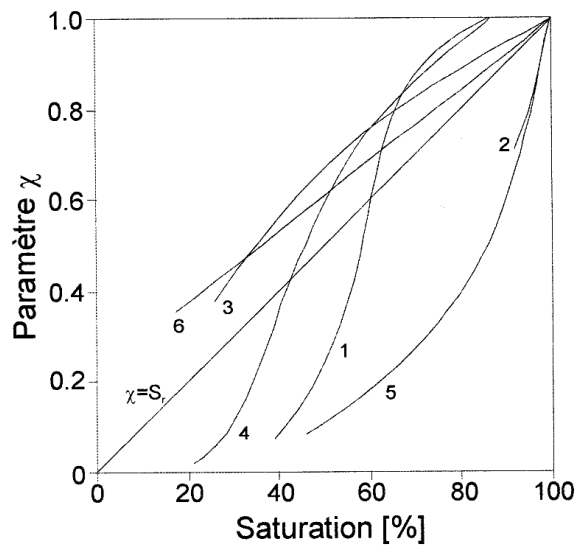
$$\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} + u_w \delta_{ij} \quad (4.24)$$

Ensuite, dans les années 50 un certain nombre d'études ont été menées pour étendre ce concept de contrainte effective pour les sols non saturés, avec σ' une fonction de u_w et de u_a , mais il ne fait peut être pas encore l'unanimité dans la communauté scientifique. Des développements récents sont encore en cours : Nuth et Laloui (2008b), Laloui et Nuth (2008). L'une des expressions les plus classiques et utilisée dans Lagamine, est celle de Bishop et Blight (Bishop et Blight (1963)) :

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - u_a \delta_{ij} + \chi (u_a - u_w) \delta_{ij} \quad (4.25)$$

Cette expression donne en général de bons résultats lorsque les effets volumiques ne sont pas trop importants. Ainsi d'autres expressions ont vu le jour : Fredlund et Rahardjo (1993), Richards (cf Li (2000)), Khalili et Khabbaz (1995). Considérant l'expression de Bishop et Blight (1963), le coefficient χ dépend de la microstructure du sol et du degré de saturation comme on peut le voir sur la figure F . 4.6. Dans le cas où les effets volumiques ne sont pas trop importants (cas où l'expression de Bishop marche bien), χ peut être pris égal au degré de saturation (Charlier *et al.* (1997)). Enfin, nous ferons de plus l'hypothèse que la pression d'air reste constante égale à la pression atmosphérique lorsque que le milieu n'est pas totalement saturé :

$$\boxed{\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} + S_r (u_a - u_w) \delta_{ij}} \quad (4.26)$$



F . 4.6 – Évolution de χ en fonction du degré de saturation pour différents types de sol : Jennings et Burland (1962)

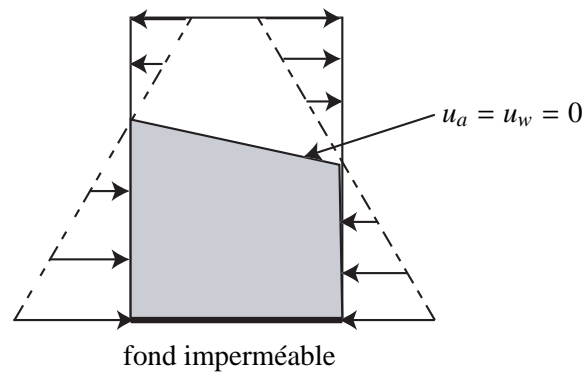
4.3 Modélisation des glissements de Petacciato et Ballandaz

4.3.1 Phénomène physique à modéliser : principe de la modélisation

Pour ces deux sites, la stabilité des pentes semble fortement liée aux problèmes de saturation dans les sols. Le glissement de Petacciato a eu lieu après une forte période pluvieuse, et les petits mouvements observés sur le site de Ballandaz sont aussi dus à une hydrologie complexe : pluie, fonte de neige, divers travaux de drainage... Bien que les phénomènes physiques à représenter sont très complexes, nous nous contentons de modéliser l'influence du niveau d'eau "moyen" sur la stabilité du massif. En effet, la caractérisation des systèmes hydriques d'un site est probablement encore plus compliquée que la détermination des matériaux. D'autre part, des hypothèses simplificatrices fortes ont été faites afin de simplifier le modèle non saturé :

- le couplage présenté ici n'a qu'un effet isotrope : les paramètres du modèle Plasol n'évoluent pas avec le comportement hydraulique,
- la courbe de rétention d'eau ne présente pas d'hystérésis,
- la perméabilité dépendant linéairement du degré de saturation,
- dans l'expression de la contrainte effective de Bishop $\chi = S_r$.

Compte tenu de ces limitations, les paramètres de chargement seront la gravité, et le niveau d'eau moyen dans le massif. Pour simuler l'influence de ce niveau de nappe, les conditions limites en pression d'eau exposées sur la figure F . 4.7 sont adoptées : À chaque pas de chargement le niveau de la nappe est incrémenté grâce aux conditions de pression sur les bords latéraux. Ne connaissant pas la dynamique de transfert de l'eau, nous nous contenterons juste de modéliser l'influence du niveau d'eau dans le massif : l'incrément de temps sur lequel l'équation de Richards est intégré est suffisamment grand pour qu'à la fin du pas de chargement, l'écoulement soit permanent entre les deux bords droit et gauche. Enfin, comme montré sur la figure, nous ne sommes pas tenu d'imposer un niveau de nappe phréatique horizontal.



F . 4.7 – Conditions aux limites pour imposer le niveau d'eau.

4.3.2 Présentation de Petacciato et modélisation

Le site de Petacciato, se trouve sur la cote Adriatique en Italie (F . 4.8) et couvre une aire de 7 km le long de la cote, sur 2 km à l'intérieur des terres. La différence d'altitude entre le point le plus haut et le niveau du bord de mer est de 200 m. Ce site a connu une série de petits mouvements durant le XX^e siècle jusqu'à l'évènement principal du 14 mars 1996 qui causa d'importants dégâts matériels sur la commune et les différentes infrastructures : route, chemin de fer, bâtiments... (LESSLOSS-Report (2004)). Des photos de ces dégradations ont été données dans le chapitre 1 (F . 1.4). La figure F . 4.9 est une carte où sont situées les zones géographiques qui ont fait l'objet d'une reconnaissance géologique et géotechnique. La géométrie et les matériaux constitutifs d'une coupe amont-aval (droite brisée XV F . 4.9) du site ont pu être reconstitués et sont présentés sur la figure F . 4.10. Sur cette figure, les pointillés représentent les zones où se trouvent la surface de rupture observée grâce à des inclinomètres et piézomètres : entre 70 et 90 mètres de profondeur. Les différentes couleurs (ou dégradés de gris) distinguent les différents matériaux. On peut d'ailleurs remarquer que le sol est très homogène. Seules les couches superficielles sont un peu différentes. Du fait de cette propriété, et de la situation des zones de ruptures, seul le matériau de la couche inférieure est pris en compte dans la modélisation.

La discrétisation spatiale de la pente, ainsi que les conditions aux limites cinématiques sont présentées sur la figure F . 4.11. Le maillage comprend 2600 éléments triangulaires quadratiques (6 nœuds à 7 points d'intégrations). Les degrés de liberté horizontaux pour les bords latéraux, et verticaux pour le bord inférieur sont fixés. Le calcul se fait ensuite sous hypothèse de déformations planes.

Concernant la calibration et les paramètres du modèle, nous avons choisi les résultats d'essais expérimentaux les plus exploitables et proposé la calibration faite dans le chapitre 2 en figure F . 2.9. Le tableau T . 4.1 récapitule tous les paramètres d'entrée de la loi Plasol.

Pour les paramètres hydrauliques de la courbe de rétention d'eau, il n'y avait aucune donnée disponible dans le cadre du projet. Une courbe de rétention "typique" pour les argiles a été introduite (F . 4.12) avec les paramètres du tableau T . 4.2.

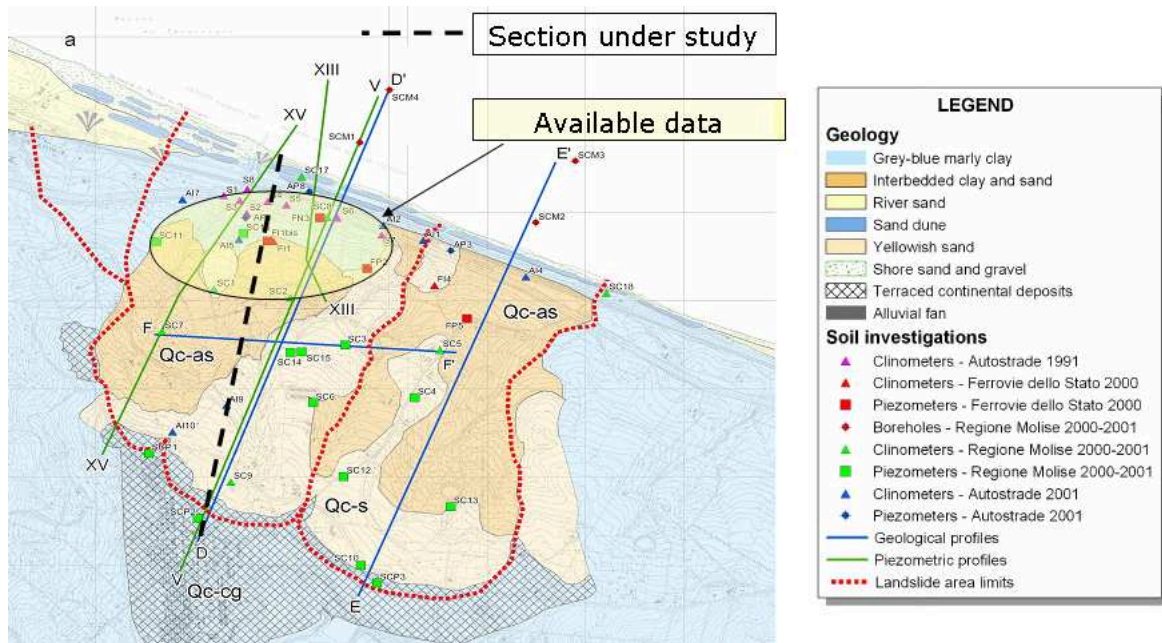
La simulation à proprement parler a consisté à augmenter le niveau d'eau dans le massif étape par étape comme expliqué sur la figure F . 4.7. Au début de la simulation, le niveau d'eau est horizontal sur le fond de la structure, puis il augmente progressivement en s'inclinant dans le sens de la pente. L'inclinaison a été choisie de telle sorte qu'au niveau maximum la pente soit saturée à 100 %. En-dessous de ce niveau, le sol est complètement saturé, et au-dessus, il l'est partiellement avec un degré de saturation correspondant à la pression capillaire donnée par la courbe de rétention d'eau. La figure F . 4.13 présente l'évolution des isovaleurs du travail du second ordre local normalisé (cf equation (2.6) du chapitre 2) au cours de l'accroissement du niveau d'eau dans le massif. De là, on



F . 4.8 – Situation géographique de Petacciato.

paramètres du sol	symboles	unités	limon bleu argileux
pois spécifique des grains	ρ_s	kN/m ³	27.40
module d'Young tangent initial	E	MPa	95.0
coefficient de Poisson tangent initial	ν	-	0.21
porosité	n	-	0.3
angle de frottement initial	$\varphi_{c0} = \varphi_{e0}$	°	1.0
angle de frottement final	$\varphi_{cf} = \varphi_{ef}$	°	19.0
paramètre d'écroûissage 1	B_p	-	0.01
cohésion initiale	c_0	kPa	10 ⁻³
cohésion finale	c_f	kPa	171
paramètre d'écroûissage 2	B_c	-	0.02
angle de dilatance	ψ_f	°	0

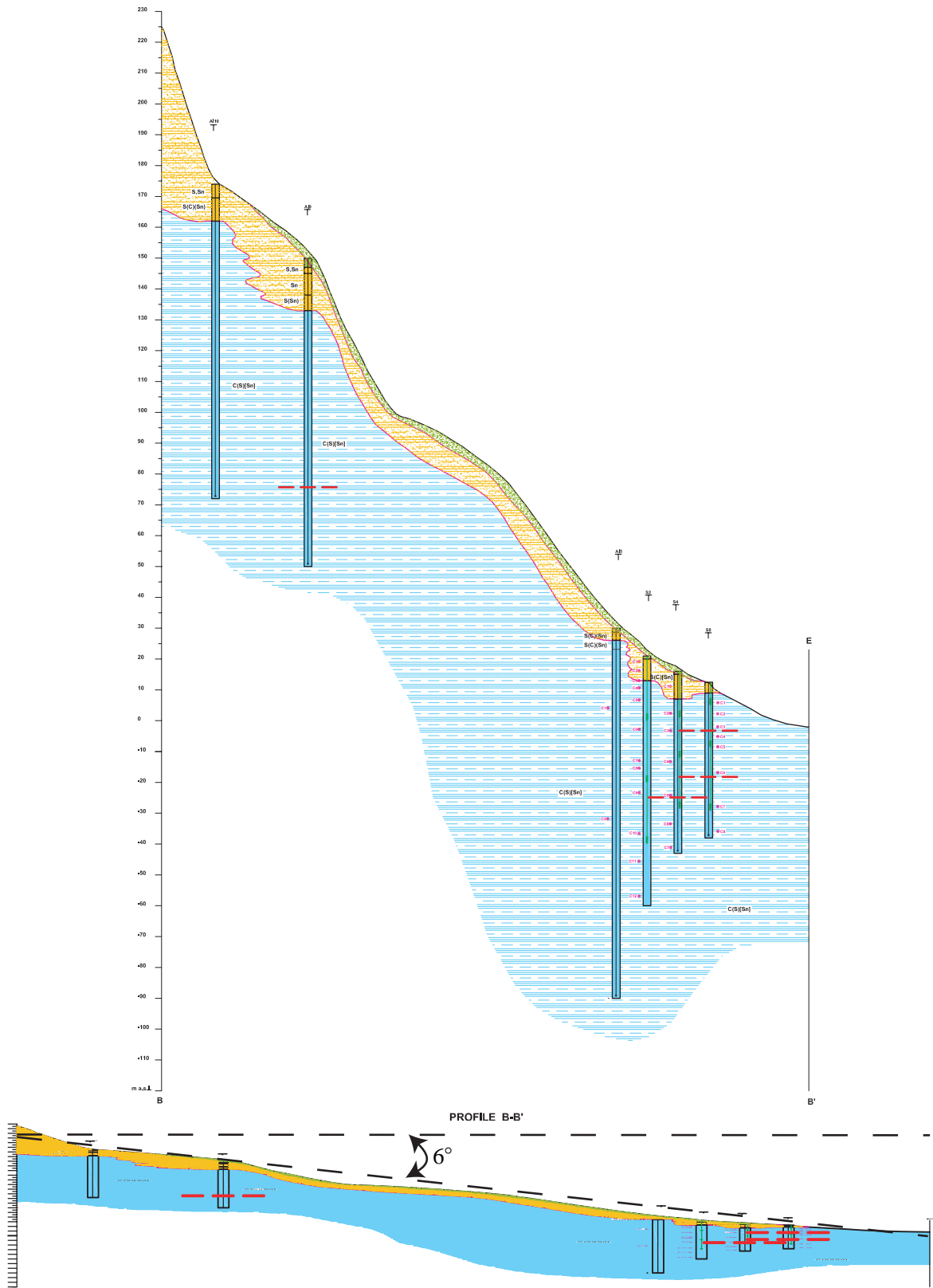
T . 4.1 – Paramètres de calibration.



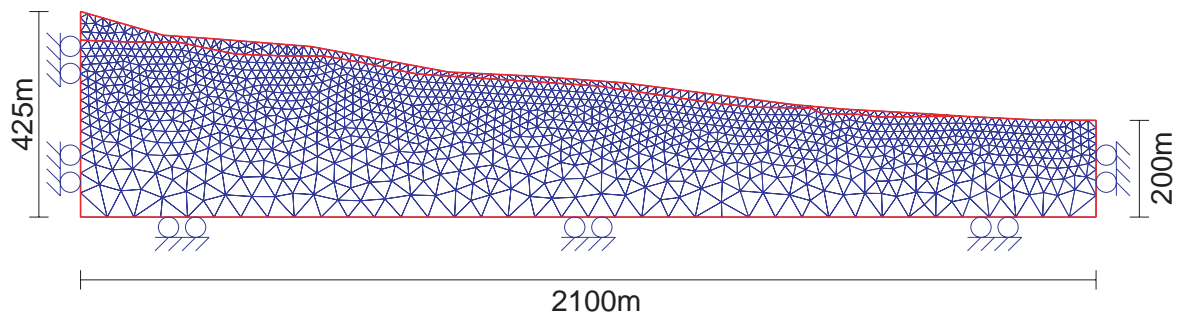
F . 4.9 – Carte des investigations géologiques et géotechniques.

paramètres hydrauliques	symboles	unités	argile
perméabilité intrinsèque	k_0	m^2	10^{-17}
degré de saturation résiduel	S_{r0}	-	0.1
premier paramètre de rétention	α	Pa^{-1}	$1.0 \cdot 10^{-5}$
deuxième paramètre de rétention	β	-	1.35

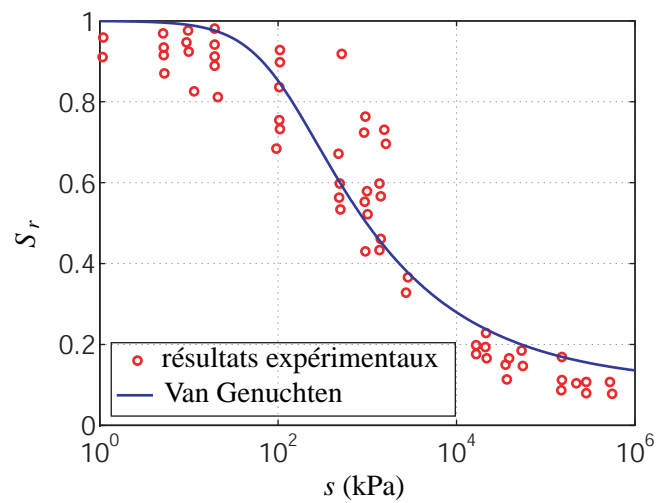
T . 4.2 – Paramètres de rétention d'eau.



F . 4.10 – Coupe morphologique à modéliser.

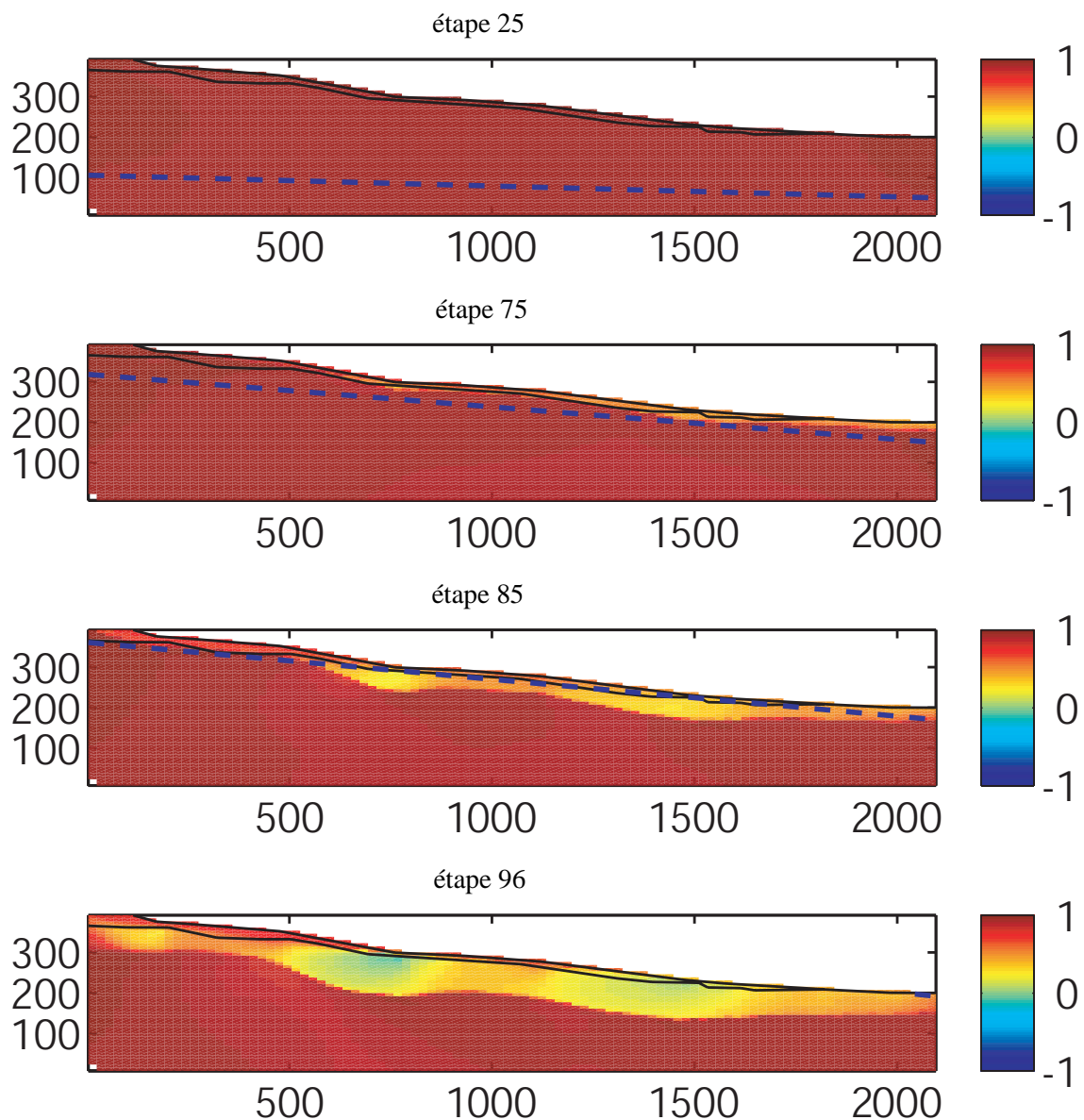


F . 4.11 – Maillage de la coupe de Petacciato.



F . 4.12 – Courbe de rétention d'eau "typique" d'une argile (Fleureau et al. (2002)) utilisée pour le sol de Petacciato.

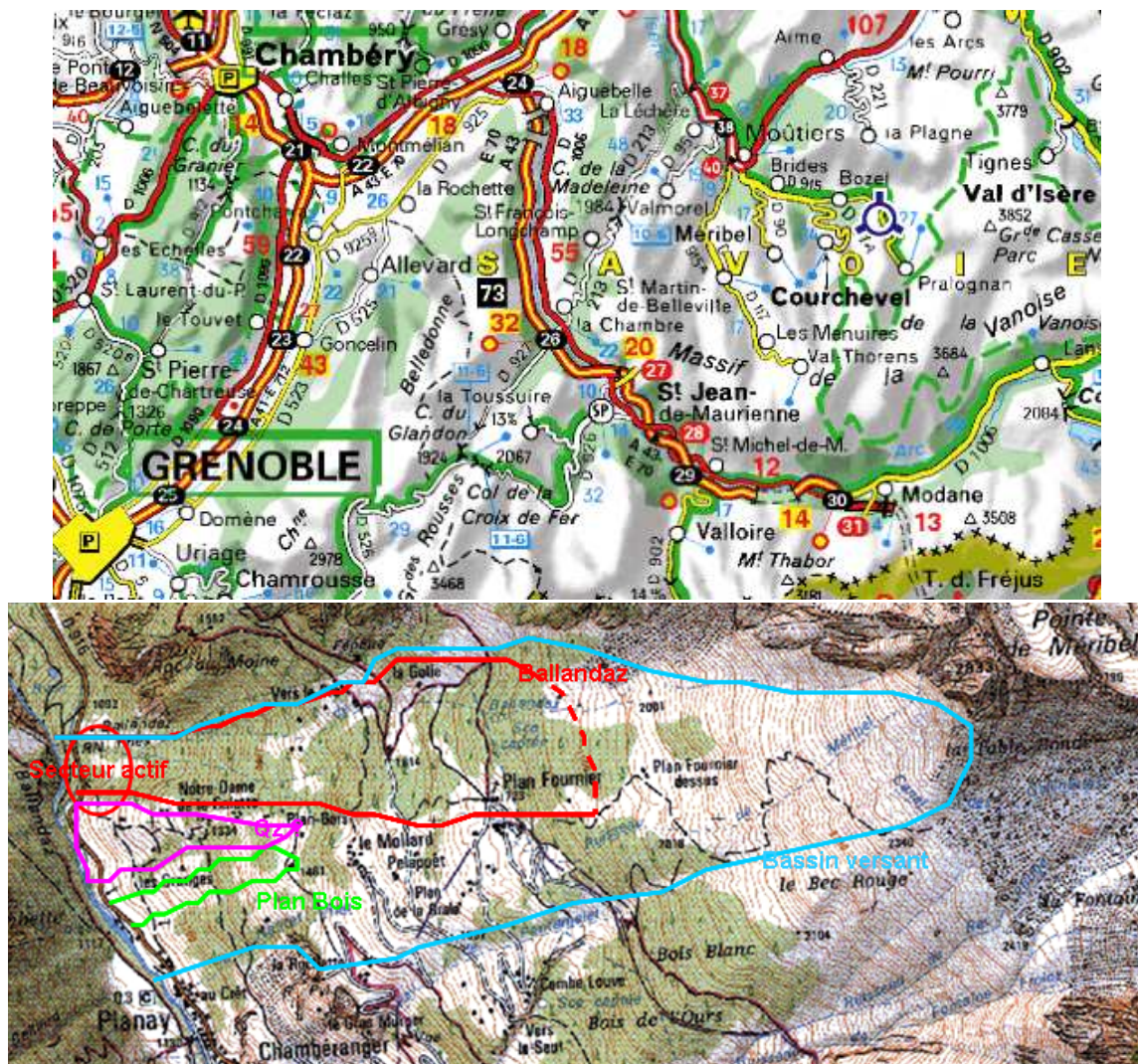
peut observer qu'il faut pratiquement saturer totalement le massif pour obtenir des zones instables. Néanmoins, grâce à la normalisation, il est possible de savoir comment se développent ces zones instables depuis l'étape 75 du calcul qui correspond à un niveau d'eau amont situé à 75 % de la hauteur maximum du talus. Il faut noter aussi que si les valeurs de d^2W_n ne sont pas négatives ou nulles juste à la limite des zones claires et foncées (ou jaune et rouge sur le fichier informatique), elles sont proches de zéro. À l'étape 96, cette frontière se trouve aux environs de 90 mètres de profondeur comme observé sur le terrain. L'évolution des isovaleurs du travail du second ordre normalisé permet une description suffisamment précise de l'évolution des zones instables au cours du chargement.



F . 4.13 – Isovaleurs de d^2W_n pour différents niveaux de la nappe phréatique (représentée en tiretés).

4.3.3 Présentation de Ballandaz et modélisation

Le glissement de Ballandaz se trouve en Tarentaise sur la route de Pralognan, quelques kilomètres après Bozel (F . 4.14). Il est actuellement contrôlé et monitoré dans le cadre du projet ANR



F . 4.14 – Situation géographique de Ballandaz.

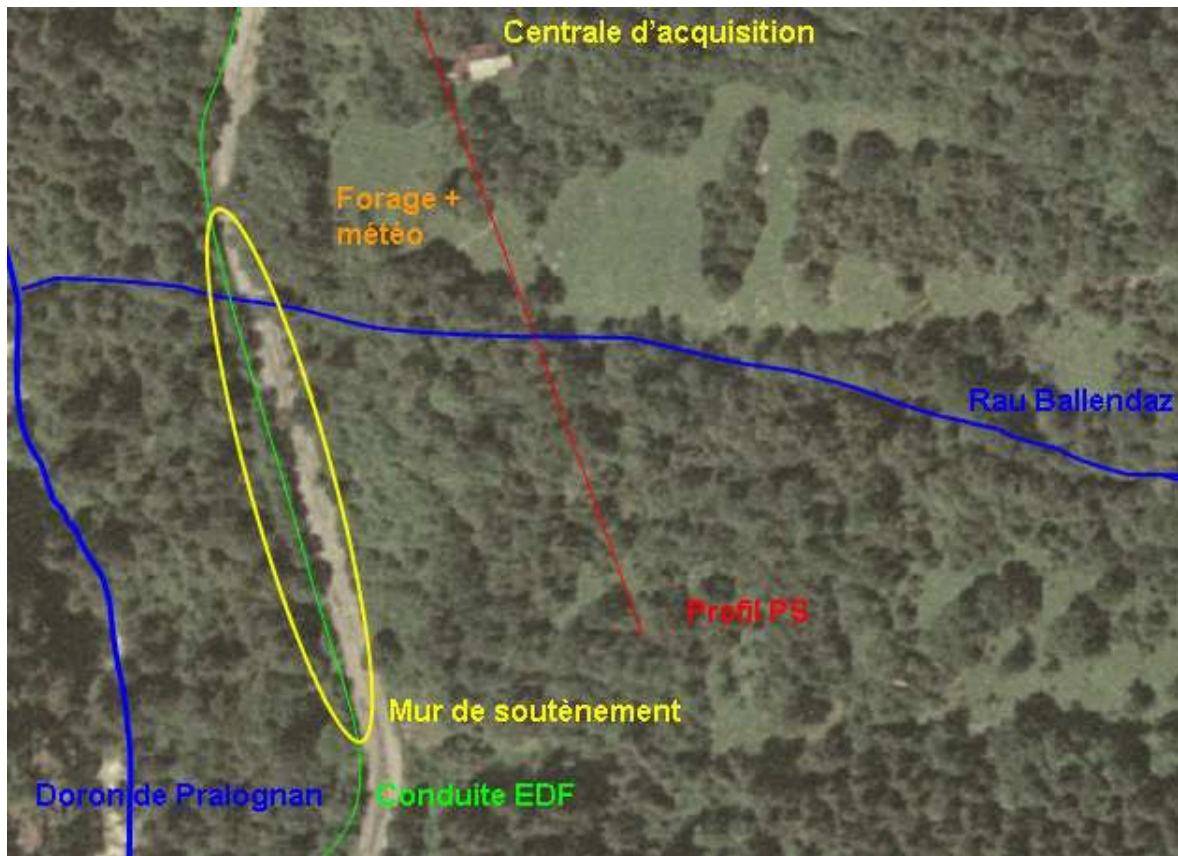
RGCU Sigma. Pour l'instant, encore de nature lente, il cause néanmoins des problèmes d'affaissement de la route au niveau du pont sur le ruisseau de Ballandaz, et la conduite forcée EDF nécessite d'être rehaussée de temps en temps (F . 4.16 et F . 4.15). Les affaissements observés à ce niveau sont de l'ordre de 10 à 30 cm/an. Cependant, durant l'été 1987, le glissement a connu une accélération jusqu'à 1 m/jour. Depuis, des travaux de drainage ont été réalisés, mais ne semblent pas avoir résolus tous les problèmes. Le site est assez largement instrumenté dans le cadre de sa surveillance (inclinomètres, piézomètres...), et de sa reconnaissance par des mesures géophysiques faisant parti du projet. Cependant, la géophysique actuelle, n'est pas encore suffisamment avancée pour permettre d'être exploitée avec nos modèles géomécaniques. Nous ne disposons d'essais géomécaniques que sur quelques carottes provenant d'un forage situé non loin de la route (F . 4.17). Or les matériaux constituant ce site semblent très hétérogènes. Pour l'instant la profondeur approximative où se situe le substratum rocheux n'est toujours pas définie. De plus, l'hydrologie est finalement complexe et assez



F .4.15 – Conduite forcée EDF sous la route.



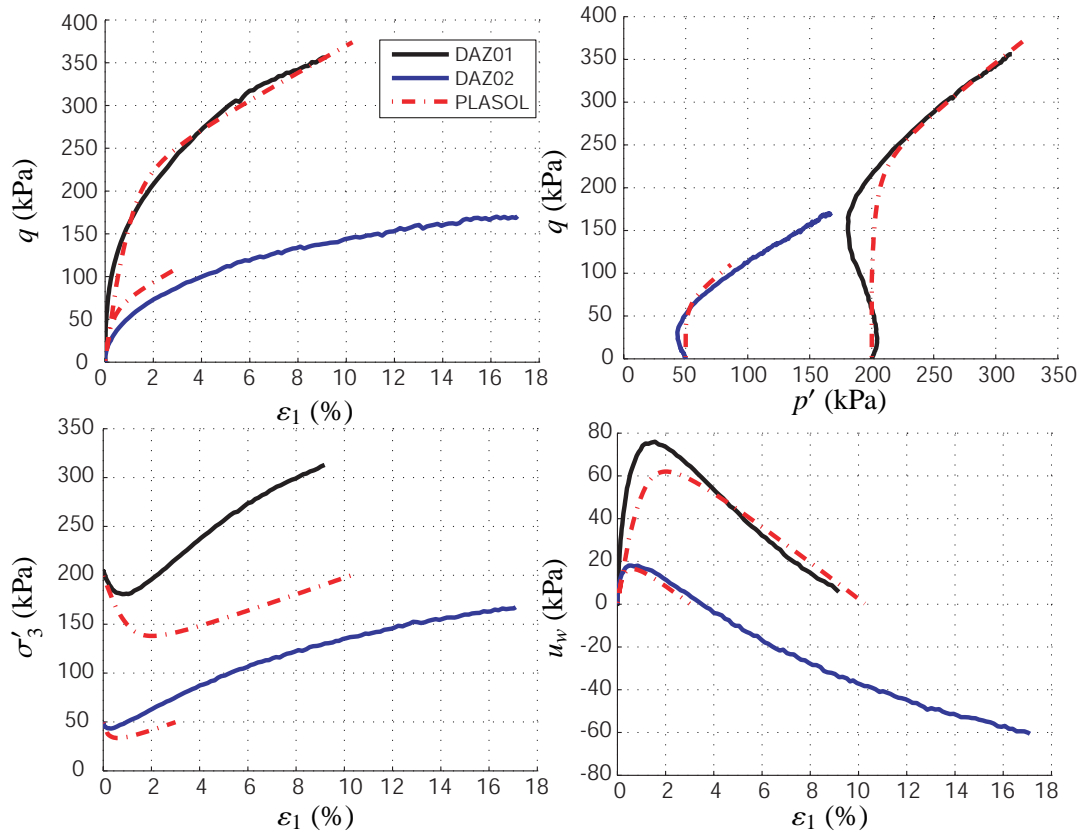
F .4.16 – Pont de la route sur le ruisseau de Ballendaz.



F . 4.17 – Situation du forage d'où proviennent les essais matériaux.

mal connue.

Des essais triaxiaux non drainés ont été effectués sur deux échantillons in situ et d'autres remaniés permettant de connaître les propriétés mécaniques de la matrice essentiellement sériciteuse. D'un point de vue expérimental, ces essais ont été menés avec des vitesses de chargements égales à 0.009 mm/min . Les résultats de ces calibrations sont présentés sur les figures F . 4.18 et F . 4.19 et tableaux T . 4.3 et T . 4.4. Pour ce qui est des paramètres hydrauliques, nous ne disposons pas

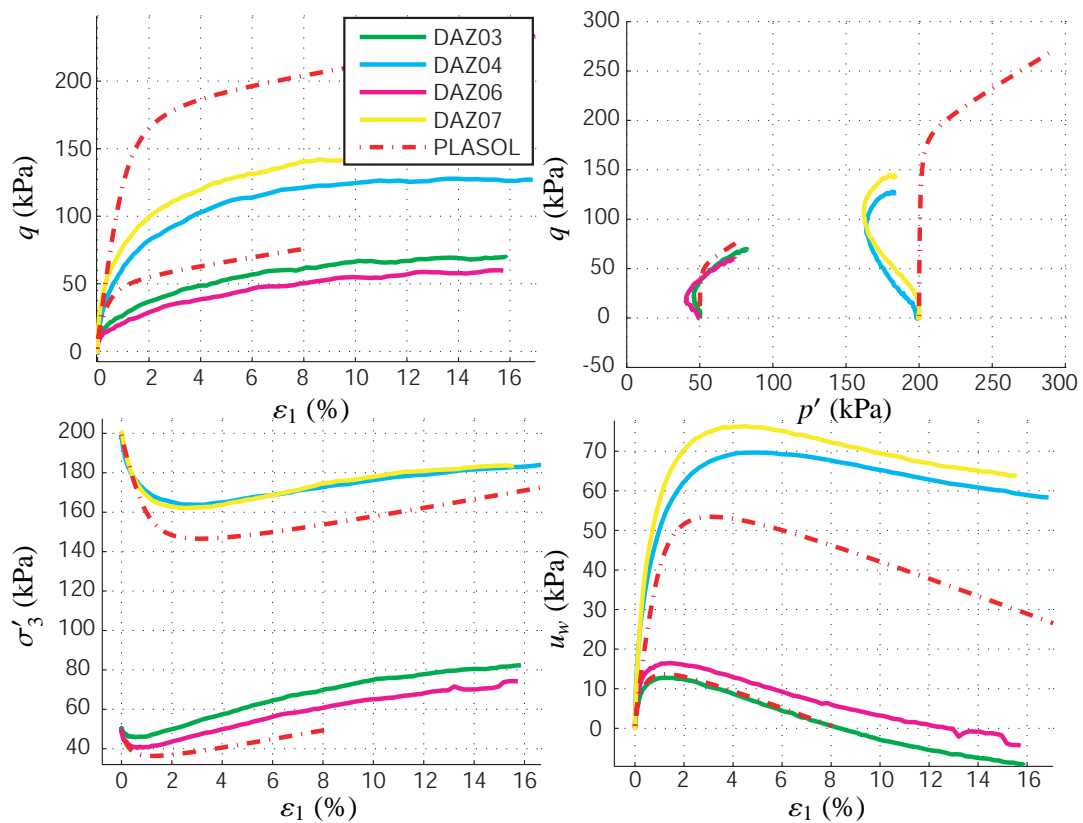


F . 4.18 – Essais triaxiaux non drainés sur échantillon in situ.

non plus d'essais spécifiques pour mesurer la perméabilité intrinsèque et fournir les caractéristiques de rétention d'eau. Cependant, nous avons pu obtenir des courbes granulométriques, obtenues par diffraction laser, des deux échantillons in situ (cf annexe B). Grâce à ces données, une estimation de la perméabilité intrinsèque et des paramètres de la courbe de rétention d'eau de Van Genuchten nous a été fournie par Tarantino (Tarantino (2008)) que je remercie par ailleurs chaleureusement pour avoir effectué ce travail de façon entièrement gratuite. Cette estimation a été faite en utilisant des modèles essentiellement empiriques issues de : Vereecken *et al.* (1989), Vereecken *et al.* (1990), Vereecken *et al.* (1992). Grâce à ces quelques informations, nous avons proposé une simulation "d'avant projet". N'ayant pas de coupe permettant de localiser les différentes couches de matériaux, la géométrie présentée en figure F . 4.21 a été postulée. Les conditions aux limites ne figurant pas sur cette figure, sont les mêmes que pour la simulation de Petacciato : degrés de libertés horizontaux fixes sur les bords latéraux, et degrés de libertés verticaux fixes sur le bord du bas. Le substratum rocheux est modélisé par un matériaux plus rigide que celui de la couche supérieure (cf table T . 4.6). Malheureusement, avec les données matériaux issues de la calibration, le massif ne tient pas sous son poids propre, même avant de commencer à faire monter le niveau d'eau. Il semble qu'il soit nécessaire de reconsidérer la géométrie et éventuellement les conditions aux limites. Par exemple : limiter la géométrie à la couche supérieure, et fixer les nœuds correspondant à l'interface avec la roche. Mais n'ayant à ce jour que

paramètres du sol	symboles	unités	échantillons in situ
pois spécifique des grains	ρ_s	kN/m ³	28.57
module d'Young tangent initial	E	MPa	15.0
coefficient de Poisson tangent initial	ν	-	0.20
porosité	n	-	0.2
angle de frottement initial	$\varphi_{c0} = \varphi_{e0}$	°	10
angle de frottement final	$\varphi_{cf} = \varphi_{ef}$	°	28
paramètre d'écroûissage 1	B_p	-	0.02
cohésion initiale	c_0	kPa	9
cohésion finale	c_f	kPa	9
paramètre d'écroûissage 2	B_c	-	0.02
angle de dilataence	ψ_f	°	5

T . 4.3 – Paramètres de calibration des échantillons in situ.



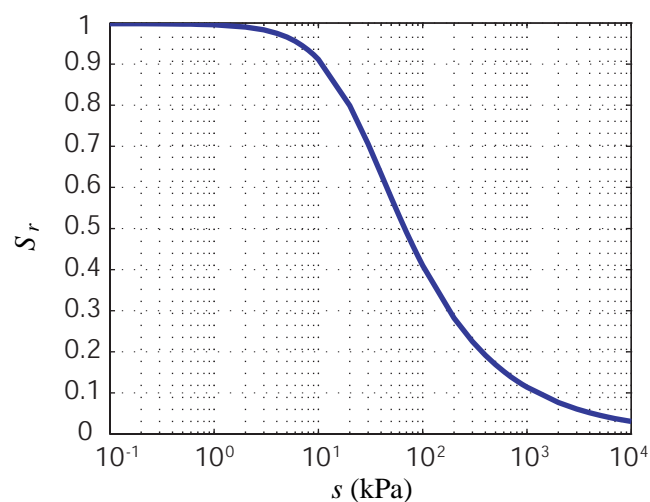
F . 4.19 – Essais triaxiaux non drainés sur échantillon remanié.

paramètres du sol	symboles	unités	échantillons remaniés
poids spécifique des grains	ρ_s	kN/m ³	28.57
module d'Young tangent initial	E	MPa	15.0
coefficient de Poisson tangent initial	ν	-	0.20
porosité	n	-	0.2
angle de frottement initial	$\varphi_{c0} = \varphi_{e0}$	°	1
angle de frottement final	$\varphi_{cf} = \varphi_{ef}$	°	23
paramètre d'érouissage 1	B_p	-	0.02
cohésion initiale	c_0	kPa	5
cohésion finale	c_f	kPa	5
paramètre d'érouissage 2	B_c	-	0.02
angle de dilatance	ψ_f	°	1

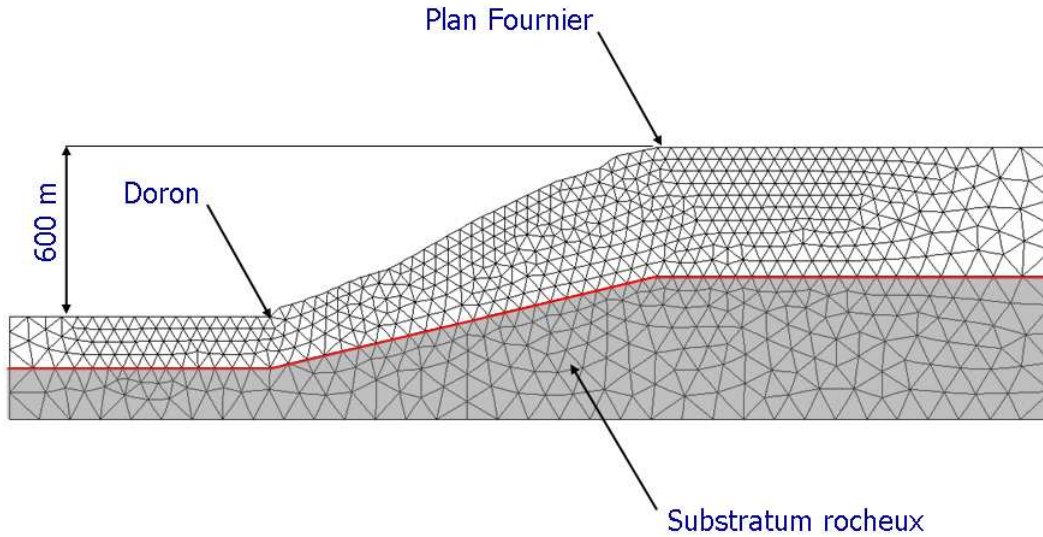
T . 4.4 – Paramètres de calibration des échantillons remaniés.

paramètres hydrauliques	symboles	unités	argile
perméabilité intrinsèque	k_0	m ²	$3.3 \cdot 10^{-14}$
degré de saturation résiduel	S_{r0}	-	0
premier paramètre de rétention	α	Pa ⁻¹	$4.5 \cdot 10^{-2}$
deuxième paramètre de rétention	β	-	1.57

T . 4.5 – Paramètres de rétention d'eau.



F . 4.20 – Courbe de rétention d'eau pour le sol de Ballendaz.



F . 4.21 – Maillage de la coupe de Ballendaz.

paramètres du sol	symboles	unités	échantillons remaniés
poids spécifique des grains	ρ_s	kN/m ³	28.57
module d'Young tangent initial	E	MPa	1500
coefficient de Poisson tangent initial	ν	-	0.20
porosité	n	-	0.2
angle de frottement initial	$\varphi_{c0} = \varphi_{e0}$	°	1
angle de frottement final	$\varphi_{cf} = \varphi_{ef}$	°	40
paramètre d'écrouissage 1	B_p	-	0.02
cohésion initiale	c_0	kPa	230
cohésion finale	c_f	kPa	230
paramètre d'écrouissage 2	B_c	-	0.02
angle de dilatence	ψ_f	°	1

T . 4.6 – Paramètres du substratum rocheux.

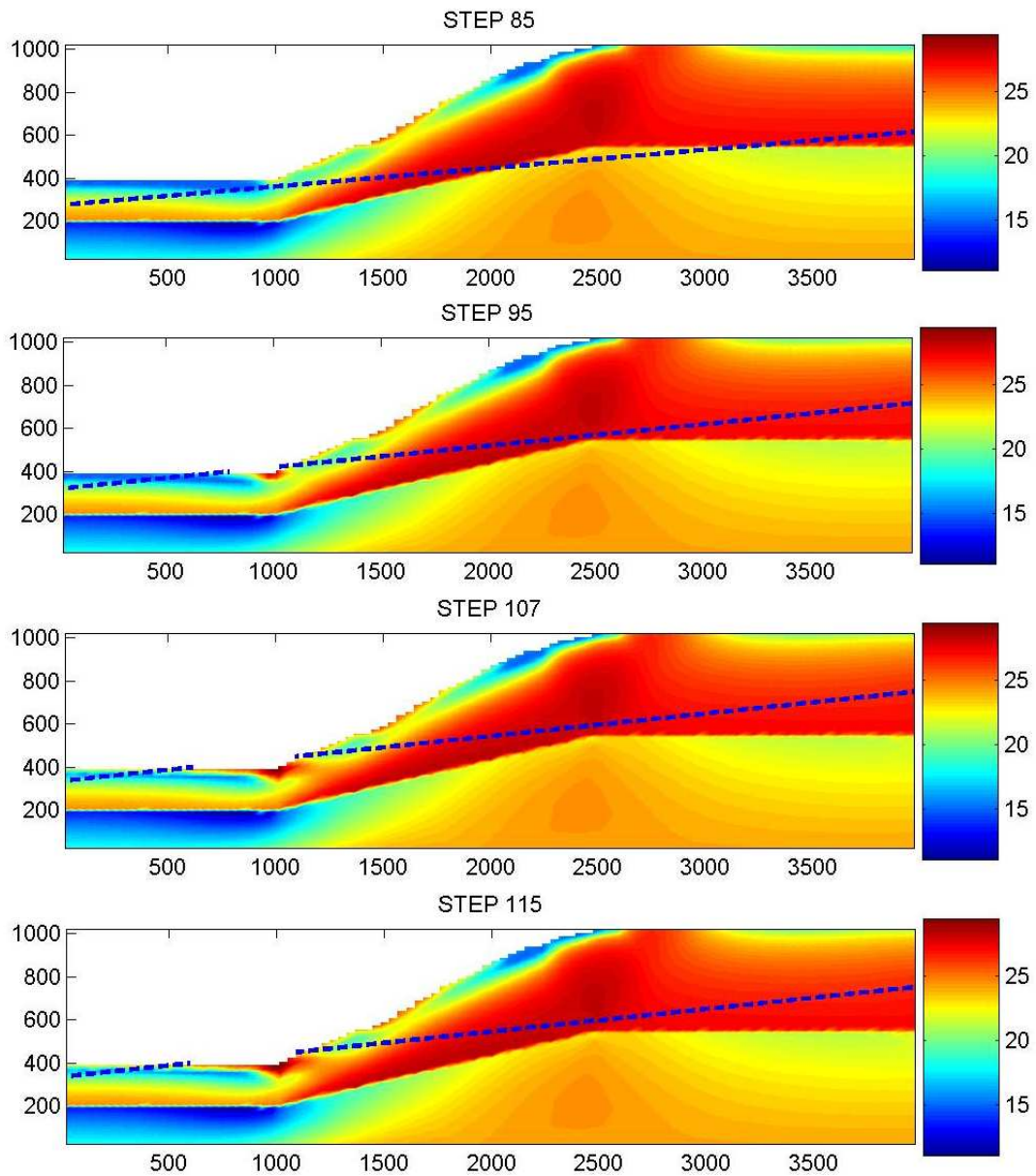
peu d'informations, nous nous sommes contentés d'augmenter les propriétés mécaniques de la couche de sol comme indiqué dans le tableau T . 4.7. Les paramètres hydrauliques restent quant à eux inchangés et identiques sur les deux couches.

Pour illustrer ce problème d'équilibre initial, la figure F . 4.22 montre l'évolution des iso-

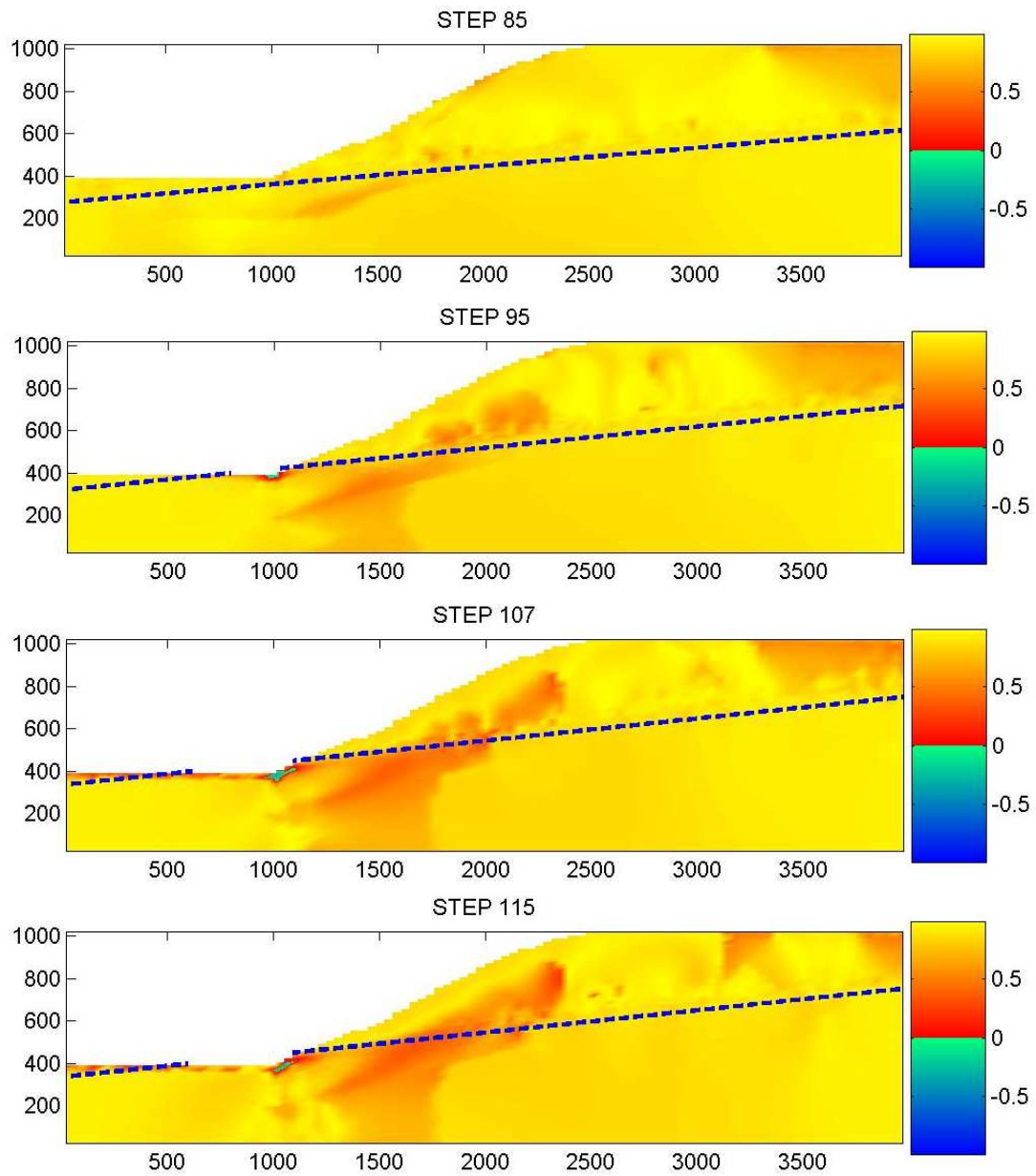
paramètres du sol	symboles	unités	échantillons remaniés
pooids spécifique des grains	ρ_s	kN/m ³	28.57
module d'Young tangent initial	E	MPa	150
coefficient de Poisson tangent initial	ν	-	0.20
porosité	n	-	0.2
angle de frottement initial	$\varphi_{c0} = \varphi_{e0}$	°	10
angle de frottement final	$\varphi_{cf} = \varphi_{ef}$	°	35
paramètre d'écrouissage 1	B_p	-	0.02
cohésion initiale	c_0	kPa	50
cohésion finale	c_f	kPa	50
paramètre d'écrouissage 2	B_c	-	0.02
angle de dilataence	ψ_f	°	1

T . 4.7 – Paramètres du sol considéré pour la simulation.

valeurs de l'angle de frottement mobilisé au cours du chargement. La couche de sol supérieure a tendance à glisser sur celle du bas au niveau de l'interface. Dans cette zone, l'angle de frottement atteint dès la fin de la mise en équilibre initiale, une valeur élevée mais légèrement inférieure à celle à la rupture. De plus, cette variable n'évolue pratiquement plus avec la montée d'eau au voisinage de l'interface. En revanche, φ augmente fortement au pied de la pente, et illustre le fait que la zone autour de la route va glisser si le niveau d'eau augmente de trop. Les isovaleurs de la cohésion mobilisée ne sont pas présentées, car nous avons choisi $c_0 = c_f$ (T . 4.7). Dès lors, la cohésion reste constante en tout point du volume quelque soit le niveau de chargement. Les résultats en terme d'isovaleurs du travail du second ordre local normalisé en fonction du niveau d'eau, sont présentés sur la figure F . 4.23. On peut voir que l'évolution des zones instables est, pour cette simulation, entièrement corrélée à l'évolution de l'angle de frottement mobilisé au pied de la pente. Pour ces conditions, il est ainsi possible de conclure que la rupture sera plutôt de type localisé, et concentrée dans la zone géographique de la route. Sur le site réel, c'est effectivement la zone sensible, où les efforts de stabilisations sont concentrés.



F . 4.22 – Isovaleurs de l'angle de frottement mobilisé.

F . 4.23 – Isovaleurs de d^2W_n .

4.3.4 Conclusion

Sur ces deux simulations, le travail du second ordre local normalisé permet de décrire correctement les zones d'instabilité du massif étudié, et ce, sans postuler a priori une ligne de glissement privilégiée. Dans le cas du site de Petacciato, ces zones instables ne pouvaient être détectées uniquement avec le critère de limite de plasticité. Le chemin de chargement "naturel" imposé à cette pente via les conditions aux limites suit donc, en certains points, des directions incluses dans les cônes d'instabilités. Pour le cas du site de Ballendaz, les zones instables correspondent finalement à l'ensemble des points qui atteignent la limite de plasticité. Cette rupture aurait donc pu être identifiée aussi avec des méthodes plus classiques. Pour ce cas de chargement, nous nous trouvons dans une situation où la limite de plasticité coïncide avec le critère du travail du second ordre.

Concernant l'aspect prédictif de ces simulations pour décrire la stabilité des sites réels, il me semble que même si les modèles peuvent toujours être améliorés, notamment sur le couplage hydro-mécanique non saturé, les principales limitations viennent, aujourd'hui, de nos facultés très limitées à caractériser mécaniquement les milieux présents sur les sites. L'écart entre la complexité des modèles utilisés, et notre capacité à fournir des données mécaniques fiables sur les matériaux d'un milieu naturel, est tel, qu'il est légitime de se poser la question du caractère plus ou moins représentatif de ces calculs. Néanmoins, l'avenir semble prometteur pour la modélisation de tels sites, car les modèles peuvent encore beaucoup progresser, et les avancées technologiques des appareils de mesures de grandeurs physiques in situ progressent rapidement.

Conclusions et perspectives

Conclusions

Ce travail de thèse s'est focalisé sur la modélisation des instabilités et ruptures en géomécanique. Dans le premier chapitre, des définitions précises des concepts de stabilité, rupture et bifurcation s'appliquant au domaine de la mécanique des milieux continus ont été rappelées. Le contexte de l'étude a ensuite été posé grâce à une brève description de ruptures observées sur des essais mécaniques de laboratoires : essais triaxiaux effectués sur des sables, puis de ruptures observées sur des sites naturels : exemples de glissements de terrains. Comme les applications se sont limitées à l'analyse de la stabilité des pentes, trois modèles élasto-plastiques non associés décrivant le comportement des sols (sables ou argiles) ont été présentés : modèle Plasol (Barnichon (1998)) implémenté dans le code aux éléments finis Lagamine, modèle de Pastor-Zienkiewicz (Pastor *et al.* (1990)) implémenté dans le code Gehomadrid non utilisé dans cette thèse, et modèles incrémentaux de Darve (Darve *et al.* (1995)). Enfin, deux critères de bifurcation s'appliquant aux matériaux solides ont été analysés. Le critère de Rice (Rice (1976)) permet une description précise des ruptures en mode localisé pouvant se produire dans des matériaux initialement homogènes, et le critère de Hill (Hill (1958)) permet, quant à lui, de détecter les premiers états instables d'un matériau sous sollicitations quasi-statiques. Il a été rappelé de plus que dans le cas de matériaux associés, ces deux conditions coïncident avec le critère de limite de plasticité. Dans le cas contraire, la condition de Hill est atteinte avant celle de Rice, elle même vérifiée avant le critère de plasticité limite pour des directions de sollicitations particulières. Si le critère de Hill constitue une borne inférieure des conditions de stabilité matérielle, et autorise ainsi la détection de toute instabilité potentielle, il ne permet néanmoins pas de déterminer, a priori, le mode de rupture engendré.

Le second chapitre est dédié à l'analyse du critère du travail du second ordre à l'échelle du point matériel. Comme l'étude sur cette thématique avait commencé dans notre équipe bien avant que je n'arrive, les résultats antérieurs obtenus pour des conditions de symétrie axiale, et de déformations planes ont d'abord été rappelés. Puis une extension de ces travaux a été effectuée pour des cas de sollicitations tridimensionnelles. La condition :

$$\underline{d\sigma} : \underline{d\varepsilon} \leq 0$$

permet d'introduire les notions de cônes de directions de sollicitations instables, et de limite de do-

maine de bifurcation. En effet, l'équation :

$$\underline{\underline{d\sigma}} : \underline{\underline{d\varepsilon}} = 0$$

est celle d'un cône elliptique dans l'espace à trois dimensions des contraintes ou déformations principales pour les lois incrémentalement linéaires par morceaux. Deux cas de figure se présentent :

- cette équation n'a pas de solutions et l'état de contrainte-déformation est inconditionnellement stable,
- l'équation possède des solutions, et l'état de contrainte-déformation n'est instable que pour les directions de sollicitations incluses sur ou dans les cônes.

L'ensemble des états de contraintes déformations pour lesquels la solution dégénère en une seule direction, définissent la limite du domaine de bifurcation. Pour un matériau donné, les états de contrainte-déformation situé à l'extérieur de cette limite sont inconditionnellement stables, et dans le cas inverse, ils sont potentiellement instables. La rupture effective dépend de la direction des sollicitations et des paramètres de contrôles. Il a été montré de plus que cette limite du domaine de bifurcation est donnée par la relation :

$$\det(\underline{\underline{M}}_s) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \det(\underline{\underline{N}}_s) = 0$$

pour des modèles incrémentaux linéaires par morceaux, avec $\underline{\underline{M}} = \underline{\underline{N}}^{-1}$ les matrices constitutives, et $\underline{\underline{M}}_s$ et $\underline{\underline{N}}_s$ leur partie symétrique respective. En revanche, dans le cas de matériaux associés,

$$\underline{\underline{M}} = \underline{\underline{M}}_s$$

donc la limite du domaine de bifurcation coïncide avec le critère de plasticité limite, mais,

$$\det(\underline{\underline{M}}_s) = 0 \neq \det(\underline{\underline{N}}_s) = 0$$

La double interprétation de cette condition avec $\underline{\underline{M}}_s$ et $\underline{\underline{N}}_s$ disparaît sur le critère de plasticité. Les domaines de bifurcation tridimensionnels, ainsi que des cônes d'instabilités tridimensionnels, ont été présentés avec les modèles de Darve. D'autre part, en simulant des trajets de chargements suivant une direction fixée dans le plan déviatoire, nous avons pu mettre en évidence que l'ouverture des cônes d'instabilités était non seulement dépendante du ratio $\eta = q/p'$ mais aussi fortement de l'angle de Lode. En effet, à premier et deuxième invariant des contraintes fixés, l'ouverture des cônes varie fortement avec l'angle de Lode. Ainsi, la façon d'appliquer un déviateur à un échantillon de sol est déterminant pour les instabilités qui peuvent se développer. Enfin, il a aussi été observé, que l'orientation générale et l'ouverture des cônes d'instabilités n'étaient pas influencées par le caractère dilatat ou contractant d'un matériau. Aussi pense-t-on que les instabilités matérielles ne sont pas liées aux variations de volumes constitutives, mais bien aux phénomènes physiques qui rendent un matériau non associé. Il faut donc bien dissocier ces deux caractéristiques qui ne sont pas complètement liées d'un point de vue mathématique : une loi non associée permet en général de mieux décrire les variations de volumes réelles (par l'introduction de paramètres supplémentaires) qu'un modèle associé. Néanmoins, un modèle élasto-plastique vérifiant la règle de normalité basée sur une surface de charge de type Mohr-Coulomb décrira des variations de volumes, sans permettre une seule instabilité avant le critère de rupture, alors qu'un modèle toujours basé sur une surface de charge de type Mohr-Coulomb, mais non associé avec une surface d'écoulement de type Von-Mises, ne permettra pas de décrire de variations de volumes, mais des instabilités se produiront avant la limite de plasticité.

Dans le troisième chapitre, nous nous sommes intéressés à l'intégration du travail du second ordre local sur toute une structure, tentant ainsi d'exploiter l'expression originale de Hill (1.91). Pour mener cette étude, la méthode des éléments finis a été utilisée, grâce au code de calcul Lagamine (Lagamine (2007)). Après avoir montré que le travail du second ordre global était équivalent au produit scalaire des vecteurs forces et déplacements généralisés, l'étude aux valeurs et vecteurs propres de la partie symétrique de la matrice de rigidité semble s'imposer. Dans ces conditions, le formalisme global devient identique à la formulation locale. Néanmoins, si au niveau local les difficultés liées à la non linéarité de l'opérateur constitutif pouvaient être levées pour les modèles incrémentaux linéaires par morceaux grâce à l'exploitation des zones tensorielles, ces problèmes subsistent encore en grande partie pour l'opérateur global non linéaire d'une structure. D'un point de vue général, le très grand nombre d'opérateurs tangents qu'il est possible de construire en fonction de la direction du vecteur incrément de chargement généralisé reste impossible à prendre en compte. À l'échelle d'un ouvrage, les instabilités ne sont étudiées que sur le chemin de chargement imposé par les conditions aux limites grâce à la matrice de rigidité tangente globale (correspondant au solide linéaire de comparaison de Hill (Hill (1959))). Comme pour le cas local, l'ouvrage étudié est instable lorsque l'une des directions instables, détectée avec la partie symétrique de la matrice de rigidité globale, se confond avec la direction des sollicitations. La rupture effective n'a lieu que si de plus les variables de chargement appropriées sont utilisées.

Avec la loi Plasol, des analyses de la matrice de rigidité ont été menées pour trois problèmes aux limites différents. Le premier problème : simulation de triaxiaux drainés homogènes, a permis de vérifier qu'il n'y avait pas d'erreur entre les formulations locales et globales et que la finesse et le type de maillage n'avait pas d'influence sur les résultats. Ensuite deux problèmes heuristiques classiques de mécanique des sols ont été traités : simulation axisymétrique d'une fondation superficielle sur un massif de sol, et cas d'une fondation superficielle en tête d'une pente. Pour ces deux derniers cas, l'annulation du déterminant de la partie symétrique de la matrice de rigidité s'est manifestée bien avant l'apparition des premières instabilités locales, ce qui signifie que des directions instables se développent pour le solide linéaire de comparaison, mais ne sont pas rencontrées par le chargement imposé. L'évolution des isovalues du travail du second ordre local décrit correctement le développement des zones instables jusqu'à la rupture vis-à-vis du chargement imposé. Si l'étude de la matrice de rigidité semble avoir un intérêt limité par rapport à l'utilisation du critère du fait de sa complexité de mise en œuvre, les motivations pour effectuer ce genre d'analyse ont été relancées grâce à l'observation suivante : avec la loi Plasol, il semble que le champ de déplacements propre associé à la première valeur propre nulle de la partie symétrique de la matrice de rigidité décrit très bien le mode de rupture observé sur un chemin monotone. Ainsi, nous avons pu aussi vérifier sur les cas de la fondation axisymétrique et de la pente, que le vecteur propre associé à la première valeur propre nulle de la partie symétrique de la matrice de rigidité globale décrit avec une très bonne approximation le mode de rupture observé en fin de calcul. Si à l'avenir on arrive à montrer que cette caractéristique est intrinsèque aux matériaux granulaires, il sera alors possible de diminuer dans certains cas les temps de calcul grâce à l'estimateur donné par ce vecteur. Cependant pour le cas de maillages avec beaucoup d'éléments, le calcul des modes propres prend aussi beaucoup de temps, il n'est donc pas évident que ce calcul sur quelques pas de chargement soit moins long que le calcul total sans analyse des modes propres. Enfin la formule proposée par Khoa (Khoa (2005)) pour le travail du second ordre global normalisé permet d'utiliser cette quantité au même titre qu'un coefficient de sécurité vis-à-vis de la stabilité globale de la structure. En effet, ce scalaire diminue fortement avec le développement des zones instables pour tendre à s'annuler à la divergence du calcul, qui est considéré comme représentatif de la rupture globale du massif.

Enfin, deux applications sur lesquelles j'ai été amené à travailler durant ma thèse ont été présentées dans le dernier chapitre. Une modélisation bidimensionnelle (déformations planes) des glis-

sements de terrains de Petacciato (Italie) et Ballendaz (Savoie) a été réalisée pour chacun des sites. Comme dans les deux cas, nous avons utilisé, en plus de la loi Plasol, un modèle permettant de décrire le couplage hydro-mécanique dans les sols non saturés, un bref état de l'art sur cette thématique a d'abord été effectué, permettant ainsi de justifier le modèle utilisé. Sur ces deux glissements, il semble que le paramètre de chargement déclencheur était de type hydraulique (non sismique). Comme l'hydrologie d'un site naturel est parfois très complexe à décrire, nous avons décidé de simuler l'influence du niveau de la nappe phréatique sur la stabilité de chaque site en augmentant le niveau de cette nappe pas à pas et en calculant les valeurs du travail du second ordre local en tous points. Les résultats ont montré qu'il fallait pratiquement totalement saturer le massif de Petacciato pour retrouver les surfaces de glissements observées in situ. Ce résultat est positif, car il aurait été difficile de retrouver ces zones instables avec un critère de plasticité classique pour une pente de seulement 6° en moyenne. Pour le site de Ballendaz, très peu de données mécaniques et morphologiques étaient disponibles. Néanmoins, malgré nos estimations grossières sur la composition des matériaux, nous avons pu mettre en évidence que le pied de cette pente est bien la partie la plus instable du massif, comme il est observé sur le site réel. De plus il est probable qu'un glissement relativement violent se produise à l'avenir, car les zones instables concentrées sur une faible surface au pied de la pente, se trouvent, selon notre modélisation, à la limite du critère de plasticité. Finalement, si les modèles peuvent encore beaucoup progresser, et notamment ceux décrivant le couplage hydro-mécanique, il est important d'essayer d'estimer la marge de progression des technologies permettant de caractériser la morphologie et les propriétés géotechniques des sites naturels. Actuellement il ne semble pas possible d'utiliser des modèles aussi complexes compte tenu des incertitudes très grandes qu'il y a sur pratiquement chacun des paramètres d'entrées de ces modèles dans le cas d'une étude rudimentaire de site. En revanche, pour beaucoup d'autres applications, où les structures et ouvrages géotechniques ont été fabriqués par l'homme (et donc sont bien connus), alors l'utilisation et le développement de tels modèles, même plus complexes pour prendre en compte d'autres couplages multi-physiques, semble totalement légitime et conseillée.

Perspectives

Concernant le travail du second ordre local, le tour de la question est en grande partie achevé, du moins lorsque l'hypothèse de petites transformations est émise. Il me semble que les avancées peuvent surtout provenir d'un point de vue expérimental : par exemple tester certaines directions de chargement incluses dans les cônes supérieurs observés avec les lois de Darve et Pastor. D'un point de vue analytique, il peut être aussi intéressant d'essayer de considérer des espaces de contraintes et déformations à six degrés de liberté indépendants, pour sortir de l'hypothèse de coaxialité de ces deux espaces (les bases principales des tenseurs contraintes et déformation coïncident). Je crois qu'il est également nécessaire de considérer le cas des grandes transformations.

Pour ce qui est de l'analyse de la stabilité des structures, le champ des recherches futures semble très vaste. Beaucoup des résultats présentés dans le troisième chapitre sont encore à confirmer en utilisant d'autres modèles de comportement par exemple. De plus, la non linéarité incrémentale des lois de comportements ajoute beaucoup de difficultés théoriques qui seront à considérer.

De manière générale à propos du critère de Hill, il faut voir dans quelle mesure on peut l'utiliser dans d'autres champs de la mécanique des milieux continus, que celui de l'élasto-plasticité non associée. Pour des matériaux de type béton, dans les lois d'endommagement phénoménologiques, le comportement en petites déformations est hyper-élastique, puis un seuil de limite élastique est défini de façon "empirique" avant de commencer la phase d'endommagement. Si l'endommagement est non-associé, probablement le critère du travail du second ordre devrait s'appliquer.

Enfin, concernant les couplages hydro-mécaniques, et multi physiques de manière plus générale, ce sont des thématiques relativement jeunes et actuellement en pleine expansion. Dans la description du comportement hydraulique des phases fluides dans les sols, il faut encore améliorer les méthodes numériques pour pouvoir prendre en compte les multiples sources de non linéarités : par exemple pour

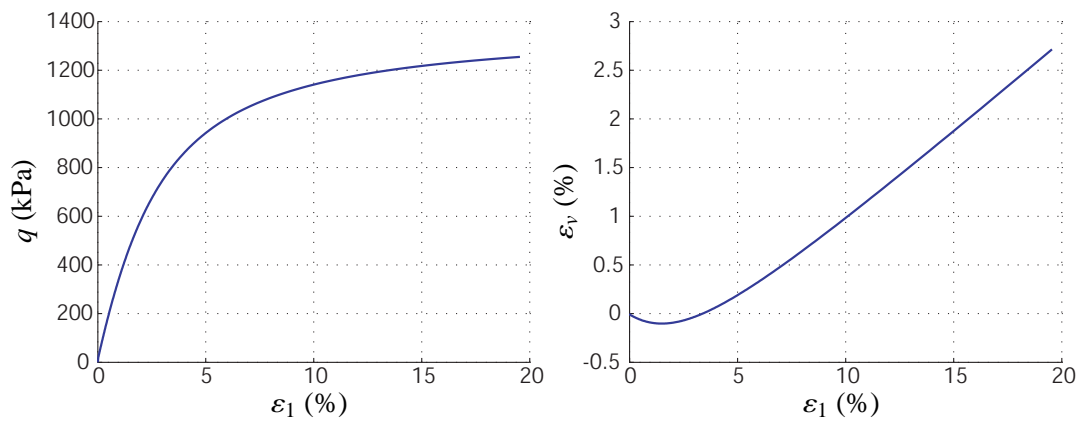
prendre en compte les phénomènes d'hystérésis observés sur les courbes de rétention d'eau.

ANNEXE A

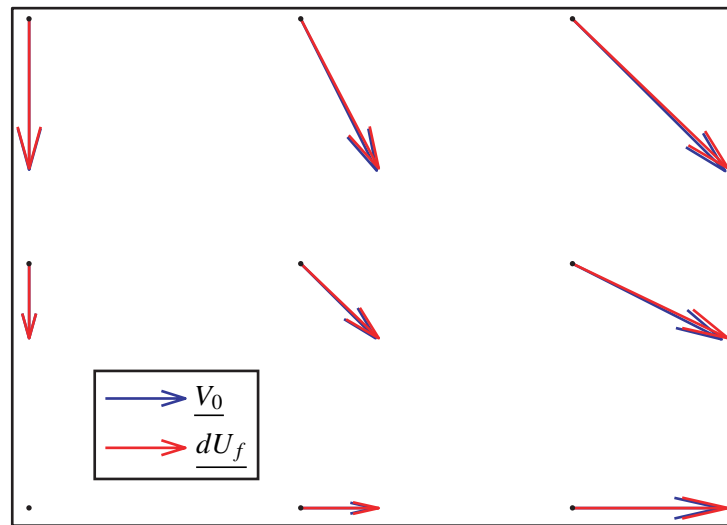
Comparaison de V_0 avec dU_f pour un sol dense

$E = 95 \text{ MPa}$	$C = 10 \text{ kPa}$
$\nu = 0.21$	$\phi = 35^\circ$
$\rho = 2740 \text{ kg/m}^3$	$\psi = 5^\circ$

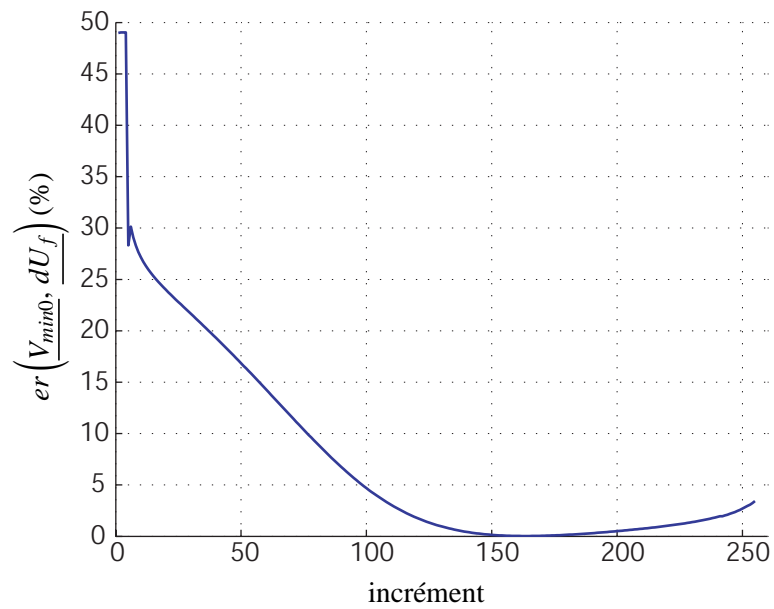
T . A.1 – Principales caractéristiques du sol.



F . A.1 – Réponse du matériau au triaxial drainé, $p_0 = 500 \text{ (kPa)}$.



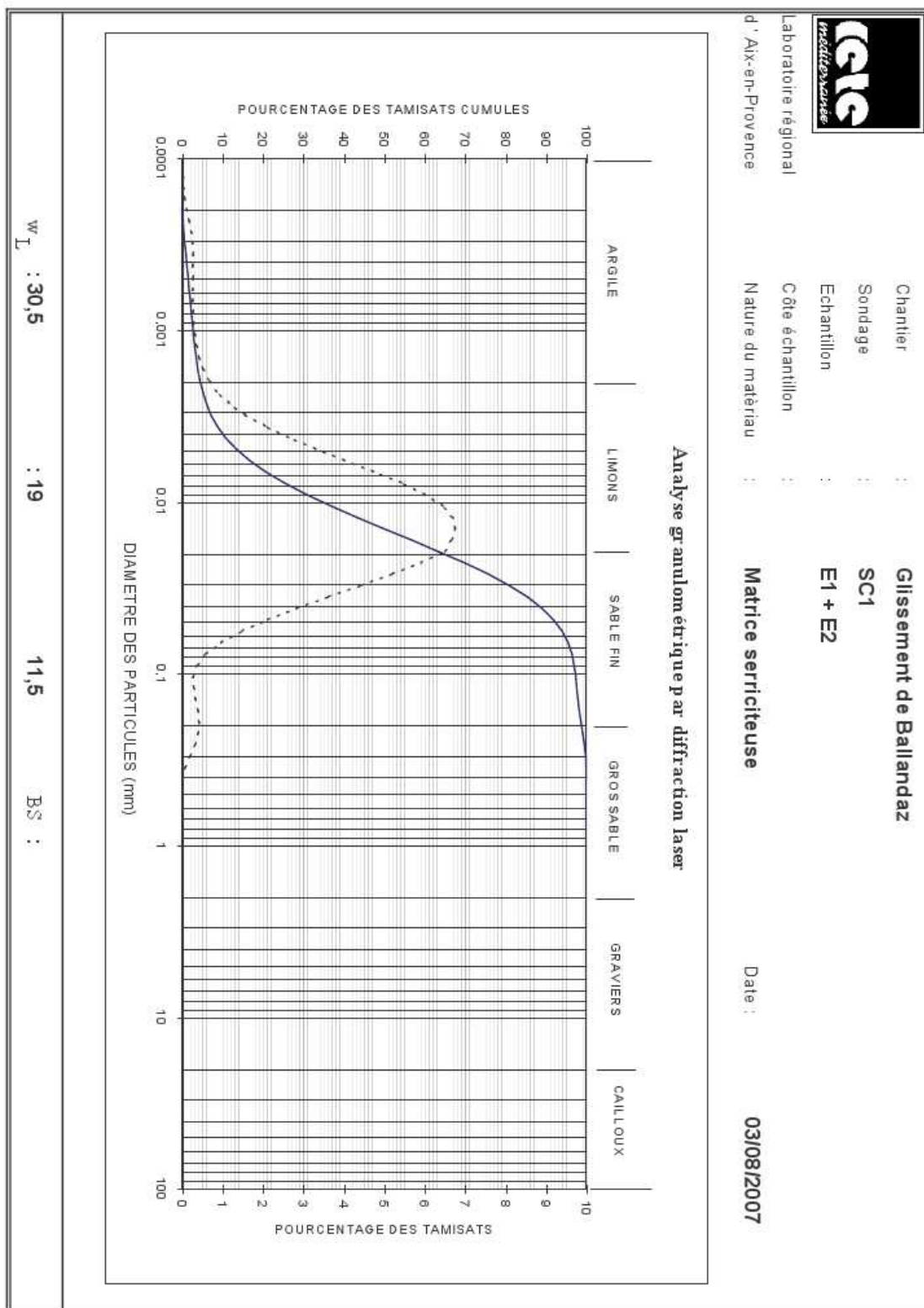
F . A.2 – \underline{V}_0 superposé avec \underline{dU}_f , $er(\underline{V}_0, \underline{dU}_f) = 0.0325\%$



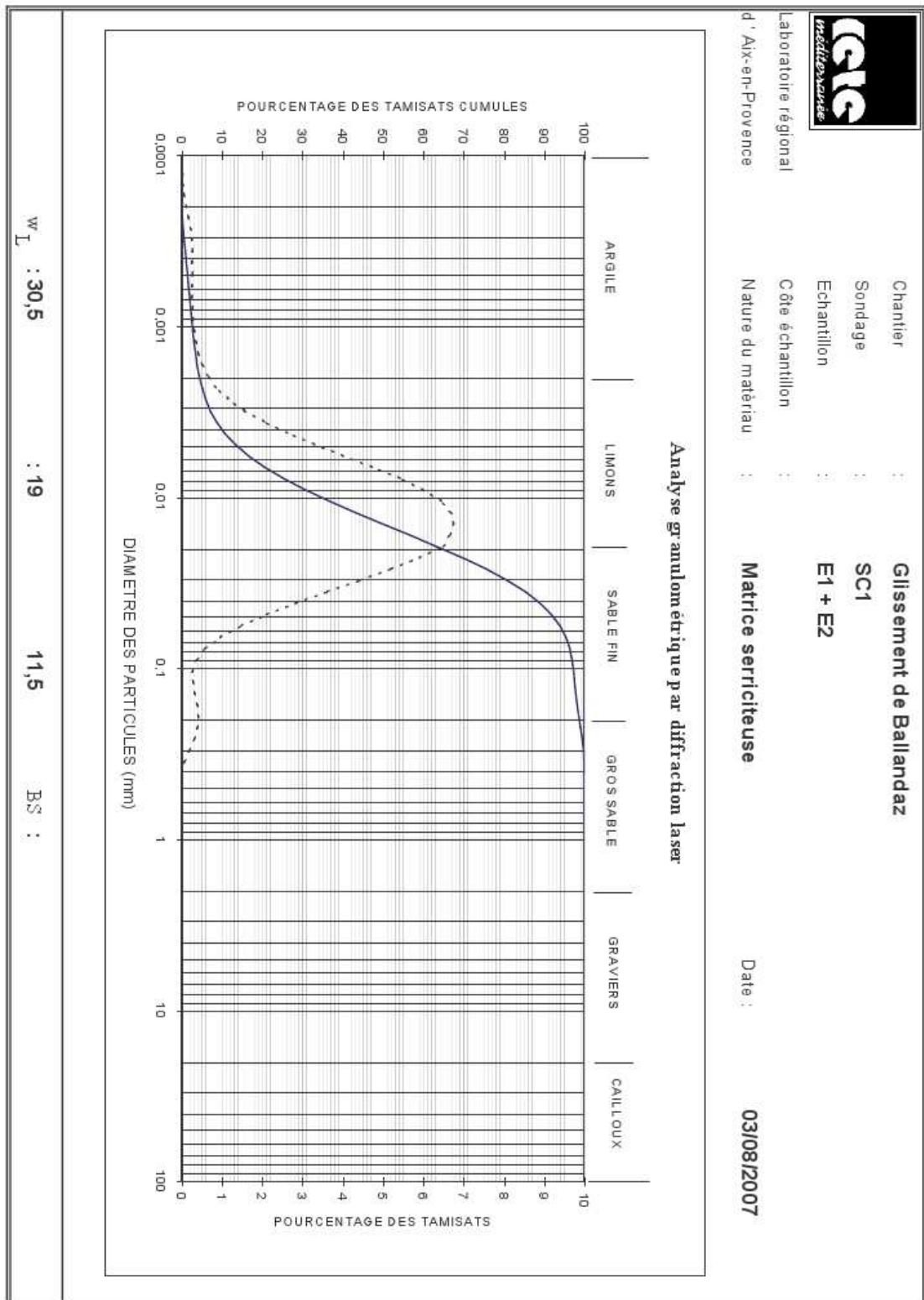
F . A.3 – Évolution de $er(\underline{V}_{min0}, \underline{dU}_f)$ au cours du chargement.

ANNEXE B

Granulométrie par diffraction laser: sol de Ballendaz



F . B.1 – Courbe granulométrique obtenus par diffraction laser de l'échantillon DAZ01.



F .B.2 – Courbe granulométrique obtenus par diffraction laser de l'échantillon DAZ02.

Bibliographie

- A , E.E., G , A. et J , A. (1990). A constitutive model for partially saturated soils. *Geotechnique*, 40(3):405–430.
- B , J.D. (1998). *Finite element modelling in structural and petroleum geology*. Thèse de doctorat, Université de Liège, Belgique.
- B , Z.P. et C , L. (1991). *Stability of structures*. Oxford University Press.
- B , A.M. (1955). The use of slip circle in the stability analysis slope. *Géotechnique*, 5:7–17.
- B , A.M. et B , G.E. (1963). Some aspects of the effective stress in saturated and unsaturated soils. *Géotechnique*, 13(3):177–197.
- B , R.N. et C , A.T. (1966). Properties of porous media affecting fluid flow. *J. Irrig. Drain. Div.*, 92:61–88.
- C. C (1773). Sur une application des règles de maximis et de minimis à quelques problèmes de statique relatifs à l'architecture. *Mémoires de l'Académie Royale*, pages 343–382.
- C , A. et K' , J. (1966). *traité de mécanique des sols*. Gautier-Villars.
- C , S. (1983). *Simulation numérique du laminage en cannelures, essais de qualification de divers éléments*. Université de Liège. Rapport semestriel (chap. 2).
- C , N. (2007). *Quelques études de stabilité en génie civil : élasticité, plasticité et endommagement*. H.D.R., Université de Rennes 1.
- C , R., C , D. et V , G. (2004). Loss of uniqueness and bifurcation vs instability: some remarks. *Revue française de génie civil*, 8(5-6):517–535.
- C , R. (1987). *Approche unifiée de quelques problèmes non linéaires de mécanique des milieux continus par la méthode des éléments finis*. Thèse de doctorat, Université de Liège.
- C , R., R , J.P. et C , S. (1997). The effects of hydromechanical coupling on the numerical modelling of strain localization. In *COMPLAS 5*. Barcelona.
- C , B. (1986). *Manuel de calibration*. INPG.
- C -D , J.L. (1986). *Comportement des matériaux granulaires sous fortes contraintes*. Thèse de doctorat, USMG-INPG, Grenoble.
- C , F. (2003). *Couplage Thermo-Hydro-mécanique dans les sols et les roches tendres*. Thèse de doctorat, Université de Liège.
- C , E. et C , F. (1909). *Théorie des Corps Déformables*. Hermann et Fils. Paris.
- C , O. et F , J.M. (2002). *Mécanique des sols non saturés*. Hermès-Lavoisier.

- C , O. et S , J. (1979). Analyse de la stabilité des ouvrages en terre par le calcul à la rupture. *Annales des Ponts et Chaussées*, 12:7–35.
- C , D. (1952). The movement and distribution of water in soils. *Géotechnique*, 3(1):1–16.
- D , F. et C , B. (1987). Constitutive instabilities in incrementally non-linear modelling. *In Constitutive laws for Engineering Materials*, pages 301–310. C. S. Desai.
- D , F., F , E. et M , M. (1995). Yield surfaces and principle of superposition revisited by incrementally non-linear constitutive relations. *International Journal of Plasticity*, 11(8):927–948.
- D , F. et L , S. (1982). Incremental constitutive law for sands and clays. simulations of monotonic and cyclic tests. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 6:243–275.
- D , F., S , G., L , F. et K , H.D.V. (2004). Failure in geomaterials : continuous and discrete analyses. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193:3057–3085.
- D , F., S , L., D , A. et N , F. (2007). Bifurcations in granular media: macro- and micro-mechanics approaches. *Comptes Rendus Académie des Sciences Mécanique*, 335:496–515.
- D , F. et V , I., éditeurs (2004). *Degradations and instabilities in geomaterials*, volume 461 de *CISM courses*. SPRINGER.
- D , E. et B , J. (1973). The effect of increasing strength with depth on the bearing capacity of clay. *Géotechnique*, 23(4):551–563.
- D , P. et C , Y.J. (2000). L'eau dans les sols non saturés. *Techniques de l'Ingénieur*, C2:C301.
- D , J. et C , R. (2002). Shear band analysis and shear moduli calibration. *International Journal of Solids and Structures*, 39:3757–3776.
- D , G., T , G. et L , E. (2005). *Méthode des éléments finis*. Hermès Science Publication.
- D , D.C. et P , W. (1952). Soils mechanics and plastic analysis or limit design. *Quarterly Applied Mathematics*, 10(2):157–165.
- D , J.M. (1996). State of the art: limit equilibrium and finite element analysis of slopes. *Journal of Geotechnical Engineering*, 122(7):577–596.
- E , R.D., R , P.C. et M , B. (1992). General framework for stability analysis of slopes. *Géotechnique*, 42(4):603–615.
- F , W. (1936). Calculation of the stability of earth dams. *In 2nd International Congress on Large Dams*, volume 4, page 445. Washington D.C.
- F M , J.A., P , M., M , P., T , L., H , M.I., G , E. et T , R. (2004). Modelling of diffuse failure mechanisms of catastrophic landslides. *Computers methods in applied mechanics and engineering*, 193:2911–2939.
- F , J.M., V , J-C., H , P.J., G C , A. et K -S , S. (2002). Aspects of the behavior of compacted clayey soils on drying and wetting paths. *Canadian Geotechnical Journal*, 39:1341–1357.
- F , D.G. et R , H. (1993). *Soil mechanics for unsaturated soils*. Wiley.
- G , P. (1973). *Cours de mécanique des milieux continus*, volume 1. Masson et Cie.
- G , A.A. (1920). The phenomenon of rupture and flow in solids. *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, 221:163–198.
- G , G. (1979). A comparison of some constitutive laws for soils under radially loading symmetric loading and unloading. *In Third International conference on numerical Methods in Geomechanics*, pages 1309–1323. A.A. Balkema.
- H , A.M.H. (1989). *Contribution à la méthode du formage des métaux par la méthode des éléments finis*. Thèse de doctorat, Université de Liège.

- H , R. (1950). *The mathematical theory of plasticity*. Oxford, Clarendon Press.
- H , R. (1958). A general theory of uniqueness and stability in elasto-plastic solids. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 6:236–249.
- H , R. (1959). Some basic principles in the mechanics of solids without a natural time. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 7:209–225.
- H , R. (1967). Eigenmodal deformations in elastic/plastic continua. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 15:371–386.
- I , S. et N , R. (2001). On the value of the second order work in homogeneous tests on loose sand specimens. In M , H.B., D , A. et P , E., éditeurs : *Bifurcation and Localisation Theory in Geomechanics*, pages 209–216. A.A. Balkema.
- I , G.R. (1958). Fracture. *Handbuch der Physik (Springer Berlin)*, 6:551–590.
- J , J.E.B. et B , J.B. (1962). Limitations if the use of effective stresses in partly saturated soils. *Géotechnique*, 12(2):125–144.
- K , N. et K , M.H. (1995). On the theory of three-dimensional consolidation in unsaturated soils. In *1st International Conference on Unsaturated Soils*, volume 2, pages 745–750.
- K , H.D.V. (2005). *Modélisation des glissements de terrains comme un problème de bifurcation*. Thèse de doctorat, INPG.
- K , H.D.V., G , I.O., D , F. et L , F. (2006). Diffuse failure in geomaterials: Experiments and modelling. *Computer and Geotechnics*, 33:1–14.
- L , P.V. (1992). Static instability and liquefaction of loose fine sandy slopes. *Journal of Geotechnical Engineering*, 118(1):51–71.
- L (2007). *User's Manual*. University of Liège, Département GEOMAC, Sart-Tilman B52/3, Chemin des chevreuils 1, 4000 Liège.
- L , L. et N , M. (2008). On the use of the generalised effective stress in the constitutive modelling of unsaturated soils. *Computers and Geotechnics*, In press.
- L , F. (2007). *Modélisations numériques par éléments finis et instabilités en géomécanique : de la loi de comportement à l'ouvrage*. H.D.R., Institut National Polytechnique de Grenoble.
- L , F. et D , F. (2002). Modelling of slope failure by a material instability mechanism. *Computer and Geotechnics*, 29:301–325.
- LESSLOSS-R (2004). The petacciato landslide: geological and geotechnical data. Rapport technique, SGI: Studio Geotecnico Italiano, Campobasso-Italy.
- L , X-L. (2000). *Comportement hydromécanique des sols fins: de l'état saturé à l'état non saturé*. Thèse de doctorat, Université de Liège, Belgique.
- L , J. et K , H.L. (1981). Critical density of sand. *Géotechnique*, 31(2):231–245.
- L , A.M. (1907). Problème général de la stabilité des mouvements. In *Annales de la faculté des sciences de Toulouse*, volume 9, pages 203–274.
- M , J. (1966). Conditions de stabilité et postulat de drücker. In K , J. et S , P.M., éditeurs : *Rheology and Soils Mechanics*, pages 58–68. Berlin Springer.
- M , M. et S , J. (1979). Capacité portante des semelles filantes. *Revue Française de Géotechnique*, 9:51–76.
- M , M. (1993). *Stabilité des sables lâches: essais et modélisation (Stability of loose sands: tests and modelling)*. Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier - Grenoble, France.
- M , E. (1938). *Ingenieur-Archiv*, 9:116.
- M , Z. (1963). Non-associated flow laws in plasticity. *Journal de Mécanique*, 2:21–42.
- M , Z. (1966). On forms of constitutive laws for elastic-plastic solids. *Archive of Mechanics Stosovanej*, 18:1–34.

- N , F. (2003). Constitutive modelling of a snowcover with a change in scale. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 22(3):325–340.
- N , F. (2004a). Constitutive modeling of snow as a cohesive granular material. *Granular Matter*, 6:47–60.
- N , F. (2004b). From a constitutive modelling of a snowcover to the design of flexible structures part i: Mechanical modelling. *International Journal of Solids and Structures*, 41(11-12):3317–3337.
- N , F. (2008). private communication.
- N , F. et D , F. (2006). Micro-mechanical investigation of material instability in granular assemblies. *International Journal of Solids and Structures*, 43:3569–3595.
- N , F., D , F. et K , H.D.V. (2007). Bifurcation and second-order work in geomaterials. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 31:1007–1032.
- N , R. (1991). A note on sand liquefaction and soil stability. In *3rd International Conference on Constitutive Laws for Engineering Materials: Theory and Applications*, pages 153–156, Tuscon, USA.
- N , R. (1994). Controllability of the incremental response of soil specimens subjected to arbitrary loading programs. *Journal of the Mechanical behavior of Materials*, 5(2):193–201.
- N , R. (2004). Controllability of geotechnical testing. *Failure, Degradation and Instabilities in Geomaterials. Revue française de génie civil*, 8(5-6):613–634.
- N , M. et L , L. (2008a). Advances in modelling hysteretic water retention curve in deformable soils. *Computers and geotechnics*, In press.
- N , M. et L , L. (2008b). Effective stress concept in unsaturated soils :clarification and validation of an unified framework. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 32:771–801.
- P , M., L , T., L , X. et Z , O.C. (1999). Stabilized low order finite elements for failure and localization problems in undrained soils and foundations. *Computers Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 174:219–234.
- P , M., Q , M. et Z , O.C. (1997). A mixed displacement-pressure formulation for numerical analysis of plastic failure. *Computers and Structures*, 62:13–23.
- P , M. et T , C., éditeurs (2004). *Numerical Modelling in Geomechanics*. Kogan.
- P , M., Z , O.C. et C , A.C. (1990). Generalized plasticity and the modelling of soil behaviour. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 14:151–190.
- P , H., éditeur (1999). *Material Instabilities in Elastic and Plastic Solids*. Springer. CISM Courses.
- P , L. (1924). In *1st International Congress of Applied Mechanics*.
- Q , M., P , M. et Z , O.C. (2000). Application of a fractional step method to localization problems. *Computers and Structures*, 74:535–2545.
- Q S , N. (2000). *Stability and Nonlinear Solid Mechanics*. John Wiley and Sons.
- R , W.J.M. (1857). On the stability of loose earth. *Philosophical Transaction of the Royal Society of London*, pages 343–382.
- R , A. (1930). *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, 10:266.
- R , O. (1885). On the dilatancy of media composed of rigid particles in contact, with experimental illustrations. *Philosophical Magazine*, 20:469–481.
- R , J.R. (1968). A path-independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks. *Journal of Applied Mechanics (ASME)*, 35:379–386.
- R , J.R. (1976). The localization of plastic deformation. In K , W.T., éditeur : *Theoretical and Applied Mechanics*, pages 207–220. 14th IUTAM Congress Amsterdam.

- R , P. (2005). *Mécanique des milieux continus*. Presse Universitaire de Lyon (ENTPE collection).
- R , J.W. et R , J.R. (1975). Conditions for the localization of deformations in pressure-sensitive dilatant materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 23:371–394.
- S , J. (1983). *Calcul à la rupture et analyse limite*. Presses de l'ENPC.
- S , G., D , F., D , J. et G , I.O. (2005). Diffuse modes of failure in geomaterials. In D B , éditeur: *Deformation characteristics in geomaterials*, pages 181–200.
- S , L. (2007). *Modélisation discrètes de la rupture dans les milieux granulaires*. Thèse de doctorat, INPG.
- S , J.A., D'H , R.D. et K , J. (1985). The liquefaction of sands, a collapse surface approach. *Canadian Geotechnical Journal*, 22:564–578.
- S , S.W. (1988). Lower bound limit analysis using finite elements and linear programming. *Internationnal Journal for Numerical and Analytical methods in Geomechanics.*, 12(1):61–77.
- S , S.W. (1989). Upper bound limit analysis using finite elements and linear programming. *Internationnal Journal for Numerical and Analytical methods in Geomechanics.*, 13(3):263–282.
- S , F. (2005). *Cohésion par capillarité et comportement mécanique de milieux granulaires*. Thèse de doctorat, Univerité Montpellier II.
- S , D., S , H.E. et L , A. (1999). *Cours de Physique De Newton à Mandelbrot*. Springer-Verlag France.
- S , P. (1987). Lois de comportement: principes généraux. In *Manuel de rhéologie*, pages 103–127. ENPC.
- T , R. (2004). An extended cam-clay model for unsaturated soils with hydraulic hysteresis. *geotechnique*, 54(3):223–228.
- T , A. (2008). private communication.
- T , K. (1936). In *1st International Conference for Soil Mechanics and Foundation Engineering*. Cambridge.
- T , R. (1972). *Essai d'une théorie générale des modèles*. W.A. Benjamin INC. Ediscience S.A.
- T , T.Y. (1961). *Plastic flow and fracture in solids*. New York.
- T , J.M.T. et H , G.W. (1973). *A General Theory of Elastic Stability*. John Wiley and Sons.
- T , H.E. (1864). Memoir on the flow of solid bodies under strong pressure. *Comptes Rendus de l'Académie de Sciences*, 59:754.
- V E , H.A.M. (1980). Isotropic yield surfaces in three dimensions for use in soil mechanics. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 4:89–101.
- V G , M.T. (1980). A closed form for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils. *Soil Science Society of America Journal*, 4:892–898.
- V , I. et S , J., éditeurs (1995). *Bifurcation Analysis in Geomechanics*. Blackie Academic and Professional.
- V , H., D , J., O , J. V., F , J. et B , J. (1992). Functional evaluation of pedotransfert functions for the estimation of soil hydraulic properties. *Soil Science Society of America*, 56:1371–1378.
- V , H., M , J. et F , J. (1990). Estimating unsaturated hydraulic conductivity from easily measured soil properties. *Soil Science*, 149(1):1–12.
- V , H., M , J., F , J. et D , P. (1989). Estimating the soil moisture retention characteristic from texture, bulk density, and carbon content. *Soil Science*, 148(6):389–403.
- V M , R. (1928). *Z. Angew. Math. Mech.*, 8:161–185.
- W , X.C. (1993). *Modélisation numérique des problèmes avec localisation en bandes de cisaillement*. Thèse de doctorat, Université de Liège.

- Zienkiewicz, O.C. (2006). *The Finite Element Method*. Butterworth-Heinemann. 6th edition.
- Zienkiewicz, O.C., Cunniff, A.H.C., Plesha, M., Sulem, B.A. et Sulem, T., éditeurs (1999). *Computational Geomechanics*. Wiley.