



**HAL**  
open science

# Propagation brutale de fissures et effets dynamiques : application industrielle à la notion de longueur d'arrêt

Pierre-Emmanuel Dumouchel

► **To cite this version:**

Pierre-Emmanuel Dumouchel. Propagation brutale de fissures et effets dynamiques : application industrielle à la notion de longueur d'arrêt. Mécanique [physics.med-ph]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2008. Français. NNT : . tel-00355825

**HAL Id: tel-00355825**

**<https://theses.hal.science/tel-00355825>**

Submitted on 24 Jan 2009

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Thèse de Doctorat de l'Université Pierre et Marie Curie

Spécialité : **Mécanique**

présentée par

**Pierre-Emmanuel Dumouchel**

pour obtenir le grade de docteur de l'Université  
Pierre et Marie Curie

Sujet de la thèse :

**Propagation brutale de fissures  
et effets dynamiques : application industrielle  
à la notion de longueur d'arrêt**

Soutenue le 6 Mars 2008

devant le jury composé de :

M. Huy Duong BUI	Examineur
M. Gilles DEBRUYNE	Invité
M. André DRAGON	Rapporteur
Mme. Françoise LENE	Examineur
M. Eric LORENTZ	Examineur
M. Jean-Jacques MARIGO	Directeur de thèse
M. Lev TRUSKINOVSKY	Rapporteur

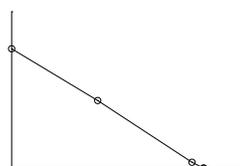


# Remerciements

En espérant n'oublier personne et par ordre alphabétique je tenais à dire, **aux personnes d'Edf**, *aux gens de Paris VI*, à **ma famille**, AUX GRANDES PERSONNES DE PARIS XIII, *aux membres de mon jury* ; et plus particulièrement, à **ma femme**♥, à *mon directeur de thèse*\*, à **mon voisin de bureau**⊙, **aux philosophes du LaMSID**☆, *aux relecteurs*⊙, *aux visionnaires du LMM*⊙, à **LA MARIGO'S Team**♯, à **mes encadrants d'Edf**§ :

*Adrien Mamou-Mani*⊙, *Amine Sbitti*☆, *André Dragon*, ANDRÉ JAUBERT♯, *Anne Bague*, AURELIE WAUTHIER, Benjamin Groult☆, *Benoît Dumouchel*, BLAISE BOURDIN♯, *Carole Henninger*, *Claire Dumouchel*, *Corrado Maurini*, *Elisee Mackagny*, *Eric Lorentz*⊙§, *François Dumouchel*, *Françoise Lene*, *Géraldine Fassassi*, *Gilles Debruyne*⊙§, GILLES FRANCFORT, *Hanen Amor*♯, HICHEME FERDJANI♯, *Hong-Minh Nguyen*, *Huy-Duong Bui*, *Jean-Baptiste Brunac*, *Jean-Baptiste Dumouchel*, *Jean-Baptiste Leblond*, *Jérôme Laverne*♯, *Jean-Jacques Marigo*\*♯⊙, *Joel Frelat*, *Joselin Delmas*, *Khaled Hadj-sassi*⊙☆, *Laurence Dumouchel*, *Lev Truskinovsky*, *Lili Ganjehi*⊙, *Marie-laure Dumouchel*♥⊙, *Mehdi Chraïbi*⊙, *Michael Baudoin*, MIGUEL CHARLOTTE♯, *Mohamed Hamdaoui*, *Mohamed Torkhani*, *Olivier Devauchelle*⊙, *Pascal Ray*, *Patrick Massin*, *Pc Compaq nx7010*⊙, *Pierre Koechlin*, *Pierre-Yves Lagree*, *Philippe Testud*☆, *RADHI ABDELMOULA*♯, *Rémi Bonnefoi*, *Renaud Bargellini*⊙♯, *Said Taheri*☆, *Samuel Geniaut*, *Sebastien Murer*, *Simon Marie*, *Sophie Dumouchel*, *Stéphane andrieux*, *THIBAUT WELLER*♯, *Thomas Emmert*, *Veronique Duwig*, *Vincent Flutet*, *Vincent Godard*, **XX Dumouchel**, *Yves Wadier*

,8.	,8.	8 8888888888	8 888888888o.	,o888888o.	8 8888
,888.	,888.	8 8888	8 8888 '88.	8888 '88.	8 8888
.'8888.	.'8888.	8 8888	8 8888 '88	,8 8888 '8.	8 8888
,8.'8888.	,8.'8888.	8 8888	8 8888 ,88	88 8888	8 8888
,8'8.'8888,8~8.'8888.		8 88888888888888	8 8888. ,88'	88 8888	8 8888
,8' '8.'8888' '8.'8888.		8 8888	8 8888888888P'	88 8888	8 8888
,8' '8.'88' '8.'8888.		8 8888	8 8888'8b	88 8888	8 8888
,8' '8.' '8.'8888.		8 8888	8 8888 '8b.	'8 8888 .8'	8 8888
,8' '8' '8.'8888.		8 8888	8 8888 '8b.	8888 ,88'	8 8888
,8' '8' '8.'8888.		8 88888888888888	8 8888 '88.	'8888888P'	8 8888

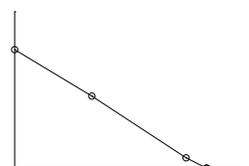




---

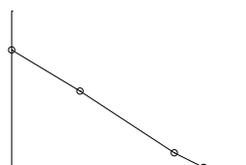
# Table des matières

<b>I</b>	<b>Etat de l'art</b>	<b>5</b>
A	Introduction . . . . .	6
B	Expériences autour de la rupture dynamique . . . . .	7
B.1	Quelques phénomènes en fissuration dynamique . . . . .	7
B.2	Propagation brutale puis arrêt du front de fissure . . . . .	11
B.3	Propagation d'une fissure à travers des milieux ayant une ténacité variable . . . . .	17
B.3.1	Rupture des multicouches . . . . .	17
B.3.2	Rupture des matériaux composites . . . . .	19
C	Cadre théorique de la rupture dynamique . . . . .	22
C.1	Approche énergétique de la mécanique de la rupture . . . . .	22
C.1.1	Le taux de restitution d'énergie en statique . . . . .	22
C.1.2	Le flux de l'énergie totale en dynamique . . . . .	23
C.1.3	Le flux d'énergie totale pour un cas 1D . . . . .	25
C.2	Présentation de quelques solutions analytiques . . . . .	26
D	Conclusion . . . . .	29
<b>II</b>	<b>Modèles à discontinuité de ténacité</b>	<b>31</b>
A	Introduction . . . . .	32
B	Présentation générale du modèle . . . . .	33
C	Réponses quasi-statiques . . . . .	35
C.1	Formulation du problème d'évolution . . . . .	35
C.2	Propriétés générales . . . . .	36
C.3	Quelques exemples . . . . .	39
C.3.1	Cas homogène . . . . .	39
C.3.2	Cas discontinu avec accroissement de la ténacité . . . . .	39
C.3.3	Cas discontinu avec diminution de la ténacité . . . . .	40
D	Réponse dynamique . . . . .	44
D.1	Formulation du problème de dynamique . . . . .	44
D.2	Propriétés générales . . . . .	45
D.3	Cas homogène . . . . .	48
D.4	Cas discontinu avec augmentation de la ténacité . . . . .	48
D.4.1	Phase de propagation dans le milieu à faible ténacité . . . . .	48
D.4.2	Phase d'arrêt à l'interface . . . . .	49
D.4.3	Phase de propagation dans le milieu à forte ténacité . . . . .	49
D.4.4	Convergence . . . . .	51



D.5	Cas discontinu avec diminution de la ténacité . . . . .	52
D.5.1	Phase de propagation dans le milieu à forte ténacité	52
D.5.2	Phase de propagation “rapide” dans le milieu à faible ténacité . . . . .	53
D.5.3	Phase d’arrêt dans le milieu à faible ténacité . . . . .	56
D.5.4	Phase de propagation “progressive” dans le milieu à faible ténacité . . . . .	56
D.5.5	Convergence vers la solution quasi-statique métastable . . . . .	57
E	Conclusion . . . . .	58
<b>III Décollement d’un film à travers un défaut de ténacité</b>		<b>59</b>
A	Introduction . . . . .	60
B	Comportement d’une fissure par rapport à un défaut . . . . .	61
B.1	Présentation du modèle . . . . .	61
B.2	Réponse quasi-statique . . . . .	62
B.2.1	Solution quasi-statique (UGM) . . . . .	62
B.2.2	Solution quasi-statique (ULM) . . . . .	63
B.3	Réponse dynamique . . . . .	65
B.3.1	Notations et définitions . . . . .	65
B.3.2	Phase de propagation lorsque $\ell(T) \leq \ell_{II}$ . . . . .	67
B.3.3	Phase de propagation lorsque $\ell_{II} < \ell(T) \leq \ell^d$ . . . . .	68
B.3.4	Phase de propagation lorsque $\ell(T) > \ell^d$ . . . . .	74
B.4	Influence de la vitesse de chargement sur la courbe $\ell \mapsto \mathcal{T}(\ell)$	75
B.4.1	Arrêt puis reprise du chargement . . . . .	76
B.4.2	Décharge puis recharge de la charge $T$ . . . . .	76
B.4.3	Arrêt puis reprise avec une vitesse de chargement différente . . . . .	77
B.5	Interprétation des résultats . . . . .	77
B.5.1	Analyse de la solution dynamique . . . . .	77
B.5.2	Une interprétation statique de la loi $\dot{\ell} = \mathcal{F}(\ell)$ . . . . .	80
B.5.3	Une interprétation dynamique de la ténacité $k^a(x)$ . . . . .	82
B.6	Construction d’une ténacité apparente pour un défaut $k(x)$ constant par morceaux . . . . .	82
B.6.1	$k(x)$ est constitué de trois discontinuités . . . . .	82
B.6.2	Cas général . . . . .	84
C	Analogie avec un chargement brutal . . . . .	86
C.1	Influence du chargement . . . . .	86
C.2	Influence du chargement en présence d’une discontinuité de ténacité . . . . .	88
D	Conclusion . . . . .	90
<b>IV Décollement d’un film à travers une infinité de défauts</b>		<b>91</b>
A	Introduction . . . . .	92
B	Réponse quasi-statique . . . . .	93
B.1	Solution quasi-statique (UGM) . . . . .	93
B.2	Solution quasi-statique (ULM) . . . . .	98

	B.3	Solution quasi-statique métastable . . . . .	98
C		Réponse dynamique . . . . .	100
	C.1	Notations et définitions . . . . .	101
	C.2	Construction des champs mécaniques . . . . .	103
	C.3	Construction des courbes limites . . . . .	108
	C.4	Approche numérique de la solution dynamique . . . . .	115
D		Conclusion . . . . .	119
<b>V</b>		<b>Propagation brutale à travers un milieu 2D</b>	<b>121</b>
A		introduction . . . . .	122
B		Présentation générale du modèle . . . . .	123
C		Approche quasi-statique . . . . .	125
	C.1	Solution quasi-statique (UGM) . . . . .	125
	C.2	Solution quasi-statique (ULM) métastable . . . . .	126
D		Approche dynamique . . . . .	128
	D.1	Introduction des techniques numériques en dynamique . . . . .	128
		D.1.1 Quelques éléments numériques important . . . . .	128
		D.1.2 Propagation de la fissure en dynamique par une technique numérique . . . . .	130
	D.2	Résultats et comparaisons . . . . .	136
		D.2.1 Résultats numériques avec $h = 1$ et $i = 1$ . . . . .	136
		D.2.2 Etude de l'influence des paramètres $h$ et de $i$ . . . . .	140
		D.2.3 Comparaison des solutions dynamiques et quasi- statiques . . . . .	142
	D.3	Analogie industrielle . . . . .	145
E		Conclusion . . . . .	146
<b>A</b>			<b>159</b>
A		Démonstrations et figures complémentaires pour le chapitre III . . . . .	159
	A.1	Solution quasi-statique . . . . .	159
	A.2	Solution dynamique . . . . .	160
	A.3	Solution dynamique pour un défaut constitué de plusieurs ténacités . . . . .	174
	A.4	Figures pour les études complémentaires . . . . .	177
<b>B</b>			<b>183</b>
A		Figures complémentaires du chapitre IV . . . . .	183
<b>C</b>			<b>191</b>
A		Démonstrations autour du chapitre V . . . . .	191

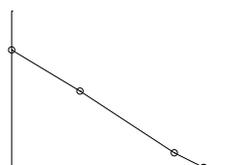




---

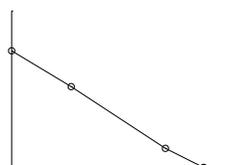
# Table des figures

I.1	Rupture d'une couche de glace sous un chargement dynamique cyclique . . . . .	7
I.2	Quelques trajets de fissuration à travers un bloc de glace . . . . .	8
I.3	Etat de fissuration sur une plaque de verre sous l'effet d'un projectile . . . . .	9
I.4	Fragmentation d'une bille après un choc thermique . . . . .	10
I.5	Etude de l'influence de la forme du projectile sur les trajets de fissuration à travers une plaque de verre : en haut à gauche, avec un projectile à bout sphérique de diamètre 5 mm ; en haut à droite, avec un projectile à bout plat et de diamètre 5 mm ; au milieu à gauche, avec un projectile à bout sphérique (5 mm) et dont la plaque est deux fois plus épaisse (4 mm) ; au milieu à droite et les deux figures du bas, avec un projectile ayant une section très petite (clou) et en faisant varier la force d'impact. . . . .	12
I.6	Section d'une cuve de réacteur avec son réseau de microfissures pour un scénario d'utilisation normale . . . . .	13
I.7	Présentation de l'essai sur DCB (Double Cantilever Beam) de Kalthoff . . . . .	15
I.8	Facteurs d'intensité de contrainte au cours de l'évolution de la fissure à travers l'éprouvette DCB . . . . .	16
I.9	Présentation de la géométrie du disque préfissuré soumis à un chargement thermique . . . . .	17
I.10	Présentation de la géométrie des multicouches . . . . .	18
I.11	Influence de la taille du défaut et de l'entaille sur le trajet de fissuration . . . . .	18
I.12	Composite à fibres : à gauche la forme générale du composite, à droite les différents modes de rupture . . . . .	19
I.13	A gauche : rupture du composite en alternant rupture des fibres et rupture de la matrice et à droite : rupture du composite avec des phases de délaminage et d'arrachement . . . . .	19
I.14	Evolution de la déformation en fonction du temps pour un essai de traction sur une éprouvette composite dans le sens des fibres avec une contrainte imposée augmentant par palier. . . . .	21
I.15	Evolution de la contrainte imposée en fonction de la déformation globale pour un essai de traction et pour différents diamètres de fibre. . . . .	21
I.16	Notations pour l'intégrale de contour . . . . .	23
I.17	Notations pour l'intégrale de contour . . . . .	23



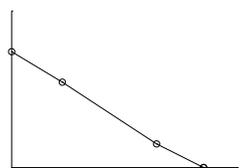
I.18	Notations pour l'intégrale de contour . . . . .	27
II.1	Décollement du film à travers une interface discontinue en ténacité .	33
II.2	Évolution de la fissuration avec la charge dans le cas d'une ténacité discontinue et croissante . . . . .	40
II.3	Détermination de $\ell_c$ . . . . .	43
II.4	Les deux solution extrêmes de (ULM) : à gauche, le minimum global ; à droite, la solution métastable ; en haut, le graphe de l'énergie au moment du saut ; en bas, l'évolution de la fissuration avec la charge	44
II.5	Structure de l'évolution dynamique : les secteurs d'état constant $\mathcal{Q}_\epsilon^i$ délimités par les ondes de choc rétrogrades et directes (en maigre) et le front de fissuration (en gras). . . . .	46
II.6	Les 3 phases de propagation dans le cas avec augmentation de la ténacité. Front de propagation et ondes de choc pour $k_1 = 0.5, k_2 = 2$ et $\epsilon = 0.075$ . . . . .	49
II.7	Comparaison des solutions quasi-statique (en pointillé) et dynamique (en trait plein) dans le cas discontinu convexe : $k_1 = 0.5, k_2 = 2$ et $\epsilon = 0.075$ . . . . .	51
II.8	Les 4 phases de propagation dans le cas avec diminution de la ténacité. Front de propagation et ondes de choc pour $k_1 = 0.5, k_2 = 2$ et $\epsilon = 0.05$ . . . . .	53
II.9	Evolution de l'énergie cinétique en fonction du niveau de charge ; $k_1 = 0.5, k_2 = 2$ et $\epsilon = 0.075$ . . . . .	55
II.10	Comparaison de la solution quasi-statique métastable (en pointillé) avec la solution dynamique (en trait plein) dans le cas discontinu non convexe ; $k_1 = 0.5, k_2 = 2$ et $\epsilon = 0.075$ . . . . .	58
III.1	Décollement du film à travers une interface avec défaut . . . . .	61
III.2	Evolution de la ténacité $x \mapsto k(x)$ . . . . .	61
III.3	Evolution de $\ell(T)$ en fonction des deux solutions de l'approche (UGM) : à gauche lorsque $\ell^* < \ell_{II}$ et à droite lorsque $\ell^* \geq \ell_{II}$ ; en haut l'énergie totale au moment du saut et en bas la propagation de $\ell(T)$ dans le plan espace-charge. . . . .	63
III.4	Evolution de $\ell(T)$ en fonction des deux solutions de l'approche (ULM) : à gauche lorsque $\ell^* < \ell_{II}$ et pour $T_x \in [T^c, T^{**}]$ et à droite lorsque $\ell^* \geq \ell_{II}$ ; en haut l'énergie totale au moment du saut et en bas la propagation de $\ell(T)$ dans le plan espace charge. . . . .	64
III.5	Notations retenues pour le décollement du film à travers un défaut	66
III.6	Définition des domaines $\Delta_1$ et $\Delta_n$ . . . . .	67
III.7	Définition des domaines $\psi_n^i$ et $\psi_n^e$ . . . . .	67
III.8	Construction de la récurrence à partir du couple $(a_n, T_n)$ . . . . .	70
III.9	Évolution du front de fissure $\mathcal{S}_\epsilon^0$ dans le plan espace-charge pour $\epsilon \rightarrow 0$ . . . . .	71
III.10	Évolution des énergies cinétique et élastique en fonction de la charge $T$ au cours de la traversée du pavage $\Delta_n$ . . . . .	72
III.11	Evolution des énergies en fonction de $\ell(T)$ . . . . .	73
III.12	Évolution ondulatoire entre $T_{n-1}$ et $T_n$ . . . . .	73

III.13	Exemples de chargement non constant . . . . .	76
III.14	Evolution de la charge $T$ . . . . .	77
III.15	Evolution de la force $F$ associée au déplacement imposé en $x = 0$ en fonction de la charge $T$ et de la position du décollement du film $\ell$ . . . . .	78
III.16	Evolution de la réponse asymptotique dans le plan $(T, \ell)$ avec $k_2 = \ell_I = 1, \ell_{II} = 2$ . . . . .	79
III.17	Evolution de la ténacité apparente $k^a$ en fonction de $\ell$ lorsque $k_2 = 1, k_1 = 0.1, L = 1$ et $\ell_I = 1$ . . . . .	81
III.18	Pavage $\Delta_n$ pour $x > \ell_1^d$ . . . . .	84
III.19	Convergence de $\ell(T)$ en fonction de $\epsilon$ dans le plan $(x, T)$ . . . . .	84
III.20	Solution limite de $\ell(T)$ dans le plan $(x, T)$ . . . . .	85
III.21	Evolution de la charge $T$ suivant différentes configurations . . . . .	87
III.22	Evolution de la charge $T$ en fonction de $\ell$ lorsque $T$ évolue selon le <b>Cas 1</b> . . . . .	87
III.23	Evolution des énergies en fonction de $\ell$ lorsque $T$ évolue selon le <b>Cas 2</b> . . . . .	88
III.24	Evolution de la charge $T$ en fonction de $\ell$ lorsque le film traverse une discontinuité de ténacité en $x = \ell_I$ puis un chargement $T$ sous forme d'une impulsion de type <b>Cas 2</b> . . . . .	89
IV.1	Evolution de la ténacité $k(x)$ . . . . .	95
IV.2	Evolution instable du front de fissure : en haut à gauche lorsque l'instabilité démarre à la charge $T_\beta$ (cf (IV.14)), en haut à droite lorsque l'instabilité démarre à la charge $T_\alpha$ (cf (IV.13)), en bas lorsque l'instabilité démarre à la charge $T_\gamma$ (cf (IV.15)) . . . . .	96
IV.3	Solution quasi-statique (UGM) pour deux modèles différents . . . . .	97
IV.4	Courbe enveloppe de la solution quasi-statique (UGM) paramétrée en fonction de $k_1$ : à gauche pour une valeur fixée de $L$ , à droite lorsque $L \rightarrow 0$ . . . . .	97
IV.5	Evolution de différentes solutions quasi-statiques (ULM) à $k_1$ et $k_2$ fixés lorsque $L \rightarrow 0$ . . . . .	98
IV.6	Solution quasi-statique métastable lorsque $L \rightarrow 0$ . . . . .	99
IV.7	Solution quasi-statique métastable : à gauche lorsque $L$ est fixé, et à droite lorsque $L \rightarrow 0$ . . . . .	100
IV.8	Présentation de la solution ondulatoire à partir des trains d'onde. . . . .	104
IV.9	Définition des pavages $\Delta_n^m$ . . . . .	105
IV.10	Présentation du faisceau $\mathcal{F}_1^{12}$ . . . . .	106
IV.11	Evolution des faisceaux après la traversée du troisième défaut de ténacité. . . . .	108
IV.12	Exemple de pavage ayant 7 arrêts du front de fissure . . . . .	110
IV.13	Evolution de $T \mapsto \ell(T)$ lorsque le modèle comporte deux défauts de ténacité . . . . .	112
IV.14	Evolution de $T \mapsto \ell(T)$ lorsque le modèle comporte trois défauts de ténacité . . . . .	114
IV.15	Evolution de $T \mapsto \ell(T)$ lorsque le modèle comporte six défauts de ténacité . . . . .	116



IV.16	Evolution du décollement du film dans le plan espace-charge pour différentes vitesses de chargement $\epsilon$ et pour différentes valeurs de $\theta$ avec $L = 10^{-4}$ , $k_1 = 0.05$ et $k_2 = 1$ . . . . .	117
IV.17	Evolution de la solution dynamique avec $\epsilon = 0.01c$ , $k_2 = 1$ et $k_1 = 0.1$ pour différentes valeurs de $L$ . . . . .	118
IV.18	Evolution quasi-statique (UGM) et (ULM) métastable . . . . .	119
V.1	Présentation du modèle DCB utilisé . . . . .	123
V.2	Représentation des surfaces utilisées . . . . .	124
V.3	Modèle numérique utilisé . . . . .	125
V.4	Evolution de l'énergie totale $\mathcal{E}(T, \ell)$ pour l'approche (UGM) en fonction de $\ell$ et paramétré selon la charge $T$ . . . . .	126
V.5	Evolution du front de fissure en fonction de la charge $T$ pour la solution (UGM) . . . . .	127
V.6	Evolution de l'énergie totale $\mathcal{E}(T, \ell)$ pour l'approche (ULM) en fonction de $\ell$ et paramétré selon la charge $T$ . . . . .	127
V.7	Evolution du front de fissure en fonction de la charge $T$ pour la solution (ULM) métastable . . . . .	128
V.8	Présentation de la technique de déboutonnage . . . . .	132
V.9	Evolution du taux de restitution d'énergie au cours du temps . . . . .	133
V.10	Evolution de la vitesse du front de fissure pour différents maillages . . . . .	137
V.11	Comparaison entre les ténacités apparentes et réelles en fonction de $d$ pour $\alpha = 1/2$ . . . . .	138
V.12	Evolution de l'énergie dissipée et de l'énergie de fissuration en fonction de la propagation du front de fissure . . . . .	138
V.13	Evolution de l'erreur sur la ténacité en fonction de $\alpha$ pour $d = 1$ . . . . .	139
V.14	Evolution des énergies en fonction de $\ell(t)$ . . . . .	139
V.15	Evolution des vitesses de fissuration en fonction de $\ell(t)$ . . . . .	140
V.16	Evolution des énergies dissipées en fonction de $\ell(t)$ . . . . .	141
V.17	Evolution des ténacités en fonction de $i$ à $\Delta a$ constant . . . . .	142
V.18	Evolution des ténacités en fonction de $d$ à $i$ constant . . . . .	142
V.19	Evolution des énergies potentielles pour un niveau de charge $T^1$ en fonction de $\ell$ . . . . .	143
V.20	Comparaison entre les deux méthodes en fonction de $\alpha$ . . . . .	144
V.21	Comparaison entre les deux approches en fonction de $\ell_b$ . . . . .	144
A.1	Evolution de la solution ondulatoire avec $t_1^a$ qui correspond à un instant de mise à zéro de la vitesse de chargement et $t_2^a$ à un instant de redémarrage de la vitesse de chargement $\epsilon$ . Le domaine espace-temps est subdivisé en domaine $\Delta_w$ , $\Delta_q^a$ et $\Delta_s^r$ . . . . .	164
A.2	Présentation des deux cas de figure lors de l'arrêt du chargement ; à gauche : le train d'onde <b>3</b> est généré entre les trains d'onde <b>2</b> et <b>1</b> , à droite : le train d'onde <b>3</b> est généré entre les trains d'onde <b>1</b> et <b>2</b> . . . . .	165
A.3	Solution ondulatoire avec une vitesse de chargement nulle après suppression du trains d'onde <b>3</b> . . . . .	165
A.4	Evolution de la charge $T$ . . . . .	167
A.5	Evolution de la charge $T$ . . . . .	168

A.6	Solution ondulatoire lorsque la vitesse de chargement passe de $\epsilon$ à $\beta$ et que le train d'onde <b>3</b> se trouve entre les trains d'onde <b>2</b> et <b>1</b> . . .	171
A.7	Solution ondulatoire lorsque la vitesse de chargement passe de $\epsilon$ à $\beta$ et que le train d'onde <b>3</b> se trouve entre les trains d'onde <b>1</b> et <b>2</b> . . .	173
A.8	Définition du pavage $\Delta_1$ . . . . .	176
A.9	Evolution des ondes dans le plan $(t, \ell)$ lorsque $T$ évolue selon le <b>Cas 2</b> . . . . .	177
A.10	Evolution des ondes dans le plan $(t, \ell)$ lorsque $T$ évolue selon le <b>Cas 1</b> . . . . .	178
A.11	Evolution de la charge $T$ en fonction de $\ell$ lorsque $T$ évolue selon le <b>Cas 2</b> et pour différentes valeurs de $\beta$ . . . . .	178
A.12	Evolution de l'énergie cinétique en fonction de $\ell$ lorsque $T$ évolue selon le <b>Cas 2</b> . . . . .	179
A.13	Evolution des énergies en fonction de $t$ lorsque $T$ évolue selon le <b>Cas 2</b> . . . . .	179
A.14	Evolution de l'énergie cinétique $\mathcal{K}$ au voisinage de l'instabilité en fonction de $\ell$ lorsque $T$ évolue selon le <b>Cas 1</b> . . . . .	180
A.15	Comparaison entre les énergies lorsque la propagation instable traverse un défaut ( <b>Cas 2</b> ) . . . . .	180
A.16	Evolution du front de fissure dans le plan $(T, x)$ lorsque le chargement est une double impulsion de type <b>Cas 2</b> . . . . .	181
A.17	Evolution des énergies en fonction de $\ell$ lorsque $T$ évolue selon le <b>Cas 1</b> . . . . .	181
A.18	Evolution de l'énergie cinétique $\mathcal{K}$ en fonction de $\ell$ lorsque $T$ évolue selon le <b>Cas 1</b> . . . . .	182
A.19	Evolution de l'énergie cinétique $\mathcal{K}$ en fonction du temps $t$ lorsque le film traverse une discontinuité de ténacité puis un chargement $T$ sous forme d'une impulsion de type <b>Cas 2</b> . . . . .	182
B.1	Illustration de l'hypothèse 2. . . . .	183
B.2	Présentation du faisceau $\mathcal{F}_1^{17}$ . . . . .	184
B.3	Solution dynamique ondulatoire lors de la traversée du 17 <sup>ième</sup> défaut avec $\epsilon = 0.01c$ , $L = 1$ , $k_1 = 0.5$ et $k_2 = 1$ . . . . .	185
B.4	Construction des domaines $\omega_s$ du faisceau $\mathcal{F}_1^{17}$ . . . . .	186
B.5	Evolution de l'énergie cinétique à travers les 6 premiers défauts en fonction de $\ell(T)$ pour $\epsilon = 0.01c$ , $L = 1$ , $k_1 = 0.5$ et $k_2 = 1$ . . . . .	187
B.6	Evolution des différentes énergies en fonction de la position du front de fissure avec $\epsilon = 0.01c$ , $L = 1$ , $k_1 = 0.5$ et $k_2 = 1$ . . . . .	188
B.7	Evolution des différentes énergies en fonction de la charge $T$ avec $\epsilon = 0.01c$ , $L = 1$ , $k_1 = 0.5$ et $k_2 = 1$ . . . . .	189





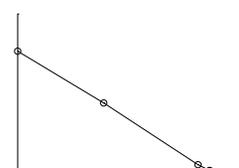
# Introduction

Selon le dictionnaire de l'académie française, la rupture se définit par :

*“Action par laquelle une chose est rompue ; État d'une chose rompue sous entant deux état : l'action de la rupture (actif) et l'état (passif).”*

Cette définition scinde le concept de rupture en deux aspects : soit elle est active soit elle est passive. D'un point de vue mécanique, la distinction du concept de rupture en deux notions existe. Il s'agit de la rupture selon une approche quasi-statique et de la rupture selon une approche dynamique. A partir de ce concept “actif” ou “dynamique” de la rupture, il existe différentes sous classes ; ainsi la rupture pourra être qualifiée de “lente” ou “brutale”. Le travail que nous présentons à travers cette thèse, traite de la rupture “dynamique” à la fois “brutale” et “lente”.

Ce travail a été effectué en partie dans un cadre industriel (Edf) et vise à comprendre et à analyser quelques mécanismes liés à la rupture dynamique sous divers chargements. Une des premières problématiques qui nous est apparue est la rupture dynamique sous chargement quasi-statique. Par “rupture dynamique”, on entend rupture brutale (vitesse de fissuration élevée), qui s'oppose aux fissures se propageant à de faibles vitesses ; et par “chargement quasi-statique”, on entend vitesse de chargement relativement lente. Ces modes de fissuration peuvent être envisagés sur des structures relativement importantes, telles que des cuves de réacteur, par exemple, et où le chargement évolue de façon infiniment lente (bombardement neutronique, fatigue thermique ou mécanique...) permettant à des réseaux de microfissures de se propager de façon stable. Ces structures peuvent rester stable un certain temps, puis sous l'effet d'un quelconque paramètre, devenir instable. Une phase d'instabilité se traduit généralement par une phase de propagation brutale de quelques microfissures. D'une façon plus particulière on retrouve ce type de configuration au sein des centrales d'Edf, puisque ce que l'on appelle “zone hétérogène” (zone de ségrégation présente dans l'acier des cuves) ou “défaut sous revêtement” (défauts générés dans la structure suite à un traitement de surface particulier) peuvent être initiateur de cette phase instable. D'autres domaines de la rupture dynamique ont été investigués, il s'agit de la propagation de fissure sous chargement brutal. On retrouve ce type de phénomène au niveau des cuves de centrale lorsque l'on envisage un chargement accidentel. Il s'agit en fait d'une rupture de tuyauterie ayant pour conséquence de générer une brusque variation de la pression. Suite à ce chargement violent, on peut s'attendre à avoir des microfissures se propageant brutalement. Ces mécanismes de rupture sont similaires à ceux qui apparaissent lorsqu'un bloc de verre est impacté violemment par un projectile. En effet sous l'effet du chargement brutal, un réseau de fissures apparaît et ce de façon quasi instantanée. A ces considérations industrielles, s'ajoute quelques questions académiques qui découlent de la problématique précédemment décrite. Il s'agit en fait de comprendre le comportement d'une fissure lorsqu'elle traverse un ou plusieurs défauts



(on entend par défaut des zones de ségrégation particulière rendant le milieu hétérogène). Ce type de considération peut, par exemple, s'appliquer aux matériaux composites.

L'objectif n'est pas de chercher à reproduire exactement la complexité des structures et des trajets de fissuration comme le proposent les approches X-Fem en dynamique (cf [Ret05]), mais de comprendre finement les mécanismes sous jacents. L'approche que nous suivrons se fera en deux temps ; tout d'abord nous tenterons de comprendre ces différents mécanismes de rupture dynamique en cherchant à les reproduire à l'aide de modèles simplifiés. Puis nous essaierons de donner un sens aux différentes grandeurs couramment utilisées dans ces domaines. L'idée générale est donc de chercher à comprendre, par le biais de modèles simplifiés, les concepts qui pilotent de tels mécanismes. Plus particulièrement, nous montrerons l'importance des considérations énergétiques pour la compréhension de ces phénomènes. Ainsi pour certain cas nous chercherons à montrer que l'évolution dynamique peut être correctement traduite par certaines solutions quasi-statiques, tandis que pour d'autres cas nous mettrons en avant la nécessité de modifier les propriétés du matériau en introduisant des propriétés apparentes. Pour obtenir de tels résultats, nous alternerons entre solution quasi-statique et solution dynamique (lorsque le chargement est quasi-statique on recherchera la limite de la solution dynamique) et nous essaierons, en fonction des cas, de construire des équivalences.

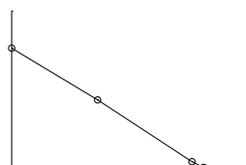
Ainsi ce travail s'articulera en cinq chapitres. Dans un premier temps nous présenterons globalement les différentes problématiques rencontrées (définies en début d'introduction) ainsi que quelques axes théoriques couramment utilisés pour de telles approches. Dans un deuxième temps nous proposerons un modèle simplifié basé sur le décollement d'un film pour comprendre les mécanismes de la rupture brutale sous un chargement quasi-statique. Dans un troisième temps nous développerons un modèle similaire pour étudier l'influence d'un défaut sur la propagation d'une fissure lorsque le chargement est quasi-statique, puis nous effectuerons une analogie avec un chargement brutal. Dans un quatrième temps, nous généraliserons le modèle précédent en considérant un cas avec un grand nombre de défauts ; nous nous intéresserons tout particulièrement au cas où la taille des défauts devient très petite. Enfin, nous reviendrons sur l'étude de la propagation brutale sous un chargement quasi-statique pour en donner une interprétation numérique.

Le premier modèle qui sera présenté vise à comprendre les aspects de la propagation brutale sous un chargement quasi-statique. Plus particulièrement, ce chapitre a pour objectif de décrire de façon générale le phénomène étudié, puis de montrer que l'on peut s'affranchir du calcul dynamique direct. Pour cela nous avons utilisé un modèle de décollement de film. Il s'agit d'un film, inextensible et totalement flexible, initialement collé contre une interface ayant une discontinuité de la ténacité. Un déplacement est imposé à l'une de ses extrémités (on note  $\epsilon$  la vitesse du déplacement imposé), ce qui a pour conséquence de décoller progressivement le film. La discontinuité de ténacité peut être choisie de deux façons différentes. En effet, lorsque le film se décolle, celui-ci rencontre soit une zone de faible ténacité, soit une zone de forte ténacité. Selon le cas de figure, on peut s'attendre à obtenir des comportements différents. En effet, si au cours du décollement, on rencontre une zone de plus forte ténacité, le décollement aura tendance à s'arrêter ; tandis que dans le cas contraire, le décollement du film peut devenir brutal. Ainsi avec une telle répartition de la ténacité, nous montrerons qu'une propagation brutale sous un chargement quasi-statique peut être obtenue. Plus particulièrement, nous présenterons cette étude en deux temps ; tout d'abord nous construirons quelques solutions quasi-statiques, puis nous expliciterons la solution dynamique. Pour ce qui est de la solution

quasi-statique, nous introduirons deux approches différentes, une première (ULM) basée sur un principe de minimum local de l'énergie et sur une conservation de l'énergie totale, et une seconde (UGM) basée sur un principe de minimum global de l'énergie. Les solutions de ces différentes approches seront construites et une solution particulière de l'approche (ULM) sera plus particulièrement analysée (solution (ULM) métastable). Il s'agit en fait de la solution qui reste "accrochée" à un minimum local le plus longtemps possible. La solution dynamique pour une vitesse de chargement  $\epsilon$  quelconque sera construite en déterminant l'intégralité des ondes de choc. Cette solution est construite en considérant l'intégralité des allers-retours des ondes. Au final nous rechercherons la solution dynamique limite (lorsque  $\epsilon$  tend vers 0) et nous la comparerons avec les différentes solutions quasi-statiques (en fait cette solution dynamique jouera un rôle de "filtre" parmi toutes les solutions quasi-statiques).

Un second modèle sera développé pour comprendre l'influence d'un défaut sur la propagation d'une fissure. Pour cela nous réutiliserons le modèle de film introduit dans le chapitre précédent et la discontinuité de ténacité sera remplacée par un défaut de ténacité. On entend par défaut de ténacité, une brusque variation de la ténacité sur une distance  $L$ . Avec un tel modèle, on s'attend à avoir une propagation brutale lorsque le film se décolle à travers le défaut. Lorsqu'il se décollera en dehors du défaut, le comportement du film deviendra plus complexe. De la même façon nous chercherons à construire la solution dynamique limite, puis à la comparer aux différentes solutions quasi-statiques. Nous montrerons qu'à la différence du modèle avec discontinuité de la ténacité, la solution dynamique limite ne converge vers aucune solution quasi-statique. Cette non convergence repose essentiellement sur le décollement du film en sortie du défaut (on montrera que la solution évolue selon une certaine courbe limite qu'on reliera à un phénomène de relaxation de l'énergie cinétique). De ce fait nous chercherons une interprétation de ce mécanisme sous la forme d'une loi d'évolution particulière basée sur le décollement du film. Cette loi d'évolution sera ensuite interprétée d'un point de vue statique et dynamique et nous ferons apparaître des ténacités apparentes. Une analogie entre ce modèle et celui qui considère une interface homogène avec un chargement évoluant brutalement sera développée.

Le quatrième chapitre présente le modèle précédent où le défaut de ténacité a été remplacé par un grand nombre de défauts à travers l'interface. Le chapitre précédent présente un mécanisme particulier lié au décollement du film à travers un défaut : il s'agit de la relaxation de l'énergie cinétique. Toute la question est donc de savoir si ce phénomène est toujours valable lorsque le nombre de défauts augmente et que la vitesse de chargement  $\epsilon$  tend vers zéro. En d'autres termes, comment l'énergie cinétique évolue dans une telle structure : a-t-elle tendance à augmenter ou à converger autour d'une certaine valeur ? Pour tenter de répondre à cette question, nous présenterons deux approches différentes ; une première qui consiste à construire de façon graphique la solution dynamique limite défaut après défaut, et une seconde qui consiste à construire numériquement la solution dynamique pour une certaine valeur de la vitesse du chargement  $\epsilon$ , puis de faire tendre numériquement  $\epsilon$  vers zéro. Cette deuxième méthode nécessite de prendre en compte l'intégralité des allers-retours des ondes de choc. Au final, nous montrerons que l'évolution du décollement du film à travers un grand nombre de défauts tend vers un comportement moyen que l'on assimilera à une ténacité effective. Il sera aussi question de la taille des défauts et de leurs influences sur la solution dynamique limite. En particulier nous souhaiterons savoir si les passages à la limite en  $\epsilon$  et en  $L$  commutent, où  $L$  représente la taille des défauts.



Le dernier chapitre présente une version numérique des travaux effectués à travers le deuxième chapitre. Nous présentons le cas d'une fissure se propageant de façon brutale à travers un milieu 2D soumis à un chargement quasi-statique. L'objectif de ce chapitre est de comparer les résultats obtenus sur le modèle de décollement de film avec un modèle 2D similaire. Il s'agit en fait d'un modèle de DCB (Double Cantilever Beam) 2D ayant un trajet de fissuration prédéterminé et à travers lequel la ténacité est discontinue pour une certaine position du front de fissure. Ainsi, ce modèle numérique 2D ressemble, dans les grandes lignes, au modèle de décollement d'un film à travers une interface ayant une discontinuité de ténacité. Ainsi nous présenterons la construction des solutions quasi-statiques (UGM) et (ULM) et plus particulièrement de la solution quasi-statique (ULM) métastable. Ensuite la solution dynamique sera exhibée par le biais d'un algorithme de type déboutonnage de noeuds. Cette approche consiste à rechercher la vitesse de fissuration telle que le critère de Griffith soit vérifié en fin de procédure de déboutonnage. Une étude précise de cette technique sera présentée et plus particulièrement, on recherchera l'énergie dissipée par cette méthode lorsqu'un schéma en temps de type Newmark est utilisé. Cela nous permettra de comparer cette énergie dissipée par rapport à l'énergie de fissuration. Au final, nous proposerons quelques précautions à prendre pour éviter d'obtenir de trop grandes différences entre ces deux énergies. De la même façon qu'au chapitre 2, on cherchera à comparer la solution dynamique limite avec les solutions quasi-statiques. Cette comparaison, nous permettra de conclure sur le conservatisme de certaines grandeurs de l'étude (en particulier la longueur de propagation) et d'introduire quelques grandeurs couramment utilisées, comme la "ténacité à l'arrêt".

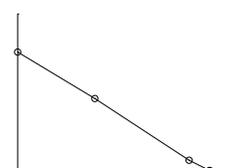
# Chapitre I

## Etat de l'art

### Contents

<b>A</b>	<b>Introduction</b> . . . . .	<b>6</b>
<b>B</b>	<b>Expériences autour de la rupture dynamique</b> . . . . .	<b>7</b>
B.1	Quelques phénomènes en fissuration dynamique . . . . .	7
B.2	Propagation brutale puis arrêt du front de fissure . . . . .	11
B.3	Propagation d'une fissure à travers des milieux ayant une ténacité variable . . . . .	17
<b>C</b>	<b>Cadre théorique de la rupture dynamique</b> . . . . .	<b>22</b>
C.1	Approche énergétique de la mécanique de la rupture . . . . .	22
C.2	Présentation de quelques solutions analytiques . . . . .	26
<b>D</b>	<b>Conclusion</b> . . . . .	<b>29</b>

**résumé :** Ce chapitre présente de façon générale les différents phénomènes en rupture dynamique qui seront abordés au cours de cette thèse. Tout d'abord on présentera ce que l'on entend par rupture dynamique à l'aide de quelques expériences. Puis on introduira les problèmes que rencontre Edf au niveau de l'utilisation de ses centrales (propagation brutale suite à la présence de "zones hétérogènes" ou de "défauts sous revêtement"). Quelques mécanismes de rupture en milieu hétérogène seront présentés : propagation d'une fissure à travers des matériaux de type multicouche et composite. Ensuite quelques éléments théoriques comme le taux de restitution d'énergie en statique et le flux de l'énergie totale (dynamique) seront présentés.



## A Introduction

Ce chapitre a pour objectif d'aborder d'une part les différents phénomènes liés à la fissuration auxquels nous nous sommes intéressés à travers cette thèse, et d'autre part de présenter quelques approches théoriques.

L'analyse des phénomènes de fissuration s'articulera en trois points : présentation générale de ce que l'on entend par rupture dynamique (on présentera quelques expériences observables dans la vie de tous les jours), introduction des différentes problématiques que rencontre Edf et présentation des enjeux autour des multicouches et des composites. Nous nous focaliserons plus particulièrement autour des enjeux liés au fonctionnement des centrales d'Edf (chargement accidentel et phénomènes liés à la présence de "zones hétérogènes" et de "défauts sous revêtement"). Et pour finir on étudiera le comportement d'une fissure se propageant à travers un matériau ayant une alternance de ses propriétés mécaniques (par exemple ténacité périodique). En particulier nous présenterons deux types de matériau présentant ces aspects : les multicouches et les matériaux composites. En parallèle à ces différents phénomènes nous introduirons les grandeurs qui leurs sont couramment associées. En particulier nous aborderons les notions de ténacité à l'arrêt et de ténacité apparente. Ces différentes notions seront analysées dans les chapitres suivants.

Nous aborderons ensuite quelques aspects théoriques de la mécanique de la rupture en dynamique nécessaires par la suite. En particulier, nous détaillerons la construction du taux de restitution d'énergie en statique ainsi que le flux de l'énergie totale (nécessaire dans le cadre d'une approche dynamique). Le cas de Yoffé en mode II (fissure se propageant en mode II à travers un milieu infini) sera abordé et permettra de détailler quelques grandeurs couramment utilisées.

## B Expériences autour de la rupture dynamique

Tout d'abord nous allons présenter de façon générale la rupture dynamique, en introduisant quelques expériences. Puis dans un cadre industriel, nous détaillerons quelques interrogations au sujet de la propagation brutale du front de fissure et de son arrêt. Et pour finir, nous parlerons des problèmes de rupture des matériaux composites et des multicouches.

### B.1 Quelques phénomènes en fissuration dynamique

Notre quotidien est peuplé de divers phénomènes de rupture en dynamique où le front de fissure se propage à des vitesses comparables à la célérité des ondes du milieu et donc qui apparaissent comme quasi-instantané à notre échelle de temps.

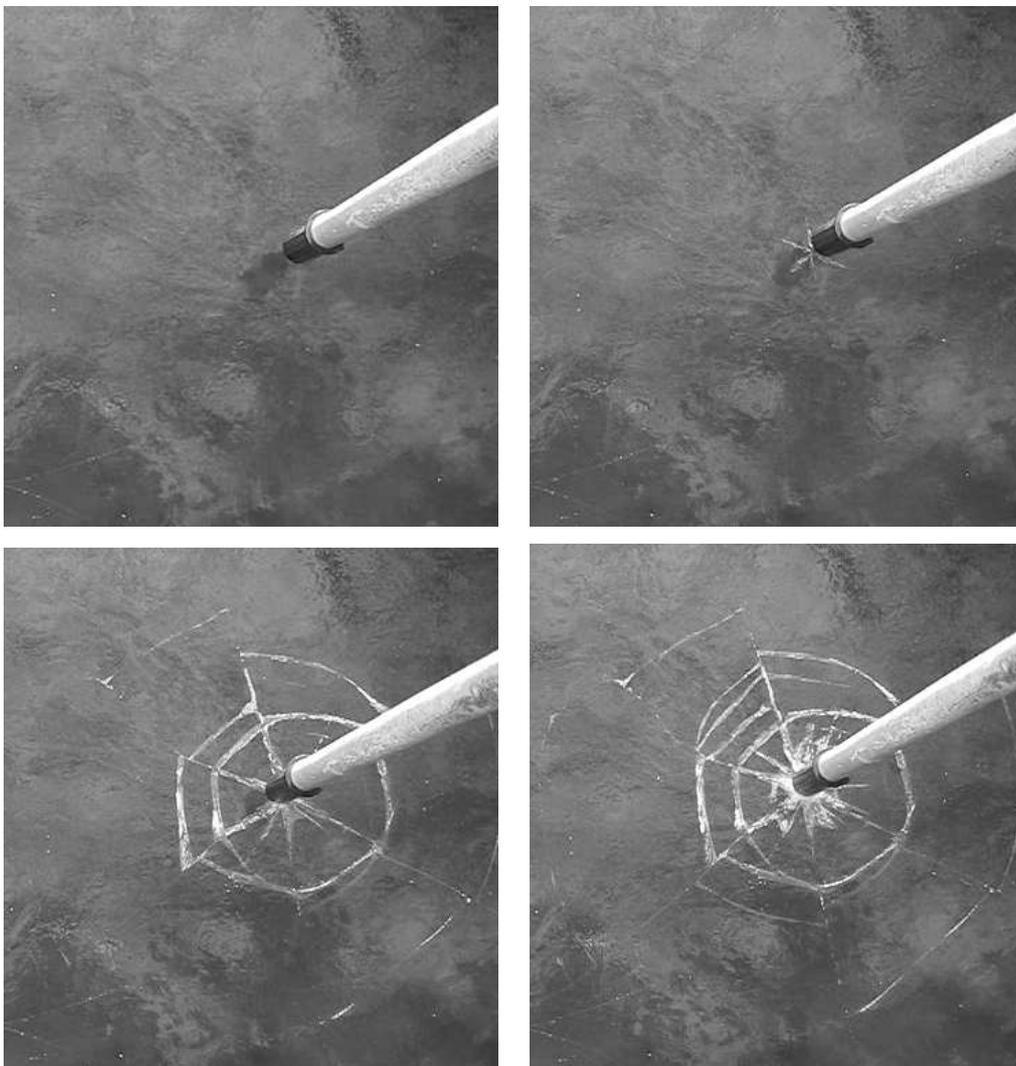
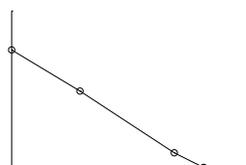


FIG. I.1 : Rupture d'une couche de glace sous un chargement dynamique cyclique

Ceci peut avoir lieu aussi bien sous chargement rapide (choc) que sous chargement lent.



**Expérience 1 :** La figure I.1 représente une couche de glace sur un lac sous l'effet d'un chargement dynamique cyclique (un projectile impacte de façon répétée la surface du lac gelée). On observe qu'à chaque impact du projectile, un nouveau réseau de fissures apparaît. Après le premier impact, le réseau de fissures est en forme d'étoile à 6 branches puis sous les impacts suivants, des fissures transversales apparaissent. Ainsi sous l'effet d'une succession de chocs, la structure (qui peut être considérée comme un plan infini) se stabilise choc après choc, en créant brutalement de nouvelles surfaces fissurées.

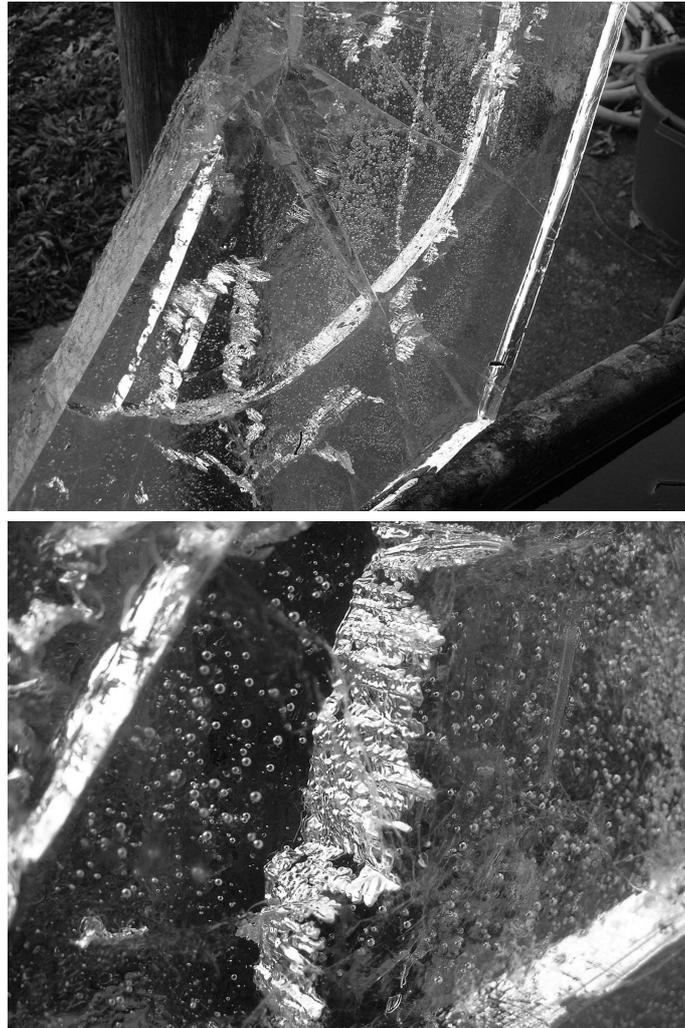


FIG. I.2 : Quelques trajets de fissuration à travers un bloc de glace

D'un point de vue local, les formes des trajets de fissuration sont relativement complexes. Par exemple la figure I.2 présente des trajets de fissuration à travers un bloc de glace. On observe que les trajets des fissures sont soit rectilignes, soit d'une extrême complexité (similaire à une forme de type fractale).

**Bilan :** Sachant que toute nouvelle surface fissurée "coûte" une énergie de surface, la question est de savoir le rôle des ondes (porteuses de l'information) dans la propagation, le choix du trajet et l'arrêt de la fissuration.

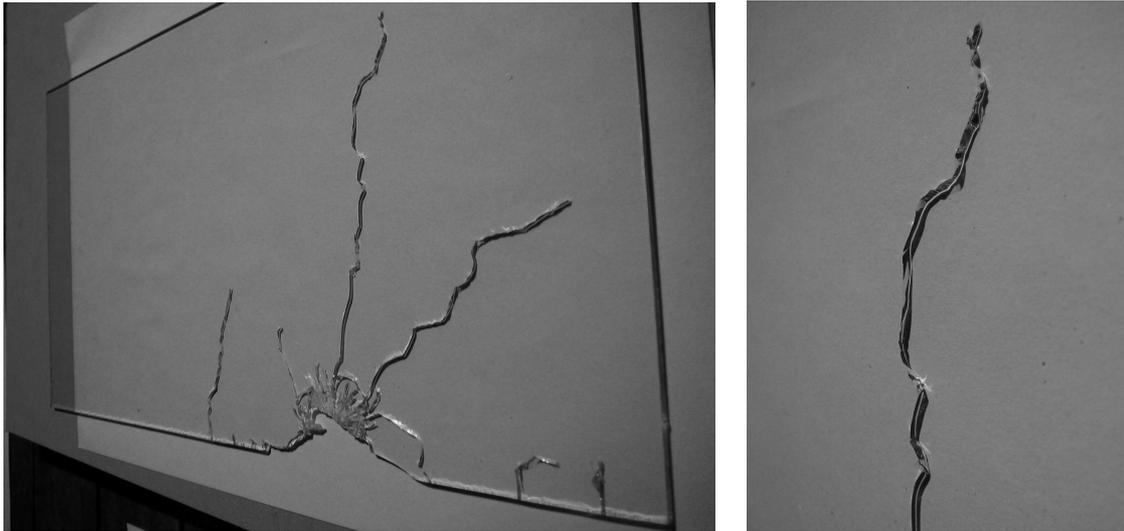
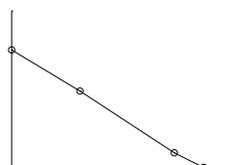


FIG. I.3 : Etat de fissuration sur une plaque de verre sous l'effet d'un projectile

Des expériences similaires, mais sur des structures plus “petites” peuvent être effectuées pour mettre en évidence l'importance du retour des ondes.

**Expérience 2 :** La figure I.5 présente le cas d'un projectile venant impacter une plaque de verre. Plusieurs essais ont été effectués à partir de différentes formes de projectile ; les deux figures du haut représentent les états de fissuration lorsque le projectile est soit à bout sphérique, soit à bout plat. On observe que lorsque le bout du projectile est plat, alors les propagations des fissures à partir du point d'impact sont rectilignes pendant un certain temps puis deviennent “chaotiques”. Tandis que lorsque le projectile est à bout sphérique, il n'y a pas de phase où les propagations du front de fissure sont rectilignes.

D'après [Fre98], une bifurcation ou un arrêt du front de fissure sont toujours liés (en dynamique) à une collision entre une onde et le front de fissure. En effet, les ondes transmettent des informations (modification des champs de contrainte et de déformation) qui seront susceptibles de venir modifier le trajet de fissuration. Ainsi, on peut faire l'hypothèse qu'à chaque changement d'orientation du trajet de fissuration (cf Figure I.5), correspond une onde venant impacter le front de fissure. De ce fait, le cas avec un projectile à bout plat semble mettre en évidence l'absence de retour d'onde sur le front de fissure durant un certain temps. En effet, le choc contre le verre d'un projectile à bout plat est plus court (en terme de temps d'impact) que celui avec un bout sphérique. Dans un cas (projectile à bout plat) l'initiation et la propagation des faisceaux de fissures a lieu en même temps que l'émission des différentes ondes dues à l'impact. Ainsi, lors de l'impact, les ondes se propageront plus rapidement que les différentes fissures, puis se réfléchiront contre les bords de la structure pour revenir vers les fissures et modifier leurs trajets de fissuration (entre le temps d'impact initial et celui du retour des ondes, les fronts de fissure sont *libres* et se propagent de façon rectiligne). Dans l'autre cas (projectile à bout sphérique), le choc du projectile contre la plaque de verre est moins *violent* (en terme de temps d'impact) et des ondes sont générées à partir du moment où le projectile impacte le verre et ce durant un certain temps (le temps d'écrasement du



projectile à bout sphérique est plus grand que celui du projectile à bout plat), de même pour l'initiation des faisceaux de fissure. Ainsi, chaque front de fissure est perturbé, soit par une onde générée au point d'impact à un temps supérieur à celui de la création de la fissure, soit par une onde réfléchie contre les bords de la structure. Au final, on obtient des faciès de propagation qui ne présentent pas de phase rectiligne.



FIG. I.4 : Fragmentation d'une bille après un choc thermique

Lorsque la plaque de verre est impactée par un projectile de type *clou*, alors les trajets de fissuration sont différents (trois dernières images de la Figure I.5). En effet, la *quantité* d'onde générée lors de l'impact initial est beaucoup plus faible et donc, la modification des trajets de fissuration générée par le retour des ondes est lui aussi plus faible. Par exemple, sur la figure au milieu à droite (cf Figure I.5) on observe des propagations rectilignes à travers toute la structure et une bifurcation du front de fissure suivie d'un arrêt de celle-ci.

**Bilan :** Cet exemple de perforation d'une plaque de verre par différents types de projectile, semble mettre en évidence l'importance du trajet des ondes dans la structure pour l'évaluation des différents faciès de rupture. Cependant, la complexité des trajets de fissuration permet de se demander s'il est possible ou réaliste d'envisager la résolution du problème de façon ondulatoire.

Après avoir abordé des chargements de type mécanique (impact d'un projectile), on considère un chargement de type thermique.

**Expérience 3 :** Il s'agit de faire chauffer une *bille* en verre à différentes températures (de l'ordre de 500 degrés) puis de l'immerger de façon instantanée dans un liquide à température ambiante. On observe alors une fragmentation instantanée à la surface de la bille et à travers une certaine épaisseur (cf Figure I.4). De plus, le faciès de la fragmentation (profondeur et distance moyenne entre deux fissures) semble dépendre de la température initiale (avant le choc thermique). Ce phénomène de fragmentation s'explique par le fait que lorsque la bille est portée à forte température, le volume se dilate, puis lorsqu'elle est portée dans un liquide à température ambiante, la surface de la bille a tendance à se

contracter, générant ainsi un réseau de fissure à travers une certaine épaisseur.

**Bilan** : A la différence des exemples précédents, le chargement est d'origine thermique (choc thermique) et la structure est relativement petite (par rapport aux structures de verre précédentes). Ainsi la compréhension et l'étude de ce phénomène par une approche ondulatoire ne semble pas réaliste. Il faudra donc considérer des approches différentes pour résoudre ce problème.

## B.2 Propagation brutale puis arrêt du front de fissure

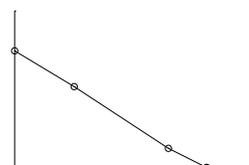
A travers cette partie, nous allons présenter une des problématiques que rencontre Edf dans l'exploitation de ses centrales : la propagation brutale ou non d'une fissure et son arrêt dans une cuve REP (Réacteur à Eau Pressurisée). La propagation brutale d'une fissure peut avoir diverses origines. Nous présenterons les cas où la fissure traverse un défaut de propriété du matériau ("zones hétérogènes" et "défauts sous revêtement") et où la cuve est soumise à un chargement de type accidentel (brusque variation de la pression).

### a) Origine de la fissuration dans une cuve REP

La cuve est l'un des composants essentiels d'un réacteur à eau sous pression. En effet, ce composant en acier ferritique au molybdène, d'une hauteur de 14 mètres et d'un diamètre de 4 mètres pour une épaisseur de 20 centimètres, accueille le coeur du réacteur ainsi que son instrumentation. Entièrement remplie d'eau en fonctionnement normal, la cuve, d'une masse de 300 tonnes, supporte une pression de 155 bar à une température de 300°C. Le suivi régulier et précis de l'état de la cuve est essentiel pour deux raisons : la cuve est un composant dont le remplacement n'est pas envisageable (problème de faisabilité et de coût), la rupture de la cuve est un accident inenvisageable (les conséquences ne sont donc pas prises en compte dans l'évaluation de la sûreté du réacteur). Ainsi la conception et l'utilisation d'un réacteur nécessitent des mesures de suivi particulières pour éviter un tel phénomène.

En fonctionnement normal, la cuve se dégrade lentement : en effet, le coeur des centrales est le théâtre d'intenses activités neutroniques fragilisant lentement le métal de la cuve. Ce vieillissement de la cuve est susceptible de générer des microfissures (cf Figure I.6). (On entend par microfissure, des fissures de quelques millimètres de profondeur). Ces microfissures sont généralement de forme elliptique et dépendent de l'histoire du chargement ainsi que des propriétés du matériau. En fonctionnement normal, ces microfissures peuvent évoluer de façon infiniment lente sous l'effet d'un chargement de type fatigue mécanique ou thermique (cf [STG07]).

D'un point de vue sûreté du réacteur, deux approches différentes sont possibles : soit le réacteur est dimensionné pour qu'il n'y ait pas de microfissures (une telle approche est utopique), soit le dimensionnement tient compte du vieillissement du métal de la cuve et de la présence de microfissures et dans ce cas on cherchera à étudier la stabilité de ces microfissures. La seconde approche est celle que nous avons choisi pour la suite de l'étude. Les enjeux qui entourent une telle approche, sont d'une part de montrer la stabilité de ces microfissures au cours de l'utilisation normale du réacteur et en particulier en présence de défauts au sein du métal de la cuve, et d'autre part d'étudier le comportement des microfissures lors d'un scénario accidentel, comme par exemple une rupture de tuyauterie.



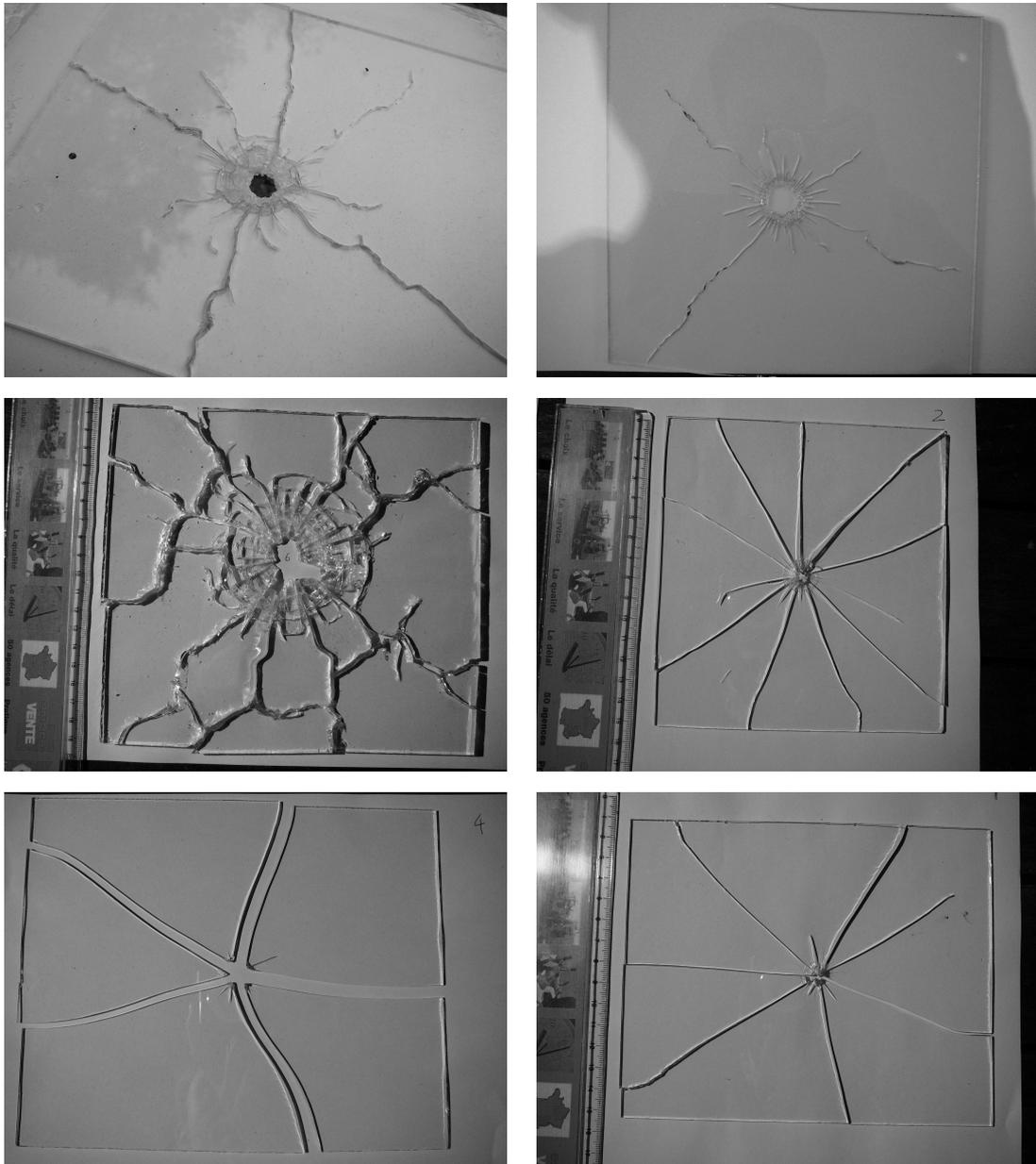


FIG. I.5 : Etude de l'influence de la forme du projectile sur les trajets de fissuration à travers une plaque de verre : en haut à gauche, avec un projectile à bout sphérique de diamètre 5 mm ; en haut à droite, avec un projectile à bout plat et de diamètre 5 mm ; au milieu à gauche, avec un projectile à bout sphérique (5 mm) et dont la plaque est deux fois plus épaisse (4 mm) ; au milieu à droite et les deux figures du bas, avec un projectile ayant une section très petite (clou) et en faisant varier la force d'impact.

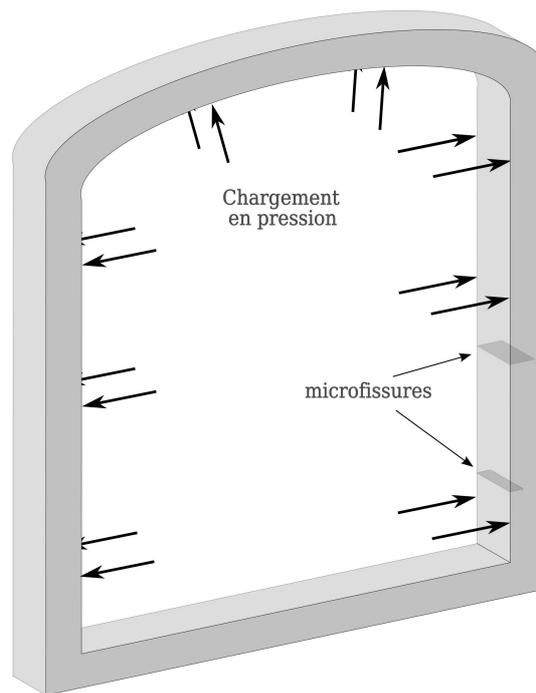


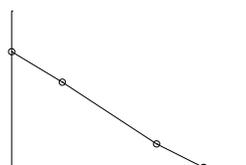
FIG. I.6 : Section d'une cuve de réacteur avec son réseau de microfissures pour un scénario d'utilisation normale

#### b) Les phénomènes liés à la présence de défauts

Tant que la fissure se propage à travers une zone saine (le matériau est homogène), les seuls risques de propagation brutale viennent d'une potentielle perte de stabilité de la structure. Lorsque cette même fissure se propage à travers un milieu hétérogène (présence d'un défaut dans le matériau), les choses sont plus complexes. En effet, lorsque la fissure arrive dans une zone ayant une ténacité plus faible (défaut), on peut s'attendre à avoir une propagation brutale du front de fissure. Toute la question est donc de savoir si une propagation brutale aura lieu, et si oui, est-elle suivie d'un arrêt du front de fissure.

Ces défauts peuvent se présenter sous la forme de zones de ségrégation à travers l'acier 16MND5 constituant la cuve de la centrale. Ces zones de ségrégation sont des zones enrichies en éléments d'alliage et en impuretés, communément appelées "zones hétérogènes" (cf [Nau99]). (Le phosphore ségrégué aux joints de grains sous forme atomique en est le principal constituant. De plus ces zones contiennent des inclusions de sulfure de manganèse de forme allongée dans le sens circonférentiel de la cuve, qui peuvent atteindre 1 mm de long). Ainsi ces "zones hétérogènes" peuvent être modélisées par des zones ayant des ténacités différentes. (Compte tenu des propriétés des "zones hétérogènes", on considérera que leur ténacité est beaucoup plus faible que celle du matériau sain, et que leur épaisseur est très faible par rapport aux différentes dimensions de la cuve).

La présence de défauts au sein de la centrale peut avoir une origine différente : les défauts sous revêtement. En effet, pour se prémunir contre les risques de corrosion, les composants en acier noir (acier ferritique) du circuit primaire sont revêtus d'une ou plusieurs couches d'acier inoxydable, ou d'alliage à base de nickel (inconel). L'opération de revêtement est une opération classique du métier de chaudronnier, qui n'est pourtant pas exempte de risque de créer une dégradation, que ce soit par fissuration à froid due



à l'hydrogène ou par décohésion intergranulaire due au réchauffage. Les défauts alors potentiellement créés sont situés dans le métal de base, juste sous la couche de métal déposée : ce sont les défauts sous revêtement. De la même manière que pour les "zones hétérogènes", ces défauts peuvent être représentés par des zones ayant une très faible ténacité et ayant une épaisseur très faible.

Ainsi d'un point de vue sûreté nucléaire, différentes questions apparaissent : la propagation est-elle brutale lorsque la fissure pénètre un défaut ? Suite à une propagation brutale, y a-t-il un arrêt du front de fissure ? Et si oui, apparaît-il dans le défaut ou en dehors ? En supposant que la fissure s'arrête en dehors du défaut, apparaît-il des ténacités apparentes de redémarrage du front de fissure (modifiant de ce fait les analyses quasi-statiques) ?

### c) Influence d'un chargement accidentel

Une propagation brutale du front de fissure peut aussi apparaître suite à un scénario accidentel (chargement de type dynamique). En effet, suite à la rupture d'une tuyauterie d'alimentation en eau du réacteur, la pression chute brutalement au sein du réacteur ; ainsi pour éviter un emballement de la réaction nucléaire une grande quantité d'eau à température ambiante est injectée dans le réacteur. De ce fait, la structure (avec ses microfissures) subit un double chargement *brutal* : un premier lors de la chute de la pression et un second lors du choc thermique (injection d'eau).

Ainsi, suite à ces deux scénarios, on peut s'attendre à avoir une propagation brutale suivie ou non d'un arrêt, une propagation stable ou un arrêt du front de fissure. D'un point de vue sûreté nucléaire, il est nécessaire d'assurer la non rupture de la cuve du réacteur. De ce fait, on cherchera des méthodes permettant de quantifier la propagation ainsi que l'arrêt des microfissures (au final on souhaite que toutes les microfissures finissent par s'arrêter).

Pour étudier ces risques, Edf considère différents axes de recherche : approche directe en effectuant un calcul numérique et en modélisant tous les phénomènes et approche plus fine en étudiant séparément les différents phénomènes par des approches expérimentales et théoriques. Par la suite, nous allons plutôt nous focaliser sur la deuxième approche et plus particulièrement sur des considérations théoriques. Mais avant de développer ces aspects qui seront introduits aux chapitres II et III, on présente deux expériences permettant de mettre en évidence les différents phénomènes agissant sur les microfissures présentes dans les centrales.

### d) Quelques expériences en rupture dynamique

Il s'agit de présenter deux expériences différentes, couramment analysées à Edf, et permettant de mettre en évidence certains phénomènes présentés à travers les paragraphes précédents.

- La première expérience a été introduite par Kalthoff [KBW77] et traite le cas d'une fissure se propageant à travers une éprouvette de type DCB (Double Cantilever Beam). Il s'agit d'une fissure se propageant sous un chargement quasi-statique. En effet, à l'extrémité de l'éprouvette (cf Figure I.7) un *coin* est enfoncé à une vitesse constante relativement lente. Ainsi le front de fissure est à l'arrêt tant que le critère de propagation de Griffith n'est pas vérifié ; ensuite, comme on l'observe sur les deux graphiques de la figure I.7, le front de fissure se propage de façon dynamique à vitesse constante puis s'arrête à

une certaine longueur.

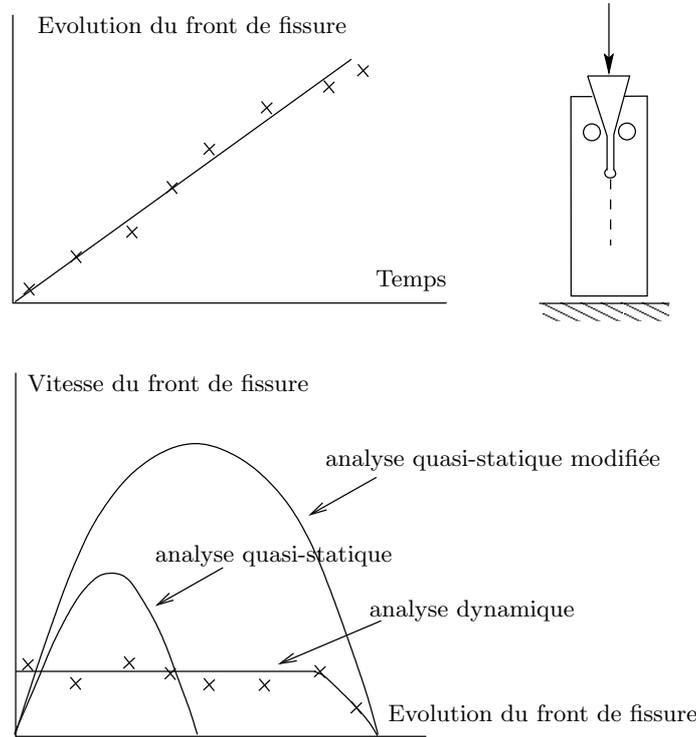
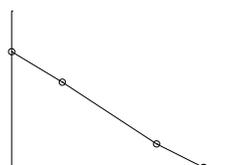


FIG. I.7 : Présentation de l'essai sur DCB (Double Cantilever Beam) de Kalthoff

Kalthoff présente cette expérience avec différentes formes d'entaille initiale et la figure I.8 représente l'évolution du facteur d'intensité de contrainte en pointe de fissure pour différents types d'entaille (la forme de l'entaille permet de jouer sur la quantité d'énergie disponible initialement) en fonction de la position du front de fissure. Sur cette même figure est représentée la solution quasi-statique en faisant évoluer virtuellement le front de fissure. On observe que la longueur d'arrêt obtenue à partir de l'analyse quasi-statique et en considérant un critère de propagation de type Griffith (la fissure est à l'arrêt lorsque le facteur d'intensité de contrainte est inférieur à une valeur critique  $K_c$ ) est inférieure à celle obtenue par l'expérience. Ainsi il introduit un  $K$  critique différent  $K_a$  (ténacité à l'arrêt) pour que l'approche quasi-statique puisse donner la bonne longueur d'arrêt. Cette valeur correspond sur la figure I.8 au point lorsque la courbe expérimentale intersecte la courbe issue de l'approche statique.

Par la suite et plus particulièrement au chapitre II nous proposerons une interprétation énergétique de ce phénomène et nous introduirons au chapitre V une méthode pour obtenir numériquement une ténacité à l'arrêt. La notion de ténacité à l'arrêt découle directement de l'approche énergétique. Une telle approche peut aussi être utilisée lorsque le chargement est accidentel. En effet, une analogie peut être effectuée entre le modèle à entaille de Kalthoff et le modèle qui consiste à faire varier brutalement la pression (chargement accidentel). Dans un cas, le modèle accumule une certaine énergie par le biais de l'entaille, tandis que pour l'autre, l'énergie est injectée initialement sous forme de choc. Comme on le verra par la suite, la structure cherche à propager brutalement une fissure pour garantir un certain bilan énergétique. Ainsi, ces phénomènes sont pilotés par des



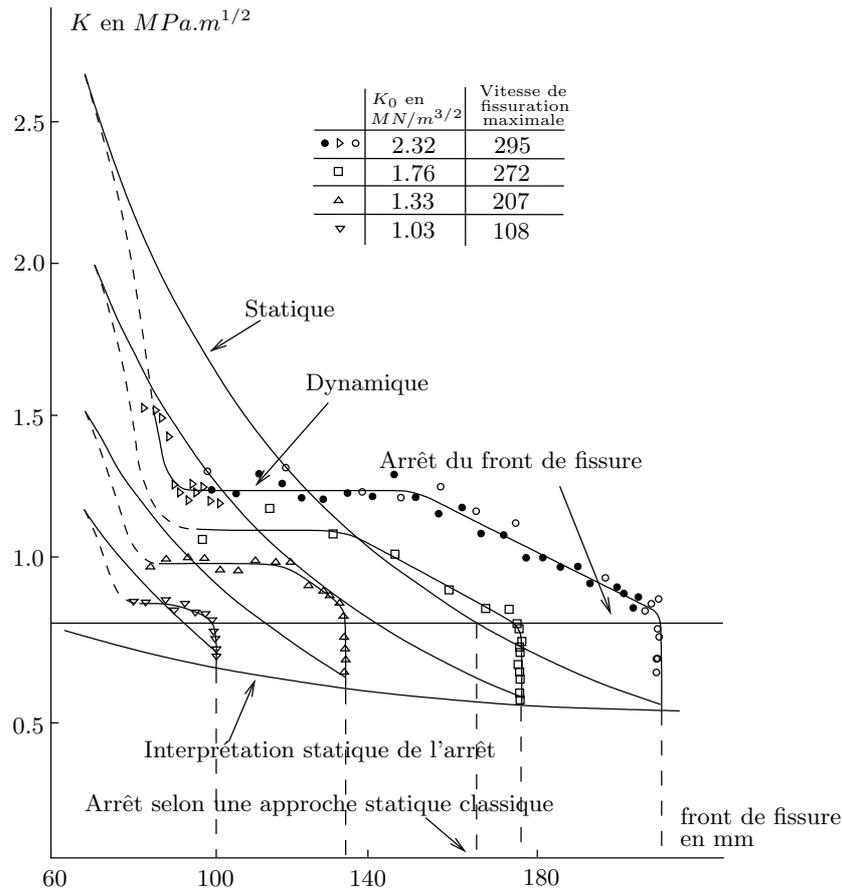


FIG. I.8 : Facteurs d'intensité de contrainte au cours de l'évolution de la fissure à travers l'éprouvette DCB

aspects énergétiques et non par la façon dont ces énergies sont stockées (ce qui justifie l'analogie).

- La deuxième expérience est liée à la stabilité de la fissure lors du choc thermique [Gen89]. Celle-ci étudie la propagation d'une fissure à travers un disque préfissuré (cf Figure I.9) soumis à un chargement thermique violent. Différentes études ont été par la suite effectuées sur ce même sujet [BM02], [Bug05], [BJ01], [Gen89] et [Haj03].

Le disque est tout d'abord préfissuré en effectuant un chargement mécanique cyclique sur un disque avec une entaille. Puis il est refroidi dans un bain d'azote liquide à  $-196^\circ\text{C}$ . Ensuite un inducteur est appliqué sur la surface  $\Omega_e$  ce qui permet de créer un gradient thermique à travers le diamètre du disque. Ce gradient thermique a pour conséquence de générer des contraintes de traction sur la peau externe du disque (au voisinage de  $\Omega_e$ ) et des contraintes de compression au voisinage de  $\Omega_i$ . Les contraintes de traction ont tendance à propager la fissure de façon dynamique à travers une certaine distance. Lorsque la fissure se rapproche du centre, les contraintes de compression ont tendance à arrêter la propagation du front de fissure. Un second phénomène joue un rôle important, il s'agit de l'influence de la température sur la ténacité. En effet, après que l'inducteur ait été appliqué sur la surface  $\Omega_e$ , la ténacité a tendance à être plus élevée sur la frontière  $\Omega_i$  que sur  $\Omega_e$ , favorisant aussi l'arrêt du front de fissure.

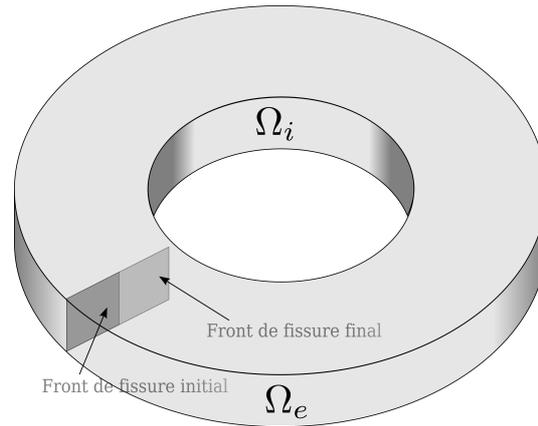


FIG. I.9 : Présentation de la géométrie du disque préfissuré soumis à un chargement thermique

Ces différentes phases de propagation ont été observées expérimentalement et ce pour différentes valeurs de choc thermique et de taille de fissure initiale. Globalement il a été observé que l'arrêt a lieu lorsque la température en pointe de fissure est de  $-60^{\circ}\text{C}$ . Au niveau des vitesses de propagation du front de fissure, une vitesse de  $600\text{ m.s}^{-1}$  a été obtenue lors de la propagation brutale suivie d'une phase de décélération sur les 5 derniers millimètres précédant l'arrêt du front de fissure. Au final, ces différentes expériences ont permis de mettre en évidence une fissure se propageant de façon brutale suivi par un arrêt de la fissure. Cet arrêt est caractérisé en définissant une ténacité à l'arrêt (similaire à l'étude de Kalthoff sur une DCB).

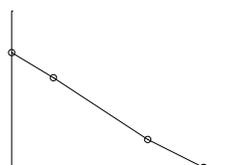
### B.3 Propagation d'une fissure à travers des milieux ayant une ténacité variable

A travers cette partie, on présente un mécanisme de rupture à travers un milieu ayant une ténacité variable. Ce mécanisme sera introduit à partir de la rupture des multicouches et des matériaux composites.

#### B.3.1 Rupture des multicouches

Les multicouches sont des structures composées par un empilement de couches ayant une épaisseur de l'ordre du nanomètre. Ces nouveaux matériaux sont élaborés par des techniques de dépôt sous vide et permettent d'obtenir des propriétés intéressantes dans différents domaines. Par exemple en informatique, on retrouve les multicouches dans les nouvelles technologies autour des systèmes de stockage comme les disques optiques multicouches d'IBM et les nouvelles façons d'architecturer les microprocesseurs...

A la différence des matériaux composites, les multicouches sont présents dans les structures, soit pour améliorer des propriétés liées à la réflexion des surfaces, soit pour véhiculer des informations (microélectronique). Ainsi, les sollicitations mécaniques présentes au sein des multicouches, sont plutôt générées par des phénomènes thermiques, de corrosion ou de fatigue vibratoire [MKH00]. Ces différentes sollicitations ont pour conséquence de créer des fissures de deux types : par délaminage ou par rupture transverse. Le premier cas de figure correspond à une fissure se propageant à l'interface entre deux



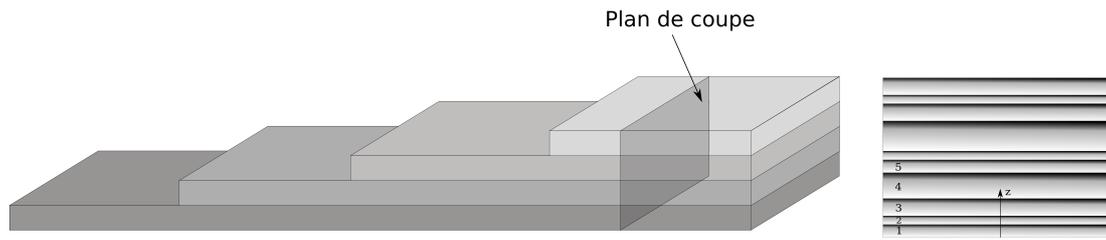


FIG. I.10 : Présentation de la géométrie des multicouches

couches, tandis que le deuxième mode de rupture correspond à une fissure se propageant à travers une couche. L'une des principales préoccupations est de proposer des méthodes de conception de multicouches pour éviter ces modes de rupture [SLTJ97], [DLM98] et [Tho96]. Dans cette optique [MKH00], [SLTJ97] et [EH95] présentent une analyse des différents phénomènes liés à l'initiation de ces fissures ainsi qu'à leurs propagations au sein des multicouches. Par exemple [DLM98] explique que l'élévation de la température au sein du multicouche génère une corrosion aux interfaces qui a pour conséquence de diminuer la ténacité de l'interface. Ainsi une fissure par délaminage se propage.

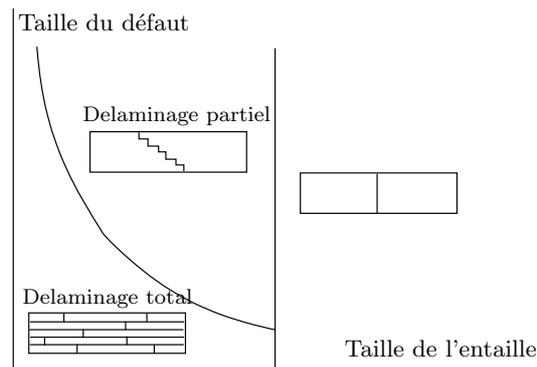


FIG. I.11 : Influence de la taille du défaut et de l'entaille sur le trajet de fissuration

Des phénomènes similaires sont présentés dans [MKH00] sur des multicouches constituées d'aluminium et de monazite. Ils expliquent que le chargement thermique modifie les interfaces en introduisant des grains de taille différente qu'ils assimilent à des défauts. Ainsi en introduisant des essais de type flexion 4 points sur le multicouche avec entaille (l'entaille est perpendiculaire aux couches), ils obtiennent des trajets de fissuration qui dépendent des conditions de chargement et qui sont des combinaisons entre des ruptures par délaminage et des ruptures transverses des couches. En particulier ils expliquent qu'un des paramètres influents [KTH98] est la taille des défauts et la forme initiale de l'entaille (cf Figure I.11). Et pour finir des essais de type pelage sur des multicouches ont été effectués par [Tho96] pour obtenir la ténacité de l'interface lors d'un délaminage.

Par la suite, on s'intéresse à des modes de rupture qui sont similaires au cas où l'entaille est relativement grande. Ce mode de rupture correspond à des fissures transversales aux multicouches et ce, sans propagation par délaminage (cf Figure I.11). Au chapitre IV, on proposera différentes approches (à l'aide d'un modèle de décollement de film) pour obtenir une ténacité équivalente lorsque la fissure traverse un milieu ayant une té-

nacité périodique (on suppose qu'il existe une certaine périodicité dans la construction des multicouches).

### B.3.2 Rupture des matériaux composites

Un matériau composite (cf Figure I.12) est généralement constitué d'une *matrice* à travers laquelle se trouve un *renfort* (fibre). L'objectif d'un tel matériau est de pouvoir conjuguer les propriétés mécaniques (module d'Young, ténacité) de plusieurs matériaux en un seul. De même les propriétés du composite peuvent être améliorées en modifiant la géométrie de la *matrice* et du *renfort* ainsi que les propriétés d'interaction entre la matrice et le renfort.

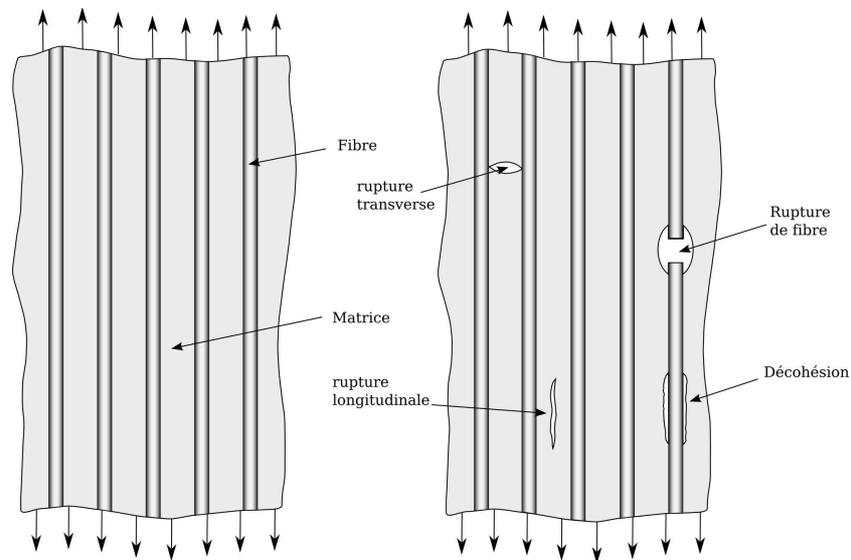


FIG. I.12 : Composite à fibres : à gauche la forme générale du composite, à droite les différents modes de rupture

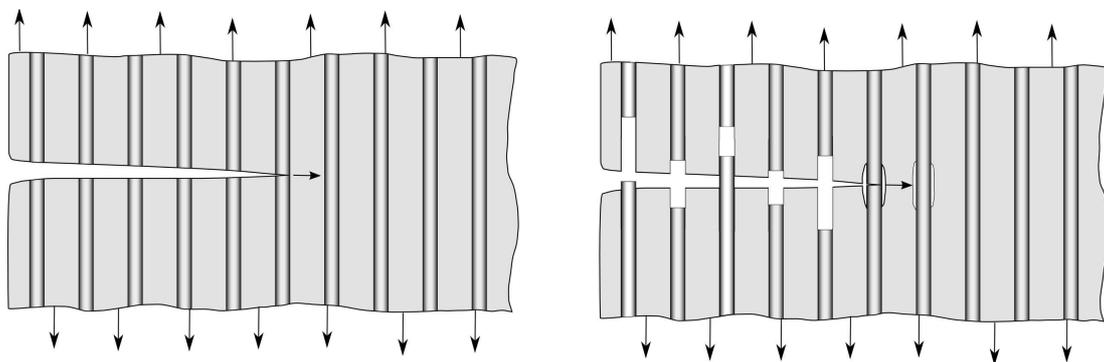
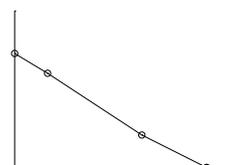


FIG. I.13 : A gauche : rupture du composite en alternant rupture des fibres et rupture de la matrice et à droite : rupture du composite avec des phases de délaminage et d'arrachement

La rupture peut être analysée de deux façons différentes : soit on recherche des critères de rupture globaux ou soit on cherche à décrire précisément l'évolution d'un front de



fissure à travers un matériau composite. Pour le premier aspect, l'approche selon la loi des mélanges est couramment utilisée.

Par exemple, dans le cas d'un composite unidirectionnel (cf Figure I.12) soumis à une traction longitudinale (sens des fibres), la rupture a lieu lorsque la déformation du composite est égale à la plus petite des déformations critiques de la fibre  $\epsilon_{fu}$  et de la matrice dans le sens transversale  $\epsilon_{mu}$ . Lorsque  $\epsilon_{fu} < \epsilon_{mu}$ , la rupture du composite est couramment définie en introduisant la contrainte critique du composite telle que

$$\sigma_{cu} = \sigma_{fu}V_f + (\sigma_m)_{\epsilon_{fu}}(1 - V_f) \quad (\text{I.1})$$

où  $V_f$  est la fraction volumique des fibres du composite ( $0 < V_f < 1$ ) et où  $\sigma_{fu}$  est la contrainte associée à la déformation critique  $\epsilon_{fu}$  et  $(\sigma_m)_{\epsilon_{fu}}$  la contrainte dans la matrice correspond à la déformation  $\epsilon_{fu}$ . Lorsque  $\epsilon_{fu} > \epsilon_{mu}$ , on introduit une relation du même type à partir de la contrainte critique  $\sigma_{mu}$  (contrainte associée à la déformation critique  $\epsilon_{mu}$  de la matrice).

D'autres approches globales sont utilisées comme par exemple le critère de Hill [Hil48] basé sur une approche généralisée du critère de Von Mises. On peut citer aussi le critère de Tsai-Hill [TH80] qui propose une modification du critère précédent.

Lorsque l'on souhaite décrire la rupture d'un composite de façon locale (évolution du front de fissure en fonction du chargement), on commence par analyser les phénomènes qui agissent entre la fibre et la matrice puis on essaie de les généraliser pour obtenir une évolution globale du front de fissure. Tout d'abord, on introduit deux notions différentes : les microfissures et les macrofissures. Les premières définissent des phénomènes locaux à la structure composite (cf Figure I.12) et peuvent se résumer en quatre phénomènes : rupture des fibres, rupture longitudinale dans la matrice, rupture transverse de la matrice et rupture de l'interface fibre matrice. Les macrofissures sont définies comme étant un ensemble de microfissures. Ainsi, lorsque le chargement évolue, la structure génère des microfissures qui en fonction du modèle et du chargement définissent des macrofissures. La figure I.13 présente deux exemples de macrofissure [Kel70], une première qui traverse successivement les différents matériaux du composite (matrice et renfort) [MJW65] et qui revient donc en une alternance de rupture de fibre et de rupture transversale de la matrice. Une deuxième macrofissure est présentée et dont l'évolution se fait en combinant les quatre types de microfissure.

Un essai de traction sur une éprouvette de composite à fibre unidirectionnel est présenté sur les figures I.14 et I.15 (cf [Kel70]). La première figure représente l'évolution de la déformation globale de l'éprouvette en fonction du temps lorsque la contrainte est imposée par palier. On observe que lorsque la contrainte appliquée augmente, alors la déformation évolue (en fissurant le composite) pour se stabiliser autour d'une valeur. En d'autres termes la structure relaxe l'énergie injectée dans le système (brusque augmentation de la contrainte) en un certain temps. La figure I.15 représente l'évolution de la contrainte en fonction de la déformation pour deux composites ayant des diamètres de fibre différents.

L'étude des matériaux composites présente des similitudes avec les multicouches au niveau des mécanismes de rupture lorsque la fissure traverse successivement la matrice et le renfort (similitude avec le mode de rupture présenté par la figure I.11 lorsque la taille de l'entaille est grande). Par la suite, et plus précisément dans le chapitre IV, on étudiera l'influence d'une ténacité périodique sur la propagation de la fissure (on s'intéressera au cas où la période de la ténacité devient très petite). Cette étude permettra d'apporter une

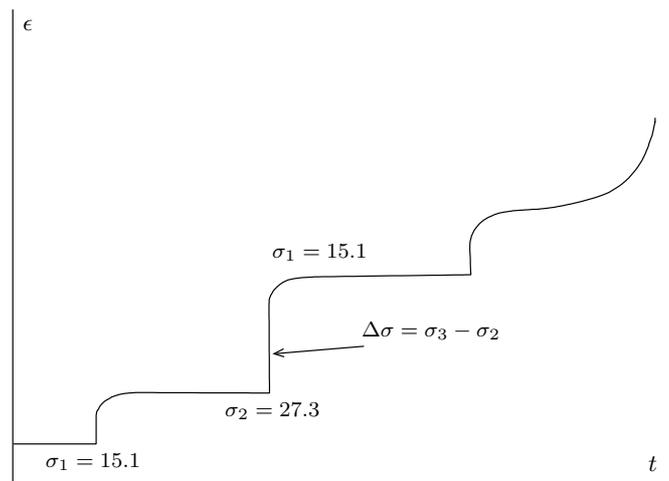


FIG. I.14 : Evolution de la déformation en fonction du temps pour un essai de traction sur une éprouvette composite dans le sens des fibres avec une contrainte imposée augmentant par palier.

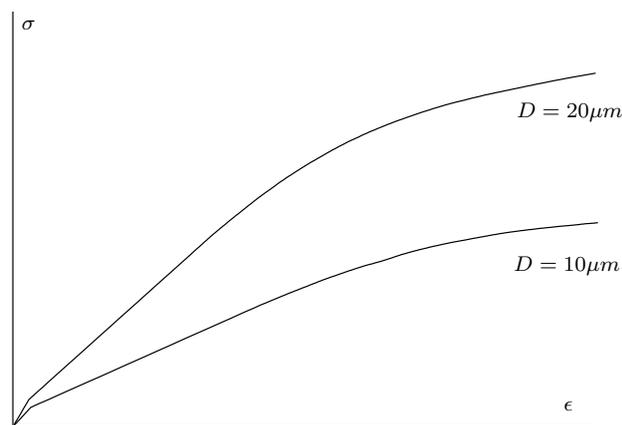
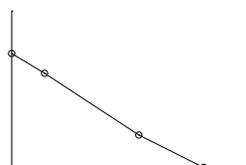


FIG. I.15 : Evolution de la contrainte imposée en fonction de la déformation globale pour un essai de traction et pour différents diamètres de fibre.

lecture particulière de la rupture des matériaux composites en introduisant la notion de ténacité apparente. Des éléments de réponse supplémentaires seront apportés au chapitre III au sujet du phénomène introduit par la figure I.14 (stabilisation de la déformation autour d'une valeur). Pour cela on introduira un phénomène particulier : *la relaxation de l'énergie cinétique*.



## C Cadre théorique de la rupture dynamique

Cette partie vise à présenter les réponses apportées par les approches théoriques sur les phénomènes précédemment introduits. En particulier on se focalisera sur le taux de restitution d'énergie.

### C.1 Approche énergétique de la mécanique de la rupture

#### C.1.1 Le taux de restitution d'énergie en statique

Nous allons tout d'abord commencer par quelques rappels en statique avec en particulier l'introduction du taux de restitution d'énergie  $G$ , puis nous présenterons son équivalent en dynamique  $\mathcal{G}$  : le *flux d'énergie*.

Le cadre de l'étude se base sur une structure  $\Omega$  élastique ayant une fissure  $\Gamma_0$  (cf Figure I.16).  $\ell$  représente l'abscisse curviligne de la fissure  $\Gamma_0$ . En statique le taux de restitution d'énergie s'interprète comme étant la variation de l'énergie potentielle lorsque la longueur de la fissure varie. Ainsi  $G$  se présente sous la forme

$$G = -\frac{d}{d\ell}E_p = -\frac{d}{d\ell}(W_{ext} + W_{elas}) \quad (\text{I.2})$$

où  $E_p$  représente l'énergie potentielle,  $W_{ext}$  le travail des forces extérieures et  $W_{elas}$ , l'énergie élastique.

Dans la théorie de Griffith, l'énergie de séparation des surfaces du milieu continue est interprétée comme étant une énergie proportionnelle à l'aire fissurée. On a donc

$$dE_p = -k d\ell \quad (\text{I.3})$$

où  $k$  est l'énergie de surface caractéristique du matériau et  $d\ell$  représente l'aire totale de la fissure. Au final, le critère de propagation se met sous la forme

$$G \leq k, \quad \dot{\ell} \geq 0, \quad (G - k)\dot{\ell} = 0 \quad (\text{I.4})$$

Une écriture différente de  $G$  défini par (I.2) peut être introduite. En utilisant le théorème des travaux virtuels et le fait que  $W_{elas} = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \sigma_{ij} \epsilon_{ij}$  on obtient

$$G = \frac{1}{2} \int_{S_T} T_i^d \frac{du_i}{d\ell} ds - \frac{1}{2} \int_{S_U} u_i^d \frac{dT_i}{d\ell} ds \quad (\text{I.5})$$

où  $S_T$  et  $S_U$  correspondent à une partie de la frontière de  $\Omega$  où respectivement des conditions de type Dirichlet et des conditions de type Neumann sont imposées.

En utilisant le théorème de réciprocité de Betti, (I.5) peut s'écrire sous la forme d'une intégrale curviligne basée sur le contour  $\Gamma$  fermé et entourant totalement la fissure  $\Gamma_0$  (cf Figure I.16)

$$G = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \left( T_i \frac{du_i}{d\ell} - u_i \frac{dT_i}{d\ell} \right) ds \quad (\text{I.6})$$

Une telle expression est invariante par rapport au contour  $\Gamma$ . Lorsque la fissure  $\Gamma_0$  débouche à travers  $\partial\Omega$  (cf Figure I.17) les expressions de  $G$  sous la forme d'une intégrale

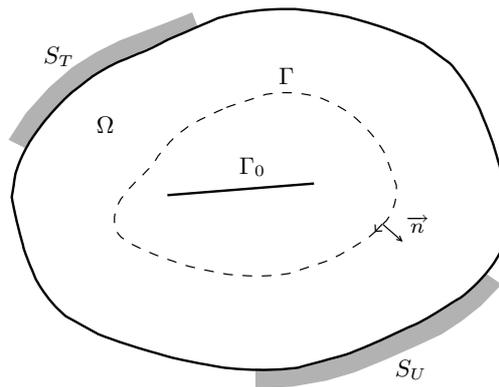


FIG. I.16 : Notations pour l'intégrale de contour

curviligne sont à redéfinir puisque  $\Gamma$  est un contour ouvert. Ainsi on définit un invariant que l'on nomme intégrale  $J$  (ou intégrale de Rice) tel que

$$J = \int_{\Gamma} \left( W n_1 - \sigma_{ik} n_k \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right) ds \quad (I.7)$$

De même cette intégrale est indépendante du contour d'intégration  $\Gamma$  et on obtient que pour le cas élastique, l'intégrale  $J$  est égale au taux de restitution d'énergie  $G$ . Lorsque la fissure évolue en effectuant un branchement alors l'égalité n'est plus vérifiée.

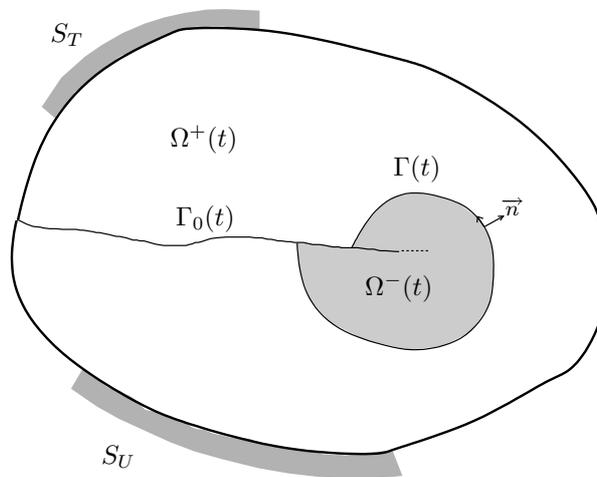
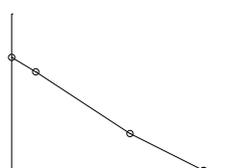


FIG. I.17 : Notations pour l'intégrale de contour

### C.1.2 Le flux de l'énergie totale en dynamique

Pour le cas dynamique l'expression du taux de restitution d'énergie  $G$  est modifiée puisque l'on a

$$\int_{\Omega} \frac{1}{2} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} d\omega = \int_{\Omega} -\frac{1}{2} \rho \ddot{u}_i u_i d\omega + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} T_i u_i ds \quad (I.8)$$



Ainsi le taux de restitution d'énergie en dynamique s'écrit

$$G = \frac{d}{d\ell} \int_{\Omega} \frac{1}{2} \rho \ddot{u}_i u_i d\omega + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \left( T_i \frac{du_i}{d\ell} - u_i \frac{dT_i}{d\ell} \right) ds \quad (\text{I.9})$$

qui ne peut plus se mettre sous la forme d'une intégrale curviligne indépendante du contour puisque l'énergie cinétique ne peut plus être négligée.

L'expression du taux de restitution d'énergie en dynamique est construite à partir de (I.2). Ainsi l'énergie cinétique n'apparaît pas dans le calcul du taux de restitution d'énergie. Pour palier ce manque, il est usuel d'utiliser une grandeur  $\mathcal{G}$  construite à partir de la variation de l'énergie totale et défini telle que

$$\mathcal{G} d\ell = -dW_{elas} - dW_{ext} - dW_{cin} \quad (\text{I.10})$$

$\mathcal{G}$  est souvent appelé dans la littérature *flux de l'énergie totale* pour une avancée unitaire du front de fissure. Un critère de propagation à partir de  $\mathcal{G}$  peut être défini. Ce critère revient à rechercher l'évolution du front de fissure vérifiant les trois équations suivantes

$$\mathcal{G} \leq k, \quad \dot{\ell} \geq 0, \quad (\mathcal{G} - k) \dot{\ell} = 0 \quad (\text{I.11})$$

Pour définir  $\mathcal{G}$  on part de l'équation du mouvement en dynamique

$$\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} - \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{I.12})$$

où  $\rho$  représente la masse volumique du matériau. En multipliant (I.12) par  $\partial u_i / \partial t$  on obtient

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \sigma_{ji} \frac{\partial u_i}{\partial t} \right) - \frac{\partial}{\partial t} (U + T) = 0 \quad (\text{I.13})$$

où  $U$  est l'énergie élastique et  $T$  l'énergie cinétique définies telles que

$$U = \frac{1}{2} \sigma_{ij} u_{i,j}, \quad T = \frac{1}{2} \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} \frac{\partial u_i}{\partial t} \quad (\text{I.14})$$

On considère un contour  $\Gamma(t)$  (cf Figure I.17) centré par rapport à la pointe de la fissure  $\ell(t)$ ; ainsi lorsqu'on évolue dans un repère attaché à la pointe de la fissure, le contour  $\Gamma(t)$  est invariant. Pour un contour  $\Gamma(t)$  donné, on définit un domaine intérieur  $\Omega^-(t)$  et un domaine extérieur  $\Omega^+(t)$  tels que  $\Omega = \Omega^-(t) \cup \Omega^+(t)$  et  $\Omega^-(t) \cap \Omega^+(t) = \emptyset$ . On note aussi  $C(t) = \partial\Omega^+(t) \setminus \Gamma(t)$ . On introduit ensuite le volume  $V$  de dimension 3 (2 dimensions en espace et une en temps) tel que  $V = \bigcup_{t_1 \leq t \leq t_2} \Omega^+(t)$ .  $V$  correspond donc au volume généré

par l'ensemble des domaines  $\Omega^+(t)$  compris entre les plans  $t = t_1$  et  $t = t_2$ .  $\vec{\nu}$  est un vecteur unitaire défini comme étant normal à la surface  $\partial V$  et extérieur au volume  $V$ . Le vecteur  $\vec{\nu}$  est défini par ses trois composantes  $\nu_1$ ,  $\nu_2$  et  $\nu_t$  (1 et 2 représentent les deux directions de l'espace). De même on introduit  $\vec{n}$  comme étant un vecteur unitaire normal à  $\partial\Omega^+(t)$  et orienté vers l'extérieur lorsqu'il se trouve sur  $C(t)$  et dans le sens opposé du front de fissure lorsqu'il se trouve sur  $\Gamma(t)$ . Lorsque  $\nu_t = 0$  on a  $\nu_1 = -n_1$  et  $\nu_2 = -n_2$  sur  $\Gamma(t)$ .

En intégrant (I.13) sur le volume  $V$  et en utilisant le théorème de Stokes on a

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \int_{C(t)} \sigma_{ji} \frac{\partial u_i}{\partial t} dC dt - \int_{\Omega^+(t_2)} (U + T) d\Omega + \int_{\Omega^+(t_1)} (U + T) d\Omega \\ = - \int_{Tube} \left[ \sigma_{ji} \frac{\partial u_i}{\partial t} \nu_j - (U + T) \nu_t \right] dS \end{aligned} \quad (\text{I.15})$$

où  $Tube = \bigcup_{t_1 \leq t \leq t_2} \Gamma(t)$ . On suppose que le front de fissure se propage selon la direction  $x$  avec une vitesse  $v$ , ainsi on a  $\nu_t = -v\nu_1$  sur la surface  $Tube$ . Le second membre de (I.15) se met donc sous la forme

$$- \int_{Tube} \left[ \sigma_{ji} \frac{\partial u_i}{\partial t} + (U + T)v\delta_{1j} \right] \nu_j dS \quad (\text{I.16})$$

où  $\delta_{ij}$  est le symbole de Kronecker. Puis en remarquant que  $\nu_j dS = -n_j ds dt$ , (I.15) se met sous la forme

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \int_{C(t)} \sigma_{ji} \frac{\partial u_i}{\partial t} dC dt &= - \int_{\Omega^+(t_1)} (U + T) d\Omega + \int_{\Omega^+(t_2)} (U + T) d\Omega \\ &+ \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Gamma} \left[ \sigma_{ji} \frac{\partial u_i}{\partial t} n_j + (U + T)v n_1 \right] ds dt \end{aligned} \quad (\text{I.17})$$

Le terme de gauche représente le travail des forces extérieures appliquées sur la frontière extérieure de  $\Omega$  ainsi que sur les lèvres de la fissure entre les temps  $t_1$  et  $t_2$ . Les deux premiers termes à droite de l'égalité de l'équation (I.17) représentent l'énergie totale aux temps  $t_1$  et  $t_2$ . Ainsi le dernier terme représente l'intégrale de l'énergie totale à travers le contour  $\Gamma$  entre les temps  $t_1$  et  $t_2$ . De ce fait on définit

$$F(\Gamma) = \int_{\Gamma} \left[ \sigma_{ji} \frac{\partial u_i}{\partial t} n_j + (U + T)v n_1 \right] ds \quad (\text{I.18})$$

comme étant le flux de l'énergie totale à travers le contour  $\Gamma$ . De plus, on peut démontrer que  $F(\Gamma)$  est obtenue à partir d'une intégrale curviligne indépendante du contour  $\Gamma$ . Si on en revient à la définition de  $\mathcal{G}$  on a

$$\begin{aligned} \mathcal{G} &= \lim_{\Gamma \rightarrow 0} \left\{ \frac{F(\Gamma)}{v} \right\} \\ &= \lim_{\Gamma \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{v} \int_{\Gamma} \left[ \sigma_{ji} \frac{\partial u_i}{\partial t} n_j + (U + T)v n_1 \right] d\Gamma \right\} \end{aligned} \quad (\text{I.19})$$

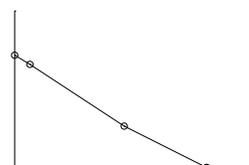
puisque  $\mathcal{G}$  est défini comme étant le flux d'énergie totale pour une avancée unitaire du front de fissure.

### C.1.3 Le flux d'énergie totale pour un cas 1D

On se propose de présenter le calcul du flux d'énergie pour un modèle 1D particulier : le décollement de film. Il s'agit d'un film complètement collé sur une interface et qui se décolle sous l'effet d'un déplacement imposé (cf Figure II.1). Ce modèle sera développé par la suite à travers les chapitres II, III et IV. On suppose que le film se décolle selon la direction 1 et qu'un déplacement est imposé selon la direction 2. L'expression du flux d'énergie totale (I.19) peut se mettre sous la forme

$$\mathcal{G} = \lim_{\Gamma \rightarrow 0} \int_{\Gamma} \left( \left( \frac{\rho}{2} u_{,t}^2 + W(\epsilon) \right) n_1 - \sigma_{ij} n_j \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right) ds \quad (\text{I.20})$$

en considérant que  $dx_1 = v dt$ .  $W(\epsilon)$  représente l'énergie élastique du modèle qui est définie comme étant quadratique et égale à  $\frac{N}{2} u_{,1}^2$  et où  $N$  est une tension appliquée



à l'extrémité du film (cf chapitre II). La contrainte  $\sigma$  est définie telle que  $\sigma = N\epsilon$ . Le contour  $\Gamma$  est défini, par exemple, par un cercle centré sur le front de décollement du film. Appliqué au modèle du film, ce contour se trouve réduit en deux points (intersection de  $\Gamma$  avec le film) : un en amont du front de décollement du film et l'autre en aval. Ainsi la construction du vecteur unitaire  $\vec{n}$  est définie par deux valeurs :  $\vec{n} = -n_1$  pour le point en amont ( $x = \ell^-$ ) et  $\vec{n} = n_1$  pour le point en aval ( $x = \ell^+$ ) du front de décollement du film. Ainsi (I.20) devient

$$\mathcal{G} = \frac{\rho}{2} (\dot{u}^2(\ell^+) - \dot{u}^2(\ell^-)) - \frac{N}{2} (u'^2(\ell^+) - u'^2(\ell^-)) \quad (\text{I.21})$$

qui se met sous la forme suivante

$$\mathcal{G} = \frac{N}{2} \llbracket u'^2 \rrbracket - \frac{\rho}{2} \llbracket \dot{u}^2 \rrbracket \quad (\text{I.22})$$

où les crochets désignent les sauts. On appellera par la suite le flux d'énergie totale, le taux de restitution d'énergie en dynamique.

## C.2 Présentation de quelques solutions analytiques

On se propose à travers cette partie de présenter rapidement les différents champs qui ont été investigués au sujet des solutions élastodynamiques en rupture. Rappelons tout d'abord que les équations de l'élastodynamique peuvent s'écrire à partir de deux fonctions de déplacement  $\phi$  et  $\psi$  telles que

$$\begin{cases} u = \phi_{,x} + \psi_{,y} \\ v = \phi_{,y} - \psi_{,x} \\ \phi_{,xx} + \phi_{,yy} - \frac{1}{c_P^2} \phi_{,tt} = 0 \\ \psi_{,xx} + \psi_{,yy} - \frac{1}{c_S^2} \psi_{,tt} = 0 \end{cases} \quad (\text{I.23})$$

où  $c_P$  et  $c_S$  définissent respectivement les célérités des ondes longitudinales et transversales telles que

$$c_P = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad c_S = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (\text{I.24})$$

Dans le cas d'un régime stationnaire, c'est à dire lorsque le temps n'intervient pas explicitement, on souhaite écrire les équations de l'élastodynamique dans un repère centré sur le front de fissure et évoluant à une vitesse  $v$  selon la direction  $\vec{e}_x$ . On effectue ainsi le changement de repère suivant :  $Y = y$  et  $X = x - vt$ ; ce qui permet d'écrire (I.23) sous la forme

$$\begin{cases} a_p^2 \phi_{,XX} + \phi_{,YY} = 0 \\ a_s^2 \psi_{,XX} + \psi_{,YY} = 0 \end{cases} \quad (\text{I.25})$$

où  $a_p = \sqrt{1 - v^2/c_P^2}$  et  $a_s = \sqrt{1 - v^2/c_S^2}$

On se propose maintenant de présenter la solution de Yoffe [Yof51]. Ce problème consiste en une fissure de longueur constante  $2a$  évoluant avec une vitesse  $v$  selon la direction  $\vec{e}_x$  (cf Figure I.18). Le modèle original développé par Yoffe, introduit un chargement en contrainte à l'infini selon la direction  $\vec{e}_y$ . Ainsi la propagation de la fissure est

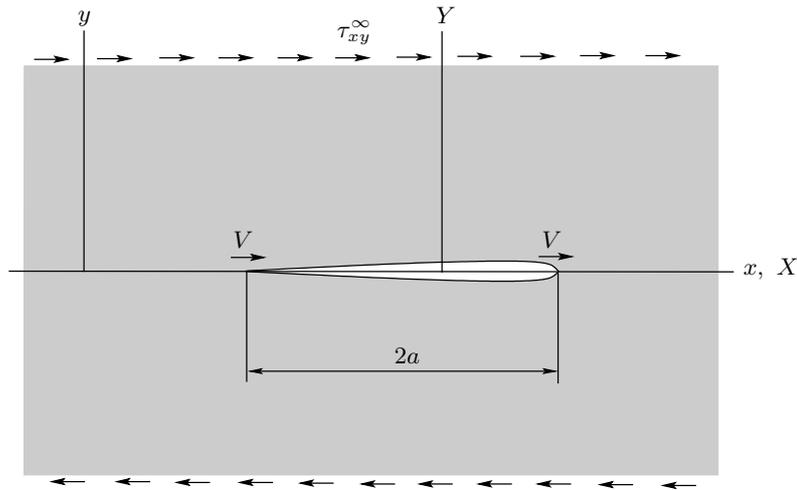


FIG. I.18 : Notations pour l'intégrale de contour

essentiellement pilotée par un mécanisme de rupture en mode I. La solution que nous allons développer est celle introduite par Broberg [Bro99] et consiste à imposer à l'infini des contraintes de cisaillement. Ainsi le mécanisme prépondérant pour la propagation de la fissure est le mode II.

La résolution de ce problème nécessite la connaissance d'un modèle particulier. Il s'agit d'un milieu semi infini  $y > 0$  où une force ponctuelle en cisaillement  $\tau_{xy}^0$  définie sur l'axe  $y = 0$  évolue à vitesse  $v$  selon  $\vec{e}_x$ . La condition aux limites se présente sous la forme  $\tau_{xy}^0 = T\delta(x - vt)$  avec  $T > 0$ . A cette condition, on ajoute  $\sigma_y = 0$  pour  $y = 0$ . Les solutions générales de (I.25) (cf [Ach75]) peuvent se mettre sous la forme

$$\begin{aligned}\phi &= \int_0^\infty A(\alpha)e^{-\alpha a_p Y} \sin \alpha X d\alpha \\ \psi &= \int_0^\infty C(\alpha)e^{-\alpha a_s Y} \cos \alpha X d\alpha\end{aligned}\quad (\text{I.26})$$

En utilisant les conditions aux limites ainsi que (I.26) et (I.23) on obtient après quelques calculs

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{T}{\pi\mu} \cdot \frac{Y_{II}(\beta)}{2(1-k^2)} \cdot \frac{1}{X}, \quad \text{pour } X \neq 0 \text{ et } Y = 0 \quad (\text{I.27})$$

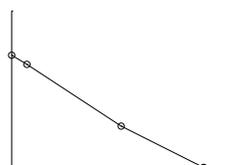
où  $k = c_S/c_P$ ,  $\beta = v/c_P$  et

$$Y_{II}(\beta) = 2(1-k^2) \frac{a_S(1-a_S^2)}{R(a_P, a_S)} \quad \text{avec } R(a_P, a_S) = 4a_P a_S - (1+a_S^2)^2 \quad (\text{I.28})$$

$R(a_P, a_S)$  se trouve plus facilement dans la littérature sous la forme

$$R(\beta) = 4k^3 \sqrt{1-\beta^2} \sqrt{k^2-\beta^2} - (2k^2-\beta^2)^2 = k^4 R(a_P, a_S) \quad (\text{I.29})$$

qui est la fonction de Rayleigh et qui s'annule lorsque la vitesse  $v$  est égale à la vitesse de Rayleigh. Les fonctions de déplacement  $\phi$  et  $\psi$  ne peuvent pas être directement calculées puisque les intégrales (I.26) ne convergent pas. La difficulté est contournée en calculant



leurs dérivées secondes, ce qui permet avec l'aide de (I.23) d'obtenir les champs élastodynamiques pour  $y > 0$  (cf [Bro99]). En comparant la solution dynamique obtenue dans le repère  $(X, Y)$  avec la solution statique dans le repère  $(x, y)$  (la contrainte de cisaillement est fixe), on obtient que la réponse dynamique  $(\partial u / \partial x)$  est obtenue en multipliant la solution statique par  $Y_{II}(\beta)$ . Ainsi en utilisant le théorème de superposition on obtient que la solution dynamique du modèle où un chargement en cisaillement  $\tau_{xy}^0(X)$  est imposé sur  $y = 0$  (on a toujours  $\sigma_y = 0$  sur cette même frontière) est égale à la solution statique (où une contrainte de cisaillement  $\tau_{xy}^0(x)$  est imposée sur  $y = 0$ ) multipliée par  $Y_{II}(\beta)$ . cette approche est toujours utilisable lorsqu'une fissure est présente sur la droite  $y = 0$ . Ainsi, en se donnant une fissure de longueur  $2a$  sur l'axe  $\vec{e}_x$  évoluant à une vitesse  $v$  et en appliquant sur  $y = 0$  une contrainte de cisaillement  $\tau_{xy}^0(X)$  qui est exactement la contrainte de cisaillement sur  $y = 0$  du modèle de Yoffe en statique et en mode II on obtient ce que l'on souhaite. En effet, d'après ce qui précède, la solution de Yoffe en dynamique est exactement la solution de Yoffe en statique multipliée par  $Y_{II}(\beta)$ . Pour  $y = 0$  la solution se met sous la forme

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= \tau_{xy}^\infty \sqrt{\frac{X+a}{X-a}} \text{ pour } |X| > a \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{\tau_{xy}^\infty Y_{II}(\beta)}{2(1-k^2)\mu} \sqrt{\frac{a+X}{a-X}} \text{ pour } |X| < a \end{aligned} \quad (\text{I.30})$$

les expressions des champs élastodynamiques pour  $y > 0$  sont présentés dans [Bro99] et [Yof51].

A partir de ces champs, il est possible de calculer deux paramètres caractérisant la singularité de la pointe de fissure en dynamique : le facteur d'intensité dynamique  $K_{II}^\sigma$  et le facteur d'intensité cinématique  $K_{II}^v$  qui se définissent tels que

$$\begin{aligned} K_{II}^\sigma &= \lim_{r \rightarrow 0} (\sqrt{2\pi r} \tau_{xy})_{y=0} = 2\tau_{xy}^\infty \sqrt{\pi a} \\ K_{II}^v &= \frac{(1-k^2)\mu}{Y_{II}(\beta)} \lim_{r \rightarrow 0} \left( \sqrt{\frac{2\pi}{r}} u \right) = Y_{II}(\beta) K_{II}^\sigma \end{aligned} \quad (\text{I.31})$$

A partir de ces deux facteurs, une relation généralisée d'Irwin en dynamique est obtenue

$$\mathcal{G} = \frac{K_{II}^\sigma K_{II}^v}{4(1-k^2)\mu} \quad (\text{I.32})$$

où  $\mathcal{G}$  est le flux d'énergie introduit précédemment.

La résolution de problèmes plus complexes peuvent être obtenue, comme par exemple l'évolution transitoire du problème précédent et où la seconde pointe de fissure ne se referme pas, mais se propage selon  $-\vec{e}_x$  avec une vitesse  $v$ . Une solution de ce problème est obtenue par Afanasev et Cherepanov (cf [Bui78]) en introduisant les variables complexes de Smirnov et Sobolev.

La littérature est relativement abondante sur ces sujets et une multitude de problèmes sont présentés dans [Bui78], [Fre98] et [Bro99].

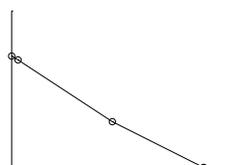
## D Conclusion

Ce chapitre a permis de présenter les différents mécanismes de rupture en dynamique qui seront abordés par la suite. Nous avons montré que la nature présente de nombreux cas de propagation brutale de fissure (à travers un bloc de glace et une plaque de verre). Il a été obtenu que les conditions aux limites influent sur la forme des trajets de fissuration et peuvent déterminer l'arrêt ou non d'une fissure.

D'un point de vue industriel nous avons introduit quelques phénomènes de rupture brutale présents au sein des centrales d'Edf. Plus particulièrement nous avons montré que la présence de zones hétérogènes et de défauts sous revêtement pouvait entraîner une propagation brutale du front de fissure. Ensuite, quelques expériences couramment interprétées chez Edf ont été introduites.

La problématique autour de la propagation d'une fissure à travers un milieu hétérogène a été abordée. Plus spécifiquement, nous nous sommes intéressés à des milieux présentant des hétérogénéités ayant une certaine périodicité (périodicité de la ténacité) comme les matériaux de type multicouche et composite.

Et pour finir nous avons développé quelques aspects théoriques comme le taux de restitution d'énergie en statique et le flux d'énergie totale nécessaire pour une approche dynamique. Le cas de Yoffé en mode II a par la suite été présenté.





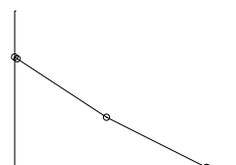
## Chapitre II

# Modèles à discontinuité de ténacité

### Contents

<b>A</b>	<b>Introduction</b> . . . . .	<b>32</b>
<b>B</b>	<b>Présentation générale du modèle</b> . . . . .	<b>33</b>
<b>C</b>	<b>Réponses quasi-statiques</b> . . . . .	<b>35</b>
	C.1 Formulation du problème d'évolution . . . . .	35
	C.2 Propriétés générales . . . . .	36
	C.3 Quelques exemples . . . . .	39
<b>D</b>	<b>Réponse dynamique</b> . . . . .	<b>44</b>
	D.1 Formulation du problème de dynamique . . . . .	44
	D.2 Propriétés générales . . . . .	45
	D.3 Cas homogène . . . . .	48
	D.4 Cas discontinu avec augmentation de la ténacité . . . . .	48
	D.5 Cas discontinu avec diminution de la ténacité . . . . .	52
<b>E</b>	<b>Conclusion</b> . . . . .	<b>58</b>

**résumé :** Ce chapitre présente le cas d'un film mince se décollant à travers une interface ayant une discontinuité de la ténacité (lorsque le film se décolle, celui-ci rencontre après le point de discontinuité : soit une ténacité plus forte soit une ténacité plus faible). Nous présentons pour un tel modèle différentes solutions quasi-statiques (approche (UGM) et (ULM)) ainsi que la solution dynamique. L'objectif de cette étude est de montrer la convergence ou non de la solution dynamique limite (lorsque la vitesse du chargement tend vers 0) vers les différentes solutions quasi-statiques. Il a été obtenu que pour le cas avec une augmentation de la ténacité, la convergence a lieu et ce vers toutes les solutions quasi-statiques considérées. Tandis que pour le cas avec une diminution de la ténacité, la solution dynamique limite converge vers une certaine solution quasi-statique : la solution métastable.



## A Introduction

A travers ce chapitre nous présentons le cas du décollement d'un film mince collé sur une interface ayant une discontinuité de la valeur de la ténacité. Initialement le film est totalement collé, puis sous l'effet d'un déplacement imposé (charge), celui-ci se décolle. Nous considérerons différents types de discontinuité : soit le film se décolle à travers un milieu ayant une ténacité plus forte ou soit il se décolle à travers un milieu ayant une ténacité plus faible.

Tout d'abord, différentes approches quasi-statiques seront présentées. Plus particulièrement, nous introduirons les approches (UGM) (Unilateral Global Minimum) et (ULM) (Unilateral Local Minimum). Nous montrerons que l'approche (UGM) admet une unique solution tandis que l'approche (ULM) admet une infinité de solution lorsque le film arrive sur une zone de plus faible ténacité. Parmi toutes les solutions (ULM) nous nous focaliserons sur une solution particulière : la solution métastable.

Ensuite, nous présenterons la construction de la solution dynamique. Nous montrerons qu'elle peut se construire à partir d'une construction récurrente basée sur des domaines dans le plan espace-charge. A partir de cette solution, nous introduirons la solution dynamique limite qui correspond à celle où la vitesse de chargement tend vers zéro.

Ces différentes solutions nous permettront de conclure quant à la convergence ou non de la solution dynamique limite vers une des solutions quasi-statiques. On prendra bien soin de distinguer les deux types de répartition de la ténacité.

## B Présentation générale du modèle

Le modèle utilisé est un film 1D inextensible et infiniment flexible qui se décolle sur une surface ayant des propriétés particulières que l'on précisera par la suite. Le problème considéré est représenté sur la figure (II.1).  $x$  et  $t$  désignent respectivement la coordonnée spatiale variant dans  $[0, +\infty)$  et la coordonnée temporelle variant dans  $[0, +\infty)$ . L'évolution du film est décrite par les champs de déplacement  $u$  et  $v$ , où  $u$  et  $v$  définissent respectivement la position du film par rapport au mode I et au mode II d'ouverture. De plus on considère que la cinématique du film répond à l'hypothèse des petits déplacements et que la propagation du décollement du film est due au mode I. On définit comme condition aux limites, un déplacement imposé  $u = T$  en  $x = 0$  et une force imposée en ce même point selon la direction  $-\vec{x}$  :

$$u|_{x=0} = T = c\epsilon t, \quad \epsilon > 0 \text{ et } c = \sqrt{\frac{N}{\rho}} \quad (\text{II.1})$$

où  $\epsilon$  est définie comme étant la vitesse de chargement sans dimension.

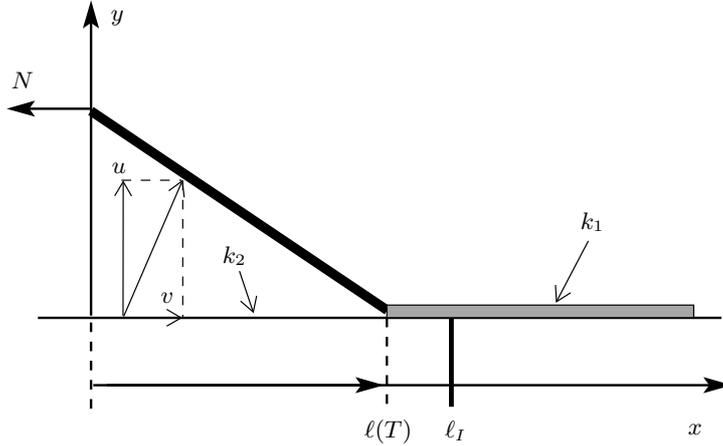


FIG. II.1 : Décollement du film à travers une interface discontinue en ténacité

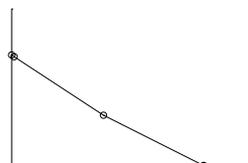
Les différentes grandeurs de notre problème seront définies à partir des variables  $T$  et  $x$ . En effet il est préférable d'utiliser  $T$  à la place de  $t$  pour que l'on puisse comparer les résultats du modèle pour différentes valeurs de  $\epsilon$ . La dérivée spatiale sera notée avec un prime, alors que la dérivée par rapport au niveau d'ouverture imposée par un point :

$$u' = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \dot{u} = \frac{\partial u}{\partial T} \quad (\text{II.2})$$

L'état de décollement du film au niveau d'ouverture imposée  $T$ , noté  $\Gamma(T)$ , correspond aux points  $x$  où  $u$  a pris au moins une fois une valeur non nulle (positive) à une charge inférieure ou égale à  $T$  :

$$\Gamma(T) = \{x \geq 0 : \exists S \leq T, u(x, S) > 0\} \quad (\text{II.3})$$

Pour simplifier la présentation, nous postulerons *a priori* que l'état de décollement du film est à chaque niveau d'ouverture imposée sur un intervalle  $[0, \ell(T))$ , l'irréversibilité



de la fissuration se traduisant par la croissance de l'application  $T \mapsto \ell(T)$ ,

$$\Gamma(T) = [0, \ell(T)), \quad \dot{\ell}(T) \geq 0 \quad (\text{II.4})$$

La suite de l'étude nécessite l'utilisation des différentes énergies. On définit ainsi les énergies cinétique, de surface et le travail des forces extérieures :

$$\mathcal{K}(T) = \frac{\epsilon^2 c^2}{2} \int_0^{\ell(T)} \rho \dot{u}(x, T)^2 dx, \quad \mathcal{S}(T) = \int_0^{\ell(T)} k(x) dx, \quad \mathcal{P}(T) = -N \int_0^{\ell(T)} v' dx \quad (\text{II.5})$$

On modifie le travail des forces extérieures en utilisant la condition d'inextensibilité :

$$dx^2 = (1 + v')^2 dx^2 + u'^2 dx^2 \quad (\text{II.6})$$

qui devient  $v' = -u'^2/2$  en négligeant le terme  $v'^2$ . Le travail des forces extérieures se met ainsi sous la forme d'une énergie potentielle :  $\mathcal{P}(T) = \frac{1}{2} \int_0^{\ell(T)} N u'^2 dx$ .

Pour plus de simplicité dans la suite du calcul on adimensionnalise le problème, ce qui revient à considérer les variables  $\bar{x}$  et  $\bar{T}$  adimensionnalisées telles que

$$T = L\bar{T}, \quad x = 1.\bar{x} \quad (\text{II.7})$$

où 1 a la dimension d'une longueur et  $L$  est choisi égal à  $\ell_I$ . De même les autres champs et variables sont adimensionnalisés tels que

$$\ell(T) = 1.\bar{\ell}(\bar{T}), \quad k = N\bar{k}, \quad u = L\bar{u} \quad (\text{II.8})$$

Ce qui permet de considérer les énergies suivantes (pour plus de simplicité dans les notations les variables  $\bar{T}$ ,  $\bar{x}$ ,  $\bar{u}$ ,  $\bar{k}$  et  $\bar{\ell}$  se notent  $T$ ,  $x$ ,  $u$ ,  $k$  et  $\ell$ ) :

$$\mathcal{K}(T) = \frac{\epsilon^2 N}{2} \int_0^{\ell(T)} \dot{u}^2 dx, \quad \mathcal{S}(T) = N \int_0^{\ell(T)} k(x) dx, \quad \mathcal{P}(T) = \frac{N}{2} \int_0^{\ell(T)} u'^2 dx \quad (\text{II.9})$$

On notera que, pour l'énergie de surface, on a adopté l'hypothèse de Griffith,  $k(x)$  représentant la ténacité au point  $x$ . On supposera en outre que :

$$\exists k_1, k_2 : 0 < k_1 \leq k(x) \leq k_2 < +\infty, \quad \text{pour presque tout } x \quad (\text{II.10})$$

L'énergie totale du milieu, au niveau de charge  $T$ , est la somme des trois énergies :

$$\mathcal{E}(T) = \mathcal{P}(T) + \mathcal{K}(T) + \mathcal{S}(T). \quad (\text{II.11})$$

## C Réponses quasi-statiques

### C.1 Formulation du problème d'évolution

Dans l'approche quasi-statique, on néglige l'énergie cinétique et on calcule l'énergie potentielle en supposant que la structure est en équilibre à chaque niveau de charge. En vertu du théorème de l'énergie potentielle, on a donc

$$\mathcal{P}(T) = \min_{\{w \in H^1(0, \ell(T)) : w(0)=T, w \geq 0, w(\ell(T))=0\}} \frac{1}{2} \int_0^{\ell(T)} w'(x)^2 dx, \quad (\text{II.12})$$

le minimum étant atteint par la configuration d'équilibre  $u|_T$ . Un calcul immédiat donne

$$u(x, T) = T \left(1 - \frac{x}{\ell(T)}\right)^+, \quad \mathcal{P}(T) = \frac{T^2}{2\ell(T)}, \quad \mathcal{E}(T) = \frac{T^2}{2\ell(T)} + \int_0^{\ell(T)} k(x) dx. \quad (\text{II.13})$$

Il reste à déterminer  $\ell(T)$ . Cela passe par la formulation de la loi d'évolution. On va en envisager et en comparer deux, basées toutes deux sur des propriétés énergétiques et faisant intervenir la fonction énergie  $l \mapsto \mathcal{E}(T, l)$  définie pour  $l \geq 0$  par

$$\mathcal{E}(T, l) = \frac{T^2}{2l} + \int_0^l k(x) dx \quad (\text{II.14})$$

(ULM) La première s'appuie sur l'approche variationnelle préconisée par [Mie04] et [FM04] pour les lois indépendantes de la vitesse ou par [BFM07] en rupture fragile. Elle se traduit par trois conditions qui, outre la condition d'irréversibilité, consiste en une condition dite de stabilité et une dite de conservation de l'énergie. Précisément, on exige que, pour tout  $T > 0$ ,  $\ell(T)$  satisfasse

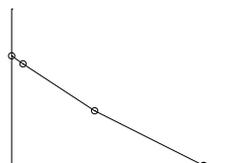
$$\begin{aligned} (\text{Ir}) \quad & T \mapsto \ell(T) \text{ monotone croissant;} \\ (\text{Lm}) \quad & \exists h(T) > 0 \text{ tel que } \forall l \in [\ell(T), \ell(T) + h(T)], \mathcal{E}(T, \ell(T)) \leq \mathcal{E}(T, l); \\ (\text{Eb}) \quad & \mathcal{E}(T, \ell(T)) = \int_0^T \frac{S}{\ell(S)} dS; \end{aligned}$$

La condition (Lm) est une condition de minimum local *unilatéral*, le caractère unilatéral provenant du fait que l'on ne compare l'énergie réelle du milieu qu'à celle correspondant à une longueur de fissuration plus grande. La condition (Eb) traduit bien la conservation de l'énergie puisque le deuxième membre correspond au travail de la force de réaction en  $x = 0$  dans le déplacement imposé de cette extrémité. (C'est aussi  $\int_0^{\ell(T)} \partial \mathcal{E} / \partial T(S, \ell(S)) dS$ .)

(UGM) La deuxième consiste simplement à conserver (Ir) et (Eb), et à remplacer la condition de minimum local unilatéral (Lm) par la condition de minimum *global* unilatéral

$$(\text{Gm}) \quad \forall l \geq \ell(T), \mathcal{E}(T, \ell(T)) \leq \mathcal{E}(T, l).$$

Ces deux formulations doivent être complétées par la condition initiale  $\ell(0) = 0$ . On sera amené en outre à utiliser des concepts classiques de la théorie de Griffith, cf [Bui78], [Ngu00] ou [Leb00].



**Définition 1** On appelle *taux de restitution d'énergie potentielle* (au niveau de charge  $T$  pour une longueur de fissure  $l$ ) la quantité  $\frac{T^2}{2l^2}$  (égale à  $-\partial/\partial\ell(T^2/2l)$ ). Cette grandeur entre dans la définition de la loi de propagation de Griffith qui stipule que le *taux de restitution d'énergie potentielle* est égal à la ténacité lors des phases de propagation (stable) de la fissure. Plus précisément, en supposant que  $T \mapsto \ell(T)$  est absolument continue, la loi de Griffith s'écrit : pour presque tout  $T$ ,

$$\dot{\ell}(T) \geq 0, \quad \frac{T^2}{2\ell(T)^2} \leq k(\ell(T)), \quad \left( \frac{T^2}{2\ell(T)^2} - k(\ell(T)) \right) \dot{\ell}(T) = 0 \quad (\text{II.15})$$

## C.2 Propriétés générales

Établissons quelques propriétés générales relatives aux différentes formulations.

**Proposition 1** Si à un niveau de charge  $T$  la longueur de la fissure est discontinue, alors les limites avant  $\ell^-(T)$  et après  $\ell^+(T)$  sont reliées par

$$\mathcal{E}(T, \ell^-(T)) = \mathcal{E}(T, \ell^+(T)) \quad (\text{II.16})$$

*Preuve* : Il suffit d'utiliser (Eb) qui assure que  $T \mapsto \mathcal{E}(T)$  est absolument continue.

**Proposition 2** La formulation (UGM), i.e. celle correspondant aux conditions (Ir), (Gm) et (Eb), est équivalente au problème de minimisation suivant

$$(\text{Min}) \quad \text{Pour } T \geq 0, \quad \ell(T) = \arg \min_{l \geq 0} \mathcal{E}(T, l)$$

Elle admet donc au moins une solution, solution qui est nécessairement à variation bornée, croissante de 0 à  $+\infty$ .

*Preuve* :

La démonstration est décomposée en 3 étapes.

*Étape 1* : (Min) admet au moins une solution et toute solution est croissante de 0 à  $\infty$ .  $l \mapsto \mathcal{E}(T, l)$  est continue, positive (donc bornée inférieurement), et, en vertu de (II.10), tend vers l'infini à l'infini. Donc, pour tout  $T$ , le minimum existe. Soit  $\ell(T)$  un minimiseur. On a évidemment  $\ell(0) = 0$  puisque  $\mathcal{E}(0, l) = \int_0^l k(x) dx$ , et,  $\ell(T) > 0$  pour  $T > 0$  puisque  $\mathcal{E}(T, 0) = \infty$ . Soit  $0 \leq T_1 < T_2$ , on a

$$\mathcal{E}(T_1, \ell(T_1)) \leq \mathcal{E}(T_1, \ell(T_2)), \quad \mathcal{E}(T_2, \ell(T_2)) \leq \mathcal{E}(T_2, \ell(T_1)) \quad (\text{II.17})$$

En additionnant et en explicitant on obtient

$$\frac{T_2^2 - T_1^2}{2\ell(T_1)} > \frac{T_2^2 - T_1^2}{2\ell(T_2)} \quad (\text{II.18})$$

on en déduit immédiatement que  $\ell(T_1) \leq \ell(T_2)$ , d'où la croissance de la solution.  $T \mapsto \ell(T)$  étant monotone, elle est à variation bornée. Montrons que  $\lim_{T \rightarrow \infty} \ell(T) = +\infty$ . Sinon, appelons  $\ell_\infty$  la limite finie. On aurait  $\mathcal{E}(T, \ell(T)) \leq \mathcal{E}(T, 2\ell_\infty)$ . En divisant par  $T^2$

et en passant à la limite quand  $T \rightarrow \infty$ , on obtiendrait  $2\ell_\infty \leq \ell_\infty$ .

*Étape 2 : Toute solution de (Min) vérifie (Ir),(Gm) et (Eb).*

Toute solution de (Min) étant monotone vérifie (Ir). Elle vérifie évidemment (Gm). Reste à vérifier (Eb). Montrons tout d'abord que  $T \mapsto \mathcal{E}(T)$  est croissante. Soit  $0 < T_1 < T_2$ , on a

$$\mathcal{E}(T_1) = \mathcal{E}(T_1, \ell(T_1)) \leq \mathcal{E}(T_1, \ell(T_2)) \leq \mathcal{E}(T_2, \ell(T_2)) = \mathcal{E}(T_2) \quad (\text{II.19})$$

Montrons maintenant que  $T \mapsto \mathcal{E}(T)$  est Lipchitz. Il suffit de montrer qu'il existe  $C \in \mathbb{R}$  tel que, pour tout  $T \geq 0$ ,  $\limsup_{h \rightarrow 0} (\mathcal{E}(T+h) - \mathcal{E}(T))/h \leq C$ . Distinguons le cas  $T = 0$ . On a, pour  $l \geq 0$ ,

$$\frac{\mathcal{E}(h)}{h} = \frac{h}{2\ell(h)} + \frac{1}{h} \int_0^{\ell(h)} k(x) dx \leq \frac{h}{2l} + \frac{1}{h} \int_0^l k(x) dx \leq \frac{h}{2l} + k_2 \frac{l}{h} \quad (\text{II.20})$$

D'où

$$\limsup_{h \rightarrow 0} \frac{\mathcal{E}(h)}{h} \leq \min_{\alpha \geq 0} \left\{ \frac{\alpha}{2} + \frac{k_2}{\alpha} \right\} = \frac{5}{4} \sqrt{2k_2} \quad (\text{II.21})$$

Soit  $T > 0$ , on a

$$\mathcal{E}(T+h) - \mathcal{E}(T) = \frac{T^2}{2} \left( \frac{1}{\ell(T+h)} - \frac{1}{\ell(T)} \right) + \int_{\ell(T)}^{\ell(T+h)} k(x) dx + \frac{hT}{\ell(T+h)} + \frac{h^2}{2\ell(T+h)} \quad (\text{II.22})$$

De la propriété d'optimalité  $\mathcal{E}(T+h, \ell(T+h)) \leq \mathcal{E}(T+h, \ell(T))$ , on en tire

$$\frac{T^2}{2} \left( \frac{1}{\ell(T+h)} - \frac{1}{\ell(T)} \right) + \int_{\ell(T)}^{\ell(T+h)} k(x) dx + \frac{hT}{\ell(T+h)} + \frac{h^2}{2\ell(T+h)} \leq \frac{hT}{\ell(T)} + \frac{h^2}{2\ell(T)} \quad (\text{II.23})$$

et donc

$$\limsup_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (\mathcal{E}(T+h) - \mathcal{E}(T)) \leq \frac{T}{\ell(T)} \quad (\text{II.24})$$

De  $\mathcal{E}(T) \leq \mathcal{E}(T, l)$  pour tout  $l \geq 0$ , on tire

$$\frac{T}{\ell(T)} \leq \frac{T}{l} + \frac{2}{T} \int_0^l k(x) dx \leq \frac{T}{l} + \frac{2k_2 l}{T} \quad (\text{II.25})$$

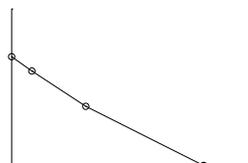
et donc

$$\limsup_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (\mathcal{E}(T+h) - \mathcal{E}(T)) \leq \min_{\alpha \geq 0} \left\{ \alpha + \frac{2k_2}{\alpha} \right\} = 2\sqrt{2k_2} \quad (\text{II.26})$$

Comme  $T \mapsto \mathcal{E}(T)$  est Lipchitz, elle est absolument continue et  $\mathcal{E}(T) = \int_0^T \dot{\mathcal{E}}(S) dS$ . De plus elle est dérivable presque partout. De même  $T \mapsto \ell(T)$  étant monotone est dérivable presque partout. En se plaçant aux points où  $T \mapsto \mathcal{E}(T)$  et  $T \mapsto \ell(T)$  sont toutes deux dérivables (donc presque partout), la dérivée de  $T \mapsto \mathcal{E}(T)$  s'écrit

$$\dot{\mathcal{E}}(T) = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial T}(T, \ell(T)) + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (\mathcal{E}(T, \ell(T+h)) - \mathcal{E}(T, \ell(T))) \quad (\text{II.27})$$

(On notera que l'on ne développe pas le deuxième terme du membre de droite car  $l \mapsto \mathcal{E}(T, l)$  n'est pas dérivable aux points où la ténacité est discontinue.) En divisant les



conditions d'optimalité  $\mathcal{E}(T, \ell(T \pm h)) \geq \mathcal{E}(T, \ell(T))$  par  $h > 0$  et en passant à la limite quand  $h \rightarrow 0$ , on obtient

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (\mathcal{E}(T, \ell(T \pm h)) - \mathcal{E}(T, \ell(T))) = 0 \quad (\text{II.28})$$

d'où (Eb).

*Étape 3 : Toute solution de (Ir), (Gm) et (Eb) est solution de (Min)*

Notons  $T \mapsto \ell(T)$  (resp.  $T \mapsto \ell_*(T)$ ) une solution de (Ir), (Gm) et (Eb) (resp. de (Min)). Notons  $\mathcal{E}(T)$  (resp.  $\mathcal{E}_*(T)$ ) l'énergie associée. Remarquons que  $\ell(0) = \ell_*(0) = 0$  et que  $\mathcal{E}(0) = \mathcal{E}_*(0) = 0$ . Supposons que les deux solutions diffèrent, il existe donc une charge  $T_1$  telle que  $\mathcal{E}(T_1) > \mathcal{E}_*(T_1)$ . D'après (Eb), qui est vérifiée par les 2 solutions,  $T \mapsto \mathcal{E}(T)$  et  $T \mapsto \mathcal{E}_*(T)$  sont absolument continues. Il existe donc une charge  $T_0 < T_1$  telle que  $\mathcal{E}(T_0) = \mathcal{E}_*(T_0)$  et  $\mathcal{E}(T) > \mathcal{E}_*(T)$  pour tout  $T \in (T_0, T_1)$ . On a nécessairement  $\ell(T) \geq \ell_*(T)$  dans tout cet intervalle, car sinon en utilisant (Gm) avec  $l = \ell_*(T)$  on aurait  $\mathcal{E}(T) \leq \mathcal{E}(T, \ell_*(T)) = \mathcal{E}_*(T)$ , ce qui est en contradiction avec notre hypothèse. De (Eb) on tire

$$\dot{\mathcal{E}}(T) = \frac{T}{\ell(T)} \leq \frac{T}{\ell_*(T)} = \dot{\mathcal{E}}_*(T) \quad (\text{II.29})$$

En intégrant sur  $(T_0, T_1)$  on aboutit à  $\mathcal{E}(T_1) \leq \mathcal{E}_*(T_1)$ , i.e. une contradiction. □

**Corollaire 1** *La formulation (ULM), i.e. celle correspondant aux conditions (Ir), (Lm) et (Eb), admet au moins une solution.*

*Preuve :* Il suffit de remarquer que si  $T \mapsto \ell(T)$  vérifie (Gm), alors il vérifie (Lm).

**Proposition 3** *Si la ténacité est une fonction monotone non décroissante de  $x$ , alors les deux formulations sont équivalentes et admettent une unique solution.*

*Preuve :*

*Étape 1 : Unicité de la solution de (UGM).*

Si  $x \mapsto k(x)$  est croissante, alors  $l \mapsto \mathcal{E}(T, l)$  est strictement convexe, pour tout  $T > 0$ . Donc la solution de (Min) est unique et en vertu de la Proposition 2 c'est aussi l'unique solution de (UGM).

*Étape 2 : Toute solution de (ULM) est solution de (UGM)*

Il suffit de vérifier que (Lm) implique (Gm). Soit  $T \mapsto \ell(T)$  une solution de (ULM) et  $l > \ell(T)$ . Pour  $h > 0$  et assez petit, on a  $\mathcal{E}(T, \ell(T) + h(1 - \ell(T))) \geq \mathcal{E}(T)$  en vertu de (Lm). Mais grâce à la convexité de  $l \mapsto \mathcal{E}(T, l)$ , on a donc

$$\mathcal{E}(T, l) - \mathcal{E}(T, \ell(T)) \geq \frac{1}{h} (\mathcal{E}(T, \ell(T) + h(l - \ell(T))) - \mathcal{E}(T)) \geq 0 \quad (\text{II.30})$$

d'où (Gm). □

### C.3 Quelques exemples

#### C.3.1 Cas homogène

Plaçons-nous dans le cas où la ténacité est constante,  $k(x) = k > 0$ . On est donc dans la situation de la Proposition 3. Les formulations sont équivalentes et admettent une unique solution qui est aussi solution de (Min).  $l \mapsto \mathcal{E}(T, l)$  étant dérivable, strictement convexe et infinie en  $l = 0$ , le minimum est atteint en un point où la dérivée est nulle, d'où

$$\ell(T) = \frac{T}{\sqrt{2k}} \quad (\text{II.31})$$

La longueur de la fissure varie linéairement avec la charge. On notera que l'évolution de la fissuration suit la loi de Griffith, puisque (II.31) est obtenue en écrivant que la dérivée de l'énergie totale par rapport à la longueur de la fissure est nulle, ce qui revient à écrire que le taux de restitution d'énergie potentielle est égal à la ténacité (alias le taux de restitution d'énergie critique). Le calcul du déplacement et des énergies donne

$$u(x, T) = (T - x\sqrt{2k})^+, \quad \mathcal{P}(T) = \mathcal{S}(T) = \frac{T}{2}\sqrt{2k} \quad (\text{II.32})$$

où on peut noter l'équipartition entre énergie potentielle et énergie de surface.

#### C.3.2 Cas discontinu avec accroissement de la ténacité

Plaçons-nous dans le cas où la répartition de ténacité est donnée par

$$k(x) = \begin{cases} k_1 & \text{si } 0 < x < \ell_I \\ k_2 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{II.33})$$

avec  $k_1 < k_2$  et posons

$$T_1 = \ell_I\sqrt{2k_1}, \quad T_2 = \ell_I\sqrt{2k_2}, \quad \ell_1(T) = \frac{T}{\sqrt{2k_1}}, \quad \ell_2(T) = \frac{T}{\sqrt{2k_2}} \quad (\text{II.34})$$

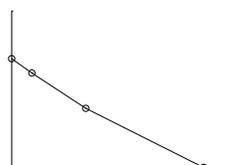
On est encore dans la situation de la proposition 3, les formulations sont équivalentes et admettent une unique solution qui est aussi solution de (Min). La fonction  $l \mapsto \mathcal{E}(T, l)$  est donnée par

$$\mathcal{E}(T, l) = \frac{T^2}{2l} + \begin{cases} k_1 l & \text{si } 0 < l < \ell_I \\ k_2(l - \ell_I) + k_1 \ell_I & \text{si } l \geq \ell_I \end{cases} \quad (\text{II.35})$$

elle est strictement convexe, mais pas dérivable en  $\ell_I$ . Le minimum est atteint en  $\ell_I$  si  $\partial\mathcal{E}/\partial l(T, \ell_{I-}) \leq 0 \leq \partial\mathcal{E}/\partial l(T, \ell_{I+})$ , en un point (différent de  $\ell_I$ ) où la dérivée de l'énergie est nulle sinon. On obtient donc

$$\ell(T) = \begin{cases} \ell_1(T) & \text{si } 0 < T \leq T_1 \\ \ell_I & \text{si } T_1 \leq T \leq T_2 \\ \ell_2(T) & \text{si } T \geq T_2 \end{cases} \quad (\text{II.36})$$

On notera que l'évolution est régulière ( $T \mapsto \ell(T)$  est absolument continue) et suit toujours la loi de Griffith : durant la première phase, le taux de restitution d'énergie potentielle est égale à la ténacité  $k_1$  ; lorsque la fissure arrive à l'interface où intervient le



saut de ténacité, la fissure n'évolue pas tant que le taux de restitution d'énergie potentielle n'a pas atteint la nouvelle valeur critique  $k_2$ ; puis, la fissure se propage, le taux de restitution d'énergie potentielle restant alors toujours égal à la ténacité  $k_2$ . D'un point de vue énergétique, on a

$$\begin{cases} 0 < T \leq T_1 : & \mathcal{P}(T) = \mathcal{S}(T) = \frac{T}{2}\sqrt{2k_1} \\ T_1 \leq T \leq T_2 : & \mathcal{P}(T) = \frac{T^2}{2\ell_I}, \mathcal{S}(T) = k_1\ell_I \\ T \geq T_2 : & \mathcal{P}(T) = \frac{T}{2}\sqrt{2k_2}, \mathcal{S}(T) = \frac{T}{2}\sqrt{2k_2} - (k_2 - k_1)\ell_I \end{cases} \quad (\text{II.37})$$

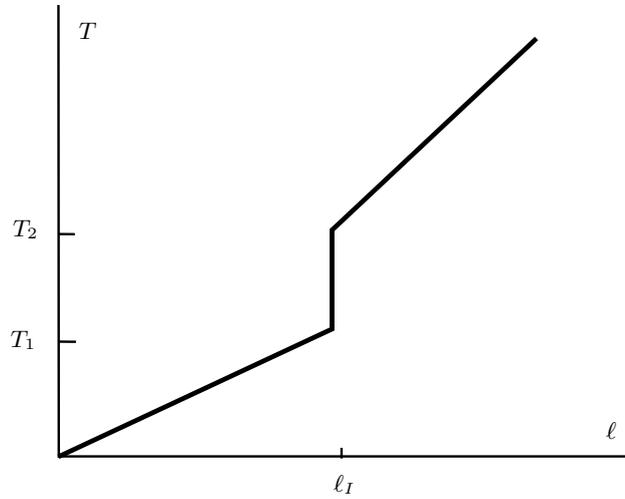


FIG. II.2 : Évolution de la fissuration avec la charge dans le cas d'une ténacité discontinue et croissante

### C.3.3 Cas discontinu avec diminution de la ténacité

Plaçons-nous dans le cas où la répartition de ténacité est donnée par

$$k(x) = \begin{cases} k_2 & \text{si } 0 < x < \ell_I \\ k_1 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{II.38})$$

avec  $k_1 < k_2$ . Nous ne sommes plus dans la situation de la Proposition 3, les formulations ne sont plus équivalentes, l'énergie n'est plus une fonction convexe de la longueur et l'unicité n'est plus assurée. La fonction  $l \mapsto \mathcal{E}(T, l)$  est donnée par

$$\mathcal{E}(T, l) = \frac{T^2}{2l} + \begin{cases} k_2 l & \text{si } 0 < l < \ell_I \\ k_1(l - \ell_I) + k_2 \ell_I & \text{si } l \geq \ell_I \end{cases} \quad (\text{II.39})$$

Conservons les définitions de  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $\ell_1(T)$  et  $\ell_2(T)$  données en (II.34) et commençons par déterminer la solution de la formulation (UGM).

**Proposition 4** La solution  $T \mapsto \ell_*(T)$  de (Ir), (Gm) et (Eb) est donnée par

$$\ell_*(T) = \begin{cases} \ell_2(T) & \text{si } 0 < T < T_* \\ \ell_1(T) & \text{si } T > T_* \end{cases}, \quad T_* = \frac{T_1 + T_2}{2} \quad (\text{II.40})$$

Autrement dit, l'évolution de la fissuration suit dans une première phase la loi de Griffith, le taux de restitution d'énergie potentielle restant égal à la ténacité  $k_2$ , puis au niveau de charge  $T_*$  est discontinue, la longueur de la fissure sautant de  $(1 + \sqrt{k_1/k_2})\ell_I/2$  à  $(1 + \sqrt{k_2/k_1})\ell_I/2$  de façon à ce qu'il y ait conservation de l'énergie, et enfin suit de nouveau la loi de Griffith, le taux de restitution d'énergie potentielle restant égal à la ténacité  $k_1$ .

*Preuve* : D'après la Proposition 2, il s'agit de déterminer le minimiseur global de  $l \mapsto \mathcal{E}(T, l)$ . Remarquons qu'il ne peut pas être en  $\ell_I$ , car il faudrait que  $\partial\mathcal{E}/\partial l(T, \ell_{I-}) \leq 0 \leq \partial\mathcal{E}/\partial l(T, \ell_{I+})$  et donc que  $k_2 \leq k_1$ , ce qui est contraire à notre hypothèse. Le minimum se trouve donc en une valeur de  $l$  où la dérivée de l'énergie est nulle. Pour  $T < T_1$ , la seule possibilité est  $l = \ell_2(T)$ , alors que pour  $T > T_2$ , la seule possibilité est  $l = \ell_1(T)$ . Entre ces deux valeurs de  $T$ , il existe deux valeurs de  $l$  où la dérivée est nulle, on trouve la bonne en comparant directement leur énergie. □

On notera que la valeur de  $\ell_*(T_*)$  n'est pas parfaitement déterminée, on peut aussi bien choisir la limite avant ou la limite après. On remarquera aussi que le saut de fissuration a lieu avant que la fissure atteigne l'interface.

Intéressons-nous maintenant aux solutions de la solution (ULM).

**Proposition 5** La formulation (ULM) admet la famille de solutions suivante, indexée par  $T_c \in [T_*, T_2]$  :

$$\ell(T) = \begin{cases} \ell_2(T) & \text{si } 0 \leq T < T_c \\ \ell_c & \text{si } T_c < T \leq T^c \\ \ell_1(T) & \text{si } T \geq T^c \end{cases}, \quad (\text{II.41})$$

où la longueur  $\ell_c$  de fissuration après le saut est l'unique solution de

$$\mathcal{E}(T_c, \ell_c) = \mathcal{E}(T_c, \ell_2(T_c)), \quad \ell_c \geq \ell_1(T_c), \quad (\text{II.42})$$

et la charge de redémarrage  $T^c$  est donnée par

$$T^c = \sqrt{2k_1}\ell_c, \quad (\text{II.43})$$

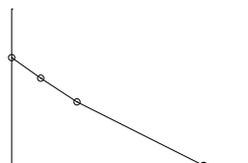
cf. Figure II.3

*Preuve*

*Étape 1* : (Lm) impose que  $\ell(T)\sqrt{2k(\ell(T))} \geq T$

En prenant  $l = \ell(T) + h$  dans (Lm),  $h > 0$  suffisamment petit, et en passant à la limite quand  $h \mapsto 0$ , on obtient l'inégalité

$$\ell(T)\sqrt{2k(\ell(T))} \geq T \quad (\text{II.44})$$



qui n'est rien d'autre que le critère de Griffith exigeant que le taux de restitution d'énergie soit inférieur à la ténacité. Notons qu'elle est vraie même si  $\ell(T) = \ell_I$  en vertu du choix que  $k(\ell_I) = k_1$ .

*Étape 2 : Pour  $T < T_*$ ,  $\ell(T) = \ell_2(T)$*

En vertu de (Eb) et (II.44) on a

$$\dot{\mathcal{E}}(T) = \frac{T}{\ell(T)} \leq \sqrt{2k_2}, \text{ pour presque tout } T. \quad (\text{II.45})$$

En intégrant, il vient  $\mathcal{E}(T) \leq \mathcal{E}_*(T)$  pour  $T \leq T_*$ . D'où le résultat puisque  $\ell_2(T)$  est l'unique minimiseur global pour  $T < T_*$ .

*Étape 3 : La solution quitte la branche  $l = \ell_2(T)$  à un niveau de charge  $T_c \in [T_*, T_2]$  en sautant.*

On ne peut avoir  $\ell(T) = \ell_2(T)$  pour  $T \geq T_2$ , car sinon (II.44) donnerait  $k_1 \geq k_2$  ce qui est contraire à notre hypothèse. Posons  $T_c = \inf \{T : \ell(T) \neq \ell_2(T)\}$ . On a  $T_c \leq T_2$  et  $\ell^-(T_c) = \ell_2(T_c)$ . Montrons que  $\ell^+(T_c) > \ell_2(T_c)$  en distinguant le cas  $T_c < T_2$  du cas  $T_c = T_2$ .

Supposons que  $T_c < T_2$  et que  $\ell^+(T_c) = \ell_2(T_c)$ . Comme  $\ell_I = \ell_2(T_2) > \ell_2(T_c)$ , on devrait avoir  $\ell(T) < \ell_I$  et donc  $k(\ell(T)) = k_2$  pour  $h > 0$  suffisamment petit et pour  $T \in (T_c, T_c + h)$ . En vertu de (II.44), on en déduirait  $\ell(T) \geq \ell_2(T)$ . Mais comme (Eb) impose que  $\dot{\mathcal{E}}(T) = T/\ell(T)$  pour presque tout  $T$ , on aurait  $\dot{\mathcal{E}}(T) \leq \sqrt{2k_2}$  pour presque tout  $T \in (0, T_c + h)$ . En intégrant, on en déduirait que

$$\mathcal{E}(T) \leq \sqrt{2k_2}T = \mathcal{E}(T, \ell_2(T)) = \min_{l \in [0, \ell_I]} \mathcal{E}(T, l) \quad (\text{II.46})$$

et donc que  $\ell(T) = \ell_2(T)$  sur tout l'intervalle  $(0, T_c + h)$ , puisque  $\ell_2(T)$  est l'unique minimiseur de  $l \mapsto \mathcal{E}(T, l)$  sur  $[0, \ell_I]$ . Ceci est en contradiction avec la définition de  $T_c$ .

Supposons que  $T_c = T_2$ . Alors, comme  $\ell(T) \geq \ell_2(T_2) = \ell_I$ ,  $k(\ell(T)) = k_1$  pour  $T > T_2$ . En vertu de (II.44), on a donc  $\ell(T) \geq \ell_1(T)$ , d'où  $\ell^+(T_2) \geq \ell_1(T_2) > \ell_I$ .

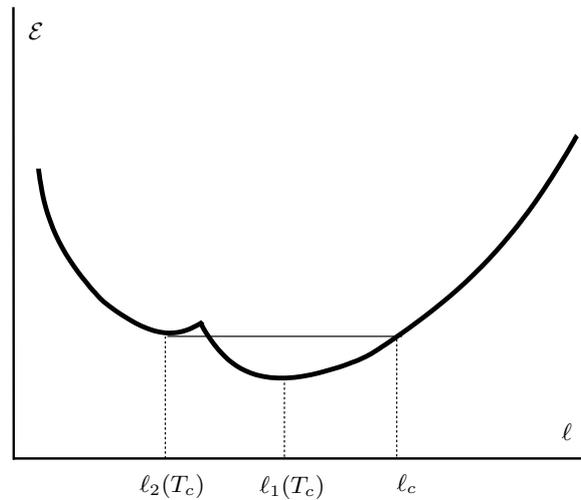
*Étape 4 : La longueur de fissuration  $\ell_c$  après le saut est l'unique solution de (II.42).* Posons  $\ell_c = \ell^+(T_c)$ . En vertu de la Proposition 1,  $\ell_c$  doit vérifier la condition de continuité de l'énergie en  $T = T_c$ ,  $\mathcal{E}(T_c, \ell_2(T_c)) = \mathcal{E}(T_c, \ell_c)$ . Comme  $\ell_c > \ell_2(T_c)$  et comme  $\ell_2(T_c)$  est l'unique minimiseur de  $l \mapsto \mathcal{E}(T_c, l)$  sur  $[0, \ell_I]$ , on a  $\ell_c > \ell_I$  et donc, en vertu de (II.44),  $\ell_c \geq \ell_1(T_c)$ . En explicitant, (II.42) s'écrit

$$\frac{T_c^2}{2\ell_c} + k_1(\ell_c - \ell_I) + k_2\ell_I = T_c\sqrt{2k_2} \quad (\text{II.47})$$

Elle admet au moins une solution puisque  $\mathcal{E}(T_c, \ell_c)$  est supérieur ou égal au minimum global de  $l \mapsto \mathcal{E}(T_c, l)$  qui se trouve en  $\ell_1(T_c)$ . Il y a au plus deux solutions et il ne faut retenir que celle qui est supérieure à  $\ell_1(T_c)$ , cf Figure II.3

*Étape 5 : Pour  $T > T_c$ ,  $\ell(T)$  est le minimiseur de  $l \mapsto \mathcal{E}(T, l)$  sur  $[\ell_c, +\infty)$ .*

Comme  $\ell_c > \ell_I$ ,  $l \mapsto \mathcal{E}(T, l)$  est strictement convexe sur  $[\ell_c, +\infty)$ . Il suffit alors d'adapter les Propositions 2 et 3 pour conclure. (Le seul point qui diffère dans les démonstrations tient à la condition initiale qui s'écrit ici  $\ell^+(T_c) = \ell_c$ .)

FIG. II.3 : Détermination de  $\ell_c$ 

Étape 6 : Détermination de  $\ell(T)$  pour  $T > T_c$ .

Le minimiseur de  $l \mapsto \mathcal{E}(T, l)$  sur  $[\ell_1, +\infty)$  est  $\ell_1(T)$ . Il sera aussi le minimiseur sur  $[\ell_c, +\infty)$  dès que  $\ell_1(T) \geq \ell_c$ , i.e. dès que  $T \geq T^c$ . Avant,  $\ell_c$  est le minimiseur.

□

On peut distinguer deux solutions particulières dans la famille trouvée précédemment

- (i) **Le minimum global.** Elle correspond à  $T_c = T_*$ , i.e. celle où le saut intervient le plus tôt possible. C'est aussi celle où le saut est le plus petit et où il n'y a pas d'arrêt de la fissuration.
- (ii) **La solution métastable.** C'est celle correspondant à  $T_c = T_2$ , i.e. celle où le saut intervient le plus tard possible. C'est celle où le saut est le plus grand et la phase d'arrêt la plus longue. La position de la fissure après le saut  $\ell_c$  et la charge de redémarrage  $T^c$  sont données par

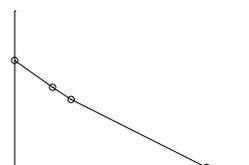
$$\ell_c = \frac{k_2}{k_1} \ell_I, \quad T^c = \sqrt{\frac{k_2}{k_1}} T_2 \quad (\text{II.48})$$

Au moment du saut, l'énergie totale vaut  $2k_2 \ell_I$ . Elle est conservée durant le saut, mais sa répartition entre énergie potentielle et énergie de surface est modifiée durant le saut. Il y a équipartition avant le saut, alors que la restitution d'énergie potentielle durant le saut est intégralement transformée en énergie de surface. Précisément, on a

$$\mathcal{E}(T_2) = 2k_2 \ell_I, \quad \mathcal{P}^-(T_2) = \mathcal{S}^-(T_2) = k_2 \ell_I, \quad \mathcal{P}^+(T_2) = k_1 \ell_I, \quad \mathcal{S}^+(T_2) = (2k_2 - k_1) \ell_I \quad (\text{II.49})$$

Au moment du redémarrage, à la charge  $T^c$ , l'énergie potentielle du milieu est exactement celle qu'il aurait s'il s'était propagé jusqu'en  $\ell_c$  dans un milieu de ténacité  $k_1$ , par contre l'énergie de surface est plus grande (à cause de la phase de propagation dans le milieu de ténacité  $k_2$ ),

$$\mathcal{P}(T^c) = k_2 \ell_I = k_1 \ell_c, \quad \mathcal{S}(T^c) = (2k_2 - k_1) \ell_I > k_1 \ell_c \quad (\text{II.50})$$



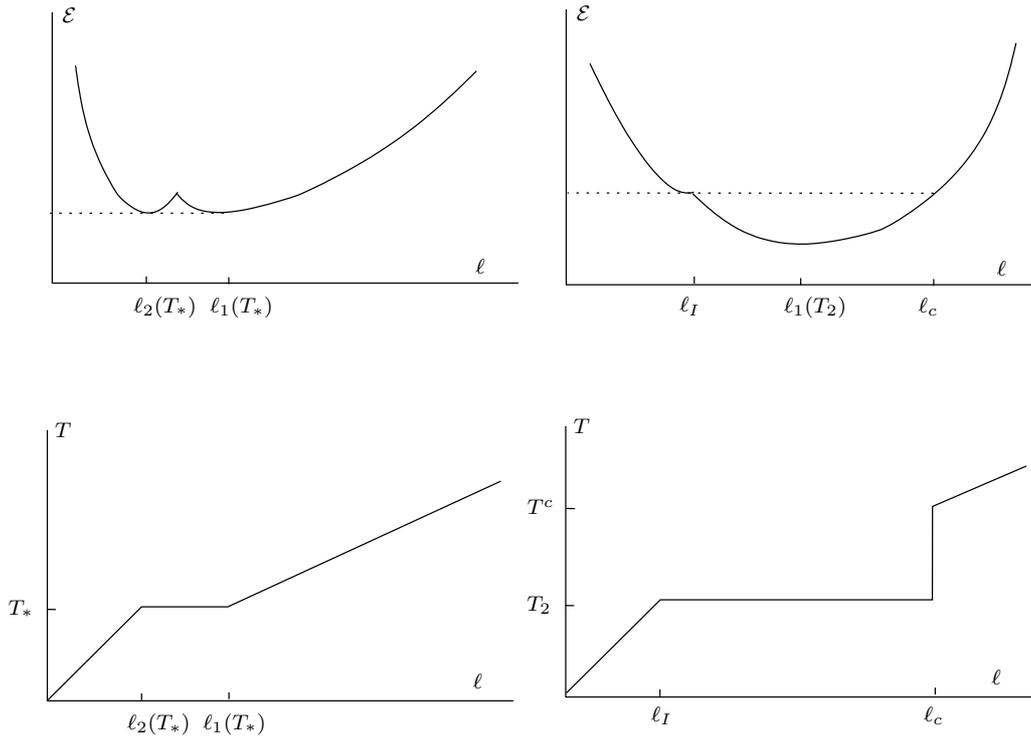


FIG. II.4 : Les deux solution extrêmes de (ULM) : à gauche, le minimum global ; à droite, la solution métastable ; en haut, le graphe de l'énergie au moment du saut ; en bas, l'évolution de la fissuration avec la charge

A ce moment-là, le taux de restitution d'énergie potentielle atteint la valeur critique  $k_1$ .

## D Réponse dynamique

### D.1 Formulation du problème de dynamique

Comme la réponse dynamique dépend de la vitesse de chargement  $\epsilon$ , toutes les grandeurs attachées à la réponse dynamique seront représentées par un symbole indexé par  $\epsilon$ . Ainsi, le champ de déplacement du milieu et la position de la pointe de fissure seront dénotés  $u_\epsilon$  et  $\ell_\epsilon$ . Rappelons que l'on travaille dans l'espace-charge  $(x, T)$  et non dans l'espace-temps  $(x, t)$ . En conséquence, étant donné que  $\partial/\partial t = \epsilon \partial/\partial T$ , les vitesses ou célérités "réelles" (*i.e.* dans l'espace-temps) sont dans le rapport  $\epsilon$  avec celles dans l'espace-charge. L'évolution de la pointe est régie par la fonction  $T \mapsto \ell_\epsilon(T)$ , la "vitesse" de propagation de la fissure dans l'espace-charge est donc  $\dot{\ell}_\epsilon = d\ell_\epsilon/dT$ . Il s'avère préférable en pratique de prendre pour inconnues les déformations  $e_\epsilon$  et les vitesses  $v_\epsilon$ , plutôt que les déplacements ou les positions :

$$e_\epsilon = u'_\epsilon, \quad v_\epsilon = \dot{u}_\epsilon \quad (\text{II.51})$$

*A priori* ces champs sont seulement à variation bornée [EG92], *i.e.*  $e_\epsilon$  et  $v_\epsilon \in BV(\mathcal{Q})$ , mais pour simplifier la présentation nous supposons plus de régularité et considérerons qu'ils sont réguliers par morceaux. Le déplacement  $u_\epsilon$  est nécessairement continu, alors

que  $e_\epsilon$  et  $v_\epsilon$  peuvent être discontinus sur des sous-ensembles “unidimensionnels” de  $\mathcal{Q}$ , communément appelés ondes de choc et dénotés  $S_\epsilon$ . C’est en particulier le cas sur le front de propagation  $S_\epsilon^0 = \{(\ell_\epsilon(T), T) : T > 0\}$ . Les sauts de quantité à travers  $S_\epsilon$  seront notés avec un double crochet,

$$[[f]] = f^+ - f^- \text{ sur } S_\epsilon, \quad (\text{II.52})$$

l’orientation étant choisie de façon à ce que le côté + corresponde aux charges plus grandes, *i.e.* les valeurs *après* passage de l’onde de choc. Ecrivons les équations de la dynamique, en distinguant les ondes de choc  $S_\epsilon$  et le domaine  $\mathcal{Q} \setminus S_\epsilon$  de l’espace-charge où les champs  $e_\epsilon$  et  $v_\epsilon$  sont réguliers.

(i) *Equation de compatibilité cinématique d’Hadamard :*

$$v'_\epsilon - \dot{e}_\epsilon = 0 \text{ dans } \mathcal{Q} \setminus S_\epsilon, \quad [[v_\epsilon]] + c[[e_\epsilon]] = 0 \text{ sur } S_\epsilon \quad (\text{II.53})$$

(ii) *Bilan de quantité de mouvement :*

$$e'_\epsilon - \epsilon^2 \dot{v}_\epsilon = 0 \text{ dans } \mathcal{Q} \setminus S_\epsilon, \quad [[e_\epsilon]] + c\epsilon^2 [[v_\epsilon]] = 0 \text{ sur } S_\epsilon \setminus S_\epsilon^0 \quad (\text{II.54})$$

(iii) *Condition à la limite :*

$$v_\epsilon|_T(0) = 1, \quad \forall T > 0 \quad (\text{II.55})$$

(iv) *Condition initiale :*

$$v_\epsilon|_0 = e_\epsilon|_0 = 0 \quad (\text{II.56})$$

Dans (II.53) et (II.54),  $c$  représente la célérité locale de l’onde de choc (dans l’espace-charge  $(x, T)$ ). Notons que le bilan de la quantité de mouvement ne s’écrit pas sur le front de propagation  $S_\epsilon^0$  car c’est une onde de choc “non libre” au sens où l’énergie de surface engendre des forces concentrées. Pour compléter la formulation, il reste donc à préciser la loi d’évolution dynamique de la fissure. Nous adoptons le point de vue de Griffith et la formulons en terme du taux de restitution dynamique  $G_\epsilon$ . De façon générale le taux de restitution d’énergie dynamique est défini par une intégrale de contour avec un contour tendant vers la pointe de la fissure, cf [Fre98]. En l’appliquant ici,  $G_\epsilon$  s’écrit

$$G_\epsilon = \frac{1}{2} [[e_\epsilon^2]] - \frac{1}{2} \epsilon^2 [[v_\epsilon^2]], \quad (\text{II.57})$$

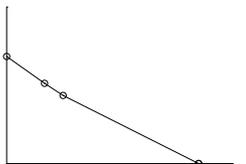
les sauts étant évalués sur  $S_\epsilon^0$ . Finalement, la loi de Griffith s’écrit

$$\dot{\ell}_\epsilon \geq 0, \quad G_\epsilon \leq k(\ell_\epsilon), \quad (G_\epsilon - k(\ell_\epsilon))\dot{\ell}_\epsilon = 0 \quad (\text{II.58})$$

## D.2 Propriétés générales

Notons tout d’abord que l’on tire de (II.53) et (II.54) que  $c^2\epsilon^2 = 1$  sur  $S_\epsilon \setminus S_\epsilon^0$ , *i.e.* que les ondes de choc “libres” se propagent toutes à la même vitesse (en valeur absolue). (Leur célérité dans l’espace-temps est égale à 1.) En considérant leur signe, on peut donc diviser  $S_\epsilon$  en 3 parties : les ondes de choc libres rétrogrades  $S_\epsilon^-$  où  $c = -\epsilon^{-1}$ , les ondes de choc libres directes  $S_\epsilon^+$  où  $c = \epsilon^{-1}$  et le front de fissure  $S_\epsilon^0$ ,  $S_\epsilon = S_\epsilon^- \cup S_\epsilon^+ \cup S_\epsilon^0$ . Sur  $S_\epsilon^-$  et  $S_\epsilon^+$ , il ne reste plus qu’à vérifier la condition de compatibilité d’Hadamard qui devient

$$\epsilon [[v_\epsilon]] - [[e_\epsilon]] = 0 \text{ sur } S_\epsilon^-, \quad \epsilon [[v_\epsilon]] + [[e_\epsilon]] = 0 \text{ sur } S_\epsilon^+ \quad (\text{II.59})$$



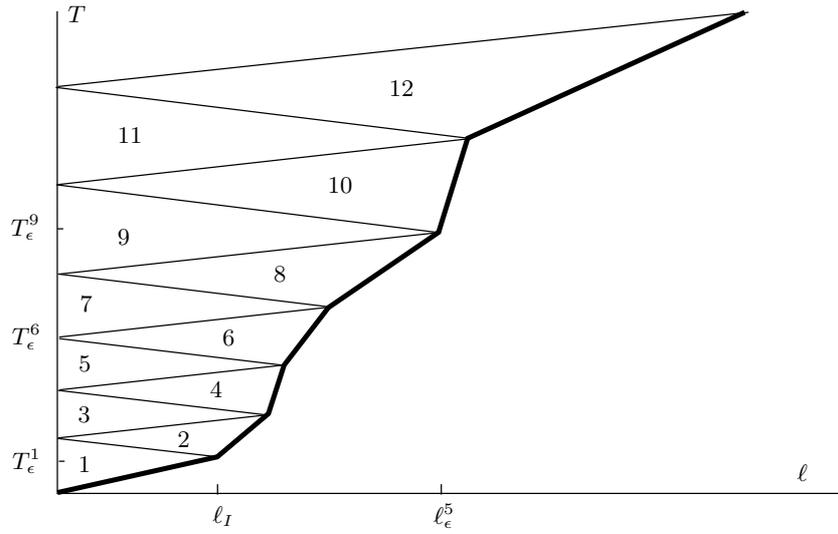


FIG. II.5 : Structure de l'évolution dynamique : les secteurs d'état constant  $\mathcal{Q}_\epsilon^i$  délimités par les ondes de choc rétrogrades et directes (en maigre) et le front de fissuration (en gras).

Dans tous les cas que nous allons traiter, la ténacité sera constante par morceaux (avec au plus 2 morceaux, *i.e.* au plus une discontinuité). Comme la condition à la limite et les conditions initiales sont des constantes en terme de la déformation et de la vitesse, on va chercher des solutions où  $e_\epsilon$ ,  $v_\epsilon$  et  $\dot{\ell}_\epsilon$  sont constants par morceaux. Le bien-fondé de cette hypothèse *a priori* est renforcée par le fait qu'en dehors de la loi de propagation du front de fissure, le problème est linéaire et que toutes les ondes "libres" se propagent avec une célérité valant  $\pm\epsilon^{-1}$ . Il ne peut y avoir d'ondes de raréfaction (cf [Smo94]). (Il serait évidemment intéressant de pouvoir s'appuyer sur un résultat d'unicité, mais une telle entreprise sort largement du cadre de cette étude exploratoire.) Ce faisant, l'équation de compatibilité et le bilan de quantité de mouvement sont automatiquement vérifiés. Il reste à déterminer les domaines dits d'état constant et la valeur de ces états. En dehors du cas où la ténacité est constante dans tout le milieu et où la seule onde de choc est celle correspondant au front de propagation, des ondes de choc rétrogrades et directes se propagent dans le milieu. La première onde de choc rétrograde est engendrée par le front de propagation lorsqu'il arrive sur la discontinuité de ténacité. Cette onde se réfléchit au bord  $x = 0$  et se transforme en onde directe qui va rattraper le front de propagation. Cette collision des deux ondes de choc modifie la vitesse de propagation de la fissure et engendre une onde de choc rétrograde qui va à son tour se réfléchir au bord, le processus continuant ainsi indéfiniment. Ce ballet des ondes délimite les secteurs d'état constant. De façon générique sont représentés sur la figure II.5 les différents secteurs  $\mathcal{Q}_\epsilon^i$ , dont l'indice  $i$  est croissant avec la charge,  $\mathcal{Q}_\epsilon^0$  correspondant au secteur où  $e_\epsilon = v_\epsilon = 0$ . Dans le secteur  $\mathcal{Q}_\epsilon^i$  l'état constant est noté  $(e_\epsilon^i, v_\epsilon^i)$ . La célérité de propagation de la fissure dans le premier milieu, *i.e.* sur le segment de droite séparant  $\mathcal{Q}_\epsilon^0$  et  $\mathcal{Q}_\epsilon^1$  est notée  $\dot{\ell}_\epsilon^0$  et le taux de restitution d'énergie  $G_\epsilon^0$ . Dans le deuxième milieu, la célérité de propagation de la fissure sur le segment de droite séparant  $\mathcal{Q}_\epsilon^0$  et  $\mathcal{Q}_\epsilon^{2i}$  est notée  $\dot{\ell}_\epsilon^i$  et le taux de restitution d'énergie  $G_\epsilon^i$ . Comme  $e_\epsilon^0 = v_\epsilon^0 = 0$ , (II.53) et (II.57) donnent

$$v_\epsilon^1 = -\dot{\ell}_\epsilon^0 e_\epsilon^1, \quad G_\epsilon^0 = \frac{1}{2}(1 - \epsilon^2 \dot{\ell}_\epsilon^0{}^2) e_\epsilon^0{}^2 \quad \text{sur } \partial\mathcal{Q}_\epsilon^0 \cap \partial\mathcal{Q}_\epsilon^1 \quad (\text{II.60})$$

et, pour  $i \geq 1$ ,

$$v_\epsilon^{2i} = -\dot{\ell}_\epsilon^i e_\epsilon^{2i}, \quad G_\epsilon^i = \frac{1}{2}(1 - \epsilon^2 \dot{\ell}_\epsilon^{i2}) e_\epsilon^{2i2} \text{ sur } \partial Q_\epsilon^0 \cap \partial Q_\epsilon^{2i} \quad (\text{II.61})$$

Les niveaux de charge où les ondes de choc rétrogrades se réfléchissent en  $x = 0$  et se transforment en ondes directes sont notés  $T_\epsilon^{2i}$ ,  $i \geq 1$ . Les niveaux de charge et la position de la pointe de la fissure où les ondes de choc directes se réfléchissent sur le front de propagation et se transforment en ondes rétrogrades sont notés  $T_\epsilon^{2i-1}$  et  $\ell_\epsilon^i$ ,  $i \geq 1$ . L'onde de choc rétrograde  $S_\epsilon^{2i-1}$  séparant  $Q_\epsilon^{2i-1}$  de  $Q_\epsilon^{2i}$  et l'onde de choc directe  $S_\epsilon^{2i}$  séparant  $Q_\epsilon^{2i}$  de  $Q_\epsilon^{2i+1}$  ont pour équation

$$S_\epsilon^{2i-1} : T = T_\epsilon^{2i} - l/\epsilon, \quad 0 \leq l \leq \ell_\epsilon^i, \quad S_\epsilon^{2i} : T = T_\epsilon^{2i} + l/\epsilon, \quad 0 \leq l \leq \ell_\epsilon^{i+1}, \quad (\text{II.62})$$

ce qui permet de relier les niveaux de charge  $T_\epsilon^i$  aux positions de la pointe de la fissure  $\ell_\epsilon^i$  :

$$T_\epsilon^{2i} - T_\epsilon^{2i-1} = \epsilon \ell_\epsilon^i, \quad T_\epsilon^{2i+1} - T_\epsilon^{2i} = \epsilon \ell_\epsilon^{i+1} \quad (\text{II.63})$$

Etablissons un résultat général permettant de calculer par récurrence les états et les vitesses de propagation de la fissure.

**Proposition 6** Soit  $i \geq 1$ . Dans  $Q_\epsilon^{2i-1}$ , la condition à la limite (II.55) impose que  $v_\epsilon^{2i-1} = 1$ ; supposons connus  $e_\epsilon^{2i-1}$  et  $\ell_\epsilon^i$ . En notant  $k$  la ténacité du milieu dans lequel se propage la fissure,  $e_\epsilon^{2i}$ ,  $v_\epsilon^{2i}$  et  $\ell_\epsilon^{i+1}$  sont donnés par

$$\dot{\ell}_\epsilon^i = \frac{1}{\epsilon} \frac{((e_\epsilon^{2i-1} - \epsilon)^2 - 2k)^+}{(e_\epsilon^{2i-1} - \epsilon)^2 + 2k}, \quad e_\epsilon^{2i} = \frac{e_\epsilon^{2i-1} - \epsilon}{1 + \epsilon \dot{\ell}_\epsilon^i}, \quad v_\epsilon^{2i} = -\dot{\ell}_\epsilon^i e_\epsilon^{2i}, \quad (\text{II.64})$$

l'exposant  $+$  désignant la partie positive, alors que  $e_\epsilon^{2i+1}$ ,  $v_\epsilon^{2i+1}$  et  $\ell_\epsilon^{i+1}$  sont donnés par

$$e_\epsilon^{2i+1} = (1 - \epsilon \dot{\ell}_\epsilon^i) e_\epsilon^{2i} - \epsilon, \quad v_\epsilon^{2i+1} = 1, \quad \dot{\ell}_\epsilon^{i+1} = \frac{1 + \epsilon \dot{\ell}_\epsilon^i}{1 - \epsilon \dot{\ell}_\epsilon^i} \dot{\ell}_\epsilon^i \quad (\text{II.65})$$

Les différentes énergies sont des fonctions affines par morceaux du niveau de charge. En particulier les valeurs de l'énergie potentielle et de l'énergie cinétique aux niveaux  $T_\epsilon^i$  sont données par

$$\mathcal{P}_\epsilon(T_\epsilon^{2i-1}) = \frac{1}{2} e_\epsilon^{2i-12} \ell_\epsilon^i, \quad \mathcal{P}_\epsilon(T_\epsilon^{2i}) = \frac{1}{2} e_\epsilon^{2i2} (1 + \epsilon \dot{\ell}_\epsilon^i) \ell_\epsilon^i, \quad (\text{II.66})$$

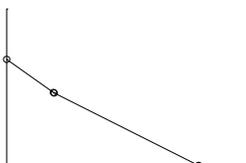
$$\mathcal{K}_\epsilon(T_\epsilon^{2i-1}) = \frac{\epsilon^2}{2} \dot{\ell}_\epsilon^i, \quad \mathcal{K}_\epsilon(T_\epsilon^{2i}) = \frac{\epsilon^2}{2} v_\epsilon^{2i2} (1 + \epsilon \dot{\ell}_\epsilon^i) \dot{\ell}_\epsilon^i, \quad (\text{II.67})$$

*Preuve* : Le seul point demandant un peu d'attention est l'obtention de  $\dot{\ell}_\epsilon^i$ , les autres relations étant des conséquences immédiates des conditions de compatibilité ou de la condition à la limite. D'après (II.58), si  $G_\epsilon^i < k$  alors  $\dot{\ell}_\epsilon^i = 0$ . Mais alors, en vertu de (II.61),  $|e_\epsilon^{2i}| < \sqrt{2k}$ . Par contre, si  $G_\epsilon^i = k$ , alors, toujours en vertu de (II.61), on a

$$|e_\epsilon^{2i}| \geq \sqrt{1 - \epsilon^2 \dot{\ell}_\epsilon^{i2}} |e_\epsilon^{2i}| = \sqrt{2k} \quad (\text{II.68})$$

Il suffit donc de comparer  $|e_\epsilon^{2i}|$  à  $\sqrt{2k}$  pour savoir si la fissure se propage ou pas et obtenir  $\dot{\ell}_\epsilon^i$ . Mais comme  $(1 + \epsilon \dot{\ell}_\epsilon^i) e_\epsilon^{2i} = e_\epsilon^{2i-1} - \epsilon$  en vertu de (II.59),  $|e_\epsilon^{2i}| \geq \sqrt{2k}$  est équivalent à  $|e_\epsilon^{2i-1}| + \epsilon \geq \sqrt{2k}$ . Il suffit alors de remplacer l'expression de  $e_\epsilon^{2i}$  en fonction de  $\dot{\ell}_\epsilon^i$  et  $e_\epsilon^{2i-1}$  dans l'équation  $G_\epsilon^i = k$  pour obtenir  $\dot{\ell}_\epsilon^i$  en fonction de  $e_\epsilon^{2i-1}$ .

Les énergies sont des fonctions affines par morceaux du niveau de charge parce que les états et la vitesse de propagation sont constants par morceaux. Il suffit alors d'utiliser les définitions II.9 et de remarquer que  $\ell_\epsilon(T_\epsilon^{2i}) = (1 + \epsilon \dot{\ell}_\epsilon^i) \ell_\epsilon^i$  pour obtenir (II.66)-(II.67).



### D.3 Cas homogène

Plaçons-nous dans le cas où la ténacité est constante,  $k(x) = k > 0$ . Dans ce cas, il n'y a pas création d'ondes de choc rétrogrades et directes. Il n'existe que deux secteurs  $\mathcal{Q}_\epsilon^0$  et  $\mathcal{Q}_\epsilon^1$  séparés par le front de fissuration. La condition initiale (II.56) donne  $e_\epsilon^0 = v_\epsilon^0 = 0$ . La condition à la limite (II.55) donne  $v_\epsilon^1 = 1$ . En reportant dans l'équation de compatibilité (II.53), on en déduit  $e_\epsilon^1 = -1/\dot{\ell}_\epsilon^0$ . D'où, d'après (II.60),

$$G_\epsilon^0 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\dot{\ell}_\epsilon^0{}^2} - \epsilon^2 \right) \quad (\text{II.69})$$

La loi de Griffith (II.58) impose donc que  $G_\epsilon^0 = k$  et finalement on obtient

$$\dot{\ell}_\epsilon^0 = \frac{1}{\sqrt{2k + \epsilon^2}}, \quad e_\epsilon^1 = -\sqrt{2k + \epsilon^2}, \quad v_\epsilon^1 = 1 \quad (\text{II.70})$$

D'où

$$u_\epsilon(x, T) = \left( T - x\sqrt{2k + \epsilon^2} \right)^+, \quad \ell_\epsilon(T) = \frac{T}{\sqrt{2k + \epsilon^2}} \quad (\text{II.71})$$

On notera que  $\dot{\ell}_\epsilon^0 < \epsilon^{-1}$ , *i.e.* que la fissure se propage moins vite que les ondes libres, et que la vitesse de propagation de la fissure tend vers cette vitesse (égale à 1 dans l'espace-temps) quand la vitesse de chargement tend vers l'infini.

Le calcul des différentes énergies donne

$$\mathcal{P}_\epsilon(T) = \frac{T}{2} \sqrt{2k + \epsilon^2}, \quad \mathcal{S}_\epsilon(T) = \frac{kT}{\sqrt{2k + \epsilon^2}}, \quad \mathcal{K}_\epsilon(T) = \frac{\epsilon^2}{2} \frac{T}{\sqrt{2k + \epsilon^2}} \quad (\text{II.72})$$

On notera que l'énergie cinétique reste toujours de l'ordre de  $\epsilon^2$ . On voit immédiatement que la solution dynamique converge vers la solution quasi-statique lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$ , cf (II.31) et (II.32).

### D.4 Cas discontinu avec augmentation de la ténacité

On se place dans le cadre de l'hypothèse (II.33). Comme la vitesse de chargement  $\epsilon$  est destinée à tendre vers 0, on la supposera assez petite dans les raisonnements qui suivent afin d'éliminer quelques cas particuliers. On distingue alors 3 phases dans l'évolution de la fissuration, cf Figure II.6.

#### D.4.1 Phase de propagation dans le milieu à faible ténacité

La solution dynamique coïncide avec celle trouvée dans le cas homogène tant que la pointe de la fissure n'a pas atteint l'interface, *i.e.* tant que  $\ell_\epsilon(T) < \ell_I$ . Lorsqu'elle l'atteint, une onde de choc rétrograde part et la vitesse de propagation de la fissure est modifiée. Dans le secteur  $\mathcal{Q}_\epsilon^1$ , on a donc

$$\dot{\ell}_\epsilon^0 = \frac{1}{\sqrt{2k_1 + \epsilon^2}}, \quad e_\epsilon^1 = -\sqrt{2k_1 + \epsilon^2}, \quad v_\epsilon^1 = 1 \quad (\text{II.73})$$

la fissure atteint l'interface au niveau de charge  $T_\epsilon^1$  donné par

$$T_\epsilon^1 = \ell_I \sqrt{2k_1 + \epsilon^2} \quad (\text{II.74})$$

A partir de cette charge, les évolutions sont régies par la Proposition 6 avec  $k = k_2$

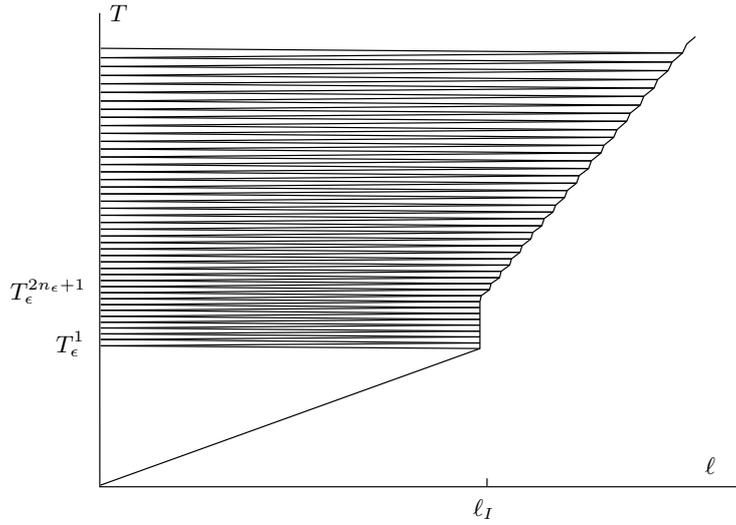


FIG. II.6 : Les 3 phases de propagation dans le cas avec augmentation de la ténacité. Front de propagation et ondes de choc pour  $k_1 = 0.5$ ,  $k_2 = 2$  et  $\epsilon = 0.075$

#### D.4.2 Phase d'arrêt à l'interface

Pour  $\epsilon$  assez petit, comme  $|e_\epsilon^1| + \epsilon = \sqrt{2k_1 + \epsilon^2} + \epsilon < \sqrt{2k_2}$ , on déduit de (II.64) que  $\dot{\ell}_\epsilon^1 = 0$ . La fissure est arrêtée à l'interface durant l'intervalle de charge  $(T_\epsilon^1, T_\epsilon^1 + 2\epsilon\ell_I)$  correspondant à l'aller retour de la première onde de choc. En reportant dans (II.64) et (II.65), on en déduit les états dans  $\mathcal{Q}_\epsilon^2$  et  $\mathcal{Q}_\epsilon^3$

$$e_\epsilon^2 = -\sqrt{2k_1 + \epsilon^2} - \epsilon, v_\epsilon^2 = 0, e_\epsilon^3 = -\sqrt{2k_1 + \epsilon^2} - 2\epsilon, v_\epsilon^3 = 1 \quad (\text{II.75})$$

Montrons que la fissure reste bloquée à l'interface durant un nombre  $n_\epsilon$  d'aller-retour de l'onde de choc que l'on précisera. Plus précisément, montrons par récurrence que, si  $1 \leq i \leq n_\epsilon$ , alors

$$\dot{\ell}_\epsilon^i = 0, v_\epsilon^{2i} = 0, e_\epsilon^{2i} = -\sqrt{2k_1 + \epsilon^2} - (2i - 1)\epsilon, v_\epsilon^{2i+1} = 1, e_\epsilon^{2i+1} = -\sqrt{2k_1 + \epsilon^2} - 2i\epsilon \quad (\text{II.76})$$

C'est vrai pour  $i = 1$ . Supposons que ce soit vrai jusqu'à  $i - 1$  et établissons sous quelle condition c'est vrai pour  $i$ . En s'aidant de l'hypothèse de récurrence, on a  $|e_\epsilon^{2i-1}| + \epsilon = \sqrt{2k_1 + \epsilon^2} + (2i - 1)\epsilon$ . Par conséquent, d'après (II.64), si  $\sqrt{2k_1 + \epsilon^2} + (2i - 1)\epsilon \leq \sqrt{2k_2}$ , alors  $\dot{\ell}_\epsilon^i = 0$  et toutes les autres propriétés s'en déduisent. Donc, (II.76) est vrai tant que  $i \leq n_\epsilon$  avec

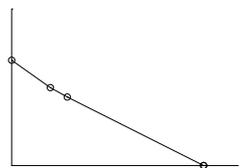
$$n_\epsilon = \left\langle \frac{1}{2\epsilon} (\sqrt{2k_2} - \sqrt{2k_1 + \epsilon^2} + \epsilon) \right\rangle, \quad (\text{II.77})$$

$\langle \cdot \rangle$  désignant la partie entière. En terme de niveau de charge, cette phase d'arrêt a lieu entre  $T_\epsilon^1$  et  $T_\epsilon^{2n_\epsilon+1}$ ,

$$T_\epsilon^{2n_\epsilon+1} = T_\epsilon^1 + 2\ell_I \epsilon n_\epsilon \quad (\text{II.78})$$

#### D.4.3 Phase de propagation dans le milieu à forte ténacité

A partir de  $T = T_\epsilon^{2n_\epsilon+1}$  la fissure redémarre et se propage dans la partie à forte ténacité  $k_2$ . La détermination de la solution s'appuie sur la Proposition 6 et le Lemme suivant



**Lemme 1** Soit  $\eta$  et  $X_0$  tels que  $0 < 1 - 2\eta < X_0 < 1$ . Alors la suite  $\{X_i\}_{i \geq 0}$  définie par

$$\frac{1}{X_{i+1}} = X_i + 2\eta \quad (\text{II.79})$$

reste toujours entre 0 et 1, son élément générique  $X_i$ , est donné par

$$\frac{1}{X_i + \eta + \sqrt{1 + \eta^2}} = \frac{1}{2\sqrt{1 + \eta^2}} + (-1)^i (\sqrt{1 + \eta^2} - \eta)^{2i} \left( \frac{1}{X_0 + \eta + \sqrt{1 + \eta^2}} - \frac{1}{2\sqrt{1 + \eta^2}} \right) \quad (\text{II.80})$$

et converge, en oscillant vers  $\sqrt{1 + \eta^2} - \eta$ .

*Preuve* : Vérifions que la suite reste entre 0 et 1. C'est vrai par hypothèse pour  $X_0$ . Comme  $1/X_1 = X_0 + 2\eta > 1$ , c'est également vrai pour  $X_1$ . Puis, par récurrence, on le montre pour  $X_{i+2}$  en le supposant vrai pour  $X_i$  en remarquant que

$$\frac{1}{X_{i+2}} = \frac{1}{X_i + 2\eta} + 2\eta > \frac{1}{1 + 2\eta} + 2\eta > 1 \quad (\text{II.81})$$

Etablissons la formule (II.80). On commence par faire le changement de variable,  $Y_i = X_i + \sqrt{1 + \eta^2} + \eta$ , ce qui permet de transformer la suite en une suite géométrico-arithmétique :

$$\frac{1}{Y_{i+1}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \eta^2} + \eta} - \frac{(\sqrt{1 + \eta^2} - \eta)^2}{Y_i}, \quad (\text{II.82})$$

la formule (II.80) s'en déduisant facilement. Comme  $\sqrt{1 + \eta^2} + \eta < 1$ , le terme en puissance  $i$  dans (II.80) tend vers 0 quand  $i$  tend vers l'infini. D'où le résultat de convergence annoncé. Les oscillations autour de la valeur limite sont dues à la présence du  $(-1)^i$ .

Posons, pour  $j \geq 0$ ,

$$X_\epsilon^j = \frac{\sqrt{2k_2}}{|e_\epsilon^{2n_\epsilon+1+2j}| + \epsilon}, \quad \eta_\epsilon = \frac{\epsilon}{\sqrt{2k_2}} \quad (\text{II.83})$$

Par construction de  $n_\epsilon$ , on a  $\sqrt{2k_2} < |e_\epsilon^{2n_\epsilon+1}| + \epsilon = \sqrt{2k_1 + \epsilon^2} + (2n_\epsilon + 1)\epsilon \leq \sqrt{2k_2} + 2\epsilon$  et donc, pour  $\epsilon$  assez petit,  $0 < 1 - 2\eta_\epsilon < (1 + 2\eta_\epsilon)^{-1} \leq X_\epsilon^0 < 1$ . De plus, comme  $\dot{\ell}_\epsilon^{n_\epsilon+1} > 0$ , on obtient à partir de (II.64) et (II.65),  $1/X_\epsilon^1 = X_\epsilon^0 + 2\eta_\epsilon$ . Comme  $0 < X_\epsilon^1 < 1$ , on a  $\dot{\ell}_\epsilon^{n_\epsilon+2} > 0$  et on peut réitérer le procédé pour obtenir la relation de récurrence (II.79). On peut donc utiliser le Lemme 1. A l'aide de (II.64), (II.65) et (II.80), on en déduit l'évolution de la fissuration pour  $T \geq T_\epsilon^{2n_\epsilon+1}$ . En particulier,  $\dot{\ell}_\epsilon^i$  peut s'écrire

$$\epsilon \dot{\ell}_\epsilon^i = \frac{1 - (X_\epsilon^{i-n_\epsilon-1})^2}{1 + (X_\epsilon^{i-n_\epsilon-1})^2} \quad (\text{II.84})$$

et on a le résultat de convergence

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} \dot{\ell}_\epsilon^i = \dot{\ell}_\epsilon^\infty \equiv \frac{1}{\sqrt{2k_2 + \epsilon^2}} \quad (\text{II.85})$$

disant que la vitesse de fissuration tend vers celle correspondant au cas d'une propagation dans un milieu homogène de ténacité  $k_2$ . La vitesse de propagation  $\dot{\ell}_\epsilon^i$  oscille autour de cette valeur limite et y tend exponentiellement (avec  $i$ ). On peut y voir là un effet de couche limite dû à la phase de propagation dans le premier milieu et à la phase d'arrêt à l'interface qui viennent modifier les conditions initiales du problème de propagation en milieu homogène.

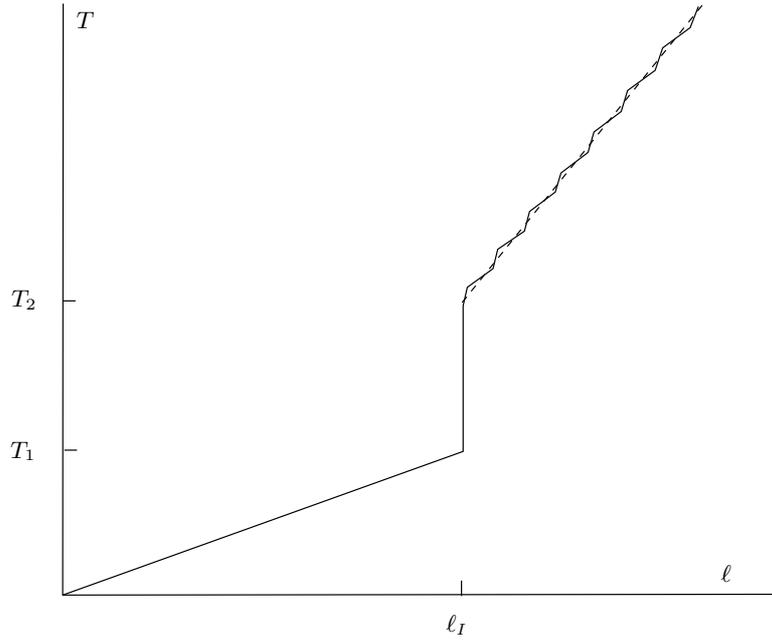


FIG. II.7 : Comparaison des solutions quasi-statique (en pointillé) et dynamique (en trait plein) dans le cas discontinu convexe :  $k_1 = 0.5$ ,  $k_2 = 2$  et  $\epsilon = 0.075$ .

#### D.4.4 Convergence

Il s'agit de vérifier que la solution dynamique converge vers la solution quasi-statique quand la vitesse de chargement tend vers 0. De façon précise, on a la

**Proposition 7** *La solution  $T \mapsto \ell_\epsilon(T)$  converge vers  $T \mapsto \ell(T)$  donnée par (II.36), uniformément sur tout compact. De même, les énergies potentielle et de surface convergent uniformément sur tout compact vers leur homologue quasi-statique cf (II.34), l'énergie cinétique convergent vers 0.*

*Preuve :*

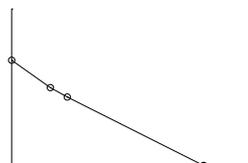
*Étape 1 : Convergence des phases de propagation dans le milieu à faible ténacité et d'arrêt à l'interface.*

On déduit immédiatement de (II.74) que  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \ell_\epsilon^0 = 1/\sqrt{2k_1}$  et  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} T_\epsilon^1 = \ell_I \sqrt{2k_1} = T_1$ . De plus, comme (II.77) donne  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} 2\epsilon n_\epsilon = \sqrt{2k_2} - \sqrt{2k_1}$ , on déduit de (II.78) que  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} T_\epsilon^2 = \ell_I \sqrt{2k_2} = T_2$ .

*Étape 2 : Convergence de la phase de propagation dans le milieu à forte ténacité.*

C'est la partie la plus délicate de la démonstration, à cause des oscillations du front de propagation. On sait d'après le Lemme 1 que  $\dot{\ell}_\epsilon^i$  oscille autour de la vitesse limite  $(2k_2 + \epsilon^2)^{-1/2}$  en y convergeant quand  $i \rightarrow +\infty$ . Introduisons la pente moyenne du front de propagation durant une oscillation, *i.e.*

$$p_\epsilon^i = \frac{\ell_\epsilon^{i+2} - \ell_\epsilon^i}{T_\epsilon^{2i+3} - T_\epsilon^{2i-1}}, \quad i \geq 1 \quad (\text{II.86})$$



En utilisant (II.65), (II.84) et (II.80), on obtient après un long calcul qui ne présente pas de difficulté

$$\dot{\ell}_\epsilon^\infty - p_\epsilon^i = \frac{2\dot{\ell}_\epsilon^\infty \left( X_\epsilon^{i-n_\epsilon-1} + \eta_\epsilon - \sqrt{1 + \eta_\epsilon^2} \right)^2}{(X_\epsilon^{i-n_\epsilon-1} + 2\eta_\epsilon)^2 + (X_\epsilon^{i-n_\epsilon-1})^2 + 2} \quad (\text{II.87})$$

Comme  $|X_\epsilon^i + \eta_\epsilon - \sqrt{1 + \eta_\epsilon^2}|$  décroît quand  $i$  croît, à  $\epsilon$  fixé, (il tend vers 0 quand  $i \rightarrow \infty$ ), on peut le majorer par  $|X_\epsilon^0 + \eta_\epsilon - \sqrt{1 + \eta_\epsilon^2}|$  qui est de l'ordre de  $\epsilon$ . Par conséquent, en notant de façon générique  $C$ , toute constante positive indépendante de  $\epsilon$ , on a

$$0 \leq \dot{\ell}_\epsilon^\infty - p_\epsilon^i \leq C\epsilon^2 \quad (\text{II.88})$$

De plus, comme  $0 \leq (2k_2)^{-1/2} - \dot{\ell}_\epsilon^\infty \leq C\epsilon^2$  et  $|T_\epsilon^{2n_\epsilon-1} - T^2| \leq C\epsilon$ , on en déduit que  $|\ell_\epsilon(T) - \ell_2(T)| \leq C\epsilon T$  pour  $T \geq T_2$ .

*Étape 3 : Convergence des énergies.*

Comme  $\ell_\epsilon(T) \rightarrow \ell(T)$ , on a aussi  $\mathcal{S}_\epsilon(T) \rightarrow \mathcal{S}(T)$ , uniformément sur tout compact. Pour l'énergie potentielle et l'énergie cinétique, en s'aidant de (II.63), (II.66), (II.74) et (II.78), il vient, quand  $1 \leq i \leq 2n_\epsilon + 1$  :

$$\mathcal{P}_\epsilon(T_\epsilon^i) = \frac{(T_\epsilon^i)^2}{2\ell_I}, \quad \mathcal{K}_\epsilon(T_\epsilon^i) = \begin{cases} \epsilon^2/2\ell_I, & \text{si } i \text{ impair} \\ 0, & \text{si } i \text{ pair} \end{cases}, \quad T_\epsilon^i = \left( \sqrt{2k_1 + \epsilon^2} + (i-1)\epsilon \right) \ell_I \quad (\text{II.89})$$

Comme  $T_\epsilon^1 \rightarrow T_1$ , que  $T_\epsilon^{2n_\epsilon+1} \rightarrow T_2$ , que les  $T_\epsilon^i$  sont équi-répartis entre  $T_\epsilon^1$  et  $T_\epsilon^{2n_\epsilon+1}$  et que les énergies sont affines par morceaux, on en déduit immédiatement la convergence uniforme de  $\mathcal{P}_\epsilon$  vers  $\mathcal{P}$  donné par (II.37) et de  $\mathcal{K}_\epsilon$  vers 0, dans l'intervalle de charge  $[0, T_2]$ .

Comme  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} X_\epsilon^j = 1$  pour tout  $j \geq 0$  (avec convergence uniforme en  $j$ ), on tire de (II.64), (II.83) et (II.84) que  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \dot{\ell}_\epsilon^i = 0$ ,  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon v_\epsilon^{2i-1} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon v_\epsilon^{2i} = 0$  et  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon e_\epsilon^{2i-1} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon e_\epsilon^{2i} = \sqrt{2k_2}$ , pour tout  $i \geq n_\epsilon + 1$  (avec convergence uniforme en  $i$ ). En reportant dans (II.66) et (II.67), on en déduit la convergence uniforme de  $\mathcal{P}_\epsilon$  vers  $\mathcal{P}$  donné par (II.37) et de  $\mathcal{K}_\epsilon$  vers 0 pour  $T \geq T_2$ .

□

## D.5 Cas discontinu avec diminution de la ténacité

On se place dans le cadre de l'hypothèse (II.38), *i.e.* la fissure se propage d'abord dans le milieu de forte ténacité. Dans les sous-sections qui suivent, la résolution est faite pour une valeur arbitraire de  $\epsilon$  et les formules données sont exactes (sauf mention explicite du contraire). Toutefois, on est amené à faire aussi des interprétations et des calculs en considérant que  $\epsilon$  est un petit paramètre. On donne en particulier l'ordre de grandeur ou la limite de certains termes quand  $\epsilon$  tend vers 0, résultats intermédiaires qui serviront à établir le résultat de convergence final. On distingue 4 phases dans l'évolution de la fissuration, cf Figure (II.8).

### D.5.1 Phase de propagation dans le milieu à forte ténacité

La solution dynamique coïncide avec celle trouvée dans le cas homogène tant que la pointe de la fissure n'a pas atteint l'interface, *i.e.* tant que  $\ell_\epsilon(T) < \ell_I$ . Lorsqu'elle

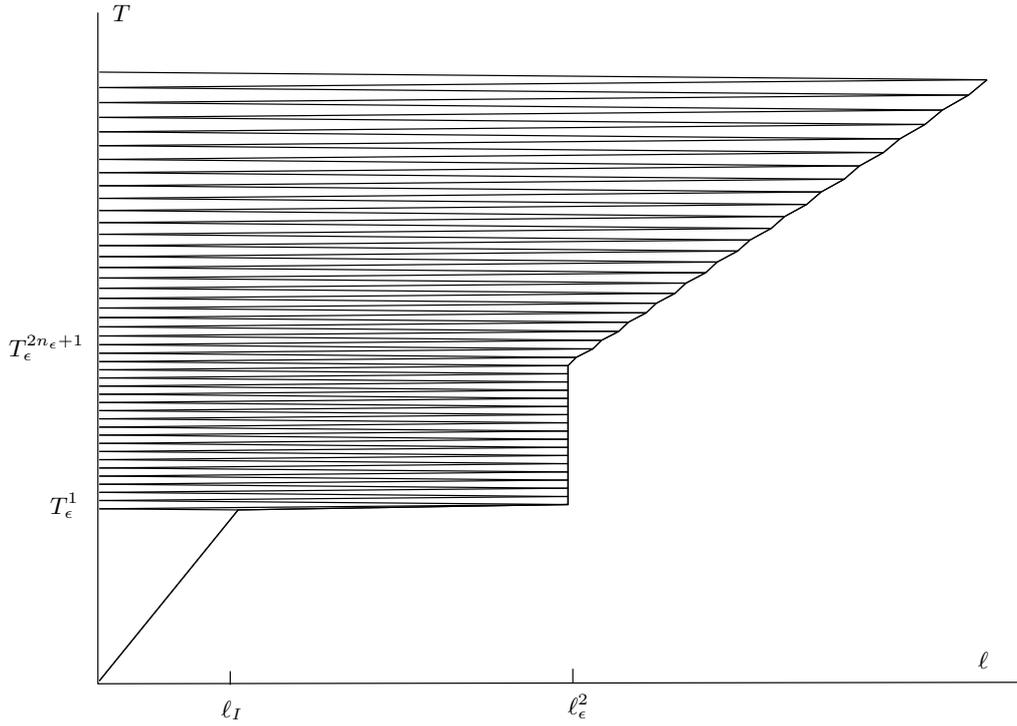


FIG. II.8 : Les 4 phases de propagation dans le cas avec diminution de la ténacité. Front de propagation et ondes de choc pour  $k_1 = 0.5$ ,  $k_2 = 2$  et  $\epsilon = 0.05$ .

l'atteint, une onde de choc rétrograde part et la vitesse de propagation de la fissure est modifiée. Dans le secteur  $\mathcal{Q}_\epsilon^1$ , on a donc

$$\dot{\ell}_\epsilon^0 = \frac{1}{\sqrt{2k_2 + \epsilon^2}}, \quad e_\epsilon^1 = -\sqrt{2k_2 + \epsilon^2}, \quad v_\epsilon^1 = 1, \quad (\text{II.90})$$

la fissure atteint l'interface au niveau de charge  $T_\epsilon^1$  donné par

$$T_\epsilon^1 = \ell_I \sqrt{2k_2 + \epsilon^2} \quad (\text{II.91})$$

A partir de cette charge, les évolutions sont régies par la Proposition 6 avec  $k = k_1$ .

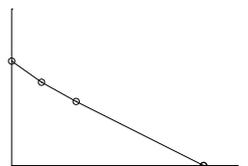
### D.5.2 Phase de propagation “rapide” dans le milieu à faible ténacité

Comme  $|e_\epsilon^1| + \epsilon = \sqrt{2k_2 + \epsilon^2} + \epsilon > \sqrt{2k_1}$ , on déduit de (II.64) que  $\dot{\ell}_\epsilon^1 > 0$  et est donné par

$$\epsilon \dot{\ell}_\epsilon^1 = \frac{(\sqrt{2k_2 + \epsilon^2} + \epsilon)^2 - 2k_1}{(\sqrt{2k_2 + \epsilon^2} + \epsilon)^2 + 2k_1} \quad (\text{II.92})$$

On notera que  $\epsilon \dot{\ell}_\epsilon^1$  est de l'ordre de 1, ce qui signifie que la pointe de la fissure se propage à une vitesse de l'ordre de la célérité du son qui reste une vitesse que l'on ne peut dépasser. De façon précise, on a

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \dot{\ell}_\epsilon^1 = \frac{k_2 - k_1}{k_2 + k_1} \quad (\text{II.93})$$



limite qui correspond à la vitesse de propagation de la fissure dans l'espace-temps. Elle est d'autant plus proche de la célérité du son que le contraste de ténacité est grand. Dans l'espace-charge, la propagation apparaîtra d'autant plus brutale que  $\epsilon$  est petit. Durant cette phase, l'onde de choc rétrograde, partie lorsque la fissure était arrivée à l'interface, arrive en  $x = 0$  au niveau de charge  $T_\epsilon^2 = T_\epsilon^1 + \epsilon \ell_I$ . Alors, elle se réfléchit et rattrape le front de propagation, inévitablement puisque les ondes libres se propagent plus vite que le front de fissure. En utilisant (II.63) et (II.65) on trouve que la rencontre a lieu au point  $(\ell_\epsilon^2, T_\epsilon^3)$  de l'espace-charge donné par

$$\ell_\epsilon^2 = \frac{1 + \epsilon \dot{\ell}_\epsilon^1}{1 - \epsilon \dot{\ell}_\epsilon^1} \ell_I, \quad T_\epsilon^3 = T_\epsilon^1 + \frac{2\epsilon \ell_I}{1 - \epsilon \dot{\ell}_\epsilon^1} \quad (\text{II.94})$$

et donc la limite

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \ell_\epsilon^2 = \frac{k_2}{k_1} \ell_I, \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} T_\epsilon^1 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} T_\epsilon^3 = \sqrt{2k_2} \ell_I \quad (\text{II.95})$$

Evaluons les énergies qui, rappelons-le, sont des fonctions affines par morceaux du niveau de charge. En  $T_\epsilon^1$ ,  $T_\epsilon^2$  et  $T_\epsilon^3$ , l'énergie cinétique prend les valeurs

$$\mathcal{K}_\epsilon(T_\epsilon^1) = \frac{\epsilon^2}{2} \ell_I, \quad \mathcal{K}_\epsilon(T_\epsilon^2) = \frac{(\epsilon \dot{\ell}_\epsilon^1)^2 (\sqrt{2k_2 + \epsilon^2} + \epsilon)^2}{2(1 + \epsilon \dot{\ell}_\epsilon^1)} \ell_I, \quad \mathcal{K}_\epsilon(T_\epsilon^3) = \frac{\epsilon^2 (1 + \epsilon \dot{\ell}_\epsilon^1)}{2(1 - \epsilon \dot{\ell}_\epsilon^1)} \ell_I \quad (\text{II.96})$$

et donc à la limite en s'aidant de (II.93)

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{K}_\epsilon(T_\epsilon^1) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{K}_\epsilon(T_\epsilon^3) = 0, \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{K}_\epsilon(T_\epsilon^2) = \frac{(k_2 - k_1)^2}{2(k_2 + k_1)} \ell_I \quad (\text{II.97})$$

L'énergie de surface prend successivement les valeurs suivantes

$$\mathcal{S}_\epsilon(T_\epsilon^1) = k_2 \ell_I, \quad \mathcal{S}_\epsilon(T_\epsilon^2) = (k_2 + \epsilon \dot{\ell}_\epsilon^1 k_1) \ell_I, \quad \mathcal{S}_\epsilon(T_\epsilon^3) = \left( k_2 + \frac{2\epsilon \dot{\ell}_\epsilon^1}{1 - \epsilon \dot{\ell}_\epsilon^1} k_1 \right) \ell_I \quad (\text{II.98})$$

et donc la limite en s'aidant de (II.93)

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{S}_\epsilon(T_\epsilon^2) = \left( k_2 + \frac{k_2 - k_1}{k_2 + k_1} k_1 \right) \ell_I, \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{S}_\epsilon(T_\epsilon^3) = (2k_2 - k_1) \ell_I \quad (\text{II.99})$$

L'énergie potentielle prend successivement les valeurs suivantes

$$\mathcal{P}_\epsilon(T_\epsilon^1) = (k_2 + \frac{\epsilon^2}{2}) \ell_I, \quad \mathcal{P}_\epsilon(T_\epsilon^2) = \frac{(\sqrt{2k_2 + \epsilon^2} + \epsilon)^2}{2(1 + \epsilon \dot{\ell}_\epsilon^1)} \ell_I \quad (\text{II.100})$$

$$\mathcal{P}_\epsilon(T_\epsilon^3) = \frac{1}{2} \left( \frac{1 - \epsilon \dot{\ell}_\epsilon^1}{1 + \epsilon \dot{\ell}_\epsilon^1} (\sqrt{2k_2 + \epsilon^2} + \epsilon) + \epsilon \right)^2 \frac{1 + \epsilon \dot{\ell}_\epsilon^1}{1 - \epsilon \dot{\ell}_\epsilon^1} \ell_I \quad (\text{II.101})$$

et donc en s'aidant de (II.93)

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{P}_\epsilon(T_\epsilon^1) = k_2 \ell_I, \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{P}_\epsilon(T_\epsilon^2) = \frac{k_2 + k_1}{2} \ell_I, \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{P}_\epsilon(T_\epsilon^3) = k_1 \ell_I \quad (\text{II.102})$$

Pour ce qui est de l'énergie totale, on a à la limite

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{E}_\epsilon(T_\epsilon^1) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{E}_\epsilon(T_\epsilon^2) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{E}_\epsilon(T_\epsilon^3) = 2k_2 \ell_I \quad (\text{II.103})$$

Si l'on compare ces valeurs à celles correspondant à la solution quasi-statique métastable, on obtient le résultat fondamental suivant

**Proposition 8** *Après que la fissure ait atteint l'interface, suit une phase de propagation durant laquelle la fissure a une vitesse du même ordre que la célérité du son. Cette phase dure le temps que l'onde de choc rétrograde engendrée à l'interface se réfléchisse au bord et rejoigne le front de propagation. Au début de cette phase, l'énergie cinétique est négligeable et les énergies potentielle et de surface sont pratiquement celles données par la solution quasi-statique métastable. L'énergie cinétique va augmenter rapidement pour devenir maximale au moment où l'onde de choc rétrograde se réfléchit au bord. A ce moment-là, sa valeur est du même ordre que les autres énergies. Elle va ensuite diminuer rapidement pour redevenir négligeable lorsque l'onde de choc rejoint le front de propagation, cf Figure II.9. Durant cette période, une partie de l'énergie potentielle et toute l'énergie cinétique sont transformées en énergie de surface. Au moment où l'onde de choc rejoint le front de propagation, la position de la pointe de la fissure et les différentes énergies correspondent pratiquement à celles prédites par la solution quasi-statique juste après le saut.*

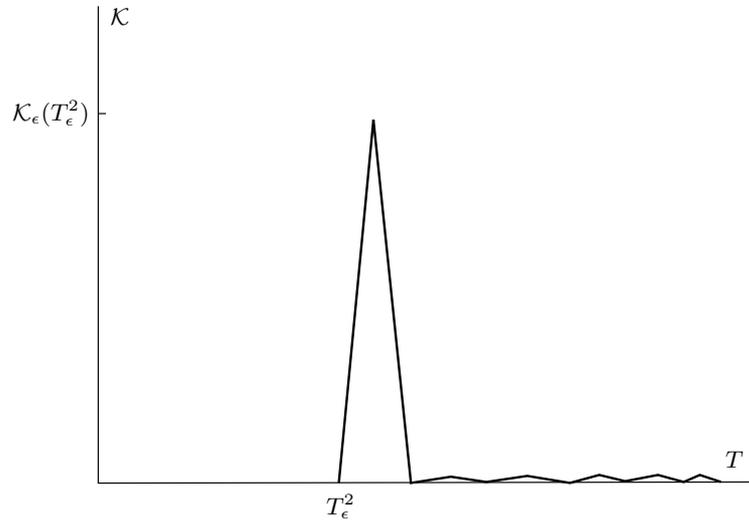


FIG. II.9 : Evolution de l'énergie cinétique en fonction du niveau de charge ;  $k_1 = 0.5$ ,  $k_2 = 2$  et  $\epsilon = 0.075$

*Preuve :*

Il reste à comparer les valeurs limites de la solution dynamique à celles de la solution métastable quasi-statique. En rapprochant (II.48) et (II.49) de (II.95), (II.102) et (II.99), on voit que

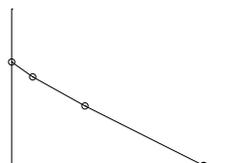
$$\ell_\epsilon^1 = \ell_c, \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} T_\epsilon^1 = T_2, \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{S}_\epsilon(T_\epsilon^1) = \mathcal{S}^-(T_2), \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{P}_\epsilon(T_\epsilon^1) = \mathcal{P}^-(T_2) \quad (\text{II.104})$$

et que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \ell_\epsilon^2 = \ell_c, \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} T_\epsilon^3 = T_2, \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{S}_\epsilon(T_\epsilon^3) = \mathcal{S}^+(T_2), \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{P}_\epsilon(T_\epsilon^3) = \mathcal{P}^+(T_2) \quad (\text{II.105})$$

Comme  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{K}_\epsilon(T_\epsilon^1) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{K}_\epsilon(T_\epsilon^3) = 0$ , on a bien le résultat annoncé.

□



### D.5.3 Phase d'arrêt dans le milieu à faible ténacité

Lorsque l'onde de choc rattrape le front de propagation, la fissure s'arrête. En effet, on a

$$|e_\epsilon^3| = \frac{2k_1}{\sqrt{2k_2 + \epsilon^2} + \epsilon} + \epsilon \quad (\text{II.106})$$

Par conséquent, pour  $\epsilon$  assez petit, comme  $|e_\epsilon^3| + \epsilon < \sqrt{2k_1}$ , on déduit de (II.64) que  $\dot{\ell}_\epsilon^2 = 0$ . De plus, en vertu de (II.64) et (II.65) on a

$$v_\epsilon^4 = 0, e_\epsilon^4 = -\frac{2k_1}{\sqrt{2k_2 + \epsilon^2} + \epsilon} - 2\epsilon, v_\epsilon^5 = 1, e_\epsilon^5 = -\frac{2k_1}{\sqrt{2k_2 + \epsilon^2} + \epsilon} - 3\epsilon \quad (\text{II.107})$$

En s'inspirant du raisonnement suivi en D.4.2, montrons que la pointe de la fissure va rester bloquée à  $\ell_\epsilon^2$  le temps que le taux de restitution d'énergie mécanique redevienne égal à  $k_1$ . Plus précisément, montrons par récurrence que si  $2 \leq i \leq n_\epsilon$ ,  $n_\epsilon$  restant à préciser, alors  $\dot{\ell}_\epsilon^i = 0$  et

$$v_\epsilon^{2i} = 0, e_\epsilon^{2i} = -\frac{2k_1}{\sqrt{2k_2 + \epsilon^2} + \epsilon} - 2(i-1)\epsilon, v_\epsilon^{2i+1} = 1, e_\epsilon^{2i+1} = -\frac{2k_1}{\sqrt{2k_2 + \epsilon^2} + \epsilon} - (2i-1)\epsilon \quad (\text{II.108})$$

C'est vrai pour  $i = 2$ . Supposons que ce soit vrai jusqu'à  $i - 1$ . D'après (II.64), cela restera vrai pour  $i$  si  $|e_\epsilon^{2i-1}| + \epsilon \leq \sqrt{2k_1}$ . En s'aidant de l'hypothèse de récurrence, on en déduit que (II.108) est vrai tant que  $2 \leq i \leq n_\epsilon$  avec

$$n_\epsilon = \left\langle \frac{1}{2\epsilon} \left( \sqrt{2k_1} - \frac{2k_1}{\sqrt{2k_2 + \epsilon^2} + \epsilon} + 2\epsilon \right) \right\rangle \quad (\text{II.109})$$

En terme de niveau de charge, cette charge d'arrêt a lieu entre  $T_\epsilon^3$  et  $T_\epsilon^{2n_\epsilon+1}$ ,

$$T_\epsilon^{2n_\epsilon+1} = T_\epsilon^3 + 2\epsilon n_\epsilon \ell_\epsilon^2 \quad (\text{II.110})$$

En passant à la limite, on obtient

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} T_\epsilon^{2n_\epsilon+1} = \sqrt{\frac{k_2}{k_1}} T_2 \quad (\text{II.111})$$

autrement dit, la phase d'arrêt correspond à celle prévue par la solution métastable quasi-statique.

### D.5.4 Phase de propagation "progressive" dans le milieu à faible ténacité

A partir de  $T = T_\epsilon^{2n_\epsilon+1}$  la fissure redémarre. En effet, posons, pour  $j \geq 0$ ,

$$X_\epsilon^j = \frac{\sqrt{2k_1}}{|e_\epsilon^{2n_\epsilon+1+2j}| + \epsilon}, \eta_\epsilon = \frac{\epsilon}{\sqrt{2k_1}} \quad (\text{II.112})$$

Par construction de  $n_\epsilon$ , on a  $\sqrt{2k_1} < |e_\epsilon^{2n_\epsilon+1}| + \epsilon \leq \sqrt{2k_1} + 2\epsilon$  et donc, pour  $\epsilon$  assez petit,  $0 < 1 - 2\eta_\epsilon < (1 + 2\eta_\epsilon)^{-1} \leq X_\epsilon^0 < 1$ . De plus, comme  $\dot{\ell}_\epsilon^{n_\epsilon+1} > 0$ , on obtient à partir de (II.64) et (II.65),  $1/X_\epsilon^1 = X_\epsilon^0 + 2\eta_\epsilon$ . Comme  $0 < X_\epsilon^1 < 1$ , on a  $\dot{\ell}_\epsilon^{n_\epsilon+2} > 0$  et on peut réitérer le procédé pour obtenir la relation de récurrence (II.80). On peut donc utiliser le

Lemme 1. A l'aide de (II.64), (II.65) et (II.80), on en déduit l'évolution de la fissuration pour  $T \geq T_\epsilon^{2n_\epsilon+1}$ . En particulier, pour  $i \geq n_\epsilon + 1$ ,  $\dot{\ell}_\epsilon^i$  peut s'écrire

$$\epsilon \dot{\ell}_\epsilon^i = \frac{1 - (X_\epsilon^{i-n_\epsilon-1})^2}{1 + (X_\epsilon^{i-n_\epsilon-1})^2} \quad (\text{II.113})$$

et on a le résultat de convergence

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \dot{\ell}_\epsilon^i = \dot{\ell}_\epsilon^\infty = \frac{1}{\sqrt{2k_1 + \epsilon^2}} \quad (\text{II.114})$$

disant que la vitesse de fissuration tend vers celle correspondant au cas d'une propagation dans un milieu homogène de ténacité  $k_1$ . La vitesse de propagation  $\dot{\ell}_\epsilon^i$  oscille autour de cette valeur limite et y tend exponentiellement (avec  $i$ ).

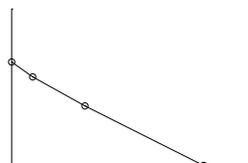
On peut reprendre les étapes 2 et 3 de la démonstration de la proposition 7 pour obtenir des résultats de convergence uniforme, aussi bien pour l'évolution de la fissure que pour l'évolution des énergies durant cette phase, vers la solution métastable quand  $\epsilon \rightarrow 0$ .

#### D.5.5 Convergence vers la solution quasi-statique métastable

On peut résumer l'ensemble des résultats précédents dans la

**Proposition 9** *La solution dynamique converge vers la solution quasi-statique métastable. Cette convergence n'est pas uniforme à cause de la phase de propagation rapide durant laquelle la fissure "saute" de l'interface à la position  $\ell_c$ , l'énergie cinétique ne pouvant alors être négligée. Cependant les valeurs du saut et des énergies juste après le saut convergent bien vers celles de la solution métastable.*

On peut comparer l'évolution de la fissuration donnée par la solution dynamique et par la solution quasi-statique métastable sur la Figure II.10.



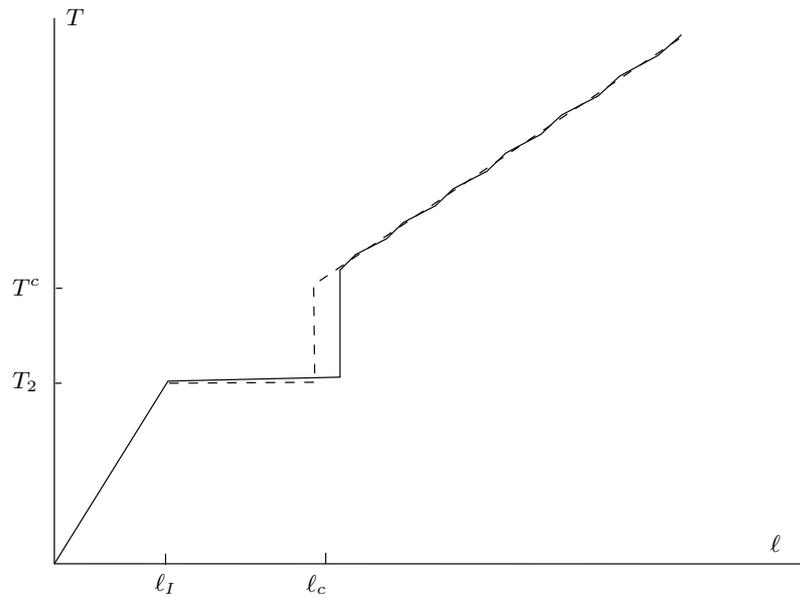


FIG. II.10 : Comparaison de la solution quasi-statique métastable (en pointillé) avec la solution dynamique (en trait plein) dans le cas discontinu non convexe ;  $k_1 = 0.5$ ,  $k_2 = 2$  et  $\epsilon = 0.075$

## E Conclusion

On peut retenir de ce problème de rupture dynamique en milieu hétérogène sous vitesse de chargement faible deux résultats majeurs

- Contrairement à une idée répandue, on peut traiter les phases de propagation instables de la fissuration en ne considérant que des grandeurs quasi-statiques à l'équilibre, l'énergie cinétique ne jouant qu'un rôle éphémère.
- La condition donnant la valeur du saut de la fissuration lors de ces phases de propagation instables n'est pas le critère de Griffith portant sur le taux de restitution d'énergie critique, mais sur la conservation de l'énergie totale (sachant que l'on peut raisonner en quasi-statique, l'énergie cinétique étant négligeable avant et après le saut).

On peut rajouter en outre que la dynamique favorise la solution quasi-statique métastable, *i.e.* celle où le saut de fissuration a lieu lorsque la fissure atteint le milieu de moindre ténacité.

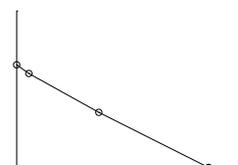
## Chapitre III

# Décollement d'un film à travers un défaut de ténacité

### Contents

<b>A</b>	<b>Introduction</b> . . . . .	<b>60</b>
<b>B</b>	<b>Comportement d'une fissure par rapport à un défaut</b> . . . . .	<b>61</b>
B.1	Présentation du modèle . . . . .	61
B.2	Réponse quasi-statique . . . . .	62
B.3	Réponse dynamique . . . . .	65
B.4	Influence de la vitesse de chargement sur la courbe $\ell \mapsto \mathcal{T}(\ell)$ . .	75
B.5	Interprétation des résultats . . . . .	77
B.6	Construction d'une ténacité apparente pour un défaut $k(x)$ constant par morceaux . . . . .	82
<b>C</b>	<b>Analogie avec un chargement brutal</b> . . . . .	<b>86</b>
C.1	Influence du chargement . . . . .	86
C.2	Influence du chargement en présence d'une discontinuité de ténacité . . . . .	88
<b>D</b>	<b>Conclusion</b> . . . . .	<b>90</b>

**résumé :** Ce chapitre présente un film se décollant à travers une interface ayant un défaut de ténacité. A la différence du chapitre II, le rôle de l'énergie cinétique est important. En effet le décolllement du front de fissure évolue de façon brutale à travers le défaut et s'arrête en fond de défaut avec une énergie cinétique non nulle (la solution métastable n'est plus valable dans ce cas). Ensuite lorsque la charge évolue, l'énergie cinétique diminue et ce grâce à un phénomène de relaxation de l'énergie cinétique. Dans le plan espace-charge, ce phénomène de relaxation décrit une courbe limite qui est confondue avec la solution statique à partir d'une certaine longueur. Ces courbes limites sont ensuite généralisées à l'aide d'une loi d'évolution "universelle" de type  $\dot{\ell} = \mathcal{F}(\ell)$ . Et pour finir on montre que l'on obtient ces mêmes phénomènes de relaxation de l'énergie cinétique lorsque le chargement est de type impulsif.



## A Introduction

A travers le chapitre II, nous avons montré que l'énergie cinétique joue un rôle négligeable par rapport à la propagation brutale du décollement du film. (La solution dynamique limite lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$  converge vers la solution quasi-statique métastable). On se propose maintenant d'étudier un cas où l'énergie cinétique joue un rôle important et dont la solution dynamique limite ne converge plus vers la solution quasi-statique métastable.

Pour cela on considère un cas de décollement de film mince (cf chapitre II) où l'interface est matérialisée par un défaut de ténacité de taille  $L$  (cf Figure III.1). Tant que le front de décollement du film n'est pas arrivé en fond de défaut, ( $\ell = \ell_{II}$ ) la solution est identique avec celle obtenue avec le modèle à discontinuité de ténacité. Puis lorsque celui-ci intersecte le fond du défaut, alors une seconde onde de choc est générée et l'évolution future du décollement du film est différente de celle obtenue avec le modèle à une discontinuité. Par la suite on se propose d'étudier l'évolution du décollement du film lorsque la vitesse de chargement  $\epsilon$  tend vers zéro (on prendra bien soin tout d'abord, d'explicitier les solutions quasi-statiques (UGM) et (ULM) métastables). En particulier on recherchera la solution sous forme de courbe limite dont on montrera l'indépendance de celle-ci par rapport à l'histoire du chargement. A cette construction (courbe limite), s'ajoutera une interprétation énergétique de ce phénomène. En particulier on présentera un mécanisme particulier que l'on appelle *relaxation de l'énergie cinétique*. Et pour finir nous présenterons une lecture particulière de ces courbes limites sous la forme de loi d'évolution de type  $\dot{\ell} = \mathcal{F}(\ell)$  qui, comme on le montrera, s'interprète en statique comme en dynamique sous la forme d'une *ténacité apparente*.

Dans un deuxième temps nous étudierons l'influence de la distribution du défaut sur cette courbe limite. En particulier nous présenterons le cas d'un double défaut (le défaut est constitué de deux ténacités différentes et inférieures à la ténacité de référence  $k_2$ ) et nous développerons quelques propriétés au sujet d'un défaut ayant une distribution de la ténacité plus complexe. Et pour finir on introduira quelques résultats obtenus à partir d'un chargement de type impulsif et on montrera que l'énergie cinétique est régie de la même façon que celle présente dans le modèle précédemment défini.

Ce chapitre s'articule en deux parties ; une première à travers laquelle est présentée les principaux éléments, et une seconde qui présente quelques démonstrations trop longues et non essentielles (en terme de raisonnement) à la bonne compréhension du chapitre (cf annexe A).

## B Comportement d'une fissure par rapport à un défaut

On commence tout d'abord par présenter le modèle utilisé par la suite.

### B.1 Présentation du modèle

Le modèle que l'on considère est similaire à celui développé au cours du chapitre II. Il s'agit d'un film se décollant sous l'effet d'un déplacement imposé à travers une interface ayant une distribution de ténacité particulière.

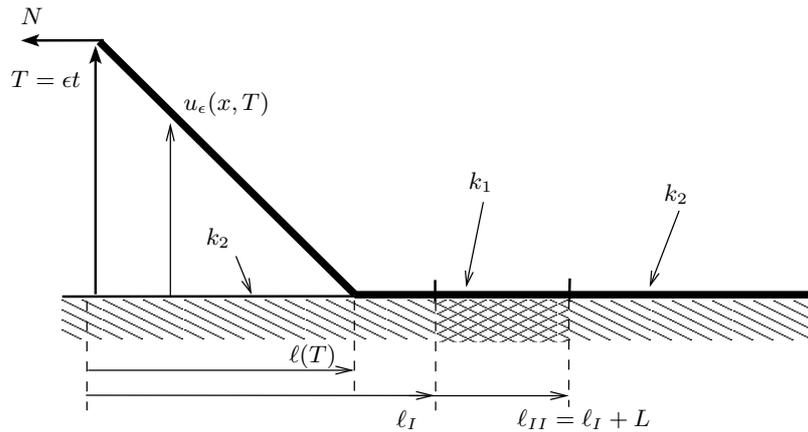


FIG. III.1 : Décollement du film à travers une interface avec défaut

La première partie de l'étude consiste à étudier un modèle ayant une répartition de la ténacité (cf Figure III.2) donnée par

$$k(x) = \begin{cases} k_1 & \text{si } \ell_I < x < \ell_{II} \\ k_2 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{III.1})$$

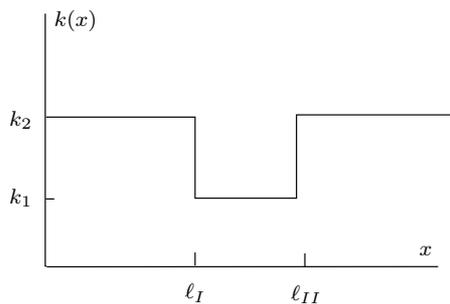
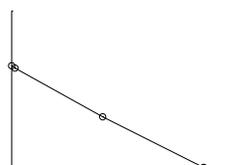


FIG. III.2 : Evolution de la ténacité  $x \mapsto k(x)$

avec  $k_1 < k_2$ . Par la suite (cf B.6) on sera amené à introduire des distributions de ténacité différentes qui seront présentées le moment venu.



La construction de la solution quasi-statique nécessite de définir quelques grandeurs :

$$\begin{aligned} T_1 = \ell_I \sqrt{2k_2}, \quad T_2 = \ell_{II} \sqrt{2k_2}, \quad T_3 = \ell_{II} \sqrt{2k_1}, \quad \ell_1(T) = \frac{T}{\sqrt{2k_1}}, \quad \ell_2(T) = \frac{T}{\sqrt{2k_2}}, \\ \ell_c = \frac{k_2}{k_1} \ell_I, \quad T_c = \ell_c \sqrt{2k_1} \end{aligned} \quad (\text{III.2})$$

où  $\ell_c$  correspond à la longueur sautée de la solution métastable lors du cas de diminution de ténacité, défini en (II.48). On définit aussi :

$$T^* = \frac{\ell_I}{\sqrt{2}} (\sqrt{k_2} + \sqrt{k_1}), \quad \ell^* = \frac{T^*}{\sqrt{2k_1}} \quad (\text{III.3})$$

L'énergie totale du modèle  $l \mapsto \mathcal{E}(T, l)$  n'est pas une fonction convexe, ainsi elle peut présenter plusieurs minima locaux.  $\mathcal{E}(T, l)$  se présente sous la forme

$$\mathcal{E}(T, l) = \frac{T^2}{2l} + \begin{cases} k_2 l & \text{si } 0 < x < \ell_I \\ k_2 \ell_I + k_1 (l - \ell_I) & \text{si } \ell_I < x < \ell_{II} \\ k_2 \ell_I + k_1 (\ell_{II} - \ell_I) + k_2 (l - \ell_{II}) & \text{si } x > \ell_{II} \end{cases} \quad (\text{III.4})$$

## B.2 Réponse quasi-statique

De façon similaire qu'au chapitre II, différentes approches quasi-statiques peuvent être introduites (approches quasi-statiques (UGM) et (ULM)).

### B.2.1 Solution quasi-statique (UGM)

L'évolution du front de fissure selon l'approche (UGM) peut se résumer dans la

**Proposition 10** *La solution  $T \mapsto \ell_g(T)$  de (Ir), (Gm) et (Eb) (cf page 35) dépend de la longueur  $\ell^*$  et est donnée par*

- Si  $\ell^* < \ell_{II}$  :  $\ell_g(T) = \begin{cases} \ell_2(T) & \text{si } 0 < T < T^* \text{ et } T_2 < T \\ \ell_1(T) & \text{si } T^* < T < T_3 \\ \ell_{II} & \text{si } T_3 < T < T_2 \end{cases}$
- Si  $\ell^* \geq \ell_{II}$  :  $\ell_g(T) = \begin{cases} \ell_2(T) & \text{si } 0 < T < T^c \text{ et } T_2 < T \\ \ell_{II} & \text{si } T^c < T < T_2 \end{cases}$

avec  $T^c$  solution de  $\mathcal{E}(T^c, \ell_2^*) = \mathcal{E}(T^c, \ell_{II})$ ,  $\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial l}(T^c, \ell_2^*) = 0$  avec  $\ell_2^* < \ell_I$ .

La démonstration de cette proposition est introduite page 159 (la construction est similaire à celle présentée au chapitre II).

Le calcul de  $T^c$  peut être obtenu à partir de  $\mathcal{E}(T^c, \ell_2^*) = \mathcal{E}(T^c, \ell_{II})$  qui se met sous la forme

$$\frac{T^{c^2}}{2\ell_{II}} + k_2 \ell_I + k_1 (\ell_{II} - \ell_I) = T^c \sqrt{2k_2} \quad (\text{III.5})$$

et qui permet d'obtenir  $T^c = \ell_{II} \sqrt{2k_2} \pm \sqrt{2(k_2 - k_1) \ell_{II} (\ell_{II} - \ell_I)}$ .

**Remarque 1**  $T^c$  évolue en fonction des paramètres du modèle à travers l'intervalle  $[T^*, T_1]$ . Le cas particulier  $T^c = T_1$  est obtenu pour un jeu de paramètre tel que  $k_1/k_2 = \ell_I/\ell_{II}$ . Ainsi dans ce cas de figure,  $\ell(T)$  évolue jusqu'à la position  $x = \ell_I$  de façon stable puis saute en  $x = \ell_{II}$  où le front de fissure marquera un arrêt jusqu'à ce qu'il ait accumulé assez d'énergie pour redémarrer.

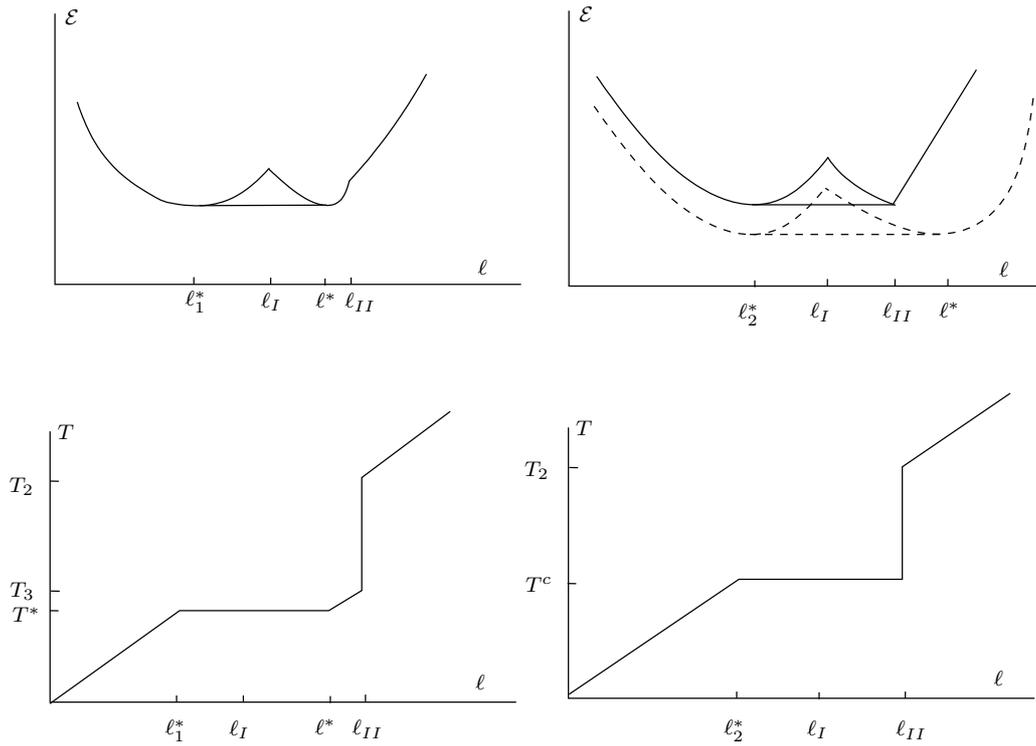


FIG. III.3 : Evolution de  $\ell(T)$  en fonction des deux solutions de l'approche (UGM) : à gauche lorsque  $\ell^* < \ell_{II}$  et à droite lorsque  $\ell^* \geq \ell_{II}$  ; en haut l'énergie totale au moment du saut et en bas la propagation de  $\ell(T)$  dans le plan espace-charge.

### B.2.2 Solution quasi-statique (ULM)

L'évolution du front de fissure selon l'approche (ULM) peut se résumer dans la

**Proposition 11** La solution  $T \mapsto \ell_l(T)$  de **(Ir)**, **(Lm)** et **(Eb)** dépend de la longueur  $\ell^*$  et est indexée par  $T_x$  défini sur l'intervalle  $[T^c, T_1]$

- Si  $\ell_{II} < \ell^*$  :  $\ell_l(T) = \begin{cases} \ell_2(T) & \text{si } 0 < T < T_x \text{ et } T > T_\theta \\ \ell_x & \text{si } T_x < T < T_\theta \end{cases}$

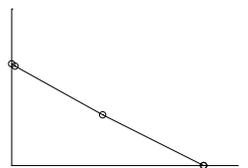
avec  $T_x \in [T^c, T_1]$  et  $\ell_x$  déterminés par  $\mathcal{E}(T_x, y) = \mathcal{E}(T_x, \ell_x)$  et  $\partial\mathcal{E}/\partial l(T_x, y) = 0$  avec  $y < \ell_I$ .

- Si  $\ell^* < \ell_{II}$  :

$$\blacktriangleright \text{ pour } T_x \in [T^c, T^{**}] : \ell_l(T) = \begin{cases} \ell_2(T) & \text{si } 0 < T < T_x \text{ et } T > T_\eta \\ \ell_z & \text{si } T_x < T < T_\beta \\ \ell_1(T) & \text{si } T_\beta < T < T_\gamma \\ \ell_{II} & \text{si } T_\gamma < T < T_\eta \end{cases}$$

avec  $T^{**}$  défini tel que  $\mathcal{E}(T^{**}, \ell_2(T^{**})) = \mathcal{E}(T^{**}, \ell_{II})$ , et  $T_x \leq T_\beta \leq T_\gamma \leq T_\eta$  définis tels que  $\mathcal{E}(T_x, \ell_2(T_x)) = \mathcal{E}(T_x, \ell_z)$ ,  $\partial\mathcal{E}/\partial l(T_\beta, \ell_z) = 0$ ,  $\partial\mathcal{E}/\partial l(T_\gamma, \ell_{II}) = 0$ ,  $\partial\mathcal{E}/\partial l(T_\eta, \ell_{II}) = 0$ ,

$$\blacktriangleright \text{ pour } T_x \in [T^{**}, T_1] : \ell_l(T) = \begin{cases} \ell_2(T) & \text{si } 0 < T < T_x \text{ et } T > T_\nu \\ \ell_z & \text{si } T_x < T < T_\nu \end{cases}$$



avec  $T_x \leq T_\nu$  où  $T_\nu$  et  $\ell_z$  sont définis tels que  $\mathcal{E}(T_x, \ell_2(T_x)) = \mathcal{E}(T_x, \ell_z)$ ,  $\partial\mathcal{E}/\partial l(T_\nu, \ell_z) = 0$

Preuve :

Étape 1 : Construction de la solution lorsque  $\ell_{II} < \ell^*$

La solution quasi-statique (ULM) est indexée par  $T_x \in [T^c, T_1]$ . Le cas  $T_x = T^c$  correspond à la solution quasi-statique (UGM) avec  $\ell_{II} < \ell^*$  introduite à travers la proposition 10. Pour  $T_x \in ]T^c, T_1]$  alors  $\ell_x \in ]\ell_{II}, \ell_c]$  puisque  $\partial\mathcal{E}/\partial l(T, l) < 0$  pour  $T > T_x$  et  $l \in ]\ell_I, \ell_{II}]$ , et  $\partial\mathcal{E}/\partial l(T, l) > 0$  pour  $T > T_x$  et  $l \in ]\ell_{II}, \infty)$ . Ainsi à la charge  $T_x$ , le front de fissure saute de la position  $\ell_2(T_x)$  à la position  $\ell_x$ . Ensuite le front de fissure redémarrera à la charge  $T_\theta$  en évoluant selon  $\ell_2(T)$  lorsque  $\partial\mathcal{E}/\partial l(T_\theta, \ell_x) = 0$ .

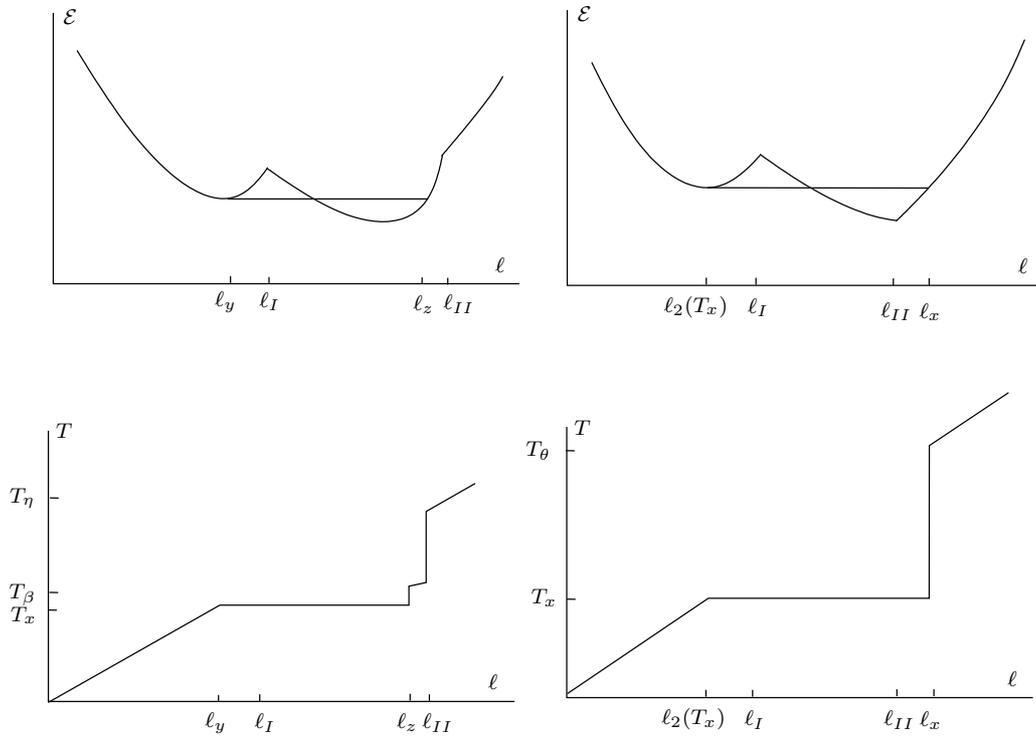


FIG. III.4 : Evolution de  $\ell(T)$  en fonction des deux solutions de l'approche (ULM) : à gauche lorsque  $\ell^* < \ell_{II}$  et pour  $T_x \in [T^c, T^{**}]$  et à droite lorsque  $\ell^* \geq \ell_{II}$  ; en haut l'énergie totale au moment du saut et en bas la propagation de  $\ell(T)$  dans le plan espace charge.

Étape 2 : Construction de la solution lorsque  $\ell^* < \ell_{II}$

Lorsque  $T_x \in [T^{**}, T_1]$ , alors la solution est identique à la solution quasi-statique (ULM) lorsque  $\ell_{II} < \ell^*$ . En effet  $T^{**}$  est défini tel que  $\mathcal{E}(T^{**}, \ell_2(T^{**})) = \mathcal{E}(T^{**}, \ell_{II})$ , ce qui revient à dire que  $T^{**} = T^c$  où  $T^c$  a été défini pour la solution quasi-statique (UGM) lorsque  $\ell^* > \ell_{II}$ . Ensuite la démonstration développée à travers l'étape 1 reste valable.

Lorsque  $T_x \in [T^c, T^{**}]$ , le cas avec  $T_x = T^c$  correspond à la solution quasi-statique (UGM) lorsque  $\ell^* < \ell_{II}$ . Ce cas ne comporte pas d'arrêt dans le défaut puisque la longueur du saut est définie telle que  $\mathcal{E}(T^c, \ell_2(T^c)) = \mathcal{E}(T^c, \ell_z)$  où  $\ell_2(T^c) < \ell_I < \ell_z$

et avec  $\partial\mathcal{E}/\partial l(T^c, \ell_z) = 0$ , ainsi pour  $T > T^c$  le front de fissure se propage et évolue selon  $\ell_1(T)$ . Pour  $T_x \in ]T^c, T^{**}]$ , la définition de  $\ell_z$  est différente puisqu'on n'a plus  $\partial\mathcal{E}/\partial l(T^x, \ell_z) = 0$ , de ce fait il faut recharger le modèle jusqu'à une charge critique  $T_\beta$  telle que  $\partial\mathcal{E}/\partial l(T_\beta, \ell_y) = 0$ . Ensuite la solution évolue selon  $\ell_1(T)$  et est similaire à la solution quasi-statique (UGM) lorsque  $\ell^* < \ell_{II}$ .

□

**Corollaire 2** *De la même façon qu'à travers le chapitre II, on définit la solution **quasi-statique métastable** comme étant la solution selon l'approche (ULM) qui part le plus tard. Nous avons donc deux solutions différentes en fonction de la valeur de  $\ell_c$  par rapport à  $\ell_{II}$ . Lorsque  $\ell_c < \ell_{II}$ , alors le front de fissure se propage brutalement à partir de la position  $x = \ell_I$  jusqu'à  $x = \ell_c$  pour ensuite s'arrêter dans le défaut, repartir puis s'arrêter en  $x = \ell_{II}$  pour finalement redémarrer et suivre la même solution quasi-statique que lorsque  $x < \ell_I$ . Le cas où  $\ell_c > \ell_{II}$  est légèrement différent : le front de fissure **saute** brutalement à partir de la position  $x = \ell_I$  jusqu'à la position  $x = \ell_b$  qui se trouve en dehors du défaut. Ensuite  $\ell(T)$  marque un arrêt, le temps que la structure réaccumule suffisamment d'énergie pour repartir et évoluer comme la solution quasi-statique lorsque  $x < \ell_I$ . Le fait qu'en sortie du défaut (ou plus généralement lorsque la solution redémarre après avoir traversée le défaut), la solution évolue comme la solution quasi-statique avant d'entrer dans le défaut, met en évidence l'absence d'effet de mémoire de la solution quasi-statique par rapport au défaut.*

Dans le cas  $\ell_c > \ell_{II}$ ,  $\ell_b$  est défini tel que  $\mathcal{E}(T_1, \ell_I) = \mathcal{E}(T_1, \ell_b)$ , ce qui nous donne :

$$\ell_b = \frac{\ell_I(k_1 + k_2) + \ell_{II}(k_2 - k_1) + \sqrt{(\ell_{II}(k_2 - k_1) + \ell_I(k_1 + k_2))^2 - 4\ell_I^2 k_2^2}}{2k_2} \quad (\text{III.6})$$

### B.3 Réponse dynamique

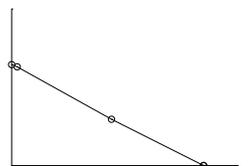
On considère la répartition de ténacité  $k(x)$  définie par (III.1). La dimension du défaut  $L = \ell_{II} - \ell_I$  est supposée être plus petite que  $\ell_c - \ell_I$ . On recherche la solution dynamique qui corresponde au cas  $\ell_c > \ell_{II}$  du Corollaire 2, l'autre solution dynamique ( $\ell_{II} > \ell_c$ ) se construit assez facilement à partir d'une combinaison entre les solutions dynamiques obtenues avec des ténacités variant de façon monotone (cf chapitre II).

Le modèle comporte 2 discontinuités de ténacité, ainsi les notations de la Proposition 6 ne sont plus totalement appropriées. Nous allons donc commencer par les adapter.

#### B.3.1 Notations et définitions

Initialement le film est totalement collé et on a  $v_\epsilon = e_\epsilon = 0$ , puis pour  $T > 0$  les champs évoluent dans le domaine régulier  $\mathcal{Q}_\epsilon^1$  du plan espace charge  $(x, T)$ . Lorsque le front de fissure  $\mathcal{S}_\epsilon^0 = \partial\mathcal{Q}_\epsilon^1 \cap \partial\mathcal{Q}_\epsilon^0$  arrive sur la première discontinuité de ténacité en  $x = \ell_I$  et à la charge  $T_\epsilon^1$ , une onde de choc rétrograde  $\mathcal{S}_\epsilon^{1-}$  est générée qui va ensuite se réfléchir contre la condition aux limites en  $T = T_\epsilon^3$ . Pendant ce temps, le nouveau front de fissure  $\mathcal{S}_\epsilon^2$  rencontre à la charge  $T = T_\epsilon^2$  la deuxième discontinuité de ténacité et génère une seconde onde de choc rétrograde entre les domaines  $\mathcal{Q}_\epsilon^2$  et  $\mathcal{Q}_\epsilon^4$  notée  $\mathcal{S}_\epsilon^{2-}$ . On choisit  $\ell_{II}$  tel que

$$L < \left( \frac{k_2 - k_1}{2k_2} \right) \ell_{II} \quad (\text{III.7})$$



Ce choix permet de fixer les notations et est équivalent à  $T_\epsilon^3 > T_\epsilon^2$ . (Lorsque la condition (III.7) n'est plus vraie, les notations et les calculs des énergies qui vont suivre ne sont plus justes.)

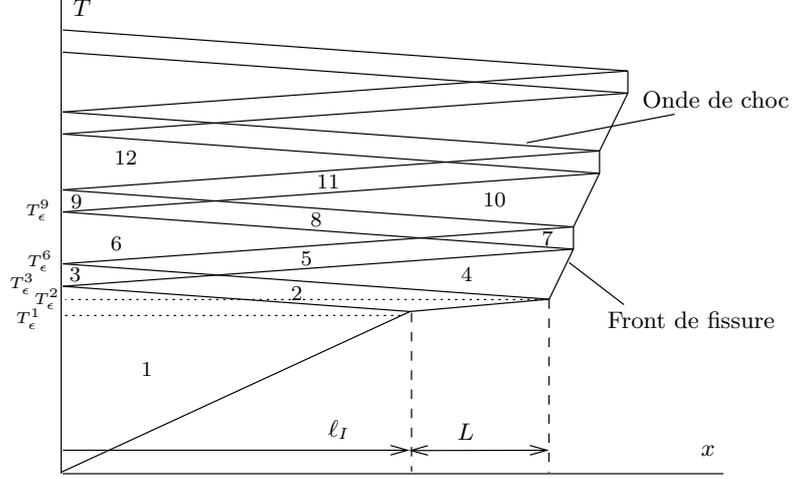


FIG. III.5 : Notations retenues pour le décollement du film à travers un défaut

Ensuite l'onde de choc  $\mathcal{S}_\epsilon^{1-}$  qui se réfléchit en  $x = 0$  à la charge  $T = T_\epsilon^3$  génère l'onde  $\mathcal{S}_\epsilon^{2+}$  qui devient ensuite  $\mathcal{S}_\epsilon^{4+}$ , tandis que l'onde de choc  $\mathcal{S}_\epsilon^{2-}$  devient dans un premier temps  $\mathcal{S}_\epsilon^{3-}$  puis se réfléchit à la charge  $T = T_\epsilon^6$  et devient  $\mathcal{S}_\epsilon^{5+}$ .

**Définition 2** On définit deux **trains** d'onde, notés **1** et **2**, correspondant à toutes les ondes de choc générées par la première et la deuxième discontinuité de ténacité. Le train d'onde **1** correspond donc à

$$\mathcal{S}_\epsilon^{1-} \cup \left( \bigcup_{i=1}^n \{ \mathcal{S}_\epsilon^{6i-4+} \cup \mathcal{S}_\epsilon^{6i-2+} \cup \mathcal{S}_\epsilon^{6i-1-} \cup \mathcal{S}_\epsilon^{6i-} \} \right) \quad (\text{III.8})$$

tandis que le train d'onde **2** correspond à

$$\bigcup_{i=1}^n \{ \mathcal{S}_\epsilon^{6i-1+} \cup \mathcal{S}_\epsilon^{6i+1+} \cup \mathcal{S}_\epsilon^{6i-4-} \cup \mathcal{S}_\epsilon^{6i-3-} \} \quad (\text{III.9})$$

**Définition 3** L'espace charge  $(x, T)$  se subdivise en sous-domaines  $\mathcal{Q}_\epsilon^i$ ,  $\forall i > 0$  que l'on peut ranger par famille de 6 éléments que l'on appelle un **pavage**  $\Delta_n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ . Il est choisi tel que l'on puisse représenter tout le domaine espace charge (de la solution) à partir d'une construction récurrente de  $\Delta_n$ , et avec  $\Delta_1 = \mathcal{Q}_\epsilon^4 \cup \mathcal{Q}_\epsilon^5 \cup \mathcal{Q}_\epsilon^6 \cup \mathcal{Q}_\epsilon^7 \cup \mathcal{Q}_\epsilon^8 \cup \mathcal{Q}_\epsilon^9$ . On considère donc comme  $n$ -ième pavage

$$\Delta_n = \bigcup_{j=1}^6 \{ \mathcal{Q}_\epsilon^{6n+j-3} \} \quad (\text{III.10})$$

A partir de la définition 2, on peut définir deux sous domaines  $\psi_n^i$  et  $\psi_n^e$  (cf Figure III.7) de l'espace charge  $(x, T)$  tels que l'espace charge complet (jusqu'au rang  $n$  du pavage)

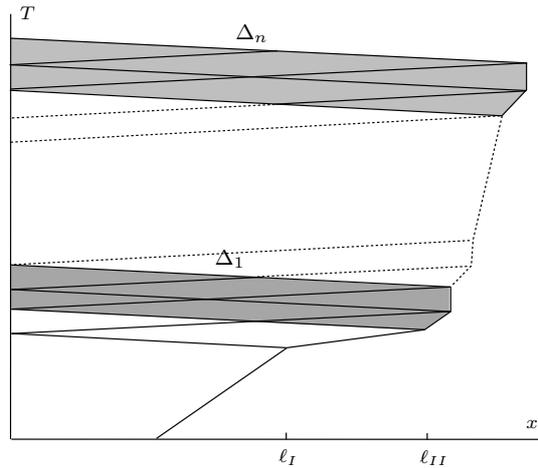


FIG. III.6 : Définition des domaines  $\Delta_1$  et  $\Delta_n$

soit représenté par  $\psi_n^i \cup \psi_n^e$ .  $\psi_n^i$  est construit comme étant l'espace formé entre les trains d'onde **1** et **2**, tandis que  $\psi_n^e$  est construit comme étant l'espace entre les trains d'onde **2** et **1**. On a bien entendu  $\psi_n^i \cap \psi_n^e \neq \emptyset$  et

$$\psi_n^i \cap \psi_n^e = \bigcup_{i=1}^n \mathcal{Q}_\epsilon^{3i-1} \tag{III.11}$$

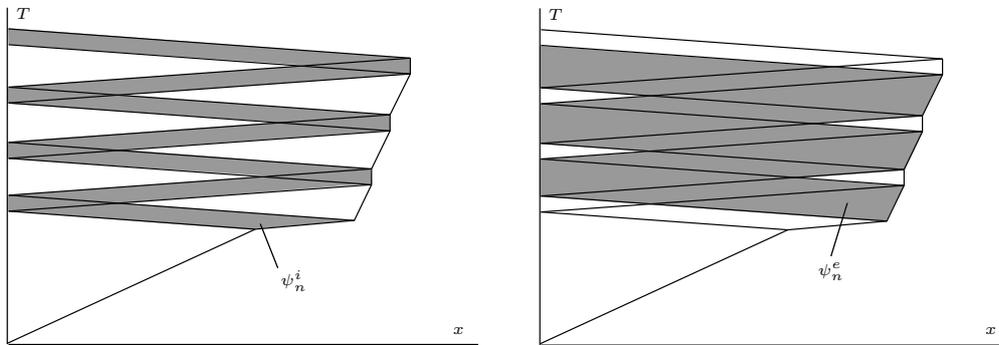
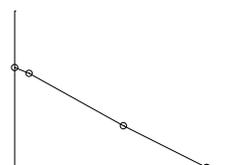


FIG. III.7 : Définition des domaines  $\psi_n^i$  et  $\psi_n^e$

**Remarque 2** Par la suite (cf chapitre IV) on définit  $\psi_n^i$  comme étant le premier “faisceau” que l'on nomme  $\mathcal{F}_1$ .

### B.3.2 Phase de propagation lorsque $\ell(T) \leq \ell_{II}$

Pour  $\ell(T) \leq \ell_I$  on se trouve dans la configuration du modèle avec diminution de ténacité lorsque  $\ell(T)$  se propage dans le milieu de forte ténacité (cf page 52). Ainsi  $\ell(T)$  évolue de façon stable et converge vers la solution quasi-statique métastable lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$ .



Pour  $\ell_{II} > \ell(T) > \ell_I$  on se trouve dans la configuration du modèle avec diminution de ténacité lorsque  $\ell(T)$  se trouve dans le milieu de faible ténacité  $k_1$  (cf page 53). Cependant les conditions d'arrêt du front de fissure sont différentes, car l'onde de choc  $\mathcal{S}_\epsilon^{1-}$  générée lorsque la fissure traverse le début du défaut n'est toujours pas revenue vers le front de fissure  $\mathcal{S}_\epsilon^0$  lorsque ce dernier interagit avec la fin du défaut en  $T = T_\epsilon^2$  défini par

$$T_\epsilon^2 = T_\epsilon^1 + L\epsilon \frac{k_2 + k_1}{k_2 - k_1}, \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} T_\epsilon^2 = \sqrt{2k_2}\ell_I. \quad (\text{III.12})$$

L'énergie cinétique  $\mathcal{K}_\epsilon(T)$  en  $x = \ell_{II}$  est de ce fait d'ordre 1 et vaut

$$\mathcal{K}_\epsilon(T_\epsilon^2) \simeq \frac{1}{2}L(k_2 - k_1) + \frac{L\epsilon\sqrt{k_2}}{\sqrt{2}}, \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{K}_\epsilon(T_\epsilon^2) = \frac{1}{2}L(k_2 - k_1) \quad (\text{III.13})$$

lorsque  $T_\epsilon^3 > T_\epsilon^2$ . Et dans le cas où  $T_\epsilon^3 < T_\epsilon^2$  on a

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{K}_\epsilon(T_\epsilon^2) = \frac{(k_2 - k_1)(\ell_I k_2 - \ell_{II} k_1)}{2k_2} \quad (\text{III.14})$$

et le maximum d'énergie cinétique est obtenu lorsque  $T_\epsilon^3 = T_\epsilon^2$

$$\max_{\forall \ell_1 > 0} \left( \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{K}_\epsilon(T_\epsilon^2) \right) = \frac{\ell_2(k_1 - k_2)^2}{4k_2} \quad (\text{III.15})$$

Ces variations de l'énergie cinétique sont cohérentes avec ce que l'on trouve avec le modèle à décroissance monotone de ténacité (cf page 52), puisque l'énergie cinétique initialement nulle passe par un maximum, pour ensuite décroître vers zéro.

La construction de la solution ondulatoire nécessite de définir une longueur caractéristique  $\ell^d$  telle que

$$\ell^d = \frac{-(\ell_{II} k_1 - \ell_I k_2)e^{1 - \frac{k_1}{k_2}} + k_2 L}{-k_1 + k_2} \quad (\text{III.16})$$

Le sens physique de cette grandeur sera développé page 74.

### B.3.3 Phase de propagation lorsque $\ell_{II} < \ell(T) \leq \ell^d$

Après que le front de fissure a traversé la seconde discontinuité de ténacité, deux ondes évoluent à travers le film décollé laissant apparaître dans le plan  $(x, T)$ , des domaines où les champs sont constants. De ce fait, les variations des champs à travers le film permettront au film soit de se décoller à une certaine vitesse soit de rester collé et ce, durant un certain temps. Toute la question ici, est d'analyser le comportement du décollement du film  $T \mapsto \ell(T)$  lorsque la vitesse de chargement  $\epsilon$  tend vers 0. Il est donc tout d'abord nécessaire de connaître les champs à travers le film décollé. La valeur des champs à travers le pavage  $\Delta_w$  peut se résumer avec la

**Proposition 12** *La solution dans le  $w$ -ième pavage  $\Delta_w$  est donnée à  $\epsilon$  fixé, pour  $w$  compris entre 0 et  $w_\epsilon$  et où  $w_\epsilon$  dépend de  $\epsilon$ , par*

$$v_\epsilon^{6w-2} = v_\epsilon^{6w} = 1, \quad e_\epsilon^{6w-2} = e_\epsilon^{6w} = -\sqrt{2k_2 + \epsilon^2}, \quad \dot{\ell}_\epsilon^{2w-1} = \frac{1}{\sqrt{2k_2 + \epsilon^2}} \quad (\text{III.17})$$

$$v_\epsilon^{6w-1} = \frac{k_1 - k_2}{\epsilon(\epsilon + \sqrt{2k_2 + \epsilon^2})} + w, \quad e_\epsilon^{6w-1} = \frac{-k_2 - k_1}{(\epsilon + \sqrt{2k_2 + \epsilon^2})} - w\epsilon \quad (\text{III.18})$$

$$v_\epsilon^{6w+1} = 0, e_\epsilon^{6w+1} = -\frac{2k_1}{\sqrt{2k_2 + \epsilon^2} + \epsilon} - 2w\epsilon, \dot{\ell}_\epsilon^{2w} = 0 \quad (\text{III.19})$$

$$v_\epsilon^{6w+2} = \frac{k_2 - k_1}{\epsilon(\epsilon + \sqrt{2k_2 + \epsilon^2})} + 1 - w, e_\epsilon^{6w+2} = \frac{-k_2 - k_1}{(\epsilon + \sqrt{2k_2 + \epsilon^2})} - (1 + w)\epsilon \quad (\text{III.20})$$

$$v_\epsilon^{6w+3} = 1, e_\epsilon^{6w+3} = -\frac{2k_1}{\sqrt{2k_2 + \epsilon^2} + \epsilon} - (2w + 1)\epsilon \quad (\text{III.21})$$

$$G_\epsilon^{2w-1} = k_2, G_\epsilon^{2w} = 2 \left( \frac{k_1 + w\epsilon(\epsilon + \sqrt{2k_2 + \epsilon^2})}{\sqrt{2k_2 + \epsilon^2} + \epsilon} \right)^2 \quad (\text{III.22})$$

La démonstration de cette proposition est introduite page 160

**Remarque 3** A  $\epsilon$  fixé et pour  $w$  assez petit on a  $G_\epsilon^{2w} < k_2$

**Corollaire 3** Pour  $\epsilon > 0$  donné tel que  $\dot{\ell}_\epsilon^{2(w+1)} = 0$ , alors  $\dot{\ell}_\epsilon^{2i} = 0, \forall i \in \mathbb{N}^*$  avec  $i < w + 1$ .

*Preuve :*

En utilisant III.21 et la relation  $\epsilon < \sqrt{2k_2} - |e_\epsilon^{6w+3}|$  (cf démonstration de la proposition 12), on obtient que

$$\epsilon = \epsilon_w < \mathcal{H}(w) = \frac{\sqrt{2k_2}(k_2 - k_1)}{2wk_2 - k_1} \text{ avec } \frac{d\mathcal{H}}{dw} < 0 \text{ et } \lim_{w \rightarrow +\infty} \mathcal{H}(w) = 0 \quad (\text{III.23})$$

Ainsi  $\forall \epsilon > 0$ , il existe  $w$  tel que  $\epsilon_w < \mathcal{H}(w)$ , et comme  $w \mapsto \mathcal{H}(w)$  est une fonction décroissante, positive et convergeant vers 0, alors  $\epsilon_w < \mathcal{H}(i), \forall i \leq w$ . Ce qui garantit  $\dot{\ell}_\epsilon^{2i} = 0, \forall i \leq w + 1$ .

□

**Corollaire 4** Le domaine  $\partial\psi_n^i \cap \partial\mathcal{Q}_\epsilon^0$  correspond à l'ensemble des propagations de fissure à vitesse nulle.

*Preuve :* Elle découle directement des Définitions 3 et 2 et du Corollaire 3

□

De ce fait la construction des différents champs dans le plan  $(x, T)$  est possible et il a été obtenu que le décollement du film alterne entre une phase de propagation et une phase d'arrêt. A partir de ces champs, il est possible d'obtenir un comportement limite de  $T \mapsto \ell(T)$  lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$ . Le résultat principal est énoncé dans la

**Proposition 13** Lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$ , tous les points appartenant au front de fissure dans le plan espace charge, convergent vers la courbe  $\ell \mapsto \mathcal{T}(\ell)$  lorsque  $\ell \in [\ell_{II}, \ell^d]$  (cf figure (III.9)) telle que

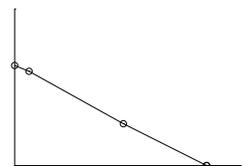
$$\mathcal{T}(\ell) = \sqrt{2k_2} \left( \ell_I - \ell_{II} + \ell + \frac{k_2(\ell_{II} - \ell_I)}{k_2 - k_1} \ln \frac{k_2(\ell_{II} - \ell_I) + \ell(k_1 - k_2)}{\ell_{II}k_1 - \ell_Ik_2} \right) \quad (\text{III.24})$$

et ayant les propriétés suivantes :

$$\mathcal{T}(\ell_{II}) = \sqrt{2k_2}\ell_I = T_\epsilon^1, \left. \frac{d\mathcal{T}}{dx} \right|_{x=\ell_{II}} = \frac{\sqrt{2k_2}\ell_{II}(k_2 - k_1)}{\ell_Ik_2 - \ell_{II}k_1} \quad (\text{III.25})$$

et

$$\mathcal{T}(\ell^d) = \sqrt{2k_2}\ell^d = T^d, \left. \frac{d\mathcal{T}}{dx} \right|_{x=\ell^d} \neq \sqrt{2k_2} \quad (\text{III.26})$$



*Preuve :*

On utilise pour obtenir la courbe limite, une récurrence indicée par rapport à  $n$ , numéro du pavage  $\Delta_n$ , et construite à partir des points  $(a_n, T_n) \in \Delta_n$  correspondant aux couples dans l'espace charge appartenant au front de fissure  $\mathcal{S}_\epsilon^0$  et ayant la plus grande charge (cf figure (III.8)). Ou autrement dit, un changement de notation est effectué et  $T_\epsilon^i$  devient  $T_i$  (cela permet d'alléger les notations). Deux relations de récurrence sont construites en introduisant une **charge propre**  $h$ . La première équation est obtenue en écrivant la charge  $T_{n+1}$  à partir de  $T_n$  et en suivant le trajet de l'onde de choc entre les points  $(a_n, T_n)$  et  $(a_{n+1}, T_{n+1})$ . La deuxième équation est obtenue en écrivant la charge  $T_{n+1}$  à partir de  $T_n$  et en suivant le trajet du front de fissure.

$$\begin{cases} T_{n+1} = T_n + \epsilon(a_{n+1} + a_n) \\ T_{n+1} = T_n + h + (a_{n+1} - a_n)\sqrt{2k_2 + \epsilon^2} \end{cases}, \quad h = \frac{2L\epsilon k_2}{k_2 - k_1} \quad (\text{III.27})$$

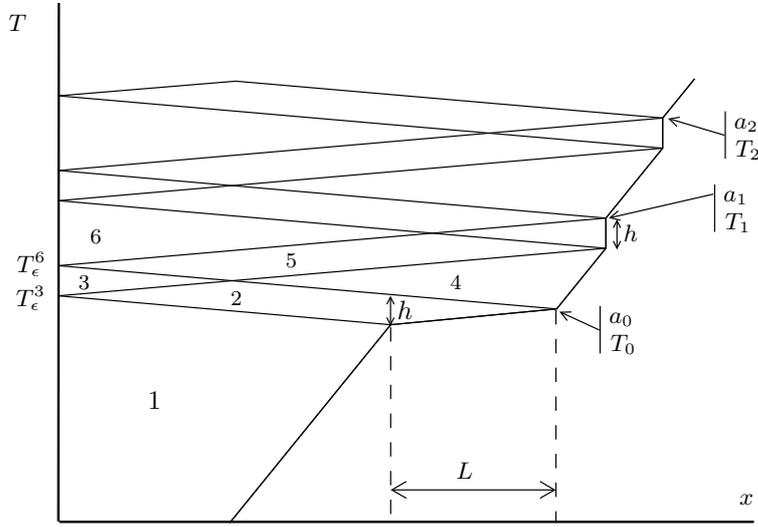


FIG. III.8 : Construction de la récurrence à partir du couple  $(a_n, T_n)$

En prenant la différence entre ces deux équations on a

$$a_{n+1} = Xa_n + Y, \quad X = \frac{\sqrt{2k_2 + \epsilon^2} + \epsilon}{\sqrt{2k_2 + \epsilon^2} - \epsilon}, \quad Y = \frac{h}{\epsilon - \sqrt{2k_2 + \epsilon^2}} \quad (\text{III.28})$$

Ce qui permet de déterminer

$$a_{n+1} = Y \sum_{i=0}^n X^i + X^{n+1}a_0, \quad a_0 = \ell_{II} \quad (\text{III.29})$$

En injectant III.29 dans la seconde relation de III.27 et en remarquant que  $Y/(1-X) = h/2\epsilon$  on a

$$T_{n+1} = T_n + pX^n + h, \quad p = \sqrt{2k_2 + \epsilon^2}((X-1)a_0 + Y) \quad (\text{III.30})$$

qui peut se mettre sous la forme

$$T_{n+1} = p \sum_{i=0}^n X^i + h(n+1) + T_0, \quad T_0 = T_\epsilon^2 \quad (\text{III.31})$$

Lorsque  $\epsilon$  évolue dans l'intervalle  $[0, \epsilon_{n+1}]$ , où  $\epsilon_{n+1}$  définit la valeur critique de  $\epsilon$  telle que  $\forall \epsilon \leq \epsilon_{n+1}$  on a  $\dot{\ell}_\epsilon^{2(n+1)} = 0$  (cf Corollaire 3), alors le couple  $(a_{n+1}, T_{n+1})$  décrit une courbe particulière dans le plan espace charge. Ainsi il s'agit de trouver une relation qui relie l'abscisse  $x = a_{n+1}$  à l'ordonnée  $T = T_{n+1}$  ( $\forall n > 0$  et  $\forall \epsilon \leq \epsilon_n$ ) en fonction du paramètre  $\epsilon$  ou du paramètre  $n$ . Ainsi on utilise tout d'abord la relation III.29 pour relier les paramètres  $n$  et  $\epsilon$  à  $x$  fixé en effectuant un développement limité pour  $\epsilon$  proche de 0 :

$$X^{n+1} = \frac{x(k_2 - k_1) - Lk_2}{a_0(k_2 - k_1) - Lk_2}, \quad n = \frac{1}{\epsilon} \sqrt{\frac{k_2}{2}} \ln \frac{x(k_2 - k_1) - Lk_2}{a_0(k_2 - k_1) - Lk_2} - 1 \quad (\text{III.32})$$

Ainsi en injectant III.32 dans III.31 et en effectuant un passage à la limite  $\epsilon \rightarrow 0$  on obtient la relation souhaitée. □

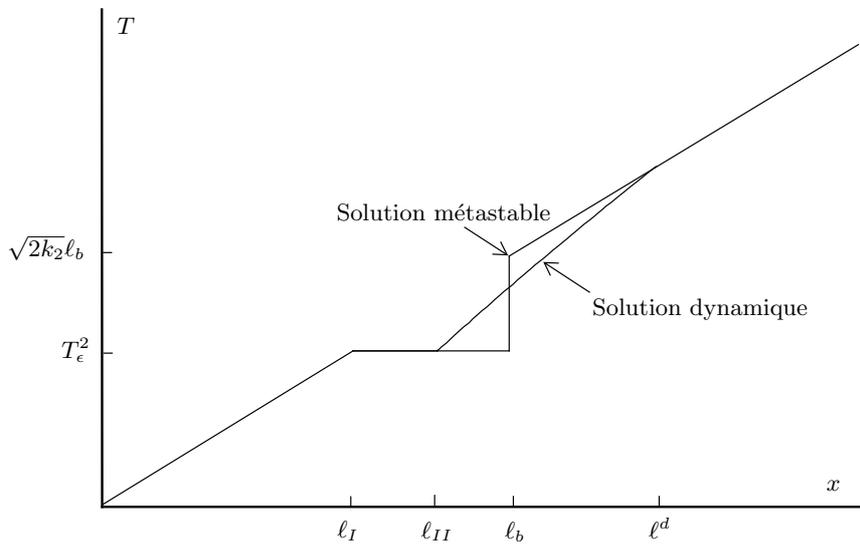
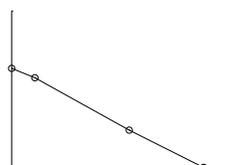


FIG. III.9 : Évolution du front de fissure  $S_\epsilon^0$  dans le plan espace-charge pour  $\epsilon \rightarrow 0$

En utilisant des constructions similaires, on montre de la même façon que tous les points du front de fissure d'un pavage  $\Delta_n$  convergent vers  $\ell \mapsto T(\ell)$  lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$ .

**Proposition 14** *Il s'agit de présenter les évolutions des énergies cinétique et élastique au cours du chargement pour  $x \geq \ell_{II}$  :*

- **Point de vue local :** Entre les charges  $T_{n-1}$  et  $T_n$ , les énergies se comportent comme présentées sur la figure III.10. Durant la phase de propagation  $\dot{\ell}_\epsilon(T) \neq 0$ , l'énergie cinétique est tout d'abord constante, puis passe par zéro avant de regagner le niveau d'énergie précédemment atteint pour la maintenir constante jusqu'à la charge  $T_\epsilon^{6n-2}$ . A partir de cette charge le front de fissure s'arrête et l'énergie cinétique décroît jusqu'à zéro et regagne ensuite son niveau constant. L'énergie élastique évolue en fonction de la charge  $T$  comme étant le symétrique de l'énergie cinétique par rapport à la direction de charge  $T$ .



- **Point de vue global :** Lorsque le front de fissure  $\ell(T)$  évolue sur le domaine  $[\ell_{II}, \ell^d]$ , les énergies cinétique et élastique oscillent en opposition de phase avec une période aussi fine que  $\epsilon$  est petit, et avec une amplitude évoluant entre une courbe limite inférieure et une courbe limite supérieure (cf Figure III.11). Les courbes enveloppes inférieures et supérieures de l'énergie cinétique définies pour  $\ell \in [\ell_{II}, \ell^d]$  sont respectivement

$$\begin{aligned} \ell &\mapsto \mathcal{K}_\epsilon^1(\ell) = 0 \\ \ell &\mapsto \mathcal{K}_\epsilon^2(\ell) = \frac{L}{2(k_2 - k_1)} (k_1 - k_2 + k_2 \mathcal{F}(\ell))^2 \end{aligned} \quad (\text{III.33})$$

Tandis que celles de l'énergie potentielle sont respectivement

$$\begin{aligned} \ell &\mapsto \mathcal{P}_\epsilon^1(\ell) = \frac{L}{2(k_2 - k_1)} (k_1 + k_2 + k_2 \mathcal{F}(\ell))^2 + \frac{k_2}{k_1 - k_2} (2k_2 L + \ell(k_1 - k_2)) \\ \ell &\mapsto \mathcal{P}_\epsilon^2(\ell) = \frac{L}{k_2 - k_1} (k_1 + k_2 \mathcal{F}(\ell))^2 + \frac{k_2}{k_1 - k_2} (k_2 L + \ell(k_1 - k_2)) \end{aligned} \quad (\text{III.34})$$

$$\text{avec } \mathcal{F}(\ell) = \ln \left[ \frac{\ell(k_1 - k_2) + k_2 L}{\ell_{II} k_1 - \ell_I k_2} \right].$$

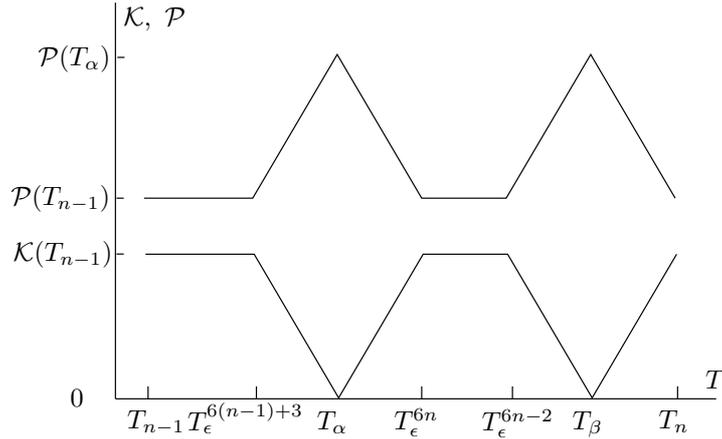


FIG. III.10 : Évolution des énergies cinétique et élastique en fonction de la charge  $T$  au cours de la traversée du pavage  $\Delta_n$

La démonstration de cette proposition est présentée page 161.

**Remarque 4** D'un point de vue local (entre les charges  $T_{n-1}$  et  $T_n$ ) on peut calculer l'accroissement des énergies cinétique et potentielle (sans passage à la limite en  $\epsilon$ )

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{K}_\epsilon &= \mathcal{K}_\epsilon(T_n) - \mathcal{K}_\epsilon(T_{n-1}) = -\frac{(\ell_I - \ell_{II})k_2 \epsilon (2k_1 - 2k_2 + (-3 + 2n)\epsilon (\epsilon + \sqrt{2k_2 + \epsilon^2}))}{(-k_1 + k_2) (\epsilon + \sqrt{2k_2 + \epsilon^2})} \\ \delta \mathcal{P}_\epsilon &= \mathcal{P}_\epsilon(T_n) - \mathcal{P}_\epsilon(T_{n-1}) = \frac{(\ell_I - \ell_{II})k_2 \epsilon (2k_1 + 2k_2 + (1 + 2n)\epsilon (\epsilon + \sqrt{2k_2 + \epsilon^2}))}{(k_1 - k_2) (\epsilon + \sqrt{2k_2 + \epsilon^2})} \end{aligned} \quad (\text{III.35})$$

et finalement

$$\delta \mathcal{K}_\epsilon - \delta \mathcal{P}_\epsilon = -\frac{4(\ell_I - \ell_{II})k_2 \epsilon (k_2 + \epsilon (\epsilon + \sqrt{2k_2 + \epsilon^2}))}{(k_1 - k_2) (\epsilon + \sqrt{2k_2 + \epsilon^2})} \quad (\text{III.36})$$

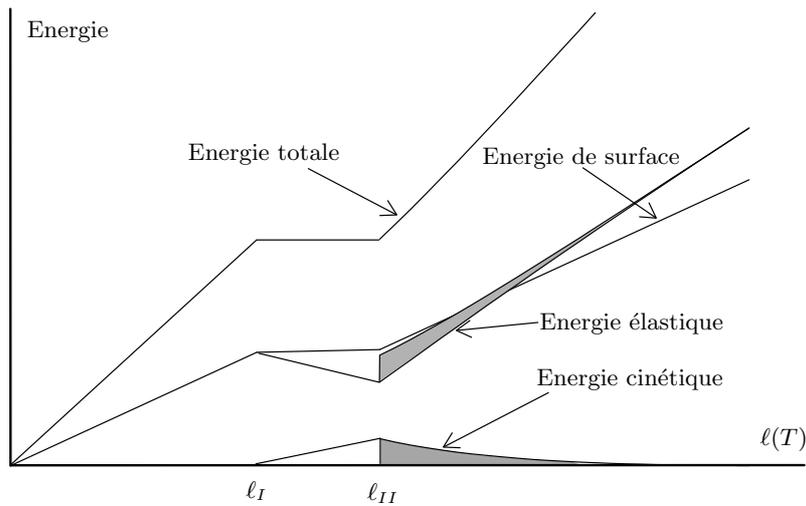


FIG. III.11 : Evolution des énergies en fonction de  $l(T)$

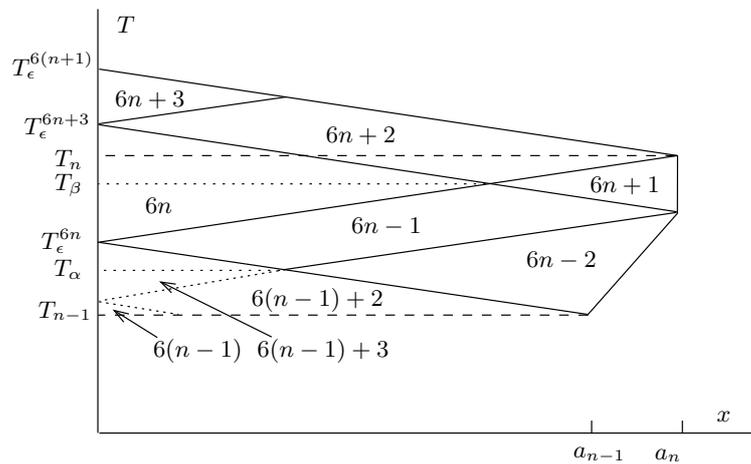


FIG. III.12 : Évolution ondulatoire entre  $T_{n-1}$  et  $T_n$

**Corollaire 5** Dans l'espace charge  $(x, T)$ , l'énergie cinétique est non nulle lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$  dans les domaines  $6n - 1$  et  $6n + 2 \forall n \in \mathbb{N}^*$ , et nulle ailleurs.

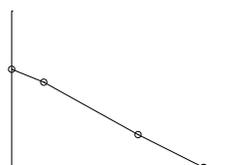
*Preuve :*

Elle découle directement de la construction de l'énergie cinétique entre les charges  $T_{n-1}$  et  $T_n$  présentée dans la preuve de la proposition 14.

□

**Corollaire 6** La quantité d'énergie cinétique entre les charges  $T_{\epsilon}^2$  et  $T^d$ , définie par  $\Sigma\mathcal{K} = \int_{T_{\epsilon}^2}^{T^d} \mathcal{K}_{\epsilon}(T)dT$ , est une constante dépendant des propriétés du modèle. A l'inverse la quantité d'énergie cinétique par rapport au temps  $t$  (sur un intervalle en temps comparable à celui en charge) tend vers l'infini.

La démonstration de ce corollaire est présentée page 162.



**Remarque 5** En observant que la somme de l'énergie potentielle et de l'énergie cinétique entre les charges  $T_\epsilon^2$  et  $T^d$  peut être donnée soit, par la courbe enveloppe supérieure de l'énergie potentielle, soit par la somme entre la courbe enveloppe supérieure de  $\mathcal{K}_\epsilon$  et la courbe enveloppe inférieure de  $\mathcal{P}_\epsilon$ , on en déduit que la quantité d'énergie potentielle définie par la zone hachurée (cf Figure III.11) est égale à  $\Sigma\mathcal{K}$ .

### B.3.4 Phase de propagation lorsque $\ell(T) > \ell^d$

Précédemment, nous avons obtenu que le décollement du film entre les positions  $\ell_{II}$  et  $\ell^d$ , cherche à supprimer son énergie cinétique pour regagner la solution statique (nous reviendrons sur cet aspect par la suite). Ce paragraphe se propose donc d'étudier le comportement de la solution lorsque  $\ell(T)$  rejoint la courbe statique  $\ell \mapsto \sqrt{2k_2}\ell$ . Ce "rat-trapage" est obtenu lorsque  $\ell = \ell^d$  et correspond au point où la courbe  $\ell \mapsto \mathcal{T}(\ell)$  rejoint la courbe statique  $\ell \mapsto \sqrt{2k_2}\ell$ . Ainsi on déterminera  $\ell^d$ , puis nous montrerons que l'évolution du décollement du film converge bien vers la solution statique lorsque  $\ell > \ell^d$ .

D'après l'équation III.23, pour un  $\epsilon > 0$  fixé, il existe  $k > 0$  tel que  $\dot{\ell}_\epsilon^{2k} = 0$  et  $\dot{\ell}_\epsilon^{2(k+1)} > 0$ . On note  $N = k$ , qui représente le nombre de pavages  $\Delta_i$   $i \leq N$  défini tel que  $\dot{\ell}_\epsilon^{2i} = 0$ . De même on redéfinit  $\ell^d = a_N$  et  $T^d = T_N$ . Une estimation de  $N$  est effectuée en prenant  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $\epsilon = \sqrt{2k_2} - |e_\epsilon^{6k+3}|$ , et on a

$$N = \frac{k_2 - k_1}{\epsilon\sqrt{2k_2}} \quad (\text{III.37})$$

D'autre part on peut obtenir une estimation de  $\ell^d$  et de  $T^d$  en recherchant le point d'intersection entre les droites  $T = \sqrt{2k_2}x$  et  $T = \mathcal{T}(\ell)$ . La recherche de ce point se met sous la forme

$$0 = (\ell_I - \ell_{II}) \left( 1 - \frac{k_2}{k_2 - k_1} \ln \frac{k_2(\ell_{II} - \ell_I) + x(k_1 - k_2)}{\ell_{II}k_1 - \ell_Ik_2} \right) \quad (\text{III.38})$$

ainsi pour  $L \neq 0$  on a

$$\ell^d = \frac{-(\ell_{II}k_1 - \ell_Ik_2)e^{1-\frac{k_1}{k_2}} + k_2L}{-k_1 + k_2}, \quad T^d = \sqrt{2k_2}\ell^d \quad (\text{III.39})$$

Lorsque  $L \rightarrow 0$ , l'expression (III.39) permet d'obtenir

$$\lim_{L \rightarrow 0} \ell^d = \ell_{II}e^{1-\frac{k_1}{k_2}} \quad (\text{III.40})$$

qui est supérieure à  $\ell_{II}$  puisque  $k_2 > k_1$ . Ainsi lorsque  $L \rightarrow 0$ ,  $\ell^d$  tend vers une limite finie différente de  $\ell_{II}$  et de l'ordre de  $\ell_{II}$ . Les dérivées des courbes  $\ell \mapsto \mathcal{T}(\ell)$  et  $\ell \mapsto \sqrt{2k_2}\ell$  au point  $\ell^d$  sont différentes lorsque  $L \neq 0$ , et deviennent égales lorsque  $L \rightarrow 0$ . On obtient les mêmes conclusions lorsque  $L$  est de taille finie et que  $\ell_I \rightarrow \infty$ . Dans ce cas, la limite de  $\ell^d$  lorsque  $\ell_I \rightarrow \infty$  est égale à  $\ell_{II}e^{1-\frac{k_1}{k_2}}$  (identique à (III.40)) et les dérivées des courbes  $\ell \mapsto \mathcal{T}(\ell)$  et  $\ell \mapsto \sqrt{2k_2}\ell$  au point  $\ell^d$  sont égales.

**Remarque 6** On peut calculer un rapport  $\gamma$  entre la longueur  $\ell^d - \ell_{II}$  et la taille du défaut  $\ell_{II} - \ell_I$

$$\gamma = \frac{\ell^d - \ell_{II}}{\ell_{II} - \ell_I} = \frac{\ell_{II}k_1 - \ell_Ik_2}{(-k_1 + k_2)(\ell_{II} - \ell_I)} \left( -e^{1-\frac{k_1}{k_2}} + 1 \right) \quad (\text{III.41})$$

On observe que  $\gamma$  dépend fortement de la position du défaut  $\ell_I$ , mettant en évidence un effet d'échelle sur la longueur  $\ell^d - \ell_{II}$  par rapport à  $\ell_I$ . Dans l'expression  $\gamma$ , le terme  $\ell_{II}k_1 - \ell_I k_2$  est positif puisqu'il correspond à la condition que l'on s'est fixée en début de chapitre :  $\ell_c > \ell_{II}$  (avec  $\ell_c = k_2/k_1 \ell_I$ ). Cette condition a été fixée pour s'assurer que la première onde de choc n'a pas eu le temps de rejoindre le front de fissure lorsque celui-ci sort du défaut  $L$ . (Cela permet de s'assurer que la solution n'est pas une combinaison de différentes solutions métastables.)

**Proposition 15** *L'évolution du front de fissure  $\ell_\epsilon^i$  avec  $i > 2N$  converge vers la solution quasi-statique métastable  $\ell_2(T)$  (approche (ULM)) lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$ . De plus les énergies cinétique et potentielle convergent vers leurs homologues quasi-statiques.*

*Preuve :*

*Étape 1 : Convergence des phases de propagation*

La convergence dans les domaines  $\mathcal{Q}_\epsilon^{6i-2}$  avec  $i > N$  est immédiate, puisque la construction de  $\ell_\epsilon^{2i-1}$  ne dépend pas du fait que  $\ell_\epsilon^{2i} > 0$ . En effet les champs du domaine  $\mathcal{Q}_\epsilon^{6i-2}$  dépendent du domaine  $\mathcal{Q}_\epsilon^{6(i-1)}$  qui lui même dépend du domaine  $\mathcal{Q}_\epsilon^{6(i-1)-2}$  et ainsi de suite. De ce fait la reprise de la phase de propagation dans les domaines  $\mathcal{Q}_\epsilon^{6i+1}$  avec  $i > N$  n'influe en aucun cas sur la vitesse de fissuration  $\ell_\epsilon^{2i-1} = \frac{1}{\sqrt{2k_2 + \epsilon^2}}$ .

La convergence de l'évolution du front de fissure dans les domaines  $\mathcal{Q}_\epsilon^{6i+1}$  a déjà été abordée à la page 50 à travers le Lemme 1

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \ell_\epsilon^{2i} = \ell_\epsilon^\infty = \frac{1}{\sqrt{2k_2 + \epsilon^2}} \quad (\text{III.42})$$

*Étape 2 : Convergence des énergies*

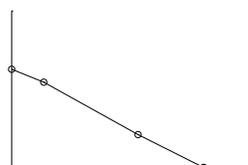
La démonstration est rapide puisque tous les domaines  $\mathcal{Q}_\epsilon^i$  avec  $i > 6N + 3$  ont des champs qui sont identiques lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$  et qui sont égaux aux champs du domaine  $\mathcal{Q}_\epsilon^1$ . Ainsi les énergies cinétique  $\mathcal{K}_\epsilon(T)$  et potentielle  $\mathcal{P}_\epsilon(T)$  sont respectivement égales à zéro et à la solution quasi-statique pour  $T > T^d$ .

□

#### B.4 Influence de la vitesse de chargement sur la courbe $\ell \mapsto \mathcal{T}(\ell)$

Précédemment nous avons étudié le décollement du film  $T \mapsto \ell(T)$  lorsque la vitesse de chargement est constante ( $\epsilon$  constant). Nous avons obtenu que l'évolution du décollement du film converge vers la courbe limite  $\ell \mapsto \mathcal{T}(\ell)$  lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$ . On peut se demander maintenant si cette limite serait la même lorsque la vitesse de chargement n'est plus constante tout en restant infiniment petite. La figure III.13(a) présente un exemple de chargement non constant ayant une alternance entre des phases de propagation à vitesse constante  $\epsilon$  et des phases d'arrêt du chargement. D'autres types de chargement plus complexes pourraient être envisagés comme par exemple celui présenté sur la figure III.13(b).

Cependant la construction de l'évolution du décollement du film à partir de tels chargements est loin d'être trivial. Ainsi on se propose de présenter quelques cas de chargement non constant. En particulier nous étudierons trois cas particuliers : lorsque la vitesse de chargement passe par zéro puis revient à son niveau initial, lorsque suite à



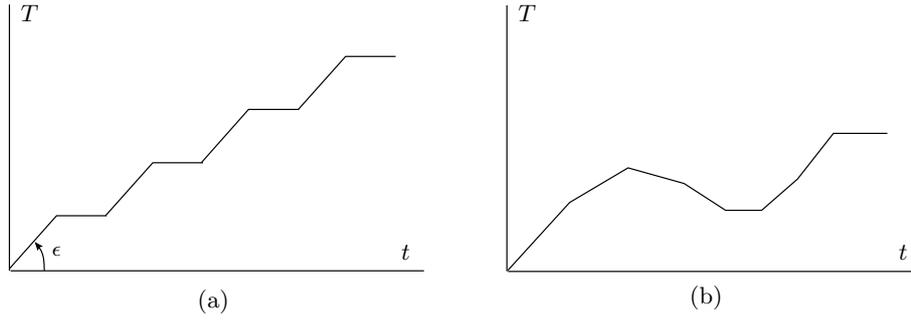


FIG. III.13 : Exemples de chargement non constant

un arrêt du chargement ( $\epsilon = 0$ ) le niveau de charge décroît puis recroît à une vitesse  $\epsilon$ , et pour finir lorsque la vitesse de chargement varie (initialement la vitesse de chargement vaut  $\epsilon$  puis elle change pour être égale à  $\beta$  tel que  $\beta < \epsilon$ ).

#### B.4.1 Arrêt puis reprise du chargement

On suppose que le film se décolle à travers une interface ayant une double discontinuité de ténacité (défaut) à une vitesse de chargement  $\epsilon$  et que le front de fissure  $\ell(T)$  est décollé au delà de la position  $x = \ell_{II}$ . On considère les notations des trains d'onde **1** et **2** introduites dans la définition 2. L'évolution "ondulatoire" du film se traduit dans le plan espace-temps car, comme on considère un arrêt du chargement, il est nécessaire de quitter le plan espace-charge pour observer l'évolution ondulatoire durant la phase d'arrêt. Ainsi les différentes vitesses seront prises par rapport au temps  $t$  et non par rapport à la charge  $T$ , et on conservera les notations précédentes sans l'indice  $\epsilon$ . Au temps  $t_1^a$ , la vitesse de chargement est mise à zéro (cf figure A.1) et une onde de choc que l'on nomme, train d'onde **3** est générée. Ensuite, à partir du temps  $t_2^a$ , la vitesse de chargement revient à son niveau initial  $\epsilon$  en générant une quatrième onde de choc que l'on nomme, train d'onde **4**. Le principal résultat de ce modèle se résume dans la

**Proposition 16** *Lorsque  $\epsilon$  converge vers 0, alors l'évolution du front de fissure  $T \mapsto \ell(T)$  converge vers la courbe limite (III.24) lorsque  $t > t_2^a$ . Autrement dit, la phase d'arrêt est sans influence sur la réponse asymptotique.*

La démonstration de la proposition 16 est présentée page 162

#### B.4.2 Décharge puis recharge de la charge $T$

Il s'agit d'étudier le comportement du modèle lorsque le déplacement  $T$  décroît jusqu'à zéro, puis recroît ensuite avec une vitesse de chargement  $\epsilon$ . On note  $T^r$  la charge maximale atteinte (avant que  $T$  décroisse), et  $\ell^r$  la longueur fissurée qui lui correspond ( $T^r = \mathcal{T}(\ell^r)$  et  $\ell_{II} < \ell^r < \ell^d$ ).

Le résultat principal s'énonce à travers la

**Proposition 17** *Lorsque  $T$  évolue selon la Figure III.14, alors la position du front de fissure est fixe ( $\ell(T) = \ell^r$ ) et ce, tant que  $T \leq T^r$ . Ensuite pour  $T > T^r$ , la fonction  $T \mapsto \ell(T)$  est décrite par la fonction  $\ell \mapsto \mathcal{T}(\ell)$  introduite dans (III.24). Autrement dit, la phase de décharge puis de recharge est sans influence sur la réponse asymptotique.*

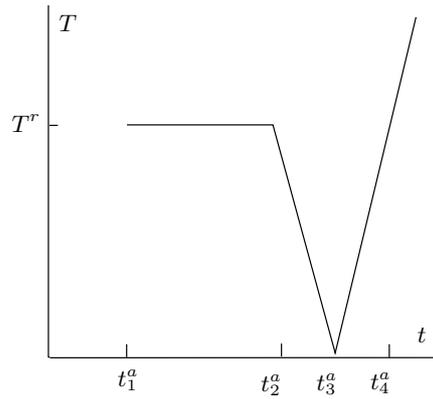


FIG. III.14 : Evolution de la charge  $T$

La démonstration de la proposition 17 est présentée page 165.

### B.4.3 Arrêt puis reprise avec une vitesse de chargement différente

On souhaite maintenant s'intéresser au cas où la vitesse de chargement  $\epsilon$  change. Dans le paragraphe précédent, nous avons remarqué que l'onde de choc générée lors de la phase de mise à zéro de  $\epsilon$  disparaît au cours du temps (cf démonstration page 162). Ainsi on ne s'intéressera pas à cette phase d'arrêt, et on considèrera un modèle où la vitesse de chargement change brutalement au temps  $t^a > T_\epsilon^2/\epsilon$  ( $T_\epsilon^2$  est défini page 65) et passe d'une valeur  $\epsilon$  à une valeur  $\beta$  en générant un train d'onde que l'on notera  $\mathfrak{z}$ . On définit  $\kappa$  comme étant le rapport entre ces vitesses de chargement tel que  $\kappa = \beta/\epsilon$ . Le résultat principal de ce modèle se résume dans la

**Proposition 18** *Pour un  $\beta > 0$  donné tel que  $\beta < \epsilon$ , alors pour  $t > t^a$ ,  $t \mapsto \ell(t)$  converge vers la même courbe limite que celle définie lorsque  $T_\epsilon^2/\epsilon < t < t^a$ . Autrement dit, le changement de vitesse de chargement est sans influence sur la réponse asymptotique.*

La démonstration de la proposition 18 est présentée page 171.

## B.5 Interprétation des résultats

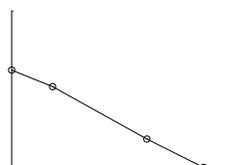
Nous allons tout d'abord présenter une lecture particulière de la solution dynamique lorsque  $\ell_{II} \leq \ell \leq \ell^d$ . Puis nous traduirons le phénomène précédemment décrit sous la forme d'une loi d'évolution de type  $\dot{\ell} = f(\ell)$  (on définira une ténacité apparente).

### B.5.1 Analyse de la solution dynamique

Les résultats obtenus avec la courbe limite (III.24) nous permettent d'introduire la

**Définition 4** *On introduit la notion de **couche limite**, comme étant le phénomène qui agit sur la propagation du front de fissure  $T \mapsto \ell(T)$  lorsque  $\ell \in [\ell_{II}, \ell^d]$  et qui est défini par la courbe  $\ell \mapsto \mathcal{T}(\ell)$  (cf (III.24)).*

**Remarque 7** *La courbe limite (III.24) est la fonction inverse de  $T \mapsto \ell(T)$  pour  $\sqrt{2k_2}\ell_I < T < \sqrt{2k_2}\ell^d$ .*



La couche limite semblerait avoir un caractère “universel”, puisque les propositions 16, 17 et 18 montrent l'indépendance de la couche limite par rapport à des variations du chargement (modification de la vitesse de chargement, phase d'arrêt...). En d'autres termes, il semblerait que la couche limite ne varie pas lorsque le chargement est modifié (lorsque les vitesses de chargement sont de l'ordre de  $\epsilon$ ). Cependant cet aspect n'a pu qu'être intuité par le biais de quelques cas simples. Une étude plus approfondie permettrait de montrer le caractère général de cette courbe limite.

Un cas particulier (cf proposition 17) a été mis en évidence : il s'agit de faire décroître le chargement (à vitesse  $-\epsilon$ ) puis de le réaugmenter (à vitesse  $\epsilon$ ). Ce cas permet de prédire que lorsqu'une décharge aura lieu (cf Figure III.15-(a)), alors la structure évoluera de façon élastique puis lorsque la charge réaugmentera alors le modèle évoluera de façon élastique jusqu'à la valeur précédemment atteinte. Ensuite, pour des charges plus élevées, le modèle évoluera sur la couche limite.

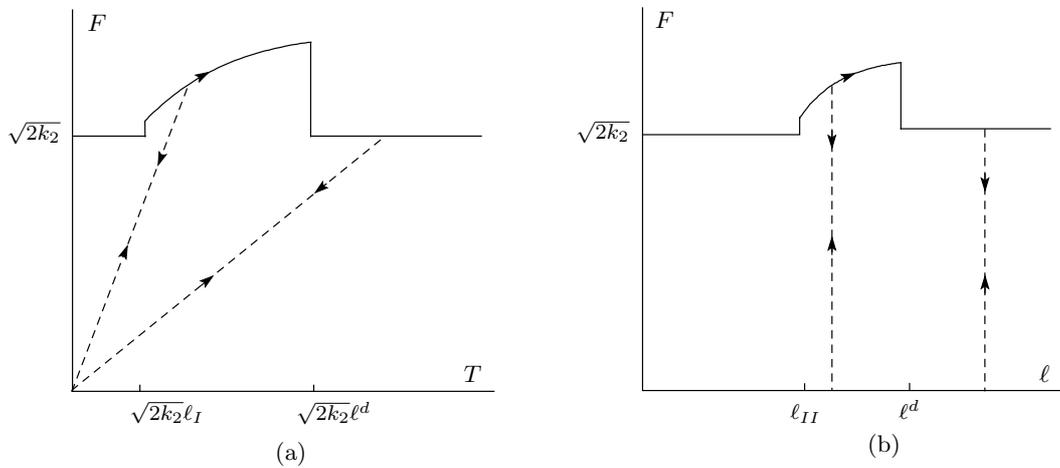


FIG. III.15 : Evolution de la force  $F$  associée au déplacement imposé en  $x = 0$  en fonction de la charge  $T$  et de la position du décollement du film  $\ell$ .

On cherche maintenant à comprendre les mécanismes énergétiques qui pilotent la couche limite. Le résultat principal s'énonce à travers la

**Proposition 19** *La notion de couche limite s'interprète d'un point de vue énergétique comme un phénomène de **relaxation de l'énergie cinétique**. En effet il faut injecter de l'énergie au système (sous la forme d'une énergie potentielle) pour que l'énergie cinétique oscillant dans le système diminue, et devienne quasiment nulle lorsque le front de fissure sort de la couche limite.*

*Preuve :*

La démonstration découle directement de la Proposition 14. En effet nous avons montré qu'à chaque accroissement de l'énergie potentielle (sous la forme d'évolution de la charge  $T$ ) correspond une augmentation de l'énergie de fissuration et une diminution de l'énergie cinétique, le tout effectué en oscillant : l'énergie potentielle et l'énergie cinétique oscillent (la période est de l'ordre de  $\epsilon$ ) en opposition de phase.

□

Si maintenant, on en revient à la proposition 17 et à la figure III.15-(a), on comprend mieux le comportement du modèle par rapport à une diminution puis un réaugmentation de la charge. En effet lorsque  $T$  diminue, l'énergie cinétique ne peut plus se relaxer (le travail des forces extérieures diminue) et donc, la structure piège cette énergie le temps de la décharge ainsi que celui de la recharge jusqu'à un niveau d'énergie (énergie potentielle) égal à celui atteint avant la décharge. Ensuite pour des niveaux de charge plus élevés, l'énergie cinétique se relaxe et la charge évolue en fonction de  $\ell$  selon la fonction  $\ell \mapsto \mathcal{T}(\ell)$  (cf Equation (III.24))

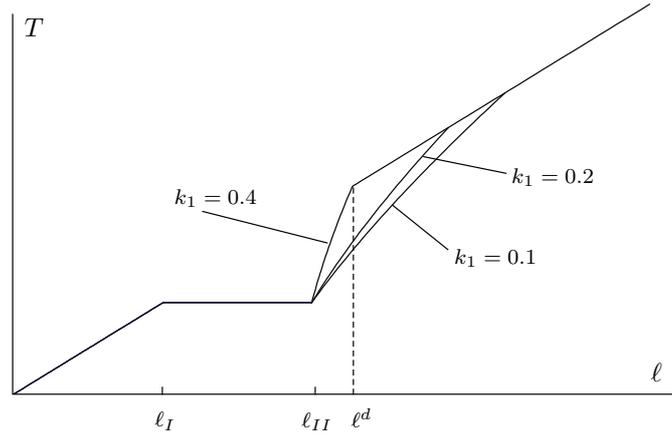


FIG. III.16 : Evolution de la réponse asymptotique dans le plan  $(T, \ell)$  avec  $k_2 = \ell_I = 1$ ,  $\ell_{II} = 2$ .

**Remarque 8** En effectuant une analogie avec la fatigue mécanique cyclique, on peut calculer une vitesse d'accroissement par cycle. Dans notre cas un cycle correspond à un pavage (un aller-retour des ondes) et donc la quantité que l'on souhaite calculer est  $\partial\ell/\partial n$ . En utilisant (III.32) on obtient

$$\epsilon \dot{\ell}_N = \frac{\partial\ell}{\partial n} = \epsilon \frac{\sqrt{2}(k_1\ell - k_2(\ell_I - \ell_{II} + \ell))}{(k_1 - k_2)\sqrt{k_2}} \quad (\text{III.43})$$

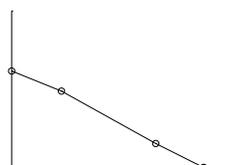
On redéfinit le nombre de cycle  $n$  par une grandeur  $N$  telle que  $N = \epsilon n$ , ce qui permet de construire une vitesse de décollement du film  $\dot{\ell}_N = \partial\ell/\partial N$  indépendante de  $\epsilon$ .

Une autre vitesse peut être générée, il s'agit de dériver  $\ell$  par rapport au niveau de charge  $T$ . En raisonnant d'un point de vue ondulatoire à partir d'un pavage quelconque (cf Figure III.9) on obtient

$$\dot{\ell} = \frac{\partial\ell}{\partial T} = \frac{(-k_1 + k_2)\ell - k_2L}{\sqrt{2k_2}(-k_1 + k_2)\ell} = \mathcal{F}(\ell) \quad (\text{III.44})$$

qui est exactement la même expression que celle obtenue à partir de  $\ell \mapsto \mathcal{T}(\ell)$  (il suffit de dériver  $\mathcal{T}(\ell)$  par rapport à  $\ell$  puis de prendre l'inverse). (III.44) permet d'énoncer le résultat suivant

**Proposition 20** La relation  $\dot{\ell} = \mathcal{F}(\ell)$  ne dépend que de  $k_1$ ,  $k_2$  et  $L$  et est relativement "universelle" puisqu'elle ne dépend pas de la position du défaut de ténacité.  $\dot{\ell} = \mathcal{F}(\ell)$  permet de définir une loi d'évolution générique de la couche limite. Autrement dit, cette loi d'évolution permet de construire la couche limite d'un quelconque défaut.



*Preuve :*

Pour construire la courbe  $\ell \mapsto \mathcal{T}(\ell)$  (équation de la couche limite) il suffit de résoudre l'équation différentielle (III.44) du premier ordre par rapport au niveau de charge  $T$ . Au final, la dépendance de  $\ell \mapsto \mathcal{T}(\ell)$  par rapport à la position du défaut, apparaît au niveau des conditions initiales nécessaires pour résoudre (III.44). (Ces conditions initiales sont  $T|_{\ell=\ell_{II}} = \sqrt{2k_2\ell_I}$ .)

□

Dans la suite du travail, nous allons présenter une interprétation statique de la loi (III.44) (cela nous permettra de construire une *ténacité apparente*). Ensuite nous montrons que la solution dynamique construite à partir de cette ténacité donne une évolution du décollement du film pilotée par la couche limite  $\ell \mapsto \mathcal{T}(\ell)$ .

### B.5.2 Une interprétation statique de la loi $\dot{\ell} = \mathcal{F}(\ell)$

On se propose à travers ce paragraphe, d'étudier le comportement de la solution d'un point de vue statique lorsque le critère de Griffith est remplacé par une loi d'évolution du type  $\dot{\ell} = \mathcal{F}(\ell)$ .

Comme il a été présenté page 77, la résolution de l'équation différentielle du premier ordre par rapport à la charge  $T$  permet de construire la couche limite du problème  $\ell \mapsto \mathcal{T}(\ell)$  (cf (III.24)). Ainsi si l'on se fixe dans un cadre statique, l'énergie cinétique est négligée et de ce fait on peut se proposer de construire le taux de restitution d'énergie qui est lié à la solution statique qui considère  $\dot{\ell} = \mathcal{F}(\ell)$  comme loi d'évolution. Ainsi la connaissance du taux de restitution d'énergie par rapport à  $\ell$  permet de construire un second modèle. Ce nouveau problème consiste à construire la solution statique en utilisant le critère de Griffith avec comme ténacité, le taux de restitution d'énergie précédemment calculé. La construction de ce modèle peut se résumer à travers une ténacité statique apparente telle que

**Définition 5** On introduit une *ténacité apparente*  $k^a(x)$  définie sur l'intervalle  $x \in [0, \infty)$ , telle que la solution quasi-statique (ULM) métastable générée par  $k^a(x)$ , soit identique à la solution dynamique limite ( $\epsilon \rightarrow 0$ ).

plus précisément  $k^a(x)$  peut se résumer à travers la

**Proposition 21**  $k^a(x)$  prend la valeur de la ténacité de référence lorsque  $x \in [0, \ell_{II}[$  et  $x \in [\ell^d, \infty)$ , sinon elle est égale à

$$k^a(x) = k_2 \left( \frac{x - L}{x} + \frac{k_2 L}{(k_2 - k_1)x} \log \frac{k_2 L + x(k_1 - k_2)}{\ell_{II} k_1 - \ell_I k_2} \right)^2 \quad (\text{III.45})$$

*Preuve :*

Lorsque  $x \in \mathbb{R}^+ \setminus [\ell_{II}, \ell^d[$  alors la solution dynamique limite converge vers les différentes solutions quasi-statiques (cf page 69). Ainsi  $k^a(x)$  est pris comme étant égal à la ténacité de référence. Pour le cas contraire on calcule une ténacité apparente telle que la solution quasi-statique évolue selon l'équation (III.24). Sachant que le taux de restitution d'énergie en statique est défini par  $G = \frac{\epsilon^2}{2}$  et que l'on souhaite que  $T \mapsto \ell(T)$  décrive la même

évolution que (III.24) lorsque le critère de Griffith est vérifié  $G = k^a(x)$  on prend comme ténacité apparente celle du taux de restitution d'énergie avec

$$e = -\frac{\mathcal{T}(x)}{x} \quad (\text{III.46})$$

ce qui permet d'obtenir l'équation recherchée.

□

Sur un plan expérimental (si l'on considère une structure 2D ayant une fissure traversant un défaut), il est courant de calculer la ténacité qui permet à la fissure de redémarrer. Par analogie à cette problématique on se propose d'introduire la

**Définition 6** On nomme **ténacité de redémarrage**, la valeur de  $k^a(x)$  au point  $x = \ell_{II}$  telle que

$$k^a(\ell_{II}) = k_2 \frac{\ell_1^2}{\ell_{II}^2} \quad (\text{III.47})$$

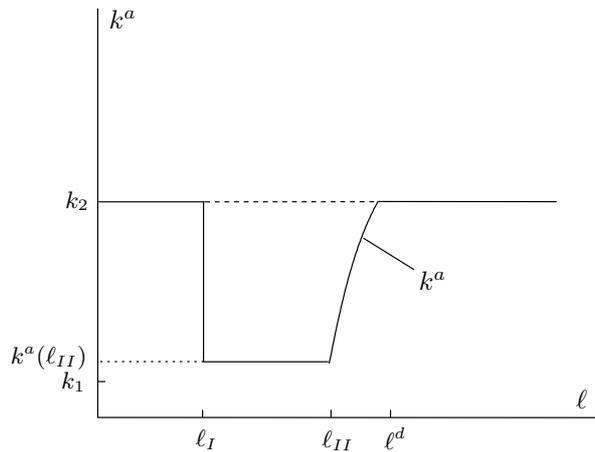


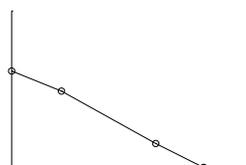
FIG. III.17 : Evolution de la ténacité apparente  $k^a$  en fonction de  $\ell$  lorsque  $k_2 = 1$ ,  $k_1 = 0.1$ ,  $L = 1$  et  $\ell_I = 1$ .

En utilisant (III.44),  $k^a$  peut se mettre sous la forme d'une fonction dépendant de  $\dot{\ell}$

$$k_1^a(\dot{\ell}) = \left( \sqrt{2}\dot{\ell}(k_2 - k_1) + \frac{k_1}{\sqrt{k_2}} + \sqrt{k_2}(1 - \sqrt{2k_2}\dot{\ell}) \ln \left( \frac{Lk_2\dot{\ell}}{\dot{\ell}^0 \ell_{II}(k_2 - k_1)(1 - \sqrt{2k_2}\dot{\ell})} \right) \right) \quad (\text{III.48})$$

avec  $\dot{\ell}^0 = \dot{\ell}|_{\ell=\ell_{II}}$ . Cependant cette expression garde une dépendance vis à vis de  $\ell_{II}$  et ne peut donc pas être considérée comme "universelle". Une expression de  $k^a$  à partir de la vitesse  $\dot{\ell}_N$  peut être obtenue  $\dot{\ell}_N \mapsto k_2^a(\dot{\ell}_N)$  (l'expression  $k_2^a(\dot{\ell}_N)$  présente la même lacune que  $k_1^a(\dot{\ell})$  : une dépendance par rapport à la position du défaut).

**Remarque 9** Une expression "universelle" de  $k^a$  peut être obtenue sous la forme d'une fonction dépendant de  $\dot{\ell}$  et de  $\dot{\ell}_N^0$  avec  $\dot{\ell}_N^0 = \dot{\ell}_N|_{\ell=\ell_{II}}$ .



### B.5.3 Une interprétation dynamique de la ténacité $k^a(x)$

Précédemment nous avons obtenu que d'un point de vue statique, la loi d'évolution  $\dot{\ell} = \mathcal{F}(\ell)$  pouvait s'interpréter par une ténacité apparente  $k^a(x)$ . Ainsi nous allons essayer de construire la solution dynamique du modèle de décollement du film lorsque la ténacité  $k_2$  (en sortie de défaut) est remplacée par la ténacité apparente  $k^a(x)$ .

Lorsque le film se décolle à travers une interface ayant une ténacité  $k^a(x)$ , alors la nature des ondes est plus complexe à déterminer. De ce fait on considère un champ de déplacement sous la forme

$$u(x, T) = \frac{1}{\epsilon} (f(T + \epsilon X) + g(T - \epsilon X)) \quad (\text{III.49})$$

En utilisant la condition à la limite  $u(0, T) = T$  on obtient

$$f'(T) + g'(T) = \epsilon \quad (\text{III.50})$$

Ainsi les expressions des champs de vitesse et déformation se présentent sous la forme

$$\begin{aligned} v &= 1 + \frac{1}{\epsilon} (f'(T + \epsilon x) - f'(T - \epsilon x)) \\ e &= f'(T + \epsilon x) + f'(T - \epsilon x) - \epsilon \end{aligned} \quad (\text{III.51})$$

En effectuant un développement limité de  $e$  et de  $v$  lorsque  $\epsilon$  est petit et pour  $x = \ell$  on a

$$\begin{aligned} v &= 1 + 2\ell f''(T) \\ e &= 2f'(T) \end{aligned} \quad (\text{III.52})$$

en considérant la relation d'Hadamard sur le front de décollement du film  $e\dot{\ell} + v = 0$  et le critère de décollement du film lorsque la vitesse de décollement  $\dot{\ell}$  est faible ( $2k^a(x) = e^2$ ) on obtient

$$\left( \sqrt{2k^a(\ell)\ell} \right)^{\bullet} = 1 \quad (\text{III.53})$$

où l'indice  $\bullet$  représente la dérivée par rapport à la charge  $T$ .

Comme l'équation (III.53) est identique (sous une forme différente) à celle utilisée pour construire la ténacité équivalente  $k^a(x)$  en statique, alors l'évolution du film est exactement définie par la courbe limite  $\ell \mapsto \mathcal{T}(\ell)$ .

## B.6 Construction d'une ténacité apparente pour un défaut $k(x)$ constant par morceaux

On se propose dans cette partie d'étudier l'influence de la forme du défaut de ténacité sur la couche limite. De ce fait, on considérera différentes distributions de  $k(x)$  pour  $\ell_I < x < \ell_{II}$ . Les études qui suivent se présentent en deux temps : tout d'abord on construit les couches limites par une approche similaire à celle qui a permis de construire  $\ell \mapsto \mathcal{T}(\ell)$ , puis on présentera les lois d'évolution qui apparaissent.

### B.6.1 $k(x)$ est constitué de trois discontinuités

On se place dans le cas où  $k(x)$  admet deux valeurs différentes lorsque  $\ell_I < x < \ell_{II}$ .  $k(x)$  se présente donc sous la forme

$$k(x) = \begin{cases} k_1 & \text{lorsque } \ell_I < x < \ell_{III} \\ k_3 & \text{lorsque } \ell_{III} < x < \ell_{II} \\ k_2 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{III.54})$$

avec  $k_1 < k_3 < k_2$  et  $\ell_{II} > \ell_{III} > \ell_I$ .

**Définition 7** On note  $\mathcal{M}(\ell, L, \alpha, k_2)$  ( $k_2$  joue uniquement un rôle de facteur homothétique sur la solution), la famille de courbes limites dans le plan  $(x, T)$  de type (III.24) générée par un défaut de taille  $L$  et un rapport de ténacité  $\alpha = k_1/k_2 < 1$ . Cette famille est de la forme  $\mathcal{M}(\ell, L, \alpha, k_2) = C(L, \alpha) + \sqrt{2k_2}f(\ell, L, \alpha)$ , où la fonction  $f$  est totalement définie par  $L$  et  $\alpha$ , et  $C$  est déterminé par les conditions initiales.

$$f(\ell, L, \alpha) = \ell + \frac{L}{1 - \alpha} \ln(L + \ell(1 - \alpha)) \quad (\text{III.55})$$

**Remarque 10** Pour un défaut défini tel que  $L = \ell_{II} - \ell_I$ , la constante  $C$  se présente sous la forme

$$C(L, \alpha) = -\sqrt{2k_2}L\left(1 + \frac{1}{1 - \alpha} \ln(\ell_{II}\alpha - \ell_I)\right) \quad (\text{III.56})$$

**Proposition 22** La solution limite lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$  se présente sous la forme de deux courbes limites  $T_1(\ell)$  et  $T_2(\ell)$  (cf Figure III.19) définies respectivement sur  $[\ell_{II}, \ell_1^d]$  et sur  $[\ell_1^d, \ell_2^d]$

La démonstration de la proposition 22 est présentée page 175.

La suite de l'étude nécessite d'introduire quelques notations :

$$L_1 = \ell_{III} - \ell_I, \quad L_2 = \ell_{II} - \ell_{III} \quad (\text{III.57})$$

Dans le cas du modèle à un défaut, une loi d'évolution  $\dot{\ell} = \mathcal{F}(\ell)$  a été introduite. On se propose d'étendre cette analyse à notre modèle actuel (double défaut). Le résultat principal s'énonce à travers la

**Proposition 23** D'un point de vue plus global, les couches limites  $T_1$  et  $T_2$  peuvent s'interpréter à l'aide de deux lois d'évolution :  $\dot{\ell}^1$  pour  $\ell_{II} < \ell < \ell_1^d$  et  $\dot{\ell}^2$  pour  $\ell_1^d < \ell < \ell_2^d$  définies telles que

$$\dot{\ell}^1 = \frac{1}{\sqrt{2k_2}} \left( 1 + \frac{k_2(k_1L_2 + k_3L_1 - k_2(L_1 + L_2))}{\ell(k_2 - k_1)(k_2 - k_3)} \right) \quad (\text{III.58})$$

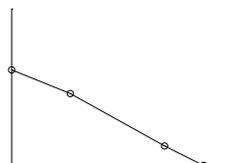
$$\dot{\ell}^2 = \frac{1}{\sqrt{2k_2}} \left( 1 + \frac{k_2L_2}{\ell(k_3 - k_2)} \right) \quad (\text{III.59})$$

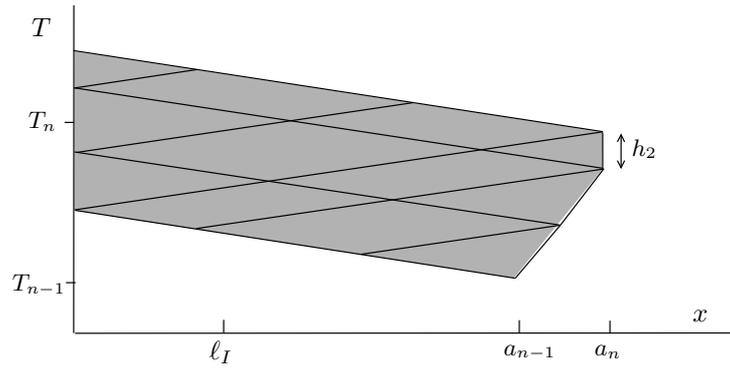
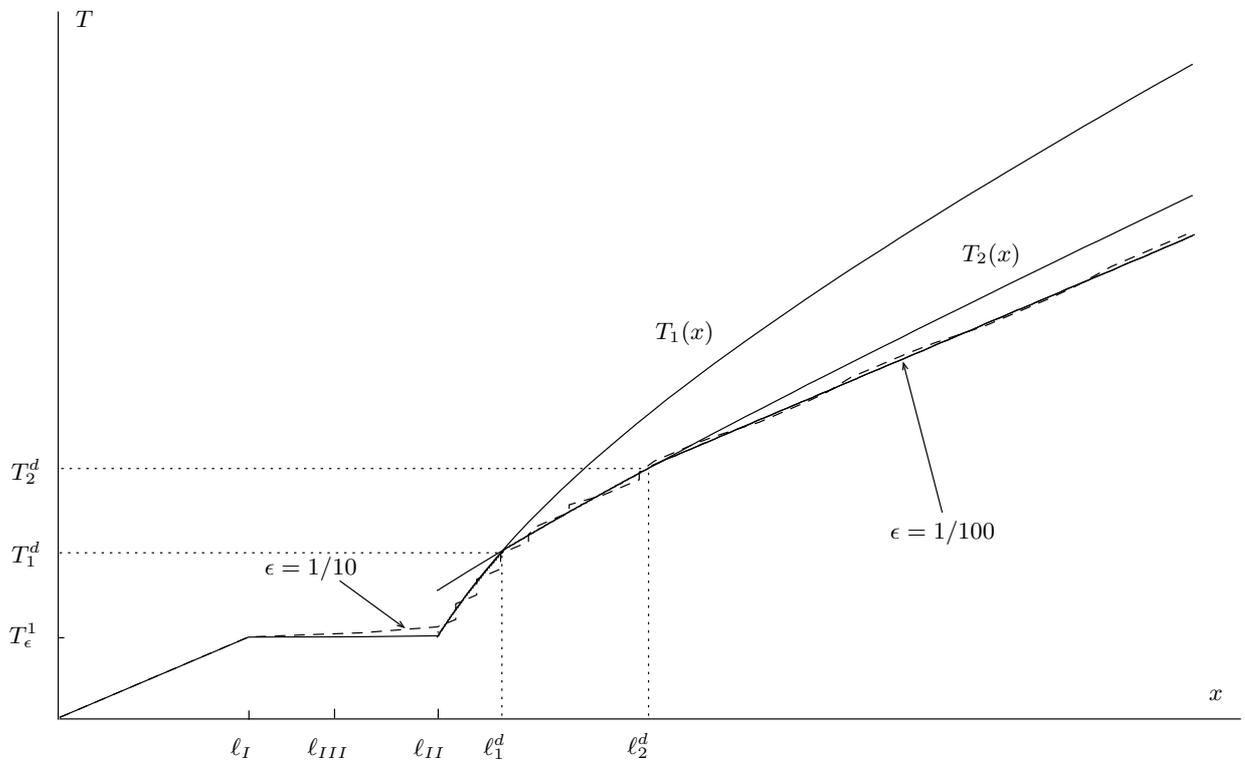
De plus ces lois d'évolution sont indépendantes de la position du défaut.

*Preuve :*

La construction de ces lois d'évolution apparaissent directement en dérivant les expressions  $T_1(\ell)$  et  $T_2(\ell)$  par rapport à  $\ell$  puis en prenant l'inverse.

□

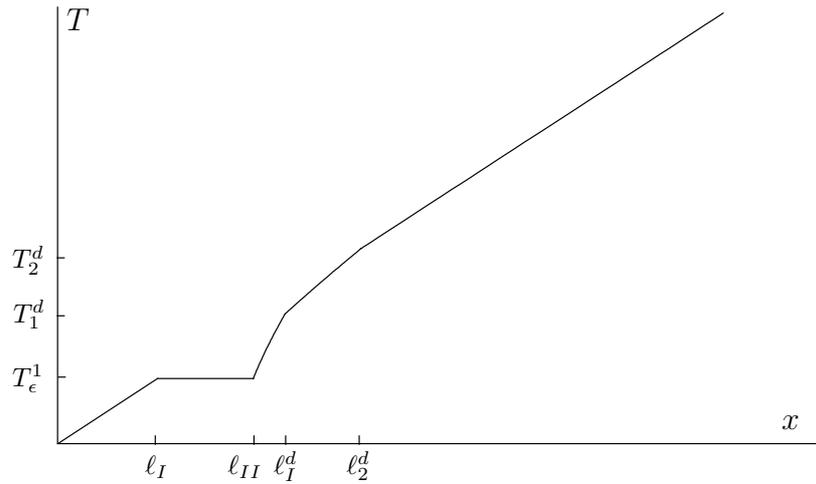


FIG. III.18 : Pavage  $\Delta_n$  pour  $x > \ell_1^d$ FIG. III.19 : Convergence de  $\ell(T)$  en fonction de  $\epsilon$  dans le plan  $(x, T)$ 

### B.6.2 Cas général

Dans cette partie on se propose de présenter quelques résultats généraux sur le lien entre la forme de la courbe limite et la répartition de la ténacité dans le défaut. On suppose que le défaut est défini pour  $x \in [\ell_I, \ell_{II}]$  et que la ténacité est constante par morceaux. On note  $m$  le nombre de valeurs que prend la ténacité dans le défaut et  $k_1^i \forall i \in \{1 \dots m\}$  l'ensemble de ces valeurs. De ce fait la ténacité peut se mettre sous la forme

$$\begin{cases} k_1^i & \text{lorsque } x \in [d^i, d^{i+1}], \forall i \in \{1 \dots m\} \\ k_2 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{III.60})$$


 FIG. III.20 : Solution limite de  $\ell(T)$  dans le plan  $(x, T)$ 

où  $d^i \forall i \in \{1 \dots m\}$  définissent les  $m + 1$  discontinuités de ténacité. On a  $d^1 = \ell_I$  et  $d^{m+1} = \ell_{II}$

**Définition 8** Compte tenu de la construction précédente du modèle à 3 discontinuités, on définit les courbes  $x \mapsto T^i(x)$  avec  $i \in \{1 \dots r\}$  comme étant toutes les courbes limites apparaissant dans l'ordre des  $i$  croissants lorsque  $x > \ell_{II}$ . Les courbes  $x \mapsto T^i(x)$  sont définis sur les intervalles  $[\ell_i^d, \ell_{i+1}^d]$  avec  $\ell_1^d = \ell_I$ .

**Définition 9** On note  $x \mapsto \mathcal{T}(x)$  la réunion des courbes limites  $x \mapsto T^i(x)$  avec  $i \in \{1 \dots r\}$  que l'on définit comme étant la couche limite du modèle III.60.

**Proposition 24** L'ordre de rangement des  $m$  micro-défauts ne modifie pas la forme de la couche limite.

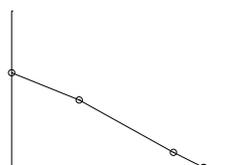
La démonstration est présentée page 174

**Corollaire 7** La forme de la couche limite  $x \mapsto \mathcal{T}(x)$  dépend uniquement du nombre de valeurs différentes que prend la ténacité lorsque  $\ell_{II} > x > \ell_I$ , ainsi que de la contribution énergétique (énergie de surface) de chacune de ces valeurs. Ainsi la couche limite est insensible à des effets d'histoire ou d'alternance entre différentes ténacités.

*Preuve :*

La démonstration découle directement de la construction ondulatoire présentée dans la proposition 24. D'une part la ténacité joue un rôle important au niveau du critère d'arrêt du front de fissure (cf équation (A.64) page 174), ce qui détermine directement les couples  $(\ell_i^d, T_i^d) \forall i \in \{1 \dots r\}$ . D'autre part la construction des courbes limites (cf équation (A.65) page 175) est directement liée à l'ensemble  $h^i$  avec  $i \in \{1 \dots m\}$ . On peut cependant construire un nouvel ensemble  $\mathcal{H}^i$  avec  $i \in \{1 \dots R\}$  où les  $\mathcal{H}^i$  sont définis tels que

$$\mathcal{H}^i = \sum_{j=0}^m (H(k_1^i - k_1^j) + H(k_1^j - k_1^i) - 1)h_1^j, \text{ avec } H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad (\text{III.61})$$



ce qui permet de construire les courbes limites à partir de l'ensemble  $\mathcal{H}^i$  avec  $i \in \{1 \cdots R\}$ . La construction est rendue possible puisque

$$\sum_{i=0}^m h^i = \sum_{i=0}^R \mathcal{H}^i, \quad (\text{III.62})$$

ainsi les suites (A.65) (cf page 175) ne sont pas modifiées, et par conséquent les courbes limites. La construction des paramètres  $\mathcal{H}^i$  permettent de **compter** l'influence, en terme de longueur du micro-défaut, de chacune des  $R$  ténacités différentes du défaut. Ainsi on peut parler d'une dépendance de type énergie de surface pour chacune des  $R$  ténacités.

**Remarque 11** *Un modèle dont la répartition de la ténacité  $k(x)$  est défini telle que*

$$\forall b = 2n, \quad n \in \mathbb{N}^{*+}, \quad k(x) = \begin{cases} k_1 & \text{si } x \in [\ell_I + 2ip, \ell_I + (2i + 1)p] \\ k_3 & \text{si } x \in [\ell_I + (2i + 1)p, \ell_I + (2i + 2)p] \end{cases} \quad (\text{III.63})$$

$$\text{avec } p = \frac{\ell_{II} - \ell_I}{b} \text{ et } i \in \{1, \dots, n - 1\}$$

à la même couche limite  $x \mapsto \mathcal{T}(x)$  qu'un modèle ayant une répartition de la ténacité  $k(x)$  telle que

$$k(x) = \begin{cases} k_1 & \text{lorsque } \ell_I < x < \frac{\ell_{II} - \ell_I}{2} \\ k_3 & \text{lorsque } \frac{\ell_{II} - \ell_I}{2} < x < \ell_{II} \\ k_2 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{III.64})$$

## C Analogie avec un chargement brutal

On se propose de présenter une analogie entre le modèle précédemment développé et celui où l'interface est homogène et le chargement brutal. On se limitera à la présentation des modèles et des réponses ondulatoires.

### C.1 Influence du chargement

Un premier modèle de décollement de film est présenté. Il s'agit d'un film se décollant à travers une interface de ténacité  $k$ . Initialement, la vitesse de chargement  $\epsilon$  est relativement faible, puis elle varie brusquement pour être égale à  $\beta$  ( $\epsilon \ll \beta$ ) pendant  $\delta t$ . Ensuite, différents cas de figure sont possibles (cf Figure III.21) que l'on nomme par **Cas 1** et **Cas 2**. A la différence du modèle précédent (discontinuité de ténacité), le chargement n'est plus considéré comme étant quasi-statique (*i.e.* l'énergie cinétique apportée par le chargement ne tendra pas vers zéro lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$ ).

Lorsque le modèle subit respectivement un chargement de type **Cas 1** ou de type **Cas 2**, alors trois ou deux ondes de choc sont générées au point  $x = 0$  (cf Figure A.9 et A.10 page 178). Ces ondes de chocs se propageront à travers le film décollé pour venir interagir avec le front de fissure, puis se réfléchir contre celui-ci pour se rediriger vers le point d'application du déplacement imposé. Au final ces ondes de choc se réfléchissent infiniment entre le point  $x = 0$  et le front de fissure. Lorsque la première onde de choc arrive sur le front de décollement du film, alors celui-ci se propage brutalement le temps que la deuxième onde de choc (pour un chargement de type **cas 1**, le décollement du film

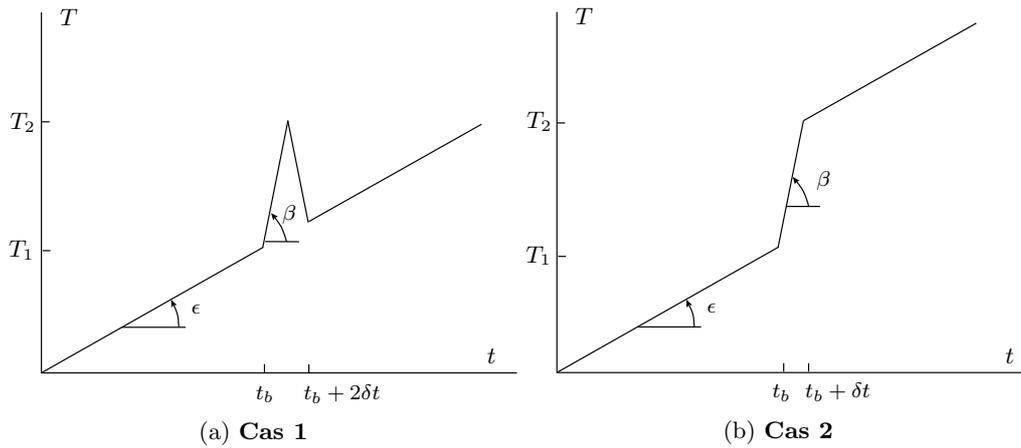


FIG. III.21 : Evolution de la charge  $T$  suivant différentes configurations

n'évolue pas après le passage de la deuxième onde et ce jusqu'à l'arrivée de la troisième onde de choc) rencontre le front de décollement du film. Ensuite, (après que la seconde onde de choc ait interagi avec le front de fissure) on observe que le décollement du film évolue en alternant entre des phases de propagation et des phases d'arrêt (similaire au modèle avec un défaut de ténacité). Lorsqu'on fait tendre (numériquement) la vitesse de chargement  $\epsilon$  vers zéro, on obtient que le décollement du film évolue en générant dans le plan espace-temps une courbe limite (similaire à  $\ell \mapsto \mathcal{T}(\ell)$ ) dépendant des paramètres  $\delta t$  et  $\beta$  qui caractérisent le chargement "brutal" (cf Figure III.22 pour le **cas 1** et A.11 page 178 pour le **cas 2**).

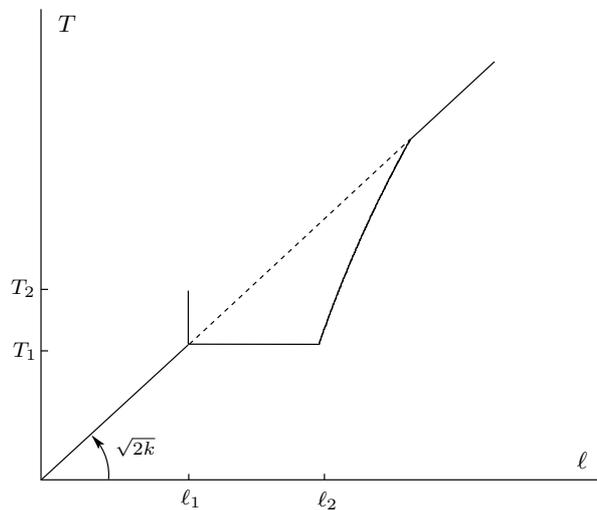
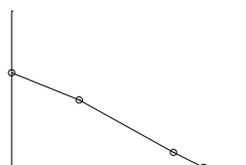


FIG. III.22 : Evolution de la charge  $T$  en fonction de  $\ell$  lorsque  $T$  évolue selon le **Cas 1**

On note  $\ell_1$  et  $\ell_2$  les positions du front de décollement du film qui caractérisent la propagation brutale : juste avant le passage de la première onde on a  $\ell = \ell_1$  et après le passage de la seconde onde on a  $\ell = \ell_2$  (pour le **cas 1**, la valeur de  $\ell$  est identique lors du passage de la deuxième et de la troisième onde). Lorsque l'on observe les évolutions des



énergies, on obtient que la propagation brutale est effectuée à énergie totale constante (identique au cas à discontinuité de ténacité). Cependant l'énergie cinétique en début de propagation brutale n'est pas nulle et vaut  $\mathcal{K}_1$  (cf Figure III.23 et A.17 page 181 : l'énergie cinétique apparaît comme étant la différence entre  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{P} + \mathcal{S}$ ). Durant la propagation brutale, l'énergie cinétique va augmenter pour arriver à un maximum puis diminuer pour, en fin de propagation brutale, être égale à la valeur initiale  $\mathcal{K}_1$ . Ainsi, si on se donne  $\mathcal{K}_1$ , la longueur du saut de fissure est donnée par la solution métastable (recherche du saut de fissure tel que l'énergie potentielle  $\mathcal{P} + \mathcal{S}$  en  $\ell = \ell_2$  soit égale à sa valeur en  $\ell = \ell_1$ ).

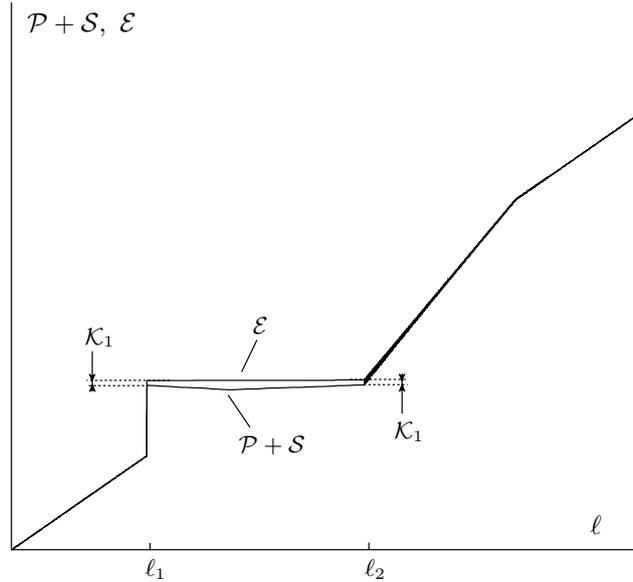


FIG. III.23 : Evolution des énergies en fonction de  $\ell$  lorsque  $T$  évolue selon le **Cas 2**

Après que la propagation brutale ait eu lieu, la structure possède toujours une énergie cinétique non nulle  $\mathcal{K}_1$ . Ainsi lorsque la charge  $T$  évolue, le modèle relaxe son énergie cinétique (cf Figure A.18 page 182). Le front de décollement du film évolue donc sur une couche limite similaire à celles présentées précédemment.

## C.2 Influence du chargement en présence d'une discontinuité de ténacité

On se propose maintenant d'étudier l'influence d'une variation du chargement (de type **cas 2**) lorsque le front de décollement du film traverse une discontinuité de ténacité. Plus précisément, on s'intéresse au cas où une variation du chargement est imposée dans la phase de recharge générée par une discontinuité de ténacité (phase qui apparaît après la propagation brutale de  $\ell(T)$  et qui se fait à énergie totale constante).

La figure III.24 représente l'évolution de la charge en fonction de  $\ell$  pour un tel modèle (la discontinuité de ténacité se trouve en  $\ell = \ell_I$ ). On obtient deux cas de figure : soit l'énergie cinétique injectée par la brusque variation du chargement est relativement faible (inférieur à une certaine borne  $\mathcal{K}^0$ ) et dans ce cas le système cherche à relaxer cette énergie (cf Figure A.19 page 182 et Figure III.24 avec  $\beta = 0.1$  et  $\beta = 0.18$ ), soit l'énergie cinétique est supérieure à cette borne  $\mathcal{K}^0$  et dans ce cas  $\ell(T)$  se propagera brutalement avant de s'arrêter avec une certaine énergie cinétique résiduelle pour ensuite la relaxer (cf Figure

A.19 page 182 et Figure III.24 avec  $\beta = 0.3$  et  $\beta = 0.4$ ). Dans les deux cas de figure on observe que l'énergie cinétique ne se relaxe pas immédiatement (cf Figure A.19 page 182) : le système cherche à accumuler suffisamment d'énergie potentielle avant de relaxer l'énergie cinétique. Ce phénomène est similaire à celui décrit à travers la proposition 16 (diminution puis augmentation de la charge  $T$ ).

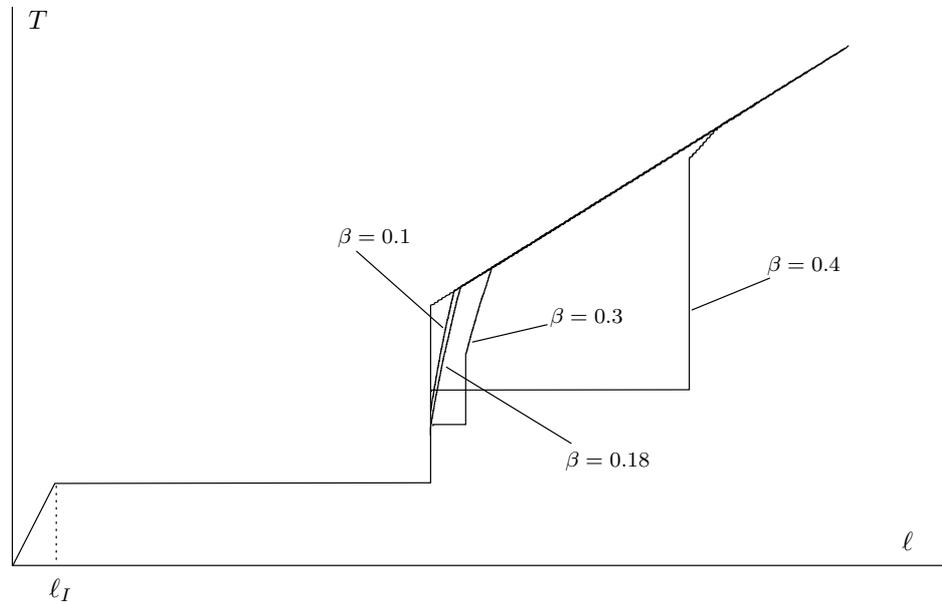
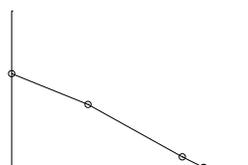


FIG. III.24 : Evolution de la charge  $T$  en fonction de  $l$  lorsque le film traverse une discontinuité de ténacité en  $x = l_I$  puis un chargement  $T$  sous forme d'une impulsion de type **Cas 2**



## D Conclusion

La construction du modèle de décollement du film à travers une interface ayant un défaut de ténacité a permis de mettre en évidence deux “modes” de rupture différents. Soit la dimension du défaut est relativement grande (l'onde générée par le décollement du film lorsqu'il entre dans le défaut arrête le front de décollement du film dans le défaut) et dans ce cas la solution est une combinaison de deux solutions quasi-statiques métastables (la solution métastable d'entrée dans le défaut suivie de celle de sortie du défaut), soit la dimension du défaut est petite (lorsque le film se décolle brutalement à travers l'intégralité du défaut) et dans ce cas le décollement du film évolue, en sortie de défaut, selon une courbe limite. Nous avons obtenue que cette courbe limite regagne la solution statique pour une certaine charge et que de petites variations du chargement ne modifient pas cette courbe limite. Ainsi nous avons appelé *couche limite* cette courbe limite qui est relativement générale pour un modèle donné.

La couche limite obtenue ne correspond en aucun point à la solution quasi-statique (ULM) métastable, ainsi le mécanisme de couche limite ne peut être expliqué par une conservation de l'énergie totale. En effet, lorsque le film s'arrête en fond de défaut ( $\ell = \ell_{II}$ ), le film possède une énergie cinétique non nulle pouvant influencer sur l'évolution du film. De ce fait une interprétation énergétique (qui se base sur le calcul direct) de cette *couche limite* a été présentée : il s'agit d'un phénomène de *relaxation de l'énergie cinétique* par rapport à la charge  $T$ . Autrement dit, pour diminuer l'énergie cinétique, il faut augmenter le chargement. Un caractère plus “universel” de la couche limite a été obtenu par le biais d'une loi d'évolution de type  $\dot{\ell} = \mathcal{F}(\ell)$  où  $\dot{\ell}$  est la dérivée de  $\ell$  par rapport à la charge  $T$ . En effet, cette loi permet de construire une couche limite et ce, quelque soit la position du défaut.  $\dot{\ell} = \mathcal{F}(\ell)$  peut s'interpréter de façon statique et dynamique (lorsque l'on remplace en statique, le critère de Griffith par cette loi d'évolution) par une *ténacité apparente*.

D'autres aspects ont été investigués, il s'agit de considérer un défaut ayant une distribution particulière de la ténacité. Par exemple le cas d'un défaut avec deux faibles ténacités a été étudié, et il a été obtenu que la couche limite est constituée de deux courbes limites. Quelques propriétés ont été obtenues, lorsque la distribution de la ténacité du défaut est plus complexe. Et pour finir, ces phénomènes de couche limite ont été obtenus lorsque le film se décolle à travers une interface homogène et que le chargement varie brutalement.

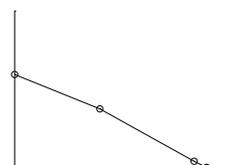
## Chapitre IV

# Décollement d'un film à travers une infinité de défauts

### Contents

<b>A</b>	<b>Introduction</b> . . . . .	<b>92</b>
<b>B</b>	<b>Réponse quasi-statique</b> . . . . .	<b>93</b>
B.1	Solution quasi-statique (UGM) . . . . .	93
B.2	Solution quasi-statique (ULM) . . . . .	98
B.3	Solution quasi-statique métastable . . . . .	98
<b>C</b>	<b>Réponse dynamique</b> . . . . .	<b>100</b>
C.1	Notations et définitions . . . . .	101
C.2	Construction des champs mécaniques . . . . .	103
C.3	Construction des courbes limites . . . . .	108
C.4	Approche numérique de la solution dynamique . . . . .	115
<b>D</b>	<b>Conclusion</b> . . . . .	<b>119</b>

**résumé :** Ce chapitre présente un film se décollant à travers une interface ayant une infinité de défauts (la répartition des défauts est périodique). D'un point de vue quasi-statique, il a été obtenu que la solution (UGM) (minimum global de l'énergie) évolue (lorsque la taille des défauts tend vers 0) avec une ténacité apparente égale à la moyenne arithmétique des ténacités, et que la solution métastable est une fonction en escalier comprise entre deux droites particulières. D'un point de vue dynamique, deux approches différentes sont proposées : une première où on cherche à construire directement la solution asymptotique (la vitesse de chargement tend vers zéro), et une seconde plus directe où on résout le problème avec toutes les ondes (le passage à la limite est effectué numériquement). Au final on obtient que les passages à la limite (sur la taille des défauts et la vitesse du chargement) semblent commuter, et que la solution limite converge vers une certaine limite différente des solutions quasi-statiques (l'énergie résiduelle dans le film semble être proportionnelle à la longueur de film décollée).



## A Introduction

Le chapitre précédent introduit la notion de couche limite (cf Figure III.12) après que le film a traversé un défaut de ténacité. Ce phénomène de couche limite peut s'interpréter d'un point de vue énergétique comme un phénomène de relaxation de l'énergie cinétique (le chargement doit évoluer pour faire diminuer l'énergie cinétique).

Suite à cette étude, une des questions qui vient à l'esprit est *l'effet d'écrantage* entre plusieurs défauts. Autrement dit, le phénomène de relaxation de l'énergie cinétique (qui a lieu après la traversée d'un défaut) peut ne pas être totalement terminé (l'énergie cinétique n'est pas nulle) lorsque le film se décolle à travers le défaut suivant (et ainsi de suite). On se propose, en utilisant le modèle de décollement du film, de prendre une interface ayant une infinité de défauts. L'une des questions qui semble importante est de connaître le comportement global de l'énergie cinétique lorsque la vitesse du chargement  $\epsilon$  tend vers 0 et lorsque la taille des défauts tend vers 0 : a-t-elle tendance à s'annuler (dans ce cas on peut espérer que le modèle converge vers une des solutions quasi-statiques) ou alors à continuer de croître (dans ce cas une ténacité apparente apparaîtra) ?

Ainsi l'étude s'articulera en deux temps, tout d'abord nous construirons les solutions quasi-statiques (UGM) et (ULM) métastable, puis nous présenterons différentes approches pour obtenir la solution dynamique limite. Une première approche consistera, pour une taille de défaut donnée, de construire la solution asymptotique à partir d'une construction graphique se basant sur les équations des couches limites (cf Chapitre III), tandis qu'une seconde approche consistera à construire la solution de façon directe (on construit la solution ondulatoire). A partir de ces approches on s'intéressera à la commutativité entre les deux passages à la limite (sur la taille des défauts et la vitesse du chargement) et recherchera s'il existe une loi d'évolution particulière de ce milieu (cf B.5.3).

L'étude portera donc sur le décollement du film à travers une interface ayant une ténacité  $k(x)$  périodique définie telle que

$$k(x) = \begin{cases} k_2 & \text{lorsque } x \in [2(i-1)L, (2i-1)L] \\ k_1 & \text{lorsque } x \in [(2i-1)L, 2iL] \end{cases} \quad \text{avec } i \in \mathbb{N}^* \quad (\text{IV.1})$$

avec  $k_1 < k_2$  et où  $L$  représente la taille des défauts de ténacité  $k_1$ .

## B Réponse quasi-statique

A travers cette section nous présentons les solutions quasi-statiques obtenues selon les différentes approches considérées (cf Chapitre II et III).

### B.1 Solution quasi-statique (UGM)

On s'intéresse tout d'abord à la solution selon l'approche (UGM). Le résultat principal est introduit dans la

**Proposition 25** *Lorsque la ténacité à l'interface  $k(x)$  est définie comme étant une fonction périodique de période  $\frac{1}{n}$  ( $n$  étant le nombre de défauts), alors la solution quasi-statique selon l'approche (UGM) a une ténacité équivalente égale à  $n \int_y^{y+\frac{1}{n}} k(x) dx$  qui est la moyenne arithmétique des ténacités.*

*Preuve :*

Compte tenu de l'hypothèse faite autour de  $k(x)$ , on définit  $k(x)$  tel que  $k(x) = g(nx)$  où  $x \mapsto g(x)$  est une fonction périodique de période 1 et telle que  $0 < k_1 \leq g(y) \leq k_2 < +\infty$ ,  $\forall y \in [0, 1]$ .

D'après la proposition 2, résoudre (UGM) est équivalent à chercher le minimum global de l'énergie, à  $T$  fixé parmi les  $\ell \geq 0$ , *i.e.*

$$\ell_n(T) = \arg \min \{ \mathcal{E}_n(T, \ell), \ell \geq 0 \} \quad (\text{IV.2})$$

$$\text{avec } \mathcal{E}_n(T, \ell) = \frac{T^2}{2\ell} + \int_0^\ell g(nx) dx$$

*Étape 1 :* à  $n$  et  $T$  fixés il existe au moins un minimiseur à  $\ell \mapsto \mathcal{E}_n(T, \ell)$

La fonction  $\ell \mapsto \mathcal{E}_n(T, \ell)$  est continue et tend vers l'infini quand  $\ell$  tend vers l'infini (en effet  $\mathcal{E}_n(T, \ell) \geq \frac{T^2}{2\ell} + k_1 \ell$ , qui tend vers l'infini).

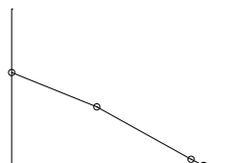
Montrons maintenant qu'il existe au moins un minimiseur à la fonction  $\ell \mapsto \mathcal{E}_n(T, \ell)$ . On omet la dépendance vis à vis de  $n$  et de  $T$  pour simplifier l'écriture. Soit  $e$  la borne inférieure de l'énergie :  $e = \inf_{\ell \geq 0} \mathcal{E}(\ell)$ . On a évidemment ici  $\ell \geq 0$ . Tout le problème consiste à montrer que cette borne inférieure est atteinte en au moins un  $\ell$ , *i.e.* il existe  $\ell^*$  tel que  $e = \mathcal{E}(\ell^*)$ . Par définition de la borne inférieure, on peut toujours construire une suite minimisante, *i.e.* une suite  $\{\ell_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  telle que  $\lim_{i \rightarrow \infty} \mathcal{E}(\ell_i) = e \geq 0$ . Montrons que cette suite est bornée. On a à partir d'un certain rang  $i_0$ ,  $\mathcal{E}(\ell_i) \leq e + 1$ . Mais comme  $\mathcal{E}(\ell_i) \geq k_1 \ell_i$ , on a donc  $0 \leq \ell_i \leq \frac{e+1}{k_1}$ , pour  $i$  assez grand. La suite étant bornée, on peut en extraire une sous suite qui converge vers un certain  $\ell^*$ . Mais comme  $\ell \mapsto \mathcal{E}(\ell)$  est continue, on a  $\lim_{i \rightarrow \infty} \mathcal{E}(\ell_i) = \mathcal{E}(\ell^*) = e$ , d'où l'existence.

*Étape 2 :* à  $T$  fixé, la suite des minimiseurs  $\ell_n(T)$  est bornée (indépendamment de  $n$ )

Soit  $\ell_0 > 0$ . On a  $\mathcal{E}_n(T, \ell_n(T)) \leq \mathcal{E}_n(T, \ell_0) \leq \frac{T^2}{2\ell_0} + k_2 \ell_0 = C$ . Mais comme  $\mathcal{E}_n(T, \ell_n(T)) \geq k_1 \ell_n(T)$ , on a donc  $\ell_n(T) \leq \frac{C}{k_1}$ .

*Étape 3 :* Convergence des énergies

Comme la suite  $\ell_n(T)$  est bornée, on peut extraire une sous suite, toujours notée  $\ell_n(T)$  qui converge vers  $\ell^*(T)$ . (A ce stade, on ne sait pas si  $\ell^*(T)$  est unique et si toute la suite



converge). Montrons que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{E}_n(T, \ell) = \mathcal{E}^*(T, \ell) = \frac{T^2}{2\ell} + k^* \ell \quad (\text{IV.3})$$

avec  $k^* = \int_0^1 k(y) dy$  qui est la moyenne arithmétique des ténacités.

(C'est un résultat classique sur la convergence des fonctions périodiques lorsque la période tend vers 0 ; redémontrons le dans notre cas). Soit  $\ell > 0$  (le cas  $\ell = 0$  est trivial). Posons  $n\ell = E(n\ell) + \theta(n\ell)$  où  $E(\cdot)$  représente la partie entière et  $\theta(\cdot)$  le reste. On a donc  $0 \leq \theta(n\ell) < 1$

$$\int_0^\ell k(nx) dx = \frac{\ell}{n\ell} \int_0^{n\ell} k(y) dy = k^* \ell + \frac{1}{n} \int_0^{\theta(n\ell)} k(y) dy \quad (\text{IV.4})$$

Comme le deuxième terme tend vers 0, on a le résultat.

Montrons ensuite que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{E}_n(T, \ell_n(T)) = \mathcal{E}^*(T, \ell^*(T))$ .

Ceci tient à la continuité de  $\mathcal{E}_n$  par rapport à  $\ell$ . En effet

$$\mathcal{E}_n(T, \ell_n(T)) - \mathcal{E}_n(T, \ell^*(T)) = \frac{T^2}{2\ell_n(T)} - \frac{T^2}{2\ell^*(T)} + \int_{\ell^*(T)}^{\ell_n(T)} k(nx) dx \quad (\text{IV.5})$$

Or  $\frac{T^2}{2\ell_n(T)} \rightarrow \frac{T^2}{2\ell^*(T)}$  et  $\left| \int_{\ell^*(T)}^{\ell_n(T)} k(nx) dx \right| \leq k_2 |\ell_n(T) - \ell^*(T)| \rightarrow 0$ .

Donc  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{E}_n(T, \ell_n(T)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{E}_n(T, \ell^*(T)) = \mathcal{E}^*(T, \ell^*(T))$

*Étape 4 : Problème limite et détermination de  $\ell^*(T)$*

On peut passer à la limite dans l'inégalité

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}_n(T, \ell_n(T)) & \leq & \mathcal{E}_n(T, \ell) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{E}^*(T, \ell^*(T)) & & \mathcal{E}^*(T, \ell) \end{array}, \quad \forall \ell \geq 0 \quad (\text{IV.6})$$

Donc  $\ell^*(T)$  est le minimiseur de  $\mathcal{E}^*(T, \cdot)$ . Mais comme  $\ell \mapsto \mathcal{E}^*(T, \ell)$  est strictement convexe (pour  $T \neq 0$ ). Donc le minimiseur est unique

$$\ell^*(T) = \frac{T}{\sqrt{2k^*}} \quad (\text{IV.7})$$

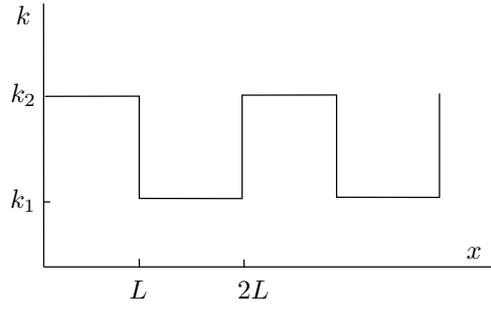
*Étape 5 : Conclusion*

On avait obtenu un résultat de convergence pour une sous suite de  $\ell_n(T)$ . Mais comme la limite obtenue  $\ell^*(T)$  est unique, toute la suite converge.

□

On se propose maintenant de montrer la validité du résultat précédent, en introduisant la construction pas à pas de la solution quasi-statique (UGM) lorsque la ténacité évolue selon (IV.1) (cf Figure IV.1).

Lorsque le front de fissure évolue à travers la première zone de ténacité  $k_2$ , la propagation est stable ( $T \mapsto \ell_1(T) = T/\sqrt{2k_2}$ ). Ensuite, le décollement du film évolue en

FIG. IV.1 : Evolution de la ténacité  $k(x)$ 

recherchant une position garantissant à l'énergie potentielle de rester à son niveau le plus bas. Ainsi l'évolution de  $\ell(T)$  alterne entre propagation stable et propagation instable. On rappelle les notations suivantes :  $\ell_1(T) = T/\sqrt{2k_1}$  et  $\ell_2(T) = T/\sqrt{2k_2}$

*Étape 1 : expression des énergies*

Compte tenu de l'évolution de la ténacité  $k(x)$  (cf (IV.1)), on construit les expressions des énergies potentielles en fonction de  $\ell$  et de  $T$ . Lorsque  $x \in [2(i-1)L, (2i-1)L]$  on a

$$E_2^i(T, \ell) = \frac{T^2}{2\ell} + (i-1)(k_1 + k_2)L + k_2(\ell - 2(i-1)L) \quad (\text{IV.8})$$

et pour  $x \in [(2i-1)L, 2iL]$  on a

$$E_1^i(T, \ell) = \frac{T^2}{2\ell} + (i-1)(k_1 + k_2)L + k_2L + k_1(\ell - (2i-1)L) \quad (\text{IV.9})$$

Pour la suite du calcul on définit le minimum de l'énergie potentielle pour certaine configuration :

- Lorsque  $\ell \in [(2i-1)L, 2iL[$  on a  $T = \sqrt{2k_1}\ell$  et le minimum se définit tel que

$$E_1^{im}(T) = \sqrt{2k_1}T + iL(k_2 - k_1) \quad (\text{IV.10})$$

- Lorsque  $\ell \in ]2(i-1)L, (2i-1)L]$  on a  $T = \sqrt{2k_2}\ell$  et le minimum se définit tel que

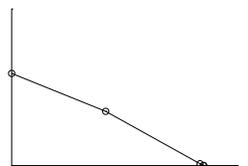
$$E_2^{im}(T) = \sqrt{2k_2}T + (i-1)L(k_2 - k_1) \quad (\text{IV.11})$$

- Lorsque  $\ell(T)$  se trouve à l'interface en  $x = 2iL$  le minimum se définit tel que

$$E_1^{ip}(T) = \frac{T^2}{4iL} + iL(k_1 + k_2) \quad (\text{IV.12})$$

*Étape 2 : les différents faciès de propagation*

On distingue deux types de propagation, soit la propagation est stable et la fonction  $T \mapsto \ell(T)$  est strictement croissante ou soit la propagation est instable et il faut rechercher pour un niveau de charge  $T$  donné, une nouvelle position du front de fissure  $\ell$  telle que le minimum global de la fonction  $l \mapsto \mathcal{E}(T, l)$  soit obtenu pour  $l = \ell$  ( $\mathcal{E}$  représente l'énergie potentielle). Il existe 9 possibilités différentes d'envisager une propagation instable du front de fissure (conservation de l'énergie potentielle) dont 3 sont physiquement acceptables (cf Figure IV.2) :



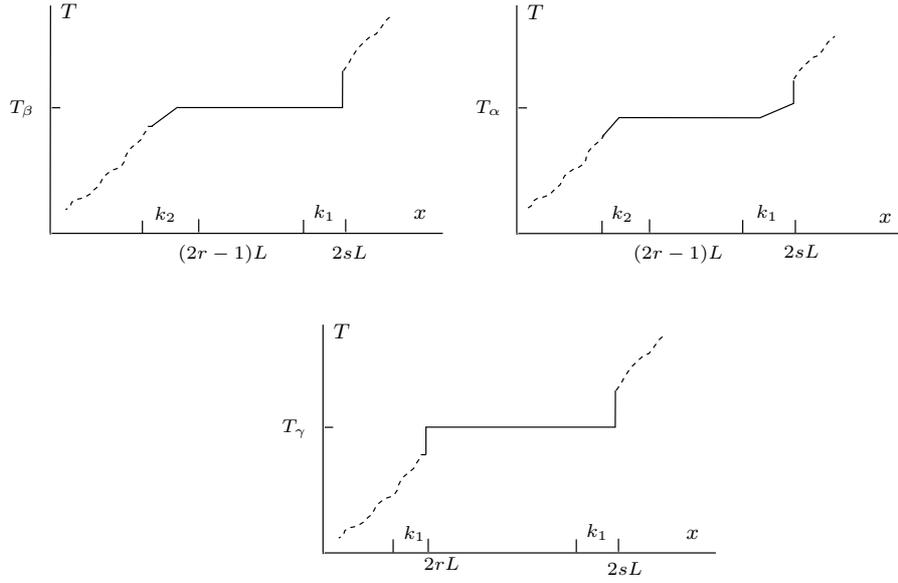


FIG. IV.2 : Evolution instable du front de fissure : en haut à gauche lorsque l'instabilité démarre à la charge  $T_\beta$  (cf (IV.14)), en haut à droite lorsque l'instabilité démarre à la charge  $T_\alpha$  (cf (IV.13)), en bas lorsque l'instabilité démarre à la charge  $T_\gamma$  (cf (IV.15))

- $\ell(T)$  se trouve dans la  $r$ -ième zone de ténacité  $k_2$  et saute jusqu'à la  $s$ -ième ( $s > r$ ) zone de ténacité  $k_1$ . On recherche donc  $T_\alpha$  tel que  $E_2^{r,m} = E_1^{s,m}$  et on a

$$T_\alpha = \frac{L(1+s-r)}{\sqrt{2}}(\sqrt{k_2} + \sqrt{k_1}) \quad (\text{IV.13})$$

- $\ell(T)$  se trouve dans la  $r$ -ième zone de ténacité  $k_2$  et saute jusqu'à l'interface entre la  $s$ -ième ( $s > r$ ) zone de ténacité  $k_1$  et la  $(s+1)$ -ième zone de ténacité  $k_2$ . On recherche donc  $T$  tel que  $E_2^{r,m} = E_1^{s,p}$  et on a

$$T_\beta = 2sL \left( \sqrt{2k_2} \pm \sqrt{k_2 - k_1} \sqrt{\frac{r+s-1}{s}} \right) \quad (\text{IV.14})$$

- $\ell(T)$  se trouve à l'interface entre la  $r$ -ième zone de ténacité  $k_1$  et la  $(r+1)$ -ième zone de ténacité  $k_2$  et saute jusqu'à l'interface entre la  $s$ -ième zone de ténacité  $k_1$  et la  $s+1$ -ième zone de ténacité  $k_2$ . On recherche donc  $T$  tel que  $E_1^{r,p} = E_1^{s,p}$  et on a

$$T_\gamma = 2L\sqrt{rs(k_1 + k_2)} \quad (\text{IV.15})$$

### Étape 3 : construction de la solution quasi-statique

La solution est construite de façon incrémentale et consiste à ordonner (par rapport à la charge  $T$ ) les charges critiques obtenues précédemment. Tout d'abord on remarque que  $s \mapsto T_\alpha$ ,  $s \mapsto T_\beta$  et  $s \mapsto T_\gamma$  sont des fonctions strictement croissantes et ce  $\forall r \in \mathbb{N}^*$ ; on prend donc  $s = r + 1$ . Autrement dit, la distance maximale selon  $x$  de la propagation instable est  $2L$  et toutes les charges critiques peuvent être exprimées en fonction de  $r$ .

On obtient qu'il existe un certain  $r^*$  tel que l'évolution de  $\ell(T)$  à travers les  $r$  défauts définis tels que  $r < r^*$  est construite en combinant des phases de propagations stables et

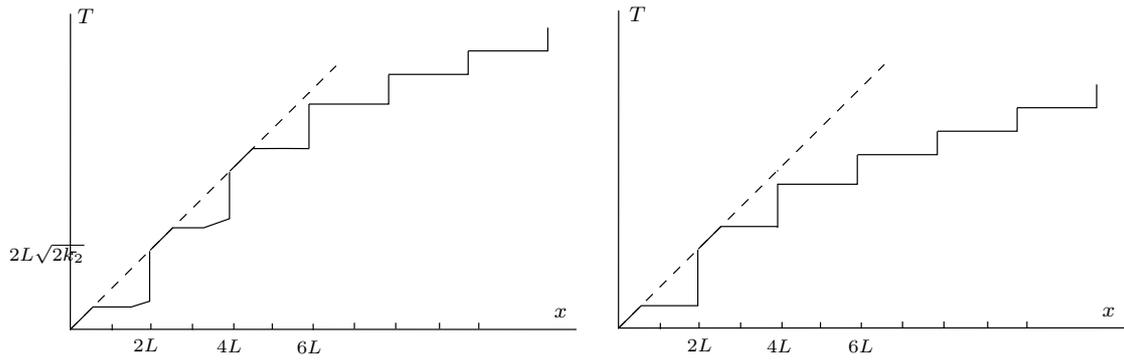


FIG. IV.3 : Solution quasi-statique (UGM) pour deux modèles différents

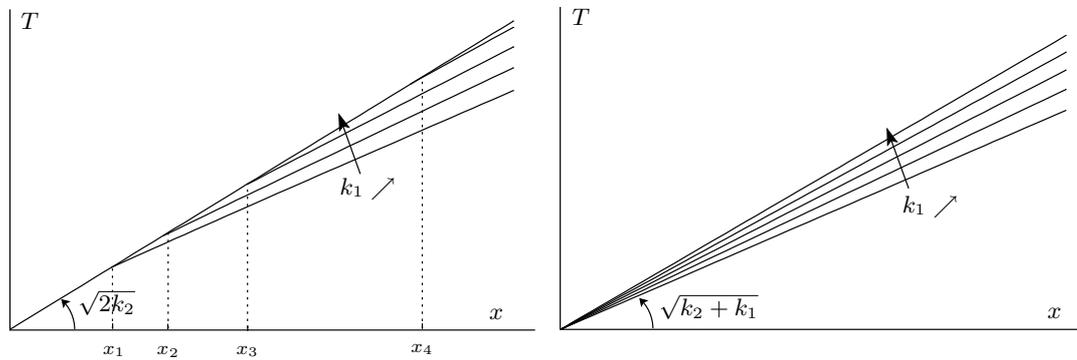


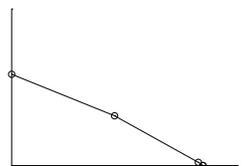
FIG. IV.4 : Courbe enveloppe de la solution quasi-statique (UGM) paramétrée en fonction de  $k_1$  : à gauche pour une valeur fixée de  $L$ , à droite lorsque  $L \rightarrow 0$

des phases de propagations instables définies par  $T_\alpha$  et par  $T_\beta$  (à travers cet intervalle la charge critique  $T_\gamma$  est supérieure aux autres charges critiques). Ensuite lorsque  $\ell(T)$  se propage à travers les défauts tels que  $r > r^*$ , alors la propagation est uniquement constituée de phases instables de type  $T_\gamma$ .

La solution asymptotique ( $L \rightarrow 0$ ) revient donc à considérer que la propagation du décollement du film est uniquement constituée de phase instable décrite par la charge critique  $T_\gamma$ . En utilisant l'expression de  $T_\gamma$  (IV.15) on détermine  $\beta$ , la pente moyenne d'avancée du front de fissure entre la  $r$ -ième et la  $(r + 1)$ -ième zone de ténacité  $k_1$  :

$$\beta = \sqrt{k_1 + k_2} \sqrt{r + 1} (\sqrt{r + 2} - \sqrt{r}) \quad (\text{IV.16})$$

En remarquant que  $\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r + 1} (\sqrt{r + 2} - \sqrt{r}) = 1$ , on obtient le comportement à l'infini ( $x \rightarrow \infty$ ) du modèle et on a  $\lim_{r \rightarrow \infty} \beta = \sqrt{k_1 + k_2}$ . Lorsque l'on se ramène à une grandeur de type ténacité (lorsque  $x \rightarrow \infty$ ), on obtient qu'elle est égale à la moyenne arithmétique des ténacités à savoir  $\frac{k_1 + k_2}{2}$ . La figure IV.4 représente l'évolution de la courbe enveloppe (les propagations brutales et arrêts sont lissées) de la solution quasi-statique. Le graphique de gauche représente la solution lorsque  $L$  est fixé pour différentes valeurs de  $k_1$  (la figure IV.3 représente les mêmes aspects), tandis que la figure de droite correspond au cas limite (la taille des défauts tend vers 0).



□

## B.2 Solution quasi-statique (ULM)

On se propose maintenant de présenter les solutions obtenues selon l'approche (ULM). Le résultat principal s'énonce à travers la

**Proposition 26** Lorsque  $L \rightarrow 0$ , l'ensemble des solutions quasi-statiques (ULM) est défini comme étant une combinaison entre des fonctions en escalier comprises entre les droites  $T = (k_1 + k_2)x/(\sqrt{2k_2})$  et  $T = \sqrt{2k_2}x$  (cf Figure IV.5), et des segments des droites  $T = (k_1 + k_2)x/(\sqrt{2k_2})$  et  $T = \sqrt{2k_2}x$ .

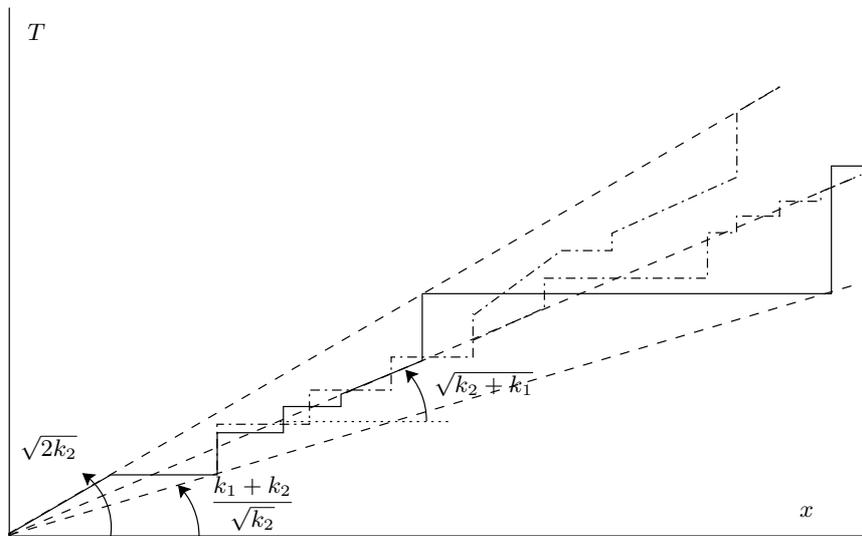


FIG. IV.5 : Evolution de différentes solutions quasi-statiques (ULM) à  $k_1$  et  $k_2$  fixés lorsque  $L \rightarrow 0$

*Preuve :*

Ce résultat découle de la construction des solutions quasi-statiques (UGM) et (ULM) métastable (paragraphe suivant).

□

Au final on obtient que la solution (ULM) admet une infinité de solutions, dont l'étude n'apporterait pas grand chose à la compréhension du problème. Ainsi on se propose uniquement de détailler la construction de la solution (ULM) métastable. Cette solution consiste à suivre le critère de Griffith tant que c'est possible, puis à considérer une conservation d'énergie lorsqu'un saut de fissure doit être envisagé. Si différentes longueurs de saut sont obtenues, alors il faut introduire le critère de stabilité pour qu'une sélection puisse avoir lieu.

## B.3 Solution quasi-statique métastable

On propose maintenant de présenter la solution quasi-statique métastable :

**Proposition 27** Lorsque  $L \rightarrow 0$ , la solution quasi-statique métastable dans le plan espace charge est une fonction en escalier évoluant entre les droites  $T = (k_1 + k_2)x/(\sqrt{2k_2})$  et  $T = \sqrt{2k_2}x$ . L'intersection entre la solution métastable et les droites  $T = (k_1 + k_2)x/(\sqrt{2k_2})$  et  $T = \sqrt{2k_2}x$  définit deux suites  $(a_n, T_n)$  (cf Figure IV.6) telles que

$$\begin{cases} a_n = A \sum_{i=0}^{n-1} B^i + r_0 B^n \\ T_n = \sqrt{2k_2} a_n \end{cases} \text{ avec } a_0 = 2Lr_0, \quad A = \frac{k_1 - k_2}{2(k_1 + k_2)}, \quad B = \frac{2k_2}{k_1 + k_2} \quad (\text{IV.17})$$

qui permettent de construire  $b_n$  et  $U_n$ , comme étant la moyenne géométrique respectivement des suites  $a_n$  et  $T_n$  :

$$b_n = \sqrt{a_n a_{n+1}}, \quad U_n = \sqrt{T_n T_{n+1}} \quad (\text{IV.18})$$

et où l'ensemble des points  $(b_n, T_n)$  et  $(a_{n+1}, U_n)$  appartiennent à la droite  $T = \sqrt{k_1 + k_2}x$ .

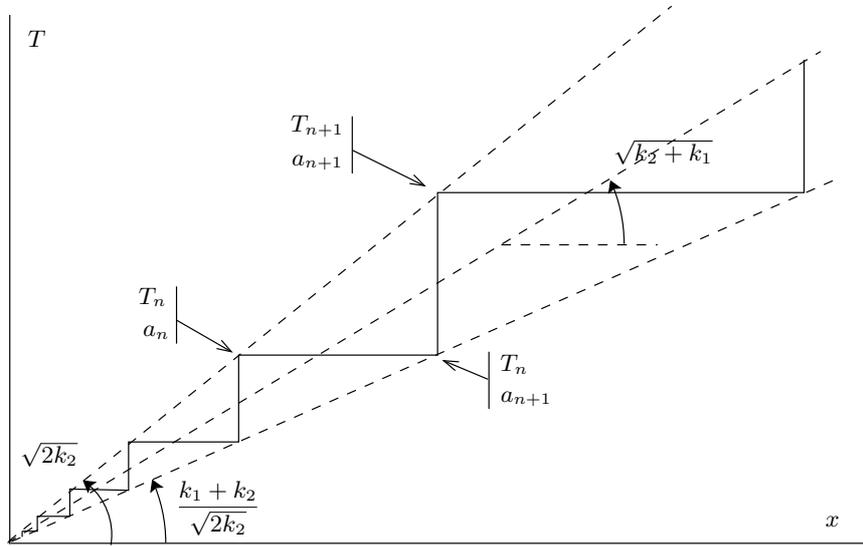


FIG. IV.6 : Solution quasi-statique métastable lorsque  $L \rightarrow 0$

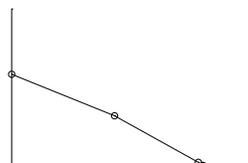
*Preuve :*

Au chapitre II, la solution quasi-statique métastable a été définie comme étant la solution (ULM) particulière qui *part la dernière*. Ainsi l'instabilité n'a pas lieu lorsque la charge  $T$  est égale à une des charges critiques  $T_\alpha$ ,  $T_\beta$  ou  $T_\gamma$  (approche (UGM)) mais lorsque le front de fissure  $\ell(T)$  se trouve à l'interface entre la  $r$ -ième zone de ténacité  $k_2$  et la  $(r+1)$ -ième zone de ténacité  $k_1$ . La valeur de l'énergie potentielle qui correspond à cette configuration est

$$E^*(r) = k_2(5r - 3)L + k_1(1 - r)L \quad (\text{IV.19})$$

Ensuite on recherche la position du front de fissure  $\ell^*(r)$  qui garantit la conservation de l'énergie totale. Puisque l'énergie potentielle est différentiable par morceaux (cf (IV.8) et (IV.9)), on a

$$\ell^*(r) = \min (\arg \min_\ell |E^*(r) - E_1^s(T^*(r), \ell)|, \arg \min_\ell |E^*(r) - E_2^s(T^*(r), \ell)|) \quad (\text{IV.20})$$



avec  $T^*(r) = \sqrt{2k_2}(2r-1)L$ .  $s$  définit le nombre de défauts de ténacité  $k_1$  et  $k_2$  traversés par le front de fissure après l'instabilité. Au final, après quelques calculs et lorsque  $L \rightarrow 0$  on a

$$\arg \min_{\ell} |E^*(r) - E_1^s(T^*(r), \ell)| = \arg \min_{\ell} |E^*(r) - E_2^s(T^*(r), \ell)| \quad (\text{IV.21})$$

qui permet d'obtenir

$$s = \frac{k_1 - k_2 + 4k_2r}{2(k_1 + k_2)}. \quad (\text{IV.22})$$

L'équation précédente peut se mettre sous la forme  $s_n = A + Bs_{n-1}$  avec  $A = (k_1 - k_2)/(2(k_1 + k_2))$  et  $B = 2k_2/(k_1 + k_2)$ ; ce qui permet de construire la suite  $a_n$  telle que  $a_n = 2s_nL$  et d'obtenir le résultat. Ensuite la construction de la suite  $T_n$  est évidente.

L'ensemble des points  $(a_{n+1}, T_n)$  appartiennent à la droite  $T = \beta x$  (lorsque  $L \rightarrow 0$ ) où  $\beta$  est défini tel que  $T_n = \sqrt{2k_2}a_n = \beta a_{n+1}$ . Au final on obtient que  $\beta = (k_1 + k_2)/\sqrt{2k_2}$ , ce qui garantit que la solution métastable est une fonction en escalier comprise entre les droites  $T = (k_1 + k_2)x/(\sqrt{2k_2})$  et  $T = \sqrt{2k_2}x$ .

Et pour finir, la construction des suites  $b_n$  et  $U_n$  telles que  $b_n = \sqrt{a_n a_{n+1}}$  et  $U_n = \sqrt{T_n T_{n+1}}$  donne

$$b_n = \frac{T_n}{\sqrt{k_1 + k_2}}, \quad U_n = \sqrt{k_1 + k_2} a_{n+1} \quad (\text{IV.23})$$

en utilisant le fait que  $T_n = a_{n+1} \frac{k_1 + k_2}{\sqrt{2k_2}}$  et  $T_n = \sqrt{2k_2} a_n$ . Cette construction assure que les points  $(b_n, T_n)$  et  $(a_{n+1}, U_n)$  appartiennent à la droite  $T = \sqrt{k_1 + k_2}x$ .

□

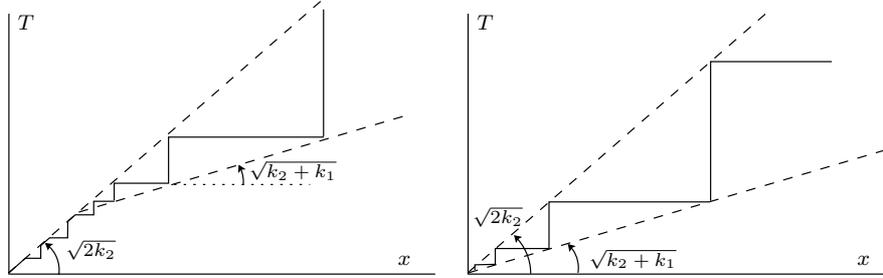


FIG. IV.7 : Solution quasi-statique métastable : à gauche lorsque  $L$  est fixé, et à droite lorsque  $L \rightarrow 0$

## C Réponse dynamique

On se propose maintenant de présenter la solution dynamique lorsque la vitesse de chargement  $\epsilon$  tend vers 0. Dans un premier temps nous introduirons quelques notations et définitions puis nous présenterons la construction de la solution dynamique. A partir de cette solution nous développerons la solution dynamique limite en adoptant une approche graphique se basant sur les résultats généralisés du chapitre III. Et pour finir

nous proposerons une approche directe pour évaluer le comportement asymptotique du milieu ( $L \rightarrow 0$ ) qui consiste à résoudre le problème de façon numérique en utilisant un algorithme de type récursif.

### C.1 Notations et définitions

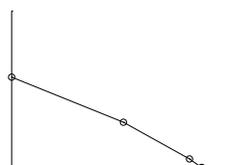
Tout d'abord on se propose de définir les différentes notations utilisées par la suite :

- \*  $m$  est le numéro du défaut (cf définition 10)
- \*  $m$  est aussi le numéro du faisceau  $\mathcal{F}_m^s$
- \*  $s$  est le nombre d'allers-retours du faisceau  $\mathcal{F}_m^s$
- \*  $M$  est le nombre de défauts (cf définition 10)
- \*  $i$  est le numéro du domaine  $\mathcal{Q}_\epsilon^i$  selon un ordre particulier (cf Figure IV.8)
- \*  $n$  est le numéro du pavage  $\Delta_n^m$  qui est réinitialisé à chaque traversée d'un nouveau défaut
- \*  $n_m$  est le nombre de pavages  $\Delta_n^m$  entre le défaut numéro  $m$  et le défaut numéro  $m + 1$
- \*  $o$  est le numéro du train d'onde
- \*  $z$  est l'indice de la suite  $\omega_z$  générée à partir du faisceau  $\mathcal{F}_m^s$  tel que  $z \leq s$
- \*  $N$  est le nombre d'allers-retours des ondes au-delà duquel  $\ell(T)$  converge vers la solution quasi-statique
- \*  $P$  est le nombre de faisceaux actifs

On se propose d'introduire la

**Définition 10** *On définit par  $M$  le **nombre de défauts** total à travers le modèle. Chaque défaut a un numéro  $m$  qui lui est propre et qui varie de 1 à  $M$ . L'ordre de numérotation des défauts est celui décrivant tous les défauts de la gauche vers la droite (selon l'axe  $x$  de la figure III.1).*

Initialement le film est totalement collé sur l'interface. Lorsque le chargement  $T$  évolue, le film se décolle et traverse successivement les défauts présents à l'interface. La traversée du premier défaut (la ténacité passe de  $k_2$  à  $k_1$ , puis de  $k_1$  à  $k_2$ ) génère deux ondes de choc qui oscillent à travers la partie décollée du film. A chaque aller-retour des ondes, le décollement du film est modifié (cf chapitre III). Ainsi pour construire cette solution différentes notations et définitions (cf définitions 2 et 3) sont introduites. En particulier les deux ondes de choc générées par le premier défaut définissent dans le plan espace-charge deux trains d'onde (cf définition 2). Ces trains d'onde sont notés par les chiffres **1** et **2** (par ordre d'apparition). A cette définition s'ajoute la numérotation des domaines dans le plan espace-charge. En effet, les allers-retours des ondes de choc permettent de délimiter dans le plan espace-charge des domaines  $\mathcal{Q}_\epsilon^i$  où  $i$  définit la numérotation de ces domaines (on les numérote de la droite vers la gauche en suivant les ondes qui partent du front de décollement du film pour aller vers le point  $x = 0$ ). Ces différents aspects permettent d'introduire le pavage  $\Delta_n$  (cf définition 3) comme étant une "brique" élémentaire à la construction de la solution (la solution se construit en additionnant ces pavages comme le présente la figure III.6). Et pour finir nous avons défini par  $\psi_n^i$  l'ensemble des domaines  $\mathcal{Q}_\epsilon^i$  se trouvant entre les trains d'onde **1** et **2**. Nous allons maintenant généraliser ces notations lorsque plusieurs défauts sont traversés par  $\ell(T)$ .



Lorsque le front de fissure  $\ell(T)$  se propage à travers les défauts suivants, des ondes de choc sont générées (deux ondes de choc sont générées par défaut) et vont osciller à travers la partie décollée du film. A chaque aller-retour des ondes, l'évolution du décollement du film est modifiée, générant dans le plan espace-charge, lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$ , des courbes pouvant s'apparenter à des couches limites. Pour permettre une construction géométrique simple de la solution ondulatoire on introduit

**Hypothèse 1** *On suppose qu'aucune onde de choc n'interagit avec le front du décollement du film lorsque celui-ci traverse une zone de faible ténacité  $k_1$ .*

Cette hypothèse n'est pas trop déraisonnable puisque la vitesse de décollement du film est du même ordre que la célérité du son dans le film. (De plus, numériquement on observe que lorsque cette hypothèse n'est pas vérifiée alors la solution, dans le cas limite, est inchangée). Ainsi selon cette hypothèse, l'évolution de  $\ell(T)$  à travers plusieurs défauts se décrit de la façon suivante : lorsque  $\ell(T)$  se trouve dans une zone de ténacité  $k_1$  alors  $\ell(T)$  est "libre" (pas de retour d'onde), tandis que lorsque  $\ell(T)$  évolue à travers la zone de ténacité  $k_2$  alors  $\ell(T)$  avance au gré des allers-retours des ondes (cf Figure IV.8).

A chaque traversée de défauts, deux ondes de choc supplémentaires sont générées venant s'additionner aux ondes générées par les défauts précédents. En généralisant la définition 2 qui présente la notion de train d'onde, on définit pour chaque "création" d'onde de choc un train d'onde numéroté par la lettre  $o$ . Puisque les trains d'onde sont générés aux points de discontinuité de ténacité, alors on peut dire que le défaut numéro  $m$  génère les trains d'onde  $o = 2m - 1$  et  $o = 2m$ . Ainsi, comme on peut l'observer sur la figure IV.8 (l'ensemble des droites d'un même motif de trait représente un train d'onde particulier), le deuxième défaut ( $m = 2$ ) génère les trains d'onde  $o = 3$  et  $o = 4$  et le troisième défaut ( $m = 3$ ) génère les trains d'onde  $o = 5$  et  $o = 6$ . De la même façon que pour le modèle à un défaut, on numérote les domaines  $\mathcal{Q}_\epsilon^i$  à partir de l'indice  $i$  (cf Figure IV.8).

Pour la suite de la construction de la solution on propose de lire la solution ondulatoire à partir de deux constructions différentes : une première qui se base sur des considérations géométriques et qui consiste à construire la solution à partir de pavages  $\Delta_n^m$ , et une seconde qui se base sur les champs mécaniques et qui consiste à construire la solution à partir de plusieurs faisceaux  $\mathcal{F}_m^s$ . La définition des pavages permettra de construire des courbes limites lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$ , tandis que les faisceaux permettront de déterminer les intervalles sur lesquels ces courbes limites sont valides.

Le pavage  $\Delta_n^m$  est défini (cf Figure IV.9) à partir des indices  $n$  et  $m$ , où  $m$  est le numéro du défaut précédemment traversé et  $n$  le numéro du pavage ( $n$  est réinitialisé à 1 à chaque traversée de défaut). Un pavage représente en fait l'ensemble des domaines  $\mathcal{Q}_\epsilon^i$  "impliqués" au cours d'un aller-retour d'une onde (on peut donc définir autant de pavages qu'il y a d'ondes, on choisira celle qui a été générée en sortie du précédent défaut traversé). Ainsi l'indice  $n$  évolue (lorsque  $\ell(T)$  se trouve dans la zone de ténacité  $k_2$  entre les défauts  $m$  et  $m + 1$ ) entre les valeurs 1 et  $n_m$ , où  $n_m$  est le numéro de l'ultime pavage avant que le front de décollement du film traverse le défaut numéro  $m + 1$ . Lorsque  $\ell(T)$  a traversé  $m$  défauts, les domaines  $\mathcal{Q}_\epsilon^i$  compris entre les pavages  $\Delta_{n_m-1}^{m-1}$  et  $\Delta_1^m$ , n'interviennent pas dans la définition des pavages (il s'agit des domaines non grisés sur la figure IV.9).

Le faisceau  $\mathcal{F}_m^s$  est défini (cf Figure IV.10) à partir de l'indice  $m$  qui représente le numéro du défaut précédemment traversé et de l'indice  $s$  qui définit le nombre d'allers-retours du faisceau. Il s'agit en fait de l'ensemble des domaines  $\mathcal{Q}_\epsilon^i$  compris entre les

trains d'onde  $o = 2m - 1$  et  $o = 2m$  lorsque les trains d'onde  $2m - 1$  et  $2m$  ont effectué  $s$  allers-retours. La figure IV.10 représente le faisceau  $\mathcal{F}_1^{12}$  (zone grisée) et on observe qu'il est généré à partir des domaines compris entre les trains d'onde **1** et **2** après que ces mêmes trains d'onde ont effectué 12 allers-retours. De même, la figure B.2 présente le faisceau  $\mathcal{F}_1^{17}$  qui lui aussi est généré à partir des domaines compris entre les trains d'onde **1** et **2** après que ces mêmes trains d'onde ont effectué 17 allers-retours. On qualifiera le faisceau  $\mathcal{F}_1^{12}$  comme étant **actif** car le domaine  $\mathcal{Q}_\epsilon^i$  appartenant à  $\mathcal{F}_1^{12}$  et ayant la plus grande charge a une vitesse de décollement qui est nulle, tandis que le faisceau  $\mathcal{F}_1^{17}$  sera qualifié comme étant **passif** car le domaine  $\mathcal{Q}_\epsilon^i$  appartenant à  $\mathcal{F}_1^{17}$  et ayant la plus grande charge a une vitesse de décollement qui est non nulle.

## C.2 Construction des champs mécaniques

Il s'agit maintenant de construire les évolutions des champs mécaniques et plus particulièrement les vitesses de décollement du film. La connaissance de ce champ nous permettra par la suite de construire l'évolution asymptotique du décollement du film lorsque la vitesse de chargement  $\epsilon$  tend vers zéro. Tout d'abord introduisons une seconde hypothèse sur la construction ondulatoire

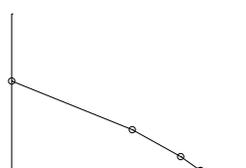
**Hypothèse 2** *On suppose qu'aucun faisceau interagit avec le front de décollement du film lorsque celui-ci traverse une zone de faible ténacité  $k_1$  (cf Figure B.1 page 183). L'hypothèse 1 est incluse dans l'hypothèse 2.*

Lorsque le nombre  $s$  d'allers-retours du faisceau  $\mathcal{F}_m^s$  est grand (pour une charge donnée, on ne peut pas distinguer s'il s'agit d'un faisceau actif ou passif), on supprime l'indice  $s$  et on représente un faisceau avec la notation  $\mathcal{F}_m$ . La figure B.1 (page 183) illustre l'hypothèse 2 et les figures (a) et (b) représentent le cas où le faisceau  $\mathcal{F}_1$  interagit avec le front du décollement du film (l'hypothèse 2 n'est pas vérifiée). Dans ce cas, on observe que le faisceau  $\mathcal{F}_3$  qui est généré par le défaut numéro 3 se trouve inclus dans le domaine  $\mathcal{F}_1$ . Lorsque l'hypothèse 2 est vérifiée (cf Figure B.1 (c) et (d) page 183) alors les faisceaux sont générés les uns après les autres comme on peut l'observer sur la figure IV.11.

**Remarque 12** *L'hypothèse 2 permet juste d'obtenir une solution particulière de notre problème ayant une construction ondulatoire simple. Lorsque l'hypothèse n'est plus vérifiée alors les démonstrations qui vont suivre sont plus complexes voire impossible à expliciter. On se contentera donc juste de rappeler les démonstrations effectuées dans le cadre d'un changement de la vitesse de chargement sur le modèle à un défaut (cf pages 165 et 162) en notant que celles nécessaires pour construire la solution, lorsque l'hypothèse 2 n'est pas vérifiée, seraient du même type.*

A partir de la définition du faisceau  $\mathcal{F}_m^s$ , on introduit le domaine  $\omega_z$  (cf Figure B.4 page 186) avec  $z \in \{0 \dots s\}$ . Ce domaine  $\omega_z$  permet d'introduire la

**Proposition 28** *Pour un faisceau  $\mathcal{F}_m^s$  donné, la construction des domaines  $\omega_z$  dépend du domaine initial  $\omega_0$  et de l'indice  $z$ . Autrement dit, les défauts qui seront traversés par la suite n'influent pas sur la construction de la suite  $\omega_z$ .*



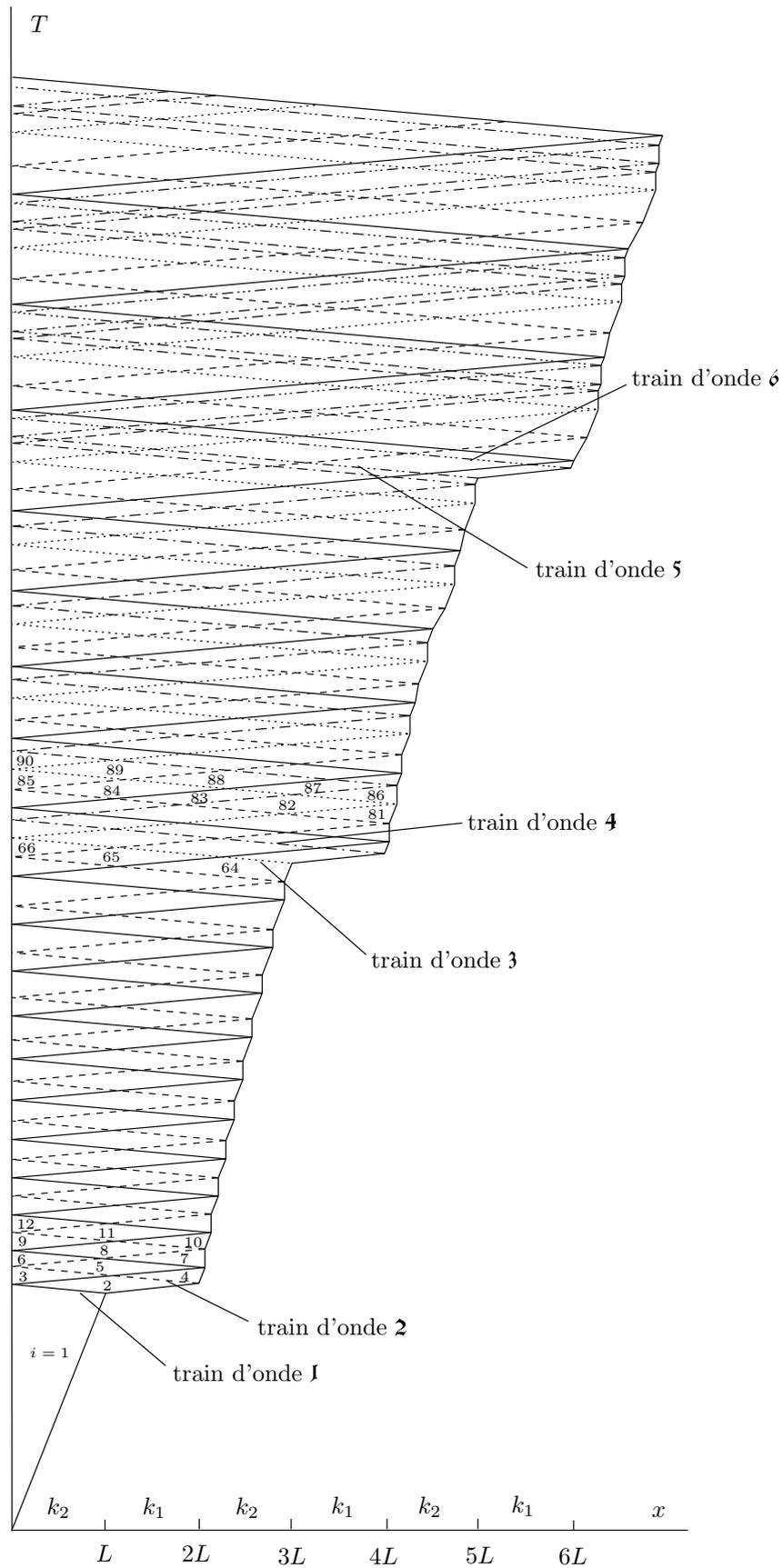


FIG. IV.8 : Présentation de la solution ondulatoire à partir des trains d'onde.

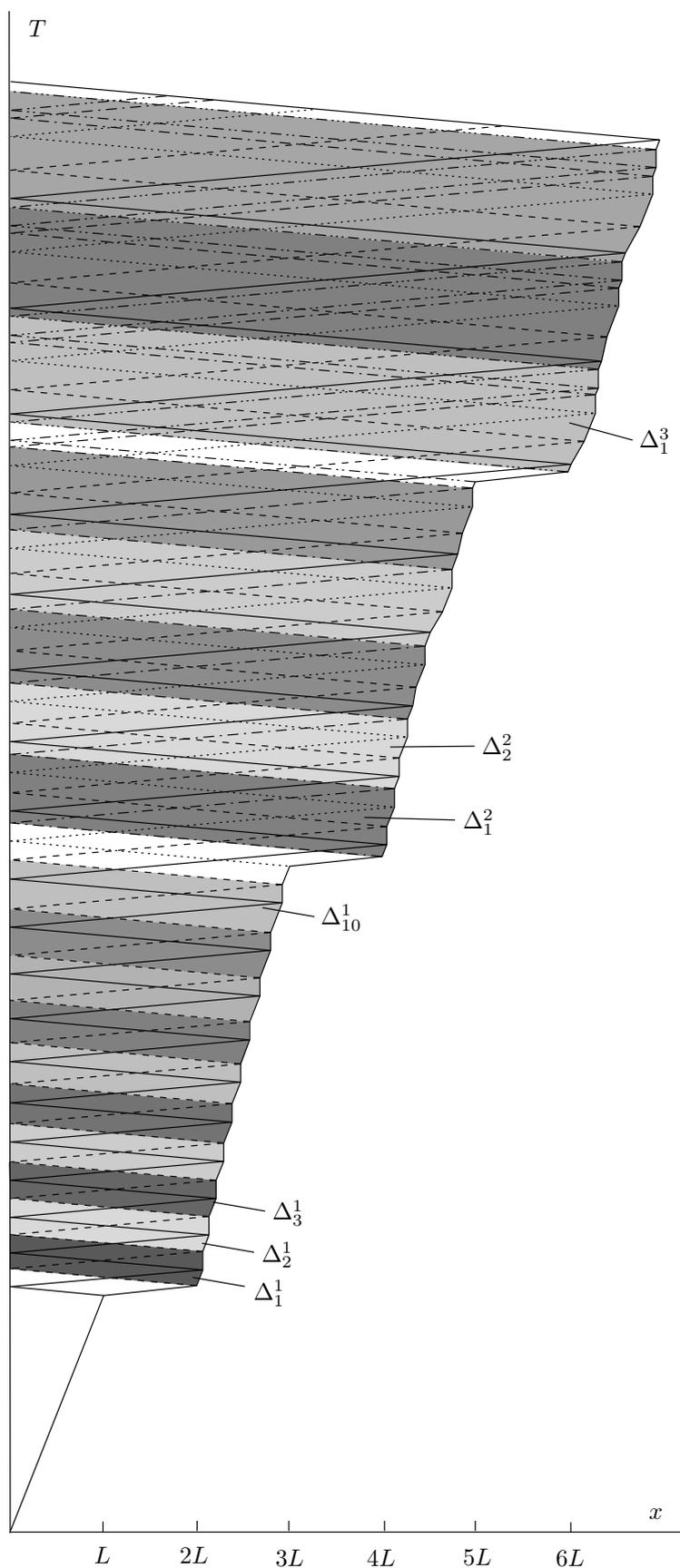
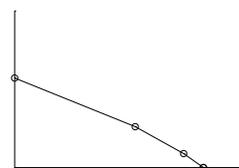


FIG. IV.9 : Définition des pavages  $\Delta_n^m$ .



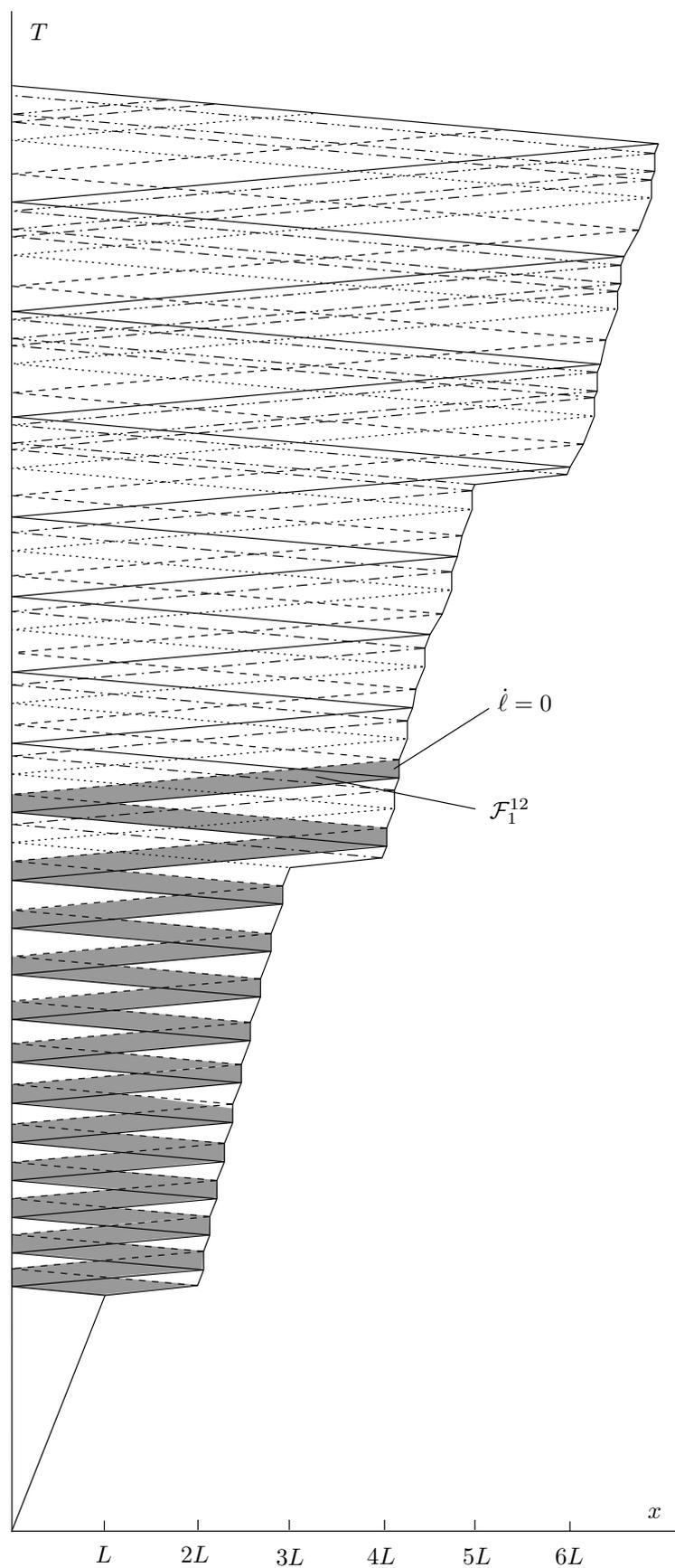


FIG. IV.10 : Présentation du faisceau  $\mathcal{F}_1^{12}$ .

*Preuve :*

On note par  $(e_z, v_z, \dot{\ell}_z)$  les champs du domaine  $\omega_z$ . On obtient que lorsque  $\epsilon$  tend vers zéro (en effectuant des développements limités pour  $\epsilon$  proche de zéro), alors tous les domaines  $\omega_0$  générés à partir des faisceaux  $\mathcal{F}_m^s \forall m > 0$  sont identiques. A partir de ces valeurs, la construction des champs du domaine  $\omega_1$  se déduit facilement (cf proposition 12) à partir du domaine  $\omega_0$  (en utilisant un domaine intermédiaire qui est celui appartenant au faisceau en question et étant le plus proche du bord  $x = 0$ ). On obtient que pour un  $\epsilon$  suffisamment petit, alors la vitesse de décollement du film est nulle ( $\dot{\ell}_1 = 0$ ). De même, on construit les champs du domaine  $\omega_z$  à partir de ceux du domaine  $\omega_{z-1}$  (encore une fois on utilise un domaine intermédiaire similaire à celui décrit précédemment) et on obtient que pour un  $\epsilon$  suffisamment petit

$$v_z = 0, e_z = -\frac{2k_1}{\sqrt{2k_2 + \epsilon^2} + \epsilon} - 2z\epsilon, \dot{\ell}_z = 0 \quad (\text{IV.24})$$

Au final, le raisonnement à adopter pour la construction de la solution est similaire à celui développé au chapitre III pour la construction de la solution ondulatoire avec un défaut (cf proposition 12) et qui est le suivant : pour un  $\epsilon > 0$  fixé, il existe  $N > 0$  tel que  $\forall z < N$  alors  $\dot{\ell}_z = 0$  et dans le cas contraire ( $z > N$ ) les champs du domaine  $\omega_z$  sont définis (il s'agit de la solution lorsqu'il n'y a pas de défauts) par

$$v_z = 1, e_z = -\sqrt{2k_2 + \epsilon^2}, \dot{\ell}_z = \frac{1}{\sqrt{2k_2 + \epsilon^2}} \quad (\text{IV.25})$$

Ainsi on retrouve bien la solution obtenue sur le modèle à un défaut : une première phase d'arrêts et de reprises ( $z < N$ ) caractérisant une couche limite, puis une phase de "reprise" ( $z > N$ ) où l'évolution converge (lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$ ) vers la solution quasi-statique.

On retiendra aussi (cf B.3.4) que  $N$  est caractérisé par

$$N = \frac{k_2 - k_1}{\epsilon\sqrt{2k_2}} \quad (\text{IV.26})$$

□

**Remarque 13** *Le paramètre  $N$  définit le passage d'un faisceau  $\mathcal{F}_m^s$  du statut actif au statut passif.*

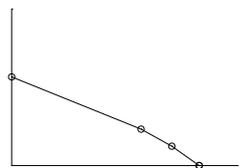
**Corollaire 8** *La connaissance des champs mécaniques obtenus avec la suite  $\omega_z$  générée à partir du faisceau  $\mathcal{F}_1^s$  permet de générer l'intégralité de la solution ondulatoire.*

*Preuve :*

La démonstration découle directement de la proposition précédente. En effet, puisque tous les faisceaux  $\mathcal{F}_m^s$  génèrent un domaine initial  $\omega_0$  ne dépendant pas de  $m$ , alors pour construire la solution, il suffit uniquement de connaître (pour une position de  $\ell(T)$  donnée) la valeur de  $z$  (qui ne dépend pas de  $m$ ). Cependant la position du front de décollement du film  $\ell(T)$  peut se trouver entre deux faisceaux différents. Dans ce cas les champs mécaniques sont donnés par (il s'agit de la solution lorsqu'il n'y a pas de défauts)

$$v_z = 1, e_z = -\sqrt{2k_2 + \epsilon^2}, \dot{\ell}_z = \frac{1}{\sqrt{2k_2 + \epsilon^2}} \quad (\text{IV.27})$$

□



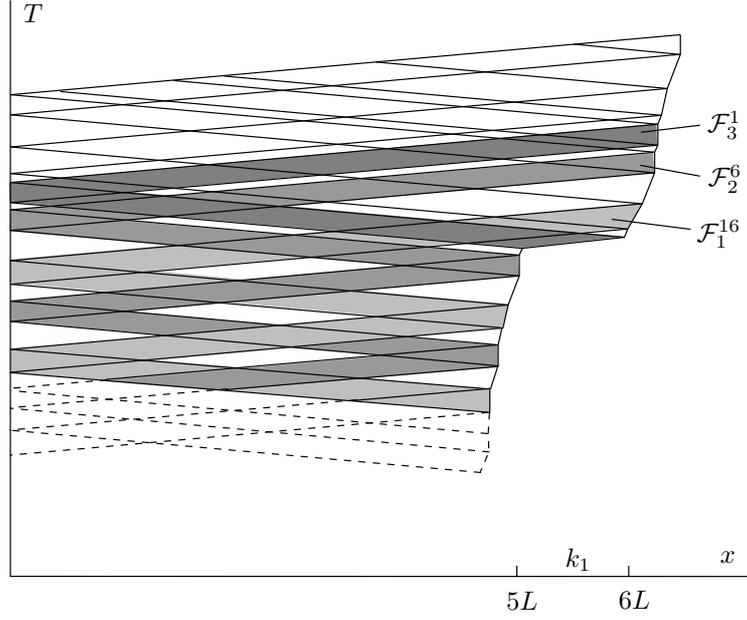


FIG. IV.11 : Evolution des faisceaux après la traversée du troisième défaut de ténacité.

### C.3 Construction des courbes limites

On se propose de construire l'évolution de  $\ell(T)$  entre les défauts numéro  $m$  et  $m + 1$ . Tout d'abord, comme le présente la partie précédente consacrée à l'introduction des champs mécaniques liés aux faisceaux  $\mathcal{F}_m^s$ ,  $\ell(T)$  évolue entre les défauts  $m$  et  $m + 1$  avec une vitesse de décrolement qui oscille entre les valeurs 0 et  $1/\sqrt{2k_2 + \epsilon^2}$ . Lorsque  $\ell(T)$  traverse le premier défaut, alors les pavages  $\Delta_n^1$  ( $n \in \{1 \dots n_1\}$ ) permettent de construire (géométriquement) la solution et en utilisant les deux suites (III.27) on obtient la courbe limite  $\ell \mapsto \mathcal{T}(\ell)$  (cf (III.24)). L'évolution de  $\ell(T)$  est décrite par cette courbe limite tant que le nombre de pavage reste inférieur à  $N$ . Si la condition  $n_1 > n > N$  est vérifiée (et ce, tant que  $\ell(T) < 3L$ ) alors l'évolution du décrolement du film regagne la solution quasi-statique (le faisceau  $\mathcal{F}_1^s$  est "actif" tant que  $s \leq N$ ). (Ensuite lorsque  $\ell(T)$  traversera le défaut suivant alors l'évolution sera encore décrite à l'aide des suites (III.27)).

Dans le cas contraire ( $n_1 < N$ ) alors, en sortie du deuxième défaut, l'évolution du décrolement du film est pilotée à l'aide des pavages  $\Delta_n^2$  (un second faisceau  $\mathcal{F}_2^s$  est généré) avec  $n \in \{1 \dots n_2\}$  (cf Figure IV.9). Ces pavages présentent deux arrêts de  $\ell(T)$  et en utilisant une démarche similaire à celle utilisée pour construire (III.27) on construit deux suites

$$\begin{cases} T_{n+1} = T_n + \epsilon(a_{n+1} - a_n) \\ T_{n+1} = T_n + 2h + (a_{n+1} - a_n)\sqrt{2k_2 + \epsilon^2} \end{cases} \text{ avec } h = \frac{2\epsilon L k_2}{k_2 - k_1} \quad (\text{IV.28})$$

Ces suites permettent de construire une courbe limite similaire à (III.27) (on présentera par la suite la construction de cette courbe limite dans un cadre général) que l'on note  $\ell \mapsto \mathcal{T}_2(\ell)$ . A partir de cet instant, deux cas de figure sont à analyser : il s'agit des instants où les faisceaux  $\mathcal{F}_1^s$  et  $\mathcal{F}_2^s$  deviendront inactifs. Compte tenu de la construction, le faisceau  $\mathcal{F}_1^s$  deviendra inactif avant le faisceau  $\mathcal{F}_2^s$ . Lorsque le faisceau  $\mathcal{F}_1^s$  devient inactif, alors les pavages ne présentent plus qu'un arrêt du décrolement du film et dans ce cas  $\ell(T)$  est

décrit par les suites (III.27).

Ensuite, au fur et à mesure des défauts traversés, le nombre de faisceaux générés augmente et avec la “taille” (par rapport à la charge  $T$ ) du pavage  $\Delta_n^m$ . Supposons que l’on vient juste de traverser le défaut numéro  $m$ . L’évolution de  $\ell(T)$  est obtenue en comptabilisant le nombre de faisceaux “actif” (que l’on note  $P$ ), ce qui permet de construire la courbe limite lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$ . A partir de ce point, deux aspects sont à analyser : soit  $\ell(T)$  a le temps de rejoindre le défaut numéro  $m + 1$  ou soit un des faisceaux actifs devient inactif. Dans ce cas, le nombre de faisceaux actifs est égal à  $P - 1$  et l’évolution du décollement du film est pilotée par une courbe limite différente. La connaissance du point (dans le plan espace-charge) où un des faisceaux passera du statut actif au statut inactif est essentiel puisqu’il permet de donner les conditions initiales pour construire la courbe limite suivante. De façon générale, la construction de la courbe limite lorsque le nombre de faisceaux “actifs” est  $P$  peut se mettre sous la forme

**Proposition 29** *Lorsque l’évolution du film est décrite par les pavages  $\Delta_n^m$  ayant  $P$  arrêts du front de décollement du film, alors l’évolution de  $\ell(T)$  est pilotée par les suites  $(a_n, T_n)$  définies telles que*

$$\begin{cases} T_{n+1} = T_n + \epsilon(a_{n+1} - a_n) \\ T_{n+1} = T_n + Ph + (a_{n+1} - a_n)\sqrt{2k_2 + \epsilon^2} \end{cases} \text{ avec } h = \frac{2\epsilon Lk_2}{k_2 - k_1} \text{ et } m \in \mathbb{N}^* \quad (\text{IV.29})$$

Lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$ , les points  $(a_n, T_n)$  convergent dans le plan espace-charge vers les points  $(\ell, \mathcal{T}_P(\ell))$  définis tels que

$$\mathcal{T}_P(x) = T_0 + \sqrt{2k_2}(x - a_0 + \frac{Lk_2P}{k_2 - k_1} \log \frac{x(k_2 - k_1) - PLk_2}{a_0(k_2 - k_1) - PLk_2}) \quad (\text{IV.30})$$

où  $T_0$  et  $a_0$  sont respectivement les conditions initiales des suites  $T_n$  et  $a_n$  (qui sont déterminées soit lorsque  $\ell(T)$  sort d’un défaut où soit lorsque un faisceau devient inactif).

*Preuve :*

La construction de ces courbes limites est obtenue en effectuant un calcul similaire à celui développé page 70 dans le cadre du modèle de film à un défaut. Les suites  $T_n$  et  $a_n$  que l’on considère, définissent une courbe enveloppe du même type que celle présentée sur la figure III.8. La seule différence est sur la définition du pavage élémentaire  $\Delta_n^m$ . En effet la suite que l’on introduit, possède  $P$  arrêts du front de fissure par pavage (chaque arrêt nécessite un accroissement élémentaire  $h = (2\epsilon Lk_2)/(k_2 - k_1)$  de la charge). Par exemple la figure IV.12 représente un pavage élémentaire ayant 7 arrêts de la charge.

□

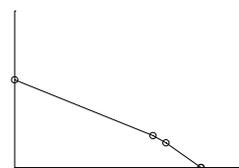
**Définition 11** *D’une façon plus générale on définit la fonction  $x \mapsto \mathcal{M}(x, P, \tau, \varphi)$  telle que*

$$\mathcal{M}(x, P, \tau, \varphi) = \tau + \mathcal{N}(x, P) - \mathcal{N}(\varphi, P) \quad (\text{IV.31})$$

avec

$$\mathcal{N}(x, P) = \sqrt{2k_2} \left( x + \frac{Lk_2P}{k_2 - k_1} \log (x(k_2 - k_1) - PLk_2) \right) \quad (\text{IV.32})$$

où  $\tau$  et  $\varphi$  représentent les conditions initiales de la courbe limite ( $a_0 = \varphi$  et  $T_0 = \tau$ ).



**Corollaire 9** Soit  $\varphi_1 \in \mathbb{R}^+$  et  $\tau_1 \in \mathbb{R}$ , alors  $\forall \varphi_2 \in \mathbb{R}^+$  il existe  $\tau_2 \in \mathbb{R}$  tel que  $\mathcal{M}(x, P, \tau_1, \varphi_1) = \mathcal{M}(x, P, \tau_2, \varphi_2)$  pour  $x \in [\max(\varphi_1, \varphi_2), +\infty)$ .

*Preuve :*

Il suffit de choisir  $\tau_2$  tel que

$$\tau_2 = \tau_1 + \sqrt{2k_2} \left( \varphi_2 - \varphi_1 + \frac{Lk_2P}{k_2 - k_1} \log \frac{\varphi_2(k_2 - k_1) - PLk_2}{\varphi_1(k_2 - k_1) - PLk_2} \right) \quad (\text{IV.33})$$

et on obtient le résultat souhaité. □

**Remarque 14** Lorsque  $\tau$  varie, la courbe limite  $x \mapsto \mathcal{M}(x, P, \tau, \varphi)$  (cf (IV.31)) est uniquement translatée selon l'axe des ordonnées.

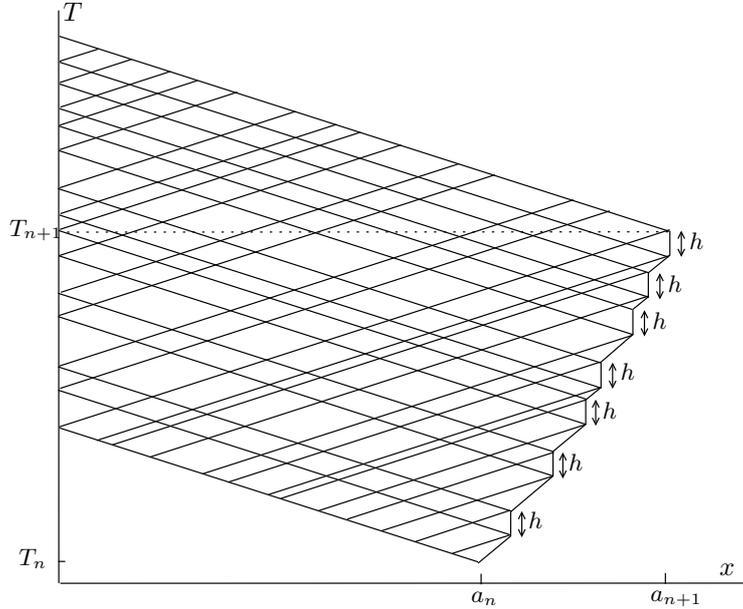


FIG. IV.12 : Exemple de pavage ayant 7 arrêts du front de fissure

Un dernier aspect important pour la construction de la solution asymptotique est de pouvoir quantifier la charge  $T$  où un ou plusieurs faisceaux deviennent inactifs. Le résultat suivant en apporte la réponse

**Proposition 30** Soit un couple  $(T^1, a^1)$  appartenant à la courbe  $\mathcal{M}(x, P_1, \tau, \varphi_1)$ , on définit par  $Q$  le nombre de pavages nécessaires pour que la solution à  $\epsilon$  fixé évolue de  $\tau$  à  $T^1$ . Ainsi la construction du couple  $(T^2, a^2)$  appartenant à la courbe  $\mathcal{M}(x, P_2, \tau, \varphi_2)$  et tel que le nombre de pavages nécessaires pour décrire la solution entre les charges  $\tau$  et  $T^2$  soit  $Q$ , est obtenue graphiquement en prenant l'intersection entre la droite  $x \mapsto \mathcal{R}(x, P_1, P_2, \varphi_1, \varphi_2)$  et la courbe  $\mathcal{M}(x, P_2, \tau, \varphi_2)$ . La droite  $x \mapsto \mathcal{R}(x, P_1, P_2, \varphi_1, \varphi_2)$  est définie comme étant tangente à la courbe  $x \mapsto \mathcal{S}(x, P_1, P_2, \varphi_1, \varphi_2)$  au point  $(T^1, a^1)$

où  $x \mapsto \mathcal{S}(x, P_1, P_2, \varphi_1, \varphi_2)$  est défini tel que

$$\frac{\partial \mathcal{S}(x, P_1, P_2, \varphi_1, \varphi_2)}{\partial x} = \frac{\sqrt{2k_2}}{-x + \frac{k_2 LP_2(-\varphi_1+x) + \varphi_2(k_2 LP_1 + k_1 x - k_2 x)}{\varphi_1(k_1 - k_2) + k_2 LP_1}} \quad (\text{IV.34})$$

$$\left( \frac{(\varphi_1(k_1 - k_2) + \varphi_2(-k_1 + k_2) + k_2 L(P_1 - P_2))(\varphi_1 - x)}{\varphi_1(k_1 - k_2) + k_2 LP_1} + \frac{k_2 L(P_1 - P_2) \log \left[ \frac{k_2 LP_1 + k_1 x - k_2 x}{\varphi_1 k_1 - \varphi_1 k_2 + k_2 LP_1} \right]}{k_1 - k_2} \right)$$

$$\text{et } \mathcal{R}(x, P_1, P_2, \varphi_1, \varphi_2) = \frac{\partial \mathcal{S}(x)}{\partial x}$$

*Preuve :*

Il s'agit de montrer que la droite  $x \mapsto \mathcal{R}(x, P_1, P_2, \varphi_1, \varphi_2)$  (obtenue en dérivant  $x \mapsto \mathcal{S}(x, P_1, P_2, \varphi_1, \varphi_2)$  en  $x = a^1$  et en faisant passer la droite  $x \mapsto \mathcal{R}(x, P_1, P_2, \varphi_1, \varphi_2)$  par le point  $(T^1, a^1)$ ) est identique à la droite passant par les points  $(T^1, a^1)$  et  $(T^2, a^2)$ . D'après la définition de  $n$  donnée précédemment et en notant  $a_n$  et  $T_n$  les deux suites qui génèrent  $\mathcal{M}(x, P_1, \tau, \varphi_1)$ , et  $b_n$  et  $U_n$  les deux suites qui génèrent  $\mathcal{M}(x, P_2, \tau, \varphi_2)$  on obtient

$$a_n = a^1, \quad T_n = T^1, \quad b_n = a^2, \quad U_n = T^2 \quad (\text{IV.35})$$

Ainsi on définit  $\beta$  comme étant la pente de la droite passant par les points  $(T^1, a^1)$  et  $(T^2, a^2)$  telle que

$$\beta = \frac{U_n - T_n}{b_n - a_n}. \quad (\text{IV.36})$$

En utilisant la relation développée page 70 qui relie  $n$  et  $\epsilon$  :

$$(n+1)\epsilon = \sqrt{\frac{k_2}{2}} \log \left[ \frac{k_2 LP_1 + k_1 x - k_2 x}{\varphi_1 k_1 - \varphi_1 k_2 + k_2 LP_1} \right] \quad (\text{IV.37})$$

ainsi que la relation

$$X^{n+1} = \frac{-k_2 LP_1 + (-k_1 + k_2)x}{\varphi_1(-k_1 + k_2) - k_2 LP_1} \quad (\text{IV.38})$$

introduite pour la construction de la courbe limite  $x \mapsto \mathcal{M}(x, P, \tau, \varphi)$  on obtient :

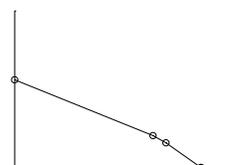
$$\begin{cases} T_{n+1} = T_0 + \sqrt{2k_2} \left( x - a_0 - \frac{P_1 L k_2}{k_1 - k_2} \log \frac{x(k_1 - k_2) + k_2 LP_1}{a_0(k_1 - k_2) + k_2 LP_1} \right) \\ a_{n+1} = x \\ U_{n+1} = U_0 + \frac{(b_0(k_1 - k_2) + k_2 LP_2)(a_0 -) \sqrt{2k_2}}{a_0(k_2 - k_1) - k_2 LP_1} + \frac{LP_2 k_2 \sqrt{2k_2}}{k_2 - k_1} \log \frac{x(k_1 - k_2) + k_2 LP_1}{a_0(k_1 - k_2) + k_2 LP_1} \\ b_{n+1} = \frac{k_2 LP_2(-a_0 + x) + b_0(k_2 LP_1 + k_1 x - k_2 x)}{a_0(k_1 - k_2) + k_2 LP_1} \end{cases} \quad (\text{IV.39})$$

Ces équations nous permettent d'obtenir le résultat puisque  $\beta = \partial \mathcal{S}(x, P_1, P_2, \varphi_1, \varphi_2) / \partial x$ . Ensuite la fonction  $x \mapsto \mathcal{S}(x, P_1, P_2, \varphi_1, \varphi_2)$  est déterminée en intégrant analytiquement  $\beta$  par rapport à  $x$ .

□

### Méthode de construction :

on se propose de construire la solution asymptotique ( $\epsilon \rightarrow 0$ ) de façon incrémentale : on se donne la solution pour  $T \in [0, \infty)$  lorsque le modèle comporte au total  $m - 1$  défauts, puis (en utilisant des considérations graphiques) on construit la solution lorsque le modèle comporte  $m$  défauts en transformant graphiquement la solution avec  $m - 1$  défauts. Ainsi



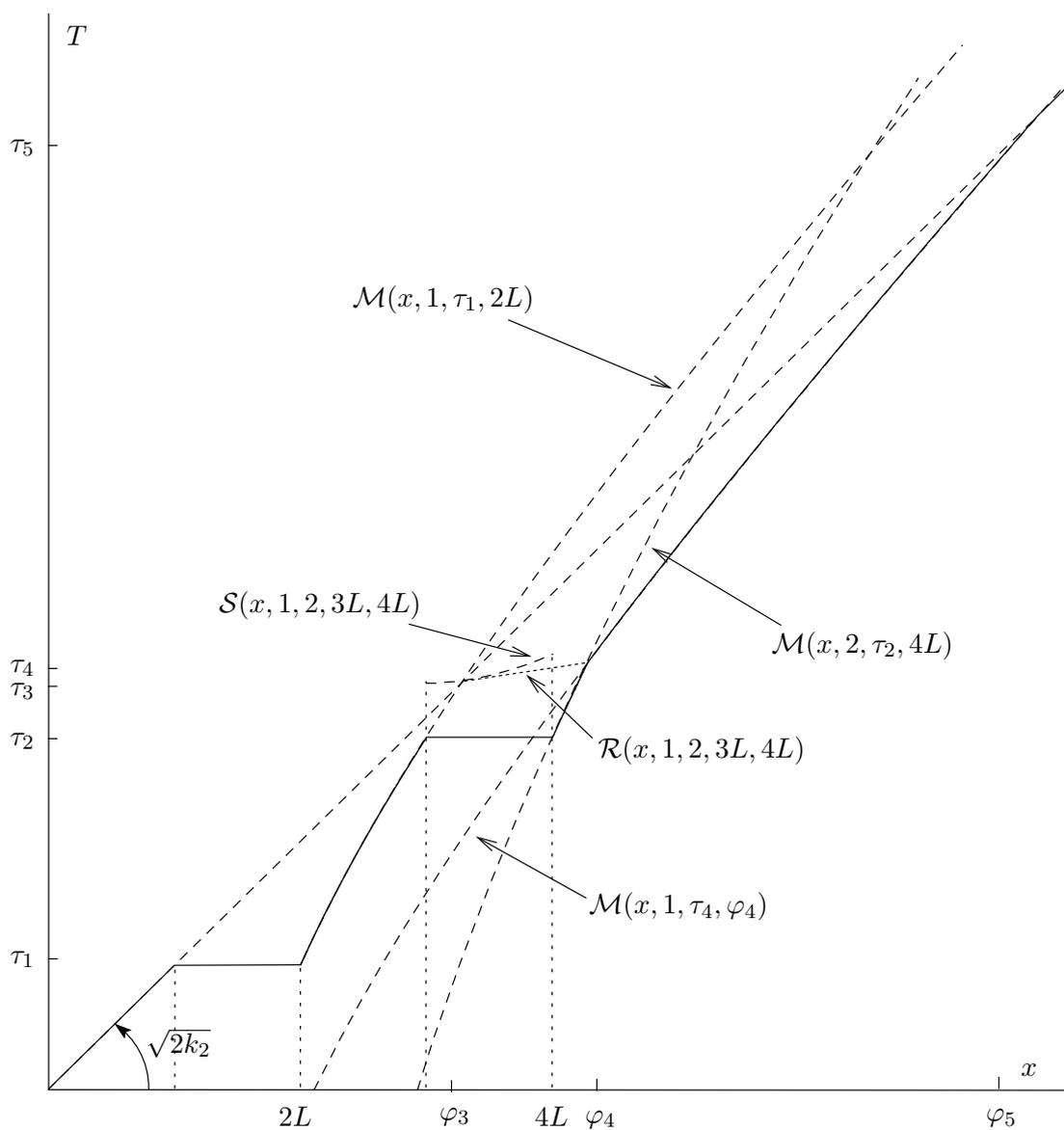


FIG. IV.13 : Evolution de  $T \mapsto \ell(T)$  lorsque le modèle comporte deux défauts de ténacité

l'étude qui suit, présente la construction asymptotique pas à pas (on construit d'abord la solution  $m = 1$  puis à partir de cette solution on construit celle avec  $m = 2$  et ainsi de suite).

### Cas $m = 1$

Lorsque le modèle comporte un défaut, la solution asymptotique dans le plan espace charge est donnée par  $x \mapsto \mathcal{T}(x)$  (cf Figure III.12), qui est aussi représentée par la courbe  $x \mapsto \mathcal{M}(x, 1, \tau_1, 2L)$  de la figure IV.13.

### Cas $m = 2$

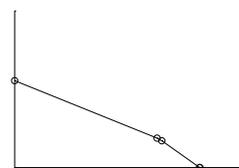
Il s'agit de construire à partir de la courbe limite  $x \mapsto \mathcal{M}(x, 1, \tau_1, 2L)$ , l'évolution de  $T \mapsto \ell(T)$  pour  $x > 4L$  (cf Figure IV.13). Lorsque le front de fissure atteint le second défaut alors un second faisceau  $\mathcal{F}_2$  apparaît et oscille parallèlement au faisceau  $\mathcal{F}_1$ . Ainsi le pavage de référence est modifié et  $\ell(T)$  évolue selon la courbe  $x \mapsto \mathcal{M}(x, 2, \tau, 4L)$ . Cette courbe est obtenue en déplaçant verticalement la courbe  $x \mapsto \mathcal{M}(x, 2, \tau, \varphi)$  pour la faire passer par le point  $(x = 4L, T = \tau_2)$  (cf Figure IV.13). L'intersection entre la droite  $T\sqrt{2k_2x}$  et la courbe  $x \mapsto \mathcal{M}(x, 1, \tau_1, 2L)$  donne le point  $(x = \varphi_3, T = \tau_3)$ , et on utilise la courbe  $x \mapsto \mathcal{R}(x, 1, 2, 3L, 4L)$  pour déplacer ce point sur la nouvelle couche limite en  $(x = \varphi_4, T = \tau_4)$ . Ensuite lorsque  $\ell(T) > \varphi_4$  le faisceau  $\mathcal{F}_1$  devient "inactif" et donc, seul le faisceau  $\mathcal{F}_2$  est "actif". On se retrouve donc avec un pavage de référence du type de celui de la figure III.12 et dont l'évolution  $T \mapsto \ell(T)$  est régie par la courbe  $x \mapsto \mathcal{M}(x, 1, \tau_4, \varphi_4)$ . Cette nouvelle couche limite prend fin lorsqu'elle rencontre la droite  $T = \sqrt{2k_2x}$  au point  $(x = \varphi_5, T = \tau_5)$ .

### Cas $m = 3$

La construction de la solution asymptotique avec 3 défauts se base sur celle avec 2 défauts (cf Figure IV.14). Tout d'abord, lorsque le front de fissure arrive sur le troisième défaut en  $(x = 5L, T = \tau_6)$  alors la propagation de  $T \mapsto \ell(T)$  est instable et un faisceau  $\mathcal{F}_3$  est généré. Puisque le pavage est constitué de trois faisceaux dont un inactif, alors l'évolution du front de fissure se fait selon la courbe  $x \mapsto \mathcal{M}(x, 2, \tau_6, 6L)$ . Cependant la fin de la couche limite du modèle à deux défauts en  $(x = \varphi_5, T = \tau_5)$  doit être reportée dans celui à 3 défauts. On utilise pour cela la courbe  $x \mapsto \mathcal{S}(x, 1, 2, 5L, 6L)$  (qui passe par le point  $(x = \varphi_5, T = \tau_5)$ ) et on obtient le point  $(x = \varphi_7, T = \tau_7)$ . Ensuite lorsque  $\ell(T) > \varphi_7$  alors le faisceau  $\mathcal{F}_2$  devient inactif et donc le pavage de référence est constitué d'un seul faisceau actif. De ce fait la solution asymptotique est une courbe de type  $x \mapsto \mathcal{M}(x, 1, \tau, \varphi)$  passant par le point  $(x = \varphi_7, T = \tau_7)$  que l'on note  $x \mapsto \mathcal{M}(x, 1, \tau_7, \varphi_7)$ . Puis cette courbe rencontre la droite  $T = \sqrt{2k_2x}$  au point  $(x = \varphi_8, T = \tau_8)$ .

### Cas $m = 6$

Pour un nombre de défauts supérieur, la construction reste la même. On présente par exemple avec la figure IV.15 la solution asymptotique pour  $m = 6$ . Lorsque le front de fissure évolue entre les défauts 3 et 4, nous avons vu précédemment que  $T \mapsto \ell(T)$  évolue tout d'abord selon la courbe  $x \mapsto \mathcal{M}(x, 2, \tau_6, 6L)$ . Puis  $\ell(T)$  se propage brutalement dans le quatrième défaut au point  $(x = 7L, T = \tau_9)$  et génère le faisceau  $\mathcal{F}_4$ . De ce fait, nous avons 4 faisceaux dont 3 actifs et donc  $T \mapsto \ell(T)$  évolue selon la courbe  $x \mapsto \mathcal{M}(x, 3, \tau_9, 8L)$ . Ensuite, au cinquième défaut le faisceau  $\mathcal{F}_5$  est généré et nous avons 4 faisceaux actifs. Ainsi  $T \mapsto \ell(T)$  évolue selon la courbe  $x \mapsto \mathcal{M}(x, 4, \tau_{10}, 10L)$  jusqu'au point  $(x = \varphi_{14}, T = \tau_{14})$  qui correspond à la fin de la couche limite du modèle avec 2 défauts. Après ce point, le faisceau  $\mathcal{F}_2$  devient inactif et le nouveau pavage donne une



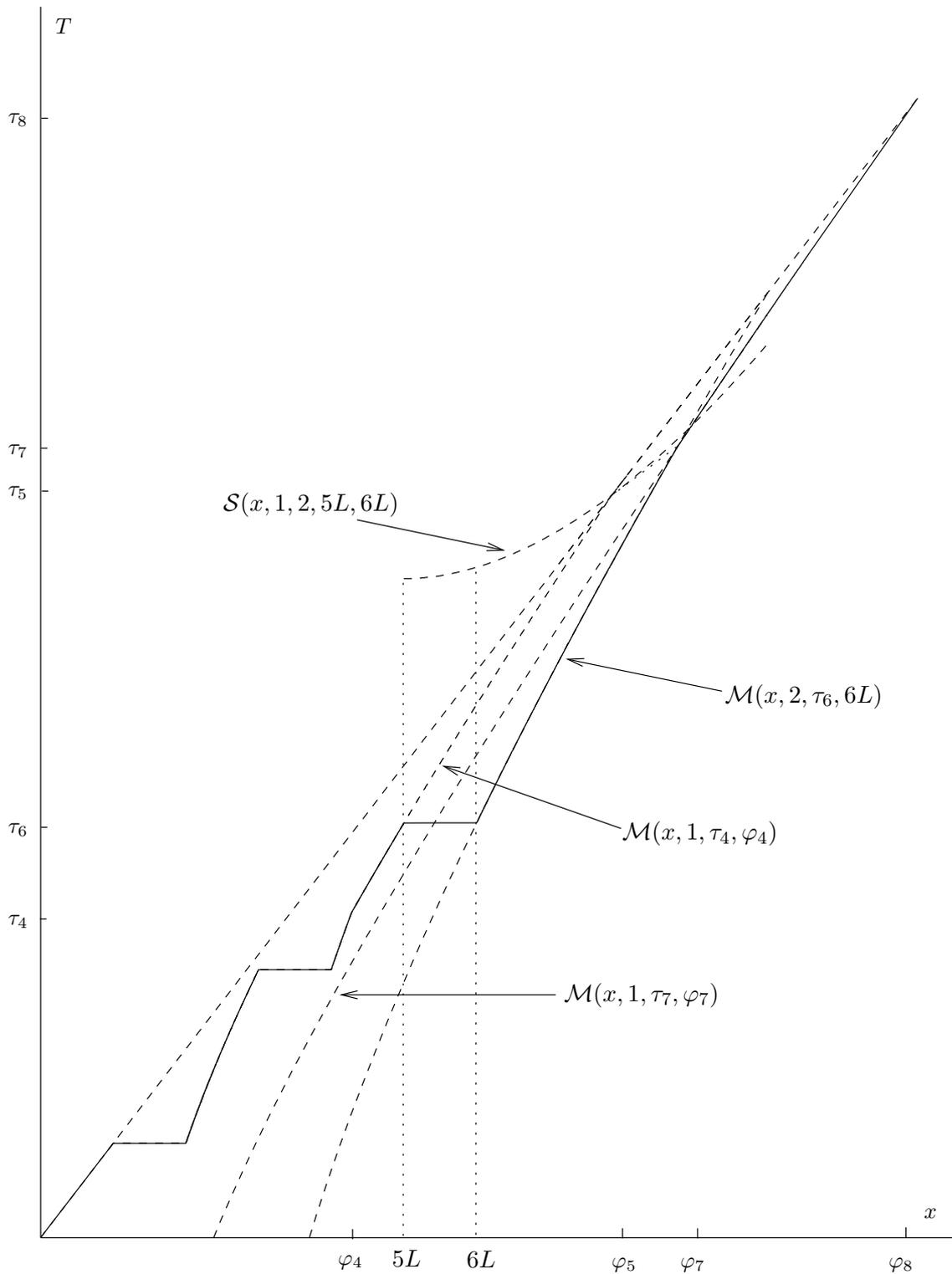


FIG. IV.14 : Evolution de  $T \mapsto \ell(T)$  lorsque le modèle comporte trois défauts de ténacité

évolution de  $T \mapsto \ell(T)$  obtenue par la courbe  $x \mapsto \mathcal{M}(x, 3, \tau_{14}, \varphi_{14})$ .

**Remarque 15** Une implémentation numérique de la construction de la solution asymptotique pourrait être envisagée

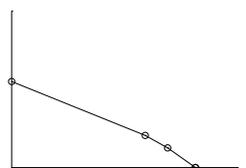
#### C.4 Approche numérique de la solution dynamique

Le calcul de la solution asymptotique peut être obtenu d'une façon différente. Il s'agit de considérer l'intégralité des allers-retours des ondes et de construire l'évolution du décollement du film associée. Ensuite, la solution asymptotique est obtenue en faisant tendre numériquement  $\epsilon$  vers 0. La construction de la solution ondulatoire est obtenue en développant un algorithme de type récursif sous *Python*. En fait, à chaque interaction entre deux ondes ou entre une onde et le front de décollement du film ou encore entre  $\ell(T)$  et une discontinuité de ténacité, l'algorithme calcule les champs mécaniques à travers les domaines générés juste après cette interaction, puis à partir de ces nouveaux champs, il recherche l'interaction (entre deux ondes ...) suivante et ainsi de suite. Le calcul devient rapidement exhaustif, ainsi différentes techniques de stockage (en fonction du résultat que l'on souhaite obtenir) des champs mécaniques sont développées. En particulier on utilise une approche qui consiste à conserver uniquement la valeur des champs au voisinage du décollement du film (cela permet d'obtenir des résultats avec un grand nombre de défauts) et une autre qui consiste à conserver toutes les ondes et différents champs mécaniques (cette approche permet par la suite d'obtenir les évolutions des énergies au cours de la propagation du décollement du film).

Dans la suite de la présentation nous considérerons des évolutions de ténacité décrites par (IV.40). En particulier, cette ténacité permet (pour un jeu de paramètres correctement choisis) d'obtenir une solution quasi-statique métastable relativement bien décrite dans le plan espace-charge (les deux droites enveloppes de la solution métastable ont des pentes qui sont significativement différentes). En effet le paramètre  $\theta$  permet de régler la proportion entre les zones de ténacité  $k_1$  et les zones de ténacité  $k_2$ .

$$k(x) = \begin{cases} k_2 & \text{lorsque } x \in [(i-1)L, iL - \theta L] \\ k_1 & \text{lorsque } x \in [iL - \theta L, iL] \end{cases} \quad \text{avec } i \in \mathbb{N}^* \text{ et } \theta \in ]0, 1[ \quad (\text{IV.40})$$

La figure IV.16 représente l'évolution du décollement du film dans le plan espace-charge pour différentes valeurs de  $\epsilon$  et de  $\theta$ . Il semblerait à première vue que l'évolution de  $\ell(T)$  ne converge pas vers la solution quasi-statique (UGM) ( $\ell \mapsto \sqrt{2((1-\theta)k_2 + \theta k_1)}\ell$ ) ni vers aucune autre solution quasi-statique (la droite  $\ell \mapsto \sqrt{2k_2}\ell$  représente la courbe enveloppe supérieure de la solution métastable). On observe que pour un jeu de paramètre donné, la solution converge lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$  vers une certaine limite. (On observe que l'écart entre la solution limite et la solution quasi-statique (UGM) varie en fonction des paramètres du modèle). Ainsi ces résultats sembleraient mettre en avant le fait qu'une énergie cinétique résiduelle est piégée par le modèle (cf Figure B.5). Plus particulièrement chaque défaut (zone de ténacité  $k_1$ ) génère une énergie cinétique qui sera totalement ou partiellement relaxée dans la zone suivante de forte ténacité (zone de ténacité  $k_2$ ). Ensuite, lors de la traversée du défaut suivant, une énergie cinétique sera créée venant s'ajouter à l'énergie cinétique résiduelle déjà présente dans le modèle, puis cette énergie tentera à nouveau de se relaxer dans la zone suivante de ténacité  $k_2$ . D'un point de vue global (cf



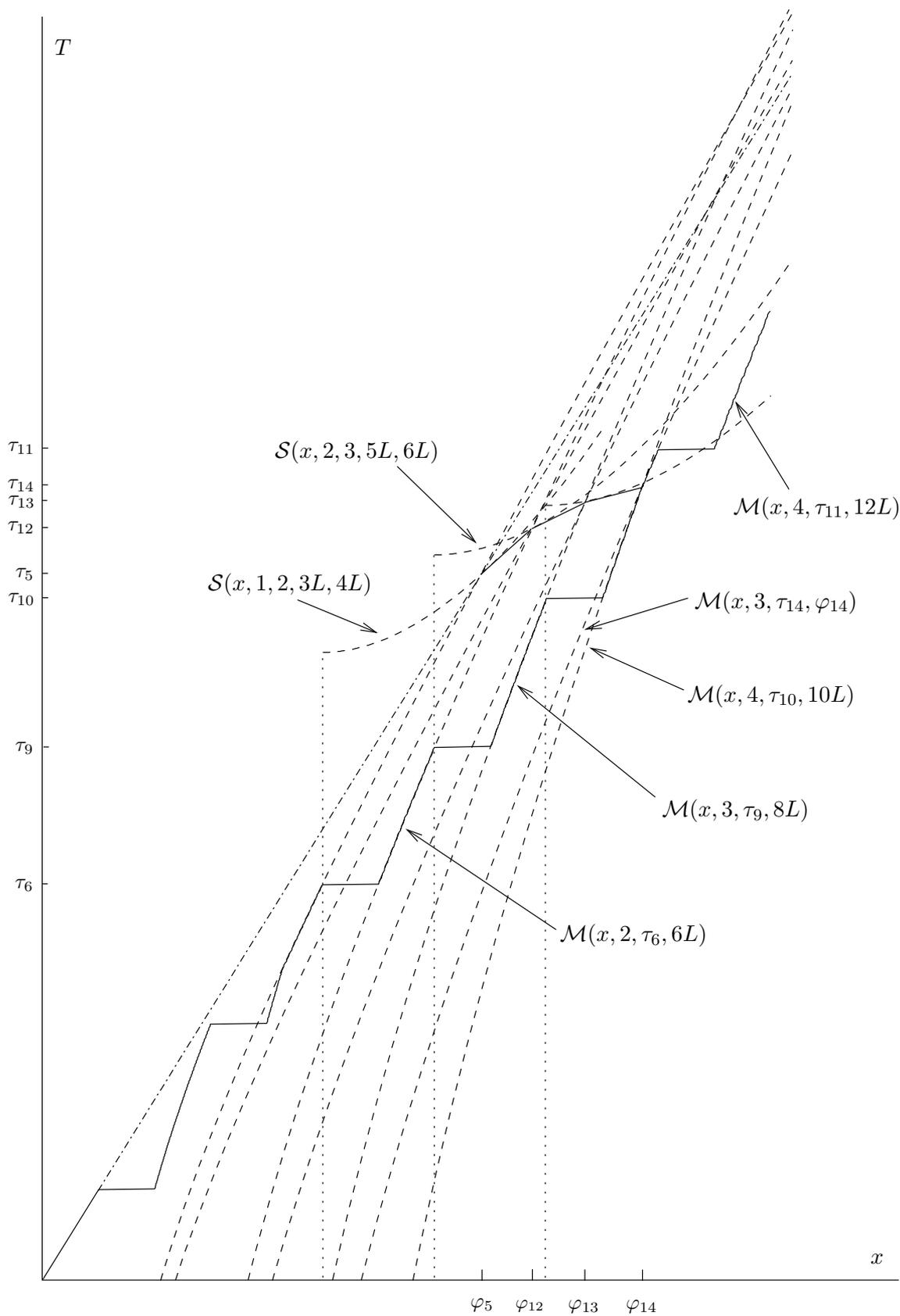


FIG. IV.15 : Evolution de  $T \mapsto \ell(T)$  lorsque le modèle comporte six défauts de ténacité

Figure B.6 et B.7) on observe que ces phases de “création” d’énergie cinétique et “relaxation” de l’énergie cinétique, font globalement augmenter l’énergie cinétique. Lorsque l’on se place suffisamment loin ( $L \rightarrow 0$ ) l’énergie cinétique semblerait croître selon une droite.

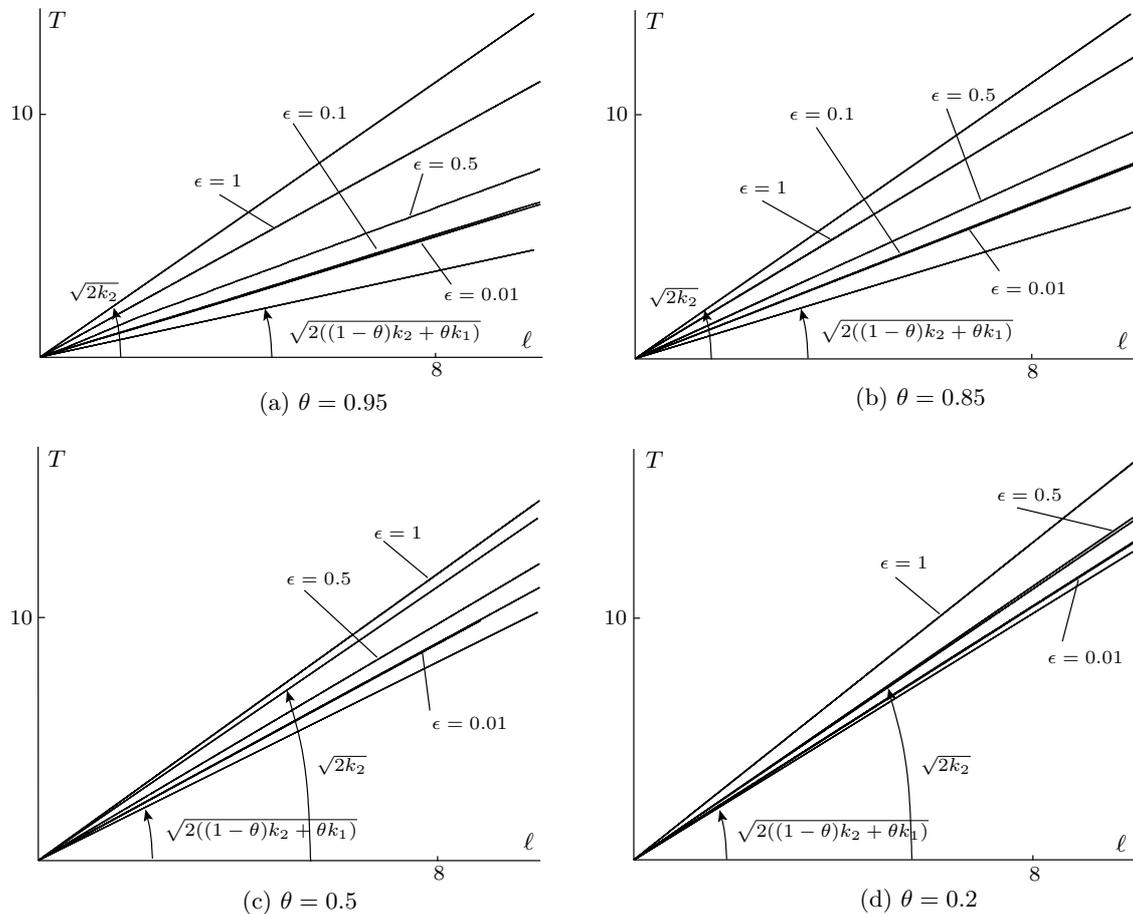
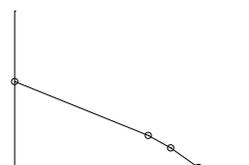


FIG. IV.16 : Evolution du décollement du film dans le plan espace-charge pour différentes vitesses de chargement  $\epsilon$  et pour différentes valeurs de  $\theta$  avec  $L = 10^{-4}$ ,  $k_1 = 0.05$  et  $k_2 = 1$

Ces différents résultats militent en faveur d’une évolution du front de fissure qui est linéaire dans le plan espace-charge. On peut donc avancer que le décollement du film est piloté par une loi d’évolution (cf B.5.3) de type  $\dot{\ell}_T = A$  où  $A$  est une constante dépendante des paramètres du modèle. Lorsque la vitesse de chargement est de l’ordre de 1 ( $\epsilon = 1$ ) alors deux comportements différents sont à observer : pour  $\theta < 0.5$  alors la ténacité apparente de la solution dynamique est supérieure à celle lorsqu’il n’y a pas de défauts, alors que lorsque  $\theta > 0.5$  c’est l’inverse.

Les calculs numériques précédemment effectués, présentent le passage à la limite en  $\epsilon$  (lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$ ) avec une taille de défaut  $L$  fixée. Lorsque l’on effectue le passage à la limite en  $L$  pour un  $\epsilon$  fixé alors le résultat est présenté sur la figure IV.17. On observe que la variation de  $L$  ne modifie la solution qu’à un rapport homothétique près. Ainsi ces différents aspects militent en faveur de la commutativité au niveau des passages à la limite sur la taille des défauts et la vitesse du chargement.



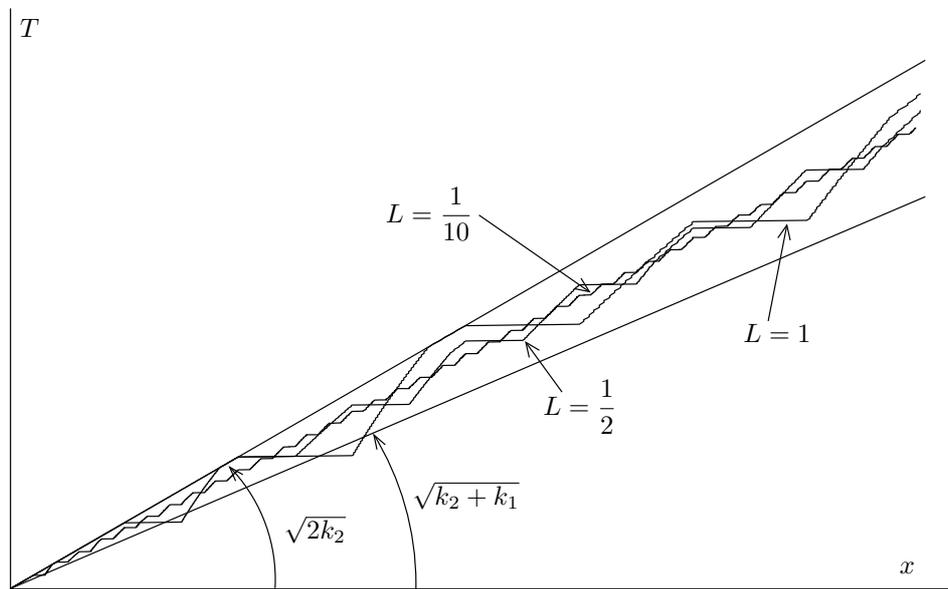


FIG. IV.17 : Evolution de la solution dynamique avec  $\epsilon = 0.01c$ ,  $k_2 = 1$  et  $k_1 = 0.1$  pour différentes valeurs de  $L$

## D Conclusion

Les solutions quasi-statiques (UGM) et (ULM) métastables ont été construites, et il a été obtenu que la solution quasi-statique (UGM) présente une ténacité apparente (lorsque la taille des défauts tend vers 0) égale à la moyenne arithmétique des ténacités. Au niveau de la solution (ULM) métastable, nous avons trouvé une fonction en escalier évoluant entre deux droites particulières et dont la moyenne géométrique de certains points de cette solution permet de retrouver la solution (UGM).

D'un point de vue dynamique, différentes constructions ont été présentées. Plus particulièrement, nous avons montré que sous certaines hypothèses, une solution asymptotique pour une taille de défaut donnée peut être obtenue. Nous avons ensuite présenté une méthode pour construire cette solution asymptotique ( $\epsilon \rightarrow 0$ ) à partir d'une approche graphique. Une autre approche a été développée, il s'agit de construire la solution ondulatoire à l'aide d'un algorithme de type récursif. Les différents passages à la limite sont donc effectués numériquement. Nous avons obtenu que lorsque la taille des défauts et la vitesse du chargement tendent vers 0 alors la solution limite présente une ténacité apparente particulière (différente de celle obtenue avec la solution quasi-statique (UGM)). Autrement dit, l'énergie cinétique a tendance à augmenter et ce de façon proportionnelle à la longueur de film décollée. D'autre part il semblerait que les passages à la limite commutent.

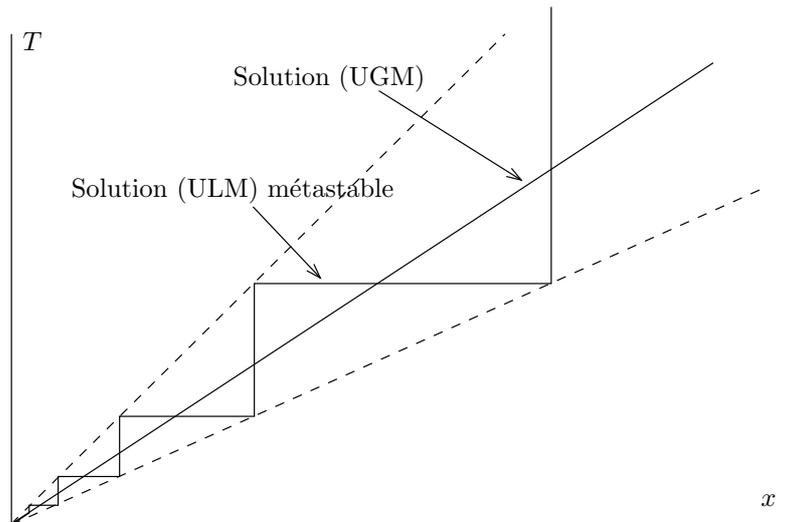
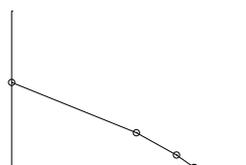


FIG. IV.18 : Evolution quasi-statique (UGM) et (ULM) métastable





## Chapitre V

# Propagation brutale à travers un milieu 2D

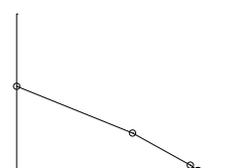
### Contents

---

<b>A</b>	<b>introduction</b> . . . . .	<b>122</b>
<b>B</b>	<b>Présentation générale du modèle</b> . . . . .	<b>123</b>
<b>C</b>	<b>Approche quasi-statique</b> . . . . .	<b>125</b>
	C.1 Solution quasi-statique (UGM) . . . . .	125
	C.2 Solution quasi-statique (ULM) métastable . . . . .	126
<b>D</b>	<b>Approche dynamique</b> . . . . .	<b>128</b>
	D.1 Introduction des techniques numériques en dynamique . . . . .	128
	D.2 Résultats et comparaisons . . . . .	136
	D.3 Analogie industrielle . . . . .	145
<b>E</b>	<b>Conclusion</b> . . . . .	<b>146</b>

---

**résumé :** Ce chapitre présente une fissure se propageant à travers un milieu 2D (DCB). Le chargement est quasi-statique et le trajet de fissuration est connu et possède une discontinuité de ténacité. Les mécanismes de propagation du front de fissure sont donc similaires à ceux décrits au chapitre II. Nous présenterons les solutions quasi-statiques (UGM) et (ULM) métastable ainsi que la solution dynamique. Les solutions quasi-statiques seront obtenues en faisant varier virtuellement la position du front de fissure, tandis que la solution dynamique sera construite à partir d'une technique de déboutonnage de noeuds. Au final on montrera que la longueur de saut donnée par la solution (ULM) métastable est supérieure à celle obtenue avec l'approche dynamique. Ainsi la solution (ULM) métastable permettra de construire une *ténacité à l'arrêt*.



## A introduction

A travers le chapitre II, nous avons traité le cas d'un film mince se décollant à travers une surface ayant une discontinuité de ténacité. Une approche particulière (ULM) pour obtenir la solution quasi-statique basée sur une conservation de l'énergie totale, a été présentée et comparée avec la solution dynamique limite. Au final nous avons obtenu que cette solution dynamique converge vers une des solutions particulières obtenue avec l'approche (ULM) que l'on appelle solution **métastable**. En parallèle nous avons comparé les solutions obtenues par l'approche (ULM) avec la solution qui satisfait un principe de minimum global de l'énergie totale (approche (UGM)).

D'un point de vue industriel, les considérations qui nous intéressent sont plutôt 2D. Ainsi à travers ce chapitre, nous allons étudier selon une démarche similaire à celle effectuée au chapitre II, le cas d'une propagation brutale d'une fissure à travers un milieu 2D soumise à un chargement quasi-statique. Le modèle 2D que l'on considère est une DCB (Double Cantilever Beam) ayant une discontinuité de ses propriétés matériaux à une certaine position du trajet de fissuration. Dans un premier temps nous allons présenter les différentes solutions quasi-statiques (UGM) et (ULM), puis les comparer avec la solution dynamique. Pour cela nous introduirons une technique particulière pour propager la fissure de façon dynamique, qui sera dans un premier temps analysée puis discutée.

## B Présentation générale du modèle

On considère une DCB (cf figure V.1) soumise à un déplacement imposé  $T = \epsilon t$  en  $x = 0$  et présentant une discontinuité de ténacité en  $x = \ell_I$ . Lorsque  $x < \ell_I$ , la ténacité vaut  $k_2$  tandis que dans le cas contraire, elle vaut  $k_1$  avec  $k_2 > k_1$ . On suppose que le trajet de fissuration est prédéterminé (droite défini par  $y = 0$ ), et on recherche l'évolution du front de fissure  $T \mapsto \ell(T)$ . Compte tenu de la géométrie de la DCB et du trajet de fissuration, on sera amené par la suite à considérer l'axe  $y = 0$  comme axe de symétrie du modèle. Ainsi le domaine d'étude  $\Omega$  (cf figure V.2) est défini comme étant la partie supérieure de la DCB, où  $\ell_a$  est la longueur et  $\ell_b$  la demi largeur de la DCB réelle.

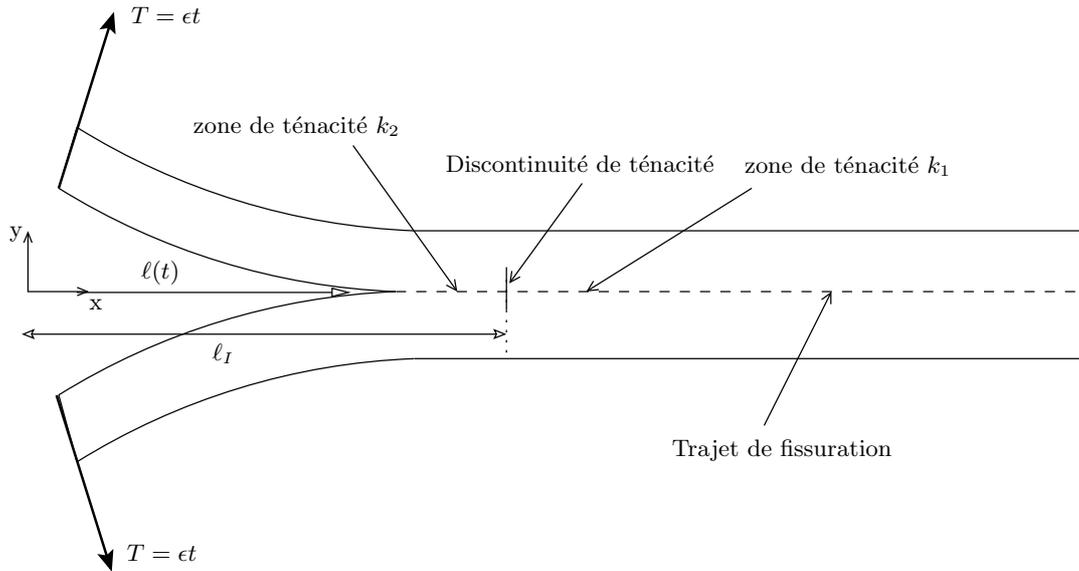
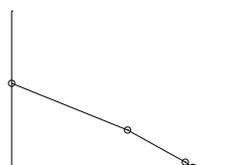


FIG. V.1 : Présentation du modèle DCB utilisé

La résolution du problème nécessite l'utilisation d'une approche numérique de type éléments finis. Ainsi on discrétise spatialement le domaine  $\Omega$  que l'on nomme  $\Omega^d$  (cf figure V.3) en utilisant des éléments linéaires de type quadrangle et de taille égale  $\delta l$ . Les champs de déplacement du problème seront donc approximés par des champs continus et dérivables par morceaux. La position du front de fissure  $\ell(T)$  sera elle, approximée par une fonction  $T \mapsto \ell^d(T)$  dont l'image admet un nombre fini de valeurs dépendant de la taille des mailles  $\delta l$ . En effet, la définition du front de fissure  $\ell^d(T)$  se base à partir d'une condition aux limites de type bord libre sur l'ensemble des positions passées du front de fissure  $[0, \ell(T)]$ . De plus, comme on considère le plan de fissuration comme axe de symétrie, alors il faut introduire une condition aux limites supplémentaire et on a : un bord libre  $\partial\Omega_l$  lorsque  $x < \ell^d(T)$ , et un bord semi-encasté  $\partial\Omega_f$  lorsque  $x \geq \ell^d(T)$ . Ainsi  $\ell(T)$  se discrétise, pour un maillage donné  $\Omega^d$ , sous la forme  $\ell^d(T) = m(T)\delta l$  avec  $m(T) \in \mathbb{N}^*$ .

$\partial\Omega_u$  est défini comme étant le bord de  $\Omega$  où on impose un déplacement imposé  $T = \epsilon t$ .  $\partial\Omega_2$  et  $\partial\Omega_1$  définissent respectivement les positions du front de fissure  $\ell^d(T)$  envisageable à travers les zones de ténacité  $k_2$  et  $k_1$ ; et  $\partial\Omega_e$  définit la frontière où on impose une condition aux limites de type encastrement pour bloquer les mouvements de corps rigide.



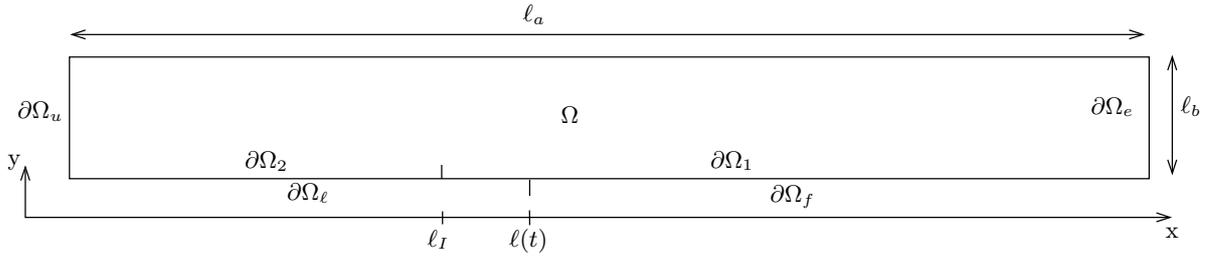


FIG. V.2 : Représentation des surfaces utilisées

D'un point de vue numérique, la propagation du front de fissure revient à faire évoluer la variable discrète  $\ell^d(T)$  à travers le trajet de fissuration envisagé (pour l'instant le modèle discrétisé est de la forme  $\Omega^d(T)$ ). Ainsi l'évolution de  $T \mapsto \ell^d(T)$  est défini en modifiant les frontières  $\partial\Omega_l$  et  $\partial\Omega_f$  telles que  $\partial\Omega_l \cap \partial\Omega_f = \ell^d(T)$ . (Cette technique est équivalent à une méthode de déboutonnage de noeuds). D'autre part, on souhaite effectuer des calculs dynamiques à partir de ce modèle ainsi pour éviter les problèmes générés par les maillages évolutifs en temps (méthodes dissipatives en énergie et dépendantes de la technique de projection des champs) on utilise le même maillage  $\Omega^d$  au cours du temps. Ainsi, le choix d'un maillage fixe et le fait que l'on souhaite que la fonction  $T \mapsto \ell^d(T)$  soit défini avec la même précision sur l'intervalle  $[0, \ell_a]$  justifie l'utilisation d'un maillage réglé dont les tailles des mailles sont identiques (les mailles sont carrées).

Après avoir défini les domaines de définition de la fonction  $T \mapsto \ell^d(T)$ , il faut définir l'évolution même de cette fonction. Pour cela on considère différents principes d'évolution : approche (ULM) et approche (UGM) (cf chapitre II), pour décrire l'évolution de  $\ell^d$  en fonction de  $T$ . Ces deux approches reviennent, pour les cas stables, à rechercher des positions d'équilibre qui sont des minima locaux ou globaux de l'énergie totale  $\ell \mapsto \mathcal{E}(T, \ell)$ . La recherche de ces minima revient, pour une charge donnée  $T$ , à obtenir une longueur de fissuration  $\ell$  telle qu'en  $x = \ell$  on ait  $G = k_i$  avec  $i \in \{1, 2\}$  et  $G$  étant le taux de restitution d'énergie en fond de fissure. Ces conditions sur  $G$  se résument à travers le critère de Griffith :

$$\dot{\ell}^d(T) \geq 0, \quad G \leq k_i, \quad (G - k_i)\dot{\ell}^d = 0 \quad \text{avec } i \in \{1, 2\} \quad (\text{V.1})$$

où  $\dot{\ell}^d$  définit la vitesse du front de fissure par rapport à la charge  $T$ . Cette approche qui consiste à coupler une technique numérique de propagation de  $\ell^d$  avec le critère de Griffith est connue dans la littérature sous le nom de *technique de déboutonnage de noeuds*. A travers l'étude qui suit, nous considérons que le front de fissure évolue par incrément de longueur  $\Delta a$  avec  $\Delta a = i\delta l$  et  $i \in \mathbb{N}^{*+}$ . Il est donc nécessaire d'introduire  $n(T)$  pour définir la position du front de fissure tel que  $\ell^d(T) = n(T)\Delta a = n(T)i\delta l$  et  $m(T) = n(T)i$ . Par la suite nous noterons  $n(T)$  par  $n$ .

**Remarque 16** *Les vitesses de fissuration étant très grandes par rapport à l'évolution de la charge  $T$ , on représentera donc, dans la suite du travail et en particulier lors de l'introduction des approches dynamiques, les différentes variables ( $\dot{\ell}^d$ ,  $\ell^d$ ) par rapport au temps  $t$ .*

Les grandeurs numériques du modèle considérées sont les suivantes :  $\ell_a = 0.1\text{m}$ ,  $\ell_b = 0.01\text{m}$  et  $\ell_I = 0.01\text{m}$ . La discrétisation retenue a  $10d$  éléments selon  $\ell_b$  et  $100d$

éléments selon  $\ell_a$ , avec  $d$  le paramètre de raffinement du maillage défini tel que  $d = 1$  pour le maillage de référence et  $d = 2N$  avec  $N \in \mathbb{N}^*$  pour des maillages plus fins (ce choix de  $d$  garantit un noeud au point de discontinuité de ténacité en  $x = \ell_I$ ). Le matériau retenu pour le domaine  $\Omega^d$  est un acier ayant un comportement élastique avec un module d'Young  $E = 200\,000$  MPa, un coefficient de Poisson  $\nu = 0.3$  et une masse volumique  $\rho = 7\,800$  m.kg $^{-3}$ . On considère pour le modèle de rupture, des ténacités telles que  $k_2 = 100$  MPa.mm et  $k_1 = 50$  MPa.mm. On considèrera aussi dans la suite du travail des ténacités  $k_1$  plus faible.

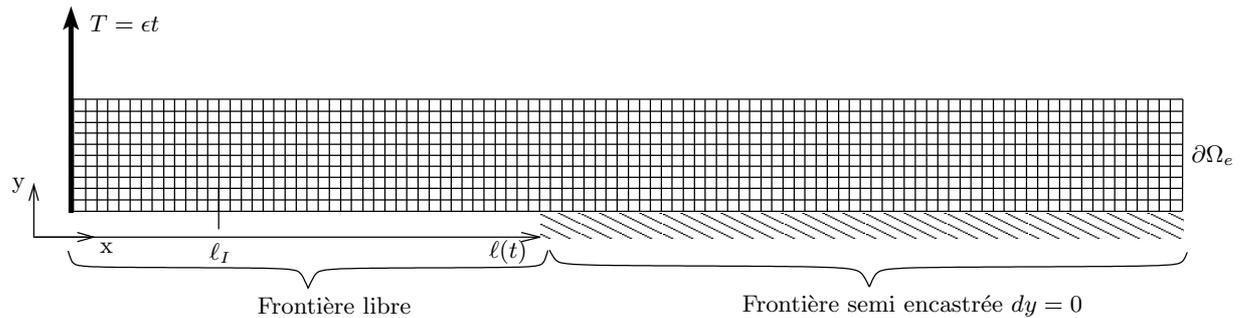


FIG. V.3 : Modèle numérique utilisé

## C Approche quasi-statique

Nous adoptons une approche similaire à celle effectuée à travers le chapitre II, à savoir : présentation de la solution quasi-statique en adoptant différents principes d'évolution (approches (ULM) et (UGM)).

### C.1 Solution quasi-statique (UGM)

On souhaite obtenir l'évolution du front de fissure  $\ell$  selon l'approche (UGM) à travers  $\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2$  lorsque le chargement  $T$  croît.

**Proposition 31** *L'évolution du front de fissure  $T \mapsto \ell(T)$  selon l'approche (UGM) est définie par :*

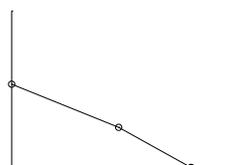
$$\exists T^1 > 0 \text{ tel que } \begin{cases} 0 \leq \ell(T) < \ell_\alpha \text{ lorsque } T < T^1 \\ \ell_\beta < \ell(T) \text{ lorsque } T > T^1 \end{cases} \quad (\text{V.2})$$

avec  $\ell_\alpha < \ell_I < \ell_\beta$  et  $T \mapsto \ell(T)$  continue sur  $[0, T^1[$  et sur  $]T^1, \infty)$ .

*Preuve numérique :*

Cette approche consiste à rechercher la solution statique selon un principe de minimum global (cf page 35). La détermination de  $T \mapsto \ell(T)$  se fait en deux temps ; tout d'abord on recherche pour une charge  $T$  donnée la position du front de fissure  $\ell$  telle que  $\ell$  réalise le minimum de la fonction  $\ell \mapsto \mathcal{E}(T, \ell)$ . La recherche de ce minimum est effectuée par une méthode de type dichotomie, et à chaque pas de la méthode, l'énergie totale de  $\Omega$  est calculée à partir des champs de déplacement à l'équilibre.

Ensuite lorsque le minimum  $\ell$  pour une charge  $T$  donnée est obtenue, on fait croître la charge  $T$  d'un incrément  $\delta T$  et on réitère la méthode précédente. La figure V.4 représente



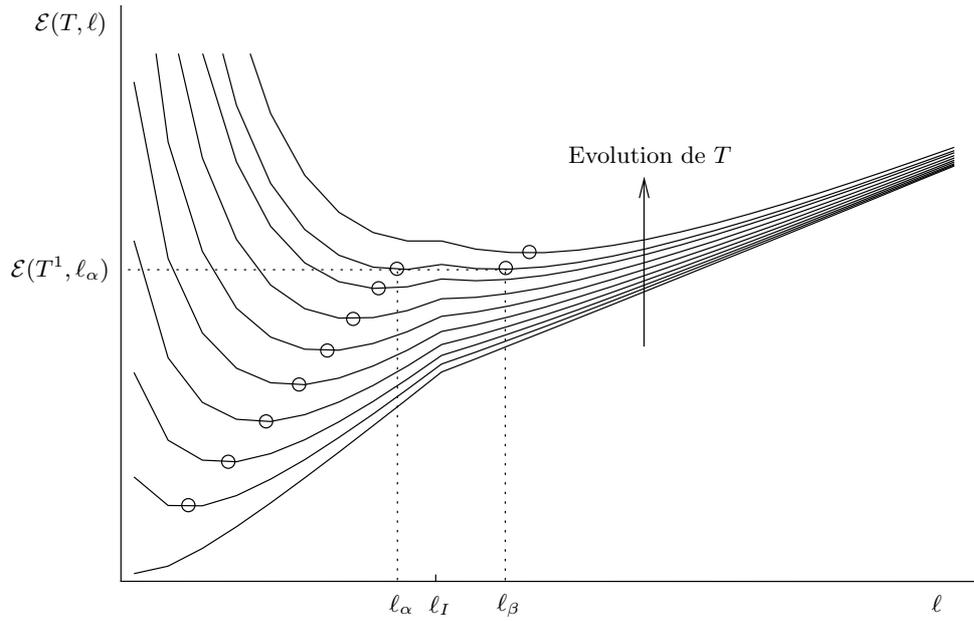


FIG. V.4 : Evolution de l'énergie totale  $\mathcal{E}(T, \ell)$  pour l'approche (UGM) en fonction de  $\ell$  et paramétré selon la charge  $T$

l'évolution de  $\mathcal{E}(T, \ell)$  en fonction de  $\ell$  paramétrée par la charge  $T$ . Pour une charge  $T$  donnée, on représente par un cercle le minimum obtenu suite à la minimisation en fonction de  $\ell$ .

Cependant, pour le cas d'une fissure se propageant à travers un bimatériau ayant deux ténacités différentes  $k_1$  et  $k_2$ , l'énergie totale  $\ell \mapsto \mathcal{E}(T, \ell)$  n'est pas une fonction convexe. Ainsi à partir d'une certaine charge  $T$ , la fonction admet deux minima locaux. Ainsi selon l'approche que l'on considère, on recherche uniquement le plus petit (minimum global). Dans un premier temps, lorsque  $T < T^1$ , le minimum global se trouve à gauche du point de discontinuité de ténacité  $\ell_I$ , puis lorsque  $T = T^1$ , les deux minima locaux sont égaux ainsi le front de fissure saute de  $x = \ell_\alpha$  à  $x = \ell_\beta$ . Ensuite lorsque le chargement  $T$  évolue avec  $T > T^1$ , le minimum évolue à travers l'intervalle  $]\ell_\beta, \infty)$ .

Ainsi comme on l'observe sur la figure V.4, la solution quasi-statique (UGM) évolue de façon stable lorsque  $T < T^1$ , puis devient instable pour  $T = T^1$  et saute sur une longueur  $\delta\ell = \ell_\beta - \ell_\alpha$ . La configuration d'amorçage de l'instabilité correspond à une position du front de fissure telle que  $\ell < \ell_I$ , et la position de  $\ell$  après l'instabilité (saut du front de fissure) est défini telle que  $\ell > \ell_I$ . Ensuite l'évolution de  $\ell$  redevient stable.

□

## C.2 Solution quasi-statique (ULM) métastable

On souhaite maintenant obtenir l'évolution du front de fissure  $\ell$  en fonction de la charge  $T$  selon une approche quasi-statique métastable (ULM). L'approche (ULM) a été présentée page 35 et à travers le problème du décollement du film, on obtient que l'approche (ULM) admet une infinité de solutions dont un choix peut être effectué avec la solution dynamique. En effet on obtient que la solution dynamique limite (lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$ ) converge vers la solution (ULM) qui saute la plus tard (solution métastable).

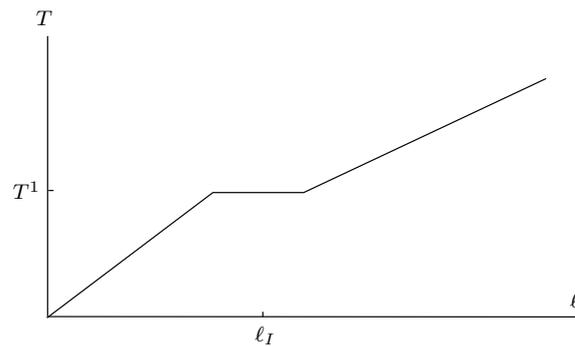


FIG. V.5 : Evolution du front de fissure en fonction de la charge  $T$  pour la solution (UGM)

**Proposition 32** L'évolution du front de fissure  $T \mapsto \ell(T)$  pour la solution quasi-statique métastable est définie par :

$$\begin{cases} 0 \leq \ell(T) < \ell_I & \text{pour } T < T^2 \\ \ell(T) = \ell_c & \text{pour } T^2 < T \leq T^3 \\ \ell_c < \ell(T) & \text{pour } T > T^3 \end{cases} \quad (\text{V.3})$$

avec  $T \mapsto \ell(T)$  continue sur  $[0, T^2[$  et sur  $]T^2, \infty)$

*Preuve numérique :*

La recherche de la solution revient à utiliser une méthode similaire à celle adoptée lors

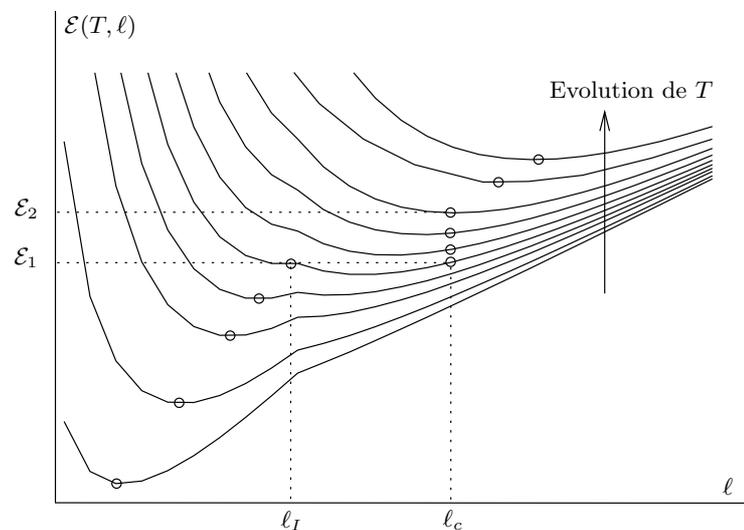
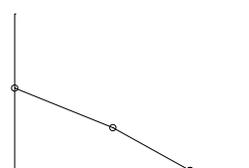


FIG. V.6 : Evolution de l'énergie totale  $\mathcal{E}(T, \ell)$  pour l'approche (ULM) en fonction de  $\ell$  et paramétré selon la charge  $T$

de l'approche (UGM) (alternance de la propagation numérique de  $T$  et de  $\ell$ ). La seule différence porte sur le critère de propagation du front de fissure. Selon l'approche (ULM), on recherche  $\ell(T)$  tel que le couple  $(T, \ell)$  soit un minimum local de l'énergie totale et tel que si il y a une instabilité, alors elle se propage brutalement à énergie totale constante.

La figure V.6 représente l'évolution de l'énergie totale pour une charge  $T$  fixée en fonction de la position du front de fissure  $\ell$  ; et les petits cercles représentent pour chacune



des charges considérées, la solution quasi-statique issue de l'approche (ULM). On observe ainsi (comme pour le cas du décollement d'un film mince), que la propagation de  $\ell$  est stable lorsque  $\ell < \ell_I$ , puis lorsque  $T = T^2$  (défini tel que  $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}(T^2, \ell_I)$ ) la propagation devient brutale et le front de fissure *saut* jusqu'à une position  $x = \ell_c$  (défini telle que  $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}(T^2, \ell_c)$ ). Ensuite le front de fissure  $\ell$  s'arrête à la longueur  $\ell_c$  le temps que la position  $x = \ell_c$  redevienne un minimum local de l'énergie totale. Ou autrement dit, le temps que la structure réaccumule suffisamment d'énergie pour que  $\ell$  puisse repartir. Cette charge de redémarrage correspond à  $T^3$  défini telle que la fonction  $\ell \mapsto \mathcal{E}(T^3, \ell)$  admette comme minimum la position  $\ell = \ell_c$ . Pour une charge  $T > T^3$ , le front de fissure  $\ell$  évolue de façon stable.

□

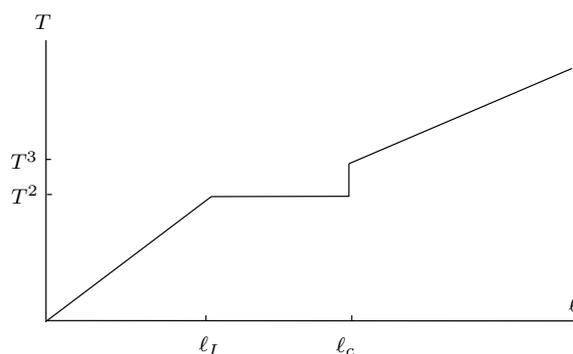


FIG. V.7 : Evolution du front de fissure en fonction de la charge  $T$  pour la solution (ULM) métastable

**Remarque 17** Une approche plus formelle pourrait être effectuée en assimilant la DCB à une poutre de Bernoulli. Ainsi, l'expression de l'énergie potentielle serait connue analytiquement.

## D Approche dynamique

Après avoir introduit les solutions quasi-statiques selon les approches (UGM) et (ULM), on présente la construction de la solution dynamique. On utilise le même modèle numérique que précédemment et on adopte une stratégie de type *déboutonnage de noeud* en dynamique, qui revient à rechercher la vitesse de fissuration telle que le critère de propagation soit vérifié en tous points du trajet de fissuration. Ainsi nous aborderons cette partie en trois points, tout d'abord on présentera les techniques numériques utilisées, puis on analysera et comparera les résultats obtenus, et pour finir, nous introduirons à partir des résultats précédents, une grandeur couramment utilisée dans l'industrie : la *ténacité à l'arrêt*.

### D.1 Introduction des techniques numériques en dynamique

#### D.1.1 Quelques éléments numériques important

Commençons tout d'abord par présenter quelques éléments numériques nécessaires à la technique de déboutonnage de noeuds : la discrétisation en temps, la notion de stabilité et son interprétation énergétique.

## a) Algorithme de résolution en temps

Le but de ce paragraphe est de présenter la discrétisation en temps retenue pour ce problème de fissuration en dynamique avec ses avantages et inconvénients. Le champ de déplacement représenté sur la structure discrétisée au temps  $t_n$  se présente sous la forme  $U(t_n)$  (vecteur dont la dimension est le nombre de ddl du maillage) et on souhaite construire la solution au temps  $t_{n+1} = t_n + \delta t$  notée  $U(t_{n+1})$ . Pour plus de simplicité dans la notation on notera ces vecteurs  $U_n$  et  $U_{n+1}$  et de la même façon on définit les vitesses et les accélérations aux temps  $t_n$  et  $t_{n+1}$  par respectivement  $(\dot{U}_n, \dot{U}_{n+1})$  et par  $(\ddot{U}_n, \ddot{U}_{n+1})$ .

Le schéma en temps retenu est de type Newmark, ce qui veut dire que l'on considère respectivement des déplacements et des vitesses sous la forme d'un développement limité au deuxième et premier ordre. On considère que les contributions aux ordres supérieurs peuvent être représentées par un terme proportionnel à la différence des accélérations  $(\ddot{U}_{n+1} - \ddot{U}_n)$  au temps  $t_n$  et  $t_{n+1}$ . Ces deux termes se présentent ainsi sous la forme :

$$U_{n+1} = U_n + \Delta t \dot{U}_n + \frac{\Delta t^2}{2} ((1 - 2\beta)\ddot{U}_n + 2\beta\ddot{U}_{n+1}) \quad (\text{V.4})$$

$$\dot{U}_{n+1} = \dot{U}_n + \Delta t ((1 - \gamma)\ddot{U}_n + \gamma\ddot{U}_{n+1}) \quad (\text{V.5})$$

où  $\beta$  et  $\gamma$  sont les paramètres du schéma numérique. Pour un schéma implicite (sans déperdition d'énergie) on choisira comme paramètre  $\gamma = \frac{1}{2}$  et  $\beta = \frac{1}{4}$ , et pour un schéma explicite  $\gamma = \frac{1}{2}$  et  $\beta = 0$ .

Pour des raisons de simplicité, on discrétise les équations dynamiques en fonction de deux nouvelles variables :

$$[U] = U_{n+1} - U_n \quad (\text{V.6})$$

$$\langle U \rangle = \frac{1}{2}(U_{n+1} + U_n) \quad (\text{V.7})$$

Ainsi (V.4) peut se mettre sous la forme :

$$[U] = \frac{\Delta t}{2} \dot{U}_n + \frac{\Delta t}{2} \dot{U}_n + \Delta t^2 \beta [\ddot{U}] + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{U}_n$$

qui devient en utilisant (V.5) :

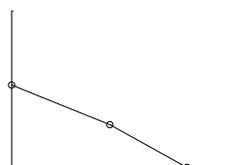
$$[U] = \Delta t \langle \dot{U} \rangle + \Delta t^2 (\beta - \frac{\gamma}{2}) [\ddot{U}] \quad (\text{V.8})$$

De la même façon on obtient à partir de (V.5) :

$$[\dot{U}] = \Delta t \langle \ddot{U} \rangle + \Delta t (\gamma - \frac{1}{2}) [\ddot{U}] \quad (\text{V.9})$$

## b) Notion de stabilité du schéma :

On souhaite maintenant regarder la stabilité d'un tel schéma sur un problème dynamique linéaire.



**Proposition 33** *Le choix des paramètres  $\beta$  et  $\gamma$  conditionne la stabilité du schéma d'intégration en temps :*

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{2} \leq \gamma \leq 2\beta & \text{alors le schéma est inconditionnellement stable} \\ \frac{1}{2} \leq \gamma \text{ et } \gamma > 2\beta & \text{alors le schéma est stable si } \Delta t \leq \frac{1}{\omega_p \sqrt{\frac{\gamma}{2} - \beta}} \end{array} \right. \quad (\text{V.10})$$

avec  $\omega_p$  défini comme étant la plus grande racine de  $\det(K - \omega^2 M) = 0$

La démonstration de la proposition 33 est présentée page 191.

**Remarque 18** *Un schéma implicite est toujours stable puisque  $\gamma = \frac{1}{2}$  et  $\beta = \frac{1}{4}$ , alors que pour un schéma explicite il faut que le pas de temps du schéma soit choisi tel que  $\Delta t \leq \frac{1}{\omega \sqrt{\frac{\gamma}{2} - \beta}}$ .*

**Remarque 19** *En modifiant l'équation (C.2) on peut la mettre sous la forme d'une puissance injectée ( $[\ddot{U}^T M \ddot{U} + U^T K U]$ ) par le schéma au cours du pas de temps  $\Delta t$ . Pour un schéma implicite, on observe que la puissance injectée est nulle.*

c) Bilan d'énergie du schéma retenu

Il peut être intéressant de connaître l'énergie dissipée par le schéma entre les temps  $t_n$  et  $t_{n+1}$ .

**Proposition 34** *La variation d'énergie dissipée entre les temps  $t_n$  et  $t_{n+1}$  se met sous la forme :*

$$\begin{aligned} [\dot{U}^T M \dot{U} + U^T K U] &= \mathcal{W}_{ext} - \Delta t^2 (\beta - \frac{\gamma}{2}) [\ddot{U}]^T M \langle \ddot{U} \rangle \\ &- (\gamma - \frac{1}{2}) \Delta t^2 (\beta - \frac{\gamma}{2}) [\ddot{U}]^T M [\ddot{U}] - (\gamma - \frac{1}{2}) [U]^T K [U] \end{aligned} \quad (\text{V.11})$$

avec  $\mathcal{W}_{ext} = (\gamma - \frac{1}{2}) [U]^T [F] + [U]^T \langle F \rangle$

La démonstration de la proposition 34 est présentée page 192.

**Remarque 20** *Pour un schéma implicite on observe qu'il n'y a pas de dissipation d'énergie ( $[\dot{U}^T M \dot{U} + U^T K U] = \mathcal{W}_{ext}$ ), tandis que pour un schéma explicite on trouve une énergie dissipée au cours de  $\Delta t$  égale à  $\frac{\Delta t^2}{4} [\ddot{U}]^T M \langle \ddot{U} \rangle$  (qui peut donc être positive ou négative).*

### D.1.2 Propagation de la fissure en dynamique par une technique numérique

Dans cette partie nous allons présenter une approche numérique pour faire propager le front de fissure à travers la DCB. La résolution se fait en deux temps, tout d'abord pour des positions du front de fissure telles que  $\ell(t) < \ell_I$  (la propagation est stable) on utilise une approche statique (on montre que l'approche dynamique donne les mêmes résultats), puis lorsque le front de fissure arrive sur la discontinuité de ténacité en  $\ell(t) \geq \ell_I$  (la propagation devient instable) on utilise une approche dynamique. Dans le cas stable, la propagation du front de fissure revient à rechercher pour toutes éventuelles positions du front de fissure (ensemble des configurations pour représenter une propagation de fissure) la valeur des conditions aux limites qui garantit le critère de Griffith  $G = k_i$  en

pointe de fissure. Ensuite lorsque la propagation devient instable, il n'est plus possible de procéder de cette façon car la vitesse du front de fissure devient un paramètre du critère de Griffith  $G(\dot{\ell}(t)) = k_i$ . Ainsi on considère un algorithme, que nous appellerons technique de déboutonnage de noeud en dynamique, pour propager le front de fissure instable. Cet algorithme nous permettra d'obtenir une propagation brutale du front de fissure. (Le chargement  $T$  devient fixe au moment de la propagation brutale).

Dans les parties qui suivent nous présentons l'algorithme utilisé ainsi qu'une interprétation de cette technique d'un point de vue énergétique.

a) Le déboutonnage dynamique

Comme présenté en introduction notre modèle numérique revient à considérer que le front de fissure peut prendre un nombre fini de position  $\ell(t_n) = n\Delta a$ , où  $\ell(t_n)$  représente la position du front de fissure selon l'axe  $x$  (qui est le trajet de fissuration),  $\Delta a$  représente l'incrément d'avancement de la fissure,  $n$  est un entier et  $t_n$  représente le temps pour lequel le critère de Griffith (V.13) est vérifié en  $x = n\Delta a$ . L'objectif de ce calcul est de pouvoir faire évoluer (dans un contexte dynamique) le front de fissure d'une position  $\ell(t_n) = n\Delta a$  à une autre position  $\ell(t_n + \delta t) = (n + 1)\Delta a$  selon le critère de Griffith.

Cette méthode revient à se donner le critère de Griffith ( $G = k_i$ ) et à le discrétiser par rapport au trajet de fissuration. Plus précisément, on cherche à ce qu'il soit vérifié pour toutes les positions du front de fissure  $x = n\Delta a$  lorsque le chargement évolue. Ainsi pour une position du front de fissure  $\ell(t_n) = n\Delta a$  donnée, on recherche  $\delta t$  tel que le critère de Griffith soit vérifié en  $\ell(t_n + \delta t) = (n + 1)\Delta a$  (nouvelle position du front de fissure). Pour cela on procède de la façon suivante (cf Figure V.8) :

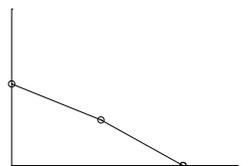
- On prend comme configuration initiale, la structure au temps  $t_n$  où le front de fissure se trouve en  $\ell(t_n) = n\Delta a$ .
- A partir de cette configuration, on écrit les équations du mouvement sur la structure lorsque le front de fissure est  $x = (n + 1)\Delta a$ .
- On résout l'équation non linéaire du critère de Griffith  $G = k_1$  en recherchant  $\delta t$  (les techniques de résolution sont présentées par la suite) et on obtient  $t_{n+1} = t_n + \delta t$ .
- On réitère la démarche pour calculer  $t_{n+2}$  en prenant la structure au temps  $t_{n+1}$  comme configuration initiale.

Nous allons par la suite, présenter la résolution de l'équation non linéaire  $G = k_1$  par rapport à  $\delta t$  et ce, pour deux cas différents ( qui dépend de la discrétisation en temps de  $\delta t$ ). Mais avant de développer ces aspects, on introduit quelques remarques et définitions nécessaires pour la suite.

**Remarque 21** Cette méthode fonctionne tant que  $\dot{\ell} > 0$ . Dans le cas contraire (lorsque  $\delta t$  devient très grand) le front de fissure est à l'arrêt (l'algorithme précédent ne fonctionne plus) et ce, tant que le taux de restitution d'énergie  $G$  est inférieur à la ténacité  $k_1$ .

Au final la structure vérifie le critère de Griffith en un nombre fini de position ( $\ell(t) \in \{n\Delta a, n \in \mathbb{N}\}$ ) et dont chaque position correspond à un temps  $t_n$  particulier. Cela nous amène donc à définir la vitesse du front de fissure par des accroissements :

$$\dot{\ell}_n = \frac{\ell_{n+1} - \ell_n}{t_{n+1} - t_n} = \frac{\Delta a}{\delta t} \quad (\text{V.12})$$



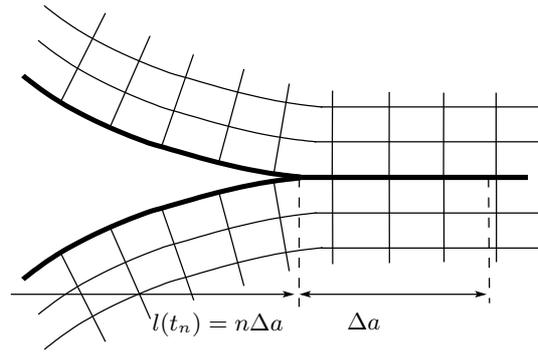
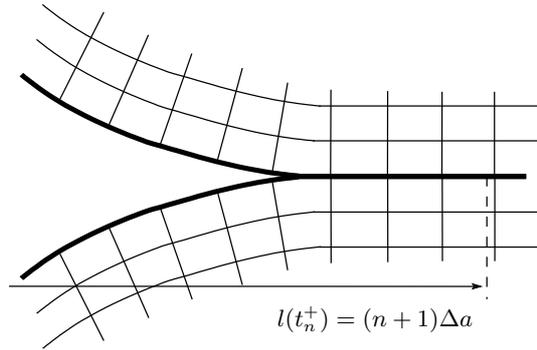
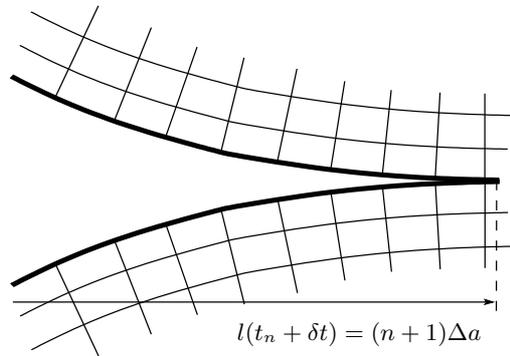
(a) Structure au temps  $t$  avant le déboutonnage(b) Structure au temps  $t$  après le déboutonnage(c) Structure au temps  $t + \delta t$ 

FIG. V.8 : Présentation de la technique de déboutonnage

Le critère de Griffith (cf équation V.1) peut se mettre sous la forme :

$$\begin{cases} \text{si } G < k_i \Rightarrow \dot{\ell} = 0 \\ \text{si } \dot{\ell} > 0 \Rightarrow G = k_i \end{cases} \quad \text{avec } i \in \{1, 2\} \quad (\text{V.13})$$

où  $k_i$  représente la ténacité du matériau (valant dans notre cas soit  $k_1$  lorsque  $x > \ell_I$  ou soit  $k_2$  lorsque  $x < \ell_I$ ),  $G$  le taux de restitution d'énergie et  $\dot{\ell}$  la vitesse de propagation de la fissure.

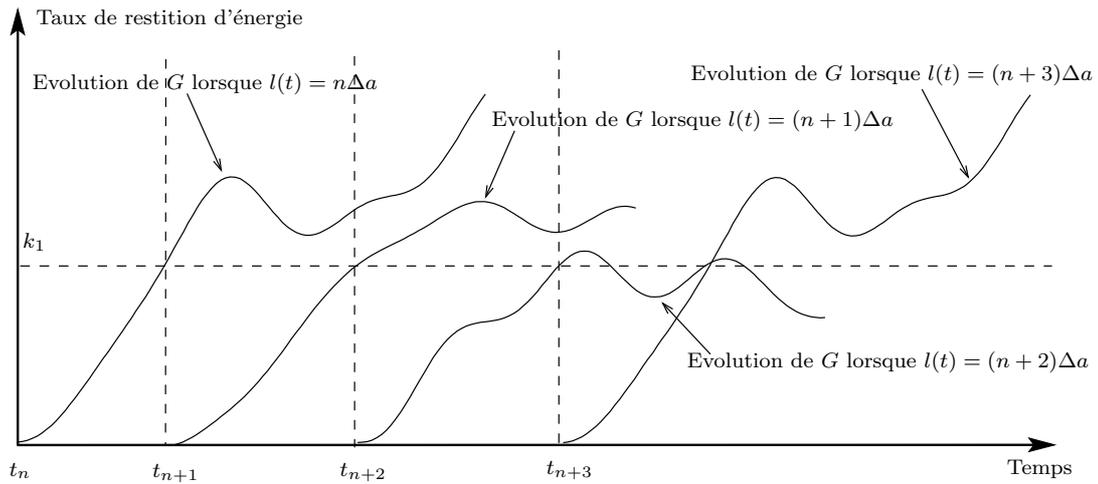


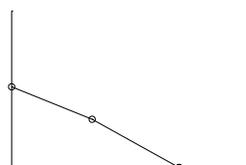
FIG. V.9 : Evolution du taux de restitution d'énergie au cours du temps

La figure V.9 représente l'évolution du taux de restitution d'énergie lorsque la fissure évolue à travers un nombre fini de position ( $\ell(t) = n\Delta a$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ ) et permet de mettre en évidence la non linéarité dans la résolution de  $G = k_1$ . Pour chaque position du front de fissure on observe que le taux de restitution d'énergie évolue au cours de l'intervalle de temps  $\delta t$  d'une façon qui lui est propre ( $\delta t$  est obtenu en résolvant  $G = k_1$ ). Par exemple lorsque le front de fissure se trouve en  $\ell(t_{n+2}) = (n+2)\Delta a$  on recherche  $t_{n+3}$  tel que le critère (V.13) soit vérifié sur la structure actuelle. On observe qu'il faut dans ce cas tenir en compte de l'histoire au cours du temps du taux de restitution d'énergie pour obtenir  $t_{n+3}$  (on peut trouver un autre temps  $t > t_{n+3}$  qui vérifie le critère de Griffith mais qui n'est pas juste).

**Remarque 22** Le paramètre  $\delta t$  est discrétisé par le biais d'un schéma de Newmark en un nombre fini de pas de temps  $\delta t_h$  tel que  $\delta t = h\delta t_h$  avec  $h \in \mathbb{N}^*$ . On étudiera l'influence de cette discrétisation dans la partie suivante et on montrera que  $h = 1$  donne des résultats plus juste que  $h > 1$ . De même, on rappelle que  $\Delta a$  est défini tel que  $\Delta a = i\delta l$  avec  $i \in \mathbb{N}^*$  et  $\delta l$  la dimension d'une maille. L'influence de  $i$  sera aussi étudié par la suite.

Dans le cas où  $h > 1$  l'algorithme de résolution du problème se décompose en deux parties, la première qui permet d'avoir une estimation de  $\delta t$  et une seconde où on recherche par le biais d'un algorithme de Newton la valeur de  $\delta t$  vérifiant le critère de Griffith (la deuxième phase se base sur l'estimation faite de  $\delta t$  pour initialiser le Newton). La première phase consiste à faire évoluer le modèle au cours du temps  $t \in [t_n, t_{n+1}]$  et d'observer (en discrétisant  $\delta t$  en  $h$  pas de temps de taille égale) l'évolution du taux de restitution d'énergie. Ensuite on recherche le temps le plus petit qui vérifie le critère de Griffith et on obtient notre estimateur. La deuxième phase consiste à optimiser la valeur de  $\delta t$  qui permet de vérifier le critère de Griffith en  $t_{n+1} = t_n + \delta t$  en utilisant un algorithme de Newton (développement au premier ordre du critère de Griffith en fonction du temps). Pour cela on construit le vecteur tangent du problème et on arrête le calcul lorsque le critère de Griffith est vérifié à une certaine erreur fixée.

Dans le cas où  $h = 1$  l'algorithme précédent peut être utilisé. Cependant pour diminuer les temps de calcul, on recherche  $\delta t$  par dichotomie et on arrête le processus lorsque



le critère de Griffith est vérifié (à une certaine erreur fixée). Cependant il faut bien choisir les valeurs initiales de la dichotomie pour éviter de passer à coté de la solution en trouvant un temps  $t_{n+1}^*$  qui vérifie le critère de Griffith et qui soit supérieur au temps  $t_{n+1}$  exact qui vérifie le même critère.

**Remarque 23** Dans le cadre de l'algorithme de Newton le développement limité du critère de Griffith  $G(t) = k_i$  permet par le biais de la dérivée de  $G$  de connaître les directions de descente. Tandis que pour la recherche par dichotomie il faut orienter la minimisation sous forme d'un critère. Ainsi pour obtenir  $G = k_i$  on utilise la remarque suivante pour la prédiction de  $\delta t$  :

$$\begin{cases} G > k_i \implies \delta t \searrow \\ G < k_i \implies \delta t \nearrow \end{cases}$$

La résolution numérique du modèle est effectuée sous *Code\_Aster* sous la forme d'une macro commande. La construction de la solution dynamique (voir la construction matricielle dans la section suivante) est discrétisée en temps selon un schéma de Newmark (existant dans *Code\_Aster*). Le taux de restitution d'énergie est obtenu par la méthode  $G-\theta$  implémenté dans *Code\_Aster* et l'évolution des conditions aux limites est effectuée par un pilotage du modèle sous Python.

**Remarque 24** La solution est calculée en deux temps : une phase de propagation stable dans la partie de ténacité  $k_2$  (une approche statique suffit), et une phase de propagation brutale dans la partie de ténacité  $k_1$  (nécessite un calcul dynamique). Dans la première phase la seule chose qui nous intéresse est la dernière configuration stable de la DCB (juste avant que la propagation devienne instable). Une analyse de stabilité permet de mettre en évidence le fait que la structure perd sa stabilité lorsque le front de rupture se trouve sur la discontinuité de ténacité ( $\ell(t) = \ell_I$ ). Ainsi nous recherchons la charge  $T = et$  telle que  $\ell(t) = \ell_I$  et telle que le critère de Griffith  $G = k_2$  soit vérifié en pointe de fissure. A partir de cette configuration un simple accroissement du chargement propagera le front de rupture dans la zone de ténacité  $k_1$  où la propagation sera instable (on utilisera notre algorithme de déboutonnage de noeud).

## b) Interprétation énergétique de l'algorithme de déboutonnage

A travers cette partie on cherche à présenter l'algorithme de déboutonnage d'un point de vue numérique en présentant l'évolution des énergies à travers le modèle discrétisé en espace et en temps. Dans un premier temps on présentera l'énergie dissipée au cours du temps pour un modèle ayant une rigidité qui potentiellement peut évoluer (Approche similaire à celle introduite par Rethore [Ret05]). Puis nous nous focaliserons sur le cas du déboutonnage de noeuds.

On définit les notations suivantes : l'indice  $n$  représente le temps et l'indice  $n$  le modèle associé à une certaine position du front de fissure. Par exemple le vecteur  $U_{n+1}^{n+1}$  représente le champ des déplacements au temps  $t_{n+1}$  dans la configuration  $\Omega^{n+1}$ .

**Proposition 35** *L'énergie dissipée entre les temps  $t_n$  et  $t_{n+1}$  pour un modèle tel que  $[M] \neq 0$  et  $[K] \neq 0$  se met sous la forme :*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}[\dot{U}^T M \dot{U} + U^T K U] = & \mathcal{W}_{ext} - (\gamma - 1/2)[U]^T K_{n+1}^{n+1}[U] \\ & - \Delta t^2 (\beta - \gamma/2)[\dot{U}] M_{n+1}^{n+1}(\ddot{U}) + (\gamma - 1/2)[\ddot{U}] \\ & - (\gamma - 1)[U]([K]U_n^n + [M]\dot{U}_n^n) \end{aligned} \quad (\text{V.14})$$

avec  $\mathcal{W}_{ext} = (\gamma - 1/2)[U][F] + [U]\langle F \rangle$

La démonstration de la proposition 35 est présentée page 192.

**Remarque 25** *Dans le cas d'un maillage fixe et en utilisant un schéma implicite on obtient la même équation obtenue en début de chapitre :  $\frac{1}{2}[\dot{U}^T M \dot{U} + U^T K U] = \mathcal{W}_{ext}$*

**Proposition 36** *Dans le cadre d'un déboutonnage de noeud, l'énergie dissipée entre les temps  $t_n$  et  $t_{n+1}$  se met sous la forme :*

$$\frac{1}{2}[\dot{U}^T M \dot{U} + U^T K U] = -\frac{1}{2}(U_{n+1}^{n+1})_p (U_n^{n+1})_n = -\frac{1}{2}(w_{n+1}^{n+1})_g (\lambda_n^{n+1})_g \quad (\text{V.15})$$

où l'indice  $_g$  représente le noeud qui sera déboutonné sur l'intervalle  $[t_n, t_{n+1}]$ .  $(w_{n+1}^{n+1})_g$  et  $(\lambda_n^{n+1})_g$  représentent respectivement le déplacement au temps  $t_{n+1}$  et la force au temps  $t_n$  du noeud en question.

*Preuve :*

Dans le cas d'une propagation de fissure par déboutonnage de noeud on a  $[M] = 0$  et  $[K]$  qui est déterminé analytiquement. Si on considère que le système mécanique se met sous la forme (C.11) alors  $[K]$  peut se mettre sous la forme (on peut toujours se ramener à ce résultat en effectuant une renumérotation particulière) :

$$[K] = \begin{pmatrix} & & & & 0 \\ & & & & \vdots \\ & & & & 0 \\ & & 0 & & -1 \\ & & & & 0 \\ & & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \text{ où } \begin{cases} [K]_{(i,j)} = -\delta_{i,n}\delta_{j,p} - \delta_{i,p}\delta_{j,n} \\ \text{avec } \left| \begin{array}{l} \delta_{i,j} = 1 \text{ lorsque } i = j \\ \delta_{i,j} = 0 \text{ lorsque } i \neq j \end{array} \right. \end{cases} \quad (\text{V.16})$$

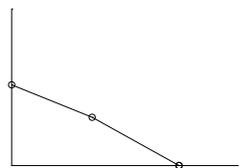
La différence d'énergie (V.14) dans le cas du déboutonnage de noeud et en utilisant une discrétisation en temps de type implicite, se met sous la forme :

$$\frac{1}{2}[\dot{U}^T M \dot{U} + U^T K U] = \mathcal{W}_{ext} + \frac{1}{2}[U][K]U_n^n \quad (\text{V.17})$$

On note  $(U_n^n)_i$  la  $i^{\text{ème}}$  composante du vecteur  $U_n^n$ . De ce fait le bilan (V.17) devient :

$$\frac{1}{2}[\dot{U}^T M \dot{U} + U^T K U] = -\frac{1}{2}((U_{n+1}^{n+1})_p - (U_n^{n+1})_p)(U_n^{n+1})_n - \frac{1}{2}((U_{n+1}^{n+1})_p - (U_n^{n+1})_p)(U_n^{n+1})_n \quad (\text{V.18})$$

et d'après (C.11) on observe que  $(U_n^{n+1})_p$  correspond au déplacement du noeud déboutonné au temps  $t_n$  ce qui permet de dire que  $(U_n^{n+1})_p = 0$ . D'autre part  $(U_n^{n+1})_n$  correspond au multiplicateur de Lagrange au temps  $t_n$  associé au noeud déboutonné sur l'intervalle de temps  $[t_n, t_{n+1}]$ . Ainsi (V.18) permet d'obtenir le résultat souhaité.



□

**Remarque 26** L'équation (V.15) représente une énergie dissipée par la technique de déboutonnage de noeud. Pour l'instant cette énergie n'est absolument pas relié à l'énergie de fissuration  $k_i \Delta a$  (nous présentons dans la partie suivante les conditions à respecter pour que cela soit vraie).

**Remarque 27** Si le temps  $\delta t$  durant lequel le déboutonnage est effectué est subdivisé en  $n \in \mathbb{N}$  intervalles alors l'énergie dissipée (V.15) sera modifié. En effet l'énergie dissipée n'apparaît qu'au cours du premier intervalle  $\delta t/n$  et ensuite durant les  $n - 1$  intervalles restant l'évolution se fait à énergie mécanique constante (le modèle n'évolue pas durant ces instants). Et on remarque ainsi que :

$$\lim_{\frac{\delta t}{n} \rightarrow 0} \left( \frac{1}{2} [\dot{U}^T M \dot{U} + U^T K U] \right) = 0$$

## D.2 Résultats et comparaisons

Comme introduit précédemment nous allons présenter les calculs numériques effectués sur la DCB avec un algorithme de déboutonnage de noeud. Compte tenu des résultats obtenus précédemment, on considèrera comme paramètre  $h$ , le nombre de pas de temps de  $\delta t$  servant à la discrétisation en temps lors du déboutonnage d'une longueur  $\Delta a$ . On étudiera aussi l'influence du nombre de maille  $i$  sur l'incrément de propagation de la fissure  $\Delta a$  (tel que  $\Delta a = i \delta l$  où  $\delta l$  est la longueur d'une maille). D'autre part nous comparerons les résultats numériques avec ceux obtenus par les approches (ULM) et (UGM).

### D.2.1 Résultats numériques avec $h = 1$ et $i = 1$

Il s'agit dans cette partie de présenter les résultats obtenus avec  $h = 1$  et de montrer l'influence du raffinement du maillage ( $\delta l \rightarrow 0$  et  $d \rightarrow +\infty$ ).

On considère le modèle numérique présenté précédemment où on effectue au préalable un calcul statique pour déterminer la configuration à partir de laquelle le modèle sera instable. Ensuite on poursuit le calcul de façon dynamique par une technique de déboutonnage de noeud présentée précédemment. La figure V.10 représente pour différentes valeurs du paramètre  $d$  (raffinement du maillage) l'évolution de la vitesse du front de fissure en fonction de l'abscisse curviligne  $x$ . On observe une convergence lorsque  $d$  augmente sur la hauteur du pic initial et sur la longueur propagée. Les ondulations qu'on observe sur les vitesses sont dus aux allers retours des ondes de compression dans la largeur  $\ell_b$  de la poutre. Par exemple, la courbe de la vitesse  $\dot{\ell}(t)$  du front de fissure, où  $\ell_a$  est maillé avec 600 éléments ( $d = 6$ ) (figure (V.10)) on observe deux grandes oscillations qui correspondent au retour des ondes de compression sur le front de fissure et un arrêt du front de fissure qui correspond au troisième aller retour de cette même onde.

**Remarque 28** On observe que la valeur de la vitesse de fissuration au moment de traverser la discontinuité de ténacité ( $x = \ell_I$ ) est très élevée sur le premier noeud déboutonné puis ensuite se stabilise à une valeur inférieure. Il s'agit en fait de l'énergie dissipée par le déboutonnage du premier noeud qui n'est pas réaliste. En effet lorsque l'on regarde (V.15) on remarque que le terme  $(\lambda_n^{n+1})_g$  est obtenue sur la configuration  $(\Omega^{n+1}, t_n)$  lorsque la

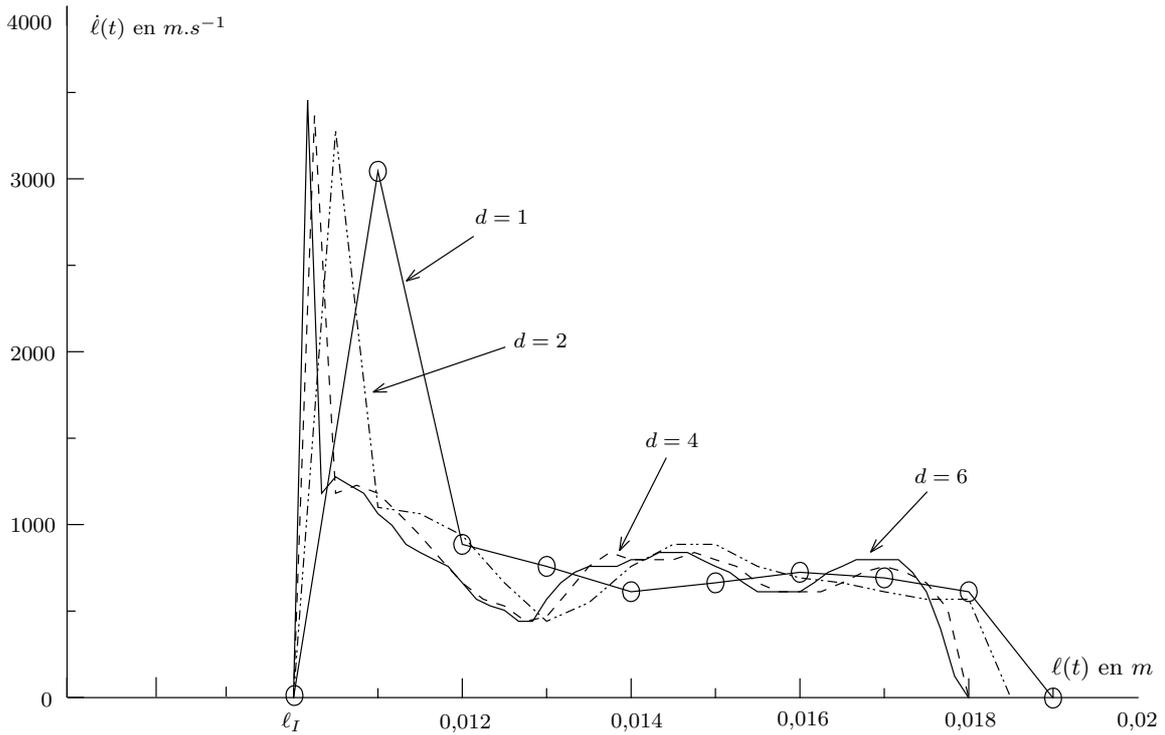


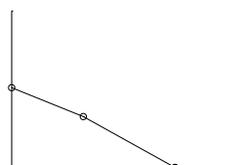
FIG. V.10 : Evolution de la vitesse du front de fissure pour différents maillages

ténacité vaut  $k_2$  (on utilise les champs de la configuration  $(\Omega^n, t_n)$ ) alors que le terme  $(w_{n+1}^{n+1})_g$  est obtenue à partir de la configuration  $(\Omega^{n+1}, t_{n+1})$  qui considère une ténacité  $k_1$ . De ce fait on surestime l'énergie dissipée ce qui se traduit par un pic au niveau de la vitesse de fissuration. Cette observation reste vraie lorsque la taille du maillage diminue.

En utilisant (V.15) on peut construire l'énergie dissipée du modèle au cours de l'évolution. On peut aussi calculer cette énergie en considérant que le système est conservatif et que le travail extérieur est nul. Ainsi la figure (V.12) représente les évolutions des énergies de dissipation et de fissuration en fonction de la position du front de fissure (l'énergie de fissuration est obtenue en multipliant la ténacité avec la position du front de fissure). En notant "ténacité apparente" la pente de l'énergie de dissipation, on observe une différence entre la ténacité réelle et cette ténacité apparente. La figure (V.11) présente l'évolution de cette différence de ténacité en fonction de la taille du maillage et met en évidence la faible dépendance au raffinement  $d$ . Cependant lorsqu'on étudie l'influence des paramètres du modèle sur cette différence, on observe sur la figure (V.13), une dépendance au rapport des ténacités  $\alpha = k_1/k_2$  sur la différence entre ces ténacités (l'erreur entre les deux ténacités est calculée au voisinage de  $x = \ell_I$ ). De même la différence augmente lorsque le paramètre de la largeur de la DCB  $\ell_a$  augmente.

**Observation :** La différence entre les énergies dissipées et de fissuration dépend peu du paramètre maillage  $d$  mais plus des paramètres du modèle tels que le rapport de ténacité  $\alpha$  et de la largeur de la DCB  $\ell_a$ .

La figure (V.14) représente l'évolution des différentes énergies au cours de la propagation dynamique du front de fissure. Durant cette propagation les conditions aux limites en déplacement imposé n'évoluent pas, ainsi le travail des forces extérieures est nul et



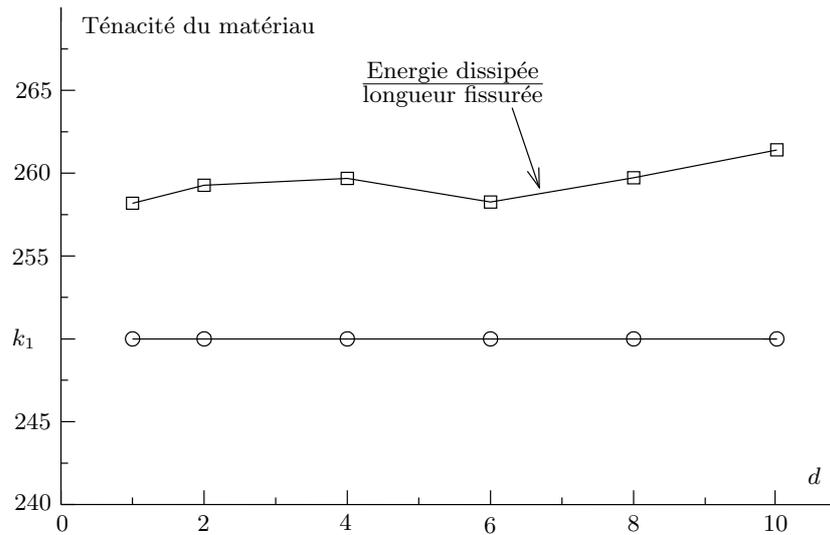


FIG. V.11 : Comparaison entre les ténacités apparentes et réelles en fonction de  $d$  pour  $\alpha = 1/2$

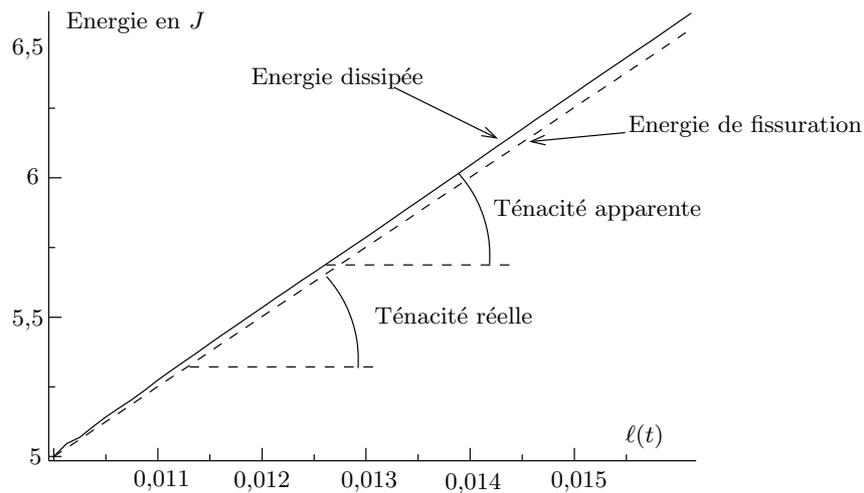
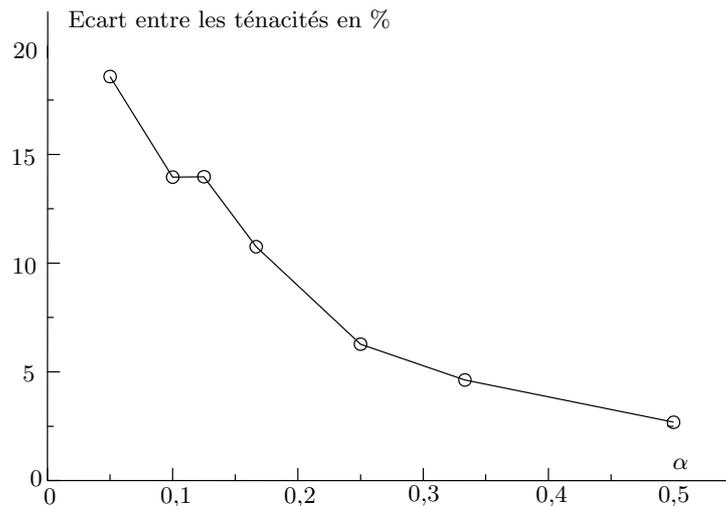
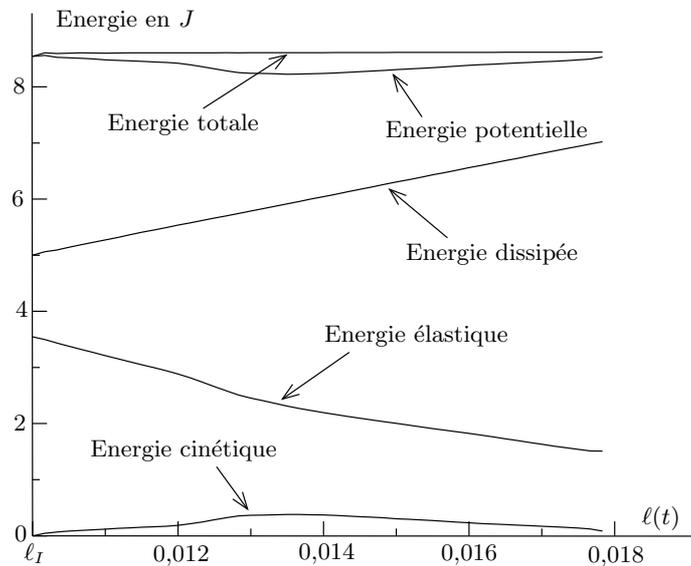


FIG. V.12 : Evolution de l'énergie dissipée et de l'énergie de fissuration en fonction de la propagation du front de fissure

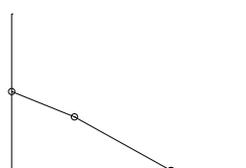
l'énergie totale est constante. L'évolution de l'énergie de fissuration est une droite dont la valeur initiale correspond à l'énergie de fissuration nécessaire pour fissurer sur une longueur  $\ell_I$  le matériau de ténacité  $k_2$ . Au niveau de l'énergie cinétique, on remarque que durant la phase de la propagation brutale, l'énergie passe par un maximum puis diminue pour arriver à un minimum correspondant à l'arrêt du front de fissure. De ce fait l'énergie cinétique peut être vue comme une quantité permettant de propager le front de fissure en rendant constante l'énergie totale. Au final l'énergie ne retombe pas à zéro, ce qui laisse penser que le modèle de DCB, au cours de la propagation dynamique, a piégé de

FIG. V.13 : Evolution de l'erreur sur la ténacité en fonction de  $\alpha$  pour  $d = 1$ FIG. V.14 : Evolution des énergies en fonction de  $l(t)$ 

l'énergie qui ne sert pas à la propagation (on peut imaginer cette énergie piégée à travers des modes ne sollicitant pas le modèle en mode I de rupture).

**Remarque 29** Différents calculs ont été effectués en modifiant les paramètres du modèle (largueur de la DCB  $l_a$  et rapport de ténacité  $\alpha$ ). Cependant il est difficile d'avoir un calcul juste (qui tient compte des allers retours des ondes) lorsque  $l_a \nearrow$  et  $\alpha \searrow$ .

**Remarque 30** Dans le chapitre précédent nous avons développé un modèle de décollement de film à travers une interface ayant un grand nombre de défauts. Si on souhaite construire cette solution d'un point de vue numérique, deux problèmes majeurs se poseront : tout d'abord l'erreur sur l'énergie lors du passage d'une discontinuité puis l'erreur



entre l'énergie dissipée et l'énergie de fissuration (qui augmente dans le cas où les défauts ont une ténacité faible).

On rappelle pour la suite, que le paramètre  $h$  correspond à la discrétisation de  $\delta t$  (cf algorithme de déboutonnage) et que le paramètre  $i$  correspond au nombre de mailles traversées à chaque avancée du front de fissure.

### D.2.2 Etude de l'influence des paramètres $h$ et de $i$

a) Influence du paramètre  $h$  :

On souhaite maintenant étudier l'influence du paramètre  $h$  sur le calcul du déboutonnage dynamique. L'équation (V.15) détermine l'énergie dissipée entre les configurations  $(\Omega^n, t_n)$  et  $(\Omega^{n+1}, t_{n+1})$  lorsque l'évolution entre ces deux configurations se fait en un pas de temps ( $h = 1$ ). Sinon lorsque le pas de temps  $\delta t$  est discrétisé en  $h$  sous pas de temps alors l'équation (V.15) détermine l'énergie dissipée par le mécanisme de déboutonnage au cours du premier pas de temps (d'une durée  $\delta t/h$ ). Ainsi (comme présenté en remarque à travers la partie d'interprétation énergétique) l'énergie dissipée diminue jusqu'à devenir négligeable lorsque  $h$  augmente.

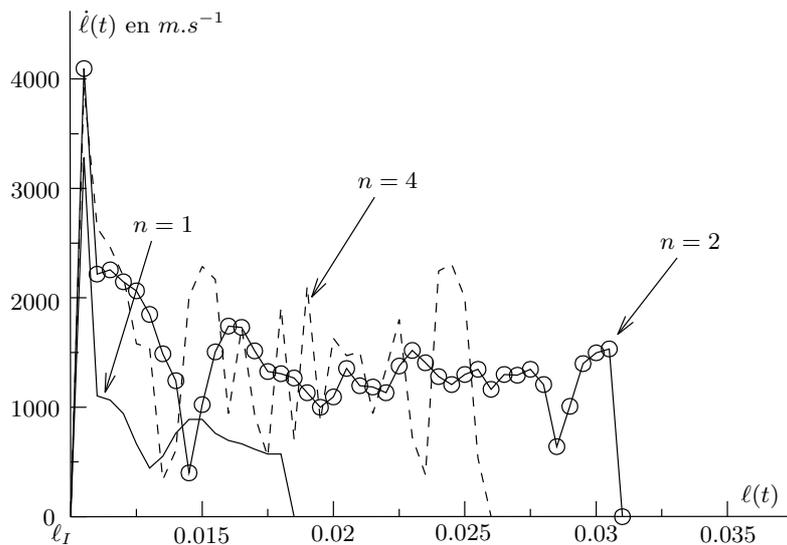


FIG. V.15 : Evolution des vitesses de fissuration en fonction de  $\ell(t)$

La figure (V.16) présente les évolutions des énergies dissipées pour différents  $h$  en fonction du front de fissure. On observe que lorsque  $h = 4$  le modèle dissipe beaucoup moins d'énergie que lorsque  $h = 1$  (en accord avec les considérations présentées précédemment) ainsi le processus de transfert énergétique entre l'énergie cinétique du modèle et l'énergie dissipée prendra *plus de temps* (ces transferts d'énergie sont de même nature que ceux observés avec le film mince). La figure (V.15) montre l'influence de  $h$  sur la réponse ondulatoire. En effet on observe que le paramètre  $h$  modifie fortement l'évolution du front de fissure et que la solution en vitesse semble devenir chaotique lorsque  $h \nearrow$ .

**Remarque 31** Si on souhaite propager une fissure en dynamique par une technique de déboutonnage de noeud, alors il faut considérer une discrétisation en temps telle que

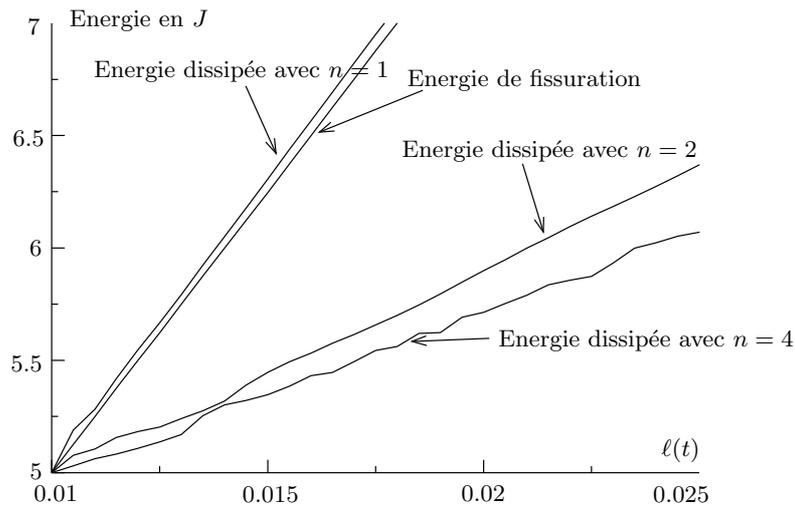


FIG. V.16 : Evolution des énergies dissipées en fonction de  $l(t)$

$h = 1$ . Dans le cas contraire, on risque de s'éloigner très fortement de la solution puisque les mécanismes de dissipation d'énergie évoluent différemment au cours du temps (lorsque  $h \nearrow$ ).

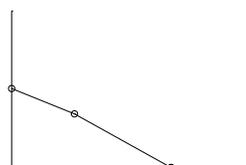
**Remarque 32** Pour faire un calcul dynamique cohérent (énergie dissipée = énergie de fissuration) il faut donc considérer des techniques numériques différentes qui permettent de modifier artificiellement l'histoire de la dissipation. On notera par exemple des techniques telles que le rééquilibrage dynamique [RGC04] et les techniques qui consistent à mettre une force d'interaction entre les noeuds déboutonnés [Nis97].

b) Influence du paramètre  $i$  :

On se propose maintenant d'étudier l'influence du paramètre  $i$  (nombre de maille relâchées à chaque processus de déboutonnage) sur la solution. Deux stratégies différentes peuvent être utilisées pour l'étude de ce paramètre : soit on fait évoluer  $i$  à maillage fixe (le paramètre  $d$  du maillage est fixe) ou soit on fait évoluer  $d$  et  $i$  en prenant  $\Delta a$  fixe (sous la condition que les maillages soient définis en subdivisant le maillage de référence). La figure (V.17) représente les ténacités apparentes et réelles en fonction de  $i$  (première approche). On observe que lorsque  $i$  augmente, l'énergie dissipée converge vers l'énergie de fissuration. Cependant l'histoire du problème dynamique évolue en fonction de  $i$ , (l'interaction des ondes avec le front de fissure est mal pris en compte lorsque  $i \nearrow$ ) on trouve ainsi des longueurs d'arrêt qui varient sans pour autant converger vers une limite. Le cas où  $d$  évolue à  $i$  constant n'est pas étudié puisqu'il correspond (à un changement d'échelle près) au cas précédent.

La figure (V.18) représente l'évolution des ténacités apparente et réelle en fonction du paramètre  $d$  dans le cadre de la deuxième approche ( $\Delta a$  constant). On observe que la ténacité apparente ne converge pas vers la ténacité réelle lorsque  $d \nearrow$ . Cependant on observe une bonne convergence sur les longueurs de saut de fissure (l'évolution ondulatoire est décrit plus finement lorsque  $d \nearrow$ ).

**Remarque 33** Pour un modèle donné, la convergence de la longueur sautée et de l'énergie de dissipation, est obtenue en faisant converger le maillage  $\Omega_d$  d'une certaine façon.



En effet, il faut combiner les deux approches précédente ( $i \nearrow$  à  $\delta l$  fixe, et  $d \nearrow$  à  $\Delta a$  fixe) pour obtenir le résultat souhaité; puisque la première permet une convergence de l'énergie mais pas de la longueur sautée, tandis que la deuxième approche permet le contraire. Ainsi en raffinant le modèle de façon alternative sur  $i$  et sur  $d$ , on garantit la convergence de l'énergie de fissuration et de la longueur sautée.

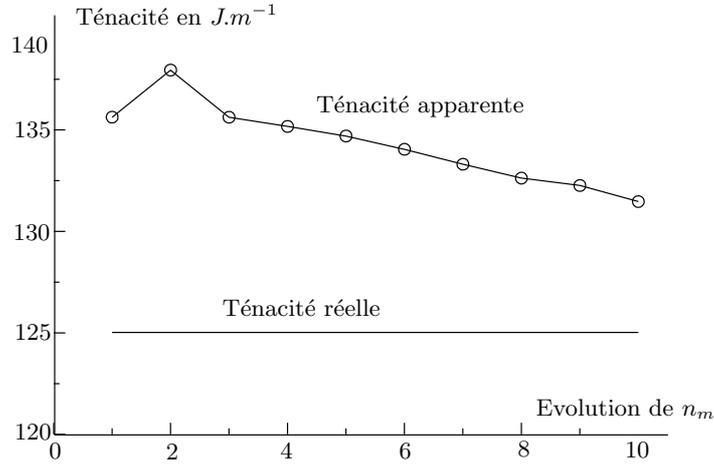


FIG. V.17 : Evolution des ténacités en fonction de  $i$  à  $\Delta a$  constant

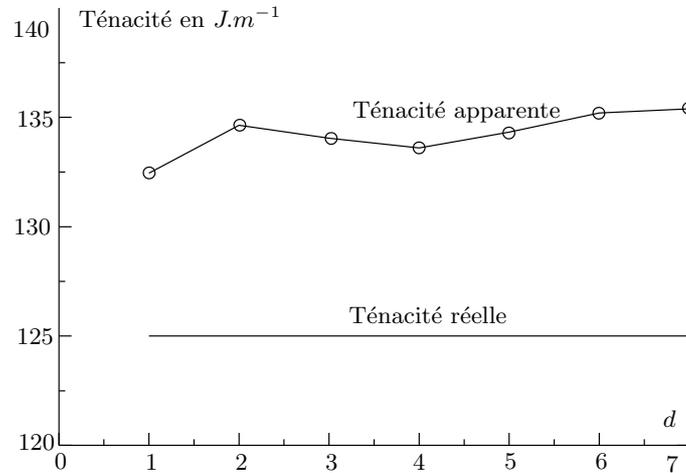


FIG. V.18 : Evolution des ténacités en fonction de  $d$  à  $i$  constant

### D.2.3 Comparaison des solutions dynamiques et quasi-statiques

On souhaite comparer les solutions dynamiques avec celles obtenues par les approches (ULM) et (UGM). L'étude portera plus particulièrement sur la comparaison des longueurs sautées entre les différentes approches.

**Proposition 37** La solution dynamique a les mêmes critères d'amorçage que la solution

quasi-statique métastable. Tandis que la solution quasi-statique selon l'approche (UGM) donne un critère d'amorçage différent.

*Preuve :*

La démonstration découle directement de la construction des solutions quasi-statiques et de la solution dynamique. En effet l'amorçage de la solution quasi-statique métastable est la même pour la solution dynamique et a lieu lorsque  $\ell(T) = \ell_I$ . Tandis que l'amorçage de la solution quasi-statique (UGM) à lieu pour une distance de fissuration plus courte.

□

**Définition 12** Un modèle est dit conservatif lorsqu'il prédit une situation plus dangereuse que la réalité.

**Proposition 38** Le modèle DCB ayant une discontinuité de ténacité  $\alpha = k_1/k_2$  a une solution quasi-statique métastable conservative au niveau du saut de fissure par rapport au modèle dynamique.

*Preuve :*

La démonstration se base sur des arguments numériques, et découle directement des calculs précédents. Pour un modèle donné (cf figure V.19) on observe en traçant l'évolution des énergies potentielles pour un niveau de chargement critique  $T^1$ , que le saut obtenu selon l'approche dynamique  $\ell_c^d$  est inférieur à celui obtenu avec l'approche (ULM) métastable  $\ell_c^s$ . La différence entre les énergies  $\mathcal{P}_I^d$  et  $\mathcal{P}_I^s$  s'explique par le résidu d'énergie cinétique de la solution dynamique en fin de propagation brutale.

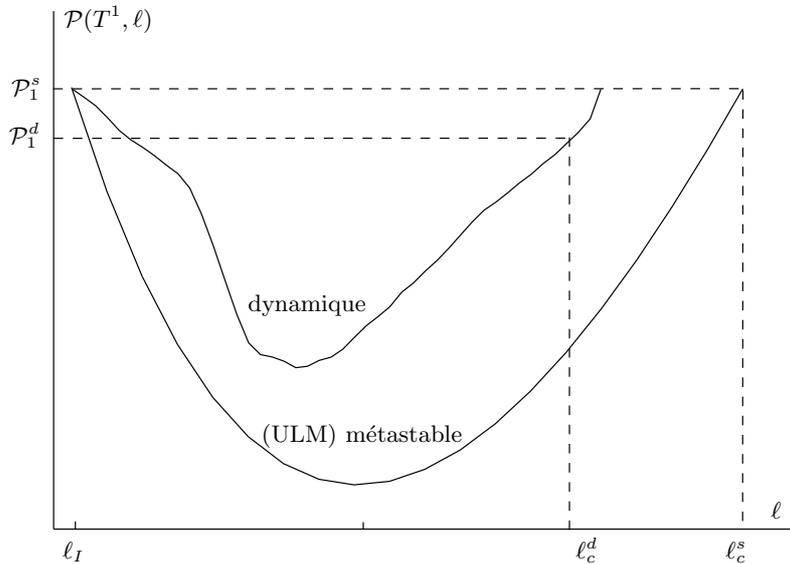
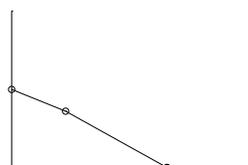
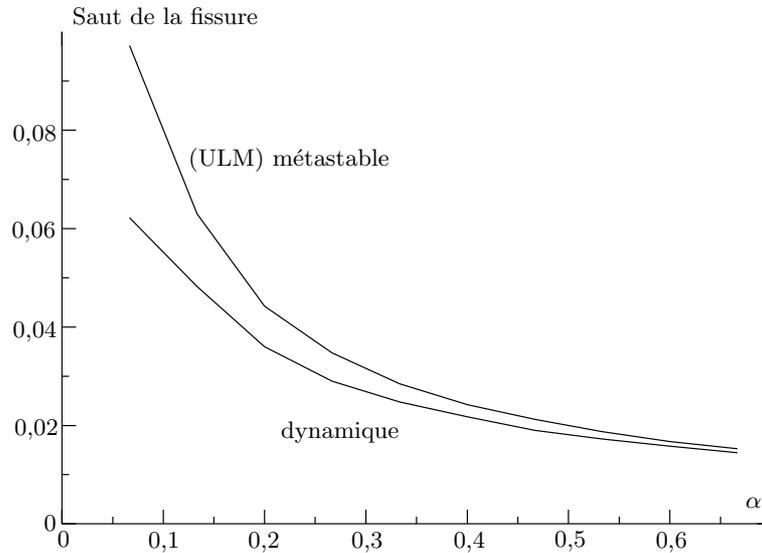
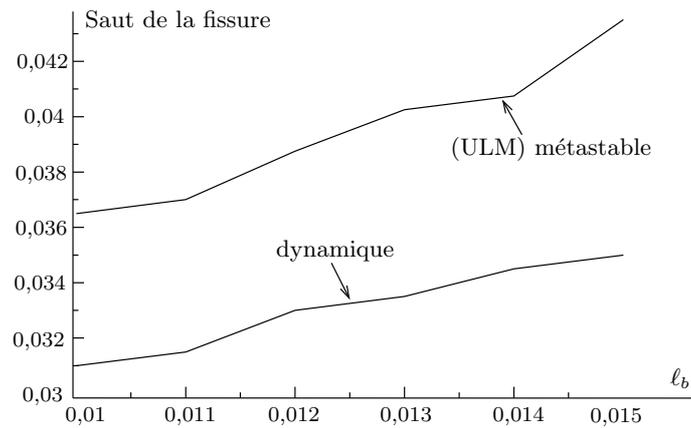


FIG. V.19 : Evolution des énergies potentielles pour un niveau de charge  $T^1$  en fonction de  $\ell$

En faisant varier certains paramètres comme le rapport de ténacité  $\alpha$  et la largeur  $\ell_b$ , on obtient que la solution quasi-statique métastable reste conservative par rapport à la solution dynamique au niveau de la longueur sautée. Les figures V.20 et V.21 comparent les longueurs de saut en fonction de respectivement  $\alpha$  et  $\ell_b$ , et permet de montrer notre résultat.



FIG. V.20 : Comparaison entre les deux méthodes en fonction de  $\alpha$ FIG. V.21 : Comparaison entre les deux approches en fonction de  $l_b$ 

**Remarque 34** A travers le modèle 1D de décollement du film mince, on obtient que la solution quasi-statique métastable permet de retrouver exactement la longueur sautée obtenue par le calcul dynamique limite ( $\epsilon \rightarrow 0$ ). En fait, dans le cas 1D, l'énergie cinétique sert uniquement de vecteur pour la propagation brutale. Pour le cas 2D (DCB), l'idée reste la même sur le rôle de l'énergie cinétique, cependant elle n'est pas totalement reconvertie en énergie de fissuration puisqu'une partie est piégée par la structure. En effet, la propagation brutale dans le cas 2D sollicite certains modes de vibration, qui capteront une partie de l'énergie cinétique qui ne sera pas restituée à la structure.

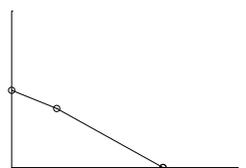
**Remarque 35** Intuitivement, on peut valider la proposition précédente, en disant que le mécanisme de propagation de la fissure dans le cas quasi-statique métastable peut être

assimilé à un cas qui a totalement transformé l'énergie cinétique (générée en début de propagation brutale) en énergie de surface. Ainsi tout autre mécanisme qui aurait un taux de conversion entre l'énergie cinétique et l'énergie de surface plus faible, aurait au final une énergie de surface plus faible, et donc une longueur de saut plus faible.

### D.3 Analogie industrielle

La partie précédente a mis en évidence le caractère conservatif de la solution métastable au niveau du saut de fissure par rapport à la solution dynamique. Ainsi compte tenu de ce résultat on se propose de donner une définition de la *ténacité à l'arrêt* introduit par Kalthoff [KBW77] et présenté au chapitre I.

**Définition 13** On définit la *ténacité à l'arrêt*  $G_a$  comme étant la ténacité apparente de la solution (ULM) métastable après que le front de fissure se soit propagé de façon instable ( $\ell(T^1) = \ell_c^s$ ). En d'autres mots, cette ténacité apparente est défini telle que le critère de Griffith  $G = G_a$  soit vérifié lorsque le chargement est égal à  $T^1$  et que la pointe de la fissure soit  $\ell_c^s$ .



## E Conclusion

Ce chapitre a permis de présenter la construction des solutions quasi-statiques (ULM) métastable et (UGM) pour un modèle 2D de type DCB ayant une discontinuité de ténacité. Les évolutions du front de fissure sont similaires à celles obtenues avec le film au chapitre II à savoir : une propagation brutale lorsque la fissure arrive sur la discontinuité de ténacité puis un arrêt suivi d'une reprise pour la solution métastable, et une propagation brutale avant que la fissure ne soit arrivée sur la discontinuité de ténacité puis une reprise de la propagation pour la solution (UGM).

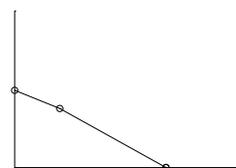
Ensuite une technique numérique pour la propagation de la fissure en dynamique a été présentée puis adaptée au cas de la DCB. Nous avons obtenu que la fissure se propage de façon stable tant qu'elle n'est pas arrivée au point de discontinuité de ténacité, puis de façon instable après l'avoir traversée avant de s'arrêter à une certaine longueur. Cette méthode plus connue sous le nom de *déboutonnage de noeud* a été discutée à travers des considérations énergétiques. En particulier nous avons montré qu'il est important d'adapter la discrétisation en temps par rapport à l'évolution du front de fissure. En effet, l'énergie dissipée par la méthode de déboutonnage correspond (à une erreur près) à l'énergie de fissuration lorsque respectivement chaque élément de la suite  $t_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ), définissant l'évolution dynamique du problème, est associée à une position différente de la suite  $\ell_n$  définissant le front de fissure ( $\ell_{n+1} - \ell_n = C > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ ). De même, nous avons obtenu une convergence de la longueur de la propagation instable (saut de fissure) lorsque la taille du maillage diminue et lorsque le choix de la suite  $\ell_n$  est inchangée.

La comparaison entre la solution dynamique et la solution quasi-statique métastable a permis de montrer que le saut de fissure obtenu par la solution métastable est conservatif (supérieur) par rapport à celui obtenu avec la solution dynamique. Ainsi nous sommes basés sur la configuration métastable (juste après l'instabilité) pour définir une ténacité à l'arrêt.

# Conclusion

A travers cette thèse, différents aspects de la mécanique de la rupture en dynamique ont été étudiés. D'une façon plus particulière, une interprétation des quelques phénomènes énoncés à travers le premier chapitre est donnée. Ces phénomènes se classent en trois grandes familles : la propagation brutale du front de fissure sous chargement quasi-statique, l'influence d'un chargement brutal sur la propagation d'une fissure et l'influence d'un milieu hétérogène sur la propagation d'une fissure. La première famille recouvre les phénomènes liés à la présence de zones hétérogènes dans les centrales d'Edf, la deuxième famille vise à analyser les scénarios accidentels sur les cuves des centrales et la dernière famille traite du cas de la propagation d'une fissure à travers un matériau composite (nous n'avons énoncé bien sûr qu'une partie des phénomènes décrits à travers le chapitre 1). L'étude de ces différents phénomènes est développée au cours des quatre chapitres suivants. Les chapitres traitant du décollement du film à travers une interface et de la propagation d'une fissure dans un milieu 2D visent à analyser les aspects liés à la propagation brutale sous chargement quasi-statique. Les phénomènes liés à la propagation d'une fissure sous un chargement brutal sont analysés par le biais du modèle de décollement de film à travers un défaut. En effet, nous avons montré qu'il existe une analogie entre le modèle de film avec un défaut et le modèle de film sans défaut soumis à un chargement brutal (impulsion). Pour finir, le chapitre traitant du décollement du film à travers un grand nombre de défauts vise à comprendre les phénomènes liés à la propagation d'une fissure dans un milieu hétérogène.

L'étude du modèle de décollement de film à travers une interface ayant une discontinuité de ténacité nous a permis de mettre en évidence un "mode" de propagation brutale sous un chargement quasi-statique (un second "mode" est présenté avec le modèle à un défaut). Nous avons obtenu les solutions quasi-statiques et dynamiques du modèle pour les deux types de répartitions de la ténacité (la ténacité est plus élevée après le point de discontinuité ou l'inverse). Lorsque la ténacité est plus élevée après le point de discontinuité, nous avons obtenu que les solutions quasi-statiques (UGM) et (ULM) sont identiques. En effet, lorsque le déplacement imposé évolue, le film se décolle à travers une zone saine, puis lorsqu'il arrive contre la discontinuité de ténacité les deux solutions quasi-statiques présentent un arrêt du front de fissure. Ensuite, une fois que la charge a évolué suffisamment longtemps, le film se décolle de nouveau. La solution dynamique met en évidence une première onde de choc qui est générée lorsque le front de décollement du film arrive contre la discontinuité de ténacité. Ainsi, cette onde se propage à travers le film décollé puis vient se réfléchir contre la condition à la limite en  $x = 0$  pour finalement retourner vers le front de décollement du film. Lorsque l'onde arrive sur le front de décollement du film, la vitesse de décollement du film est modifiée et l'onde est redirigée vers le point  $x = 0$ . Ce mécanisme est ensuite infiniment répété donnant au décollement du film une évolution particulière. Lorsque la vitesse de chargement  $\epsilon$  tend

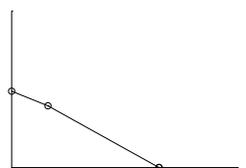


vers 0, nous avons obtenu que la solution dynamique converge en tous points vers les solutions quasi-statiques. Lorsque la ténacité est plus faible après le point de discontinuité, les solutions quasi-statiques (UGM) et (ULM) sont différentes. La solution quasi-statique (UGM) présente un saut du front du décollement du film avant que celui-ci ne soit arrivé sur la discontinuité. Ensuite, le décollement du film ne marque pas d'arrêt et continue à se décoller. La solution quasi-statique (ULM) est différente de la précédente dans la mesure où le film commence par se décoller brutalement puis s'arrête un certain temps. (Le déclenchement de la propagation brutale a lieu pour une position du front de décollement comprise entre celle où la solution (UGM) devient instable et la position de la discontinuité). Ensuite lorsque la charge atteint un niveau suffisamment élevé le film se décolle à nouveau. (Cette charge de redémarrage correspond à la charge où la solution (ULM) intersecte la solution (UGM)). La solution quasi-statique (ULM) métastable correspond à la solution où le déclenchement de l'instabilité est le point de discontinuité de la ténacité (le saut de cette solution est supérieur à celui obtenu avec la solution (UGM)). Lorsque l'on construit la solution dynamique et que l'on fait tendre  $\epsilon$  vers 0, on montre que la solution converge en tous points vers la solution quasi-statique métastable. D'un point de vue énergétique, la solution dynamique limite a une énergie totale qui est constante au cours de la propagation brutale (ce qui est cohérent avec le fait que cette solution converge vers la solution métastable). De plus on obtient que la solution dynamique limite a une énergie cinétique nulle en début et en fin de propagation brutale. Ensuite, la phase d'arrêt du décollement du film est interprétée comme une phase d'accumulation de l'énergie, puis lorsque le système a accumulé suffisamment d'énergie, le film se décolle en évoluant selon la solution quasi-statique (UGM). En conclusion, on peut s'affranchir du calcul dynamique (lorsque le chargement est quasi-statique) et ne s'intéresser qu'à la solution quasi-statique métastable. L'énergie cinétique joue un rôle négligeable dans le décollement brutal du film.

Un second "mode" de propagation avec un chargement quasi-statique est présenté à travers le modèle de décollement du film où l'interface possède un défaut de ténacité. Tout d'abord, nous obtenons deux cas de figure différents : soit la taille du défaut est relativement grande par rapport à la structure et dans ce cas les solutions quasi-statiques et dynamiques sont des combinaisons des solutions précédemment obtenues, soit la taille du défaut est petite et dans ce cas un comportement particulier est obtenu. La construction de la solution dynamique présente quelques points particuliers. En effet, lorsque le front du décollement du film pénètre dans le défaut, une première onde de choc est générée puis, lorsqu'il en sort, une seconde. Ces deux ondes effectuent des allers-retours à travers le film décollé tout en modifiant la vitesse de décollement du film à chaque interaction entre une onde et le front de décollement du film. On obtient que lorsque la taille du défaut est suffisamment petite et que  $\epsilon$  tend vers 0, alors le film se décolle brutalement à travers la totalité du défaut. Ensuite le décollement du film évolue, en sortie de défaut, selon une courbe limite particulière que l'on nomme "couche limite" (courbe logarithmique). Puis à partir d'une charge suffisamment grande, l'évolution du décollement du film atteint de nouveau la solution quasi-statique. La couche limite que nous avons obtenue dépend des différents paramètres du modèle et en particulier de la position du défaut. Ainsi nous avons plutôt privilégié une définition de cette couche limite sous la forme d'une loi d'évolution  $\dot{\ell} = \mathcal{F}(\ell)$  (dérivée de la courbe limite par rapport à la charge) ne dépendant que des paramètres du défaut (la taille du défaut et sa ténacité). D'un point de vue énergétique, on obtient qu'en fin de propagation brutale à travers le défaut, une énergie cinétique résiduelle non nulle est présente dans le film. Ainsi la phase qui suit

(évolution du décollement du film selon une couche limite) correspond à un mécanisme de relaxation de l'énergie cinétique (il faut augmenter la charge pour diminuer l'énergie cinétique). En effet, le système cherche à faire "disparaître" l'énergie cinétique résiduelle présente en sortie du défaut. Lorsque toute l'énergie cinétique a été relaxée, l'évolution regagne la solution quasi-statique. Cette solution dynamique limite a été comparée avec les différentes solutions quasi-statiques et il n'a pas été établie de lien entre ces solutions (on remarque que la solution métastable présente une propagation brutale qui traverse entièrement le défaut et s'arrête au delà de la fin du défaut). Cependant, un lien apparaît lorsque l'on considère une solution quasi-statique particulière. Il s'agit en fait de la solution quasi-statique (ULM) ayant une ténacité apparente particulière. Cette ténacité apparente est construite à partir de la solution quasi-statique du modèle de décollement du film, où le critère de Griffith a été remplacé par la loi d'évolution  $\dot{\ell} = \mathcal{F}(\ell)$ . Ainsi, sans la connaissance de cette ténacité apparente, le mécanisme lié à la couche limite, ne peut pas être uniquement décrit par une approche quasi-statique. En effet, il faut prendre en compte le phénomène de relaxation de l'énergie cinétique. Une analogie a été effectuée avec un modèle ayant une ténacité homogène et un chargement brutal. On obtient des évolutions du décollement du film qui sont similaires (à une constante près) aux évolutions obtenues avec le modèle de film avec un défaut. La seule différence réside dans la phase de propagation brutale. En effet, en début de propagation brutale, la structure possède une énergie cinétique résiduelle qui sera identique à celle présente dans la structure en fin de propagation brutale. Ensuite, cette énergie est relaxée par un mécanisme similaire à celui présenté précédemment. Ainsi cette étude permet de faire le lien entre deux modèles (le film avec défaut et celui avec un chargement brutal) et de conclure que la solution ne dépend pas de la façon dont l'énergie cinétique résiduelle est créée (choc ou défaut) mais de sa valeur (le mécanisme de relaxation de l'énergie cinétique dépend de la quantité d'énergie cinétique résiduelle).

Après avoir montré l'importance de l'énergie cinétique sur le décollement du film, nous nous sommes intéressés à un modèle présentant un grand nombre de défauts. Il s'agit en fait d'un film se décollant à travers une infinité de défauts. L'idée générale est de construire une ténacité équivalente d'un tel milieu selon des approches à la fois quasi-statique et dynamique. Nous avons tout d'abord commencé par présenter la solution quasi-statique (UGM) lorsque la taille des défauts tend vers 0. (La ténacité du milieu alterne entre des zones de valeur  $k_2$  et des zones de valeur  $k_1$  et les tailles de ces zones tendent vers 0). Deux approches différentes ont été menées pour construire l'évolution du décollement du film : une première où on recherche la solution comme étant le minimum global d'une fonctionnelle particulière correspondant à l'énergie potentielle du modèle, lorsque la taille des défauts tend vers 0. Une deuxième approche a été présentée et consiste à construire la solution défaut après défaut, puis d'effectuer un passage à la limite sur la taille des défauts. Au final, on obtient une ténacité moyenne du milieu qui correspond à la moyenne arithmétique des ténacités à l'interface. La solution quasi-statique (ULM) métastable a aussi été explicitée, et on obtient que l'évolution du décollement du film en fonction de la charge correspond à une fonction en escalier (dans le plan charge, position du front de décollement du film) compris entre deux droites passant par l'origine. La solution métastable ne présente que des phases d'arrêt et de propagation brutale. La solution dynamique a été construite et nous avons proposé deux approches différentes pour déterminer l'évolution du front de décollement du film par rapport à la charge lorsque la vitesse de chargement  $\epsilon$  tend vers 0. Une première approche consiste à généraliser le concept de couche limite précédemment développé. En effet, chacune des micro-zones



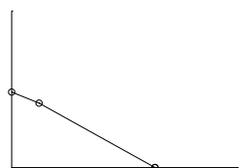
saines (celles qui ont la ténacité la plus élevée) présente une propagation du front de décollement du film qui est pilotée par un mécanisme de relaxation de l'énergie cinétique. De ce fait, nous avons proposé une méthode graphique visant à construire défaut après défaut les évolutions de ces couches limites. Cependant, cette approche est relativement coûteuse en temps de calcul et ne permet pas d'obtenir une propagation du film à travers un grand nombre de défauts. Ainsi nous avons développé une deuxième méthode qui consiste à construire, dans le plan espace-charge, l'intégralité des allers-retours des ondes de choc (à chaque traversée d'un nouveau défaut, deux ondes de choc sont générées). Ensuite, les passages à la limite par rapport à  $\epsilon$  et à la taille des défauts ont été calculés numériquement. Cette deuxième approche nous a permis d'obtenir (numériquement) des ténacités apparentes du milieu. Nous avons obtenu que la solution dynamique limite est différente des solutions quasi-statiques (UGM) et (ULM) et que le modèle présente une énergie cinétique qui ne cesse d'évoluer. Cette remarque semble mettre en évidence le fait qu'il existe une compétition entre les mécanismes de "création" de l'énergie cinétique (zones de faible ténacité) et les mécanismes de "relaxation" de l'énergie cinétique (zones de forte ténacité). Dans les cas de figure envisagés nous n'avons obtenu que des évolutions où la quantité d'énergie cinétique créée est plus importante que celle relaxée (l'énergie cinétique croît linéairement avec la charge). De plus il semblerait que les passages à la limite par rapport à la vitesse du chargement et à la taille des défauts commutent.

Un dernier aspect a été abordé, il s'agit de l'approche numérique 2D d'un cas de propagation brutal sous chargement quasi-statique. Les phénomènes mis en évidence sont similaires à ceux présentés avec le modèle de décollement de film à travers une interface ayant une discontinuité de ténacité. Le modèle numérique que nous avons développé est une DCB (Double Cantilever Beam) ayant une discontinuité de la ténacité à travers un trajet de fissuration prédéterminé. Les solutions quasi-statiques (UGM) et (ULM) métastable ont été construites en faisant varier virtuellement la position du front de fissure. Les comportements obtenus sont similaires à ceux que présente le modèle de film, à savoir : une propagation brutale puis un arrêt suivi d'une reprise du front de fissure pour la solution métastable, et une propagation brutale suivie d'un arrêt pour la solution quasi-statique (UGM). Une solution dynamique a été développée à partir d'une méthode de déboutonnage de noeuds en dynamique et en utilisant un schéma de type Newmark. Cette méthode consiste à rechercher la vitesse de propagation du front de fissure pour un incrément d'avancement du front de fissure fixé. Au final, cette approche permet d'obtenir une évolution du front de fissure similaire à la solution métastable (propagation brutale du front de fissure suivie d'un arrêt). La technique de déboutonnage de noeuds a été analysée et il a été obtenu que l'énergie dissipée par cette technique correspond, à une erreur près, à l'énergie de fissuration. Cette erreur est la plus faible lorsqu'il est choisi de discrétiser avec un seul pas de temps (schéma de Newmark), un incrément de déboutonnage du front de fissure. De plus, nous avons obtenu que la position de l'arrêt du front de fissure converge vers une certaine valeur lorsque la taille du maillage tend vers 0 et que la liste utilisée pour discrétiser les positions du front de fissure lors du déboutonnage est fixe. Suite à ces résultats, une comparaison entre la solution (ULM) métastable et la solution dynamique limite a été effectuée. A la différence du modèle de film, la solution métastable donne une longueur de saut supérieure à celle obtenue par la dynamique. Cela est dû au fait que le mécanisme de propagation brutale ne convertit pas l'intégralité de l'énergie cinétique en énergie de fissuration. En effet, il existe en fin de propagation brutale un résidu d'énergie cinétique qui pourra disparaître lorsque la charge évoluera par un mécanisme de relaxation de l'énergie cinétique. Cependant, ces

résultats sont intéressants d'un point de vue industriel puisque la solution quasi-statique métastable est conservative (la longueur de saut est supérieure) par rapport à la solution dynamique. Ainsi, on peut s'affranchir de la solution dynamique puisque la solution métastable donne une borne supérieure au saut de la fissure. Cette solution métastable nous a permis de définir la notion de "ténacité d'arrêt".

Suite à ce travail, quelques questions restent ouvertes. Au chapitre V il a été obtenu que la solution métastable donne une borne supérieure au saut du front de fissure. Il pourrait être intéressant d'envisager d'autres approches quasi-statiques permettant de mieux rendre compte de la solution dynamique. Une des approches possibles serait de construire une solution quasi-statique à l'aide d'une décomposition modale. En effet, une hypothèse de conservation de l'énergie mode par mode (analogie avec le principal résultat du chapitre II) permettrait d'obtenir une évaluation plus fine de la propagation brutale de la fissure. Cela permettrait aussi d'obtenir une évaluation de l'énergie cinétique résiduelle présente en fin de propagation brutale. D'autre part, il serait intéressant, à partir du travail effectué autour des "couches limites" lorsque le film se décolle à travers un défaut, de présenter une construction numérique d'une couche limite à travers une structure 2D. En effet, on peut s'attendre à avoir un mécanisme de relaxation de l'énergie cinétique (et donc une couche limite) lorsqu'un résidu d'énergie cinétique est présent dans la structure (ce qui est le cas après une propagation brutale du front de fissure). Au final, la construction des couches limites permettrait de répondre à la question suivante : existe-il une loi d'évolution "universelle" ne dépendant pas de la position du défaut ou de la discontinuité de ténacité ?

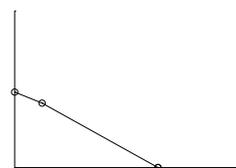
Par rapport aux différents modèles de film développés, il serait intéressant de continuer l'étude sur le film se décollant à travers une infinité de défauts (cf chapitre IV). En effet, le comportement de l'énergie cinétique (qui est directement lié à la valeur de la ténacité apparente) reste un problème ouvert : comment déterminer la répartition entre les mécanismes de "création" et ceux de "relaxation" de l'énergie cinétique ? D'autre part, la solution quasi-statique (ULM) métastable a une évolution particulière, ainsi, existe-il une configuration du modèle (répartition des défauts) qui permette d'obtenir une telle solution ?





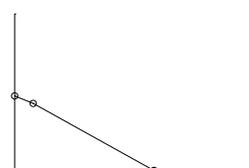
# Bibliographie

- [Abr02] I.D. Abrahams. On the application of the Wiener–Hopf technique to problems in dynamic elasticity. *Wave Motion*, 36(4) :311–333, 2002.
- [Ach75] JD Achenbach. *Wave Propagation in Elastic Solids*, North-Holland, Amsterdam. 1975.
- [AP79] C. Atkinson and CH Popelar. Antiplane Dynamic Crack Propagation in a Viscoelastic Strip. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 27(5) :431–439, 1979.
- [AP97] M. Attigui and C. Petit. Mixed-mode separation in dynamic fracture mechanics : New path independent integrals. *International Journal of Fracture*, 84(1) :19–36, 1997.
- [Ber92] J.M. Berthelot. *Matériaux composites : comportement mécanique et analyse des structures*. Masson, 1992.
- [BFM07] B. Bourdin, G.A. Francfort, and J.-J. Marigo. *The variational approach to fracture*. Springer, 2007.
- [BJ01] E. Bouyne and Houssin B. Wiesner-CS Pineau A. Joly, P. Mechanical and microstructural investigations into the crack arrest behaviour of a modern 21/4Cr-1 Mo pressure vessel steel. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, 24(2) :105, 2001.
- [BM02] S. Bugat and D. Moinereau. Programme d’étude de l’arrêt de fissure dans les cuves REP. *HT-26/01/060/A.EDF-DRD/RNE/MTC*, 2002.
- [BOU00] P.O. BOUCHARD. Contribution à la Modélisation Numérique en Mécanique de la Rupture et Structures Multimatériaux. 2000.
- [Bro99] K.B. Broberg. *Cracks and Fracture*. Academic Press, 1999.
- [BT96] T. BELYTSCHKO and M. TABBARA. Dynamic fracture using element-free galerkin methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39(6) :923–938, 1996.
- [Bug05] S. Bugat. Projet cuve : objectif 60 ans, arrêt de fissure, réinterprétation de l’essai de choc thermique sur structure de FRAMATOME. *Rapport EDF R&D*, HT-26/04/046/A, 2005.
- [Bui78] H.D. Bui. *Mécanique de la rupture fragile*. Masson, 1978.
- [Bui06] H.D. Bui. *Fracture Mechanics Inverse Problems and Solutions*. Springer, 2006.
- [CC06] M.J. Cordill and LUND M.S. HALLMAN-D.M. PERREY C.R. CHAMBERS, M.D. Plasticity responses in ultra-small confined cubes and films. *Acta Materialia*, 54(17) :4515–4523, 2006.



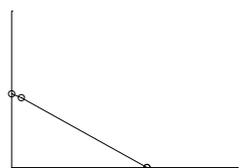
- [CDDM03] M. Charlotte, G. Debruyne, PE Dumouchel, and JJ Marigo. Analyse du décollement d'un film élastique en régime dynamique : exploration analytique et numérique. *7ème Colloque National en Calcul des Structures de Giens, France*, 2003.
- [CLEM89] PG Charalambides, J. Lund, AG Evans, and RM McMeeking. A test specimen for determining the fracture resistance of bimaterial interfaces. *J. Appl. Mech.(Trans. ASME)*, 56(1) :77–82, 1989.
- [DD81] P. Destuynder and M. DJAOUA. Sur une interprétation de l'intégrale de Rice en théorie de la rupture fragile. *Mathematics Methods in the Applied Sciences*, 3 :70–87, 1981.
- [DD06] G. Debruyne and Laverne J. Dumouchel, P.-E. Dynamic crack growth : Analytical and numerical CZM approaches. *Eng. Frac. Mech (soumis)*, 2006.
- [DD07] G. Debruyne and Laverne J. Dumouchel, P.-E. Dynamic crack growth : Analytical and numerical CZM approaches. *ECF 16 Alexandroupolis Grèce*, 2007.
- [DH96] MD Drory and JW Hutchinson. Measurement of the Adhesion of a Brittle Film on a Ductile Substrate by Indentation. *Proceedings : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 452(1953) :2319–2341, 1996.
- [DLM98] RH Dauskardt, M. Lane, and Q. Ma. Adhesion and debonding of multi-layer thin film structures. *Engineering Fracture Mechanics*, 61(1) :141–162, 1998.
- [DM06] P.-E. Dumouchel and J.-J. Marigo. An energetic approach to a dynamic fracture problem. *ICAMEM Tunisie*, 2006.
- [DM07a] P.-E. Dumouchel and Charlotte M. Marigo, J.-J. An example of convergence of the dynamic response to a quasi static response even if the solution contains an unstable phase of crack propagation. *Continuum Mechanics and Thermodynamics (soumis)*, 2007.
- [DM07b] P.-E. Dumouchel and J.-J. Marigo. Rupture dynamique ou rupture quasi-statique : quelques éléments de comparaison. *8ème Colloque National en Calcul des Structures de Giens France*, 2007.
- [DMC07] P.E. Dumouchel, J.J. Marigo, and M. Charlotte. Dynamic fracture and unstable quasi-static cracking. *Comptes rendus-Mécanique*, 335(11) :708–713, 2007.
- [DTY00] J. Du, MD Thouless, and AF Yee. Effects of rate on crack growth in a rubber-modified epoxy. *Acta Materialia*, 48(13) :3581–3592, 2000.
- [Duv90] G. Duvaut. *Mécanique des milieux continus*. Masson, 1990.
- [EG92] L.C. Evans and R.F. Gariepy. Measure Theory and Fine Properties of Functions. 1992.
- [EH95] AG Evans and JW Hutchinson. Overview no. 120 : The thermomechanical integrity of thin films and multilayers. *Acta Metall. Mater.(USA)*, 43(7) :2507–2530, 1995.
- [FGMS91] J. Fineberg, S.P. Gross, M. Marder, and H.L. Swinney. Instability in dynamic fracture. *Physical Review Letters*, 67(4) :457–460, 1991.

- [FM98] GA Francfort and J.J. Marigo. Revisiting brittle fracture as an energy minimization problem. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 46(8) :1319–1342, 1998.
- [FM04] G. Francfort and A. Mielke. Existence results for a class of rate-independent material models with nonconvex elastic energies. *J. reine angew. Math*, 2004.
- [FMM73] SW Freiman, DR Mulville, and PW Mast. Crack propagation studies in brittle materials. *Journal of Materials Science*, 8(11) :1527–1533, 1973.
- [FRE77] LB FREUND. A simple model of the double cantilever beam crack propagation specimen. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 25 :69–79, 1977.
- [Fre98] LB Freund. *Dynamic Fracture Mechanics*. 1998.
- [Gen89] A. Genty. Etude expérimentale et numérique de l’amorçage et de l’arrêt de fissure, sous choc thermique, dans un acier faiblement allié (16MND5). *Thèse de doctorat, Ecole des Mines de Paris*, 1989.
- [Gri21] AA Griffith. The Phenomena of Rupture and Flow in Solids. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character*, 221 :163–198, 1921.
- [GSN83] P. Germain, P. Suquet, and QS Nguyen. Continuum thermodynamics. *ASME, Transactions, Journal of Applied Mechanics (ISSN 0021-8936)*, 50(4b) :1010–1020, 1983.
- [Haj03] Berdin C. Bugat-S. Hajjaj, M. Propagation et arrêt de fissure dans les cuves rep. *Rapport EDF RD, HT-26/04/043/A*, 2003.
- [HB00] TJR Hughes and T. Belytschko. Nonlinear finite element analysis. *ICE Division, Zace Services Ltd*, 2000.
- [Hil48] R. Hill. A Theory of the Yielding and Plastic Flow of Anisotropic Metals. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 193(1033) :281–297, 1948.
- [HN75] B. Halphen and QS Nguyen. Sur les matériaux standards généralisés. *J. Mec*, 14(1) :39–63, 1975.
- [HS92] JW HUTCHINSON and Z. SUO. Mixed mode cracking in layered materials. *Advances in applied mechanics*, 29 :63–191, 1992.
- [Kan73] MF Kanninen. An augmented double cantilever beam model for studying crack propagation and arrest. *International Journal of Fracture*, 9(1) :83–92, 1973.
- [KBW77] JF KALTHOFF, J. BEINERT, and S. WINKLER. Measurements of dynamic stress intensity factors for fast running and arresting cracks in double-cantilever-beam specimens. *ASTM special technical publication*, (627) :161–176, 1977.
- [Kel70] A. Kelly. Interface Effects and the Work of Fracture of a Fibrous Composite. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 319(1536) :95–116, 1970.
- [KS77] JF Kalthoff and DA Shockey. Instability of cracks under impulse loads. *Journal of Applied Physics*, 48 :986, 1977.



- [KTH98] D. Kovar, MD Thouless, and JW Halloran. Crack Deflection and Propagation in Layered Silicon Nitride/Boron Nitride Ceramics. *Journal of the American Ceramic Society*, 81(4) :1004–1016, 1998.
- [KWB77] JF Kalthoff, S. Winkler, and J. Beinert. The influence of dynamic effects in impact testing. *International Journal of Fracture*, 13(4) :528–531, 1977.
- [Leb00] J.B. Leblond. *Mécanique de la rupture fragile et ductile*. Lavoisier, 2000.
- [Leg02] D. Leguillon. Strength or toughness? A criterion for crack onset at a notch. *European Journal of Mechanics/A Solids*, 21(1) :61–72, 2002.
- [MB97] Q. Ma and Fujimoto H. Lane-M. Dauskardt R.H. Bumgarner, J. Adhesion measurement of interfaces in multilayer interconnect structures. *Materials reliability in microelectronics VII*, pages 3–14, 1997.
- [MFF] Q. Ma, H. Fujimoto, and Jain V. Adibi-Rizi F. Moghadam F. Dauskardt RH Flinn, P. Quantitative Measurement of Interface Fracture Energy in Multi-Layer Thin Film Structures. *Materials Reliability in Microelectronics V*, pages 91–96.
- [Mia88] P. Mialon. Calcul de la dérivée d’une grandeur par rapport à un fond de fissure par la méthode thêta. *EDF-Bulletin de la Direction des Etudes et Recherche*, 3 :1–28, 1988.
- [Mie04] A. Mielke. *Evolution of Rate-independent Systems*. SFB 404, Geschäftsstelle, 2004.
- [MJW65] DL McDanel, RW Jech, and JW Weeton. Analysis of Stress-Strain Behavior of Tungsten-Fiber-Reinforced Copper Composites. *Trans. Metallurgical Soc. AIME*, 223 :636–642, 1965.
- [MKH00] J.R. Mawdsley, D. Kovar, and J.W. Halloran. FRACTURE BEHAVIOUR OF ALUMINA/MONAZITE MULTILAYER LAMINATES. *J. Am. Ceram. Soc.*, 83(4) :802–808, 2000.
- [MM95] P.E.D. Morgan and D.B. Marshall. CERAMIC COMPOSITES OF MONAZITE AND ALUMINA. *J. Am. Ceram. Soc.*, 78(6) :1553–1563, 1995.
- [Nau99] C. Naudin. *Modélisation de la ténacité de l’acier de cuve REP en présence de zones de ségrégation*. PhD thesis, 1999.
- [Ngu00] Q.S. Nguyen. *Stabilité et mécanique non linéaire*. Hermès science publications, 2000.
- [Nis97] T. Nishioka. Computational dynamic fracture mechanics. *International Journal of Fracture*, 86(1) :127–159, 1997.
- [Nis05] I. Nistor. Identification expérimentale et simulation numérique de l’endommagement en dynamique rapide : application aux structures aéronautiques. 2005.
- [Ret05] J. Rethoré. *Méthodes éléments finis étendus en espace et en temps : application à la propagation dynamique des fissures*. PhD thesis, 2005.
- [RGC04] J. Réthoré, A. Gravouil, and A. Combescure. A stable numerical scheme for the finite element simulation of dynamic crack propagation with remeshing. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193(42-44) :4493–4510, 2004.

- [RGC05a] J. Rethoré, A. Gravouil, and A. Combescure. A combined space–time extended finite element method. *Int. J. Numer. Meth. Engng*, 64 :260–284, 2005.
- [RGC05b] J. Rethore, A. Gravouil, and A. Combescure. An energyconserving scheme for dynamic crack growth using the eXtended finite element method. *Int J Numer Meth Eng*, 63 :631–659, 2005.
- [SF99] E. Sharon and J. Fineberg. Confirming the continuum theory of dynamic brittle fracture for fast cracks. *Nature*, 397(6717) :333–335, 1999.
- [SLTJ97] D.E. Seeger and D.C. La Tulipe Jr. Thin-film imaging : Past, present, prognosis. *IBM Journal of Research and Development*, 41(1) :105–118, 1997.
- [Smo94] J. Smoller. *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations*. Springer, 1994.
- [STG07] A. Sbitti, S. Taheri, and E. Galenne. Semi-elliptical single or multi-crack propagation under thermo mechanical variable amplitude loading. *International conference on the respective input of the numerical simulation and the experimental approach in Fatigue design*, 2007.
- [TH80] S.W. Tsai and H.T. Hahn. *Introduction to Composite Materials*. CRC Press, 1980.
- [Tho96] MD Thouless. Fracture mechanics for thin-film adhesion. *Microelectronics Reliability*, 36(3) :453–453, 1996.
- [TJ92] MD Thouless and HM Jensen. Elastic Fracture Mechanics of the Peel-Test Geometry. *The Journal of Adhesion*, 38(3) :185–197, 1992.
- [WR00] G. Weisbrod and D. Rittel. A method for dynamic fracture toughness determination using short beams. *International Journal of Fracture*, 104(1) :89–103, 2000.
- [Yof51] E.H. Yoffe. The moving Griffith crack. *Phil. Mag*, 42 :739–750, 1951.





# Annexe A

## A Démonstrations et figures complémentaires pour le chapitre III

Nous présentons à travers cette annexe les démonstrations des différentes propositions du chapitre III. Elles ne sont pas essentielles à la compréhension de la thèse, mais sont présentées pour le lecteur qui souhaiterait avoir une lecture plus approfondie.

### A.1 Solution quasi-statique

a) Preuve de la proposition 10

*Étape 1 : Solution quasi-statique lorsque  $\ell^* < \ell_{II}$*

La longueur  $\ell^*$  correspond au saut de la solution quasi-statique (UGM) du modèle de film à une discontinuité de ténacité (cf chapitre II). Ainsi  $\ell^*$  est défini par  $\mathcal{E}(T^*, \ell_1^*) = \mathcal{E}(T^*, \ell^*)$ ,  $\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial l}(T^*, \ell_1^*) = 0$  et  $\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial l}(T^*, \ell^*) = 0$ .  $\ell_1^*$  représente la position du front de fissure lorsque  $T \mapsto \ell(T)$  devient instable et est défini telle que  $\ell_1^* < \ell_I$ .

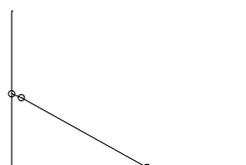
Lorsque  $T < T^*$ , alors le minimum global de  $l \mapsto \mathcal{E}(T, l)$  est exactement  $T \mapsto \ell_2(T)$ . Ensuite lorsque  $T = T^*$ ,  $l \mapsto \mathcal{E}(T, l)$  admet deux minima globaux. (La condition de minimum global unilatéral (**Gm**) de l'approche (UGM) assure que le nouvel état d'équilibre se trouve en  $x = \ell^*$ .) Ainsi pour  $T^* < T < T^3$  on a  $\ell_g(T) = \ell_1(T)$  et  $T \mapsto \ell(T)$  évolue de la position  $x = \ell^*$  à la position  $x = \ell_{II}$ .

Pour  $T^3 < T < T^2$ , le minimum global se trouve en  $x = \ell_{II}$  puisque  $T \mapsto \ell(T)$  est strictement croissant et  $\partial \mathcal{E} / \partial l > 0$  pour  $l \geq \ell_{II}$  et  $T < T_2$ . Ensuite pour  $T = T_3$ , le minimum global de l'énergie totale se trouve en  $x = \ell_{II}$  et pour  $T > T_3$  on a  $\ell_g(T) = \ell_2(T)$ .

*Étape 2 : Solution quasi-statique lorsque  $\ell^* \geq \ell_{II}$*

Lorsque  $T < T^*$ , la solution quasi-statique est identique au cas où  $\ell^* < \ell_{II}$ . Cependant lorsque  $T = T^*$ , la position  $x = \ell_1^*$  reste l'unique minimum de  $l \mapsto \mathcal{E}(T, l)$  car  $l \mapsto \partial \mathcal{E} / \partial l < 0$  sur  $[\ell_I, \ell_{II}]$ ,  $l \mapsto \partial \mathcal{E} / \partial l > 0$  sur  $[\ell_{II}, +\infty)$  et  $\mathcal{E}(T^*, \ell_1^*) < \mathcal{E}(T^*, \ell_{II})$ . Ainsi le front de fissure ne saute pas lorsque  $T = T^*$  mais pour une charge supérieure  $T^c$  où deux minima locaux de  $l \mapsto \mathcal{E}(T, l)$  apparaîtront.

La charge  $T = T^c$  est définie telle que  $\mathcal{E}(T^c, \ell_2^*) = \mathcal{E}(T^c, \ell_{II})$  où  $\ell_2^*$  est défini tel que  $\ell_2^* \leq \ell_I$  et  $\partial \mathcal{E} / \partial l(T^c, \ell_2^*) = 0$ . Ainsi la solution quasi-statique (UGM) saute à la position  $x = \ell_{II}$ . La position  $x = \ell_{II}$  est un minimiseur de  $l \mapsto \mathcal{E}(T, l)$  tant que  $T^c \leq T \leq T_2$  car  $l \mapsto \partial \mathcal{E} / \partial l > 0$  sur  $[\ell_{II}, +\infty)$  pour  $T^c \leq T < T_2$ . Ensuite en  $x = \ell_{II}$  la dérivée de l'énergie totale par rapport à  $l$  pour  $T = T_2$  devient nulle et le front de fissure  $\ell(T)$  évolue selon  $\ell_2(T)$  pour  $T > T_2$ .



## A.2 Solution dynamique

b) Preuve de la proposition 12

La démonstration s'effectue par récurrence, à savoir, on suppose vraie la proposition au rang  $w$  et on montre qu'elle est toujours vraie au rang  $w + 1$ . Au rang  $w = 1$  l'hypothèse de récurrence se montre facilement, tandis que pour la deuxième partie de la démonstration, quelques calculs sont nécessaires.

*Étape 1 : calcul des champs dans les domaines  $\mathcal{Q}_\epsilon^{6(w+1)-2}$  et  $\mathcal{Q}_\epsilon^{6(w+1)}$*   
Le domaine  $\mathcal{Q}_\epsilon^{6(w+1)-2}$  a 3 inconnues  $v_\epsilon^{6(w+1)-2}$ ,  $e_\epsilon^{6(w+1)-2}$ ,  $\dot{\ell}_\epsilon^{2(w+1)-1}$  à déterminer. En utilisant les domaines  $\mathcal{Q}_\epsilon^{6w}$  et  $\mathcal{Q}_\epsilon^{6(w+1)-2}$  on peut écrire

$$\epsilon(v_\epsilon^{6(w+1)-2} - v_\epsilon^{6w}) + e_\epsilon^{6w} - e_\epsilon^{6(w+1)-2} = 0 \quad (\text{A.1})$$

qui permet avec l'aide des 2 équations de II.61 de déterminer les 3 inconnues.

De même, la résolution du domaine  $\mathcal{Q}_\epsilon^{6(w+1)}$  demande de trouver  $v_\epsilon^{6(w+1)}$  et  $e_\epsilon^{6(w+1)}$ . On a  $v_\epsilon^{6(w+1)} = 1$  et une équation qui relie  $\mathcal{Q}_\epsilon^{6(w+1)}$  et  $\mathcal{Q}_\epsilon^{6(w+1)-2}$

$$\epsilon(v_\epsilon^{6(w+1)-2} - v_\epsilon^{6(w+1)}) + e_\epsilon^{6(w+1)-2} - e_\epsilon^{6(w+1)} = 0, \quad (\text{A.2})$$

ce qui permet de trouver les inconnues.

*Étape 2 : calcul des champs dans les domaines  $\mathcal{Q}_\epsilon^{6(w+1)-1}$  et  $\mathcal{Q}_\epsilon^{6(w+1)+1}$*   
Les deux champs  $v_\epsilon^{6(w+1)-1}$  et  $e_\epsilon^{6(w+1)-1}$  du domaine  $\mathcal{Q}_\epsilon^{6(w+1)-1}$  se construisent rapidement à partir des deux équations de couplage qui relient les domaines  $\mathcal{Q}_\epsilon^{6(w+1)-1}$  et  $\mathcal{Q}_\epsilon^{6(w+1)-2}$ , et les domaines  $\mathcal{Q}_\epsilon^{6(w+1)-1}$  et  $\mathcal{Q}_\epsilon^{6w+3}$

Le calcul des champs dans le domaine  $\mathcal{Q}_\epsilon^{6(w+1)+1}$  est similaire au calcul précédent.

*Étape 3 : calcul des champs dans les domaines  $\mathcal{Q}_\epsilon^{6(w+1)+1}$  et  $\mathcal{Q}_\epsilon^{6(w+1)+3}$*   
Le calcul dans le domaine  $\mathcal{Q}_\epsilon^{6(w+1)+1}$  revient à trouver les champs  $v_\epsilon^{6(w+1)+1}$ ,  $e_\epsilon^{6(w+1)+1}$  et  $\dot{\ell}_\epsilon^{2(w+1)}$ . En utilisant l'équation de couplage entre les domaines  $\mathcal{Q}_\epsilon^{6(w+1)+1}$  et  $\mathcal{Q}_\epsilon^{6w+3}$  ainsi que les deux équations de II.61, on trouve

$$\dot{\ell}_\epsilon^{2(w+1)} = \frac{1}{\epsilon} \frac{((e_\epsilon^{6w+3} - \epsilon)^2 - 2k_2)^+}{(e_\epsilon^{6w+3} - \epsilon)^2 + 2k_2} \quad (\text{A.3})$$

Il suffit de choisir à  $\epsilon$  fixé,  $w$  tel que  $|e_\epsilon^{6w+3} - \epsilon| < \sqrt{2k_2}$  pour que l'on ait  $\dot{\ell}_\epsilon^{2(w+1)} = 0$ . En observant que  $e_\epsilon^{6w+3} < 0$ , on peut choisir  $w$  tel que  $\epsilon < \sqrt{2k_2} - |e_\epsilon^{6w+3}|$ .

La résolution des champs du domaine  $\mathcal{Q}_\epsilon^{6(w+1)+3}$  s'obtient rapidement en observant que  $v_\epsilon^{6(w+1)+3} = 1$  et en construisant la relation de couplage entre  $\mathcal{Q}_\epsilon^{6(w+1)+3}$  et  $\mathcal{Q}_\epsilon^{6(w+1)+1}$ .

Les expressions des taux de restitution d'énergie III.22 en  $x = \ell(T)$  dans les domaines  $\mathcal{Q}_\epsilon^{6(w+1)-2}$  et  $\mathcal{Q}_\epsilon^{6(w+1)+1}$  sont obtenues à partir des relations suivantes :

$$\begin{aligned} G_\epsilon^{2(w+1)-1} &= \frac{1}{2} \left( 1 - \epsilon^2 \left( \dot{\ell}_\epsilon^{2(w+1)-1} \right)^2 \right) \left( e_\epsilon^{6(w+1)-2} \right)^2 \\ G_\epsilon^{2(w+1)} &= \frac{1}{2} \left( 1 - \epsilon^2 \left( \dot{\ell}_\epsilon^{2(w+1)} \right)^2 \right) \left( e_\epsilon^{6(w+1)+1} \right)^2 \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

qui relie  $G_\epsilon^{2(w+1)-1}$  et  $G_\epsilon^{2(w+1)}$  aux champs de déformation et de vitesse du front de fissure des domaines  $Q_\epsilon^{6(w+1)-2}$  et  $Q_\epsilon^{6(w+1)+1}$ .

c) Démonstration de la proposition 14

On se propose de calculer l'évolution des énergies entre les charges  $T_{n-1} = T_\epsilon^{6(n-1)+1}$  et  $T_n = T_\epsilon^{6n+1}$ . Puisque les champs  $v_\epsilon$ ,  $e_\epsilon$  et  $\ell_\epsilon$  sont constants par morceaux alors les énergies sont linéaires en fonction de  $T$  et donc, seul le calcul des énergies aux points de changement de pente est nécessaire. Ces points sont, dans notre cas,  $T_{n-1} < T_\epsilon^{6(n-1)+3} < T_\alpha < T_\epsilon^{6n} < T_\epsilon^{6n-2} < T_\beta < T_n$ . En faisant ce choix, au niveau de l'ordre des points, nous avons fait l'hypothèse que  $T_\epsilon^{6n-2} > T_\epsilon^{6n}$ , ce qui revient à dire que  $\epsilon a_n > h$ . Et comme la fonction  $n \mapsto \epsilon a_n$  est croissante et non bornée, alors il existe  $m$  tel que  $\forall n > m$  on ait  $\epsilon a_n > h$ . Pour éviter de prendre en compte ce changement dans la construction ondulatoire, on se propose de considérer les modèles tels que  $\epsilon a_0 > h$ . Ce qui revient à dire que  $T_\epsilon^2 < T_\epsilon^3$ , qui est l'hypothèse de construction III.7

En considérant une telle configuration, le calcul des différentes énergies en découle rapidement. A la charge  $T_{n-1}$  les énergies sont calculées en introduisant les expressions suivantes

$$\begin{cases} \mathcal{K}_\epsilon(T_{n-1}) = \int_0^{\ell_*} \frac{\epsilon^2 v_\epsilon^{6(n-1)^2}}{2} dx + \int_{\ell_*}^{a_{n-1}} \frac{\epsilon^2 v_\epsilon^{6(n-1)+2^2}}{2} dx, \\ \mathcal{P}_\epsilon(T_{n-1}) = \int_0^{\ell_*} \frac{e_\epsilon^{6(n-1)^2}}{2} dx + \int_{\ell_*}^{a_{n-1}} \frac{e_\epsilon^{6(n-1)+2^2}}{2} dx, \\ \text{avec } \ell_* = a_{n-1} - \frac{h}{\epsilon} \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

qui deviennent en utilisant III.32 et en effectuant un passage à la limite en  $\epsilon$

$$\begin{cases} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{K}_\epsilon(T_{n-1}) = \frac{L}{2(k_2 - k_1)} (k_1 - k_2 + k_2 \mathcal{F}(x))^2, \\ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{P}_\epsilon(T_{n-1}) = \frac{L}{2(k_2 - k_1)} (k_1 + k_2 + k_2 \mathcal{F}(x))^2 + \frac{k_2}{k_1 - k_2} (2k_2 L + x(k_1 - k_2)), \\ \text{avec } \mathcal{F}(x) = \ln \frac{x(k_1 - k_2) + k_2 L}{\ell_{II} k_1 - \ell_I k_2} \text{ et } x \geq \ell_{II} \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

A la charge  $T_\epsilon^{6(n-1)+3}$  on a

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{K}_\epsilon(T_\epsilon^{6(n-1)+3}) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{K}_\epsilon(T_{n-1}) \text{ et } \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{P}_\epsilon(T_\epsilon^{6(n-1)+3}) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{P}_\epsilon(T_{n-1}) \quad (\text{A.7})$$

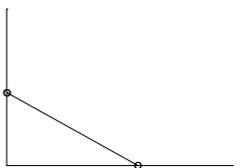
puisque les domaines  $6(n-1)$  et  $6n-2$  ont des champs de vitesse et de déformation égaux.

A la charge  $T_\alpha$  on a

$$\begin{cases} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{K}_\epsilon(T_\alpha) = 0, \\ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{P}_\epsilon(T_\alpha) = \frac{L}{k_2 - k_1} (k_1 + k_2 \mathcal{F}(x))^2 + \frac{k_2}{k_1 - k_2} (k_2 L + x(k_1 - k_2)), \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

A la charge  $T_\epsilon^{6n}$  on a

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{K}_\epsilon(T_\epsilon^{6n}) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{K}_\epsilon(T_{n-1}), \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{P}_\epsilon(T_\epsilon^{6n}) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{P}_\epsilon(T_{n-1}), \quad (\text{A.9})$$



De même à la charge  $T_\epsilon^{6n-2}$  on a

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{K}_\epsilon(T_\epsilon^{6n-2}) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{K}_\epsilon(T_{n-1}), \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{P}_\epsilon(T_\epsilon^{6n-2}) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{P}_\epsilon(T_{n-1}), \quad (\text{A.10})$$

puisque les domaines  $6n - 2$  et  $6n$  ont les mêmes champs.

A la charge  $T_\beta$  on a

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{K}_\epsilon(T_\beta) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{K}_\epsilon(T_\alpha), \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{P}_\epsilon(T_\beta) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{P}_\epsilon(T_\alpha), \quad (\text{A.11})$$

Ainsi en remarquant d'une part que  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{K}_\epsilon(T_{n-1}) > 0$  et que  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{P}_\epsilon(T_{n-1}) < \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{P}_\epsilon(T_\alpha)$ , et d'autre part, que les énergies sont linéaires par morceaux en fonction de la charge  $T$  avec comme point de discontinuité les charges précédemment calculées, on obtient le premier résultat souhaité (point de vue local).

La justification du deuxième point est immédiate puisque, les deux équations A.6 sont respectivement la courbe enveloppe supérieure de l'énergie cinétique et la courbe enveloppe inférieure de l'énergie potentielle. De même les deux équations A.8 sont respectivement la courbe enveloppe inférieure de l'énergie cinétique et la courbe enveloppe supérieure de l'énergie potentielle.

d) Démonstration du corollaire 6

On se base sur le Corollaire 5 pour construire  $\Sigma\mathcal{K}$  comme étant la somme de toutes les surfaces des domaines  $6n - 1$  et  $6n + 2 \forall n \in \mathbb{N}^*$  dans le plan  $(x, T)$  pondérées par la moitié de leurs vitesses au carré et multipliées par  $\epsilon^2$  :

$$\Sigma\mathcal{K} = \sum_{i=0}^N \frac{\epsilon^2}{2} (\mathcal{A}_{6n-1} v_\epsilon^{6n-12} + \mathcal{A}_{6n+2} v_\epsilon^{6n+22}) \quad (\text{A.12})$$

où  $\mathcal{A}_{6n-1}$  et  $\mathcal{A}_{6n+2}$  représentent respectivement les surfaces dans le plan  $(x, T)$  des domaines  $6n - 1$  et  $6n + 2$ .  $N$  est défini tel que  $a_N = \ell^d$ ; ainsi il peut être vu comme le nombre total de pavages  $\Delta_n$  nécessaire au film pour passer de la configuration  $\ell(T) = \ell_{II}$  à la configuration  $\ell(T) = \ell^d$ . Puis en remarquant que  $\mathcal{A}_{6n-1} = \mathcal{A}_{6n+2} = a_n h - \frac{h^2}{\epsilon}$  (cf Figure III.12) on peut déterminer l'expression analytique de  $\Sigma\mathcal{K}$ . Ensuite on effectue une estimation de  $N$  (cf Page 74) qui dépend de  $\epsilon$  et finalement on effectue un passage à la limite  $\epsilon \rightarrow 0$  de  $\Sigma\mathcal{K}$  et on a

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \Sigma\mathcal{K} &= \frac{e^{-\frac{k_1}{k_2}} (\ell_I - \ell_{II}) \sqrt{k_2} (6\epsilon k_2^2 (\ell_{II} k_1 - \ell_I k_2))}{3\sqrt{2} (k_1 - k_2)^2} \\ &\quad \frac{(\ell_I - \ell_{II}) \sqrt{k_2} ((\ell_{II} (-4k_1^3 + 15k_1^2 k_2 - 18k_1 k_2^2 + k_2^3) + \ell_I (k_1^3 - 9k_1 k_2^2 + 14k_2^3)))}{3\sqrt{2} (k_1 - k_2)^2} \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

qui est bien constant pour un modèle donné.

e) Démonstration de la proposition 16

*Étape 1 : étude de la phase d'arrêt*

La mise à zéro de la vitesse de chargement  $\epsilon$  au temps  $t_1^a$  nécessite de distinguer deux cas différents : soit l'onde de choc  $\mathfrak{3}$  se trouve entre les trains d'onde  $\mathfrak{1}$  et  $\mathfrak{2}$  ou soit elle se trouve entre les trains d'onde  $\mathfrak{2}$  et  $\mathfrak{1}$ . La figure A.1 et la figure A.2 de gauche représentent le deuxième cas de figure, tandis que la figure A.2 de droite représente le premier cas de figure. Après l'apparition de l'onde de choc  $\mathfrak{3}$ , on définit un pavage de référence  $\Delta_q^a$  contenant 12 domaines différents (cf figure A.1), ensuite l'évolution ondulatoire se construit en superposant ces différents pavages  $\Delta_q^a$ .

On souhaite dans un premier temps présenter l'évolution des champs de déformation et de vitesse lorsque  $t > t_1^a$ . On se place tout d'abord dans le cas où le train d'onde  $\mathfrak{3}$  se trouve initialement entre les trains d'ondes  $\mathfrak{2}$  et  $\mathfrak{1}$ . Le calcul des champs du domaine  $\mathcal{Q}^{12q}$ , qui sont la vitesse  $v^{12q}$  et la déformation  $e^{12q}$ , se construisent à partir du domaine  $\mathcal{Q}^{6w-2}$ , ce qui nous permet d'écrire les équations suivantes

$$v^{12q} = 0, \quad (e^{12q} - e^{6w-2}) + (v^{12q} - v^{6w-2}) = 0, \quad (\text{A.14})$$

et on a  $e^{12q} = \epsilon - \sqrt{2k_2 + \epsilon^2}$ . On note (a) le couple  $(v^{12q}, e^{12q})$ . Les champs du domaine  $\mathcal{Q}^{12q+4}$  se construisent de la même manière à partir des champs du domaine  $\mathcal{Q}^{6w+1}$ , et on a  $v^{12q+4} = 0$  et  $e^{12q+4} = e^{6w+1} = -2w\epsilon - \frac{2k_1}{\sqrt{2k_2 + \epsilon^2 + \epsilon}}$ . De même on note (b) le couple  $(v^{12q+4}, e^{12q+4})$ . Pour le domaine  $\mathcal{Q}^{12q+8}$ , on construit les champs à partir du domaine  $\mathcal{Q}^{6(w+1)-2}$  et on obtient les mêmes valeurs que pour le couple (a) (cf Figure A.1). Ensuite, en remarquant que le front de fissure  $\ell(t)$  est à l'arrêt, les champs des domaines se trouvant aux frontières ( $x = 0$  et  $x = \ell(t)$ ) se construisent facilement puisque les domaines  $\mathcal{Q}^{12q}$ ,  $\mathcal{Q}^{12q+3}$ ,  $\mathcal{Q}^{12q+8}$  et  $\mathcal{Q}^{12q+11}$  sont identiques, et que les domaines  $\mathcal{Q}^{12q+4}$  et  $\mathcal{Q}^{12q+7}$  sont aussi identiques. Le domaine  $\mathcal{Q}^{12q+1}$  se construit à partir des domaines  $\mathcal{Q}^{12q}$  et  $\mathcal{Q}^{12q+4}$  et on a

$$v^{12q+1} = \frac{k_2 - k_1 - w\epsilon (\epsilon + \sqrt{2k_2 + \epsilon^2})}{\epsilon + \sqrt{2k_2 + \epsilon^2}}, \quad e^{12q+1} = -\frac{k_2 + k_1 + w\epsilon (\epsilon + \sqrt{2k_2 + \epsilon^2})}{\epsilon + \sqrt{2k_2 + \epsilon^2}} \quad (\text{A.15})$$

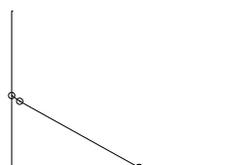
On note par (c) la valeur des champs du domaine  $\mathcal{Q}^{12q+1}$ . Les champs du domaine  $\mathcal{Q}^{12q+2}$  sont obtenus à partir des domaines  $\mathcal{Q}^{12q}$  et  $\mathcal{Q}^{12q+8}$  et on trouve comme solution, le couple (a). Pour le domaine  $\mathcal{Q}^{12q+5}$ , on obtient avec les domaines  $\mathcal{Q}^{12q+4}$  et  $\mathcal{Q}^{12q+8}$

$$v^{12q+5} = -v^{12q+1}, \quad e^{12q+5} = e^{12q+1} \quad (\text{A.16})$$

On note (d) la valeur des champs de ce domaine. On trouve que les champs du domaine  $\mathcal{Q}^{12q+6}$  sont identiques à ceux du domaine précédent. Et pour finir on trouve que les champs du domaine  $\mathcal{Q}^{12q+9}$  sont égaux à (a) et que ceux du domaines  $\mathcal{Q}^{12q+10}$  sont égaux à (c). La figure A.2 de gauche représente pour plusieurs pavages, l'évolution de ces champs. De la même façon, on construit les champs dans le plan espace-temps lorsque le train d'onde  $\mathfrak{3}$  est généré entre les trains d'onde  $\mathfrak{1}$  et  $\mathfrak{2}$  (cf Figure A.2 de droite).

On observe que les champs de part et d'autre du train d'onde  $\mathfrak{3}$  sont identiques (cf Figure A.2), ainsi l'influence de l'onde de choc sur l'évolution ondulatoire est nulle et on peut considérer un pavage de référence de 6 éléments avec deux trains d'onde  $\mathfrak{1}$  et  $\mathfrak{2}$  (cf Figure A.3). De ce fait on ramène les deux configurations initiales que l'on avait (au niveau du choix du déclenchement du train d'onde  $\mathfrak{3}$ ) en une seule construction ondulatoire.

*Étape 2 : construction de la solution pour  $t > t_2^a$*



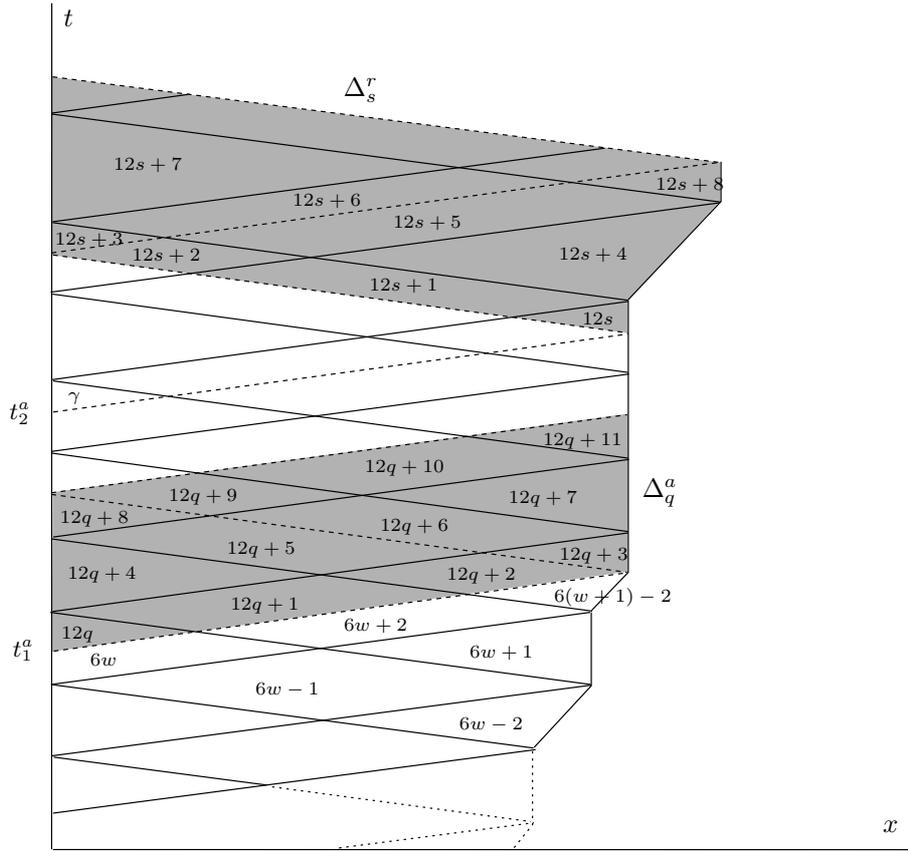


FIG. A.1 : Evolution de la solution ondulatoire avec  $t_1^a$  qui correspond à un instant de mise à zéro de la vitesse de chargement et  $t_2^a$  à un instant de redémarrage de la vitesse de chargement  $\epsilon$ . Le domaine espace-temps est subdivisé en domaine  $\Delta_w$ ,  $\Delta_q^a$  et  $\Delta_s^r$ .

Lorsque la solution arrive au temps  $t = t_2^a$ , alors la vitesse du chargement repasse par sa valeur initiale  $\epsilon$ , et le train d'onde **4** est généré. Ainsi, compte tenu de la construction ondulatoire lorsque le front de fissure est à l'arrêt, deux configurations sont possibles : soit le train d'onde **4** est généré entre les trains d'onde **1** et **2**, où soit entre les trains d'onde **2** et **1**. La figure A.1 correspond au premier cas.

On se place tout d'abord dans le cas de la Figure A.1 et on recherche la valeur des champs du domaine  $\mathcal{Q}^\gamma$ . Puisque les champs du domaine qui lui sont tangents sont égaux à  $(b)$ , alors  $v^\gamma = \epsilon$  et  $e^\gamma = -(2w+1)\epsilon - \frac{2k_1}{\sqrt{2k_2 + \epsilon^2 + \epsilon}}$ . On remarque, en utilisant (III.21), que ces champs sont égaux à ceux du domaine  $\mathcal{Q}_\epsilon^{6w+3}$ . Ainsi le domaine  $\mathcal{Q}^{12s}$  est identique au domaine  $\mathcal{Q}_\epsilon^{6(w+1)+1}$  sous réserve que la vitesse de chargement  $\epsilon$  est suffisamment petite pour que le front de fissure du domaine  $\mathcal{Q}^{12s}$  soit à l'arrêt. De même par un raisonnement similaire, on obtient que le domaine  $\mathcal{Q}^{12s+8}$  est identique au domaine  $\mathcal{Q}_\epsilon^{6(w+1)+1}$ . Puis on obtient assez facilement que le domaine  $\mathcal{Q}^{12s+4}$  est identique au domaine  $\mathcal{Q}^{6(w+1)-2}$ . Ainsi à travers le pavage  $\Delta_s^r$  nous avons exactement reconstruit les champs du pavage  $\Delta_{w+1}$  qui est le pavage qui suit  $\Delta_w$  pour la construction de la courbe limite (III.24). Lorsque le train d'onde **4** apparaît entre les trains d'onde **2** et **1**, alors la conclusion est la même à une permutation près des domaines du pavage  $\Delta_s^r$ .

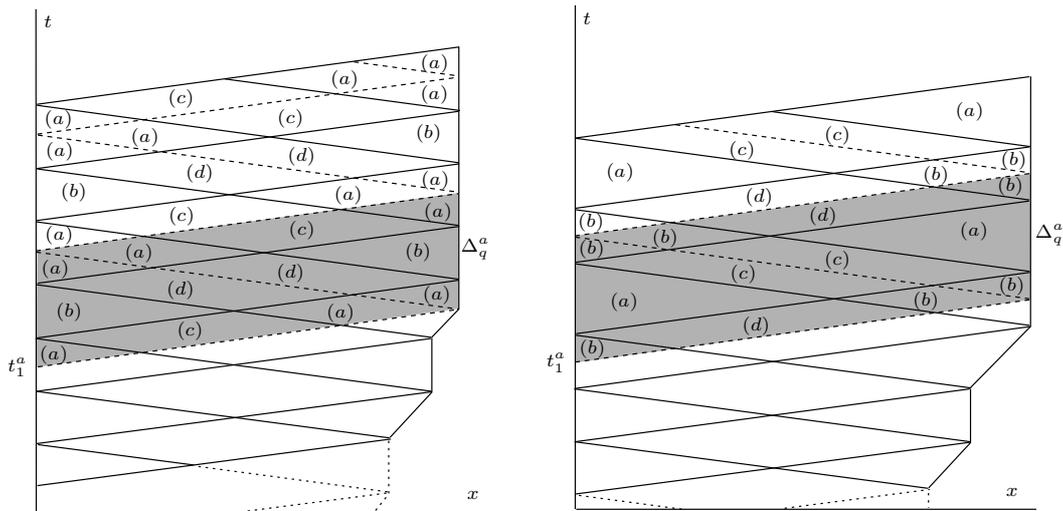


FIG. A.2 : Présentation des deux cas de figure lors de l'arrêt du chargement ; à gauche : le train d'onde 3 est généré entre les trains d'onde 2 et 1, à droite : le train d'onde 3 est généré entre les trains d'onde 1 et 2

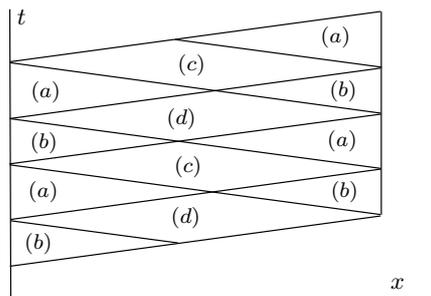


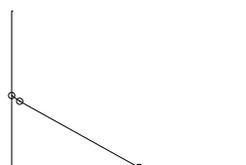
FIG. A.3 : Solution ondulatoire avec une vitesse de chargement nulle après suppression du trains d'onde 3

Étape 3 : convergence de  $T \mapsto \ell(T)$  vers la courbe limite (III.24)

Le résultat précédent nous assure que la construction ondulatoire pour  $t > t_2^a$  s'effectue à partir de pavages similaires (à un permutation des domaines près) aux pavages  $\Delta_n$  avec  $n > w$ . Lorsque l'on reconstruit les suites nécessaires à l'élaboration de la courbe limite (III.24), on obtient des suites identiques à celles introduites en page 70. Cependant, une différence apparaît au niveau des conditions initiales de ces suites, puisque lors de l'arrêt du chargement en  $t = t_1^a$ , soit le pavage  $\Delta_{w+1}$  ou soit le pavage  $\Delta_w$  (en fonction des deux cas de figure possible) n'a pas été totalement construit. Cela se traduit par un décalage des conditions initiales dans le plan espace-charge. Ainsi le résultat de convergence est obtenu lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$ . (Tel que la perturbation de la condition initiale tende vers zéro lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$ .)

f) Démonstration de la proposition 17

On commence tout d'abord par présenter un résultat qui sera nécessaire par la suite.



**Lemme 2** Lorsque le pavage  $\Delta_w$  (cf Figure III.8) est construit en considérant les deux suites (III.27), et où la vitesse du front de fissure  $\dot{\ell}_\epsilon^{2w-1} = 1/\sqrt{2k_2 + \epsilon^2}$  a été remplacée par le terme d'ordre 0 de son développement limité lorsque  $\epsilon$  est proche de zéro, alors l'évolution du décollement du film converge vers la réponse asymptotique (III.24) lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$ .

*Preuve :*

Les termes  $(a_n, T_n)$  qui sont défini à partir du pavage  $\Delta_n$  peuvent se mettre sous la forme

$$\begin{cases} T_{n+1} = T_n + \epsilon(a_{n+1} + a_n) \\ T_{n+1} = T_n + h + (a_{n+1} - a_n)\sqrt{2k_2} \end{cases}, \quad h = \frac{2L\epsilon k_2}{k_2 - k_1} \quad (\text{A.17})$$

Ensuite en adoptant une approche similaire à celle développée page 70 on obtient le résultat souhaité à savoir

$$\mathcal{T}(x) = \sqrt{2k_2}(\ell_I - \ell_{II} + x + \frac{k_2(\ell_{II} - \ell_I)}{k_2 - k_1} \ln \frac{k_2(\ell_{II} - \ell_I) + x(k_1 - k_2)}{\ell_{II}k_1 - \ell_I k_2}) \quad (\text{A.18})$$

□

Le lemme (2) a permis de mettre en évidence la convergence vers la courbe (III.24) dans un certain cas de figure. En fait cette configuration sera celle obtenue au cours de la démonstration de la proposition 17.

*Preuve de la proposition 17 :*

La construction de la solution se décompose en plusieurs parties : une phase d'arrêt lorsque  $t_1^a < t < t_2^a$ , une phase de décharge lorsque  $t_2^a < t < t_3^a$ , une phase de recharge lorsque  $t_3^a < t < t_4^a$  et une phase de propagation lorsque  $t > t_4^a$ . La première phase a déjà été abordée (cf Page 165) et on obtient que le front de fissure est à l'arrêt lorsque la vitesse de chargement devient nulle. De plus, le train d'onde **3** généré au temps  $t = t_1^a$  disparaît lorsque  $t > t_1^a$ . On considèrera donc, comme condition initiale à la deuxième phase du chargement, les champs présentés à travers la Figure A.3.

*Étape 1 : Construction de la solution pour  $t_2^a < t < t_3^a$  :*

En  $t = t_2^a$ , un train d'onde que l'on note **4** apparaît, ainsi le pavage de référence doit être redéfini et on note  $\Delta_q^a$  le nouveau pavage constitué de 12 éléments. Comme précédemment, une discussion s'impose au niveau de la position du train d'onde **4** par rapport aux autres trains d'onde existants (cf Figure A.2). On suppose tout d'abord que le train d'onde **4** est généré entre les trains d'onde **2** et **1**. De ce fait on peut construire la solution ondulatoire (cf Figure A.4) et on obtient les valeurs des champs du pavage  $\Delta_q^a$  (après avoir effectué un développement limité en  $\epsilon$  autour de zéro)

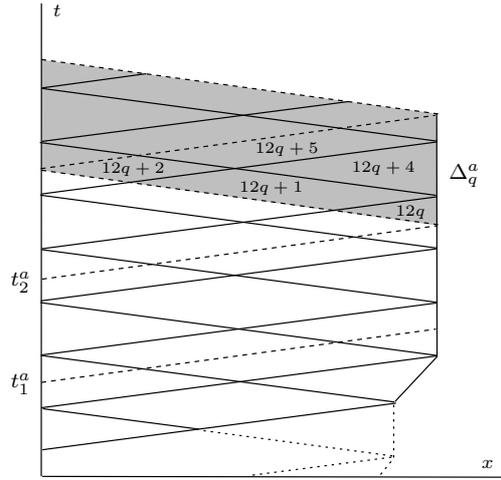
$$e^{12q} = (2q + 1)\epsilon - \sqrt{2k_2}, \quad v^{12q} = 0 \quad (\text{A.19})$$

$$e^{12q+1} = -\frac{k_1}{\sqrt{2k_2}} - \sqrt{\frac{k_2}{2}} + \left(\frac{4q+1}{2} + \frac{k_1}{2k_2} - w\right)\epsilon \quad (\text{A.20})$$

$$v^{12q+1} = \frac{k_1}{\sqrt{2k_2}} - \sqrt{\frac{k_2}{2}} + \left(\frac{1}{2} - \frac{k_1}{2k_2} + w\right)\epsilon$$

$$e^{12q+2} = e^{12q}, \quad v^{12q+2} = 0 \quad (\text{A.21})$$

$$e^{12q+3} = 2(q+1)\epsilon - \sqrt{2k_2}, \quad v^{12q+3} = -\epsilon \quad (\text{A.22})$$

FIG. A.4 : Evolution de la charge  $T$ 

$$e^{12q+4} = -\frac{\sqrt{2}k_1}{\sqrt{k_2}} + (2q + \frac{k_1}{k_2} - 2w)\epsilon, \quad v^{12q+4} = 0 \quad (\text{A.23})$$

$$e^{12q+5} = e^{12q+1}, \quad v^{12q+5} = -\frac{k_1}{\sqrt{2k_2}} + \sqrt{\frac{k_2}{2}} + \left(-\frac{1}{2} + \frac{k_1}{2k_2} - w\right)\epsilon \quad (\text{A.24})$$

$$e^{12q+6} = -\frac{k_1}{\sqrt{2k_2}} - \sqrt{\frac{k_2}{2}} + \left(\frac{4(q+1)-1}{2} + \frac{k_1}{2k_2} - w\right)\epsilon \quad (\text{A.25})$$

$$v^{12q+6} = -\frac{k_1}{\sqrt{2k_2}} + \sqrt{\frac{k_2}{2}} + \left(-\frac{3}{2} + \frac{k_1}{2k_2} - w\right)\epsilon$$

$$e^{12q+7} = -\frac{\sqrt{2}k_1}{\sqrt{k_2}} + (2q + 1 + \frac{k_1}{k_2} - 2w)\epsilon, \quad v^{12q+7} = -\epsilon \quad (\text{A.26})$$

$$e^{12q+8} = e^{12q}, \quad v^{12q+8} = 0 \quad (\text{A.27})$$

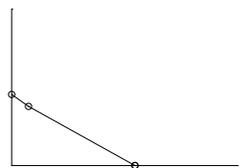
$$e^{12q+9} = e^{12q+3}, \quad v^{12q+9} = -\epsilon \quad (\text{A.28})$$

$$e^{12q+10} = e^{12q+6}, \quad v^{12q+10} = \frac{k_1}{\sqrt{2k_2}} - \sqrt{\frac{k_2}{2}} + \left(-\frac{1}{2} - \frac{k_1}{2k_2} + w\right)\epsilon \quad (\text{A.29})$$

$$e^{12q+11} = e^{12q+3}, \quad v^{12q+11} = -\epsilon \quad (\text{A.30})$$

Cette construction des champs du pavage  $\Delta_q^a$ , nous assure que le front de fissure  $\ell(T)$  est à l'arrêt lorsque la charge passe de la valeur  $T^r$  à la valeur nulle. De plus, le fait que les vitesses ne dépendent pas de l'indice  $q$  du pavage  $\Delta_q^a$ , nous assure que la quantité d'énergie cinétique qui oscille dans le film est constante au cours du temps. Ainsi l'énergie injectée dans le modèle par le déplacement imposé sert uniquement à modifier la déformée générale du film, en d'autres mots il n'y a pas de transfert entre une partie de l'énergie potentielle et l'énergie cinétique (cf Proposition 14).

**Remarque 36** Lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$  on obtient que les domaines  $\mathcal{Q}^{12q+2}$  et  $\mathcal{Q}^{12q+3}$  ont des champs identiques, de même pour les domaines  $\mathcal{Q}^{12q+5}$  et  $\mathcal{Q}^{12q+6}$  et pour les domaines  $\mathcal{Q}^{12q+8}$  et  $\mathcal{Q}^{12q+9}$ . Ainsi l'influence du train d'onde **4** peut être négligé dans le plan espace-temps (et non dans le plan espace-charge) lors d'un passage à la limite en  $\epsilon$ .



*Étape 2 : Construction de la solution pour  $t_3^a < t < t_4^a$  :*

Lorsque  $t_2^a < t < t_3^a$  la solution ondulatoire se construit à partir d'une superposition des pavages  $\Delta_q^a$  (constitué de 12 domaines). En  $t = t_3^a$ , la vitesse de chargement change et passe de  $-\epsilon$  à  $\epsilon$ , ainsi un train d'onde est généré (que l'on note **5**) et vient modifier la solution ondulatoire. L'apparition du train d'onde **5** doit être analysé en fonction de sa position par rapport aux trains d'onde **1**, **2** et **4**. En effet le train d'onde **5** peut se trouver soit entre les trains d'onde **2** et **4**, soit entre les trains d'onde **4** et **1** ou soit entre les trains d'onde **1** et **2** (sachant qu'à travers l'étape 1 nous avons fait le choix du train d'onde **4** entre **2** et **1**).

La solution ondulatoire pour  $t > t_3^a$  peut être construit comme précédemment à l'aide d'un pavage de référence et en considérant que le train d'onde **5** apparaît entre les trains d'onde **1** et **2**. Dans notre cas, il faut considérer un pavage  $\Delta_s^b$  ayant 20 domaines (cf Figure A.5). Ensuite de façon similaire à la construction des domaines précédents (cf Page 69) on obtient les champs solutions des 20 domaines du pavage (A.31).

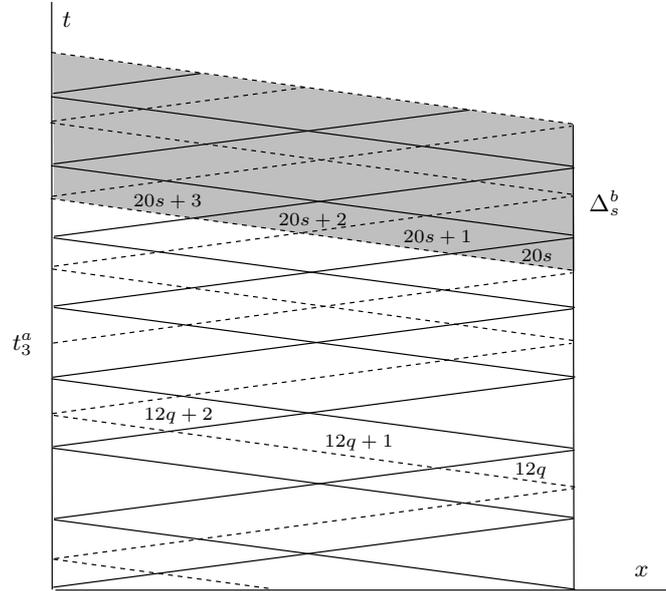


FIG. A.5 : Evolution de la charge  $T$

$$e^{20s} = -\frac{\sqrt{2}k_1}{\sqrt{k_2}} + \left(-2s + \frac{k_1}{k_2} + 2q - 2w\right)\epsilon, \quad v^{20s} = 0 \quad (\text{A.31})$$

$$\begin{aligned} e^{20s+1} &= -\frac{k_1}{\sqrt{2k_2}} - \sqrt{\frac{k_2}{2}} + \left(-\frac{4s-1}{2} + \frac{k_1}{2k_2} + 2q - w\right)\epsilon \\ v^{20s+1} &= -\frac{k_1}{\sqrt{2k_2}} + \sqrt{\frac{k_2}{2}} + \left(-\frac{1}{2} + \frac{k_1}{2k_2} - w\right)\epsilon \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

$$\begin{aligned} e^{20s+2} &= -\frac{k_1}{\sqrt{2k_2}} - \sqrt{\frac{k_2}{2}} + \left(-\frac{4(s-1)+1}{2} + \frac{k_1}{2k_2} + 2q - w\right)\epsilon \\ v^{20s+2} &= -\frac{k_1}{\sqrt{2k_2}} + \sqrt{\frac{k_2}{2}} + \left(-\frac{3}{2} + \frac{k_1}{2k_2} - w\right)\epsilon \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

$$e^{20s+3} = -\frac{\sqrt{2}k_1}{\sqrt{k_2}} + \left(-2s + 1 + \frac{k_1}{k_2} + 2q - 2w\right)\epsilon, \quad v^{20s+3} = -\epsilon \quad (\text{A.34})$$

$$e^{20s+4} = -\frac{\sqrt{2}k_1}{\sqrt{k_2}} + \left(-2s - 1 + \frac{k_1}{k_2} + 2q - 2w\right)\epsilon, \quad v^{20s+4} = \epsilon \quad (\text{A.35})$$

$$e^{20s+5} = -\sqrt{2k_2} + (-2s + 1 + 2q)\epsilon, \quad v^{20s+5} = 0 \quad (\text{A.36})$$

$$e^{20s+6} = -\sqrt{2k_2} + (-2(s-1) + 2q)\epsilon, \quad v^{20s+6} = -\epsilon \quad (\text{A.37})$$

$$e^{20s+7} = -\frac{k_1}{\sqrt{2k_2}} - \sqrt{\frac{k_2}{2}} + \left(-\frac{4(s-1)+1}{2} + \frac{k_1}{2k_2} + 2q - w\right)\epsilon \quad (\text{A.38})$$

$$v^{20s+7} = \frac{k_1}{\sqrt{2k_2}} - \sqrt{\frac{k_2}{2}} + \left(-\frac{1}{2} - \frac{k_1}{2k_2} + w\right)\epsilon$$

$$e^{20s+8} = -\frac{k_1}{\sqrt{2k_2}} - \sqrt{\frac{k_2}{2}} + \left(-\frac{4s+1}{2} + \frac{k_1}{2k_2} + 2q - w\right)\epsilon \quad (\text{A.39})$$

$$v^{20s+8} = \frac{k_1}{\sqrt{2k_2}} - \sqrt{\frac{k_2}{2}} + \left(\frac{3}{2} - \frac{k_1}{2k_2} + w\right)\epsilon$$

$$e^{20s+9} = -\sqrt{2k_2} + (-2s + 2q)\epsilon, \quad v^{20s+9} = \epsilon \quad (\text{A.40})$$

$$e^{20s+10} = -\sqrt{2k_2} + (-2s + 3 + 2q)\epsilon, \quad v^{20s+10} = 0 \quad (\text{A.41})$$

$$e^{20s+11} = -\frac{k_1}{\sqrt{2k_2}} - \sqrt{\frac{k_2}{2}} + \left(-\frac{4s+5}{2} + \frac{k_1}{2k_2} + 2q - w\right)\epsilon \quad (\text{A.42})$$

$$v^{20s+11} = \frac{k_1}{\sqrt{2k_2}} - \sqrt{\frac{k_2}{2}} + \left(\frac{1}{2} - \frac{k_1}{2k_2} + w\right)\epsilon$$

$$e^{20s+12} = -\frac{k_1}{\sqrt{2k_2}} - \sqrt{\frac{k_2}{2}} + \left(-\frac{4s-1}{2} + \frac{k_1}{2k_2} + 2q - w\right)\epsilon \quad (\text{A.43})$$

$$v^{20s+12} = \frac{k_1}{\sqrt{2k_2}} - \sqrt{\frac{k_2}{2}} + \left(\frac{5}{2} - \frac{k_1}{2k_2} + w\right)\epsilon$$

$$e^{20s+13} = -\sqrt{2k_2} + (-2s + 1 + 2q)\epsilon, \quad v^{20s+13} = 2\epsilon \quad (\text{A.44})$$

$$e^{20s+14} = -\sqrt{2k_2} + (-2(s-1) + 2q)\epsilon, \quad v^{20s+14} = \epsilon \quad (\text{A.45})$$

$$e^{20s+15} = -\frac{\sqrt{2}k_1}{\sqrt{k_2}} + (-2(s-1) + \frac{k_1}{k_2} + 2q - 2w)\epsilon, \quad v^{20s+15} = 0 \quad (\text{A.46})$$

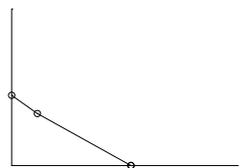
$$e^{20s+16} = -\frac{\sqrt{2}k_1}{\sqrt{k_2}} + (-2s + \frac{k_1}{k_2} + 2q - 2w)\epsilon, \quad v^{20s+16} = 2\epsilon \quad (\text{A.47})$$

$$e^{20s+17} = -\frac{k_1}{\sqrt{2k_2}} - \sqrt{\frac{k_2}{2}} + \left(-\frac{4s-1}{2} + \frac{k_1}{2k_2} + 2q - w\right)\epsilon \quad (\text{A.48})$$

$$v^{20s+17} = -\frac{k_1}{\sqrt{2k_2}} + \sqrt{\frac{k_2}{2}} + \left(\frac{3}{2} + \frac{k_1}{2k_2} - w\right)\epsilon$$

$$e^{20s+18} = -\frac{k_1}{\sqrt{2k_2}} - \sqrt{\frac{k_2}{2}} + \left(-\frac{4(s-1)+1}{2} + \frac{k_1}{2k_2} + 2q - w\right)\epsilon \quad (\text{A.49})$$

$$v^{20s+18} = -\frac{k_1}{\sqrt{2k_2}} + \sqrt{\frac{k_2}{2}} + \left(\frac{1}{2} + \frac{k_1}{2k_2} - w\right)\epsilon$$



$$e^{20s+19} = -\frac{\sqrt{2}k_1}{\sqrt{k_2}} + \left(-2s + 1 + \frac{k_1}{k_2} + 2q - 2w\right) \epsilon, \quad v^{20s+19} = \epsilon \quad (\text{A.50})$$

On observe que lorsque  $t < t_4^a$  alors la fonction  $T \mapsto \ell(T)$  n'évolue pas puisque les vitesses de fissuration que l'on obtient sur les domaines  $\mathcal{Q}^{20s}$ ,  $\mathcal{Q}^{20s+5}$ ,  $\mathcal{Q}^{20s+10}$  et  $\mathcal{Q}^{20s+15}$  sont négatives (on les fixe donc à zéro). L'arrêt du front de fissure à travers un pavage  $\Delta_s^b$  peut être généré par deux aspects, soit  $\epsilon$  est suffisamment petit, ce qui garanti l'arrêt de la fissure (domaines  $\mathcal{Q}^{20s}$  et  $\mathcal{Q}^{20s+15}$ ). Ou soit le film n'a pas accumulé suffisamment d'énergie pour que le front de fissure  $\ell(T)$  évolue (on reviendra sur cet aspect dans l'étape suivante).

*Étape 3 : Construction de la solution pour  $t > t_4^a$  :*

On s'intéresse maintenant aux conditions de propagation des 4 fronts de fissure du pavage  $\Delta_s^b$ . Le calcul de la vitesse de fissuration du domaine  $\mathcal{Q}^{20s}$  (le front de fissure est à l'arrêt pour les domaines antérieurs à  $\mathcal{Q}^{20s}$ ) donne

$$\dot{j}^{20s} = \frac{k_1^2 - k_2^2}{k_1^2 + k_2^2} - \frac{2k_2^{3/2} (\sqrt{2}k_1^2 + 2\sqrt{2}k_1k_2q - 2\sqrt{2}k_1k_2s - 2\sqrt{2}k_1k_2w) \epsilon}{(k_1^2 + k_2^2)^2} \quad (\text{A.51})$$

qui est négatif pour un  $\epsilon$  suffisamment petit. Ensuite à  $\epsilon$  fixé,  $s$  évolue et peut pour de grandes valeurs, donner une vitesse  $\dot{j}^{20s}$  positive. Ce redémarrage correspond à la fin de la couche limite (cf (B.3.4)) et on retiendra qu'il intervient lorsque  $s + w - q$  est de l'ordre de  $\frac{1}{\epsilon}$ . Puisque l'on s'intéresse aux effets de redémarrage lorsque  $\ell_{II} < \ell(T) < \ell^d$ , on considère que  $\dot{j}^{20s} = 0$ . Ainsi le calcul de la vitesse du front de fissure du domaine  $\mathcal{Q}^{20s+5}$  donne

$$\dot{j}^{20s+5} = \epsilon \frac{2s - 1 - 2q}{\sqrt{2k_2}}, \quad (\text{A.52})$$

puis le calcul de la vitesse du front de fissure du domaine suivant  $\mathcal{Q}^{20s+10}$  (le résultat est identique lorsque l'on considère  $\dot{j}^{20s+5} = 0$  ou  $\dot{j}^{20s+5} > 0$ )

$$\dot{j}^{20s+10} = \epsilon \frac{2s - 3 - 2q}{\sqrt{2k_2}}, \quad (\text{A.53})$$

A travers les expressions (A.52) et (A.53) on obtient que  $\dot{j}^{20s+5} > 0$  pour  $s \geq q + 1$  et que  $\dot{j}^{20s+10} > 0$  pour  $s \geq q + 2$ . Lors de l'évolution de  $s$ , les fronts de fissure sont à l'arrêt pour  $s < q + 1$ , puis lorsque  $s = q + 1$ , on a  $\dot{j}^{20s+5} > 0$  et  $\dot{j}^{20s+10} = 0$ . Ensuite pour le domaine  $\mathcal{Q}^{20s+15}$  on retrouve une vitesse de fissuration du même type que pour le domaine  $\mathcal{Q}^{20s}$

$$\dot{j}^{20s+15} = \frac{k_1^2 - k_2^2}{k_1^2 + k_2^2} - \frac{2k_2^{3/2} (\sqrt{2}k_1^2 + 2\sqrt{2}k_1k_2 + 2\sqrt{2}k_1k_2q - 2\sqrt{2}k_1k_2s - 2\sqrt{2}k_1k_2w) \epsilon}{(k_1^2 + k_2^2)^2} \quad (\text{A.54})$$

Sur les pavages suivants, on obtient que les domaines  $\mathcal{Q}^{20S+5}$  et  $\mathcal{Q}^{20S+10}$  avec  $S > s$ , ont des vitesses de fissuration identiques et égales à  $\epsilon/\sqrt{2k_2}$ . Cette valeur correspond au terme d'ordre 0 du développement limité de  $\dot{j}_\epsilon^{2w-1}$  lorsque  $\epsilon$  est proche de zéro. Ainsi, en effectuant un redécoupage du pavage  $\Delta_s^b$  pour obtenir un pavage du type  $\Delta_w$  (cf Figure III.8), et en utilisant le Lemme 2, on obtient que l'ensemble des points du front de fissure  $(T, \ell(T))$  converge vers la courbe limite  $x \mapsto T(x)$  lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$ .

g) Démonstration de la proposition 18

Puisque les vitesses de chargement changent, alors l'évolution du front de fissure sera considérée dans le plan espace-temps. Cependant les résultats que l'on recherche au niveau du comportement asymptotique du front de fissure seront à analyser dans le plan espace-charge (le changement de plan sera effectué en fin de démonstration et consistera en des transformations homothétiques par morceaux).

*Étape 0 : plan de la démonstration*

La construction de la solution ondulatoire nécessite de distinguer deux cas : soit le train d'onde 3 est généré entre les trains d'onde 1 et 2, ou soit le train d'onde 3 est généré entre les trains d'onde 2 et 1 (cf Figure A.6). On présente ainsi la construction de la solution ondulatoire selon les deux cas de figure, puis on montre la convergence du décollement du film vers la courbe (III.24).

*Étape 1 : construction de la solution ondulatoire lorsque  $t^a$  se trouve entre les trains d'onde 2 et 1*

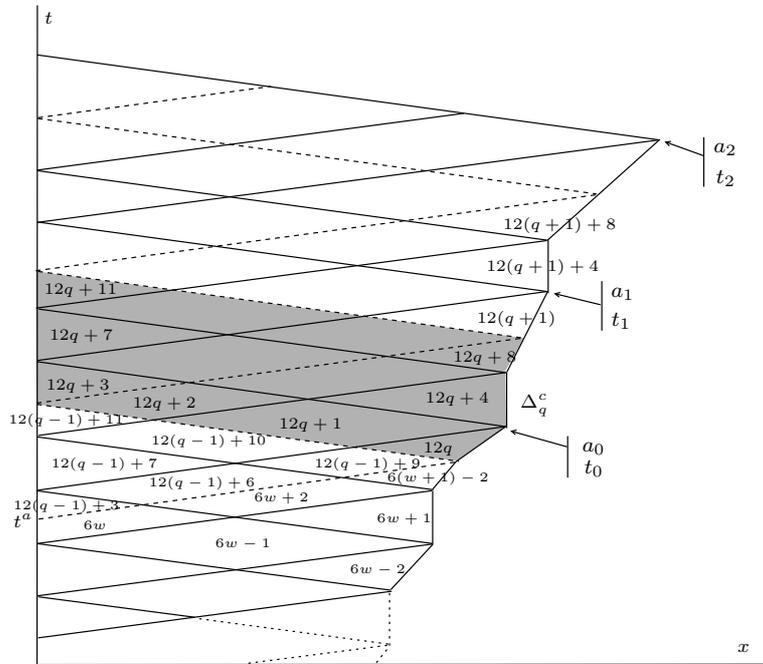
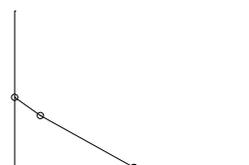


FIG. A.6 : Solution ondulatoire lorsque la vitesse de chargement passe de  $\epsilon$  à  $\beta$  et que le train d'onde 3 se trouve entre les trains d'onde 2 et 1.

On commence tout d'abord par calculer les champs dans le domaine  $Q^{12(q-1)+3}$ . A partir du domaine  $Q^{6w}$  on obtient  $v^{12(q-1)+3} = \beta$  et  $e^{12(q-1)+3} = -\sqrt{2k_2} + \epsilon^2 + \epsilon - \beta$ . Ainsi, de ce domaine on construit les champs du domaine  $Q^{12q}$  et on a

$$v^{12q} = \epsilon \left( \frac{2 - \kappa}{\kappa} \right), \quad e^{12q} = -\sqrt{2k_2}, \quad \dot{l}^{12q} = \frac{(2 - \kappa)\epsilon}{\kappa\sqrt{2k_2}} \quad (\text{A.55})$$

après avoir effectué un développement limité autour de  $\epsilon$  proche de zéro. Ensuite on s'intéresse au domaine  $Q^{12(q-1)+7}$  qui se construit à partir de  $Q^{6w+1}$  et on a  $v^{12(q-1)+7} = \beta$



et  $e^{12(q-1)+7} = -\frac{2k_1}{\sqrt{2k_2+\epsilon^2+\epsilon}} - 2w\epsilon - \beta$ . De ce domaine on obtient les champs à travers le domaine  $\mathcal{Q}^{12q+4}$  et en particulier la vitesse du front de fissure :

$$\dot{\ell}^{12q+4} = \frac{k_1^2 - k_2^2}{k_1^2 + k_2^2} + \frac{2\sqrt{2}k_1k_2\mathfrak{I}/2(-k_1\kappa + 2k_2(1 + \kappa w))\epsilon}{(k_1^2 + k_2^2)^2\kappa} \quad (\text{A.56})$$

qui, pour un  $\epsilon$  suffisamment petit  $\epsilon^c$ , peut devenir négatif. Ainsi, pour  $\epsilon < \epsilon^c$ , la vitesse du front de fissure est mise à zéro et les champs du domaine  $\mathcal{Q}^{12q+4}$  se mettent sous la forme

$$\dot{\ell}^{12q+4} = 0, \quad v^{12q+4} = 0, \quad e^{12q+4} = -\frac{k_1\sqrt{2}}{\sqrt{k_2}} + \left(\frac{k_1}{k_2} - \frac{2}{\kappa} - 2w\right)\epsilon \quad (\text{A.57})$$

De même on construit les champs du domaine  $\mathcal{Q}^{12q+8}$  à partir du domaine  $\mathcal{Q}^{12(q-1)+11}$  et on a

$$v^{12(q-1)+11} = \beta, \quad e^{12(q-1)+11} = -\sqrt{2k_2 + \epsilon^2} \quad (\text{A.58})$$

$$v^{12q+8} = \beta, \quad e^{12q+8} = -\sqrt{2k_2}, \quad \dot{\ell}^{12q+8} = \frac{\epsilon}{\sqrt{2k_2}} \quad (\text{A.59})$$

Ensuite on obtient que les domaines  $\mathcal{Q}^{12(q+1)}$  et  $\mathcal{Q}^{12q+8}$  sont identiques. La construction des champs du domaine  $\mathcal{Q}^{12(q+1)}$  est obtenue à partir des champs du domaine  $\mathcal{Q}^{12q+3}$ . Pour le domaine  $\mathcal{Q}^{12(q+1)+4}$ , on obtient que pour un  $\epsilon$  suffisamment petit, la vitesse du décollement du film est nulle. Puis en se basant sur le domaine  $\mathcal{Q}^{12q+11}$ , on construit le domaine  $\mathcal{Q}^{12(q+1)+8}$  et on trouve que ses champs sont identiques à ceux du domaine  $\mathcal{Q}^{12q}$ . Un pavage  $\Delta_q^c$  est ensuite défini à partir des 12 domaines grisés de la Figure A.6. Compte tenu de la construction des différents domaines, les pavages  $\Delta_q^c$  et  $\Delta_{q+1}^c$  ne sont pas identiques au niveau de la valeur des champs, tandis que les pavages  $\Delta_{2q+1}^c$  avec  $q \in \mathbb{N}$  sont identiques et de même pour les pavages  $\Delta_{2q+2}^c$  avec  $q \in \mathbb{N}$ . On en déduit donc que si l'on souhaite construire une suite pour décrire l'évolution de  $T \mapsto \ell(T)$ , alors il faut considérer une suite basée sur un couple de deux pavages successifs  $\Delta_q^c$  et  $\Delta_{q+1}^c$ . Ainsi on construit les suites  $a_m^*$  et  $T_m^*$  tel que  $a_m^* = a_n$ ,  $a_{m+1}^* = a_{n+2}$ ,  $T_m^* = T_n$  et  $T_{m+1}^* = T_{n+2}$ .

*Étape 2 : construction de la solution ondulatoire lorsque  $t^a$  se trouve entre les trains d'onde 1 et 2*

On construit la solution dynamique en utilisant des techniques similaires à celles utilisées précédemment, et on obtient la construction présentée sur la Figure A.7. Comme précédemment, l'utilisation de deux pavages successifs est nécessaire pour construire une récurrence sur  $a_m^*$  et  $T_m^*$ . La seule différence se trouve au niveau de la condition initiale  $(a_0, t_0)$  par rapport au train d'onde 3. En effet, soit le couple  $(a_0, t_0)$  se trouve sur le train d'onde 3 ou soit il se trouve à une distance de l'ordre de  $\epsilon$  de ce train d'onde. En définitive on supposera que lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$ , cette distance est proche de zéro.

*Étape 3 : résultat de convergence à partir d'un raisonnement par récurrence*

Il s'agit maintenant de montrer que l'évolution du front de fissure  $T \mapsto \ell(T)$  converge vers la courbe limite (III.24). Commençons tout d'abord par présenter la construction des deux suites  $(a_n, t_n)$  qui permettent de construire l'évolution de  $T \mapsto \ell(T)$ . Les suites sont construites en utilisant une approche similaire à (III.27) et compte tenu de la construction, on obtient quatre suites différentes : deux à travers le pavage  $\Delta_q^c$  et deux à travers le

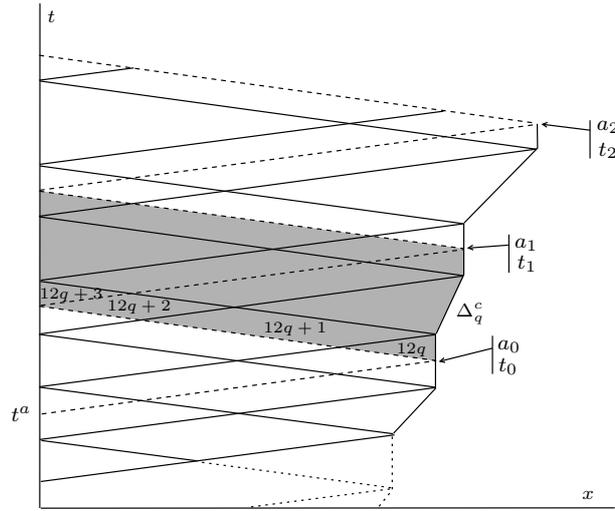


FIG. A.7 : Solution ondulatoire lorsque la vitesse de chargement passe de  $\epsilon$  à  $\beta$  et que le train d'onde 3 se trouve entre les trains d'onde 1 et 2.

pavage  $\Delta_{q+1}^c$ .

$$\begin{cases} T_{n+1} = T_n + \frac{h}{\frac{\epsilon}{\kappa}} + (a_{n+1} - a_n) \frac{\sqrt{2k_2}}{\kappa} \\ T_{n+1} = T_n + \frac{h}{\kappa} (a_n + a_{n+1}) \\ T_{n+2} = T_{n+1} + \frac{h}{\frac{\epsilon}{\kappa}} + (a_{n+2} - a_{n+1}) \frac{\sqrt{2k_2}}{2 - \kappa} \\ T_{n+2} = T_{n+1} + \frac{\epsilon}{\kappa} (a_{n+1} + a_{n+2}) \end{cases}, \text{ avec } h = \frac{2\epsilon k_2 (\ell_{II} - \ell_I)}{k_2 - k_1} \quad (\text{A.60})$$

avec  $T_m^* = T_n$ ,  $T_{m+1}^* = T_{n+2}$ ,  $a_m^* = a_n$  et  $a_{m+1}^* = a_{n+2}$ . Ce qui nous permet, en effectuant un développement limité en  $\epsilon$  à l'ordre 1, d'obtenir deux suites :

$$T_{n+2} = T_n + \frac{4\epsilon}{\kappa} a_n, \quad a_{n+2} = \frac{\sqrt{k_2}\kappa + 2\sqrt{2}\epsilon}{\sqrt{k_2}\kappa} a_n + \frac{2\sqrt{2k_2}(\ell_I - \ell_{II})\epsilon}{(k_2 - k_1)\kappa} \quad (\text{A.61})$$

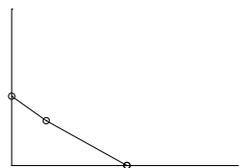
Nous allons ainsi montrer par récurrence que le couple  $(a_m^*, \beta t_m^*)$  avec  $m \in \mathbb{N}$  appartient à la courbe limite (III.24).

Au rang  $m = 0$  on considère que le couple  $(a_0^*, T_0^* = \epsilon t_0)$  appartient à la courbe (III.24). On a donc  $a_0^* = \ell_{II}$  et  $T_0^* = \sqrt{2k_2}\ell_I$ . En utilisant (A.61) on obtient, en effectuant un développement limité en  $\epsilon$  proche de 0 à l'ordre 1 :

$$a_1^* = \ell_{II} + \frac{2\sqrt{2}\epsilon(k_2\ell_I - k_1\ell_{II})}{\sqrt{k_2}\kappa(k_2 - k_1)}, \quad T_1^* = \sqrt{2k_2}\ell_I + \frac{4\ell_{II}\epsilon}{\kappa} \quad (\text{A.62})$$

et on a l'égalité suivante  $\mathcal{T}(a_1^*) = T_1^*$  où  $x \mapsto \mathcal{T}(x)$  définit la courbe limite (III.24). Ainsi au rang  $m = 0$ , la relation de récurrence est vraie.

Au rang  $m$ , on suppose que le couple  $(a_m^*, \beta t_m^*)$  appartient à la courbe (III.24) et on souhaite montrer que le couple  $(a_{m+1}^*, \beta t_{m+1}^*)$  appartient aussi à cette courbe. En utilisant les expressions (A.61) puis en les injectant dans la relation (III.24), on obtient immédiatement notre résultat :  $\mathcal{T}(a_{m+1}^*) = T_{m+1}^*$ . Ainsi la relation de récurrence est aussi vraie au rang  $m$ , et donc tout couple  $(a_m^*, T_m^*)$  avec  $m \in \mathbb{N}$  et pour  $\epsilon$  convergeant vers 0, appartient à la courbe limite (III.24).



### A.3 Solution dynamique pour un défaut constitué de plusieurs ténacités

h) Démonstration de la proposition 24

La démonstration se présente sous la forme d'un raisonnement par récurrence, où l'indice de récurrence est défini comme étant l'indice  $i$  de la construction des courbes limites. Ainsi on suppose au rang  $i$  que la couche limite formée par l'ensemble des courbes limites  $x \mapsto T^k(x)$  avec  $k \leq i$ , est indépendante des permutations des micro-défauts, et on souhaite montrer qu'elle le reste pour la nouvelle couche limite formée par  $x \mapsto T^k(x)$  avec  $k \leq i+1$ . Cette démonstration par récurrence nécessite aussi, en parallèle, la construction pas à pas de la couche limite. Pour cela on imbriquera dans le raisonnement précédent un second raisonnement par récurrence basé sur les mêmes indices  $i$  : on suppose au rang  $i$  que l'on connaît la courbe limite  $x \mapsto T^{i-1}(x)$  ainsi que le couple  $(\ell_i^d, T_i^d)$ , et on recherche  $x \mapsto T^i(x)$  ainsi que le couple  $(\ell_{i+1}^d, T_{i+1}^d)$ .

*Étape 1 : Récurrence au rang  $i = 1$*

A la première étape de la construction de la couche limite,  $x \mapsto T^0(x)$  n'est pas défini. Cependant on sait que  $\epsilon$  a été choisi tel que le front de fissure, au cours du pavage  $\Delta_k$ , s'arrête  $m$  fois. Cette information nous permet de construire les deux suites nécessaires à la construction de  $x \mapsto T^1(x)$

$$\begin{cases} T_{n+1} = T_n + \epsilon(a_{n+1} + a_n) \\ T_{n+1} = T_n + \sum_{i=1}^m h^i + \sqrt{2k_2 + \epsilon^2}(a_{n+1} - a_n), \text{ avec } h^i = \frac{2\epsilon k_2(d^{i+1} - d^i)}{k_2 - k_1^i} \end{cases} \quad (\text{A.63})$$

La courbe limite  $x \mapsto T^1(x)$  sera obtenue par passage à la limite lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$  (cf page 70). On observe qu'une permutation parmi les  $m$  défauts entraîne uniquement une permutation dans la sommation des termes  $h^i$ , ce qui ne modifie en rien la courbe limite  $x \mapsto T^1(x)$  et ce qui valide l'hypothèse de la première récurrence au rang  $i = 1$ .

La construction du pavage  $\Delta_k$  suppose l'arrêt du front de fissure  $m$  fois, ainsi le critère d'arrêt peut se mettre sous la forme (cf équation A.67)

$$\text{pour un } \epsilon \text{ fixé } \exists k \in \mathbb{N} \text{ tel que } , \epsilon < \mathcal{H}^i(k) \forall i \in \{1 \dots m\} \text{ avec } \mathcal{H}^i(k) = \frac{\sqrt{2k_2}(k_2 - k_1^i)}{2kk_2 - k_1^i} \quad (\text{A.64})$$

Lorsque l'un ou plusieurs des  $m$  critères  $\epsilon < \mathcal{H}^i(k)$  ne sont plus valides (par exemple les indices  $p, q$ ), alors la construction du pavage  $\Delta_k$  doit être modifiée et un point de raccord  $(\ell_2^d, T_2^d)$  doit être calculé. Ce point est obtenu en utilisant la relation  $p = (k_2 - k_1^p)/\sqrt{2k_2}\epsilon$  (ou  $q = (k_2 - k_1^q)/\sqrt{2k_2}\epsilon$ ), qui est obtenue en effectuant un développement limité autour du critère d'arrêt violé  $\epsilon < \mathcal{H}^p(k)$  (ou  $\epsilon < \mathcal{H}^q(k)$ ). Cette relation nous permet ensuite de déterminer le couple  $(\ell_2^d, T_2^d)$  en utilisant les suites A.63 (cf page 70). Ainsi l'hypothèse de la seconde récurrence est vérifiée au rang  $i = 1$ .

**Remarque 37** *Lorsqu'un nombre fini de critères d'arrêt sont violés en même temps, alors les ténacités des micro-défauts dont ils dépendent sont identiques. Par exemple, dans notre démonstration nous avons  $k_1^p = k_1^q$ .*

*Étape 2 : Récurrence au rang  $i$*

On suppose que la couche limite est formée de  $i - 1$  courbes limites et que l'on connaît le couple  $(\ell_i^d, T_i^d)$ . La connaissance de ces deux aspects nous informe sur la forme du pavage  $\Delta_k$  sur l'intervalle  $[\ell_i^d, \ell_{i+1}^d]$ , ce qui nous permet de construire

$$\begin{cases} T_{n+1} = T_n + \epsilon(a_{n+1} + a_n) \\ T_{n+1} = T_n + \sum_{i=1}^j h^i + \sqrt{2k_2 + \epsilon^2}(a_{n+1} - a_n), \text{ avec } h^i = \frac{2\epsilon k_2(d^{i+1} - d^i)}{k_2 - k_1^i} \end{cases} \quad (\text{A.65})$$

où  $j$  est défini comme étant le nombre de micro-défauts vérifiant le critère d'arrêt du front de fissure. Ces deux suites permettent de générer une famille de courbes limite  $\mathcal{M}(\ell, \alpha, k_2)$  sur l'intervalle  $[\ell_i^d, \ell_{i+1}^d]$ . On retient la courbe limite qui vérifie la relation  $T^i(\ell_i^d) = T_i^d$ . Puis on recherche le couple  $(\ell_{i+1}^d, T_{i+1}^d)$  à partir des fonctions  $\mathcal{H}^i(k)$  qui ne vérifient plus le critère d'arrêt de  $\ell(T)$  (cf récurrence au rang  $i = 1$ ). Ainsi les hypothèses des deux récurrences sont vérifiées puisque d'une part les suites A.65 sont insensibles aux permutations des micro-défauts de ténacité, et d'autre part nous avons construit  $x \mapsto T^i(x)$  ainsi que le couple  $(\ell_{i+1}^d, T_{i+1}^d)$ .

i) Démonstration de la proposition 22

*Étape 1 : construction de la courbe limite pour  $\ell \in [\ell_{I1}, \ell_1^d]$*

On utilise une approche similaire à celle présentée à la page 70, lors de l'étude du modèle à un défaut. La figure A.8 représente, par la zone grisée, le pavage de référence  $\Delta_k$  que l'on considère. Il possède 12 domaines élémentaires de type  $\mathcal{Q}_\epsilon^i$  et la numérotation des domaines et du front de fissure utilise la même convention que le modèle à un défaut.

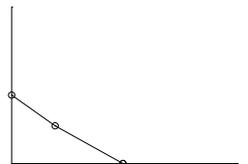
$$\Delta_k = \bigcup_{i=1}^{12} \mathcal{Q}_\epsilon^{12k-j+7} \quad (\text{A.66})$$

Ainsi chacune des trois discontinuités génère respectivement les trains d'onde **1**, **2** et **3**. Sur chaque pavage  $\Delta_k$  le front de fissure est à l'arrêt entre les trains d'onde **1** et **2**, et entre les trains d'onde **2** et **3**; entre les trains d'onde **3** et **1** le front de fissure se propage à la même vitesse que lorsque  $\ell(T) < \ell_I$ . De ce fait, pour garder les mêmes notations, le front de fissure s'arrête dans les domaines  $\mathcal{Q}_\epsilon^{12k-1}$  et  $\mathcal{Q}_\epsilon^{12k+3}$  avec  $k \in \mathbb{N}^*$  et tel que  $\dot{\ell}_\epsilon^{3k+2} = 0$  et  $\dot{\ell}_\epsilon^{3k+3} = 0$ .

A partir d'une construction des domaines de façon similaire à celle présentée par l'équation A.3, on observe que les domaines  $\mathcal{Q}_\epsilon^{12k-1}$  et  $\mathcal{Q}_\epsilon^{12k+3}$  dépendent respectivement de  $k_1$  et de  $k_3$ . Cet aspect se démontre par une récurrence simple et on présente ici la démonstration au premier ordre  $k = 1$ . La construction des champs de  $\mathcal{Q}_\epsilon^{13}$  nécessite uniquement la connaissance des champs de  $\mathcal{Q}_\epsilon^6$  qui eux même dépendent uniquement du domaine  $\mathcal{Q}_\epsilon^4$ , on effectue le même type de raisonnement pour montrer que  $\mathcal{Q}_\epsilon^{11}$  dépend uniquement de  $\mathcal{Q}_\epsilon^2$  (bien entendu les champs des domaines  $\mathcal{Q}_\epsilon^{12k-1}$  et  $\mathcal{Q}_\epsilon^{12k+3}$  ont une dépendance par rapport à  $k$ , indice du pavage  $\Delta_k$ ).

En utilisant la relation III.23 et en l'adaptant à notre problème on a : pour un  $\epsilon$  fixé,  $\exists k \in \mathbb{N}$  tel que  $\epsilon < \mathcal{H}(k) < \mathcal{G}(k)$  avec  $\mathcal{H}(k) = \frac{\sqrt{2k_2}(k_2 - k_1)}{2kk_2 - k_1}$  et  $\mathcal{G}(k) = \frac{\sqrt{2k_2}(k_2 - k_3)}{2kk_2 - k_3}$ .

Alors  $\dot{\ell}_\epsilon^{3k+2} = 0$  et  $\dot{\ell}_\epsilon^{3k+3} = 0, \forall k \geq 1$ .



De ce fait on définit  $\ell_1^d$  tel que

$$\ell_1^d = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} a_{k(\epsilon)} \text{ où } k(\epsilon) \text{ est solution de } \tau(k) = 0 \quad (\text{A.67})$$

où  $a_k$  est un élément de la suite nécessaire à la construction de la courbe limite (cf (III.27)) et  $\tau(k) = (\epsilon - \min(\mathcal{H}(k), \mathcal{G}(k)))$ .  $\ell_1^d$  apparaît donc comme la distance à partir de laquelle le front de fissure du domaine  $\mathcal{Q}_\epsilon^{12k-1}$  ou du domaine  $\mathcal{Q}_\epsilon^{12k+3}$  a une vitesse de fissuration non nulle. Comme présenté par le Lemme 1, cette vitesse de fissuration correspond à la solution statique III.42 lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$ .

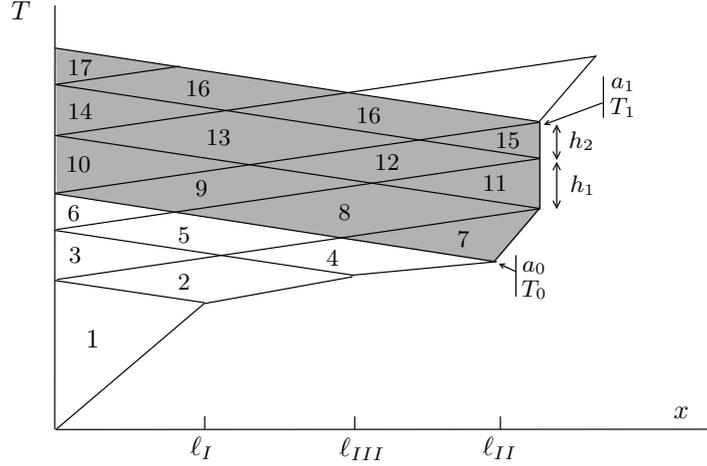


FIG. A.8 : Définition du pavage  $\Delta_1$

Ainsi on construit une récurrence basée sur deux suites

$$\begin{cases} T_{n+1} = T_n + \epsilon(a_{n+1} + a_n) \\ T_{n+1} = T_n + h_1 + h_2 + (a_{n+1} - a_n)\sqrt{2k_2 + \epsilon^2} \end{cases} \quad (\text{A.68})$$

où  $h_1 = \frac{2\epsilon k_2(\ell_{III} - \ell_I)}{k_2 - k_1}$  et  $h_2 = \frac{2\epsilon k_2(\ell_{II} - \ell_{III})}{k_2 - k_3}$ . En effectuant une approche similaire à celle présentée page 70 on obtient

$$T_1(\ell) = \sqrt{2k_2}(\ell_I - \ell_{II} + \ell + \frac{k_2(\ell_{II}(k_2 - k_1) + \ell_{III}(k_1 - k_3) + \ell_I(k_3 - k_2))}{(k_2 - k_1)(k_2 - k_3)} \ln \left( \frac{\ell(k_2 - k_1)(k_2 - k_3) + k_2(\ell_{III}(k_3 - k_1) + \ell_{II}(k_1 - k_2) + \ell_I(k_2 - k_3))}{\ell_I k_2(k_2 - k_3) + \ell_{II} k_3(k_1 - k_2) + \ell_{III} k_2(k_3 - k_1)} \right)) \quad (\text{A.69})$$

Une expression de  $\ell_1^d$  est obtenue en utilisant l'équation A.67, et dans le cas où le minimum de la fonction  $\tau(k)$  est atteint par la fonction  $\mathcal{H}(k)$  on a

$$\ell_1^d = \frac{k_2(\ell_{II}(k_2 - k_1) + \ell_{III}(k_1 - k_3) + \ell_I(k_3 - k_2))}{(k_2 - k_1)(k_2 - k_3)} + e^{1 - \frac{k_3}{k_2}} \left( \frac{\ell_I k_2(k_2 - k_3) + \ell_{II} k_3(k_1 - k_2) + \ell_{III} k_2(k_3 - k_1)}{(k_2 - k_1)(k_2 - k_3)} \right) \quad (\text{A.70})$$

Le calcul de  $T_1^d$  est obtenue en utilisant l'équation A.69 et se présente sous la forme  $T_1^d = T_1(\ell_1^d)$

Étape 2 : construction de la courbe limite pour  $\ell \in [\ell_1^d, \ell_2^d]$

Lorsque  $\ell_2^d > \ell > \ell_1^d$ , le pavage  $\Delta_k$  présente deux fronts de fissure se propageant et un à l'arrêt. De ce fait la courbe limite est une courbe appartenant à la famille  $\mathcal{M}(\ell, L, \alpha, k_2)$  avec  $L = \ell_{III} - \ell_I$  et  $\alpha = k_1/k_2$ . La constante  $C$  permettant de définir  $\mathcal{M}(\ell, L, \alpha, k_2)$  dans la définition 7 est déterminée en utilisant comme condition initiale  $T_2(\ell_1^d) = T_1^d$ . Au final on obtient

$$T_2(\ell) = T_1^d + \sqrt{2k_2}(\ell - \ell_1^d) + \frac{k_2(\ell_{II} - \ell_{III})}{k_2 - k_3} \ln \left( \frac{k_2(\ell_{II} - \ell_{III}) + \ell(k_3 - k_2)}{k_2(\ell_{II} - \ell_{III}) + \ell_1^d(k_3 - k_2)} \right) \quad (\text{A.71})$$

La recherche du point  $\ell_2^d$  est obtenue facilement en recherchant  $\ell$  tel que  $T_2(\ell) = \sqrt{2k_2}\ell$ .

#### A.4 Figures pour les études complémentaires

Nous présentons à travers cette partie quelques figures complémentaires introduites lors de l'analogie entre le modèle de décollement de film avec un défaut et celui sans défaut avec un chargement brutal.

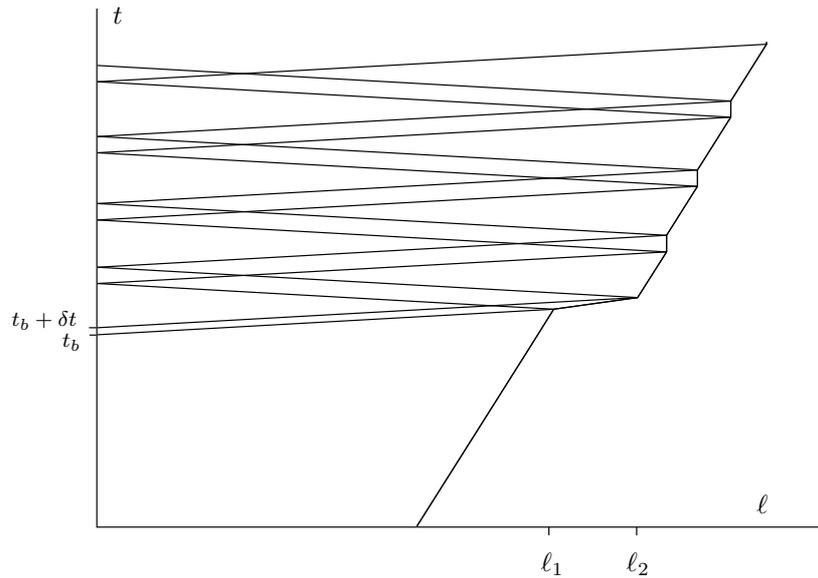
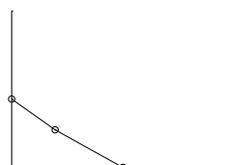


FIG. A.9 : Evolution des ondes dans le plan  $(t, \ell)$  lorsque  $T$  évolue selon le **Cas 2**



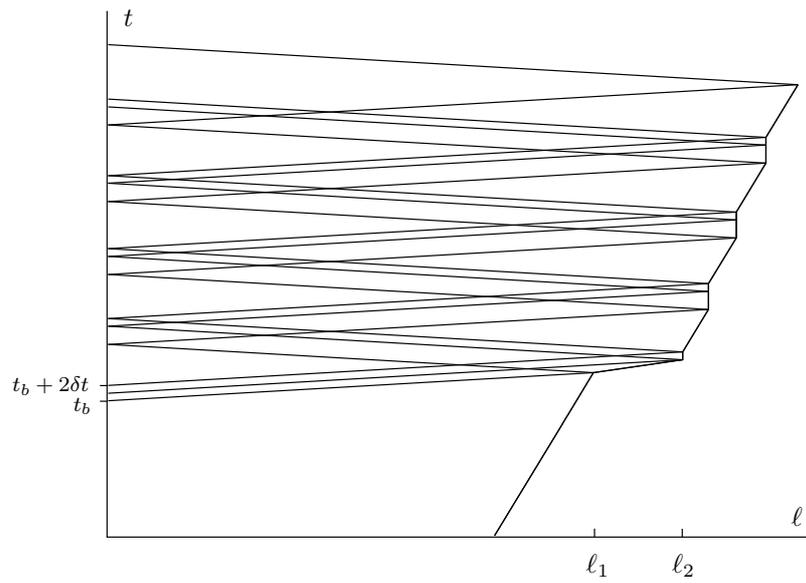


FIG. A.10 : Evolution des ondes dans le plan  $(t, \ell)$  lorsque  $T$  évolue selon le **Cas 1**

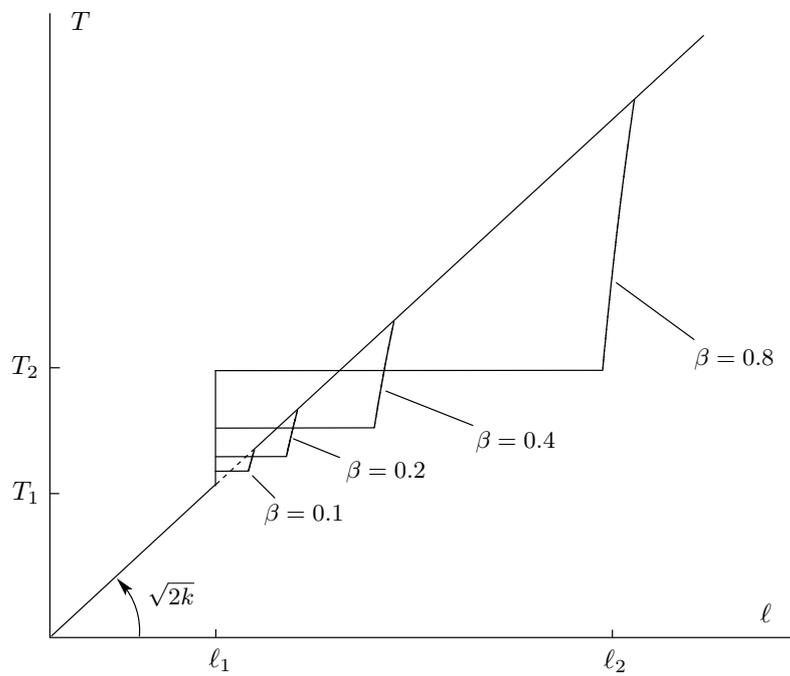


FIG. A.11 : Evolution de la charge  $T$  en fonction de  $\ell$  lorsque  $T$  évolue selon le **Cas 2** et pour différentes valeurs de  $\beta$

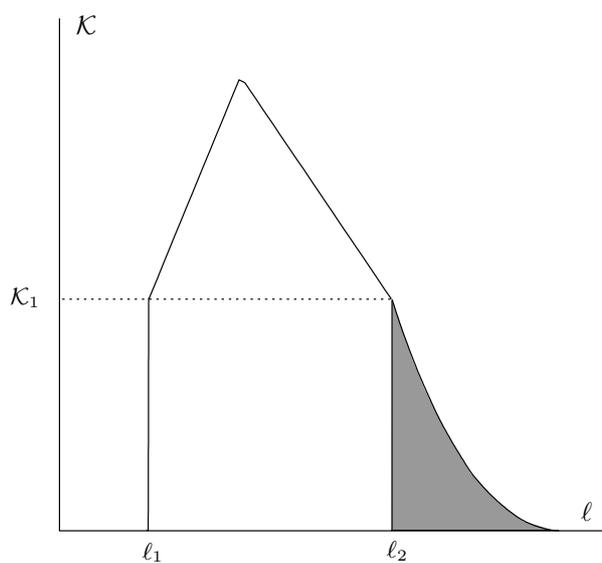


FIG. A.12 : Evolution de l'énergie cinétique en fonction de  $l$  lorsque  $T$  évolue selon le **Cas 2**

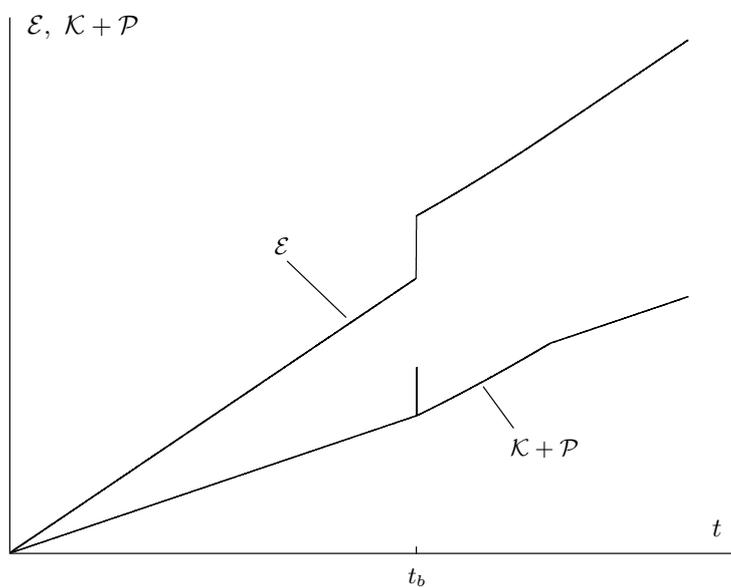
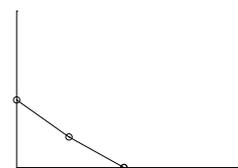


FIG. A.13 : Evolution des énergies en fonction de  $t$  lorsque  $T$  évolue selon le **Cas 2**



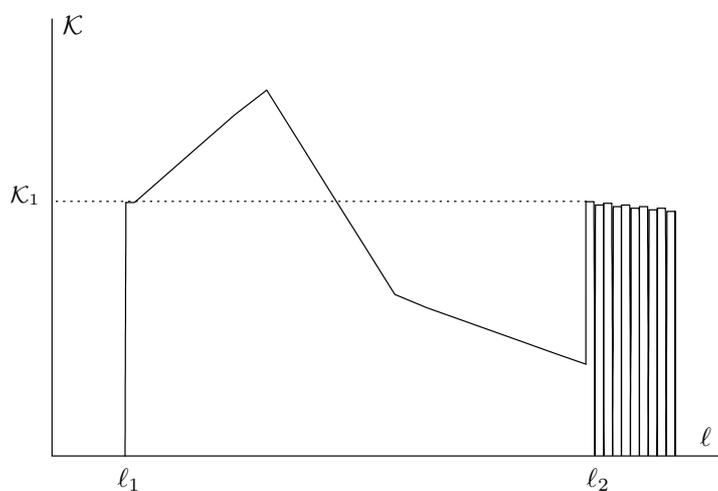


FIG. A.14 : Evolution de l'énergie cinétique  $\mathcal{K}$  au voisinage de l'instabilité en fonction de  $l$  lorsque  $T$  évolue selon le **Cas 1**

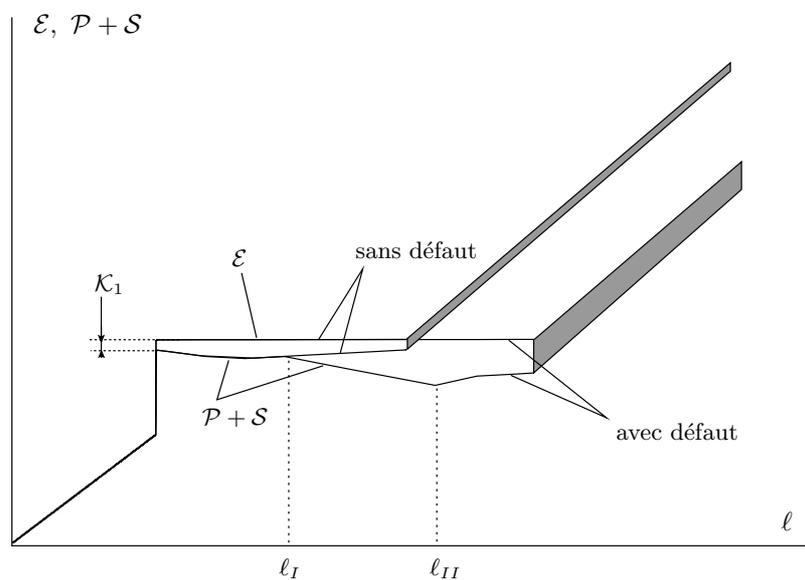


FIG. A.15 : Comparaison entre les énergies lorsque la propagation instable traverse un défaut (**Cas 2**)

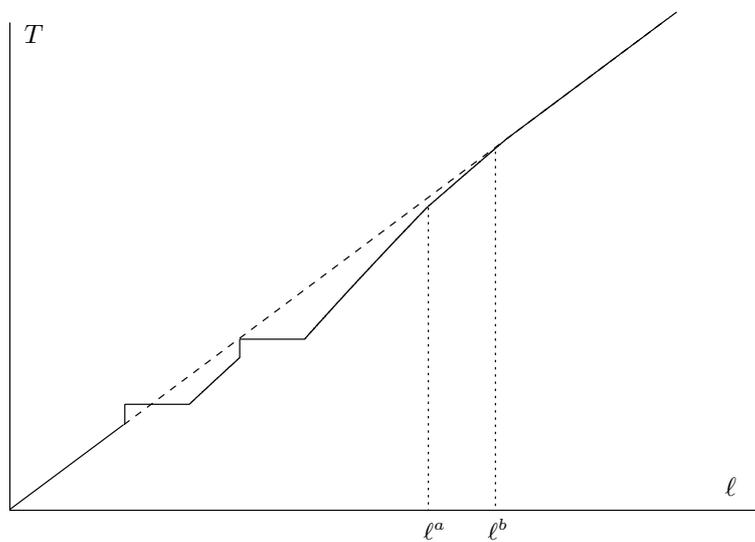


FIG. A.16 : Evolution du front de fissure dans le plan  $(T, x)$  lorsque le chargement est une double impulsion de type **Cas 2**

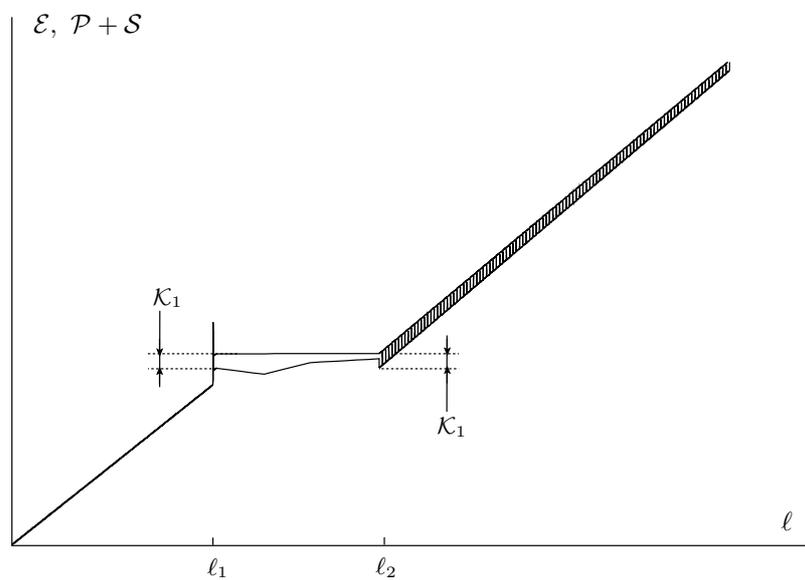
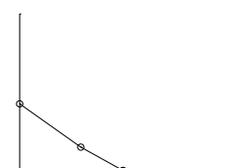


FIG. A.17 : Evolution des énergies en fonction de  $l$  lorsque  $T$  évolue selon le **Cas 1**



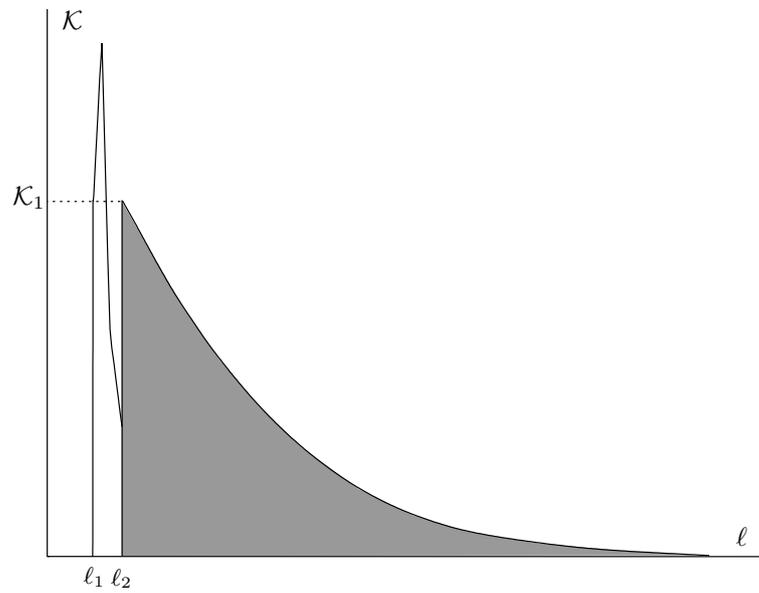


FIG. A.18 : Evolution de l'énergie cinétique  $\mathcal{K}$  en fonction de  $\ell$  lorsque  $T$  évolue selon le **Cas 1**

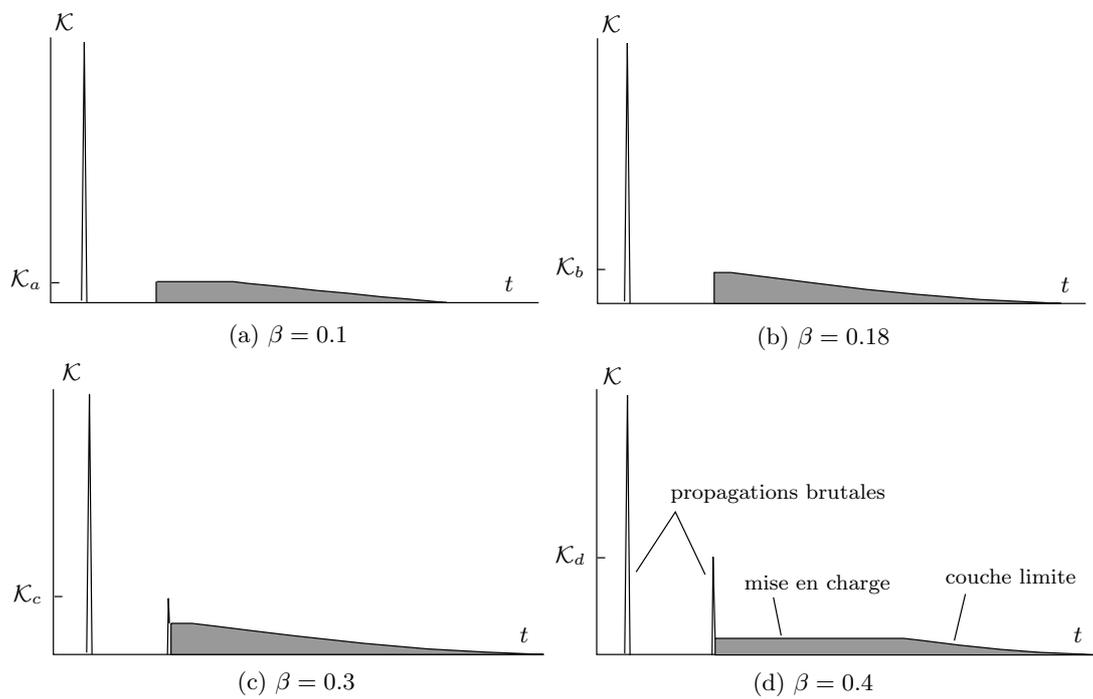


FIG. A.19 : Evolution de l'énergie cinétique  $\mathcal{K}$  en fonction du temps  $t$  lorsque le film traverse une discontinuité de ténacité puis un chargement  $T$  sous forme d'une impulsion de type **Cas 2**

## Annexe B

### A Figures complémentaires du chapitre IV

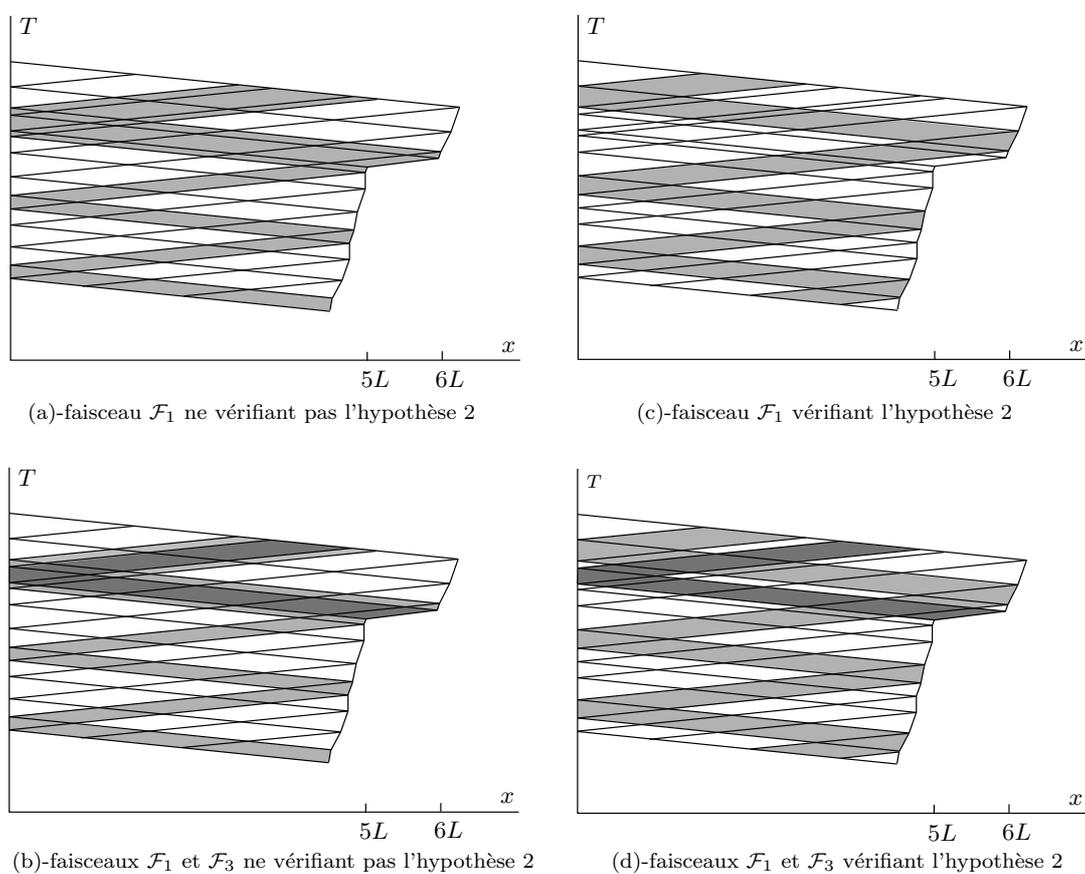
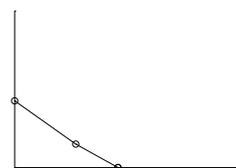


FIG. B.1 : Illustration de l'hypothèse 2.



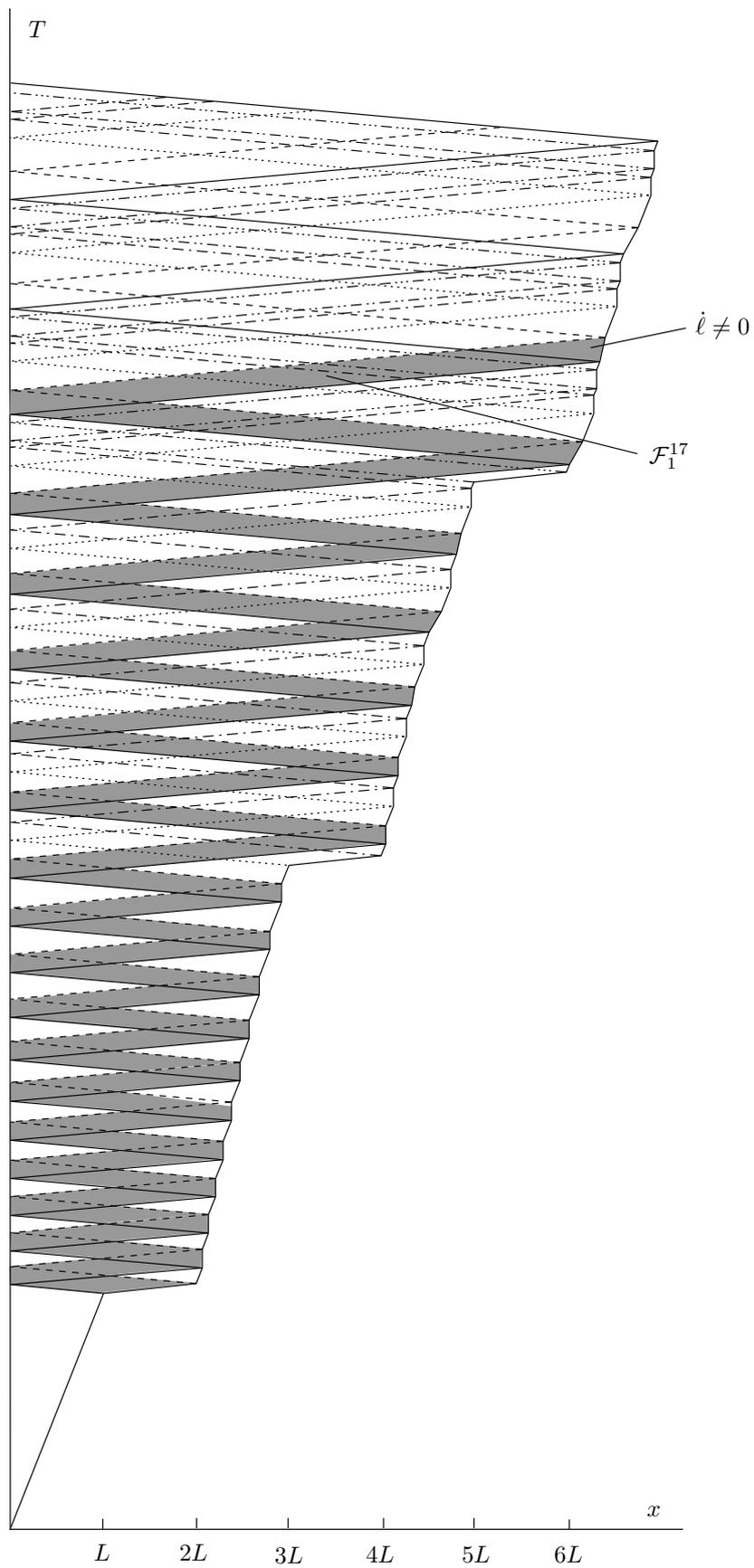


FIG. B.2 : Présentation du faisceau  $\mathcal{F}_1^{17}$ .

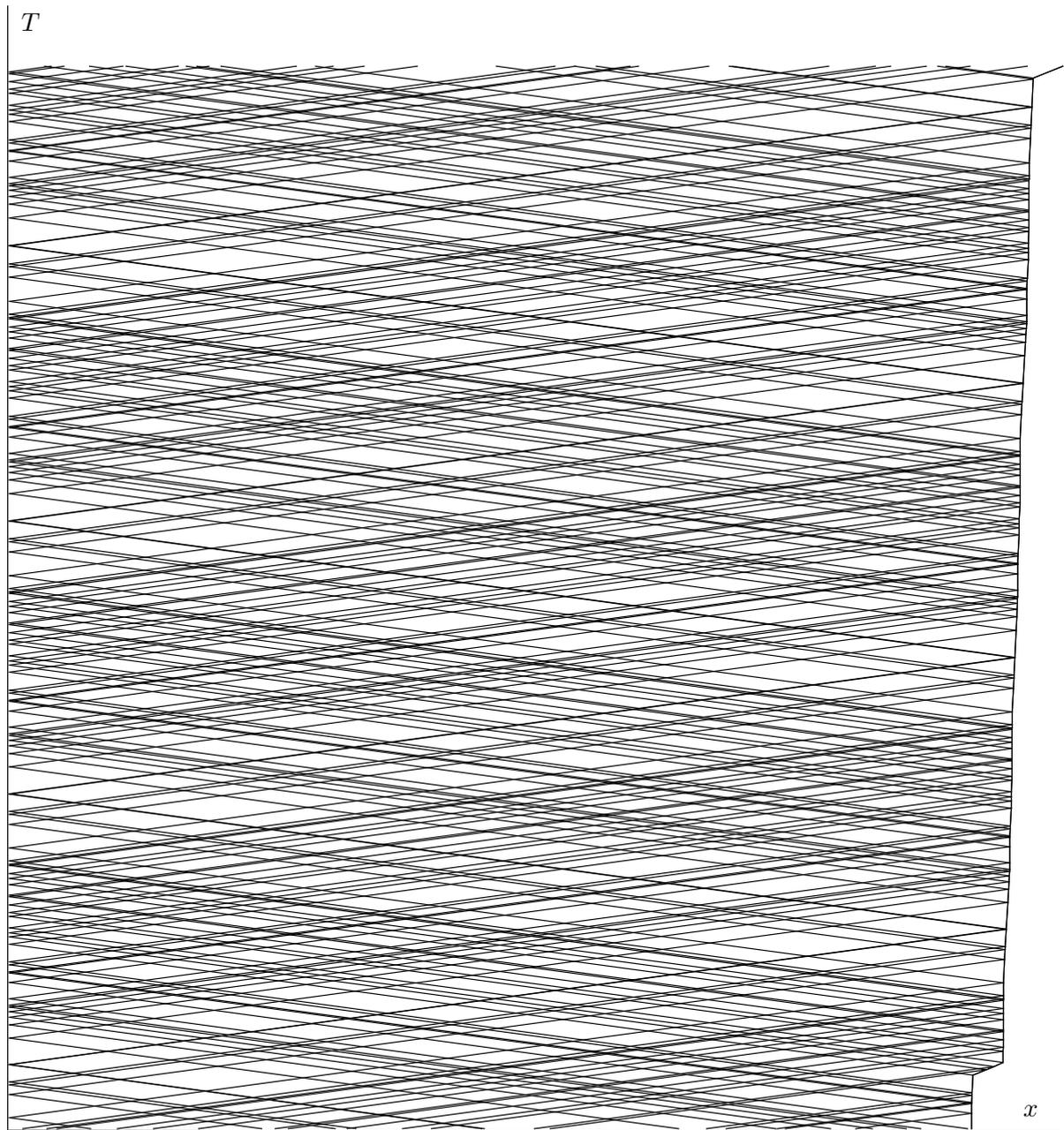
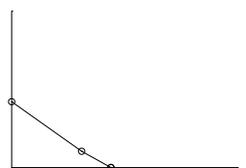


FIG. B.3 : Solution dynamique oscillatoire lors de la traversée du 17-ième défaut avec  $\epsilon = 0.01c$ ,  $L = 1$ ,  $k_1 = 0.5$  et  $k_2 = 1$



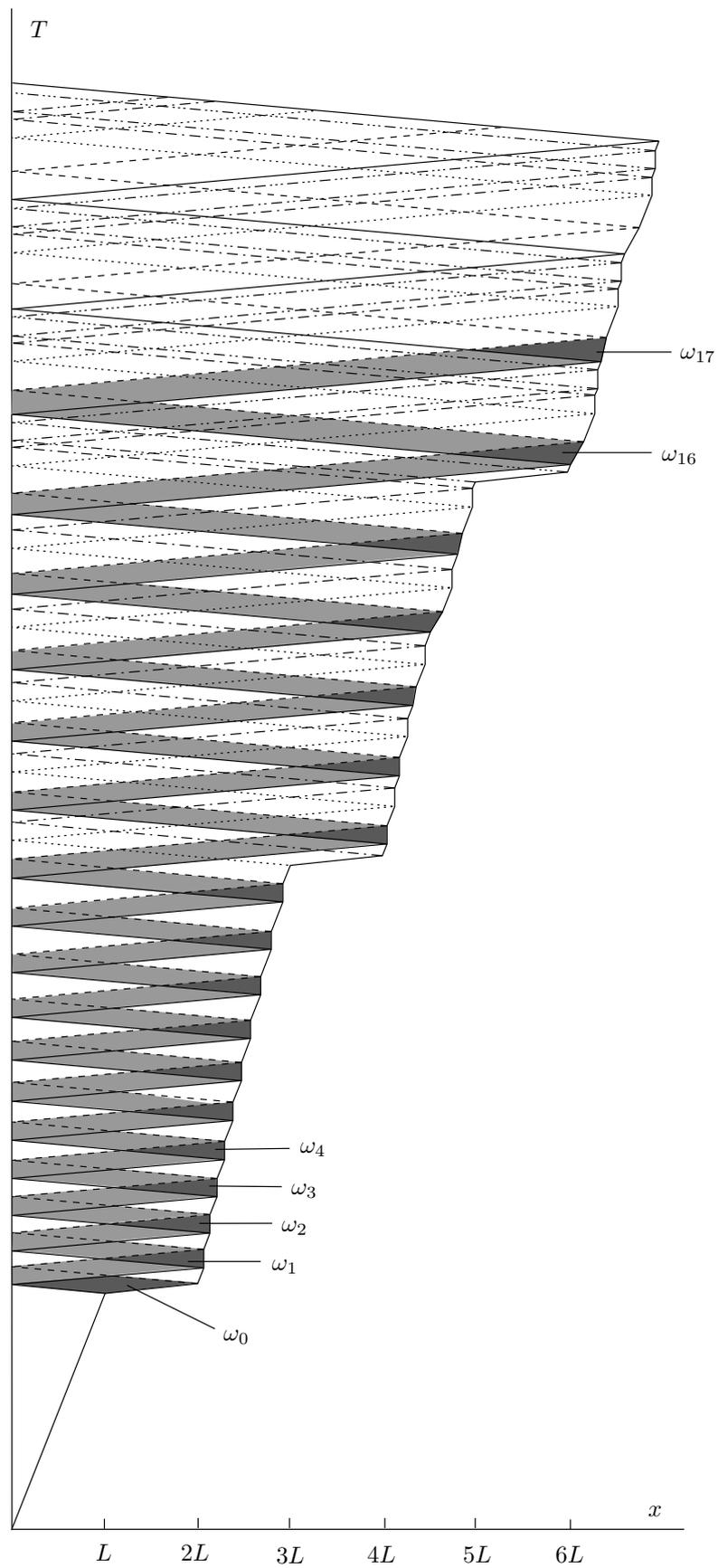


FIG. B.4 : Construction des domaines  $\omega_s$  du faisceau  $\mathcal{F}_1^{17}$ .

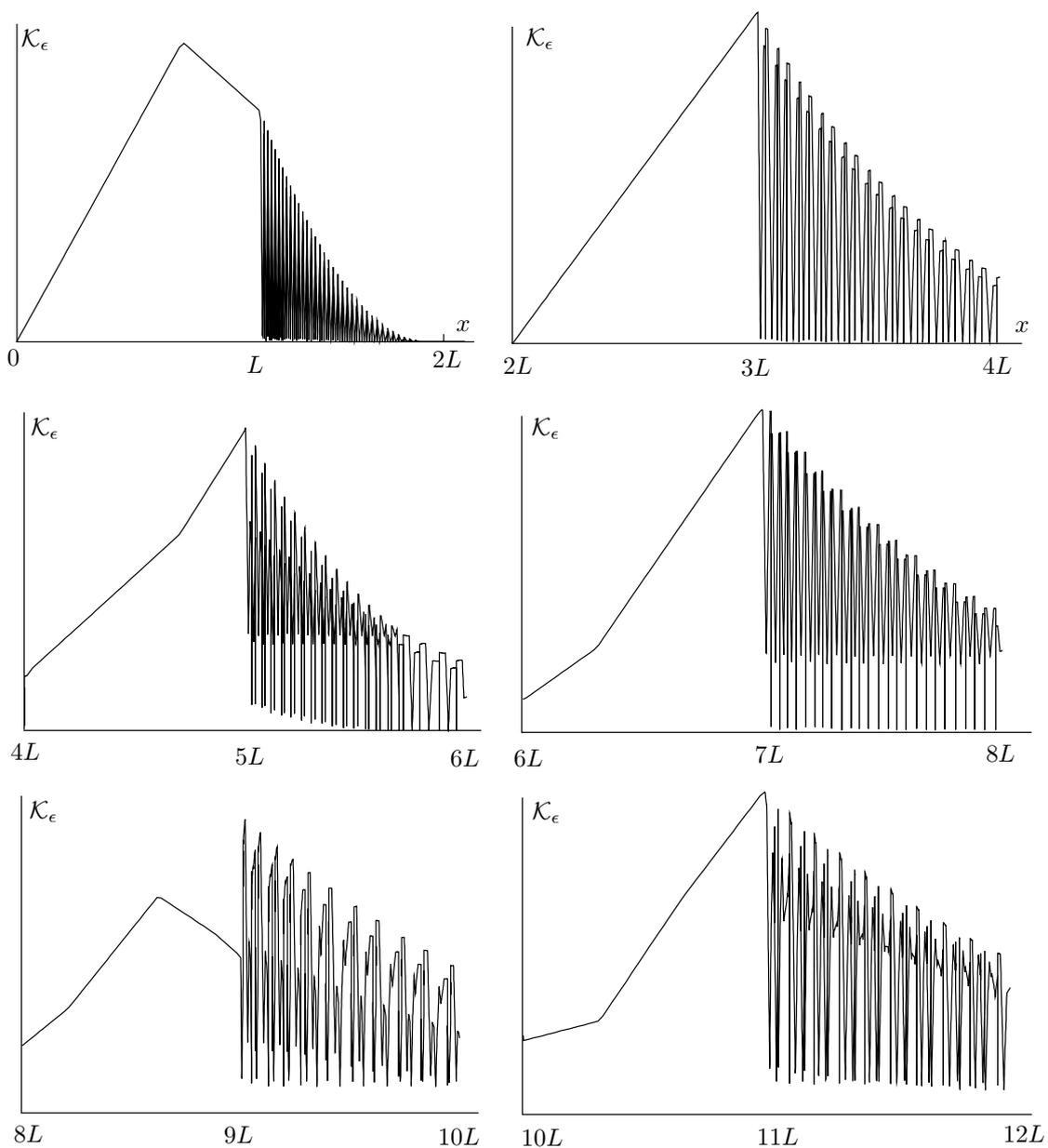
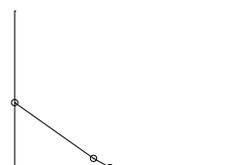


FIG. B.5 : Evolution de l'énergie cinétique à travers les 6 premiers défauts en fonction de  $\ell(T)$  pour  $\epsilon = 0.01c$ ,  $L = 1$ ,  $k_1 = 0.5$  et  $k_2 = 1$



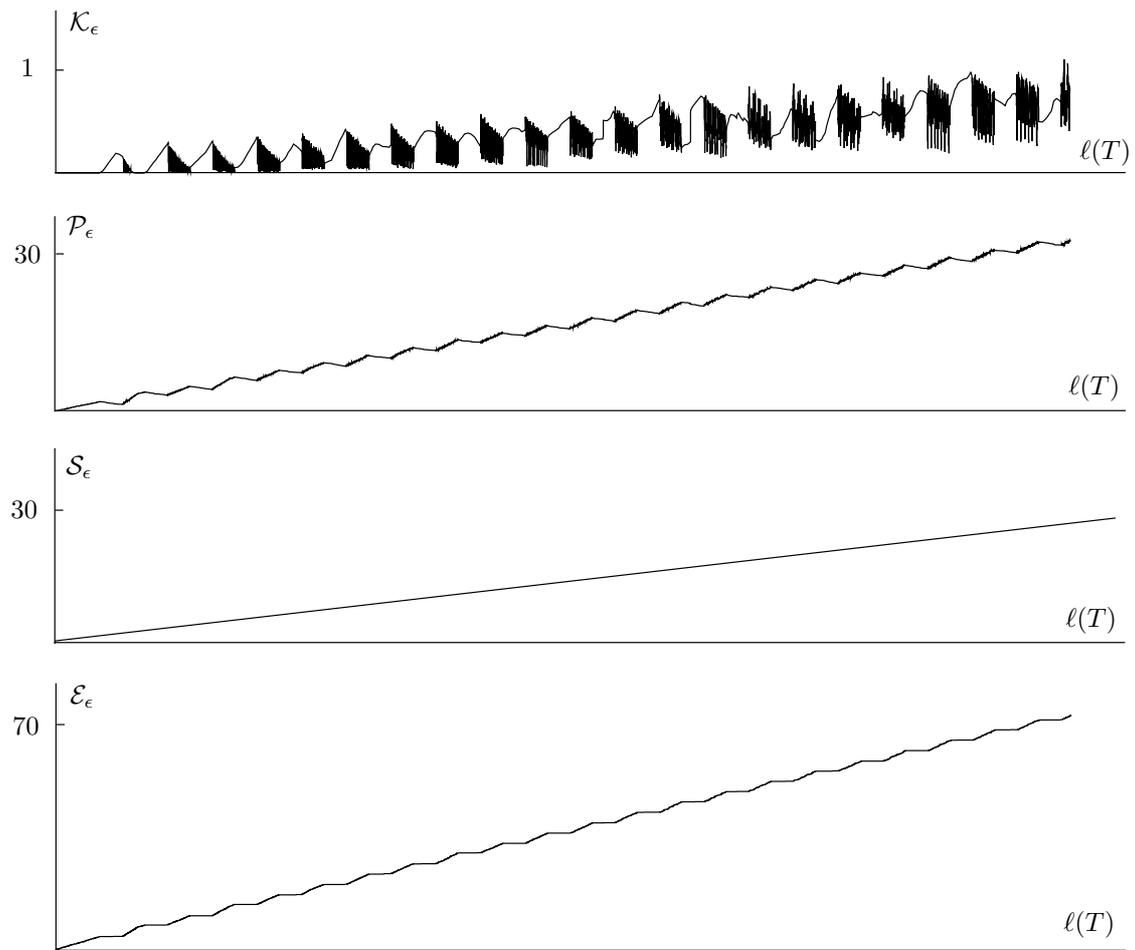


FIG. B.6 : Evolution des différentes énergies en fonction de la position du front de fissure avec  $\epsilon = 0.01c$ ,  $L = 1$ ,  $k_1 = 0.5$  et  $k_2 = 1$

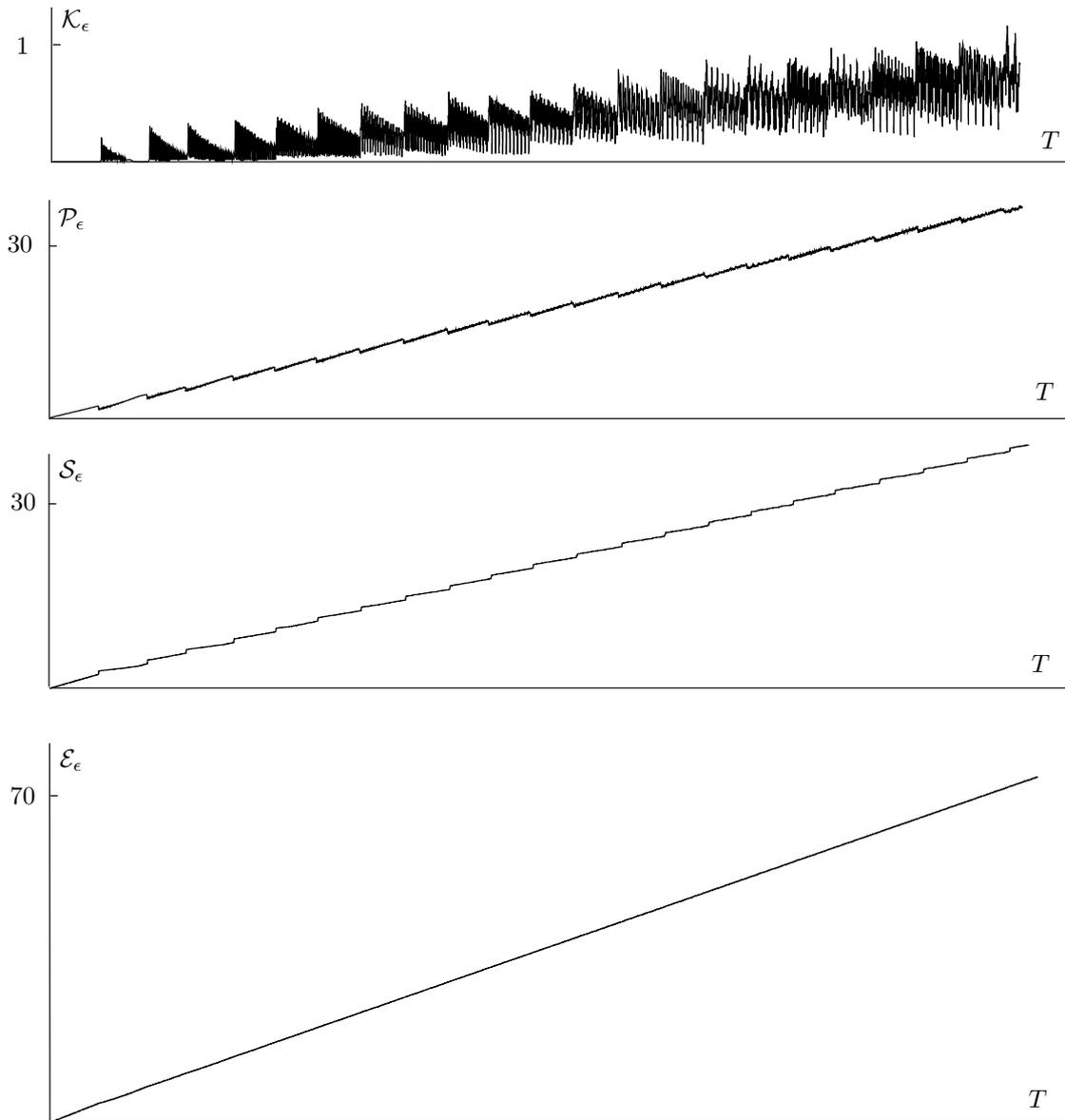
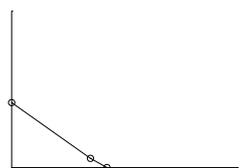


FIG. B.7 : Evolution des différentes énergies en fonction de la charge  $T$  avec  $\epsilon = 0.01c$ ,  $L = 1$ ,  $k_1 = 0.5$  et  $k_2 = 1$





## Annexe C

### A Démonstrations autour du chapitre V

j) Preuve de la proposition 33

Les systèmes à résoudre aux temps  $t_n$  et  $t_{n+1}$  peuvent se mettre sous la forme :

$$\begin{cases} M_n \ddot{U}_n + K_n U_n = 0 \\ M_{n+1} \ddot{U}_{n+1} + K_{n+1} U_{n+1} = 0 \end{cases} \quad (\text{C.1})$$

Le calcul de la stabilité du système mécanique s'applique sur le système d'équation (C.1) sans second membre de type force. En multipliant par  $[\dot{U}]$  les équations (C.1) et en prenant la différence, on obtient (en prenant  $M_n = M_{n+1}$  et  $K_n = K_{n+1}$ ) :

$$[\dot{U}]^T M [\ddot{U}] + [\dot{U}]^T K [U] = 0$$

qui se met sous la forme en utilisant (V.4) et (V.5) :

$$(\Delta t \langle \ddot{U} \rangle^T + \Delta t (\gamma - \frac{1}{2}) [\ddot{U}]^T) M [\ddot{U}] + [\dot{U}]^T K (\Delta t \langle \dot{U} \rangle + [\ddot{U}] \Delta t^2 (\beta - \frac{\gamma}{2})) = 0$$

ou encore :

$$\frac{1}{2} [\ddot{U}^T A \ddot{U} + \dot{U}^T K \dot{U}] = -(\gamma - \frac{1}{2}) [\ddot{U}]^T A [\ddot{U}] \quad (\text{C.2})$$

avec  $A$  qui est de la forme :

$$A = M + K \Delta t^2 (\beta - \frac{\gamma}{2})$$

En utilisant un théorème développé dans [HB00], on obtient que sous les conditions que  $A$  est défini positive et  $\gamma \geq \frac{1}{2}$  alors  $\dot{U}_{n+1}$  et  $\ddot{U}_{n+1}$  sont bornés.

On considère que  $\omega$  est défini tel que  $-\omega^2 M + K = 0$ . De ce fait la condition de  $A$  défini positive peut se mettre sous la forme ( $n$  représente la dimension de  $U_n$ ) :

$$x^T A x \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

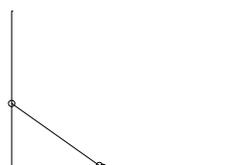
et en utilisant la relation précédente :

$$x^T M (1 + \omega^2 \Delta t^2 (\beta - \frac{\gamma}{2})) x \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Ainsi comme  $M$  est défini positive on a :

$$1 + \omega^2 \Delta t^2 (\beta - \frac{\gamma}{2}) \geq 0 \quad (\text{C.3})$$

ce qui nous donne les conditions de stabilité du schéma.



k) Preuve de la proposition 34

Pour cela on considère maintenant un système dynamique discrétisé avec son second membre :

$$\begin{cases} M_n \ddot{U}_n + K_n U_n = F_n \\ M_{n+1} \ddot{U}_{n+1} + K_{n+1} U_{n+1} = F_{n+1} \end{cases} \quad (\text{C.4})$$

et on cherche à calculer la différence des énergies totales entre les instants  $t_n$  et  $t_{n+1}$ . En multipliant les équations (C.4) par  $[U]$  et en prenant la différence on a :

$$[U]^T (M[\ddot{U}] + K[U]) = [U]^T [F]$$

qui devient en injectant (V.4) dans l'équation précédente :

$$(\Delta t \langle \dot{U} \rangle^T + [\ddot{U}]^T \Delta t^2 (\beta - \frac{\gamma}{2})) M[\ddot{U}] + [U]^T K[U] = [U]^T [F]$$

En injectant (V.5) on a :

$$\frac{1}{\gamma - \frac{1}{2}} \langle \dot{U} \rangle^T M([\dot{U}] - \Delta t \langle \ddot{U} \rangle) + \Delta t^2 (\beta - \frac{\gamma}{2}) [\ddot{U}]^T M[\ddot{U}] + [U]^T K[U] = [U]^T [F]$$

puis en développant :

$$\langle \dot{U} \rangle^T M[\dot{U}] = (\gamma - \frac{1}{2}) ([U]^T [F] - \Delta t^2 (\beta - \frac{\gamma}{2}) [\ddot{U}]^T M[\ddot{U}] - [U]^T K[U]) + \Delta t \langle \dot{U} \rangle^T M \langle \ddot{U} \rangle \quad (\text{C.5})$$

D'autre part si on multiplie les équations (C.4) par  $[U]$  puis on les additionne on obtient par une démarche similaire que précédemment :

$$\langle U \rangle^T K[U] = [U]^T \langle F \rangle - \Delta t \langle \dot{U} \rangle^T M \langle \ddot{U} \rangle - \Delta t^2 (\beta - \frac{\gamma}{2}) [\ddot{U}]^T M \langle \ddot{U} \rangle \quad (\text{C.6})$$

puis en additionnant (C.5) et (C.6) on obtient :

$$\begin{aligned} \langle \dot{U} \rangle^T M[\dot{U}] + \langle U \rangle^T K[U] &= (\gamma - \frac{1}{2}) [U]^T [F] + [U]^T \langle F \rangle \\ -\Delta t^2 (\beta - \frac{\gamma}{2}) [\ddot{U}]^T M \langle \ddot{U} \rangle - (\gamma - \frac{1}{2}) \Delta t^2 (\beta - \frac{\gamma}{2}) [\ddot{U}]^T M[\ddot{U}] &- (\gamma - \frac{1}{2}) [U]^T K[U] \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

Ainsi en considérant  $\langle \dot{U} \rangle^T M[\dot{U}] + \langle U \rangle^T K[U] = [\ddot{U}]^T M \ddot{U} + U^T K U$ , on obtient le résultat souhaité.

l) Preuve de la proposition 35

On considère  $\Omega$  comme étant le domaine sein et  $\Omega^n$ , le domaine ayant  $n$  éléments débou-  
tonnés. On suppose que le modèle est soumis uniquement à des conditions aux limites de  
type Dirichlet. La résolution du problème dynamique revient à rechercher le champ de  
déplacement  $u$  tel que :

$$\begin{cases} \delta \mathcal{M}(u, t, \Omega) \delta u = 0, \forall \delta u \in \mathcal{CA} \\ \text{avec } \mathcal{M}(v, t, \Omega) = \int_0^t \int_{\Omega} \mathcal{L} d\Omega dt = \int_0^t \int_{\Omega} \left( -\frac{1}{2} \rho \dot{v}^2 + \psi(\varepsilon(v)) \right) d\Omega dt \\ \text{et } \mathcal{CA} = \{v \in H^1 : v = T \text{ sur } \partial\Omega_d, v = 0 \text{ sur } \partial\Omega_f\} \end{cases} \quad (\text{C.8})$$

où  $\mathcal{L}$  représente le lagrangien du système, et étant égal à la différence entre l'énergie  
élastique  $\psi(\varepsilon)$  et l'énergie cinétique.  $\mathcal{M}$  représente l'intégrale du lagrangien sur le domaine

$[0, t] * \Omega$ . Ainsi trouver la solution du problème revient à chercher le champ de déplacement admissible qui rend la fonctionnelle  $\mathcal{M}$  stationnaire. Dans notre cas on ne considère que des conditions aux limites de type Dirichlet, ainsi cette condition peut être intégrée dans le lagrangien sous la forme d'une énergie introduite par un multiplicateur de lagrange :

$$\begin{cases} \delta \mathcal{M}(u, \lambda, t, \Omega) \delta u = 0, \forall \delta u \in \mathcal{CA} \\ \text{avec } \mathcal{M}(v, \lambda, t, \Omega) = \int_0^t \left( \int_{\Omega} \left( -\frac{1}{2} \rho \dot{v}^2 + \psi(\varepsilon(v)) \right) d\Omega + \int_{\partial\Omega_d} \lambda(u - T) ds \right) dt \\ \text{et } \mathcal{CA} = \{v \in H^1 : v = 0 \text{ sur } \partial\Omega_f\} \end{cases} \quad (\text{C.9})$$

Le calcul de la variation première de la fonctionnelle  $\mathcal{M}(u, \lambda, t, \Omega)$  donne :

$$\delta \mathcal{M}(u, \lambda) = \int_0^t \left( \int_{\Omega} \left( -\rho \dot{u} \delta \dot{u} + \frac{\partial \psi(\varepsilon(u))}{\partial \varepsilon(u)} \delta \varepsilon(u) \right) dv + \int_{\partial\Omega_d} (\delta \lambda (u - T) + \lambda \delta u) ds \right) dt = 0 \quad (\text{C.10})$$

On remarque que dans notre cas élastique linéaire on a  $\bar{\sigma} = \partial \psi(\varepsilon) / \partial \varepsilon$  où  $\bar{\sigma}$  représente le tenseur des contraintes et qui est relié au tenseur des contraintes par la relation de Hook :  $\bar{\sigma} = \bar{E} \bar{\varepsilon}$ . En discrétisant le champ de déplacement  $u = NU$  et le champ des déformations  $\varepsilon = BU$  avec  $B = \partial U$  où  $N$  représente les fonctions de forme nécessaires à la discrétisation et  $U$  le vecteur nodal des déplacements on obtient :

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{U} \\ \ddot{\lambda} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} K & C^T \\ C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ u_d \end{pmatrix} \\ \text{avec } CU = u_d \end{cases} \quad (\text{C.11})$$

On notera dans la suite de l'étude :

$$\left\{ M_n^n = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, K_n^n = \begin{pmatrix} K & C^T \\ C & 0 \end{pmatrix}, U_n^n = \begin{pmatrix} U \\ \lambda \end{pmatrix} \text{ et } F_n^n = \begin{pmatrix} 0 \\ u_d \end{pmatrix} \right.$$

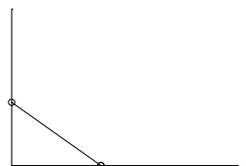
Ce qui nous permet de mettre (C.11) sous la forme :

$$M_n^n \ddot{U}_n^n + K_n^n U_n^n = F_n^n \quad (\text{C.12})$$

où les indices  $_n$  représente le temps et les indices  $^n$  le modèle associé à une certaine position du front de fissure. Par exemple le vecteur  $U_{n+1}^{n+1}$  représente le champ des déplacements au temps  $t_{n+1}$  dans la configuration  $\Omega^{n+1}$ . La matrice de masse  $M_n^n$  reste fixe au cours du temps mais évolue en fonction du modèle considéré. En effet on a  $M_n^{n+1} = M_{n+1}^{n+1}$  et  $M_n^n \neq M_n^{n+1}$  et comme il s'agit d'un modèle dont uniquement les conditions aux limites évoluent alors  $M_n^n$  change uniquement de dimension (le noyau de  $M$  reste le même et on complète avec des zéros). Au niveau de la matrice de rigidité  $K_n^n$ , le noyau  $K$  reste constant au cours des transformations du modèle et la matrice  $C$  change pour faire évoluer les conditions aux limites.

Maintenant on revient au calcul du bilan d'énergie de ce modèle lors du déboutonnage du front de fissure d'une longueur  $\Delta a$ . On construit pour cela une équation similaire à (V.11) mais en prenant en compte des termes liés au saut des matrices de masse  $[M]$  et de rigidité  $[K]$ . Tout d'abord le système mécanique peut se mettre pour les configurations  $(\Omega^n, t_n)$  et  $(\Omega^{n+1}, t_{n+1})$  sous la forme :

$$M_n^n \ddot{U}_n^n + K_n^n U_n^n = F_n^n \quad (\text{C.13})$$



$$M_{n+1}^{n+1}\ddot{U}_{n+1} + K_{n+1}^{n+1}U_{n+1} = F^{n+1} \quad (\text{C.14})$$

On note pour la suite :

$$[M] = M_{n+1}^{n+1} - M_n^n \quad (\text{C.15})$$

$$[K] = K_{n+1}^{n+1} - K_n^n \quad (\text{C.16})$$

et on remarque que :

$$[M\ddot{U}] = M_{n+1}^{n+1}[\ddot{U}] + [M]\ddot{U}_n^n \quad (\text{C.17})$$

$$\langle M\ddot{U} \rangle = M_{n+1}^{n+1}\langle \ddot{U} \rangle - \frac{1}{2}[M]\ddot{U}_n^n \quad (\text{C.18})$$

Ainsi en effectuant comme manipulation  $[U]((\text{C.14})-(\text{C.13}))$  on obtient :

$$[U]^T([M\ddot{U}] + [KU]) = [U]^T[F] \quad (\text{C.19})$$

en utilisant (C.17), l'équation précédente devient :

$$[U]^T(M_{n+1}^{n+1}[\ddot{U}] + [M]\ddot{U}_n^n + K_{n+1}^{n+1}[U] + [K]U_n^n) = [U]^T[F] \quad (\text{C.20})$$

puis en utilisant (V.8) et (V.9) on a :

$$\begin{aligned} (\Delta t \langle \dot{U} \rangle^T + \Delta t^2(\beta - \gamma/2)[\ddot{U}]^T)M_{n+1}^{n+1}[\ddot{U}] &= [U]^T[F] \\ -[U]^T[M]\ddot{U}_n^n - [U]^TK_{n+1}^{n+1}[U] - [U]^T[K]U_n^n & \end{aligned} \quad (\text{C.21})$$

qui peut encore se mettre sous la forme :

$$\begin{aligned} [\dot{U}]^T M_{n+1}^{n+1} \langle \dot{U} \rangle &= (\gamma - 1/2)[U]^T[F] - (\gamma - 1/2)[U]^T K_{n+1}^{n+1}[U] \\ &\quad - (\gamma - 1/2)[U]^T [K]U_n^n + \Delta t \langle \dot{U} \rangle^T M_{n+1}^{n+1} \langle \ddot{U} \rangle \\ &\quad - \Delta t^2 (\gamma - 1/2)(\beta - \gamma/2) [\ddot{U}]^T M_{n+1}^{n+1} [\ddot{U}] \\ &\quad - (\gamma - \frac{1}{2}) [U]^T [M] \ddot{U}_n^n \end{aligned} \quad (\text{C.22})$$

De même à partir de  $[U]((\text{C.14})+(\text{C.13}))$  on obtient :

$$\begin{aligned} [U]^T K_{n+1}^{n+1} \langle U \rangle &= [U]^T \langle F \rangle + \frac{1}{2}[U]^T [K]U_n^n - \Delta t \langle \dot{U} \rangle^T M_{n+1}^{n+1} \langle \ddot{U} \rangle \\ &\quad + \frac{1}{2}[U]^T [M] \ddot{U}_n^n - \Delta t^2 (\beta - \gamma/2) [\ddot{U}]^T M_{n+1}^{n+1} \langle \ddot{U} \rangle \end{aligned} \quad (\text{C.23})$$

En additionnant (C.22) et (C.23) on a :

$$\begin{aligned} [\dot{U}]^T M_{n+1}^{n+1} \langle \dot{U} \rangle + [U]^T K_{n+1}^{n+1} \langle U \rangle &= (\gamma - 1/2)[U][F] + [U]\langle F \rangle - (\gamma - 1/2)[U]^T K_{n+1}^{n+1}[U] \\ &\quad - \Delta t^2 (\beta - \gamma/2) [\ddot{U}] M_{n+1}^{n+1} (\langle \ddot{U} \rangle + (\gamma - 1/2)[\ddot{U}]) \\ &\quad - (\gamma - 1)[U]([K]U_n^n + [M]\ddot{U}_n^n) \end{aligned} \quad (\text{C.24})$$

Le bilan d'énergie de la structure au cours d'un déboutonnage de noeud correspond à  $[\dot{U}^T M \dot{U} + U^T K U]$  et peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}[\dot{U}^T M \dot{U} + U^T K U] &= \frac{1}{2}\dot{U}_{n+1}^{n+1T} M_{n+1}^{n+1} \dot{U}_{n+1}^{n+1} \\ &\quad + U_{n+1}^{n+1T} K_{n+1}^{n+1} U_{n+1}^{n+1} - \frac{1}{2}\dot{U}_n^n M_n^n \dot{U}_n^n + U_n^n T K_n^n U_n^n \end{aligned} \quad (\text{C.25})$$

D'autre part on a continuité des énergies lors de la première phase que l'on pourrait appeler projection des champs sur le nouveau modèle :

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\dot{U}_n^T M_n^n \dot{U}_n = \frac{1}{2}\dot{U}_n^{n+1 T} M_n^{n+1} \dot{U}_n^{n+1} \\ \frac{1}{2}U_n^T K_n^n U_n = \frac{1}{2}U_n^{n+1 T} K_n^{n+1} U_n^{n+1} \end{cases} \quad (\text{C.26})$$

Ainsi la différence d'énergie totale au cours d'un déboutonnage de noeud se met sous la forme :

$$\frac{1}{2}[\dot{U}^T M \dot{U} + U^T K U] = [\dot{U}]^T M_{n+1}^{n+1} \langle \dot{U} \rangle + [U]^T K_{n+1}^{n+1} \langle U \rangle$$

et ainsi on obtient notre résultat.

