



**HAL**  
open science

# High-order discontinuous Galerkin methods for solving the time-domain Maxwell equations on non-conforming simplicial meshes

Hassan Fahs

► **To cite this version:**

Hassan Fahs. High-order discontinuous Galerkin methods for solving the time-domain Maxwell equations on non-conforming simplicial meshes. Mathematics [math]. Université Nice Sophia Antipolis, 2008. English. NNT: . tel-00359874v1

**HAL Id: tel-00359874**

**<https://theses.hal.science/tel-00359874v1>**

Submitted on 10 Feb 2009 (v1), last revised 13 Feb 2009 (v2)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE NICE-SOPHIA ANTIPOLIS - UFR Sciences  
Ecole Doctorale Sciences Fondamentales et Appliquées

## THÈSE

pour obtenir le titre de  
Docteur en Sciences  
de l'Université de Nice-Sophia Antipolis

Spécialité: Mathématiques appliquées

présentée et soutenue par

HASSAN FAHS

### MÉTHODES DE TYPE GALERKIN DISCONTINU D'ORDRE ÉLEVÉ POUR LA RÉOLUTION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS DE MAXWELL INSTATIONNAIRES SUR DES MAILLAGES SIMPLEXES NON-CONFORMES

Thèse dirigée par Stéphane LANTERI

soutenue le 19 Décembre 2008 à l'INRIA Sophia Antipolis

Jury:

RÉMI ABGRALL,	professeur,	rapporteur
ROLAND BECKER,	professeur,	rapporteur
STÉPHANE DESCOMBES,	professeur,	président du jury
STÉPHANE LANTERI,	directeur de recherche,	directeur de thèse
FRANCESCA RAPETTI,	maître de conférence,	examinatrice
FRANCOIS ROGIER,	ingénieur de recherche,	examineur
JOE WIART,	ingénieur de recherche,	examineur



*La réussite ne réside pas seulement dans le résultat obtenu,  
mais dans l'effort fourni pour atteindre ce résultat,*

Gibran Khalil Gibran



*à mes parents*



# Remerciements

Cette thèse est le fruit de toutes mes années d'études et le résultat d'un travail acharné jour et nuit, auquel se sont mêlées la passion de la recherche et la joie de la découverte. Elle a été aussi pour moi une rare opportunité pour découvrir une vérité humaine, fondée sur un merveilleux dialogue entre la raison et le talent.

Comme le veut la tradition, je vais tenter de satisfaire au difficile exercice de la page des remerciements, peut-être la tâche la plus ardue de ces années de thèse. Non qu'exprimer ma gratitude envers les personnes en qui j'ai trouvé un soutien soit contre ma nature, bien au contraire. La difficulté tient plutôt dans le fait de n'oublier personne. C'est pourquoi, je remercie par avance ceux dont le nom n'apparaît pas dans cette page et qui m'ont aidé d'une manière ou d'une autre. Ils se reconnaîtront. Pour les autres, non merci. Ils se reconnaîtront aussi . . .

Ce travail a été effectué au sein de l'équipe NACHOS (Numerical modeling and high performance computing for evolution problems in Complex domains and Heterogeneous media), sur le site de l'INRIA Sophia Antipolis.

En premier lieu, je tiens à exprimer ma plus profonde gratitude à Stéphane Lanteri, qui m'a proposé ce sujet de thèse dans la continuité de mon stage de DEA et m'a accompagné tout au long de sa réalisation avec beaucoup d'intérêt. Stéphane, j'ai apprécié chez toi la qualité d'un grand chercheur plein d'optimisme, le sens de la rigueur et les qualités humaines: bonne humeur agrémentée de larges sourires, sympathie couronnée d'une énorme modestie, et soutien. Je te remercie Stéphane de la confiance précieuse que tu m'as accordée et de l'autonomie que tu m'as laissée et qui m'a permis de prendre différentes initiatives dans l'élaboration de ce travail, tout en y gardant un œil critique et avisé. Nos continuelles oppositions, contradictions et confrontations ont sûrement été la clé de notre travail commun. Plus qu'un directeur ou un collègue, je crois avoir trouvé en toi un ami qui m'a aidé aussi bien dans le travail que dans la vie lorsque j'en avais besoin.

Je remercie Monsieur Rémi Abgrall et Monsieur Roland Becker de m'avoir fait l'honneur d'être les rapporteurs de cette thèse. J'éprouve un profond respect pour leur travail et leur parcours, ainsi que pour leurs qualités humaines. Le regard critique, juste et avisé qu'ils ont porté sur mes travaux ne peut que m'encourager à être encore plus perspicace et engagé dans mes recherches. Je remercie également Madame Francesca Rapetti et Messieurs Stéphane Descombes, François Rogier et Joe Wiart d'avoir accepté de faire partie de mon jury. Leurs remarques et commentaires ont jeté un courant d'air frais qui m'a permis de clarifier certains points de ce manuscrit.

Ce travail n'aurait pu être engagé sans le soutien financier de France Télécom R&D, unité Interaction Ondes et Personnes (IOP).



Je voudrais également remercier Loula Fezoui pour l'intérêt qu'elle a porté à mon travail et pour ses conseils très constructifs aussi bien sur le plan scientifique qu'humain. Au début de cette thèse, Loula a eu la gentillesse de me transmettre un code de calcul, sans lequel je n'aurais pu démarrer ce travail.

Merci à Serge Piperno qui a facilité mon intégration au sein de l'INRIA, et qui a ensuite répondu à mes questions avec beaucoup de gentillesse.

Mes remerciements vont également à Ronan Perrussel pour les discussions très fructueuses et pour sa lecture attentive d'une partie de ce manuscrit.

Je salue tous mes collègues des projets CAIMAN et NACHOS de l'INRIA Sophia Antipolis avec qui j'ai eu le plaisir de travailler durant ces trois années: Mondher Benjema, Antoine Bouquet, Adrien Catella, Joseph Charles, Sarah Delcourte, Victorita Dolean, Clément Durochat, Mohamed El Bouajaji, Medhi Fhima, Papa Ibou Diouf, Antoine Jarrier, Christian Konrad, Siham Layouni, Serge Moto Pong et Gilles Serre. Merci à Nathalie Glinisky d'avoir relu attentivement les deux premiers chapitres de ce manuscrit. Une pensée spéciale va à Hugo Fol pour son soutien dans les moments difficiles.

Je n'oublierai pas les aides permanentes reçues du personnel administratif de l'INRIA Sophia Antipolis. Un grand merci à nos assistantes Montserrat Argente et Stéphanie Sorres. Merci aussi au service des ressources humaines et au bureau des missions pour leur sympathie et leur aide lors de la préparation de mes missions et mes dossiers administratifs.

Je salue également tous mes sympatiques collègues de l'Université Libanaise, en particulier Mouhamad Al Sayed Ali, Ahmad El Hajj, Hayssam Ezzaldine, Mouhamad Jradeh, Bassam Kojok et Mohamad Safa. Merci à Nader El Khatib mon collègue de DEA, avec qui j'ai partagé de très bons moments et de longues après-midi autour de la machine à café à Saint Etienne (sais-tu combien vaut 1 euro en TRL "l'ancienne livre turque"?).

Une pensée spécial va à mes amis ingénieurs de Polytech'Nice-Sophia pour leur soutien constant, dans les moments de joie comme dans les autres. Merci donc à Ismail Bargach (Schumpeter), Faycal Filali (le fan d'Oklahoma), Soufiane Mehdi (le Général) et Charles Naoum.

Mes remerciements vont également à mes amis intimes Ayman Baydoun (le conseiller juridique) et Mohamad Srour (le conseiller en stratégie), qui ont représenté pour moi un véritable soutien dans les moments difficiles et qui sont toujours présents lorsque j'ai besoin d'eux. Ayman a été une âme bienveillante sur ma famille et mes amis durant mon absence.

Cela va de soi, je remercie évidemment mes parents, mes soeurs Bouchra et Batoul et mon gendre Mohamad Souhail pour leur irremplaçable et inconditionnel soutien. Ils ont été présents malgré l'éloignement géographique, pour écarter les doutes, soigner les blessures et partager les joies. Cette thèse est un peu la leur, aussi.

Finalement, je voudrais associer à cette thèse mon épouse Noha, sans l'aide et l'amour de qui je n'aurais pu mener à bien ce travail.

# Table des matières

<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
L'électromagnétisme numérique et ses applications . . . . .	1
Les difficultés de la modélisation numérique . . . . .	2
Résolution numérique des équations de Maxwell . . . . .	2
Interactions des ondes électromagnétiques avec les personnes . . . . .	3
Objectif et plan de la thèse . . . . .	4
Liste des publications issues cette la thèse . . . . .	6
<b>1 Cadres mathématique et numérique</b>	<b>9</b>
1.1 Équations de Maxwell . . . . .	10
1.2 Conditions d'interface et conditions aux limites . . . . .	11
1.2.1 Equations de Maxwell au sens des distributions . . . . .	11
1.2.2 Conditions aux limites pour une surface métallique . . . . .	12
1.2.3 Conditions aux limites pour une frontière absorbante . . . . .	13
1.2.4 Conditions de saut à l'interface entre deux matériaux . . . . .	14
1.3 Problème de diffraction d'onde . . . . .	14
1.4 Le cas à deux dimensions d'espace: polarisations TM et TE . . . . .	15
1.5 Electromagnétisme numérique . . . . .	17
1.5.1 Méthodes en domaine fréquentiel: formulations intégrales . . . . .	17
1.5.2 Méthodes en domaine fréquentiel: formulations EDP . . . . .	18
1.5.3 Méthodes en domaine temporel: formulations intégrales . . . . .	18
1.5.4 Méthodes en domaine temporel: formulations EDP . . . . .	19
1.6 Une méthode Galerkin discontinue à flux centré . . . . .	25
1.6.1 Discrétisation spatiale . . . . .	26
1.6.2 Discrétisation temporelle . . . . .	27
1.7 Stratégies de raffinement local d'un maillage simplexe . . . . .	28
<b>2 Méthodes Galerkin discontinues non-conformes</b>	<b>33</b>
2.1 Schéma Galerkin discontinu GDDT- $\mathbb{P}_{p_i}$ . . . . .	34
2.1.1 Conservation d'une énergie discrète . . . . .	38
2.1.2 Stabilité du schéma GDDT- $\mathbb{P}_{p_i}$ . . . . .	40
2.2 Etude de cas particuliers . . . . .	44

2.2.1	Cas d'un maillage conforme . . . . .	44
2.2.2	Cas d'un maillage non-conforme . . . . .	45
2.2.3	Raffinement local non-conforme . . . . .	48
2.3	Validation numérique du schéma GDDT- $\mathbb{P}_{p_i}$ . . . . .	48
2.3.1	Maillage conforme . . . . .	50
2.3.2	Maillage non-conforme . . . . .	51
2.4	Calcul de la matrice d'interface non-conforme . . . . .	58
2.4.1	Approches basées sur projection et quadrature . . . . .	58
2.4.2	Comparaison entre les deux approches . . . . .	60
2.5	Résultats numériques pour $h$ -raffinement et $p$ -enrichissement . . . . .	62
2.5.1	Cas d'un maillage non-conforme général . . . . .	64
2.6	Une méthode Galerkin discontinue de type $hp$ . . . . .	68
2.7	Conclusion . . . . .	72
<b>3</b>	<b>Numerical evaluation of non-conforming DGTD methods</b>	<b>75</b>
3.1	Homogeneous media . . . . .	76
3.1.1	Concentric cylinders PEC resonator . . . . .	76
3.1.2	Circular PEC resonator . . . . .	83
3.1.3	Wedge-shaped PEC resonator . . . . .	89
3.2	Heterogeneous media . . . . .	95
3.2.1	Rectangular PEC resonator with one material interface . . . . .	96
3.2.2	Dielectric in a PEC cavity with two material interfaces . . . . .	102
3.2.3	Scattering of a plane wave by a dielectric cylinder . . . . .	105
3.2.4	Scattering of a plane wave by a multilayered dielectric cylinder . . . . .	118
3.3	Concluding remarks . . . . .	124
<b>4</b>	<b>High-order time schemes</b>	<b>127</b>
4.1	An arbitrary high-order non-conforming DGTD method . . . . .	128
4.1.1	Space discretization . . . . .	128
4.1.2	Time discretization . . . . .	131
4.2	Stability and convergence analysis . . . . .	133
4.2.1	Stability . . . . .	133
4.2.2	Convergence . . . . .	138
4.2.3	Convergence of the divergence error . . . . .	144
4.3	Numerical validation . . . . .	145
4.4	Concluding remarks . . . . .	152
<b>5</b>	<b>Numerical experiments in 3D</b>	<b>153</b>
5.1	Cubature formulas on a triangle . . . . .	154
5.1.1	Introduction . . . . .	154
5.1.2	The calculation of the non-conforming interface matrix . . . . .	155
5.2	Numerical experiments . . . . .	156
5.2.1	Propagation of a standing wave in a cubic PEC cavity . . . . .	158
5.2.2	Propagation in a heterogeneous human head model . . . . .	163
	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>167</b>

<b>Annexes</b>	<b>171</b>
A.1 Inégalité généralisée . . . . .	171
A.2 Problème d'optimisation . . . . .	172
A.3 Formulation du schéma GDDT- $\mathbb{P}_{p_i}$ . . . . .	173
A.4 Etude de quelques exemples . . . . .	174
A.5 Références pour les formules de cubatures . . . . .	175
<b>Bibliographie</b>	<b>177</b>



# Introduction générale

## Sommaire

---

<b>L'électromagnétisme numérique et ses applications . . . . .</b>	<b>1</b>
<b>Les difficultés de la modélisation numérique . . . . .</b>	<b>2</b>
<b>Résolution numérique des équations de Maxwell . . . . .</b>	<b>2</b>
<b>Interactions des ondes électromagnétiques avec les personnes . . . . .</b>	<b>3</b>
<b>Objectif et plan de la thèse . . . . .</b>	<b>4</b>
<b>Liste des publications issues cette la thèse . . . . .</b>	<b>6</b>

---

## L'électromagnétisme numérique et ses applications

La modélisation numérique est un outil essentiel pour l'ingénieur et son importance n'a cessé de croître avec l'augmentation des capacités de calcul et de stockage des ordinateurs et notamment l'avènement des calculateurs parallèles. Ce phénomène a été d'autant plus ressenti dans le domaine de l'électromagnétisme qu'il s'est accompagné de la mise au point de nouvelles méthodes numériques adaptées à ce type d'architecture de calcul, et que la simulation numérique dans ce domaine, traditionnellement réservée aux applications militaires comme la furtivité radar ou la vulnérabilité des systèmes d'arme, s'est aussi ouverte à un large spectre d'applications civiles.

Ainsi, l'électromagnétisme numérique est aujourd'hui une discipline en plein essor et on constate que le champ d'application de l'électromagnétisme numérique s'est élargi à des contextes aussi variés que l'électronique, les accélérateurs de particules, la magnétohydrodynamique, l'optimisation de forme d'antennes, la conception de dispositifs hyperfréquences ou la compatibilité électromagnétique. Ce dernier est particulièrement crucial car les nouveaux matériaux qui composent les avions, les bâtiments ou les voitures, n'assurent plus la protection des nombreux composants électroniques contre la foudre ou d'autres sources électromagnétiques. La santé au sens large est un autre contexte d'application de l'électromagnétisme numérique. Il s'agit essentiellement de quantifier numériquement l'absorption d'un champ électromagnétique dans des tissus biologiques, soit pour évaluer les éventuels effets nocifs de l'exposition à ces champs [BCPP01]-[CLO<sup>+</sup>00], soit pour des besoins de planification du traitement par hyperthermie<sup>1</sup> de tumeurs cancéreuses [LHC<sup>+</sup>00]-[SNVM03].

---

<sup>1</sup>L'hyperthermie est un échauffement (local) des tissus biologiques.

Les équations qui modélisent les problèmes de propagation d'ondes électromagnétiques, à savoir les équations de Maxwell, suscitent un engouement tant de la part des physiciens que de la part des mathématiciens, en raison notamment des applications industrielles pressenties. La simulation numérique a contribué à une meilleure compréhension des phénomènes physiques sous-jacents, motivant de nombreuses recherches afin de parvenir à des méthodes qui restituent au mieux les caractéristiques mathématiques de ces équations et l'universalité de leur application, avec à la clef un souci de performance.

## Les difficultés de la modélisation numérique

En dépit des avancées significative de ces vingt dernières années, un grand nombre d'applications de l'électromagnétisme numérique reste hors de portée des capacités de l'état de l'art des méthodes numériques pour la modélisation des équations de Maxwell [RT04].

Plusieurs difficultés émergent lorsque l'on tente de modéliser et de développer des méthodes de calcul pour simuler des phénomènes de propagation d'ondes électromagnétiques:

- la plupart des phénomènes électromagnétiques à modéliser requièrent un domaine de calcul non borné,
- la précision des méthodes d'approximation des équations d'une part, et la discrétisation du domaine de calcul d'autre part, doivent être compatibles avec le caractère ondulatoire des phénomènes de propagation d'ondes électromagnétiques,
- les nouveaux matériaux constituant les objets étudiés possèdent des caractéristiques électromagnétiques de plus en plus complexes où, par exemple, les hypothèses de linéarité et d'isotropie ne s'appliquent pas. Ces matériaux nécessitent donc des algorithmes robustes pour la résolution des équations de Maxwell,
- les applications d'intérêt industriel conduisent à la résolution numérique de systèmes discrets dont la taille, évaluée en termes du nombre d'inconnues pour atteindre une précision donnée, est très grande. Par exemple, les longueurs caractéristiques sont généralement de l'ordre de quelques dizaines de longueur d'onde mais peuvent dépasser la centaine, conduisant à des maillages qui peuvent contenir jusqu'à dix millions de maille pour des maillages volumiques. La résolution numérique de problèmes de cette taille ne peut se faire qu'en exploitant pleinement les possibilités des calculateurs parallèles. L'algorithme généré par la méthode doit donc avoir un haut degré de parallélisme.

## Résolution numérique des équations de Maxwell

De nombreuses méthodes ont été développées pour la résolution numérique des équations de Maxwell mais il semble qu'aucune méthode ne soit prédominante, le choix étant déterminé essentiellement par le type d'application considéré. Il ne s'agit pas ici de proposer une revue exhaustive de ces méthodes mais plutôt de préciser quelques caractéristiques importantes qui motivent le choix d'une méthode particulière.

Ces méthodes peuvent être regroupées en plusieurs classes, suivant que l'on souhaite traiter les équations de Maxwell en domaine temporel en regardant l'évolution en temps du champ électromagnétique, ou les équations de Maxwell en domaine fréquentiel (ou en régime harmonique) en regardant cette fois-ci le comportement du champ électromagnétique lorsque le terme source suit une dépendance harmonique en temps. Bien que ces deux formulations aient un lien physique étroit (voir par exemple [Hel94]), les

méthodes numériques développées pour leur approximation peuvent s'attaquer indistinctement aux deux systèmes d'équations ou au contraire être spécifiques à chacun. Les méthodes mises au point pour la résolution des équations en domaine temporel utilisent le plus souvent une formulation des équations au premier ordre, alors que les méthodes conçues pour la résolution des équations de Maxwell en domaine fréquentiel s'appuient habituellement sur la formulation des équations du deuxième ordre dans laquelle on élimine le champ électrique ou le champ magnétique, afin de réduire la taille des systèmes algébriques résultants.

La présente étude porte sur la résolution numérique des équations de Maxwell en domaine temporel. Différentes familles de méthodes numériques ont été développées pour résoudre ces équations, faisant suite à la méthode la plus ancienne proposée en 1966 par K.S. Yee [Yee66]. Nous les passerons en revue plus loin dans ce manuscrit. Le point de départ de notre étude consiste en une méthode d'éléments finis discontinus, connue sous le nom de méthode Galerkin discontinue, initialement introduite dans [PF03]-[FLLP05]. Cette méthode est formulée sur des maillages triangulaires en 2D et tétraédriques en 3D. Les méthodes Galerkin discontinues présentent plusieurs avantages parmi lesquels:

- elles sont naturellement adaptées à la discrétisation de fonctions discontinues et à la prise en compte d'hétérogénéités (par exemple du milieu dans le cas d'un problème de propagation d'ondes),
- elles se prêtent bien à l'utilisation de maillages non-structurés pour la discrétisation de géométries complexes,
- elles autorisent un raffinement local non-conforme du maillage de calcul et un degré d'interpolation variable en espace (en d'autres termes, elles définissent un cadre idéal pour la mise au point de méthodes auto-adaptatives),
- elles sont naturellement parallélisables.

Le caractère discontinu de l'approximation impose d'avoir recours à une formulation faible locale c'est-à-dire dont le support d'intégration est l'élément (un triangle en 2D et un tétraèdre en 3D). Une intégration par parties fait alors apparaître un terme de bord dont le calcul conduit à l'introduction d'une fonction de flux numérique (similairement à ce qui est réalisé dans les méthodes volumes finis [CFS93]-[PRF02]). Une particularité de la méthode Galerkin discontinue introduite dans [PF03]-[FLLP05] est d'utiliser une fonction de flux numérique centrée. Lorsque celle-ci est combinée à un schéma d'intégration en temps centré de type saute-mouton du second ordre, on montre que l'on obtient une méthode Galerkin discontinue non-dissipative et stable sous une condition de type CFL.

## Interactions des ondes électromagnétiques avec les personnes

L'étude des interactions des ondes électromagnétiques avec les personnes est au cœur des activités de l'équipe «Interactions des Ondes avec les Personnes» (IOP) du centre FRANCE TELECOM R&D d'Issy les Moulineaux qui co-finance cette thèse. En particulier, l'équipe IOP contribue activement aux recherches actuelles sur les effets sanitaires des rayonnements issus des téléphones mobiles. Ces dernières années ont vu la réalisation d'un grand nombre d'études scientifiques visant à évaluer les effets des champs électromagnétiques radio-fréquence sur la santé humaine. Beaucoup de ces études sont de nature expérimentale (études in vivo sur des animaux principalement, et études in vitro). On rencontre aussi des études épidémiologiques pour lesquelles, d'une façon générale, on manque encore de recul à cause du caractère récent du déploiement à grande échelle des téléphones mobiles (et des antennes relais). Enfin, un certain nombre d'études font appel à la modélisation numérique.



Un des aspects importants de l'étude des effets biologiques résultant de l'exposition à un champ électromagnétique radio-fréquence concerne la dosimétrie, c'est-à-dire la quantification du rayonnement électromagnétique sur les tissus exposés. La dose d'énergie absorbée par transformation en chaleur est quantifiée par la puissance absorbée par unité de masse de matière biologique exposée. Elle est définie par le débit d'absorption spécifique (DAS) et s'exprime en W/kg. Le calcul du DAS peut se faire à l'aide de bancs de mesure (fantômes et sondes); dans ce cas, il s'agit de dosimétrie expérimentale. On peut aussi faire appel à des modèles numériques qui permettent la résolution du système d'équations de Maxwell (on parle alors de dosimétrie numérique). Dans ce dernier cas, le calcul numérique nécessite la construction d'un modèle de tête discret (maillage) à partir d'images médicales. Les études de ce type sont majoritairement réalisées à l'aide de modèles numériques basés sur la méthode DFDT (Différences Finies en Domaine Temporel). Dans cette méthode, le domaine de calcul est discrétisé au moyen d'un maillage structuré (cartésien). Du fait de sa simplicité de mise en œuvre et de la disponibilité de moyens de calcul de plus en plus performants, la méthode DFDT reste le choix de prédilection pour l'évaluation numérique des effets de l'exposition humaine aux champs électromagnétiques radio-fréquence. Cependant, de telles grilles ne sont pas bien adaptées à la discrétisation de formes géométriques complexes. Plus précisément, toute frontière courbe est approchée par une interface en marches d'escalier: ce phénomène engendre des oscillations parasites sur la solution et une perte de précision de la méthode. De plus, la modélisation de petits détails (fentes minces, plaques minces) impose une taille de maille trop petite, rendant le calcul prohibitif. Si on utilise un maillage non-uniforme pour prendre en compte ces détails, on augmente l'erreur de dispersion du schéma et la précision de la méthode DFDT se dégrade (la méthode DFDT est précise au second ordre en espace et en temps sur des grilles de calcul orthogonales uniformes).

Au contraire, un maillage non-structuré (non-orthogonal et non-uniforme) offre la souplesse voulue pour approcher correctement des frontières courbes et des détails géométriques. Les méthodes Galerkin discontinues proposent des solutions très prometteuses pour la résolution numérique de problèmes de propagation d'ondes en milieux hétérogènes en s'appuyant sur des maillages non-structurés, localement raffinés, éventuellement non-conformes. En particulier, la non-conformité du maillage pourrait permettre une plus grande flexibilité dans la construction des modèles géométriques des tissus de la tête (cerveau, LCR, crâne, peau, etc.). On pourrait aussi raffiner le maillage au voisinage du téléphone et de l'oreille exposée et utiliser un maillage grossier partout ailleurs. Alternativement, on pourrait songer à mailler les tissus indépendamment sans imposer de contrainte aux maillages de surface définissant les interfaces entre tissus voisins. Dans chaque cas, on cherche à réaliser deux objectifs *a priori* antagonistes: augmenter la précision des calculs dans les zones d'intérêt et minimiser les temps de calcul et les volumes de données à manipuler.

## Objectif et plan de la thèse

En pratique, un grand nombre de simulations numériques réalistes mettent en jeu des géométries aux formes irrégulières ou des dispositifs de petite taille plongés dans des domaines de plus grande taille. Pour ces problèmes, l'utilisation de maillages non-structurés raffinés est presque toujours souhaitable voire incontournable. Néanmoins, la grande majorité des outils d'électromagnétisme numérique existants et compatibles avec l'utilisation de maillages non-structurés supposent que ceux-ci sont conformes, c'est-à-dire qu'ils ne présentent pas de nœuds flottants résultant de raffinements. Pourtant, la non-conformité si elle était autorisée pourrait grandement faciliter le processus de raffinement et permettre de localiser celui-ci aux seules zones d'intérêt lors de la construction du maillage de calcul. Outre les questions de discrétisation à proprement dites, les stratégies de résolution numérique auto-adaptatives font elles aussi

appel à un processus de raffinement. Là encore, la possibilité de ne limiter celui-ci qu'aux régions identifiées par un critère d'erreur approprié est grandement souhaitable. Notons aussi que dans l'idéal, ces stratégies auto-adaptatives cherchent à combiner un raffinement du maillage (*h*-raffinement) dans les zones de moindre régularité de la solution avec un enrichissement de l'ordre d'approximation (*p*-enrichissement) là où la solution est régulière. On parle alors de méthode *hp*-adaptative.

Comme souligné plus haut, les méthodes Galerkin discontinues sont particulièrement bien adaptées à la prise en compte de maillages non-structurés non-conformes et plus généralement, à la mise au point de stratégies de résolution *hp*-adaptatives. Toutefois, pour ce qui concerne la modélisation numérique de problèmes de propagation d'ondes électromagnétiques en régime instationnaire, la non-conformité de maillage a été rarement exploitée dans les méthodes Galerkin discontinues développées pour la résolution numérique des équations de Maxwell en domaine temporel. Cette possibilité a été étudiée dans la thèse de N. Canouet [Can03] dans le contexte de maillages hexaédriques orthogonaux. Par ailleurs, la mise en œuvre initiale de la méthode Galerkin discontinue en maillages simplexes introduite dans [PF03]-[FLLP05] (voir aussi [BFLP06]) reposait sur des maillages tétraédriques non-structurés conformes et des méthodes d'interpolation  $\mathbb{P}_0$  (méthode volume fini) et  $\mathbb{P}_1$  (méthode Galerkin discontinue conforme basée sur une interpolation linéaire). Dans ce contexte, l'objectif général de la présente étude a été d'étendre ces travaux pour exploiter la non-conformité de maillage et de l'ordre d'approximation dans la méthode Galerkin discontinue en maillages simplexes décrite dans [PF03]-[FLLP05].

Cette thèse a donné lieu aux contributions suivantes:

- Une étude analytique permettant de mettre en évidence l'influence de la non-conformité du maillage sur la stabilité de la méthode Galerkin discontinue introduite dans [PF03]-[FLLP05]. Rappelons que cette méthode combine l'utilisation d'un schéma centré pour le calcul numérique des flux aux interfaces entre éléments voisins et un schéma saute-mouton du second ordre pour l'intégration en temps.
- La mise en œuvre d'une méthode Galerkin discontinue en maillages triangulaires non-structurés, d'ordre arbitrairement élevé en espace, et exploitant la non-conformité de maillage et de l'ordre d'approximation, pour la résolution numérique des équations de Maxwell bidimensionnelles.
- Une extension de la méthode Galerkin discontinue initiale par la prise en compte d'une famille de schémas saute-mouton d'ordre arbitrairement élevé pour l'intégration en temps, et une étude de convergence *a priori* de la méthode Galerkin discontinue résultante.
- Une mise en œuvre préliminaire d'une méthode Galerkin discontinue non-conforme en maillages tétraédriques non-structurés pour la résolution numérique des équations de Maxwell tridimensionnelles.

Cette thèse constitue une première étape vers le développement d'une méthode Galerkin discontinue *hp*-adaptative en maillages simplexes pour la résolution numérique des équations de Maxwell en domaine temporel.

Le plan de la thèse est le suivant:

- Le Chapitre 1 est consacré à une présentation du système des équations de Maxwell qui modélise les phénomènes électromagnétiques, ainsi qu'à une revue rapide des principales techniques existantes pour la résolution numérique de ce système d'EDPs: méthode de différences finies en domaine temporel (DFDT), méthode d'éléments finis en domaine temporel (EFDT), méthode de volumes finis en domaine temporel (VFDT) et méthode Galerkin discontinue en domaine temporel (GDDT).

- Dans le Chapitre 2, on s'intéresse à la mise au point de méthodes Galerkin discontinues non-conformes en maillages triangulaires non-structurés, d'ordre arbitrairement élevé en espace, pour la résolution numérique des équations de Maxwell bidimensionnelles en domaine temporel. On considère tout d'abord la situation où la non-conformité porte sur le maillage seulement et on présente une étude théorique de la stabilité de la méthode GDDT résultante. On propose ensuite une méthode GDDT de type  $hp$  qui combine  $h$ -raffinement et  $p$ -enrichissement locaux et est basée sur une formule de quadrature pour calculer les matrices de flux associées aux interfaces non-conformes.
- Dans le Chapitre 3 on réalise une étude numérique détaillée des méthodes Galerkin discontinues non-conformes discutées au Chapitre 2, sur la base de problèmes de propagation d'ondes en milieux homogènes et hétérogènes. Pour tous ces cas tests sauf un, des solutions analytiques existent autorisant une étude de convergence numérique rigoureuse des méthodes Galerkin discontinues non-conformes en question. Cette étude vise aussi à évaluer les gains en temps de calcul entre méthodes Galerkin discontinues conformes et non-conformes.
- Le Chapitre 4 traite de l'extension de la méthode Galerkin discontinue non-conforme de type  $hp$  par la prise en compte d'une famille de schémas saute-mouton d'ordre arbitrairement élevé pour l'intégration en temps. On réalise notamment une étude de stabilité ainsi qu'une étude de convergence a priori de la méthode GDDT non-conforme d'ordre arbitrairement élevé résultante.
- Le Chapitre 5 traite de la mise en œuvre préliminaire d'une méthode Galerkin discontinue non-conforme en maillages tétraédriques non-structurés pour la résolution numérique des équations de Maxwell tridimensionnelles.

## Liste des publications issues de cette thèse

### Articles acceptés

- [P1]. H. Fahs, *Development of a  $hp$ -like discontinuous Galerkin time-domain method on non-conforming simplicial meshes for electromagnetic wave propagation*, Int. J. Numer. Anal. Model., **2008**, to appear.
- [P2]. H. Fahs, L. Fezoui, S. Lanteri, and F. Rapetti, *Preliminary investigation of a non-conforming discontinuous Galerkin method for solving the time domain Maxwell equations*, IEEE Trans. on Magnet., 44(6), 1254 - 1257, **2008**.

### Article soumis

- [P3]. H. Fahs and S. Lanteri, *A high-order non-conforming discontinuous Galerkin method for time-domain electromagnetics*, J. Comput. Appl. Math., submitted, September **2008**.

### Articles en préparation

- [P4]. A. Catella, V. Dolean, H. Fahs and S. Lanteri, *A hybrid explicit-implicit discontinuous Galerkin method for time-domain electromagnetics*, will be submitted for publication in *J. Comput. Phys.*, **2008** (dans le cadre de la thèse d'Adrien Catella).
- [P5]. H. Fahs, *High-order leap-frog based discontinuous Galerkin method for solving the time-domain Maxwell equations on non-conforming simplicial meshes*, will be submitted for publication in *Numer. Math. Theor. Meth. Appl.*, **2008**.

## Rapports de recherche INRIA

- [R1]. H. Fahs and S. Lanteri, *Convergence and stability of a high-order leap-frog based discontinuous Galerkin method for the Maxwell equations on non-conforming meshes*. INRIA Research Report RR-6699, **2008**. [Online]. Available: <http://hal.inria.fr/inria-00332277/>
- [R2]. H. Fahs, *Numerical evaluation of a non-conforming discontinuous Galerkin method on triangular meshes for solving the time-domain Maxwell equations*. INRIA Research Report RR-6311, **2007**. [Online]. Available: <http://hal.inria.fr/inria-00175738/>
- [R3]. H. Fahs, S. Lanteri and F. Rapetti, *A hp-like discontinuous Galerkin method for solving the 2D time-domain Maxwell's equations on non-conforming locally refined triangular meshes*. INRIA Research Report RR-6162, **2007**. [Online]. Available: <http://hal.inria.fr/inria-00140783/>
- [R4]. H. Fahs, S. Lanteri and F. Rapetti, *Etude de stabilité d'une méthode Galerkin discontinu pour la résolution numérique des équations de Maxwell 2D en domaine temporel sur des maillages triangulaires non-conformes*. INRIA Research Report RR-6023, **2006**. [Online]. Available: <http://hal.inria.fr/inria-00114537/>

## Proceedings

- [C1]. H. Fahs, *A non-conforming discontinuous Galerkin method for solving Maxwell's equations*, In proc. of the 6th European Conference on Numerical Methods in Electromagnetism (NUMELEC08). Liège, Belgium, pp. 100-101, **2008**.
- [C2]. H. Fahs, S. Lanteri and F. Rapetti, *Development of a non-conforming discontinuous Galerkin method on simplex meshes for electromagnetic wave propagation*, In proc. of the 4th Int. Conf. on Advanced Computational Methods in Engineering (ACOMEN08). Editors: M. Hogge, R. Van Keer, L. Noels, L. Stainier, J.-P. Ponthot, J.-F. Remacle, E. Dick. Liège, Belgium, 10-pages, **2008**.
- [C3]. H. Fahs, L. Fezoui, S. Lanteri, and F. Rapetti, *Preliminary investigation of non-conforming discontinuous Galerkin methods for solving the time domain Maxwell equations*, In proc. of the 16th Int. Conf. on the Computation of Electromagnetic Fields, pp. 269-270, **2007** (referred).

## Conférences

- [1]. **EUA4X Workshop** (event #14) "On high order methods for large scale industrial applications", organized by CRS4, Pula, Sardinia, June 7-9, 2006.
- [2]. **SMAI 2007**: 3ème Congrès national de mathématiques appliquées et industrielles, Praz sur Arly, 4-8 Juin, 2007.
- [3]. **COMPUMAG 2007**: 16th Int. Conf. on the Computation of Electromagnetic Fields, Aachen, Germany, June 24-28, 2007.
- [4]. **ACOMEN 2008**: 4th Int. Conf. on Advanced Computational Methods in Engineering, Liège, Belgium, May 26-28, 2008.
- [5]. **CANUM 2008**: 39ème Congrès National d'Analyse Numérique, Saint Jean de Monts, Vendée, France, 26-30 Mai, 2008.
- [6]. **ICCAM 2008**: 13th Int. Congress on Computational and Applied Mathematics, Ghent, Belgium, July 7-11, 2008.
- [7]. **NUMELEC 2008**: 6th European Conference on Numerical Methods in Electromagnetism, Liège, Belgium, December 8-10, 2008.



# Cadres mathématique et numérique

## Sommaire

<b>1.1</b>	<b>Équations de Maxwell</b> . . . . .	<b>10</b>
<b>1.2</b>	<b>Conditions d'interface et conditions aux limites</b> . . . . .	<b>11</b>
1.2.1	Equations de Maxwell au sens des distributions . . . . .	11
1.2.2	Conditions aux limites pour une surface métallique . . . . .	12
1.2.3	Conditions aux limites pour une frontière absorbante . . . . .	13
1.2.4	Conditions de saut à l'interface entre deux matériaux . . . . .	14
<b>1.3</b>	<b>Problème de diffraction d'onde</b> . . . . .	<b>14</b>
<b>1.4</b>	<b>Le cas à deux dimensions d'espace: polarisations TM et TE</b> . . . . .	<b>15</b>
<b>1.5</b>	<b>Electromagnétisme numérique</b> . . . . .	<b>17</b>
1.5.1	Méthodes en domaine fréquentiel: formulations intégrales . . . . .	17
1.5.2	Méthodes en domaine fréquentiel: formulations EDP . . . . .	18
1.5.3	Méthodes en domaine temporel: formulations intégrales . . . . .	18
1.5.4	Méthodes en domaine temporel: formulations EDP . . . . .	19
<b>1.6</b>	<b>Une méthode Galerkin discontinue à flux centré</b> . . . . .	<b>25</b>
1.6.1	Discretisation spatiale . . . . .	26
1.6.2	Discretisation temporelle . . . . .	27
<b>1.7</b>	<b>Stratégies de raffinement local d'un maillage simplexe</b> . . . . .	<b>28</b>

Bien que les phénomènes électromagnétiques soient connus depuis l'Antiquité, les premières expériences sur l'électricité et le magnétisme remontent seulement au XVII<sup>ème</sup> siècle. L'analyse scientifique de ces phénomènes débuta avec les travaux de Coulomb sur l'électrisation qui furent publiés en 1785, et qui conduisirent à la théorie dynamique du champ électromagnétique de Maxwell, publiée en 1864. Cette théorie fut validée en 1888 par Hertz qui découvrit des ondes électromagnétiques se propageant à la vitesse de la lumière.

Depuis les années soixante, notre compréhension sur les constituants fondamentaux de la matière et les forces qui interagissent entre elles a révolutionné la physique. Cela a donné lieu à la formulation du modèle standard des particules physiques qui décrit les particules et leurs interactions. L'électrodynamique classique héritée de Maxwell est une forme limite de l'électrodynamique quantique contenue dans le modèle standard, c'est-à-dire valide lorsque le nombre de photons impliqués est suffisamment grand.

L'électrodynamique classique permet de décrire les phénomènes électromagnétiques qui se manifestent dans de nombreuses technologies modernes: télécommunication, micro-onde, radar, antenne, etc. Afin

de simuler les effets produits, qui peuvent être destructeurs, il est nécessaire de faire une analyse mathématique des équations de Maxwell, pour les résoudre numériquement, la résolution analytique étant dans la majorité des cas impossible.

L'objectif de ce chapitre est d'une part, de faire quelques rappels de physique et mathématique sur les équations de Maxwell et d'autre part, de passer en revue les principales méthodes numériques pour résoudre les équations de Maxwell, et de motiver le choix de la méthode numérique adoptée dans cette étude ainsi que l'utilisation de maillages simplexes non-conformes.

Il existe de nombreux ouvrages de référence sur l'électromagnétisme et le traitement numérique des phénomènes de propagation d'ondes électromagnétiques. Les fondements physiques de l'électromagnétisme sont au cœur des ouvrages de J.D. Jackson [Jac98] et de R. Feynman [Fey79]. Le livre d'A. Bossavit [Bos91] permet de passer de la physique à la modélisation, et le livre de R.F. Harrington [Har01] présente les techniques mathématiques pour traiter des problèmes de propagation d'ondes électromagnétiques en régime harmonique.

## 1.1 Équations de Maxwell

Une étude des phénomènes électromagnétiques consiste à déterminer, à l'instant  $t$  ( $t \in \mathbb{R}^+$ ) et au point  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ , les quatre champs de vecteurs  $\mathbf{E}$  (en  $V/m$ ),  $\mathbf{D}$  (en  $C/m^2$ ),  $\mathbf{H}$  (en  $A/m$ ) et  $\mathbf{B}$  (en  $T$ ) désignant respectivement le champ et l'induction électrique, le champ et l'induction magnétique, et vérifiant:

- ❶ la loi de Faraday qui lie la force électromotrice à la variation de flux d'induction,
- ❷ le théorème d'Ampère qui permet de calculer le champ magnétique engendré par un courant,
- ❸ la loi définissant la charge électrique,
- ❹ la loi postulant l'absence de charge magnétique.

En appliquant le théorème de la divergence de Gauss et le théorème de Stokes, on obtient les expressions locales de ces lois physiques appelées **équations de Maxwell** :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - \text{rot}(\mathbf{H}) = -\mathbf{j} \quad (\text{loi de Maxwell-Ampère}), \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \text{rot}(\mathbf{E}) = 0 \quad (\text{loi de Maxwell-Faraday}), \\ \text{div}(\mathbf{D}) = \rho \quad (\text{loi de Gauss électrique}), \\ \text{div}(\mathbf{B}) = 0 \quad (\text{loi de Gauss magnétique}). \end{array} \right. \quad (1.1)$$

Les densités de charge  $\rho$  et de courant  $\mathbf{j}$  sont reliées par la loi de conservation:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\mathbf{j}) = 0. \quad (1.2)$$

Le système des équations de Maxwell ne tient pas compte du milieu matériel où il y a propagation, et par conséquent il ne suffit pas à la détermination du champ électromagnétique. Il convient alors d'ajouter des relations qui précisent les propriétés spécifiques du milieu étudié. Ces relations liant les champs et les inductions sont données par des lois dites de comportement, caractéristiques du milieu considéré. Nous considérerons dans cette étude des matériaux linéaires isotropes dont les lois constitutives les plus simples sont données par les relations:

$$\begin{cases} \mathbf{D}(\mathbf{x}, t) = \epsilon(\mathbf{x})\mathbf{E}(\mathbf{x}, t), \\ \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \mu(\mathbf{x})\mathbf{H}(\mathbf{x}, t), \end{cases} \quad (1.3)$$

où  $\epsilon(\mathbf{x})$  et  $\mu(\mathbf{x})$  représentent la permittivité diélectrique et la perméabilité magnétique du milieu. Par ailleurs, on supposera que les courants sources sont donnés ou bien que le milieu de propagation est un conducteur à perte. Dans ce dernier cas, la densité de courant  $\mathbf{j}$  et le champ électrique  $\mathbf{E}$  sont reliés par une loi dite de conduction. En l'absence d'autre source de courant électrique, la loi la plus simple est la loi d'Ohm:

$$\mathbf{j}(\mathbf{x}, t) = \sigma(\mathbf{x})\mathbf{E}(\mathbf{x}, t),$$

où la conductivité du matériau  $\sigma$  est une grandeur scalaire positive ou nulle.

A l'aide de la loi de comportement (1.3), on peut alors écrire les équations de Maxwell (1.1) en variables  $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$  de la façon suivante:

$$\begin{cases} \epsilon(\mathbf{x})\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \text{rot}(\mathbf{H}) = -\mathbf{j}, \\ \mu(\mathbf{x})\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \text{rot}(\mathbf{E}) = 0, \\ \text{div}(\epsilon(\mathbf{x})\mathbf{E}) = \rho, \\ \text{div}(\mu(\mathbf{x})\mathbf{H}) = 0. \end{cases} \quad (1.4)$$

Notons que les équations:

$$\begin{cases} \text{div}(\epsilon(\mathbf{x})\mathbf{E}) = \text{div}(\mathbf{D}) = \rho, \\ \text{div}(\mu(\mathbf{x})\mathbf{H}) = \text{div}(\mathbf{B}) = 0, \end{cases}$$

sont redondantes dans le modèle continu (pour tout temps  $t$  positif) pour des conditions initiales vérifiant ces contraintes (voir par exemple [DL87]). On peut ainsi ne considérer que les deux premières équations de (1.4).

## 1.2 Conditions d'interface et conditions aux limites

L'écriture classique des équations de Maxwell suppose implicitement que sources et champs ont une régularité qui assure un sens aux diverses dérivations. Or, des répartitions de charges (éventuellement ponctuelles) et/ou de courants localisés sur des courbes ou des surfaces se rencontrent fréquemment dans les applications. L'écriture des équations de Maxwell au sens des distributions permet alors de traiter des singularités et d'expliciter de manière générale les conditions aux limites ou d'interface associées à ces types de problème.

### 1.2.1 Equations de Maxwell au sens des distributions

Soit une distribution vectorielle  $T_{\mathbf{A}}$  de  $\mathbb{R}^3$  associée au champ de vecteur  $\mathbf{A}$  dérivable au sens des fonctions vectorielles dans le complémentaire d'une surface de discontinuité  $S$  orientée et de normale  $\mathbf{n}$ . On rappelle que la divergence et le rotationnel d'une distribution vectorielle  $T_{\mathbf{A}}$  s'écrivent:



$$\begin{cases} \operatorname{div}(T_{\mathbf{A}}) = \operatorname{div}(\mathbf{A}) + \mathbf{n} \cdot [\mathbf{A}]_S \delta_S, \\ \operatorname{rot}(T_{\mathbf{A}}) = \operatorname{rot}(\mathbf{A}) + \mathbf{n} \times [\mathbf{A}]_S \delta_S, \end{cases} \quad (1.5)$$

où  $\delta_S$  est la distribution de Dirac sur la surface  $S$  et  $[\mathbf{A}]_S$  le saut de  $\mathbf{A}$  à travers la surface  $S$ . Le terme  $\operatorname{div}(\mathbf{A})$  désigne l'opérateur divergence au sens des fonctions appliqué à  $\mathbf{A}$ , alors que  $\operatorname{rot}(\mathbf{A})$  désigne l'opérateur rotationnel au sens des fonctions associé à  $\mathbf{A}$ .

On considère maintenant les distributions vectorielles et scalaires associées aux grandeurs électromagnétiques intervenant dans les équations de Maxwell (1.4). On suppose que ces grandeurs sont dérivables dans le complémentaire de la surface de discontinuité  $S$ . De plus, la distribution scalaire  $T_\rho$  se décompose en la somme d'une densité de charge volumique  $\rho$  et d'une charge superficielle notée  $\rho_S$  ( $T_\rho = \rho + \rho_S \delta_S$ ). On décompose de manière analogue la distribution volumique  $T_{\mathbf{j}}$ .

Ainsi, les équations de Maxwell au sens des distributions s'écrivent :

$$\begin{cases} \epsilon(\mathbf{x}) \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \operatorname{rot}(\mathbf{H}) - \mathbf{n} \times [\mathbf{H}]_S \delta_S = -\mathbf{j} - \mathbf{j}_S \delta_S, \\ \mu(\mathbf{x}) \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \operatorname{rot}(\mathbf{E}) + \mathbf{n} \times [\mathbf{E}]_S \delta_S = 0, \\ \operatorname{div}(\epsilon(\mathbf{x}) \mathbf{E}) + \mathbf{n} \cdot [\epsilon(\mathbf{x}) \mathbf{E}]_S \delta_S = \rho + \rho_S \delta_S, \\ \operatorname{div}(\mu(\mathbf{x}) \mathbf{H}) + \mathbf{n} \cdot [\mu(\mathbf{x}) \mathbf{H}]_S \delta_S = 0. \end{cases} \quad (1.6)$$

On retrouve par identification les équations de Maxwell au sens des fonctions (1.4) d'une part, et les conditions aux limites sur la surface  $S$  d'autre part:

$$\begin{cases} \mathbf{n} \times [\mathbf{H}]_S = \mathbf{j}_S, \\ \mathbf{n} \times [\mathbf{E}]_S = 0, \\ \mathbf{n} \cdot [\epsilon(\mathbf{x}) \mathbf{E}]_S = \rho_S, \\ \mathbf{n} \cdot [\mu(\mathbf{x}) \mathbf{H}]_S = 0. \end{cases} \quad (1.7)$$

Ainsi, en l'absence de courant  $\mathbf{j}_S$ , les composantes tangentes des champs électrique et magnétique sont continues à travers toute surface. Par contre, même en l'absence de charge, les composantes normales des champs électrique et magnétique ne sont généralement pas continues.

## 1.2.2 Conditions aux limites pour une surface métallique

Nous assimilerons, tout au long de cette étude, une paroi métallique au modèle idéal et fictif du conducteur parfait de conductivité  $\sigma$  supposée infinie (les charges se portent instantanément à la surface du conducteur). Physiquement, il n'existe pas de courant surfacique  $\mathbf{j}_S$  à l'interface  $S$  entre un diélectrique et un métal. Le champ électromagnétique à l'intérieur du métal devient rapidement nul mais pénètre tout de même celui-ci sur une faible épaisseur. Ce phénomène est classiquement appelé effet de peau mais il n'est généralement pas pris en compte dans les modélisations numériques car le modèle de conducteur parfait est très simple à mettre en œuvre et assez précis pour un grand ensemble de dispositifs. Nous considérerons donc que le champ électromagnétique est nul à l'intérieur du métal.

Soient  $\mathbf{E}_S$  et  $\mathbf{H}_S$  les champs électrique et magnétique à la surface du métal. Les relations de saut (1.7) deviennent:

$$\begin{cases} \mathbf{n} \times \mathbf{H}_S = \mathbf{j}_S, \\ \mathbf{n} \times \mathbf{E}_S = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_S = \frac{\rho_S}{\epsilon}, \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{H}_S = 0. \end{cases} \quad (1.8)$$

**Remarque 1.1** Les courants surfaciques  $\mathbf{j}_S$  et les charges surfaciques  $\rho_S$  ne sont pas des sources appliquées connues mais leur présence est rendue nécessaire par le modèle de conducteur parfait.

On en déduit en particulier qu'à la surface d'un conducteur parfait, le champ électrique est normal et le champ magnétique est tangent. D'autre part, le champ magnétique peut se mesurer directement à partir de la densité de courants superficiels.

### 1.2.3 Conditions aux limites pour une frontière absorbante

Les problèmes de propagation d'ondes sont souvent posés en domaines non-bornés. Une des questions cruciales pour leur résolution numérique est de savoir borner artificiellement le domaine de calcul. Ce sujet est inépuisable et alimente depuis l'apparition des techniques de simulation numérique un nombre conséquent de recherches.

La première méthode simulant l'espace ouvert infini a été proposée par Yee [Yee66] en 1966. Elle consiste simplement à borner le domaine de calcul par des conditions réfléchissantes et à limiter le temps d'observation de façon à ne pas prendre en compte l'apparition d'ondes réfléchies sur la frontière. Cette méthode n'a jamais été utilisée pour la résolution des problèmes 3D électromagnétiques importants car la taille mémoire augmente en fonction du temps d'observation du fait de l'augmentation du domaine de calcul. En 1971, Merewether [Mer71] a proposé une autre méthode dite *condition au bord rayonnante* qui consiste à approcher le champ électromagnétique aux frontières par une loi en  $1/r$  ( $r$  étant la distance du point considéré sur la frontière au centre du maillage). Cette méthode semble avoir été abandonnée à la suite de constats d'imprécisions et d'instabilités. Une troisième méthode a été décrite en 1977 par Holland [Hol77] (voir aussi [KL78]), dite de la *couche adaptée*, qui consistait à entourer le volume de calcul par un milieu absorbant, dont l'impédance est égale à celle du vide. Le milieu absorbant est constitué d'un certain nombre de couches possédant des caractéristiques dissipatives. Leur rôle est d'assurer une perte significative et progressive de l'amplitude des ondes se dirigeant vers la limite extérieure du maillage. Cette même année, Engquist et Majda [EM77]-[EM79] ont proposé une famille de conditions absorbantes basée sur l'approximation de l'équation des ondes. Ces conditions ont été proposées pour les ondes acoustiques. Appliquée ensuite par Mur [Mur81] en 1981 aux problèmes électromagnétiques en 2D et 3D (on peut aussi se référer à [LWYY84]-[BH88]-[TBR92] pour des travaux traitant de conditions absorbantes d'ordre élevé).

Nous utiliserons dans la suite de cette thèse la condition absorbante de Silver-Müller [Mul69]-[Mur81]:

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E} = -c_0 \mu_0 \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{H}), \quad (1.9)$$

pour une frontière artificielle placée dans le vide. C'est une condition aux limites facile à implémenter numériquement néanmoins la frontière artificielle doit être placée assez loin afin que d'éventuelles réflexions parasites n'interagissent pas avec l'objet diffractant.

### 1.2.4 Conditions de saut à l'interface entre deux matériaux

Les équations (1.4) font apparaître trois paramètres dont les valeurs dans le vide sont  $\mu \equiv \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$ ,  $\epsilon \equiv \epsilon_0 \approx 10^{-9}/36\pi \approx 8.8541878 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$  et  $\sigma = 0 \text{ S/m}$ . La vitesse de la lumière dans le vide est définie par  $c_0 = 2.99792458 \cdot 10^8 \text{ m/s} \approx 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$ . Pour les autres matériaux, il est classique de définir la perméabilité et la permittivité par rapport à celles du vide, *i.e.* on a  $\epsilon = \epsilon_r\epsilon_0$  et  $\mu = \mu_r\mu_0$  ( $\epsilon_r$  et  $\mu_r$ , sans dimensions). Pour la plupart des matériaux  $\epsilon_r$  et  $\mu_r$  dépendent de la fréquence. Cependant, dans cette étude, on suppose que les matériaux ne possèdent pas une telle dépendance; ces matériaux s'appellent alors *matériaux simples*. Les permittivités relatives  $\epsilon_r$  de certains matériaux sont données dans la Tab. 1.1. La perméabilité magnétique relative  $\mu_r$  est égale à 1 pour la plupart des *matériaux simples* sauf les matériaux magnétiques, lesquels peuvent être considérés comme des conducteurs parfaits. Notons que la permittivité diélectrique satisfait toujours  $\epsilon_r \geq 1$ . Elle est discontinue à l'interface entre matériaux et ces changements sont souvent la cause d'importantes difficultés dans les simulations numériques. En l'absence de densité volumique de charge et de courant surfacique, les relations (1.8) conduisent à :

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot (\epsilon_1 \mathbf{E}_1 - \epsilon_2 \mathbf{E}_2) &= 0, \\ \mathbf{n} \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) &= 0, \\ \mathbf{n} \cdot (\mu_1 \mathbf{H}_1 - \mu_2 \mathbf{H}_2) &= 0, \\ \mathbf{n} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) &= 0, \end{aligned} \tag{1.10}$$

où les indices identifient les milieux et  $\mathbf{n}$  est le vecteur normal à l'interface, dirigé du milieu 1 vers le milieu 2.

TAB. 1.1 – *Permittivités relatives pour certains matériaux*

Matériau/milieu	$\epsilon_r$
Air	1.0
Téflon	2.1
Polyéthylène	2.25
Polystyrène	2.6
Pyrex de verre	4.7
Glace à 0° C	3.2

## 1.3 Problème de diffraction d'onde

Le problème de la diffraction d'une onde électromagnétique par un obstacle est un problème très intéressant pour les ingénieurs et sert à plusieurs applications telles que le calcul de surface équivalente radar (SER). On considère pour ce faire un obstacle de  $\mathbb{R}^p$  ( $p = 2, 3$ ) de frontière  $\Gamma$ , parfaitement conducteur. Soit une onde électromagnétique incidente se propageant dans un milieu extérieur  $\Omega$  homogène non conducteur et arrivant sur l'obstacle (Fig. 1.1). Cette onde incidente (référéncée par *inc*) est une donnée du problème dont on connaît l'expression analytique. La présence de l'obstacle induit une perturbation de l'onde incidente qui génère une onde diffractée (référéncée par *dif*).

On cherche alors à déterminer le champ diffracté  ${}^t(\mathbf{E}^{dif}, \mathbf{H}^{dif})$ , sachant que les équations de Maxwell sont vérifiées par le champ total défini par:

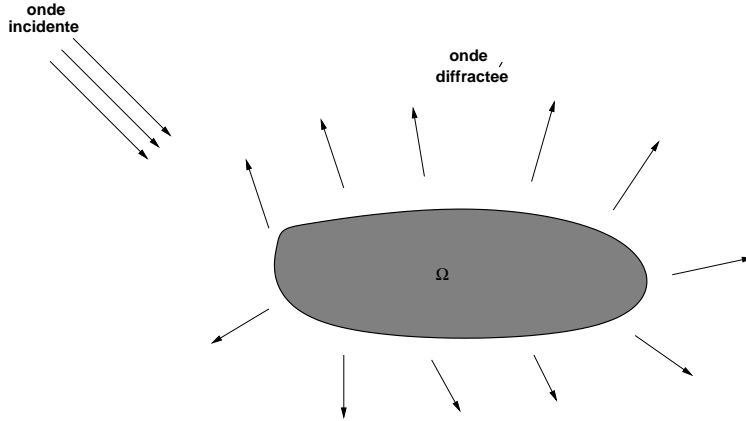


FIG. 1.1 – Diffraction par un obstacle.

$$\begin{cases} \mathbf{E} = \mathbf{E}^{dif} + \mathbf{E}^{inc}, \\ \mathbf{H} = \mathbf{H}^{dif} + \mathbf{H}^{inc}. \end{cases}$$

Une écriture des équations de Maxwell en champ diffracté est plus appropriée à ce type de problème car le calcul d'une SER par exemple ne requiert que la connaissance du champ diffracté. De plus, les conditions aux limites absorbantes exprimées en fonction du champ diffracté génèrent moins de réflexions parasites car celui-ci est généralement d'amplitude plus faible que le champ total.

Par hypothèse, le champ incident  ${}^t(\mathbf{E}^{inc}, \mathbf{H}^{inc})$  est solution des équations de Maxwell. De plus, le système de Maxwell est linéaire ce qui permet de réécrire les équations en fonction du champ diffracté. Les conditions aux limites sur un métal parfaitement conducteur s'écrivent alors:

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E}^{dif} = -\mathbf{n} \times \mathbf{E}^{inc} \quad \text{et} \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{H}^{dif} = -\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}^{inc}.$$

## 1.4 Le cas à deux dimensions d'espace: polarisations TM et TE

En dimension deux d'espace, les équations de Maxwell peuvent être découplées en deux systèmes analogues de trois équations, généralement nommés mode transverse électrique (TE) et mode transverse magnétique (TM).

Les ondes transverses électriques et transverses magnétiques sont en toute généralité des ondes qui se propagent en trois dimensions d'espace. Cependant, nous utiliserons dans cette étude leurs propriétés en dimension deux d'espace qui permettent de simplifier les équations de Maxwell puisque l'on peut se ramener à un système de trois équations sans perdre d'information au niveau de la physique du phénomène. Nous avons choisi ici la direction suivant l'axe  $O_z$  comme direction privilégiée et le champ électromagnétique ne dépend que des variables d'espace  $x$  et  $y$ . Un exemple typique est la diffraction d'une onde par un cylindre infini d'axe  $O_z$  (pas nécessairement à base circulaire comme décrit sur la Fig. 1.2).

Aucune contribution tridimensionnelle ne devant être présente (*i.e.* ici aucune dépendance par rapport à la variable  $z$ ), l'onde est supposée se propager uniquement dans un plan secteur quelconque  $P$  du cylindre: le vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  reste dans ce plan  $P$  après la diffraction sur l'objet d'après la théorie

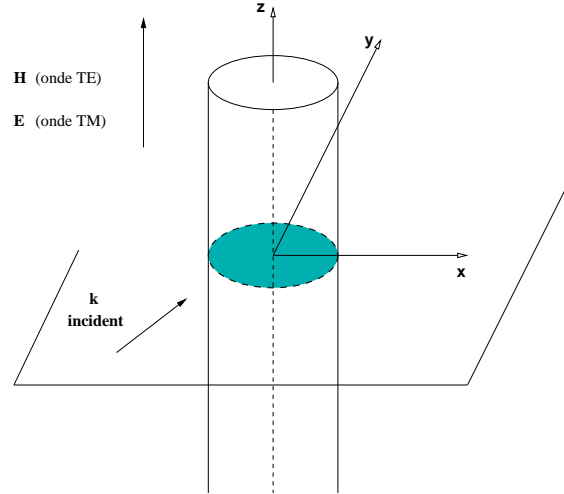


FIG. 1.2 – Diffraction bidimensionnelle par un cylindre infini.

de l'optique. En particulier pour une onde plane, dont les champs électrique et magnétique restent orthogonaux entre eux dans un même plan perpendiculaire au vecteur d'onde  $\mathbf{k}$ , il reste à définir un degré de liberté: la polarisation de l'onde qui précise la direction de l'un des champs de vecteurs. On notera que deux directions (appelées polarisations  $TE_z$  et  $TM_z$ ) suffisent à retrouver une polarisation quelconque en dimension deux d'espace d'après le principe de superposition. Les calculs peuvent alors se faire uniquement dans le plan secteur  $P$  et pour seulement deux polarisations.

Pour les ondes transverses magnétiques  $TM_z$ , on a  $\mathbf{H} = {}^t(H_x, H_y, 0)$ ,  $\mathbf{E} = {}^t(0, 0, E_z)$  et  $\mathbf{j} = {}^t(0, 0, j_z)$  en coordonnées cartésiennes. Seules les composantes non nulles des champs électrique et magnétique sont considérées. Ainsi, les équations de Maxwell en mode  $TM_z$  s'écrivent :

$$\begin{cases} \epsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} - \frac{\partial H_y}{\partial x} + \frac{\partial H_x}{\partial y} = -j_z, \\ \mu \frac{\partial H_x}{\partial t} + \frac{\partial E_z}{\partial y} = 0, \\ \mu \frac{\partial H_y}{\partial t} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = 0. \end{cases}$$

Pour les ondes transverses électriques  $TE_z$ , on a  $\mathbf{H} = {}^t(0, 0, H_z)$ ,  $\mathbf{E} = {}^t(E_x, E_y, 0)$  et  $\mathbf{j} = {}^t(j_x, j_y, 0)$  en coordonnées cartésiennes. Les équations de Maxwell en mode  $TE_z$  s'écrivent :

$$\begin{cases} \mu \frac{\partial H_z}{\partial t} + \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0, \\ \epsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} - \frac{\partial H_z}{\partial y} = -j_x, \\ \epsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} + \frac{\partial H_z}{\partial x} = -j_y. \end{cases}$$

## 1.5 Electromagnétisme numérique

Les équations (1.1) sont linéaires et il peut au premier abord sembler assez facile de les résoudre analytiquement. Cependant, les conditions aux bords et les conditions d'interface rendent les équations de Maxwell difficiles à résoudre analytiquement sauf dans un petit nombre de situations mettant en jeu des formes géométriques simples (comme la diffraction d'une onde plane par une sphère ou un cylindre circulaire infini). Ainsi, dans la majeure partie des situations réalistes, la résolution numérique des équations de Maxwell est la seule alternative viable.

Les équations de Maxwell peuvent être résolues dans le domaine temporel ou bien dans le domaine fréquentiel (*i.e.* en supposant une variation harmonique en temps). De plus, la méthode numérique peut être appliquée soit sur une formulation d'équations aux dérivées partielles (EDP) des équations de Maxwell (1.1) soit sur une formulation intégrale. La Tab. 1.2 fournit des exemples de méthodes numériques suivant cette classification. Les abréviations dans la Tab. 1.2 ont les significations suivantes:

- DF\*\*: Difference Finie (en Domaine Temporel ou Domaine Fréquentiel)
- EF\*\*: Élément Fini (en Domaine Temporel ou Domaine Fréquentiel)
- VF\*\*: Volume Fini (en Domaine Temporel ou Domaine Fréquentiel)
- GD\*\*: Galerkin Discontinue (en Domaine Temporel ou Domaine Fréquentiel)
- MOT : *Marching-On in Time*
- MoM : *Method of Moments*

TAB. 1.2 – *Classification des méthodes numériques pour les équations de Maxwell.*

	Domaine temporel	Domaine fréquentiel
Formulation EDP	DFDT	DFDF
	EFDT	EFDF
	VFDT	VFDF
	GDDT	GDDF
Formulation intégrale	MOT	MoM

La Tab. 1.2 recense les méthodes les plus couramment utilisées dans chaque catégorie. Il existe bien sûr de nombreuses autres méthodes. Les méthodes en domaine temporel permettent de traiter en un seul calcul des problèmes de propagation dont le spectre comprend plusieurs fréquences. Elles permettent également de suivre l'évolution d'un signal impulsionnel en temps. Comme cette thèse porte sur des méthodes en domaine temporel, la discussion qui suit concerne essentiellement ces méthodes et seules quelques méthodes en domaine fréquentiel sont abordées. Ces dernières sont toutefois les méthodes les mieux adaptées aux applications dont le spectre fréquentiel ne présente que quelques fréquences.

### 1.5.1 Méthodes en domaine fréquentiel: formulations intégrales

Les méthodes en domaine fréquentiel reposant sur des formulations intégrales, comme la MoM [Wan91], réduisent les équations volumiques à des équations surfaciques. Après discrétisation, la méthode MoM conduit à un système linéaire dense. La résolution de ce système par une méthode directe (méthode de Gauss) nécessite  $O(N^3)$  opérations arithmétiques si la taille de la matrice est  $N \times N$ . En supposant que le nombre d'éléments par longueur d'onde est constant,  $N$  croît proportionnellement à  $f^2$ , où  $f$  est la fréquence. La complexité de résolution du système MoM par une méthode directe est alors en  $O(f^6)$ . Un des moyens de réduire cette complexité est de résoudre le système MoM par une

méthode itérative. Le noyau numérique de base d'une méthode itérative est le produit d'une matrice par un vecteur, lequel a une complexité en  $O(N^2)$ , si bien que la complexité arithmétique pour résoudre le système MoM itérativement est en  $O(f^4)$  si la méthode itérative converge bien. Une réduction de cette complexité peut encore être réalisée par l'utilisation d'une méthode multipôle pour accélérer le calcul du produit matrice-vecteur moyennant quelques approximations. Dans ce cas, le système MoM peut être résolu en  $O(N \log(N))$  opérations arithmétiques si une méthode multipôle multiniveaux est utilisée [CRW93]-[SC95]. Une voie alternative pour réduire la complexité de la méthode MoM est d'utiliser la méthode d'optique physique (OP). Ici les inconnues à la surface de l'objet sont calculées directement à partir du champ incident. L'interaction entre les différentes parties de la surface est donc négligée. Il s'agit d'une approximation haute fréquence. Les méthodes OP et MoM fournissent des résultats identiques lorsque la fréquence tend vers l'infini. Pour une étude récente de la méthode MoM d'un point de vue algorithmique et mise en œuvre, on pourra consulter [BRI05].

### 1.5.2 Méthodes en domaine fréquentiel: formulations EDP

Une formulation EDP des équations de Maxwell dans le domaine fréquentiel est l'équation d'Helmholtz vectorielle. Pour le champ électrique celle-ci s'écrit:

$$\nabla \times \left( \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{E} \right) = \omega \epsilon \mathbf{E}, \quad (1.11)$$

où  $\omega$  est la fréquence angulaire et  $\epsilon$  et  $\mu$  dépendent de la variable d'espace. Cette équation est en général résolue au moyen d'une méthode élément fini en raison de sa flexibilité géométrique et la possibilité d'utiliser des maillages non-structurés. Cependant, le développement de ces méthodes pour résoudre les équations de Maxwell a été relativement lent, en particulier dans le cas des méthodes d'ordre élevé. Une raison essentielle est l'obtention de solutions non physiques (apparition de modes parasites) lorsqu'un schéma élément fini classique de type Galerkin continu nodal est utilisé pour discrétiser l'équation (1.11). La source des ces problèmes a plusieurs interprétations parmi lesquelles une mauvaise représentation du noyau de l'opérateur rotationnel [Bos88] ou la génération de solutions qui violent les conditions de divergence, qui ne sont généralement pas directement imposées [PL91]. Une discussion de ces questions se trouve dans [SMYC95].

A. Bossavit a fait l'observation fondamentale que l'utilisation d'éléments finis spéciaux de type  $H(\text{rot}, \Omega)$ <sup>1</sup> permet de pallier le problème des modes parasites en préservant des principes de l'algèbre vectorielle [Bos88]-[Bos90]. Les méthodes d'éléments finis basées sur des éléments de type  $H(\text{rot}, \Omega)$ , aussi connues sous les noms d'éléments d'arêtes ou d'éléments de Nedelec [Ned80]-[Ned86], sont devenues rapidement l'approche dominante pour résoudre des problèmes à géométrie complexe en domaine fréquentiel. Bien que très élégantes, de telles formulations ne sont pas entièrement dénuées de points faibles: les systèmes algébriques associés sont plus grands que ceux caractérisant les éléments finis nodaux et la conformité intrinsèque de l'approximation ne facilite pas la mise au point de stratégies de résolution adaptatives (méthodes  $hp$ ).

### 1.5.3 Méthodes en domaine temporel: formulations intégrales

Les méthodes en domaine temporel reposant sur des formulations intégrales pour les équations de Maxwell sont relativement peu utilisées. Cependant, au cours de ces dernières années, ces méthodes

---

<sup>1</sup> $H(\text{rot}, \Omega) = \{v : v \in [L^2(\Omega)]^3, \nabla \times v \in [L^2(\Omega)]^3\}$ .

ont bénéficié d'un regain d'intérêt. La plupart de ces méthodes sont appelées méthodes *Marching-On In Time* (MOT). La complexité arithmétique des méthodes MOT est en  $O(N_t N_s^2)$ , où  $N_t$  est le nombre de pas de temps et  $N_s$  est le nombre de fonctions de base. Cette complexité peut être réduite en utilisant une technique *Plane Wave Time Domain* (PWTD) [ESM98]. Les techniques PWTD s'inspirent des méthodes multipôles. La complexité d'une technique PWTD à deux niveaux est en  $O(N_t N_s^{4/3} \log(N_s))$ , et la complexité d'une technique PWTD multiniveaux est en  $O(N_t N_s \log(N_s))$ .

Un inconvénient des méthodes MOT est qu'elles sont sujettes à des instabilités [RS90]. La question a été étudiée dans [DWB97] où il est montré qu'une méthode MOT pour résoudre les équations intégrales en champ magnétique peut être stabilisée en utilisant un schéma en temps implicite. Récemment, une nouvelle méthode a été développée pour éliminer l'instabilité des méthodes MOT pour des simulations en temps longs. Cette méthode s'appelle *Marching-On In Degree* (MOD) et elle utilise des polynômes de Laguerre [JCS03]. En général, le coût de stockage mémoire de la méthode MOD est beaucoup plus grand que celui de la méthode MOT si le nombre de pas de temps est très grand. Une comparaison entre les méthodes MOD et MOT notamment formulation, stabilité, coût et précision, se trouve dans [JJS<sup>+</sup>07].

## 1.5.4 Méthodes en domaine temporel: formulations EDP

### 1.5.4.1 Les méthodes DFDT

Pour la résolution des équations de Maxwell en domaine temporel, la méthode la plus connue et la plus couramment utilisée est la méthode DFDT proposée par K.S. Yee en 1966 [Yee66]. Les dérivées temporelles sont approchées par un schéma saute-mouton du second ordre (les champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$  ne sont pas calculés aux mêmes instants) et chacune des dérivées spatiales est aussi discrétisée par des différences centrées du second ordre. Les différentes composantes des champs ne sont pas calculées aux mêmes noeuds du maillage. Une illustration de la cellule du schéma de Yee est montrée sur la Fig. 1.3. C'est une méthode de conception simple et facile à mettre en œuvre. Sur des maillages cartésiens, cette méthode est la plus efficace en terme de temps de calcul et, lorsque la discrétisation est uniforme, la méthode DFDT est précise au second ordre en espace et en temps. Cependant, il est malaisé de discrétiser des formes irrégulières avec de tels maillages. En particulier, toute surface courbe est approchée par une surface discrète en marches d'escalier, ce qui peut être préjudiciable à la précision du calcul lorsque cette surface revêt une importance particulière comme par exemple l'interface entre deux tissus biologiques dans les études dosimétriques du rayonnement électromagnétique issu d'un téléphone mobile. De plus, la modélisation de petits détails (fentes minces, plaques minces) impose une taille de maille trop petite, rendant le calcul très coûteux si le maillage sous-jacent est uniforme. Si l'on utilise un maillage cartésien non-uniforme mais conforme pour prendre en compte ces détails, on accroît l'erreur de dispersion du schéma dans les mailles grossières. Le schéma de Yee souffre d'une importante dégradation de précision lorsqu'il est utilisé pour traiter les interfaces entre matériaux. En effet, l'approximation par marches d'escalier peut mener à une précision locale d'ordre zéro et au plus d'ordre un; elle peut aussi conduire à une méthode localement non-convergente [DDH01].

Plusieurs travaux ont visé à remédier aux défauts des schémas DFDT classiques, conduisant par exemple à la mise au point de schémas pour maîtriser le problème des marches d'escalier dans les discrétisations cartésiennes de surfaces curvilignes [DDH01]-[DHD01]-[XL04], de schémas d'ordre élevé [Taf98]-[Hes03]-[ZW04]-[Kas04], de schémas d'ordre élevé pour traiter les interfaces diélectriques [TY00a]-[TY00b]-[YP01]-[KT06], de schémas en maillages conformes non-orthogonaux [Fus90]-[Hol83], de schémas en maillages non-conformes orthogonaux [ZBM04]-[CFJ06] ou de schémas adaptés aux géométries curvilignes [JTUM92]-[MNA05]. D'autres techniques et améliorations sont discutées dans [Taf98]. Cependant,



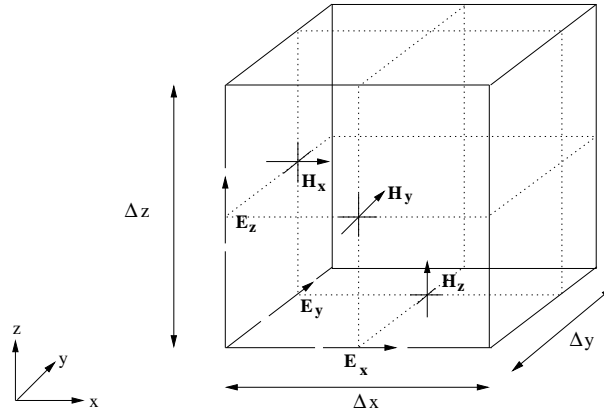


FIG. 1.3 – Position des inconnues dans une cellule de Yee.

la plupart de ces nouvelles méthodes n'ont pas vraiment pénétré la communauté d'utilisateurs, d'une part en raison de leur complexité et d'autre part, parce qu'elles introduisent souvent d'autres complications. Une solution élégante pour prendre en compte des éléments géométriques de forme complexe tout en préservant l'utilisation de maillages conformes est proposée par la méthode des domaines fictifs [CJM97]-[CGJ98]-[BG05]. L'inconvénient d'une telle approche est que la taille du pas de discrétisation de l'objet est liée à celui du maillage et donc, si l'objet est discrétisé finement, on est de nouveau contraint à utiliser un maillage fin dans tout le domaine. Une autre approche consiste à avoir recours à un raffinement local du maillage. Il existe deux types de raffinement: conforme et non-conforme. Plusieurs travaux ont été menés pour étendre la méthode DFDT originale à ce type de maillage (raffinement spatio-temporel) qui utilisent des formules d'interpolation portant sur les deux champs [KH90]-[PS92], ou sur un seul champ (le champ magnétique ou le champ électrique) [CL97]-[ZBM04]. On peut citer deux conclusions de ces travaux. La première est que le raffinement spatio-temporel a surtout été abordé d'un point de vue heuristique et étudié d'un point de vue expérimental (analyse de résultats de simulations numériques). La deuxième est que des instabilités fortes (explosion au bout de quelques pas de temps) ou faibles (explosion à la suite de multiples aller-retours de l'onde à l'intérieur de la boîte de calcul) ont été signalées par certains auteurs sans qu'aucune analyse mathématique n'ait été donnée. Collino *et al.* [CFJ06] ont récemment proposé une nouvelle méthode de raffinement spatio-temporel en trois dimensions d'espace garantissant un raccord stable entre les sous-maillages, basée sur la conservation d'une énergie électromagnétique discrète. Cependant, cette méthode est de nature implicite aux interfaces entre sous-maillages et nécessite donc la résolution d'un système linéaire pour l'obtention de la solution.

#### 1.5.4.2 Les méthodes EFDT

La méthode EFDT repose sur une formulation variationnelle des équations de Maxwell. Les éléments d'arêtes de Nedelec [Ned80]-[Ned86] ou les éléments de Whitney [Whi57]-[Bos02] sont les plus couramment utilisés pour approcher les inconnues du problème. En effet, les éléments finis nodaux classiques ne peuvent pas être utilisés pour les équations de Maxwell car ils ne respectent pas les conditions d'interface et les relations de divergence, et ils produisent des solutions non physiques. Les éléments d'arêtes fournissent une approximation *physique* dans le sens où seule la continuité des composantes tangentes aux arêtes des éléments est imposée, les composantes normales n'étant pas continues en général ce qui est en accord avec les conditions d'interface (1.10). Ainsi, cette approche permet de bien prendre en compte les milieux hétérogènes et les géométries complexes par l'utilisation de maillages non-structurés. Une

comparaison entre les éléments d'arêtes et les éléments nodaux classiques est présentée dans [Mon91]. La formulation EFDT est basée sur l'équation différentielle du second ordre obtenue en éliminant le champ  $\mathbf{H}$  ou le champ  $\mathbf{E}$  dans les équations de Maxwell. Par exemple, on peut éliminer le champ magnétique  $\mathbf{H}$  pour obtenir l'équation d'onde vectorielle du second ordre suivante:

$$\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \nabla \times \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} = 0.$$

La formulation faible associée peut être posée de la façon suivante: trouver  $\mathbf{H} \in H(\text{rot}, \Omega)$ , tel que:

$$\int_{\Omega} \left( \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \cdot \mathbf{w} - \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{w} + \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} \cdot \mathbf{w} \right) = \int_{\Gamma} \frac{1}{\mu} \mathbf{n} \times \nabla \times \mathbf{E} \cdot \mathbf{w},$$

pour tout  $\mathbf{w} \in W$ . Les fonctions de base d'arêtes sont construites à partir des fonctions de bases nodales. Par exemple, la fonction de base  $\psi_e$  sur une arête  $e$  qui joint le nœud  $i$  avec le nœud  $j$  s'écrit (voir Fig. 1.4 pour une représentation 2D de la fonction de base):

$$\psi_e = \phi_i \nabla \phi_j - \phi_j \nabla \phi_i,$$

où  $\phi_i$  est le vecteur des fonctions de base nodales, tel que  $\phi_i = 1$  sur le nœud  $i$  et  $\phi_i = 0$  sur les autres nœuds.

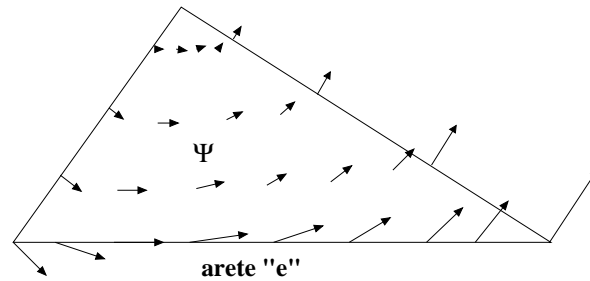


FIG. 1.4 – La fonction de base  $\psi_e$  pour l'arête  $e$  tracée sur un triangle.

La fonction de base pour une arête  $e$  possède les propriétés suivantes:

- $\nabla \cdot \psi_e = 0$ .
- $\psi_e$  a une composante tangentielle constante le long de l'arête  $e$ , ce qui signifie que la composante tangentielle est continue autour de l'arête  $e$ .
- $\psi_e$  a une composante tangentielle nulle le long des autres arêtes.

Le principal inconvénient de la méthode EFDT basée sur les éléments d'arêtes est la difficulté d'obtenir un schéma explicite sur un maillage non-structuré général: une matrice creuse réelle, symétrique, définie positive est à inverser à chaque itération temporelle. Bien que ne présentant pas de difficulté, cette inversion entraîne des temps de calcul importants. Des techniques de condensation de masse permettent avec des approximations numériques de diagonaliser la matrice à inverser. Malheureusement, ces techniques sont difficiles à mettre en œuvre pour les éléments finis utilisés pour l'électromagnétisme [EJ97a]-[EJ97b]-[BCP00]-[Lac04]-[FWR04]. Pour la formulation du premier ordre des équations de Maxwell, il a été démontré que la condensation de masse peut être justifiée seulement si tous les triangles sont aigus [MP94]. Des travaux sont en cours sur ce sujet pour le cas de maillages hexaédriques [CFMP03].

Une solution pour réduire les temps de calcul est de combiner la méthode EFDT avec la méthode DFDT, ce qui conduit à une méthode hybride. Un maillage non-structuré est utilisé à proximité des objets courbes et autour de petits détails géométriques, tandis qu'une grille structurée est employée dans les parties homogènes du domaine de calcul. Ainsi, l'hybridation permet de combiner l'efficacité des grilles structurées avec la flexibilité géométrique des maillages non-structurés. De telles hybridations sont présentées dans [WI95]-[SDPP98]-[RB00]-[RB02]-[WLTL03]-[Tel07]-[VGLL07].

Demkowicz et ses collaborateurs ont été parmi les premiers à proposer des techniques d'éléments finis *hp*-adaptatives en électromagnétisme [DR97]-[DV98]-[VD99]. Dans leur première contribution en deux dimensions d'espace, les calculs sont effectués avec des polynômes de degré uniforme en espace. Une analyse de convergence de la méthode est donnée dans [VD99]. Dans [DR97] et [PDG04], les auteurs proposent un ensemble complet d'éléments finis qui autorise l'utilisation de maillages hybrides à base de quadrilatères et triangles, avec *h*-raffinement et *p*-enrichissement simultanément. Une série de problèmes modèles est traitée, sans adaptivité du maillage [DV98]-[VD99], pour démontrer l'efficacité du *p*-enrichissement. Des calculs avec *h*-adaptivité ont également été réalisés [DR97]-[PDG04]. Plus récemment, Rachowicz et Demkowicz [RD02] ont développé une méthode d'éléments finis *hp*-adaptative en trois dimensions d'espace sur des maillages hexaédriques (voir aussi [CRD03]-[RZ05]). Leur approche autorise des maillages avec nœuds flottants et un raffinement anisotrope. Ils décrivent une structure de données qui permet un tel raffinement, mais ils ne proposent pas de stratégie pour la sélection correcte de la combinaison *h*-raffinement et *p*-enrichissement. En outre, des éléments courbes sont autorisés via la définition d'un élément de référence et d'une transformation géométrique associée. Des exemples numériques illustrent l'efficacité de l'approche. On peut noter ici, qu'à notre connaissance, toutes les méthodes EFDT *hp*-adaptatives existantes autorisent un seul niveau de nœuds flottants, mis à part le travail récent de Solín *et al.* [SC06] qui proposent une stratégie adaptative automatique basée sur un niveau arbitraire de nœuds flottants, et qui peut être appliquée aux méthodes d'éléments finis spectraux.

#### 1.5.4.3 Les méthodes VFDT

Les méthodes volumes finis sont utilisées depuis longtemps pour les simulations numériques en mécanique des fluides. Depuis les années 90, elles vivent une seconde jeunesse avec leur application en électromagnétisme. Ces méthodes ont deux caractéristiques principales:

- une simplicité algorithmique: elles ont en général un coût en espace mémoire et en temps de calcul peu élevé et sont caractérisées par une certaine simplicité de mise en œuvre;
- elles conduisent naturellement à des schémas conservatifs, ceci expliquant que les méthodes volumes finis soient largement employées dans le domaine de la mécanique des fluides.

Toute résolution numérique par une méthode volumes finis nécessite de mailler le domaine de calcul en cellules élémentaires qui servent de support à la discrétisation des équations de Maxwell. L'attrait principal de ce type de méthode est la tolérance vis à vis du maillage et de la localisation des inconnues. Une étape importante est donc la définition du volume de contrôle (ou cellule) sur lequel les composantes des champs sont approchées en moyenne. Par exemple, en dimension deux, pour un maillage composé de triangles, il est possible de définir de plusieurs façons les volumes de contrôle. La forme de ces volumes influe sur la solution calculée. Une comparaison entre les différentes formes d'un point de vue numérique (convergence numérique, précision, temps de calcul, ...) est proposée dans [Pas02]. Une comparaison entre la première et la troisième des formes énumérées ci-dessous pour les équations de Maxwell est donnée dans [Rem99]. Différentes formes de volume de contrôle ont été étudiées que l'on rappelle ici dans le cas où le maillage primal est une triangulation:

- Une première forme (voir la Fig. 1.5) consiste à prendre les triangles eux-mêmes. La méthode qui en découle correspond dans la littérature volumes finis au schéma *cell-centered*. Ce type de volume de contrôle a pour avantage de ne pas nécessiter la construction d'un maillage dual au maillage primal qui peut être conforme ou non (au sens des éléments finis), isotrope ou adapté à la solution.
- Une deuxième possibilité (voir la Fig. 1.6) consiste à associer pour chaque arête de la triangulation initiale un volume construit en joignant les barycentres des triangles adjacents à cette arête avec les sommets de cette arête. Ces volumes dits barycentriques ont été introduits par Dolejsi et Angot [DA96] pour des applications en mécanique des fluides compressibles et permettent de combiner facilement une méthode volumes finis pour la convection avec une méthode d'éléments finis de type Crouzeix-Raviart pour la diffusion si le maillage primal est conforme. Ce choix présente l'inconvénient de travailler sur un maillage auxiliaire et de conduire à des volumes déformés dans le cas d'un maillage primal anisotrope ou non-conforme.
- On peut aussi associer à chaque sommet  $S$  du maillage primal, le volume (voir la Fig. 1.7) s'appuyant sur les centres de gravité des triangles ayant pour sommet  $S$  et sur les milieux des arêtes ayant  $S$  pour extrémité. Dans la littérature volumes finis, cette configuration correspond à la méthode *cell-vertex* (aussi référencée comme *mixed element method*). Ce choix nécessite la construction d'un maillage dual et peut conduire à des volumes de contrôle déformés dans le cas d'un maillage primal anisotrope. On note que le nombre de volumes de contrôle est égal au nombre de sommets du maillage primal et est donc plus petit que pour les deux premiers choix, alors que le nombre d'interfaces (intersection entre deux volumes de contrôle voisins) est quant à lui plus grand.
- Enfin, on peut considérer un volume de contrôle légèrement modifié par rapport au précédent (voir la Fig. 1.8), obtenu en joignant les centres de gravité des triangles ayant un sommet en commun. Ce type de volume de contrôle réduit (par rapport au troisième choix) le nombre d'interfaces par volume. Notons qu'en cas de maillage primal trop anisotrope, il peut arriver que le sommet associé soit à l'extérieur du volume.

Le système de Maxwell (1.4) est hyperbolique. Par ailleurs, il peut s'écrire sous une forme conservative. Ces propriétés justifient l'utilisation d'une approximation numérique basée sur des schémas volumes finis à flux décentrés initialement mis au point pour la résolution numérique des systèmes de la mécanique des fluides. Associés à une discrétisation temporelle de type Runge-Kutta, ces schémas numériques sont très robustes, stables et efficaces pour résoudre des problèmes de propagation complexes. En outre, de nombreuses recherches ont permis de limiter la diffusion et la dispersion de ces schémas numériques en augmentant les ordres d'approximation en espace et en temps [Bon97]-[Bon98]-[Pac01]. Néanmoins, la diffusion numérique introduite par les schémas décentrés s'avère pénalisante dans certaines situations, notamment pour les calculs en temps longs.

Un schéma volumes finis centré, c'est à dire sans diffusion numérique, combiné à une discrétisation temporelle de type saute-mouton a été mis au point dans le cadre de la thèse de Remaki [Rem99], le but étant d'obtenir un schéma non-dissipatif, peu coûteux en espace mémoire et en temps de calcul. Tout comme le schéma différences finies de Yee [Yee66], il est d'ordre 2 en temps et en espace sur une grille régulière orthogonale. Il permet aussi de traiter des maillages triangulaires ou tétraédriques non-structurés. L'atout majeur de ce schéma est de conserver une énergie discrète sur tout maillage. En revanche, ce schéma présente une dispersion numérique importante lorsqu'il est utilisé avec un maillage fortement non-uniforme.

Plusieurs travaux ont donné lieu à des évolutions des méthodes VFDT dans le but d'augmenter leur précision et leur efficacité. L'hybridation de la méthode volumes finis avec d'autres méthodes temporelles

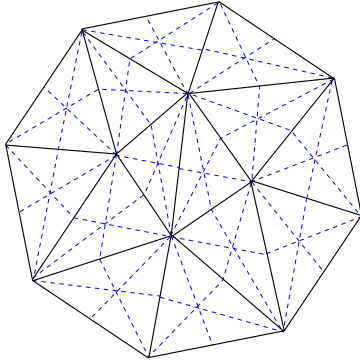


FIG. 1.5 – *Volume de contrôle triangulaire.*

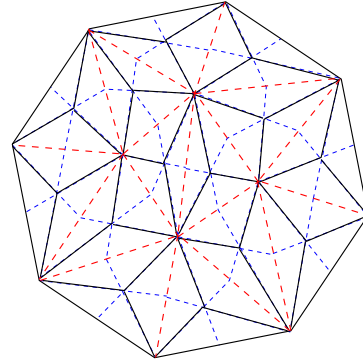


FIG. 1.6 – *Volume de contrôle barycentrique.*

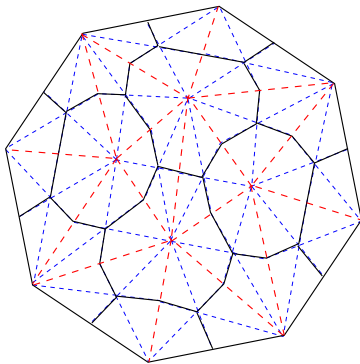


FIG. 1.7 – *Volume de contrôle sommet.*

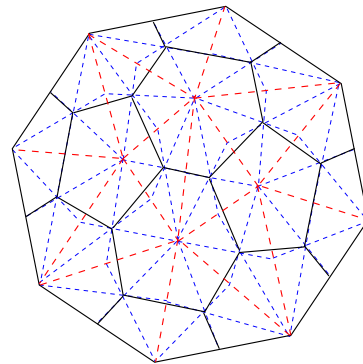


FIG. 1.8 – *Volume de contrôle diamant.*

permet de bénéficier des avantages de chacune des deux méthodes, ouvrant ainsi des perspectives intéressantes. Les principales difficultés du couplage entre la méthode différences finies et la méthode volumes finis sont énumérées par Pacaud dans sa thèse [Pac01], parmi lesquelles le comportement différent des deux méthodes (diffusion pour la méthode VFDT à flux décentrés et dispersion pour la méthode DFDT) et la gestion du passage d'un maillage structuré à un maillage non-structuré avec des composantes du champ électromagnétique localisées à des endroits différents. Certaines études de couplage entre ces deux méthodes ont montré des signes d'instabilités après de nombreuses itérations temporelles [EL01]. Cependant, plusieurs publications mettent en valeur des résultats de simulations numériques avec des méthodes couplées VFDT/DFDT pour des calculs de SER de sphères [YC94]-[YC95]-[YCC95]-[CY95]-[YC97]. Il est aussi possible d'hybrider la méthode VFDT et la méthode EFDT pour résoudre les équations de Maxwell [LEEA99]-[Led01]. Enfin, la prise en compte d'un pas de temps local pour améliorer l'efficacité et diminuer l'erreur de dispersion lorsque la méthode VFDT est utilisée avec des maillages localement raffinés, a été étudiée dans [FBLV03]-[FBLV04].

#### 1.5.4.4 Les méthodes GDDT

La méthode Galerkin discontinue (GD) a été introduite pour la première fois en 1973 par Reed et Hill [RH73] pour résoudre le problème de transport neutronique. Cette méthode repose sur une base de fonctions discontinues d'un élément du maillage à un autre. L'ordre d'interpolation peut varier arbitrairement dans chaque élément. La méthode peut être vue comme une approche éléments finis pour laquelle

aucune continuité n'est imposée entre éléments, ou une approche volumes finis d'ordre élevé. Par ailleurs, la discontinuité de l'approximation permet de n'imposer aucune contrainte sur le maillage et les discrétisations non-conformes sont donc autorisées. De plus, les matrices de masse obtenues sont locales à un élément ce qui permet de s'affranchir de la question cruciale de l'inversion d'une matrice de masse globale typique des méthodes d'éléments finis classiques. Ces propriétés font des méthodes Galerkin discontinues des candidates idéales pour mettre au point des stratégies de résolution *hp*-adaptatives. La méthode GD est particulièrement bien adaptée aux architectures de calcul parallèles [FLST00]-[BFLP06]. Enfin, la méthode GD est fréquemment utilisée pour résoudre les systèmes différentiels hyperboliques non-linéaires de la mécanique des fluides compressibles [RFS03]-[RPFS03]-[XF06] mais son application à la résolution des équations de Maxwell instationnaires est en revanche plus récente [KSH04]-[FLLP05]-[Min05]-[JLCZ05]. Pour ces équations, des méthodes GDDT d'ordre élevé ont été développées en maillages tétraédriques [HW02]-[FLLP05] et en maillages hexaédriques [CFP06].

Les méthodes GDDT peuvent être basées sur des flux décentrés [HW02]-[HW04a]-[KWH00]-[War00]. Dans [CS89] par exemple, Cockburn et Shu utilisent une formulation GD en espace, combinée à un schéma en temps de type Runge-Kutta, pour discrétiser des systèmes d'EDP hyperboliques. Dans [KWH00]-[KWH02], Kopriva *et al.* ont développé une méthode GD qui combine des éléments spectraux avec un schéma de Runge-Kutta peu coûteux, d'ordre quatre, en utilisant des maillages conformes et non-conformes. Warburton [War00] et Hesthaven et Warburton [HW02] utilisent une méthode *Runge-Kutta Discontinuous Galerkin* (RKDG) basée sur une interpolation polynomiale nodale pour l'approximation locale du champ électromagnétique. Comme tout schéma basé sur des flux décentrés, celui-ci ne conserve pas une énergie électromagnétique discrète. Récemment, Chen *et al.* ont développé une méthode RKDG pour les équations de Maxwell en formulation du premier ordre, qui réalise une convergence d'ordre élevé en espace et en temps, en utilisant un schéma de Runge-Kutta particulier (*Strong Stability Preserving Runge-Kutta* (SSP-RK) [CCR05]. En utilisant des polynômes locaux à divergence nulle, Cockburn *et al.* ont développé une méthode GDDT pour les équations de Maxwell du premier ordre, qui conserve localement la divergence discrète [CLS04]. Pour les équations de Maxwell en domaine fréquentiel, les méthodes GD sur des maillages simplexes ont été étudiées par Hesthaven et Warburton [HW04b] et Houston *et al.* [HPS05]-[BHP07], tandis que des maillages non-conformes orthogonaux sont considérés dans [HPS03]-[HPS04].

Récemment, Piperno *et al.* ont développé une méthode GDDT qui combine des flux centrés avec un schéma saute-mouton [FLLP05]. Leur schéma conserve une énergie électromagnétique discrète et préserve les relations de divergence (dans un certain sens) en l'absence de sources, mais la vitesse de convergence de ce schéma semble sous-optimale. Canouet *et al.* [CFP05] ont proposé une nouvelle méthode de type Galerkin discontinue basée sur un espace d'approximation local  $\mathbb{P}_{div}^1$ , un schéma saute-mouton pour l'intégration en temps et un schéma centré pondéré pour le calcul des flux. Malheureusement ce schéma peut dans certains cas conduire à des solutions incorrectes dans le cas d'un maillage localement raffiné de façon non-conforme. Pour pallier à ce problème, les auteurs proposent un schéma hybride  $\mathbb{P}_{div}^1/\mathbb{P}_{div}^2$  avec des flux centrés. Les résultats numériques montrent clairement l'intérêt de ce type de méthode en maillages non-conformes pour la conception d'antennes. Néanmoins, bien que vérifiée numériquement, la stabilité de la méthode n'est pas étudiée théoriquement.

## 1.6 Une méthode Galerkin discontinue à flux centré

Dans cette section, on présente, dans un cadre général, la méthode GDDT non-dissipative proposée dans [FLLP05] pour la résolution des équations de Maxwell en maillages non-structurés conformes. Cette

méthode combine l'utilisation d'une approximation centrée pour l'évaluation des flux aux interfaces entre éléments voisins du maillage, à un schéma d'intégration en temps de type saute-mouton d'ordre deux. Cette méthode est le point de départ de notre étude d'une méthode GDDT adaptée à des maillages simplexes non-conformes.

### 1.6.1 Discrétisation spatiale

On considère le système de Maxwell en variables  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$  avec densité volumique de courant  $\mathbf{j}$  sur un domaine borné  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$ ,  $n = 2, 3$  :

$$\begin{cases} \epsilon(\mathbf{x}) \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \text{rot}(\mathbf{H}) - \mathbf{j}, \\ \mu(\mathbf{x}) \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\text{rot}(\mathbf{E}). \end{cases} \quad (1.12)$$

Sur le bord  $\partial\Omega$  on utilise une condition métallique *i.e.*  $\mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0$  ou une condition absorbante de type Silver-Müller *i.e.*  $\mathbf{n} \times \mathbf{E} = -c\mu \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{H})$ , où  $c$  est la vitesse de propagation et  $\mathbf{n}$  est le vecteur normal unitaire sortant de  $\partial\Omega$ . On se donne un maillage simplexe conforme quelconque constitué de cellules  $T_i$  (triangles en 2D et tétraèdres en 3D). On appelle interface entre deux cellules leur intersection notée  $a_{ik} = T_i \cap T_k$ . Pour chaque interface  $a_{ik}$ , on note par  $\mathbf{n}_{ik}$  l'intégrale sur  $a_{ik}$  de la normale orientée de  $T_i$  vers  $T_k$ . On désigne par  $\tilde{\mathbf{n}}_{ik}$  la normale unitaire ( $\tilde{\mathbf{n}}_{ik} = \mathbf{n}_{ik}/\|\mathbf{n}_{ik}\|$ ) et par  $\mathcal{V}_i$  l'ensemble des cellules voisines de  $T_i$ . On note enfin  $\epsilon_i$  (respectivement  $\mu_i$ ) la valeur moyenne de  $\epsilon$  (respectivement  $\mu$ ) sur la cellule  $T_i$ . Sur chacune des cellules, on se donne un espace vectoriel de dimension  $d_i$  et un ensemble de fonctions de base vectorielles  $\varphi_{ij}$ ,  $1 \leq j \leq d_i$ , où  $d_i$  est le nombre de degrés de liberté dans la cellule  $T_i$ . Ces fonctions de bases n'assurent aucune continuité d'une cellule à une autre. En prenant le produit scalaire de chacune des équations du système (1.12) par la fonction de base  $\varphi_{ij}$  et en intégrant sur  $T_i$ , on obtient:

$$\begin{cases} \int_{T_i} \epsilon_i \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot \varphi_{ij} = \int_{T_i} (\text{rot}(\mathbf{H}) - \mathbf{j}) \cdot \varphi_{ij}, \\ \int_{T_i} \mu_i \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \cdot \varphi_{ij} = - \int_{T_i} \text{rot}(\mathbf{E}) \cdot \varphi_{ij}. \end{cases} \quad (1.13)$$

En utilisant l'identité  $\text{div}(\mathbf{B} \times \mathbf{A}) = \text{rot}(\mathbf{B}) \cdot \mathbf{A} - \text{rot}(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{B}$  et le théorème de Green on obtient:

$$\begin{cases} \int_{T_i} \epsilon_i \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot \varphi_{ij} = \int_{T_i} \text{rot}(\varphi_{ij}) \cdot \mathbf{H} - \int_{T_i} \mathbf{j} \cdot \varphi_{ij} - \int_{\partial T_i} (\varphi_{ij} \times \mathbf{H}) \cdot \tilde{\mathbf{n}}_i, \\ \int_{T_i} \mu_i \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \cdot \varphi_{ij} = - \int_{T_i} \text{rot}(\varphi_{ij}) \cdot \mathbf{E} + \int_{\partial T_i} (\varphi_{ij} \times \mathbf{E}) \cdot \tilde{\mathbf{n}}_i, \end{cases} \quad (1.14)$$

où  $\tilde{\mathbf{n}}_i$  est la normale unitaire extérieure à  $T_i$ . On note à présent  $\mathbf{E}_i$  et  $\mathbf{H}_i$  les projections  $L^2$ -orthogonales de  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$  sur l'espace vectoriel  $\text{Vect}\{\varphi_{ij}, 1 \leq j \leq d_i\}$ . On a sur tout le domaine de calcul la représentation discontinue suivante des champs:

$$\begin{cases} \mathbf{E} \simeq \sum_i \mathbf{E}_i = \sum_i \sum_{j=1}^{d_i} E_{ij}(t) \boldsymbol{\varphi}_{ij}(\mathbf{x}), \\ \mathbf{H} \simeq \sum_i \mathbf{H}_i = \sum_i \sum_{j=1}^{d_i} H_{ij}(t) \boldsymbol{\varphi}_{ij}(\mathbf{x}), \end{cases} \quad (1.15)$$

où  $E_{ij}$  (respectivement  $H_{ij}$ ) désigne le  $j^{\text{ème}}$  degré de liberté de  $\mathbf{E}_i$  (respectivement  $\mathbf{H}_i$ ). On note  $\vec{\mathbf{E}}_i$  (respectivement  $\vec{\mathbf{H}}_i$ ) le vecteur colonne  $(E_{ij})_{1 \leq j \leq d_i}$  (respectivement  $(H_{ij})_{1 \leq j \leq d_i}$ ). On a la propriété suivante:

$$\forall \boldsymbol{\varphi} \in \text{Vect}\{\boldsymbol{\varphi}_{ij}, 1 \leq j \leq d_i\} : \int_{T_i} \mathbf{E}_i \cdot \boldsymbol{\varphi} = \int_{T_i} \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\varphi} \quad \text{et} \quad \int_{T_i} \mathbf{H}_i \cdot \boldsymbol{\varphi} = \int_{T_i} \mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\varphi}. \quad (1.16)$$

Les inconnues numériques de la méthode sont des approximations de  $\mathbf{E}_i$  et  $\mathbf{H}_i$  qui peuvent être ainsi directement utilisées pour calculer les intégrales volumiques de (1.14). Aucune continuité n'étant imposée d'une cellule à une autre, sur chaque interface  $a_{ik}$  les valeurs des champs sont donc à définir. Dans [FLLP05], les auteurs utilisent une approximation centrée:

$$k \in \mathcal{V}_i, \forall \mathbf{x} \in a_{ik}, \mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{E}_i(\mathbf{x}) + \mathbf{E}_k(\mathbf{x})}{2} \quad \text{et} \quad \mathbf{H}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{H}_i(\mathbf{x}) + \mathbf{H}_k(\mathbf{x})}{2}. \quad (1.17)$$

On utilise cette approximation centrée pour évaluer les intégrales surfaciques. On aboutit finalement au système semi-discret:

$$\begin{cases} \left( \epsilon_i \mathbb{M}_i \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}_i}{\partial t} \right)_j = \int_{T_i} \text{rot}(\boldsymbol{\varphi}_{ij}) \cdot \mathbf{H}_i - \int_{T_i} \mathbf{j} \cdot \boldsymbol{\varphi}_{ij} - \sum_{k \in \mathcal{V}_i} \int_{a_{ik}} \left( \boldsymbol{\varphi}_{ij} \times \frac{\mathbf{H}_i + \mathbf{H}_k}{2} \right) \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{ik}, \\ \left( \mu_i \mathbb{M}_i \frac{\partial \vec{\mathbf{H}}_i}{\partial t} \right)_j = - \int_{T_i} \text{rot}(\boldsymbol{\varphi}_{ij}) \cdot \mathbf{E}_i + \sum_{k \in \mathcal{V}_i} \int_{a_{ik}} \left( \boldsymbol{\varphi}_{ij} \times \frac{\mathbf{E}_i + \mathbf{E}_k}{2} \right) \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{ik}, \end{cases} \quad (1.18)$$

où  $\mathbb{M}_i$  est la matrice de masse locale symétrique définie positive associée à la cellule  $T_i$ :

$$(\mathbb{M}_i)_{jl} = \int_{T_i} {}^t \boldsymbol{\varphi}_{ij} \cdot \boldsymbol{\varphi}_{il} \quad \text{pour} \quad 1 \leq j, l \leq d_i.$$

### 1.6.2 Discrétisation temporelle

Concernant l'intégration temporelle, on utilise un schéma saute-mouton d'ordre 2 : les degrés de liberté associés au champ électrique  $\mathbf{E}$  sont calculés aux instants  $t^n = n\Delta t$  et sont notés  $E_{ij}^n$ , tandis que les degrés de liberté associés au champ magnétique sont évalués aux instants  $t^{n+1/2} = (n+1/2)\Delta t$  et sont notés  $H_{ij}^{n+1/2}$ . Les quantités  $\mathbf{E}_i^n, \mathbf{H}_i^{n+1/2}, \vec{\mathbf{E}}_i^n$  et  $\vec{\mathbf{H}}_i^{n+1/2}$  sont définies de manière analogue. Le vecteur  $\mathbf{j}^{n+1/2}$  désigne la valeur du courant source  $\mathbf{j}$  à l'instant  $(n+1/2)\Delta t$ . Le schéma GDDT s'écrit alors:



$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \epsilon_i \mathbb{M}_i \frac{\vec{\mathbf{E}}_i^{n+1} - \vec{\mathbf{E}}_i^n}{\Delta t} \right)_j = \int_{T_i} \text{rot}(\boldsymbol{\varphi}_{ij}) \cdot \mathbf{H}_i^{n+\frac{1}{2}} - \int_{T_i} \mathbf{j}^{n+\frac{1}{2}} \cdot \boldsymbol{\varphi}_{ij} \\ \quad - \sum_{k \in \mathcal{V}_i} \int_{a_{ik}} \left( \boldsymbol{\varphi}_{ij} \times \frac{\mathbf{H}_i^{n+\frac{1}{2}} + \mathbf{H}_k^{n+\frac{1}{2}}}{2} \right) \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{ik}, \\ \left( \mu_i \mathbb{M}_i \frac{\vec{\mathbf{H}}_i^{n+3/2} - \vec{\mathbf{H}}_i^{n+1/2}}{\Delta t} \right)_j = - \int_{T_i} \text{rot}(\boldsymbol{\varphi}_{ij}) \cdot \mathbf{E}_i^{n+1} \\ \quad + \sum_{k \in \mathcal{V}_i} \int_{a_{ik}} \left( \boldsymbol{\varphi}_{ij} \times \frac{\mathbf{E}_i^{n+1} + \mathbf{E}_k^{n+1}}{2} \right) \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{ik}. \end{array} \right.$$

En l'absence de densité volumique de charge et de courant *i.e.*  $\mathbf{j} = 0$ , et après une seconde intégration par partie, le système semi-discret (1.18) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \epsilon_i \mathbb{M}_i \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}_i}{\partial t} \right)_j = \frac{1}{2} \int_{T_i} (\text{rot}(\boldsymbol{\varphi}_{ij}) \cdot \mathbf{H}_i + \text{rot}(\mathbf{H}_i) \cdot \boldsymbol{\varphi}_{ij}) - \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathcal{V}_i} \int_{a_{ik}} \boldsymbol{\varphi}_{ij} \cdot (\mathbf{H}_k \times \tilde{\mathbf{n}}_{ik}), \\ \left( \mu_i \mathbb{M}_i \frac{\partial \vec{\mathbf{H}}_i}{\partial t} \right)_j = -\frac{1}{2} \int_{T_i} (\text{rot}(\boldsymbol{\varphi}_{ij}) \cdot \mathbf{E}_i + \text{rot}(\mathbf{E}_i) \cdot \boldsymbol{\varphi}_{ij}) + \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathcal{V}_i} \int_{a_{ik}} \boldsymbol{\varphi}_{ij} \cdot (\mathbf{E}_k \times \tilde{\mathbf{n}}_{ik}). \end{array} \right. \quad (1.19)$$

Le schéma GDDT peut s'écrire alors sous la forme matricielle suivante:

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_i \mathbb{M}_i \frac{\vec{\mathbf{E}}_i^{n+1} - \vec{\mathbf{E}}_i^n}{\Delta t} = \mathbb{K}_i \vec{\mathbf{H}}_i^{n+1/2} - \sum_{k \in \mathcal{V}_i} \mathbb{S}_{ik} \vec{\mathbf{H}}_k^{n+1/2}, \\ \mu_i \mathbb{M}_i \frac{\vec{\mathbf{H}}_i^{n+3/2} - \vec{\mathbf{H}}_i^{n+1/2}}{\Delta t} = -\mathbb{K}_i \vec{\mathbf{E}}_i^{n+1} + \sum_{k \in \mathcal{V}_i} \mathbb{S}_{ik} \vec{\mathbf{E}}_k^{n+1}, \end{array} \right.$$

où  $\mathbb{K}_i$  est la matrice de rigidité locale associée à la cellule  $T_i$  définie par:

$$(\mathbb{K}_i)_{jl} = \frac{1}{2} \int_{T_i} {}^t \boldsymbol{\varphi}_{ij} \cdot \text{rot}(\boldsymbol{\varphi}_{il}) + {}^t \boldsymbol{\varphi}_{il} \cdot \text{rot}(\boldsymbol{\varphi}_{ij}) \quad \text{pour } 1 \leq j, l \leq d_i,$$

et pour toute interface  $a_{ik}$ , la matrice d'interface  $\mathbb{S}_{ik}$  de dimension  $d_i \times d_k$  a pour expression :

$$(\mathbb{S}_{ik})_{jl} = \frac{1}{2} \int_{a_{ik}} {}^t \boldsymbol{\varphi}_{ij} \cdot (\boldsymbol{\varphi}_{kl} \times \tilde{\mathbf{n}}_{ik}) \quad \text{pour } 1 \leq j \leq d_i, 1 \leq l \leq d_k.$$

## 1.7 Stratégies de raffinement local d'un maillage simplexe

La génération de maillages volumiques de qualité est une difficulté réelle en électromagnétisme. Les structures à étudier sont en effet très complexes (antennes hélicoïdales, fentes et fils minces, ...). On ne considère dans cette étude que le cas de maillages simplexes (triangles en 2D et tétraèdres en 3D) qui sont en général plus difficiles à construire que des maillages orthogonaux. Nous discutons ci-dessous des différentes stratégies de raffinement local d'un maillage simplexe qui peuvent être utilisées

pour la discrétisation de géométries complexes. En pratique, un raffinement local du maillage devrait réduire les coûts en temps de calcul et occupation mémoire. On distingue deux types de raffinement: conforme et non-conforme. On se concentre dans ce travail sur les discrétisations non-conformes qui sont à priori plus flexibles car elles permettent de réduire de manière spectaculaire le volume des données à traiter. Lorsqu'on travaille avec des maillages réguliers (où l'intersection de deux éléments voisins est un sommet, une arête ou une face), les techniques adaptatives sont souvent basées sur ce qu'on appelle la stratégie de raffinement *red-green* (i.e. un raffinement standard combiné avec une étape de mise en conformité) [HHS01]-[HSS02]. Cette technique divise d'abord les éléments désirés en sous-éléments (découpage standard) géométriquement convenables avec des nœuds flottants (*hanging nodes*) puis élimine les nœuds flottants en contraignant les raffinements suivants (découpage de mise en conformité), comme détaillé sur la Fig. 1.9.

Le mode de découpage adopté dans notre étude est le suivant:

- pour découper un triangle, on découpe ses trois arêtes en deux. On obtient alors 4 triangles semblables (voir la Fig. 1.9 au centre) qui conservent la qualité du triangle original;

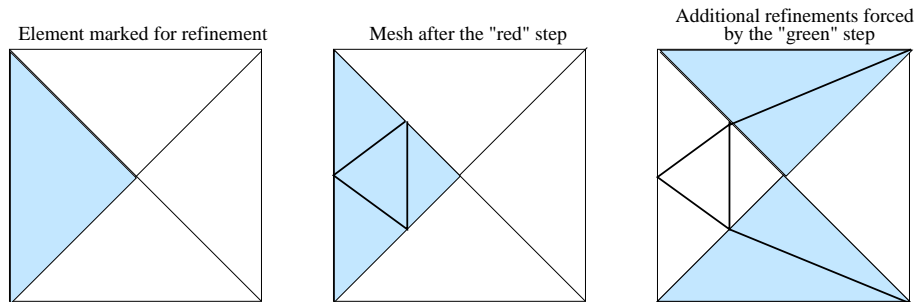


FIG. 1.9 – Raffinement red-green d'un maillage triangulaire.

- le découpage d'un tétraèdre se fait en huit [Bey95]-[LJ96]. Pour commencer, chacune des faces triangulaires est découpée en 4 faces triangulaires semblables (voir la Fig. 1.10).

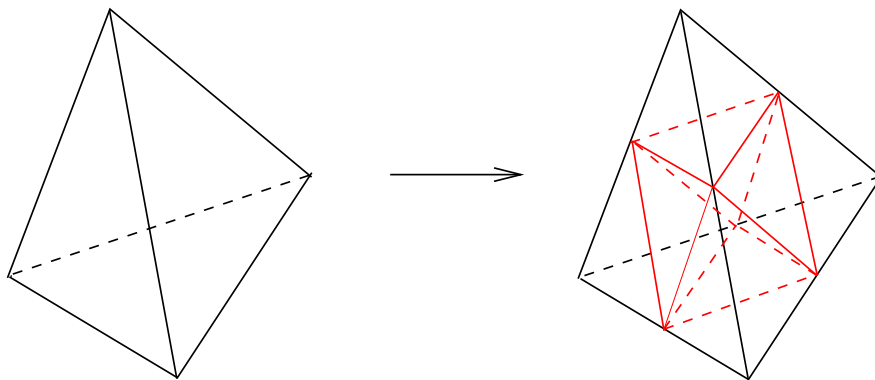


FIG. 1.10 – Mode de découpage standard d'un tétraèdre.

Ce découpage des faces produit 4 tétraèdres dans les angles du tétraèdre initial. On remarque que ces 4 nouveaux tétraèdres sont homothétiques de l'initial. Ils conservent donc la même qualité. Il reste au cœur du tétraèdre initial un bloc qui a la forme de deux pyramides accolées par leur base (octaèdre). On crée une arête avec l'une des 3 diagonales possibles, puis les 4 faces qui contiennent

cette arête et deux arêtes extérieures (voir la Fig. 1.11).

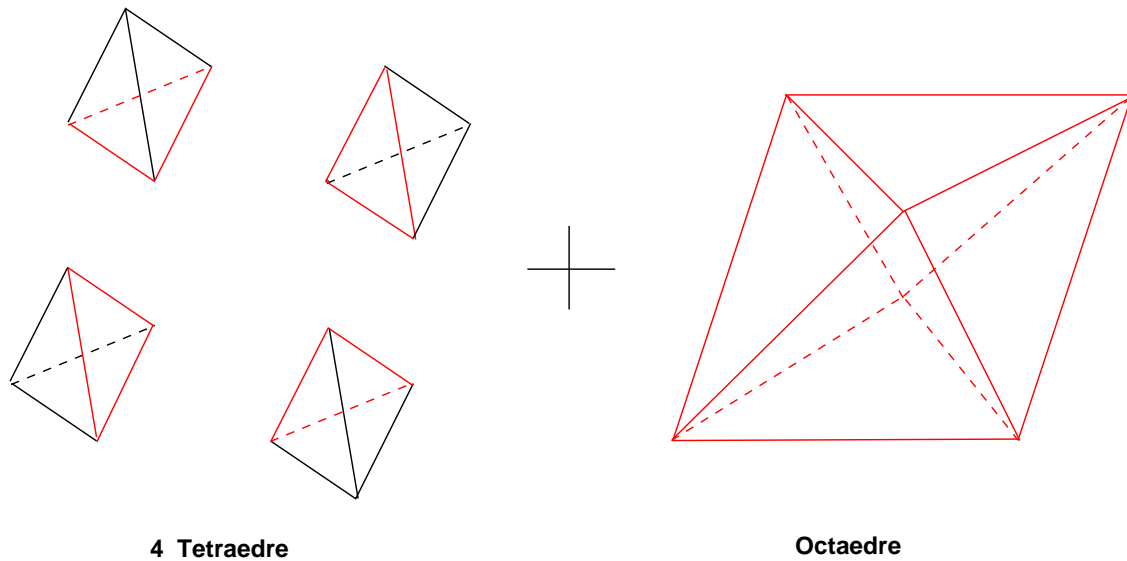


FIG. 1.11 – Un tétraèdre découpé en 4 tétraèdres et un octaèdre.

Cela produit 4 nouveaux tétraèdres (voir la Fig. 1.12). On notera que ceux-ci sont semblables deux à deux, mais qu'ils ne peuvent jamais être semblables au tétraèdre initial. Ils ne pourront donc jamais avoir la même qualité que ce dernier. Toutefois, selon le choix de la diagonale qui a servi au découpage du bloc pyramidal interne, le résultat n'est pas le même. J. Bey [Bey95] a montré que le meilleur choix, en terme de qualité, est celui de la plus petite des trois diagonales possibles. Des autres modes de découpage d'un tétraèdre sont étudiés dans [SHW04]-[TGM06]. Un exemple de raffinement tétraédrique non-conforme est montré sur la Fig. 1.13.

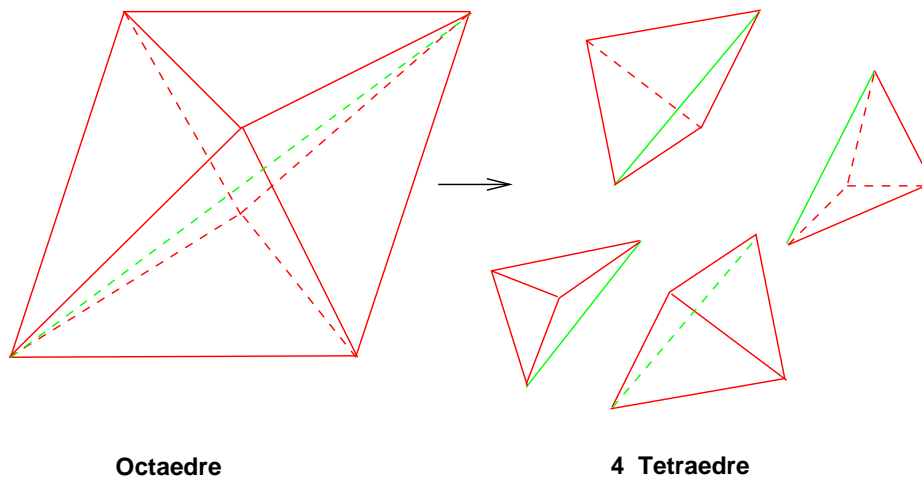
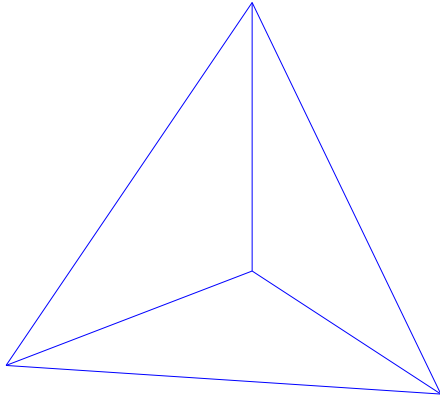
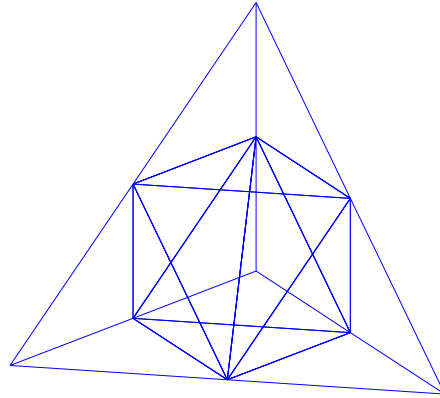


FIG. 1.12 – Mode de découpage standard d'un octaèdre.

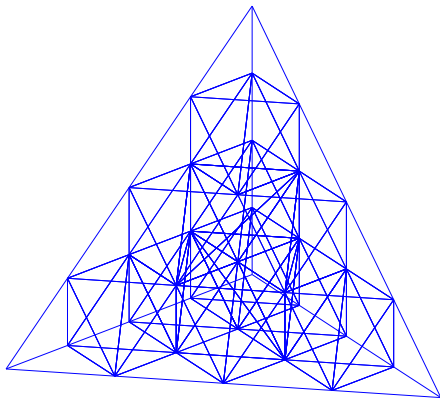
L'approche *red-green* préserve la régularité (conformité) du maillage, mais en même temps, elle introduit des éléments étirés avec des angles obtus. On observe souvent ce phénomène quand on répète plusieurs



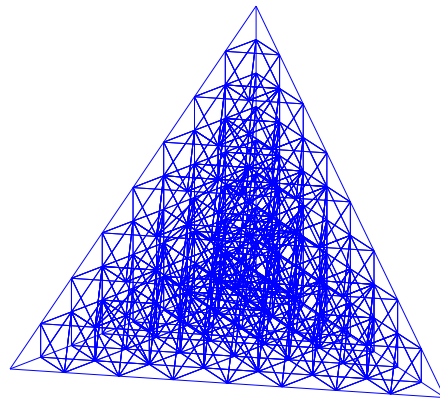
(a) Niveau de raffinement 0.



(b) Niveau de raffinement 1.



(c) Niveau de raffinement 2.



(d) Niveau de raffinement 3.

FIG. 1.13 – Raffinement non-conforme d'un tétraèdre.

fois les raffinements dans une partie du domaine, par exemple, dans une couche limite ou près d'une singularité géométrique. Les raffinements de type *green* peuvent être évités en introduisant des nœuds flottants *i.e.* en autorisant des maillages irréguliers (ou non-conformes). Les sommets d'un tel élément peuvent rester à l'intérieur des côtés des autres éléments. Pour faciliter l'implémentation, la plupart des codes de calcul basés sur des méthodes d'éléments finis discontinues qui autorisent des nœuds flottants, limitent l'écart maximal des niveaux de raffinement d'éléments adjacents à 1 (*1-irregularity rule*, voir entre autres [HPS04]-[RFS03]).

Dans la suite de ce document, on considère seulement des raffinements de type *red* et on entend par  $\kappa$ -niveau nœuds flottants, ou maillage  $\kappa$ -irrégulier, un maillage non-conforme pour lequel l'écart maximal de niveaux de raffinement d'éléments adjacents est  $\kappa$ . Dans ce contexte,  $\kappa = 0$  correspond à l'adaptivité avec des maillages réguliers et  $\kappa = \infty$  à une adaptivité avec un niveau arbitraire de nœuds flottants. La Fig. 1.14 montre que même un maillage 1-irrégulier impose des raffinements additionnels au raffinement non-conforme de base.

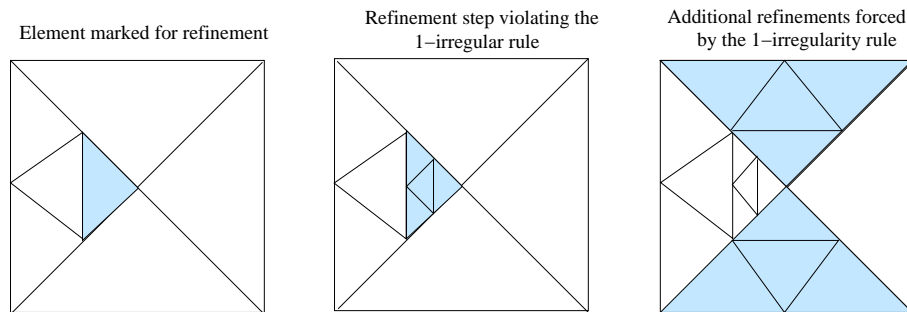


FIG. 1.14 – Raffinement *red* avec maillage 1-irrégulier.

Le coût des raffinements contraints dans le maillage dépend fortement du niveau de nœuds flottants. La Fig. 1.15 montre un maillage irrégulier (non-conforme) général où les nœuds flottants ne sont pas placés uniformément sur les arêtes.

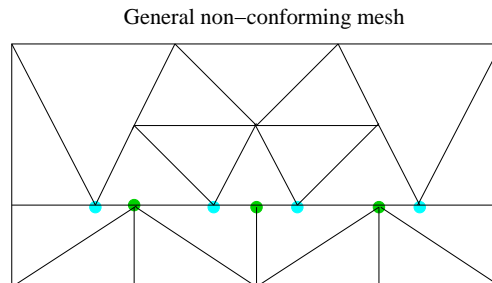


FIG. 1.15 – Maillage triangulaire irrégulier (*non-conforme*) général.

# Méthodes Galerkin discontinues non-conformes

## Sommaire

<b>2.1</b>	<b>Schéma Galerkin discontinu GDDT-<math>\mathbb{P}_{p_i}</math></b>	<b>34</b>
2.1.1	Conservation d'une énergie discrète	38
2.1.2	Stabilité du schéma GDDT- $\mathbb{P}_{p_i}$	40
<b>2.2</b>	<b>Etude de cas particuliers</b>	<b>44</b>
2.2.1	Cas d'un maillage conforme	44
2.2.2	Cas d'un maillage non-conforme	45
2.2.3	Raffinement local non-conforme	48
<b>2.3</b>	<b>Validation numérique du schéma GDDT-<math>\mathbb{P}_{p_i}</math></b>	<b>48</b>
2.3.1	Maillage conforme	50
2.3.2	Maillage non-conforme	51
<b>2.4</b>	<b>Calcul de la matrice d'interface non-conforme</b>	<b>58</b>
2.4.1	Approches basées sur projection et quadrature	58
2.4.2	Comparaison entre les deux approches	60
<b>2.5</b>	<b>Résultats numériques pour <math>h</math>-raffinement et <math>p</math>-enrichissement</b>	<b>62</b>
2.5.1	Cas d'un maillage non-conforme général	64
<b>2.6</b>	<b>Une méthode Galerkin discontinue de type <math>hp</math></b>	<b>68</b>
<b>2.7</b>	<b>Conclusion</b>	<b>72</b>

Ce chapitre est consacré à une présentation et une étude de stabilité des méthodes Galerkin discontinues non-conformes, d'ordre arbitrairement élevé en espace, pour la résolution numérique des équations de Maxwell bidimensionnelles en domaine temporel sur des maillages triangulaires. On considère tout d'abord la situation où la non-conformité porte sur le maillage et on expose (Sec. 2.1.1 et Sec. 2.1.2) une étude théorique de la stabilité de la méthode GDDT résultante. L'objectif de cette étude est d'exhiber des conditions sous lesquelles la méthode est stable, et de comparer ces conditions à celles obtenues dans le cas de maillages conformes (Sec. 2.2). Ensuite, on propose une méthode GDDT de type  $hp$  (Sec. 2.6). Cette méthode combine  $h$ -raffinement et  $p$ -enrichissement locaux et est basée sur une formule de quadrature (Sec. 2.4) pour calculer les matrices de flux associées aux interfaces non-conformes. Comme dans le cas de maillages conformes, cette méthode couple une approximation centrée pour l'évaluation des

flux aux interfaces entre éléments voisins du maillage à un schéma d'intégration en temps de type saute-mouton. Elle repose sur une base de fonctions polynomiales nodales  $\mathbb{P}_{p_i}$ . Des expériences numériques sur un cas test académique sont présentées qui permettent de valider les résultats théoriques d'une part, et d'avoir une première idée des performances de la méthode GDDT de type  $hp$  d'autre part.

Ce chapitre est une synthèse des rapports de recherche [FLR06] et [FLR07a]. Les travaux présentés dans ce chapitre et une partie du Chapitre 3 ont également fait l'objet de trois communications sous forme de posters à l'école EUA4X [FFLR06] et aux congrès SMAI 2007 [FLR07b] et COMPUMAG 2007 [FFLR07], et deux communications orales aux congrès CANUM 2008 [Fah08c] et ACOMEN 2008 [FLR08], ainsi qu'à deux publications dans "IEEE Trans. on Magnet." [FFLR08] et dans "Int. J. Numer. Anal. Model." [Fah08a].

## 2.1 Schéma Galerkin discontinu GDDT- $\mathbb{P}_{p_i}$

On s'intéresse ici à la résolution des équations de Maxwell en deux dimensions d'espace dans la polarisation transverse électrique  $\text{TE}_z$  (toutefois, tout ce qui suit reste valide dans le cas de la polarisation  $\text{TM}_z$ ) sur un domaine borné  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^2$ :

$$\begin{cases} \mu \frac{\partial H_z}{\partial t} + \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0, \\ \epsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} - \frac{\partial H_z}{\partial y} = 0, \\ \epsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} + \frac{\partial H_z}{\partial x} = 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

On initialise le champ électromagnétique à l'instant  $t = 0$  pour  $(x, y) \in \Omega$  par:

$$\begin{cases} E_x(t = 0, x, y) = E_{0x}(x, y), \\ E_y(t = 0, x, y) = E_{0y}(x, y), \\ H_z(t = 0, x, y) = H_{0z}(x, y), \end{cases}$$

où les inconnues  $\mathbf{E} = (E_x, E_y, 0)$  et  $\mathbf{H} = (0, 0, H_z)$  sont respectivement les champs électrique et magnétique. On suppose que les composantes des champs ainsi que les paramètres des matériaux  $\epsilon$  et  $\mu$  ne dépendent pas de la variable  $z$ . Sur le bord  $\Gamma = \partial\Omega$  on utilise suivant le cas, une condition de bord parfaitement conducteur *i.e.*  $n_y E_x - n_x E_y = 0$  pour la polarisation  $\text{TE}_z$  ( $E_z = 0$  pour la polarisation  $\text{TM}_z$ ), ou une condition absorbante (*i.e.* sur une frontière artificielle utilisée pour tronquer le domaine de calcul) de type Silver-Müller *i.e.*  $c\mu H_z = n_y E_x - n_x E_y$  pour la polarisation  $\text{TE}_z$  ( $E_z = c\mu(n_y H_x - n_x H_y)$  pour la polarisation  $\text{TM}_z$ ) où  $c$  est la vitesse de propagation et  $\vec{n} = {}^t(n_x, n_y)$  est le vecteur normal unitaire sortant de  $\Gamma$ .

On se donne une partition  $\Omega_h$  qui divise le domaine  $\Omega$  en  $N = \text{Card}(\Omega_h)$  triangles disjoints  $\tau_i$  de diamètre  $h_i$  et de frontières  $\partial\tau_i$  telles que la taille caractéristique du maillage  $h$  est donnée par  $h = \max_{\tau_i \in \Omega_h} h_i$  et  $\bar{\Omega} = \cup\{\bar{\tau}_i, \tau_i \in \Omega_h\}$ . Dans cette construction nous autorisons des maillages présentant des nœuds flottants (voir Fig. 2.1) *i.e.* des maillages irréguliers (non-conformes) où les sommets d'un élément peuvent se situer à l'intérieur des côtés des autres éléments (comme discuté dans la Sec. 1.7 du Chapitre 1). Chaque triangle  $\tau_i$  est supposé être l'image d'une application bijective de classe  $\mathcal{C}^1$  (difféomorphisme)  $\chi_i$ , d'un triangle de référence  $\hat{\tau} = \{\hat{x}, \hat{y} \mid \hat{x}, \hat{y} \geq 0; \hat{x} + \hat{y} \leq 1\}$ . Supposons que  $\tau_i$  est un triangle de

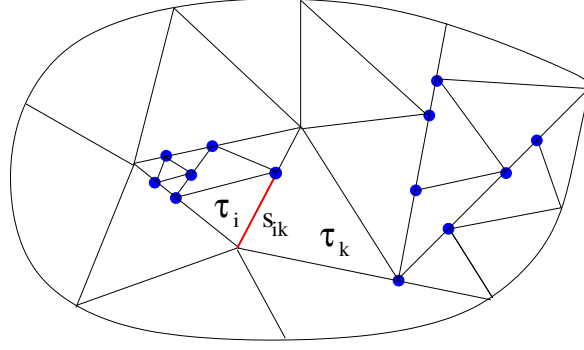
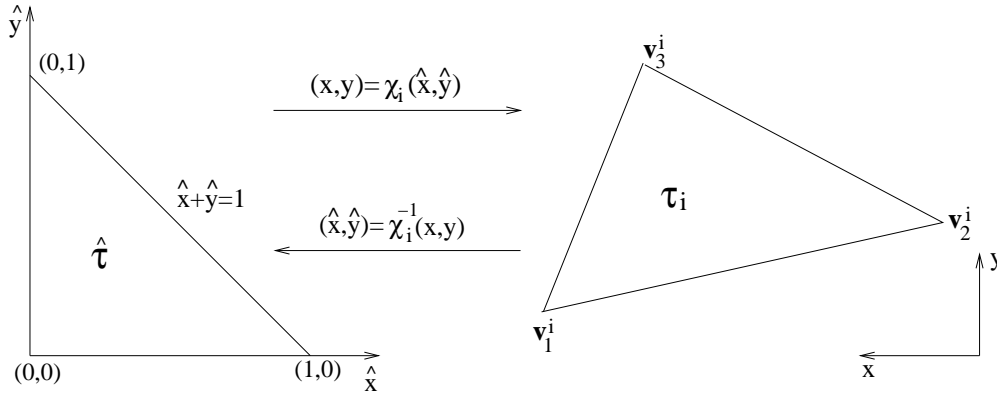


FIG. 2.1 – Maillage triangulaire non-conforme avec des nœuds flottants.

sommets  $\mathbf{v}_1^i$ ,  $\mathbf{v}_2^i$  et  $\mathbf{v}_3^i$  (voir Fig. 2.2). La correspondance entre les deux triangles  $\hat{\tau}$  et  $\tau_i$  est établie en utilisant les coordonnées barycentriques  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ . On rappelle que tout point  $\mathbf{x}^i \in \tau_i$  peut être formulé comme une combinaison convexe des sommets de  $\tau_i$  et la transformation est simplement donnée par  $\chi_i : (\hat{x}, \hat{y}) \in \hat{\tau} \rightarrow \mathbf{x}^i$  avec :

$$\mathbf{x}^i(\hat{x}, \hat{y}) = \lambda_1 \mathbf{v}_1^i + \lambda_2 \mathbf{v}_2^i + \lambda_3 \mathbf{v}_3^i, \quad (2.2)$$

où  $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$  et  $0 \leq (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \leq 1$  avec  $\lambda_1 = 1 - \hat{x} - \hat{y}$ ,  $\lambda_2 = \hat{x}$  et  $\lambda_3 = \hat{y}$ .


 FIG. 2.2 – Transformation entre le triangle physique  $\tau_i$  et le triangle de référence  $\hat{\tau}$ .

Pour chaque élément  $\tau_i$ , on désigne par  $|\tau_i|$  son aire, par  $\epsilon_i$  et  $\mu_i$  respectivement la permittivité électrique locale et la perméabilité magnétique locale qui sont supposées constantes sur  $\tau_i$ , et par  $c_i$  la vitesse de propagation locale définie par  $\epsilon_i \mu_i c_i^2 = 1$ . On note  $s_{ik} = \tau_i \cap \tau_k$  l'interface entre deux éléments voisins (*i.e.* leur intersection). Pour chaque interface interne on note par  $\vec{n}_{ik} = {}^t(n_{ikx}, n_{iky})$  la normale orientée de  $\tau_i$  vers  $\tau_k$  (avec  $\|\vec{n}_{ik}\|$  la longueur de  $s_{ik}$ ), par  $\vec{\tilde{n}}_{ik}$  le vecteur unitaire associé et par  $\mathcal{V}_i$  l'ensemble des indices des éléments voisins de l'élément  $\tau_i$ . Pour les interfaces aux bords du domaine, l'indice  $k$  correspond à un élément fictif extérieur au domaine. On note par  $P_i^* = \sum_{k \in \mathcal{V}_i} |n_{ik*}|$  le périmètre suivant  $\star$  du triangle  $\tau_i$ , où  $\star$  représente  $x$  ou  $y$ .

A chaque  $\tau_i \in \Omega_h$  on attribue un entier  $p_i \geq 0$  qui désigne le degré d'interpolation local. On collecte les  $p_i$  dans le vecteur  $p = \{p_i, \tau_i \in \Omega_h\}$ . Si  $p_i$  est identique pour tous les éléments du maillage alors on note simplement  $p = p_i$ . Pour une partition donnée  $\Omega_h$  de  $\Omega$  et un vecteur donné  $p$ , on cherche des solutions approchées de (2.1) dans le sous-espace vectoriel de dimension fini  $V_p(\Omega_h)$  défini par :



$$V_p(\Omega_h) := \{v \in L^2(\Omega) : v|_{\tau_i} \in \mathbb{P}_{p_i}(\tau_i), \forall \tau_i \in \Omega_h\},$$

où  $\mathbb{P}_{p_i}(\tau_i)$  est l'espace des polynômes de degré maximal  $p_i$  sur l'élément  $\tau_i$ . La dimension de l'espace  $\mathbb{P}_{p_i}(\tau_i)$  est  $d_i = (p_i + 1)(p_i + 2)/2$  (le nombre de degré de liberté local sur  $\tau_i$ ). On note que le degré  $p_i$  peut varier d'un élément à un autre, et qu'une fonction  $v_h^p \in V_p(\Omega_h)$  est discontinue à travers les interfaces des éléments. On nomme *interface non-conforme* une interface  $s_{ik}$  qui a au moins une de ces deux extrémités est un nœud flottant ou/et qui est telle que  $p_{i|s_{ik}} \neq p_{k|s_{ik}}$ .

On multiplie le système (2.1) par une fonction de base scalaire  $\varphi_{ij} \in \mathbb{P}_{p_i}(\tau_i)$ ,  $1 \leq j \leq d_i$ , puis on intègre sur chaque triangle  $\tau_i$ . On obtient, après intégration par parties, le système suivant:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_i \int_{\tau_i} \frac{\partial H_z}{\partial t} \varphi_{ij} - \int_{\tau_i} E_y \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial x} + \int_{\tau_i} E_x \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial y} \\ \quad + \int_{\partial \tau_i} E_y \varphi_{ij} \tilde{n}_{ikx} - \int_{\partial \tau_i} E_x \varphi_{ij} \tilde{n}_{iky} = 0, \\ \epsilon_i \int_{\tau_i} \frac{\partial E_x}{\partial t} \varphi_{ij} + \int_{\tau_i} H_z \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial y} - \int_{\partial \tau_i} H_z \varphi_{ij} \tilde{n}_{iky} = 0, \\ \epsilon_i \int_{\tau_i} \frac{\partial E_y}{\partial t} \varphi_{ij} - \int_{\tau_i} H_z \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial x} + \int_{\partial \tau_i} H_z \varphi_{ij} \tilde{n}_{ikx} = 0. \end{array} \right. \quad (2.3)$$

Pour tout champ  $X \in \{E_x, E_y, H_z\}$  on note par  $X_i$  la projection  $L^2$ -orthogonale de  $X$  sur l'espace vectoriel  $\text{Vect}\{\varphi_{ij}, 1 \leq j \leq d_i\}$  engendré par les fonctions de base définies sur le triangle  $\tau_i$ . Dans chaque triangle  $\tau_i$  on construit une représentation polynomiale des champs magnétique et électrique et on adopte ici une interpolation Lagrangienne basée sur un ensemble des nœuds définis sur le triangle de référence  $\hat{\tau}$  (voir par exemple [DT84]). En utilisant ces notations, on a la propriété classique suivante:

$$\forall \varphi \in \text{Vect}\{\varphi_{ij}, 1 \leq j \leq d_i\}, \int_{\tau_i} X_i \varphi = \int_{\tau_i} X \varphi. \quad (2.4)$$

Globalement, on a la représentation discontinue suivante des champs:

$$X \simeq \sum_i X_i(t, x, y) = \sum_i \sum_{j=1}^{d_i} X_{ij}(t) \varphi_{ij}(x, y), \quad (2.5)$$

où  $X_{ij}$  désigne le  $j^{\text{ème}}$  degré de liberté de  $X_i$ . On note par  $\mathbf{X}_i$  le vecteur colonne  $(X_{ij})_{1 \leq j \leq d_i}$ . Les inconnues numériques de la méthode sont des approximations des  $X_i$  qui peuvent être ainsi directement utilisées pour calculer les intégrales volumiques et surfaciques de (2.3). Sachant qu'aucune continuité n'est imposée sur les champs d'une cellule à une autre, pour évaluer les intégrales aux bords, des valeurs des champs doivent être définies sur chaque interface  $s_{ik}$ . Ces valeurs peuvent être approchées de différentes façons. On décide ici d'adopter l'approximation centrée étudiée dans [Rem00]-[PRF02]-[FLLP05]:

$$\forall i, \forall k \in \mathcal{V}_i, X_{|s_{ik}} \approx \frac{X_{i|s_{ik}} + X_{k|s_{ik}}}{2}. \quad (2.6)$$

Concernant la discrétisation temporelle, on utilise un schéma saute-mouton comme dans [PRF02]-[FLLP05]. Les degrés de liberté associés au champ électrique  $E_x$  (respectivement  $E_y$ ) sont calculés

aux instants  $t^n = n\Delta t$  et sont notés  $E_{xij}^n$  (respectivement  $E_{yij}^n$ ). Les degrés de liberté associés au champ magnétique  $H_z$  sont quant à eux calculés aux instants  $t^{n+\frac{1}{2}} = (n + \frac{1}{2})\Delta t$  et sont notés  $H_{zij}^{n+\frac{1}{2}}$ .

Il reste pour compléter le cadre de notre étude à définir les conditions aux limites. Soit une cellule  $\tau_i$  au bord du domaine. On considère une cellule fictive  $\tau_k$  et on note par  $s_{ik}$  l'interface frontière. Les conditions aux limites sont traitées en imposant des valeurs aux champs associés aux cellules fictives  $\tau_k$ . Pour l'analyse de stabilité réalisée dans la suite, on se limite à l'utilisation d'une condition de bord parfaitement conducteur qui en toute généralité s'écrit  $\mathbf{E} \times \mathbf{n} = 0$ . Dans le cas présent, on impose donc:

$$\forall (x, y) \in s_{ik} : \begin{cases} \mathbf{E}_{xk}^n(x, y) = -\mathbf{E}_{xi}^n(x, y), & \mathbf{E}_{yk}^n(x, y) = -\mathbf{E}_{yi}^n(x, y), \\ \mathbf{H}_{zk}^{n+\frac{1}{2}}(x, y) = \mathbf{H}_{zi}^{n+\frac{1}{2}}(x, y). \end{cases} \quad (2.7)$$

On a par ailleurs les propriétés géométriques suivantes:

$$1. \sum_{k \in \mathcal{V}_i} \vec{n}_{ik} = 0 \quad \text{et} \quad 2. \vec{n}_{ik} = -\vec{n}_{ki}. \quad (2.8)$$

Le schéma Galerkin discontinu GDDT- $\mathbb{P}_{p_i}$  s'écrit (voir l'Annexe A.3 pour plus de détails):

$$\begin{cases} \mu_i \mathbb{M}_i \frac{\mathbf{H}_{zi}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{H}_{zi}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} = \mathbb{K}_i^x \mathbf{E}_{yi}^n - \mathbb{K}_i^y \mathbf{E}_{xi}^n - \sum_{k \in \mathcal{V}_i} (\mathbb{F}_{xik}^n - \mathbb{F}_{yik}^n), \\ \epsilon_i \mathbb{M}_i \frac{\mathbf{E}_{xi}^{n+1} - \mathbf{E}_{xi}^n}{\Delta t} = -\mathbb{K}_i^y \mathbf{H}_{zi}^{n+\frac{1}{2}} + \sum_{k \in \mathcal{V}_i} \mathbb{G}_{yik}^{n+\frac{1}{2}}, \\ \epsilon_i \mathbb{M}_i \frac{\mathbf{E}_{yi}^{n+1} - \mathbf{E}_{yi}^n}{\Delta t} = \mathbb{K}_i^x \mathbf{H}_{zi}^{n+\frac{1}{2}} - \sum_{k \in \mathcal{V}_i} \mathbb{G}_{xik}^{n+\frac{1}{2}}, \end{cases} \quad (2.9)$$

où les quantités vectorielles  $\mathbb{F}_{xik}^n, \mathbb{F}_{yik}^n, \mathbb{G}_{xik}^{n+\frac{1}{2}}$  et  $\mathbb{G}_{yik}^{n+\frac{1}{2}}$  sont définies par:

$$\begin{cases} \mathbb{F}_{xik}^n = \mathbb{S}_{ik}^x \mathbf{E}_{yk}^n & , & \mathbb{F}_{yik}^n = \mathbb{S}_{ik}^y \mathbf{E}_{xk}^n, \\ \mathbb{G}_{yik}^{n+\frac{1}{2}} = \mathbb{S}_{ik}^y \mathbf{H}_{zk}^{n+\frac{1}{2}} & , & \mathbb{G}_{xik}^{n+\frac{1}{2}} = \mathbb{S}_{ik}^x \mathbf{H}_{zk}^{n+\frac{1}{2}}, \end{cases} \quad (2.10)$$

et  $\mathbb{M}_i$  est la matrice (symétrique définie positive) de masse locale de dimension  $d_i \times d_i$ , et  $\mathbb{K}_i^\star$  est la matrice (antisymétrique) de rigidité de dimension  $d_i \times d_i$ , où  $\star$  représente  $x$  ou  $y$ . Ces matrices sont définies par les relations suivantes:

$$\begin{cases} (\mathbb{M}_i)_{jl} = \int_{\tau_i} \varphi_{ij} \varphi_{il}, \\ (\mathbb{K}_i^\star)_{jl} = \frac{1}{2} \int_{\tau_i} \left( \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial \star} \varphi_{il} - \varphi_{ij} \frac{\partial \varphi_{il}}{\partial \star} \right). \end{cases} \quad (2.11)$$

Pour toute interface  $s_{ik}$ , la matrice  $\mathbb{S}_{ik}^\star$  de dimension  $d_i \times d_k$  est définie par:

$$(\mathbb{S}_{ik}^\star)_{jl} = \frac{1}{2} \tilde{n}_{ik\star} \int_{s_{ik}} \varphi_{ij} \varphi_{kl}. \quad (2.12)$$

Dans la suite, pour simplifier l'écriture, on utilise les notations suivantes:

$$\mathbb{F}_{\star ik}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{\mathbb{F}_{\star ik}^{n+1} + \mathbb{F}_{\star ik}^n}{2}, \quad \mathbf{E}_{\star i}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{\mathbf{E}_{\star i}^{n+1} + \mathbf{E}_{\star i}^n}{2}. \quad (2.13)$$

**Remarque 2.1** On a les propriétés suivantes:

- si  $s_{ik}$  est une interface interne alors  ${}^t\mathbb{S}_{ik}^{\star} = -\mathbb{S}_{ki}^{\star}$ ,
- si  $s_{ik}$  est une interface métallique alors  ${}^t\mathbb{S}_{ik}^{\star} = \mathbb{S}_{ik}^{\star}$ .

### 2.1.1 Conservation d'une énergie discrète

On introduit l'énergie électromagnétique discrète suivante:

$$\mathcal{E}^n = \frac{1}{2} \sum_i \left( \epsilon_i {}^t\mathbf{E}_{xi}^n \mathbb{M}_i \mathbf{E}_{xi}^n + \epsilon_i {}^t\mathbf{E}_{yi}^n \mathbb{M}_i \mathbf{E}_{yi}^n + \mu_i {}^t\mathbf{H}_{zi}^{n-\frac{1}{2}} \mathbb{M}_i \mathbf{H}_{zi}^{n+\frac{1}{2}} \right). \quad (2.14)$$

On évalue maintenant la variation d'énergie au cours d'un pas de temps:

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{E} &= \mathcal{E}^{n+1} - \mathcal{E}^n \\ &= \sum_i \left[ {}^t\mathbf{E}_{xi}^{n+\frac{1}{2}} \epsilon_i \mathbb{M}_i (\mathbf{E}_{xi}^{n+1} - \mathbf{E}_{xi}^n) + {}^t\mathbf{E}_{yi}^{n+\frac{1}{2}} \epsilon_i \mathbb{M}_i (\mathbf{E}_{yi}^{n+1} - \mathbf{E}_{yi}^n) \right. \\ &\quad \left. + {}^t\mathbf{H}_{zi}^{n+\frac{1}{2}} \frac{\mu_i \mathbb{M}_i}{2} (\mathbf{H}_{zi}^{n+\frac{3}{2}} - \mathbf{H}_{zi}^{n-\frac{1}{2}}) \right] \\ &= \Delta t \sum_i \left[ - {}^t\mathbf{E}_{xi}^{n+\frac{1}{2}} \mathbb{K}_i^y \mathbf{H}_{zi}^{n+\frac{1}{2}} + {}^t\mathbf{E}_{xi}^{n+\frac{1}{2}} \sum_{k \in \mathcal{V}_i} \mathbb{G}_{yik}^{n+\frac{1}{2}} \right. \\ &\quad \left. + {}^t\mathbf{E}_{yi}^{n+\frac{1}{2}} \mathbb{K}_i^x \mathbf{H}_{zi}^{n+\frac{1}{2}} - {}^t\mathbf{E}_{yi}^{n+\frac{1}{2}} \sum_{k \in \mathcal{V}_i} \mathbb{G}_{xik}^{n+\frac{1}{2}} \right. \\ &\quad \left. + {}^t\mathbf{H}_{zi}^{n+\frac{1}{2}} \mathbb{K}_i^x \mathbf{E}_{yi}^{n+\frac{1}{2}} - {}^t\mathbf{H}_{zi}^{n+\frac{1}{2}} \mathbb{K}_i^y \mathbf{E}_{xi}^{n+\frac{1}{2}} \right. \\ &\quad \left. + {}^t\mathbf{H}_{zi}^{n+\frac{1}{2}} \sum_{k \in \mathcal{V}_i} (\mathbb{F}_{yik}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbb{F}_{xik}^{n+\frac{1}{2}}) \right] \\ &= \Delta t \sum_i \sum_{k \in \mathcal{V}_i} \left[ {}^t\mathbf{E}_{xi}^{n+\frac{1}{2}} \mathbb{G}_{yik}^{n+\frac{1}{2}} - {}^t\mathbf{E}_{yi}^{n+\frac{1}{2}} \mathbb{G}_{xik}^{n+\frac{1}{2}} + {}^t\mathbf{H}_{zi}^{n+\frac{1}{2}} (\mathbb{F}_{yik}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbb{F}_{xik}^{n+\frac{1}{2}}) \right]. \end{aligned}$$

Dans la troisième égalité, tous les termes qui contiennent  $\mathbb{K}_i^x$  et  $\mathbb{K}_i^y$  s'éliminent car ces matrices sont antisymétriques et, dans la quatrième égalité, tous les termes dans la double sommation correspondent aux interfaces entre éléments voisins. On a donc:

$$\Delta \mathcal{E} = \Delta t (\mathbf{A} + \mathbf{B}),$$

où les quantités  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  sont définies par:

$$\mathbf{A} = \sum_{\text{interfaces}}^{\text{internes}} \left[ {}^t\mathbf{E}_{xi}^{n+\frac{1}{2}} \mathbb{G}_{yik}^{n+\frac{1}{2}} + {}^t\mathbf{E}_{xk}^{n+\frac{1}{2}} \mathbb{G}_{yki}^{n+\frac{1}{2}} - {}^t\mathbf{E}_{yi}^{n+\frac{1}{2}} \mathbb{G}_{xik}^{n+\frac{1}{2}} - {}^t\mathbf{E}_{yk}^{n+\frac{1}{2}} \mathbb{G}_{xki}^{n+\frac{1}{2}} + \right. \\ \left. {}^t\mathbf{H}_{zi}^{n+\frac{1}{2}} (\mathbb{F}_{yik}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbb{F}_{xik}^{n+\frac{1}{2}}) + {}^t\mathbf{H}_{zk}^{n+\frac{1}{2}} (\mathbb{F}_{yki}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbb{F}_{xki}^{n+\frac{1}{2}}) \right],$$

$$\mathbf{B} = \sum_{\text{interfaces}}^{\text{métalliques}} \left[ {}^t\mathbf{E}_{xi}^{n+\frac{1}{2}} \mathbb{G}_{yik}^{n+\frac{1}{2}} - {}^t\mathbf{E}_{yi}^{n+\frac{1}{2}} \mathbb{G}_{xik}^{n+\frac{1}{2}} + {}^t\mathbf{H}_{zi}^{n+\frac{1}{2}} (\mathbb{F}_{yik}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbb{F}_{xik}^{n+\frac{1}{2}}) \right].$$

On utilise (2.10), (2.13) et la Remarque 2.1 pour calculer  $\mathbf{A}$ , on obtient:

$$\mathbf{A} = \sum_{\text{interfaces}}^{\text{internes}} \left[ {}^t\mathbf{E}_{xi}^{n+\frac{1}{2}} \mathbb{S}_{ik}^y \mathbf{H}_{zk}^{n+\frac{1}{2}} + {}^t\mathbf{E}_{xk}^{n+\frac{1}{2}} \mathbb{S}_{ki}^y \mathbf{H}_{zi}^{n+\frac{1}{2}} - \right. \\ \left. {}^t\mathbf{E}_{yi}^{n+\frac{1}{2}} \mathbb{S}_{ik}^x \mathbf{H}_{zk}^{n+\frac{1}{2}} - {}^t\mathbf{E}_{yk}^{n+\frac{1}{2}} \mathbb{S}_{ki}^x \mathbf{H}_{zi}^{n+\frac{1}{2}} + \right. \\ \left. {}^t\mathbf{H}_{zi}^{n+\frac{1}{2}} \mathbb{S}_{ik}^y \mathbf{E}_{xk}^{n+\frac{1}{2}} - {}^t\mathbf{H}_{zi}^{n+\frac{1}{2}} \mathbb{S}_{ik}^x \mathbf{E}_{yk}^{n+\frac{1}{2}} + \right. \\ \left. {}^t\mathbf{H}_{zk}^{n+\frac{1}{2}} \mathbb{S}_{ki}^y \mathbf{E}_{xi}^{n+\frac{1}{2}} - {}^t\mathbf{H}_{zk}^{n+\frac{1}{2}} \mathbb{S}_{ki}^x \mathbf{E}_{yi}^{n+\frac{1}{2}} \right] = 0.$$

Pour calculer  $\mathbf{B}$ , on utilise (2.7), (2.10), (2.13) et la Remarque 2.1. On peut écrire:

$$\mathbf{B} = \sum_{\text{interfaces}}^{\text{métalliques}} \left[ {}^t\mathbf{E}_{xi}^{n+\frac{1}{2}} \mathbb{S}_{ik}^y \mathbf{H}_{zk}^{n+\frac{1}{2}} - {}^t\mathbf{E}_{yi}^{n+\frac{1}{2}} \mathbb{S}_{ik}^x \mathbf{H}_{zk}^{n+\frac{1}{2}} + \right. \\ \left. {}^t\mathbf{H}_{zi}^{n+\frac{1}{2}} \mathbb{S}_{ik}^y \mathbf{E}_{xk}^{n+\frac{1}{2}} - {}^t\mathbf{H}_{zi}^{n+\frac{1}{2}} \mathbb{S}_{ik}^x \mathbf{E}_{yk}^{n+\frac{1}{2}} \right] = 0.$$

Donc, pour des conditions aux limites de type métallique seulement, l'énergie est exactement conservée. Ce résultat est cohérent avec le théorème de Poynting. On rappelle que l'énergie électromagnétique en trois dimensions d'espace, dans le vide, en absence de charge et de courant, vérifie le théorème de Poynting:

$$\int_V \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \int_{\partial V} \mathbf{P} \cdot \tilde{\mathbf{n}} = 0,$$

pour tout volume  $V$  fermé de frontière  $\partial V$  régulier, où  $\mathcal{E}$  est l'énergie électromagnétique et  $\mathbf{P}$  est le vecteur de Poynting, respectivement définis par:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} [\epsilon {}^t\mathbf{E} \cdot \mathbf{E} + \mu {}^t\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}] \quad \text{et} \quad \mathbf{P} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}.$$

Pour des conditions aux limites de type métallique  $\mathbf{E} \times \tilde{\mathbf{n}} = 0$ , le théorème de Poynting montre que l'énergie est exactement conservée.

### 2.1.2 Stabilité du schéma GDDT- $\mathbb{P}_{p_i}$

On cherche maintenant à exhiber une condition suffisante de stabilité de la méthode Galerkin discontinue (2.9)-(2.10)-(2.11)-(2.12)-(2.13) lorsque les conditions aux limites sont données par (2.7). Pour cela, on veut démontrer que l'énergie discrète (2.14) est une forme quadratique définie positive sous une condition de type CFL sur  $\Delta t$  qui pourrait jouer le rôle de fonction de Lyapunov de toutes les inconnues numériques [Vid78]. On pourra alors conclure que le schéma est conditionnellement stable.

**Hypothèse 2.1** *On suppose que pour tout triangle  $\tau_i$ , il existe une constante  $\alpha_i$  telle que:*

$$\forall \mathbf{X} \in \text{Vect}\{\varphi_{ij}, 1 \leq j \leq d_i\}, \quad \left\| \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \star} \right\|_{\tau_i} \leq \frac{\alpha_i P_i^*}{|\tau_i|} \|\mathbf{X}\|_{\tau_i}. \quad (2.15)$$

On note par  $\|\mathbf{X}\|_{\tau_i}$  la norme  $L^2$  du champ  $\mathbf{X}$  sur  $\tau_i$ , i.e.  $\|\mathbf{X}\|_{\tau_i}^2 = \int_{\tau_i} |\mathbf{X}|^2$ . On utilise la même notation pour définir la norme  $L^2$  du champ  $\mathbf{X}$  sur l'interface  $s_{ik}$ .

**Hypothèse 2.2** *On suppose que pour tout triangle  $\tau_i$  de voisin  $\tau_k$  ( $k \in \mathcal{V}_i$ ), il existe des constantes  $\beta_{ik}$  et  $\beta_{ki}$ , telles que:*

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{X} \in \text{Vect}\{\varphi_{ij}, 1 \leq j \leq d_i\}, \quad \|\mathbf{X}\|_{s_{ik}}^2 &\leq \beta_{ik} \frac{\|\vec{n}_{ik}\|}{|\tau_i|} \|\mathbf{X}\|_{\tau_i}^2, \\ \forall \mathbf{Y} \in \text{Vect}\{\varphi_{kj}, 1 \leq j \leq d_k\}, \quad \|\mathbf{Y}\|_{s_{ik}}^2 &\leq \beta_{ki} \frac{\|\vec{n}_{ik}\|}{|\tau_k|} \|\mathbf{Y}\|_{\tau_k}^2. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Notons ici que la définition de la constante  $\alpha_i$  est différente et moins contraignante que celle utilisée dans [FLLP05]. Cela vient du fait que les périmètres suivant  $x$  et  $y$  notés  $P_i^x$  et  $P_i^y$  respectivement, sont plus petits que le périmètre d'un triangle  $\tau_i$ . De plus, on a introduit une deuxième constante  $\beta_{ki}$  dans l'Hypothèse 2.2 qui n'a pas été adoptée dans [FLLP05]. On motivera ce choix dans la Sec. 2.2.2.

En utilisant la définition de  $\mathbb{S}_{ik}^*$  et des inégalités élémentaires, on a :

$$\begin{aligned} |{}^t \mathbf{X} \mathbb{S}_{ik}^* \mathbf{Y}| &\leq \frac{|\tilde{n}_{ik\star}|}{2} \|\mathbf{X}\|_{s_{ik}} \|\mathbf{Y}\|_{s_{ik}} \\ &\leq \frac{|\tilde{n}_{ik\star}|}{4} \left( \frac{\sqrt{\mu_i}}{\sqrt{\epsilon_i}} \|\mathbf{X}\|_{s_{ik}}^2 + \frac{\sqrt{\epsilon_i}}{\sqrt{\mu_i}} \|\mathbf{Y}\|_{s_{ik}}^2 \right). \end{aligned}$$

Alors, on peut déduire de l'Hypothèse 2.2 que:

$$|{}^t \mathbf{X} \mathbb{S}_{ik}^* \mathbf{Y}| \leq \frac{|\tilde{n}_{ik\star}|}{4} \left( \frac{\beta_{ik}}{|\tau_i|} \frac{\sqrt{\mu_i}}{\sqrt{\epsilon_i}} \|\mathbf{X}\|_{\tau_i}^2 + \frac{\beta_{ki}}{|\tau_k|} \frac{\sqrt{\epsilon_i}}{\sqrt{\mu_i}} \|\mathbf{Y}\|_{\tau_k}^2 \right). \quad (2.17)$$

On a par ailleurs:

$$\begin{aligned} 2\mathcal{E}^n &= \sum_i \left( \epsilon_i {}^t \mathbf{E}_{xi}^n \mathbb{M}_i \mathbf{E}_{xi}^n + \epsilon_i {}^t \mathbf{E}_{yi}^n \mathbb{M}_i \mathbf{E}_{yi}^n + \mu_i {}^t \mathbf{H}_{zi}^{n-\frac{1}{2}} \mathbb{M}_i \mathbf{H}_{zi}^{n+\frac{1}{2}} \right) \\ &= \sum_i \left( \epsilon_i \|\mathbf{E}_{xi}^n\|_{\tau_i}^2 + \epsilon_i \|\mathbf{E}_{yi}^n\|_{\tau_i}^2 + \mu_i \|\mathbf{H}_{zi}^{n-\frac{1}{2}}\|_{\tau_i}^2 - \Delta t \mathbb{X}_i^n \right), \end{aligned}$$

avec:

$$\mathbb{X}_i^n = {}^t \mathbf{H}_{zi}^{n-\frac{1}{2}} \left[ -\mathbb{K}_i^x \mathbf{E}_{yi}^n + \mathbb{K}_i^y \mathbf{E}_{xi}^n + \sum_{k \in \mathcal{V}_i} (\mathbb{F}_{xik}^n - \mathbb{F}_{yik}^n) \right].$$

Dans la suite, on omet les exposants  $n$  et  $n-1/2$  des variables des champs électrique et magnétique respectivement. On a:

$$\begin{aligned} |\mathbb{X}_i^n| &= \left| {}^t \mathbf{H}_{zi}^{n-\frac{1}{2}} \left[ -\mathbb{K}_i^x \mathbf{E}_{yi}^n + \mathbb{K}_i^y \mathbf{E}_{xi}^n + \sum_{k \in \mathcal{V}_i} (\mathbb{F}_{xik}^n - \mathbb{F}_{yik}^n) \right] \right| \\ &\leq \frac{1}{2} \left\| \frac{\partial \mathbf{H}_{zi}}{\partial x} \right\|_{\tau_i} \|\mathbf{E}_{yi}\|_{\tau_i} + \frac{1}{2} \left\| \frac{\partial \mathbf{E}_{yi}}{\partial x} \right\|_{\tau_i} \|\mathbf{H}_{zi}\|_{\tau_i} + \\ &\quad \frac{1}{2} \left\| \frac{\partial \mathbf{H}_{zi}}{\partial y} \right\|_{\tau_i} \|\mathbf{E}_{xi}\|_{\tau_i} + \frac{1}{2} \left\| \frac{\partial \mathbf{E}_{xi}}{\partial y} \right\|_{\tau_i} \|\mathbf{H}_{zi}\|_{\tau_i} + \\ &\quad \sum_{k \in \mathcal{V}_i} \left( |{}^t \mathbf{H}_{zi} \mathbb{S}_{ik}^x \mathbf{E}_{yk}| + |{}^t \mathbf{H}_{zi} \mathbb{S}_{ik}^y \mathbf{E}_{xk}| \right). \end{aligned}$$

L'Hypothèse 2.1 et l'inégalité 2.17 impliquent:

$$\begin{aligned} |\mathbb{X}_i^n| &\leq \sum_{k \in \mathcal{V}_i} \left[ \frac{|\alpha_i| n_{ikx}}{|\tau_i|} \|\mathbf{H}_{zi}\|_{\tau_i} \|\mathbf{E}_{yi}\|_{\tau_i} + \frac{|\alpha_i| n_{iky}}{|\tau_i|} \|\mathbf{H}_{zi}\|_{\tau_i} \|\mathbf{E}_{xi}\|_{\tau_i} + \right. \\ &\quad \left. \frac{|n_{ikx}|}{4} \left( \frac{\beta_{ik} \sqrt{\mu_i}}{|\tau_i| \sqrt{\epsilon_i}} \|\mathbf{H}_{zi}\|_{\tau_i}^2 + \frac{\beta_{ki} \sqrt{\epsilon_i}}{|\tau_k| \sqrt{\mu_i}} \|\mathbf{E}_{yk}\|_{\tau_k}^2 \right) + \right. \\ &\quad \left. \frac{|n_{iky}|}{4} \left( \frac{\beta_{ik} \sqrt{\mu_i}}{|\tau_i| \sqrt{\epsilon_i}} \|\mathbf{H}_{zi}\|_{\tau_i}^2 + \frac{\beta_{ki} \sqrt{\epsilon_i}}{|\tau_k| \sqrt{\mu_i}} \|\mathbf{E}_{xk}\|_{\tau_k}^2 \right) \right] \\ &\leq \sum_{k \in \mathcal{V}_i} \left[ \frac{|\alpha_i| n_{ikx}}{2|\tau_i|} \frac{\sqrt{\mu_i}}{\sqrt{\epsilon_i}} \|\mathbf{H}_{zi}\|_{\tau_i}^2 + \frac{|\alpha_i| n_{ikx}}{2|\tau_i|} \frac{\sqrt{\epsilon_i}}{\sqrt{\mu_i}} \|\mathbf{E}_{yi}\|_{\tau_i}^2 + \right. \\ &\quad \frac{|\alpha_i| n_{iky}}{2|\tau_i|} \frac{\sqrt{\mu_i}}{\sqrt{\epsilon_i}} \|\mathbf{H}_{zi}\|_{\tau_i}^2 + \frac{|\alpha_i| n_{iky}}{2|\tau_i|} \frac{\sqrt{\epsilon_i}}{\sqrt{\mu_i}} \|\mathbf{E}_{xi}\|_{\tau_i}^2 + \\ &\quad \frac{|n_{ikx}| \beta_{ik} \sqrt{\mu_i}}{4|\tau_i| \sqrt{\epsilon_i}} \|\mathbf{H}_{zi}\|_{\tau_i}^2 + \frac{|n_{ikx}| \beta_{ki} \sqrt{\epsilon_i}}{4|\tau_k| \sqrt{\mu_i}} \|\mathbf{E}_{yk}\|_{\tau_k}^2 + \\ &\quad \left. \frac{|n_{iky}| \beta_{ik} \sqrt{\mu_i}}{4|\tau_i| \sqrt{\epsilon_i}} \|\mathbf{H}_{zi}\|_{\tau_i}^2 + \frac{|n_{iky}| \beta_{ki} \sqrt{\epsilon_i}}{4|\tau_k| \sqrt{\mu_i}} \|\mathbf{E}_{xk}\|_{\tau_k}^2 \right]. \end{aligned}$$

Par suite:

$$\begin{aligned}
 2\mathcal{E}^n \geq & \sum_i \sum_{k \in \mathcal{V}_i} \left[ |n_{iky}| \left( \frac{\epsilon_i}{P_i^y} - \Delta t \frac{\alpha_i}{2|\tau_i|} \frac{\sqrt{\epsilon_i}}{\sqrt{\mu_i}} \right) \|\mathbf{E}_{xi}\|_{\tau_i}^2 + \right. \\
 & |n_{ikx}| \left( \frac{\epsilon_i}{P_i^x} - \Delta t \frac{\alpha_i}{2|\tau_i|} \frac{\sqrt{\epsilon_i}}{\sqrt{\mu_i}} \right) \|\mathbf{E}_{yi}\|_{\tau_i}^2 + \\
 & |n_{iky}| \left( \frac{\mu_i}{P_i^y} - \Delta t \frac{\alpha_i}{2|\tau_i|} \frac{\sqrt{\mu_i}}{\sqrt{\epsilon_i}} - \Delta t \frac{\beta_{ik}}{4|\tau_i|} \frac{\sqrt{\mu_i}}{\sqrt{\epsilon_i}} \right) \|\mathbf{H}_{zi}\|_{\tau_i}^2 + \\
 & |n_{ikx}| \left( \frac{\mu_i}{P_i^x} - \Delta t \frac{\alpha_i}{2|\tau_i|} \frac{\sqrt{\mu_i}}{\sqrt{\epsilon_i}} - \Delta t \frac{\beta_{ik}}{4|\tau_i|} \frac{\sqrt{\mu_i}}{\sqrt{\epsilon_i}} \right) \|\mathbf{H}_{zi}\|_{\tau_i}^2 - \\
 & \left. \Delta t \frac{|n_{iky}| \beta_{ki}}{4|\tau_k|} \frac{\sqrt{\epsilon_i}}{\sqrt{\mu_i}} \|\mathbf{E}_{xk}\|_{\tau_k}^2 - \Delta t \frac{|n_{ikx}| \beta_{ki}}{4|\tau_k|} \frac{\sqrt{\epsilon_i}}{\sqrt{\mu_i}} \|\mathbf{E}_{yk}\|_{\tau_k}^2 \right].
 \end{aligned}$$

Pour simplifier l'écriture de l'énergie on utilise les notations suivantes :

$$\begin{aligned}
 N_{ik}^* &= \left( \frac{\epsilon_i}{P_i^*} - \Delta t \frac{\alpha_i}{2|\tau_i|} \frac{\sqrt{\epsilon_i}}{\sqrt{\mu_i}} - \Delta t \frac{\beta_{ik}}{4|\tau_i|} \frac{\sqrt{\epsilon_i}}{\sqrt{\mu_i}} \right) |n_{ik*}|, \\
 Z_{ik}^* &= \left( \frac{\mu_i}{P_i^*} - \Delta t \frac{\alpha_i}{2|\tau_i|} \frac{\sqrt{\mu_i}}{\sqrt{\epsilon_i}} - \Delta t \frac{\beta_{ik}}{4|\tau_i|} \frac{\sqrt{\mu_i}}{\sqrt{\epsilon_i}} \right) |n_{ik*}|,
 \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned}
 2\mathcal{E}^n \geq & \sum_{\text{interfaces}}^{\text{internes}} \left[ N_{ik}^y \|\mathbf{E}_{xi}\|_{\tau_i}^2 + N_{ik}^x \|\mathbf{E}_{yi}\|_{\tau_i}^2 + Z_{ik}^y \|\mathbf{H}_{zi}\|_{\tau_i}^2 + Z_{ik}^x \|\mathbf{H}_{zi}\|_{\tau_i}^2 + \right. \\
 & \left. N_{ki}^y \|\mathbf{E}_{xk}\|_{\tau_k}^2 + N_{ki}^x \|\mathbf{E}_{yk}\|_{\tau_k}^2 + Z_{ki}^y \|\mathbf{H}_{zk}\|_{\tau_k}^2 + Z_{ki}^x \|\mathbf{H}_{zk}\|_{\tau_k}^2 \right] + \\
 & \sum_{\text{interfaces}}^{\text{métalliques}} \left[ N_{ik}^y \|\mathbf{E}_{xi}\|_{\tau_i}^2 + N_{ik}^x \|\mathbf{E}_{yi}\|_{\tau_i}^2 + Z_{ik}^y \|\mathbf{H}_{zi}\|_{\tau_i}^2 + Z_{ik}^x \|\mathbf{H}_{zi}\|_{\tau_i}^2 \right].
 \end{aligned}$$

Pour que  $\mathcal{E}^n$  soit une forme quadratique définie positive, il suffit que les coefficients de tous les termes de l'expression ci-dessus soient positifs. Donc, pour les interfaces internes on doit avoir :

$$c_i \Delta t (2\alpha_i + \beta_{ik}) \leq \frac{4|\tau_i|}{P_i^x} \quad \text{et} \quad c_i \Delta t (2\alpha_i + \beta_{ik}) \leq \frac{4|\tau_i|}{P_i^y}, \quad (2.18)$$

$$c_k \Delta t (2\alpha_k + \beta_{ki}) \leq \frac{4|\tau_k|}{P_k^x} \quad \text{et} \quad c_k \Delta t (2\alpha_k + \beta_{ki}) \leq \frac{4|\tau_k|}{P_k^y}. \quad (2.19)$$

L'équation (2.18) se résume à :

$$c_i \Delta t_1 (2\alpha_i + \beta_{ik}) \leq 4 \min \left( \frac{|\tau_i|}{P_i^x}, \frac{|\tau_i|}{P_i^y} \right). \quad (2.20)$$

L'équation (2.19) entraîne:

$$c_k \Delta t_2 (2\alpha_k + \beta_{ki}) \leq 4 \min\left(\frac{|\tau_k|}{P_k^x}, \frac{|\tau_k|}{P_k^y}\right). \quad (2.21)$$

Pour les interfaces métalliques on doit avoir:

$$c_i \Delta t (2\alpha_i + \beta_{ik}) \leq \frac{4|\tau_i|}{P_i^x} \quad \text{et} \quad c_i \Delta t (2\alpha_i + \beta_{ik}) \leq \frac{4|\tau_i|}{P_i^y}. \quad (2.22)$$

L'équation (2.22) conduit à:

$$c_i \Delta (2\alpha_i + \beta_{ik}) \leq 4 \min\left(\frac{|\tau_i|}{P_i^x}, \frac{|\tau_i|}{P_i^y}\right). \quad (2.23)$$

Utilisons les relations (2.20) et (2.21) pour définir la condition de stabilité sur les interfaces internes et (2.23) pour les interfaces métalliques. Ainsi, la condition de stabilité est définie par:

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \text{ interface interne } s_{ik}, \quad \Delta t \leq \min(\Delta t_1, \Delta t_2), \\ \forall \text{ interface métallique } s_{ik}, \quad c_i \Delta t (2\alpha_i + \beta_{ik}) \leq 4 \min\left(\frac{|\tau_i|}{P_i^x}, \frac{|\tau_i|}{P_i^y}\right). \end{array} \right. \quad (2.24)$$

**Remarque 2.2** Dans le cas d'un maillage orthogonal conforme ou non-conforme, chaque élément  $\tau_i$  peut être caractérisé par le couple  $(\Delta x_i, \Delta y_i)$ , l'aire  $|\tau_i| = \frac{\Delta x_i \Delta y_i}{2}$  et on a les propriétés suivantes:

$$P_i^x = \sum_{k \in \mathcal{V}_i} |n_{ikx}| = 2\Delta y_i \quad \text{et} \quad P_i^y = \sum_{k \in \mathcal{V}_i} |n_{iky}| = 2\Delta x_i. \quad (2.25)$$

La condition de stabilité s'écrit dans ce cas:

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \text{ interface interne } s_{ik}, \quad \Delta t \leq \min(\Delta t_1, \Delta t_2), \\ \forall \text{ interface métallique } s_{ik}, \quad c_i \Delta t (2\alpha_i + \beta_{ik}) \leq \min(\Delta x_i, \Delta y_i), \end{array} \right. \quad (2.26)$$

où  $\Delta t_1$  et  $\Delta t_2$  sont définis par:

$$c_i (2\alpha_i + \beta_{ik}) \Delta t_1 \leq \min(\Delta x_i, \Delta y_i) \quad \text{et} \quad c_k (2\alpha_k + \beta_{ki}) \Delta t_2 \leq \min(\Delta x_k, \Delta y_k).$$

A ce stade, quelques remarques s'imposent sur les Hypothèses 2.1 et 2.2 (voir Annexes A.1 et A.2 pour plus de détails):

- L'existence des constantes  $\alpha_i$  et  $\beta_{ik}, \forall i, \forall k \in \mathcal{V}_i$  est toujours assurée pour tout choix de fonctions de base et pour tout maillage conforme ou non-conforme.
- Les valeurs des constantes  $\alpha_i$  et  $\beta_{ik}, \forall i, \forall k \in \mathcal{V}_i$  croissent avec le degré des fonctions de base.
- Par définition, la constante  $\alpha_i$  dépend seulement du choix de fonctions de base locales. Autrement dit, si on choisit le même espace de fonctions de base dans toutes les cellules, alors  $\alpha_i$  est une constante globale (même dans le cas non-conforme). Dans les autres cas, la constante  $\alpha_i$  devient constante par cellule (locale).



## 2.2 Etude de cas particuliers

On a implémenté la méthode GDDT- $\mathbb{P}_p$  (*i.e.*  $p_i = p$  est uniforme dans tous les éléments du maillage) pour  $p = 0, \dots, 4$ , sur un maillage triangulaire avec des fonctions de base nodales. On considère plus particulièrement dans la suite les schémas GDDT- $\mathbb{P}_0$  et GDDT- $\mathbb{P}_1$  et on cherche à évaluer analytiquement les critères de stabilité associés. On distingue deux cas: on commence d'abord par le cas d'un maillage conforme puis on étudie ensuite le cas d'un maillage non-conforme.

### 2.2.1 Cas d'un maillage conforme

#### 2.2.1.1 Schéma GDDT- $\mathbb{P}_0$

Pour un maillage triangulaire, le schéma GDDT- $\mathbb{P}_0$  est exactement un schéma volume fini classique. Dans ce cas  $d_i = 1$ , *i.e.* chaque inconnue nécessite un seul degré de liberté. Les conditions (2.15) et (2.16) sont vérifiées et on a  $\forall i, \alpha_i = 0$  et  $\forall i, \forall k \in \mathcal{V}_i, \beta_{ik} = \beta_{ki} = 1$ . La condition de stabilité s'écrit alors pour toute interface interne  $s_{ik}$ :

$$\max(c_i, c_k)\Delta t \leq 4 \min\left(\min\left(\frac{|\tau_i^x|}{P_i^x}, \frac{|\tau_i^y|}{P_i^y}\right), \min\left(\frac{|\tau_k^x|}{P_k^x}, \frac{|\tau_k^y|}{P_k^y}\right)\right). \quad (2.27)$$

Dans le cas d'un maillage triangulaire orthogonal uniforme (*i.e.*  $\Delta x_l$  et  $\Delta y_l$  sont constants  $\forall l$ ) la condition de stabilité du schéma GDDT- $\mathbb{P}_0$  s'écrit pour toute interface interne:

$$\max(c_i, c_k)\Delta t \leq \min(\Delta x_i, \Delta y_i). \quad (2.28)$$

On note par CFL la valeur maximale que peut prendre le rapport  $\frac{\max(c_i, c_k)\Delta t}{\min(\Delta x_i, \Delta y_i)}$ . Dans le cas présent, la valeur du CFL est égale à 1.

**Remarque 2.3** *Ce schéma volume fini est étudié dans [FLLP05] et [PRF02]. Le lecteur pourra vérifier que pour un maillage orthogonal la condition de stabilité obtenue ici est moins contraignante que celles obtenues dans [FLLP05] et [PRF02]. Par exemple, dans le cas homogène (*i.e.*  $\epsilon_i = cte$  et  $\mu_i = cte, \forall i$ ) et pour un maillage uniforme, la condition CFL obtenue ici est plus grande d'un facteur 1.7 que celles obtenues dans [FLLP05] et [PRF02].*

#### 2.2.1.2 Schéma GDDT- $\mathbb{P}_1$

Dans le cas de fonctions de base nodales linéaires, chaque composante du champ électromagnétique nécessite trois degrés de liberté, *i.e.*  $d_i = 3$ . Pour un maillage conforme, on a le lemme suivant.

**Lemme 2.1** *Pour des fonctions de base nodales linéaires, les conditions (2.15) et (2.16) sont vérifiées et on a:*

- [1].  $\forall i, \alpha_i = 3$ ,
- [2].  $\forall i, \forall k \in \mathcal{V}_i, \beta_{ik} = \beta_{ki} = 3$ .

**Preuve.** Tout d'abord, on a les intégrales élémentaires suivantes:

$$\int_{\tau_i} \varphi_{ij} \varphi_{ij'} = \frac{|\tau_i|}{12} (1 + \delta_{jj'}), \quad (2.29a)$$

$$\int_{s_{ik}} \varphi_{ij} \varphi_{ij'} = \frac{\|\vec{n}_{ik}\|}{6} (1 + \delta_{jj'}) (1 - \delta_{jk}) (1 - \delta_{j'k}). \quad (2.29b)$$

[1]. On a:  $\mathbf{X} = \sum_{j \in \mathcal{V}_i} X_{ij} \varphi_{ij}$  (ici,  $|\mathcal{V}_i| = d_i$ ), alors  $\|\mathbf{X}\|_{\tau_i}^2 \geq \frac{|\tau_i|}{12} \sum_{j \in \mathcal{V}_i} |X_{ij}|^2$ .

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \star} \right\|_{\tau_i}^2 &\leq \frac{3}{4|\tau_i|} \left( \sum_{j \in \mathcal{V}_i} |n_{ij\star} X_{ij}| \right)^2 \leq \frac{3(P_i^\star)^2}{4|\tau_i|} \sum_{j \in \mathcal{V}_i} |X_{ij}|^2 \\ &\leq \frac{9(P_i^\star)^2}{|\tau_i|^2} \|\mathbf{X}\|_{\tau_i}^2 \quad \text{donc } \alpha_i = 3. \end{aligned}$$

[2]. Pour un maillage conforme,  $\forall i, \forall k \in \mathcal{V}_i$  on a  $\beta_{ik} = \beta_{ki}$ . On utilise (2.29a) et (2.29b) pour calculer  $\beta_{ik}$  qui vérifie le problème de minimisation:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \preceq \frac{\beta_{ik}}{2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

où " $\preceq$ " désigne une inégalité généralisée définie dans l'Annexe A.1. On obtient ainsi  $\beta_{ik} = 3$ .  $\square$

La condition de stabilité du schéma GDDT- $\mathbb{P}_1$  s'écrit pour un maillage conforme quelconque:

$$\forall \text{ interface interne } s_{ik}, \max(c_i, c_k) \Delta t \leq \frac{4}{9} \min \left( \min \left( \frac{|\tau_i|}{P_i^x}, \frac{|\tau_i|}{P_i^y} \right), \min \left( \frac{|\tau_k|}{P_k^x}, \frac{|\tau_k|}{P_k^y} \right) \right). \quad (2.30)$$

Pour un maillage orthogonal uniforme et en utilisant (2.25), la condition de stabilité s'écrit:

$$\forall \text{ interface interne } s_{ik}, \max(c_i, c_k) \Delta t \leq 0.11 \min(\Delta x_i, \Delta y_i). \quad (2.31)$$

### 2.2.2 Cas d'un maillage non-conforme

Le but de cette section est d'étudier et d'expliciter des conditions de stabilité des schémas GDDT- $\mathbb{P}_0$  et GDDT- $\mathbb{P}_1$  dans le cas d'un maillage non-conforme. L'existence des constantes  $\alpha_i$  et  $\beta_{ik}$  (respectivement  $\beta_{ki}$ )  $\forall i, \forall k \in \mathcal{V}_i$  est toujours assurée, donc les Hypothèses 2.1 et 2.2 sont toujours valables. Cependant, contrairement au cas conforme où les constantes  $\beta_{ik}$  et  $\beta_{ki}$  sont égales, on va démontrer par la suite que ces constantes sont différentes dans le cas non-conforme (sauf pour un cas particulier). La constante  $\alpha_i$  quant à elle, est identique au cas conforme.

On considère deux types de maillage non-conforme comme sur les Fig. 2.3 (a) et (b). Dans la situation (a), le triangle  $\tau_k$  touche son voisin  $\tau_i$  par deux sommets; dans ce cas la non-conformité est de la part de  $\tau_i$ , l'interface  $s_{ik}$  est une arête complète du triangle  $\tau_k$ , par contre elle est une portion d'une arête de  $\tau_i$ . Par contre, dans la situation (b),  $\tau_k$  touche  $\tau_i$  par un seul sommet et la non-conformité est de la part de  $\tau_i$  et  $\tau_k$ .

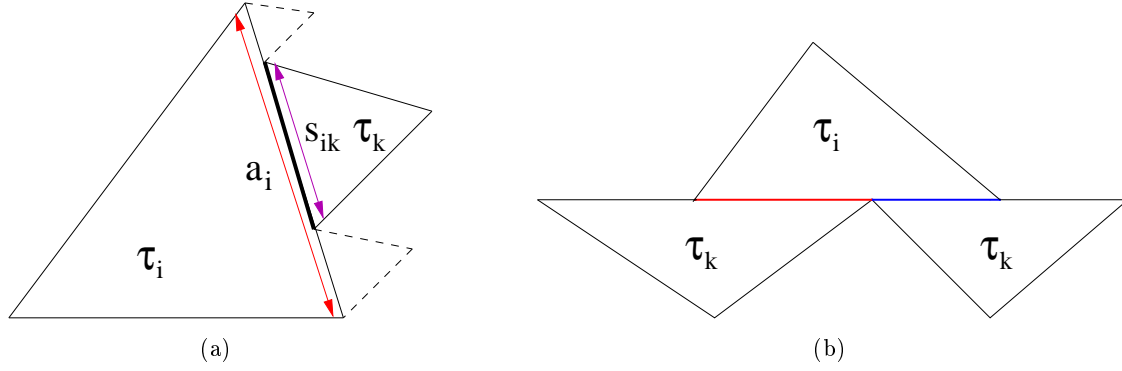


FIG. 2.3 – Deux types de maillage non-conforme.

**Lemme 2.2** Soit un triangle  $\tau_i$  et son voisin  $\tau_k$ . On note par  $a_i$  et  $a_k$  les arêtes de  $\tau_i$  et  $\tau_k$  respectivement, telles que  $s_{ik} = \tau_i \cap \tau_k = a_i \cap a_k$ . On note par  $\ell_1 = \frac{|a_i|}{|s_{ik}|}$  et  $\ell_2 = \frac{|a_k|}{|s_{ik}|}$  deux constantes positives telles que  $\ell_1, \ell_2 \geq 1$ , où  $|\cdot|$  désigne la longueur d'un côté. On a alors les propriétés suivantes:

$$\begin{cases} \text{si } \ell_1 = \ell_2 & \text{alors } \beta_{ik} = \beta_{ki}, \\ \text{si } \ell_1 > \ell_2 & \text{alors } \beta_{ik} \geq \beta_{ki}, \\ \text{si } \ell_1 < \ell_2 & \text{alors } \beta_{ik} \leq \beta_{ki}. \end{cases} \quad (2.32)$$

**Preuve.** On se limite dans la démonstration à des fonctions de base nodales linéaires. On peut néanmoins utiliser les mêmes techniques pour d'autres fonctions de base. Tout d'abord, on note par  $A_1^i$  et  $A_2^i$  les matrices symétriques positives telles que:

$$(A_1^i)_{jj'} = \int_{s_{ik}} \varphi_{ij} \varphi_{ij'} \quad \text{et} \quad (A_2^i)_{jj'} = \int_{a_i} \varphi_{ij} \varphi_{ij'}. \quad (2.33)$$

Puisque les fonctions de bases nodales du triangle  $\tau_i$  sont toujours positives ou nulles sur  $\tau_i$ , on a:

$$\begin{aligned} \frac{1}{|s_{ik}|} A_1^i &\preceq \chi_1 \ell_1 \frac{1}{|a_i|} A_2^i \quad \text{avec } \chi_1 \leq 1, \\ \frac{1}{|s_{ik}|} A_1^k &\preceq \chi_2 \ell_2 \frac{1}{|a_k|} A_2^k \quad \text{avec } \chi_2 \leq 1. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Pour obtenir (2.34), commençons par remarquer que la comparaison entre les matrices  $A_1^i$  et  $A_2^i$ ,  $\forall i$  ne se fait pas directement par le critère de l'Annexe A.1 puisque ces matrices ne sont pas définies, sont singulières et possèdent toujours une ligne et une colonne nulles. En effet, pour des fonctions de base nodales  $\mathbb{P}_1$  les différentes formes des matrices  $A_1^i$  et  $A_2^i$  sont:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & * \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.35)$$

Donc, ces matrices possèdent une valeur propre nulle. On définit alors les matrices  $B_1^i$  et  $B_2^i$  obtenues en éliminant la ligne nulle et la colonne nulle des matrices  $A_1^i$  et  $A_2^i$ . Les matrices  $B_1^i$  et  $B_2^i$  sont symétriques

définies positives, donc on peut les comparer en utilisant le critère classique. De plus, elles possèdent les mêmes valeurs propres non nulles que celles de  $A_1^i$  et  $A_2^i$  respectivement. Enfin, on peut déduire les vecteurs propres de  $A_1^i$  et  $A_2^i$  de ceux des matrices  $B_1^i$  et  $B_2^i$ . Pour comparer  $A_1^i$  et  $A_2^i$  il suffit de comparer  $B_1^i$  et  $B_2^i$  et on a: si  $B_1^i \preceq \lambda B_2^i$ , alors  $A_1^i \preceq \lambda A_2^i$ , où  $\lambda$  est une constante. Donc:

$$\begin{aligned} \frac{1}{|s_{ik}|} A_1^i &\preceq \ell_1 \frac{1}{|a_i|} A_2^i \preceq \ell_1 \beta_{ik}^{\text{conf}} \frac{B^i}{|\tau_i|}, \\ \frac{1}{|s_{ik}|} A_1^k &\preceq \ell_2 \frac{1}{|a_k|} A_2^k \preceq \ell_2 \beta_{ki}^{\text{conf}} \frac{B^k}{|\tau_k|}, \end{aligned}$$

où  $\forall i$ ,  $B^i$  est la matrice de masse associée au triangle  $\tau_i$  définie par (2.29a). Les constantes  $\beta_{ik}^{\text{conf}}$  et  $\beta_{ki}^{\text{conf}}$  sont égales (l'indice "conf" signifie que ces constantes sont les mêmes que celles qui sont définies dans le cas conforme). Ainsi, si  $\ell_1 = \ell_2$  et en prenant  $\beta_{ik} = \ell_1 \beta_{ik}^{\text{conf}}$  et  $\beta_{ki} = \ell_2 \beta_{ki}^{\text{conf}}$ , la première propriété du lemme est démontrée. On suit la même démarche pour démontrer les deux autres propriétés.  $\square$

#### Remarque 2.4

- Les propriétés du Lemme 2.2 sont des conditions nécessaires seulement. Par exemple pour un maillage non-conforme de type Fig. 2.3 (b), on peut avoir  $\beta_{ik} = \beta_{ki}$  mais  $\ell_1 \neq \ell_2$ . Dans le cas d'un maillage de type Fig. 2.3 (a), ces conditions deviennent suffisantes aussi (voir l'Exemple 1 de l'Annexe A.4).
- Le Lemme 2.2 montre clairement (pour un maillage non-conforme seulement) l'influence des constantes  $\beta_{ik}$  et  $\beta_{ki}$  par  $\ell_1$  et  $\ell_2$  respectivement. Cela vient du fait que les matrices  $A_1^i$  et  $A_1^k$  dépendent fortement non seulement des constantes  $\ell_1$  et  $\ell_2$  respectivement, mais aussi de la position du voisin  $\tau_k$  de  $\tau_i$ , i.e. on peut avoir deux interfaces (sur un côté de  $\tau_i$ ) de mêmes longueurs, mais les matrices  $A_1^i$  correspondantes sont différentes. On observe cette situation dans le cas d'un raffinement de maillage.
- Le Lemme 2.2 permet de différencier les interfaces conformes des interfaces non-conformes. Il pourrait aussi permettre d'identifier le type de non-conformité et aussi de faciliter le calcul de la valeur du CFL.

Dans la pratique, on utilise la démarche suivante pour calculer la plus grande valeur de  $\beta_{ik} \forall i, \forall k \in \mathcal{V}_i$  (voir l'Exemple 2 de l'Annexe A.4):

- [1]. On identifie toutes les interfaces non-conformes.
- [2].  $\forall i, \forall k \in \mathcal{V}_i$ , on calcule les longueurs  $\ell_1$  et  $\ell_2$  qui correspondent aux interfaces non-conformes.
- [3]. On cherche à calculer:

$$\forall i, \forall k \in \mathcal{V}_i, \ell_1^{\max} = \max(\ell_1) \quad \text{et} \quad \ell_2^{\max} = \max(\ell_2) \quad \text{puis} \quad \mathcal{L}^{\max} = \max(\ell_1^{\max}, \ell_2^{\max}).$$

Il se peut que l'on ait plusieurs  $\mathcal{L}^{\max}$ , soit  $\mathcal{L}^{\max}$  l'ensemble des valeurs  $\{\mathcal{L}_1^{\max}, \dots, \mathcal{L}_m^{\max}\}$ , où  $m$  est un entier naturel. Dans ce cas on calcule toutes les valeurs de  $\beta_{ik}$  et  $\beta_{ki}$ , puis on prend les maxima de toutes les valeurs de  $\beta_{ik}$  et  $\beta_{ki}$  calculées.

### 2.2.3 Raffinement local non-conforme

Un cas très intéressant à étudier est le cas d'un raffinement non-conforme. Le mode de découpage (de raffinement) d'un triangle décrit ci-dessous (voir Fig 2.4) a été choisi pour ne pas détériorer la qualité du maillage. Soit un triangle  $\tau_i$ ; les nouveaux sommets sont générés aux milieux des côtés et sont utilisés avec les sommets originaux pour créer quatre nouveaux triangles. Le quatrième triangle est situé au centre du triangle original et utilise les trois nouveaux sommets. Pour ce mode de découpage, l'aire de chaque nouveau triangle vaut le quart de l'aire du triangle initial. L'avantage de cette subdivision est la préservation de l'anisotropie du triangle initial. On note par  $\ell = |s_{ik}^{\max}|/|s_{ik}^{\min}|$  (le rapport entre les longueurs de la plus grande interface  $s_{ik}^{\max}$  et la plus petite  $s_{ik}^{\min}$ ) le taux de raffinement,  $\ell$  est un entier naturel. Les Fig. 2.5 (a) et (b) représentent des exemples de raffinement de taux  $\ell = 4$  et  $\ell = 8$  respectivement.

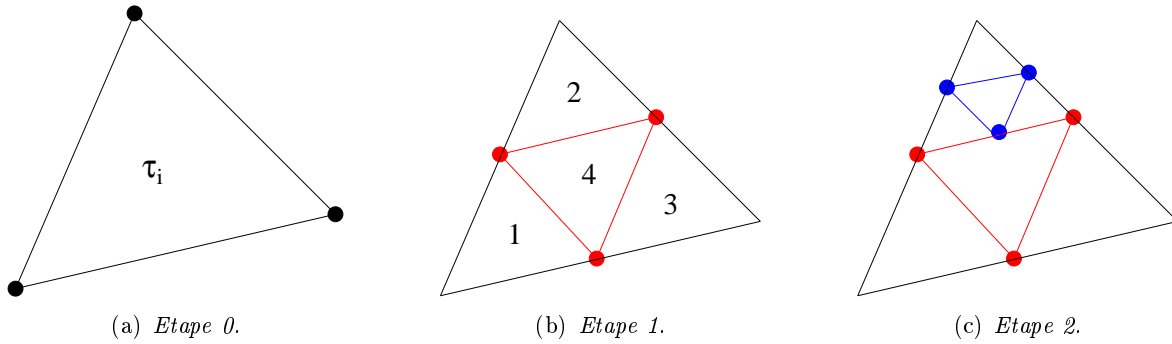


FIG. 2.4 – Les étapes de subdivision d'un triangle.

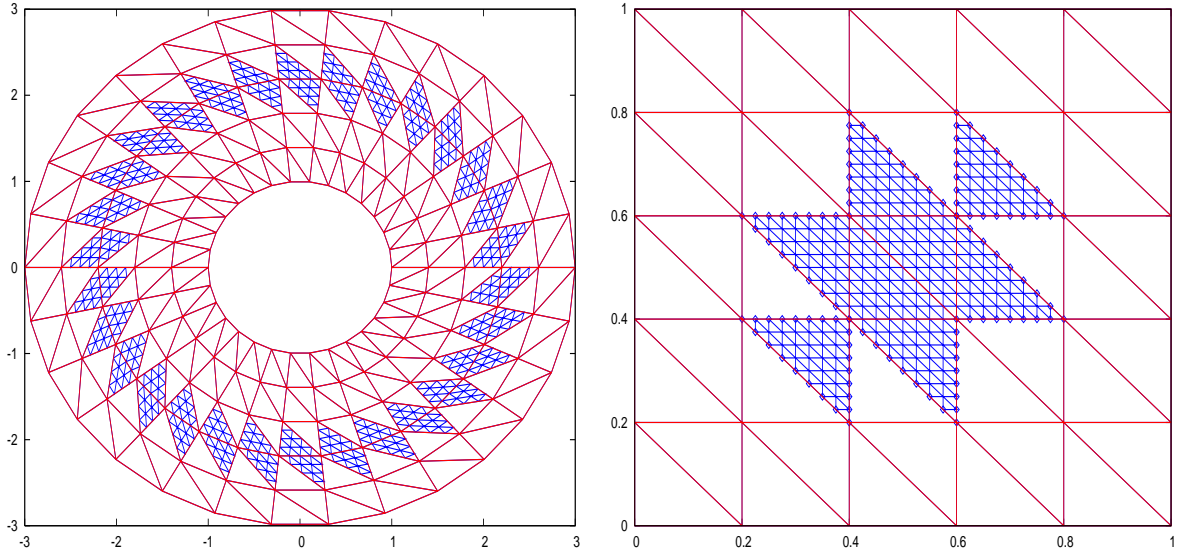
En utilisant les notations et les résultats du Lemme 2.2, on a  $\ell_1 \geq \ell_2 = 1$ , et donc  $\beta_{ik} \geq \beta_{ki}, \forall i, \forall k \in \mathcal{V}_i$ . Si les valeurs de  $\beta_{ik}$  pouvaient être calculées analytiquement alors une condition de stabilité exacte (CFL théorique) pourrait être obtenue. C'est ce que nous allons faire ici dans le cas d'un maillage triangulaire orthogonal. On donne dans les Tab. 2.1 et 2.2 les valeurs des constantes  $\alpha_i$  et  $\max(\beta_{ik}), \forall i, \forall k \in \mathcal{V}_i$  et dans la Tab. 2.3, les valeurs du nombre CFL en fonction du taux de raffinement  $\ell$  et du degré d'interpolation  $p$ . La constante  $\alpha_i$  dépend seulement de  $p$  et la constante  $\beta_{ik}$  quant à elle dépend de  $p$  et de  $\ell$ . On peut conclure que notre condition de stabilité devient très restrictive lorsque les valeurs de  $\ell$  et  $p$  augmentent.

TAB. 2.1 – Valeurs de  $\alpha_i$  en fonction de  $p$ .

$p$	0	1	2	3	4
$\alpha_i \simeq$	0.0	3.0	8.0	18.0	38.0

## 2.3 Validation numérique du schéma GDDT- $\mathbb{P}_{p_i}$

On considère une cavité métallique carrée unitaire. Les expressions analytiques des modes de résonance sont connues pour cette géométrie [Jac98] et on propose ici de simuler l'évolution temporelle du mode propre (1, 1) pour le cas transverse magnétique  $TM_z$ . Nous avons initialisé le champ électromagnétique par la solution analytique à  $t = 0$ , donnée par l'expression suivante:



(a) Raffinement de taux  $\ell = 4$  (maillage 3-irrégulier). (b) Raffinement de taux  $\ell = 8$  (maillage 7-irrégulier).

FIG. 2.5 – Exemples de raffinements locaux non-conformes d'un maillage triangulaire.

TAB. 2.2 – Valeurs de  $\beta_{ik}$  en fonction de  $\ell$  et  $p$ .

$\ell \setminus p$	$p=0$	$p=1$	$p=2$	$p=3$	$p=4$
1	1	3	6	10	23
2	1	4.5	10	18	35
4	1	6.0	17	33	68
8	1	7.5	24	52	108
16	1	8.0	29	70	147
64	1	9.0	34	91	200

TAB. 2.3 – Valeurs du nombre CFL en fonction de  $\ell$  et  $p$ .  
Cas d'un maillage triangulaire orthogonal.

$\ell \setminus p$	$p=0$	$p=1$	$p=2$	$p=3$	$p=4$
1	1	0.11	0.045	0.022	0.01
2	1	0.095	0.04	0.019	0.009
4	1	0.085	0.03	0.015	0.007
8	1	0.075	0.025	0.011	0.0055
16	1	0.07	0.022	0.009	0.0045
64	1	0.067	0.02	0.008	0.004

$$\begin{cases} H_x = 0, \\ H_y = 0, \\ E_z = \sin(\pi x) \sin(\pi y). \end{cases}$$

La solution exacte est donnée par:

$$\begin{cases} H_x = \frac{-\pi}{\omega} \sin(\pi x) \cos(\pi y) \sin(\omega t), \\ H_y = \frac{\pi}{\omega} \cos(\pi x) \sin(\pi y) \sin(\omega t), \\ E_z = \sin(\pi x) \sin(\pi y) \cos(\omega t), \end{cases}$$

où  $\omega = 2\pi f$ . La fréquence  $f$  est ici égale à  $f = 0.212$  GHz. L'intérêt de ce cas test est double: il autorise les simulations en temps long et l'énergie de la solution exacte est conservée.

On réalise toutes les simulations avec un maillage triangulaire orthogonal régulier *i.e.* si chaque triangle  $\tau_i$  est représenté par le couple  $(\Delta x_i, \Delta y_i)$ , on choisit ici  $\Delta x_i = \Delta y_i$ . Pour ce choix du maillage, on désigne par:

- **CFL théorique**, la valeur maximale que peut prendre le rapport  $\frac{\max(c_i, c_k)\Delta t}{\min(\Delta x_i)}$  selon l'étude théorique de la Sec. 2.1.2 *i.e.* la valeur de  $\frac{1}{(2\alpha_i + \beta_{ik})}$ .
- **CFL numérique** (utilisé en pratique), la valeur maximale que peut prendre le rapport  $\frac{\max(c_i, c_k)\Delta t}{\min(h_i)}$  où  $h_i$  est le minimum des hauteurs du triangle  $\tau_i$  (ici  $h_i = \frac{\Delta x_i}{\sqrt{2}}$ ).

### 2.3.1 Maillage conforme

On propose d'abord de vérifier la stabilité des schémas GDDT- $\mathbb{P}_p$  ( $p_i = p$  est uniforme dans tous les éléments du maillage). Pour cela on réalise les mêmes simulations pour  $p = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ . Le maillage utilisé a une résolution de 14 points par longueur d'onde. On utilise pour chacun des schémas le pas de temps maximal autorisé par les conditions de stabilité théorique et numérique. On recense dans la Tab. 2.4 les valeurs du nombre CFL trouvées théoriquement et numériquement pour les différents schémas. Les valeurs du CFL numérique sont celles qui correspondent à la stabilité numérique effective *i.e.* la limite au delà de laquelle on observe une croissance de l'énergie discrète (2.14). La durée de toutes les simulations est de 43 périodes. On montre sur la Fig. 2.6 l'évolution de l'énergie discrète au cours du temps pour différentes valeurs de  $p$  en utilisant la valeur du CFL numérique. Puisque la solution exacte est connue, on choisit ensuite de comparer les différents schémas GDDT- $\mathbb{P}_p$  à partir de la dispersion numérique observée et de l'erreur  $L^2$ . Pour cela, on se propose de suivre l'évolution temporelle du champ électromagnétique en un point du maillage. Les simulations sont cette fois réalisées sur 32 périodes en utilisant différents nombres de points par longueur d'onde ( $\lambda$ ) pour chaque schéma GDDT- $\mathbb{P}_p$ . On montre sur la Fig. 2.7 les évolutions temporelles de l'erreur  $L^2$ , et sur la Fig. 2.8 l'évolution temporelle de la composante  $H_x$  (sur les 4 dernières périodes des simulations) en un point du maillage. Il est clair que lorsqu'on augmente le degré d'interpolation  $p$ , le schéma devient plus précis. On remarque aussi que les résultats obtenus avec le nombre CFL théorique sont plus précis que ceux obtenus avec le nombre CFL numérique. Enfin on notera que le schéma GDDT- $\mathbb{P}_0$  semble apparaître ici comme le plus précis si l'on se réfère à l'amplitude de l'erreur  $L^2$  sur la Fig. 2.7 (a) et (d). On peut attribuer ce comportement au fait que pour la valeur

$CFL=1.0$  qui correspond à la limite de stabilité du schéma  $GDDT-\mathbb{P}_0$ , la dispersion du second ordre de ce schéma est minimale (voir par exemple [Rem99] pour une démonstration de cette propriété dans le cas de maillages uniformes parallélépipédiques) alors que, pour les autres schémas  $GDDT-\mathbb{P}_p$ ,  $p \geq 1$ , cette propriété n'est pas garantie pour les valeurs considérées du nombre CFL.

TAB. 2.4 – Valeurs théoriques et numériques du nombre CFL - méthode  $GDDT-\mathbb{P}_p$ .

Schéma	$GDDT-\mathbb{P}_0$	$GDDT-\mathbb{P}_1$	$GDDT-\mathbb{P}_2$	$GDDT-\mathbb{P}_3$	$GDDT-\mathbb{P}_4$
CFL théorique	1.0	0.11	0.045	0.022	0.01
CFL numérique	1.0	0.3	0.15	0.1	0.09

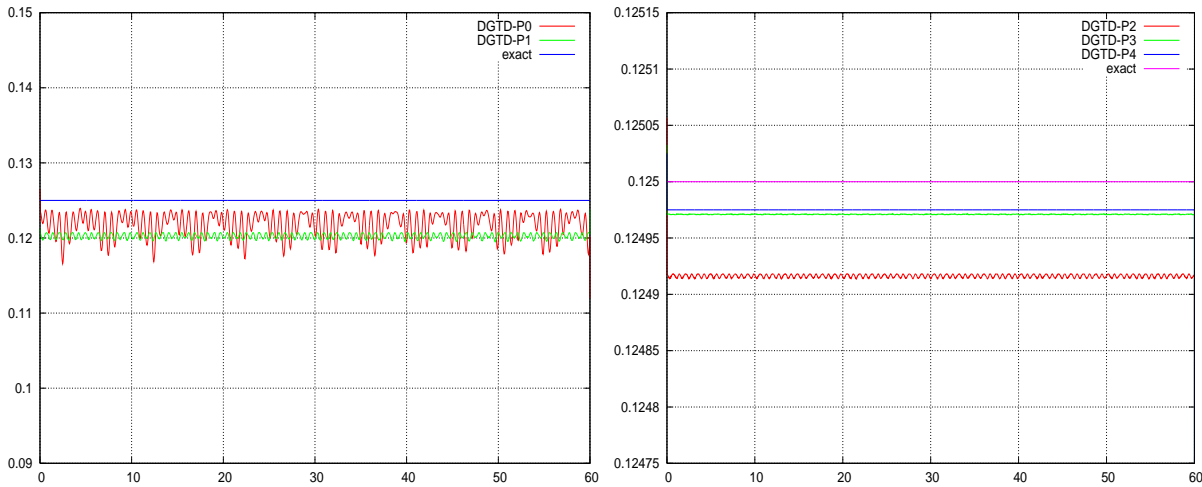


FIG. 2.6 – Evolution temporelle de l'énergie: méthode  $GDDT-\mathbb{P}_p$ .  
Maillage conforme.

### 2.3.2 Maillage non-conforme

On simule, comme dans le cas conforme, l'évolution du mode propre (1, 1) dans une cavité métallique carrée. On utilise un maillage dont une partie centrale est raffinée trois fois de manière non-conforme (voir Fig. 2.9). Le taux de raffinement est 8 (*i.e.* le maillage est 7-irrégulier). La résolution du maillage de la grille grossière est de 11 points par longueur d'onde. La durée de toutes les simulations est de 43 périodes. L'objectif ici est de tester la stabilité du schéma  $GDDT-\mathbb{P}_p$  en présence d'un raffinement local non-conforme. On montre sur la Fig. 2.10 l'évolution de l'énergie (2.14) pour les différents schémas, pour les CFL numériques. On peut conclure que le schéma est stable.

Afin de comparer la dispersion numérique observée pour les différents schémas  $GDDT-\mathbb{P}_p$ , on réalise la même simulation avec un raffinement de taux 4 et un autre de taux 8. On utilise pour chacun des schémas le pas de temps maximal autorisé par la condition de stabilité numérique. On montre sur les Fig. 2.11 et 2.12 l'évolution temporelle de  $H_x$  en un point du maillage grossier sur les 5 dernières périodes de la simulation (qui en comporte 35) et sur la Fig. 2.13 l'évolution de l'erreur  $L^2$ , pour les deux taux de raffinement considérés. Ces résultats sont à comparer à ceux obtenus dans le cas conforme (Fig. 2.7 (d))



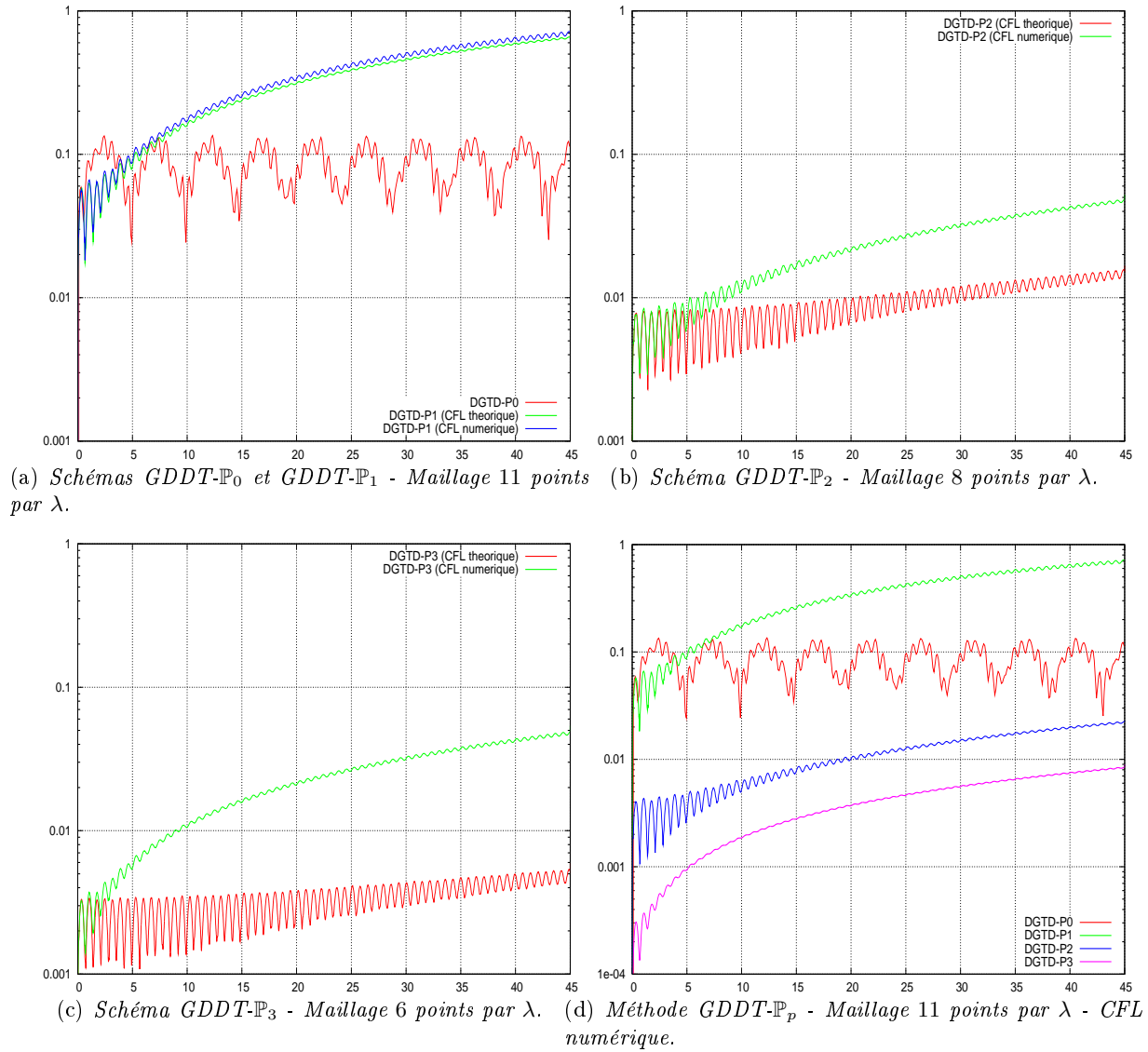


FIG. 2.7 – Evolution temporelle de l'erreur  $L^2$  pour les valeurs théoriques et numériques du CFL. Maillage conforme.

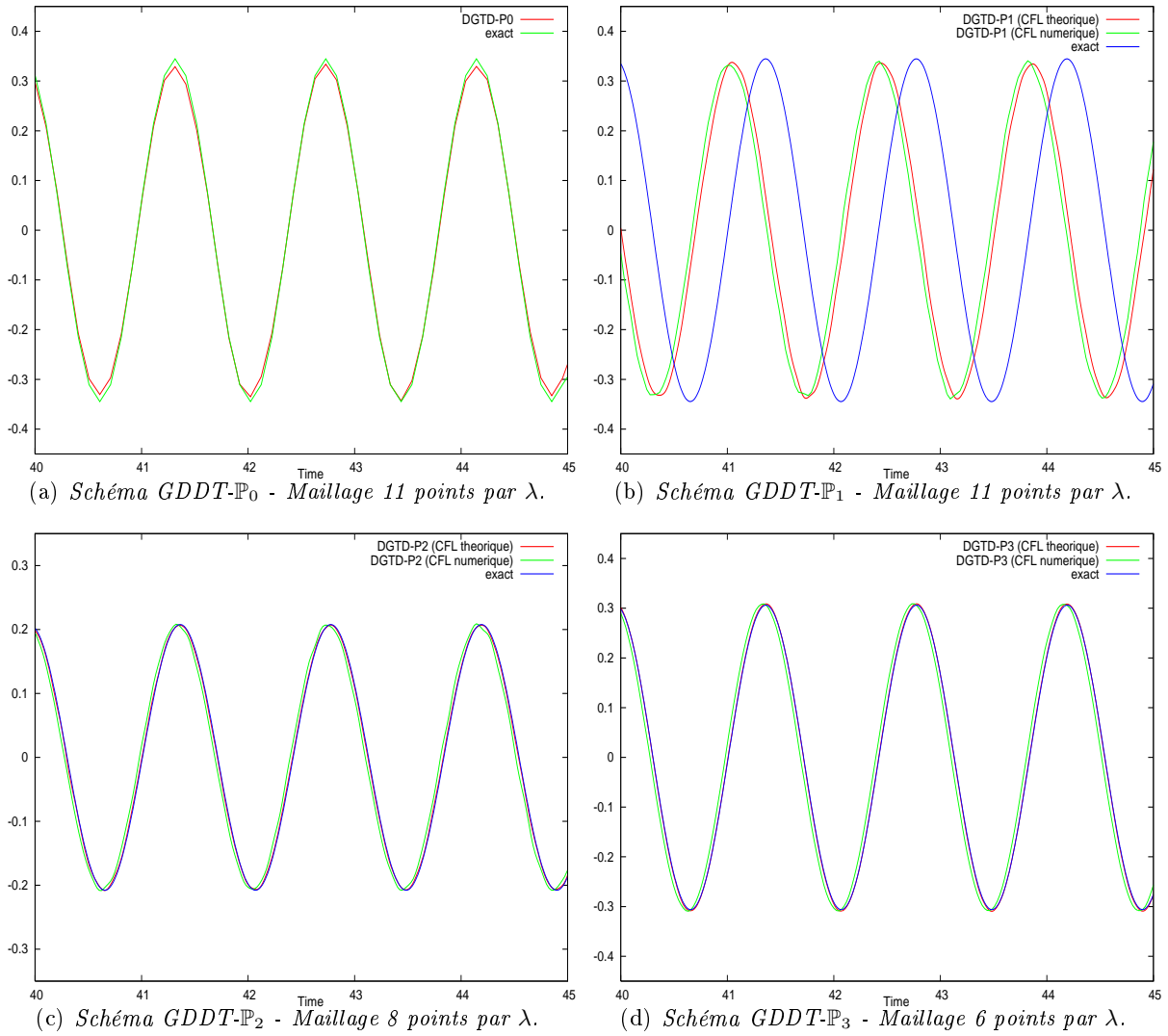


FIG. 2.8 – Evolution temporelle de  $H_x$  en un point du maillage.  
 Méthode  $GDDT-\mathbb{P}_p$  pour les valeurs théoriques et numériques du CFL.  
 Maillage conforme.

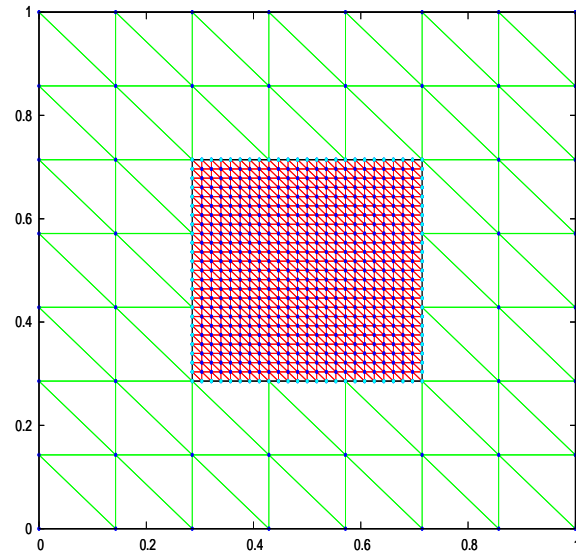


FIG. 2.9 – Maillage non-conforme avec un raffinement local de taux 8.  
Maillage triangulaire 7-irrégulier.

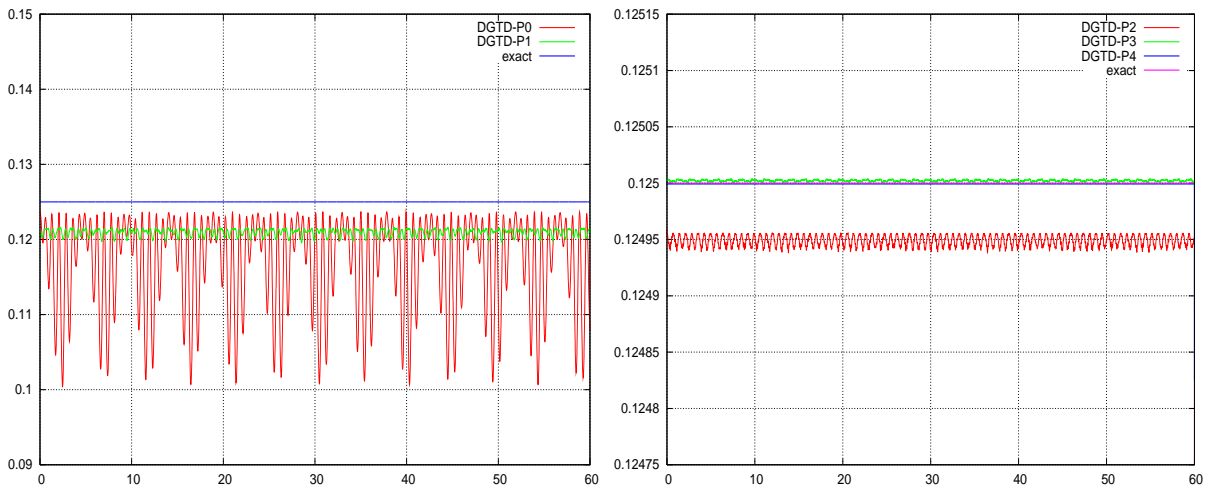


FIG. 2.10 – Evolution temporelle de l'énergie: méthode GDDT- $\mathbb{P}_p$ .  
Maillage non-conforme avec un raffinement local de taux 8.

et 2.8). Bien que moins précis que dans le cas conforme, les résultats sont tout de même satisfaisants compte tenu des forts taux de raffinement traités. On a vérifié numériquement les points suivants:

- Les valeurs théoriques du nombre CFL trouvées dans le cas d'un maillage raffiné sont restrictives.
- Augmenter le degré d'interpolation n'améliore pas les résultats.

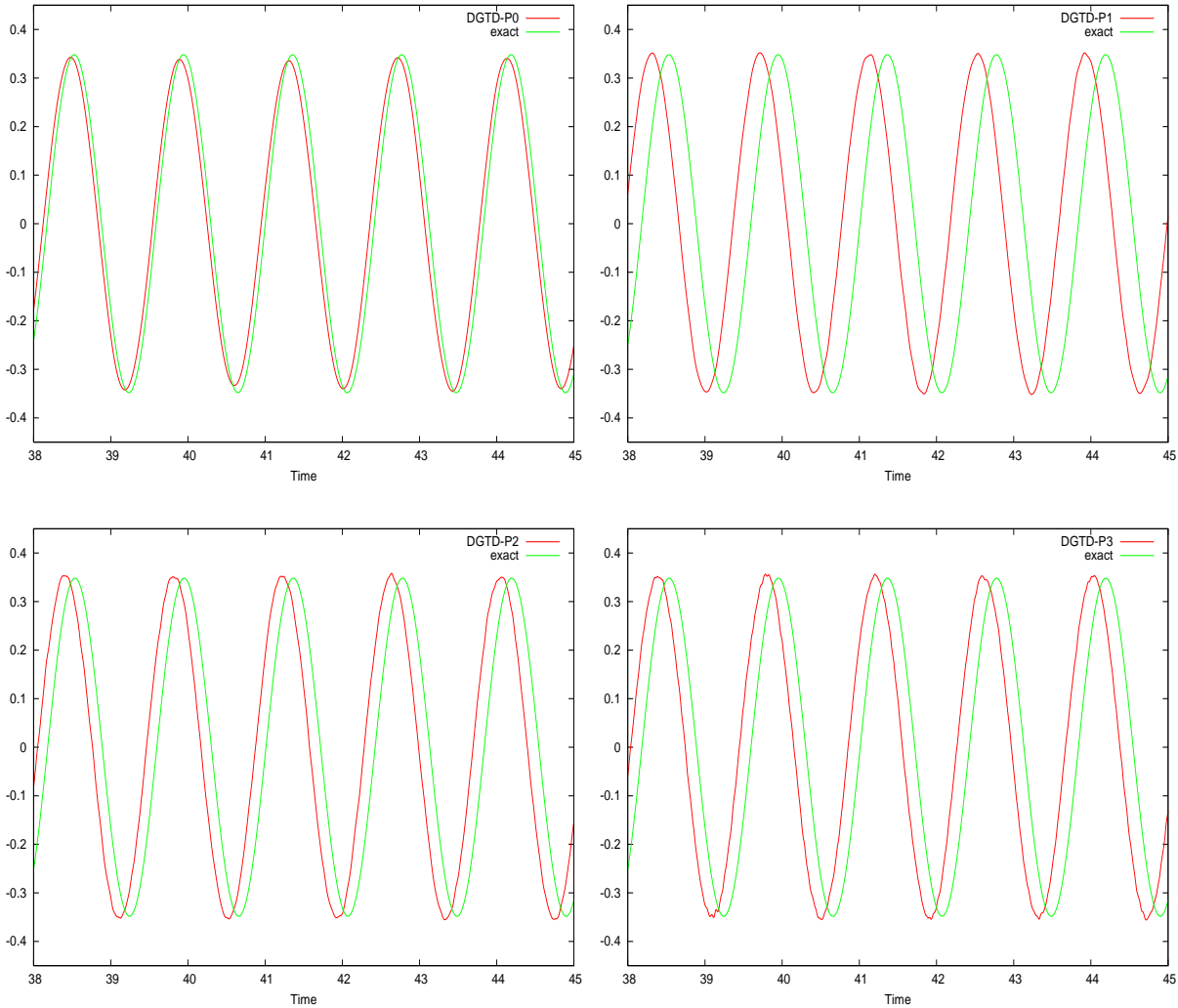


FIG. 2.11 – Evolution temporelle de  $H_x$  en un point du maillage.  
Méthode  $GDDT-\mathbb{P}_p$  - CFL numérique.  
Maillage non-conforme avec raffinement local de taux 4.

**Remarque 2.5** Pour les résultats présentés dans cette section, nous avons utilisé une mise en œuvre préliminaire de la méthode  $GDDT-\mathbb{P}_p$  dans laquelle on fait une approximation pour le calcul de la matrice d'interface (2.12) non-conforme. En effet, pour toute interface conforme ou non-conforme  $s_{ik} = \tau_i \cap \tau_k$ , où  $\tau_i$  et  $\tau_k$  sont deux éléments voisins, on redéfinit la matrice d'interface de la manière suivante:

$$(\mathbb{S}_{ik})_{jl} = \int_{s_{ik}} \varphi_{ij} \varphi_{kl}.$$

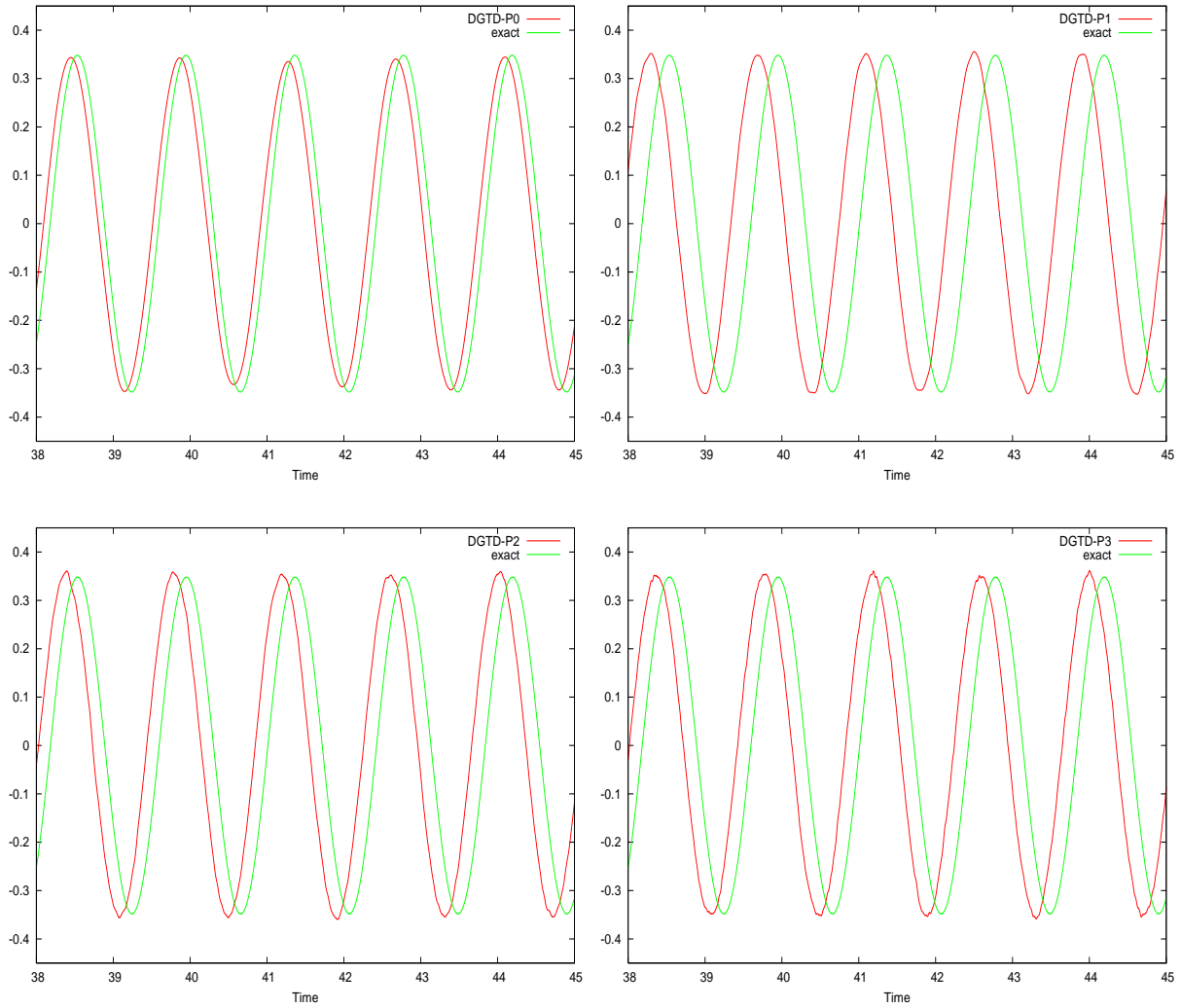


FIG. 2.12 – Evolution temporelle de  $H_x$  en un point du maillage.  
 Méthode GDDT- $\mathbb{P}_p$  - CFL numérique.  
 Maillage non-conforme avec raffinement local de taux 8.

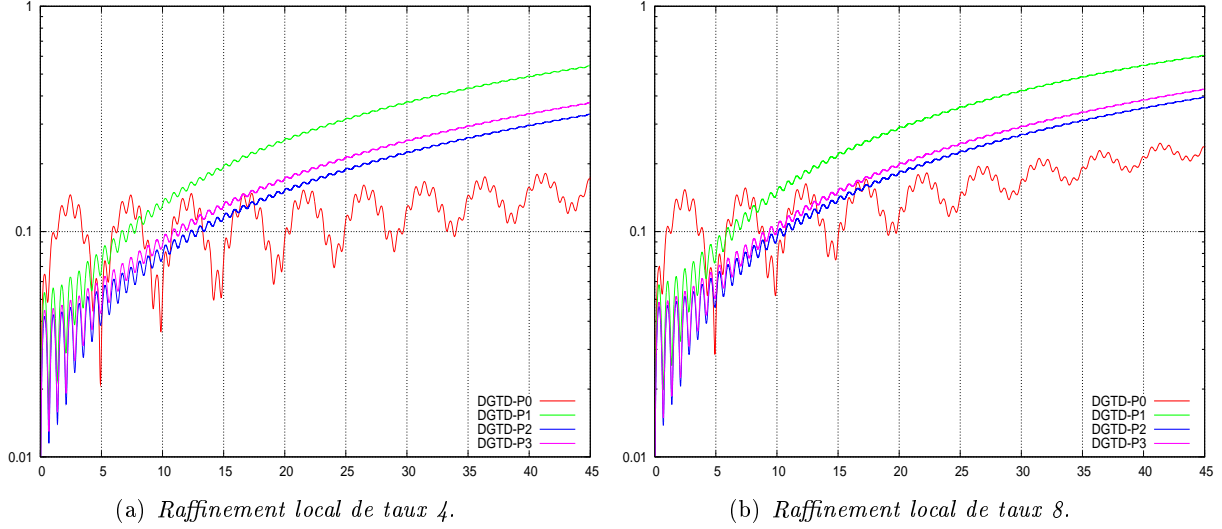


FIG. 2.13 – Evolution temporelle de l'erreur  $L^2$  - Méthode  $GDDT-\mathbb{P}_p$  - CFL numérique. Maillage non-conforme.

Dans le cas d'un maillage conforme, où toutes les interfaces  $s_{ik}$  sont conformes, la matrice  $\mathbb{S}_{ik}$  peut être calculée d'une manière exacte sur chaque interface physique  $s_{ik}$  à partir de la matrice d'interface ( $\mathbb{S}_{ik}^{refer}$ ) $_{jl} = \int_0^1 \psi_j \psi_l$ , où  $\psi$  est une fonction de base définie sur l'élément de référence  $\hat{\tau}$ . Pour un maillage conforme donné  $\Omega_h$  de  $\Omega$  on a la relation suivante:

$$\mathbb{S}_{ik} = |s_{ik}| \mathbb{S}_{ik}^{refer}. \quad (2.36)$$

Dans la pratique,  $\mathbb{S}_{ik}^{refer}$  est calculée une seule fois puis il suffit de la multiplier par  $|s_{ik}|$  (la longueur de  $s_{ik}$ ) pour obtenir  $\mathbb{S}_{ik}$ . Cependant, la formule (2.36) n'est pas appropriée dans le cas d'un maillage non-conforme pour les raisons suivantes:

- [1]. La présence des nœuds flottants et leur distribution sur l'interface influent fortement sur la forme générale de la matrice  $\mathbb{S}_{ik}^{refer}$ . Autrement dit,  $\mathbb{S}_{ik}^{refer}$  perd la propriété de symétrie.
- [2]. La deuxième raison dérive de l'application (2.2). En effet, dans la formule (2.36), la correspondance entre les fonctions de bases  $\{\varphi_{ij}\}_{j=1}^{d_i}$  et  $\{\varphi_{kl}\}_{l=1}^{d_k}$  définies respectivement sur les éléments  $\tau_i$  et  $\tau_k$  et les fonctions de bases  $\psi$  de  $\hat{\tau}$  est établie en utilisant la bijection (2.2) ce qui pose un problème dans le cas non-conforme puisque l'interface  $s_{ik}$  n'est pas un côté complet pour l'un des deux triangles  $\tau_i$  et  $\tau_k$ .

Pour remédier à ce problème, on propose dans la section suivante deux approches pour évaluer la matrice d'interface non-conforme. En particulier, une nouvelle version de la méthode  $GDDT-\mathbb{P}_{p_i}$  a été implémentée en utilisant des formules de quadrature et qui permet l'utilisation de maillages non-conformes avec un nombre arbitraire de nœuds flottants et par conséquent autorise des méthodes  $h$ -raffinement et  $p$ -enrichissement locaux séparément ou simultanément (raffinement de type  $hp$ ).

## 2.4 Calcul de la matrice d'interface non-conforme

L'objectif de cette section est de présenter deux méthodes pour calculer la matrice d'interface (2.12) dans le cas où  $s_{ik}$  est une interface non-conforme. On se restreint au cas 2D mais une partie des développements peut néanmoins se généraliser au cas 3D.

### 2.4.1 Approches basées sur projection et quadrature

On note  $S_F$  la matrice d'interface dont les coefficients sont définis de la manière suivante :

$$(S_F)_{ij} = \int_F \phi_i \psi_j ds, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad \forall j \in \{1, \dots, m\}. \quad (2.37)$$

L'indice  $F = \partial T_1 \cap \partial T_2$  désigne une interface non-conforme du maillage. Les fonctions  $(\phi_i)_{i=1}^n$  et  $(\psi_j)_{j=1}^m$  sont les restrictions à cet interface  $F$  des fonctions de base définies sur les éléments  $T_1$  et  $T_2$  et non identiquement nulles sur  $F$  (voir Fig. 2.14 (a) et (b)). Elles engendrent des espaces de fonctions polynomiales d'un certain degré définies sur  $F$  et on peut imaginer choisir une base différente pour ces espaces afin d'effectuer le calcul de  $S_F$  en s'appuyant sur les calculs que l'on effectuerait dans le cas d'un maillage conforme.

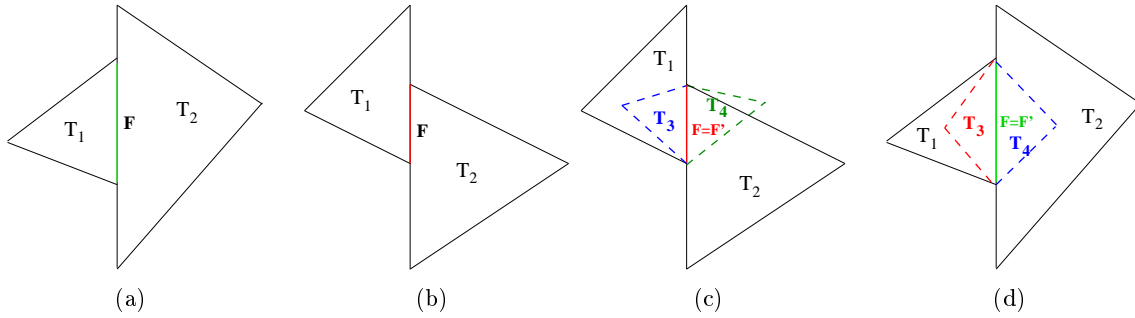


FIG. 2.14 – Deux situations possibles avec un maillage non-conforme.

Dans les Fig. (c) et (d), on remarque que  $F$  est une interface non-conforme pour les triangles  $T_1$  et  $T_2$ , par contre elle est conforme pour les triangles  $T_3$  et  $T_4$  et on l'appelle  $F'$  dans ce cas.

Soient  $(\gamma_k)_{k=1}^n$  une seconde base de l'espace engendré par les  $(\phi_i)_{i=1}^n$  et  $(\zeta_l)_{l=1}^m$  une seconde base de l'espace engendré par les  $(\psi_j)_{j=1}^m$ . Les matrices  $P^1$  et  $P^2$  sont respectivement les matrices de passages des bases  $(\phi_i)_{i=1}^n$  et  $(\psi_j)_{j=1}^m$  aux bases  $(\gamma_k)_{k=1}^n$  et  $(\zeta_l)_{l=1}^m$ . Plus explicitement, on a ainsi :

$$\begin{cases} \phi_i = \sum_{k=1}^n P_{ik}^1 \gamma_k, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}, \\ \psi_j = \sum_{l=1}^m P_{jl}^2 \zeta_l, \quad \forall j \in \{1, \dots, m\}. \end{cases}$$

**Lemme 2.3** Soit  $A_{F'}$  la matrice définie par :

$$(A_{F'})_{ij} = \int_{F'} \gamma_i \zeta_j ds, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad \forall j \in \{1, \dots, m\}.$$

L'indice  $F'$  désigne une interface conforme (la même que  $F$  mais dans une situation conforme, voir Fig. 2.14 (c) et (d)). On a alors le résultat suivant :

$$S_F = P^1 A_{F'} {}^t(P^2). \quad (2.38)$$

La formule (2.38) peut servir au calcul de  $S_F$  et on appellera cette approche dans la suite *approche par projection*. Les matrices  $S_F$  et  $A_{F'}$  sont toutes deux de dimension  $n \times m$  et les matrices  $P^1$  et  $P^2$  sont de dimensions  $n \times n$  et  $m \times m$  respectivement.

**Preuve.** Les étapes du calcul sont les suivantes :

$$\begin{aligned} (S_F)_{ij} &= \int_F \left( \sum_{k=1}^n P_{ik}^1 \gamma_k \right) \left( \sum_{l=1}^m P_{jl}^2 \zeta_l \right) ds \\ &= \sum_{k=1}^n P_{ik}^1 \left( \sum_{l=1}^m \left( \int_{F \equiv F'} \gamma_k \zeta_l ds \right) P_{jl}^2 \right) \\ &= \sum_{k=1}^n P_{ik}^1 \left( \sum_{l=1}^m (A_{F'})_{kl} ({}^t(P^2))_{lj} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n P_{ik}^1 (A_{F'} {}^t(P^2))_{kj} \\ &= (P^1 A_{F'} {}^t(P^2))_{ij}. \end{aligned}$$

□

De plus, la matrice  $S_F$  peut être évaluée en utilisant une formule de quadrature numérique basée sur les zéros des polynômes de Legendre *i.e.* les nœuds de la formule de quadrature de Gauss-Legendre. On note par  $N_G$  le nombre minimal de points et poids de Gauss nécessaires pour obtenir une intégration exacte des polynômes de degré  $\leq 2N_G - 1$ . Une représentation matricielle des opérations à effectuer est la suivante:

$$S_F \simeq Q^1 B {}^t(Q^2), \quad (2.39)$$

où les matrices  $Q^1$  et  $Q^2$  sont respectivement de dimensions  $n \times N_G$  et  $m \times N_G$ , la matrice  $B$  est diagonale et elle est de dimension  $N_G \times N_G$ . Les coefficients de ces matrices sont définis par:

$$\begin{cases} (Q^1)_{ik} = \phi_i(x_k), & \forall 1 \leq i \leq n, \forall 1 \leq k \leq N_G, \\ (Q^2)_{jk} = \psi_j(x_k), & \forall 1 \leq j \leq m, \forall 1 \leq k \leq N_G, \\ (B)_{kk} = \omega_k \quad \text{et} \quad (B)_{rk} = 0, & \forall r \neq k, \forall 1 \leq k \leq N_G. \end{cases}$$

Les paramètres  $x_k$  et  $\omega_k$  sont respectivement les points et les poids de la méthode de Gauss-Legendre. Dans la suite, l'évaluation de  $S_F$  en utilisant la formule (2.39) sera appelée *approche par quadrature*.

La raison du choix de la formule de quadrature Gauss-Legendre est que la fonction poids du polynôme de Legendre est égale à un. Toutefois, on peut utiliser la méthode de Gauss-Lobatto où les deux points aux extrémités du domaine d'intégration sont des nœuds de quadrature et le problème dans ce cas est de choisir les poids  $\omega_k$  et les nœuds restants  $x_k$  pour maximiser le degré d'exactitude de la formule de quadrature. Notons que, pour la méthode de Gauss-Lobatto on a seulement besoin de  $N_G - 2$  points et poids (deux parmi eux sont les extrémités du domaine d'intégration) pour obtenir une intégration exacte des polynômes de degré  $\leq 2N_G - 3$ . Sans entrer dans les détails, on note cependant que pour réduire le



coût de stockage, seuls les nœuds et les poids associés dans l'intervalle  $[0; 0.5]$  sont stockés ( $(N_G + 1)/2$  pour Gauss-Legendre et  $(N_G - 1)/2$  pour Gauss-Lobatto) et on peut trouver les valeurs restantes dans  $[0.5; 1]$  par des arguments de symétrie.

## 2.4.2 Comparaison entre les deux approches

L'objectif est ici de comparer l'approche par projection (2.38) avec l'approche par quadrature (2.39) du point de vue de la complexité de calcul. Pour ce faire, on donne dans la Tab. 2.5 le nombre d'opérations arithmétiques nécessaires pour calculer  $S_F$  par les deux approches.

TAB. 2.5 – Nombre d'opérations arithmétiques pour calculer  $S_F$ .

Opération	Approche par projection	Approche par quadrature
x	$nm(n + m)$	$nN_G(m + 1)$
+	$nm(n + m - 2)$	$nm(N_G - 1)$
Total	$2nm(n + m - 1)$	$n(2mN_G + N_G - m)$

Dans la définition de  $S_F$  (2.37), on a que  $\forall i, \forall j$ , la fonction à intégrer sur l'interface  $F$  est un polynôme de degré  $m + n - 2$  (supposons que  $n \geq m$ ). Par conséquent, pour obtenir une intégration exacte de cette fonction en utilisant la méthode de Gauss-Legendre, il suffit que:

$$m + n - 2 \leq 2N_G - 1 \Rightarrow N_G \geq \frac{n + m - 1}{2} \Rightarrow N_G = \left\lceil \frac{n + m - 1}{2} \right\rceil,$$

où  $\lceil \cdot \rceil$  désigne la fonction partie entière d'un nombre réel. On note  $\mathcal{C}$  la différence entre les nombres d'opérations arithmétiques de l'approche par projection et de l'approche par quadrature. On considère trois cas:

- Si  $n + m - 1$  est un nombre pair, alors  $N_G = \frac{n + m - 1}{2}$  et on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= 2nm(n + m - 1) - n(2mN_G + N_G - m) \\ &= mn^2 + nm^2 - \frac{nm}{2} - \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} \\ &= n^2\left(m - \frac{1}{2}\right) + mn\left(m - \frac{1}{2}\right) + \frac{n}{2} > 0, \forall m, \forall n. \end{aligned}$$

- Si  $n + m - 1$  est un nombre impair, alors  $N_G = \frac{n + m}{2}$  et on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= 2nm(n + m - 1) - n(2mN_G + N_G - m) \\ &= 2mn^2 + 2nm^2 - 2mn - nm^2 - mn^2 - \frac{n^2}{2} + \frac{mn}{2} \\ &= n^2\left(m - \frac{1}{2}\right) + mn\left(m - \frac{3}{2}\right) > 0, \forall m, \forall n \text{ tels que } (n, m) \neq 1. \end{aligned}$$

- Si  $n = m = 1$ , alors  $\mathcal{C} = 0$  et les deux approches sont équivalentes.

On recense dans la Tab. 2.6 le nombre d'opérations total pour les deux approches et pour les cas les plus fréquemment observés *i.e.*  $n = m$ ,  $n = m + 1$  et  $n = m + 2$ .

Par conséquent, on peut conclure que l'approche par quadrature est toujours la moins coûteuse.

TAB. 2.6 – Nombre d'opérations arithmétiques pour calculer  $S_F$ .

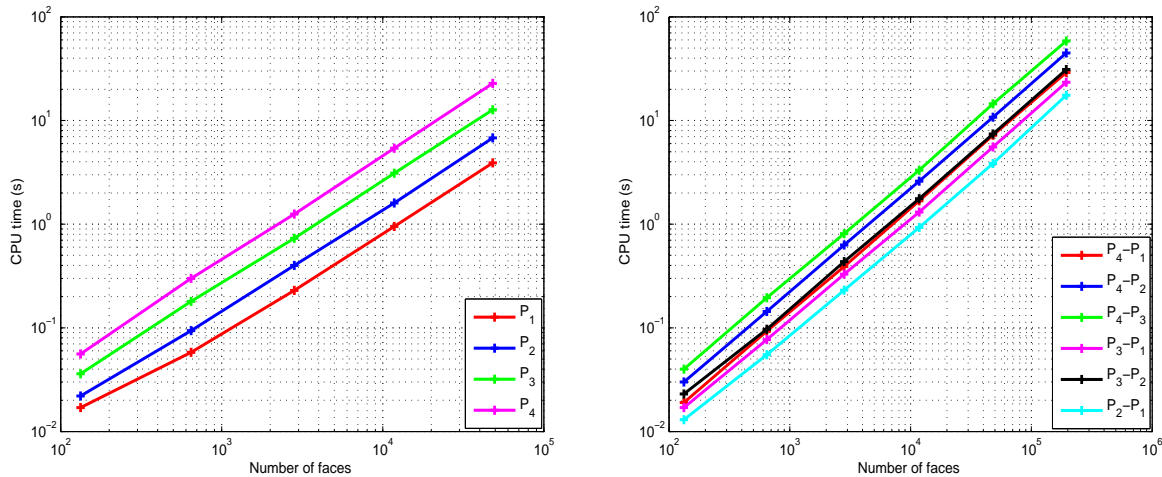
Cas	Approche par projection	Approche par quadrature
$n = m$	$2m^2(2m - 1)$	$2m^3$
$n = m + 1$	$4m^2(m + 1)$	$2m^2(m + 1)$
$n = m + 2$	$(m + 2)(4m^2 + 2m)$	$(m + 2)(2m^2 + 2m + 1)$

**Remarque 2.6** Dans le cas du maillage non-conforme de la situation de la Fig. 2.14 (a), le choix  $P^1 = I$  (la matrice identité) et donc  $S_F = A_{F'}^t(P^2)$  est envisageable et permet de réduire le coût de calcul de  $S_F$ . Concernant l'approche par projection, on a uniquement besoin du produit de deux matrices et le coût dans ce cas diminue (voir Tab. 2.7). Par contre, pour l'approche par quadrature, on a toujours besoin de multiplier trois matrices et le nombre d'opérations ne change pas.

TAB. 2.7 – Nombre d'opérations arithmétiques pour calculer  $S_F$ .  
Cas d'un maillage non-conforme classique.

Opération	Approche par projection	Approche par quadrature
x	$nm^2$	$nN_G(m + 1)$
+	$nm(m - 1)$	$nm(N_G - 1)$
Total	$nm(2m - 1)$	$n(2mN_G + N_G - m)$

On trace sur la Fig. 2.15 le coût CPU (en secondes) pour évaluer  $S_F$  en fonction du nombre de faces, en utilisant l'approche par quadrature numérique de Gauss-Legendre. Le temps CPU croît très lentement par rapport au nombre de faces. La méthode de Gauss-Legendre a été implémentée en Fortran 77 et le calcul a été réalisé sur une station de travail équipée d'un processeur Intel P4 cadencé à 3.6 GHz.

FIG. 2.15 – Coût de calcul de  $S_F$  en utilisant l'approche par quadrature de Gauss-Legendre. Pour  $n = m$  (gauche) et pour  $n \neq m$  (droite) ( $n$  est le degré dans  $T_1$  et  $m$  le degré dans  $T_2$ ).

## 2.5 Résultats numériques pour $h$ -raffinement et $p$ -enrichissement

On présente dans cette section des expériences numériques visant à évaluer la performance pratique des versions  $h$ -raffinement et  $p$ -enrichissement de la méthode GDDT- $\mathbb{P}_{p_i}$  basée sur la formule de quadrature décrite ci-dessus, en utilisant des maillages conformes et non-conformes avec un nombre arbitraire des nœuds flottants. La méthode  $h$ -raffinement implique une modification de la taille de l'élément (pour un  $p$  fixé) alors que la méthode  $p$ -enrichissement consiste à modifier localement le degré polynomial (pour une taille de maillage  $h$  fixée). Notre principal objectif est de comparer les schémas GDDT- $\mathbb{P}_{p_i}$  sur la base de la dispersion numérique observée et de valider le choix du calcul de la matrice d'interface non-conforme par la formule de quadrature. Notons que dans cette section on suppose que le degré polynomial  $p_i = p$  est uniforme dans tous les éléments de maillage.

On simule comme dans la Sec. 2.3 l'évolution du mode propre  $(1, 1)$  dans une cavité métallique carrée. Puisque la solution exacte est connue, on peut évaluer la précision des schémas GDDT- $\mathbb{P}_p$  à partir de la dispersion numérique observée. Cette fois-ci, on utilise différents maillages en fonction de la valeur du degré d'interpolation  $p$ . Tout d'abord, un maillage grossier et un autre fin sont construits (leurs caractéristiques sont résumées dans la Tab. 2.8). Ensuite, des maillages non-conformes (7-irréguliers) sont obtenus en raffinant localement trois fois une région centrale des maillages conformes (voir Fig. 2.9). Les caractéristiques des maillages 7-irréguliers résultants sont données dans la Tab. 2.9. Les simulations numériques portent sur 43 périodes.

TAB. 2.8 – *Caractéristiques des maillages conformes pour chaque  $p$ .*

	# triangles	# faces	# nœuds
$p = 0, 1$	288	456	169
$p = 2, 3, 4$	72	120	49

TAB. 2.9 – *Caractéristiques des maillages non-conformes (7-irréguliers) pour chaque  $p$ .*

	# triangles grossiers	# triangles fins	# faces conformes	# faces non-conformes	# nœuds	# nœuds flottants
$p = 0, 1$	256	2048	3408	128	1121	112
$p = 2, 3, 4$	64	512	840	64	273	56

On montre sur les Fig. 2.16 et 2.17 l'évolution temporelle de  $H_x$  en un point donné du maillage grossier pour chaque schéma GDDT- $\mathbb{P}_p$ . On peut constater que pour les deux maillages conformes et non-conformes, les solutions fournies par la méthode GDDT- $\mathbb{P}_p$  ( $p \geq 2$ ) sont très proches de la solution exacte. D'autre part, les solutions associées aux schémas GDDT- $\mathbb{P}_0$  et GDDT- $\mathbb{P}_1$  présentent une forte erreur de dispersion sur des maillages conformes et non-conformes bien que pour les maillages non-conformes les solutions semblent plus précises. L'erreur  $L^2$  globale sur le champ électromagnétique  $(H_x, H_y, E_z)$  de la méthode GDDT- $\mathbb{P}_p$  est présentée sur la Fig. 2.18. Ces erreurs augmentent avec le temps à cause de la dispersion numérique, cependant, le niveau de dispersion est moindre pour  $p \geq 2$ . Enfin, la Fig. 2.19 montre les distributions 1D des solutions exactes et approchées de la composante  $H_x$  pour  $y = 0.75$  et  $p \leq 2$ . Une comparaison entre les résultats présentés ici et ceux de la Sec. 2.3, permet de confirmer le choix de l'approche par quadrature pour calculer la matrice d'interface non-conforme.

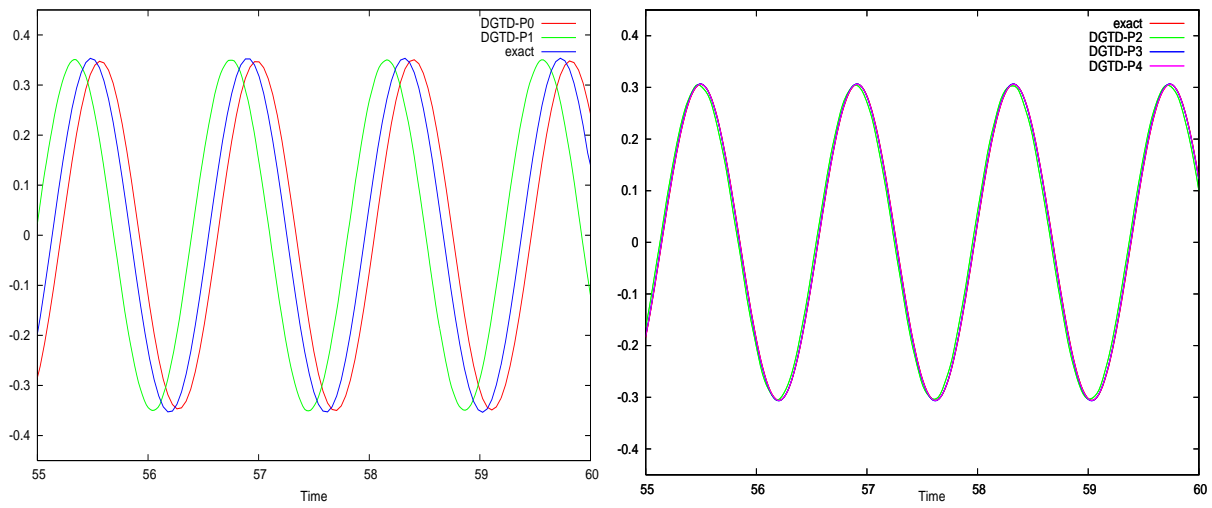


FIG. 2.16 – Evolution temporelle de  $H_x$ : méthode  $GDDT-\mathbb{P}_p$  et solution exacte. Maillages conformes.

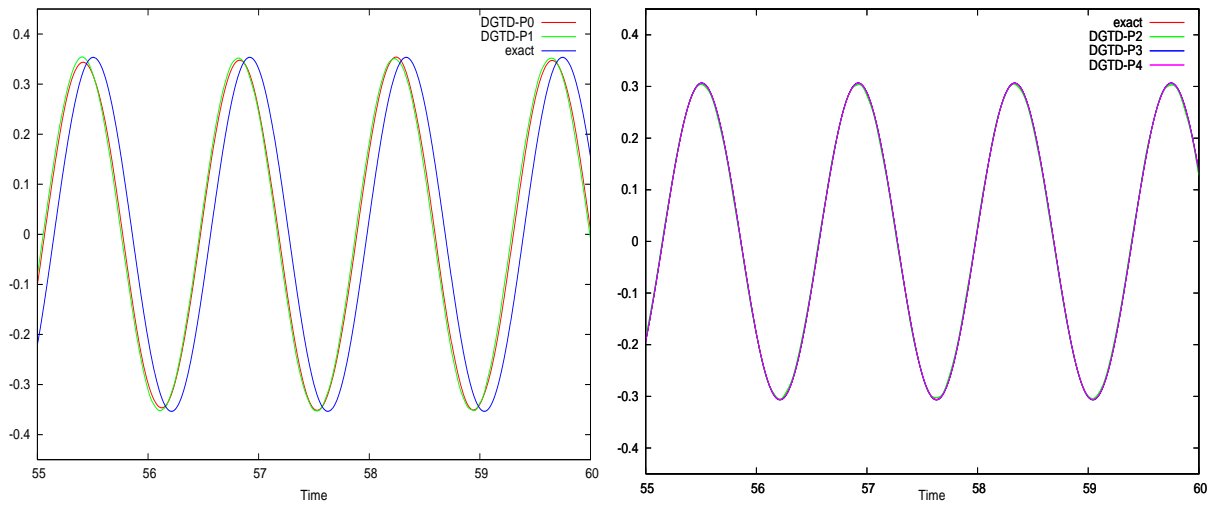


FIG. 2.17 – Evolution temporelle de  $H_x$ : méthode  $GDDT-\mathbb{P}_p$  et solution exacte. Maillages non-conformes.

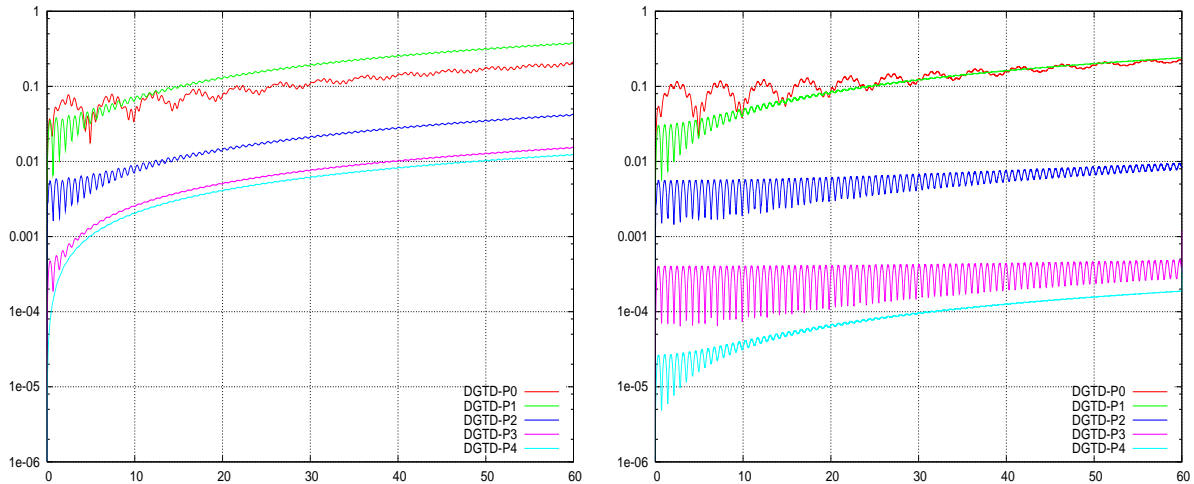


FIG. 2.18 – Evolution temporelle de l'erreur  $L^2$ : méthode  $GDDT-\mathbb{P}_p$ .  
Maillages conformes (gauche) et non-conformes (droite).

En résumé, on peut conclure que :

- Pour un  $h$  fixé, augmenter le degré polynomial  $p$  peut réduire l'erreur de dispersion pour  $p \geq 2$ .
- Pour un degré polynomial fixé  $p$ , lorsque le maillage est localement raffiné et autorisant des nœuds flottants, la précision de la solution est préservée et l'erreur de dispersion est réduite.
- Pour  $p = 0, 1$ , la solution présente une grande erreur de dispersion même si le maillage est localement raffiné.

### 2.5.1 Cas d'un maillage non-conforme général

Dans cette section, on étudie l'influence du maillage non-conforme général, *i.e.* les nœuds flottants ne sont pas placés uniformément sur les arêtes (voir Fig. 1.15), sur la qualité de la solution. On simule l'évolution du mode propre  $(1, 1)$  en utilisant deux maillages non-conformes généraux (voir Fig. 2.20) et deux maillages conformes réguliers (MCR1 et MCR2). Les simulations portent sur 43 périodes. Les caractéristiques des maillages, les erreurs  $L^2$  et le temps CPU sont donnés dans la Tab. 2.10. On montre sur la Fig. 2.21 l'évolution temporelle de  $E_z$  en un point sur une interface non-conforme. Les solutions se comparent très bien avec la solution exacte. L'erreur  $L^2$  globale de la méthode  $GDDT-\mathbb{P}_p$  obtenue avec les maillages conformes et non-conformes est tracée sur la Fig. 2.22. Les erreurs provenant des maillages non-conformes se comparent avec celles obtenues avec des maillages conformes bien que les maillages non-conformes contiennent un grand nombre de nœuds flottants et moins de triangles par rapport aux maillages conformes. On peut conclure en se basant sur ces expériences numériques que le maillage non-conforme général n'influe pas sur la qualité de la solution.

Notons ici, que ce type de maillage non-conforme a été récemment utilisé dans [BHP07] pour calculer les valeurs propres de l'opérateur de Maxwell en utilisant une méthode Galerkin discontinue. Les auteurs ont observés que ce type de maillage a pollué les valeurs propres et aussi généré des valeurs propres non-physiques malgré le fait que les maillages utilisés contenaient au maximum 3 nœuds flottants.

Dans la section suivante, on propose une approche qui combine  $h$ -raffinement et  $p$ -enrichissement pour entre autres réduire l'erreur de dispersion des schémas  $GDDT-\mathbb{P}_p$ .

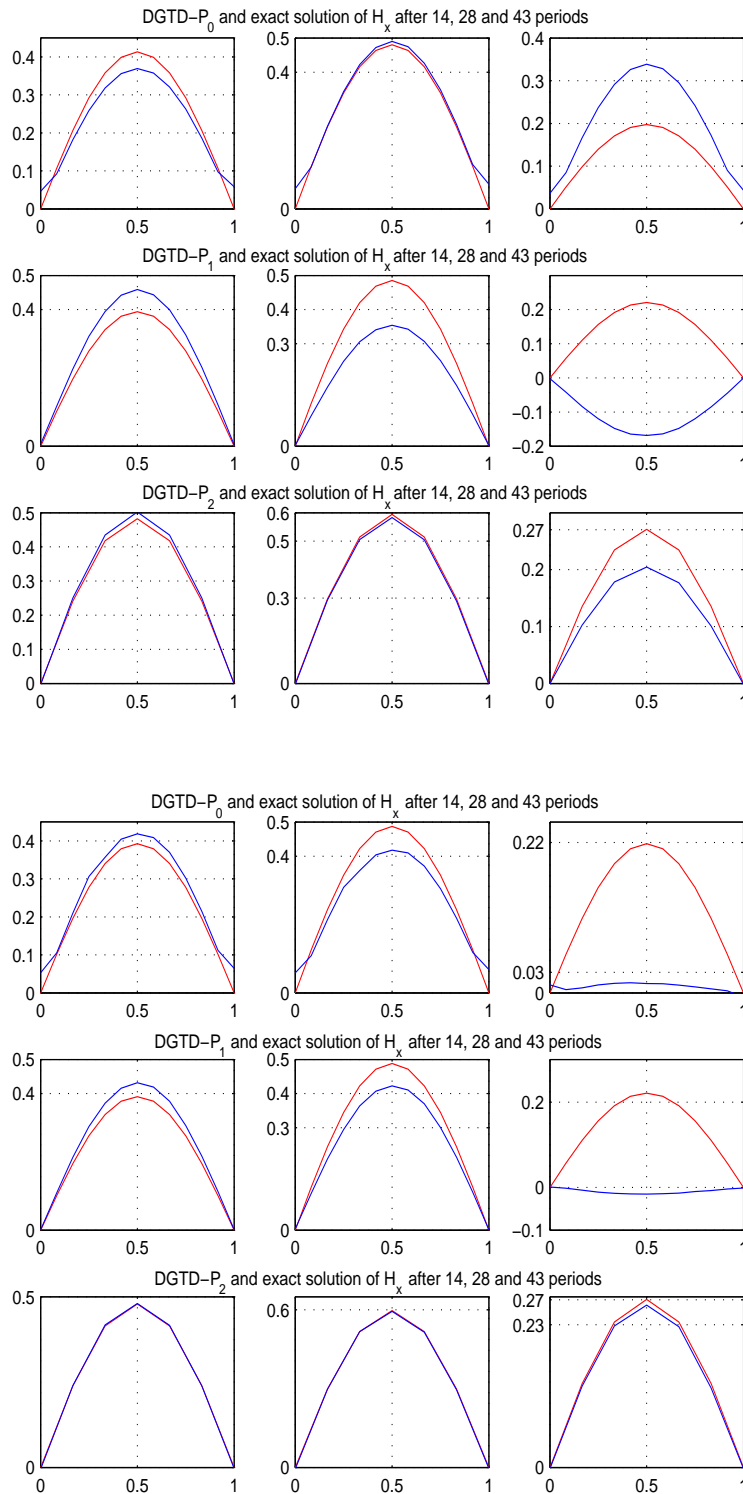


FIG. 2.19 – Distributions 1D de  $H_x$  pour  $y = 0.75$ .  
 Méthode GDDT- $\mathbb{P}_p$  ( $p \leq 2$ ) et solution exacte (en bleu).  
 Maillages conformes (haut) et non-conformes (bas).

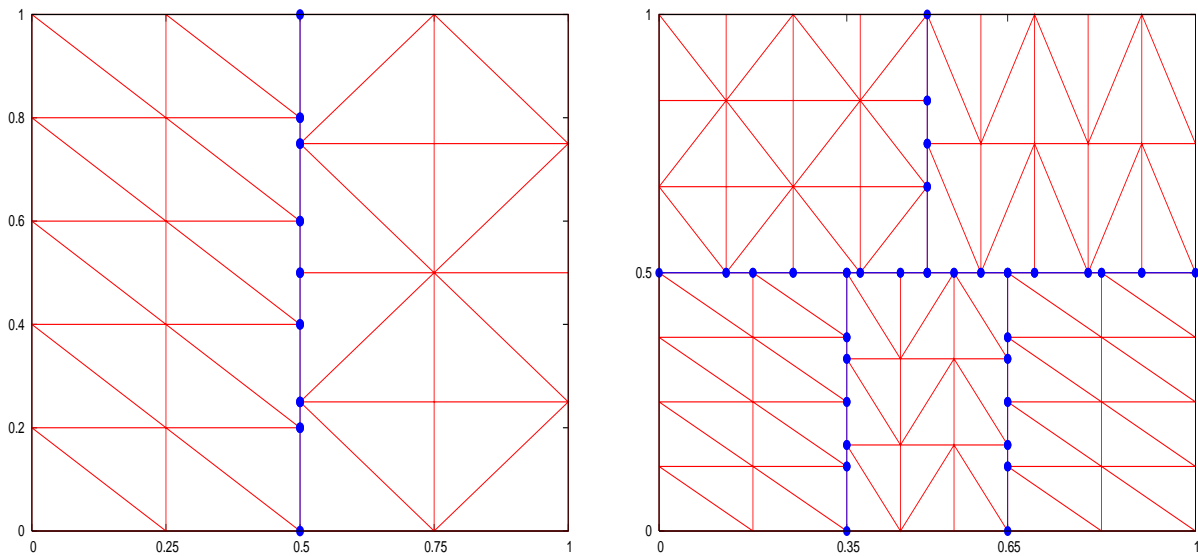


FIG. 2.20 – Maillages non-conformes généraux: *MNCG1* (gauche) et *MNCG2* (droite).

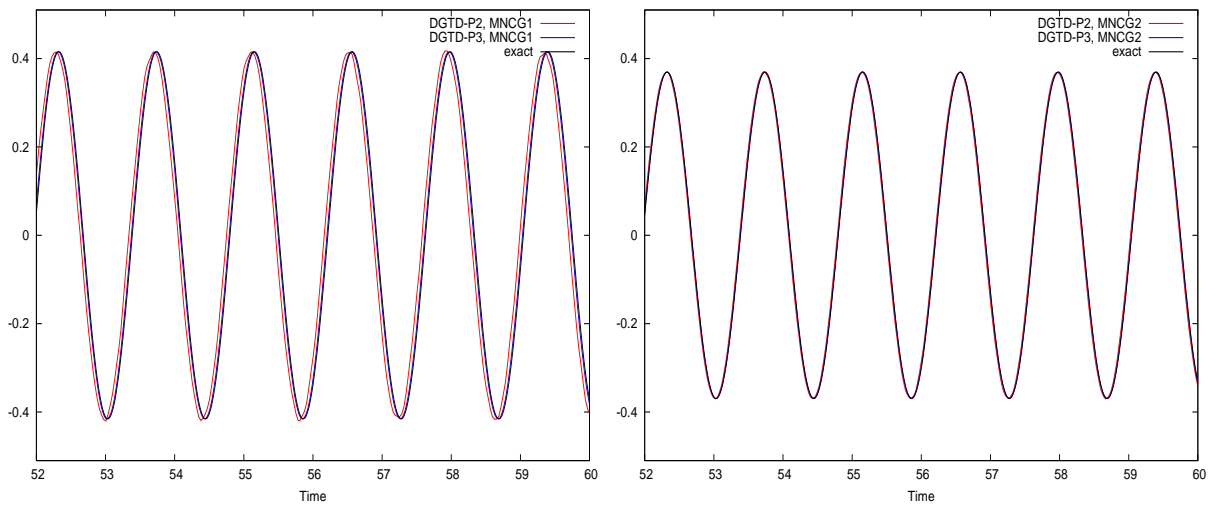


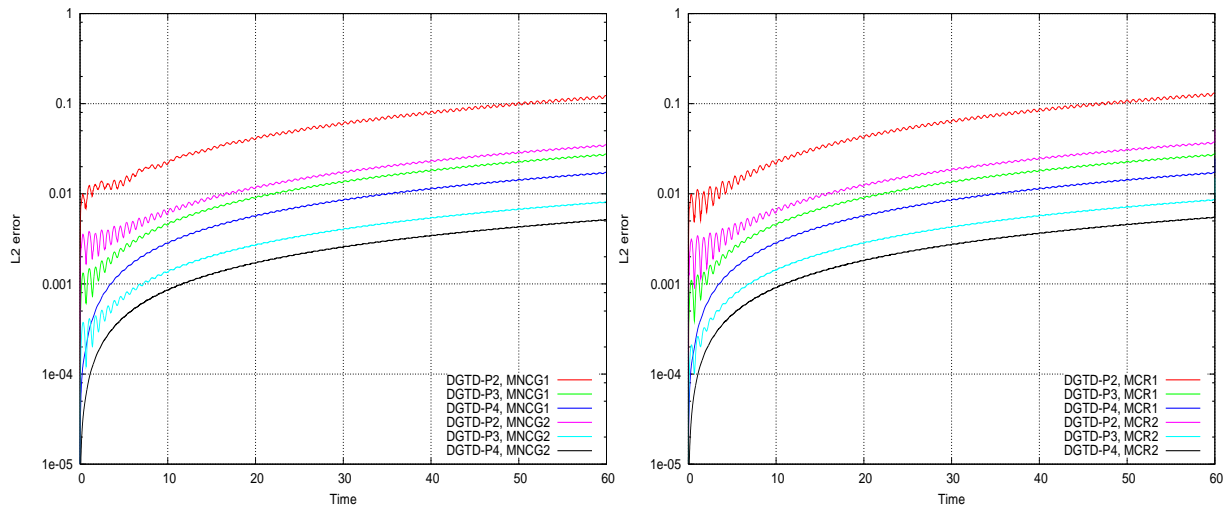
FIG. 2.21 – Evolution temporelle de  $E_z$ : méthode  $GDDT-\mathbb{P}_p$  et solution exacte. Maillages *MNCG1* (gauche) et *MNCG2* (droite).

TAB. 2.10 – Comparaison entre maillages non-conformes généraux et maillages réguliers conformes. Erreur  $L^2$ , # DOF et le temps CPU (en secondes) sont mesurés après 43 périodes, pour différentes configurations de la méthode  $GDDT-\mathbb{P}_p$ .

Maillage non-conforme général	MNCG1			MNCG2		
	# nœuds	31			76	
# triangles	36			94		
# nœuds flottants	9			32		
# faces	66			169		
	GDDT- $\mathbb{P}_2$	GDDT- $\mathbb{P}_3$	GDDT- $\mathbb{P}_4$	GDDT- $\mathbb{P}_2$	GDDT- $\mathbb{P}_3$	GDDT- $\mathbb{P}_4$
Erreur $L^2$	1.2E-01	2.7E-02	1.7E-02	3.5E-02	8.1E-03	5.2E-03
# DOF	216	360	540	564	940	1410
Temps CPU	1.3	3.9	7.1	5	15	31

Maillage conforme régulier	MCR1			MCR2		
	# nœuds	30			81	
# triangles	40			128		
# nœuds flottants	-			-		
# faces	69			208		
	GDDT- $\mathbb{P}_2$	GDDT- $\mathbb{P}_3$	GDDT- $\mathbb{P}_4$	GDDT- $\mathbb{P}_2$	GDDT- $\mathbb{P}_3$	GDDT- $\mathbb{P}_4$
Erreur $L^2$	1.3E-01	2.7E-02	1.7E-02	3.7E-02	8.6E-03	5.5E-03
# DOF	240	400	600	768	1280	1920
Temps CPU	1.4	4.2	7.8	5.5	18	37


 FIG. 2.22 – Evolution temporelle de l'erreur  $L^2$ : méthode  $GDDT-\mathbb{P}_p$ . Maillages MNCG (gauche) et MCR (droite).



## 2.6 Une méthode Galerkin discontinue de type $hp$

On propose dans cette section une méthode GDDT de type  $hp$  dans laquelle on combine  $h$ -raffinement et  $p$ -enrichissement. On a vu dans la Sec. 2.5 que l'erreur de dispersion n'est pas réduite lorsque le  $h$ -raffinement est combiné aux schémas GDDT- $\mathbb{P}_p$  ( $p = 0, 1$ ). En outre, le  $p$ -enrichissement nécessite un grand nombre de degrés de liberté et est plus coûteux en mémoire et temps CPU (qui augmentent avec  $p$ ). La méthode GDDT de type  $hp$  étudiée ici permet d'éliminer ou de réduire fortement l'erreur de dispersion et de diminuer le coût de calcul.

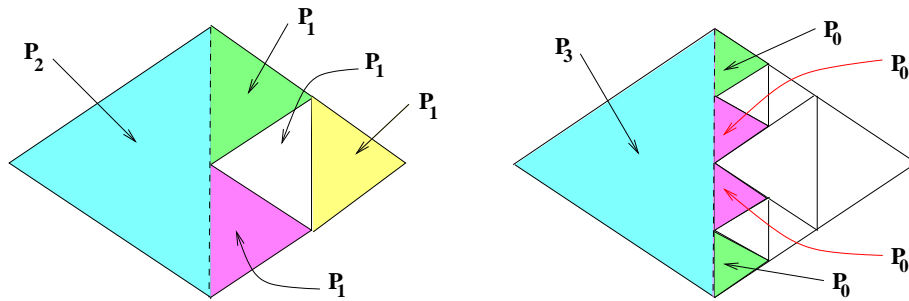


FIG. 2.23 – Exemples de représentations des champs.

Afin d'améliorer la représentation des champs dans le cas d'un maillage localement raffiné, la méthode GDDT de type  $hp$  consiste à utiliser des polynômes d'ordre élevé dans le maillage grossier et des polynômes de degré moindre dans le maillage raffiné (e.g. les éléments raffinés). On nomme le schéma résultant par méthode GDDT- $\mathbb{P}_{p_c}:\mathbb{P}_{p_f}$ , où  $p_c$  et  $p_f$  sont des degrés polynomiaux dans les éléments grossiers et fins respectivement. Si  $p_c = p_f = p$ , on retrouve la méthode GDDT- $\mathbb{P}_p$  classique étudiée dans la Sec. 2.5 (aussi dans [FLR06]). On montre sur la Fig. 2.23 deux représentations différentes des champs, la première utilise des approximations  $\mathbb{P}_2$  et  $\mathbb{P}_1$  et la deuxième utilise des approximations  $\mathbb{P}_3$  et  $\mathbb{P}_0$ . La stabilité d'une telle méthode GDDT- $\mathbb{P}_{p_c}:\mathbb{P}_{p_f}$  est assurée sous des conditions de type CFL. On recense dans la Tab. 2.11 les valeurs du CFL observées numériquement pour certains degrés polynomiaux. Ces valeurs sont à comparer avec celles obtenues pour le schéma GDDT- $\mathbb{P}_p$  (voir Tab. 2.4). On peut remarquer que pour  $p_c = p_f + 1 = p + 1$ , la méthode GDDT- $\mathbb{P}_{p_c}:\mathbb{P}_{p_f}$  possède la même limite de stabilité que la méthode GDDT- $\mathbb{P}_p$ . Ce n'est pas une surprise, puisque la méthode GDDT- $\mathbb{P}_{p_c}$ , qui possède un domaine de stabilité réduit puisque  $p_c > p_f$ , n'est utilisée que sur les éléments du maillage grossier (lesquels sont au moins deux fois plus grands que les éléments du maillage raffiné).

TAB. 2.11 – Valeurs numériques du nombre CFL: méthode GDDT- $\mathbb{P}_{p_c}:\mathbb{P}_{p_f}$ .

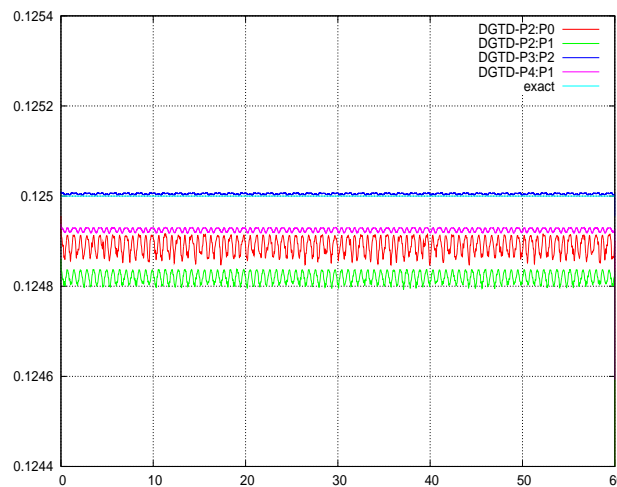
Schéma	GDDT- $\mathbb{P}_1:\mathbb{P}_0$	GDDT- $\mathbb{P}_2:\mathbb{P}_0$	GDDT- $\mathbb{P}_3:\mathbb{P}_0$	GDDT- $\mathbb{P}_4:\mathbb{P}_0$	GDDT- $\mathbb{P}_2:\mathbb{P}_1$
CFL	0.7	0.4	0.3	0.18	0.3
Schéma	GDDT- $\mathbb{P}_3:\mathbb{P}_1$	GDDT- $\mathbb{P}_4:\mathbb{P}_1$	GDDT- $\mathbb{P}_3:\mathbb{P}_2$	GDDT- $\mathbb{P}_4:\mathbb{P}_2$	GDDT- $\mathbb{P}_4:\mathbb{P}_3$
CFL	0.25	0.18	0.15	0.15	0.1

Afin de valider la méthode, on considère à nouveau le cas test de l'évolution du mode propre (1,1) dans une cavité métallique carrée et on applique divers schémas GDDT- $\mathbb{P}_{p_c}:\mathbb{P}_{p_f}$  en utilisant le maillage triangulaire non-conforme 7-irrégulier de la Fig. 2.9. Le nombre de points par longueur d'onde  $\lambda/h$  est égal à 6 dans le maillage grossier (sans raffinement) et 48 dans la région raffinée (voir Tab. 2.12).

Les degrés de liberté sont initialisés par la projection de la solution exacte sur les fonctions de base locales. On montre sur la Fig. 2.24 l'évolution temporelle de l'énergie pour certains degrés polynomiaux  $p_c$  et  $p_f$  après 43 périodes. On peut clairement voir que l'énergie est conservée. On compare sur les Fig. 2.25 et 2.26 l'évolution temporelle des valeurs exactes et approchées de la composante  $H_x$  en un point donné du maillage grossier (les cinq dernières périodes sur 43 sont montrées) pour les schémas  $\text{GDDT-}\mathbb{P}_{p_c}:\mathbb{P}_0$  et  $\text{GDDT-}\mathbb{P}_{p_c}:\mathbb{P}_1$  ( $p_c \geq 2$ ). On note que ces schémas n'introduisent pas trop de dispersion dans le maillage grossier où la valeur du CFL n'est pas optimale. Bien que le niveau de raffinement soit élevé, le maillage grossier est caractérisé par un nombre modéré de points par longueur d'onde. En ce qui concerne le schéma  $\text{GDDT-}\mathbb{P}_1:\mathbb{P}_0$ , on peut observer que celui-ci est dispersif (voir Fig. 2.27) ce qui n'est pas surprenant, car comme on l'a mentionné dans la Sec. 2.5, les schémas  $\text{GDDT-}\mathbb{P}_1$  et  $\text{GDDT-}\mathbb{P}_0$  sont dispersifs. On montre sur la Fig. 2.28 les distributions 1D (pour  $y = 0.75$ ) de la composante  $H_x$  pour les solutions exactes et approchées. Ces courbes doivent être comparées avec celles de la Fig. 2.19 (bas). On peut noter que les solutions fournies par les schémas  $\text{GDDT-}\mathbb{P}_{p_c}:\mathbb{P}_1$  ( $p_c = 2, 3$ ) se comparent très bien avec la solution du schéma  $\text{GDDT-}\mathbb{P}_2$ , et les solutions fournies par les schémas  $\text{GDDT-}\mathbb{P}_{p_c}:\mathbb{P}_0$  ( $p_c = 2, 3$ ) sont plus précises que celles des schémas  $\text{GDDT-}\mathbb{P}_1$  et  $\text{GDDT-}\mathbb{P}_0$ . L'évolution temporelle de l'erreur  $L^2$  du champ électromagnétique ( $H_x, H_y, E_z$ ) pour les méthodes  $\text{GDDT-}\mathbb{P}_{p_c}:\mathbb{P}_{p_f}$  est montrée sur la Fig. 2.29. On peut observer qu'il n'est pas nécessaire d'augmenter le degré polynomial dans le maillage grossier au delà de  $p_f + 2$ . La Fig. 2.29 est à comparer avec la Fig. 2.18 (droite) qui correspond aux schémas  $\text{GDDT-}\mathbb{P}_p$  (i.e.  $p_c = p_f = p$ ). Il apparaît que les schémas  $\text{GDDT-}\mathbb{P}_{p_c}:\mathbb{P}_1$  ( $p_c = 3, 4$ ) sont plus précise (sur la base de l'erreur  $L^2$ ) que le schéma  $\text{GDDT-}\mathbb{P}_2$ , alors que ce dernier est comparable aux schémas  $\text{GDDT-}\mathbb{P}_{p_c}:\mathbb{P}_0$  ( $p_c = 3, 4$ ). On peut voir aussi que le schéma  $\text{GDDT-}\mathbb{P}_3:\mathbb{P}_2$  possède un niveau d'erreur similaire au schéma  $\text{GDDT-}\mathbb{P}_3$ .

TAB. 2.12 – *Caractéristiques du maillage 7-irrégulier.*

# triangles grossiers	# triangles fins	# faces conformes	# faces non-conformes	# nœuds	# nœuds flottants
64	512	840	64	273	56

FIG. 2.24 – *Evolution temporelle de l'énergie: méthode  $\text{GDDT-}\mathbb{P}_{p_c}:\mathbb{P}_{p_f}$ . Maillage non-conforme 7-irrégulier.*

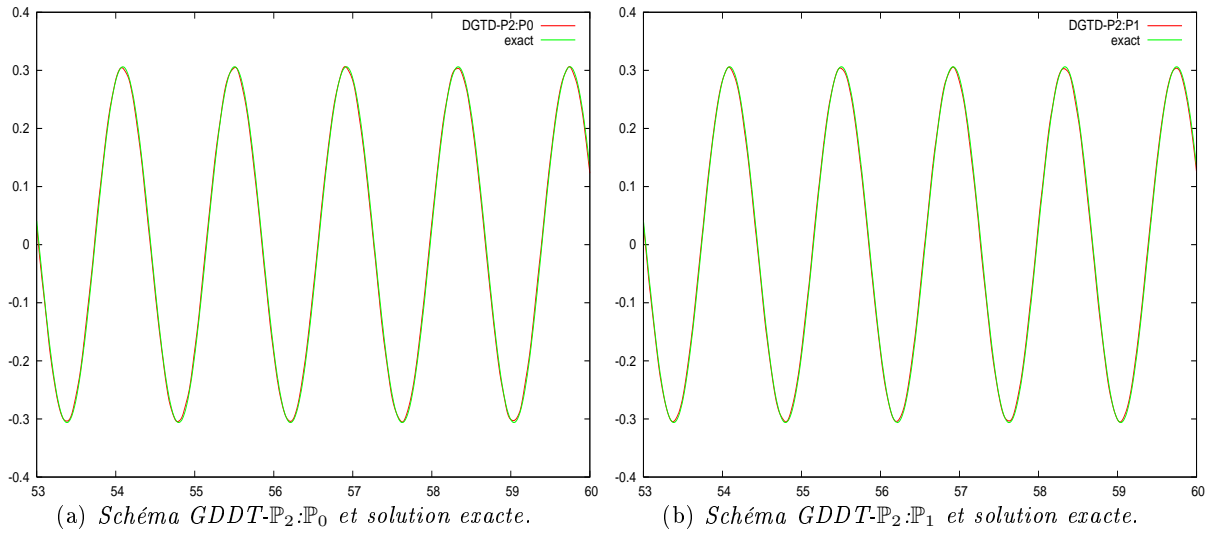


FIG. 2.25 – Evolution temporelle de  $H_x$ : zoom sur les cinq dernières périodes. Maillage non-conforme 7-irrégulier.

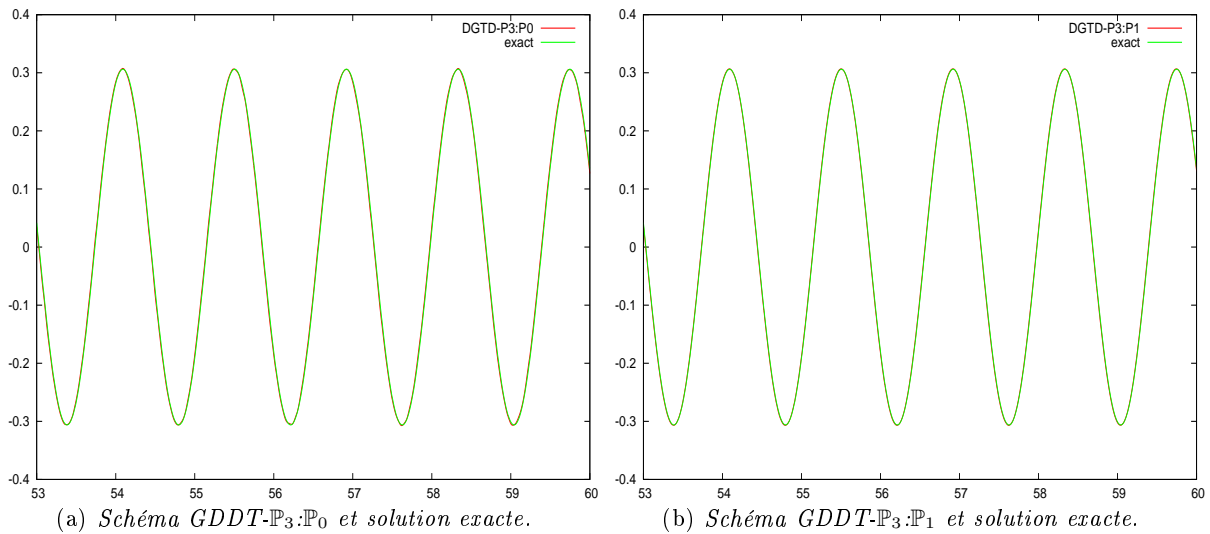


FIG. 2.26 – Evolution temporelle de  $H_x$ : zoom sur les cinq dernières périodes. Maillage non-conforme 7-irrégulier.

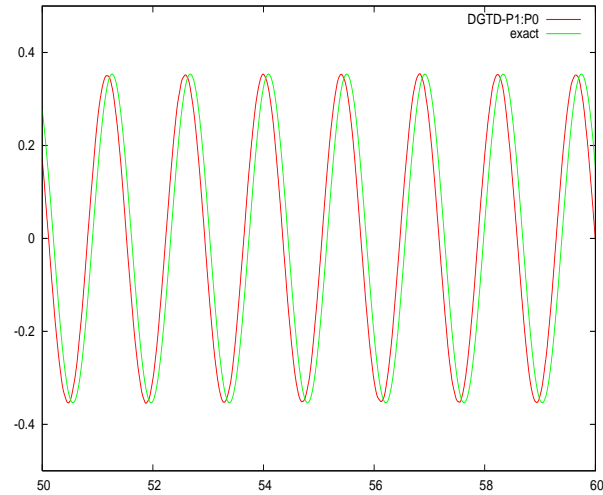


FIG. 2.27 – Evolution temporelle de  $H_x$ : zoom sur les sept dernières périodes.  
Schéma  $GDDT-\mathbb{P}_1:\mathbb{P}_0$  et solution exacte.  
Maillage non-conforme 7-irrégulier.

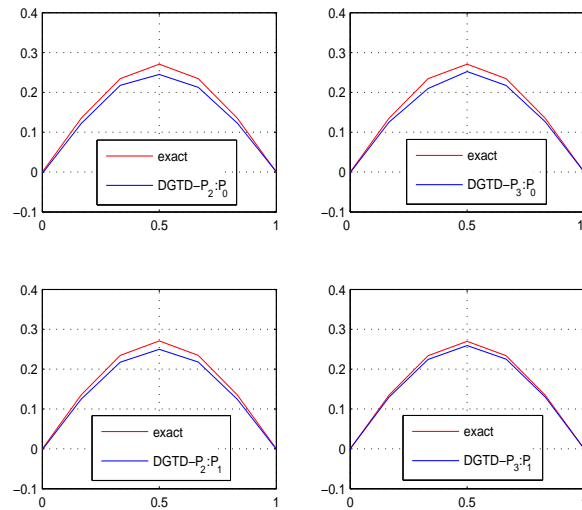


FIG. 2.28 – Distributions 1D de  $H_x$  pour  $y = 0.75$  après 43 périodes.  
Méthode  $GDDT-\mathbb{P}_{p_c}:\mathbb{P}_{p_f}$  et solution exacte.  
Maillage non-conforme 7-irrégulier.

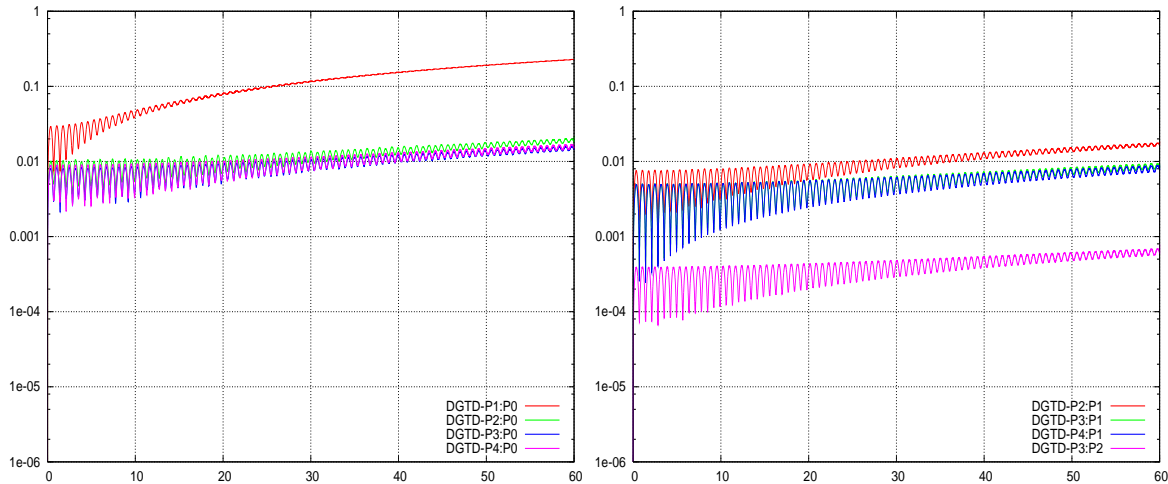


FIG. 2.29 – Evolution temporelle de l'erreur  $L^2$ : méthode  $GDDT-\mathbb{P}_{p_c}:\mathbb{P}_{p_f}$ .  
Maillage non-conforme 7-irrégulier.

Enfin, quelques conclusions peuvent être tirées de cette étude:

- La méthode  $GDDT-\mathbb{P}_{p_c}:\mathbb{P}_{p_f}$  peut réduire (ou éliminer) l'erreur de dispersion qui dérive des schémas  $GDDT-\mathbb{P}_p$  pour  $p = 0, 1$ .
- L'augmentation du degré polynomial au delà de  $p_f + 2$  dans le maillage grossier n'améliore pas nettement les résultats.

## 2.7 Conclusion

Nous avons étudié dans ce chapitre la stabilité d'une méthode Galerkin discontinue  $GDDT-\mathbb{P}_{p_i}$  pour la résolution numérique des équations de Maxwell bidimensionnelles en domaine temporel sur des maillages triangulaires non-conformes. Cette méthode combine l'utilisation d'un schéma centré pour l'évaluation des flux aux interfaces entre éléments voisins du maillage avec un schéma d'intégration en temps de type saute-mouton précis au second ordre. Les composantes du champ électromagnétique sont approchées sur chaque triangle par des fonctions de base nodales polynomiales discontinues. Le degré d'interpolation qui caractérise cette approximation peut varier d'un élément du maillage à un autre. Une analyse théorique a permis de vérifier que la méthode conserve un équivalent discret de l'énergie électromagnétique. La stabilité est alors obtenue en démontrant que l'énergie discrète utilisée est une forme quadratique définie positive de ces variables sous une condition de type CFL. Considérant le cas du raffinement local non-conforme d'un maillage triangulaire, nous avons étudié plus précisément le lien entre la stabilité et la non-conformité géométrique, et nous avons exhibé des conditions pour lesquelles les méthodes  $GDDT-\mathbb{P}_{p_i}$  sont stables. Une première implémentation de la méthode a été réalisée en adoptant un traitement simplifié des intégrales de surface dans le cas d'un maillage non-conforme, et un ordre d'interpolation uniforme. La méthode  $GDDT-\mathbb{P}_p$  résultante est dispersive même pour un ordre d'interpolation  $p$  élevé. Pour remédier à ce problème, une deuxième implémentation a été réalisée en utilisant une formule de quadrature de Gauss-Legendre pour calculer la matrice d'interface non-conforme et qui autorise l'utilisation de maillages non-conformes avec un nombre arbitraire de nœuds flottants et des  $h$ -raffinements et  $p$ -enrichissements locaux. Dans ce cas, de très bon résultats sont obtenus pour des simulations en temps long et avec

un taux de raffinement élevé. En particulier, la dispersion numérique est diminuée sauf pour  $p = 0, 1$ . On a enfin proposé une méthode GDDT de type  $hp$  nommée  $\text{GDDT-}\mathbb{P}_{p_c}:\mathbb{P}_{p_f}$ , qui utilise des polynômes d'interpolation d'ordre élevé  $p_c$  dans la partie du maillage non-raffinée, et des polynômes d'ordre plus faible  $p_f$  dans la zone raffinée. Des expériences numériques sur un cas test académique montrent que la méthode  $\text{GDDT-}\mathbb{P}_{p_c}:\mathbb{P}_{p_f}$  permet de réduire notablement l'erreur de dispersion numérique exhibée par la méthode  $\text{GDDT-}\mathbb{P}_p$  ( $p = 0, 1$ ).

Dans le chapitre suivant, on se concentre sur les deux points suivants:

- la validation des méthodes GDDT étudiées dans ce chapitre sur des problèmes mettant en jeu des géométries complexes et des matériaux hétérogènes,
- une étude numérique de la convergence des méthodes GDDT complétée par une évaluation des gains potentiels en termes de coûts de calcul et consommation mémoire résultant de la non-conformité géométrique.



# Numerical evaluation of non-conforming DGTD methods

## Sommaire

---

<b>3.1 Homogeneous media . . . . .</b>	<b>76</b>
3.1.1 Concentric cylinders PEC resonator . . . . .	76
3.1.2 Circular PEC resonator . . . . .	83
3.1.3 Wedge-shaped PEC resonator . . . . .	89
<b>3.2 Heterogeneous media . . . . .</b>	<b>95</b>
3.2.1 Rectangular PEC resonator with one material interface . . . . .	96
3.2.2 Dielectric in a PEC cavity with two material interfaces . . . . .	102
3.2.3 Scattering of a plane wave by a dielectric cylinder . . . . .	105
3.2.4 Scattering of a plane wave by a multilayered dielectric cylinder . . . . .	118
<b>3.3 Concluding remarks . . . . .</b>	<b>124</b>

---

This chapter is dedicated to a detailed numerical evaluation of the non-dissipative, non-conforming discontinuous Galerkin methods on triangular meshes previously introduced in Chapter 2, for solving the two-dimensional time-domain Maxwell equations. In [Fah08a], a  $hp$ -like DGTD (Discontinuous Galerkin Time-Domain) method is considered, where the interpolation degree is defined at the element level and the mesh is refined locally in a non-conforming way. The resulting DGTD- $\mathbb{P}_{p_c}:\mathbb{P}_{p_f}$  method combines a centered approximation for the evaluation of fluxes at the interface between neighboring elements of the mesh, with a second-order leap-frog time integration scheme. Moreover, non-conforming meshes with arbitrary-level hanging nodes are allowed. Here, our objective is to assess the convergence, the stability and the efficiency of the method, but also discuss its limitations, through numerical experiments for 2D propagation problems in homogeneous and heterogeneous media with various types and locations of material interfaces.

*This chapter is an enhanced version of the research report [Fah07].*

A theoretical convergence analysis of the DGTD- $\mathbb{P}_{p_i}$  method is conducted in [FLLP05] in the case of a conforming simplicial mesh and a uniform  $p_i = p$ . It is shown that the convergence order in space and time is:

$$\mathcal{O}(Th^{\min(s,p)}) + \mathcal{O}(\Delta t^2) \tag{3.1}$$



where  $t \in [0, T]$  and  $s$  is a regularity parameter. One can note that the asymptotic convergence order is bounded by 2 independently of the interpolation degree  $p$  and the formula (3.1) seems to be suboptimal. This comes from the fact that the leap-frog time-scheme is second-order accurate. According to the authors, the formula (3.1) applies equally in the presence of a non-conforming refinement of the mesh ( $h$ -refinement). Our attention is turned to the numerical validity of this result especially in the cases of the  $h$ -refinement,  $p$ -enrichment and combined  $hp$ -refinement DGTD methods proposed in Chapter 2 with non-conforming meshes.

### 3.1 Homogeneous media

In this section, we consider several wave propagation problems in homogeneous media for which analytical solutions exist. Our objectives are the following:

- to assess numerically and compare the convergence of the conforming and non-conforming DGTD methods,
- to provide insights regarding the overall performances of the  $hp$ -refinement DGTD- $\mathbb{P}_{pc}:\mathbb{P}_{pf}$  method,
- to compare, on one hand, the conforming DGTD- $\mathbb{P}_p$  method with the non-conforming one and, on the other hand, the  $hp$ -refinement method with the  $h$ -refinement one.

The above points are studied by considering the following test cases:

- [1]. a concentric cylinders PEC resonator,
- [2]. a circular PEC resonator,
- [3]. a wedge-shaped PEC resonator.

#### 3.1.1 Concentric cylinders PEC resonator

We consider a resonator which consists of two concentric PEC cylinders with an electromagnetic wave bouncing back and forth between the walls (see Fig. 3.1). The material is taken to be the vacuum *i.e.*  $\epsilon = \mu = 1$  (relative quantities). The radii of the two cylinders are  $r_1 = 1/6$  and  $r_2 = 1/2$ . The exact time-domain solution of the problem is [DDH01]-[DHD01]:

$$\begin{aligned}
 E_z &= \cos(\omega t + \theta)[J_1(\omega r) + aY_1(\omega r)], \\
 H_x &= -\frac{1}{2} \sin(\omega t + \theta) \sin(\theta)[J_0(\omega r) - J_2(\omega r) + a(Y_0(\omega r) - Y_2(\omega r))] \\
 &\quad - \frac{\cos(\theta)}{\omega r} \cos(\omega t + \theta)[J_1(\omega r) + aY_1(\omega r)], \\
 H_y &= \frac{1}{2} \sin(\omega t + \theta) \cos(\theta)[J_0(\omega r) - J_2(\omega r) + a(Y_0(\omega r) - Y_2(\omega r))] \\
 &\quad - \frac{\sin(\theta)}{\omega r} \cos(\omega t + \theta)[J_1(\omega r) + aY_1(\omega r)],
 \end{aligned}$$

for  $r_1 < r < r_2$ , where  $(r, \theta) = (\sqrt{x^2 + y^2}, \arctan(y/x))$  are the usual polar coordinates;  $J_n$  and  $Y_n$  ( $n$  is a positive integer) stand for the  $n$ th-order Bessel functions of the first and second kind, respectively.

The values of the parameters  $\omega$  and  $a$  are obtained by enforcing the boundary condition  $E_z = 0$  at  $r = r_1$  and  $r = r_2$ . Then, as in [DDH01], we set  $\omega = 9.813695999428405$  and  $a = 1.76368380110927$ . First, a quasi-uniform conforming mesh is constructed (see Fig. 3.2 left). Then a non-conforming mesh is obtained by locally refining a cylindrical zone as shown on Fig. 3.2 right. Contour lines of the  $E_z$  component at times  $t = 1$  and  $t = 10$  are shown on Fig. 3.3 for a calculation based on the conforming DGTD- $\mathbb{P}_1$  method.

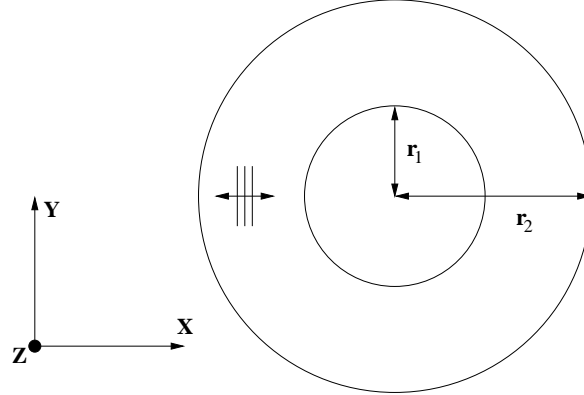


FIG. 3.1 – Concentric cylinders PEC resonator setting.

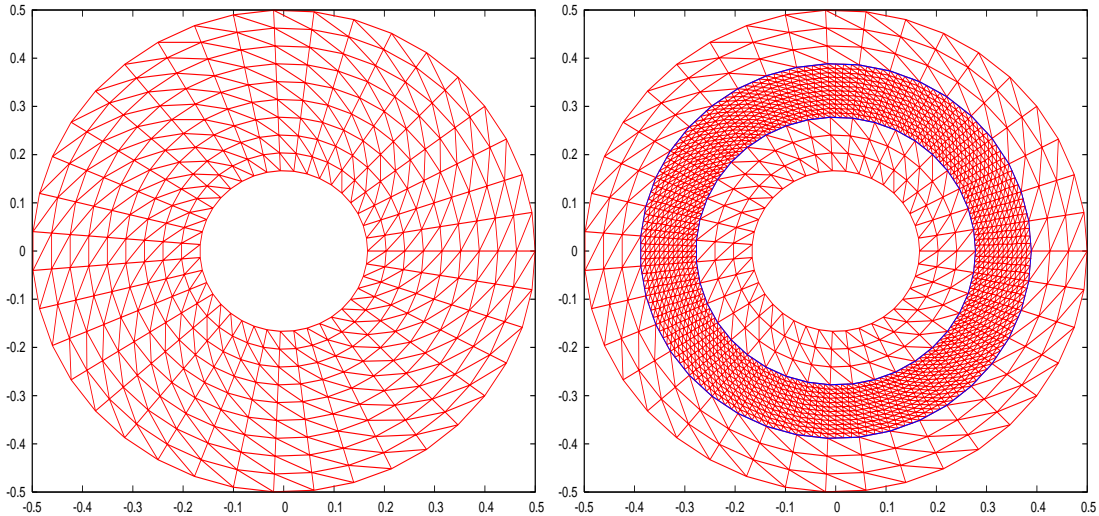


FIG. 3.2 – Concentric cylinders PEC resonator.  
Example of conforming (left) and non-conforming (right) triangular meshes.

Two strategies are considered for this problem: the first one is the DGTD- $\mathbb{P}_p$  (or  $h$ -refinement) method and the second one is the DGTD- $\mathbb{P}_{p_c}:\mathbb{P}_{p_f}$  (or  $hp$ -refinement) method.

**$h$ -refinement DGTD- $\mathbb{P}_p$  method.** We first consider the case where the interpolation degree  $p$  is uniform and the mesh size  $h$  is varied. In Tab. 3.1, we summarize the CFL values evaluated numerically for some values of  $p$  (i.e. by assessing the limit beyond which we observe a growth of the discrete energy). Tab. 3.2 and 3.3 give the  $L^2$  error on the electric field component  $E_z$ , the convergence rate, the CPU

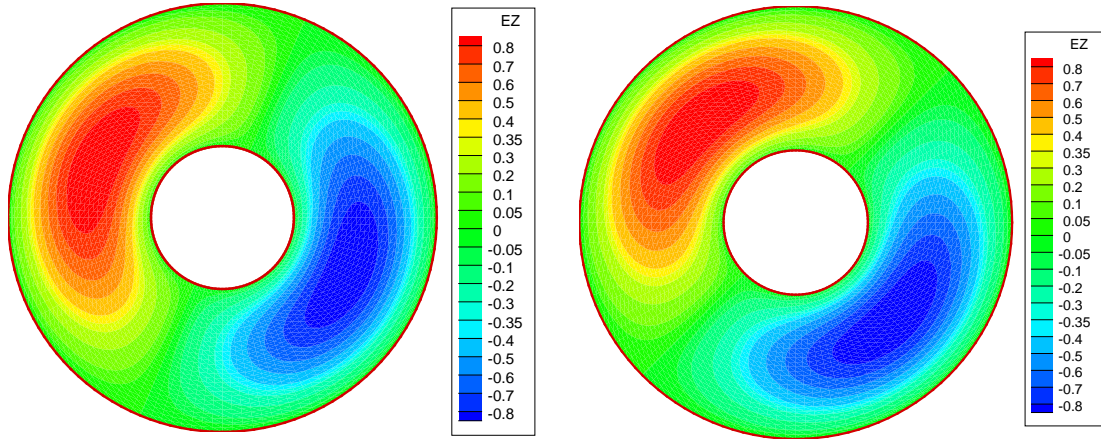


FIG. 3.3 – Concentric cylinders PEC resonator.  
 Contour lines of  $E_z$  at times  $t = 1$  (left) and  $t = 10$  (right).  
 DGTD- $\mathbb{P}_1$  method using a conforming mesh with 1088 nodes and 2048 triangles.

time and the number of time steps ( $\# \Delta t$ ) to reach time  $t = 1$ , and using sequences of conforming and non-conforming meshes. The characteristics of these meshes are also listed in Tab. 3.2 and 3.3. The non-conforming meshes are obtained by refining (one refinement level) the cylindrical zone  $1/3 \leq r \leq 3/8$ . Fig. 3.4 shows the  $L^2$  error on  $E_z$  as a function of the square root of the total number of degrees of freedom ( $\#$  DOF). We can deduce from Tab. 3.2 and 3.3 that, for both conforming and non-conforming meshes, the DGTD- $\mathbb{P}_p$  method converges as  $h^{(2)}$  for  $p \geq 1$  and as  $h^{(1)}$  for  $p = 0$ .

TAB. 3.1 – Concentric cylinders PEC resonator.  
 Numerical CFL values of the DGTD- $\mathbb{P}_p$  method.

$p$	0	1	2	3	4
CFL	1.0	0.3	0.2	0.1	0.09

**$hp$ -refinement DGTD- $\mathbb{P}_{p_c}:\mathbb{P}_{p_f}$  method.** We now consider the case where both  $p$  and  $h$  are locally refined. The observed numerical CFL values for the DGTD- $\mathbb{P}_{p_c}:\mathbb{P}_{p_f}$  method are summarized in Tab. 3.4. We give in Tab. 3.5 the  $L^2$  error on  $E_z$ , the convergence rate, the CPU time and the number of time steps to reach time  $t = 1$  using non-conforming meshes which are obtained by refining the zone  $1/3 \leq r \leq 3/8$  as previously. Fig. 3.5 shows the  $L^2$  error on  $E_z$  as a function of the square root of the number of DOF. Clearly, the DGTD- $\mathbb{P}_{p_c}:\mathbb{P}_{p_f}$  method converges as  $h^{(2)}$  for  $p_f \neq 0$ , while the convergence rate for  $p_f = 0$  is more than  $\mathcal{O}(h^{(1.5)})$ ,  $\forall p_c$ .

In summary, the results given in Tab. 3.2, 3.3 and 3.5 motivates the following remarks:

- In the case of the  $h$ -refinement DGTD- $\mathbb{P}_p$  method, using both conforming and non-conforming meshes, it is not necessary to increase the interpolation degree  $p$  to more than 2. Clearly, doing so does not improve the convergence rate. Furthermore, to reach a given error level, the DGTD- $\mathbb{P}_3$  method is more expensive than the DGTD- $\mathbb{P}_2$  one.

TAB. 3.2 – Concentric cylinders PEC resonator.  
 Convergence study of the  $h$ -refinement DGTD- $\mathbb{P}_p$  method using conforming meshes.  
 $L^2$  error,  $\# \Delta t$  and CPU time in seconds are measured at time  $t = 1$ .

Characteristics of the conforming meshes.							
# nodes	# triangles	# DOF	$L^2$ error	conv. rate	CPU time	# $\Delta t$	
DGTD- $\mathbb{P}_0$							
1088	2048	2048	5.24E-02	–	2	80	
4224	8192	8192	2.62E-02	1.00	9	158	
16640	32768	32768	1.31E-02	1.00	74	313	
66048	131072	131072	6.56E-03	1.00	593	624	
DGTD- $\mathbb{P}_1$							
288	512 (mesh-A <sup>a</sup> )	1536	2.52E-02	–	2	137	
1088	2048 (mesh-B)	6144	6.46E-03	1.96	9	266	
4224	8192 (mesh-C)	24576	1.65E-03	1.97	65	525	
16640	32768 (mesh-D)	98304	4.11E-04	2.00	524	1043	
DGTD- $\mathbb{P}_2$							
	mesh-A	3072	1.44E-02	–	3	205	
	mesh-B	12288	3.58E-03	2.01	21	399	
	mesh-C	49152	8.93E-04	2.00	168	787	
	mesh-D	196608	2.23E-04	2.00	1390	1564	
DGTD- $\mathbb{P}_3$							
	mesh-A	5120	1.42E-02	–	10	410	
	mesh-B	20480	3.52E-03	2.02	71	797	
	mesh-C	81920	8.74E-04	2.01	565	1574	
	mesh-D	327680	2.18E-04	2.01	4916	3128	

<sup>a</sup>This means that mesh-A contains 288 nodes and 512 triangles, etc.

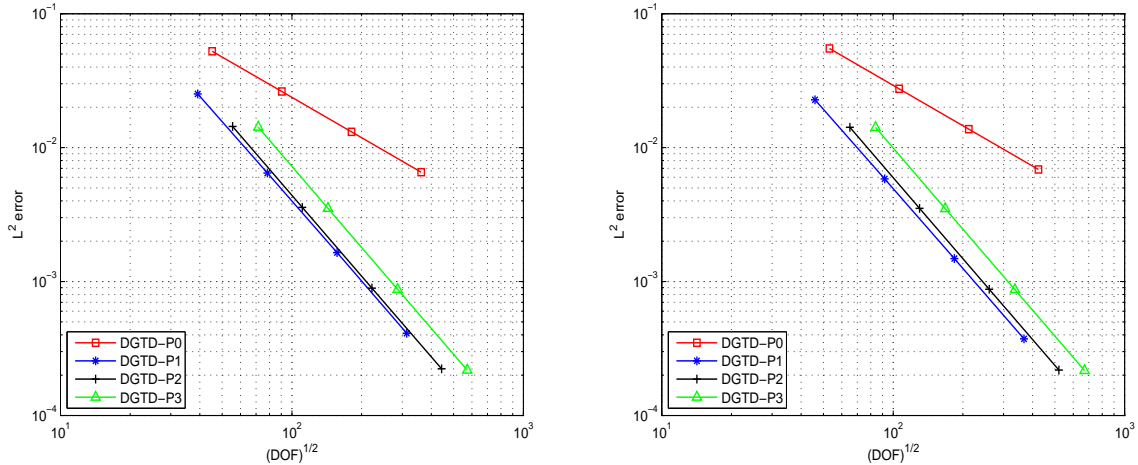


FIG. 3.4 – Concentric cylinders PEC resonator.  
 Numerical convergence of the  $h$ -refinement DGTD- $\mathbb{P}_p$  method.  
 Conforming (left) and non-conforming (right) triangular meshes.

TAB. 3.3 – Concentric cylinders PEC resonator.  
 Convergence study of the  $h$ -refinement DGTD- $\mathbb{P}_p$  method using non-conforming meshes.  
 $L^2$  error,  $\# \Delta t$  and CPU time in seconds are measured at time  $t = 1$ .

Characteristics of the non-conforming meshes.

# nodes	# hanging nodes	# triangles	# DOF	$L^2$ error	conv. rate	CPU time	# $\Delta t$
DGTD- $\mathbb{P}_0$							
1536	128	2816	2816	5.49E-02	–	3	117
5888	256	11264	11264	2.75E-02	1.00	19	231
23040	512	45056	45056	1.37E-02	1.00	155	458
91136	1024	180224	180224	6.86E-03	1.00	1270	913
DGTD- $\mathbb{P}_1$							
416	64	704 (mesh-E <sup>a</sup> )	2112	2.27E-02	–	3	199
1536	128	2816 (mesh-F)	8448	5.83E-03	1.97	17	389
5888	256	11264 (mesh-G)	33792	1.48E-03	1.98	131	768
23040	512	45056 (mesh-H)	135168	3.73E-04	1.99	1071	1526
DGTD- $\mathbb{P}_2$							
		mesh-E	4224	1.42E-02	–	6	299
		mesh-F	16896	3.52E-03	2.01	43	583
		mesh-G	67584	8.75E-04	2.01	347	1151
		mesh-H	270336	2.18E-04	2.00	2842	2289
DGTD- $\mathbb{P}_3$							
		mesh-E	7040	1.41E-02	–	18	597
		mesh-F	28160	3.50E-03	2.01	144	1165
		mesh-G	112640	8.69E-04	2.01	1148	2302
		mesh-H	450560	2.17E-04	2.01	9466	4578

<sup>a</sup>This means that mesh-E contains 416 nodes in which 64 are hanging nodes, and 704 triangles, etc.

TAB. 3.4 – Concentric cylinders PEC resonator.  
 Numerical CFL values of the DGTD- $\mathbb{P}_{p_c}:\mathbb{P}_{p_f}$  method.

$p_c:p_f$	1:0	2:0	2:1	3:0	3:1	3:2	4:2	4:3
CFL	0.5	0.3	0.3	0.19	0.19	0.19	0.1	0.1

TAB. 3.5 – Concentric cylinders PEC resonator.  
 Convergence study of the DGTD- $\mathbb{P}_c:\mathbb{P}_f$  method using non-conforming meshes.  
 $L^2$  error, #  $\Delta t$  and CPU time in seconds are measured at time  $t = 1$ .

mesh <sup>a</sup>	% DOF <sub>f</sub> <sup>b</sup>	# DOF	$L^2$ error	conv. rate	CPU time	# $\Delta t$
DGTD- $\mathbb{P}_1:\mathbb{P}_0$						
mesh-E	16%	1600	2.51E-02	–	2	120
mesh-F	16%	6400	7.89E-03	1.67	8	233
mesh-G	16%	25600	2.11E-03	1.90	64	461
mesh-H	16%	102400	7.08E-04	1.58	527	916
DGTD- $\mathbb{P}_2:\mathbb{P}_0$						
mesh-E	9%	2944	1.90E-02	–	3	199
mesh-F	9%	11776	7.11E-03	1.42	21	389
mesh-G	9%	47104	1.91E-03	1.89	168	768
mesh-H	9%	188416	7.58E-04	1.33	1394	1526
DGTD- $\mathbb{P}_3:\mathbb{P}_0$						
mesh-E	5%	4736	1.90E-02	–	7	315
mesh-F	5%	18944	6.29E-03	1.60	53	613
mesh-G	5%	75776	2.14E-03	1.56	421	1212
mesh-H	5%	303104	8.52E-04	1.33	3445	2410
DGTD- $\mathbb{P}_2:\mathbb{P}_1$						
mesh-E	22%	3456	1.49E-02	–	4	199
mesh-F	22%	13824	3.71E-03	2.00	25	389
mesh-G	22%	55296	9.23E-04	2.01	194	768
mesh-H	22%	221184	2.30E-04	2.00	1597	1526
DGTD- $\mathbb{P}_3:\mathbb{P}_1$						
mesh-E	15%	5248	1.48E-02	–	8	299
mesh-F	15%	20992	3.66E-03	2.01	55	583
mesh-G	15%	83968	9.11E-04	2.01	461	1212
mesh-H	15%	335872	2.27E-04	2.00	3775	2410
DGTD- $\mathbb{P}_3:\mathbb{P}_2$						
mesh-E	26%	6016	1.42E-02	–	8	299
mesh-F	26%	24064	3.53E-03	2.02	63	583
mesh-G	26%	96256	8.76E-04	2.01	526	1212
mesh-H	26%	385024	2.18E-04	2.01	4262	2410
DGTD- $\mathbb{P}_4:\mathbb{P}_2$						
mesh-E	19%	8256	1.42E-02	–	21	597
mesh-F	19%	33024	3.50E-03	2.02	165	1165
mesh-G	19%	132096	8.70E-04	2.01	1340	2302
mesh-H	19%	528384	2.17E-04	2.01	10955	4578
DGTD- $\mathbb{P}_4:\mathbb{P}_3$						
mesh-E	28%	9280	1.42E-02	–	24	597
mesh-F	28%	37120	3.50E-03	2.02	188	1165
mesh-G	28%	148480	8.70E-04	2.01	1501	2302
mesh-H	28%	593920	2.16E-04	2.00	12254	4578

<sup>a</sup>See Tab. 3.3 for the characteristics of these meshes.

<sup>b</sup>Represents the percentage of the # DOF in the fine mesh.

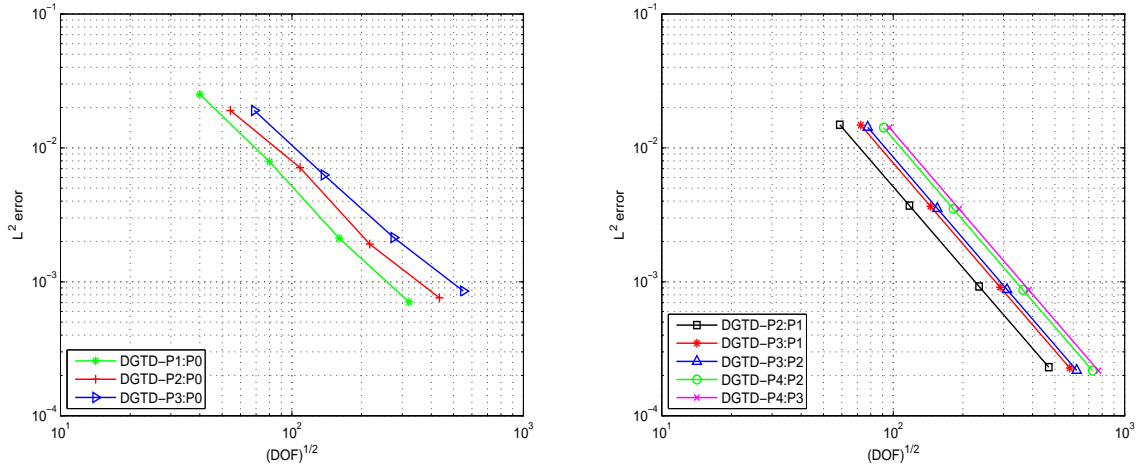


FIG. 3.5 – Concentric cylinders PEC resonator.  
 Numerical convergence of the  $hp$ -refinement  $DGTD-\mathbb{P}_{p_c}:\mathbb{P}_{p_f}$  method.  
 Non-conforming triangular meshes.

- For a given  $p$ , the conforming  $DGTD-\mathbb{P}_p$  method always requires less CPU time than the non-conforming one. In fact, a comparison of the two methods from the point of view of the CPU time is rather unfair in the present case since the local refinement of the mesh is performed arbitrarily (*i.e.* not motivated by any physical or geometrical concern).
- In general, for a given error level  $< 10^{-2}$  the  $hp$ -refinement method is less expensive than the  $h$ -refinement one. For example, if we use the  $DGTD-\mathbb{P}_{p_c}:\mathbb{P}_0$  method for  $p_c = 1, 2, 3$  respectively, rather than the  $DGTD-\mathbb{P}_0$  method, the gains in the number of DOF and CPU time vary from 95% to 85%. Similarly, the  $DGTD-\mathbb{P}_2:\mathbb{P}_1$  method can be compared with the  $DGTD-\mathbb{P}_p$  one for  $p = 1, 2$ .
- Finally, we have observed that in the case of the  $DGTD-\mathbb{P}_{p_c}:\mathbb{P}_{p_f}$  method, it is not reasonable to increase the interpolation degree  $p_c$  in the coarse mesh to more than  $p_f + 1$  since doing so does not improve the convergence rate and results in increased CPU time and memory usage.

**Comparison with various FDTD methods.** Here we compare the  $DGTD-\mathbb{P}_0$  method with two different FDTD schemes:

- [1]. the classical second-order Yee scheme [Yee66] staggered both in space and time where the numerical solution is carried out on a *staircased* mesh;
- [2]. a modification of the Yee scheme (referred as Ty(2,4)), see [TY00a]-[TY00b], and chapter 2 in [Taf98]. This method is fourth-order accurate in space and second-order accurate in time. The numerical solution is also computed on a staggered *staircased* mesh.

The  $L^2$  error on the  $E_z$  component and the convergence rate of these two FDTD schemes, evaluated at times  $t = 1$  and  $t = 10$ , are given in Tab. 3.6. These results were taken from [ADY98]-[XCZ02]. It is seen from Tab. 3.6 that the staircased FDTD approximation leads to an extremely slow convergence

rate at early time ( $t = 1$ ) and a divergent scheme at late time ( $t = 10$ ). According to [XCZ02], this is probably not only because the staircasing misrepresents the shape of the cylinders, but also because of the fact that in this resonator case an electromagnetic wave is bouncing back and forth between the walls, so numerical errors accumulate quickly in the solution. These FDTD results are compared with the classical centered finite volume DGTD- $\mathbb{P}_0$  scheme on conforming triangular meshes (see Tab. 3.6). One can see that the DGTD- $\mathbb{P}_0$  conserves a linear convergence rate even for a long simulation time.

TAB. 3.6 – *Concentric cylinders PEC resonator.*  
The  $L^2$  error on  $E_z$  for two different FDTD schemes and for the DGTD- $\mathbb{P}_0$  method.

t=1			t=10		
Yee scheme (staircased) cartesian mesh <sup>a</sup> .					
mesh	$L^2$ error	conv. rate	mesh	$L^2$ error	conv. rate
1000	4.322E-01	–	1000	5.101E-01	–
4000	3.635E-01	0.28	4000	4.364E-01	0.23
16000	1.742E-01	1.06	16000	6.683E-01	–0.61
Ty(2,4) (staircased) cartesian mesh <sup>b</sup> .					
1000	4.038E-01	–	1000	2.642E-01	–
4000	3.347E-01	0.27	4000	7.079E-01	–1.42
16000	1.579E-01	1.08	16000	7.243E-01	–0.03
The classical centered finite volume DGTD- $\mathbb{P}_0$ scheme.					
$\sqrt{\text{DOF}}$	$L^2$ error	conv. rate	$\sqrt{\text{DOF}}$	$L^2$ error	conv. rate
90	2.62E-02	–	90	4.52E-02	–
180	1.31E-02	0.99	180	1.89E-02	1.25
360	6.65E-03	1.00	360	8.96E-03	1.08

<sup>a</sup>Results were taken from [ADY98]-[XCZ02].

<sup>b</sup>Results were taken from [ADY98].

### 3.1.2 Circular PEC resonator

We consider a circular PEC resonator with radius  $r = 1/2$ . The material is taken to be the vacuum. The exact time-domain solution of the problem is [TY00b]:

$$\begin{aligned}
 E_z &= J_1(\omega r) \cos(\omega t + \theta), \\
 H_x &= \frac{y}{2r} [J_0(\omega r) - J_2(\omega r)] \cos(\omega t + \theta) - \frac{x}{\omega r^2} J_1(\omega r) \sin(\omega t + \theta), \\
 H_y &= -\frac{x}{2r} [J_0(\omega r) - J_2(\omega r)] \cos(\omega t + \theta) - \frac{y}{\omega r^2} J_1(\omega r) \sin(\omega t + \theta),
 \end{aligned}$$

where  $\omega = 14.03117333963124$ , which is obtained from the PEC boundary condition  $E_z = 0$  at  $r = 1/2$ . As in the previous test case,  $(r, \theta)$  represent the usual polar coordinates.

Numerical simulations make use of quasi-uniform triangular meshes with possibly obtuse angles (see Fig. 3.6 left). The percentage of triangles with obtuse angles is between 45 % and 50 % which correspond to a maximum angle between  $100^\circ$  and  $90^\circ$  respectively. The non-conforming meshes are obtained by locally refining a cylindrical zone as shown on Fig. 3.6 right. Contour lines of the  $E_z$  component at times  $t = 1$  and  $t = 10$  are shown on Fig. 3.7 for a calculation based on the conforming DGTD- $\mathbb{P}_1$  method.



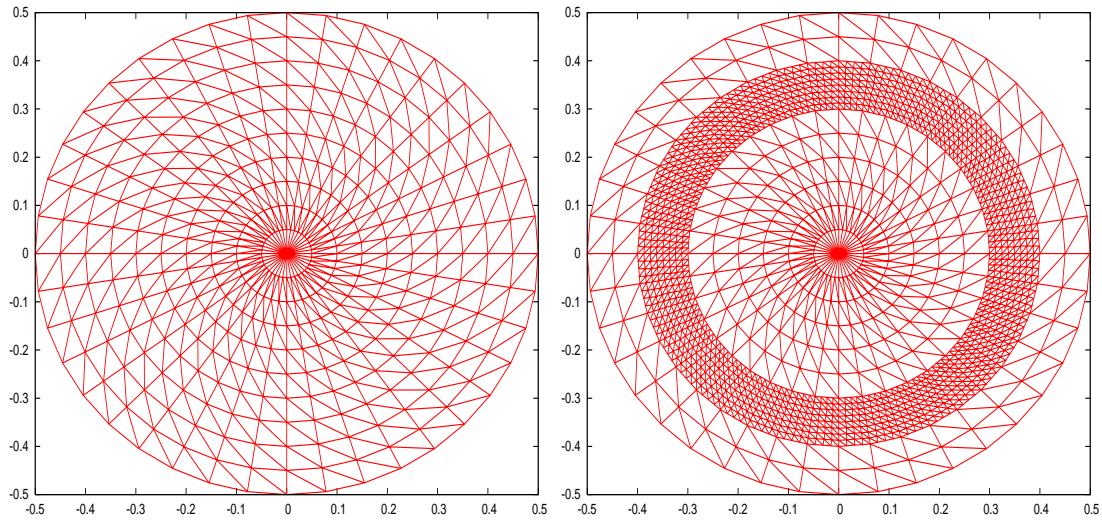


FIG. 3.6 – *Circular PEC resonator.*  
*Example of conforming (left) and non-conforming (right) triangular meshes.*

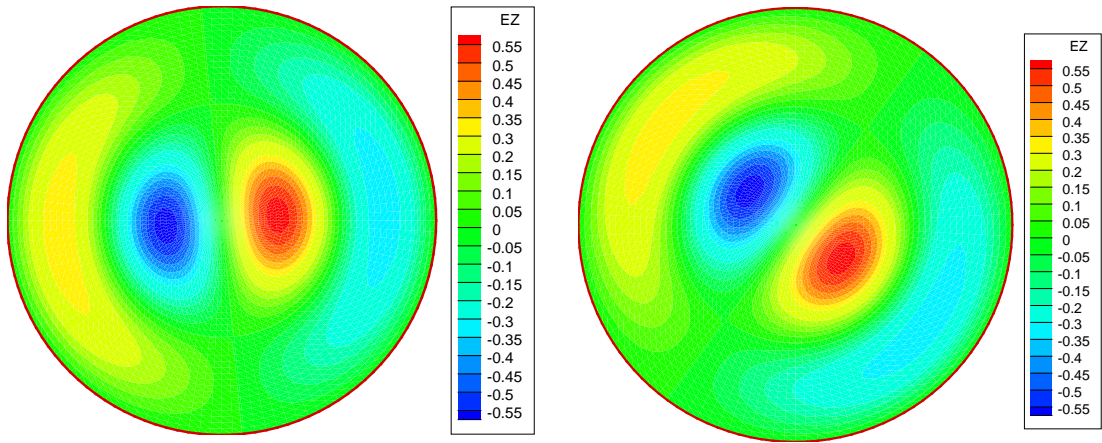


FIG. 3.7 – *Circular PEC resonator.*  
*Contour lines of  $E_z$  at times  $t = 1$  (left) and  $t = 10$  (right).*  
*DGTD- $\mathbb{P}_1$  method using a conforming mesh with 4201 nodes and 8280 triangles.*

As for the previous test case, we apply the  $h$ -refinement DGTD- $\mathbb{P}_p$  and the  $hp$ -refinement DGTD- $\mathbb{P}_{p_c}:\mathbb{P}_{p_f}$  methods.

**$h$ -refinement DGTD- $\mathbb{P}_p$  method.** For each polynomial degree  $p$ , we use four different conforming and non-conforming meshes whose characteristics are listed in Tab. 3.7 and 3.8. The non-conforming meshes are obtained by locally refining (one refinement level) the cylindrical zone  $0.3 \leq r \leq 0.4$  of the conforming meshes. We use here the same CFL values as in the previous example (see Tab. 3.1). We give in Tab. 3.7 and 3.8 the  $L^2$  error on  $E_z$ , the convergence rate, the CPU time and the number of time steps to reach time  $t = 0.8$ . Fig. 3.8 shows the corresponding  $L^2$  error as a function of the square root of the number of DOF. We can deduce from Tab. 3.7 and 3.8 that for conforming as well as non-conforming meshes, the DGTD- $\mathbb{P}_p$  method converges as  $h^{(2)}$  for  $p \geq 1$  and as  $h^{(1)}$  for  $p = 0$ .

TABLE 3.7 – *Circular PEC resonator.*  
*Convergence study of the  $h$ -refinement DGTD- $\mathbb{P}_p$  method using conforming meshes.*  
 *$L^2$  error,  $\# \Delta t$  and CPU time in seconds are measured at time  $t = 0.8$ .*

Characteristics of the conforming meshes.							
# nodes	# triangles	# DOF	$L^2$ error	conv. rate	CPU time	# $\Delta t$	
DGTD- $\mathbb{P}_0$							
176	325 (mesh-A)	325	6.73E-02	–	< 1	48	
701	1350 (mesh-B)	1350	2.88E-02	1.19	2	182	
2801	5500 (mesh-C)	5500	1.34E-02	1.08	24	717	
11201	22200 (mesh-C)	22200	6.58E-03	1.02	417	2856	
DGTD- $\mathbb{P}_1$							
	mesh-A	975	4.45E-02	–	< 1	160	
	mesh-B	4050	1.21E-02	1.83	10	606	
	mesh-C	16500	3.07E-03	1.95	169	2388	
	mesh-D	66600	7.76E-04	1.97	2855	9518	
DGTD- $\mathbb{P}_2$							
	mesh-A	1950	1.32E-02	–	2	239	
	mesh-B	8100	3.19E-03	2.00	26	908	
	mesh-C	33000	7.89E-04	1.99	432	3582	
	mesh-D	133200	1.96E-04	1.99	7229	14277	
DGTD- $\mathbb{P}_3$							
	mesh-A	3250	1.29E-02	–	7	478	
	mesh-B	13500	3.17E-03	1.97	86	1816	
	mesh-C	55000	7.88E-04	1.98	1450	7163	
	mesh-D	222000	1.97E-04	1.99	24190	28554	

**$hp$ -refinement DGTD- $\mathbb{P}_{p_c}:\mathbb{P}_{p_f}$  method.** The observed numerical CFL values of the DGTD- $\mathbb{P}_{p_c}:\mathbb{P}_{p_f}$  method are reported in Tab. 3.9. As with the  $h$ -refinement method, the non-conforming meshes are obtained by locally refining the cylindrical zone  $0.3 \leq r \leq 0.4$ . Tab. 3.10 gives the  $L^2$  error on  $E_z$ , the convergence rate, the CPU time and the number of time steps to reach time  $t = 0.8$ . Fig. 3.9 shows the corresponding  $L^2$  error on  $E_z$  as a function of the square root of the number of DOF. It is clear from Tab. 3.10 that the DGTD- $\mathbb{P}_{p_c}:\mathbb{P}_{p_f}$  converges as  $h^{(2)}$  for  $p_f \neq 0$ , while the convergence rate for  $p_f = 0$  is more than  $\mathcal{O}(h^{(1.8)})$ ,  $\forall p_c$ .

TAB. 3.8 – *Circular PEC resonator.*  
*Convergence study of the  $h$ -refinement DGTD- $\mathbb{P}_p$  method using non-conforming meshes.*  
 *$L^2$  error, #  $\Delta t$  and CPU time in seconds are measured at time  $t = 0.8$ .*

Characteristics of the non-conforming meshes.

# nodes	# hanging nodes	# triangles	# DOF	$L^2$ error	conv. rate	CPU time	# $\Delta t$
DGTD- $\mathbb{P}_0$							
181	40	300 (mesh-E)	300	7.71E-02	–	<< 1	29
681	80	1240 (mesh-F)	1240	4.01E-02	0.92	1	105
2641	160	5040 (mesh-G)	5040	2.05E-02	0.96	12	411
10401	320	20320 (mesh-H)	20320	1.05E-02	0.96	224	1633
DGTD- $\mathbb{P}_1$							
		mesh-E	900	6.87E-02	–	< 1	95
		mesh-F	3720	1.96E-02	1.77	6	350
		mesh-G	15120	5.07E-03	1.93	90	1368
		mesh-H	60960	1.28E-03	1.97	1484	5443
DGTD- $\mathbb{P}_2$							
		mesh-E	1800	2.10E-02	–	2	142
		mesh-F	7440	4.99E-03	2.03	14	524
		mesh-G	30240	1.23E-03	2.00	234	2052
		mesh-H	121920	3.06E-04	2.00	3838	8164
DGTD- $\mathbb{P}_3$							
		mesh-E	3000	2.03E-02	–	4	284
		mesh-F	12400	4.96E-03	1.98	49	1048
		mesh-G	50400	1.23E-03	1.99	782	4104
		mesh-H	203200	3.06E-04	1.99	12681	16327

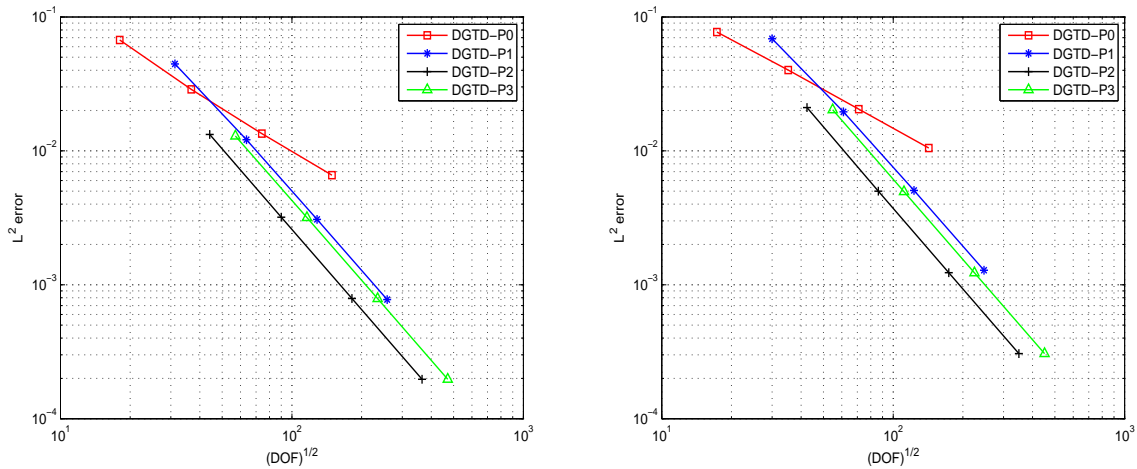


FIG. 3.8 – *Circular PEC resonator.*  
*Numerical convergence of the  $h$ -refinement DGTD- $\mathbb{P}_p$  method.*  
*Conforming (left) and non-conforming (right) triangular meshes.*

TABLE 3.9 – *Circular PEC resonator.*  
*Numerical CFL values of DGTD- $\mathbb{P}_{p_c}:\mathbb{P}_{p_f}$  method.*

$p_c:p_f$	1:0	2:0	2:1	3:0	3:1	3:2	4:2	4:3
CFL	0.3	0.2	0.2	0.1	0.1	0.1	0.08	0.08

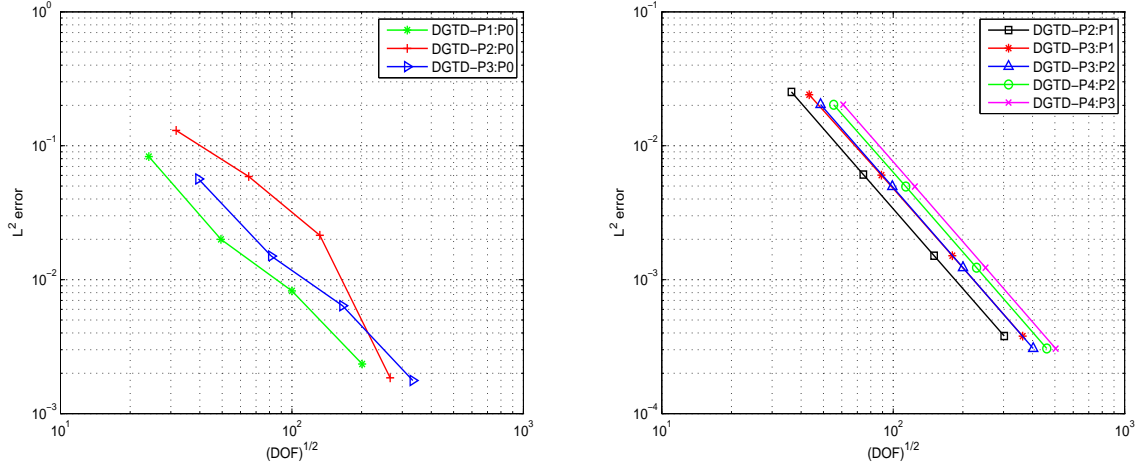


FIG. 3.9 – *Circular PEC resonator.*  
*Numerical convergence of the hp-refinement DGTD- $\mathbb{P}_{p_c}:\mathbb{P}_{p_f}$  method.*  
*Non-conforming triangular meshes.*

In summary, the results given in Tab. 3.7, 3.8 and 3.10 call for the following comments:

- It is not reasonable to increase the polynomial degree in the coarse mesh to more than  $p_c = p_f + 1$  (see Tab. 3.11). One can clearly deduce from Tab. 3.11 that the DGTD- $\mathbb{P}_2:\mathbb{P}_1$  method is the least expensive *hp*-refinement method for this problem.
- The DGTD- $\mathbb{P}_2:\mathbb{P}_1$  method is less expensive than the non-conforming DGTD- $\mathbb{P}_p$  one. For example, we have observed (results not reported in a table here) that to obtain an error level of 0.4%, on the one hand, the DGTD- $\mathbb{P}_1$  and DGTD- $\mathbb{P}_2$  method require 19500 and 8454 DOF respectively while the corresponding CPU times are 160 and 29 seconds and, on the other hand, the DGTD- $\mathbb{P}_2:\mathbb{P}_1$  method needs 8100 DOF and 28 seconds (see Tab. 3.11).
- The DGTD- $\mathbb{P}_2:\mathbb{P}_1$  method can be compared with the conforming DGTD- $\mathbb{P}_p$  one. Indeed, the results of Tab. 3.11 together with those of Tab. 3.12 show that the DGTD- $\mathbb{P}_2:\mathbb{P}_1$  method is less expensive than the DGTD- $\mathbb{P}_1$  and DGTD- $\mathbb{P}_3$  ones, but it is not much more expensive than the DGTD- $\mathbb{P}_2$  method. One can note here that the results of the DGTD- $\mathbb{P}_2:\mathbb{P}_1$  method remain very satisfactory despite that the space  $\mathbb{P}_1$  is used in 53% of the triangles of the mesh.

TAB. 3.10 – Circular PEC resonator.  
 Convergence study of the DGTD- $\mathbb{P}_c:\mathbb{P}_f$  method using non-conforming meshes.  
 $L^2$  error,  $\# \Delta t$  and CPU time in seconds are measured at time  $t = 0.8$ .

mesh <sup>a</sup>	% DOF <sub>f</sub> <sup>b</sup>	# DOF	$L^2$ error	conv. rate	CPU time	# $\Delta t$
DGTD- $\mathbb{P}_1:\mathbb{P}_0$						
mesh-E	28 %	580	8.30E-02	–	< 1	95
mesh-F	26 %	2440	1.99E-02	1.98	4	350
mesh-G	26 %	10000	8.25E-03	1.23	66	1368
mesh-H	25 %	40480	2.34E-03	1.80	1123	5443
DGTD- $\mathbb{P}_2:\mathbb{P}_0$						
mesh-E	16 %	1000	1.30E-01	–	1	142
mesh-F	15 %	4240	5.89E-02	1.10	9	524
mesh-G	15 %	17440	2.14E-02	1.43	146	2052
mesh-H	15 %	70720	1.85E-03	3.50	2427	8164
DGTD- $\mathbb{P}_3:\mathbb{P}_0$						
mesh-E	10 %	1560	5.65E-02	–	3	284
mesh-F	10 %	6640	1.50E-02	1.83	26	1048
mesh-G	9 %	27360	6.39E-03	1.20	441	4104
mesh-H	9 %	111040	1.76E-03	1.84	7271	16327
DGTD- $\mathbb{P}_2:\mathbb{P}_1$						
mesh-E	36 %	1320	2.52E-02	–	2	142
mesh-F	35 %	5520	6.09E-03	1.98	11	524
mesh-G	34 %	22560	1.51E-03	1.98	184	2052
mesh-H	34 %	91200	3.79E-04	1.98	3016	8164
DGTD- $\mathbb{P}_3:\mathbb{P}_1$						
mesh-E	26 %	1880	2.40E-02	–	3	284
mesh-F	24 %	7920	6.03E-03	1.92	31	1048
mesh-G	24 %	32480	1.51E-03	1.96	520	4104
mesh-H	23 %	131520	3.78E-04	1.98	8483	16327
DGTD- $\mathbb{P}_3:\mathbb{P}_2$						
mesh-E	41 %	2360	2.03E-02	–	4	284
mesh-F	40 %	9840	4.96E-03	1.97	37	1048
mesh-G	38 %	40160	1.23E-03	1.99	621	4104
mesh-H	38 %	162240	3.06E-04	1.99	10041	16327
DGTD- $\mathbb{P}_4:\mathbb{P}_2$						
mesh-E	31 %	3060	2.02E-02	–	5	354
mesh-F	30 %	12840	4.96E-03	1.96	58	1310
mesh-G	29 %	52560	1.23E-03	1.98	993	5130
mesh-H	29 %	212640	3.06E-04	1.99	16239	20409
DGTD- $\mathbb{P}_4:\mathbb{P}_3$						
mesh-E	43 %	3700	2.03E-02	–	5	315
mesh-F	42 %	15400	4.96E-03	1.97	72	1310
mesh-G	42 %	62800	1.23E-03	1.99	1195	5130
mesh-H	40 %	253600	3.05E-04	2.00	20167	20409

<sup>a</sup>See Tab 3.8 for the characteristics of these meshes.

<sup>b</sup>Represents the percentage of the # DOF in the fine mesh.

TAB. 3.11 – *Circular PEC resonator.*  
 # DOF and CPU time in seconds to reach an error level of 0.4%.  
 DGTD- $\mathbb{P}_{p_c}:\mathbb{P}_{p_f}$  method using non-conforming meshes.

DGTD- $\mathbb{P}_{p_c}:\mathbb{P}_{p_f}$	$\mathbb{P}_1:\mathbb{P}_0$	$\mathbb{P}_2:\mathbb{P}_0$	$\mathbb{P}_3:\mathbb{P}_0$	$\mathbb{P}_2:\mathbb{P}_1$	$\mathbb{P}_3:\mathbb{P}_1$	$\mathbb{P}_3:\mathbb{P}_2$	$\mathbb{P}_4:\mathbb{P}_2$	$\mathbb{P}_4:\mathbb{P}_3$
# DOF	25602	47088	47090	8100	12120	12150	17670	22500
CPU time	320	1000	1200	28	170	157	190	201

TAB. 3.12 – *Circular PEC resonator.*  
 # DOF and CPU time in seconds to reach an error level of 0.4%.  
 DGTD- $\mathbb{P}_p$  method using conforming meshes.

DGTD- $\mathbb{P}_p$	DGTD- $\mathbb{P}_1$	DGTD- $\mathbb{P}_2$	DGTD- $\mathbb{P}_3$
# DOF	13689	6402	10400
CPU time	100	18	59

### 3.1.3 Wedge-shaped PEC resonator

We consider a computational domain which is bounded by the curves  $y = \tan(3\pi/7)x$ ,  $x^2 + y^2 = 1/4$  and the  $x$ -axis (see Fig. 3.10). The boundaries of the sector are assumed to be perfectly conducting. The exact time-domain solution is [TY00b]:

$$\begin{aligned}
 E_z &= J_\nu(\omega r) \sin(\nu\theta) \cos(\omega t), \\
 H_x &= -\frac{y}{2r} [J_{\nu-1}(\omega r) - J_{\nu+1}(\omega r)] \sin(\nu\theta) \sin(\omega t) \\
 &\quad - \frac{\nu x}{\omega r^2} J_\nu(\omega r) \cos(\nu\theta) \sin(\omega t), \\
 H_y &= \frac{x}{2r} [J_{\nu-1}(\omega r) - J_{\nu+1}(\omega r)] \sin(\nu\theta) \sin(\omega t) \\
 &\quad - \frac{\nu y}{\omega r^2} J_\nu(\omega r) \cos(\nu\theta) \sin(\omega t),
 \end{aligned}$$

where  $J_\nu$  ( $\nu \in \mathbb{R}$ , non-negative) is the  $\nu$ -order Bessel function of the first kind. The values of the parameters  $\omega = 16.75883874736728$  and  $\nu = 14/3$  are obtained by enforcing the PEC condition on the boundaries. Numerical simulations make use of quasi-uniform triangular meshes with possibly obtuse angles (see Fig. 3.11 left). The percentage of triangles with obtuse angles is between 45 % and 50 % which correspond to a maximum angle between  $94^\circ$  and  $91^\circ$  respectively. The non-conforming meshes are obtained thanks to local refinements of a region situated between two arcs of the sector as shown on Fig. 3.11 right. Contour lines of the  $E_z$  component at times  $t = 1$  and  $t = 10$  are shown on Fig. 3.12 for a calculation based on the conforming DGTD- $\mathbb{P}_1$  method. As for the previous test cases, we apply the  $h$ -refinement DGTD- $\mathbb{P}_p$  and  $hp$ -refinement DGTD- $\mathbb{P}_{p_c}:\mathbb{P}_{p_f}$  methods.

**$h$ -refinement DGTD- $\mathbb{P}_p$  method.** For each polynomial degree  $p$ , we use four different conforming and non-conforming meshes whose characteristics are given in Tab. 3.13 and 3.14. The non-conforming

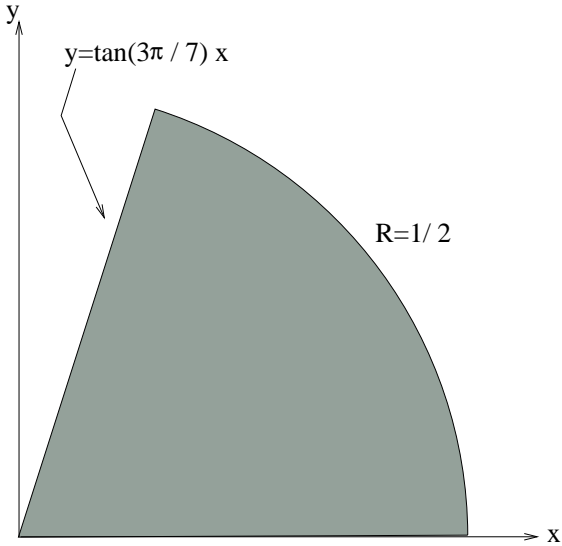


FIG. 3.10 – Wedge-shaped PEC resonator setting.

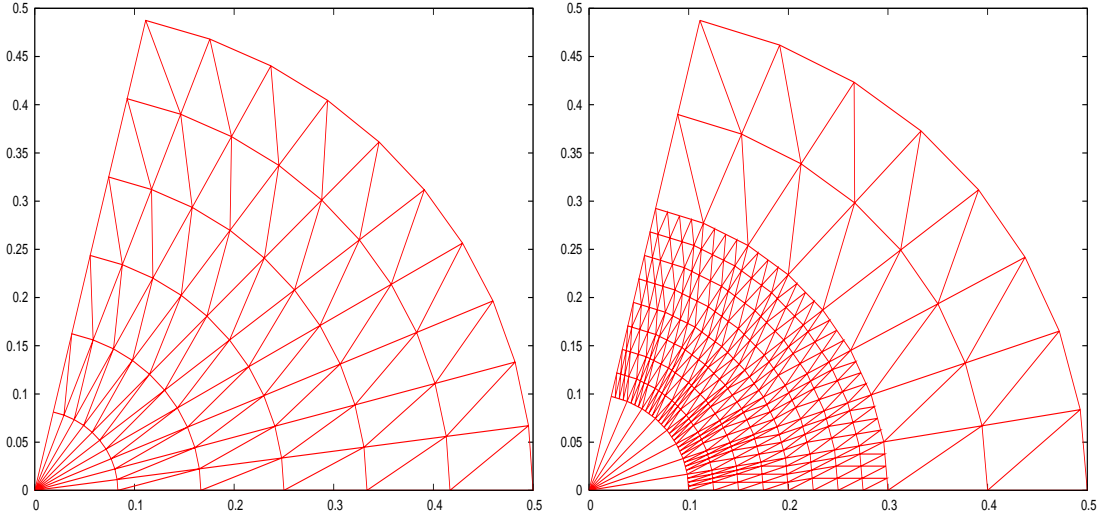


FIG. 3.11 – Wedge-shaped PEC resonator. Example of conforming (left) and non-conforming (right) triangular meshes.

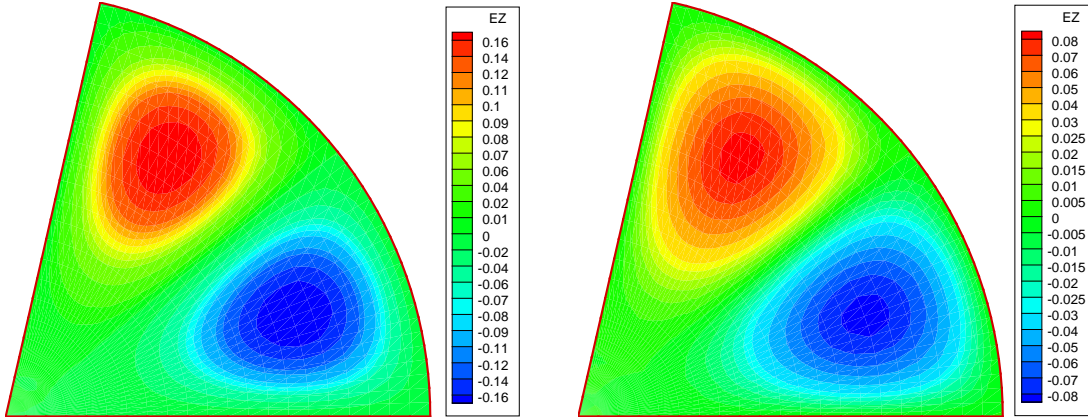


FIG. 3.12 – *Wedge-shaped PEC resonator.*  
*Contour lines of  $E_z$  at times  $t = 1$  (left) and  $t = 10$  (right).*  
*DGTD- $\mathbb{P}_1$  method using a conforming mesh with 862 nodes and 1640 triangles.*

meshes are obtained by locally refining (one refinement level) the zone of the domain bounded by the curves  $\tan(9\pi/7\alpha) \leq y/x \leq \tan(3(\alpha - 3)\pi/7\alpha)$  and  $1/5 \leq x^2 + y^2 \leq 3/10$ . The integer  $\alpha$  takes a value in the set  $\{9, 18, 36, 72\}$  depending on the mesh size. We summarize in Tab. 3.13 and 3.14 the  $L^2$  error on  $E_z$ , the convergence rate, the CPU time and the number of time steps to reach time  $t = 0.75$ . In Fig. 3.13, we plot the corresponding  $L^2$  error on  $E_z$  as a function of the square root of the number of DOF. The observed numerical CFL values are given in Tab. 3.1. We can deduce from Tab. 3.13 and 3.14 that the DGTD- $\mathbb{P}_p$  method converges as  $h^{(1)}$  if  $p = 0$  and as  $h^{(2)}$  if  $p \geq 1$  (excepted for  $p = 2$  using conforming meshes, where the convergence rate is close to  $\mathcal{O}(h^{(2.5)})$ ).

Tab. 3.13 and 3.14 and Fig.3.13 call for the following remarks:

- For this problem and using conforming meshes, it is clear that the gains in CPU time and memory usage are notable when the interpolation degree is increased. For example, to achieve an error level of 0.01%, the number of DOF required by the DGTD- $\mathbb{P}_1$ , DGTD- $\mathbb{P}_2$  and DGTD- $\mathbb{P}_3$  methods is 16902, 5042 and 2500 respectively, while the corresponding CPU times are 1700, 130 and 47 seconds (results not reported in a table here).
- Using non-conforming meshes, it is not necessary to increase the interpolation degree to more than 2. For example, to achieve an error level of 0.01%, the number of DOF required by the DGTD- $\mathbb{P}_1$ , DGTD- $\mathbb{P}_2$  and DGTD- $\mathbb{P}_3$  methods is 28560, 6402 and 10000 respectively, while the corresponding CPU times are 2250, 160 and 420 seconds.
- The conforming  $h$ -refinement method is less expensive (in terms of the required number of DOF and CPU time) than the non-conforming one, however, the results obtained by using non-conforming meshes are very satisfactory despite of the presence of a large number of triangles in the refined zone.

**$hp$ -refinement DGTD- $\mathbb{P}_{p_c} \cdot \mathbb{P}_{p_f}$  method.** The numerical CFL values used are still those given in Tab. 3.9. The non-conforming meshes are those already used in conjunction with the  $h$ -refinement method. We summarize in Tab. 3.15 the  $L^2$  error on  $E_z$ , the convergence rate, the CPU time and the



TAB. 3.13 – Wedge-shaped PEC resonator.  
 Convergence study of the  $h$ -refinement DGTD- $\mathbb{P}_p$  method using conforming meshes.  
 $L^2$  error,  $\# \Delta t$  and CPU time in seconds are measured at time  $t = 0.75$ .

Characteristics of the conforming meshes.						
# nodes	# triangles	# DOF	$L^2$ error	conv. rate	CPU time	# $\Delta t$
DGTD- $\mathbb{P}_0$						
67	110	110	2.41E-02	–	<< 1	69
232	420	420	1.21E-02	1.03	2	247
862	1640	1640	6.22E-03	0.98	21	938
3322	6480	6480	3.16E-03	0.98	324	3656
DGTD- $\mathbb{P}_1$						
67	110	330	5.06E-03	–	1	228
232	420	1260	1.36E-03	1.96	13	822
862	1640	4920	2.99E-04	2.22	169	3124
3322	6480	19440	7.98E-05	1.92	2780	12185
DGTD- $\mathbb{P}_2$						
28	40	240	2.99E-03	–	1	139
86	144	864	8.47E-04	1.97	5	450
298	544	3264	1.70E-04	2.42	56	1608
1106	2112	12672	2.92E-05	2.59	838	6064
DGTD- $\mathbb{P}_3$						
28	40	400	1.29E-03	–	2	277
86	144	1440	1.86E-04	3.02	15	899
298	544	5440	4.60E-05	2.10	190	3216
1106	2112	21120	1.16E-05	2.03	2807	12128

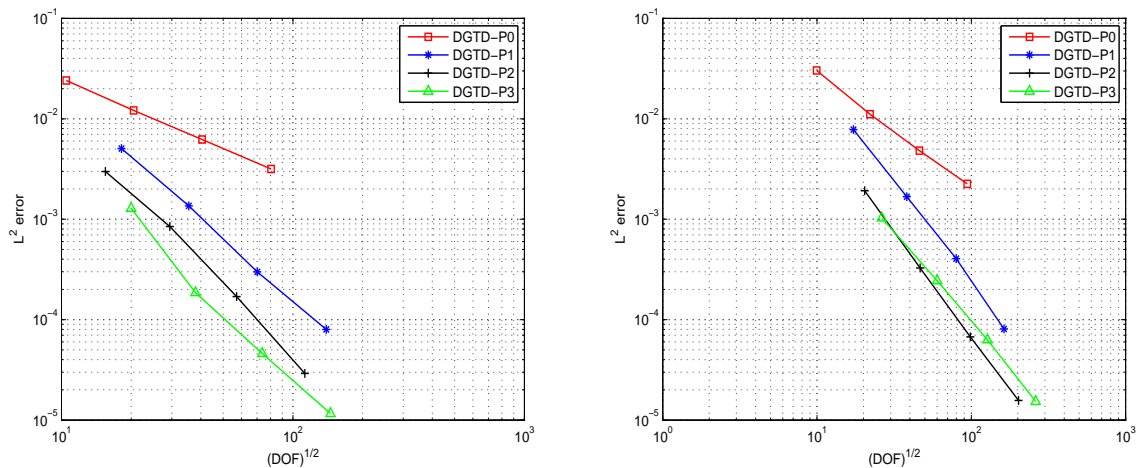


FIG. 3.13 – Wedge-shaped PEC resonator.  
 Numerical convergence of the  $h$ -refinement DGTD- $\mathbb{P}_p$  method.  
 Conforming (left) and non-conforming (right) triangular meshes.

TAB. 3.14 – *Wedge-shaped PEC resonator.*  
*Convergence study of the  $h$ -refinement DGTD- $\mathbb{P}_p$  method using non-conforming meshes.*  
 *$L^2$  error, #  $\Delta t$  and CPU time in seconds are measured at time  $t = 0.75$ .*

Characteristics of the non-conforming meshes.							
# nodes	# hanging nodes	# triangles	# DOF	$L^2$ error	conv. rate	CPU time	# $\Delta t$
DGTD- $\mathbb{P}_0$							
64	8	99	99	3.03E-02	–	<< 1	54
277	28	486	486	1.11E-02	1.26	2	202
1135	68	2124	2124	4.83E-03	1.13	22	804
4579	148	8856	8856	2.25E-03	1.07	398	3210
DGTD- $\mathbb{P}_1$							
64	8	99	297	7.81E-03	–	2	179
277	28	486	1458	1.68E-03	1.93	12	673
1135	68	2124	6372	4.05E-04	1.93	192	2679
4579	148	8856	26568	8.08E-05	2.26	3329	10700
DGTD- $\mathbb{P}_2$							
46	4	69 (mesh1 <sup>a</sup> )	414	1.92E-03	–	3	217
209	20	362 (mesh2)	2172	3.27E-04	2.14	19	789
871	52	1620 (mesh3)	9720	6.72E-05	2.11	328	3128
3539	116	6824 (mesh4)	40944	1.57E-05	2.03	5617	12487
DGTD- $\mathbb{P}_3$							
46	4	69	690	1.03E-03	–	4	434
209	20	362	3620	2.43E-04	1.74	64	1577
871	52	1620	16200	6.29E-05	1.81	1125	6256
3539	116	6824	68240	1.53E-05	1.96	19067	24973

<sup>a</sup>This means that the mesh1 contains 46 nodes in which 4 are hanging nodes and 69 triangles, etc.

number of time steps to reach time  $t = 0.75$ . Fig. 3.14 shows the  $L^2$  error on  $E_z$  as a function of the square root of the number of DOF. It can be seen from Tab. 3.15 that the DGTD- $\mathbb{P}_{p_c}:\mathbb{P}_{p_f}$  method converges as  $h^{(2)}$  for  $p_f \neq 0$ , while the convergence rate for  $p_f = 0$  is close to  $\mathcal{O}(h^{(1.2)})$  for  $p_c \neq 3$  (for  $p_c = 3$  this rate is close to  $\mathcal{O}(h^{(1)})$ ).

A detailed analysis of Tab. 3.15 leads to the following remarks:

- It is not necessary to increase the polynomial degree in the coarse mesh to more than  $p_c = p_f + 1$  (see Tab. 3.16). One can clearly deduce from Tab. 3.16 that the DGTD- $\mathbb{P}_2:\mathbb{P}_1$  method is the least expensive  $hp$ -refinement method for this problem.
- The DGTD- $\mathbb{P}_2:\mathbb{P}_1$  method is less expensive than the non-conforming DGTD- $\mathbb{P}_p$  methods. For example, we have observed (results not reported in a table here) that to obtain an error level of 0.05%, on the one hand, the DGTD- $\mathbb{P}_1$  and DGTD- $\mathbb{P}_2$  methods require 5184 and 1482 DOF respectively, while the corresponding CPU times are 130 and 13 seconds and, on the other hand, the DGTD- $\mathbb{P}_2:\mathbb{P}_1$  method needs 1296 DOF and 10 seconds (see Tab. 3.16).
- The DGTD- $\mathbb{P}_2:\mathbb{P}_1$  method can be compared with the conforming DGTD- $\mathbb{P}_p$  one. Indeed, the results of Tab. 3.16 together with those of Tab. 3.17 show that the DGTD- $\mathbb{P}_2:\mathbb{P}_1$  method is less expensive than the DGTD- $\mathbb{P}_1$  and DGTD- $\mathbb{P}_2$  methods, but it is not much more expensive than the DGTD- $\mathbb{P}_3$  method. One can note here that the results of the DGTD- $\mathbb{P}_2:\mathbb{P}_1$  method remain very satisfactory

TAB. 3.15 – *Wedge-shaped PEC resonator.*  
 Convergence study of the DGTD- $\mathbb{P}_c:\mathbb{P}_f$  method using non-conforming meshes.  
 $L^2$  error,  $\# \Delta t$  and CPU time in seconds are measured at time  $t = 0.75$ .

mesh <sup>a</sup>	% DOF <sub>f</sub> <sup>b</sup>	# DOF	$L^2$ error	conv. rate	CPU time	# $\Delta t$
DGTD- $\mathbb{P}_1:\mathbb{P}_0$						
mesh1	4%	191	9.76E-03	–	1	145
mesh2	15%	830	2.52E-03	1.84	6	526
mesh3	20%	3452	1.23E-03	1.00	81	2086
mesh4	23%	14072	5.28E-04	1.21	1426	8325
DGTD- $\mathbb{P}_2:\mathbb{P}_0$						
mesh1	2%	374	4.68E-03	–	2	217
mesh2	8%	1532	2.07E-03	1.16	15	789
mesh3	11%	6200	1.02E-03	1.00	210	3128
mesh4	13%	24944	4.45E-04	1.20	3544	12487
DGTD- $\mathbb{P}_3:\mathbb{P}_0$						
mesh1	1%	618	3.99E-03	–	4	434
mesh2	5%	2468	2.05E-03	0.97	44	1577
mesh3	7%	9864	1.06E-03	0.95	675	6256
mesh4	8%	39440	6.01E-04	0.82	11159	24973
DGTD- $\mathbb{P}_2:\mathbb{P}_1$						
mesh1	6%	390	1.96E-03	–	2	217
mesh2	21%	1788	3.58E-04	2.23	16	789
mesh3	28%	7608	8.28E-05	2.02	258	3128
mesh4	31%	31344	1.90E-05	2.08	4415	12487
DGTD- $\mathbb{P}_3:\mathbb{P}_1$						
mesh1	4%	634	1.19E-03	–	5	434
mesh2	14%	2724	2.71E-04	2.03	47	1577
mesh3	19%	11272	7.22E-05	1.86	771	6256
mesh4	21%	45840	1.73E-05	2.04	12836	24973
DGTD- $\mathbb{P}_3:\mathbb{P}_2$						
mesh1	7%	658	1.03E-03	–	4	434
mesh2	25%	3108	2.42E-04	1.86	53	1577
mesh3	32%	13384	6.25E-05	1.86	913	6256
mesh4	35%	55440	1.46E-05	2.04	15583	24973
DGTD- $\mathbb{P}_4:\mathbb{P}_2$						
mesh1	5%	963	1.00E-03	–	7	542
mesh2	18%	4278	2.47E-04	1.88	92	1971
mesh3	24%	17964	6.18E-05	1.93	1555	7820
mesh4	26%	73560	1.46E-05	2.05	25687	31250
DGTD- $\mathbb{P}_4:\mathbb{P}_3$						
mesh1	8%	995	1.01E-03	–	7	542
mesh2	27%	4790	2.46E-04	1.80	103	1971
mesh3	34%	20780	6.16E-05	1.89	1763	7820
mesh4	37%	86360	1.45E-05	2.03	30003	31250

<sup>a</sup>See Tab. 3.14 for the characteristics of the meshes.

<sup>b</sup>Represents the percentage of the # DOF in the fine mesh.

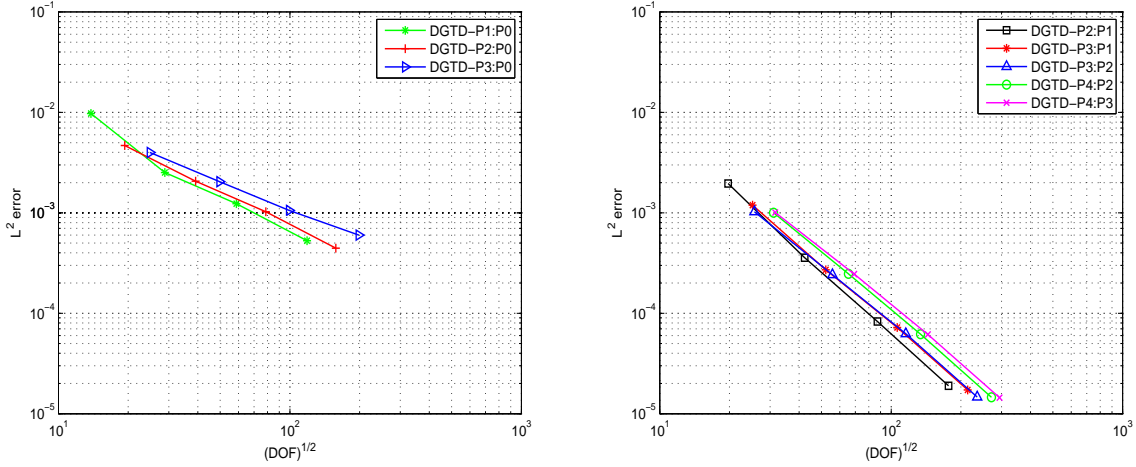


FIG. 3.14 – *Wedge-shaped PEC resonator.*  
*Numerical convergence of the  $hp$ -refinement  $DGTD-\mathbb{P}_{p_c}:\mathbb{P}_{p_f}$  method.*  
*Non-conforming triangular meshes.*

despite that the space  $\mathbb{P}_1$  is used in 38% of the triangles of the mesh.

TAB. 3.16 – *Wedge-shaped PEC resonator.*  
*# DOF and CPU time in seconds to reach an error level of 0.05%.*  
 *$DGTD-\mathbb{P}_{p_c}:\mathbb{P}_{p_f}$  method using non-conforming meshes.*

$DGTD-\mathbb{P}_{p_c}:\mathbb{P}_{p_f}$	$\mathbb{P}_1:\mathbb{P}_0$	$\mathbb{P}_2:\mathbb{P}_0$	$\mathbb{P}_3:\mathbb{P}_0$	$\mathbb{P}_2:\mathbb{P}_1$	$\mathbb{P}_3:\mathbb{P}_1$	$\mathbb{P}_3:\mathbb{P}_2$	$\mathbb{P}_4:\mathbb{P}_2$	$\mathbb{P}_4:\mathbb{P}_3$
# DOF	14502	22500	57600	1296	1530	1440	2010	2100
CPU time	1600	2500	20000	10	19	15	25	27

TAB. 3.17 – *Wedge-shaped PEC resonator.*  
*# DOF and CPU time in seconds to reach an error level of 0.05%.*  
 *$DGTD-\mathbb{P}_p$  method using conforming meshes.*

$DGTD-\mathbb{P}_p$	$DGTD-\mathbb{P}_1$	$DGTD-\mathbb{P}_2$	$DGTD-\mathbb{P}_3$
# DOF	3135	1308	760
CPU time	70	12	6

## 3.2 Heterogeneous media

This section is devoted to the numerical evaluation of the conforming and non-conforming DGTD methods in the context of wave propagation problems in heterogeneous media. As in the previous section, we have selected test cases for which analytical solution are available:

- [1]. a rectangular PEC resonator with one material interface,
- [2]. a dielectric in a PEC cavity with two material interfaces,

- [3]. a dielectric cylinder illuminated by a plane wave,
- [4]. a multilayered dielectric cylinders illuminated by a plane wave.

### 3.2.1 Rectangular PEC resonator with one material interface

We consider a problem in which a dielectric of relative permittivity  $\epsilon_2$  occupying the spatial region  $[0, 0.5] \times [0, 1]$  is enclosed by a PEC-bounded  $[0, 1.25] \times [0, 1]$  domain. The exact time-domain solution is [ZW04]:

$$\begin{aligned}
 E_z &= \begin{cases} \sin(a_1 x) \sin(\omega t) \sin(by), & 0 \leq x \leq 1/2, & 0 \leq y \leq 1, \\ \cos(a_2 x) \sin(\omega t) \sin(by), & 1/2 \leq x \leq 5/4, & 0 \leq y \leq 1, \end{cases} \\
 H_x &= \begin{cases} \frac{b}{\omega} \sin(a_1 x) \cos(\omega t) \cos(by), & 0 \leq x \leq 1/2, & 0 \leq y \leq 1, \\ \frac{b}{\omega} \cos(a_2 x) \cos(\omega t) \cos(by), & 1/2 \leq x \leq 5/4, & 0 \leq y \leq 1, \end{cases} \\
 H_y &= \begin{cases} -\frac{a_1}{\omega} \cos(a_1 x) \cos(\omega t) \sin(by), & 0 \leq x \leq 1/2, & 0 \leq y \leq 1, \\ \frac{a_2}{\omega} \sin(a_2 x) \cos(\omega t) \sin(by), & 1/2 \leq x \leq 5/4, & 0 \leq y \leq 1, \end{cases}
 \end{aligned}$$

where  $a_1^2 + b^2 = \epsilon_2 \omega^2$ ,  $a_2^2 + b^2 = \epsilon_1 \omega^2$ ,  $\sin(a_1/2) = \cos(a_2/2)$  and  $\cos(5a_2/4) = 0$ . The values of the parameters appearing in these relations are defined by imposing the PEC condition on the boundary  $x = 5/4$  and by ensuring the continuity of  $E_z$  across the material interface  $x = 1/2$ . As in [ZW04]-[YP01], these parameter values are chosen as  $\epsilon_1 = 1$ ,  $\epsilon_2 = 2$ ,  $a_1 = 3\pi$ ,  $a_2 = 2\pi$ ,  $b = \pi$ , and  $\omega = \sqrt{5}\pi$ . The wavelength is  $\lambda^{\epsilon_1} = 0.268$  in the air zone and  $\lambda^{\epsilon_2} = 0.189$  in the dielectric zone *i.e.*  $\lambda^{\epsilon_1} \simeq 1.42\lambda^{\epsilon_2}$ . Across the dielectric interface (*i.e.* the air/dielectric interface), the tangential components of the electromagnetic field  $E_z$  and  $H_y$  are continuous as well as their first  $y$  derivative. Furthermore, the first  $x$  derivative of  $E_z$  is continuous while that of  $H_y$  is discontinuous. An example plot of the analytical solution is shown on Fig. 3.15.

Numerical simulations make use of uniform triangular meshes such that the material interface  $x = 1/2$  is aligned with the grid *i.e.* the intersection between the interface  $x = 1/2$  and  $\text{int}(\tau_i)$  (the interior of  $\tau_i$ ) is empty for all the triangles  $\tau_i$  of the mesh (see Fig. 3.16 top). Hence, the mesh shown on Fig. 3.16 bottom is not allowed in the present modeling. One can note here that some FDTD schemes may not need this condition on the material interface [ZW04]. Contour lines of the  $E_z$  component at times  $t = 1$  and  $t = 10$  are shown on Fig. 3.17 for a calculation based on the conforming DGTD- $\mathbb{P}_1$  method.

**$h$ -refinement DGTD- $\mathbb{P}_p$  method.** The non-conforming meshes are obtained by locally refining (one refinement level) the material region *i.e.* the zone  $[0, 0.5] \times [0, 1]$ . Tab. 3.18 and 3.19 give the  $L^2$  error on  $E_z$  and  $(\mathbf{E}, \mathbf{H}) = (E_z, H_x, H_y)$ , the convergence rate, the CPU time and the number of time steps to reach time  $t = 1$  using conforming and non-conforming meshes. Fig. 3.18 shows the corresponding  $L^2$  error on the electromagnetic field  $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$  as a function of the square root of the number of DOF. The numerical CFL values used here are given in Tab. 3.1. We can deduce from these results that

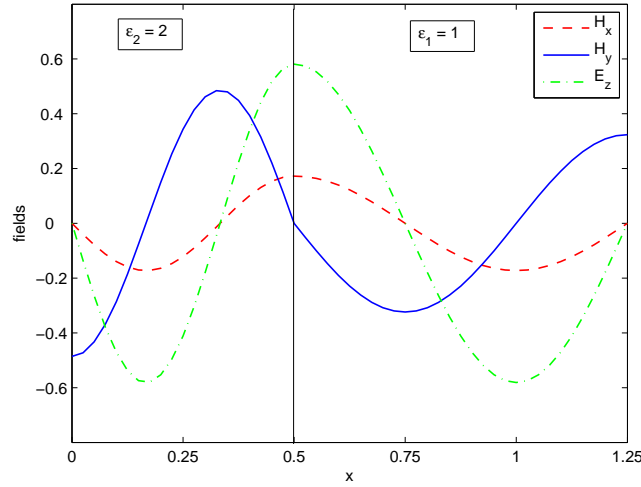


FIG. 3.15 – Rectangular PEC resonator with one material interface. Plots of the analytical solution along the line  $y = 3/4$  at time  $t = 0.75$ .

the convergence rate of the DGTD- $\mathbb{P}_p$  method is close to  $\mathcal{O}(h^{(1)})$ ,  $\forall p$ . Moreover, it is not necessary to increase the interpolation degree  $p$  to more than one since doing so does not result in a higher convergence rate and the method becomes too much expensive for  $p \geq 2$  (see Tab. 3.23). It is clear that the presence of a material interface influences the convergence rate of the DGTD- $\mathbb{P}_p$  method but this behaviour does not depend on the type of material. We validate this by studying the convergence of the conforming DGTD- $\mathbb{P}_p$  method using three different materials. Results in Tab. 3.20 show that the convergence rate is always close to  $\mathcal{O}(h^{(1)})$ . This confirms that the convergence rate depends only on the regularity of the solution. It is expected that the use of multiple material interfaces would make the situation worse. This phenomenon has been observed in [HW04b] and in the more recent work [BHP07] for the Maxwell eigenvalue problem (see Remark 3.1). This is also observed in [Dur06] for the time-harmonic Maxwell equations using high-order continuous and discontinuous Galerkin methods.

**Remark 3.1** In [BHP07] a checkerboard pattern of materials inside a PEC cavity is studied using a high-order discontinuous Galerkin method. It is observed that the convergence rate is less than linear, whatever the interpolation degree is, despite that without material interfaces (i.e. in homogeneous media) the convergence rate is close to  $\mathcal{O}(h^{(2p)})$ . The authors in [BHP07] do not elaborate on this fact. Moreover, this problem was also studied in [HW04b] using high-order nodal  $h$ - and  $p$ -refinement discontinuous Galerkin method with central fluxes. As in [BHP07], the convergence of the nodal discontinuous Galerkin method degrades in the presence of material interfaces. According to the authors of [HW04b] the degradation of the convergence is due to the use of centered fluxes at the material interfaces (or at discontinuities). The authors suggest that by defining material properties at material interfaces as the average of cell values (i.e. by using a regularization technique [TE03]) should improve the situation.

**$hp$ -refinement DGTD- $\mathbb{P}_{pc}:\mathbb{P}_{pf}$  method.** Here the non-conforming meshes are obtained by locally refining (one refinement level) the zone  $[0, 0.5] \times [0, 1]$ . Tab. 3.21 gives the  $L^2$  error on  $E_z$  and  $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$ , the convergence rate, the CPU time and the number of time steps to reach time  $t = 1$ . Fig. 3.19 shows the corresponding  $L^2$  error on  $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$  as a function of the square root of the number of DOF. The

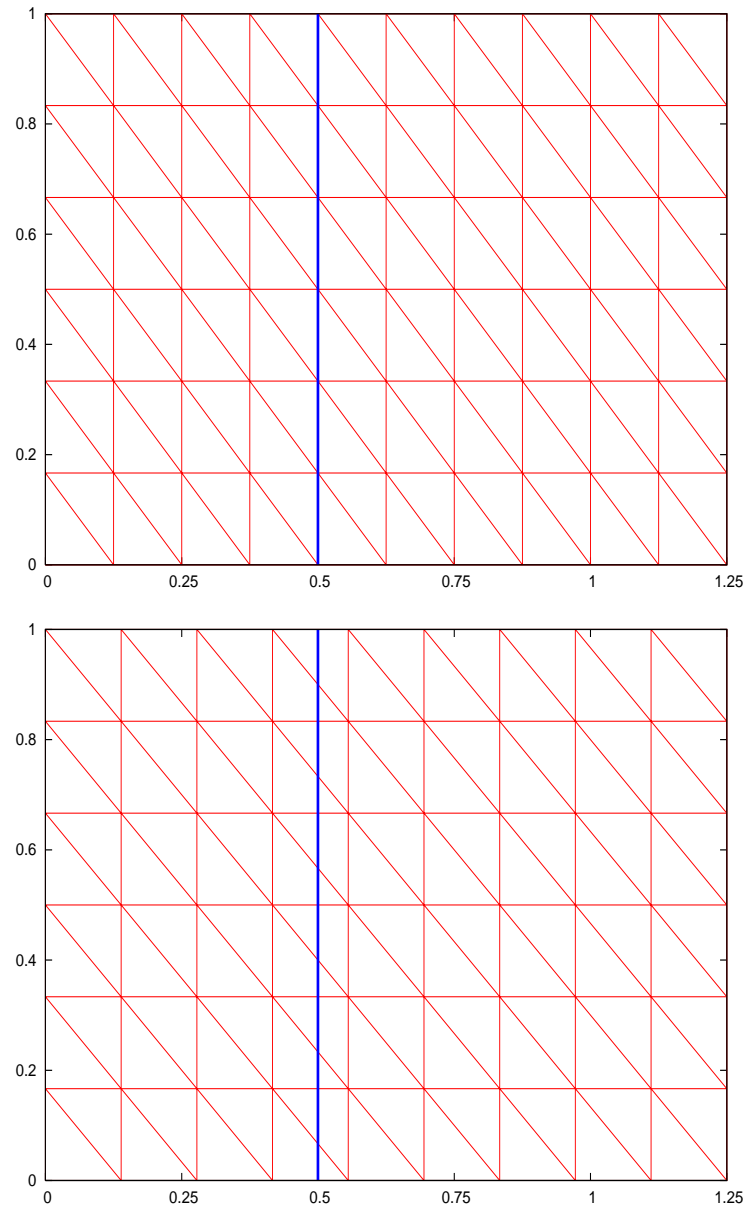


FIG. 3.16 – Rectangular PEC resonator with one material interface.  
 Example of two possible configurations of a conforming triangular mesh.  
 The top figure shows the mesh used in the present study,  
 and the bottom figure shows a situation of mesh which is not allowed in our modeling.  
 The blue line represents the material interface.

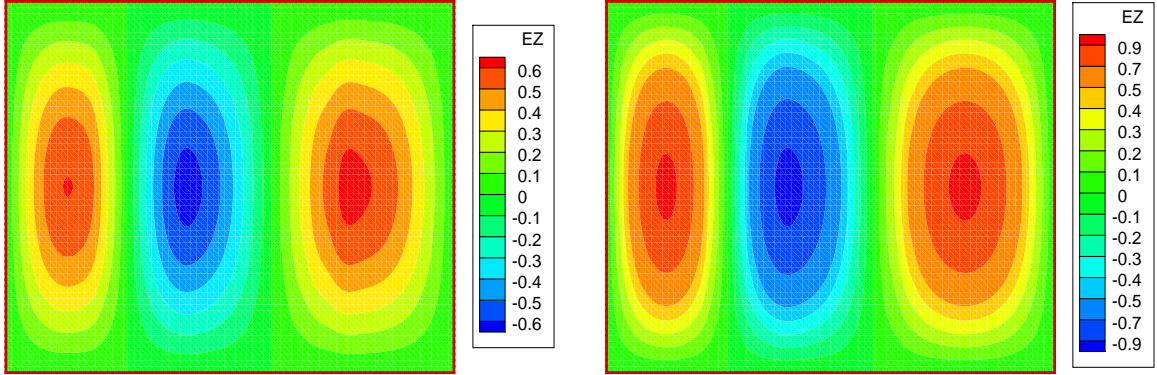


FIG. 3.17 – Rectangular PEC resonator with one material interface.  
Contour lines of  $E_z$  at times  $t = 1$  (left) and  $t = 10$  (right).  
DGTD- $\mathbb{P}_1$  method using a conforming mesh with 4941 nodes and 9600 triangles.

TAB. 3.18 – Rectangular PEC resonator with one material interface.  
Convergence study of the  $h$ -refinement DGTD- $\mathbb{P}_p$  method using conforming meshes.  
 $L^2$  error,  $\# \Delta t$  and CPU time in seconds are measured at time  $t = 1$ .

# DOF	error on $E_z$	conv. rate on $E_z$	error on $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$	conv. rate on $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$	CPU time	# $\Delta t$
DGTD- $\mathbb{P}_0$						
4000	1.40E-02	–	3.26E-02	–	1	57
16000	6.73E-03	1.06	1.91E-02	0.77	10	114
64000	3.33E-03	1.02	9.06E-03	1.08	79	227
256000	1.66E-03	1.01	4.11E-03	1.14	644	453
DGTD- $\mathbb{P}_1$						
12000	5.30E-02	–	7.18E-02	–	8	189
48000	2.72E-02	0.96	3.63E-02	0.98	58	378
192000	1.38E-02	0.99	1.86E-02	0.97	483	755
768000	6.91E-03	0.99	9.51E-03	0.97	3861	1509
DGTD- $\mathbb{P}_2$						
14400	6.88E-02	–	9.21E-02	–	9	220
57600	3.47E-02	0.99	4.76E-02	0.95	65	439
230400	1.74E-02	1.00	2.37E-02	1.01	535	878
921600	8.68E-03	1.00	1.20E-02	0.98	4503	1755
DGTD- $\mathbb{P}_3$						
24000	6.89E-02	–	9.38E-02	–	27	439
96000	3.47E-02	0.99	4.76E-02	0.98	220	878
384000	1.74E-02	1.00	2.41E-02	0.98	1837	1755
1536000	8.68E-03	1.00	1.20E-02	1.01	14917	3510



TAB. 3.19 – Rectangular PEC resonator with one material interface.  
 Convergence study of the  $h$ -refinement DGTD- $\mathbb{P}_p$  method using non-conforming meshes.  
 $L^2$  error,  $\# \Delta t$  and CPU time in seconds are measured at time  $t = 1$ .

# DOF	error on $E_z$	conv. rate on $E_z$	error on $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$	conv. rate on $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$	CPU time	# $\Delta t$
DGTD- $\mathbb{P}_0$						
5280	1.02E-02	–	2.02E-02	–	2	88
21120	4.93E-03	1.05	1.09E-02	0.88	21	176
84480	2.45E-03	1.01	5.15E-03	1.09	166	351
337920	1.22E-03	1.00	2.74E-03	0.91	1350	702
DGTD- $\mathbb{P}_1$						
15840	6.71E-02	–	9.06E-02	–	15	293
63360	3.43E-02	0.97	4.76E-02	0.93	122	585
253440	1.73E-02	0.99	2.41E-02	0.98	1004	1170
1013760	8.66E-03	1.00	1.20E-02	1.00	8272	2340
DGTD- $\mathbb{P}_2$						
9900	1.08E-01	–	1.46E-01	–	7	250
39600	5.54E-02	0.96	7.63E-02	0.94	51	500
158400	2.78E-02	0.99	3.88E-02	0.96	425	1000
633600	1.39E-02	1.00	1.95E-02	0.99	3462	2000
DGTD- $\mathbb{P}_3$						
16500	1.08E-01	–	1.46E-01	–	20	500
66000	5.54E-02	0.96	7.62E-02	0.94	172	1000
264000	2.78E-02	0.99	3.88E-02	0.98	1410	2000
1056000	1.39E-02	1.00	1.95E-02	0.99	12051	4000

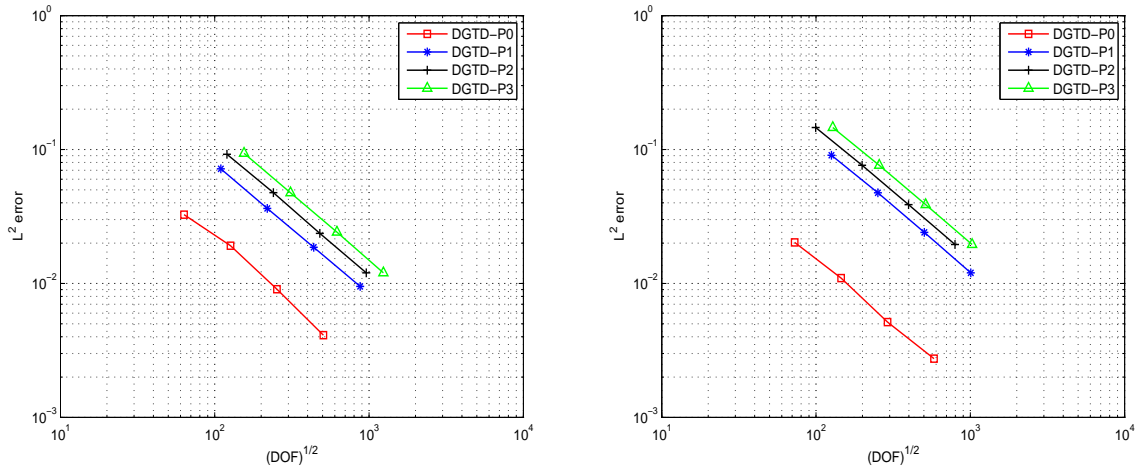


FIG. 3.18 – Rectangular PEC resonator with one material interface.  
 Numerical convergence of the  $h$ -refinement DGTD- $\mathbb{P}_p$  method.  
 Conforming (left) and non-conforming (right) triangular meshes.

TAB. 3.20 – Rectangular PEC resonator with one material interface for different types of materials.  
 Convergence study of the DGTD- $\mathbb{P}_p$  method using conforming meshes.  
 $L^2$  error is measured at time  $t = 1$ .

# DOF	$\epsilon_2 = 2.125$ $\omega = \sqrt{40}\pi$		$\epsilon_2 = 3.25$ $\omega = \sqrt{20}\pi$		$\epsilon_2 = 6.625$ $\omega = \sqrt{8}\pi$	
	error on $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$	conv. rate on $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$	error on $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$	conv. rate on $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$	error on $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$	conv. rate on $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$
	DGTD- $\mathbb{P}_0$		DGTD- $\mathbb{P}_0$		DGTD- $\mathbb{P}_0$	
4000	1.06E-01	–	1.28E-01	–	1.90E-01	–
16000	5.41E-02	0.97	6.41E-02	1.00	9.25E-02	1.04
64000	2.66E-02	1.02	3.20E-02	1.00	4.63E-02	1.00
256000	1.19E-02	1.15	1.51E-02	1.08	2.30E-02	1.00
	DGTD- $\mathbb{P}_1$		DGTD- $\mathbb{P}_1$		DGTD- $\mathbb{P}_1$	
12000	2.21E-01	–	2.72E-01	–	3.86E-01	–
48000	1.23E-01	0.84	1.48E-01	0.87	2.07E-01	0.90
192000	6.62E-02	0.90	7.87E-02	0.92	1.06E-01	0.96
768000	3.47E-02	0.93	4.09E-02	0.94	5.39E-02	0.98
	DGTD- $\mathbb{P}_2$		DGTD- $\mathbb{P}_2$		DGTD- $\mathbb{P}_2$	
14400	3.45E-01	–	3.84E-01	–	4.44E-01	–
57600	1.78E-01	0.95	2.03E-01	0.92	2.38E-01	0.90
230400	8.87E-02	1.01	1.01E-01	1.01	1.21E-01	0.97
921600	4.49E-02	0.98	5.13E-02	0.98	6.12E-02	0.98
	DGTD- $\mathbb{P}_3$		DGTD- $\mathbb{P}_3$		DGTD- $\mathbb{P}_3$	
24000	3.46E-01	–	3.93E-01	–	4.47E-01	–
96000	1.79E-01	0.96	2.03E-01	0.95	2.38E-01	0.91
384000	8.87E-02	1.01	1.03E-01	0.98	1.21E-01	0.97
1536000	4.49E-02	0.98	5.15E-02	1.00	6.12E-02	0.98

numerical CFL values are given in Tab. 3.22. It is found from Tab. 3.21 that the convergence rate of the DGTD- $\mathbb{P}_{p_c}:\mathbb{P}_{p_f}$  method is close to  $\mathcal{O}(h^{(1)})$ ,  $\forall p_c, \forall p_f$ . One can also note that to obtain a given error level the DGTD- $\mathbb{P}_1:\mathbb{P}_0$  is the least expensive of all  $hp$ -refinement and  $h$ -refinement methods (see Tab. 3.23).

TAB. 3.21 – Rectangular PEC resonator with one material interface.  
 Convergence study of the DGTD- $\mathbb{P}_{p_c}:\mathbb{P}_{p_f}$  method using non-conforming meshes.  
 $L^2$  error,  $\# \Delta t$  and CPU time in seconds are measured at time  $t = 1$ .

# DOF	error on $E_z$	conv. rate on $E_z$	error on $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$	conv. rate on $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$	CPU time	# $\Delta t$
DGTD- $\mathbb{P}_1:\mathbb{P}_0$						
2580	1.29E-02	–	2.77E-02	–	1	72
10320	5.08E-03	1.35	1.09E-02	1.34	6	143
41280	2.24E-03	1.18	5.31E-03	1.04	52	286
165120	1.06E-03	1.07	2.95E-03	0.85	429	572
DGTD- $\mathbb{P}_2:\mathbb{P}_0$						
3840	1.82E-02	–	3.06E-02	–	2	125
15360	8.86E-03	1.04	1.35E-02	1.18	14	250
61440	3.58E-03	1.30	5.77E-03	1.23	115	500
245760	1.38E-03	1.37	2.59E-03	1.16	928	1000
DGTD- $\mathbb{P}_3:\mathbb{P}_0$						
5520	1.18E-02	–	2.31E-02	–	4	200
22080	4.83E-03	1.29	1.02E-02	1.19	28	400
88320	2.21E-03	1.13	4.92E-03	1.05	232	800
353280	1.06E-03	1.06	2.53E-03	0.96	1895	1600
DGTD- $\mathbb{P}_2:\mathbb{P}_1$						
6480	5.36E-02	–	7.28E-02	–	3	167
25920	2.74E-02	0.97	3.68E-02	0.99	25	334
103680	1.38E-02	0.99	1.90E-02	0.95	214	667
414720	6.92E-03	1.00	9.37E-03	1.02	1792	1334
DGTD- $\mathbb{P}_3:\mathbb{P}_1$						
8160	5.36E-02	–	7.43E-02	–	4	200
32640	2.74E-02	0.97	3.84E-02	0.95	40	400
130560	1.38E-02	0.99	1.95E-02	0.98	317	800
522240	6.92E-03	1.00	9.79E-03	0.99	2537	1600
DGTD- $\mathbb{P}_3:\mathbb{P}_2$						
12120	5.53E-02	–	7.63E-02	–	7	250
48480	2.78E-02	0.99	3.88E-02	0.98	63	500
193920	1.39E-02	1.00	1.95E-02	0.99	523	1000
775680	6.94E-03	1.00	9.79E-03	1.00	4270	2000

### 3.2.2 Dielectric in a PEC cavity with two material interfaces

In this problem, a lossless dielectric with a relative permittivity  $\epsilon_2$  is enclosed by air in the  $x$  direction. The media are nonmagnetic and homogeneous along the  $y$  direction. The computational domain  $\Omega = [-1, 1] \times [-1, 1]$  is bounded by PEC walls. The permittivity is given as  $\epsilon = \epsilon_1$  if  $1/2 \leq |x| \leq 1$  and  $|y| \leq 1$ , and  $\epsilon = \epsilon_2$  if  $|x| \leq 1/2$  and  $|y| \leq 1$ , where  $\epsilon_1 = 1$  and  $\epsilon_2 = 2.25$ . The exact time-domain solution is [ZW04]:

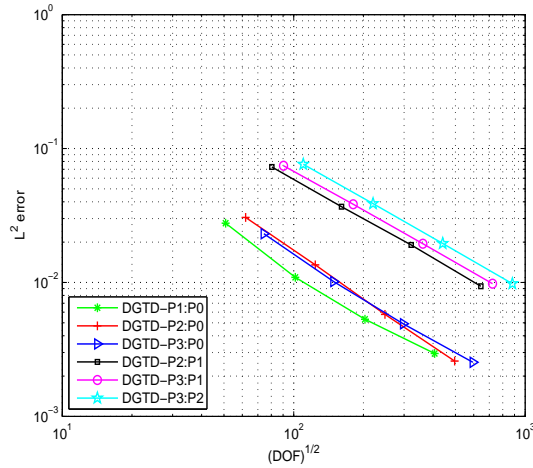


FIG. 3.19 – Rectangular PEC resonator with one material interface. Numerical convergence of the hp-refinement  $DGTD-\mathbb{P}_{p_c}:\mathbb{P}_{p_f}$  method. Non-conforming triangular meshes.

TAB. 3.22 – Rectangular PEC resonator with one material interface. Numerical CFL values of the  $DGTD-\mathbb{P}_{p_c}:\mathbb{P}_{p_f}$  method.

$p_c:p_f$	1:0	2:0	3:0	2:1	3:1	3:2
CFL	0.7	0.4	0.25	0.3	0.25	0.2

TAB. 3.23 – Rectangular PEC resonator with one material interface. # DOF and CPU time in seconds to reach an error level of 2% on  $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$ .  $DGTD-\mathbb{P}_{p_c}:\mathbb{P}_{p_f}$  and  $DGTD-\mathbb{P}_p$  methods.

$DGTD-\mathbb{P}_{p_c}:\mathbb{P}_{p_f}$	$\mathbb{P}_1:\mathbb{P}_0$	$\mathbb{P}_2:\mathbb{P}_0$	$\mathbb{P}_3:\mathbb{P}_0$	$\mathbb{P}_2:\mathbb{P}_1$	$\mathbb{P}_3:\mathbb{P}_1$	$\mathbb{P}_3:\mathbb{P}_2$
# DOF	4092	7750	6990	93024	122500	184920
CPU time	2	5	5	185	290	485

$DGTD-\mathbb{P}_p$ on conforming meshes		$\mathbb{P}_0$	$\mathbb{P}_1$	$\mathbb{P}_2$	$\mathbb{P}_3$
# DOF		14161	164025	324900	562500
CPU time		8	380	900	3150

$DGTD-\mathbb{P}_p$ on non-conforming meshes		$\mathbb{P}_0$	$\mathbb{P}_1$	$\mathbb{P}_2$	$\mathbb{P}_3$
# DOF		5280	360000	592800	1000000
CPU time		2	1730	3120	10800

$$\begin{aligned}
 E_z &= \begin{cases} \sin\left(\frac{\omega_2}{2}\right) \sin(\omega_1(x+1)) \sin(\omega_y y) \cos(\omega t), & -1 \leq x < -1/2, \quad |y| \leq 1, \\ -\sin\left(\frac{\omega_1}{2}\right) \sin(\omega_2 x) \sin(\omega_y y) \cos(\omega t), & -1/2 \leq x \leq 1/2, \quad |y| \leq 1, \\ \sin\left(\frac{\omega_2}{2}\right) \sin(\omega_1(x-1)) \sin(\omega_y y) \cos(\omega t), & 1/2 \leq x \leq 1, \quad |y| \leq 1, \end{cases} \\
 H_x &= \begin{cases} -\frac{\omega_y}{\omega} \sin\left(\frac{\omega_2}{2}\right) \sin(\omega_1(x+1)) \cos(\omega_y y) \sin(\omega t), & -1 \leq x < -1/2, \quad |y| \leq 1, \\ \frac{\omega_y}{\omega} \sin\left(\frac{\omega_1}{2}\right) \sin(\omega_2 x) \cos(\omega_y y) \sin(\omega t), & -1/2 \leq x \leq 1/2, \quad |y| \leq 1, \\ -\frac{\omega_y}{\omega} \sin\left(\frac{\omega_2}{2}\right) \sin(\omega_1(x-1)) \cos(\omega_y y) \sin(\omega t), & 1/2 \leq x \leq 1, \quad |y| \leq 1, \end{cases} \\
 H_y &= \begin{cases} \frac{\omega_1}{\omega} \sin\left(\frac{\omega_2}{2}\right) \cos(\omega_1(x+1)) \sin(\omega_y y) \sin(\omega t), & -1 \leq x < -1/2, \quad |y| \leq 1, \\ -\frac{\omega_2}{\omega} \sin\left(\frac{\omega_1}{2}\right) \cos(\omega_2 x) \sin(\omega_y y) \sin(\omega t), & -1/2 \leq x \leq 1/2, \quad |y| \leq 1, \\ \frac{\omega_1}{\omega} \sin\left(\frac{\omega_2}{2}\right) \cos(\omega_1(x-1)) \sin(\omega_y y) \sin(\omega t), & 1/2 \leq x \leq 1, \quad |y| \leq 1, \end{cases}
 \end{aligned}$$

where  $\omega_1^2 + \omega_y^2 = \epsilon_1 \omega^2$  and  $\omega_2^2 + \omega_y^2 = \epsilon_2 \omega^2$ . The value of  $\omega_y$  is determined according to the relation:

$$\sqrt{\epsilon_2 \omega^2 - \omega_y^2} \tan\left(\frac{\sqrt{\epsilon_1 \omega^2 - \omega_y^2}}{2}\right) = \sqrt{\epsilon_1 \omega^2 - \omega_y^2} \tan\left(-\frac{\sqrt{\epsilon_2 \omega^2 - \omega_y^2}}{2}\right).$$

As in [ZW04] we choose  $\omega_y = 2\pi$  to satisfy the PEC conditions on  $y = \pm 1$  which leads to  $\omega = 9.07716175885174$ . The wavelength  $\lambda^{\epsilon_1} = 0.208$  in the air zone and  $\lambda^{\epsilon_2} = 0.138$  in the material region *i.e.*  $\lambda^{\epsilon_1} \simeq 1.5\lambda^{\epsilon_2}$ . Note that across the dielectric interface (*i.e.* at  $x = \pm 1/2$ ), the  $E_z$  and  $H_x$  components, their time derivative and their first  $y$  derivative are continuous while their first  $x$  derivative are discontinuous. Furthermore, the  $H_y$  component and all its derivatives are discontinuous. An example plot of the analytical solution is shown on Fig. 3.20. Contour lines of the  $E_z$  and  $H_y$  components at times  $t = 1$  and  $t = 10$  are shown on Fig. 3.21 for a calculation based on the conforming DGTD- $\mathbb{P}_1$  method.

**$h$ -refinement DGTD- $\mathbb{P}_p$  method.** The non-conforming meshes are obtained by locally refining (one refinement level) the material region *i.e.* the zone  $[-0.5, 0.5] \times [-1, 1]$ . Tab. 3.24 and 3.25 give the  $L^2$  error on  $E_z$ ,  $H_y$  and  $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$ , the convergence rate, the CPU time and the number of time steps to reach time  $t = 0.65$  using conforming and non-conforming meshes. Fig. 3.22 shows the corresponding  $L^2$  error on  $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$  as a function of the square root of the number of DOF. The convergence rate of the DGTD- $\mathbb{P}_p$  method is close to  $\mathcal{O}(h^{(1)})$  for  $p = 0, 1$ , and close to  $\mathcal{O}(h^{(1/3)})$  for  $p = 2, 3$ .

**$hp$ -refinement DGTD- $\mathbb{P}_{p_c}:\mathbb{P}_{p_f}$  method.** Similarly to the  $h$ -refinement method, the non-conforming meshes are obtained by locally refining (one refinement level) the region  $[-0.5, 0.5] \times [-1, 1]$ . Tab. 3.26 gives the  $L^2$  error on  $E_z$ ,  $H_y$  and  $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$ , the convergence rate, the CPU time and the number of time steps to reach time  $t = 0.65$ . Fig. 3.23 shows the corresponding  $L^2$  error on  $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$  as a function of the square root of the number of DOF. The numerical CFL values are given in Tab. 3.22. It can be seen

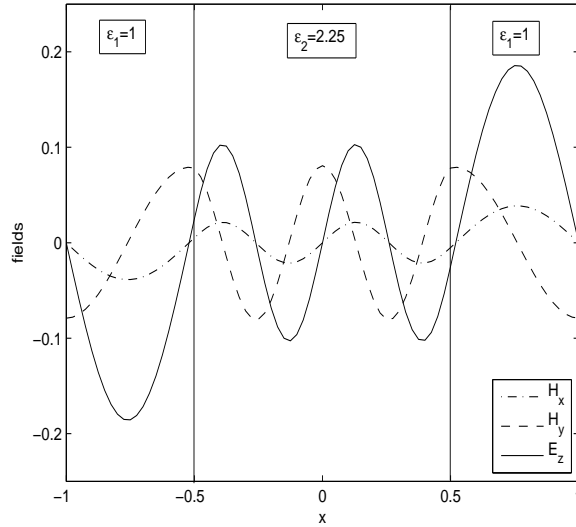


FIG. 3.20 – Dielectric in a PEC cavity with two material interfaces. Plots of the analytical solution along the line  $y = 1/3$  at time  $t = 0.75$ .

from Tab. 3.26 that the overall convergence rate of the  $\text{DGTD-}\mathbb{P}_{p_c}:\mathbb{P}_{p_f}$  is close to  $\mathcal{O}(h^{(1)})$ , excepted for the  $\text{DGTD-}\mathbb{P}_3:\mathbb{P}_2$  method where the convergence rate is close to  $\mathcal{O}(h^{(1/3)})$ .

Despite the slow convergence rate of the  $\text{DGTD-}\mathbb{P}_p$  (for  $p \geq 2$ ) and  $\text{DGTD-}\mathbb{P}_{p_c}:\mathbb{P}_{p_f}$  (for  $p_c \geq 3$ ,  $p_f \geq 2$ ) methods, the role of the high-order DGTD method remains very important to reduce the numerical dispersion even in the presence of material interfaces. To illustrate this point, we plot on Fig 3.24 and 3.25 the time evolution of the  $L^2$  error on the electromagnetic field  $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$  for calculations based on the  $\text{DGTD-}\mathbb{P}_p$  and  $\text{DGTD-}\mathbb{P}_{p_c}:\mathbb{P}_{p_f}$  methods using conforming and non-conforming meshes with 6 and 4 points per wavelength  $\lambda^{\epsilon_1}$  respectively.

Next, we study the numerical convergence of the  $\text{DGTD-}\mathbb{P}_p$  method for different materials and using conforming meshes. In Tab 1.1 we summarize the relative permittivity  $\epsilon_r = \epsilon_2$  for several materials. Our objective here is to understand the influence of the material type on the convergence rate. We give in Tab 3.27 and 3.28 the  $L^2$  error on the  $E_z$  component and the corresponding convergence rate for some materials. We can conclude that:

- The  $\text{DGTD-}\mathbb{P}_0$  method converges as  $h^{(1)}$  in the heterogeneous and homogeneous cases.
- In the homogeneous case, the  $\text{DGTD-}\mathbb{P}_1$  converges as  $h^{(2)}$  but the convergence rate is reduced to  $\mathcal{O}(h^{(1)})$  in the heterogeneous case.
- For  $p \geq 2$ , the  $\text{DGTD-}\mathbb{P}_p$  methods converge as  $h^{(2)}$  in the homogeneous case. This convergence rate is reduced to  $\mathcal{O}(h^{(1)})$  or is less than linear in the heterogeneous case.

### 3.2.3 Scattering of a plane wave by a dielectric cylinder

We consider now a typical problem in which a plane wave impinges on a dielectric cylinder, experiencing reflection and refraction at the material interface. The problem setting is shown on Fig. 3.26.

We assume that the cylinder is illuminated by a monochromatic plane wave of the form:

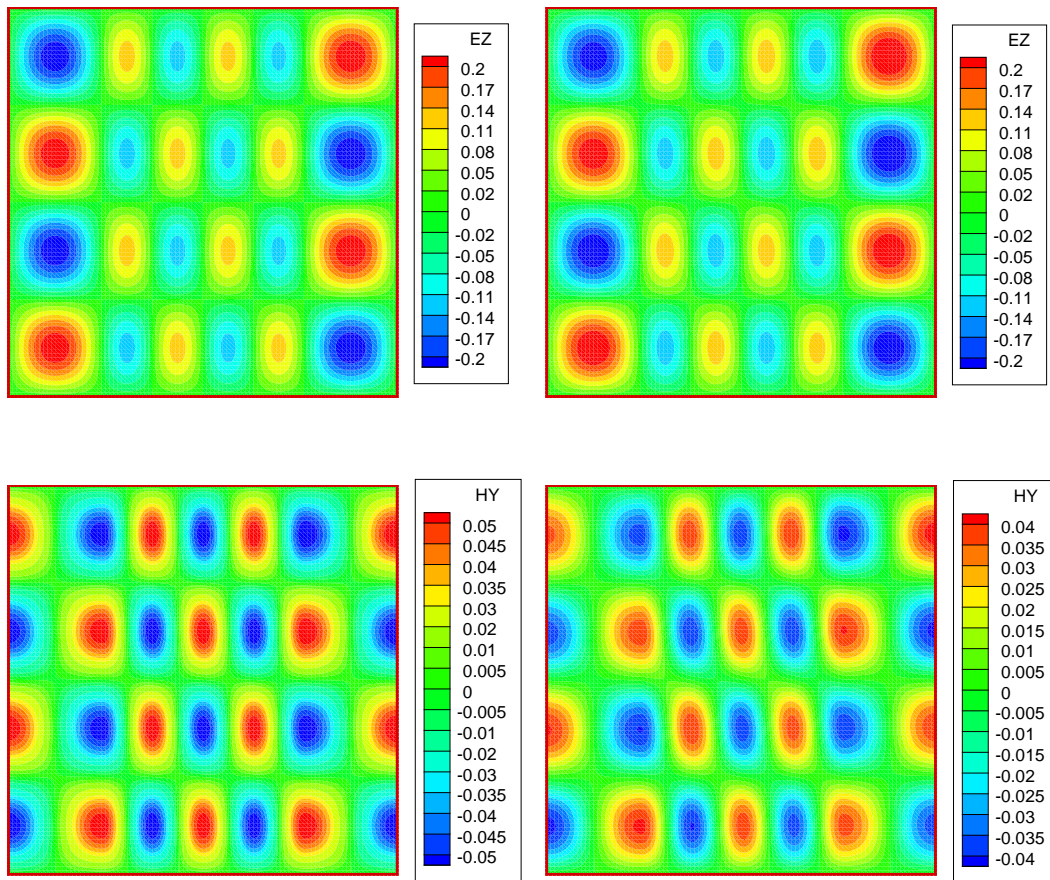


FIG. 3.21 – Dielectric in a PEC cavity with two material interfaces. Contour lines of  $E_z$  (top) and  $H_y$  (bottom) at times  $t = 1$  (left) and  $t = 10$  (right). DGTD- $\mathbb{P}_1$  method using a conforming mesh with 10201 nodes and 20000 triangles.

TAB. 3.24 – Dielectric in a PEC cavity with two material interfaces with  $\epsilon_2 = 2.25$ .  
 Convergence study of the  $h$ -refinement DGTD- $\mathbb{P}_p$  method using conforming meshes.  
 $L^2$  error,  $\# \Delta t$  and CPU time in seconds are measured at time  $t = 0.65$ .

# DOF	error on $E_z$	conv. rate on $E_z$	error on $H_y$	conv. rate on $H_y$	error on $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$	conv. rate on $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$	CPU time	# $\Delta t$
DGTD- $\mathbb{P}_0$								
4608	7.74E-03	–	2.05E-02	–	2.72E-02	–	1	23
18432	3.78E-03	1.03	1.01E-02	1.02	1.33E-02	1.03	4	45
73728	1.89E-03	1.00	4.60E-03	1.14	6.08E-03	1.13	29	89
294912	9.47E-04	1.00	1.78E-03	1.37	2.42E-03	1.33	224	177
DGTD- $\mathbb{P}_1$								
9600	5.72E-03	–	1.38E-02	–	1.81E-02	–	< 2	62
38400	2.11E-03	1.44	4.85E-03	1.51	6.47E-03	1.48	12	123
153600	1.33E-03	0.67	2.79E-03	0.79	3.80E-03	0.77	96	246
614400	6.11E-04	1.12	1.27E-03	1.13	1.80E-03	1.08	770	491
DGTD- $\mathbb{P}_2$								
19200	1.57E-03	–	1.51E-03	–	2.41E-03	–	4	92
76800	1.22E-03	0.36	1.22E-03	0.31	1.89E-03	0.35	29	184
307200	1.08E-03	0.17	1.08E-03	0.16	1.69E-03	0.16	244	368
1228800	6.58E-04	0.72	7.12E-04	0.61	1.08E-03	0.64	1936	736
DGTD- $\mathbb{P}_3$								
32000	1.55E-03	–	1.44E-03	–	2.30E-03	–	13	184
128000	1.22E-03	0.35	1.21E-03	0.25	1.88E-03	0.29	104	368
512000	1.08E-03	0.17	1.08E-03	0.15	1.69E-03	0.15	875	736
2048000	6.58E-04	0.72	6.37E-04	0.77	1.00E-03	0.76	6817	1471

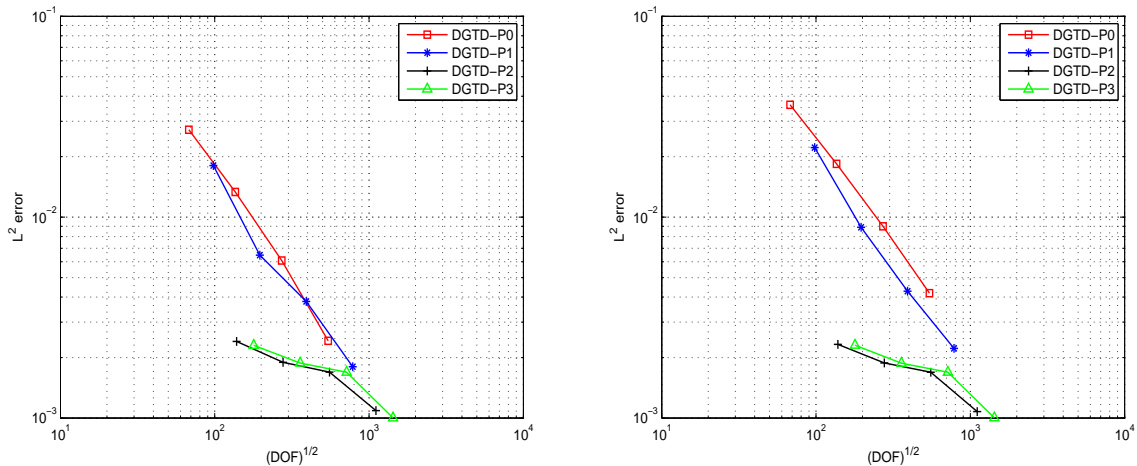


FIG. 3.22 – Dielectric in a PEC cavity with two material interfaces with  $\epsilon_2 = 2.25$ .  
 Numerical convergence of the  $h$ -refinement DGTD- $\mathbb{P}_p$  method.  
 Conforming (left) and non-conforming (right) triangular meshes.



TAB. 3.25 – Dielectric in a PEC cavity with two material interfaces with  $\epsilon_2 = 2.25$ .  
 Convergence study of the  $h$ -refinement DGTD- $\mathbb{P}_p$  method using non-conforming meshes.  
 $L^2$  error, #  $\Delta t$  and CPU time in seconds are measured at time  $t = 0.65$ .

# DOF	error on $E_z$	conv. rate on $E_z$	error on $H_y$	conv. rate on $H_y$	error on $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$	conv. rate on $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$	CPU time	# $\Delta t$
DGTD- $\mathbb{P}_0$								
2880	1.92E-02	–	2.38E-02	–	3.62E-02	–	< 1	23
11520	9.25E-03	1.06	1.25E-02	0.93	1.84E-02	0.98	2	45
46080	4.62E-03	1.00	6.08E-03	1.04	9.01E-03	1.03	18	89
184320	2.31E-03	1.00	2.73E-03	1.15	4.18E-03	1.11	142	177
DGTD- $\mathbb{P}_1$								
8640	1.12E-02	–	1.48E-02	–	2.22E-02	–	< 2	74
34560	3.85E-03	1.54	6.49E-03	1.19	8.90E-03	1.32	13	148
138240	1.99E-03	0.95	3.00E-03	1.12	4.28E-03	1.06	105	295
552960	1.01E-03	0.98	1.50E-03	1.00	2.22E-03	0.95	824	589
DGTD- $\mathbb{P}_2$								
48000	1.56E-03	–	1.46E-03	–	2.33E-03	–	18	184
192000	1.22E-03	0.36	1.28E-03	0.27	1.88E-03	0.31	148	368
768000	1.08E-03	0.17	1.08E-03	0.16	1.69E-03	0.15	1218	736
3072000	6.58E-04	0.72	7.11E-04	0.61	1.08E-03	0.65	10110	1472
DGTD- $\mathbb{P}_3$								
80000	1.56E-03	–	1.44E-03	–	2.30E-03	–	65	368
320000	1.22E-03	0.35	1.20E-03	0.26	1.88E-03	0.30	596	736
1280000	1.08E-03	0.17	1.08E-03	0.16	1.69E-03	0.15	5487	1472
5120000	6.58E-04	0.72	6.39E-04	0.76	1.00E-03	0.75	51103	2944

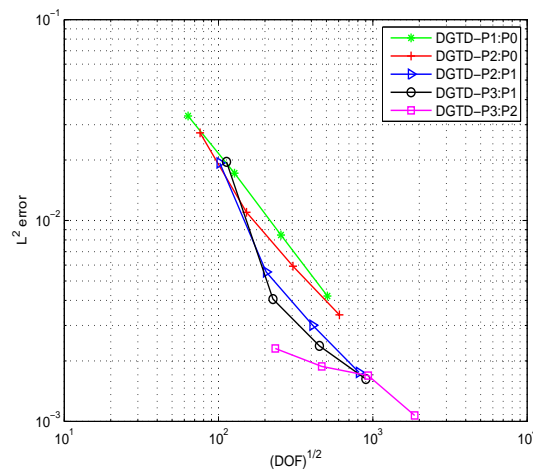


FIG. 3.23 – Dielectric in a PEC cavity with two material interfaces with  $\epsilon_2 = 2.25$ .  
 Numerical convergence of the  $hp$ -refinement DGTD- $\mathbb{P}_{p_c}:\mathbb{P}_{p_f}$  method.  
 Non-conforming triangular meshes.

TAB. 3.26 – Dielectric in a PEC cavity with two material interfaces with  $\epsilon_2 = 2.25$ .  
 Convergence study of the DGTD- $\mathbb{P}_{p_c}:\mathbb{P}_{p_f}$  method using non-conforming meshes.  
 $L^2$  error, #  $\Delta t$  and CPU time in seconds are measured at time  $t = 0.65$ .

# DOF	error on $E_z$	conv. rate on $E_z$	error on $H_y$	conv. rate on $H_y$	error on $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$	conv. rate on $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$	CPU time	# $\Delta t$
DGTD- $\mathbb{P}_1:\mathbb{P}_0$								
4032	1.49E-02	–	2.37E-02	–	3.31E-02	–	< 1	32
16128	6.34E-03	1.23	1.28E-02	0.88	1.72E-02	0.95	4	64
64512	3.46E-03	0.87	6.28E-03	1.03	8.46E-03	1.02	34	127
258048	1.87E-03	0.89	3.10E-03	1.02	4.21E-03	1.01	280	253
DGTD- $\mathbb{P}_2:\mathbb{P}_0$								
5760	1.50E-02	–	1.83E-02	–	2.73E-02	–	1	56
23040	5.04E-03	1.57	7.79E-03	1.23	1.10E-02	1.31	8	111
92160	3.01E-03	0.74	4.25E-03	0.87	5.92E-03	0.89	69	221
368640	1.75E-03	0.78	2.46E-03	0.79	3.39E-03	0.81	498	442
DGTD- $\mathbb{P}_2:\mathbb{P}_1$								
10368	1.32E-02	–	1.15E-02	–	1.93E-02	–	2	74
41472	3.29E-03	2.00	4.30E-03	1.42	5.54E-03	1.80	16	148
165888	1.77E-03	0.89	2.19E-03	0.97	3.01E-03	0.88	126	295
663552	9.37E-04	0.92	1.18E-03	0.89	1.75E-03	0.78	933	589
DGTD- $\mathbb{P}_3:\mathbb{P}_1$								
12672	1.31E-02	–	1.19E-02	–	1.96E-02	–	3	89
50688	2.94E-03	2.16	2.92E-03	2.03	4.06E-03	2.27	21	177
202752	1.65E-03	0.83	1.63E-03	0.85	2.37E-03	0.78	175	353
811008	9.37E-04	0.82	1.06E-03	0.61	1.62E-03	0.55	1402	706
DGTD- $\mathbb{P}_3:\mathbb{P}_2$								
54400	1.56E-03	–	1.44E-03	–	2.31E-03	–	21	184
217600	1.22E-03	0.35	1.21E-03	0.26	1.88E-03	0.30	172	368
870400	1.08E-03	0.17	1.08E-03	0.15	1.69E-03	0.15	1392	736
3481600	6.56E-04	0.72	7.02E-04	0.63	1.07E-03	0.66	11270	1472

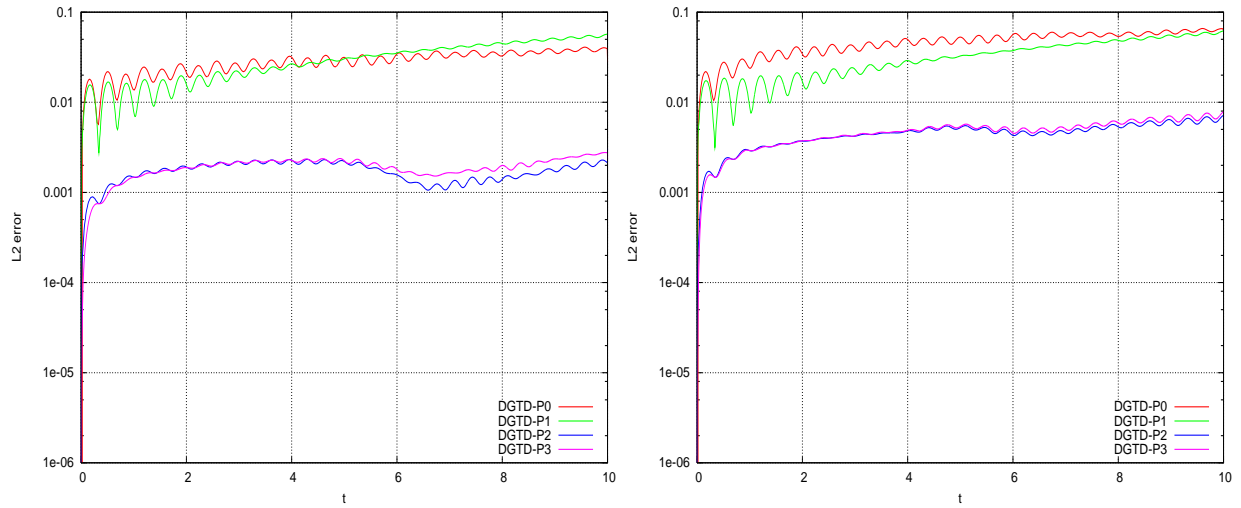


FIG. 3.24 – Dielectric in a PEC cavity with two material interfaces with  $\epsilon_2 = 2.25$ .  
 Time evolution of the  $L^2$  error using the  $h$ -refinement  $DGTD-\mathbb{P}_p$  method.  
 Conforming (left) and non-conforming (right) triangular meshes.

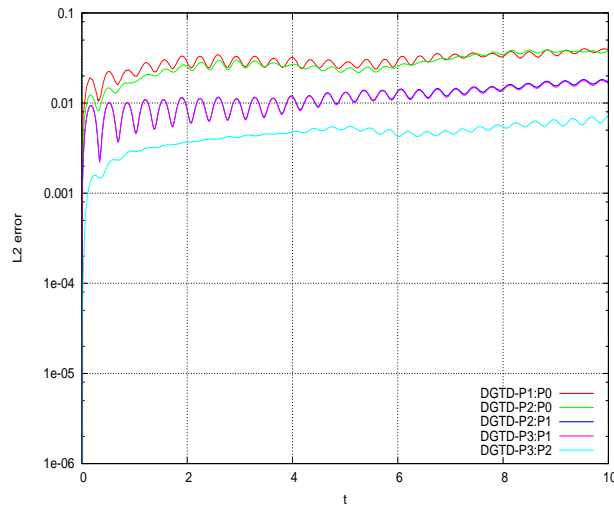


FIG. 3.25 – Dielectric in a PEC cavity with two material interfaces with  $\epsilon_2 = 2.25$ .  
 Time evolution of the  $L^2$  error using the  $hp$ -refinement  $DGTD-\mathbb{P}_{p_c}:\mathbb{P}_{p_f}$  method.  
 Non-conforming triangular meshes.

TAB. 3.27 – Dielectric in a PEC cavity with two material interfaces for different types of materials.  
 Convergence study of the DGTD- $\mathbb{P}_p$  method using conforming meshes.  
 $L^2$  error is measured at time  $t = 0.65$ .

# DOF	$\epsilon_2 = 1.00$ $\omega = \sqrt{5}\pi$		$\epsilon_2 = 1.25$ $\omega = 6.574295470$		$\epsilon_2 = 2.10$ $\omega = 9.217644926$	
	error	conv. rate	error	conv. rate	error	conv. rate
	on $E_z$	on $E_z$	on $E_z$	on $E_z$	on $E_z$	on $E_z$
	DGTD- $\mathbb{P}_0$		DGTD- $\mathbb{P}_0$		DGTD- $\mathbb{P}_0$	
3200	2.71E-02	–	1.74E-02	–	1.56E-02	–
12800	1.40E-02	0.95	9.15E-03	0.93	7.21E-03	1.11
51200	7.14E-03	0.97	4.69E-03	0.96	3.59E-03	1.01
204800	3.60E-03	0.99	2.38E-03	0.98	1.79E-03	1.00
	DGTD- $\mathbb{P}_1$		DGTD- $\mathbb{P}_1$		DGTD- $\mathbb{P}_1$	
9600	1.26E-02	–	2.14E-02	–	7.34E-03	–
38400	3.19E-03	1.98	1.16E-02	0.90	4.67E-03	0.65
153600	8.64E-04	1.89	6.10E-03	0.93	3.02E-03	0.63
614400	2.02E-04	2.10	3.14E-03	0.96	1.70E-03	0.83
	DGTD- $\mathbb{P}_2$		DGTD- $\mathbb{P}_2$		DGTD- $\mathbb{P}_2$	
19200	5.34E-04	–	2.47E-02	–	4.17E-03	–
76800	1.26E-04	2.09	1.26E-02	0.97	4.88E-03	–0.2
307200	3.14E-05	2.00	6.39E-03	0.99	3.13E-03	0.64
1228800	7.74E-06	2.02	3.21E-03	0.99	1.73E-03	0.85
	DGTD- $\mathbb{P}_3$		DGTD- $\mathbb{P}_3$		DGTD- $\mathbb{P}_3$	
32000	1.22E-04	–	2.49E-02	–	4.16E-03	–
128000	3.11E-05	1.97	1.27E-02	0.97	4.88E-03	–0.2
512000	7.63E-06	2.03	6.39E-03	0.99	3.13E-03	0.64
2048000	1.65E-06	2.21	3.21E-03	0.99	1.73E-03	0.85

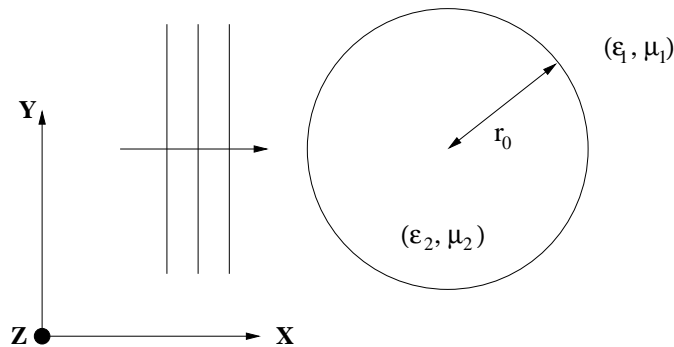


FIG. 3.26 – Scattering of a dielectric cylinder problem setting.

TAB. 3.28 – Dielectric in a PEC cavity with two material interfaces for different types of materials.  
 Convergence study of the DGTD- $\mathbb{P}_p$  method using conforming meshes.  
 $L^2$  error is measured at time  $t = 0.65$ .

# DOF	$\epsilon_2 = 2.60$		$\epsilon_2 = 3.20$		$\epsilon_2 = 4.70$	
	$\omega = 8.819946882$		$\omega = 6.480642472$		$\omega = 8.987555688$	
	error on $E_z$	conv. rate on $E_z$	error on $E_z$	conv. rate on $E_z$	error on $E_z$	conv. rate on $E_z$
	DGTD- $\mathbb{P}_0$		DGTD- $\mathbb{P}_0$		DGTD- $\mathbb{P}_0$	
3200	4.04E-03	–	3.67E-02	–	9.60E-03	–
12800	1.89E-03	1.10	1.73E-02	1.09	3.89E-03	1.30
51200	9.40E-04	1.01	8.50E-03	1.02	1.84E-03	1.07
204800	4.70E-04	1.00	4.24E-03	1.00	9.07E-04	1.02
	DGTD- $\mathbb{P}_1$		DGTD- $\mathbb{P}_1$		DGTD- $\mathbb{P}_1$	
9600	4.96E-03	–	1.04E-01	–	9.84E-03	–
38400	1.53E-03	1.69	5.75E-02	0.85	1.47E-03	2.74
153600	5.12E-04	1.58	3.01E-02	0.93	5.73E-04	1.36
614400	1.91E-04	1.43	1.54E-02	0.97	2.95E-04	0.96
	DGTD- $\mathbb{P}_2$		DGTD- $\mathbb{P}_2$		DGTD- $\mathbb{P}_2$	
19200	4.43E-03	–	1.11E-01	–	7.40E-03	–
76800	1.37E-03	1.69	5.96E-02	0.90	4.15E-04	4.16
307200	4.70E-04	1.54	3.07E-02	0.96	6.36E-04	–0.6
1228800	1.82E-04	1.37	1.55E-02	0.98	5.21E-04	0.29
	DGTD- $\mathbb{P}_3$		DGTD- $\mathbb{P}_3$		DGTD- $\mathbb{P}_3$	
32000	4.43E-03	–	1.11E-01	–	7.39E-03	–
128000	1.37E-03	1.69	5.96E-02	0.90	4.14E-04	4.16
512000	4.71E-04	1.54	3.07E-02	0.96	6.36E-04	–0.6
2048000	1.82E-04	1.37	1.56E-02	0.98	5.21E-04	0.29

$$E_z^{\text{inc}} = \exp(-i(k_1x - \omega t)) \quad \text{and} \quad H_y^{\text{inc}} = -\exp(-i(k_1x - \omega t)),$$

where  $k_1 = \omega\sqrt{\epsilon_1\mu_1}$ . In this case, the exact solution of the scattering problem is given by:

$$E_z(x, y, t) = E_z(r, \theta, t) = \exp(i\omega t) \begin{cases} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n^{\text{tot}} J_n(k_2 r) \exp(in\theta), & r \leq r_0, \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} (i^{-n} J_n(k_1 r) + C_n^{\text{scat}} H_n^{(2)}(k_1 r)) \exp(in\theta), & r > r_0, \end{cases}$$

where  $J_n$  and  $H_n^{(2)}$  represent the  $n$ th-order Bessel function of the first kind and the Hankel function of the second kind, respectively, and  $k_2 = \omega\sqrt{\epsilon_2\mu_2}$  is the propagation constant for homogeneous, lossless dielectric medium. As usual,  $(r, \theta) = (\sqrt{x^2 + y^2}, \arctan(y/x))$  represent the usual polar coordinates. The expansion coefficients for the total field interior to the cylinder are:

$$C_n^{\text{tot}} = i^{-n} \frac{(k_1/\mu_1) J_n'(k_1 r_0) H_n^{(2)}(k_1 r_0) - (k_1/\mu_1) H_n^{(2)'}(k_1 r_0) J_n(k_1 r_0)}{(k_2/\mu_2) J_n'(k_2 r_0) H_n^{(2)}(k_1 r_0) - (k_1/\mu_1) H_n^{(2)'}(k_1 r_0) J_n(k_2 r_0)}.$$

The corresponding coefficients for the scattered field are:

$$C_n^{\text{scat}} = i^{-n} \frac{(k_1/\mu_1) J_n'(k_1 r_0) J_n(k_2 r_0) - (k_2/\mu_2) J_n'(k_2 r_0) J_n(k_1 r_0)}{(k_2/\mu_2) J_n'(k_2 r_0) H_n^{(2)}(k_1 r_0) - (k_1/\mu_1) H_n^{(2)'}(k_1 r_0) J_n(k_2 r_0)}.$$

Using the  $\text{TM}_z$  Maxwell equations, one can recover the solution for the magnetic field components. Then, the angular component of the total magnetic field is:

$$H_\theta(r, \theta, t) = -\exp(i\omega t) \begin{cases} \frac{-ik_2}{\omega\mu_2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n^{\text{tot}} J_n'(k_2 r) \exp(in\theta), & r \leq r_0, \\ \frac{-ik_1}{\omega\mu_1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (i^{-n} J_n'(k_1 r) + C_n^{\text{scat}} H_n^{(2)'}(k_1 r)) \exp(in\theta), & r > r_0, \end{cases}$$

and the radial component is:

$$H_r(r, \theta, t) = -\exp(i\omega t) \begin{cases} \frac{i}{\omega\mu_2 r} \sum_{n=-\infty}^{\infty} in C_n^{\text{tot}} J_n(k_2 r) \exp(in\theta), & r \leq r_0, \\ \frac{i}{\omega\mu_1 r} \sum_{n=-\infty}^{\infty} in (i^{-n} J_n(k_1 r) + C_n^{\text{scat}} H_n^{(2)}(k_1 r)) \exp(in\theta), & r > r_0. \end{cases}$$

In the following, we set  $\mu_1 = \mu_2 = \epsilon_1 = 1$ , i.e. the material is non-magnetic, and the material exterior to the cylinder is assumed to be vacuum. The cylinder has a radius  $r_0 = 0.6$  and bounds a material of relative permittivity  $\epsilon_2 = 2.25$ . The angular frequency is  $\omega = 2\pi$  and the computational domain  $\Omega$  is chosen as a cylinder of radius  $r$ , centered at  $(0, 0)$ . In this special case, all three field components are continuous across the material interface. The first derivative of  $E_z$  is also continuous across the interface, but first derivatives of  $H_x$  and  $H_y$  are discontinuous. Regarding the boundary condition at the artificial boundary of the computational domain, we use a first-order Silver-Müller absorbing boundary condition.

### 3.2.3.1 Configuration S1: $r = 1$

We consider a situation where the external cylinder has a radius  $r = 1$  m. Similarly to the previous test cases, we study the convergence of the DGTD- $\mathbb{P}_p$  and DGTD- $\mathbb{P}_{p_c}:\mathbb{P}_{p_f}$  methods for solving this scattering problem using conforming and non-conforming meshes.

This problem has been studied in [Taf98] in a scattered field/total field formulation using a FDTD method, and in [HDL99]-[FLH02]-[SLL06] using a pseudospectral time-domain method with a stabilized PML [Ber94] absorbing boundary condition. It is also solved in [CD03] using a central finite difference scheme away from the material interfaces and upwinding technique with jump conditions near the interfaces and exact boundary conditions. Cai *et al.* [LZC04] developed a discontinuous Galerkin method for this problem. This method combined upwinding fluxes with a Runge-Kutta time scheme and the fields are approximated using Legendre polynomials for rectangular elements and standard nodal polynomials for triangular elements. Recently, Deng and Cai [DC05] have proposed an extension of [LZC04] to a higher order method based on orthogonal non-polynomial nodal basis on triangles.

**$h$ -refinement DGTD- $\mathbb{P}_p$  method.** We first construct three conforming meshes whose characteristics are listed in Tab. 3.29. Then, non-conforming meshes are obtained by locally refining (one refinement level) the dielectric region of the conforming meshes. The characteristics of the resulting non-conforming meshes are summarized in Tab. 3.30. We give in Tab. 3.31 and 3.32 the  $L^2$  error on  $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$ , the convergence rate, the CPU time and the number of time steps ( $\# \Delta t$ ) to reach time  $t = 1$  using conforming and non-conforming meshes. Fig. 3.27 shows the corresponding  $L^2$  error on  $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$  as a function of the square root of the number of DOF. It can be deduced from Tab. 3.31 and 3.32 that the convergence rate of the DGTD- $\mathbb{P}_p$  method is close to  $\mathcal{O}(h^{(1)})$  for  $p = 0, 1$ , and very slow for  $p = 2, 3$ . It is clear also that it is not necessary to increase the interpolation degree to more than one since the convergence rate is not improved and this results in increased CPU time and memory usage.

TAB. 3.29 – *Scattering of a plane wave by a dielectric cylinder - Configuration S1. Characteristics of the three conforming meshes.*

	# nodes	# triangles
<b>mesh-C1</b>	101	190
<b>mesh-C2</b>	401	780
<b>mesh-C3</b>	1601	3160

TAB. 3.30 – *Scattering of a plane wave by a dielectric cylinder - Configuration S1. Characteristics of the three non-conforming meshes.*

	# total nodes	# fine triangles	# coarse triangles	# hanging nodes
<b>mesh-NC1</b>	261	400	90	20
<b>mesh-NC2</b>	1021	1600	380	40
<b>mesh-NC3</b>	4041	6400	1560	80

**$hp$ -refinement DGTD- $\mathbb{P}_{p_c}:\mathbb{P}_{p_f}$  method.** We still make use of the non-conforming meshes summarized in Tab. 3.30. We give in Tab. 3.33 the  $L^2$  error on  $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$ , the convergence rate, the CPU time

TAB. 3.31 – *Scattering of a plane wave by a dielectric cylinder - Configuration S1.*  
*Convergence study for the  $h$ -refinement DGTD- $\mathbb{P}_p$  method using conforming meshes.*  
 $L^2$  error,  $\# \Delta t$  and CPU time in seconds are measured at time  $t = 1$ .

# DOF	error on $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$	conv. rate on $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$	CPU time	$\# \Delta t$
DGTD- $\mathbb{P}_0$				
190	1.45E-00	–	< 1	23
780	6.43E-01	1.15	4	71
3160	3.22E-01	0.99	44	262
DGTD- $\mathbb{P}_1$				
570	9.39E-01	–	4	76
2340	3.84E-01	1.26	30	236
9480	1.86E-01	1.03	427	874
DGTD- $\mathbb{P}_2$				
1140	3.47E-01	–	7	113
4680	1.62E-01	1.07	85	354
18960	1.51E-01	0.11	1272	1310
DGTD- $\mathbb{P}_3$				
1900	2.64E-01	–	23	226
7800	1.60E-01	0.70	283	708
31600	1.51E-01	0.09	4239	2620

TAB. 3.32 – *Scattering of a plane wave by a dielectric cylinder - Configuration S1.*  
*Convergence study for the  $h$ -refinement DGTD- $\mathbb{P}_p$  method using non-conforming meshes.*  
 $L^2$  error,  $\# \Delta t$  and CPU time in seconds are measured at time  $t = 1$ .

# DOF	error on $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$	conv. rate on $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$	CPU time	$\# \Delta t$
DGTD- $\mathbb{P}_0$				
490	1.22E-00	–	2	46
1980	5.71E-01	1.09	7	82
7960	3.05E-01	0.90	88	262
DGTD- $\mathbb{P}_1$				
1470	8.77E-01	–	9	151
5940	3.25E-01	1.42	65	272
23880	1.73E-01	0.90	845	874
DGTD- $\mathbb{P}_2$				
2940	3.23E-01	–	27	226
11880	1.62E-01	0.99	193	408
47760	1.51E-01	0.10	2506	1310
DGTD- $\mathbb{P}_3$				
4900	2.61E-01	–	87	452
19800	1.61E-01	0.70	633	816
79600	1.51E-01	0.09	8264	2620



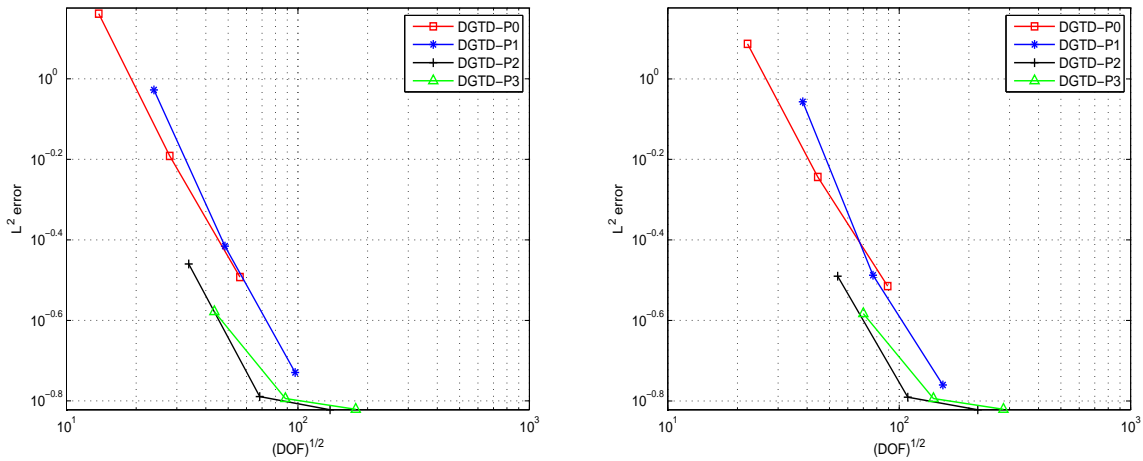


FIG. 3.27 – Scattering of a plane wave by a dielectric cylinder - Configuration S1. Numerical convergence of the  $h$ -refinement  $DGTD-\mathbb{P}_p$  method. Conforming (left) and non-conforming (right) triangular meshes.

and the number of time steps to reach time  $t = 1$ . Fig. 3.28 shows the corresponding  $L^2$  error on  $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$  as a function of the square root of the number of DOF. It can be seen from Tab. 3.33 that the overall convergence rate of the  $DGTD-\mathbb{P}_{pc}:\mathbb{P}_{pf}$  method is less than linear excepted for the  $DGTD-\mathbb{P}_1:\mathbb{P}_0$  where the convergence rate is close to  $\mathcal{O}(h^{(1)})$ .

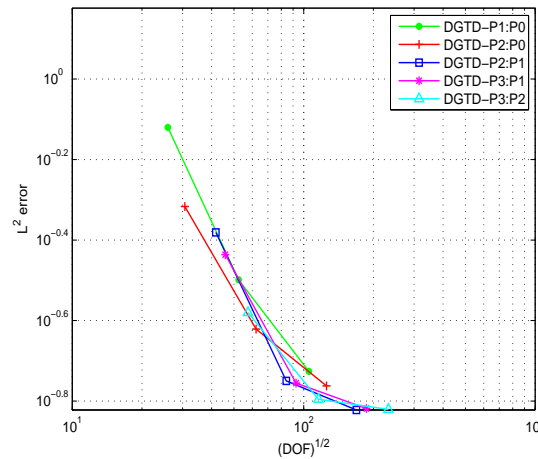


FIG. 3.28 – Scattering of a plane wave by a dielectric cylinder - Configuration S1. Numerical convergence of the  $hp$ -refinement  $DGTD-\mathbb{P}_{pc}:\mathbb{P}_{pf}$  method. Non-conforming triangular meshes.

### 3.2.3.2 Configuration S2: $r = 1.5$

We consider now a situation where the external cylinder has a radius  $r = 1.5$  m. Contour lines of the  $E_z$  and  $H_y$  components at times  $t = 1$  and  $t = 10$  are shown on Fig. 3.29 for a calculation based on the

TAB. 3.33 – Scattering of a plane wave by a dielectric cylinder - Configuration S1.  
 Convergence study of the DGTD- $\mathbb{P}_{p_c}:\mathbb{P}_{p_f}$  method using non-conforming meshes.  
 $L^2$  error, #  $\Delta t$  and CPU time in seconds are measured at time  $t = 1$ .

# DOF	error on $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$	conv. rate on $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$	CPU time	# $\Delta t$
DGTD- $\mathbb{P}_1:\mathbb{P}_0$				
670	7.58E-01	–	5	113
2740	3.17E-01	1.23	28	204
11080	1.88E-01	0.75	363	655
DGTD- $\mathbb{P}_2:\mathbb{P}_1$				
940	4.82E-01	–	13	226
3880	2.39E-01	0.99	89	408
15760	1.73E-01	0.46	1153	1310
DGTD- $\mathbb{P}_2:\mathbb{P}_1$				
1740	4.16E-01	–	12	151
7080	1.78E-01	1.21	87	272
28560	1.51E-01	0.23	1134	874
DGTD- $\mathbb{P}_3:\mathbb{P}_1$				
2100	3.66E-01	–	24	226
8600	1.76E-01	1.04	176	408
34800	1.52E-01	0.21	4566	2620
DGTD- $\mathbb{P}_3:\mathbb{P}_2$				
3300	2.63E-01	–	33	226
13400	1.60E-01	0.71	239	408
54000	1.51E-01	0.08	6096	2620

conforming DGTD- $\mathbb{P}_1$  method.

To show the effectiveness of the  $hp$ -like method, we compare the DGTD- $\mathbb{P}_p$  method using conforming meshes with the DGTD- $\mathbb{P}_{p_c}:\mathbb{P}_{p_f}$  method using non-conforming meshes. To this end, we first construct a conforming mesh consisting of 11920 triangles and 6001 nodes and we use different cases of DGTD- $\mathbb{P}_p$  method, where the interpolation order  $p$  is uniform in all triangles of the mesh. Then, a non-conforming mesh is obtained by locally refining (two refinement levels) the cylindrical zone  $0.55 \leq r \leq 0.65$  of a coarse conforming mesh. The resulting non-conforming mesh consists of 5950 triangles and 3151 nodes (300 of them are hanging nodes). Results are shown on Fig. 3.30 and 3.31 in terms of the  $x$ -wise 1D distribution along  $y = 0.0$  m of the  $E_z$  and  $H_y$  components respectively. Tab. 3.34 summarizes the CPU time, the relative  $L^2$  error, the number of time steps and the number of DOF for some configurations of the DGTD methods. As expected, the gain in CPU time between the proposed  $hp$ -like DGTD- $\mathbb{P}_{p_c}:\mathbb{P}_{p_f}$  and the conforming DGTD- $\mathbb{P}_p$  methods is considerable. For instance, to achieve an error level of 5%, the DGTD- $\mathbb{P}_2:\mathbb{P}_0$  scheme requires, on the one hand, 3 times less memory and 21 times less CPU time than the DGTD- $\mathbb{P}_2$  scheme and, on the other hand, 6 times less memory and 72 times less CPU time than the DGTD- $\mathbb{P}_3$  scheme. These gains are slightly lower if we increase the interpolation orders  $p_c$  and  $p_f$ , for instance, the DGTD- $\mathbb{P}_2:\mathbb{P}_1$  scheme requires 2.5 times less memory and 16 times less CPU time than the DGTD- $\mathbb{P}_2$  scheme while the DGTD- $\mathbb{P}_3:\mathbb{P}_2$  scheme requires 2.3 times less memory and 10 times less CPU time than the DGTD- $\mathbb{P}_3$  scheme.

The observed gains in memory usage and computing time are for a great part due to the fact that the CFL condition of the DGTD- $\mathbb{P}_{p_c}:\mathbb{P}_{p_f}$  is larger than the one for the DGTD- $\mathbb{P}_{p_c}$  ( $p_c = p$ ) method, and the local refinement (in a non-conforming way) is only applied to regions where the solution is of low regularity (*i.e.* near the material interface), and in such region a low interpolation degree  $p_f$  (*e.g.*  $p_f = 0$ ) is applied. Furthermore, a coarse mesh and a high interpolation degree  $p_c$  are used far from the material interface where the solution is smooth. Here,  $p_f$  is used in 55% of the triangles of the mesh. In the three-dimensional case, these gains could be larger than in the two-dimensional case, because the number degrees of freedom increases faster with the polynomial order.

TAB. 3.34 – Scattering of a plane wave by a dielectric cylinder - Configuration S2.  
 $L^2$  error,  $\# \Delta t$  and CPU time in minutes are measured at time  $t = 5$ .

DGTD- $\mathbb{P}_p$ : Conforming triangular mesh.				
$p$	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>
$L^2$ error, CPU time	13.6%, 20	7.15%, 178	5.20%, 542	5.22%, 1817
$\#$ DOF, $\# \Delta t$	11920, 3206	35760, 10687	71520, 16030	119200, 32060
DGTD- $\mathbb{P}_{p_c}:\mathbb{P}_{p_f}$ : Non-conforming triangular mesh.				
$p_c:p_f$	<b>1:0</b>	<b>2:0</b>	<b>2:1</b>	<b>3:2</b>
$L^2$ error, CPU time	11.6%, 9	5.36%, 25	5.39%, 33	5.37%, 179
$\#$ DOF, $\# \Delta t$	11450, 1621	19700, 2702	26100, 2702	46700, 8104

### 3.2.4 Scattering of a plane wave by a multilayered dielectric cylinder

We finally consider a problem, in which a plane wave impinges on a dielectric cylinder with multiple layers, experiencing multiple reflections and refractions at the material interfaces. The problem setting is shown on Fig. 3.32.

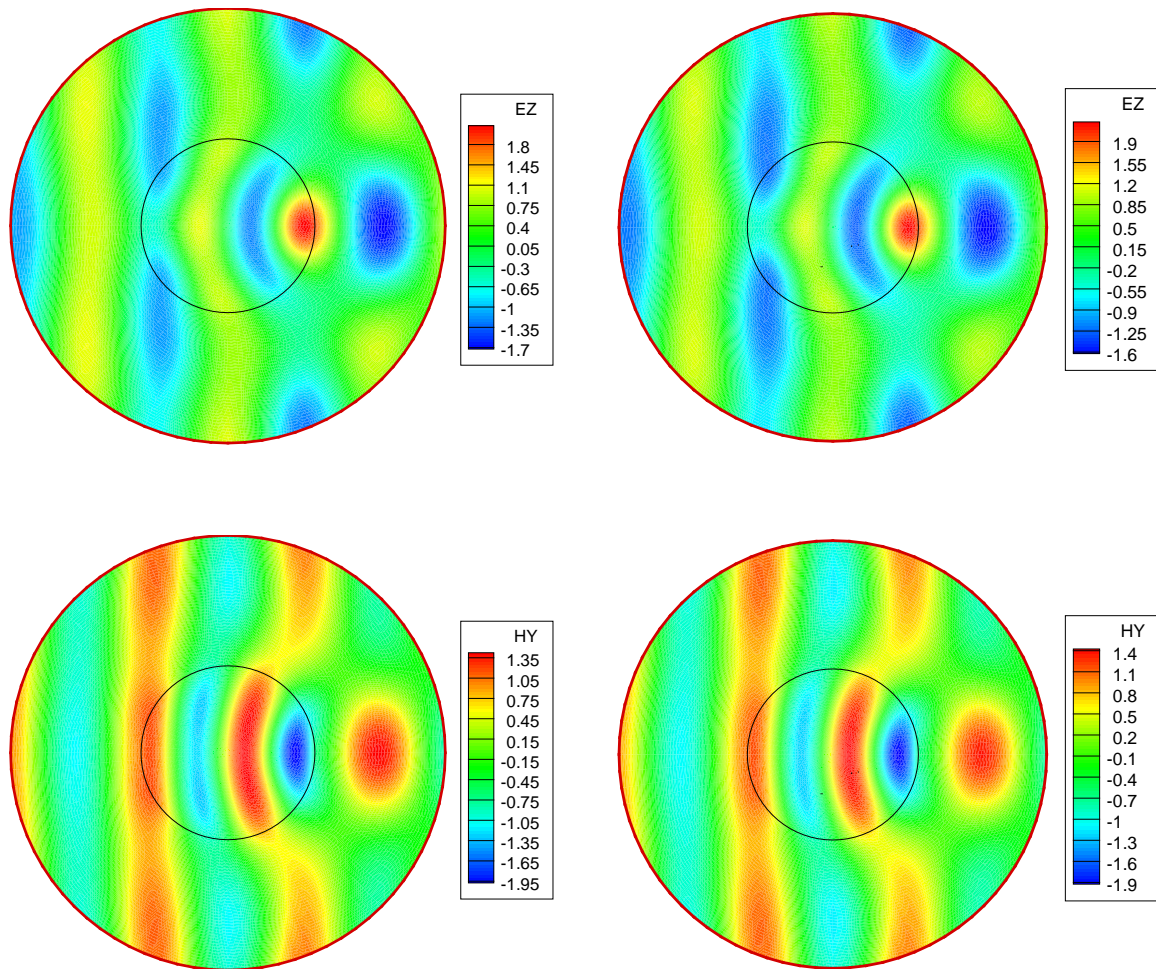


FIG. 3.29 – Scattering of a plane wave by a dielectric cylinder - Configuration S1. Contour lines of  $E_z$  (top) and  $H_y$  (bottom) at times  $t = 1$  (left) and  $t = 10$  (right). DGTD- $\mathbb{P}_1$  method using a conforming mesh with 6001 nodes and 11920 triangles.

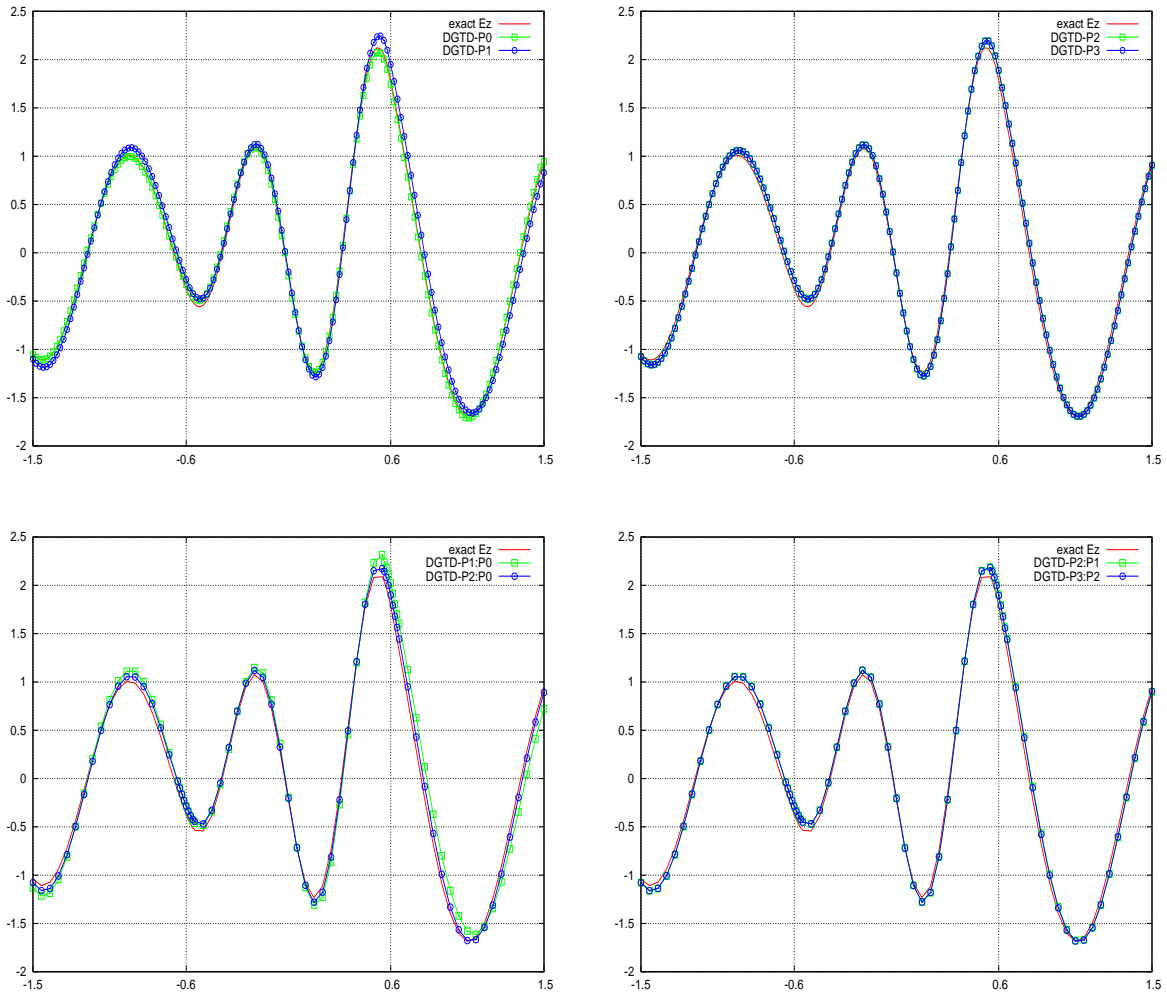


FIG. 3.30 – Scattering of a plane wave by a dielectric cylinder - Configuration S2.  
 1D distribution of  $E_z$  along  $y = 0.0$  at time  $t = 5$ .  
 DGTD- $\mathbb{P}_p$  method (top) and DGTD- $\mathbb{P}_{p_c}:\mathbb{P}_{p_f}$  method (bottom).

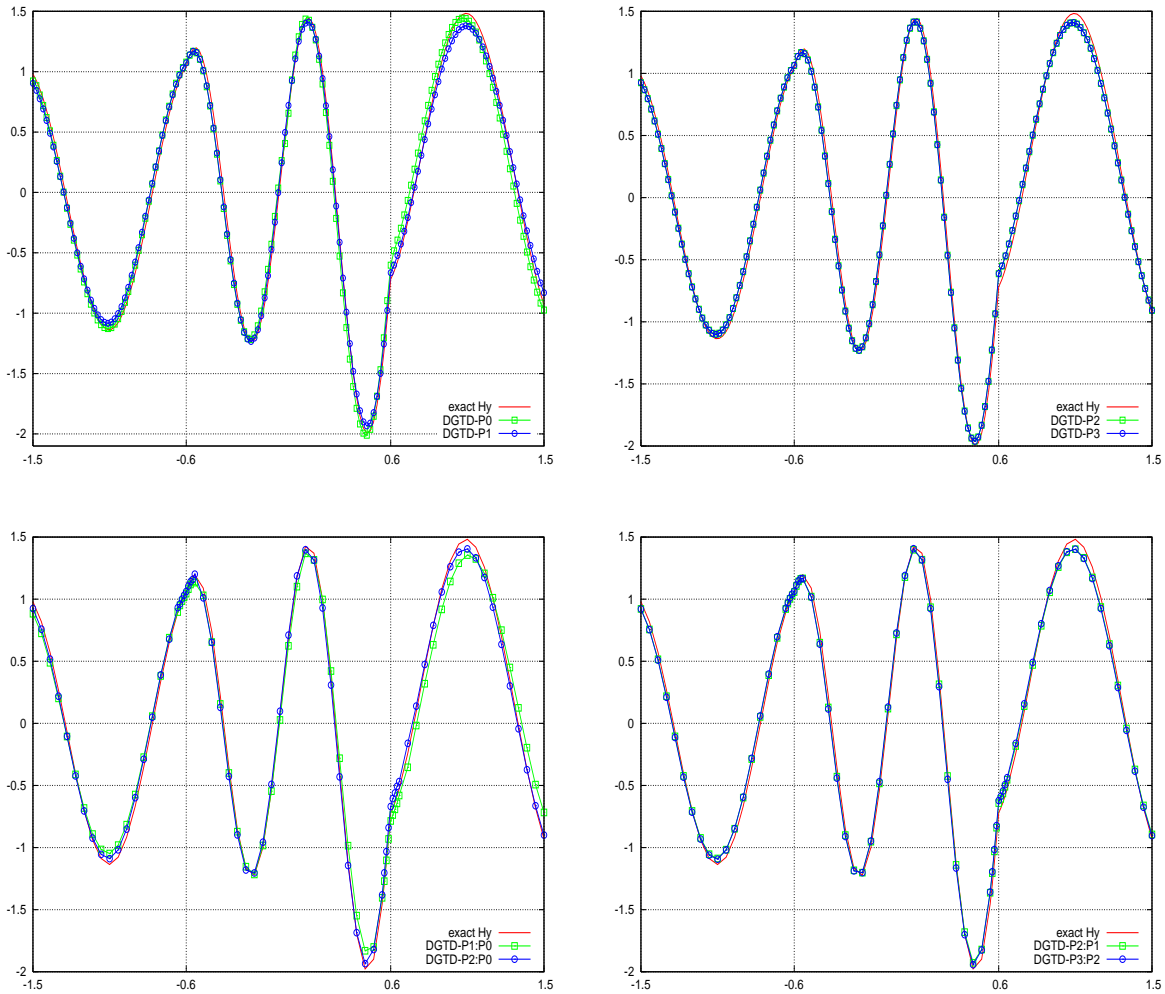


FIG. 3.31 – Scattering of a plane wave by a dielectric cylinder - Configuration S2.  
 1D distribution of  $H_y$  along  $y = 0.0$  at time  $t = 5$ .  
 DGT-D- $\mathbb{P}_p$  method (top) and DGT-D- $\mathbb{P}_{p_c}:\mathbb{P}_{p_f}$  method (bottom).

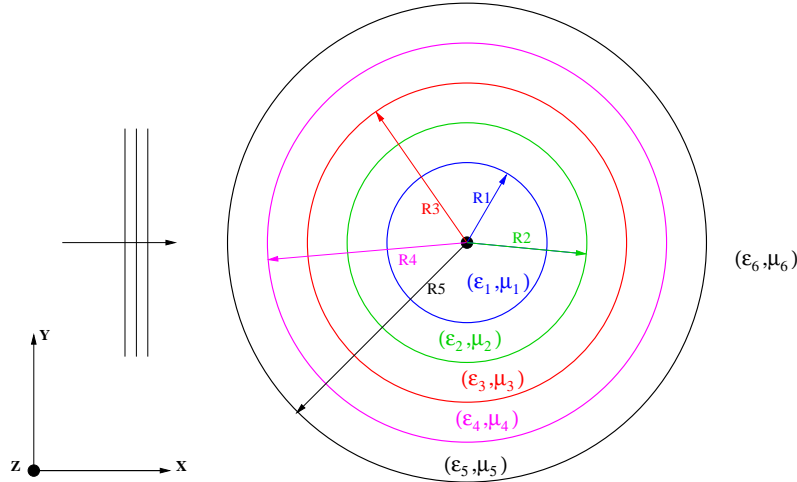


FIG. 3.32 – Scattering of a plane wave by a multilayered dielectric cylinder. Problem setting and computational domain.

We assume that the cylinder is illuminated by a monochromatic plane wave of the form:

$$E_z^{\text{inc}} = \exp(-i(k_6 x - \omega t)) \quad \text{and} \quad H_y^{\text{inc}} = -\exp(-i(k_6 x - \omega t)),$$

where  $k_6 = \omega\sqrt{\epsilon_6\mu_6}$ . We suppose that the cylinder contains five concentric layers. The radii of the cylinders are  $r_1 = 0.1$  m,  $r_2 = 0.2$  m,  $r_3 = 0.3$  m,  $r_4 = 0.4$  m and  $r_5 = 0.5$  m. Each layer consists of a dielectric non-magnetic material, i.e.  $\mu_i = 1, \epsilon_i \geq 1, i = 1, \dots, 6$ . The characteristics of the materials and the corresponding wavelength in the different regions are given in Tab. 3.35. The angular frequency is  $\omega = 2\pi$  and the wavelength in the vacuum is  $\lambda = 1$  m.

TAB. 3.35 – Scattering of a plane wave by a multilayered dielectric cylinder. Characteristics of the material in the different regions.

Region	Region 1 $r < r_1$	Region 2 $r_1 < r < r_2$	Region 3 $r_2 < r < r_3$	Region 4 $r_3 < r < r_4$	Region 5 $r_4 < r < r_5$	Region 6 $r > r_5$
$\epsilon_r$	$\epsilon_1 = 1$	$\epsilon_2 = 4$	$\epsilon_3 = 9$	$\epsilon_4 = 16$	$\epsilon_5 = 64$	$\epsilon_6 = 1$
$\lambda$ (m)	1	0.5	0.33	0.25	0.125	1

The computational domain  $\Omega$  is bounded by a cylinder of radius  $R = 1$  m, centered at  $(0, 0)$ . At this artificial boundary, we use a first order Silver-Müller absorbing boundary condition. No exact analytical solution is available for this problem; instead, we replace it by a reference solution obtained using the DGTD- $\mathbb{P}_4$  method applied to a high resolution conforming mesh consisting of 25001 nodes and 49750 triangles. Contour lines of the  $E_z$  and  $H_y$  components at time  $t = 5$  are shown on Fig. 3.33.

To assess the effectiveness of the proposed non-conforming method, we first construct a conforming mesh consisting of 14401 nodes and 28560 triangles and we use different DGTD- $\mathbb{P}_p$  methods, where the interpolation order  $p$  is uniform in space. Then, a non-conforming mesh is obtained by locally refining a coarse conforming mesh with a resolution of 10 points per the largest of the layer wavelenghtes. The level of refinement depends on the local wavelength in each region. For example, the fifth region is refined four times since it corresponds to the lower wavelength. For this non-conforming mesh, we assign to each

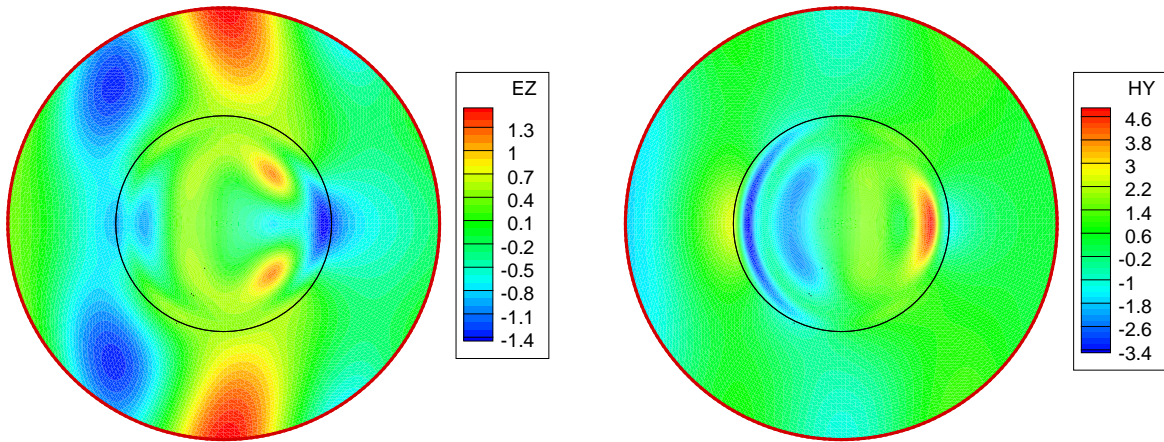


FIG. 3.33 – *Scattering of a plane wave by a multilayered dielectric cylinder. Contour lines of the reference solution at time  $t = 5$ .*

region a polynomial degree  $p_i$  and we use different DGTD- $\mathbb{P}_{p_i}$  methods. The resulting non-conforming mesh consists of 27640 triangles and 14441 nodes in which 920 are hanging nodes (see Fig. 3.34). The level of refinement and the distribution of triangles in each region are summarized in Tab. 3.36.

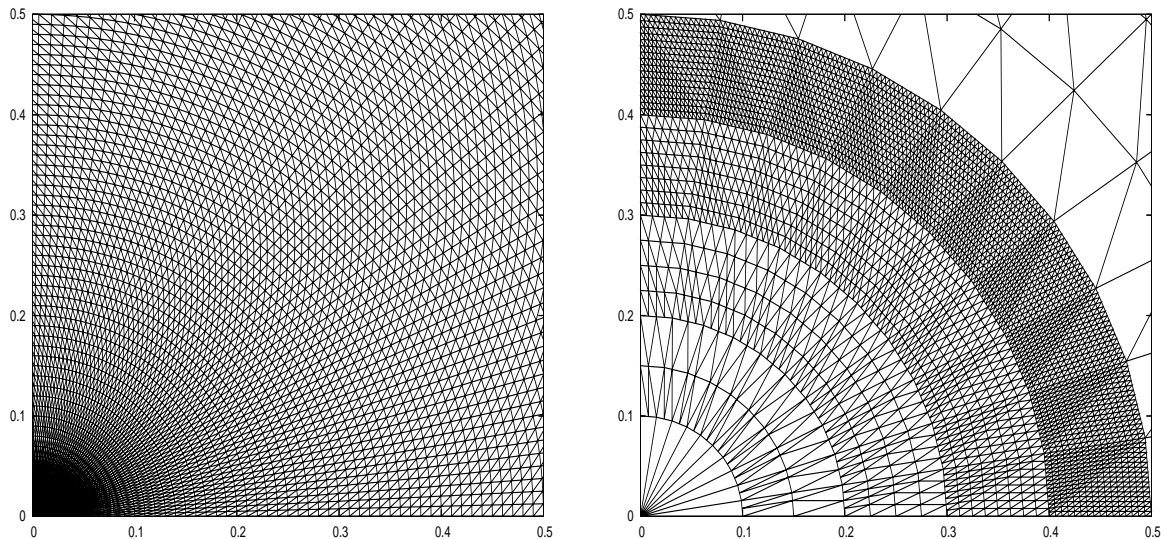


FIG. 3.34 – *Scattering of a plane wave by a multilayered dielectric cylinder. Conforming mesh (left) and non-conforming mesh (right).*

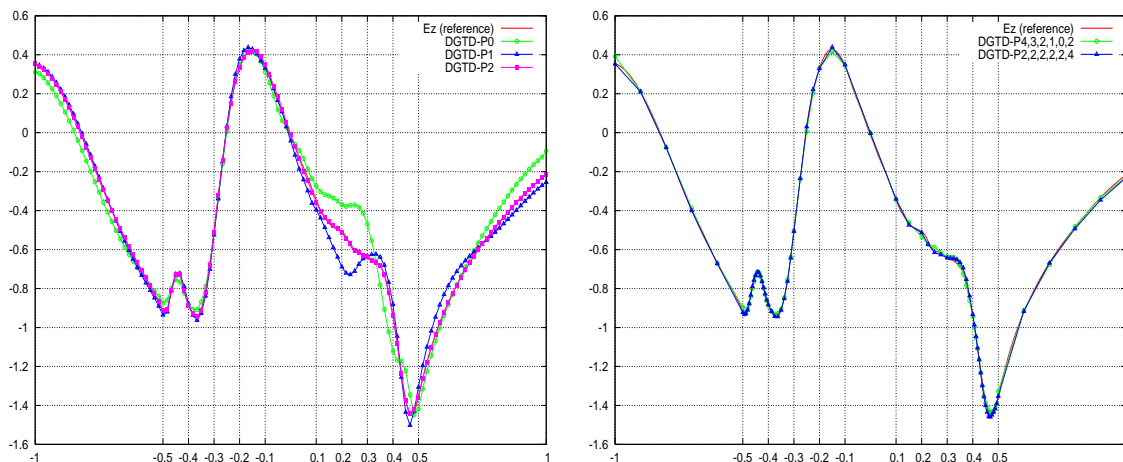
Results are shown on Fig. 3.35 and 3.36 in terms of the  $x$ -wise 1D distribution along  $y = 0.0$  m of the  $E_z$  and  $H_y$  components respectively. One can observe that the  $H_y$  component is of low regularity and the proposed non-conforming DGTD method treats very well the discontinuity at the material interfaces although the levels of refinement in regions 4 and 5 as well as the size of the jump in  $\epsilon$  on the materials interfaces are high, and the mesh in regions 1, 2, 3, 6 are characterized by a few points per wavelength. We give in Tab. 3.37 and 3.38 the  $L^2$  error with the reference solution, the CPU time and # DOF to reach  $t = 5$ , for some cases of the conforming and non-conforming DGTD methods. As expected, the



TAB. 3.36 – Scattering of a plane wave by a multilayered dielectric cylinder.  
 # triangles and the level of refinement in each region.

Region	Region 1	Region 2	Region 3	Region 4	Region 5	Region 6
Interpolation order	$p_1$	$p_2$	$p_3$	$p_4$	$p_5$	$p_6$
Level of refinement	0	1	2	3	4	0
# triangles non-conforming mesh	40	320	1280	5120	20480	400
# triangles conforming mesh	2640	2880	2880	2880	2880	14400

gain in CPU time between the two methods is notable. For instance, the DGTD- $\mathbb{P}_{p_i}$  (first configuration of Tab. 3.38) is roughly 1.5 times more accurate and requires 11 times less CPU time and 1.7 times less memory than the conforming DGTD- $\mathbb{P}_1$  method. Moreover, the DGTD- $\mathbb{P}_{p_i}$  (last configuration) requires respectively 14 times and 42 times less CPU than the conforming DGTD- $\mathbb{P}_2$  and DGTD- $\mathbb{P}_3$  methods.


 FIG. 3.35 – Scattering of a plane wave by a multilayered dielectric cylinder.  
 1D distribution of the  $E_z$  component along  $y = 0.0$  at time  $t = 5$ .  
 Conforming DGTD- $\mathbb{P}_p$  method (left) and non-conforming DGTD- $\mathbb{P}_{p_i}$  method (right).

### 3.3 Concluding remarks

In this chapter, we have presented the results of a detailed numerical evaluation of DGTD- $\mathbb{P}_p$  and DGTD- $\mathbb{P}_{p_c}:\mathbb{P}_{p_f}$  methods developed for the numerical solution of the two-dimensional time-domain Maxwell equations on conforming and non-conforming triangular meshes. For this purpose, we have considered wave propagation problems in homogeneous and heterogeneous media. The DGTD- $\mathbb{P}_p$  and DGTD- $\mathbb{P}_{p_c}:\mathbb{P}_{p_f}$  methods were implemented in Fortran 77 and the computation was performed on a PC workstation equipped with an Intel Pentium M 1.7 GHz processor. The following conclusions can be drawn from these numerical experiments:

- [1]. An optimal convergence rate is obtained for the DGTD- $\mathbb{P}_p$  ( $p = 0, 1$ ) method in both homogeneous

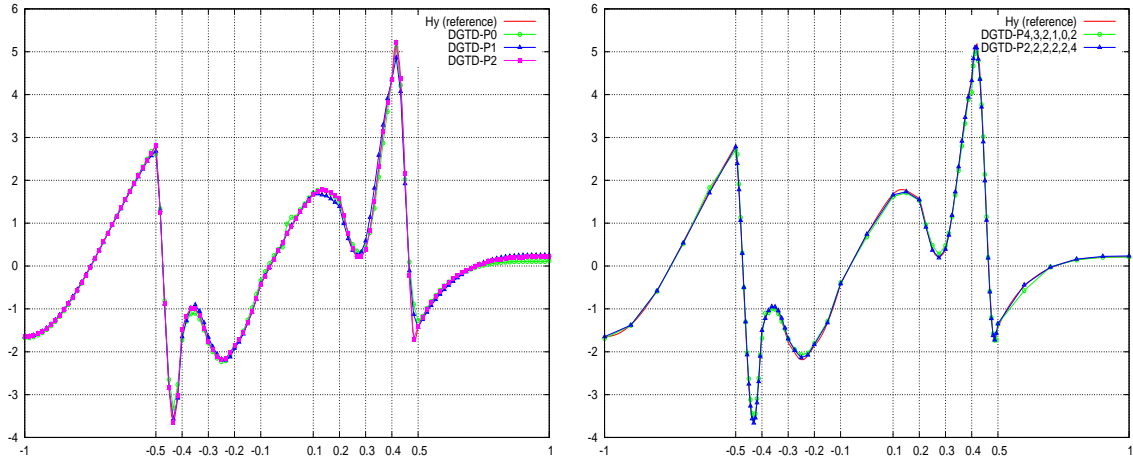


FIG. 3.36 – Scattering of a plane wave by a multilayered dielectric cylinder.  
 1D distribution of the  $H_y$  component along  $y = 0.0$  at time  $t = 5$ .  
 Conforming DGTD- $\mathbb{P}_p$  method (left) and non-conforming DGTD- $\mathbb{P}_{p_i}$  method (right).

TAB. 3.37 – Scattering of a plane wave by a multilayered dielectric cylinder.  
 The relative error, CPU time in minutes and # DOF to reach time  $t = 5$  for different  $p$ .

DGTD- $\mathbb{P}_p$ method using the conforming mesh				
$p$	Error on $H_y$	Error on $E_z$	CPU time	# DOF
0	8.6 %	12.7 %	25	28560
1	7.6 %	7.80 %	137	85680
2	2.2 %	1.30 %	286	171360
3	2.2 %	1.20 %	842	285600

TAB. 3.38 – Scattering of a plane wave by a multilayered dielectric cylinder.  
 The relative error, CPU time in minutes and # DOF to reach time  $t = 5$  for different  $p_i$ .

DGTD- $\mathbb{P}_{p_i}$ method using the non-conforming mesh				
$p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$	Error on $H_y$	Error on $E_z$	CPU time	# DOF
4,3,2,1,0,2	5.0 %	1.7 %	12	49720
4,3,2,2,0,2	4.8 %	1.8 %	12.5	65080
4,3,2,2,1,4	3.5 %	2.6 %	17	109640
4,2,2,4,1,4	3.2 %	2.6 %	21	154440
2,2,2,2,0,2	4.8 %	1.8 %	10	63440
2,2,2,2,1,2	3.5 %	2.5 %	13.5	104400
2,2,2,2,1,4	3.5 %	2.5 %	14	108000
2,2,2,2,2,4	2.5 %	1.6 %	20	169440

and heterogeneous media. For  $p \geq 2$  the convergence rate is close to  $\mathcal{O}(h^{(2)})$  in homogeneous case but it is linear or less in heterogeneous case.

- [2]. The convergence rate of the DGTD- $\mathbb{P}_{p_c}:\mathbb{P}_{p_f}$  method for homogeneous media is close to  $\mathcal{O}(h^{(2)})$  for  $p_f \neq 0$ , while this convergence rate is close to  $\mathcal{O}(h^{(3/2)})$  for  $p_f = 0$ . In heterogeneous media, the convergence rate of this method is linear or less, and in some particular cases we can obtain a convergence rate more than linear.
- [3]. In homogeneous media, the DGTD- $\mathbb{P}_2$  and DGTD- $\mathbb{P}_2:\mathbb{P}_1$  methods are the most accurate and the least expensive  $h$ - and  $hp$ -refinement methods respectively. In heterogeneous media and to reach a given error level, the DGTD- $\mathbb{P}_0$  and DGTD- $\mathbb{P}_1:\mathbb{P}_0$  are the least expensive  $h$ - and  $hp$ -refinement methods. In general, the DGTD- $\mathbb{P}_{p_c}:\mathbb{P}_{p_f}$  method is less expensive than the DGTD- $\mathbb{P}_p$  method.
- [4]. Compared with a conforming DGTD- $\mathbb{P}_p$  method, the proposed  $hp$ -like DGTD- $\mathbb{P}_{p_c}:\mathbb{P}_{p_f}$  method can lead to notable reductions in the CPU time and memory usage.
- [5]. To obtain a high convergence rate for high-order interpolation ( $p \geq 2$ ), a high-order time scheme like a fourth-order leap-frog scheme should be used (see [Pip03] for a 1D example). A special treatment of the numerical fluxes at material interfaces by using a regularization technique [And01]-[Kas04] should also improve the accuracy of the proposed method.
- [6]. To reduce the costs of the method for a high-order interpolation, three possible approaches can be used separately or in combination:
  - the use of hierarchical or orthogonal nodal basis functions can reduce the cost of memory consumption and can also improve the convergence rate of the  $p$ -enrichment method,
  - the use of a local time stepping strategy [Pip06],
  - the use of an *a posteriori* error estimator which remains mandatory to reduce the costs of the method on non-conforming locally refined meshes.

# High-order time schemes

## Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>An arbitrary high-order non-conforming DGTD method . . . . .</b>	<b>128</b>
4.1.1	Space discretization . . . . .	128
4.1.2	Time discretization . . . . .	131
<b>4.2</b>	<b>Stability and convergence analysis . . . . .</b>	<b>133</b>
4.2.1	Stability . . . . .	133
4.2.2	Convergence . . . . .	138
4.2.3	Convergence of the divergence error . . . . .	144
<b>4.3</b>	<b>Numerical validation . . . . .</b>	<b>145</b>
<b>4.4</b>	<b>Concluding remarks . . . . .</b>	<b>152</b>

---

This chapter is concerned with the study of high-order leap-frog schemes that are extensions of the second-order leap-frog scheme adopted in the DGTD methods that are studied in Chapters 2 and 3. The motivation behind this study is to improve the overall accuracy for the same mesh resolution and/or to improve convergence when the mesh resolution is increased. Not surprisingly, the arbitrary high-order DGTD methods discussed in this chapter are consistently more accurate than the DGTD methods based on the second-order leap-frog scheme. The high-order leap-frog schemes require more computational operations to update a cell. Fortunately, this can be alleviated by the ability to use discretization meshes with fewer points per wavelength for the same level of accuracy.

The high-order leap-frog schemes considered in this chapter were initially proposed by Young [You01], and further studied by Spachmann *et al.* [SSW02]. The chief attributes of these integrators are that the memory requirements are small and the algorithmic complexity is not significantly increased, with respect to the second-order leap-frog scheme. In the case of Fang's approach [Fan89]-[Tuo94], high-order temporal derivatives are replaced with high-order mixed spatial derivatives. Although the memory requirements of Fang's approach are the same as the one of the second-order leap-frog scheme, the resulting scheme is far too complex to implement for most practical problems. One can note here that to our knowledge, these high-order leap-frog schemes have not been used yet in the context of the Maxwell's equations discretized by a discontinuous Galerkin method.

The existing high-order discontinuous Galerkin methods are mostly based on high-order Runge-Kutta (RK) schemes. The low storage RK schemes introduced in [CK94] are among the most popular choices for time integration of the DG space-discretized Maxwell equations. High-order RKDG schemes have

been used by Monk and Richter [MR05] for solving linear symmetric hyperbolic problems, Hesthaven and Warburton [HW02], Chen *et al.* [CCR05] and Lu *et al.* [LZC04] for solving time-domain electromagnetics. A dispersion and dissipation study for a high-order DG method for solving Maxwell's equations have been conducted in [SBvdV07] using several high-order RK schemes. Recently, Kanevsky *et al.* [KCGH07] have applied a hybrid implicit-explicit high-order RK scheme to DG methods for solving conservation laws.

In this chapter, we discuss the formulation, stability, convergence and numerical validation of a high-order leap-frog based non-dissipative DGTD method for solving Maxwell's equations on non-conforming simplicial meshes. This DGTD method makes use of a nodal polynomial interpolation method for the approximation of the electromagnetic field within a simplex, and of a centered scheme for the calculation of the numerical flux at an interface between neighboring elements. Moreover, the interpolation degree is defined at the element level and the mesh is refined locally in a non-conforming way resulting in arbitrary level hanging nodes. This chapter is structured as follows. In Sec. 4.1, we introduce the high-order non-conforming DGTD method for solving the system of Maxwell's equations. Our two main results, the stability and the  $hp$ -convergence of the proposed method, are stated and proved in Sec. 4.2. In this section we also establish bounds on the behavior of the divergence error. In Sec. 4.3 we verify our theoretical results through numerical experiments. Finally, some concluding remarks are presented in Sec. 4.4.

*This chapter is summarized in the research report [FL08a]. The results presented in this chapter and a part of Chapter 5 have been the subject of two communications in ICCAM 2008 [FL08b] and NUMELEC 2008 [Fah08b] conferences.*

## 4.1 An arbitrary high-order non-conforming DGTD method

We consider the Maxwell equations in three space dimensions for heterogeneous anisotropic linear media with no source. The electric permittivity tensor  $\bar{\epsilon}(x)$  and the magnetic permeability tensor  $\bar{\mu}(x)$  are varying in space, time-invariant and both symmetric positive definite. The electric field  $\vec{\mathbf{E}} = {}^t(E_x, E_y, E_z)$  and the magnetic field  $\vec{\mathbf{H}} = {}^t(H_x, H_y, H_z)$  verify:

$$\begin{cases} \bar{\epsilon} \partial_t \vec{\mathbf{E}} &= \text{curl } \vec{\mathbf{H}}, \\ \bar{\mu} \partial_t \vec{\mathbf{H}} &= -\text{curl } \vec{\mathbf{E}}, \end{cases} \quad (4.1)$$

where the symbol  $\partial_t$  denotes a time derivative. These equations are set and solved on a bounded polyhedral domain  $\Omega$  of  $\mathbb{R}^3$ . For the sake of simplicity, a metallic boundary condition is set everywhere on the domain boundary  $\partial\Omega$ , *i.e.*  $\vec{n} \times \vec{\mathbf{E}} = 0$  (where  $\vec{n}$  denotes the unitary outwards normal).

### 4.1.1 Space discretization

We consider a partition  $\Omega_h$  of  $\Omega$  into a set of tetrahedra  $\tau_i$  of size  $h_i$  with boundaries  $\partial\tau_i$  such that  $h = \max_{\tau_i \in \Omega_h} h_i$ . To each  $\tau_i \in \Omega_h$  we assign an integer  $p_i \geq 0$  (the local interpolation degree) and we collect the  $p_i$  in the vector  $p = \{p_i : \tau_i \in \Omega_h\}$ . Of course, if  $p_i$  is uniform in all element  $\tau_i$  of the mesh, we have  $p = p_i$ . Within this construction we admit meshes with possibly hanging nodes *i.e.* by allowing non-conforming (or irregular) meshes where element vertices can lie in the interior of faces of other elements. However, we assume that the local mesh sizes and approximation degrees are of bounded variation, that is, there exist a constant  $\kappa_1 > 0$ , depending only on the shape-regularity of the mesh, and a constant  $\kappa_2 > 0$ , such that:

$$\begin{aligned}\kappa_1^{-1}h_i &\leq h_k \leq \kappa_1 h_i, \\ \kappa_2^{-1}p_i &\leq p_k \leq \kappa_2 p_i,\end{aligned}\tag{4.2}$$

for all neighboring elements  $\tau_i$  and  $\tau_k$  in  $\Omega_h$ . Nevertheless, the above hypothesis is not restrictive in practice and allows, in particular for geometric refinement and linearly increasing approximation degrees. We also assume that  $\Omega_h$  is shape regular in the sense that there is a constant  $\eta > 0$  such that:

$$\forall \tau_i \in \Omega_h, \quad \frac{h_i}{\rho_i} \leq \eta,\tag{4.3}$$

where  $\rho_i$  is the diameter of the insphere of  $\tau_i$ . Each tetrahedron  $\tau_i$  is assumed to be the image, under a smooth bijective (diffeomorphic) mapping, of a fixed reference tetrahedron  $\hat{\tau} = \{\hat{x}, \hat{y}, \hat{z} \mid \hat{x}, \hat{y}, \hat{z} \geq 0; \hat{x} + \hat{y} + \hat{z} \leq 1\}$ . Assuming that  $\tau_i$  is a straight faced tetrahedron defined through the coordinates of the four vertices  $v_1^i, v_2^i, v_3^i$  and  $v_4^i$  (see Fig. 4.1), the correspondence between the two tetrahedra  $\hat{\tau}$  and  $\tau_i$  is established through the use of the barycentric coordinates  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ . We recall that any point  $\mathbf{x}^i \in \tau_i$  can be expressed as a convex combination of the vertices of  $\tau_i$  and the mapping is simply given by  $\chi_i : (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) \in \hat{\tau} \rightarrow \mathbf{x}^i$ , such that:  $\mathbf{x}^i(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) = \lambda_1 v_1^i + \lambda_2 v_2^i + \lambda_3 v_3^i + \lambda_4 v_4^i$ , where  $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1$  and  $0 \leq (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \leq 1$  with  $\lambda_1 = 1 - \hat{x} - \hat{y} - \hat{z}, \lambda_2 = \hat{x}, \lambda_3 = \hat{y}$  and  $\lambda_4 = \hat{z}$ . For each  $\tau_i$ ,  $V_i$  denotes its volume, and  $\bar{\epsilon}_i$  and  $\bar{\mu}_i$  are respectively the local electric permittivity and magnetic permeability tensors of the medium, which could be varying inside the element  $\tau_i$ . For two distinct tetrahedra  $\tau_i$  and  $\tau_k$  in  $\Omega_h$ , the intersection  $\tau_i \cap \tau_k$  is an (oriented) triangle  $a_{ik}$  which we will call interface. For each internal interface  $a_{ik}$ , we denote by  $S_{ik}$  the measure of  $a_{ik}$  and by  $\vec{n}_{ik}$  the unitary normal vector, oriented from  $\tau_i$  towards  $\tau_k$ . For the boundary interfaces, the index  $k$  corresponds to a fictitious element outside the domain. We denote by  $\mathcal{F}_h^I$  the union of all interior faces of  $\Omega_h$ , by  $\mathcal{F}_h^B$  the union of all boundary faces of  $\Omega_h$ , and by  $\mathcal{F}_h = \mathcal{F}_h^I \cup \mathcal{F}_h^B$ . Furthermore, we identify  $\mathcal{F}_h^B$  to  $\partial\Omega$  since  $\Omega$  is a polyhedron. Finally, we denote by  $\mathcal{V}_i$  the set of indices of the elements which are neighbors of  $\tau_i$  (having an interface in common). We also define the perimeter  $P_i$  of  $\tau_i$  by  $P_i = \sum_{k \in \mathcal{V}_i} S_{ik}$ . We have the following geometrical property for all elements:  $\sum_{k \in \mathcal{V}_i} S_{ik} \vec{n}_{ik} = 0$ .

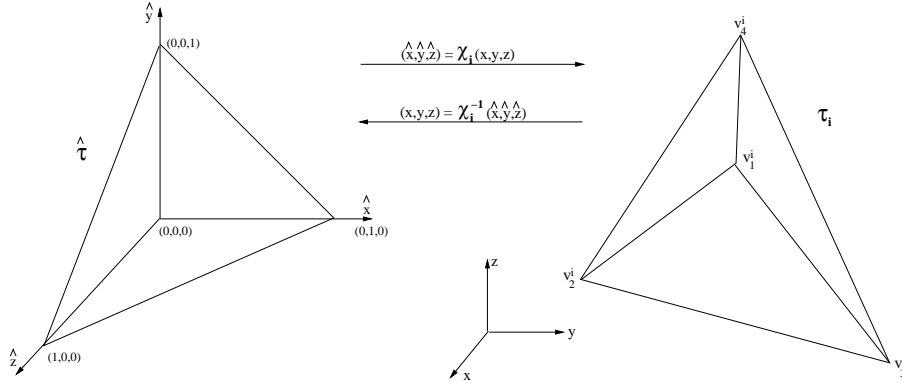


FIG. 4.1 – Mapping between the physical tetrahedron  $\tau_i$  and the reference tetrahedron  $\hat{\tau}$ .

In the following, for a given partition  $\Omega_h$  and for a vector  $p$ , we seek approximate solutions to (4.1) in the finite dimensional subspace  $V_p(\Omega_h) = \{\vec{v} \in L^2(\Omega)^3 : \vec{v}|_{\tau_i} \in \mathbb{P}_{p_i}(\tau_i), \forall \tau_i \in \Omega_h\}$ , where  $\mathbb{P}_{p_i}(\tau_i)$  denotes the space of nodal polynomials of degree at most  $p_i$  inside the element  $\tau_i$ . Note that the polynomial degree  $p_i$  may vary from element to element in the mesh. By non-conforming interface we mean an interface  $a_{ik}$  which is such that at least one of its vertices is a hanging node, or/and such that  $p_i|_{a_{ik}} \neq p_k|_{a_{ik}}$ .

Following the discontinuous Galerkin approach, the electric and magnetic fields inside each finite element are sought for as linear combinations  $(\vec{\mathbf{E}}_i, \vec{\mathbf{H}}_i)$  of linearly independent basis vector fields  $\vec{\varphi}_{ij}$ ,  $1 \leq j \leq d_i$ , where  $d_i$  denotes the local number of degrees of freedom inside  $\tau_i$ . We denote by  $\mathcal{P}_i = \text{Span}(\vec{\varphi}_{ij}, 1 \leq j \leq d_i)$ . The approximate fields  $(\vec{\mathbf{E}}_h, \vec{\mathbf{H}}_h)$ , defined by  $(\forall i, \vec{\mathbf{E}}_h|_{\tau_i} = \vec{\mathbf{E}}_i, \vec{\mathbf{H}}_h|_{\tau_i} = \vec{\mathbf{H}}_i)$  are allowed to be completely discontinuous across element boundaries. For such a discontinuous field  $\vec{\mathbf{U}}_h$ , we define its average  $\{\vec{\mathbf{U}}_h\}_{ik}$  through any internal interface  $a_{ik}$ , as  $\{\vec{\mathbf{U}}_h\}_{ik} = (\vec{\mathbf{U}}_i|_{a_{ik}} + \vec{\mathbf{U}}_k|_{a_{ik}})/2$ . Note that for any internal interface  $a_{ik}$ ,  $\{\vec{\mathbf{U}}_h\}_{ki} = \{\vec{\mathbf{U}}_h\}_{ik}$ . Because of this discontinuity, a global variational formulation cannot be obtained. However, dot-multiplying (4.1) by any given vector function  $\vec{\varphi} \in \mathcal{P}_i$ , integrating over each single element  $\tau_i$  and integrating by parts, yields:

$$\begin{cases} \int_{\tau_i} \vec{\varphi} \cdot \bar{\epsilon}_i \partial_t \vec{\mathbf{E}} &= \int_{\tau_i} \text{curl } \vec{\varphi} \cdot \vec{\mathbf{H}} - \int_{\partial\tau_i} \vec{\varphi} \cdot (\vec{\mathbf{H}} \times \vec{n}), \\ \int_{\tau_i} \vec{\varphi} \cdot \bar{\mu}_i \partial_t \vec{\mathbf{H}} &= - \int_{\tau_i} \text{curl } \vec{\varphi} \cdot \vec{\mathbf{E}} + \int_{\partial\tau_i} \vec{\varphi} \cdot (\vec{\mathbf{E}} \times \vec{n}). \end{cases} \quad (4.4)$$

In (4.4), we now replace the exact fields  $\vec{\mathbf{E}}$  and  $\vec{\mathbf{H}}$  by the approximate fields  $\vec{\mathbf{E}}_h$  and  $\vec{\mathbf{H}}_h$  in order to evaluate volume integrals. For integrals over  $\partial\tau_i$ , a specific treatment must be introduced since the approximate fields are discontinuous through element faces. We choose to use a fully centered numerical flux, *i.e.*  $\forall i, \forall k \in \mathcal{V}_i$ ,  $\vec{\mathbf{E}}|_{a_{ik}} \simeq \{\vec{\mathbf{E}}_h\}_{ik}$ ,  $\vec{\mathbf{H}}|_{a_{ik}} \simeq \{\vec{\mathbf{H}}_h\}_{ik}$ . The metallic boundary condition on a boundary interface  $a_{ik}$  (where  $k$  is the element index of a fictitious neighboring element) is dealt with *weakly*, in the sense that traces of fictitious fields  $\vec{\mathbf{E}}_k$  and  $\vec{\mathbf{H}}_k$  are used for the computation of numerical fluxes for the boundary element  $\tau_i$ . In the present case, where all boundaries are metallic, we simply take  $\vec{\mathbf{E}}_k|_{a_{ik}} = -\vec{\mathbf{E}}_i|_{a_{ik}}$  and  $\vec{\mathbf{H}}_k|_{a_{ik}} = \vec{\mathbf{H}}_i|_{a_{ik}}$ . Replacing surface integrals using the centered numerical flux in (4.4) and re-integrating by parts yields:

$$\begin{cases} \int_{\tau_i} \vec{\varphi} \cdot \bar{\epsilon}_i \partial_t \vec{\mathbf{E}}_i &= \frac{1}{2} \int_{\tau_i} (\text{curl } \vec{\varphi} \cdot \vec{\mathbf{H}}_i + \text{curl } \vec{\mathbf{H}}_i \cdot \vec{\varphi}) - \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathcal{V}_i} \int_{a_{ik}} \vec{\varphi} \cdot (\vec{\mathbf{H}}_k \times \vec{n}_{ik}), \\ \int_{\tau_i} \vec{\varphi} \cdot \bar{\mu}_i \partial_t \vec{\mathbf{H}}_i &= -\frac{1}{2} \int_{\tau_i} (\text{curl } \vec{\varphi} \cdot \vec{\mathbf{E}}_i + \text{curl } \vec{\mathbf{E}}_i \cdot \vec{\varphi}) + \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathcal{V}_i} \int_{a_{ik}} \vec{\varphi} \cdot (\vec{\mathbf{E}}_k \times \vec{n}_{ik}). \end{cases} \quad (4.5)$$

We can rewrite this formulation in terms of scalar unknowns. Inside each element, the fields being recomposed according to  $\vec{\mathbf{E}}_i = \sum_{1 \leq j \leq d_i} E_{ij} \vec{\varphi}_{ij}$  and  $\vec{\mathbf{H}}_i = \sum_{1 \leq j \leq d_i} H_{ij} \vec{\varphi}_{ij}$ . Let us denote by  $\mathbf{E}_i$  and  $\mathbf{H}_i$  respectively the column vectors  $(E_{il})_{1 \leq l \leq d_i}$  and  $(H_{il})_{1 \leq l \leq d_i}$ . Eq. (4.5) can be rewritten as:

$$\begin{cases} M_i^\epsilon \partial_t \mathbf{E}_i &= K_i \mathbf{H}_i - \sum_{k \in \mathcal{V}_i} S_{ik} \mathbf{H}_k, \\ M_i^\mu \partial_t \mathbf{H}_i &= -K_i \mathbf{E}_i + \sum_{k \in \mathcal{V}_i} S_{ik} \mathbf{E}_k, \end{cases} \quad (4.6)$$

where the symmetric positive definite mass matrices  $M_i^\sigma$  ( $\sigma$  stands for  $\epsilon$  or  $\mu$ ) and the symmetric stiffness matrix  $K_i$  (all of size  $d_i \times d_i$ ) are given by :

$$\begin{aligned} (M_i^\sigma)_{jl} &= \int_{\tau_i} {}^t \vec{\varphi}_{ij} \cdot \bar{\sigma}_i \vec{\varphi}_{il}, \\ (K_i)_{jl} &= \frac{1}{2} \int_{\tau_i} {}^t \vec{\varphi}_{ij} \cdot \text{curl } \vec{\varphi}_{il} + {}^t \vec{\varphi}_{il} \cdot \text{curl } \vec{\varphi}_{ij}. \end{aligned}$$

For any interface  $a_{ik}$ , the  $d_i \times d_k$  rectangular matrix  $S_{ik}$  is given by:

$$(S_{ik})_{jl} = \frac{1}{2} \int_{a_{ik}} {}^t \vec{\varphi}_{ij} \cdot (\vec{\varphi}_{kl} \times \vec{n}_{ik}), \quad 1 \leq j \leq d_i, \quad 1 \leq l \leq d_k. \quad (4.7)$$

### 4.1.2 Time discretization

The choice of the time discretization is a crucial step for the global efficiency of the numerical method. The temporal integration methods are divided into two major families: implicit and explicit schemes. Implicit schemes require the solution of large matrix systems resulting in a high computational effort per time step. The quality of the scheme depends strongly on the efficiency of the used linear system solver. The advantage of implicit schemes is their flexibility regarding the choice of the time step since usually, these time schemes are unconditionally stable. Thus, an analysis requires only a small number of solver runs but every time step is burdened by a high numerical effort. Explicit schemes in contrast are easy to implement, produce greater accuracy with less computational effort than implicit methods, but are restricted by a stability criterion enforcing a close linkage of the time step to the spatial discretization parameter. This restriction may result in a large number of iterations per analysis, each iteration with a low computational effort. In this study, we focus on explicit time integration schemes and our objective is to design an arbitrary high-order DGTD method which combines the spatial discretization features of the methods discussed in Chapters 2 and 3, with a family of high-order explicit leap-frog schemes.

The ordinary differential system, Eq. (4.5), can be formally seen as a system of the form (see Sec. 4.2.1 for more details):

$$\begin{cases} \mathbf{M} \partial_t \mathbf{E} = \mathbf{U} \mathbf{H}, \\ \mathbf{N} \partial_t \mathbf{H} = \mathbf{V} \mathbf{E}. \end{cases} \quad (4.8)$$

The one-step explicit time integration methods like Runge-Kutta or leap-frog schemes imply the convenience of storing just one old solution followed by a single update step. Therefore, they are computationally efficient per update cycle and easy to implement. Moreover, the leap-frog scheme has the advantage to be free of time dissipation. We can introduce the  $N$ th-order explicit leap-frog ( $\text{LF}_N$ ) integrator as an approximation of the solution of the first-order ODE:

$$\dot{y}(t) = \mathbf{A}y(t) \Rightarrow y(t) = e^{\mathbf{A}t}y(t_0), \quad (4.9)$$

with  $y(t_0)$  as initial value. The time discrete equivalent of (4.9) is given by:

$$y(n\Delta t) = e^{\mathbf{A}\Delta t}y((n-1)\Delta t). \quad (4.10)$$

System (4.8) can be rewritten as:

$$\partial_t \begin{pmatrix} \mathbf{H} \\ \mathbf{E} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \mathbf{N}^{-1}\mathbf{V} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{U} & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{H} \\ \mathbf{E} \end{pmatrix}}_{\mathbf{Y}(t)}. \quad (4.11)$$

Note that the system matrix  $\mathbf{A}$  depends only on the spatial configuration. Seeking a time discrete solution of (4.11), a discretization in time with a global time step is introduced. The time discrete solution of the first-order system of ODEs (4.11) is a discretized version of the exponential solution according to its scalar equivalent (4.10):



$$\mathbf{Y}(n\Delta t) = \Phi(\Delta t)\mathbf{Y}((n-1)\Delta t), \quad (4.12)$$

with:

$$\Phi(\Delta t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\Delta t^i}{i!} \mathbb{A}^i := e^{\mathbb{A}\Delta t}. \quad (4.13)$$

Finally, the solution of (4.11) is written as:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{H}(n\Delta t) \\ \mathbf{E}(n\Delta t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} \end{pmatrix}}_{\Phi} \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{H}((n-1)\Delta t) \\ \mathbf{E}((n-1)\Delta t) \end{pmatrix}}_{\mathbf{Y}((n-1)\Delta t)}. \quad (4.14)$$

The time discrete solution, Eqs. (4.11) and (4.13), is *exact*, as long as  $\Phi(\Delta t)$  follows Eq. (4.12). The construction of  $N$ th-order integration schemes is based on a truncation of Eq. (4.12) at the  $N$ th element, leading to an *approximated* solution.

Introducing a staggered temporal grid, as in the case of LF schemes, we obtain from (4.14) the general LF update equation:

$$\mathbf{H}^{n+1} = [\Phi_{11}^2 - \Phi_{11}\Phi_{12}\Phi_{22}^{-1}\Phi_{21}]\mathbf{H}^{n-1} + [\Phi_{12} + \Phi_{11}\Phi_{12}\Phi_{22}^{-1}]\mathbf{E}^n, \quad (4.15a)$$

$$\mathbf{E}^{n+2} = [\Phi_{21} + \Phi_{22}\Phi_{21}\Phi_{11}^{-1}]\mathbf{H}^{n+1} + [\Phi_{22}^2 - \Phi_{22}\Phi_{21}\Phi_{11}^{-1}\Phi_{12}]\mathbf{E}^n, \quad (4.15b)$$

where the electric field quantities are located at even time steps and magnetic quantities at odd time steps as illustrated on Fig. 4.2. In the case of a non-conducting material, the relation:

$$[\Phi_{11}^2 - \Phi_{11}\Phi_{12}\Phi_{22}^{-1}\Phi_{21}] = [\Phi_{22}^2 - \Phi_{22}\Phi_{21}\Phi_{11}^{-1}\Phi_{12}] = \mathbf{I} + \mathcal{O}(\Delta t^{N+1}), \quad (4.16)$$

holds, which is a characteristic of a LF scheme.

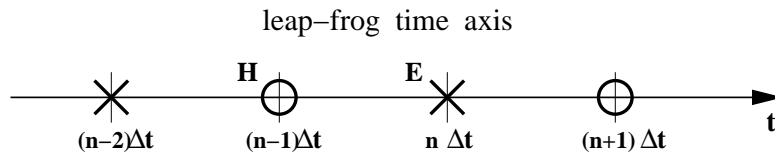


FIG. 4.2 – Temporal allocation of electric ( $\times$ ) and magnetic ( $\odot$ ) fields in the LF scheme.

In the sequel, superscripts refer to time stations and  $\Delta t$  is the global time step. The unknowns related to the electric field are approximated at integer time-stations  $t^n = n\Delta t$  and are denoted by  $\mathbf{E}_i^n$ . The unknowns related to the magnetic field are approximated at half-integer time-stations  $t^{n+1/2} = (n + 1/2)\Delta t$  and are denoted by  $\mathbf{H}_i^{n+1/2}$ .

Note that here, the used time step  $\Delta t$  is twice as large as the time step defined in (4.10). The  $\text{LF}_N$  for  $N = 2$  and 4 integrators are constructed as follows [You01]-[SSW02]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{T}_1 = \Delta t (M_i^\epsilon)^{-1} \text{curl } \vec{\mathbf{H}}_i^{n+\frac{1}{2}}, \quad \mathbf{T}_1^* = -\Delta t (M_i^\mu)^{-1} \text{curl } \vec{\mathbf{E}}_i^{n+1}, \\ \mathbf{T}_2 = -\Delta t (M_i^\mu)^{-1} \text{curl } \mathbf{T}_1, \quad \mathbf{T}_2^* = \Delta t (M_i^\epsilon)^{-1} \text{curl } \mathbf{T}_1^*, \\ \mathbf{T}_3 = \Delta t (M_i^\epsilon)^{-1} \text{curl } \mathbf{T}_2, \quad \mathbf{T}_3^* = -\Delta t (M_i^\mu)^{-1} \text{curl } \mathbf{T}_2^*. \\ \\ \text{LF}_2 : \begin{cases} \mathbf{E}_i^{n+1} = \mathbf{E}_i^n + \mathbf{T}_1, \\ \mathbf{H}_i^{n+\frac{3}{2}} = \mathbf{H}_i^{n+\frac{1}{2}} + \mathbf{T}_1^*. \end{cases} \\ \\ \text{LF}_4 : \begin{cases} \mathbf{E}_i^{n+1} = \mathbf{E}_i^n + \mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_3/24, \\ \mathbf{H}_i^{n+\frac{3}{2}} = \mathbf{H}_i^{n+\frac{1}{2}} + \mathbf{T}_1^* + \mathbf{T}_3^*/24. \end{cases} \end{array} \right. \quad (4.17)$$

Here the  $\mathbf{T}_i$  and  $\mathbf{T}_i^*$  ( $i = 1, 2, 3$ ) can be combined. Moreover,  $\mathbf{T}_3$  (resp.  $\mathbf{T}_3^*$ ) is a temporary vector. However, in a practical implementation, this vector is not used since the calculations for  $\mathbf{T}_3$  and  $\vec{\mathbf{E}}_i^{n+1}$  (resp.  $\mathbf{T}_3^*$  and  $\vec{\mathbf{H}}_i^{n+\frac{1}{2}}$ ) can be combined. Thus, the  $\text{LF}_4$  scheme requires 2 times more memory storage and 3 times more arithmetic operations than the  $\text{LF}_2$  scheme. In general, the  $\text{LF}_N$  scheme requires  $N/2$  times more memory storage and  $(N-1)$  times more arithmetic operations than the  $\text{LF}_2$  scheme. A pictorial representation of the extended  $\text{LF}_4$  integrator is shown on Fig. 4.3.

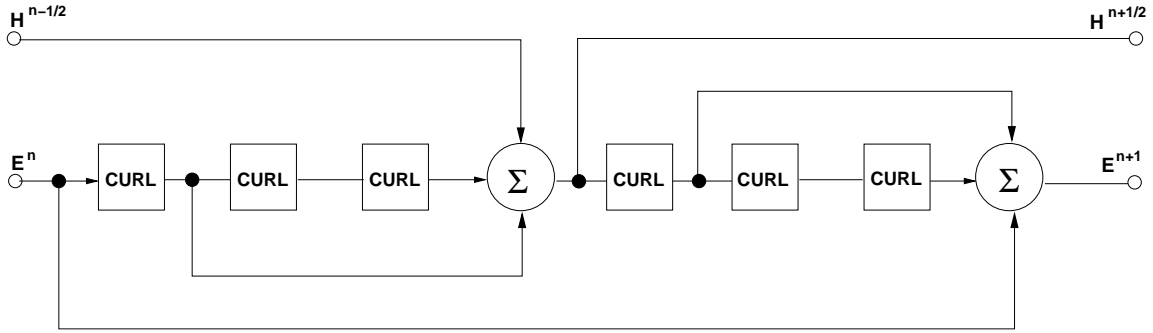


FIG. 4.3 – A pictorial representation of the extended  $\text{LF}_4$  scheme (multiplicative constants omitted). Figure taken from [You01].

For the treatment of the boundary condition on an interface  $a_{ik} \in \mathcal{F}_h^B$ , we use:

$$\mathbf{E}_{k|a_{ik}}^n = -\mathbf{E}_{i|a_{ik}}^n \quad \text{and} \quad \mathbf{H}_{k|a_{ik}}^{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{H}_{i|a_{ik}}^{n+\frac{1}{2}}. \quad (4.18)$$

## 4.2 Stability and convergence analysis

In this section we study the stability and convergence properties of the high-order discontinuous Galerkin method introduced previously.

### 4.2.1 Stability

Here, we aim at giving and proving a sufficient condition for the  $L^2$ -stability of the proposed high-order DGTD method. We use the same kind of energy approach as in [FLLP05] where a quadratic form

plays the role of a Lyapunov function of the whole set of numerical unknowns. To this end, we suppose that all electric (resp. magnetic) unknowns are gathered in a column vector  $\mathbb{E}$  (resp.  $\mathbb{H}$ ) of size  $d = \sum_i d_i$ . Then the space discretized system (4.6) can be rewritten as:

$$\begin{cases} \mathbb{M}^\epsilon \partial_t \mathbb{E} &= \mathbb{K}\mathbb{H} - \mathbb{A}\mathbb{H} - \mathbb{B}\mathbb{H}, \\ \mathbb{M}^\mu \partial_t \mathbb{H} &= -\mathbb{K}\mathbb{E} + \mathbb{A}\mathbb{E} - \mathbb{B}\mathbb{E}, \end{cases} \quad (4.19)$$

where we have the following definitions and properties:

- $\mathbb{M}^\epsilon, \mathbb{M}^\mu$  and  $\mathbb{K}$  are  $d \times d$  block diagonal matrices with diagonal blocks equal to  $M_i^\epsilon, M_i^\mu$  and  $K_i$  respectively. Therefore  $\mathbb{M}^\epsilon$  and  $\mathbb{M}^\mu$  are symmetric positive definite matrices, and  $\mathbb{K}$  is a symmetric matrix.
- $\mathbb{A}$  is also a  $d \times d$  block sparse matrix, whose non-zero blocks are equal to  $S_{ik}$  when  $a_{ik} \in \mathcal{F}_h^I$ . Since  $\vec{n}_{ki} = -\vec{n}_{ik}$ , it can be checked from (4.7) that  $(S_{ik})_{jl} = (S_{ki})_{lj}$  and then  $S_{ki} = {}^t S_{ik}$ ; thus  $\mathbb{A}$  is a symmetric matrix.
- $\mathbb{B}$  is a  $d \times d$  block diagonal matrix, whose non-zero blocks are equal to  $S_{ik}$  when  $a_{ik} \in \mathcal{F}_h^B$ . In that case,  $(S_{ik})_{jl} = -(S_{ik})_{lj}$ ; thus  $\mathbb{B}$  is a skew-symmetric matrix.

The discontinuous Galerkin DGTD- $\mathbb{P}_{p_i}$  method using centered fluxes combined with a  $N$ th order leap-frog (LF $_N$ ) time scheme can be written, using the matrix  $\mathbb{S} = \mathbb{K} - \mathbb{A} - \mathbb{B}$ , in the general form:

$$\begin{cases} \mathbb{M}^\epsilon \frac{\mathbb{E}^{n+1} - \mathbb{E}^n}{\Delta t} &= \mathbb{S}_N \mathbb{H}^{n+\frac{1}{2}}, \\ \mathbb{M}^\mu \frac{\mathbb{H}^{n+\frac{3}{2}} - \mathbb{H}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta t} &= -{}^t \mathbb{S}_N \mathbb{E}^{n+1}, \end{cases} \quad (4.20)$$

where the matrix  $\mathbb{S}_N$  ( $N$  being the order of the leap-frog scheme) verifies:

$$\mathbb{S}_N = \begin{cases} \mathbb{S} & \text{if } N = 2, \\ \mathbb{S} \left( \mathbb{I} - \frac{\Delta t^2}{24} \mathbb{M}^{-\mu} {}^t \mathbb{S} \mathbb{M}^{-\epsilon} \mathbb{S} \right) & \text{if } N = 4, \\ \mathbb{S} \left( \mathbb{I} + \sum_{i=1}^{N/2-1} \frac{(-1)^i}{(2i+1)! 2^{2i}} (\Delta t^2 \mathbb{M}^{-\mu} {}^t \mathbb{S} \mathbb{M}^{-\epsilon} \mathbb{S})^i \right) & \forall N > 2, \text{ even.} \end{cases} \quad (4.21)$$

We now define the following discrete version of the electromagnetic energy.

**Definition 4.1** *We consider the following electromagnetic energies inside each tetrahedron and in the whole domain  $\Omega$ :*

- *the local energy :*  $\forall i, \mathcal{E}_i^n = \frac{1}{2} ({}^t \mathbf{E}_i^n M_i^\epsilon \mathbf{E}_i^n + {}^t \mathbf{H}_i^{n-\frac{1}{2}} M_i^\mu \mathbf{H}_i^{n+\frac{1}{2}}),$  (4.22)

- *the global energy :*  $\mathcal{E}^n = \frac{1}{2} ({}^t \mathbb{E}^n \mathbb{M}^\epsilon \mathbb{E}^n + {}^t \mathbb{H}^{n-\frac{1}{2}} \mathbb{M}^\mu \mathbb{H}^{n+\frac{1}{2}}).$  (4.23)

In the following, we shall prove that the global energy (4.23) is conserved through a time step and that it is a positive definite quadratic form of all unknowns under a CFL-like condition on the global time step  $\Delta t$ .

**Lemma 4.1** *Using the DGTD- $\mathbb{P}_{p_i}$  method (4.20)-(4.21) for solving (4.1) with metallic boundaries only, the global discrete energy (4.23) is exactly conserved, i.e.  $\mathcal{E}^{n+1} - \mathcal{E}^n = 0, \forall n$ .*

**Proof.** We denote by  $\mathbb{E}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{\mathbb{E}^{n+1} + \mathbb{E}^n}{2}$ . We have :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}^{n+1} - \mathcal{E}^n &= {}^t\mathbb{E}^{n+\frac{1}{2}}\mathbb{M}^\epsilon(\mathbb{E}^{n+1} - \mathbb{E}^n) + \frac{1}{2} {}^t\mathbb{H}^{n+\frac{1}{2}}\mathbb{M}^\mu(\mathbb{H}^{n+\frac{3}{2}} - \mathbb{H}^{n-\frac{1}{2}}) \\ &= \Delta t {}^t\mathbb{E}^{n+\frac{1}{2}}\mathbb{S}_N\mathbb{H}^{n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\Delta t {}^t\mathbb{H}^{n+\frac{1}{2}}({}^t\mathbb{S}_N\mathbb{E}^{n+1} + {}^t\mathbb{S}_N\mathbb{E}^n) \\ &= \Delta t {}^t\mathbb{H}^{n+\frac{1}{2}}({}^t\mathbb{S}_N - {}^t\mathbb{S}_N)\mathbb{E}^{n+\frac{1}{2}} = 0.\end{aligned}$$

This concludes the proof.  $\square$

**Lemma 4.2** *Using the DGTD- $\mathbb{P}_{p_i}$  method (4.20)-(4.21), the global discrete electromagnetic energy  $\mathcal{E}^n$  (4.23) is a positive definite quadratic form of all unknowns if:*

$$\Delta t \leq \frac{2}{d_N}, \quad \text{with } d_N = \|\mathbb{M}^{-\frac{\mu}{2}} {}^t\mathbb{S}_N \mathbb{M}^{-\frac{\epsilon}{2}}\|, \quad (4.24)$$

where  $\|\cdot\|$  denotes a matrix norm, and the matrix  $\mathbb{M}^{-\frac{\sigma}{2}}$  is the inverse square root of  $\mathbb{M}^\sigma$ . Also, for a given mesh, the stability limit of the  $LF_4$  scheme is roughly 2.85 times larger than that of the  $LF_2$  scheme.

**Proof.** The mass matrices  $\mathbb{M}^\epsilon$  and  $\mathbb{M}^\mu$  are symmetric positive definite and we can construct in a simple way their square root (also symmetric positive definite) denoted by  $\mathbb{M}^{\frac{\epsilon}{2}}$  and  $\mathbb{M}^{\frac{\mu}{2}}$  respectively. Moreover:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}^n &= \frac{1}{2} {}^t\mathbb{E}^n\mathbb{M}^\epsilon\mathbb{E}^n + \frac{1}{2} {}^t\mathbb{H}^{n-\frac{1}{2}}\mathbb{M}^\mu\mathbb{H}^{n+\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2} {}^t\mathbb{E}^n\mathbb{M}^\epsilon\mathbb{E}^n + \frac{1}{2} {}^t\mathbb{H}^{n-\frac{1}{2}}\mathbb{M}^\mu\mathbb{H}^{n-\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t}{2} {}^t\mathbb{H}^{n-\frac{1}{2}} {}^t\mathbb{S}_N\mathbb{E}^n \\ &\geq \frac{1}{2} \|\mathbb{M}^{\frac{\epsilon}{2}}\mathbb{E}^n\|^2 + \frac{1}{2} \|\mathbb{M}^{\frac{\mu}{2}}\mathbb{H}^{n-\frac{1}{2}}\|^2 - \frac{\Delta t}{2} |{}^t\mathbb{H}^{n-\frac{1}{2}}\mathbb{M}^{\frac{\mu}{2}}\mathbb{M}^{-\frac{\mu}{2}} {}^t\mathbb{S}_N\mathbb{M}^{-\frac{\epsilon}{2}}\mathbb{M}^{\frac{\epsilon}{2}}\mathbb{E}^n| \\ &\geq \frac{1}{2} \|\mathbb{M}^{\frac{\epsilon}{2}}\mathbb{E}^n\|^2 + \frac{1}{2} \|\mathbb{M}^{\frac{\mu}{2}}\mathbb{H}^{n-\frac{1}{2}}\|^2 - \frac{d_N\Delta t}{2} \|\mathbb{M}^{\frac{\mu}{2}}\mathbb{H}^{n-\frac{1}{2}}\| \|\mathbb{M}^{\frac{\epsilon}{2}}\mathbb{E}^n\|.\end{aligned}$$

At this point, we choose to use an upper bound for the term  $\|\mathbb{M}^{\frac{\mu}{2}}\mathbb{H}^{n-\frac{1}{2}}\| \|\mathbb{M}^{\frac{\epsilon}{2}}\mathbb{E}^n\|$  which might lead to suboptimal lower bounds for the energy (and then to a slightly too severe stability limit for the DGTD method). Anyway, this stability limit is only sufficient, and not really close to necessary. We use the inequality:

$$\|\mathbb{M}^{\frac{\mu}{2}}\mathbb{H}^{n-\frac{1}{2}}\| \|\mathbb{M}^{\frac{\epsilon}{2}}\mathbb{E}^n\| \leq \frac{1}{2} (\|\mathbb{M}^{\frac{\mu}{2}}\mathbb{H}^{n-\frac{1}{2}}\|^2 + \|\mathbb{M}^{\frac{\epsilon}{2}}\mathbb{E}^n\|^2).$$

We then sum up the lower bounds for  $\mathcal{E}^n$  to obtain:

$$\mathcal{E}^n \geq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{d_N\Delta t}{2}\right) \|\mathbb{M}^{\frac{\epsilon}{2}}\mathbb{E}^n\|^2 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{d_N\Delta t}{2}\right) \|\mathbb{M}^{\frac{\mu}{2}}\mathbb{H}^{n-\frac{1}{2}}\|^2.$$

Then, under the condition proposed in Lemma 4.2, the electromagnetic energy  $\mathcal{E}^n$  is a positive definite quadratic form of all unknowns.

Moreover, for a given mesh, using the definition (4.21) of  $\mathbb{S}_N$ , the  $LF_4$  scheme is stable if:

$$\begin{aligned}
 \Delta t \| \mathbb{M}^{-\frac{\mu}{2}} {}^t \mathbb{S}_4 \mathbb{M}^{-\frac{\epsilon}{2}} \| &\leq 2, \\
 \Rightarrow \Delta t \| \mathbb{M}^{-\frac{\mu}{2}} (\mathbb{S}_2 - \frac{\Delta t^2}{24} \mathbb{S}_2 \mathbb{M}^{-\mu} {}^t \mathbb{S}_2 \mathbb{M}^{-\epsilon} \mathbb{S}_2) \mathbb{M}^{-\frac{\epsilon}{2}} \| &\leq 2, \\
 \Rightarrow |\Delta t d_2 - \frac{\Delta t^3}{24} d_2^3| &\leq 2.
 \end{aligned}$$

This inequality is verified if and only if  $d_2 \Delta t \leq 2(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}) \simeq 2(2.847)$ . This concludes the proof.  $\square$

Now, we denote by  $\nu_N = \text{CFL}_N / \text{CFL}_2$  the ratio between the stability limit of the  $\text{LF}_N$  scheme and the  $\text{LF}_2$  scheme, and by  $r_N = \nu_N / (N/2)$  the ratio between  $\nu_N$  and the additional memory storage between the  $\text{LF}_N$  and  $\text{LF}_2$  schemes. Tab. 4.1 lists the values of  $\nu_N$  and  $r_N$  for several values of  $N$ .

TAB. 4.1 – The values of  $\nu_N$  and  $r_N$  for several  $\text{LF}_N$  schemes.

$N$	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
$\nu_N$	1	2.847	3.681	3.793	5.272	4.437	6.422	7.534	7.265	8.909
$r_N$	1	1.424	1.227	0.948	1.05	0.739	0.917	0.942	0.807	0.891

As it can be seen from Tab. 4.1, the choice of the  $\text{LF}_4$  scheme is advantageous with respect to the  $r_N$  ratio.

Now, our objective is to give an explicit CFL condition on  $\Delta t$  under which the local energy (4.22) is a positive definite quadratic form of the numerical unknowns  $\mathbf{E}_i^n$  and  $\mathbf{H}_i^{n-\frac{1}{2}}$ . We first need some classical definitions.

**Definition 4.2** We assume that the media is isotropic and such that the tensors  $\bar{\epsilon}_i$  and  $\bar{\mu}_i$  are piecewise constant, i.e.  $\bar{\epsilon}_i = \epsilon_i$  and  $\bar{\mu}_i = \mu_i$ . We denote by  $c_i = 1/\sqrt{\epsilon_i \mu_i}$  the propagation speed in the element  $\tau_i$ . We also assume that there exist dimensionless constants  $\alpha_i$  and  $\beta_{ik}$  ( $k \in \mathcal{V}_i$ ) such that:

$$\forall \vec{\mathbf{X}} \in \mathcal{P}_i, \begin{cases} \|\text{curl} \vec{\mathbf{X}}\|_{\tau_i} \leq \frac{\alpha_i P_i}{V_i} \|\vec{\mathbf{X}}\|_{\tau_i}, \\ \|\vec{\mathbf{X}}\|_{a_{ik}}^2 \leq \frac{\beta_{ik} S_{ik}}{V_i} \|\vec{\mathbf{X}}\|_{\tau_i}^2, \end{cases} \quad (4.25)$$

where  $\|\vec{\mathbf{X}}\|_{\tau_i}$  and  $\|\vec{\mathbf{X}}\|_{a_{ik}}$  denote the  $L^2$ -norms of the vector field  $\vec{\mathbf{X}}$  over  $\tau_i$  and the interface  $a_{ik}$  respectively.

**Lemma 4.3** Using the scheme (4.6)-(4.17)-(4.18), under assumptions of Definition 4.2, the local discrete energy  $\mathcal{E}_i^n$  (4.22) is a positive definite quadratic form of all unknowns  $(\mathbf{E}_i^n, \mathbf{H}_i^{n-\frac{1}{2}})$  and the scheme is stable if the time step  $\Delta t$  is such that:

$$\forall i, \forall k \in \mathcal{V}_i, \quad c_i \Delta t [2\alpha_i + \beta_{ik}] < \frac{4V_i}{P_i}, \quad (4.26)$$

(with the convention that, in the above formula,  $k$  should be replaced by  $i$  for a metallic boundary interface  $a_{ik}$ ).

**Proof.** Using the scheme (4.5) to replace the occurrences of  $\mathbf{H}_i^{n+\frac{1}{2}}$  in the definition of  $\mathcal{E}_i$ , and using the boundary fluxes given in (4.18), we get:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_i^n &= \frac{\epsilon_i}{2} \|\mathbf{E}_i^n\|_{\tau_i}^2 + \frac{\mu_i}{2} \|\mathbf{H}_i^{n-\frac{1}{2}}\|_{\tau_i}^2 - \frac{\Delta t}{4} \mathbb{X}_i^n, \quad \text{with} \\ \mathbb{X}_i^n &= \int_{T_i} \left( \text{curl } \vec{\mathbf{H}}_i^{n-\frac{1}{2}} \cdot \vec{\mathbf{E}}_i^n + \text{curl } \vec{\mathbf{E}}_i^n \cdot \vec{\mathbf{H}}_i^{n-\frac{1}{2}} \right) - \sum_{k \in \mathcal{V}_i} \int_{a_{ik}} (\vec{\mathbf{H}}_i^{n-\frac{1}{2}} \times \vec{\mathbf{E}}_k^n) \cdot \vec{n}_{ik}.\end{aligned}$$

For any metallic or internal interface  $a_{ik}$ , we have:

$$\begin{aligned}\left| \int_{a_{ik}} (\vec{\mathbf{H}}_i^{n-\frac{1}{2}} \times \vec{\mathbf{E}}_k^n) \cdot \vec{n}_{ik} \right| &\leq \frac{1}{\sqrt{\mu_i \epsilon_i}} \int_{a_{ik}} \|\sqrt{\mu_i} \vec{\mathbf{H}}_i^{n-\frac{1}{2}}\| \|\sqrt{\epsilon_i} \vec{\mathbf{E}}_k^n\| \\ &\leq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu_i}{\epsilon_i}} \|\vec{\mathbf{H}}_i^{n-\frac{1}{2}}\|_{a_{ik}}^2 + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_i}{\mu_i}} \|\vec{\mathbf{E}}_k^n\|_{a_{ik}}^2 \\ &\leq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu_i}{\epsilon_i}} \frac{\beta_{ki} S_{ik}}{V_i} \|\vec{\mathbf{H}}_i^{n-\frac{1}{2}}\|_{\tau_i}^2 + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_i}{\mu_i}} \frac{\beta_{ki} S_{ik}}{V_k} \|\vec{\mathbf{E}}_k^n\|_{\tau_i}^2.\end{aligned}$$

In the remainder of the proof, we omit the superscripts  $n$  and  $n-1/2$  in the electric and magnetic variables respectively. We have that:

$$\begin{aligned}|\mathbb{X}_i^n| &\leq \|\text{curl } \vec{\mathbf{H}}_i\|_{\tau_i} \|\vec{\mathbf{E}}_i\|_{\tau_i} + \|\text{curl } \vec{\mathbf{E}}_i\|_{\tau_i} \|\vec{\mathbf{H}}_i\|_{\tau_i} + \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathcal{V}_i} \left( \sqrt{\frac{\mu_i}{\epsilon_i}} \|\vec{\mathbf{H}}_i\|_{a_{ik}}^2 + \sqrt{\frac{\epsilon_i}{\mu_i}} \|\vec{\mathbf{E}}_k\|_{a_{ik}}^2 \right) \\ &\leq \frac{2\alpha_i P_i}{V_i} \|\vec{\mathbf{H}}_i\|_{\tau_i} \|\vec{\mathbf{E}}_i\|_{\tau_i} + \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathcal{V}_i} \left( \sqrt{\frac{\mu_i}{\epsilon_i}} \frac{\beta_{ik} S_{ik}}{V_i} \|\vec{\mathbf{H}}_i\|_{\tau_i}^2 + \sqrt{\frac{\epsilon_i}{\mu_i}} \frac{\beta_{ki} S_{ik}}{V_k} \|\vec{\mathbf{E}}_k\|_{\tau_i}^2 \right).\end{aligned}$$

Noticing that  $\|\vec{\mathbf{H}}_i\|_{\tau_i} \|\vec{\mathbf{E}}_i\|_{\tau_i} \leq \frac{c_i}{2} (\mu_i \|\vec{\mathbf{H}}_i\|_{\tau_i}^2 + \epsilon_i \|\vec{\mathbf{E}}_i\|_{\tau_i}^2)$ , gathering all lower bounds for terms in the expression of  $\mathcal{E}_i^n$  and using  $P_i = \sum_{k \in \mathcal{V}_i} S_{ik}$  leads to:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_i^n &\geq \sum_{k \in \mathcal{V}_i} S_{ik} \left( \frac{1}{2P_i} - \frac{\alpha_i c_i \Delta t}{4V_i} \right) (\epsilon_i \|\vec{\mathbf{E}}_i\|_{\tau_i}^2 + \mu_i \|\vec{\mathbf{H}}_i\|_{\tau_i}^2) \\ &\quad - \frac{\Delta t}{8} \sum_{k \in \mathcal{V}_i} S_{ik} \left( \sqrt{\frac{\mu_i}{\epsilon_i}} \frac{\beta_{ik}}{V_i} \|\vec{\mathbf{H}}_i\|_{\tau_i}^2 + \sqrt{\frac{\epsilon_i}{\mu_i}} \frac{\beta_{ki}}{V_k} \|\vec{\mathbf{E}}_k\|_{\tau_i}^2 \right).\end{aligned}$$

Then, summing up these inequalities in order to obtain a lower bound for  $\sum_i \mathcal{E}_i$  leads to an expression that we reorganize using sums over interfaces  $a_{ik}$ . We find that  $\sum_i \mathcal{E}_i \geq \sum_{a_{ik}} S_{ik} W_{ik}$  with:

$$\begin{aligned}
 W_{ik} &= \epsilon_i \|\vec{\mathbf{E}}_i\|_{\tau_i}^2 \left( \frac{1}{2P_i} - \frac{\alpha_i c_i \Delta t}{4V_i} - \frac{\beta_{ik} c_i \Delta t}{8V_i} \right) + \\
 &\quad \mu_i \|\vec{\mathbf{H}}_i\|_{\tau_i}^2 \left( \frac{1}{2P_i} - \frac{\alpha_i c_i \Delta t}{4V_i} - \frac{\beta_{ik} c_i \Delta t}{8V_i} \right) + \\
 &\quad \epsilon_k \|\vec{\mathbf{E}}_k\|_{\tau_k}^2 \left( \frac{1}{2P_k} - \frac{\alpha_k c_k \Delta t}{4V_k} - \frac{\beta_{ki} c_k \Delta t}{8V_k} \right) + \\
 &\quad \mu_k \|\vec{\mathbf{H}}_k\|_{\tau_k}^2 \left( \frac{1}{2P_k} - \frac{\alpha_k c_k \Delta t}{4V_k} - \frac{\beta_{ki} c_k \Delta t}{8V_k} \right).
 \end{aligned}$$

Then, under the conditions of Lemma 4.3,  $W_{ik}$  is a positive definite quadratic form and the local energy is a positive definite quadratic form of all unknowns. This concludes the proof.  $\square$

Note that, the existence of the constants  $\alpha_i$  and  $\beta_{ik}$  ( $k \in \mathcal{V}_i$ ) is always ensured. The values of  $\alpha_i$  only depend on the local polynomial order  $p_i$  while the values of  $\beta_{ik}$  depend on  $p_i$  and on the number of hanging nodes on the interface  $a_{ik}$ . For instance, for orthogonal polynomials on a  $d$ -simplex  $\beta_{ik} = (p_i+1)(p_i+d)/d$  (see [WH03]), and for arbitrary basis functions these values are given by:

$$\left( \frac{\alpha_i^2 P_i^2}{V_i^2}; \frac{\beta_{ik} S_{ik}}{V_i} \right) = (\|M^{-1/2} S_1 M^{-1/2}\|; \|M^{-1/2} S_2 M^{-1/2}\|),$$

where  $M$  is the mass matrix without material parameter,  $S_2 = 2S_{ik}$ , and  $S_1 = \int_{\tau_i} \text{curl } \vec{\varphi}_{ij} \cdot \text{curl } \vec{\varphi}_{il}$ ,  $1 \leq j, l \leq d_i$ . Moreover, the value of  $\beta_{ik}$  verifies the properties of Lemma 2.2 of Chapter 2.

## 4.2.2 Convergence

A convergence analysis of the LF<sub>2</sub> based DGTD- $\mathbb{P}_{p_i}$  method is conducted in [FLLP05] in the case of conforming simplicial meshes and  $p_i = p$  everywhere. In this section, our objective is to obtain an *a priori* error estimates depending on  $h$  and  $p$ , which establishes the rate of convergence of the proposed  $hp$ -like DGTD method.

We consider again the Maxwell problem: find  $(\vec{\mathbf{E}}, \vec{\mathbf{H}}) : \Omega \times ]0, T[ \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$  such that,

$$\begin{cases} \bar{\epsilon} \partial_t \vec{\mathbf{E}} &= \text{curl } \vec{\mathbf{H}} & \text{in } \Omega, \\ \bar{\mu} \partial_t \vec{\mathbf{H}} &= -\text{curl } \vec{\mathbf{E}} & \text{in } \Omega, \end{cases} \quad (4.27a)$$

$$\begin{cases} \vec{n} \times \vec{\mathbf{E}} &= 0 & \text{on } \partial\Omega, \\ \vec{\mathbf{E}}(\vec{x}, 0) &= \vec{\mathbf{E}}_0(\vec{x}) & \text{in } \Omega, \\ \vec{\mathbf{H}}(\vec{x}, 0) &= \vec{\mathbf{H}}_0(\vec{x}) & \text{in } \Omega, \end{cases} \quad (4.27b)$$

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{\mathbf{E}} &= 0 & \text{in } \Omega, \\ \nabla \cdot \vec{\mathbf{H}} &= 0 & \text{in } \Omega. \end{cases} \quad (4.27c)$$

We assume that  $\bar{\epsilon}, \bar{\mu} \in [L^\infty(\Omega)]^{3 \times 3}$  and  $\exists C_1, C_2 > 0$  such that:

$$\forall \vec{\xi} \in \mathbb{R}^3 : \begin{cases} C_1 |\vec{\xi}|^2 \leq \bar{\epsilon} \vec{\xi} \cdot \vec{\xi} \leq C_2 |\vec{\xi}|^2, \\ C_1 |\vec{\xi}|^2 \leq \bar{\mu} \vec{\xi} \cdot \vec{\xi} \leq C_2 |\vec{\xi}|^2. \end{cases} \quad (4.28)$$

The problem (4.27) admits a unique solution  $(\vec{\mathbf{E}}, \vec{\mathbf{H}}) \in [C^1(0, T; [L^2(\Omega)]^3) \cap C^0(0, T; H_0(\text{curl}, \Omega))]^2$  (see [Rem99] for more details), where  $H_0(\text{curl}, \Omega) = \{\vec{u} \in H(\text{curl}, \Omega) \text{ such that } \vec{n} \times \vec{u} = 0\}$ .

For a real  $s \geq 0$ , we define the classical broken space :

$$H^s(\Omega_h) = \{v \in L^2(\Omega) : \forall \tau_i \in \Omega_h, v|_{\tau_i} \in H^s(\tau_i)\}. \quad (4.29)$$

The space  $H^s(\Omega_h)$  is equipped with the natural norm, for  $v \in H^s(\Omega_h)$  :

$$\|v\|_{s,h} = \left( \sum_{\tau_i \in \Omega_h} \|v\|_{s,\tau_i}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (4.30)$$

where  $\|\cdot\|_{s,\tau_i}$  is the usual Sobolev norm of  $H^s$  on  $\tau_i$ . For  $s > \frac{1}{2}$ , the elementwise traces of functions in  $H^s(\Omega_h)$  belongs to  $tr(\mathcal{F}_h) = \Pi_{\tau_i \in \Omega_h} L^2(\partial\tau_i)$ . We denote by  $\mathbf{H}^s(\Omega_h)$  the vectorial broken space  $[H^s(\Omega_h)]^3$  and the associated norm defined by :

$$\|\vec{v}\|_{s,h} = \left( \sum_{j=1}^3 \|v_j\|_{s,h}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (4.31)$$

where  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbf{H}^s(\Omega_h)$ . We define the jump of a function  $\vec{v} \in \mathbf{H}^s(\Omega_h)$ :

$$\begin{aligned} \forall a_{ik} \in \mathcal{F}_h^I, \quad \llbracket \vec{v} \rrbracket_{ik}^i &= \llbracket \vec{v} \rrbracket_{a_{ik}}^{\tau_i} = (\vec{v}_k|_{a_{ik}} - \vec{v}_i|_{a_{ik}}) \times \vec{n}_{ik}, \\ \forall a_{ik} \in \mathcal{F}_h^B, \quad \llbracket \vec{v} \rrbracket_{ik}^i &= -\vec{v}_i|_{a_{ik}} \times \vec{n}_{ik}. \end{aligned} \quad (4.32)$$

We associate to the continuous problem (4.27a) the following space discretized problem: find  $(\vec{\mathbf{E}}(\cdot, t), \vec{\mathbf{H}}(\cdot, t)) \in \mathbf{H}^1(\Omega_h) \times \mathbf{H}^1(\Omega_h)$  such that,  $\forall \tau_i \in \Omega_h$  and  $\forall \vec{\phi}, \vec{\psi} \in \mathbf{H}^1(\Omega_h)$ ,

$$\left\{ \begin{aligned} \int_{\tau_i} \vec{\phi}_i \cdot \bar{\epsilon}_i \partial_t \vec{\mathbf{E}}_i - \int_{\tau_i} \vec{\mathbf{H}}_i \cdot \text{curl } \vec{\phi}_i &+ \sum_{\substack{k \in \mathcal{V}_i \\ a_{ik} \in \mathcal{F}_h^I}} \int_{a_{ik}} \vec{\phi}_i \cdot (\vec{\mathbf{H}}|_{a_{ik}} \times \vec{n}_{ik}) \\ &+ \sum_{\substack{k \in \mathcal{V}_i \\ a_{ik} \in \mathcal{F}_h^B}} \int_{a_{ik}} \vec{\phi}_i \cdot (\vec{\mathbf{H}}|_{a_{ik}} \times \vec{n}_{ik}) = 0, \\ \int_{\tau_i} \vec{\psi}_i \cdot \bar{\mu}_i \partial_t \vec{\mathbf{H}}_i + \int_{\tau_i} \vec{\mathbf{E}}_i \cdot \text{curl } \vec{\psi}_i &- \sum_{\substack{k \in \mathcal{V}_i \\ a_{ik} \in \mathcal{F}_h^I}} \int_{a_{ik}} \vec{\psi}_i \cdot (\vec{\mathbf{E}}|_{a_{ik}} \times \vec{n}_{ik}) = 0, \end{aligned} \right. \quad (4.33)$$

where  $\vec{\phi}_i = \vec{\phi}|_{\tau_i}$  and  $\vec{\psi}_i = \vec{\psi}|_{\tau_i}$ . Summing up the identities in (4.33) with respect to  $i$ , we consider the following semi-discrete discontinuous Galerkin problem : find  $(\vec{\mathbf{E}}_h(\cdot, t), \vec{\mathbf{H}}_h(\cdot, t)) \in V_p(\Omega_h) \times V_p(\Omega_h)$  such that,  $\forall \tau_i \in \Omega_h$  and  $\forall \vec{\phi}_h, \vec{\psi}_h \in V_p(\Omega_h)$ ,



$$\begin{cases} \sum_i \int_{\tau_i} \vec{\phi}_{hi} \cdot \bar{\epsilon}_i \partial_t \vec{\mathbf{E}}_i - \sum_i \int_{\tau_i} \vec{\mathbf{H}}_i \cdot \text{curl} \vec{\phi}_{hi} + \sum_{a_{ik} \in \mathcal{F}_h} \int_{a_{ik}} \llbracket \vec{\phi}_h \rrbracket_{ik}^i \cdot \{\vec{\mathbf{H}}_h\}_{ik} = 0, \\ \sum_i \int_{\tau_i} \vec{\psi}_{hi} \cdot \bar{\mu}_i \partial_t \vec{\mathbf{H}}_i + \sum_i \int_{\tau_i} \vec{\mathbf{E}}_i \cdot \text{curl} \vec{\psi}_{hi} - \sum_{a_{ik} \in \mathcal{F}_h} \int_{a_{ik}} \llbracket \vec{\psi}_h \rrbracket_{ik}^i \cdot \{\vec{\mathbf{E}}_h\}_{ik} = 0, \\ \vec{\mathbf{E}}_h(0) = \Pi_h^p \vec{\mathbf{E}}_0 \text{ and } \vec{\mathbf{H}}_h(0) = \Pi_h^p \vec{\mathbf{H}}_0. \end{cases} \quad (4.34)$$

Here  $\Pi_h^p : \mathbf{L}^2(\Omega) \rightarrow V_p(\Omega_h)$  is the  $\mathbf{L}^2$ -projection onto  $V_p(\Omega_h)$ . The problem (4.34) can be rewritten in the following form: find  $\vec{\mathbf{U}}_h = (\vec{\mathbf{E}}_h, \vec{\mathbf{H}}_h) \in V_p(\Omega_h) \times V_p(\Omega_h)$  such that:

$$J(\partial_t \vec{\mathbf{U}}_h, \vec{\mathbf{U}}'_h) + a(\vec{\mathbf{U}}_h, \vec{\mathbf{U}}'_h) + b(\vec{\mathbf{U}}_h, \vec{\mathbf{U}}'_h) = 0, \quad \forall \vec{\mathbf{U}}'_h = (\vec{\phi}_h, \vec{\psi}_h) \in V_p(\Omega_h) \times V_p(\Omega_h). \quad (4.35)$$

For  $\vec{\mathbf{W}} = (\vec{u}, \vec{v})$  and  $\vec{\mathbf{W}}' = (\vec{u}', \vec{v}')$ , the bilinear forms  $J, a$  and  $b$  defined on  $V_p(\Omega_h) \times V_p(\Omega_h)$  are given by:

$$\begin{cases} J(\vec{\mathbf{W}}, \vec{\mathbf{W}}') = \sum_i \int_{\tau_i} (\bar{\epsilon} \vec{u} \cdot \vec{u}' + \bar{\mu} \vec{v} \cdot \vec{v}'), \\ a(\vec{\mathbf{W}}, \vec{\mathbf{W}}') = \sum_i \int_{\tau_i} (\vec{u} \cdot \text{curl} \vec{v}' - \vec{v} \cdot \text{curl} \vec{u}'), \\ b(\vec{\mathbf{W}}, \vec{\mathbf{W}}') = \sum_{a_{ik} \in \mathcal{F}_h} \int_{a_{ik}} (\{\vec{v}\} \cdot \llbracket \vec{u}' \rrbracket - \{\vec{u}\} \cdot \llbracket \vec{v}' \rrbracket), \end{cases} \quad (4.36)$$

taking into account that, for boundary faces  $a_{ik} \in \mathcal{F}_h^B$  we have  $\{\vec{v}\} = \vec{v}$ . The semi-discrete discontinuous Galerkin formulation (4.35) is consistent with the original continuous problem (4.27) in the following sense: if  $\vec{\mathbf{U}} = (\vec{\mathbf{E}}, \vec{\mathbf{H}})$  is the exact solution of (4.27), such that  $\forall h, \forall t \in [0, T], (\vec{\mathbf{E}}(\cdot, t), \vec{\mathbf{H}}(\cdot, t)) \in \mathbf{H}^s(\Omega) \times \mathbf{H}^s(\Omega)$ , then we have:

$$J(\partial_t \vec{\mathbf{U}}, \vec{\mathbf{U}}') + a(\vec{\mathbf{U}}, \vec{\mathbf{U}}') + b(\vec{\mathbf{U}}, \vec{\mathbf{U}}') = 0, \quad \forall \vec{\mathbf{U}}' \in V_p(\Omega_h) \times V_p(\Omega_h). \quad (4.37)$$

The following approximation results will be used to bound the error [BS87]-[Sch98].

**Lemma 4.4** (*Babuska and Suri [BS87]*) *Let  $\tau_i \in \Omega_h$  and suppose that  $\vec{u} \in \mathbf{H}^s(\tau_i)$ ,  $s \geq 1/2$ . Let  $\Pi$  be a linear continuous operator from  $\mathbf{H}^s(\tau_i)$  onto  $\mathbb{P}_{p_i}(\tau_i)$ ,  $p_i \geq 1$ , such that  $\Pi(\vec{u}) = \vec{u}$ ,  $\forall \vec{u} \in \mathbb{P}_{p_i}(\tau_i)$ . Then we have:*

$$\|\vec{u} - \Pi(\vec{u})\|_{0, \tau_i} \leq C \frac{h_i^{\nu_i}}{p_i^s} \|\vec{u}\|_{s, \tau_i}, \quad (4.38)$$

$$\|\vec{u} - \Pi(\vec{u})\|_{0, \partial \tau_i} \leq C \frac{h_i^{\nu_i - 1/2}}{p_i^{s-1/2}} \|\vec{u}\|_{s+1, \tau_i}, \quad (4.39)$$

where  $\nu_i = \min\{s, p_i + 1\}$  and  $C$  is a positive constant independent of  $u, h_i$  and  $p_i$ , but dependent on  $s$  and on the shape regularity of the mesh parameter  $\eta$ .

**Lemma 4.5** (Schwab [Sch98]) For all  $q \in \mathbb{P}_{p_i}(\tau_i)$ ,  $p_i \geq 1$ , we have:

$$\|q\|_{0,\partial\tau_i}^2 \leq C_{inv} \frac{p_i^2}{h_i} \|q\|_{0,\tau_i}^2,$$

where  $C_{inv}$  is a positive constant depending only on the shape regularity of the mesh parameter  $\eta$ .

Let  $\vec{\mathbf{U}} = (\vec{\mathbf{E}}, \vec{\mathbf{H}})$  and  $\vec{\mathbf{U}}_h = (\vec{\mathbf{E}}_h, \vec{\mathbf{H}}_h)$ . We define  $\mathbf{\Pi}_h^p : \mathbf{L}^2(\Omega) \times \mathbf{L}^2(\Omega) \rightarrow V_p(\Omega_h) \times V_p(\Omega_h)$  by  $\mathbf{\Pi}_h^p(\vec{\mathbf{U}}) = (\mathbf{\Pi}_h^p \vec{\mathbf{E}}, \mathbf{\Pi}_h^p \vec{\mathbf{H}})$ . We denote by  $\varepsilon_{\tau_i}(t)$  the local error and by  $\varepsilon(t) = \sum_{\tau_i \in \Omega_h} \varepsilon_{\tau_i}(t)$  the global error. Then we have:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\tau_i}(t) &= \|\vec{\mathbf{E}} - \mathbf{\Pi}_h^p \vec{\mathbf{E}} + \mathbf{\Pi}_h^p \vec{\mathbf{E}} - \vec{\mathbf{E}}_h\|_{0,\tau_i}^2 + \|\vec{\mathbf{H}} - \mathbf{\Pi}_h^p \vec{\mathbf{H}} + \mathbf{\Pi}_h^p \vec{\mathbf{H}} - \vec{\mathbf{H}}_h\|_{0,\tau_i}^2 \\ &\leq 2(\|\vec{\mathbf{E}} - \mathbf{\Pi}_h^p \vec{\mathbf{E}}\|_{0,\tau_i}^2 + \|\vec{\mathbf{H}} - \mathbf{\Pi}_h^p \vec{\mathbf{H}}\|_{0,\tau_i}^2) + 2(\|\mathbf{\Pi}_h^p \vec{\mathbf{E}} - \vec{\mathbf{E}}_h\|_{0,\tau_i}^2 + \|\mathbf{\Pi}_h^p \vec{\mathbf{H}} - \vec{\mathbf{H}}_h\|_{0,\tau_i}^2) \\ &= 2\|\vec{\mathbf{U}} - \mathbf{\Pi}_h^p \vec{\mathbf{U}}\|_{0,\tau_i}^2 + 2\|\mathbf{\Pi}_h^p \vec{\mathbf{U}} - \vec{\mathbf{U}}_h\|_{0,\tau_i}^2 \\ &= 2\varepsilon_{\tau_i}^a + 2\varepsilon_{\tau_i}^b, \end{aligned}$$

where  $\varepsilon_{\tau_i}^a$  is due to the error introduced by the polynomial approximation of the exact solution while  $\varepsilon_{\tau_i}^b$  measures the errors associated with the semi-discrete approximation of Maxwell's equations.

To bound  $\varepsilon_{\tau_i}^a$  we need only recall Lemma 4.4 to state:

**Lemma 4.6** Assume that  $\vec{\mathbf{U}} \in \mathbf{H}^s(\tau_i) \times \mathbf{H}^s(\tau_i)$ ,  $s \geq 0$ . Then there exists a constant  $C$ , dependent on  $s$  and on the shape regularity of the mesh  $\eta$ , but independent of  $\vec{\mathbf{U}}$ ,  $h_i$  and  $p_i$ , such that:

$$\|\vec{\mathbf{U}} - \mathbf{\Pi}_h^p \vec{\mathbf{U}}\|_{0,\tau_i} \leq C \frac{h_i^{\nu_i}}{p_i^s} \|\vec{\mathbf{U}}\|_{s,\tau_i}, \quad (4.40)$$

where  $\nu_i = \min\{s, p_i + 1\}$ .

**Theorem 4.1** Assume that a solution  $(\vec{\mathbf{E}}(t), \vec{\mathbf{H}}(t)) \in \mathbf{H}^s(\tau_i) \times \mathbf{H}^s(\tau_i)$  with  $s \geq 3/2$  to Maxwell's equations in  $\Omega_h = \bigcup_i \tau_i$  exists. Then the numerical solution,  $(\vec{\mathbf{E}}_h(t), \vec{\mathbf{H}}_h(t)) \in V_p(\Omega_h) \times V_p(\Omega_h)$ , to the semi-discrete approximation, Eq. (4.34), converges to the exact solution and the global error is bounded as:

$$\left( \|\vec{\mathbf{E}} - \vec{\mathbf{E}}_h\|_{0,\Omega}^2 + \|\vec{\mathbf{H}} - \vec{\mathbf{H}}_h\|_{0,\Omega}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq C \left( \frac{h^\nu}{p_{\min}^s} + T \frac{h^{\nu-1}}{p_{\min}^{s-\frac{3}{2}}} \right) \max_{t \in [0,T]} \|(\vec{\mathbf{E}}(t), \vec{\mathbf{H}}(t))\|_{s,\Omega}, \quad (4.41)$$

where  $\nu = \min\{s, p_{\min} + 1\}$  and  $p_{\min} = \min\{p_i, \tau_i \in \Omega_h\}$ ,  $p_i \geq 1$ . The constant  $C > 0$  depends on the material properties and on the shape regularity of the mesh parameter  $\eta$ , but not on  $p_{\min}$  and  $h$ .

**Proof.** Let  $\vec{\mathbf{q}} = \vec{\mathbf{U}} - \vec{\mathbf{U}}_h$ . Since  $\mathbf{\Pi}_h^p \vec{\mathbf{U}}_h = \vec{\mathbf{U}}_h$ , we have  $\sum_i \varepsilon_{\tau_i}^b = \|\mathbf{\Pi}_h^p \vec{\mathbf{q}}\|_{0,\Omega}^2$ . To obtain a bound for  $\|\mathbf{\Pi}_h^p \vec{\mathbf{q}}\|_{0,\Omega}$ , we introduce  $\sigma(t) = \frac{1}{2} J(\mathbf{\Pi}_h^p \vec{\mathbf{q}}(t), \mathbf{\Pi}_h^p \vec{\mathbf{q}}(t))$  with  $\mathbf{\Pi}_h^p \vec{\mathbf{q}}(\cdot, t)$  belongs to  $V_p(\Omega_h) \times V_p(\Omega_h)$ . Using the discrete initial conditions of Eq. (4.34), we have  $\sigma(0) = 0$  and then, for  $0 < t \leq T$ ,

$$\sigma(t) = \frac{1}{2} \int_0^t \frac{d}{ds} J(\mathbf{\Pi}_h^p \vec{\mathbf{q}}(s), \mathbf{\Pi}_h^p \vec{\mathbf{q}}(s)) ds = \int_0^t J(\partial_s \mathbf{\Pi}_h^p \vec{\mathbf{q}}(s), \mathbf{\Pi}_h^p \vec{\mathbf{q}}(s)) ds.$$

For any  $\vec{\mathbf{U}}_h \in V_p(\Omega_h) \times V_p(\Omega_h)$ , we have  $a(\vec{\mathbf{U}}_h, \vec{\mathbf{U}}_h) + b(\vec{\mathbf{U}}_h, \vec{\mathbf{U}}_h) = 0$ , and we get:

$$\begin{aligned} \sigma(t) = & \int_0^t \left( J(\partial_s \mathbf{\Pi}_h^p \vec{\mathbf{q}}(s), \mathbf{\Pi}_h^p \vec{\mathbf{q}}(s)) + a(\mathbf{\Pi}_h^p \vec{\mathbf{q}}(s), \mathbf{\Pi}_h^p \vec{\mathbf{q}}(s)) \right. \\ & \left. + b(\mathbf{\Pi}_h^p \vec{\mathbf{q}}(s), \mathbf{\Pi}_h^p \vec{\mathbf{q}}(s)) \right) ds. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Subtracting Eq. (4.35) from the consistency result of Eq. (4.37) with  $\vec{\mathbf{U}}' = \vec{\mathbf{U}}'_h = \mathbf{\Pi}_h^p \vec{\mathbf{q}}(s)$  yields:

$$J(\partial_s \vec{\mathbf{q}}(s), \mathbf{\Pi}_h^p \vec{\mathbf{q}}(s)) + a(\vec{\mathbf{q}}(s), \mathbf{\Pi}_h^p \vec{\mathbf{q}}(s)) + b(\vec{\mathbf{q}}(s), \mathbf{\Pi}_h^p \vec{\mathbf{q}}(s)) = 0. \quad (4.43)$$

Now, subtracting the above equality in Eq. (4.43) from Eq. (4.42) leads to:

$$\begin{aligned} \sigma(t) = & \int_0^t \left( J([\mathbf{\Pi}_h^p \partial_s \vec{\mathbf{U}} - \partial_s \vec{\mathbf{U}}](s), \mathbf{\Pi}_h^p \vec{\mathbf{q}}(s)) + a([\mathbf{\Pi}_h^p \vec{\mathbf{U}} - \vec{\mathbf{U}}](s), \mathbf{\Pi}_h^p \vec{\mathbf{q}}(s)) \right. \\ & \left. + b([\mathbf{\Pi}_h^p \vec{\mathbf{U}} - \vec{\mathbf{U}}](s), \mathbf{\Pi}_h^p \vec{\mathbf{q}}(s)) \right) ds. \end{aligned}$$

Since  $\mathbf{\Pi}_h^p$  is a projector onto  $V_p(\Omega_h) \times V_p(\Omega_h)$  and  $\mathbf{\Pi}_h^p \vec{\mathbf{q}}(., t)$  belongs to  $V_p(\Omega_h) \times V_p(\Omega_h)$ , then  $J(\mathbf{\Pi}_h^p \partial_s \vec{\mathbf{U}} - \partial_s \vec{\mathbf{U}}, \mathbf{\Pi}_h^p \vec{\mathbf{q}}) = 0$  and  $a(\mathbf{\Pi}_h^p \vec{\mathbf{U}} - \vec{\mathbf{U}}, \mathbf{\Pi}_h^p \vec{\mathbf{q}}) = 0$ . Using the lower bound  $C_1 > 0$  of  $\bar{\epsilon}$  and  $\bar{\mu}$ , Eq. (4.28), we thus get:

$$\frac{C_1}{2} \|\mathbf{\Pi}_h^p \vec{\mathbf{q}}(t)\|_{0,\Omega}^2 \leq \int_0^t b([\mathbf{\Pi}_h^p \vec{\mathbf{U}} - \vec{\mathbf{U}}](s), \mathbf{\Pi}_h^p \vec{\mathbf{q}}(s)) ds. \quad (4.44)$$

Now, we bound the surface integrals deriving from the definition of  $b(., .)$ . We assume that  $\vec{\mathbf{q}} = (\vec{\mathbf{q}}^E, \vec{\mathbf{q}}^H)$ , where  $\vec{\mathbf{q}}^E$  and  $\vec{\mathbf{q}}^H$  denote the error in  $\vec{\mathbf{E}}$  and  $\vec{\mathbf{H}}$  respectively. Let  $a_{ik} \in \mathcal{F}_h^I$  be an internal interface shared by the tetrahedra  $\tau_i$  and  $\tau_k$ . We denote by  $\mathbb{I}^E = \int_{a_{ik}} \{\mathbf{\Pi}_h^p \vec{\mathbf{H}} - \vec{\mathbf{H}}\}_{ik} \cdot [\mathbf{\Pi}_h^p \vec{\mathbf{q}}^E]_{ik}$ , we have, using the Cauchy-Schwarz-Buniakovsky (CSB) inequality:

$$\mathbb{I}^E \leq \underbrace{\left( \int_{a_{ik}} (\{\mathbf{\Pi}_h^p \vec{\mathbf{H}} - \vec{\mathbf{H}}\}_{ik})^2 \right)^{\frac{1}{2}}}_{\mathbb{I}_1^E} \underbrace{\left( \int_{a_{ik}} ([\mathbf{\Pi}_h^p \vec{\mathbf{q}}^E]_{ik})^2 \right)^{\frac{1}{2}}}_{\mathbb{I}_2^E}.$$

We have that:

$$\begin{aligned} \mathbb{I}_1^E & \leq \frac{1}{2} \left( \int_{a_{ik}} ((\mathbf{\Pi}_h^p \vec{\mathbf{H}}_i - \vec{\mathbf{H}}_i) + (\mathbf{\Pi}_h^p \vec{\mathbf{H}}_k - \vec{\mathbf{H}}_k))^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \|\mathbf{\Pi}_h^p \vec{\mathbf{H}}_i - \vec{\mathbf{H}}_i\|_{0,a_{ik}}^2 + \|\mathbf{\Pi}_h^p \vec{\mathbf{H}}_k - \vec{\mathbf{H}}_k\|_{0,a_{ik}}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

and,

$$\begin{aligned} \mathbb{I}_2^E & \leq \left( \int_{a_{ik}} (\vec{n}_{ik}(\mathbf{\Pi}_h^p \vec{\mathbf{q}}^E)_i|_{a_{ik}} + \vec{n}_{ki}(\mathbf{\Pi}_h^p \vec{\mathbf{q}}^E)_k|_{a_{ik}})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq \sqrt{2} \left( \|(\mathbf{\Pi}_h^p \vec{\mathbf{q}}^E)_i\|_{0,a_{ik}}^2 + \|(\mathbf{\Pi}_h^p \vec{\mathbf{q}}^E)_k\|_{0,a_{ik}}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Using Lemma 4.4 and Lemma 4.5, yields:

$$\mathbb{I}^E \leq C \left( \left( \frac{h_i^{\nu_i - \frac{1}{2}}}{p_i^{\frac{s-1}{2}}} \right)^2 \|\vec{\mathbf{H}}\|_{s, \tau_i}^2 + \left( \frac{h_k^{\nu_k - \frac{1}{2}}}{p_k^{\frac{s-1}{2}}} \right)^2 \|\vec{\mathbf{H}}\|_{s, \tau_k}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{p_i^2}{h_i} \|\mathbf{\Pi}_h^p \vec{\mathbf{q}}^E\|_{0, \tau_i}^2 + \frac{p_k^2}{h_k} \|\mathbf{\Pi}_h^p \vec{\mathbf{q}}^E\|_{0, \tau_k}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

According to the assumptions of Eq. (4.2), we finally get:

$$\mathbb{I}^E \leq K(\kappa_1, \kappa_2) \frac{h_i^{\nu-1}}{p_i^{\frac{s-\frac{3}{2}}{2}}} (\|\vec{\mathbf{H}}\|_{s+1, \tau_i}^2 + \|\vec{\mathbf{H}}\|_{s+1, \tau_k}^2)^{\frac{1}{2}} (\|\mathbf{\Pi}_h^p \vec{\mathbf{q}}^E\|_{0, \tau_i}^2 + \|\mathbf{\Pi}_h^p \vec{\mathbf{q}}^E\|_{0, \tau_k}^2)^{\frac{1}{2}}, \quad (4.45)$$

where  $K > 0$  does not depend on  $h_i$  and  $p_i$ , but depends on  $\kappa_1$  and  $\kappa_2$ , and on the local material properties  $(\bar{\epsilon}_{i/k}, \bar{\mu}_{i/k})$  associated to  $\tau_i$  and  $\tau_k$ .

The term  $\mathbb{I}^H = \int_{a_{ik}} \{ \mathbf{\Pi}_h^p \vec{\mathbf{E}} - \vec{\mathbf{E}} \}_{ik} \cdot [ \mathbf{\Pi}_h^p \vec{\mathbf{q}}^H ]_{ik}$  is treated in the same way, yielding the result:

$$\mathbb{I}^H \leq K(\kappa_1, \kappa_2) \frac{h_i^{\nu-1}}{p_i^{\frac{s-\frac{3}{2}}{2}}} (\|\vec{\mathbf{E}}\|_{s+1, \tau_i}^2 + \|\vec{\mathbf{E}}\|_{s+1, \tau_k}^2)^{\frac{1}{2}} (\|\mathbf{\Pi}_h^p \vec{\mathbf{q}}^H\|_{0, \tau_i}^2 + \|\mathbf{\Pi}_h^p \vec{\mathbf{q}}^H\|_{0, \tau_k}^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.46)$$

For boundary interfaces  $a_{ik} \in \mathcal{F}_h^B$ , we obtain the same upper bounds as Eqs. (4.45) and (4.46) but without the norms on  $\tau_k$ .

Summing up with respect to all  $\tau_i \in \Omega_h$ , and using the CSB inequality, yields:

$$b([\mathbf{\Pi}_h^p \vec{\mathbf{U}} - \vec{\mathbf{U}}](s), \mathbf{\Pi}_h^p \vec{\mathbf{q}}(s)) \leq K(\kappa_1, \kappa_2) \frac{h^{\nu-1}}{p_{\min}^{\frac{s-\frac{3}{2}}{2}}} \|\mathbf{\Pi}_h^p \vec{\mathbf{q}}(s)\|_{0, \Omega} \|(\vec{\mathbf{E}}(s), \vec{\mathbf{H}}(s))\|_{s, \Omega}. \quad (4.47)$$

Integrating in  $t \in [0, T]$  and combining this with Lemma 4.6 establishes the result and proves convergence on weak assumptions of local, elementwise smoothness of the solution.  $\square$

We have hence established the semi-discrete result that the error cannot grow faster than linearly in time and that we can control the growth rate by adapting the resolution parameters  $h$  and  $p$  accordingly. As we shall verify in Sec. 4.3 this linear growth is a sharp result. However, the numerical experiments will also show that we can expect that the growth rate approaches zero spectrally fast when increasing the approximation order  $p$  provided that the solution is sufficiently smooth.

Note that the convergence result of Theorem 4.1 is different from the one obtained by Fezoui *et al* [FLLP05]. The convergence result in [FLLP05] considers only the case of a conforming discontinuous Galerkin formulation where the interpolation degree is constant. The result presented here remains valid on any kind of mesh and discontinuous elements, including  $hp$ -type or non-conformal refinement.

Now, we give the consistency order of the time-discretized problem. The discretized scheme (4.6) can be formally seen as the discretization in time of a system of ODEs (4.20). The estimation of the consistency error comes directly from Taylor expansions. If  $(\vec{\mathbf{E}}_h^{n+1}, \vec{\mathbf{H}}_h^{n+\frac{3}{2}})$  is computed from  $\vec{\mathbf{E}}_h^n = \vec{\mathbf{E}}_h(t^n)$  and  $\vec{\mathbf{H}}_h^{n+\frac{1}{2}} = \vec{\mathbf{H}}_h(t^{n+\frac{1}{2}})$  by (4.6) where  $(\vec{\mathbf{E}}_h(\cdot), \vec{\mathbf{H}}_h(\cdot))$  denotes the semi-discrete solution of (4.34), then there exists a constant  $C$  independent of  $\Delta t$  and  $h$ , but dependent on the order of the leap-frog scheme  $N$ , such that:

$$\begin{aligned} & \|\vec{\mathbf{E}}_h^{n+1} - \vec{\mathbf{E}}_h^n\|_{0,\tau_i} + \|\vec{\mathbf{H}}_h^{n+\frac{3}{2}} - \vec{\mathbf{H}}_h^{n+\frac{1}{2}}\|_{0,\tau_i} \leq \\ & C\Delta t^{N+1} \left( \sum_{m=1}^{N/2+1} (\|\partial_t^m \vec{\mathbf{E}}_h\|_{0,\tau_i}^2)^{\frac{1}{2}} + \sum_{m=1}^{N/2+1} (\|\partial_t^m \vec{\mathbf{H}}_h\|_{0,\tau_i}^2)^{\frac{1}{2}} \right). \end{aligned} \quad (4.48)$$

Provided that the exact solution of the Maxwell system (4.27) is regular enough,  $(\partial_t^m \vec{\mathbf{E}}_h, \partial_t^m \vec{\mathbf{H}}_h)$  are some discrete approximation of  $(\partial_t^m \vec{\mathbf{E}}, \partial_t^m \vec{\mathbf{H}})$  which is also a solution of Maxwell equations and,  $\|\partial_t^m \vec{\mathbf{E}}_h\|_{0,\tau_i}$  and  $\|\partial_t^m \vec{\mathbf{H}}_h\|_{0,\tau_i}$  can be bounded independently from  $h$ , which proves that the consistency error is of order  $\mathcal{O}(\Delta t^N)$ .

### 4.2.3 Convergence of the divergence error

In the absence of sources, it is well known that the electric and the magnetic fields must remain solenoidal<sup>1</sup> throughout the computation. Indeed, taking the divergence of Eqs. (4.27a) and applying Eqs. (4.27c) in combination with Gauss' law for charge conservation immediately confirms that if the initial conditions satisfy Eqs. (4.27c), and the fields are evolved according to Maxwell's equations Eqs. (4.27a), the solution will satisfy Eqs. (4.27c) at all times. Hence, one can view Eqs. (4.27c) as a consistency condition on the initial conditions and limit the solution to the time-dependent part of Maxwell's equations, Eqs. (4.27a). The scheme in Eqs. (4.6) does not solve Eqs. (4.1), however, but rather an approximation to it. Hence one needs to consider the question of how well Eqs. (4.6) conserve the divergence.

Using the results of Sec. 4.2.2 we can state the following result.

**Theorem 4.2** *Assume that a solution  $\vec{\mathbf{U}} = (\vec{\mathbf{E}}(t), \vec{\mathbf{H}}(t)) \in \mathbf{H}^s(\tau_i) \times \mathbf{H}^s(\tau_i)$  with  $s \geq 7/2$  to Maxwell's equations in  $\Omega_h = \bigcup_i \tau_i$  exists. Then there exist a constant  $C$  dependent on  $s$  and the shape regularity of the mesh parameter  $\eta$ , but independent of  $\vec{\mathbf{U}}$ ,  $h$ , and  $p$ , such that the divergence of the numerical solution  $\vec{\mathbf{U}}_h$  to the semi-discrete approximation (4.34) is bounded as:*

$$\begin{aligned} & \left( \|\nabla \cdot (\vec{\mathbf{E}} - \vec{\mathbf{E}}_h)\|_{0,\Omega}^2 + \|\nabla \cdot (\vec{\mathbf{H}} - \vec{\mathbf{H}}_h)\|_{0,\Omega}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ & C \left( \frac{h^{\nu-1}}{p_{\min}^{s-1}} + T \frac{h^{\nu-2}}{p_{\min}^{s-\frac{7}{2}}} \right) \max_{t \in [0,T]} \|(\vec{\mathbf{E}}(t), \vec{\mathbf{H}}(t))\|_{s,\Omega}, \end{aligned} \quad (4.49)$$

where  $\nu = \min\{s, p_{\min} + 1\}$  and  $p_{\min} = \min\{p_i, \tau_i \in \Omega_h\}$ ,  $p_i \geq 1$ .

**Proof.** Consider the local divergence of  $\vec{\mathbf{H}}$  on any  $\tau_i \in \Omega_h$  we have:

$$\|\nabla \cdot (\vec{\mathbf{H}} - \vec{\mathbf{H}}_h)\|_{0,\tau_i}^2 \leq 2\|\nabla \cdot (\vec{\mathbf{H}} - \Pi_h^p \vec{\mathbf{H}})\|_{0,\tau_i}^2 + 2\|\nabla \cdot (\Pi_h^p \vec{\mathbf{H}} - \vec{\mathbf{H}}_h)\|_{0,\tau_i}^2. \quad (4.50)$$

The first term can be bounded using Lemma 4.4 as:

$$\|\nabla \cdot (\vec{\mathbf{H}} - \Pi_h^p \vec{\mathbf{H}})\|_{0,\tau_i} \leq C \frac{h_i^{\nu_i-1}}{p_i^{s-1}} \|\vec{\mathbf{H}}\|_{s,\tau_i}, \quad (4.51)$$

<sup>1</sup>A solenoidal vector is a vector field  $\mathbf{v}$  with zero divergence,  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ .

where  $\nu_i = \min\{s, p_i + 1\}$  and  $s \geq 1$ .

Using the inverse inequality [Sch98]:

$$\|\nabla \cdot \vec{\mathbf{u}}_h\|_{0,\tau_i} \leq C \frac{p_i^2}{h_i} \|\vec{\mathbf{u}}_h\|_{s,\tau_i}, \quad (4.52)$$

for all  $\vec{\mathbf{u}}_h \in \mathbb{P}_{p_i}(\tau_i)$ , we can bound the second term as:

$$\begin{aligned} \|\nabla \cdot (\Pi_h^p \vec{\mathbf{H}} - \vec{\mathbf{H}}_h)\|_{0,\tau_i} &\leq C \frac{p_i^2}{h_i} \|\Pi_h^p \vec{\mathbf{H}} - \vec{\mathbf{H}}_h\|_{0,\tau_i} \\ &\leq CT \frac{p_i^2}{h_i} \frac{h_i^{\nu-1}}{p_i^{s-\frac{3}{2}}} \|(\vec{\mathbf{E}}, \vec{\mathbf{H}})\|_{s,\tau_i} \\ &\leq CT \frac{h_i^{\nu-2}}{p_i^{s-\frac{7}{2}}} \|(\vec{\mathbf{E}}, \vec{\mathbf{H}})\|_{s,\tau_i}, \end{aligned} \quad (4.53)$$

by combining (4.44) with (4.47). An equivalent bound can be obtained for the divergence of  $\vec{\mathbf{E}}_h$  in the case of a source free medium which, combined with the above, yields the result.  $\square$

As could be expected, the result inherits the temporal linear growth from the convergence result and confirms the possibility of recovering spectral convergence of the divergence under the assumption of sufficient smoothness of the solutions. It should be noted that while the result confirms high-order accuracy and convergence, the estimate for the actual convergence rate is certainly suboptimal and leaves room for improvement.

### 4.3 Numerical validation

In the following, we shall discuss the validity of the main theoretical results of the previous sections through the numerical solution of the two-dimensional Maxwell's equations in the TM polarization, *i.e.* we solve for  $(H_x, H_y, E_z)$ .

We consider the propagation of an eigenmode which is a standing wave of frequency  $f = 212$  MHz and wavelength  $\lambda = 1.4$  m in a unitary metallic cavity with  $\epsilon = \mu = 1$  in normalized units. Owing to the existence of an exact analytical solution, this problem allows us to appreciate the numerical results at any point and time in the cavity. Numerical simulations make use of a non-conforming locally refined triangular meshes of the square  $[0, 1] \times [0, 1]$  as shown on Fig. 4.4. In the sequel, we compare the LF<sub>2</sub> and LF<sub>4</sub> schemes using the DGTD- $\mathbb{P}_p$  and DGTD- $\mathbb{P}_{p_c}:\mathbb{P}_{p_f}$  methods previously studied in Chapters 2 and 3. In Tab. 4.2, we summarize the CFL values of the LF<sub>2</sub> based DGTD- $\mathbb{P}_p$  and DGTD- $\mathbb{P}_{p_c}:\mathbb{P}_{p_f}$  methods. The CFL values of the LF<sub>4</sub> schemes are given by  $\text{CFL}(\text{LF}_4) = 2.847 \text{ CFL}(\text{LF}_2)$ . If  $p_c \neq p_f$ , the DGTD- $\mathbb{P}_{p_c}:\mathbb{P}_{p_f}$  method has the same stability limit as the DGTD- $\mathbb{P}_{\min\{p_c, p_f\}}$  method, as long as the mesh is actually refined.

As a first verification of the theoretical estimates, we consider a non-conforming mesh consists of 782 triangles and 442 nodes (36 of them are hanging nodes). All simulations are carried out for  $t = 150$  which corresponds to 106 periods. We plot on Fig. 4.5 the time evolution of the  $L^2$  error of the DGTD- $\mathbb{P}_p$  and DGTD- $\mathbb{P}_{p_c}:\mathbb{P}_{p_f}$  methods using the LF<sub>2</sub> and LF<sub>4</sub> schemes. Tab. 4.3 gives the final  $L^2$  error, the number of degrees of freedom (# DOF) and the CPU time to reach time  $t = 150$ . It can be observed from Fig. 4.5 that the gain in the  $L^2$  error is notable when the accuracy in space and time are increased.

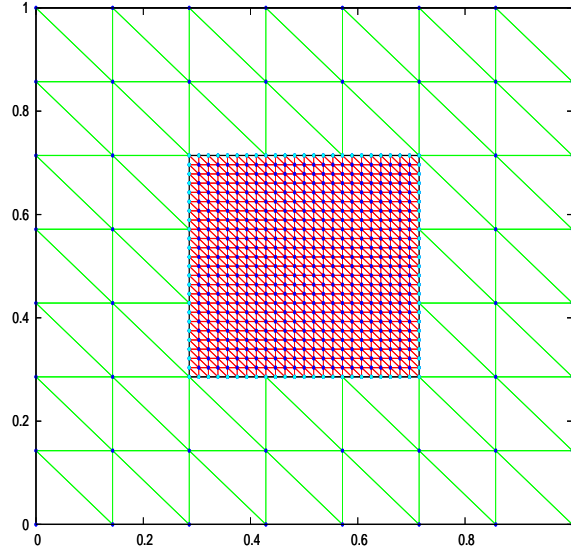


FIG. 4.4 – Example of a non-conforming locally refined triangular mesh.

Moreover, it is clear from (4.17) and Lemma 4.2 that, for a given mesh, each time step of  $LF_4$  scheme requires 2 times more memory than the  $LF_2$ , but its stability limit is almost 2.85 times less restrictive. Then, the  $LF_4$  schemes require almost 1.5 times less CPU time and is roughly 15 times more accurate than the  $LF_2$  scheme based on the observed  $L^2$  errors. Furthermore, for a given accuracy, the  $LF_4$  based  $DGTD-\mathbb{P}_{p_c}:\mathbb{P}_{p_f}$  method requires less CPU time than the  $LF_4$  based  $DGTD-\mathbb{P}_p$  method.

 TAB. 4.2 – The CFL values of the  $LF_2$   $DGTD-\mathbb{P}_p$  and  $DGTD-\mathbb{P}_{p_c}:\mathbb{P}_{p_f}$  methods.

$p =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
CFL( $LF_2$ )	0.3	0.2	0.1	0.08	0.06	0.045	0.035	0.03	0.025	0.02
$p_c:p_f =$	3:2	4:2	4:3	5:3	5:4	6:5	7:6	8:7	9:8	10:9
CFL( $LF_2$ )	0.2	0.2	0.1	0.1	0.08	0.06	0.045	0.035	0.03	0.025

Fig. 4.6 illustrates the numerical  $h$ -convergence of the  $DGTD-\mathbb{P}_p$  and  $DGTD-\mathbb{P}_{p_c}:\mathbb{P}_{p_f}$  methods. Corresponding asymptotic convergence orders are summarized in Tab. 4.4. As it could be expected from the use of a  $N$ th accurate time integration scheme, the asymptotic convergence order is bounded by  $N$  independently of the approximation order  $p$ . On Fig. 4.7 we show the numerical  $p$ -convergence of the  $DGTD-\mathbb{P}_p$  and  $DGTD-\mathbb{P}_{p_c}:\mathbb{P}_{p_f}$  methods for different approximation orders  $p$  and different mesh resolutions  $h$ . Corresponding  $L^2$  errors are given in Tab. 4.5 and 4.6. Following the main result, Theorem 4.1, we expect that the error grows at most linearly in time and that the growth rate should vanish spectrally for smooth solution. The results on Fig. 4.7 and in Tab. 4.5 and 4.6 not only confirm the validity of both statements but also illustrate that Theorem 4.1 is sharp, *i.e.* we cannot in general guarantee slower than linear growth, although we can control the growth rate by the approximation order  $p$ .

We conclude this experimental study by considering the numerical behavior of the divergence error. For this purpose, we still consider the eigenmode problem. The computational domain is discretized by a non-conforming locally refined mesh with 48 triangles (32 of them in the refined region) and 37 nodes (16 of them are hanging nodes), which corresponds to a grid resolution of 5 points per wavelength.

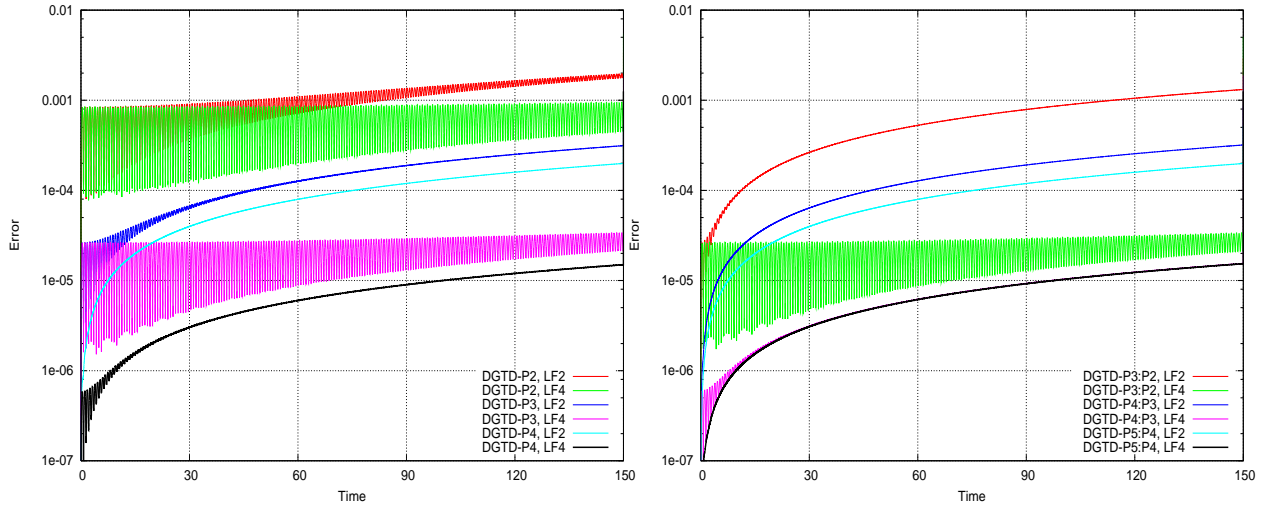


FIG. 4.5 – Time evolution of the  $L^2$  error.  $DGTD-\mathbb{P}_p$  (left) and  $DGTD-\mathbb{P}_{p_c}:\mathbb{P}_{p_f}$  (right) methods.

TAB. 4.3 – # DOF,  $L^2$ -error and CPU time using the  $LF_2$  and  $LF_4$  based DGTD methods.

DGTD- $\mathbb{P}_p$ method		LF <sub>2</sub>		LF <sub>4</sub>	
$p$	# DOF	Error	CPU (min)	Error	CPU (min)
<b>2</b>	4692	1.8E-03	11	5.5E-04	8
<b>3</b>	7820	3.1E-04	39	2.4E-05	28
<b>4</b>	11730	1.9E-04	98	1.5E-05	70
<b>5</b>	16422	1.5E-04	220	1.3E-05	155
DGTD- $\mathbb{P}_{p_c}:\mathbb{P}_{p_f}$ method		LF <sub>2</sub>		LF <sub>4</sub>	
$p_c:p_f$	# DOF	Error	CPU (min)	Error	CPU (min)
<b>3:2</b>	6668	1.3E-03	17	2.3E-05	12
<b>4:2</b>	9138	1.3E-03	27	1.5E-05	19
<b>4:3</b>	10290	3.2E-04	61	1.5E-05	44
<b>5:4</b>	14694	2.0E-04	134	1.4E-05	95

TAB. 4.4 – Asymptotic convergence orders of the  $LF_2$  and  $LF_4$  based DGTD methods.

DGTD- $\mathbb{P}_p$ method, $p =$	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>
LF <sub>2</sub> scheme	1.06	1.19	2.18	2.37	2.29	2.25	2.26
LF <sub>4</sub> scheme	1.06	1.14	2.23	3.03	4.30	4.50	4.50
DGTD- $\mathbb{P}_{p_c}:\mathbb{P}_{p_f}$ method, $p_c:p_f =$	<b>1:0</b>	<b>2:1</b>	<b>3:2</b>	<b>4:3</b>	<b>5:4</b>	<b>6:5</b>	
LF <sub>2</sub> scheme	1.30	2.23	2.08	2.27	2.13	2.17	
LF <sub>4</sub> scheme	1.05	2.20	3.01	4.21	4.50	4.48	



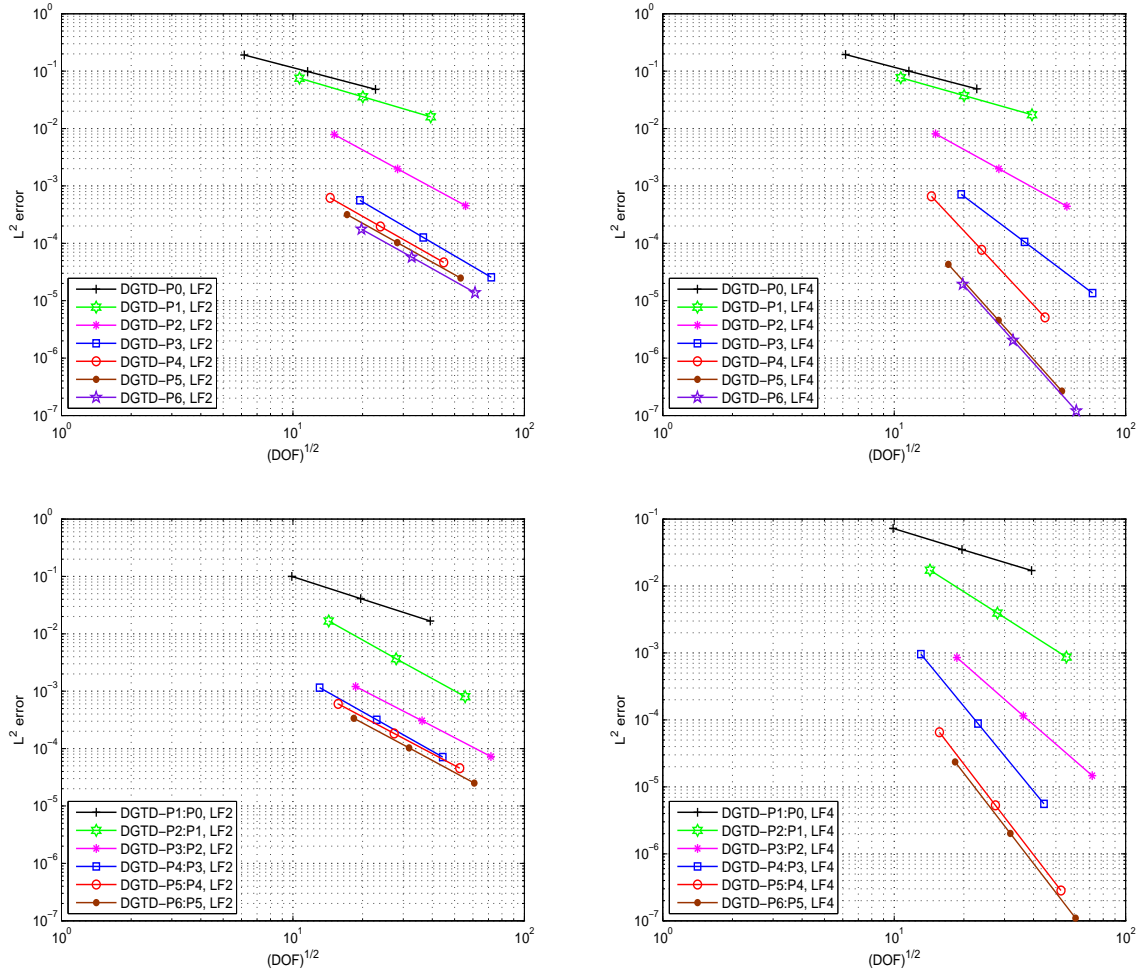


FIG. 4.6 –  $h$ -convergence of the  $DGTD-P_p$  (top) and  $DGTD-P_p$ : $\mathbb{P}_{p_f}$  (bottom) methods.  $L^2$  error as a function of the square root of #DOF.

TAB. 4.5 –  $p$ -convergence of the  $DGTD-P_p$  method.

DGTD- $\mathbb{P}_p$ method						
$p$	$h = 1/2$		$h = 1/3$		$h = 1/4$	
	LF <sub>2</sub>	LF <sub>4</sub>	LF <sub>2</sub>	LF <sub>4</sub>	LF <sub>2</sub>	LF <sub>4</sub>
1	3.0E-01	2.6E-01	1.8E-01	1.7E-01	1.1E-01	9.8E-02
2	4.9E-02	4.5E-02	1.8E-02	2.2E-02	9.2E-03	9.0E-03
3	9.1E-03	8.9E-03	2.8E-03	2.4E-03	1.4E-03	8.9E-04
4	3.2E-02	1.0E-03	1.3E-03	2.0E-04	7.4E-04	6.9E-05
5	1.6E-02	1.7E-04	7.4E-04	2.2E-05	4.1E-04	5.1E-06
6	9.3E-04	2.0E-05	4.1E-04	2.1E-06	2.3E-04	7.3E-07
7	1.7E-04	2.5E-06	4.4E-05	3.3E-07	2.7E-05	1.1E-07

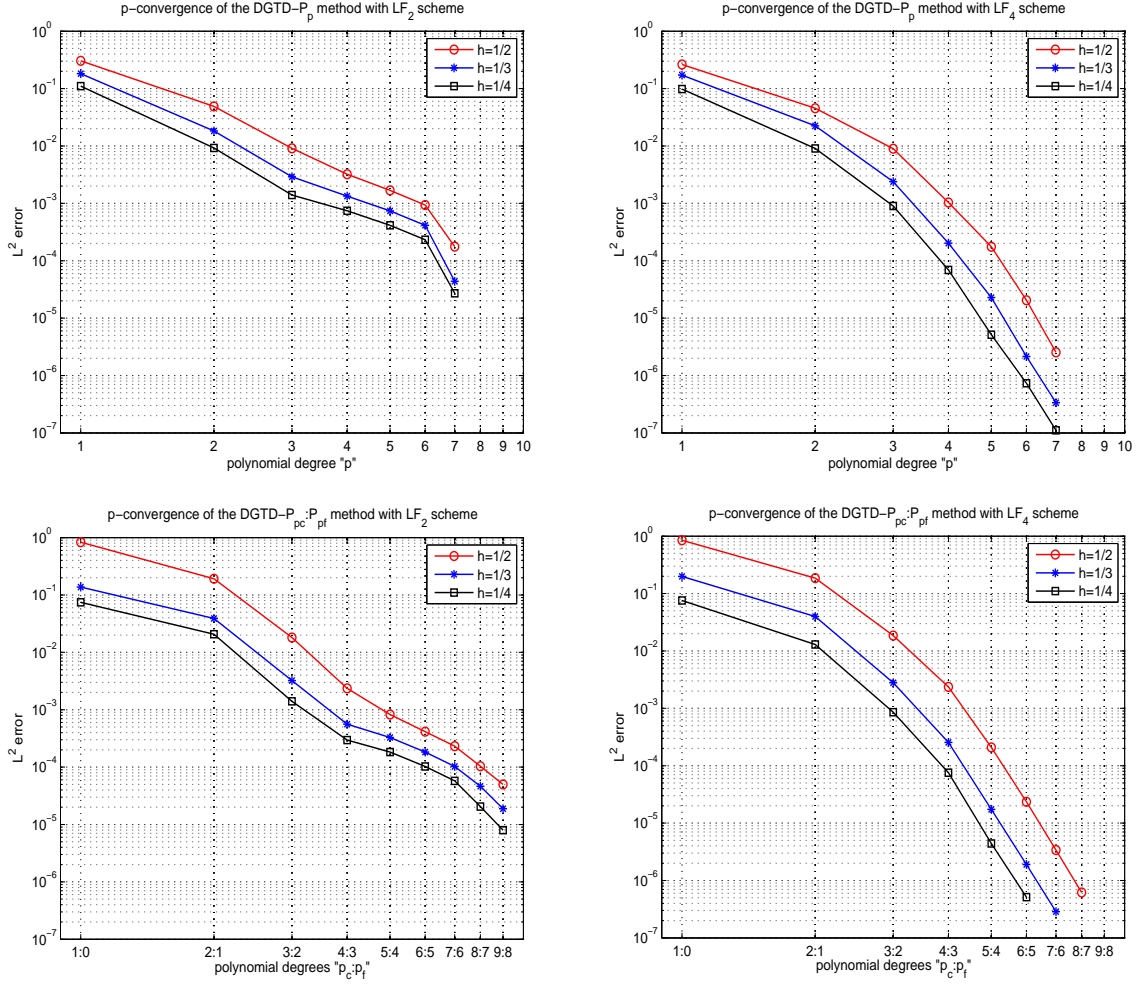


FIG. 4.7 –  $p$ -convergence of the  $DGTD-\mathbb{P}_p$  (top) and  $DGTD-\mathbb{P}_{p_c}:\mathbb{P}_{p_f}$  (bottom) methods.  $L^2$  error as a function of the approximation order  $p$ .

TAB. 4.6 –  $p$ -convergence of the  $DGTD-\mathbb{P}_{p_c}:\mathbb{P}_{p_f}$  method.

DGTD- $\mathbb{P}_p$ method						
$p_c:p_f$	$h = 1/2$		$h = 1/3$		$h = 1/4$	
	LF <sub>2</sub>	LF <sub>4</sub>	LF <sub>2</sub>	LF <sub>4</sub>	LF <sub>2</sub>	LF <sub>4</sub>
<b>1:0</b>	8.3E-01	8.5E-01	1.3E-01	1.9E-01	7.4E-02	7.6E-02
<b>2:1</b>	1.9E-01	1.8E-01	3.9E-02	3.9E-02	2.1E-02	1.3E-02
<b>3:2</b>	1.8E-02	1.8E-02	3.2E-03	2.7E-03	1.4E-03	8.5E-04
<b>4:3</b>	2.3E-03	2.3E-03	5.6E-04	2.5E-04	2.9E-04	7.6E-05
<b>5:4</b>	8.2E-04	2.0E-04	3.2E-04	1.7E-05	1.8E-04	4.4E-06
<b>6:5</b>	4.1E-04	2.3E-05	1.8E-04	1.9E-06	1.0E-04	4.7E-07
<b>7:6</b>	2.3E-04	3.4E-06	1.0E-04	2.8E-07	5.7E-05	-
<b>8:7</b>	1.0E-04	6.1E-07	4.6E-05	-	2.1E-05	-
<b>9:8</b>	4.9E-05	-	1.9E-05	-	7.9E-06	-

Simulations are carried out for time  $t = 30$  which corresponds to 20 periods. Fig. 4.8 shows the global  $L^2$  error of the divergence of  $\vec{\mathbf{H}}$  as a function of time and the approximation order  $p$  using respectively the  $\text{DGT D-}\mathbb{P}_p$  and  $\text{DGT D-}\mathbb{P}_{p_c}:\mathbb{P}_{p_f}$  methods. One can observe that for  $p \leq N + 2$ , the error vanishes faster than for  $p > N + 2$ ,  $N$  being the order of the leap-frog ( $\text{LF}_N$ ) scheme.

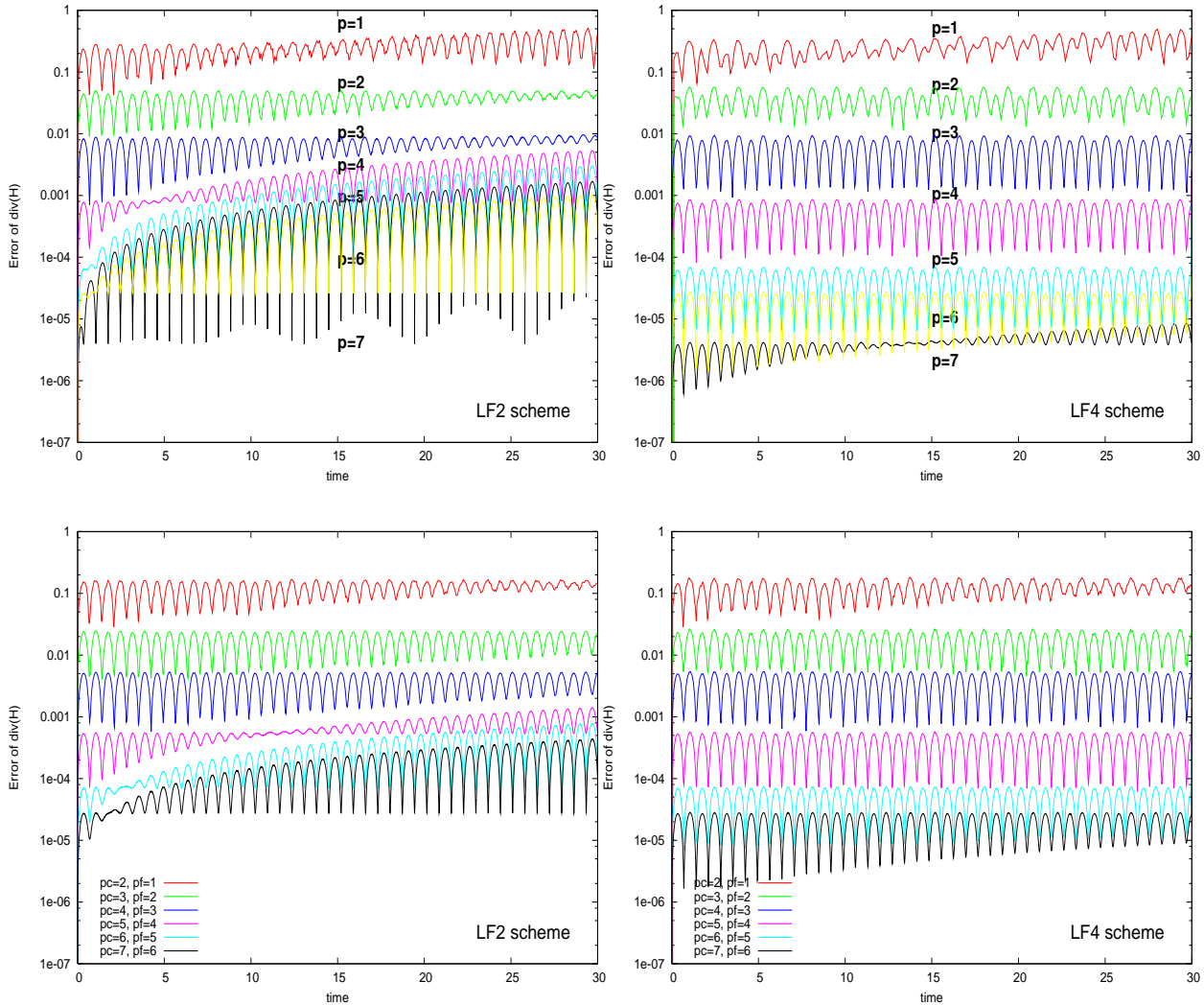


FIG. 4.8 – Global  $L^2$  error of the divergence of  $\vec{\mathbf{H}}$  as a function of time and  $p$ .  $\text{DGT D-}\mathbb{P}_p$  (top) and  $\text{DGT D-}\mathbb{P}_{p_c}:\mathbb{P}_{p_f}$  (bottom) methods using  $\text{LF}_2$  (left) and  $\text{LF}_4$  (right) schemes.

On Fig. 4.9 we show the numerical  $h$ - and  $p$ -convergence of the divergence of  $\vec{\mathbf{H}}$  using the  $\text{LF}_2$  and  $\text{LF}_4$  schemes. Consistent with the theoretical result in Theorem 4.2, the divergence error vanishes spectrally as we increase the approximation order  $p$ . Corresponding asymptotic convergence orders of the divergence of  $\vec{\mathbf{H}}$  are given in Tab. 4.7. One can observe that the convergence order is bounded by  $N + 2$  contrary to what we have observed for the  $h$ -convergence of the DGT D methods which confirms that the estimate (4.49) is suboptimal and leaves room for improvement.

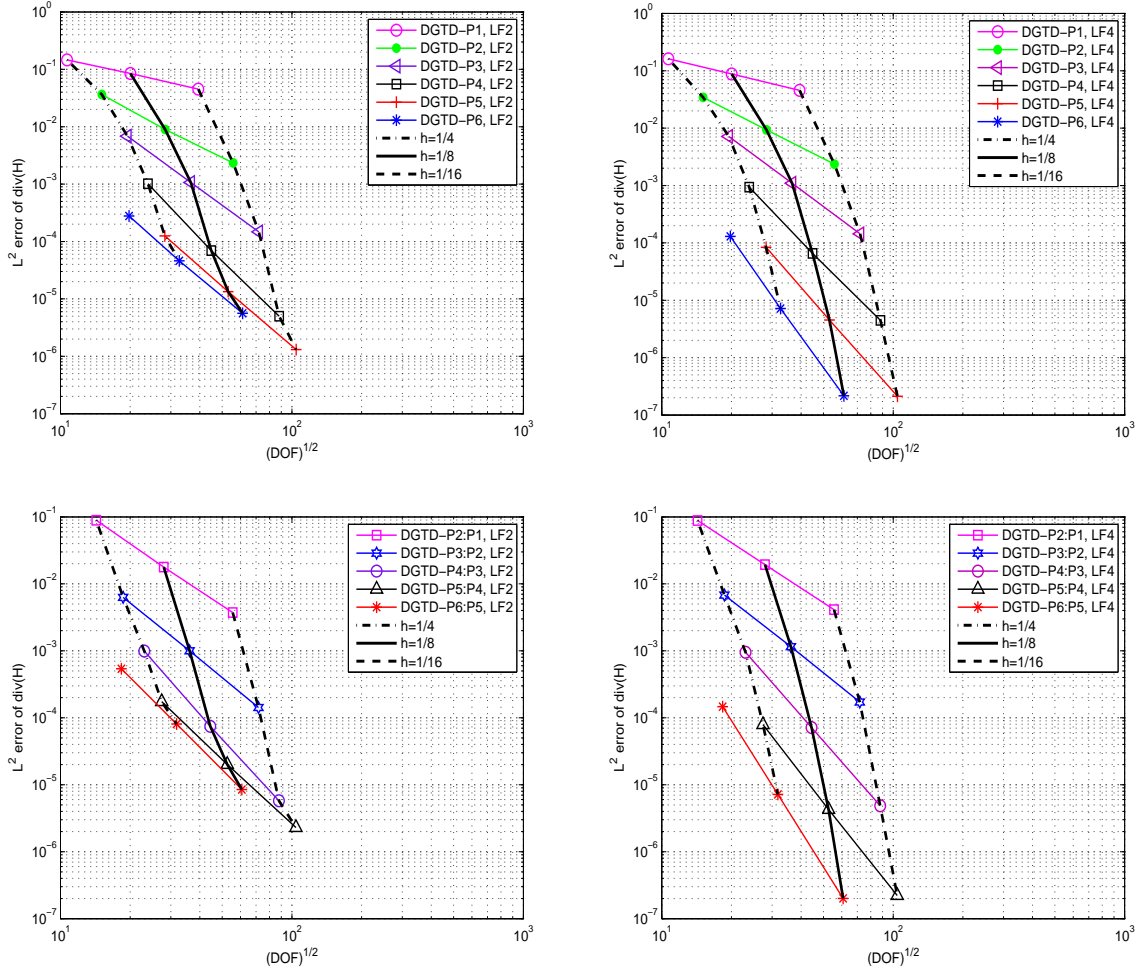


FIG. 4.9 –  $h$ - and  $p$ -convergence of the divergence of  $\vec{\mathbf{H}}$ .  
 $DGTD\text{-}\mathbb{P}_p$  (top) and  $DGTD\text{-}\mathbb{P}_{p_c}:\mathbb{P}_{p_f}$  (bottom) methods.

TAB. 4.7 – Asymptotic convergence orders of the divergence of  $\vec{\mathbf{H}}$ .

DGTD- $\mathbb{P}_p$ method, $p =$	1	2	3	4	5	6
LF <sub>2</sub> scheme	0.89	2.10	2.94	4.07	3.49	3.45
LF <sub>4</sub> scheme	0.97	2.05	3.00	4.09	4.58	5.66
DGTD- $\mathbb{P}_{p_c}:\mathbb{P}_{p_f}$ method, $p_c:p_f =$	2:1	3:2	4:3	5:4	6:5	
LF <sub>2</sub> scheme	2.33	2.81	3.84	3.24	3.46	
LF <sub>4</sub> scheme	2.26	2.73	3.94	4.40	5.50	

## 4.4 Concluding remarks

The main purpose of this chapter has been to study both theoretically and numerically an arbitrarily high-order DGTD method for the discretization of the time-domain Maxwell equations on non-conforming simplicial meshes. The central element which distinguishes the current work from previous attempts to develop such DGTD methods is that a high-order leap-frog time integration scheme is adopted here instead of a high-order Runge-Kutta method. We have proved that the resulting DGTD method conserves a discrete equivalent of the electromagnetic energy and is stable under some CFL-type condition. Also, we have developed a complete, if not optimal, convergence theory. We have confirmed the results of the analysis thorough numerical experiments using an eigenmode problem in two space dimensions, illustrating the flexibility, versatility, and efficiency of the proposed arbitrarily high-order DGTD method.

# Numerical experiments in 3D

## Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>Cubature formulas on a triangle . . . . .</b>	<b>154</b>
5.1.1	Introduction . . . . .	154
5.1.2	The calculation of the non-conforming interface matrix . . . . .	155
<b>5.2</b>	<b>Numerical experiments . . . . .</b>	<b>156</b>
5.2.1	Propagation of a standing wave in a cubic PEC cavity . . . . .	158
5.2.2	Propagation in a heterogeneous human head model . . . . .	163

---

In Chapters 2 and 3, we have studied non-conforming discontinuous Galerkin methods adapted to locally refined meshes. These methods combine a centered approximation for the evaluation of the numerical flux with a second-order leap-frog time scheme. We have shown that the  $hp$ -like DGTD method can reduce significantly the CPU time and the required number of degrees of freedom for a target accuracy in the case where an analytical solution is available for the underlying wave propagation problem. In this chapter, our attention is turned to the validation of the  $hp$ -like DGTD- $\mathbb{P}_{p_c}:\mathbb{P}_{p_f}$  method in three space dimensions, and a preliminary answer is given here on the basis of numerical simulations. For that purpose, we consider an implementation of the DGTD- $\mathbb{P}_{p_c}:\mathbb{P}_{p_f}$  method where the tetrahedral mesh is refined in a conforming way (*i.e.* without hanging nodes) and the non-conformity is attached to the interpolation degree  $p$ . All the other ingredients of the method are those discussed in Chapters 2 and 3, especially the use of a centered approximation for the computation of a numerical flux at the interface between neighboring elements, and of a second-order leap-frog time integration scheme.

This chapter is organized as follows. In Sec. 5.1, we study different cubature formulas to evaluate the surface matrix (4.7) in the 3D case and select one of these possibilities for our implementation of the DGTD- $\mathbb{P}_{p_c}:\mathbb{P}_{p_f}$  method. Then, results of numerical experiments are presented and discussed in Sec. 5.2 for two test problems: a model problem corresponding the propagation of a standing wave within a perfectly conducting cavity, and a more challenging problem involving the propagation in a complex heterogeneous medium of a wave emitted by a localized source.

## 5.1 Cubature formulas on a triangle

### 5.1.1 Introduction

The numerical calculation of areas has a history that precedes the history of the infinitesimal calculus by several millenia. But the discovery of an analytical method in the late eighteenth century led to an increasing activity towards both theoretical and numerical methods for quadrature. The development of numerical methods for cubature (multidimensional integration) came perhaps a century and a half later, following closely the development of computing machines capable of handling these more intensive numerical calculations. Not until the early 70s did textbooks begin to address cubature.

Undoubtedly, in the early days, cubature was treated as an iterative application of one-dimensional quadrature. But it was quickly realized that it was often more cost-effective to treat cubature over standard regions as a single entity. Two factors inhibiting the development of the theory were the large number of standard regions, each demanding special attention, and the cost of experimentation.

The triangle is simply one of these standard regions; the development of dedicated cubature methods is comparatively recent. The earliest reference is to Radon's seven-point rule of polynomial degree [Rad48]. A version of this rule is applicable to any planar region. The theory of integration over a triangle has lagged behind the theory for the square, but it has recently been spurred by two particular applications. One is the application to adaptive cubature, where triangles seem to be replacing squares as the basic module. The other application is to finite element methods. Here integrands with specified singularities may be involved.

The century and a half of development of one-dimensional quadrature has left us with a rich legacy in terms of variety of methods. We have rules involving derivative values, rules with all sorts of weighting functions, equally spaced rules, copy rules, minimum norm rules, equal weight rules, and rules of specified trigonometric degree. There are methods for using the same sets of function values to evaluate sets of integral transforms. We have techniques involving *subtracting out singularities* [Let77]-[JTYO06], and the method of *steepest descent* [PS97] in the complex plane. And we have a wealth of expressions for the discretization error. For an overview of all these, we suggest [DR84]. Compared with all this, the available theory for the triangle is indeed sparse.

We are interested in cubature formula of algebraic degree of the form:

$$\tilde{\mathcal{I}}[f] = \sum_l^N \hat{\omega}_l f(\hat{\mathbf{x}}_l), \quad (5.1)$$

which serves to approximate the integral:

$$\mathcal{I}[f] = \int_{\hat{\tau}} f(\hat{\mathbf{x}}) d\hat{\mathbf{x}}, \quad (5.2)$$

where  $\hat{\tau} = \{\hat{x}, \hat{y} \mid \hat{x}, \hat{y} \geq 0; \hat{x} + \hat{y} \leq 1\}$  is the unit triangle. The real numbers  $\hat{\mathbf{x}}_l$  and  $\hat{\omega}_l$  are respectively the nodes and weights of the cubature formula. The integer  $N$  is the number of nodes and weights necessary to obtain an exact integration for all polynomials of total degree at most  $d$ , *i.e.* the cubature formula (5.1) is said to be exact if:

$$\tilde{\mathcal{I}}[f] = \mathcal{I}[f], \forall f \in \mathbb{P}_d, \quad (5.3)$$

where:

$$\mathbb{P}_d = \text{span}\{\hat{x}^i \hat{y}^j : 0 \leq i + j \leq d, i, j \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}. \quad (5.4)$$

The survey of known cubature formulas of the form (5.1) for (5.2) given in [LC94] is far from complete. A survey of all known cubature formulas up to 1971 for standard regions is given in [Str71]. An update of this overview is presented in [CR93]. The standard triangle is one of the regions treated in these surveys.

### 5.1.2 The calculation of the non-conforming interface matrix

We are here concerned with the approximation of the interface matrix (4.7) over a triangle by using a cubature formula. Let  $\Omega$  be a bounded polyhedral domain of  $\mathbb{R}^3$ , and consider a partition  $\Omega_h$  of  $\Omega$  into a set of tetrahedra. Let  $\kappa$  and  $\kappa'$  be two neighboring tetrahedra of  $\Omega_h$ . We assign to  $\kappa$  and  $\kappa'$  polynomial degrees  $p_\kappa$  and  $p_{\kappa'}$ . We denote by  $S_\tau$  the interface matrix whose coefficients are defined in the following way:

$$(S_\tau)_{ij} = \int_\tau \phi_i(\mathbf{x}) \psi_j(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad \forall i \in \{1, \dots, n_\kappa\}, \quad \forall j \in \{1, \dots, n_{\kappa'}\}. \quad (5.5)$$

where  $\tau = \partial\kappa \cap \partial\kappa'$  refers to a non-conforming face of  $\Omega_h$  and  $n_{\kappa/\kappa'} = (p_{\kappa/\kappa'} + 1)(p_{\kappa/\kappa'} + 2)/2$  is the number of degrees of freedom (#DOF) of the element  $\kappa/\kappa'$  attached to the face  $\tau$ . The functions  $(\phi_i)_{i=1}^{n_\kappa} \in \mathbb{P}_{p_\kappa}$  and  $(\psi_j)_{j=1}^{n_{\kappa'}} \in \mathbb{P}_{p_{\kappa'}}$  are the restriction to the face  $\tau$  of basis functions defined respectively on the elements  $\kappa$  and  $\kappa'$  and not identically equal to zero on  $\tau$ . The matrix  $S_\tau$  can be evaluated using a cubature formula in the following form:

$$S_\tau \simeq \tilde{S}_\tau = \mathcal{Q}_\kappa \mathcal{B}^t \mathcal{Q}_{\kappa'}, \quad (5.6)$$

where the matrices  $\mathcal{Q}_\kappa$  and  $\mathcal{Q}_{\kappa'}$  are respectively of size  $n_\kappa \times N$  and  $n_{\kappa'} \times N$ , while the matrix  $\mathcal{B}$  is diagonal of size  $N \times N$ . The integer  $N$  is the number of nodes and weights necessary to obtain an exact integration of polynomials of degree equal to  $d_{\kappa\kappa'} = p_\kappa + p_{\kappa'}$  i.e.  $S_\tau = \tilde{S}_\tau$ ,  $\forall \phi_i \psi_j \in \mathbb{P}_{p_\kappa} \times \mathbb{P}_{p_{\kappa'}} = \mathbb{P}_{d_{\kappa\kappa'}}$ . The coefficients of these matrices are defined by:

$$\begin{cases} (\mathcal{Q}_\kappa)_{il} &= \phi_i(\mathbf{x}_l), \quad 1 \leq i \leq n_\kappa, \quad 1 \leq l \leq N, \\ (\mathcal{Q}_{\kappa'})_{jl} &= \psi_j(\mathbf{x}_l), \quad 1 \leq j \leq n_{\kappa'}, \quad 1 \leq l \leq N, \\ (\mathcal{B})_{ll} &= \omega_l \quad \text{and} \quad (\mathcal{B})_{sl} = 0, \quad \forall s \neq l, \quad 1 \leq l \leq N, \end{cases}$$

where  $\mathbf{x}_l$  and  $\omega_l$  are respectively the nodes and weights of the cubature formula defined on  $\tau$ , and obtained from  $\hat{\mathbf{x}}_l$  and  $\hat{\omega}_l$  by the affine mapping (2.2) between  $\tau$  and  $\hat{\tau}$ .

Assuming that the matrix  $S_\tau$  (5.5) is evaluated in a direct way and its approximation  $\tilde{S}_\tau$  is evaluated according to (5.6), the relative error between  $S_\tau$  and  $\tilde{S}_\tau$  is defined as

$$\frac{\|S_\tau - \tilde{S}_\tau\|_2}{\|S_\tau\|_2}, \quad (5.7)$$

where  $\|\cdot\|_2$  is the 2-norm of a matrix.

We have evaluated the interface matrix (5.5) for 400000 interfaces using several cubature formulas. In Tab. 5.1 we give the following informations: in addition to the total interpolation degree  $d_{ik}$  and the corresponding number of points, we give an indication of the quality of the approximation and the



reference for the cubature formula (see Annexe A.5). We also give, the relative error (5.7) and the CPU time. The accuracy of the cubature does not only depend on the number of points and weights  $N$ , but also on their qualities. In our study, we have adopted the cubature formula of Dunavant [Dun85]. Fig. 5.1 shows the relative error as a function of the square root of the number of faces. The CPU time of the Dunavant formula increases very slowly relatively to the number of faces. Note that, in general, the percentage of non-conforming interfaces do not exceed 50% of the global number of interfaces in the mesh.

We briefly recall below the notion of quality of a cubature formula. The first symbol gives information about the weights:

- P**: all the weights are positive,
- E**: all the weights are equal (and thus positive),
- N**: some weights are negative.

The second symbol gives information about the location of the points:

- I**: all points are inside the unit triangle,
- B**: some points lie on the boundary of triangle, the others inside the triangle,
- O**: some points are outside the unit triangle.

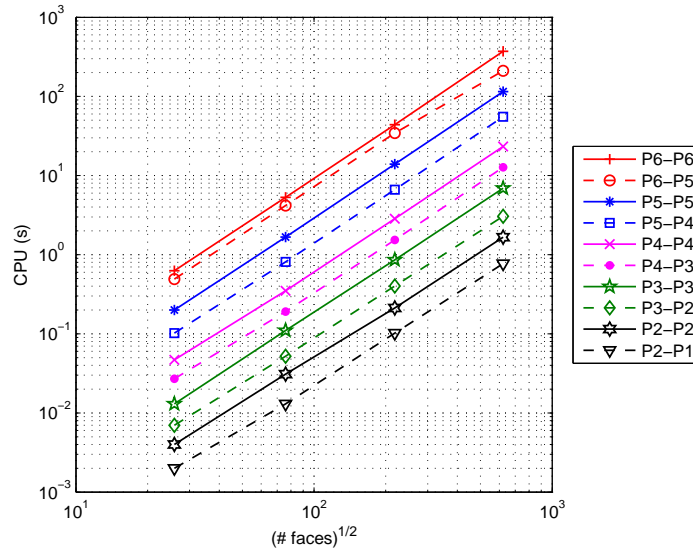


FIG. 5.1 – The calculation of the interface matrix using the Dunavant formula. CPU time as a function of the square root of # faces.

## 5.2 Numerical experiments

In the following, we denote by  $V_\kappa$  the volume of a tetrahedron  $\kappa \in \Omega_h$ . The DGTD- $\mathbb{P}_{p_c}:\mathbb{P}_{p_f}$  method involves high polynomial degrees  $p_c$  in all tetrahedron  $\kappa$  such that  $V_\kappa \geq \text{TOL}$  and low polynomial degrees  $p_f$  otherwise, where  $\text{TOL}$  is a given tolerance. The CFL values of the DGTD- $\mathbb{P}_p$  method are given in Tab. 5.2. The DGTD- $\mathbb{P}_{p_c}:\mathbb{P}_{p_f}$  method has the same stability limit as the DGTD- $\mathbb{P}_{p_f}$  method.

TAB. 5.1 – *The evaluation of the interface matrix using several cubature formulas. CPU time (seconds) and relative error for 400000 interfaces.*

$\mathbb{P}_{p_k}-\mathbb{P}_{p_{k'}}$	$d_{ik}$	$N$	Reference	Quality	CPU(s)	Relative error
$\mathbb{P}_1-\mathbb{P}_0$	1	1	[Str71]	PI	0.19	4.21E-08
		3	[Str71]	PB	0.32	2.00E-15
$\mathbb{P}_1-\mathbb{P}_1$	2	3	[Str71]-[Dun85]	EI	0.45	2.66E-15
		3	[Str71]-[SF73]	EB	0.45	2.00E-15
		4	[GM78]	NI	0.70	7.39E-17
$\mathbb{P}_2-\mathbb{P}_1$	3	4	[Str71]-[GM78]-[Dun85]	NI	0.77	4.56E-15
		6	[Str71]-[SF73]	EI	0.96	7.81E-16
		6	[Str71]	PB	0.96	2.46E-16
		6	[Str71]	NB	0.96	9.67E-17
		10	[TWV00]	PB	1.47	5.13E-10
$\mathbb{P}_2-\mathbb{P}_2$	4	6	[Dun85]	PI	1.66	2.59E-15
		6	[Sch83]-[TWB07]	PI	1.66	8.81E-08
		7	[SF73]	PI	1.88	2.39E-11
		9	[LJ75]	PB	2.23	2.02E-16
$\mathbb{P}_3-\mathbb{P}_2$	5	7	[Str71]-[Dun85]-[WX03]	PI	3.1	3.88E-15
		9	[SF73]	PI	3.7	2.27E-16
		10	[GM78]	NI	4.3	3.19E-16
		10	[LJ75]	PB	4.3	1.18E-16
$\mathbb{P}_3-\mathbb{P}_3$	6	10	[Ras83]	PO	6.92	7.58E-08
		10	[GS99]	PO	6.92	6.94E-08
		12	[Dun85]	PI	7.70	1.75E-15
		12	[Bec87]	PI	7.70	2.30E-16
		13	[LJ75]	PB	8.05	2.35E-16
		28	[TWV00]	PB	17.1	2.58E-08
$\mathbb{P}_4-\mathbb{P}_3$	7	12	[Gat88]	PI	12.7	1.18E-07
		13	[Dun85]	NI	13.2	1.13E-08
		15	[LG78]	PI	14.5	9.16E-08
		16	[LJ75]	PB	15.1	1.13E-08
		20	[GM78]	NI	20.5	1.13E-08
$\mathbb{P}_4-\mathbb{P}_4$	8	15	[CH87]	PO	23.3	1.17E-07
		16	[Dun85]	PI	24.5	2.22E-08
		19	[Lau82]	PI	28.1	2.22E-08
		21	[LJ75]	NI	33.9	2.22E-08
$\mathbb{P}_5-\mathbb{P}_4$	9	19	[Dun85]	PI	55.3	1.46E-07
		21	[LG78]	PB	66.6	2.76E-07
		22	[LJ75]	PB	69.7	1.46E-07
		35	[GM78]	NI	102	1.46E-07
$\mathbb{P}_5-\mathbb{P}_5$	10	22	[CH87]	PO	115	2.42E-07
		25	[Dun85]	PI	129	1.56E-07
		25	[WX03]	PI	129	1.56E-07
$\mathbb{P}_6-\mathbb{P}_5$	11	27	[Dun85]	PO	211	1.35E-08
		28	[DR84]	PB	220	2.67E-08
		49	[Str71]	PI	349	1.35E-08
$\mathbb{P}_6-\mathbb{P}_6$	12	33	[Dun85]	PI	372	3.79E-08
		36	[BE90]	NO	399	2.72E-07
		37	[BE92]	PI	418	1.33E-07
		49	[Str71]	PI	520	3.79E-08
		54	[WX03]	PI	566	3.79E-08
		91	[TWV00]	PB	880	4.56E-08

TAB. 5.2 – CFL values of the DGTD- $\mathbb{P}_p$  method.

method	DGTD- $\mathbb{P}_0$	DGTD- $\mathbb{P}_1$	DGTD- $\mathbb{P}_2$	DGTD- $\mathbb{P}_3$	DGTD- $\mathbb{P}_4$
CFL	1.0	0.33	0.167	0.1	0.08

### 5.2.1 Propagation of a standing wave in a cubic PEC cavity

We compute the  $(1, 1, 1)$  mode which is a standing wave of frequency  $f = 256$  MHz and wavelength  $\lambda = 1.15$  m in a unitary PEC cubic cavity with  $\epsilon = \mu = 1$  in normalized units. The exact time-domain solution is:

$$\left\{ \begin{array}{l} H_x = -\frac{\pi}{\omega} \sin(\pi x) \cos(\pi y) \cos(\pi z) \sin(\omega t), \\ H_y = \frac{2\pi}{\omega} \cos(\pi x) \sin(\pi y) \cos(\pi z) \sin(\omega t), \\ H_z = -\frac{\pi}{\omega} \cos(\pi x) \cos(\pi y) \sin(\pi z) \sin(\omega t), \\ E_x = -\cos(\pi x) \sin(\pi y) \sin(\pi z) \cos(\omega t), \\ E_y = 0, \\ E_z = \sin(\pi x) \sin(\pi y) \cos(\pi z) \cos(\omega t), \end{array} \right. \quad (5.8)$$

where  $\omega = 2\pi f$  is the angular frequency. We initialize the electromagnetic field by the analytical solution at  $t = 0$ :  $H_x = H_y = H_z = E_y = 0$ ,  $E_x = -\cos(\pi x) \sin(\pi y) \sin(\pi z)$  and  $E_z = \sin(\pi x) \sin(\pi y) \cos(\pi z)$ . Numerical simulations make use of a non-uniform tetrahedral mesh which consists of 962 vertices, 4406 tetrahedra and 9235 faces (internal and boundary). The ratio between the maximal and the minimal volumes of the tetrahedra is  $\simeq 10^5$ . For  $\text{TOL} = 0.00018$ , the mesh contains 1905 non-conforming interfaces and  $p_f$  is used in 1434 tetrahedra. We plot on Fig. 5.2 the time evolution of  $E_z$  at a given point of the domain (the last 3 periods of 30 are shown). The numerical solutions produced by the DGTD- $\mathbb{P}_2:\mathbb{P}_{p_f}$ , ( $p_f = 0, 1$ ) and DGTD- $\mathbb{P}_2$  schemes compare very well with the exact one, while the DGTD- $\mathbb{P}_1$  scheme exhibit a dispersion error. Contours lines of  $E_z$  in the plane  $y = 0.5$  for certain DGTD- $\mathbb{P}_p$  and DGTD- $\mathbb{P}_{p_c}:\mathbb{P}_{p_f}$  methods are shown on Fig. 5.4. Fig. 5.3 shows the time evolution of the  $L^2$  error of the DGTD- $\mathbb{P}_p$  and DGTD- $\mathbb{P}_{p_c}:\mathbb{P}_{p_f}$  methods, while Tab. 5.3 summarizes the values of the final  $L^2$  error, # DOF and CPU time to reach time  $t = 35$ . For a given target accuracy, the DGTD- $\mathbb{P}_{p_c}:\mathbb{P}_{p_f}$  method requires less CPU time and #DOF than the DGTD- $\mathbb{P}_p$  method. Fig. 5.5 illustrates the numerical convergence and CPU time as a function of the  $L^2$  error of the DGTD- $\mathbb{P}_p$  and DGTD- $\mathbb{P}_{p_c}:\mathbb{P}_{p_f}$  methods. Corresponding asymptotic convergence orders are summarized in Tab. 5.4. The convergence order is bounded by 2. It is clear from Fig. 5.5 that the gains in CPU time and #DOF increase with the accuracy in space.

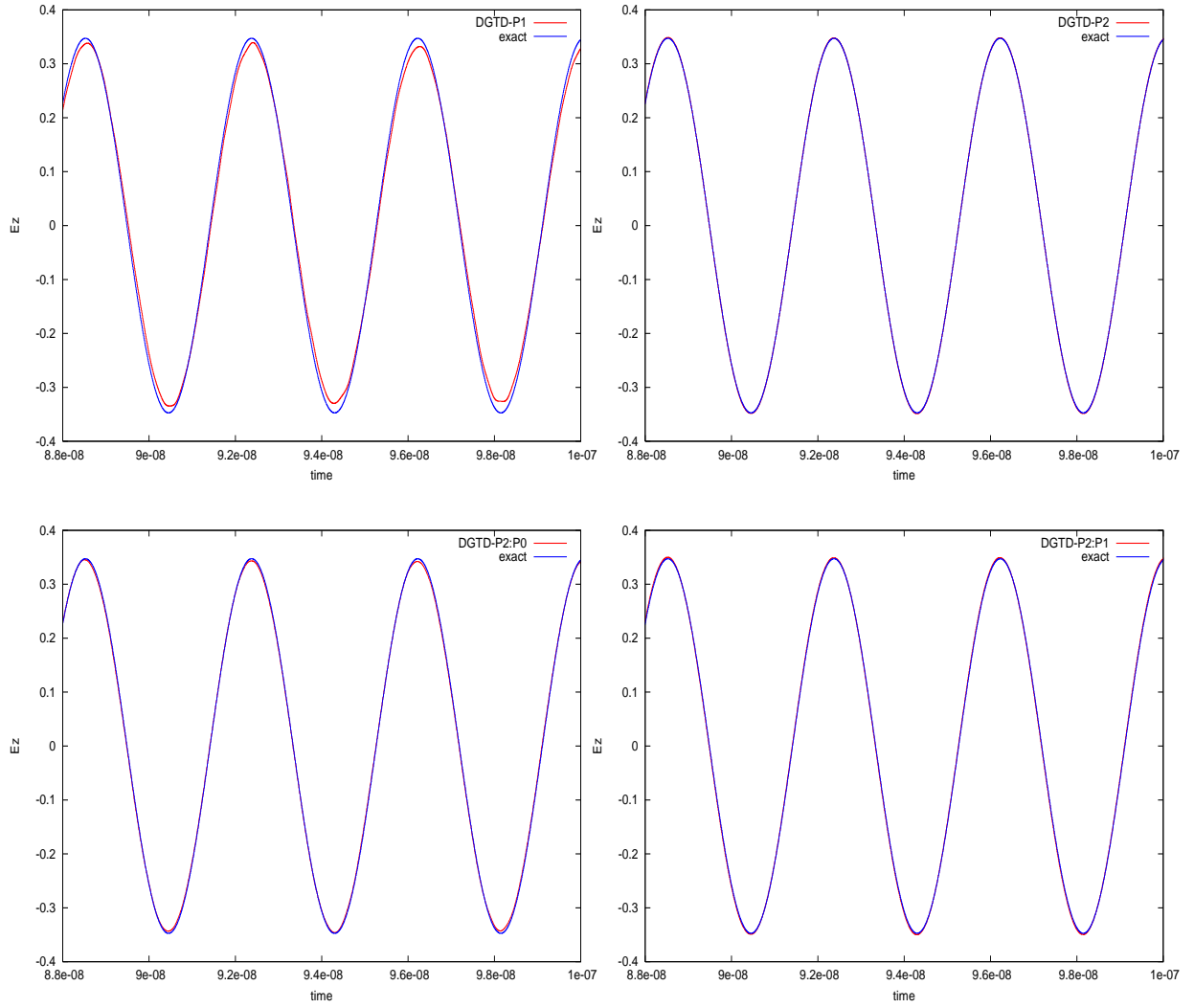


FIG. 5.2 – Propagation of a standing wave in a cubic PEC cavity.  
Time evolution of  $E_z$  at point  $(0, 3, 0.3, 0.3)$ : zoom on the last 3 periods.

TAB. 5.3 – Propagation of a standing wave in a cubic PEC cavity.  
# DOF,  $L^2$  error and CPU time in minutes to reach time  $t = 35$ .

DGTD- $\mathbb{P}_p$	DGTD- $\mathbb{P}_0$	DGTD- $\mathbb{P}_1$	DGTD- $\mathbb{P}_2$	DGTD- $\mathbb{P}_3$
$L^2$ error	7.2E-01	2.0E-01	1.4E-02	8.0E-04
CPU	4	40	213	859
# DOF	4406	17624	44060	88120
DGTD- $\mathbb{P}_{p_c}:\mathbb{P}_{p_f}$	DGTD- $\mathbb{P}_2:\mathbb{P}_0$	DGTD- $\mathbb{P}_2:\mathbb{P}_1$	DGTD- $\mathbb{P}_3:\mathbb{P}_1$	DGTD- $\mathbb{P}_3:\mathbb{P}_2$
$L^2$ error	3.6E-02	1.3E-02	1.0E-03	8.8E-04
CPU	35	106	260	499
# DOF	31154	35456	65176	73780

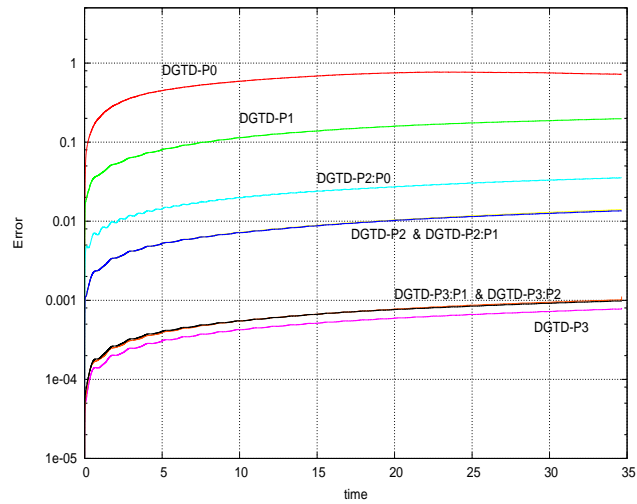


FIG. 5.3 – Propagation of a standing wave in a cubic PEC cavity.  
Time evolution of the  $L^2$  error.

TAB. 5.4 – Propagation of a standing wave in a cubic PEC cavity.  
Asymptotic convergence orders of the  $DGTD-\mathbb{P}_p$  and  $DGTD-\mathbb{P}_{p_c}:\mathbb{P}_{p_f}$  methods.

DGTD- $\mathbb{P}_p$	DGTD- $\mathbb{P}_0$	DGTD- $\mathbb{P}_1$	DGTD- $\mathbb{P}_2$	DGTD- $\mathbb{P}_3$	DGTD- $\mathbb{P}_4$
Conv. order	1.16	1.25	2.20	2.07	2.06
DGTD- $\mathbb{P}_{p_c}:\mathbb{P}_{p_f}$	DGTD- $\mathbb{P}_1:\mathbb{P}_0$	DGTD- $\mathbb{P}_2:\mathbb{P}_0$	DGTD- $\mathbb{P}_2:\mathbb{P}_1$	DGTD- $\mathbb{P}_3:\mathbb{P}_2$	DGTD- $\mathbb{P}_4:\mathbb{P}_3$
Conv. order	1.37	2.01	2.01	1.99	1.99

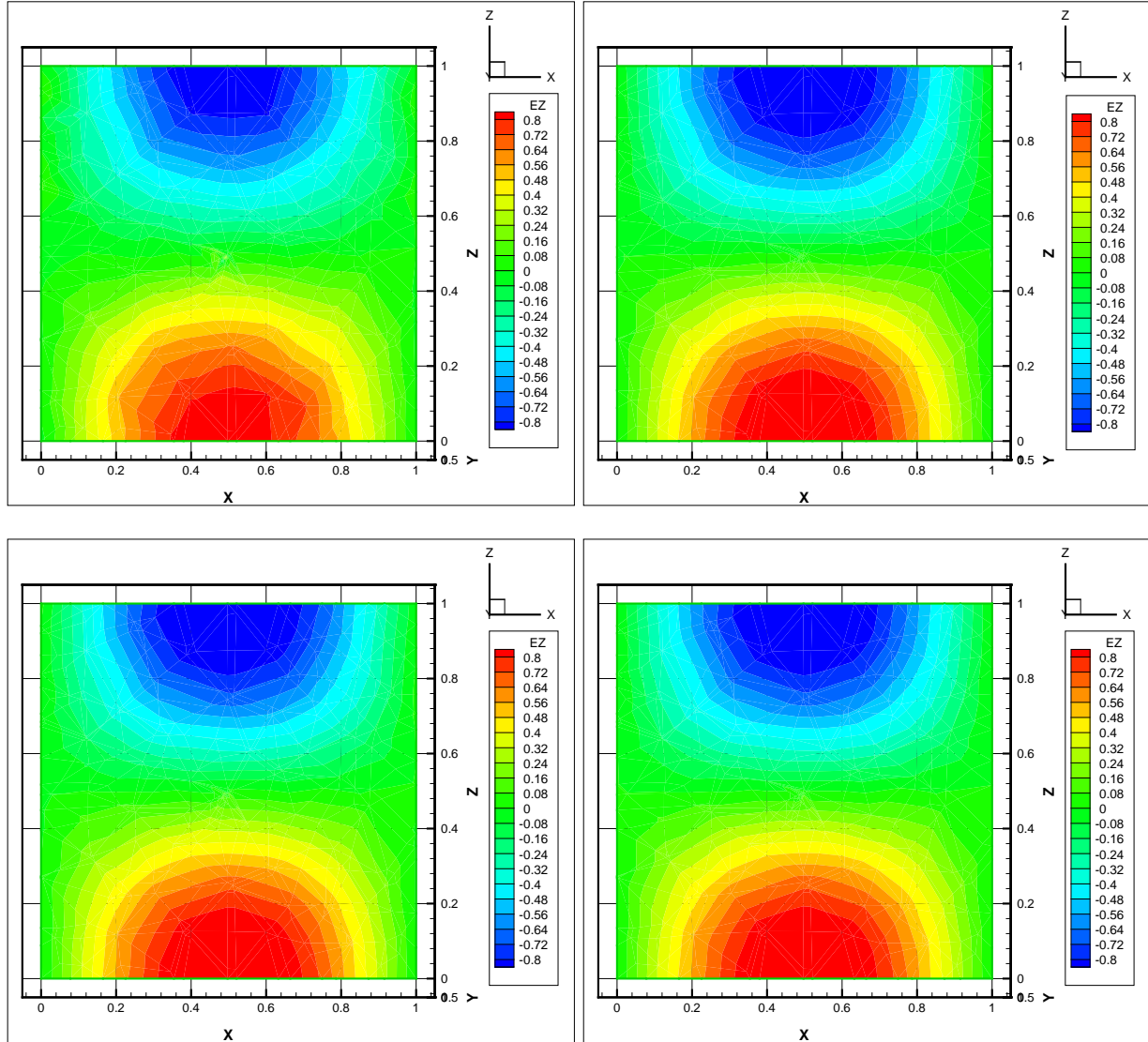


FIG. 5.4 – Propagation of a standing wave in a cubic PEC cavity.  
 Contour lines of  $E_z$  in the plane  $y = 0.5$ .  
 DGTD- $\mathbb{P}_1$  (top-left) and DGTD- $\mathbb{P}_2$  (top-right) methods.  
 DGTD- $\mathbb{P}_2:\mathbb{P}_0$  (bottom-left) and DGTD- $\mathbb{P}_2:\mathbb{P}_1$  (bottom-right) methods.

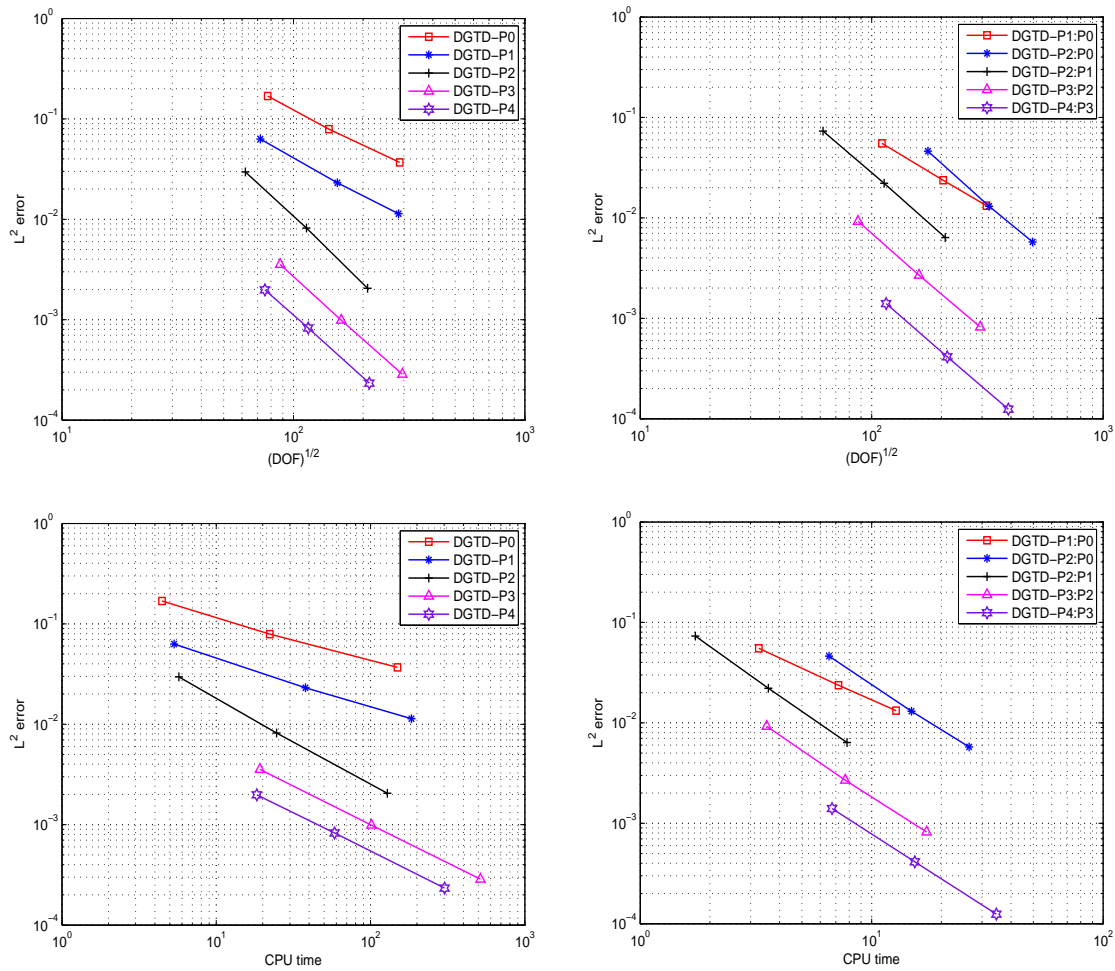


FIG. 5.5 – Propagation of a standing wave in a cubic PEC cavity. Numerical convergence and CPU time in function of the  $L^2$  error.  $DGTD-P_p$  (left) and  $DGTD-P_{pc}:P_{pf}$  methods (right).

### 5.2.2 Propagation in a heterogeneous human head model

We consider now the application of the proposed numerical methodology to the simulation of a more challenging problem involving an irregularly shaped and heterogeneous medium. The problem under consideration is concerned with the propagation of a wave emitted by a localized source, in a realistic geometrical model of head tissues. It is a first step towards the development of a computational framework for the numerical dosimetry of electromagnetic fields radiated by mobile phones. Starting from medical images of the Visible Human 2.0 project [RHGJ03], head tissues are segmented and the interfaces of a selected number of tissues (namely, the skin, the skull and the brain) are triangulated. Different strategies can be used in order to obtain a smooth and accurate segmentation of head tissues and interface triangulations as well. A first strategy consists in using a marching cube algorithm [LC87] which leads to huge triangulations of interfaces between segmented subdomains. These triangulations can then be regularized, refined and decimated in order to obtain reasonable surface meshes, for example using the YAMS [Fre03] re-meshing tool. Another strategy consists in using a variant of Chew's algorithm [Che93], based on Delaunay triangulation restricted to the interface, which allows to control the size and aspect ratio of interfacial triangles [BO05]. An example of such a triangulated surface for the skin is shown on Fig. 5.6. Then, these triangulated surfaces together with a triangulation of the artificial boundary (absorbing boundary) of the overall computational domain, which is taken here to be a sphere, are used as inputs for the generation of volume meshes between the surfaces, using a tetrahedral mesh generator [GHS91]. Finally, the computational domain is artificially bounded by a sphere where a Silver-Müller is applied, and the volume between the skin and the sphere is also meshed. Overall, the tetrahedral mesh used in the simulations consists of 60590 vertices, 361848 tetrahedra and 728016 faces (internal and boundary).

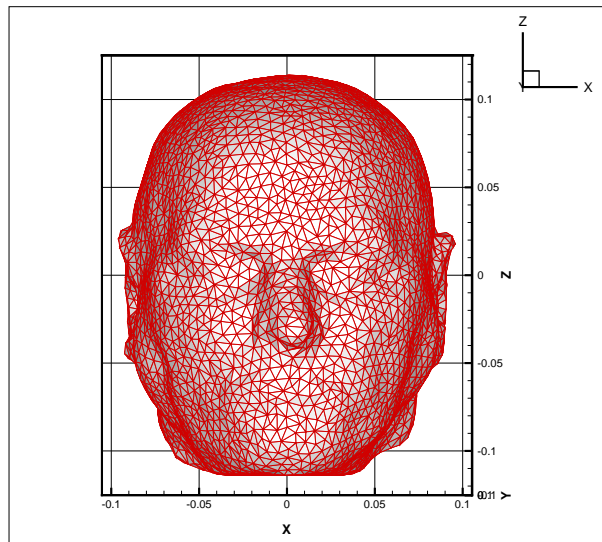


FIG. 5.6 – *Propagation in a heterogeneous human head model.*  
*Surface mesh of the skin.*

The simulation that we consider here involves the propagation of a wave emitted by a dipole type source. This source is localized near the right ear of the head. From the point of view of numerical modeling, a current source term is imposed to the equation for the  $E_z$  component:



$$J_z(\mathbf{x}, t) = z_0 \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_d) f(t),$$

where  $\mathbf{x}_d$  is the position of the source. The tetrahedron whose center of gravity is the nearest to  $\mathbf{x}_d$  is selected and the equations for the associated degrees of freedom are modified to take into account the discretization of  $J_z(\mathbf{x}, t)$ . In the present case, the temporal source  $f(t)$  is a sinusoidal function and the frequency is set to  $f = 1800$  MHz. The simulation is carried out for 5 periods of the source signal and a discrete Fourier transform (DFT) of the electromagnetic field is performed during the last period. The electromagnetic characteristics of the tissues are listed in Tab. 5.5. The simulation results are visualized on Fig. 5.7 in terms of the DFT of  $E_z$  on the skin and in a selected plane. Finally, CPU times for the simulations based on the DGTD- $\mathbb{P}_p$  and DGTD- $\mathbb{P}_{p_c}:\mathbb{P}_{p_f}$  methods are summarized in Tab. 5.6.

TAB. 5.5 – *Propagation in a heterogeneous human head model.*  
*Electromagnetic characteristics of the selected head tissues.*

Tissue	$\epsilon_r$	$\sigma$	$\rho$
Brain	43.55	1.15	1050.0
CSF	67.20	2.92	1000.0
Skull	15.56	0.43	1200.0
Skin (wet)	43.85	1.23	1100.0

TAB. 5.6 – *Propagation in a heterogeneous human head model.*  
*CPU time in hours.*

Method	DGTD- $\mathbb{P}_1$	DGTD- $\mathbb{P}_2$	DGTD- $\mathbb{P}_3$	DGTD- $\mathbb{P}_2:\mathbb{P}_1$
CPU time	6 h	30 h	87 h	12 h

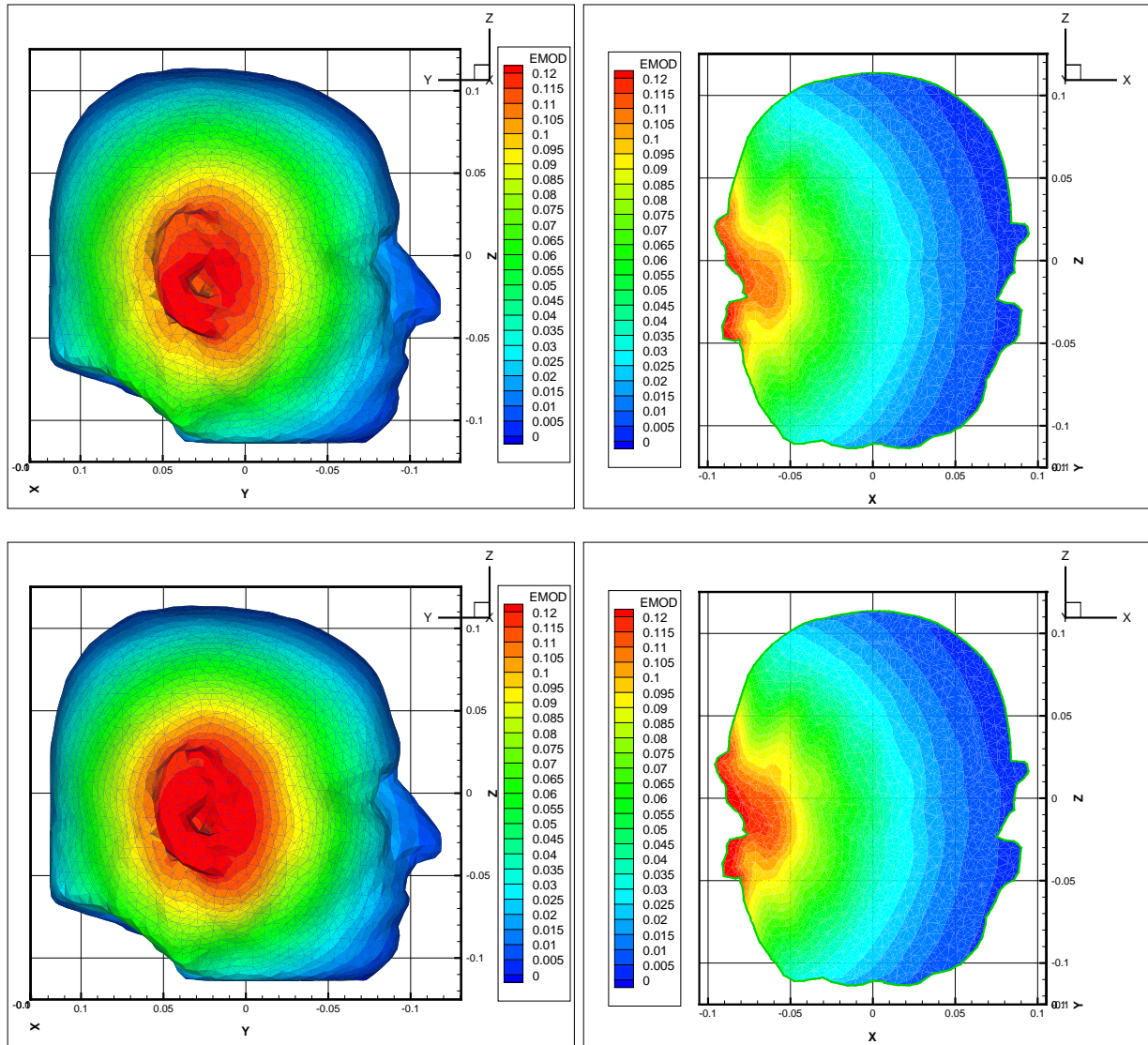


FIG. 5.7 – Propagation in a heterogeneous human head model.  
Contour lines of the DFT of  $E_z$  for the DGTD- $\mathbb{P}_1$  (top) and DGTD- $\mathbb{P}_2$  (bottom) methods.



# Conclusion et perspectives

Rappelons que l'objectif principal de cette thèse était de proposer une méthode Galerkin discontinue (GD) d'ordre élevé pour la résolution numérique des équations de Maxwell stationnaires sur des maillages simplexes localement raffinés non-conformes. Le point de départ de cette étude consistait en une méthode GDDT- $\mathbb{P}_p$  arbitrairement d'ordre élevé en espace et du second ordre en temps, mais qui n'avait été jusqu'ici étudiée et validée que pour des calculs en maillages simplexes conformes et pour des configurations de calcul où le degré d'interpolation  $p \leq 1$  est uniforme en espace.

Dans un premier temps, nous avons étudié une méthode GDDT- $\mathbb{P}_{p_i}$  reposant sur une approximation centrée pour évaluer les flux numériques aux interfaces entre cellules (triangles en 2D et tétraèdres en 3D) voisines et un schéma saute-mouton du second ordre pour l'intégration temporelle, et autorisant l'utilisation de maillages non-conformes (donc, présentant des nœuds flottants). Une étude analytique par une approche énergétique nous a permis de démontrer la stabilité de cette méthode sous une condition de type CFL. En particulier, nous avons analysé en détail le lien entre la stabilité et la non-conformité géométrique. Une première mise en œuvre de la méthode a alors été réalisée en adoptant un traitement simplifié pour le calcul des intégrales de surface dans le cas d'un maillage non-conforme et d'un degré d'interpolation uniforme en espace. Les résultats numériques ont montré que cette simplification peut conduire à une méthode numérique très dispersive. Pour remédier à ce problème, nous avons étudié deux approches alternatives pour le calcul des intégrales de surface associées aux interfaces non-conformes: une approche *par projection* et une approche *par quadrature*. Nous avons démontré que l'approche par quadrature de type Gauss-Legendre est la moins coûteuse en termes d'opérations arithmétiques. Une seconde implémentation a été réalisée en utilisant l'approche par quadrature et qui autorise l'utilisation de maillages non-conformes avec un nombre arbitraire de nœuds flottants. Dans ce cas, de très bons résultats sont obtenus pour des simulations numériques en temps long et avec un taux de raffinement élevé. Nous avons aussi montré en nous basant sur des expériences numériques que l'utilisation de maillages non-conformes généraux n'influe pas sur la qualité de la solution.

Bien que la méthode GDDT- $\mathbb{P}_{p_i}$  soit capable de traiter des maillages non-conformes avec un taux de raffinement élevé en assurant la stabilité, l'erreur de dispersion des schémas GDDT- $\mathbb{P}_0$  et GDDT- $\mathbb{P}_1$  reste trop importante dans ces situations. Afin de diminuer cette erreur de dispersion avec un surcoût raisonnable, nous avons proposé une méthode de type *hp* nommée GDDT- $\mathbb{P}_{p_c}:\mathbb{P}_{p_f}$ , qui combine *h*-raffinement et *p*-enrichissement locaux tout en préservant la stabilité. Cette méthode utilise un ordre d'interpolation élevé  $p_c$  dans la partie du maillage non-raffinée et un ordre d'interpolation  $p_f < p_c$  dans la zone raffinée. Des expériences numériques ont montré que cette méthode permet de réduire notablement l'erreur de dispersion numérique exhibée par la méthode GDDT- $\mathbb{P}_{p_i}$  pour  $p_i = 0, 1$  uniforme en espace.

Nous avons ensuite réalisé une étude numérique détaillée des méthodes GDDT- $\mathbb{P}_{p_i}$  (avec  $p_i$  uniforme en espace) et GDDT- $\mathbb{P}_{p_c}:\mathbb{P}_{p_f}$ , sur la base d'une série de problèmes de propagation d'ondes bidimensionnels en milieux homogène et hétérogène. L'existence de solutions analytiques pour chacun de ces problèmes nous a permis de conduire une étude de convergence numérique rigoureuse des méthodes Galerkin discontinues en question. L'ordre de convergence est borné par 2 dans le cas de milieux homogènes et par 1 dans le cas de milieux hétérogènes. De plus, l'ordre de convergence des méthodes proposées est indépendant du saut du paramètre  $\epsilon$  sur une interface diélectrique, il dépend seulement de la régularité de la solution. Une comparaison des méthodes Galerkin discontinues conformes et non-conformes a montré que pour une précision donnée, la méthode GDDT- $\mathbb{P}_{p_c}:\mathbb{P}_{p_f}$  permet de réduire considérablement les coûts en temps de calcul et consommation mémoire.

Afin d'améliorer la précision et la vitesse de convergence des méthodes GDDT précédentes, nous nous sommes alors attachés à augmenter l'ordre de l'intégration temporelle par la prise en compte d'une famille de schémas saute-mouton d'ordre arbitrairement élevé. Ces schémas temporels nous assurent sur tout maillage la conservation d'un équivalent discret de l'énergie électromagnétique ainsi que la stabilité des méthodes GDDT résultantes sous une condition de type CFL. On a notamment observé que le schéma saute-mouton du quatrième ordre offre le meilleur compromis entre domaine de stabilité et coût de calcul parmi tous les schémas de la famille considérée. Nous avons aussi réalisé une étude de convergence *hp a priori* ainsi qu'une étude de convergence de l'erreur sur la divergence. Des expériences numériques ont montré que pour un maillage donné, le schéma saute-mouton du quatrième ordre est moins coûteux en temps de calcul et plus précis que le schéma saute-mouton du second ordre, en dépit d'une complexité arithmétique accrue. Une convergence exponentielle est obtenue avec le schéma saute-mouton du quatrième ordre.

Enfin, nous avons réalisé une implémentation préliminaire d'une méthode GDDT non-conforme en maillages tétraédriques pour la résolution numérique des équations de Maxwell instationnaires tridimensionnelles. Dans ce cas, le maillage reste conforme et la non-conformité de la méthode GDDT vient de la définition locale du degré d'interpolation. Outre la réalisation d'expériences numériques portant sur un cas test modèle et visant à valider la méthode GDDT- $\mathbb{P}_{p_i}$  développée, nous avons aussi appliqué cette dernière à un problème de propagation non trivial, en milieu hétérogène.

Ce travail constitue une première étape vers le développement d'une méthode Galerkin discontinue *hp*-adaptative en maillages simplexes pour la résolution numérique des équations de Maxwell en domaine temporel. Dans ce contexte, les perspectives de ce travail sont nombreuses:

- l'introduction d'un estimateur d'erreur *a posteriori* permettrait de détecter les cellules à adapter au niveau  $h$  et/ou au niveau  $p$ . La  $h$ -adaptation consiste à raffiner ou déraffiner localement le maillage tandis que la  $p$ -adaptation consiste à enrichir ou réduire localement le degré d'interpolation. La  $hp$ -adaptation est une combinaison de ces deux mécanismes. Le développement d'un estimateur *robuste* (en termes de précision et de coût de calcul) et *optimal* (selon un critère qui assure le bon comportement de l'estimateur) est une étape cruciale et difficile pour les raisons suivantes:
  - ✗ Très peu de travaux ont été menés jusqu'ici sur la construction d'un estimateur *a posteriori* pour la résolution numérique des équations de Maxwell en domaine temporel.
  - ✗ L'application de la  $h$ -adaptation à chaque itération en temps risque fort d'être une opération complexe à mettre œuvre et coûteuse en temps de calcul. Il est donc crucial de disposer d'un estimateur d'erreur *a posteriori* fiable (*i.e.* optimal) qui permette de juger au mieux de l'instant et de la fréquence d'application de la  $h$ -adaptation.

- ✗ Similairement, la mise en œuvre de l'estimateur d'erreur peut conduire à une procédure coûteuse en temps de calcul. Un bon compromis doit être trouvé entre robustesse et optimalité de l'estimateur d'erreur en question.
- ✗ Sur le plan de la programmation, la  $hp$ -adaptation exige une gestion efficace et dynamique de la mémoire pour traiter de la variation du nombre de degrés de liberté. De plus, la complexité globale d'une telle méthodologie numérique ne permet pas d'envisager une mise en œuvre par des techniques de programmation classiques (*i.e.* procédurales).

En résumé, le développement et l'implémentation d'un tel estimateur est un travail à long terme qui nécessite d'aborder différentes problématiques depuis l'analyse numérique des méthodes jusqu'à la programmation sur calculateurs haute performance par des techniques modernes (programmation orientée objets).

- Le raffinement du maillage et l'augmentation du degré d'interpolation peut réduire prohibitivement le pas de temps. Dans ce cas, l'introduction d'un pas de temps local permettrait de minimiser le nombre d'itérations temporelles dans les éléments non-raffinés (voir [Pip06] pour un travail récent sur ce sujet).
- Pour une méthode  $p$ -adaptative, il semble préférable d'utiliser des fonctions de base hiérarchiques orthogonales [AdF26]-[Dub91]-[FGS03]-[Koo75]-[Owe98]-[Pro57]-[Xu01]. De telles fonctions de base exigent en général moins de degrés de liberté que les fonctions de base de Lagrange et peuvent augmenter la précision de la méthode numérique. Il est aussi important de savoir comment choisir des fonctions de base dont les zéros peuvent servir à mettre au point des formules de quadrature adaptatives. Ces formules de quadrature sont essentielles dans le contexte d'une méthode de discrétisation  $hp$ -adaptative.

Concernant les perspectives à court terme, les points suivants méritent d'être étudiés:

- pour améliorer l'ordre de convergence dans le cas de milieux hétérogènes, on pourrait chercher à exploiter des techniques de régularisation [TE03]. Ces techniques ont été utilisées pour les méthodes DFDT [And01]-[Kas04] et on peut s'attendre à atteindre l'ordre deux pour les méthodes GDDT proposées dans cette étude.
- Toujours pour les calculs en milieux hétérogènes, on pourrait essayer de construire un schéma centré dans les cellules loin d'une interface diélectrique et un schéma décentré au voisinage de cette interface.
- L'introduction des conditions absorbantes d'ordre deux ou plus permettrait d'améliorer la précision et l'ordre de convergence de la méthode GDDT- $\mathbb{P}_{p_i}$ .
- Enfin, il serait intéressant de combiner la méthode GDDT- $\mathbb{P}_{p_c}:\mathbb{P}_{p_f}$  proposée ici au schéma d'intégration en temps hybride explicite/implicite initialement proposé dans [Pip06]. On pourrait notamment adopter un schéma d'intégration en temps implicite aux éléments de la zone raffinée du maillage où est appliquée le degré d'interpolation  $p_f$ .



# Annexes

## Sommaire

---

A.1	Inégalité généralisée . . . . .	171
A.2	Problème d'optimisation . . . . .	172
A.3	Formulation du schéma GDDT- $\mathbb{P}_{p_i}$ . . . . .	173
A.4	Etude de quelques exemples . . . . .	174
A.5	Références pour les formules de cubatures . . . . .	175

---

## A.1 Inégalité généralisée

- [1]. On dit qu'un ensemble  $C$  est un cône, si pour tout  $x \in C$  et  $\theta \geq 0$  on a  $\theta x \in C$ .
- [2]. Un ensemble  $C$  est un cône convexe si c'est un cône et s'il est convexe, *i.e.*  $\forall x_1, x_2 \in C$  et  $\theta_1, \theta_2 \geq 0$ , on a  $\theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 \in C$ .
- [3]. Un cône  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  est appelé un cône propre s'il satisfait les conditions suivantes:
- $K$  est convexe,
  - $K$  est fermé,
  - $K$  est solide, *i.e.* l'intérieur de  $K$  est non vide,
  - $K$  est pointu, *i.e.*  $x \in K, -x \in K \Rightarrow x = 0$ .

Un cône propre  $K$  peut être utilisé pour définir une inégalité généralisée, laquelle est une relation d'ordre partielle de  $\mathbb{R}^n$  qui possède plusieurs propriétés de la relation d'ordre définie dans  $\mathbb{R}$ . On associe au cône propre  $K$  la relation d'ordre partielle définie par:

$$x \preceq_K y \iff y - x \in K. \tag{A.1}$$

On définit également la relation d'ordre partielle stricte par:

$$x \prec_K y \iff y - x \in \text{int } K \text{ (i.e. l'intérieur de } K\text{)}. \tag{A.2}$$

Dans la suite, on note par  $\preceq_K$  et  $\prec_K$  les inégalités généralisées respectivement non stricte et stricte, associées au cône  $K$ . Si  $K = \mathbb{R}_+$ , alors les relations d'ordre partiel  $\preceq_K$  et  $\prec_K$  sont respectivement équivalentes aux relations d'ordre usuel  $\leq$  et  $<$  définies sur  $\mathbb{R}$ . On note par:



- $\mathbf{S}^n$  l'ensemble des matrices carrées symétriques d'ordre  $n$ :

$$\mathbf{S}^n = \{X \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid X = {}^t X\},$$

- $\mathbf{S}_+^n$  l'ensemble des matrices carrées symétriques positives d'ordre  $n$ :

$$\mathbf{S}_+^n = \{X \in \mathbf{S}^n \mid X \succeq 0\},$$

- $\mathbf{S}_{++}^n$  l'ensemble des matrices carrées symétriques définies positives d'ordre  $n$ :

$$\mathbf{S}_{++}^n = \{X \in \mathbf{S}^n \mid X \succ 0\}.$$

Les deux propriétés suivantes sont immédiates (voir [BV04]-[Nem05]):

- $\mathbf{S}_+^n$  est cône propre de  $\mathbf{S}^n$ ,
- $\mathbf{S}_+^n = \bigcap_{z \neq 0} \{X \in \mathbf{S}^n \mid {}^t z X z \geq 0\}$ .

La première propriété signifie que l'on peut associer à  $\mathbf{S}_+^n$  une inégalité généralisée  $\preceq$  ou  $\prec$ , i.e. une inégalité entre deux matrices dans  $\mathbf{S}^n$ . Donc, d'après Eq. (A.1) on a,  $X \preceq_{\mathbf{S}_+^n} Y \iff Y - X$  est positive, et en utilisant Eq. (A.2), on a  $X \prec_{\mathbf{S}_+^n} Y \iff Y - X$  est définie positive. La deuxième propriété signifie que  $X \preceq_{\mathbf{S}_+^n} Y \iff \forall z, z^T X z \leq z^T Y z$ . Pour simplifier l'écriture, on élimine l'indice de  $\preceq_{\mathbf{S}_+^n}$  et  $\prec_{\mathbf{S}_+^n}$ . Pour des matrices symétriques on utilise simplement  $X \preceq Y$  ou  $X \prec Y$ , étant entendu que l'inégalité généralisée est associée au cône propre  $\mathbf{S}_+^n$ .

Un critère pour comparer deux matrices est alors le suivant: soient  $X$  et  $Y$  deux matrices symétriques d'ordre  $n$  avec  $Y$  définie positive. On note par  $P$  la matrice telle que  $P = Y^{-1/2} X Y^{-1/2}$ . On considère le problème d'optimisation suivant: trouver une constante  $\delta \in \mathbb{R}^+$  telle que  $X \preceq \delta Y$ .

Ce problème admet une solution optimale  $\delta_{opt}$  qui est le rayon spectral de la matrice  $P$ .

## A.2 Problème d'optimisation

Dans la suite, on utilise les mêmes notations que celles de la Sec. 2.1.2 du Chapitre 2. On considère le problème suivant: existe-t-il deux constantes  $\delta_1$  et  $\delta_2$  qui vérifient,

$$\forall X \in \text{Vect}\{\varphi_{ij}, 1 \leq j \leq d_i\}, \quad \left\| \frac{\partial X}{\partial x} \right\|_{\tau_i}^2 \leq \delta_1 \|X\|_{\tau_i}^2 \quad \text{et} \quad \|X\|_{s_{ik}}^2 \leq \delta_2 \|X\|_{\tau_i}^2. \quad (\text{A.3})$$

La réponse est positive pour tout choix de fonctions de base  $\varphi_{ij}$ .

**Preuve.** Le problème, Eq. (A.3), est équivalent au problème d'optimisation suivant: trouver deux constantes positives  $\delta_1$  et  $\delta_2$  telles que,

$$\mathbf{A}_1 \preceq \delta_1 \mathbf{B} \quad \text{et} \quad \mathbf{A}_2 \preceq \delta_2 \mathbf{B}, \quad (\text{A.4})$$

où les matrices  $\mathbf{A}_1$ ,  $\mathbf{A}_2$  sont symétriques et  $\mathbf{B}$  est symétrique définie positive. Ces matrices sont définies par:

$$(\mathbf{A}_1)_{jj'} = \int_{\tau_i} \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial x} \frac{\partial \varphi_{ij'}}{\partial x}, \quad (\mathbf{A}_2)_{jj'} = \int_{s_{ik}} \varphi_{ij} \varphi_{ij'} \quad \text{et} \quad (\mathbf{B})_{jj'} = \int_{\tau_i} \varphi_{ij} \varphi_{ij'}. \quad (\text{A.5})$$

D'après le critère de la section précédente, le problème définie dans Eq. (A.4) admet une solution optimale  $(\delta_1; \delta_2)$  qui est aussi une solution du problème (A.3).  $\delta_1$  et  $\delta_2$  sont les rayons spectraux des matrices  $\mathbf{B}^{-1/2} \mathbf{A}_1 \mathbf{B}^{-1/2}$  et  $\mathbf{B}^{-1/2} \mathbf{A}_2 \mathbf{B}^{-1/2}$  respectivement.

On peut vérifier aussi que les valeurs des constantes  $\delta_1$  et  $\delta_2$  augmentent avec la taille ( $d_i$ ) des matrices  $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2$  et  $\mathbf{B}$ .

### A.3 Formulation du schéma GDDT- $\mathbb{P}_{p_i}$

On précise dans cette section l'écriture du schéma GDDT- $\mathbb{P}_{p_i}$  étudié dans la Sec. 2.1. Pour simplifier, on détaille seulement la formulation de la première équation du système (2.1). On multiplie la première équation de (2.1) par la fonction de base locale  $\varphi_{ij}$ , puis on intègre sur chaque triangle  $\tau_i$ :

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial H_z}{\partial t} + \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} &= 0 \\ \Rightarrow \int_{\tau_i} \mu \frac{\partial H_z}{\partial t} \varphi_{ij} + \int_{\tau_i} \frac{\partial E_y}{\partial x} \varphi_{ij} - \int_{\tau_i} \frac{\partial E_x}{\partial y} \varphi_{ij} &= 0. \end{aligned}$$

Après intégration par parties, on obtient:

$$\mu_i \int_{\tau_i} \frac{\partial H_z}{\partial t} \varphi_{ij} - \int_{\tau_i} E_y \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial x} + \int_{\tau_i} E_x \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial y} + \int_{\partial \tau_i} E_y \varphi_{ij} \tilde{n}_{ikx} - \int_{\partial \tau_i} E_x \varphi_{ij} \tilde{n}_{iky} = 0.$$

Utilisons les équations (2.5) et (2.6) pour en déduire:

$$\begin{aligned} \mu_i \sum_{l=1}^{d_i} \left( \int_{\tau_i} \varphi_{ij} \varphi_{il} \right) \frac{\partial H_{zil}}{\partial t} - \sum_{l=1}^{d_i} \left( \int_{\tau_i} \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial x} \varphi_{il} \right) E_{yil} + \sum_{l=1}^{d_i} \left( \int_{\tau_i} \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial y} \varphi_{il} \right) E_{xil} \\ + \sum_{k \in \mathcal{V}_i} \int_{s_{ik}} \left( \frac{E_{yi} + E_{yk}}{2} \right) \varphi_{ij} \tilde{n}_{ikx} - \sum_{k \in \mathcal{V}_i} \int_{s_{ik}} \left( \frac{E_{xi} + E_{xk}}{2} \right) \varphi_{ij} \tilde{n}_{iky} = 0. \end{aligned}$$

Une intégration par parties conduit à:

$$\begin{aligned} \mu_i \sum_{l=1}^{d_i} \left( \int_{\tau_i} \varphi_{ij} \varphi_{il} \right) \frac{\partial H_{zil}}{\partial t} - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{d_i} \left( \int_{\tau_i} \left( \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial x} \varphi_{il} - \varphi_{ij} \frac{\partial \varphi_{il}}{\partial x} \right) \right) E_{yil} \\ + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{d_i} \left( \int_{\tau_i} \left( \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial y} \varphi_{il} - \varphi_{ij} \frac{\partial \varphi_{il}}{\partial y} \right) \right) E_{xil} \\ + \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathcal{V}_i} \left[ \sum_{l=1}^{d_i} \left( \int_{s_{ik}} \varphi_{ij} \varphi_{kl} \tilde{n}_{ikx} \right) E_{ykl} - \right. \\ \left. \sum_{l=1}^{d_i} \left( \int_{s_{ik}} \varphi_{ij} \varphi_{kl} \tilde{n}_{iky} \right) E_{xkl} \right] = 0, \end{aligned}$$

qui donne:

$$\mu_i \mathbb{M}_i \frac{\partial \mathbf{H}_{zi}}{\partial t} - \mathbb{K}_i^x \mathbf{E}_{yi} + \mathbb{K}_i^y \mathbf{E}_{xi} + \sum_{k \in \mathcal{V}_i} (\mathbb{F}_{xik} - \mathbb{F}_{yik}) = 0.$$

Les matrices  $\mathbb{M}_i$ ,  $\mathbb{K}_i^x$  et  $\mathbb{K}_i^y$  sont définies par (2.11) et les vecteurs  $\mathbb{F}_{xik}$  et  $\mathbb{F}_{yik}$  sont définies par (2.13).

## A.4 Étude de quelques exemples

**Exemple 1:** le but de cet exemple est d'éclaircir les deux premiers points de la Remarque 2.4. On utilise les mêmes notations que celles du Lemme 2.2. On considère un triangle  $\tau_i$  défini par les sommets  $s_1(2, 3)$ ,  $s_2(3, 3)$  et  $s_3(3, 1)$ . Les fonctions de base  $\mathbb{P}_1$  de  $\tau_i$  sont:

$$\begin{cases} \varphi_{i1} &= 3 - x \\ \varphi_{i2} &= (2x + y - 7)/2 \\ \varphi_{i3} &= (3 - y)/2 \end{cases}$$

Les faces de  $\tau_i$  et de son voisin  $\tau_k$  sont définies respectivement par  $a_i = [s_2, s_3]$  et  $a_k = [(3, 1.5), (3, 2.5)]$ . L'interface entre  $\tau_i$  et  $\tau_k$  est telle que  $s_{ik} = a_i \cap a_k$ , par suite  $\ell_1 = 2$  et  $\ell_2 = 1$ . On trouve alors que  $\beta_{ik} = \beta_{ki} = 3$  ce qui justifie le premier point de la Remarque 2.4.

On considère maintenant un raffinement de taux 8 de la face  $a_i$ . Les faces  $a_k$  pour  $k \in \mathcal{V}_i$  sont définies dans la Tab. A.1, on a  $\forall i, \forall k \in \mathcal{V}_i, \ell_1 = 8$  et  $\ell_2 = 1$ . On recense dans la Tab. A.1 les valeurs de  $\beta_{ik}$  et  $\beta_{ki}$ . Bien que toutes les interfaces  $s_{ik}$  soient égales, on remarque que les valeurs de  $\beta_{ik}$  sont déterminées par la position du voisin  $\tau_k$  de  $\tau_i$ . Donc le deuxième point de la Remarque 2.4 est justifié.

TAB. A.1 – Valeurs de  $\beta_{ik}$  et  $\beta_{ki}$  suivant la face  $a_k$  de  $\tau_k$ .  
Raffinement de taux 8.

$a_k$	$\beta_{ik}$	$\beta_{ki}$
$[(3, 1.0), (3, 1.25)]$	7.613	3.0
$[(3, 1.25), (3, 1.5)]$	5.357	3.0
$[(3, 1.5), (3, 1.75)]$	3.851	3.0
$[(3, 1.75), (3, 2.0)]$	3.095	3.0
$[(3, 2.0), (3, 2.25)]$	3.095	3.0
$[(3, 2.25), (3, 2.5)]$	3.851	3.0
$[(3, 2.5), (3, 2.75)]$	5.357	3.0
$[(3, 2.75), (3, 3.0)]$	7.613	3.0

**Exemple 2:** on précise dans cet exemple le calcul de la valeur maximale des constantes  $\beta_{ik}$  et  $\beta_{ki}$  dans le cas d'un maillage non-conforme. Supposons que nous sommes dans la situation de la Fig. A.1. Les voisins du triangle  $\tau_{i1}$  sont  $\tau_{k1}$  et  $\tau_{k2}$ . Le voisin des triangles  $\tau_{i2}$ ,  $\tau_{i3}$  et  $\tau_{i4}$  est  $\tau_{k3}$ . On note les interfaces non-conformes par  $a_1 = \tau_{i1} \cap \tau_{k1}$ ,  $a_2 = \tau_{i1} \cap \tau_{k2}$ ,  $a_3 = \tau_{i2} \cap \tau_{k3}$ ,  $a_4 = \tau_{i3} \cap \tau_{k3}$  et  $a_5 = \tau_{i4} \cap \tau_{k3}$ . On donne dans la Tab. A.2 les valeurs de  $\ell_1$  et  $\ell_2$  pour toutes les interfaces non-conformes. Les maxima de tous les  $\ell_1$  et  $\ell_2$  sont  $\ell_1^{\max} = 2.7$  et  $\ell_2^{\max} = 4.0$  qui correspondent respectivement aux interfaces  $a_1$  et  $a_3$ . On a  $\mathcal{L}^{\max} = \max(\ell_1^{\max}, \ell_2^{\max}) = \ell_2^{\max}$ . Appliquons le Lemme 2.2: on calcule seulement la valeur de  $\beta_{ki}$  qui correspond à l'interface  $a_3$  qui est le maximum de toutes les valeurs de  $\beta_{ik}$  et  $\beta_{ki}$ .

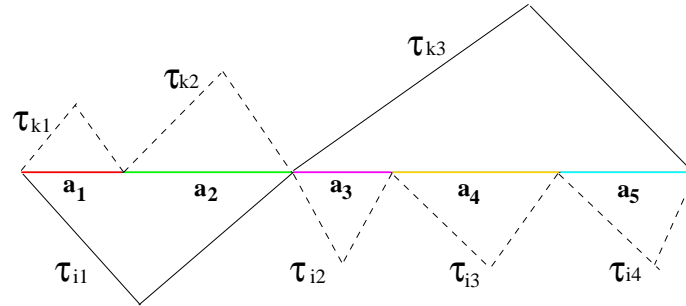


FIG. A.1 – Exemple d'un maillage non-conforme.

TAB. A.2 – Valeurs de  $\ell_1$  et  $\ell_2$  pour toutes les interfaces.

interface	$\ell_1$	$\ell_2$
$a_1$	2.7	1.0
$a_2$	1.6	1.0
$a_3$	1.0	4.0
$a_4$	1.0	2.4
$a_5$	1.0	3.0

## A.5 Références pour les formules de cubatures

[BE90] J. Berntsen and T.O. Espelid, *Degree 13 symmetric quadrature rules for the triangle*, Reports in Informatics 44, Dept. of Informatics, University of Bergen, 1990.

[BE92] J. Berntsen and T.O. Espelid, *Algorithm 706, DCUTRI: an algorithm for adaptive cubature over a collection of triangle*, ACM Transactions on Mathematical Software **18** (1992), no. 3, 329–342.

[Bec87] T. Becker, *Konstruktion von interpolatorischen kubaturformeln mit anwendungen in der finite-element-methode*, Ph.D. thesis, Technische Hochschule Darmstadt, 1987.

[CH87] R. Cools and A. Haegemans, *Construction of minimal cubature formulae for the square and the triangle using invariant theory*, TW 96, Dept. of Computer Science, K.U. Leuven, 1987.

[DR84] E. De Doncker and I. Robinson, *Algorithm 612, TRIEX: integration over a triangle using nonlinear extrapolation*, ACM Transactions on Mathematical Software **10** (1984), no. 1, 17–22.

[Gat88] K. Gatermann, *The construction of symmetric cubature formulas for the square and the triangle*, Computing **40** (1988), 229–240.

[GM78] A. Grundmann and M. Moeller, *Invariant integration formulas for the N-simplex by combinatorial method*, SIAM J. Numer. Anal. **15** (1978), no. 2, 282–290.

[GS99] B. Griener and H.J. Schmid, *An interactive tool to visualize common zeros of twodimensional polynomials*, J. Comput. Appl. Math. **112** (1999), 83–94.

[Lau82] D. Laurie, *Algorithm 584, CUBTRI: automatic cubature over a triangle*, ACM Transactions on Mathematical Software **8** (1982), no. 2, 210–218.

[LG78] M.E. Laursen and M. Gellert, *Some criteria for numerically integrated matrices and quadrature formulas for triangles*, Int. J. Numer. Methods Engrg. **12** (1978), 67–76.

- [LJ75] J. Lyness and D. Jespersen, *Moderate degree symmetric quadrature rules for the triangle*, J. Inst. Math. Appl. **15** (1975), no. 1, 19–32.
- [Ras83] G.G. Rasputin, *Construction of cubature formulas containing prespecified knots (in russian)*, Metody Vychisl. **13** (1983), 145–154.
- [Sch83] H. J. Schmid, *Interpolatorische Kubaturformeln (in german)*, Dissertationes Mathematicae, vol. 220, Warszawa, Polish Scientific, 1983.
- [SF73] G. Strang and G.J. Fix, *An analysis of the finite element method*, Prentice-Hall, 1973.
- [TWB07] M.A. Taylor, B.A. Wingate, and L.P. Bos, *Several new quadrature formulas for polynomial integration in the triangle*, submitted, 2007.
- [TWW00] M.A. Taylor, B.A. Wingate, and R. Vincent, *An algorithm for computing Fekete points in the triangle*, SIAM J. Numer. Anal. **38** (2000), no. 5, 1707–1720.
- [WX03] S. Wandzura and H. Xiao, *Symmetric quadrature rules on a triangle*, Computers & Mathematics with Applications **45** (2003), no. 12, 1829–1840.

# Bibliographie

- [AdF26] P. Appell and J. Kampé de Fériet, *Fonctions hypergéométriques et hypersphériques. Polynômes d'Hermite*, Gauthier-Villars, Paris, 1926.
- [ADY98] S. Abarbanel, A. Ditkowski, and A. Yefet, *Bounded error schemes for the wave equation on complex domains*, Report 98-50, ICASE, 1998, NASA Langley Research Center, Hampton.
- [And01] U. Andersson, *Time-domain methods for the Maxwell equations*, Ph.D. thesis, Royal Institute of Technology, 2001.
- [BCP00] S. Benhassine, W.P. Jr. Carpes, and L. Pichon, *Comparison of mass lumping techniques for solving the 3D Maxwell's equations in the time domain*, IEEE Trans. Magn. **36** (2000), no. 4, 1548–1552.
- [BCPP01] P. Bernardi, M. Cavagnaro, S. Pisa, and E. Piuze, *Power absorption and temperature elevations induced in the human head by a dual-band monopole-helix antenna phone*, IEEE Trans. Microwave Theory Tech. **49** (2001), no. 12, 2539–2546.
- [Ber94] J.-P. Berenger, *A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves*, J. Comput. Phys. **114** (1994), no. 2, 185–200.
- [Bey95] J. Bey, *Tetrahedral grid refinement*, Computing **55** (1995), no. 4, 355–378.
- [BFLP06] M. Bernacki, L. Fezoui, S. Lanteri, and S. Piperno, *Parallel unstructured mesh solvers for heterogeneous wave propagation problems*, Appl. Math. Model. **30** (2006), no. 8, 744–763.
- [BG05] V.A. Bokil and R. Glowinski, *An operator splitting scheme with a distributed Lagrange multiplier based fictitious domain method for wave propagation problems*, J. Comput. Phys. **205** (2005), no. 1, 242–268.
- [BH88] A. Bernaldi and L. Halpern, *Conditions aux limites absorbantes pour le système de Maxwell dans le vide en dimension trois*, Note C.R.A.S. **307** (1988), 1011–1013.
- [BHP07] A. Buffa, P. Houston, and I. Perugia, *Discontinuous Galerkin computation of the Maxwell eigenvalues on simplicial meshes*, J. Comput. Appl. Math. **204** (2007), no. 2, 317–333.
- [BO05] J.-D. Boissonnat and S. Oudot, *Provably good sampling and meshing of surfaces*, Graphical Models **67** (2005), no. 5, 405–451.
- [Bon97] F. Bonnet, *Méthodes de résolution efficaces pour le système de Maxwell instationnaire*, Ph.D. thesis, Université de Nice-Sophia Antipolis, 1997.
- [Bon98] P. Bonnet, *Résolution des équations de Maxwell instationnaires et harmoniques par une technique de volumes finis, applications à des problèmes de CEM*, Ph.D. thesis, Université Blaise Pascal, 1998.

- [Bos88] A. Bossavit, *A rationale for edge-elements in 3-D fields computations*, IEEE Trans. Magn. **24** (1988), no. 1, 74–79.
- [Bos90] ———, *Solving Maxwell equations in a closed cavity, and the question of spurious modes*, IEEE Trans. Magn. **26** (1990), no. 2, 702–705.
- [Bos91] ———, *Électromagnétisme en vue de la modélisation*, Mathématiques et Applications, vol. 14, Springer-Verlag, 1991.
- [Bos02] ———, *Generating Whitney forms of polynomial degree one and higher*, IEEE Trans. Magn. **38** (2002), no. 2, 341–344.
- [BRI05] A. Bondeson, T. Rylander, and P. Ingelström, *Computational electromagnetics*, Texts in applied mathematics, vol. 51, Springer, 2005.
- [BS87] I. Babuska and M. Suri, *The hp-version of the finite element method with quasiuniform meshes*, RAIRO: M2AN **21** (1987), no. 2, 199–238.
- [BV04] S. Boyd and L. Vandenberghe, *Convex optimization*, ch. 1 and 2, Cambridge University Press, 2004, disponible sur <http://www.stanford.edu/~boyd/cvxbook>.
- [Can03] N. Canouet, *Méthodes de Galerkin discontinu pour la résolution du système de Maxwell sur des maillages localement raffinés non-conformes*, Ph.D. thesis, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 2003.
- [CCR05] M.-H. Chen, B. Cockburn, and F. Reitich, *High-order RKDG methods for computational electromagnetics*, J. Sci. Comput. **22** (2005), no. 1, 205–226.
- [CD03] W. Cai and S. Deng, *An upwinding embedded boundary method for Maxwell's equations in media with material interfaces: 2D case*, J. Comput. Phys. **190** (2003), no. 1, 159–183.
- [CFJ06] F. Collino, T. Fouquet, and P. Joly, *Conservative space-time mesh refinement methods for the FDTD solution of Maxwell's equations*, J. Comput. Phys. **211** (2006), no. 1, 9–35.
- [CFMP03] G. Cohen, X. Ferrieres, P. Monk, and S. Pernet, *Mass-lumped edge elements for the lossy Maxwell's equations*, Sixth International Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation (Jyväskylä, Finland), Springer-Verlag, 2003, pp. 383–388.
- [CFP05] N. Canouet, L. Fezoui, and S. Piperno, *Discontinuous Galerkin time-domain solution of Maxwell's equations on locally-refined nonconforming cartesian grids*, COMPEL **24** (2005), no. 4, 1381–1401.
- [CFP06] G. Cohen, X. Ferrieres, and S. Pernet, *A spatial high-order hexahedral discontinuous Galerkin method to solve Maxwell's equations in time domain*, J. Comput. Phys. **217** (2006), 340–363.
- [CFS93] J.-P. Cioni, L. Fezoui, and H. Steve, *A parallel time-domain Maxwell solver using upwind schemes and triangular meshes*, IMPACT Comput. Sci. Eng. **5** (1993), no. 3, 215–247.
- [CGJ98] F. Collino, S. Garcès, and P. Joly, *A fictitious domain method for conformal modeling of the perfect electric conductors in the FDTD method*, IEEE Trans. Antennas and Propagat. **46** (1998), no. 10, 1519–1526.
- [Che93] L.P. Chew, *Guaranteed-quality mesh generation for curved surfaces*, 9th Annual ACM Symposium Computational Geometry, ACM Press, 1993, pp. 274–280.
- [CJM97] F. Collino, P. Joly, and F. Millot, *Fictitious domain method for unsteady problems: application to electromagnetic scattering*, J. Comput. Phys. **138** (1997), no. 2, 907–938.
- [CK94] M.H. Carpenter and C.A. Kennedy, *Fourth-order 2N-storage Runge-Kutta schemes*, Nasa-tm-109112, NASA Langley Research center, VA, 1994.

- [CL97] M.W. Chevalier and R.J. Luebbers, *FDTD local grid with material traverse*, IEEE Trans. Antennas and Propagat. **45** (1997), no. 3, 411–421.
- [CLO<sup>+</sup>00] O. Clatz, S. Lanteri, S. Oudot, J.-P. Pons, S. Piperno, G. Scarella, and J. Wiart, *Modélisation numérique réaliste de l'exposition des tissus de la tête à un champ électromagnétique issu d'un téléphone mobile*, 13ème Colloque International et Exposition sur la Compatibilité Electromagnétique (Saint Malo, France), 2000, pp. 377–397.
- [CLS04] B. Cockburn, F. Li, and C.-W. Shu, *Locally divergence-free discontinuous Galerkin methods for the Maxwell equations*, J. Comput. Phys. **194** (2004), no. 1, 588–610.
- [CR93] R. Cools and P. Rabinowitz, *Monomial cubature rules since "stroud": A compilation*, J. Comput. Appl. Math. **48** (1993), 309–326.
- [CRD03] W. Cecot, W. Rachowicz, and L. Demkowicz, *An hp-adaptive finite element method for electromagnetics. Part 3: a three-dimensional infinite element for Maxwell's equations*, Int. J. Numer. Meth. Engng **57** (2003), no. 7, 899–921.
- [CRW93] R. Coifman, V. Rokhlin, and S. Wandzura, *The fast multipole method for the wave equation: a pedestrian approach*, IEEE Trans. Antennas and Propagat. **35** (1993), no. 7, 7–12.
- [CS89] B. Cockburn and C.-W. Shu, *TVB Runge-Kutta local projection discontinuous Galerkin method for conservation laws II: general framework*, Math. Comp. **52** (1989), no. 186, 411–435.
- [CY95] J.S. Chen and K.S. Yee, *Artificial tapered damping near the outer computation boundary in FDTD and FDTD/FVTD hybrid*, IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium **1** (1995), 620–623.
- [DA96] V. Dolejsi and P. Angot, *Finite volume methods on unstructured meshes for compressible flows*, Finite Volumes for Complex Applications: Problems and Perspectives (F. Benkhaldoun and R. Vilsmeier, eds.), Edition Hermes, Rouen, 1996, pp. 667–674.
- [DC05] S. Deng and W. Cai, *Analysis and application of an orthogonal nodal basis on triangles for discontinuous spectral element methods*, Appl. Num. Anal. Comp. Math. **2** (2005), no. 3, 326–345.
- [DDH01] A. Ditkowski, K. Dridi, and J.S. Hesthaven, *Convergent cartesian grid methods for Maxwell's equations in complex geometries*, J. Comput. Phys. **170** (2001), no. 1, 39–80.
- [DHD01] K. Dridi, J.S. Hesthaven, and A. Ditkowski, *Staircase-free finite-difference time-domain formulation for general materials in complex geometries*, IEEE Trans. Antennas and Propagat. **49** (2001), no. 5, 749–755.
- [DL87] R. Dautray and J.L. Lions, *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques*, vol. 1, Masson, Paris, 1987.
- [DR84] P.J. Davis and P. Rabinowitz, *Methods of numerical integration*, Academic Press, London, 1984.
- [DR97] L. Demkowicz and W. Rachowicz, *A 2D hp-adaptive finite element package for electromagnetics*, Technical Report 97–18, TICAM, 1997.
- [DT84] G. Dhatt and G. Touzot, *Une présentation de la méthode des éléments finis*, second ed., Collection Université de Compiègne, Maloine S.A. Éditeur, Paris, 1984.
- [Dub91] M. Dubiner, *Spectral methods on triangles and other domains*, J. Sci. Comput. **6** (1991), no. 4, 345–390.



- [Dun85] D. Dunavant, *High degree efficient symmetrical Gaussian quadrature rules for the triangle*, Int. J. Numer. Meth. Engng. **21** (1985), 1129–1148.
- [Dur06] M. Duruflé, *Intégration numérique et éléments finis d'ordre élevé appliqués aux équations de Maxwell en régime harmonique*, Ph.D. thesis, Université Paris Dauphine, 2006.
- [DV98] L. Demkowicz and L. Vardapetyan, *Modeling of electromagnetic absorption/scattering problems using hp-adaptive finite elements*, Computer Meth. Appl. Mech. Engng. **152** (1998), no. 1-2, 103–124.
- [DWB97] S. Dodson, S.P. Walker, and M.J. Bluck, *Implicitness and stability of time domain integral equation scattering analysis*, Appl. Comput. Electromagn. Soc. J. **13** (1997), no. 3, 291–301.
- [EJ97a] A. Elmekies and P. Joly, *Finite elements and mass lumping for Maxwell's equations: the 2D case*, C.R. Acad. Science. Paris, Série I, Mathematics **324** (1997), no. 11, 1287–1293.
- [EJ97b] ———, *Finite elements and mass lumping for Maxwell's equations: the 3D case*, C.R. Acad. Science. Paris, Série I, Mathematics **325** (1997), no. 11, 1217–1222.
- [EL01] F. Edelvik and G. Ledfelt, *A comparison of time-domain hybrid solvers for complex scattering problems*, Int. J. Numer. Model. **15** (2001), no. 5-6, 475–487.
- [EM77] B. Engquist and A. Majda, *Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves*, Math. Comp. **31** (1977), 629–651.
- [EM79] ———, *Radiation boundary conditions for acoustic and elastic wave calculations*, Comm. Pure Appl. Math. **32** (1979), no. 3, 313–357.
- [ESM98] A.A. Ergin, B. Shanker, and E. Michielssen, *Fast evaluation of three-dimensional transient wave fields using diagonal translation operators*, J. Comput. Phys. **146** (1998), no. 1, 157–180.
- [Fah07] H. Fahs, *Numerical evaluation of a non-conforming discontinuous Galerkin method on triangular meshes for solving the time-domain Maxwell equations*, Research Report 6311, INRIA, 2007, [Online]. Available: <http://hal.inria.fr/inria-00175738/>.
- [Fah08a] ———, *Development of a hp-like discontinuous Galerkin time-domain method on non-conforming simplicial meshes for electromagnetic wave propagation*, Int. J. Numer. Anal. Model., to appear, 2008.
- [Fah08b] ———, *A non-conforming discontinuous Galerkin method for solving Maxwell's equations*, 6th European Conference on Numerical Methods in Electromagnetism, NUMELEC'08, December 8-10, Liège, Belgium 2008, pp. 100–101.
- [Fah08c] ———, *Numerical assessment of a high order non-conforming discontinuous Galerkin method for electromagnetic wave propagation*, 39ème Congrès National d'Analyse Numérique, CANUM'08, May 26-30, Saint Jean de Monts, Vendée, France 2008, p. 20.
- [Fan89] J. Fang, *Time domain finite difference computation for Maxwell's equations*, Ph.D. thesis, University of Calif, Berkeley, 1989.
- [FBLV03] C. Fumeaux, D. Baumann, P. Leuchtman, and R. Vahldieck, *A generalized local time-step scheme for the FVTD method for efficient simulation of microwave antennas*, Proc. of the 33rd European Microwave Conference, Munich, 2003, pp. 467–470.
- [FBLV04] ———, *A generalized local time-step scheme for efficient FVTD simulations in strongly inhomogeneous meshes*, IEEE Trans. Microwave Theory Tech. **52** (2004), no. 3, 1067–1076.

- [Fey79] R.P. Feynman, *Le cours de physique de Feynman. Electromagnétisme, tomes 1 et 2*, Inter-Editions, 1979.
- [FFLR06] H. Fahs, L. Fezoui, S. Lanteri, and F. Rapetti, *A discontinuous Galerkin method for solving the 2D time-domain Maxwell equation on non-conforming triangular meshes*, On high order methods for large scale industrial applications, EUA4X, June 7-9, Pula, Sardinia 2006.
- [FFLR07] ———, *Preliminary investigation of non-conforming discontinuous Galerkin methods for solving the time domain Maxwell equations*, 16th International Conference on the Computation of Electromagnetic Fields, COMPUMAG'07, June 24-28, Aachen, Germany 2007, pp. 269–270.
- [FFLR08] ———, *Preliminary investigation of a non-conforming discontinuous Galerkin method for solving the time domain Maxwell equations*, IEEE Trans. Magn. **44** (2008), no. 6, 1254–1257.
- [FGS03] R.T. Farouki, T.N.T. Goodman, and T. Sauer, *Construction of orthogonal bases for polynomials in Bernstein form on triangular and simplex domains*, Computer Aided Geometric Design **20** (2003), no. 4, 209–230.
- [FL08a] H. Fahs and S. Lanteri, *Convergence and stability of a high-order leap-frog based discontinuous Galerkin method for the Maxwell equations on non-conforming meshes*, Research Report 6699, INRIA, 2008, [Online]. Available: <http://hal.inria.fr/inria-00332277/>.
- [FL08b] ———, *A high-order non-conforming discontinuous Galerkin method for time-domain electromagnetics*, 13th Int. Congress on Computational and Applied Mathematics, ICCAM'08, July 7-11, Ghent, Belgium 2008, submitted for publication to J. Comput. Appl. Math.
- [FLH02] G.X. Fan, Q.H. Liu, and J.S. Hesthaven, *Multi-domain pseudospectral time-domain simulations of scattering by objects buried in lossy media*, IEEE Trans. Geosci. Remote Sens. **40** (2002), no. 6, 1366–1373.
- [FLLP05] L. Fezoui, S. Lanteri, S. Lohrengel, and S. Piperno, *Convergence and stability of a discontinuous Galerkin time-domain method for the heterogeneous Maxwell equations on unstructured meshes*, ESAIM: Math. Model. and Numer. Anal. **39** (2005), no. 6, 1149–1176.
- [FLR06] H. Fahs, S. Lanteri, and F. Rapetti, *Etude de stabilité d'une méthode Galerkin discontinue pour la résolution numérique des équations de Maxwell 2D en domaine temporel sur des maillages triangulaires non-conformes*, Research Report 6023, INRIA, 2006, [Online]. Available: <http://hal.inria.fr/inria-00114537/>.
- [FLR07a] ———, *A hp-like discontinuous Galerkin method for solving the 2D time-domain Maxwell's equations on non-conforming locally refined triangular meshes*, Research Report 6162, INRIA, 2007, [Online]. Available: <http://hal.inria.fr/inria-00140783/>.
- [FLR07b] ———, *Une méthode Galerkin discontinue pour la résolution numérique des équations de Maxwell 2D en domaine temporel sur des maillages triangulaires localement raffinés non-conformes*, 3ème Congrès National de Mathématiques Appliquées et Industrielles, SMAI'07, June 4-8, Praz sur Arly, France 2007, p. 173.
- [FLR08] ———, *Development of a non-conforming discontinuous Galerkin method on simplex meshes for electromagnetic wave propagation*, 4th Int. Conf. on Advanced Computational Methods in Engineering (M. Hogge, R. Van Keer, L. Noels, L. Stainier, J.-P. Ponthot, J.-F. Remacle, and E. Dick, eds.), ACOMEN'08, May 26-28, Liège, Belgium 2008, 10 pages.

- [FLST00] J. Flaherty, R. Loy, M. Shephard, and J. Teresco, *Software for the parallel adaptative solution of conservation laws by discontinuous Galerkin methods*, Lecture Notes in Computational Science and Engineering (2000), 113–124.
- [Fre03] P. Frey, *YAMS: a fully automatic adaptive isotropic surface remeshing procedure*, INRIA Research Report No. 4252, 2003.
- [Fus90] M. Fusco, *FDTD algorithm in curvilinear coordinates*, IEEE Trans. Antennas and Propagat. **38** (1990), 76–89.
- [FWR04] A. Fisher, D. White, and G. Rodrigue, *A generalized mass lumping scheme for Maxwell's wave equation*, IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium 2 (2004), 1507–1510.
- [GHS91] P.-L. George, F. Hecht, and E. Saltel, *Automatic mesh generator with specified boundary*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. **92** (1991), 269–288.
- [Har01] R.F. Harrington, *Time-harmonic electromagnetic fields*, John Wiley and Sons, INC, 2001.
- [HDL99] J.S. Hesthaven, P.G. Dinesen, and J.P. Lynov, *Spectral collocation time-domain modeling of diffractive optical elements*, J. Comput. Phys. **155** (1999), no. 2, 287–306.
- [Hel94] P. Helluy, *Résolution numérique des équations de Maxwell harmonique par une méthode d'éléments finis discontinus*, Ph.D. thesis, Ecole Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace, 1994.
- [Hes03] J.S. Hesthaven, *High-order accurate methods in time-domain computational electromagnetics*, Adv. Imaging Elec. Phys. **127** (2003), 59–123.
- [HHS01] P. Houston, R. Hartmann, and E. Süli, *Adaptive discontinuous Galerkin finite element methods for compressible fluid flows*, Numerical Methods for Fluid Dynamics VII (M. Baines, ed.), 2001, pp. 347–353.
- [Hol77] R. Holland, *Threde: a free-field EMP coupling and scattering code*, IEEE Trans. Nuclear Sci. **24** (1977), 2416–2421.
- [Hol83] \_\_\_\_\_, *Finite difference solutions of Maxwell's equations in generalized nonorthogonal coordinates*, IEEE Trans. Nuclear Sci. **30** (1983), 4589–4591.
- [HPS03] P. Houston, I. Perugia, and D. Schötzau, *hp-DGFEM for Maxwell's equations*, Numerical Mathematics and Advanced Applications (ENUMATH 2001) (F. Brezzi, A. Buffa, S. Corsaro, and A. Murli, eds.), Springer-Verlag, 2003, pp. 785–794.
- [HPS04] \_\_\_\_\_, *Mixed discontinuous Galerkin approximation of the Maxwell operator*, SIAM J. Numer. Anal **42** (2004), no. 1, 434–459.
- [HPS05] \_\_\_\_\_, *Mixed discontinuous Galerkin approximation of the Maxwell operator: non-stabilized formulation*, J. Sci. Comput. **22** (2005), 325–356.
- [HSS02] P. Houston, B. Senior, and E. Süli, *hp-discontinuous Galerkin finite element methods for hyperbolic problems: error analysis and adaptivity*, Int. J. Numer. Meth. Fluids **40** (2002), no. 1–2, 153–169.
- [HW02] J.S. Hesthaven and T. Warburton, *Nodal high-order methods on unstructured grids. I. Time-domain solution of Maxwell's equations*, J. Comput. Phys. **181** (2002), 186–221.
- [HW04a] \_\_\_\_\_, *High-order accurate methods for time-domain electromagnetics*, Comp. Mod. Engin. Sci. **5** (2004), no. 5, 395–408.

- [HW04b] ———, *High-order nodal discontinuous Galerkin methods for the Maxwell's eigenvalue problem*, Royal Soc. London Ser. A **362** (2004), 493–524.
- [Jac98] J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, third edition ed., John Wiley and Sons, INC, 1998.
- [JCS03] B.H. Jung, Y.S. Chung, and T.K. Sarkar, *Time-domain EFIE, MFIE, and CFIE formulations using Laguerre polynomials as temporal basis functions for analysis of transient scattering from arbitrarily shaped conducting structures*, Progress in Electromagnetics Research **39** (2003), 1–45.
- [JJS<sup>+</sup>07] B.H. Jung, Z. Ji, T.K. Sarkar, M. Salazar-Palma, and M. Yuan, *A comparison of marching-on-in-time method with marching-on-in-degree method for the TDIE solver*, Progress in Electromagnetics Research **70** (2007), 281–296.
- [JLCZ05] X. Ji, T. Lu, W. Cai, and P. Zhang, *Discontinuous Galerkin time domain (DGTD) methods for the study of 2-D waveguide-coupled microring resonators*, Journal of Lightwave Technology **23** (2005), no. 11, 3864–3874.
- [JTUM92] T.G. Jurgens, A. Taflove, K. Umashankar, and T.G. Moore, *Finite-difference time-domain modeling of curved surfaces*, IEEE Trans. Antennas and Propagat. **40** (1992), 357–366.
- [JTYO06] S. Järvenpää, M. Taskinen, and P. Ylä-Oijala, *Singularity subtraction technique for high-order polynomial vector basis functions on planar triangles*, IEEE Trans. Antennas and Propagat. **54** (2006), no. 1, 42–49.
- [Kas04] E. Kashdan, *High-order accurate methods for Maxwell equations*, Ph.D. thesis, Tel Aviv University, 2004.
- [KCGH07] A. Kanevsky, M.H. Carpenter, D. Gottlieb, and J.S. Hesthaven, *Application of implicit-explicit high-order Runge-Kutta methods to discontinuous Galerkin schemes*, J. Comput. Phys. **225** (2007), no. 2, 1753–1781.
- [KH90] I.S. Kim and W. J.R. Hoefer, *A local mesh refinement algorithm for the time domain finite difference method using Maxwell's curl equations*, IEEE Trans. Microwave Theory Tech. **38** (1990), no. 6, 812–815.
- [KL78] K.S. Kunz and K.M. Lee, *A three dimensional finite-difference solution of the external response of an aircraft to a complex transient EM environment I: The method and its implementation*, IEEE Trans. Electromag. Compat. **20** (1978), 328–333.
- [Koo75] T. Koornwinder, *Two-variable analogues of the classical orthogonal polynomials*, in Theory and Application of Special Functions, R. A. Askey ed., Academic Press (1975), 435–495.
- [KSH04] A.V. Kabakian, V. Shankar, and W.F. Hall, *Unstructured grid-based discontinuous Galerkin method for broadband electromagnetic simulations*, J. Sci. Comput. **20** (2004), no. 3, 405–431.
- [KT06] E. Kashdan and E. Turkel, *High-order accurate modeling of electromagnetic wave propagation across media: grid conforming bodies*, J. Comput. Phys. **218** (2006), 816–835.
- [KWH00] D. Kopriva, S.L. Woodruff, and M.Y. Hussaini, *Discontinuous spectral element approximation of Maxwell's equations*, Discontinuous Galerkin Methods: Theory, Computation and Applications (B. Cockburn, G.E. Karniadakis, and C.W. Shu, eds.), Lecture Notes in Computational Science and Engineering, vol. 11, Springer-Verlag, 2000, pp. 355–362.
- [KWH02] ———, *Computation of electromagnetic scattering with a non-conforming discontinuous spectral element method*, Int. J. Numer. Meth. Engng. **53** (2002), 105–122.

- [Lac04] P. Lacoste, *Mass-lumping for the first order Raviart-Thomas-Nédélec finite elements*, Comptes Rendus Mathématique **339** (2004), no. 10, 727–732.
- [LC87] W. Lorensen and H. Cline, *Marching cubes: a high resolution 3D surface construction algorithm*, Siggraph 87, vol. 21, 1987, pp. 163–170.
- [LC94] J. Lyness and R. Cools, *A survey of numerical cubature over triangles*, Proc. Sympos. Appl. Math., vol. 48, Amer. Math. Soc., 1994, pp. 127–150.
- [Led01] G. Ledfelt, *Hybrid time-domain methods and wire models for computational electromagnetics*, Ph.D. thesis, Department of Numerical Analysis and Computer Science, Royal institute of Technology, Stockholm, 2001.
- [LEEA99] G. Ledfelt, F. Edelvik, L. Eriksson, and U. Andersson, *Hybrid time-domain solver for the Maxwell equations*, Tech. Report 99-08, Royal Institute of Technology, 1999.
- [Let77] F.G. Lether, *Subtracting out complex singularities in numerical integration*, Math. Comp. **31** (1977), no. 137, 223–229.
- [LHC<sup>+</sup>00] J.C. Lin, S. Hirai, C.-L. Chiang, W.-L. Hsu, J.-L. Su, and Y.-J. Wang, *Computer simulation and experimental studies of SAR distributions of interstitial arrays of sleeved-slot microwave antennas for hyperthermia treatment of brain tumors*, IEEE Trans. Microwave Theory Tech. **48** (2000), no. 11, 2191–2198.
- [LJ96] A. Liu and B. Joe, *Quality local refinement of tetrahedral meshes based on 8-subtetrahedron subdivision*, Math. Comp. **65** (1996), no. 215, 1183–1200.
- [LWYY84] Z.P. Liao, H.L. Wong, B.P. Yang, and Y.F. Yuan, *A transmitting boundary for transient wave analyses*, Scientia Sinica (series A) **XXVII** (1984), 1063–1076.
- [LZC04] T. Lu, P. Zhang, and W. Cai, *Discontinuous Galerkin methods for dispersive and lossy Maxwell's equations and PML boundary conditions*, J. Comput. Phys. **200** (2004), 549–580.
- [Mer71] D.E. Merewether, *Transient currents on a body of revolution by an electromagnetic pulse*, IEEE Trans. Electromag. Compat. **2** (1971), 41–44.
- [Min05] M. Min, *Discontinuous Galerkin method based on quadrilateral mesh for Maxwell's equations*, Proc. of IEEE/ACES on Wireless Communications and Applied Computational Electromagnetics (2005), 724–727.
- [MNA05] A. Mohammadi, H. Nadgaran, and M. Agio, *Contour-path effective permittivities for the two-dimensional finite-difference time-domain method*, Optics Express **13** (2005), no. 25, 10367–10381.
- [Mon91] P. Monk, *A comparison of finite element methods for the time dependent Maxwell equations*, Mathematical and numerical aspects of wave propagation phenomena (G. Cohen *et al.*, ed.), SIAM, 1991, pp. 80–88.
- [MP94] P. Monk and K. Parrott, *Mixed finite elements in  $\mathbb{R}^3$* , SIAM J. Sci. Comput. **15** (1994), no. 4, 916–937.
- [MR05] P. Monk and J. Richter, *A discontinuous Galerkin method for linear symmetric hyperbolic systems in inhomogeneous media*, SIAM J. Sci. Comput. **22** (2005), no. 1, 433–477.
- [Mul69] C. Muller, *Foundations of the mathematical theory of electromagnetic waves*, Springer-Verlag, Berlin, 1969.

- [Mur81] G. Mur, *Absorbing boundary conditions for the finite-difference approximation of the time-domain electromagnetic field equations*, IEEE Trans. Electromag. Compat. **23** (1981), 377–382.
- [Ned80] J.C. Nedelec, *Mixed finite elements in  $\mathbb{R}^3$* , Numer. Math. **35** (1980), 315–341.
- [Ned86] ———, *A new family of mixed finite elements in  $\mathbb{R}^3$* , Numer. Math. **50** (1986), 57–81.
- [Nem05] A. Nemirovski, *Lectures on modern convex optimization*, Department ISYE, Georgia Institute of Technology, 2005.
- [Owe98] R.G. Owens, *Spectral approximations on the triangle*, Proc. R. Soc. Lond. A **454** (1998), no. 1971, 857–872.
- [Pac01] D. Pacaud, *Développement de techniques différences finies-volumes finis performantes en électromagnétisme*, Ph.D. thesis, Université de Bordeaux I, 2001.
- [Pas02] F. Pascal, *FV method with characteristic flux: influence of the geometrical aspect of control volumes*, Finite Volumes for Complex Applications III. Problems and perspectives (R. Herbin and D. Kröner, eds.), 2002, pp. 341–348.
- [PDG04] D. Pardo, L. Demkowicz, and J. Gopalakrishnan, *Integration of hp-adaptivity and a two grid solver. II. Electromagnetic problems*, Technical Report 04-58, ICES, 2004.
- [PF03] S. Piperno and L. Fezoui, *A centered discontinuous Galerkin finite volume scheme for the 3D heterogeneous Maxwell equations on unstructured meshes*, Tech. Report 4733, INRIA, 2003.
- [Pip03] S. Piperno, *Schémas en éléments finis discontinus localement raffinés en espace et en temps pour les équations de Maxwell 1D*, Tech. Report 4986, INRIA, 2003.
- [Pip06] ———, *Simplectic local time-stepping in non-dissipative DGTD methods applied to wave propagation problems*, M2AN **40** (2006), no. 5, 815–841.
- [PL91] K.D. Paulsen and D.R. Lynch, *Elimination of vector parasites in finite element Maxwell solutions*, IEEE Trans. Microwave Theory Tech. **39** (1991), 395–404.
- [PRF02] S. Piperno, M. Remaki, and L. Fezoui, *A nondiffusive finite volume scheme for the three-dimensional Maxwell's equations on unstructured meshes*, SIAM J. Numer. Anal. **39** (2002), no. 6, 2089–2108.
- [Pro57] J. Proriol, *Sur une famille de polynômes à deux variables orthogonaux dans un triangle*, C. R. Acad. Sci. Paris (1957), 2459–2461.
- [PS92] D.T. Prescott and N.V. Shuley, *A method for incorporating different sized cells into the finite-difference time-domain analysis technique*, IEEE Microwave Guided Wave Letters **2** (1992), no. 11, 434–436.
- [PS97] S.S. Petrova and A.D. Solov'ev, *The origin of the method of steepest descent*, Historia Mathematica **24** (1997), no. 4, 361–375.
- [Rad48] J. Radon, *Zur mechanischen Kubatur*, Monatsh. Math. **52** (1948), 286–300.
- [RB00] T. Rylander and A. Bondeson, *Stable FEM-FDTD hybrid method for Maxwell's equations*, Comput. Phys. Comm. **125** (2000), 75–82.
- [RB02] ———, *Stability of explicit-implicit hybrid time-stepping schemes for Maxwell's equations*, J. Comput. Phys. **179** (2002), no. 2, 426–438.
- [RD02] W. Rachowicz and L. Demkowicz, *An hp-adaptive finite element method for electromagnetics. Part 2: A 3D implementation*, Int. J. Numer. Meth. Engng. **53** (2002), 147–180.

- [Rem99] M. Remaki, *Méthodes numériques pour les équations de Maxwell instationnaires en milieu hétérogène*, Ph.D. thesis, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1999.
- [Rem00] ———, *A new finite volume scheme for solving Maxwell's system*, COMPEL **19** (2000), no. 3, 913–931.
- [RFS03] J.-F. Remacle, J. Flaherty, and M. Shephard, *An adaptive discontinuous Galerkin technique with an orthogonal basis applied to compressible flow problems*, SIAM Review **45** (2003), no. 1, 53–72.
- [RH73] W.H. Reed and T.R. Hill, *Triangular mesh methods for the neutron transport equation*, Tech. Report LA-UR-73-479, Los Alamos National Laboratory, Los Alamos, New Mexico, 1973.
- [RHGJ03] P. Ratiu, B. Hillen, J. Glaser, and D. P. Jenkins, *Medicine Meets Virtual Reality 11 - NextMed: Health Horizon*, vol. 11, ch. Visible Human 2.0 - the next generation, pp. 275–281, IOS Press, 2003.
- [RPFS03] J.-F. Remacle, K. Pinchedez, J. Flaherty, and M. Shephard, *An efficient local time stepping-discontinuous Galerkin scheme for adaptive transient computations*, submitted, 2003.
- [RS90] B.P. Rynne and P.D. Smith, *A new finite volume scheme for solving Maxwell's system*, J. Electromagn. Waves Applicat. **12** (1990), 1181–1205.
- [RT04] F. Reitich and K.K. Tamma, *State-of-the-art, trends and directions in computational electromagnetics*, CMES Comput. Model. Eng. Sci. **5** (2004), no. 4, 287–294.
- [RZ05] W. Rachowicz and A. Zdunek, *An hp-adaptive finite element method for scattering problems in computational electromagnetics*, Int. J. Numer. Engng. **62** (2005), 1226–1249.
- [SBvdV07] D. Sármany, M.A. Botchev, and J.J.W. van der Vegt, *Dispersion and dissipation error in high-order Runge-Kutta discontinuous Galerkin discretisations of the Maxwell equations*, J. Sci. Comput. **33** (2007), no. 1, 47–74.
- [SC95] J.M. Song and W.C. Chew, *Multilevel fast-multipole algorithm for solving combined field integral equations of electromagnetic scattering*, Microwave Opt. Technol. Lett. **10** (1995), no. 1, 14–19.
- [SC06] P. Solín and J. Cervený, *Arbitrary-level hanging nodes and automatic adaptivity in the hp-FEM*, Research Report 2006-07, University of Texas at El Paso, 2006.
- [Sch98] CH. Schwab, *p- and hp-finite element methods. Theory and applications to solid and fluid mechanics*, Oxford University Press, Oxford, UK, 1998.
- [SDPP98] S. Selleri, J.Y. Dauvignac, G. Pelosi, and C. Pichot, *Comparison between FDTD and hybrid FDTD-FETD applied to scattering and antenna problems*, Microwave Opt. Technol. Lett. **18** (1998), no. 4, 247–250.
- [SHW04] S. Schaefer, J. Hakenberg, and J. Warren, *Smooth subdivision of tetrahedral meshes*, Proc. of the 2004 Eurographics/ACM SIGGRAPH symposium on Geometry processing (R. Scopigno and D. Zorin, eds.), ACM International Conference Proceeding, vol. 71, ACM, New York, 2004, pp. 147–154.
- [SLL06] Y. Shi, L. Li, and C.-H. Liang, *Two dimensional multidomain pseudospectral time-domain algorithm based on alternating-direction implicit method*, IEEE Trans. Antennas and Propagat. **54** (2006), no. 4, 1207–1214.
- [SMYC95] D. Sun, J. Manges, X. Yuan, and Z. Cendes, *Spurious modes in finite element methods*, IEEE Antennas Propagat. Mag. **37** (1995), 12–24.

- [SNVM03] N. Siauve, L. Nicolas, C. Vollaire, and C. Marchal, *3D modeling of electromagnetic fields in local hyperthermia*, Eur. Phys. J. AP **21** (2003), 243–250.
- [SSW02] H. Spachmann, R. Schuhmann, and T. Weiland, *High order explicit time integration schemes for Maxwell's equations*, Int. J. Numer. Model. **15** (2002), no. 6, 419–437.
- [Str71] A. Stroud, *Approximate calculation of multiple integrals*, Prentice Hall, 1971.
- [Taf98] A. Taflove, *Advances in computational electrodynamics, the finite-difference time-domain method*, Artech House, Boston, London, 1998.
- [TBR92] P.A. Tirkas, C.A. Balanis, and R.A. Renaut, *High-order absorbing boundary conditions for the finite-difference time-domain method*, IEEE Trans. Antennas and Propagat. **40** (1992), no. 10, 1215–1222.
- [TE03] A.-K. Tornberg and B. Engquist, *Regularization techniques for numerical approximation of PDEs with singularities*, J. Sci. Comput. **19** (2003), 527–552.
- [Tel07] F.L. Telxeira, *FDTD/FETD methods: a review on some recent advances and selected applications*, J. of Microwaves and Optoelectronics **6** (2007), no. 1, 83–95.
- [TGM06] G. Turini, F. Ganovelli, and C. Montani, *Simulating drilling on tetrahedral meshes*, Proc. of Eurographics Conference - Short Papers, Eurographics, 2006, pp. 127–131.
- [Tuo94] J. Tuomela, *Fourth-order schemes for the wave equation, Maxwell's equations, and linearized elastodynamic equations*, Numerical Methods for PDEs **10** (1994), no. 1, 33–63.
- [TY00a] E. Turkel and A. Yefet, *Fourth order compact implicit method for the Maxwell equations with discontinuous coefficients*, Appl. Numer. Math. **33** (2000), no. 1-4, 125–134.
- [TY00b] ———, *On the construction of a high order difference scheme for complex domains in a cartesian grid*, Appl. Numer. Math. **33** (2000), no. 1-4, 113–124.
- [VD99] L. Vardapetyan and L. Demkowicz, *hp-adaptive finite elements in electromagnetics*, Comput. Meth. Appl. Mech. Engng. **169** (1999), 331–344.
- [VGLL07] N.V. Venkatarayalu, Y.-B. Gan, R. Lee, and L.-W. Li, *Antenna modeling using stable hybrid FETD-FDTD method*, IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium (2007), 3736–3739.
- [Vid78] M. Vidyasagar, *Nonlinear System Analysis*, Prentice Hall, 1978.
- [Wan91] J.J.H. Wang, *Generalized Moment methods in Electromagnetics, Formulation and Computer Solution of Integral Equations*, John Wiley and Sons Inc, 1991.
- [War00] T. Warburton, *Application of the discontinuous Galerkin method to Maxwell's equations using unstructured polymorphic hp-finite elements*, Discontinuous Galerkin Methods: Theory, Computation and Applications (B. Cockburn, G.E. Karniadakis, and C.W. Shu, eds.), Lecture Notes in Computational Science and Engineering, vol. 11, Springer-Verlag, 2000, pp. 451–458.
- [WH03] T. Warburton and J.S. Hesthaven, *On the constants in hp-finite element trace inequalities*, Comput. Meth. Appl. Mech. Engng. **192** (2003), 2765–2773.
- [Whi57] H. Whitney, *Geometric Integration Theory*, Princeton University Press, Princeton, 1957.
- [WI95] R.-B. Wu and T. Itoh, *Hybridizing FD-TD analysis with unconditionally stable FEM for objects of curved boundary*, IEEE MTT-S Int. Microwave Symp., vol. 2, Orlando, FL, 1995, pp. 833–836.



- [WLTL03] S. Wang, R. Lee, F.L. Teixeira, and J.F. Lee, *A hybrid finite element time domain/finite difference time domain approach for electromagnetic modeling*, Progress in Electromagnetics Research Symposium, Singapore, January 2003.
- [XCZ02] Z. Xie, C.-H. Chan, and B. Zhang, *An explicit fourth-order orthogonal curvilinear staggered-grid FDTD method for Maxwell's equations*, J. Comput. Phys. **175** (2002), no. 2, 739–763.
- [XF06] J. Xin and J.E. Flaherty, *Viscous stabilization of discontinuous Galerkin solutions of hyperbolic conservation laws*, Appl. Numer. Math. **56** (2006), no. 3-4, 444–458.
- [XL04] T. Xiao and Q.H. Liu, *A staggered upwind embedded boundary (SUEB) method to eliminate the FDTD staircasing error*, IEEE Trans. Antennas and Propagat. **52** (2004), no. 3, 730–741.
- [Xu01] Y. Xu, *Orthogonal polynomials and cubature formulae on balls, simplices and spheres*, J. Comput. Appl. Math **127** (2001), no. 1-2, 349–368.
- [YC94] K.S. Yee and J.S. Chen, *Conformal hybrid finite difference time domain and finite volume time domain*, IEEE Trans. Antennas and Propagat. **42** (1994), no. 10, 1450–1455.
- [YC95] ———, *IBC simulation in the FDTD/FVTD hybrid for smooth surfaces*, IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium **1** (1995), 616–619.
- [YC97] ———, *Impedance boundary condition simulation in the FDTD/FVTD hybrid*, IEEE Trans. Antennas and Propagat. **45** (1997), no. 6, 921–925.
- [YCC95] K.S. Yee, J.S. Chen, and A.-H. Chang, *Numerical experiments on PEC boundary condition and late time growth involving the FDTD/FDTD and FDTD/FVTD hybrid*, IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium **1** (1995), 624–627.
- [Yee66] K.S. Yee, *Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media*, IEEE Trans. Antennas and Propagat. **14** (1966), no. 3, 302–307.
- [You01] J.L. Young, *High-order, leapfrog methodology for the temporally dependent Maxwell's equations*, Radio Science **36** (2001), no. 1, 9–17.
- [YP01] A. Yefet and P.G. Petropoulos, *A staggered fourth-order accurate explicit finite difference scheme for the time-domain Maxwell's equations*, J. Comput. Phys. **168** (2001), no. 2, 286–315.
- [ZBM04] A.R. Zakharian, M. Brio, and J.V. Moloney, *FDTD based second-order accurate local mesh refinement method for Maxwell's equations in two space dimensions*, Comm. Math. Sci. **2** (2004), no. 3, 497–513.
- [ZW04] S. Zhao and G.W. Wei, *High-order FDTD methods via derivative matching for Maxwell's equations with material interfaces*, J. Comput. Phys. **200** (2004), no. 1, 60–103.

## Méthodes de type Galerkin discontinu d'ordre élevé pour la résolution numérique des équations de Maxwell instationnaires sur des maillages simplex non-conformes

**Résumé:** Ce travail porte sur le développement d'une méthode Galerkin discontinue (GDDT) d'ordre élevé pour la résolution numérique des équations de Maxwell instationnaires sur des maillages simplex non-conformes. On présente tout d'abord une méthode GDDT reposant sur des fonctions de base nodales pour approcher le champ électromagnétique dans un simplexe, un schéma centré pour évaluer les flux numériques aux interfaces entre cellules voisines et un schéma saute-mouton du second ordre pour l'intégration temporelle. De plus, cette méthode autorise l'utilisation de maillages non-conformes présentant un nombre arbitraire de nœuds flottants. La méthode résultante est non-dissipative, stable sous une condition de type CFL, conserve un équivalent discret de l'énergie électromagnétique, et très peu dispersive. Afin de diminuer le coût de calcul de cette méthode, on propose une méthode GDDT de type  $hp$ , qui combine  $h$ -raffinement et  $p$ -enrichissement locaux tout en préservant la stabilité. On réalise ensuite une étude numérique détaillée des méthodes GDDT sur la base d'une série de problèmes de propagation d'ondes en milieux homogène et hétérogène. En particulier, on effectue une comparaison des méthodes Galerkin discontinues conformes et non-conformes en termes de précision, convergence et coûts de calcul. Afin d'améliorer la précision et la vitesse de convergence des méthodes GDDT précédentes, on étudie une famille de schémas saute-mouton d'ordre arbitrairement élevé. Ces schémas temporels nous assurent sur tout maillage la conservation d'un équivalent discret de l'énergie électromagnétique ainsi que la stabilité des méthodes GDDT résultantes sous une condition de type CFL. On réalise aussi une étude de convergence  $hp$  *a priori* ainsi qu'une étude de convergence de l'erreur sur la divergence. Des expériences numériques montrent que pour un maillage donné, le schéma saute-mouton du quatrième ordre est moins coûteux en temps de calcul et plus précis que le schéma saute-mouton du second ordre, en dépit d'une complexité arithmétique accrue. De plus, on obtient une convergence exponentielle avec le schéma saute-mouton du quatrième ordre.

**Mots clefs :** électromagnétisme - équations de Maxwell - méthode Galerkin discontinue - méthode de type  $hp$  - maillage non-conforme - maillage localement raffiné - stabilité - convergence - précision d'ordre élevé.

## High-order discontinuous Galerkin methods for solving the time-domain Maxwell equations on non-conforming simplicial meshes

**Abstract:** This work is concerned with the development of a high-order discontinuous Galerkin time-domain (DGTD) method for solving Maxwell's equations on non-conforming simplicial meshes. First, we present a DGTD method based on high-order nodal basis functions for the approximation of the electromagnetic field within a simplex, a centered scheme for the calculation of the numerical flux at an interface between neighboring elements, and a second-order leap-frog time integration scheme. Moreover, the mesh is refined locally in a non-conforming way resulting in arbitrary level hanging nodes. The resulting method is non-dissipative, stable under some CFL-like condition, conserves a discrete version of the electromagnetic energy, and does not introduce much dispersion error. To reduce the computational costs of the method, we propose a  $hp$ -like DGTD method which combines local  $h$ -refinement and  $p$ -enrichment. Then, we report on a detailed numerical evaluation of the DGTD methods using several propagation problems in homogeneous and heterogeneous media. In particular, we compare the conforming and non-conforming DGTD methods in terms of accuracy, convergence and computational costs. In order to improve the accuracy and rate of convergence of the DGTD methods previously studied, we study a family of high-order explicit leap-frog time schemes. These time schemes ensure the conservation of the electromagnetic energy as well as the stability under some CFL-like condition. We also establish rigorously the convergence of the semi-discrete approximation to Maxwell's equations and we provide bounds on the global divergence error. Numerical experiments show that for a given mesh resolution, the fourth-order leap-frog scheme is more accurate and requires less CPU time than the second-order scheme, despite an increased computational overhead. Furthermore, we obtain a spectral convergence with the fourth-order leap-frog scheme.

**Key words :** electromagnetism - Maxwell's equations - discontinuous Galerkin method -  $hp$ -like method - non-conforming mesh - locally refined mesh - stability - convergence - high-order accuracy.