



**HAL**  
open science

# Comportement des matériaux cellulaires : élaboration, caractérisation et modélisation prédictive des propriétés

Nicolas Auffray

► **To cite this version:**

Nicolas Auffray. Comportement des matériaux cellulaires : élaboration, caractérisation et modélisation prédictive des propriétés. Mécanique [physics.med-ph]. Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG, 2008. Français. NNT : . tel-00360837v1

**HAL Id: tel-00360837**

**<https://theses.hal.science/tel-00360837v1>**

Submitted on 12 Feb 2009 (v1), last revised 4 Mar 2009 (v2)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE**

N° attribué par la bibliothèque

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

**THESE**

pour obtenir le grade de

**DOCTEUR DE L'INPG**

***Spécialité : Matériaux, Mécanique, Génie Civil, Electrochimie***

préparée au Département Matériaux et Structures Métalliques de  
l'Office National d'Etudes et de Recherches Aérospatiales  
dans le cadre de l'***Ecole Doctorale Ingénierie - Matériaux, Mécanique,  
Environnement, Energétique, Procédés, Production***

présentée et soutenue publiquement

par

**Nicolas AUFFRAY**

le 17 décembre 2008

**Titre :**

Comportement des matériaux cellulaires ; élaboration, caractérisation et  
modélisation prédictive des propriétés

***Directeur de thèse :***

Yves BRECHET

**JURY**

M. Pierre GILORMINI  
M. Giuseppe GEYMONAT  
M. Yves BRECHET  
M. Régis BOUCHET  
M. Samuel FOREST  
M. Denis GRATIAS

, Rapporteur  
, Rapporteur  
, Directeur de thèse  
, Co-encadrant  
, Examineur  
, Examineur



L'univers (que d'autres appellent la Bibliothèque) se compose d'un nombre indéfini, et peut-être infini, de galeries hexagonales, avec au centre de vastes puits d'aération bordés par des balustrades basses.[...] Qu'il me suffise, pour le moment, de redire la sentence classique : la Bibliothèque est une sphère dont le centre véritable est un hexagone quelconque, et dont la circonférence est inaccessible.

La Bibliothèque de Babel, *Jorge Luis Borges*.

Un enfant de 5 ans comprendrait ça ! Allez me chercher un enfant de 5 ans !

*Groucho Marx*



## Remerciements

L'incipit consacré aux remerciements de thèse est probablement la partie de la thèse qu'il est la plus difficile à rédiger. Comment rendre en si peu de place ce que les gens qui nous ont accompagné pendant ces trois années nous ont apporté ? La tâche est invraisemblable, l'exercice de style ardu. Mais je m'y risque avec bon cœur, en espérant n'oublier personne.

Je désire consacrer mes premiers mots à mes encadrants. Tout d'abord à Régis Bouchet à qui ce travail doit beaucoup, et à qui humainement je dois encore plus. J'aimerais saluer ici sa très grande compétence scientifique, son écoute et sa rigueur. A son contact j'ai appris les vertus du doute, l'exigence de la précision, le dépassement des certitudes trop vite acquises. Il a été un encadrant, il est devenu un ami. Son encadrement a été complété par celui d'Yves Bréchet, à qui, par ces quelques lignes, je témoigne toute mon amitié et ma gratitude. Homme encyclopédique, lecteur d'Athanasius Kircher et d'Alexandre Vialatte, spécialiste de la biophysique des applaudissements et de l'émergence de la géométrie projective, j'ai énormément appris à son contact, au scientifique comme au littéraire. Et en attendant la suite de ces aventures intellectuelles, je le remercie déjà pour tout cela.

Je désire remercier également les membres de mon jury de thèse : pour avoir examiné mon travail, ainsi que pour les commentaires et remarques qu'ils ont pu m'en faire. Je remercie en premier lieu Denis Gratias qui m'a fait l'honneur de présider mon jury. Sa disponibilité, son écoute, ses conseils éclairés ainsi que l'intérêt qu'il a témoigné pour mon travail m'ont aidé à avancer. Je désire aussi saluer mes rapporteurs : Pierre Gilormini (déjà rapporteur de mon mémoire de M2,... et à un de ces jours pour l'HDR) ainsi que Giuseppe Geymonat, pour la relecture minutieuse d'un rapport conséquent et pour les remarques qu'ils m'en ont fait. Et finalement Samuel Forest, qui a été un guide dans l'exploration de ce continent fascinant qui est celui des milieux continus généralisés.

Une thèse n'étant rien sans un laboratoire d'accueil, je tiens, à présent, à exprimer toute ma gratitude à Shigehisa Naka ainsi qu'à Marie-Pierre Bacos pour m'avoir accueilli, respectivement, au DMSM (Département Matériaux et Structures Métalliques) de l'Onera, ainsi qu'au sein de l'unité MAT (Matériaux et ArchiTectures).

Tandis que j'en suis à évoquer le DMSM, je profite de ces lignes pour saluer mes collègues et amis de tous les jours : \_ Pierre Jossal, le Josso singulier ; \_ Seb, qui s'il sait bien c'est parce qu'il regarde des documentaires ; \_ Jérôme, dit le petit bonhomme en mousse, apprenti à titre

perpétuel et couteau suisse de la science ; \_ Eric dont la nonchalance caustique nous rappelle un célèbre inspecteur allemand récemment décédé ; \_ Cécile au sens de l'humour et de l'emploi du temps affûtés ; \_ Vincent, dealer en chocolat dont le brownie est à réclamer en toutes occasions ; \_ Antoine, l'inénarrable doubleur de flipper le dauphin dans sa version française ; \_ Fady, ancien doctorant devenu mascotte chez Michelin ; \_ Annick Doucet dont le professionnalisme m'a beaucoup touché. Ainsi que toutes les autres personnes avec qui j'ai interagi au cours de ces années et que je ne cite que rapidement faute de place : Jean-Louis, les Serge, Franck, les Anaïs, Alain, Denis, Yves, Martine, Monique, Fabienne, les Catherine, Odile, Sarah, Thierry, Yveline, Sophie, Christelle, Anna, Aurelie, Arnaud, Remy, Marc, les Pierre, les Didiers, Agnes, Ariel, Marie-Hélène, les Gilles...

Je pense aussi à tout mes amis de l'extérieur, scientifique ou non, qui pendant trois ans ont essayé de comprendre ce que je faisais. Je les remercie de leurs amitiés, de leur patience et de leurs encouragements. Je pense également à mes parents sans qui rien de tout cela n'aurait été possible. Et presque pour finir, j'envoies toutes mes pensées et mes remerciements, pour sa présence et sa patience, *a la mia bella Selene*.

Et pour finir maintenant tout à fait, ce travail est dédié à la petite Lucille, dont l'arrivée à une semaine de ma soutenance a empêché son papa, Guilhem, d'être présent à la soutenance de son ami des Arts...On en reparlera quand tu seras plus grande.

...Et encore une fois : Merci à tous !...

<b>Remerciements</b>		<b>5</b>
<b>Table des matières</b>		<b>1</b>
<b>Introduction</b>		<b>7</b>
<b>Contexte</b>		<b>11</b>
<b>I Milieux cellulaires : De la conception au calcul des propriétés physiques</b>		<b>15</b>
<b>I-1 Conception et modélisation de matériaux cellulaires</b>		<b>17</b>
I-1.1 Acoustique des milieux poreux . . . . .		17
I-1.1.1 Travaux antérieurs . . . . .		18
I-1.1.2 Vérification expérimentale . . . . .		18
I-1.1.3 Modèle d'acoustique phénoménologique . . . . .		20
I-1.2 Architecture nida . . . . .		22
I-1.2.1 Construction d'un nida . . . . .		23
I-1.2.2 Expression générale de la densité relative d'un nida . . . . .		30
I-1.3 Synthèse . . . . .		35
<b>I-2 Modélisation mécanique d'un milieu hétérogène</b>		<b>37</b>
I-2.1 Élasticité linéaire d'un matériau cellulaire . . . . .		37
I-2.1.1 Démarche de modélisation . . . . .		37
I-2.1.2 Interprétation des effets d'échelle . . . . .		38
I-2.2 Modélisation du comportement élastique . . . . .		40
I-2.2.1 Calculs complet par élément-finis . . . . .		40
I-2.2.2 Modèles analytiques . . . . .		41
I-2.2.3 Milieu de substitution . . . . .		45
I-2.2.4 Milieu élastique homogène du second gradient . . . . .		49
I-2.3 Synthèse . . . . .		51



<b>I-3</b>	<b>Détermination du milieu effectif</b>	<b>53</b>
I-3.1	Condition de contour non-homogène . . . . .	54
I-3.2	Relations de moyenne . . . . .	55
I-3.3	Élasticité linéaire . . . . .	57
I-3.3.1	Tenseurs de localisation . . . . .	57
I-3.3.2	Expression des modules effectifs . . . . .	58
I-3.3.3	Formulation énergétique . . . . .	59
I-3.4	Calcul des propriétés effectives . . . . .	61
I-3.4.1	Principe . . . . .	61
I-3.4.2	Calcul d'un milieu effectif géométriquement isotrope . . . . .	62
I-3.4.3	Calcul de milieux effectifs géométriquement anisotropes . . . . .	66
I-3.5	Synthèse . . . . .	68
<b>I-A</b>	<b>Modèles d'acoustique phénoménologiques -Application à la conception de matériau sur mesure-</b>	<b>71</b>
<b>I-B</b>	<b>Essais acoustiques</b>	<b>79</b>
I-B.1	Fabrication . . . . .	79
I-B.2	Essais acoustiques . . . . .	80
I-B.2.1	Mesures d'absorption acoustique en tube de Kundt . . . . .	80
I-B.2.2	Résultats de mesure . . . . .	81
I-B.3	Synthèse . . . . .	84
<b>II</b>	<b>Comportement anisotrope des milieux du second gradient</b>	<b>85</b>
<b>II-1</b>	<b>Vers une théorie de l'anisotropie des milieux du second gradient</b>	<b>87</b>
II-1.1	Historique . . . . .	87
II-1.2	Démarche . . . . .	88
II-1.2.1	Principe général . . . . .	88
II-1.2.2	Décomposition de tenseur . . . . .	88
II-1.2.3	Élasticité du second gradient . . . . .	90
II-1.3	Annexes de la seconde partie . . . . .	91
<b>II-2</b>	<b>Loi de comportement d'un milieu élastique du second gradient</b>	<b>93</b>
II-2.1	Symétries tensorielles . . . . .	93
II-2.2	Milieu de Cauchy . . . . .	94
II-2.3	Conventions pour l'étude d'un milieu à gradient de déformation . . . . .	95
II-2.3.1	Loi de comportement . . . . .	95
II-2.4	Étude des symétries indicielles . . . . .	97
II-2.4.1	Études des petites symétries . . . . .	98
II-2.4.2	Études des grandes symétries . . . . .	98
II-2.4.3	Synthèse et discussion . . . . .	99
II-2.5	Détermination de la dimension de la loi de comportement . . . . .	100
II-2.5.1	Dimension des opérateurs de comportement . . . . .	100
II-2.5.2	Synthèse . . . . .	102
II-2.6	Synthèse . . . . .	102

<b>II-3</b>	<b>Symétries matérielles et physiques</b>	<b>103</b>
II-3.1	Symétries matérielles et symétries physiques . . . . .	103
II-3.2	Groupe de symétrie d'un milieu à gradient de déformation . . . . .	104
II-3.3	Sous-groupes de $SO(3)$ . . . . .	107
	II-3.3.1 Groupes plans . . . . .	107
	II-3.3.2 Groupes spatiaux . . . . .	110
II-3.4	Synthèse . . . . .	114
<b>II-4</b>	<b>Décomposition et représentation des tenseurs</b>	<b>115</b>
II-4.1	Décomposition harmonique des tenseurs . . . . .	115
	II-4.1.1 Principe de la décomposition harmonique . . . . .	116
	II-4.1.2 Insuffisance de l'approche classique . . . . .	117
	II-4.1.3 Approche spectrale . . . . .	121
	II-4.1.4 Discussion . . . . .	126
II-4.2	Tableaux de décomposition . . . . .	127
	II-4.2.1 Sous-espaces invariants . . . . .	127
	II-4.2.2 Représentation diagrammatique de la décomposition harmonique	128
	II-4.2.3 Décomposition de Cartan . . . . .	130
	II-4.2.4 Discussion . . . . .	132
<b>II-5</b>	<b>Étude des invariances</b>	<b>137</b>
II-5.1	Prise en compte des invariances . . . . .	137
II-5.2	Étude des groupes plans . . . . .	138
	II-5.2.1 Groupes cycliques . . . . .	139
	II-5.2.2 Groupes diédraux . . . . .	140
	II-5.2.3 Synthèse . . . . .	143
II-5.3	Étude des groupes spatiaux . . . . .	149
	II-5.3.1 $\mathcal{T}$ -invariance . . . . .	149
	II-5.3.2 $\mathcal{O}$ -invariance . . . . .	152
	II-5.3.3 $\mathcal{I}$ -invariance . . . . .	153
	II-5.3.4 $SO(3)$ -invariance . . . . .	156
	II-5.3.5 Synthèse . . . . .	156
II-5.4	Synthèse . . . . .	157
<b>II-A</b>	<b>Algorithme d'étude des symétries spatiales</b>	<b>159</b>
II-A.1	Introduction . . . . .	159
II-A.2	Principe de la méthode . . . . .	160
	II-A.2.1 Paramétrisation du tétraèdre . . . . .	160
	II-A.2.2 Insuffisance de l'approche directe . . . . .	161
	II-A.2.3 Approche retenue . . . . .	162
II-A.3	Fonctionnement de l'algorithme . . . . .	163
	II-A.3.1 Polynômes harmoniques . . . . .	163
	II-A.3.2 Connexions des différentes bases . . . . .	163
	II-A.3.3 Obtention des invariances spatiales . . . . .	164
II-A.4	Détail des calculs . . . . .	166
	II-A.4.1 Calcul de la $Z_3$ -invariance de $\mathbb{H}^6$ . . . . .	166
	II-A.4.2 Calcul de la $\mathcal{T}$ -invariance de $\mathbb{H}^6$ . . . . .	169
	II-A.4.3 Calcul de la $\mathcal{O}$ -invariance de $\mathbb{H}^6$ . . . . .	170
	II-A.4.4 Calcul de la $\mathcal{I}$ -invariance de $\mathbb{H}^6$ . . . . .	171

II–A.5 Synthèse . . . . .	173
<b>II–B Formalisme matricielle des équations de comportement</b>	<b>175</b>
II–B.1 Écriture matricielle . . . . .	175
II–B.2 Approche énergétique . . . . .	177
II–B.3 Approche algébrique . . . . .	177
II–B.3.1 Espaces tensorisés . . . . .	177
II–B.3.2 Espaces vectoriels de tenseurs . . . . .	178
II–B.3.3 Tenseurs associés à un espace de description . . . . .	179
II–B.3.4 Conséquence d’un changement de base de $\mathcal{E}$ . . . . .	180
II–B.4 Synthèse . . . . .	181
<b>II–C Groupe de symétrie d’un milieu élastique de degré <math>n</math></b>	<b>183</b>
II–C.1 Introduction . . . . .	183
II–C.2 Hypothèses et loi de comportement . . . . .	183
II–C.3 Groupe de symétrie de la loi de comportement . . . . .	184
II–C.3.1 Modélisation du problème . . . . .	184
II–C.3.2 Groupe de symétrie . . . . .	185
II–C.4 Discussion . . . . .	186
II–C.5 Synthèse . . . . .	187
<b>II–D Démonstration du théorème d’Hermann à partir de la méthode Forte-Vianello</b>	<b>189</b>
<b>II–E Phénomène de saut de classe dans un espace physique de dimension 2</b>	<b>197</b>
<b>III Opérateur de comportement du second ordre</b>	<b>207</b>
<b>III–1 Dérivation des opérateurs du second ordre en dimension 2</b>	<b>209</b>
III–1.1 Introduction . . . . .	212
III–1.2 Mindlin’s strain gradient elasticity . . . . .	212
III–1.3 Change of space . . . . .	213
III–1.3.1 Matrix representation . . . . .	213
III–1.3.2 Change of space formalism . . . . .	214
III–1.4 Derivation of anisotropic operators . . . . .	217
III–1.4.1 Expression of invariance . . . . .	217
III–1.4.2 $Z_n$ -material invariance . . . . .	218
III–1.4.3 $D_n$ -material invariance . . . . .	221
III–1.5 Discussion . . . . .	223
III–1.5.1 Class jump phenomenon . . . . .	223
III–1.5.2 Chiral sensitivity . . . . .	225
III–1.5.3 Anisotropy of plane periodic tiling . . . . .	226
III–1.6 Conclusion . . . . .	228
III–1.7 Compléments à l’article . . . . .	229
III–1.7.1 Représentation graphique d’un tenseur . . . . .	229
III–1.7.2 Système de mécanismes . . . . .	237
III–1.7.3 Système des valeurs propres . . . . .	241

<b>III-2 Propriétés des opérateurs du second ordre</b>	<b>245</b>
III-2.1 Étude des matrices d'élasticité du second-ordre . . . . .	245
III-2.1.1 Calcul d'un milieu effectif géométriquement isotrope . . . . .	246
III-2.1.2 Calcul de milieux effectifs géométriquement anisotropes . . . . .	249
III-2.2 Vérification du théorème de Hermann . . . . .	253
III-2.2.1 Étude d'une cellule octogonale . . . . .	253
III-2.2.2 Étude d'une cellule pentagonale . . . . .	255
III-2.2.3 Synthèse sur les valeurs propres de nos opérateurs . . . . .	256
III-2.3 Milieux chiraux . . . . .	258
III-2.4 Synthèse . . . . .	261
<b>III-3 Comportement élastique effectif des nidas</b>	<b>263</b>
III-3.1 Étude de l'influence de la zone de contact . . . . .	264
III-3.1.1 Paramétrisation de l'interface de contact . . . . .	264
III-3.1.2 Élasticité du premier ordre . . . . .	266
III-3.1.3 Élasticité du second ordre . . . . .	270
III-3.1.4 Synthèse . . . . .	275
III-3.2 Calcul des propriétés d'un matériau réel . . . . .	276
III-3.2.1 Absorption acoustique . . . . .	276
III-3.2.2 Élasticité . . . . .	277
III-3.2.3 Synthèse . . . . .	279
<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>281</b>
<b>Conclusion générale et perspectives</b>	<b>283</b>
<b>Annexes</b>	<b>287</b>
<b>A Notations</b>	<b>289</b>
A.1 Notations tensorielles . . . . .	289
A.2 Espaces vectoriels . . . . .	289
A.3 Acoustique et géométrie . . . . .	290
A.4 Mécanique . . . . .	290
A.5 Mathématique . . . . .	291
A.6 Symétries . . . . .	291
A.7 Classification symétrie cristalline . . . . .	292
A.7.1 Sous-groupe des $O(3)$ de type I . . . . .	292
A.7.2 Sous-groupes de $O(3)$ de type II . . . . .	292
A.7.3 Sous-groupes de $O(3)$ de type III . . . . .	293
<b>Bibliographie</b>	<b>295</b>



La conception de matériaux innovants pour l'aérospatial doit satisfaire à deux critères essentiels : \_augmentation des performances mécaniques ; \_minimisation de la masse. Cette double exigence conduit à s'intéresser à la classe des matériaux cellulaires. Ces matériaux ont la spécificité que leurs propriétés physiques dépendent à la fois de leur matériau constitutif ainsi que de l'agencement spatial de ce matériau au sein d'une architecture à l'échelle millimétrique. Les mousses métalliques et les nid-d'abeilles sont des exemples canoniques de matériaux cellulaires.

Toutefois pour être intégrés dans la réalisation de pièces industrielles, le comportement de ces matériaux doit être facilement calculable. Or l'hétérogénéité géométrique de ces matériaux constitue un problème pour un bureau d'étude : le maillage, pour un calcul par éléments-finis, de l'ensemble de l'architecture conduit à une explosion du temps de calcul. Il est, de fait, nécessaire de déterminer une stratégie de calcul adaptée à la réalité des besoins industrielles des bureaux d'étude.

Les phénomènes linéaires étant une première étape nécessaire à la compréhension de tout comportement complexe, une étude rigoureuse de leur modélisation est indispensable avant d'envisager une généralisation à d'autres types de comportement. De fait, nous concentrerons, au cours de ce travail, notre intérêt à l'étude des propriétés d'élasticité linéaire des matériaux cellulaires. Une méthode d'étude classique de ce problème passe par la définition d'un milieu homogène équivalent ayant les mêmes propriétés élastiques que celles du milieu cellulaire [1,2]. L'étude des propriétés physiques de ce milieu homogène équivalent permet de formuler un certain nombre de résultats généraux quant à celles du milieu hétérogène initial. Toutefois l'application de ces techniques d'« homogénéisation » repose sur l'hypothèse que l'échelle de la microstructure est très petite devant celle de la fluctuation des champs mécaniques. Or comme montré dans la thèse de Cardona [3] cette hypothèse peut être mise en défaut dans le cas de nombreuses structures réelles. La taille des hétérogénéités en font des structures à « gros grains » [4,5].

La perte de cette nette séparation des échelles ne remet cependant pas en cause la possibilité de définir un milieu de substitution. Toutefois, comme montré dans de nombreuses études [6-9], le milieu effectif obtenu dans ce cas là possédera une cinématique plus riche que celle d'un milieu classique : on obtient un milieu continu généralisé [9]. Il est donc possible de conserver l'idée d'étudier un matériau hétérogène via un milieu homogène équivalent si l'on accepte que

celui-ci soit de type généralisé.

Toutefois l'ensemble de ces travaux ne s'est intéressé qu'à l'écriture de la forme globale des équations de comportement sans établir les formes particulières induites par les symétries matérielles du milieu initial. En d'autres termes, les liens entre symétries matérielles et systèmes d'anisotropies n'ont pas, ou peu, été étudiés. L'étude de la littérature [7, 9, 10] révèle que le seul système qui soit connu est celui de l'isotropie. La connaissance de ce seul système constitue une limitation à l'étude des milieux cellulaires anisotropes par la technique envisagée.

De fait, la détermination complète de différents systèmes d'anisotropie est actuellement une nécessité vis-à-vis de l'étude des propriétés élastiques de structures mesoscopiques. La connaissance de la forme des différents opérateurs permettra de plus l'implémentation de ce comportement dans un logiciel de calcul par éléments-finis comme ZeBuLoN. Nous nous intéresserons dans cette optique à la détermination de ces opérateurs anisotropes dans le cas d'un milieu généralisé particulier : l'élasticité du second-gradient [10].

Ce manuscrit de thèse se décline en 3 parties. Nous l'introduisons avec la partie « Milieux cellulaires : De la conception au calcul des propriétés physiques ». Au cours de celle-ci, qui regroupe 3 chapitres, nous nous intéresserons à répondre aux questions suivantes :

- à quels types de géométries allons nous restreindre notre problème ?
- quels sont les propriétés physiques que nous considérerons ?
- comment calculer le comportement d'un tel milieu ?

Ces questions constituent ainsi le triptyque canonique : *Géométrie, Propriété, Calcul*.

Nous commencerons, au chapitre I-1, par définir les géométries que nous retiendrons pour nos matériaux cellulaires. Le degré de liberté associé à cette première question est plus limité que les autres en ce sens que ce travail est la continuation du travail de Gasser [11]. Ce dernier a mis en avant l'intérêt d'une structure de type « nid d'abeille » (que nous écrirons simplement « nida » dans la suite de ce document) vis-à-vis de la dissipation acoustique. De fait nous construirons, en grande partie, notre travail autour de cette notion de « nida », notion qu'il nous faudra définir.

Le chapitre suivant I-2 exposera notre réponse à la seconde question. Nous avons fait le choix de nous intéresser, au cours de cette thèse, à l'élasticité linéaire des nidas. Notre principale motivation à cela est que l'élasticité étant le point de départ des autres comportements mécaniques, on ne peut pas faire l'économie d'une étude détaillée de ce comportement. Pour traiter le problème de manière plus générale qu'en effectuant une série de calculs par éléments-finis, nous étudierons les propriétés d'un milieu élastique « équivalent ». Ce milieu équivalent sera retenu comme étant un milieu continu généralisé du type second-gradient.

Le dernier point de cette partie concernera le calcul des propriétés d'un tel milieu. L'exposé de la méthode d'homogénéisation au second ordre que nous décrirons au chapitre I-3 répond ainsi à la troisième question. Cette méthode permettra de lier les propriétés du milieu effectif aux paramètres géométriques et matériaux du nida. Toutefois l'analyse fine des résultats obtenus nécessite la connaissance des opérateurs d'anisotropie du second ordre. Ces opérateurs n'étant, pour une grande partie d'entre eux, pas disponibles dans la littérature il nous faudra procéder à leur étude. Cette étude sera l'objectif de la seconde partie de ce manuscrit.

La deuxième partie de ce manuscrit de thèse s'intitule « Comportement anisotrope des milieux du second gradient » et constitue le coeur de notre travail de thèse. Cette partie se découpe

en sept chapitres, et débute au chapitre II-1 par une introduction présentant de manière technique les problématiques qui y seront traitées, ainsi que la méthodologie que nous mettrons en oeuvre pour y répondre. Les chapitres suivants traiteront chacun d'un point particulier de cette démarche.

Le chapitre II-2 sera consacré à la définition précise des équations de l'élasticité du second gradient. L'objectif sera de définir les conventions de travail et de notation utilisées systématiquement par la suite. Nous établirons ensuite, au cours du chapitre II-3, de manière rigoureuse ce que l'on appellera le groupe de symétrie de notre loi de comportement. Nous définirons, de même, au cours de ce chapitre les liens qui unissent les groupes de symétrie et les symétries des polyèdres, ce lien étant l'outil conceptuel sur lequel se base notre travail. Le chapitre II-4 s'intéressera ensuite à la manière dont nous pouvons facilement et rapidement décomposer et représenter nos opérateurs de comportement. Ceci nous permettra, au cours du chapitre II-5, d'établir, pour chacun des systèmes de symétrie identifiés au chapitre II-3, la forme générale des opérateurs associés. Nous pourrions alors conclure sur le nombre de systèmes d'anisotropie différents pour l'élasticité à gradient de déformation, ainsi que sur le nombre des coefficients définissant chacun de ces systèmes.

La troisième partie de cette thèse est la rencontre des deux précédentes. Nous y ferons la synthèse de résultats théoriques sur les classes de symétrie obtenus au cours de la partie II avec les opérateurs construits à partir de la procédure d'homogénéisation introduite à la fin de la partie I. Le chapitre III-1 sera consacré à la dérivation de l'expression analytique des opérateurs élastiques du second ordre dans chacun des systèmes d'anisotropies. Les opérateurs obtenus seront ceux à intégrer dans un code de calculs éléments finis. Nous nous intéresserons à la dérivation de ces opérateurs en deux dimensions<sup>1</sup>. Nous reviendrons ensuite, au cours du chapitre III-2, à l'étude des opérateurs du second ordre construit par homogénéisation au chapitre I-3. Nous vérifierons de plus au cours de ce chapitre par éléments finis un certain nombre de propriétés de ces opérateurs. Le dernier chapitre de cette partie s'intéressera à la manière dont nos résultats peuvent être utilisés lors d'une phase de conception de matériaux cellulaires. Nous nous intéresserons à l'influence de la zone de contact entre les différentes cellules d'un milieu nida sur les propriétés effectives du matériau. Nous conclurons par la construction explicite des opérateurs associés à un matériau obtenu en laboratoire.

Nous commencerons tout d'abord ce manuscrit par une brève introduction du contexte dans lequel ce projet s'attache.

---

<sup>1</sup>La dérivation des opérateurs tridimensionnelles, que nous possédons, est l'objet d'une publication en cours de rédaction





Ce travail s'inscrit dans la thématique de la maîtrise de la pollution sonore. Et nous nous intéresserons plus particulièrement à la réduction des nuisances acoustiques générées par le trafic aérien au voisinage des aéroports. Nous présenterons dans les sections suivantes un exposé très général visant à préciser de manière technique ce qu'est le bruit d'un avion, ainsi que le cahier des charges d'un absorbeur acoustique.

## Les sources de bruit

Une première classification des sources de bruits (fig.1(a)) peut-être faite sur leurs localisations. Ainsi nous pouvons distinguer le *bruit de cellule*, engendré par l'écoulement de l'air autour du corps de l'appareil (*bruit aérodynamique*), et les *bruits moteurs* dûs à leurs fonctionnement.

Le bruit de cellule est dû aux fortes interactions de l'écoulement avec les appendices solides de l'aéronef (trains d'atterrissage, bords de bord d'attaque, volets de bord de fuite, etc. . . ), interactions se traduisant par la génération de phénomènes fortement turbulents et donc très bruyants. C'est un problème fortement couplé de mécanique des fluides et d'aéroacoustique qui est traité par les spécialistes de ces domaines.

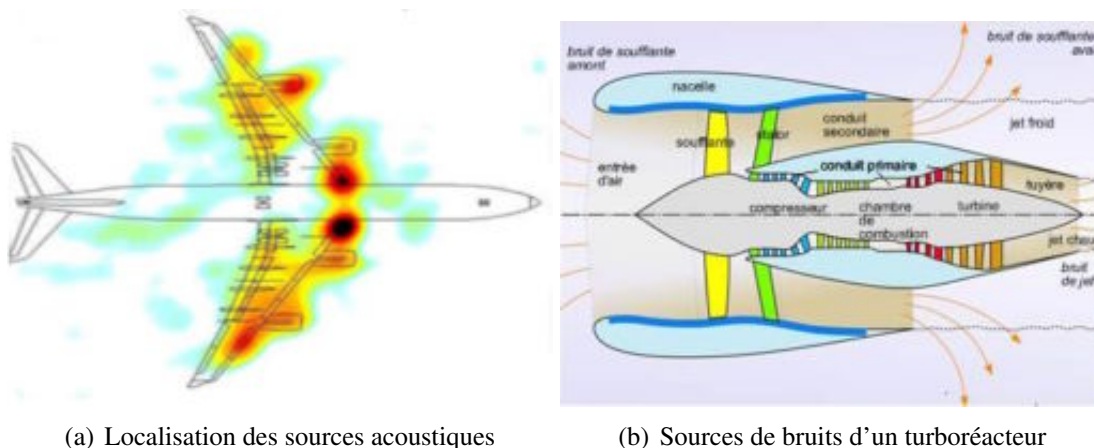


FIG. 1 – Sources de bruits d'un avion civil

Le bruit des turboréacteurs [12] est la résultante de plusieurs phénomènes (fig.1(b)) :

- bruit de soufflante : il prend son origine au niveau des aubages. Il se caractérise par un sifflement dont la fréquence fondamentale se situe vers 2kHz et il est dû à l'effet sur l'écoulement du passage des aubes du rotor devant les éléments du stator. Sa signature est, de fait, un spectre de raies (fig.2).
- bruit de turbine : il a la même origine que le bruit de soufflante. Il se caractérise par un spectre de raies aux hautes fréquences ainsi que par un bruit à large bande aux moyennes et hautes fréquences. Un bruit large bande est caractéristique de phénomènes turbulents.
- bruit de combustion : c'est un bruit à large bande aux basses et moyennes fréquences. Il est la conséquence de la combustion turbulente du kérosène au niveau du foyer.
- bruit de jet : il est lié à l'éjection rapide des gaz à la sortie de la tuyère. La zone de mélange entre l'air ambiant et les gaz éjectés est créatrice de structures turbulentes à l'origine d'un bruit à large bande dominant aux basses et moyennes fréquences.

La figure 2 résume les différentes signatures spectrales des bruits moteurs.

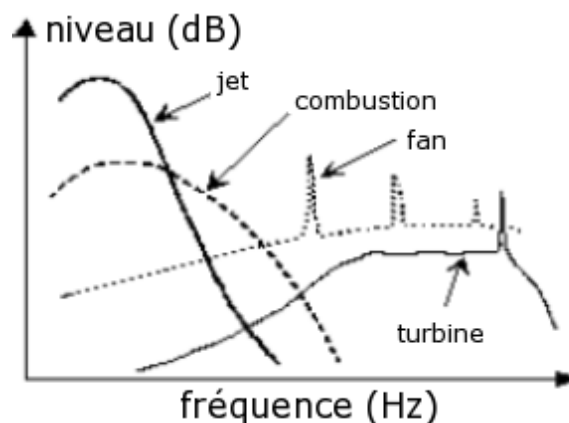


FIG. 2 – Spectre des bruits moteurs

On peut, de plus, classer les types de bruits moteurs en deux catégories : les bruits externes (bruit aérodynamique, bruit de jet), et les bruits internes (bruit de soufflante, turbine et combustion). Si le traitement des sources sonores externes est un problème essentiellement de mécanique des fluides et ne peut donc pas être découplé de l'aérodynamique du véhicule, le traitement des sources internes peut se faire en partie grâce au développement de matériaux qui absorbent l'énergie de l'onde acoustique rayonnée. La mise en oeuvre de ces matériaux au sein du moteur s'effectue par le revêtement des parties à traiter avec comme impératif de ne pas détériorer le rendement aérodynamique du moteur.

Le principe physique de fonctionnement de ces revêtements acoustiques est le suivant. L'onde rayonnée par les éléments moteurs se propage dans la nacelle du moteur et pénètre dans le matériau poreux. La petite taille des pores maximise les effets des couches limites visqueuse et thermique sur la propagation de l'onde, celle-ci voit ainsi son énergie acoustique se dissiper, convertie en énergie thermique au sein du matériau (fig.3).

Actuellement de tels traitements n'existent que dans les parties « froides » (soufflante) du moteur, les zones les plus chaudes, comme les tuyères, ne bénéficiant d'aucun traitement acoustique. De plus ces solutions passent par la mise en série de résonateurs dont les dimensions sont « accordées » sur les fréquences à atténuer. L'inconvénient majeur de cette solution est qu'elle n'est réellement efficace que pour l'atténuation des bruits de raies. Pour des sources sonores turbulentes dont les spectres sont à large bande les revêtements couramment utilisés sont trans-

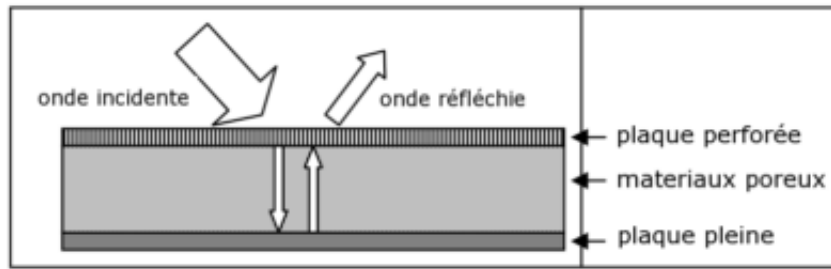


FIG. 3 – Principe de fonctionnement d'un revêtement acoustique

parents.

Aux vues des insuffisances des traitements acoustiques existant à l'heure actuelle, le développement de nouvelles classes de matériaux absorbants acoustiques constitue un domaine de recherche à fort potentiel industriel.

## Développement d'une solution matériau

La mise au point d'un matériau qui soit innovant passe par l'étude approfondie du cahier des charges. Pour être une solution acceptable le matériau doit satisfaire un certain nombre de critères [12] :

1. avoir les caractéristiques acoustiques voulues : spécifiées aux conditions représentatives de l'approche et du décollage, elles se définissent par des impédances optimales sur la plage de fréquences du bruit à traiter.
2. assurer des exigences mécaniques minimales :
  - (a) transmission des efforts (conduit aval soufflante en mode « reverse ») ;
  - (b) rétention des aubes ;
  - (c) fatigue vibratoire.
3. satisfaire des critères aéronautiques :
  - (a) légèreté ;
  - (b) minimisation des pertes aérodynamiques ;
  - (c) maintenabilité.
4. résister à l'environnement des turboréacteurs :
  - (a) tenue à haute température ( $\approx 900K$ ) ;
  - (b) tenue à la corrosion et à l'abrasion ;
  - (c) résistance au feu.

Un tel matériau est donc par essence un *matériau multifonctionnel*. La démarche de développement retenue est une approche « Material by Design ». Le cahier des charges est divisé en sous-parties et chaque exigence est traitée de manière indépendante et paramétrique. La détermination de la solution la mieux adaptée passe par une phase d'optimisation déterminant les caractéristiques du matériau vis-à-vis des exigences paramétriques associées.

Le premier projet de cette nature a été mené par Gasser [11] au cours de sa thèse. Son travail a porté sur l'étude des propriétés mécaniques et acoustiques d'un assemblage régulier de

sphères creuses. Son étude a notamment mis en avant l'intérêt des matériaux cellulaires pour l'application désirée et, plus particulièrement, la classe des matériaux poreux métalliques.

Les raisons ayant conduit au choix de cette classe de matériaux sont détaillées dans [11]. Si on les résume sommairement, ces raisons sont :

- les températures de fonctionnement excluent l'utilisation de polymères ;
- les problèmes de chocs, thermiques ou mécaniques, excluent l'utilisation de céramiques ;
- la porosité fermée du matériau permet de maximiser son module d'Young spécifique ( $\frac{E}{\rho}$ ) (critère déterminant pour une application aérospatiale) ;
- la porosité ouverte est une nécessité vis-à-vis de l'application acoustique.

C'est-à-dire, et pour résumer, que les propriétés mécaniques de ce type de matériau sont la résultante à la fois du choix d'un matériau constitutif ainsi que d'une architecture donnée. Ainsi « schématiquement » on pourrait dire que les caractéristiques physiques qui garantissent la tenue du matériau à haute température sont liées au choix du matériau constitutif. Les propriétés d'absorption acoustiques, quant à elles, sont liées à l'architecture du matériau cellulaire.

## Projet Mapo

Le projet MAPO, auquel appartient cette thèse, a pour objectif de généraliser l'approche « Material by Design » mise en oeuvre au cours de la thèse de Gasser. Les axes de cette généralisation sont :

- l'amélioration de la description géométrique des matériaux cellulaires étudiés ;
- l'exploration de nouvelles structures ;
- la diversification des propriétés physiques évaluables par cette méthode ;
- la mise en oeuvre de modèles de calcul adaptés à une problématique donnée.

Le but étant, à terme, de proposer un cadre d'étude conceptuel couplé à une série d'outils permettant la conception *a priori* de matériaux satisfaisant à un cahier des charges donné.

Dans le projet l'étude de ces structures se divise selon plusieurs axes :

- mécanique : étude des interactions entre comportement mécanique et géométrie (thèses de Fallet, Caty, Brugger, ainsi que celle-ci) ;
- acoustique : identification du comportement acoustique et validation des modèles (thèse de Lavielle) ;
- élaboration : mise au point de procédés de fabrication permettant sa réalisation (travaux de Lozat, Josso et Davoine).

## **Première partie**

### **Milieux cellulaires : De la conception au calcul des propriétés physiques**



# CHAPITRE I-1

## Conception et modélisation de matériaux cellulaires

Nous nous intéresserons tout au long de ce manuscrit au comportement de matériau de type « nid-d'abeille ». Tout d'abord nous reviendrons sur les raisons de ce choix, la section I-1.1 sera dévolue à cette tâche. Nous y présenterons des résultats du travail de thèse de Gasser [11] et nous montrerons la supériorité de cette classe de matériaux vis-à-vis de la dissipation d'énergie acoustique pour les spectres de bruits visés. Cette section s'appuiera pour cela sur deux chapitres présents aux annexes I-A et I-B. La première de ces annexes est un article présenté au CFM2007 qui traite du modèle d'acoustique phénoménologique sur lequel se base notre étude. La deuxième annexe, quant à elle, traite des essais qui ont été réalisés au DMSM sur des matériaux modèles. Notre but sera de montrer l'efficacité de ce modèle ainsi que l'importance de la description géométrique d'un matériau de type nida.

La second partie de ce chapitre s'intéressera à définir ce que l'on entend par nida. Nous proposerons à cette fin quelques définitions, ainsi qu'un procédé de construction abstrait de ce milieu. Nous introduirons ainsi une paramétrisation de nos structures qui nous permettra d'exprimer certaine grandeurs comme la densité relative en toute généralité. Les résultats de cette section seront réutilisés à de nombreuses reprises au cours de ce manuscrit.

### I-1.1 Acoustique des milieux poreux

L'objectif de l'approche *material-by-design* consiste à utiliser les liens qui unissent les propriétés physiques des matériaux architecturés à leurs topologies pour s'orienter, dès la phase de préconception, vers une architecture permettant au-dit matériau de maximiser son efficacité. L'acoustique des matériaux poreux est, à ce niveau, un excellent exemple des potentialités de cette approche. Par acoustique des matériaux poreux nous entendons les phénomènes dissipatifs qui prennent place au coeur de ces matériaux quand des ondes acoustiques viennent à les traverser.

Les modes de dissipation de l'énergie acoustique au sein des matériaux poreux sont essentiellement liés aux couches limites visqueuses et thermiques [11, 13, 14]. L'énergie de l'onde acoustique se dissipe en frottement au contact de la surface du réseau poreux et par transfert thermique irréversible au contact de cette même surface.



### I-1.1.1 Travaux antérieurs

Les graphiques de la figure I-1.1 sont des résultats de simulations issus de la thèse de Gasser [11]. Les graphiques ont pour abscisses les fréquences et pour ordonnées  $\alpha$  le coefficient d'absorption acoustique du matériau. Les spectres d'absorption obtenus sur les matériaux poreux sont à large bande (fig.I-1.1(b), fig.I-1.1(d)), leurs avantages par rapport à un résonateur d'Helmholtz (fig.I-1.1(a)) sont évidents. Le système actuel est celui représenté par la figure I-1.1(c) cette solution semble *a priori* plus efficace que celle se basant sur la structure sphères creuses, toutefois l'encombrement de cette dernière structure est nettement moindre. La structure de type  $\mu$ nida (fig.I-1.1(d)) établit un consensus quant aux performances acoustiques obtenues, celles-ci étant supérieures à celles des autres systèmes. Ce sont ces constatations qui ont motivé l'étude des  $\mu$ nida. Toutefois ces résultats théoriques n'ont jusqu'alors pas été vérifiées expérimentalement.

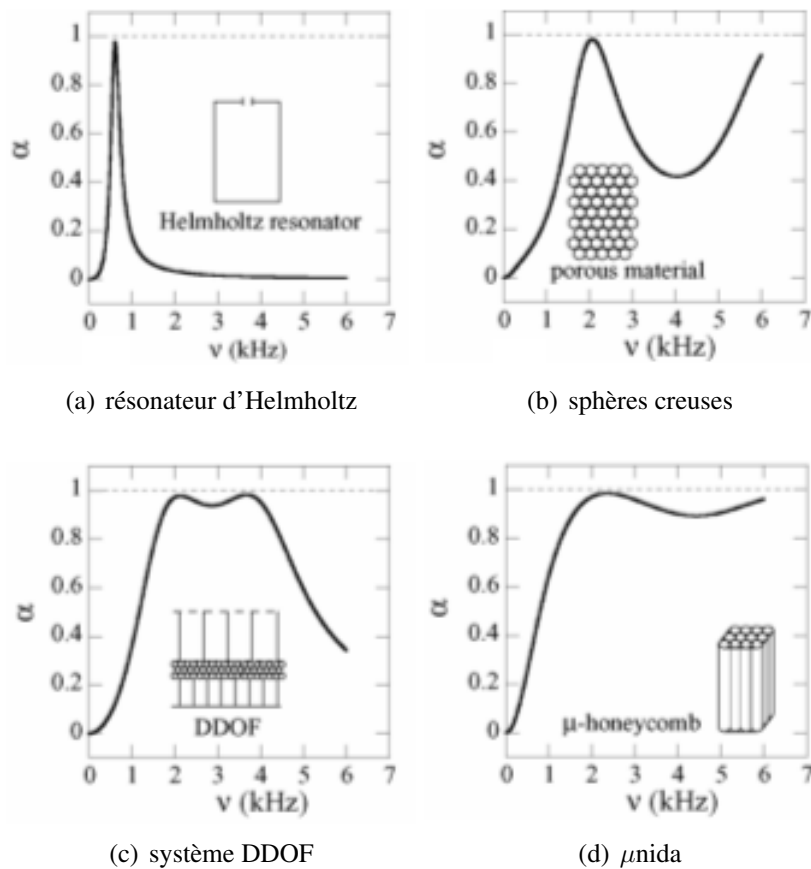


FIG. I-1.1 – Comparaison de l'absorption acoustique pour divers types de matériaux

### I-1.1.2 Vérification expérimentale

Au cours de cette thèse, ainsi qu'au cours d'études menées en parallèle au DMSM, une série de matériaux modèles a été réalisée. La figure I-1.2 est un prototype de  $\mu$ nida que nous avons élaboré. Cette structure est un assemblage de tubes de rayon intérieur  $R_i = 0,25$  mm, de rayon extérieur  $R_e = 0,15$  mm et d'une longueur de 30 mm. La structure résultante est un cylindre de diamètre extérieur 26 mm. Nous avons également étudié l'absorption réalisée par un empilement gravitaire de sphères creuses (fig.I-1.3). Les sphères de cet empilement ont un diamètre extérieur de 3 mm et le plot a une hauteur de 26 mm pour un diamètre de 28 mm.

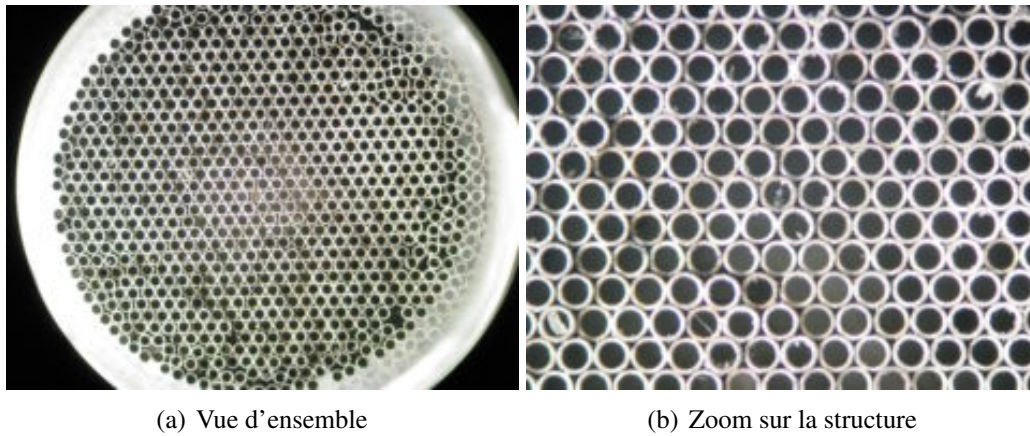


FIG. I-1.2 –  $\mu$ -nida modèle



FIG. I-1.3 – Empilement de sphères creuses

Nous avons réalisé des essais d'absorption acoustique sur ces différentes structures. La méthode d'étude retenue pour cela sera présentée, avec des résultats complémentaires, dans l'annexe I-B. Nous avons représenté sur la figure I-1.4 le comportement acoustique comparé d'une structure nida ainsi que d'un empilement gravitaire de sphères. Les trois empilements gravitaires de sphères ont les caractéristiques géométriques décrites précédemment. Et, même si les deux échantillons non pas rigoureusement la même longueur, on constate que la structure nida dissipe plus d'énergie acoustique et de manière plus homogène en fréquence que l'empilement de sphères. Ces résultats expérimentaux confirment l'intérêt des  $\mu$ nidas pour la conception d'absorbeurs acoustiques.

Comme illustré au cours de la thèse de Gasser [11] si l'on maîtrise précisément l'architecture du réseau poreux périodique alors il nous est possible d'accorder notre matériau sur un spectre d'absorption choisi. Plusieurs approches ont été conduites au cours de son travail, nous nous concentrerons ici sur un modèle analytique de type Lafarge-Pride [13]. Les intérêts de ce modèle sont multiples, tout d'abord il est facile et rapide à mettre en oeuvre, les résultats prédits sont

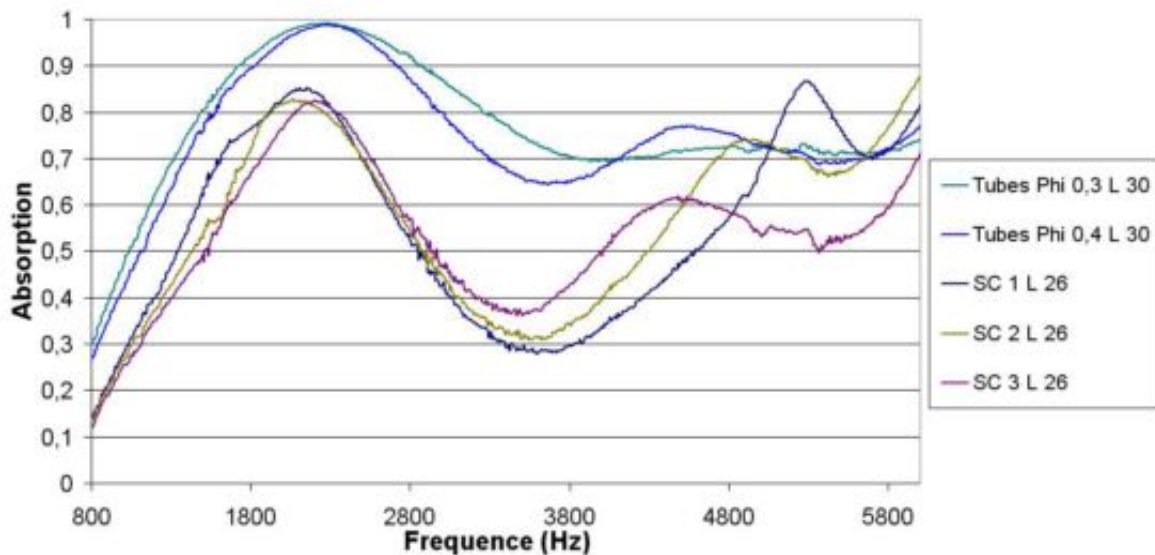


FIG. I-1.4 – Comparaison  $\mu$ nida et empilements gravitaires de sphères creuses

dans un bon rapport avec l'expérience et de plus il est assez aisé de dériver de son formalisme des outils qui peuvent être autant d'aide à la conception.

### I-1.1.3 Modèle d'acoustique phénoménologique

Les modèles d'acoustique phénoménologique nous permettent de relier simplement les paramètres d'architecture d'un milieu à sa courbe d'absorption. Comme indiqué ci-dessus nous travaillerons à partir du modèle de Lafarge-Pride, le détail de ce modèle ainsi que sa dérivation rapide pourront être trouvés dans l'annexe I-A. Notons  $Abs_p$  la famille de fonctions qui a une fréquence donnée nous renvoie l'absorption acoustique réalisée par le milieu. Cette famille de fonctions est définie de  $\mathbb{R}^+$  dans  $[0; 1]$ . On considère  $\underline{p}$  un « vecteur » décrivant le milieu poreux. Ce vecteur est, dans le modèle complet de Lafarge-Pride, de la forme :

$$\underline{p} = \{L; \alpha_\infty; \phi; \lambda; \lambda'; C; C'; p; p'\} \quad (I-1.1)$$

Ces coefficients<sup>1</sup> sont les suivants :  $L$  la longueur de l'échantillon ;  $\alpha_\infty$  la tortuosité, c'est-à-dire le rapport entre la longueur parcourue par le fluide et la longueur du matériau ;  $\phi$  la porosité du milieu ;  $\lambda$  la longueur caractéristique visqueuse ;  $C$  le facteur de formes des pores ;  $p$  le facteur de variation de section des pores pour les phénomènes visqueux ;  $\lambda'$ ,  $C'$  et  $p'$  sont leurs équivalents pour les phénomènes thermiques. La programmation de ce modèle est extrêmement simple, et l'obtention d'une courbe d'absorption est quasi-immédiate. Quand on travaille sur des matériaux de type nida ce modèle se simplifie.

Dans le cas d'un assemblage de tubes rectilignes la tortuosité est égale à 1, les grandeurs visqueuses et thermiques coïncident et l'on a pas de variation de section le long de la direction de propagation de l'onde, c'est-à-dire que  $p = 1$ . De fait le vecteur des paramètres matériaux se simplifie :

$$\underline{p}_{tube} = \{L; \phi; \lambda; C\} \quad (I-1.2)$$

<sup>1</sup>On pourra trouver une étude détaillée de la signification de ces paramètres dans la thèse de Gasser [11].

Intéressons nous à l'absorption acoustique du nida de la figure I-1.2(a). On supposera notre milieu infini et périodique dans un réseau hexagonal. Considérons la cellule de base de base de ce réseau :

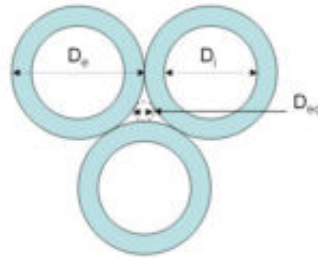


FIG. I-1.5 – Cellule idéal de notre nida

Nous prendrons  $L = 30$  mm, un calcul que nous détaillerons dans la seconde partie de ce chapitre nous donne une porosité théorique de 42%. On constate sur la fig.I-1.5 l'existence d'une porosité intersticielle. On peut montrer que cette porosité représente 22% environ de la porosité totale. Pour le paramètre  $\lambda$  nous prendrons, en première approximation, un rayon équivalent déterminé à partir du rayon intérieur des tubes et du rayon du cercle inscrit à la porosité intersticielle du réseau (fig.I-1.5). En appliquant une loi des mélanges nous obtenons un  $\lambda_{eq}$  de 0,12 mm. Nous prendrons de même en première approximation un facteur de forme  $C$  égale à 1, ce qui correspond au cas d'un cercle. On obtient donc :

$$p_{the} = \{30 ; 42\% ; 1, 2 ; 1\} \quad (I-1.3)$$

Nous pouvons estimer à partir de ces données géométriques l'absorption acoustique réalisée par notre matériau modèle.

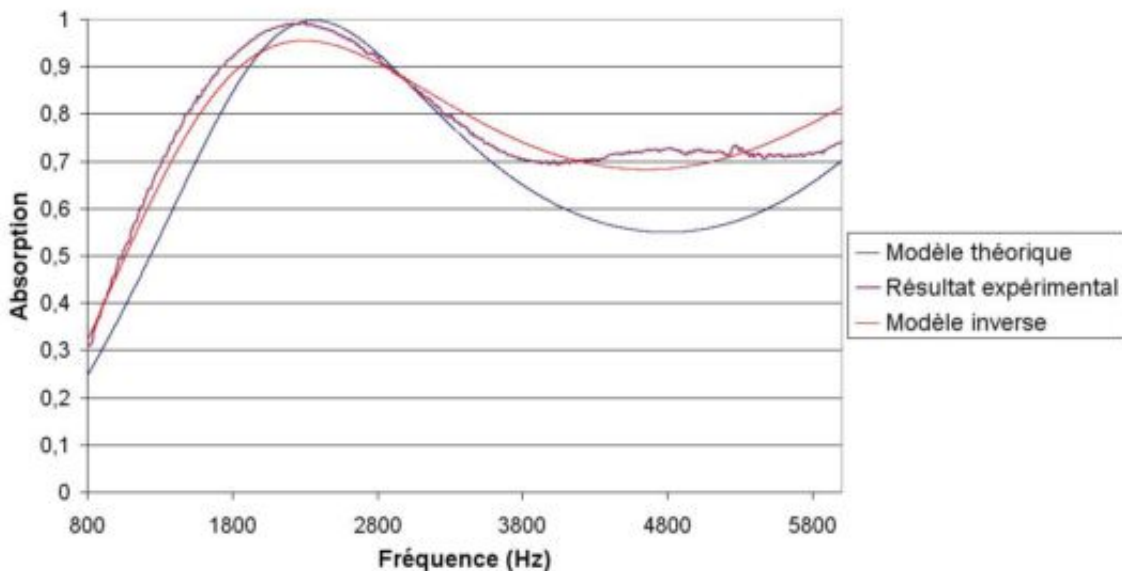


FIG. I-1.6 – Comparaison expérimentation et modélisation

Nous avons superposé sur la figure I-1.6 l'absorption acoustique du matériau réel avec son absorption théorique obtenue à partir du modèle de Lafarge-Pride. Au regard de l'ensemble des approximations faites, on obtient une prévision théorique ayant une relativement bonne concordance avec le résultat expérimental. Nous avons également essayé de retrouver les paramètres

du modèle à partir d'une méthode inverse<sup>2</sup>, la courbe correspondant à cela est également tracée sur la figure I-1.6. Les valeurs obtenues sont les suivantes :

$$p_{inv} = \{30 ; 45\% ; 0,9 ; 1,2\} \quad (\text{I-1.4})$$

On constate que ces valeurs sont assez assez proches de celles que nous avons estimées. L'assemblage de microtubes qui a été réalisé manuellement présentent de nombreux défauts. Ceci explique en partie cette dispersion des valeurs. Toutefois on prévoit bien à la fois la fréquence du premier pic d'absorption ainsi que son intensité. De fait les résultats obtenus ici sont satisfaisant lors d'une phase de préconception pour déterminer les paramètres géométriques d'un milieu nida en fonction de spécifications d'absorption acoustique. Cette méthode est considérablement plus rapide que celles basées sur des calculs complets par éléments finis des écoulements au sein d'une cellule élémentaire [11].

Du fait de l'importance des paramètres d'architecture dans la détermination des propriétés effectives d'un matériau définissons maintenant plus précisément ce qu'est une architecture de type nid-d'abeille.

## I-1.2 Architecture nida

L'analyse de la littérature [15, 16] traitant des milieux cellulaires montre que les différentes propriétés mécaniques effectives peuvent être exprimées en fonction des paramètres géométriques caractérisant la structure. Notamment dans les références précédentes le module de Young relatif du matériau cellulaire est exprimé comme une fonction de la densité relative<sup>3</sup>. Il nous paraît de fait important de formaliser ce que l'on entend par nida. Cette formalisation a deux objectifs : envisager la structure dans toute sa généralité, et définir les hypothèses que nous réutiliserons par la suite dans la modélisation.

Pour cela nous appellerons *structure nida*/ $\mu$ nida un volume défini de la manière suivante :

**Définition 1** *Volume engendré par la translation le long de sa normale d'un plan pavé à l'aide de surfaces planes élémentaires de connexités multiples (fig.I-1.7).*

L'intérêt de cette définition réside en ceci qu'elle pose notre nida idéal comme invariant par translation le long de sa normale. L'étude des propriétés de la structure pourra être réduite à celles d'une section quelconque. Sous cette définition notre problème est essentiellement 2-D.

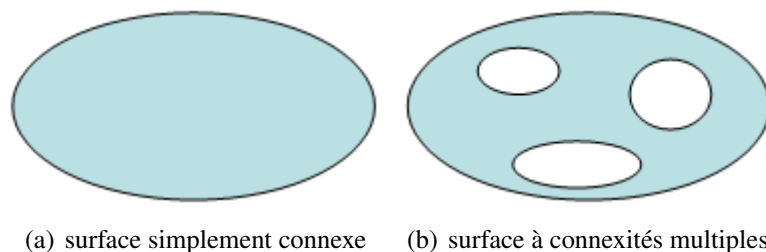


FIG. I-1.7 – Connexité des surfaces

<sup>2</sup>Dans le cas d'une structure de type nida le problème inverse est bien posé. Toutefois dans le cas général la prise en compte de la tortuosité conduit à l'existence de familles de solutions équivalentes. Cela est montré plus en détail dans l'annexe I-A.

<sup>3</sup>De part la nature normalisée de la densité relative, cette grandeur ne dépend que de l'architecture du milieu.

Si l'on impose en plus au nida d'être une structure périodique alors nous obtiendrons des matériaux pouvant posséder des microstructures de la forme de celles présentées sur la figure I-1.8 :

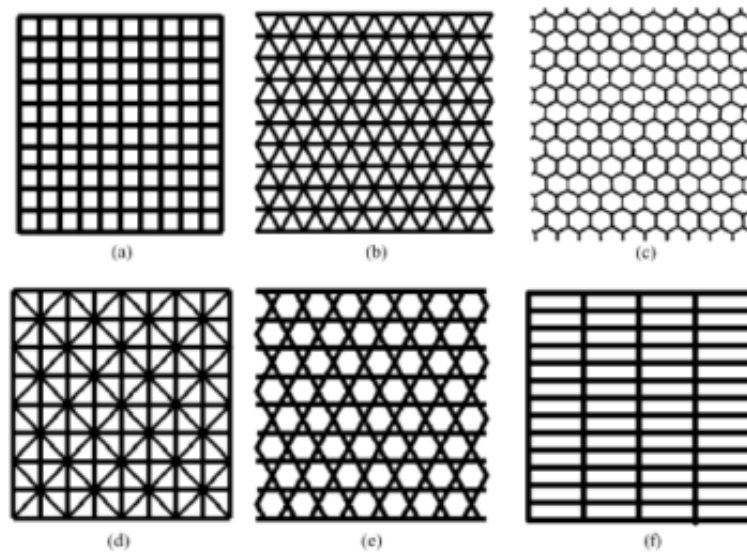


FIG. I-1.8 – Nidas étudiés dans [16]

Cette condition de périodicité réduit notre problème à l'étude d'une cellule élémentaire. A partir de ces définitions, que nous compléterons par quelques autres au cours de la sous-section suivante, il va nous être possible de définir une paramétrisation de nos architectures.

Nous procéderons de la manière suivante pour les deux prochaines sous-sections. Nous introduirons tout d'abord, la construction complète d'un milieu de type nida périodique. Ces résultats seront ensuite réutilisés dans la dernière sous-section pour dériver, sous les hypothèses précédentes, l'expression de la densité relative (donc de la porosité) théorique de notre matériau. Commençons donc par construire brique par brique notre architecture nida périodique.

### I-1.2.1 Construction d'un nida

L'objectif de cette section sera donc de construire un nida étape par étape en partant du niveau le plus abstrait pour finir par la définition d'une structure réelle. Ceci nous conduit à sectionner notre approche en quatre étapes clés : \_ groupe ponctuel ; \_réseau ; \_topologie ; \_ métrique<sup>4</sup>. Chacun de ces points est lié à une propriété de notre nida, le groupe ponctuel définit l'ensemble des opérations de rotation qui laisse notre nida invariant, le réseau définit la notion de voisinage dans notre structure, la topologie s'intéresse à la forme que possédera notre motif de base tandis que la métrique prendra en compte l'aspect dimensionnel de cette structure.

#### Groupe ponctuel

Le groupe ponctuel d'un réseau est le groupe de toutes les transformations orthogonales préservant ce réseau. Nous nous intéresserons plus particulièrement aux sous-groupes des rotations. La compatibilité entre la symétrie de rotation et l'invariance par translation fait que tout

<sup>4</sup>Nous préciserons le sens que nous donnerons à ces notions dans la suite de cette section. Toutefois il est à noter que nous les entendrons dans des sens différents de ceux qui sont généralement les leurs en mathématique.

angle de rotation n'est pas possible pour une structure cristalline. Soit  $Z_n$  le groupe cyclique<sup>5</sup> d'ordre  $n$ , le groupe des rotations d'un réseau ne peut être le conjugué que de  $I, Z_2, Z_3, Z_4$  ou  $Z_6$ . C'est le principe de la restriction cristallographique [17]. Nous nous intéresserons aux nidas pouvant être pavés à partir de polygones réguliers, ce choix exclut de considérer les  $I$  et  $Z_2$ -invariances. De plus en deux dimensions un réseau qui est  $Z_3$ -invariant est, du fait de l'invariance par translation, automatiquement  $Z_6$ -invariant [17]. Nous nous intéresserons de fait dans la suite de cette section uniquement aux réseaux de symétrie élevée ; c'est-à-dire à ceux qui sont  $Z_4$  ou  $Z_6$ -invariants. La figure I-1.9 montre un ensemble de points possédant cette dernière invariance par rapport au point  $A_0$ .

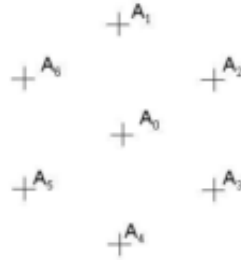


FIG. I-1.9 – Éléments  $Z_6$ -invariants

Notre objectif est de définir des pavages du plan, de fait on considère les points de la figure I-1.9 comme délimitant le motif que nous définirons par la suite comme étant notre élément pavant. La question est de savoir, à présent, quelles sont les voisinages compatibles avec nos invariances par rotation. Ceci est l'objet de la sous-section suivante.

## Réseau

Nous appellerons réseaux les structures périodiques du plan compatibles avec les groupes d'invariance par rotation précédemment évoqués. Concrètement dans le cadre de nos applications le réseau va déterminer, pour une symétrie donnée, quels sont les différents voisinages possibles. Il existe dans la littérature un certain nombre d'approche permettant de déterminer ces réseaux [17, 18], dans ce qui suit nous utiliserons une approche personnelle que nous confronterons à celle utilisée par Coxeter dans [18]. Pour cela nous définirons l'ensemble des graphes compatibles avec un ensemble de points  $\Sigma_p$ .

**Réseaux  $Z_6$ -invariant** Dans le cas de la figure I-1.9 on a :

$$\Sigma_p = \{e^{\frac{ki\pi}{3}}\}_{\{0 \leq k \leq 5\}} \quad (\text{I-1.5})$$

On étudie ensuite les chemins induits par l'action d'un élément de  $Z_6$  sur  $\Sigma_p$ . L'ensemble des chemins associés à un paramètre  $q$  forme un graphe que nous appellerons  $G(q)$  et que définirons comme :

$$G(q) = e^{\frac{qi\pi}{3}} \star \Sigma_p \quad (\text{I-1.6})$$

Ce graphe est constitué de l'ensemble des points de  $\Sigma_p$  définis via la suite  $(g(q))$

$$g_0 = A_p \quad (\text{I-1.7})$$

<sup>5</sup>La définition de ce groupe sera donnée plus précisément dans la seconde partie de ce manuscrit au chapitre II-3. Nous pouvons définir ce groupe ici comme l'ensemble des nombres complexes de module 1 de la forme  $Z_n = \{e^{\frac{2ik\pi}{n}}, k \in [1; n]\}$ . Cet ensemble est un groupe pour la multiplication.

$$g_{n+1} = e^{\frac{qi\pi}{3}} g_n \quad (\text{I-1.8})$$

pour l'ensemble des points  $A_p$  de  $\Sigma_p$  en fonction d'un élément  $e^{\frac{qi\pi}{3}}$  de  $Z_6$ . Pour  $q = 1$ , on obtient le graphe  $G(1)$  :

$$A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow A_3 \rightarrow A_4 \rightarrow A_5 \rightarrow A_6 \rightarrow A_1 \quad (\text{I-1.9})$$

Pour  $q = 2$ , on obtient  $G(2)$  :

$$A_1 \rightarrow A_3 \rightarrow A_5 \rightarrow A_1 \quad (\text{I-1.10})$$

$$A_2 \rightarrow A_4 \rightarrow A_6 \rightarrow A_2 \quad (\text{I-1.11})$$

Tandis que dans le cas  $q = 3$ , on obtient les trois chemins du graphe  $G(3)$  :

$$A_1 \rightarrow A_4 \rightarrow A_1 \quad (\text{I-1.12})$$

$$A_2 \rightarrow A_5 \rightarrow A_2 \quad (\text{I-1.13})$$

$$A_3 \rightarrow A_6 \rightarrow A_3 \quad (\text{I-1.14})$$

$G(4)$  et  $G(5)$  sont respectivement identiques à  $G(2)$  et  $G(3)$  parcourus en sens inverse. La figure I-1.10 résume graphiquement les trois graphes obtenues précédemment :

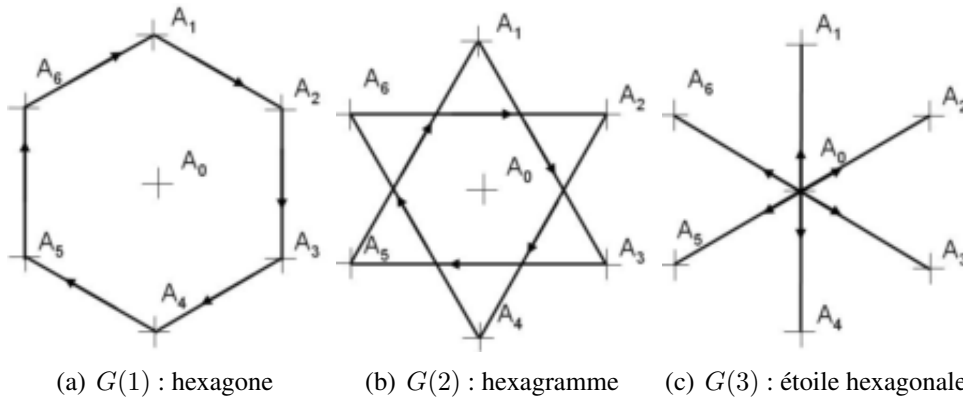


FIG. I-1.10 – Différents graphes  $Z_6$ -invariant

La compatibilité de ces graphes avec la symétrie par translation nous permet d'engendrer des réseaux. Les figures I-1.10(a) ainsi que I-1.10(c) engendrent les réseaux réguliers hexagonaux, fig.I-1.11(a) et triangulaire, fig.I-1.11(c). L'hexagramme, fig.I-1.10(b), engendre le réseau quasi-régulier fig.I-1.11(b), ce dernier réseau est également appelé kagome.

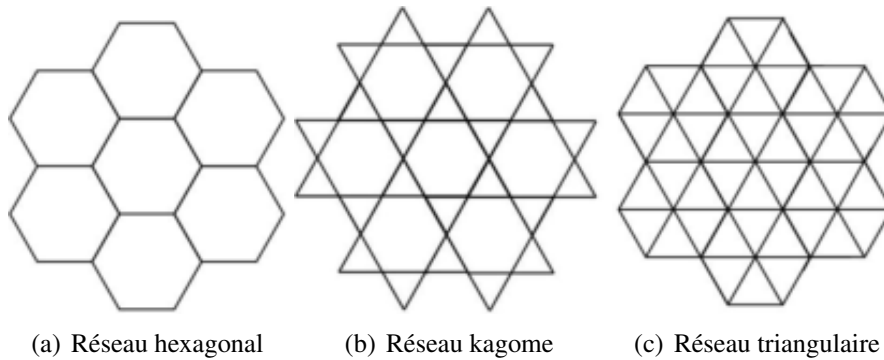


FIG. I-1.11 – Différents réseaux  $Z_6$ -invariants



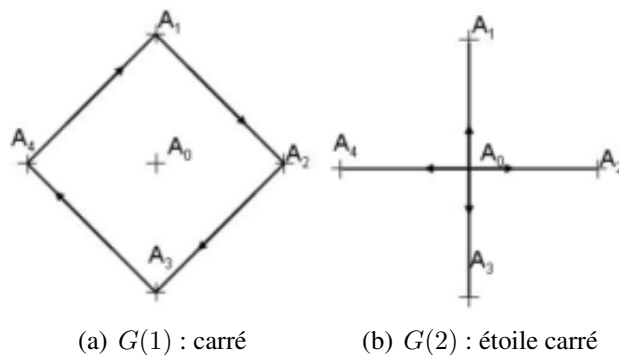
D'autres réseaux quasi-réguliers existent, ils sont obtenus en superposant les réseaux que nous venons de définir. On pourra les retrouver notamment dans [18].

**Réseaux  $Z_4$ -invariant** Dans le cas de réseaux  $Z_4$ -invariants la situation est plus simple que précédemment. On a tout d'abord  $\Sigma_p$ , voir fig. I-1.12, l'ensemble des points compatible avec un axe de symétrie d'ordre quatre centré en  $A_0$ .



FIG. I-1.12 – Éléments  $Z_4$ -invariants

Ceci nous donne, au final, les deux graphes présentés figure I-1.13 :



(a)  $G(1)$  : carré

(b)  $G(2)$  : étoile carré

FIG. I-1.13 – Différents graphes  $Z_4$ -invariants

La reproduction de ces graphes par translation conduit deux réseaux carrés se déduisant l'un de l'autre par une homothétie de facteur  $\sqrt{2}$  complétée par une rotation d'angle  $\frac{\pi}{4}$ , c'est-à-dire, au final, à la même classe de réseau, voir fig. I-1.14. Nous n'obtenons pas par notre méthode de réseau quasi-régulier  $Z_4$ -invariant.

**Synthèse** A partir de la méthode introduite nous obtenons, au final, trois réseaux réguliers plans compatibles avec la restriction cristallographique complétés d'un réseau quasi-régulier. Il est à noter que les réseaux obtenus coïncident avec les nidas définis dans la référence [16], dont on rappelle les figures :

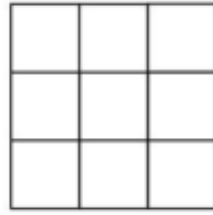


FIG. I-1.14 – Réseau  $Z_4$ -invariant

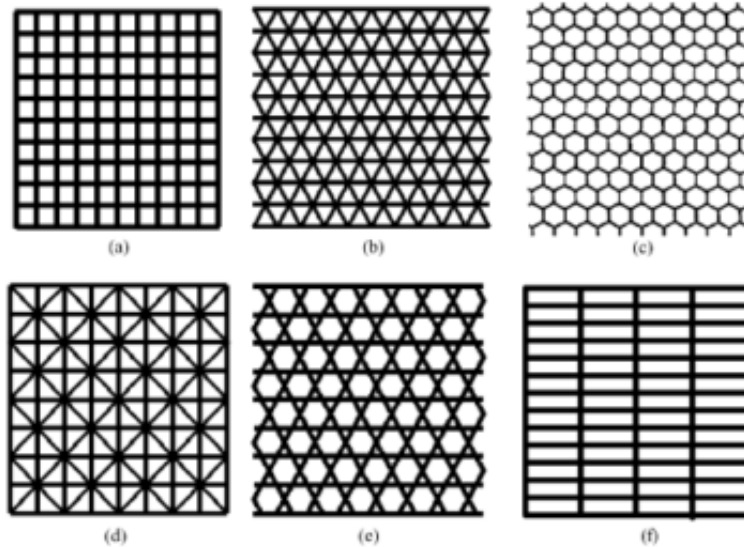


FIG. I-1.15 – Nidas étudiés dans [16]

Les réseaux des nidas (a), (b), (c) et (e) peuvent être définis immédiatement par notre méthode. Le nida (d) correspond, quand à lui, à la superposition des deux réseaux réguliers  $Z_4$ -invariants, tandis que l'exemple (f) sort du cadre de nos hypothèses.

Nous avons bien obtenu l'ensemble des réseaux réguliers car, comme démontré dans [18], les seuls pavages compacts réguliers sont réalisés à partir de  $p$ -gones réguliers qui vérifient l'égalité suivante :

$$(p - 2)(q - 2) = 4 \quad (\text{I-1.15})$$

où  $q$  est le nombre de  $p$ -gone à chaque noeud du réseau. Les seuls solutions sont les pavages  $\{p, q\}$  suivants :  $\{3, 6\}$ ,  $\{4, 4\}$  ainsi que  $\{6, 3\}$ . C'est-à-dire, comme illustré I-1.11(c), I-1.14 et I-1.11(a), les classiques réseaux triangulaire, carré et hexagonal.

Les différents réseaux réguliers ci-dessus définissent les différents types de coordination que peuvent présenter des pavages réguliers du plan. En ce sens le réseau ne contient pas de matière mais définit les voisinages que notre nida possédera quand on aura rempli le réseau avec de la matière.

## Topologie

Nous définissons la topologie d'un nida comme étant la forme de la matière qui est définie dans chaque cellule du réseau et qui est compatible avec le groupe ponctuel de ce réseau. Nous appellerons nida à topologie polygonale<sup>6</sup> tout nida dont la surface de base dans un réseau donné est polygonale. Un nida à topologie circulaire sera considéré comme étant la limite d'un nida polygonale quand son nombre de faces tend vers l'infini.

On définira l'ordre d'un nida polygonal dans un réseau donné comme le rapport entre  $n/p$  du  $n$ -gone de la topologie sur le  $p$ -gone du réseau. Ainsi un nida d'ordre 1, figures I-1.16(a), I-1.17(a) et I-1.18(a), correspond au cas usuel où la topologie du nida épouse celle du réseau, tandis que le nida d'ordre  $\infty$  correspondra à la topologie circulaire, figure I-1.16(c), I-1.17(c) et I-1.18(c). Les figures I-1.16(b), I-1.17(b) et I-1.18(b) représentent quant à elles des nidas d'ordre 2 sur leurs réseaux respectifs.

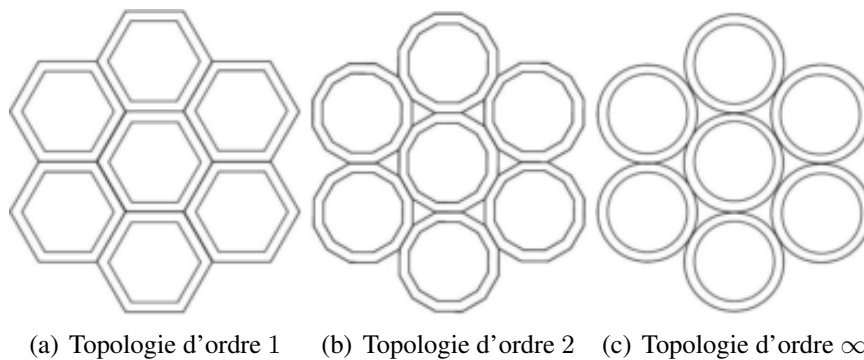


FIG. I-1.16 – Différentes topologies sur le réseau hexagonal

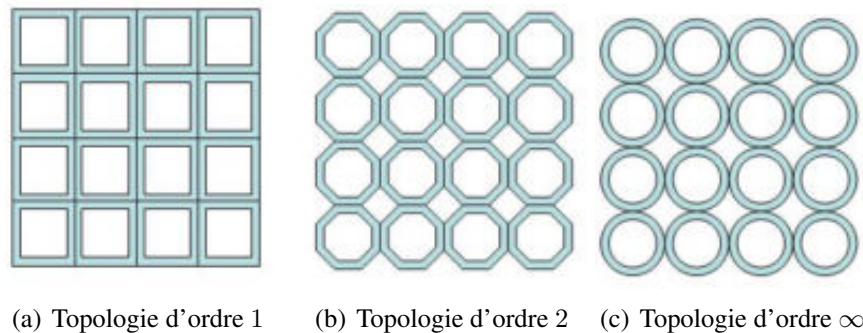


FIG. I-1.17 – Différentes topologies sur le réseau carré

Nous avons choisi comme cellules élémentaires des surfaces trouées, la porosité qui en résulte est une propriété topologique du motif de base. Si l'on pave le plan avec des motifs pleins alors les topologies d'ordre 1 conduisent à des pavages compacts. Si l'on garde nos motifs pleins et que l'on réalise un nida d'ordre supérieur à 1 sur un réseau alors le pavage résultant ne pourra plus être compact, la porosité qui en résulte est une propriété topologique induite par le réseau. La porosité d'un réseau est donc, au final, la somme de ces deux porosités de natures

<sup>6</sup>Par topologie nous désignons ici les caractéristiques qui ont à voir avec la forme des cellules et ceci indépendamment de tout critère dimensionnel. Cette notion ne coïncide pas totalement avec celle définie en mathématique, et ceci d'autant plus que toutes nos topologies polygonales sont homéomorphes.

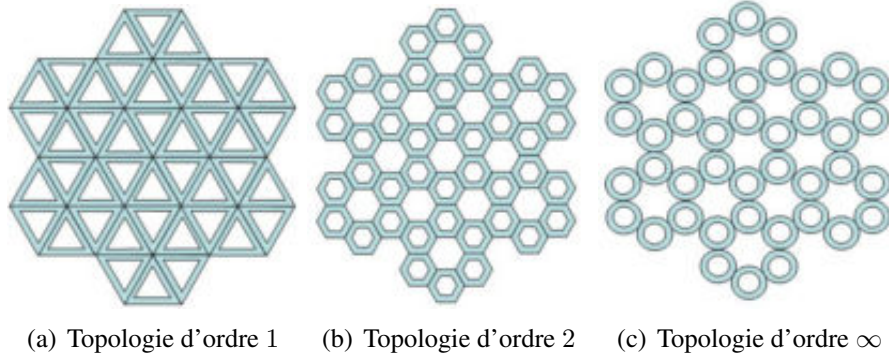


FIG. I-1.18 – Différentes topologies sur le réseau triangulaire

différentes. Leur proportion relative dépend essentiellement du réseau et, en second ordre, de la topologie du nida. La justification de ceci est que dès le nida d'ordre 2 la proportion relative est presque fixée et converge très rapidement vers celle du nida d'ordre  $\infty$ . Ces différentes remarques seront montrées formellement dans la suite de ce document.

Ceci étant fixé le dernier point permettant de définir un nida réel est la donnée des propriétés métriques de la structure.

### Métrie

Dans cette sous-section nous allons définir précisément la surface d'un polygone régulier pour introduire ensuite les différents paramétrages que l'on peut utiliser sur une structure nida. Nous noterons  $S(n)_P$  l'aire d'un  $n$ -gone régulier.

Soit un polygone régulier ayant  $n$  cotés,  $S(n)_P$  est la réunion de l'aire,  $S_{tri}$ , de  $2n$  triangles rectangles de hauteur  $h$  et de coté  $l$ , tel que  $2nl$  soit le périmètre du polygone. L'angle opposé à  $l$  vaut  $\frac{\pi}{n}$ , on a donc  $l = h \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)$  et de fait :

$$S_{tri} = \frac{h^2 \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)}{2} \quad (\text{I-1.16})$$

donc

$$S(n)_P = n \tan\left(\frac{\pi}{n}\right) h^2 \quad (\text{I-1.17})$$

$S(n)_P$  est l'aire d'un  $n$ -gone régulier. On vérifie bien que l'on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \tan\left(\frac{\pi}{n}\right) = \pi \quad (\text{I-1.18})$$

c'est-à-dire que l'on retrouve pour le  $\infty$ -gone l'aire du cercle. De fait on a  $S(n)_D$  l'aire d'un disque  $n$ -gonale dont les cercles inscrits intérieur et extérieur sont de rayons respectifs  $R_i$  et  $R_e$  :

$$S(n)_D = n \tan\left(\frac{\pi}{n}\right) (R_e^2 - R_i^2) \quad (\text{I-1.19})$$

Donc dans les systèmes de paramètres  $(R_e, e)$  et  $(R_i, e)$  :

$$S(n)_D = n \tan\left(\frac{\pi}{n}\right) e R_i \left(2 + \frac{e}{R_i}\right) = n \tan\left(\frac{\pi}{n}\right) e R_e \left(2 - \frac{e}{R_e}\right) \quad (\text{I-1.20})$$

Par simplicité nous ne considérerons plus par la suite le système  $(R_i, e)$  qui nous intéressera moins que  $(R_e, e)$ . La fonction  $S(n)_D$  exprimée dans le système  $(R_e, e)$  (et de manière équivalente dans  $(R_i, e)$ ) s'écrit comme le produit de deux fonctions :

$$S(n)_D = t(n)m \left( \frac{e}{R_e} \right) \quad (\text{I-1.21})$$

où

$$t(n) = n \tan \left( \frac{\pi}{n} \right) ; m(e, R_e) = eR_e \left( 2 - \frac{e}{R_e} \right) \quad (\text{I-1.22})$$

C'est-à-dire que dans ce système de paramètres la contribution de la topologie via la fonction  $t$  et la contribution de la métrique via la fonction  $m$  sont découplées.

Il nous faut toutefois introduire un autre système de paramètres  $(L_e, e)$  qui sera en pratique plus simple d'utilisation pour les cas polygonaux. La relation  $L_e = 2R_e \tan \left( \frac{\pi}{n} \right)$  nous permet d'exprimer  $S(n)_D$  dans le système  $(L_e, e)$ , on y obtient :

$$S(n)_D = neL_e \left( 1 - \tan \left( \frac{\pi}{n} \right) \frac{e}{L_e} \right) \quad (\text{I-1.23})$$

Il est à noter que dans le système  $(L_e, e)$   $L_e$  est une fonction de  $n$ , par opposition le système  $(R_e, e)$  qui est indépendant de  $n$ . De plus dans ce dernier système on perd la propriété de séparation des contributions topologique et métrique.

A partir de cette « paramétrisation » de notre architecture nous pouvons à présent définir la densité relative d'une telle structure.

### **I-1.2.2 Expression générale de la densité relative d'un nida**

De part sa nature adimensionalisée la densité relative d'une structure est un paramètre géométrique, on a la relation suivante :

$$\bar{\rho} = 1 - \phi \quad (\text{I-1.24})$$

où  $\phi$  représente la porosité de la structure. La porosité s'exprime naturellement par le rapport :

$$\phi = \frac{V_{pore}}{V_{total}} \quad (\text{I-1.25})$$

où  $V_{pore}$  représente le volume des pores et  $V_{total}$  le volume totale du matériau. De part notre définition du nida comme un matériau engendré par translation, nous pouvons simplifier cette relation en ne considérant qu'une tranche de matériau, on obtient :

$$\phi = \frac{S_{pore}}{S_{total}} \quad (\text{I-1.26})$$

Particularisons, en terme de densité relative, cette relation aux différents types de nidas précédemment définis. Nous donnerons le détail du calcul dans le cas du système hexagonal ; pour les autres systèmes nous ne donnerons que les résultats.

## Système hexagonal

On considère la cellule élémentaire suivante :

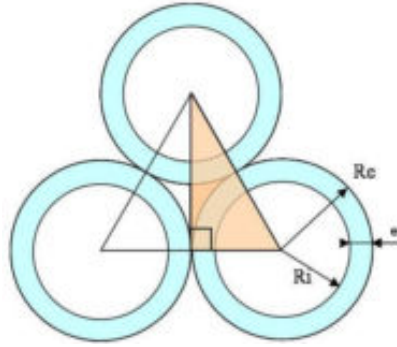


FIG. I-1.19 – Cellule élémentaire d'un nida à topologie circulaire

L'illustration est faite sur un nida circulaire, toutefois les propriétés ne sont liées qu'au réseau, de fait cela ne nuit pas à la généralité du propos.

On considère la cellule élémentaire représentée figure I-1.19. Pour des raisons de symétrie du réseau hexagonal on travaillera dans le triangle rectangle encadré sur la figure I-1.19. Soit  $S_T$  la surface totale de ce triangle, et  $S_M$  la surface occupée dans le triangle par la matière, on a trivialement :  $\bar{\rho} = \frac{S_M}{S_T}$ . On a immédiatement  $S_T = \frac{\sqrt{3}}{2} R_e^2$ . Comme on est dans un triangle rectangle  $S_M$  est égale au quart de la surface  $S_C$  d'une couronne de rayon intérieur  $R_i$  et de rayon extérieur  $R_e$ .

$$S(n)_M = \frac{S(n)_C}{4} \quad (\text{I-1.27})$$

On obtient immédiatement :

$$\bar{\rho}(n) = \frac{S(n)_C}{2\sqrt{3}R_e^2} \quad (\text{I-1.28})$$

Ce qui nous donne dans le système  $(R_e, e)$  :

$$\bar{\rho}(n) = \frac{n}{2\sqrt{3}} \tan\left(\frac{\pi}{n}\right) \left(\frac{e}{R_e}\right) \left(2 - \frac{e}{R_e}\right) \quad (\text{I-1.29})$$

ainsi que dans le système  $(L_e, e)$  :

$$\bar{\rho}(n) = \frac{2n}{\sqrt{3}} \left(\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)^2 \left(\frac{e}{L_e}\right) \left(1 - \tan\left(\frac{\pi}{n}\right) \left(\frac{e}{L_e}\right)\right) \quad (\text{I-1.30})$$

Vérifions si l'on retrouve bien à partir de notre paramétrisation les résultats de la littérature. Dans la littérature l'épaisseur est, généralement, supposée faible devant le rayon. De fait si l'on suppose  $\left(\frac{e}{R_e}\right) \ll 1$  on peut réécrire les relations (I-1.29), et (I-1.30) respectivement :

$$\bar{\rho}_a(n) = \frac{n}{\sqrt{3}} \tan\left(\frac{\pi}{n}\right) \left(\frac{e}{R}\right) \quad (\text{I-1.31})$$

$$\bar{\rho}_a(n) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \left(\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)^2 \left(\frac{e}{L}\right) \quad (\text{I-1.32})$$

où  $\bar{\rho}_a(n)$  indique la densité relative approchée. De plus, dans l'approximation  $\left(\frac{e}{R_e}\right) \ll 1$ , on a  $R_e \approx R_i$  et  $L_e \approx L_i$  et de fait les équations sont identiques exprimées par rapport aux variables

intérieures ou extérieures, c'est pourquoi nous donnons ces résultats sans indices.

Dans le cas où  $n = 6$ , c'est-à-dire pour une topologie d'ordre 1 (fig.I-1.16(a)), on obtient :

$$\bar{\rho}_a(6) = \frac{4}{\sqrt{3}} \left( \frac{e}{L} \right) \quad (\text{I-1.33})$$

Comme on peut le constater sur la figure I-1.16(a) le pavage génère une épaisseur effective du réseau de  $e' = 2e$ , de fait la densité relative matériau est de :

$$\bar{\rho}_a(6) = \frac{2}{\sqrt{3}} \left( \frac{e'}{L} \right) \quad (\text{I-1.34})$$

On retrouve bien l'expression de la densité relative classique d'un réseau nida classique [15,16]. Et dans le cas où l'on ne fait aucune approximation on obtient :

$$\bar{\rho}(6) = \frac{2}{\sqrt{3}} \left( \frac{e'}{L_e} \right) \left( 1 - \frac{1}{2\sqrt{3}} \left( \frac{e'}{L_e} \right) \right) \quad (\text{I-1.35})$$

Cette dernière expression est bien conforme à celle que l'on peut trouver dans [15].

### Autres systèmes

**Système carré** On a dans le système  $(R_e, e)$  :

$$\bar{\rho}(n) = \frac{n}{4} \tan \left( \frac{\pi}{n} \right) \left( \frac{e}{R_e} \right) \left( 2 - \frac{e}{R_e} \right) \quad (\text{I-1.36})$$

ainsi que dans le système  $(L_e, e)$  :

$$\bar{\rho}(n) = n \left( \tan \left( \frac{\pi}{n} \right) \right)^2 \left( \frac{e}{L_e} \right) \left( 1 - \tan \left( \frac{\pi}{n} \right) \left( \frac{e}{L_e} \right) \right) \quad (\text{I-1.37})$$

Dans le cas où  $n = 4$  c'est-à-dire pour un nida carré d'ordre 1 :

$$\bar{\rho}(4) = 4 \left( \frac{e}{L_e} \right) \left( 1 - \left( \frac{e}{L_e} \right) \right) \quad (\text{I-1.38})$$

et donc en tenant compte de la paroi double :

$$\bar{\rho}(4) = 2 \left( \frac{e'}{L_e} \right) \left( 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{e'}{L_e} \right) \right) \quad (\text{I-1.39})$$

c'est-à-dire que l'on retrouve bien l'expression de la densité relative classique d'un réseau nida carré [15, 16].

**Système triangulaire** On a dans le système  $(R_e, e)$  :

$$\bar{\rho}(n) = \frac{n}{3\sqrt{3}} \tan \left( \frac{\pi}{n} \right) \left( \frac{e}{R_e} \right) \left( 2 - \frac{e}{R_e} \right) \quad (\text{I-1.40})$$

ainsi que dans le système  $(L_e, e)$  :

$$\bar{\rho}(n) = \frac{4n}{3\sqrt{3}} \left( \tan \left( \frac{\pi}{n} \right) \right)^2 \left( \frac{e}{L_e} \right) \left( 1 - \tan \left( \frac{\pi}{n} \right) \left( \frac{e}{L_e} \right) \right) \quad (\text{I-1.41})$$

et donc dans  $(L_e, e')$  :

$$\bar{\rho}(n) = \frac{2n}{3\sqrt{3}} \left( \tan\left(\frac{\pi}{n}\right) \right)^2 \left( \frac{e'}{L_e} \right) \left( 1 - \tan\left(\frac{\pi}{n}\right) \left( \frac{e'}{2L_e} \right) \right) \quad (\text{I-1.42})$$

qui dans le cas d'un nida triangulaire classique devient :

$$\bar{\rho}(3) = 2\sqrt{3} \left( \frac{e}{L_e} \right) \left( 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \left( \frac{e}{L_e} \right) \right) \quad (\text{I-1.43})$$

## Généralité

On s'aperçoit à la lecture de ces résultats que dans le système de paramètres intrinsèques  $(R_e, e)$  l'expression de la densité relative s'écrit :

$$\bar{\rho}(p, n, \left(\frac{e}{R_e}\right)) = r(p)t(n)m \left(\frac{e}{R_e}\right) \quad (\text{I-1.44})$$

C'est-à-dire que l'influence du réseau au travers de la fonction  $r$ , de la topologie via la fonction  $t$  ainsi que de la métrique par  $m$  agisse de manière découplée. Ces fonctions ont pour expressions :

$$t(n) = n \tan\left(\frac{\pi}{n}\right) ; m \left(\frac{e}{R_e}\right) = \left(\frac{e}{R_e}\right) \left( 2 - \left(\frac{e}{R_e}\right) \right) \quad (\text{I-1.45})$$

La fonction de réseau quant à elle est l'inverse de celle de la topologie

$$r(p) = \frac{1}{p \tan\left(\frac{\pi}{p}\right)} \quad (\text{I-1.46})$$

On a donc dans le cas général :

$$\bar{\rho} \left( p, n, \left(\frac{e}{R_e}\right) \right) = \frac{n \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)}{p \tan\left(\frac{\pi}{p}\right)} \left(\frac{e}{R_e}\right) \left( 2 - \left(\frac{e}{R_e}\right) \right) \quad (\text{I-1.47})$$

Dans le cas d'une topologie d'ordre 1, c'est-à-dire pour un pavage compact, cette expression se simplifie :

$$\bar{\rho}_{compact} \left( \left(\frac{e}{R_e}\right) \right) = \left(\frac{e}{R_e}\right) \left( 2 - \left(\frac{e}{R_e}\right) \right) \quad (\text{I-1.48})$$

et la densité relative ne dépend plus que du rayon extérieur équivalent et de l'épaisseur.

Ceci fait nous pouvons étudier la fonction suivante qui mesure l'écart relatif de  $\bar{\rho}(n)$  par rapport à  $\bar{\rho}(\infty)$  dans un réseau donné :

$$err(\bar{\rho}(n)) = \frac{\bar{\rho}(n) - \bar{\rho}(\infty)}{\bar{\rho}(\infty)} \quad (\text{I-1.49})$$

cette fonction s'explique en :

$$err(\bar{\rho}(n)) = \frac{n}{\pi} \tan\left(\frac{\pi}{n}\right) - 1 \quad (\text{I-1.50})$$

L'expression de cette fonction est indépendante des paramètres métriques et en ceci elle caractérise de manière intrinsèque la topologie de notre réseau. On peut trouver un graphe de



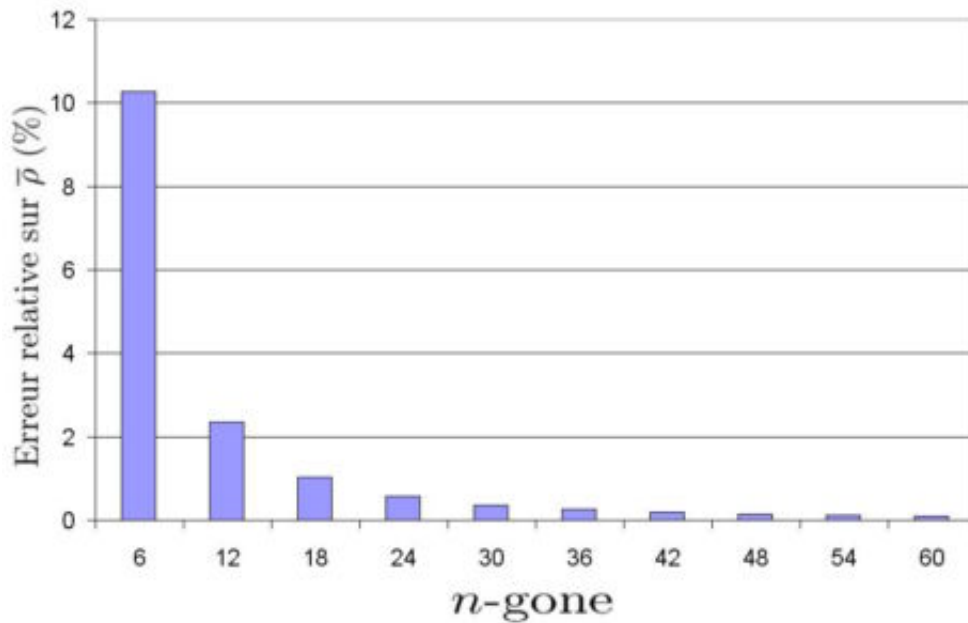


FIG. I-1.20 – Écarts relatifs entre  $\bar{\rho}(n)$  et  $\bar{\rho}(\infty)$  par rapport à  $\bar{\rho}(\infty)$

cette fonction en figure I-1.20, nous n’y avons représenté les valeurs de  $err(\bar{\rho}(n))$  que pour des  $n$  correspondant à des polygones compatibles avec la symétrie du réseau hexagonal. Ceci montre que pour un réseau hexagonal donné, la cellule circulaire minimise la densité relative sur l’ensemble des polygones compatibles avec la symétrie du réseau. Le gain de masse entre une topologie hexagonale et circulaire est de l’ordre de 10%. On note de plus que la fonction  $\bar{\rho}(n)$  converge assez rapidement est que dès  $n = 12$ , c’est-à-dire dans le cas du décagone on a un écart relatif d’environ 2% avec la masse minimale. Or dans le cas du réseau hexagonal la topologie dodécagonale est la topologie polygonale qui suit immédiatement l’hexagonale.

Ceci est intéressant car cela montre, qu’au moins vis-à-vis de la densité relative, qu’un pavage d’ordre 2 est une bonne approximation du pavage d’ordre  $\infty$ . De plus, dans la pratique, la réalisation et la modélisation de matériau d’ordre  $\infty$  pose un certain nombre de problème. Le principal problème est lié à la réalisation d’une jonction entre les éléments pavants. Ces ménisques [19, 20] sont une source de problème pour modéliser le comportement des matériaux cellulaires. Les questions attenantes sont d’une part physiques et géométriques : quelles formes pour le ménisque, quelles largeurs ; et d’autre part numériques : problèmes de maillage, explosion du temps de calcul,... . Dans le cas de matériaux de type nida, au vue de la vitesse de convergence d’un nida polygonal vers un nida circulaire, le plus simple est de supprimer tout simplement le ménisque en travaillant à partir de nidas polygonaux. Cela simplifie la modélisation des propriétés mécaniques, et de plus la réalisation d’une telle architecture est facilement envisageable industriellement. On peut fabriquer ces tubes par extrusion puis les assembler, ou bien d’obtenir directement la structure finale à partir de techniques de prototypage rapide.

L’extension de cette approche au cas tridimensionnel est plus compliqué. Le premier point est qu’en dimension 3 il n’existe que 5 polyèdres réguliers<sup>7</sup> alors qu’il existe une infinité de polygones réguliers. De fait nous ne pouvons pas faire tendre une topologie polyédrale vers la topologie sphérique de la même manière que dans le cas plan. Toutefois il existe des poly-

<sup>7</sup>Nous reviendrons en détail sur cela au cours de la seconde partie de cette thèse au chapitre II-3.

èdres semi-réguliers comme le tétrakaidécaèdre (fig.I-1.21(a)) ou le rhombicuboctaèdre (fig.I-1.21(b)) permettant de définir une géométrie « approchant » celle des empilements réguliers de sphères.

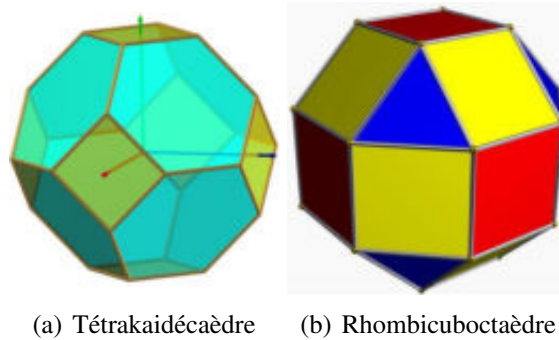


FIG. I-1.21 – Exemple de polyèdres semi-réguliers

On peut noter que dans la littérature un certain nombre d’auteurs a utilisé le tétrakaidécaèdre, également connu sous le nom de solide de Kelvin, pour modéliser la géométrie des mousses ouvertes [21–23]. Toutefois il est à noter que cette approche serait essentiellement de nature à simplifier la modélisation d’une structure réalisée à partir de sphères creuses. L’élaboration de structures à base de tétrakaidécaèdres creux, si elle est envisageable, semble être néanmoins complexe à réaliser.

### I-1.3 Synthèse

Au cours de ce premier chapitre nous avons tout d’abord, au §.I-1.1, justifié notre intérêt pour les matériaux de type nida. Celui-ci se fonde sur le fait que les propriétés d’absorption acoustique de ce type d’architecture sont supérieures à celles des autres matériaux cellulaires. Pour ce faire nous avons réalisé une série de matériaux modèles dont nous avons ensuite mesuré l’absorption acoustique expérimentalement sur une large bande de fréquences. L’utilisation du modèle d’acoustique phénoménologique de Lafarge-Pride [11, 13] nous permet de relier les propriétés acoustiques aux paramètres d’architecture de notre matériau. Nous avons montré que ces modèles donnent une bonne estimation de ces propriétés.

L’intérêt des matériaux nida mis en avant, nous avons proposé, au §.I-1.2, une construction de cette architecture. L’objectif suivi et de concevoir le nida de manière générale sans se restreindre *a priori* à quelques géométries particulières. Grâce à cette construction nous avons pu obtenir une formule générale dans le cas des topologies polygonales de la densité relative du matériau résultant. Ceci nous a permis de montrer qu’un nida de topologie dodécagonale est une bonne approximation du nida circulaire. Nous avons ensuite brièvement évoqué l’extension de cette approche au cas d’une architecture tridimensionnelle.

La description des géométries que nous traiterons au cours de cette thèse ayant été faite, il nous faut à présent définir le domaine des propriétés mécaniques étudiées.



## CHAPITRE I-2

# Modélisation mécanique d'un milieu hétérogène

Maintenant que nous possédons une définition d'un matériau nida, il nous faut définir les propriétés que nous souhaitons étudier sur ces géométries. Comme nous l'avons dit en introduction de ce manuscrit, nous nous intéresserons à l'élasticité linéaire des matériaux nidas. De fait l'objectif de la première partie de ce chapitre sera de justifier ce choix de modélisation. Dans un second temps nous envisagerons plusieurs méthodes pour réaliser cette étude. Nous comparerons les avantages et les limitations des modèles analytiques, des approches par éléments finis ainsi que des approches intermédiaires par milieux équivalents. Ce chapitre, qui se démarquera des autres par sa nature plus bibliographique, nous permettra ainsi de poser les bases et les hypothèses de notre modélisation.

### I-2.1 Élasticité linéaire d'un matériau cellulaire

#### I-2.1.1 Démarche de modélisation

Dans notre approche les problèmes de modélisation mécanique et acoustique seront clairement découplés. Le couplages de ces propriétés se fera en *post-processus* en fonction des paramètres pilotant chacune de ces propriétés. La démarche *material-by-design* auquel nous nous rattachons implique, quant à elle, d'étudier un certains nombre de propriété pour une classe d'architectures donnée de manière générale et paramétrique. De fait, par essence, la dérivation de ces résultats « généraux » se fait en dehors du cadre d'un cahier des charges.

Ce travail de thèse s'ancre dans une thématique sur les matériaux cellulaires ayant commencé avec la thèse de Gasser [11] et se continuant au travers d'autre sujets. Ce passage de relais entre les thèses est une motivation pour structurer l'étude des propriétés des matériaux cellulaires en une série de briques de base. La thèse de Caty [24] s'intéresse à la fatigue d'empilements de sphères creuses, celle de Fallet [25] à l'endommagement de ces empilements. Le présent travail se distingue des précédents en ceci qu'il s'agit du premier qui s'intéresse à d'autres architectures qu'aux empilements réguliers [11, 19] et gravitaires [19, 24, 25]. Pour cet raison il nous paraît intéressant de dégager une série de résultats généraux sur nos architectures.

Cette série de constatations nous a amené à nous intéresser à l'élasticité linéaire des structures nidas. Les deux principales raisons à cela sont :

- la linéarité du phénomène nous permet de dériver un certain nombre de propriétés générales ;
- l'élasticité est au coeur de nombreux comportements physiques complexes.

Le premier de ces points est donc lié à la volonté d'obtenir des classes de résultats généraux concernant le comportement des nidas. Par classe de résultats généraux, nous voulons nous affranchir de dériver un résultat pour un type de nida et qui ne soit plus valable si l'on modifie, par exemple, l'épaisseur de la paroi dans le modèle. Un résultat général sera pour nous de dire qu'un nida hexagonal idéal<sup>1</sup> est nécessairement isotrope transverse pour l'élasticité classique. La dérivation de ce genre de résultat est possible dans le cas de l'élasticité linéaire car la linéarité des équations nous permet d'avoir accès à un certain nombre d'outils mathématiques. La démonstration du fait qu'un nida hexagonal est isotrope transverse pour l'élasticité classique repose alors sur des résultats d'homogénéisation où, sous un certain nombre d'hypothèses, le milieu hétérogène est remplacé par un milieu homogène équivalent [2]. Le milieu effectif est alors un milieu élastique linéaire conventionnel et, par application de résultats sur les classes de symétrie du tenseur d'élasticité [26], on sait qu'un milieu hexagonal est isotrope transverse. La linéarité du phénomène nous permet d'établir ce genre de résultat.

Le deuxième point concerne le fait que l'élasticité est au coeur de nombreux autres comportements complexes. Notamment nous pouvons penser à la plasticité, à la vibroélasticité, au flambement linéaire, etc. Ce rôle central de l'élasticité, et notamment dans les milieux architecturés, incite à ne pas seulement la considérer comme un état transitoire vers les phénomènes plastiques, et à la négliger en première approximation. En effet l'élasticité a un rôle spécifique beaucoup plus important dans les milieux cellulaires que celui qu'elle a dans les matériaux massifs. La non-séparation des échelles entre les longueurs spécifiques des différents phénomènes aboutit à des comportements pouvant se produire à plusieurs échelles. La littérature mécanique des années 60 s'est intéressée à cette problématique des milieux élastiques à microstructures. Un de leurs objectifs était de construire des milieux continus généralisés dont la formulation mathématique prendrait en compte le comportement de cette microstructure. L'article de Mindlin de 1964 : « Micro-structure in linear elasticity » est emblématique de cette volonté, de même qu'un certain nombre d'autres publications de cette époque [10, 27, 28]. Un résultat intéressant de leurs approches est d'avoir montré qu'un milieu architecturé était intrinsèquement dispersif. C'est-à-dire que selon le rapport entre la taille de la micro-structure et la fréquence d'une sollicitation mécanique, le milieu va se comporter comme un filtre en fréquence [29]. Cet aspect de l'élasticité des milieux à microstructure peut être intéressant à prendre en compte lors de la conception de pièces travaillant dans des régimes vibratoires. Un autre comportement qui peut se produire à plusieurs échelles est le flambement élastique. Dans [7, 30, 31] les auteurs s'intéressent aux modes d'effondrement des milieux périodiques, milieux qui sont semblables à la définition que nous nous sommes donnée pour nos architectures nidas. Ils mettent en avant les liens qui unissent les flambements microstructuraux, dont la longueur d'onde est de l'ordre de la cellule, et l'apparition de modes de flambement de structure de longueur macroscopique.

### **I-2.1.2 Interprétation des effets d'échelle**

La description de ces effets de microstructure est souvent traduite dans les publications précédentes par la substitution du milieu hétérogène par un milieu continu généralisé [9]. Nous ne détaillerons pas pour l'instant la typologie de ces milieux, mais plusieurs remarques d'ordre physique peuvent, d'ores et déjà, être formulées. La première est que pour étudier des milieux

---

<sup>1</sup>C'est-à-dire en dehors de l'anisotropie induite par le procédé de fabrication.

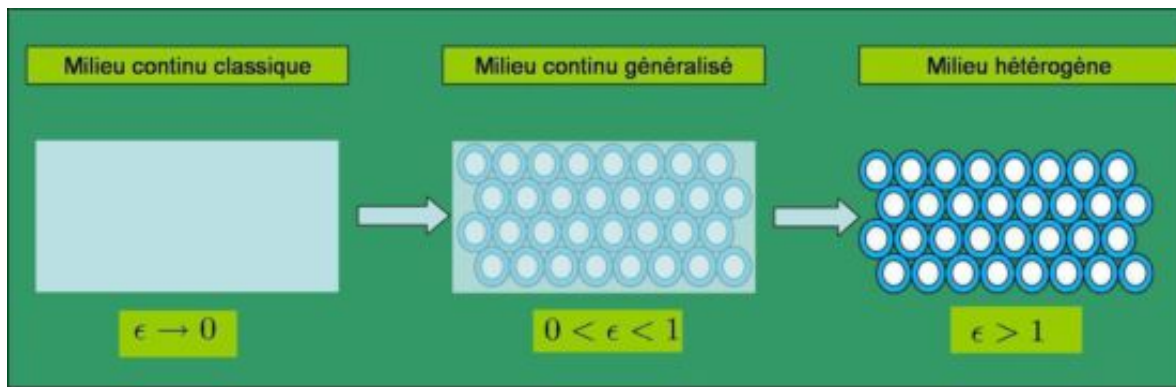


FIG. I-2.1 – Structure vue pour différents champs mécaniques

à géométrie complexe la démarche la plus simple consiste généralement en l'étude d'un milieu homogène dont le comportement est, en un « certain sens », équivalent<sup>2</sup>.

La deuxième remarque correspond à la notion de milieu équivalent. On peut en donner une définition intuitive, ce milieu correspond au comportement moyen de la cellule de base considérée. Cette moyenne est celle des champs mécaniques en présence. Il y a deux paramètres d'influence qui ressortent, la dimension de la fluctuation des champs mécaniques :  $L_\omega$  ; ainsi que le paramètre de microstructure :  $l$ . A partir de ces deux grandeurs, on définit  $\epsilon = \frac{l}{L_\omega}$ , la valeur de ce paramètre indique ce qui se passe dans le matériau. Ce paramètre a un vrai sens physique (fig.I-2.1). Quand celui-ci tend vers 0, la sollicitation varie sur une échelle très supérieure à celle de la cellule. La cellule de base, potentiellement très hétérogène, se comporte sans que sa microstructure ne soit sollicitée. Elle se comporte donc, sous cette hypothèse de séparation des échelles, comme un milieu homogène classique. On peut alors appliquer les résultats de l'homogénéisation classique [1, 2, 32].

Considérons la situation complètement opposée. On a alors le rapport  $\epsilon > 1$ , cela signifie qu'au sein de notre cellule les champs varient fortement. De fait l'ensemble de la microstructure de cette cellule est sollicitée dans la réponse mécanique. Le cellule est une structure à part entière et ne peut pas être remplacée par quoique ce soit d'homogène.

Dans les cas où  $\epsilon$  est compris entre 0 et 1, la cellule a un comportement à mi-chemin entre les deux, elle se comporte comme un milieu homogène à microstructure [28]. C'est-à-dire comme un milieu continu dont la cinématique serait enrichie [9] pour tenir compte de l'influence de la microstructure de la cellule de base. Il existe une zoologie complexe et quasi-infinie de tels milieux. En effets il est possible de rajouter une infinité de termes correctifs pour enrichir le comportement moyen. En pratique les auteurs complètent généralement leur description en prenant en compte les termes du second ordre [7, 33], même si rien n'empêche d'aller plus loin [6, 34, 35].

De fait si l'on désire prendre en compte ces effets de structure dans une modélisation il est nécessaire de pousser la description du milieu jusqu'au second ordre. La question est de savoir à partir de quel rapport  $\epsilon$  il est nécessaire de tenir compte des termes du second ordre. Il n'y a pas de réponse définitive à cette question, Boutin dans [6] propose de construire un estimateur de ces effets et situe l'apparition d'effet d'échelle pour  $\epsilon \approx 0,1$ . Dans [3] l'auteur montre que, vis-à-vis de la dilatation thermique, quand  $\epsilon \geq \frac{1}{3}$  les modèles du premier ordre sont mis en défaut. L'estimation d'un seuil d'apparition des effets de micro structure à quelque chose arbitraire, car cette apparition est progressive et la sensibilité d'une microstructure dépend pré-

<sup>2</sup>Cette question est encore ouverte à l'heure actuelle et les convergences d'un milieu vers un autre sont pour l'instant essentiellement heuristiques.

cisément de celle-ci [36] ainsi que de ses conditions aux limites [6].

## **I-2.2 Modélisation du comportement élastique**

Vis-à-vis des besoins d'un bureau d'étude en phase de conception deux points sont à considérer :

- le calcul des propriétés effectives du matériau ;
- le calcul complet d'une structure.

En effet une approche sera performante si elle permet de déduire de la microstructure le comportement effectif du matériau. Cela permettra de faire du pré-dimensionnement. Et elle sera d'autant plus intéressante que les résultats obtenus permettront de simplifier les calculs de dimensionnement consécutifs.

Ce dernier point est important car si le calcul d'une pièce massive est déjà une opération compliquée, le calcul d'une pièce à microstructure devient problématique. Le maillage de l'ensemble de la microstructure dans le cas d'un matériau cellulaire conduit à l'explosion du temps de calcul associé. L'utilisation de matériaux cellulaires dans la conception de pièces mécaniques est tributaire des méthodes de calcul qui lui sont associées.

Pour calculer les propriétés d'un milieu architecturé plusieurs approches sont envisageables :

- calcul complet par éléments-finis ;
- calcul à partir de modèles analytiques ;
- calcul à partir d'un milieu homogène équivalent.

Nous nous intéresserons successivement à chacune de ces trois possibilités dans les sous-sections suivantes. Commençons par le calcul de l'ensemble de la microstructure par la méthode des éléments finis.

### **I-2.2.1 Calculs complet par élément-finis**

C'est l'approche la plus directe du problème. On obtient pour un problème donné l'ensemble des champs solutions. De plus on ne fait pas d'hypothèse sur le milieu (périodique, infini, etc.), ni sur les champs, et on a une grande liberté sur les géométries.

Cependant, formulée comme cela, cette approche souffre de trois inconvénients majeurs :

- l'extraction du comportement effectif n'est pas immédiat ;
- même remarque pour l'extraction d'une classe de résultats généraux ;
- le maillage de la microstructure coûte cher en temps de calcul et en volume de stockage de matrice.

Toutefois l'avantage de cette approche est qu'elle permettra de valider (ou non) un calcul simplifié. Mais elle ne simplifie pas le problème.

Les deux autres approches, c'est-à-dire celle par modèles analytiques, à la Gibson-Ashby, ainsi que par milieux équivalents, intériorisent et synthétisent les effets de la géométrie et du matériau constitutif. On construit un matériau effectif. Regardons plus en détails les avantages et inconvénients de ces deux approches.

## I-2.2.2 Modèles analytiques

On trouve dans [16] le tableau suivant que nous avons complété par quelques références annexes [37, 38] :

Topologie	Densité relative $\bar{\rho}$	Module de Young relatif $\bar{E} = \frac{E^*}{E}$	Module de cisaillement relatif $\bar{G} = \frac{G^*}{E}$	Coefficient de Poisson $\nu^*$	Isotrope
Carrée	$2 \left( \frac{e}{L} \right)$	$\frac{1}{2} \bar{\rho}$	$\frac{1}{16} \bar{\rho}^3$	0	Non
Triangulaire	$2\sqrt{3} \left( \frac{e}{L} \right)$	$\frac{1}{3} \bar{\rho}$	$\frac{1}{8} \bar{\rho}^3$	$\frac{1}{3}$	Oui
Hexagonale	$\frac{2}{\sqrt{3}} \left( \frac{e}{L} \right)$	$\frac{3}{2} \bar{\rho}^3$	$\frac{3}{8} \bar{\rho}^3$	1	Oui
Kagomé	$\sqrt{3} \left( \frac{e}{L} \right)$	$\frac{1}{3} \bar{\rho}$	$\frac{1}{8} \bar{\rho}^3$	$\frac{6-\bar{\rho}^2}{18+\bar{\rho}^2} \approx \frac{1}{3}$	Oui
Circulaire	$\approx 1,813 \left( \frac{e}{R} \right)$	$\approx \frac{1,396}{1-\nu^2} \bar{\rho}^3$	$\approx \frac{0,386}{1-\nu^2} \bar{\rho}^3$	$\approx 0,806$	Oui

Les informations contenues dans ce tableau sont les grandeurs relatives dans le plan<sup>3</sup> obtenues comme une fonction de la densité relative. Ces grandeurs correspondent aux valeurs effectives obtenues pour des sollicitations dans le plan. On constate que l'on retrouve bien, pour les topologies les plus courantes, les résultats de [15].

Si cette manière de procéder pour déterminer les grandeurs effectives d'un matériau cellulaire a comme grand mérite sa simplicité de mise en oeuvre, elle possède un certain nombre de limitations intrinsèques.

### Insuffisances de ces modèles

Nous illustrerons certaines des insuffisances des modèles analytiques à partir de l'étude des nidas cylindriques dans un réseau hexagonal<sup>4</sup>. Le choix de ce type de nida est lié au fait que celui correspond aux matériaux modèles que nous avons réalisés en laboratoire à partir d'assemblages de minitubes (cf. annexe I-B).

La dérivation des modules effectifs pour ce type de géométrie n'est pas souvent évoquée dans la littérature. Le livre de Gibson et Ashby [15] n'évoque pas ce type de nida, pas plus que la publication de Hayes et *al.* [16] qui résume pourtant un grand nombre de modèles. Une des premières études concernant cette topologie a été celle menée par Papka et Kyriakides dans [37], on trouve dans cette publication les résultats suivants :

$$\bar{\rho} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \left( \frac{e}{D_i} \right) \quad (\text{I-2.1})$$

$$\bar{E} \approx \frac{8,329}{1-\nu^2} \left( \frac{e}{R_i} \right)^3 \quad (\text{I-2.2})$$

où  $\bar{\rho}$  représente la densité relative,  $\bar{E}$  le module de Young relatif et  $\nu$  le coefficient de Poisson. De plus  $R_i, D_i, e$  sont respectivement les rayon et diamètre intérieurs ainsi que l'épaisseur. Chung

<sup>3</sup>La notion \* indique un module dans le plan. Ces modules plans ne doivent pas être confondu avec modules du matériau effective. On remarque notamment que si l'on ne considère pas la nature « apparente » du coefficient de Poisson dans le plan, alors celui viole les règles de stabilité classique. On peut toutefois construire, à partir d'eux, les coefficients du tenseur d'élasticité complet et ensuite obtenir les vrais modules effectifs. La procédure de construction est donnée III-3.

<sup>4</sup>Ou de topologie  $\infty$  sur un réseau hexagonal, selon la terminologie introduite au cours du chapitre I-1.



et Waas [38–40] dans leur suite ont partiellement complété les résultats précédents. Dans [38] on peut trouver les expressions suivantes :

$$\bar{E} \approx \frac{8,329}{1-\nu^2} \left( \frac{e}{R_i} \right)^3 \approx \frac{1,396}{1-\nu^2} \bar{\rho}^3 \quad (\text{I-2.3})$$

$$\bar{G} \approx \frac{2,306}{1-\nu^2} \left( \frac{e}{R_i} \right)^3 \approx \frac{0,386}{1-\nu^2} \bar{\rho}^3 \quad (\text{I-2.4})$$

$$(\text{I-2.5})$$

avec  $\bar{G}$  le module de Coulomb relatif.

Les hypothèses sous lesquelles ces résultats ont été obtenus ne sont pas clairement énoncées. La référence [37] est la plus claire sur cette question mais l'information ne réside que dans les petites lignes de l'annexe de leur article, tandis que dans [38] pratiquement rien n'est dit. Les propriétés équivalentes sont dérivées de la même manière dans ces deux publications. La dérivation se base sur un modèle poutre dans lequel l'effet de membrane est négligé, [37] note que ce modèle marche bien quand  $\bar{\rho} < 0,08$ , [38] ne dit rien. Cela peut conduire dans le cas de nos matériaux à des résultats faux.

Considérons par exemple le cas d'un assemblage de mini tubes dont les diamètres externes et internes sont respectivement de  $500 \mu\text{m}$  et de  $300 \mu\text{m}$ . Une formule indiquée dans [37] estime la densité relative de notre matériau à 1,2 tandis qu'une autre, extraite de [38], estime un module de Young relatif de 2,78. Les grandeurs obtenues n'ont pas de sens physique et la validité des modèles analytiques dans notre cas de figure est mise en défaut. L'hypothèse de base de tous les modèles effectifs que l'on peut trouver dans la littérature est que l'épaisseur de la poutre est faible devant sa longueur [15]. Dans l'exemple précédent cette hypothèse n'est pas vérifiée et cela conduit aux résultats observés. La question est de savoir à partir de quand, dans le cas de cette topologie, les approximations classiques conduisent à des résultats faux. Notons de plus que dans le cadre des approximations de la littérature comme on a  $R_i \approx R_e$ , où  $R_e$  est le rayon externe, il est inutile de préciser de quel rayon on parle. Pour éviter toutes ambiguïtés recalculons  $\bar{\rho}$  dans le cas général.

A partir des résultats établis au §.I-1.2.2, nous pouvons écrire, dans les systèmes de variables  $(t, R_e)$  et  $(t, R_i)$ , les relations suivantes :

$$\bar{\rho} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \left( \frac{e}{R_e} \right) \left( 2 - \left( \frac{e}{R_e} \right) \right) = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \left( 1 - \frac{1}{\left( 1 + \left( \frac{e}{R_i} \right) \right)^2} \right) \quad (\text{I-2.6})$$

Ces formules sont les formules exactes de la densité relative. Si maintenant on a  $\left( \frac{e}{R_i} \right) \ll 1$  et donc  $\left( \frac{e}{R_e} \right) \ll 1$  alors via un développement limité on obtient, pour les deux systèmes, l'approximation suivante :

$$\bar{\rho} = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \left( \frac{e}{R} \right) \quad (\text{I-2.7})$$

c'est-à-dire l'expression de Papka et de Kyriakides. Notons  $\bar{\rho}_e$  l'expression exacte de la densité relative ainsi que  $\bar{\rho}_a$  son expression approchée. Nous pouvons définir de la manière suivante la fonction erreur relative :

$$\text{err}\% = \left| \frac{\bar{\rho}_a - \bar{\rho}_e}{\bar{\rho}_e} \right| \quad (\text{I-2.8})$$

Si l'on pose  $x = \left(\frac{e}{R_e}\right)$ , par exemple, on obtient :

$$err_{x\%} = \left| \frac{x}{x-2} \right| \quad (\text{I-2.9})$$

Cette relation nous permet de tracer la fonction d'erreur que l'on observe figures I-2.2 :

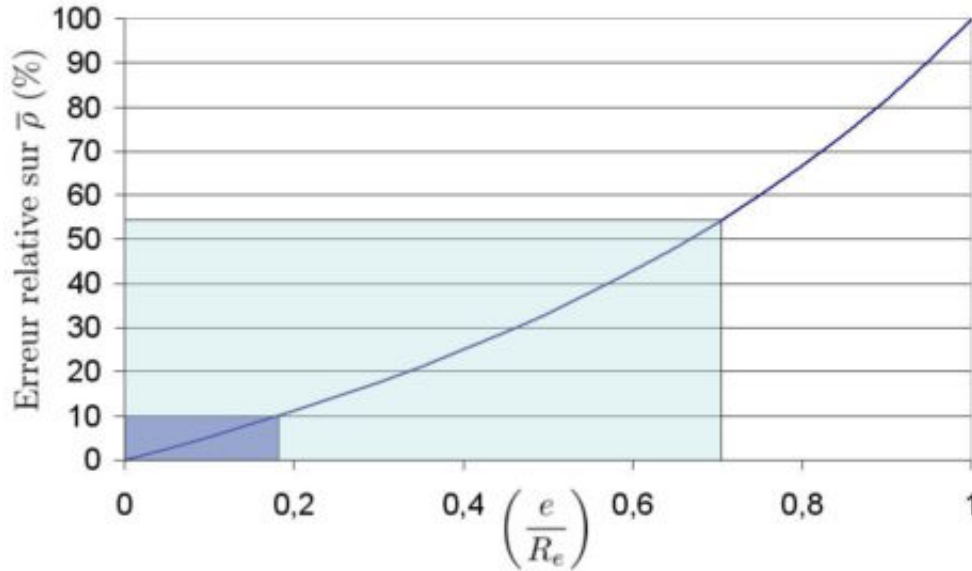


FIG. I-2.2 – Mesure de l'erreur sur  $\bar{\rho}$  en fonction de  $\left(\frac{e}{R_e}\right)$  dans l'approximation de Papka. Le secteur bleu clair indique le domaine des nidas usuels, le domaine bleu foncé la limite de validité des modèles analytiques

Nous considérerons que les formules analytiques de la littérature sont valables quand elles conduisent à moins de 10% d'erreur sur la densité relative. Ceci nous permet de tracer sur la figure I-2.2 le domaine de validité des formules analytiques ainsi celui dans lequel se situent les matériaux qui nous intéressent. On constate immédiatement que les modèles de la littérature sont inadaptés à nos matériaux. Ce qu'il est important de noter est que l'application des formules analytiques issues de publications comme [38] dans lesquelles les limites de validité du modèle ne sont pas précisées peuvent conduire à des erreurs importantes sur les grandeurs effectives.

### Point sur les modèles analytiques

Au niveau des limitations des modèles de la littérature nous pouvons également citer deux autres points problématiques. Tout d'abord il est à noter que du fait de l'hypothèse  $\left(\frac{e}{R_e}\right) \ll 1$  la dérivation du modèle analytique néglige l'effet de membrane qui normalement existe. Pour résoudre cela il faudrait remplacer la modélisation par poutres d'Euler-Bernoulli par une modélisation par poutres de Timoshenko [15, 37]. Le deuxième point est que les modèles standards supposent une épaisseur  $e$  constante en tout point de la géométrie, or ceci est faux au niveau de la zone de contact où, dans notre cas, on a une épaisseur de  $2e$ .

De fait, il est possible de prendre en compte tout ces effets et redériver les formules exactes dans ces conditions. Toutefois plusieurs autres problèmes se posent à nous avec cette démarche :

- si l'on change de géométrie, alors le calcul est à revoir ;
- on est limité à des géométries simples ;
- l'approche ne fournit pas de résultats généraux ;
- l'obtention des coefficients supplémentaires dans le cas d'un matériau anisotrope se complique rapidement ;
- il y a des hypothèses cachées sur les champs appliqués pour le calcul des grandeurs effectives ;
- ces résultats ne sont pas d'un grand intérêt pratique pour un calcul de structure.

Détaillons brièvement chacun de ces points. Tout d'abord les formules analytiques ne sont valables que pour une géométrie déterminée. La dérivation des résultats dans le cas d'un nid hexagonal, ne nous apprend rien sur les nidas carrés. Et à chaque nouvelle géométrie correspond une nouvelle dérivation. Cette approche aboutit vite à l'établissement d'un catalogue. De fait on n'obtient pas vraiment de résultats généraux permettant d'explorer rapidement un espace de solution, à la place on obtient une litanie de cas particuliers. De plus, si l'on veut être totalement rigoureux, on notera qu'un milieu possédant une symétrie hexagonale n'est pas élastiquement isotrope. Sa classe de symétrie est celle de l'isotropie transverse, or cette classe est définie par la donnée de 5 coefficients et non pas de 2 coefficients. Quels sont alors ces coefficients ? De plus il est facile de concevoir des nidas qui ne soient pas isotropes transverses, auquel cas le nombre de coefficients à identifier augmente.

On est de plus cantonné à l'étude de géométrie relativement simple. La dérivation de résultats dans le cas où l'épaisseur et la forme de la paroi varieraient deviendrait très rapidement très compliquée à gérer.

Un autre problème réside dans les hypothèses qui sont cachées dans la dérivation de ces formules analytiques. Ces hypothèses consistent essentiellement :

1. à supposer le milieu occupé par le matériau cellulaire comme étant infini ;
2. à supposer que la fluctuation des champs mécanique est faible à l'échelle du motif.

Ces hypothèses sont toutefois courantes dans beaucoup de théories visant à établir les propriétés effectives d'un matériau hétérogène. Si l'on réalise des plaques minces à partir de nos matériaux quelle est la pertinence des modèles analytiques ? La probabilité d'avoir enfreint les hypothèses est importante en particulier parce que les limites de ces hypothèses sont floues.

Un dernier point est, qu'une fois les propriétés mécaniques estimés par une approche analytique, il reste à effectuer un véritable dimensionnement à partir d'un calcul par éléments-finis. Or vis-à-vis de ce calcul, l'approche analytique ne remplace pas ce calcul, ni ne le simplifie.

Une approche intermédiaire entre calculs par éléments-finis et modèles analytiques semble être la voie la plus intéressante à utiliser. La théorie de l'homogénéisation se situe précisément à ce carrefour.

Si ces dernières approches ne sont pas dénuées de limitations (dont certaines sont communes à celles des modèles analytiques), elles possèdent comme avantage de proposer un cadre général dans lequel le calcul des propriétés effectives peut être automatisé à partir d'un logiciel éléments-finis. Ainsi à partir de cette approche il est envisageable de déterminer le comportement effectif de matériaux à géométrie très complexe, l'ensemble de coefficients d'anisotropie est obtenu, et comme nous le verrons, il est possible d'amoinrir les hypothèses sur les champs pour faire apparaître les effets du second ordre.

### I-2.2.3 Milieu de substitution

#### Homogénéisation

L'idée est de ne plus étudier notre matériau avec l'ensemble de sa microstructure mais de lui substituer un matériau homogène équivalent dont la formulation des lois de comportement prendrait en compte de manière implicite cette microstructure [2, 32]. Des publications comme notamment celles de Forest [41, 42] ainsi que la thèse de Cardona [3] montrent comment il est possible de remplacer un milieu hétérogène par un milieu homogène équivalent. Pour illustrer notre propos nous suivrons l'exemple donné dans [3]. L'objectif est de remplacer une plaque perforée (fig.I-2.3(a)), que l'on peut dans notre cas assimiler à un nida, par une plaque homogène (fig.I-2.3(b)) dont le comportement mécanique est identique.

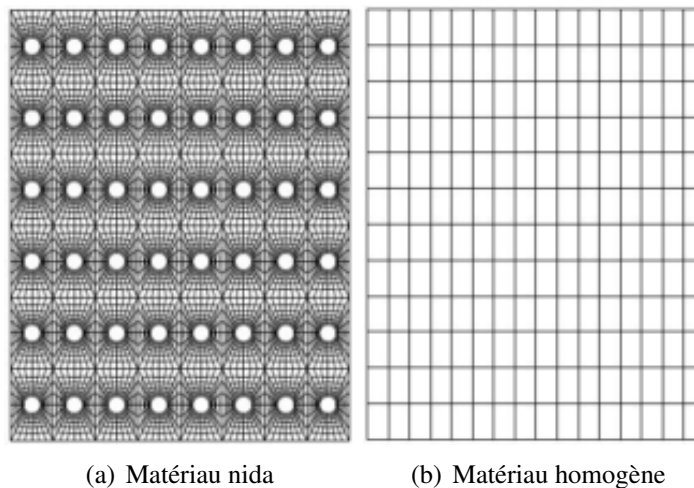


FIG. I-2.3 – Homogénéisation d'un nida

L'identification des coefficients d'élasticité du matériau homogène équivalent se fait à partir de l'étude par éléments-finis du comportement de la cellule périodique du matériau nida. Le détail et la mise en oeuvre de cette identification est l'objet du chapitre I-3. Cette démarche est clairement une généralisation de celle employée dans le cas de modèles analytiques. Le milieu ainsi obtenu a un comportement mécanique tendant à être équivalent à celui du milieu hétérogène (fig.I-2.3).

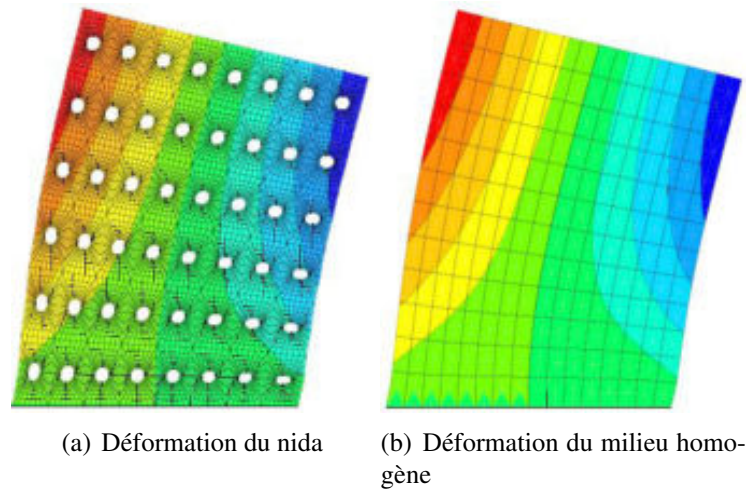


FIG. I-2.4 – Comparaison du champ de déplacement  $u_y$  suite à un glissement simple

La figure fig.I-2.4 représente le champ déplacement  $u_y$  résultant d'un glissement simple de la structure. On peut regarder le long d'une ligne horizontale la valeur de ce déplacement (fig.I-2.5) dans les cas où l'on considère : \_ la structure hétérogène ; \_la structure homogène équivalente ; \_une plaque sans trou dont le matériau est celui de la structure hétérogène.

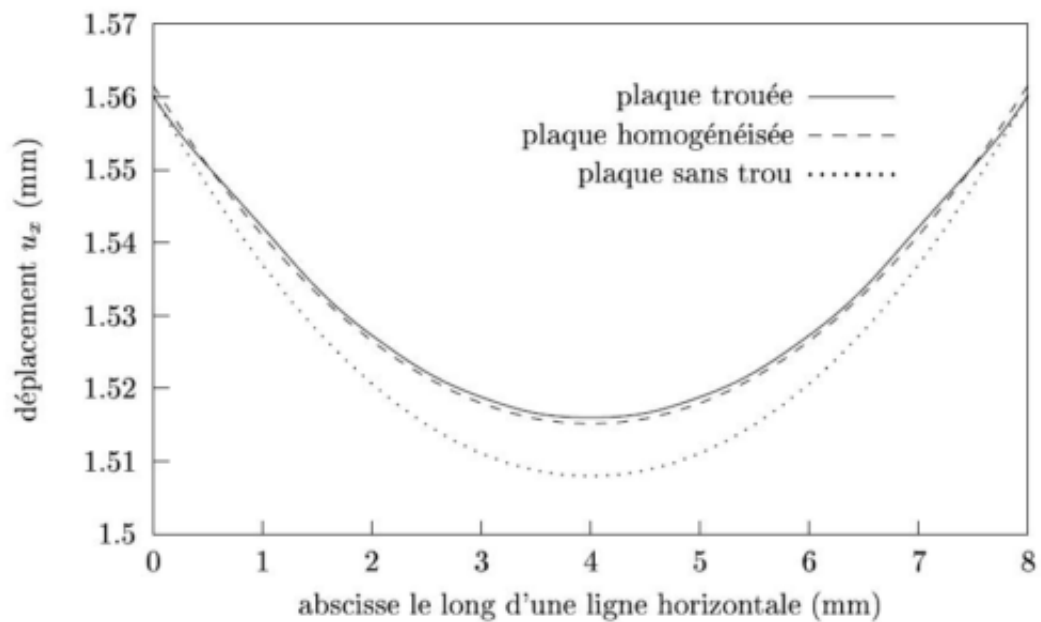


FIG. I-2.5 – Déplacement le long d'une ligne horizontale

Cette méthode présente un certain nombre d'avantages. On peut déterminer à partir de la connaissance géométrique de l'architecture son comportement effectif, et cela quelque soit la complexité de cette microstructure. De plus l'ensemble des coefficients anisotropes est identifié. Le second point est que l'on peut réutiliser les résultats de cette identification pour déterminer le comportement d'une structure, chose qui n'était pas possible avec les modèles analytiques.

Toutefois il convient de souligner que cette approche n'est pas dénuée de défauts. L'identification du comportement effectif de la cellule se fait dans l'hypothèse d'un milieu infini, de

fait la réponse d'une structure homogénéisée est légèrement plus raide que celle du matériau hétérogène. Toutefois comme on peut le constater sur la figure I-2.5 cet effet est minime. Un autre point important concerne l'hypothèse de séparation des échelles. Regardons à présent une situation dans laquelle cette hypothèse est mise en défaut.

### Effet du second ordre

Considérons le paramètre  $\epsilon$  que nous avons défini au §.I-2.1.2 comme étant le rapport entre la longueur d'onde de la fluctuation de la sollicitation,  $L_\omega$ , et  $l$  le paramètre d'architecture. L'homogénéisation telle que nous l'avons présentée ci-dessus repose sur l'hypothèse que  $\epsilon \rightarrow 0$ . Or cette hypothèse est difficile à vérifier en pratique car dans le cas de structure mesoscopique la taille des hétérogénéités n'est, par définition, jamais microscopique [4, 5].

Toujours dans [3] l'auteur étudie la dilatation thermique d'une plaque soumise à deux chargements « sévères » (fig.I-2.6). Le premier de ces chargements est linéaire :

$$T(x) = A \left| \frac{x}{l} \right| \quad (\text{I-2.10})$$

où  $A$  est l'amplitude du chargement et  $l$  la dimension d'une cellule. Le deuxième chargement est sinusoïdal :

$$T(x, y) = K + A \left( \sin \left( \frac{2x}{l} \right) + \cos \left( \frac{2y}{l} \right) \right) \quad (\text{I-2.11})$$

où  $K$  est un champ moyen. La longueur d'onde du chargement thermique  $L_\omega$  est d'environ  $3l$ .

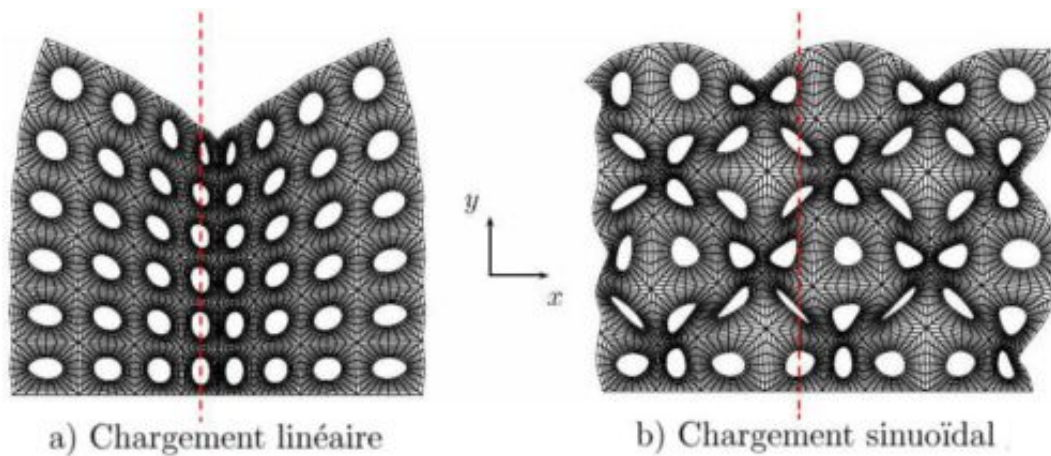


FIG. I-2.6 – Déformation de la plaque nida

L'auteur trace (fig.I-2.7) ensuite le déplacement selon  $x$  le long d'une ligne verticale traversant, dans la configuration initiale, la quatrième rangée de trous. Sur ces graphiques sont également tracés le déplacement des points du milieu homogène le long de la même verticale.

Tandis que dans le cas du chargement linéaire les déplacements moyens du milieu hétérogène et du milieu de substitution concordent, on constate que cela n'est plus le cas quand on considère le chargement sinusoïdal. La longueur d'onde du chargement de  $3l$  fait que le champ de température ne peut plus être supposé constant au sein d'une cellule élémentaire. Nous ne sommes plus dans les hypothèses classiques de l'homogénéisation, et le milieu effectif n'arrive pas à reproduire les effets de structure qui deviennent, pour ce chargement là, non-négligeables. La définition d'un milieu de substitution prenant en compte ces effets de microstructure est

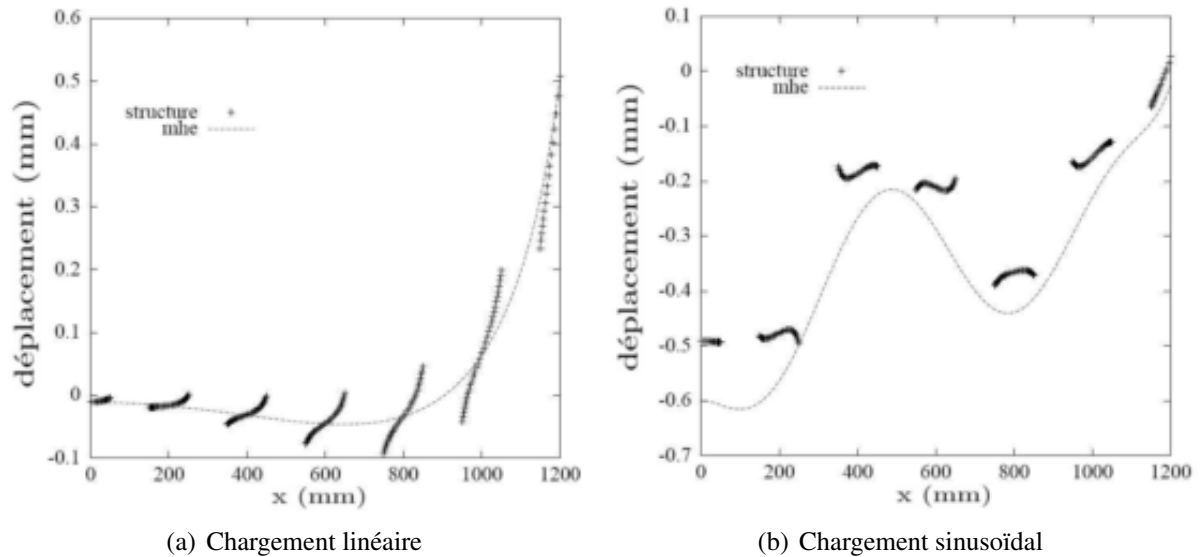


FIG. I-2.7 – Comparaison du déplacement entre milieu complet et homogénéisé pour deux types de chargement

néanmoins toujours possible. Toutefois le milieu homogène équivalent ne pourra plus être un milieu homogène classique.

### Enrichissement du milieu de substitution

A la suite de cela l'auteur montre par une analyse asymptotique que le milieu de substitution à considérer dans ce cas là est un milieu homogène thermoélastique du second gradient. Le détail de cette analyse pourra être retrouvé dans [3, 9] et nous ne reviendrons pas dessus. Ce qu'il est important de noter est que dès lors que les champs moyens ne sont plus lentement variables, le milieu homogène équivalent doit être considéré comme un milieu continu généralisé [8, 9, 43, 44]. Une typologie de ces différentes classes de milieux continus généralisés peut être trouvée dans [9]. La figure I-2.8 qui est extraite de l'HDR de Forest nous permet de rapidement situer les classes de milieux généralisés les uns par rapport aux autres. Sans rentrer dans les détails donnons nous quelques définitions. Ce que l'on appelle *milieu de Cauchy* correspond tout simplement à un milieu élastique classique. C'est de fait un milieu dont la contrainte en un point dépend uniquement du premier gradient du déplacement en ce point, de plus les variables cinématiques décrivant les déplacements contiennent uniquement des degrés de liberté de translation. Si l'on enrichit la base des degrés de liberté en autorisant, par exemple, des rotations du V.E.R alors on aboutit à un milieu d'*ordre supérieur*. Inversement si l'on conserve nos variables cinématiques mais que l'on prend en compte dans le calcul des contraintes également les gradients du déplacement d'ordre supérieur alors on aboutit à un milieu de *degré supérieur*.

La généralisation des techniques d'homogénéisation classiques permet d'identifier les composantes d'ordres supérieurs [8, 41, 42]. Le type de milieu résultant dépend des hypothèses retenues lors de cette phase d'homogénéisation. Dans cette étude nous nous intéresserons à l'étude de l'élasticité linéaire anisotrope d'un milieu du second-gradient. Nous considérerons à la suite de [3, 9, 41] que ce type de milieu puisse définir un milieu homogène de substitution pour nos milieux hétérogènes. Nous introduirons au chapitre I-3 une méthode permettant d'obtenir les opérateurs d'élasticité de ce modèle. Détaillons à présent ce modèle de comportement.

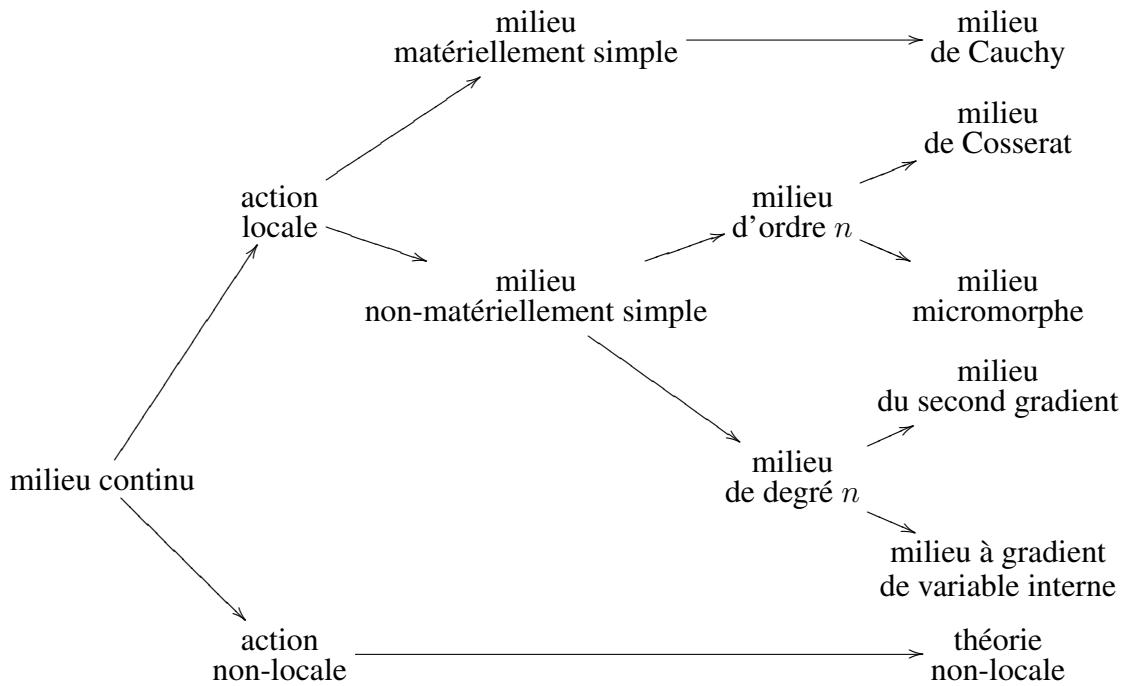


FIG. I-2.8 – Typologie des MCG

### I-2.2.4 Milieu élastique homogène du second gradient

Présentons rapidement les équations de comportement du second gradient. Nous analyserons plus en détail sur ces écritures au chapitre II-2. Les équations de l'élasticité s'écrivent [9] :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\varepsilon}} + \underline{\underline{M}} : \underline{\underline{K}} \quad (\text{I-2.12})$$

$$\underline{\underline{S}} = \underline{\underline{M}}^T : \underline{\underline{\varepsilon}} + \underline{\underline{A}} : \underline{\underline{K}} \quad (\text{I-2.13})$$

où :  $\underline{\underline{\sigma}}$  est le tenseur des contraintes de Cauchy ;  $\underline{\underline{S}}$  le tenseur d'hyper-contrainte ;  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  le tenseur des déformations ;  $\underline{\underline{K}}$  est le tenseur du « gradient des déformations » ;  $\underline{\underline{C}}$  est le tenseur d'élasticité du premier ordre ;  $\underline{\underline{A}}$  le tenseur d'élasticité du second ordre et  $\underline{\underline{M}}$  le tenseur de couplage entre l'élasticité classique et celle du second ordre.

On rappelle que  $\underline{u}$  est le champ de déplacement et que  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  est le tenseur de déformation qui est défini via la relation classique suivante :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \{\underline{u} \otimes \underline{\nabla}\} \quad (\text{I-2.14})$$

où la notation  $\{\}$  indique la partie symétrique de l'expression entre accolades. De fait la première question qui se pose est de savoir quelle définition se donner pour le tenseur  $\underline{\underline{K}}$ . Mindlin et Eshel [10] recensent trois manières différentes d'aborder ce problème. L'ensemble de ces écritures définit des milieux communément appelés *du second gradient*. Comme nous les réutiliserons systématiquement dans la suite nous les introduirons rapidement ici.



### Formulation type I : Écriture en déplacement

On peut écrire  $\underline{\underline{K}}$  comme étant le second gradient du déplacement. On a alors

$$\underline{\underline{K}}^{(I)} = \underline{u} \otimes \underline{\nabla} \otimes \underline{\nabla} \quad (\text{I-2.15})$$

On a donc  $K_{ijk}^{(I)} = u_{i,jk}$  ce qui implique que  $K_{ijk}^{(I)} = K_{ikj}^{(I)}$  et que donc on a<sup>5</sup>  $\underline{\underline{K}}^{(I)} \in \mathbb{T}_{i(jk)}$ .

### Formulation type II : Écriture en déformation

On peut également écrire  $\underline{\underline{K}}$  comme étant le premier gradient de la déformation. De fait,

$$\underline{\underline{K}}^{(II)} = \underline{\varepsilon} \otimes \underline{\nabla} \quad (\text{I-2.16})$$

On a donc  $K_{ijk}^{(II)} = \frac{1}{2}(u_{i,jk} + u_{j,ik})$  ce qui implique que  $K_{ijk}^{(II)} = K_{jik}^{(II)}$  et que donc on a  $\underline{\underline{K}}^{(II)} \in \mathbb{T}_{(ij)k}$ .

### Formulation type III : Écriture en fonction des mécanismes de déformation

Une dernière solution consiste à scinder  $\underline{\underline{K}}$  en un tenseur polaire totalement symétrique  $\underline{\underline{K}}^{(III)}$  ainsi qu'en un tenseur axial  $\underline{\underline{K}}^R$  représentant le gradient de la rotation. On a donc, d'une part,  $K_{ij}^R = -\frac{1}{2}\epsilon_{ipq}u_{p,qj}$  et, d'autre part,  $K_{ijk}^{(III)} = \frac{1}{3}(u_{i,jk} + u_{k,ij} + u_{j,ki})$ . En conséquent  $\underline{\underline{K}}^{(III)} \in \mathbb{T}_{(ijk)}$ .

### Discussion

Comme montré par Mindlin et Eshel [10] le choix d'une convention par rapport à une autre est laissé à la convenance de tout un chacun, les trois représentations induisant des équations strictement équivalentes. On trouve d'ailleurs, toujours dans [10], l'ensemble des combinaisons linéaires permettant de passer d'une représentation à une autre. L'écriture des conditions aux limites ainsi que des opérateurs de comportement s'effectuant en fonction de la représentation de  $\underline{\underline{K}}$  choisie, la seule contrainte est d'être cohérent. On peut faire quelques remarques supplémentaires. L'écriture II est celle que l'on retrouve principalement dans les travaux où le milieu à gradient de déformation (strain gradient) est obtenu à partir de l'homogénéisation de matériaux hétérogènes. Les travaux de Forest et Cardona [3, 9, 41] ainsi que ceux de Boutin [6] et Triantafyllidis [7] utilisent ce formalisme. Toutefois dans les publications appliquant la théorie du second gradient à un milieu homogène, c'est la formulation III qui est généralement préférée en ceci qu'elle permet de séparer les différents mécanismes d'ordres supérieurs en présence. On peut notamment citer la publication de Germain sur le principe des puissances virtuelles [45], ou encore la thèse de Laheurte sur la modélisation des phénomènes de coupe [46].

Comme nous nous intéressons à l'homogénéisation de matériaux cellulaires, nous choisirons de travailler essentiellement à partir de l'écriture numéro II. C'est-à-dire

$$\underline{\underline{K}}^{(II)} = \underline{\varepsilon} \otimes \underline{\nabla} \quad (\text{I-2.17})$$

---

<sup>5</sup>La notation (...) indique la symétrie par échange des indices entre parenthèse.

Il convient de noter que les milieux généralisés contiennent dans leur formulation un plus grand nombre de tenseurs. Lorsque l'on construit un milieu équivalent du second ordre par homogénéisation les informations sur l'architecture du milieu sont transformées en informations contenues dans ces tenseurs. L'étude par des voies mathématiques de ces tenseurs nous permet ensuite de remonter à des informations générales sur notre milieu hétérogène initial. On a donc ainsi une méthode d'étude permettant de dériver des résultats généraux sur l'ensemble des microstructures réalisables. Le principe de cette démarche est schématisé par la figure fig.I-2.9.

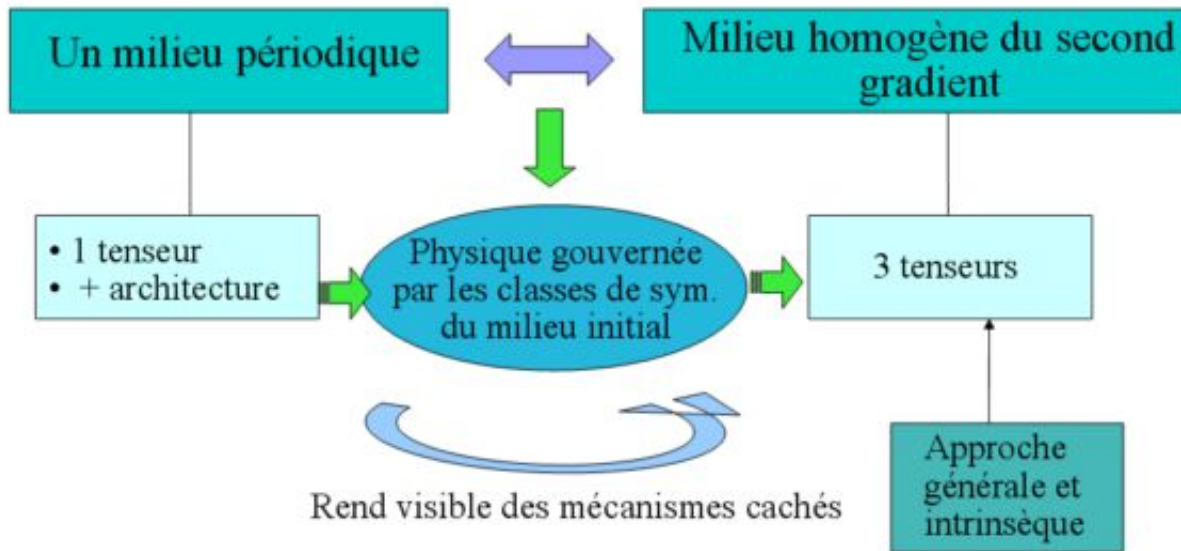


FIG. I-2.9 – Principe de substitution

### I-2.3 Synthèse

Notre problématique au cours de ce chapitre a été la suivante : comment, vis-à-vis de l'ensemble des propriétés mécaniques définies pour une classe de géométrie, arriver à extraire une classe de résultats généraux pouvant aider, soit à la conception a priori d'architecture répondant à une série de critères, soit à modéliser proprement un matériau de ce type déjà existant ?

Nous avons tout d'abord restreint, au §.I-2.1, le cadre des propriétés mécanique étudiées à l'élasticité linéaire. Notre choix a été motivé par :

- le rôle centrale de l'élasticité comme comportement mécanique ;
- la spécificité de ce comportement dans un milieu architecturé ;
- la volonté d'obtenir une classe de résultat généraux.

Nous nous sommes ensuite intéressé, au §.I-2.2, à définir une méthode d'étude satisfaisant à trois critères :

- permettre le calcul des propriétés effectives ;
- pouvoir être utilisée dans un code de calcul ;
- permettre d'obtenir une classe de résultat généraux.

La méthode que nous avons retenue consistera à remplacer notre milieu nida par un milieu homogène équivalent. De manière à prendre en compte les effets d'architectures le milieu homogène équivalent sera un milieu continu généralisé du second gradient. La dérivation d'une classe

de résultat généraux est à présent possible en procédant à l'étude des opérateurs du second ordre obtenue au terme de la procédure d'homogénéisation. La définition de cette procédure d'homogénéisation est l'objectif du chapitre à venir.

Ce dernier chapitre de la partie 1 est consacré à la dernière de nos questions inaugurales et concerne le moyen de calculer nos propriétés effectives. Nous avons au cours du chapitre précédent choisi de nous concentrer sur l'élasticité linéaire des milieux hétérogènes. La méthode retenue pour cela consiste à remplacer notre milieu hétérogène par un milieu homogène équivalent du second gradient. Comme montré dans [3, 6, 9] cette substitution est pertinente lorsque la longueur d'onde de la sollicitation mécanique devient commensurable avec la longueur caractéristique de notre microstructure. Dans le cas de nos structures cette longueur est celle de la cellule périodique. L'analyse rigoureuse de cette propriété passe par un développement asymptotique des champs mécaniques en fonction des diverses longueurs caractéristique du problème. Cette étude est détaillée dans la thèse de Cardona [3] et nous ne reviendrons pas ici sur ce point. Nous nous intéresserons au cours de ce chapitre à la mise en place d'une méthode de dérivation heuristique des tenseurs d'ordre supérieur à partir d'une analyse par éléments finis de la cellule élémentaire. Cette technique a été initialement mis en place dans [47] et a été généralisée par Forest dans [41, 48]. Nous reprendrons pour l'essentiel ici l'exposé proposé dans cette dernière référence en détaillant, précisant et complétant un certain nombre de points techniques. Nous concluons cet exposé par une série d'illustrations réalisée à partir de calculs par éléments-finis. Les résultats obtenus justifions la nécessité de procéder à une étude précise des opérateurs anisotropes d'ordre supérieurs.

La méthode d'obtention des tenseurs d'ordres supérieurs utilisée ici se base sur une généralisation des conditions de contour homogène utilisées dans la théorie des modules effectifs [2]. Notons déjà ici le point suivant, en toute rigueur nous devrions travailler à partir de condition de contour périodique. Toutefois l'implémentation de cette condition aux limites dans ZeBuLoN n'a pas pu être réalisée dans le cadre de cette thèse. Ceci nous conduira, comme dans le cas de l'homogénéisation classique [2], à sur-estimer les tenseurs effectifs. Toutefois cette surestimation ne nuit pas à l'analyse des opérateurs que nous proposerons dans la seconde partie de cette thèse.

Commençons par introduire la notion de condition de contour non-homogène.

### I-3.1 Condition de contour non-homogène

Introduisons tout d'abord les différentes variables que nous manipulerons dans la suite de ce chapitre.  $\underline{u}(x_1, x_2)$  est le champ de déplacement local défini au sein de la cellule élémentaire. A ce champ on lui en associe un autre,  $\underline{U}$ , qui est le champ moyen, c'est-à-dire le champ de déplacement du milieu effectif. On définit les gradients successifs du champ macroscopique de la manière suivante :

$$\underline{E} = \underline{U}\{\otimes\}\underline{\nabla}; \quad \underline{K}^I = \underline{U} \otimes \underline{\nabla} \otimes \underline{\nabla}; \quad \underline{T} = \underline{U} \otimes \underline{\nabla} \otimes \underline{\nabla} \otimes \underline{\nabla} \quad (\text{I-3.1})$$

La notation  $\{\otimes\}$  représente la partie symétrique du gradient. Le tenseur  $\underline{K}^I$  est le second gradient du champ de déplacement, il correspond donc à une modélisation de type I selon la dénomination de Mindlin introduite au chapitre I-2. Le tenseur  $\underline{T}$  est le troisième gradient de  $\underline{U}$  et à donc les symétries indicielles :  $T_{i(jkl)}$ .

Pour effectuer l'homogénéisation d'un milieu hétérogène Forest utilise dans [41] la condition de Dirichlet (I-3.2) comme condition limite sur son VER (Volume Elementaire Représentatif). Il s'agit de l'équivalent non-homogène de la condition de déformation homogène de la théorie des modules effectifs [2]. On peut également retenir sa version périodique telle qu'elle est présentée dans [3] :

$$\underline{u}(\underline{x}) = \underline{E} \cdot \underline{x} + \frac{1}{2} \underline{K}^I \cdot \cdot (\underline{x} \otimes \underline{x}), \quad \underline{x} \in \partial\Omega \quad (\text{I-3.2})$$

$$\underline{u}(\underline{x}) = \underline{E} \cdot \underline{x} + \frac{1}{2} \underline{K}^I \cdot \cdot (\underline{x} \otimes \underline{x}) + \underline{v}(\underline{x}), \quad \underline{x} \in \partial\Omega \quad (\text{I-3.3})$$

avec  $\underline{v}$  un champ de déplacement périodique. Les tenseurs  $\underline{E}$  et  $\underline{K}^I$  sont constants sur le volume.

La notion de condition non-homogène de Dirichlet utilisée est équivalente aux développements polynomiaux de [48]. A la manière de [48] on peut écrire, en 2-D, la relation (I-3.2) de la manière suivante :

$$u_i(x_1, x_2) = E_{i1}x_1 + E_{i2}x_2 + \frac{1}{2}K_{i11}^I x_1^2 + \frac{1}{2}K_{i22}^I x_2^2 + K_{i12}^I x_1 x_2, \quad x_i \in \partial\Omega \quad (\text{I-3.4})$$

En effet, dans [48] les auteurs cherchaient le champ de déplacement  $u_i(x_1, x_2)$  sous la forme :

$$u_i(x_1, x_2) = V_i + E_{i1}x_1 + E_{i2}x_2 + K_{i1}^I x_1^2 + K_{i2}^I x_2^2 + 2K_{i3}^I x_1 x_2 + T_{i111} x_1^3 + T_{i222} x_2^3 + 3T_{i112} x_1^2 x_2 + 3T_{i122} x_1 x_2^2, \quad x_i \in \Omega \quad (\text{I-3.5})$$

ce qui reviendrait, dans notre cas, à écrire une condition de contour non homogène de type :

$$\underline{u}(x_1, x_2) = \underline{V} + \underline{E} \cdot \underline{x} + \underline{K}^I : (\underline{x} \otimes \underline{x}) + \underline{T} \cdot \cdot (\underline{x} \otimes \underline{x} \otimes \underline{x}), \quad \underline{x} \in \partial\Omega \quad (\text{I-3.6})$$

La raison de l'écriture de la condition de contour dans le système I est lié au fait que ce système en facilite l'écriture : en effet, le tenseur  $\underline{x} \otimes \underline{x}$  est totalement symétrique. Au cours de ce chapitre nous utiliserons également une modélisation de type II, c'est-à-dire une écriture en tant que gradient de la déformation. On montre dans [10] que ces deux écritures sont équivalentes. On a les relations suivantes entre ces deux systèmes :

$$K_{ijk}^{II} = \frac{1}{2} (K_{ijk}^I + K_{jik}^I) \quad (\text{I-3.7})$$

$$K_{ijk}^I = K_{ijk}^{II} + K_{kij}^{II} - K_{jki}^{II} \quad (\text{I-3.8})$$

Ces relations peuvent être réécrites sous forme tensorielle, nous noterons  $\tilde{P}^{I \rightarrow II}$  l'opérateur de passage entre la représentation I et la représentation II, et réciproquement. On a alors :

$$P_{ijklmn}^{I \rightarrow II} = \frac{1}{2} (\delta_{il} \delta_{jm} + \delta_{im} \delta_{jl}) \delta_{kn} \quad (\text{I-3.9})$$

$$P_{ijklmn}^{II \rightarrow I} = \delta_{il} \delta_{jm} \delta_{kn} + \delta_{im} \delta_{jn} \delta_{kl} - \delta_{in} \delta_{jl} \delta_{km} \quad (\text{I-3.10})$$

Ces relations de passage nous seront nécessaires dans la suite de ce chapitre, notons de plus que l'on a la relation :

$$P_{ijkopq}^{I \rightarrow II} P_{opqlmn}^{II \rightarrow I} = 1_{ijklmn}^{II} \quad (\text{I-3.11})$$

Il convient de noter qu'il est relatif à la convention de notation II et qu'il n'est pas égal à l'opérateur identité d'ordre 6. De même l'opérateur  $1_{ijklmn}^I$  est distinct de  $1_{ijklmn}^{II}$ .

Regardons comment ces conditions particulières de contour définissent la nature du comportement effectif de notre milieu hétérogène. Nous regarderons pour cela quelles sont les formes des moyennes spatiales pour ces différentes grandeurs.

## I-3.2 Relations de moyenne

Le but de cette section sera d'établir rigoureusement les liens qu'il existe entre l'imposition d'un champ de déplacement de contour et la moyenne spatiale des grandeurs locales résultantes.

Nous travaillerons à présent, et dans la suite de ce chapitre, à partir du champ de déplacement quadratique suivant, défini en bordure de notre VER :

$$\underline{u}(\underline{x}) = \underline{E} \cdot \underline{x} + \frac{1}{2} \underline{K}^I \cdot (\underline{x} \otimes \underline{x}), \quad \underline{x} \in \partial\Omega \quad (\text{I-3.12})$$

Ce qui nous donne en notation indicielle :

$$u_i = E_{io} x_o + \frac{1}{2} K_{ipq}^I x_p x_q, \quad \forall x \in \partial\Omega \quad (\text{I-3.13})$$

On note  $\langle \cdot \rangle$  la moyenne sur une cellule élémentaire dont l'origine est prise au centre de gravité géométrique. On a, d'après [8], les relations de moyenne suivantes sur le volume :

$$\langle \underline{u} \otimes \underline{\nabla} \rangle = \frac{1}{V} \int_{\Omega} \underline{u} \otimes \underline{\nabla} d\Omega = \underline{E} \quad (\text{I-3.14})$$

$$\langle \underline{u} \otimes \underline{\nabla} \otimes \underline{\nabla} \rangle = \frac{1}{V} \int_{\Omega} \underline{u} \otimes \underline{\nabla} \otimes \underline{\nabla} d\Omega = \underline{K}^I \quad (\text{I-3.15})$$

que l'on peut démontrer en utilisant le théorème de Gauss.

Nous vérifions bien que l'imposition des conditions de contour détermine les champs moyens dans la cellule. On peut, à partir des deux relations précédentes, en établir deux autres dont nous aurons besoin pour la suite. On a tout d'abord la relation suivante :

$$\underline{E} = \langle \underline{\varepsilon} \rangle \quad (\text{I-3.16})$$

Ceci est vrai car, comme  $\underline{E}$  est symétrique, on a :

$$\underline{E} = \langle \underline{u} \otimes \underline{\nabla} \rangle \quad (\text{I-3.17})$$

$$= \langle \underline{\nabla} \otimes \underline{u} \rangle \quad (\text{I-3.18})$$

$$= \frac{1}{2}(\langle \underline{u} \otimes \underline{\nabla} \rangle + \langle \underline{\nabla} \otimes \underline{u} \rangle) \quad (\text{I-3.19})$$

$$= \langle \frac{1}{2}(\underline{u} \otimes \underline{\nabla} + \underline{\nabla} \otimes \underline{u}) \rangle \quad (\text{I-3.20})$$

$$= \langle \underline{\varepsilon} \rangle \quad (\text{I-3.21})$$

On peut également établir une relation sur la moyenne du gradient de la déformation locale. On a :

$$\langle \underline{\varepsilon} \otimes \underline{\nabla} \rangle = \underline{\underline{K}}^{\text{II}} \quad (\text{I-3.22})$$

où  $\underline{\underline{K}}^{\text{II}}$  est le tenseur du second gradient de type II [10]. En effet on a :

$$\langle \underline{\varepsilon} \otimes \underline{\nabla} \rangle = \frac{1}{2}(\langle \underline{u} \otimes \underline{\nabla} \otimes \underline{\nabla} \rangle + \langle \underline{\nabla} \otimes \underline{u} \otimes \underline{\nabla} \rangle) \quad (\text{I-3.23})$$

$$= \frac{1}{2}(\langle \underline{u} \otimes \underline{\nabla} \otimes \underline{\nabla} \rangle + \langle \underline{\nabla} \otimes \underline{u} \otimes \underline{\nabla} \rangle) \quad (\text{I-3.24})$$

$$= \frac{1}{2}(K_{ijk}^{\text{I}} + K_{jik}^{\text{I}}) \quad (\text{I-3.25})$$

$$= K_{ijk}^{\text{II}} \quad (\text{I-3.26})$$

$$= \underline{\underline{K}}^{\text{II}} \quad (\text{I-3.27})$$

de même on a :

$$\langle \underline{\varepsilon} \otimes \underline{\nabla} \rangle = \underline{\underline{P}}^{\text{I} \rightarrow \text{II}} \therefore \underline{\underline{K}}^{\text{I}} \quad (\text{I-3.28})$$

On peut étendre le lemme de Hill-Mandel [47]. On considère un champ  $\underline{\sigma}$  auto-équilibré ainsi que  $\underline{\varepsilon}$  un champ de déformation compatible. L'hypothèse  $\underline{\sigma}$  auto-équilibré implique que  $\sigma_{ij,j} = 0$  et l'hypothèse  $\underline{\varepsilon}$  compatible implique que  $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$ . Comme dans le lemme de Hill-Mandel ces deux champs ne sont pas forcément reliés par une loi de comportement. On a alors, en formulation de type I :

$$\langle \underline{\sigma} : \underline{\varepsilon} \rangle = \langle \underline{\sigma} \rangle : \underline{\underline{E}} + \langle \underline{\sigma} \{ \otimes \} \underline{x} \rangle \therefore \underline{\underline{K}}^{\text{I}} \quad (\text{I-3.29})$$

soit, si on pose :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \langle \underline{\sigma} \rangle ; \underline{\underline{S}}^{\text{I}} = \langle \underline{\sigma} \{ \otimes \} \underline{x} \rangle \quad (\text{I-3.30})$$

on aboutit à la relation :

$$\langle \underline{\sigma} : \underline{\varepsilon} \rangle = \underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{E}} + \underline{\underline{S}}^{\text{I}} \therefore \underline{\underline{K}}^{\text{I}} \quad (\text{I-3.31})$$

En formulation II on a :

$$\langle \underline{\sigma} : \underline{\varepsilon} \rangle = \langle \underline{\sigma} \rangle : \underline{\underline{E}} + \langle \underline{\sigma} \otimes \underline{x} \rangle \therefore \underline{\underline{K}}^{\text{II}} \quad (\text{I-3.32})$$

de fait, si l'on pose :

$$\underline{\underline{S}}^{\text{II}} = \langle \underline{\sigma} \otimes \underline{x} \rangle \quad (\text{I-3.33})$$

on aboutit à la relation :

$$\langle \underline{\sigma} : \underline{\varepsilon} \rangle = \underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{E}} + \underline{\underline{S}}^{\text{II}} \therefore \underline{\underline{K}}^{\text{II}} \quad (\text{I-3.34})$$

Cela signifie que le fait d'imposer des conditions quadratiques de contour (I-3.13) sur notre VER engendre des champs dans le volume dont l'énergie moyenne est semblable à celle d'un

milieu du second gradient. Dit d'une autre manière, pour les conditions de contour proposées, notre milieu hétérogène, vu de loin, se comporte comme un milieu du second gradient.

En résumé, on a les formulations suivantes du lemme de Hill-Mandel pour un milieu de substitution du second gradient. En formulation de type I :

$$\langle \underline{\sigma} : \underline{\varepsilon} \rangle = \langle \underline{\sigma} \rangle : \langle \underline{\varepsilon} \rangle + \langle \underline{\sigma} \{ \otimes \} \underline{x} \rangle : \langle \underline{u} \otimes \underline{\nabla} \otimes \underline{\nabla} \rangle \quad (\text{I-3.35})$$

en formulation de type II :

$$\langle \underline{\sigma} : \underline{\varepsilon} \rangle = \langle \underline{\sigma} \rangle : \langle \underline{\varepsilon} \rangle + \langle \underline{\sigma} \otimes \underline{x} \rangle : \langle \underline{\varepsilon} \otimes \underline{\nabla} \rangle \quad (\text{I-3.36})$$

où les champs  $\underline{\sigma}$  et  $\underline{\varepsilon}$  vérifient les propriétés habituelles pour le lemme de Hill-Mandel et où le champ  $\underline{u}$  satisfait la condition de Dirichlet non homogène introduite plus haut. Les résultats dérivés jusqu'à présent sont indépendants du modèle de comportement choisi. Particularisons les dans le cas de l'élasticité linéaire.

## I-3.3 Élasticité linéaire

Les résultats de cette section nous permettront de définir une méthode d'obtention des coefficients des tenseurs d'ordres supérieurs présents dans notre modélisation. L'établissement de cette méthode nécessite l'introduction de plusieurs relations supplémentaires, la définition des tenseurs de localisation étant au centre celles-ci.

### I-3.3.1 Tenseurs de localisation

On se place toujours au niveau de notre cellule élémentaire. On a la relation :

$$\underline{\sigma}(\underline{x}) = \underline{c}(\underline{x}) : \underline{\varepsilon}(\underline{x}), \quad \forall \underline{x} \in \Omega \quad (\text{I-3.37})$$

La linéarité du problème vis-à-vis des tenseurs  $\underline{E}$  et  $\underline{K}^1$  implique l'existence de deux tenseurs de localisation  $\underline{L}^1(\underline{x})$  et  $\underline{L}^{1,2}(\underline{x})$ . Ces tenseurs vérifient la relation suivante :

$$\underline{\varepsilon}(\underline{x}) = \underline{L}^1(\underline{x}) : \underline{E} + \underline{L}^{1,2}(\underline{x}) : \underline{K}^1, \quad \forall \underline{x} \in \Omega \quad (\text{I-3.38})$$

On peut à partir de cette relation définir de nouvelles expressions pour nos différentes moyennes. On a tout d'abord la relation  $\langle \underline{\varepsilon} \rangle = \underline{E}$  qui combinée à l'expression :

$$\langle \underline{\varepsilon} \rangle = \langle \underline{L}^1(\underline{x}) : \underline{E} + \underline{L}^{1,2}(\underline{x}) : \underline{K}^1 \rangle \quad (\text{I-3.39})$$

$$= \langle \underline{L}^1(\underline{x}) \rangle : \underline{E} + \langle \underline{L}^{1,2}(\underline{x}) \rangle : \underline{K}^1 \quad (\text{I-3.40})$$

nous permet d'établir les propriétés suivantes des tenseurs de localisation :

$$\langle \underline{L}^1 \rangle = \underline{1}; \quad \langle \underline{L}^2 \rangle = 0 \quad (\text{I-3.41})$$

Dans l'expression précédente nous n'avons pas précisé pour  $\underline{L}^2$  le type de modélisation retenue, car cette propriété est vraie dans les deux cas.



Toutefois cette dernière remarque n'est plus vraie dès que l'on s'intéresse aux termes du second ordre, et il nous faut alors préciser de quel tenseur de localisation on parle. En effet si l'on calcule, à partir de l'expression (I-3.38), en formulation II le champ  $\langle \varepsilon \otimes \nabla \rangle$  on obtient :

$$\langle \varepsilon \otimes \nabla \rangle = \langle \underset{\sim}{\underset{\sim}{L}}^1(\underline{x}) \otimes \nabla \rangle : \underset{\sim}{E} + \langle \underset{\sim}{\underset{\sim}{L}}^{\text{II},2}(\underline{x}) \otimes \nabla \rangle : \underset{\sim}{K}^{\text{II}} \quad (\text{I-3.42})$$

et, comme  $\langle \varepsilon \otimes \nabla \rangle = \underset{\sim}{K}^{\text{II}}$ , on en déduit que :

$$\langle \underset{\sim}{\underset{\sim}{L}}^1 \otimes \nabla \rangle = \underset{\sim}{0} ; \langle \underset{\sim}{\underset{\sim}{L}}^{\text{II},2} \otimes \nabla \rangle = \underset{\sim}{1}^{\text{II}} \quad (\text{I-3.43})$$

Pour la formulation I le résultat est moins direct, on aboutit à la relation :

$$\langle \varepsilon \otimes \nabla \rangle = \langle \underset{\sim}{\underset{\sim}{L}}^{\text{I},2}(\underline{x}) \otimes \nabla \rangle : \underset{\sim}{K}^{\text{I}} = \underset{\sim}{K}^{\text{II}} \quad (\text{I-3.44})$$

ce qui implique que :

$$\langle \underset{\sim}{\underset{\sim}{L}}^{\text{I},2}(\underline{x}) \otimes \nabla \rangle = \langle \underset{\sim}{\underset{\sim}{L}}^{\text{II},2}(\underline{x}) \otimes \nabla \rangle : \underset{\sim}{P}^{\text{I} \rightarrow \text{II}} \quad (\text{I-3.45})$$

et donc, comme  $\langle \underset{\sim}{\underset{\sim}{L}}^{\text{II},2}(\underline{x}) \otimes \nabla \rangle = \underset{\sim}{1}^{\text{II}}$ , on a finalement :

$$\langle \underset{\sim}{\underset{\sim}{L}}^{\text{I},2}(\underline{x}) \otimes \nabla \rangle = \underset{\sim}{1}^{\text{II}} : \underset{\sim}{P}^{\text{I} \rightarrow \text{II}} = \underset{\sim}{P}^{\text{I} \rightarrow \text{II}} \quad (\text{I-3.46})$$

où  $\underset{\sim}{P}^{\text{I} \rightarrow \text{II}}$  est le tenseur d'ordre 6 précédemment défini et tel que :

$$\underset{\sim}{P}^{\text{I} \rightarrow \text{II}} : \underset{\sim}{K}^{\text{I}} = \underset{\sim}{K}^{\text{II}} \quad (\text{I-3.47})$$

De manière générale, on a la relation suivante :

$$\underset{\sim}{L}^{\text{I},2}(\underline{x}) = \underset{\sim}{L}^{\text{II},2}(\underline{x}) : \underset{\sim}{P}^{\text{I} \rightarrow \text{II}} \quad (\text{I-3.48})$$

où le tenseur de passage  $\underset{\sim}{P}^{\text{I} \rightarrow \text{II}}$  est bien évidemment constant sur le volume. Cette remarque est essentielle car elle nous permettra par la suite de transformer les résultats obtenus dans un système en ceux valables dans l'autre convention d'écriture. Les relations de passage seront assurées d'être bien écrites. Établissons à présent, une première forme pour nos modules effectifs.

### I-3.3.2 Expression des modules effectifs

Nous commencerons par établir les expressions des modules effectifs de manière directe, nous nous intéresserons ensuite à la définition énergétique de ces modules [8]. Ce que nous entendons par approche directe est le fait d'écrire l'expression de grandeurs duales effectives de notre problème à partir de l'expression (I-3.38). Nous commencerons, comme d'habitude par travailler en formulation I. Dans ce système le tenseur de contrainte macroscopique s'écrit :

$$\underset{\sim}{\Sigma}^{\text{I}} = \langle \underset{\sim}{\sigma} \rangle \quad (\text{I-3.49})$$

$$= \langle \underset{\sim}{c} : \underset{\sim}{\varepsilon} \rangle \quad (\text{I-3.50})$$

$$= \langle \underset{\sim}{c} : \underset{\sim}{L}^1 : \underset{\sim}{E} + \underset{\sim}{c} : \underset{\sim}{L}^{1,2} : \underset{\sim}{K}^1 \rangle \quad (\text{I-3.51})$$

$$= \langle \underset{\sim}{c} : \underset{\sim}{L}^1 \rangle : \underset{\sim}{E} + \langle \underset{\sim}{c} : \underset{\sim}{L}^{1,2} \rangle : \underset{\sim}{K}^1 \quad (\text{I-3.52})$$

et, de même :

$$\underset{\sim}{S}^I = \langle \sigma \{ \otimes \} \underline{x} \rangle \quad (\text{I-3.53})$$

$$= \langle \frac{1}{2} (\sigma_{ij} x_k + \sigma_{ik} x_j) \rangle \quad (\text{I-3.54})$$

$$= \langle c_{i(jlm} L_{lmno}^1 x_k) \rangle E_{no} + \langle c_{i(jlm} L_{lmnop}^{1,2} x_k) \rangle K_{nop}^I \quad (\text{I-3.55})$$

avec la notation :

$$c_{i(jlm} L_{lmno}^1 x_k) = \frac{1}{2} (c_{ijlm} L_{lmno}^1 x_k + c_{iklm} L_{lmno}^1 x_j) \quad (\text{I-3.56})$$

En notation II, on aura :

$$\underset{\sim}{\Sigma}^{II} = \langle \underset{\sim}{c} : \underset{\sim}{L}^1 \rangle : \underset{\sim}{E} + \langle \underset{\sim}{c} : \underset{\sim}{L}^{II,2} \rangle : \underset{\sim}{K}^{II} \quad (\text{I-3.57})$$

ainsi que :

$$\underset{\sim}{S}^{II} = \langle \sigma \otimes \underline{x} \rangle \quad (\text{I-3.58})$$

$$= \langle c_{ijlm} L_{lmno}^1 x_k \rangle E_{no} + \langle c_{ijlm} L_{lmnop}^{II,2} x_k \rangle K_{nop}^{II} \quad (\text{I-3.59})$$

En résumé, on peut synthétiser ces résultats de manière « matricielle ». En notation I on a :

$$\begin{pmatrix} \underset{\sim}{\Sigma}_{(ij)}^I \\ \underset{\sim}{S}_{i(jk)}^I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle c_{ijlm} L_{lmno}^1 \rangle & \langle c_{ijlm} L_{lmnop}^{1,2} \rangle \\ \langle c_{i(jlm} L_{lmno}^1 x_k) \rangle & \langle c_{i(jlm} L_{lmnop}^{1,2} x_k) \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{(no)} \\ K_{n(op)}^I \end{pmatrix} \quad (\text{I-3.60})$$

tandis qu'en notation II, on a :

$$\begin{pmatrix} \underset{\sim}{\Sigma}_{(ij)}^{II} \\ \underset{\sim}{S}_{i(jk)}^{II} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle c_{ijlm} L_{lmno}^1 \rangle & \langle c_{ijlm} L_{lmnop}^{II,2} \rangle \\ \langle c_{i(jlm} L_{lmno}^1 x_k) \rangle & \langle c_{i(jlm} L_{lmnop}^{II,2} x_k) \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{(no)} \\ K_{n(op)}^{II} \end{pmatrix} \quad (\text{I-3.61})$$

Établissons à présent ces mêmes formules à partir d'une approche en énergie, les modules y seront les mêmes mais leurs expressions sera légèrement différentes. Selon l'utilisation que l'on désire en faire, une expression pourra être plus simple à utiliser qu'une autre.

### I-3.3.3 Formulation énergétique

Nous allons établir les expressions des tenseurs effectifs à partir de l'expression de l'énergie élastique :

$$\langle w_e \rangle = \frac{1}{2} \langle \underset{\sim}{\varepsilon} : \underset{\sim}{\sigma} \rangle \quad (\text{I-3.62})$$

D'après la relation de localisation (I-3.38) on a :

$$\langle \underset{\sim}{\varepsilon} : \underset{\sim}{\sigma} \rangle = \langle \left( \underset{\sim}{L}^1(\underline{x}) : \underset{\sim}{E} + \underset{\sim}{L}^{1,2}(\underline{x}) : \underset{\sim}{K}^1 \right) : \underset{\sim}{c} : \left( \underset{\sim}{L}^1(\underline{x}) : \underset{\sim}{E} + \underset{\sim}{L}^{1,2}(\underline{x}) : \underset{\sim}{K}^1 \right) \rangle \quad (\text{I-3.63})$$

expression que l'on peut mettre sous la forme :

$$\begin{aligned} \langle \underset{\sim}{\varepsilon} : \underset{\sim}{\sigma} \rangle &= \underset{\sim}{E} : \langle \underset{\sim}{L}^{T1} : \underset{\sim}{c} : \underset{\sim}{L}^1 \rangle : \underset{\sim}{E} + 2\underset{\sim}{E} : \langle \underset{\sim}{L}^{T1} : \underset{\sim}{c} : \underset{\sim}{L}^{1,2} \rangle : \underset{\sim}{K}^1 + \\ &\quad \underset{\sim}{K}^1 : \langle \underset{\sim}{L}^{T1,2} : \underset{\sim}{c} : \underset{\sim}{L}^{1,2} \rangle : \underset{\sim}{K}^1 \end{aligned} \quad (\text{I-3.64})$$

Or comme d'après le lemme de Hill la moyenne de l'énergie microscopique est égale à l'énergie macroscopique, on peut identifier la forme précédente avec celle de l'énergie élastique d'un milieu du second gradient. Celle-ci a pour forme :

$$W_e = \frac{1}{2} \underline{\underline{E}} : \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{E}} + \underline{\underline{E}} : \underline{\underline{M}}^I : \underline{\underline{K}}^I + \frac{1}{2} \underline{\underline{K}}^I : \underline{\underline{A}}^I : \underline{\underline{K}}^I \quad (\text{I-3.65})$$

on obtient donc, par identification, :

$$\underline{\underline{C}} = \langle \underline{\underline{L}}^{T1} : \underline{\underline{c}} : \underline{\underline{L}}^1 \rangle \quad (\text{I-3.66})$$

$$\underline{\underline{M}}^I = \langle \underline{\underline{L}}^{T1} : \underline{\underline{c}} : \underline{\underline{L}}^{I,2} \rangle \quad (\text{I-3.67})$$

$$\underline{\underline{A}}^I = \langle \underline{\underline{L}}^{TI,2} : \underline{\underline{c}} : \underline{\underline{L}}^{I,2} \rangle \quad (\text{I-3.68})$$

Et, de manière « matricielle », on a :

$$\begin{pmatrix} \underline{\underline{\Sigma}}^I \\ \underline{\underline{S}}^I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \underline{\underline{L}}^{T1} : \underline{\underline{c}} : \underline{\underline{L}}^1 \rangle & \langle \underline{\underline{L}}^{T1} : \underline{\underline{c}} : \underline{\underline{L}}^{I,2} \rangle \\ \langle \underline{\underline{L}}^{TI,2} : \underline{\underline{c}} : \underline{\underline{L}}^{T1} \rangle & \langle \underline{\underline{L}}^{TI,2} : \underline{\underline{c}} : \underline{\underline{L}}^{I,2} \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\underline{E}} \\ \underline{\underline{K}}^I \end{pmatrix} \quad (\text{I-3.69})$$

Les expressions des tenseurs effectifs dans le cadre d'une modélisation de type II sont bien évidemment obtenues de la même manière. Dans [41], les expressions des tenseurs établies dans cette sous-section, ainsi que dans la sous-section précédente sont montrées être rigoureusement équivalentes.

Nous noterons donc ici, et dans la suite de ce document<sup>1</sup>, notre milieu effectif de la manière suivante :

$$\begin{pmatrix} \underline{\underline{\Sigma}}^I \\ \underline{\underline{S}}^I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{C}} & \underline{\underline{M}}^I \\ \underline{\underline{M}}^{TI} & \underline{\underline{A}}^I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\underline{E}} \\ \underline{\underline{K}}^I \end{pmatrix} \quad (\text{I-3.70})$$

ainsi que

$$\begin{pmatrix} \underline{\underline{\Sigma}}^{II} \\ \underline{\underline{S}}^{II} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{C}} & \underline{\underline{M}}^{II} \\ \underline{\underline{M}}^{TII} & \underline{\underline{A}}^{II} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\underline{E}} \\ \underline{\underline{K}}^I \end{pmatrix} \quad (\text{I-3.71})$$

Un des intérêts de cette formulation alternative est l'expression du module du second ordre  $\underline{\underline{A}}^I$ . Son expression dans les deux formulations est :

$$A_{ijklmn}^I = \langle c_{ijlm} L_{lmnop}^{II,2} x_k \rangle = \langle L_{ijkop}^{TI,2} c_{opqr} L_{qrlmn}^{I,2} \rangle \quad (\text{I-3.72})$$

L'expression obtenue à partir de la définition énergétique est plus simple à manipuler algébriquement. A partir de celle-ci on peut facilement exprimer l'opérateur dans un système à partir de sa connaissance dans un autre système. On a ainsi :

$$\underline{\underline{A}}^{II} = \underline{\underline{P}}^{TII \rightarrow I} : \underline{\underline{A}}^I : \underline{\underline{P}}^{II \rightarrow I} \quad (\text{I-3.73})$$

C'est-à-dire, en indicielle, :

$$A_{ijklmn}^{II} = (\delta_{io} \delta_{jp} \delta_{kq} + \delta_{ip} \delta_{jq} \delta_{ko} - \delta_{iq} \delta_{jo} \delta_{kp}) A_{opqrst}^I (\delta_{rl} \delta_{sm} \delta_{tn} + \delta_{rm} \delta_{sn} \delta_{tl} - \delta_{rn} \delta_{sl} \delta_{tm}) \quad (\text{I-3.74})$$

<sup>1</sup>Ceci modulo le fait que dans la seconde partie comme nous travaillerons sur un milieu « naturellement » et non par « construction » du second gradient, nous utiliserons les notations  $(\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\sigma}})$  à la place de  $(\underline{\underline{E}}, \underline{\underline{\Sigma}})$ .

Ceci est intéressant car la relation de contour telle qu'elle est introduite (I-3.13) impose de travailler en formulation I. C'est cette condition de contour qui est implémentée dans ZeBuLoN. De fait, la procédure de calcul que nous allons proposer dans la section suivante, déterminera les opérateurs effectifs de type I. La relation (I-3.74) permettra de passer simplement au système de type II.

## I-3.4 Calcul des propriétés effectives

L'objectif va maintenant être de calculer explicitement, sur une géométrie donnée, les opérateurs que nous avons introduit précédemment. La méthode consiste à calculer les différentes « moyennes » via une série de calculs de structure sur notre VER. La méthode est présentée dans le cas classique dans [2] et dans le cas du second-gradient dans [8], nous la présenterons dans cette section. La procédure est facilement applicable dans un code par éléments-finis.

### I-3.4.1 Principe

Récrivons la condition de contour (I-3.13),

$$u_i = E_{io}x_o + \frac{1}{2}K_{ipq}^I x_p x_q, \quad \forall x \in \partial\Omega$$

ainsi que la relation de localisation (I-3.38)

$$\underline{\varepsilon}(\underline{x}) = \underline{\mathbb{L}}^1(\underline{x}) : \underline{\mathbb{E}} + \underline{\mathbb{L}}^{1,2}(\underline{x}) \cdot \underline{\mathbb{K}}^I, \quad \forall \underline{x} \in \Omega$$

L'objectif va être de construire les opérateurs de localisation sans avoir à les calculer directement. Leur construction peut se faire via la réalisation d'une série de calculs élémentaires.

Considérons les familles de sollicitations élémentaires suivantes :

$$E_{ij}^{(ab)} = \delta_{ai}\delta_{bj} ; K_{ijk}^{(abc)} = \frac{1}{2}\delta_{ai}(\delta_{bj}\delta_{ck} + \delta_{bk}\delta_{cj}) \quad (\text{I-3.75})$$

La réponse locale à ces sollicitations de base appliquées de manière non simultanée conduit, via la relation de localisation (I-3.38), aux champs de déformation locaux suivants :

$$\varepsilon_{ij}(x)_{ij}^{(ab)} = L(x)_{ijlm}^1 \delta_{al}\delta_{bm} = L(x)_{ijab}^1 \quad (\text{I-3.76})$$

$$\varepsilon_{ij}(x)_{ij}^{(abc)} = L(x)_{ijlmn}^{I,2} \delta_{al}(\delta_{bm}\delta_{cn} + \delta_{bn}\delta_{cm}) = L(x)_{ijabc}^{I,2} \quad (\text{I-3.77})$$

La loi de comportement nous permet ensuite de déterminer les champs de contrainte associés. On obtient, selon le cas, les champs suivants :

$$\sigma_{ij}(x)_{ij}^{(ab)} = c(x)_{ijkl}\varepsilon_{kl}(x)_{kl}^{(ab)} = c(x)_{ijkl}L(x)_{klab}^1 \quad (\text{I-3.78})$$

$$\sigma_{ij}(x)_{ij}^{(abc)} = c(x)_{ijkl}\varepsilon_{ij}(x)_{ij}^{(abc)} = c(x)_{ijkl}L(x)_{klabc}^{I,2} \quad (\text{I-3.79})$$

A partir de l'expression des modules effectifs obtenues de manière directe nous avons les relations suivantes :

$$C_{ijkl} = \langle c_{ijop}L_{opkl}^1 \rangle \quad (\text{I-3.80})$$

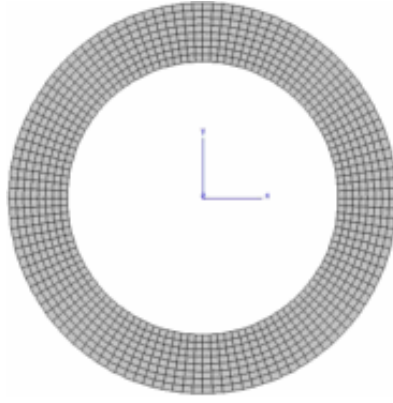


FIG. I-3.1 – Cellule de base

$$M_{ijlmn}^I = \langle c_{ijop} L_{oplmn}^{I,2} \rangle \quad (\text{I-3.81})$$

$$A_{ijklmn}^I = \langle c_{i(jop} L_{oplmn}^{I,2} x_k) \rangle \quad (\text{I-3.82})$$

La réécriture de ces relations à partir de nos cas de chargement élémentaires nous donne :

$$C_{ijab} = \langle \sigma_{ij}^{(ab)} \rangle \quad (\text{I-3.83})$$

$$M_{ijabc}^I = \langle \sigma_{ij}^{(abc)} \rangle \quad (\text{I-3.84})$$

$$A_{ijkabc}^I = \langle \frac{1}{2} (\sigma_{ij}^{(abc)} x_k + \sigma_{ik}^{(abc)} x_j) \rangle \quad (\text{I-3.85})$$

On peut également obtenir d'autres expressions à partir de la définition énergétique des modules effectifs, toutefois ces expressions sont moins directes.

### I-3.4.2 Calcul d'un milieu effectif géométriquement isotrope

Nous nous placerons dans un espace de dimension 2. La raison de cela est que, pour l'instant, dans ZeBuLon la condition de contour quadratique n'existe qu'en 2-D. Pour les mêmes raisons nous ne travaillerons dans ce qui suit qu'avec des conditions de contour non-périodiques. A l'instar de l'homogénéisation classique cette hypothèse conduit à identifier les modules effectifs par excès [2, 3]. Toutefois l'enrichissement de la condition de contour aux cas 3-D et périodique ne pose pas de problèmes majeures.

On s'intéressera aux modules effectifs du second ordre représenté par le tenseur  $A_{ijklmn}^I$ . De manière à obtenir un milieu homogénéisé isotrope au second gradient, nous considérerons, tout simplement, comme VER une cellule circulaire remplie par un matériau homogène isotrope. Les paramètres matériaux seront un module de Young de 200 GPa et un coefficient de Poisson de 0,3. On considère donc une cellule circulaire (fig.I-3.1) de rayon extérieur 1 mm ayant une épaisseur de paroi de 0,3 mm. Ceci nous donne<sup>2</sup>  $\bar{\rho} = 0,51$ .

Les différents champs de déplacements obtenus sont représentés sur les figures I-3.2(a) et I-3.2(b)

Comme le milieu étudié présente un pore il nous faut modifier certaines opérations dans la démarche que nous avons établie au cours de ce chapitre. La modification à prendre en compte

<sup>2</sup>La densité relative a été calculé dans le cas d'une cellule circulaire, ceci pourrait être également fait dans le cadre de l'homogénéisation périodique. Notons toutefois que cela n'a pas un grand sens physique car un tel réseau de symétrie par rotation infinie ( $D_\infty$ -invariant pour être exact). Toutefois cela nous permet d'obtenir simplement un opérateur dans ce système d'anisotropie.

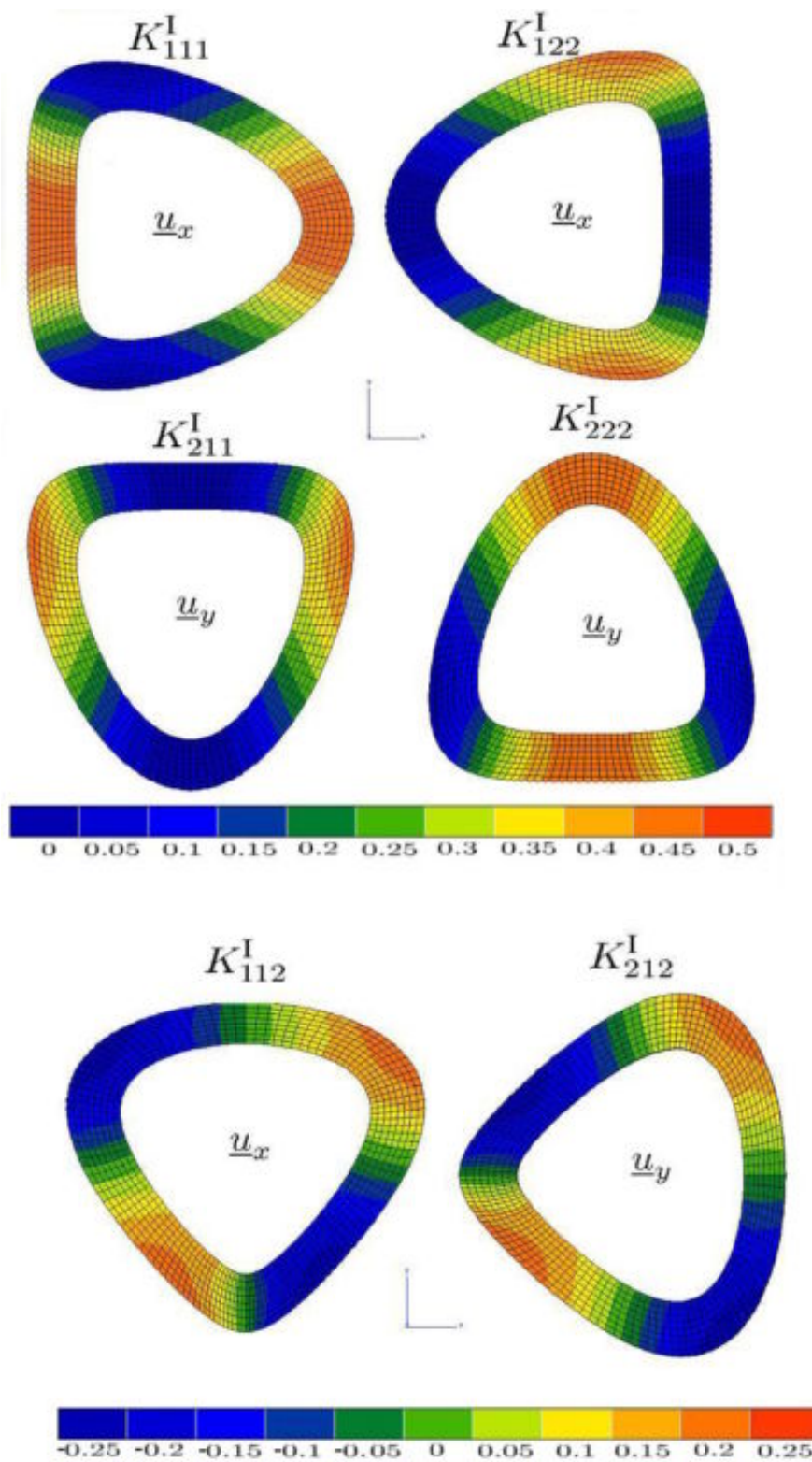


FIG. I-3.2 – Champs de déplacements de la cellule de base

est mineure, et sa dérivation pourra être retrouvée dans [2,49]. Il nous faut modifier la définition de l'opérateur de moyenne spatiale, on a dans le cas d'un milieu poreux :

$$\langle \tilde{\sigma} \rangle^* = \frac{1}{V_T} \int_M \tilde{\sigma} d\Omega_M = \bar{\rho} \langle \tilde{\sigma} \rangle_M \quad (\text{I-3.86})$$

Dans le post-processing de ZeBuLon l'opérateur de moyenne implémenté est naturellement l'opérateur  $\langle . \rangle_M$ , c'est-à-dire la moyenne sur le volume de matière. De fait il nous suffira de multiplier cette moyenne par la densité relative<sup>3</sup> de notre milieu pour obtenir l'opérateur à utiliser pour dériver les modules effectifs.

Les degrés de liberté associés à la condition de contour sont, pour des raisons de symétries, les suivants :

$$\{K_{111}^I \ K_{112}^I \ K_{122}^I \ K_{211}^I \ K_{212}^I \ K_{222}^I\} \quad (\text{I-3.87})$$

On obtient donc, après 6 calculs par éléments-finis la matrice de l'opérateur  $\hat{A}^I$  dans cette base :

$$\hat{A}^I = \begin{pmatrix} 9223 & 0 & -9223 & 0 & -2162 & 0 \\ 0 & 9223 & 0 & 2162 & 0 & -2162 \\ -9223 & 0 & 9223 & 0 & 2162 & 0 \\ 0 & 2162 & 0 & 9223 & 0 & -9223 \\ -2162 & 0 & 2162 & 0 & 9223 & 0 \\ 0 & -2162 & 0 & -9223 & 0 & 9223 \end{pmatrix} \quad (\text{I-3.88})$$

Ces valeurs sont donnée en Mpa.mm<sup>2</sup>, et ont été calculées en tenant compte de la densité relative de la cellule qui est de 0,51 et arrondies par excès.

On veut à présent obtenir le même opérateur dans le système II dans lequel nous préférons travailler. Dans ce système nous choisissons les degrés de liberté suivants :

$$\{K_{111}^{II} \ K_{112}^{II} \ K_{121}^{II} \ K_{122}^{II} \ K_{221}^{II} \ K_{222}^{II}\} \quad (\text{I-3.89})$$

Dans les deux systèmes les vecteurs précédents, du fait de leur symétries indicelles, sont de dimension 6. Considérons le système suivant :

$$\{K_{111} \ K_{112} \ K_{121} \ K_{122} \ K_{211} \ K_{212} \ K_{221} \ K_{222}\} \quad (\text{I-3.90})$$

dans ce système de dimension 8 on peut naturellement écrire  $\tilde{K}^I$  ainsi que  $\tilde{K}^{II}$  en dédoublant certaines colonnes.

Considérons à présent l'opérateur de changement de système  $\tilde{P}^{II \rightarrow I}$ , celui-ci a pour expression :

$$P_{ijklmn}^{II \rightarrow I} = \delta_{il}\delta_{jm}\delta_{kn} + \delta_{im}\delta_{jn}\delta_{kl} - \delta_{in}\delta_{jl}\delta_{km} \quad (\text{I-3.91})$$

Dans l'espace vectoriel de dimension 8 précédemment évoqué, cet opérateur peut se récrire sous la forme d'une matrice, on a<sup>4</sup> :

$$\hat{P}_{\alpha\beta}^{II \rightarrow I} = \hat{1}_{\alpha\beta} + \hat{M}_{\alpha\beta} - \hat{N}_{\alpha\beta} \quad (\text{I-3.92})$$

<sup>3</sup>Les expressions générale des densités relatives pour les différents nidas ont été dérivées au cours du chapitre I-1.

<sup>4</sup>La notation  $\hat{\cdot}$  indique une écriture matricielle d'une grandeur tensorielle.

avec  $\hat{I}_{\alpha\beta}$  l'opérateur identité en dimension 8 et  $\hat{M}_{\alpha\beta}$  et  $\hat{N}_{\alpha\beta}$  les matrices :

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; \hat{N} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{I-3.93})$$

A partir de cela il est immédiat d'obtenir l'opérateur  $\hat{A}_{\alpha\beta}^{\text{II}}$ . Il suffit de calculer :

$$\hat{A}_{\alpha\beta}^{\text{II}} = \hat{P}_{\alpha\mu}^{\text{II}\rightarrow\text{I}} \hat{A}_{\mu\nu}^{\text{II}} \hat{P}_{\nu\beta}^{\text{II}\rightarrow\text{I}} \quad (\text{I-3.94})$$

On obtient, en dimension 8, l'opérateur  $\hat{A}_{\alpha\beta}^{\text{II}}$  suivant :

$$\hat{A}^{\text{II}} = \begin{pmatrix} 9223 & 0 & 0 & -9223 & 0 & -9223 & 4899 & 0 \\ 0 & 37466 & -4899 & 0 & -4899 & 0 & 0 & 4899 \\ 0 & -4899 & 9223 & 0 & 9223 & 0 & 0 & -9223 \\ -9223 & 0 & 0 & 9223 & 0 & 9223 & -4899 & 0 \\ 0 & -4899 & 9223 & 0 & 9223 & 0 & 0 & -9223 \\ -9223 & 0 & 0 & 9223 & 0 & 9223 & -4899 & 0 \\ 4899 & 0 & 0 & -4899 & 0 & -4899 & 37466 & 0 \\ 0 & 4899 & -9223 & 0 & -9223 & 0 & 0 & 9223 \end{pmatrix} \quad (\text{I-3.95})$$

On remarque que la colonne 3 est égale à la colonne 5 ainsi que la 4 qui est égale à la 6, cela prouve que l'on est bien dans le système de symétrie de type II. Et on obtient au final  $\hat{A}_{\alpha\beta}^{\text{II}}$  en dimension 6 :

$$\hat{A}^{\text{II}} = \begin{pmatrix} 9223 & 0 & 0 & -9223 & 4899 & 0 \\ 0 & 37466 & -4899 & 0 & 0 & 4899 \\ 0 & -4899 & 9223 & 0 & 0 & -9223 \\ -9223 & 0 & 0 & 9223 & -4899 & 0 \\ 4899 & 0 & 0 & -4899 & 37466 & 0 \\ 0 & 4899 & -9223 & 0 & 0 & 9223 \end{pmatrix} \quad (\text{I-3.96})$$

Plusieurs choses sont à remarquer quant à l'expression de l'opérateur  $\hat{A}^{\text{II}}$ . Tout d'abord il convient de noter que comme dans le cas de l'élasticité classique l'opérateur présenté ici correspond à une représentation matricielle et non tensorielle de  $\hat{A}^{\text{II}}$  [2, 50]. La définition d'une représentation de  $\hat{A}^{\text{II}}$  par un tenseur d'ordre 2, à la manière de la représentation tensorielle de Voigt, sera traitée proprement au cours du chapitre III-1. Le second point est la question de savoir de combien de coefficients dépend cet opérateur supposé isotrope. La lecture l'opérateur semble indiquer que celui-ci dépend de 3 coefficients. Or on sait que dans sa classe isotrope le tenseur  $\hat{A}^{\text{II}}$  est défini, en 3-D, par 5 coefficients [3, 9, 10]. Comme on est dans un espace 2-D ce résultat est-il toujours valable ? Ou bien le nombre de coefficients est-il alors différent ? Auquel cas il semblerait logique que le système isotrope dépende de moins de coefficients. A notre connaissance, la littérature ne donne pas de réponse à cette question. De fait quel est l'opérateur



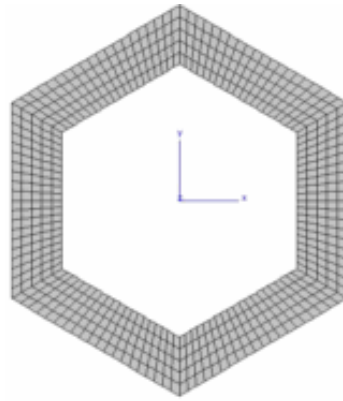


FIG. I-3.3 – Cellule hexagonale

que nous avons obtenue ? Analysons d'autres milieux possédant cette fois-ci une anisotropie géométrique, nous étudierons de fait le comportement effectif d'une cellule hexagonale ainsi que d'une cellule carrée.

### I-3.4.3 Calcul de milieux effectifs géométriquement anisotropes

#### Cellule hexagonale

Nous nous intéresserons pour commencer à une cellule hexagonale. Les résultats de l'homogénéisation classique établissent que pour l'élasticité du premier ordre le comportement effectif est isotrope. Qu'en est-il au second ordre ? Pour ce faire procédons au calcul de la matrice  $\hat{A}^{\text{II}}$ .

Nous considérerons une cellule de rayon extérieur équivalent<sup>5</sup> 1 mm et d'épaisseur 0,3 mm (fig I-3.3).

En réappliquant l'ensemble de la procédure précédente on obtient, au final,  $\hat{A}_{\alpha\beta}^{\text{II}}$  :

$$\hat{A}^{\text{II}} = \begin{pmatrix} 12078 & 0 & 0 & -10154 & 5472 & 0 \\ 0 & 39966 & -5645 & 0 & 0 & 6708 \\ 0 & -5645 & 9348 & 0 & 0 & -8917 \\ -10154 & 0 & 0 & 10584 & -4408 & 0 \\ 5472 & 0 & 0 & -4408 & 41202 & 0 \\ 0 & 6708 & -8917 & 0 & 0 & 10841 \end{pmatrix} \quad (\text{I-3.97})$$

On constate à présent que notre opérateur du second ordre semble être défini par la donnée de 12 coefficients. Regardons ce qu'il en est à présent dans le cas d'une cellule carrée.

#### Cellule carrée

On considérera comme d'habitude une cellule de rayon équivalent 1 mm et d'épaisseur 0,3 mm.

<sup>5</sup>Ceci dans le cadre de la paramétrisation introduit au chapitre I-1.

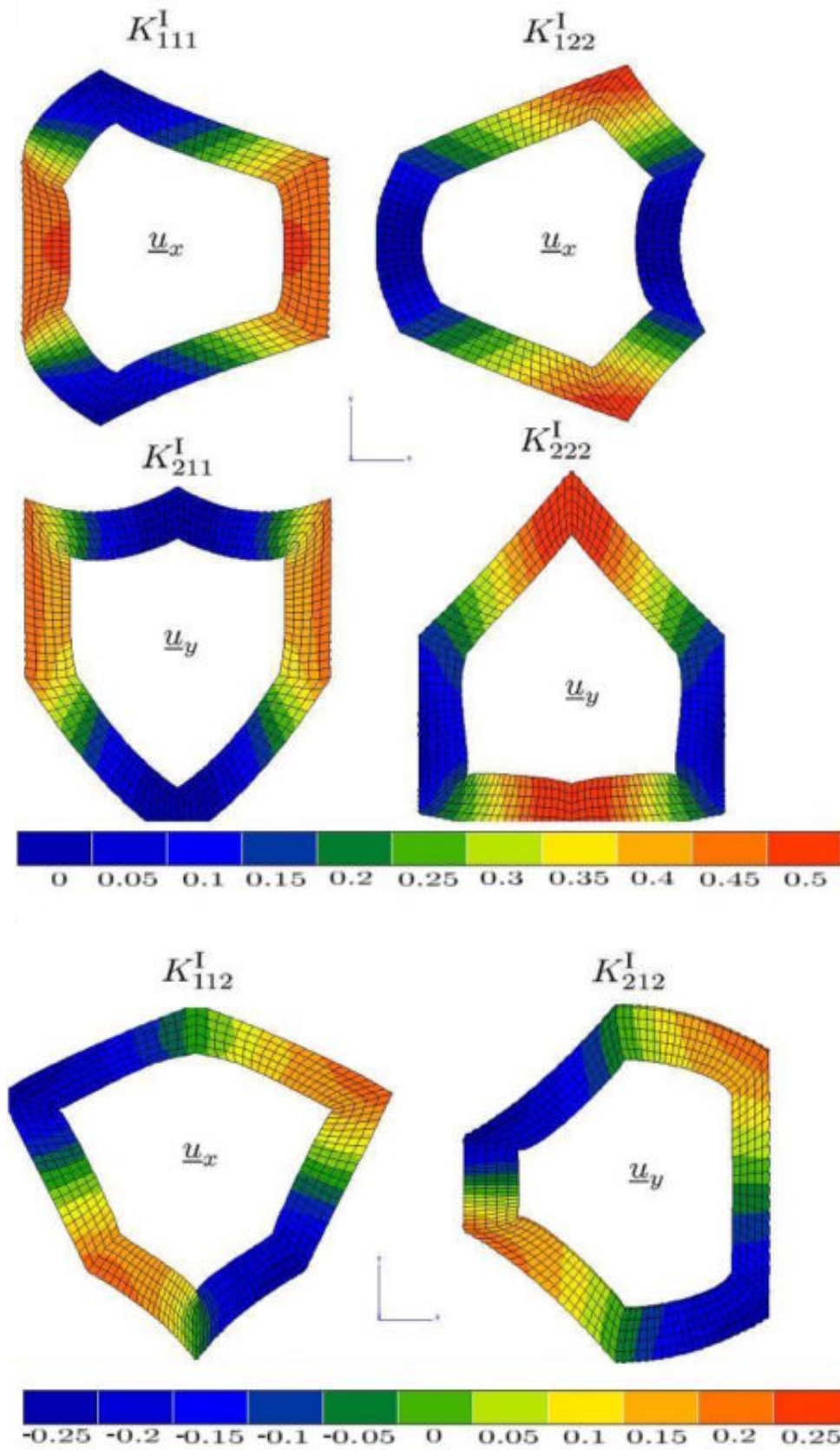


FIG. I-3.4 – Champs de déplacements de la cellule de base

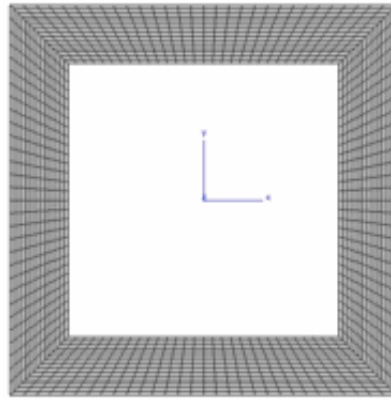


FIG. I-3.5 – Cellule carrée

On obtient l'opérateur  $\hat{A}_{\alpha\beta}^{\text{II}}$  suivant :

$$\hat{A}^{\text{II}} = \begin{pmatrix} 19092 & 0 & 0 & -8723 & 5643 & 0 \\ 0 & 50327 & -3802 & 0 & 0 & 5643 \\ 0 & -3802 & 8367 & 0 & 0 & -8723 \\ -8723 & 0 & 0 & 8367 & -3802 & 0 \\ 5643 & 0 & 0 & -3802 & 50327 & 0 \\ 0 & 5643 & -8723 & 0 & 0 & 19092 \end{pmatrix} \quad (\text{I-3.98})$$

Cette fois-ci l'opérateur semble dépendre de 6 coefficients.

Ces résultats posent le problème de l'interprétation des différents termes présents dans les opérateurs de second ordre. En effet la seule connaissance que nous avons d'eux est le fait qu'en 3-D la classe isotrope est définie par 5 coefficients indépendants. La construction des opérateurs du second ordre dans le cas des symétries du cercle, de l'hexagone ainsi que du carré semble nous indiquer que ces classes de symétrie dépendent respectivement de 3, 12 et 6 coefficients. Le fait que la symétrie hexagonale, ou pour être plus exacte la  $D_6$ -invariance, induise, en apparence, un opérateur moins symétrique que la symétrie carrée ( $D_4$ -invariance) n'est pas logique. Ce fait laisse penser que dans le cas de la  $D_6$ -invariance certains paramètres soient liés. Dans le même temps l'égalité du comportement selon l'axe  $x$  et  $y$  dans le cas de la cellule carrée semble nous indiquer que 6 soit bien le bon nombre de coefficients de l'opérateur pour cette symétrie.

## I-3.5 Synthèse

Après avoir défini la classe de géométrie de nos matériaux au chapitre I-1, et circonscrit l'étude des propriétés mécaniques à celle de l'élasticité linéaire au chapitre I-2, nous nous sommes intéressés ici à la construction d'un milieu élastique effectif du second gradient. Comme illustré au chapitre I-2 cette approche de la modélisation de l'élasticité d'un milieu hétérogène permet de prendre en compte l'effet de la microstructure dans la définition du milieu effectif. La mise en place de cette méthode nécessite de pouvoir construire, pour une géométrie donnée, les opérateurs effectifs d'ordres supérieurs. Cette construction a été l'objectif de ce chapitre.

La réalisation d'un certain nombre de calculs éléments-finis sur une cellule soumise à des conditions de contours quadratiques, suivie du calcul d'un certain nombre de moyennes sur les

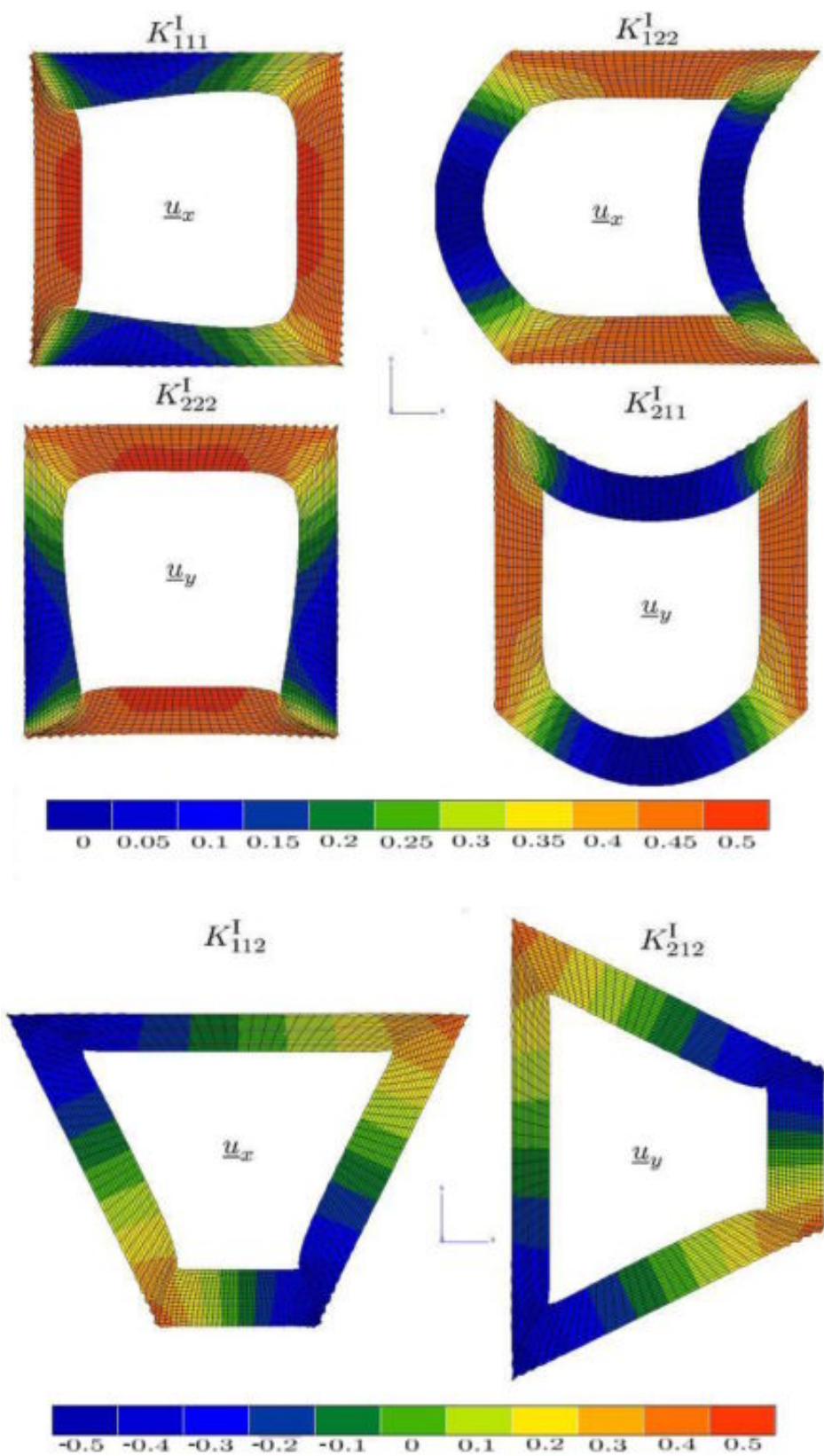


FIG. I-3.6 – Champs de déplacements de la cellule de base

champs résultants nous a permis de construire les opérateurs élastiques du second ordre. Cette méthode a été mise en place dans le cas 2-D et avec des conditions de contour non-périodique. Le comportement de trois cellules de bases a été étudié : \_circulaire ; \_hexagonale et carrée. Les opérateurs obtenues pour ces trois différents systèmes sont définies par un nombre de paramètres différents : on obtient des opérateurs anisotropes. L'étude de la littérature ne nous renseigne pas sur le sujet, et en première approche le système hexagonal semble être plus anisotrope que le système carré. De fait une étude détaillée de ces opérateurs est nécessaire pour comprendre le sens des coefficients élastiques supplémentaires.

De plus dans l'optique de l'implantation dans un code par éléments-finis d'un modèle de calcul au second-gradient anisotrope, la forme des opérateurs du second ordre doit être obtenue dans le cas général. L'étude de l'anisotropie de ce type de comportement sera l'objectif de la section à venir.

## ANNEXE I–A

### Modèles d'acoustique phénoménologiques -Application à la conception de matériau sur mesure-

Les modèles d'acoustique phénoménologique permettent, à partir de la description géométrique d'un matériau poreux, d'obtenir sa courbe d'absorption en fonction de la fréquence d'une onde le traversant. Faciles à programmer et à calculer, ces modèles permettent lors de la phase de conception d'une architecture poreuse d'accorder la structure aux exigences d'un cahier des charges. Nous présenterons une utilisation de ces modèles dans le cadre d'une approche Material-by-design.

# Modèles d'acoustique phénoménologiques -Application à la conception de matériau sur mesure-

Nicolas Auffray<sup>1</sup>, Régis Bouchet<sup>1</sup> & Yves Bréchet<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Onera-DMMP

BP72 - 29 avenue de la Division Leclerc FR-92322 CHATILLON CEDEX

<sup>2</sup> LTPCM/INPG

Domaine Universitaire de Grenoble  
BP 75 38402 St. Martin d'Hères Cedex

## Résumé :

*Les modèles d'acoustique phénoménologique permettent, à partir de la description géométrique d'un matériau poreux, d'obtenir sa courbe d'absorption en fonction de la fréquence d'une onde le traversant. Faciles à programmer et à calculer, ces modèles permettent lors de la phase de conception d'une architecture poreuse d'accorder la structure aux exigences d'un cahier des charges. Nous présenterons une utilisation de ces modèles dans le cadre d'une approche Material-by-design.*

## Abstract :

*Starting from the geometrical description of a porous media, phenomenological acoustic models allow us to obtain the absorption vs. frequency graph of a wave flowing through this porous media. The strength of those kind of models is that they are very easy to compute, so they are a powerful designing-tool to elaborate sound-absorptive architected media. Our aim here is to introduce that kind of model, and to place emphasis on how they could be used in a material-by-design approach.*

## Mots-clefs :

**acoustique ; matériaux poreux ; material-by-design**

## 1 Introduction

L'objectif de l'approche *material-by-design* consiste à utiliser les liens qui unissent les propriétés physiques des matériaux à leurs topologies, pour s'orienter dès la phase de pré-conception vers une architecture permettant au-dit matériau de maximiser son efficacité. L'acoustique des matériaux poreux est, à ce niveau, un excellent exemple des potentialités de cette approche. Par acoustique des matériaux poreux nous entendons les phénomènes dissipatifs qui prennent place au cœur de ces matériaux quand des ondes acoustiques viennent à les traverser. La problématique industrielle sous-jacente vise à la conception d'absorbeurs acoustiques destinés à réduire les émissions sonores des réacteurs d'avions, toutefois la démarche de conception initiée sur ce projet à une portée plus large qui touche à la conception *a-priori* d'absorbeurs acoustiques passifs. Comme illustré au cours de la thèse de Gasser (2003) si l'on maîtrise précisément l'architecture du réseau poreux périodique alors il nous est possible d'accorder notre matériau sur un spectre d'absorption choisi. Plusieurs approches ont été conduites au cours de son travail, nous nous concentrerons ici sur un modèle analytique de type Lafarge-Pride ? (LP par la suite). Les intérêts de ce modèle sont multiples, tout d'abord il est excessivement facile et rapide à mettre en oeuvre, les résultats prédits sont dans un bon rapport avec l'expérience et de plus il est assez aisé de dériver de son formalisme des outils qui peuvent être autant d'aide à la conception.

Dans un premier temps nous rappellerons quelques notions d'acoustique des matériaux poreux, ceci de manière à présenter le modèle de LP sur lequel nous allons travailler. Dans la partie suivante, nous nous intéresserons à la formulation inverse de notre problème, c'est-à-dire à la possibilité à partir d'une courbe d'absorption de remonter aux paramètres matériaux. Nous montrerons alors que ce problème, identifié comme mal posé, permet pour une courbe donnée d'obtenir un fuseau de matériaux y correspondant ; loin d'être problématique ce fait nous permet de déterminer les équations de matériaux équivalents au sens de l'acoustique. Cette propriété est d'une grande utilité pratique en conception car elle identifie des couples de paramètres sur lesquels on peut jouer pour optimiser un matériau vis-à-vis de contraintes extérieures.

## 2 Acoustique des matériaux poreux

L'ensemble des modèles d'acoustique phénoménologiques est dérivé en substituant au comportement local un comportement global moyenné sur la structure. On passe ainsi d'une intégration des équations de Navier-Stokes, qui tiendrait compte de la géométrie exacte de notre matériau poreux, à un modèle équivalent fonctionnant comme une loi entrée/sortie. L'idée est de moyennner sur le volume, quand le volume tend vers l'infini, nos équations locales viscothermiques en imposant que la forme des équations de comportement moyen est assimilable à celle d'un fluide parfait dont le nombre d'onde dépendrait de la fréquence.

### 2.1 Dérivation du modèle de Lafarge-Pride

Au niveau local, en régime harmonique et sous les hypothèses des petites perturbations d'une part, et de l'incompressibilité locale d'autre part, notre problème est décrit par le système d'équations (Voir [Johnson \*et al.\* \(1987\)](#) pour tous les détails de la dérivation) :

$$\rho_0 i\omega \underline{u} = -\nabla p + \mu \Delta \underline{u} \quad (1)$$

$$0 = \frac{1}{P_0} i\omega p - \frac{1}{T_0} i\omega \tau \quad (2)$$

$$\rho_0 C_p i\omega \tau = i\omega p + K \Delta \tau \quad (3)$$

complété des conditions aux limites suivantes au contact du squelette rigide et isotherme de notre matériau poreux :

$$\underline{u} = \underline{0} \quad (4)$$

$$\tau = 0 \quad (5)$$

Les variables  $\underline{u}$ ,  $p$ ,  $\tau$  représentent respectivement les fluctuations des champs de vitesse, de pression et de température autour de leur valeur moyenne  $\underline{0}$ ,  $P_0$ ,  $T_0$ . Les autres coefficients sont : -  $\rho_0$  la masse volumique de l'air ; -  $\mu$  la viscosité dynamique de l'air ; -  $K$  le coefficient isotrope de conduction thermique ; -  $C_p$  la capacité calorifique massique. L'équation (1) est l'équation de la dynamique (Navier-Stokes incompressible), (2) dérive de la conservation de la masse tandis que (3) est l'équation de la thermique. Les conditions aux limites, quant à elles, traduisent le fait qu'au contact des parois de notre matériau la vitesse des particules de fluide s'annule (4) ainsi que, notre matériau étant considéré comme isotherme, la fluctuation de température du fluide au niveau des parois est nulle (5). En moyennant les champs locaux sur le volume du matériau on met les champs moyens sous la forme d'un fluide non dissipatif, c'est-à-dire tel que :

$$\Delta \langle p \rangle + \frac{\omega^2}{c_{eff}} \langle p \rangle = 0 \quad (6)$$



où

$$\langle p \rangle = \frac{1}{\omega} \iiint_{\omega} p dV \quad (7)$$

avec

$$c_{eff} = \sqrt{\frac{1}{\rho_{eff} \chi_{eff}}} \quad (8)$$

avec

$$\rho_{eff} = \rho_0 \alpha_{\infty} \left( 1 - i \frac{8\mu}{\rho_0 \lambda^2} \frac{1-p+p\sqrt{1+\frac{C^2}{2p^2} \frac{\rho_0 \lambda^2}{8\mu} i\omega}}{C\omega} \right) \quad (9)$$

et

$$\chi_{eff} = \frac{1}{\gamma P_0} \left( \gamma - \frac{\gamma-1}{1 - i \frac{8\mu}{\rho_0 Pr \lambda^2} \frac{1-p'+p'\sqrt{1+\frac{C'^2}{2p'^2} \frac{\rho_0 \lambda'^2 Pr}{8\mu} i\omega}}{C'\omega}} \right) \quad (10)$$

$\rho_{eff}$ ,  $\chi_{eff}$  et  $c_{eff}$  représentent respectivement la densité, la compressibilité et la célérité effective du milieu poreux. Les équations (9) et (10) sont particulièrement importantes car elles nous permettent de relier le comportement effectif du matériau à la géométrie de son architecture. Les paramètres de ces coefficients sont les suivants : -  $\alpha_{\infty}$  la tortuosité, c'est-à-dire le rapport entre la longueur parcourue par le fluide et la longueur du matériau ; -  $\lambda$  la longueur caractéristique visqueuse ; -  $C$  le facteur de formes des pores ; -  $p$  le facteur de variation de section des pores pour les phénomènes visqueux.  $\lambda$ ,  $C'$  et  $p'$  sont leurs équivalents pour les phénomènes thermiques. Les coefficients  $\mu$  et  $Pr$  sont, respectivement, la viscosité dynamique ainsi que le nombre de Prandtl du fluide sujet aux phénomènes acoustiques, dans notre cas il s'agira de l'air.

## 2.2 Modèle d'absorption acoustique pour un matériau poreux

La forme générale de l'équation de l'onde plane progressive unidimensionnelle solution de (6) est :

$$p = \langle p \rangle = e^{i\omega t} [Ae^{-ikx} + Be^{ikx}] \quad (11)$$

avec  $k$  le nombre d'onde. Son expression est

$$k = \frac{\omega}{c_{eff}} = \sqrt{\rho_{eff} \chi_{eff}} \omega \quad (12)$$

Le nombre d'onde associé à la propagation est un nombre complexe, ceci est caractéristique d'un phénomène dissipatif.

Considérons maintenant le cas de la figure 1 qui représente notre matériau poreux dans son environnement. Le milieu 1 est l'air, le milieu 2 le matériau et le 3 un miroir acoustique. L'impédance de l'air est notée  $Z_0$ , celle du milieu poreux  $Z_{eff}$ , tandis que celle du miroir acoustique est supposée infinie. On a

$$Z_{eff} = \frac{1}{\phi} \sqrt{\frac{\rho_{eff}}{\chi_{eff}}} \quad (13)$$

On introduit  $r$  le coefficient de réflexion en pression de l'onde acoustique, c'est-à-dire le rapport des pressions de l'onde réfléchie sur l'onde incidente :

$$r = \frac{H * Z_{eff} - Z_0}{H * Z_{eff} + Z_0} \quad (14)$$

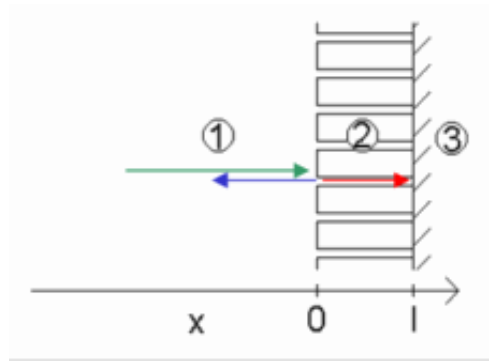


FIG. 1 – Schéma d'un matériau poreux en fonctionnement (voir le texte pour plus d'explication)

où  $H$  est la fonction de transfert qui permet de tenir compte du parcours de l'onde dans le matériau poreux.  $H$  s'exprime

$$H = \frac{1 + e^{-2i\sqrt{\rho_{eff}\chi_{eff}\omega L}}}{1 - e^{-2i\sqrt{\rho_{eff}\chi_{eff}\omega L}}} \quad (15)$$

et, si l'on passe en énergie, on obtient la dissipation créée par le matériau.

$$\text{Abs}(f) = 1 - |r(f)|^2 \quad (16)$$

### 3 Utilisation du modèle de Lafarge-Pride

La programmation du modèle précédent dans un logiciel du type Matlab est triviale. Regardons maintenant des exemples d'outils que l'on peut dériver de cette approche. Nous nous intéresserons à la classe des problèmes inverses. Par problème inverse nous entendons le fait de remonter au jeu de paramètres du modèle connaissant la courbe d'absorption. L'idée initiale est d'identifier les paramètres matériaux d'un échantillon en minimisant le nombre de manipulations expérimentales. Pour que cela soit possible il faut que pour une courbe donnée il existe un jeu de paramètres unique. Nous allons montrer que cela n'est pas le cas, et que nous pouvons dériver des propriétés intéressantes de cette constatation.

#### 3.1 Existence de solutions multiples

On considère que le problème direct est défini par la donnée d'un vecteur de paramètre matériau de la forme suivante :

$$\underline{V} = \{L, \alpha_\infty, \phi, \lambda, \lambda', C, C', p, p'\} \quad (17)$$

L'image de ce vecteur par une application  $\phi$  est une fonction  $\text{Abs}$  de  $\mathbb{R}^+$  dans  $[0; 1]$  qui à une fréquence associe un niveau d'absorption. Le problème inverse dans le cas idéal consiste alors à se demander si connaissant une fonction  $\text{Abs}$  particulière on peut remonter à  $\underline{V}$ . Le problème inverse dans le cas réel est plus complexe car on ne connaît plus la fonction  $\text{Abs}$  mais une approximation de cette fonction que l'on considère pour une fenêtre finie de fréquences. Le problème idéal traite de la nature intrinsèquement bien posé ou non du problème, le problème réel considère en plus la sensibilité de ce problème. Nous considérerons ici uniquement le cas idéal. Un problème est dit bien posé au sens d'Hadamard si trois conditions sont réunies : - que la solution existe ; - que cette solution soit unique ; - que la solution dépende de façon continue des données. On a procédé à la

minimisation d'une courbe générée par le modèle de LP par lui-même via un algorithme de Levenberg-Marquardt. Le problème de l'existence d'une solution est, de fait, automatiquement réglé. Nous ne vérifierons pas le troisième point. Le résultat de cette étude montre l'existence d'une infinité de famille de solutions liées. La raison en est la suivante, nous pouvons récrire les paramètres du modèle de la manière suivante

$$Z_{eff} = \frac{\sqrt{\alpha_\infty}}{\phi} \sqrt{\frac{\rho_{eff}}{\alpha_\infty \chi_{eff}}} \quad H = \frac{1 + e^{-2i\sqrt{\frac{\rho_{eff}}{\alpha_\infty}} \chi_{eff} \omega \sqrt{\alpha_\infty} L}}{1 - e^{-2i\sqrt{\frac{\rho_{eff}}{\alpha_\infty}} \chi_{eff} \omega \sqrt{\alpha_\infty} L}} \quad (18)$$

on pose alors

$$q = \frac{\sqrt{\alpha_\infty}}{\phi}, t = \sqrt{\alpha_\infty} L \quad (19)$$

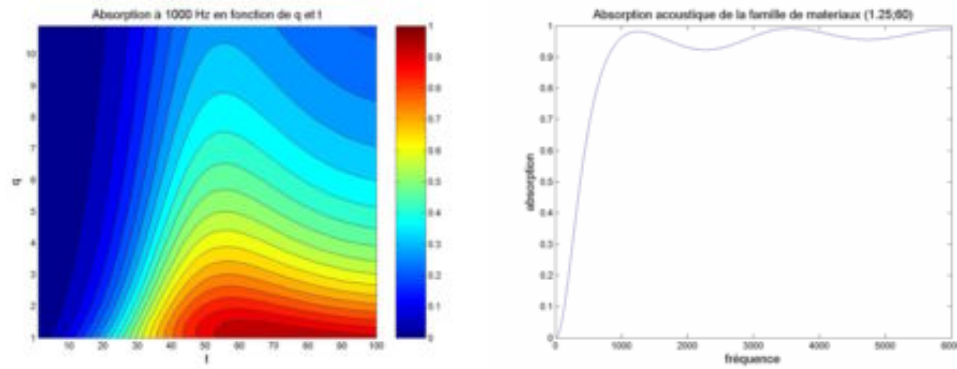
De fait pour un jeu de paramètres  $\{q, t, \lambda, \lambda', C, C', p, p'\}$  donné on a, quelque soit  $L$ , la famille de jeu de paramètres

$$\underline{V}_{q,t} = \left\{ L, \left( \frac{t}{L} \right)^2, \frac{t}{q} \frac{1}{L}, \lambda, \lambda', C, C', p, p' \right\} \quad (20)$$

qui conduit à des courbes d'absorption identiques. La raison est que cette vision « globale » du problème mélange deux échelles d'observation du matériau. Le vecteur  $\underline{V}$  contient en effet des paramètres intrinsèques au réseau poreux  $\{\alpha_\infty, \lambda, \lambda', C, C', p, p'\}$  ainsi que des paramètres macroscopiques  $\{L, \phi\}$ . L'interprétation physique des coefficients  $q$  et  $t$  va dans ce sens. On a  $t = \sqrt{\alpha_\infty} L = L'$  qui est la longueur effective du réseau, le seul paramètre de longueur vu par l'onde. Ainsi que  $q = \frac{\sqrt{\alpha_\infty}}{\phi}$  qui correspond à la limite haute fréquence du rapport  $\frac{Z_{eff}}{Z_0}$  et qui est une constante d'architecture du milieu poreux.

### 3.2 Conséquences

Deux conséquences importantes découlent de cette étude. Tout d'abord si l'on caractérise le comportement d'un matériau au tube à impédance la simple mise en oeuvre d'une méthode inverse pour remonter aux caractéristiques du milieu est insuffisante, d'autres mesures physiques seront nécessaire pour cela. Le deuxième point est toutefois positif, car on a pour une courbe d'absorption donnée une famille de matériau y conduisant, et de plus on connaît les relations qui lient les paramètres macroscopiques au sein de cette famille. Cela peut permettre en phase de conception si on a, par exemple, une contrainte de longueur limite sur le dispositif acoustique de jouer sur les autres paramètres pour obtenir un matériau acoustique adapté. Dans cette optique il devient plus astucieux, lors de phase de recherche de solutions, de travailler à partir du couple  $\{q, t\}$  qu'à partir de  $\{L, \alpha_\infty, \phi\}$ . Le candidat identifié, les formules (19) permettent de trouver la mise en oeuvre macroscopique la plus adaptée du matériau. Considérons un exemple. On prend comme paramètres intrinsèques  $\lambda = \lambda' = 0,1$  mm et  $C = C' = p = p' = 1$  et on trace, pour ce jeu de paramètres, la carte des isovaleurs d'absorption à 1000Hz en fonction de  $\{q, t\}$  (fig.2(a)). Désirant maximiser cette absorption on note que la famille des matériaux (1,25 ; 60) semble être une bonne candidate. La courbe absorption-fréquence de cette famille, présentée sur la figure 2(b), confirme cela. Si l'on recherche maintenant, par exemple, la solution qui minimise la tortuosité, on abouti au trio de paramètres macroscopiques :  $L = 60$  mm ;  $\alpha_\infty = 1$  ;  $\phi = 80\%$ .



(a) Carte d'iso-absorption dans l'espace des familles de courbes (b) Courbe d'absorption de la famille (1.25;60)

FIG. 2 – Sélection d'une famille de matériau maximisant l'absorption acoustique à 1000Hz

## 4 Conclusion

Après avoir réintroduit les étapes qui conduisent à l'établissement des modèles d'acoustiques phénoménologiques, nous avons montré que le problème qui permet ensuite de passer de l'impédance de ce milieu poreux à sa courbe d'absorption contient des paramètres liés. A une courbe d'absorption donné correspond alors une famille de matériaux équivalent, le problème inverse est donc mal posé. Ce fait n'est pas problématique dans un contexte de conception car il nous permet de réaliser des cartes de choix dans l'espace des familles de solutions. Une fois une solution identifiée, on peut ensuite modifier les paramètres liés pour trouver la solution la mieux adaptée au cahier des charges.

## Références

- Gasser, Stéphane. 2003 Étude des propriétés acoustiques et mécaniques d'un matériau métallique poreux modèle à base de sphères creuses de nickel. *Thèse INPG*.
- Johnson, D. L., Koplik, J., Dashen, R. 1987 Théorie of dynamic permeability and tortuosity in fluid-saturated porous media. *In Journal of Fluid Mechanic* vol 176 pp. 379-402.

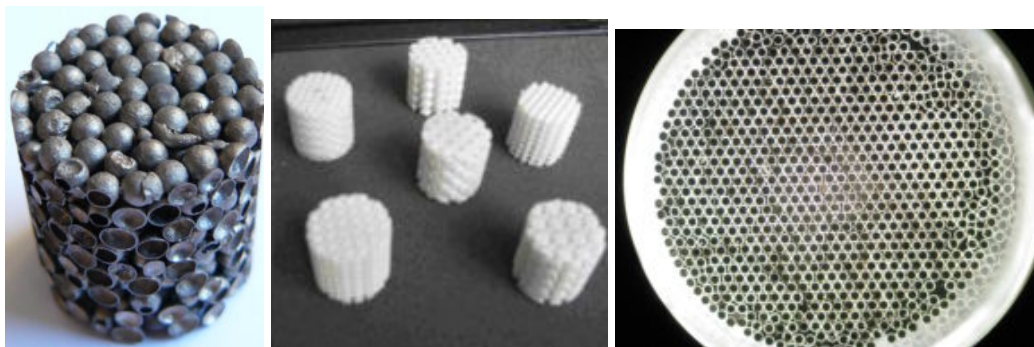


### I–B.1 Fabrication

La problématique de la fabrication de matériaux innovants est au coeur de l'activité du DMSM. Pour notre part nous nous sommes intéressés à la réalisation de matériaux modèles pour les essais d'acoustiques. Ces essais seront présentés à la section §I–B.2. Précisons ici comment nous avons fabriqués ces matériaux. Les échantillons ont été réalisés à partir :

1. d'empilements de sphères creuses ;
2. de techniques de prototypage rapide ;
3. d'assemblages de minitubes.

Les matériaux de type sphères creuses sont des empilements gravitaires réalisés par ATECA selon un procédé Onera développé au DMSM [51]. Les techniques de prototypage rapide nous ont permis de réaliser divers types d'empilements réguliers de sphères pleines. Ces échantillons ont été réalisés par le DERM du centre Onera de Lille. Et finalement des assemblages artisanaux de minitubes ont été réalisés à partir d'assemblage de tubes de la société Minitube ainsi que d'aiguilles de seringue. Les trois différents procédés conduisant ainsi à des matériaux de géométries différentes (fig.I–B.1).



(a) empilement gravitaire

(b) empilements réguliers

(c) nida

FIG. I–B.1 – Matériaux modèles

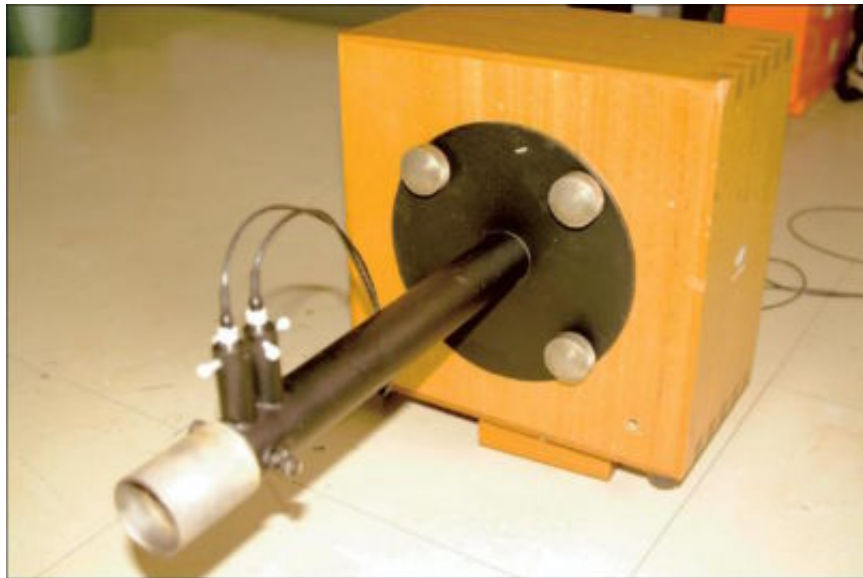


FIG. I-B.2 – Dispositif de mesure de l'absorption acoustique : tube de Kundt

## I-B.2 Essais acoustiques

### I-B.2.1 Mesures d'absorption acoustique en tube de Kundt

L'absorption acoustique peut être mesurée par un montage appelé tube de Kundt. Il consiste en un tube cylindrique dont l'une des extrémités est reliée à un haut-parleur tandis qu'à l'autre est placée le matériau dont on veut mesurer l'absorption. Deux microphones équipent le dispositif, ils sont introduits par le dessus du tube et leurs extrémités affleurent la surface du cylindre intérieur. Ils sont ainsi positionnés de manière à ne pas perturber la mesure. La figure I-B.2 est le dispositif du DSNA de l'Onera que nous avons utilisé pour effectuer nos mesures d'absorption. Le principe est basé sur la mesure de la fonction de transfert  $H$  entre 2 signaux fournis par les 2 microphones montés sur la paroi du tube. Le haut-parleur placé à l'extrémité du tube est excité par un bruit blanc. On crée ainsi un système d'ondes planes stationnaires dans le tube et la pression mesurée sur chaque microphone peut être décomposée en pression incidente et réfléchiée. Le coefficient de réflexion  $R$  du matériau est alors déterminé par :

$$R = \left( \frac{H - e^{-iks}}{e^{iks} - H} \right) e^{2k(l+s)} \quad (\text{I-B.1})$$

avec

- $k$  : nombre d'onde ;
- $s$  : espacement entre les microphones ;
- $l$  : distance entre la surface du matériau et le microphone le plus proche de l'échantillon.

La détermination du coefficient de réflexion permet ensuite d'accéder au coefficient d'absorption  $\alpha$  par la relation :

$$\alpha = 1 - |R|^2 \quad (\text{I-B.2})$$

La réponse en amplitude et en phase des 2 microphones n'étant jamais parfaitement identique, on procède à un étalonnage en effectuant 2 mesures consécutives de la fonction de transfert entre les 2 microphones dans leur position initiale puis en les inversant. Le facteur de correction correspond alors à la moyenne géométrique de ces 2 fonctions de transfert. La fonction de transfert mesurée avec le matériau sera ainsi corrigée par ce facteur de correction, ce qui permettra

de s'affranchir des différences en amplitude et en phase entre les 2 microphones. La mesure ne donnent des résultats exploitables que pour des fréquences comprises entre deux limites. L'analyse n'est possible que si les ondes en présence dans les tubes sont planes, la limite haute fréquence est liée à l'apparition de modes transverses. Cette fréquence dépend du diamètre du tube utilisé, dans notre cas, pour un tube de diamètre intérieur de 30 mm, la fréquence limite d'analyse est de 6500 Hz. La limite basse fréquence est, quant à elle, liée, à la distance entre les microphones : pour des fréquences très basses la variation de phase entre les deux micros devient négligeable et la mesure n'a plus de signification. Pour l'appareil utilisé cette fréquence limite se situe à 800 Hz.

### I-B.2.2 Résultats de mesure

Nous présentons ici les résultats des mesures effectuées sur nos différents matériaux modèles. Les différents nidas testés ont les caractéristiques suivantes :

type	$R_e$	$R_i$	Type
Gros	0,45	0,3	Aiguilles de seringue
Moyen	0,3	0,2	Aiguilles de seringue
Petit	0,25	0,15	Minitubes
Plein	0,5	0	Nouilles japonaises

A partir de ces matériaux on a réalisé des fagots de diamètre 26 mm et de longueur 30 mm. L'assemblage des éléments dans le fagot a été réalisé à la main, et le matériau résultant présente des défauts de structure par rapport à l'ordre hexagonal. Un fagot mixte a également été constitué à partir de tubes petits et moyens. De plus, trois fagots différents ont été assemblés à partir de tubes moyens dans l'objectif d'estimer la sensibilité de la mesure aux défauts d'assemblage. Finalement un fagot a été réalisé avec des nouilles de caractéristiques proches de celles des gros tubes dans l'objectif d'estimer l'influence de la porosité intersticielle. Les différentes courbes d'absorption sont tracées figure I-B.3.

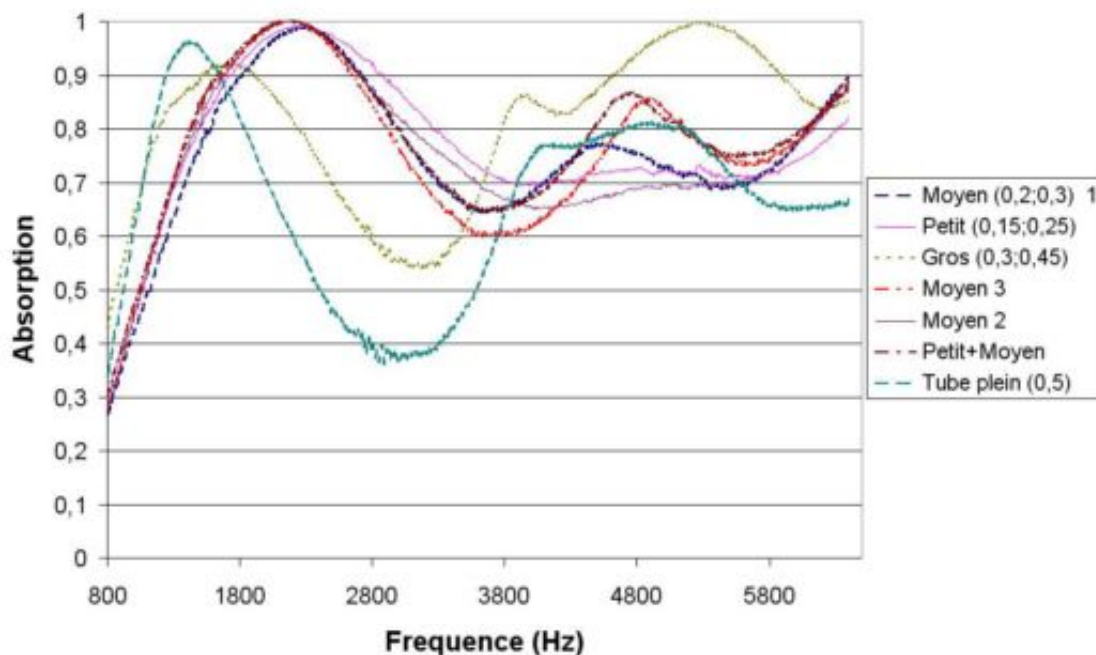


FIG. I-B.3 – Absorption acoustique pour divers nidas



On constate que pour l'ensemble des fagots réalisés à partir de petits ou moyens tubes le comportement acoustique est sensiblement équivalent. La raison est lié à la densité de défaut que l'on crée lors de l'assemblage manuel des fagots. Des mesures par traitement d'image de nos échantillons montrent que la densité de défauts créés est élevée et conduits à une porosité parasite importante. De fait, la différence entre les caractéristiques géométriques des différents tubes est masqué par cette porosité parasite.

Toutefois les qualités d'absorption des différents tubes petits et moyens se distinguent de celles des gros tubes et des nouilles. Pour ces derniers l'absorption optimum se situe pour des fréquences plus basses et le pic d'absorption est moins élevé. Des essais complémentaires seraient nécessaires pour valider cela. Toutefois nous pouvons noter, grâce à l'essai réalisé sur un fagot de nouille, que la porosité interstitielle ne peut pas être négligée.

Passons aux empilements gravitaires. Les sphères des empilements ont un diamètre extérieur de 3 mm et le plot a une hauteur de 26 mm pour un diamètre de 28 mm. Trois empilements ont été testés et les différentes courbes d'absorption sont tracées figure I-B.4 :

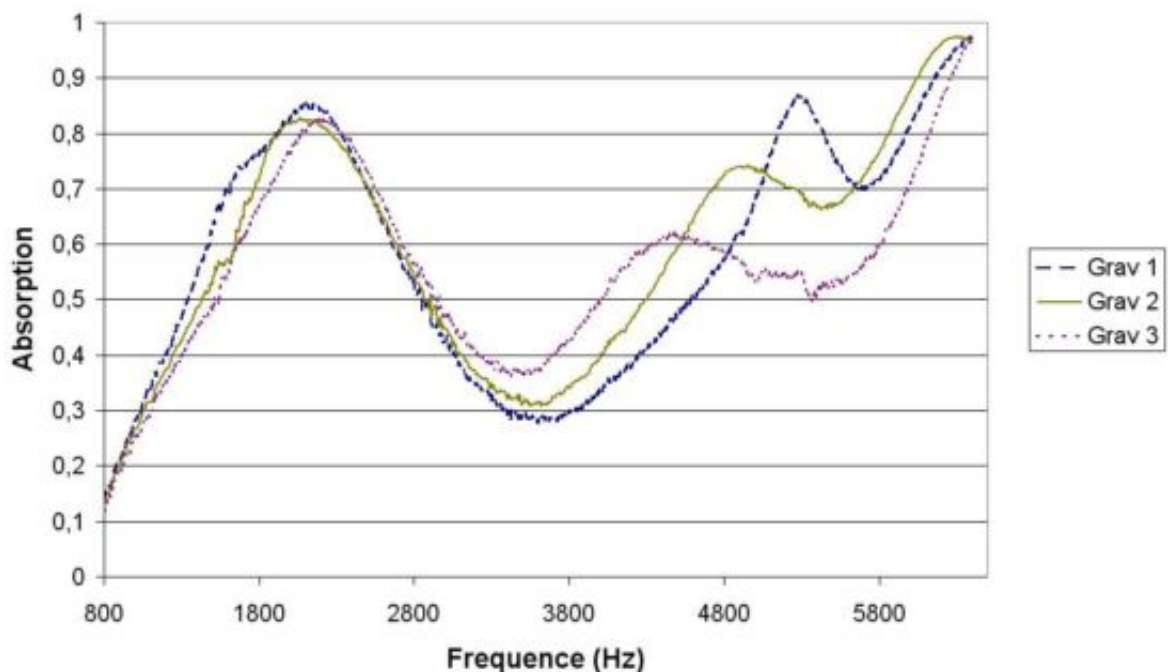


FIG. I-B.4 – Absorption acoustique des empilements gravitaires

On constate que ces empilements présentent une bonne reproductibilité dans le régime des fréquences inférieures à 3000 Hz. Ceci est comparable à ce que l'on observe également sur les assemblages de tubes. Il semblerait que les différences de géométrie entre les différents échantillons n'influent que le régime de fréquences élevées. Comme ce qui nous intéresse dans le cadre du projet MAPO est l'absorption basse fréquence, on constate, sur l'ensemble des échantillons testés, la faible sensibilité aux défauts d'architecture pour ces fréquences là. On remarque de plus que les nidas réalisés avec des tubes petits et moyens ainsi que les empilements de sphères creuses présentent un pic d'absorption pour une fréquence d'environ 2000 Hz et ceci pour un encombrement comparable. La seule différence est que le coefficient d'absorption des nidas tend vers 1 pour cette gamme de fréquence tandis que celui des sphères creuses plafonne

à 0,8. On voit ainsi que la structure nida est mieux adaptée à l'absorption acoustique que celle des empilements gravitaires de sphères creuses.

La figure I-B.5 quant à elle compare l'absorption acoustique de deux empilements réguliers de sphères avec celle d'un empilement gravitaire. Les échantillons réguliers ont été obtenus par prototypage rapide, les échantillons testés sont des plots de diamètre 28 mm et d'une longueur de 30 mm pour un diamètre de bille de 3 mm. L'empilement gravitaire est donc comparable aux réguliers. Les empilements réguliers testés sont une structure cubique à faces centrés ainsi qu'une cubique centré, la mesure d'absorption a été faite selon une direction [100].

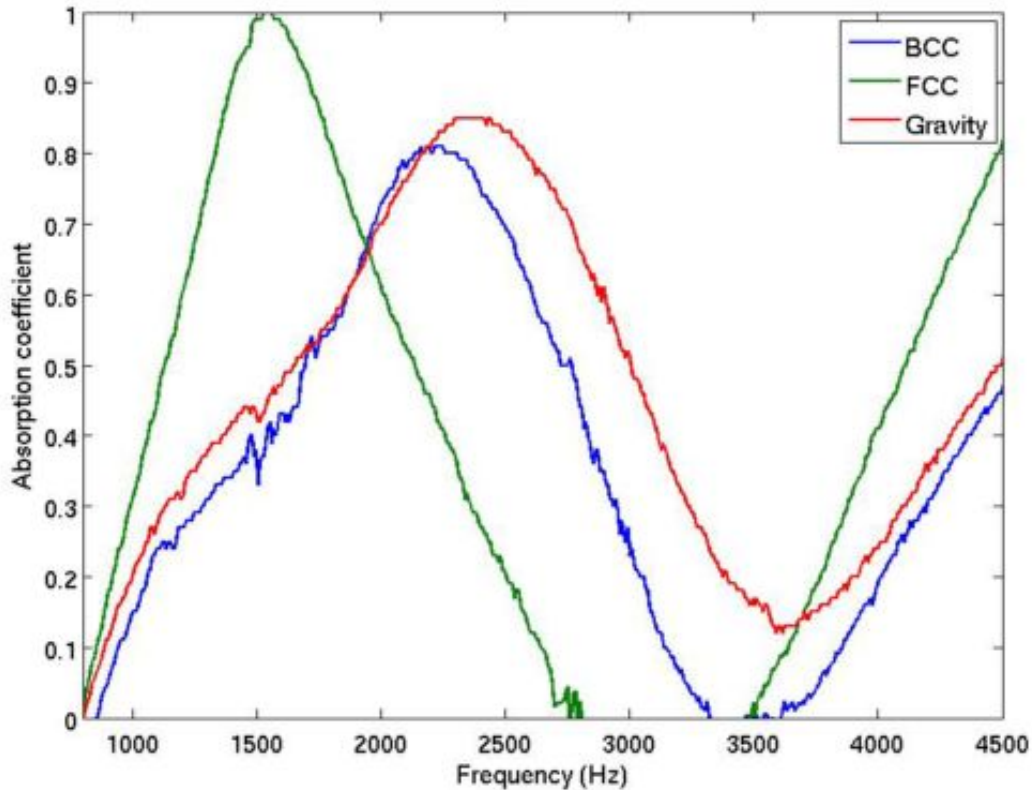


FIG. I-B.5 – Absorption acoustique d'empilements réguliers et gravitaire

Les empilements gravitaires ( $\phi = 36\%$  d'après [19]) et cubique centré ( $\phi = 32\%$ ) ont des comportements semblables, superposable à une translation près. L'empilement gravitaire a tout de même un comportement acoustique supérieur à celui du CC. Le comportement du CFC ( $\phi = 26$ ) est, quant à lui, plus singulier et présente une absorption de 1 pour une fréquence de 1600 Hz.

Il est à noter que si l'on peut obtenir les coefficients du modèles de Lafarge-Pride (fig.I-B.6) à partir des courbes expérimentales, les résultats sont moins probants dans le cas des empilements réguliers que pour les nidas. Les paramètres liés à la courbe d'absorption du CFC nous donne :

$$\phi = 26\% ; \alpha_{\infty} = 2,6 ; \lambda = 366 \mu m ; \lambda' = 134 \mu m \quad (\text{I-B.3})$$

en effectuant la minimisation sur la plage de fréquence de 800 Hz à 2200 Hz. Les autre grandeurs étant fixée à 1 [11]. Si la valeur de la porosité est correcte celle de la tortuosité semble

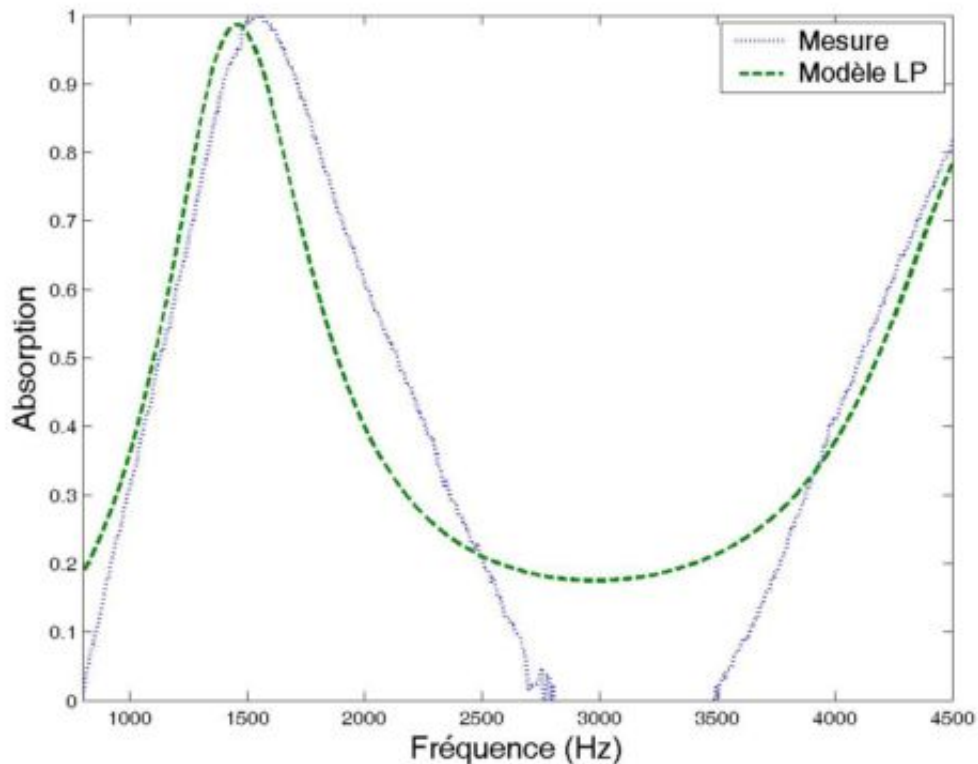


FIG. I-B.6 – Comparaison expérimental-modèle analytique pour le CFC

anormalement grande. Une des raisons à cela est que le modèle de Lafarge-Pride a été construit par homogénéisation en supposant la microstructure comme infiniment petite devant la longueur d'onde, or dans notre cas les échantillons sont plutôt mesoscopiques de fait des effets d'échelle doivent apparaître. Ces effets doivent croître quand la fréquence de l'onde augmente. De plus pour revenir sur les relativement bonnes propriétés de la structure CFC il est à noter que la réalisation de cette structure est, en pratique, nettement plus complexe que la structure nida. De même le spectre obtenu perd sa caractéristique large bande, et l'absorption acoustique chute très rapidement passé le premier pic.

### I-B.3 Synthèse

Nous avons réalisé, au cours de notre étude, une série de matériaux test d'architecture diverses en essayant, au maximum, d'avoir des caractéristiques géométriques comparables. Ainsi nous avons comparé des matériaux nidas avec des empilements gravitaires et réguliers de sphères. De cela il en ressort que seule l'architecture nida permet de combiner un spectre à large bande avec un pic d'absorption acoustique important à basse fréquence. Ces résultats vont dans le sens de ceux prévus par le modèle analytique de Lafarge-Pride. Il est à noter toutefois que ce dernier modèle fonctionne, pour nos matériaux, correctement que pour des fréquences inférieures à 3000 Hz. Pour compléter cette étude il faudrait réaliser des matériaux modèles ayant une microstructure mieux maîtrisée. Ceci permettra de comprendre plus finement l'influence des différents paramètres, ainsi que peut-être d'utiliser des modèles analytiques plus adaptés au caractère mésoscopique de nos matériaux.

## **Deuxième partie**

# **Comportement anisotrope des milieux du second gradient**



## CHAPITRE II–1

### Vers une théorie de l'anisotropie des milieux du second gradient

Nous venons de conclure la partie précédente en montrant que dans le cas de champs lentement variables le milieu de substitution à considérer devait être un milieu généralisé. Dans notre cas ce milieu est du type milieu élastique du second-gradient [10]. La littérature nous renseigne assez peu sur ce type de milieu, et nous ne pouvons trouver la forme de l'opérateur d'élasticité que dans le cas isotrope. Or les milieux sur lesquelles nous travaillons seront périodiques ou quasi-périodiques et présentent de fait une forte anisotropie géométrique<sup>1</sup>. L'objectif de cette partie sera d'obtenir l'ensemble des renseignements concernant cette loi de comportement et pour en déduire les différents opérateurs à implémenter dans un code éléments-finis. Nous nous focaliserons de fait dans cette partie sur l'aspect mathématique de la loi de comportement.

Nous introduirons ce chapitre avec une section bibliographique II–1.1 rappelant la problématique générale de l'identification des classes de symétrie. Au delà de l'aspect historique notre second objectif sera au II–1.2 d'esquisser le schéma de la démarche qui sera la notre au cours de ce travail. Comme un certain nombre de points techniques seront introduits au cours de cette partie, l'exposé, *a priori*, de notre démarche a pour but de préserver la continuité du raisonnement, en introduisant dès maintenant les grandes étapes de notre travail.

### II–1.1 Historique

Le principe que nous avons retenu pour la classification des symétries de la loi de comportement de notre milieu a pour point de départ les travaux menées par Forte et Vianello. Nous nous référerons plus particulièrement à leur article [26] : « Symmetry classes for elasticity tensors » dans lequel ils démontrent pour la première fois de manière rigoureuse l'existence d'uniquement 8 classes de symétrie pour le tenseur d'élasticité. L'approche qu'ils utilisent pour mener à bien leur étude repose sur des éléments issues de la théorie de représentation linéaire des groupes [52]. Ces outils, qui sont très utilisés dans de nombreuses branches de la physique [53,54], n'ont, à notre connaissance, eu que peu d'échos chez les mécaniciens. Par conséquent, pour cette dernière, communauté la publication de Forte et Vianello constitue un article de référence. A leur suite un certain nombre d'auteurs ont redémontré, de diverses manières,

<sup>1</sup>Nous entendons par cela que la répartition de la matière n'est pas homogène dans l'espace.

l'existence des 8 classes de symétrie [55–57]. Les techniques mises en oeuvre ont également été appliquées à d'autres problèmes. A ce niveau plusieurs travaux peuvent être cités :

- Étude du tenseur de photoélasticité [58] par Forte et Vianello ;
- Étude du tenseur de piezoélectricité par Weller [59] ;
- Étude d'« invariants restreints » du tenseur d'élasticité, toujours par Forte et Vianello [60].

Notre objectif est l'extension du formalisme actuel à la prise en compte d'une loi de comportement plus complexe. Nous tâcherons de mettre en place un outil général et facile d'utilisation permettant de résoudre des problèmes de détermination des symétries tensorielles. Par la mise en place d'un algorithme simplifié ainsi que via l'utilisation de diagrammes nous pourrions améliorer la méthodologie initiale. Voyons tout d'abord la démarche employée dans ces travaux.

## II–1.2 Démarche

L'étude des symétries peut paraître complexe lorsque l'on l'applique directement à un tenseur d'ordre élevé. Toutefois le principe est relativement simple et, de fait, l'objectif de cette section sera d'expliquer « avec les mains » comment nous procéderons pour ce faire. Nous illustrerons pour commencer au II–1.2.1 comment le problème s'écrit dans le cas d'une matrice. La II–1.2.2 montrera comment un tenseur peut être réduit en une somme de composantes élémentaires. Cette sous-section sera illustrée par l'étude du tenseur d'élasticité classique. Et finalement au II–1.2.3, nous formulerons la problématique qui sera la nôtre au cours de cette partie et nous présenterons la manière dont nous allons procéder pour résoudre l'ensemble des problèmes identifiés.

### II–1.2.1 Principe général

Si l'on considère un tenseur d'ordre 2 celui-ci est représentable par une matrice  $M$ . On suppose que cette matrice est invariante par une transformation orthogonale  $Q$ , on a

$$QMQ^{-1} = M \quad (\text{II–1.1})$$

Quelles conséquences cette invariance implique-t-elle sur les coefficients de  $M$  ? La démarche pour répondre à cette question est simple : on calcule  $M' = QMQ^{-1}$  et on résout le système  $M' - M = 0$ . Pour un tenseur quelconque d'ordre  $n$  le principe est rigoureusement le même. Toutefois, les calculs étant trop compliqués à effectuer de manière directe, il nous faut trouver une méthode pour nous ramener à ce problème simple. Si nous ne savons pas traiter le problème de manière globale car celui-ci est trop compliqué il nous faut le décomposer en problèmes plus simples. Ce principe de décomposition est au cœur de notre étude. La philosophie de notre problème devient alors la suivante : pour étudier un tenseur quelconque il faut le désassembler, regarder comment chacun de ses constituants élémentaires fonctionnent, puis ensuite le réassembler pour conclure sur le comportement de l'opérateur.

Nous pouvons illustrer ce principe par l'étude du tenseur d'élasticité classique  $\mathbb{C}$ .

### II–1.2.2 Décomposition de tenseur

Nous rappelons avant toute chose l'écriture indicielle de la relation d'élasticité classique :

$$\sigma_{(ij)} = C_{(ij)(kl)} \varepsilon_{(kl)} \quad (\text{II–1.2})$$

Les symétries classiques de l'opérateur seront notées : (...) pour les petites symétries ; ainsi que ... pour la grande.

Le squelette d'un tenseur s'appelle sa décomposition harmonique : c'est la donnée de l'ensemble des tenseurs totalement symétriques et de traces nulles qui le compose, ce sont les engrenages. Ces tenseurs élémentaires sont appelés *tenseurs harmoniques* [61, 62] et nous noterons  $\mathbb{H}^i$  l'espace vectoriel des tenseurs harmoniques d'ordre  $i$ . Cette décomposition est la généralisation à l'ordre  $n$  de la décomposition d'une matrice en une partie sphérique, anti-symétrique et deviatorique. Nous appellerons de ce fait "déviateur d'ordre  $i$ " la composante d'ordre  $i$  de la décomposition harmonique. La décomposition de  $\mathbb{C}$ , que nous établirons formellement au chapitre II-4, contient [26, 61, 63] :

- 2 scalaires ou tenseurs d'ordre 0 ;
- 2 tenseurs harmoniques d'ordre 2 ou déviateurs ;
- 1 tenseur harmonique d'ordre 4 ou déviateur d'ordre 4 .

La donnée de ces éléments constitue le spectre de  $\mathbb{C}$ . La composition du spectre dépend des symétries indicielles du tenseur étudié. C'est pour cette raison que nous insisterons, au chapitre II-2, sur les symétries indicielles de nos opérateurs de comportement.

La décomposition harmonique nous indique que l'espace vectoriel des tenseurs d'élasticité se décompose de manière  $O(3)$ -invariante comme la somme directe des espaces harmoniques<sup>2</sup> suivants :

$$\mathbb{T}_{(ij)(kl)} \cong \mathbb{H}_a^0 \oplus \mathbb{H}_b^0 \oplus \mathbb{H}_a^2 \oplus \mathbb{H}_b^2 \oplus \mathbb{H}^4 \quad (\text{II-1.3})$$

où  $\mathbb{T}_{(ij)(kl)}$  représente l'espace vectoriel des tenseurs ayant les symétries de  $\mathbb{C}$ . Pour une meilleure lisibilité nous regrouperons les composantes de même type<sup>3</sup> ensemble en indiquant l'ordre de l'espace puissance sa multiplicité, ceci nous donne :

$$\text{Sp}(\mathbb{T}_{(ij)(kl)}) = 0^{(2)} \oplus 2^{(2)} \oplus 4 \quad (\text{II-1.4})$$

Nous appellerons cette écriture *spectre harmonique* de l'espace  $\mathbb{T}_{(ij)(kl)}$ .

Cette décomposition est invariante sous l'action du groupe orthogonal à 3 dimensions, c'est-à-dire que tout opérateur  $Q \in O(3)$  agit de manière indépendante sur chacune des composantes de la décomposition. Soit  $G(\mathbb{C})$  le groupe de symétries de  $\mathbb{C}$ , c'est-à-dire le groupe des opérations qui laissent notre tenseur  $\mathbb{C}$  invariant, on peut montrer que ce groupe est l'intersection des groupes de symétrie des tenseurs de sa décomposition harmonique [26]. De fait connaissant les classes de symétrie de chaque composante élémentaire, on peut calculer les différentes intersections de ces groupes. Le résultat de cette opération génère l'ensemble des classes de symétrie du tenseur  $\mathbb{C}$ . Forte et Vianello ont montré par cette méthode qu'il ne pouvait exister que 8 classes de symétrie pour  $\mathbb{C}$ .

<sup>2</sup>La logique des indices  $a, b$  n'est que de distinguer les différentes composantes d'un même ordre entre elles. Et la notation  $\cong$  indique un isomorphisme.

<sup>3</sup>Ce regroupement est classique et la décomposition qui en est issue porte, en théorie de représentation des groupes, le nom de décomposition isotypique. De plus il y a unicité de la décomposition isotypique tandis que la décomposition harmonique n'est pas unique [64].



Leurs résultats peuvent se présenter de la manière suivante :

$G_{\mathcal{M}}$	$G_{\text{ElaC}}$	Système d'élasticité	Nb. de coefficients
$I$	$I$	Triclinique	21
$Z_2$	$Z_2$	Monoclinique	13
$D_2$	$D_2$	Orthotrope	9
$Z_3, D_3$	$D_3$	Rhomboédrique	6
$Z_4, D_4$	$D_4$	Quadratique	6
$Z_{n>4}, D_{n>4}$	$SO(2)$	Isotrope transverse	5
$\mathcal{T}, \mathcal{O}$	$\mathcal{O}$	Cubique	3
$\mathcal{I}, SO(3)$	$SO(3)$	Isotrope	2

(II-1.5)

La première colonne représente la symétrie du milieu matériel, la seconde colonne la symétrie de l'opérateur défini sur ce milieu, la troisième est le nom usuel du système d'élasticité et la dernière contient le nombre de coefficients définissant chacun de ces opérateurs. Ces notations mathématiques seront largement utilisées tout au long de cette partie, nous les définirons au cours du chapitre II-3. L'équivalence entre les notations mathématiques des groupes de symétrie ainsi que les notations cristallographiques pourra être retrouvée dans l'annexe A.

Notre objectif sera, de la même manière que pour l'élasticité classique, d'établir le tableau permettant pour une symétrie matérielle donnée d'obtenir la symétrie tensorielle correspondante ainsi que le nombre de coefficients définissant l'opérateur de comportement dans ce système d'anisotropie. Ces résultats nous serviront ensuite pour dériver les expressions matricielles explicites de ces opérateurs. Passons maintenant à l'élasticité du second gradient.

### II-1.2.3 Élasticité du second gradient

Comme nous l'avons vu à la fin de la partie précédente et comme nous le verrons plus en détail dans la suite de cette partie les équations de comportement de l'élasticité du second gradient s'écrivent [9] :

$$\underset{\sim}{\sigma} = \underset{\sim}{\mathbb{C}} : \underset{\sim}{\varepsilon} + \underset{\sim}{\mathbb{M}} : \underset{\sim}{\mathbb{K}} \quad (\text{II-1.6})$$

$$\underset{\sim}{\mathbb{S}} = \underset{\sim}{\mathbb{M}}^T : \underset{\sim}{\varepsilon} + \underset{\sim}{\mathbb{A}} : \underset{\sim}{\mathbb{K}} \quad (\text{II-1.7})$$

Cette loi de comportement est plus complexe que celle de l'élasticité classique en ce sens qu'elle n'est plus définie par un tenseur, mais par une famille de tenseurs. De plus les ordres des tenseurs présents dans cette famille sont plus élevés que ceux jusqu'alors étudiés dans la littérature et on a la présence d'un tenseur d'ordre impair. Il va nous falloir, de fait, étendre la méthodologie d'étude actuelle à ce type de loi de comportement.

Pour ce faire nous procéderons en plusieurs étapes, la démarche générale sera présentée dans la suite de cette partie tandis que les points plus techniques pourront être retrouvés en annexe de ce manuscrit. Notons dès à présent que, dans la grande majorité des cas, nous nous placerons dans la situations où le tenseur de couplage d'ordre 5 est nul. L'extension de nos résultats à la prise en compte de ce tenseur ne présente néanmoins pas de difficultés majeures.

## II-1.3 Annexes de la seconde partie

Les annexes principales de cette partie s'arrangent de la manière suivante. Nous montrons dans l'annexe II-B des propriétés générales concernant l'élasticité linéaire d'un milieu de degré  $n$ , le comportement que nous étudions est un cas particulier de ce type de loi. Nous montrerons de même dans l'annexe II-C ainsi qu'au cours de la section II-3.2 que la prise en compte de plusieurs tenseurs au sein d'une même loi revient à prendre en compte une phase de réassemblage supplémentaire. L'annexe II-D s'intéressera à la démonstration que nous avons effectué de théorèmes importants concernant les tenseurs et qui sont connus sous le nom des théorèmes de Hermann. Nous ferons souvent référence à ces théorèmes. L'annexe II-E traitera des différences qu'il existe entre une modélisation purement bidimensionnelle et une modélisation tridimensionnelle. Des différences fondamentales y sont mises en avant et permettent de mieux analyser le comportement physique des milieux anisotropes. L'annexe II-A, quant à elle, traitera de détails techniques concernant l'algorithme formelle que nous avons mis en oeuvre pour obtenir certain de nos résultats. Cette méthodologie est assez importante car la réalisation de calculs formels efficaces n'est pas toujours triviale.



# CHAPITRE II-2

## Loi de comportement d'un milieu élastique du second gradient

L'objectif de ce chapitre est d'établir proprement la formulation des équations de comportement d'un milieu dont l'énergie élastique dépend en un point de la déformation ainsi que de son gradient. Ce travail a pour but à la fois de déterminer les symétries indicielles de notre loi de comportement. Comme nous le montrerons ici ces symétries indicielles sont liées à la fois à des conventions d'écriture des grandeurs ainsi qu'à des considérations physiques. Cette démarche nous permettra d'obtenir le nombre de coefficients indépendants de chacun des tenseurs et par là même de la loi de comportement. De plus cela nous permettra de préparer le travail de décomposition harmonique de ces tenseurs, travail qui sera effectué au chapitre II-4.

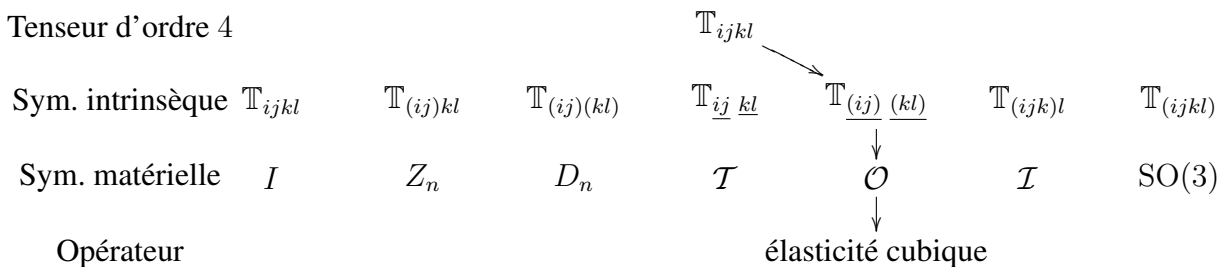
Avant toute chose précisons définissons ce que recouvre le concept de symétries tensorielles.

### II-2.1 Symétries tensorielles

Précisons quelques notions concernant les symétries d'un phénomène physique. Celles-ci sont les conséquences de deux types de symétrie :

- les symétries propres de ce phénomène, ou symétries intrinsèques, qui s'expriment, lorsque ces propriétés sont modélisées par des tenseurs cartésiens, par une invariance par permutation de certains indices de ce tenseur, d'où le nom de symétries indicielles ;
- les symétries induites par les symétries du milieu sur lequel la propriété est définie.

Ce principe peut être illustré par le diagramme suivant :



Nous avons considéré, sur la première ligne, la « catégorie » des tenseurs d'ordre 4, la deuxième ligne correspond à l'ensemble des symétries physiques que peut posséder un tel tenseur, tandis que la troisième contient l'ensemble des symétries qu'un milieu matériel peut posséder. De fait un opérateur linéaire, comme celui de l'élasticité cubique, sera défini à la fois comme un tenseur

ayant la symétrie intrinsèque de l'élasticité ainsi que l'invariance par le groupe de symétrie du cube. Nous nous concentrerons au cours de ce chapitre sur la première de ces restrictions, celle liée aux symétries du phénomène physique.

Illustrons à présent notre propos par l'étude du milieu élastique classique, ou milieu de Cauchy.

## II-2.2 Milieu de Cauchy

Dans un milieu dont l'énergie associée à la déformation élastique ne dépend que du premier gradient du déplacement, et sous l'hypothèse des petites perturbations, la loi de comportement associant un état de déformation à un état de contrainte est modélisée par un tenseur polaire cartésien d'ordre 4. Nous dirons dans la suite plus simplement un tenseur d'ordre 4. Ce tenseur traduit la réponse du matériau en terme de champs physiques à une « modification » de son environnement. Nous noterons  $\underline{\underline{C}}$  un tel tenseur. Soit  $\mathbb{T}_{ijkl}$  l'espace vectoriel des tenseurs d'ordre 4, est-ce-que tout élément de  $\mathbb{T}_{ijkl}$  définit un tenseur d'élasticité ? La réponse est non, l'espace vectoriel des tenseurs d'élasticité  $\mathbb{E}la_{\mathbb{C}}$  est un s.-e.-v de  $\mathbb{T}_{ijkl}$  défini de la manière suivante :

$$\mathbb{E}la_{\mathbb{C}} = \{ \underline{\underline{C}} \in \mathbb{T}_{ijkl} \mid C_{(ij)(kl)} \text{ et } \underline{\underline{C}} \text{ défini positif} \} \quad (\text{II-2.1})$$

Intéressons nous aux symétries d'un élément de  $\mathbb{E}la_{\mathbb{C}}$ .

Les symétries indicielles du tenseur d'élasticité ont deux origines. Les symétries des tenseurs<sup>1</sup> cause ( $\underline{\underline{\varepsilon}}$ ) et conséquence ( $\underline{\underline{\sigma}}$ ) qui induisent les petites symétries de  $\underline{\underline{C}}$ , i.e.

$$C_{(ij)(kl)} = C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} \quad (\text{II-2.2})$$

De plus le fait que la loi de comportement dérive d'une énergie potentielle implique l'existence d'une autre symétrie appelée « grande symétrie » et qui traduit l'invariance de  $\underline{\underline{C}}$  par transposition. On a donc

$$\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{C}}^T \quad (\text{II-2.3})$$

c'est à dire, en indicielle,

$$C_{ij \underline{kl}} = C_{ijkl} = C_{klij} \quad (\text{II-2.4})$$

En notation synthétique  $\underline{\underline{C}}$  possède les symétries intrinsèques suivantes

$$C_{\underline{(ij)} \underline{(kl)}} \quad (\text{II-2.5})$$

La présence de ces symétries réduit le nombre des composantes indépendantes du tenseur de 81 à 21<sup>2</sup>.

<sup>1</sup>Les raisons de ces symétries sont les suivantes. La déformation  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  correspond au gradient symétrique du champ de déformation, le gradient antisymétrique correspond à un mouvement de corps rigide qui n'induit pas d'énergie de déformation élastique. Pour le tenseur de contrainte le fait que celui-ci soit symétrique correspond à l'hypothèse qu'il n'y a pas d'effet de couple au sein de la matière.

<sup>2</sup>Toutefois il est intéressant de noter que le nombre de composantes d'un tenseur totalement anisotrope peut être réduit à 18 dans une base bien choisie [65, 66].

L'ellipticité du tenseur  $\underset{\approx}{\mathbb{C}}$  garantit, quant à elle, et via le théorème de Lax-Milgram, l'existence d'une solution unique au problème de l'élasticité complété de ses conditions aux limites [67].

Voyons à présent ce qu'il en est lorsque l'on considère, non plus un milieu de Cauchy, mais un milieu dont la formulation énergétique dépend également du gradient de la déformation. De manière à aborder proprement cette étude il nous faut tout d'abord définir un certain nombre de conventions.

## II-2.3 Conventions pour l'étude d'un milieu à gradient de déformation

Nous nous intéresserons dans ce qui suit aux symétries indicielles de nos tenseurs. Toutefois pour ce faire il est nécessaire de définir à la fois les objets que nous allons utiliser ainsi que le sens que nous donnons à la notion de milieu à gradient de transformation. Ce double objectif est l'objet de la présente section. Nous commencerons donc par définir les équations de notre milieu ainsi que le formalisme avec lequel nous les manipulerons. Nous choisirons ensuite une définition pertinente de ce que nous appellerons dans la suite de ce travail le gradient de la déformation.

### II-2.3.1 Loi de comportement

On rappelle que les équations de notre milieu de degré<sup>3</sup> 2 s'écrivent [9] :

$$\underset{\sim}{\sigma} = \underset{\approx}{\mathbb{C}} : \underset{\sim}{\varepsilon} + \underset{\approx}{\mathbb{M}} : \underset{\approx}{\mathbb{K}} \quad (\text{II-2.6})$$

$$\underset{\approx}{\mathbb{S}} = \underset{\approx}{\mathbb{M}}^T : \underset{\sim}{\varepsilon} + \underset{\approx}{\mathbb{A}} : \underset{\approx}{\mathbb{K}} \quad (\text{II-2.7})$$

où :  $\underset{\sim}{\sigma}$  est le tenseur des contraintes de Cauchy ;  $\underset{\approx}{\mathbb{S}}$  le tenseur d'hyper-contrainte ;  $\underset{\sim}{\varepsilon}$  le tenseur des déformations ;  $\underset{\approx}{\mathbb{K}}$  est le tenseur du « gradient des déformations » ;  $\underset{\approx}{\mathbb{C}}$  est le tenseur d'élasticité du premier ordre ;  $\underset{\approx}{\mathbb{A}}$  le tenseur d'élasticité du second ordre et  $\underset{\approx}{\mathbb{M}}$  le tenseur de couplage entre l'élasticité classique et celle du second ordre.

Pour manipuler aisément ces équations de comportement nous allons introduire un formalisme qui nous est propre. Nous illustrerons sa pertinence ensuite en montrant, via son utilisation, que si l'on définit le tenseur de couplage  $\underset{\approx}{\mathbb{M}}$  dans l'équation (II-2.6) alors l'existence d'une énergie de déformation impose que l'on ait  $\underset{\approx}{\mathbb{M}}^T$  dans l'équation (II-2.7).

### Formalisme matricielle

Le formalisme suivant qui nous est propre nous permet de manipuler facilement nos équations de comportement, une discussion générale sur ce formalisme pourra être trouvée à l'annexe II-B. Nous définissons en chaque point un vecteur de déformation généralisé  $\underline{\varepsilon}$  ainsi qu'un

<sup>3</sup>On appelle degré du milieu l'ordre du gradient maximal du déplacement pris en compte dans le calcul de l'énergie de déformation. Ainsi un milieu de Cauchy est de degré 1 et un milieu à gradient de déformation est de degré 2.

vecteur de contrainte généralisé  $\underline{\varsigma}$ , définis tels que :

$$\underline{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \underset{\sim}{\mathbb{K}} \end{pmatrix} \quad \underline{\varsigma} = \begin{pmatrix} \sigma \\ \underset{\sim}{\mathbb{S}} \end{pmatrix} \quad (\text{II-2.8})$$

Ces vecteurs d'état contiennent l'ensemble des informations mécaniques en un point du milieu. De ce fait nous prouvons réécrire les équations (II-2.6) de la manière matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} \sigma \\ \underset{\sim}{\mathbb{S}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underset{\sim}{\mathbb{C}} & \underset{\sim}{\mathbb{M}} \\ \underset{\sim}{\mathbb{M}}^T & \underset{\sim}{\mathbb{A}} \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \underset{\sim}{\mathbb{K}} \end{pmatrix} \quad (\text{II-2.9})$$

où  $\odot$  est un opérateur de contraction généralisé permettant de développer le produit matricielle ainsi défini. Nous introduisons de plus l'application  $\mathcal{L}$  qui à la famille de tenseurs  $\{\mathbb{L}\}_k = \left\{ \underset{\sim}{\mathbb{C}}, \underset{\sim}{\mathbb{M}}, \underset{\sim}{\mathbb{A}} \right\}$  associe la matrice de comportement :

$$\underset{\sim}{\Lambda} = \begin{pmatrix} \underset{\sim}{\mathbb{C}} & \underset{\sim}{\mathbb{M}} \\ \underset{\sim}{\mathbb{M}}^T & \underset{\sim}{\mathbb{A}} \end{pmatrix} \quad (\text{II-2.10})$$

et nous appellerons  $\mathcal{L}$  la loi de comportement. Cette application est de fait définie par

$$\mathcal{L}(\{\mathbb{L}\}_k) : \underline{\varepsilon} \longrightarrow \mathcal{L}(\{\mathbb{L}\}_k)(\underline{\varepsilon}) = \underline{\varsigma}(\underline{\varepsilon}) = \underset{\sim}{\Lambda} \odot \underline{\varepsilon} \quad (\text{II-2.11})$$

Avec ces outils nous pouvons revenir sur la question du couplage présent dans notre loi de comportement.

### Forme de l'élasticité de couplage

La présence du tenseur de couplage sous sa forme transposée dans l'équation de l'hyper-contrainte est liée à la définition d'une énergie élastique sur ce milieu. Considérons la loi de comportement linéaire la plus générale possible, celle-ci a pour forme

$$\begin{pmatrix} \sigma \\ \underset{\sim}{\mathbb{S}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underset{\sim}{\mathbb{C}} & \underset{\sim}{\mathbb{M}} \\ \underset{\sim}{\mathbb{N}} & \underset{\sim}{\mathbb{A}} \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \underset{\sim}{\mathbb{K}} \end{pmatrix} \quad (\text{II-2.12})$$

On définit l'énergie élastique en un point de la manière suivante :

$$W_e = \frac{1}{2} \underline{\varepsilon} \odot \underline{\varsigma} = \frac{1}{2} \varepsilon : \sigma + \frac{1}{2} \underset{\sim}{\mathbb{K}} : \underset{\sim}{\mathbb{S}} \quad (\text{II-2.13})$$

Celle-ci se réécrit via la loi de comportement (II-2.12) :

$$W_e = \frac{1}{2} \varepsilon : \underset{\sim}{\mathbb{C}} : \varepsilon + \frac{1}{2} \varepsilon : \underset{\sim}{\mathbb{M}} : \underset{\sim}{\mathbb{K}} + \frac{1}{2} \underset{\sim}{\mathbb{K}} : \underset{\sim}{\mathbb{N}} : \varepsilon + \frac{1}{2} \underset{\sim}{\mathbb{K}} : \underset{\sim}{\mathbb{A}} : \underset{\sim}{\mathbb{K}} \quad (\text{II-2.14})$$

ou bien encore

$$W_e = \frac{1}{2} \varepsilon : \underset{\sim}{\mathbb{C}} : \varepsilon + \frac{1}{2} \varepsilon : \underset{\sim}{\mathbb{M}} : \underset{\sim}{\mathbb{K}} + \frac{1}{2} \varepsilon : \underset{\sim}{\mathbb{N}}^T : \underset{\sim}{\mathbb{K}} + \frac{1}{2} \underset{\sim}{\mathbb{K}} : \underset{\sim}{\mathbb{A}} : \underset{\sim}{\mathbb{K}} \quad (\text{II-2.15})$$

et donc par linéarité

$$W_e = \frac{1}{2} \underset{\sim}{\varepsilon} : \underset{\sim}{\mathbb{C}} : \underset{\sim}{\varepsilon} + \frac{1}{2} \underset{\sim}{\varepsilon} : (\underset{\sim}{\mathbb{M}} + \underset{\sim}{\mathbb{N}}^T) \cdot \underset{\sim}{\mathbb{K}} + \frac{1}{2} \underset{\sim}{\mathbb{K}} \cdot \underset{\sim}{\mathbb{A}} \cdot \underset{\sim}{\mathbb{K}} \quad (\text{II-2.16})$$

Si on pose  $\underset{\sim}{\mathbb{P}} = \frac{1}{2}(\underset{\sim}{\mathbb{M}} + \underset{\sim}{\mathbb{N}}^T)$  on obtient finalement

$$W_e = \frac{1}{2} \underset{\sim}{\varepsilon} : \underset{\sim}{\mathbb{C}} : \underset{\sim}{\varepsilon} + \underset{\sim}{\varepsilon} : \underset{\sim}{\mathbb{P}} \cdot \underset{\sim}{\mathbb{K}} + \frac{1}{2} \underset{\sim}{\mathbb{K}} \cdot \underset{\sim}{\mathbb{A}} \cdot \underset{\sim}{\mathbb{K}} \quad (\text{II-2.17})$$

Cette énergie de déformation élastique est une forme quadratique semblable à l'énergie libre  $\rho\Psi$ . Les dérivés de ce potentiel par rapport aux variables de déformation conduisent à l'expression des variables de contrainte. On a

$$\underset{\sim}{\sigma} = \frac{\partial \rho\Psi}{\partial \underset{\sim}{\varepsilon}} ; \underset{\sim}{\mathbb{S}} = \frac{\partial \rho\Psi}{\partial \underset{\sim}{\mathbb{K}}} \quad (\text{II-2.18})$$

On obtient alors :

$$\underset{\sim}{\sigma} = \underset{\sim}{\mathbb{C}} : \underset{\sim}{\varepsilon} + \underset{\sim}{\mathbb{P}} \cdot \underset{\sim}{\mathbb{K}} \quad (\text{II-2.19})$$

$$\underset{\sim}{\mathbb{S}} = \underset{\sim}{\mathbb{P}}^T : \underset{\sim}{\varepsilon} + \underset{\sim}{\mathbb{A}} \cdot \underset{\sim}{\mathbb{K}} \quad (\text{II-2.20})$$

Par identification avec notre loi de comportement initiale (II-2.12) nous aboutissons à

$$\underset{\sim}{\mathbb{P}} = \frac{1}{2} (\underset{\sim}{\mathbb{M}} + \underset{\sim}{\mathbb{N}}^T) = \underset{\sim}{\mathbb{M}} \quad (\text{II-2.21})$$

D'où immédiatement  $\underset{\sim}{\mathbb{N}} = \underset{\sim}{\mathbb{M}}^T$ . On en conclut donc que l'existence d'une énergie de déformation élastique impose que les couplages des mécanismes en présence s'effectuent via des opérateurs qui sont respectivement adjoints. Cette symétrie de notre matrice de comportement est l'équivalent, appliqué aux termes extra-diagonaux, de la grande symétrie des opérateurs situés le long de la diagonale. Nous reviendrons sur ce point au cours de II-2.4.2.

## II-2.4 Étude des symétries indicielles

La définition des symétries indicielles des opérateurs de notre loi de comportement est d'une importance capitale. En effet ce sont ces symétries qui définissent l'ensemble des formes particulières qu'une loi de comportement peut posséder. C'est au regard de cette importance pour la suite de notre travail, ainsi que pour éviter toute ambiguïté avec des cas particuliers que l'on peut retrouver dans la littérature, que nous ré-établirions la démonstration des symétries indicielles des opérateurs élastiques d'un milieu à gradient de déformation.

Le problème de la détermination des symétries indicielles de notre loi de comportement sera découpé en deux sous-parties :

1. étude des petites symétries ;
2. étude des grandes symétries.



## II-2.4.1 Études des petites symétries

Les symétries intrinsèques des tenseurs cause et conséquence conditionnent les symétries indicielles des tenseurs traduisant les propriétés du milieu. On a tout d'abord  $\underline{\varepsilon}$  symétrique,  $\underline{\varepsilon}$  appartient donc à  $\mathbb{T}_{(ij)}$ . Le fait d'avoir choisi comme représentation pour  $\underline{K}$  d'être le gradient de  $\underline{\varepsilon}$  implique que  $\underline{K}$  appartient à  $\mathbb{T}_{(ij)k}$ . On a de même  $\underline{\sigma} \in \mathbb{T}_{(lm)}$  et  $\underline{S} \in \mathbb{T}_{(lm)n}$ . Les opérateurs de comportement possèdent les petites symétries suivantes :

$$C_{(ij)(lm)}, \quad M_{(ij)(lm)n}, \quad A_{(ij)k(lm)n} \quad (\text{II-2.22})$$

On remarque que si l'on définit l'espace vectoriel  $\mathbb{M}$  suivant :

$$\mathbb{M} = \mathbb{T}_{(ij)} \oplus \mathbb{T}_{(lm)n} \quad (\text{II-2.23})$$

alors les vecteurs d'état  $\underline{\varepsilon}$  et  $\underline{\sigma}$  définis (II-2.8) appartiennent à  $\mathbb{M}$ . La matrice de comportement  $\underline{\Lambda}$  est de fait un élément de  $\mathbb{M}^2 = \mathbb{M} \otimes \mathbb{M}$ . Les matrices blocs de  $\underline{\Lambda}$  sont donc des éléments des espaces vectoriels blocs suivants<sup>4</sup> :

$$\mathbb{M}^2 = \begin{pmatrix} \mathbb{T}_{(ij)} \otimes \mathbb{T}_{(lm)} & \mathbb{T}_{(ij)} \otimes \mathbb{T}_{(lm)n} \\ \mathbb{T}_{(ij)k} \otimes \mathbb{T}_{(lm)} & \mathbb{T}_{(ij)k} \otimes \mathbb{T}_{(lm)n} \end{pmatrix} \quad (\text{II-2.24})$$

et l'on retrouve ainsi naturellement l'ensemble des petites symétries de nos opérateurs.

## II-2.4.2 Études des grandes symétries

L'énergie libre de notre matériau peut être écrite, sous les hypothèses retenues, sous la forme quadratique suivante :

$$\rho\Psi = \frac{1}{2} \underline{\varepsilon} : \underline{C} : \underline{\varepsilon} + \underline{\varepsilon} : \underline{M} : \underline{K} + \frac{1}{2} \underline{K} : \underline{A} : \underline{K} \quad (\text{II-2.25})$$

Ceci nous conduit en notation indicielle à l'écriture :

$$\rho\Psi = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} C_{ijlm} \varepsilon_{lm} + \frac{1}{2} K_{ijk} A_{ijklmn} K_{lmn} + \varepsilon_{ij} M_{ijlmn} K_{lmn} \quad (\text{II-2.26})$$

A partir de la relation (II-2.26), on obtient les équations qui constituent nos lois de comportement :

$$\sigma_{ij} = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon_{ij}} = C_{ijlm} \varepsilon_{lm} + M_{ijlmn} K_{lmn} \quad (\text{II-2.27})$$

$$S_{lmn} = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial K_{lmn}} = K_{ijk} A_{ijklmn} + \varepsilon_{ij} M_{ijlmn} \quad (\text{II-2.28})$$

On obtient alors au second ordre

$$\rho \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{lm}} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{lm}} = C_{ijlm} \quad (\text{II-2.29})$$

$$\rho \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varepsilon_{ij} \partial K_{lmn}} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial K_{lmn}} = M_{ijlmn} \quad (\text{II-2.30})$$

<sup>4</sup>Nous ne tenons pas compte pour l'instant des grandes symétries des opérateurs de  $\underline{\Lambda}$ , toutefois cela ne change rien à notre observation.

$$\rho \frac{\partial^2 \Psi}{\partial K_{lmn} \partial \varepsilon_{ij}} = \frac{\partial S_{lmn}}{\partial \varepsilon_{ij}} = M_{ijklmn} \quad (\text{II-2.31})$$

$$\rho \frac{\partial^2 \Psi}{\partial K_{lmn} \partial K_{ijk}} = \frac{\partial S_{lmn}}{\partial K_{ijk}} = A_{ijklmn} \quad (\text{II-2.32})$$

Comme nos différentielles dérivent d'un potentiel celles-ci sont exactes, on a donc, d'après le théorème de Schwartz, égalité des dérivées croisées, ceci implique :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{lm}} = \rho \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{lm}} = \rho \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varepsilon_{lm} \partial \varepsilon_{ij}} = \frac{\partial \sigma_{lm}}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad (\text{II-2.33})$$

$$\frac{\partial S_{lmn}}{\partial K_{ijk}} = \rho \frac{\partial^2 \Psi}{\partial K_{lmn} \partial K_{ijk}} = \rho \frac{\partial^2 \Psi}{\partial K_{ijk} \partial K_{lmn}} = \frac{\partial S_{ijk}}{\partial K_{lmn}} \quad (\text{II-2.34})$$

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial K_{lmn}} = \rho \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varepsilon_{ij} \partial K_{lmn}} = \rho \frac{\partial^2 \Psi}{\partial K_{lmn} \partial \varepsilon_{ij}} = \frac{\partial S_{lmn}}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad (\text{II-2.35})$$

$$(\text{II-2.36})$$

Or d'après nos lois de comportement,

$$\sigma_{lm} = C_{lmij} \varepsilon_{ij} + M_{lmijk} K_{ijk} \quad (\text{II-2.37})$$

$$S_{ijk} = K_{lmn} A_{lmnijk} + \varepsilon_{lm} M_{lmijk} \quad (\text{II-2.38})$$

De fait les relations (II-2.33) et (II-2.34) impliquent  $C_{ijlm} = C_{lmij}$  et  $A_{ijklmn} = A_{lmnijk}$ .

On en conclut que les tenseurs  $\underset{\sim}{\mathbb{C}}$  et  $\underset{\sim}{\mathbb{A}}$  possèdent la grande symétrie. Ceci signifie que si l'on considère  $\underset{\sim}{\mathbb{C}}$  comme un endomorphisme de  $\mathbb{T}_{(ij)}$ , et  $\underset{\sim}{\mathbb{A}}$  comme un endomorphisme de  $\mathbb{T}_{(ij)k}$ , cela revient à dire que leurs opérateurs associés sont autoadjoints. On a donc  $\underset{\sim}{\mathbb{C}} = \underset{\sim}{\mathbb{C}}^T$  ainsi que  $\underset{\sim}{\mathbb{A}} = \underset{\sim}{\mathbb{A}}^T$

### II-2.4.3 Synthèse et discussion

Si l'on résume ces résultats on a :

$$C_{(ij)(lm)}, \quad M_{(ij)(lm)n}, \quad A_{(ij)k(lm)n} \quad (\text{II-2.39})$$

Nous noterons dans la suite  $\mathbb{E}la_{\mathbb{C}}$ ,  $\mathbb{E}la_{\mathbb{M}}$  ainsi que  $\mathbb{E}la_{\mathbb{A}}$  leurs espaces vectoriels respectifs.

Nos résultats peuvent être comparés à ceux de la littérature. Dans [68] les auteurs aboutissent aux mêmes résultats que nous. Il est à noter qu'évidemment selon le type d'écriture de  $\underset{\sim}{\mathbb{K}}$  retenus ces résultats peuvent sensiblement différer. On peut noter que dans [35] les auteurs relèvent une symétrie supplémentaire pour  $\mathbb{A}$  que l'on pourrait écrire

$$A_{(ij)k(lm)n} \quad (\text{II-2.40})$$

l'origine de cette symétrie n'est pas énoncée dans l'article. De fait doit-on la considérée comme le fruit d'une hypothèse supplémentaire ou bien correspond-elle à une réalité physique ? Il nous semble que la symétrie de type (II-2.40) soit un cas particulier de celle que nous venons de dériver, et de fait cette dernière est plus générale. C'est pourquoi nous continuerons de travailler

à partir de cette expression générale.

Concernant le tenseur  $\underline{\underline{M}}$  on trouve dans [6, 7] les symétries

$$M_{\underline{(ij)} \overline{(lm)}n} \quad (\text{II-2.41})$$

où la notation  $\underline{a} \overline{b}$  indique l'antisymétrie du tenseur par permutation des blocs  $a$  et  $b$ . La raison en est que le tenseur obtenu par homogénéisation s'exprime

$$\underline{\underline{M}}' = \underline{\underline{M}} - \underline{\underline{M}}^* \quad (\text{II-2.42})$$

où  $M_{ijlmn}^* = M_{lmijn}$ . De fait si l'on considère les symétries du tenseur  $\underline{\underline{M}}$  on abouti bien pour  $\underline{\underline{M}}'$  aux symétries indiquées par (II-2.41). Détaillons ce point, la contrainte effective en un point de notre matériau s'écrit [3, 9]

$$\underline{\underline{\tau}} = \underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{S}} \cdot \underline{\underline{\nabla}} \quad (\text{II-2.43})$$

et en introduisant les relations de comportement (II-2.7) et (II-2.6) dans (II-2.43) on obtient

$$\underline{\underline{\tau}} = \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\varepsilon}} + (\underline{\underline{M}} - \underline{\underline{M}}^*) : \underline{\underline{K}} - \underline{\underline{A}} :: (\underline{\underline{\nabla}} \otimes \underline{\underline{K}}) \quad (\text{II-2.44})$$

On en conclut donc que cette différence dans la nature des symétries identifiées n'est qu'apparente car les tenseurs concernés ne sont, au final, pas les mêmes.

Nos résultats ayant été confrontés à ceux de la littérature déterminons maintenant combien de coefficients indépendants sont nécessaire à l'écriture complète de nos modèles.

## II-2.5 Détermination de la dimension de la loi de comportement

Nous appelons dimension de la loi de comportement le nombre de coefficients des opérateurs nécessaire à la définir. Dans le cas général, c'est-à-dire sans symétrie indicielle, un tenseur d'ordre  $n$  en dimension  $d$  est définie par la donnée de  $d^n$  coefficients. La prise en compte de symétries indicelles réduit le nombre de coefficients nécessaires, déterminons de fait pour chacun des tenseurs de notre loi de comportement la dimension de leur espace vectoriel associé.

### II-2.5.1 Dimension des opérateurs de comportement

#### Tenseur $\underline{\underline{C}}$

Le tenseur d'élasticité  $\underline{\underline{C}}$  est, classiquement, défini par 21 coefficients indépendants.

#### Tenseur $\underline{\underline{M}}$

Nous considérerons en fait ici successivement les cas des tenseurs  $\underline{\underline{M}}$  et  $\underline{\underline{M}}'$ .

**Cas de  $\underline{\underline{M}}$**  On peut se représenter les composantes du tenseur  $\underline{\underline{M}}$  dans une matrice rectangle dont les dimensions sont égales au nombre de coefficients indépendants de  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  et  $\underline{\underline{K}}$ . On a  $\underline{\underline{\varepsilon}} \in \mathbb{T}_{(ij)}$  et  $\underline{\underline{K}} \in \mathbb{T}_{(lm)n}$  ce qui implique que la matrice des composante de  $\underline{\underline{M}}$  est une matrice (6, 18). De fait  $\underline{\underline{M}}$  possède 108 composantes indépendantes.

**Cas de  $\underline{\underline{M}}'$**  Calculons à présent le nombre de coefficients de  $\underline{\underline{M}}'$ . On considère deux tenseurs  $\underline{\underline{N}}$  et  $\underline{\underline{H}}$  définis de la manière suivante

$$\underline{\underline{N}} = N_{\underline{(ij)} \underline{(lm)}} e_i \otimes e_j \otimes e_l \otimes e_m, \quad \underline{\underline{H}} = H_n e_n \quad (\text{II-2.45})$$

tel que

$$\underline{\underline{M}}' = \underline{\underline{N}} \otimes \underline{\underline{H}} \quad (\text{II-2.46})$$

Comme  $\underline{\underline{N}}$  est un tenseur antisymétrique d'ordre 4 possédant des petites symétries, il peut être représenté par un tenseur antisymétrique équivalent d'ordre 2 en dimensions 6, on appellera  $\underline{\underline{N}}'_{as}$  ce tenseur. Sachant qu'un tenseur d'ordre 2 peut être scindé en un tenseur symétrique d'ordre 2 ainsi qu'en un tenseur antisymétrique d'ordre 2, on peut écrire :

$$\underline{\underline{N}}'_{as} = \underline{\underline{N}}' - \underline{\underline{N}}'_s \quad (\text{II-2.47})$$

De fait la dimension de  $\underline{\underline{N}}'_{as}$ , donc de  $\underline{\underline{N}}$ , se calcule aisément (les espaces étant en somme directe) :

$$\begin{aligned} \dim(\underline{\underline{N}}) &= \dim(\underline{\underline{N}}'_{as}) = \dim(\underline{\underline{N}}') - \dim(\underline{\underline{N}}'_s) \\ &= d^2 - \frac{d(d+1)}{2} = 15 \end{aligned} \quad (\text{II-2.48})$$

De fait si l'on revient à  $\underline{\underline{M}}'$ , on montre que celui-ci possède 45 coefficients indépendants, en effet :

$$\dim(\underline{\underline{M}}') = \dim(\underline{\underline{N}}) * \dim(\underline{\underline{H}}) = 45 \quad (\text{II-2.49})$$

### Tenseur $\underline{\underline{A}}$

Concernant le tenseur  $\underline{\underline{A}}$ , on procédera de la même manière que pour  $\underline{\underline{M}}$  pour déterminer son nombre de composantes indépendantes. Le tenseur  $\underline{\underline{A}}$  est auto-adjoint, on peut donc représenter ses composantes dans une matrice carrée symétrique de dimension 18. Le nombre de coefficients indépendants est égal à

$$N_c = \frac{d(d+1)}{2} \quad (\text{II-2.50})$$

où  $d$  représente la dimension de la matrice. Ce qui implique que dans notre cas que  $\underline{\underline{A}}$  possède 171 composantes.

## II-2.5.2 Synthèse

On peut résumer l'ensemble de ces informations dans le tableau suivant :

Fonction	Tenseur	Dimension
Contrainte, déformation	$\sigma_{(ij)}, \varepsilon_{(ij)}$	6
Hyper-contrainte, gradient de déformation	$S_{(ij)k}, K_{(ij)k}$	18
Élasticité du premier ordre	$C_{(ij)(lm)}$	21
Élasticité du second ordre	$A_{(ij)k(lm)n}$	171
Élasticité de couplage	$M_{(ij)(lm)n}$	108
Élasticité de couplage effective	$M'_{(ij)(lm)n}$	45

Si l'on considère notre loi de comportement définie par la donnée des tenseurs  $\underset{\approx}{C}$ ,  $\underset{\approx}{M}$ ,  $\underset{\approx}{A}$  alors celle-ci, dans le cas d'un milieu totalement anisotrope, et sans hypothèses supplémentaires, comporte 300 coefficients. Comme nous le montrerons par la suite l'ensemble des symétries du milieu sur lequel est défini cette loi réduit assez rapidement le nombre des coefficients réellement mis en jeu.

## II-2.6 Synthèse

Au cours de ce chapitre nous avons présenté les conventions d'écriture que nous avons retenues pour la modélisation de notre milieu. A partir de celles-ci nous avons dérivé les symétries indicelles de nos tenseurs de comportement. Une partie de ces résultats peut être retrouvée dans la littérature. Toutefois ce que nous avons essayé de montrer est que, du fait des multiples manières d'écrire nos équations, reprendre des résultats existants sans se poser de questions constitue un pari risqué. Les symétries qui ont été retenues au final sont celles dont la nature est la plus générale. Il existe en effet des hypothèses permettant de faire baisser le nombre de coefficients des lois de comportement généralisées, cependant de manière à conserver la plus grande généralité à notre propos, nous ne considérerons pas ici ces simplifications. En conséquence nous avons actuellement en notre possession le formalisme général d'un milieu à gradient de déformation. Il nous faut à présent étudier l'influence des symétries du milieu matériel sur notre loi de comportement. La mise en oeuvre d'une méthodologie adaptée à ce problème est l'objectif du chapitre qui va suivre.

## CHAPITRE II–3

# Symétries matérielles et physiques

Au cours du chapitre II–2 nous avons défini les symétries indicielles de notre loi de comportement. Ces symétries, intrinsèques, sont les symétries du phénomène physique étudié. Toutefois à celles-ci s’ajoutent des symétries supplémentaires, géométriques ou spatiales, qui sont induites par celles du milieu sur lequel notre loi de comportement est définie. L’ensemble des différents types de symétries inéquivalentes que peut avoir un opérateur sont ses classes de symétries.

Les objectifs de ce chapitre seront multiples. Nous commencerons tout d’abord, au II–3.1, par définir rigoureusement les notions de symétries matérielles et de symétries physiques, et nous formulerons la relation qui les unis. Ceci fait nous travaillerons, au II–3.2, sur l’écriture de notre loi de comportement pour établir l’expression de son groupe de symétries. C’est-à-dire des opérations qui appliquées à notre loi de comportement l’amène dans un état indiscernable de son état initial. L’expression de ce groupe nous permettra de reformuler de manière plus concise notre problème. Dans la suite de ce travail nous nous intéresserons plus particulièrement au tenseur d’élasticité du second ordre  $\underset{\sim}{A}$ . Cela nous permettra de réduire notre problème initial à l’étude des sous-groupes de  $SO(3)$ . La section II–3.3 définira précisément la nature de ces groupes et la manière dont ceux-ci se construisent et se déduisent les uns des autres. Les résultats de cette section seront très souvent réutilisés dans la suite de ce travail.

### II–3.1 Symétries matérielles et symétries physiques

On considère un milieu matériel  $\mathcal{M}$  ainsi qu’une propriété physique quelconque  $\mathcal{P}$  définie dessus. Une opération qui transforme le milieu  $\mathcal{M}$  en un nouveau milieu  $\mathcal{M}'$  qui est indiscernable du premier est une opération de symétrie. Ces opérations, de fait, ne déforment pas notre milieu initial<sup>1</sup> et le transforment de manière « rigide », elles appartiennent de fait au groupe  $O(3)$ , le groupe des isométries de l’espace euclidien à 3 dimensions<sup>2</sup>.

<sup>1</sup>On pourrait toutefois étendre notre définition pour y intégrer des symétries par changement d’échelles. Nous nous contenterons ici uniquement du groupe des transformations rigides.

<sup>2</sup>Ou à  $O(2)$  dans le cas d’une modélisation bidimensionnelle.

Si nous appelons  $G(\mathcal{M})$  l'ensemble de ces opérations celui-ci s'écrit

$$G(\mathcal{M}) = \{Q \in O(3) | Q \star \mathcal{M} = \mathcal{M}\} \quad (\text{II-3.1})$$

où  $\star$  représente l'action de  $O(3)$  sur  $\mathcal{M}$ . Cet ensemble a une structure algébrique de groupe et constitue le groupe de symétrie matérielle.

De même l'ensemble des transformations de l'espace qui laissent invariante notre propriété physique forme un groupe que nous noterons  $G(\mathcal{P})$ , le groupe de symétrie de la propriété physique. Ce groupe s'écrit

$$G(\mathcal{P}) = \{Q \in O(3) | Q \star \mathcal{P} = \mathcal{P}\} \quad (\text{II-3.2})$$

L'action d'un élément de  $G(\mathcal{M})$  sur  $\mathcal{M}$  résultant en une image du milieu indiscernable du milieu initial, la réponse du matériau à un champ physique fixé doit nécessairement être la même dans les deux configurations de  $\mathcal{M}$ . En d'autres termes, comme la propriété physique est définie sur  $\mathcal{M}$ , si  $Q$  appartient à  $G(\mathcal{M})$  alors il appartient également à  $G(\mathcal{P})$ . Cette observation est contenue dans le principe de Neumann [69] qui, pour un milieu matériel donné, pose l'inclusion  $G(\mathcal{M}) \subseteq G(\mathcal{P})$ . En d'autres termes : les symétries des causes doivent se retrouver dans celles des conséquences. Comme démontré en annexe II-D, les conséquences peuvent des fois être plus symétriques que les causes mais, hors ruptures de symétrie, jamais moindres.

Un exemple classique de cela est le cas de la symétrie matérielle  $6/mmm$ , en notation cristallographique, ou  $D_6 \oplus Z_2^c$  en notation mathématique<sup>3</sup>, appliquée à l'élasticité classique. Un tel cristal est matériellement anisotrope et son groupe de symétrie matériel est fini, toutefois cette anisotropie matérielle induit l'isotropie transverse des propriétés élastiques [26, 70] : c'est-à-dire un groupe de symétrie infinie dans le plan. Dans ce cas précis on observe que la conséquence est plus symétrique que la cause. Ceci est dû au fait que l'ordre de la symétrie, ici 6, excède le nombre d'indices du tenseur d'élasticité, ici 4, et donc le tenseur ne peut pas « voir » toutes les symétries. Le théorème qui nous permet d'affirmer cela fait partie des théorèmes de Hermann. Les démonstrations que nous avons fait de ces théorèmes pourront être retrouvées en annexe II-D et ont fait l'objet d'un compte rendu à l'académie des science [71].

Revenons à présent au cas de l'élasticité à gradient de déformation.

## II-3.2 Groupe de symétrie d'un milieu à gradient de déformation

La première des choses qu'il nous faut déterminer est l'ensemble des transformations qui laisse notre loi de comportement invariante. Ce point est traité de manière plus générale dans le cas d'un milieu de degré  $n$  dans l'annexe II-C, et notre objectif ici est d'en particulariser l'étude au cas d'un milieu à gradient de déformation.

Conformément à ce qui a été établi au cours du chapitre II-2, on a l'opérateur de comportement  $\underline{\Lambda}$  suivant :

---

<sup>3</sup>Voir l'annexe A pour les équivalences entre les notations cristallographiques et mathématiques.

$$\underset{\sim}{\Lambda} = \begin{pmatrix} \underset{\sim}{\mathbb{C}} & \underset{\sim}{\mathbb{M}} \\ \underset{\sim}{\mathbb{M}^T} & \underset{\sim}{\mathbb{A}} \end{pmatrix} \quad (\text{II-3.3})$$

avec les symétries indicielles classiques pour nos tenseurs :

$$\underset{\sim}{C}_{(ij)(lm)}; \quad \underset{\sim}{M}_{(ij)(lm)n}; \quad \underset{\sim}{A}_{(ij)k(lm)n} \quad (\text{II-3.4})$$

Cet opérateur est l'image de la famille de tenseurs  $\{\mathbb{L}\}_k = \left\{ \underset{\sim}{\mathbb{C}}, \underset{\sim}{\mathbb{M}}, \underset{\sim}{\mathbb{A}} \right\}$  par l'application  $\mathcal{L}$ .

$$\mathcal{L}(\{\mathbb{L}\}_k) : \underline{\epsilon} \in \mathbb{M} \longrightarrow \mathcal{L}(\{\mathbb{L}\}_k)(\underline{\epsilon}) = \underline{\varsigma}(\underline{\epsilon}) = \underset{\sim}{\Lambda} \odot \underline{\epsilon} \quad (\text{II-3.5})$$

on rappelle que dans ce formalisme  $\underline{\epsilon}$  ainsi que  $\underline{\varsigma}$  représentent des vecteurs de déformation et de contrainte généralisés ; c'est-à-dire que :

$$\underline{\epsilon} = \begin{pmatrix} \underset{\sim}{\epsilon} \\ \underset{\sim}{\mathbb{K}} \end{pmatrix} \quad \underline{\varsigma} = \begin{pmatrix} \underset{\sim}{\sigma} \\ \underset{\sim}{\mathbb{S}} \end{pmatrix} \quad (\text{II-3.6})$$

De fait, dans le cas qui nous intéresse, la propriété physique  $\mathcal{P}$  est l'opérateur de comportement linéaire  $\underset{\sim}{\Lambda}$ . On a alors le groupe de symétrie tensorielle

$$G(\underset{\sim}{\Lambda}) = \left\{ \mathbb{Q} \in O(3) \mid \mathbb{Q} \star \underset{\sim}{\Lambda} = \underset{\sim}{\Lambda} \right\} \quad (\text{II-3.7})$$

ainsi que l'inclusion  $G(\mathcal{M}) \subseteq G(\underset{\sim}{\Lambda})$ .

Comme montré en annexe II-C dans le cas d'un milieu de degré  $n$  le groupe de symétrie d'une loi de comportement se définit comme l'intersection des groupes de symétries des tenseurs de comportement de cette loi. C'est-à-dire que l'on a la relation

$$G(\underset{\sim}{\Lambda}) = \bigcap_{k=1}^{\frac{n(n+1)}{2}} G(L_k) \quad (\text{II-3.8})$$

où  $n$  indique le degré du milieu, c'est-à-dire l'ordre des gradients du déplacement pris en compte dans le modèle. Nous obtenons donc dans ce dernier cas :

$$G(\underset{\sim}{\Lambda}) = G(\underset{\sim}{\mathbb{C}}) \cap G(\underset{\sim}{\mathbb{M}}) \cap G(\underset{\sim}{\mathbb{A}}) \quad (\text{II-3.9})$$

où les groupes s'explicitent de la manière suivante :

$$G(\underset{\sim}{\mathbb{C}}) = \left\{ \mathbb{Q} \in O(3) \mid \mathbb{Q} \star_r \underset{\sim}{\mathbb{C}} = \underset{\sim}{\mathbb{C}} \right\} \quad (\text{II-3.10})$$

$$G(\underset{\sim}{\mathbb{M}}) = \left\{ \mathbb{Q} \in O(3) \mid \mathbb{Q} \star_r \underset{\sim}{\mathbb{M}} = \underset{\sim}{\mathbb{M}} \right\} \quad (\text{II-3.11})$$

$$G(\underset{\sim}{\mathbb{A}}) = \left\{ \mathbb{Q} \in O(3) \mid \mathbb{Q} \star_r \underset{\sim}{\mathbb{A}} = \underset{\sim}{\mathbb{A}} \right\} \quad (\text{II-3.12})$$

où l'action  $\star_r$  est définie par un produit de Rayleigh, i.e.

$$\star_r : O(3) \times \mathbb{T}^{(n)} \rightarrow \mathbb{T}^{(n)} : (\mathbb{Q}, \mathbb{T}) \mapsto \mathbb{Q} \star_r \mathbb{T} := Q_{i_1 j_1} \dots Q_{i_n j_n} T_{j_1 \dots j_n} \quad (\text{II-3.13})$$



On peut définir de même l'application  $\phi_n$  (ou produit de Kronecker)

$$\phi_n : O(3) \rightarrow \mathbb{T}^{(n)} : Q \mapsto Q^{(n)} = Q_{i_1 j_1} \cdots Q_{i_n j_n} \quad (\text{II-3.14})$$

qui définit une représentation linéaire du groupe  $O(3)$  dans  $\mathbb{T}^{(n)}$ . Ceci nous permet de réécrire en indicelle les groupes de symétrie définis ci-dessus :

$$G(\underset{\approx}{\mathbb{C}}) = \left\{ Q \in O(3) \mid Q_{io} Q_{jp} Q_{lr} Q_{ms} C_{(op)(rs)} = C_{(ij)(lm)} \right\} \quad (\text{II-3.15})$$

$$G(\underset{\approx}{\mathbb{M}}) = \left\{ Q \in O(3) \mid Q_{io} Q_{jp} Q_{lq} Q_{mr} Q_{ns} M_{(op)(qr)s} = M_{(ij)(lm)n} \right\} \quad (\text{II-3.16})$$

$$G(\underset{\approx}{\mathbb{A}}) = \left\{ Q \in O(3) \mid Q_{io} Q_{jp} Q_{kq} Q_{lr} Q_{ms} Q_{nt} A_{(op)q(rs)t} = A_{(ij)k(lm)n} \right\} \quad (\text{II-3.17})$$

Cela nous permet déjà de formuler une simplification à notre étude. Considérons un élément  $Q \in O(3)$ , cet élément est par définition orthogonal et son déterminant est égal à  $\pm 1$ . Considérons  $P$  un élément de  $SO(3)$ ,  $SO(3)$  étant le groupe des isométries propres, et, par définition, son déterminant est de 1. De fait on a<sup>4</sup> :

$$\forall Q \in O(3), \exists P \in SO(3) \mid P = \frac{1}{\det(Q)} Q \quad (\text{II-3.18})$$

De fait si l'on considère, par exemple,  $G(\underset{\approx}{\mathbb{C}})$  on a :

$$G(\underset{\approx}{\mathbb{C}}) = \left\{ Q \in O(3) \mid (\det(Q))^4 P_{io} P_{jp} P_{lr} P_{ms} C_{(op)(rs)} = C_{(ij)(lm)} \right\} \quad (\text{II-3.19})$$

or comme dans tous les cas  $\det(Q)^4$  est égal à 1, on peut réduire l'étude des éléments de  $G(\underset{\approx}{\mathbb{C}})$  aux transformations propres de  $SO(3)$ . Cette remarque est bien évidemment vraie également pour les groupes de symétrie de tout tenseur d'ordre paire et donc également pour  $G(\underset{\approx}{\mathbb{A}})$ . Nous avons au final :

$$G(\underset{\approx}{\mathbb{C}}) = \left\{ Q \in SO(3) \mid Q_{io} Q_{jp} Q_{lr} Q_{ms} C_{(op)(rs)} = C_{(ij)(lm)} \right\} \quad (\text{II-3.20})$$

$$G(\underset{\approx}{\mathbb{M}}) = \left\{ Q \in O(3) \mid Q_{io} Q_{jp} Q_{lq} Q_{mr} Q_{ns} M_{(op)(qr)s} = M_{(ij)(lm)n} \right\} \quad (\text{II-3.21})$$

$$G(\underset{\approx}{\mathbb{A}}) = \left\{ Q \in SO(3) \mid Q_{io} Q_{jp} Q_{kq} Q_{lr} Q_{ms} Q_{nt} A_{(op)q(rs)t} = A_{(ij)k(lm)n} \right\} \quad (\text{II-3.22})$$

où bien encore, de manière plus concise, via l'application  $\phi_n$

$$G(\underset{\approx}{\mathbb{C}}) = \left\{ Q \in SO(3) \mid Q_{ijlmoprs}^{(4)} C_{(op)(rs)} = C_{(lm)(kl)} \right\} \quad (\text{II-3.23})$$

$$G(\underset{\approx}{\mathbb{M}}) = \left\{ Q \in O(3) \mid Q_{ijklmopqrs}^{(5)} M_{(op)(qr)s} = M_{(ij)(lm)n} \right\} \quad (\text{II-3.24})$$

$$G(\underset{\approx}{\mathbb{A}}) = \left\{ Q \in SO(3) \mid Q_{ijklmnopqrst}^{(6)} A_{(op)q(rs)t} = A_{(ij)k(lm)n} \right\} \quad (\text{II-3.25})$$

C'est à partir du matériel constitué des groupes de symétrie (II-3.20), (II-3.21), (II-3.22) ainsi que (II-3.23), (II-3.24), (II-3.25) que nous allons travailler ; les deux approches sont complémentaires. Comme nous le verrons par la suite, les définitions des groupes de symétrie selon (II-3.23), (II-3.24), (II-3.25) constituent le fondement de notre approche théorique et nous

<sup>4</sup>Ceci est vrai et on a droit de le faire car la dimension de l'espace est impaire, en dimension paire ceci est faux. Cela se démontre facilement en travaillant à partir du produit des valeurs propres.

permettra par la suite de déterminer le nombre de classes de symétrie différentes ainsi que le nombre de coefficients dans chacune de ces classes. Les définitions (II–3.20), (II–3.21), (II–3.22), quant à elles, nous seront utiles pour la dérivation formelle de nos opérateurs de comportement, dérivation qui est l’objet du chapitre III–1.

Pour des raisons de concision du discours nous nous intéresserons dans la suite de cette thèse exclusivement au cas où le tenseur de couplage  $\underline{\underline{M}}$  est nul. Cela se produit dans tout milieu tridimensionnel centro-symétrique, de fait négliger ce terme revient à faire cette hypothèse. Notons toutefois que l’ensemble des résultats présentés ici pourra être sans difficultés majeures étendu aux cas non-centrosymétriques<sup>5</sup>. Cette hypothèse de travail nous permet de nous restreindre à l’étude des sous-groupes de  $SO(3)$  au lieu d’avoir à considérer l’ensemble des sous-groupes de  $O(3)$ . La liste de ces groupes pourra néanmoins être retrouvée dans l’annexe A.

Passons donc à l’étude des sous-groupes de  $SO(3)$ .

### II–3.3 Sous-groupes de $SO(3)$

La question de savoir quelles sont les caractéristiques générales des classes de symétrie d’une loi de comportement a été traitée de manière assez fondamentale par Zheng et Boehler dans « The description, classification, and reality of material and physical symmetries » [69]. Il en ressort que le groupe de symétrie d’une loi de comportement ne peut être que le conjugué d’un sous-groupe de  $SO(3)$ <sup>6</sup>. La collection de ces sous-groupes est

$$\Sigma := \{I, Z_m, D_m, T, \mathcal{O}, \mathcal{I}, SO(2), O(2), SO(3)\}, (m \geq 2) \quad (\text{II–3.26})$$

où :  $I$  est le groupe identité ;  $Z_m$  le groupe cyclique d’ordre  $m$  ;  $D_m$  le groupe diédral d’ordre  $2m$  ;  $T$  le groupe tétraédrique d’ordre 12 ;  $\mathcal{O}$  le groupe octaédrique d’ordre 24 ;  $\mathcal{I}$  le groupe icosaédrique d’ordre 60. Cette collection de groupes se divise en deux catégories : d’une part, les groupes plans :

$$\Sigma_P := \{I, Z_m, D_m, SO(2), O(2)\}, (m \geq 2) \quad (\text{II–3.27})$$

et, d’autre part, les groupes spatiaux :

$$\Sigma_S := \{T, \mathcal{O}, \mathcal{I}, SO(3)\} \quad (\text{II–3.28})$$

On a une infinité dénombrable de groupes plans pour seulement 4 groupes spatiaux possibles. Étudions plus en détails chacune de ces catégories de groupes.

#### II–3.3.1 Groupes plans

Les groupes plans se divisent en deux catégories : \_les groupes cycliques ; \_les groupes diédraux. Introduisons pour commencer les groupes cycliques.

<sup>5</sup>L’extension à ce type de milieu peut se faire en utilisant les outils que nous introduirons au cours des chapitres suivants ainsi qu’en utilisant les résultats de Weller [59].

<sup>6</sup>Cette remarque concerne uniquement les groupes de symétrie des tenseurs d’ordre pair. Dans le cas des tenseurs d’ordre impair il est nécessaire, de la même manière, de considérer l’ensemble des sous-groupes de  $O(3)$ , ce point est traité dans le détail dans le travail de thèse de Weller [59]. Dans tous les cas comme  $O(3)$  peut être construit à partir de  $SO(3)$  cela ne modifie fondamentalement le raisonnement présenté ici.

## Groupes cycliques

Le groupe cyclique  $Z_m$  est engendré par une rotation d'axe  $z$  et d'angle  $\theta = \frac{2\pi}{m}$ . Ce groupe contient  $m$  éléments distincts et est le groupe de symétrie des figures chirales. Le triskel, fig.II-3.1, est un exemple de figure  $Z_3$ -invariante. La représentation matricielle du générateur de  $Z_m$



(a) Triskel levogyre (b) Triskel dextrogyre

FIG. II-3.1 – Figure  $Z_3$ -invariante

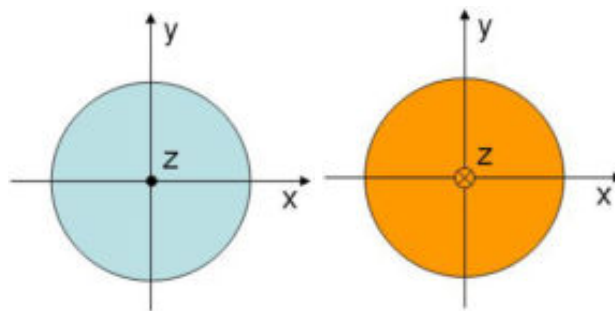
dans  $\mathbb{R}^2$  est la suivante :

$$\text{Gen}(Z_m) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2\pi}{m}\right) & -\sin\left(\frac{2\pi}{m}\right) \\ \sin\left(\frac{2\pi}{m}\right) & \cos\left(\frac{2\pi}{m}\right) \end{pmatrix} \quad (\text{II-3.29})$$

Dans  $\mathbb{R}^3$  de nombreuses représentations sont possibles, pour celle de normale  $z$  nous avons :

$$\text{Gen}(Z_m) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2\pi}{m}\right) & -\sin\left(\frac{2\pi}{m}\right) & 0 \\ \sin\left(\frac{2\pi}{m}\right) & \cos\left(\frac{2\pi}{m}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{II-3.30})$$

Nous considérerons le groupe  $SO(2)$  comme étant le groupe continu limite de  $Z_m$  quand  $m$  tend vers  $+\infty$ , et donc  $\theta$  vers 0. On peut se représenter  $SO(2)$  comme étant le groupe de symétrie d'un disque dont les faces supérieure et inférieure seraient de couleurs différentes (fig.II-3.2), ou bien encore d'un cône d'axe  $z$ .



(a) Disque vue de dessus (b) Disque vue de dessous

FIG. II-3.2 – Figure  $O(2)$ -invariante

Considérons à présent les groupes diédraux.

## Groupes diédraux

Le groupe diédral  $D_m$  est engendré par une rotation d'axe  $z$  et d'angle  $\theta = \frac{2\pi}{m}$  complétée par une rotation<sup>7</sup> d'axe normal à  $z$  et d'angle  $\pi$ . Ce groupe est le groupe de symétrie des polygones

<sup>7</sup>Ou d'un miroir dans le cas d'un espace à deux dimensions.

réguliers et il contient  $2m$  opérations. En deux dimensions, le triangle est un exemple de figure  $D_3$ -invariante. En trois dimensions (II-3.3) la  $D_m$ -invariance peut être vue comme une  $Z_m$ -invariance complétée d'une  $Z_2$ -invariance selon un axe perpendiculaire au précédent, opération que nous noterons  $Z_2^p$ .

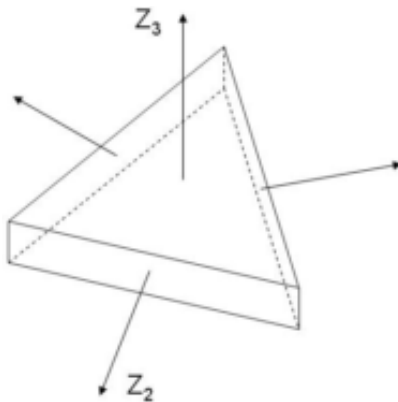


FIG. II-3.3 – Axe de symétrie d'un solide  $D_3$ -invariant

Les représentations matricielles dans  $\mathbb{R}^2$  des générateurs de  $D_m$  sont les suivantes :

$$\text{Gen}(D_m) = \left( \begin{array}{cc} \cos\left(\frac{2\pi}{m}\right) & -\sin\left(\frac{2\pi}{m}\right) \\ \sin\left(\frac{2\pi}{m}\right) & \cos\left(\frac{2\pi}{m}\right) \end{array} \right), \quad \left( \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{array} \right) \quad (\text{II-3.31})$$

et dans  $\mathbb{R}^3$  nous prendrons les suivantes selon la normale  $\underline{z}$  :

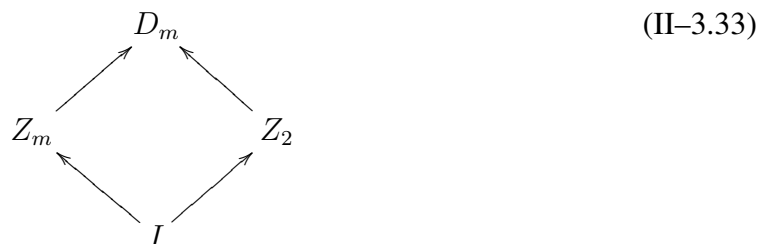
$$\text{Gen}(Z_m) = \left( \begin{array}{ccc} \cos\left(\frac{2\pi}{m}\right) & -\sin\left(\frac{2\pi}{m}\right) & 0 \\ \sin\left(\frac{2\pi}{m}\right) & \cos\left(\frac{2\pi}{m}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right), \quad \left( \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array} \right) \quad (\text{II-3.32})$$

On remarque bien que, selon cette définition,  $D_m$  est un groupe impropre en dimension deux et propre en dimension trois.

Nous considérerons le groupe  $O(2)$  comme étant le groupe continu limite de  $D_m$  quand  $m$  tend vers  $+\infty$ , et donc  $\theta$  vers 0. On peut se représenter  $O(2)$  comme étant le groupe de symétrie d'un disque dont les faces supérieure et inférieure sont, cette fois ci, de même couleur, ou bien encore d'un cylindre d'axe  $\underline{z}$ .

### Relations d'inclusion planaire

On peut résumer les diverses inclusions des groupes planaires de la manière suivante :



Regardons maintenant du côté des groupes spatiaux.

## II-3.3.2 Groupes spatiaux

Tandis que l'on avait une infinité dénombrable de groupes plans, nous n'avons plus que 4 groupes de rotation spatiaux.

$$\Sigma_S := \{\mathcal{T}, \mathcal{O}, \mathcal{I}, \text{SO}(3)\} \quad (\text{II-3.34})$$

Dans cet ensemble nous avons 3 groupes finis  $\mathcal{T}$ ,  $\mathcal{O}$ , et  $\mathcal{I}$  ainsi qu'un groupe continu  $\text{SO}(3)$ . Les groupes finis correspondent aux groupes des rotations qui laissent invariants les 5 solides platoniciens, ou polyèdres réguliers. Ce résultat est remarquable car n'importe quelle système spatial présentant des symétries sera d'un de ces types. La démonstration de ce résultat pourra notamment être trouvée dans « Regular Polytope » de Coxeter [18].

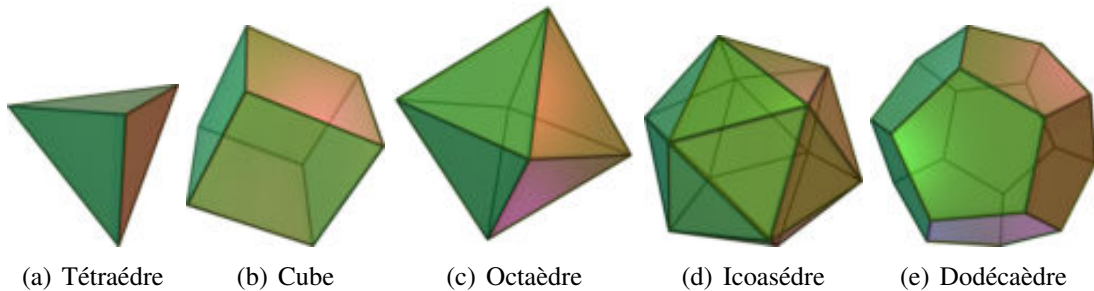


FIG. II-3.4 – Solides platoniciens

La présence de 3 groupes spatiaux finis pour 5 solides est liée fait que le cube et l'octaèdre, d'une part, ainsi que l'icosaèdre et le dodécaèdre, d'autre part, sont liés par dualité et possèdent donc le même groupe de symétrie. Le tétraèdre est, quant à lui, autodual. Le dual d'un polyèdre est le polyèdre dont les sommets sont situés au centre des faces du polyèdre initial. Les figures fig.II-3.5(a) et fig.II-3.5(b) illustrent ce principe dans le cas particulier du cube. On remarque que l'opération de dualité est involutive.

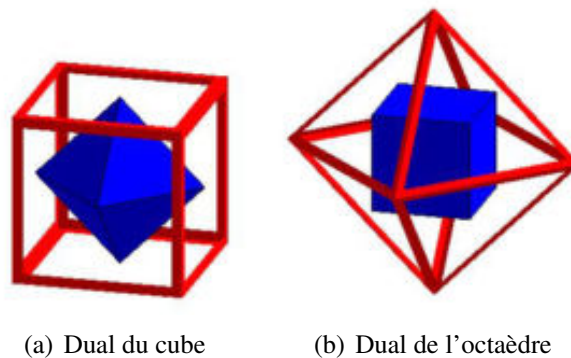


FIG. II-3.5 – Relation de dualité

Ainsi le groupe des rotations qui laissent le tétraèdre invariant est le groupe tétraédrique  $\mathcal{T}$ . Le groupe laissant le cube et l'octaèdre invariant est le groupe octaédrique  $\mathcal{O}$  ; tandis que pour l'icosaèdre et le dodécaèdre nous avons le groupe icosaédrique  $\mathcal{I}$ .

Détaillons la composition de ces groupes.

## Groupe tétraédrique

Le groupe tétraédrique est le plus petit et le plus fondamental des groupes spatiaux. Nous le notons ici en notation mathématique  $\mathcal{T}$ , sa notation cristallographique dans le système d'Hermann est 32.

Comme dit précédemment le groupe tétraédrique est le groupe des rotations qui laissent un tétraèdre invariant. Ce groupe contient 12 éléments, et l'on peut montrer qu'il est engendré par le produit d'une  $Z_3$ -invariance dans un plan ainsi que d'une  $D_2$  dans un autre. Le produit des éléments de ces deux groupes plans est égal à l'ordre de  $\mathcal{T}$ . La figure II-3.6 indique les différents axes d'invariance du polyèdre.

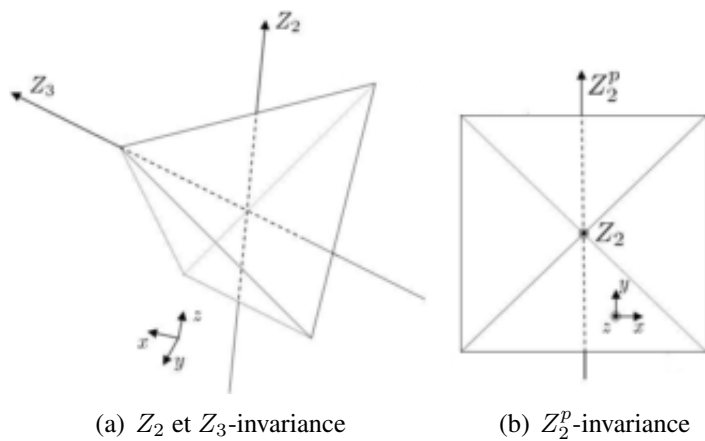


FIG. II-3.6 – Différentes invariances planes dans différents plans

Ce groupe spatial est fondamental dans le sens où il a la propriété de pouvoir engendrer les autres groupes spatiaux : c'est la notion de composés tétraédriques [18]. Cette notion est illustrée par la figure II-3.7. Les polyèdres engendrés par l'union des tétraèdres sur une orbite bien choisie sont l'octaèdre étoilé (fig.II-3.7(b)) et l'icosaèdre étoilé, ou composé 5-tétraédrique (fig.II-3.7(c)). Les groupes de symétrie de ces derniers polyèdres sont respectivement le groupe octaédrique et le groupe icosaédrique.

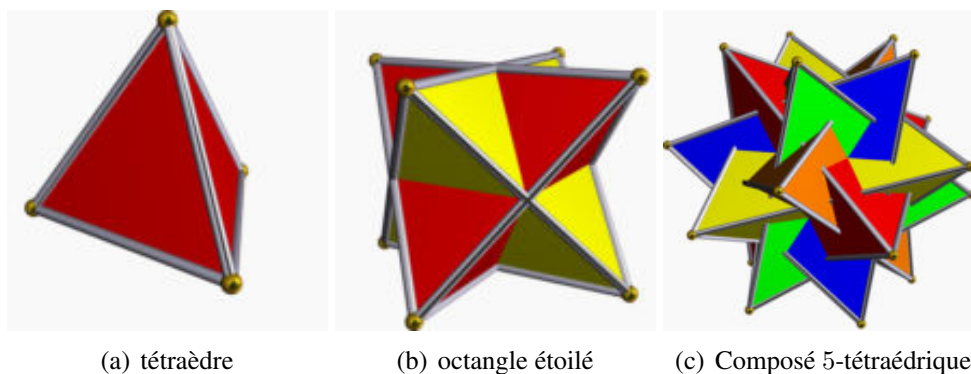


FIG. II-3.7 – Composés tétraédriques

Détaillons plus précisément la structure de ces derniers groupes.

## Groupe octaédrique

Le groupe octaédrique,  $\mathcal{O}$  ou  $432$ , est le groupe des rotations qui laissent le cube et l'octaèdre invariant. Ce groupe contient 24 éléments et il est engendré par le produit d'une  $Z_3$ -invariance dans un plan ainsi que d'une  $D_4$  dans un autre. Si l'on considère le cas du cube, il est facile de voir que la  $D_4$  invariance s'exprime autour d'un axe passant par le centre des faces. Ce sous-groupe contient 8 éléments. La  $Z_3$ -invariance, quant à elle, se trouve le long des grandes diagonales du cube. Ce sous-groupe contient 3 éléments. Le produit des ordres de ces deux groupes est égal à 24, qui est l'ordre de  $\mathcal{O}$ .

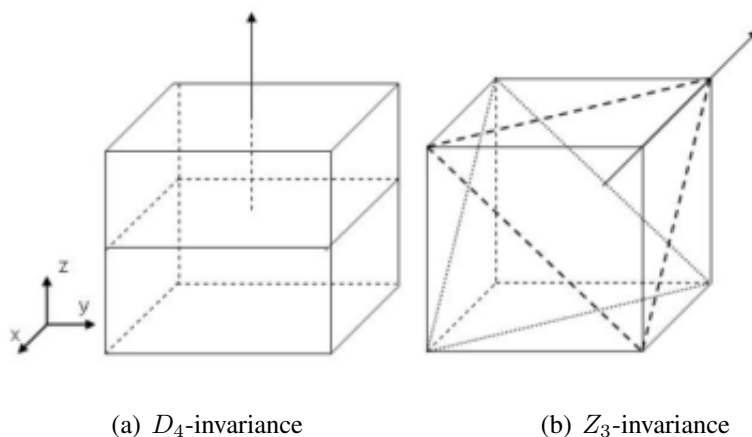


FIG. II-3.8 – Différentes invariances planes dans différents plans

Une autre manière d'engendrer ce groupe est de considérer la  $Z_4$ -orbite d'un tétraèdre le long de son axe de  $D_2$ -invariance. Le polyèdre engendré par cette opération s'appelle l'octaèdre étoilé (fig.II-3.7(b)) et est composé de deux tétraèdres. Le produit de l'ordre du groupe  $\mathcal{T}$  par le nombre des positions inéquivalentes du tétraèdre autour de l'orbite est égal à l'ordre de  $\mathcal{O}$ .

Passons à présent au groupe de symétrie de l'icosaèdre.

## Groupe icosaédrique

Le groupe icosaédrique  $\mathcal{I}$ , ou  $532$ , est le groupe des rotations qui laissent l'icosaèdre et le dodécaèdre invariant. Ce groupe contient 60 éléments et il est engendré par le produit d'une  $D_3$ -invariance dans un plan ainsi que d'une  $D_5$  dans un autre. Si l'on considère le cas de l'icosaèdre, il est facile de voir que la  $D_5$  invariance s'exprime autour d'un axe passant par deux sommets opposés. Il s'agit du groupe de symétrie de l'antiprisme pentagonal (fig.II-3.9(b)) extrait de l'icosaèdre. On a 6 axes de ce type (fig.II-3.9(a)) dans l'icosaèdre et l'on passe d'un de ses axes à un autre par le groupe  $D_3$  dont l'axe passe par le milieu des faces<sup>8</sup>. L'ordre du groupe  $D_5$  multiplié par celui de  $D_3$  est égal à 60, l'ordre de  $\mathcal{I}$ .

<sup>8</sup>La symétrie s'exprime dans l'antiprisme triangulaire formé par deux faces opposées.

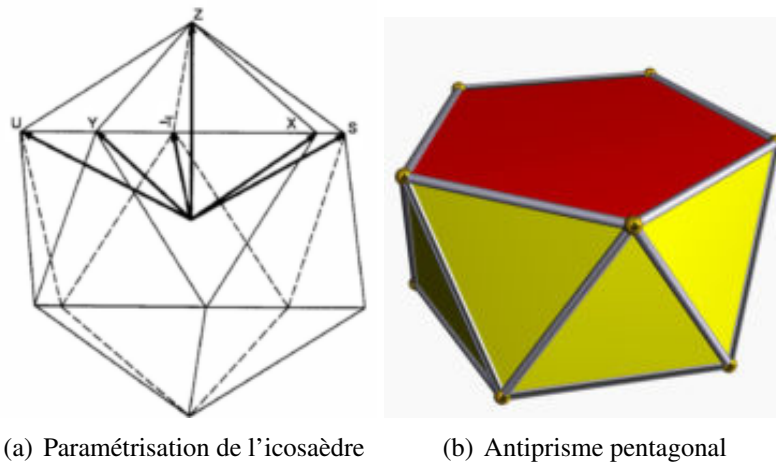


FIG. II-3.9 – Icosaèdre et antiprisme pentagonal

Une autre manière d'engendrer ce groupe est de considérer la  $Z_5$ -orbite d'un tétraèdre autour d'un axe bien choisi. Le polyèdre engendré par cette opération s'appelle le composé 5-tétraédrique (fig.II-3.7(c)). Le produit de l'ordre du groupe  $\mathcal{T}$  par la dimension de l'orbite est égal à l'ordre de  $\mathcal{I}$ .

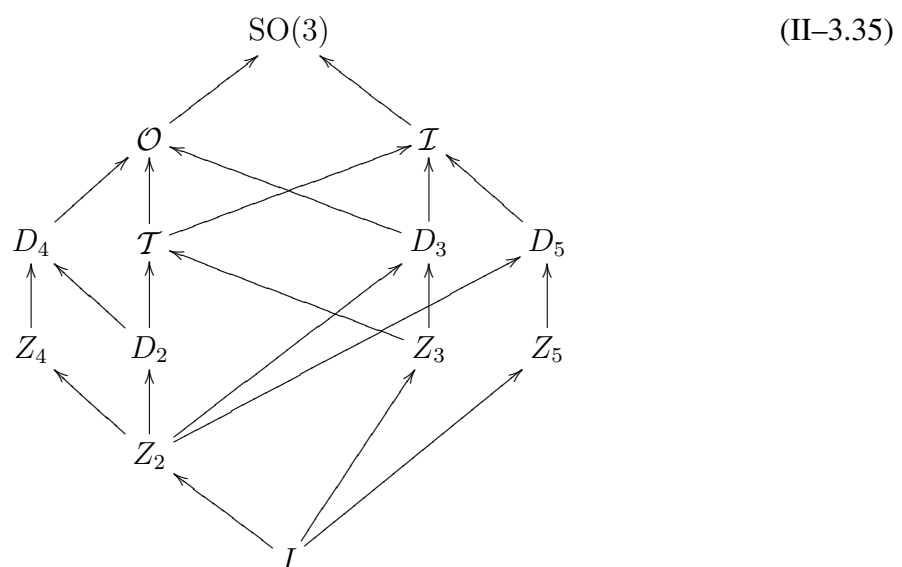
### Groupe sphérique

Le dernier des groupes de symétrie spatial est le groupe continu des rotations de la sphère :  $SO(3)$ .

L'ensemble des informations précédentes peut être résumé de manière graphique.

### Synthèse : Relations d'inclusion spatiales

De la même manière que dans l'étude des groupes plans nous pouvons tracer le graphe des inclusions successives des groupes spatiaux. Les flèches indiquent donc le passages d'un groupe à un sur-groupe le contenant.



Tout cela nous permet de formuler la remarque suivante qui, en pratique, nous sera d'un grand intérêt. Du fait de la finitude des groupes spatiaux on sait qu'un objet physique spatial



dont le groupe de symétrie n'est le conjugué d'aucun des groupes des solides platoniciens est nécessairement  $SO(3)$ -invariant.

Illustrons cela. On considère un tenseur d'ordre quelconque, on suppose que celui-ci est invariant par une rotation d'ordre 6 dans un plan et d'ordre 4 dans un autre. Comme il n'existe aucun solide platonicien possédant simultanément ces symétries, le groupe de symétrie de notre tenseur est nécessairement le conjugué de celui de la sphère. En d'autre terme notre tenseur est  $SO(3)$ -invariant, donc isotrope<sup>9</sup>.

## II-3.4 Synthèse

Au cours de ce chapitre nous avons introduit un certain nombre de notions et de notations qui reviendront par la suite de manière constante au cours de notre travail. Le point essentiel de ce chapitre a été introduit II-3.1 et concerne le fait que les notions de symétrie d'un milieu matériel et de symétrie d'une propriété physique sont distinctes. Le principe de Neumann précise en seconde instance le lien entre ces deux notions.

Dans le cas qui nous intéresse, la nature tensorielle de l'élasticité du second gradient nous a ensuite permis, au II-3.2, de donner une définition plus précise des éléments de son groupe de symétrie. De cette définition deux manières d'identifier les différentes formes d'opérateurs invariants pour un groupe donné ont été proposés. Ces deux formulations définissent respectivement une approche théorique ainsi qu'une approche pratique.

Au cours de II-3.2, nous avons montré que dans le cas des tenseurs d'ordre pair l'étude de l'action des éléments de  $O(3)$  pouvait se réduire à celle de  $SO(3)$ . De fait la dernière partie de ce chapitre (II-3.3) a été consacrée à l'étude des sous-groupes de  $SO(3)$ . Nous ferons par la suite systématiquement référence à ces sous-groupes.

Nous commencerons dès le chapitre suivant le cœur de notre étude en nous intéressant au versant théorique de notre problème. Notre objectif sera d'obtenir toutes les informations qui nous permettront de valider les formes d'opérateurs que nous dériverons par la suite. Ces informations sont :

- le nombre de classes de symétrie distinctes ;
- le nombre de coefficients dans chacune de ces classes.

---

<sup>9</sup>En toute rigueur il faudrait dire hémitrope pour la  $SO(3)$ -invariance car l'isotropie est formellement la  $O(3)$ -invariance. Toutefois dans le cas de tenseur d'ordre pair les deux notions coïncident, or nous restreindrons notre propos à ce cas précis.

Nous venons de définir le groupe de symétrie de l'élasticité du second-gradient. Déterminer l'implication d'une invariance matérielle sur les coefficients de cette loi de comportement n'est pas, au regard des expressions formelles des groupes de symétrie, quelque chose d'immédiat. L'analyse de la littérature [61, 64] nous apprend que sous l'action d'une transformation orthogonale, un tenseur se transforme comme une somme de tenseurs totalement symétriques et de traces nulles. Cette décomposition classique est appelée *décomposition harmonique*. Pour étudier les classes de symétrie de notre loi de comportement il nous importe donc de réaliser cette décomposition. Ceci constituera l'objectif de la section II-4.1. Nous y introduirons une technique de décomposition adaptée à nos problèmes, technique qui diffère de celle employée habituellement dans les publications traitant du sujet. Pour travailler facilement sur cette décomposition nous définirons ensuite, au cours de la section II-4.2, une représentation de nos opérateurs sous forme de tableau, que nous nommerons « tableau de décomposition ». Ces tableaux que nous pourrions analyser par analogie avec les tableaux couches/sous-couches utilisés en atomistique constitueront l'outil d'étude et de représentation des différents systèmes de symétrie d'un opérateur linéaire.

Commençons par introduire la décomposition harmonique de nos espaces de tenseur.

### II-4.1 Décomposition harmonique des tenseurs

La détermination de la décomposition harmonique présuppose la connaissance de l'ensemble des symétries indicielles de nos tenseurs. Celles-ci ayant été établies au chapitre II-2 regardons, à présent, comment ces dernières structurent nos opérateurs de comportement.

Pour aboutir à cela, nous procéderons, au cours de cette section, en trois étapes. Nous exposerons, II-4.1.1, le principe de la décomposition harmonique. Au cours de II-4.1.2, nous introduirons la technique classique de calcul de cette décomposition et nous montrerons en quoi cette approche convient mal au problème qui nous intéresse. Les limitations de la technique classique mises en avant, nous présenterons, II-4.1.3, une technique de décomposition permettant de contourner ces problèmes. Ceci nous permettra, en suite, de conclure cette section en présentant le « squelette » de notre loi de comportement, aussi bien dans un espace à trois dimensions, que dans un espace à deux dimensions.

## II-4.1.1 Principe de la décomposition harmonique

Au cours de cette section notre approche de la décomposition harmonique sera très pragmatique. Nous nous concentrerons sur la définition de ses propriétés générales ainsi que sur les moyens de la réaliser. Notons toutefois ici que cette décomposition correspond aux sous-espaces invariants de la représentation du groupe  $O(3)$  sur l'espace vectoriel des tenseurs considéré. Il s'agit ainsi d'une application particulière de la théorie de représentation des groupes. Revenons au problème qui nous intéresse par un exemple classique cette décomposition.

La décomposition harmonique est bien connue dans le cas d'un tenseur d'ordre 2. Celle-ci correspond à la décomposition classique d'une matrice en trois parties : une antisymétrique, une sphérique et une déviatorique. Cette décomposition s'écrit de la manière suivante :

$$T_{ij} = \left\{ \left( \frac{1}{3} T_{kk} \right) \delta_{ij} \right\} + \left\{ \frac{1}{2} (T_{ij} - T_{ji}) \right\} + \left\{ \frac{1}{2} (T_{ij} + T_{ji}) - \left( \frac{1}{3} T_{kk} \right) \delta_{ij} \right\} \quad (\text{II-4.1})$$

c'est-à-dire :

$$T_{ij} = T_{ij}^{(0)} + T_{ij}^{(1)} + T_{ij}^{(2)} \quad (\text{II-4.2})$$

avec :

$$T_{ij}^{(0)} = \left( \frac{1}{3} T_{kk} \right) \delta_{ij}; \quad T_{ij}^{(1)} = \frac{1}{2} (T_{ij} - T_{ji}); \quad T_{ij}^{(2)} = \frac{1}{2} (T_{ij} + T_{ji}) - \left( \frac{1}{3} T_{kk} \right) \delta_{ij} \quad (\text{II-4.3})$$

La composante  $T_{ij}^{(0)}$  est un scalaire,  $\alpha$  (c'est-à-dire un tenseur d'ordre 0), assemblé dans un tenseur d'ordre 2, de même que  $T_{ij}^{(1)}$  est semblable, modulo sa contraction par le symbole de Levi-Civita<sup>1</sup>, à un vecteur axial  $\mathbf{a}$  et  $T_{ij}^{(2)}$  est un déviateur,  $A$ .

Comme introduit dans [59] la relation (II-4.1) établit un isomorphisme noté  $\psi$  entre  $\mathbb{T}_{ij}$  et  $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^3 \oplus \text{Dev}$ . Pour notre part nous préférons écrire<sup>2</sup> :

$$\mathbb{T}_{ij} \underset{\psi}{\cong} \mathbb{H}^0 \oplus \mathbb{H}^1 \oplus \mathbb{H}^2 \quad (\text{II-4.4})$$

où  $\mathbb{H}^i$  est l'espace vectoriel des tenseurs harmoniques d'ordre  $i$ . Les écritures  $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^3 \oplus \text{Dev}$  ainsi que  $\mathbb{H}^0 \oplus \mathbb{H}^1 \oplus \mathbb{H}^2$  sont rigoureusement identiques. Nous préférons cependant la seconde car elle est plus aisée à manipuler à l'ordre  $i$ . De fait l'espace vectoriel des tenseurs d'ordre 2 se décompose comme la somme directe des espaces vectoriels des tenseurs harmoniques d'ordre 0, d'ordre 1, et d'ordre 2. Nous raisonnerons ici, et par la suite, uniquement dans l'ensemble d'arrivée de  $\psi$ . Nous adopterons, dans le cas général, l'écriture suivante plus compacte que celles utilisées usuellement :

$$\text{Sp}(\mathbb{T}_{ij}) = \psi(\mathbb{T}_{ij}) = 0^{(1)} \oplus 1^{\#(1)} \oplus 2^{(1)} \quad (\text{II-4.5})$$

où l'application  $\text{Sp}$  associe à un espace vectoriel de tenseur donné sa décomposition en somme directe d'espaces vectoriels de tenseurs harmoniques. La notation choisie représente l'ordre de l'espace harmonique avec sa multiplicité en exposant. L'exposant  $\#$  sert à distinguer, dans cette notation, un tenseur axial. De même si l'on considère  $\mathbb{T}_{(ij)}$ , l'espace des tenseurs symétriques d'ordre 2, on aura :

$$\text{Sp}(\mathbb{T}_{(ij)}) = 0^{(1)} \oplus 1^{\#(0)} \oplus 2^{(1)} \quad (\text{II-4.6})$$

<sup>1</sup>Le symbole de Levi-Civita, noté  $\epsilon_{ijk}$ , est également appelé tenseur alterné ou bien tenseur antisymétrique. Il a pour valeur +1 si la permutation de ses indices est paire, -1 si elle est impaire, et 0 si elle présente une répétition.

<sup>2</sup>La notation  $\cong$  signifie « est isomorphe à ».

que nous noterons plus simplement

$$\text{Sp}(\mathbb{T}_{(ij)}) = 0 \oplus 2 \quad (\text{II-4.7})$$

Notons ici que dans certain cas, notamment pour des questions de démonstration, nous pourrions noter également le spectre d'un tenseur quelconque de la manière suivante :

$$\text{Sp}(\mathbb{T}) = \bigoplus_i \alpha_i \mathbb{H}^i \quad (\text{II-4.8})$$

où  $\{\alpha_i\}$  est la famille des multiplicités des espaces harmoniques de la décomposition.

Un tenseur harmonique est un tenseur qui est totalement symétrique par rapport à la permutation de ses indices et dont la trace est nulle<sup>3</sup>. La notion d'harmonicité est liée au fait que le polynôme dual associé au tenseur a un laplacien nul. La dimension de  $\mathbb{H}^i$  dépend de la dimension de l'espace physique, dans un espace à trois dimensions on a  $\dim \mathbb{H}^i = 2i + 1$ , tandis que dans un espace à deux dimensions on a  $\dim \mathbb{H}^i = 2$  si  $i > 0$  et  $\dim \mathbb{H}^i = 1$  si  $i = 0$  [72].

La principale propriété de cette décomposition est d'être  $O(3)$ -invariante, c'est-à-dire qu'elle est vraie dans toutes bases de  $\mathbb{R}^3$ . Cette propriété a la conséquence suivante. On considère un tenseur  $M$  d'ordre 2, par propriété de la décomposition harmonique ce tenseur est défini par le triplet  $(\alpha, a, A)$ . Soit  $Q \in O(3)$ , on considère le tenseur  $M' = QMQ^{-1}$ . La décomposition harmonique étant  $O(3)$ -invariante, l'action de  $Q$  sur  $M$  agit de manière indépendante sur chacun des éléments de sa décomposition. De fait le tenseur  $M'$  est défini par le triplet<sup>4</sup>  $(\alpha, Qa, QAQ^{-1})$ .

Cette décomposition, que nous avons illustrée dans le cas des tenseurs d'ordre 2, est valable à tout ordre. Toutefois tandis qu'il est direct de passer d'un tenseur d'ordre 2 à sa décomposition harmonique les choses vont en se compliquant quand l'ordre du tenseur de comportement croît. De fait notre objectif sera d'établir une méthode simple pour réaliser cette décomposition. Commençons par présenter la méthode classiquement utilisée par les auteurs dans la littérature [26, 59, 61, 63, 73]. Nous montrerons ensuite en quoi cette approche « classique » est mal adaptée à nos problèmes. Nous proposerons, pour conclure, une technique efficace pour réaliser cette décomposition.

### II-4.1.2 Insuffisance de l'approche classique

Nous appellerons approche classique l'approche de la décomposition harmonique telle qu'elle a été présentée par Spencer dans [62] et complétée entre autre, par Jaric [73] et Zhou *et al.* [72]. Cette approche établit pour un tenseur donné sa décomposition harmonique explicite. Cette technique de décomposition a été utilisée dans de nombreux travaux comme ceux de Bäckus [61], Boehler *et al.* [74], Forte et Vianello [26, 60, 75] et Weller [59].

---

<sup>3</sup>Une trace d'un tenseur d'ordre  $n$  est un tenseur d'ordre  $n-2$  obtenu par contraction sur deux indices du tenseur initial par un tenseur de Kronecker  $\delta_{ij}$ . Il existe autant de trace pour un tenseur que de manière inéquivalente de le contracter sur 2 indices. De fait, si l'on considère un tenseur totalement symétrique d'ordre  $n$ , celui-ci ne possède qu'une trace car toutes les contractions d'indices possibles sont identiques.

<sup>4</sup>Dans ce chapitre les scalaires seront notés par des lettres grecs, les vecteurs en minuscules, les déviateurs d'ordre 2 en majuscules, les déviateurs d'ordre 4 en majuscules grasses.

## Approche classique

Dans le cas d'un tenseur d'ordre 2 la décomposition harmonique explicite est donnée par l'expression (II-4.1). Nous la récrivons pour mémoire :

$$T_{ij} = \left\{ \left( \frac{1}{3} T_{kk} \right) \delta_{ij} \right\} + \left\{ \frac{1}{2} (T_{ij} - T_{ji}) \right\} + \left\{ \frac{1}{2} (T_{ij} + T_{ji}) - \left( \frac{1}{3} T_{kk} \right) \delta_{ij} \right\}$$

Nous opposerons à cette décomposition explicite, une autre forme de décomposition que nous nommerons spectrale. Dans la décomposition spectrale nous ne nous intéresserons qu'à la nature des sous-espaces de la décomposition, la manière dont les éléments de celle-ci sont assemblés dans notre tenseur n'a pas d'importance<sup>5</sup>. Dans ce cas la décomposition spectrale de l'e.-v. des tenseur d'ordre 2 s'écrit simplement :

$$\text{Sp}(\mathbb{T}_{ij}) = 0 \oplus 1^{\#} \oplus 2 \quad (\text{II-4.9})$$

La connaissance de la décomposition explicite permet d'établir la décomposition spectrale, c'est d'ailleurs ce que font classiquement les auteurs dans la littérature mécanicienne consacrée aux classes de symétrie [26, 59, 75]. L'opération inverse n'est pas directe, car en plus de la complexité de l'opération on a, dans la plupart des cas non-unicité, de la décomposition explicite. La décomposition spectrale, qui s'apparente à une décomposition O(3)-isotypique [64], est, quant à elle, unique. Regardons, dans le cas de l'élasticité classique, les résultats que donnent la décomposition explicite.

Dans le cas du tenseur d'élasticité la décomposition harmonique explicite permet d'obtenir le résultat suivant [26] :

$$\begin{aligned} C_{(ij) (kl)} = & \mathbf{D}_{(ijkl)} + \delta_{ij} A_{(kl)} + \delta_{ik} A_{(jl)} + \delta_{ik} B_{(jl)} + \delta_{jl} B_{(ik)} + \delta_{il} B_{(jk)} \\ & + \delta_{jk} B_{(il)} + \alpha \delta_{ij} \delta_{kl} + \beta (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \end{aligned} \quad (\text{II-4.10})$$

et les composantes des tenseurs harmoniques constitutifs de cette décomposition se déduisent de ceux de  $C_{(ij) (kl)}$ . Pour plus de lisibilité nous avons écrit en majuscule, dans ce qui suit, les indices sur lesquelles sont obtenues les différentes traces.

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{(ijkl)} = & (C_{(ij) (kl)} + C_{(ik) (lj)} + C_{(il) (jk)}) / 3 \\ & - \left[ \left( C_{(ij) (PP)} + 2C_{(iP) (jP)} \right) \delta_{kl} + \left( C_{(kl) (PP)} + 2C_{(kP) (lP)} \right) \delta_{ij} \right. \\ & + \left( C_{(ik) (PP)} + 2C_{(iP) (kP)} \right) \delta_{jl} + \left( C_{(jl) (PP)} + 2C_{(jP) (lP)} \right) \delta_{ik} \\ & + \left( C_{(il) (PP)} + 2C_{(iP) (lP)} \right) \delta_{jk} + \left. \left( C_{(jk) (PP)} + 2C_{(jP) (kP)} \right) \delta_{il} \right] / 21 \\ & + \left( C_{(QQ) (PP)} + 2C_{(QP) (QP)} \right) (\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) / 105 \end{aligned} \quad (\text{II-4.11})$$

$$A_{(ij)} = \left( 15C_{(ij) (PP)} - 12C_{(iP) (jP)} - 5\delta_{ij} C_{(QQ) (PP)} + 4\delta_{ij} C_{(QP) (QP)} \right) / 21 \quad (\text{II-4.12})$$

$$B_{(ij)} = \left( -6C_{(ij) (PP)} + 9C_{(iP) (jP)} + 2\delta_{ij} C_{(QQ) (PP)} - 3\delta_{ij} C_{(QP) (QP)} \right) / 21 \quad (\text{II-4.13})$$

<sup>5</sup>De plus du fait de la non unicité de la décomposition explicite cela n'aurait pas vraiment de sens. On constate à ce sujet que pour le tenseur d'élasticité classique il n'y a pas de consensus entre les différents auteurs [26, 61, 63], ni même entre les différentes publications des même auteurs [26, 60].

$$\alpha = \left( 2C_{\underline{(QQ)} \underline{(PP)}} - C_{\underline{(QP)} \underline{(QP)}} \right) / 15 \quad (\text{II-4.14})$$

$$\beta = \left( -3C_{\underline{(QQ)} \underline{(PP)}} - C_{\underline{(QP)} \underline{(QP)}} \right) / 90 \quad (\text{II-4.15})$$

Toutefois, comme il n'y a pas unicité de la décomposition, les expressions obtenues varient selon les auteurs.

L'algorithme de Spencer [62] qui repose sur la symétrisation du tenseur de comportement étudié établit l'expression (II-4.10) à partir des expressions des tenseurs constitutifs. De fait la décomposition est très calculatoire et peut être la source de nombreuses erreurs. De plus l'information contenue dans l'expression explicite la décomposition est relativement complexe et non synthétique. La question est de savoir si l'ensemble des informations obtenues nous est nécessaire.

Si l'on a besoin de l'expression explicite des composantes de la décomposition alors ce travail est obligatoire. Toutefois si ce qui nous intéresse est l'obtention de la décomposition isotypique, alors l'expression des différents tenseurs impliqués dans la décomposition nous est indifférent. Or lorsque l'on discute des classes de symétrie ce qui intéresse les auteurs est, au final, de connaître les types de tenseurs présents dans la décomposition ainsi que leur multiplicité. Dans [26] les auteurs s'intéressent au fait que le tenseur d'élasticité se décompose comme 1 déviateur d'ordre 4, 2 déviateurs, et 2 scalaires. Vis-à-vis des symétries ce qui importe n'est pas la forme du tenseur mais son type. De fait l'établissement explicite de la décomposition a une complexité qui est supérieur aux résultats dont nous avons besoin. Regardons ce qu'il en est dans le cas de l'élasticité du second ordre.

### Application à l'élasticité du second ordre

En ce qui concerne le tenseur  $A_{(ij)k(lm)n}$  l'approche classique est-elle envisageable ? Nous pouvons évaluer la complexité de la décomposition explicite de la manière suivante. Dans la décomposition harmonique d'un tenseur d'ordre  $n$ , le terme de plus haut ordre est un tenseur d'ordre  $n$  totalement symétrique et de trace nulle. C'est le tenseur  $\mathbf{D}_{(ijkl)}$  (II-4.10) dans le cas de l'élasticité classique. L'obtention de ce terme se fait en deux étapes :

1. extraction de la partie totalement symétrique du tenseur complet ;
2. extraction de la partie déviatorique du tenseur symétrisé.

Le tenseur totalement symétrique est obtenu comme une « moyenne » du tenseur sur l'ensemble de ses permutations inéquivalentes. A l'ordre 2 cela correspond au résultat classique suivant

$$T_{(ij)} = \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji}) \quad (\text{II-4.16})$$

Dans le cas du tenseur d'élasticité on a, d'après (II-4.11), l'expression :

$$S_{(ijkl)} = \left( C_{\underline{(ij)} \underline{(kl)}} + C_{\underline{(ik)} \underline{(lj)}} + C_{\underline{(il)} \underline{(jk)}} \right) / 3 \quad (\text{II-4.17})$$

Le processus de symétrisation devient de plus en plus complexe quand l'ordre  $n$  du tenseur s'accroît.

Sans symétrie indicielle la symétrisation se fait sur les  $n!$  permutations inéquivalentes des indices du tenseur. Dans le cas d'un tenseur d'ordre 6 cela représente 720 termes différents. La présence de symétries indicielles réduit de manière importante le nombre de permutations à considérer. Si l'on tient compte des symétries indicielles de  $A_{(ij)k \underline{(lm)n}}$  sur combien de permutations doit on effectuer la symétrisation ?

Établissons le groupe de symétrie indicielle de notre tenseur. Sa symétrie est du type  $(ab)c \underline{(de)f}$ . Si l'on note  $G_{S_6}(A_{(ij)k \underline{(lm)n}})$  le groupe de symétrie indicielle de  $A_{(ij)k \underline{(lm)n}}$  on obtient l'expression formelle suivante :

$$G_{S_6}(A_{(ij)k \underline{(lm)n}}) = \{\tau \in S_6 | \tau \star A_{(ij)k \underline{(lm)n}} = A_{(ij)k \underline{(lm)n}}\} \quad (\text{II-4.18})$$

où  $S_6$  correspond au groupe symétrique à 6 éléments et  $\star$  à l'action d'un élément de  $S_6$  sur  $A_{(ij)k \underline{(lm)n}}$ . Essayons à présent d'exprimer l'ensemble des éléments de ce groupe. Si l'on considère la petite et la grande symétrie on obtient les générateurs<sup>6</sup>

$$\text{Gen}_{S_6}(A_{(ij)k \underline{(lm)n}}) = \{e, [12], [45], [14][25][36]\} \quad (\text{II-4.19})$$

A partir de ces générateurs on obtient l'expression explicite de  $G_{S_6}(A_{(ij)k \underline{(lm)n}})$ . Il s'agit du groupe formé par les huit éléments suivants<sup>7</sup> :

$$G_{S_6}(A_{(ij)k \underline{(lm)n}}) = \{e, [12], [45], [12][45], [14][25][36], \dots \\ [1425][36], [1524][36], [15][24][36]\} \quad (\text{II-4.20})$$

Ce groupe est bien évidemment un sous-groupe de  $S_6$ , et, de fait, d'après le théorème de Lagrange, son ordre divise celui de  $S_6$ . Le résultat de cette division représente le nombre de permutations inéquivalentes en prendre en compte pour symétriser notre tenseur. Ceci implique que lors de la décomposition harmonique, l'obtention du tenseur totalement symétrique se fera par symétrisation sur  $\frac{6!}{|G_{S_6}|} = 80$  permutations<sup>8</sup> au lieu de 720.

De cela on en conclut que la décomposition harmonique explicite de  $A_{(ij)k \underline{(lm)n}}$  implique, pour l'obtention du tenseur totalement symétrique, une symétrisation sur 80 permutations. De plus ce terme n'étant pas de trace nulle d'autres opérations seront nécessaire pour obtenir le terme de degré  $n$  de notre décomposition. Ce calcul rapide nous permet de penser que la décomposition explicite de notre tenseur ne tiendrait pas sur une seule page. C'est ce pourquoi il nous faut, pour traiter de nos problèmes, introduire une technique nous permettant d'obtenir directement le spectre harmonique de nos tenseurs<sup>9</sup>.

C'est dans cette optique que nous introduirons dans la suite de ce travail une méthode se basant sur le produit tensoriel des représentations irréductible. Cette méthode a été notamment introduite dans dans l'article de Jerphagnon, Chemla, et Bonneville de 1978 « The description of the physical properties of condensed matter using irreducible tensors » [53]. Cette méthode, classique en physique, semble être quasiment inconnue des mécaniciens. Elle nous permet d'obtenir extrêmement rapidement le spectre harmonique d'un tenseur quelconque<sup>10</sup>. Comme nous

<sup>6</sup>La notation  $[adf]$  signifie l'opération de permutation tel que  $a \rightarrow d \rightarrow f \rightarrow a$ . L'élément neutre sera, de plus, classiquement noté  $e$ .

<sup>7</sup>Ce groupe est isomorphe à celui de l'élasticité classique.

<sup>8</sup>Et on retrouve bien la symétrisation sur  $\left(\frac{4!}{|G_{S_6}|}\right) = 3$  permutations de l'élasticité classique [26, 61, 63] telle qu'on l'observe dans l'expression de  $\mathbb{S}$  donnée (II-4.17).

<sup>9</sup>De plus si l'on est obligé de réaliser cette décomposition, par nature très calculatoire, le fait de posséder une information qualitative sur le résultat que l'on doit obtenir est une aide précieuse.

<sup>10</sup>Que nous confondrons dans ce qui suit avec la décomposition  $O(3)$ -isotypique.

le montrerons dans ce qui suit dans le cas de l'élasticité classique cette méthode nous permet d'aboutir quasi-immédiatement au spectre de la décomposition harmonique précédente (II-4.10), c'est-à-dire

$$\text{Sp}(\mathbb{T}_{(ij)(kl)}) = 0^{(2)} \oplus 2^{(2)} \oplus 4 \quad (\text{II-4.21})$$

Toutefois dans l'article de Jerphagnon la méthodologie pour prendre en compte la grande symétrie n'est pas clairement indiquée. L'objet de la section suivante est donc d'introduire et de compléter cette méthode.

### II-4.1.3 Approche spectrale

Cette section a fait l'objet d'un compte rendu à l'académie des sciences [71]. Nous en présenterons ici une version enrichie. Nous introduirons tout d'abord la structure formelle sur laquelle nous travaillerons, cela nous permettra de définir une arithmétique de travail. Nous appliquerons ensuite cette méthode à l'ensemble des tenseurs utilisés au cours de cette thèse. Ceci nous permettra d'obtenir les différents squelettes de nos opérateurs. Et nous conclurons cette sous-section en évoquant le cas des espaces à deux dimensions.

#### Arithmétique des e.v. de tenseurs irréductibles

On peut bâtir une arithmétique permettant, à partir de la connaissance des symétries indicelles d'un tenseur d'ordre  $n$  quelconque, de déterminer la dimension et la structure harmonique de cet espace.

Le principe de cette arithmétique repose sur le produit tensoriel des représentations irréductibles [52, 54]. On considère  $\mathbb{E}_1$  et  $\mathbb{E}_2$  deux e.v. portant des représentations irréductibles  $D_1$  et  $D_2$  d'un groupe  $G$ . L'espace produit  $\mathbb{E} = \mathbb{E}_1 \otimes \mathbb{E}_2$  porte une représentation  $D = D_1 \otimes D_2$  qui n'est pas irréductible et se réduit selon la *décomposition de Clebsch-Gordan* :

$$D_1 \otimes D_2 = \bigoplus_{\rho} m_{\rho} D_{\rho} \quad (\text{II-4.22})$$

où  $m_{\rho}$  indique la multiplicité de la représentation  $D_{\rho}$ . Dans le cas de  $O(3)$  les espaces irréductibles sont les espaces des tenseurs harmoniques  $\mathbb{H}^k$  évoqué précédemment. Dans ce cas là l'espace produit se décompose alors suivant la règle dite « d'addition du moment angulaire » [54] suivante, soit  $\mathbb{H}^i$  et  $\mathbb{H}^j$  d'ordre respectifs  $i$  et  $j$  alors :

$$\mathbb{E} = \mathbb{H}^i \otimes \mathbb{H}^j = \bigoplus_{k=|i-j|}^{i+j} \mathbb{H}^k \quad (\text{II-4.23})$$

Ainsi le produit tensoriel de deux tenseurs irréductibles d'ordre 1 donne le spectre d'un tenseur d'ordre 2. On a alors

$$\text{Sp}(\mathbb{T}_{ij}) = 1_a^{\#} \otimes 1_b^{\#} = 0_a \oplus 1_a^{\#} \oplus 2_a \quad (\text{II-4.24})$$

où la notation  $\#$  indique un tenseur axial, ou pseudo tenseur. De plus il est à noter que les indices  $a, b, \dots$  que nous utilisons n'ont pour but que de distinguer les différentes composantes de même ordre. Ainsi comme le produit tensoriel est non-commutatif, l'espace vectoriel  $1_a \otimes 1_b$  diffère de  $1_b \otimes 1_a$  et le tenseur résultant est non-symétrique. Au contraire l'espace engendré par  $1_a \otimes 1_a$  sera un espace sur lequel notre tenseur sera symétrique<sup>11</sup>. Ceci peut être facilement

<sup>11</sup>Car celui-ci est à coefficients dans  $\mathbb{R}$  qui est un corps commutatif. Il faudrait travailler dans un corps non-commutatif comme celui des quaternions pour que cela ne soit plus automatiquement vrai.



illustré de la manière suivante. On considère des vecteurs sur  $v_1$  et  $v_2$  :

$$v_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} \quad (\text{II-4.25})$$

et l'on obtient :

$$v_1 \otimes v_2 \begin{pmatrix} aA & aB & aC \\ bA & bB & bC \\ cA & cB & cC \end{pmatrix} \quad v_2 \otimes v_1 = \begin{pmatrix} Aa & Ab & Ac \\ Ba & Bb & Bc \\ Ca & Cb & Cc \end{pmatrix} = (v_1 \otimes v_2)^T \quad (\text{II-4.26})$$

tandis que

$$v_1 \otimes v_1 = \begin{pmatrix} aa & ab & ac \\ ba & bb & bc \\ ca & cb & cc \end{pmatrix} \quad (\text{II-4.27})$$

On rappelle de plus que le produit tensoriel est associatif mais non commutatif, tandis que l'opérateur « somme directe » l'est. De plus, le produit tensoriel est distributif par rapport à la somme directe. On a donc, en résumé, la structure algébrique suivante :

**Propriété 1** Soit  $E$  l'ensemble des décompositions  $O(3)$ -invariante. Cet ensemble muni des lois internes  $\oplus$  et  $\otimes$ , avec  $\otimes$  définie par la décomposition de Clebsch-Gordan est un semi-anneau.

On a de plus, d'après [53], les propriétés suivantes :

**Propriété 2** La décomposition harmonique d'un tenseur totalement symétrique d'ordre pair ne contient que des termes d'ordre pair. Et réciproquement pour un tenseur impair.

**Propriété 3** Dans le cas d'un tenseur polaire d'ordre pair, tous les tenseurs d'ordre pair de cette décomposition sont polaires et tous les tenseurs d'ordre impair sont axiaux (i.e. de type  $\#$ ), et réciproquement dans le cas d'un tenseur impair.

De fait on a :

$$\text{Sp}(\mathbb{T}_{ij}) = 1_a^\# \otimes 1_b^\# = 0_a \oplus 1_a^\# \oplus 2_a \quad (\text{II-4.28})$$

et

$$\text{Sp}(\mathbb{T}_{(ij)}) = 1_a^\# \otimes 1_a^\# = 0_a \oplus 2_a \quad (\text{II-4.29})$$

A partir de ces règles simples nous pouvons bâtir l'ensemble des spectres des tenseurs de comportement. Nous détaillerons de plus le principe pour prendre en compte la grande symétrie, principe qui n'était pas énoncé dans les publications ayant traitées du sujet [53, 76]. Regardons l'application de cette méthode sur quelques tenseurs.

### Détermination des spectres de réduction

**Tenseurs d'ordre 3** On considère le cas général de l'e.v. des tenseurs d'ordre 3. Il peut être engendré à partir de  $1_a^\# \otimes 1_b^\# \otimes 1_c^\#$ . On obtient alors la structure suivante :

$$1_a^\# \otimes 1_b^\# \otimes 1_c^\# = 1_a^\# \otimes (1_b^\# \otimes 1_c^\#) = 1_a^\# \otimes (0_b \oplus 1_b^\# \oplus 2_b) \quad (\text{II-4.30})$$

$$= (1_a^\# \otimes 0_b) \oplus (1_a^\# \otimes 1_b^\#) \oplus (1_a^\# \otimes 2_b) \quad (\text{II-4.31})$$

$$= 0_a^\# \oplus 1_a \oplus 1_b \oplus 1_c \oplus 2_a^\# \oplus 2_b^\# \oplus 3_a \quad (\text{II-4.32})$$

que l'on récriera de manière isotypique

$$\text{Sp}(\mathbb{T}_{ijk}) = 0^\# \oplus 1^{(3)} \oplus 2^{\#(2)} \oplus 3 \quad (\text{II-4.33})$$

ce qui correspond bien à un espace à 27 dimensions.

Si on suppose maintenant une symétrie de type  $(ij)k$ , qui est celle que nous avons retenue pour notre tenseur  $\underline{\underline{K}}$ , on peut considérer un tenseur appartenant à ce e.v comme étant le résultat d'un produit tensoriel d'un vecteur par un tenseur d'ordre 2 symétrique. On a

$$\text{Sp}(\mathbb{T}_{(ij)k}) = 1_a^\# \otimes (0_b \oplus 2_b) = 1^{(2)} \oplus 2^\# \oplus 3 \quad (\text{II-4.34})$$

ce qui correspond bien à un sous-espace de dimension 18 de l'e.v. précédent. La structure identifiée correspond également à celle identifiée dans [59] pour l'e.v. des tenseurs piézoélectriques. Continuons maintenant avec les spectres de tenseurs d'ordre 4.

**Tenseurs d'ordre 4** On considère le tenseur d'élasticité sans la grande symétrie, c'est-à-dire possédant les symétries indicielles :  $(ij)(kl)$ . Ce tenseur correspond physiquement à celui de l'effet Kerr [58]. Le e.-v des tenseurs photoélastiques à la structure suivante :

$$(0_a \oplus 2_a) \otimes (0_b \oplus 2_b) = (0_a \otimes 0_b) \oplus (0_a \otimes 2_b) \oplus (2_a \otimes 0_b) \oplus (2_a \otimes 2_b) \quad (\text{II-4.35})$$

Donc au final on a

$$\text{Sp}(\mathbb{T}_{(ij)(kl)}) = (0_a \oplus 2_a) \otimes (0_b \oplus 2_b) = 0^{(2)} \oplus 1^\# \oplus 2^{(3)} \oplus 3^\# \oplus 4 \quad (\text{II-4.36})$$

ce qui correspond au spectre de la décomposition harmonique effectuée dans [75]. Le même calcul effectué par la méthode de Spencer aurait été beaucoup plus compliqué à mener.

Considérons à présent le cas de l'élasticité, on tient compte à présent de la grande symétrie :  $(ij)(kl)$ . Le problème admet des simplifications. La grande symétrie implique de récrire (II-4.35) de la manière suivante :

$$(0_a \oplus 2_a) \otimes (0_a \oplus 2_a) = (0_a \otimes 0_a) \oplus (0_a \otimes 2_a) \oplus (2_a \otimes 0_a) \oplus (2_a \otimes 2_a) \quad (\text{II-4.37})$$

avec des termes au « carré » et des termes croisés. On a naturellement pour les termes « carrés »

$$0_a \otimes 0_a = 0_a \quad \text{et} \quad 2_a \otimes 2_a = 0_a \oplus 2_a \oplus 4_a \quad (\text{II-4.38})$$

par propriété de la décomposition d'un tenseur totalement symétrique. Tandis que pour les termes croisés  $(0_a \otimes 2_a) \oplus (2_a \otimes 0_a)$  constitue un sous-espace symétrique et non deux sous-espaces indépendants. De fait on a

$$(0_a \otimes 2_a) \oplus (2_a \otimes 0_a) = 2_a \quad (\text{II-4.39})$$

Ce qui nous permet de conclure que

$$\text{Sp}(\mathbb{T}_{(ij)(kl)}) = 0^{(2)} \oplus 2^{(2)} \oplus 4 \quad (\text{II-4.40})$$

Comme<sup>12</sup>  $\mathbb{E}la_{\mathbb{C}} \cong \mathbb{T}_{(ij)(kl)}$  on retrouve bien le spectre de la décomposition harmonique (II-4.10).

Appliquons notre méthodologie à la dérivation des structures des différents e.v. des tenseurs d'ordre 5 et 6.

<sup>12</sup>La notation est un peu abusive car en réalité  $\mathbb{E}la_{\mathbb{C}}$  est définie, en plus de ses symétries, par le fait que ses éléments soient définis positifs. Toutefois ce détail n'a aucune importance dans ce qui nous intéresse et de fait nous nous permettrons cet abus de notation.

**Tenseurs d'ordre 5** On travaille avec deux tenseurs d'ordre 5, celui de la loi de comportement générale ainsi que celui de l'effective.

On considère le tenseur  $M_{(ij)(kl)m}$ . On a alors pour son spectre

$$\text{Sp}(\mathbb{E}la_{\mathbb{M}}) = \text{Sp}(\mathbb{T}_{(ij)(kl)m}) = (0 \oplus 2) \otimes (1^{(2)} \oplus 2 \oplus 3) \quad (\text{II-4.41})$$

$$= 0^{\#} \oplus 1^{(6)} \oplus 2^{\#(5)} \oplus 3^{(5)} \oplus 4^{\#(2)} \oplus 5 \quad (\text{II-4.42})$$

Le nombre de composantes associées est

$$\dim \mathbb{T}_{(ij)(kl)m} = 1 + (6) * 3 + (5) * 5 + (5) * 7 + (2) * 9 + 11 = 108 \quad (\text{II-4.43})$$

ce qui est bien le nombre de composantes que nous attendions.

On considère à présent le tenseur  $M_{\underline{(ij)} \overline{(kl)m}}$ . Son spectre est d'après [76]

$$\text{Sp}(\mathbb{T}_{\underline{(ij)} \overline{(kl)m}}) = 0^{\#} \oplus 1^{(2)} \oplus 2^{\#(3)} \oplus 3^{(2)} \oplus 4^{\#} \quad (\text{II-4.44})$$

On vérifie que le nombre de composantes associées est bien 45 ce qui est bien le résultat que nous attendions.

**Tenseurs d'ordre 6** On a immédiatement

$$\text{Sp}(\mathbb{T}_{ijklmn}) = 0^{(15)} \oplus 1^{\#(36)} \oplus 2^{(40)} \oplus 3^{\#(29)} \oplus 4^{(15)} \oplus 5^{\#(5)} \oplus 6 \quad (\text{II-4.45})$$

On retrouve bien les 729 coefficients d'un tenseur d'ordre 6 et on retrouve bien les 15 composantes isotropes déjà identifiées par Suiker et Chang [77].

Si l'on rajoute à présent la grande symétrie, i.e. si l'on considère la symétrie  $\underline{ijk} \underline{lmn}$  on a le spectre

$$\text{Sp}(\mathbb{T}_{\underline{ijk} \underline{lmn}}) = (0 \oplus 1_a \oplus 1_b \oplus 1_c \oplus 2_a \oplus 2_b \oplus 3) \otimes (0 \oplus 1_a \oplus 1_b \oplus 1_c \oplus 2_a \oplus 2_b \oplus 3) \quad (\text{II-4.46})$$

ce qui, en tenant compte des symétries des différents termes, nous donne au final

$$\text{Sp}(\mathbb{T}_{\underline{ijk} \underline{lmn}}) = 0^{(11)} \oplus 1^{\#(15)} \oplus 2^{(23)} \oplus 3^{\#(13)} \oplus 4^{(9)} \oplus 5^{\#(2)} \oplus 6 \quad (\text{II-4.47})$$

Cet espace vectoriel est de dimension 178. Il correspond physiquement à l'espace vectoriel des tenseurs d'élasticité du second ordre dans la théorie micromorphe [9].

Pour l'e.v. des tenseurs d'élasticité du second ordre dans un milieu à gradient de déformation [10] on obtient :

$$\text{Sp}(\mathbb{E}la_{\mathbb{A}}) = \text{Sp}(\mathbb{T}_{\underline{(ij)k} \underline{(lm)n}}) = 0^{(5)} \oplus 1^{\#(4)} \oplus 2^{(10)} \oplus 3^{\#(5)} \oplus 4^{(5)} \oplus 5^{\#} \oplus 6 \quad (\text{II-4.48})$$

On constate que notre décomposition concorde avec le modèle isotrope de Mindlin car nous retrouvons bien les 5 coefficients du modèle [10].

Au cours du paragraphe II-2.4.3 du chapitre II-2 nous avons évoqué le cas de la symétrie indicelle :  $A_{\underline{(ij)k} \underline{(lm)n}}$  telle quelle est proposée dans la référence [35]. Le spectre de ce tenseur est le suivant :

$$\text{Sp}(\mathbb{T}_{\underline{(ij)k} \underline{(lm)n}}) = 0^{(4)} \oplus 1^{\#(2)} \oplus 2^{(7)} \oplus 3^{\#(3)} \oplus 4^{(4)} \oplus 5^{\#} \oplus 6 \quad (\text{II-4.49})$$

Ce tenseur de comportement est défini par 4 coefficients isotropes, ceci nous permet définitivement de conclure que, du fait de ses symétries indicielles, ce tenseur ne représente pas le tenseur élastique d'ordre 2 de la théorie de Mindlin II [10].

De manière plus générale à présent, regardons comment évoluent les structures d'espaces en fonction des symétries indicielles.

Sym	0	1	2	3	4	5	6	dim
ijklmn	15	36	40	29	15	5	1	729
ijk <u>lmn</u>	11	15	23	13	9	2	1	378
(ij)k(lm)n	6	12	16	12	8	3	1	324
(ij)k <u>(lm)n</u>	5	4	10	5	5	1	1	171
(ij) <u>k</u> <u>(lm)n</u>	4	2	7	3	4	1	1	126
(ijk)(lmn)	2	2	4	3	3	1	1	100
(ijk) <u>(lmn)</u>	2	0	3	1	2	0	1	55
(ijklmn)	1	0	1	0	1	0	1	28

A notre connaissance les résultats obtenus pour les spectres des tenseurs d'ordres 6 sont, en grande partie, nouveaux ; la littérature traitant de ce sujet semblant être assez rare.

Il est important de noter que les résultats présentés ici ne sont valables que dans un espace physique à trois dimensions. Si l'on veut obtenir ces spectres dans un espace à deux dimensions il va nous falloir procéder autrement. La technique utilisée pour établir les spectres en dimension 2 est publiée sur HAL [78], la sous-section suivante en synthétise les principaux résultats.

### Cas d'un espace à deux dimensions

Ce qui vient d'être présenté concerne exclusivement le cas d'un espace euclidien à trois dimensions. Dans le cas d'espace de dimension différente nous avons introduit une autre approche qui se fonde sur l'utilisation de diagrammes pour déterminer la décomposition harmonique de nos tenseurs. L'exposé de cette méthode pourra être trouvé dans notre publication en ligne [78]. Son principe se fonde sur l'analyse des classes de conjugaison du groupe des permutations des indices de nos tenseurs, cette analyse peut se faire de manière graphique via l'utilisation des diagrammes de Young [52]. Un diagramme de Young est un tableau constitué d'un certain nombre de cases et dont l'agencement de ces cases est lié aux propriétés de symétrie du tenseur étudié. Pour un tenseur d'ordre 4, par exemple, les différents tableaux de Young auront les formes suivante :

$$\begin{array}{c} \square \square \square \square \\ \square \square \square \\ \square \square \\ \square \square \\ \square \\ \square \end{array} \quad (II-4.50)$$

Le principal avantage de cette méthode est que, contrairement à l'approche que l'on vient de présenter ci-dessus, cette dernière est totalement générale. En effet l'approche par diagrammes est indépendante de la dimension de l'espace de travail, la prise en compte de symétries indicielles complexes est possible et le spectre peut être obtenu pour l'action de groupes de Lie autre que les groupes orthogonaux. En contrepartie sa mise en oeuvre est plus abstraite et plus complexe.

En deux dimensions les spectres des opérateurs de comportement sont les suivants

$$\text{Sp}(\mathbb{E}la_C) = 0^{(2)} \oplus 2 \oplus 4 \quad (II-4.51)$$

$$\text{Sp}(\mathbb{E}la_{\mathbb{M}}) = 1^{(5)} \oplus 3^{(3)} \oplus 5 \quad (\text{II-4.52})$$

$$\text{Sp}(\mathbb{E}la_{\mathbb{A}}) = 0^{\#} \oplus 0^{(4)} \oplus 2^{(5)} \oplus 4^{(2)} \oplus 6 \quad (\text{II-4.53})$$

Notons également le spectre du tenseur micromorphe suivant :

$$\text{Sp}(\mathbb{T}_{ijk \ lmn}) = 0^{\#(3)} \oplus 0^{(7)} \oplus 2^{(9)} \oplus 4^{(3)} \oplus 6 \quad (\text{II-4.54})$$

On rappelle que la dimension de chaque sous-espace est de 2 sauf pour l'espace 0 qui est de dimension 1. On a de fait,

$$\dim(\mathbb{E}la_{\mathbb{C}}) = 6 \quad \dim(\mathbb{E}la_{\mathbb{M}}) = 18 \quad \dim(\mathbb{E}la_{\mathbb{A}}) = 21 \quad (\text{II-4.55})$$

#### II-4.1.4 Discussion

En résumé voici le spectre de notre loi de comportement  $\mathcal{L}_{3-D}$  pour un espace à trois dimensions

$\mathbb{E}la_{\mathbb{C}}$	$0^{(2)} \oplus 2^{(2)} \oplus 4$	21
$\mathbb{E}la_{\mathbb{M}}$	$0^{\#} \oplus 1^{(6)} \oplus 2^{\#(5)} \oplus 3^{(5)} \oplus 4^{\#(2)} \oplus 5$	108
$\mathbb{E}la_{\mathbb{A}}$	$0^{(5)} \oplus 1^{\#(4)} \oplus 2^{(10)} \oplus 3^{\#(5)} \oplus 4^{(5)} \oplus 5^{\#} \oplus 6$	171

(II-4.56)

nous noterons  $\text{Sp}(\mathcal{L}_{3-D})$  ce spectre. De même nous pouvons établir dans un espace à deux dimensions la forme de ce spectre, nous avons dans ce cas  $\text{Sp}(\mathcal{L}_{2-D})$

$\mathbb{E}la_{\mathbb{C}}$	$0^{(2)} \oplus 2 \oplus 4$	6
$\mathbb{E}la_{\mathbb{M}}$	$1^{(5)} \oplus 3^{(3)} \oplus 5$	18
$\mathbb{E}la_{\mathbb{A}}$	$0^{(\#)} \oplus 0^{(4)} \oplus 2^{(5)} \oplus 4^{(2)} \oplus 6$	21

(II-4.57)

Un résultat intéressant qui ressort de cela est que la dimension de la classe de symétrie isotrope dépend de la dimension de l'espace de travail. Dans un espace à trois dimensions le tenseur  $A_{(ij)k \ (lm)n}$  est défini par 5 coefficients isotropes, tandis que dans un espace à deux dimensions l'isotropie n'est plus définie que par 4 coefficients. Le cinquième coefficient qui est celui d'un pseudo tenseur n'est actif que dans le cas de l'hémitropie, c'est-à-dire dans un milieu sans symétrie miroir. Ces résultats seront illustrés au chapitre III-1.

Ceci établi nous possédons à présent le squelette sous l'action du groupe orthogonal de notre loi de comportement dans des espaces physiques à deux et trois dimensions. Cette étape est, dans les publications de Forte Vianello [26, 75] et Weller [59], la première étape à réaliser avant de classer les différentes symétries qu'une loi de comportement peut posséder. Nous avons réalisé ici cette décomposition avec une technique fondamentalement différente de celle proposée dans les articles originaux. Nous pensons que l'avantage principal de notre méthode est sa facilité et sa rapidité de mise en oeuvre dans le cas de tenseurs d'ordres élevés. En effet comme montré au début de cette section, dans le cas de notre tenseur de comportement  $A_{(ij)k \ (lm)n}$  l'obtention du terme de plus haut degré de la décomposition harmonique implique une symétrisation sur 80 permutations. De plus, les résultats obtenus au cours de cette section montre que la décomposition harmonique de ce même tenseur implique la présence, dans un espace physique à trois dimensions, de 31 tenseurs. On en conclut que la méthode proposée ci-dessus est, dans notre cas précis, bien plus adaptée que la méthode traditionnelle à la Spencer.

Regardons maintenant comment, à partir de ces décompositions, « représenter » graphiquement nos différents tenseurs.

## II-4.2 Tableaux de décomposition

La décomposition harmonique effectuée au cours de la section précédente est le point de départ de notre travail. Nous possédons maintenant le squelette des opérateurs que nous désirons étudier. Toutefois cela est encore assez immatériel, de fait nous allons travailler au cours de cette section sur une manière de représenter sous forme de tableaux les informations qui nous intéressent pour nos travaux. Nous présenterons tout d'abord, II-4.2.1, à partir d'un peu de théorie des groupes le principe formel qui va nous donner le droit de réaliser nos tableaux de « décomposition ». La sous-section suivante, II-4.2.2, introduira une technique issue de la théorie de représentation des groupes qui nous permettra de représenter nos opérateurs décomposés sous la forme de diagrammes barres. Et nous conclurons ce chapitre au, II-4.2.3, en introduisant une dernière décomposition, dite de Cartan, qui nous sera très pratique pour étudier les conséquences des invariances sur les coefficients de nos opérateurs.

Établissons à présent le principe formel nous permettant de représenter nos opérateurs sous forme de tableaux.

### II-4.2.1 Sous-espaces invariants

L'ensemble de l'argumentation sera ici conduit sur l'exemple particulier du tenseur d'élasticité classique. On rappelle que son espace vectoriel admet la décomposition suivante :

$$\text{Sp}(\mathbb{E}la_{\mathbb{C}}) = \text{Sp}(\mathbb{T}_{(ij) (kl)}) = 0^{(2)} \oplus 2^{(2)} \oplus 4 \quad (\text{II-4.58})$$

Soit  $C \in \mathbb{T}_{(ij) (kl)}$ , le groupe de symétrie de cet élément s'écrit

$$G(C) = \{Q \in \text{SO}(3) | Q \star C = C\} \quad (\text{II-4.59})$$

Comme il a été dit au II-3.3, ce groupe de symétrie est nécessairement le conjugué d'un groupe fermé de  $\text{SO}(3)$  [69], notons  $H$  ce groupe. L'ensemble des tenseurs  $T$  qui ont ce groupe de symétrie forme le sous-espace vectoriel suivant [64] :

$$\text{Fix}(H) = \{T \in \mathbb{T}_{(ij) (kl)}, Q \in H | Q \star T = T\} \quad (\text{II-4.60})$$

Soit un tenseur  $C$   $H$ -invariant, c'est-à-dire que  $C \in \text{Fix}(H)$  et tel que  $H = G(C)$ <sup>13</sup> alors d'après [26]

$$H = G(C) \Leftrightarrow H = G(\mathbf{D}) \cap G(\mathbf{A}) \cap G(\mathbf{B}) \cap G(\alpha) \cap G(\beta) \quad (\text{II-4.61})$$

où  $\{\mathbf{D}, \mathbf{A}, \mathbf{b}, \alpha, \beta\} \in \mathbb{H}^4 \times \mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^0 \times \mathbb{H}^0$ . Mais comme l'action de  $\text{SO}(3)$  sur  $\mathbb{H}^0$  est triviale, la relation précédente se réécrit :

$$H = G(C) \Leftrightarrow H = G(\mathbf{D}) \cap G(\mathbf{A}) \cap G(\mathbf{B}) \quad (\text{II-4.62})$$

Soit  $K_1, K_2$  et  $K_3$  des sous-groupes de  $\text{SO}(3)$  telles que :

$$G(\mathbf{D}) = K_1 \quad G(\mathbf{a}) = K_2 \quad G(\mathbf{b}) = K_3 \quad (\text{II-4.63})$$

<sup>13</sup>La précision n'est pas redondante, en effet on a  $G(C) = H \Rightarrow C \in \text{Fix}(H)$  mais la réciproque est fautive. On a en fait  $C \in \text{Fix}(H) \Rightarrow H \subseteq G(C)$ . Si est  $K$  un sur-groupe de  $H$  tel que  $\text{Fix}(H) \subset \text{Fix}(K)$ , on peut avoir  $C \in \text{Fix}(H)$  et  $G(C) = K$ .

La relation (II-4.61) signifie que  $H$  est le plus grand sous-groupe appartenant simultanément à  $K_1$ ,  $K_2$  et  $K_3$ . Les plus petits groupes de symétrie vérifiant (II-4.62) sont naturellement ceux telles que  $K_1 = K_2 = K_3 = H$ .

De fait le plus grand sous-espace vectoriel  $H$ -invariant de  $\mathbb{T}_{(ij)(kl)}$  est le sous-espace  $\text{Fix}_{\mathbb{T}}(H)$  défini par :

$$\text{Fix}_{\mathbb{T}}(H) = \text{Fix}_{\mathbb{H}^4}(H) \oplus \text{Fix}_{\mathbb{H}^2}(H) \oplus \text{Fix}_{\mathbb{H}^2}(H) \quad (\text{II-4.64})$$

De plus comme tous les tenseurs harmoniques d'un même type se comporte de la même manière sous l'action de  $\text{SO}(3)$  [64], l'étude de  $\text{Fix}_{\mathbb{T}}(H)$ , dans le cas le plus général, se résume à celle de  $\text{Fix}_{\mathbb{H}^4}(H)$  et  $\text{Fix}_{\mathbb{H}^2}(H)$ . C'est-à-dire que la forme la plus générale d'un tenseur d'élasticité  $H$ -invariant contient les formes  $H$ -invariantes les plus générales du déviateur d'ordre 4, des deux déviateurs complétés par deux scalaires.

Ce raisonnement est bien évidemment vrai pour un tenseur d'ordre  $n$ , on alors :

$$\text{Fix}_{\mathbb{T}}(H) = \bigoplus_{k=1}^n \text{Fix}_{\mathbb{H}^k}(H) \quad (\text{II-4.65})$$

Les propriétés d'invariance d'un opérateur de comportement sont complètement déterminées par celles de ses tenseurs harmoniques.

Ce principe de décomposition de l'espace vectoriel d'un tenseur  $H$ -invariant en la somme directe de ses sous-espaces harmoniques  $H$ -invariants, va nous permettre de représenter nos opérateurs sous forme de tableaux. Cette représentation est l'objectif de la sous-section suivante.

## II-4.2.2 Représentation diagrammatique de la décomposition harmonique

Dans un espace à trois dimensions la dimension d'un tenseur harmonique est de  $2i + 1$  [61]. On a

$$\dim(\mathbb{H}^i) = 2i + 1 \quad (\text{II-4.66})$$

Si l'on représente chacun des sous-espaces harmoniques identifiés par une barre dont le nombre de cases est égal à la dimension du sous-espace, nous pouvons écrire ce spectre à l'aide de diagrammes barres. Ce qui nous donne pour le spectre de  $\mathbb{T}_{(ij)(kl)}$  :

$$\text{Sp}(\mathbb{T}_{(ij)(kl)}) = \square^{(2)} \oplus \square\square\square\square\square^{(2)} \oplus \square\square\square\square\square\square\square\square \quad (\text{II-4.67})$$

cette écriture est formellement justifiée via la théorie des diagrammes de Young [52, 79].

Ceci nous permet de réécrire le spectre de l'opérateur d'élasticité classique sous la forme du tableau suivant<sup>14</sup> :

	$\alpha_i$	$\mathbb{H}^i$	Diagramme de Young	$\dim \mathbb{H}^i$	$\alpha_i \dim \mathbb{H}^i$	$\Sigma$
$\text{Ela}_{\mathbb{C}} =$	2	0	$\square$	1	2	2
	2	2	$\square\square\square\square$	5	10	12
	1	4	$\square\square\square\square\square\square\square\square$	9	9	21

(II-4.68)

<sup>14</sup>On rappelle que l'on peut également écrire le spectre d'un opérateur de la manière suivante  $\text{Sp}(\mathbb{T}) = \bigoplus \alpha_i \mathbb{H}^i$ . Les  $\alpha_i$  du tableau de décomposition sont issue de cette notation.

La première colonne indique la multiplicité de l'espace vectoriel  $\mathbb{H}^i$  indiqué dans la seconde colonne. La quatrième colonne contient la dimension de l'espace  $\mathbb{H}^i$  considéré, cette dimension est multiplié par la multiplicité de l'espace dans la cinquième colonne. Et finalement la sixième colonne contient les sommes partielles de l'ensemble des coefficients lignes après lignes.

En un certain sens les espaces vectoriels  $\mathbb{H}^i$  peuvent être vue comme des « vecteurs » de bases pour notre tenseur de comportement et la première colonne comme les coordonnées de notre espace vectoriel dans cette base<sup>15</sup>. Étudier les conditions d'invariance d'un tenseur dans une classe de symétrie revient alors à déterminer les conditions d'invariance induites par cette symétrie sur les tenseurs de bases.

Dans le cas d'un milieu à gradient de déformation le tableau précédent se complète des deux tableaux suivants qui correspondent respectivement à l'élasticité de couplage et l'élasticité du second ordre.

$\alpha_i$	$\mathbb{H}^i$	Diagramme de Young	$\dim \mathbb{H}^i$	$\alpha_i \dim \mathbb{H}^i$	$\Sigma$
1	0#	□	1	1	1
6	1	□□□	3	18	19
5	2#	□□□□□	5	25	44
5	3	□□□□□□	7	35	79
2	4#	□□□□□□□	9	18	97
1	5	□□□□□□□□	11	11	108

(II-4.69)

et

$\alpha_i$	$\mathbb{H}^i$	Diagramme de Young	$\dim \mathbb{H}^i$	$\alpha_i \dim \mathbb{H}^i$	$\Sigma$
5	0	□	1	5	5
4	1#	□□□	3	12	17
10	2	□□□□□	5	50	67
5	3#	□□□□□□	7	35	102
5	4	□□□□□□□	9	45	147
1	5#	□□□□□□□□	11	11	158
1	6	□□□□□□□□□	13	13	171

(II-4.70)

Tout ceci est valable quand l'on se place dans un espace physique à deux dimensions. Nos trois tableaux précédents se réécrivent alors :

$\alpha_i$	$\mathbb{H}^i$	Diagramme de Young	$\dim \mathbb{H}^i$	$\alpha_i \dim \mathbb{H}^i$	$\Sigma$
2	0	□	1	2	2
1	2	□□	2	2	4
1	4	□□	2	2	6

(II-4.71)

$\alpha_i$	$\mathbb{H}^i$	Diagramme de Young	$\dim \mathbb{H}^i$	$\alpha_i \dim \mathbb{H}^i$	$\Sigma$
5	1	□□	2	10	10
3	3	□□	2	6	16
1	5	□□	2	2	18

(II-4.72)

<sup>15</sup>La nature précise de cette structure reste à déterminer, elle est toutefois plus complexe que celle d'un espace vectoriel.



$\alpha_i$	$\mathbb{H}^i$	Diagramme de Young	$\dim \mathbb{H}^i$	$\alpha_i \dim \mathbb{H}^i$	$\Sigma$
1	$0^\#$	$\square$	1	1	1
4	0	$\square$	1	4	5
5	2	$\square\square$	2	10	15
2	4	$\square\square$	2	4	19
1	6	$\square\square$	2	2	21

(II-4.73)

Comme étudier l'action d'une invariance sur un opérateur équivaut à étudier l'action d'une invariance sur chacune des lignes du tableau de sa décomposition harmonique, il nous faut définir comment un opérateur orthogonal agit sur un sous-espace harmonique. Ceci sera l'objet de la section suivante où nous introduirons pour cela une nouvelle décomposition, appelée *décomposition de Cartan*<sup>16</sup>. Cette décomposition nous permettra de redécomposer les tableaux définis jusqu'à présent ainsi que de définir des règles simples d'action sur ces nouveaux tableaux.

### II-4.2.3 Décomposition de Cartan

Pour étudier ces tenseurs de base, nous définirons sur l'espace des tenseurs harmoniques une nouvelle décomposition, dite *de Cartan* [26, 64], dans laquelle l'action d'un opérateur  $Q$  est facilement exprimable. Cette décomposition est invariante vis-à-vis de l'action de  $O(2)$ , le groupe orthogonal à deux dimensions. De fait comme on a l'inclusion  $O(2) \subset O(3)$  la décomposition de Cartan est incluse dans la décomposition harmonique. Une autre manière de voir les choses est de considérer la décomposition de Cartan comme une base bien choisie de  $\mathbb{H}^i$ .

#### Principe

Son principe est le suivant, elle décompose l'espace vectoriel d'un tenseur harmonique d'ordre  $i$  en la somme directe de  $i$  espaces vectoriels de dimension 2 et d'un espace de dimension 1. Concrètement cela peut se récrire

$$\mathbb{H}^i = \mathbb{K}_0^i \oplus \mathbb{K}_1^i \oplus \dots \oplus \mathbb{K}_i^i = \bigoplus_{j=0}^i \mathbb{K}_j^i \quad (\text{II-4.74})$$

où  $\mathbb{H}^i$  est l'espace vectoriel des tenseurs harmoniques d'ordre  $i$  et  $\mathbb{K}_j^i$  le sous-espace de Cartan d'ordre  $j$  de  $\mathbb{H}^i$  et tel que

$$\mathbb{K}_0^i = \text{vect}(s^i) \quad (\text{II-4.75})$$

$$\mathbb{K}_j^i = \text{vect}(s_j^i, t_j^i) \quad (\text{II-4.76})$$

où les  $(s_j^i, t_j^i)$  sont les vecteurs de base de ces sous-espaces. Nous noterons, dans la suite de ce travail,  $K_j^i$  un élément de  $\mathbb{K}_j^i$ . Cet élément sera représenté par le vecteur  $(v_{s_j^i}^i, v_{t_j^i}^i)$ .

<sup>16</sup>La notion de décomposition de Cartan a un sens beaucoup plus général en mathématique, en ce qui nous concerne elle fera référence à la décomposition d'un espace harmonique en une somme de sous-espaces  $O(2)$ -invariants.

## Action

Cette décomposition est invariante par transformations planes. Considérons la rotation d'axe  $\underline{z}$  et d'angle  $\theta$  notée  $Q(\underline{z}, \theta)$ , celle-ci agit sur  $K_j^i$  de la manière suivante [64] :

$$Q(\underline{z}, \theta) \star K_j^i = \begin{pmatrix} \cos(j\theta) & -\sin(j\theta) \\ \sin(j\theta) & \cos(j\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{sj}^i \\ v_{tj}^i \end{pmatrix} \quad (\text{II-4.77})$$

C'est-à-dire que l'action de  $Q(\theta)$  un élément de  $\mathbb{K}_j^i$  agit comme une rotation d'ordre  $j\theta$  sur un vecteur. On est ainsi revenu à une expression que l'on sait facilement manipuler avec des matrices. Via cette décomposition on étudie la manière dont notre tenseur harmonique d'ordre  $i$  se comporte quand on fait agir sur lui le groupe des isométries propres de l'espace.

Cela nous permet d'enrichir la représentation sous formes de tableaux que nous avons introduit précédemment II-4.2.2. Introduisons à présent ces tableaux enrichis que nous nommerons *tableaux de décomposition*.

## Tableau de décomposition

Dans la théorie de représentation linéaire des groupes de Lie, on appelle branchement l'opération permettant de passer d'une représentation irréductible pour un groupe à celle irréductible pour un autre groupe. Dans notre cas on s'intéresse au branchement de la représentation  $O(3)$  sur celle de  $O(2)$  noté  $O(3) \downarrow O(2)$  [80]. Si l'on considère ce branchement appliqué à  $\mathbb{H}^4$  cela équivaut, de manière diagrammatique, à

$$\square\square\square\square\square\square\square\square|_{O(3)} \xrightarrow{O(3)\downarrow O(2)} \square|_{O(2)} \oplus \square\square|_{O(2)} \oplus \square\square|_{O(2)} \oplus \square\square|_{O(2)} \oplus \square\square|_{O(2)} \quad (\text{II-4.78})$$

Ce qui correspond exactement à la définition de la décomposition de Cartan (II-4.74) écrite cette fois-ci sous forme de diagrammes. De fait, par cohérence avec les définitions (II-4.75), nous appellerons  $s$  la première case et  $t$  la seconde case d'un sous espace de Cartan. Dans le cas du sous-espace de dimension 1 la case sera notée  $s$  également. Ainsi dans le cas de la décomposition de  $\mathbb{H}^4$  nous aurons

$$\mathbb{H}^4 = \boxed{s} \oplus \boxed{st} \oplus \boxed{st} \oplus \boxed{st} \oplus \boxed{st} \quad (\text{II-4.79})$$

toutefois nous omettrons, pour plus de lisibilité, cette notation quand celle-ci n'est pas nécessaire. Tout cela nous permet de réécrire les tableaux (II-4.68), (II-4.69) ainsi que (II-4.70) de la manière suivante :

	$\alpha_i$	$\mathbb{H}^i$	$\mathbb{K}_0^i$	$\mathbb{K}_1^i$	$\mathbb{K}_2^i$	$\mathbb{K}_3^i$	$\mathbb{K}_4^i$	$\dim \mathbb{H}^i$	$\alpha_i \dim \mathbb{H}^i$	$\Sigma$	
$\mathbb{E}la_C =$	2	0	□					1	2	2	(II-4.80)
	2	2	□	□□	□□			5	10	12	
	1	4	□	□□	□□	□□	□□	9	9	21	

	$\alpha_i$	$\mathbb{H}^i$	$\mathbb{K}_0^i$	$\mathbb{K}_1^i$	$\mathbb{K}_2^i$	$\mathbb{K}_3^i$	$\mathbb{K}_4^i$	$\mathbb{K}_5^i$	$\dim \mathbb{H}^i$	$\alpha_i \dim \mathbb{H}^i$	$\Sigma$	
$\mathbb{E}la_M =$	1	0 <sup>#</sup>	□						1	1	1	(II-4.81)
	6	1	□	□□					3	18	19	
	5	2 <sup>#</sup>	□	□□	□□				5	25	44	
	5	3	□	□□	□□	□□			7	35	79	
	2	4 <sup>#</sup>	□	□□	□□	□□	□□		9	18	97	
	1	5	□	□□	□□	□□	□□	□□	11	11	108	

$\alpha_i$	$\mathbb{H}^i$	$\mathbb{K}_0^i$	$\mathbb{K}_1^i$	$\mathbb{K}_2^i$	$\mathbb{K}_3^i$	$\mathbb{K}_4^i$	$\mathbb{K}_5^i$	$\mathbb{K}_6^i$	$\dim \mathbb{H}^i$	$\alpha_i \dim \mathbb{H}^i$	$\Sigma$
5	0	□							1	5	5
4	1 <sup>#</sup>	□	□□						3	12	17
10	2	□	□□	□□					5	50	67
5	3 <sup>#</sup>	□	□□	□□	□□				7	35	102
5	4	□	□□	□□	□□	□□			9	45	147
1	5 <sup>#</sup>	□	□□	□□	□□	□□	□□		11	11	158
1	6	□	□□	□□	□□	□□	□□	□□	13	13	171

(II-4.82)

Ce sont ces écritures de nos tenseurs que nous appellerons tableaux de décompositions.

Nous avons à présent en main l'ensemble des outils qui nous permettra, au chapitre suivant, d'étudier les conséquences des invariances matérielles sur la forme de nos opérateurs de comportement. Toutefois avant de continuer plusieurs points sont à noter.

### II-4.2.4 Discussion

Avant d'effectuer la classification des symétries de nos opérateurs nous allons nous arrêter quelques instants sur quelques unes des propriétés des tableaux de décomposition. Le premier point que nous désirons soulever concerne, ce que nous avons appelé, l'universalité de la représentation.

#### Universalité de la représentation

Un des intérêts de cette représentation sous forme de tableaux est quelle est directement adaptable à tout espace vectoriel de tenseurs. Ainsi (II-4.82) représente de manière diagrammatique les coefficients du tenseur élastique du second ordre dans le cadre d'un milieu à gradient de déformation. Ce qui caractérise ce type de tenseur est la donnée de la multiplicité de ses sous-espaces, i.e. la séquence  $\{\alpha_i\} = (5, 4, 10, 5, 5, 1, 1)$ , si l'on considère maintenant un tenseur élastique du second ordre dans le cadre d'un milieu micromorphe alors la séquence à considérer est la suivante  $\{\alpha_i\} = (11, 15, 23, 13, 9, 2, 1)$ . On obtient alors

$\alpha_i$	$\mathbb{H}^i$	$\mathbb{K}_0^i$	$\mathbb{K}_1^i$	$\mathbb{K}_2^i$	$\mathbb{K}_3^i$	$\mathbb{K}_4^i$	$\mathbb{K}_5^i$	$\mathbb{K}_6^i$	$\dim \mathbb{H}^i$	$\alpha_i \dim \mathbb{H}^i$	$\Sigma$
11	0	□							1	11	11
15	1 <sup>#</sup>	□	□□						3	45	56
23	2	□	□□	□□					5	115	181
13	3 <sup>#</sup>	□	□□	□□	□□				7	91	272
9	4	□	□□	□□	□□	□□			9	81	343
2	5 <sup>#</sup>	□	□□	□□	□□	□□	□□		11	22	365
1	6	□	□□	□□	□□	□□	□□	□□	13	13	378

(II-4.83)

Comme nous le verrons au cours du chapitre suivant cela est très pratique car l'ensemble de la discussion sur les symétries se résume à déterminer si les cases de ces tableaux sont, ou non, vides. Ceci implique que si nous connaissons l'action des groupes de symétrie sur les lignes de nos tableaux alors en faisant varier la séquence  $\{\alpha_i\}$  on obtiendra le nombre de coefficients pour chacune des classes de symétrie et pour tout types d'espace vectoriels de tenseurs.

Le deuxième point que nous voulons soulever concerne les analogies que nous pouvons faire entre la représentation de nos opérateurs de comportement et la description de systèmes atomiques.

### Système atomique

Comme illustrée par la figure fig.II-4.1 la décomposition de Cartan d'un espace  $\mathbb{H}^i$  peut être vue comme la représentation des coefficients d'un tenseur harmonique le long de cercles concentriques.

Le sous-espace  $\mathbb{K}_0^i$  correspond à un point situé le long de l'axe de rotation des sous-groupes de  $SO(2)$  et les sous-espaces de  $\mathbb{K}_1^i$  à  $\mathbb{K}_i^i$  représentent des cercles dont les rayons sont croissants de 1 à  $i$ . Sous l'action d'une rotation d'axe  $\mathbb{K}_0^i$  et d'angle  $\theta$  un point appartenant au sous-espace  $\mathbb{K}_j^i$  tourne d'un angle  $j\theta$ . Dans cette représentation les rayons des différents sous-espaces apparaissent donc normés et multipliés par leur distance au centre  $\mathbb{K}_0$ . Cela car rien ne force la norme d'un point appartenant à  $\mathbb{K}_i$  à être inférieure à celle d'un point appartenant à  $\mathbb{K}_j$  pour  $j > i$ .

Nous appellerons *système atomique* ce type de représentation graphique. La figure fig.II-4.1 représente ainsi le système atomique associé à  $\mathbb{H}^4$ .

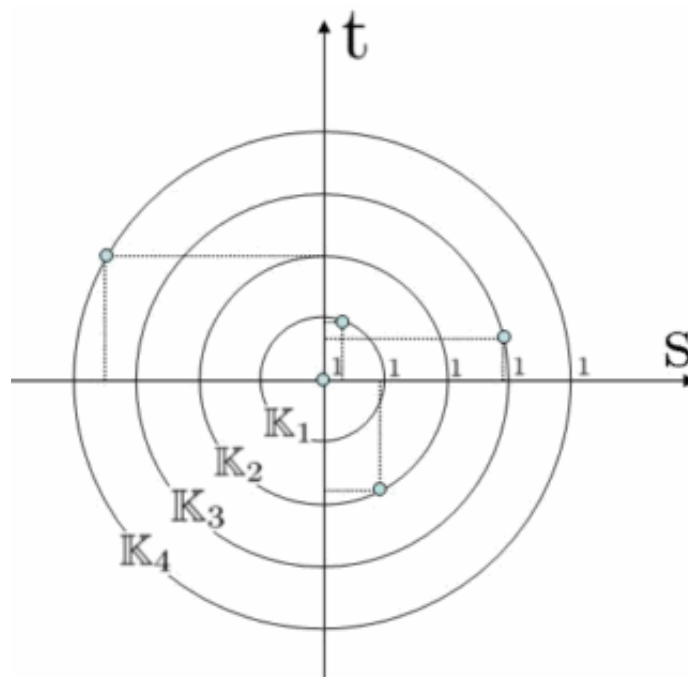
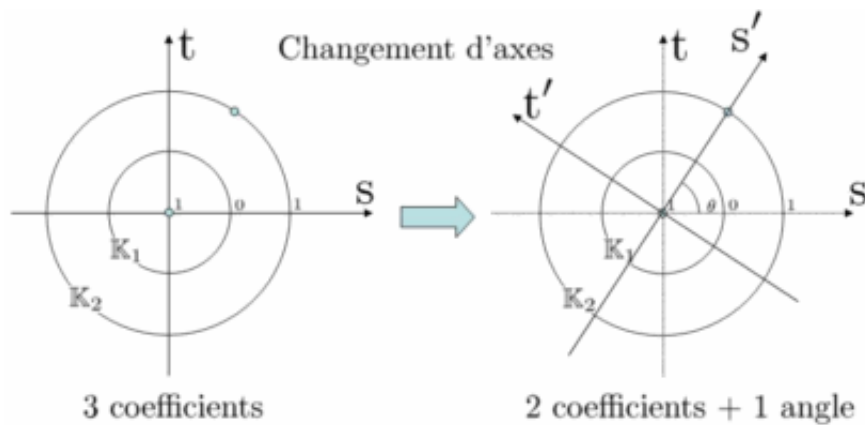


FIG. II-4.1 – système atomique associé à l'espace  $\mathbb{H}^4$

En poursuivant cette analogie nous appellerons *électrons* les points de ce diagramme, on peut donc associer à tout espace  $\mathbb{H}^i$   $i + 1$  électrons. Cette notion a son intérêt car, contrairement au nombre de coefficients, le nombre d'électrons est un invariant de  $\mathbb{H}^i$ . Ceci peut être illustré de la manière suivante. On définit un système d'axe  $(s, t)$  et on tire un tenseur au hasard dans  $\mathbb{H}^i$  et on le représente dans  $(s, t)$ . La probabilité qu'un de ses électrons ait une composante pure selon  $s$  ou  $t$  est nulle, le tenseur  $\mathbb{H}^i$  est défini par la donnée de  $2i + 1$  valeurs. Maintenant on peut faire tourner mon système d'axe pour amener au moins un électron à avoir une composante pure,

dans ce cas le tenseur  $H^i$  est défini par la donnée de  $2i$  valeurs. La figure fig.II-4.2.4 illustre cet exemple.



De même on peut imaginer une configuration singulière où tous les électrons seraient alignés alors il existerait un repère dans lequel le tenseur serait défini par la donnée de  $i + 1$  coefficients. Dans chacun des exemples cités, on arrive, à partir d'un élément d'un même espace  $\mathbb{H}^i$ , à trouver des configurations dans lesquelles le nombre de coefficients observés diffère. Toutefois dans chacun de ces exemples le nombre d'électrons reste constant.

La représentation du système atomique d'un tenseur harmonique peut s'étendre aisément à un tenseur complet. La figure fig.II-4.2 représente par exemple le tenseur d'élasticité classique.

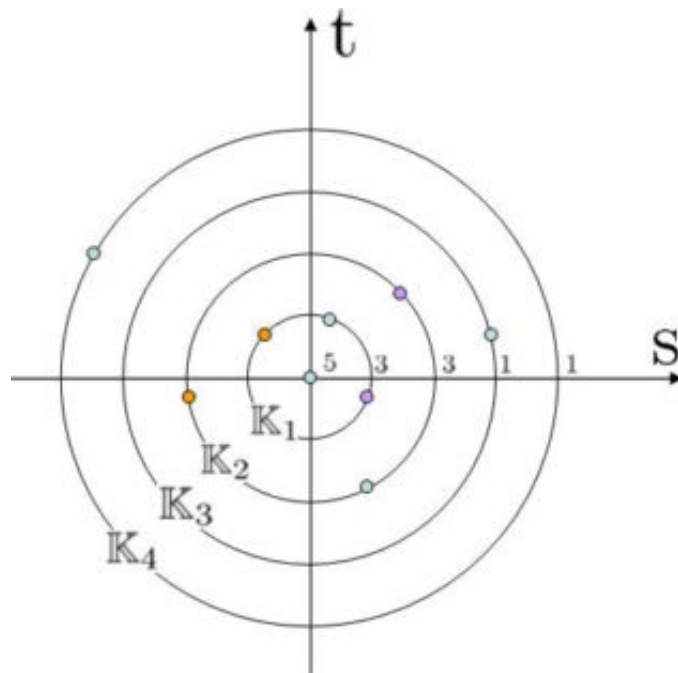


FIG. II-4.2 – le système atomique associé à l'espace  $\mathbb{E}la_C$

Nous pouvons de plus constater qu'il existe une analogie entre le tableau de décomposition dans lequel nous étudions nos opérateurs et la structure en couche/sous-couche de l'atome. Rappelons rapidement le modèle quantique de l'atome. Les électrons sont réparties sur des couches, ses couches sont nommées, de la plus proche du noyau à la plus éloignée,  $K, L, M, N, O, P$ , et

$Q$ . Chacune de ces couches se compose de sous-couches nommées  $s$ ,  $p$ ,  $d$  et  $f$  mais on peut en théorie aller plus loin et rajouter, par exemple,  $g$ ,  $h$  et  $i$ . Chacune de ces sous-couches contient  $2n + 1$  orbitales, où  $n = 1$  pour  $s$ , 2 pour  $p$ ...et une orbitale contient, au final, au maximum 2 électrons.

L'état d'un électron est, au final, déterminé par 4 nombres. La couche correspond au nombre quantique principal  $n$ , la sous-couche au nombre quantique secondaire  $l$ . Pour décrire le système de l'atome on a, en outre, besoin de deux autres nombre quantique :  $m$  et  $s$ . Le nombre  $m$  est le nombre quantique tertiaire ou magnétique tandis que  $s$ , qu'il ne faut pas confondre avec la sous-couche *sharp*, est le nombre de spin. Sans rentrer dans les détails notons que le nombre quantique magnétique  $m$  représente l'orientation de l'orbital tandis que le nombre de spin représente une caractéristique intrinsèque de l'électron et, de fait, il est de nature différente des trois premiers.

On peut donc représenter le système couche/sous couche de l'atome d'hydrogène, ou système  $(n, l)$ , de la manière suivante :

$(n, l)$	$s$	$p$	$d$	$f$	$g$	$h$	$i$	dim	$\Sigma$
$K$	□							1	1
$L$	□	□□						4	5
$M$	□	□□	□□□□					9	14
$N$	□	□□	□□□□	□□□□□□				16	30
$O$	□	□□	□□□□	□□□□□□	□□□□□□□□			25	55
$P$	□	□□	□□□□	□□□□□□	□□□□□□□□	□□□□□□□□		36	91
$Q$	□	□□	□□□□	□□□□□□	□□□□□□□□	□□□□□□□□	□□□□□□□□	49	140

(II-4.84)

On peut, de même, se placer dans la couche  $Q$  et écrire le système sous-couche/orientation, ou système  $l, m$ , et alors on obtient :

$Q(l, m)$	0	$\pm 1$	$\pm 2$	$\pm 3$	$\pm 4$	$\pm 5$	$\pm 6$	dim	$\Sigma$
$s$	□							1	1
$p$	□	□□						3	4
$d$	□	□□	□□					5	9
$f$	□	□□	□□	□□				7	16
$g$	□	□□	□□	□□	□□			9	25
$h$	□	□□	□□	□□	□□	□□		11	36
$i$	□	□□	□□	□□	□□	□□	□□	13	49

(II-4.85)

De fait, sans pousser l'analogie jusqu'à l'absurde, on peut remarquer que la décomposition harmonique d'un tenseur d'ordre 6 correspond à la décomposition en sous-couches de la couche  $n = 6$ . De même ce que nous avons introduit sous le nom de *tableau de décomposition* ressemble beaucoup à, dans une couche donnée, l'écriture des sous-couches en fonction du nombre quantique magnétique. Les espaces des tenseurs harmoniques sont semblables aux sous-couches, tandis que les sous-espaces de Cartan correspondent aux nombres magnétiques.

Néanmoins cette analogie est purement formelle et elle n'a pour fonction que d'aider à la visualisation d'objets conceptuellement abstraits. Nous chercherons, tout de même, au cour du chapitre suivant, une méthode de détermination des symétries pouvant ressembler aux principes de remplissage utilisés en atomistique. L'objectif de tout cela sera de proposer des règles

simples d'étude des invariances tensorielles.

Maintenant que nous avons en main l'ensemble de ces outils nous pouvons aborder la dérivation théorique des formes invariantes de nos opérateurs dans chacun des systèmes de symétrie de  $SO(3)$ . Ceci sera l'objectif du chapitre suivant.

## CHAPITRE II–5

### Étude des invariances

Ce chapitre constitue la rencontre entre, les résultats que nous avons mis en avant sur les sous-groupes de  $SO(3)$  au cours du chapitre chapitre II–3, et les techniques de représentation de nos opérateurs telles que nous venons de les introduire au chapitre II–4. Ces deux points constituent la quasi-totalité des objets que nous avons à utiliser pour étudier les classes de symétries des opérateurs de comportement linéaire. Cette étude sera effectuée ici en trois temps. Nous introduirons, au II–5.1, la condition formelle d’invariance. Nous particulariserons, au II–5.2, cette relation aux sous-groupes plans de  $SO(3)$  puis, au II–5.3, aux groupes spatiaux. Nous verrons ainsi que dans le cas des invariances planes, la détermination des formes d’opérateurs invariants peut être réalisée à la main via la définition d’un *principe d’exclusion*. Dans les cas spatiaux notre approche devra être complétée par l’utilisation d’un logiciel de calcul formel. Le détail du fonctionnement de l’algorithme que nous avons mis en oeuvre pour cela pourra être trouvé dans l’annexe II–A. Nous concluons ce chapitre en énonçant l’ensemble des classes de symétrie non-équivalentes que peut posséder l’opérateur d’élasticité du second ordre  $\underset{\approx}{\underset{\approx}{\mathbb{A}}}$ , ainsi que le nombre de coefficients dans chacun de ces systèmes.

Commençons par énoncer, pour un tenseur quelconque, sa condition d’invariance sous l’action d’une opération orthogonale.

### II–5.1 Prise en compte des invariances

Notre objectif est de faire agir l’ensemble des sous-groupes de  $SO(3)$  sur l’espace vectoriel  $\mathbb{T}$  de manière à déterminer les différentes classes de symétrie distinctes que cet espace vectoriel peut posséder.

Précisons un point terminologique pour éviter tout contre-sens dans ce qui va suivre. Nous étudions l’action des sous-groupes de  $SO(3)$  sur un tenseur quelconque. Par définition même de  $SO(3)$  nous étudierons donc l’action de rotations dans des plans de l’espace pouvant être potentiellement distincts. De fait ce que nous appellerons *plan de symétrie* signifiera le plan normal à l’axe de la rotation considérée.

On considère un milieu matériel  $\mathcal{M}$  dont le groupe de symétrie est  $G(\mathcal{M})$ . On considère un tenseur  $T$  défini sur ce milieu, on a de même  $G(T)$  le groupe des éléments  $Q$  tels que  $Q \star_r T = T$ .



Par application du principe de Neumann [69] on a nécessairement  $G(\mathcal{M}) \subseteq G(\mathbb{T})$ . De fait pour que le tenseur  $\mathbb{T}$  soit compatible avec les symétries du milieu il doit satisfaire dans chacun de ses plans de symétries les conditions d'invariances :

$$\forall Q \in G(\mathcal{M}), \forall (k, p, q), \quad Q \star_r K_j^{i,q} = K_j^{i,q} \quad (\text{II-5.1})$$

où  $K_j^{i,q}$  est la composante d'ordre  $j$  de la décomposition de Cartan de  $H^{i,q}$ . L'exposant  $q$  distingue les diverses composantes d'ordre  $i$  de la décomposition harmonique. La condition

$$Q \star_r K_j^{i,q} = K_j^{i,q} \quad (\text{II-5.2})$$

qui peut se réécrire

$$(Q_j^i - \text{Id})K_j^{i,q} = 0 \quad (\text{II-5.3})$$

où  $Q_j^i$  représente l'opérateur de l'action de  $Q$  sur  $K_j^{i,q}$ . Ce qui implique que pour chaque sous-espace soit  $(Q_j^i - \text{Id})$ , soit  $K_j^{i,q}$  est nul ; en d'autres termes les éléments  $Q$ -invariants appartiennent à  $\ker(Q_j^i - \text{Id})$ . Maintenant que la condition d'invariance est établie dans le cas général, il nous faut la particulariser dans le cas des groupes de symétrie qui nous intéressent.

Comme discuté au chapitre II-3 nous supposons dans cette partie que les milieux sur lesquelles nous travaillons sont centro-symétriques. Ceci a pour conséquence que le tenseur de couplage élastique  $\underline{\underline{M}}$  est nul et que la loi de comportement n'est définie que par des tenseurs d'ordre pair. Comme montré au cours du chapitre II-3, dans le cas de l'étude de tenseurs pairs, les groupes de transformation à considérer pour notre étude sont réduits aux sous-groupes de  $SO(3)$ . Notons tout de même que l'ensemble de ce qui va être dit pourra aisément être généralisé aux sous-groupes de  $O(3)$ .

Comme introduit au II-3, la collection des sous-groupes de  $SO(3)$  se divisent en deux catégories : \_ les groupes plans ; \_ les groupes spatiaux.

Commençons tout d'abord notre travail par l'étude des restrictions induites par les groupes plans.

## II-5.2 Étude des groupes plans

Nous nous intéresserons pour commencer aux groupes plans, c'est-à-dire aux éléments de la collection :

$$\Sigma_P : \{\mathcal{I}, Z_m, D_m, SO(2), O(2)\} \quad (\text{II-5.4})$$

Comme nous pouvons considérer  $SO(2)$  et  $O(2)$  comme les groupes limites respectifs de  $Z_m$  et  $D_m$  quand  $m$  tend vers  $+\infty$ , nous restreindrons notre intérêt à ces deux derniers groupes.

Nous verrons, dans ce qui suit, que grâce à l'utilisation des tableaux de décomposition que nous avons introduit au chapitre II-4, l'étude des restrictions que ces groupes induisent sur les coefficients de nos opérateurs peut être réalisée quasi-immédiatement à la main.

Regardons pour commencer la restriction induite sur nos composantes par une  $Z_m$ -invariance matérielle.

## II-5.2.1 Groupes cycliques

### Invariance

On considère la rotation suivante d'axe  $\underline{z}$  et d'angle  $\theta$  notée  $Q(\underline{z}, \theta)$ . L'action de  $Q(\underline{z}, \theta)$  sur  $\mathbb{H}^i$  se transporte, d'après [64], sur les  $K_j^i$  de la manière suivante :

$$Q(\underline{z}, \theta) \star K_j^i = \begin{pmatrix} \cos(j\theta) & -\sin(j\theta) \\ \sin(j\theta) & \cos(j\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{sj}^i \\ v_{tj}^i \end{pmatrix} \quad (\text{II-5.5})$$

L'action de  $Q(\theta)$  sur un élément  $K_j^i$  agit comme une rotation d'ordre  $j\theta$  sur un vecteur.

On considère que le milieu matériel est  $Z_m$ -invariant, c'est-à-dire qu'une rotation d'angle  $\theta = \frac{2\pi}{m}$  laisse le milieu invariant. Dans ce cas là le condition d'invariance (II-5.3) se récrit :

$$K_j^i \in \ker \begin{pmatrix} \cos(\frac{2j\pi}{m}) - 1 & -\sin(\frac{2j\pi}{m}) \\ \sin(\frac{2j\pi}{m}) & \cos(\frac{2j\pi}{m}) - 1 \end{pmatrix} \quad (\text{II-5.6})$$

L'invariance du sous-espace d'ordre  $j$  sous l'action de  $Z_m$  se traduit par la condition suivante :

$$\frac{2j\pi}{m} = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{N} \quad (\text{II-5.7})$$

soit

$$j = km, \quad k \in \mathbb{N} \quad (\text{II-5.8})$$

c'est-à-dire que les coefficients des sous-espaces de Cartan d'ordre  $j$  avec  $j \neq km$  sont nuls.

### Tableau de décomposition

Cela nous permet d'énoncer une première règle de remplissage de nos tableaux.

**Propriété 4** Soit un milieu  $Z_m$ -invariant. Les coefficients des sous-espaces associés aux colonnes du tableau de décomposition dont l'indice de Cartan  $n$  n'est pas un multiple de  $m$  sont identiquement nulles.

Nous pouvons illustrer cette règle par l'étude du tenseur  $A_{(ij)k}^{(lm)n}$ . Nous ne considérerons ici, pour l'exemple, que le cas des  $Z_2$  et  $Z_3$  invariances matérielles, l'ensemble des autres tableaux pourra facilement être déduit.

**Cas de la  $Z_2$ -invariance** Le tableau de décomposition s'écrit :

$\alpha_i$	$\mathbb{H}^i$	$K_0^i$	$K_1^i$	$K_2^i$	$K_3^i$	$K_4^i$	$K_5^i$	$K_6^i$	$\dim \mathbb{H}^i$	$\alpha_i \dim \mathbb{H}^i$	$\Sigma$
5	0	$\boxed{o}$							1	5	5
4	1 <sup>#</sup>	$\boxed{o}$	$\boxed{**}$						1	4	9
10	2	$\boxed{o}$	$\boxed{**}$	$\boxed{oo}$					3	30	39
5	3 <sup>#</sup>	$\boxed{o}$	$\boxed{**}$	$\boxed{oo}$	$\boxed{**}$				3	15	54
5	4	$\boxed{o}$	$\boxed{**}$	$\boxed{oo}$	$\boxed{**}$	$\boxed{oo}$			5	25	79
1	5 <sup>#</sup>	$\boxed{o}$	$\boxed{**}$	$\boxed{oo}$	$\boxed{**}$	$\boxed{oo}$	$\boxed{**}$		5	5	84
1	6	$\boxed{o}$	$\boxed{**}$	$\boxed{oo}$	$\boxed{**}$	$\boxed{oo}$	$\boxed{**}$	$\boxed{oo}$	7	7	91

(II-5.9)

où  $*$  indique un coefficient nul, et  $o$  un coefficient indépendant. Un tenseur du second ordre  $Z_2$ -invariant est donc défini par la donnée de 91 coefficients indépendants sur les 171 coefficients totaux.

**Cas de la  $Z_3$ -invariance** Le tableau de décomposition s'écrit :

$\alpha_i$	$\mathbb{H}^i$	$\mathbb{K}_0^i$	$\mathbb{K}_1^i$	$\mathbb{K}_2^i$	$\mathbb{K}_3^i$	$\mathbb{K}_4^i$	$\mathbb{K}_5^i$	$\mathbb{K}_6^i$	$\dim \mathbb{H}^i$	$\alpha_i \dim \mathbb{H}^i$	$\Sigma$
5	0	$\boxed{0}$							1	5	5
4	1 <sup>#</sup>	$\boxed{0}$	$\boxed{**}$						1	4	9
10	2	$\boxed{0}$	$\boxed{**}$	$\boxed{**}$					1	10	19
5	3 <sup>#</sup>	$\boxed{0}$	$\boxed{**}$	$\boxed{**}$	$\boxed{00}$				3	15	34
5	4	$\boxed{0}$	$\boxed{**}$	$\boxed{**}$	$\boxed{00}$	$\boxed{**}$			3	15	49
1	5 <sup>#</sup>	$\boxed{0}$	$\boxed{**}$	$\boxed{**}$	$\boxed{00}$	$\boxed{**}$	$\boxed{**}$		3	3	52
1	6	$\boxed{0}$	$\boxed{**}$	$\boxed{**}$	$\boxed{00}$	$\boxed{**}$	$\boxed{**}$	$\boxed{00}$	5	5	57

(II-5.10)

Un tenseur du second ordre  $Z_3$ -invariant est défini par la donnée de 57 coefficients sur les 171 coefficients totaux. Ces résultats peuvent également être retrouvés de manière analytique.

### Dimension des sous-espaces $Z_m$ -invariants

L'expression de la condition d'invariance (II-5.8) permet d'obtenir une formule analytique nous donnant pour espace  $\mathbb{H}^i$  la dimension de son sous-espace  $Z_m$ -invariant. On a classiquement

$$\dim \mathbb{H}^i = 2i + 1 \quad (\text{II-5.11})$$

de fait la condition (II-5.8) indique que  $\lfloor \frac{i}{m} \rfloor$  sous-espaces de Cartan sont non nuls <sup>1</sup>. On a donc la formule analytique

$$\dim \text{Fix}_{\mathbb{H}^i}(Z_m) = 2 \left\lfloor \frac{i}{m} \right\rfloor + 1 \quad (\text{II-5.12})$$

De fait si l'on note la décomposition  $\text{SO}(3)$ -isotypique d'un tenseur d'ordre  $n$  de la manière suivante :

$$\text{Sp}(\mathbb{T}) = \bigoplus \alpha_i \mathbb{H}^i \quad (\text{II-5.13})$$

alors on a immédiatement

$$\dim \text{Fix}_{\mathbb{T}}(Z_m) = 2 \sum_{i=0}^n \alpha_i \left\lfloor \frac{i}{m} \right\rfloor + \sum_{i=0}^n \alpha_i \quad (\text{II-5.14})$$

Posons  $\beta_{ht} = \sum_{i=0}^n \alpha_i$ , la relation précédente peut se réécrire :

$$\dim \text{Fix}_{\mathbb{T}}(Z_m) = 2 \sum_{i=0}^n \alpha_i \left\lfloor \frac{i}{m} \right\rfloor + \beta_{ht} \quad (\text{II-5.15})$$

On note que quand  $m > i$ , alors  $\lfloor \frac{i}{m} \rfloor = 0$ , de fait  $\beta_{ht}$  est le nombre de coefficients de l'hémi-tropie transverse. Ces coefficients sont ceux d'un opérateur qui est donc  $\text{SO}(2)$ -invariant.

Passons à présent à l'étude des groupes diédraux.

## II-5.2.2 Groupes diédraux

### Invariance

Si l'on considère à présent une symétrie miroir d'axe  $\underline{n}$  notée  $Q(\underline{n})$ . L'action de  $Q(\underline{n})$  sur  $\mathbb{H}^i$  se transporte sur les  $\mathbb{K}_j^i$  de la manière suivante [64] :

$$Q(\underline{n}) \star \mathbb{K}_j^i = \begin{pmatrix} (-1)^{i-j} & 0 \\ 0 & (-1)^{i-j+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{sj}^i \\ v_{tj}^i \end{pmatrix} \quad (\text{II-5.16})$$

<sup>1</sup>La fonction  $\lfloor x \rfloor$  retourne la partie entière inférieure de  $x$ .

Notre condition d'invariance (II-5.3) pour la symétrie miroir se réécrit

$$K_j^i \in \ker \begin{pmatrix} (-1)^{i-j} - 1 & 0 \\ 0 & (-1)^{i-j+1} - 1 \end{pmatrix} \quad (\text{II-5.17})$$

Dans tous les cas la symétrie miroir annule un terme de  $K_j^i$ , le terme annulé est fonction de la parité de la différence entre  $i$  et  $j$ . On a

$$(i - j) = \begin{cases} 2k \Rightarrow v_{tj}^i = 0 \\ 2k + 1 \Rightarrow v_{sj}^i = 0 \end{cases} \quad (\text{II-5.18})$$

Or on a  $(i - j)$  paire si  $i$  et  $j$  sont de même parité, et  $(i - j)$  impaire dans le cas contraire.

### Tableau de décomposition

Ceci nous permet d'énoncer une deuxième règle de remplissage de nos tableaux.

**Propriété 5** Soit un milieu  $Z_2^p$ -invariant. Les coefficients de type  $t$  du tableau de décomposition sont nuls dans les cases dans lesquelles les indices de Cartan et de l'espace harmonique sont de même parité. Les coefficients de type  $s$  du tableau de décomposition sont nuls dans les cases dans lesquelles les indices de Cartan et de l'espace harmonique sont de parité opposée.

Regardons à présent ce qu'une  $Z_2^p$ -invariance matérielle implique pour le tenseur d'élasticité du second-ordre. Son tableau de décomposition s'écrit :

$\alpha_i$	$\mathbb{H}^i$	$\mathbb{K}_0^i$	$\mathbb{K}_1^i$	$\mathbb{K}_2^i$	$\mathbb{K}_3^i$	$\mathbb{K}_4^i$	$\mathbb{K}_5^i$	$\mathbb{K}_6^i$	$\dim \mathbb{H}^i$	$\alpha_i \dim \mathbb{H}^i$	$\Sigma$
5	0	o							1	5	5
4	1#	*	o*						1	4	9
10	2	o	*o	o*					3	30	39
5	3#	*	o*	*o	o*				3	15	54
5	4	o	*o	o*	*o	o*			5	25	79
1	5#	*	o*	*o	o*	*o	o*		5	5	84
1	6	o	*o	o*	*o	o*	*o	o*	7	7	91

(II-5.19)

Pour cette symétrie matériel le tenseur est défini par la donnée de 91 coefficients sur les 171 coefficients totaux.

Pour revenir à l'étude des invariances matérielles diédrales, il nous suffit de remarquer qu'un milieu  $D_m$ -invariant est à la fois  $Z_m$ -invariant et  $Z_2^p$  invariant. De fait les coefficients d'un tenseur défini sur un tel milieu doivent vérifier les deux invariances. Ceci nous permet d'énoncer une troisième règle de remplissage de nos tableaux.

**Propriété 6** Soit un milieu  $D_m$ -invariant. L'ensemble des coefficients non-nuls du tableau de décomposition est l'intersection des coefficients non-nuls des tableaux de décomposition pour un milieu  $Z_m$ -invariant et un milieu  $Z_2^p$ -invariant.

Comme précédemment nous illustrerons cette règle dans le cas de milieu  $D_2$ - et  $D_3$ -invariant, l'ensemble des autres tableaux pourra facilement être déduit.

**Cas de la  $D_2$ -invariance** Le tableau de décomposition s'écrit :

$\alpha_i$	$\mathbb{H}^i$	$\mathbb{K}_0^i$	$\mathbb{K}_1^i$	$\mathbb{K}_2^i$	$\mathbb{K}_3^i$	$\mathbb{K}_4^i$	$\mathbb{K}_5^i$	$\mathbb{K}_6^i$	$\dim \mathbb{H}^i$	$\alpha_i \dim \mathbb{H}^i$	$\Sigma$
5	0	$\mathcal{O}$							1	5	5
4	1 <sup>#</sup>	*	**						0	0	5
10	2	$\mathcal{O}$	**	$\mathcal{O}$ *					2	20	25
5	3 <sup>#</sup>	*	**	* $\mathcal{O}$	**				1	5	30
5	4	$\mathcal{O}$	**	$\mathcal{O}$ *	**	$\mathcal{O}$ *			3	15	45
1	5 <sup>#</sup>	*	**	* $\mathcal{O}$	**	* $\mathcal{O}$	**		2	2	47
1	6	$\mathcal{O}$	**	$\mathcal{O}$ *	**	$\mathcal{O}$ *	**	$\mathcal{O}$ *	4	4	51

(II-5.20)

Un tenseur du second ordre  $D_2$ -invariant est défini par la donnée de 51 coefficients sur les 171 coefficients totaux.

**Cas de la  $D_3$ -invariance** Le tableau de décomposition s'écrit :

$\alpha_i$	$\mathbb{H}^i$	$\mathbb{K}_0^i$	$\mathbb{K}_1^i$	$\mathbb{K}_2^i$	$\mathbb{K}_3^i$	$\mathbb{K}_4^i$	$\mathbb{K}_5^i$	$\mathbb{K}_6^i$	$\dim \mathbb{H}^i$	$\alpha_i \dim \mathbb{H}^i$	$\Sigma$
5	0	$\mathcal{O}$							1	5	5
4	1 <sup>#</sup>	*	**						0	0	5
10	2	$\mathcal{O}$	**	**					1	10	15
5	3 <sup>#</sup>	*	**	**	$\mathcal{O}$ *				1	5	20
5	4	$\mathcal{O}$	**	**	* $\mathcal{O}$	**			2	10	30
1	5 <sup>#</sup>	*	**	**	$\mathcal{O}$ *	**	**		1	1	31
1	6	$\mathcal{O}$	**	**	* $\mathcal{O}$	**	**	$\mathcal{O}$ *	3	3	34

(II-5.21)

Un tenseur du second ordre  $D_3$ -invariant est défini par la donnée de 34 coefficients sur les 171 coefficients totaux.

Ces résultats peuvent également être retrouvés de manière purement analytique.

### Dimension des sous-espaces $D_m$ -invariants

L'expression de la condition d'invariance (II-5.18) permet d'obtenir une formule analytique nous donnant pour espace  $\mathbb{H}^i$  la dimension de son sous-espace  $D_m$ -invariant. Rappelons que dans le cas d'un milieu  $Z_m$ -invariant un tenseur harmonique d'ordre  $i$  dépend de  $2 \lfloor \frac{i}{m} \rfloor + 1$  coefficients. Sur cet ensemble de coefficients la condition (II-5.18) en annule un sur deux. Comme, de plus, le coefficient d'ordre 0 disparaît pour  $\mathbb{H}^{2p+1}$ , on aboutit à la formule analytique :

$$\dim \text{Fix}_{\mathbb{H}^i}(D_m) = \begin{cases} \lfloor \frac{i}{m} \rfloor + 1 & i = 2p \\ \lfloor \frac{i}{m} \rfloor & i = 2p + 1 \end{cases} \quad (\text{II-5.22})$$

De fait si l'on la décomposition  $\text{SO}(3)$ -isotypique d'un tenseur d'ordre  $n$  de la manière suivante :

$$\text{Sp}(\mathbb{T}) = \bigoplus \alpha_i \mathbb{H}^i \quad (\text{II-5.23})$$

alors on a immédiatement

$$\dim \text{Fix}_{\mathbb{T}}(D_m) = \sum_{i=0}^n \alpha_i \left\lfloor \frac{i}{m} \right\rfloor + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \alpha_{2i} \quad (\text{II-5.24})$$

Notons  $\beta_{it} = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \alpha_{2i}$ , la relation précédente peut se réécrire :

$$\dim \mathbb{F}ix_{\mathbb{T}}(D_m) = \sum_{i=0}^n \alpha_i \left\lfloor \frac{i}{m} \right\rfloor + \beta_{it} \quad (\text{II-5.25})$$

On note que quand  $m > i$ , alors  $\lfloor \frac{i}{m} \rfloor = 0$ , de fait  $\beta_{it}$  sont le nombre de coefficients de l'isotropie transverse. Ces coefficients sont ceux d'un opérateur qui est donc  $O(2)$ -invariant.

On peut déjà faire un première remarque. La classe d'hémitropie transverse semble être quasiment inconnue dans la communauté mécanicienne. La raison majeure à cela est que cette classe n'existe pas dans le cas de l'élasticité classique. Une démonstration immédiate peut se faire à partir des résultats que nous venons juste d'énoncer. On rappelle que le nombre de coefficients d'hémitropie transverse est égal à la somme des multiplicités des espaces présents dans la décomposition harmonique. De même le nombre de coefficients d'isotropie transverse est égal à la somme des multiplicité des espaces d'ordre pair. Or le spectre harmonique de l'élasticité classique est le suivant :

$$\text{Sp}(\mathbb{E}la_{\mathbb{C}}) = 2\mathbb{H}^0 + 2\mathbb{H}^2 + \mathbb{H}^4 \quad (\text{II-5.26})$$

Comme le spectre harmonique de  $\mathbb{E}la_{\mathbb{C}}$  ne contient que des termes pairs on a  $\beta_{ht} = \beta_{it} = 5$ , les deux classes d'anisotropie sont confondues.

Avant de passer à l'étude des systèmes de symétrie spatiaux, faisons une synthèse des résultats que nous venons d'obtenir.

### II-5.2.3 Synthèse

Avant de continuer il est important de revenir sur plusieurs points. L'étude, via les tableaux de décompositions, des invariances tensorielles induites par les symétrie d'un milieu permet de mieux comprendre le sens physique qu'ont la décomposition de Cartan ainsi que la décomposition harmonique. Ce point-ci précisé nous proposerons un tableau de synthèse des différents opérateurs du second ordre que l'on peut obtenir en fonction des symétries matérielles. Cela appellera quelques remarques sur la physique de ces milieux. Et nous conclurons cette mini-synthèse en nous intéressant aux points communs et aux différences qu'il existe entre une modélisation bidimensionnelle et tridimensionnelle.

Revenons tout d'abord sur les liens qu'il existe entre décomposition harmonique et décomposition de Cartan.

#### Caractère locale la décomposition de Cartan

Remarquons que la symétrie que nous avons appelée miroir en est effectivement une quand elle est exprimée dans un espace de dimension 2 ; dans un espace de dimension 3 cette symétrie est une  $Z_2$ -invariance par rapport à un axe appartenant au plan de travail. Nous notons d'ailleurs cette invariance  $Z_2^p$ . De fait les tenseurs  $Z_2$ -invariant et  $Z_2^p$ -invariant sont définis par le même nombre de coefficients : 91 comme montré par les deux tableaux. De plus si l'on observe nos tableaux les coefficients nuls par ligne ne sont pas les mêmes, mais leur nombre total est le même dans les deux cas.

Ceci est vrai car la décomposition harmonique est  $SO(3)$ -invariante, et en cela les symétries que voient les composantes de cette décomposition sont indépendantes de la base d'observation : les éléments de la décomposition harmonique ont une vision « globale » des invariances. Au contraire la décomposition de Cartan correspond à un point de vue « locale », à partir d'une base définie, des invariances. Ces remarques nous seront très utiles en pratique lors de l'étude des invariances spatiales.

### Classes de symétries planes tridimensionnelles

**Résultats** On peut donc au travers des techniques présentés dans cette section établir à la main le tableau suivant :

$G_{\mathcal{M}}$	$I$	$Z_2$	$D_2$	$Z_3$	$D_3$	$Z_4$	$D_4$	$Z_5$	$D_5$	$Z_6$	$D_6$	$Z_{n>6}$	$D_{n>6}$
$G_{\mathbb{E}la_A}$	$I$	$Z_2$	$D_2$	$Z_3$	$D_3$	$Z_4$	$D_4$	$Z_5$	$D_5$	$Z_6$	$D_6$	$SO(2)$	$O(2)$
dim	171	91	51	57	34	45	28	35	23	33	22	31	21

(II-5.27)

Ce tableau résume les différentes classes de symétrie plane que l'opérateur d'élasticité du second ordre peut posséder dans un espace physique de dimension 3.

**Analyse** Analysons ce résultat par rapport à ce que l'on connaît bien : l'élasticité classique. Comme montré au cours du chapitre II-4 l'espace vectoriel de ces tenseurs se décompose de la manière suivante :

$$\text{Sp}(\mathbb{E}la_{\mathbb{C}}) = 0^{(2)} \oplus 2^{(2)} \oplus 4 \quad (\text{II-5.28})$$

De fait cela nous permet d'établir, via nos tableaux de décomposition, immédiatement le résultat suivant pour les classes planes :

$G_{\mathcal{M}}$	$I$	$Z_2$	$D_2$	$Z_3$	$D_3$	$Z_4$	$D_4$	$Z_{n>4}, D_{n>4}$
$G_{\mathbb{E}la_{\mathbb{C}}}$	$I$	$Z_2$	$D_2$	$Z_3$	$D_3$	$Z_4$	$D_4$	$O(2)$
dim	21	13	9	7	6	7	6	5

(II-5.29)

Comme montré dans [26] dans le cas d'une  $Z_m$ -invariance on peut toujours trouver une base dans laquelle le tenseur ne dépend que de  $n - 1$  coefficients sur les  $n$  de la classe. Cela revient à aligner 1 coefficient dans le système atomique tel que nous l'avons introduit II-4.2.3. Cela ce comprend très bien graphiquement (voir fig.II-5.1)

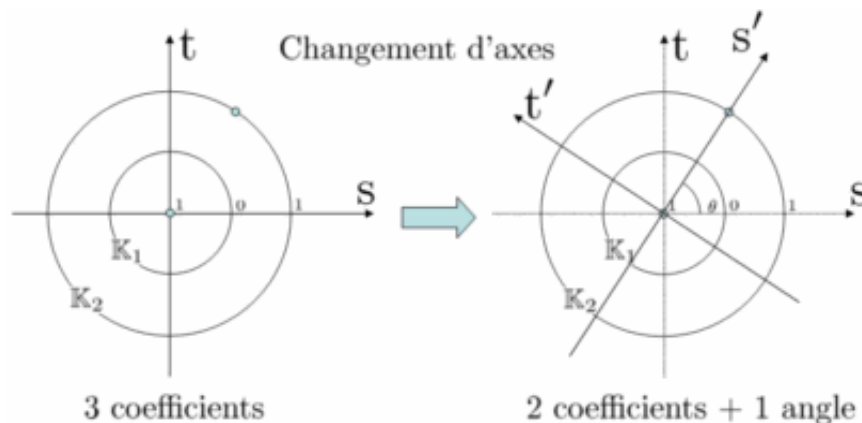


FIG. II-5.1 – Alignement du système atomique

De fait les classes de symétrie de l'élasticité classique peuvent, modulo un changement de base, se réduire de la manière suivante<sup>2</sup> :

$G_{\mathcal{M}}$	$I$	$Z_2$	$D_2$	$Z_3, D_3$	$Z_4, D_4$	$Z_{n>4}, D_{n>4}$	
$G_{\text{Ela}_{\mathcal{C}}}$	$I$	$Z_2$	$D_2$	$D_3$	$D_4$	$O(2)$	(II-5.30)
dim	18	12	9	6	6	5	

Si l'on applique la même réduction à l'élasticité du second ordre nous obtenons alors :

$G_{\mathcal{M}}$	$I$	$Z_2$	$D_2$	$Z_3$	$D_3$	$Z_4$	$D_4$	$Z_5$	$D_5$	$Z_6$	$D_6$	$Z_{n>6}$	$D_{n>6}$	
$G_{\text{Ela}_{\mathcal{A}}}$	$I$	$Z_2$	$D_2$	$Z_3$	$D_3$	$Z_4$	$D_4$	$Z_5$	$D_5$	$Z_6$	$D_6$	$SO(2)$	$O(2)$	(II-5.31)
dim	168	90	51	56	34	44	28	34	23	32	22	31	21	

C'est-à-dire que dans le cas de l'élasticité du second ordre nous n'avons pas ce phénomène de condensation de classe tel qu'il existe pour l'élasticité classique. C'est une première différence entre les deux élasticités. Cette différence vient du fait que l'élasticité classique, du fait de son spectre, constitue un cas particulier et non général de tenseur. Cela a pour conséquence le fait que tandis que l'élasticité classique n'est pas sensible à la chiralité du milieu, l'élasticité du second ordre l'est. Ce point sera illustré au chapitre III-1.

Un autre point de différence majeur est que l'élasticité du second ordre peut voir des systèmes plus anisotropes que l'élasticité du premier ordre. Concrètement alors que l'élasticité classique est isotrope transverse sur un milieu à symétrie hexagonale, l'élasticité du second ordre est elle anisotrope. Cela était prévisible du fait des théorèmes de Hermann [71], ces théorèmes, que l'on retrouve en annexe II-D, nous disent que un tenseur ne peut pas voir une symétrie dont l'ordre excède le nombre de ses indices. Les tableaux de décomposition montrent cela très clairement.

Cela appelle une remarque, lorsque l'on va construire, à partir d'un matériau cellulaire périodique, un milieu homogène équivalent ce milieu aura les symétrie du milieu réel. Or, à partir du principe de restriction cristallographique, on sait qu'un milieu périodique aura une invariance par rotation au maximum d'ordre 6. A cet ordre on retrouve le nid-d'abeille canonique. De fait il est immédiat de conclure qu'un tel milieu sera isotrope transverse pour l'élasticité classique. Conformément à tout ce qui vient d'être dit, un tel milieu homogénéisé au second ordre n'est plus isotrope transverse. De même, et de manière général, nous pouvons affirmer que l'élasticité du second gradient ne peut être isotrope transverse pour aucun pavage périodique du plan. De fait la question est de savoir l'on peut construire un milieu telle que l'élasticité du second gradient soit isotrope transverse dessus. La réponse vient probablement de l'étude des propriétés élastiques des pavage quasi-périodiques du plan [81]. Le pavage suivant (fig.II-5.2), ou pavage d'Ammann-Beenker, possède la symétrie matérielle  $D_8$  [82]. En toute rigueur le modèle d'élasticité que nous étudions devrait être isotrope transverse sur un tel milieu.

Regardons à présent ce qu'il se passe dans un espace de dimension 2.

### Classes de symétries bidimensionnelles

Tout ce qui vient d'être dit est directement applicable à un modèle purement bidimensionnel.

<sup>2</sup>Dans le cas de la  $I$ -invariance, l'orientation du repère dans l'espace permet d'annuler 3 coefficients [65, 66].



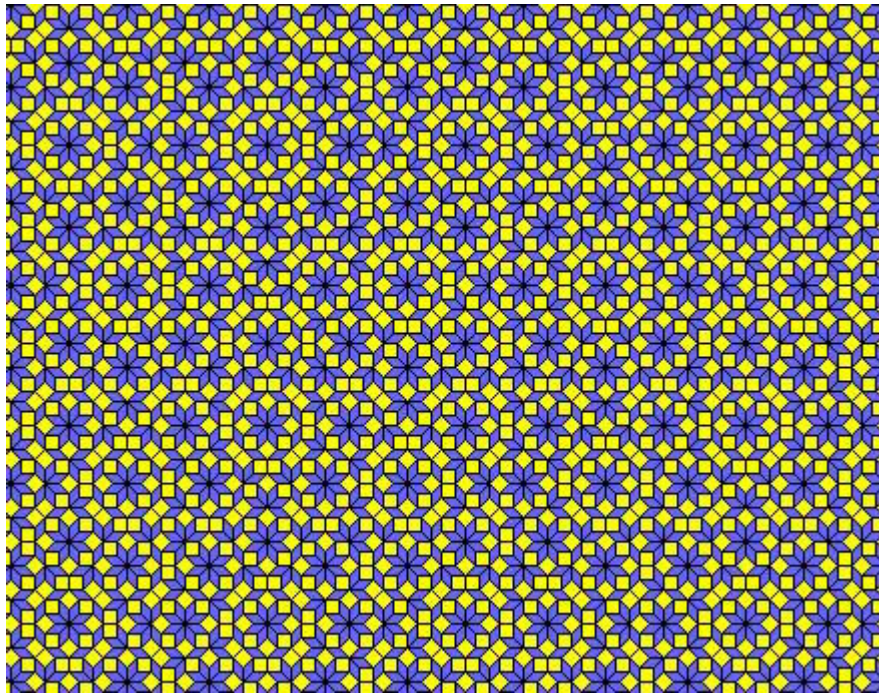


FIG. II-5.2 – Pavage octagonal d’Ammann-Beenker

**Résultats** Dans le cas d’un espace de dimension 2 nous obtenons les résultats suivants :

$G_{\mathcal{M}}$	$I, Z_2$	$D_2$	$Z_4$	$D_4$	$Z_3, Z_6$	$D_3, D_6$	$Z_5, Z_{n>7}$	$D_5, D_{n>7}$
$G_{\text{Ela}_A}$	$I$	$D_2$	$Z_4$	$D_4$	$Z_6$	$D_6$	$SO(2)$	$O(2)$
dim	21	12	9	6	7	5	5	4

(II-5.32)

**Analyse** Tout ce qui a été dit dans le cas tridimensionnel reste vrai ici. Toutefois un nouveau phénomène qui est spécifique à la dimension de l’espace apparaît : les sauts de classes.

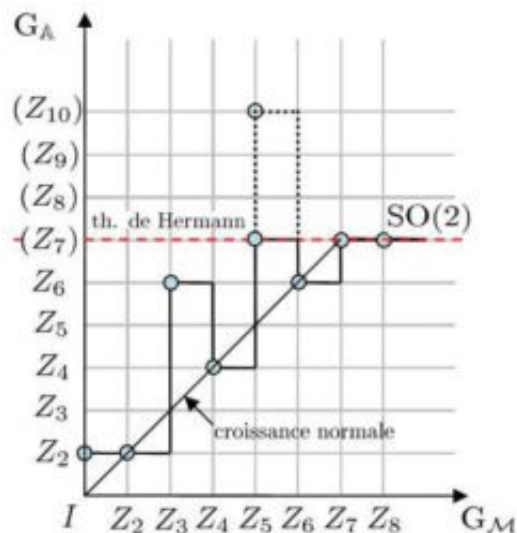


FIG. II-5.3 – Phénomène de saut de classe en dimension 2

Ce phénomène n’est pas lié au tenseur étudié mais est propre au caractère bidimensionnel de l’espace physique. L’étude détaillée de ce phénomène a fait l’objet d’un article [83] et pourra

Invariance materielle	$I$	$Z_2$	$Z_3$	$Z_4$	$Z_5$	$Z_6$
Invariance tensorielle en 2D						
Invariance tensorielle en 3D						

FIG. II-5.4 – Mécanisme de saut de classe

être retrouvé en annexe II-E.

Cela peut se constater simplement en remarquant qu'en 2-D un milieu sans symétrie et un milieu  $Z_2$ -invariant induisent la même symétrie physique. Dit autrement, en 2-D, un tenseur sur un milieu sans symétrie est automatiquement  $Z_2$ -invariant. C'est ce phénomène qui n'existe pas en 3-D qui est responsable des sauts de classe. Cela peut s'illustrer de la manière suivante. On considère d'un côté la symétrie du milieu et de l'autre la symétrie de la propriété physique. Alors si quand le milieu n'a pas de symétrie notre propriété physique est, naturellement,  $Z_2$ -invariante alors quand le milieu sera  $Z_{2p+1}$ -invariant la propriété sera  $Z_{2(2p+1)}$ . Ce cas correspond à un espace de dimension 2. Dans le cas 3-D un opérateur défini sur un milieu sans symétrie est également sans symétrie, auquel tout se passe bien et l'on a pas ce phénomène de saut de classe. La figure fig.II-5.4 illustre cela graphiquement.

Concrètement la portée de ce résultat est double. Tout d'abord cela nous précise qu'une modélisation bidimensionnelle implique un certain nombre d'hypothèses qui ont des conséquences potentiellement importantes sur les résultats. Il faut garder en tête ces hypothèses pour ne pas faire dire n'importe quoi aux résultats obtenus.

Considérons par exemple le pavage quasi-périodique de Penrose (fig.II-5.5). Ce pavage est  $Z_5$ -invariant. Considérons qu'il représente un milieu élastique, le milieu représenté est-il isotrope ou bien anisotrope ?

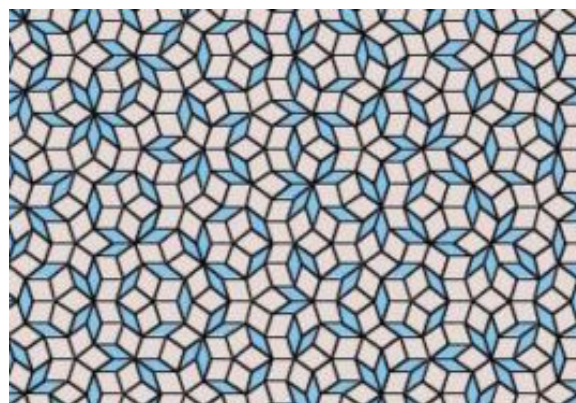


FIG. II-5.5 – Pavage quasi-périodique de Penrose

La réponse dépend de l'ordre de l'élasticité considérée ainsi que de la dimension de l'espace physique. On considère le tableau suivant

	$C_{(ij)(kl)}$	$A_{(ij)k(lm)n}$
2-D	Isotrope	Isotrope
3-D	Isotrope Transverse	Pentatrophe

Une étude rapide qui n'aurait considérée que la modélisation bidimensionnelle de l'élasticité du second-ordre aurait pu conclure, sans autre précaution, que comme en 2-D un tel milieu est isotrope alors nécessairement en 3-D on retrouve l'isotropie transverse. Raisonement qui est faux. L'isotropie en 2-D n'implique pas l'isotropie transverse en 3-D.

Le deuxième point soulevé est physiquement plus intéressant. A quoi correspond l'opérateur bidimensionnel par rapport à celui tridimensionnel ? On peut montrer assez simplement que l'opérateur bidimensionnel est strictement inclus dans celui tridimensionnel. En d'autres termes on peut extraire de la matrice 3-D de l'opérateur une matrice correspondant à l'opérateur 2-D. La matrice de A peut être représentée, dans un espace de dimension 3, sous la forme suivante :

$$\left( \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{c} x \otimes x \end{array} \right] \\ \left[ \begin{array}{c} x \otimes y \\ y \otimes y \end{array} \right] \\ \left[ \begin{array}{c} x \otimes z \\ y \otimes z \\ z \otimes z \end{array} \right] \\ \left[ \begin{array}{c} x \otimes c \\ y \otimes c \\ z \otimes c \\ c \otimes c \end{array} \right] \end{array} \right) \quad (\text{II-5.33})$$

où les  $x, y, z$  représentent les mécanismes dans les directions considérées. Le terme  $c$ , quant à lui représente un terme de couplage entre les trois directions. Nous pouvons noter toutefois que si l'on se place dans un plan de normale  $\underline{z}$  alors l'opérateur bidimensionnel extrait est nécessairement une sous matrice de :

$$\left( \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{c} x \otimes x \end{array} \right] \\ \left[ \begin{array}{c} x \otimes y \\ y \otimes y \end{array} \right] \end{array} \right) \quad (\text{II-5.34})$$

que nous noterons<sup>3</sup> :

$$\left( \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{c} x_{2D} \otimes x_{2D} \end{array} \right] \\ \left[ \begin{array}{c} x_{2D} \otimes y_{2D} \\ y_{2D} \otimes y_{2D} \end{array} \right] \end{array} \right) \quad (\text{II-5.35})$$

<sup>3</sup>Une discussion détaillée sur cette représentation pourra être trouvée à la III-1.7.2

La différence entre les matrices (II-5.34) et (II-5.35) étant que la deuxième ne contient pas les couplages hors-plans. Cette dernière matrice est donc invariante, dans un espace de dimension 3, que l'opérateur soit  $Z_{2p+1}$ -invariant ou  $Z_{2(2p+1)}$ -invariant. On comprend par cela que dans un espace de dimension 3 la différence entre un opérateur tensoriel d'ordre pair  $Z_{2p+1}$ -invariant et  $Z_{2(2p+1)}$ -invariant, ne concerne que les composantes hors-plan de cet opérateur. La démonstration est une conséquence directe des remarques faites ci-dessus ainsi que des résultats démontrés proprement dans l'annexe II-E.

Regardons ce qu'il en est, à présent des restrictions induites par les invariances spatiales.

## II-5.3 Étude des groupes spatiaux

Comme détaillé au cours du II-3.3 par groupes spatiaux nous entendons les groupes de symétries des solides platoniciens, c'est-à-dire du tétraèdre ( $\mathcal{T}$ ), du cube ( $\mathcal{O}$ ), de l'icosaèdre ( $\mathcal{I}$ ), complétés du groupe de symétrie de la sphère  $SO(3)$ . L'étude des invariances tensorielles induites par ces symétries est plus complexe que dans les cas plans traités jusqu'à maintenant. Les calculs ne sont plus forcément réalisable à la main, et nous avons donc complété notre approche par l'utilisation d'un logiciel de calcul formel. Nous ne rentrerons pas dans cette sous-section dans les détails de l'algorithme mise en oeuvre pour d'obtention de ces résultats, l'ensemble de ces renseignements pourra être trouvé dans l'annexe II-A. Nous nous contenterons d'explicitier dans les grandes lignes la méthode utilisée ainsi que de fournir les principaux résultats.

Le matériel de base de notre approche sera le groupe de symétrie du tétraèdre car, comme expliqué au II-3.3, à partir de sa connaissance nous pouvons engendrer tous les autres groupes de symétries.

### II-5.3.1 $\mathcal{T}$ -invariance

Dans le cas de l'étude des groupes plans nous avons deux types de groupes distincts :  $Z_m$  et  $Z_2^p$ . L'invariance sous l'action du générateur de  $Z_m$  engendre les symétries cycliques de nos opérateurs. Combinée à  $Z_2^p$  on obtient alors les symétries diédrales. L'action de  $Z_2^p$  n'est pas, à strictement parler, une action plane car elle agit comme rotation de  $\pi$  dans un plan orthogonal à celui de la base de Cartan considéré. Toutefois nous l'associons à une invariance plane car, dans un espace de dimension 2, cette opération continue à exister exprimée comme un miroir.

De fait nous pouvons considérer comme spatial un groupe dont les axes de rotations des générateurs ne sont pas orthogonaux entre eux. Cela nous empêche d'utiliser directement les tableaux de décomposition tels que nous les avons exprimés précédemment. En effet comme la décomposition de Cartan n'est pas  $SO(3)$ -invariante celle-ci diffère dans les différents plans de symétrie. Pour continuer d'utiliser notre approche il nous faut transporter la décomposition de Cartan dans chacun de ces différents plans de symétrie. L'union des conditions sur les coefficients obtenues dans les différents systèmes de symétrie nous permettra de conclure quant aux coefficients de l'opérateur dans la classe spatiale considérée.

Regardons le cas du tétraèdre fig.II-5.6.

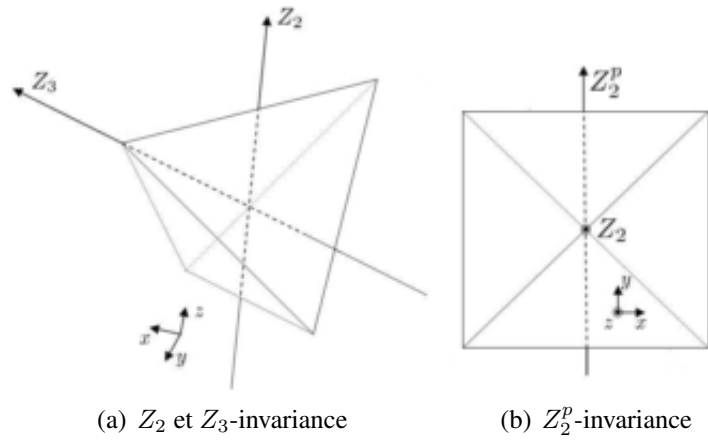


FIG. II-5.6 – Différentes invariances planes dans différents plans

Comme discuté au II-3.3 le produit des ordres des groupes représentés fig.II-5.6 est égal à l'ordre du groupe de symétrie du tétraèdre.

Si nous positionnons le tétraèdre précédent dans un repère cartésien de manière à ce que l'axe de la  $D_2$  invariance soit colinéaire à l'axe  $z$  alors la  $Z_3$ -invariance s'exprime dans un plan dont la normale est la trisectrice du repère. Nous pouvons choisir d'orienter le tétraèdre tel que l'axe de la  $Z_3$ -invariance soit colinéaire à  $\underline{n} = \underline{x} + \underline{y} + \underline{z}$ .

Ainsi nous avons dans le plan de normale  $\underline{x} + \underline{y} + \underline{z}$  le tableau de décomposition suivant

$\alpha_i$	$\mathbb{H}^i$	$\mathbb{K}_0^i$	$\mathbb{K}_1^i$	$\mathbb{K}_2^i$	$\mathbb{K}_3^i$	$\mathbb{K}_4^i$	$\mathbb{K}_5^i$	$\mathbb{K}_6^i$	dim $\mathbb{H}^i$	$\alpha_i$ dim $\mathbb{H}^i$	$\Sigma$
5	0	o							1	5	5
4	1 <sup>#</sup>	o	**						1	4	9
10	2	o	**	**					1	10	19
5	3 <sup>#</sup>	o	**	**	oo				3	15	34
5	4	o	**	**	oo	**			3	15	49
1	5 <sup>#</sup>	o	**	**	oo	**	**		3	3	52
1	6	o	**	**	oo	**	**	oo	5	5	57

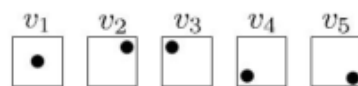
(II-5.36)

Pour continuer il nous faut à présent introduire une nouvelle notation. Si l'on considère, dans le tableau II-5.36, la ligne correspondant au sous-espace  $\mathbb{H}^6$ , la notation  $o$  indique, dans les cases dans lesquelles elle apparaît, un coefficient indépendant. Ainsi le sous-espace  $\mathbb{H}^6$  est défini par la donnée de 5 coefficients. On a le diagramme :

	$\mathbb{K}_0$	$\mathbb{K}_1$	$\mathbb{K}_2$	$\mathbb{K}_3$	$\mathbb{K}_4$	$\mathbb{K}_5$	$\mathbb{K}_6$	dim $\mathbb{H}$
$\mathbb{H}^6$	o	**	**	oo	**	**	oo	5

(II-5.37)

Cette notation est valable dans le plan, cependant si nous changeons notre tableau de base, ces 5 coefficients vont s'exprimer dans d'autres cases sous forme de combinaisons linéaires. De fait il nous faut mettre en oeuvre une notation nous permettant de « suivre » ces coefficients. Dans cet optique nous proposons d'adopter une notation sous forme de « dés » :



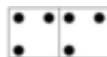
Ce qui nous permet de réécrire notre sous-espace  $\mathbb{H}^6$ , de la manière suivante<sup>4</sup> :

	$\mathbb{K}_0$	$\mathbb{K}_1$	$\mathbb{K}_2$	$\mathbb{K}_3$	$\mathbb{K}_4$	$\mathbb{K}_5$	$\mathbb{K}_6$	dim $\mathbb{H}$
$\mathbb{H}^6$	◻	◻◻	◻◻	◻◻	◻◻	◻◻	◻◻	5

En adoptant cette convention pour l'ensemble du tableau, nous pouvons le réécrire dans une nouvelle base. De fait dans le plan de normale  $\underline{z}$  le tableau se réécrit

$\alpha_i$	$\mathbb{H}^i$	$\mathbb{K}'_0$	$\mathbb{K}'_1$	$\mathbb{K}'_2$	$\mathbb{K}'_3$	$\mathbb{K}'_4$	$\mathbb{K}'_5$	$\mathbb{K}'_6$	dim $\mathbb{H}^i$	$\alpha_i \dim \mathbb{H}^i$	$\Sigma$
5	0	◻							1	5	5
4	1 <sup>#</sup>	◻	◻◻						1	4	9
10	2	◻	◻◻	◻◻					1	10	19
5	3 <sup>#</sup>	◻	◻◻	◻◻	◻◻				3	15	34
5	4	◻	◻◻	◻◻	◻◻	◻◻			3	15	49
1	5 <sup>#</sup>	◻	◻◻	◻◻	◻◻	◻◻	◻◻		3	3	52
1	6	◻	◻◻	◻◻	◻◻	◻◻	◻◻	◻◻	5	5	57

Les coefficients  $Z_3$ -invariants apparaissent dans ce plan sous forme de combinaisons linéaires. Il faut encore préciser une chose, considérons le sous-espace  $\mathbb{K}_3$  de  $\mathbb{H}^6$ , on a le « domino » :



Ceci ne signifie pas que les coefficients sont les mêmes dans les deux cases du domino, cela signifie juste que le coefficient dans la case s ainsi que le coefficient dans la case t sont des combinaisons linéaire de  $v_1, v_2$  et  $v_3$ .

Ceci précisé pour conclure quant aux restrictions tensorielles imposées par la symétrie tétraédrique, il reste plus qu'à appliquer les règles d'éliminations liés à une  $D_2$ -invariance matérielle. On obtient au final :

$\alpha_i$	$\mathbb{H}^i$	$\mathbb{K}'_0$	$\mathbb{K}'_1$	$\mathbb{K}'_2$	$\mathbb{K}'_3$	$\mathbb{K}'_4$	$\mathbb{K}'_5$	$\mathbb{K}'_6$	dim $\mathbb{H}^i$	$\alpha_i \dim \mathbb{H}^i$	$\Sigma$
5	0	◻							1	5	5
4	1 <sup>#</sup>	◻	◻◻						0	0	5
10	2	◻	◻◻	◻◻					0	0	5
5	3 <sup>#</sup>	◻	◻◻	◻◻	◻◻				1	5	10
5	4	◻	◻◻	◻◻	◻◻	◻◻			1	5	15
1	5 <sup>#</sup>	◻	◻◻	◻◻	◻◻	◻◻	◻◻		0	0	15
1	6	◻	◻◻	◻◻	◻◻	◻◻	◻◻	◻◻	2	2	17

On en conclut qu'un tenseur du second ordre  $\mathcal{T}$ -invariant, est défini par la donnée de 17 coefficients indépendants sur les 171 coefficients totaux.

<sup>4</sup>Dans cette notation il est évident que la  $\times$  est équivalent à l' \* des tableaux précédents.

## Dimension des sous-espaces $\mathcal{T}$ -invariants

Contrairement aux groupes plans nous n'avons pas exprimé ici directement la condition d'invariance imposée par la symétrie tétraédrique. Nous avons utilisé les résultats plans précédents que nous avons combinés dans divers repères. Comme montré dans [64] par cette technique on peut également obtenir une formule analytique permettant d'exprimer la dimension du sous-espace  $\mathcal{T}$ -invariant de  $\mathbb{H}^i$ . On obtient la relation

$$\dim \text{Fix}_{\mathbb{H}^i}(\mathcal{T}) = 2 \left\lfloor \frac{i}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor - i + 1 \quad (\text{II-5.38})$$

De fait on a immédiatement

$$\dim \text{Fix}_{\mathbb{T}}(\mathcal{T}) = \sum_{i=0}^n \alpha_i (2 \left\lfloor \frac{i}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor - i + 1) \quad (\text{II-5.39})$$

Passons à la  $\mathcal{O}$ -invariance.

### II-5.3.2 $\mathcal{O}$ -invariance

#### Tableau de décomposition

L'invariance octaédrique se déduit directement de l'invariance tétraédrique. On considère l'octangle étoilé fig.II-5.7.

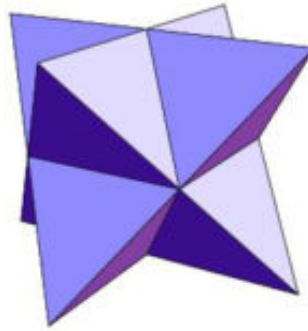


FIG. II-5.7 – Octangle étoilé

Son groupe de symétrie est le groupe octaédrique. L'octangle étoilé peut être vu comme un tétraèdre  $Z_4$ -invariant. Cette invariance s'exprime dans le même plan que la  $D_2$ -invariance du tétraèdre, on peut donc conclure directement en utilisant ce tableau de décomposition. Il nous suffit pour cela d'exclure les colonnes dont l'indice de Cartan n'est pas un multiple de 4. Ce qui nous permet d'obtenir le tableau de décomposition suivant :

$\alpha_i$	$\mathbb{H}^i$	$K_0^i$	$K_1^i$	$K_2^i$	$K_3^i$	$K_4^i$	$K_5^i$	$K_6^i$	$\dim \mathbb{H}^i$	$\alpha_i \dim \mathbb{H}^i$	$\Sigma$
5	0	•							1	5	5
4	1 <sup>#</sup>	x	xx						0	0	5
10	2	x	xx	xx					0	0	5
5	3 <sup>#</sup>	x	xx	xx	xx				0	0	5
5	4	•	xx	x>	xx	•x			1	5	10
1	5 <sup>#</sup>	x	xx	xx	xx	xx	xx		0	0	10
1	6	•	xx	xx	xx	•x	xx	xx	1	1	11

On en conclut qu'un tenseur du second ordre  $\mathcal{O}$ -invariant, est défini par la donnée de 11 coefficients indépendants sur les 171 coefficients totaux.

Il est évident que l'on aurait pu obtenir ces résultats directement à partir des symétries du cube, sans faire appel à la notion de composé tétraédrique. Toutefois l'approche par les composés est plus générale et met en avant le rôle de brique de base du groupe tétraédrique. Comme nous le verrons dans la sous-section suivante dans le cas de la symétrie icosaédrique les liens entre les différentes symétries sont beaucoup moins intuitifs et cet outil nous garantit de travailler proprement.

### Dimension des sous-espaces $\mathcal{O}$ -invariants

De la même manière que pour l'invariance tétraédrique, on peut obtenir une formule analytique permettant d'exprimer la dimension du sous-espace  $\mathcal{O}$ -invariant de  $\mathbb{H}^i$ . On a

$$\dim \text{Fix}_{\mathbb{H}^i}(\mathcal{O}) = \left\lfloor \frac{i}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{i}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor - i + 1 \quad (\text{II-5.40})$$

Et donc pour le tenseur complet :

$$\dim \text{Fix}_{\mathbb{T}}(\mathcal{O}) = \sum_{i=0}^n \alpha_i \left( \left\lfloor \frac{i}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{i}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor - i + 1 \right) \quad (\text{II-5.41})$$

On peut également récrire ces relations en faisant apparaître la symétrie tétraédrique. On obtient alors successivement :

$$\dim \text{Fix}_{\mathbb{H}^i}(\mathcal{O}) = \left\lfloor \frac{i}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{i}{3} \right\rfloor + \dim \text{Fix}_{\mathbb{H}^i}(\mathcal{T}) \quad (\text{II-5.42})$$

ainsi que :

$$\dim \text{Fix}_{\mathbb{T}}(\mathcal{O}) = \dim \text{Fix}_{\mathbb{T}}(D_4) - \dim \text{Fix}_{\mathbb{T}}(D_3) + \dim \text{Fix}_{\mathbb{T}}(\mathcal{T}) \quad (\text{II-5.43})$$

Cette dernière formule nous permet de déduire un certain nombre de résultats à partir de la connaissance des systèmes plans. Un excellent exemple de cela concerne l'élasticité classique. On a établi, au II-5.2.3, que les tenseurs  $D_3$  et  $D_4$ -invariants dépendent du même nombre de coefficients. Alors on peut en conclure que les classes  $\mathcal{T}$  et  $\mathcal{O}$  sont confondues. On peut dire cela car  $\mathcal{T}$  est un sous-groupe de  $\mathcal{O}$ , donc  $\text{Fix}_{\mathbb{T}}(\mathcal{O}) \subseteq \text{Fix}_{\mathbb{T}}(\mathcal{T})$  et, d'après la formule (II-5.43), ces deux espaces sont de même dimensions. On a directement le résultat  $\text{Fix}_{\mathbb{E}la_c}(\mathcal{O}) = \text{Fix}_{\mathbb{E}la_c}(\mathcal{T})$ . Ce résultat est intéressant car on peut l'appliquer directement sur le nombre de coefficients d'une matrice sans pour autant avoir établi la décomposition de l'opérateur associé. Un autre exemple de cette approche sera donné au paragraphe suivant.

Passons à présent au cas de l' $\mathcal{I}$ -invariance.

### II-5.3.3 $\mathcal{I}$ -invariance

Le cas de l'icosaèdre est le plus délicat à traiter. Une des raisons est que les composantes des rotations sont des nombres irrationnels. De fait, il faut traiter le problème proprement pour obtenir un résultat et garantir que celui-ci est le bon. L'annexe II-A, qui concerne l'algorithme mis en œuvre dans la résolution de ce problème, traite essentiellement des problèmes liés au



calcul formel des propriétés de l'icosaèdre. De fait nous ne rentrerons pas ici dans des considérations techniques.

Le principe d'obtention des coefficients dans la symétrie icosaédrique est sensiblement identique au cas octaédrique. Toutefois alors que dans le cas précédent on pouvait travailler directement dans le système des symétries du cube sans faire appel à la notion de composé tétraédrique, dans le cas de l'icosaèdre travailler à partir de cette notion minimise le risque d'erreurs de calcul.

Comme illustré II-3.3.2 le composé 5-tétraédrique possède le même groupe d'invariance que l'icosaèdre. Le composé 5-tétraédrique est engendré par l'orbite du tétraèdre autour d'un axe bien choisie. Si nous écrivons la décomposition de Cartan de la symétrie du tétraèdre dans le plan normal à cet axe, alors, par application des règles de simplification dans le plan, nous obtenons le jeu de coefficients d'un tenseur possédant cette invariance.

On rappelle que le tableau de décomposition du tétraèdre s'écrit, dans le plan de normale  $\underline{z}$ , de la manière suivante :

$\alpha_i$	$\mathbb{H}^i$	$K_0^i$	$K_1^i$	$K_2^i$	$K_3^i$	$K_4^i$	$K_5^i$	$K_6^i$	$\dim \mathbb{H}^i$	$\alpha_i \dim \mathbb{H}^i$	$\Sigma$
5	0	□							1	5	5
4	1#	×	×						0	0	5
10	2	×	×	×					0	0	5
5	3#	×	×	×	×				1	5	10
5	4	□	×	×	×	×	×		1	5	15
1	5#	×	×	×	×	×	×	×	0	0	15
1	6	□	×	×	×	×	×	×	2	2	17

après le changement de base adapté à la génération du tétraèdre, ce tableau se réécrit :

$\alpha_i$	$\mathbb{H}^i$	$K_0^i$	$K_1^i$	$K_2^i$	$K_3^i$	$K_4^i$	$K_5^i$	$K_6^i$	$\dim \mathbb{H}^i$	$\alpha_i \dim \mathbb{H}^i$	$\Sigma$
5	0	□							1	5	5
4	1#	×	×						0	0	5
10	2	×	×	×					0	0	5
5	3#	×	×	×	×				1	5	10
5	4	×	×	×	×	×	×		1	5	15
1	5#	×	×	×	×	×	×	×	0	0	15
1	6	□	×	×	×	×	×	×	2	2	17

On remarque que cette fois-ci, comme chacune des cases dépend de deux paramètres, on ne pourra pas appliqué graphiquement notre critère d'exclusion. Nous le ferons donc formellement sur les combinaisons linéaires exactes de chacune de ces cases.

Avant de formuler notre conclusion, analysons le problème. Nous pouvons savoir, a priori, que si il existe une anisotropie pour la classe icosaédrique alors celle ci ne peut provenir que du sous-espace  $\mathbb{H}^6$ . A la vue des coefficients dans le système tétraédrique on voit que si il y a une anisotropie de la classe icosaédrique alors celle-ci se situe dans un des sous-espaces suivants :  $\mathbb{H}^3$ ,  $\mathbb{H}^4$  ou  $\mathbb{H}^6$ . Hors ceci n'est pas possible pour les espaces  $\mathbb{H}^3$ ,  $\mathbb{H}^4$ . Supposons que cela soit vrai pour  $\mathbb{H}^4$ , alors dans le plan de la  $Z_5$ -invariance, d'après le théorème de Hermann, le tenseur

serait isotrope transverse et son unique coefficient anisotrope serait dans le sous-espace de Cartan d'ordre 0. Comme l'icosaèdre possède une  $Z_5$ -invariance dans 6 plans distincts, alors  $\mathbb{H}^4$  serait isotrope transverse dans ces 6 plans, ce qui n'est pas possible donc tous les coefficients de  $\mathbb{H}^4$  sont nuls. De même pour  $\mathbb{H}^3$ . De fait si le tenseur présente une anisotropie icosaédrique celle-ci ne peut provenir que de  $\mathbb{H}^6$ . Ces résultats sont confirmés par la littérature car ni le tenseur d'élasticité [26], ni celui de piezoélectricité [59] ne possèdent une classe d'invariance icosaédrique. Tout cela nous permet de conclure que soit cette anisotropie existe auquel cas dans ce système le tenseur dépend de 6 coefficients, ou bien elle n'existe pas et on retrouve l'isotropie donc 5 coefficients.

L'application formelle de notre critère d'exclusion nous permet, au final, d'aboutir au tableau de décomposition suivant :

$\alpha_i$	$\mathbb{H}^i$	$\mathbb{K}_0^i$	$\mathbb{K}_1^i$	$\mathbb{K}_2^i$	$\mathbb{K}_3^i$	$\mathbb{K}_4^i$	$\mathbb{K}_5^i$	$\mathbb{K}_6^i$	$\dim \mathbb{H}^i$	$\alpha_i \dim \mathbb{H}^i$	$\Sigma$
5	0	□							1	5	5
4	1 <sup>#</sup>	×	×						0	0	5
10	2	×	×	×					0	0	5
5	3 <sup>#</sup>	×	×	×	×				0	0	5
5	4	×	×	×	×	×			0	0	5
1	5 <sup>#</sup>	×	×	×	×	×	×		0	0	5
1	6	□	×	×	×	×	×	×	1	1	6

TAB. II-5.1 – Tableau de décomposition dans la symétrie icosaédrique

On trouve donc un système anisotrope dépendant de 6 coefficients.

Est-ce que ce résultat est le bon ? Un premier indice est que l'on trouve un nombre de coefficients dans cette classe de symétrie qui est strictement compris entre celui de la symétrie cubique et celui de l'isotropie. Par propriété des solides platoniciens, et sous la condition que notre algorithme ne présente pas d'erreurs, si cette solution existe elle est nécessairement la bonne.

Pour vérifier le fonctionnement de notre algorithme nous avons effectué un calcul à partir d'un axe « faux » n'engendrant aucun solide platonicien. Le tenseur résultant, invariant par transformation autour de cet axe, est le tenseur d'isotropie. Ce petit test garanti la cohérence de notre approche. La classe d'anisotropie icosaédrique est donc bien définie par 6 coefficients. De plus comme, comme dans les cas précédents, nous pouvons redémontrer ce résultat de manière purement algébrique.

### Dimension des sous-espaces $\mathcal{I}$ -invariants

De la même manière que pour les autres solides platoniciens, on peut obtenir une formule analytique permettant d'exprimer la dimension du sous-espace  $\mathcal{I}$ -invariant de  $\mathbb{H}^i$ . On a la relation :

$$\dim \text{Fix}_{\mathbb{H}^i}(\mathcal{I}) = \left\lfloor \frac{i}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{i}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor - i + 1 \quad (\text{II-5.44})$$

qui se somme pour le tenseur complet :

$$\dim \text{Fix}_{\mathbb{T}}(\mathcal{I}) = \sum_{i=0}^n \alpha_i \left( \left\lfloor \frac{i}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{i}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor - i + 1 \right) \quad (\text{II-5.45})$$

On peut également écrire ces relations en faisant apparaître la symétrie tétraédrique :

$$\dim \text{Fix}_{\mathbb{H}^i}(\mathcal{I}) = \left\lfloor \frac{i}{5} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{i}{3} \right\rfloor + \dim \text{Fix}_{\mathbb{H}^i}(\mathcal{T}) \quad (\text{II-5.46})$$

On obtient alors pour le tenseur complet :

$$\dim \text{Fix}_{\mathbb{T}}(\mathcal{I}) = \dim \text{Fix}_{\mathbb{T}}(D_5) - \dim \text{Fix}_{\mathbb{T}}(D_3) + \dim \text{Fix}_{\mathbb{T}}(\mathcal{T}) \quad (\text{II-5.47})$$

ou bien encore :

$$\dim \text{Fix}_{\mathbb{T}}(\mathcal{I}) = \dim \text{Fix}_{\mathbb{T}}(D_5) - \dim \text{Fix}_{\mathbb{T}}(D_4) + \dim \text{Fix}_{\mathbb{T}}(\mathcal{O}) \quad (\text{II-5.48})$$

Le résultat obtenu (II-5.47) est intéressant quand l'on travaille directement sur les matrices d'anisotropies d'un opérateur sans en avoir étudié la décomposition théorique auparavant. En effet l'opérateur le plus pénible à dériver, de part la complexité de ses symétries, est l'opérateur icosaédrique. La première question est donc de savoir si celui ci existe. La formule (II-5.47) permet d'y répondre si l'on connaît quelques matrices. Dans le cas de l'élasticité classique on sait que le système cubique est défini par 3 coefficients, que la  $D_3$ -invariance par 6 et la  $D_5$  par 5. De fait la classe icosaédrique doit être définie par 2 coefficients. Comme  $\mathcal{I}$  est un sous groupe de  $SO(3)$ , et que la classe de symétrie  $SO(3)$ -invariante est définie par 2 coefficients alors les  $\mathcal{I}$  et  $SO(3)$ -invariance sont confondues. Cela permet de conclure immédiatement sur la non-existence d'une classe icosaédrique pour l'élasticité conventionnelle.

Concluons l'étude des groupes spatiaux par le cas de l'isotropie.

### II-5.3.4 $SO(3)$ -invariance

Le résultat est immédiat et s'effectue à la main, on trouve le tableau

$n$	$\mathbb{H}^i$	$\mathbb{K}_0^i$	$\mathbb{K}_1^i$	$\mathbb{K}_2^i$	$\mathbb{K}_3^i$	$\mathbb{K}_4^i$	$\mathbb{K}_5^i$	$\mathbb{K}_6^i$	$\dim \mathbb{H}^i$	$n \dim \mathbb{H}^i$	$\Sigma$
5	0	○							1	5	5
4	1#	*	**						0	0	5
10	2	*	**	**					0	0	5
5	3#	*	**	**	**				0	0	5
5	4	*	**	**	**	**			0	0	5
1	5#	*	**	**	**	**	**		0	0	5
1	6	*	**	**	**	**	**	**	0	0	5

(II-5.49)

### II-5.3.5 Synthèse

L'ensemble des résultats de cette section peut être résumé par le tableau suivant :

$G_{\mathcal{M}}$	$\mathcal{T}$	$\mathcal{O}$	$\mathcal{I}$	$SO(3)$
$G_{\text{Ela}_A}$	$\mathcal{T}$	$\mathcal{O}$	$\mathcal{I}$	$SO(3)$
dim	17	11	6	5

(II-5.50)

Ces résultats ont été obtenues via l'utilisation de l'algorithme que nous présentons en annexe II-A et vérifiés à partir de l'approche analytique de [64]. Ces deux approches qui se complètent nous ont permis de montrer l'existence de systèmes d'anisotropies qui n'existent pas dans l'élasticité classique. L'opérateur du second ordre possède une classe tétraédrique et une

classe icosaédrique distinctes des classes cubique et isotrope. Nous ne savons si cela avait déjà été observé dans la littérature pour d'autre type de comportement. Il est toutefois à noter qu'il est impossible de paver l'espace de manière périodique avec des tétraèdres ou bien des icosaèdres. Toutefois la symétrie icosaédrique existe bien au sein de la matière avec des propriétés de régularités s'approchant de celles des cristaux : ce sont les quasi-cristaux [84].

## II-5.4 Synthèse

Au cours de ce chapitre nous avons mis en oeuvre l'ensemble des techniques introduites au cours de cette deuxième partie. L'utilisation conjointe des travaux fait sur les décompositions (ch.II-4) et la connaissance a priori de la structure des groupes d'invariance matérielle (ch.II-3) nous a permis d'effectuer une étude complète de l'espace vectoriel des tenseurs élastique du second ordre.

Pour cette étude nous avons introduit un outil d'« exclusion » pour obtenir, à partir du tableau de décomposition de notre opérateur, sa structure invariante pour un groupe de symétrie matérielle donnée. Dans le cas des groupes plans, §.II-5.2, l'ensemble de l'étude peut s'effectuer très rapidement à la main. Le cas des groupes spatiaux, §.II-5.3 est un peu plus complexe et nous avons introduit une manière algorithmique de traiter notre problème (ch.II-A).

Notre approche a permis de déterminer l'ensemble des classes de symétrie du tenseur d'élasticité du second ordre, ainsi que le nombre de coefficient le définissant dans chacune de ces classes. L'intérêt de cette approche théorique apparaît dans l'identification de classes de symétrie qui n'existant pas pour l'élasticité classique. La méthode mise en place est exhaustive.

La connaissance de tout cela nous permet à présent de savoir précisément la forme que doivent posséder les opérateurs de comportement à dériver et à implémenter dans un code par éléments-finis. Cette dérivation est l'objectif de la troisième partie de cette thèse.



## ANNEXE II–A

# Algorithme d'étude des symétries spatiales

### II–A.1 Introduction

Cet annexe complète notre travail sur la détermination des classes de symétrie des tenseurs de comportement. Nous avons vu, au cours du chapitre II–5, comment les symétries matérielles imposent des restrictions sur les coefficients des opérateurs de comportement. Nous avons alors évoqué brièvement le cas des symétries spatiales, en nous contentant d'énoncer nos principaux résultats. L'objet de cette annexe est d'explicitier la méthode que nous avons mise en oeuvre pour les obtenir. Tandis que dans le cas des symétries planes nous avons procédé « à la main », pour les systèmes spatiaux nous avons travaillé à partir d'un logiciel de calcul formel.

Nous avons établi, au chapitre II–4, le fait que les composantes d'un tenseur pouvait être représentées dans un tableau : le tableau de décomposition. Les lignes de ce tableau contiennent les éléments de la décomposition harmonique de l'opérateur. Nous avons également vu que nous pouvions découper ce tableau en colonnes. Ces colonnes représentent les sous-espaces de Cartan [64] de la décomposition harmonique, c'est-à-dire les sous-espaces  $O(2)$ -invariants de la décomposition harmonique. L'expression des invariances planes étant très simple, nous avons pu énoncer des règles d'exclusion permettant de déterminer graphiquement les différentes classes de symétrie plane d'un opérateur ainsi que le nombre de coefficients associés à chacune de ces classes. Grâce à ces règles nous avons montré que l'espace vectoriel  $\mathbb{E}l_{\mathbb{A}}$  possède 13 types de symétrie plane. Pour compléter notre étude il est nécessaire de s'intéresser aux invariances induites sur les composantes de notre tenseur par l'action des quatre sous-groupes spatiaux de  $SO(3)$  qui sont :  $\mathcal{T}$ ,  $\mathcal{O}$ ,  $\mathcal{I}$ , ainsi que  $SO(3)$ . Autrement dit les groupes de transformation qui laissent invariants, respectivement, le tétraèdre, l'octaèdre, l'icosaèdre ainsi que la sphère<sup>1</sup>.

Notre objectif ici va être la détermination des sous-espaces invariants des opérateurs de comportement sous l'action des groupes de transformation spatiale. Nous développerons une méthode basée sur l'utilisation des composés tétraédriques. Cette méthode vise à établir le sous-espace  $\mathcal{T}$ -invariant puis à déduire de sa connaissance les sous-espaces  $\mathcal{O}$ -invariant et  $\mathcal{I}$ -invariant. Le cas de la  $SO(3)$ -invariance pouvant se « à la main » ne sera pas abordé ici.

---

<sup>1</sup>La nature de ces groupes a été précisée au cours du chapitre II–3 ainsi que leur méthode de construction.

Comme nous le montrerons, à la section II-A.2, dans le cas des groupes spatiaux nous ne pouvons pas réutiliser directement les résultats obtenus dans les cas plans. Pour pallier cet inconvénient nous proposerons, au II-A.3, un algorithme programmable dans un logiciel de calcul formel. Cet algorithme permet d'établir le nombre de coefficients définissant un tenseur  $H^i$  invariant par transformation tétraédrique, cubique ainsi qu'icosaédrique. La section II-A.4 illustre, et détail, le fonctionnement de cet algorithme dans le cas particulier d'un tenseur  $H^6$ .

Introduisons à présent le cadre général de notre travail.

## II-A.2 Principe de la méthode

### II-A.2.1 Paramétrisation du tétraèdre

Dans tout ce qui va suivre nous étudierons les invariances induites par la symétrie tétraédrique dans plusieurs plans différents de l'espace. Il nous faut donc définir comment nous paramétriserons notre tétraèdre de référence. La position la plus simple pour notre étude consiste à définir les coordonnées cartésiennes suivantes pour ses sommets [18] dans un repère ortho-normé :

$$(1, 1, 1); \quad (-1, -1, 1); \quad (1, -1, -1); \quad (-1, 1, -1) \quad (\text{II-A.1})$$

Les arêtes de ce tétraèdre de référence ont pour longueur  $l = 2\sqrt{2}$ . Ce positionnement est simple en ceci que l'on obtient l'octaèdre étoilé (ou composé 2-tétraédrique) en superposant à ce tétraèdre sa copie tournée de  $\frac{\pi}{2}$  autour de l'axe  $z$ . Les sommets de l'octaèdre étoilé ont donc pour coordonnées

$$(\pm 1, \pm 1, \pm 1) \quad (\text{II-A.2})$$

c'est-à-dire les mêmes sommets que le cube d'arête 2 centré à l'origine (fig.II-A.1).

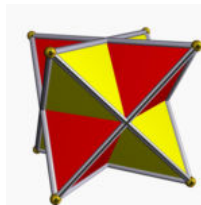


FIG. II-A.1 – Composé 2-tétraédrique

Cette paramétrisation nous permet de faire correspondre directement les symétries du tétraèdre avec celles du cube. Ainsi nous voyons immédiatement que, dans les plans de normale  $\underline{x}$ ,  $\underline{y}$  et  $\underline{z}$ , le tétraèdre est  $D_2$ -invariant (fig.II-A.2(b)). Dans le cas du cube ces plans seront, quant à eux,  $D_4$ -invariants. De plus le cube est  $Z_3$ -invariant le long de ses grandes diagonales, on voit qu'il en est de même pour le tétraèdre (fig.II-A.2(a)). De fait nous appellerons, par abus de langage, symétrie le long de la grande diagonale cette symétrie du tétraèdre.

Les différentes symétries du tétraèdre sont les suivantes (fig.II-A.2) :

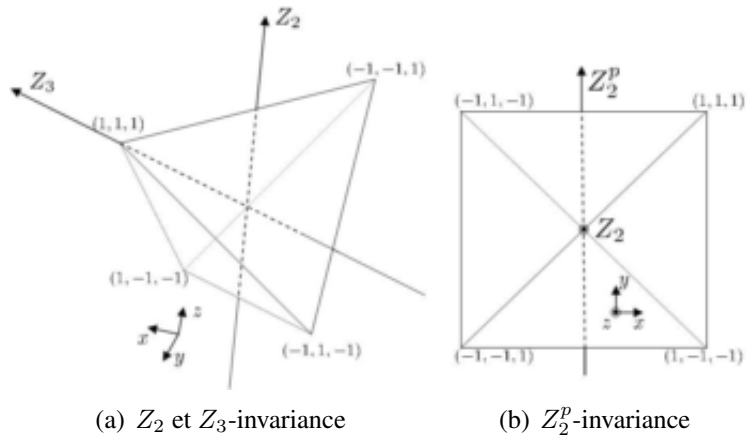


FIG. II-A.2 – Différentes invariances planes dans différents plans

Regardons à présent pourquoi ces symétries spatiales nous empêchent d'utiliser directement la méthode mise en œuvre au cours de l'étude des invariances planes.

### II-A.2.2 Insuffisance de l'approche directe

Dès que l'on travaille avec les groupes spatiaux on ne peut plus juste utiliser l'invariance de la décomposition de Cartan pour étudier notre problème. Au sein d'un groupe spatial quelconque les invariances par rotation sont exprimées dans, au moins, deux plans différents et la décomposition de Cartan n'est pas invariante par changement de plan. Illustrons cela par l'étude du tétraèdre.

La  $D_2$ -invariance, union de la  $Z_2$ -invariance et  $Z_2^p$ -invariance, existe dans trois plans distincts. Dans chacun de ces plans, et en ne considérant pas les autres éléments de symétries, un tenseur harmonique d'ordre 6, par exemple, sera défini par 4 coefficients :

	$\mathbb{K}_0$	$\mathbb{K}_1$	$\mathbb{K}_2$	$\mathbb{K}_3$	$\mathbb{K}_4$	$\mathbb{K}_5$	$\mathbb{K}_6$	dim $\mathbb{H}$
$\mathbb{H}^6$	o	* *	o *	* *	o *	* *	o *	4

(II-A.3)

On n'a toutefois pas d'information sur le nombre de composantes qui définissent un tenseur qui serait  $D_2$ -invariant dans chacun des plans du tétraèdre. De même, si l'on regarde le tétraèdre le long de ses grandes diagonales (fig. II-A.2(a)) alors celui-ci est  $Z_3$ -invariant et de fait on a

	$\mathbb{K}_0$	$\mathbb{K}_1$	$\mathbb{K}_2$	$\mathbb{K}_3$	$\mathbb{K}_4$	$\mathbb{K}_5$	$\mathbb{K}_6$	dim $\mathbb{H}$
$\mathbb{H}^6$	o	* *	* *	0 0	* *	* *	0 0	5

(II-A.4)

c'est-à-dire que, selon ces axes particuliers, un tenseur harmonique d'ordre 6, par exemple, sera défini par 5 coefficients. Toutefois la méthode classique ne nous renseigne pas sur le nombre de coefficients dans le cas où notre tenseur serait  $Z_3$ -invariant selon l'ensemble des grandes diagonales simultanément.

Il nous faut donc mettre au point une méthode nous permettant de relier les informations de symétrie obtenues dans les différents plans du polyèdre.



## II–A.2.3 Approche retenue

La décomposition harmonique est  $SO(3)$ -invariante, ceci veut dire que quelle que soit la manière dont on « observe » un tenseur harmonique celui-ci, dans une classe de symétrie donnée, est défini par le même nombre de coefficients.

Regardons l'exemple suivant, on considère un tenseur harmonique d'ordre 6 ainsi que les restrictions induites par la  $Z_2$ -invariance ainsi que la  $Z_2^p$ -invariance. Cette dernière invariance n'est qu'une  $Z_2$ -invariance exprimée par rapport à un axe appartenant à notre plan. Les restrictions induites sont les suivantes :

	$G_{\mathcal{M}}$	$\mathbb{K}_0$	$\mathbb{K}_1$	$\mathbb{K}_2$	$\mathbb{K}_3$	$\mathbb{K}_4$	$\mathbb{K}_5$	$\mathbb{K}_6$	dim $\mathbb{H}$
$\mathbb{H}^6$	$Z_2$	$o$	$* *$	$o o$	$* *$	$o o$	$* *$	$o o$	7
$\mathbb{H}^6$	$Z_2^p$	$o$	$* o$	$o *$	$* o$	$o *$	$* o$	$o *$	7

(II–A.5)

La répartition des coefficients dans les sous-espaces de Cartan diffère, toutefois le nombre de coefficients est identique dans chacun des deux cas. Intrinsèquement, la symétrie dans les deux cas est la même et, de fait, la dimension de l'espace harmonique est identique : c'est la propriété d' $SO(3)$ -invariance de la décomposition. La décomposition de Cartan peut être vue comme un plan de coupe dans un objet  $SO(3)$ -invariant. Si la coupe est faite perpendiculairement à l'axe de la rotation alors, la projection des coefficients du tenseur se fait orthogonalement dans les cases de notre représentation. Si la coupe est faite dans un plan différent alors les coefficients apparaissent sous forme de combinaisons linéaires dans les cases de notre base de Cartan.

La démarche que nous avons mise en œuvre consiste à choisir un plan de symétrie principal, d'y définir notre base de Cartan de travail, pour ensuite y projeter les conditions de symétries induites par les invariances hors-plan. Une fois les conditions hors-plan ramenées dans le plan de travail, l'application de la méthode classique permet de conclure. Notre approche se base sur la définition, dans les plans normaux aux axes de symétries de nos polyèdres, de bases de Cartan particulières. Nous relierons ensuite ces bases entre elles par des éléments de symétrie du groupe du polyèdre. Illustrons cela à partir de l'étude de la symétrie tétraédrique.

On considère un tenseur  $\mathcal{T}$ -invariant, les composantes de ce tenseur sont identiques exprimées dans une base de Cartan de normale  $\underline{x}$ , dans une base de normale  $\underline{y}$  et de normale  $\underline{z}$ . Dans chacune de ces bases le tétraèdre est  $D_2$ -invariant, nous choisirons, arbitrairement la base de normale  $\underline{z}$  comme étant la base de travail. La rotation de  $\frac{2\pi}{3}$  le long de la grande diagonale transforme par permutation cyclique la base de Cartan de normale  $\underline{z}$  en celle de normale  $\underline{x}$  et celle de  $\underline{x}$  en  $\underline{y}$ .

De manière à obtenir les briques de base pour définir les invariances d'un tenseur de comportement, nous allons étudier les invariances induites par ces groupes spatiaux sur les espaces vectoriels des tenseurs harmoniques. Les opérations de transfert de base seront calculées de manière formelle par la méthode que nous proposons. Nous allons à présent préciser de manière plus technique l'algorithme mis en œuvre.

## II–A.3 Fonctionnement de l’algorithme

Nous présenterons ici le principe mathématique de notre algorithme ainsi que les différents résultats que l’on obtient par son application.

### II–A.3.1 Polynômes harmoniques

Pour des raisons de facilité des manipulations algébriques nous ne travaillerons pas directement dans  $\mathbb{H}^i$ , mais plutôt dans son espace dual, l’espace des polynômes harmoniques de degré  $i$  en dimension 3. Nous noterons  $\mathcal{P}(i)$  cet espace vectoriel ainsi que  $\mathcal{B}(\mathcal{P}(i))$  une base de cet espace. Nous noterons classiquement le laplacien  $\Delta$ , de fait la propriété fondamentale de  $\mathcal{P}(i)$  est la suivante :

$$\forall P \in \mathcal{P}(i), \Delta(P) = 0 \quad (\text{II–A.6})$$

Cette propriété nous permettra de vérifier, au cours de notre algorithme, que nos manipulations d’introduisent pas d’erreur. On a, de plus, classiquement [64] :

$$\dim(\mathcal{P}(i)) = 2i + 1 \quad (\text{II–A.7})$$

Soit  $\{p_j\}$  une base de  $\mathcal{P}(i)$ , la relation (II–A.6) implique nécessaire  $\{\Delta(p_j)\} = \{0\}$ .

On prendra pour  $\mathcal{B}(\mathcal{P}(i))$  les  $2i + 1$  polynômes  $\{p_j\}$  de la décomposition de Cartan dans un plan de normale  $\underline{z}$ . Cela revient à se placer dans le plan  $xy$  (fig.II–A.2(a)). L’invariance spatiale implique qu’il existe des plans différents de  $xy$  dans lesquelles notre opérateur est identique. Les générateurs des groupes associés nous permettent de passer d’un plan à un autre.

### II–A.3.2 Connexions des différentes bases

Pour identifier les composantes invariantes il nous faut procéder en plusieurs étapes. Tout d’abord il nous faut construire  $\mathcal{B}'(\mathcal{P}(i))$  à partir de  $\mathcal{B}(\mathcal{P}(i))$  via l’utilisation d’une transformation  $Q$  de  $SO(3)$  appartenant au groupe spatial étudié. Dans le cas du tétraèdre on utilisera la permutation cyclique  $(xyz)$  qui correspond à sa  $Z_3$ -invariance le long de sa grande diagonale. Ceci implique

$$p'_j(x, y, z) = Q \star p_j(x, y, z) = p_j(y, z, x) \quad (\text{II–A.8})$$

La décomposition harmonique étant  $SO(3)$ -invariante l’image de  $\{p_j\}$  par  $Q$  est une base de  $\mathcal{P}(i)$ . Nous noterons  $\mathcal{B}'(\mathcal{P}(i))$  la base engendrée par les  $\{p'_j\}$ . De plus comme  $\mathcal{B}(\mathcal{P}(i))$  est une base de  $\mathcal{P}(i)$  et que  $\{p'_j\}$  appartient à  $\mathcal{P}(i)$ ,  $\{p'_j\}$  est une combinaison linéaire de  $\{p_j\}$ . Autrement dit

$$\exists T \in SL(2i + 1); \quad p'_j = T_{jk} p_k \quad (\text{II–A.9})$$

où  $SL$  représente le groupe spécial linéaire<sup>2</sup>, c’est-à-dire le groupe des automorphismes de déterminant  $+1$ .

---

<sup>2</sup>Il peut paraître étrange que la représentation d’une opération orthogonale sur un espace vectoriel perde son orthogonalité. Toutefois nous savons [64, 85] que toute représentation d’un groupe de Lie réel peut être orthogonalisée via la définition d’un produit scalaire adapté. De fait nous pourrions orthogonaliser notre représentation, toutefois cela nous est inutile pour les calculs que nous devons effectuer.

Notre tenseur harmonique est identique dans toutes bases construites à partir de la transformation  $T$ . De fait si l'on considère  $H$  le vecteur des coefficients d'un tenseur dans  $\mathcal{B}(\mathcal{P}(i))$  alors la condition d'invariance s'écrit :

$$T^{-1}H = H \quad (\text{II-A.10})$$

donc  $H \in \ker(T^{-1} - \text{Id})$ . Mais en pratique on peut récrire simplement  $H \in \ker(T - \text{Id})$ , car  $T$  appartient au groupe de symétrie de  $H$  donc  $T^{-1}$  également, de fait cela nous évite d'inverser<sup>3</sup> notre opérateur  $T$ .

Regardons les résultats de cette démarche appliquée à  $\mathbb{H}^6$ .

### II-A.3.3 Obtention des invariances spatiales

Nous présentons ici uniquement les résultats intermédiaires de notre méthode, les détails des calculs pourront être trouvés à la section suivante.

#### Cas de la $\mathcal{T}$ -invariance

Le noyau de l'opérateur  $(T - \text{Id})$  correspond à l'expression de la  $Z_3$ -invariance de notre tétraèdre le long de sa grande diagonale exprimée dans la base de normale  $\underline{z}$ . L'invariance tétraédrique s'obtient ensuite en imposant aux coefficients des sous-espaces de Cartan d'être nuls conformément à la  $D_2$ -invariance de ce plan.

Considérons l'exemple de la  $\mathcal{T}$ -invariance de  $\mathbb{H}^6$ . Dans le plan de normale  $\underline{x} + \underline{y} + \underline{z}$  la  $Z_3$ -invariance impose :

	$\mathbb{K}_0$	$\mathbb{K}_1$	$\mathbb{K}_2$	$\mathbb{K}_3$	$\mathbb{K}_4$	$\mathbb{K}_5$	$\mathbb{K}_6$	dim $\mathbb{H}$
$\mathbb{H}^6$	o	* *	* *	o o	* *	* *	o o	5

(II-A.11)

ramenée dans le plan de normale  $\underline{z}$  on obtient :

	$\mathbb{K}_0$	$\mathbb{K}_1$	$\mathbb{K}_2$	$\mathbb{K}_3$	$\mathbb{K}_4$	$\mathbb{K}_5$	$\mathbb{K}_6$	dim $\mathbb{H}$
$\mathbb{H}^6$	◻	◻◻◻	◻◻	◻◻◻	◻◻	◻◻	◻◻	5

La notation en « dés » introduite au chapitre II-5, permet de suivre les combinaisons linéaires des différents coefficients du tenseur. On remarque immédiatement que, comme prévu, le nombre total de coefficients est invariant selon la base d'observation. En appliquant les règles de simplification de la  $D_2$ -invariance dans le plan, on aboutit finalement à :

	$\mathbb{K}_0$	$\mathbb{K}_1$	$\mathbb{K}_2$	$\mathbb{K}_3$	$\mathbb{K}_4$	$\mathbb{K}_5$	$\mathbb{K}_6$	dim $\mathbb{H}$
$\mathbb{H}^6$	◻	◻◻	◻◻	◻◻	◻◻	◻◻	◻◻	2

qui est l'expression de la  $\mathcal{T}$ -invariance de  $\mathbb{H}^6$ .

<sup>3</sup>On pourrait également calculer  $T^2$ , car on a évidemment  $T^3 = \text{Id}$ .

### Cas de la $\mathcal{O}$ -invariance

Le cas de la  $\mathcal{O}$ -invariance est directe. Le cube se déduit du tétraèdre en imposant la  $Z_4$ -invariance du tétraèdre sur de son orbite le long de l'axe  $z$ . Il nous suffit d'appliquer dans ce plan les restrictions liées à la  $D_4$ -invariance. Pour  $\mathbb{H}^6$  on aboutit à :

	$K_0$	$K_1$	$K_2$	$K_3$	$K_4$	$K_5$	$K_6$	dim H
$\mathbb{H}^6$	•	xx	xx	xx	•x	xx	xx	1

### Cas de la $\mathcal{I}$ -invariance

Le cas de l' $\mathcal{I}$ -invariance est plus complexe. L'aborder directement conduit à des calculs lourds et difficiles à mener dans un système formel et presque impossible de manière numérique. Ceci est, en partie, dû aux valeurs irrationnels des rotations de l'icosaèdre. La manière la plus simple de procéder est de considérer le composé 5-tétraédrique (fig.II-A.3).

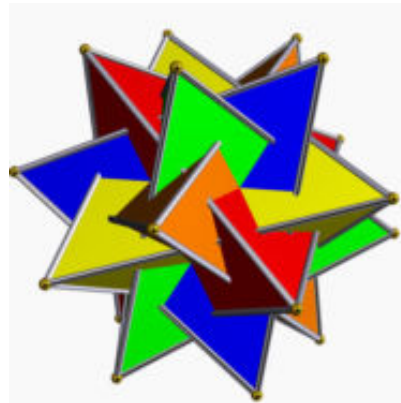


FIG. II-A.3 – Composé 5-tétraédrique

Pour cela il nous placer dans la base de Cartan de normale

$$\underline{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{\sqrt{1+(1-\phi)^2}} \\ 1-\phi \\ \frac{1-\phi}{\sqrt{1+(1-\phi)^2}} \end{pmatrix} \quad (\text{II-A.12})$$

où  $\phi$  représente le nombre d'or. La  $D_5$ -orbite du tétraèdre autour de cet axe engendre l'icosaèdre [18]. Dans ce plan il suffit d'appliquer les restrictions liées à la  $D_5$ -invariance pour conclure. La symétrie tétraédrique, exprimée dans le plan de normale  $\underline{n}$ , nous donne pour  $\mathbb{H}^6$  :

	$K_0$	$K_1$	$K_2$	$K_3$	$K_4$	$K_5$	$K_6$	dim H
$\mathbb{H}^6$	••	x••	••x	x••	••x	x••	••x	2

et, après application de la condition de  $D_5$ -invariance, on aboutit à

	$K_0$	$K_1$	$K_2$	$K_3$	$K_4$	$K_5$	$K_6$	dim H
$\mathbb{H}^6$	•	xx	xx	xx	xx	x•	xx	1

La programmation de cet algorithme de manière formelle nous permet ainsi d'obtenir les formes des tenseurs harmoniques possédant une invariance spatiale. Dans le cas des symétries considérées cette méthode nous permet d'obtenir des résultats rapidement pour des tenseurs harmoniques d'ordres élevés. Détaillons plus précisément les calculs effectués par l'algorithme.

## II-A.4 Détail des calculs

Le but de cette section est d'illustrer la manière dont nous procédons pour faire nos changements de base. Nous présenterons la méthode dans le cas de  $\mathbb{H}^6$ .

### II-A.4.1 Calcul de la $Z_3$ -invariance de $\mathbb{H}^6$

Considérons par exemple le cas de  $\mathcal{P}(6)$ . La base  $\mathcal{B}(\mathcal{P}(6))$  de normale  $\underline{z}$  est constituée des 13 polynômes suivants :

$$p = \begin{pmatrix} \frac{1}{231} (-5(x^2 + y^2)^3 + 90(x^2 + y^2)^2 z^2 - 120(x^2 + y^2) z^4 + 16z^6) \\ \frac{1}{33} xz (5(x^2 + y^2)^2 - 20(x^2 + y^2) z^2 + 8z^4) \\ \frac{1}{33} yz (5(x^2 + y^2)^2 - 20(x^2 + y^2) z^2 + 8z^4) \\ \frac{1}{66} (x^2 - y^2) ((x^2 + y^2)^2 - 16(x^2 + y^2) z^2 + 16z^4) \\ \frac{1}{33} xy ((x^2 + y^2)^2 - 16(x^2 + y^2) z^2 + 16z^4) \\ -\frac{1}{44} x(x^2 - 3y^2)z (3(x^2 + y^2) - 8z^2) \\ \frac{1}{44} y(-3x^2 + y^2)z (3(x^2 + y^2) - 8z^2) \\ -\frac{1}{88} (x^4 - 6x^2 y^2 + y^4)(x^2 + y^2 - 10z^2) \\ \frac{1}{22} xy(x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - 10z^2) \\ \frac{1}{16} x(x^4 - 10x^2 y^2 + 5y^4)z \\ \frac{1}{16} y(x^4 - 10x^2 y^2 + 5y^4)z \\ \frac{1}{32} (x^6 - 15x^4 y^2 + 15x^2 y^4 - y^6) \\ \frac{1}{16} (3x^5 y - 10x^3 y^3 + 3xy^5) \end{pmatrix} \quad (\text{II-A.13})$$

Cette base de  $\mathcal{P}(6)$  est générée automatiquement à partir de la méthode présentée dans [86]. Notre seule intervention est de lui spécifier que l'on désire aligner ces polynômes le long de la variable  $z$ . Le laplacien de ce vecteur est bien entendu le vecteur nul.

On choisit l'axe d'ordre 3 le long de la grande diagonale du tétraèdre comme élément  $Q$  pour générer la base  $\mathcal{B}(\mathcal{P}(6))$ . Nous pensons cette transformation comme la permutation circulaire  $[xyz]$ . Cette permutation a pour représentation dans  $\mathbb{R}^3$  la matrice  $Q$  suivante :

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{II-A.14})$$

On vérifie bien  $Q^3 = \text{Id}$ . Comme de plus  $Q^2 = Q^T$  et  $\det(Q) = 1$  on a  $Q \in \text{SO}(3)$ .

L'action de  $Q$  sur  $\mathbb{R}^3$  transforme  $\mathcal{B}(\mathcal{P}(6))$  en  $\mathcal{B}'(\mathcal{P}(6))$ . Les nouveaux vecteurs de  $\mathcal{P}(6)$  sont :

$$p' = \begin{pmatrix} \frac{1}{231} (-5(y^2 + z^2)^3 + 90(y^2 + z^2)^2 x^2 - 120(y^2 + z^2)x^4 + 16x^6) \\ \frac{1}{33} yx (5(y^2 + z^2)^2 - 20(y^2 + z^2)x^2 + 8x^4) \\ \frac{1}{33} zx (5(y^2 + z^2)^2 - 20(y^2 + z^2)x^2 + 8x^4) \\ \frac{1}{66} (y^2 - z^2) ((y^2 + z^2)^2 - 16(y^2 + z^2)x^2 + 16x^4) \\ \frac{1}{33} yz ((y^2 + z^2)^2 - 16(y^2 + z^2)x^2 + 16x^4) \\ -\frac{1}{44} y(y^2 - 3z^2)x (3(y^2 + z^2) - 8x^2) \\ \frac{1}{44} z(-3y^2 + z^2)x (3(y^2 + z^2) - 8x^2) \\ -\frac{1}{88} (y^4 - 6y^2 z^2 + z^4)(y^2 + z^2 - 10x^2) \\ \frac{1}{22} yz(y^2 - z^2)(y^2 + z^2 - 10x^2) \\ \frac{1}{16} y(y^4 - 10y^2 z^2 + 5z^4)x \\ \frac{1}{16} z(y^4 - 10y^2 z^2 + 5z^4)x \\ \frac{1}{32} (y^6 - 15y^4 z^2 + 15y^2 z^4 - z^6) \\ \frac{1}{16} (3y^5 z - 10y^3 z^3 + 3yz^5) \end{pmatrix} \quad (\text{II-A.15})$$

Cette nouvelle base est à présent alignée selon la variable  $x$ . Et on vérifie que le laplacien de ce vecteur est bien nul.

Comme  $p$  et  $p'$  sont des bases de  $\mathcal{P}(6)$ , il existe une relation linéaire permettant de passer de l'une à l'autre. Nous pouvons identifier cet opérateur  $T$  qui, dans notre cas précis, est :

$$T = \begin{pmatrix} -\frac{5}{16} & 0 & 0 & -\frac{15}{16} & 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{8} & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{4} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{16} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{7}{32} & 0 & 0 & \frac{17}{32} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{9}{32} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{16} & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{27}{64} & 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ -\frac{21}{128} & 0 & 0 & -\frac{15}{128} & 0 & 0 & 0 & \frac{13}{16} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & -\frac{3}{16} & 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{8} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{33}{128} & 0 & 0 & 0 & -\frac{55}{64} & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{16} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{165}{256} & 0 & 0 & 0 & -\frac{11}{16} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{16} \\ \frac{231}{512} & 0 & 0 & -\frac{495}{512} & 0 & 0 & 0 & \frac{33}{64} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{32} & 0 \\ 0 & \frac{99}{128} & 0 & 0 & 0 & -\frac{55}{64} & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{16} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{II-A.16})$$

Comme précédemment on vérifie  $T^3 = \text{Id}$ , ce qui nous permet d'écrire  $T^2 = T^{-1}$ . Toutefois, dans ce cas là, la relation  $T^2 = T^T$  n'est pas vérifiée, ce qui prouve que notre opérateur n'est pas orthogonal et comme, de plus,  $\det(T) = 1$  on en conclut que  $T \in \text{SL}(13)$ . Comme précisé précédemment cette matrice de passage pourrait être orthogonalisée, toutefois comme cela ne change rien à nos résultats nous ne le ferons pas.

Les vecteurs de  $\mathcal{P}(6)$  invariants par cette  $Z_3$ -invariance appartiennent au sous-espace  $\ker(T - \text{Id})$ . Le calcul de ce sous-espace est plus rapide à réaliser avec un logiciel formel que la résolution du système :

$$Tv = v \quad (\text{II-A.17})$$

pour un vecteur  $v$  quelconque. On obtient au final

$$\ker(T - \text{Id}) = \text{vect} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{8}{7} \\ \frac{32}{33} & 0 & \frac{32}{33} & -\frac{16}{33} & 0 \\ \frac{32}{33} & 0 & -\frac{16}{33} & \frac{32}{33} & 0 \\ 0 & -\frac{16}{15} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{16}{165} & 0 & -\frac{128}{165} & \frac{128}{165} & 0 \\ -\frac{16}{165} & 0 & -\frac{48}{55} & -\frac{12}{55} & 0 \\ \frac{16}{165} & 0 & \frac{12}{55} & -\frac{48}{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{8}{11} & \frac{8}{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{II-A.18})$$

Le sous-espace vectoriel de  $\mathbb{H}^6$   $Z_3$ -invariant est générée, dans le plan de normale  $\underline{z}$ , par la famille des 5 vecteurs  $v_j$  ci-dessus. Nous noterons  $M_{Z_3}$  la matrice (II-A.18). On vérifie bien que la dimension de  $\ker(T - \text{Id})$  est égale à la dimension de  $\text{Fix}_{\mathbb{H}^6}(Z_3)$ , dont le tableau de décomposition associé est :

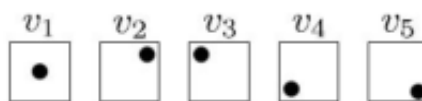
	$\mathbb{K}_0$	$\mathbb{K}_1$	$\mathbb{K}_2$	$\mathbb{K}_3$	$\mathbb{K}_4$	$\mathbb{K}_5$	$\mathbb{K}_6$	dim $\mathbb{H}$
$\mathbb{H}^6$	0	* *	* *	0 0	* *	* *	0 0	5

(II-A.19)

Analysons  $M_{Z_3}$ . Les colonnes représentent les vecteurs invariants de la transformation et les lignes les composantes des espaces de Cartan. On a de haut en bas

$$\begin{pmatrix} s_0 \\ s_1 \\ t_1 \\ s_2 \\ t_2 \\ s_3 \\ t_3 \\ s_4 \\ t_4 \\ s_5 \\ t_5 \\ s_6 \\ t_6 \end{pmatrix} \quad (\text{II-A.20})$$

On a de la manière diagrammatique suivante les divers vecteurs du noyau :



On peut, à partir de cette notation, représenter un vecteur quelconque de  $\ker(T - \text{Id})$  sous la forme suivante :



ce qui, réécrit différemment, nous donne :

	$K_0$	$K_1$	$K_2$	$K_3$	$K_4$	$K_5$	$K_6$	dim H
$\mathbb{H}^6$	$\bullet$	$\bullet \bullet \bullet$	$\bullet \bullet \bullet$	$\bullet \bullet \bullet$	$\bullet \bullet \bullet$	$\bullet \bullet \bullet$	$\bullet \bullet \bullet$	5

On obtient ainsi le tableau de décomposition de la  $Z_3$ -invariance de  $\mathbb{H}^6$  exprimée dans le repère de normale  $\underline{z}$ .

Regardons maintenant comment, à partir de cela, établir les invariances spatiales.

### II-A.4.2 Calcul de la $\mathcal{T}$ -invariance de $\mathbb{H}^6$

La  $D_2$ -invariance dans le plan de normale  $\underline{Z}$  implique :

$$\begin{pmatrix} s_1 \\ t_1 \\ t_2 \\ s_3 \\ t_3 \\ t_4 \\ s_5 \\ t_5 \\ t_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{II-A.21})$$

Soit  $T_{\text{red}}$  la matrice  $(9, 5)$  extraite de  $M_{Z_3}$  associée aux lignes nulles. On a :

$$T_{\text{red}} = \begin{pmatrix} \frac{32}{33} & 0 & \frac{32}{33} & -\frac{16}{33} & 0 \\ \frac{32}{33} & 0 & -\frac{16}{33} & \frac{32}{33} & 0 \\ -\frac{16}{165} & 0 & -\frac{128}{165} & \frac{32}{128} & 0 \\ -\frac{16}{165} & 0 & -\frac{48}{55} & -\frac{12}{55} & 0 \\ \frac{16}{165} & 0 & \frac{12}{55} & -\frac{48}{55} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{8}{11} & \frac{8}{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{II-A.22})$$

De fait les coefficients  $\mathcal{T}$ -invariant appartiennent au noyau de  $T_{\text{red}}$ . Au final on obtient

$$\ker T_{\text{red}} = \text{vect}(v_2, v_5) \quad (\text{II-A.23})$$





soit, à partir de la connaissance des symétrie du tétraèdre, :

$$P_{\mathcal{O}}^{(6)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{-16b}{15} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{II-A.28})$$

Donc  $b = 0$  et, sous forme de diagramme de Young, :

	K <sub>0</sub>	K <sub>1</sub>	K <sub>2</sub>	K <sub>3</sub>	K <sub>4</sub>	K <sub>5</sub>	K <sub>6</sub>	dim H
H <sup>6</sup>	a	* *	* *	* *	a *	* *	* *	1

(II-A.29)

#### II-A.4.4 Calcul de la $\mathcal{I}$ -invariance de H<sup>6</sup>

Le calcul du tableau de décomposition pour  $\mathcal{I}$ -invariance est sensiblement le même que dans les deux cas précédents. De fait nous ne reviendrons pas sur ce que nous avons déjà présenté. La seule différence essentielle est liée au changement d'axe nécessaire au calcul dans le cas de l'icosaèdre. L'écriture propre de ce changement d'axe est une condition *sine-qua-non* de fonctionnement de notre algorithme. Nous insisterons de fait uniquement sur ce point précis. De plus ce que nous mettrons en oeuvre ici pourra être réutilisé pour la dérivation effective des opérateurs de comportements 3-D.

#### Changement d'axe

On rappelle que le composé 5-tétraédrique est engendré par la  $D_5$ -orbite du tétraèdre autour de l'axe  $\underline{n}$ , où

$$\underline{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{1+(1-\phi)^2}} \\ \frac{\phi-1}{\sqrt{1+(1-\phi)^2}} \end{pmatrix} \quad (\text{II-A.30})$$

avec

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad (\text{II-A.31})$$

le nombre d'or [18]. Nous poserons

$$q_y = \frac{1}{\sqrt{1 + (1 - \phi)^2}}, \quad q_z = \frac{\phi - 1}{\sqrt{1 + (1 - \phi)^2}} \quad (\text{II-A.32})$$

Cela nous permet de définir la matrice de passage  $N$  de la manière suivante :

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & q_z & q_y \\ 0 & -q_y & q_z \end{pmatrix} \quad (\text{II-A.33})$$

Exprimée dans le corps des réels, cette matrice s'écrit :

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1+\sqrt{5}}{2(5-\sqrt{5})} & \sqrt{\frac{2}{5-\sqrt{5}}} \\ 0 & -\sqrt{\frac{2}{5-\sqrt{5}}} & \frac{-1+\sqrt{5}}{2(5-\sqrt{5})} \end{pmatrix} \quad (\text{II-A.34})$$

L'écriture de notre précédente matrice dans le corps  $\mathbb{R}$  est un mauvais choix. Cette expression, même pour un logiciel de calcul formel, n'est pas satisfaisante. Le logiciel peine à résoudre nos équations dans  $\mathbb{R}$ , il ne voit pas la structure des coefficients et n'arrive pas à opérer les simplifications optimales. On va donc définir un bon système de nombre pour y travailler dedans. Pour une plus grande efficacité des manipulations algébriques nous ne travaillerons pas dans le corps des réels mais dans une extension algébrique de  $\mathbb{Q}$ .

### Définition d'une extension algébrique

L'analyse de la matrice (II-A.34), nous montre que celle-ci n'est pas à coefficients dans  $\mathbb{Q}$ . En effet, elle contient les nombres  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{5}$  ainsi que  $\sqrt{\sqrt{5}}$  qui sont par définition même des nombres irrationnels. Pour être précis ces nombres sont dits algébriques, car ils peuvent être définis comme les racines d'un polynôme. Par exemple,  $\sqrt{2}$  est une des racines du polynôme  $X^2 - 2$ . De même le nombre d'or  $\phi$  est racine de  $X^2 - X - 1$ , ce qui revient à dire que l'on a la relation :

$$\phi^2 - \phi - 1 = 0 \quad (\text{II-A.35})$$

Le corps  $\mathbb{R}$  contient l'ensemble de ces nombres algébriques, ainsi que d'autres types de nombre, comme  $\pi$ , ou  $e$ , qui ne sont pas algébriques (nombres transcendants). De fait si  $\mathbb{Q}$  était trop « petit » pour définir (II-A.34),  $\mathbb{R}$  est beaucoup trop « grand ». Cette idée, un peu abusive, de taille de l'espace de travail est une des raisons pour laquelle notre logiciel de calcul formel a du mal à simplifier les différentes expressions. Dans le cas du nombre d'or, la connaissance de la relation (II-A.35) contient les informations de simplification. Ainsi si l'on considère cet exemple, il est nettement plus facile de travailler dans un système où tout nombre peut s'écrire sous la forme  $a + b\phi$  avec  $(a, b) \in \mathbb{Q}^2$ . Ce concept revient, en quelques sortes, à construire un espace vectoriel de dimension deux, où les vecteurs de base seraient  $(1, \phi)$  et les nombres des vecteurs dans cette base. Cette idée correspond précisément à la notion d'extension algébrique. En fonctionnant ainsi on vient de construire un corps, noté  $\mathbb{Q}[\phi]$ , qui est le plus petit corps contenant  $\phi$ , on a :

$$\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}[\phi] \subset \mathbb{R} \quad (\text{II-A.36})$$

Dans le cas qui nous intéresse, et pour simplifier nos calculs, nous allons déterminer quelle est l'extension algébrique adaptée à l'étude de l'icosaèdre. Cette extension doit pouvoir représenter  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{5}$  ainsi que  $\sqrt{\sqrt{5}}$ . Nous travaillerons dans  $\mathbb{Q}[\tau]$  une extension algébrique de  $\mathbb{Q}$  défini par le polynôme :

$$P(X) = X^8 - 58X^6 + 999X^4 - 5582X^2 + 6241 \quad (\text{II-A.37})$$

$\tau$  est la racine de  $P(X)$  qui a pour expression :

$$\tau = -\sqrt{17 - 5\phi - 2\sqrt{2}(2\phi - 1)\sqrt{3 - \phi}} \quad (\text{II-A.38})$$

de fait tout élément  $\alpha$  de  $\mathbb{Q}[\tau]$  s'écrit :

$$a + b\tau + c\tau^2 + d\tau^3 + e\tau^4 + f\tau^5 + g\tau^6 + h\tau^7 \quad (\text{II-A.39})$$

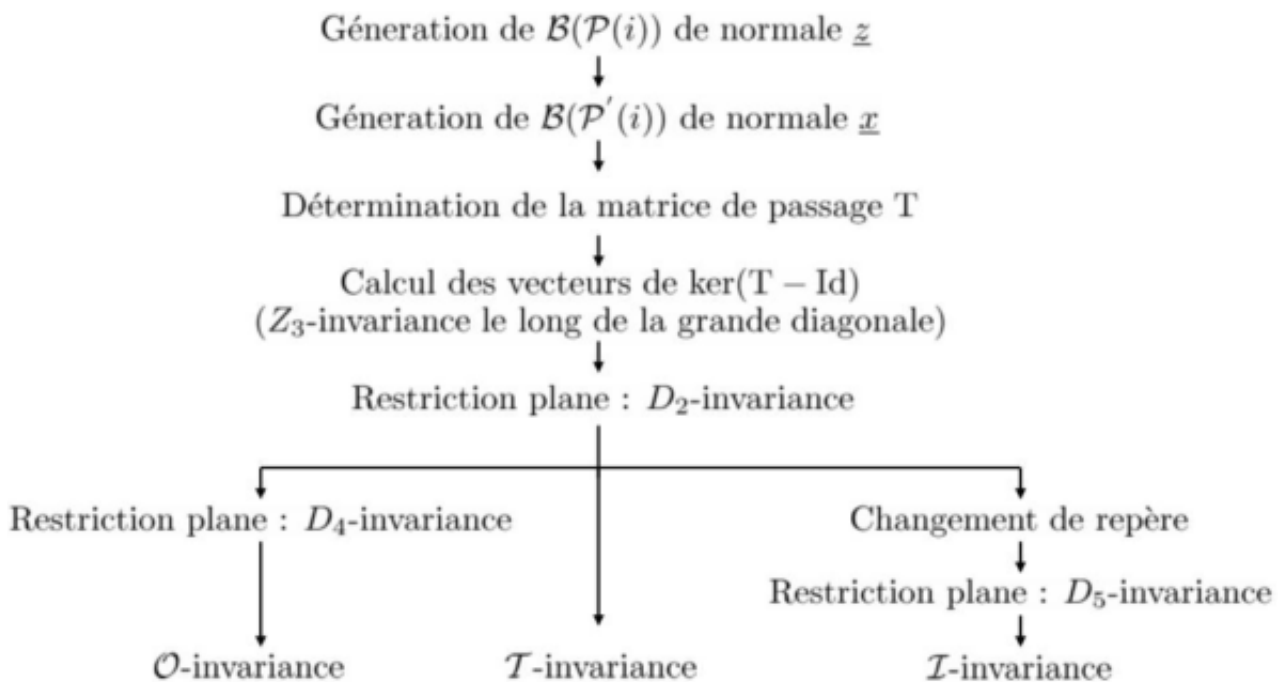
On a ainsi défini un espace vectoriel de dimension 8 sur  $\mathbb{Q}$ .

Notre matrice de transformation étant à coefficients dans  $\mathbb{Q}[\tau]$ , la multiplication matricielle est stable dans ce corps ainsi que le passage à l'inverse. De plus la relation (II-A.37), qui est caractéristique de ce corps, fournit une règle de simplification polynomiale automatique des coefficients des matrices de notre système. Les expressions données ci-dessus n'ont, à priori, pas l'air simple, toutefois dans un logiciel formel qui gère le système de nombres algébriques le gain de temps en manipulation est conséquent. Cela se fait particulièrement sentir quand la dimension des matrices de changement de système augmente. L'utilisation de cette extension algébrique nous a été en pratique utile pour l'établissement du tableau de décomposition dans le cas de la symétrie icosaédrique (chapitre II-5), ainsi que pour la dérivation explicite des opérateurs de comportement en 3-D.

Un fois que la matrice II-A.34 a été réécrite dans  $\mathbb{Q}[\tau]$ , l'ensemble des opérations à mener est similaire à celles effectuées pour les invariances spatiales précédentes. De fait nous n'y reviendrons pas.

## II-A.5 Synthèse

Résumons cela par un tableau :



Ce tableau fait la synthèse de la méthode que nous avons mis en oeuvre pour obtenir, dans le cas des systèmes d'invariance spatiaux, la structure de nos tableaux de décomposition. Elle peut être étendue à d'autres problématiques comme par exemple l'étude théorique du système de valeurs propres d'un tenseur quelconque<sup>4</sup>. De plus l'utilisation d'une extension de corps que nous avons utilisé pour travailler sur l'icosaèdre est utile pour la dérivation du tenseur d'ordre 2 associé à cette classe de symétrie.

---

<sup>4</sup>Un travail est en cours sur ce point précis, et devrait donner lieu à une publication.

## ANNEXE II–B

### Formalisme matricielle des équations de comportement

Cette annexe complète le chapitre II–2 et traite du formalisme que nous y avons introduit pour manipuler simplement nos équations de comportement. La littérature concernant les milieux continus généralisés ne parlant pas de ce formalisme il nous paraît intéressant de consacrer cette annexe à ce sujet.

Nous nous intéresserons ici à la structure algébrique des équations de comportement d'un matériau linéaire élastique de degré  $n$ . Nous observerons, dans un premier temps, l'existence d'une structure matricielle apparaissant lors de l'écriture de nos lois de comportement. De plus cette analyse nous permettra de généraliser un certain nombre d'outils mathématiques ainsi que d'en définir de nouveaux.

Contrairement aux autres chapitres, et pour des question de lisibilité, l'ordre des tenseurs ne sera pas systématiquement indiqué de manière graphique. Les ordres de tous les tenseurs manipulés seront néanmoins systématiquement précisés dans le texte. Toutefois, quand il s'agira d'éviter un contre-sens, ils seront notés explicitement dans les expressions. De plus, quand nous parlerons de milieu de degrés  $n$  nous ferons références, *a priori*, au  $n$ -ième-gradient du déplacement  $u$ . De fait, un milieu élastique de Cauchy est de degré 1. Introduisons à présent notre approche.

### II–B.1 Écriture matricielle

Lors de la lecture de publications traitant de l'élasticité des milieux continus généralisés on rencontre le genre d'écritures suivante [9] :

$$\sigma_{ij} = C_{ijlm}\varepsilon_{lm} + M_{ijlmn}K_{lmn} \quad (\text{II–B.1})$$

$$S_{ijk} = M_{ijklm}\varepsilon_{lm} + A_{ijklmn}K_{lmn} \quad (\text{II–B.2})$$

ou bien encore, dans le cas du troisième gradient, [35] :

$$\sigma_{ij} = C_{ijmn}\varepsilon_{mn} + M_{ijmno}K_{mno}^{(1)} + N_{ijmnop}K_{mnop}^{(2)} \quad (\text{II–B.3})$$

$$S_{ijk}^{(1)} = M_{ijkmn}\varepsilon_{mn} + A_{ijkmno}K_{mno}^{(1)} + O_{ijkmnop}K_{mnop}^{(2)} \quad (\text{II–B.4})$$

$$S_{ijkl}^{(2)} = N_{ijklmn}\varepsilon_{mn} + O_{ijklmno}K_{mno}^{(1)} + A_{ijklmnop}K_{mnop}^{(2)} \quad (\text{II–B.5})$$

(II-B.6)

où les exposants sur les tenseurs distinguent les différents termes d'ordre supérieur.

Pour plus de lisibilité, nous réécrivons ces équations de la manière suivante. Nous noterons  $\varepsilon_i, \sigma_i$  l'ensemble des couples déformation-gradient relatifs au  $i$  gradient du déplacement. Les tenseurs de comportement seront notés A, B, C s'ils correspondent à un comportement non-couplé, et M, N, O pour les tenseur de couplages entre les mécanismes des différents ordres. On obtient alors :

$$\sigma_1 = A : \varepsilon_1 + M \cdot : \varepsilon_2 \quad (\text{II-B.7})$$

$$\sigma_2 = M^T : \varepsilon_1 + B \cdot : \varepsilon_2 \quad (\text{II-B.8})$$

ainsi que :

$$\sigma_1 = A : \varepsilon_1 + M \cdot : \varepsilon_2 + N :: \varepsilon_3 \quad (\text{II-B.9})$$

$$\sigma_2 = M^T : \varepsilon_1 + B \cdot : \varepsilon_2 + O :: \varepsilon_3 \quad (\text{II-B.10})$$

$$\sigma_3 = N^T : \varepsilon_1 + O^T \cdot : \varepsilon_2 + C :: \varepsilon_3 \quad (\text{II-B.11})$$

Les ordres respectifs des tenseurs précédents sont :

Ordre	2	3	4	5	6	7	8
Tenseur	$\sigma_1 ; \varepsilon_1$	$\sigma_2 ; \varepsilon_2$	$\sigma_3 ; \varepsilon_3 ; A$	M	B ; N	O	C

On remarques alors que ces écritures peuvent se mettre sous forme « matricielle ». La réécriture des équations d'un milieu du troisième gradient nous conduit à

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & M & N \\ M^T & B & O \\ N^T & O^T & C \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{pmatrix} \quad (\text{II-B.12})$$

Et si l'on pose :

$$\underline{\zeta} = \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{pmatrix} \quad \underline{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{pmatrix} \quad \underline{\Lambda} = \begin{pmatrix} A & M & N \\ M^T & B & O \\ N^T & O^T & C \end{pmatrix} \quad (\text{II-B.13})$$

On peut encore réécrire II-B.12 de manière plus condensée

$$\underline{\zeta} = \underline{\Lambda} \odot \underline{\varepsilon} \quad (\text{II-B.14})$$

où les vecteurs  $\underline{\zeta}$  et  $\underline{\varepsilon}$  sont, dans notre formalisme, des vecteurs qui contiennent, en chaque point, l'ensemble de l'état mécanique. Nous appelons ces vecteurs : contrainte et déformation généralisés. L'opérateur  $\underline{\Lambda}$  est l'opérateur de comportement généralisé, il contient l'ensemble des opérateurs de la loi de comportement.

On peut réécrire systématiquement les équations de l'élasticité linéaire d'un matériau de degré  $n$  sous cette forme matricielle. Justifions cela à partir d'une approche énergétique.

## II-B.2 Approche énergétique

On se place dans le formalisme d'un milieu linéaire élastique de degré  $n$ , nous supposons de plus que ce milieu satisfasse au principe de l'action locale. L'information sur la déformation en un point est défini par la donnée d'un ensemble de  $n$  tenseurs de déformation dont les ordres sont distincts deux à deux et s'échelonnent de 2 à  $n + 1$ . Nous noterons  $\underline{\epsilon}$  cet ensemble de tenseurs de déformation et nous noterons  $\varepsilon_i$  le tenseur de déformation d'ordre  $i + 1$  de  $\underline{\epsilon}$ .

L'énergie libre de ce matériau est, en tout point, une fonction de  $\underline{\epsilon}$  tout entier. Dans le cas d'un milieu du troisième gradient on a donc :

$$\Psi(\underline{\epsilon}) = \Psi(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \quad (\text{II-B.15})$$

où les tenseurs associés sont d'ordres respectifs 2, 3 et 4.

De fait, la donnée des  $n$  tenseurs de déformation définit, via l'énergie libre,  $n$  tenseurs de contrainte. Chacun de ces tenseurs  $\sigma_i$  est le dual du tenseur  $\varepsilon_i$  correspondant. Nous admettrons les mêmes conventions pour  $\underline{\sigma}$  que pour  $\underline{\epsilon}$ . La valeur de chaque tenseur  $\sigma_i$  est liée à l'ensemble des valeurs de  $\underline{\epsilon}$ . Supposons que  $\Psi(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$  soit une forme quadratique en  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ . Il existe une famille de fonction  $\{f_i\}$  linéaires traduisant ces relations. On peut donc écrire :

$$\sigma_i = f_i(\underline{\epsilon}) \quad (\text{II-B.16})$$

et, par linéarité des fonctions  $f_i$ , on a :

$$\sigma_i = f_{ij}\varepsilon_j \quad (\text{II-B.17})$$

où la sommation sur l'indice répété est sous-entendue. De fait, en considérant la nature tensorielle des applications  $f_{ij}$ , et en appelant  $L_{ij}$  leurs tenseurs associés, la relation (II-B.16) peut finalement se réécrire :

$$\sigma_i = L_{ij}\varepsilon_j \quad (\text{II-B.18})$$

ce qui, au final, constitue une écriture « matricielle » de la relation. De plus on a la relation concernant l'ordre du tenseur  $L_{ij}$  :

$$o(L_{ij}) = o(\sigma_i) + o(\varepsilon_j) \quad (\text{II-B.19})$$

où la fonction  $o$  indique l'ordre du tenseur argument.

Si il existe une énergie libre qui est une forme quadratique sur l'ensemble de ses variables alors l'écriture matricielle d'une application linéaire de tenseurs est vraie quelque soit l'ordre  $n$  du milieu considéré.

Voyons ce que cela implique au niveau de la base de l'application considérée.

## II-B.3 Approche algébrique

### II-B.3.1 Espaces tensorisés

Définissons tout d'abord un certain nombre d'espaces auxquelles nous ferons références par la suite. On appelle  $\mathcal{E}$  l'espace euclidien qui constitue pour nous l'espace physique de référence,



nous noterons également  $\mathbb{T}_i$  l'espace vectoriel des vecteurs sur  $\mathcal{E}$ .  
Nous noterons sa base de la manière suivante :

$$\mathcal{B}(\mathbb{T}_i) = e_i \quad (\text{II-B.20})$$

$i$  variant de 1 à 3. On définit de même  $\mathbb{T}_{i_1 i_2 \dots i_n}$  l'espace tensoriel obtenu en tensorisant  $\mathbb{T}_i$   $n$  fois par lui-même. Dans le cas où  $n = 2$ , la base associée sera :

$$\mathcal{B}(\mathbb{T}_{i_1 i_2}) = e_{i_1} \otimes e_{i_2} \quad (\text{II-B.21})$$

et, dans le cas général, :

$$\mathcal{B}(\mathbb{T}_{i_1 i_2 \dots i_n}) = \underbrace{e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_n}}_{n \text{ fois}} \quad (\text{II-B.22})$$

Quand l'ordre  $n$  sera peu élevé, on substituera systématiquement la notation indicielle  $(i, j, k, \dots)$  à celle  $(i_1, i_2, i_3, \dots)$ .

De fait, si l'on considère un milieu élastique de degré  $n$ , celui-ci est caractérisé par la donnée de  $n$  tenseurs de déformation dont les ordres sont échelonnés entre 2 et  $n + 1$ . Ces tenseurs appartiennent donc respectivement aux espaces  $\mathbb{T}_{i_1 i_2 \dots i_k}$  avec  $k \in [2, n + 1]$ .

### II-B.3.2 Espaces vectoriels de tenseurs

Posons, tout d'abord, deux définitions supplémentaires. On appellera :

– *espace de description* : L'espace de description est la restriction de la famille infinie  $\{\mathbb{T}_{i_1 i_2 \dots i_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  à une sous-famille d'ordre fini. Cette sous-famille définit le degré de finesse de la description mécanique du milieu. Le cardinal de la sous-famille de description correspond à l'ordre du milieu généralisé. Un milieu de Cauchy possède par définition un espace de description d'ordre 1, tandis qu'un milieu généralisé d'ordre  $n$  a un espace de description de cardinal  $n$ .

– *espace de modélisation* : L'espace de modélisation est la restriction de l'espace de description aux sous-espaces correspondants aux symétries des espaces retenus pour la description mécanique du milieu.

Par exemple, si l'on considère un milieu d'ordre 3, l'espace de description est

$$\{\mathbb{D}\} = (\mathbb{T}_{ij}, \mathbb{T}_{ijk}, \mathbb{T}_{ijkl}) \quad (\text{II-B.23})$$

$\mathbb{D}$  constitue l'espace de description de notre milieu. Toutefois la mécanique nous impose, lors de la recherche des champs solutions, des restrictions sur ceux-ci. Nous considérerons que les trois composantes de notre champ  $\epsilon$  possèdent les symétries suivantes :

$$\epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon_{0(ij)} \\ \epsilon_{1(ij)k} \\ \epsilon_{2(ij)(kl)} \end{pmatrix} \quad (\text{II-B.24})$$

De fait les équations de la mécanique s'écriront dans l'espace de modélisation  $\mathbb{M}$  associé à  $\mathbb{D}$ . On notera,  $\mathbb{T}_{(ij)}$ ,  $\mathbb{T}_{(ij)k}$ ,  $\mathbb{T}_{(ij)(kl)}$  les sous-espaces de  $\mathbb{T}_{ij}$ ,  $\mathbb{T}_{ijk}$ ,  $\mathbb{T}_{ijkl}$  correspondants. On aura donc

$$\{\mathbb{M}\} = (\mathbb{T}_{(ij)}, \mathbb{T}_{(ij)k}, \mathbb{T}_{(ij)(kl)}) \quad (\text{II-B.25})$$

Les espaces  $\mathbb{D}$  et  $\mathbb{M}$  sont mathématiquement construits par une somme directe de leurs composantes, c'est-à-dire, pour un milieu d'ordre 3, :

$$\mathbb{D} = \mathbb{T}_{ij} \oplus \mathbb{T}_{ijk} \oplus \mathbb{T}_{ijkl} \quad (\text{II-B.26})$$

$$\mathbb{M} = \mathbb{T}_{(ij)} \oplus \mathbb{T}_{(ij)k} \oplus \mathbb{T}_{(ij)(kl)} \quad (\text{II-B.27})$$

La base de  $\mathbb{D}$  est définie par le produit cartésien des bases de ses espaces constitutifs,

$$\mathcal{B}(\mathbb{D}) = \mathcal{B}(\mathbb{T}_{i_1 i_2}) \times \dots \times \mathcal{B}(\mathbb{T}_{i_1 i_2 \dots i_n}) \quad (\text{II-B.28})$$

Dans le cas d'un milieu de degré 3, on a la base suivante pour notre vecteur  $\epsilon$  :

$$\mathcal{B}(\mathbb{D}) = (e_i \otimes e_j, e_i \otimes e_j \otimes e_k, e_i \otimes e_j \otimes e_k \otimes e_l) \quad (\text{II-B.29})$$

Ceci implique que l'on puisse écrire<sup>1</sup>, pour notre milieu de degré 3, le vecteur déformation généralisé sous *la forme générale* :

$$\epsilon = \varepsilon_{0ij}(e_i \otimes e_j) + \varepsilon_{1ijk}(e_i \otimes e_j \otimes e_k) + \varepsilon_{2ijkl}(e_i \otimes e_j \otimes e_k \otimes e_l) \quad (\text{II-B.30})$$

ainsi que sous *la forme contractée*

$$\epsilon = \varepsilon_0 E_i + \varepsilon_1 E_j + \varepsilon_2 E_k \quad (\text{II-B.31})$$

Dans la notation précédente, qui est un peu abusive, nous considérons donc  $E_i$ ,  $E_j$  et  $E_k$  comme les vecteurs de base de  $\mathbb{D}$ , et  $\varepsilon_0$ ,  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$  comme les coordonnées dans cet espace.

La nature d'espace vectoriel de  $\mathbb{D}$  et  $\mathbb{M}$  nous permet, à présent, de définir des tenseurs sur ces espaces.

### II-B.3.3 Tenseurs associés à un espace de description

Nous définirons un tenseur d'ordre deux et nous travaillerons le plus souvent possible en écriture contractée. La première chose à noter est que comme  $\mathbb{D}$  est un espace vectoriel alors automatiquement l'espace défini par :

$$\mathbb{D}^2 = \mathbb{D} \otimes \mathbb{D} \quad (\text{II-B.32})$$

est un espace vectoriel. Toutefois, si l'on considère les dimensions par rapport à la base des vecteurs-espaces, alors un élément de  $\mathbb{D}$  est d'ordre 2 et de dimension  $n^2$ , c'est-à-dire représentable par une matrice dans la base  $\mathbb{D}$ . La base de ce tenseur est :

$$\mathcal{B}(\mathbb{D}^2) = E_i \otimes E_j \quad (\text{II-B.33})$$

Dans le cas d'un milieu de degré 3, l'espace vectoriel  $\mathbb{D}^2$  se décompose de la manière suivante

$$\mathbb{D}^2 = \begin{pmatrix} \mathbb{T}_{ij} \otimes \mathbb{T}_{mn} & \mathbb{T}_{ij} \otimes \mathbb{T}_{mno} & \mathbb{T}_{ij} \otimes \mathbb{T}_{mnop} \\ \mathbb{T}_{ijk} \otimes \mathbb{T}_{mn} & \mathbb{T}_{ijk} \otimes \mathbb{T}_{mno} & \mathbb{T}_{ijk} \otimes \mathbb{T}_{mnop} \\ \mathbb{T}_{ijkl} \otimes \mathbb{T}_{mn} & \mathbb{T}_{ijkl} \otimes \mathbb{T}_{mno} & \mathbb{T}_{ijkl} \otimes \mathbb{T}_{mnop} \end{pmatrix} \quad (\text{II-B.34})$$

Il s'agit de l'espace vectoriel des endomorphisme de  $\mathbb{D}$ . Et, dans l'espace, de modélisation on a :

$$\mathbb{M}^2 = \begin{pmatrix} \mathbb{T}_{(ij)} \otimes \mathbb{T}_{(mn)} & \mathbb{T}_{(ij)} \otimes \mathbb{T}_{(mn)o} & \mathbb{T}_{(ij)} \otimes \mathbb{T}_{(mn)(op)} \\ \mathbb{T}_{(ij)k} \otimes \mathbb{T}_{(mn)} & \mathbb{T}_{(ij)k} \otimes \mathbb{T}_{(mn)o} & \mathbb{T}_{(ij)k} \otimes \mathbb{T}_{(mn)(op)} \\ \mathbb{T}_{(ij)(kl)} \otimes \mathbb{T}_{(mn)} & \mathbb{T}_{(ij)(kl)} \otimes \mathbb{T}_{(mn)o} & \mathbb{T}_{(ij)(kl)} \otimes \mathbb{T}_{(mn)(op)} \end{pmatrix} \quad (\text{II-B.35})$$

Et l'on retrouve bien les petites symétries des opérateurs de comportement.

<sup>1</sup>On ne tient pas compte des symétries indicelles dans ces écritures pour limiter leurs complexités, toutefois ceci ne poserait aucun problème

### II-B.3.4 Conséquence d'un changement de base de $\mathcal{E}$

Regardons rapidement l'effet d'un changement de base de  $\mathcal{E}$ . On considérera l'opérateur orthogonal  $Q \in O(3)$ . L'écriture du changement de base d'un espace vectoriel s'écrit :

$$e'_i = Q_{ij} e_j \quad (\text{II-B.36})$$

où l'exposant « prime » indique le vecteur de la nouvelle base. De fait cela revient à considérer l'action de  $Q$  sur  $\mathcal{B}(\mathbb{T}_i)$  et à écrire que l'on a

$$\mathcal{B}(\mathbb{T}'_i) = Q \star_r \mathcal{B}(\mathbb{T}_j) \quad (\text{II-B.37})$$

De même, si l'on désire exprimer la base de  $\mathbb{T}'_{ij}$  en fonction de celle de  $\mathbb{T}_{ij}$  on écrira

$$\mathcal{B}(\mathbb{T}'_{ij}) = e'_i \otimes e'_j \quad (\text{II-B.38})$$

$$= Q_{ik} e_k \otimes Q_{jl} e_l \quad (\text{II-B.39})$$

$$= Q_{ik} Q_{jl} e_k \otimes e_l \quad (\text{II-B.40})$$

$$= Q_{ik} Q_{jl} \mathcal{B}(\mathbb{T}_{kl}) \quad (\text{II-B.41})$$

et tout simplement

$$\mathcal{B}(\mathbb{T}'_{ij}) = Q^{(2)} \star_r \mathcal{B}(\mathbb{T}_{kl}) \quad (\text{II-B.42})$$

où  $Q$  est l'opérateur de rotation généralisée d'ordre 4 défini de la manière suivante :

$$Q^{(2)}_{ijkl} = Q_{ik} Q_{jl} \quad (\text{II-B.43})$$

Ce produit tensoriel particulier sera noté  $\boxtimes$  de telle manière à ce que l'on ait, à l'ordre 2, :

$$Q^{(2)} = Q \boxtimes Q \quad (\text{II-B.44})$$

À l'ordre  $n$  on a, de même,  $Q^{(n)}$  l'application orthogonale généralisée définie par :

$$Q^{(n)} = \underbrace{Q \boxtimes \dots \boxtimes Q}_{n \text{ fois}} \quad (\text{II-B.45})$$

On notera que l'opérateur  $Q^{(n)}$  est symétrique par rapport à la permutation des opérateurs  $Q$  dans l'expression (II-B.45). On a notamment, à l'ordre 2,  $Q^{(2)}_{ijkl} = Q^{(2)}_{jilk}$ .

L'action de  $Q$  sur la base de  $\mathbb{T}_{i_1 i_2 \dots i_n}$  via  $Q^{(n)}$  associe une nouvelle base  $\mathbb{T}'_{i_1 i_2 \dots i_n}$  définie par

$$\mathcal{B}(\mathbb{T}'_{i_1 i_2 \dots i_n}) = Q^{(n)} \star \mathcal{B}(\mathbb{T}_{i_1 i_2 \dots i_n}) \quad (\text{II-B.46})$$

Cela nous conduit à l'écriture de  $\mathcal{B}(\mathbb{D}'^2)$  en fonction de l'ancienne base :

$$\mathcal{B}(\mathbb{D}'^2) = E'_i \otimes E'_j \quad (\text{II-B.47})$$

$$= Q^{(i+1)} E_i \otimes Q^{(j+1)} E_j \quad (\text{II-B.48})$$

$$= Q^{(i+j+2)} E_i \otimes E_j \quad (\text{II-B.49})$$

Ce formalisme va nous permettre de généraliser l'action d'un opérateur orthogonal à l'ensemble des opérateurs définissant une relation de comportement. En effet si l'on appelle  $\Lambda$  la matrice généralisée de comportement définie par

$$\Lambda = L_{ij} E_i \otimes E_j \quad (\text{II-B.50})$$

On a, dans le cas, d'un milieu de degré 3 :

$$\underset{\sim}{\Lambda} = \begin{pmatrix} A & M & N \\ M^T & B & O \\ N^T & O^T & C \end{pmatrix} \quad (\text{II-B.51})$$

On considère l'action de  $Q \in O(3)$  sur  $\underset{\sim}{\Lambda}$ , celle-ci s'écrit :

$$Q \star \underset{\sim}{\Lambda} = \underset{\sim}{\Theta} \underset{\sim}{\Lambda} \underset{\sim}{\Theta}^{-1} \quad (\text{II-B.52})$$

où  $\underset{\sim}{\Theta}$  est l'opérateur :

$$\underset{\sim}{\Theta} = \begin{pmatrix} Q^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & Q^{(3)} & 0 \\ 0 & 0 & Q^{(4)} \end{pmatrix} \quad (\text{II-B.53})$$

et, au final, on aboutit a

$$Q \star \underset{\sim}{\Lambda} = \begin{pmatrix} Q^{(4)}A & Q^{(5)}M & Q^{(6)}N \\ Q^{(5)}M^T & Q^{(6)}B & Q^{(7)}O \\ Q^{(6)}N^T & Q^{(7)}O^T & Q^{(8)}C \end{pmatrix} \quad (\text{II-B.54})$$

Et en indicielle, on a

$$(Q \star \underset{\sim}{\Lambda})_{ij} = Q^{(i+j+2)} L_{ij} \quad (\text{II-B.55})$$

Cette écriture constitue un produit de Rayleigh généralisé. Nous noterons  $\Phi$  l'application qui a  $Q \in O(3)$  associe la matrice  $\underset{\sim}{\Theta} \in GL(\mathbb{D})$ . Ainsi défini  $\Phi$  est une représentation de  $O(3)$  sur  $\mathbb{D}$ .

Notons ici un dernier point, on introduit l'opérateur suivant  $\odot$  qui nous permet de contracter notre matrice d'opérateurs avec notre vecteur de champs. On a en indicielle<sup>2</sup> :

$$\sigma_i = L_{ij} \overline{\otimes}^{j+1} \varepsilon_j \quad (\text{II-B.56})$$

que nous noterons de manière « matricielle »

$$\underline{\varsigma} = \underset{\sim}{\Lambda} \odot \underline{\varepsilon} \quad (\text{II-B.57})$$

Ce qui nous permet d'écrire nos équations de comportements sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \sigma^0 \\ \sigma^1 \\ \sigma^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & M & N \\ M^T & B & O \\ N^T & O^T & C \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} \varepsilon^0 \\ \varepsilon^1 \\ \varepsilon^2 \end{pmatrix} \quad (\text{II-B.58})$$

## II-B.4 Synthèse

Nous venons de présenter un formalisme qui nous permet de récrire les lois de comportement d'un milieu élastique de degré  $n$  sous forme matricielle. Loin d'être anecdotique cette propriété est liée à la structure algébrique des équations de comportement d'un milieu généralisé. Dans ce formalisme l'ensemble des déformations en un point constitue les composantes d'un vecteur. La base de l'espace-vectoriel associé est constituée d'une famille de vecteur-espaces qui sont  $n + 1$  espaces de tenseur. La définition de ce formalisme nous a permis d'introduire un opérateur de rotation généralisée agissant sur l'ensemble des équations de comportement à la fois. Cet outil a le double avantage d'être, à la fois facile à manipuler, ainsi que de portée complètement générale. Nous l'utiliserons au cours de l'annexe II-C pour déterminer le groupe de symétrie d'un milieu élastique de degré  $n$ .

<sup>2</sup>La notation  $\overline{\otimes}^n$  définit un produit contracté sur  $n$  indices.



## ANNEXE II–C

### Groupe de symétrie d'un milieu élastique de degré $n$

Cette annexe a pour objectif de définir, en toute généralité, le groupe de symétrie des équations de comportement d'un milieu élastique généralisé de degré  $n$ . Elle se rapporte ainsi, plus particulièrement, au chapitre II–3. Et, pour établir nos résultats, nous utiliserons le formalisme que nous avons introduit dans l'annexe II–B.

#### II–C.1 Introduction

On considère un domaine matériel  $\mathcal{M}$ . Le matériau élastique défini sur ce domaine est supposé pouvoir être modélisé par un milieu continu généralisé de degré  $n$ . On désire caractériser les conséquences des symétries matérielles de  $\mathcal{M}$  sur les coefficients de la loi de comportement. On se propose ici d'établir le groupe des transformations « rigides » laissant cette loi invariante. Par rigide nous entendons les transformations agissant simultanément sur l'ensemble des composantes de l'espace de description<sup>1</sup>  $\mathbb{D}$  ainsi que, par voie de conséquence, sur  $\mathbb{D}^2$ . Nous insisterons sur cette notion plus en détail au cours de ce chapitre, et ceci notamment au regard de la littérature qui s'est déjà intéressée en partie à ce sujet [87–89]. Toutefois nous distinguons d'elle dans le sens où, malgré un certain nombre de points de ressemblance, nous ne traiterons pas exactement du même problème.

#### II–C.2 Hypothèses et loi de comportement

On considère un milieu élastique dans l'hypothèse des petites perturbations. De fait notre loi de comportement est linéaire. On supposera de plus que notre milieu satisfasse au principe de l'action locale. Ceci implique notamment que l'on puisse considérer l'ensemble des composantes des vecteurs d'état  $\underline{\epsilon}$  et  $\underline{\varsigma}$  comme étant des champs indépendants au niveau local [90]. On considère alors un volume élémentaire et on écrit en ce point :

$$\underline{\varsigma} = \underline{\Lambda} \odot \underline{\epsilon} \quad (\text{II–C.1})$$

où  $\underline{\epsilon}$  ainsi que  $\underline{\varsigma}$  sont, conformément à ce qui a été dit au cours de l'annexe II–B, des vecteurs dans un espace dont la base est constituée par des espaces de tenseurs. Dans cette base l'opérateur de comportement  $\underline{\Lambda}$  peut être représenté par une matrice par blocs. La relation (II–C.1)

<sup>1</sup>Cette notion est introduite dans l'annexe II–B.

peut se récrire en indicielle

$$\sigma_i = L_{ij} \varepsilon_j \quad (\text{II-C.2})$$

On peut définir pour l'opérateur de comportement  $\tilde{\Lambda}$  son opérateur adjoint de la manière suivante :

$$L_{ij}^T = L_{ji} \quad (\text{II-C.3})$$

On suppose, de plus, que notre comportement dérive d'un potentiel quadratique. De fait les opérateurs blocs diagonaux de  $\tilde{\Lambda}$  sont auto-adjoints, tandis que les opérateurs extra-diagonaux sont adjoints deux-à-deux. C'est-à-dire que si l'on considère les tenseurs  $M$  d'ordre  $i + j + 2$  associé à l'opérateur bloc  $L_{ij}$  on a :

$$L_{ij} = M = M_{\{i+1\}\{j+1\}} \quad (\text{II-C.4})$$

où  $M_{\{i+1\}\{j+1\}} \in \mathbb{T}^{i+1} \otimes \mathbb{T}^{j+1}$ , et où la notation  $\{i + 1\}\{j + 1\}$  représente le bloc des  $\{i + 1\}$  premiers indices suivit des  $\{j + 1\}$  autre, alors :

$$L_{ij}^T = L_{ji} = M^T = M_{\{j+1\}\{i+1\}} \quad (\text{II-C.5})$$

De fait, si l'on considère un milieu de degré  $n$  le comportement élastique de celui-ci sera une fonction de  $\frac{n(n+1)}{2}$  tenseurs. Nous référerons à cette famille de tenseurs par  $\{L\}_k$ . Nous pouvons alors définir  $\mathcal{L}$  notre loi de comportement de la manière suivante :

$$\mathcal{L}(\{L\}_k) : \underline{\varepsilon} \in \mathbb{M} \longrightarrow \mathcal{L}(\{L\}_k)(\underline{\varepsilon}) = \underline{\sigma}(\underline{\varepsilon}) = \tilde{\Lambda} \odot \underline{\varepsilon} \quad (\text{II-C.6})$$

Ces définitions posées établissons à présent l'ensemble des transformations orthogonales qui laissent notre loi de comportement invariante.

## II-C.3 Groupe de symétrie de la loi de comportement

### II-C.3.1 Modélisation du problème

Pour déterminer les conditions de symétrie que nos tenseurs de comportement doivent vérifier nous procéderons de la sorte. On considère notre matériau dans une configuration de référence dans le repère physique. On applique à ce matériau un champ de déformation défini et représenté en tout point par le vecteur d'état de référence  $\underline{\varepsilon}_{ref}$ . On a alors, en tout point, le champ de contraintes résultant  $\underline{\varsigma}_{ref}$ , tel que :

$$\underline{\varsigma}_{ref} = \tilde{\Lambda}_{ref} \odot \underline{\varepsilon}_{ref} \quad (\text{II-C.7})$$

On considère également un deuxième état, celui-ci se construit à partir du premier de la manière suivante. On modifie la configuration de notre matériau dans notre repère physique, le passage entre la configuration de référence et la configuration « modifiée » se faisant via une transformation orthogonale  $Q \in O(3)$  du milieu matériel. Ceci a pour conséquence que l'ensemble des tenseurs définissant le comportement de notre milieu se transforme. On peut alors définir un nouvel opérateur de comportement  $\tilde{\Lambda}^*$  se déduisant de celui de l'état de référence via la relation définie à l'annexe II-B :

$$\tilde{\Lambda}^* = \Theta \tilde{\Lambda}_{ref} \Theta^{-1} \quad (\text{II-C.8})$$

On considère de plus que le champ défini en tout point par le vecteur  $\underline{\varepsilon}_{réf}$  reste identique. Cela nous conduit à un nouveau champ de contraintes généralisées défini par  $\underline{\zeta}^*$  tel que :

$$\underline{\zeta}^* = \left( \underset{\sim}{\Theta} \underset{\sim}{\Lambda} \underset{\sim}{\Theta}^{-1} \right) \odot \underline{\varepsilon}_{réf} \quad (\text{II-C.9})$$

La transformation définie par Q est une opération de symétrie si elle conduit à un état mécanique qui est indiscernable de celui l'état de référence. C'est-à-dire tel que :

$$\underline{\zeta}_{réf} = \left( \underset{\sim}{\Theta} \underset{\sim}{\Lambda} \underset{\sim}{\Theta}^{-1} \right) \odot \underline{\varepsilon}_{réf} \quad (\text{II-C.10})$$

et ceci quelque soit le champ  $\underline{\varepsilon}$  appliqué. Ceci peut se récrire :

$$\forall \underline{\varepsilon} \in \mathbb{M} \quad \left( \underset{\sim}{\Theta} \underset{\sim}{\Lambda} \underset{\sim}{\Theta}^{-1} - \underset{\sim}{\Lambda} \right) \odot \underline{\varepsilon} = 0 \quad (\text{II-C.11})$$

L'ensemble de symétrie de notre matériau est, de fait, défini de la manière suivante

$$\mathcal{H}_{(\underset{\sim}{\Lambda})} = \left\{ Q \in O(3) \mid \underset{\sim}{\Theta} \underset{\sim}{\Lambda} \underset{\sim}{\Theta}^{-1} = \underset{\sim}{\Lambda} \right\} \quad (\text{II-C.12})$$

Ceci constitue la première étape de ce que nous désirons établir. Il nous faut à présent montrer plusieurs choses :

- établir la structure de groupe de cet ensemble ;
- déterminer son expression explicite minimale.

### II-C.3.2 Groupe de symétrie

L'établissement de la structure de groupe de  $\mathcal{H}_{(\underset{\sim}{\Lambda})}$  est immédiate. Nous avons établi au cours du chapitre II-B l'expression de l'application  $\Phi$  qui à  $Q \in O(3)$  associe la matrice  $\underset{\sim}{\Theta}$ . Cette application est une représentation de  $O(3)$  sur  $\mathbb{D}$ , de fait,  $\mathcal{H}_{(\underset{\sim}{\Lambda})}$  hérite automatiquement de la structure de groupe. On a

$$G_{(\underset{\sim}{\Lambda})} = \left\{ Q \in O(3) \mid \underset{\sim}{\Theta} \underset{\sim}{\Lambda} \underset{\sim}{\Theta}^{-1} = \underset{\sim}{\Lambda} \right\} \quad (\text{II-C.13})$$

en indicielle ce groupe de symétrie se récrit

$$G_{(\underset{\sim}{\Lambda})} = \left\{ Q \in O(3) \mid \forall L_{ij} \in \underset{\sim}{\Lambda} \quad Q^{(i+j+2)} L_{ij} Q^{-(i+j+2)} = L_{ij} \right\} \quad (\text{II-C.14})$$

De fait si l'on note

$$G_{(L_{ij})} = \left\{ Q \in O(3) \mid Q^{(i+j+2)}(Q) L_{ij} Q^{-(i+j+2)} = L_{ij} \right\} \quad (\text{II-C.15})$$

alors la relation (II-C.14) peut se récrire

$$G_{(\underset{\sim}{\Lambda})} = \bigcap_{(i,j) \in [1,n]^2} G_{(L_{ij})} \quad (\text{II-C.16})$$

Toutefois le groupe de symétrie tel qu'il est défini par la relation (II-C.16) est l'intersection des groupes de symétrie de  $n^2$  tenseurs alors que  $\mathcal{L}$  la loi de comportement ne dépend quant à elle que de  $\frac{n(n+1)}{2}$  tenseurs. De fait peut-on réduire le nombre de tenseurs en présence dans (II-C.16) ? On rappelle que l'opérateur de comportement transposé s'écrit (II-C.3)

$$\underset{\sim}{\Lambda}^T = (L_{ij})^T = L_{ji} \quad (\text{II-C.17})$$



La question devient la suivante : soit  $L$  un tenseur d'ordre  $k + p$  dont le groupe de symétrie est  $G(L)$ , on considère le tenseur  $L^T$  dont l'ordre est  $p + k$  et dont le groupe de symétrie est  $G(L^T)$ , a-t-on  $G(L) = G(L^T)$  ?

Montrons pour commencer que l'inclusion  $G(L) \subset G(L^T)$  est vérifiée. On considère pour cela  $Q \in G(L)$ , ainsi que la fonction  $f$  qui à  $L$  associe  $L^T$ , c'est-à-dire qui permute par bloc les  $k$  premiers indices de  $L$  avec les  $p$  derniers. On a

$$L_{\{k\}\{p\}} = Q^{(k+p)} L_{\{k\}\{p\}} \quad (\text{II-C.18})$$

$$= Q^{(k)} \boxtimes Q^{(p)} L_{\{k\}\{p\}} \quad (\text{II-C.19})$$

$$= Q^{(k)} L_{\{k\}\{p\}} Q^{(-p)} \quad (\text{II-C.20})$$

de fait

$$L_{\{p\}\{k\}} = f(L_{\{k\}\{p\}}) \quad (\text{II-C.21})$$

$$= Q^{(p)} L_{\{p\}\{k\}} Q^{(-k)} \quad (\text{II-C.22})$$

$$= Q^{(p+k)} L_{\{p\}\{k\}} \quad (\text{II-C.23})$$

ce qui implique

$$\forall Q \in G(L), Q \in G(L^T) \quad (\text{II-C.24})$$

c'est-à-dire que  $G(L) \subset G(L^T)$ .

Pour l'inclusion réciproque  $G(L^T) \subset G(L)$  la démonstration est rigoureusement identique. En conclusion, on a bien  $G(L) = G(L^T)$ . Nous pouvons alors réécrire (II-C.16) en ne considérant plus que  $\frac{n(n+1)}{2}$  tenseurs

$$G_{\sim}(\Lambda) = \bigcap_{k=1}^{\frac{n(n+1)}{2}} G(\{L\}_k) \quad (\text{II-C.25})$$

ce qui correspond tout simplement au groupe de symétrie de notre loi de comportement au sens où celle-ci a été définie via la relation (II-C.6). De fait, et on conclusion,

$$G_{(\mathcal{L})} = \bigcap_{k=1}^{\frac{n(n+1)}{2}} G(\{L\}_k) \quad (\text{II-C.26})$$

ce qui est le résultat que nous recherchions.

## II-C.4 Discussion

En discussion nous introduirons trois références de la littérature vis-à-vis desquelles nous désirons mettre nos résultats en perspectives. Par ordre chronologique nous introduirons tout d'abord l'article de Murdoch [87] qui semble être l'article de référence sur le sujet. Le travail de Elzanowski et Epstein [88] vient ensuite et redémontre en partie les résultats de Murdoch. Toutefois cet article va moins loin que le précédent et les auteurs semblent ignorer son existence. Un dernier article assez intéressant sur le sujet est celui de Testa et Vianello [89], et, même si le sujet traite, au final, plus de mécanique des fluides, les auteurs proposent dans leur article une synthèse intéressante des travaux sur le sujet. De tout ces articles le plus fondamental est celui

de Murdoch.

Les points qui nous séparent de ces travaux sont les suivants. Tout d'abord nous avons établi notre résultat dans le cas d'un milieu de degré  $n$ , tandis que les leurs sont spécifiques à un milieu de degré 2. De plus, intrinsèquement, la question que nous nous posons diffère de la leur. Leur question peut se résumer ainsi : « Je considère un milieu défini par deux champs tensoriels d'ordres différents. Quel est l'ensemble des transformations qui, agissant de manière indépendante sur chaque tenseurs de ces champs, me conduit à des champs résultants indiscernables deux à deux ? ». La réponse à cette question est un groupe de la forme

$$G = \{(H^{(2)}, K^{(3)}) | \sigma(\varepsilon^{(2)}, \varepsilon^{(3)}) = \sigma(\varepsilon^{(2)} H^{(2)}, \varepsilon^{(2)} K^{(3)} + \varepsilon^{(3)} [H^{(2)}, H^{(2)}])\} \quad (\text{II-C.27})$$

avec<sup>2</sup>  $(H^{(2)}, K^{(3)}) \in (\mathbb{T}_{ij}^+, \mathbb{T}_{i(jk)})$ . Et où la notation  $\varepsilon^{(3)} [H^{(2)}, H^{(2)}]$  s'explique, en indicielle :

$$(\varepsilon^{(3)} [H^{(2)}, H^{(2)}])_{ijk} = \varepsilon_{ilm}^{(3)} H_{lj}^{(2)} H_{mk}^{(2)} \quad (\text{II-C.28})$$

C'est-à-dire que l'on obtient le groupe des « déformations » qui laissent la relation de comportement invariante. Tandis que ce qui nous intéresse pourrait se récrire

$$G = \{Q \in O(3) | \sigma(\varepsilon^{(2)}, \varepsilon^{(3)}) = \sigma(Q \star \varepsilon^{(2)}, Q \star \varepsilon^{(3)})\} \quad (\text{II-C.29})$$

C'est-à-dire que l'on considère le groupe des transformations de l'espace qui laisse la relation de comportement invariante. De fait on voit bien, sur cet exemple, en quoi nos résultats sont foncièrement différents de ceux des auteurs précités, et ceci avec une problématique initiale qui peut paraître assez semblable.

## II-C.5 Synthèse

Plusieurs choses sont à souligner. La relation (II-C.26) peut se résumer simplement de la manière suivante : le groupe de symétrie d'une loi de comportement d'un milieu généralisé de degré  $n$  est l'ensemble des transformations que l'on peut appliquer à ce milieu et tel que, pour des causes physiques identiques, les réponses de ce milieu soient indiscernables. Ce groupe de symétrie se définit comme étant l'intersection des groupes de symétrie des tenseurs de la loi de comportement. C'est-à-dire que le groupe de symétrie de la loi est l'ensemble des transformations qui conservent les « mécanismes » qui définissent le comportement du milieu.

L'autre point intéressant à souligner ici est l'utilisation du formalisme que nous avons introduit au cours de l'annexe II-B. Par l'utilisation des opérations de transformations généralisés, nous avons pu établir assez directement l'ensemble des résultats de ce chapitre. Il est évident que ces résultats auraient pu être établis à partir du produit de Rayleigh classique, toutefois les manipulations à faire pour cela auraient été nettement plus laborieuses.

---

<sup>2</sup> $\mathbb{T}_{ij}^+$  indique le groupe des matrices de déterminant positif.



## ANNEXE II–D

### Démonstration du théorème d’Hermann à partir de la méthode Forte-Vianello

Le travail présenté dans cette annexe a été publié aux *Compte Rendus de l’Académie des Sciences* [70]. La connaissance des ces théorèmes permet de connaître *a priori* un certain nombre de résultats généraux concernant les liens entre symétries matérielles et physiques. L’idée principale de ces théorèmes est celle qu’un tenseur ne peut pas voir une symétrie dont l’ordre est supérieur au nombre de ses indices.

Les résultats présentés ici ont été démontrés pour des tenseurs d’ordre pair dans un espace euclidien de dimension 3. Ils demeurent vrai également pour des tenseurs d’ordre impair, ainsi qu’en dimension 2. Un travail sur la réciproque de ces théorèmes est proposé en annexe II–E et traite, plus particulièrement, des différences qu’il existe entre un espace euclidien à 2 et à 3 dimensions.

# Démonstration du théorème d'Hermann à partir de la méthode Forte–Vianello

Nicolas Auffray

ONERA-DMMP BP72, 29, avenue de la Division Leclerc, 92322 Châtillon cedex, France

Reçu le 4 septembre 2007 ; accepté après révision le 5 février 2008

Disponible sur Internet le 3 mars 2008

Présenté par Évariste Sanchez-Palencia

---

## Résumé

Une nouvelle dérivation du théorème d'Hermann est proposée. La démonstration s'appuiera sur les outils introduit par Forte et Vianello [S. Forte, M. Vianello, Symmetry classes for elasticity tensors, *Journal of Elasticity* 43 (1996) 81–108]. **Pour citer cet article :** *N. Auffray, C. R. Mecanique 336 (2008)*.

© 2008 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

## Abstract

**Proof of Hermann's theorem using the Forte–Vianello's method.** A new derivation of Hermann' theorem is proposed, this demonstration is based on Forte–Vianello approach [S. Forte, M. Vianello, Symmetry classes for elasticity tensors, *Journal of Elasticity* 43 (1996) 81–108]. **To cite this article:** *N. Auffray, C. R. Mecanique 336 (2008)*.

© 2008 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

*Mots-clés :* Algèbre tensorielle ; Classe d'anisotropie

*Keywords:* Tensor algebra; Anisotropic class

---

## 1. Introduction

Un des théorèmes de C. Hermann [1] établit un lien formel entre l'ordre de symétrie d'un milieu matériel et celui d'une propriété tensorielle définie sur ce milieu. Ce théorème établit le fait que lorsque l'ordre d'un axe de symétrie excède l'ordre du tenseur de la propriété, alors celui-ci est le conjugué d'une classe de symétrie continue. Ce théorème issue de la cristallographie offre des perspectives très intéressantes vis-à-vis de la conception de matériaux architecturés. L'objectif de cette contribution est de présenter une nouvelle dérivation de ce résultat et ceci en insistant sur les mécanismes d'algèbres tensorielles sous-jacents. Les outils utilisés pour ce faire sont issus de la théorie des groupes et sont en cohérence avec ceux introduits par Forte et Vianello en 1996 [2] lors de l'analyse des classes de symétrie de l'élasticité conventionnelle.

---

Adresse e-mail : [nicolas.auffray@onera.fr](mailto:nicolas.auffray@onera.fr).

## 2. Présentation des objets

On considère un matériau  $\mathcal{M}$  quelconque dont la matière occupe un domaine matériel  $\mathcal{D}$  et nous appellerons  $\mathcal{R}$  l'ensemble des variables caractérisant l'état de notre matériaux. Nous considérerons  $\mathcal{A}$  l'environnement général de  $\mathcal{M}$  (température, champs mécaniques, champs magnétiques, ...). Nous appellerons propriété physique d'un matériau l'opérateur  $\mathcal{F}$  qui traduit la manière dont notre matériau va s'adapter à une variation de son environnement, c'est-à-dire reliant une variation de l'environnement de notre matériau à une variation de son état. D'après [3] ceci peut s'écrire  $\mathcal{F} : \mathcal{A} \mapsto \mathcal{R} = \mathcal{F}\{\mathcal{A}\}$ .

Nous nous intéresserons à la restriction suivante du problème énoncé :

- (i) nous considérerons le cas où  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{R}$  peuvent être représentés par des tenseurs cartésiens d'ordre  $p$  en dimension 3. Nous considérerons de fait  $\mathbb{T}^{(p)}$  l'espace vectoriel de ces tenseurs ;
- (ii) nous considérerons également que  $\mathcal{F}$  est un automorphisme de  $\mathbb{T}^{(p)}$ , et nous noterons  $GL(\mathbb{T}^{(p)})$  l'espace vectoriel associé. Nous avons de fait  $GL(\mathbb{T}^{(p)}) \subset \mathbb{T}^{(2p)}$ .

Introduisons maintenant les groupes de symétrie de notre domaine matériel ainsi que de notre propriété physique. Nous introduirons ensuite la notion de *conjugaison* qui nous permettra de comparer et de trier des objets abstraits entre eux.

### 2.1. Symétries matérielles et physiques

On considère  $O(3)$  le groupe orthogonal de  $E$ , l'espace euclidien physique. Les symétries matérielles sont définies par l'invariance de  $\mathcal{D}$ , le domaine matériel, sous l'action de  $G_m$ , où  $G_m$  est un sous-groupe fermé de  $O(3)$  défini de la manière suivante :  $G_m = \{Q \in O(3) \mid Q \star \mathcal{D} = \mathcal{D}\}$  où l'opérateur  $\star$  représente le produit de Rayleigh.

On définit  $G_p(\mathbb{T}^{(2p)})$  le groupe de symétrie du tenseur  $T^{(2p)}$  :

$$G_p(\mathbb{T}^{(2p)}) = \{Q \in O(3) \mid Q \star T^{(2p)} = T^{(2p)}\}, \quad T^{(2p)} \in GL(\mathbb{T}^{(p)}) \quad (1)$$

Notre tenseur  $T^{(2p)}$  qui traduit les propriétés physiques de notre matériau est d'ordre pair. L'écriture du produit de Rayleigh appliqué à un tenseur d'ordre pair fait apparaître un nombre pair de fois l'opérateur  $Q$ , de fait  $G_p$  ne peut pas contenir l'inversion et on restreint  $G_p(\mathbb{T}^{(2p)})$  à  $SO(3)$ , le groupe spécial orthogonal. L'application du *principe de Neumann* [3] nous permet ensuite de relier ces deux groupes de symétries, i.e.  $G_m \subseteq G_p$

### 2.2. Relations de conjugaison

Les notions ci-dessus permettent de caractériser un objet vis-à-vis de ses symétries. Pour comparer deux objets différents entre eux de manière à savoir s'ils sont, ou non, équivalents au sens de leurs symétries, on introduit la notion de *groupes conjugués*. Soient  $G_1$  et  $G_2$  deux sous-groupes conjugués de  $SO(3)$  on a :

$$G_1 \sim G_2 \Leftrightarrow \exists R \in SO(3), \quad G_1 = RG_2R^T \quad (2)$$

La classe d'équivalence  $\{G_\alpha\}$  d'un groupe  $G_\alpha$  de  $SO(3)$  est l'ensemble des sous-groupes qui lui sont conjugués, c'est-à-dire :

$$\{G_\alpha\} = \{G \in SO(3) \mid \exists R \in SO(3), G_\alpha = RGR^T\} \quad (3)$$

On peut alors, à la manière de [2], définir des classes d'équivalence sur l'espace  $GL(\mathbb{T}^{(p)})$ . On en retient la définition suivante :

$$T_1^{(2p)}, T_2^{(2p)} \in (GL(\mathbb{T}^{(p)}))^2, \quad T_1^{(2p)} \sim T_2^{(2p)} \Leftrightarrow \exists R \in SO(3), \quad G_p(T_1^{(2p)}) = RG_p(T_2^{(2p)})R^T \quad (4)$$

Comme montré par Zheng et Boehler dans [3] seule la conjugaison vis-à-vis des sous-groupes fermés de  $SO(3)$  est à considérer. La collection de ces sous-groupes est  $\Sigma := \{I, Z_m, D_m, \mathcal{T}, \mathcal{O}, \mathcal{I}, SO(2), O(2), SO(3)\}$ , ( $m \geq 2$ ) où : –  $I$  est le groupe identité ;  $Z_m$  le groupe cyclique d'ordre  $m$  ;  $D_m$  le groupe diédral d'ordre  $2m$  ; –  $\mathcal{T}$  le groupe de

symétrie du tétraèdre ; –  $\mathcal{O}$  le groupe de symétrie du cube ; –  $\mathcal{I}$  le groupe de symétrie de l'icosaèdre. Le corollaire est que tout groupe de symétrie d'un tenseur est nécessairement le conjugué d'un unique élément de  $\Sigma$  :

$$\forall \mathbb{T}^{(2p)} \in \text{GL}(\mathbb{T}^{(p)}), \quad \text{G}_p(\mathbb{T}^{(2p)}) \sim \text{G}_\Sigma, \quad \text{G}_\Sigma \in \Sigma \quad (5)$$

L'espace vectoriel  $\text{GL}(\mathbb{T}^{(p)})$  est donc divisé en classes d'équivalences. Ces classes se définissent

$$\text{GL}(\mathbb{T}^{(p)})(\text{G}_\Sigma) := \{ \mathbb{T}^{(2p)} \in \text{GL}(\mathbb{T}^{(p)}) \mid \text{G}_p(\mathbb{T}^{(2p)}) \sim \{\text{G}_\Sigma\} \} \quad (6)$$

On notera que  $\text{GL}(\mathbb{T}^{(p)})(\text{G}_\Sigma)$  ne constitue pas un sous-espace vectoriel de  $\text{GL}(\mathbb{T}^{(p)})$  ainsi que le fait que les classes d'équivalences sont disjointes, i.e.

$$\text{G}_{\Sigma_1} \neq \text{G}_{\Sigma_2} \Rightarrow \text{GL}(\mathbb{T}^{(p)})(\text{G}_{\Sigma_1}) \cap \text{GL}(\mathbb{T}^{(p)})(\text{G}_{\Sigma_2}) = \emptyset \quad (7)$$

On a de fait  $\text{GL}(\mathbb{T}^{(p)}) = \bigcup_{\text{G}_\Sigma \in \Sigma} \text{GL}(\mathbb{T}^{(p)})(\text{G}_\Sigma)$ . C'est à partir de ce matériel que nous allons dériver nos théorèmes.

### 3. Théorèmes

Nous pouvons résumer nos résultats au travers de 4 théorèmes :

**Théorème 3.1.** Soit  $\mathbb{T}^{(2p)}$  un tenseur cartésien d'ordre  $2p$  défini sur un domaine  $\mathcal{D}$ . Si le groupe de symétrie de  $\mathcal{D}$  contient  $Z_m$  avec  $m > 2p$  alors le tenseur  $\mathbb{T}^{(2p)}$  est au moins hémitrope transverse.

**Théorème 3.2.** Soit  $\mathbb{T}^{(2p)}$  un tenseur cartésien d'ordre  $2p$  défini sur un domaine  $\mathcal{D}$ . Si le groupe de symétrie de  $\mathcal{D}$  contient  $D_m$  avec  $m > 2p$  alors le tenseur  $\mathbb{T}^{(2p)}$  est au moins isotrope transverse.

**Théorème 3.3.** Soit  $\mathbb{T}^{(2p)}$  un tenseur cartésien d'ordre  $2p$  défini sur un domaine  $\mathcal{D}$ . Si le groupe de symétrie de  $\mathcal{D}$  contient  $Z_m$  avec  $m > 2p$  et si la décomposition harmonique de  $\mathbb{T}^{(2p)}$  ne contient que des termes d'ordres pairs alors le tenseur  $\mathbb{T}^{(2p)}$  est au moins isotrope transverse.

De plus comme montré dans [4] la décomposition harmonique d'un tenseur totalement symétrique ne contient que des tenseurs d'ordres pairs de fait :

**Théorème 3.4.** Soit  $\mathbb{T}^{(2p)}$  un tenseur cartésien totalement symétrique d'ordre  $2p$  défini sur un domaine  $\mathcal{D}$ . Si le groupe de symétrie de  $\mathcal{D}$  contient  $Z_m$  avec  $m > 2p$  alors le tenseur  $\mathbb{T}^{(2p)}$  est isotrope transverse.

### 4. Démonstration

Pour démontrer ces théorèmes nous nous baserons sur deux décompositions successives de notre tenseur d'ordre  $2p$ . La première décomposition est une décomposition harmonique [5], la seconde une décomposition de Cartan [2]. Ces décompositions sont respectivement  $\text{SO}(3)$  et  $\text{SO}(2)$ -invariante et nous permettent d'étudier facilement l'action d'un axe d'ordre  $m$  sur un tenseur d'ordre  $n$ .

#### 4.1. Décomposition harmonique

Tout tenseur cartésien peut être décomposé en une série de tenseurs harmoniques [5] d'ordres décroissants encapsulés dans des tenseurs d'ordres  $k$  :

$$\mathbb{T}^{(n)} = \sum_{\oplus \tau, i} \mathbb{H}^{(i, \tau)} \quad (8)$$

cette forme constitue le spectre de réduction de  $\mathbb{T}^{(n)}$ ,  $i$  indique l'ordre du tenseur harmonique, et  $\tau$  distingue les différentes composantes de même ordre. Cette décomposition étant  $\text{SO}(3)$ -invariante [2] nous pouvons écrire :

$$\forall \mathbb{Q} \in \text{SO}(3), \forall \mathbb{T}^{(n)} \in \mathbb{T}^{(n)} \quad \mathbb{Q} \star \mathbb{T}^{(n)} = (\mathbb{Q} \star \mathbb{H}^{(n)}, \mathbb{Q} \star \mathbb{H}^{(n-1, \tau)}, \dots, \mathbb{Q} \star \mathbb{H}_l^{(n-i, \tau)}, \dots) \quad (9)$$

Cette propriété nous permet d'écrire (1) le groupe de symétrie physique comme :

$$G_p(T^{(2p)}) = \bigcap G_p(\{H\}_m) \tag{10}$$

avec  $\{H\}_m$  la collection de tous les tenseurs appartenant à la décomposition harmonique de  $T^{(2p)}$ . L'écriture du groupe de symétrie d'un tenseur comme intersection des groupes de symétrie des éléments de sa décomposition nous permet d'étudier chacun d'entre eux indépendamment.

#### 4.2. Décomposition de Cartan

L'espace  $\mathcal{H}^q$  des polynômes harmoniques de degré  $q$  étant isomorphe à l'espace des tenseurs harmoniques d'ordre  $q$ , nous étudierons les polynômes associés à cette décomposition. Ces polynômes seront étudiés dans leur base de Cartan  $\{\mathcal{K}_i^q\}_{1 \leq i \leq q}$  respective. L'invariance de  $T^{(2p)}$  par l'action de  $Q \in G_m(\mathcal{D})$  se traduit par celle de ses composantes harmoniques. On considère le tenseur  $H^{(q)}$  issue de cette décomposition<sup>1</sup> et d'ordre  $q$ . Son polynôme  $h^{(q)} \in \mathcal{H}^q$ , de degré  $q$  s'exprime dans sa base de Cartan associée :

$$h^{(q)} := \lambda u + \sum_{i=1}^q (\alpha_i s_i + \beta_i t_i) \tag{11}$$

Considérons à présent  $h_i^{(q)}$  la composante de  $h^{(q)}$  selon  $\mathcal{K}_i^q$  et de degré  $i$  :  $h_i^{(q)} = \alpha_i s_i + \beta_i t_i$ . L'invariance de  $T^{(2p)}$  par  $Q$  implique l'invariance de chaque composante de  $h$  dans les sous-espaces de Cartan, c'est-à-dire

$$Q \star h_i^{(q)} = h_i^{(q)} \tag{12}$$

Si l'on considère  $Q(\mathbf{k}, \theta) \in SO(2)$  et  $Q(\mathbf{i}, \pi)$  leurs actions sur  $\mathcal{K}_i^q$  s'écrivent respectivement :

$$\begin{pmatrix} \cos(i\theta) & \sin(i\theta) \\ -\sin(i\theta) & \cos(i\theta) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} (-1)^{q-i} & 0 \\ 0 & (-1)^{q-i+1} \end{pmatrix} \tag{13}$$

On est ainsi passé d'une condition à vérifier sur l'ensemble du tenseur à une série de conditions matricielles portant sur les composantes des décompositions.

#### 4.3. Condition d'invariance

D'après les relations précédentes, la condition (12) s'écrit :

$$\alpha_i (\cos(i\theta) - 1) - \beta_i \sin(i\theta) = 0 \quad \text{et} \quad \alpha_i \sin(i\theta) - \beta_i (\cos(i\theta) - 1) = 0 \tag{14}$$

Ce système est vérifié

$$\forall (\alpha_i, \beta_i) \in \mathbb{R}^2 \text{ si } \theta = \frac{2k\pi}{i}, \quad k \in \mathbb{N} \quad \text{ou} \quad \forall \theta \in [0, 2\pi] \text{ si } \alpha_i = \beta_i = 0 \tag{15}$$

*Action de  $Z_m$*  Si on considère l'invariance de  $h^{(q)}$  par  $Q(\mathbf{k}, \frac{2\pi}{m})$  avec  $m > q$ , on a

$$\forall i \in [1, q] \quad i \neq km \tag{16}$$

on ne peut donc satisfaire la condition sur  $\theta$  dans aucun des sous-espaces  $\mathcal{K}_i^q$  avec  $i \in [1, q]$ ; les coefficients associés à ces sous-espaces sont donc nuls. Il ne reste que le terme selon  $\mathcal{K}_0^q$ , soit :

$$h^{(q)} := \lambda u \tag{17}$$

On a donc, pour un polynôme homogène harmonique de degré  $q$ , la propriété suivante :

$$\forall Q \in Z_m, m > d^\circ(h^{(q)}) \quad Q \star h^{(q)} = h^{(q)} \Leftrightarrow h^{(q)} = \lambda u \tag{18}$$

<sup>1</sup> On omettra l'écriture de  $\tau$  par soucis de lisibilité.



par continuité si l'on considère que  $SO(2) = \lim_{m \rightarrow \infty} Z_m$  on peut récrire la propriété précédente :

$$\forall Q \in SO(2) \quad Q \star h^{(q)} = h^{(q)} \Leftrightarrow h^{(q)} = \lambda u \quad (19)$$

De fait, vis-à-vis d'un polynôme homogène harmonique de degré  $q$ , une condition de symétrie d'ordre  $q + 1$  est équivalente à une condition de symétrie infinie. Par isomorphisme des espaces considérés cette propriété est transportable dans l'espace des tenseurs harmoniques d'ordre  $q$ . On aboutit alors à

$$\forall Q \in Z_m, m > \mathcal{O}(H^{(q)}) \Leftrightarrow (\forall Q \in SO(2) \quad Q \star H^{(q)} = H^{(q)} \Leftrightarrow H^{(q)} = H_0^{(q)}) \quad (20)$$

où  $H_0^{(q)}$  est le tenseur d'ordre 0 de la décomposition de Cartan du tenseur harmonique  $H^{(q)}$ . L'application d'une condition de symétrie d'ordre  $q + 1$  sur un tenseur harmonique d'ordre  $q$ , est équivalente à l'application d'une condition de symétrie infinie. D'après la relation (19) ceci peut se récrire

$$\forall Q \in Z_m, m > \mathcal{O}(H^{(q)}) \quad G_p(H^{(q)}) = SO(2) \quad (21)$$

La composante harmonique d'ordre maximale de  $T^{(2p)}$  étant d'ordre  $2p$ , il suffit de choisir  $m > 2p$  pour que l'on obtienne :

$$\forall Q \in Z_m, \quad Q \star T^{(2p)} = T^{(2p)} \Rightarrow G_p(T^{(2p)}) = \bigcap G_p(\{H\}_m) = SO(2) \quad (22)$$

ce qui revient à dire que notre tenseur  $T$  est hémitrope transverse. *Ceci prouve le Théorème 3.1.*

*Action de  $D_m$*  Considérons à présent l'action du groupe diédral  $D_m$ . Son action est équivalente à celle d'un groupe cyclique d'ordre  $m$  auquel on rajouterait la rotation  $Q(\mathbf{i}, \pi)$  au générateur. Sous l'action de  $Z_m$ , avec  $m > 2p$ , la décomposition harmonique d'un tenseur d'ordre  $2p$  se réduit à l'ensemble des tenseurs  $H_0^{(q)}$  (20), ensemble qui est laissé invariant par  $Z_m$ . Si  $Q(\mathbf{i}, \pi)$  appartient au groupe de symétrie de ce tenseur, alors celui-ci vérifie :

$$Q(\mathbf{i}, \pi) \star T^{(2p)} = T^{(2p)} \quad (23)$$

c'est à dire,

$$\forall q \in [0, 2p] \quad Q(\mathbf{i}, \pi) \star u = (-1)^q u = u \quad (24)$$

qui est vérifié

$$\forall u \text{ si } q = 2t \quad \text{ou} \quad u = 0 \text{ si } q = 2t + 1 \quad (25)$$

De fait si le groupe de symétries de  $\mathcal{D}$  contient  $D_m$  avec  $m > 2p$  alors tous les termes impairs de la décomposition harmonique s'annulent et seuls subsistent ceux invariant par  $Z_{2p+1}$  et  $Q(\mathbf{i}, \pi)$ , on a donc nécessairement pour  $m > 2p$  :

$$\forall Q \in D_m, \quad Q \star T^{(2p)} = T^{(2p)} \Rightarrow G_p(T^{(2p)}) = \bigcap G_p(\{H\}_m) = O(2) \quad (26)$$

ce qui revient à dire que notre tenseur  $T$  est isotrope transverse. *Ceci prouve le Théorème 3.2.*

Pour les deux autres théorèmes il suffit de remarquer qu'il ne sert à rien d'éliminer les composantes impaires de la décomposition harmoniques si celles-ci n'existent pas. L'application stricte de cela aboutit au Théorème 3.3, tandis que le 3.4 note que cela est automatiquement vrai si l'on a affaire à un tenseur totalement symétrique.

## 5. Synthèse et applications

L'intérêt de ces théorèmes réside dans le fait qu'ils nous permettent d'obtenir très rapidement des informations sur une propriété physique quelconque liée à un milieu dont on connaît les symétries. Regardons quelques conséquences rapides que l'on peut tirer de ces théorèmes.

### 5.1. Élasticité classique

Le spectre de réduction du tenseur d'élasticité, de part la présence de la grande symétrie, ne contient pas de termes d'ordre impair. On sait immédiatement que la classe de d'hémitropie transverse n'existe pas pour ce tenseur physique [2]. Si on supprime la grande symétrie, on retrouve le tenseur de l'effet Kerr, des termes d'ordre impair existent dans son spectre, on retrouve bien la classe d'hémitropie transverse [6]. De plus si l'on considère un milieu ayant une symétrie d'ordre 6, alors comme l'ordre de la symétrie est supérieur à celui du tenseur d'élasticité, alors le milieu est isotrope transverse vis-à-vis de cette propriété.

## 5.2. Élasticité du second gradient

Si l'on considère l'élasticité du second-gradient [7], on a la relation linéaire suivante entre le gradient de la déformation  $K^{(3)}$ , le tenseur d'hypercontrainte  $S^{(3)}$  et le tenseur d'élasticité généralisée  $A^{(6)}$  :  $S_{ijk} = A_{ijklmn} K_{lmn}$ . Si l'on considère, à nouveau, un milieu ayant une symétrie d'ordre 6, alors comme cette fois-ci l'ordre de la symétrie est égal à celui du tenseur d'élasticité du second ordre alors ce milieu isotrope transverse au premier ordre devient anisotrope à l'ordre deux. Comme de plus tout milieu périodique à une symétrie d'ordre inférieur ou égal à 6, alors vis-à-vis de l'élasticité du second gradient tout milieu périodique est anisotrope.

Cette démonstration a été effectuée pour des raisons de concision dans le cas spécial des tenseurs de comportement d'ordre pair. Sa généralisation à un tenseur d'ordre quelconque est directe.

## Références

- [1] C. Hermann, *Tensoren und Kristallsymmetrie*, Zs. Kristallogr. 8 (1934).
- [2] S. Forte, M. Vianello, *Symmetry classes for elasticity tensors*, Journal of Elasticity 43 (1996) 81–108.
- [3] Q.-S. Zheng, J.P. Boehler, *The description, classification, and reality of material and physical symmetries*, Acta Mechanica 102 (1994) 73–89.
- [4] J. Jerphagnon, D. Chemla, R. Bonneville, *The description of the physical properties of condensed matter using irreducible tensors*, Advances in Physics 27 (1978) 609–650.
- [5] A. Spencer, *A note on the decomposition of tensors into traceless symmetric tensors*, International Journal of Engineering Science 8 (1970) 475–481.
- [6] S. Forte, M. Vianello, *Symmetry classes and harmonic decomposition for photoelasticity tensors*, International Journal of Engineering Science 35 (1997) 1317–1326.
- [7] J.-M. Cardona, *Comportement et durée de vie des pièces multiperforées : application aux aubes de turbine*, Thèse de doctorat, École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2000.



## ANNEXE II–E

### Phénomène de saut de classe dans un espace physique de dimension 2

L'annexe présentée ici correspond à un article *Class-jump phenomenon in physical symmetries in bidimensional space*. [83] accepté pour publication dans un numéro spécial de *Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics* consacré au congrès *EMMC11* qui s'est tenu à Turin en 2008. Le thème du congrès était *Mechanics of microstructured solids : cellular materials, fibre reinforced solids and soft tissues*.

Cet article est le pendant théorique de *Derivation of anisotropic matrix for bi-dimensional strain gradient elasticity behavior*. [91] que nous avons soumis l'*International Journal of Solids and Structure*. Rédigé a peu près à la même époque, il correspond à la question de savoir en quelle mesure la dimension de l'espace de travail modifie le comportement d'un opérateur de comportement. Nous montrons, au cours de cet article, qu'en deux dimensions des comportements singuliers peuvent apparaître.

---

# Class-jump phenomenon for physical symmetries in bi-dimensional space.

N. Auffray<sup>1</sup>, R. Bouchet<sup>1</sup>, and Y. Bréchet<sup>2</sup>

<sup>1</sup> ONERA/DMSM, 29 Avenue de la Division Leclerc, F-92322, Châtillon Cedex, France  
nicolas.auffray@onera.fr

<sup>2</sup> LTPCM, BP 75, Domaine Universitaire de Grenoble, F-38402, Saint Martin d'Hères Cedex, France

In condensed matter physics, tensors are used in modelling physical properties of materials. Some well known examples are elasticity (*4th*-order tensor), or piezoelectricity (*3rd*-order tensor). Higher orders tensors might be encountered, as examples:

- *4th* to *6th*-order tensors to model elasticity in Mindlin's strain-gradient theory [2];
- *8th*-order tensor to describe damage.

When studying a complex behavior, the bi-dimensional version is first focused. Decreasing the problem level allows a better understanding of the physics. Then, the question is: "Is the studied phenomenon independent of the working space dimension?". In this paper, we will study the issue of linear constitutive behavior symmetry classes, and it will be shown that, in  $2D$ , anomalies can occur.

## 1 Physical and material symmetries

In the following,  $\mathcal{E}^d$  will be the  $d$ -dimensional euclidean space modelling the physical space. The  $d = 2$  and  $d = 3$  cases will be considered.

Let  $G$  be a group of operations. A material  $\mathcal{M}$  is  $G$ -invariant if the action of  $G$ 's elements transforms  $\mathcal{M}$  into itself. This set of operations, called the material symmetry group, will be noted  $G_{\mathcal{M}}$ .

$$G_{\mathcal{M}} = \{Q \in O(d), \quad Q \star \mathcal{M} = \mathcal{M}\} \quad (1)$$

where  $\star$  stands for the  $Q$  action upon  $\mathcal{M}$  and  $O(d)$  for the orthogonal group in  $d$ -dimension.

Now considering a physical property  $\mathcal{P}$  defined on  $\mathcal{M}$ , the operations set letting the behavior invariant is the physical symmetry group, noted  $G_{\mathcal{P}}$ .

$$G_{\mathcal{P}} = \{Q \in O(d), \quad Q \star \mathcal{P} = \mathcal{P}\} \quad (2)$$

$\mathcal{P}$  will be described, in the following, by an  $n$ th-order tensor noted  $T^n$ .  $T^n$  will stand for its related vector space. The  $O(d)$  action on  $T^n$  is defined using the Rayleigh product:

$$\star : O(d) \times \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n : (Q, \mathbb{T}^n) \mapsto Q \star \mathbb{T}^n := Q_{i_1 j_1} \dots Q_{i_n j_n} T_{j_1 \dots j_n}^{(n)} \quad (3)$$

Therefore the  $\mathbb{T}^n$  symmetry group is the following set of elements:

$$G_{\mathbb{T}^n} = \{Q \in O(d) | Q_{i_1 j_1} \dots Q_{i_n j_n} T_{j_1 \dots j_n}^{(n)} = T_{i_1 \dots i_n}^{(n)}\} \quad (4)$$

$\mathbb{T}^n$  is divided in equivalence classes according to its elements different symmetry properties [3].

The material symmetry group and the physical one are related by the mean of Neumann's principle [4]:

$$G_{\mathcal{M}} \subseteq G_{\mathcal{P}} \quad (5)$$

Meaning that each operation letting the material invariant let the physical properties invariant. Nevertheless, as shown for tensorial properties using Hermann's theorems [6], physical properties can be more symmetrical than the material.

In  $\mathcal{E}^2$ , plane and spatial material symmetry groups coincide meanwhile they are distinct in  $\mathcal{E}^3$ . In case of plane invariance,  $G_{\mathcal{M}}$  is conjugated with a subgroup of  $O(2)$  [4]. The collection of those subgroups is [3]:

$$\Sigma := \{I, Z_p, D_p, SO(2), O(2)\} \quad (6)$$

with  $I$  the identity group;  $Z_p$  the  $p$ -order cyclic group, i.e. the symmetry group of a  $p$ -fold-invariant chiral figure;  $D_p$  the  $2p$ -order dihedral group, i.e. the symmetry group of a regular  $p$ -gone<sup>3</sup>;  $SO(2)$  the continuous group of rotations and  $O(2)$  the continuous group of orthogonal transformations in  $2D$ . In the sequel, we will often refer to rotational invariance: the collection of  $SO(2)$ -subgroups, according to former definitions.

To study the tensors symmetry classes, an elementary parts decomposition is needed. Such a decomposition is, in literature, referred as the harmonic one [3, 1] or the irreducible one [8, 7].

## 2 Harmonic decomposition

### 2.1 Generalities

The tensor orthogonal irreducible decomposition is called harmonic decomposition. In  $\mathcal{E}^d$ , it is  $O(d)$ -invariant and is well known in group representation theory. It allows us to decompose any finite order tensor as a sum of irreducible ones [7, 8]. This decomposition can be written:

$$\mathbb{T}^n = \sum_{k, \tau} D(n)^{k, \tau} \quad (7)$$

where tensors  $D(n)^{k, \tau}$  are components of the irreducible decomposition,  $k$  denotes the order of the harmonic tensor embedded in  $D(n)$  and  $\tau$  separates same order terms. This decomposition establishes an isomorphism between  $\mathbb{T}^n$  and a direct sum of harmonic tensor vector spaces  $\mathbb{H}^k$  [3]. It is written

<sup>3</sup>  $D_p$  contains  $Z_p$  and mirror symmetry.

$$\mathbb{T}^n = \bigoplus_{k,\tau} \mathbb{H}^{k,\tau} \quad (8)$$

but, as explained in [1], this decomposition is not unique. On the contrary, the  $O(d)$ -isotypic decomposition (equation (9)), grouping same order terms, is unique.

$$\mathbb{T}^n = \bigoplus_{k=0}^n \alpha_k \mathbb{H}^k \quad (9)$$

with  $\alpha_k$  being the  $\mathbb{H}^k$  multiplicity in the decomposition. Harmonic tensors are totally symmetric and traceless. The dimensions of the associated vector spaces are:

$$\dim \mathbb{H}^k = \begin{cases} 2k + 1, & \forall k \geq 0 \text{ in } 3D \\ 2, & \forall k > 0, \text{ and } 1 \text{ if } k = 0 \text{ in } 2D \end{cases} \quad (10)$$

For simplicity sake, when there is no risk of misunderstanding, spaces  $\alpha_k \mathbb{H}^k$  will be noted  $K^{\alpha_k}$ : i.e. the subspace order  $K$  powers its multiplicity  $\alpha_k$ . Moreover, since we are dealing with  $2D$  and  $3D$  tensor spaces, bi-dimensional vector spaces will be distinguished with a  $*$  exponent. The  $\mathbb{T}^{*(n)}$  bi-dimensional harmonic decomposition will be written:

$$\mathbb{T}^{*(n)} = \bigoplus_{k=0}^n \alpha_k^* \mathbb{H}^{*k} \quad (11)$$

Families  $\{\alpha_k\}$  and  $\{\alpha_k^*\}$  are functions of tensor space order and index symmetries. Several methods exist to compute those different families [8, 7, 5]. A general result on the structure of  $2D$  and  $3D$  harmonic decomposition can be found in [7]. For a generic tensor, i.e. a tensor space with no index symmetry, the two following theorems hold true:

**Theorem 1.** *Let  $\mathbb{T}^{*(n)}$  be a  $2D$  generic  $n$ th-order tensor vector space. If  $n = 2q$  its harmonic decomposition only contains even-order subspaces. If  $n = 2q + 1$ , then its harmonic decomposition only contains odd-order subspaces.*

**Theorem 2.** *Let  $\mathbb{T}^n$  be a  $3D$  generic  $n$ th-order tensor. Its harmonic decomposition contains  $k$ th-order subspaces for each  $k$  within  $[0; n]$ .*

In the  $3D$  case, taking index symmetries into account can make odd or even components vanish. For example, totally symmetric even-order tensors will just contain even-order harmonic tensors and reciprocally for totally symmetric odd-order tensors [8].

A classical example is the space of elasticity tensors. In  $3D$ , it is isomorphic to  $0^2 \oplus 2^2 \oplus 4$  which is a 21-dimensional vector space [3]. In  $2D$ , the same space will be isomorphic to  $0^{*2} \oplus 2^* \oplus 4^*$  [7]: a 6-dimensional vector space. The information provided by these two decompositions does not allow a direct comparison of their structures. In order to do so, the  $O(2)$ -isotypic decomposition of  $\mathbb{T}^n$  has to be expressed.

Let now focus attention on the link between  $3D$  and  $2D$  harmonic decomposition. The aim is to establish, for rotational action, an isomorphism between  $3D$  harmonic tensor vector space and a direct sum of  $2D$  harmonic tensor vector spaces.

## 2.2 Cartan decomposition

Under the  $O(2)$  action,  $\mathbb{H}^k$  can be decomposed as [1]:

$$\mathbb{H}^k = \bigoplus_{j=0}^k \mathbb{K}_j^k \quad (12)$$

with

$$\dim \mathbb{K}_j^k = \begin{cases} 1 & \text{if } j = 0 \\ 2 & \text{if } j \neq 0 \end{cases} \quad (13)$$

It is referred as Cartan decomposition of an harmonic tensor space. The relation (12) implies a decomposition containing subspaces for each  $j$  within  $[0; k]$ .

For  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ,  $w = x + iy$  is the plane complex vector with  $i = \sqrt{-1}$ . As explained in [1] spaces  $\mathbb{K}_j^k$  are spanned by

$$k_l^j = \{k_1^j, k_2^j\} = \{z^{k-j} \Re(w^j), z^{k-j} \Im(w^j)\} \quad (14)$$

with  $\Re, \Im$  functions returning, respectively, a complex number real and imaginary part. Simultaneously spaces  $\mathbb{H}^{*j}$  are spanned [7] by

$$h_l^j = \{h_1^j, h_2^j\} = \{\Re(w^j), \Im(w^j)\} \quad (15)$$

So if  $z \neq 0$ , then for each space  $\mathbb{K}_j^k$  a bijective function  $\phi_j^k$  exists, turning  $\mathbb{K}_j^k$  basis vectors into  $\mathbb{H}^{*j}$  ones.  $\phi_j^k$  is defined as

$$\phi_j^k(k_l^j) = \frac{k_l^j}{z^{k-j}} = h_l^j \quad (16)$$

Therefore,  $\mathbb{H}^k$  is isomorphic, by the family  $\{\phi_j^k\}_{0 \leq j \leq k}$ , to the following space:

$$\mathbb{H}^k = \bigoplus_{j=0}^k \mathbb{H}^{*j} \quad (17)$$

The relation (9) may be rewritten:

$$\mathbb{T}^n = \bigoplus_{k=0}^n \alpha_k \left( \bigoplus_{j=0}^k \mathbb{H}^{*j} \right) = \bigoplus_{k=0}^n \sum_{j=k}^n \alpha_j \mathbb{H}^{*k} = \bigoplus_{k=0}^n \beta_k \mathbb{H}^{*k} \quad (18)$$

This decomposition is the  $O(2)$ -isotypic decomposition of a 3D tensor. The following lemma is obtained for planar decomposition of 3D operators:

**Lemma 1.** *Let  $\mathbb{T}^n$  be a 3D  $n$ th-order tensor vector space with any kind of index symmetry. Its planar harmonic decomposition contains  $k$ th-order subspaces for each  $k$  within  $[0; n]$ .*

*Proof.* Planar decomposition can be written:

$$\mathbb{T}^n = \bigoplus_{k=0}^n \beta_k \mathbb{H}^{*k} \quad (19)$$



So, to demonstrate this lemma, the following property shall be proved:

$$\forall k \in [0, n], \beta_k > 0 \quad (20)$$

The proof is straight forward. Let's consider the  $\mathbb{T}^n$  harmonic decomposition. Regardless of that space index symmetry, there is a term of order  $n$  in it. By harmonic decomposition property, this harmonic space multiplicity must be 1. Using Cartan decomposition,  $\mathbb{T}^n$  will decompose into  $n + 1$  Cartan subspaces. Therefore,

$$\forall k \in [0, n], \beta_k = \sum_{i=k}^n \alpha_i = 1 + \sum_{i=k}^{n-1} \alpha_i \quad (21)$$

and as  $\alpha_i \in \mathbb{N}$ , it can be concluded that:

$$\forall k \in [0, n], \beta_k \geq 1 \quad (22)$$

which concludes the proof.  $\square$

So theorem 1 and lemma 1 allow to formulate the following theorem:

**Theorem 3.** *Let  $\mathbb{T}^n$  be any  $n$ th-order tensor vector space. In  $\mathcal{E}^3$  its planar harmonic spectrum is full, meanwhile in  $\mathcal{E}^2$  its planar harmonic spectrum is sparse according to  $n$  parity.*

Coming back to the elasticity example, one reminds that, in  $3D$ , its vector space is isomorphic to  $0^2 \oplus 2^2 \oplus 4$ . According to formula (18), its planar decomposition will be  $0^{*5} \oplus 1^{*3} \oplus 2^{*3} \oplus 3^* \oplus 4^*$ . This last one has to be compared with the  $2D$  harmonic decomposition:  $0^{*2} \oplus 2^* \oplus 4^*$ .

The differences in the composition of the planar spectrum will lead to different symmetry systems in  $2D$  and  $3D$  physical spaces. This can be shown by studying the rotational invariance properties of tensors.

### 3 Rotational invariance

Let  $G_{\mathbb{T}^n}$  be the group of operations that let  $\mathbb{T}^n$  unchanged, i.e.:

$$Q \in G_{\mathbb{T}^n} \Rightarrow Q \star \mathbb{T}^n = \mathbb{T}^n \quad (23)$$

$\mathbb{T}^n$  is isomorphic with  $\bigoplus_{k=0}^n \beta_k \mathbb{H}^{*k}$ . So, any  $\mathbb{T}^n \in \mathbb{T}^n$  is defined by a tensors family:  $\{\mathbb{H}^{*k, \tau}\}$ . The family order is obviously  $m = \sum_{k=0}^n \beta_k$ . As this decomposition is  $SO(2)$ -invariant, the invariance condition on  $\mathbb{T}^n$  can be expressed by  $m$  conditions on the planar decomposition elements. These conditions are of  $n + 1$  different types according to the  $2D$  harmonic tensor order, i.e.

$$Q \star_k \mathbb{H}^{*k} = \mathbb{H}^{*k} \quad (24)$$

where  $\star_k$  is the action of  $SO(2)$  on  $\mathbb{H}^{*k}$ , this action shall easily be expressed in the sequel.

Let  $\mathbb{H}^{*k} = (s_k, t_k)$  be a  $\mathbb{H}^{*k}$  vector. Considering a plane rotation,  $Q_{rot} \in SO(2)$  belonging to  $Z_p$ , allows to write:

$$\mathbf{Q}_{rot} = \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi}{p} & -\sin \frac{2\pi}{p} \\ \sin \frac{2\pi}{p} & \cos \frac{2\pi}{p} \end{pmatrix} \quad (25)$$

As shown in [1],  $\mathbf{Q}_{rot}$  acts on  $\mathbb{H}^{*k}$  as a  $Z_{\frac{p}{k}}$  generator. The rotation order  $p$  is divided by the Cartan subspace indice.

$$\mathbf{Q}_{rot} \star \mathbb{H}^{*k} = \begin{pmatrix} \cos \frac{2k\pi}{p} & -\sin \frac{2k\pi}{p} \\ \sin \frac{2k\pi}{p} & \cos \frac{2k\pi}{p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_k \\ t_k \end{pmatrix} \quad (26)$$

So, if  $\mathbf{Q}_{rot}$  belongs to  $G_{\mathbb{T}^n}$  then each  $\mathbb{H}^{*k}$  must be  $\mathbf{Q}_{rot}$ -invariant. The matrix of the  $\mathbf{Q}_{rot}$  action on  $\mathbb{H}^{*k}$  will be noted  $\mathbf{Q}_{rot}^{(k)}$ . The invariance condition of  $\mathbb{H}^{*k}$  is the solution of  $(\mathbf{Q}_{rot}^{(k)} - \text{Id})\mathbb{H}^{*k} = 0$ . In other words,  $\ker(\mathbf{Q}_{rot}^{(k)} - \text{Id})$  has to be studied. A direct calculation shows that the  $\mathbb{H}^{*k}$  invariance condition under the  $Z_p$ -action is:

$$k = tp, \quad t \in \mathbb{N} \quad (27)$$

And so, if  $k \neq tp$  then  $\mathbb{H}^{*k}$  is equal to 0. Therefore  $Z_p \mathbb{T}^n$ , the  $Z_p$ -invariant  $\mathbb{T}^n$  planar decomposition, will be:

$$Z_p \mathbb{T}^n = \bigoplus_{0 \leq m \leq \lfloor \frac{n}{p} \rfloor} \beta_{mp} \mathbb{H}^{*mp} \quad (28)$$

where  $\lfloor \cdot \rfloor$  is the floor function. Clearly, in the case of  $p > n$  the decomposition (28) will reduce to

$$Z_p \mathbb{T}^n = \beta_0 \mathbb{H}^{*0} \quad (29)$$

containing only the hemitropic components. The relation (28) allows to compare material invariance consequences on operators in different cases.

For tensors in  $3D$ , as theorem 1 consequence, the following theorem can be written:

**Theorem 4.** *Let  $\mathbb{T}^n$  be a  $3D$  tensor vector space. Considering  $(p, q) \in \mathbb{N}^2$  such as  $0 < p < q \leq n$ , then  $Z_p$  and  $Z_q$ -material invariance will imply non-equivalent tensorial invariances.*

*Proof.* As a  $3D$  tensorial vector space is dealt with, according to lemma 1, its planar decomposition spectrum is full.

For any  $p$  and  $q$  greater than  $n$ , we get  $Z_p \mathbb{T}^n = Z_q \mathbb{T}^n = \beta_0 \mathbb{H}^{*0}$ . And so, it can be concluded that this condition leads to the same anisotropic class: transverse hemitropy<sup>4</sup>. This property is related to Hermann's theorems [5].

Now, suppose  $0 < p < q \leq n$ . Let's search  $p, q \in \mathbb{N}^2$  verifying  $Z_p \mathbb{T}^n = Z_q \mathbb{T}^n$ . The following relation can be written:

$$\bigoplus_{0 \leq m \leq \lfloor \frac{n}{p} \rfloor} \beta_{mp} \mathbb{H}^{*mp} = \bigoplus_{0 \leq m' \leq \lfloor \frac{n}{q} \rfloor} \beta_{m'q} \mathbb{H}^{*m'q} \quad (30)$$

implying that the following indices equality holds:  $mp = m'q$ ,  $\{m, m'\} \in \mathbb{N}^2$ .

$$\forall m, \exists m', m' = m \frac{p}{q} \quad (31)$$

and so  $\frac{p}{q} = k, k \in \mathbb{N}^*$ . Reciprocally,

<sup>4</sup> The mirror invariance should be combined with the rotational one to obtain the transverse isotropy class.

$$\forall m', \exists m, m = m' \frac{q}{p} \quad (32)$$

and so  $\frac{q}{p} = k' = \frac{1}{k}, k' \in \mathbb{N}^*$ , implying that  $k$  must be 1. The only solution is  $p = q$ , so reciprocally,  $p \neq q$  implies  $Z_p \mathbb{T}^n \neq Z_q \mathbb{T}^n$ .  $\square$

As an example of this property implication, let's consider a 6th-order tensor being, for physical illustration, the second order elasticity tensor appearing in strain-gradient elasticity [2]. By Hermann's theorems mean [6], it is known that, for any material invariance of order greater than 6, this tensor will be transverse hemitropic. Using theorem 4, any other rotational invariance leads to distinct symmetry classes. And so, considering  $SO(2)$  subgroups, 7 different rotational invariant types of tensors:  $\{I, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5, Z_6, SO(2)\}$  are obtained. Let's consider now the same problem in a  $2D$  physical space.

## 4 Bi-dimensional physical space

To study the  $3D$  plane invariance, the harmonic decomposition has to be completed by the Cartan one. In  $2D$ , the problem is simpler. There is no need to further decompose  $\mathbb{T}^{*(n)}$ . The  $Q_{rot}$  action on  $2D$  harmonic decomposition is the same as the one on Cartan decomposition in the  $3D$  case. So, all things said about the condition of invariance remain the same. The only difference arises from theorem 1. In  $2D$ , the harmonic decomposition of an even-order tensor only contains even-order harmonic tensors, and reciprocally. This property will generate a phenomenon, called "Class-Jump"-phenomenon, making some physical properties more symmetrical than they should.

### 4.1 Even-order tensors

Considering first the  $\mathbb{T}^{*(2q)}$  case, its  $O(2)$ -isotypic decomposition can be written according to theorem 1:

$$\mathbb{T}^{*(2q)} = \bigoplus_{k=0}^q \alpha_{2k}^* \mathbb{H}^{*2k} \quad (33)$$

Regarding the subset of  $Z_p$ -invariant tensors, their non-vanishing coefficients belong to  $2k$ -order subspaces verifying the relation:

$$2k = tp, \quad t \in \mathbb{N} \quad (34)$$

Two cases have to be considered:  $p = 2q'$  and  $p = 2q' + 1$ . Suppose first  $p = 2q'$ , the classical condition  $k = tq'$  is obtained. But considering the case  $p = 2q' + 1$  we obtain:

$$2k = t(2q' + 1), \quad t \in \mathbb{N} \quad (35)$$

The former relation only makes sense for  $t = 2t'$ , and so:

$$2k = t'(2(2q' + 1)), \quad t' \in \mathbb{N} \quad (36)$$

This last relation is exactly the same restriction as the one imposed by an  $Z_{(2(2q'+1))}$ -material invariance. Therefore a  $Z_{(2q'+1)}$ -material invariance imposes the same restriction on tensor as a  $Z_{(2(2q'+1))}$ -invariance. This demonstrates the following theorem:

**Theorem 5.** *In  $2D$ , an odd-order material invariance can not be seen by an even-order tensor. The material-invariance order seen will be twice the real one.*

## 4.2 Odd-order tensors

According to theorem 1, the  $O(2)$ -isotypic decomposition of the vector space  $\mathbb{T}^{*(2q+1)}$  can be written:

$$\mathbb{T}^{*(2q+1)} = \bigoplus_{k=0}^q \alpha_{2k+1}^* \mathbb{H}^{*2k+1} \quad (37)$$

Considering the subset of  $Z_p$ -invariant tensors, their non-vanishing coefficients belong to  $2k+1$ -order subspaces verifying the relation:

$$(2k+1) = tp, \quad t \in \mathbb{N} \quad (38)$$

If  $p = 2q'$ , the following condition is obtained

$$(2k+1) = 2tq', \quad t \in \mathbb{N} \quad (39)$$

As  $t \in \mathbb{N}$ , it can never be satisfied. So the following theorem has been demonstrated:

**Theorem 6.** *In  $2D$ , an even-order material invariance can not be seen by an odd-order tensor. The tensor will vanish for that kind of material invariance.*

If  $p = 2q' + 1$ , we have

$$(2k+1) = t(2q' + 1), \quad t \in \mathbb{N} \quad (40)$$

If  $t$  is even, then the relation (39) is found, meaning that no solution exists for  $t = 2t'$ . If  $t$  is odd ( $t = 2t' + 1$ ) equation (40) can be written:

$$(2k+1) = (2t+1)(2q'+1) \quad (41)$$

This last relation is of the form  $k' = t' r'$  for  $\{k', t', r'\} \in (2\mathbb{N} + 1)$ . In this case distinct material invariances will lead to distinct tensorial classes.

## 4.3 Synthesis

Results obtained for rotational invariance in  $2D$  can be summarized in the following array:

	$\mathbb{T}^{*(2k)}$	$\mathbb{T}^{*(2k+1)}$
$Z_{2p}$	$t \in \mathbb{N}$	$t = \emptyset$
$Z_{2p+1}$	$t \in (2\mathbb{N}) \Rightarrow$ jumps to $Z_{2(2p+1)}$	$t \in (2\mathbb{N} + 1)$

In  $2D$  a class jump phenomenon will occur for an odd material invariance in the case of an even tensor, and a vanishing effect in the opposite case. As demonstrated by theorem 4, none of these effects will appear in  $3D$ .

Coming back to the 6th-order tensor example, in §3 it has been shown that, in  $3D$ , 7 different rotational invariant tensors types exist. In  $2D$  such a tensor can only belong to one of the 4 different following systems:  $\{Z_2, Z_4, Z_6, SO(2)\}$ . One can notice that, in  $2D$ , a tensorial property defined on a material with no symmetry is  $Z_2$ -invariant.

## 5 Conclusion

It has been shown in this paper, that symmetry classes of a tensorial property depends on the space dimension. In  $2D$ , some symmetry jumps can occur making physical properties more symmetrical than the material they are defined on. This is related to the reciprocity of Hermann's theorems [6]. They state that if the rotational invariance order exceeds the number of a tensor indexes then, this tensor is, at least, transverse hemitropic ( $SO(2)$ -invariant). In  $3D$ , theorems 1 and 4 show that the reciprocity is true. But, as corollary of theorem 5 this reciprocity fails in  $2D$ . Considering a  $6th$ -order tensor, then a  $Z_5$ -material invariance will be seen as a  $Z_{10}$ -one. Therefore, a  $Z_5$ -material invariance implies a  $6th$ -order tensor to be at least hemitropic. Continuous classes of symmetry could appear for an order of rotation lower than the number of the tensor indexes.

## References

1. Golubitsky M, Stewart I, Schaeffer D (1989) Singularities and Groups in Bifurcation Theory. Volume II. Springer-Verlag
2. Mindlin R, Eshel N (1968) Int. J. Solids Struct 4:109–124
3. Forte S, Vianello M (1996) J. Elastic. 43:81–108
4. Zheng Q, Boehler J (1994) Acta Mecha. 102:73–89
5. Auffray N (2008) CR. Meca. 336:458–463
6. Auffray N (2008) CR. Meca. 336:370–375
7. Zou W, Zheng Q, Du D, Rychlewski J (2001) Math. Mech. Solids 6:249–267
8. Jerphagnon J, Chemla D, Bonneville R (1978) Adv. Physics. 27:609–650

## **Troisième partie**

# **Opérateur de comportement du second ordre**



## CHAPITRE III-1

### Dérivation des opérateurs du second ordre en dimension 2

Au cours des chapitres précédents, nous avons travaillé sur la dérivation théorique des différentes formes que peut posséder le tenseur d'élasticité du second ordre  $A_{(ij)k(lm)n}$ . La réponse à cette question a été donnée au chapitre II-5. Nous savons à présent que, dans un espace de dimension 3, il existe 17 types de symétries différentes pour cet opérateur. De même, nous sommes intéressés à l'élasticité du second gradient en dimension 2 et nous avons conclu, dans ce cas, à l'existence de 8 types d'élasticités planes. De plus, nous avons également déterminé, dans chaque cas, le nombre de coefficients définissant ce tenseur.

Ce savoir théorique acquis, il nous faut maintenant obtenir les formes des opérateurs à implémenter dans un code de calcul par éléments-finis. En d'autres termes, il nous faut passer de la connaissance théorique des tenseurs d'ordre 6 à l'expression des matrices les représentant. Les dimensions de ces matrices ont rapidement été évoquées au cours du chapitre II-2. L'opérateur traduisant l'élasticité du second-ordre sera, dans un espace de dimension 3, une matrice carrée symétrique de dimension 18. En dimension 2 le même opérateur sera représenté par une matrice carrée symétrique de dimension 6. L'objectif du présent chapitre sera de déterminer la forme de chacun des opérateurs prévus par la théorie.

Nous commencerons cette étude avec la dérivation de ces matrices en dimension 2. En effet il est, dans un premier temps, plus simple de comprendre les mécanismes physiques dans ce cas là. De plus, il est plus aisé d'avoir une vision d'ensemble des mécanismes présents au sein d'une matrice de dimension 6 que dans le cas d'une matrice de dimension 18. Finalement, cela nous permettra de mettre au point des outils d'analyse que nous pourrons ensuite réappliquer dans le cas<sup>1</sup> 3-D. Il est toutefois à noter que l'étude de phénomène physique dépend de la dimension de l'espace. De fait, les résultats obtenus en deux et trois dimensions ne sont pas directement équivalents. Les différences qui existent entre ces deux modélisations sont étudiées, de manière théorique, dans l'annexe II-E.

Le corps principal de ce chapitre s'appuie sur un article accepté dans *International Journal of Solids and Structure* sous le titre *Derivation of anisotropic matrix for bi-dimensional strain gradient elasticity behavior*. Par rapport au texte initial nous rajouterons ici, outre cette introduction, un complément à la fin de l'article. Son objectif sera de nous permettre d'introduire un certain nombre de remarques et d'outils dont nous n'avons pas parlé dans l'article. De plus, les

---

<sup>1</sup>L'écriture d'une publication est en cours concernant ce point précis.



outils introduits ici, dans le cas bi-dimensionnel, seront réinvestis, dans une publication en cours de rédaction, pour l'étude des matrices 3-D. Nous détaillerons de fait trois points particuliers :\_ une représentation graphique des tenseurs ;\_ l'écriture en système de mécanismes ;\_ les modes propres et les conditions de stabilité associées.

Commençons donc par l'article *Derivation of anisotropic matrix for bi-dimensional strain gradient elasticity behavior*. Notons que les conventions de notation utilisées dans cet article diffèrent légèrement de celles utilisées dans le reste de la thèse. Néanmoins, celle-ci sont redéfinies dans l'article pour éviter tout contre-sens.

# Derivation of anisotropic matrix for bi-dimensional strain gradient elasticity behavior.

N. Auffray <sup>a,\*</sup>, R. Bouchet <sup>a</sup>, Y. Bréchet <sup>b</sup>

<sup>a</sup>ONERA/DMSM, 29 Avenue de la Division Leclerc, F-92322, Châtillon Cedex,  
France

<sup>b</sup>LTPCM, BP 75, Domaine Universitaire de Grenoble, F-38402, Saint Martin  
d'Hères Cedex, France

---

## Abstract

The different forms of second order elasticity operators, in Mindlin's strain gradient elasticity, are given for a bi-dimensional physical space. These different forms are obtained according to the different symmetry classes of a material media. Dimensional aspects are discussed together with observations made on the physical behavior of such a media.

*Key words:* Symmetry Classes, Strain Gradient Elasticity, Anisotropy

---

## 1 Introduction

Designing lightweight and innovating materials is nowadays one of the most important challenge for material's engineering. The aim is to reach high mechanical properties with low density materials. To achieve such contradictory objectives the scientific community has, for several years, focused its attention on cellular materials structured at the mesoscale. Designing in optimal way such a material, requires to understand at the same time the relation between architecture and physical properties, and the explicit method to calculate these properties. According to a geometric definition of a RVE (Representative Volume Elementary) a classical way to obtain the overall behavior of our cellular

---

\* Corresponding author.

*Email address:* nicolas.auffray@onera.fr (N. Auffray).

## III–1.1 Introduction

Designing lightweight and innovating materials is nowadays one of the most important challenge for material's engineering. The aim is to reach high mechanical properties with low density materials. To achieve such contradictory objectives the scientific community has, for several years, focused its attention on cellular materials structured at the mesoscale. Designing in optimal way such a material, requires to understand at the same time the relation between architecture and physical properties, and the explicit method to calculate these properties. According to a geometric definition of a RVE (Representative Volume Elementary) a classical way to obtain the overall behavior of our cellular material is to use homogenization theory. It is well known that classical homogenization relied on a clear scale separation between the geometric pattern and mechanical fields. If the scale separation is not broad enough, the classical theory fail to predict the overall behavior. As shown by [6] and [8], if we want to keep a continuum description we have to consider a generalized continuum to model the substitution material resulting from the homogenization process. In particular, if we are designing millimetric microstructural materials to be implemented in centimetric structures (such as, for instance, hollow spheres stacking for acoustical absorber [11]) we cannot take the strong scale separation for granted. And so, second order elastic effects have to be taken into account in the homogenization approach.

In order to achieve this goal some basic facts about constitutive behavior of strain-gradient elasticity will be recalled in section III–1.2. In section III–1.3 a mathematical transformation will introduced allowing us to handle easily the higher order tensors that define our behavior. Using this framework all the operators we need we will obtained in section III–1.4. This paper will be concluded, in section III–1.5, by some complementary remarks on the physics of such a behavior.

## III–1.2 Mindlin's strain gradient elasticity

In classical elasticity theory stress at a material point is related to strain through the classical elasticity tensor. This relation, usually known as Hooke's law, is written in tensorial fashion in the following way :

$$\sigma_{(ij)} = E_{(ij)(lm)} \varepsilon_{(lm)} \quad (\text{III–1.1})$$

Where  $\sigma_{(ij)}$  is the symmetrical-stress tensor,  $\varepsilon_{(lm)}$  the strain tensor and  $E_{(ij)(lm)}$  the tensor describing our material property. The notation  $( )$  stands for the minor symmetries whereas  $\underline{\underline{\quad}}$  stands for the major one.

In the case of Mindlin elasticity the material state at a material point also depends on the strain gradient. We shall note  $K_{(lm)n}$  the strain gradient tensor, which is formally defined as :

$$K_{(lm)n} = \frac{\partial \varepsilon_{(lm)}}{\partial x_n} = \varepsilon_{(lm),n} \quad (\text{III–1.2})$$

where the notation  $,n$  mean the derivation of the operator along  $n$ . This strain-gradient elasticity is also known as the type II Mindlin's elasticity [10].

Taking into account strain-gradient effect in the mechanical formulation led one to define symmetrically the hyperstress tensor  $S_{(ij)k}$ . So the knowledge, in each material point, of the stress tensor completed by the hyperstress one allows to compute the effective tensor  $\tau_{(ij)}$ . This tensor is defined as :

$$\tau_{(ij)} = \sigma_{(ij)} - S_{(ij)k,k} \quad (\text{III–1.3})$$

and is the one to consider to calculate the local equilibrium [92]. Tensors  $\sigma_{(ij)}$  and  $S_{(ij)k}$  are related with  $\varepsilon_{(lm)}$  and  $K_{(lm)n}$  through the following general constitutive relation :

$$\sigma_{(ij)} = E_{\underline{(ij)} \underline{(lm)}} \varepsilon_{(lm)} + M_{(ij)(lm)n} K_{(lm)n} \quad (\text{III-1.4})$$

$$S_{(ij)k} = M_{(ij)k(lm)} \varepsilon_{(lm)} + A_{\underline{(ij)k} \underline{(lm)n}} K_{(lm)n} \quad (\text{III-1.5})$$

where the tensor  $A_{\underline{(ij)k} \underline{(lm)n}}$  is the second order elasticity tensor and  $M_{(ij)(lm)n}$  the coupling tensor between first and second order elasticity.

As explained by [7] in a three dimension physical space for a centro-symmetric media, this coupling tensor will vanish. In a bidimensional space this tensor would vanish for any media that is even order rotational invariant [83]. For both cases the former constitutive relations could be rewritten :

$$\sigma_{(ij)} = E_{\underline{(ij)} \underline{(lm)}} \varepsilon_{(lm)} \quad (\text{III-1.6})$$

$$S_{(ij)k} = A_{\underline{(ij)k} \underline{(lm)n}} K_{(lm)n} \quad (\text{III-1.7})$$

In this study we will focus our attention on operators describing  $A_{\underline{(ij)k} \underline{(lm)n}}$  for each material's symmetry classes. The different expressions of the operators are necessary for a correct numerical implementation of that kind of behavior in FEM code. First of all, in order to handle the tensor formerly defined, mathematical transformation should be introduced, allowing us to turn our 2-dimensional 6th-order tensor into a 6-dimensional 2nd-order tensor<sup>2</sup>. This will allow us to rewrite the second order constitutive relation as :

$$\hat{S}_\alpha = \hat{A}_{(\alpha\beta)} \hat{K}_\beta \quad (\text{III-1.8})$$

### III-1.3 Change of space

We aim at obtaining the operators defined in equations (III-1.6) and (III-1.7) to implement in FEM-code to compute strain-gradient elasticity. We are dealing here especially in 2-D space, nevertheless most of our approach would still be valid in 3-D space. The first order elasticity was studied in depth by [50]. So, our attention will be focused on the 2nd-order elasticity. In a 2-D space the 3rd-order tensor  $K_{(lm)n}$  belong to a 6-D vector space, and the fully anisotropic tensor  $A_{\underline{(ij)k} \underline{(lm)n}}$  would belong to an 21-D vector-space.

As a 6th-order tensor is not an easy object to handle, a transformation will now be introduced to turn that object into a 2nd-order tensor. Let's begin with some remarks about matrix representations of a tensor.

#### III-1.3.1 Matrix representation

In the case of Hooke's law the classical Voigt matrix representation of constitutive equation is :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{1111} & E_{1122} & E_{1133} & E_{1123} & E_{1113} & E_{1112} \\ E_{2211} & E_{2222} & E_{2233} & E_{2223} & E_{2213} & E_{2212} \\ E_{3311} & E_{3322} & E_{3333} & E_{3323} & E_{3313} & E_{3312} \\ E_{2311} & E_{2322} & E_{2333} & E_{2323} & E_{2313} & E_{2312} \\ E_{1311} & E_{1322} & E_{1333} & E_{1323} & E_{1313} & E_{1312} \\ E_{1211} & E_{1222} & E_{1233} & E_{1223} & E_{1213} & E_{1212} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix} \quad (\text{III-1.9})$$

<sup>2</sup>The permutation order-dimension is just a coincidence, in 3-D the same transformation would turn a 3-dimensional 6th-order tensor into a 18-dimensional 2nd-order tensor.

But, as explained by [50], this notation does not define a  $2nd$ -order tensor, it is just a common matricial representation. A rigorous expression of that relation in a tensorial fashion will be :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sqrt{2}\sigma_{23} \\ \sqrt{2}\sigma_{13} \\ \sqrt{2}\sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{1111} & E_{1122} & E_{1133} & \sqrt{2}E_{1123} & \sqrt{2}E_{1113} & \sqrt{2}E_{1112} \\ E_{2211} & E_{2222} & E_{2233} & \sqrt{2}E_{2223} & \sqrt{2}E_{2213} & \sqrt{2}E_{2212} \\ E_{3311} & E_{3322} & E_{3333} & \sqrt{2}E_{3323} & \sqrt{2}E_{3313} & \sqrt{2}E_{3312} \\ \sqrt{2}E_{2311} & \sqrt{2}E_{2322} & \sqrt{2}E_{2333} & 2E_{2323} & 2E_{2313} & 2E_{2312} \\ \sqrt{2}E_{1311} & \sqrt{2}E_{1322} & \sqrt{2}E_{1333} & 2E_{1323} & 2E_{1313} & 2E_{1312} \\ \sqrt{2}E_{1211} & \sqrt{2}E_{1222} & \sqrt{2}E_{1233} & 2E_{1223} & 2E_{1213} & 2E_{1212} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{23} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{13} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{12} \end{pmatrix} \quad (\text{III-1.10})$$

In the same way the rigorous way of representing the  $6th$ -order tensor  $A$  as a  $2nd$ -order, one according to its symmetries, is :

$$\begin{pmatrix} S_{111} \\ S_{222} \\ S_{221} \\ S_{112} \\ \sqrt{2}S_{122} \\ \sqrt{2}S_{121} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{111111} & A_{111222} & A_{111221} & A_{111112} & \sqrt{2}A_{111122} & \sqrt{2}A_{111121} \\ A_{222111} & A_{222222} & A_{222221} & A_{222112} & \sqrt{2}A_{222122} & \sqrt{2}A_{222121} \\ A_{221111} & A_{221222} & A_{221221} & A_{221112} & \sqrt{2}A_{221122} & \sqrt{2}A_{221121} \\ A_{112111} & A_{112222} & A_{112221} & A_{112112} & \sqrt{2}A_{112122} & \sqrt{2}A_{112121} \\ \sqrt{2}A_{122111} & \sqrt{2}A_{122222} & \sqrt{2}A_{122221} & \sqrt{2}A_{122112} & 2A_{122122} & 2A_{122121} \\ \sqrt{2}A_{121111} & \sqrt{2}A_{121222} & \sqrt{2}A_{121221} & \sqrt{2}A_{121112} & 2A_{121122} & 2A_{121121} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_{111} \\ K_{222} \\ K_{221} \\ K_{112} \\ \sqrt{2}K_{122} \\ \sqrt{2}K_{121} \end{pmatrix} \quad (\text{III-1.11})$$

That is a true tensorial way of writing the constitutive relation  $S_{(ij)k} = A_{(ij)k(lm)n}K_{(lm)n}$ . An example for that representation is the following. According to [10] in indicial the isotropic strain-gradient relation could be written as :

$$\begin{aligned} S_{ijk} = & \frac{1}{2}a_1 (K_{llj}\delta_{ik} + K_{lli}\delta_{kj} + 2K_{lkl}\delta_{ij}) + a_2(K_{ljl}\delta_{ik} + K_{lil}\delta_{jk}) \\ & + 2a_3K_{llk}\delta_{ij} + 2a_4K_{ijk} + a_5(K_{jki} + K_{ikj}) \end{aligned} \quad (\text{III-1.12})$$

So the tensorial representation of that relation is :

$$\begin{pmatrix} S_{111} \\ S_{222} \\ S_{221} \\ S_{112} \\ \sqrt{2}S_{122} \\ \sqrt{2}S_{121} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \\ c_2 & 0 & c_4 & 0 & c_5 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & c_4 & 0 & c_5 \\ c_3 & 0 & c_5 & 0 & c_6 & 0 \\ 0 & c_3 & 0 & c_5 & 0 & c_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_{111} \\ K_{222} \\ K_{221} \\ K_{112} \\ \sqrt{2}K_{122} \\ \sqrt{2}K_{121} \end{pmatrix} \quad (\text{III-1.13})$$

with

$$\begin{aligned} c_1 &= 2(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5); & c_2 &= a_1 + 2a_2; & c_3 &= \sqrt{2}\left(\frac{1}{2}a_1 + a_3\right); \\ c_4 &= 2(a_2 + a_4); & c_5 &= \sqrt{2}\left(\frac{1}{2}a_1 + a_5\right); & c_6 &= a_3 + 2a_4 + a_5 \end{aligned}$$

Let's detail the way this transformation works.

### III-1.3.2 Change of space formalism

The change of space could be expressed by the following diagram (III-1.14) :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{E} & \xrightarrow{f} & \mathbb{E}^n & \xrightarrow{g} & \mathbb{E}^{2n} \\ & & \downarrow h & & \downarrow h^* \\ & & \hat{\mathbb{E}} & \xrightarrow{\hat{g}} & \hat{\mathbb{E}}^2 \end{array} \quad (\text{III-1.14})$$

$\mathbb{E}$  is the physical space, a vector space which basis vectors are  $e_i$ ,  $i$  varying from 1 to  $d$  for a  $d$ -dimensional physical space. Vector space of higher dimensions could be generated by the self tensor product of the initial space. The space obtained by  $n - 1$  self product of  $\mathbb{E}$  will be noted  $\mathbb{E}^n$  and its dimension is  $d^n$ . So  $\mathbb{E}^3$  is a  $d^3$ -dimensional vector space which base is  $e_i \otimes e_j \otimes e_k$ . An endomorphism on this space belong to an  $2n$ -order vector space of  $d^{2n}$  dimensions. In the same time  $\mathbb{E}^n$  could be associated with  $\hat{\mathbb{E}}$  a true  $d^n$ -dimensional physical space which vectors basis are  $e_\alpha$ . And so elements of  $\text{End}(\hat{\mathbb{E}})$  are  $2nd$ -order tensor belonging to  $\hat{\mathbb{E}}^2$ . The basis of that space is  $e_\alpha \otimes e_\beta$ . For the sake of simplicity the indexes symmetries of the different spaces were neglected, taking them into account don't change the philosophy of our transformation. An orthonormal basis of  $\hat{\mathbb{S}}$  will now be constructed (with the index symmetry now), and the application  $h$  will be defined.

### Construction of equivalent basis

In strain-gradient elasticity  $\mathbb{S}^3$  is the vector space of  $\underline{\underline{K}}$  and  $\underline{\underline{S}}$ . This space is symmetric with respect of the first two indices permutation. Let's construct the 6-D space  $\hat{\mathbb{S}}$ ; its basis vectors  $\underline{\hat{e}}_\alpha$  could be expressed as :

$$\begin{aligned} \underline{\hat{e}}_1 &= e_1 \otimes e_1 \otimes e_1 ; & \underline{\hat{e}}_2 &= e_2 \otimes e_2 \otimes e_2 ; & \underline{\hat{e}}_3 &= e_2 \otimes e_2 \otimes e_1 ; \\ \underline{\hat{e}}_4 &= e_1 \otimes e_1 \otimes e_2 ; & \underline{\hat{e}}_5 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1) \otimes e_2 ; & \underline{\hat{e}}_6 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1) \otimes e_1. \end{aligned}$$

The orthonormality of  $\underline{e}_i$  implies the one of  $\underline{\hat{e}}_\alpha$  and so we got :

$$\underline{\hat{e}}_\alpha \cdot \underline{\hat{e}}_\beta = \delta_{\alpha\beta} \quad (\text{III-1.15})$$

for  $\alpha$  and  $\beta$  varying from 1 to 6.  $\delta_{\alpha\beta}$  stands for the classical Kronecker symbol. This implies the expression of  $h$  linking de coefficients of  $\mathbb{S}^n$  with those of  $\hat{\mathbb{S}}$ . So given  $T_{(ij)k}$  in  $\mathbb{S}^3$  and  $\hat{T}_\alpha$ , its image in  $\hat{\mathbb{S}}$ , we got  $h$  defined by :

$$\hat{T}_\alpha = h(T_{ijk}) = \begin{cases} T_{ijk} & i = j \\ \sqrt{2}T_{ijk} & i \neq j \end{cases} \quad (\text{III-1.16})$$

And so do for the strain-gradient and the hyperstress tensors :

$$\hat{K}_\alpha \underline{\hat{e}}_\alpha = h(K_{ijk}) \underline{\hat{e}}_\alpha ; \quad \hat{S}_\alpha \underline{\hat{e}}_\alpha = h(S_{ijk}) \underline{\hat{e}}_\alpha \quad (\text{III-1.17})$$

We could now construct the basis of  $\hat{\mathbb{S}}^2$  by the tensor product of the basis  $\hat{\mathbb{S}}$ . So given a tensor  $T_{(ij)k (lm)n}$  in  $\mathbb{S}^6$  its image  $\hat{T}_{\alpha\beta}$  in  $\hat{\mathbb{S}}^2$  is obtained by the application  $h^*$  :

$$\hat{T}_{\alpha\beta} = h^*(T_{ijklmn}) = \begin{cases} T_{ijklmn} & i = j \text{ and } j = k \\ \sqrt{2}T_{ijklmn} & i \neq j \text{ and } l = m \text{ or } i = j \text{ and } l \neq m \\ 2T_{ijklmn} & i \neq j \text{ and } l \neq m \end{cases} \quad (\text{III-1.18})$$

### Derivation of transformation matrix

As the space transformation in now introduced, let's focus on the way an  $O(2)$ -orthogonal operator could be transformed into a  $O(6)$ -orthogonal operator. Let's  $\underline{e}'_i$  be the image of the vectors  $\underline{e}_i$  under the action of  $Q$ ,  $Q \in O(2)$ . We got :

$$\underline{e}'_i = Q_{ij} \underline{e}_j \quad (\text{III-1.19})$$

Let's, in the same way,  $\hat{e}'_\alpha$  be the image of  $\hat{e}_\alpha$  under the action of  $\hat{Q}$ .  $\hat{Q}$  is defined as the image of  $Q$  in  $O(6)$  and we got :

$$\hat{e}'_\alpha = \hat{Q}_{\alpha\beta} \hat{e}_\beta \quad (\text{III-1.20})$$

$\hat{Q}$  will be expressed, now, as a function of  $Q$ . The action of  $Q$  on a  $\mathbb{E}^3$  could be expressed as :

$$\underline{e}'_i \otimes \underline{e}'_j \otimes \underline{e}'_k = Q_{il} Q_{jm} Q_{kn} \underline{e}_l \otimes \underline{e}_m \otimes \underline{e}_n \quad (\text{III-1.21})$$

The same action on a element of the symmetrized space  $\mathbb{S}^3$  lead to :

$$\frac{1}{2}(\underline{e}'_i \otimes \underline{e}'_j + \underline{e}'_j \otimes \underline{e}'_i) \otimes \underline{e}'_k = \frac{1}{2}(Q_{il} Q_{jm} + Q_{im} Q_{jl}) Q_{kn} \underline{e}_l \otimes \underline{e}_m \otimes \underline{e}_n \quad (\text{III-1.22})$$

The operator we just written is the following 6th-order tensor :

$$Q^{\mathbb{S}^3} = \frac{1}{2}(Q_{il} Q_{jm} + Q_{im} Q_{jl}) Q_{kn} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \otimes \underline{e}_k \otimes \underline{e}_l \otimes \underline{e}_m \otimes \underline{e}_n \quad (\text{III-1.23})$$

By the  $h^*$  application introduced in the previous section we could turn this 6th-order tensor into a 2nd-order one in  $\hat{\mathbb{S}}^2$ . And so :

$$\hat{Q}_{\alpha\beta} \hat{e}_\alpha \otimes \hat{e}_\beta = h^* \left( \frac{1}{2}(Q_{il} Q_{jm} + Q_{im} Q_{jl}) Q_{kn} \right) \hat{e}_\alpha \otimes \hat{e}_\beta \quad (\text{III-1.24})$$

The following table sum-up the information about the change of system

$\alpha$	1	2	3	4	5	6	
$(i, j, k)$	(1, 1, 1)	(2, 2, 2)	(2, 2, 1)	(1, 1, 2)	(1, 2, 2)	(1, 2, 1)	(III-1.25)

If we consider now  $Q \in \mathbb{E}^2$  we got :

$$Q = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{pmatrix} \quad (\text{III-1.26})$$

we could construct  $\hat{Q} \in \hat{\mathbb{S}}^2$  as :

$$\hat{Q} = \begin{pmatrix} Q_{11}^3 & Q_{12}^3 & Q_{12}^2 Q_{11} & Q_{11}^2 Q_{12} & \sqrt{2} Q_{12}^2 Q_{11} & \sqrt{2} Q_{11}^2 Q_{12} \\ Q_{21}^3 & Q_{22}^3 & Q_{22}^2 Q_{21} & Q_{21}^2 Q_{22} & \sqrt{2} Q_{22}^2 Q_{21} & \sqrt{2} Q_{21}^2 Q_{22} \\ Q_{21}^2 Q_{11} & Q_{22}^2 Q_{12} & Q_{22}^2 Q_{11} & Q_{21}^2 Q_{12} & \sqrt{2} Q_{12} Q_{22} Q_{21} & \sqrt{2} Q_{11} Q_{22} Q_{21} \\ Q_{11}^2 Q_{21} & Q_{12}^2 Q_{22} & Q_{12}^2 Q_{21} & Q_{11}^2 Q_{22} & \sqrt{2} Q_{11} Q_{12} Q_{22} & \sqrt{2} Q_{11} Q_{12} Q_{21} \\ \sqrt{2} Q_{21}^2 Q_{11} & \sqrt{2} Q_{22}^2 Q_{12} & \sqrt{2} Q_{12} Q_{22} Q_{21} & \sqrt{2} Q_{11} Q_{22} Q_{21} & (Q_{11} Q_{22} + Q_{12} Q_{21}) Q_{22} & (Q_{11} Q_{22} + Q_{12} Q_{21}) Q_{21} \\ \sqrt{2} Q_{11}^2 Q_{21} & \sqrt{2} Q_{12}^2 Q_{22} & \sqrt{2} Q_{12} Q_{22} Q_{11} & \sqrt{2} Q_{11} Q_{21} Q_{12} & (Q_{11} Q_{22} + Q_{12} Q_{21}) Q_{12} & (Q_{11} Q_{22} + Q_{12} Q_{21}) Q_{11} \end{pmatrix} \quad (\text{III-1.27})$$

In the case of  $O(2)$  we consider the two following operators :  $Q_{rot}$  the rotation operator,  $Q_{mir}$  the mirror operator.

$$Q_{rot} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} ; \quad Q_{mir} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{III-1.28})$$

Theirs images in  $O(6)$  are :

$$\hat{Q}_{rot} = \begin{pmatrix} c(\theta)^3 & -s(\theta)^3 & c(\theta)s(\theta)^2 & -c(\theta)^2s(\theta) & \sqrt{2}c(\theta)s(\theta)^2 & -\sqrt{2}c(\theta)^2s(\theta) \\ s(\theta)^3 & c(\theta)^3 & c(\theta)^2s(\theta) & c(\theta)s(\theta)^2 & \sqrt{2}c(\theta)^2s(\theta) & \sqrt{2}c(\theta)s(\theta)^2 \\ c(\theta)s(\theta)^2 & -c(\theta)^2s(\theta) & c(\theta)^3 & -s(\theta)^3 & -\sqrt{2}c(\theta)s(\theta)^2 & \sqrt{2}c(\theta)^2s(\theta) \\ c(\theta)^2s(\theta) & c(\theta)s(\theta)^2 & s(\theta)^3 & c(\theta)^3 & -\sqrt{2}c(\theta)^2s(\theta) & -\sqrt{2}c(\theta)s(\theta)^2 \\ \sqrt{2}c(\theta)s(\theta)^2 & -\sqrt{2}c(\theta)^2s(\theta) & -\sqrt{2}c(\theta)s(\theta)^2 & \sqrt{2}c(\theta)^2s(\theta) & c(2\theta)c(\theta) & c(2\theta)s(\theta) \\ \sqrt{2}c(\theta)^2s(\theta) & \sqrt{2}c(\theta)s(\theta)^2 & -\sqrt{2}c(\theta)^2s(\theta) & -\sqrt{2}c(\theta)s(\theta)^2 & -c(2\theta)s(\theta) & c(2\theta)c(\theta) \end{pmatrix} \quad (\text{III-1.29})$$

$$\hat{Q}_{mir} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{III-1.30})$$

Where, for the sake of simplicity,  $\text{Cos}(\theta)$  and  $\text{Sin}(\theta)$  have been noted  $c(\theta)$ , and  $s(\theta)$ . We could check that for  $Q \in O(2)$  we got :

$$\hat{Q}^T \hat{Q} = \text{Id}_{\mathbb{S}^2} \quad (\text{III-1.31})$$

so the orthogonality of  $Q$  implies the one of  $\hat{Q}$  and so  $\hat{Q} \in O(6)$ .

With that transformation, completed by the expression of  $\hat{Q}$ , we have the tools we need to study the different expressions of  $A_{(ij)k} \underline{(lm)}_n$  for different material's symmetry classes.

## III-1.4 Derivation of anisotropic operators

### III-1.4.1 Expression of invariance

Let  $G$  be a group of operation, a material  $\mathcal{M}$  will be said  $G$ -invariant if the action of all the element of  $G$  transform the material into itself. This set of operation will be noted  $G_{\mathcal{M}}$ , namely the material symmetry's group, and defined by :

$$G_{\mathcal{M}} = \{Q \in O(2), \quad Q \star \mathcal{M} = \mathcal{M}\} \quad (\text{III-1.32})$$

Where  $\star$  represents the action of  $Q$  upon  $\mathcal{M}$ . As we are dealing with 2-D materials, our attention will be restricted to the 2-D orthogonal group :  $O(2)$ . Moreover we know that  $G_{\mathcal{M}}$  must be conjugate to a subgroup of  $O(2)$  [69]. The collection of those subgroups is, according to [93], :

$$\Sigma := \{I, Z_n, D_n, SO(2), O(2)\} \quad (\text{III-1.33})$$

Where  $I$  is the identity group.  $Z_n$  is the cyclic group of order  $n$ , it is the group of rotations of a chiral figure that possesses an  $n$ -fold invariance (cf. fig.III-1.1 for an example of an  $Z_3$ -invariant figure).  $D_n$  is the dihedral group of order  $2n$ , it is the group of operations that leave a regular  $n$ -gone invariant (cf. fig.III-1.2 for the example of an  $D_3$ -invariant figure).  $SO(2)$  is the continuous group of rotations. The generator of the  $Z_n$ -invariance is the matrix  $Q_{rot}$ , and for the  $D_n$ -invariance the set of generator have to completed with the matrix  $Q_{mir}$ .



(a) Levorotary triskelion (b) Dextrorotary triske-  
lion

FIG. III-1.1 –  $Z_3$ -invariant figures



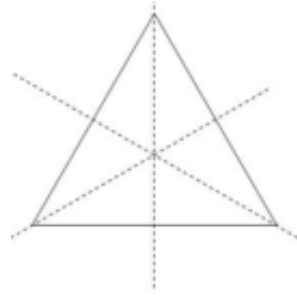


FIG. III-1.2 –  $D_3$ -invariant figure

Consider now a physical property  $\mathcal{P}$  defined on our material  $\mathcal{M}$ . The physical group of symmetry of that property could be defined as the set of operations that leave the behavior invariant. This set of operations will be noted  $G_{\mathcal{P}}$ , namely the physical's symmetry group and defined as :

$$G_{\mathcal{P}} = \{Q \in O(2), \quad Q \star \mathcal{P} = \mathcal{P}\} \quad (\text{III-1.34})$$

In our case the action of  $Q$  upon the tensor  $A$  could be rewritten as :

$$G_A = \{Q \in O(2), \quad Q_{io}Q_{jp}Q_{kq}Q_{lr}Q_{ms}Q_{nt}A_{opqrst} = A_{ijklmn}\} \quad (\text{III-1.35})$$

By the mean of Neumann's principle [69], we got the inclusion :

$$G_{\mathcal{M}} \subseteq G_{\mathcal{P}} \quad (\text{III-1.36})$$

this just mean that every operation that leaves our material invariant will let our physical properties invariant. Nevertheless the physical property could appear to be more symmetrical than the material [70].

In the following subsections, consequences of material symmetries on tensorial components will be studied. This work will be simplified by the use of transformation introduced in section III-1.3, and so, the group of symmetry of tensor  $A$  could be rewritten as :

$$G_A = \{Q \in O(2), \quad \hat{Q}_{\alpha\gamma}\hat{Q}_{\beta\delta}\hat{A}_{\gamma\delta} = \hat{A}_{\alpha\beta}\} \quad (\text{III-1.37})$$

The restriction on tensorial coefficients will be the different solutions of the following matricial system :

$$\hat{Q}^T \hat{A} \hat{Q} = \hat{A} \quad (\text{III-1.38})$$

for  $Q$  belonging to the generators of all  $O(2)$ -subgroups.

Let's begin by studying the consequence of a  $Z_n$ -material invariance on  $A_{(ij)k(lm)n}$ .

### III-1.4.2 $Z_n$ -material invariance

In the following subsections the following notation will adopted for the matricial coefficients :

- $a_{ij}$  will stand for not final coefficients, some more transformation are needed to reach the minimal expression ;
- $b_{ij}$  will be the coefficients of the minimal expression,  $b_{ij}$  are independent ;
- $c_i$  will be used to make comparison between different forms, the  $c_i$  are not independent.

In the same way a non-minimal matrix representation will be noted by a  $*$  exponent.

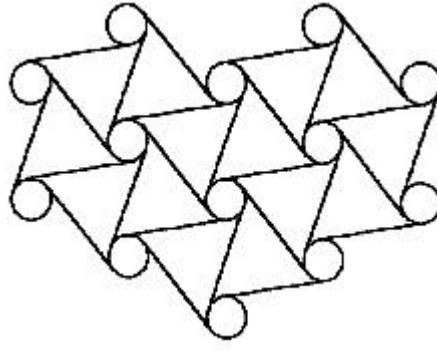


FIG. III-1.3 –  $Z_6$ -invariant honeycomb

### $Z_2$ -invariance

For  $Z_2$  no restriction will be imposed on A.

### $Z_3/Z_6$ -invariance

The  $Z_3$  and the  $Z_6$ -invariance will lead to the same following operator :

$$\hat{A}_{Z_3}^* = \hat{A}_{Z_6}^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & -2a_{12}-a_{23} & a_{15} & \frac{-a_{12}+a_{23}}{\sqrt{2}} \\ & a_{22} & a_{23} & a_{11}-a_{22}+a_{13} & -\frac{3a_{12}+a_{23}}{\sqrt{2}} & \sqrt{2}(a_{11}-a_{22})+a_{15} \\ & & a_{11}-a_{22}+a_{44} & a_{12} & -a_{15}+\frac{a_{22}-a_{44}}{\sqrt{2}} & \frac{3a_{12}+a_{23}}{\sqrt{2}} \\ & & & a_{44} & \frac{a_{12}-a_{23}}{\sqrt{2}} & -\sqrt{2}a_{11}-a_{15}+\frac{3a_{22}-a_{44}}{\sqrt{2}} \\ & & & & a_{11}-a_{13}-\frac{a_{22}-a_{44}}{2} & 2a_{12} \\ & & & & & -a_{11}-a_{13}+\frac{3a_{22}+a_{44}}{2} \end{pmatrix} \quad (\text{III-1.39})$$

This operator seems to depend on 7 different coefficients. But writing of the system :

$$\hat{Q}_{rot} \hat{A}_{Z_6}^* \hat{Q}_{rot}^T = 0 \quad (\text{III-1.40})$$

shows that there exists a rotation :

$$\text{Tan}(6\theta) = \frac{2a_{12}}{a_{22} - a_{11}} \quad (\text{III-1.41})$$

allowing us to reduce the number of parameters from 7 to 6. The operator will have, in an appropriate basis, the following expression :

$$\hat{A}_{Z_6} = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & b_{13} & b_{14} & \frac{b_{11}-b_{33}}{\sqrt{2}}-b_{35} & -\frac{b_{14}}{\sqrt{2}} \\ & b_{22} & -b_{14} & b_{11}-b_{22}+b_{13} & \frac{b_{14}}{\sqrt{2}} & \frac{3b_{11}-b_{33}}{\sqrt{2}}-b_{35}-\sqrt{2}b_{22} \\ & & b_{33} & 0 & b_{35} & -\frac{b_{14}}{\sqrt{2}} \\ & & & b_{33}+b_{22}-b_{11} & \frac{b_{14}}{\sqrt{2}} & \sqrt{2}(b_{22}-b_{11})+b_{35} \\ & & & & \frac{b_{11}+b_{33}}{2}-b_{13} & 0 \\ & & & & & -\frac{3b_{11}+b_{33}}{2}-b_{13}+2b_{22} \end{pmatrix} \quad (\text{III-1.42})$$

where  $b_{ij}$  coefficients are functions of the former  $a_{ij}$  coefficients of  $\hat{A}_{Z_6}^*$ . So, finally, the tensor A is defined by 6 coefficients in its hexatropic chiral class.

An example of a material with such a geometry could be found in [94]. The geometry of the honeycombed studied by the authors is described fig. III-1.3.

### $Z_4$ -invariance

For the  $Z_4$ -invariance we got :

$$\hat{A}_{Z_4}^* = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ & a_{11} & -a_{14} & a_{13} & -a_{16} & a_{15} \\ & & a_{33} & 0 & a_{35} & a_{36} \\ & & & a_{33} & -a_{36} & a_{35} \\ & & & & a_{55} & 0 \\ & & & & & a_{55} \end{pmatrix} \quad (\text{III-1.43})$$

As in the case of the  $Z_3/Z_6$ -invariance a rotation decreasing the operator's number of parameters could be found. The action of the following rotation :

$$\text{Tan}(4\theta) = \frac{2\sqrt{2}(a_{16} - a_{36})}{(a_{11} + a_{33} - 2(a_{13} + a_{55}))} \quad (\text{III-1.44})$$

reduces our former operator to the new one :

$$\hat{A}_{Z_4} = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & b_{13} & b_{14} & b_{15} & b_{16} \\ & b_{11} & -b_{14} & b_{13} & -b_{16} & b_{15} \\ & & b_{33} & 0 & b_{35} & b_{16} \\ & & & b_{33} & -b_{16} & b_{35} \\ & & & & b_{55} & 0 \\ & & & & & b_{55} \end{pmatrix} \quad (\text{III-1.45})$$

In this new basis the former coefficients  $a_{16}$  and  $a_{36}$  are now equal and are denoted by the new coefficient  $b_{16}$ . And so the number of independent coefficients in the orthotropic chiral class decrease from 9 to 8.

### $Z_5/Z_n$ , $n \geq 7$ -invariance

For a  $Z_5$ -invariance, and for any  $Z_n$ -invariance in which  $n \geq 7$ , we got the following operator :

$$\hat{A}_{\text{SO}(2)} = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & b_{13} & b_{14} & \frac{b_{11}-b_{33}}{\sqrt{2}} - b_{35} & -\frac{b_{14}}{\sqrt{2}} \\ & b_{11} & -b_{14} & b_{13} & \frac{b_{14}}{\sqrt{2}} & \frac{b_{11}-b_{33}}{\sqrt{2}} - b_{35} \\ & & b_{33} & 0 & b_{35} & -\frac{b_{14}}{\sqrt{2}} \\ & & & b_{33} & \frac{b_{14}}{\sqrt{2}} & b_{35} \\ & & & & \frac{b_{11}+b_{33}}{2} - b_{13} & 0 \\ & & & & & \frac{b_{11}+b_{33}}{2} - b_{13} \end{pmatrix} \quad (\text{III-1.46})$$

This symmetry class depends on 5 parameters.

### Analysis of the hemitropic class

It can be noticed that for  $n \geq 7$  the order of the symmetry exceed the order of the tensor A. According to Hermann's theorem [70], the symmetry group of A must be, in that case, conjugate to a continuous group. As we are dealing with subgroups of  $O(2)$  this continuous group must be either  $SO(2)$  or  $O(2)$ . In other words, for a  $Z_5$ -invariance, and for any  $Z_n$ -invariance in which  $n \geq 7$ , the tensor A must be either hemitropic ( $SO(2)$ -invariant) or isotropic ( $O(2)$ -invariant). So in our case A is at least hemitropic. Let's

$$b_{11} = c_1 ; \quad b_{13} = c_2 ; \quad b_{33} = c_4 ; \quad b_{35} = c_5$$

where  $c_i$  for  $i$  varying from 1 to 6 are the Mindlin's coefficients. The following relations are verified :

$$c_3 = \frac{b_{11} - b_{33}}{\sqrt{2}} - b_{35} ; \quad c_6 = \frac{b_{11} + b_{33}}{2} - b_{13}$$

and if we note  $c_7 = b_{14}$ , we finally obtain :

$$\hat{A}_{SO(2)} = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & c_2 & c_7 & c_3 & -\frac{c_7}{\sqrt{2}} \\ & c_1 & -c_7 & c_2 & \frac{c_7}{\sqrt{2}} & c_3 \\ & & c_4 & 0 & c_5 & -\frac{c_7}{\sqrt{2}} \\ & & & c_4 & \frac{c_7}{\sqrt{2}} & c_5 \\ & & & & c_6 & 0 \\ & & & & & c_6 \end{pmatrix} \quad (\text{III-1.47})$$

This expression differs from the isotropic one (III-1.13) by the presence of the  $c_7$  coefficient. But, as  $\hat{A}$  is at least hemitropic, it does not exist any rotation that could make  $c_7$  disappear. So the  $Z_5/Z_n$ ,  $n \geq 7$ -invariance, lead to a non-isotropic invariance, namely the hemitropic invariance.

### III-1.4.3 $D_n$ -material invariance

For the dihedral-invariance, former results have to be combined with mirror-invariance. This means the invariance of our former operators under the action of  $\hat{Q}_{mir}$ .

#### $D_2$ -invariance

For a  $D_2$ -invariance, we obtain the operator :

$$\hat{A}_{D(2)} = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & b_{13} & 0 & b_{15} & 0 \\ & b_{22} & 0 & b_{24} & 0 & b_{26} \\ & & b_{33} & 0 & b_{35} & 0 \\ & & & b_{44} & 0 & b_{46} \\ & & & & b_{55} & 0 \\ & & & & & b_{66} \end{pmatrix} \quad (\text{III-1.48})$$

This system is defined by 12 coefficients.

#### $D_3/D_6$ -invariance

The  $D_3$  and the  $D_6$ -invariance lead to :

$$\hat{A}_{D(3)} = \hat{A}_{D(6)} = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & b_{13} & 0 & \frac{b_{11}-b_{33}}{\sqrt{2}} - b_{35} & 0 \\ & b_{22} & 0 & b_{11}-b_{22}+b_{13} & 0 & \frac{3b_{11}-b_{33}}{\sqrt{2}} - b_{35} - \sqrt{2}b_{22} \\ & & b_{33} & 0 & b_{35} & 0 \\ & & & b_{33}+b_{22}-b_{11} & 0 & \sqrt{2}(b_{22}-b_{11})+b_{35} \\ & & & & \frac{b_{11}+b_{33}}{2} - b_{13} & 0 \\ & & & & & \frac{-3b_{11}+b_{33}}{2} - b_{13} + 2b_{22} \end{pmatrix} \quad (\text{III-1.49})$$

This class is defined by 5 coefficients.

### $D_4$ -invariance

For  $D_4$ , we got :

$$\hat{A}_{D(4)} = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & b_{13} & 0 & b_{15} & 0 \\ & b_{11} & 0 & b_{13} & 0 & b_{15} \\ & & b_{33} & 0 & b_{35} & 0 \\ & & & b_{33} & 0 & b_{35} \\ & & & & b_{55} & 0 \\ & & & & & b_{55} \end{pmatrix} \quad (\text{III-1.50})$$

This class is defined by 6 coefficients.

### $D_5/D_n, n \geq 7$ -invariance

And finally for  $D_5$  and  $D_n, n > 7$  we got the following operator :

$$\hat{A}_{O(2)} = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & b_{13} & 0 & \frac{b_{11}-b_{33}}{\sqrt{2}}-b_{35} & 0 \\ & b_{11} & 0 & b_{13} & 0 & \frac{b_{11}-b_{33}}{\sqrt{2}}-b_{35} \\ & & b_{33} & 0 & b_{35} & 0 \\ & & & b_{33} & 0 & b_{35} \\ & & & & \frac{b_{11}+b_{33}}{2}-b_{13} & 0 \\ & & & & & \frac{b_{11}+b_{33}}{2}-b_{13} \end{pmatrix} \quad (\text{III-1.51})$$

which is defined by only 4 coefficients. If we substitute those coefficients with the  $c_i$  one of Mindlin second order elasticity we obtain :

$$\hat{A}_{O(2)} = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \\ c_2 & 0 & c_4 & 0 & c_5 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & c_4 & 0 & c_5 \\ c_3 & 0 & c_5 & 0 & c_6 & 0 \\ 0 & c_3 & 0 & c_5 & 0 & c_6 \end{pmatrix} \quad (\text{III-1.52})$$

The mirror-invariance make the hemitropic coefficient  $c_7$  to vanish and we obtain the isotropic operator. So we have now obtained for the second order elasticity in a bidimensional space 8 different expressions for the operator  $A_{(ij)k(lm)n}$  according to its different classes of symmetry. These results could be sum up in the following table :

$G_M$	$G_A$	dim
$I, Z_2$	$I$	21
$D_2$	$D_2$	12
$Z_4$	$Z_4$	8
$D_4$	$D_4$	6
$Z_3, Z_6$	$Z_6$	6
$D_3, D_6$	$D_6$	5
$Z_5, Z_n, n \geq 7$	$SO(2)$	5
$D_5, D_n, n \geq 7$	$O(2)$	4

In a two dimensional physical space, the group of symmetry an operator  $A_{(ij)k(lm)n}$  belongs to must be conjugate to an element of the following set :

$$\Sigma_A : \{I, D_2, Z_4, D_4, Z_6, D_6, SO(2), O(2)\} \quad (\text{III-1.53})$$

## III-1.5 Discussion

Besides the fact we obtain, in a 2-D space, the explicit expression of the anisotropic second order elastic tensor in strain-gradient elasticity theory, some points concerning symmetry of the operators are worth emphasizing.

### III-1.5.1 Class jump phenomenon

The results presented here are obtained considering a 2-D physical space, whereas the real physical space is 3-D. It is therefore useful to analyse the consequence of this hypothesis.

$\hat{A}$  tensor could be represented, in 3-D space, by the following block matrix :

$$\left( \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{c} x \otimes x \end{array} \right] \\ \left[ \begin{array}{c} x \otimes y \\ y \otimes y \end{array} \right] \\ \left[ \begin{array}{c} x \otimes z \\ y \otimes z \\ z \otimes z \end{array} \right] \\ \left[ \begin{array}{c} x \otimes c \\ y \otimes c \\ z \otimes c \\ [c \otimes c] \end{array} \right] \end{array} \right) \quad (\text{III-1.54})$$

where  $x, y, z$  stand for mechanisms along the different direction, and  $c$  stands for a coupling between all of those mechanisms. This full matrix is square and of dimension 18. A sub-operator modeling effect along the  $x$  and  $y$  direction could be extracted. This sub operator will be of the following form :

$$\left( \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{c} x \otimes x \end{array} \right] \\ \left[ \begin{array}{c} x \otimes y \\ y \otimes y \end{array} \right] \end{array} \right) \quad (\text{III-1.55})$$

This matrix is obviously square, and it could be shown that its dimension is 10. What we called  $x$  and  $y$  are kind of vectors containing indexes. We got :

$$x = \begin{bmatrix} 111 \\ 221 \\ 331 \\ 122 \\ 133 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} 222 \\ 332 \\ 112 \\ 233 \\ 121 \end{bmatrix} \quad (\text{III-1.56})$$

And so if we get rid of elements with indices equal to 3, we obtain  $x_{2D}$  and  $y_{2D}$  each of length 3. And so we could construct the following sub-operator :

$$\left( \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{c} x_{2D} \otimes x_{2D} \end{array} \right] \\ \left[ \begin{array}{c} x_{2D} \otimes y_{2D} \\ y_{2D} \otimes y_{2D} \end{array} \right] \end{array} \right) \quad (\text{III-1.57})$$

This last operator is the operator of Mindlin's elasticity in a  $2D$ -space, the operator we have been working on since the beginning of that paper.

The operator we obtain is so the one we would obtain by suppressing rows and columns with an out-of-plane indice in the expression of the 3-D operator. This operation implies a loss of information. The most noticeable consequence is the existence for 2-D modeling of a "class-jump" phenomena. An example of such phenomenon is the following.

In §III-1.4.2 we notice that the Hermann's theorem implies that for an order of symmetry that exceed 6 the operator of strain-gradient elasticity must possess a continuous group of symmetry. We also show in the same subsection that it was also the case for an order of symmetry equal to 5. The fact a 5-fold axe induce a continuous symmetry is a dimensional anomaly specific to bi-dimensional space. In figure III-1.4, we plot, for the cyclic group, the material invariance group against the physical invariance group.

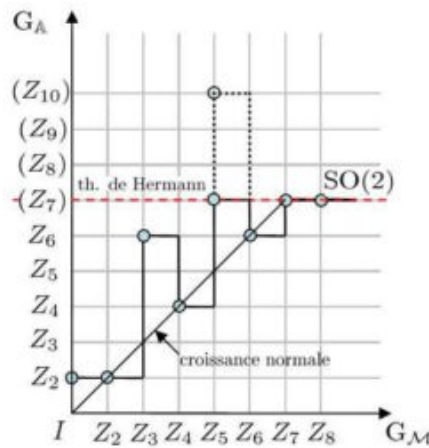


FIG. III-1.4 – Jump of symmetry classes between material and physical invariances.

We observe that for  $A$ , that is an even-order tensor, an odd-order material-invariance imply a physical invariance of twice order : a  $Z_{2p+1}$ -material invariance implies a  $Z_{2(2p+1)}$ -physical invariance. This fact which is specific to bi-dimensional space can be formally proved working on the harmonic decomposition of the operator [83]. This phenomena could also be observed for classical elasticity. So the difference induced on an operator by a  $Z_{2p+1}$ -material symmetry or a  $Z_{2(2p+1)}$  one just concern out-of-plane coefficients. This explain why continuous symmetry class appear for an 5-fold symmetry whereas we are not in the case of Hermann's theorem. In case of bi-dimensional space an 5-fold symmetry is seen as a 10-fold symmetry and this time we are in the case of the former theorem. Finally, it's well known since Mindlin that isotropic strain-gradient elasticity depend on 5 independent coefficients. But as we showed here this number of coefficient depend on the dimension of the physical space, for a two dimensional space this number decreases to 4. This fact depend on the operator, for the conventional elasticity the number of isotropic coefficients is the same in two and three dimensions [72].

If we get back to the expression of matrices (II-5.34) and (II-5.35), we understand that the last one don't take into account for out-of plane coupling. In [91] it has been proved that, in 3-D, different material invariances lead to different physical behaviors. This fact means that the matrix (II-5.34) is different for even and odd-material invariance, meanwhile its submatrix (II-5.35) remains the same. This remark, made through the study of operators in 2-D space, has a deep meaning about the physical consequence of material symmetry in 3-D. In, 3-D, the difference between a  $Z_{2p+1}$  and a  $Z_{2(2p+1)}$  material invariance will just concerns out-of-plane coupling coefficients. This remark holds true for any kind of linear behavior.

### III-1.5.2 Chiral sensitivity

The second is the fact that strain-gradient elasticity is a chiral-sensitive behavior. For conventional elasticity, for example, the  $Z_4$ -invariance and the  $D_4$  lead to the same elastic operator expressed in two different basis ; as shown by [26] you can always find a angle of rotation to turn the  $Z_4$ -invariant operator into the  $D_4$  one. As shown in ,§III-1.4 for the second order elasticity after reduction the operators for the two different class remain distinct. The existence of an hemitropic class of symmetry, class which doesn't exist for classical elasticity, shows that the sensitivity to chirality is independent of the choice of an appropriate basis. The chirality coupling can be easily illustrated in the following way. In §III-1.3 we introduce the following matrix representation for  $\hat{A}$  :

$$\begin{pmatrix} S_{111} \\ S_{222} \\ S_{221} \\ S_{112} \\ \sqrt{2}S_{122} \\ \sqrt{2}S_{121} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{111111} & A_{111222} & A_{111221} & A_{111112} & \sqrt{2}A_{111122} & \sqrt{2}A_{111121} \\ A_{222111} & A_{222222} & A_{222221} & A_{222112} & \sqrt{2}A_{222122} & \sqrt{2}A_{222121} \\ A_{221111} & A_{221222} & A_{221221} & A_{221112} & \sqrt{2}A_{221122} & \sqrt{2}A_{221121} \\ A_{112111} & A_{112222} & A_{112221} & A_{112112} & \sqrt{2}A_{112122} & \sqrt{2}A_{112121} \\ \sqrt{2}A_{122111} & \sqrt{2}A_{122222} & \sqrt{2}A_{122221} & \sqrt{2}A_{122112} & 2A_{122122} & 2A_{122121} \\ \sqrt{2}A_{121111} & \sqrt{2}A_{121222} & \sqrt{2}A_{121221} & \sqrt{2}A_{121112} & 2A_{121122} & 2A_{121121} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_{111} \\ K_{222} \\ K_{221} \\ K_{112} \\ \sqrt{2}K_{122} \\ \sqrt{2}K_{121} \end{pmatrix} \quad (\text{III-1.58})$$

We can rewrite this operator separating the strain gradient mechanisms along the  $x$ -direction and the  $y$ -direction, leading to :

$$\begin{pmatrix} S_{111} \\ S_{221} \\ \sqrt{2}S_{122} \\ S_{222} \\ S_{112} \\ \sqrt{2}S_{121} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{111111} & A_{111221} & \sqrt{2}A_{111122} & A_{111222} & A_{111112} & \sqrt{2}A_{111121} \\ A_{221111} & A_{221221} & \sqrt{2}A_{221122} & A_{221222} & A_{221112} & \sqrt{2}A_{221121} \\ \sqrt{2}A_{122111} & \sqrt{2}A_{122221} & 2A_{122122} & \sqrt{2}A_{122222} & \sqrt{2}A_{122112} & 2A_{122121} \\ A_{222111} & A_{222221} & \sqrt{2}A_{222122} & A_{222222} & A_{222112} & \sqrt{2}A_{222121} \\ A_{112111} & A_{112221} & \sqrt{2}A_{112122} & A_{112222} & A_{112112} & \sqrt{2}A_{112121} \\ \sqrt{2}A_{121111} & \sqrt{2}A_{121221} & 2A_{121122} & \sqrt{2}A_{121222} & \sqrt{2}A_{121112} & 2A_{121121} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_{111} \\ K_{221} \\ \sqrt{2}K_{122} \\ K_{222} \\ K_{112} \\ \sqrt{2}K_{121} \end{pmatrix} \quad (\text{III-1.59})$$

We can rewrite now the matrix we obtain in this system. We shall do that here just for the hemitropic and the isotropic cases, but this result stands for any  $Z_k$ -invariance and  $D_k$ -invariance :  $Z_k$ -invariance behave likes the hemitropic case meanwhile  $D_k$ -invariance is similate to the isotropic one. For the isotropic-invariance, and for any  $D_k$ -invariance, in the former system of vectors the matrix operators are block-diagonal. We have, on one hand :

$$\hat{A}_{O(2)} = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & 0 & 0 & 0 \\ & c_4 & c_5 & 0 & 0 & 0 \\ & & c_6 & 0 & 0 & 0 \\ & & & c_1 & c_2 & c_3 \\ & & & & c_4 & c_5 \\ & & & & & c_6 \end{pmatrix} \quad (\text{III-1.60})$$

for hemitropic-invariance, and for any  $Z_k$ -invariance, we have, on the other hand :

$$\hat{A}_{SO(2)} = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & 0 & c_7 & -\frac{c_7}{\sqrt{2}} \\ & c_4 & c_5 & -c_7 & 0 & \frac{c_7}{\sqrt{2}} \\ & & c_6 & -\frac{c_7}{\sqrt{2}} & -\frac{c_7}{\sqrt{2}} & 0 \\ & & & c_1 & c_2 & c_3 \\ & & & & c_4 & c_5 \\ & & & & & c_6 \end{pmatrix} \quad (\text{III-1.61})$$



In this system the upper right block matrix represent the coupling effect between strain gradient in the  $x$ -direction and in the  $y$ -direction. If the material is invariant under a mirror-symmetry this coupling effect vanish. Otherwise the coupling effect appears in the form of a skew-symmetric matrix. This skew-symmetric coupling is a chiral sensitive mechanism.

### III–1.5.3 Anisotropy of plane periodic tiling

We observe that a material symmetry of order 6 will lead to an anisotropic elastic behavior. So whereas 1st-order elasticity is isotropic for a 6-fold invariant material, its 2nd-order term will become anisotropic. This fact makes sense since that the order of rotation group that allow a bi-dimensional-media to be periodic is finite and must be either 1, 2, 3, 4 or 6. This fact is known as the crystallographic restriction. So it can be concluded that for any bidimensional periodic material, the strain-gradient elasticity must be anisotropic<sup>3</sup>. This effect can be shown by expressing the second-order elastic energy  $W$  in the plane  $(x, y)$  as a function of  $K_{(ij)k}(x, y)$ . This energy could be expressed through the Voigt's formalism :

$$W(x, y) = \frac{1}{2} \hat{S}_\alpha \hat{K}_\alpha = \frac{1}{2} \hat{A}_{(\alpha\beta)} \hat{K}_\beta \hat{K}_\alpha \quad (\text{III-1.62})$$

We consider now the following special strain-gradient field<sup>4</sup>  $\underline{\hat{K}}$  :

$$\underline{\hat{K}}(x, y) = \begin{pmatrix} x^3 \\ y^3 \\ xy^2 \\ yx^2 \\ \sqrt{2}xy^2 \\ \sqrt{2}yx^2 \end{pmatrix} \quad (\text{III-1.63})$$

For such a special field the second order elastic energy is a symmetric homogeneous polynomial :

$$\begin{aligned} 2W(x, y) = & b_{11}x^6 + \\ & b_{22}y^6 + \\ & 2(b_{14} + \sqrt{2}b_{16})x^5y + \\ & 2(b_{23} + \sqrt{2}b_{25})xy^5 + \\ & (2(b_{13} + b_{66} + \sqrt{2}(b_{15} + b_{46})) + b_{44})x^4y^2 + \\ & (2(b_{24} + b_{55} + \sqrt{2}(b_{26} + b_{35})) + b_{33})x^2y^4 + \\ & 2(b_{12} + b_{34} + 2b_{56} + \sqrt{2}(b_{36} + b_{45}))x^3y^3 \end{aligned} \quad (\text{III-1.64})$$

For both hemitropy or isotropy symmetry the polynomial (III-1.64) will reduce to :

$$2W_{iso}(x, y) = b_{11}(x^2 + y^2)^3 \quad (\text{III-1.65})$$

This implies that the iso-energy lines are concentric circles. That was for at least hemitropic behavior. For the  $Z_6/D_6$ -invariance the polynomial will reduce to :

$$2W_{D_6}(x, y) = b_{11}(x^3 - 3xy^2)^2 + b_{22}(-3x^2y + y^3)^2 \quad (\text{III-1.66})$$

<sup>3</sup>This result is obviously also true in 3-D space. In 3-D space, Mindlin's elasticity defined over a  $Z_6$ -invariant media is not transverse isotropic.

<sup>4</sup>The elastic energy expressed through this field with that special spatial dependence depend only on the full symmetrical part of the tensor  $A$ . Such a choice of a strain-gradient field allows us to represent the anisotropic part of the tensor in the plane.

As shown in figure fig.III-1.5 iso-energy lines for such a material would be represented by different "stars" according the values of the parameters  $b_{11}$  and  $b_{22}$ .

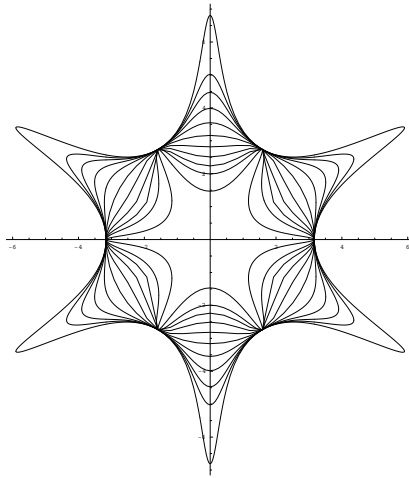


FIG. III-1.5 – Different isoenergy curves for different tensor parameters  $b_{11}$  et  $b_{22}$

This fact clearly show that the physical response of an  $Z_6/D_6$ -invariant material depends, for 2nd-order elasticity, on the direction of the space, and so that the tensor corresponding to this symmetry is anisotropic.

So a natural question one can wonder, is "what kind of geometry a media should have for Mindlin's elasticity to be isotropic on?". As it would be shown in §III-1.5.1 the answer depend on the dimension of the physical space, but in both case it deals with quasi-periodic tilling [84]. In 2-D space, for instance, Mindlin's elasticity define over Penrose tilled media should be isotropic (cf. fig.III-1.6).

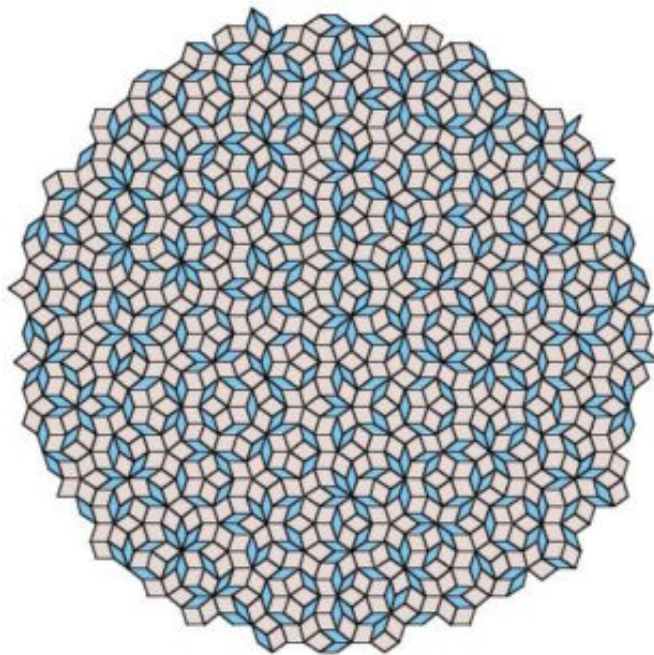


FIG. III-1.6 –  $D_5$ -invariant Penrose tilling

As shown §III–1.5.1 and explained by [91] in 2-D space this a  $Z_{2p+1}$ -material invariance induce a  $Z_{2(2p+1)}$ -physical invariance<sup>5</sup>. So for Mindlin’s elasticity a  $D_5$ -invariant media is seen as a  $D_{10}$ -invariant one.

But, even if it is not the scope of this paper, it should be note that in 3-D space the Penrose tilling will not induce a transverse isotropic behavior. The reason is that in 3-D, we don’t have jump of class phenomenon, and so the order of rotation should be strictly greater than the tensor’s number of index to imply a continuous class of symmetry. So in that case we could consider, for example, the  $D_8$  Ammann-Beenker tilling fig.III–1.7.

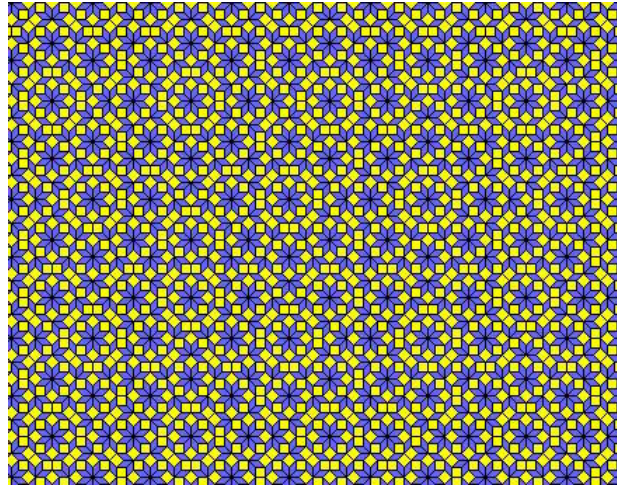


FIG. III–1.7 –  $D_8$ -invariant Ammann-Beenker tilling

## III–1.6 Conclusion

We derived all the expressions the  $2nd$ -order tensor of Mindlin elasticity could have in a 2-D physical space depending of the material symmetry. To achieve this goal we introduced an algebraically transformation of space to change a 2-dimensional  $6th$ -order tensor in a 6-dimensional  $2nd$ -order tensor. This goal was reached using the formalism introduce by [50]. That allowed us to show that the tensor  $A_{(ij)k (lm)n}$  could be of eight different types. The two main results concerning second order elasticity are that all the periodic media are anisotropic and that this elasticity depend on the chirality of the material. The particularity of two dimensional physical space was finally pointed out, showing that in two dimension some anomaly, like the class-jump, appears.

---

<sup>5</sup>For behavior described by even order tensors.

## III–1.7 Compléments à l'article

L'objectif de cette « annexe » sera d'introduire plusieurs outils que nous réutiliserons, par la suite au cours des chapitres III–2 et III–3 sur les opérateurs que nous construirons à partir de la procédure introduite au chapitre I–3.

Nous reviendrons tout d'abord, dans la sous-section III–1.7.1, sur la représentation graphique de l'anisotropie d'un tenseur, représentation que nous avons utilisée dans la sous-section III–1.5.3. Nous insisterons sur l'obtention et la signification de cette représentation. Au cours de la sous-section III–1.5.2, nous avons réécrit nos opérateurs en ordonnant les vecteurs de base de manière à les diagonaliser par blocs. Nous appellerons « système de mécanismes » un tel arrangement, et nous y reviendrons plus en détail au III–1.7.2. Nous concluons cette section, au III–1.7.3, en évoquant les systèmes de valeurs propres des opérateurs d'élasticité du second-ordre.

### III–1.7.1 Représentation graphique d'un tenseur

Dans le corps de l'article nous avons proposé, III–1.5.3, une manière de représenter graphiquement l'anisotropie du tenseur  $A_{(ij)k (lm)n}$ . La méthode que nous avons proposée pour cela consiste en l'étude des courbes d'iso-énergie de déformation induites par le champ de micro-déformation  $\hat{K}^*(x, y)$  défini :

$$\hat{K}^*(x, y) = \begin{pmatrix} x^3 \\ y^3 \\ xy^2 \\ x^2y \\ \sqrt{2}xy^2 \\ \sqrt{2}x^2y \end{pmatrix} \quad (\text{III–1.67})$$

De fait, l'énergie élastique dans le plan  $(x, y)$  a la forme suivante :

$$W(x, y) = \frac{1}{2} \hat{S}_\alpha \hat{K}_\alpha = \frac{1}{2} \hat{A}_{(\alpha\beta)} \hat{K}_\beta \hat{K}_\alpha \quad (\text{III–1.68})$$

c'est-à-dire, si l'on développe<sup>6</sup>,

$$\begin{aligned} W(x, y) = & b_{11}x^6 + \\ & b_{22}y^6 + \\ & 2(b_{14} + \sqrt{2}b_{16})x^5y + \\ & 2(b_{23} + \sqrt{2}b_{25})xy^5 + \\ & (2(b_{13} + b_{66} + \sqrt{2}(b_{15} + b_{46})) + b_{44})x^4y^2 + \\ & (2(b_{24} + b_{55} + \sqrt{2}(b_{26} + b_{35})) + b_{33})x^2y^4 + \\ & 2(b_{12} + b_{34} + \sqrt{2}(b_{36} + b_{45}) + 2b_{56})x^3y^3 \end{aligned} \quad (\text{III–1.69})$$

La forme ainsi obtenue est celle d'un polynôme homogène de degré 6 en  $x, y$ .

Il nous paraît intéressant de revenir ici, à la fois sur le choix de ce champ de micro-déformation ainsi que sur la signification du polynôme décrivant l'énergie élastique associée. La méthode

<sup>6</sup>On omettra le coefficient  $\frac{1}{2}$  dans la suite pour des soucis de lisibilité.

que nous proposons ici est personnelle, et nous ignorons si des références lui sont faites dans la littérature. L'objectif recherché est la construction, à partir de l'expression de notre opérateur, du polynôme homogène d'ordre 6 défini par l'équation (III-1.69).

### Construction du polynôme

La construction du champ  $\hat{\underline{K}}^*(x, y)$  s'effectue de la manière suivante. On considère le polynôme  $P(x, y)$  associé à  $\hat{\underline{A}}$ , que l'on construit à partir du produit scalaire de matrice suivant :

$$P(x, y) = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} & b_{16} \\ & b_{22} & b_{23} & b_{24} & b_{25} & b_{26} \\ & & b_{33} & b_{34} & b_{35} & b_{36} \\ & & & b_{44} & b_{45} & b_{46} \\ & & & & b_{55} & b_{56} \\ & & & & & b_{66} \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} x^6 & x^3y^3 & x^4y^2 & x^5y & \sqrt{2}x^4y^2 & \sqrt{2}x^5y \\ & y^6 & xy^5 & x^2y^4 & \sqrt{2}xy^5 & \sqrt{2}x^2y^4 \\ & & & x^2y^4 & x^3y^3 & \sqrt{2}x^2y^4 & \sqrt{2}x^3y^3 \\ & & & & x^4y^2 & \sqrt{2}x^3y^3 & \sqrt{2}x^4y^2 \\ & & & & & 2x^2y^4 & 2x^3y^3 \\ & & & & & & 2x^4y^2 \end{pmatrix} \quad (\text{III-1.70})$$

La matrice des polynômes  $\hat{\underline{M}}(x, y)$  est construite à partir de la dualisation des vecteurs de base de l'espace  $\mathbb{T}_{ijklmn}$ . On considère pour cela l'application  $f$  définie telle que :

$$f(\underline{e}_1) = x, \quad f(\underline{e}_2) = y \quad (\text{III-1.71})$$

Ainsi, par exemple, le terme  $(1, 1)$  de la matrice des polynômes est le terme associé au vecteur de base du tenseur  $\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1$ . On a naturellement

$$f(\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1) = x^6 \quad (\text{III-1.72})$$

On pose le vecteur  $\hat{\underline{K}}^*(x, y)$  défini par :

$$\hat{\underline{K}}^*(x, y) = \begin{pmatrix} x^3 \\ y^3 \\ xy^2 \\ x^2y \\ \sqrt{2}xy^2 \\ \sqrt{2}x^2y \end{pmatrix} \quad (\text{III-1.73})$$

La matrice  $\hat{\underline{M}}(x, y)$  peut être engendrée comme le produit tensoriel du vecteur  $\hat{\underline{K}}^*(x, y)$  par lui-même. De fait on peut réécrire  $P(x, y)$  de la manière suivante :

$$P(x, y) = \hat{\underline{A}} : \hat{\underline{M}}(x, y) \quad (\text{III-1.74})$$

$$= \hat{\underline{A}} : (\hat{\underline{K}}^*(x, y) \otimes \hat{\underline{K}}^*(x, y)) \quad (\text{III-1.75})$$

$$= \hat{\underline{K}}^{T*}(x, y) \cdot \hat{\underline{A}} \cdot \hat{\underline{K}}^*(x, y) \quad (\text{III-1.76})$$

Cette dernière forme est semblable à deux fois celle d'une énergie engendrée par la champ de micro-déformation  $\hat{\underline{K}}^*(x, y)$ . Ceci explique les raisons du choix de notre champ particulier, mais pas la signification de l'énergie élastique associée.

## Opération de projection

La question est : que représente un polynôme homogène ? On peut montrer qu'il s'agit de l'image, dans sa base duale, d'un tenseur complètement symétrique. De fait, la contraction de la matrice  $\hat{\mathbb{A}}$ , à droite et à gauche, par  $\hat{\mathbb{K}}^*(x, y)$  correspond à la projection de  $\hat{\mathbb{A}}$  sur  $\mathbb{T}_{(ijklmn)}$ , l'espace des tenseurs symétriques d'ordre 6. Regardons ce que cela signifie en terme de spectre. On rappelle que, dans un espace à deux dimensions, on a (II-4.1.3) :

$$\text{Sp}(\mathbb{T}_{(ij)k(lm)n}) = 0^\# \oplus 0^{(4)} \oplus 2^{(5)} \oplus 4^{(2)} \oplus 6 \quad (\text{III-1.77})$$

Notons  $\mathcal{F}$  l'application définie par :

$$\mathcal{F}(\hat{\mathbb{A}}) = \hat{\mathbb{K}}^{T*}(x, y) \cdot \hat{\mathbb{A}} \cdot \hat{\mathbb{K}}^*(x, y) \quad (\text{III-1.78})$$

On a, alors, :

$$\text{im}(\mathcal{F}) \in 0 \oplus 2 \oplus 4 \oplus 6 \quad (\text{III-1.79})$$

$$\text{ker}(\mathcal{F}) \in 0^\# \oplus 0^{(3)} \oplus 2^{(4)} \oplus 4 \quad (\text{III-1.80})$$

Cela nous donne le sens mécanique de  $\hat{\mathbb{K}}^*(x, y)$  : c'est le champ de micro-déformation qui fait travailler la partie totalement symétrique du tenseur de comportement. Nous ne pouvons voir avec cette méthode qu'une partie du comportement du tenseur. On pourrait améliorer cette approche en l'itérant sur le résidu, ceci de manière à effectuer la décomposition de notre tenseur en polynôme symétrique d'ordres décroissants. Pour ce qui nous intéresse dans ce chapitre cela ne sera néanmoins pas nécessaire.

Le fait que le polynôme homogène obtenu soit l'image d'un tenseur totalement symétrique, nous autorise à l'étudier avec les outils mis en œuvre au cours des chapitres II-4 et II-5. On rappelle de plus, que, dans le cadre d'un espace de dimension 2, on a  $\dim \mathbb{H}^i = 2$  si  $i > 0$  et  $\dim \mathbb{H}^i = 1$  dans le cas  $i = 0$ .

	$\mathbb{H}^0$	$\mathbb{H}^2$	$\mathbb{H}^4$	$\mathbb{H}^6$	dim
$W(x, y)$	$\square$	$\square\square$	$\square\square$	$\square\square$	7

(III-1.81)

Ceci nous dit que, dans le cas général<sup>7</sup>, notre polynôme est de dimension 7, ce que l'on vérifie bien sur l'expression III-1.69 en comptant les différents monômes indépendants.

A partir des outils précédemment introduits, on peut prédire la dimension de ce polynôme pour chacune des classes de symétrie du tenseur  $A_{(ij)k(kl)m}$ . On obtient le tableau :

	$\mathbb{H}^0$	$\mathbb{H}^2$	$\mathbb{H}^4$	$\mathbb{H}^6$	dim
$W_{Z_2}$	$\square$	$\square\square$	$\square\square$	$\square\square$	7
$W_{D_2}$	$\square$	$\square x$	$\square x$	$\square x$	4
$W_{Z_4}^*$	$\square$	$x x$	$\square\square$	$x x$	3
$W_{Z_4, D_4}$	$\square$	$x x$	$\square x$	$x x$	2
$W_{Z_6}^*$	$\square$	$x x$	$x x$	$\square\square$	3
$W_{Z_6, D_6}$	$\square$	$x x$	$x x$	$\square x$	2
$W_{\text{SO}(2), \text{O}(2)}$	$\square$	$x x$	$x x$	$x x$	1

(III-1.82)

<sup>7</sup>Ce qui signifie une propriété tensorielle  $Z_2$ -invariante. Car comme montré dans l'annexe II-E sur un milieu sans symétrie, en  $2D$ , une propriété tensorielle d'ordre pair, est automatique  $Z_2$ -invariante.

La notation \* indique que le polynôme est obtenu à partir d'une forme non-réduite (cf. III-1.4.2). La forme réduite est obtenue grâce à ce que l'on avait appelé, au II-4.2.4, l'alignement du système atomique. Les formes particulières des matrices  $\hat{\tilde{A}}$  obtenues au cours de l'article nous permettent d'obtenir les expressions explicites suivantes pour l'énergie élastique :

$$\begin{aligned}
W_{Z_2}(x, y) = & b_{11}x^6 + \\
& b_{22}y^6 + \\
& 2(b_{14} + \sqrt{2}b_{16})x^5y + \\
& 2(b_{23} + \sqrt{2}b_{25})xy^5 + \\
& (2(b_{13} + b_{66} + \sqrt{2}(b_{15} + b_{46})) + b_{44})x^4y^2 + \\
& (2(b_{24} + b_{55} + \sqrt{2}(b_{26} + b_{35})) + b_{33})x^2y^4 + \\
& 2(b_{12} + b_{34} + \sqrt{2}(b_{36} + b_{45}) + 2b_{56})x^3y^3
\end{aligned} \tag{III-1.83}$$

$$\begin{aligned}
W_{D_2}(x, y) = & b_{11}x^6 + \\
& b_{22}y^6 + \\
& (2(b_{13} + b_{66} + \sqrt{2}(b_{15} + b_{46})) + b_{44})x^4y^2 + \\
& (2(b_{24} + b_{55} + \sqrt{2}(b_{26} + b_{35})) + b_{33})x^2y^4
\end{aligned} \tag{III-1.84}$$

$$\begin{aligned}
W_{Z_4}^*(x, y) = W_{Z_4}(x, y) = & b_{11}(x^6 + y^6) + \\
& 2(b_{14} + \sqrt{2}b_{16})(x^5y - xy^5) + \\
& (2(b_{13} + b_{55} + \sqrt{2}(b_{15} + b_{35})) + b_{33})(x^4y^2 + x^2y^4)
\end{aligned} \tag{III-1.85}$$

$$\begin{aligned}
W_{D_4}(x, y) = & b_{11}(x^6 + y^6) + \\
& (2(b_{13} + b_{55} + \sqrt{2}(b_{15} + b_{35})) + b_{33})(x^4y^2 + x^2y^4)
\end{aligned} \tag{III-1.86}$$

$$\begin{aligned}
W_{Z_6}^*(x, y) = & b_{11}(x^3 - 3xy^2)^2 + \\
& b_{22}(-3x^2y + y^3)^2 - \\
& 2b_{12}xy(x^2 - 3y^2)(3x^2y - y^2)
\end{aligned} \tag{III-1.87}$$

$$\begin{aligned}
W_{Z_6, D_6}(x, y) = & b_{11}(x^3 - 3xy^2)^2 + \\
& b_{22}(-3x^2y + y^3)^2
\end{aligned} \tag{III-1.88}$$

$$W_{SO(2), O(2)}(x, y) = b_{11}(x^2 + y^2)^3 \tag{III-1.89}$$

On constate que  $W_{Z_4}^*(x, y) = W_{Z_4}(x, y)$  et que leur dimension est de 3. Ceci est en apparence contradiction avec le tableau (III-1.82). On rappelle que le spectre de  $A_{(ij)k} \underline{(lm)}_n$  est en dimension 2 le suivant :

$$\text{Sp}(\mathbb{T}_{\underline{(ij)k} \underline{(lm)}_n}) = 0^\# \oplus 0^{(4)} \oplus 2^{(5)} \oplus 4^{(2)} \oplus 6 \tag{III-1.90}$$

de fait le spectre d'un opérateur  $Z_4$ -invariant est

$$\text{Sp}(\mathbb{T}_{(ij)k} \underline{(lm)_n}) = 0^\# \oplus 0^{(4)} \oplus 4^{(2)} \quad (\text{III-1.91})$$

Il y a 2 sous-espaces harmoniques d'ordre 4 dans cette décomposition, la rotation que l'on a effectuée dans l'article a été déterminé de manière à annuler un coefficient. De fait, on voit ici que ce coefficient est relatif à la partie antisymétrique de notre tenseur. C'est ce pourquoi les projections des matrices réduite et non réduite concordent, la différence entre les deux appartenant au noyau de l'opérateur de projection. On pourrait déterminer une autre réduction de l'opérateur  $\hat{A}_{\sim Z_4}^*$  de manière à ce que l'alignement se fasse dans un sous-espace relatif à la partie symétrique de  $A_{(ij)k} \underline{(lm)_n}$ . Toutefois cela n'a pas beaucoup d'importance pour ce qui suit.

On a, au final, les dimensions suivantes pour les différents polynômes obtenues pour les opérateurs déterminés dans l'article :

$W(x, y)$	$Z_2$	$D_2$	$Z_4$	$D_4$	$Z_6/D_6$	$\text{SO}(2), \text{O}(2)$	(III-1.92)
dim	7	4	3	2	2	1	

Regardons à présent les représentations de quelques uns de ces polynômes dans le plan  $(x, y)$ .

### Représentation graphique

**Isotropie** On a  $W_{\text{SO}(2), \text{O}(2)}(x, y) = b_{11}(x^2 + y^2)^3$ . Les polynômes  $\text{O}(2)$  et  $\text{SO}(2)$ -invariants concordent, ce qui est logique quand on analyse ce polynôme comme un tenseur. L'iso-énergie de micro-déformation est définie par l'équation  $W_{\text{SO}(2), \text{O}(2)}(x, y) = k$ , il est immédiat de voir que cela définit une famille de cercles concentriques, d'équation  $b_{11}(x^2 + y^2)^3 = k$ . En coordonnées polaires, on a :

$$W(\rho, \phi) = b_{11}\rho^6 \quad (\text{III-1.93})$$

et donc, pour  $a_{11} > 0$ ,

$$\rho = \left( \frac{k}{b_{11}} \right)^{\frac{1}{6}} \quad (\text{III-1.94})$$

En coordonnées polaires, la fonction  $W(\rho, \phi)$  ne dépend pas de  $\phi$  dans la classe de symétrie considérée. On a donc la propriété suivante : pour un matériau isotrope soumis à notre champ  $\hat{K}^*(x, y)$ , l'énergie de déformation associée est isotrope. Regardons ce qu'il en est dans le cas de l'hexatropie.

**Hexatropie** Comme montré au II-5.2.3, pour un tenseur d'ordre 6 en dimension 2 les coefficients d'anisotropie hexatropie sont localisés sur la partie symétrique du tenseur de comportement. De fait, la représentation graphique utilisée ici est parfaitement adaptée à la mise en évidence de cet effet.

$W_{Z_6}^*$  et  $W_{Z_6/D_6}$  ne diffèrent que par la présence d'un seul coefficient :  $b_{12}$ .  $W_{Z_6}^*$  est le polynôme associé à la forme non-réduite du tenseur  $Z_6$ -invariant. En coordonnées polaires ce polynôme a pour expression :

$$W_{Z_6}^*(\rho, \phi) = \frac{\rho^6}{2}(b_{11} + b_{22} + (b_{11} - b_{22}) \cos(6\phi) - 2b_{12} \sin(6\phi)) \quad (\text{III-1.95})$$

Comme montré (III-1.41) il existe une rotation annulant le coefficient  $b_{12}$ . Cette rotation vérifie, pour  $b_{22} - b_{11} \neq 0$ , l'équation :

$$\tan(6\theta) = \frac{2b_{12}}{b_{22} - b_{11}} \quad (\text{III-1.96})$$



Tandis que pour  $W_{Z_6, D_6}(\rho, \theta)$  on obtient

$$W_{Z_6, D_6}(\rho, \phi) = \frac{\rho^6}{2}(b_{11} + b_{22} + (b_{11} - b_{22}) \cos(6\phi)) \quad (\text{III-1.97})$$

Regardons la différence entre les deux systèmes, on raisonne dans un système adimensionnalisé. On considère, tout d'abord, un tenseur ayant pour paramètres  $b_{11} = 25, b_{12} = 10, b_{22} = 10$ , on trace la courbe d'iso-énergie pour  $k = 5$

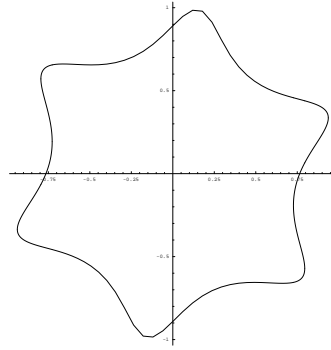


FIG. III-1.8 – Tenseur hexatropé de paramètres  $b_{11} = 25, b_{12} = 10, b_{22} = 10$

On constate que l'axe  $y$  n'est pas un axe de symétrie de la figure. L'action d'une rotation arbitraire d'un angle  $\theta$  sur le tenseur  $\hat{A}$  transforme les coefficients de la manière suivante :

$$b'_{12} = \frac{2b_{12} \cos(6\theta) + (b_{11} - b_{22}) \sin(6\theta)}{2} \quad (\text{III-1.98})$$

$$b'_{11} = \frac{b_{11} + b_{22} + (b_{11} - b_{22}) \cos(6\theta) - 2b_{12} \sin(6\theta)}{2} \quad (\text{III-1.99})$$

$$b'_{22} = \frac{b_{11} + b_{22} - (b_{11} - b_{22}) \cos(6\theta) + 2b_{12} \sin(6\theta)}{2} \quad (\text{III-1.100})$$

Si l'on annule par rotation le terme  $b'_{12}$  on obtient le tenseur défini par  $b'_{11} = 30, b'_{12} = 0, b'_{22} = 5$ . Sa représentation dans le plan est :

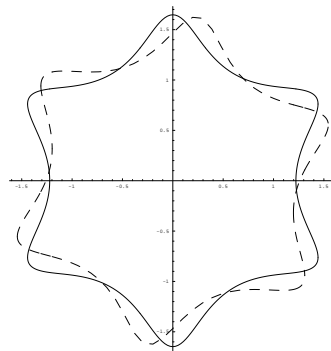


FIG. III-1.9 – Tenseur hexatropé de paramètres  $b_{11} = 30, b_{12} = 0, b_{22} = 5$

Et on obtient notre étoile redressée. Ceci nous montre que les paramètres  $b_{11}$  et  $b_{22}$  contrôlent les dimensions de l'étoile, tandis que  $b_{12}$  contrôle son orientation. Quand  $b_{12} = 0$ , on peut montrer que les angles  $\phi = 0$  et  $\phi = \frac{\pi}{2}$  correspondent à des extremums de la fonction  $W_{Z_6, D_6}(\rho, \phi) = k$ . En ces points on a :

$$\rho(0) = \left(\frac{k}{b_{11}}\right)^{\frac{1}{6}}, \quad \rho\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{k}{b_{22}}\right)^{\frac{1}{6}} \quad (\text{III-1.101})$$

auquel cas  $b_{11}$  et  $b_{22}$  contrôlent la plus grande et la plus petite dimension de cette étoile. Et on obtient la condition  $b_{11}$  et  $b_{22}$  strictement supérieurs à 0. On obtient alors, suivant les cas :

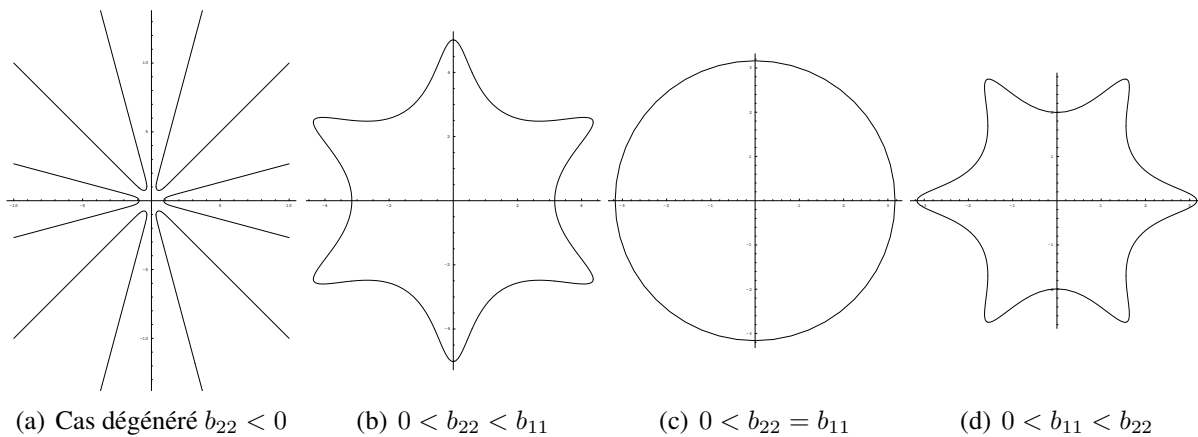


FIG. III-1.10 – Forme du tenseur en fonction de ses coefficients

et, en dehors du cas dégénéré, on a :

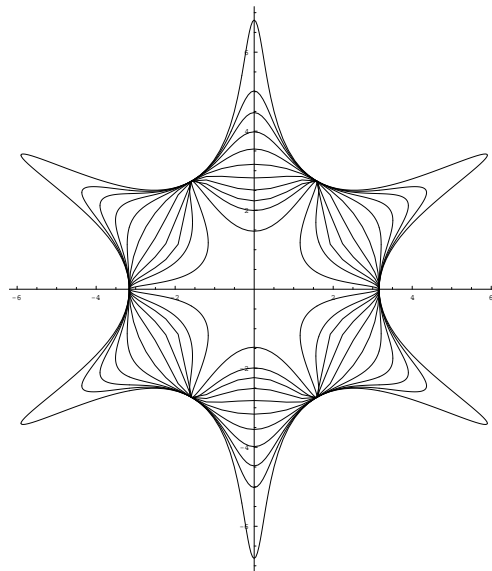


FIG. III-1.11 – Variation de la forme du tenseur hexaspatope

Tandis que l'on avait dans le cas d'un milieu isotrope une réponse isotrope, nous nous retrouvons ici avec une réponse énergétique qui, dans le plan, est une fonction de  $\phi$ . Ceci illustre de manière visuelle l'anisotropie de l'élasticité du second gradient.

Regardons rapidement ce qu'il se passe dans le cas de l'orthotropie.

**Orthotropie** Tout ce qui vient d'être dit pour le tenseur symétrique hexatrophe est directement transférable au cas orthotrope. Les courbes obtenues ressemblent à celles de l'astroïde mais de degrés supérieur, une sorte de sextique de Lamé (fig.III-1.12).

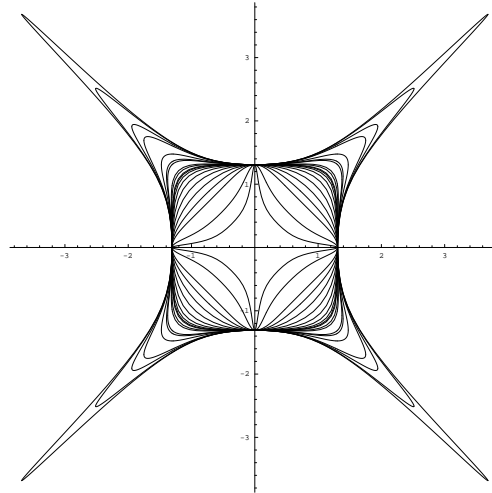


FIG. III-1.12 – Variation de la forme du tenseur  $D_4$ -invariant

De même que pour la  $Z_6$ -invariance, si on procède à l'alignement de notre opérateur  $Z_4$ -invariant dans le sous-espace relatif à sa partie symétrique, on redresse sa représentation fig.III-1.13.

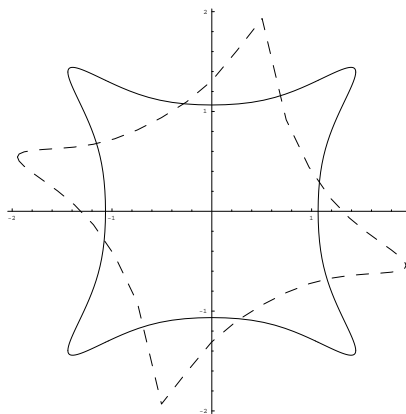


FIG. III-1.13 – Redressement par annulation d'un terme dans la partie symétrique de la décomposition

La représentation des autres classes de symétrie ne présente pas d'intérêts majeurs, de fait nous nous arrêtons ici avec les représentations graphiques de nos tenseurs.

## Mini-synthèse

Avant de continuer cette annexe à l'article *Derivation of anisotropic matrix for bi-dimensional strain gradient elasticity behavior* faisons une petite synthèse de ce qui vient d'être dit.

De manière à représenter graphiquement l'effet de l'anisotropie d'un opérateur de comportement, nous avons déterminé l'expression d'un champ de micro-déformation particulier  $\hat{K}^*(x, y)$ . La fonction de ce champ est de faire travailler la partie symétrique de notre tenseur de comportement. Ce champ nous permet de tracer des courbes d'iso-énergie de déformation. Une des propriétés de ces courbes est d'être isotrope quand le tenseur est isotrope. Cela nous permet donc de représenter l'anisotropie d'un opérateur. Cette représentation est performante quand, comme dans le cas de l'opérateur  $D_6$ -invariant, toute l'anisotropie est localisée sur sa partie symétrique. Cette technique demeure valable dans un espace à trois dimensions. Les figures III-1.14(a) et III-1.14(b) illustre cela à partir des matrices 3-D des classes de symétrie isotrope et icosaédrique.

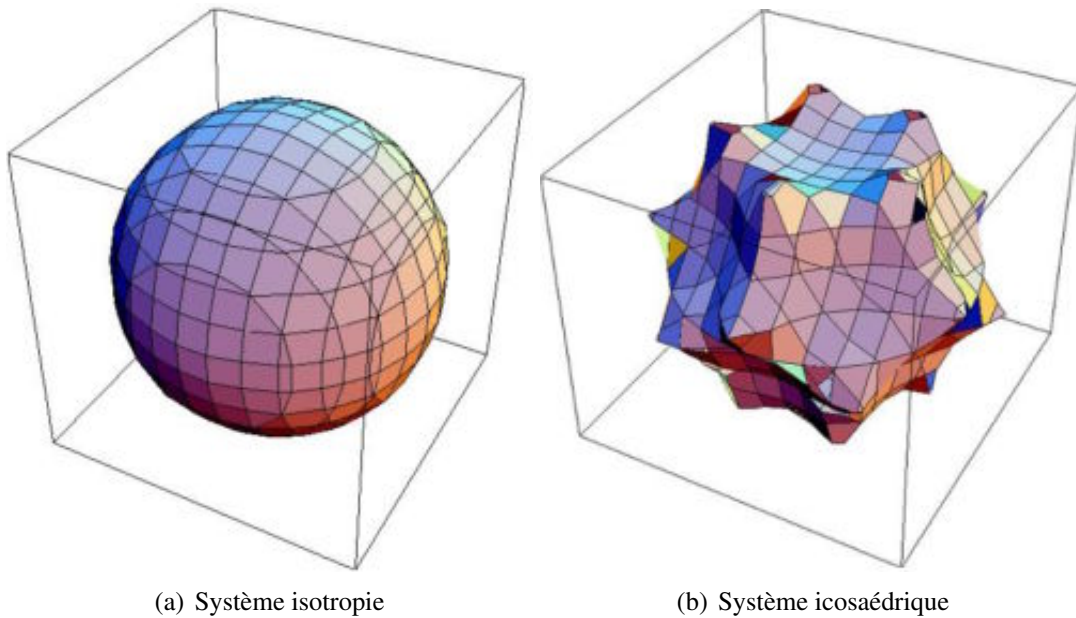


FIG. III-1.14 – Surface d'anisotropie 3-D

### III-1.7.2 Système de mécanismes

Ce que nous appellerons système de mécanismes est le fait de récrire les matrices précédentes en fonction du vecteur de micro-déformation suivant :

$$\begin{pmatrix} K_{111} \\ K_{221} \\ \sqrt{2}K_{122} \\ K_{222} \\ K_{112} \\ \sqrt{2}K_{121} \end{pmatrix} \quad (\text{III-1.102})$$

A partir de cette permutation des vecteurs de base (l'écriture formelle en a été donnée au III-1.5.2) nous pouvons récrire toutes nos matrices de comportement.

$$\hat{\mathbb{A}}_{\sim Z(2)} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{13} & b_{15} & b_{12} & b_{14} & b_{16} \\ & b_{33} & b_{35} & b_{32} & b_{34} & b_{36} \\ & & b_{55} & b_{52} & b_{54} & b_{56} \\ & & & b_{22} & b_{24} & b_{26} \\ & & & & b_{44} & b_{46} \\ & & & & & b_{66} \end{pmatrix}, \hat{\mathbb{A}}_{\sim D(2)} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{13} & b_{15} & 0 & 0 & 0 \\ & b_{33} & b_{35} & 0 & 0 & 0 \\ & & b_{55} & 0 & 0 & 0 \\ & & & b_{22} & b_{24} & b_{26} \\ & & & & b_{44} & b_{46} \\ & & & & & b_{66} \end{pmatrix} \quad (\text{III-1.103})$$

$$\hat{\mathbb{A}}_{\sim Z(4)} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{13} & b_{15} & 0 & b_{14} & b_{16} \\ & b_{33} & b_{35} & -b_{14} & 0 & b_{16} \\ & & b_{55} & -b_{16} & -b_{16} & 0 \\ & & & b_{11} & b_{13} & b_{15} \\ & & & & b_{33} & b_{35} \\ & & & & & b_{55} \end{pmatrix}, \hat{\mathbb{A}}_{\sim D(4)} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{13} & b_{15} & 0 & 0 & 0 \\ & b_{33} & b_{35} & 0 & 0 & 0 \\ & & b_{55} & 0 & 0 & 0 \\ & & & b_{11} & b_{13} & b_{15} \\ & & & & b_{33} & b_{35} \\ & & & & & b_{55} \end{pmatrix} \quad (\text{III-1.104})$$

$$\hat{\mathbb{A}}_{\sim Z_6} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{13} & \frac{b_{11}-b_{33}}{\sqrt{2}}-b_{35} & 0 & b_{14} & -\frac{b_{14}}{\sqrt{2}} \\ & b_{33} & b_{35} & -b_{14} & 0 & -\frac{b_{14}}{\sqrt{2}} \\ & & \frac{b_{11}+b_{33}}{2}-b_{13} & \frac{b_{14}}{\sqrt{2}} & \frac{b_{14}}{\sqrt{2}} & 0 \\ & & & b_{22} & b_{11}-b_{22}+b_{13} & \frac{3b_{11}-b_{33}}{\sqrt{2}}-b_{35}-\sqrt{2}b_{22} \\ & & & & b_{33}+b_{22}-b_{11} & \sqrt{2}(b_{22}-b_{11})+b_{35} \\ & & & & & \frac{-3b_{11}+b_{33}}{2}-b_{13}+2b_{22} \end{pmatrix} \quad (\text{III-1.105})$$

$$\hat{\mathbb{A}}_{\sim D_6} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{13} & \frac{b_{11}-b_{33}}{\sqrt{2}}-b_{35} & 0 & 0 & 0 \\ & b_{33} & b_{35} & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{b_{11}+b_{33}}{2}-b_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & & & b_{22} & b_{11}-b_{22}+b_{13} & \frac{3b_{11}-b_{33}}{\sqrt{2}}-b_{35}-\sqrt{2}b_{22} \\ & & & & b_{33}+b_{22}-b_{11} & \sqrt{2}(b_{22}-b_{11})+b_{35} \\ & & & & & \frac{-3b_{11}+b_{33}}{2}-b_{13}+2b_{22} \end{pmatrix} \quad (\text{III-1.106})$$

$$\hat{\mathbb{A}}_{\sim \text{SO}(2)} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{13} & \frac{b_{11}-b_{33}}{\sqrt{2}}-b_{35} & 0 & b_{14} & -\frac{b_{14}}{\sqrt{2}} \\ & b_{33} & b_{35} & -b_{14} & 0 & -\frac{b_{14}}{\sqrt{2}} \\ & & \frac{b_{11}+b_{33}}{2}-b_{13} & \frac{b_{14}}{\sqrt{2}} & \frac{b_{14}}{\sqrt{2}} & 0 \\ & & & b_{11} & b_{13} & \frac{b_{11}-b_{33}}{\sqrt{2}}-b_{35} \\ & & & & b_{33} & b_{35} \\ & & & & & \frac{b_{11}+b_{33}}{2}-b_{13} \end{pmatrix} \quad (\text{III-1.107})$$

$$\hat{\mathbb{A}}_{\sim \text{O}(2)} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{13} & \frac{b_{11}-b_{33}}{\sqrt{2}}-b_{35} & 0 & 0 & 0 \\ & b_{33} & b_{35} & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{b_{11}+b_{33}}{2}-b_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & & & b_{11} & b_{13} & \frac{b_{11}-b_{33}}{\sqrt{2}}-b_{35} \\ & & & & b_{33} & b_{35} \\ & & & & & \frac{b_{11}+b_{33}}{2}-b_{13} \end{pmatrix} \quad (\text{III-1.108})$$

La réécriture de nos opérateurs dans le « système de mécanismes » fait apparaître des motifs remarquables. La différence, pour un ordre de rotation donné, entre un opérateur chiral et son homologue non-chiral devient explicite. Dans le cas non-chiral on a apparition d'une matrice

bloc nulle, tandis que dans les autres cas on la présence d'une matrice bloc antisymétrique. De part sa localisation dans l'opérateur cette matrice bloc correspond aux termes de couplage entre les mécanismes dans la direction  $x$  et dans la direction  $y$ . L'analyse des polynômes associées à la base duale nous montre que les termes en question ont des monômes dont les degrés constitutifs sont impaires :

$$\hat{M}(x, y) = \begin{pmatrix} x^6 & x^4y^2 & \sqrt{2}x^4y^2 & x^3y^3 & x^5y & \sqrt{2}x^5y \\ & x^2y^4 & \sqrt{2}x^2y^4 & xy^5 & x^3y^3 & \sqrt{2}x^3y^3 \\ & & 2x^2y^4 & \sqrt{2}xy^5 & \sqrt{2}x^3y^3 & 2x^3y^3 \\ & & & y^6 & x^2y^4 & \sqrt{2}x^2y^4 \\ & & & & x^4y^2 & \sqrt{2}x^4y^2 \\ & & & & & 2x^4y^2 \end{pmatrix} \quad (\text{III-1.109})$$

On pouvait déjà remarquer cela dans l'expression de l'énergie de micro-déformation associée au champ  $\hat{K}^*(x, y)$  pour les opérateurs chiraux. Le signe de ces termes impairs dépend de l'orientation de l'espace de travail. En d'autres termes si l'on regarde ce tenseur dans un miroir, les coefficients de couplage changent de signe. Comme dit dans l'article on est en présence d'une élasticité chirale. Cette propriété des milieux du second gradient sera illustrée à partir de calculs éléments-finis au chapitre III-2.

Ces remarques faites simplifions, à présent, nos écritures.

### Réduction à des matrices par blocs

Dans l'esprit de ce qui vient d'être dit, nous pouvons réécrire nos opérateurs de comportement sous la forme de la matrice par blocs suivante :

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} X & C \\ C^T & Y \end{pmatrix} \quad (\text{III-1.110})$$

où X représente la matrice bloc des coefficients élastiques selon l'axe  $x$ , de même pour Y, tandis que C est la matrice de couplage entre les différentes directions.

La forme des blocs dépend de la classe de symétrie considérée. Les indices  $a$ ,  $o$ ,  $i$ , et  $cor$  signifieront anisotrope, isotrope, orthotrope et correction. On pose alors les matrices<sup>8</sup> :

$$X_a = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{13} & b_{15} \\ & b_{33} & b_{35} \\ & & b_{55} \end{pmatrix}, X_i = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{13} & \frac{b_{11}-b_{33}}{\sqrt{2}} - b_{35} \\ & b_{33} & b_{35} \\ & & \frac{b_{11}+b_{33}}{2} - b_{13} \end{pmatrix}, X_{cor} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -\sqrt{2} \\ & 1 & \sqrt{2} \\ & & 2 \end{pmatrix} \quad (\text{III-1.111})$$

$$C_a = \begin{pmatrix} b_{12} & b_{14} & b_{16} \\ b_{32} & b_{34} & b_{36} \\ b_{52} & b_{54} & b_{56} \end{pmatrix}, C_o = \begin{pmatrix} 0 & b_{14} & b_{16} \\ -b_{14} & 0 & b_{16} \\ -b_{16} & -b_{16} & 0 \end{pmatrix}, C_i = \begin{pmatrix} 0 & b_{14} & -\frac{b_{14}}{\sqrt{2}} \\ b_{14} & 0 & -\frac{b_{14}}{\sqrt{2}} \\ -\frac{b_{14}}{\sqrt{2}} & \frac{b_{14}}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{III-1.112})$$

<sup>8</sup>Quand l'on ne note que la partie triangulaire supérieure de la matrice cela signifie que cette matrice est symétrique.

Posons, de plus, la matrice  $\hat{\underset{\sim}{A}}^{hex}_{cor}$ , définie

$$\hat{\underset{\sim}{A}}^{hex}_{cor} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 1 & -1 & -\sqrt{2} \\ & & & & 1 & \sqrt{2} \\ & & & & & 2 \end{pmatrix} \quad (\text{III-1.113})$$

telle que l'on ai la décomposition suivante :

$$\hat{\underset{\sim}{A}}_{D_6} = \hat{\underset{\sim}{A}}_{O(2)} + (b_{22} - b_{11})\hat{\underset{\sim}{A}}_{cor} \quad (\text{III-1.114})$$

A partir de ces matrices on peut réécrire nos opérateurs de comportement :

$$\hat{\underset{\sim}{A}}_{Z_2} = \begin{pmatrix} X_a & C_a \\ C_a^T & Y_a \end{pmatrix}, \hat{\underset{\sim}{A}}_{D_2} = \begin{pmatrix} X_a & 0 \\ 0 & Y_a \end{pmatrix} \quad (\text{III-1.115})$$

$$\hat{\underset{\sim}{A}}_{Z_4} = \begin{pmatrix} X_a & C_o \\ C_o^T & X_a \end{pmatrix}, \hat{\underset{\sim}{A}}_{D_4} = \begin{pmatrix} X_a & 0 \\ 0 & X_a \end{pmatrix} \quad (\text{III-1.116})$$

$$\hat{\underset{\sim}{A}}_{Z_6} = \begin{pmatrix} X_i & C_i \\ C_i^T & X_i + (b_{22} - b_{11})X_{cor} \end{pmatrix}, \hat{\underset{\sim}{A}}_{D_6} = \begin{pmatrix} X_i & 0 \\ 0 & X_i + (b_{22} - b_{11})X_{cor} \end{pmatrix} \quad (\text{III-1.117})$$

$$\hat{\underset{\sim}{A}}_{SO(2)} = \begin{pmatrix} X_i & C_i \\ C_i^T & X_i \end{pmatrix}, \hat{\underset{\sim}{A}}_{O(2)} = \begin{pmatrix} X_i & 0 \\ 0 & X_i \end{pmatrix} \quad (\text{III-1.118})$$

A partir de cette notation il nous semble plus aisé de comparer les différents opérateurs d'élasticité entre eux. De plus, si cette approche peut paraître complexe vis-à-vis des matrices proposées, celle-ci est d'un grand intérêt lorsque l'on travail sur les opérateurs 3-D. Car si en dimension 2 les opérateurs du second ordre sont représentables par des matrices de dimension 6, en dimension 3 les mêmes matrices seront de dimension 18. De fait, cette décomposition en système de mécanismes permettra de réduire ces matrices à des matrices par blocs de dimension 4.

Regardons à présent une première application de ces notations compactes. Nous pouvons écrire une fonction qui calcule l'erreur en énergie commise en négligeant la partie anisotrope d'un opérateur de comportement.

### Erreur en énergie

On peut décomposer tout opérateur en une partie isotrope, une partie chirale ainsi qu'une correction anisotrope. Considérons un opérateur quelconque  $\hat{\underset{\sim}{A}}_{ani}$ , on a l'égalité triviale suivante :

$$\begin{pmatrix} X & C \\ C^T & Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_i & 0 \\ 0 & Y_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & C \\ C^T & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X - X_i & 0 \\ 0 & Y - Y_i \end{pmatrix} \quad (\text{III-1.119})$$

c'est-à-dire :

$$\hat{\underset{\sim}{A}}_{ani} = \hat{\underset{\sim}{A}}_{iso} + \hat{\underset{\sim}{A}}_{chi} + \hat{\underset{\sim}{A}}_{cor} \quad (\text{III-1.120})$$

Soit  $\hat{\underline{K}}(x, y)$  un champ de déformation quelconque. L'énergie élastique associée est définie de la manière suivante :

$$W(x, y) = \frac{1}{2} \hat{\underline{K}}^T(x, y) \hat{\underline{A}}_{\sim ani} \hat{\underline{K}}(x, y) \quad (\text{III-1.121})$$

d'après notre décomposition cette énergie se décompose en un terme isotrope, un terme lié à la chiralité, ainsi qu'un terme de correction anisotrope.

$$W_{ani}(x, y) = W_{iso}(x, y) + \frac{1}{2} \hat{\underline{K}}^T(x, y) \hat{\underline{A}}_{\sim chir} \hat{\underline{K}}(x, y) + \frac{1}{2} \hat{\underline{K}}^T(x, y) \hat{\underline{A}}_{\sim cor} \hat{\underline{K}}(x, y) \quad (\text{III-1.122})$$

cela nous permet d'exprimer l'erreur relative en énergie si l'on suppose isotrope un milieu qui ne l'est pas. On a

$$W_{err\%}(x, y) = \left| \frac{W_{ani}(x, y) - W_{iso}(x, y)}{W_{iso}(x, y)} \right| = \left| \frac{\hat{\underline{K}}^T(x, y) \hat{\underline{A}}_{\sim chir} \hat{\underline{K}}(x, y)}{\hat{\underline{K}}^T(x, y) \hat{\underline{A}}_{\sim iso} \hat{\underline{K}}(x, y)} + \frac{\hat{\underline{K}}^T(x, y) \hat{\underline{A}}_{\sim cor} \hat{\underline{K}}(x, y)}{\hat{\underline{K}}^T(x, y) \hat{\underline{A}}_{\sim iso} \hat{\underline{K}}(x, y)} \right| \quad (\text{III-1.123})$$

Dans le cas d'un opérateur  $D_k$ -invariant, le terme de chiralité s'annule et dans le cas de l'hexa-tropie la formule se simplifie encore :

$$W_{err\%}^{D_6}(x, y) = \left| \frac{W_{D_6}(x, y) - W_{iso}(x, y)}{W_{iso}(x, y)} \right| = \left| (b_{22} - b_{11}) \frac{\hat{\underline{K}}^T(x, y) \hat{\underline{A}}_{\sim cor}^{hex} \hat{\underline{K}}(x, y)}{\hat{\underline{K}}^T(x, y) \hat{\underline{A}}_{\sim iso} \hat{\underline{K}}(x, y)} \right| \quad (\text{III-1.124})$$

et si l'on reprend notre champ  $\hat{\underline{K}}^*(x, y)$  introduit pour la représentation graphique de l'anisotropie, on obtient, en polaire l'expression explicite suivante :

$$W_{err\%}^{D_6}(\rho, \phi) = \left| \frac{b_{22} - b_{11}}{b_{11}} \right| \sin 3\phi^2 \quad (\text{III-1.125})$$

Soit, dans ce cas précis, une erreur maximum de  $\left| \frac{b_{22} - b_{11}}{b_{11}} \right| \%$ , pour tout  $\phi$  de la forme :

$$\phi_{max} = \frac{\pi}{6} + k \frac{\pi}{3} \quad (\text{III-1.126})$$

Nous noterons dans la suite de ce document  $a\%$  ce paramètre d'anisotropie. On pourrait de même calculer, à partir de cette méthode, la famille des champs  $\hat{K}^\perp(x, y)$  qui ne font pas travailler la composante anisotrope de ce milieu.

Passons à présent au dernier point de cette annexe, et qui concerne les conditions de stabilité des opérateurs de comportement du second ordre.

### III-1.7.3 Système des valeurs propres

Nous allons voir ici que les outils mis en place au cours de cette thèse, ainsi que dans ce chapitre, permettent de « prévoir » les différents systèmes de valeurs propres qu'un opérateur peut posséder. De plus dans certain cas les conditions de stabilité peuvent être explicitées. En pratique cela sera toujours le cas dans un espace de dimension 2.

Les opérateurs étant auto-adjoints, ils sont tous diagonalisables. On a plusieurs autres propriétés, permettant d'étudier la diagonalisation de nos matrices. Considérons le cas des matrices



$D_k$ -invariantes. Conformément à ce qui vient d'être écrit, celles-ci sont diagonales par blocs dans leur système de mécanismes. On a donc

$$\hat{A}_{\sim D_k} = \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix} \quad (\text{III-1.127})$$

Soit  $\chi_A(\lambda)$  le polynôme caractéristique de  $\hat{A}_{\sim D_k}$ , on peut montrer simplement que

$$\chi_A(\lambda) = \chi_X(\lambda)\chi_Y(\lambda) \quad (\text{III-1.128})$$

et, de fait, l'étude des valeurs propres de  $\hat{A}_{\sim D_k}$  se réduit à celle de X et de Y. De plus, on rappelle que si  $\tilde{M}$  est une matrice  $3 \times 3$  alors l'expression de son polynôme caractéristique est

$$\chi_M(\lambda) : \quad \lambda^3 - \text{Tr}(\tilde{M})\lambda^2 - \frac{1}{2} \left( \text{Tr}(\tilde{M}^2) - \text{Tr}(\tilde{M})^2 \right) \lambda + \text{Det}(\tilde{M}) \quad (\text{III-1.129})$$

C'est-à-dire que le polynôme caractéristique de tout tenseur de comportement plan d'ordre 6 appartenant à une classe de symétrie diédrale peut s'écrire comme le produit de deux polynômes caractéristiques de degré 3. Le corollaire est qu'alors toutes ses racines sont calculable par radicaux, i.e. concrètement cela signifie que l'on peut obtenir l'expression analytique exacte de toutes ses racines à partir des coefficients de notre matrice. Ceci est intéressant car l'on sait qu'il n'existe pas de méthode générale de résolution des équations polynomiales quand le degré est supérieur à 4. La connaissance des expressions analytiques des valeurs propres nous permet de conclure immédiatement sur le caractère elliptique de l'opérateur de comportement considéré.

Notons que l'on peut diviser nos opérateurs en 2 sous-catégories :  $D_4$  et  $O(2)$ -invariance d'une part, et  $D_2$  et  $D_6$ -invariance d'autre part. En effet, les  $D_4$  et  $O(2)$ -invariances possèdent des matrices du type :

$$\hat{A}_{\sim D_4, O(2)} = \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix} \quad (\text{III-1.130})$$

tandis que les  $D_2$  et  $D_6$ -invariances ont des matrices du type :

$$\hat{A}_{\sim D_2, D_6} = \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix} \quad (\text{III-1.131})$$

Le polynôme caractéristique  $\chi_{\hat{A}_{\sim D_4, O(2)}}(\lambda)$  a pour forme :

$$\chi_{\hat{A}_{\sim 1}}(\lambda) = (\chi_X(\lambda))^2 \quad (\text{III-1.132})$$

On peut en conclure que les matrices de type  $\hat{A}_{\sim 1}$  possèdent, au plus, 3 valeurs propres.

En fait, on peut montrer que ces matrices possèdent exactement 3 valeurs propres. Le raisonnement est le suivant. Notre tenseur de comportement est d'ordre 6 en dimension 2, de fait il définit un automorphisme de  $\mathbb{T}_{(ij)k}$ .

$$a : \quad \mathbb{T}_{(ij)k} \mapsto \mathbb{T}_{(ij)k} \quad (\text{III-1.133})$$

tel que

$$T'_{(ij)k} = a(T_{(lm)n}) = A_{(ij)k} \underline{(lm)n} T_{(lm)n} \quad (\text{III-1.134})$$

D'après les méthodes que nous avons introduites au chapitre II-4, nous pouvons montrer qu'en dimension 2 on a :

$$\mathbb{T}_{(ij)k} \cong 1^{(2)} \oplus 3 \quad (\text{III-1.135})$$

Cette décomposition étant  $O(2)$ -invariante cela signifie qu'elle est vraie dans toutes bases de  $\mathbb{R}^2$ . De fait elle est valable dans la base propre de l'opérateur. Comme on a trois sous-espaces distincts de dimension 2 le nombre de valeurs propres ne peut être compris qu'entre 3 et 6. De fait comme les matrices de type  $\hat{A}_{\sim D_4, O(2)}$  possèdent, au plus, 3 valeurs propres, on conclut qu'elles en possèdent exactement 3.

On pouvait se douter que, dans le cas de l'isotropie, le nombre de valeurs propres serait égale au nombre de sous-espace invariants de  $\mathbb{T}_{(ij)k}$ , ce résultat est plus étonnant dans le cas de la symétrie orthotrope. Pour l'isotropie cette propriété est générale :

**Théorème 1** Soit  $T$  un tenseur d'ordre et de symétrie indicelle donné, soit  $M$  un opérateur auto-adjoint isotrope appartenant à  $\text{Aut}(T)$ , alors :

- $M$  est diagonalisable ;
- $M$  possède autant de valeurs propres distincts qu'il y a d'éléments dans le spectre harmonique de  $T$  ;
- l'ordre des valeurs propres de  $M$  est égale à la dimension du sous-espace harmonique correspondant de  $T$ .

Ainsi dans un espace à 3 dimensions on a  $\text{Sp}(\mathbb{T}_{(ij)k}) = 3 \otimes 2 \otimes 1^{(2)}$ , de fait l'opérateur  $\hat{A}_{\sim SO(3)}$  de l'élasticité de Mindlin est diagonalisable et on a 4 valeurs propres :

$$\text{Vp}(\hat{A}_{\sim SO(3)}) = \{\lambda_1^7, \lambda_2^5, \lambda_3^3, \lambda_4^3\} \quad (\text{III-1.136})$$

Les démonstrations formelles de ces propriétés pourront être retrouvées dans un article qui est actuellement en cours de rédaction [95,96]. On traite dans cette article, de manière théorique, de la détermination *a priori*, du système des valeurs propres d'un opérateur pour tous les systèmes de symétrie possibles.

En appliquant cette méthode, qui est proche de celle qui a été mise en oeuvre au cours du chapitre II-5, on établit le tableau suivant :

$G(\mathcal{M})$	$Z_2/D_2$	$Z_3/D_3$	$Z_4/D_4$	$Z_5/D_5$	$Z_6/D_6$	$SO(2)/O(2)$	(III-1.137)
$\text{Card}(\text{Vp})$	6	4	3	3	4	3	

Tout cela a été vérifié cela sur l'expression explicite de nos opérateurs de comportement, et pour des systèmes de symétrie élevé nous pouvons fournir des conditions simples de stabilité.

### Conditions de stabilité

L'unicité de la solution dépend de la nature elliptique [97] de nos tenseurs. Les conditions d'ellipticité sont dérivées des conditions de positivité des valeurs propre de nos tenseurs. On a pour les opérateurs  $O(2)$ ,  $SO(2)$ ,  $D_6$ , et  $Z_6$ -invariants les conditions suivantes à satisfaire :

**$O(2)$ ,  $SO(2)$ -invariances** Comme prévue de manière théorique on a, dans les deux cas, 3 valeurs propres. Notre tenseurs est elliptique si :

$$\lambda_1 = -b_{13} + b_{33} + \sqrt{2}b_{35} > 0 \quad (\text{III-1.138})$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{4}(3b_{11} + b_{33} - 2\sqrt{2}b_{35} - \sqrt{\Delta}) > 0 \quad (\text{III-1.139})$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{4}(3b_{11} + b_{33} - 2\sqrt{2}b_{35} + \sqrt{\Delta}) > 0 \quad (\text{III-1.140})$$

La différence entre l'hémitropie et l'isotropie dépend uniquement de l'expression de  $\Delta$ . On a alors :

$$\Delta = 9(b_{11}^2 + b_{33}^2) + 4b_{33}(2b_{13} + \sqrt{2}b_{35}) - 2b_{11}(4b_{13} + 9b_{33} + 2\sqrt{2}b_{35}) + 8(2b_{13}^2 + 2\sqrt{2}b_{13}b_{35} + b_{35}^2) \quad (\text{III-1.141})$$

$$\Delta_{chi} = \Delta + 32b_{14}^2 \quad (\text{III-1.142})$$

**$D_6, Z_6$ -invariances** Dans ce cas on a 4 valeurs propres. Notre tenseurs est elliptique si :

$$\lambda_1 = -b_{13} + b_{33} + \sqrt{2}b_{35} > 0 \quad (\text{III-1.143})$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{4}(3b_{11} + b_{33} - 2\sqrt{2}b_{35} - \sqrt{\Delta}) > 0 \quad (\text{III-1.144})$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{4}(3b_{11} + b_{33} - 2\sqrt{2}b_{35} + \sqrt{\Delta}) > 0 \quad (\text{III-1.145})$$

$$\lambda_4 = 4(b_{22} - b_{11}) + \lambda_1 > 0 \quad (\text{III-1.146})$$

Comme précédemment la différence entre la  $D_6$  et la  $Z_6$ -invariance dépend uniquement de l'expression de  $\Delta$ . On a les même expressions que précédemment.

Pour les autres systèmes les expressions deviennent trop complexes pour que cela représente un quelconque intérêt de les reporter ici.

Notons que l'étude du signe des valeurs propres des opérateurs du second ordre a un intérêt en élasticité non-linéaire. L'étude précise de cette question est l'objet de la référence [7]. Sa connaissance permet de relier la surface de perte d'ellipticité de l'opérateur d'élasticité homogénéisé, ce qui correspond à un mode global de flambement, avec les modes de bifurcation locaux déterminer à partir d'une analyse par onde de Bloch [30]. L'analyse des modes de bifurcation locales est très coûteuse en temps de calcul, et de fait la connaissance de la frontière entre les deux surfaces seuils permet de détecter les modes locaux qui engendrent une perte d'ellipticité globale.

Maintenant que nous avons défini cet ensemble d'outils d'analyse de nos opérateurs de comportement, nous pouvons revenir à l'étude des matrices que nous avons construites à la fin de la partie I de ce travail de thèse. Ceci nous permettra de confronter les résultats de notre approche algébrique des opérateurs du second gradient aux opérateurs obtenus à partir de l'homogénéisation d'une cellule de base.

## CHAPITRE III–2

### Propriétés des opérateurs du second ordre

Ce chapitre a pour objectif de vérifier et d'illustrer les différentes propriétés que possèdent l'opérateur d'élasticité du second ordre. Il est la rencontre de la procédure de construction de cet opérateur par homogénéisation telle que nous l'avons introduite au chapitre I–3 et des résultats sur les classes de symétrie dérivés au chapitre III–1.

Nous reviendrons tout d'abord, à la lueur de nos nouveaux résultats, sur les opérateurs que nous avons obtenus à la fin du chapitre I–3. Nous proposerons ensuite une vérification du théorème de Hermann, la démonstration de ce théorème est donnée aux annexes II–D et II–E. En parallèle de ces deux sections, nous étudierons le système des valeurs propres des différents opérateurs calculés. Nous construirons finalement un milieu chiral pour vérifier la forme de l'opérateur obtenu dans ce cas particulier.

#### III–2.1 Étude des matrices d'élasticité du second-ordre

La partie II de ce travail de thèse nous a permis d'obtenir des informations sur le nombre de systèmes d'anisotropie en 2-D et 3-D. Nous avons ainsi répondu à une des interrogations qui clôturaient la partie I. Au cours du chapitre III–1 nous avons dérivé les formes explicites des différents opérateurs d'élasticité du second ordre dans le cadre d'un vrai formalisme tensoriel. Ceci faisant nous avons déterminé pour chaque système d'anisotropie les diverses dépendances des coefficients entre eux. Il nous paraît maintenant intéressant de confronter ces divers résultats aux matrices que nous avons construit à la fin de la partie I.

Nous reprendrons dans cette section le plan de la dernière section du chapitre I–3. Nous étudierons les opérateurs obtenus par homogénéisation sur, respectivement, une cellule circulaire, hexagonale et carrée. Les cellules seront bâties à partir de polygones réguliers de rayon extérieur de 1 mm et d'épaisseur de 0,3 mm. Le matériau de la cellule sera pris homogène isotrope avec un module de Young de 200 GPa et un coefficient de Poisson de 0,3.

Nous rappelons que nous ne travaillerons dans ce qui suit qu'avec des conditions de contour non-périodiques. Une analyse précise de ce que cela implique quant au résultat reste à mener. Notons que dans le cadre de la théorie classique de l'homogénéisation [2] cela conduit à une surestimation des modules effectifs.

### III-2.1.1 Calcul d'un milieu effectif géométriquement isotrope

Nous considérerons la cellule circulaire suivante :

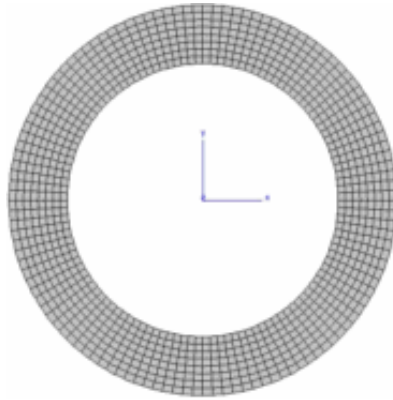


FIG. III-2.1 – Cellule de base

Les différents champs de déplacement obtenus sont représentés sur les figures I-3.2(a) et I-3.2(b) du chapitre I-3. On obtient, grâce à la procédure introduite dans ce dernier chapitre, la matrice de l'opérateur<sup>1</sup>  $\hat{\mathbb{A}}^{\text{II}}$  :

$$\hat{\mathbb{A}}^{\text{II}} = \begin{pmatrix} 9223 & 0 & 0 & -9223 & 4899 & 0 \\ 0 & 37466 & -4899 & 0 & 0 & 4899 \\ 0 & -4899 & 9223 & 0 & 0 & -9223 \\ -9223 & 0 & 0 & 9223 & -4899 & 0 \\ 4899 & 0 & 0 & -4899 & 37466 & 0 \\ 0 & 4899 & -9223 & 0 & 0 & 9223 \end{pmatrix} \quad (\text{III-2.1})$$

Ces valeurs sont données en MPa.mm<sup>2</sup> et arrondies par excès. Elles ont été calculées en tenant compte de la densité relative de la cellule qui est de 0, 51.

Comme noté précédemment cette construction de l'opérateur isotrope n'a pas de sens physique, car une telle cellule ne pourrait pas paver l'espace de manière dense. Toutefois elle permet d'obtenir simplement un milieu isotrope. De plus on retrouve ce processus de construction dans un certain nombre de publications traitant de la mécanique des matériaux poreux [47, 49]. Nous montrerons ici que cette construction est néanmoins sujette à caution car elle conduit à la définition d'un opérateur de comportement dégénéré.

#### Construction de l'opérateur

Si l'on se place dans le système des mécanismes introduit au chapitre III-1 et, en appliquant les coefficients de correction tensorielle, nous obtenons la représentation par un tenseur d'ordre

<sup>1</sup>Nous noterons dans ce chapitre par un \* les représentations matricielles non tensorielles de tenseurs d'ordre supérieur.

2 de  $\hat{A}_{\sim}^{\text{II}}$ . On a :

$$\hat{A}_{\sim}^{\text{II}} = \begin{pmatrix} 9223 & 4899 & -13043 & 0 & 0 & 0 \\ 4899 & 37466 & -6928 & 0 & 0 & 0 \\ -13043 & -6928 & 18446 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9223 & 4899 & -13043 \\ 0 & 0 & 0 & 4899 & 37466 & -6928 \\ 0 & 0 & 0 & -13043 & -6918 & 18446 \end{pmatrix} \quad (\text{III-2.2})$$

Comme montré au chapitre III-1 un tenseur du second ordre isotrope dépend de 4 coefficients et, dans le système des mécanismes, est de la forme :

$$\hat{A}_{\sim \text{O}(2)} = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \frac{c_1-c_3}{\sqrt{2}} - c_4 & 0 & 0 & 0 \\ & c_3 & c_4 & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{c_1+c_3}{2} - c_2 & 0 & 0 & 0 \\ & & & c_1 & c_2 & \frac{c_1-c_3}{\sqrt{2}} - c_4 \\ & & & & c_3 & c_4 \\ & & & & & \frac{c_1+c_3}{2} - c_2 \end{pmatrix} \quad (\text{III-2.3})$$

c'est-à-dire, en utilisant les notations blocs, à un opérateur de la forme :

$$\hat{A}_{\sim \text{O}(2)} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_i & 0 \\ \tilde{0} & \mathbf{X}_i \end{pmatrix} \quad (\text{III-2.4})$$

avec :

$$\mathbf{X}_i = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \frac{c_1-c_3}{\sqrt{2}} - c_4 \\ c_2 & c_3 & c_4 \\ \frac{c_1-c_3}{\sqrt{2}} - c_4 & c_4 & \frac{c_1+c_3}{2} - c_2 \end{pmatrix} \quad (\text{III-2.5})$$

Construisons cet opérateur à partir des données obtenues par homogénéisation. On pose :

$$c_1 = 9223 \text{ MPa.mm}^2 ; c_2 = 4899 \text{ MPa.mm}^2 ; c_3 = 37466 \text{ MPa.mm}^2 ; c_4 = -6928 \text{ MPa.mm}^2$$

Cet opérateur, que nous noterons  $\hat{A}_{\sim \text{O}(2)}^c$  pour indiquer que nous l'avons construit, a pour expression :

$$\hat{A}_{\sim \text{O}(2)}^c = \begin{pmatrix} 9223 & 4899 & -13043 & 0 & 0 & 0 \\ 4899 & 37466 & -6928 & 0 & 0 & 0 \\ -13043 & -6928 & 18446 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9223 & 4899 & -13043 \\ 0 & 0 & 0 & 4899 & 37466 & -6928 \\ 0 & 0 & 0 & -13043 & -6928 & 18446 \end{pmatrix} \quad (\text{III-2.6})$$

On constate que le tenseur est bien identique à celui obtenu par homogénéisation (III-2.2). Les relations d'isotropie 2-D sont bien vérifiées. Cela confirme que notre construction à partir de la cellule circulaire définit bien un milieu isotrope du second gradient. On peut de fait appliquer les résultats que nous avons dérivés au chapitre III-1 et qui concernent les valeurs propres de cet opérateur.

## Analyse des valeurs propres

Notre étude théorique a montré que l'opérateur isotrope est diagonalisable et possède 3 valeurs propres de multiplicité 2. Nous avons également donné une série de formules analytiques pour permettre d'obtenir l'expression de ces valeurs propres. Ces formules nous donnent ici :

$$\lambda_1 = 22769,4 \text{ MPa.mm}^2 ; \lambda_2 = 0 \text{ MPa.mm}^2 ; \lambda_3 = 42365,4 \text{ MPa.mm}^2$$

Les valeurs correspondent à celles obtenues en diagonalisant l'opérateur. La présence d'une valeur propre égale à 0 est une caractéristique de la cellule circulaire. Comme nous le verrons au cours de la section III-2.2 lorsque l'on construit un milieu isotrope à partir d'une cellule octogonale nous n'avons pas apparition d'une valeur propre nulle. La raison de l'apparition de cette valeur propre négative est la suivante, on considère notre opérateur dans le système II juste après construction par homogénéisation, on a :

$$\hat{\tilde{A}}^{*\text{II}} = \begin{pmatrix} 9223 & 0 & 0 & -9223 & 4899 & 0 \\ 0 & 37466 & -4899 & 0 & 0 & 4899 \\ 0 & -4899 & 9223 & 0 & 0 & -9223 \\ -9223 & 0 & 0 & 9223 & -4899 & 0 \\ 4899 & 0 & 0 & -4899 & 37466 & 0 \\ 0 & 4899 & -9223 & 0 & 0 & 9223 \end{pmatrix} \quad (\text{III-2.7})$$

Comme détaillé au chapitre I-3, une colonne dans ce système correspond à l'ensemble des composantes du tenseur d'hypercontrainte engendré pour une condition aux limites élémentaire. Dans le système II ces colonnes représentent :

$$\{K_{111}^{\text{II}} K_{112}^{\text{II}} K_{121}^{\text{II}} K_{122}^{\text{II}} K_{221}^{\text{II}} K_{222}^{\text{I}}\}$$

On remarque que le tenseur d'hypercontrainte engendré par  $K_{111}^{\text{II}}$  est égal à l'opposé de celui engendré par  $K_{122}^{\text{II}}$ , de même pour les conditions  $K_{222}^{\text{II}}$  et  $K_{211}^{\text{II}}$ . Cette dépendance linéaire est conservée lors de la conversion de la matrice en tenseur. Si l'on considère la matrice bloc de l'opérateur isotrope dans son système de mécanismes on a :

$$\begin{pmatrix} 9223 & 4899 & -13043 \\ 4899 & 37466 & -6928 \\ 13043 & -6928 & 18446 \end{pmatrix} \quad (\text{III-2.8})$$

la troisième colonne est égale à la première multipliée par  $\sqrt{2}$ , donc le déterminant de l'opérateur est nul, donc au moins une valeur propre est nulle. Cette propriété est liée uniquement à la géométrie de la cellule, on la retrouve quelque soit le rapport  $\left(\frac{e}{R_e}\right)$ .

La démonstration mathématique de cette propriété est la suivante. On considère la relation<sup>2</sup> suivante :

$$\underline{\underline{K}}^{\text{I}} = \frac{1}{V} \int_{\partial\Omega} \underline{\underline{\nabla}}(\underline{u}) \cdot \underline{n} \, d\partial\Omega \quad (\text{III-2.9})$$

où  $\underline{\underline{K}}^{\text{I}}$  est le second gradient du déplacement du milieu de homogène équivalent. On omettra de rappeler de quel type de formulation on parle pour plus de lisibilité. Le tenseur  $\underline{\underline{K}}^{(111)}$  dans lequel seul le terme  $K_{111}$  est non nul est obtenu à partir de la condition de contour :

$$\underline{u}^{(111)} = \left( u_1(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1^2 ; u_2(x_1, x_2) = 0 \right) \quad (\text{III-2.10})$$

<sup>2</sup>Cette relation, ainsi que d'autres, a été détaillée au cours du chapitre I-3.

de même  $K^{(122)}$  est obtenu à partir de la condition de contour :

$$\underline{u}^{122} = \left( u_1(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_2^2 ; u_2(x_1, x_2) = 0 \right) \quad (\text{III-2.11})$$

La géométrie de notre cellule est circulaire, on pose :

$$x_1 = R_e \cos(\theta) ; x_2 = R_e \sin(\theta) \quad (\text{III-2.12})$$

de fait on obtient immédiatement :

$$u^{111} = \frac{R_e^2}{2} - u^{122} \quad (\text{III-2.13})$$

De fait

$$\frac{1}{V} \int_{\partial\Omega} \underline{\nabla}(\underline{u}^{(111)}) \cdot \underline{n} d\partial\Omega = - \int_{\partial\Omega} \underline{\nabla}(\underline{u}^{(122)}) \cdot \underline{n} d\partial\Omega \quad (\text{III-2.14})$$

et donc sur un contour circulaire  $\underline{K}^{(111)} = -\underline{K}^{(122)}$  et de même pour  $\underline{K}^{(222)}$  et  $\underline{K}^{(211)}$ . Ceci implique la dépendance linéaire des vecteurs de la matrice d'élasticité du second ordre et donc la nullité d'au moins une valeur propre.

Cette remarque repose la question du sens physique de l'opération d'obtention d'un milieu isotrope à partir d'une cellule donnée. L'opération utilisée ici conduit à une forme dégénérée d'isotropie. Il est intéressant de noter que ce procédé de construction apparaît dans certaines publications notamment dans [49] où les auteurs construisent leur milieu isotrope par homogénéisation non-périodique d'une cellule circulaire. La forme de l'opérateur présent dans leur publication montre qu'ils obtiennent bien un opérateur d'isotropie dégénéré. Les auteurs notent un comportement anormal de leur modèle lors de calculs éléments-finis effectués à partir de l'opérateur identifié. Il est probable que la nature dégénéré de l'opérateur utilisé joue un rôle dans ces problèmes.

Passons à présent à l'étude des milieux anisotropes. Nous analyserons en même temps les différents systèmes de valeurs propres associés aux opérateurs.

### III-2.1.2 Calcul de milieux effectifs géométriquement anisotropes

On étudiera successivement les cas d'une cellule hexagonale et carrée.

#### Cellule hexagonale

Nous nous intéresserons pour commencer à une cellule hexagonale. Les résultats de l'homogénéisation classique établissent que pour l'élasticité du premier ordre le comportement effectif est isotrope. Les résultats des chapitres précédents montrent que ceci n'est plus vrai dans le cas de l'élasticité du second ordre. En théorie ce système de symétrie est défini par la donnée de 5 coefficients anisotropes.

Nous considérerons la cellule suivante :



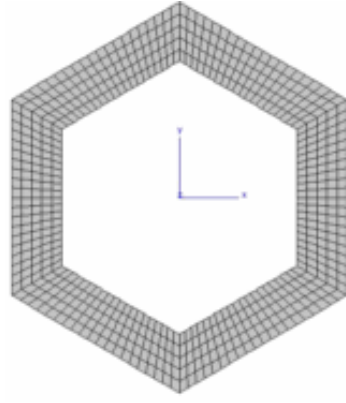


FIG. III-2.2 – Cellule hexagonale

En appliquant la procédure habituelle on obtient :

$$\hat{\tilde{A}}^{*\text{II}} = \begin{pmatrix} 12101 & 0 & 0 & -10164 & 549040 & \\ 0 & 40095 & -5621 & 0 & 0 & 6683 \\ 0 & -5624 & 9410 & 0 & 0 & -8971 \\ -10164 & 0 & 0 & 10601 & -4428 & 0 \\ 5490 & 0 & 0 & -4428 & 41287 & 0 \\ 0 & 6684 & -8971 & 0 & 0 & 10909 \end{pmatrix} \quad (\text{III-2.15})$$

Cet opérateur a l'expression tensorielle suivante dans son système de mécanismes :

$$\hat{\tilde{A}}^{\text{II}} = \begin{pmatrix} 12101 & 5490 & -14374 & 0 & 0 & 0 \\ 5490 & 41287 & -6262 & 0 & 0 & 0 \\ -14374 & -6263 & 21203 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12101 & 5490 & -14374 \\ 0 & 0 & 0 & 5490 & 41287 & -6262 \\ 0 & 0 & 0 & -14374 & -6263 & 21203 \end{pmatrix} \quad (\text{III-2.16})$$

Nous avons montré, au chapitre III-1, qu'un opérateur élastique du second ordre  $D_6$ -invariant admet la décomposition suivante :

$$\hat{\tilde{A}}_{D_6} = \hat{\tilde{A}}_{O(2)} + (c_5 - c_1)\hat{\tilde{A}}_{cor} \quad (\text{III-2.17})$$

avec  $\hat{\tilde{A}}_{O(2)}$  un tenseur isotrope et  $\hat{\tilde{A}}_{cor}$  une correction anisotrope d'expression :

$$\hat{\tilde{A}}_{cor} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 1 & -1 & -\sqrt{2} \\ & & & & 1 & \sqrt{2} \\ & & & & & 2 \end{pmatrix} \quad (\text{III-2.18})$$

Construisons cet opérateur à partir de celui obtenu par homogénéisation. On pose :

$$c_1 = 12101 \text{ MPa.mm}^2 ; c_2 = 5490 \text{ MPa.mm}^2 ; c_3 = 40095 \text{ MPa.mm}^2$$

$$c_4 = -5621 \text{ MPa.mm}^2 ; c_5 = 10909 \text{ MPa.mm}^2$$

On obtient au final :

$$\hat{\tilde{A}}_{D_6}^c = \begin{pmatrix} 12101 & 5490 & -14375 & 0 & 0 & 0 \\ 5490 & 41287 & -6263 & 0 & 0 & 0 \\ -14375 & -6263 & 21204 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10909 & 6683 & -12689 \\ 0 & 0 & 0 & 6683 & -12689 & -6263 \\ 0 & 0 & 0 & -12689 & -6263 & 18819 \end{pmatrix} \quad (\text{III-2.19})$$

On constate que cette matrice construite à partir de nos relations est assez proche de celle obtenue par homogénéisation. On peut calculer l'erreur relative commise en utilisant une norme matricielle, nous utiliserons  $\|\cdot\|_F$  la norme de Frobenius<sup>3</sup>. On a donc classiquement :

$$err\% = \left| \frac{\left\| \hat{\tilde{A}}_{\sim}^{\text{II}} \right\|_F - \left\| \hat{\tilde{A}}_{\sim D_6}^c \right\|_F}{\left\| \hat{\tilde{A}}_{\sim D_6}^c \right\|_F} \right| * 100 \quad (\text{III-2.20})$$

Dans notre cas l'erreur relative entre  $\hat{\tilde{A}}_{\sim}^{\text{II}}$  et  $\hat{\tilde{A}}_{\sim D_6}^c$  est d'environ  $10^{-3}\%$ . On peut légitimement conclure que notre opérateur du second ordre construit sur une cellule hexagonale est hexatrope.

On peut de même calculer le facteur d'anisotropie en énergie de micro-déformation du système hexatrope. On a montré, au chapitre III-1, que dans ce système ce paramètre se réduit à :

$$a\% = \left| \frac{c_5 - c_1}{c_1} \right| * 100 \quad (\text{III-2.21})$$

On obtient donc, dans notre cas, un facteur d'anisotropie de 9.85%. Ce facteur est lié à l'erreur commise sur l'énergie déformation élastique due aux termes du second ordre quand on suppose isotrope un milieu hexatrope. C'est la borne supérieure de cette erreur.

On peut appliquer les formules analytiques du chapitre III-1 pour obtenir les valeurs propres de cet opérateur. On obtient alors

$$\lambda_1 = 26940 \text{ MPa.mm}^2; \lambda_2 = 1560 \text{ MPa.mm}^2; \lambda_3 = 46092 \text{ MPa.mm}^2; \lambda_4 = 22171 \text{ MPa.mm}^2$$

Ces valeurs correspondent bien à celles que l'on obtient en diagonalisant directement notre tenseur. Et on constate que cette fois-ci notre opérateur ne contient pas d'anomalie. Le système hexatrope est bien défini par la donnée de 4 valeurs propres. Les valeurs  $\lambda_1$  et  $\lambda_4$  sont de multiplicité 1 et correspondent à la scission en deux valeurs propres du  $\lambda_1$  du système isotrope. Les valeurs propres  $\lambda_2$  et  $\lambda_3$  sont de multiplicité 2 et correspondent aux valeurs propres de mêmes indices dans le système isotrope.

Passons à présent au cas d'une cellule carrée.

<sup>3</sup>Le choix de normes utilisables est assez vaste, nous choisissons celle de Frobenius car celle-ci étant définissable à partir d'un produit scalaire de matrices est semblable à une énergie. On la définit suivante  $\|M\|_F = \sqrt{\text{Tr}(M^T \cdot M)}$ . On peut montrer que cette définition est égale à la norme  $\|\cdot\|_2$  du vecteur constitué des valeurs propres.

## Cellule carrée

On considérera comme d'habitude une cellule de rayon équivalent 1 mm et d'épaisseur 0,3 mm.

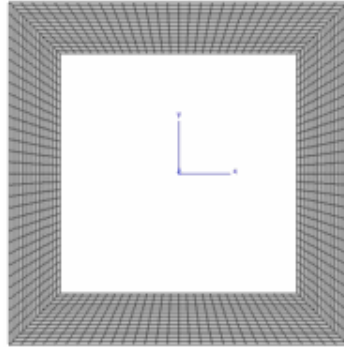


FIG. III-2.3 – Cellule carrée

On obtient l'opérateur  $\hat{\tilde{A}}^{*\text{II}}$  suivant :

$$\hat{\tilde{A}}^{*\text{II}} = \begin{pmatrix} 19092 & 0 & 0 & -8723 & 5643 & 0 \\ 0 & 50327 & -3802 & 0 & 0 & 5643 \\ 0 & -3802 & 8367 & 0 & 0 & -8723 \\ -8723 & 0 & 0 & 8367 & -3802 & 0 \\ 5643 & 0 & 0 & -3802 & 50328 & 0 \\ 0 & 5643 & -8723 & 0 & 0 & 19092 \end{pmatrix} \quad (\text{III-2.22})$$

Cet opérateur a l'expression tensorielle suivante dans son système de mécanismes :

$$\hat{\tilde{A}}^{\text{II}} = \begin{pmatrix} 19092 & 5643 & -12336 & 0 & 0 & 0 \\ 5643 & 50327 & -5377 & 0 & 0 & 0 \\ 12336 & -5377 & 16733 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 19092 & 5642,6 & -12336 \\ 0 & 0 & 0 & 5643 & 50327 & -5377 \\ 0 & 0 & 0 & 12336 & -5377 & 16733 \end{pmatrix} \quad (\text{III-2.23})$$

On vérifie ainsi bien qu'un opérateur défini sur un milieu  $D_4$ -invariant est défini par la donnée de 6 coefficients.

Le système des valeurs propres associé à cette classe de symétrie contient trois valeurs propres de multiplicité 2. Comme leurs expressions analytiques ne sont pas simples nous n'avons pas donné leurs expressions analytiques au chapitre précédent. Ces valeurs propres valent dans le cas de notre cellule :

$$\lambda_1 = 27630 \text{ MPa.mm}^2 ; \lambda_2 = 5519 \text{ MPa.mm}^2 ; \lambda_3 = 53003 \text{ MPa.mm}^2$$

Ce système n'est donc pas dégénéré.

Vérifions à présent une autre propriété de ces opérateurs, propriété que nous avons dérivée lors de notre étude théorique.

## III-2.2 Vérification du théorème de Hermann

Nous proposons dans cette section une vérification du théorème de Hermann bidimensionnel [70, 83]. La démonstration de ce théorème pourra être trouvée dans l'annexe II-D et sa réciproque est étudiée en annexe II-E.

Le théorème nous dit qu'une propriété physique décrite par un tenseur d'ordre  $n$  sera hémitrope transverse si le milieu est invariant par un ordre de rotation  $p > n$ . Nous sommes dans le cas d'une modélisation bidimensionnelle, de fait les notions d'hémitropie transverse et d'hémitropie coïncident. De plus nous considérerons des cellules décrites par des polygones réguliers, de fait la présence de symétries miroirs impliquent que si l'ordre d'invariance par rotation est supérieur à l'ordre du tenseur alors celui-ci est isotrope.

Dans le cas qui nous intéresse l'opérateur d'élasticité du second-gradient que nous construisons est d'ordre 6. De fait en toute rigueur si nous appliquons notre procédure de calcul des coefficients sur une cellule ayant un ordre d'invariance strictement supérieur à 6 alors le milieu obtenu sera isotrope. Pour une raison que nous justifierons par la suite nous vérifierons cette propriété non pas sur un heptagone, mais sur un octogone.

### III-2.2.1 Étude d'une cellule octogonale

On considère donc l'octogone suivant :

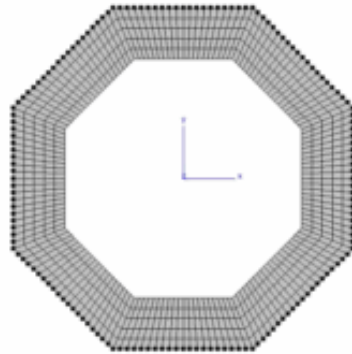


FIG. III-2.4 – Cellule octogonale

Le choix du contour sur lequel appliquer les conditions aux limites est important pour obtenir le bon comportement, on imposera ces conditions sur l'ensemble du contour. On obtient l'opérateur :

$$\hat{\tilde{A}}^{\text{II}} = \begin{pmatrix} 10345 & 5426 & -13482 & 0 & 0 & 0 \\ -5426 & 39464 & -5377 & 0 & 0 & 0 \\ -13482 & -5377 & 19479 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10345 & 5426 & -13482 \\ 0 & 0 & 0 & -5426 & 39464 & -5377 \\ 0 & 0 & 0 & -13482 & -5377 & 19479 \end{pmatrix} \quad (\text{III-2.24})$$

Et en posant :

$$c_1 = 10345 \text{ MPa.mm}^2 ; c_2 = 5426 \text{ MPa.mm}^2 ; c_3 = 39464 \text{ MPa.mm}^2$$

$$c_4 = -5377 \text{ MPa.mm}^2; c_5 = -13482 \text{ MPa.mm}^2; c_6 = 19479 \text{ MPa.mm}^2$$

on vérifie bien les relations d'isotropie :

$$c_5 = \frac{c_1 - c_3}{\sqrt{2}} - c_4; \quad c_6 = \frac{c_1 + c_3}{2} - c_2$$

Regardons à présent le système des valeurs propres :

$$\lambda_1 = 23986 \text{ MPa.mm}^2; \lambda_2 = 675 \text{ MPa.mm}^2; \lambda_3 = 44627 \text{ MPa.mm}^2$$

L'opérateur isotrope obtenu cette fois-ci n'est pas dégénéré.

Deux choses sont à noter. Le choix du contour sur lequel imposer les conditions aux limites est essentiel. Si l'on retient le contour tracé sur la figure suivante :

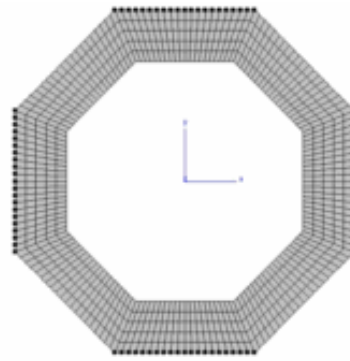


FIG. III-2.5 – Cellule octogonale

On obtient alors l'opérateur<sup>4</sup> :

$$\hat{\tilde{A}}^{\Pi} = \begin{pmatrix} 8165 & 6223 & -10598 & 0 & 0 & 0 \\ 6223 & 21228 & -939 & 0 & 0 & 0 \\ -10597 & 9394 & 16137 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8165 & 6223 & -10597 \\ 0 & 0 & 0 & 6223 & 21228 & -9394 \\ 0 & 0 & 0 & -10597 & 9394 & 16137 \end{pmatrix} \quad (\text{III-2.25})$$

opérateur dans lequel les relations d'isotropie ne sont pas vérifiées. On retrouve naturellement un opérateur du second-ordre  $D_4$ -invariant. Son système de valeurs propres est le suivant :

$$\lambda_1 = 11031 \text{ MPa.mm}^2; \lambda_2 = 826 \text{ MPa.mm}^2; \lambda_3 = 33673 \text{ MPa.mm}^2 \quad (\text{III-2.26})$$

L'opérateur obtenu n'est pas dégénéré.

Si l'on revient sur le système des valeurs propres on constate que la valeur propre  $\lambda_2$  qui est nul dans le cas d'un disque commence à chuter, et est plus faible dans le cas isotrope que dans le cas  $D_4$ -invariant. Cette valeur propre est fortement liée au nombre de cotés de la cellule de base.

Le deuxième point est qu'il n'est pas possible de définir un pavage périodique du plan possédant une  $D_8$ -invariance. De fait notre construction est correcte d'un point de vue théorique

<sup>4</sup>Avec un  $\bar{\rho}$  de 0,42 car on suppose que l'on est alors dans un réseau carré.

mais ne correspond pas, sous cette forme, à une réalité physique. Comme évoqué au cours du chapitre III-1, il existe des milieux présentant cette symétrie toutefois ces milieux ne sont plus périodiques mais quasi-périodiques. Le milieu d’Ammann-Beenker, que nous avons présenté à cette occasion, a cette propriété.

Dans un espace à trois dimensions nous avons montré dans [83] que la réciproque du théorème de Hermann était vraie. Une propriété isotrope est définie sur milieu dont les symétries excèdent l’ordre du tenseur. Toutefois comme montré dans le même article, ainsi que comme nous l’avons constaté au chapitre III-1, cette réciproque n’est plus vraie quand on est dans un espace à deux dimensions : on a apparition d’un phénomène de saut de classe. Pour un tenseur d’ordre pair, un milieu ayant une symétrie impaire est vu comme un milieu ayant un ordre de symétrie double. Cette propriété implique que si l’on calcule nos coefficients dans le cas d’une cellule pentagonale on doit retrouver un opérateur isotrope. Vérifions cette propriété.

### III-2.2.2 Étude d’une cellule pentagonale

On considère la cellule pentagonale suivante :

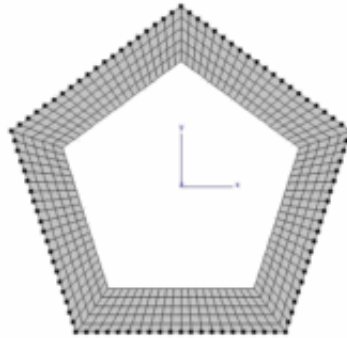


FIG. III-2.6 – Cellule pentagonale

On construit l’opérateur suivant :

$$\hat{\tilde{A}}^{\text{II}} = \begin{pmatrix} 13102 & 6887 & -13559 & 0 & 0 & 0 \\ 6887 & 42168 & -6994 & 0 & 0 & 0 \\ -13559 & -6994 & 20748 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 13101 & 6887 & -13559 \\ 0 & 0 & 0 & 6887 & 42168 & -6994 \\ 0 & 0 & 0 & -13559 & -6994 & 20748 \end{pmatrix} \quad (\text{III-2.27})$$

Et en posant :

$$c_1 = 13102 \text{ MPa.mm}^2 ; c_2 = 6887 \text{ MPa.mm}^2 ; c_3 = 42168 \text{ MPa.mm}^2$$

$$c_4 = -6994 \text{ MPa.mm}^2 ; c_5 = -13559 \text{ MPa.mm}^2 ; c_6 = 20748 \text{ MPa.mm}^2$$

on vérifie bien les relations d’isotropie :

$$c_5 = \frac{c_1 - c_3}{\sqrt{2}} - c_4 ; \quad c_6 = \frac{c_1 + c_3}{2} - c_2$$

Le système des valeurs propres est le suivant :

$$\lambda_1 = 25389 \text{ MPa.mm}^2 ; \lambda_2 = 2792 \text{ MPa.mm}^2 ; \lambda_3 = 47835 \text{ MPa.mm}^2 \quad (\text{III-2.28})$$

Synthétisons à présent les informations que nous avons obtenues sur les différents systèmes de valeurs propres.

### III-2.2.3 Synthèse sur les valeurs propres de nos opérateurs

#### Valeurs propres

En filigrane des deux premières sections de ce chapitre nous avons indiqué pour chacun des opérateurs le système des valeurs propres associé. L'ensemble des cellules étudiées ont pour épaisseur 0,3 mm et on a toujours imposé les conditions aux limites sur l'ensemble du contour. De fait, en dépit de l'impossibilité physique de réalisation de certains pavages, cela revient à chaque fois à considérer un pavage dense réalisé à partir de la cellule de base, la densité relative de ces « pavages » est de fait identique et égale à 0,51. Le tableau suivant résume l'ensemble de ces informations :

$n \lambda$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$
4	27630	5519	53003
5	25389	2792	47835
6	24555	1560	46091
8	23985	675	44626
$\infty$	22769	0	42365

où dans le cas de l'hexagone on a pris la moyenne de  $\lambda_1$  et  $\lambda_4$ . On peut à présent tracer l'évolution des valeurs propres en fonction du nombre de cotés de la cellule de base :

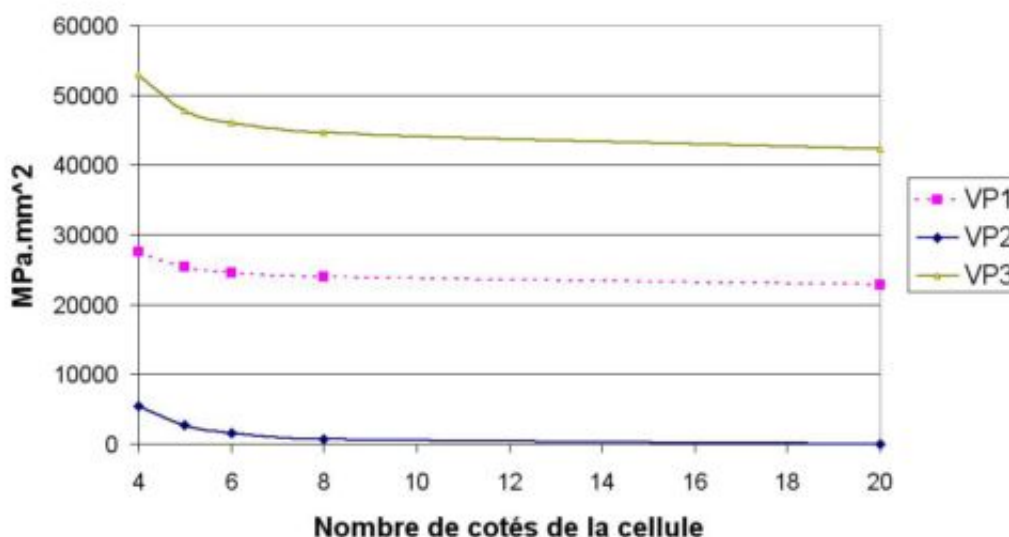


FIG. III-2.7 – Évolution des valeurs propres

On constate ainsi que nos valeurs propres convergent vers celles du milieu circulaire en fonction du nombre de face du polygone de notre cellule. Ceci n'est qu'une constatation et un résultat général derrière cela devrait pouvoir être démontré.

Cela implique que la norme de Frobenius de nos opérateurs est décroissante en fonction du nombre de coté de la cellule de base et tend vers une limite qui est celle de la cellule circulaire. De plus la valeur de cette norme dépend en première approximation du contour extérieur de la cellule. Revenons pour illustrer cela sur le cas de l’octogone. Nous avons calculé les propriétés effectives d’un milieu construit à partir de celui-ci avec deux conditions de contour différentes, nous compléterons cette étude en considérant la figure suivante :

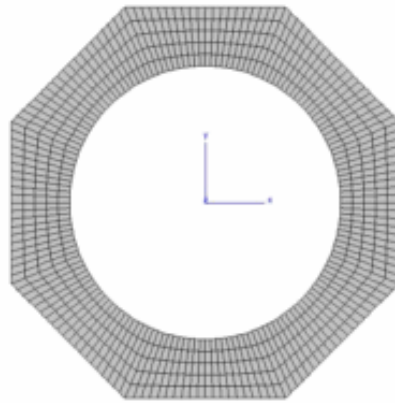


FIG. III–2.8 – Cellule mixte octogonale-circulaire

c’est-dire en conservant une condition au limite sur l’ensemble du contour et considérant une porosité circulaire. On obtient un opérateur isotrope ayant le système de valeurs propres suivant :

$$\lambda_1 = 25652 \text{ MPa.mm}^2 ; \lambda_2 = 693 \text{ MPa.mm}^2 ; \lambda_3 = 47278 \text{ MPa.mm}^2 \quad (\text{III–2.29})$$

de norme :  $76074,7 \text{ MPa.mm}^2$ . Le tableau suivant synthétise les différentes informations sur ces trois cas de calculs que nous comparons au cas du disque :

<i>Cont.ext.</i>	<i>Cont.int.</i>	<i>Cond.Lim.</i>	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\ \hat{\tilde{A}}\ $	$\bar{\rho}$	G
Octogonal	Octogonal	contour complet	23985	675	44626	71656	0,51	O(2)
Octogonal	Circulaire	contour complet	25651	693	47278	76075	0,53	O(2)
Octogonal	Octogonal	contour carré	11031	826	33672	50124	0,42	$D_4$
Circulaire	Circulaire	contour complet	22769	0	42365	32200	0.51	O(2)

On constate que l’opérateur isotrope défini à partir de l’octogone a pour norme  $71657 \text{ MPa.mm}^2$  tandis que celui défini à partir du disque circulaire a pour norme  $32201 \text{ MPa.mm}^2$ . Pour ces deux géométries les contours intérieur et extérieur différent, on peut réaliser un calcul à partir de la cellule de la figure III–2.8 pour limiter la différence au contour extérieur. La densité relative des deux milieux diffère d’environ 4%, de fait si il y a unicité du milieu isotrope alors, d’après la linéarité de nos opérations, la norme de l’opérateur devra différer de 4%, ce qui n’est pas le cas. On voit donc que l’on peut définir à partir de différents polygones vérifiant le théorème de Hermann une infinité de milieu isotrope.

La qualité numérique de ces différents milieux isotropes n’est cependant pas équivalente, nous pouvons les classer en utilisant le nombre de conditionnement associé à l’opérateur.



## Nombre de conditionnement

On rappelle que le nombre de conditionnement  $k$  d'une matrice  $\tilde{M}$  a pour valeur :

$$k(\tilde{M}) = \left\| \tilde{M} \right\|_{(.)} * \left\| \tilde{M}^{-1} \right\|_{(.)} \quad (\text{III-2.30})$$

pour une norme matricielle donnée. Dans notre cas nous considérerons la norme 2 qui a une matrice symétrique lui associe sa plus grande valeur propre. Sous cette norme, le nombre de conditionnement s'exprime comme le rapport de la plus grande valeur propre sur la plus petite. C'est-à-dire, avec le notation du chapitre III-1 que l'on a dans notre cas<sup>5</sup> :

$$k(\hat{A}) = \frac{\lambda_3}{\lambda_2} \quad (\text{III-2.31})$$

Plus cette valeur est élevée plus l'opérateur est mal conditionné, c'est-à-dire sensible à des perturbations des valeurs d'entrés. On a pour nos géométries :

$n$	4	5	6	8	$\infty$
$k(\hat{A})$	10	17	29	66	$\infty$

De fait, pour revenir à la remarque concernant l'article [49], en dépit du manque de sens physique il est préférable de construire l'opérateur isotrope à partir d'une cellule pentagonale qui est la plus « robuste » de toute. Ou bien, si l'on veut se rapprocher de la densité relative induite par la cellule circulaire, utiliser une cellule octogonale.

Passons à présent à l'étude d'une autre propriété caractéristique des milieux du second gradient.

### III-2.3 Milieux chiraux

Une des propriétés spécifiques de l'élasticité du second ordre par rapport à l'élasticité classique est sa sensibilité à la chiralité du milieu. Nous nous proposons dans cette section de vérifier cette propriété. Pour ce faire nous construirons les cellules carrées représentées figures III-2.9(a) et III-2.9(b), ces figures se déduisent l'une de l'autre par une opération de symétrie miroir.

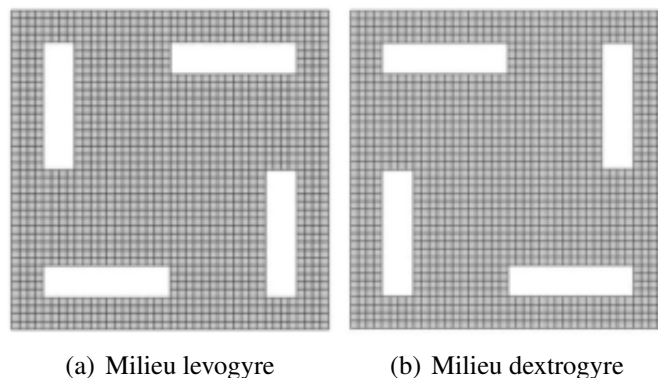


FIG. III-2.9 – Milieux  $Z_4$ -invariants

<sup>5</sup>On constate en pratique que pour nos géométries  $\lambda_3$  est toujours la plus grande valeur propre et  $\lambda_2$  la plus petite.

Considérons tout d'abord le milieu levogyre, tournant à gauche, représenté figure III-2.9(a). Les champs de déformation induits par les conditions de contour sont les suivants :

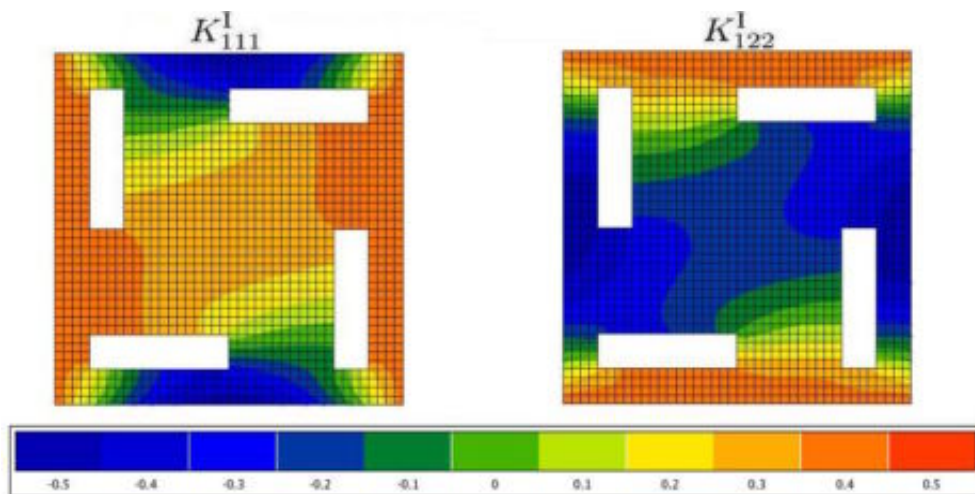


FIG. III-2.10 – Champs de déplacement selon la direction  $\underline{x}$  pour  $K_{111}$  et  $K_{122}$

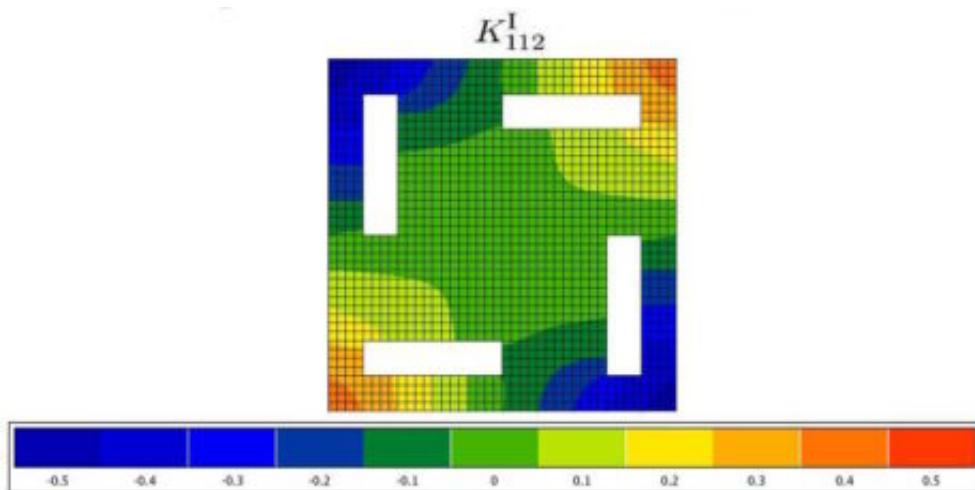


FIG. III-2.11 – Champ de déplacement selon la direction  $\underline{x}$  pour  $K_{112}$

Comme le milieu est invariant par rotation de  $\frac{\pi}{2}$  nous n'avons pas tracé les champs de déplacement selon  $\underline{y}$  pour les sollicitations  $K_{222}$ ,  $K_{212}$  et  $K_{211}$ . De plus, pour plus de lisibilité, nous avons tracé nos champs dans la configuration non-déformée de la cellule. On constate à la lecture de ces champs que les conditions de contour ainsi que la géométrie du milieu induisent des champs qui ont tendance à tourner. Il y a apparition de couples et de moments au sein de la matière.

L'opérateur tensoriel du second ordre associé à ce milieu a pour expression :

$$\hat{\mathbb{A}}_{\sim lev}^{\Pi} = \begin{pmatrix} 20630 & 6073 & -13628 & 0 & 3335 & 1351 \\ 6073 & 56189 & -3831 & -3334 & 0 & 5848 \\ -13628 & -3831 & 20748 & -1351 & -5848 & 0 \\ 0 & -3334 & -1351 & 20630 & 6073 & -13628 \\ 3334 & 0 & -5848 & 6073 & 56189 & -3831 \\ 1351 & 5848 & 0 & -13628 & -3831 & 20748 \end{pmatrix} \quad (\text{III-2.32})$$

C'est-à-dire, si l'on réutilise la décomposition des opérateurs par blocs proposée au chapitre III-1, une expression de la forme :

$$\hat{\underset{\sim}{A}}_{Z_4} = \begin{pmatrix} \hat{\underset{\sim}{X}} & \hat{\underset{\sim}{C}} \\ \hat{\underset{\sim}{C}}^T & \hat{\underset{\sim}{X}} \end{pmatrix} \quad (\text{III-2.33})$$

avec

$$\hat{\underset{\sim}{X}} = \begin{pmatrix} 20630 & 6073 & -13628 \\ 6073 & 56189 & -3831 \\ -13628 & -3831 & 20748 \end{pmatrix}, \hat{\underset{\sim}{C}} = \begin{pmatrix} 0 & 3334 & 1351 \\ -3334 & 0 & 5848 \\ -1351 & -5848 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{III-2.34})$$

On retrouve les symétries d'un milieu carré, mais cette fois-ci les termes de couplage entre les directions  $\underline{x}$  et  $\underline{y}$  ne sont plus nuls. Et, conformément à ce que nous avons déterminé de manière théorique, la matrice de couplage est antisymétrique. Ainsi présentée l'opérateur  $Z_4$ -invariant dépend de 9 coefficients, toutefois comme expliqué au chapitre II-5 et montré au chapitre III-1, il est possible de trouver une rotation qui abaisse ce nombre de coefficients à 8. Si l'on écrit :

$$\hat{\underset{\sim}{X}} = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ c_2 & c_4 & c_5 \\ c_3 & c_5 & c_6 \end{pmatrix}, \hat{\underset{\sim}{C}} = \begin{pmatrix} 0 & c_7 & c_8 \\ -c_7 & 0 & c_9 \\ -c_8 & -c_9 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{III-2.35})$$

l'angle de la rotation à appliquer à notre opérateur est solution de l'équation suivante :

$$\tan(4\theta) = \frac{2\sqrt{2}(c_8 - c_9)}{c_1 + c_4 - 2(c_2 + c_6)} \quad (\text{III-2.36})$$

Dans notre cas cela conduit à un angle  $\theta$  de  $-0,129615$  rad et on obtient, suite à cette transformation, l'opérateur :

$$\hat{\underset{\sim}{A}}_{Z_4} = \begin{pmatrix} \hat{\underset{\sim}{X}} & \hat{\underset{\sim}{C}}_{\underset{o}{\sim}} \\ \hat{\underset{\sim}{C}}_{\underset{o}{\sim}}^T & \hat{\underset{\sim}{X}} \end{pmatrix} \quad (\text{III-2.37})$$

avec

$$\hat{\underset{\sim}{X}} = \begin{pmatrix} 19321 & 5651 & -12404 \\ 5651 & 58341 & -2607 \\ -12404 & -2607 & 20347 \end{pmatrix}, \hat{\underset{\sim}{C}}_{\underset{o}{\sim}} = \begin{pmatrix} 0 & 1434 & 2256 \\ -1434 & 0 & 2256 \\ -2256 & -2256 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{III-2.38})$$

On retrouve bien l'ensemble des résultats prévus. Et si maintenant on calcul le même opérateur à partir du milieu dextrogyre, alors on trouve un opérateur identique à celui précédent, excepté le fait qu'à présent on a :

$$\hat{\underset{\sim}{C}}_{\underset{o}{\sim} dex} = \begin{pmatrix} 0 & -1434 & -2256 \\ 1434 & 0 & -2256 \\ 2256 & 2256 & 0 \end{pmatrix} = -\hat{\underset{\sim}{C}}_{\underset{o}{\sim} lev} \quad (\text{III-2.39})$$

Notre milieu matériel est soumis à présent à un couple de sens opposé :

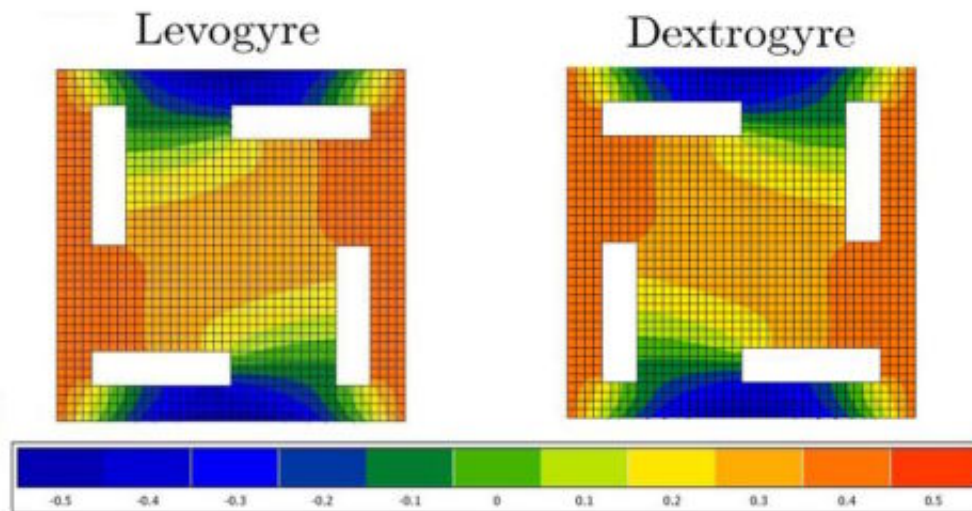


FIG. III-2.12 – Champ de déplacements selon la direction  $\underline{x}$  pour  $K_{111}$

### III-2.4 Synthèse

Ce chapitre nous a permis de vérifier qu'un milieu cellulaire homogénéisé à partir de conditions de contour quadratiques vérifie bien l'ensemble des propriétés que possèdent un milieu homogène du second gradient. Nous avons ainsi comparé les opérateurs construits sur des cellules présentant des symétries avec les opérateurs anisotropes du second gradient. On retrouve bien l'ensemble des classes de symétrie prévues par la théorie. Dans un second temps nous avons montré comment, en utilisant le théorème de Hermann, dériver les propriétés d'un milieu isotrope à partir d'une cellule polygonale. Cela nous a permis de montrer, par l'étude des valeurs propres des différents opérateurs construits, que la technique d'obtention usuelle d'un milieu isotrope à partir de l'étude d'une cellule circulaire conduit à obtenir un opérateur dégénéré. Finalement nous avons illustré une autre propriété des milieux du second-gradient qui est leur sensibilité à la chiralité de la cellule élémentaire. Nous avons pour cela construit un milieu levogyre et dextrogyre et observé que les opérateurs qui en sont issues se déduisent l'un de l'autre par une opération de symétrie miroir.

Illustrons à présent l'intérêt de ces résultats pour la détermination des propriétés effectives des matériaux nidas. Ceci sera l'objectif du dernier chapitre de ce travail de thèse.



Ce dernier chapitre a pour objectif de revenir sur le problème de la détermination des propriétés effectives d'un matériau de type nida. Nous y illustrerons une application des outils mis en oeuvre jusqu'à présent pour la détermination du comportement macroscopique d'un matériau cellulaire. Notre objectif sera ici de voir l'influence de la zone de contact entre les cellules d'un nida. Ce problème a à voir avec celui de la détermination de la taille du ménisque optimum tel qu'il apparaît dans l'étude des assemblages de sphères [11, 19].

Nous aborderons successivement les cas des propriétés effectives du premier et du second ordre. En ce qui concerne l'élasticité classique nous comparerons la valeur des modules effectifs  $E_{eff}$  et  $\nu_{eff}$  pour différentes densités relatives et différentes longueurs de jonction. Nous comparerons ces résultats obtenus par homogénéisation avec ceux calculés analytiquement par le modèle de Papka et Kyriakides [37]. Nous traiterons ensuite des opérateurs du second gradient. Du fait du nombre élevé de modules nous étudierons ces opérateurs au travers de plusieurs grandeurs caractéristiques. Ceci nous permettra de mettre en avant dans la section III–3.1 le rôle que possède la jonction entre les cellules dans le calcul des propriétés effectives du matériaux. La section III–3.2 quant à elle sera dévolue à l'étude d'un cas complet de modélisation. Cela nous permettra de résumer autour d'un exemple le calcul des propriétés effectives élastiques et acoustique d'un matériau modèle obtenu en laboratoire.

Plusieurs réserves sont à formuler en préambule de ce chapitre. Celui-ci constitue plus une illustration des outils mis en place au cours de cette thèse qu'une étude approfondie de fabrication des matériaux nidas. Les limitations que l'on voit *a priori* sont liées à l'implémentation actuelle du modèle dans ZeBuLoN. Tout d'abord il nous faudrait définir des conditions de contour périodiques pour valider les valeurs numériques de nos tenseurs au second gradient<sup>1</sup>. Nous avons vu au chapitre précédent que les opérateurs obtenus ont le bon comportement algébrique, toutefois nous ne pouvons pas conclure rigoureusement sur la précision des valeurs des modules effectifs. De plus l'implémentation de la procédure de calcul au second gradient en anisotrope reste à compléter dans ZeBuLoN.

De fait, nous ne pouvons ici qu'observer le fait que pour certains opérateurs du second ordre certains effets sont plus prononcés que pour d'autres. Il nous faudrait ensuite vérifier, en pratique, l'importance de ces effets pour diverses sollicitations pour pouvoir conclure. Toutefois la

<sup>1</sup>Ces conditions de contour périodiques existent dans ZeBuLoN pour l'élasticité classique.

prédiction de ces différents effets n'est possible que parce que nous avons défini les outils pour le faire, et pour, ultérieurement les calculer. De fait même si ce chapitre n'est pas un chapitre de perspective, il se situe à la limite entre le travail de cette thèse et les travaux à venir.

### III-3.1 Étude de l'influence de la zone de contact

Nous nous placerons ici dans le cas d'un réseau périodique hexagonal, réseau qui sera censé représenter notre architecture. Nous étudierons ce matériau que nous supposons, dans un premier temps, comme ayant un rayon équivalent extérieur  $R_e$  de 1 mm en faisant varier l'épaisseur  $e$  de la paroi ainsi que le nombre de faces  $n$  du polygone de base de ce réseau<sup>2</sup>.

#### III-3.1.1 Paramétrisation de l'interface de contact

Nous travaillerons dans cette section avec  $R_e = 1$  mm. Cela a pour conséquence de réduire le paramètre  $\left(\frac{e}{R_e}\right)$  à simplement  $e$ .

Nous étudierons nos matériaux pour la famille d'épaisseurs :

$$e = \{0,05 ; 0,1 ; 0,2 ; 0,3 ; 0,4 ; 0,5 ; 0,6 ; 0,7\} \quad (\text{III-3.1})$$

et pour les polygones suivants :

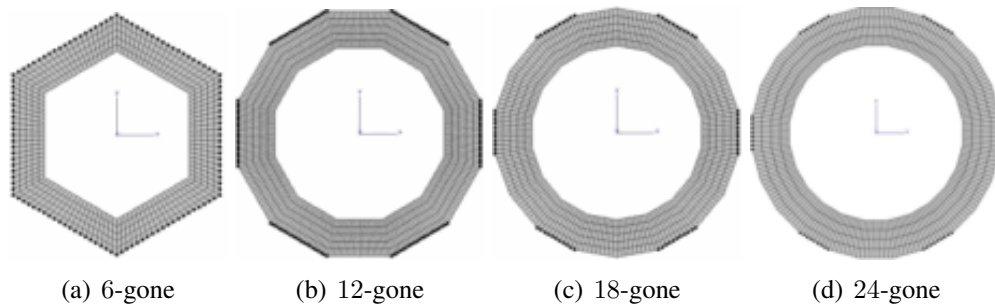


FIG. III-3.1 – Différentes cellules polygonales utilisées dans le calcul des propriétés effectives

L'augmentation de l'ordre du polygone de la cellule de base fait tendre notre matériau vers le nida hexagonal de topologie infinie (III-3.2).

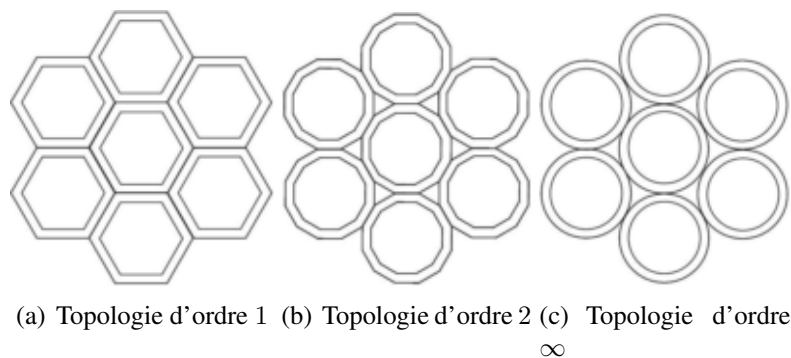


FIG. III-3.2 – Différentes topologies sur le réseau hexagonal

<sup>2</sup>Ceci conformément à la paramétrisation que nous avons introduite au chapitre I-1.

Il est à noter que pour ce nida « limite » la zone de contact entre les différents éléments devient ponctuelle, il ne représente pas, de fait, un nida physique mais la limite d'un modèle.

Établissons tout d'abord la densité relative de chacun de ces différents nidas hexagonaux.

### Densité relative du matériau

Nous étudierons la variation de la densité relative en fonction de l'épaisseur  $e$  de paroi et du nombre  $n$  de faces du polygone de base. Nous utiliserons pour cela les formules introduites au chapitre I-1. Dans le cas d'un réseau hexagonal et pour  $R_e = 1$  mm, nous avons :

$$\bar{\rho}(n, e) = \frac{n}{2\sqrt{3}} \tan\left(\frac{\pi}{n}\right) e(2 - e) \quad (\text{III-3.2})$$

cela nous permet de construire le tableau suivant :

$n e$	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7
6	0,09	0,19	0,36	0,51	0,64	0,75	0,84	0,91
12	0,09	0,17	0,33	0,47	0,59	0,70	0,78	0,84
18	0,09	0,17	0,33	0,47	0,59	0,69	0,77	0,83
24	0,09	0,17	0,33	0,47	0,58	0,68	0,77	0,83
$\infty$	0,09	0,17	0,33	0,46	0,58	0,68	0,76	0,82

Le graphique III-3.3 représente l'évolution de la densité relative du matériau en fonction des paramètres du modèle.

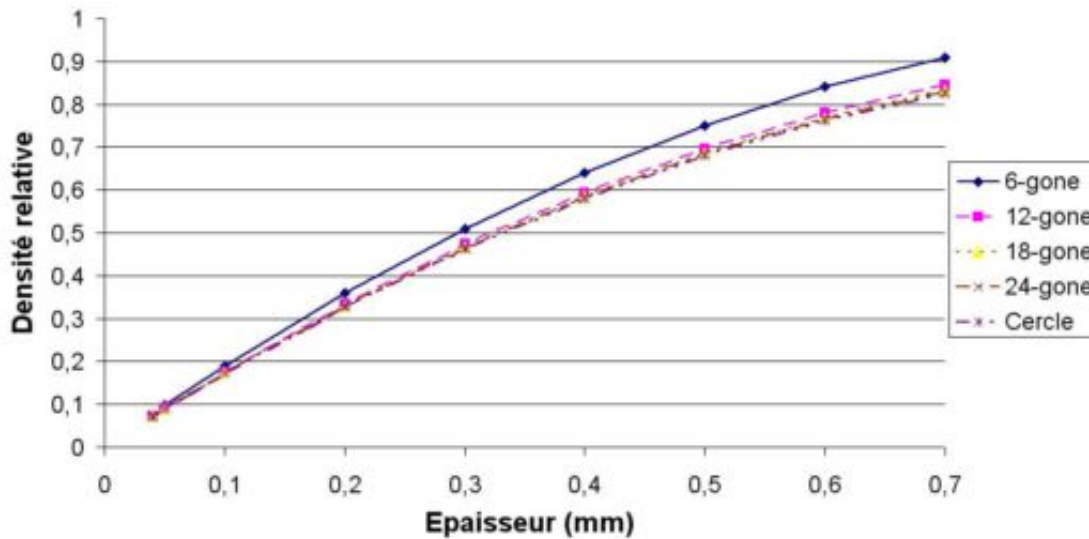


FIG. III-3.3 – Évolution de la densité relative en fonction de  $n$  et de  $e$

On remarque, comme on l'avait déjà noté au chapitre I-1, que dès la topologie d'ordre 2 sur le réseau hexagonal (fig.III-3.2), la densité relative tend très vite avec  $n$  vers celle d'ordre  $\infty$  décrite par la cellule circulaire.



## Longueur de contact

Comme la densité relative ne varie que très peu, l'ordre de l'approximation de la topologie circulaire modifie principalement la longueur de contact entre les différentes cellules. On peut tracer l'évolution de la proportion du périmètre de la cellule en contact en fonction de  $n$  :

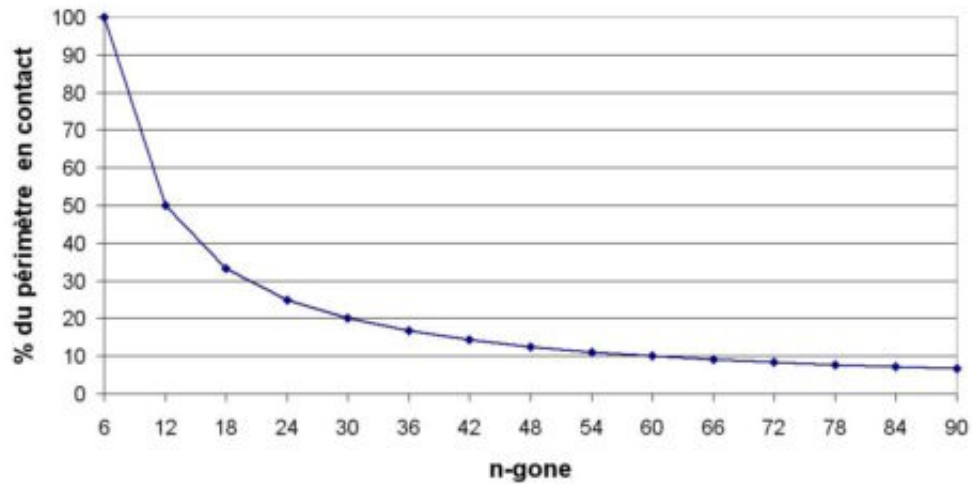


FIG. III-3.4 – Évolution de la proportion du périmètre en contact en fonction de la cellule élémentaire

On constate bien que, tandis que la densité relative demeure à peu près constante, la zone de contact évolue, elle, rapidement avec la forme de la cellule polygonale. Cette manière de remplacer la description géométrique des contacts d'un nida à cellules circulaires par une approximation polygonale de l'ensemble de la cellule a déjà été utilisée dans la littérature. Dans [33] les auteurs, qui s'intéressent à l'évaluation des constantes d'élasticité micro-polaire d'un nida à cellule circulaire, utilisent la topologie dodécagonale pour représenter l'architecture de leur matériau. Cette approche nous permettra d'étudier l'influence de la zone de contact dans le comportement mécanique du matériau nida.

Regardons à présent l'évolution des grandeurs caractéristiques de nos opérateurs en fonction des paramètres  $e$  et  $n$  de notre modèle.

### III-3.1.2 Élasticité du premier ordre

Pour commencer nous comparerons les résultats obtenus au premier ordre par notre approche avec ceux des modèles analytiques disponibles dans la littérature. Rappelons pour commencer les formules de la littérature pour les assemblages de tubes, ces grandeurs correspondent aux modules dans le plan. La dérivation de ces modèles pourra être retrouvée dans les références [37, 38]. Les modules dans le plan sont donnée par les formules :

$$E_x^* = \frac{1,396}{(1 - \nu^2)} \bar{\rho}^3 E ; \nu_{xy}^* = 0,806 \quad (\text{III-3.3})$$

Ces modules sont les modules apparents dans les directions considérées et ils ne correspondent pas directement aux modules du milieu effectif. Pour passer aux grandeurs effectives il faut

considérer la relation contrainte-déformation macroscopique suivante :

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{E_x^*}{1-\nu_{xy}^{*2}} & \frac{\nu_{xy}^* E_x^*}{1-\nu_{xy}^{*2}} & 0 \\ \frac{\nu_{xy}^* E_x^*}{1-\nu_{xy}^{*2}} & \frac{E_x^*}{1-\nu_{xy}^{*2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E_x^*}{2(1+\nu_{xy}^*)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} \quad (\text{III-3.4})$$

Cette matrice est de la forme :

$$\begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \quad (\text{III-3.5})$$

où  $(\lambda, \mu)$  sont les coefficients de Lamé. On identifie donc :

$$\lambda = \frac{\nu_{xy}^* E_x^*}{1 - \nu_{xy}^{*2}} ; \mu = \frac{E_x^*}{2(1 + \nu_{xy}^*)} \quad (\text{III-3.6})$$

De fait cela nous donne, à partir des relations :

$$E_{eff} = \mu \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} ; \nu_{eff} = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \quad (\text{III-3.7})$$

les modules du milieu effectif. A partir des relations dans le plan ces modules s'écrivent :

$$E_{eff} = \frac{1 + 2\nu_{xy}^*}{(1 + \nu_{xy}^*)^2} E_x^* ; \nu_{eff} = \frac{\nu_{xy}^*}{\nu_{xy}^* + 1} \quad (\text{III-3.8})$$

et donc au final

$$E_{eff} = \frac{1,117}{(1 - \nu^2)} \bar{\rho}^3 E ; \nu_{eff} = 0,44 \quad (\text{III-3.9})$$

Le graphique suivant représente l'évolution du module de Young en fonction de la densité relative pour le modèle analytique ainsi que pour les calculs effectués sur nos différentes cellules de base.

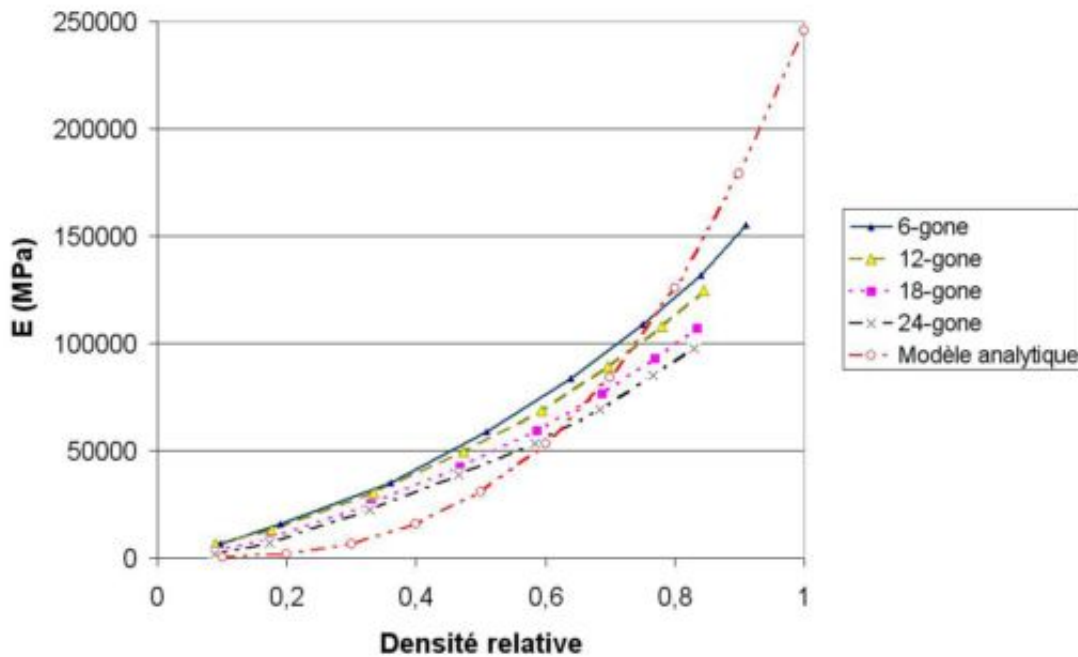


FIG. III-3.5 – Évolution du module de Young en fonction de la densité relative et de la cellule de base

Nous pouvons tracer, de même, l'évolution du coefficient de Poisson :

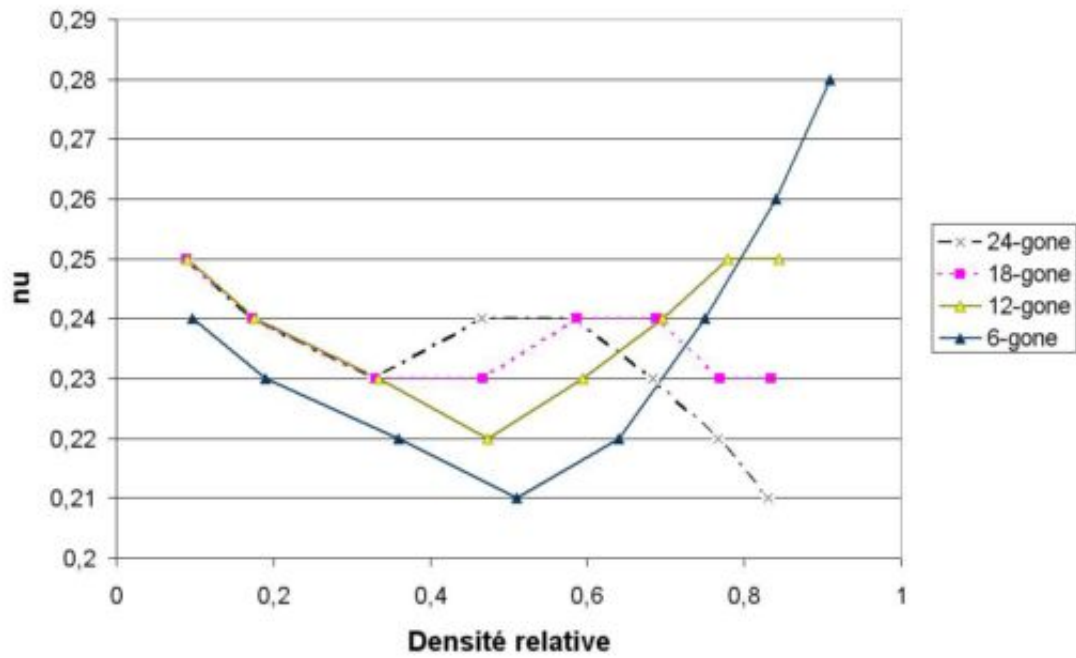


FIG. III-3.6 – Évolution du coefficient de Poisson en fonction de la densité relative et de la cellule de base

Nous n'avons pas représenté sur cette dernière figure le coefficient de Poisson pour le modèle analytique car pour celui-ci ce coefficient est constant et vaut 0,44.

Plusieurs choses sont à noter. Tout d'abord on constate que le comportement du modèle analytique donne des coefficients qui diffèrent fortement de ceux que l'on calcul par homogénéisation. Ceci n'est pas étonnant car ce modèle a été dérivé dans l'approximation où l'épaisseur est négligeable devant le rayon du cylindre. Dans [37] les auteurs notent que ce modèle est satisfaisant quand  $\bar{\rho} < 0,08$ . Dans le cas de nos épaisseurs de paroi nous sommes au-delà de la limite de validité de ce modèle. Nous pouvons d'ailleurs remarquer que celui-ci tend vers un milieu ayant un module de Young supérieur à celui du matériau constitutif.

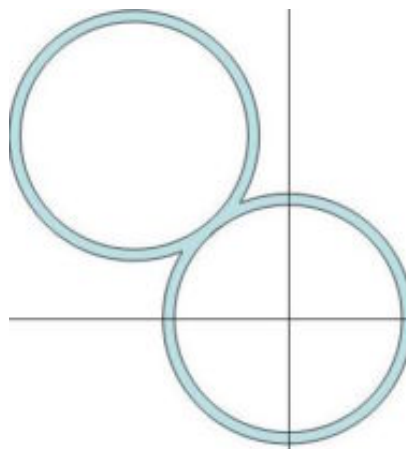


FIG. III-3.7 – Géométrie à la base du modèle analytique

On constate que pour les très faibles densités le module de Young se rapproche de celui de nos modèles. Toutefois il demeure plus faible que ces derniers, une des principales raisons à cela est que la description géométrique de la cellule de base utilisée pour dériver le modèle analytique diffère fortement de la notre. La figure III-3.7 représente la géométrie à partir de laquelle est développé le modèle analytique. La zone de contact tend à devenir ponctuelle et au niveau de la jonction l'épaisseur est égale à celle d'un disque. Dans notre modèle l'épaisseur de la zone de contact est toujours égale à deux fois l'épaisseur d'un disque. De fait il ne faut pas s'attendre à retrouver exactement les mêmes valeurs dans les deux modélisations pour des basses densités relatives.

Au niveau des modules obtenus par homogénéisation on observe que la diminution de la zone de contact tend à assouplir de manière assez importante la rigidité de la structure. Cet effet, qui est peu marqué pour les faibles densités relatives, a tendance à s'accroître pour les fortes épaisseurs de paroi. On constate de plus que la structure hexagonale, qui est la seule à tendre géométriquement vers un milieu dense, voit ses modules effectifs tendre vers ceux du matériau constitutif. Même si ce comportement est normal il est important de constater que notre approche vérifie ce point précis.

Si le module de Young est croissant en fonction de la densité relative, on constate que le coefficient de Poisson, quant à lui décroît jusqu'à un minimum avant d'augmenter vers une valeur limite pour les fortes densités. Le modèle analytique ne prévoyait aucune variation de ce paramètre. On constate figure III-3.6 que pour les fortes densités les valeurs limites des coefficients de Poisson sont croissantes en fonction de la longueur de contact entre les différentes cellules du nida. La valeur maximale de  $\nu_{eff}$  tend vers 0,3 pour l'hexagone, c'est-à-dire 100% du contour de la cellule en contact, et vers 0,2 pour le 24-gone, c'est-à-dire pour une zone de contact de 25%. Nous n'avons pas, avec notre approche, exploré le comportement équivalent pour des matériaux de très faibles densités, toutefois dans le cas de l'hexagone nous pouvons utiliser les modèles proposés par Gibson et Ashby [15]. Auquel cas pour les très faibles densités le coefficient de Poisson tend vers 0,5, c'est-à-dire vers un milieu effectif incompressible. Quand le volume de matière est très faible la déformation du matériau tend vers un comportement indépendant du matériau constitutif, la déformation de la structure est prépondérante. L'accroissement de la densité relative du matériau, donc du volume de matière dans la cellule de base, redonne de l'importance au matériau constitutif et le coefficient de Poisson baisse jusqu'à une valeur critique qui se situe vers, pour l'hexagone,  $\bar{\rho} = 0,3$ . Pour cette valeur les effets combinés de structure et du matériau conduisent à une valeur du coefficient de Poisson inférieure à celle du matériau constitutif. A partir de ce point, l'influence du matériau constitutif reprend le pas sur le comportement de structure et le coefficient de Poisson recommence à croître vers une valeur limite qui dépend de la forme de la cellule de base. Si l'on trace à présent la figure III-3.6, non plus en fonction de la densité relative, mais en fonction de l'épaisseur de paroi on obtient la figure suivante :

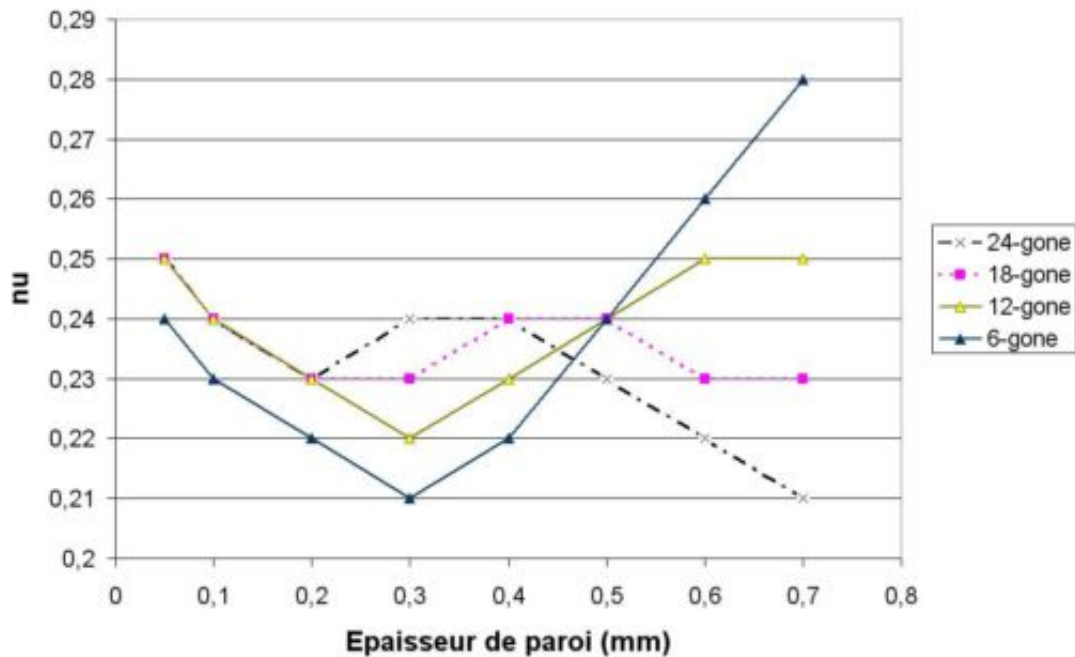


FIG. III-3.8 – Évolution du coefficient de Poisson en fonction de l'épaisseur de paroi et de la cellule de base

On constate que le minimum du coefficient de Poisson se situe selon la longueur de la zone de contact pour des épaisseurs de paroi comprises entre 0,2 mm et 0,3 mm. Nous verrons dans ce qui suit que pour ces épaisseurs certains effets du second ordre sont maximaux.

### III-3.1.3 Élasticité du second ordre

Dans cette section nous nous intéresserons à la variation de trois paramètres représentant les effets élastiques du second ordre. Ces paramètres sont :

- le facteur d'anisotropie ;
- la norme de Frobenius de l'opérateur ;
- le nombre de conditionnement de l'opérateur.

Le premier de ces paramètres, que nous avons défini au chapitre III-1, sert à estimer si l'on peut, ou non, supposer isotrope un milieu qui ne l'est pas. Il estime l'erreur relative maximum en énergie de déformation que l'on peut commettre lorsque l'on fait cette hypothèse. Le second paramètre, qui est égal à la norme euclidienne usuelle du vecteur constitué des valeurs propres, mesure l'intensité des effets du second ordre. Le dernier paramètre, quant à lui, mesure la qualité de l'opérateur en vue d'une application numérique, il mesure dans notre cas, selon la convention choisie au chapitre III-2, le rapport entre la plus grande et la plus petite valeur propre de notre opérateur. Physiquement cela indique si la cellule possède un mode de déformation privilégiée.

Regardons pour commencer l'évolution du facteur d'anisotropie.

## Facteur d'anisotropie

On obtient pour le paramètre d'anisotropie les valeurs suivantes :

$n e$	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7
6	37%	30%	19%	10%	5%	2%	1%	0%
12	16%	29%	39%	33%	23%	12%	5%	0%
18	5%	48%	74%	62%	39%	20%	8%	2%
24	3%	64%	97%	76%	46%	23%	9%	3%

On peut résumer ce tableau par le graphique de la figure III-3.9.

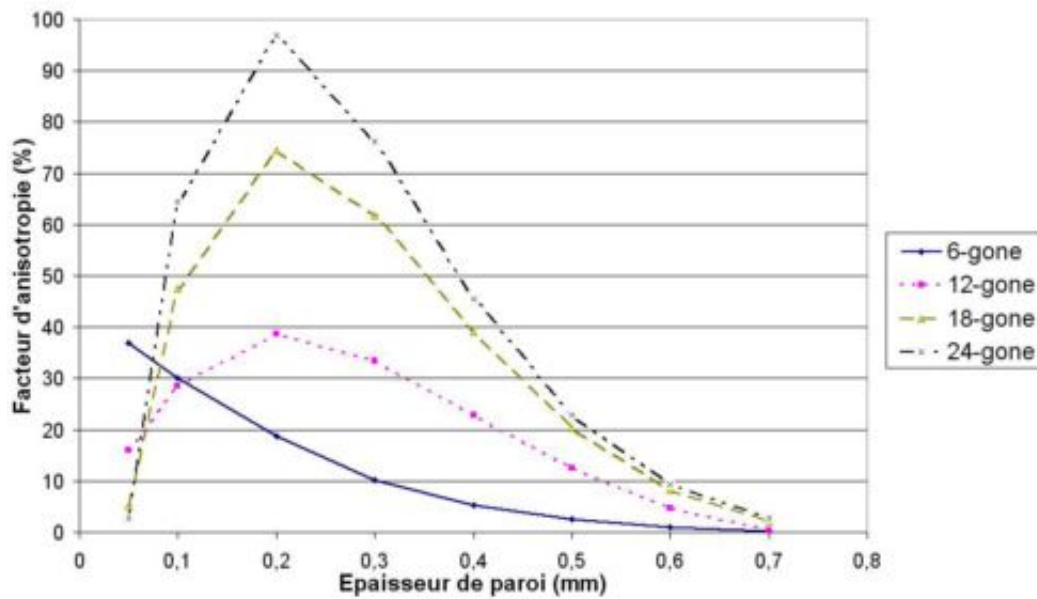


FIG. III-3.9 – Facteur d'anisotropie en fonction de l'épaisseur de paroi pour plusieurs cellules polygonales de base

On constate tout d'abord que dans le cas d'une cellule hexagonale, c'est-à-dire pour un pavage résultant qui est dense, les effets d'anisotropie sont contenus et décroissent en fonction de l'épaisseur de paroi. L'anisotropie est, dans ce cas, maximale pour les petites valeurs de  $e$  et tend ensuite vers un comportement isotrope quand l'épaisseur de la cellule augmente. Dès lors que l'on laisse des bords libres sur notre cellule le comportement change complètement.

Ainsi, à partir du dodécagone le pavage hexagonal du plan n'est plus dense, cela se traduit lors de la phase de calcul des coefficients par des faces du polygone sur lesquelles les conditions de bord sont laissées libres. On constate que cela modifie profondément l'allure de notre courbe. Celle-ci présente à présent un pic pour une épaisseur  $e = 0,2$  mm. Passé ce pic le milieu tend avec  $e$  vers un comportement isotrope, ce qui est normal car on se rapproche d'un matériau homogène.

On remarque que l'amplitude de ce pic dépend du polygone utilisé pour décrire la cellule de base, c'est-à-dire dans notre approche, de la surface de contact qui lie les cellules élémentaires entre elles. Pour une description par un 24-gone le facteur d'anisotropie avoisine les 100%, cela correspond à une cellule dans un réseau hexagonal dont 25% du périmètre est en contact

avec ses plus proches voisins. Dans ce cas, si l'on modélise ce matériau au second ordre par un opérateur isotrope, on peut commettre jusqu'à 100% d'erreur sur l'énergie de déformation. L'utilisation d'un opérateur de comportement hexatrope est nécessaire.

Regardons à présent l'intensité des effets du second ordre.

### Norme de l'opérateur

Pour la norme des valeurs propres on obtient le tableau suivant :

$n e$	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7
6	130224	26324	51788	73766	90761	102579	109824	113546
12	10972	21395	40561	56302	67597	74896	79199	81392
18	5110	14270	33269	47538	56586	62059	65260	66918
24	3370	11042	29645	43033	50904	55534	58232	59633

Ce tableau peut être résumé par le graphique suivant :

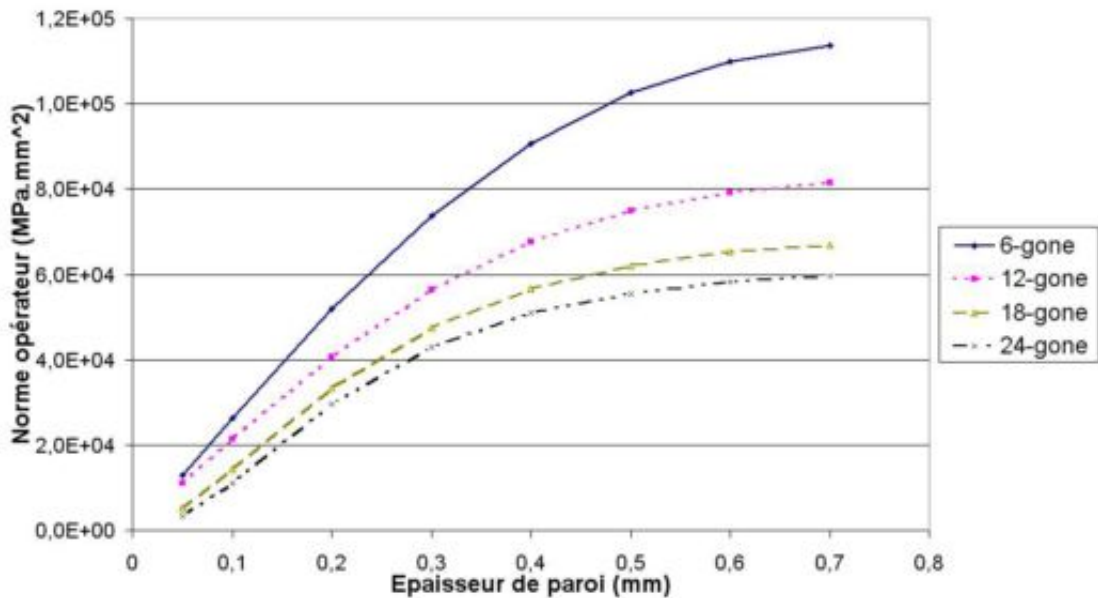


FIG. III-3.10 – Norme des valeurs propres en fonction de l'épaisseur de paroi pour plusieurs cellules polygonales de base

Comme constaté au chapitre précédent, l'augmentation du nombre de faces de la cellule de base a tendance à faire chuter la norme des valeurs propres. Toutefois ici le mécanisme n'est pas le même, car au chapitre précédent nous avons constaté cela en faisant varier le polygone tout en gardant des conditions aux limites imposées sur l'ensemble du contour. De fait l'abaissement de la norme matricielle était lié à l'augmentation de la régularité du champ de déplacement sur le contour. Ici, nous augmentons le nombre de faces du polygone en conservant les zones de contacts compatibles avec la symétrie hexagonale du réseau, et donc nous n'augmentons pas la régularité du champ de déplacement sur le contour. L'effet observé est donc essentiellement lié à la réduction de la zone sur laquelle sont imposées les conditions aux limites.

Cette réduction de la surface de contact, à  $\bar{\rho}$  fixé, atténue la sensibilité de notre cellule aux effets du second ordre. Si l'on considère, par exemple, la sollicitation  $K_{112}$  cela se comprend bien. La condition de contour  $K_{112}$  impose un champ de déplacement de la forme :

$$u_1(x_1, x_2) = x_1 x_2 \quad (\text{III-3.10})$$

Sur la ligne du contour extérieur dont le centre a pour coordonnée  $(R_e, 0)$  et pour longueur  $L_e$  le champ de déplacement varie linéairement avec  $x_2$ . Le déplacement maximum vaut  $\frac{L_e}{2}$  et d'après l'expression obtenue au chapitre I-1 cette valeur se réduit dans notre cas à  $\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)$ . Quand  $n$  augmente la zone de surface diminue et le champ de déplacement tend vers 0, de fait les effets de gradient baissent et vont se concentrer aux voisinages des zones de contact. Les effets du second ordre diminuent dans la structure qui devient de moins en moins sollicitée.

De plus ce paramètre n'a de sens que par comparaison à la norme de l'opérateur de l'élasticité classique. Nous définirons le module  $I$  de la manière suivante :

$$I = \frac{\left\| \hat{\hat{A}} \right\|_F}{\left\| \hat{\hat{C}} \right\|_F} \quad (\text{III-3.11})$$

Ce module mesure le rapport « d'intensité » entre les effets du second ordre et les effets du premier ordre, il est homogène à une surface et est exprimé en  $\text{mm}^2$ . On obtient pour nos matériaux le diagramme suivant :

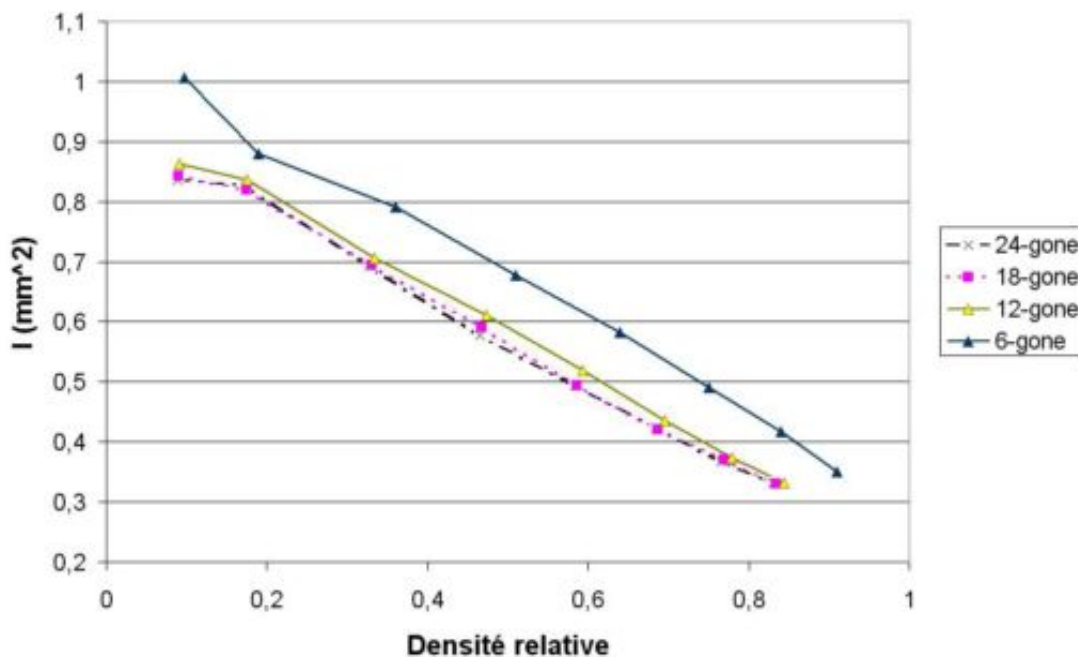


FIG. III-3.11 – Module d'intensité comparé des effets du premier et du second ordre

On constate que lorsque l'épaisseur de paroi augmente l'importance des effets du second ordre baissent devant ceux du premier ordre. De plus, il semblerait que ce module tendent à devenir indépendant de la longueur de la zone de contact. Il faudrait recalculer ce module avec des conditions de contour périodique car il est probable que dans le cas de l'hexagone, pour



de fortes épaisseurs, ce module ait une valeur trop grande. La raison de cela est que, quand la densité relative tend vers 1, dans le cas de l'hexagone, le matériau devient dense et la notion de paramètre de microstructure n'a plus de sens. Or sans condition périodique on introduit artificiellement une longueur interne dans un modèle qui n'en présente plus.

Regardons à présent comment évolue notre dernier paramètre.

### Nombre de conditionnement

On rappelle que l'on a défini, au chapitre III-2, le nombre de conditionnement  $k$  de l'opérateur  $\hat{A}$  comme le rapport de sa plus grande valeur propre sur sa plus petite. Ce nombre évolue, pour nos différents cas de la manière suivante :

$n e$	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7
6	14	17	24	30	33	36	37	38
12	157	197	248	303	350	381	400	409
18	334	577	954	1291	1524	1668	1747	1787
24	657	1214	2541	3635	4369	4659	4970	5011

On peut résumer ces variations avec le graphique suivant :

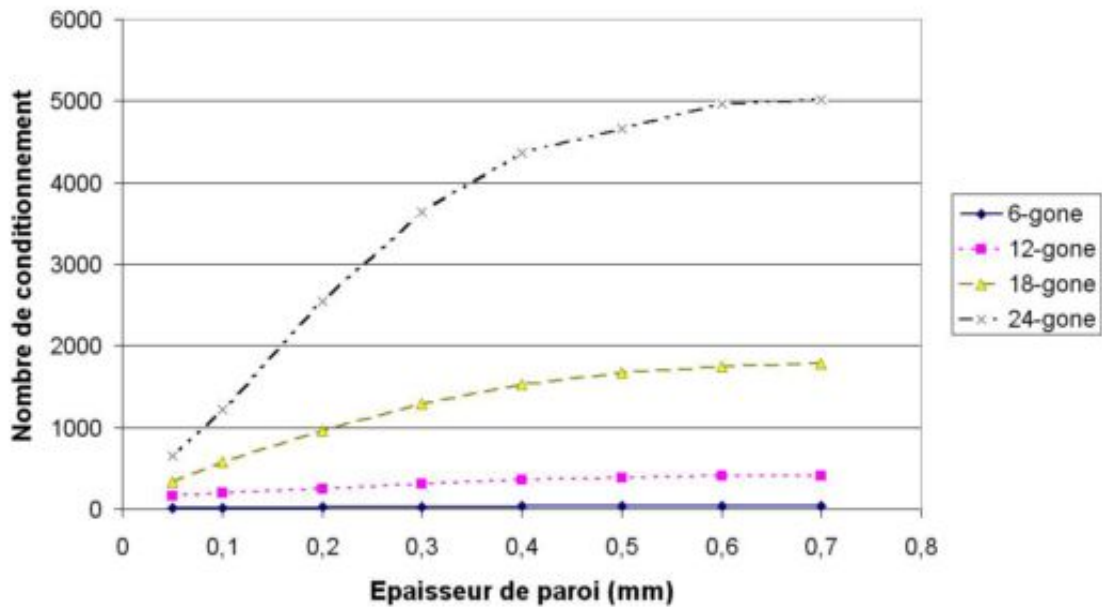


FIG. III-3.12 – Nombre de conditionnement en fonction de l'épaisseur de paroi pour plusieurs cellules polygonales de base

Défini comme nous l'avons fait ce nombre a les significations suivantes. Numériquement il indique si le problème est bien ou mal posé. Quand ce nombre est élevé, lors d'une phase d'inversion de l'opérateur, par exemple la résolution d'un système, le résultat sera très sensible à une perturbation des données. Outre ce sens, qui a une importance lors de calcul numérique, on peut donner à ce paramètre une interprétation physique.

Comme nous l'avons évoqué précédemment pour le type de géométrie étudié, nous avons une valeur propre  $\lambda_2$  qui tend à être systématiquement plus faible que les autres. Le nombre de conditionnement nous indique comment le rapport entre cette valeur propre et la plus grande

varie. Quand ces deux valeurs varient dans la même proportion alors le nombre de conditionnement reste stable. Toutefois si il y a augmentation de ce nombre alors il apparaît un déséquilibre dans les modes de déformation de la microstructure. Il n'y a pas de localisation de la déformation, car cela signifierait une valeur propre nulle, mais quand cette valeur croît un mode de déformation dégénéré doit commencer à apparaître.

Il est difficile à ce stade, sans calculs par éléments finis au second-gradient, d'en dire beaucoup plus sur l'influence de ce paramètre. Une étude spécifique de son influence reste à mener. Ce qu'il convient de noter toutefois est qu'il existe une transition dans les modes de déformation de la microstructure lorsque la longueur de contact entre les cellules tend à baisser. Nous n'avons pas réalisé de calculs au-delà du 24-gone, mais tout laisse à penser que cet effet va s'accroître encore pour des polygones avec un plus grand nombre de faces.

### III-3.1.4 Synthèse

Nous nous sommes intéressés à l'influence qu'avait la dimension de la zone de contact vis-à-vis des opérateurs d'élasticité du milieu homogène équivalent. Cette étude avait plusieurs objectifs. Elle nous a tout d'abord permis d'illustrer le fonctionnement des outils mis en oeuvre jusqu'à présent. Ces outils doivent actuellement être améliorés en implémentant le modèle de calcul complet de l'élasticité du second gradient dans ZeBuLon. Toutefois un certain nombre de résultats sortent de cette étude.

Nous avons montré que notre technique d'obtention des coefficients d'élasticité classique fonctionne bien. Les résultats obtenus sont propres aux géométries que nous étudions et nous permettent de contrôler les hypothèses du modèle. Ceci est à opposer à certains modèles analytiques où les hypothèses sur la géométries sont masquées et dont la plage de validité est limitée.

Vis-à-vis de la modélisation des effets d'anisotropie nous nous sommes aperçues que les nidas à réseaux hexagonaux présentent un pic d'anisotropie<sup>3</sup> pour un rapport  $\left(\frac{e}{R_e}\right)$  de 0, 2. En pratique la réalisation de nida à partir de minitubes couvre assez bien la zone de rapport  $\left(\frac{e}{R_e}\right)$  compris entre 0, 15 et 0, 5. De fait ce pic d'anisotropie ne concerne pas un cas d'architecture marginale. Pour un nida appartenant à cette gamme de valeur, le phénomène d'anisotropie au second ordre devient non-négligeable. Et ceci d'autant plus que la longueur de la zone de contact diminue.

En parallèle de cette augmentation du phénomène d'anisotropie, la réduction de la surface de contact entre les différents éléments aura tendance à minimiser les effets du second-ordre de la structure. Cette diminution de l'amplitude de ces effets s'accompagne en même temps d'une modification du mode de déformation de la structure en faisant tendre une des valeurs propres de l'opérateur vers 0.

Une étude détaillée de l'influence de ces paramètres est intéressante pour déterminer le procédé de fabrication d'un matériau nida. L'assemblage de microtubes par un procédé de soudage de type décharge électrique produira des zones de soudures de petites dimensions, et donc on aura tendance à maximiser l'effet lié à un nombre de conditionnement élevé. En contre partie

---

<sup>3</sup>Pour les topologie d'ordre strictement supérieures à 1.

si l'on réalise des matériaux à partir de techniques de prototypage rapide alors on pourra réaliser des jonctions de tailles supérieures entre les différentes cellules. De fait selon l'importance qu'une étude numérique peut donner à ces différents paramètres cela conditionnera le type de procédé de fabrication à mettre en oeuvre. Ce qu'il est important de noter est qu'il existe des régimes de rapports  $\left(\frac{e}{R_e}\right)$  tels que les valeurs de ces différents paramètres ne puissent pas être négligées.

Synthétisons à présent l'ensemble de ces résultats autour d'un cas de calcul complet des propriétés effectives d'un matériau donné.

### III-3.2 Calcul des propriétés d'un matériau réel

On revient à présent sur le cas du matériau présenté au chapitre I-1. Ce matériau est représenté sur la figure III-3.13 et est constitué d'un assemblage selon un réseau hexagonal de tubes ayant un diamètre extérieur de  $500 \mu\text{m}$  et un diamètre intérieur de  $300 \mu\text{m}$ . Cette structure est donc définie par un paramètre  $\left(\frac{e}{R_e}\right)$  de 0,4 et nous supposons que les zones de contact entre les éléments représentent 25% de la surface extérieure de notre cellule. La densité relative de cette structure est de 0,58 et donc sa porosité de 42%. Le matériau constitutif de ces tubes est un acier inox du type 316L, nous prendrons pour son comportement élastique un module de Young de 200000 MPa et un coefficient de Poisson de 0,3.

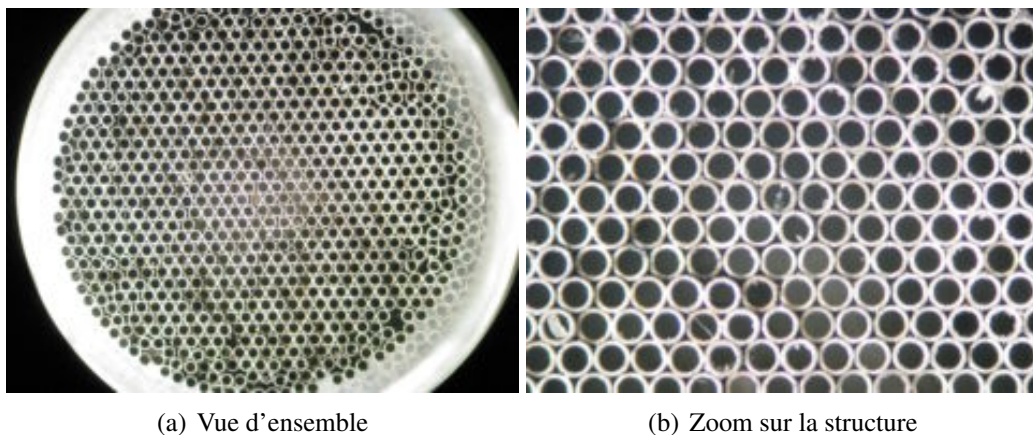


FIG. III-3.13 –  $\mu$ -nida modèle

La connaissance de ces données nous permet de calculer l'ensemble de propriétés acoustique et élastiques du matériau cellulaire résultant.

#### III-3.2.1 Absorption acoustique

Nous utilisons le modèle présenté au chapitre I-1 et détaillé en annexe I-A. Le résultat de la modélisation prédictive des propriétés comparé à son comportement mesuré au tube à impédance est représenté sur la figure III-3.14. Les résultats théoriques et expérimentaux sont dans un bon rapport.

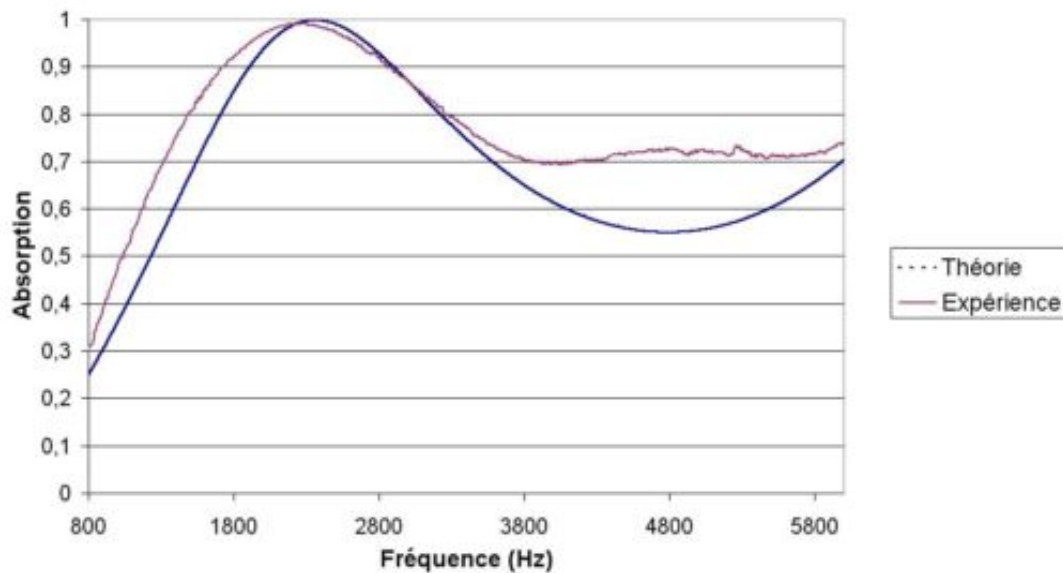


FIG. III-3.14 – Comparaison expérimentation et modélisation

Il est à noter que même si le modèle d'acoustique utilisé ne reproduit pas exactement la courbe de comportement de notre matériau, il nous permet de prévoir correctement la localisation et l'intensité du premier pic d'absorption. Comme de plus ce modèle est très facile à mettre en oeuvre, il est largement suffisant lors d'une phase de préconception d'un absorbeur acoustique. Notons de plus que l'absorption acoustique est une propriété relativement indépendante de la taille des jonctions entre les cellules du matériau.

Passons à présent aux résultats concernant l'élasticité.

### III-3.2.2 Élasticité

On dérivera ici les modules effectifs du premier et du second ordre du nida en utilisant la procédure introduite au chapitre I-3. Nous avons fait ici le choix, pour l'homogénéisation au premier ordre, de ne pas utiliser de conditions de contour périodiques pour avoir une procédure d'homogénéisation qui soit comparable dans les deux cas<sup>4</sup>.

La longueur de la zone de contact entre les cellules de notre matériau nida nous conduit à modéliser la cellule de référence par un 24-gone.

#### Élasticité du premier ordre

On obtient le tenseur d'élasticité 2-D isotrope suivant :

$$\hat{\tilde{C}} = \begin{pmatrix} 64335 & 20132 & 0 \\ 20132 & 64335 & 0 \\ 0 & 0 & 44204 \end{pmatrix} \quad (\text{III-3.12})$$

<sup>4</sup>Selon les modules considérés cela peut conduire à une erreur par excès d'environ 10% sur la valeur obtenue avec des conditions périodiques [2].

Cet opérateur est exprimé dans le système :

$$\begin{pmatrix} C_{1111} & C_{1122} & \sqrt{2}C_{1112} \\ C_{2211} & C_{2222} & \sqrt{2}C_{2212} \\ \sqrt{2}C_{1211} & \sqrt{2}C_{1222} & 2C_{1212} \end{pmatrix} \quad (\text{III-3.13})$$

et les valeurs sont exprimées en MPa. Cette matrice est de la forme :

$$\begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 2\mu \end{pmatrix} \quad (\text{III-3.14})$$

où  $(\lambda, \mu)$  sont les coefficients de Lamé. De fait cela nous donne, à partir des relations :

$$E = \mu \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} ; \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \quad (\text{III-3.15})$$

un module de Young effectif de 53498 MPa et un coefficient de Poisson de 0,24. Ce qui correspond à un module de Young relatif d'environ 26%.

### Élasticité du second ordre

Pour l'élasticité du second ordre nous obtenons l'opérateur hexatrope :

$$\hat{\tilde{A}}^{\text{II}} = \begin{pmatrix} 4946 & 6131 & -6980 & 0 & 0 & 0 \\ 6130 & 27060 & -8657 & 0 & 0 & 0 \\ -6979 & -8657 & 9872 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7200 & 3878 & -10167 \\ 0 & 0 & 0 & 3878 & 29314 & -5470 \\ 0 & 0 & 0 & -10167 & -5470 & 14379 \end{pmatrix} \quad (\text{III-3.16})$$

Cet opérateur a, d'après les résultats présentés, au cours de la section III-3.1 les caractéristiques suivantes :

$$a_{\%} = 45\% ; \left\| \hat{\tilde{A}}^{\text{II}} \right\| = 50904 \text{ MPa.mm}^2 ; k(\hat{\tilde{A}}^{\text{II}}) = 4368 \quad (\text{III-3.17})$$

et le système de valeurs propres suivants :

$$\lambda_1 = 8686 \text{ MPa.mm}^2 ; \lambda_2 = 7 \text{ MPa.mm}^2 ; \lambda_3 = 33185 \text{ MPa.mm}^2 ; \lambda_4 = 17700 \text{ MPa.mm}^2$$

où on s'aperçoit que, comme prévu, la valeur propre  $\lambda_2$  devient très faible.

On constate de plus que l'ordre de grandeur des modules du second ordre n'est pas négligeable devant ceux de l'élasticité classique. Notamment les coefficients tensorielles :

$$A_{221221} = 27060 \text{ MPa.mm}^2 ; A_{112112} = 29314 \text{ MPa.mm}^2 \quad (\text{III-3.18})$$

qui correspondent à une rigidité de flexion ne sont pas négligeables devant le module de Young du milieu effectif. Le facteur d'intensité des effets du second gradient est dans ce cas d'environ 0,5 mm<sup>2</sup>.

### III-3.2.3 Synthèse

Nous venons d'obtenir l'ensemble des opérateurs définissant le comportement effectif d'un matériau que nous avons réalisé en laboratoire. De fait ce cas d'illustration ne concerne pas une structure exotique, mais bien une structure réelle dont l'intérêt vis-à-vis d'application acoustique a été mis en avant.

Vis-à-vis de l'élasticité du premier ordre, nous pouvons constater que l'approche permet d'obtenir des résultats pour des rapports  $\left(\frac{e}{R_e}\right)$  dans lesquels les approches analytiques [37, 38] ne sont plus valables. De fait ne serait-ce qu'au premier ordre l'approche par homogénéisation est plus performante.

Pour l'élasticité du second ordre, nous obtenons par la même méthode l'ensemble des modules du second ordre. Ces coefficients sont montrés être en cohérence avec les symétries du problème. Et l'on constate que l'ordre de grandeur des coefficients obtenus pour l'opérateur du second ordre n'est pas négligeable devant celui du premier ordre. De plus l'opérateur du second ordre obtenu dans ce cas là possède un comportement anisotrope marqué ainsi qu'une valeur propre très faible. Ceci laisse penser que pour un champ de sollicitation adapté les effets du second ordre ne seront pas négligeables. Le paramètre de microstructure étant dans notre cas de  $500 \mu\text{m}$ , et en se référant à l'exemple donné dans [3], un champ de déplacement ayant une période inférieure à  $1,5 \text{ mm}$  fera travailler la microstructure du matériau. Cet effet pourra être potentiellement important dans le cas de matériau travaillant en flexion. Ceci d'autant plus que les termes associés à ce paramètre sont de l'ordre de 50% de la valeur du module de Young.



## **Conclusion et perspectives**





### Conclusion

Au cours de ce travail de thèse nous nous sommes intéressés à l'obtention du comportement mécanique et acoustique effectif d'un matériau cellulaire à partir de la connaissance *a priori* de son architecture.

L'étude des propriétés acoustiques s'est basée sur l'utilisation d'un modèle phénoménologique de type Lafarge-Pride [11, 13, 98]. Ce modèle qui avait été utilisé de manière théorique au cours de la thèse de Gasser a été validé de manière expérimentale au cours de cette thèse sur des matériaux tests. Nous avons ainsi montré la supériorité de la classe des « nids d'abeille » vis-à-vis des autres architectures cellulaires. De plus nous avons constaté que les résultats prédits étaient dans un rapport suffisamment bon avec les résultats expérimentaux pour que ce modèle puisse être utilisé lors d'une phase de préconception des structures.

Notre étude mécanique s'est, quant à elle, intéressée à l'élasticité linéaire des architectures nidées. Dans l'objectif de définir une classe de résultats généraux, nous nous sommes intéressés à la définition d'un milieu homogène de substitution. En nous basant sur des résultats de la littérature nous avons utilisé un modèle de comportement élastique du second-gradient [41, 43]. Ce type de milieu, dit généralisé, dévient en effet pertinent lorsque l'hypothèse de séparation des échelles entre la longueur d'onde des champs mécaniques et le paramètre de microstructure est mise en défaut [3]. Nous avons montré que l'utilisation de conditions de déplacement quadratiques lors de la phase d'homogénéisation permettait la construction de ces opérateurs du second ordre. A la fin de la partie I, nous avons constaté l'absence de connaissance sur la nature des opérateurs que nous avons obtenus : les systèmes d'anisotropies des milieux généralisés n'ayant que peu été étudiés.

Au cours de la deuxième partie de cette thèse nous avons donc fait une incursion dans l'algèbre des tenseurs. Cette partie nous a permis de dériver un certain nombre de résultats généraux concernant les opérateurs linéaires de comportement. Parmi ces résultats nous pouvons noter la démonstration du théorème de Hermann qui lie l'apparition de l'isotropie transverse à l'ordre de symétrie du milieu ainsi qu'au nombre d'indices du tenseur de la propriété considérée. La démonstration de ce théorème a fait l'objet d'une publication [70].

Nous avons de plus proposé une technique de décomposition des tenseurs relativement innovante par rapport à ce qui se fait dans la littérature. Cette technique nous autorise l'analyse

de tenseurs d'ordres élevés. Cette méthode a fait l'objet d'une publication [71]. Nous avons également proposé un mode de représentation des coefficients tensorielles inspirée de l'atomistique. Cette représentation permet, dans certain cas, une énumération très rapide des différents systèmes anisotropes ainsi que la détermination du nombre de coefficients dans chacune de ces classes. L'application de ces techniques est très générale et peut servir à l'étude de nombreux comportements complexes.

Au niveau de l'élasticité du second gradient nous avons ainsi pu conclure qu'en 2-D il existe exactement 8 systèmes d'anisotropie distincts et 17 en 3-D. Ce nombre est à comparer à celui des 8 systèmes de l'élasticité 3-D classique [26]. Ceci montre que l'élasticité du second ordre a un comportement plus « riche » que celui de l'élasticité classique. Les principales différences sont les suivantes :

- sensibilité à la chiralité du milieu ;
- apparition de classes tétragonale et icosaédrale ;
- anisotropie des milieux de symétrie hexagonale.

Ces résultats impliquent que, contrairement à l'élasticité classique, il n'existe pas de pavage périodique du plan qui soit isotrope transverse. Pour retrouver cette propriété il faut alors considérer des pavages quasi-périodiques comme ceux de Ammann-Beenker. De même pour les symétries spatiales, les milieux quasi-périodiques icosaédraux ne sont plus isotropes.

La partie III nous a permis de faire converger les résultats d'homogénéisation de la partie I avec les résultats théoriques de la partie II. Dans un premier chapitre nous avons tout d'abord dérivé les formes tensorielles exactes de nos opérateurs. Ce travail a donné lieu à une publication [91]. Les dimensions des différents opérateurs obtenues concordent avec celles dérivées lors de notre étude théorique. Nous avons ensuite contrôlé que les différentes propriétés algébriques des opérateurs étaient vérifiées quand ceux-ci étaient construits par homogénéisation. Finalement nous sommes revenus sur le cas d'un matériau de laboratoire pour lequel nous avons dérivé les propriétés effectives en fonction de la longueur de la zone de contact entre les différentes cellules constitutives du matériau. Ceci nous permet de relier la sensibilité de propriétés effectives d'un nida à la manière dont celui-ci est assemblé.

## Perspectives

Les perspectives de ce travail sont assez nombreuses et diverses. Nous discuterons uniquement de celles liées à la partie mécanique et nous les classerons selon plusieurs catégories selon qu'elles soient numériques, expérimentales, théorique ou bien liées à des stratégies de conception.

### Perspectives numériques

Les perspectives les plus immédiates concernent l'implémentation du modèle dans le code ZeBuLoN. Plusieurs points sont à considérer. Au niveau de la procédure d'homogénéisation il faut implémenter les conditions de déplacements quadratiques périodiques en 3-D. Ceci nous permettra de vérifier, à la fois la précision des valeurs des coefficients que nous avons obtenus par notre méthode, ainsi que d'étendre celle-ci aux opérateurs 3-D. Cette implémentation vise essentiellement à compléter les conditions de contour par la prise en compte d'un champ de déplacement périodique, cette condition peut être appliquée en utilisant un multiplicateur de Lagrange pour forcer les cotés opposés de la cellule à se déplacer de la même manière.

La définition des matrices d'anisotropie dans le code ne pose pas de problème, de fait il restera à implémenter la procédure de calcul au second gradient. La difficulté est avant tout numérique, il faut en effet trouver la solution du problème mécanique pour un champ et sa dérivé ; cela implique l'implémentation d'un élément de type  $C^1$ . Même si dans la littérature on trouve des publications s'intéressant à ce sujet [99, 100], il semblerait que cette approche pose des problèmes numériques importants. De fait en pratique les auteurs utilisent majoritairement une approche par éléments finis mixtes, c'est-à-dire que l'élément interpole deux champs indépendants. L'élément reste ainsi de type  $C^0$ . La stratégie pour retrouver un milieu du second gradient consiste ensuite à forcer la compatibilité de ces deux champs. Pour cela il est possible de fonctionner à partir d'une méthode des pénalités [101] ou bien à partir de multiplicateurs de Lagrange [102], l'expérience montre que c'est cette dernière voie qui est la plus efficace.

La littérature concernant cette dernière approche est bien détaillée et l'implémentation devrait pouvoir se faire en suivant ce modèle là.

## Perspectives expérimentales

En ce qui concerne les perspectives expérimentales de ce travail il serait intéressant de voir si les techniques de mesures de champ nous permettraient de remonter aux coefficients que nous obtenons par homogénéisation. L'utilisation de ces techniques dans le cadre de l'élasticité [103] ainsi que pour la plasticité des milieux hétérogènes [104] laissent à penser que l'utilisation de la corrélation d'image pour l'étude du comportement des nidas serait une voie prometteuse. Dans un autres esprit on pourrait s'intéresser à l'extension des techniques de mesure ultrasonore du tenseur d'élasticité<sup>5</sup> en étendant les résultats de [106, 107].

## Perspectives en conception

Le concept de symétrie peut être avantageusement réinvesti dans la conception *a priori* de structures optimums. Si l'on reprend le théorème de Hermann un de ses corollaires est que si le milieu est isotrope transverse pour un tenseur d'ordre  $n$  alors ce milieu sera isotrope transverse pour toutes propriétés linéaires décrites par un tenseur d'ordre inférieur à  $n$ . Ceci nous dit qu'il n'est pas possible, pour des structures cellulaires mono-matériau, d'obtenir un matériau homogène équivalent qui soit isotrope transverse pour l'élasticité (tenseur d'ordre 4) et anisotrope pour la conduction thermique (tenseur d'ordre 2). Toutefois une telle structure exotique peut être construite en utilisant un bi-matériau. Il faut pour cela introduire une notion de « couleur » dans notre approche [108–110].

Supposons que l'on ai deux types de tube fait de deux matériaux différents. Supposons que les propriétés élastiques soient similaires pour ces deux matériaux, mais que les propriétés thermiques différent. Représentons à présent les propriétés physiques par des couleurs, et rangeons ces tubes de la manière suivante dans un réseau hexagonal :

---

<sup>5</sup>L'extension au second gradient du logiciel d'identification des propriétés élastiques SYMETRIC développé par Francois [105] ne semble pas poser de problèmes majeurs.

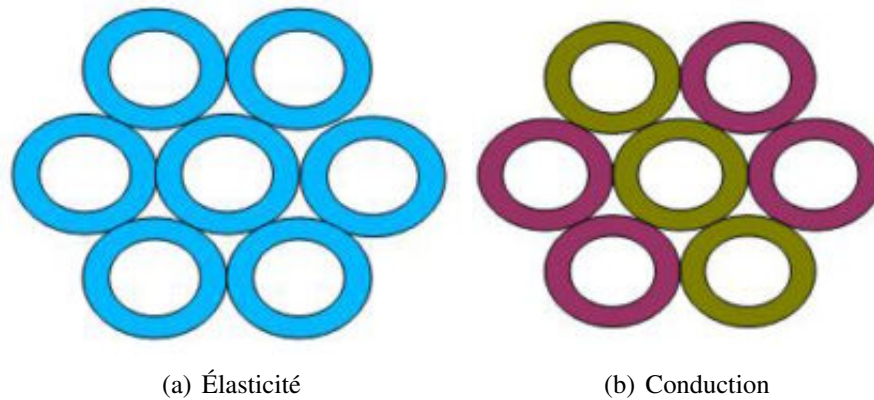


FIG. III-3.15 – Milieu coloré

Le matériau est  $D_6$ -invariant, toutefois ce qu'il convient de prendre en compte est la symétrie liée à la propriété physique. Ainsi dans le cas des propriétés élastiques le milieu est monochrome, de fait le milieu coloré est toujours  $D_6$ -invariant. Par homogénéisation au premier ordre et application du théorème de Hermann le milieu équivalent est, en 3-D, isotrope transverse. Dans le cas de la conduction thermique le pavage est bicolore et ce bicolourage dégrade la symétrie du matériau qui, dans ce cas là, est  $D_2$ -invariant. Les propriétés thermiques effectives sont, dans ce cas là, anisotropes. On obtient donc au final un matériau élastiquement isotrope transverse et thermiquement orthotrope.

Ce principe d'utilisation des symétries pour réaliser des matériaux aux propriétés exotiques est une voie d'approfondissement de ce travail qu'il semble intéressante d'explorer.

### Perspective théorique

Une première perspective serait de compléter nos résultats aux cas où les milieux considérés ne seraient plus nécessairement centro-symétriques. Cela nous amènerait à étudier les diverses formes que le tenseur de couplage  $M$  d'ordre 5 peut posséder. Cette étude est assez directe en reprenant la méthodologie mise en place au cours de notre travail.

Un deuxième point qu'il paraît intéressant de traiter est l'étude asymptotique de notre loi de comportement quand, pour un volume de matériau donné, une dimension tend vers 0. En d'autre terme, dériver à partir de nos résultats les modèles de plaques linéaires associés [59]. En suivant la méthodologie introduite par Weller dans cette dernière référence les étapes de ce travail sont bien identifiées. Cela permettrait d'obtenir des modèles de plaques anisotropes tenant compte des effets liés au second gradient du déplacement. Ce type de modèle peut être intéressant pour la modélisation de structures sandwich dans lesquelles nos matériaux cellulaires auraient une dimension très petite devant les autres.

# **Annexes**



Nous indiquerons ici les notations principales utilisées au cours de cette thèse. Les notations plus marginales seront définies et introduites au cours du manuscrit.

## A.1 Notations tensorielles

Pour indiquer l'ordre d'un tenseur nous utiliserons les notations suivante :

$\cdot$  tenseur d'ordre 1 (vecteur) ;  $\underset{\sim}{\cdot}$  tenseur d'ordre 2 ;  $\underset{\sim}{\sim}$  tenseur d'ordre 3  
 $\underset{\sim}{\sim}$  tenseur d'ordre 4 ;  $\underset{\sim}{\sim}$  tenseur d'ordre 5 ;  $\underset{\sim}{\sim}$  tenseur d'ordre 6 ;

La partie symétrique d'un tenseur sera notée entre accolade, ainsi

$$\{\underset{\sim}{A}\} = \frac{1}{2} (A_{ij} + A_{ji}) \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$$

On utilisera l'opérateur  $\nabla$  défini

$$\nabla = \cdot, i \underline{e}_i$$

Nous noterons  $\otimes$  le produit tensoriel standard définie pour des tenseurs d'ordre 2 de la manière suivante :

$$\underset{\sim}{A} \otimes \underset{\sim}{B} = A_{ij} B_{kl} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \otimes \underline{e}_k \otimes \underline{e}_l \quad (\text{A.1})$$

cette définition étant généralisable à des tenseurs d'ordre quelconque. Nous noterons de même  $\boxtimes$  le produit tensoriel modifié définie pour des tenseurs d'ordre 2 de la manière suivante :

$$\underset{\sim}{A} \boxtimes \underset{\sim}{B} = A_{ik} B_{jl} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \otimes \underline{e}_k \otimes \underline{e}_l \quad (\text{A.2})$$

cette définition étant généralisable à des tenseurs d'ordre quelconque.

## A.2 Espaces vectoriels

Nous noterons les différents espaces vectoriel en utilisant des fonts « black board » ainsi

$$\mathbb{T}_{ijkl} \quad (\text{A.3})$$



indiquera l'espace vectoriel des tenseurs d'ordre 4. La notation indicielle nous permettra de préciser les symétries de cette espace. De plus les espaces auxquels nous nous référerons sont les suivants :

$\text{Ela}_C$	espace des tenseurs d'élasticité du premier ordre
$\text{Ela}_M$	espace des tenseurs d'élasticité de couplage
$\text{Ela}_A$	espace des tenseurs d'élasticité du second ordre
$\mathbb{H}^i$	espace des tenseurs harmoniques d'ordre $i$
$\mathbb{K}_j^i$	sous-espace de Cartan d'ordre $j$ de $\mathbb{H}^i$
$\text{Fix}_{\mathbb{T}}(H)$	le s.-e.-v de $\mathbb{T}$ invariant par l'action du groupe $H$

### A.3 Acoustique et géométrie

$L$	Longueur matériau
$\alpha$	Absorption acoustique
$\alpha_\infty$	Tortuosité
$\phi$	Porosité
$\lambda$	Longueur spécifique (visqueuse ou thermique si')
$\underline{p}$	Paramètres du modèle de Lafarge-Pride
$\bar{\rho}$	Densité relative
$R$	Rayon
$e$	Épaisseur

### A.4 Mécanique

$L_\omega$	Longueur d'onde des champs mécaniques
$l$	Paramètre de microstructure
$E$	Module de Young
$G$	Module de cisaillement
$\nu$	Coefficient de Poisson
$(\lambda, \mu)$	Coefficients de Lamé
$\underline{\sigma}$	Tenseur des contraintes de Cauchy
$\underline{\underline{S}}$	Tenseur d'hypercontrainte
$\underline{\underline{\varepsilon}}$	Tenseur des petites déformations
$\underline{\underline{K}}$	Tenseur du gradient des déformations
$\underline{\underline{\varepsilon}}$	Vecteur de déformation généralisé
$\underline{\underline{\varsigma}}$	Vecteur de contrainte généralisé
$\underline{\underline{C}}$	Tenseur d'élasticité du premier ordre
$\underline{\underline{M}}$	Tenseur d'élasticité de couplage
$\underline{\underline{A}}$	Tenseur d'élasticité du second ordre
$\underline{\underline{L}}^1$	Tenseur de localisation du premier ordre
$\underline{\underline{L}}^2$	Tenseur de localisation du second ordre

## A.5 Mathématique

$\otimes$	Produit tensoriel
$\oplus$	Somme directe
$ \cdot $	Valeur absolue
$\ \cdot\ $	Norme
$\lfloor \cdot \rfloor$	Valeur entière
$\cong$	Isomorphisme
$\star$	Action
$\star_r$	Action de Rayleigh
ker	Noyau
im	Image
$\Omega$	Domaine
$\partial\Omega$	Frontière du domaine
$\epsilon_{ijk}$	Tenseur de Levi-Civita
$\delta_{ij}$	Tenseur de Kronecker
$G(T)$	Groupe de symétrie de T
$S_n$	Groupe symétrique à $n$ éléments
$\text{Gen}(G)$	Ensemble des générateurs du groupe $G$
$ G $	Ordre du groupe $G$
$[abc]$	Permutation circulaire des éléments $a, b, c$

## A.6 Symétries

Les symétries indicelles seront notées de la manière suivante

$A_{i(jkl)n}$   $\rightarrow$  sym. par rapport à la permutation des indices entre parenthèses

$A_{i\underline{jk}lmn}$   $\rightarrow$  sym. par rapport à la permutation des blocs soulignés

$A_{i\underline{j}\overline{kl}mn}$   $\rightarrow$  asym. par rapport à la permutation des blocs sur/soulignés

## A.7 Classification symétrie cristalline

### A.7.1 Sous-groupe des $O(3)$ de type I

Notation de Hermann – Maugin	Notation de Schönflies	Notation mathématique
1	$C_1$	1
2	$C_2$	$Z_2$
222	$D_2$	$D_2$
3	$C_3$	$Z_3$
32	$D_3$	$D_3$
4	$C_4$	$Z_4$
422	$D_4$	$D_4$
6	$C_6$	$Z_6$
622	$D_6$	$D_6$
$\infty$	$C_\infty$	$SO(2)$
$\infty 2$	$D_\infty$	$O(2)$
23	$T$	$\mathcal{T}$
432	$O$	$\mathcal{O}$
532	$I$	$\mathcal{I}$
$\infty\infty$		$SO(3)$

### A.7.2 Sous-groupes de $O(3)$ de type II

Notation de Hermann – Maugin	Notation de Schönflies	Notation mathématique
$\bar{1}$	$C_i$	$Z_2^c$
$2/m$	$C_{2h}$	$Z_2 \oplus Z_2^c$
$mmm$	$D_{2h}$	$D_2 \oplus Z_2^c$
3	$S_6, C_{3i}$	$Z_3 \oplus Z_2^c$
$\bar{3}m$	$D_{3d}$	$D_3 \oplus Z_2^c$
$4/m$	$C_{4h}$	$Z_4 \oplus Z_2^c$
$4/mmm$	$D_{4h}$	$D_4 \oplus Z_2^c$
$6/m$	$C_{6h}$	$Z_6 \oplus Z_2^c$
$6/mmm$	$D_{6h}$	$D_6 \oplus Z_2^c$
$m\bar{3}$	$T_h$	$\mathcal{T} \oplus Z_2^c$
$m\bar{3}m$	$O_h$	$\mathcal{O} \oplus Z_2^c$
$\infty/m$	$C_{\infty h}$	$SO(2) \oplus Z_2^c$
$\infty/mm$	$D_{\infty h}$	$O(2) \oplus Z_2^c$
$\infty/m\infty/m$		$O(3)$

### A.7.3 Sous-groupes de $O(3)$ de type III

Notation de Hermann – Maugin	Notation de Schönflies	Notation mathématique
$m$	$S_1, C_s$	$Z_2^-$
$2mm$	$C_{2v}$	$D_2^z$
$3m$	$C_{3v}$	$D_3^z$
$\bar{4}$	$S_4$	$Z_4^-$
$4mm$	$C_{4v}$	$D_4^z$
$\bar{4}2m$	$D_{2d}$	$D_4^d$
$\bar{6}$	$S_3, C_{3h}$	$Z_6^-$
$6mm$	$C_{6v}$	$D_6^z$
$\bar{6}2m$	$D_{3h}$	$D_6^d$
$\bar{4}3m$	$T_d$	$\mathcal{O}^-$
$\bar{5}5m$	$I_h$	$\mathcal{I}^-$
$\infty m$	$C_{\infty v}$	$O(2)^-$



- [1] J. Sanchez-Hubert and E. Sanchez-Palencia. *Introduction aux méthodes asymptotiques et à l'homogénéisation*. 1992.
- [2] Michel Bornert, Thierry Bretheau, and Pierre Gilormini. *Homogénéisation en mécanique des matériaux 1 -Matériaux aléatoires élastiques et milieux périodiques-*. Hermes Science, 2001.
- [3] Jean-Marc Cardona. *Comportement et durée de vie des pièces multiperforées : application aux aubes de turbine*. PhD thesis, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2000.
- [4] Serge Kruch and Samuel Forest. Computation of coarse grain structures using a homogeneous equivalent medium. *Journal de physique. IV.*, 8 :197–205, 1998.
- [5] Serge Kruch, Frederic Feyel, and Jean-Louis Chaboche. Application de l'homogénéisation périodique aux structures à gros grains. Aussois, 2004. MECAMAT.
- [6] C. Boutin. Microstructural effects in elastic composites. *International Journal of Solids and Structures*, 33 :1023–1051, 1996.
- [7] N. Triantafyllidis and S. Bardenhagen. Scale size on the stability of periodic solids and the role of associated higher order gradient continuum models. *Journal Mech. Physics Solids*, 44 :1891–1928, 1996.
- [8] Samuel Forest. Mechanics of generalized continua : Construction by homogenization. *Journal de Physique IV*, 8 :39–48, 1998.
- [9] Samuel Forest. *Milieux continus généralisés et matériaux hétérogènes*. Les Presses de l'Ecole des Mines de Paris, 2006.
- [10] R. D. Mindlin and N. N. Eshel. On first strain-gradient theories in linear elasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 4 :109–124, 1968.
- [11] Stéphane Gasser. *Etude des propriétés acoustiques et mécaniques d'un matériau métallique poreux modèle à base de sphères creuses de nickel*. Doctorat, INPG, 2003.
- [12] Jacques Julliard. Problématique des matériaux absorbants sonores pour applications sur turboréacteur. Journée Scientifique de l'ONERA, Janvier 2003.
- [13] Denis Lafarge. *Propagation du son dans les matériaux poreux à structure rigide saturés par un fluide viscothermique*. PhD thesis, Université du maine, 1993.
- [14] Michel Bruneau. *Manuel d'acoustique fondamentale*. Hermes edition, 1998.
- [15] M. F. Ashby and L. J. Gibson. *Cellular solids*. University of Cambridge, 1997.

- [16] Alethea M. Hayes, Aijun Wang, Benjamin M. Dempsey, and David L. McDowell. Mechanics of linear cellular alloys. *Mechanics of Materials*, 36 :691–713, 2004.
- [17] Rousseau. *Cristallographie géométrique et radiocristallographie*. Masson, 1995.
- [18] H. S. M. Coxeter. *Regular Polytopes*. Dover, 1973.
- [19] Fady Mamoud. *Modélisation de l'élasticité et du fluage des empilements gravitaires et sphères creuses métalliques brasées*. PhD thesis, INP Grenoble, 2007.
- [20] Vincent Marcadon. Description de la méthode de maillage des empilements de sphères creuses. Technical report, Onera, 2007.
- [21] Myriam Laroussi. *Modélisation du comportement des mousses solides à porosité ouverte : une approche micromécanique*. Doctorat, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 2002.
- [22] L. Gong, S. Kyriakides, and N. Triantafyllidis. On the stability of kelvin cell foams under compressive loads. *Journal of the Mechanics and Physics of solids*, 53 :771–794, 2005.
- [23] Wen-Yea Jang, Andrew M. Kraynik, and Stelios Kyriakides. On the microstructure of open-cell foams and its effect on elastic properties. *International Journal of Solids and Structures*, 45 :1845–1875, 2008.
- [24] Olivier Caty. *Fatigue des empilements de sphères creuses*. PhD thesis, INSA Lyon, 2008.
- [25] Alexandre Fallet. *Comportement mécanique d'empilements aléatoires de sphères creuses*. PhD thesis, INP Grenoble, 2008.
- [26] Sandra Forte and Maurizio Vianello. Symmetry classes for elasticity tensors. *Journal of Elasticity*, 43 :81–108, 1996.
- [27] R. Toupin. Elastic material with couple-stresses. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 11 :385–414, 1962.
- [28] R. D. Mindlin. Micro-structure in linear elasticity. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 16 :51–78, 1964.
- [29] H. G. Georgiadis, I. Vardoulakis, and E. G. Velgaki. Dispersive rayleigh-wave propagation in microstructured solids characterized by dipolar gradient elasticity. *Journal of Elasticity*, 74 :17–45, 2004.
- [30] G. Geymonat, S. Müller, and N. Triantafyllidis. Homogenization of nonlinearly elastic materials, microscopic bifurcation and macroscopic loss of rank-one convexity. *Archive for rational mechanics and analysis*, 122 :231–290, 1993.
- [31] N. Triantafyllidis, M. D. Nestorovic, and M. W. Schraad. Failure surfaces for finitely strained two-phase periodic solids under general in-plane loading. *Journal of Applied Mechanics*, 73 :505–515, 2006.
- [32] Michel Bornert, Thierry Bretheau, and Pierre Gilormini. *Homogénéisation en mécanique des matériaux 2 -Comportements non linéaires et problèmes ouverts-*. Hermes Science, 2001.
- [33] R. J. Mora and A. M. Waas. Evaluation of the micropolar elasticity constants for honeycombs. *Acta Mechanica*, 192 :1–16, 2007.
- [34] R. D. Mindlin. Second gradient strain and surface-tension in linear elasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 1 :417–438, 1965.
- [35] Markus Lazar, Gérard A. Maugin, and Elias C. Aifantis. Dislocations in second strain gradient elasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 43 :1787–1817, 2006.

- [36] R. H. J. Peerlings and N. A. Fleck. Computational evaluation of strain gradient elasticity constants. *International Journal for Multiscale Computational Engineering*, 2 :599–619, 2004.
- [37] S. D. Papka and S. Kyriakides. In-plane crushing of a polycarbonate honeycomb. *International Journal of Solids Structure*, 35, 1998.
- [38] J. Y. Chung and A. M. Waas. The inplane elastic properties of circular cell and elliptical cell honeycombs. *Acta Mechanica*, 144 :29–42, 2000.
- [39] J. Y. Chung and A. M. Waas. Elastic imperfection sensitivity of hexagonally packed circular-cell honeycombs. *The Royal Society*, 458 :2851–2868, 2002.
- [40] J. Y. Chung and A. M. Waas. Compressive response of circular cell polycarbonate honeycombs under inplane biaxial static and dynamic loading part ii : simulations. *International journal of Impact Engineering*, 27 :1015–1047, 2002.
- [41] Samuel Forest. Homogenization methods and the mechanics of generalized continua. *Travaux en Cours*, No. 60 :35–48, 1999.
- [42] Samuel Forest. Homogenization methods and the mechanics of generalized continua -part 2-. *Theoretical and applied mechanics*, 28-29 :113–143, 2002.
- [43] C. Pideri and P. Seppecher. A second gradient material resulting from the homogenization of an heterogeneous linear elastic medium. *Continuum Mech.and Thermodyn.*, 9 :241–257, 1997.
- [44] Patrick R. Onck. Cosserat modeling of cellular solids. *Comptes Rendus Mecanique*, 330 :717–722, 2002.
- [45] P. Germain. La méthode des puissances virtuel en mécanique des milieux continus première partie : théorie du second gradient. *Journal de Mécanique*, 12 :235–274, 1973.
- [46] Raynald Laheurte. *Application de la théorie du second gradient à la coupe des matériaux*. PhD thesis, Université de Bordeaux, 2004.
- [47] M. Gologanu, J.-B. Leblond, G. Perrin, and J. Devaux. *Recent extensions of Gurson's model for porous ductile metals*, chapter Continuum Micromechanics, pages 61–130. Springer-Verlag, 1997.
- [48] Samuel Forest and Karam Sab. Cosserat overall modeling of heterogeneous materials. *Mechanics Research Communications*, 25 :449–454, 1998.
- [49] Lutz Zybell, Uwe Mühlich, and Meinhard Kuna. Constitutive equations for porous plane-strain gradient elasticity obtained by homogenization. *Arch Appl Mech*, 2008.
- [50] Morteza M. Mehrabadi and Stephen C. Cowin. Eigentensors of linear anisotropic elastic materials. *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, 43 :15–41, 1990.
- [51] Myriam Douin. Fabrication d'un matériau à base de sphères métalliques creuses pour application à la la réduction du bruit des avions. Memoire de formation d'ingenieur par alternance, ONERA, 15/09/2003 2003.
- [52] Bruce E. Sagan. *The Symmetric Group : Representation, Combinatorial Alogorithms, ans Symmetric Function*. Springer, 2000.
- [53] J. Jerphagnon, D. Chemla, and R. Bonneville. The description of the physical properties of condensed matter using irreducible tensors. *Advances in Physics*, 27 :609 – 650, 1978.
- [54] J.B. Zuber. *Introduction à la théorie des groupes et de leurs représentations*. 1994.



- [55] Peter Chadwick, Maurizio Vianello, and Stephen C. Cowin. A new proof that the number of linear elastic symmetries is eight. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 49 :2471–2492, 2001.
- [56] T. C. T. Ting. Generalized cowin-mehrabadi theorems and a direct proof that the number of linear elastic symmetries is eight. *International Journal of Solids and Structures*, 40(25) :7129–7142, 2003.
- [57] A. Bóna, I. Bucataru, and M. A. Slawinski. Characterization of elasticity-tensor symmetries using  $su(2)$ . *Journal of Elasticity*, 75(3) :267 – 289, June 2004.
- [58] Sandra Forte and Maurizio Vianello. Symmetry classes and harmonic decomposition for photoelasticity tensors. *International Journal of Engineering Science*, 35(14) :1317–1326, November 1997.
- [59] Thibaut Weller. *Etude des symétries et modèles de plaques en piézoélectricité linéarisée*. PhD thesis, Université Montpellier 2, 2004.
- [60] Sandra Forte and Maurizio Vianello. Restricted invariants on the space of elasticity tensors. *Mathematics and Mechanics of Solids*, 11(1) :48–82, 2006.
- [61] George Backus. A geometrical picture of anisotropic elastic tensors. *Reviews of Geophysics and Space Physics*, 8 :633–671, 1970.
- [62] A. Spencer. A note on the decomposition of tensors into traceless symmetric tensors. *International Journal of Engineering Science*, 8 :475–481, 1970.
- [63] Reidar Baerheim. Harmonic decomposition of the anisotropic elasticity tensor. *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 46 :391–419, 1993.
- [64] Martin Golubitsky, Ian Stewart, and David G. Schaeffer. *Singularities and Groups in Bifurcation Theory. Volume II*. Springer, 1989.
- [65] I. I. Kolodner. Existence of longitudinal waves in anisotropic media. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 40 :730–731, 1966.
- [66] Giuseppe Geymonat and Pierre Gilormini. On the existence of longitudinal plane waves in general elastic anisotropic media. *Journal of Elasticity*, 54(3) :253–266, 1999.
- [67] Samuel Forest, Michel Amestoy, Sabine Cantournet, Gilles Damammes, and Serge Kruch. *Mécanique des milieux continus*. Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2005.
- [68] H. G. Georgiadis and C. G. Grentzelou. Energy theorems and the j-integral in dipolar gradient elasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 43 :5690–5712, 2006.
- [69] Q.-S. Zheng and J. P. Boehler. The description, classification, and reality of material and physical symmetries. *Acta Mechanica*, 102 :73–89, 1994.
- [70] Nicolas Auffray. Démonstration du théorème d’hermann à partir de la méthode forte-vianello. *Comptes Rendus -Mécanique-*, 336 :458–463, 2008.
- [71] Nicolas Auffray. Décomposition harmonique des tenseurs -méthode spectrale-. *Compte Rendus -Mécanique*, 336 :370–375, 2008.
- [72] W.-N. Zou, Q.-S. Zheng, D.-X. Du, and J. Rychlewski. Orthogonal irreducible decompositions of tensors of high orders. *Mathematics and Mechanics of Solids*, 6 :249–267, 2001.
- [73] Jovo Jaric. On the decomposition of symmetric tensors into traceless symmetric tensors. *International Journal of Engineering Science*, 41 :2123–2141, 2003.

- [74] J.P. Boehler, A.A. Kirillov, and E.T. Onat. On polynomial invariants of the elasticity tensor. *Journal of elasticity*, 34 :97–110, 1994.
- [75] Sandra Forte and Maurizio Vianello. Functional bases for transversely isotropic and transversely hemitropic invariants of elasticity tensors. *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 51 :543–552, 1998.
- [76] T. P. Srinivasan. A description of acoustical activity using irreducible tensors. *Journal of Physics C*, 21 :4207–4219, 1988.
- [77] V.P. Smyshlyaev and K.D. Cherednichenko. On rigorous derivation of strain gradient effects in the overall behaviour of periodic heterogeneous media. *Journal Mechanics and Physics of Solids*, 48 :1325–1357, 2000.
- [78] Nicolas Auffray and Regis Bouchet. Considérations sur les symétries indicelles et matérielles d’un tenseur : Application à l’élasticité du second-gradient. *HAL*, 2008.
- [79] Bruce E. Sagan. *Invariant Theory and Tableaux*, chapter The Ubiquitous Young Tableau, pages 262–298. Springer-Verlag, 1990.
- [80] R. C. King. Branching rules for classical lie groups using tensor and spinor methods. *Journal of Physics A : Mathematical and General*, 8 :429–449, 1975.
- [81] Denis Gracias. Cristallographie et quasicristallographie. In *Université de Tous Les Savoirs*, Paris, 2002.
- [82] J. X. Zhong, U. Grimm, R. A. Römer, and M. Schreiber. Level-spacing distributions of planar quasiperiodic tight-binding models. *Phys. Rev. Lett.*, 80 :3996 – 3999, 1998.
- [83] Nicolas Auffray, Regis Bouchet, and Yves Brechet. Class-jump phenomenon in physical symmetries in bidimensionnal space. *Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics*, (en cours de publication), 2008.
- [84] Denis Gratias, M. Quinquandon, and A. Katz. Introduction to icosahedral quasicrystals. In *Quasicrystals, Current Topics*, pages 1–72, 2000.
- [85] Yvette Kosmann-Schwarzbach. *Groupes et symétries. Groupes finis, groupes et algèbres de Lie, représentations*. 2005.
- [86] Sheldon Axler, Paul Bourdon, and Wade Ramey. *Harmonic Function Theory*. Springer, 2001.
- [87] A. I. Murdoch. Symmetry considerations for materials second-grade. *Journal of Elasticity*, 9 :43–50, 1979.
- [88] Marek Elzanowski and Marcelo Epstein. The symmetry group of second-grade materials. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 27 :635–638, 1992.
- [89] Valentina Testa and Maurizio Vianello. The symmetry group of gradient sensitive fluids. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 40 :621–631.
- [90] Castrenze Polizzotto. Gradient elasticity and nonstandard boundary conditions. *International Journal of Solids and Structures*, 40 :7399–7423, 2003.
- [91] Nicolas Auffray, Regis Bouchet, and Yves Brechet. Derivation of anisotropic matrix for bi-dimensional strain gradient elasticity. *International Journal of Solids and Structures*, (en cours de publication), 2008.
- [92] Samuel Forest. *Milieux continus généralisés et matériaux hétérogènes*. Hdr-presentation, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2004.
- [93] M. A. Armstrong. *Groups and Symmetry*. Springer Verlag, 1988.

- [94] D. Prall and Roderic Lakes. Properties of a chiral honeycomb with a poisson's ratio -1. *International Journal of Mechanical Sciences*, 39 :305–314, 1996.
- [95] Nicolas Auffray. Détermination a priori du système des valeurs propres d'un tenseur. partie i : Méthode et étude des systèmes plans. Technical report, ONERA, 2007.
- [96] Nicolas Auffray. Détermination a priori du système des valeurs propres d'un tenseur. partie ii : Étude des systèmes spatiaux. Technical report, ONERA, 2007.
- [97] Grégoire Allaire. *Analyse numérique et optimisation*. Ellipse, 2006.
- [98] D. L. Johnson, J. Koplik, and R. Dashen. Théorie of dynamic permeability and tortuosity in fluid-saturated porous media. *Journal of Fluid Mechanics*, 176 :379–402, 1987.
- [99] A. Zervos, P. Papanastasiou, and I. Vadoulakis. Modelling of localisation and scale in thick-walled cylinders with gradient elastoplasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 38 :5081–5095, 2001.
- [100] Ai-Kah Soh and Chen Wanji. Finite element formulations of strain gradient theory for microstructures and c0-1 patch test. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2004.
- [101] J. Y. Shu and N. A. Fleck. The prediction of a size effect in micro-indentation. *International Journal of Solids and Structures*, 35 :1363–1383, 1998.
- [102] J. Y. Shu, W. E. King, and N. A. Fleck. Finite elements for materials with strain gradient effects. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 44 :373–391, 1999.
- [103] Giuseppe Geymonat, Francois Hild, and Stephane Pagano. Identification of elastic parameters by displacement field measurement. *Compte-Rendu Mécanique*, 330 :403–408, 2002.
- [104] Felix Latourte. *Identifiication des parametres d'une loi élastoplastique de Prager et calcul de champs de contrainte dans des matériaux hétérogènes*. PhD thesis, Univerité de Montpellier 2, 07.
- [105] Marc Francois. *Identification des symétries matérielles des matériaux anisotropes*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Currie, 1995.
- [106] Marc Francois, Giuseppe Geymonat, and Yves Berthaud. Determination of the symmetries of an experimentally determined stiffness tensor : application to acoustic measurements. *International Journal of Solids and Structures*, 35(31-32) :4091–4106, 1998.
- [107] Douglas T. Queheillalt, David J. Sypeck, and Haydn N. G. Wadley. Ultrasonic characterization of cellular metal structures. *Materials Science and Engineering A*, 323 :138–147, 2002.
- [108] R. L. E. Scharzenberger. Colour symmetry. *Bulletin of the London Mathematical Society*, 16 :209–240, 1984.
- [109] Leonid Fel, Vladimir Machavariani, and David Bergman. Isotropic conductivity of two-dimensional three-component symmetric composites. *J. Phys. A : Math. Gen.*, 33 :6669–6681, 2000.
- [110] Michael Baake. Combinatorial aspects of colour symmetries. *J. Phys. A : Math. Gen.*, 30 :2687–98, 1997.



## **Comportement des matériaux cellulaires : élaboration, caractérisation et modélisation prédictive des propriétés**

Cette thèse a porté sur l'étude d'une classe de matériaux cellulaires, les micro nids d'abeille, destinés à combiner des propriétés mécaniques et acoustiques afin d'être employés comme absorbants acoustiques dans les tuyères des turbomachines. Les bonnes qualités d'absorption acoustique prédites par les modèles théoriques ont tout d'abord été vérifiées expérimentalement. Le travail s'est ensuite porté sur la modélisation des propriétés élastiques de ces structures. Pour ce faire une approche par milieu équivalent a été retenue et, de manière à tenir compte des effets d'échelle présents dans la structure, un milieu de substitution du type « élasticité du second gradient » a été choisi. Pour cela une méthode de construction par homogénéisation des opérateurs de cette loi de comportement a été introduite. Devant l'absence de résultats concernant les classes d'anisotropie des opérateurs d'élasticité du second ordre, une étude détaillée de ce point a conduit à l'identification des matrices à implémenter dans un code éléments finis. Les opérateurs du second ordre construits par homogénéisation ont pu ensuite être comparés à leurs formes théoriques. Ceci nous a permis de montrer que vis-à-vis du comportement de matériaux nida les effets du second ordre sont, dans certain cas, d'un ordre de grandeur comparable à ceux de l'élasticité classique. Les méthodes mises en place pour l'étude théorique des symétries des opérateurs d'élasticité sont généralisables à toutes lois de comportement linéaire.

**Mots-clés :** MATERIAU CELLULAIRE ; NID D'ABEILLE ; ACOUSTIQUE ; ELASTICITE ; MILIEU CONTINU GENERALISE ; TENSEUR ; HOMOGENEISATION.

## **Behavior of cellular material : design, characterization and predictive modelling of theirs properties**

This thesis was about studying a cellular material intended to combine mechanical and acoustical properties in order to be used to reduce aircraft engine noise. Attention had been focused on honey-comb structures. The sound absorber quality of such a structure, predicted by theoretical model, were first investigated and confirmed by experimentation. The mechanical study focus on elastic property of the structure and an approach by homogeneization was choosen. In order to take account of size effects the substitution medium behavior was choosen to be strain-gradient elastic. An homogeneization method was introduced to construct the first and second order elastic operator needed by this theory. As anisotropic systems for second order elasticity were mostly unknown, a rigourous study of that point was proposed. According to these results theoretic expressions of second order elasticity matrix were obtained. These matrix are the ones to be implemented in finite elements codes to proceed for strain-gradient elasticity computation. A comparison between matrix obtained by homogeneization and operator theoretic form were performed. Homogeneized construction was shown to be consistent with strain gradient theoretical model. A study of the strain-gradient operator defining the overall behavior of honeycomb was procedeed. It was shown that, in some case, first and second order elastic coefficients are of the same order of magnitude. The extension of our theoretical study of symmetry to other kind of linear behavior is straight-forward

**Mots-clés :** CELLULAR MATERIAL ; HONEY COMB ; ACOUSTIC ; ELASTICITY ; GENERALIZED CONTINUA ; TENSOR ; HOMOGENEIZATION.