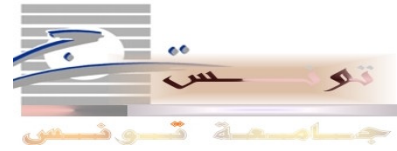




Université Bordeaux 2
École Doctorale des Sciences Humaines
et Sociales



Université de Tunis
École Doctorale des Didactiques des
Disciplines

Année 2008
N° 20307490

THESE

pour le

DOCTORAT DE L'UNIVERSITE BORDEAUX 2 & DE L'UNIVERSITE DE TUNIS

Mention : Sciences de l'Éducation
Spécialité : Didactique des Mathématiques

Présentée et soutenue publiquement

Le 14 novembre 2008
Par **Imène GHEDAMSI**
Née le 22/01/1968 à Bizerte

Enseignement du début de l'analyse réelle à l'entrée à l'université

Articuler contrôles pragmatique et formel dans des situations à dimension a-
didactique

Membres du jury

Viviane DURAND-GUERRIER, Maître de conférences, Université Lyon, Rapporteur.
Isabelle BLOCH, Professeur, Université Bordeaux 4, Directrice.
Leila LASSOUED, Professeur, Université El Manar, Tunis, Présidente.
Fabrice VANDEBROUCK, Maître de conférences, Université Paris 7, Examineur.

Belhassen DAHMEN, Professeur, Université El Manar, Tunis, Rapporteur.
Hikma SMIDA, Professeur Université El Manar, Tunis, Directrice.
Guy BROUSSEAU, Professeur émérite, Université Bordeaux 2, Invité.

REMERCIEMENTS

Je tiens tout d'abord à exprimer toute ma gratitude et ma reconnaissance à Hikma Smida et Isabelle Bloch, qui ont accepté de diriger ce travail de recherche. Je les remercie de tout cœur pour l'apport essentiel qui a permis à cette recherche de se développer et d'aboutir. J'ai pu, tout au long des travaux qui ont fait l'objet de ce mémoire de thèse, apprécier leur grande compétence et savourer à leurs côtés le goût subtil de la découverte. Je les remercie vivement et chaleureusement.

Je voudrais exprimer tous mes remerciements à Mahdi Abdeljaouad, qui m'a guidé à l'aube de mes études doctorales en co-encadrant mon mémoire de DEA qui a servi de base à ce travail de thèse. Mes remerciements vont aussi à André Rouchier pour les conseils qu'il m'a prodigués.

Je remercie Belhassen Dahmen et Viviane Durand-Guerrier d'avoir accepté de se rendre disponible pour être rapporteurs de cette thèse.

Mes remerciements vont également à Leila Lassoued pour l'honneur qu'elle m'a fait de présider le jury de cette thèse, et à Fabrice Vandebrouck d'avoir accepté de faire partie de ce même jury en tant qu'examinateur.

Il m'est agréable de remercier Guy Brousseau, qui n'a pas hésité à me faire profiter de ses précieuses compétences et connaissances notamment lors des séminaires de l'équipe DAESL et qui a accepté d'être membre du jury de cette thèse en tant qu'invité.

J'adresse mes cordiaux remerciements à toute l'équipe du CNIPRE de Tunis et à toute l'équipe de l'IUFM de Pau pour avoir mis à ma disposition tout le matériel et la bibliothèque pour l'avancement de cette thèse.

Les travaux de recherche qui ont fait l'objet de ce mémoire de thèse ont été réalisés entre l'Institut Supérieur de l'Education et de la Formation Continue de Tunis, l'Unité de Recherche Outils analytiques et probabilistes de Tunis et l'équipe DAESL au sein du laboratoire LACES de Bordeaux. Je remercie les membres responsables de ces établissements.

Je remercie vivement les enseignants et les étudiants qui ont participé avec dynamisme aux expérimentations.

J'adresse particulièrement mes remerciements à Faiza Chellougui et Leila Ben Youssef qui ont su m'aider et m'apporter leur soutien au long de ce travail.

Enfin je ne saurais terminer sans évoquer l'affectueuse et constante attention de mes parents, de mes frères et sœurs Skander, Mehdi, Dorra et Hela, de Médiha ainsi que de mes filles Sarah et Yasmine, qui ont partagé mes inquiétudes et m'ont apporté leur aide et leur soutien à tout moment et pour leur patience et leur complicité.

A toutes les personnes qui ont contribué à la réalisation de ce travail et qui m'ont apporté un soutien constant.

Organisation générale de la thèse

PREMIERE PARTIE : PROBLEMATIQUE DE L'ENSEIGNEMENT DE L'ANALYSE

CHAPITRE 1 : ETUDE PRELIMINAIRE DES VARIATIONS DIDACTIQUES DES ORGANISATIONS MATHÉMATIQUES DANS LA TRANSITION LYCÉE/UNIVERSITÉ EN ANALYSE



INTRODUCTION GÉNÉRALE DE LA THÈSE : PROBLÉMATIQUE ET ORGANISATION DE LA RECHERCHE

CHAPITRE 2 : CONTEXTE THÉORIQUE RELATIF AUX OBJETS DE L'ANALYSE



VARIABLES MACRO-DIDACTIQUES RETENUES ET PREMIERS RESULTATS POUR LA CONSTRUCTION D'UN MILIEU THÉORIQUE DES OBJETS DE L'ANALYSE RÉELLE (POUR L'IDENTIFICATION DES VARIABLES MICRO-DIDACTIQUES)

DEUXIÈME PARTIE : L'ENSEIGNEMENT DE L'ANALYSE DANS LE CONTRAT CLASSIQUE

CHAPITRE 3 : SUR LES PRATIQUES ENSEIGNANTES À L'ENTRÉE À L'UNIVERSITÉ EN ANALYSE

CHAPITRE 4 : MÉTHODOLOGIE D'ANALYSE DE SEANCES

TRAVAIL POSSIBLE DES ÉTUDIANTS DANS LE CONTRAT CLASSIQUE ET PROPOSITION D'INGÉNIERIE

TROISIÈME PARTIE : ORGANISER L'ARTICULATION DE CONNAISSANCES NUMÉRIQUES AVEC DES CONNAISSANCES DE L'ANALYSE

CONSTRUCTION ET EXPÉRIMENTATION D'UNE INGÉNIERIE RELATIVE À L'ENSEIGNEMENT DE L'ANALYSE À L'ENTRÉE À L'UNIVERSITÉ

TABLE DES MATIERES

TABLE DES MATIERES	1
PREMIERE PARTIE : PROBLEMATIQUE DE L'ENSEIGNEMENT DE L'ANALYSE	5
CHAPITRE 1 : PREMIERE ETUDE DES VARIATIONS DIDACTIQUES DES ORGANISATIONS MATHÉMATIQUES DANS LA TRANSITION LYCEE/UNIVERSITE EN ANALYSE	7
I. INTRODUCTION	8
II. L'ENSEIGNEMENT DE L'ANALYSE AU SECONDAIRE	9
<i>II.1 Objets de l'Analyse.....</i>	<i>9</i>
<i>II.2 Le contrat relatif à la validation.....</i>	<i>10</i>
<i>II.3 Activités mathématiques attendues : standardisation et/ou transparence</i>	<i>13</i>
<i>II.4 Premiers outils d'analyse du travail de conceptualisation.....</i>	<i>17</i>
<i>II.5 Conclusion de l'étude dans l'enseignement secondaire</i>	<i>19</i>
III. L'ENSEIGNEMENT DE LA NOTION DE LIMITE A L'UNIVERSITE	20
<i>III.1 Texte du savoir en Analyse et nouveau contexte du travail des étudiants</i>	<i>20</i>
<i>III.2 Nouvelles attentes : maîtrise de techniques amalgamées et gestion personnelle de l'organisation de la preuve</i>	<i>21</i>
<i>III.3 Nouvelles exigences d'ordre conceptuel.....</i>	<i>25</i>
IV. LES VARIABLES MACRO-DIDACTIQUES ASSOCIEES A LA TRANSITION SECONDAIRE / SUPERIEUR	26
<i>IV.1 Variables macro- didactiques.....</i>	<i>26</i>
<i>IV.2 Les valeurs prises par les variables didactiques et leurs conséquences.....</i>	<i>27</i>
V. NOUVELLES QUESTIONS ET PERSPECTIVES	31
<i>V.1 Introduction.....</i>	<i>31</i>
<i>V.2 Premiers questionnements et problématisation.....</i>	<i>32</i>
<i>V.3 Choix méthodologiques.....</i>	<i>34</i>
<i>V.4 Organisation de la thèse</i>	<i>35</i>
CHAPITRE 2 : CONTEXTE THEORIQUE RELATIF AUX OBJETS DE L'ANALYSE	37
I. INTRODUCTION	38
II. L'ANALYSE AU FIL DE L'HISTOIRE A TRAVERS UNE QUESTION DE NOMBRES	38
<i>II.1 Contexte historique : la notion de nombre.....</i>	<i>39</i>
<i>II.2 Extractions de racines $n^{\text{ième}}$ de nombres</i>	<i>44</i>
<i>II.3 La méthode d'exhaustion ou une approximation de π.....</i>	<i>59</i>
<i>II.4 Résolutions d'équations par approximations.....</i>	<i>63</i>
III. RETOUR SUR LES FONDEMENTS	74
<i>III.1 Elucidation des objets de base de l'Analyse.....</i>	<i>75</i>
<i>III.2 L'étude des fonctions dans la perspective des normes du calcul infinitésimal.....</i>	<i>78</i>
<i>III.3 Retour sur les nombres : rigueur mathématique oblige</i>	<i>81</i>

IV. CONCLUSION : SPECIFICITES DE L'ANALYSE	84
V. L'ENSEIGNEMENT DE L'ANALYSE : QUELLES DIFFICULTES ? QUELLES ALTERNATIVES ?	86
<i>V.1 Travaux en didactique de l'Analyse à l'entrée à l'université et difficultés des étudiants</i>	86
<i>V.2 Organisations classiques</i>	89
<i>V.3 Organisations alternatives</i>	90
VI. SYNTHESE	92
DEUXIEME PARTIE : L'ENSEIGNEMENT DE L'ANALYSE DANS LE CONTRAT CLASSIQUE	95
CHAPITRE 3 : SUR LES PRATIQUES ENSEIGNANTES A L'ENTREE A L'UNIVERSITE	97
I. INTRODUCTION	98
II. L'ENSEIGNEMENT DE L'ANALYSE A TRAVERS L'ORGANISATION MATHEMATIQUE : ÉTUDE D'UN CORPUS	99
III. L'ENSEIGNEMENT DE L'ANALYSE A TRAVERS LES PRATIQUES ENSEIGNANTES	101
<i>III.1 Méthodologie</i>	101
<i>III.2 Analyse des réponses</i>	107
IV. CONCLUSION : TYPES POSSIBLES DE CONTRAT	115
CHAPITRE 4 : METHODOLOGIE D'ANALYSE DE SEANCES	119
I. LE PROBLEME DE L'ANALYSE DE SEANCES : LA GESTION ANTICIPEE DU PROFESSEUR ET LE TRAVAIL POSSIBLE DES ETUDIANTS	120
<i>I.1 Introduction</i>	120
<i>I.2 Grilles d'analyse</i>	122
II. ETUDE DE CAS EN ANALYSE	125
<i>II.1 Introduction</i>	125
<i>II.2 Analyse a priori des énoncés</i>	126
<i>II.3 Analyse a posteriori : gestion du professeur et travail des étudiants</i>	136
III. CONCLUSION	144
CONCLUSION : NOUVELLE QUESTION ET NOUVEL ENJEU DE RECHERCHE	146
TROISIEME PARTIE : ORGANISER L'ARTICULATION DE CONNAISSANCES NUMERIQUES AVEC DES CONNAISSANCES DE L'ANALYSE	149
CHAPITRE 5 : METHODOLOGIE DE L'INGENIERIE	151
I. INTRODUCTION	152
II. RETOUR SUR LES PARAMETRES DES SITUATIONS THEORIQUES	154
<i>II.1 Variables retenues</i>	155
<i>II.2 Formes possibles des interactions des étudiants dans les situations</i>	160
III. SYNTHESE METHODOLOGIQUE	161
<i>III.1 Les thèmes et les objectifs : les savoirs de l'Analyse en lien avec les problèmes numériques</i> ...	161
<i>III.2 La prise en compte de l'interaction professeur/étudiants</i>	162
<i>III.3 La progression des situations</i>	162
CHAPITRE 6 : CHOIX DES SITUATIONS : PERTINENCE ET CONSISTANCE	165

I. LES METHODES NUMERIQUES : ADAPTATION AUX SAVOIRS VISES	166
<i>I.1 Méthodes retenues : quels connaissances et savoirs possibles ?</i>	168
<i>I.2 La dialectique syntaxique/sémantique</i>	174
<i>I.3 Conclusion</i>	185
II. QUESTIONS POSEES PAR LES SITUATIONS.....	185
<i>II.1 Problématique de l'existant et du construit</i>	185
<i>II.2 Milieu pour un contrôle mixte : intuitif et formel</i>	189
III. CHOIX DES SITUATIONS	194
<i>III.1 Choix des valeurs des variables</i>	194
<i>III.2 Conclusion : situations retenues</i>	198
CHAPITRE 7 : LA SITUATION DE L'ANTIPHERESE DE $\sqrt{2}$	201
I. INTRODUCTION : CONTENUS ET OBJECTIFS DE LA SITUATION	202
II. ANALYSE A PRIORI	203
<i>II.1 Connaissances et savoirs requis et visés</i>	204
<i>II.2 Organisation de la situation et ses variables didactiques</i>	207
<i>II.3 Enoncé, figures et calcul</i>	213
<i>II.4 Déroulement prévu</i>	217
III. ANALYSE A POSTERIORI	228
<i>III.1 Déroulement effectif</i>	228
<i>III.2 La situation de l'antiphèrèse de racine de 2 et les connaissances des étudiants</i>	240
IV. CONCLUSION.....	244
CHAPITRE 8 : LA SITUATION DU POINT FIXE DE COSINUS	249
I. INTRODUCTION : APPROFONDIR LA CONNAISSANCE DES NOMBRES REELS	250
II. ANALYSE A PRIORI	251
<i>II.1. Connaissances et savoirs requis et visés</i>	251
<i>II.2. Organisation de la situation et ses variables didactiques</i>	253
<i>II.3. Enoncé, figures et calcul</i>	258
<i>II.4. Déroulement prévu</i>	261
III. ANALYSE A POSTERIORI	271
<i>III.1. Déroulement effectif</i>	271
<i>III.2 Le point fixe de cosinus et les connaissances des étudiants</i>	282
IV. CONCLUSION.....	286
CONCLUSION GENERALE	289
I. LE MODELE DES VARIABLES MACRO-DIDACTIQUES (VMD).....	289
<i>I.1 Validité du modèle VMD</i>	289
<i>I.2 De l'enseignement "ordinaire" vers l'identification des savoirs visés</i>	289
II. CONSTRUCTION ET APPORT DE L'INGENIERIE	293
<i>II.1 La théorie des situations didactiques : validité dans l'enseignement de l'Analyse à l'entrée à l'université</i>	293

<i>II.2 Les effets de l'ingénierie : les savoirs issus des situations expérimentées</i>	294
<i>II.3 Deux étapes dans l'apprentissage de l'analyse réelle</i>	296
III. LIMITES ET PERSPECTIVES DE LA RECHERCHE	297
BIBLIOGRAPHIE	301
BIBLIOGRAPHIE GENERALE SUR LA DIDACTIQUE.....	301
BIBLIOGRAPHIE SUR HISTOIRE DES SCIENCES ET EPISTEMOLOGIE	305
BIBLIOGRAPHIE SUR L'ANALYSE	307
BIBLIOGRAPHIE SUR LA DIDACTIQUE DE L'ANALYSE.....	308
ANNEXES	313

PREMIERE PARTIE
PROBLEMATIQUE DE L'ENSEIGNEMENT DE L'ANALYSE

CHAPITRE 1

Première étude des variations didactiques des organisations mathématiques dans la transition lycée/université en Analyse

I. Introduction

La transition entre deux institutions d'enseignement (primaire/collège, collège/lycée, etc.) est toujours délicate : l'institution de niveau supérieur a tendance à rejeter sur l'institution précédente la responsabilité des échecs et des ignorances des enseignés. Un exemple significatif est celui de la transition entre l'enseignement secondaire et les études scientifiques à l'université ; une conséquence sociale bien connue des difficultés de cette transition – dont témoignent aussi bien professeurs qu'étudiants – est la raréfaction socialement et scientifiquement préoccupante des étudiants poursuivant des études scientifiques, particulièrement en mathématiques.

Nous avons entrepris l'étude de cette transition dans le cas de l'enseignement de l'analyse réelle, domaine pointé comme source de difficultés considérables par les étudiants comme par les professeurs. L'analyse réelle est en effet un champ majeur du savoir à l'université ; ce champ n'a été que peu fréquenté par les élèves au lycée, et sous des formes censées favoriser plutôt une première appréhension des notions que l'assimilation de règles formelles de validation et l'entrée dans une théorie mathématique.

Se pose alors la question de la réalité du rapport des élèves aux savoirs de l'analyse réelle à la sortie du lycée et de son degré d'adéquation avec celui attendu à l'entrée à l'université : Comment peut-on mesurer la distance entre les connaissances et l'activité mathématique des élèves de fin du lycée et celles attendues à l'entrée à l'université ?

Dans ce chapitre, nous nous attachons à exposer l'essentiel d'un travail déjà fait dans notre mémoire de DEA à savoir : l'état des lieux dans les deux institutions en référence au travail attendu, que nous étudions à travers une analyse de documents officiels¹. Nous interrogeons, au fur et à mesure de l'étude, la prise en compte par les deux institutions des phénomènes liés à la transition. Nous ferons enfin une synthèse des observations en proposant une analyse à l'aide des variables macro-didactiques que l'étude a permis de définir, puis nous concluons par de nouvelles questions de recherche dont l'étude fera l'objet de ce travail de thèse.

L'étude a été réalisée en Tunisie, dont le système secondaire et supérieur est très proche du système français, et la tradition de haut niveau universitaire en mathématiques bien implantée. L'étude faite concerne les deux dernières années du

¹ Dans les deux dernières années du lycée option scientifique, nous avons étudié le programme et les manuels en vigueur jusqu'à l'année 2006 ; à l'université, le texte du programme et six séries de travaux dirigés en analyse réelle (distribuées à partir du début de l'année) ainsi que le cours correspondant.

lycée et la première année universitaire option mathématiques-informatique. Le corpus étudié comporte des cours et exercices de manuels de lycée, et des exercices de TD d'université². Les programmes sont nationaux ainsi que les manuels, ce qui rend l'étude plus aisée en supprimant la variabilité due aux différences dans les manuels destinés à l'enseignement. Le programme de la première année d'université est sensiblement le même que celui des universités françaises en filière mathématiques-informatique.

II. L'enseignement de l'Analyse au secondaire

II.1 Objets de l'Analyse

L'étude historique de l'enseignement de l'analyse réelle au lycée montre comment depuis 30 ans l'enseignement secondaire, à la recherche d'une progression d'enseignement des savoirs de l'analyse réelle, plus spécifiquement des suites, des limites de suite et de fonction, oscille d'une organisation basée sur des problèmes et peu de justifications théoriques (avant 1968), au tout formel des années soixante-dix, puis à l'introduction d'éléments permettant de ne pas *étouffer l'intuition*³ (usage du graphique) *et d'éviter toute formalisation inutile* (programme des années quatre-vingt). A partir de 1993 et durant treize ans⁴, cet enseignement semble stabilisé autour de la manipulation d'un certain nombre d'ostensifs relatifs aux fonctions, limites et dérivées ; les sujets du baccalauréat, qui pilotent dans une mesure certaine l'enseignement effectif, s'avèrent basés sur des problèmes stéréotypés.

La succession rapide des réformes et l'état jugé peu satisfaisant montrent que l'institution peine à trouver les moyens adéquats pour prendre en compte deux spécificités de l'enseignement d'une théorie complexe comme l'analyse réelle :

- Le savoir ne peut s'y construire de façon définitive lors de la première rencontre, et il faut nécessairement prévoir une progression qui fasse revenir sur les objets mathématiques dans différents problèmes afin d'enrichir leur fonctionnement. Ceci renvoie au fait que le sens d'un objet mathématique n'est jamais défini de façon isolée, mais il se construit dans son articulation et ses liens de fonctionnement avec d'autres objets de la théorie ; il en résulte que le sens d'un concept est toujours à venir, dans les possibilités futures de son fonctionnement et des relations avec les autres objets. L'enseignement doit donc se résigner, comme le dit d'ailleurs

² Cf. Ghedamsi (2003), pour la totalité de l'étude.

³ Nous utilisons ce terme dans l'acception qui lui est communément attribuée dans les textes des programmes de mathématiques. Nous aurons par ailleurs l'occasion de définir ce terme (Cf. chapitre 6) dans le cadre de son usage au sein de cette recherche.

Brousseau dans Fondements et méthodes de la didactique⁵, à n'enseigner qu'un sens provisoire, et le formalisme ne peut pas être garant du sens "définitif".

- Dans une théorie comme l'analyse réelle, il est donc difficile de prévoir l'apprentissage d'un concept isolé ainsi qu'une progression linéaire de l'enseignement. De ce fait, il est sans doute illusoire de prétendre à une organisation linéaire optimale en attribuant des valeurs différentes aux mêmes variables à disposition pour l'enseignement du début de l'analyse réelle (la chronologie d'apparition des premiers savoirs, le degré d'utilisation des règles de la logique, le système de validation-algèbre des limites, définitions formelles, ou calculs basés sur des approximations, le degré de formalisation et/ou de généralisation, etc.).

Ces caractéristiques ne sont d'ailleurs pas propres à l'analyse réelle, et on les retrouve dans l'enseignement de toutes les théories complexes ; ainsi l'enseignement de l'algèbre linéaire a fait l'objet d'études de didactique mettant en évidence les mêmes difficultés de construction de connaissances provisoires et du savoir formel utile, et le même besoin de construction de problèmes pertinents.

II.2 Le contrat relatif à la validation

Jusqu'à l'année 2006⁶, le programme de mathématique stipule : " *On évitera toute formalisation des définitions relatives à la limite d'une fonction*"⁷. L'organisation choisie dans les manuels met donc une insistance importante sur l'algèbre des limites, allant de pair avec quelques techniques de majorations/minorations. Selon les objectifs des programmes, l'élève sera capable d'étudier et/ou de calculer des limites de fonctions à partir des théorèmes d'opérations sur les limites, des théorèmes relatifs aux limites et ordres et des limites de fonctions de références à savoir : $x \mapsto x$, $x \mapsto a$, $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto x^n$, et $x \mapsto \frac{1}{x}$.

Mais l'absence de définition formelle de la limite d'une fonction dans le manuel de Terminale⁸ scientifique option Mathématiques ne s'accompagne pas d'une organisation alternative cohérente en ce qui concerne la validation. Ainsi dans la démonstration du

⁴ La réforme de 2003 a pris place dans les deux dernières années du lycée à partir de septembre 2006. Dans le cadre de cette recherche, nous restreignons l'étude à l'état des lieux jusqu'à septembre 2006.

⁵ Cf. Brousseau (1986).

⁶ Signalons que la dernière réforme a été entamée en 2003 ; elle est rentrée en vigueur pour la classe de 3^{ème} année secondaire en septembre 2006 et pour la classe de 4^{ème} année en septembre 2007. Ce programme n'a pas fait l'objet d'une étude de notre part.

⁷ Document officiel 1998, classe de 3^{ème} année Mathématiques (année précédant le baccalauréat).

⁸ Par Terminale, nous entendons l'année du baccalauréat appelée 4^{ème} année secondaire dans le cursus tunisien.

théorème relatif à l'unicité de la limite, les auteurs utilisent quasi subrepticement cette définition formelle alors que celle-ci n'a pas été énoncée comme telle, et qu'elle n'a pas reçu de statut clair pour la validation : rien n'est indiqué de l'usage du formalisme dans le travail des élèves. Il semblerait qu'il y ait là une volonté de réintroduction de *rigueur* mathématique ; mais les tâches prévues dans le manuel n'organisent pas cet usage du formalisme : quand doit-on utiliser cette définition ? Quand peut-on s'en passer et, soit admettre le résultat, soit user d'un autre moyen de validation ? Quelles propriétés générales les élèves sont-ils supposés connaître et utiliser ? Il reste donc à la charge du professeur de gérer l'articulation entre l'*intuition* et les outils de validation.

Un exemple de cette difficulté relative à la *rigueur* mathématique est donné par l'introduction, en Terminale, des limites des fonctions trigonométriques, ainsi que logarithme et exponentielle. Concernant les limites des fonctions sinus et cosinus, le manuel de 3^{ème} année admet $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$, puis l'utilise (ainsi que certaines formules trigonométriques) pour retrouver les autres limites usuelles.

Pour ce qui est des limites des fonctions logarithmes et exponentielles, le manuel de 4^{ème} année propose le paragraphe suivant pour déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x$.

A l'aide d'une calculatrice compléter le tableau suivant :

x	400	$8 \cdot 10^3$	$5 \cdot 10^5$	2^7	2^{15}	2^{1000}
$\ln x$						

Que peut-on constater sur le comportement de $\ln x$, lorsque x devient de plus en plus grand ?

Cet exercice est suivi d'un exercice entièrement résolu sur le manuel :

Soit A un réel strictement positif.

1. Trouver un entier naturel n tel que : $\ln(2^n) > A$.
2. Trouver un réel strictement positif B tel que : $x > B \Rightarrow \ln x > A$. Que peut-on conclure ?

En utilisant ce résultat, quelques encadrements et des changements de variables explicités par les énoncés, le reste des limites usuelles de la fonction logarithme népérien est établi. Utilisant le fait que la fonction exponentielle est la réciproque de la fonction logarithme népérien, les limites à l'infini de la fonction exponentielle sont

établies, et le reste des limites usuelles concernant la fonction exponentielle est établi moyennant des changements de variables explicitement donnés dans les énoncés.

Ceci ne peut pas jouer réellement le rôle de démonstration mais peut être considéré comme une façon dont intervient, dans le contrat en vigueur au secondaire, la *rigueur* mathématique, ici constituée par des éléments de validation. Ce que relève l'analyse didactique, c'est :

- le statut peu clair de cette validation ;
- la non responsabilité des élèves dans la prise en charge de ce calcul ;
- le caractère local et non relié de ces éléments de théorie.

Dans le manuel de Terminale option mathématiques, les tâches de *recherche de l'existence d'un nombre*, pour lesquelles la détermination algébrique n'est en général pas possible, sont justifiées par des théorèmes d'existence sans calcul d'une approximation. La nature de l'analyse réelle rend difficile d'opter pour un moyen privilégié de validation en excluant les autres : les moyens non déclarés officiellement se trouvent réintroduits subrepticement, et du même coup leur statut est ambigu.

Ainsi dans un exercice – où il s'agit de trouver la limite d'une suite de terme générale $u_n = 2n + \cos n$ – il apparaît qu'on s'appuie, pour la démonstration, sur des propriétés qui n'ont pas encore été démontrées explicitement. En effet on y utilise l'inégalité $u_{2n} \geq 2n - 1$, or la technologie légitimant le passage à la limite n'a pas encore été instaurée (théorème sur $u_n \geq v_n$ et $v_n \rightarrow +\infty$). Dans ce cas, le théorème est introduit en suivant tout en étant censé s'appuyer sur *l'intuition*, et réciproquement.

Enfin, les types de raisonnements requis sont parfois difficiles à identifier mais nous pouvons noter que le programme ne prévoit pas de tâches pour travailler les raisonnements de type "condition nécessaire et/ou suffisante" ; contrairement au programme officiel de 1988 qui stipulait : " *Il ne sera pas perdu de vue que l'entraînement à l'utilisation des modes de raisonnement aussi divers que possibles amènera, entre autre, les élèves à distinguer entre condition nécessaire et condition suffisante, à formuler des propositions ainsi que leurs négations.* ".

L'enseignement secondaire semble donc faire une tentative d'introduction de l'analyse réelle basée sur *l'intuition* ; tout se passe cependant comme si les choix didactiques conduisaient à piloter la *rigueur* de cet enseignement par la validation formelle, mais de façon non déclarée, faute sans doute d'avoir pu trouver une alternative valable.

II.3 Activités mathématiques attendues : standardisation et/ou transparence

L'étude des manuels des deux dernières années du lycée nous montre comment, à travers une même organisation de chacun des chapitres, ces manuels mettent bien en avant certaines activités mathématiques précises et attendues définissant les principaux enjeux en classe de troisième année et de Terminale. Ces activités se manifestent dans la rubrique des exercices, notamment par l'existence de canevas d'exercices très répétitifs tous centrés sur une technique et/ou une technologie donnée⁹.

II.3.1 Les tâches privilégiées

A travers l'étude des exercices répertoriés dans l'environnement de la notion de limite¹⁰, nous avons pu classer les types de tâches en trois catégories et à chacune de ces types de tâches nous avons associé les techniques à utiliser :

- Tâches de type algorithmique

Dans ce cas, il s'agit de considérer les tâches utilisant des techniques calculatoires *simples* ou *moins simples* pour étudier la convergence d'une suite ou la limite d'une expression algébrique dans le cadre de l'étude des fonctions.

- Tâches de type graphique

Il s'agit dans ce cas de tâches qui étudient graphiquement, le comportement asymptotique d'une fonction, la position de tangentes en des points particuliers, le comportement d'une suite, etc., pour conjecturer des limites éventuelles. D'autre part, cette catégorie regroupe les tâches où le résultat d'un calcul de limite est à interpréter graphiquement.

- Tâches complexes

Nous avons groupé au sein de cette classe, les tâches qui ne correspondent ni à la mise en oeuvre d'un algorithme ni à une interprétation/conjecture graphique. Ces tâches requièrent une certaine disponibilité des connaissances et comportent une dimension de recherche.

II.3.2 Analyse des tâches suivant la classification

Nous avons ainsi pu voir que les techniques rattachées aux tâches de type algorithmiques sont majoritaires (52%) ; nous citerons les techniques de factorisation

⁹ Cf. Chevallard (1999).

par le terme prépondérant, de multiplication par l'expression conjuguée et de changement de variable explicité par les énoncés. Dans le détail, la mise en œuvre de techniques de type algorithmique se rencontre essentiellement dans les questions portant sur l'étude de variations de fonctions (qu'il s'agisse ou non de fonctions logarithmes ou exponentielles). Dans le cas le plus compliqué, il y a plus d'une étape à exécuter avant d'aboutir au résultat, comme le montre l'exemple du calcul de limite en $+\infty$ de $\frac{2 \ln x}{x^2 + x}$, pour lequel il s'agit d'abord de diviser par x^2 le numérateur et le dénominateur pour ensuite utiliser le résultat d'une limite usuelle à savoir celle de $\frac{\ln x}{x}$ en $+\infty$. La technique de changement de variable, renforcée par l'institutionnalisation du théorème de composition des limites en classe de terminale, est récurrente, fondamentalement à travers le calcul de limites d'expressions telles que $\frac{\sin(1-3x)}{(1-3x)}$ en $x_0 = \frac{1}{3}$, $\frac{\cos(x^2)-1}{x}$ en $x_0 = 0$, ou encore $\frac{1}{1+e^x}$ en $x_0 = 0$, $\frac{\ln(1-x^2)}{x^2}$ en $x_0 = 0$. Dans tous les cas, les exercices requièrent la mobilisation d'un résultat standard aboutissant à l'utilisation d'une limite remarquable (ou usuelle).

On observe les mêmes phénomènes en ce qui concerne les problèmes de convergence d'une suite : une part importante des questions nécessitant des techniques de type algorithmique est consacrée à situer la notion de limite d'une suite dans un contexte de connaissances déjà élaborées en 3^{ème} année. L'essentiel du travail de l'élève consiste à aboutir aux théorèmes des opérations sur les limites de suites convergentes ainsi qu'aux différents résultats donnant $\lim_{n \rightarrow +\infty} q_n$.

Les techniques exigées dans les tâches faisant intervenir le graphique restent inscrites dans un contrat peu étendu : nous en distinguons deux, celles qui induisent des conjectures à partir du graphique ou, à l'inverse, demandent des tracés. Cependant, la systématisation antérieure des études globales de fonctions par tracé du graphique favorise la mise en œuvre d'une technique d'interprétation graphique d'un nombre limite – ainsi le tracé de la tangente en un point de la courbe, le tracé des branches infinies, le tracé des asymptotes obliques, verticales ou horizontales. Réciproquement, lorsqu'il s'agit d'interpréter des courbes afin d'en conjecturer un résultat éventuel, l'élève n'est généralement pas confronté à une tâche de production complexe. On lui demande, soit d'utiliser la représentation graphique d'une fonction f (explicitement désignée dans

¹⁰ Nous entendons les exercices qui réfèrent à la notion de limite et qui ne se trouvent pas nécessairement

l'énoncé) afin de conjecturer l'existence d'une limite éventuelle de f en x_0 (en l'occurrence de percevoir un nombre dérivé) ou encore de représenter les courbes par exemples de $-f$, $1/f$, $f + k$ (k étant un réel donné). Ces tâches graphiques supposent de plus que la courbe ne recèle aucun implicite non visible, donc elles induisent une utilisation du graphique peu problématique et non problématisée.

Enfin, les tâches induisant la prise en compte par l'élève de l'utilité du graphique – telles que les questions relatives à la représentation graphique de la réciproque d'une fonction ou à la conjecture sur la convergence éventuelle d'une suite récurrente – n'exigent en général pas le recours autonome au graphique par les étudiants – que ce soit dans des phases de contrôle ou d'exploration. L'institution scolaire semble en effet prendre peu en charge le recours au graphique comme outil de validation et ne pas chercher spécifiquement à le développer (Cf. Bloch, 2003). Ce que nous pouvons noter, c'est une certaine carence de tâches graphiques moins élémentaires, correspondant à un degré de familiarisation plus élevé avec les savoirs liés aux limites et à l'aspect heuristique du graphique ; cette absence a été également signalée par Maschietto (2001). Une évolution de l'usage du graphique dans le sens d'une aide heuristique aux tâches plus complexes, pointée comme souhaitable par ce même auteur, n'est manifestement pas celle qui est prise en compte de la 3^{ème} à la terminale.

II.3.3 La standardisation

La standardisation des tâches apparaît comme importante, à travers la routinisation de quelques tâches revenant fréquemment et systématiquement. Les tâches complexes les moins "standardisées" occupent une place très réduite (14% de l'ensemble des tâches dans le manuel de Terminale) ; de plus, les démonstrations associées n'appellent pas un réel travail de production personnelle. Nous distinguons dans l'environnement de la limite d'une expression algébrique trois techniques rattachées aux tâches complexes : l'encadrement et la comparaison, l'identification d'un nombre dérivé et la discussion suivant un paramètre.

En 3^{ème} année comme en Terminale, la technique de comparaison/encadrement fait essentiellement appel aux propriétés et inégalités concernant $\sin x$, $\cos x$ ou $E[x]$. Dans l'exercice suivant (classe de Terminale), l'inégalité à utiliser est, de plus, expressément indiquée dans les textes de l'énoncé :

On considère la fonction $f : x \rightarrow x^2 E\left(\frac{1}{x}\right)$.

dans les chapitres des limites.

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a : $x-x^2 < f(x) < x$.

En déduire $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

Afin de répondre à la première question, l'élève utilise une propriété fondamentale de la partie entière d'un nombre réel à savoir $x-1 < E(x) \leq x$, laquelle a été rappelée dans l'exercice précédent ; puis, il applique l'un des théorèmes relatifs aux limites et ordre. De tels types de calculs, très dirigés dans l'ensemble, et qui apparaissent surtout au niveau des exercices portant l'intitulé du thème (dans ce cas limites et ordre), n'appellent pas un réel travail de recherche de la démonstration, même s'ils font significativement appel à des compétences algébriques et d'organisation du raisonnement.

Par ailleurs, l'introduction des inégalités des accroissements finis et celles des intégrales devraient contribuer à enrichir les connaissances des élèves et à faire évoluer les exercices mettant en œuvre des encadrements/comparaisons. Mais, dans tous les cas, le découpage préalable de l'énoncé en questions intermédiaires induit la technique à mettre en œuvre et les moyens pour y arriver (c'est le cas du calcul de limite par encadrement, lorsque ce dernier est indiqué).

Notons par ailleurs que la technique du point fixe (utilisée pour déterminer la limite d'une suite récurrente convergente) est presque inexploitée au niveau des problèmes complexes sauf dans un contexte particulier, celui de l'étude de la convergence d'une suite récurrente précédée par l'étude de la fonction qui lui est associée. La technique requise pour déterminer la limite – la résolution algébrique d'équations de type $f(x) = x$, est de ce fait indiquée par l'énoncé. La presque totalité des exercices du même type donnés en Terminale se retrouve dans le chapitre *Suites réelles-convergence*, et le contexte est donc facilement identifiable par l'élève : il s'agit d'une connaissance technique ou mobilisable et non disponible¹¹. Or le niveau disponible de mise en fonctionnement des connaissances, exige que l'élève soit capable de résoudre ce qui lui est proposé sans aucune indication, donc de trouver par lui-même les connaissances nécessaires à la résolution. Ce niveau inclut donc l'élaboration d'une stratégie et le choix de théorèmes pour la résolution. Ce niveau est rarement présent au secondaire et s'avère spécifique à l'université. Il est de ce fait, adéquat pour nous permettre de saisir l'ampleur de l'évolution du travail attendu des étudiants.

¹¹ Au sens des niveaux de mise en fonctionnement des notions de Robert (1998). Auxquels nous aurons l'occasion de revenir dans d'autres chapitres de la thèse (Cf. Chapitres 4, 7 et 8).

Il convient enfin de signaler que la donnée de tâches complexes sans aide méthodologique, proposée dans certains exercices afin de favoriser une certaine prise d'autonomie de l'élève, reste dans un contexte très restreint. Ces tâches nécessitent l'utilisation de plus d'une technique à la fois, ou la mobilisation de techniques qui se maintiennent à faible inférence telle que l'identification d'un nombre dérivé lors du calcul de la limite d'une expression algébrique ; mais dans le cas le plus complexe, on demande de reconnaître la nécessité de distinguer limite à droite / limite à gauche ou l'étude des points particuliers d'une courbe. L'élève semble donc assez peu engagé à adopter des démarches autonomes lors de la résolution d'exercices. De plus nous ne pouvons assurer que les professeurs donnent effectivement ces exercices aux élèves : cela peut dépendre du niveau de la classe, et l'organisation didactique prescrite par l'institution n'est pas l'organisation effective.

II.4 Premiers outils d'analyse du travail de conceptualisation

Plusieurs travaux ayant trait à l'enseignement supérieur soulignent l'apparition de certaines exigences en termes de flexibilité cognitive, et d'évolution du statut des notions.

Robert (1998) pose la question, d'une part des relations que des nouvelles notions introduites à l'université entretiennent avec des notions connues ; d'autre part la question des fonctions que vont occuper ces nouvelles notions. Ceci conduit à distinguer plusieurs aspects possibles des notions concernées : aspect formalisateur, unificateur, généralisateur ou simplificateur.

En articulant le travail de Robert (1998) et celui de Sfard (1991), nous avons pu caractériser les deux statuts des notions de l'analyse réelle¹² : processus et objet. La mise en œuvre du statut processus appelle un rapport opérationnel à la notion en question : c'est le cas par exemple de la notion de limite lors de la recherche de la pente d'une tangente. Quand à la dimension objet d'une notion, elle est essentiellement liée à ses aspects unificateur, généralisateur et formalisateur, elle caractérise l'aspect structurel du travail de conceptualisation : c'est le cas par exemple de la notion de limite dans des activités de raisonnement sur des objets généraux, ou lorsque les énoncés en question portent sur des propriétés générales des limites ou des objets (fonctions, suites) ayant ou non des limites.

L'analyse des tâches proposées dans l'environnement de la notion de limite, à la fin du cursus secondaire, nous montre que la notion de limite n'est presque jamais utilisée

¹² Ou plus précisément les deux modes d'intervention des notions de l'analyse réelle.

dans son statut objet. Ceci s'explique dans le contexte du travail de Sfard, qui met en avant le rôle que peut jouer la forme opérationnelle d'un concept pour une première introduction de celui-ci. Effectivement, dans leur majorité, les textes des exercices de Terminale portant sur le statut processus de la notion de limite contiennent des indications sur des étapes de calcul de limites d'expressions algébriques (niveau technique de fonctionnement). Par ailleurs, les exercices qui n'indiquent pas le recours à la limite comme outil de résolution posent des questions familières, à savoir étudier la continuité, dérivabilité, construire une tangente, asymptote, une courbe, etc. ou encore étudier la nature d'une suite bien définie. En revanche, on a pu observer, à travers certains exercices concernant l'étude de la convergence d'une suite, une tâche qui pourrait constituer une première approche de la définition formelle de la limite de suite. Citons l'exemple ci-dessous :

On considère la suite U définie sur \mathbb{N} par : $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \sqrt{6 - u_n}$.

1. Montrer que pour tout n de \mathbb{N}^* , $u_n - 2 = \frac{2 - u_{n-1}}{\sqrt{6 - u_{n-1}} + 2}$.

Puis que : $|u_n - 2| \leq \frac{|u_{n-1} - 2|}{2}$.

2. En déduire que pour tout n de \mathbb{N} , $|u_n - 2| \leq \frac{1}{2^n}$.

3. Déterminer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Cependant, même ces exercices plus complexes ne révèlent pas de besoins spécifiques de formalisation dans le domaine de l'analyse réelle : la technique de base est l'encadrement-comparaison et rien n'assure que, pour les élèves, cet exercice est bien une approche de l'aspect généralisateur. De plus, dans une organisation de type processus, les données mathématiques en jeu dans les exercices, même les plus difficiles, sont des fonctions (ou suites) particulières : il n'est jamais demandé de démonstration de propriétés plus générales ou décontextualisées des objets nouveaux introduits (ici les limites).

Cette organisation induit des conséquences d'ordre conceptuel. Si l'on peut s'attendre à des connaissances accrues sur certaines fonctions et les règles du calcul algébrique, il est clair que la conceptualisation sur la notion de limite comme objet ne peut émerger du travail des élèves dans le cadre des tâches prévues. Concevoir la notion de limite

comme objet mathématique suppose d'en maîtriser une définition et d'être capable de le voir comme inséré dans une théorie où il intervient dans la constitution d'autres objets et la validation de propriétés.

Un autre cadre théorique permet de préciser la nature du travail des étudiants, c'est celui des registres de représentations sémiotiques. En effet, un objet mathématique ne peut être accessible qu'à travers ses représentations sémiotiques et son traitement n'est possible que par ces représentations. Or les représentations sémiotiques ne sont pas homogènes dans un même cadre mathématique : pour un travail dans le cadre de l'analyse réelle on peut être amené à utiliser des ostensifs de type algébrique, graphique ou analytique. On est aussi parfois amené à effectuer des conversions entre les registres sémiotiques, conversions congruentes ou non suivant la classification de Duval. Nous avons donc procédé à la classification des tâches selon les registres de représentations qui devraient intervenir dans la solution, en restreignant notre étude aux tâches dont la résolution nécessite une conversion entre registres de représentation sémiotique.

Ce travail nous a permis de faire apparaître les potentialités de traitements et de conversions de registres existant au niveau scolaire. Les données relatives aux activités induisant des conversions de registres de représentations sémiotiques ont montré une large prépondérance des conversions du type algébrique/graphique, toujours pilotées par les énoncés. Les énoncés réclamant ce type de conversion concernent notamment l'interprétation graphique d'un calcul de limite ou à l'inverse la conjecture graphique d'un nombre dérivée, d'une limite éventuelle d'une suite, de l'allure d'une courbe, etc.

II.5 Conclusion de l'étude dans l'enseignement secondaire

Cet état des lieux amène à constater que l'enseignement secondaire ne porte pas l'exigence d'une réelle cohérence théorique des objets qu'il entreprend d'étudier, et que l'étude est limitée à des objets isolés, sur des cas particuliers. Les connaissances sont ainsi essentiellement mises en jeu aux niveaux technique ou mobilisable (Cf. Robert, 1998) ; le travail de conceptualisation favorise un rapport opérationnel à la notion de limite, qui ne peut être plus ambitieux en absence du rapport à l'objet (Cf. Sfard, 1991). Les métaphores culturelles sur les limites sont supposées guider l'*intuition* lorsque les outils de validation font défaut, mais elles ne peuvent prendre en charge l'aspect généralisateur et unificateur. Enfin, le travail de formalisation analytique et de démonstration est quasi absent dans cet environnement, ou il est algorithmique et fortement guidé. De plus, il ne concerne que des fonctions et suites particulières et non des propriétés générales : l'enseignement secondaire ne prend pas en charge la décontextualisation des savoirs introduits.

Ces conclusions rejoignent celles de Bosch, Fonseca et Gascon (2004) sur le fait que l'enseignement secondaire ne propose que des organisations mathématiques locales, non suffisamment reliées entre elles, et ne permettant pas un accès aux relations qu'entretiennent entre elles les notions mathématiques.

Les connaissances construites dans cet environnement pourraient-elles permettre aux élèves d'aborder convenablement l'enseignement de l'analyse réelle à l'université ?

III. L'enseignement de la notion de limite à l'université

III.1 Texte du savoir en Analyse et nouveau contexte du travail des étudiants

Contrairement au lycée, les technologies utilisées dans le cours que nous avons étudié s'inscrivent dans un cadre strictement formel de validation spécifique à l'analyse réelle. L'enseignement à l'université choisit de considérer la notion mathématique en tant que *réalité mathématique objective*, en adoptant le point de vue structurel, ce qui est bien entendu légitime dans des études supérieures de mathématiques.

Ce système est basé sur le registre analytique formel mais comprend, de plus, des caractéristiques bien connues dans les preuves et démonstrations : enchaînements de propriétés et articulation d'énoncés formels, raisonnement par condition suffisante, articulation des connecteurs logiques et des quantificateurs pour énoncer des propriétés portant sur des classes de fonctions (Cf. Bloch (1999, 2000), Chellougui (2003)). Cette spécificité est liée à la généralité des objets manipulés ; un travail possible des élèves dans le domaine de l'analyse réelle ne doit pas se contenter de porter sur des exemples ou sur quelques fonctions exhibées, il doit prendre en charge l'établissement de propriétés générales et le débat sur leur champ de validité.

Pour plusieurs des enseignants de l'université, les étudiants sont supposés fonctionner d'emblée dans le registre analytique formel, et l'institution s'appuie sur une conviction forte de ce que les étudiants devraient pouvoir, dès leur premiers pas à l'université, saisir le sens des concepts dans cet unique registre et procéder tout à la fois à la recherche et à la formulation de solutions correctes dans ce cadre.

Nous avons identifié des attentes de l'institution universitaire par rapport à un certain corpus théorique requis, dont des savoirs et démonstrations de type recherche de l'existence d'un nombre ainsi que des raisonnements mettant l'accent sur le formalisme et le *système spécifique de preuves de l'analyse réelle*¹³. Par rapport au travail du

¹³ Cf. Bloch (2000).

secondaire, l'utilisation du langage formel exige l'intégration peu évidente des connaissances anciennes et leur réorganisation dans les savoirs nouveaux ; ceci nécessite sans aucun doute l'effacement de certaines images anciennes associées au travail antérieur. Les premières représentations pratiques que se forgent les élèves sur les tâches de l'analyse réelle (graphiques, métaphores, algébriques) sont peu compatibles avec les exigences de justification formelle, et le maniement des outils logiques qu'exige la validation en analyse réelle¹⁴.

III.2 Nouvelles attentes : maîtrise de techniques amalgamées et gestion personnelle de l'organisation de la preuve

Alors que les exercices et problèmes présents dans les manuels du lycée, se centrent le plus souvent sur la mise en œuvre de techniques dans des contextes très ciblés, les séries de travaux dirigés que nous avons étudiées mettent en lumière un amalgame de nouvelles techniques. Les exercices proposées dans ces séries appellent à :

- des raisonnements sur des objets généraux telles que la preuve de conjectures ou la recherche de contre-exemples,
- des raisonnements par l'absurde,
- un travail de formalisation qui n'était pas de règle au lycée,
- la nécessité parfois (entièrement à la charge de l'étudiant) de recourir, d'une façon autonome, aux graphiques pour vérifier et découvrir.

De notre point de vue, la transition lycée/université est aussi marquée par l'importance accordée aux tâches complexes et la disparition des tâches graphiques. Pour ce qui est des tâches algorithmiques, nous relevons surtout un développement important des compétences algébriques à travers l'introduction de fonctions nouvelles, comme les fonctions réciproques des fonctions trigonométriques et les fonctions hyperboliques. Concernant l'étude de la convergence d'une suite, nous recensons une seule question où l'expression est inhabituelle (par rapport au vécu antérieur des

étudiants), il s'agit de trouver la limite de la suite u_n de terme général : $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$. Pour

faire ce calcul, il faut d'abord transformer l'écriture en : $\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$, puis simplifier

¹⁴ En particulier, cf. Chellougui (2003).

tous les termes sauf $1 - \frac{1}{n+1}$ et enfin utiliser la technique de factorisation par le terme adéquat.

Comme nous l'avons déjà signalé, il n'existe aucune question qui exige explicitement ou implicitement l'utilisation de techniques relatives aux tâches de nature graphique. En contrepartie, il peut arriver que l'étudiant soit amené par lui-même à effectuer des tracés qualitatifs afin de contrôler le résultat d'un calcul de limite ou d'un développement limité asymptotique. C'est le cas par exemple de l'exercice suivant :

Soit $f :]-1,1[\rightarrow \mathbb{R}$, la fonction donnée par $f(x) = \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \frac{2x+ax^2}{1+x}$.

1. Déterminer le développement limité de f en 0, à l'ordre 3.
2. Discuter suivant la valeur de a , la position de la courbe représentative de f , par rapport à la tangente à l'origine.
3. Préciser les asymptotes à l'infini et la position de la courbe par rapport à ses asymptotes pour la fonction : $f(x) = (x+1)e^{\frac{1}{x-1}}$.

Par ailleurs, concernant la limite d'une suite, nous avons répertorié des exercices dans lesquels un graphique peut simplifier l'exécution, comme la recherche de la limite éventuelle d'une suite récurrente sans que ceci ne soit indiqué par l'énoncé.

Un autre exercice s'inscrit dans le cadre de l'étude d'une suite récurrente ; la fonction choisie étant paramétrée et l'étudiant pourrait vérifier graphiquement des résultats dans des cas particuliers (la suite (x_n) étant définie par $x_0 = I$ et $x_{n+1} = a \sin x_n + b$). Enfin, la validation d'une condition nécessaire à l'existence et l'unicité du point fixe se traduit par l'existence de contre-exemples que l'étudiant pourra trouver par le biais du graphique (dans le cas de fonctions k- lipchitziennes).

Ce qui est remarquable concernant les tâches complexes, c'est le fait que les techniques qui leur sont associées sont dans leur majorité d'une nature différente de celles qui apparaissent au lycée. Ainsi dans les techniques utiles figurent très souvent des développements limités, que les étudiants sont donc supposés pouvoir maîtriser comme connaissances disponibles. On peut classer les exercices faisant appel à ce type de techniques en deux catégories :

- La première catégorie concerne la recherche de limite (en x_0 fini et à l'infini) de fonctions différentes par le biais de développements limités (implicitement demandés

par les énoncés). C'est donc là un entraînement au calcul de développement limité intégrant les thèmes : somme, produit, quotient, composé, etc., et le choix de l'ordre du développement.

- La deuxième catégorie propose des tâches concernant l'étude de branches infinies, l'étude locale d'une courbe paramétrée, la détermination de l'équation d'une asymptote ou tangente, l'étude des positions relatives entre courbe et tangente ou asymptote et l'étude locale de dérivabilité.

Les techniques de raisonnement par l'absurde – nécessitant dans la plupart des cas un travail de formalisation et de recherche de contre-exemples (qui sont aussi inexistants au lycée) – sont proposées de sorte que le choix de les mettre en œuvre est entièrement à la charge de l'étudiant. L'étudiant a donc à gérer une difficulté supplémentaire, il doit être capable de *pressentir la règle adéquate au moment adéquat*. Mais, comme le dit Wittgenstein, il n'y a pas de règle pour dire comment ni quand appliquer la règle, ce n'est que l'expérience des choses qui fixera l'usage de la règle ; or les règles mathématiques ne dérogent pas à cette règle !

Enfin, nous avons pu constater que les techniques correspondant aux tâches complexes sur la nature des suites, qui prenaient une certaine importance au lycée par la reconnaissance de suites spécifiques (reconnaître par exemple qu'une suite est géométrique), disparaissent à l'entrée à l'université en faveur de nouvelles techniques concernant des objets généraux. Ceci s'explique par le fait que :

- ces techniques sont supposées maîtrisées ;
- l'enseignement supérieur n'utilise pas beaucoup de suites spécifiques, il s'occupe plutôt d'énoncer des propriétés générales des suites.

Nous regroupons ces techniques sous le thème 'identifier- reconnaître' (sans que cela soit explicitement formulé dans les énoncés). Dans ces techniques, on trouve le fait de reconnaître une suite de Cauchy, ou deux suites adjacentes, d'identifier des suites extraites, d'utiliser un contre-exemple ou de raisonner par l'absurde.

Tout ceci induit la nécessité de se détacher des activités scolaires secondaires afin d'intégrer un niveau supérieur de l'activité mathématique, incluant la réflexion sur la nature des concepts étudiés et leur reconnaissance sans aide de l'énoncé.

Compte tenu de la variété des difficultés présentées par les tâches proposées, et du peu de temps qui sera par suite consacré à chacune des techniques utiles, il nous semble assez utopique de penser, qu'une véritable routine d'exercices puisse ici s'installer et

permettre une familiarisation suffisante de l'ensemble des étudiants à l'ensemble de ces tâches.

Par ailleurs, les exercices dont les énoncés indiquent le résultat à obtenir ne sont pas pour autant plus facilement exécutables, car ils concernent par exemple des corollaires de théorèmes, comme l'exemple très classique ci-dessous :

En raisonnant par l'absurde montrer que toute fonction continue sur un intervalle fermé borné est uniformément continue sur cet intervalle.

En effet, pour arriver à résoudre cet exercice, l'étudiant est censé connaître les définitions formelles de continuité et de continuité uniforme et avoir compris les différences qu'implique l'ordre des quantificateurs, jongler avec les inégalités, donc maîtriser un degré assez élevé de formalisme analytique : en d'autres termes faire fonctionner des connaissances jusque là nouvelles.

L'étude de suites récurrentes de type $u_{n+1} = f(u_n)$ est proposée sans que l'énoncé ait demandé une étude préalable de la fonction f , et même l'identification de cette fonction f intervenant dans la définition de la suite n'est pas suggérée. C'est là une différence essentielle avec les exercices de Terminale abordant ce type de problème, qui sont, en général, d'abord centrés sur une étude de fonction spécifiée assez complète, l'étude de la suite récurrente associée ne venant qu'en seconde partie. La nécessité d'étudier la fonction f passe donc de connaissance mobilisable à disponible.

En fait, la majorité des activités induisent un choix à réaliser de la part de l'étudiant sans aucune indication explicite : reconnaître la nécessité de distinguer limite à droite et limite à gauche en x_0 fini, identifier l'encadrement adéquat, construire une stratégie (dans ce cas il s'agit de mettre en œuvre plusieurs techniques pour trouver la limite), inventer un contre-exemple, se fixer des paramètres, reconnaître la nécessité d'utiliser un raisonnement par l'absurde, reconnaître la ou les suite(s) extraite(s) pertinente(s), se fixer l'ordre du développement limité adéquat, etc. Nous pointons ici un amalgame de techniques nouvelles dont la mise en œuvre induit une difficulté double pour les étudiants à savoir : *quand et comment* ? Il y a là envers l'étudiant une exigence de prise en charge individuelle et de gestion personnelle des difficultés à un degré non atteint jusque là. Pratiquement l'ensemble des connaissances passe de technique ou mobilisable à disponible.

III.3 Nouvelles exigences d'ordre conceptuel

L'étude que nous avons faite nous a permis de pointer l'intervention d'un nouvel aspect du travail de conceptualisation :

- Apparition d'exercices qui mettent en jeu le statut objet (rapport structurel) de la notion de limite, essentiellement liés à ses aspects unificateur, généralisateur et formalisateur.
- Disparition d'exercices qui demandent une conversion entre les registres de représentations sémiotiques algébrique et graphique – activité coutumière au lycée – cédant la place à des conversions dans le registre analytique formel.

Des tâches mettant en œuvre la définition formelle de la notion de limite apparaissent à travers des études de liens nécessaires/suffisants pour des propriétés de continuité uniforme, en vue de démontrer des inégalités ou encore pour déterminer une limite. Il convient de noter que les tâches proposées exigent de la part de l'étudiant une maîtrise des concepts et des modes de validation, et une capacité d'adaptation importante.

Concernant l'étude des suites, les activités mathématiques attendues incluent la capacité à énoncer des conjectures générales mêlant une nécessité d'adaptation parfaite à la définition formelle de la limite d'une suite. Il s'agit par exemple de montrer que :

Etant donnée une suite $(u_n)_n$ à termes entiers relatifs, $(u_n)_n$ converge si et seulement si $(u_n)_n$ est stationnaire.

Ou encore, de vérifier si chacune des propositions suivantes est vraie ou fausse :

Toute suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.

Toute suite non majorée admet une suite extraite qui tend vers $+\infty$.

Toute suite convergente est bornée.

Par ailleurs, les questions qui induisent l'aspect processus de la notion de limite d'une suite (généralement non indiqué par les énoncés) demandent :

- l'étude algébrique de la convergence de suites données par leur terme général,
- la donnée de contre-exemples particuliers de limites de suites, activité non abordée jusqu'à ce niveau du cursus,
- l'étude d'une suite récurrente, sans qu'aucune indication ne soit donnée sur la fonction associée et sur l'intervalle contenant les éléments de cette suite.

Enfin, la disparition d'exercices qui recourent à une conversion entre les registres de représentations sémiotiques algébrique et graphique (activité coutumière au lycée), montre que l'université ne prend pas en charge les connaissances antérieures des étudiants afin de les développer et de leur trouver une utilité au moins dans la partie heuristique du travail de leur réorganisation en savoirs nouveaux.

IV. Les variables macro-didactiques associées à la transition secondaire / supérieur

Pour donner une vision synthétique des modifications qu'engendre, dans le travail demandé aux étudiants, le passage de l'enseignement du lycée à celui de l'université, nous présentons dans ce paragraphe les variables finalement retenues pour décrire globalement cette transition et leurs modifications dans le passage lycée/université. Ces variables permettent également d'évaluer des organisations mathématiques par rapport à leur adéquation plus ou moins grande enseignement secondaire/enseignement supérieur. Nous proposons dans ce qui suit, quelques commentaires et exemples relatifs aux principales modifications des valeurs des variables.

IV.1 Variables macro- didactiques

Les variables que nous avons finalement retenues comme pertinentes, en fonction des éléments théoriques de notre étude, sont des variables macro-didactiques au sens qu'elles concernent une organisation relativement globale de l'enseignement et non une situation locale d'enseignement d'un nouveau savoir (comme une situation).

VD1 : le degré de formalisation, et tout particulièrement dans les définitions des concepts ;

VD2 : le registre (ou mode) de validation, soit l'algèbre des limites, soit le raisonnement analytique ;

VD3 : le degré de généralisation requis dans les énoncés : faible ou élevé (la tâche proposée est soit un exercice d'application, soit une démonstration d'un énoncé auxiliaire mais général) ;

VD4 : le nombre des nouveaux savoirs introduits dans l'environnement de la limite, comme les développements limités, etc.;

VD5 : le type de tâches, soit complexe, graphique, algorithmique ;

VD6 : le choix des techniques et leur routinisation ou non : usage d'une même technique ou amalgame de techniques dont la responsabilité revient à l'étudiant ;

VD7 : le degré d'autonomie nécessaire : faible ou élevé ;

VD8 : le mode d'intervention de la notion, comme processus ou objet ;

VD9 : le type de conversions utilisé entre registres de représentation ;

Nous pouvons ajouter une variable V0 qui concerne l'introduction de la notion de limite : dans l'enseignement secondaire, il s'agit d'une introduction par des métaphores culturelles, alors que dans le supérieur, c'est par une définition formelle.

Les valeurs que prennent ces variables nous permettent de dégager la nature du partage des responsabilités mathématiques entre professeur et étudiant. Les modifications constatées des valeurs des variables correspondent à des "ruptures" entre les deux ordres d'enseignement. Nous avons pu ainsi catégoriser les tâches proposées dans un certain nombre de domaines de l'étude, ce qui nous a permis de disposer d'information – qualitative ou quantitative – sur la continuité du travail des étudiants entre le secondaire et le supérieur, et sur la nature des ruptures existantes : celles-ci sont-elles progressives et localisées ou constituent-elles une transition globale difficile à gérer par les étudiants ?

IV.2 Les valeurs prises par les variables didactiques et leurs conséquences

IV.2.1 Evolution des valeurs des variables

Le tableau ci-dessous montre à l'évidence que ces variables sont loin d'être des variables *continues*, leurs valeurs entre le lycée et l'université sont dichotomiques et synonymes d'une profonde mutation dans le travail mathématique demandé.

Tableau 1.1 : Variables macro-didactiques

<i>Variable didactique</i>	<i>Enseignement secondaire</i>	<i>Début de université</i>
0. Introduction de la limite	Métaphores	Définition
1. Degré de formalisation	Faible	Elevé
2. Registre de validation	Algèbre des limites	Analyse
3. Degré de généralisation	Aucun	Elevé
4. Introduction de nouveaux savoirs	Importante (mais sans outils théoriques spécifiques de validation)	Importante (avec des outils théoriques spécifiques de validation)
5. Type de tâches	Algorithme, tracé de graphiques, calcul	Recherche et démonstration
6. Choix des techniques	Transparent	Amalgame
7. Degré d'autonomie nécessaire (ou sollicité)	Routines à des niveaux techniques et au plus mobilisables	Peu de routine à des niveaux plutôt disponibles
8. Mode d'intervention de la notion	Processus	Objet
9. Type de conversions entre registres	Algébrique /Graphique	Algébrique /Analytique

L'analyse du tableau permet de noter que le passage de l'enseignement secondaire à l'université s'accompagne de modifications majeures : presque toutes les variables sont modifiées, avec un taux de changement considérable. Les valeurs prises ne montrent presque aucun recouvrement : les étudiants sont confrontés à une révolution globale, aussi bien du travail demandé que des moyens de ce travail.

IV.2.2 D'un travail algorithmique à un travail complexe

VD0 : L'introduction de la notion de limite au secondaire est supposée s'appuyer sur l'*intuition* et des métaphores culturelles, alors qu'à l'université la question de l'existence ou non d'une limite n'est plus philosophique mais entièrement déterminée par la cohérence de la théorie et la puissance du formalisme comme outil de preuve.

VD1 : A l'université le registre analytique formel est introduit d'emblée et les étudiants sont supposés avoir compris son utilité et se mouvoir aisément dans ce registre.

VD2 : A l'entrée à l'université l'usage de la définition de la notion de limite est général, et considéré comme un moyen de preuve habituel ; ceci contraste avec le travail usuel au secondaire, qui porte exclusivement sur des fonctions ou des suites particulières données algébriquement, si bien qu'aucun travail n'est demandé sur des énoncés

généraux. Dans l'enseignement secondaire, on ne procède qu'à des exemplifications de théorèmes sur des fonctions simples ; et encore faut-il remarquer que les théorèmes ont été le plus souvent admis – conformément au programme.

VD3 : L'analyse des énoncés de ce qui est considéré comme des exercices à faire par les étudiants, au secondaire et à l'université, montre qu'au lycée les tâches portent sur des fonctions particulières, données par des formules algébriques, ce qui situe clairement le travail des élèves dans le domaine de l'application à des exemples ; les exercices des séries de travaux dirigés de l'université consistent fréquemment à démontrer des corollaires de théorèmes du cours, dans des cas de propriétés particulières éventuellement (suite majorée, alternée, à valeurs dans \mathbf{Z} ...) mais non dans le cas d'une suite donnée par sa formule. Ceci porte clairement la responsabilité mathématique des étudiants vers l'établissement de résultats de cours, supposés réutilisables dans d'autres cas ; or ce type de responsabilité ne fait partie à aucun moment du contrat habituel de l'élève du secondaire.

VD2, VD5 : A l'université les étudiants sont supposés tenir des raisonnements analytiques : ces raisonnements portent très souvent sur des résultats faisant intervenir la définition de la notion de limite en (ε, η) ou des fonctions possédant telle ou telle propriété. Ces raisonnements comportent généralement une dimension de recherche d'une solution non évidente et l'usage de définitions formelles.

Les modifications dans les valeurs prises par VD5 s'observent particulièrement bien sur des pourcentages : au lycée 52% des tâches sont algorithmiques et 33% concernent des réalisations graphiques ; seuls 14% des exercices figurant dans les manuels sont complexes et comportent une dimension de recherche, encore peut-on douter s'ils sont effectivement donnés à faire aux élèves. Au début de l'enseignement supérieur, nous avons identifié 37% de tâches algorithmiques, pas d'occurrence de tâches graphiques, et 63% de tâches complexes, avec l'usage de nouvelles techniques ou technologies.

VD4 : Il pourrait sembler que la variable VD4 ait subi peu de modifications entre l'enseignement secondaire et l'université. L'introduction de l'analyse réelle s'accompagne, dans les deux cas, d'une augmentation significative des savoirs nouveaux introduits. Cependant la nature de cette augmentation est différente dans les deux institutions :

- Dans l'enseignement secondaire, les savoirs sont présentés à l'aide de métaphores culturelles, et sont donc introduits essentiellement par, a) un nouveau vocabulaire, b) des analogies ou des métaphores, ce qui est pointé comme devant reposer sur l'*intuition* par les programmes et les manuels. Une notion comme celle de limite est donc réduite à son nom, quelques occurrences (limites finies, infinies, en x_0 ou à

l'infini, sur des fonctions polynômes et rationnelles simples, puis sans démonstration sur les fonctions sinus, cosinus, logarithme et exponentielle) et quelques exemples. Les élèves n'ayant pas à prendre en charge sa définition générale, ni le questionnement sur les fonctions ayant une limite ou non, ni ce que signifie cette notion de limite relativement à d'autres savoirs qui lui sont reliés. Il en résulte que, si dans le secondaire il y a une relative importance de savoirs nouveaux désignés dans le programme, dans les faits cela ne s'accompagne pas de la nécessité d'introduire des moyens nouveaux de validation.

- Dans l'enseignement supérieur, les savoirs sont introduits avec tout l'arsenal formel de définition et de preuve. Le savoir introduit est de ce fait très différent : outil général, relié à d'autres savoirs, susceptible d'être remis en jeu pour accéder à un nouveau savoir ou un autre niveau de validation (par exemple les rapports entre limite, taux de variation, dérivée, développement limité, intégrale, etc.).

Il faut donc relativiser la valeur apparemment identique dans les deux colonnes du tableau, que nous avons donnée à VD4.

VD6, VD7 : Les manuels du secondaire proposent des exercices et des problèmes usant la plupart du temps des mêmes techniques, techniques qui deviennent ainsi des routines pour l'élève. De plus, un même exercice est très souvent consacré à une seule technique. A l'université il en va tout autrement : les ensembles d'exercices analysés révèlent l'usage de nombreuses techniques, de plusieurs techniques dans un même problème, les étudiants étant supposés pouvoir faire usage de ce que nous avons appelé un *amalgame de techniques*.

VD8 : A l'université, la notion de limite est en soi un objet de la théorie "analyse" étudié en tant que tel. On observe donc un travail sur la conception structurelle de la notion de limite : ses fonctionnalités dans des problèmes, ses relations avec d'autres objets de la théorie (développements limités, séries, intégrales, etc.), et la validation dans le cadre du système de preuves de l'analyse réelle. Dans l'enseignement secondaire, cet aspect est explicitement absent et, comme nous l'avons déjà remarqué, le travail demandé met essentiellement en jeu l'aspect processus de la notion de limite.

Les résultats de cette étude pointent que le travail demandé en fin du lycée ne permet pas en général la mise en évidence de propriétés mathématiques, au sens où l'on pourrait interroger leur validité, trouver leur domaine d'efficacité, énoncer la propriété "non p" et en déduire des relations entre propriétés "voisines" (par exemple sur l'ordre et la continuité, etc.) et insérer les différentes propriétés dans une théorie.

Cette étude rejoint également la recherche faite dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique (TAD) par Bosch, Fonseca et Gascon (Cf. Bosch, Fonseca et Gascon, 2004). En effet ces auteurs pointent la faible possibilité ouverte, dans l'enseignement secondaire, de transformer des *organisations mathématiques ponctuelles* (OMP), comme l'étude des limites d'une fonction donnée algébriquement en *organisations mathématiques locales* (OML) où les savoirs sont reliés entre eux par les règles de la théorie. Les travaux s'avèrent donc convergents : l'organisation actuelle de l'enseignement mathématique au secondaire n'autorise qu'une "visite guidée" d'un certain nombre de propriétés isolées et ne permet pas de mettre en évidence les liens entre propriétés, entre concepts et la cohérence de l'édifice théorique, même de façon embryonnaire.

VD7, VD9 : Au lycée, les étudiants n'ont presque aucune opportunité de décider de l'usage d'un diagramme ou d'un graphique pour aborder une situation de recherche, et ceci quelle que puisse être l'utilité d'un tel usage dans les problèmes intégratifs concernant le concept de limite. Maschietto (2001) a pointé la fonctionnalité des représentations graphiques pour la résolution de problèmes d'analyse réelle au début de l'université. Maschietto relève ainsi les difficultés des étudiants à se saisir de diagrammes, schémas, graphiques, comme supports de recherche. Il faut noter que les étudiants doivent compter sur eux seuls s'ils veulent développer ce type de compétences et en poursuivre l'usage à leur entrée à l'université : en effet l'institution n'encourage et n'aide aucunement le développement des compétences heuristiques graphiques.

VD9 : L'université n'exploite pas non plus les possibilités ouvertes par les changements de registres de représentation, et on note même la disparition de tâches de conversion entre registre algébrique et registre graphique, qui étaient pourtant relativement courantes au secondaire, même si elles avaient tendance à n'être exploitées que dans un sens : de l'algébrique vers le graphique¹⁵.

V. Nouvelles questions et perspectives

V.1 Introduction

L'étude précédemment faite des variables macro-didactiques de la transition lycée/université en analyse réelle¹⁶ a mis en évidence les multiples composantes contribuant à creuser l'écart entre l'enseignement secondaire et l'enseignement supérieur,

¹⁵ On peut constater là encore la convergence des travaux faits dans le cadre de la TAD et celui de la TSD : Bloch (2005) a préconisé des conversions dans les deux sens, et même travaillé sur les *situations retournées*, alors que Bosch et al. (2004) recommandent l'usage de *tâches inverses*.

et à rendre très difficile le travail des étudiants confrontés à des modifications majeures dans toutes les dimensions de leur travail et dans les connaissances en jeu.

Le bilan des premières études réalisées nous amène à reprendre notre formulation du DEA : la transition lycée/université en analyse réelle s'accompagne de modifications majeures dans la nature du travail mathématique et des connaissances en jeu, modifications susceptibles d'induire un changement du contrat didactique difficile à saisir de la part des étudiants et à gérer de la part de l'enseignant.

La question se pose des moyens que se donne ou pourrait se donner l'enseignement des mathématiques à l'entrée à l'université pour gérer des variations aussi importantes et permettre aux étudiants d'accéder aux objets de l'analyse réelle¹⁷.

La recherche qui suit a pour but de reprendre cette question en réintroduisant certaines questions épistémologiques, en approfondissant l'étude du travail des étudiants dans différentes conditions, et en proposant une ingénierie basée sur deux situations à dimension a-didactique dont nous situons la construction par rapport à certaines des variables macro-didactiques de la transition.

V.2 Premiers questionnements et problématisation

Comment penser l'enseignement de l'analyse réelle à l'entrée à l'université dans une perspective d'adaptation en amont et en aval ? En particulier, comment envisager l'articulation de l'analyse réelle presque algébrique du lycée et de l'analyse théorique de l'université ?

La démarche de formalisation en analyse réelle à l'entrée à l'université ne peut être considérée comme jouant un rôle simplificateur, d'un point de vue didactique, que si l'aspect généralisateur peut en être déduit et des théorèmes facilitant le travail ultérieur prennent place dans les outils disponibles. Dans ces conditions, les choix faits ne peuvent se limiter à déterminer la "dose de formel" dans les premiers apprentissages : il est essentiel de penser les situations qui permettent à l'étudiant d'appréhender les gains méthodologiques ainsi conquis. De plus, l'organisation amalgamée des savoirs de l'analyse réelle devrait obliger à prévoir le champ de problèmes que les étudiants vont pouvoir rencontrer et sur lequel ils vont pouvoir appliquer les techniques enseignées et perfectionner leur compréhension des savoirs de l'analyse réelle. Les situations

¹⁶ Rappelons qu'on s'est restreint à l'environnement de la notion de limite.

¹⁷ On peut aussi – même si ce n'est pas le but de cette thèse – s'interroger sur le rôle du professeur : il s'avère particulièrement difficile, comment peut-il enseigner en s'appuyant sur des connaissances antérieures actuellement inadaptées ?

rencontrées doivent aussi prévoir la reprise et l'approfondissement des connaissances antérieures même si celles-ci ne sont pas directement utilisables ou performantes pour l'étude prévue à l'université.

Les enjeux sont donc importants et il sera certainement difficile de cibler des situations qui puissent prendre en charge une part significative de ces considérations.

D'où les questionnements qui guident cette recherche :

1. A quelles conditions, en termes de connaissances et travail des étudiants, le formalisme peut-il jouer son rôle simplificateur en analyse réelle à l'entrée à l'université ?
2. Les situations d'accès à l'analyse formelle contiennent-elles des connaissances qui pourraient être en partie, travaillées dans les dernières années du lycée, afin d'assurer une meilleure transition secondaire/supérieur ?
3. Dans la préface de son calcul infinitésimal (1980) Dieudonné pointe largement les spécificités du travail en analyse réelle :

"Pour acquérir le sens de l'Analyse indispensable jusque dans les spéculations les plus abstraites, il faut avoir appris à distinguer ce qui est grand de ce qui est petit, ce qui est prépondérant de ce qui est négligeable [...] et on pourrait les résumer en trois mots, approcher, majorer, minorer [...]. Avoir le sens de l'Analyse, c'est avoir acquis une idée intuitive des opérations de calcul infinitésimal, [...] ; mais l'épreuve qui assure que l'on est vraiment parvenu à ce stade, c'est de savoir donner des définitions précises des notions que l'on emploie, et s'en servir pour donner des démonstrations correctes ; car ces dernières ne sont jamais, en définitive qu'une mise en forme de l'intuition." (Cf. Dieudonné, 1980)

Or, *Approcher, majorer, minorer* suppose d'engager l'approche de l'analyse réelle en s'appuyant au moins en partie sur des procédures numériques : Comment peut-on assurer cette approche, étant données les manques dans les connaissances des étudiants (constatées dans plusieurs travaux) à propos de la structure de \mathbb{R} ?

4. " En 1821, Cauchy publie un Cours d'analyse réelle, dans lequel il exige une rigueur inhabituelle à son époque. Les questions sont les suivantes :
 - Qu'est-ce véritablement qu'une dérivée ? Réponse : une limite.
 - Qu'est-ce véritablement qu'une intégrale ? Réponse : une limite.

- Qu'est-ce véritablement qu'une série infinie $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$? Réponse : une limite.

Il reste à savoir :

- Qu'est-ce qu'une limite ? Réponse : un nombre.

Et nous arrivons ainsi à l'ultime question :

- *Qu'est-ce qu'un nombre ?*" (Cf. Haier et al., 2000, p. 170)

Ces considérations historique et didactique nous portent à choisir de ne pas évacuer le problème du numérique et de la structure de \mathbb{R} , mais de le mettre au cœur des problèmes mathématiques et des situations qui doivent être travaillées par les étudiants.

5. Dans ce cas, quel milieu est susceptible de favoriser l'accès des étudiants à l'analyse réelle sachant qu'on lui assigne trois objectifs :

- reprendre et approfondir les connaissances sur \mathbb{R} ;
- donner une dimension d'expérience aux notions enseignées ;
- revenir à la dimension formelle.

Ces questions d'ordre général vont devoir être précisées, notamment dans la perspective de la construction de situations "ad hoc".

En particulier :

6. Comment va se faire l'articulation numérique/formelle ?

7. Comment se positionner par rapport à d'autres travaux qui concernent des situations de l'analyse réelle en fin du lycée et en début d'université ? Notamment, quel peut être l'apport du registre graphique ; l'appui sur des visualisations comme dans le cas du flocon de Von Koch (Cf. Bloch, 2000) et les limites de cette visualisation ?

La situation du flocon étant construite pour des élèves de fin du secondaire ; elle prévoyait un accès limité à la formalisation, et pas de généralisation. Les situations que nous projetons doivent donc, en tout état de cause, être plus orientées sur les savoirs de l'enseignement supérieur. Ceci n'exclut pas un recours à l'intuition via le graphique et/ou le géométrique.

V.3 Choix méthodologiques

Avant de tester l'ingénierie, nous avons pensé nécessaire de produire une étude des conditions "ordinaires" de l'enseignement supérieur, même si elles sont relativement

bien connues. Ce que nous en attendons en particulier, c'est une meilleure définition du travail possible des étudiants dans des conditions classiques pour cerner de façon plus précise l'espace qu'il reste à investir dans une ingénierie et surtout les responsabilités mathématiques qui peuvent être dévolues aux étudiants.

L'ingénierie fera appel à des situations construites à partir de questions de limites avec une entrée numérique (c'est-à-dire dans leur lien avec les nombres réels). Son élaboration s'opère suivant le schéma de la TSD (Cf. Bloch, 2002) :

- Le milieu théorique des situations envisagées est construit d'un point de vue épistémologique en incorporant les jeux possibles des actants dans telles situations.
- Le milieu expérimental a priori est celui qui sera proposé aux étudiants avec les valeurs des variables didactiques fixées.

Dans une théorie complexe comme l'analyse réelle, une situation ou même plusieurs ne peuvent, à elles seules, être porteuses de toutes les connaissances visées. Nous pensons raisonnable de construire des situations à dimension a-didactique plutôt que globalement a-didactique (Bloch, 1999) et nous aurons donc à analyser ce qui peut être dévolu aux étudiants et ce qui restera à la charge de la situation ou du professeur, ceci pour chacune des situations construites.

V.4 Organisation de la thèse

Nous décomposons notre travail en trois parties.

Dans la première partie, nous étudions quelques aspects mathématiques de l'enseignement de l'analyse réelle (structure de \mathbb{R} ; suite ; limite et fonction) dans la perspective des situations que nous proposons d'élaborer et d'expérimenter. Cette étude comporte une enquête historique, et une étude de quelques organisations classiques et alternatives d'enseignement de l'analyse réelle.

La deuxième partie comporte une étude du terrain à deux niveaux :

1. Les pratiques des enseignants de mathématiques à l'entrée à l'université, par le biais d'un questionnaire posé à des enseignants de première année.
2. Ces pratiques font également l'objet d'une observation où nous tentons de dégager la gestion de l'enseignant et le travail effectif des étudiants.

Dans le cadre très limité de cette étude (observation des classes d'un seul enseignant), nous mettons en relation l'analyse des deux corpus expérimentaux pour dégager une définition plus précise du travail des étudiants dans le contrat classique.

La troisième partie rend compte des situations construites et de leur expérimentation dans deux classes de première année mathématiques-informatique à la faculté des sciences de Tunis. L'analyse du corpus expérimental – transcriptions, travail des étudiants, nous permettra de conclure sur les possibilités ouvertes dans un milieu tel que celui que nous avons installé.

CHAPITRE 2

Contexte théorique relatif aux objets de l'Analyse

I. Introduction

Dans ce chapitre, nous nous proposons de :

- Mener une enquête sur la genèse historique des objets de l'analyse réelle envisagés pour l'enseignement (nombres réels, suites, limites et fonctions) et de leurs manifestations anciennes ou contemporaine.
- Faire une étude des difficultés que pourraient rencontrer des étudiants en classe d'analyse réelle, ainsi que de certaines alternatives d'enseignement de l'analyse réelle.

M. Artigue (1990) a pointé la pertinence et la fonction de vigilance d'une enquête historique préalable à la construction d'une ingénierie. Selon Artigue, la nécessité d'une telle étude pour le didacticien est de se rendre compte que les problèmes de fondement ne sont pas toujours pris en compte dans l'enseignement des mathématiques. Or les problèmes qui ont motivé l'introduction ou l'évolution d'un savoir sont *constitutifs de la signification de ce savoir*. Confronté à des recherches de modèles d'enseignement, le chercheur en didactique est nécessairement dans *une quête ininterrompue de sens*. Artigue avance l'exemple de l'analyse réelle en ces termes :

"L'exemple de l'Analyse est à ce titre encore frappant : ses fondements ne se mettent en place qu'après des siècles d'utilisation, la recherche sur les fondements étant d'ailleurs tout autant motivée par le besoin de transmettre la science que par les besoins issus du développement scientifique."
(Artigue, 1990, p. 244)

Dans le cadre de cette recherche, l'enquête historique est nécessaire pour la construction de l'ingénierie. Néanmoins, compte tenu d'une réalité didactique, elle ne manque pas de nous montrer son insuffisance, comme l'ont montré les turbulences de la période des "mathématiques modernes". Une étude complémentaire des difficultés possibles des étudiants, des organisations classiques et alternatives proposées pour l'enseignement s'avère nécessaire.

II. L'Analyse au fil de l'histoire à travers une question de nombres

Selon Dieudonné (1980), les problèmes d'approximation et de limites sont à l'origine de la construction de l'analyse moderne. Ce point de vue, appuyé par les préoccupations de Cauchy que nous avons développées dans le dernier paragraphe du chapitre 1, nous conforte dans l'idée que l'étude de la genèse et de l'évolution des méthodes numériques

d'approximations de nombres réels devra nous aider à saisir le processus de construction des savoirs de l'analyse réelle. Nous rejoignons de la sorte l'idée explicitée par Bruter (2000) "*La résolution des équations numériques reste une œuvre inachevée des mathématiques, et l'un des moteurs de son développement.*" (Bruter, 2000, p. 105).

Plus précisément et à travers l'étude de la genèse et de l'évolution des méthodes numériques d'approximation de nombres réels, nous nous proposons de :

1. Identifier les caractéristiques épistémologiques (ou spécificités) de l'analyse réelle.
2. Identifier, parmi ces caractéristiques, des enjeux qui pourraient se constituer en enjeux didactiques.

Les méthodes que nous avons étudiées traitent de questions et de techniques qui portent pour l'essentiel sur des procédés d'approximations successives de nombres. C'est le cas des méthodes d'extractions des racines $n^{\text{ième}}$ de nombre réel positif et les méthodes d'approximations des solutions d'équations. Nous avons été de plus amenées à compléter l'étude par la méthode dite d'exhaustion (ou "calcul" de π).

Dans tous les cas, il s'agit de :

- Interroger les limites théoriques historiquement "imposées" à ces méthodes. En effet, l'absence de prise en compte de résultats théoriques conduit à des manques au niveau de la validation ; la stabilité de l'édifice théorique n'était pas une préoccupation et n'a été assurée que très tard (Cf. Dhombres, 1978).
- Identifier les motivations liées à la genèse d'une méthode ou d'une autre, sachant que l'accent sera mis sur des préoccupations explicitées comme étant intrinsèques aux nombres.

Avant d'entamer l'étude des méthodes d'approximations successives que nous visons dans cette recherche, nous décrivons succinctement dans ce qui suit, le contexte historique lié à la notion de nombre.

II.1 Contexte historique : la notion de nombre

Les tablettes Babyloniennes étudiées par les historiens se décomposent en deux classes. Dans la première classe, on retrouve des tables de valeurs numériques donnant les résultats de plusieurs opérations (telles que les tables sexagésimales de réciproques, de carrées, de cubes, de racines carrées, de racines cubiques ou d'inverses). La deuxième classe comporte des énoncés de problèmes numériques souvent liés la vie quotidienne, des problèmes géométriques motivés par des exigences de la vie pratique

telles que la fabrication d'objets, la construction d'habitations, le calcul des aires de champs, etc., et enfin de problèmes liés à l'astronomie tels que ceux où il est question de dresser les éphémérides d'un corps céleste. Certains parmi ces problèmes étant accompagnés de leurs solutions.

Ces exigences de la vie pratique ont amené les scribes babyloniens à développer des techniques de calcul ou de détermination de valeur approchées de nombres tels que $\sqrt{2}$ ou π .

Dans tous les cas, les historiens s'accordent sur le fait que :

- Les procédés employés, qui sont exprimés sous forme d'une suite de règles à appliquer, ne présentent aucune justification.
- Les seuls nombres intervenant dans les énoncés sont des nombres positifs exprimables d'une façon finie en numération sexagésimale.

A l'instar des tablettes babyloniennes, les papyrus de l'Égypte ancienne (comme le papyrus Rhind et le papyrus de Moscou) comportent des problèmes essentiellement liés au contexte socio-économique de l'époque. Cependant les nombres utilisés sont exprimés dans le système décimal sans usage de la position et sont uniquement des entiers, des fractions unitaires et la fraction $2/3$ représentée par un symbole particulier¹⁸. De plus, ces papyrus ne comportent pas de calculs de valeurs approchées de nombres.

Si les Babyloniens (-1800 .: -1500) se contentaient de valeurs approchées de nombres tels que $\sqrt{2}$ sans se poser la question du résultat *exact* (c'est-à-dire d'un résultat exprimable dans le système de numération dont il est fait usage), il n'en était pas ainsi pour les grecs qui se sont penchés explicitement depuis les pythagoriciens sur le problème de l'incommensurabilité de la diagonale d'un carré :

"Posée au niveau des calculs de valeurs approchées, puis dans le contexte musical, enfin dans le contexte géométrique à propos de la diagonale du carré, la question de $\sqrt{2}$ revenait à se demander : est-il vrai, si l'on prend le côté du carré pour unité de mesure, que la diagonale connue par des approximations de $\sqrt{2}$, n'a pas d'expression exacte par un rapport numérique." (Caveing, 1998, p. 123)

Les Pythagoriciens annoncent une rupture avec le système sexagésimal des babyloniens¹⁹, où seuls les nombres positifs exprimables d'une façon finie en

¹⁸ Cf. Caveing (1994), pour plus de précisions.

¹⁹ Dont l'usage se perpétua cependant en astronomie.

numération sexagésimale sont autorisés. La non séparation des domaines géométrique, physique et numérique chez les premiers pythagoriciens va faire apparaître comme contradictoire la découverte des grandeurs incommensurables.

L'incommensurabilité montre la nécessité d'admettre l'existence de grandeurs qui ne s'expriment pas comme rapports de grandeurs et oblige les grecs à repenser l'organisation des mathématiques. Leur choix a consisté à séparer le domaine de l'arithmétique qui traite des nombres comme grandeurs discrètes et le domaine des grandeurs continues dont la géométrie est le modèle.

La plus ancienne preuve de l'incommensurabilité de $\sqrt{2}$ avec 1 connue des pythagoriciens, figure dans les textes d'Aristote (-384 .: -322), qui affirme que si la diagonale du carré était commensurable avec le côté, alors *un même nombre serait à la fois pair et impair*. La question de la généralisation possible de cette procédure pour d'autres irrationnels de la même forme a fait l'objet de plusieurs études. De plus, Théodore de Cyrène (-460 .: -369) utilisait une procédure générale, sans la révéler, pour démontrer l'incommensurabilité à un, des racines carrées de 3, 5, ... 17. Signalons que dans ces cas l'argument de parité utilisé pour $\sqrt{2}$ n'est plus fonctionnelle (Cf. Hardy et al. (1968), Dhombres (1978)).

A côté du développement de l'art de la maïeutique²⁰, la découverte des grandeurs incommensurables est l'un des facteurs qui a marqué l'apparition des 13 livres des *Eléments* d'Euclide²¹ (vers -300).

Les perspectives euclidiennes axent fondamentalement sur deux démarches :

- partir d'énoncés de base explicités et en déduire d'autres énoncés par des règles qui en assurent le caractère de nécessité à partir des exposés de départ ;
- comparer, calculer des rapports de grandeurs²².

Dans la Grèce classique, les éléments d'Euclide ont influencé et joué un rôle fondamental dans la conception du nombre réel (positif) en tant que rapport de grandeurs²³.

²⁰ Elle est définie comme l'art de découvrir des contradictions dans les conséquences des hypothèses admises par l'interlocuteur, dont le précurseur est semble-t-il Aristote. A la maïeutique est restée attachée le nom de Zénon et le paradoxe d'Achille et de la tortue.

²¹ Cinq livres portent sur la géométrie et les autres sur l'arithmétique et les proportions mais dans un langage inspiré par des analogies géométriques.

²² Les historiens parlent de grandeur abstraite partant du fait que cet objet comporte une indétermination quantitative (absence d'unité) et une indétermination qualitative (même si en évoquant des grandeurs de même espèce, Euclide renvoie à des longueurs, aires, volumes).

²³ Cf. Dieudonné (1978), pour plus de détails.

C'est dans le livre 5, qu'Euclide établit la théorie des rapports de grandeurs en contournant le problème des grandeurs incommensurables (et le problème de l'infini) par la définition 5 appelée aujourd'hui axiome d'Archimède (Cf. Dhombres, 1978)²⁴.

Euclide fournit dans son livre 10, une classification des grandeurs incommensurables quadratiques et biquadratiques. Cette classification est devenue nécessaire en raison de la grande quantité de grandeurs incommensurables qu'occasionnaient les constructions géométriques.

Dans la proposition 2 de son livre 7, Euclide développe l'Algorithme, portant son nom de recherche du PGCD de deux entiers, que nous présentons ci-dessous.

Soit deux entiers naturels a_1 et a_2 tels que $a_2 < a_1$, on écrit

$$a_1 = n_1 a_2 + a_3, \quad 0 \leq a_3 < a_2, \quad \text{où } n_1 \text{ et } a_3 \text{ sont des entiers naturels ;}$$

$$a_2 = n_2 a_3 + a_4, \quad 0 \leq a_4 < a_3, \quad \text{où } n_2 \text{ et } a_4 \text{ sont des entiers naturels ;}$$

$$a_p = n_p a_{p+1} + a_{p+2}, \quad 0 \leq a_{p+2} < a_{p+1} \quad \text{où } n_p \text{ et } a_{p+2} \text{ sont des entiers naturels ;}$$

Le procédé s'arrête au bout d'un nombre fini d'étapes et la dernière étape fournit un reste nul. Le PGCD de a_1 et a_2 est alors le dernier reste non nul.

Dans la proposition 2 du livre 10, l'algorithme lui-même est utilisé pour des grandeurs a_1 et a_2 commensurables ou non. Le procédé est appelé antiphérèse : s'il s'arrête on est en présence de deux grandeurs commensurables, sinon les deux grandeurs en question sont incommensurables. La proposition 2 du livre 10 s'énonce ainsi : *Si deux grandeurs inégales (proposées) la plus petite étant retranchée de la plus grande de façon réitérée et en alternance, le dernier reste ne mesure jamais le reste précédent, les grandeurs seront incommensurables.*

La démonstration qui a été établie pour cette proposition repose sur la proposition 1 du même livre : *deux grandeurs inégales étant proposées, si l'on retranche de la plus grande une partie plus grande que sa moitié, si l'on retranche du reste une partie plus grande que sa moitié, et si l'on fait toujours la même chose, il restera une certaine grandeur qui sera plus petite que la plus petite des grandeurs proposées.* Cette proposition suppose à son tour, admis l'axiome d'Archimède.

²⁴ Mais il y explicite très peu de grandeurs incommensurables, appelées parfois grandeurs archimédiennes.

L'usage de l'argument reposant sur l'antiphérèse de la diagonale d'un carré de côté 1 permet de valider l'incommensurabilité de $\sqrt{2}$ et 1. Nous le traduisons en langage actuel comme ci-dessous.

Dans le triangle ABC rectangle isocèle en A, de côté 1, on considère le point A_1 du segment [BC] tel que $A_1C = 1$. La perpendiculaire à la droite (BC) en A_1 coupe le segment [AB] au point C_1 .

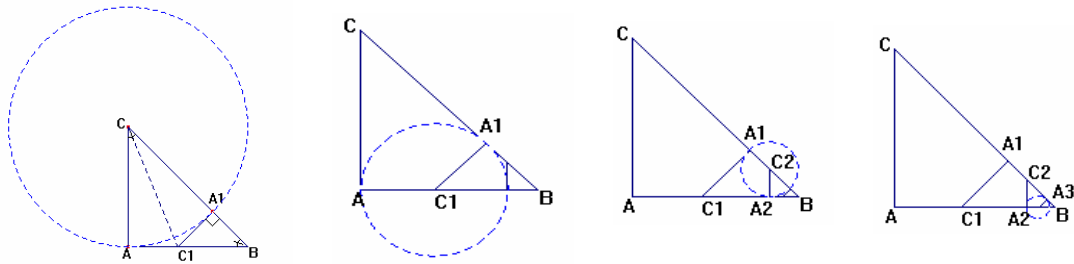


Fig. 2.1 : Antiphérèse de $\sqrt{2}$

On déduit du fait que les triangles AC_1C et A_1C_1C sont isométriques que $AC_1 = A_1C_1 = A_1B$.

Dans le triangle A_1BC_1 rectangle isocèle en A_1 , on considère le point A_2 du segment $[BC_1]$ tel que $A_2C_1 = A_1C_1$. La perpendiculaire à la droite (BC_1) en A_2 coupe le segment $[A_1B]$ au point C_2 . On en déduit de la même façon que $A_1C_2 = A_2C_2 = A_2B$.

On réitère les mêmes configurations à l'ordre n ($n \geq 2$) et on obtient à chaque fois un triangle A_nC_nB rectangle et isocèle en A_n . Le processus d'itération ne s'arrête jamais car sinon on obtiendrait un triangle A_nC_nB rectangle équilatéral.

L'argument de l'antiphérèse nous porte comme le dit Bruter (2000) *vers l'horizon peu précis de l'infini*.

Signalons qu'en établissant le procédé de l'antiphérèse, Euclide ne cherchait point à approcher des grandeurs incommensurables mais à prouver l'incommensurabilité. Ce n'est que plus tard que ce procédé a été utilisé pour approcher la racine carrée d'un entier naturel, non carré parfait.

A la suite des Grecs, l'étude des nombres et des objets infinitésimaux a représenté une part essentielle de la recherche chez les mathématiciens arabes. Le père de l'algèbre est incontestablement Al Khawarizmi (+780. : +850), c'est à son honneur que la

terminologie *Algèbre*²⁵ a été adoptée. Dans l'un de ses deux traités les plus décisifs (celui d'arithmétique, le second est un traité d'algèbre) est exposé pour la première fois le système décimal de numération avec usage du zéro, dans un langage complètement rhétorique. A la fin de son ouvrage de 1172 (que nous reprenons plus loin), As-Samaw'al (+1130.+.1174) est le premier connu à utiliser l'écriture décimale de position pour les nombres entiers et fractionnaires (positifs).

L'algèbre naissante utilisait les rationnels positifs. A partir d'Abu Kamil (+850.+.930), disciple d'Al Khawarizmi, et jusqu'à As-Samaw'al, les nombres irrationnels sont devenus "[...] un objet à part entière de l'algèbre et de l'arithmétique : grandeurs géométriques incommensurables et quantité numérique irrationnelle ont tendu à se confondre." (Dahan-Dalmedico et Peiffer, 1986, p. 101).

Jusqu'au milieu du XIX^e siècle et avant la crise des fondements, la notion de nombre repose sur la conception du nombre réel positif en tant que rapport de grandeurs :

"Entre l'apport d'Eudoxe, dont Platon fut l'élève en mathématiques, la construction euclidienne reprenant sans doute en partie au moins l'œuvre d'Eudoxe, et la fin du XIX^e siècle, aucun progrès significatif ne sera fait en matière de construction des irrationnels." (Bruter, 2000, p. 102)

Parallèlement à l'évolution de la conception du nombre, nous assistons aussi à une évolution dans les procédés de détermination de valeurs approchées de ces nombres. C'est particulièrement le cas des méthodes d'extractions des racines $n^{\text{ième}}$ de nombre réel positif et les méthodes d'approximations des solutions d'équations.

II.2 Extractions de racines $n^{\text{ième}}$ de nombres

II.2.1 Procédés babyloniens

"Si dans les documents égyptiens de bonne époque on ne trouve pas trace de calculs de valeurs approchées de racines irrationnelles, il n'en n'est pas de même dans les tablettes babyloniennes. Cela ne peut surprendre, les calculs égyptiens étant orientés par la recherche de proportions numériques, tandis qu'au contraire l'activité mathématique des babyloniens se caractérise par la présence constante d'un calcul du second degré." (Caveing, 1998, p.21)

²⁵ En référence à son œuvre Al Mokhtassar fil Jabr wal Muqabala (+825).

Il semblerait que pour déterminer des solutions d'équations du type $x^2 = a$ ou $x^3 = a$, les calculateurs babyloniens usaient des tables sexagésimales de réciproques, des carrées et des cubes. La question se pose, du procédé utilisé dans le cas où la valeur de la racine en question ne figure pas dans leurs tables.

Dans une tablette babylonienne (YBC 7289) datant d'environ -1700, on peut lire après transcription en base 10 puisque l'original est rédigé en base 60 que l'équivalent de $\sqrt{2}$ est 1,414215²⁶, valeur qui diffère de moins de 10^{-5} de sa valeur exacte. La nature géométrique de la tablette traduit des préoccupations liées à la recherche du côté d'un carré d'aire égale à 2. A la suite de la découverte de cette tablette, les historiens ont formulé divers commentaires concernant le procédé utilisé pour aboutir à la valeur approchée de $\sqrt{2}$.

Partant du fait que les scribes babyloniens de l'époque sont familiers de la technique appelée *application des aires* validée par visualisation géométrique, Caveing (1998) postule pour l'usage d'un procédé itératif fondé sur deux formules d'approximations (respectivement par défaut et par excès) de la racine carrée d'un entier naturel N non carré parfait.

Soit a un nombre positif et b un nombre pouvant être négatif ou bien positif.

On considère une première valeur approchée a_0 de \sqrt{N} , de sorte que $\sqrt{N} = a_0 + b_0$ et $|b_0| \ll a_0$ (c'est-à-dire que a_0 est une valeur approchée par excès ou par défaut de \sqrt{N}).

En écrivant $N = (a_0 + b_0)^2$ avec $|b_0| \ll a_0$, il est possible de négliger b_0^2 de sorte que $N \approx a_0^2 + 2a_0b_0$. On en déduit alors que le nombre $a_1 = a_0 + \frac{r_0}{2a_0}$ peut être considéré comme une valeur approchée de \sqrt{N} , où $r_0 = N - a_0^2$.

En écrivant $\sqrt{N} = a_1 + b_1$ et en négligeant b_1^2 , le nombre $a_2 = a_1 + \frac{r_1}{2a_1}$ peut être considéré comme une nouvelle valeur approchée de \sqrt{N} , où $r_1 = N - a_1^2$.

²⁶ Il s'agit du tracé d'un carré avec ses diagonales, avec les mesures des segments et accompagné d'une valeur approchée de $\sqrt{2}$ écrite en système sexagésimal.

En procédant de proche en proche, on obtient à l'ordre n , une valeur approchée de \sqrt{N} de la forme $a_n = a_{n-1} + \frac{r_{n-1}}{2a_{n-1}}$ ou encore $a_n = a_0 + \frac{r_0}{2a_0} + \frac{r_1}{2a_1} + \frac{r_2}{2a_2} + \dots + \frac{r_{n-1}}{2a_{n-1}}$.

En prenant $a_0 = 1$, Caveing (1998) retrouve les valeurs babyloniennes de $\sqrt{2}$.

Des transformations arithmétiques permettent d'établir que $a_n = \frac{1}{2} \left(a_{n-1} + \frac{N}{a_{n-1}} \right)$, et l'on retrouve ainsi la formule de récurrence utilisée dans le procédé itératif de Héron (vers +100)²⁷.

En commentant la tablette IM 52301/3, datant de la première dynastie babylonienne, Bruins (1953)²⁸ montre que les babyloniens se sont aidés de la configuration géométrique d'un carré pour aboutir à la formule d'approximation $\sqrt{N} \approx a + \frac{N-a^2}{2a}$.

En partant d'un carré d'aire N , dont on cherche le côté \sqrt{N} , on considère a une première approximation par défaut de \sqrt{N} et on note $h = \frac{\sqrt{N} - a}{2}$.

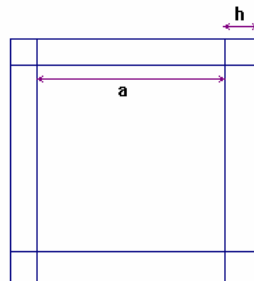


Fig. 2.1 : Carré d'aire N

Le scribe néglige les aires des quatre carrés obtenus aux quatre extrémités. En considérant $\frac{N-a^2}{4}$ comme aire approchée de chaque rectangle construit sur chaque côté, il en déduit que $\frac{N-a^2}{4a}$ est une valeur approchée de h et par suite que le nombre $a + \frac{N-a^2}{2a}$ peut être considéré comme une valeur approchée de \sqrt{N} .

²⁷ Que nous développons plus loin.

²⁸ Cité dans Caveing (1998).

En dépit du fait que le procédé de réitération des formules d'approximations n'est pas explicitement indiqué dans les tablettes babyloniennes, Caveing (1998) affirme que ces réitérations ont bien eu lieu et que le choix de s'arrêter à un ordre bien déterminé plutôt qu'à un autre réside dans la possibilité d'écrire le résultat de l'itération dans la base 60 " [...] puisque 408 contient le facteur 17 qui n'est pas diviseur de la base 60 : les textes se contentent donc de la valeur sexagésimale approchée 1;24,51,10." (Caveing, 1998, p. 22).

II.2.2 La méthode de Héron (vers +100)

Dans son traité intitulé *Métriques*, Héron d'Alexandrie (vers +100) présente le calcul approché de $\sqrt{720}$, et c'est semble-t-il le premier texte connu, dans lequel on retrouve explicitement le procédé des approximations successives.

Interprété dans le langage actuel, Héron détermine l'entier naturel a_0 , tel que a_0^2 soit le plus petit entier vérifiant $a_0^2 > 720$. Soit donc $a_0 = 27$.

De la double inégalité $\frac{720}{27} < \sqrt{720} < 27$ (car $\frac{1}{27} < \frac{1}{\sqrt{720}}$), Héron considère une nouvelle valeur approchée de $\sqrt{720}$ qui n'est autre que la moyenne arithmétique $a_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{720}{27} + 27 \right)$ de $\frac{720}{27}$ et 27.

Puis, il calcule $720 - a_1^2$ et se propose de réduire cette différence en procédant pour a_1 de la même façon que pour a_0 . Héron considère une nouvelle valeur approchée de $\sqrt{720}$, soit $a_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{720}{a_1} + a_1 \right)$ et se contente de cette deuxième itération après avoir vérifié que $720 - a_2^2 < 720 - a_1^2$.

Le procédé est fondé sur l'idée que si a est une valeur approchée par excès de $\sqrt{720}$, alors $\frac{\sqrt{720}}{a}$ en est une valeur approchée par défaut et alternativement et par suite la moyenne arithmétique de ces deux valeurs est une meilleure approximation de $\sqrt{720}$.

Toutefois à la suite de la découverte des *Métriques*, une controverse est née quant à l'usage bien avant Héron de la méthode dite de Héron. En invoquant l'argument géométrique, Caveing (1998) n'écarte pas l'usage de cette méthode par les babyloniens.

En partant d'un carré ABCD d'aire N, on considère un carré AGJI, de côté a_0 de sorte que a_0 soit une "bonne" approximation par défaut de \sqrt{N} . Puis, en négligeant le petit carré de sommet C (hachuré sur la figure), le rectangle EFGA est d'aire à peu près égale à N. Comme $AD = \frac{1}{2}(AI + AE)$, on obtient que $a_1 = \frac{1}{2}\left(a_0 + \frac{N}{a_0}\right)$ est une nouvelle valeur approchée de \sqrt{N} . Si l'on postule pour une éventuelle itération de ce procédé, on construit un carré de côté a_1 , puis en procédant de la même façon que précédemment, on obtient une nouvelle valeur approchée de \sqrt{N} , soit $a_2 = \frac{1}{2}\left(a_1 + \frac{N}{a_1}\right)$. On réitère le processus et on aboutit à chaque fois à une nouvelle approximation de \sqrt{N} .

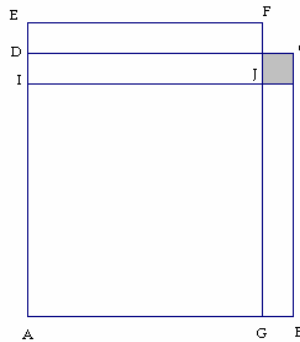


Fig. 2.2 : Carré ABCD d'aire N

Dans ce cas de figure, partant de $a_0 = 1$, les babyloniens auraient calculé successivement a_1 , a_2 puis $a_3 = \frac{577}{408}$. Cette dernière fraction étant la première à n'avoir pas une expression sexagésimale finie, les babyloniens se seraient contentés donc de la valeur approchée $\sqrt{2} = 1,414215$.

A l'époque, on se contentait d'un nombre fini d'étapes.

Aujourd'hui, on établit aisément que l'on peut construire deux suites

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 \text{ tel que } a_0^2 \text{ est le plus petit entier vérifiant } a_0^2 > N \\ a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{N}{a_n} + a_n\right) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} b_0 = \frac{N}{a_0} \\ b_{n+1} = \frac{N}{a_{n+1}} \end{array} \right., \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{telles}$$

que $b_0 < \dots < b_n < b_{n+1} < \sqrt{N} < a_{n+1} < a_n < \dots < a_0$ et qui convergent vers la même limite \sqrt{N} .

Notons enfin qu'aucune preuve tangible n'a permis d'affirmer que la méthode de Héron a pu être connue très longtemps avant lui (en particulier par les babyloniens). Toutefois, les historiens ont tablé sur certains indicateurs, y compris la possibilité de visualiser géométriquement le procédé en question, pour ne pas s'interdire d'étayer raisonnablement leur hypothèse.

II.2.3 De l'axiome d'Archimède à l'approximation d'As-Samaw'al

Même si Tannery (1894) affirme que le procédé itératif utilisé dans la méthode de Héron est "[...] le seul procédé classique chez les Grecs, quels que soient les artifices spéciaux qui aient pu être employés pour l'approximation effective de la racine carrée dans tel ou tel cas particulier."²⁹, il n'exclut pas l'usage d'autres procédés itératifs d'approximations de nombres. Parmi ces procédés, nous retenons en particulier le procédé fournissant l'encadrement de $\sqrt{3}$ donné par Archimède sans aucune explication. En effet, dans son traité intitulé La mesure du cercle, Archimède (-287 \therefore -212), encadre sans commentaires $\sqrt{3}$ entre $\frac{265}{153}$ et $\frac{1351}{780}$ ³⁰.

Avant la découverte des *Métriques*, Tannery expose une méthode qui "repose sur l'identité exprimant le carré d'une somme et accessoirement seulement sur l'emploi des *quantièmes*."³¹ (Caveing, 1998, p. 30), permettant d'obtenir les valeurs de $\sqrt{3}$ retenues par Archimède.

Selon Caveing (1998), Tannery a longtemps accordé que tout procédé approximations successives est basé sur l'approximation $\sqrt{a^2 + r} \approx a + \frac{r}{2a}$ ($r = N - a^2$), et l'on retrouve le procédé itératif postulé par Caveing comme étant celui utilisé par les babyloniens pour trouver une valeur approchée de $\sqrt{2}$. Tannery a ensuite montré que le procédé indiqué permet d'obtenir l'encadrement de $\sqrt{3}$ fourni par Archimède.

Plus précisément, il s'agit d'utiliser le procédé ci-dessous tel que décrit par Caveing (1998).

²⁹ Cité dans (Caveing, 1998, p.38).

³⁰ Cf. Dhombres (1978) et Caveing (1998).

³¹ "[...] le système grec n'est pas différent dans son principe du système égyptien, [...] quels que soient les signes ou les conventions choisis, un quotient à partie fractionnaire peut toujours aux yeux d'un Grec être exprimé d'une manière finie, soit en indiquant simplement le quotient du reste de la division euclidienne par le diviseur, soit à la manière égyptienne, au moyen d'une somme de "parties" ou *quantièmes*." (Caveing, 1998, p.41).

En partant de $a_0 = 1$ et $r_0 = 3 - a_0^2 = 2$, Tannery affirme sans explication qu'il est possible de considérer $a_1 = a_0 + \frac{r_0}{2a_0 + 1} = a_0 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$ comme approximation de $\sqrt{3}$.

En deuxième étape, il déduit via la relation $\sqrt{a^2 + r} \simeq a + \frac{r}{2a}$ ($r = N - a^2$) que $a_2 = a_1 + \frac{3 - a_1^2}{2a_1} = a_1 + \frac{1}{15} = \frac{26}{15}$ est une approximation de $\sqrt{3}$.

En troisième étape, il déduit via la relation $\sqrt{a^2 + r} \simeq a + \frac{r}{2a}$ ($r = N - a^2$) que $a_3 = a_2 + \frac{3 - a_2^2}{2a_2} = a_2 - \frac{1}{780} = \frac{1351}{780}$.

Ces étapes successives fournissent la majoration $\sqrt{3} < \frac{1351}{780}$, obtenue en comparant les carrés des deux termes.

Par ailleurs, en considérant a_0 , a_1 et a_2 telles que calculés plus haut et en prenant sans explication $a_3 = a_2 + \frac{r_2}{2a_1 + (a_2 - a_1)}$, il établit que $\sqrt{3} > \frac{265}{153}$.

Ce qui donne l'encadrement $\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780}$ fourni par Archimède.

A l'issue de la découverte des *Métriques*, Tannery a maintenu que la méthode citée ci-dessus permet d'expliquer presque "[...] le tiers des racines non-exactes de la collection héronienne [...]." (Caveing, 1998, p. 38).

Dieudonné (1987) affirme, quant à lui, que c'est en se basant sur l'axiome portant son nom, qu'Archimède aurait encadré $\sqrt{3}$ tel qu'il l'a fait. Nous proposons ci-dessous le procédé décrit par Dieudonné.

En première étape, on considère une valeur approchée par défaut Y de \sqrt{X} .

D'après l'axiome d'Archimède, il existe un unique entier naturel q_0 tel que $q_0 Y < \sqrt{X} < (q_0 + 1) Y$, le nombre $q_0 Y$ est alors une valeur approchée par défaut de \sqrt{X} à Y près de sorte que le nombre $\sqrt{X} - q_0 Y$ appartienne à l'intervalle $[0, Y]$.

En subdivisant l'intervalle $[0, Y]$ en des intervalles d'amplitude $\frac{1}{10}$, on détermine

l'unique entier $q_1 \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ tel que $q_0 Y + \frac{q_1}{10} Y < \sqrt{X} < q_0 Y + \frac{(q_1 + 1)}{10} Y$.

Il en résulte que $q_0 Y + \frac{q_1}{10} Y$ est une valeur approchée par défaut de \sqrt{X} à $\frac{1}{10} Y$ près.

En itérant le procédé, on peut trouver deux valeurs approchées décimales par défaut et

par excès de \sqrt{X} à $\frac{1}{10^k} Y$ près, respectivement de la forme $\sum_{p=0}^k \frac{q_p}{10^p} Y$, $\sum_{p=0}^k \frac{(q_p + 1)}{10^p} Y$,

$q_p \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$.

Ainsi, en partant de $Y = 1$ on trouve après quatre itérations que

$$1 + \frac{7}{10} + \frac{3}{100} + \frac{2}{1000} + \frac{0}{10000} < \sqrt{3} < 1 + \frac{7}{10} + \frac{3}{100} + \frac{2}{1000} + \frac{1}{10000}.$$

L'encadrement obtenu plus haut est un encadrement de $\sqrt{3}$ par deux décimaux alors que l'encadrement $\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780}$ fourni par Archimède est un encadrement par des rationnels. On ne peut donc affirmer qu'Archimède a utilisé le procédé proposé par Dieudonné et aucune preuve ne vient confirmer ou infirmer que le procédé utilisé par Archimède mène à la détermination des différents chiffres successifs de la racine (y compris dans la base de numération dont il est fait usage).

En réalité, la détermination des différents chiffres de la racine $n^{\text{ième}}$ d'un rationnel semble avoir fait l'objet des préoccupations des mathématiciens arabes.

C'est dans son traité intitulé *Al Quiwami Fil Hissab El Hindi* rédigé par As-Samaw'al deux ans avant sa mort, et dans lequel il consacre plusieurs chapitres pour les problèmes d'approximations des racines $n^{\text{ième}}$ d'un rationnel positif, qu'on retrouve explicitement une méthode reposant sur la détermination successive des différents chiffres de la racine $n^{\text{ième}}$:

"Par «approcher», As-Samaw'al entend : connaître un nombre réel au moyen d'une suite de nombres connus avec une approximation que le mathématicien peut rendre aussi petite qu'il veut. Il s'agit donc de mesurer l'écart entre la racine $n^{\text{ième}}$ irrationnelle et une suite de nombres rationnels." (Rashed, 1984, p. 99)

Armé des résultats des mathématiciens indiens et des algébristes arabes, As-Samaw'al prolonge le projet de ses prédécesseurs (en particulier Al Karagi) de développer une arithmétique des *Majhoulat* "[...] «arithmétique des inconnues» disaition à l'époque [...]." (Rashed, 1984, p. 97). Dans son traité d'algèbre *Al Bahir Fil Jabr*, As-Samaw'al montre une certaine originalité provenant de son usage intensif des tableaux (*Takht*) pour représenter des expressions contenant des *Majhoulat* :

Tableau 2.1 : Un exemple de *Takht*

Kaâb	Maâl	Shay	Dirham	Josô al shay	Josô al maâl
x^3	x^2	x	1	x^{-1}	x^{-2}
3	1	8	0	1	5

La première ligne du tableau contient les puissances (*Al Marateb*) de l'inconnue ou de son inverse. La deuxième ligne contient les coefficients qui leurs sont associés. A l'exception d'un des coefficients des deux termes extrêmes (celui du plus haut degré ou celui du plus bas degré), les autres coefficients peuvent être négatifs.

Les résultats obtenus par l'algèbre développée et renouvelée, en particulier par As-Samaw'al, l'un des plus engagés dans l'exécution de ce projet, semblent d'après Rasched (1984) être à l'origine des méthodes faisant actuellement partie de ce qu'on appelle aujourd'hui analyse numérique³².

Pour les besoins de cette recherche, nous retenons la méthode exposée dans le traité d'As-Samaw'al deux ans avant sa mort et concernant l'approximation des nombres réels algébriques, dont chacun est défini comme racine $n^{\text{ième}}$ d'un rationnel. Cette méthode consiste à trouver successivement les différents chiffres de la racine $n^{\text{ième}}$ dans le système de numération dont il est fait usage. Il s'agit donc de donner une approximation du rationnel X tel que $X^n - Q = 0$ (I). On détermine d'abord un intervalle de la forme $[10^p, 10^{p+1}[$, $p \in \mathbb{Z}$ contenant X. Ce qui nous permet d'écrire X sous la forme $X = x_0 10^p + x_1 10^{p-1} + x_2 10^{p-2} + \dots + x_i 10^{p-i} + \dots + r$, où les x_i ne sont pas tous nuls.

On détermine ensuite à partir de Q, les positions possibles des chiffres de la racine, c'est à dire les positions $n(p-i)$.

Nous développons dans ce qui suit cette méthode en utilisant l'exemple traité par As-Samaw'al et indiqué dans Rashed (1984). La question concerne la détermination de la

³² Cf. Rashed (1984), pour plus de détails.

racine 5^{ème} d'un rationnel Q écrit dans la base 60, soit $Q = 0;0,0,2,33,43,3,43,36,48,8,16,52,30$.

Il est clair que $X \in [60^{-1}, 60]$, donc X est de la forme $x_0 60^{-1} + x_1 60^{-2} + x_2 60^{-3} + \dots + r$.

Pour déterminer x_0 , il s'agit d'utiliser le fait que $\frac{X}{60^{-1}}$ est de la forme $x_0 + x_1 60^{-1} + x_2 60^{-2} + \dots + r'$, et de ramener la résolution de l'équation (I) à la résolution de l'équation $Y^n - Q_1 = 0$, où $Y = \frac{X}{60^{-1}}$ et $Q_1 = \frac{Q}{(60^{-1})^5}$ (II).

La recherche du plus grand entier dont on puisse soustraire la n^{ième} puissance de la première tranche (celle relative à la position -5 dans le développement décimal de Q) revient à déterminer x_0 tel que $x_0^5 \leq Q_1 < (x_0 + 1)^5$.

Après avoir calculer x_0 , la deuxième étape préparant le calcul de x_1 consiste à réduire de x_0 les racines de (II) et de se ramener à l'équation $(X' + x_0)^5 - Q_1 = 0$, où $X' = Y - x_0$ soit $\sum_{k=1}^5 C_5^k X'^k x_0^{5-k} - Q_2 = 0$, où $Q_2 = Q_1 - x_0^5$ (III).

Rappelons qu'à cette époque, les mathématiciens arabes maîtrisaient parfaitement l'usage du triangle des coefficients binomiaux découvert dans les travaux d'Al Karagi (+953 .: +1028). En réitérant successivement les deux étapes précédentes, il est possible de calculer les chiffres successifs de la racine X.

Aujourd'hui on montre qu'étant donné un nombre réel X, les suites des nombres décimaux définies par $u_n = \frac{E(10^n X)}{10^n}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{10^n}$ sont adjacentes et convergent vers X. De plus, la suite $(u_n)_n$ est la suite des approximations décimales par défaut de X et la suite $(v_n)_n$ est la suite des approximations décimales par excès de X.

La généralisation de la méthode d'As-Samaw'al nécessite de justifier les différentes opérations qui y interviennent et de résoudre le problème de la détermination des différents chiffres de la racine à partir du deuxième : "[...] silencieux sur la manière de trouver ces chiffres, As-Samaw'al et Al Kashi pouvaient encore s'en remettre à un tâtonnement heureux." (Rashed, 1984, p. 111). Ce travail a d'abord été accompli par Al

Tusi (postérieurement à As-Samaw'al) pour la résolution d'équations polynomiales de degré 3 et attribué plus tard à Ruffini-Horner dans le cas général de résolution d'équations polynomiales de degré inférieur à 5.

II.2.4 Nombres diagonaux/latéraux et la méthode des fractions continues

D'As-Samaw'al à Al Kashi, l'utilisation des suites de nombres décimaux pour approcher un nombre irrationnel est faite sans que ces algébristes-arithméticiens ne se soient posés des questions précises sur la nature de ces grandeurs incommensurables et les raisons de la réussite des élargissements entrepris. Ces questions, liées à la théorie des proportions du livre 5 des éléments d'Euclide seront soulevées par les mathématiciens arabes du deuxième courant d'algébristes-géomètres, fondamentalement initié par Al Khayyam et poursuivi par son disciple Al Tusi :

"[...] En ce qui concerne les rapports incommensurables, qui est le point difficile de la théorie, il adopte une démarche qui se ramène à décomposer un rapport en une fraction continue³³ [...]. Al Khayyam considère que les rapports quelconques doivent pouvoir s'exprimer par des nombres même si certains sont impropres ; nous dirons aujourd'hui qu'ils sont des nombres irrationnels." (Dahan-Dalmedico et Peiffer, 1986, p. 102)

Le développement en fraction continue d'un nombre irrationnel fournit des approximations rationnelles de ce nombre. Le processus itératif met en œuvre l'algorithme d'Euclide, et l'idée est déjà en germe dans le livre 10 des éléments.

On doit à Théon de Smyrne (+120 .: +180) l'introduction des deux suites $(p_n)_n$ et $(q_n)_n$ définies par les relations de récurrence $p_{n+1} = p_n + 2q_n$ et $q_{n+1} = p_n + q_n$, avec $(p_0, q_0) = (1, 1)$. L'usage des rapports de termes des deux suites a permis d'obtenir des valeurs approchées rationnelles de $\sqrt{2}$ telles que $\frac{3}{2}$, $\frac{7}{5}$, ou $\frac{17}{12}$ ³⁴.

Les entiers q_n portent le nom de nombres latéraux, les entiers p_n portent le nom de nombres diagonaux et représentent des valeurs entières approchées respectivement du côté et de la diagonale d'un carré. Plusieurs suggestions ont été formulées quant à la découverte du procédé de construction des nombres latéraux et diagonaux par Théon.

³³ C'est nous qui avons souligné.

³⁴ Toutefois, il est important de préciser qu'à l'inverse d'Archimède et de Héron, aucune source sûre ne permet d'affirmer que l'intention de Théon était de calculer des valeurs approchées de $\sqrt{2}$.

Avant d'entamer l'étude de certaines suggestions, nous développons l'interprétation (en terme de traduction) faite par Caveing (1998) du texte original de Théon.

Théon entame son texte par une justification métamathématique, liée au rôle de la monade dans la conception grecque, du choix des premières valeurs $p_0 = 1$ et $q_0 = 1$. L'idée essentielle qui fonde le procédé suppose connu le théorème de Pythagore ($d^2 = 2a^2$, où a et d sont respectivement le côté et la diagonale d'un carré). Partant du choix des premières valeurs, Théon construit successivement les trois premiers couples de nombres $(3, 2)$, $(7, 5)$ et $(17, 12)$ en utilisant explicitement les relations de récurrence $p_{n+1} = p_n + 2q_n$ et $q_{n+1} = p_n + q_n$, et en vérifiant à chaque fois que $p_n^2 = 2q_n^2 \pm 1$.

Le commentaire de Tannery³⁵ concernant la découverte du procédé de construction est purement arithmétique. Tannery affirme que la suite de nombres a été obtenue directement par l'observation des nombres, sans généralisation, prévision ou démonstration. Plus précisément, si $\frac{p_0}{q_0}$ est une valeur approchée de $\sqrt{2}$, l'idée est de

prendre $\frac{2q_0}{p_0}$ pour seconde valeur approchée de sorte que le produit des deux valeurs

soit égale à 2. En invoquant la formule d'intercalation $\frac{p_0}{q_0} < \frac{p_0 + 2q_0}{p_0 + q_0} < \frac{2q_0}{p_0}$ (supposée

déjà employée par Archimède) on obtient la valeur approchée $\frac{p_1}{q_1} = \frac{p_0 + 2q_0}{q_0 + p_0}$. En

réitérant le procédé, on obtient la relation $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = \frac{p_n + 2q_n}{q_n + p_n}$, avec la condition initiale

$p_0 = q_0 = 1$. Tannery affirme que c'est par ce moyen que les premiers pythagoriciens auraient approché $\sqrt{2}$. Sans conclure sur ce point, il nous faut remarquer que c'est le contexte mathématique dans lequel a pu se poser la question de l'irrationalité qui nous en apprendra davantage. Or ce contexte est géométrique et un fondement géométrique lié à la découverte des nombres diagonaux et latéraux n'est pas à exclure, comme en témoigne d'ailleurs la suggestion de Bergh (1907)³⁶ et notamment celle de Caveing (1998).

Partant du fait que le choix d'une commune mesure égale à 1 (du côté et de la diagonale du carré initial) évoque le processus de recherche d'une commune mesure, Caveing (1998) pointe que "[...] le procédé de construction des nombres «latéraux et

³⁵ Développé dans Caveing (1998).

³⁶ Cité dans Caveing (1998).

diagonaux» est le renversement³⁷, et qui en conséquence pourrait bien être à l'origine de sa découverte." (Caveing, 1998, p. 64). Caveing observe d'abord que si d est la diagonale d'un carré de côté a , alors $(2a+d)$ est la diagonale du carré de côté $(a+d)$, en d'autres termes l'égalité $d^2 = 2a^2$ implique que $2(a+d)^2 = 2a^2 + 2d^2 + 4ad = 4a^2 + d^2 + 4ad = (2a+d)^2$. Il pointe ensuite que la proposition 10 du livre 2 des éléments d'Euclide établit géométriquement cette identité : *Si le segment AC est bissecté en B et prolongé par le segment CD porté par la même droite et de longueur quelconque la relation suivante existe :*

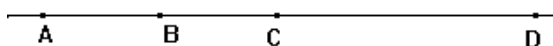


Fig. 2.4 : $AD^2 + CD^2 = 2(AB^2 + BD^2)$

Ce qui nous donne $(2a+d)^2 - 2(a+d)^2 = 2a^2 - d^2$, avec $AB = BC = a$ et $CD = d$, ou encore que $(2a+d)^2 = 2(a+d)^2$.

Cette proposition peut être utilisée pour prouver géométriquement que si d est la diagonale d'un carré de côté a , alors $(2a+d)$ est la diagonale d'un carré de côté $(a+d)$. On considère la figure ci-dessous.

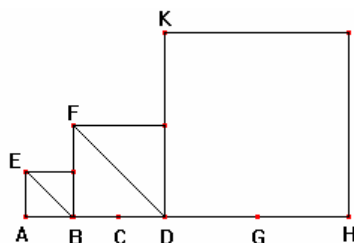


Fig. 2.5 : Carrés respectivement de côtés a et $a+d$

$AB = BC = a$ et $CD = EB = d$. En appliquant la proposition 10 du livre 2, on obtient $AD^2 = 2BD^2$ et il en résulte que $DF = AD$.

Ces interprétations géométriques confirment l'idée de *renversement* formulée par Caveing et permettent de défendre que la notion de fraction continue soit déjà en germe dans le livre 10 des éléments d'Euclide. Sur le plan théorique, la notion de fraction continue progresse lorsque Al Khayyam traduit " [...] l'égalité de deux rapports par l'identité des suites des quotients successifs dans l'algorithme d'Euclide appliqué à

³⁷ C'est nous qui avons souligné.

chacun de ces rapports, autrement dit [...] par ce qui n'est autre que l'identité de leur développement en fractions continues. " (Chabert et al., 1994, p. 145).

La théorie des fractions continues telles que nous la connaissons aujourd'hui est entreprise par Euler et pratiquement achevée par Lagrange. Rappelons que la représentation numérique d'un réel en fraction continue simple³⁸ est donnée par un procédé basé sur la décomposition du réel en la somme de sa partie entière et sa partie décimale, écrite sous forme de fraction continue. Nous étayons dans ce qui suit le procédé itératif des fractions continues.

Soit X un réel et $a_0 = [X]$ de sorte que $X = a_0 + \varepsilon_0$, $0 \leq \varepsilon_0 < 1$.

Si $\varepsilon_0 = 0$ alors on s'arrête à l'écriture $X = a_0$.

Si $\varepsilon_0 \neq 0$, on écrit $X = a_0 + \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_0}} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \varepsilon_1}$ avec $a_1 = \left[\frac{1}{\varepsilon_0} \right]$.

Si $\varepsilon_1 = 0$ alors $X = a_0 + \frac{1}{a_1}$.

Si $\varepsilon_1 \neq 0$, on écrit $X = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_1}}} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \varepsilon_2}}$ avec $a_2 = \left[\frac{1}{\varepsilon_1} \right]$.

Si $\varepsilon_2 = 0$, on arrête le procédé.

Si $\varepsilon_2 \neq 0$, on écrit $X = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_2}}}}} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \varepsilon_3}}}$ avec $a_3 = \left[\frac{1}{\varepsilon_2} \right]$.

On poursuit le processus tant que $\varepsilon_i \neq 0$.

³⁸ Dans toute la suite, nous n'envisageons que l'étude des fractions continues simples. Nous omettons donc de mentionner simple à chaque fois qu'on évoque les fractions continues.

A chaque fois qu'on arrête le processus itératif à un ordre n , on obtient le nombre rationnel qu'on appelle la réduite d'ordre n de X (ou du développement en fraction continue de X), soit

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}}}$$

et que l'on note $F_n = [a_0, a_1, \dots, a_n]$.

Tout nombre rationnel est représenté d'une manière unique sous forme d'une fraction continue finie (Cf. Hardy et al., 1968, p. 162). Tel est l'exemple de

$$-\frac{17}{5} = -4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}$$

Tout nombre irrationnel est représenté d'une manière unique sous forme d'une fraction continue infinie (Cf. Hardy et al., 1968, p.140).

Une des applications fondamentales de la notion de fraction continue concerne le problème de la *meilleure* approximation rationnelle d'un réel.

Dans le cadre de cette recherche, nous nous intéressons uniquement au cas d'un irrationnel de la forme \sqrt{d} tel que d n'est pas un carré parfait et $(d-1)$ est un carré parfait.

Dans ce cas, on peut écrire $\sqrt{d} = \alpha + \frac{1}{\alpha + \sqrt{d}}$, où $\alpha = \sqrt{d-1} = [\sqrt{d}]$.

En remplaçant indéfiniment \sqrt{d} par sa valeur, on obtient

$$\sqrt{d} = \alpha + \frac{1}{2\alpha + \frac{1}{2\alpha + \frac{1}{2\alpha + \dots}}} \quad (I).$$

Par unicité de la représentation d'un nombre

irrationnel sous forme d'une fraction continue infinie, on peut affirmer que (I) est la représentation de \sqrt{d} sous forme de fraction continue infinie, avec la notation

$$\sqrt{d} = [\alpha, \overline{2\alpha}].$$

La suite $(F_n)_n$ des réduites de \sqrt{d} est par conséquent définie par

$$F_0 = \alpha \text{ et } F_{n+1} = \alpha + \frac{1}{\alpha + F_n}.$$

En posant pour tout entier n , $F_n = \frac{p_n}{q_n}$ où $p_n \wedge q_n = 1$, on montre que les suites $(p_n)_n$

$$\text{et } (q_n)_n \text{ vérifient } \begin{cases} p_0 = \alpha, p_1 = 2\alpha^2 + 1 \\ p_n = 2\alpha p_{n-1} + p_{n-2} \end{cases} \text{ et } \begin{cases} q_0 = 1, q_1 = 2\alpha \\ q_n = 2\alpha q_{n-1} + q_{n-2} \end{cases}.$$

Ce qui implique via le principe de récurrence que
$$\begin{cases} p_{n+1} = \alpha p_n + (\alpha^2 + 1)q_n \\ q_{n+1} = p_n + \alpha q_n \end{cases}, n \in \mathbb{N}.$$

De plus,

- la suite $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)_n$ converge vers \sqrt{d} et $\left|\sqrt{d} - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_{n+1}q_n}$, $n \geq 1$;

- la suite $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)_n$ constitue la *meilleure* approximation rationnelle de \sqrt{d} ($\forall n$, $\frac{p_n}{q_n}$ est la meilleure approximation du réel \sqrt{d} parmi toutes les fractions de dénominateur inférieur à q_n) (Hardy et al., 1968, p.151)³⁹ ;

- les suites $\left(\frac{p_{2n}}{q_{2n}}\right)_n$ et $\left(\frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}}\right)_n$ sont adjacentes et vérifient $\frac{p_{2n}}{q_{2n}} \leq \sqrt{d} \leq \frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}}$, $\forall n$.

L'interprétation géométrique inspirée par le procédé de Théon et la suite des réduites de \sqrt{d} (d non carré parfait et $(d-1)$ carré parfait) suggèrent d'envisager, à un niveau du cursus où les outils théoriques sont à disposition, une situation problématisant ce type de nombres ainsi que leur nature.

II.3 La méthode d'exhaustion ou une approximation de π

Lambert établit en 1761 la représentation sous forme de fraction continue généralisée de $\tan x$ et en déduit que si x est rationnel alors $\tan x$ est irrationnel. Par suite π est irrationnel puisque $\tan \frac{\pi}{4}$ est égal à 1. Mais les recherches théoriques relatives à la nature de π sont précédées d'une quête ininterrompue de décimales de ce nombre, concrètement initialisée au temps d'Euclide par la méthode dite d'exhaustion :

³⁹ " [...] p_n/q_n is the fraction among all fractions of no greater complexity, i.e all fractions whose denominator does not exceed q_n , which provides the best approximation." (Hardy et al., 1968, p. 151).

"Les différentes approches du nombre π peuvent être classées en trois types apparus successivement au fil du temps :

Jusqu'au XVII^e siècle le point de vue géométrique est centré sur des évaluations de rapports de longueurs ou d'aires et il n'est jamais question de déterminer un nombre en tant que tel.

L'avènement de l'analyse infinitésimale révolutionne véritablement l'approche avec l'utilisation de sommes et de produits infinis, de fonctions trigonométriques ou encore de fractions continues.

Enfin des recherches plus théoriques, avec la preuve de l'irrationalité de π par Lambert, puis celle de sa transcendance par Lindemann, se conjuguent aux prouesses techniques et algorithmiques pour obtenir toujours plus de décimales." (Chabert et al., 1994, p. 160)

Il semble que le plus ancien objet où π intervient est une tablette babylonienne en écriture cunéiforme (dans le système sexagésimal), découverte en 1936 et datant entre -1800 et -1500. La majorité des commentaires faits à propos du sujet, partent de l'évaluation du périmètre d'un hexagone régulier à $\frac{24}{25}$ fois celui du cercle circonscrit, ce qui revient à estimer $\pi = 3 + \frac{1}{8}$ (C'est officiellement la plus vieille approximation connue de π).

Traduit en langage moderne ceci revient à utiliser l'égalité $6r = \frac{24}{25} 2\pi r$, où r est le rayon du cercle circonscrit à un hexagone régulier de côté r . Neugebauer⁴⁰ pointe le fait que l'hexagone régulier et la longueur de son périmètre sont connus par les babyloniens et font ressortir l'inexactitude de la valeur de π .

D'autres textes du papyrus Rhind font intervenir une valeur approchée de π . En particulier, dans les problèmes 48 et 50, Ahmès étudie le rapport liant l'aire d'un disque à son diamètre en cherchant à ramener l'aire à celle d'un carré équivalent. Le papyrus Rhind précise en effet une première approche de la quadrature du cercle⁴¹ : c'est le

⁴⁰ Cité dans Caveing (1994).

⁴¹ Construction d'un carré de même aire qu'un cercle donné.

carré de côté $\frac{8d}{9}$, où d est le diamètre du cercle. Dans ce cas, π apparaît comme étant le carré de $\frac{16}{9}$, soit $\pi = \frac{256}{81} = 3 + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} = 3.160\dots$

En réalité, pour aboutir à une solution de la quadrature du cercle, le scribe commence par considérer équivalentes les aires du cercle de diamètre 9 et de l'octogone régulier inscrit dans le carré de côté 9.

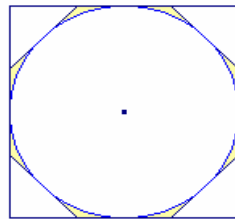


Fig. 2.6 : Quadrature d'un cercle via un octogone circonscrit

L'aire de l'octogone étant la différence entre l'aire du carré et la somme des aires des 4 triangles isocèles au coin soit 63, ce qui est approximativement égale à l'aire d'un carré de côté 8.

Parmi les problèmes majoritairement géométriques qui occupaient les grecs, le problème de construire un carré de même aire qu'un cercle (la célèbre quadrature du cercle). Avec les outils dont disposaient les grecs, les solutions proposées à la quadrature du cercle faisaient la plupart du temps appel à un nombre infini d'étapes comme *la quadratrice de Dinostrate*, construite initialement par Hippias d'Elis (vers -430), ou encore la méthode d'exhaustion.

La méthode d'exhaustion est généralement attribuée à Eudoxe de Cnide, et permet de comparer l'aire A d'une surface curviligne (cercle ou autre) avec l'aire S d'une surface connue qui soit délimitée par des droites (polygone). La méthode d'exhaustion consiste à construire deux surfaces U et V respectivement inscrites et circonscrites à la fois à A et à S , de sorte que la différence $V - U$ soit aussi petite que l'on voudra (d'où le nom exhaustion) pour pouvoir aboutir à une contradiction et établir que ni $A > S$ et ni $S > A$. C'est la proposition 1 du livre 10 (et/ou l'axiome d'Archimède) qui permet de rendre cette différence aussi petite que l'on veut. Cette méthode évite donc toute considération infinitésimale même si on ne peut nier la présence implicite de l'idée de limite.

C'est sur cette méthode qu'Euclide se base pour montrer la proposition 2 du livre 12 : *Les aires de deux cercles ont une raison double de celle des diamètres* (le rapport des aires de deux cercles est égal au carré du rapport des diamètres)⁴².

Il faut cependant attendre Archimède (-287 : -212) et son traité *De la mesure du cercle* pour que cette méthode soit efficacement appliquée à l'approximation de π . Pourtant tout était mis en place pour que Euclide donne une valeur approchée de π ; nous l'avons déjà dit, la préoccupation d'Euclide n'est pas de mesurer les grandeurs géométriques mais de les comparer et de calculer leurs rapports.

Le premier des 3 théorèmes qu'énonce Archimède dans son livre, établit que le rapport de l'aire d'un disque au carré de son rayon est égal au rapport du périmètre à son diamètre. La démonstration s'appuie sur la méthode d'exhaustion en établissant que l'aire A d'un cercle est celle S , du triangle dont l'un des côtés de l'angle droit est le rayon du cercle et l'autre est le périmètre de ce même cercle⁴³.

Le troisième théorème exprime explicitement que $3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7}$, il s'énonce comme suit : *Le périmètre de tout cercle vaut le triple du diamètre augmenté de moins de la septième partie, mais de plus de dix soixante et onzième parties du diamètre.*

Partant de deux hexagones respectivement inscrit et circonscrit, puis doublant successivement le nombre des côtés des polygones considérés respectivement inscrits et circonscrits, Archimède obtient respectivement des minoration et des majoration de plus en plus précises. Il s'arrête aux polygones à 96 côtés qui permettent d'atteindre respectivement les bornes $3 + \frac{10}{71}$ et $3 + \frac{1}{7}$. Le calcul fut mené sans aucune notation algébrique, ni connaissance de la trigonométrie, et avec la seule géométrie d'Euclide⁴⁴.

En reprenant le calcul fait dans le langage actuel, on considère les périmètres a_n et b_n des polygones à $3 \cdot 2^n$ côtés respectivement circonscrit et inscrit dans un cercle de rayon 1. On obtient que $a_n = 3 \cdot 2^n \tan\left(\frac{\pi}{3 \cdot 2^n}\right)$ et $b_n = 3 \cdot 2^n \sin\left(\frac{\pi}{3 \cdot 2^n}\right)$, $a_0 = 3\sqrt{3}$ et $b_0 = \frac{3\sqrt{3}}{2}$. On prouve alors facilement que les suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ sont adjacentes et convergent vers π .

⁴² Cf. (Dhombres, 1978, p. 75), pour un détail du développement tel que établi dans le texte original.

⁴³ Cf. (Dhombre, 1978, p. 107), pour un détail du développement tel que établi dans le texte original.

⁴⁴ Cf. (Chabert et al., 1994, p. 161), pour un détail du développement tel que établi dans le texte original.

De plus pour tout entier n , $b_n < b_{n+1} < \pi < a_{n+1} < a_n$ (Archimède poussa ses calculs jusqu'à $n = 4$).

L'approximation d'Archimède remplaça rapidement à Alexandrie les vieilles valeurs d'usage aisé mais moins précise, et se répandit jusqu'en Inde et même en Chine au V^e siècle. En utilisant les aires au lieu des périmètres des polygones inscrits et circonscrits, Viète (1540 :.1603) calcule π avec dix décimales exactes.

La méthode d'exhaustion (débarrassée de la double démonstration par l'absurde, jugée nécessaire par les grecs) n'est autre qu'une anticipation au calcul intégral et toutes les applications géométriques du calcul infinitésimal (tels que le calcul des longueurs de courbes, calcul d'aires ou de volumes délimités par des courbes ou des surfaces courbes, etc.) jusqu'au milieu du XIX^e siècle reposent sur les grandeurs archimédiennes telles que développées dans le livre 5 des éléments d'Euclide : "*[...] dans cette seconde moitié du XIX^e siècle, une théorie des nombres réels fait toujours défaut. Depuis qu'Euclide avait tenté dans sa théorie des proportions du livre 5 de donner un statut aux grandeurs incommensurables, personne n'avait plus senti le besoin de définir un nombre, et cela en dépit des extensions successives de cette notion.*" (Dahan-Dalmedico et Peiffer, 1986, p. 205).

A côté des difficultés liées aux questions où intervenaient la notion de limite, Dieudonné (1978) avance deux autres raisons qui semblent avoir amenés les mathématiciens de la seconde moitié du XIX^e siècle à construire l'ensemble des réels : la découverte de la transcendance⁴⁵ et l'impossibilité de résoudre, en général, par radicaux les équations polynomiales de degré supérieur ou égal à 5. Avant d'étudier cette nécessité de construction des nombres réels, nous retenons la deuxième raison évoquée par Dieudonné, et examinons dans ce qui suit, diverses approches de résolution des équations par approximations.

II.4 Résolutions d'équations par approximations

La tablette BM 13901 du British Museum⁴⁶ constitue l'un des plus importants textes mathématiques babyloniens (elle contient 24 problèmes numériques accompagnés de leurs solutions). En dépit du fait que les inconnues sont désignées par des grandeurs géométriques (côté d'un carré, surface d'un carré), les scribes n'hésitent pas à additionner et à soustraire des grandeurs différentes.

⁴⁵ En particulier la découverte en 1844 par Liouville que l'ensemble des nombres transcendants est infini (Cf. Dieudonné, 1978).

⁴⁶ Cf. Caveing (1994).

A travers ces problèmes, les scribes ont développé, sur des cas particuliers, des procédés entièrement rhétoriques de résolutions d'équations du second degré qui se ramènent en général, soit à la forme $x^2 + bx = c$, soit à la forme $x^2 - bx = c$, où b et c sont des nombres positifs exprimables d'une façon finie en numération sexagésimale. Les solutions négatives étant inexistantes, dans tous les cas, les deux types d'équations possèdent une unique solution positive.

Pour résoudre des équations du type $x^2 - bx = c$ (resp. $x^2 + bx = c$), le scribe procède comme suit :

- il ajoute au deuxième membre de l'égalité $\left(\frac{b}{2}\right)^2$;
- il détermine $\sqrt{c + \left(\frac{b}{2}\right)^2}$ à l'aide de la table sexagésimale de réciproque des carrées ;
- il calcule la solution en soustrayant (resp. ajoutant) $\left(\frac{b}{2}\right)$ au résultat retrouvé à l'étape précédente.

En réalité l'algorithme résolutif⁴⁷ établi par le scribe traduit le recours aux identités remarquables de la forme $\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = x^2 + xb + \frac{b^2}{4}$ ou $\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 = x^2 - xb + \frac{b^2}{4}$. Or ces identités sont susceptibles d'une visualisation géométrique par la technique d'application des aires. De plus, dans les problèmes du second degré (de la tablette BM13901), les scribes s'arrangent toujours pour que la racine carrée recherchée figure dans la table des réciproques des carrées.

Diophante (+325 .: +409) introduit un symbolisme algébrique à l'algorithme résolutif établi par les babyloniens, débouchant sur des écritures qui sortent du domaine géométrique.

Les identités algébriques ne sont plus des conséquences géométriques et les fractions sont des nombres et non plus des *raisons*, c'est ce qui explique l'acharnement de Diophante à ne plus citer les irrationnels. Les méthodes élaborées par Diophante pour la résolution des équations ne sont pas généralisées ; il ne fait que chercher pour chaque

⁴⁷ Cf. Caveing (1994), pour une traduction détaillée des problèmes du second degré de la tablette BM 13901.

équation une solution rationnelle positive. Dans le cas d'impossibilité de trouver des solutions rationnelles, il se contente de dire que le problème est absurde.

Même si l'approche de Diophante s'apparente avec celle d'Al Khawarizmi, il semblerait que du temps de ce dernier, l'œuvre de Diophante n'a pas encore été traduite en arabe.

II.4.1 Résolution par "radicaux" : d'Al Khawarizmi à Ruffini-Horner

L'Algèbre d' Al Khawarizmi combine et les justifications exposées dans le livre 6 d'Euclide (usage de l'application des aires) et les résultats de l'algèbre babylonienne traduits et commentés par Brahmagupta⁴⁸ (vers +628).

Al Khawarizmi utilise trois types de nombres *Dirham* (l'unité), *Shay* (l'inconnue, ou encore appelé *Jidhr* dans le cas où c'est la solution d'une équation) et *Mâl* (le carré de l'inconnue). Deux opérations fondamentales interviennent pour transformer une équation à une inconnue de premier ou de second degré, où tous les coefficients sont positifs, à l'une des six équations canoniques étudiées par Al Khawarizmi : $ax^2 = bx$, $ax^2 = c$, $bx = c$, $ax^2 + bx = c$, $ax^2 + c = bx$ et $bx + c = ax^2$.

L'opération *al-jabr* consiste à additionner les termes à soustraire dans un membre, dans les deux membres. Tandis que l'opération *al-muqabala* consiste à simplifier les termes égaux dans les deux membres.

Pour résoudre les six types d'équations, Al Khawarizmi commence à ramener à l'unité le coefficient du monôme du second degré. Les trois premiers types d'équations ont des solutions élémentaires et nécessairement positives. Pour les trois derniers types, des algorithmes sont présentés justifiés par une démonstration géométrique et illustrés par de nombreux exemples d'application.

Nous n'exposons pas ici les solutions présentées par ce savant arabe (largement étudiées dans les travaux des historiens) et nous nous bornons à mentionner l'apport qui concerne notre sujet : Al Khawarizmi aboutit pour chaque type d'équations à un procédé général (résolution par radicaux) tandis que les Grecs cherchaient des solutions sans se soucier de trouver d'éventuelles relations entre ces solutions. En particulier, les équations quadratiques sont étudiées comme un objet mathématique.

⁴⁸ Mathématicien indien ayant aussi commenté les œuvres de Aryabhata (+476 .: +550), ce dernier étant semble-t-il connu pour avoir utilisé la méthode d'antiphèrese pour approcher la racine carrée de 2.

Abu Kamil (+850 .: +930) prolonge l'œuvre de son prédécesseur, particulièrement concernant les transformations des expressions contenant des radicaux (non encore exprimés par le symbole $\sqrt{\quad}$). Dahan-Dalmedico et Peiffer (1986) pointe largement le saut effectué par ce savant :

"Le calcul algébrique d'Abu Kamil atteint déjà un degré assez élevé d'abstraction ; en particulier, bien qu'il reste attaché à la forme géométrique des Grecs, il renonce à l'exigence classique de l'homogénéité des dimensions que respectait encore Al Khawarizmi." (Dahan-Dalmedico et Peiffer, 1986, p. 86)

Deux courants sont nés à la suite de ces travaux :

- Le premier initialisé par Al Karagi se poursuivant par As-Samaw'al et plus tard par Ibn al Banna (+1256 .: +1321). Ce courant s'inscrit dans un objectif d'arithmétisation de l'algèbre.
- Le deuxième courant est fondamentalement associé aux travaux d'al Khayyâm (+1048 .: +1131) et de son disciple Al Tusi (+1135 .: +1213). L'objectif étant de développer l'algèbre en utilisant la géométrie, particulièrement pour la résolution d'équations linéaires à une inconnue de degré 3 :

"[...] Il est significatif que la tendance à traduire algébriquement les problèmes du 3^{ème} degré⁴⁹ se renforce au Xe siècle pour deux raisons au moins : le progrès manifeste de la théorie des équations du second et les besoins de l'astronomie. Le progrès de la dite théorie a donné aux algébristes le modèle des solutions algébriques - par radicaux – auquel ils veulent se conformer pour les équations de degré supérieur et surtout de l'équation cubique." (Rashed, 1984, p. 54)

Dans son traité intitulé *Al Mua'dalat*, Al Tusi continue l'œuvre D'Al Khayyam et entreprend de poursuivre l'un des objectifs que ce dernier s'était fixé : résoudre géométriquement et numériquement toutes les équations à coefficients rationnels positifs de degré inférieur ou égal à trois. Il en recense 25 types, où tous les coefficients sont positifs, et dont la classification relative aux équations du troisième degré repose notamment sur l'existence de solution(s) positive(s), soit :

⁴⁹ Problèmes géométriques déjà rencontrés par les grecques tels que les problèmes de duplication du cube et de trisection de l'angle.

- Equations du troisième degré qui ont toujours une solution : $x^3 + bx = c$, $bx + c = x^3$, $x^3 + ax^2 = c$, $ax^2 + c = x^3$, $x^3 + ax^2 + bx = c$, $ax^2 + bx + c = x^3$, $x^3 + ax^2 = bx + c$, $x^3 + bx = ax^2 + c$.
- Equations du troisième degré qui n'ont pas toujours une solution : $x^3 + c = ax^2$, $x^3 + c = bx$, $x^3 + ax^2 + c = bx$, $x^3 + bx + c = ax^2$, $x^3 + c = ax^2 + bx$.

Dans la première partie de son œuvre, Al Tusi analyse toutes les équations de degré inférieur ou égale à 3, qui possède au moins une racine positive. La démarche d'Al Tusi consiste à développer une démonstration de l'existence d'une solution, en précisant les conditions nécessaires d'existence si la situation l'exige. Il fait appel explicitement aux diverses propositions sur les coniques. Ses démonstrations sont générales : le choix des coefficients, représentés par des segments, apparaissant dans les équations sont arbitraires.

Dans la deuxième partie de son traité, Al Tusi s'intéresse à l'étude de cinq types d'équations cubiques qui peuvent ne pas toujours avoir de solution(s) positive(s). Contrairement à AlKhayyam, Al Tusi ne pouvait se contenter d'un simple constat de ces *cas impossibles*. Préoccupé, en effet, de la preuve de l'existence géométrique de points d'intersection, et par conséquent de l'existence des racines, il devait donc caractériser de tels cas et en chercher la raison. La démarche d'Al Tusi consiste à montrer que pour chaque type d'équations, il faut déterminer un nombre maximum au-delà duquel le problème est *impossible* (c'est-à-dire qu'il n'y a pas de racine(s) positive(s)). Ce nombre le plus grand (*Adad al A'adham*), qui comparé à la constante de l'équation permet d'affirmer l'existence ou l'inexistence d'une racine positive.

Ainsi si l'on note c la constante de l'équation et c_0 le nombre le plus grand, on a l'un des cas suivants : $c > c_0$, l'équation n'a pas de racine positive ; $c = c_0$, l'équation possède une racine positive double x_0 et $c < c_0$, l'équation possède deux racines positives distinctes x_1 et x_2 . Dans l'exemple de l'équation du type $x^3 + c = bx$, cité par Rashed (1984), Al Tusi constate d'abord que toute solution positive x_0 doit être inférieur ou égale \sqrt{b} car dans ces conditions $x_0^3 \leq bx_0$ et puis que cette solution doit vérifier l'égalité $bx - x^3 = c$. Enfin, il cherche le nombre pour laquelle $bx - x^3$ atteint

son maximum et trouve $x_0 = \sqrt{\frac{b}{3}}$, ce nombre est donc $c_0 = b\sqrt{\frac{b}{3}} - \left(\sqrt{\frac{b}{3}}\right)^3 = 2\sqrt{\frac{b^3}{27}}$. Al

Tusi conclut qu'il existe une solution positive si, et seulement si, $c \leq c_0$; ce qui

équivaut à dire qu'il existe une solution si, et seulement si, $D = \frac{b^3}{27} - \frac{c^2}{4} \geq 0$.

Comme le mentionne Rashed (1984) même s'il est localisé, le discriminant D n'a pas intervenu dans les solutions canoniques (c'est-à-dire dans la résolution par radicaux). Pour remédier à cette difficulté, Al Tusi et avant lui Al Khayyam ont développé une méthode de résolution des équations par approximations successives et dont le principe consiste à déterminer, chiffre par chiffre, la solution de l'équation en utilisant les tableaux. Cette méthode a déjà été utilisée par As-Samaw'al dans le cadre de la recherche des racines $n^{\text{ème}}$ de nombres, Al Tusi a quant à lui, permis une disposition des calculs intermédiaires réduisant légèrement le nombre d'opérations arithmétiques.

Rappelons que la méthode⁵⁰ comprend deux étapes : la première étape consiste à trouver le premier chiffre x_0 de la racine x et donc fournir une première approximation de x , la deuxième étape consiste à déterminer une équation dont $s = x - x_0$ soit une racine. Ensuite, puisque s possède un chiffre de moins que x , il s'agit de recommencer les deux étapes précédentes à la nouvelle équation, et ainsi de suite.

Selon Dieudonné (1987), Stevin (+1548. : +1620) aurait développé au XVI^e siècle, un procédé d'approximations semblable à celui décrit plus haut, le généralisant, et qui en même temps peut être considéré comme une preuve d'existence. On part d'une équation de la forme $P(x) = 0$, où $P(x)$ est un polynôme que nous écrivons $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$, $a_i > 0, \forall i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ et $a_n < 0$ de sorte que $P(0) < 0$. Stevin admet qu'il existe un entier A assez grand tel que $P(A) > 0$ ⁵¹ et procède ensuite comme suit :

- Remplace x par $1, 2, 3, \dots$ jusqu'au dernier q tel que $P(q) < 0$ et $P(q+1) \geq 0$,
- Remplace x par $q + \frac{1}{10}, q + \frac{2}{10}, \dots, q + \frac{9}{10}$ et s'arrête au dernier entier $q_1 \leq 9$ tel que $P\left(q + \frac{q_1}{10}\right) < 0$ et $P\left(q + \frac{q_1+1}{10}\right) \geq 0$,
- Remplace x par $q + \frac{q_1}{10} + \frac{1}{100}, q + \frac{q_1}{10} + \frac{2}{100}, \dots, q + \frac{q_1}{10} + \frac{9}{100}$ et s'arrête au dernier entier $q_2 \leq 9$ tel que $P\left(q + \frac{q_1}{10} + \frac{q_2}{100}\right) < 0$ et $P\left(q + \frac{q_1}{10} + \frac{q_2+1}{100}\right) \geq 0$, et ainsi de suite.

Il obtient une suite de segments emboîtés $[a_k, b_k], k \in \mathbb{N}$ telle que $b_k - a_k = \frac{1}{10^k}$, $P(a_k) < 0$ et $P(b_k) \geq 0$.

⁵⁰ Cf. (Rashed, 1984) et Chabert et al. (1994), pour plus de détails.

Stevin admet implicitement que l'intersection des segments $[a_k, b_k], k \in \mathbb{N}$ se réduit à un unique nombre x tel que $P(x) = 0$ ⁵². Ce procédé est donc un moyen d'approcher x par $a_k, k = 0, 1, \dots$ avec une erreur arbitrairement petite.

La méthode de Stevin s'applique pour n'importe quelle fonction f continue sur un intervalle I de \mathbb{R} et telle que $f(0) < 0$ et $f(A) > 0$ pour un entier A assez grand. Jusqu'à la fin du XVIII^e siècle, les mathématiciens considéraient implicitement que toutes les fonctions qu'ils étudiaient étaient continues. Ce procédé sera utilisé et généralisé par les mathématiciens du XVII^e et du XVIII^e siècle. C'est Cauchy qui en dégagait explicitement le postulat des intervalles emboîtés, qu'il utilisa d'ailleurs pour la construction de l'ensemble des nombres réels (comme nous le verrons plus loin).

Au début du XIX^e siècle, Ruffini (principalement connu pour son travail concernant l'impossibilité de résoudre des équations polynomiales de degré supérieur ou égal à 5) et Horner établissent des progrès techniques fournissant plus simplement les équations polynomiales transformées que nécessite l'usage de cette méthode. La technique définie par Ruffini permet d'obtenir à partir des n coefficients d'un polynôme $P(x)$ de degré $n-1$, les n coefficients du polynôme $Q(x) = P(x+u)$. Des justifications algébriques sont données en considérant les divisions successives de $P(x)$ par le monôme $(x-u)$.

De la même façon que Rashed (1984), Chabert et al. affirment que :

"Mais c'est plutôt à partir de la technique d'extraction des racines carrées dite de la potence, ou encore «racine, pas de racine», [...], que l'on peut repérer des analogies avec des méthodes de résolution d'équations algébriques qui procèdent par détermination successive des chiffres des racines, comme celle proposée par al-Tusi ou encore par Viète. Dans une certaine mesure, ces travaux trouvent leur prolongement dans la méthode de Newton-Raphson⁵³ [...]." (Chabert et al., 1994, p. 228)

II.4.2 La méthode de Newton

Newton expose pour la première fois la méthode portant son nom dans *De Analysis per Aequationes numero terminorum infinitas* (1669), sur des exemples numériques. La méthode en question est généralisée aujourd'hui pour la résolution par approximations

⁵¹ Cf. (Dieudonné, 1987, p.81), pour un détail de la démonstration de cette proposition

⁵² Cf. (Dieudonné, 1987, p. 81), pour un détail de la démonstration de ce résultat.

⁵³ C'est nous qui avons souligné.

successives d'une équation numérique de la forme $f(x) = 0$, où f est une fonction à variable réelle vérifiant certaines conditions que nous développons plus loin.

A son époque, Newton n'utilise pas l'interprétation géométrique d'une courbe approchée par sa tangente et n'explicite pas la formule de récurrence associée au processus itératif. Cette formule sera introduite par Raphson en 1690 dans son *Analysis Aequationum*, d'où le nom parfois utilisé de la *méthode de Newton-Raphson*. A cette époque, les conditions initiales assurant la convergence des approximations successives ne sont pas soulevées.

La première partie de *Methodus Fluxionum* édité en 1736, est une version enrichie de *De Analysi per Aequationes numero terminorum infinitas*, où Newton expose des techniques de calcul relatives à la résolution des équations. Ce n'est qu'à la suite des considérations numériques et algébriques développées dans la première partie que Newton explique sa théorie des fluxions⁵⁴ et en donne plusieurs applications (construction de tangentes, recherche d'extrema, calcul d'aires, etc.).

Nous nous intéressons donc ici à la première partie de l'ouvrage, et en particulier au célèbre exemple traité par Newton⁵⁵ : $x^3 - 2x - 5 = 0$. La question des conditions d'existence de solution(s) n'est pas vraiment posée.

Newton demande simplement de partir d'une valeur approchée à 0.1 près de la racine de l'équation (*qui ne diffère pas d'une de ses dixièmes parties de la vraie valeur de la racine*) et considère la valeur 2. Il pose ensuite $x = 2 + p$ et aboutit à l'équation $p^3 + 6p^2 + 10p - 1 = 0$ vérifiée par l'écart p . Il résout cette équation en négligeant les termes en p de degré supérieur ou égal à 2, il obtient une nouvelle valeur approchée de la racine de l'équation soit 2.1. Il réitère le procédé à partir de cette nouvelle valeur, et ainsi de suite : *je substitue comme auparavant et je continue ainsi l'opération aussi longtemps qu'il convient* (Extrait du texte de Newton). Par ailleurs, Newton procède par tâtonnements pour effectuer la séparation des racines, c'est-à-dire la détermination d'un intervalle contenant chacun une racine et une seule.

Précisons que dans cette partie du traité, il n'est nullement question ni de tangente, ni de dérivée. Nous interprétons graphiquement, ci-dessous, la résolution de l'équation

⁵⁴ En considérant le temps comme exprimé et mesuré par un mouvement local et uniforme, Newton interprète les variables x , y , z etc. comme des quantités fluentes (ou tout simplement *fluentes*) s'écoulant, ayant des vitesses de changement notées \dot{x} , \dot{y} et \dot{z} etc. et appelées *fluxions*.

⁵⁵ Que l'on retrouve dans (Chabert et al., 1994), dans (Haier et Wanner, 2000), etc.

étudiée par Newton. On part de la représentation graphique de la fonction $f : x \mapsto x^3 - 2x - 5$:

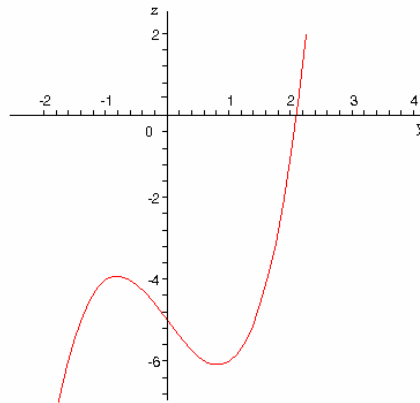


Fig. 2.7 : Représentation graphique de f

La courbe de f coupe l'axe des abscisses en un point d'abscisse comprise entre 2 et 3, et "proche" de 2. Nous ouvrons une parenthèse pour indiquer que l'introduction des systèmes de coordonnées qui associent à chaque courbe plane une équation traduisant ses propriétés a été établie aussi bien par Fermat (1601.:1665) que Descartes (1596.:1650). La désignation des inconnues et variables par des lettres (l'œuvre de Viète) avait permis de traduire les problèmes géométriques en termes d'équations algébriques symboliques.

Si on veut regarder ce qui se passe pour des valeurs de x "proches" de 2, il est possible d'assimiler la portion de courbe en question à sa tangente au point de coordonnées $(2, -1)$. On sait que cette tangente a pour équation $y = 10x - 21$.

Posons maintenant $x = 2 + p$, la courbe de f coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse $2 + p$ tel que p vérifie $p^3 + 6p^2 + 10p - 1 = 0$. La tangente coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse $2 + p$ tel que p vérifie $10p - 1 = 0$. Il suit que remplacer la portion de courbe par la tangente considérée revient à négliger (comme l'a fait Newton) les termes $p^3 + 6p^2$. On obtient alors $p = 0.1$. L'approximation est encore meilleure si l'on se place au point d'abscisse 2.1, et ainsi de suite.

En 1690, Raphson ouvre la voie à une procédure algorithmique en établissant la relation de récurrence entre deux termes consécutifs de la suite et que nous connaissons aujourd'hui sous la forme $u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}$. Mais la question de la convergence de la suite n'est pas alors véritablement posée.

C'est dans son traité intitulé *Sur la détermination approximative des racines d'une équation algébrique ou transcendante* que Cauchy donne en 1829⁵⁶, des conditions, portant sur les dérivées premières et secondes de la fonction f , qui permettent d'affirmer l'existence d'une unique racine comprise entre deux nouvelles bornes, et de préciser de quelle manière la suite des approximations successives fournie par la méthode de Newton converge (c'est-à-dire étudier la rapidité de la convergence). Sa démonstration est semblable à celle que l'on développe aujourd'hui et que l'on peut observer dans Dieudonné (1980), tout en tenant compte que la racine en question n'est pas multiple. Enfin rappelons qu'avant d'appliquer la méthode de Newton, il est nécessaire de procéder à la séparation des racines. Cauchy propose à cet effet, diverses méthodes dans le cas des équations algébriques.

Comme mentionné par Chabert et al. :

"L'idée de la méthode des approximations successives, c'est-à-dire le recours à des algorithmes itératifs qui génèrent une suite convergente dont la limite est la solution du problème considéré, exprimée sous la forme d'une méthode du point fixe, ne s'est dégagée que progressivement à partir de quelques équations $x = g(x)$ - dont les solutions sont alors des points fixes de la fonction g ." (Chabert et al., 1994, p. 228)

Pour les besoins de notre recherche, nous reprenons les preuves établissant la convergence et la rapidité de convergence de la suite des approximations successives fournie par Newton.

Aujourd'hui, on peut établir que la méthode de Newton est une méthode de point fixe de l'application g telle que $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. On voit clairement que rechercher un point fixe de l'application g revient à chercher une solution de l'équation $f(x) = 0$.

Nous partons du fait que le schéma numérique de la méthode de Newton est donné par la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}$.

Nous pouvons énoncer la proposition relative à la condition de convergence de la suite $(u_n)_n$ comme suit :

Soit $f \in C^2([a, b])$. S'il existe un unique $\alpha \in [a, b]$ tel que $f(\alpha) = 0$ et $f'(\alpha) \neq 0$,

⁵⁶ Cité dans (Chabert et al., 1994, p. 225).

alors il existe $\delta > 0$ tel que la suite $(u_n)_n$ définie par $u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}$ et $u_0 \in I_\delta = [\alpha - \delta, \alpha + \delta]$ converge.

La continuité de f' et la condition $f'(\alpha) \neq 0$ implique l'existence d'un intervalle $[\alpha - \eta, \alpha + \eta] \subset [a, b]$ sur lequel f' reste non nulle.

Il en résulte que la fonction $g' : x \mapsto \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}$ est continue sur $[\alpha - \eta, \alpha + \eta]$.

La relation $g'(\alpha) = 0$ implique alors l'existence d'un intervalle $[\alpha - \delta, \alpha + \delta] \subset [\alpha - \eta, \alpha + \eta]$ et d'un réel $0 < k < 1$ tels que $|g'(x)| \leq k, \forall x \in [\alpha - \delta, \alpha + \delta]$. On en déduit que g est k -lipchitzienne avec $0 < k < 1$, et que $g([\alpha - \delta, \alpha + \delta]) \subset [\alpha - \delta, \alpha + \delta]$.

On conclut alors à l'aide du théorème du point fixe que la suite définie par $u_{n+1} = g(u_n)$, $u_0 \in I_\delta = [\alpha - \delta, \alpha + \delta]$ converge vers l'unique point fixe α de g .

Nous pouvons aussi énoncer la proposition relative à l'estimation de la convergence comme suit :

Soit $f \in C^2([a, b])$ telle qu'il existe un unique $\alpha \in [a, b]$ vérifiant $f(\alpha) = 0$ et $f'(\alpha) \neq 0$. Alors, il existe $\varepsilon > 0$ tel que la suite $(u_n)_n$ définie par $u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}$ et $|u_0 - \alpha| \leq \varepsilon$ converge vers α .

De plus, s'il existe un intervalle $[\alpha - \eta, \alpha + \eta] \subset [a, b]$ sur lequel $|f''| \leq M$ et $\left| \frac{1}{f'} \right| \leq m$, alors tout réel $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon < \frac{2}{mM}$ et $\varepsilon \leq \eta$ convient.

En effet, $u_{n+1} - \alpha = u_n - \alpha - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)} = \frac{(u_n - \alpha)f'(u_n) - f(u_n)}{f'(u_n)}$.

La fonction f étant de classe C^2 , on en déduit l'existence d'un réel θ compris entre α et u_n tel que $f(\alpha) = f(u_n) + (\alpha - u_n)f'(u_n) + (\alpha - u_n)^2 \frac{f''(\theta)}{2} = 0$.

Il suit que $(u_n - \alpha)f'(u_n) - f(u_n) = (u_n - \alpha)^2 \frac{f''(\theta)}{2}$ ou encore que

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq |u_n - \alpha|^2 \frac{1}{|f'(u_n)|} \frac{|f''(\theta)|}{2}.$$

En considérant un intervalle $[\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon] \subset [a, b]$ contenant u_n et sur lequel f' reste non nulle, on peut écrire $|u_{n+1} - \alpha| \leq |u_n - \alpha|^2 \frac{mM}{2}$, où m et M sont tels que

$|f''| \leq M$ et $\left| \frac{1}{f'} \right| \leq m$ sur $[\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon]$. La convergence est quadratique car $|u_{n+1} - \alpha| \leq c^{\text{ste}} |u_n - \alpha|^2$ donc bien meilleure si l'on est proche de α . Ce que nous traduisons avec Newton par : *tu gagneras deux fois plus de chiffres dans l'approximation à chaque opération*⁵⁷.

III. Retour sur les fondements

L'invention du calcul infinitésimal a développé des idées et des méthodes efficaces, mais les définitions que donnaient les mathématiciens du XVII^e et XVIII^e siècles, des notions de base du calcul infinitésimal restent imprécises. Comme le témoigne d'ailleurs, la question suivante posée en 1784 par l'Académie de Berlin pour un prix mis à concours :

*"Pour assurer à cette belle partie de nos connaissances la continuation de ces précieux avantages, on demande une **théorie claire et précise de ce qu'on appelle infini en mathématique**. On sait que la haute géométrie fait un usage continuel des infiniment grands et des infiniment petits. Cependant les géomètres et même les analystes anciens, ont évité soigneusement tout ce qui approche de l'infini ; et de grands analystes modernes avouent que les termes grandeur infinie sont contradictoires. [...]. On exige que cette matière soit traitée avec toute la généralité et avec toute la rigueur, la clarté et la simplicité possibles."*⁵⁸

Dans la deuxième moitié du XIX^e siècle, Cauchy, Abel, Weierstrass, Cantor, Dedekind et bien d'autres réussissent à mettre en place une telle théorie claire et précise.

⁵⁷ Cité dans Chabert et al. (1994).

⁵⁸ Cité dans (Friedelmeyer, 1993, p. 119).

Remarquons que l'obligation d'enseignement faite aux mathématiciens du XIX^e siècle a contribué à les amener à élucider les notions de base de l'analyse réelle et asseoir ses fondements.

III.1 Elucidation des objets de base de l'Analyse

Au tournant du XVIII^e et au XIX^e siècle, Gauss (1777 :.1855) montre dans son *Notion fondamentale de la théorie des suites*⁵⁹ qu'il s'intéresse déjà aux fondements de l'analyse réelle. Il commence par définir une suite comme étant *un ensemble ayant un nombre quelconque d'éléments* (un ensemble semble être pour lui dénombrable), puis il considère que cette définition est de peu d'utilité et définit une suite comme l'ensemble des valeurs d'une fonction d'une variable en donnant ainsi la définition moderne d'une suite comme étant une application de \mathbb{N} dans \mathbb{R} . Sans se poser la question de la construction de \mathbb{R} , Gauss définit les bornes supérieure et inférieure d'une suite et indique la propriété de la borne supérieure : pour définir la borne supérieure, il définit d'abord un majorant λ d'une suite bornée et note l'existence d'un nombre a plus petit que λ et qui n'est pas un majorant de la suite puis affirme qu'en parcourant d'une *façon continue* toutes les valeurs entre a et λ , on obtient *nécessairement* le plus petit majorant. En 1813, Gauss publie un grand mémoire sur la série hypergéométrique, série entière dépendant de trois paramètres retrouvée par Euler à l'occasion de ses recherches sur les équations linéaires du second ordre intégrables par des séries entières $F(\alpha, \beta, \delta, x) = 1 + \frac{\alpha\beta}{1!\delta}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1!\delta(\delta+1)}x^2 + \dots$. L'étude de cette série a été la première étude soignée de la convergence et de la divergence d'une série qui a ouvert à son tour l'ère de la rigueur en analyse réelle.

a) Suite

C'est le *Cours d'Analyse* de Cauchy, à l'école polytechnique paru en 1821, qui ouvre la voie à l'analyse moderne, *autant par sa rigueur que par la clarté et l'élégance du style mathématique de son auteur*⁶⁰. Dans ce livre destiné à l'enseignement, où la notion de limite y apparaît comme fondamentale, Cauchy commence dans le chapitre des préliminaires par donner d'abord la définition d'une suite (quantité variable) : *Si pour tout entier positif n on se donne un nombre réel u_n , nous parlons d'une suite*. En langage moderne : $\{u_n\} = \{u_0, u_1, u_2, \dots\}$.

⁵⁹ Cf. Dieudonné (1978).

⁶⁰ Cf. Dieudonné (1978).

Il donne ensuite la définition de la limite d'une suite : *Lorsque les valeurs successives attribuées à une même variable s'approchent indéfiniment d'une valeur fixe, de manière à finir par en différer aussi peu que l'on voudra, cette dernière est appelée la limite de toutes les autres.*

Il propose la notation *lim* comme il le précise⁶¹ : *Lorsqu'une quantité variable converge vers une limite fixe, il est souvent utile d'indiquer cette limite par une notation particulière, c'est ce que nous ferons en plaçant l'abréviation *lim* devant la quantité variable dont il s'agit, etc.*

Ce qui paraît remarquable c'est la définition qu'il donne de l'infiniment petit : *On dit qu'une quantité variable devient infiniment petite lorsque sa valeur numérique décroît indéfiniment de manière à converger vers la limite zéro.* De même, il donne les premières définitions précises de $+\infty$ et de $-\infty$, telles qu'on les connaît aujourd'hui.

A la suite de la définition de la convergence d'une suite, il est donc possible d'établir que toute suite convergente est bornée et de simplifier le calcul des limites en introduisant la somme, le produit et le quotient de deux suites convergentes.

Abordons maintenant un problème important auquel a été confronté Cauchy : la définition de la convergence citée ci-dessus impose le fait que la limite u doit être connue puisqu'il faut estimer le rapprochement des valeurs successives de la suite à cette valeur. Pour sortir de cette impasse, il a l'idée de remplacer (en langage moderne) $|u_n - u| < \varepsilon$ par $|u_n - u_{n+k}| < \varepsilon$ pour tous les successeurs u_{n+k} de u_n puis énonce le théorème qui se traduit par : *Une suite de nombres réels converge (avec un nombre réel comme limite) si et seulement si c'est une suite de Cauchy.*

Une démonstration rigoureuse de l'implication inverse, au-delà de l'intuition de Cauchy, est impossible sans avoir compris la notion de nombres irrationnel et réel. Nous verrons plus loin que la construction des nombres réels a été traitée indépendamment par Cantor (1845 :. 1918) en 1872, ce qui a permis d'établir le théorème de Cauchy, et par Dedekind (1831 :. 1916) dans la même année mais cette fois basée sur l'idée selon laquelle l'ensemble des rationnels ne possède pas la propriété de la borne supérieure.

La construction de \mathbb{R} a permis de démontrer rigoureusement diverses propriétés des suites (telles celles relatives à la monotonie, aux suites monotones et bornées, aux suites adjacentes, le théorème de Bolzano-Weierstrass, etc.).

b) Fonction et continuité

⁶¹ Cité dans (Hairer et Wanner, 2000, p. 172).

Dans le paragraphe Considérations générales sur les fonctions de son premier chapitre, Gauss donne une définition générale d'une fonction et sa caractérisation⁶² : Pour qu'une fonction d'une seule variable soit complètement déterminée, il est nécessaire et il suffit que de chaque valeur particulière attribuée à la variable on puisse déduire la valeur correspondante de la fonction. Nous verrons plus loin que Dirichlet (1805 : 1859) sous l'influence de Fourier va donner une notion large de la fonction⁶³ : n'importe quelles valeurs y définies en dépendance de valeurs de x ou n'importe quelle courbe dessinée.

Dans le chapitre II du Cours d'Analyse, Cauchy introduit la notion de fonction continue en exigeant que des variations indéfiniment petites de x produisent des variations indéfiniment petites de y ⁶⁴ : ... $f(x)$ sera fonction continue, si...la valeur numérique de la différence $f(x+\alpha) - f(x)$ décroît indéfiniment avec celle de α Bien que son ouvrage fût pratiquement ignoré par les mathématiciens (passe inaperçu pendant environ un demi-siècle), le logicien et mathématicien Bolzano (1781 : 1848) a été plus précis dans sa définition de la continuité d'une fonction de la variable réelle x pour toutes les valeurs de x appartenant à un intervalle donné⁶⁵ : si x est une telle valeur quelconque, la différence $f(x-\delta) - f(x)$ peut être rendue plus petite que toute grandeur donnée, si l'on peut toujours prendre δ aussi petit que l'on voudra. Bolzano a donné cette définition à l'occasion de sa proposition de la démonstration du théorème des valeurs intermédiaires. Cependant, il a estimé nécessaire d'atteindre une plus grande rigueur en analyse réelle. Nous savons tous aujourd'hui qu'avec la construction de \mathbb{R} la démonstration rigoureuse et précise de ce théorème est possible.

Les définitions de la continuité données par Cauchy et Bolzano abordent l'aspect local de la continuité mais n'étant pas quantifiées, laissent subsister des ambiguïtés. Le travail de quantification revient à Weierstrass (1815 : 1897). Voulant réduire davantage le rôle de l'intuition, il s'était interrogé sur le sens à attacher à une expression comme une variable s'approche indéfiniment d'une valeur fixe, il suggère de la traduire en inégalités arithmétiques⁶⁶ : Si pour toute quantité ε , il existe une borne α , tel que pour toute valeur de x comprise entre $x_0 - \alpha$ et $x_0 + \alpha$, $f(x)$ est comprise entre $f(x_0) - \varepsilon$ et $f(x_0) + \varepsilon$; on dit que la fonction f est continue en x_0 . Les définitions modernes de la limite et de la continuité en découlent immédiatement.

⁶² Cf. (Dieudonné, 1978, p. 342).

⁶³ Cf. (Hairer et Wanner, 2000, p. 202).

⁶⁴ Idem.

⁶⁵ Cf. (Dieudonné, 1978, p. 340).

⁶⁶ Cf. (Hairer et Wanner, 2000, p. 204).

III.2 L'étude des fonctions dans la perspective des normes du calcul infinitésimal

Des préoccupations nouvelles de rigueur et de fondement ont conduit les mathématiciens du XIX^e siècle à l'élucidation des notions de base de l'analyse réelle. Parallèlement à ce mouvement, celui de la soumission de la fonction aux opérations du calcul infinitésimal (différentiation et intégration) n'a fait que précipiter le désir d'asseoir l'analyse réelle sur des fondements solides.

a) Sur la notion d'intégrale

C'est encore Cauchy qui donnera le premier une définition de l'intégrale d'une fonction continue dans $[a, b]$. A cette occasion une nouvelle notion importante fera son apparition, celle de la continuité uniforme qui garantit l'intégrabilité des fonctions continues. D'abord implicitement, dans la définition d'une intégrale définie de Cauchy, pour être finalement élucidée par Heine (1821 : 1881). Nous exposerons ci dessous, la démarche de Cauchy.

Dans son Résumé des leçons données en 1823 à l'école polytechnique sur le calcul infinitésimal, Cauchy explique avec la rigueur de l'époque que l'intégrale d'une fonction continue est la limite d'une somme.

C'est dans la vingt et unième leçon que Cauchy donne la première définition de l'intégrale, et c'est donc à partir de ce texte que naîtra la théorie moderne de l'intégration. Soit f une fonction réelle continue dans un intervalle $[x_0, X]$ et soit une suite (x_i) , $1 \leq i \leq n-1$, d'éléments de cet intervalle telle que $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < X$. Il introduit la somme (on trouve déjà cette notion de somme chez Euler) : $S = (x_1 - x_0)f(x_0) + (x_2 - x_1)f(x_1) + \dots + (X - x_{n-1})f(x_{n-1})$, et précise⁶⁷ : La quantité S dépendra évidemment : 1° du nombre n des éléments dans lesquels on aura divisé la différence $X - x_0$; 2° des valeurs mêmes de ces éléments et, par conséquent, du mode de division adopté. Pour démontrer que la limite de S , lorsque le pas de subdivision tend vers zéro, est indépendante de la subdivision choisie Cauchy utilise implicitement la continuité uniforme de la fonction f sur le segment $[x_0, X]$. Cette limite est ce que l'on appelle intégrale définie de f sur $[x_0, X]$. Pour la désigner, Cauchy utilise la notation, imaginée par Fourier, $\int_{x_0}^X f(x) dx$. Il établit ensuite les propriétés de linéarité de l'intégrale définie ainsi que les propriétés relatives à l'intervalle d'intégration.

⁶⁷ Cf. (Dieudonné, 1978, p. 354).

On doit à Riemann, Darboux et Lebesgue des théories plus générales englobant des classes plus générales de fonctions telles que les fonctions continues par morceaux, les fonctions dont l'ensemble des points de discontinuité est de mesure nulle (au sens de la mesure de Lebesgue) et les fonctions intégrables au sens de Lebesgue.

b) Fonctions différentiables

Dans son Cours d'Analyse, Cauchy définit la dérivée d'une fonction continue en termes de limite : C'est la limite, lorsqu'elle existe, du rapport des différences $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ lorsque h s'approche de la limite zéro. Le lien entre continuité et dérivabilité ne sera pas explicité dans les travaux de Cauchy, le problème ne sera clairement formulé qu'à partir du mémoire de Dirichlet de 1829 concernant les conditions du développement d'une fonction en série de Fourier.

A côté de la définition classique de la dérivée, qu'il énonce en utilisant sa formulation quantifiée des limites, Weierstrass définit en 1861 aussi la dérivée par la formule : $f(x) - f(x_0) = (x-x_0) f'(x_0) + (x-x_0)r(x)$, où r est une fonction continue en x_0 et satisfaisant $r(x_0) = 0$. Cette formulation a l'avantage de ne pas contenir de limite (remplacée par la continuité de $r(x)$) et de mettre en évidence l'équation de la tangente au graphe de f au point d'abscisse x_0 : $y = f(x_0) + (x-x_0) f'(x_0)$.

Un deuxième avantage s'obtient en posant $\varphi(x) = f'(x_0) + r(x)$ et en considérant la formulation établie par Carathéodory en 1950⁶⁸ : *La fonction $f(x)$ est différentiable en x_0 si et seulement s'il existe une fonction $\varphi(x)$ continue en x_0 telle que $f(x) = f(x_0) + \varphi(x)(x-x_0)$* . La valeur $\varphi(x_0)$ est la dérivée $f'(x_0)$ de f en x_0 . Il suit qu'une fonction différentiable en x_0 est continue en x_0 .

Avant l'époque de Riemann et de Weierstrass, on croyait généralement que chaque fonction continue était aussi différentiable, à l'exception possible de quelques points singuliers. La donnée de contre-exemples a permis aux mathématiciens de l'époque de réguler leur conception.

c) Lien entre intégration et dérivation

Après avoir défini $F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt$, f continue sur $[x_0, X]$ et $x \in [x_0, X]$, Cauchy⁶⁹

montre en utilisant le théorème des accroissements finis que $F'(x) = f(x)$ pour tout x

⁶⁸ Cf. (Haier et Wanner, 2000, p. 236).

⁶⁹ Pour une démonstration détaillée, se reporter au Cours de Mathématiques du premier cycle de Jacques Dixmier (1973).

$\in [x_0, X]$. Cette proposition établit le lien entre l'intégration et la dérivation, et c'est donc chez Cauchy qu'on trouve une première démonstration du théorème fondamental du calcul infinitésimal.

A propos de ce théorème, Hairer et Wanner disent :

"L'arbre généalogique⁷⁰ des théorèmes utilisés pour la démonstration rigoureuse du théorème fondamental est impressionnant. Si Leibniz en avait eu connaissance, aurait-il encore eu le courage d'énoncer et d'utiliser ce théorème ? " (Hairer et Wanner, 2000, p. 241)

d) Application de l'intégrale définie : La formule de Taylor

Comme une des applications importantes de l'intégrale définie, Cauchy démontre, la formule de Taylor avec reste intégral pour une fonction f de classe C^k sur $[a, b]$.

Cette formule permet d'affirmer que $\sum_{i=0}^{k-1} \frac{(x-a)^i}{i!} f^{(i)}(a)$ est une valeur approchée de

$f(x)$ pour $x \in]a, b[$ et que l'erreur commise est inférieure à $\frac{(b-a)^{k-1}}{(k-1)!} \int_a^b |f^{(k)}(t)| dt$.

A cette occasion il dit :

"[...] je me suis forcé de renvoyer au calcul intégral la formule de Taylor, cette formule ne pouvant pas être admise comme générale qu'autant que la série qu'elle renferme se trouve réduite à un nombre fini de termes, et complétée par une intégrale définie." (Dahan-Dalmedico et Peiffer, 1986, p. 204)

Le cours de Weierstrass de 1861, montre l'importance de la place accordée à la formule de Taylor. En fait, le véritable théorème fondamental de toute l'analyse réelle est pour Weierstrass le suivant : *Si une fonction réelle de la variable réelle est n fois continûment dérivable dans un intervalle ouvert I contenant x_0 , et si toutes les dérivées jusqu'à l'ordre $n-1$ sont nulles au point x_0 , alors on a*

$$f(x) - f(x_0) = \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0 + \theta(x - x_0)), \quad 0 < \theta < 1, x \in I.$$

⁷⁰ Nous retrouvons l'arbre en question dans (Haier et Wanner, 2000, p. 242).

III.3 Retour sur les nombres : rigueur mathématique oblige

L'une des premières raisons qui semble avoir incité les mathématiciens à construire l'ensemble \mathbb{R} , se traduit par les difficultés rencontrées à propos des questions où intervenaient la notion de limite, en l'occurrence la notion d'infini. En 1851, Bolzano publie son livre *Paradoxes de l'infini*, à cette occasion, il écrit⁷¹ : *Certainement la plupart des énoncés paradoxaux que l'on rencontre dans le domaine des mathématiques sont des théorèmes qui contiennent le concept de l'infini soit directement, soit qu'ils s'appuient sur lui, au moins d'une certaine façon lorsqu'on cherche à les démontrer.*

Cependant, d'autres raisons ont aussi amené les mathématiciens qui réfléchissent sur les fondements à construire l'ensemble des nombres réels. La plus importante est sûrement la tendance générale à bâtir l'ensemble de l'analyse réelle à partir des nombres entiers qui aboutira à l'*arithmétisation de l'analyse réelle*.

a) Egalité des agrégats et critère de finitude de Weierstrass

Selon Dieudonné (1978), on peut situer l'élaboration de la théorie des nombres réels de Weierstrass vers 1863, néanmoins elle n'a été publiée pour la première fois qu'en 1872.

Soucieux de mettre l'analyse réelle sur des bases rigoureuses depuis sa nomination en 1856, à l'Université de Berlin, il s'aperçoit le premier de l'absence de fondement logique de l'arithmétique et essaye d'y remédier.

L'existence de l'ensemble des nombres entiers positifs ou nuls \mathbb{N} étant admise, il affirme que deux nombres entiers sont égaux s'ils sont composés du même nombre d'unités. Pour donner la définition de l'égalité de deux nombres rationnels positifs, qu'il définit comme étant des combinaisons linéaires finies de coefficients entiers des *parties exactes de l'unité*, Weierstrass, utilise des transformations qui permettent de représenter un nombre rationnel positif par un *agrégat*, c'est à dire un ensemble fini dont les éléments appartiennent à l'ensemble des rationnels positifs (par exemple $\frac{4}{3}$ peut être représenté par l'agrégat $\left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right\}$). Il annonce ensuite que deux nombres rationnels positifs a et b sont égaux si l'agrégat a peut être transformé en a' de façon que a' contienne les mêmes éléments, et le même nombre de fois que b.

⁷¹ Cf. (Dieudonné, 1978, p. 363).

Pour définir les agrégats ayant un nombre infini d'éléments (c'est à dire des suites d'une infinité de nombres rationnels, donc les réels), il commence par introduire la notion ensembliste d'un nombre a' partie de a . Ce qui va lui permettre de donner une nouvelle définition de l'égalité, possédant les propriétés de symétrie et de transitivité. Enfin, il définit les nouveaux nombres composés d'une infinité d'éléments comme étant la classe d'équivalence pour la relation d'équivalence définie par la nouvelle égalité des agrégats satisfaisant au critère de finitude suivant⁷² : *On dira qu'un nombre a à une valeur finie, s'il existe un nombre b plus grand que a , b étant composé d'un nombre fini d'éléments.* En définissant la soustraction pour ces nouveaux nombres, on obtient alors l'ensemble \mathbb{R} des nombres réels.

L'année 1872, marque la publication de deux autres théories des nombres réels, celle de Cantor et de Dedekind.

b) Les coupures de Dedekind

Bien qu'il énonce dans la préface de son ouvrage *Continuité et nombres irrationnels*, que les considérations qu'il va exposer datent de l'automne 1858 au moment où il a senti *le manque d'une base réellement scientifique de l'arithmétique*, l'ouvrage ne fût publié qu'en 1872. En fait, depuis cet automne de 1858, en essayant de prouver le théorème qu'une suite croissante majorée admet une limite, il constate qu'au delà de l'évidence géométrique, aucune démonstration rigoureuse n'est possible. Ce qu'il accomplit à la fin de cette même année et qui a eu raison de son *Continuité et nombres irrationnels*.

Dans le premier chapitre des *Propriétés des nombres rationnels*, Dedekind met en évidence que l'ensemble des rationnels munis des quatre opérations de base est un corps totalement ordonné. Ensuite, guidé par l'intuition géométrique qu'un point M d'une droite partage les points de celle ci en deux classes, la classe des points situés à droite de M et celle des points situés à gauche de M , Dedekind affirme que pour tout élément a de l'ensemble des rationnels, on peut partager tous les nombres de \mathbb{Q} en deux classes A_1 et A_2 de façon que quelque soit $a_1 \in A_1$, on ait $a_1 < a$ et, quelque soit $a_2 \in A_2$, on ait $a < a_2$; le nombre a pouvant être adjoint à A_1 ou à A_2 .

Dans le chapitre sur la *Création des nombres irrationnels*, Dedekind définit la notion de coupure (A_1, A_2) de \mathbb{Q} comme étant une partition de \mathbb{Q} en deux classes A_1 et A_2 non vides et disjointes telles que tout nombre de la première A_1 soit strictement inférieur à tout nombre de la seconde A_2 . Les coupures déterminées par un nombre rationnel possèdent la propriété selon laquelle, où bien il existe un plus grand élément dans A_1 , où

⁷² Cf. (Dieudonné, 1978, p. 366).

bien il existe un plus petit élément dans A_2 . Inversement, une coupure possédant cette propriété détermine un nombre rationnel. Dedekind donne ensuite l'exemple de plusieurs coupures qui ne sont pas engendrées par un nombre rationnel. Il entreprend ainsi de construire d'autres nombres (en comblant les trous)⁷³ : *Maintenant, chaque fois qu'il existe une coupure (A_1, A_2) qui n'est pas engendrée par un nombre rationnel, on crée ainsi un nouveau nombre, un nombre irrationnel à qu'on considère comme entièrement défini par cette coupure (A_1, A_2) .* Désormais, à toute coupure correspond un nombre et un seul, rationnel ou irrationnel. Dedekind définit une relation d'ordre entre les coupures et vérifie quelques propriétés qui font de \mathbb{R} (qui est *continu*, connexe en terme moderne) un corps totalement ordonné.

c) Cantor et la construction de \mathbb{R} par les suites de Cauchy

Dans son mémoire *Sur les nombres irrationnels* Méray (1835 :.1911) indique d'abord que deux principes étaient à cette époque le fondement essentiel de toutes les parties des mathématiques où intervenaient la notion de limite. Le premier principe était qu'une suite croissante majorée (respectivement décroissante et minorée) tend vers une limite. Le deuxième principe était qu'une suite de Cauchy tend vers une limite. Il dit⁷⁴ : *Jusqu'à présent on a regardé ces propositions comme des axiomes, mais cette façon de faire n'évitait pas la nécessité d'introduire dans les raisonnements la conception assez obscure de nombre incommensurable.* Partant du fait qu'étant donnée une suite de Cauchy de rationnels, pour laquelle il n'existe pas de nombre rationnel vers lequel elle converge, Méray dit qu'une telle suite converge vers une *limite fictive*. L'introduction des nouveaux nombres, les limites fictives, va lui permettre de compléter \mathbb{Q} . Il y parvient en déclarant la suite de Cauchy toute entière *la limite fictive* en question. Nous allons par la suite traduire en langage moderne sa démarche.

En fait, il définit d'abord la notion de suites de Cauchy de rationnels équivalentes (qui est bien une relation d'équivalence) :

Deux suites de Cauchy de rationnels $\{u_n\}$ et $\{v_n\}$ sont équivalentes si $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$. On écrit alors $\{u_n\} \sim \{v_n\}$.

Par conséquent, on peut partitionner l'ensemble des suites de Cauchy de rationnels en classes d'équivalences

$\overline{\{u_n\}} = \{ \{v_n\} / \{v_n\} \}$ est une suite de Cauchy de rationnels et $\{u_n\} \sim \{v_n\}$.

⁷³ Cf. (Dieudonné, 1978, p. 368).

⁷⁴ Idem.

Les nombres réels (limites fictives) sont donc les classes d'équivalences de suites de Cauchy de rationnels : $\mathbb{R} = \left\{ \overline{\{u_n\}} / \{u_n\} \text{ est une suite de Cauchy rationnelle} \right\}$.

A cette occasion, il introduit le symbole de rationnels $\sqrt{\quad}$, et montre que l'ensemble \mathbb{R} , ainsi construit conserve l'ordre total de \mathbb{Q} .

Une théorie semblable fût élaborée par Cantor, qui fût publiée en 1872 par Heine puis par Cantor lui-même. Il définit un nombre réel de la même manière que Méray et étend à \mathbb{R} les opérations élémentaires de \mathbb{Q} .

La construction des nombres réels reposant sur les nombres entiers et sur les nombres rationnels, ne s'acheva qu'avec la définition axiomatique de l'ensemble \mathbb{N} par G. Peano en 1889.

IV. Conclusion : Spécificités de l'Analyse

A la suite des résultats de son mémoire sur sa théorie des nombres réels, Cantor introduit les premières notions ensemblistes et élabore les premières propriétés topologiques de \mathbb{R} . A partir de 1880, Cantor attribue à la théorie des ensembles un rôle unificateur et de synthèse de l'ensemble des mathématiques. Mais ses recherches furent au début mal accueillies. Il n'est pas question de s'attarder sur ce phénomène, disons plutôt que cette théorie a effectivement rempli le rôle que lui a attribué Cantor, mais après qu'elle eut surmonté par l'axiomatique (dite ZF, formulée par Ernest Zermelo en 1908 et puis précisé par Adolf Abraham Frankel en 1922) les contradictions pouvant survenir dans certains de ses raisonnements.

Pendant plusieurs décennies, l'étude des structures topologiques n'était souvent pas dissociée de la théorie des ensembles. En fait, les premiers ensembles considérés par Cantor sont évidemment des sous-ensembles de la droite ou du plan, puisque leur étude avait été inspirée par des problèmes d'analyse réelle. Ce n'est que graduellement que la théorie abstraite des ensembles se réduisit à la considération des notions d'appartenance et aux structures d'ordre. En 1906, à force d'étudier des ensembles de plus en plus abstraits, Fréchet (1878 : 1975) introduit la notion de distance. La notion d'espace topologique ne naquit qu'en 1914 grâce à Hausdorff (1868 : 1942) qui définit la notion de voisinage.

Une certaine autonomie fût reconnue à la topologie générale, elle reçut souvent le nom de Topologie ensembliste ou Topologie analytique, de sorte à rappeler que son

cadre de naissance est celui de la théorie des ensembles ou celui des applications à l'analyse réelle.

Toutefois la plupart des manuels destinés à l'enseignement de l'analyse réelle en première année d'université commencent par l'étude des propriétés du corps \mathbb{R} des nombres réels, des suites, et des fonctions pour déboucher sur le calcul différentiel et le calcul intégral. Il semblerait qu'à l'heure actuelle, du lycée à l'université, l'articulation entre la construction des nombres réels et les savoirs de l'analyse réelle soit absente. La problématique sur les fondements de l'analyse et leur consistance a supplanté les préoccupations historiques de construction des réels (en d'autres termes, la préoccupation historique à l'origine des fondements de l'analyse n'en est plus une).

En raison des variations suivant les époques, on ne peut bien sûr pas attendre que le sens de l'analyse réelle émerge des objets historiques. Nous pensons cependant que des éléments du développement historique en lien avec les nombres réels et les méthodes de leurs approximations, doivent pouvoir contribuer au sens des savoirs de l'analyse réelle. En fait, comme l'a montré l'étude ci dessus, les tâtonnements et les formulations provisoires ont constitué une partie intégrante du processus cognitif qui a sous-tendu la construction des savoirs de l'analyse réelle.

En vertu de cette étude, nous sommes en mesure d'établir certaines caractéristiques épistémologiques de l'analyse réelle :

- Les questions relatives aux notions de suite, limite, fonction dérivent de l'idée d'approximations, des propriétés et de la nature des réels. Ce n'est qu'à l'issue de la formalisation de la notion de nombre que les bases théoriques ont été établies.
- Les savoirs de l'analyse réelle sont particulièrement imbriqués. Le recours aux méthodes numériques d'approximation permet de mettre en œuvre un système satisfaisant de ces savoirs, et de faire apparaître sa cohérence.
- Certains objets de l'analyse réelle sont existants mais pas forcément "constructibles". Dans certains cas, le recours aux approximations permet de les rendre accessibles⁷⁵.
- La construction des savoirs table sur un va et vient permanent entre intuition et formalisation dans la mesure où c'est l'intuition qui rend accessible la formalisation via des tâtonnements sur des exemples et des contre-exemples, et c'est la formalisation qui enrichit l'intuition (Cf. Tall, 2004).

⁷⁵ Nous utilisons cette terminologie pour ne pas entrer en confusion avec les *mathématiques constructives*. Nous revenons sur ce point dans le chapitre 6.

A ce stade de la recherche, il est pertinent de se préoccuper du lien potentiel entre les caractéristiques épistémologiques de l'analyse réelle et des difficultés des étudiants dans l'apprentissage de l'analyse réelle. En d'autres termes, dans quelle mesure les divers aspects du travail des étudiants en analyse réelle (qui traduisent la complexité du processus cognitif sous-tendant l'acquisition des savoirs de l'analyse réelle), sont-ils en partie en lien avec la prise en compte ou non des caractéristiques épistémologiques de l'analyse réelle ?

Nous proposons une première étude de cette question à travers le paragraphe suivant.

V. L'enseignement de l'Analyse : Quelles difficultés ? Quelles alternatives ?

Nous proposons dans ce paragraphe, de faire appel à certains travaux en didactique de l'analyse réelle dans la transition lycée/université afin :

- d'identifier les difficultés que pourraient rencontrer les étudiants dans leur travail en analyse réelle, à l'entrée à l'université ;
- d'interroger "l'efficacité" des variables macro-didactiques de la transition en analyse réelle ;
- se donner les moyens théoriques d'analyser les organisations alternatives (notamment en les contrastant avec les organisations classiques) et d'avancer dans la problématique de la construction de l'ingénierie.

L'étude faite dans ce paragraphe, nous permettra de clarifier notre problématique, et de la situer par rapport aux recherches existant déjà, et relatives aux questions que nous abordons.

V.1 Travaux en didactique de l'Analyse à l'entrée à l'université et difficultés des étudiants

Plusieurs travaux à caractère psycho-cognitif (en particulier anglo-saxons), ont procédé à des analyses assez fines des difficultés des étudiants à développer des connaissances de l'analyse réelle. Ces travaux montrent comment l'appui sur une certaine logique du processus cognitif en analyse réelle (ou plus précisément sous-tendant la construction des savoirs de l'analyse réelle et qui pour des raisons claires, n'est pas forcément celle relatée par l'histoire de ces savoirs) pourrait amener à une alternative de son enseignement.

Tall (2004) synthétise l'ensemble de ses travaux concernant la logique du processus cognitif qui sous-tend l'engagement des étudiants dans la pensée mathématique savante. Dans l'approche de Tall, apprendre veut dire développer une flexibilité proceptuelle⁷⁶. Le cas de l'analyse réelle est particulièrement frappant : les procepts impliqués dans l'enseignement des débuts de l'analyse réelle sont selon Tall de troisième nature⁷⁷, dans le sens où ils sont associés à des symboles généralement sans dimensions instrumentales⁷⁸, mêmes s'ils produisent d'autres relations mathématiques, d'autres concepts. Par suite, développer une flexibilité proceptuelle en début de l'analyse réelle est une construction longue et complexe qui ne se limite pas à l'acquisition de techniques opératoires et algorithmiques. Tall (1996) insiste sur l'efficacité des expériences physiques et de la visualisation (géométrique, graphique, sur un dessin, par un logiciel ou une calculatrice) pour amener les apprenants à développer un sens intuitif des procepts de l'analyse réelle, et les préparer à transiter vers une forme de conceptualisation avancée – en l'occurrence formelle.

Dans cette étude nous avons fait le choix de ne pas rendre compte de la complexité cognitive de la transition vers la pensée formelle et les reconstructions qu'elle requière ; nous aurons l'occasion de reprendre les résultats de ces travaux en vue de la construction de l'ingénierie (Cf. Partie 3). En particulier, nous mettrons en parallèle la logique du processus cognitif identifié par Tall et le point de vue des situations didactiques – structuration du milieu⁷⁹.

Nous partons du fait que les difficultés que pourraient rencontrer les étudiants en analyse réelle sont constitutives des exigences liées à la logique (et/ou complexité) du processus cognitif qui leur est associé. Nous classons ci-dessous, ces difficultés en divers types afin de tenter d'expliquer comment leur prise en compte vient à l'appui de la nécessité de :

- penser un équilibre dans certaines des valeurs des variables macro-didactiques de la transition précédemment identifiées ;

⁷⁶ La notion de procept exprime le fait que chaque symbole évoque respectivement le savoir et le processus (à travers un contexte où le "concept" – savoir, est opérationnel), d'où le nom qui lui est attribué.

⁷⁷ Les deux autres natures réfèrent à d'autres domaines des mathématiques et ne font pas l'objet de ce travail.

⁷⁸ Algorithmiques.

⁷⁹ Notons que la logique du processus cognitif en question peut sembler équivalente aux trois dimensions pointées par Sackur et al. (2005) comme nécessaires pour l'étude de l'activité mathématique des élèves : *compréhension* (garder le contrôle par la signification), *performance* (arriver à progresser en utilisant les outils théoriques à disposition) et *conformité* (avec les règles et le formalisme).

- ne pas occulter les caractéristiques épistémologiques de l'analyse réelle, telles que nous les avons décrites plus haut, dans un projet d'enseignement de l'analyse réelle dans la transition lycée/université, et en l'occurrence à l'entrée à l'université.

Sans vouloir produire un cloisonnement, les types de difficultés que nous avons retenues sont au nombre de quatre⁸⁰ :

1. Difficultés à comprendre et à utiliser le formalisme de l'analyse réelle, ou en général le langage de l'analyse réelle (Artigue et al. (2007), Bridoux (2008), Chellougui (2003, 2008), Durand-Guerrier et Arsac (2003), Gueudet (2008), Tall (2002), Winslow (2008), etc.).

L'existence de telles difficultés confirme la nécessité de penser un équilibre dans les valeurs d'au moins deux variables macro-didactiques : le degré de généralisation et le degré de formalisation.

Ces difficultés sont explicitement formulées, par certains auteurs, comme étant en lien avec l'absence d'un contrôle sémantique. Nous dirons que le recours aux méthodes numériques d'approximations successives pourrait favoriser un contrôle mixte.

2. Difficultés à entamer une preuve en analyse réelle, soit à mettre en œuvre une définition, un théorème, etc. (Artigue (2006), Artigue et al. (2007), Durand-Guerrier et Arsac (2003), Gueudet (2008), Iannone et Nardi (2008), Moore (1994), Tall (1991, 2004, 2006), Weber et al. (2007), etc.).

L'existence de telles difficultés confirme la nécessité de penser un équilibre dans les valeurs d'au moins trois variables macro-didactiques : le registre de validation et les conversions entre registres.

Encore une fois, le recours aux méthodes numériques d'approximations successives permet de faire apparaître la cohérence du système constituant les savoirs de l'analyse réelle, et de favoriser une base supportant un travail de preuve tel que celui attendu.

3. Difficultés à produire des exemples et des contre-exemples, et par suite une sorte de désinvestissement s'installe empêchant de développer une compréhension intuitive des concepts de l'analyse réelle (Artigue et al. (2007), Benbachir et al. (2001), Gueudet (2008), Le Thai Bao (2007), Mamona-Downs (2001), etc.).

⁸⁰ Nous reprenons plus loin certains des travaux que nous allons citer.

L'existence de telles difficultés confirme la nécessité de penser un équilibre dans les valeurs d'au moins deux variables macro-didactiques : les conversions entre registres et le mode d'intervention des notions.

4. Difficultés à mettre en accord les définitions et les théorèmes de l'analyse réelle et les *concepts images*⁸¹ qui leurs sont associés (Gueudet (2008), Artigue (2006), Artigue et al. (2007), Bergé (2004), Birebent (2008), Bloch et al. (2008), Nardi et Iannone (2005), Mamona-Downs (2001), etc.).

Par concept image, nous entendons : "total cognitive structure that is associated with the concept [...]. It is built over the years through experiences of all kinds, changing as the individual meets new stimuli and matures." (Tall et Vinner, 1981, p. 152)

Notons que l'exemple de la définition de la limite d'une suite, donc celui cristallisant la relation entre nombres réels et limites, est le plus souvent invoqué pour identifier ce type de difficultés. En particulier Artigue et al. (2007) pointent l'incapacité des étudiants (même à un niveau du cursus suffisamment avancé) d'identifier $0,999\dots$ à 1. Dans le même ordre d'idée, Nardi et Iannone (2005) montrent comment les étudiants éprouvent le besoin de répondre autre chose que $x = 0$, à la question : *Soit x tel que $x^3 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, x < \frac{1}{n}$. Que vaut x ?* Les deux exemples cités pointent un travail manquant au niveau de l'articulation entre égalité formelle et égalité numérique.

L'existence de telles difficultés confirme la nécessité de penser un équilibre dans les valeurs d'au moins deux variables macro-didactiques : les conversions entre registres et le mode d'intervention des notions. Par ailleurs, au vu des caractéristiques épistémologiques de l'analyse réelle, le recours à un travail sur les nombres ainsi que leur nature pourrait constituer un moyen pour pallier à ce type de difficultés.

V.2 Organisations classiques

L'étude des organisations classiques, à travers un manuel d'analyse réelle en première année d'université ainsi que deux polycopiés de cours et des séries de travaux dirigés⁸², a amené aux résultats globaux suivants :

⁸¹ Parfois formulé dans d'autres termes par certains des auteurs que nous citons.

⁸² Le choix de ce corpus est motivé par sa nature générique qu'on observe dans la plupart des manuels et polycopiés de cours destinés à ce niveau du cursus.

- La chronologie d'apparition des savoirs à enseigner est explicitement linéaire. L'architecture globale est fondée sur l'axiomatique et les définitions, d'où découlent propriétés et théorèmes.
- La résolution des exercices d'application ainsi que des problèmes (dont la plupart des énoncés généraux) appelle une "bonne utilisation" de l'ensemble des définitions, propriété et théorèmes.
- Le cadre de validation est strictement formel. On note une nécessité à jongler avec l'ordre d'apparition et la nature des quantificateurs. On peut aussi observer quelques techniques de majorations, minorations.
- Le registre sémiotique est celui de l'analyse formelle.
- La presque totalité des notions prévues est appréhendée via leur statut objet (et ne sont pas demandées à être travaillées dans leur dimension proceptuelle au sens de Tall). L'opérationnalité de ces notions, en tant que facteur favorisant une mise en évidence explicite du degré d'imbrication des notions de l'analyse réelle, n'est pas vraiment sollicitée.
- On n'a pas pu observer de statut particulier des nombres réels. Le corps des réels étant introduit via toutes les propriétés formelles (intervalles, borne supérieure, axiome d'Archimède, segments emboîtés, etc.) nécessaires pour l'élaboration du reste du cours. En particulier, nous n'avons pas pu observer de tâches qui pourraient induire un travail sur des problèmes d'approximations et des nombres spécifiés (un nombre réel est en priorité un x , que désigne-t-il ?).

En conclusion, il s'avère que les savoirs de l'analyse réelle visés s'acquièrent par des démonstrations hors contexte d'exemplification pertinente. Or, nous pensons qu'il y a une autre façon de faire acquérir ces savoirs : c'est ce que nous visons à travers cette recherche (Cf. Partie 3).

V.3 Organisations alternatives

Des alternatives existent qui vont dans le sens souhaité d'une meilleure prise en compte de la complexité du processus cognitif, tant au secondaire qu'au supérieur, mais elles nécessitent, en général, un temps d'enseignement plus long que ce que l'institution accorde actuellement. Dans tous les cas, l'hypothèse sous-jacente à ces alternatives n'est pas explicitement d'approfondir et de compléter les connaissances numériques des étudiants, comme moyen de palier aux difficultés pouvant subvenir dans un processus d'apprentissage des savoirs de l'analyse réelle.

V.3.1 Alternatives globales

Dans la majorité des organisations que nous avons étudiées, l'approche adoptée est constitutive du choix que se fait l'auteur pour introduire/construire l'ensemble des nombres réels :

1. Approche historique (appelée heuristique dans le cas de AHA) : suivre la construction des savoirs dans leur contexte temporel.

Le projet est destiné aux élèves des deux dernières années du lycée et du début du supérieur. Il part des intuitions communes sur les pentes, les vitesses, les aires ...pour construire pas à pas les savoirs de l'analyse réelle. En ce sens, l'approche est heuristique. Les notions de fonction, de dérivée, d'intégrale, de limite y évoluent à travers une suite de problèmes. Ceux-ci sont résolus de manière à mettre en évidence les conjectures initiales, les doutes et même parfois les erreurs ou les fausses pistes.

2. Approche Arithmétique – majorée, minorée.

C'est à partir des seules opérations sur les nombres réels, que les savoirs de l'analyse réelle (y compris les propriétés de fonctions) sont définis. Cette approche suit donc le mouvement *d'arithmétisation de l'Analyse*. Le travail dans ce cadre se restreint le plus souvent à l'utilisation des registres arithmétiques, algébriques sans vraiment investir les conversions entre ces registres.

3. Approche de Cauchy.

Cette approche utilise la construction des nombres réels à partir des suites de Cauchy pour introduire le reste du savoir. On peut noter : le jeu sur plusieurs type de registres en l'occurrence graphique ; le jeu sur l'aspect opérationnel des notions introduites ainsi qu'une utilisation "modérée" des quantificateurs.

4. Approche de Ross.

Cette approche part de l'axiome des segments emboîtés et tente à chaque fois des preuves de construction des nombres (pointés comme existant dans les théorèmes) en les approchant par une suite.

V.3.2 Alternatives locales

Les alternatives locales sont celles qui ne prennent en charge qu'une partie des savoirs de l'analyse réelle.

Des ingénieries existent et ont tenté d'aller dans le sens souhaité :

- D'une meilleure prise en compte des variables de la transition, tant au secondaire qu'au supérieur (Bloch (2000), Hersant et Vandebrouck (2006), Robert (1998), Sackur et Maurel (2002), etc.).
- D'une meilleure prise en compte du rôle du numérique dans l'apprentissage de l'analyse réelle. Mais ces travaux ne pointent pas explicitement un éventuel recours aux méthodes numériques d'approximations successives, tel est le cas de l'étude de (Grugnetti et al., 2006)). Des ébauches d'alternatives sont proposées par Bloch et al. (2008) et Birebent (2008).

VI. Synthèse

L'étude précédente nous a permis notamment de :

1. Identifier certaines caractéristiques épistémologiques de l'analyse réelle (nature des nombres réels et structure de \mathbb{R} , existence des objets et leur accessibilité, rôle du formalisme en analyse, rôle et usage des méthodes numériques d'approximations, etc.).
2. Identifier les difficultés constitutives de la complexité du processus cognitif lié aux savoirs de l'analyse réelle. Ceci nous a permis de voir que la prise en compte de ces difficultés va de pair avec la prise en compte aussi bien des caractéristiques épistémologiques de l'analyse réelle, que d'un équilibre dans les valeurs de certaines variables macro-didactiques de la transition (degré de formalisation, degré de généralisation, registre de validation, conversions entre registres, mode d'intervention des notions, degré d'autonomie sollicité).

Il nous reste à utiliser ces résultats dans la perspective de la construction de l'ingénierie dans le cadre de la TSD.

Avant de procéder à ce travail, nous proposons dans la suite d'investiguer le terrain institutionnel via l'analyse d'un questionnaire en direction des enseignants. Cette étude du terrain est nécessaire pour au moins deux raisons :

- pointer particulièrement la prise en compte ou non des difficultés constitutives de la complexité du processus cognitif lié aux savoirs de l'analyse réelle ;
- ce qui nous permettra d'identifier les différents types de contrat en lien avec l'enseignement de l'analyse réelle et d'en prévoir le travail possible des étudiants.

Nous pouvons aussi avancer une motivation, non moins importante, celle de l'adhésion possible des enseignants à un aménagement de l'enseignement de l'analyse réelle via le recours aux méthodes numériques d'approximations.

DEUXIEME PARTIE
L'ENSEIGNEMENT DE L'ANALYSE DANS LE CONTRAT
CLASSIQUE

CHAPITRE 3

Sur les pratiques enseignantes à l'entrée a l'université

I. Introduction

Comment décrire les pratiques d'enseignement de l'analyse réelle dans la transition lycée/université ? Comment classer ces pratiques en fonction de la prise en charge ou non des exigences cognitives ainsi que des spécificités de l'analyse réelle et des difficultés qu'elle génère dans la transition ? Comment en identifier les types de contrat ?

On s'accorde généralement à dire qu'à l'université, l'enseignement se définit comme la transmission de corpus de savoirs et de certains *savoir-faire* en vue de l'obtention de diplômes, ces derniers attestant l'acquisition des savoirs transmis. En particulier, l'enseignement des mathématiques s'articule autour d'une organisation mathématique de type : définitions, axiomes et théorèmes, d'où découlent techniques et problèmes.

Affirmer qu'un enseignement des mathématiques émerge en premier lieu de l'organisation mathématique institutionnalisée conforte l'hypothèse anthropologique relative à l'étude des pratiques enseignantes, cette hypothèse, qui part de la modélisation explicite de l'activité mathématique⁸³, est précisée par Bosch et Gascon (2002) en ces termes :

"Si nous nous situons dans une institution didactique I, cette hypothèse peut se concrétiser en disant que l'organisation didactique de l'institution (ensemble de pratiques d'enseignement et d'apprentissage systématiques et partagées dans I) dépend fortement de l'organisation mathématique que cette organisation didactique vise à mettre en place." (Bosch et Gascon, 2002, p. 29)

Se pose alors la question suivante : l'organisation mathématique institutionnalisée, est-elle le seul discours qui justifie et engendre les stratégies d'enseignement des mathématiques dans une institution bien déterminée ?

Divers travaux portant sur l'étude des pratiques enseignantes invoquent également les conceptions des enseignants, et conduisent à l'identification du modèle d'enseignement mis en œuvre à l'aide de variables explicatives référant à ces connaissances (Cf. Fennema et Loef, 1992) et/ou ces conceptions (Cf. Thompson, 1992). Selon Thompson (1992), les conceptions des enseignants sont à déterminer à travers l'étude de :

⁸³ En praxéologies mathématiques (Cf. Chevallard, 1999).

"What a teacher considers to be desirable goals of the mathematics program, his or her own role in teaching, the students' role, appropriate classroom activities, desirable instructional approaches and emphases, legitimate mathematical procedures, and acceptable outcomes of instruction [...]." (Thompson, 1992, p. 135)

L'objectif de ce chapitre est d'étudier les pratiques d'enseignement de l'analyse réelle en première année mathématiques/informatique⁸⁴ dans les universités tunisiennes.

Dans un premier niveau, nous étudierons les pratiques d'enseignement à travers l'organisation mathématique, nous référant ainsi à l'hypothèse anthropologique. Nous tenterons alors de donner des éléments de précision à une question que nous avons déjà étudiée dans le chapitre précédent : Comment se caractérise l'organisation mathématique en analyse réelle à l'entrée à l'université ? Quel est le lien avec le modèle d'enseignement mis en œuvre ?

Dans un deuxième niveau, nous étudierons les pratiques d'enseignement à travers les conceptions des enseignants, telles que définies par Thompson (1992). Nous tenterons alors, de donner des éléments de réponse aux questions suivantes : Quels modèles d'enseignement peut-on identifier à partir des conceptions des enseignants ? Quels types de contrat peut-on en déduire ? Quel aménagement de l'enseignement de l'analyse réelle à la fin du cursus secondaire et au début du cursus universitaire peut-on envisager ?

II. L'enseignement de l'Analyse à travers l'organisation mathématique : Étude d'un corpus

Afin d'étudier l'organisation mathématique qui réfère à l'analyse réelle à l'entrée à l'université, nous complétons ici l'étude faite dans les chapitres précédents par l'étude d'autres cours et séries de travaux dirigés de la première année mathématiques-informatique (tels qu'ils sont proposés dans les facultés de sciences de Tunis).

Il apparaît, dans les documents étudiés, que l'organisation mathématique est régie par le modèle épistémologique que l'on retrouve dans la majorité des manuels destinés à l'enseignement de l'analyse réelle. De sorte que, l'architecture des cours commence par l'étude de certaines propriétés topologiques de \mathbb{R} , pour déboucher sur le calcul différentiel et le calcul intégral. Les savoirs à enseigner sont tous introduits à partir de leurs définitions, celles-ci étant suivies de propriétés, théorèmes, corollaires, etc.

⁸⁴ Ce cursus est destiné à former des titulaires de la maîtrise en mathématiques ou en informatique.

Cependant, l'analyse des compléments de cours et séries de travaux dirigés nous a amenée à distinguer deux types de projet d'enseignement⁸⁵ a priori :

- 1) Les projets où l'axiomatique, les structures et le formalisme sont le discours qui justifie et génère les savoirs et savoir-faire attendus. L'étudiant est donc sollicité pour :
 - Penser la validité des énoncés mathématiques du point de vue d'un consensus légitimé par le rôle de la démonstration.
 - Développer des raisonnements tels que la preuve de conjectures, la recherche de contre-exemples ou le raisonnement par l'absurde.
 - Maîtriser le travail de formalisation.

Interprétées dans les termes de l'approche anthropologique, les pratiques enseignantes relatives à un tel projet d'enseignement relèvent d'une organisation didactique classique. De telles pratiques favorisent la combinaison de deux moments d'études : le moment technologico-théorique⁸⁶ qui est à la charge de l'enseignant et le moment du travail de la technique qui est à la charge de l'étudiant. De ce point de vue, l'enseignant assume la direction du travail de construction théorique et laisse à la charge de l'étudiant le soin de développer des habilités calculatoires et algorithmiques (y compris formelles) dans le champ de l'analyse réelle.

- 2) Les projets pour lesquels la variété des choix adoptés pour démontrer, illustrer, appliquer ou approfondir des résultats mathématiques met en valeur une tentative déclarée - de la part des enseignants - de s'inscrire dans un cadre constructiviste. De tels projets favorisent ainsi une meilleure prise en compte de certaines exigences cognitives liées aux savoirs de l'analyse réelle.

Dans le cadre de ces projets, l'étudiant est appelé à :

- Un travail de réflexion critique, en vue de mobiliser une démarche mathématique.
- Une prise d'initiative et un recours, de façon autonome, aux graphiques et à l'outil informatique pour contrôler, vérifier, découvrir, conjecturer.

Ces projets, qui combinent le moment technologico-théorique⁸⁷ et le moment exploratoire, sous-tendent une organisation didactique constructiviste.

⁸⁵ Un projet d'enseignement englobe le polycopié du cours et les séries de travaux dirigés.

⁸⁶ Au sens de la théorie anthropologique (Cf. Bosch et Gascon, 2002).

⁸⁷ Au sens de la théorie anthropologique (Cf. Bosch et Gascon, 2002).

L'étude de l'organisation mathématique, à travers des projets d'enseignement de l'analyse réelle, permet de conjecturer deux modèles des pratiques enseignantes :

- l'un, n'obéissant qu'à la logique de l'édifice mathématique,
- l'autre, combinant la logique de l'édifice mathématique et des exigences cognitives.

Se posent alors les questions suivantes :

- 1) Les deux types de projets identifiés décrivent-ils d'une manière exhaustive la réalité institutionnelle, dans une classe de première année mathématiques/informatique de l'université tunisienne ? Quelle serait la prépondérance de chacun de ces types de projets ?
- 2) Comment peut-on expliquer les différences mises en évidence dans les deux modèles de pratiques identifiés ?

Pour tenter de répondre à ces questions, nous avons alors estimé adéquat d'étudier les conceptions des enseignants qui interviennent dans l'enseignement de l'analyse réelle en première année mathématiques/informatique.

III. L'enseignement de l'Analyse à travers les pratiques enseignantes

III.1 Méthodologie

Partant du fait que les conceptions des enseignants émergent, soit d'un point de vue historique, culturel, voire traditionnel, soit de leur expérience individuelle, nous avons privilégié d'abord une étude globale via un questionnaire, plutôt qu'une étude locale centrée sur la réalité de la classe et la gestion au jour le jour de l'enseignant.

En effet, l'utilisation de l'outil statistique pour tenter de cerner les conceptions de l'enseignant plutôt que le processus qui lui a donné naissance, nous semble apporter un éclairage global qui permettra d'identifier les profils des enseignants, selon leurs choix stratégiques dans le processus d'enseignement de l'analyse réelle à l'entrée à l'université. A la lumière des profils mis en évidence, nous tenterons d'identifier les types de contrat potentiels.

III.1.1 Élaboration du questionnaire

a) Questions de recherche

En partant de l'hypothèse de travail selon laquelle les stratégies d'enseignement au supérieur ne sont pas uniquement basées sur l'édifice mathématique, nous nous

proposons dans cette étude d'investiguer les conceptions des enseignants sur un processus d'enseignement prenant en compte la complexité du processus cognitif lié à l'apprentissage des savoirs de l'analyse réelle (telle que nous l'avons décrit dans le chapitre précédent).

D'où les questions qui guident la suite de ce travail :

1. Les pratiques des enseignants obéissent-elles à des stratégies d'enseignement visant à amener les nouveaux bacheliers à développer une activité mathématique en analyse réelle, en adéquation avec la logique du processus cognitif ?
2. Quelles sont les représentations des enseignants quant au rôle de la démonstration en analyse réelle ?
3. Quelles sont les attentes des enseignants quant aux pré-requis en analyse réelle des entrants à l'université ?
4. Comment peut-on expliquer les prises de décision des enseignants, quant à la prise en charge des spécificités de l'analyse réelle ?

Deux hypothèses sous-tendent ce travail :

1. La population des enseignants se décline en sous-populations homogènes classées suivant certaines de leurs pratiques⁸⁸, leurs attentes quant aux pré requis des nouveaux bacheliers, ainsi que leurs représentations du rôle de la démonstration ; les critères de classification⁸⁹ sont associés à la prise en compte ou non de la complexité du processus cognitif qui sous-tend l'apprentissage de l'analyse réelle à l'entrée à l'université.
2. Il est possible d'identifier les motivations qui président certaines prises de décision des enseignants⁹⁰, comme étant en lien avec certaines des spécificités de l'analyse réelle⁹¹.

b) Questions méthodologiques⁹²

L'enjeu étant d'étudier des décisions concernant les pratiques enseignantes d'une population d'enseignants à travers celles d'un échantillon représentatif, il aurait été

⁸⁸ Nous exposerons plus loin ce que nous entendons par certaines pratiques.

⁸⁹ L'identification se fera par rapport à la classification issue des variables du questionnaire.

⁹⁰ L'identification se fera par la mise en rapport de résultats, inhérents à ces prises de position, avec ceux relatifs à l'une des pratiques déclarées, du côté de l'enseignement.

⁹¹ Nous avons déjà décrit les caractéristiques épistémologiques de l'Analyse réelle dans le chapitre précédent.

⁹² L'intégralité du questionnaire se trouve en annexe III.1.

nécessaire de procéder à un échantillonnage aléatoire. Or, ceci suppose une condition difficilement réalisable : disposer d'une liste exhaustive des enseignants qui constituent la population de référence (la base de sondage), pour opérer au tirage au sort.

Nous avons interrogé 57 enseignants exerçant dans quatre facultés⁹³ des sciences tunisiennes et ayant enseigné au moins une fois un cours ou des travaux dirigés d'analyse réelle en première année mathématiques-informatique. De plus, ces 57 enseignants sont répartis en quatre classes selon un taux de sondage uniforme, qui correspond à la proportion des enseignants retenus dans une institution parmi les enseignants de l'institution, qui ont enseigné l'analyse en première année.

Une des questions centrales qui s'est posée pour rédiger ce questionnaire a été : Quelle place accorder aux questions ouvertes et aux questions fermées ?

Nous avons fait le choix d'accorder la priorité aux dernières, d'abord pour des raisons d'économie, mais aussi pour disposer des moyens de manipuler la formulation question-réponse en fonction de notre problématique de départ. Par ailleurs, sachant que les questions ouvertes favorisent, a posteriori, des perspectives beaucoup plus grandes de codage de l'information, nous avons choisi de compléter le questionnaire par des questions dont les réponses sont entièrement à la charge de l'enseignant interrogé.

De plus, pour chaque question fermée, nous avons proposé plusieurs modalités de réponses et ouvert la possibilité à l'enseignant de choisir plus d'une réponse; ce choix étant motivé par la nécessité de classer les réponses afin d'approfondir l'analyse a posteriori.

L'analyse des réponses s'est faite, dans une première étape à travers une analyse quantitative descriptive. Afin d'être en mesure d'affiner les profils potentiels des enseignants, nous avons procédé à l'étude pas à pas des différences significatives entre les réponses données aux diverses questions, en utilisant le test T de Student.

III.1.2 Analyse a priori du questionnaire

Le questionnaire adressé aux enseignants a porté sur leurs caractéristiques professionnelles, leurs pratiques enseignantes, leurs représentations quant au rôle de la démonstration à ce niveau du cursus, leurs prises de décision quant aux exigences du programme et aux spécificités de l'analyse réelle, leur degré d'adhésion/flexibilité quant au programme institué à ce niveau du cursus, et leurs attentes quant aux pré requis des nouveaux bacheliers.

⁹³ Les facultés en question sont celles de Tunis, de Bizerte, de Monastir et de Sfax.

Dans ce qui suit, nous présenterons les choix méthodologiques relatifs à l'étude de chacune de ces dimensions.

a) Sur les pratiques enseignantes

Le choix que nous avons fait pour rendre compte des pratiques enseignantes en centrant l'étude sur le point de vue des étudiants⁹⁴, s'inscrit dans le cadre des résultats que nous avons établis concernant la complexité du processus cognitif qui sous-tend l'engagement des étudiants dans la pensée mathématique savante.

Dans le cadre de cette étude, nous partons du fait que l'apprentissage de la démarche mathématique (expérimentation, conjecture, raisonnement, contrôle, validation), ainsi que la compréhension des idées mathématiques qui sous-tendent les énoncés de l'analyse réelle sont des paramètres qui viennent à l'appui de la prise en compte de cette logique.

C'est ainsi que les pratiques enseignantes ont été étudiées à partir des variables suivantes :

(V₁) Utilisation du graphique par l'enseignant (Q12).

(V₂) Utilisation du formalisme et des règles de la logique mathématique par l'enseignant (Q10).

(V₃) Compréhension des idées mathématiques à travers les applications des théorèmes (Q11) et l'explication des idées mathématiques qui sous-tendent un énoncé (Q13).

(V₄) Apprentissage logico-théorique à travers le recours au formalisme et aux règles de la logique mathématique (Q1 et Q3), ainsi que la démonstration de théorèmes du cours (Q2).

(V₅) Apprentissage du recours au graphique ou à la calculatrice : le recours au graphique (Q4 et Q6) et le recours à la calculatrice (Q5).

(V₆) Apprentissage de la démarche mathématique à travers le recours à l'expérimentation(Q7), la formulation de conjectures (Q8) et la résolution d'exercices intégratifs (Q9).

(V₇) Apprentissage de l'initiative et de l'autonomie (Q22) et (Q23).

⁹⁴ Nous empruntons à cet égard, une expression de Robert : " [...] l'enseignant est conçu comme devant organiser des opportunités pour apprendre." (Robert, 2007, p. 285). Le point de vue de Robert (2007) ne se limite forcément pas à cette définition de l'enseignant.

Hormis les questions (Q22) et (Q23) qui sont codées par les réponses données, les réponses à toutes les autres questions sont codées suivant la position choisie sur l'échelle : (a, 1), (b, 2), (c, 3), (d, 4), (aucune réponse, 9).

Dans le cadre de l'étude de la première hypothèse de la recherche, les variables (**V**₁), (**V**₂) et (**V**₃) étudient les pratiques enseignantes *pour l'enseignement*, la variable (**V**₄) étudie la prise en charge par l'enseignant de l'apprentissage logico-théorique de l'analyse réelle, les variables (**V**₅) et (**V**₆) étudient la prise en charge par l'enseignant d'un apprentissage de l'analyse réelle sous-tendu par certaines exigences cognitives.

L'étude descriptive des résultats nous a permis d'établir des profils-types des enseignants à travers leurs pratiques. La mise en rapport des réponses nous a permis également de procéder à l'étude de l'impact de l'enseignement sur l'apprentissage et d'affiner, dans la mesure du possible les profils déjà établis.

b) Sur les représentations et les attentes des enseignants

Les représentations des enseignants quant au rôle de la démonstration, à ce niveau du cursus, ont été étudiées à partir des variables suivantes :

(**V**₈) Compréhension des notions mathématiques Q14/d, Q14/e, Q15/b et Q15/c.

(**V**₉) Nécessité liée au déroulement de la suite du cours Q14/c et Q14/g.

(**V**₁₀) Appui pour convaincre Q14/f.

(**V**₁₁) Nécessité logico-théorique Q14/b et Q15/a.

Un premier codage de chacune des modalités intervenant dans les questions 14 et 15 a permis une étude descriptive des résultats. Le recodage des réponses suivant la priorité dans les choix de modalités a permis la classification⁹⁵ des enseignants suivant leurs représentations quant au rôle de la démonstration.

Par ailleurs, les attentes des enseignants quant aux pré-requis des néo-bacheliers ont été étudiées à partir des variables suivantes :

(**V**₁₂) Utilisation du symbolisme et des règles de la logique mathématique Q16/a et Q16/b.

(**V**₁₃) Raisonnement Q16/d

(**V**₁₄) Compréhension des notions mathématiques Q16/c.

⁹⁵ Cette classification s'appuie sur les quatre éventualités décrites ci-dessus.

Le codage de chacune des modalités intervenant dans la question 16 a permis une étude descriptive des résultats. Le recodage des réponses suivant la priorité dans les attentes quant aux pré-requis des néo-bacheliers a permis la classification des enseignants selon leurs attentes.

L'exploration des deux dimensions d'étude précédentes nous a permis d'éprouver la première hypothèse qui sous-tend ce travail.

c) Sur les motivations liées à certaines prises de décision : Spécificités de l'analyse réelle

Nous avons choisi de compléter le questionnaire par une troisième dimension d'étude qui concerne les prises de décision des enseignants quant au programme institué, à l'enseignement des méthodes numériques, à la démonstration ou non de théorèmes pivots de l'analyse réelle.

Plus précisément, nous avons interrogé les enseignants à partir des variables suivantes :

(V₁₅) Adhésion à la chronologie spécifiée par le programme (Q20).

(V₁₆) Démonstration de théorèmes pivots de l'analyse réelle selon la logique spécifiée par le programme (Q18/a), (Q18/b), (Q18/c), (Q18/d) et (Q18/e).

(V₁₇) Introduction des méthodes numériques via l'usage des TIC (Q19).

En réalité, ce choix des méthodes numériques via l'utilisation des TIC est à entendre à travers la prise en compte de deux considérations :

1. L'usage des TIC comme outil permettant à l'étudiant d'adopter la démarche mathématique dans un autre environnement que celui papier-crayon (expérimenter, contrôler, conjecturer, etc.), cet usage n'étant pas intrinsèque à l'analyse réelle.
2. Le recours aux méthodes numériques comme moyen favorisant l'engagement des étudiants dans l'analyse formelle.

Il peut paraître paradoxal de dissocier les variables liées aux spécificités de l'analyse réelle, de celles qui étudient la prise en compte de la complexité du processus cognitif dans l'acquisition des savoirs de l'analyse réelle. Mais ce choix s'impose du fait même que :

- La question 19 porte sur l'enseignement des méthodes numériques, non institutionnalisées à ce niveau du cursus. Au risque de biaiser l'analyse des réponses,

la question ne peut que porter sur l'adhésion à un projet d'introduction de ces méthodes à ce niveau du cursus.

- Du point de vue de l'enjeu de notre recherche, les réponses aux questions 16 et 17 deviennent obsolètes si elles ne sont pas étudiées du point de vue de leur lien avec l'introduction ou non des méthodes numériques.

Nous assumons donc le fait que les résultats établis à partir de cette étude ne concerneront la prise en compte que d'une partie des exigences cognitives dans l'enseignement supérieur en analyse réelle.

Les questions (Q18/a), (Q18/b), (Q18/c), (Q18/d), (Q18/e), (Q19) et (Q20) sont codées 0 dans la cas où la réponse est non et 1 dans le cas où la réponse est oui.

L'étude descriptive des résultats permettra de classer les enseignants suivant leurs prises de décision. La confrontation de ces prises de décision avec les résultats de certaines pratiques déclarées permettra d'étudier les implicites qui les sous-tendent.

Notons enfin que les résultats concernant les caractéristiques professionnelles des enseignants n'ont pas été prises en considération dans le cadre de cette recherche.

III.2 Analyse des réponses

L'analyse statistique a permis d'étudier quatre typologies ; une typologie des pratiques pour l'enseignement, une typologie des pratiques pour l'apprentissage, une typologie des représentations quant au rôle de la démonstration, et une typologie des attentes quant aux pré-requis des étudiants. Le traitement statistique nous a permis d'identifier certaines prises de décision de la part des enseignants concernant les spécificités de l'analyse réelle et le programme institué.

III.2.1 Sur certaines pratiques déclarées

a) Du côté de l'enseignement

Le tableau statistique descriptif⁹⁶ montre que pour cette dimension d'étude, l'échantillon est homogène, tandis que le test T des groupes appariés a confirmé qu'il n'y a pas de différence significative entre Q10 et Q13, Q10 et Q11, Q11 et Q13 (Cf. Tableau 3.1).

⁹⁶ Cf. Tableau des fréquences en annexe III.2.

Ces résultats semblent affirmer que les enseignants se préoccupent, en moyenne, souvent ou toujours d'*enseigner* et adhèrent ainsi à un contrat institutionnel partagé par l'ensemble de la communauté.

Plus précisément, plus de 70% des enseignants déclarent utiliser le graphique et appliquer les théorèmes du cours dans l'enseignement, tandis que plus de 65% d'entre eux déclarent expliciter les idées mathématiques qui sous-tendent un énoncé en analyse réelle.

Par conséquent, la majorité des enseignants adhère à un même modèle dans l'acte d'*enseigner* et manifeste clairement des préoccupations quant aux exigences cognitives sollicitées par l'apprentissage de l'analyse réelle.

Tableau 3.1 : Moyennes et écart-types pour l'ensemble de l'échantillon

	Utilisation du graphique V1	Utilisation du formalisme et des règles logiques V2	Compréhension des idées mathématiques V3	
	Q12	Q10	Q11	Q13
Valide	56	53	56	52
Manquante	1	4	1	5
Moyenne	2,89	2,89	3,27	3,04
Ecart- type	0,89	1,03	0,94	0,95
Minimum	1	1	1	1
Maximum	4	4	4	4
Classement	3	3	1	2

L'étude des résultats relatifs à la dimension *Apprentissage* nous a permis de repérer, au sein de cette population homogène, des pratiques différenciées que nous avons tentées de classer.

b) La prise en charge de l'apprentissage par l'enseignant

Le traitement statistique descriptif nous a permis de repérer des stabilités et des divergences dans les pratiques que les enseignants déclarent mettre en œuvre pour l'apprentissage.

Le tableau 3.2 montre nettement que les réponses rattachées à chacune des variables des pratiques⁹⁷, toutes modalités confondues, ne sont pas quantitativement stables.

⁹⁷ A savoir V₄, V₅ et V₆.

Cependant, il nous a été possible de repérer des régularités au sein des résultats relatifs à chacune des variables, que nous décrivons dans ce qui suit.

Tableau 3.2 : Tableau des fréquences pour chaque modalité

	Apprentissage logico-théorique V_4			Apprentissage du recours au graphique ou à la calculatrice V_5			Apprentissage de la démarche mathématique V_6		
	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9
(a) : 1	5,26	28,07	3,51	1,75	75,44	91,23	36,84	40,35	15,79
(b) : 2	43,86	52,63	29,82	38,60	15,79	1,75	38,60	40,35	42,11
(c) : 3	35,09	8,77	42,11	40,35	5,26	3,51	19,30	10,53	26,32
(d) : 4	15,79	8,77	24,56	17,54	3,51	1,75	5,26	5,26	14,04
manquante	0	1,75	0	1,75	0	1,75	0	3,51	1,75
Total	100	98,25	100	100	100	98,25	100	96,49	98,25

Plus de 90% des enseignants déclarent ne jamais ou rarement prendre en charge l'apprentissage du recours à la calculatrice (symbolique ou graphique) en analyse réelle. Pour bien interpréter ces résultats, il convient de rappeler que les étudiants font rarement usage de la calculatrice graphique durant leur cursus ; celle-ci ne faisant pas partie pour des raisons d'équité sociale, des outils d'apprentissage mentionnés dans les curricula en vigueur.

C'est en analysant le reste des résultats qu'il nous a été possible d'identifier des divergences. En effet, environ 60% des enseignants déclarent proposer aux étudiants souvent ou toujours des exercices d'analyse réelle où ils ont recours à l'illustration graphique de la définition d'une notion. Le reste de la population déclare le faire rarement ou jamais.

En regard de l'ensemble des résultats concernant la variable (V_5), il semblerait d'ores et déjà possible de décliner la population d'enseignants en deux sous-populations :

- Une sous-population (environ 40% de la population) formée d'enseignants ayant un profil *logico-théorique*, qui pensent l'apprentissage de l'analyse réelle à travers l'édifice mathématique.
- Une sous-population formée d'enseignants ayant un profil *logico-constructif*, qui pensent l'apprentissage de l'analyse réelle conformément à la logique de l'édifice mathématique et en vertu d'intentions didactiques. Dans cette deuxième catégorie, nous avons omis intentionnellement de mentionner la prise en compte du processus

cognitif, ce dernier ne peut se mesurer sans recourir aux résultats complémentaires relatifs à la variable (V_6).

Par ailleurs, plus de 80% des enseignants déclarent rarement ou jamais proposer aux étudiants de démontrer des *théorèmes du cours*. Il semble donc que les enseignants estiment que cette responsabilité leur revient. C'est pourquoi, nous avons choisi d'inclure ce constat dans le cadre des interprétations faites au niveau de la dimension *Enseignement* et de ne plus le considérer comme indicateur de la dimension *Apprentissage*.

Afin de voir plus clair au niveau des interprétations concernant les variables V_4 et V_6 et de la "réalité" des sous-populations identifiées ci-dessus, nous nous sommes appuyées sur d'autres paramètres statistiques (Cf. Tableau 3.3).

Tableau 3.3 : Moyennes et écart- types pour l'ensemble de l'échantillon

	Apprentissage logico-théorique V_4			Apprentissage du recours au graphique ou à la calculatrice V_5			Apprentissage de la démarche mathématique V_6		
	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9
Valide	57	56	57	56	57	56	57	55	56
Manquante	0	1	0	1	0	1	0	2	1
Moyenne	2,61	1,98	2,88	2,75	1,37	1,14	1,93	1,8	2,39
Ecart- type	0,82	0,86	0,83	0,77	0,75	0,55	0,88	0,85	0,93
Minimum	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Maximum	4	4	4	4	4	4	4	4	4
Classement	3	5	1	2	8	9	6	7	4

L'application du test T pour groupes appariés a confirmé qu'il n'y a pas de différence significative entre Q1 et Q3. Ceci semble affirmer que ces questions étudient bien des déclarations concernant la même variable, dans ce cas l'apprentissage logico-théorique.

D'autre part, l'application du test T pour groupes appariés a aussi montré qu'il n'y a pas de différence significative entre Q1 et Q4 et entre Q3 et Q4, ce qui nous permet de retenir les profils pointés ci-dessus en prenant en compte la variable V_4 ⁹⁸.

⁹⁸ Par ailleurs, le calcul des fréquences montre que la prépondérance des effectifs dans chacune des sous-populations est sensiblement modifiée.

Enfin, l'application du test T pour groupes appariés a aussi confirmé qu'il n'y a pas de différence significative entre Q1 et Q4, Q1 et Q9, Q9 et Q4. Rappelons que la question Q9 qui constitue l'un des paramètres d'étude la variable V₃, décrit la prise en charge de l'apprentissage de divers modes de raisonnement, de validation à travers la résolution d'exercices intégratifs mettant en œuvre le réseau des savoirs en analyse réelle⁹⁹.

Par ailleurs, le traitement statistique (Cf. tableau 3.4) a montré que les enseignants qui déclarent proposer aux étudiants des tâches mettant en œuvre l'aspect heuristique du graphique en vue de développer leur capacité à expérimenter constituent un peu plus du tiers de la sous-population *logico-constructif*.

Tableau 3.4 : Tableau croisé pour deux questions pour toutes les modalités

		Recours à l'illustration graphique d'une définition (Q4)			Total
Recours à l'expérimentation via un support graphique (Q7)		Jamais ou presque jamais	Souvent ou toujours	Sans réponse	
	Jamais ou rarement	38,6%	35,1%	1,8%	75,4%
	Souvent ou toujours	1,8%	22,8%		24,6%
Total		40,4%	57,9%	1,8%	100,0%

C'est pourquoi, à travers l'étude des pratiques, nous retenons finalement dans l'échantillon trois formes d'homogénéité que nous décrivons par trois profils-type :

- Le profil *logico-théorique* (environ 40% de l'ensemble de l'échantillon) ; ce profil décrit la population qui pense l'apprentissage de l'analyse réelle conformément à la logique de l'édifice mathématique. Le mode d'action de cette population témoigne ainsi d'une non prise en charge des exigences cognitives.
- Le profil *logico-constructif* (environ 35% de l'ensemble de l'échantillon) ; ce profil décrit la population qui pense l'apprentissage de l'analyse réelle conformément à la logique de l'édifice mathématique et en vertu d'intentions didactiques. Le mode d'action de cette population témoigne de préoccupations cognitives qui se traduisent notamment à travers la prise en charge de l'apprentissage de divers modes de raisonnement, de validation, dans des contextes où les savoirs de l'analyse réelle sont opérationnels.

⁹⁹ Ce constat nous a amené à affiner la description du profil *logico-constructif* comme pointé ci-dessous.

- Le profil *logico-cognitif* (environ 25% de l'ensemble de l'échantillon) ; ce profil décrit la population qui pense l'apprentissage de l'analyse réelle conformément à la logique de l'édifice mathématique et celle du processus cognitif. Le mode d'action de cette population témoigne d'une prise en charge des exigences cognitives dans l'apprentissage de l'analyse réelle : le recours à des outils didactiques spécifiques à l'analyse réelle, le recours à l'expérimentation, le recours à divers modes de raisonnement et de validation.

Signalons toutefois, que plus de 80% des enseignants déclarent rarement ou ne jamais proposer aux étudiants des tâches amenant les étudiants à formuler une conjecture. Des analyses statistiques supplémentaires ont confirmé la non adéquation de ce constat avec le reste des résultats. Il semblerait que l'énoncé de cette question est porteur de biais et laisse supposer que les enseignants ont interprété la conjecture du strict point de vue de l'activité mathématique du mathématicien expert. Nous avons donc fait le choix de ne pas retenir ce résultat comme indicateur des pratiques. Une reformulation de la question et son étude aurait pu se faire à travers des entretiens avec certains enseignants ayant répondu au questionnaire, ceci n'a pas fait l'objet de ce travail de thèse.

Enfin, les enseignants déclarent corriger en moyenne environ 50% des exercices proposés et laisser en moyenne environ 33% des exercices à la charge de l'étudiant. En soumettant les deux moyennes au test T de Student, il s'est avéré que cette différence est légèrement significative en faveur de la correction des exercices par l'enseignant. Ce résultat laisse supposer que les enseignants se préoccupent modérément de favoriser un cadre de travail autonome et interactif, nécessaire à l'apprentissage.

Afin de voir plus clair au niveau de ce résultat, nous avons entrepris de comparer les scores globaux obtenus pour chacune des dimensions *Apprentissage* et *Enseignement*, ce qui a donné le tableau 3.5.

Tableau 3.5 : Sores globaux - Apprentissage/Enseignement

	Score standardisé_Apprentissage	Score standardisé_Enseignement
Valide	53	50
Manquante	4	7
Moyenne	52,15	75,75
Ecart-type	8,78	16,40
Minimum	36,11	31,25
Maximum	80,56	100

Ce résultat nous laisse penser qu'il y a une différence significative entre les deux dimensions d'étude, en faveur de la dimension *Enseignement*. En soumettant les deux moyennes à un test statistique de signification, à savoir le T de Student, il s'est avéré que cette différence est très significative en faveur de la dimension *Enseignement*. Ce qui semble dire que les pratiques des enseignants privilégient la composante *Enseignement*, considérant de ce fait que la composante *Apprentissage* n'est pas entièrement à leur charge.

Par conséquent, l'entrée à l'université véhicule encore une fois une demande institutionnelle nouvelle : celle d'une gestion personnelle par l'étudiant de ses propres apprentissages.

III.2.2 Sur des indicateurs mesurant les représentations et les attentes des enseignants

A la lecture du tableau 3.6 des fréquences relatives à la dimension concernant le rôle de la démonstration, on s'aperçoit que plus de 90% des enseignants ne se représentent pas la démonstration en analyse comme moyen de convaincre les étudiants de la validité des énoncés mathématiques. Par ailleurs, presque 65% d'entre eux ne la conçoivent pas en priorité, comme outil logico- théorique de validation.

Tableau 3.6 : Tableau des fréquences pour deux modalités

	Compréhension des notions mathématiques V_8				Nécessité liée au déroulement de la suite du cours V_9		Appui pour convaincre V_{10}	Nécessité logico-théorique V_{11}	
	Q14/d	Q14/e	Q15/b	Q15/c	Q14/c	Q14/g	Q14/f	Q14/b	Q15/a
Choix classé en priorité	8,77	14,04	57,89	40,35	33,33	15,79	5,26	10,53	7,02
Non classé	70,18	70,18	21,05	19,30	40,35	68,42	77,19	64,91	64,91

Quel est alors le rôle prépondérant de la démonstration en analyse réelle ?

Plus de 50% des enseignants choisissent de démontrer un résultat parce qu'ils estiment que cette démonstration est nécessaire à la compréhension de la suite du cours, ou encore à l'acquisition de nouveaux savoirs. Tandis que plus de 30% des enseignants déclarent ne pas faire les démonstrations qu'ils estiment difficiles. Dans ces deux cas, le rôle de la démonstration est fortement lié à des préoccupations didactiques. Le reste de la population conçoit le rôle de la démonstration du point de vue strictement logico-théorique.

Le tableau 3.7 des fréquences relatives à la dimension d'étude des attentes quant aux pré-requis des étudiants a montré que presque la moitié des enseignants classe en priorité les *manques* des étudiants en termes de raisonnement. Le reste de la population est à parts presque égales, partagé entre des priorités liées à l'utilisation du formalisme, à l'utilisation de la logique mathématique et à la compréhension des notions mathématiques.

Tableau 3.7 : Tableau des fréquences pour deux modalités

	Utilisation du symbolisme et des règles de la logique mathématique V_{12}		Raisonnement V_{13}	Compréhension des notions mathématiques V_{14}
	Q16/a	Q16/b	Q16/d	Q16/c
Choix classé en priorité	28,07%	22,81%	45,61%	22,81%
Non classé	36,84%	26,32%	12,28%	31,58%

Afin d'interpréter ce résultat, il convient de rappeler qu'au lycée, les tâches qui favorisent le développement des capacités de raisonnement en analyse réelle n'occupent pas une place importante.

III.2.3 Sur des indicateurs mesurant les motivations liées à certaines prises de décision

L'analyse statistique a montré que la majorité des enseignants déclare suivre la chronologie spécifiée par le programme. Ceci réaffirme, encore une fois, que les enseignants adhèrent au contrat institutionnel en acte et que leurs choix s'accomplissent à travers les exigences de ce contrat. En effet, à l'université tunisienne les programmes sont élaborés sur la base d'un consensus, après consultation de tous les enseignants.

Par ailleurs, une première observation du tableau 3.8 pointe clairement un partage de la population à parts presque égales, suivant deux prises de position opposées (environ 44% de la population sont pour l'introduction des méthodes numériques via TIC, tandis qu'environ 46% n'y sont pas favorables).

Tableau 3.8 : Tableau croisé pour deux variables pour toutes les modalités

		Prise de position : chronologie spécifiée par le programme V_{15}			Total
		Non : 0	Oui : 1	Sans réponse	
Prise de position :	Non : 0	3,5%	33,3%	8,8%	45,6%

Méthodes numériques V ₁₇	Oui : 1	8,8%	33,3%	1,8%	43,9%
	Sans réponse		7,0%	3,5%	10,5%
Total		12,3%	73,7%	14,0%	100,0%

Ce résultat interroge les implicites qui sous-tendent l'intérêt porté par environ la moitié des enseignants à cette partie de l'analyse : Quelles sont les raisons, qui ont amené les enseignants à faire ce choix ?

Au vu des résultats statistiques, plus de la moitié de la population interrogée choisit de démontrer un énoncé en priorité pour aider à la compréhension des concepts de l'analyse réelle et déclare être favorable à l'introduction des méthodes numériques. De plus, l'échantillon est homogène quant à la décision d'expliquer les idées mathématiques qui sous-tendent un énoncé.

Si nous prenons en compte que

- l'explication des idées mathématiques qui sous-tendent un énoncé de l'analyse réelle,
- le rôle attribué à la démonstration en tant que moyen favorisant la compréhension des concepts,
- le recours aux méthodes numériques via TIC,

sont des facteurs qui contribuent à la prise en charge des difficultés inhérentes à l'analyse réelle, il est légitime de conjecturer que les motivations qui président le choix de la moitié des enseignants sont liées à leur volonté de prendre en charge les spécificités de l'analyse réelle et les difficultés qu'elles génèrent.

Il ne semble donc pas utopique de penser un projet d'aménagement ; la description détaillée de son intérêt pour l'apprentissage amènera vraisemblablement un nombre important d'enseignants à y adhérer.

IV. Conclusion : Types possibles de contrat

L'étude que nous avons faite n'est pas exhaustive, elle nous a toutefois permis d'investiguer les hypothèses que nous avons posées dans ce chapitre.

L'étude des organisations mathématique en vigueur, a mis en évidence deux modèles des pratiques enseignantes en analyse réelle à l'entrée à l'université : un modèle classique et un modèle constructif¹⁰⁰.

¹⁰⁰ Interprétés dans les termes de l'approche anthropologique.

Afin de voir plus clair au niveau de ce résultat et d'affiner les modèles identifiés, nous avons entrepris l'étude des pratiques d'enseignement à travers les conceptions des enseignants.

La méthodologie exploratoire a alors montré que l'hétérogénéité des enseignants pouvait être décrite en termes de classes de pratiques, associées à la prise en charge ou non des exigences liées à la complexité du processus cognitif dans l'apprentissage de l'analyse réelle.

Une première étude statistique a montré que l'échantillon est homogène par rapport à la dimension des pratiques, du côté de l'enseignant. Par conséquent, la majorité des enseignants adhèrent à l'obligation institutionnelle d'enseigner et manifestent des préoccupations quant aux exigences cognitives générées par l'apprentissage de l'analyse réelle à l'entrée à l'université. Ayant suivis eux-mêmes un enseignement universitaire régi par les mêmes principes institutionnels, les enseignants semblent concevoir leur métier à travers une expérience modelée par une culture commune.

Dans une deuxième étape, l'étude de la dimension *Apprentissage* a permis de repérer dans l'échantillon trois formes d'homogénéité que nous décrivons par trois profils-type :

1. Le profil logico-théorique ; celui-ci décrit la population qui pense l'apprentissage de l'analyse réelle conformément à la logique de l'édifice mathématique. Le mode d'action de celle-ci témoigne ainsi d'une non prise en charge des exigences cognitives. Comme défini par Brousseau (1996), le contrat qui transparaît, dans le cas d'une telle population, est un *contrat faiblement didactique d'information dogmatique*.
2. Le profil logico-constructif ; celui-ci concerne les enseignants qui pensent l'apprentissage de l'analyse réelle conformément à la logique de l'édifice mathématique et en vertu d'intentions didactiques. Les pratiques de ces enseignants témoignent de préoccupations cognitives qui se traduisent notamment à travers la prise en charge de l'apprentissage de divers modes de raisonnement, de validation, dans des contextes où les savoirs de l'analyse réelle sont opérationnels. Le contrat qui transparaît, dans le cas d'une telle population, est un *contrat faiblement didactique d'information dogmatique* avec des incursions dans un *contrat d'initiation ou de contrôle*.
3. Le profil logico-cognitif ; celui-ci concerne les enseignants qui pensent l'apprentissage de l'analyse réelle conformément à la logique de l'édifice mathématique et celle du processus cognitif. Les pratiques de ces enseignants témoignent d'une prise en charge des exigences cognitives dans l'apprentissage de

l'analyse réelle : le recours à des outils didactiques spécifiques à l'analyse réelle, le recours à l'expérimentation, le recours à divers modes de raisonnement et de validation. Tout autre est le contrat qui transparaît, dans le cas d'une telle population : les objectifs d'un tel contrat sont orientés vers la compréhension des étudiants et la volonté de faire comprendre "le sens de l'analyse réelle".

Des analyses statistiques complémentaires ont montré que les pratiques enseignantes privilégient la composante *Enseignement* à la composante *Apprentissage*, générant de ce fait une demande institutionnelle nouvelle : la gestion personnelle par l'étudiant de ses propres apprentissages.

Dans cette étude, nous avons aussi entrepris d'expliquer certaines prises de décision des enseignants, quant à la prise en charge des difficultés inhérentes aux spécificités de l'analyse à l'entrée à l'université. Force est de constater qu'une proportion assez représentative de l'échantillon laisse entendre l'utilité, dans l'apprentissage de l'analyse réelle à l'entrée à l'université, du recours aux méthodes numériques via les technologies de l'information et de la communication. Ce constat nous laisse supposer que la moitié des enseignants adhérerait à un aménagement qui favoriserait une meilleure prise en charge du travail de conceptualisation en analyse réelle.

Au terme de cette étude, la question se pose du travail possible des étudiants dans un contrat faiblement didactique. Dans les deux cas identifiés plus haut " *L'ensemble constitue un moyen fictif mais formel d'instruction mis à la disposition de l'apprenant par l'enseignant. Cette fiction épistémologique fait d'ailleurs partie du savoir enseigné.*" (Brousseau, 1996, p. 21).

Des analyses complémentaires à travers l'observation de classes ordinaires, devraient nous amener à investiguer la question du travail effectif des étudiants et de la gestion de l'enseignant. Cette étude fera l'objet du chapitre 4.

CHAPITRE 4
Méthodologie d'analyse de séances

I. Le problème de l'analyse de séances : la gestion anticipée du professeur et le travail possible des étudiants

I.1 Introduction

L'étude faite dans le chapitre 3 avait pour but de mener une analyse des pratiques enseignantes en relation avec certaines des exigences liées à l'apprentissage de l'analyse réelle à l'entrée à l'université¹⁰¹. Nous admettons de ce fait que l'activité mathématique des étudiants¹⁰² en analyse réelle dépend de la prise en compte de ces exigences, lesquelles dépendent elles-mêmes et à un premier niveau de l'organisation mathématique, celle-ci étant articulée aux conceptions des enseignants. Par exemple, des énoncés mathématiques en analyse réelle étant proposés aux étudiants, leur activité mathématique dépendra de la nature des énoncés, de ce que pourrait apporter l'enseignant comme complément en regard de ces conceptions (recours au graphique, à la calculatrice ; sollicitation de conjectures ; usage du formalisme ; intégration de plusieurs notions du cours ; etc.).

De plus, quand on entre en classe d'analyse réelle, il est possible de comprendre le déroulement en cours relativement à chacun des concepts abordés. En particulier, on peut identifier le partage des responsabilités mathématiques entre le professeur et les étudiants¹⁰³. Plus précisément, il s'agit d'étudier :

- les interactions que le professeur et les étudiants peuvent avoir ;
- ce qui est la charge des étudiants, en particulier du point de vue de la validation en analyse réelle ;
- la gestion du professeur et ses tentatives de régulations.

Dans cette étude, nous entendons enquêter sur la question du travail des étudiants et leur interaction avec les savoirs en jeu : comment se caractérise dans ces conditions le travail des étudiants ? Comment identifier les difficultés qu'ils rencontrent ?

Comme nous l'avons précisé plus haut, notre étude des pratiques enseignantes vise essentiellement l'étude de l'apprentissage mathématique des étudiants (dans ce cas celui de l'analyse réelle), ceci nous a porté à mettre le savoir de l'analyse réelle au cœur de nos choix méthodologiques d'analyse de ces pratiques.

¹⁰¹ Cf. Chapitres 2 et 3.

¹⁰² Rappelons que nous entendons le travail des étudiants en classe de mathématiques.

¹⁰³ Ceci réfère à la question plus générale de l'organisation du contrat didactique en classe d'Analyse.

Au niveau global, nous avons ainsi mené le travail par le biais d'outils théoriques principalement issus de l'approche anthropologique de Chevallard¹⁰⁴, particulièrement adaptée dans le cas de notre recherche pour traiter les questions macro-didactiques en termes d'organisations, mathématiques et didactiques. Par ailleurs, les études fondées sur la TSD (Margolinas, 1994, modifiée par Bloch, 2000) permettent à travers la structuration du milieu¹⁰⁵, d'analyser les interactions entre le professeur, les étudiants et les savoirs en jeu dans une situation d'enseignement.

Tableau 4.1 : Schéma de structuration du milieu

M0 M- d'apprentissage	E0 Elève	P0 Professeur pour l'élève	S0 Situation didactique
M-1 M-de référence	E-1 E-apprenant	P-1 P-en action	S-1 Situation d'apprentissage
M-2 M-objectif	E-2 E-agissant	P-2 P-observateur	S-2 Situation de référence
M-3 M-matériel	E-3 E-objectif		S-3 Situation objective

Dans cette partie de la recherche, nous tentons de mesurer l'écart entre des activités mathématiques des étudiants analysées a priori (en termes d'activités attendues), et les activités possibles aussi bien lors du déroulement qu'à sa suite¹⁰⁶. Notre approche des pratiques est de ce fait essentiellement orientée vers le travail des étudiants et l'apprentissage. Autrement dit, nous écartons ici une étude visant le *métier* d'enseignant et l'identification d'*invariants* propres aux pratiques enseignantes (Cf. Robert (2007)).

Nous utilisons le schéma de structuration du milieu afin d'analyser a posteriori les interactions entre le professeur, les étudiants et le savoir par rapport au modèle d'apprentissage inscrit dans la TSD¹⁰⁷. Nous incorporons dans cette étude des éléments d'analyse de la gestion de l'enseignant et ses tentatives de régulation.

De plus, afin d'être en adéquation avec les enjeux de cette recherche, nous avons fait le choix d'analyser a priori les énoncés mathématiques qui sont abordés ainsi que les

¹⁰⁴ Cf. Bosch et Gascon (2002), et Chevallard (1999).

¹⁰⁵ Que nous utiliserons aussi dans les chapitres 7 et 8 dans l'analyse a priori et a posteriori des situations construites dans le cadre de l'ingénierie.

¹⁰⁶ En particulier "Ce ne sont pas les activités que les élèves pourraient faire avec l'aide de l'enseignant (cf. Zone Proximale de Développement, Rogalski, 2005)." (Cf. Robert, 2007, p.278).

¹⁰⁷ Que les situations soient à dimension a-didactique ou non : la pertinence du modèle pour l'étude de situations "ordinaires" a été discutée par Comiti, Grenier et Margolinas (1995).

activités mathématiques qu'ils sont susceptibles de provoquer, en utilisant les variables macro-didactiques de la transition enrichies par l'étude faite dans le chapitre 2.

Le croisement des résultats de l'analyse a priori et du déroulement nous permettra d'identifier le travail possible des étudiants dans un tel contrat, en particulier celui relatif à la validation en analyse réelle ainsi que les difficultés que les étudiants pourraient rencontrer en tant que néo-bacheliers.

La méthode choisie pour étudier les questions posées précédemment, est d'analyser un corpus composé de transcriptions de séances de travaux dirigés et des énoncés mathématiques qui leur sont associés. Notre démarche comprendra alors deux niveaux d'analyse : un niveau d'analyse a priori des énoncés mathématiques et des savoirs en jeu et un niveau d'analyse a posteriori du déroulement, de la réalité de la classe.

I.2 Grilles d'analyse

Nous partons d'observations de classes ordinaires pour centrer ensuite l'étude sur le travail possible des étudiants relativement aux savoirs de l'analyse abordés, dans les conditions instaurées par le contrat en vigueur.

Ce que nous étudions en amont d'une séance est lié au savoir mathématique et permet de conjecturer la nature du travail demandé aux étudiants. Ceci suppose qu'on dispose d'un ensemble de critères spécifiques à l'étude des énoncés mathématiques et des savoirs en jeu dans une perspective d'un apprentissage de l'analyse réelle à l'entrée à l'université. C'est une démarche classique d'analyse a priori.

A l'issue du déroulement, l'*accompagnement* par le professeur des activités des étudiants est étudié d'un point de vue permettant de mettre en évidence le travail possible de ces derniers, notamment les procédures relatives à la validation en analyse réelle.

Nous préciserons dans les paragraphes suivants les outils d'analyse que nous mettons en œuvre pour faire cette étude.

I.2.1 Des énoncés mathématiques et des savoirs en jeu

Pour analyser a priori les activités des élèves susceptibles d'être provoquées en classe (ou devant être provoquées en classe), nous allons utiliser six dimensions d'analyse qui conditionnent le travail des étudiants à l'entrée à l'université en analyse réelle. Ces dimensions sont ici les variables macro-didactiques de la transition que nous

avons finalement retenues dans cette recherche, et correspondent d'ailleurs souvent empiriquement à des "[...] choix plus ou moins conscients des enseignants [...]." (Robert, 2007, p. 275). Il s'agit de certaines des variables de Robert déjà étudiées dans notre DEA, à savoir :

- degré de formalisation ;
- degré de généralisation ;
- registre (ou mode) de validation (attendu du côté de la solution) ;
- conversions entre registres sémiotiques (y compris dans un travail de recherche et de prospections, non explicitement attendu du côté de la solution) ;
- mode d'intervention des notions en jeu ;
- niveau de mise en fonctionnement des connaissances¹⁰⁸ (ou le degré d'autonomie sollicité).

Nous tenons aussi compte de la diversité des techniques que nous définissons à partir des exercices et du cours. Nous insistons en particulier sur la différence entre techniques et activités des étudiants : nous tenterons ici de prévoir ces dernières, une analyse complémentaire du déroulement devra nous permettre de réguler et d'affiner le résultat.

1.2.2 Des transcriptions

Les transcriptions sont étudiées du point de vue du découpage des interventions (nombre d'interventions du professeur, nombre d'interventions des élèves) et de leurs types (que nous décrivons aux moyens d'un certain nombre de critères).

Afin d'étudier la gestion du professeur, nous avons identifié trois types d'interventions équivalents à trois dimensions d'étude que nous décrivons ci-dessous. Chacune de ces dimensions comporte un ensemble de critères servant à la définir. Cette catégorisation ne sous-entend en aucun cas un cloisonnement dans les interventions du professeur mais devrait nous permettre d'identifier les conditions de travail des étudiants, suivant la logique du modèle d'apprentissage inscrit dans la TSD. En particulier, nous incorporons dans ces dimensions des critères qui nous permettront d'étudier la prise en compte par l'enseignant de phénomènes liés à la transition en analyse réelle (rappelons que nous avons fait le choix de modéliser ces phénomènes par le biais des variables macro-didactiques de la transition).

a) Gestion des interactions

- GI₁ : Engager un débat en posant des questions sur les savoirs, les connaissances.

- GI₂ : Laisser aux élèves des ouvertures, un choix pour poser et se poser des questions, pour organiser leurs connaissances.
- GI₃ : Abréger le travail des étudiants (y compris leurs questions).
- GI₄ : Découper des tâches en tâches élémentaires et/ou indiquer des techniques, des procédures¹⁰⁹. Dans ce cas, nous tenterons de préciser si la façon de faire du professeur limite ou non l'activité des étudiants à des applications juxtaposées des savoirs du cours.
- GI₅ : Amener les étudiants à prendre de la distance par rapport à ce qui se fait (les déséquilibrer, introduire des incertitudes, etc.)¹¹⁰.

b) Gestion de la recherche et de la formulation

- GRF₁ : Faire traiter un exemple ou un contre-exemple.
- GRF₂ : Favoriser une formulation (d'une conjecture, d'une connaissance, etc.).
- GRF₃ : Favoriser un changement de situations (mise en œuvre d'un autre statut de la notion, lien avec d'autres notions, changement de registres, etc.).

c) Gestion de la validation

- GV₁ : Faire des déclarations sur des savoirs et des connaissances (ce qui revient à énoncer des savoirs et des connaissances).
- GV₂ : Argumenter par validation, en restant dans un même registre.
- GV₃ : Argumenter par formulation/explicitation, en changeant de registre¹¹¹.
- GV₄ : Instancier des énoncés généraux et discuter les conséquences de ces énoncés sur une certaine catégorie d'objets (fonctions, suites, ensembles de réels, etc.).
- GV₅ : Procéder à des bilans de connaissances (synthèses locale ou globale, y compris celles relatives à l'usage des règles du calcul formel).

Afin d'être en mesure de formuler des résultats concernant le travail possible des étudiants, nous avons catégorisé les interventions des étudiants en deux types selon leur fonction du point de vue de l'apprentissage. Chaque type correspond à une dimension d'analyse a priori, en fonctions des critères qui lui sont associés.

a) Travail de recherche et de formulation

- TR₁ : Formuler des questions sur les savoirs, sur les connaissances.

¹⁰⁸ Au sens de Robert (1998).

¹⁰⁹ Nous empruntons ce critère à (Robert, 2007, p. 277).

¹¹⁰ Nous empruntons ce critère à (Robert, 2007, p. 278), que nous retrouvons aussi sous une autre forme dans (Bloch, 2000, p. 354).

¹¹¹ Nous empruntons ce critère à (Bloch, 2000, p. 349).

- TR₂ : Exprimer spontanément des connaissances (en recourant à des changements de registres, à des instanciations, à des contre-exemples, à un calcul, en reliant plusieurs notions, etc.).
- TR₃ : Formuler des opinions sur les savoirs en jeu.

b) Travail de validation

- TV₁ : Indiquer des procédures et/ou des techniques de résolution (pour ne pas rentrer en confusions, nous écartons ici les interventions relatives au critère TV₂).
- TV₂ : Procéder à un calcul de validation, formel ou autre et y compris au tableau (nous signalerons dans l'analyse a posteriori, parmi ces interventions celles qui indiquent des procédures et/ou des techniques de résolution).
- TV₃ : Discuter des modèles de validation proposés par les pairs ou le professeur.

II. Etude de Cas en Analyse

II.1 Introduction

Nous nous basons sur un corpus de transcriptions¹¹² composé de trois séances de travaux dirigés à l'entrée en première année de mathématiques-informatique : une séance sur les suites, une séance sur fonctions et continuité et une séance sur fonctions et dérivabilité¹¹³. Chacune de ces séances a duré deux heures de temps, ce qui est équivalent à la durée institutionnelle accordée à une classe de travaux dirigés à ce niveau du cursus.

Ces séances sont organisées par un même professeur et dans un seul groupe de travaux dirigés comportant en moyenne une trentaine d'étudiants¹¹⁴. Ce choix nous permettra en particulier d'étudier la progression et l'évolution du travail des étudiants en classe d'analyse réelle à l'entrée à l'université.

L'organisation mathématique du cours d'analyse réelle prodigué à ce groupe est équivalente à celle que l'on retrouve dans la majorité des manuels destinés à l'enseignement de l'analyse réelle : commencer par l'étude de certaines propriétés topologiques de \mathbb{R} , puis des suites réelles, suivie par celle des fonctions réelles (limite, continuité, dérivabilité) pour déboucher sur le calcul différentiel et le calcul intégral. Les savoirs à enseigner sont tous introduits à partir de leurs définitions, celles-ci étant suivies de propriétés, théorèmes, corollaires, etc. Notons enfin que l'introduction de

¹¹² L'intégralité de ces transcriptions se trouve en Annexe IX.

¹¹³ Les séances sont dispensées dans cette chronologie.

certaines théorèmes et définitions est accompagnée par la donnée d'exemples et/ou de contre-exemples.

II.2 Analyse a priori des énoncés

Avant d'entamer cette étude, signalons que très peu d'étudiants ont préparé les séries de travaux dirigés avant d'entrer en classe. Ce constat, nous a depuis le début amené à se poser la question suivante : qu'attendent les étudiants en participant à des séances de travaux dirigés sans avoir au préalable pris la peine de réfléchir sur le contenu ?

Nous avons de ce fait formulé deux éventualités :

- les étudiants attendent de recopier, afin de les mémoriser, quelques recettes de résolution d'exercices ;
- ou au contraire, les étudiants attendent d'interagir en classe, en particulier en présence du professeur, afin de pallier à leur difficulté et espérer optimiser l'évolution de leurs connaissances.

Au fur et à mesure de nos observations en classe aux séances, nous avons d'emblée écarté la dernière éventualité.

II.2.1 Analyse a priori des exercices sur les suites

Les trois exercices se suivent dans la série 1 et portent sur l'étude de la convergence de suites réelles. Plus précisément,

- le premier exercice reprend un travail déjà entamé au lycée et concerne l'étude de la limite d'une suite géométrique $(a^n)_n$, $a \in \mathbb{R}$;
- le deuxième exercice concerne l'étude de la convergence de certaines suites réelles définies par leur terme général¹¹⁵ ;
- le troisième exercice porte sur l'étude de la convergence de suites en utilisant la complétude de \mathbb{R} .

a) Premier exercice : étude de la convergence d'une suite géométrique

L'exercice porte sur un résultat général et s'énonce comme suit :

¹¹⁴ Il peut arriver que d'une séance à l'autre certains étudiants s'absentent.

¹¹⁵ Nous n'entendons pas que la suite considérée est nécessairement convergente.

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $u_n = a^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

1. Déterminer la nature de la suite $(u_n)_n$ dans les cas suivants : $a = 0$; $a = 1$ et $a = -1$.

2. On suppose que $a \in]-1,1[$ et $a \neq 0$. Montrer à l'aide de la définition que $(u_n)_n$ converge vers 0.

3. On suppose que $a \notin [-1,1]$. Montrer que $(u_n)_n$ diverge.

A la lumière des questions posées, une tâche centrale est requise, et consiste à établir la convergence ou la divergence d'une suite géométrique en fonction de sa raison (notée a). En fin du lycée, le théorème concernant la limite d'une suite géométrique en fonction de sa raison et de son premier terme est énoncé, et démontré dans le cas où la raison est comprise (dans le sens large) entre 1 et -1, sans usage de la définition formelle de convergence d'une suite. Dans tous les cas, des exercices visant l'introduction de ce théorème sont présents dans la partie cours et appellent à un travail aussi bien dans le registre graphique (constructions de suites récurrentes et études graphique) que dans le registre numérique (sous forme de tableaux numériques pour le calcul des termes de la suite à des ordres de plus en plus grands).

Jusqu'à la fin du lycée, les étudiants n'ont jamais été sollicités à utiliser la définition formelle pour étudier la convergence d'une suite. Il en est de même en ce qui concerne l'usage de techniques permettant de montrer qu'une suite est divergente, hormis celle relative au calcul algébrique aboutissant à une limite infinie. Parmi les techniques permettant de montrer la divergence d'une suite, nous citons : montrer que la suite n'est pas de Cauchy, montrer que la suite n'est pas bornée, rechercher deux sous-suites extraites ne convergeant pas vers la même limite, etc. Les étudiants seront appelés à travailler avec des connaissances évoluant de mobilisables à disponibles, comme ils auront l'occasion de mettre en œuvre le statut objet de la notion de limite.

Même si le registre de validation devant intervenir du côté de la solution est celui de l'analyse, il peut être possible d'interpréter graphiquement la définition formelle de la convergence d'une suite, pour être en mesure de l'utiliser et la mettre en œuvre efficacement (i.e. développer un raisonnement contravariant dans les termes de Lutz et al. (1996)).

b) Deuxième exercice : étude de la convergence de suites définies par leur terme général

Le deuxième exercice n'est pas un énoncé général, et s'inscrit dans le prolongement des exercices que l'on retrouve en fin du lycée, relatifs à l'étude de la convergence d'une suite donnée par son terme général.

Déterminer la nature des suites suivantes :

$$u_n = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \left(1 + \frac{1}{n}\right); v_n = \frac{\cos(2n^3 + 1)}{n+1}; w_n = \sqrt{n^2 + 1} - n;$$

$$t_n = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right); s_n = \frac{C_n^p}{p}, p \in \mathbb{N}^* \text{ fixé.}$$

L'étude de la limite de suites telles que $(v_n)_n$ et $(w_n)_n$ requière des techniques routinière de fin du lycée, ces techniques correspondent respectivement à un encadrement de la fonction cosinus et la multiplication par l'expression conjuguée. Nous prévoyons donc que les étudiants n'auront pas de difficultés à faire ce travail.

Les suites $(t_n)_n$ et $(u_n)_n$ ne sont pas convergentes, le calcul numérique des premiers termes de chacune de ces deux suites devrait permettre d'identifier les suites extraites à considérer, pour conclure la non convergence. L'appui sur le registre numérique peut donc être un moyen pour amener les étudiants d'abord à conjecturer la non convergence de ces suites, puis à faire le lien et/ou pressentir le mode de validation attendu.

Enfin, même si le terme général de la suite $(s_n)_n$ n'est pas "habituel" pour les néo-bacheliers, sa transformation algébrique permet de mettre en œuvre les théorèmes relatifs aux opérations sur les limites de suites convergentes, et en déduire que la suite $(s_n)_n$ converge vers $\frac{1}{p!}$.

Comme pour le premier exercice, les étudiants sont appelés à travailler avec des connaissances évoluant de mobilisables à disponibles, voire techniques, mais cette fois en mettant en œuvre la notion de limite dans son statut processus.

c) Troisième exercice : convergence de suites et complétude de \mathbb{R}

Même si le troisième exercice n'est pas un énoncé général, il pointe particulièrement des attentes nouvelles, notamment concernant les raisonnements formels (condition nécessaire, condition suffisante, négation d'un énoncé quantifié, etc.).

1. Soit $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}, n \geq 1$. Montrer que $u_{2n} - u_n \geq \frac{1}{2}$ pour tout $n \geq 1$.

En déduire la nature de la suite $(u_n)_n$.

2. Soit $v_n = 1 - \frac{1}{2} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}, n \geq 1$. Montrer que $v_n - v_m \leq \frac{1}{n+1}$ pour tout $0 < n < m$.

En déduire la nature de la suite $(v_n)_n$.

La tâche centrale consiste à étudier la convergence de deux suites, données par leur terme général.

En dépit du fait que la donnée d'une sous-tâche intermédiaire, devrait permettre aux étudiants d'utiliser la complétude de \mathbb{R} pour conclure sur la nature des suites considérées¹¹⁶, la disponibilité de cette connaissance est requise si l'on veut assurer sa mise en oeuvre. De plus, même si ce n'est pas explicitement formulé comme tel, étudier la nature des suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ revient à étudier respectivement les séries $\sum_n \frac{1}{n}$ et

$$\sum_n \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

Dans ces conditions, l'exercice est totalement d'un genre nouveau par rapport à ce qui est coutumier en fin de lycée, et on ne peut assurer une organisation des connaissances des étudiants sans une intervention du professeur, tout en prévoyant de leur laisser une ouverture et un choix à faire. Nous rejoignons à cette occasion Robert quand elle dit :

"[...] nous accordons aussi une grande importance à l'organisation des connaissances, composante indispensable de la conceptualisation : c'est aussi une condition d'apprentissage à nos yeux, qui sous-entend un travail dans plusieurs domaines de travail, articulés de fait mais pas nécessairement entièrement prévus, avec éventuellement la comparaison de plusieurs méthodes, et le fonctionnement simultané de plusieurs propriétés à la fois, y compris anciennes et nouvelles. Ce n'est là encore possible que si une certaine latitude reste aux élèves,[...]. Cela sous-entend de laisser les élèves utiliser « de l'ancien », même de manière non économique et même si « du nouveau » leur permettrait d'aller plus vite." (Robert, 2003, p. 70)

¹¹⁶ Ce qui sous-entend que la technique à utiliser est indiquée implicitement par les énoncés.

En particulier, nous insistons sur les opportunités offertes aux étudiants, de travailler dans plus qu'un registre, de formuler des exemples et des contre-exemples, etc. Et ce, malgré le fait que le mode de validation attendu du côté de la solution est celui de l'analyse réelle.

II.2.2 Analyse a priori des exercices sur la continuité de fonctions

Les deux exercices se suivent dans la série 2 et portent essentiellement sur la continuité de fonctions et les propriétés qui en découlent. Plus précisément :

- - le premier exercice concerne l'étude de la continuité de la fonction caractéristique de \mathbb{Q} ;
- - le deuxième exercice est un énoncé général et traite deux propriétés d'une fonction périodique (l'une des propriétés part de l'hypothèse de continuité de la fonction en question).

a) Premier exercice : continuité de la fonction caractéristique de \mathbb{Q}

L'exercice qui suit est l'un des classiques que l'on retrouve dans plusieurs manuels destinés à l'enseignement de l'analyse réelle en première année d'université.

Soit $\chi_{\mathbb{Q}}$ la fonction caractéristique de \mathbb{Q} définie par :

$$\chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que $\chi_{\mathbb{Q}}$ n'est continue en aucun réel.

La tâche requise consiste à étudier la continuité de la fonction caractéristique de \mathbb{Q} . Dans le cadre de cet exercice, au moins deux techniques de l'analyse réelle permettent de montrer que la fonction $\chi_{\mathbb{Q}}$ n'est continue en aucun réel. Dans les deux cas, il s'agit d'abord d'être en mesure de formuler la négation de deux énoncés :

Soit une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, I étant un intervalle ouvert de \mathbb{R} et $x_0 \in I$.

- S'il existe une suite $(x_n)_n \subset I$ convergente vers x_0 et $f(x_n) \rightarrow a$, $a \neq f(x_0)$, alors la fonction f n'est pas continue en x_0 .
- Si $\exists e > 0, \forall \eta > 0, \exists x \in I, |x - x_0| < \eta$ et $|f(x) - f(x_0)| < e$, alors f n'est pas continue en x_0 .

L'usage de l'une comme de l'autre technique, passe par la mise en œuvre de la densité de \mathbb{Q} dans \mathbb{R} et sous-entend la disponibilité, chez les étudiants, des connaissances qui en relèvent.

Aussi bien la notion de fonction que celle de nombre et limite sont des objets d'étude, et il est obsolète de penser que ce qui serait à la charge des étudiants puisse être significatif du savoir mathématique sans une intervention appropriée du professeur. Nous pensons en particulier à un retour sur la notion de densité de \mathbb{Q} dans \mathbb{R} , non seulement par des déclarations sur ce savoir mais plutôt par une entrée dans une problématique de l'analyse réelle, avec les nombres comme support à cette entrée¹¹⁷.

Par ailleurs, même si le registre de validation attendu du côté de la solution est celui de l'analyse réelle, il est possible, voire souhaitable d'interpréter graphiquement sur des exemples, la discontinuité d'une fonction en un réel et tenter de donner du sens au rôle de chaque symbole intervenant dans l'écriture quantifiée.

b) Deuxième exercice : fonction périodique et propriétés

L'exercice porte sur deux résultats généraux et s'énonce comme suit :

Soit f une fonction réelle définie sur \mathbb{R} périodique de période T .

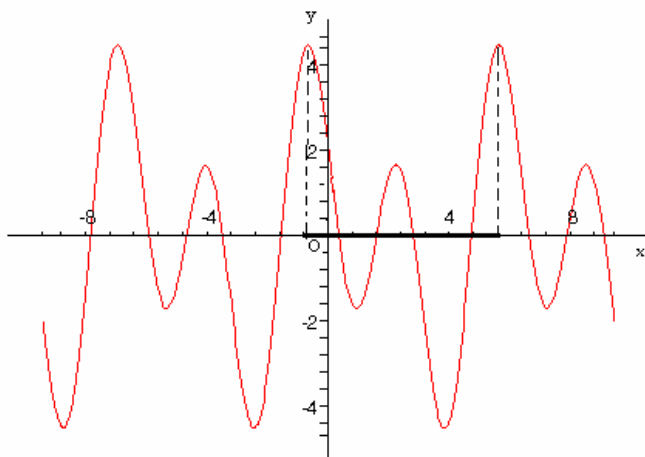
1. Démontrer que si f est continue sur \mathbb{R} , alors f est bornée sur \mathbb{R} .

2. Démontrer que si f admet une limite l lorsque x tend vers l'infini, alors f est constante.

Le résultat devant être établi à travers la première question peut être illustré graphiquement par la donnée d'exemples de fonctions trigonométriques continues et périodiques, suffisamment abordées en fin du lycée. L'exploitation du graphique peut aller dans le sens d'une identification de l'outil de preuve attendu.

Plus précisément, si l'on part du graphique qui suit, il est possible de voir que le théorème des valeurs intermédiaires permet de conclure sur le résultat sur tout intervalle $[0, T]$, où T est une période. La généralisation du résultat à l'ensemble \mathbb{R} , doit passer par l'usage de la condition de périodicité que satisfait la fonction f ainsi que la mise en œuvre de la définition de la partie entière d'un réel.

¹¹⁷ Une telle entrée est l'un des axes pris en charge dans les situations expérimentales de la troisième partie : ces situations éclairent donc ce que nous appelons problématique de l'analyse réelle.



Aussi bien pour le premier que le deuxième résultat à établir, il est possible de franchir un pas supplémentaire en proposant des contre-exemples, qui montrent que le résultat ne peut pas être généralisé à toute fonction définie sur \mathbb{R} .

L'usage du critère par les suites de la limite d'une fonction à l'infini permet de déduire le résultat énoncé dans la deuxième question.

Tout ce qui précède suppose que le travail prévu doit faire appel à des connaissances disponibles et au plus mobilisables. De la même façon que les exercices précédents, l'intervention du professeur, même si elle ne doit pas circonscrire l'activité des étudiants à une application isolée des savoirs de l'analyse réelle, elle pourra leur permettre de construire le sens de ce qu'ils font et auront à faire en classe d'analyse réelle.

II.2.3 Analyse a priori des exercices sur la dérivabilité de fonctions et fonctions réciproques

Les deux exercices se suivent dans la série 5 et portent essentiellement sur la dérivabilité de fonctions et les propriétés qui en découlent¹¹⁸. Plus précisément :

- le premier exercice concerne l'usage indiqué par les énoncés, du théorème des accroissements finis pour la recherche de valeurs approchées et d'erreurs commises et le calcul de la limite d'une suite ;
- le deuxième exercice porte sur la monotonie de fonctions dérivables dans son lien avec l'existence de fonctions réciproques.

a) Premier exercice : Dérivabilité et théorème des accroissements finis

¹¹⁸ Les séries 3 et 4 portent respectivement sur la continuité, et la continuité uniforme des fonctions, et sur la dérivabilité des fonctions et les dérivées successives.

L'exercice qui suit comporte deux questions : la première question peut être intégralement résolue à l'aide de la calculatrice et traite de la recherche de l'erreur commise en approchant un réel par un autre et réciproquement, la deuxième question a pour objectif le calcul de la limite d'une suite en mettant en œuvre le théorème des accroissements finis indiqué par les énoncés, y compris pour le choix de la fonction à utiliser.

1. On écrira la formule des accroissements finis sous la forme :

$$f(x+h) - f(x) = hf'(x+\theta h), \quad (0 < \theta < 1)$$

a) Donner la limite supérieure de l'erreur commise quand on prend 100 comme valeur de $\sqrt{10001}$.

b) Connaissant $\ln 100$ déterminer la valeur de $\ln 101$ avec une erreur inférieure à $\frac{1}{20000}$.

2. En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction $x \mapsto \ln(\ln|x|)$,

montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2 \ln 2} + \frac{1}{3 \ln 3} + \dots + \frac{1}{n \ln n} = +\infty$.

L'objectif de la première question est de mettre en œuvre le théorème des accroissements finis. L'étude des nombres et de valeurs approchées n'est pas une fin en soi. Il est donc très improbable que la tâche requise déclenche un travail problématisant la nature des nombres et leur lien avec la notion de limite et les approximations successives.

Par ailleurs, la technique à utiliser étant indiquée par les énoncés, le travail des étudiants consiste à faire le choix de la fonction et des valeurs x et h adéquates à la résolution. Le recours à des techniques de majoration et minoration, ayant pour support l'encadrement de θ entre 0 et 1 permet de déduire le résultat. A la lumière d'un premier encadrement de $\ln 101$ en fonction de $\ln 100$, l'appui sur la droite réelle permet de conjecturer une valeur approchée avec l'erreur sollicitée, le calcul numérique de l'erreur permet de confirmer la conjecture.

La deuxième question explicite le recours au théorème des accroissements finis et indique clairement la fonction à utiliser afin de procéder à la résolution. L'activité des étudiants consisterait à faire le choix des intervalles sur lesquels il est approprié de mettre en œuvre le théorème des accroissements finis, à développer des techniques de majorations et minorations puis à calculer la limite de la suite en question.

L'intervention du professeur pourrait amener les étudiants à expliciter le découpage implicite correspondant et l'ordre des mises en œuvre successifs.

Dans tous les cas, le registre de validation attendu du côté de la solution est celui de l'analyse réelle, et les tâches requises appellent les étudiants à travailler avec des connaissances mobilisables voire "techniques".

Notons enfin que, même si les savoirs de l'analyse en jeu dans cet exercice ont déjà été introduits en fin du lycée, les tâches requises sont beaucoup moins élémentaires et prennent le relais par rapport à ce qui a été déjà abordé (en fin du lycée).

b) Deuxième exercice : Dérivabilité et fonctions bijectives

La tâche globale requise dans l'exercice ci-dessous, consiste à étudier l'existence de la fonction réciproque de f ainsi que sa dérivabilité.

1. Montrer qu'il existe un unique $a \in \left]1, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $\sin a = \frac{1}{a}$.

2. Soit $f(x) = \frac{\sin x}{1 - x \sin x}, x \in]-a, a[$.

a) Montrer que f admet une fonction réciproque g dont on précisera le domaine de définition I .

b) Montrer que g est dérivable sur I et exprimer g' en fonction de g .

Pris dans sa globalité, l'exercice ci-dessous se situe dans le prolongement de ceux proposés en fin du lycée concernant les fonctions réciproques des fonctions continues strictement monotones sur un intervalle. L'évolution axe, ici, sur une approche qualitativement différente dans le choix de la fonction et de son ensemble de définition.

La première question a pour objectif de vérifier plus loin que la fonction f est bien définie dans l'intervalle $] -a, a[$. La procédure de résolution est familière pour les étudiants et consiste à étudier l'existence de a en mettant en œuvre le théorème des

valeurs intermédiaires pour la fonction $h : x \mapsto \sin x - \frac{1}{x}$, sur l'intervalle $\left]1, \frac{\pi}{2}\right[$.

L'étude de la monotonie de h sur le même intervalle permet de déduire que a est unique.

L'appui sur la représentation graphique de f permet de visualiser les résultats à établir.

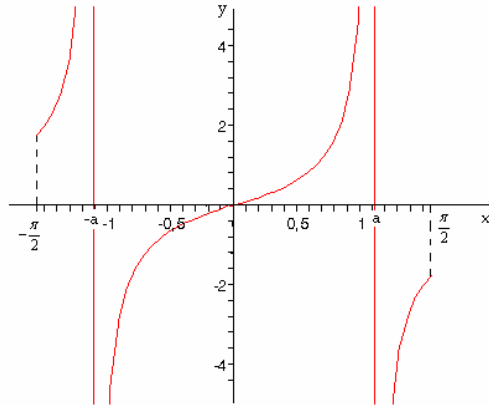


Fig. 4.1 : Représentation graphique de f

En particulier, la fonction f est définie, continue et strictement monotone sur l'intervalle $] -a, a[$. Le calcul algébrique permet d'étudier le signe de la dérivée de f sur l'intervalle $] -a, a[$, et d'en déduire que f est bijective et admet une fonction réciproque g définie, continue et dérivable dans \mathbb{R} . Il suffit ensuite d'appliquer la formule donnant l'expression de la dérivée de g en fonction de g , connaissant l'expression de la dérivée de f sur $] -a, a[$; cette formule étant introduite depuis la Terminale et suffisamment investie dans les exercices du manuel scolaire.

La résolution de cet exercice, comme du précédent d'ailleurs, est une occasion pour les étudiants d'opérationnaliser la notion de fonction en travaillant avec des connaissances mobilisables voire "techniques".

II.2.4 Synthèse

Afin de spécifier le comportement des variables macro-didactiques intervenues dans l'analyse a priori des exercices, nous avons fait le choix de les synthétiser dans le tableau ci-dessous. Les exercices étant traités dans la chronologie adoptée pour leur étude, et ce, afin d'être en mesure de les combiner et d'en déduire leurs valeurs compte tenu des prépondérances.

	VD ₁ Formalisation	VD ₂ Généralisation	VD ₃ Registre Validation	VD ₄ Conversions Registres	VD ₅ Mode Intervention	VD ₆ Niveau Fonctionnement
ES ₁	Elevé	Enoncé général	Analytique	Possibles/ autonome	Limite, suite/objet	Mobilisables/ disponibles
ES ₂	Moyen	Non général	Algébrique/ Analytique	Possibles/ autonome	Limite/proces sus	Mobilisables/ disponibles, voire techniques
ES ₃	Elevé	Enoncé	Analytique	Possibles/	Limite,	Mobilisables/

		général		autonome	suite/objet	disponibles
EC₁	Elevé	Enoncé général	Analytique	Possibles/ autonome	Nombre, limite, fonction/objet	Disponibles
EC₂	Elevé	Enoncé général	Analytique	Possibles/ autonome	Fonction/objet	Disponibles
ED₁	Moyen	Non général	Algébrique/ Analytique	Possibles/ autonome	Fonction/Processus	Mobilisables
ED₂	Moyen	Non général	Algébrique/ Analytique	Possibles/ autonome	Fonction/Processus	Mobilisables

Même si l'analyse a priori des énoncés des exercices ne permet pas à elle seule d'attester du travail des étudiants, il est toutefois possible d'identifier à la lumière du tableau ci-dessus, certains paramètres pouvant influencer de près ou de loin l'activité possible des étudiants :

- La nature des exercices proposés ne favorise pas l'organisation des connaissances des étudiants et leur progression dans le processus de conceptualisation des objets de l'analyse réelle. En effet, les exercices proposent dans leur majorité des énoncés généraux, et les objets de l'analyse réelle - nombre, limite, suite et fonction, ne sont que très rarement opérationnels. Par ailleurs, les preuves attendues sont formelles et requièrent la disponibilité des connaissances.
- L'intervention du professeur (gérer en l'optimisant aussi bien la recherche et la formulation que la validation des étudiants, particulièrement hors du contexte limité par les exercices), pourrait constituer un moyen pour pallier à la nature des exercices proposés, pour enrichir le travail des étudiants et les amener à tenter de construire le sens de ce qu'ils font ou "feraient".

II.3 Analyse a posteriori : gestion du professeur et travail des étudiants

Nous faisons le choix de ne plus distinguer les exercices, et de détailler l'analyse a posteriori en fonction des dimensions d'étude aussi bien du côté des interventions du professeur, que du côté des interventions des étudiants. Nous avons été contraint de faire ce choix, en raison de la faible occurrence des interventions des étudiants observée dans les transcriptions : ces derniers n'interviennent que rarement, et l'enseignant monopolise généralement la parole tout au long des séances.

Le professeur des classes observées, assure l'enseignement de l'analyse en première année d'université depuis plusieurs années. L'étude globale des transcriptions fait ressortir quelques rares interactions isolées professeur/étudiants ; ces échanges se produisant avec un nombre très restreint d'étudiants. En six heures de travaux dirigés,

nous avons recensé 142 interventions dont 108 émanant du professeur (très longues dans leur majorité), les interventions sont orales et/ou écrites au tableau.

II.3.1 Gestion des interactions, de la recherche/formulation, de la validation

Nous détaillons dans le tableau ci-dessous, chacune des interventions du professeur en fonction des dimensions d'étude, selon le critère auquel elle réfère.

Dimension d'analyse	N° des interventions dans les transcriptions	
Gestion des interactions	GI ₁	15, 19, 30, 33, 43, 44, 67, 73, 93, 106.
	GI ₂	7, 37.
	GI ₃	22, 38, 56, 68, 81.
	GI ₄	13, 14, 16, 25, 40, 46, 49, 57, 60, 63, 71, 76, 80, 85, 97, 105.
	GI ₅	Pas d'interventions.
Gestion de la recherche/formulation	GRF ₁	6, 23, 41, 74, 78.
	GRF ₂	27, 28, 29, 89, 91.
	GRF ₃	66.
Gestion de la validation	GV ₁	2, 3, 4, 5, 35, 48, 50, 53, 54, 61, 64, 72.
	GV ₂	8, 9, 10, 11, 12, 17, 18, 21, 24, 32, 42, 45, 47, 51, 52, 55, 58, 65, 69, 70, 75, 77, 79, 82, 83, 84, 86, 92, 94, 98, 99, 100, 101, 102, 103, 107, 108.
	GV ₃	20, 26, 31, 34, 36, 39, 87, 88, 90, 95.
	GV ₄	Pas d'interventions.
	GV ₅	62, 96, 104.

Une première observation du tableau ci-dessus, montre la prépondérance des interventions du professeur relatives à l'argumentation par validation, en restant dans un même registre. Nous comptons 37 interventions du professeur, soit environ le tiers de l'ensemble de ses interventions. Rappelons que l'étude a priori des exercices a montré que la validation attendue est en général, celle de l'analyse réelle, y compris la mise en œuvre des raisonnements formels. Parmi ces 37 interventions, 29 sont relatives à la résolution écrite des exercices au tableau incluant la rédaction de la solution et 5 sont de même nature mais formulées oralement (les interventions en question portent les numéros 9, 52, 58, 84 et 92). Même si les interventions 8, 11 et 24 ne relèvent pas explicitement de l'argumentation mais réfèrent plus aux notations, nous avons fait le choix de les rattacher au même critère en raison de leur chronologie d'apparition dans le discours du professeur.

Ces 37 interventions et celles relatives aux déclarations sur les savoirs et connaissances (sous formes d'énonciations telles que la définition d'un ensemble dense

dans IR, la définition d'une suite convergente, certains théorèmes sur la convergence de suite, la définition d'une suite de Cauchy et sa négation, le critère par les suites de continuité d'une fonction en un réel, etc.) soit au total environ 50% de l'ensemble des interventions du professeur, ne sont pas appuyées sur des interactions avec les étudiants¹¹⁹ (ne sont pas corrélées aux interventions des étudiants). Autrement dit, le professeur prend très largement à sa charge "l'obligation" de transmettre des savoirs, et une partie de son *épistémologie personnelle*¹²⁰. Dans ce dernier cas, quand il s'agit d'énonciations concernant des connaissances.

Le reste des critères intervenant dans la dimension relative à la gestion de la validation, sont parmi ceux qui sont susceptibles de nous informer sur les préoccupations du professeur à prendre en charge l'apprentissage des étudiants, relatif à la validation en analyse réelle. Il s'avère que :

- Aucune intervention relative à l'instanciation et la discussion d'énoncés généraux n'a pu être observée dans les transcriptions que nous avons étudiées.
- Seules 3 interventions correspondantes à des bilans de connaissances ont été relevées. Ces interventions demeurent déconnectées des besoins des étudiants ou des obligations d'apprentissage et ne révèlent pas l'état réel d'avancement des connaissances en classe : expressions très courtes de connaissances relatives à un usage local du théorème de densité de $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ dans \mathbb{R} , à l'usage du théorème des accroissements finis pour trouver des valeurs approchées d'un réel ou montrer la divergence d'une suite.
- Le professeur est intervenu 11 fois pour argumenter par formulation/explicitation dans le registre de la langue française, et en général dans un contexte d'échanges avec les étudiants. Parmi ces interventions, nous retenons celles qui peuvent être porteuses de certaines connaissances des étudiants en analyse réelle : certaines argumentations par formulation (26 "*Il n'y a pas de problèmes pour $1 + \frac{1}{n} \dots \frac{1}{n}$ tend vers 0 donc $1 + \frac{1}{n}$* ", 34 "*Cosinus de n'importe quoi est toujours compris entre -1 et 1...*", et 95 "*Oui l'erreur c'est la distance...*") et toutes les argumentations par explicitation (20 "*Non ça c'est absurde, c'est comme si l'ensemble des entiers naturels est fini...*", 36 "*Je veux la coincer entre deux termes qui tendent vers 0...*", 39 "*Pour la majoration qu'on vient de faire, elle n'est pas valable pour $n=0$...mais*

¹¹⁹ Nous verrons plus loin que ce ne sont pas les seules interventions non appuyées sur des interactions avec les étudiants.

¹²⁰ Terminologie empruntée à Bloch (2000) mais couramment utilisée, et qui réfère à une partie des conceptions du professeur sur les savoirs de l'analyse réelle en jeu.

c'est pas grave puisqu'on cherche limite en $+\infty$...", 88 "...on a une majoration de l'erreur grâce au T. A.F..." et 90 "...comme valeur approchée, on ne peut pas prendre Log100 car dans ce cas l'erreur n'est pas inférieure à $\frac{1}{20000}$...").

Compte tenu du niveau de la complexité des connaissances et savoirs relatifs à la validation en analyse réelle (pour les raisons exposées dans les chapitres précédents), nous estimons peu vraisemblable qu'un rapport adéquat aux savoirs de l'analyse puisse s'établir pour les étudiants aux termes des résultats relatifs aux pratiques du professeur lors du processus de validation. Et ce d'autant plus que :

- Environ 60% de l'ensemble des interventions du professeur pour la gestion des interactions, contribuent à court-circuiter ce que seraient réellement des questions de l'analyse réelle susceptibles d'être prises en charges par les étudiants. Plus précisément, alors que certaines de ces interventions stoppent explicitement le travail des étudiants et/ou "négligent" les questions qu'ils se posent (nous évoquons les interventions relatives au critère GI₃), celles correspondants aux découpages des tâches et à l'indication de procédures limitent dans leur majorité, le travail possible des étudiants à des applications instantanées des savoirs du cours (ce résultat rejoint celui de Robert, 2003). Parmi ces dernières, nous en citons les interventions 14 " *Oui, mais aussi par l'absurde...*", 25 " *... un moyen de montrer qu'une suite est divergente, c'est de trouver deux sous suites qui convergent vers des valeurs différentes...*", 49 " *Un autre moyen de montrer qu'une suite n'est pas convergente, c'est de montrer qu'elle n'est pas de Cauchy...*", 57 " *Cet exemple est pareil...par contre on va montrer qu'elle est de Cauchy...*", 85 " *On va appliquer le théorème des Accroissements finis pour $x = 10000$ et la fonction c'est racine ...*", etc. Toutefois, le professeur tente clairement (sans pour autant vraiment insister) de déclencher un débat en posant des questions locales spécifiques à la résolution des exercices en jeu, mais aussi d'ordre général et relatives aux savoirs du cours. Parmi ces dernières, nous retenons celles observées dans les interventions 15 " *Vous avez vu dans le cours que toute suite convergente est ...*", 44 " *...comment on le sait...*" et 73 " *...ça veut dire quoi périodique de période T...*". Enfin nous n'avons pu noter qu'une seule intervention laissant aux étudiants un choix pour organiser leurs connaissances, dans ce cas en fonction de ce qu'ils ont appris en fin du lycée (intervention 37 " *Eh...oui...bon vous êtes habitués à faire ça...si vous voulez...*").
- Les cinq interventions du professeur devant amener à traiter des exemples et des contre-exemples dans le cadre de la gestion de la recherche/formulation, sont exclusivement initialisées par le professeur, de la même façon que le travail qui en relève (entrepris intégralement par le professeur). Nous insistons, par ailleurs sur la

carence quantitative et qualitative des interventions du professeur visant à amener les étudiants à émettre une formulation (d'une conjecture, d'une connaissance), dont deux sans conséquences (89 " *Dans cette question c'est le contraire, on nous donne l'erreur et on nous demande de trouver Log101...*" et 91 " *On va essayer de voir qu'est ce qu'on va prendre...*"). Enfin, l'intervention 66 " *Je vous donne une fonction que vous avez vu dans le cours et que vous n'avez pas traité...*" porte en germe une tentative de changer localement de situation, mais la nature de l'alternative (même statut d'objet de la notion de fonction) et le déroulement qui suit (sans changement de registres, pas de liens avec la nature des nombres, la notion de limite, etc.) n'ont pas permis d'exploiter les opportunités (du point de vue de l'apprentissage) qu'elle aurait pu offrir.

Même si les résultats que nous venons d'établir sont des indices importants de la part du travail qui va être dévolué et/ou devant être pris en charge d'une façon personnelle par les étudiants, une étude complémentaire sur la qualité des interventions des étudiants (la quantité n'étant pas très importante par rapport au nombre d'interventions du professeur) devra nous permettre de répondre raisonnablement aux questions que nous nous sommes posées dans l'introduction et d'en traduire les conséquences du point de vue de l'apprentissage. A ce stade, nous pouvons seulement affirmer que :

- la gestion du professeur ne permet pas de pallier à la nature des exercices proposés (rappelons que cette nature est décrite dans l'analyse a priori) et d'optimiser l'apprentissage de l'analyse réelle ;
- le professeur prend entièrement à sa charge l'acte d'enseigner, laissant pour une grande part à la puissance logique et formelle de l'analyse réelle la responsabilité de régler les problèmes didactiques. Le savoir dispense de connaître, ainsi que le dit Conne (1992), mais enseigner suppose de recontextualiser ce savoir pour le traduire en connaissances à destination des étudiants : la théorie des situations a montré que là gisait la possibilité d'un apprentissage...

II.3.2 Travail des étudiants

De la même façon que pour le professeur, nous détaillons dans le tableau ci-dessous, chacune des interventions des étudiants en fonction des dimensions d'étude, selon le critère auquel elle réfère.

Dimension d'analyse		N° des interventions dans les transcriptions
Travail de recherche et de formulation	TR ₁	17, 19, 23, 24, 31, 32, 33, 34.
	TR ₂	6, 5, 9, 11, 14, 20, 22, 27, 28.
	TR ₃	Pas d'interventions.

Travail de validation	TV ₁	4, 7, 29, 30.
	TV ₂	1, 2, 3, 10, 12, 13, 15, 16, 18, 21, 25, 26.
	TV ₃	Pas d'interventions.

Les quelques 34 interventions des étudiants sont généralement très courtes sans échanges avec les pairs, et s'équilibrent, presque en nombre, entre des interventions relatives au travail de recherche/formulation et des interventions relatives au travail de validation.

Une première observation du tableau montre l'absence d'interventions des étudiants aussi bien pour formuler des opinions que pour discuter des modèles de validation, proposés par les pairs ou le professeur. Une interprétation possible de ce résultat consiste à dire que le contrat instauré par le professeur de cette classe ne comporte pas de règles établissant un travail des étudiants dans ce sens, du moins depuis le début de l'année jusqu'à la fin du premier trimestre¹²¹.

Il peut paraître hasardeux de parler aussi bien de travail de recherche et formulation que de travail de validation en se basant seulement sur 33 interventions des étudiants durant 6 heures de travaux dirigés (respectivement 16 et 17 interventions). Mais nous pensons que l'étude qualitative de ces interventions et de leur chronologie d'apparition, en fonction de celles du professeur, sachant qu'il n'y a pas d'échanges entre pairs, permet de compléter les résultats établis concernant la gestion du professeur. Cette étude permet de plus, d'investiguer la question du travail des étudiants et des difficultés qu'ils peuvent rencontrer dans les conditions du contrat tel qu'il est instauré.

Parmi les huit questions posées par les étudiants

- une est restée sans réponse (34 " *Pourquoi on n'a pas travaillé directement sur $[2, n]$...*"), trois ont été abrégées (19 " *C'est quoi le théorème sur suite bornée et suite tend vers 0...*", 24 " *Pourquoi n_0 appartient à \mathbb{N}^* , il n'y a pas dans la définition...*" et 33 " *Est-ce que l'erreur c'est la distance ...*"),
- trois ont été soldées par des réponses sous forme de déclaration de savoir (23 " *...c'est quoi la négation ...*") ou de validation de l'analyse réelle (interventions 31 et 32),
- et enfin seule la réponse à la question 17 " *On ne peut pas directement passer à la limite...*", peut être considérée comme significative d'une certaine ouverture ou choix laissés aux étudiants pour organiser leurs connaissances.

¹²¹ Remarquons que cet "embarras" des étudiants à "travailler" dans ce sens a été observé dans les classes expérimentales, dont les résultats sont étudiés dans la troisième partie.

Or, un temps de latence aurait pu être donné aux étudiants pour explorer en profondeur ces questions, du fait même que ces dernières laissent entendre, de la part des étudiants :

- une méconnaissance des savoirs du cours introduits à l'entrée à l'université (théorèmes sur les suites convergentes),
- des difficultés à rendre opérationnelles les règles du calcul formel (définition formelle d'une suite convergente, négation d'un énoncé quantifié) ;
- des insuffisances des étudiants dans le domaine des nombres (valeurs approchées, erreur, distance et éventuellement lien avec les limites).

Force est de constater que seules deux expressions spontanées des connaissances, parmi neuf, ont été entreprises d'une façon autonome par les étudiants (20

" $t_n = \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$, $t_0=0$, $t_1=1$, $t_2=0$, $t_3=-1$ et $t_4=0$ " et 28 "...on a $m=f(a)$ et $M=f(b)$..."),

dont une est interprétée de façon erronée (28). Hormis pour l'intervention 9

"... $u_1 = -2, u_2 = -\frac{3}{2}, u_3 = \frac{4}{3}, u_4 = \frac{5}{4}$..."¹²², le reste de ce type d'expressions a émergé à

la suite de questions explicitement posées par le professeur dans un but interactif (5 "... de Cauchy...", 6 "*Non madame absurde car \mathbb{N} n'est pas majoré...*", 11 "*Impair... euh... p...*", 14 "*Elle est convergente vers 0...*", 22 "*Il y a p termes...*" et 27 "...on utilise limite à droite et limite à gauche..."). En particulier :

- l'intervention 28 traduit une incompréhension du théorème des valeurs intermédiaires, cette intervention a été exploitée par le professeur grâce à la donnée d'un contre-exemple, qui n'axe pourtant pas sur l'existence accessible de la valeur intermédiaire ;
- les étudiants expriment sous forme de connaissances (9, 20), l'étude de la convergence d'une suite par le calcul de ses premiers termes et le choix des suites extraites comme moyen de validation, la nature du terme général de la suite contribue à amener les étudiants à procéder à ce travail ;
- les réponses des étudiants exprimées sous forme de connaissances sont basiques et ne sont pas significatives des exigences liées à l'apprentissage de l'analyse réelle à l'entrée à l'université : nombre de termes d'une suite finie de termes, usage des limites à droite et à gauche pour l'étude de la continuité d'une fonction en un réel, l'ensemble \mathbb{N} n'est pas majoré, parité d'un nombre exprimé sous la forme d'un multiple de 2, etc.

Les étudiants ont tenté d'intervenir quatre fois pour indiquer une technique de résolution (4 " *On peut le faire avec les sous suites...*", 7 "...on peut le faire avec les sous suites...", 29 " *On peut faire la démonstration par l'absurde ...*" et 30 " *On peut faire la démonstration par l'absurde ...*"), dont trois n'ont pas été prises en compte (4, 7 et 29).

Par ailleurs, même si les étudiants ont proposé de démontrer par l'absurde l'énoncé "*f est une fonction réelle définie sur \mathbb{R} , périodique de période T . Si f admet une limite l lorsque x tend vers l'infini, alors f est constante.*", tout le travail qui en relève a été entrepris par le professeur.

Enfin, les étudiants sont intervenus cinq fois pour procéder d'une façon autonome à un calcul de validation aboutissant à terme à la résolution des questions posées dans les exercices (13 "... $u_{4n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -1 \dots (u_n)_n$ divergente.", 15 " $\cos(2n^3 + 1)$ est bornée car

$$\left| \cos(2n^3 + 1) \right| \leq 1, \quad \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ donc } v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0", \quad 16, \quad 18 \quad "0 < w_n \leq \frac{1}{n} \text{ et } \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \dots", \quad 21$$

"... $t_{2n} = \sin(n\pi) = 0$, donc $t_{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \dots$ " et 26 "... $x_0 \in \mathbb{R} \iff \chi_{\mathbb{Q}}(x_0) = 0$, comme \mathbb{Q} est dense dans $\mathbb{R} \dots$ "). A l'occasion de ces interventions, nous avons pu repérer la mise en œuvre par les étudiants de :

- trois techniques permettant d'étudier la convergence d'une suite (multiplication par l'expression conjuguée, choix et usage de suites extraites, usage des encadrements) dont deux sont largement routinisées en fin du lycée ;
- une technique permettant de montrer la discontinuité d'une fonction en un réel (négation du critère par les suites de la continuité d'une fonction en un réel), cet usage a par contre été initialisé, entièrement guidé par le professeur et dans les mêmes termes (ce qui a fait l'objet de l'interventions 25 des étudiants).

Le reste des interventions des étudiants relatives à un calcul de validation (notamment les interventions 2, 3 et 10), est en lien étroit avec les interventions du professeur qui argumente à chaque fois et simultanément par validation, faisant le travail à leur place.

En dépit de cette étude, la pauvreté des interventions des étudiants rend difficile d'en induire l'état d'avancement de leurs connaissances et ce qu'ils seront en mesure de faire dans un travail autonome. Sous cette réserve, dans un contrat tel que celui instauré dans

¹²² Initialisée par le professeur dans un but de formulation de la part des étudiants, et non sous forme de questions.

cette classe, les étudiants gardent aussi bien la responsabilité d'apprendre ou non, que la possibilité théorique d'interagir avec le professeur.

III. Conclusion

L'étude faite dans ce chapitre, montre que la classe n'est pas mise en situation d'interaction effective avec les savoirs en jeu. Or en dépit de la nature des exercices proposés, une forme d'a-didacticité aurait pu se construire dans des interactions conjointes professeur/étudiants et entre pairs (dans les transcriptions disponibles, la part de ces interactions est infime). Le contrat à l'œuvre dans cette classe est faiblement didactique défini par Brousseau comme étant un contrat d'initiation ou de contrôle :

"Dans ce nouveau contrat l'informateur prend en charge une partie de cette responsabilité : il donne à l'informé un critère pour déterminer s'il a bien 'compris' (et pas seulement reçu) le savoir communiqué. Ce moyen consiste à établir une relation d'équivalence entre deux ensembles d'énoncés, le premier est un ensemble de savoirs communiqués comme tels (par exemple des énoncés d'une théorie), le second est proposé sous forme de questions, d'applications ou de problèmes à résoudre. [...]. Ainsi l'initiateur montre¹²³ quels savoirs se 'convertissent' en connaissances pour agir dans des situations déterminées, et quelles connaissances peuvent se convertir en quels savoirs." (Brousseau, 1996, p. 21)

Comme le dit Brousseau dans tous les cas,

"Les contrats faiblement didactiques prennent en compte le projet de faire approprier un savoir par un interlocuteur, celui-ci étant pris en tant que sujet épistémique, mais non en tant que sujet effectif." (Brousseau, 1996, p. 22)

Certes la nature des exercices peut-être considérée comme en partie responsable de la pauvreté du travail mathématique des étudiants en classe, mais la conception du professeur ne lui permet pas de s'en rendre compte. Dans ce cas précis, partant du fait que les mathématiques sont transparentes, le professeur est convaincu que l'activité mathématique des étudiants va de soi et les savoirs de l'analyse réelle se comprennent d'eux-mêmes. Cette étude nous a montré à l'évidence que les savoirs formels n'outillent pas les étudiants pour faire un travail heuristique, et ne leur permettent pas de poser la question de l'existence "constructible" des objets mathématiques mais seulement de leur

¹²³ C'est nous qui avons souligné.

existence "potentielle". Or, un résultat essentiel nous semble se dégager du travail entrepris par les chercheurs en didactique des mathématiques sur l'enseignement supérieur : c'est que **l'existence "potentielle" (voire hypothétique) des objets de l'analyse réelle n'est pas suffisante pour engager les étudiants dans un processus de validation en analyse réelle**. Ce résultat peut ainsi se lire dans les travaux de Robert, de Vandebrouck, en France ; dans ceux de Tall, Dubinsky, etc¹²⁴.

Les résultats auxquels nous avons pu aboutir viennent à l'appui des modifications majeures dans la nature du travail mathématique attendu de la part des étudiants et des connaissances en jeu, modifications induisant un changement dans le contenu de la relation didactique difficile à saisir de la part des étudiants et à gérer de la part de l'enseignant. En effet, les travaux dirigés dont les transcriptions ont été étudiées se situent entre le mois d'octobre et le mois de décembre, et réfèrent à un ensemble de savoirs de l'analyse réelle particulièrement problématiques¹²⁵.

Au terme de cette étude, la question se pose des caractéristiques d'un travail portant sur des objets spécifiques : comment construire des situations à travers lesquelles il serait possible que les étudiants s'interrogent sur la validité des énoncés de l'analyse réelle et leur champ d'application, et puissent entreprendre un travail effectif sur les objets en jeu.

¹²⁴ Cf. Chapitre 2, pour plus de détails.

¹²⁵ Cf. Chapitre 2.

CONCLUSION : NOUVELLE QUESTION ET NOUVEL ENJEU DE RECHERCHE

Alors que le contrat classique privilégie les preuves formelles¹²⁶ qui à leur tour constituent l'une des raisons de la pauvreté du travail des étudiants, la majorité des mathématiciens experts essaie de mettre en relation les savoirs sur des cas particuliers qui soient pertinents du point de vue de la généralisation afin de voir comment ils interagissent et se convaincre du fonctionnement.

Les situations proposées dans les ingénieries doivent être organisées en prenant en compte des conditions didactiques de mise en œuvre de preuves pragmatiques. Par preuves pragmatiques, nous entendons :

"[...] the production of a proof is aided by the use of instantiations of the mathematical concepts or objects involved. Here the term instantiation refers to a systematic, repeatable way that an individual thinks about a concept or object, such as with a graph, diagram, or prototypical example [...]." (Weber et al., 2007)

De plus, les caractéristiques épistémologiques de l'analyse réelle traduisent une capacité de la part des étudiants, y compris pour leurs études ultérieures afin " [...] d'assimiler plus tard des conceptions plus abstraites sans tomber dans le psittacisme."¹²⁷, de :

- se poser la question de l'existence "constructible" des objets de l'analyse réelle ;
- faire le lien entre les définitions, théorèmes et les calculs : exhiber une approximation d'un réel, donner la forme des courbes des solutions d'une équation différentielle, calculer les valeurs approchées d'intégrales, etc.

Le milieu théorique des situations doit être conçu de sorte que l'approximation et la recherche de valeurs approchées jouent un rôle essentiel.

D'où la question centrale mise en travail dans la troisième partie de cette thèse : Quelles expériences numériques, quelles situations pertinentes pourraient faciliter l'entrée des étudiants dans la problématique de l'analyse réelle (nombres réels, suites,

¹²⁶ Nous donnerons une définition précise de ce que nous entendons par preuve formelle dans le chapitre 6.

¹²⁷ Cité dans la préface de (Dieudonné, 1980).

limites et fonctions) sans perdre de vue une signification "expérimentale" ou heuristique ?

A travers cette question, nous nous fixons comme enjeu, la mise en place d'une ingénierie, soit d'aménager des situations à l'entrée à l'université, qui permettent :

- un approfondissement des connaissances numériques et de la structure de \mathbb{R} , une prise en compte des connaissances du secondaire ;
- le développement d'un processus comportant une phase expérimentale avec des allers-retours entre preuves pragmatiques et preuves formelles ;
- un retour satisfaisant sur les savoirs visés et le formalisme.

L'approche par les approximations a déjà été tentée en France dans la réforme des années 80. Nous résumons succinctement l'impact de ce choix en nous référant aux propos ci-dessous :

"Les ambitions épistémologiques que s'est donné la contre-réforme en analyse sont ambitieuses. Comme c'est souvent le cas, la réflexion épistémologique n'a pas été suffisamment accompagnée d'une réflexion de nature plus didactique et écologique, cherchant à étudier les coûts, les conditions de viabilité des choix effectués, [...]."

L'opposition entre apprentissage de concepts et apprentissage de techniques qui se développe dans l'enseignement, dans le cadre d'un constructivisme mal compris, n'aide d'ailleurs pas à poser correctement les problèmes, et en particulier à s'interroger sur le coût réel de l'opérationnalisation souhaitée des techniques d'approximation." (Artigue, 2003, p. 4)

Dans le cadre de cette recherche, nous investiguons "l'apport" des approximations sur la base de deux considérations :

1. Le niveau du cursus

Les situations sont destinées à des étudiants de première année d'université à un moment où les outils technologiques nécessaires ont été introduits. Ce que nous visons est un retour satisfaisant sur ces outils.

2. Elaboration des situations

Les situations seront construites en prenant en compte certaines conditions didactiques.

TROISIEME PARTIE
ORGANISER L'ARTICULATION DE CONNAISSANCES
NUMERIQUES AVEC DES CONNAISSANCES DE L'ANALYSE

CHAPITRE 5
Méthodologie de l'ingénierie

I. Introduction

Au terme de l'étude faite dans les deux premières parties de cette recherche, nous nous sommes posées la question des expériences nécessaires pour engager les étudiants dans l'analyse formelle telle qu'elle leur est proposée au début de l'enseignement universitaire. Notre hypothèse s'énonce ainsi :

Les situations qui réintroduisent une phase expérimentale permettant un travail heuristique sur des objets spécifiques, avec des preuves pragmatiques, vont offrir beaucoup plus d'opportunités de conjectures, de calculs, etc. et permettre un retour au formalisme dans un milieu de référence informé par le milieu objectif précédemment visité.

Par objets spécifiques, nous entendons des nombres, des suites ou des fonctions précisés par des propriétés particulières. Ceci se traduit, de la part des étudiants, par une manipulation des objets en jeu et non seulement d'expressions telles que : $\forall x \in \mathbb{R}$, soit la fonction f , \exists une suite, etc.

En élaborant ce type de situations, notre but est de ne pas faire travailler les étudiants dans un seul sens, en partant du cours pour en arriver aux exercices et problèmes d'applications. Ces situations ne sont pas non plus des situations fondamentales ; les notions en jeu sont déjà connues (définitions formelles ou théorème) et il s'agit de les instancier¹²⁸ par le biais d'un milieu heuristique qui permettra plutôt un retour satisfaisant sur les idées qui sous-tendent la généralisation, des situations qui les légitiment. Plus précisément, l'enjeu est de trouver le moyen pour que les situations traitent d'exemples génériques, dans le sens où le mode de traitement spécifique répond à la question générale traitée. Sachant que la clé de voûte de l'analyse réelle est la notion de limite (ou de nombre ce qui, selon Dieudonné, est équivalent)¹²⁹, l'un des facteurs déterminant notre choix est la difficulté de concevoir une situation d'introduction qui sollicite l'usage de cette notion formalisée sauf si cette dernière est insérée dans l'un des cas particuliers que l'on veut généraliser. Or "[...] dans ce dernier cas, les étudiants pourraient se passer de la démarche d'unification formelle et utiliser des moyens de résolution propres à ce cas." (Robert et Rogalski, 2004, p. 87). Dans le même ordre d'idée, Bloch (2000) pointe la difficulté à faire exister des réalisations de

¹²⁸ Par instancier un énoncé formel (en l'occurrence une définition ou un théorème), nous entendons considérer sa valeur de vérité sur un cas particulier qui soit de plus, pertinent du point de vue de la généralisation.

¹²⁹ "[...], c'est ce qu'on a appelé un retour à la rigueur où on met à la base de l'analyse la notion de limite d'une suite de nombres. [...] La notion de base de l'algèbre et de l'analyse doit donc être celle de nombres (c'est-à-dire nos nombres réels)." (Dieudonné, 1987, p. 223).

situations fondamentales en analyse réelle en absence d'un *répertoire d'ostensifs analytiques, permettant de formuler et de valider.*

De plus, la question de la recherche d'une dimension d'expérience est posée du point de vue des composantes souhaitables pour la construction d'un milieu théorique des situations envisagées. En prenant en compte les principaux résultats mis en évidence dans les deux premières parties, nous tenterons d'expliquer au fur et à mesure de cette étude comment :

Le recours aux méthodes numériques d'approximations de nombres permet d'organiser des situations relatives aux concepts de limite, de suite et de fonction. Ces situations permettent ensuite de revenir sur les savoirs académiques, en prenant en compte la construction des connaissances des étudiants.

En particulier, nous essaierons de montrer que les situations que nous avons construites et analysées dans la TSD ne prennent pas uniquement en charge des *connaissances d'ordre I* (Au sens de Sackur et al., 2005)¹³⁰. En organisant des situations qui suscitent, de la part des étudiants, des allers/retours entre le milieu d'action et celui de validation (propre aux *règles mathématiques*) et la mise en œuvre de procédures et de méthodes de l'analyse réelle (qui vont à leur tour faire partie de l'institutionnalisation, nous entendons les conduire à formuler des énoncés ressortissant de *connaissances d'ordre II* et si possible *d'ordre III*¹³¹.

Cette deuxième partie se propose donc d'exposer une organisation sur trois étapes de l'ingénierie didactique que nous avons mise en œuvre dans les groupes de première année d'université :

1. Dans une première étape, nous montrons l'adéquation des situations construites aux savoirs visés, du double point de vue de leur pertinence (capacité à provoquer la confrontation des étudiants aux savoirs visés) et de leur consistance (éléments du savoir en jeu et éléments restant à construire dans une situation didactique ; ce que les situations conservent du savoir visé, ce qui leur échappe).
2. Dans la deuxième étape, nous analysons les situations construites ainsi que les expérimentations qui ont eu lieu.

¹³⁰ Les connaissances d'ordre I sont les définitions, les axiomes et les contenus des énoncés mathématiques vrais.

¹³¹ Dans l'acception de Sackur et al., les connaissances d'ordre II sont celles qui portent sur le fonctionnement soit de la sémiotique mathématique, soit des démonstrations. Les connaissances d'ordre III *participent, indirectement, de la définition des mathématiques*. Il suit que certaines connaissances Méta (au sens de Robert) seraient des connaissances d'ordre III.

3. Dans une dernière étape, nous concluons sur le travail observé des étudiants et les possibilités ouvertes dans un milieu tel que celui que nous avons installé.

Au vu des investigations menées dans la première partie, nous avons adopté un modèle de situations qui nous semble adéquat à l'acquisition des savoirs visés. La présentation et l'étude de ce modèle font l'objet du paragraphe suivant.

II. Retour sur les paramètres des situations théoriques

En nous référant à l'étude faite dans la première partie, on peut inférer que :

- Les nombres réels et leurs propriétés constituent une des bases fondamentales des savoirs sur les limites, suites et fonctions.
- A l'heure actuelle, de la maternelle à l'entrée à l'université, la fréquentation des nombres est limitée et les travaux numériques sollicités n'ont pas pour but de problématiser la nature des nombres ainsi que leurs propriétés.

Aussi bien dans les travaux de Birebent (2008) que de Bloch et al. (2008), l'accent est mis sur un évitement, du collège à l'entrée à l'université, des problèmes d'approximations numériques et leur lien "obscur" avec l'analyse réelle. Ces travaux ont en particulier souligné que les attentes institutionnelles du secondaire en calcul numérique ne suffisent pas pour permettre aux étudiants de comprendre le statut théorique des nombres, dont les propriétés sont déterminées par la nature de la structure de l'ensemble \mathbb{R} .

Reprendre le travail sur les nombres réels, et élargir le champ d'expérience des étudiants relativement à la nature des nombres réels et à leurs manifestations, est donc un enjeu incontournable de situations portant sur les savoirs de l'analyse réelle.

L'étude de nature historique/épistémologique et mathématique nous a permis de préciser un modèle théorique engendrant, dans la mesure du possible, un ensemble satisfaisant de savoirs et problèmes spécifiques des nombres réels dans leurs relations avec les concepts de limite, suite et fonction. Nous pouvons donc engager les situations prévues avec l'assurance que ces situations sont porteuses de connaissances et savoirs sur les réels.

II.1 Variables retenues

Dans le but de satisfaire les premières considérations qui nous ont portée à choisir de ne pas évacuer le problème du numérique, mais de le mettre au cœur des problèmes mathématiques et des situations qui doivent être travaillées par les étudiants¹³², nous avons choisi de construire des situations autour de l'approximation dans ses deux aspects congruents :

1. Comme un moyen d'articuler le *niveau théorique* (nombres réels comme base des savoirs sur les limites, suites et les fonctions) au *niveau local*¹³³ (le théorème de densité de \mathbb{Q} dans \mathbb{R} , la définition et les théorèmes de convergence d'une suite, le théorème du point fixe, le théorème des segments emboîtés, le théorème des valeurs intermédiaires, le théorème des accroissements finis et la formule de Taylor).

Par exemple, le fait que deux suites adjacentes convergent vers la même limite doit se comprendre par rapport à une théorie des nombres réels qui table sur une construction de \mathbb{R} à partir des coupures de Dedekind¹³⁴. Ou encore, l'existence d'une suite de rationnels convergeant vers un irrationnel doit être expliquée dans le cadre d'une théorie des nombres réels dont la propriété topologique de densité inclut une notion précise de limite et de distance sur \mathbb{R} . De la même façon, le théorème des valeurs intermédiaires, le théorème des accroissements finis, etc. sont fondés sur la structure de $(\mathbb{R}, | \cdot |)$ en tant qu'espace métrique et par suite sur les propriétés des nombres réels.

2. Comme une source féconde de jeu souhaité sur les valeurs des variables macro-didactiques de la transition.

II.1.1 Milieu théorique de l'Analyse : première modélisation

Lors de nos investigations théoriques, nous avons pu mettre en évidence l'organisation amalgamée des savoirs de l'analyse réelle à travers la question de l'approximation de nombres réels. L'étude des manifestations ancienne et contemporaine de diverses méthodes numériques d'approximation de nombres nous a permis de repérer les principales caractéristiques d'un modèle de situations qui visent,

¹³² "[...] dans le champ de l'analyse, l'approximation devient un élément clef de la conceptualisation. [...] Son statut est cependant souvent mal perçu par les étudiants, y compris les étudiants relativement avancés." (Kahane et al., 2002).

¹³³ Cf. Niveaux de détermination dans (Chevallard, 2003) et leurs applications dans les travaux de Bosch, Fonseca et Gascon (2004).

¹³⁴ Ceci suppose qu'on introduit le cours d'analyse réelle par l'axiome de la borne supérieure.

en se basant sur les nombres réels, un retour sur la généralisation d'énoncés à propos de limite, suite et fonction :

- concevoir la nature des nombres : distinguer entre rationnel, irrationnel algébrique, irrationnel transcendant. Ce qui pose la question des critères connus des étudiants et de leur utilisation pertinente, et des critères nouveaux à introduire ;
- être capable de vérifier qu'un nombre n'est pas rationnel (dans la mesure du possible, voir qu'il est de plus transcendant) ;
- faire une hypothèse et la valider sur la possibilité de construire une suite approchant un nombre ;
- calculer des valeurs approchées d'irrationnels avec une approximation arbitrairement fixée ;
- faire une hypothèse et la valider sur l'existence et l'unicité (éventuelle) de solutions d'équations ;
- calculer des valeurs approchées de solutions d'équations non résolubles par l'usage des techniques algébriques à disposition ;
- construire une suite convergeant vers un réel (exhiber une approximation d'un réel) ;
- contrôler l'erreur commise à tout ordre (dans les termes de la suite) ;
- contrôler la rapidité de la convergence (en particulier, distinguer une *bonne* d'une *moins bonne* approximation) ;
- contrôler la validité des résultats numériques (les relier aux définitions et théorèmes).

Afin d'initier les activités mathématiques attendues, nous entendons mettre en jeu un canevas de connaissances et savoirs sur les nombres- limites, suites et fonctions par le biais de différents procédés :

- Exploitation du graphique/géométrique : constater l'irrationalité d'un nombre, approcher la solution d'une équation, construire une suite approchant un nombre, encadrer des réels, conjecturer la convergence d'une suite, etc.
- Exploitation du calcul numérique : approcher un nombre, estimer l'erreur commise, approcher la solution d'une équation, etc.
- Exploitation du symbolique : effectuer des opérations algébriques de majoration/minoration, utiliser pertinemment le théorème de densité, le principe de récurrence, la définition de limite, les théorèmes sur la convergence d'une suite- dont segments emboîtés (ou suites adjacentes) et le théorème du point fixe, le théorème des valeurs intermédiaires, le théorème des accroissements finis, la formule de Taylor, etc.

En catégorisant les connaissances et savoirs possibles selon le registre de représentation attribué, nous voulons mettre en évidence :

- d'une part, la possibilité de travailler sur plus qu'un registre (le graphique pour la visualisation et la conceptualisation, le numérique pour l'estimation et l'approximation pragmatique, le symbolique pour la formalisation) ;
- d'autre part, la potentialité offerte, dans le travail des étudiants, d'alterner les différents registres (valider le travail graphique ou numérique par le symbolique et dans un autre sens, légitimer le symbolique par le travail graphique ou numérique).

Des caractéristiques du modèle théorique établi (dont l'énumération n'inclut pas pour le moment un processus temporel) découlent les variables suivantes :

1. Nature du nombre : rationnel, irrationnel algébrique, irrationnel transcendant, etc. et critères utilisés pour la détermination de cette nature ;
2. Type de la suite : définie explicitement, définie par une relation de récurrence, définie à partir d'un graphique, définie par des conditions données (numériques ou autres) ;
3. Nature des termes de la suite : suite de nombres rationnels, irrationnels algébriques, transcendants, etc. ;
4. Comportement de la suite : croissante, décroissante, ni croissante ni décroissante, etc. ;
5. Type d'équation : algébrique, transcendante, résoluble algébriquement ou non ;
6. Type d'approximation sollicitée : à une erreur près, entre deux termes dont *la distance* est à une erreur près ;
7. Type d'erreur : non fixée, fixée, fixée et dépassant la capacité de la calculatrice ;
8. Méthode d'approximation : générique (en précisant le niveau de généralisation) ou non.

A ce stade, la question se pose du degré de performance d'un tel modèle pour prendre en charge certains des problèmes liés à la révolution à laquelle les néo-bacheliers sont confrontés aussi bien dans le travail demandé que dans les moyens de ce travail. Les variables macro-didactiques finalement retenues au terme de la première partie, vont nous permettre d'examiner cette question.

II.1.2 Potentialités des variables théoriques : une prise en compte de l'effet de la transition lycée/université

L'étude faite dans la première partie nous a montré à l'évidence que loin d'être des variables continues, les valeurs de variables macro- didactiques entre le lycée et l'université sont dichotomiques et synonymes d'une profonde mutation dans le travail mathématique demandé¹³⁵. Une question se pose : dans quelle mesure le principe des situations théoriques prend en charge la phase *manquante* dans le travail des étudiants ?

Pour illustrer notre discussion sur la question, nous allons utiliser un type de tâches¹³⁶ que l'étudiant entreprend au moins une fois au lycée et à l'entrée à l'université : celui qui traite de l'approximation d'un irrationnel par un décimal et de l'erreur commise.

Le but est de pointer :

- du lycée à l'université, une rupture dans les moyens de résolutions (en particulier, chacune des tâches est incorporée dans un exercice global au sein d'une série ou d'un cours traitant d'objets particuliers) ;
- un réaménagement possible par un *retournement de situations* (Cf. Bloch, 2005) conforme au modèle théorique que nous avons établi et les possibilités qui y sont offertes dans le travail des élèves/étudiants.

Au lycée, on trouve un exercice isolé traitant de ce type de tâches, exercice que l'on retrouve quasi-semblable à l'entrée à l'université. En voici les énoncés :

- Dans le manuel de Terminale mathématiques (en vigueur jusqu'à juin 2007) au sein du chapitre "Accroissements finis" et proposé dans la partie cours juste après l'énoncé de l'inégalité des accroissements finis :

Soit la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$.

a. Montrer que $\frac{1}{21} \leq f'(x) \leq \frac{1}{20}, x \in [100, 101]$.

b. En déduire que $10,047 \leq \sqrt{101} \leq 10,05$.

- Dans la série de travaux dirigés traitant des fonctions, de leurs dérivées et des propriétés qui leurs sont rattachées, la deuxième question d'un exercice en comportant trois est la suivante :

¹³⁵ Cf. Chapitre 1 de la première partie.

¹³⁶ Repérées dans le manuel de Terminale au lycée et dans les séries de TD de 1^{ère} année, que nous avons utilisé à l'université aussi bien dans les classes ordinaires (Cf. Partie I) que celles que nous avons expérimentées.

2a. Donner la limite supérieure de l'erreur commise quand on prend 100 comme valeur de $\sqrt{10001}$.

2b. Connaissant $\ln 100$ déterminer la valeur de $\ln 101$ avec une erreur inférieure à $\frac{1}{20000}$.

L'énoncé de la question qui la précède traite de l'écriture de la formule des accroissements finis sous la forme $f(x+h) - f(x) = hf'(x+\theta h)$, ($0 < \theta < 1$).

Dans les deux exercices, la résolution aurait pu ne nécessiter que l'usage de la calculatrice. Mais, dans l'exercice de la terminale, la première question traduit une demande de s'appuyer sur l'inégalité des accroissements finis pour confirmer un encadrement de $\sqrt{101}$. Cette activité est entièrement guidée par l'énoncé et la fonction à considérer est donnée.

La recherche de la limite supérieure de l'erreur commise en approchant $\sqrt{1001}$ par 100 aussi bien que la détermination d'une valeur approchée de $\ln 101$ à 10^{-5} près nécessitent d'aménager le théorème des accroissements finis en utilisant θ , de choisir la fonction f adéquate, de traduire le langage des limites, etc. Or, la correction donnée par le professeur au tableau¹³⁷ équivaut à la "rédaction" d'une suite d'étapes censées être maîtrisées par les étudiants, auquel lui seul participe. En voici une séquence :

$$P: \sqrt{10001} \approx 100 = \sqrt{10000}.$$

$$f(x) = \sqrt{x}$$

$$f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}_+, f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

$$f(x+1) - f(x) = \sqrt{10001} - \sqrt{10000} = \frac{1}{2\sqrt{10000+\theta}}$$

$$\text{donc } \sqrt{10001} = 100 + \frac{1}{2\sqrt{10000+\theta}}, \text{ l'erreur commise est donc } \frac{1}{2\sqrt{10000+\theta}}$$

On sait que $0 < \theta < 1$

$$10000 < 10000 + \theta < 10001 \text{ donc } \frac{1}{2\sqrt{10000}} < \frac{1}{2\sqrt{10000+\theta}} < \frac{1}{200} = 0.005.$$

¹³⁷ Cet exercice a été corrigé lors de l'étude que nous avons faite dans les classes ordinaires (Cf. Chapitre 4 de la première partie).

Énoncées et résolues de telles façons, ce type de tâche vient d'une part, en appui aux résultats que nous avons établis concernant les variables de la transition et d'autre part, ne permet pas de problématiser les questions de nombres dans leurs liens avec les définitions et théorèmes du cours.

Plus précisément,

- l'objectif de l'exercice, tel qu'énoncé à l'université, n'est autre que la démonstration puis l'application d'un corollaire du théorème des accroissements finis, ce qui n'est pas le cas de l'exercice de la terminale ;
- le registre de validation est algébrique dans l'exercice du lycée et en grande partie analytique dans celui de l'université.

Dans l'exercice de Terminale, il aurait été intéressant de retourner la situation, sous forme d'une seule question, en imposant des conditions sur la valeur approchée et en demandant de trouver l'erreur de sorte qu'elle soit hors d'atteinte de la calculatrice. À côté de l'intérêt épistémologique, l'élève aura l'occasion d'apprendre à chercher, expérimenter, faire fonctionner plusieurs registres avant de se rendre compte de l'intérêt (ou la légitimité) de faire appel à un théorème du cours.

Au vu de la réponse donnée à la question qui devrait permettre une exemplification du corollaire (absence d'appui graphique, pas de tentatives pour susciter la formulation de contre-exemples, etc.), la tâche proposée à l'université relève d'une logique de répétition/application des théorèmes.

L'étudiant est contraint, par l'usage du théorème des accroissements finis dans une forme bien explicitée, à enchaîner une suite de techniques auxquelles il n'est de plus pas entraîné : il n'est sûrement pas possible de cette façon de s'attendre à ce que des questions sur les nombres, limites, fonctions émergent et qu'un retour satisfaisant sur le formalisme introduit s'opère.

Au terme de cette étude la question se pose des jeux possibles des actants dans des situations relevant du modèle adopté.

II.2 Formes possibles des interactions des étudiants dans les situations

Le but est d'engager les étudiants dans des situations où ils puissent mettre en jeu des connaissances de l'analyse réelle, les amenant à interroger ce qu'est une suite, une fonction, une limite, etc. L'étude faite dans les premières parties a montré que l'enseignement traditionnel, très formel et transmissif, ne confronte pas les étudiants à

des questions précises sur des instanciations d'objets mathématiques généraux, et ne prévoit pas de place pour "l'expérience" des objets mathématiques.

Les étudiants vont donc devoir être confrontés à des questions sur des nombres spécifiés, des fonctions, des suites numériques, et à des approximations, des limites. Les formes d'interactions prévues devront comprendre des calculs effectifs, des prévisions et anticipations de résultats (de limites, de non convergence ou de convergence, de croissance/décroissance, de majoration/minoration, etc.); il est nécessaire aussi de prévoir des validations croisées entre calcul et validation à l'aide d'énoncés formels. En bref, nous visons à organiser un milieu heuristique – milieu objectif – permettant des essais/erreurs, des validations pragmatiques par exemples et contre-exemples (Cf. Benbachir et al., 2001), des intuitions géométriques et graphiques, ceci afin de donner un contenu d'expérience à des savoirs que les étudiants n'ont reçu que comme une suite d'énoncés formels.

Dans cette optique, le champ numérique nous a paru, à la fois d'un point de vue épistémologique et didactique, particulièrement fécond pour remettre les étudiants en situation d'expérimenter et de valider des conjectures qui pourront être faites dans un cadre numérique ou dans un cadre géométrique ou graphique. Le champ numérique est porteur de connaissances des étudiants, ces connaissances étant cependant à consolider, compléter, et à remettre en question.

La dimension de validation doit cependant être soigneusement préparée de façon à ce que l'enseignant puisse revenir sur les savoirs institutionnels à presque tout moment du travail des étudiants dans les situations.

III. Synthèse méthodologique

En conclusion, la méthodologie utilisée pour la construction de situations prend en compte trois axes, que nous rappelons ci-dessous.

III.1 Les thèmes et les objectifs : les savoirs de l'Analyse en lien avec les problèmes numériques

Le travail prévu des étudiants doit leur permettre de satisfaire les objectifs que nous assignions aux situations :

- Consolider et compléter leurs connaissances numériques, de façon à ce que le savoir de base sur la structure de \mathbb{R} devienne disponible et opérationnel.

- Relier ces connaissances aux savoirs nouveaux introduits sur les fonctions, les suites, les limites.
- Disposer d'un milieu objectif et de fondations expérimentales leur permettant d'asseoir leur activité en analyse réelle sur des bases efficaces, de sorte qu'ils puissent questionner les savoirs institutionnels et les exemplifier, soit de leur propre initiative soit à la demande des professeurs.

Les objectifs énoncés ci-dessus conduisent à ce que l'ingénierie prévue doit amener les étudiants à :

- travailler sur la structure de \mathbb{R} : encadrements/inégalités, approximation, différence entre rationnels et irrationnels, etc. ;
- travailler sur les limites, les suites et les fonctions.
- Ceci se traduit par la nécessité :
 - à un premier niveau, de produire des encadrements de limite, des valeurs approchées, des déclarations justifiées sur la nature des nombres, etc. ;
 - à un deuxième niveau, de lier ceci aux définitions et formalisme introduits.

III.2 La prise en compte de l'interaction professeur/étudiants

Au départ, le schéma de structuration des milieux envisage l'intervention de l'enseignant dans les niveaux sur-didactique et didactique (Cf. Margolinas, 1994). La modification apportée par Bloch (2000, 2002) privilégie, pour le professeur, aussi bien l'analyse descendante que l'analyse ascendante. L'étude faite des tâches possibles de l'enseignant au niveau des milieux objectif et de référence montre à l'évidence, qu'il est difficile de dissocier l'activité de l'étudiant de la pratique du professeur "*...le professeur fournit quant à lui, des éléments à la réflexion des élèves. C'est bien ce que nous appelons une dimension a-didactique.*" (Cf. Bloch, 1999, p. 139). Cette prise en compte de l'activité conjointe du couple enseignant/étudiant est d'autant plus importante que les situations sont envisagées à un niveau de cursus assez avancé (1^{ère} année université). De ce fait, nous avons jugé nécessaire de ne pas occulter cet aspect aussi bien dans l'analyse a priori qu'a posteriori.

III.3 La progression des situations

Une seule situation ne peut prendre en charge l'ensemble des questions et savoirs visés. Dans ce cas, nous pensons qu'une progression des situations peut être organisée pour balayer au mieux le champ des savoirs surtout dans un contexte de savoirs

complexes où chaque situation ne balaye qu'une partie du champ. L'un des axes de construction de l'ingénierie est le souci d'organiser des situations complémentaires du point de vue des savoirs et des savoir-faire pragmatiques que nous considérons essentiels.

Le mode de validation de notre hypothèse de recherche comportera deux volets :

- les travaux des étudiants lors des séances et leur nature : pertinence, recours autonome à des exemples et des contre exemples, usage correct ou non du formalisme, etc. ;
- la mise en œuvre d'outils d'analyse, dans la TSD, des modes d'argumentation des étudiants.

La question de la reproductibilité n'a pas été traitée à ce jour et fait partie de l'un des axes d'investigation future.

Dans les chapitres suivants, nous exposons l'étude et l'implantation des situations construites et analysées – a priori et a posteriori – avec les outils de la TSD. Cette étude conduira à des observations et à l'analyse du travail d'étudiants aux prises avec les situations : dans la TSD, la dimension clinique est partie intégrante de la méthodologie (Cf. Brousseau 1986). Nous ne nous interdirons pas de faire état, en complément, d'interviews de certains des étudiants en position de résolution de la situation.

CHAPITRE 6

Choix des situations : pertinence et consistance

I. Les méthodes numériques : Adaptation aux savoirs visés

Dans une problématique de situations traitant un retour sur les savoirs et le formalisme introduits (le niveau local au sens de Chevallard, 2003 et 2004) par le biais d'investigations *concrètes*¹³⁸ du niveau du secteur ou du champ théorique¹³⁹, le but est de développer une forme de conceptualisation qui dérive d'une pensée double : naturelle et formelle¹⁴⁰.

Nous nous intéressons ici aux savoirs et connaissances de l'analyse réelle à l'entrée à l'université. Dans notre cas, les investigations sont numériques et le secteur celui des nombres réels (structure de \mathbb{R}) et des fonctions numériques d'une variable réelle. Comme l'ont montré plusieurs travaux s'inscrivant dans le cadre anthropologique de Chevallard (Cf. Artaud et al. (2005), Birebent (2008)), favoriser l'occupation des places des thèmes dans le champ théorique qui autorise les organisations locales qui y réfèrent, est une condition de leur articulation. Dans le cas de l'analyse réelle, évacuer le travail sur l'articulation des thèmes réduit le travail de l'étudiant à une simple exécution de *bribes mathématiques*, ou plus précisément à une application d'éléments technologiques non générateurs d'autres savoirs.

Le programme de mathématiques, du premier semestre, de la première année mathématiques et informatique comprend quatre thèmes¹⁴¹ :

1. Le corps \mathbb{R} des nombres réels (\mathbb{R} est un corps totalement ordonné, archimédien – Axiome de la borne supérieure – Valeur absolue, distance – Intervalles de \mathbb{R} – Densité de \mathbb{Q} dans \mathbb{R}).
2. Suites de nombres réels (Convergence – Opérations sur les suites – Suites extraites – Suites de Cauchy – Théorème de Bolzano- Weierstrass).
3. Limites et continuité (Limites, critère par les suites, critère de Cauchy – Continuité, théorème des valeurs intermédiaires, image par une fonction continue d'un segment, fonctions continues strictement monotones sur un intervalle – Continuité uniforme – Théorème du point fixe).

¹³⁸ Terminologie utilisée par Winslow (2008) pour désigner par *Analyse concrète* le "Calculus" anglais. Nous l'adoptons dans une acception plus large pour distinguer les situations qui relèvent d'investigations sur des objets spécifiques, telles que nous l'avons entendu plus haut, par rapport aux situations d'application, situations portant sur des objets généraux, etc.

¹³⁹ Cf. Niveaux d'étude (Chevallard, 2003).

¹⁴⁰ Nous définirons plus loin, ce que nous entendons par pensée naturelle et pensée formelle.

¹⁴¹ Cette organisation sous-tend, implicitement, une chronologie à adopter.

4. Dérivabilité (Dérivée – Dérivée d’une fonction réciproque – Formule de Leibniz – Théorème de Rolle, théorème des accroissements finis – Formules de Taylor, développements limités – Fonctions convexes, critère de convexité, inégalité de convexité – Fonctions hyperboliques, fonctions réciproques de fonctions trigonométriques et hyperboliques).

Dans le cadre de cette recherche, les situations que nous proposons devraient permettre, à travers les nombres et les limites, de réintroduire le théorème de densité de \mathbb{Q} dans \mathbb{R} , la définition et les théorèmes de convergence d’une suite, le théorème du point fixe, le théorème des segments emboîtés, le théorème des valeurs intermédiaires, le théorème des accroissements finis et la formule de Taylor¹⁴².

Notre choix s’est porté sur deux méthodes d’approximation comme situations expérimentales associées aux situations théoriques précédemment définies ; ces situations devraient amener les étudiants à formuler l’existence et la construction d’objets de l’analyse réelle à travers des questions sur les nombres et les limites. Elles seront proposées à un niveau du cursus où les savoirs académiques de l’analyse réelle ont déjà été introduits¹⁴³ ; elles ont été choisies de sorte que les étudiants mettent en œuvre des procédures et des méthodes de l’analyse réelle, qui vont à leur tour faire partie de l’institutionnalisation¹⁴⁴.

Avant de nous intéresser aux situations qu’il est possible d’organiser, il est nécessaire de procéder d’abord à l’étude :

- de la capacité des situations théoriques à provoquer la confrontation des étudiants aux savoirs visés ;
- des éléments des savoirs en jeu et des éléments restants à construire dans une situation didactique,

c'est-à-dire de procéder à une analyse a priori approfondie des situations, estimant dans quelle mesure celles-ci peuvent être considérées comme des représentantes de situations fondamentales de l’analyse réelle dans un milieu expérimental a priori.

¹⁴² Nous présentons en Annexe VI. trois organigrammes des savoirs en question. Nous pointons à cette occasion les différents liens ainsi que l’importance des propriétés de \mathbb{R} comme bases de ces savoirs.

¹⁴³ Nous référons aux quatre thèmes précédemment mentionnés.

¹⁴⁴ Les méthodes numériques ne font pas partie des attentes institutionnelles en première année d’université. Par institutionnalisation, nous entendons ici, outiller l’étudiant de méthodes qui permettent de les aider dans leur travail en Analyse.

I.1 Méthodes retenues : quels connaissances et savoirs possibles ?

La grande majorité des manuels d'enseignement de l'analyse réelle progresse dans l'ordre inverse du développement historique de cette théorie des mathématiques. En raison des variations suivant les époques, on ne peut bien sûr pas s'attendre à ce que le sens de l'analyse réelle émerge des objets historiques, nous dirons tout de même que l'idée constitutive du développement historique devrait figurer dans l'enseignement.

Dans l'esprit d'un travail sur les nombres permettant un retour efficace sur les définitions, théorèmes et formalisme introduits, nous avons étudié le développement de diverses méthodes numériques d'approximation de nombres ; les procédures qui en découlent s'avèrent déterminantes dans les élaborations théoriques¹⁴⁵ :

"[...] six points de vue principaux ont contribué à la genèse de la notion de nombres. [...]. Le point de vue de l'approximation permet d'envisager la recherche de solutions approchées, et surtout de développer le point de vue de l'analyse : un nombre est ce qui est au "bout" d'un processus d'approximation ; l'idée de limite est là essentielle." (Rogalski et al., 2001, p. 307)

Les méthodes que nous avons étudiées dans la première partie traitent de questions et de techniques qui portent pour l'essentiel sur des calculs par approximations successives de nombres¹⁴⁶ : méthodes d'approximation de racines $n^{\text{ème}}$ d'un nombre, méthode de Héron, méthode de Newton, méthode des fractions continues, méthode de Ruffini-Horner, approximation de π (ou méthode d'exhaustion).

Nous avons déjà eu l'occasion de présenter les savoirs auxquels ces méthodes réfèrent, que ce soit implicitement ou explicitement ; soulignons ici que pour introduire véritablement un milieu d'expérience des objets de l'analyse réelle, trois facteurs sont à prendre en considération :

1. Le milieu disponible pour la dévolution doit permettre la manipulation d'une variété d'ostensifs (graphiques, géométriques, numériques, algébriques, analytiques) de nombres, suites et fonctions. De plus, on peut s'attendre à ce qu'un registre donne lieu à une manipulation d'ostensifs d'un autre registre ; ceci sous-entend que les réponses ne devraient pas être données dans un contrat d'ostension. Les tâches

¹⁴⁵ Cf. Chapitre 2.

¹⁴⁶ Rappelons que l'idée de la méthode des approximations successives, exprimée sous la forme d'une méthode du point fixe, ne s'est dégagée que très progressivement à partir de quelques équations du type $x = g(x)$ (Cf. Chapitre 2).

d'action sollicitées devraient amener les étudiants à questionner les savoirs institutionnels de l'analyse réelle et les exemplifier. La richesse des questions que peut susciter le *problème d'approximation* et les savoirs¹⁴⁷ auxquels elles réfèrent, peut mettre les étudiants sur la voie de validation pragmatique, déclencher leurs intuitions et les confronter (dans un milieu de référence conçu à cette fin) à des savoirs qu'ils ont reçu sans dimension d'expérience. Dans ces conditions, le milieu objectif pourrait a priori, aussi bien être un milieu graphique, géométrique ou numérique. Bien entendu, ceci n'empêche pas le fait que les étudiants pourraient recourir à des ostensifs algébriques ou analytique au cours de leurs investigations.

2. Nous savons tous que la théorie de l'analyse réelle s'est stabilisée à l'issue de la construction rigoureuse de l'ensemble des réels et de la mise en place des propriétés topologiques des réels, qui constituent un fondement théorique des savoirs sur les suites, limites et fonctions réelles ; c'est même là le cœur de notre problématique et le fil conducteur de la recherche. A la suite d'investigations sur les nombres, le milieu de référence est censé mettre en défaut le recours à une application "automatique" des définitions, théorèmes et formalisme du cours. Nous attendons que les étudiants, au cours de leur contact direct avec les nombres, développent des évidences sous forme d'intuitions fondées graphiquement, géométriquement, numériquement ou autre. De plus, les étudiants sont en possession d'outils théoriques leur permettant de conforter leurs intuitions, qui à leur tour participeront à une meilleure compréhension des outils en question. Encore faut-il que le milieu de référence puisse favoriser ce phénomène, et ce d'autant plus qu'il ne fait pas explicitement référence aux nombres et aux approximations. C'est pourquoi, nous avons fait le choix d'organiser des situations qui permettent un retour sur les théorèmes et définitions qui illustrent ce que l'analyse réelle a de spécifique : le théorème de densité de \mathbb{Q} dans \mathbb{R} , la définition et les théorèmes de convergence d'une suite, le théorème du point fixe, le théorème des segments emboîtés, le théorème des valeurs intermédiaires, le théorème des accroissements finis et la formule de Taylor. C'est en grande partie sur ces savoirs, ayant historiquement manqué longtemps de base théorique précise, que se fondent les méthodes d'approximation.
3. Le projet de construire un milieu d'action, formulation, validation dans des situations conforme à notre hypothèse, induit la nécessité de distinguer parmi les composantes aussi bien du milieu objectif que celui de référence, celles qui vont fonctionner

¹⁴⁷ Rappelons que ces savoirs réfèrent aux propriétés topologiques de \mathbb{R} (la topologie de l'ordre) ainsi qu'aux objets fonction, suite et les propriétés qui leurs sont rattachées de limite, continuité et dérivabilité.

comme des connaissances et celles qui feront partie des outils de preuves ou des savoirs institués¹⁴⁸.

Pour les besoins de notre travail, cette distinction entre connaissances et savoirs au sens de Conne (Conne, 1992) est nécessaire comme moyen d'identification des moments de confrontation/transformation des connaissances en savoirs (qui ne peut être fait que dans des milieux objectifs ou de référence précis), mais aussi de repérage des connaissances préalables, à construire et des savoirs à travailler.

A travers la liste ci-dessous, nous entendons reconnaître certaines des connaissances que nous rencontrons, les savoirs que nous visons et être en mesure d'analyser les scénarios des situations proposées. Cette liste n'est pas exhaustive. Les situations font appel à des connaissances que nous n'avons pas mentionnées ici, nous aurons l'occasion de les développer dans les chapitres relatifs à chacune des situations expérimentées.

1.1.1 Exemples de connaissances préalables

a) Connaissances relatives à la nature des nombres

- un irrationnel ne peut pas s'écrire sous la forme $\frac{p}{q}$, p et q entiers, $q \neq 0$;
- parmi les irrationnels, on distingue ceux qui s'écrivent à l'aide de radicaux des autres (tels que e , π).

b) Connaissances relatives à l'approximation d'un nombre

- a est une valeur approchée de x à 10^{-n} près, si $|x - a| < 10^{-n}$;
- pour évaluer l'erreur commise en approchant un réel x par un autre a , il suffit de majorer $|x - a|$;
- représentation successive d'un processus itératif (de construction ou autre) ;
- si une suite converge vers un réel alors quelque soit l'erreur que l'on se fixe à priori, il existe un ordre à partir duquel tous les termes de la suite sont des valeurs approchées de ce réel à cette erreur près ;
- la méthode de dichotomie (dans le cas où certaines hypothèses sont vérifiées) permet d'approcher un nombre à une erreur fixée à priori ;

¹⁴⁸ Ce travail se fera sous une contrainte selon laquelle : "Il est impossible d'évoquer une connaissance indépendamment de tout savoir, car la référence au savoir en tant que modèle s'y trouve d'emblée inscrite, (c'est nous qui avons souligné) et il est difficile de parler séparément de la connaissance et du savoir." (Conne, 1992, p. 236).

- la meilleure approximation affine d'une fonction f dérivable en a est $f'(a)h + f(a)$, h voisin de 0 ;
- tout nombre réel est une limite de suite de rationnels.

c) Connaissances relatives au calcul algébrique (calcul de dérivées, factorisation, développement, encadrement, trouver un majorant/minorant, etc.).

d) Connaissances relatives à l'usage d'une calculatrice symbolique.

Le milieu envisagé n'est pas instrumenté par une calculatrice symbolique, dans le sens où cet outil n'est pas un enjeu des situations prévues. Toutefois, il est prévu que les étudiants y recourent soit pour économiser le calcul, soit parce qu'ils ne disposent pas d'algorithmes calculables à la main. Par ailleurs, pour des raisons d'équité sociale, les étudiants tunisiens ne sont pas appelés à être en possession d'une calculatrice graphique.

e) Connaissances graphiques (Connaissances d'ordre II)

- construction des termes d'une suite récurrente ;
- lecture sur le graphique (de solutions d'équations, de limites, de monotonie, de maximum/minimum, etc.) ;
- choix et représentation de fonctions usuelles / tangentes / asymptotes (fonctions polynômes, circulaires, etc.).

f) Connaissances relatives à des raisonnements (Connaissances d'ordre II)

- un contre-exemple suffit pour invalider une assertion ;
- un exemple ne suffit pas pour valider une assertion mais permet de *vérifier* en tous cas sa plausibilité et la façon dont cette assertion se manifeste (dimension de l'expérience) ;
- la recherche de l'existence d'un nombre dans le cas où les outils algébriques à disposition ne le permettent pas, est possible par l'usage de théorèmes d'existence.

1.1.2 Exemples de connaissances à construire

a) Connaissances relatives au développement d'un réel en fraction continue

- technique permettant de développer un réel de la forme \sqrt{d} en fraction continue (d entier >1 , non carré parfait et $(d-1)$ carré parfait), lien avec la notion de limite ;
- si le développement en fraction continue d'un réel est fini alors ce réel est un rationnel ;
- si le développement en fraction continue d'un réel est infini alors ce réel est un irrationnel.

b) Connaissances relatives à la construction d'une suite convergeant vers un réel

- il est toujours possible de construire une suite de rationnels convergeant vers un réel ;
- exhiber des approximations successives d'un réel en utilisant la méthode de Newton ;
- exhiber des approximations successives d'un réel en utilisant la suite des quotients et la suite des numérateurs associées à la suite des réduites de ce réel.

c) Connaissances relatives à l'approximation de l'image d'un réel par une fonction f de classe C^k , $k \in \mathbb{N}$

- on peut approcher l'image d'un réel x par f , par l'image de x par une fonction polynomiale obtenue à l'aide d'un développement de Taylor ;
- la possibilité de contrôler l'erreur en approchant l'image d'un réel x par f comme décrit précédemment, n'est pas systématique.

d) Connaissances relatives à la précision de l'approximation et l'estimation de la convergence

- trouver un terme d'une suite approchant un réel à une erreur arbitrairement fixée ;
- encadrer un réel entre deux termes d'une suite qui lui est convergente et dont la différence est inférieure à une erreur arbitrairement fixée ;
- juger la "rapidité" de la convergence.

e) Connaissances relatives au contrôle de la validité des résultats empiriques numériques ou autres

Il s'agit ici, de relier les calculs aux définitions et théorèmes et réciproquement, conforter les énoncés de l'analyse réelle en gardant le contrôle pragmatique.

- étant donné un réel a , si pour tout réel α , il existe un ordre à partir duquel tous les termes d'une suite sont des valeurs approchées de ce réel à α près, alors cette suite converge vers a ;
- la recherche de l'existence d'un nombre quand les outils algébriques à disposition ne le permettent pas, est possible dans certains cas, par l'exhibition d'une approximation successive de ce nombre ;
- exhiber un élément qui vérifie une propriété donnée permet d'affirmer l'existence d'au moins un tel élément¹⁴⁹ (Connaissance d'ordre II) ;

¹⁴⁹ Commentaire formulé par Durand-Guerrier et Arsac (2003) à propos des règles de manipulation des énoncés formels développées par Copi (Instanciation existentielle). Nous aurons l'occasion d'y revenir plus loin.

- manipuler des énoncés formels comportant ou non une suite de quantificateurs, d'inégalités, etc.

1.1.3 Les savoirs

Interprétés dans les termes de l'ordre des connaissances, les savoirs sont les connaissances d'ordre I. Nous l'avons déjà dit, les savoirs mis en jeu et/ou les outils de preuve sont en possession des étudiants ; à côté de leur fonction d'organiseurs des connaissances, les savoirs constitués de définitions, théorèmes, corollaires, etc., comprennent aussi des démonstrations. Nous entendons amener les étudiants à un retour sur ces savoirs à travers des situations qui les rendent compréhensibles.

En définitive, ces savoirs et/ou outils de preuve répondent à deux types de questions *au sens des situations fondamentales de la TSD* :

- Pourquoi est-il possible de résoudre le problème ?

Dans le cas de nos situations cette question prend la forme d'interrogations telles que : pourquoi existe-t-il toujours une suite de rationnels convergeant vers un réel ? Est-il possible de construire une telle suite ? L'équation que nous considérons, possède-t-elle une solution ? Peut-on trouver la valeur exacte de cette solution ?

- Quelle(s) procédure(s) utiliser pour résoudre le problème ?

Dans le cas de nos situations cette question prend la forme d'interrogation telle que : quelle méthode utiliser pour construire une suite convergeant vers un réel ?

Les méthodes qui nous sont apparues comme les plus riches en possibilités didactiques sont celle des fractions continues, introduite historiquement par Théon de Smyrne, et la méthode de Newton¹⁵⁰, qui du fait de leur histoire complexe, tant au niveau des motivations intrinsèques qu'au niveau des questions futures qu'a provoqué l'usage implicite de savoirs, s'énoncent à l'origine comme pragmatiques et imprécises mais suscitant de plus en plus de *rigueur*. Nous anticipons de la part des étudiants des va et vient entre des manques théoriques restés longtemps inaperçus et la rigueur de l'édifice final tel qu'il est enseigné actuellement.

Dans les situations que nous proposons, la mise en œuvre des savoirs déjà introduits passe par un travail dans un milieu objectif permettant d'abord un contrôle par la signification (dimension sémantique, au sens des travaux cités ci-dessous).

La question se pose :

¹⁵⁰ Que nous ne reprenons pas ici, nous avons déjà eu l'occasion de les détailler dans la première partie.

- d'une part, de la pertinence de recourir dans l'apprentissage à des situations qui permettent d'articuler le formalisme et le fonctionnement par la signification (notamment informel) ;
- d'autre part, de la possibilité que l'organisation des situations, suivant le modèle théorique que nous avons déjà énoncé dans le chapitre 5, anticipe de la part des étudiants, des allers-retours syntaxique/ sémantique.

I.2 La dialectique syntaxique/sémantique

Plusieurs travaux étudiant la construction de preuves formelles dans un niveau de cursus suffisamment avancé font état du fait que la maîtrise du formalisme par les étudiants ne peut s'appuyer exclusivement sur le syntaxique (Cf. Durand-Guerrier et Arzac (2003), Chellougui (2008), Weber et al. (2007)). Par preuve formelle, nous entendons : " [...] *proof written by manipulating definitions, theorems, and appropriate asseptions in a logically permissible way until the desired conclusion is deduced.*" (Weber et al., 2007).

Dans ce paragraphe, nous essaierons à la lumière de ces travaux et d'autres, d'étudier la question que nous nous sommes posée des allers-retours syntaxique/ sémantique.

I.2.1 Registre et règles de calcul

Le travail mathématique sur les nombres/limites, suites et fonctions peut se situer dans trois registres de représentations :

- le registre géométrique/graphique, nous avons choisi de placer le graphique et le géométrique dans un même registre en raison de la fonction de visualisation qu'ils ont en commun ;
- le registre numérique ;
- le registre algébrique et le registre analytique, nous avons délibérément omis de distinguer dans le chapitre précédent les registres algébrique et analytique préférant les remplacer par le symbolique. Par symbolique, nous n'entendons pas la présence de symboles ($\sqrt{2}$, $8+13$, l'axe d'une représentation graphique, etc. sont aussi des symboles) mais plutôt le rôle de ces registres à supporter des énoncés formels.

Chaque registre comporte un ensemble d'ostensifs possédant chacun *une valence instrumentale et une valence sémiotique* (Bosch et Chevallard, 1999).

Ostensifs géométriques/ graphiques	Ostensifs numériques	Ostensifs algébriques	Ostensifs analytiques
Tracés de courbes, points particuliers ; construction des termes d'une suite ; systèmes d'axes et repérage ; figures géométriques ; grandeurs géométriques ; tableaux de variations ; etc.	Ecriture décimale d'un nombre ; approximation décimale ; estimation numérique de l'erreur ; suites numériques d'approximations ; solutions numériques d'équations ; tableaux de valeurs ; etc.	Expression algébrique d'une fonction ; équation/inéquations ; graphe d'une fonction $G_f = \{(x, f(x), x \in I)\}$; inégalités algébriques ; symboles relatifs aux opérations sur les fonctions : composition, somme, produit, fonctions réciproques ; expression d'une suite ; etc.	Expressions en ε/η , symboles de comportements asymptotiques de fonctions o/O , \sim ; symboles tels que ∞ , Σ , Π , \int , C^∞ , C^n ; symboles d'écritures des fonctions, de l'image d'un réel ; symboles d'écritures des dérivées successives d'une fonction, de l'image d'un réel par ces dérivées ; symboles d'écritures des suites, des termes d'une suite ; voisinages ; lim ; etc.
		Connecteurs logiques, quantificateurs.	

La valence instrumentale présuppose un ensemble de règles de calcul régissant le fonctionnement et la manipulation des divers ostensifs d'un même registre. Plus précisément, on distingue deux types de règles de calcul, celles qui sont intrinsèques au registre en jeu (ou spécifiques au registre) et celles qui sont transversales à plus qu'un registre.

Dans l'acception qui est la nôtre, le travail mathématique est dépendant des outils sémiotiques disponibles, de ceux qui sont accessibles aux étudiants, de ceux que le professeur emploie provisoirement ou constamment pour justifier. Mais ce travail dépend de façon fondamentale des situations convoquées pour introduire ou utiliser les savoirs mathématiques visés ; l'acquisition de ces derniers est dans le maniement des ostensifs qui leurs sont rattachés dans des situations élaborées à cette fin, et de surcroît dans un champ diversifié de problèmes. En particulier, les difficultés liées aux exigences de flexibilité cognitive (ou en général à la complexité du processus cognitif qui sous tend l'apprentissage d'un contenu mathématique particulier) sont en grandes parties le fruit de l'illisibilité ou l'absence dans l'enseignement de phases qui les prennent en charge en convoquant, justement à cette occasion, des situations conçues à cette fin (Cf. Artigue, 2006). Dans cette optique, la production de connaissances est

assurée par les questions posées dans les milieux objectifs des situations élaborées, ces questions sont à leur tour posées au vu des possibilités ouvertes par les différentes règles de calcul sur les ostensifs. Ce que nous voulons souligner, c'est que ostensifs et règles de calcul ne sont que les traces de l'activité mathématique de l'étudiant. Ces traces permettent certes de repérer des connaissances ou savoirs dont elles sont supposées témoigner, mais elles ne nous disent rien sur la façon avec laquelle ces connaissances ou savoirs se sont manifestés : comme conséquence d'une *stratégie d'ostension*¹⁵¹ ou à la suite d'un besoin propre émanant de l'étudiant.

Concernant l'analyse a priori, particulièrement au niveau de la validation, nous essayons de lister les règles de calcul théoriquement possibles ; il reste à s'en servir pour définir une base matérielle du milieu expérimental construit pour jouer le rôle que nous lui avons assigné plus haut.

a) Règles de calcul spécifiques

Ces règles incluent ce que Sackur et al. (2005) nomment : *Règles gouvernant la sémiotique*. Dans ce cas, on se limite ici à celles qui induisent un *traitement* dans un même registre sémiotique (dans les termes de Duval, 1993).

On peut citer, conformément à chacun des registres retenus, par exemple des

- Règles de calcul numérique : règles d'addition, de soustraction, de multiplication, de division des expressions numériques ; ordres de grandeurs/valeurs approchées ; règles de divisibilité dans \mathbb{Z} ; règles de codage et décodage des tableaux de valeurs ; etc.
- Règles de calcul graphique/géométrique : règles d'usage et de lecture des graphiques et des figures géométriques ; règles de transformations des courbes, de changement de repères ; règles de codage et décodage des tableaux de variations ; etc.
- Règles de calcul algébrique : règles de transformations des expressions algébriques ; opérations sur les expressions algébriques ; etc.
- Règles de calcul analytique : règles d'usage et de lecture des expressions en ε/η ; règles de manipulations des symboles liés aux fonctions et aux suites, de comportement asymptotique, de \lim ; etc.

b) Règles de calcul transversales

¹⁵¹ Or, l'ostension est grande pourvoyeuse d'effet Jourdain (Cf. Brousseau, 1986).

Ces règles incluent aussi bien ce que Sackur et al. (2005) nomment : *Règles gouvernant la validité* que celles induisant une *conversion* entre les registres sémiotiques (dans les termes de Duval, 1993).

- Règles de calcul inter- registres sémiotiques (pour ce type de règles, l'interprétation se fait dans un autre registre sémiotique) : règles d'interprétation des graphiques et des figures géométriques, règles d'interprétation des ordres de grandeurs/valeurs approchées, règles d'interprétation des expressions en ε/η , etc.
- Règles de calcul formel (nous entendons les règles du langage et du raisonnement mathématiques) : règles de la logique mathématique (calcul des propositions, calcul des prédicats); règles de fonctionnement des démonstrations et du langage concrètement mises en œuvre en mathématiques (non basées explicitement sur un modèle théorique, particulièrement des mots/phrases de la langue d'enseignement pourraient remplacer un signe d'appartenance, un connecteur, un quantificateur, etc.).

1.2.2 Syntaxique/sémantique : point de vue des situations didactiques

A propos de certaines règles empiriques, Durand-Guerrier et Arsac (2003) précisent :

"[...] La logique disparaît derrière un certain nombre de "règles de raisonnement" comme celles concernant la manipulation des variables en analyse, [...]. En particulier, le problème de la généralité est réglé par des routines sans lien avec la logique à première vue, [...] soit qu'il soit absorbé comme en analyse dans des règles de manipulation des variables qui traduisent le fait que l'on travaille sur un exemple générique." (Durand-Guerrier et Arsac, 2003, p. 308)

Nous avons pu observer le même phénomène, concernant la règle de manipulation de variables, à travers les résultats des séances ordinaires en classe d'analyse réelle à l'entrée à l'université¹⁵². Nous avons effectivement constaté qu'il est suffisant du point de vue de l'enseignant de connaître la règle syntaxique de fonctionnement des quantificateurs dans la négation d'un énoncé pour que l'étudiant puisse l'utiliser à bon escient, nous en donnons ci-dessous un aperçu.

P : ...on utilise la négation de la définition de Cauchy...

E : ...c'est quoi la négation ?

¹⁵² Cf. Chapitre 4, pour plus de détails.

P : ... la négation de la définition de Cauchy est
 ... $\exists \varepsilon > 0, \forall n_0 \in \mathbb{N}, \exists n \geq n_0, \exists m \geq n_0 ; |u_m - u_n| \geq \varepsilon$.

P : ...la négation...le quelque soit devient existe et le existe devient quelque soit...donc ici, il existe epsilon, quelque soit n_0 dans \mathbb{N}^* ... il existe m , il existe n tels que...

Du point de vue syntaxique, la règle énoncée par l'enseignant n'est plus fonctionnelle dès lors que l'énoncé contient une formule conditionnelle quantifiée (dans ce cas les quantificateurs de la formule conditionnelle ne changent pas, c'est le cas par exemple de la négation de la définition de la densité dans \mathbb{R} d'une partie de \mathbb{R}). De plus, le discours de l'enseignant est complètement séparé du travail sur le contenu mathématique en jeu, s'ajoutent alors des difficultés liées à la signification. En effet, en se limitant à formuler la règle de manipulation des quantificateurs, l'enseignant tronque la négation de l'énoncé et n'outille pas l'étudiant de moyen de contrôle par le sens de cette règle, or ce contrôle est intimement lié au contenu mathématique en jeu. Durand-Guerrier et Arsac (2003) pointent aussi cet ordre d'idée en soulignant que *la dimension sémantique mobilise la notion de valeur de vérité*, or cette dernière réfère au contenu mathématique en question.

Nous nous posons à cette occasion la question d'une alternative possible à la pratique de l'enseignant : pour des raisons de commodité notre choix s'est porté sur la définition d'une suite convergente vers L et sa négation.

La définition d'une suite convergente vers L ($\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - L| < \varepsilon$), peut être interprétée par : à chaque fois qu'on se fixe une erreur, on peut trouver un rang à partir duquel tous les termes de la suite approchent L à cette erreur près. Ceci implique que

- les notions d'approximation et de valeurs approchées devraient faire partie des notions essentielles à l'interprétation de cette définition ;
- lorsque l'erreur varie, le rang peut varier, ce qui peut être une manière de traduire le fait que N dépende de ε .

De plus, on peut voir, en l'occurrence en s'appuyant sur un graphique, que ce qui est vrai pour une erreur donnée est vrai pour n'importe quelle erreur qui lui est supérieure ; ce qui veut dire que le choix de $\varepsilon > 0$ ne contredit pas le fait que l'on s'intéresse à chaque fois à des ε très près de 0.

En appliquant les règles logiques liées à la négation d'un énoncé quantifié, on aboutit à la définition formelle de la non convergence d'une suite vers L . Pour espérer en déduire la définition formelle d'une suite divergente, il faudrait de plus préciser que l'énoncé reste valable pour n'importe quel L ($\forall L \in \mathbb{R}, \exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, |u_n - L| \geq \varepsilon$).

Il est obsolète d'espérer commenter "efficacement" cette définition : on peut trouver une erreur pour laquelle tout ordre de la suite est tel qu'à partir duquel il existe un terme de la suite qui n'approche pas...

Nous suggérons par ce fait, de recourir à de diverses instanciations de suites divergentes via l'idée d'approximations successives, c'est-à-dire à des cas où :

- la suite est bornée de sorte à pouvoir extraire deux sous-suites qui ne convergent pas vers la même limite, en utilisant les approximations telles que formulées plus haut ;
- la suite n'est pas bornée de sorte à pouvoir tableur sur un graphique pour considérer des suites qui tendent vers l'infini et l'interpréter dans la syntaxe mathématique.

Dans la démonstration qui suit, la pratique de l'enseignant montre qu'il s'agit bien de preuve par exemple générique¹⁵³.

P : Comment on va faire pour montrer que f est continue en 0...

E : limite à droite et limite à gauche...

P : Non, on n'a pas besoin... f est continue en 0 équivaut à ...

P : $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta / \forall x, |x| < \eta \Rightarrow |f(x) - 0| < \varepsilon$.

$$\forall x, |f(x)| = \begin{cases} |x| & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

$$|f(x)| \leq |x|, \forall x \in \mathbb{R} \text{ (car } 0 \leq |x|, \forall x)$$

$$|f(x)| < \eta \text{ si } |x| < \eta, \text{ il suffit de prendre } \varepsilon = \eta.$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta = \varepsilon / \forall x, |x| < \eta \Rightarrow |f(x)| < \eta = \varepsilon.$$

La dépendance de η par rapport à ε n'est pas soulignée par une notation particulière, nous pouvons quand même supposer que ceci a déjà été commenté par l'enseignant précédemment¹⁵⁴. Sans rentrer dans les détails d'une analyse de la démonstration ci-dessus à l'aide d'un système spécifique de la logique, précisons que la démonstration par élément générique est l'une des règles de manipulation des énoncés quantifiés dans le système de Copi¹⁵⁵. Deux de ces règles ont déjà été énoncées plus haut, comme faisant partie des connaissances à construire par les étudiants dans les situations proposées.

Comme l'écrivent Durand- Guerrier et Arsac, ce système "[...] est très près de la pratique mathématique ; en particulier parce qu'il introduit les constantes d'objets [...]." (Durand-Guerrier et Arsac, 2003, p. 316). Ils pointent plus loin que l'introduction des constantes d'objets participe à la prise en charge de la dimension sémantique. Nous retiendrons que les règles de Copi¹⁵⁶ contribuent au travail sémantique de par leur référence aux instanciations d'objets mathématiques. Nous pourrions examiner dans la partie expérimentale s'il est nécessaire de recourir à une analyse plus fine des productions des étudiants à l'aide des règles de Copi.

L'usage des règles de calcul formel est initié au collège, et il coïncide particulièrement avec l'introduction des activités de démonstrations en géométrie. L'accent est mis dans l'enseignement sur la reconnaissance de la définition ou du théorème à utiliser, la vérification des hypothèses du théorème et la formulation de la conclusion. A la manière d'Euclide, la rédaction est pratiquée dans la langue d'enseignement caractérisée par l'absence de quantificateurs et de connecteurs logiques ; il est par contre possible d'utiliser les symboles d'appartenance, d'inclusion, d'intersection ou de réunion. Cette pratique de la démonstration se maintient jusqu'à la fin du lycée y compris en analyse réelle¹⁵⁷, moyennant l'apparition de démonstrations par l'absurde ou par la recherche de contre-exemples (le statut de ces dernières n'étant pas très clair dans les programmes que nous avons étudiés)¹⁵⁸ et un usage autorisé des connecteurs logiques. Lorsqu'on aborde les démonstrations en analyse réelle, à l'entrée

¹⁵³ " [...] Du point de vue du vocabulaire, on parlera aussi bien d'élément « quelconque », « arbitraire », voire même « donné ». " (Durand-Guerrier et Arsac, 2003, p. 301).

¹⁵⁴ Cette séquence de la transcription concerne l'exercice 7 de la série sur les fonctions (limite et continuité). D'autres exercices usant d'énoncés quantifiés ont dû être déjà développés.

¹⁵⁵ Cf. Durand-Guerrier et Arsac (2003). A côté de la règle de démonstration par élément générique, le système de Copi comporte trois autres règles : deux règles d'instanciation universelle et existentielle et une règle de généralisation existentielle.

¹⁵⁶ Telles que commentées par Durand-Guerrier et Arsac (2003).

¹⁵⁷ Rappelons, en particulier, que l'usage par les élèves des expressions en ε/η dans les démonstrations n'est pas autorisé au lycée de la même façon que les démonstrations d'énoncés généraux (Cf. Chapitre 1).

à l'université, il apparaît que cette pratique est peu compatible avec le maniement des outils logiques (ou plus généralement le maniement des règles de calcul formel) qu'exige la validation dans ce domaine. Chellougui (2008) a mis en évidence des difficultés d'étudiants de première année d'université, confrontés à l'usage de la définition quantifiée de la borne supérieure d'un ensemble. L'auteur a particulièrement montré que les étudiants n'étaient pas en mesure d'articuler la succession de quantificateurs existentiel et universel avec l'argument mathématique, du fait même que les étudiants étaient incapables de traduire la signification mathématique de l'objet majorant dans les termes d'un énoncé en \forall/\exists . Ce constat n'a pas changé, même à la suite de l'intervention de l'auteur auprès des étudiants pour proposer d'interpréter graphiquement les définitions quantifiées qu'ils ont établies et d'en déterminer un contre-exemple. De ce point de vue, l'auteur affiche une tentative d'articuler le sémantique au syntaxique.

Se pose alors la question du type de manifestation de cette "signification" mathématique ; nous l'avons déjà dit, on ne peut se limiter à montrer aux étudiants ostensifs et règles de calcul, en espérant qu'il se créera spontanément un rapport adéquat aux non ostensifs auxquels ils sont censés renvoyés : en d'autres termes, on ne peut contourner les situations (à dimension a-didactique...). De plus, nous pensons que les règles de Copi, et particulièrement le principe d'instanciation, peuvent constituer un point d'appui pour penser aussi bien la définition d'un majorant que l'énoncé relatif à la caractérisation de la borne supérieure (Cf. exemple d'articulation entre cas général et "exemple de majorant" dans Bloch, 2000), avec la garantie de leur possible usage ultérieurement dans des tâches de type preuve formelle¹⁵⁹. Dans les situations que nous organisons, nous nous ne privons pas de ces allers-retours entre cas spécifié et cas général. Nous pouvons pointer d'ores et déjà que ce dispositif met notamment en évidence des allers-retours milieu objectif/milieu de référence.

La question du syntaxique et du sémantique a fait l'objet d'autres travaux¹⁶⁰ qui ont étudié le processus psychologique en jeu dans les mathématiques avancées, particulièrement en analyse réelle. Dans leur étude concernant les types de preuves d'étudiants à un niveau mathématique avancé, Weber et al. (2007) distinguent le style syntaxique de celui sémantique :

"[...] we distinguished between two ways in which an individual can construct proofs in a formal mathematical setting. We defined a syntactic

¹⁵⁸ On peut aussi noter l'usage du principe de récurrence particulièrement en analyse réelle, dans l'étude des suites.

¹⁵⁹ Nous développerons plus loin cette idée sur d'autres savoirs.

¹⁶⁰ Avec éventuellement d'autres terminologies.

*proof production to occur when a proof is written primarily by manipulating definitions, theorems, and appropriate assumptions in a logically permissible way until the desired conclusion is deduced. Such a proof is written without making use of informal representations of the concepts involved. We defined a semantic proof production to occur when the production of a proof is aided by the use of instantiations of the mathematical concepts or objects involved*¹⁶¹. Here the term instantiation refers to a systematic, repeatable way that an individual thinks about a concept or object, such as with a graph, diagram, or prototypical example [...]. " (Weber et al., 2007)

L'analyse de productions d'étudiants a permis aux auteurs de conforter leur catégorisation et d'identifier trois profils d'étudiants : le profil syntaxique, le profil sémantique et le profil mixte (articulation du syntaxique et du sémantique). Partant des performances des étudiants expérimentés et du fait que chacun des styles syntaxique et sémantique pris isolément ne prend en charge qu'une partie du travail mathématique, les auteurs soulignent : "*It would be ideal for students to be comfortable engaging in both syntactic and semantic proof productions.*" (Weber et al, 2007).

A ce stade de l'étude, nous retenons que le contrôle syntaxique ne suffit pas pour amener les étudiants à développer des preuves formelles ; ce contrôle est partie prenante d'un contrôle sémantique qui n'est opérationnel qu'à travers le contenu mathématique auquel il réfère. Nous retenons aussi que le travail dans des situations à dimension didactique (qui développent des questions précises sur des instanciations d'objets généraux) favorise la naissance de cette dialectique et contribue à sa mise en œuvre individuelle de la part des étudiants : dans le sujet qui nous occupe la question se pose des registres qui supportent chacune des deux dimensions (sémantique et syntaxique) ainsi que leur articulation et de la consistance de ceux que l'on a adoptés pour la construction de milieux.

S'inscrivant dans le paradigme des approches cognitivistes, rappelons que Tall (2004)¹⁶² distingue trois chemins fondamentaux dans le développement mental des savoirs mathématiques, correspondant chacun à un *monde mathématique différent* :

*"[...] the **conceptual-embodied** (based on perception of and reflection on properties of objects) ; the **proceptual-symbolic** that grows out of the embodied world through actions (such as counting) and symbolization into thinkable concepts such as number, developing symbols that function both*

¹⁶¹ C'est ce que nous traduisons, dans ce travail, par preuve pragmatique.

as processes to do and concepts to think about (called procepts) ; the axiomatic-formal (based on formal definitions and proof) which reverses the sequence of construction of meaning from definitions based on known concepts to formal concepts based on set-theoretic definitions." (Tall et Mejia-Ramos, 2006)¹⁶³

Tall identifie par ailleurs deux modes de pensée dans le développement du monde formel ; une pensée naturelle (*natural thinking*) et une pensée formelle (*formal thinking*). Dans le cadre de notre recherche, ce qui nous importe c'est de préciser que :

- *Natural thinking* et *formal thinking* traduisent respectivement un style sémantique et un style syntaxique.
- Selon Tall, la construction de preuves à travers une pensée naturelle suppose l'usage d'expérimentations effectuées dans le premier et le deuxième monde. Dans le cas de l'analyse réelle, Tall réfère particulièrement aux expériences numériques, physiques et de la visualisation (géométrique, graphique, sur un dessin, par un logiciel ou une calculatrice).
- Tall souligne enfin, l'efficacité pour l'apprentissage de favoriser un va et vient entre la dimension sémantique et la dimension syntaxique : " [...] *We have given examples of how mathematicians and students think about proof and how not only does embodiment and symbolism lead into formal proof, but how structure theorems return us to more powerful forms of embodiment and symbolism that can support the quest of further development of ideas.*" (Tall et Mejia-Ramos, 2006)¹⁶⁴.

Dans les situations que nous avons élaborées, les étudiants vont être confrontés à des questions sur des nombres et des approximations spécifiés. Les milieux des actions qui consistent à construire des approximations successives et formuler des validations du type sémantique pourraient être numériques et/ou graphiques. Par ailleurs, les milieux qui permettent de formuler des preuves à l'aide des règles de calcul formel peuvent aussi bien être algébriques, analytiques ou mixtes. Ceci sous-entend un aller-retour souhaitable entre les savoirs visés et les connaissances – connaissances qui dérivent des situations, particulièrement à l'issue d'une décision de l'étudiant.

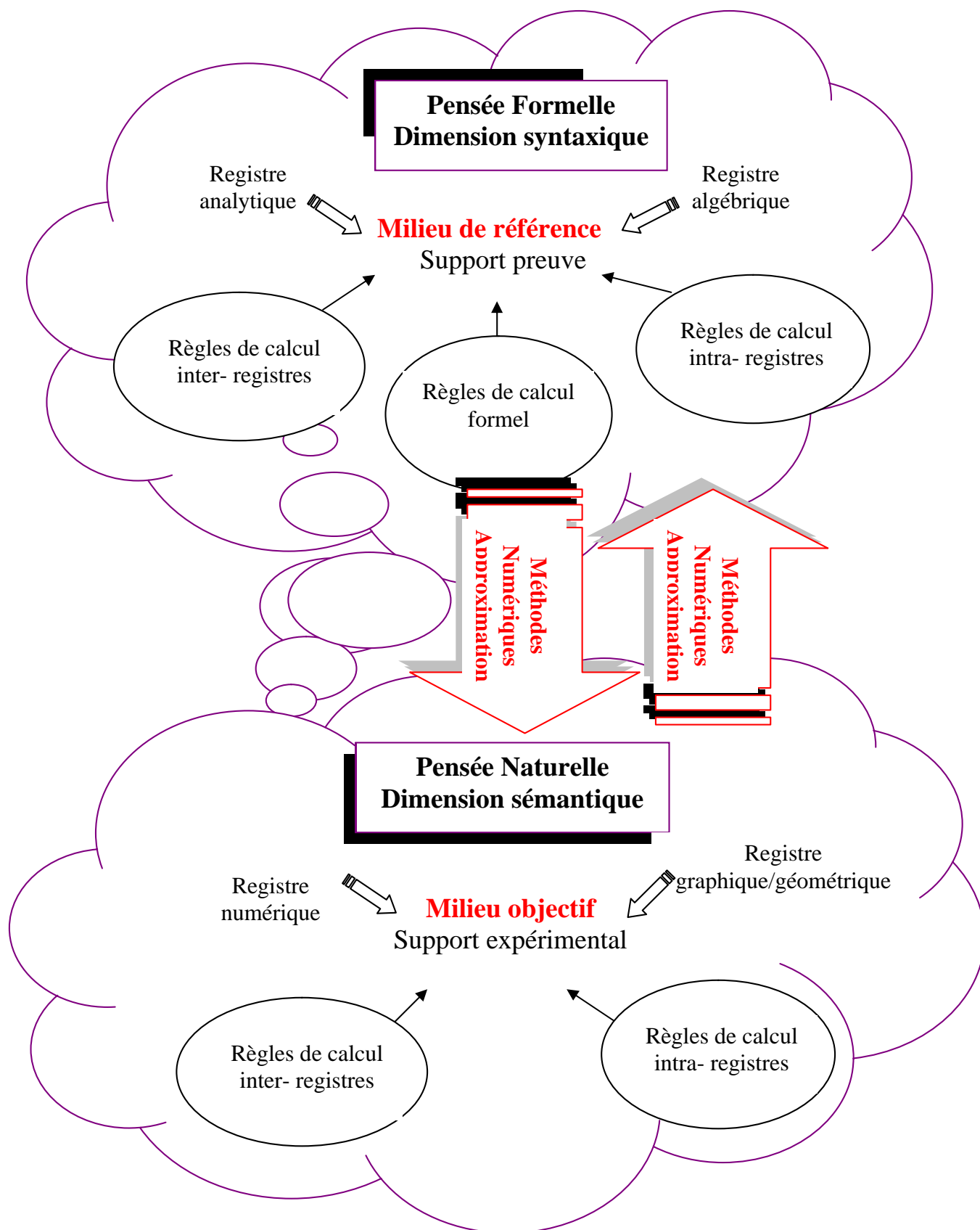
Nous synthétisons par le schéma suivant la prise en compte par les situations à dimension a-didactiques de la dialectique sémantique/syntaxique en analyse réelle.

¹⁶² Cf. Chapitre 2.

¹⁶³ A paraître dans les actes de Conference on Explanation and Proof in Mathematics (Germany, 2006).

¹⁶⁴ Idem.

Dialectique sémantique/syntaxique en Analyse : Point de vue des situations didactiques



I.3 Conclusion

A côté de considérations épistémologiques, l'étude précédente fait apparaître des éléments qui mettent l'accent sur divers aspects du travail des étudiants en analyse réelle. Cette étude pointe en particulier, que :

- la mise en évidence des connaissances (préalables et à construire) des étudiants permet d'identifier celles qui vont se manifester dans les situations, et en dégager celles qui sont spécifiques à la dimension sémantique dans un processus de preuve ;
- la distinction connaissances/savoirs et leur lien réciproque incluent la prise en compte de la dialectique sémantique/syntaxique dans un processus de preuve ;
- le recours aux méthodes numériques d'approximations successives est un moyen d'organiser des situations à dimension a-didactiques qui prennent en compte cette dialectique et qui permettent un retour efficace sur les savoirs visés.

La présence de théorèmes d'existence d'objets mathématiques est l'un des problèmes majeurs à l'entrée à l'université : ceux que nous visons dans cette étude ne dérogent pas à ce constat. Un enjeu est de pouvoir convaincre les étudiants que dans certains cas il est possible d'explicitier les objets de l'analyse réelle qui sont en jeu, de façon plus ou moins visible, dans les situations. Pour certains de ces objets, cette explicitation pourra être produite dans le travail des étudiants dans les situations ; pour d'autres, cette explicitation sera différée, par exemple lors de l'institutionnalisation ; pour d'autres encore, il se peut que l'explicitation soit renvoyée à des applications ultérieures. Comment les situations vont-elles mettre cette question en jeu, de façon visible par les étudiants, afin qu'elle soit un objet du travail mathématique ?

II. Questions posées par les situations

II.1 Problématique de l'existant et du construit

Dans son livre *Pour l'honneur de l'esprit humain* (1987), Dieudonné souligne :

"Les mots « il existe » et « il n'existe pas » sont parmi les plus employés par les mathématiciens. Vu la nature des objets mathématiques, lorsqu'on dit qu'« il existe » un objet mathématique ayant une certaine propriété P, il est clair que cela ne peut avoir le sens usuel d'« existence » d'un objet du monde sensible, [...]. Du point de vue de l'axiomatique inaugurée par Pasch et Hilbert – qui est celui adopté par l'immense majorité des

mathématiciens actuels –, la notion d'«existence» est relative à un système d'axiomes. " (Dieudonné, 1987, p. 233)

Il ajoute un peu plus loin :

"La plupart des mathématiciens préfèrent les preuves d'existence «constructives», qui souvent donnent des informations plus précises sur les objets « construits » ; mais ils se résignent à des preuves « non constructives » quand il n'y en a pas d'autres." (Dieudonné, 1987, p. 234)

Dieudonné ne donne pas de définition restrictive a priori de ce que c'est que selon lui une preuve "constructive".

Qu'elles soient "constructives" ou non, les preuves des théorèmes que nous étudions, telles que pratiquées dans le cours et les travaux dirigés des classes que nous avons expérimentées et que l'on retrouve dans la plupart des manuels destinés à l'enseignement de l'analyse réelle à l'entrée à l'université ont deux caractéristiques :

- Elles sont basées sur la structure de $(\mathbb{R}, | \cdot |)$ en tant qu'espace métrique et son caractère continu qui en garantissant l'existence d'une limite ou d'une borne supérieure respectivement de suites de Cauchy ou d'ensembles non vides et majorés, permettent de construire les objets mathématiques en question. Or, les étudiants ont du mal à concevoir l'existence d'énoncés que l'on ne démontre pas.
- Elles tentent d'outiller les étudiants de méthodes de démonstration – pour la résolution a posteriori de problèmes, plutôt que de focaliser sur le contenu conceptuel des définitions et théorèmes. En particulier, les régularités observées dans certaines preuves fournies montrent à l'évidence que l'accent n'est pas mis sur une réflexion sur la nature de l'objet en question. Dans le corpus du cours étudié, seule la preuve de la densité de \mathbb{Q} dans \mathbb{R} explicite un algorithme de recherche d'un rationnel entre deux réels quelconques directement applicable dans des cas particuliers.

A propos de la définition de la limite d'une suite, Mamona-Downs (2001) en parle en ces termes :

"[...] Consider the following informal description : “given ε , there is a certain position beyond which all further terms of the sequence are within the distance ε from L ”. Such verbalisations should not replace the definition, but they can help tremendously to pin down the relative importance of the various different “players” involved. In particular they

tend to stress the more conceptual content of the definition rather than the practical content." (Mamona-Downs, 2001, p. 278)

Notre ingénierie part justement de l'importance du lien existant entre expérience pragmatique et construction des concepts. Il s'agit donc d'organiser des incursions dans les preuves pragmatiques (qui ne sont pas forcément constructives, au sens des mathématiques constructives) afin de donner accès aux objets.

Dans ce cas, l'expérience joue le rôle d'un médiateur nécessaire au dialogue de l'étudiant avec les objets mathématiques. Plus précisément, il s'agit de mettre en évidence "l'existence" à travers des instanciations appropriées puis l'analyser sur le plan théorique et réciproquement.

Aussi bien à la fin du lycée qu'à l'entrée de l'université, parmi les exercices proposés en analyse réelle, ceux qui articulent les questions d'existence et d'approximation sont de deux types. En effet :

- A la fin du lycée, certains de ces exercices partent de la question d'existence d'un nombre (en l'occurrence la ou une solution d'une équation) dans un intervalle borné indiqué par les énoncés et se poursuit par la question de la recherche d'une valeur approchée de ce nombre à une erreur fixée à priori suivant la méthode de dichotomie, guidée ou non par les énoncés. A titre d'exemple, nous citons l'exercice ci-dessous.

On considère un cercle \mathcal{C} de centre O et de rayon 1, deux points A et B de \mathcal{C} tels que $0 < \widehat{OAB} < \pi$. On pose $\widehat{OAB} = x$. On se propose de déterminer à 10^{-2} près, pour quelle valeur de x les aires du triangle OAB et du domaine D sont égales.

1. Montrer que le problème revient à résoudre, sur $]0, \pi[$, l'équation $\sin x - \frac{x}{2} = 0$.

2. On considère la fonction $f : x \mapsto \sin x - \frac{x}{2}$, $x \in]0, \pi[$.

a. Dresser le tableau de variation de f .

b. En déduire que, sur $]0, \pi[$, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α comprise entre $\frac{\pi}{2}$ et π .

3. Posons $[a_0, b_0] = \left[\frac{\pi}{2}, \pi \right] = \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4} \right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \pi \right]$.

a. Vérifier que $f\left(\frac{3\pi}{4}\right) < 0$. On cherche donc α dans $[a_1, b_1] = \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right]$. Compléter à

l'aide d'une calculatrice, le tableau suivant

n	a_n	b_n	$c_n = \frac{a_n + b_n}{2}$	$\text{Signe}(f(c_n))$
0				
1				

b. Jusqu'à quelle valeur de n faut-il poursuivre la dichotomie pour avoir une valeur approchée à 10^{-2} près ?

- A l'entrée à l'université ainsi qu'au lycée apparaissent des tâches de recherche d'une valeur approchée à une erreur fixée à priori à travers des exercices traitant d'encadrements. Les exemples que nous avons étudiés dans le chapitre V sont basés théoriquement sur le théorème des accroissements finis.

Dans tous les cas, l'usage des approximations dans une problématique d'existence n'est pas explicité et apparaît très rarement dans des tâches isolées dont la résolution est guidée par les énoncés, ou suppose la familiarisation et l'usage d'une technique standardisée.

La question de l'existant génère d'autres interrogations :

a) Celle liée à la question d'unicité (dans le cas où ce qui existe est unique, par exemple la notion de limite) : traiter de l'unicité de l'objet existant dans l'analyse classique¹⁶⁵ se déroule en général suivant une démarche standard qui conduit à supposer la non unicité et à en conclure une absurdité. Au niveau du cursus que l'on considère, la question n'aura pas un statut particulier dans ce travail¹⁶⁶.

Hasardons-nous quand même sur la question de l'unicité de la limite d'une suite convergente. Si l'on part de la définition formelle, rien ne nous permet de dire de suite que la limite est unique. Une fois la preuve établie – nous pensons en particulier à la preuve qu'on établit généralement en première année d'université et qui consiste à supposer l'existence de deux limites L et L' et à prouver que $|L - L'| < 2\varepsilon, \forall \varepsilon > 0$ – on aura réglé la question sur le plan syntaxique. La question qui se pose est alors de savoir

¹⁶⁵ L'Analyse classique se rattache à la théorie ZFC (Zermelo- Franckel- Choix).

¹⁶⁶ Signalons tout de même que dans l'Analyse non standard (rattachée à la théorie IST, Idéalisation – Standardisation – Transfert), la question de l'unicité est plus compliquée et ne fera pas l'objet de ce travail.

comment les étudiants vont gérer cette propriété de l'égalité en analyse réelle (Cf. Paragraphe V du chapitre 2).

On peut penser que la contraposée de la définition de l'égalité en analyse réelle soit plus "convaincante" : *Si $L \neq L'$, alors $\exists \varepsilon > 0$ tel que $|L - L'| \geq \varepsilon$* , mais dans tous les cas la démarche est syntaxique.

b) Quelle peut être la nature du travail des étudiants dans des situations qui veulent prendre appui sur le contenu conceptuel des définitions et théorèmes introduits, sur l'existence des objets en jeu ? La question est de savoir inciter les étudiants à interroger ces savoirs et susciter leur intuition.

Nous reprenons à cette occasion le même questionnement développé par Tall (1985) :

"An appropriate cognitive development should eventually lead to proofs that are both intuitive (in a psychological sense¹⁶⁷) and rigorous. There need be no dichotomy between intuition and rigour. But how is this to be done ?¹⁶⁸"
(Tall, 1985, p. 52)

II.2 Milieu pour un contrôle mixte : intuitif et formel

Dans le même ordre d'idée que Tall selon laquelle rigueur ne devrait pas être en opposition avec intuition, Dieudonné (1987) précise que :

"Il ne peut y avoir de démonstrations « rigoureuses » qu'au sein d'une théorie axiomatique, où objets et relations primitives ont été spécifiés, et les axiomes qui les relient énumérés de façon exhaustive ; et si on ne tient pas compte des inadvertances ou négligences mentionnées en I) et II), cette condition nécessaire est aussi suffisante ; « manque de rigueur » signifie « manque de précision ». L'histoire corrobore cette affirmation dans tous les cas." (Dieudonné, 1987, p. 250)

Dans l'enseignement de fin du lycée et d'entrée à l'université en analyse réelle, l'appel à l'intuition est souvent ponctuel et isolé du contrôle formel. De ce fait, l'enseignement aboutit à une concentration et une fermeture sur la théorie et la succession de calcul.

¹⁶⁷ L'auteur entend : *"The psychologist uses the term 'intuitive' to signify an immediate response to a situation"* (Tall, 1985, p. 51).

¹⁶⁸ C'est nous qui avons souligné.

Il est certes admis que penser intuitivement les objets de l'analyse réelle ainsi que les résultats qui en découlent est délicat, prend du temps et cela l'est d'autant plus que :

- a) Les étudiants ne sont pas suffisamment outillés et non autorisés à pratiquer des preuves pragmatiques, en dépit du gain qui découle parfois de l'usage de ces dernières.
- b) Les mathématiques à ce niveau du cursus, proposent des instruments formels très efficaces, du moins pour ceux qui auront appris à les utiliser.

Toutefois, il n'est pas impossible de susciter l'intuition en analyse réelle et de la concilier avec la précision comme le montre l'exemple déjà cité de Mamona-Downs (2001). Dans ce travail, l'auteur montre qu'il est possible d'affiner l'intuition, via le traitement d'images mentales évoquées par la définition. En analysant le rôle de chaque symbole et expression intervenant dans la définition dans le but d'atteindre une image mentale avec laquelle elle s'accorde " [...] *to achieve a mental image firmly consonant with the definition [...].*" (Mamona-Downs, 2001, p. 259), l'idée est de proposer sur la base de l'image mentale en question, des séquences didactiques qui vont permettre aux étudiants de *mûrir* leurs intuitions et les articuler au formel. Nous retenons parmi ces séquences¹⁶⁹ l'illustration graphique de la définition conçue de sorte qu'elle participe à la formation d'une image mentale à partir de laquelle la définition formelle se reconstruit et permette de dépasser des conceptions telles que celles qui sous-entendent qu'une suite ne doit pas atteindre sa limite, qu'une suite convergente est forcément monotone, que l'ordre dans lequel intervient ε et N est négligeable, etc.¹⁷⁰.

De ce point de vue, la représentation graphique se doit :

- a) d'être un système contenant toutes les informations qui constituent la définition, Mamona-Downs illustre cette idée par le graphique ci-dessous ;

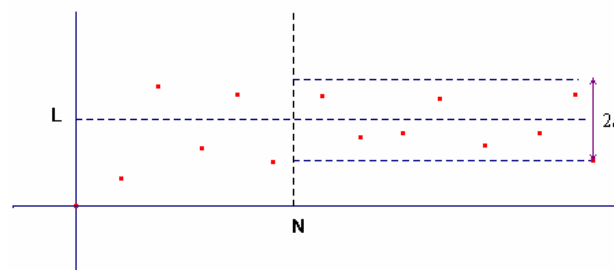


Fig. 6.1 : Graphique et limite d'une suite (Mamona-Downs)

¹⁶⁹ Cf. Mamona-Downs (2001), pour plus de détails sur cette analyse et les séquences qui utilisent l'image mentale pour réexaminer la *validité* de certaines intuitions

b) de permettre une description plus ou moins exhaustive du rôle de chaque symbole et expression figurant dans la définition ;

c) de favoriser la discussion de la question : pourquoi la définition de la limite d'une suite a la forme qu'elle a (*why the official definition has the form it has ?*) ?

Plutôt que de rentrer dans les détails de ce travail, nous tenterons ici, de transposer succinctement le modèle d'analyse à l'exemple du théorème des valeurs intermédiaires dont voici l'énoncé : *Soit f une fonction continue sur un intervalle I de \mathbb{R} et $a, b \in I$. Pour tout réel t compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un réel c compris entre a et b tel que $t = f(c)$.*

Le théorème étant admis au lycée, il est généralement précédé d'activités l'exemplifiant sur des cas particuliers et introduit à l'aide de graphiques qui tentent de l'illustrer. Les graphiques que nous avons pu observer pointent, en particulier, le fait que c n'est pas nécessairement unique et le cas où $t = 0$.

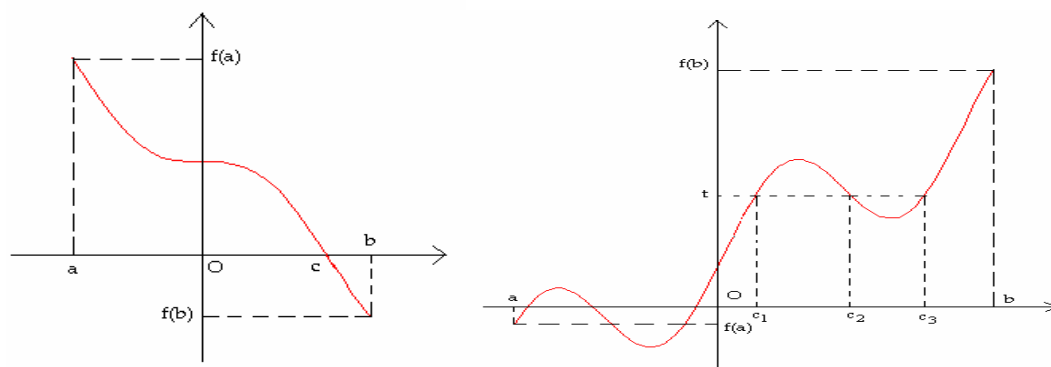


Fig. 6.2 : Exemples de graphiques de fonctions

L'idée intuitive étant que toute fonction continue sur un intervalle ne peut prendre deux valeurs distinctes d et e sans prendre les valeurs comprises entre d et e (le tracé d'une fonction continue sur un intervalle ne présente pas de trous). Mais alors, cela nous aura ouvert à d'autres affirmations (ou considérations intuitives) disant, par exemple : lorsqu'une fonction continue sur un intervalle prend deux valeurs opposées, elle prend nécessairement la valeur 0 en, au moins, un point de cet intervalle¹⁷⁰. De même, si on se donne à réfléchir sur la question de l'ordre d'apparition de t et de c , on arrive sans trop de peine à voir que si l'on part d'un c compris entre a et b , il est toujours possible de trouver t dans $f([a, b])$ mais pas nécessairement compris entre $f(a)$ et $f(b)$. Nous

¹⁷⁰ Une liste de ces conceptions se trouve dans (Mamona-Downs, 2001, p. 262).

¹⁷¹ Rappelons que ce théorème qui semble géométriquement évident, a été utilisé très longtemps sans démonstrations, avant la construction de \mathbb{R} .

travaillons là dans le même ordre d'idée que Mamona-Downs quand elle pointe : " *We feel that if we want to have the definition to have some close rapport with the students' intuitive ideas, the issue, about why the definition has the form it does, must be raised as part of its presentation.*" (Mamona-Downs, 2001, p. 284). On peut prolonger la discussion aussi loin que l'on veut, en se posant par exemple (appuyée par les graphiques ci-dessous comme contre-exemples) la question de ce qui se passe dans le cas où, soit f est discontinue, soit il existe t compris entre $f(a)$ et $f(b)$ et qui n'est image d'aucun c compris entre a et b .

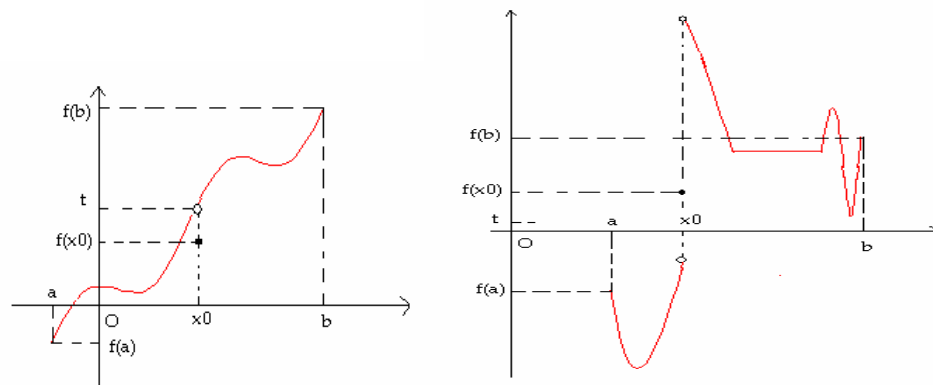


Fig. 6.3 : Exemples de graphiques de fonctions

Posons-nous maintenant la question de ce qui se passe si on veut expliciter c . Cette question est légitime si on s'intéresse à la résolution de l'équation $f(c) = t$. Puis posons-nous la question plus générale de savoir traiter l'équation dans le cas où l'outil algébrique ne le permet plus. En fait, à ce niveau du cursus, les élèves n'ont pas une image mature des réels et ce n'est pas le rôle du théorème des valeurs intermédiaires d'élucider ce sujet. Dans ce cas, une source possible d'intuitions appropriées serait les approximations successives (en l'occurrence au moyen de support graphique), que Tall suggère via le recours aux solutions numériques d'équations :

"In this case a possible source of appropriate intuitions might be the numerical solution of equations on a computer where precise solutions are rarely found. As most computer languages represent 'real numbers' only as rational approximations this may provide an intuitive foundation for the need to prove the intermediate value theorem rigorously." (Tall, 1991, p. 107)¹⁷²

¹⁷² Ceci ne veut absolument pas dire qu'on écarte le même travail sur papier crayon, du fait même que la calculatrice symbolique ou un logiciel ne sont plus compétents à partir d'un certain ordre d'erreur.

Ceci nous amène à la preuve du théorème des valeurs intermédiaires qui ne se fait qu'à l'entrée à l'université. Finalement c'est bien de la notion de nombres réels et de la structure de \mathbb{R} que devrait provenir l'idée qui permettra de prouver l'existence de c .

Aussi bien dans le cours des classes expérimentées que dans plusieurs manuels destinés à l'enseignement de l'analyse réelle en première année d'université, la preuve d'existence de c se fait par "construction", sur la base de l'axiome de la borne supérieure ($c = \sup(\{x \in [a, b], f(x) \leq t\})$) en supposant que $f(a) < t < f(b)$, et de la caractérisation de la borne supérieure par les suites.

Se pose maintenant la question du rôle conceptuel de cette démonstration, en d'autres termes à quel recours supplémentaire faudrait-il faire appel pour développer d'autres idées, affiner et/ou renforcer l'intuition ? Ceci du fait même que :

- la preuve d'existence ne s'applique pas au cas de figure ci-dessous,

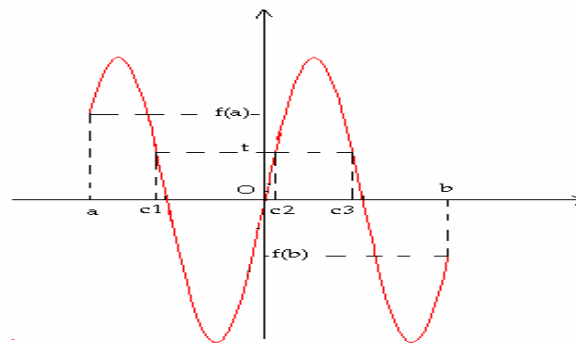


Fig. 6.4 : Exemple de graphiques de fonctions

- à supposer que l'on traite le cas où $f(b) < t < f(a)$, la preuve d'existence concernera un terme parmi c_1 , c_2 et c_3 , comment retrouver les autres ?
- dans tous les cas, l'existence de c s'appuie sur l'axiome de la borne supérieure et il faut bien tenter de le situer. Selon Lombardi (1999) : " [...] on peut montrer qu'il n'existe pas d'algorithme général pour le théorème des valeurs intermédiaires." (Lombardi, 1999, p. 64). Par *algorithme général*, l'auteur entend un procédé général pour construire c (i.e. une suite de Cauchy de rationnels). Cette affirmation même si elle est vraie ne va pas à l'encontre de notre projet : nous l'avons déjà dit, l'explicitation d'objets mathématiques est optimale du point de vue de l'apprentissage même si elle se restreint à des instanciations de ces objets. La question de l'algorithme général se situe à un autre niveau de la théorie mathématique. Nous pensons également qu'une certaine efficacité de l'enseignement de l'analyse ne peut résulter que d'une vision claire – par l'enseignant – du niveau des objets en jeu (Cf. Petitot, 1992).

Comme nous l'avons sous-entendu depuis le début, l'idée fondamentale des situations est que les étudiants optent pour une validation non seulement de type démonstration mais surtout chercher des preuves pragmatiques, éventuellement redondantes. Comme toute situation à dimension a-didactique, les situations prévues doivent conduire d'abord à un travail heuristique appuyé sur l'intuition des étudiants.

A travers la donnée de situations basées théoriquement sur les méthodes numériques d'approximations successives, notre idée est de favoriser un contrôle continu entre intuitif et formel, partant du fait que l'exercice sémantique de l'un est souhaitable et celui de l'autre est complexe.

III. Choix des situations

A la lumière des exigences épistémologiques et cognitives pointées ci-dessus, et conformément à la recherche d'un équilibre dans les valeurs prises par les variables macro- didactiques de la transition en analyse réelle, notre choix s'est porté sur le recours aux méthodes numériques d'approximations successives comme alternative qui permette de consolider les connaissances numériques des étudiants et de les relier aux savoirs introduits sur les fonctions, suites et limites, lesquels à leur tour seront questionnés sur cette base.

L'étude faite dans ce chapitre nous a permis de reconnaître, parmi les valeurs des variables didactiques du modèle théorique, celles qui s'adapteraient à la construction progressive de situations conformément aux objectifs que nous leur avons fixés.

III.1 Choix des valeurs des variables

Dans l'organisation générale de l'ingénierie, nous avons pu identifier un certain nombre de variables didactiques, qui une fois leurs valeurs fixées, concerneront l'organisation d'une séance ou d'une phase de l'ingénierie. Nous commenterons ci-dessous le choix des diverses valeurs données aux variables didactiques aussi bien dans la première que dans la deuxième situation¹⁷³.

III.1.1 Nature du nombre

Le problème constituant la base de l'ingénierie est un problème de recherche d'approximations successives de nombres irrationnels algébriques ou transcendants.

¹⁷³ Ces choix seront détaillés dans l'analyse a priori de chacune des deux situations.

Nous écartons de prime abord les nombres rationnels avec l'hypothèse que le développement périodique d'un nombre rationnel soit familier aux étudiants.

Les étudiants n'ayant à priori pas de connaissances sur la distinction algébrique/transcendant, il serait souhaitable de présenter :

1. Le cas d'un nombre algébrique supposé être parfaitement connu des étudiants, afin qu'ils puissent investir et questionner leurs connaissances numériques.
2. Le cas d'un nombre transcendant défini implicitement par une équation et que les étudiants ne connaissent pas à priori. Ce choix vise à amener les étudiants à s'interroger sur les théorèmes d'existence.

III.1.2 Type d'équation

Pour le premier cas, le nombre est défini explicitement par une équation pouvant être résolue par l'outil algébrique. Dans ce cas, le nombre ainsi que sa forme algébrique sont bien "connus" des étudiants, dans le sens où ils peuvent donner sa forme et vérifier par un simple calcul qu'il est solution de l'équation en question et s'en contenter. Il est alors dérisoire d'espérer que la dévotion de chercher une suite d'approximations successives puisse s'opérer en optant pour la résolution.

Dans le deuxième cas, le recours aux outils algébriques ne devrait pas permettre la résolution de l'équation proposée aux étudiants. Ce sera le milieu graphique qui permettra de susciter la formulation d'une conjecture sur l'existence de solution(s). De plus, à côté de la preuve de cette conjecture (via le théorème des valeurs intermédiaires), l'existence d'un nombre (solution de l'équation) devrait amener les étudiants à se poser la question de l'identifier, de l'approcher, etc. Dans ce cas, le recours à la dichotomie serait un moyen d'investiguer la question mais la finalité de la situation est de tenter de porter la réflexion des étudiants sur des méthodes plus performantes, compte tenu des outils de l'analyse dont ils disposent.

III.1.3 Nature de la suite

Afin d'essayer de légitimer la recherche d'approximations successives dans le cas où le nombre algébrique est bien connu des étudiants, nous avons adopté une entrée par la question de la densité de \mathbb{Q} dans \mathbb{R} . La dévotion peut, alors, prendre appui sur la question de l'existence et la construction d'une suite de rationnels qui converge vers un nombre réel donné. Il est de ce fait souhaitable que la suite de rationnels en question soit la *meilleure* approximation du nombre en question, encore faut-il trouver un moyen,

pour le mieux géométrique et/ou graphique, pour amener les étudiants à en expliciter la forme.

Dans la deuxième situation, la suite des approximations est irrationnelle pour deux raisons complémentaires :

- le savoir de base visé par notre situation n'est pas le théorème de densité de \mathbb{Q} dans \mathbb{R} ,
- la dévolution est censée prendre appui sur le contenu conceptuel du théorème du point fixe.

III.1.4 Type de la suite

Comment doivent s'exprimer les termes de chacune des deux suites choisies ?

Une première réponse naïve est possible ; les procédés devant être itératifs, les suites ne peuvent être que récurrentes. Une deuxième réponse plus convaincante est celle de dire que le choix des suites récurrentes s'impose par le fait même que le théorème du point fixe tel que formulé au supérieur est l'un des savoirs ultérieurement visés par l'ingénierie.

De plus, si l'on veut bénéficier de l'avantage que représente le fait de pouvoir visualiser le processus d'approximation, le choix des suites récurrentes se justifie par l'accessibilité et la clarté du procédé qui permet de les représenter. En particulier comme les termes en question sont des réels, et afin de ne pas négliger les conditions sur le continu, il faudrait avoir le moyen de les représenter sur la droite réelle.

III.1.5 Types d'approximation et d'erreur sollicités

Dans le cas de la situation relative au nombre transcendant, l'accès à un niveau plus élevé de réflexion suppose de juger la méthode d'approximation en fonction de la rapidité de convergence. Plus précisément, la condition faite sur l'erreur requise devra amener les étudiants à poser la question de l'existence d'un moyen de calcul plus économique : en d'autres termes l'existence d'une suite d'approximations qui soit plus *efficace*. Il est légitime de supposer l'émergence de la question du fait même que les étudiants n'ont aucun moyen d'expliquer la forme de ce nombre.

Dans la situation où le nombre est algébrique, le choix du type d'approximation et du type d'erreur relève de deux préoccupations :

- l'erreur sollicitée ne doit pas être accessible via la calculatrice (sinon il suffirait simplement de taper le nombre en question sur la calculatrice) ;

- le procédé itératif dont nous devons disposer devrait permettre de construire la meilleure approximation.

Pour ce faire, l'idée est d'introduire la notion de suites adjacentes. La concrétisation est supposée aller dans le sens d'une mise en défaut de l'application automatique du théorème des segments emboîtés (les suites en question ne seraient autres que les sous-suites paire et impaire).

Ces considérations supposent que l'approximation doit porter sur deux termes consécutifs dont la distance est à une erreur près fixée a priori.

III.1.6 Comportement de la suite

Dans la majorité des manuels d'enseignement de l'analyse réelle en première année d'université, la démonstration donnée au théorème des accroissements finis s'appuie sur le théorème de Rolle prouvé précédemment (Théorème de Rolle : *Soit f une fonction définie sur un segment $[a, b]$. Si f est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et $f(a) = f(b)$. alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.*)

Prouver le théorème de Rolle revient à prouver l'existence de c . Or cette existence provient du théorème qui stipule que *L'image par une fonction continue d'un segment est un segment*, il suffit ensuite de conclure (graphique à l'appui au secondaire) que c peut très bien être le maximum ou le minimum de la fonction en question.

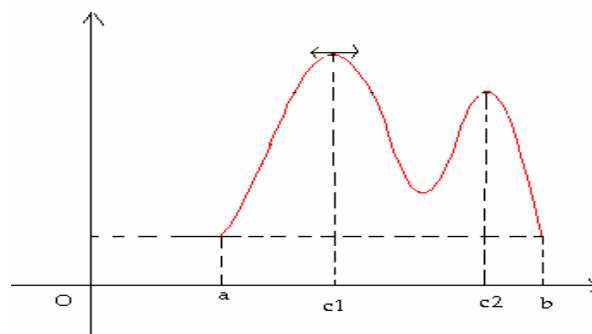


Fig. 6.5 : Exemple de graphiques de fonctions

En réalité, la difficulté du théorème de Rolle réside dans la complexité du résultat que l'on vient d'énoncer, c'est-à-dire dans la construction de $f(x_0) = \sup \{f(x), x \in [a, b]\}$ et $f(x_1) = \inf \{f(x), x \in [a, b]\}$. Nous renvoyons l'étude de cette complexité à celle que nous avons faite du théorème des valeurs intermédiaires. Ceci suppose que l'on adopte les mêmes interrogations concernant les possibilités offertes aux étudiants pour l'accès à ces nombres via des approximations.

Il vient que, si l'on veut rendre possible un travail sur le théorème des accroissements finis, sans courir le risque de se répéter et être en mesure d'intégrer le maximum de savoirs dans une même situation, il faut que les situations mettent l'accent sur son utilité ainsi que ses limites dans une recherche de type approximations successives et convergence.

Par conséquent, aussi bien dans la première que dans la deuxième situation, les suites ne devraient être ni croissantes, ni décroissantes.

III.2 Conclusion : situations retenues

En regard de toutes les conditions auxquelles les valeurs des variables doivent être soumises, deux situations ont été retenues :

1. L'antiphérèse de racine de 2, qui table sur la construction de la *meilleure* approximation rationnelle de $\sqrt{2}$ et, dans la mesure du possible, sa généralisation à certains irrationnels. La méthode utilisée est basée sur les fractions continues et a été introduite historiquement par Théon de Smyrne au temps d'Euclide.
2. Le point fixe de cosinus, qui prend appui sur une discussion de la qualité de l'approximation du point fixe de cosinus donnée par la méthode de dichotomie par comparaison à une autre approximation que l'on peut construire, à savoir celle donnée par la méthode de Newton (la méthode de Newton ne fait pas l'objet d'un enseignement dans le cursus tunisien).

L'institutionnalisation prévue concerne des méthodes de l'analyse réelle (les méthodes des approximations successives visées) et des procédures. En particulier, les procédures concernent le lien entre les outils d'investigations et de preuves utilisés. Plus précisément, un des axes particulièrement important de l'institutionnalisation est le lien entre la procédure de recherche (mise en œuvre dans le milieu objectif) et la preuve finalement établie. Cette déclaration porte sur des connaissances d'ordre II au sens de Sackur et al. (2005) ; on peut l'énoncer sur un exemple de la façon suivante : " Quand la recherche a mis en évidence une suite oscillante, on va s'orienter d'abord vers une preuve utilisant les sous-suites paire et impaire, et écarter pour un moment les autres types de preuve."

Dans tous les cas, l'ingénierie prévue doit amener les étudiants à travailler sur la nature des nombres (rationnels, irrationnels, algébriques, transcendants), les sous-ensembles de \mathbb{R} et l'approximation des réels non rationnels ; ceci dans la perspective plus large de revenir sur la réintroduction du théorème de densité de \mathbb{Q} dans \mathbb{R} , de la

définition et de théorèmes de convergence d'une suite, du théorème du point fixe, du théorème des segments emboîtés, du théorème des valeurs intermédiaires, du théorème des accroissements finis et de la formule de Taylor, tout en insistant sur la dimension expérimentale, soit calculer, rechercher, conjecturer, etc.

Notons pour conclure que des motivations exogènes viennent à l'appui des situations élaborées du fait même que :

- dans l'application des mathématiques (en physique ou autre), un nombre réel est toujours remplacé par un rationnel ou décimal qui lui est proche avec une erreur que l'on doit pouvoir estimer ;
- dans le niveau du cursus choisi, les étudiants sont aussi destinés à un enseignement informatique, donc à la programmation d'algorithmes de calcul numérique tout en étant en mesure de juger de la fiabilité de ces algorithmes.

CHAPITRE 7

La situation de l'antiphérèse de $\sqrt{2}$

I. Introduction : Contenus et objectifs de la situation

Il s'agit de construire un milieu expérimental de l'analyse réelle, visant un retour sur la densité de \mathbb{Q} dans \mathbb{R} , la convergence d'une suite, le point fixe et les fonctions contractantes, les segments emboîtés et les accroissements finis.

Dans le cadre des objectifs fixés à l'ingénierie¹⁷⁴, la situation de l'antiphérèse vise à permettre aux étudiants :

- de prendre appui sur le contenu conceptuel du théorème de densité de \mathbb{Q} dans \mathbb{R} par le biais d'instanciations appropriées,
- de mettre en œuvre et revenir sur un réseau de savoirs de l'analyse réelle : définition et théorèmes de convergence d'une suite, le théorème du point fixe, le théorème des segments emboîtés, le théorème des accroissements finis.

L'institutionnalisation prévue concerne des procédures et la méthode de construction d'une suite de rationnels qui converge vers un irrationnel de la forme \sqrt{d} , d entier ≥ 2 où d n'est pas un carré parfait et $(d-1)$ est un carré parfait¹⁷⁵.

Le travail mené dans les chapitres précédents a permis de dégager :

- les caractéristiques des situations théoriques et leurs variables didactiques,
- la forme que devrait prendre le travail des étudiants confrontés à des questions d'approximation et des limites.

Cette étude sera ici complétée et structurée par les formes que devront prendre les interactions des couples (étudiants, milieu) et (professeur, étudiants).

Les situations construites dans la perspective énoncée ci-dessus doivent être des situations à dimension a-didactique.

Cette dimension a-didactique est recherchée pour amener les étudiants à progresser dans leur travail par confrontation à un milieu. Cette quête d'a-didacticité ne dispense pas, pour autant, d'étudier ce que le professeur doit faire en interaction avec les étudiants à tous les niveaux du milieu expérimental.

En disant cela, nous mettons l'accent sur le souci qui est le nôtre de construire une situation a- didactique (ou du moins problématique) de l'analyse réelle, qui permette de

¹⁷⁴ Cf. Chapitre 5.

¹⁷⁵ Nous reprenons plus loin les motivations liées à ce choix, déjà abordées dans le chapitre 2.

favoriser un va et vient entre les connaissances des étudiants (le niveau de la dévolution, de l'action et de la formulation) et les preuves (le niveau de la validation). Ceci est d'autant plus pertinent qu'à ce niveau du cursus, l'analyse réelle est introduite avec ses critères de validation.

Les questions que l'on veut voir mises en jeu dans la situation, via des interactions inter-corrélées des couples (étudiants, milieu), et (professeur, étudiants) sont :

- Quelle est la différence entre rationnel et irrationnel ?
- Est-il possible de construire une suite de rationnels qui converge vers un irrationnel ?
- Comment encadrer un irrationnel entre deux rationnels avec une erreur que l'on se fixe à priori ?

II. Analyse a priori

A la lumière de l'étude menée dans les chapitres précédents, on se propose dans ce paragraphe d'étayer les différentes étapes de construction d'une situation d'approximation d'un nombre irrationnel algébrique.

Afin de voir plus clair dans l'élaboration de la situation, nous avons organisé cette analyse sur trois étapes :

1. Dans une première étape, nous utilisons ce que Robert (1998) a défini comme le niveau de mise en fonctionnement des connaissances¹⁷⁶. Rappelons que Robert recense trois niveaux de mise en fonctionnement des connaissances :

- Le niveau technique qui

"(...) correspond à des mises en fonctionnement isolées, mettant en jeu des applications immédiates de théorèmes, propriétés, définitions, formules, etc." (Robert, 1998, p. 165)

- Le niveau mobilisable qui

"(...) correspond à des mises en fonctionnement plus larges : encore indiquées mais dépassant l'application simple d'une propriété à la fois." (Robert, 1998, p. 166)

- Le niveau disponible qui exige que l'étudiant soit capable de résoudre ce qui lui est proposé sans aucune indication, en trouvant par lui-même les connaissances nécessaires à la résolution. Ce troisième niveau s'avère spécifique à l'université.

L'usage de cette typologie est nécessaire pour au moins une raison : être en mesure de formuler des explications a priori ou a posteriori, quant à l'usage ou non par les étudiants de connaissances supposées techniques ou autres.

2. Dans une deuxième étape, l'étude se centrera sur l'organisation de la situation, ses variables didactiques et les valeurs qu'il est souhaitable de leur attribuer en fonction des objectifs fixés.
3. Dans une dernière étape, nous utilisons le schéma de structuration du milieu suivant une analyse ascendante ; la fonction essentielle de ce schéma est de prévoir les interactions possibles des couples (étudiants, milieu) et (professeur, étudiants), à travers la mise en jeu des possibles effectifs d'enseignement.

II.1 Connaissances et savoirs requis et visés

L'étude des différents niveaux de mise en fonctionnement des connaissances et savoirs dans les situations expérimentales, même si elle ne dispense pas de l'analyse en termes de milieu, est une étape inévitable si l'on se place dans le cadre de l'élaboration d'une ingénierie à un niveau du cursus comprenant des éléments théoriques.

Nous recensons dans la grille ci-dessous les connaissances et savoirs requis, suivant leur niveau de mise en fonctionnement, et dans une chronologie se voulant adéquate à l'organisation des différentes phases de la situation. Nous reprenons à cette occasion certaines des connaissances ou savoirs déjà énumérés dans le chapitre précédent, mais cette fois dans la perspective de l'engagement autonome des étudiants dans le travail proposé.

La nature du travail demandé aux étudiants dans la situation de l'antiphérèse de $\sqrt{2}$, comme on l'analysera via la structuration du milieu, sera organisée de sorte que ces savoirs soient sollicités aux mêmes niveaux de fonctionnement que ceux déclarés ci-dessous. Remarquons donc que l'attribution des niveaux n'est pas intrinsèque au savoir visé, mais elle signale le niveau de fonctionnement dans la "situation".

¹⁷⁶ Cette terminologie est utilisée dans le sens large de connaissances et savoirs.

Connaissances et savoirs requis	Niveau de fonctionnement
Définition d'un rationnel ($\frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}^*$).	Technique
En raisonnant par l'absurde, on prouve que $\sqrt{2}$ est irrationnel.	Mobilisable
Cas d'isométries de triangles rectangles.	Mobilisable
Propriétés métriques et angulaires dans un triangle isocèle.	Mobilisable
Représentation graphique de fonctions rationnelles.	Technique
Construction des termes d'une suite récurrente (de la forme $u_{n+1}=f(u_n)$), connaissant la représentation graphique de la fonction qui lui est associée.	Technique
Le théorème des valeurs intermédiaires.	Mobilisable
Soit une fonction continue $f : [a,b] \rightarrow [a,b]$. Alors il existe $x_0 \in [a,b]$ tel que $f(x_0) = x_0$.	Mobilisable
Soit $f : I \rightarrow I$ et $(u_n)_n$ une suite définie par $u_0 \in I$ et $u_{n+1}=f(u_n)$. Si f est continue dans I et $(u_n)_n$ converge vers L dans I , alors $f(L) = L$.	Mobilisable
On dit qu'un réel a est une valeur approchée d'un réel x à 10^{-n} ($n>0$) près si $ x - a < 10^{-n}$.	Mobilisable
Opérations algébriques, majorations, minorations.	Disponible
Définition d'une suite majorée (respectivement minorée).	Mobilisable
Définition d'une suite croissante (respectivement décroissante).	Mobilisable
Principe de récurrence.	Mobilisable
Théorème de la convergence monotone.	Mobilisable
Une suite réelle $(u_n)_n$ est convergente vers L , si et seulement si, les deux sous-suites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ convergent vers L .	Disponible
Théorème des accroissements finis.	Disponible
Théorème du point fixe (relatif aux fonctions contractantes).	Disponible
Théorème des segments emboîtés.	Disponible
Propriétés de la divisibilité.	Disponible
Calcul numérique.	Technique

Comme nous l'avons mentionné plus haut le savoir essentiellement visé ici est le théorème de densité de \mathbb{Q} dans \mathbb{R} ou plus précisément la caractérisation de la densité de \mathbb{Q} dans \mathbb{R} par les suites :

$$\mathbb{Q} \text{ est dense dans } \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} \exists (x_n)_n \subset \mathbb{Q} \text{ telle que } \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x.$$

L'organisation générale de la situation part de l'idée d'une instanciation de ce théorème d'existence via la recherche d'une suite rationnelle convergeant vers un irrationnel algébrique, de sorte que la construction d'une telle suite :

- problématise la nature des nombres (différence entre rationnels/irrationnels, représentations numériques des nombres et lien avec les approximations successives, les limites, etc.) ;
- soit une méthode généralisable à d'autres irrationnels algébriques de la forme \sqrt{d} , d entier ≥ 2 où d n'est pas un carré parfait et $(d-1)$ est un carré parfait.

Nous avons guidé l'introduction par un travail sur l'irrationalité inspiré du principe d'exhaustion, utilisé par Euclide pour montrer l'incommensurabilité de la diagonale d'un carré. A condition de disposer de notations convenables, le procédé itératif appelé antiphèrese conduit à ce que l'on appelle aujourd'hui, le développement de $\sqrt{2}$ en fraction continue illimitée périodique.

Nous ne projetons pas ici d'introduire la théorie des fractions continues (d'autant plus que ce savoir ne fait pas partie des intitulés du programme de première année d'université), nous entendons permettre aux étudiants d'aborder empiriquement la notion de développement en fraction continue de $\sqrt{2}$, et se rendre compte qu'un tel développement permet d'approcher successivement $\sqrt{2}$ avec des erreurs de plus en plus petites.

Plus généralement, dans le cas où un entier naturel $d \geq 2$ n'est pas un carré parfait et vérifie la condition $(d-1)$ est un carré parfait :

- l'égalité $(\sqrt{d} - \alpha) = \frac{1}{\sqrt{d} + \alpha}$, ($\sqrt{d-1} = \alpha$) permet de donner le développement en

$$\text{fraction continue de } \sqrt{d}, \sqrt{d} = \alpha + \frac{1}{2\alpha + \frac{1}{2\alpha + \frac{1}{2\alpha + \text{etc.}}}} ;$$

- et la suite des réduites de \sqrt{d} n'est autre que la suite définie par $u_0 = \alpha$ et $u_{n+1} = \alpha + \frac{1}{u_n + \alpha}$.

Les étudiants vont donc pouvoir :

- s'appuyer sur la figure car $\sqrt{2}$ "s'obtient" à partir d'un triangle rectangle isocèle, figure simple et bien connue,

- trouver sans difficulté majeure la formule de récurrence.

Ce sont ces conditions qui rendent la situation "jouable" à ce niveau du cursus.

Nous prévoyons que la situation amène les étudiants à relier fortement la notion de nombre réel avec celle de limite et à leur permettre de revenir sur les théorèmes visés.

II.2 Organisation de la situation et ses variables didactiques

Le problème constituant la base de la situation est un problème non familier de l'enseignement actuel. On peut donc supposer que les étudiants ne le résoudre pas par contrat, sans avoir été au préalable confrontés aux enjeux.

De plus, dans l'organisation de la situation, " [...] certains choix se présentent comme des variables didactiques, dans la mesure où la détermination de ces paramètres change ce qui est à la charge des élèves, et le type de travail qu'ils seront amenés à faire [...]. " (Bloch, 2000, p.278). Nous avons déjà exposé dans le premier chapitre de la thèse, les principales modifications des valeurs des variables macro-didactiques¹⁷⁷ de la transition lycée/université en analyse réelle. A côté de l'étude des valeurs des variables micro-didactiques¹⁷⁸, nous essaierons ici, de situer la situation construite par rapport à certaines des variables macro-didactiques de la transition.

Les valeurs des variables micro-didactiques sont choisies pour organiser le travail effectif de calcul, recherche, etc. des étudiants dans la situation.

Les valeurs des variables macro-didactiques sont en évolution par rapport à l'enseignement secondaire car les étudiants sont plongés dans un milieu où la problématique et les moyens de résolution font appel à des connaissances générales de l'analyse réelle.

II.2.1. Variables didactiques

Au terme de ce chapitre, nous avons déjà repéré huit variables micro-didactiques a priori. Le choix des valeurs est détaillé ici en incorporant l'introduction de quelques valeurs des variables macro-didactiques de la transition.

a) Nature du nombre

¹⁷⁷ Rappelons que nous entendons par variables macro-didactiques, des variables qui concernent une organisation relativement globale de l'enseignement et non une situation d'enseignement/apprentissage d'un savoir (comme une situation didactique).

¹⁷⁸ Spécifiques aux situations théoriques et que l'on a déjà développées dans les chapitres 5 et 6.

Le nombre choisi dans la situation expérimentale de l'antiphérèse de $\sqrt{2}$ est irrationnel algébrique et connu des étudiants. En s'inspirant du procédé d'Euclide, il est possible de construire des approximations successives rationnelles de $\sqrt{2}$ par un procédé géométrique – procédé heuristique appuyé sur l'intuition géométrique.

La validation géométrique ne suffit certes pas, mais le raisonnement géométrique, nous dit que le procédé de construction est infini. L'interprétation numérique de ce résultat permet de dire que $\sqrt{2}$ est irrationnel, au moins par un argument de finitude de la représentation numérique de $\sqrt{2}$ en fraction continue et en s'appuyant sur des propriétés "évidentes" d'un triangle rectangle. Des conversions entre registres sont en jeu dans ce travail :

- la conversion dans le registre numérique donne la représentation numérique de $\sqrt{2}$ en fraction continue ;
- la conversion dans le registre algébrique permet d'aborder la question relative à la forme d'une suite rationnelle qui converge vers $\sqrt{2}$.

b) Suite explicite ou récurrente

Dans ce cas, la suite est récurrente et participe de ce fait à la prise en compte d'au moins deux paramètres :

- le théorème du point fixe est l'un des savoirs ultérieurement visé par l'antiphérèse de $\sqrt{2}$;
- le procédé de récurrence permet de représenter graphiquement la suite, de l'étudier graphiquement ainsi que de faire des conjectures sur ses variations, sa nature et sa limite éventuelle. Il y a donc là des conjectures graphique et numérique et une conversion sollicitée dans le registre de l'analyse réelle pour la preuve.

c) Suite rationnelle/irrationnelle

Afin d'essayer de justifier la recherche d'approximations rationnelles successives, nous avons déjà mentionné le fait qu'on adopte une entrée par la question de la densité de \mathbb{Q} dans \mathbb{R} : la dévolution prendra appui sur la question de l'existence et la construction d'une suite de rationnels qui converge vers $\sqrt{2}$.

d) Suite croissante, décroissante, non monotone

Le choix d'une suite qui n'est ni croissante, ni décroissante devra amener les étudiants à utiliser un réseau de savoirs de l'analyse réelle : définition et théorèmes de

convergence d'une suite, théorème du point fixe, du théorème des segments emboîtés et théorème des accroissements finis¹⁷⁹.

Par ailleurs ce choix vient à l'appui

- d'une évolution progressive du degré de formalisation ;
- d'une mise en œuvre de la notion de limite aussi bien comme processus que comme objet.

e) Type d'équation obtenu

Dans le cas de cette situation, l'équation est algébrique et résoluble par l'outil algébrique à disposition. Il est de ce fait clair que le rôle de la résolution se résume à un moyen de vérification. En fait, il est attendu que les étudiants procèdent à la résolution algébrique de l'équation $f(x) = x$ pour conjecturer, moyennant la condition de continuité sur f , le fait que si la suite construite converge, elle convergera nécessairement vers $\sqrt{2}$.

f) Types d'approximation et d'erreur sollicités

A côté de la condition selon laquelle la calculatrice ne doit pas donner directement accès à une valeur approchée permettant de visualiser l'erreur, pour effectuer ce choix, nous avons tenu compte de deux considérations :

- La suite obtenue oscille autour de $\sqrt{2}$, l'appui sur le registre numérique permet de postuler pour un encadrement de $\sqrt{2}$ entre deux termes consécutifs de cette suite.
- La justification théorique de l'encadrement doit donc passer par l'identification des sous- suites paire et impaire comme adjacentes. Nous prévoyons cependant que les étudiants n'éprouvent pas le besoin de justifier ce point car le graphique et le numérique jouent comme preuve pragmatique. En ce sens, le milieu de la situation n'est pas contraignant par rapport à ce savoir, du moins dans un registre de preuve algébrique/analytique.

Du reste, ce choix devra venir à l'appui de la construction de la *meilleure* approximation rationnelle de $\sqrt{2}$ ¹⁸⁰. Mais les étudiants n'auront accès qu'à une connaissance "intuitive" de ce résultat. On peut considérer qu'il s'agit d'un premier contact avec un savoir qui relève d'un niveau supérieur de la théorie : la question de la rapidité de convergence des suites ne fait pas partie des savoirs visés à ce niveau.

¹⁷⁹ Nous n'écartons pas l'usage possible par les étudiants du théorème des valeurs intermédiaires, usage routinier en fin du lycée.

¹⁸⁰ Cf. Chapitre 2, pour plus de détails.

Ceci suppose que l'approximation doit porter sur deux termes consécutifs dont la distance est à une erreur près fixée à priori, et dans la mesure du possible, aussi petite que l'on veut.

g) Méthode d'approximation

La situation d'antiphérèse de $\sqrt{2}$ table sur la construction de la suite des réduites associée au développement en fraction continue de $\sqrt{2}$. La généralisation portera sur la construction de la suite des réduites associée au développement en fraction continue d'un irrationnel de la forme \sqrt{d} , d entier ≥ 2 , où d n'est pas un carré parfait et $(d-1)$ est un carré parfait.

Ce choix vient à l'appui d'une évolution progressive du degré de généralisation : le but est d'entamer une première approche des conditions de construction d'une telle suite, nous nous appuyons pour cela sur une propriété algébrique de l'irrationnel sur lequel va porter la généralisation ($\sqrt{d} = \alpha + \frac{1}{\sqrt{d} + \alpha}$, où $\alpha = \sqrt{d-1}$). Ce choix est d'autant plus efficace, que

- Le recours à cette propriété permet aux étudiants de construire la suite des réduites associée au développement en fraction continue de \sqrt{d} , et de l'exploiter sans devoir assumer un enseignement spécifique sur la théorie des fractions continues.
- La construction d'une telle suite permet d'encadrer \sqrt{d} entre deux termes consécutifs dont la distance est aussi petite que l'on veut. Le calcul est simple et s'appuie sur la mise en place d'une relation de récurrence entre les numérateurs (respectivement dénominateurs) de deux termes consécutifs de la suite¹⁸¹.

Nous essayons, dans le tableau ci-dessous, de donner une vision synthétique aussi bien des choix que nous avons fait des valeurs des variables micro-didactiques de la situation construite, que de l'équilibre que nous avons tenté d'instaurer dans les valeurs prises par les variables macro-didactiques de la transition. L'analyse suivant la structuration du milieu, que nous ferons plus loin, montrera comment cet équilibre se traduit dans le scénario de la situation.

¹⁸¹ Cf. Chapitre 2, pour plus de détails théoriques.

Tableau 7.1 : Valeurs des variables macro-didactiques

		VARIABLES MICRO- DIDACTIQUES					
		Nature du nombre	Type de la suite	Nature de la suite	Comportement de la suite	Type d'équation	Approximation et erreur sollicitées
VARIABLES MACRO- DIDACTIQUES	Degré de formalisation	Evolution progressive du degré de formalisation					
	Degré de généralisation	Evolution progressive du degré de généralisation					
	Registre de validation	Divers registres sont sollicités pour la validation : géométrique, graphique, numérique, algébrique et analytique					
	Conversions entre registres	Diverses conversions entre les registres sont sollicitées aussi bien pour la recherche et la conjecture que pour la preuve					
	Mode d'intervention des notions	Les notions de nombre, limite, suite interviennent aussi bien comme processus que comme objet à travers la mise en œuvre des théorèmes d'existence prévus					
	Degré d'autonomie sollicité ¹⁸²	Un travail sur des connaissances évoluant de techniques, à mobilisables et disponibles (une évolution progressive dans l'autonomie requise)					

II.2.2. Trois phases pour organiser la situation

Nous avons choisi d'organiser la situation sur trois phases. De plus, nous avons prévue des questions préliminaires qui sont introduites dans chacune des phases.

a) Première phase

La première phase est une phase de dévolution du problème général et consiste à recourir au principe reposant sur l'antiphérèse de la diagonale d'un carré (inspiré du principe d'exhaustion utilisé par d'Euclide pour montrer l'incommensurabilité de la diagonale d'un carré), constater que $\sqrt{2}$ est irrationnel et traduire numériquement le principe utilisé.

Au cours des investigations, il serait opportun de lancer un débat concernant la nature des nombres en général. En effet, dans cette phase, l'usage du géométrie montre :

- d'une part, que les questions de nombres réels sont appuyées sur les questions de grandeurs et réciproquement, mais qu'on passe d'emblée d'un objet à un autre ;

¹⁸² Nous avons procédé plus haut à l'étude des niveaux de mise en fonctionnement des notions en jeu, selon Robert (1998). Nous utilisons ce résultat pour présenter les valeurs de cette variable.

- d'autre part, que le recours aux grandeurs pour exprimer un nombre réel ne suffit pas si l'on veut aboutir à une représentation explicite dans le domaine numérique et formel.

Un tel débat prendrait appui sur :

- Des questions en amont du déroulement telles que : Quelle est la différence entre les rationnels et les irrationnels ? Comment peut-on montrer qu'un réel est un rationnel ? Un irrationnel ?
- Des questions en aval du déroulement telles que : Pourquoi un développement fini en fractions continues donne-t-il un rationnel ? Pourquoi – et comment – un nombre rationnel est-il développable en fractions continues ? Est-il possible d'utiliser le développement en fraction continue d'un irrationnel pour l'approcher et estimer à chaque fois l'erreur commise ?

b) Deuxième phase

La deuxième phase devra permettre aux étudiants de :

- se convaincre de l'existence d'une suite convergeant vers $\sqrt{2}$;
- faire le lien entre l'égalité $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{1 + \sqrt{2}}$ et la construction d'une suite rationnelle d'approximation de $\sqrt{2}$, qui de plus ne sera autre que la suite des réduites associée au développement en fraction continue de $\sqrt{2}$;
- mettre en œuvre des procédures formelles sur les conditions de convergence (définition et théorèmes sur la convergence d'une suite, théorème du point fixe, théorème des accroissements finis).

Les questions d'introduction prévues sont : Existe-t-il une suite de rationnels qui converge vers $\sqrt{2}$? Si oui, de quel(s) moyen(s) dispose-t-on pour la construire ?

c) Troisième phase

La troisième phase de cette situation vise à amener les étudiants à encadrer $\sqrt{2}$ entre deux termes consécutifs de la suite qui lui est convergente, et dont la distance soit fixée a priori de sorte. Pour ce faire, il s'agit de

- mettre à leur disposition des relations de récurrence leur permettant de procéder à un calcul simple et rapide de ces termes,
- les amener à se rendre compte de l'efficacité de la suite construite pour encadrer $\sqrt{2}$ entre deux rationnels consécutifs dont la distance soit aussi petite que l'on veut.

La base théorique qui légitime l'existence de deux tels termes consécutifs de la suite, consiste à identifier les sous- suites paire et impaire comme adjacentes.

C'est pourquoi, le choix que nous avons fait et qui consiste en une entrée par un tableau numérique se justifie pour deux raisons :

- fournir une visualisation d'un théorème du cours, mais sans pouvoir viser la justification ;
- relier les calculs au formel.

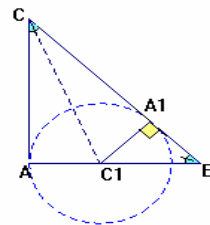
Au terme de cette phase, nous visons une idée de généralisation du procédé.

II.3 Enoncé, figures et calcul

Nous nous limitons dans ce qui suit, à exposer les calculs mathématiques, qui peuvent s'entreprendre dans les trois phases de la situation. Nous tentons pour cela d'adopter une chronologie d'introduction des calculs, suffisamment conforme au déroulement prévu dans l'analyse a priori (voir paragraphe suivant).

II.3.1 Première partie : antiphérèse de $\sqrt{2}$

Dans la figure ci-contre ABC est un triangle rectangle isocèle en A tel que $AB=AC=1$. On considère le point A_1 du segment $[BC]$ tel que $A_1C=1$. La perpendiculaire à la droite (BC) en A_1 coupe le segment $[AB]$ au point C_1 .



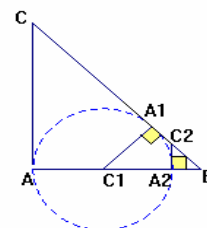
$$1. AC_1 = A_1C_1 = A_1B.$$

Comme les triangles AC_1C et A_1C_1C sont isométriques, il vient que $AC_1 = A_1C_1$.

D'autre part, A_1BC_1 est rectangle en A_1 et $C_1\widehat{B}A_1 = 45^\circ$, il suit que $C_1\widehat{B}A_1 = A_1\widehat{C}_1B$.

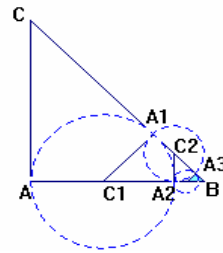
On en déduit que $AC_1 = A_1C_1 = A_1B$.

2. On désigne par A_2 le point du segment $[BC_1]$ tel que $A_2C_1 = A_1C_1$. La perpendiculaire à la droite (BC_1) en A_2 coupe le segment $[A_1B]$ au point C_2 . $A_1C_2 = A_2C_2 = A_2B$.



On procède comme dans 1. en remplaçant A par A₁, A₁ par A₂ et C₁ par C₂.

3. On réitère les mêmes configurations à l'ordre n (n ≥ 2) et on obtient à chaque fois un triangle A_nC_nB rectangle et isocèle en A_n. Le processus d'itération ne s'arrête jamais.



Si le processus d'itération s'arrête alors on obtient un triangle A_nC_nB rectangle équilatéral. Ce qui est absurde.

4. Interprétation numérique des résultats.

$$\sqrt{2} = 1 + r_1, r_1 = A_1B.$$

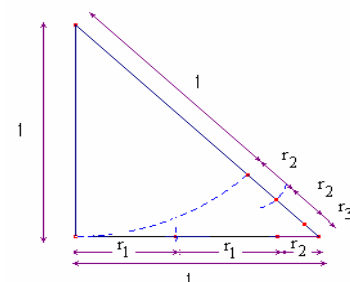
$$1 = 2r_1 + r_2, r_2 = A_2B$$

$$r_1 = 2r_2 + r_3, r_3 = A_3B.$$

$$r_2 = 2r_3 + r_4, r_4 = A_4B.$$

.....

$$r_{n-1} = 2r_n + r_{n+1}, r_{n+1} = A_{n+1}B \text{ et } n \geq 2.$$



$$\text{Il en résulte que } \sqrt{2} = 1 + \frac{1}{\frac{1}{r_1}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{r_2}{r_1}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{r_3}{r_2}}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}}}$$

On obtient la développement en fraction continue de $\sqrt{2}$.

On montre, en utilisant l'algorithme d'Euclide de recherche du PGCD de p et q (p et q deux entiers naturels non nuls et p > q), que le développement en fraction continue de $\frac{p}{q}$ est fini.

5. Il est possible de calculer u_1, u_2, u_3, u_4 , les valeurs approchées de $\sqrt{2}$, obtenus en arrêtant successivement le processus itératif à l'ordre $n=0, n=1, n=2, n=3$ et $n=4$.

$$u_0 = 1, u_1 = \frac{3}{2}, u_2 = \frac{7}{5}, u_3 = \frac{17}{12}, u_4 = \frac{41}{29}.$$

Plus précisément :

A l'ordre 0, $\sqrt{2} = 1 + r_1$, $0 \leq r_1 < 1$, il suit que $u_0 = 1$ est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à l'unité près.

A l'ordre 1, $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{r_2}{r_1}}$, $0 \leq \frac{r_2}{r_1} < 1$, il suit que $u_1 = \frac{3}{2}$ est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 5×10^{-1} près.

A l'ordre 2, $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{r_3}{r_2}}}$, $0 \leq \frac{r_3}{r_2} < 1$, il suit que $u_2 = \frac{7}{5}$ est une valeur approchée

de $\sqrt{2}$ à $1/10$ près.

Il est possible de remarquer que $u_{i+1} = 1 + \frac{1}{1 + u_i}$, $i = 0, 1, 2, 3$.

6. On désigne par u_n la valeur approchée de $\sqrt{2}$, obtenu en arrêtant le processus itératif à l'ordre n . Posons-nous la question de la convergence de la suite $(u_n)_n$ vers $\sqrt{2}$.

Pour étudier cette question, il est souhaitable de formuler d'abord une relation de récurrence entre u_n et u_{n+1} , $n \in \mathbb{N}$.

L'étude de la convergence de cette suite fera l'objet de la deuxième partie, l'égalité

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{1 + \sqrt{2}}$$

et la positivité de la suite $(u_n)_n$ permettent d'affirmer que si la suite $(u_n)_n$ converge, alors elle convergera vers $\sqrt{2}$.

II.3.2 Deuxième partie : étude de la suite $(u_n)_n$

Soit la suite $(u_n)_n$ définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{1 + u_n}$, $n \geq 0$.

1. La représentation graphique de la fonction $f: x \mapsto 1 + \frac{1}{1+x}$ ainsi que de la première bissectrice permet de construire successivement les termes de la suite $(u_n)_n$ sur l'axe des abscisses, et d'étudier graphiquement le comportement de la suite et sa limite éventuelle. Le choix est donné pour un usage de la calculatrice afin d'estimer les erreurs commises en approchant $\sqrt{2}$ par des termes successifs de la suite (dans le cas où ceci n'a pas été fait dans la première partie).

L'appui sur la résolution de l'équation $f(x) = x$ sur $[1, +\infty[$ permet de conjecturer raisonnablement que la suite converge vers $\sqrt{2}$.

2. La suite $(u_n)_n$ converge vers $\sqrt{2}$.

On se restreint dans l'étude de f à un intervalle contenant tous les termes de la suite $(u_n)_n$ et sur lequel f est dérivable et f' est majorée par un réel strictement inférieur à 1.

Un raisonnement par récurrence prouve que $u_n \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$.

D'autre part f est dérivable sur $[1, +\infty[$ et $|f'(x)| \leq \frac{1}{4}$, $x \in [1, +\infty[$. On en déduit en utilisant le théorème des accroissements finis que f est contractante sur $[1, +\infty[$. Ce qui prouve que la suite $(u_n)_n$ converge vers $\sqrt{2}$.

De plus, $|u_{n+1} - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{4^{n+1}} |u_0 - \sqrt{2}|$, $n \in \mathbb{N}$, ce qui permet d'approcher $\sqrt{2}$ par un des termes de la suite, avec une erreur fixée à priori.

II.3.3 Troisième partie : un encadrement de $\sqrt{2}$

Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = \frac{p_n}{q_n}$, avec $(p_n, q_n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ et $p_n \wedge q_n = 1$

1. $p_{n+1} = p_n + 2q_n$ et $q_{n+1} = p_n + q_n$, $n \geq 1$.

$$\text{L'égalité } \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{p_n}{q_n}} \text{ implique que } \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = \frac{p_n + 2q_n}{p_n + q_n}.$$

De plus si un entier naturel d divise $p_n + q_n$ et $p_n + 2q_n$ alors il divise q_n et par suite divise p_n . On en déduit que $p_n + q_n$ et $p_n + 2q_n$ sont premiers entre eux.

L'appui sur les formules de récurrence permet de remplir le tableau ci-dessous.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
p_n	1	3	7	17	41	99	239	577	1393	3363	
q_n	1	2	5	12	29	70	169	408	985	2370	

2. La suite $\left(\frac{p_{2n}}{q_{2n}}\right)_n$ est croissante et la suite $\left(\frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}}\right)_n$ est décroissante.

Il suffit de remarquer que f est strictement décroissante.

$$3. \frac{p_{2n}}{q_{2n}} \leq \sqrt{2} \leq \frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}}, \quad n \geq 0.$$

Il suffit de remarquer que $\left(\frac{p_{2n}}{q_{2n}}\right)_n$ et $\left(\frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}}\right)_n$ sont deux suites adjacentes et appliquer

le théorème des segments emboîtés.

4. Encadrement de $\sqrt{2}$ entre deux rationnels dont la différence est inférieure à 10^{-9} .

En utilisant le résultat établi dans 3., il suffit de choisir n_0 de sorte que

$$\frac{p_{n_0+1}}{q_{n_0+1}} - \frac{p_{n_0}}{q_{n_0}} \leq 10^{-9} \quad \text{et les deux rationnels en question sont alors } \frac{p_{n_0}}{q_{n_0}} \quad \text{et} \quad \frac{p_{n_0+1}}{q_{n_0+1}}.$$

Le calcul peut être fait via les relations de récurrence et le tableau établi dans 1.

II.3.4 Quatrième partie : généralisation

Encadrement de $\sqrt{37}$ entre deux rationnels dont la différence est inférieure à 10^{-13} .

En utilisant l'égalité $(\sqrt{37} - 6)(\sqrt{37} + 6) = 1$, il suffit de considérer la suite $(u_n)_n$ définie par $u_0 = 6$ et $u_{n+1} = 6 + \frac{1}{6 + u_n}$, $n \geq 0$ puis procéder comme pour $\sqrt{2}$, notamment pour établir les relations de récurrences utilisées pour procéder au calcul.

II.4 Déroulement prévu

Afin de procéder à l'analyse du déroulement prévu (consigne, scénario, anticipations, etc.), nous utilisons le schéma de structuration du milieu que nous rappelons ci-dessous.

Tableau 7.2 : Schéma de structuration du milieu

M0 M- d'apprentissage	E0 Elève	P0 Professeur enseignant	S0 Situation didactique
M-1 M-de référence	E-1 E-apprenant	P-1 P-en action	S-1 situation d'apprentissage
M-2 M-objectif	E-2 E-agissant	P-2 P-observateur	S-2 situation de référence
M-3 M-matériel	E-3 E-objectif		S-3 situation objective

Rappelons aussi que la fonction de ce schéma est d'étudier en les articulant les caractéristiques aussi bien du milieu du professeur que celui des étudiants.

II.4.1 Première phase

Nous exposons dans ce qui suit la consigne telle qu'elle a été communiquée aux étudiants à la suite du débat initié à l'occasion des questionnements préliminaires mentionnés ci-dessus.

On part d'un triangle T_0 rectangle isocèle dont le côté de l'angle droit est égal à 1. On retranche de l'hypoténuse le côté de l'angle droit, on obtient un segment S_1 de longueur r_1 . On construit un triangle T_1 rectangle dont l'un des côtés de l'angle droit est le segment S_1 .

On procède pour T_1 comme pour T_0 en retranchant de l'hypoténuse le segment S_1 , on obtient un triangle T_2 rectangle dont l'un des côtés de l'angle droit est le segment S_2 de longueur r_2 ; T_3 est le triangle obtenu en procédant de même pour T_2 ...

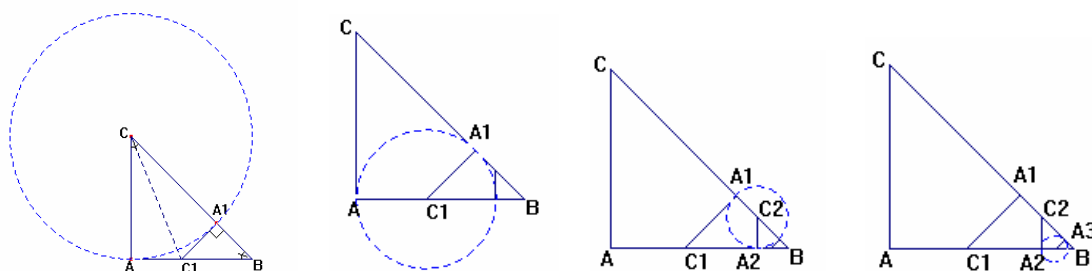


Fig. 7.1 : Antiphérèse de $\sqrt{2}$

On réitère cette construction et on obtient à chaque fois un triangle T_n rectangle dont l'un des côtés de l'angle droit est le segment S_n de longueur r_n .

Le but de l'exercice est de déterminer si le procédé de construction s'arrête et d'interpréter numériquement la réponse.

II.4.1.1 Le milieu matériel/objectif

Le milieu matériel/objectif est constitué des triangles rectangles T_n (A_nC_nB) résultant d'une procédure de construction successive. Ce milieu permet :

- de comparer A_nC_n et A_nB ,
- de formuler des conjectures concernant la nature du processus (fini ou infini),
- de comparer A_nC_n et $A_{n-1}C_n$ (nécessaire à l'interprétation numérique du processus).

En effet, M_3 est constitué des quatre figures successives du triangle rectangle ABC d'hypoténuse $\sqrt{2}$ (niveau 1, 2, 3, 4). Les connaissances de E_3 vont lui permettre :

- de dire que la longueur de l'hypoténuse du triangle T_0 est égale à $\sqrt{2}$, celui de T_1 est égale à r_1+r_2 , celui de T_2 est égale à r_2+r_3 , celui de T_3 est égale à r_3+r_4 , etc.,
- de "voir" que les triangles T_1, T_2, T_3 sont isocèles (les marques sont volontairement visualisés dans la figure),
- de se représenter successivement la construction.

S_3 est alors constitué des triangles rectangles T_0, T_1, T_2, T_3 et T_4 ainsi que de $\sqrt{2}, r_1, r_2, r_3$ et r_4 .

E_2 peut procéder de deux façons :

1. Connaissant le côté de l'angle droit et celui de l'hypoténuse des triangles T_1, T_2, T_3 , il effectue des calculs (en se basant sur Pythagore) pour essayer de montrer que les deux côtés de l'angle droit sont égaux. Cette stratégie n'est pas gagnante.
2. Utilise l'égalité des angles pour montrer l'égalité des côtés. Cette stratégie est gagnante.

S_2 est alors constitué des triangles rectangles et isocèles $T_0, T_1, T_2, T_3, \dots, T_n$ ainsi que de $\sqrt{2}, r_1, r_2, r_3, \dots, r_n$.

Il ne devrait pas être difficile pour les étudiants de vérifier que les triangles T_n sont rectangles et isocèles et de formuler la conjecture concernant la nature du processus. Par ailleurs, il n'est pas écarté qu'à ce stade, les étudiants n'éprouvent pas le besoin de comparer A_nC_n et $A_{n-1}C_n$ (cette comparaison n'étant pas nécessaire pour établir la

conjecture). On peut toutefois supposer que les marques volontairement visualisées sur la figure, les amènent à établir le lien entre $A_n C_n$ et $A_{n-1} C_n$.

Dans tous les cas, nous ne pensons pas nécessaire l'intervention du professeur, à ce niveau du milieu sauf pour lancer et orchestrer le débat, c'est-à-dire alimenter le milieu par les questions préliminaires.

II.4.1.2 Le milieu de référence

Les éléments de preuve de la conjecture sont géométriques et permettent de dire que le processus de construction ne s'arrête pas. Plus précisément, E_1 déduit que si le procédé s'arrête alors on obtient à un niveau m , un triangle rectangle équilatéral, ce qui est absurde.

A ce stade, il ne peut être prévu de débat que si les étudiants n'ont pas fait la même conjecture (ce qui est très improbable) ou n'ont pas argumenté comme analysé a priori.

Mais, M_1 est de plus finalisé par la question : Interpréter numériquement le résultat ?

C'est là que l'enseignant devra vraisemblablement apporter un constituant complémentaire au milieu (envisagé a priori) et qui consiste en un support graphique visant à la fois un retour sur la comparaison $A_n C_n$ et $A_{n-1} C_n$ et une aide à la conversion souhaitée dans le registre numérique.

E_1 établit que $\sqrt{2} = 1 + r_1$;

$$1 = 2r_1 + r_2,$$

$$r_1 = 2r_2 + r_3,$$

$$r_2 = 2r_3 + r_4, \dots,$$

$$r_{n-1} = 2r_n + r_{n+1}.$$

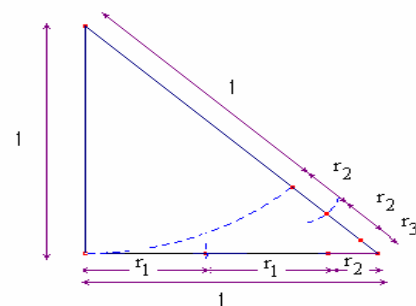


Fig. 7.2 : Antiphérese de $\sqrt{2}$ et interprétation numérique

Ce qui lui procure

- soit une écriture de $\sqrt{2}$ en fonction de r_i se prolongeant indéfiniment (partant de $\sqrt{2} = 1 + r_1$ et en remplaçant 1 en fonction de r_1 , puis r_1 en fonction de r_2 , puis r_2 en fonction de r_3 et ainsi de suite.

- soit une écriture de $\sqrt{2}$ en fraction formée d'un nombre infini de fractions. Une aide du professeur à ce calcul semble incontournable du fait même que les étudiants n'ont jamais entendu parler du développement d'un nombre en fraction continue.

La question qui se pose, quel type de débat peut soulever chacune de ces deux écritures ? Qu'est ce qui éventuellement permettra à l'étudiant de dire que tout rationnel peut être converti en une fraction continue finie ?

Or ceci est déjà une question *retournée*, pour l'étudiant il n'est pas évident que toute fraction continue finie est un rationnel. Il faut donc amener d'abord l'étudiant à formuler que toute fraction continue finie est un rationnel.

De plus, même si les moyens de validation (de la réponse à la question ci-dessus) font partie des connaissances des étudiants (Algorithme d'Euclide de recherche du PGCD de deux entiers), le professeur devra intervenir à un moment du débat pour engager les étudiants dans ce processus de validation en suscitant des exemplifications appropriées.

II.4.2 Deuxième phase

A la fin de la première phase, la question qui se pose est relative à l'existence d'une suite de rationnels convergeant vers $\sqrt{2}$. Avant de distribuer la consigne relative à cette phase, l'idée étant d'amener d'abord les étudiants à faire le lien avec le développement en fraction continue de $\sqrt{2}$, notamment en calculant ce développement à des ordres successifs 0, 1, 2, 3, 4, etc. Nous prévoyons, d'un autre côté, toutes les fins possibles, notamment celle due à une incompréhension par les étudiants du rôle de la représentation numérique de $\sqrt{2}$ en fraction continue (objet non institutionnalisé à ce niveau du cursus). Dans ces conditions, le débat est ouvert pour proposer une construction possible d'une suite convergeant vers $\sqrt{2}$.

A l'issue du débat, la consigne part de la représentation graphique de la fonction $f: x \mapsto 1 + \frac{1}{1+x}$ ainsi que la première bissectrice. On construit sur l'axe des abscisses, $u_0 = 1$, $u_1 = f(u_0)$, $u_2 = f(u_1)$, $u_3 = f(u_2)$ et $u_4 = f(u_3)$.

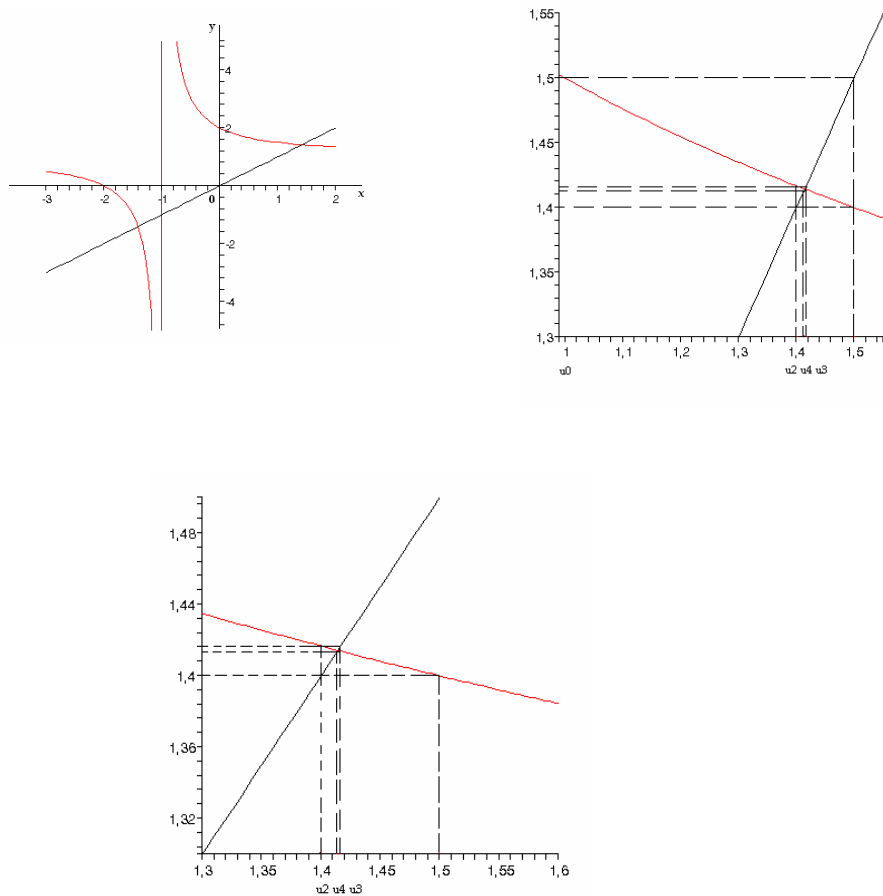


Fig 7.3 : Représentation graphique de f et construction de termes u_k

On réitère la construction des u_k de sorte que $u_k = f(u_{k-1})$, k entier naturel non nul.

Le but de l'exercice est de construire une suite de rationnels qui converge vers $\sqrt{2}$.

II.4.2.1 Le milieu matériel/objectif

Le milieu matériel/objectif doit permettre aux étudiants de formuler une conjecture concernant la convergence de la suite (u_k) ainsi construite vers $\sqrt{2}$.

Plus précisément, M_3 est constitué de l'expression algébrique de f , des premiers termes de la suite (u_k) et de la façon de les construire, ainsi que de deux représentations graphiques de la fonction f à des échelles différentes.

E_3 sait construire les u_k sur la droite des abscisses et se représenter successivement la construction. Ses connaissances vont lui permettre de dire que si la suite (u_k) , u_k ainsi construit converge alors elle convergera vers l'abscisse du point d'intersection de la

première bissectrice avec le graphique de la fonction en question (le point fixe de la fonction f sur $[1, +\infty[$).

S_3 est alors constitué de la représentation graphique de la fonction f ainsi, de son expression algébrique, des u_k , $k = 0, 1, 2, 3, 4$ ainsi que du point fixe de f .

E_2 procède sur deux étapes :

1. Détermination du nombre limite éventuel via la résolution algébrique de l'équation $f(x) = x$. Nous prévoyons qu'une minorité d'étudiants se contentent de ce résultat pour affirmer que la suite (u_k) converge vers $\sqrt{2}$. La donnée de contre-exemples, à la suite d'un débat provoqué entre les étudiants, est un moyen de contourner cette difficulté.
2. Estimation de l'erreur commise en confondant $\sqrt{2}$ respectivement à u_k , $k = 1, 2, 3, 4$, en l'occurrence en utilisant la calculatrice (une façon de contrôler la validité de cette conjecture via l'usage d'approximations successives de $\sqrt{2}$ par u_k , $k = 1, 2, 3, 4$, sachant que ces derniers oscillent de part et d'autre de $\sqrt{2}$). Une intervention du professeur est envisageable pour amener les étudiants à faire le lien avec le calcul des réduites associée au développement en fraction continue de $\sqrt{2}$ aux mêmes ordres.

S_2 est alors constitué de l'expression algébrique de la fonction f , de $\sqrt{2}$ et de la suite (u_k) .

A ce stade, les étudiants vont pouvoir conjecturer que la suite (u_k) ainsi construite, converge vers $\sqrt{2}$.

II.4.2.2 Le milieu de référence

Les étudiants sont théoriquement en possession des éléments de preuve de la conjecture. L'enjeu réside dans la mise en œuvre et un retour efficace sur ces éléments.

Les connaissances de E_1 lui permettent de constater que le recours à la technique qui part de l'étude de la monotonie de la suite et la recherche d'un minorant (ou majorant selon le résultat de la monotonie) n'est pas possible¹⁸³ (la suite (u_k) n'étant ni croissante, ni décroissante : $u_2 < u_4 < \sqrt{2} < u_3 < u_1$).

¹⁸³ Dans le cas contraire, le fait que la fonction f soit continue sur $[1, +\infty[$ et que $u_k \geq 1$, $k \in \mathbb{N}$, l'aurait amené à conclure que la suite en question converge vers le point fixe de f sur $[1, +\infty[$.

Partant du résultat de la monotonie de f (f est strictement décroissante) établi par un simple calcul algébrique, il est envisageable que E_{-1} tente de procéder à l'étude des suites (u_{2k}) et (u_{2k+1}) pour conclure la convergence de (u_k) .

De plus, les connaissances de E_{-1} devraient théoriquement contenir le théorème des accroissements finis et la capacité à manipuler des règles de majoration ou de minoration. Nous prévoyons l'intervention du professeur afin d'amener les étudiants à relier l'usage du théorème des accroissements avec les conditions d'application du théorème du point fixe.

S_{-1} comporte donc un exemple de preuve générique.

P_0 va s'appuyer sur cet exemple pour généraliser le résultat. P_0 va pouvoir institutionnaliser une procédure de l'analyse réelle : Comment démontrer qu'une suite récurrente est convergente sachant que la dérivée de la fonction associée est majorée par un réel positif strictement inférieur à 1, dans un intervalle contenant tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

De plus, il est prévu que la situation puisse amener les étudiants à construire une suite de rationnels qui converge vers un irrationnel de la forme \sqrt{d} où d est un entier naturel supérieur ou égal à 2, non carré parfait et $(d-1)$ est un carré parfait. Nous prévoyons que le professeur plonge dans le milieu l'exemple de $\sqrt{37}$ en partant de son lien avec $\sqrt{2}$, via les deux égalités $\sqrt{37} = 6 + \frac{1}{6 + \sqrt{37}}$ et $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{1 + \sqrt{2}}$.

Dans tous les cas, le retour sur le développement en fraction continue est souhaitable mais "l'impossibilité" d'y recourir ne devrait pas aller à l'encontre du but de la situation : amener les étudiants à construire la suite des réduites associée au développement en fraction continue d'un irrationnel de la forme \sqrt{d} , d entier ≥ 2 où d n'est pas un carré parfait et $(d-1)$ est un carré parfait.

II.4.3 Troisième phase

Au terme de la deuxième phase, la question qui alimentera le milieu concerne la possibilité ou non d'encadrer $\sqrt{2}$ par deux termes consécutifs de la suite, et dont la distance soit fixée a priori. Nous exposons dans ce qui suit la consigne telle qu'elle a été communiquée aux étudiants.

On dispose de la suite (x_n) de rationnels convergeant vers $\sqrt{2}$. On pose $u_n = \frac{p_n}{q_n}$, où p_n et q_n sont deux entiers naturels (q_n est non nul) premiers entre eux puis on part du tableau ci-dessous.

Tableau 7.3 : Valeurs numériques de p_n et q_n

	0	1	2	3	4
p_n	1	3	7	17	41
q_n	1	2	5	12	29

Le but de l'exercice est de déterminer, s'il est possible, un entier n_0 , de sorte que $\sqrt{2}$ soit encadré entre $\frac{p_{n_0}}{q_{n_0}}$ et $\frac{p_{n_0+1}}{q_{n_0+1}}$ et tel que $\left| \frac{p_{n_0+1}}{q_{n_0+1}} - \frac{p_{n_0}}{q_{n_0}} \right| \leq 10^{-9}$.

II.4.3.1 Le milieu matériel/objectif

L'entrée par un tableau numérique devrait permettre aux étudiants de calculer un certain nombre de termes p_n et q_n . L'usage de la calculatrice est autorisé mais pas disponible et peut être contesté du fait même que le résultat sera donné sous forme d'une écriture décimale de $\frac{p_n}{q_n}$ à une erreur donnée. L'idée étant d'amener les étudiants à effectuer le calcul des termes p_n et q_n en établissant d'abord des relations de récurrence.

Plus précisément, $M_{.3}$ est constitué de la suite (x_n) de rationnels convergeant vers $\sqrt{2}$, des inégalités $u_2 < u_4 < \sqrt{2} < u_3 < u_1$ (établies dans la phase 2), de l'écriture $u_n = \frac{p_n}{q_n}$ et du tableau numérique.

$E_{.3}$ sait qu'il est possible à l'issue de calculs trop coûteux (presque impossible à entreprendre) de poursuivre le calcul des p_n et q_n via l'égalité $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{p_n}{q_n}}$, tout en s'assurant que la fraction obtenue est irréductible et que la différence entre les deux termes consécutifs réponde à la question.

Les connaissances de $E_{.3}$ contiennent un début de calcul aboutissant à l'égalité $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = \frac{p_n + 2q_n}{p_n + q_n}$.

$S_{.3}$ est alors constitué de l'égalité $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = \frac{p_n + 2q_n}{p_n + q_n}$ et du tableau numérique.

Nous ne prévoyons pas, à ce niveau, l'intervention du professeur pour amener les étudiants à réfléchir sur les implicites liés au fait que $\sqrt{2}$ est nécessairement compris entre deux termes consécutifs de la suite, à moins que les étudiants s'engagent dans ce processus par leur propre initiative.

$E_{.2}$ sait que si la fraction $\frac{p_n + 2q_n}{p_n + q_n}$ est irréductible alors

$p_{n+1} = p_n + 2q_n$ et $q_{n+1} = p_n + q_n$ (1) (les connaissances de $E_{.2}$ contiennent forcément la définition de fraction irréductible ou de deux entiers premiers entre eux).

$E_{.2}$ conjecture, à partir de calcul faits dans le cas où $n = 1, 2, 3, 4$, que les égalités (1) constituent un procédé itératif permettant de retrouver p_n et q_n .

$S_{.2}$ est alors constitué de l'égalité $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = \frac{p_n + 2q_n}{p_n + q_n}$, de la conjecture

$p_{n+1} = p_n + 2q_n$ et $q_{n+1} = p_n + q_n$, de la conjecture relative à la possibilité d'encadrer $\sqrt{2}$ entre deux termes consécutifs de la suite, et la définition de deux entiers premiers entre eux.

II.4.3.2 Le milieu de référence

Les propriétés liées à la divisibilité dans \mathbb{N} sont des connaissances disponibles de $E_{.1}$. Une aide de l'enseignant est incontournable pour déclencher un débat : les amenant à donner des exemples, des contre-exemples et les engageant dans le processus de validation.

$E_{.1}$ termine de remplir le tableau ci-dessous et identifie l'ordre n_0 recherché ($n_0 = 15$, mais le calcul est trop rapide grâce aux formules générales retrouvées) et calcule les deux termes consécutifs en question. Or, ceci est insuffisant et ne permet pas de justifier que $\sqrt{2}$ est compris entre ces deux termes.

Il est important de noter que $E_{.3}$ utilise implicitement le fait que la suite $\left(\frac{p_{2n}}{q_{2n}}\right)_n$ (resp. $\left(\frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}}\right)_n$) est croissante (resp. décroissante), et majorée (resp. minorée) par $\sqrt{2}$ (se servant des inégalités $u_2 < u_4 < \sqrt{2} < u_3 < u_1$), pour attester de la possibilité d'encadrer $\sqrt{2}$ entre deux termes consécutifs de la suite. Mais la démonstration de ce

résultat implicite peut ne pas s'avérer nécessaire pour les étudiants : en remplissant le tableau numérique, les termes dont l'écart répond à la question sont les solutions.

Il n'est pas possible, dans la situation telle qu'elle est organisée, de prévoir un niveau où l'étudiant se pose le problème de ce résultat implicite, sauf à prévoir une intervention didactique du professeur. Dans ces conditions, les étudiants auront la charge de relier le calcul au formel.

Les connaissances de E_{-1} contiennent la procédure institutionnalisée dans la phase 2.

S_{-1} comporte donc un exemple générique de construction de suites de rationnels écrits sous forme de fractions irréductibles qui converge vers un irrationnel de la forme \sqrt{d} , d entier ≥ 2 où d n'est pas un carré parfait et $(d-1)$ est un carré parfait.

Dans la suite de la situation, les étudiants vont devoir généraliser des résultats, ce qui va être à l'origine de connaissances transmises dans S_0 à E_0 ; une question sera donc de contrôler la bonne acquisition de ces connaissances dans une autre situation ou une évaluation¹⁸⁴.

P_0 va devoir institutionnaliser une procédure de l'analyse réelle : Comment construire une suite de rationnels convergeant vers un irrationnel de la forme \sqrt{d} , d entier ≥ 2 où d n'est pas un carré parfait et $(d-1)$ est un carré parfait de sorte que :

- les termes de la suite sont écrits sous forme de fractions irréductibles ;
- il est possible d'établir une relation de récurrence entre les numérateurs (respectivement dénominateurs) successifs de deux termes consécutifs de la suite et l'utiliser pour déterminer un encadrement de \sqrt{d} entre deux termes consécutifs de cette suite, de sorte que la différence soit aussi petite que l'on veut.

Nous prévoyons amener empiriquement les étudiants, en recourant à des exemples et des contre-exemples, à prendre en compte que la construction d'une telle suite table sur l'égalité $\sqrt{d} = \alpha + \frac{1}{\sqrt{d} + \alpha}$, $\alpha = \sqrt{d-1}$ et un choix judicieux du premier terme (c'est-à-dire $\sqrt{d-1}$).

¹⁸⁴ Question que l'on se pose dans la limite de ce travail de thèse

III. Analyse a posteriori

Afin de procéder à l'analyse a posteriori de la situation expérimentée, nous allons nous appuyer sur le cours de Bloch à la XI^{ème} école d'été de didactique¹⁸⁵. Ce cours pointe en particulier les composantes d'une analyse a posteriori en confrontant le modèle proposé à la contingence :

"Après la réalisation de l'expérimentation, la discussion sur le modèle a priori comporte deux composantes, une "clinique" et une "théorique", elles-mêmes subdivisées en deux questions plus ou moins liées à la pratique [...] Le respect de ces deux composantes assure la discussion à charge et à décharge du modèle a priori, et le retour au modèle épistémologique. Il ne s'agit pas de choisir parmi les variables, celles qui exemplifient uniquement l'ingénierie projetée, mais d'avoir un retour en termes d'analyse des modèles." (Bloch, 2002, p.135)

La composante *clinique* est relative à la description et l'interprétation de la situation réelle par rapport à ce qui a été prévu a priori. La composante *théorique* interroge la consistance du modèle théorique et rend compte de ses *limites*.

En se basant sur ces deux composantes, nous avons choisi de procéder à l'analyse a posteriori suivant deux axes :

1. Un premier axe comporte une description des calculs, expérimentations et conjectures des étudiants, une analyse aussi bien des preuves des étudiants et des interventions du professeur que des difficultés rencontrées par les étudiants.
2. Un deuxième axe comporte une discussion du milieu théorique à travers un retour aussi bien sur les savoirs visés que sur les questions posées par les situations. L'analyse suivant cet axe ne peut être exhaustive sans un complément d'étude des résultats relatifs à la situation du point fixe de cosinus.

III.1 Déroulement effectif

La situation de l'antiphérèse de $\sqrt{2}$ a été expérimentée dans une classe de première année université mathématiques- informatique de la faculté des sciences de Tunis. La séance expérimentale a duré deux heures, et s'est déroulée avec 30 étudiants, invités à travailler en groupes de 3 personnes. A côté des étudiants, trois autres personnes étaient présentes : un intervenant (**I**) jouant le rôle du professeur (c'est nous qui le faisons), le

professeur de la classe en question, un seul observateur ayant la charge de noter l'intégralité des échanges des étudiants avec l'intervenant et dans la mesure du possible au sein des groupes. Afin d'être en mesure d'analyser les échanges au sein des groupes, nous avons demandé aux étudiants de noter tout ce qu'ils font avant de procéder aux échanges collectifs avec l'ensemble de la classe, ce qui nous a permis d'être en possession de traces écrites de leurs travaux. Nous n'avons pas prévu a priori que le professeur de la classe expérimentée intervienne lors des échanges, ce qu'il a fait sans que ceci influe sur le déroulement général de la séance : ses interventions sont assez pointées et isolées. Nous aurons l'occasion de les utiliser dans l'analyse qui suit.

L'intégralité de la transcription de la séance se trouve en Annexe VII. Nous signalerons certains passages des traces écrites des étudiants à chaque fois que cela est nécessaire.

III.1.1 Calculs, expérimentations et conjectures

Nous avons choisi de procéder à l'étude en trois étapes conformément au déroulement de l'expérimentation suivant les trois phases.

a) Conjectures sur la nature du processus

A la question " *Quelle différence y a-t-il entre un irrationnel et un rationnel ?*", les réponses des étudiants étaient diverses et laissent entendre une difficulté à faire fonctionner leurs connaissances concernant les réels. Les réponses telles que " [...] un rationnel est un quotient, un irrationnel n'est pas un quotient", ou " [...] un irrationnel est un quotient...mais le résultat ne peut pas être un entier", ou encore " [...] un irrationnel est la somme d'un rationnel et d'un irrationnel", viennent à l'appui des résultats de recherche concernant les conceptions des étudiants sur les nombres réels (Cf. notamment Tall et Pinto, 1996) et leur incapacité à donner du sens aux nombres rationnels et irrationnels à partir de la définition. Par ailleurs, aucun des étudiants n'a argumenté en utilisant l'écriture des nombres dans le système décimal de numération.

Il a été relativement facile aux étudiants de voir que la nature du processus dépend de la nature des triangles T_n . Ils n'ont pas trouvé de difficulté pour conclure que les triangles T_n sont rectangles et isocèles et conjecturer que le processus est infini. Les essais se sont effectués dans plusieurs registres :

- dans le registre géométrique, les étudiants ont utilisé la propriété de la somme des angles d'un triangle, les angles orientés de deux vecteurs et/ou le théorème de Pythagore ;

¹⁸⁵ Cf. Bloch (2002).

- dans le registre numérique, les étudiants ont procédé à des calculs itératifs, des côtés de l'angle droit des triangles construits, sur des cas particuliers ;
- dans le registre formel, en essayant de trouver soit un terme général de la suite de l'un des côtés de l'angle droit des triangles construits, soit une relation de récurrence entre deux termes consécutifs d'une telle suite.

Dans tous les cas, les étudiants ne se contentent pas d'utiliser le fait que deux des angles de tout triangle T_n , sont respectivement égaux à 90° et 45° . La majorité d'entre eux ont recouru au raisonnement par récurrence pour se convaincre du résultat.

Nous avons pu observer ce phénomène aussi bien au cours du déroulement collectif que dans les traces écrites des étudiants, dont ci- contre un exemple.

Pour $n = 0$, T_0 est isocèle et rectangle.

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que T_n est isocèle et rectangle. Montrons que T_{n+1} est isocèle et rectangle.

Les triangles rectangles T_n et T_{n+1} ont un angle en commun égal à 45°

\Rightarrow le troisième angle est égal à 45°

$\Rightarrow T_{n+1}$ est isocèle et rectangle

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}$, T_n est isocèle et rectangle.

Lors du débat, un seul étudiant a pointé que " [...] le processus s'arrête avec la limite...", il a été très vite arrêté par son camarade lui disant que " on ne parle pas de limite ici...". Ces déclarations n'ont pas suscité des questionnements et n'ont pas déclenché un débat. Elles nous ont permis de conforter certains travaux didactiques en analyse réelle concernant les difficultés d'acquisition de la notion de convergence d'une suite numérique (Cf. Mamona-Downs (2001), Robert, (1982)). Plus précisément, l'étudiant en question fait référence à la suite des hypoténuses des triangles rectangles construits, qui tend vers 0 à l'infini, et développe à cette occasion la conception "borne" de la notion de limite en sous entendant l'existence d'une étape de la construction, à partir de laquelle la longueur de l'hypoténuse s'annule.

Comme prévu a priori, les étudiants n'ont pas cherché, à ce stade, à comparer $A_n C_n$ et $A_{n-1} C_n$ (nécessaire à l'interprétation numérique).

b) Conjectures sur l'existence et la construction d'une suite de rationnels convergeant vers $\sqrt{2}$

La question préliminaire posée étant : existe-t-il une suite de rationnels convergeant vers $\sqrt{2}$? Les étudiants ont tout de suite cherché à en donner des exemples. Nous

retenons, en particulier " [...] $\frac{E[10^n \sqrt{2}]}{10^n}$ ", la suite proposée n'est autre que la suite des

approximations décimales par défaut de $\sqrt{2}$ (liée à l'écriture de $\sqrt{2}$ dans le système décimal de numération). Nous n'avons pas pu exploiter cet exemple à cause de l'intervention du professeur de la classe " [...] répondez-nous d'abord"¹⁸⁶. En dépit de cet imprévu, nous retenons que l'entrée des étudiants est sémantique et le contrôle théorique via le théorème de densité lui est postérieur (sous la pression du professeur de la classe).

Comme envisagé a priori, les étudiants n'ont pas cherché à retourner sur l'interprétation numérique de la première phase, qui n'a d'ailleurs pas pu être établie (nous reviendrons sur ce point plus loin, en particulier pour expliquer que ceci n'a pas joué gravement à l'encontre de nos enjeux). Ils ont exploité les représentations graphiques fournies pour conjecturer que la suite (x_k) est une suite de rationnels convergeant vers $\sqrt{2}$.

Dans les traces écrites la grande majorité des essais ne partent pas de la résolution algébrique de l'équation $f(x) = x$, mais plutôt d'un calcul successif des premiers termes de la suite dans le but de voir que ces termes sont bien rationnels. De plus, ces traces montrent que les étudiants se sont suffit au graphique pour voir que ces termes sont proches de $\sqrt{2}$. Ci-contre un des travaux génériques repéré dans les traces écrites.

$$u_0 = 1, f(u_0) = u_1 = f(1) = \frac{3}{2}$$

$$f(u_1) = u_2 = f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{7}{5},$$

$$f(u_2) = u_3 = f\left(\frac{7}{5}\right) = \frac{17}{12},$$

$$f(u_3) = u_4 = f\left(\frac{17}{12}\right)$$

$$f(u_n) = u_{n+1} \text{ avec } f : x \mapsto 1 + \frac{1}{1+x}$$

suite de rationnels \Leftrightarrow tous les termes de la suite sont des rationnels.

on montre par récurrence...

¹⁸⁶ Ce qui sous-entend de répondre à la question d'existence d'une telle suite.

Lors du débat collectif, les interventions du professeur de la classe du type " [...] *montrer que c'est une suite de [...] montrer qu'elle converge vers...*" pour remettre les choses dans le *bon ordre*, n'ont pas empêché les étudiants de faire des essais, de calculer et de formuler des conjectures.

Le professeur (I) n'a pas fait d'intervention explicite sur l'erreur commise en approchant $\sqrt{2}$ par des termes successifs de la suite considérée, les étudiants se sont contentés de remarquer que les termes successifs calculés sont de plus en plus "proches" de $\sqrt{2}$.

c) Conjectures sur la possibilité d'encadrer $\sqrt{2}$ entre deux termes consécutifs de la suite construite

Deux conjectures sont formulées concernant la question d'encadrement : la première est relative à la possibilité d'encadrer $\sqrt{2}$ entre deux termes consécutifs de la suite et la deuxième est relative au procédé de calcul de ces deux termes (cette dernière étant déjà initiée à partir de la deuxième phase, comme nous le montrerons plus loin).

Comme prévu, les étudiants partent de l'encadrement $u_2 < u_4 < \sqrt{2} < u_3 < u_1$, calculent la différence entre deux termes consécutifs de la suite aux ordres 0, 1, 2, 3 et 4 et formulent leur conjecture. Ci-contre un des exemples des travaux les plus récurrents dans les traces écrites.

$$\frac{p_0}{q_0} = 1, \frac{p_1}{q_1} = \frac{3}{2}, \frac{p_2}{q_2} = \frac{7}{5}$$

$$\frac{p_3}{q_3} = \frac{17}{12}, \frac{p_4}{q_4} = \frac{41}{29}$$

$$\left| \frac{p_0}{q_0} - \frac{p_1}{q_1} \right| = \frac{1}{2}, \left| \frac{p_2}{q_2} - \frac{p_1}{q_1} \right| = \frac{1}{10}, \dots$$

$$\frac{p_{n_0}}{q_{n_0}} < \sqrt{2} < \frac{p_{n_0+1}}{q_{n_0+1}}$$

Lors du débat collectif, les étudiants ont bien noté que le calcul sera long s'ils se contentent d'utiliser $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = \frac{p_n + 2q_n}{p_n + q_n}$ pour procéder au calcul des termes successifs.

Ils reformulent une conjecture imprévue dans la phase 2 ($p_{n+1} = p_n + 2q_n$ et $q_{n+1} = p_n + q_n$) et qui est apparue à un moment où ils cherchaient un moyen pour valider que la suite considérée est rationnelle, pour faciliter le calcul.

Nous avons pu noter, l'usage de cette conjecture dans les recherches préliminaires d'un des groupes de travail (voir ci-contre).

$$p_{n+1} = p_n + 2q_n$$

$$p_5 = 41 + 2 \times 29$$

$$q_{n+1} = p_n + q_n$$

$$q_5 = 29 + 41 \dots$$

Lors du débat collectif, un des étudiants a suggéré, d'encadrer $\sqrt{2}$ entre $\frac{E[10^n \sqrt{2}]}{10^n}$ et $\frac{E[10^{n+1} \sqrt{2}]}{10^{n+1}}$ (c'est le même étudiant qui a proposé la suite associée à ces termes).

Deux interprétations de cette intervention sont possibles : l'étudiant connaît déjà cette suite¹⁸⁷ et a choisi de faire part de ses connaissances, ou encore il tente de trouver un lien entre les termes de la suite construite et ceux qu'il propose (en remarquant que le calcul successif montre que les termes se rapprochent de plus en plus rapidement de $\sqrt{2}$). Même si elle n'est pas très plausible, nous n'écartons pas cette dernière éventualité. Dans tous les cas, nous n'avons pas pu exploiter cet exemple à cause de l'intervention du professeur de la classe "[...] tu t'éloignes de l'exercice... ce qu'on veut c'est d'utiliser cette suite".

Jusque là, les étudiants n'ont pas soulevé la question relative à la relation entre l'existence des termes successifs encadrant $\sqrt{2}$ et le comportement des sous- suites paire et impaire. Le professeur (I) n'a pas cherché à susciter cette question, préférant les laisser d'abord s'engager dans le processus de preuve.

III.1.2 Preuves des étudiants/Interventions du professeur

Nous utilisons l'organisation adoptée dans le paragraphe précédent pour faire cette étude.

a) Processus infini et preuve formelle

Lorsque les étudiants se sont engagés dans la validation relative au processus infini, ils l'ont tous fait dans le registre analytique. Cette façon de procéder n'était pas du tout envisagée dans l'analyse a priori.

¹⁸⁷ C'est un exemple que l'on retrouve dans les paragraphes qui étudient les suites d'approximations successives des réels de plusieurs manuels d'Analyse de première année université.

Aussi bien lors du débat collectif que dans la majorité des travaux identifiés dans les traces écrites, la validation n'a pas porté sur le support géométrique mais sur la suite des restes (qui se traduit ici par la suite de l'un des côtés de l'angle droit des triangles T_n).

Nous exposons ci-contre la preuve récurrente repérée dans les traces écrites et qui a été formulée aussi de la même façon lors du débat collectif.

Dans le triangle T_{n+1} , $r_{n+1} = A_{n+1}B$

$$r_{n+1} = \sqrt{2}r_n - r_n$$

$$r_{n+1} = r_n(\sqrt{2} - 1)$$

$$r_{n+1} = r_0(\sqrt{2} - 1)^{n+1}$$

Alors $\forall n \in \mathbb{N} r_n > 0$

Le professeur (I) a tenté de les déstabiliser en les poussant à interpréter le résultat en utilisant la limite de cette suite, comme en témoigne la séquence qui suit de la transcription de la séance.

I : Eh...ça y est ...

E : ...c'est strictement positif...

$$1 < \sqrt{2} < 2 \Rightarrow 0 < \sqrt{2} - 1 < 1$$

E₁ : si $n \rightarrow +\infty$ alors $r_n \rightarrow 0$

I : ...tu veux dire que ça s'arrête...

E : ...non ça s'arrête pas...à l'infini ça tend vers zéro...

Il apparaît clairement que les étudiants (intervenants), tentent d'interpréter la notion de limite d'une suite en vue d'appuyer la preuve qu'ils ont établis.

I : Expliquez...juste..." quand $n \rightarrow +\infty$, $r_n \rightarrow 0$ "...

E₁ : ...une suite convergente vers un réel l...ça ne veut pas dire qu'à partir d'un certain rang, le terme qui le suit soit égal à l...

...si on dit égal à zéro...après un certain rang $\sqrt{2} - 1 = 0$, ce qui est impossible...

I : ...laisse ça...traduit " quand $n \rightarrow +\infty$, $r_n \rightarrow 0$ "...

E : la quantité r_n est aussi petite que l'on veut, sans jamais atteindre zéro...l'itération ne s'arrête jamais...

On peut relever les connaissances mises en jeu par les étudiants lors de ces échanges :

- Connaissance relative à la notion d'égalité de deux nombres en analyse réelle : en tentant de traduire autrement la convergence de la limite vers 0, l'étudiant n'a considéré qu'un terme de la suite (qu'il a de plus confondu à une grandeur) et a formulé rhétoriquement $\forall \varepsilon > 0, |r_n - 0| < \varepsilon$. Ce qu'il a négligé vient du fait que dans ce cas précis, $|r_n - 0|$ est de plus strictement supérieur à 0. C'est ce qui nous amène à dire que cette connaissance a été énoncée d'une manière spontanée : l'étudiant n'a fait que reformulé une des interprétations souvent données à la notion de limite.
- Connaissance relative au raisonnement par l'absurde.

A l'issue de ce travail, le professeur (I) alimente le milieu d'une nouvelle question "*Pouvez-vous interpréter numériquement ce résultat ?*". Lors du débat, une seule étudiante a lancé que si le processus ne s'arrête pas alors $\sqrt{2}$ est irrationnel sans qu'aucune interprétation numérique ne soit encore établie. En renvoyant au reste de la classe la formulation de leur camarade, le professeur (I) a reçu des réponses sous formes de phrases exclamatives du type "*[...] est ce qu'il y a une relation !!!*". Face à la réticence des étudiants, le professeur (I) a préféré ne pas intervenir pour les aider (en les amenant par exemple d'abord à comparer $A_n C_n$ et $A_{n-1} C_n$) au risque de démotiver les étudiants et court-circuiter la suite de la situation. Nous notons d'ores et déjà qu'un travail préalable sur les fractions continues, antérieur à cette expérimentation, aurait dû être fait avec les étudiants avant de les plonger (les fractions continues) dans un milieu tel que celui que nous avons instauré.

Ce qui s'est passé, a été prévu dans l'analyse a priori et ne devrait pas changer la nature de la situation, l'organisation du milieu de la phase 2 prévoit justement la construction de la suite établie à partir des réduites successives associées au développement en fraction continue de $\sqrt{2}$.

b) Procédures formelles sur les conditions de convergence vers $\sqrt{2}$ de la suite construite

Le raisonnement par récurrence pour montrer que la suite retenue est bien rationnelle n'a pas posé de problème et n'a pas suscité de débat particulier, hormis le fait déjà signalé concernant la conjecture $p_{n+1} = p_n + 2q_n$ et $q_{n+1} = p_n + q_n$ (non nécessaire à ce moment).

Dans les traces écrites des travaux des étudiants, nous avons pu repérer des tentatives à entamer la preuve de la convergence de la suite construite vers $\sqrt{2}$ soit en essayant de majorer $|u_n - \sqrt{2}|$ soit en procédant à l'étude des sous- suites paire et impaire.

Toutefois, les étudiants ne se sont pas réellement investis dans la question au sein du travail de groupe (antérieur au débat collectif) et les traces écrites sont plutôt une sorte de "graffitis" rendant compte de leur réflexion en tentant de mettre en œuvre des procédures vues avant. Ci- contre deux exemples qui traduisent le recours aux procédures citées plus haut.

Exemple 1

Soit $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \sqrt{2}$ alors $u_{2n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \sqrt{2}$ et

$u_{2n+1} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \sqrt{2}$ (suites extraites)

$u_{2n} - u_{2n+1} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$

Exemple 2

$$f'(x) = -\frac{1}{1+x^2} < 0$$

$$|u_{n+1} - \sqrt{2}| = |f(u_n) - f(\sqrt{2})| = \dots$$

Lors du débat collectif et une fois la suite retenue et validée comme rationnelle, le professeur (I) pose la question " [...] et comment va-t-on faire pour montrer qu'elle est convergente vers $\sqrt{2}$ ". Les premières interprétations et validation des étudiants partent des connaissances et savoirs de la terminale. Nous retenons en particulier, la réponse " [...] on pose la suite $v_n = |u_n - \sqrt{2}|$ et on montre qu'elle est décroissante et minorée...d'ailleurs elle l'est...". Afin d'interpréter cette réponse, il suffit de rappeler que l'une des procédures fréquemment utilisées en terminale pour montrer qu'une suite est convergente, consiste à amener les étudiants à étudier d'abord une suite auxiliaire (toutes les étapes de la démonstration sont données dans les énoncés) qui soit dans la majorité des cas géométriques et dont la limite est "facile" à trouver. Par contre, ce qui nous a semblé un peu difficile à interpréter est lié à l'acharnement des étudiants à utiliser la procédure de la terminale (théorème des accroissements finis et récurrence descendante) alors même que le professeur de la classe intervenait pour leur rappeler " [...] le théorème que nous avons vu quand on a corrigé l'exercice de la série...f est contractante...donc la suite est convergente...et sa limite...". Il est peu probable que le comportement des étudiants est dû au fait qu'étant introduit à partir d'un exercice d'une des séries de travaux dirigés, le théorème du point fixe a été considéré par les étudiants, seulement comme un entraînement à une démonstration portant sur des objets généraux et l'ont retenu en tant que tel.

Du reste, il apparaît que les étudiants "mémorisent" un ensemble de procédures permettant d'étudier une suite récurrente notamment celle partant de l'étude de la monotonie de la fonction qui lui est associée. Dans ce dernier cas, la difficulté réside dans l'usage de cette monotonie (dans le cas où ceci se prête) pour étudier le comportement des sous- suites paire et impaire, comme en témoigne la séquence ci-dessus qui n'a pas pu susciter la réaction des étudiants en dépit de l'intervention du professeur de la classe (Cf. Robert, 2003 et 2004)¹⁸⁸.

Prof : ... (u_n) est une suite récurrente... $u_{n+1} = f(u_n)$...qu'est ce que vous pouvez dire de f ...

Prof (écrit au tableau) : $u_0 = 1$, $u_{n+1} = f(u_n)$...pour l'étude de cette suite, nous avons traité deux cas ...

E₂₀ : ...la fonction f est décroissante...

I : ...vous voulez donc utiliser le comportement de la fonction f , pour étudier la suite...

E : $f \circ f$ est croissante...

Prof : L'étude de $f \circ f$ nous donne des informations sur les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) ...

Pensant à la généralisation ultérieure relative à la construction d'une suite de rationnels convergeant vers \sqrt{d} où d est un entier supérieur à 1, non carré parfait et $(d-1)$ est un carré parfait, le professeur (**I**) a posé la question " [...] pouvez-vous expliquer le choix de f dans la construction d'une suite de rationnels convergeant vers $\sqrt{2}$? ". L'un des étudiants a avancé la réponse " [...] car $1 + \frac{1}{1 + \sqrt{2}} = \sqrt{2} \dots$ ", ce qui a empêché le professeur (**I**) de poursuivre son projet consistant à amener les étudiants à retourner d'abord sur les valeurs des réduites successives associée au développement en fraction continue de $\sqrt{2}$, en plongeant dans le milieu l'exemple de $\sqrt{37}$.

c) Encadrement de $\sqrt{2}$ et usage 'intuitif' du théorème des segments emboîtés

¹⁸⁸ Le souci de faire déboucher efficacement l'activité des étudiants, amène le professeur de la classe à aller à l'encontre d'une prise en charge souhaitée, par les étudiants de certaines questions relatives aux savoirs en jeu.

La validation portant sur les relations de récurrence $p_{n+1} = p_n + 2q_n$ et $q_{n+1} = p_n + q_n$, s'engage une fois l'égalité $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = \frac{p_n + 2q_n}{p_n + q_n}$ établie. De suite, l'un des étudiants avance que "[...] comme p_{n+1} et q_{n+1} sont premiers entre eux alors les autres aussi...". Le professeur (I) fait une intervention pour amener les étudiants à donner des contre-exemples, ce qui a convaincu les étudiants à conclure que le commentaire de leur camarade est insuffisant. Du reste, comme prévu a priori, l'apport mutuel du professeur (I) et des étudiants se soutiennent et permettent d'avancer progressivement dans le processus de preuve.

A la suite de ce travail, les étudiants ont automatiquement procédé au remplissage du tableau numérique et retrouvé deux termes consécutifs de la suite dont la différence est inférieure à 10^{-9} . Trouvant "normal" que $\sqrt{2}$ soit entre u_{2n} et u_{2n+1} "[...] c'est évident...ça se voit...pourquoi y aurait-il de problème", les étudiants ont utilisé un modèle de résultat déjà établi sur des exemples ; l'encadrement de $\sqrt{2}$ entre ces deux suites n'est pas problématique. L'intervention de l'enseignant (I) pour susciter une réflexion à propos de ce sujet n'a amené les étudiants qu'à reprendre une technique, utilisant le logarithme népérien et fréquemment utilisé au lycée, de recherche d'une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-9} près dans les termes de la suite.

Notons que nous avons d'ailleurs pu observer ce type de travail dans les traces écrites, dont ci-contre un exemple.

$$|u_{n+1} - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{4^{n+1}} |u_0 - \sqrt{2}|, n \in \mathbb{N}$$

$$\frac{1}{4^{n+1}} |u_0 - \sqrt{2}| \leq 10^{-9} \Rightarrow \frac{1}{4^{n+1}} \leq \frac{10^{-9}}{|u_0 - \sqrt{2}|},$$

$$(n+1) \ln\left(\frac{1}{4}\right) \leq \ln\left(\frac{10^{-9}}{|u_0 - \sqrt{2}|}\right) \dots$$

Au terme de la dernière phase, la validation n'a porté que sur les relations de récurrence $p_{n+1} = p_n + 2q_n$ et $q_{n+1} = p_n + q_n$. Les étudiants ont tablé sur l'encadrement de $\sqrt{2}$ avec comme argument l'application "intuitive" du théorème des segments emboîtés.

III.1.3 Difficultés liées à la conceptualisation d'objets 'institutionnalisés', routines des étudiants et nécessité des situations

Avant d'entamer l'analyse suivant le deuxième axe, nous avons choisi de compléter cette étude par une synthèse d'un certain nombre de paramètres liés au travail des étudiants. Cette étude est nécessaire notamment pour tenter d'expliquer dans le deuxième axe ce qui a pu aller à l'encontre des objectifs fixés à la situation.

a) Difficultés à utiliser des savoirs supposés 'appris' à l'entrée à l'université

Les difficultés qui nous ont paru comme les plus significatives concernent la capacité des étudiants à opérationnaliser leurs connaissances et les rendre mobilisables voire disponibles. Plus précisément

- Les connaissances des étudiants sur les réels ne sont pas opérationnelles : différence entre irrationnels et rationnels, organisation des rationnels/irrationnels dans l'ensemble des réels, approximation d'un nombre, recherche de l'erreur commise, et lien avec l'écriture du nombre dans le système décimal de numération, etc.
- Les étudiants sont en possession d'un amalgame de techniques de démonstration (notamment de la convergence d'une suite) dont l'usage est non maîtrisé : besoin permanent, avec l'aide du professeur de la classe, de replacer les questions dans un contexte familier pour pouvoir y répondre.

Ces difficultés viennent à l'appui au rôle qui devraient être donné à la dimension de l'*expérience de la nécessité mathématique* (Sackur et al., 2005) dans l'enseignement des objets de l'analyse réelle. Ceci sous-entend le fait que nous supposons d'emblée que les étudiants n'ont probablement pas été convoqués à travailler dans un milieu objectif approprié (notamment numérique) pour essayer, chercher, susciter des intuitions et établir le lien avec les définitions et théorèmes du cours.

b) Usage des connaissances de la terminale

Les observations montrent qu'en cas de situations problématiques, les étudiants se rabattent sur des connaissances souvent basées sur l'approche du lycée :

- Les étudiants tentent constamment d'utiliser des techniques de fin du lycée, parfois en dépit de l'intervention du professeur de la classe leur rappelant des savoirs récemment introduits.
- Les étudiants recourent constamment et avec efficacité au travail dans le registre algébrique. Ils sont par ailleurs très à l'aise dans le registre graphique (ceci ne sous-entend pas qu'ils y font appel d'une façon autonome) et ne présentent aucune difficultés de construction, de lecture ou d'interprétation graphique.

Nous pensons que cet état des lieux est une conséquence immédiate des conditions d'enseignement de l'analyse réelle en fin du lycée, prises dans l'absolu

indépendamment des phénomènes liés à la transition. Plus précisément, dans le premier chapitre, nous avons eu l'occasion de montrer que la plupart des exercices proposés dans l'environnement de l'analyse réelle au lycée :

- utilisent les mêmes techniques, techniques qui deviennent ainsi des routines pour les élèves ;
- favorisent un travail dans le registre algébrique et le registre graphique.

c) Automatisation des étudiants et/ou effet du contrat

La situation que nous avons expérimentée est volontairement déstabilisatrice et devait amener les étudiants à se détacher des règles du contrat classique.

L'entrée des étudiants dans une problématique d'essais, de recherche d'exemples et de contre-exemples, de conjectures, etc. a pris la forme d'une négociation continue depuis le début de l'expérimentation jusqu'à sa fin. Il était notamment difficile aux étudiants de produire des conjectures avant de trouver le moyen de les valider¹⁸⁹, d'autant plus que les essais et la recherche se faisaient à partir d'une figure géométrique, d'un graphique, d'un calcul numérique !

Par ailleurs, au fur et à mesure de l'avancée dans les diverses phases de la situation, le comportement des étudiants reflète une distanciation par rapport à leurs habitudes et une entrée dans le jeu de la situation.

Par contre, ce qui nous a paru assez contraignant est le manque de curiosité des étudiants et leur réticence à poser des questions malgré les éléments intéressants produits dans le débat. Nous pensons en particulier au lien non établi entre l'irrationalité de $\sqrt{2}$ et le processus d'antiphérèse, à la suite non exploitée des approximations décimales par défaut de $\sqrt{2}$ donnée par l'un des étudiants, etc.

III.2 La situation de l'antiphérèse de racine de 2 et les connaissances des étudiants

La situation s'est déroulée dans sa majorité conformément à ce qui a été prévu, il reste que certaines connaissances attendues comme étant préalables ont été difficilement mobilisées voire non exploitées ; certaines des connaissances à construire n'ont pas abouti¹⁹⁰.

¹⁸⁹ Rappelons l'exemple de la suite des côtés de la première phase.

¹⁹⁰ Pour plus de détails concernant les connaissances préalables et à construire, se reporter au tableau ci-dessus de mise en fonctionnement des connaissances ainsi qu'au chapitre 6.

Parmi les connaissances préalables exploitées dans la situation, nous relevons les connaissances relatives à des raisonnements, les connaissances relatives au calcul algébrique, les connaissances graphiques, certaines des connaissances relatives à l'approximation d'un nombre (définition de la valeur approchée d'un nombre à une erreur près, représentation successive d'un processus d'itération d'approximations successives) ainsi que la définition d'un rationnel (difficilement). Parmi celles qui n'ont pas été exploitées, nous retenons en particulier : si une suite converge vers un réel alors quelque soit l'erreur que l'on se fixe à priori, il existe un ordre à partir duquel tous les termes de la suite sont des valeurs approchées de ce réel à cette erreur près.

Aucune connaissance relative au développement d'un réel en fraction continue n'a pu être construite. Notons quand même qu'à la fin de la séance, quelques étudiants ont cherché à comprendre le lien entre les figures successives et l'irrationalité de $\sqrt{2}$. A l'issue des explications données par le professeur (I), les étudiants ont trouvé "normale" l'équivalence entre rationnel et développement en fraction continue finie.

Les connaissances relatives à la construction d'une suite convergeant vers un réel de la forme de la forme \sqrt{d} , d entier ≥ 2 où d n'est pas un carré parfait et $(d-1)$ est un carré parfait ont été abordées d'une manière assez ambiguë et portent uniquement sur le choix de la fonction associée à une suite récurrente convergeant vers le réel en question, en tenant compte, pour $\sqrt{2}$, des conditions de parité mentionnées ci-dessous. Les connaissances relatives à la précision de l'approximation ont été construites par les étudiants (en particulier, la reconnaissance de l'erreur commise prévue comme devant être une connaissance préalable), hormis celle relative à la rapidité de la convergence.

Enfin, les connaissances relatives au contrôle de la validité des résultats empiriques en les reliant aux définitions et théorèmes et réciproquement ont porté sur :

- étant donné un réel a , si pour tout réel α , il existe un ordre à partir duquel tous les termes d'une suite sont dans un intervalle centré en a et de rayon α , alors cette suite converge vers a ;
- manipuler des énoncés formels comportant ou non une suite de quantificateurs, d'inégalités, etc.

Rappelons que le travail prévu dans cette situation devait permettre aux étudiants non seulement de reprendre et compléter les connaissances sur \mathbb{R} , mais aussi de :

- relier ces connaissances aux savoirs visés (théorème de densité, définition et théorèmes de convergence de suite, théorème du point fixe, théorème des segments emboîtés, théorème des accroissements finis) ;

- de mettre à leur disposition un milieu objectif et des fondations expérimentales, de sorte qu'ils puissent questionner les savoirs institutionnels et les exemplifier, soit de leur propre initiative soit à la demande des professeurs.

D'ores et déjà, on peut avancer que la situation n'a pas généré un travail très approfondi sur la nature des nombres et l'approximation des réels non rationnels. On peut se demander s'il y a eu trop de connaissances à traiter dans une situation qui table sur plusieurs enjeux. Un travail complémentaire sur les réels sera pris en charge par la situation du point fixe de cosinus.

A la lumière des résultats que nous avons pu établir, nous complétons dans ce qui suit, l'étude suivant les deux points relatifs au travail prévu, mentionnés ci-dessus.

III.2.1 Retour sur les savoirs visés et l'institutionnalisation prévue

La situation de l'antiphérèse de $\sqrt{2}$ a permis aux étudiants, au moins d'une façon embryonnaire, d'organiser leurs connaissances sur les nombres en fonction d'un certain nombre de théorèmes fondamentaux de l'analyse réelle. Les étudiants ont pu à cette occasion, construire certaines des connaissances relatives au contrôle de la validité des résultats empiriques en les reliant aux définitions et théorèmes.

La construction d'une suite de rationnels convergeant vers $\sqrt{2}$ a permis aux étudiants d'exemplifier le théorème de densité de \mathbb{Q} dans \mathbb{R} , et d'élargir la méthode, du moins "intuitivement", à des irrationnels de la forme \sqrt{d} , d entier ≥ 2 où d n'est pas un carré parfait et $(d-1)$ est un carré parfait. Ceci en tablant sur la propriété

$$\sqrt{d} = \alpha + \frac{1}{\alpha + \sqrt{d}}, \alpha = \sqrt{d-1}.$$

La mise en oeuvre de la définition de convergence d'une suite, le théorème du point fixe et le théorème des accroissements finis a permis aux étudiants de se rendre compte que de la nécessité d'une démarche dialectique entre interprétations empiriques et outils théoriques.

Le travail des étudiants dans la troisième phase ne leur a pas permis d'établir un rapport entre les calculs et le retour sur le théorème des segments emboîtés, par le biais des sous-suites paire et impaire. Même si nous ne l'avions pas prévu dans l'analyse a priori en raison de notre volonté à organiser les phases de la situation de sorte à confronter les étudiants à ce théorème précis, il leur était possible de recourir simplement au théorème des valeurs intermédiaires pour établir un rapport entre les calculs et la validation théorique. Plus précisément, la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$ étant

continue sur \mathbb{R} , il suffit de vérifier que le produit des images des deux termes conjecturés est négatif. La mise en œuvre du théorème des valeurs intermédiaires permet de conclure que $\sqrt{2}$ est compris entre ces deux termes. Le milieu matériel de la situation n'a pas été organisé (par exemple via la donnée de la représentation graphique de g) de façon à amener les étudiants à exploiter ce théorème ; ce que nous avons suggéré vient à l'appui des difficultés des étudiants à recourir d'une façon autonome au graphique et à l'exploiter. L'organisation d'un milieu objectif et des fondations expérimentales est incontournable pour les amener progressivement à y recourir.

III.2.2 Retour sur les questions posées par la situation

En dépit des carences relatives à un travail sur les nombres, la situation de l'antiphérèse de $\sqrt{2}$ a organisé la confrontation des étudiants aux questions de l'existence et de la construction des objets de l'analyse réelle (les nombres, mais aussi la convergence des suites, la densité de \mathbb{Q} dans \mathbb{R} , le point fixe, etc.), du rôle de la dimension expérimentale et des preuves pragmatiques dans l'acquisition des savoirs institutionnalisés.

a) Différence entre existence formelle des objets et existence pragmatique

Dans l'organisation générale de l'ingénierie, le projet relatif à l'étude de l'existence des objets de l'analyse réelle part de la pertinence de recourir à des instanciations appropriées, pour ensuite analyser le travail sur le plan théorique et réciproquement. Ces instanciations devant prendre appui sur les questions d'approximations successives de nombres réels.

Dans le cadre de la situation de l'antiphérèse de $\sqrt{2}$, nous ne pouvons conclure que de manière relative sur le degré de réalisation du projet. Nous pensons toutefois qu'un premier contact des étudiants avec les approximations successives d'un nombre dans une problématique d'existence a pu s'opérer.

La différence entre l'existence formelle d'un objet et son existence pragmatique est forcément une source de difficultés pour les étudiants ; leur travail dans le cadre de la situation leur a permis de prendre conscience que les objets de l'analyse réelle peuvent être accessibles. L'échec réside dans l'incapacité de la situation à amener les étudiants à se baser sur l'existence pragmatique de $\sqrt{2}$ entre deux termes consécutifs de la suite des approximations, pour revenir sur son existence formelle entre ces deux termes.

b) Confrontation des étudiants à un milieu double

Dans le cadre de la situation de l'antiphérèse de $\sqrt{2}$, le milieu objectif est la base de la phase expérimentale et doit permettre aux étudiants de travailler sur des objets spécifiques, avec des preuves pragmatiques et leur offrir l'opportunité de conjecturer, rechercher, calculer, etc.

Ce milieu a pu fonctionner comme prévu sauf que

- le contrôle sémantique n'est pas toujours investi ; à ce niveau du cursus le sémantique n'est pas toujours opératoire ; il faut accepter de s'en dessaisir ;
- les étudiants tentent systématiquement un contrôle syntaxique même s'il ne réussit pas : le contrat du supérieur rend difficile l'entrée des étudiants dans des validations pragmatiques (Nardi et Iannona, 2005).

Le milieu de référence devait permettre aux étudiants de produire des preuves formelles tout en veillant à la mise en défaut de l'application *automatique* des définitions, théorèmes et formalisme du cours et de les relier aux connaissances sur les nombres.

Deux contraintes ont joué contre un fonctionnement efficace de ce milieu :

- le niveau algorithmique s'avère "incontrôlable" pour les étudiants et dans le travail du professeur,
- l'échec du contrôle syntaxique dans la phase 3.

Hormis pour les étapes mentionnées ci-dessus, les étudiants ont toujours tenté d'investir un contrôle mixte.

IV. Conclusion

La situation de l'antiphérèse de $\sqrt{2}$ met en jeu des questions qui ne seraient même pas l'objet de situations didactiques à ce niveau : irrationalité, approximations, construction, etc. En dépit des insuffisances relevées, cette situation oblige les étudiants à confronter le fonctionnement du formalisme sur des objets et avec des questions spécifiques.

1. Retour sur les objectifs de la situation : une étude en termes des enjeux sur lesquels nous avons tablé

Le premier objectif que l'on a fixé à la situation table sur un élargissement du champ d'expérience des étudiants relativement à la nature des nombres réels et à leurs manifestations en partant du développement en fraction continue de $\sqrt{2}$.

Comme nous l'avons précisé plus haut, la situation n'a permis qu'un travail exploratoire sur la nature des nombres et l'approximation des réels non rationnels : certaines connaissances liées aux nombres, supposées préalables n'ont pas été exploitées, d'autres à construire n'ont pas abouti¹⁹¹.

Nous pensons que cette situation est essentiellement due à deux facteurs :

- Les connaissances sur les réels font partie du milieu, mais dans cette situation le but désigné aux étudiants n'est pas la construction de la densité de \mathbb{Q} dans \mathbb{R} . Donc, tout naturellement, les étudiants se sont focalisés sur l'objectif visible de la situation, et les connaissances sur les réels ont été construites de façon annexe.
- Une grande quantité de connaissances sur les nombres est gérée par une seule situation : représentation numérique en utilisant les fractions continues, lien avec la rationalité et/ou l'irrationalité, convergence d'une suite et interprétation en terme d'approximations successives d'un nombre, la notion de rapidité de convergence, etc.

La situation a mis à la disposition des étudiants un milieu objectif et des fondations expérimentales qui leur ont permis de procéder dans la majorité des cas à un travail heuristique, de formuler des preuves pragmatiques en exploitant des connaissances graphiques, des connaissances liées au calcul algébriques, certaines des connaissances relatives à l'approximation d'un nombre et des connaissances sur le raisonnement relatives au rôle des exemples et des contre-exemples dans les phases de recherche et de conjectures.

L'entrée dans un processus de preuves mixtes comportant des allers/retours entre preuves pragmatiques et preuves formelles, table essentiellement sur la possibilité de rendre accessible les objets de l'analyse réelle, à travers le recours à des approximations successives, ainsi que sur la consistance du milieu objectif. Dans le cadre de la situation de l'antiphérèse de $\sqrt{2}$, nous pouvons affirmer qu'un retour efficace sur le théorème de densité (existence et construction d'une suite rationnelle d'approximation d'un réel) s'est opéré. Le retour sur le théorème du point fixe du point de vue de l'existence et la construction d'une suite rationnelle d'approximations du point fixe, n'est pas concluant. Du reste, les étudiants ont pu le mettre en œuvre ainsi que le théorème des accroissements finis et la définition de convergence d'une suite non sans une intervention (même partielle mais souhaitée) du professeur qui les a amené en particulier, à se rendre compte que cette mise en œuvre tient dans l'efficacité du lien que l'on peut établir entre les interprétations empiriques et ces savoirs.

¹⁹¹ Nous ne reviendrons pas sur ces connaissances, voir plus haut pour plus de détails.

L'un des enjeux relatif à la construction de la situation, et visant l'institutionnalisation, est de trouver le moyen pour que la situation traite d'exemples génériques, dans le sens où le mode de traitement spécifique répond à la question générale traitée. Il apparaît que le temps didactique de mise en œuvre d'une telle situation en classe ne peut se réduire à une seule séance, et ce si l'on veut

- exploiter efficacement l'exemple traité dans un but de généralisation ;
- contrôler véritablement certaines des connaissances acquises par les étudiants.

2. Retour sur le milieu théorique (situation fondamentale épistémologique) et les hypothèses de la recherche

Au terme des résultats relatifs à l'expérimentation de la situation de l'antiphérèse de $\sqrt{2}$, il est prématuré d'entamer une discussion fondée concernant les situations fondamentales de l'analyse réelle et retourner sur les hypothèses de la recherche.

Sur la mise en œuvre du modèle, il nous semble raisonnable d'affirmer deux points fondamentaux que nous prendrons en compte dans l'étude de la situation du point fixe de cosinus :

- Approfondissement des connaissances sur les nombres : le but étant que le savoir sur la structure de \mathbb{R} devienne disponible et opérationnel. Il est clair que ceci n'est possible sans un travail complémentaire sur la différence entre rationnels /irrationnels, approximations des réels/limites, précisions d'approximations, rapidité de convergence, etc.
- Fonctionnement des milieux objectif et de référence : le but étant d'amener les étudiants à asseoir leurs activités en analyse réelle sur des fondations expérimentales efficaces, de sorte qu'ils puissent questionner, revenir sur les savoirs institutionnels et les exemplifier, soit de leur propre initiative soit à la demande des professeurs. La plupart des choix constitutifs du milieu objectif s'avère efficace. Il reste que les allers/retours entre preuves pragmatiques et preuves formelles (du point de vue de notre enjeu, c'est-à-dire de l'existence des objets et de la possibilité de les rendre accessible) ne sont pas concluant pour le théorème du point fixe, le théorème des segments emboîtés et dans une certaine mesure (même si on n'a pas prévu un milieu approprié), le théorème des valeurs intermédiaires.

Insistons sur le changement épistémologique que produit la situation dans la façon des étudiants de concevoir les nombres comme $\sqrt{2}$. Pour certains étudiants, $\sqrt{2}$ avait

le statut d'*icône*¹⁹² : un signe que l'on met pour désigner une chose inconnue. Le travail dans la situation a permis aux étudiants d'envisager $\sqrt{2}$ avec son statut d'objet mathématique, relié à d'autres objets et incorporant des règles — ce que Pierce nomme un symbole/argument. C'est ce passage crucial de $\sqrt{2}$ (et des irrationnels, en tous cas du même type) au statut d'argument qu'a produit la situation d'antiphérèse.

¹⁹² Au sens de Pierce, Cf. Bloch (2008).

CHAPITRE 8

La situation du point fixe de cosinus

I. Introduction : Approfondir la connaissance des nombres réels

Comme l'ont montré les résultats de l'expérimentation de la situation de l'antiphérèse de $\sqrt{2}$, une seule situation ne peut prendre en charge l'ensemble des questions et savoirs visés. En vue d'être en mesure de satisfaire les objectifs fixés à l'ingénierie, l'un des axes de la recherche est le souci d'organiser des situations complémentaires pour balayer au mieux le champ des savoirs surtout dans un contexte de savoirs complexes où chaque situation ne balaye qu'une partie du champ.

Dans le cadre des objectifs fixés à l'ingénierie¹⁹³, nous retenons ici que la situation du point fixe de cosinus vise à permettre aux étudiants :

- un travail plus approfondi sur les nombres : différence entre rationnels /irrationnels (irrationnels algébriques, irrationnels transcendants), approximations des réels/limites, précisions d'approximations, rapidité de convergence, etc.,
- de prendre appui sur le contenu conceptuel aussi bien du théorème des valeurs intermédiaires que du théorème du point fixe (relatif aux fonctions contractantes), par le biais d'instanciations appropriées,
- de mettre en œuvre et revenir sur un ensemble de savoirs de l'analyse réelle : définition et théorèmes de convergence d'une suite, le théorème des accroissements finis et la formule de Taylor.

Pour des raisons de commodité¹⁹⁴, nous procédons ici à la construction du milieu expérimental du point fixe de cosinus en adoptant la même démarche que la situation de l'antiphérèse de $\sqrt{2}$.

L'institutionnalisation prévue concerne des procédures de l'analyse réelle et l'usage de la méthode de Newton pour la construction d'une suite qui converge vers l'unique solution α d'une équation de la forme $g(x) = 0$ (g est une fonction à variable réelle), non résoluble par les techniques algébriques à disposition¹⁹⁵ et telle que α soit un irrationnel transcendant.

Comme pour la situation de l'antiphérèse de $\sqrt{2}$, nous cherchons à construire une situation à dimension a-didactique, nous prévoyons à cette occasion que le milieu puisse porter des questions telles que :

¹⁹³ Cf. Chapitre 5.

¹⁹⁴ Et afin de clarifier l'organisation générale de l'ingénierie.

¹⁹⁵ Nous présentons plus loin les paramètres de généralisation que nous retenons.

- Est-il possible de trouver à chaque fois, la solution "exacte" (en terme de représentation algébrique) d'une équation quand elle en possède une ?
- Y a-t-il un moyen autre que celui de la méthode de dichotomie pour approcher la solution d'une équation non résoluble par les techniques algébriques à disposition ?
- Comment peut-on juger de l'efficacité d'une méthode d'approximation par rapport à une autre ?

II. Analyse a priori

A la lumière de l'organisation adoptée dans le chapitre précédent, nous organisons cette étude sur trois niveaux.

II.1. Connaissances et savoirs requis et visés

L'étude des différents niveaux de mise en fonctionnement des savoirs et connaissances spécifiques à la situation du point fixe de cosinus, permet en particulier

- d'identifier ceux que nous reprenons (par rapport à la situation de l'antiphérèse de $\sqrt{2}$), et de pointer le souci qui est le notre de les faire fonctionner au même niveau ;
- de préciser ceux qui ne sont propres qu'à la situation du point fixe de cosinus.

Connaissances et savoirs requis	Niveau de fonctionnement
Si f est une fonction continue et strictement croissante (respectivement décroissante) sur $[a, b]$, alors $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$ (respectivement $f([a, b]) = [f(b), f(a)]$).	Mobilisable
Soit une fonction continue $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$. Alors, il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) = x_0$.	Mobilisable
Définition d'une fonction bijective.	Mobilisable
Si f est une fonction strictement monotone sur un intervalle I de \mathbb{R} , alors f est une bijection de I sur $f(I)$.	Mobilisable
Représentation graphique de fonctions usuelles.	Technique
Construction des termes d'une suite récurrente (de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$), connaissant la représentation graphique de la fonction qui lui est associée.	Technique
Le réel a est une valeur approchée du réel x à 10^{-n} ($n > 0$) près si, $ x - a < 10^{-n}$.	Mobilisable
Méthode de dichotomie pour encadrer un réel.	Mobilisable
Soit $f : I \rightarrow I$ et $(u_n)_n$ une suite définie par $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. Si f est continue dans I et $(u_n)_n$ converge vers L dans I , alors $f(L) = L$.	Mobilisable

Règles de majorations, minorations.	Disponible
Définition d'une suite majorée (respectivement minorée).	Mobilisable
Définition d'une suite croissante (respectivement décroissante).	Mobilisable
Principe de récurrence.	Mobilisable
Théorème de la convergence monotone.	Mobilisable
Une suite réelle $(u_n)_n$ est convergente vers L, si et seulement si les sous-suites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ convergent vers L.	Disponible
Théorème des accroissements finis.	Disponible
Equation de la tangente à une courbe. Détermination de l'abscisse du point d'intersection entre deux courbes.	Technique
Formule de Taylor.	Disponible
Calcul numérique.	Technique

Comme nous l'avons mentionné plus haut les savoirs essentiellement visés sont le théorème des valeurs intermédiaires :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I de \mathbb{R} et $a, b \in I$. Pour tout réel t compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un réel c compris entre a et b tel que $t = f(c)$.

et le théorème du point fixe :

Soit une fonction $f : I \rightarrow I$, I un intervalle fermé borné de \mathbb{R} .

Si f est strictement contractante sur I ($\exists k, 0 < k < 1, \forall x \text{ et } y \in I, |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$), alors l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution $\alpha \in I$.

De plus, toute suite $(u_n)_n$ de I définie par $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, converge vers α .

L'organisation générale de la situation part de l'idée d'une instanciation de ces théorèmes d'existence via la recherche d'une suite d'approximation de la solution d'une équation, de sorte que la construction d'une telle suite :

- soit progressive et permette aux étudiants de travailler sur la différence entre rationnels /irrationnels (irrationnels algébriques, irrationnels transcendants), approximations des réels/limites, précisions d'approximations, la notion de rapidité de convergence,
- soit une méthode généralisable à d'autres irrationnels, solutions d'équations de la forme $g(x) = 0$.

Ces considérations nous ont amenée à guider l'introduction par un travail sur l'irrationalité et en particulier les nombres transcendants. Bien que les étudiants n'ont

pas de connaissances précises sur les nombres transcendants et leur lien avec les nombres algébriques (ce savoir ne fait pas partie des intitulés du programme de première année d'université), nous entendons que la situation favorise une réflexion sur ces nombres et sur la façon de les approcher.

La méthode d'approximation que nous avons choisie est celle de Newton, issue d'une idée de ce dernier pour la résolution d'une équation algébrique du troisième degré. Elle est fondée sur l'idée de l'interprétation graphique d'une courbe approchée par sa tangente. Rappelons qu'à cette époque, l'énoncé du procédé était empirique. Aujourd'hui, on généralise le procédé de Newton à toute équation de la forme $g(x) = 0$, où g est une fonction de classe C^2 sur un intervalle fermé de \mathbb{R} , et telle que l'équation $g(x) = 0$ possède une unique solution simple α ($g(\alpha) = 0$ et $g'(\alpha) \neq 0$) à l'intérieur de cet intervalle. La convergence vers α de la suite construite par la méthode de Newton résulte d'un "bon choix" de son premier terme¹⁹⁶.

II.2. Organisation de la situation et ses variables didactiques

La situation du point fixe de cosinus doit être construite de façon à prendre en considération les objectifs de l'ingénierie et les insuffisances relevées dans la situation de l'antiphérèse de $\sqrt{2}$.

II.2.1. Variables didactiques

Comme pour la situation de l'antiphérèse, nous procédons à l'étude détaillée du choix des valeurs des variables micro-didactiques en incorporant l'introduction de quelques valeurs des variables macro-didactiques de la transition.

a) Nature du nombre

Le nombre choisi dans la situation expérimentale est transcendant et les étudiants n'en connaissent pas la forme : il s'agit du point fixe de cosinus. Ce choix devra amener les étudiants à se poser des questions aussi bien sur les nombres réels, ainsi que sur l'existence et la "constructibilité"¹⁹⁷ des objets de l'analyse réelle que nous visons (le point fixe/la valeur intermédiaire).

En s'appuyant sur le graphique, il est possible de conjecturer l'existence d'une solution de l'équation $\cos x = x$. La validation graphique ne suffit certes pas mais

¹⁹⁶ Cf. Chapitre 2, pour plus de détails concernant les conditions d'application d'une telle méthode.

¹⁹⁷ Non pas dans l'acception des mathématiques constructives, mais un sens d'accessibilité, comme nous l'avons déjà pointé dans les chapitres précédents.

appelle le travail dans un autre registre, ce qui sous-entend des conversions entre registres :

- la conversion dans le registre analytique permet de donner la preuve de l'existence d'un tel irrationnel ;
- la conversion dans le registre algébrique permet de donner la forme d'une suite qui converge vers le point fixe de cosinus, constituant une première approximation de ce nombre.

b) Type d'équation

Les étudiants ne sont pas en possession d'outils algébriques de résolution de l'équation choisie. L'exploitation du graphique doit permettre la formulation de conjectures relatives à l'existence de solution(s) de l'équation.

Dans le cadre de cette situation, l'équation doit admettre une seule solution : l'idée est de construire une suite d'approximations successives de cette solution.

Une approche empirique de cette solution par le calcul peut se faire en utilisant les connaissances des étudiants relatives à la méthode de dichotomie. Ceci suppose

- la conversion dans le registre analytique pour la preuve de la conjecture en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires ;
- la gestion du calcul, si l'on opte pour la recherche d'une valeur approchée à une erreur de l'ordre de 10^{-n} (n très grand).

Nous tablons sur ce dernier point pour amener les étudiants à se poser des questions de rapidité de convergence et de l'existence d'une "méthode" plus rapide pour approcher la solution de l'équation.

c) Suite explicite ou récurrente

La situation du point fixe de cosinus met en jeu deux suites. Dans les deux cas, les suites sont récurrentes et participent de ce fait à la prise en compte de trois paramètres :

- se donner un moyen de représentation graphique claire et productive, afin de conjecturer ses propriétés, le comportement des suites paire et impaire, sa limite éventuelle, etc. ;
- être en mesure de prendre appui sur le théorème du point fixe,
- procéder à des conversions dans tous les autres registres, soit pour appuyer la conjecture, soit pour procéder à la preuve formelle (en faisant un choix efficace dans les outils théoriques de validation).

d) Suite

Du point de vue de l'enjeu de notre ingénierie, les situations de l'antiphérèse de $\sqrt{2}$ et celle du point fixe doivent être complémentaires. Ceci suppose en particulier, que la situation du point fixe n'a pas la charge de revenir sur les suites rationnelles. En effet, le point fixe de cosinus étant défini implicitement, la priorité est de l'approcher par une suite explicite de nombres.

Nous prévoyons que le calcul numérique des termes des suites en jeu, se fasse à l'aide de la calculatrice, ceci permettra aux étudiants en particulier, de se rendre compte des limites de cet outil dès que se pose les problèmes d'arrondi.

e) Suite croissante, décroissante, non monotone

De la même façon que pour la situation de l'antiphérèse de $\sqrt{2}$, les suites en jeu ne sont ni croissantes, ni décroissantes. Ces choix devront permettre :

- la mise en oeuvre de la définition et théorèmes de convergence d'une suite, le théorème des accroissements finis, la formule de Taylor ;
- des validations graphiques, numériques, algébriques ;
- une évolution progressive du degré de formalisation.

f) Types d'approximation et d'erreur sollicités

Le choix des valeurs de ces variables est un enjeu majeur de la situation : la dévolution qui à l'origine prend appui sur l'incapacité des étudiants à expliciter le nombre visé, va progressivement déboucher vers la question de la rapidité de la convergence.

Le nombre réel mis en jeu est transcendant et les étudiants n'en connaissent pas la forme. Ils vont être confrontés à deux méthodes d'approximations successives de ce nombre de sorte que l'efficacité de la méthode tienne en la possibilité de trouver des valeurs approchées à une erreur aussi petite que l'on veut.

Le choix a donc porté sur le calcul de valeurs approchées à des erreurs suffisamment petites, de sorte que le calcul soit économiquement impossible par l'une des deux méthodes et possible par l'autre.

g) Méthode d'approximation

Nous avons porté notre choix sur la méthode de Newton dont le principe est à la fois simple et efficace (la convergence est souvent rapide et c'est le cas pour la suite d'approximation du point fixe de cosinus). La discussion de la qualité de

l'approximation du point fixe de cosinus, devra être initiée progressivement en partant de la méthode de dichotomie, puis en utilisant la suite récurrente définie par la fonction cosinus, pour être enfin en mesure de motiver l'introduction de la méthode de Newton. La vitesse de convergence de la suite récurrente définie par la fonction cosinus est de type géométrique, celle construite à partir de la méthode de Newton dans la situation du point fixe de cosinus est quadratique donc plus rapide¹⁹⁸.

Dans le cadre de cette situation, l'évolution du degré de généralisation est progressive : nous visons un premier contact des conditions de convergence d'une suite d'approximations de l'unique solution d'équations de la forme $f(x) = 0$ dans un intervalle fermé borné de \mathbb{R} , construite à partir de la méthode de Newton, notamment en s'appuyant sur le graphique, et sur un choix "judicieux" du premier terme de la suite.

Au terme de cette étude, nous pouvons avancer que les valeurs des variables micro-didactiques ainsi fixées contribuent à la prise en compte d'une évolution progressive des valeurs des variables macro-didactiques. Nous rappelons à cette occasion sans le reprendre, le tableau synthétisant cette prise en compte dans le cadre de la situation de l'antiphérèse de $\sqrt{2}$.

II.2.2 Trois phases pour organiser la situation

Nous avons choisi d'organiser la situation sur trois phases. De plus, nous avons prévu d'alimenter le milieu de chacune des phases de questions sur lesquels pourraient se fonder le débat.

a) Première phase

La première phase est une phase de dévolution du problème général : montrer que la fonction cosinus possède un point fixe, la fonction cosinus n'étant pas définie par un procédé algébrique connu, la question se pose de la manière de calculer, approcher son point fixe.

Les étudiants sont appelés à

- conjecturer et prouver l'existence d'un unique point fixe de cosinus sur \mathbb{R} ;
- puis, à se baser sur le registre graphique (registre heuristique), pour encadrer cette solution entre deux rationnels ;
- enfin, à mettre en œuvre la méthode de dichotomie d'approximation de la solution.

¹⁹⁸ Cf. Chapitre 2, pour plus de détails.

Un débat en amont et en aval des investigations pourrait prendre appui sur des questions du type :

Est-il possible de trouver à chaque fois, la solution "exacte" d'une équation quand elle en possède une ? Comment peut-on qualifier la méthode de dichotomie par rapport à l'approximation d'un réel dont on ne connaît pas la forme ?

b) Deuxième phase

La deuxième phase permet de se convaincre de l'existence d'une suite convergeant vers le point fixe de cosinus et de mettre en œuvre des procédures formelles sur les conditions de convergence (définition et théorèmes de convergence d'une suite, théorème du point fixe, théorème des accroissements finis).

Au terme de cette phase, l'étudiant est appelé à se rendre compte que :

- la méthode d'approximation par la suite construite est coûteuse car trop longue, si l'on veut *affiner* l'erreur commise ;
- l'approximation de la solution par la suite récurrente du type $(u_{n+1} = \cos u_n)$ n'est pas une méthode performante du point de vue de la "rapidité" de la convergence de cette suite et donc de la qualité de l'approximation.

Il est prévu d'assurer l'entrée dans cette phase par la question : Y a-t-il un moyen autre que celui de la méthode de dichotomie pour approcher la solution d'une équation non résoluble par les techniques algébriques à disposition ?

Par ailleurs, un premier contact de la question de la fiabilité de la méthode du point de vue de la rapidité de la convergence devrait être entrepris au terme de cette phase.

c) Troisième phase

Au terme de la deuxième phase, la question se pose de la pertinence d'une méthode d'approximation d'un nombre transcendant par rapport à une autre.

La troisième phase vise à amener les étudiants à approcher la solution via la construction d'une suite convergeant *rapidement* vers cette solution en contrôlant l'erreur commise : approximation du point fixe via la méthode de Newton, donnant *rapidement* des valeurs de *plus en plus approchées* de ce réel.

Le travail des étudiants au cours de cette phase devra leur permettre

- un premier contact avec les idées qui fondent la méthode de Newton : rôle de la tangente, rôle du premier terme, conditions sur la fonction ;

- faire le lien entre les conditions de convergence et les outils de preuve de la convergence (en particulier l'usage de la formule de Taylor et ce que cet usage nécessite comme hypothèses aussi bien explicites qu'implicites et propres aux conditions de convergence de la suite).

C'est au terme de cette phase que les connaissances des étudiants vont leur permettre l'acquisition d'une méthode de l'analyse réelle, celle de Newton, d'approximation de solutions d'équation du type $f(x) = x$ (ou $g(x) = 0$), dans le cas où cette équation n'est pas résoluble par l'usage des techniques algébriques à disposition et sous certaines conditions. Ils seront de plus outillés de procédures de l'analyse réelle relatives aux moyens d'investigations et de preuves et leur lien réciproque.

II.3. Énoncé, figures et calcul

Nous nous bornons dans ce qui suit, à exposer les calculs mathématiques, qui peuvent s'entreprendre dans les trois phases de la situation, en adoptant une chronologie d'introduction des calculs, suffisamment conforme au déroulement prévu dans l'analyse a priori.

II.3.1 Première partie : existence du point fixe de cosinus

1. La fonction cosinus admet un unique point fixe $0 < \alpha < 1$.

Comme la fonction $g : x \mapsto \cos x - x$ est strictement décroissante sur \mathbb{R} , il vient que g est une bijection de \mathbb{R} sur $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Il en résulte que l'équation $\cos x - x = 0$ possède une unique solution α dans \mathbb{R} qui est aussi l'unique point fixe α de la fonction cosinus sur \mathbb{R} . D'autre part, $g(0) \cdot g(1) < 0$, on en déduit que $0 < \alpha < 1$.

2. Usage de la méthode de dichotomie.

En appliquant la méthode de dichotomie n fois en partant de l'intervalle $[0, 1]$, on aboutit à une valeur approchée de α à $\frac{1}{2^n}$ près. En procédant de proche en proche on aboutit à l'approximation souhaitée.

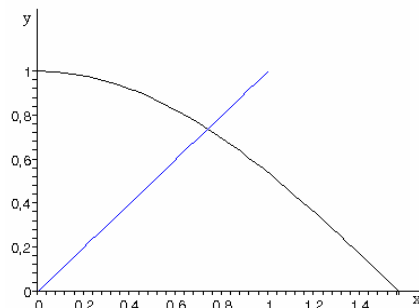
On peut aussi procéder comme suit :

- on subdivise l'intervalle $[0, 1]$ en pas d'amplitudes 10^{-1} et on applique le théorème des valeurs intermédiaires,
- on subdivise l'intervalle contenant α en intervalles d'amplitudes 10^{-1} et on applique le théorème des valeurs intermédiaires.

On obtient $0.73 < \alpha < 0.74$.

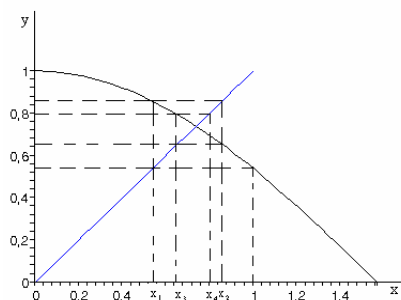
II.3.2 Deuxième partie : une première approximation du point fixe de cosinus

1. La représentation graphique de la fonction $f : x \mapsto \cos x$ ainsi que de la première bissectrice permet de construire successivement les termes de la suite $(x_n)_n$ ($x_{n+1} = f(x_n)$ et $x_0 = 1$) sur l'axe des abscisses, et d'étudier graphiquement le comportement de la suite et sa limite éventuelle.



En particulier, la construction des termes successifs de la suite $(x_n)_n$ permet de vérifier que $x_1 < x_3 < \alpha < x_4 < x_2$.

Le recours au calcul numérique permet d'estimer l'erreur commise en approchant α par les termes successifs de la suite.



L'appui sur le graphique et l'estimation de l'erreur commise en approchant α par les termes successifs de la suite permettent de conjecturer raisonnablement que la suite $(x_n)_n$ définie par $x_0 = 1$ et $x_{n+1} = \cos x_n$, $n \geq 0$.

2. La suite $(x_n)_n$ converge vers α .

On se restreint dans l'étude de f à un intervalle contenant tous les termes de la suite $(x_n)_n$ à partir d'un certain rang, et sur lequel f est dérivable et f' est majorée par un réel strictement inférieur à 1.

Un raisonnement par récurrence prouve que $0 \leq x_n \leq 1$, $n \geq 0$.

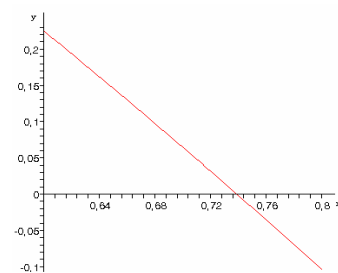
D'autre part, f est dérivable sur $[0,1]$ et $|f'(x)| \leq \sin 1 < 1$, $x \in [0,1]$. On en déduit, en utilisant le théorème des accroissements finis que f est strictement contractante sur

$[0,1]$. Ce qui prouve que la suite $(x_n)_n$ converge vers l'unique point fixe de f sur $[0,1]$ qui est aussi l'unique point fixe de f sur \mathbb{R} .

De plus, $|x_n - \alpha| \leq \sin^n(1)|x_0 - \alpha|, n \in \mathbb{N}$, ce qui permet de donner une valeur approchée de α à une erreur fixée à priori.

II.3.2 Troisième partie : une approximation du point fixe de cosinus par la méthode de Newton/'Qualité' de l'approximation

1. La représentation graphique de la fonction $g : x \mapsto \cos x - x$ permet de se représenter successivement les termes de la suite d'approximation de Newton.



Soit $u_0 = 0.73$. On désigne par u_1 l'abscisse du point d'intersection de la tangente à la courbe de g au point d'abscisse u_0 avec l'axe des abscisses.

1. Expression de u_1 en fonction de u_0 .

Une équation de la tangente à la courbe de g au point d'abscisse u_0 est $y = g'(u_0)(x - u_0) + g(u_0)$. Il en résulte que $u_1 = u_0 - \frac{g(u_0)}{g'(u_0)}$.

Il est possible d'estimer l'erreur commise en approchant α par u_1 .

2. Construction itérative des termes de la suite.

En procédant de la même façon, on construit u_2 en utilisant u_1 ; puis u_3 en utilisant u_2 , et ainsi de suite de sorte que pour tout entier naturel n , le terme u_{n+1} est l'abscisse du point d'intersection de la tangente à la courbe de g au point d'abscisse u_n avec l'axe des abscisses.

Un raisonnement par récurrence montre que $u_{n+1} = u_n - \frac{g(u_n)}{g'(u_n)}, n \in \mathbb{N}$.

Il est clair que si la suite $(u_n)_n$ converge alors elle converge vers l'unique point fixe de f , qui n'est autre que α .

2. La suite $(u_n)_n$ converge vers α .

Comme g est de classe C^2 , la formule de Taylor de g dans l'intervalle (u_n, α) à l'ordre 2 prouve qu'il existe un réel c_n tel que

$$g(\alpha) = g(u_n) + (\alpha - u_n)g'(u_n) + \frac{(\alpha - u_n)^2}{2}g''(c_n), \quad n \geq 0. \quad \text{D'autre part,}$$

$$u_{n+1} - \alpha = (u_n - \alpha) - \frac{g(u_n) - g(\alpha)}{g'(u_n)}, \quad n \geq 0. \quad \text{Il en résulte que}$$

$$u_{n+1} - \alpha = -\frac{g''(c_n)}{g'(u_n)} \cdot \frac{(u_n - \alpha)^2}{2}, \quad n \geq 0.$$

$$\text{Il en résulte que } |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{|u_n - \alpha|}{2(1 + \sin u_n)} |u_n - \alpha|, \quad n \geq 0.$$

On montre par récurrence que $|u_n - \alpha| \leq 10^{-2}$, $n \geq 0$.

On suppose que $|u_n - \alpha| \leq 10^{-2}$, comme $0.73 < \alpha < 0.74$ il vient que $0.72 < u_n < 0.75$.

Il en résulte que $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{10^{-4}}{2(1 + \sin(0.72))} \leq 10^{-2}$ et que

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{10^{-2}}{2(1 + \sin(0.72))} |u_n - \alpha|, \quad n \geq 0.$$

On pose $k = \frac{10^{-2}}{2(1 + \sin(0.72))}$ et on vérifie que $k < 10^{-2}$.

Un raisonnement par récurrence prouve que $|u_{n+1} - \alpha| \leq k^{n+1} |u_0 - \alpha|$, $n \geq 0$.

Ce qui prouve que la suite $(u_n)_n$ ainsi construite converge vers α .

3. Pour donner des valeurs approchées de α à 10^{-10} près, il suffit d'utiliser l'inégalité $|u_{n+1} - \alpha| \leq 10^{-2n-4}$, $n \geq 0$.

II.4. Déroulement prévu

Dans ce qui suit, nous procédons à l'analyse a priori suivant le schéma de structuration du milieu. Rappelons que cette analyse devra aussi rendre compte de l'interaction professeur/étudiants.

II.4.1 Première phase

On part de la représentation graphique de la fonction $g : x \mapsto \cos x - x$.

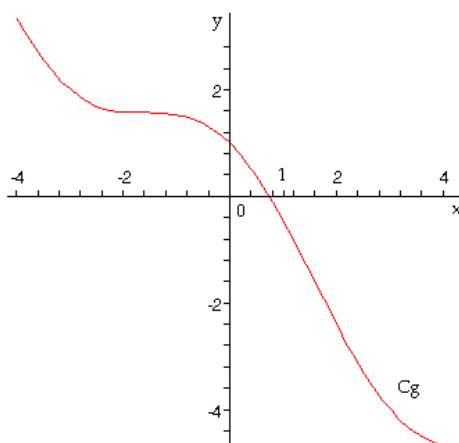


Fig. 8.1 : Représentation graphique de g

Le but de l'exercice est de déterminer si l'équation $\cos x = x$ possède une unique solution dans $]0, 1[$, puis de trouver une valeur approchée de cette solution (dans le cas où elle existe) à $\frac{1}{2^6}$ près, à 10^{-2} près, à 10^{-3} près.

II.4.1.1 Le milieu matériel/objectif

Le milieu matériel/objectif peut être constitué de la représentation graphique de g ainsi que son expression algébrique. Ce milieu doit permettre aux étudiants de :

- vérifier que le calcul algébrique ne permet pas d'étudier la question,
- formuler des conjectures sur l'existence du point fixe de cosinus,
- formuler des conjectures sur l'unicité du point fixe de cosinus,
- procéder à un calcul permettant d'encadrer le point fixe de cosinus.

Plus précisément, M_3 est constitué de la représentation graphique de la fonction g ainsi que de son expression algébrique. E_3 connaît le lien entre la fonction g et l'équation en question. E_3 sait, en recourant au graphique, que l'équation possède au moins une solution dans \mathbb{R} .

Le graphique permet de visualiser le théorème des valeurs intermédiaires pour la fonction g dans l'intervalle $[0, 1]$. Les connaissances de E_2 vont lui permettre de dire que l'existence de la solution dans $]0, 1[$ provient de la continuité de g dans $[0, 1]$ et du résultat du calcul de $g(0)$ et $g(1)$.

Le graphique permet de visualiser le comportement de la fonction dans l'intervalle $[0, 1]$. Les connaissances de E_2 vont lui permettre de dire que l'unicité de la solution provient du fait que 0 possède un unique antécédent par g dans $]0, 1[$.

E_2 conjecture que g est une bijection de $[0, 1]$ sur $g([0, 1])$ qui contient 0, et que donc la fonction cosinus possède un unique point fixe sur $[0, 1]$. Nous prévoyons que E_2 prolonge ses conjectures à \mathbb{R} .

S_2 est alors constitué de l'expression algébrique de la fonction g , des conjectures sur l'existence et l'unicité du point fixe de cosinus aussi bien sur $[0, 1]$ que sur tout \mathbb{R} .

Nous prévoyons l'intervention du professeur, en amont du déroulement afin d'alimenter le milieu de la question relative à la "détermination" des solutions des équations algébriques ou transcendantes et déclencher un débat sur les questions relatives aux nombres réels et leur nature.

II.4.1.2 Le milieu de référence

Les éléments de preuve de la conjecture de l'existence du point fixe de cosinus dans l'intervalle $]0, 1[$ sont visualisés par la figure, il s'agit du théorème des valeurs intermédiaires. E_1 va pouvoir s'appuyer sur ce théorème pour montrer qu'il existe au moins un point fixe de cosinus dans l'intervalle $]0, 1[$; en particulier E_1 calcule $g(0)$ et $g(1)$.

Les connaissances de E_1 contiennent des techniques routinières de fin du lycée :

- la technique utilisant la monotonie de la dérivée pour montrer qu'une fonction est bijective,
- la technique utilisant la continuité et la monotonie d'une fonction dans un intervalle pour déterminer l'image de cet intervalle.

E_1 montre que la fonction g est une bijection de \mathbb{R} sur \mathbb{R} et en déduit l'unicité du point fixe de cosinus.

E_1 conclut que la fonction cosinus a un unique point fixe sur \mathbb{R} légitimé par le théorème des valeurs intermédiaires et que g soit bijective sur \mathbb{R} , et sait qu'il ne peut pas donner sa forme (du moins une écriture algébrique de ce nombre).

M_1 est de plus finalisé par la question de trouver une valeur approchée de cette solution à $\frac{1}{2^6}$ près, à 10^{-3} près. Comment ce calcul sera-t-il mené ?

E_{-1} devra recourir à une méthode pour déterminer ces valeurs approchées aux erreurs fixées : les étudiants sont en possession des connaissances relatives à la méthode de dichotomie, mais sans doute pas en action. L'usage de ces connaissances reste une possibilité théorique tant qu'ils ne l'ont pas fait eux-mêmes. C'est pourquoi nous envisageons, si nécessaire, l'intervention du professeur pour amener les étudiants à se rappeler l'encadrement du point fixe de cosinus entre 0 et 1 et la manière de l'établir.

Les connaissances de E_{-1} contiennent les critères de validation de cette méthode.

E_{-1} part de l'intervalle $[0, 1]$ et procède par dichotomie sur six étapes pour retrouver une valeur approchée de cette solution à $\frac{1}{2^6}$ près.

E_{-1} recourt à la même méthode pour retrouver une valeur approchée de cette solution à 10^{-3} près. Cette dernière étape caractérisée par le grand nombre de calculs à effectuer, va constituer le point de départ de la deuxième phase.

II.4.2 Deuxième phase

Au terme de la première phase, la question se pose de l'efficacité de la méthode de dichotomie à approcher le point fixe de cosinus. Lors de cette phase, les étudiants doivent être amenés à :

- discuter la qualité d'approximation du point fixe de cosinus, donnée par la suite $x_0 = 1$ et $x_{n+1} = \cos(x_n)$,
- s'interroger sur les conditions de convergence de cette suite vers le point fixe de cosinus, en s'appuyant sur la mise en œuvre du théorème des accroissements finis et son lien avec les hypothèses du théorème du point fixe.

Nous entendons que les étudiants reviennent sur les conditions d'application du théorème du point fixe, sur l'existence et la "construction" de ce point.

La consigne part de la représentation graphique de la fonction $f : x \mapsto \cos x$ ainsi que la première bissectrice. On construit sur l'axe des abscisses, $x_0 = 1$, $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1)$, $x_3 = f(x_2)$ et $x_4 = f(x_3)$.

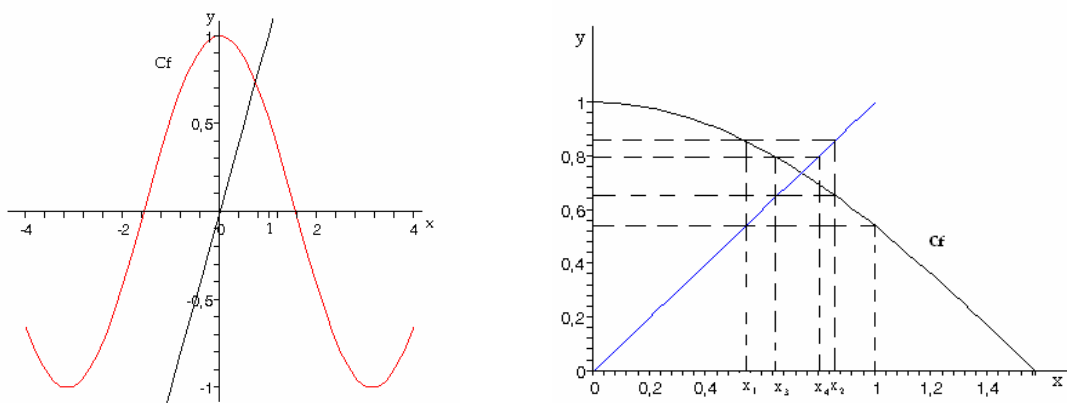


Fig. 8.2 : Représentation graphique de f et construction de termes x_n

On réitère la construction des x_n de sorte que $x_n = f(x_{n-1})$, n entier naturel non nul.

Le but de l'exercice est de construire une suite qui converge vers le point fixe de cosinus (que l'on note α), puis de déterminer un entier n_0 de sorte que le terme d'indice n_0 de cette suite, soit une valeur approchée de α à 10^{-10} près.

II.4.2.1 Le milieu matériel/objectif

Le milieu matériel/objectif doit permettre aux étudiants :

- de se représenter successivement le procédé de construction des termes de la suite (x_n) ,
- de formuler des conjectures concernant la convergence de la suite (x_n) ainsi construite vers le point fixe de cosinus,
- de procéder à des interprétations numériques, à des calculs, à des estimations.

Plus précisément, M_3 est constitué de l'expression algébrique de f , des premiers termes de la suite (x_n) et de la façon de les construire, ainsi que de deux représentations graphiques de la fonction f à des échelles différentes.

E_3 sait construire les x_n sur la droite des abscisses et se représenter successivement la construction. Ses connaissances vont lui permettre de dire que si la suite (x_n) , x_n ainsi construit, converge alors elle convergera vers l'abscisse du point d'intersection de la première bissectrice avec le graphique de la fonction en question (l'unique point fixe de la fonction f sur \mathbb{R}).

S_3 est alors constitué de la représentation graphique de la fonction f , de son expression algébrique, des x_n , $n = 0, 1, 2, 3, 4$ ainsi que du point fixe de cosinus.

E_2 procède à l'estimation de l'erreur commise en confondant le point fixe de cosinus respectivement par x_n , $n = 1, 2, 3, 4$, comme moyen de contrôler la validité de la conjecture via l'usage d'approximations successives sachant que :

- les termes de la suite oscillent de part et d'autre du point fixe de cosinus,
- l'équation $f(x) = x$ est non résoluble par l'usage des techniques algébriques à sa disposition.

A ce stade, les étudiants vont pouvoir conjecturer que la suite (x_n) ainsi construite, converge vers le point fixe de cosinus. Nous prévoyons une intervention du professeur pour plonger dans le milieu la question de la rapidité de la convergence, ceci en se basant sur le calcul des estimations déjà entrepris.

S_2 est alors constitué de l'expression algébrique de la fonction f , de la suite (x_n) et de la conjecture.

II.4.2.2 Le milieu de référence

Comme pour la situation de l'antiphérèse, les connaissances de E_1 lui permettent :

- de constater que le recours à la technique qui part de l'étude de la monotonie de la suite et la recherche d'un minorant (ou majorant selon le résultat de la monotonie) n'est pas possible (la suite (x_n) n'étant ni croissante, ni décroissante),
- de procéder à un calcul algébrique simple pour vérifier que f est décroissante, et tenter l'étude des suites (u_{2k}) et (u_{2k+1}) pour conclure la convergence de (u_k) (nous n'écartons pas cette éventualité, et nous prévoyons que les étudiants fassent appel à une autre méthode en raison de la difficulté des calculs).

Rappelons que les résultats de l'expérimentation de l'antiphérèse de $\sqrt{2}$, ont bien montré la difficulté des étudiants à opérationnaliser les savoirs de l'analyse réelle. Nous prévoyons l'intervention du professeur afin de :

- amener les étudiants à un usage réfléchi du théorème des accroissements finis (même si les étudiants sont supposés disposer théoriquement de ce théorème),
- revenir sur le théorème du point fixe, sur ces conditions d'application et sa légitimité.

M_1 est de plus finalisé par la question de déterminer un entier n_0 de sorte que x_{n_0} soit une valeur approchée de α à 10^{-10} près.

E_{-1} sait utiliser la fonction \ln dans des opérations de majoration, il en déduit alors l'entier n_0 ($n_0 \geq 132$) en recourant à l'inégalité obtenue à l'étape précédente au terme d'une récurrence descendante.

S_{-1} comporte donc un exemple de validation générique débouchant sur une procédure de recherche d'un terme de la suite approchant le nombre limite à une erreur près.

Dans S_0 , le professeur peut s'appuyer sur les étudiants pour généraliser leurs connaissances. P_0 va pouvoir institutionnaliser une procédure de l'analyse réelle :

- Comment démontrer qu'une suite récurrente est convergente sachant que la dérivée de la fonction associée est majorée par un réel positif strictement inférieur à 1, dans un intervalle contenant tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
- Comment trouver dans ce cas de figure, un terme de la suite approchant le nombre limite à une erreur près fixée à priori.

II.4.3 Troisième phase

Au terme de la deuxième phase, la situation va prendre appui sur des questions plongées dans le milieu relatives au calcul de x_{132} , et à la possibilité de développer un moyen plus rapide pour approcher le point fixe de cosinus alors qu'on ne connaît pas la valeur "exacte" de ce nombre !

On part de la représentation graphique de la fonction g sur $[0,1]$. On place $u_0 = 0.73$ sur l'axe des abscisses puis u_1 , l'abscisse du point d'intersection de la tangente à la courbe de g au point d'abscisse u_0 avec l'axe des abscisses.

On procède pour u_1 , de la même façon que pour u_0 , on obtient u_2 , l'abscisse du point d'intersection de la tangente à la courbe de g au point d'abscisse u_1 avec l'axe des abscisses ; u_3 est l'abscisse obtenue en procédant de même pour $u_2 \dots$

On réitère ce procédé et on obtient à chaque fois u_n , l'abscisse du point d'intersection de la tangente à la courbe de g au point d'abscisse u_{n-1} , n entier naturel non nul.

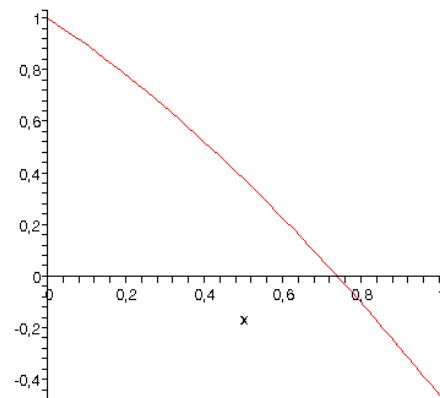


Fig. 8.3 : Représentation graphique de g sur $[0,1]$

Le but de l'exercice est de construire une suite (u_n) en itérant le procédé et de déterminer si la suite ainsi construite converge vers α . La question est enfin de déterminer, si possible, un entier n_0 de sorte que u_{n_0} soit une valeur approchée de α à 10^{-10} près.

II.4.3.1 Le milieu matériel/objectif

Le milieu matériel/objectif est constitué des termes u_n , résultant d'une procédure de construction successive (formulée rhétoriquement) ainsi que de la représentation graphique de la fonction g . Ce milieu doit permettre aux étudiants :

- d'établir l'expression de la suite (u_n) ainsi construite,
- de formuler des conjectures sur la convergence de la suite (u_n) ainsi construite.

Plus précisément, M_3 est constitué de la représentation graphique de la fonction g , de u_0 ainsi que du procédé rhétorique de construction successive de u_1, u_2, u_3 .

E_3 sait placer les u_n sur la droite des abscisses et se représenter successivement l'itération. E_3 sait également que la suite ainsi construite est une suite récurrente (le procédé de construction reliant deux termes consécutifs de la suite). Ses connaissances vont lui permettre de dire qu'étant donnée l'expression algébrique de la fonction g , il est possible de trouver l'expression de la tangente à la courbe de g en un point de cette courbe. E_3 en déduit qu'il est possible d'écrire u_0 à l'aide de u_1 , connaissant l'équation de la courbe et celle de sa tangente au point d'abscisse u_0 .

S_3 est alors constitué de la représentation graphique de la fonction f ainsi que de son expression algébrique et du procédé de construction de u_{n+1} connaissant u_n .

E_2 peut procéder sur deux étapes :

- Il détermine l'équation de la tangente à C_g en u_0 et en déduit u_1 , l'abscisse du point d'intersection de C_g avec cette tangente $(u_1 = u_0 - \frac{g(u_0)}{g'(u_0)})$. Il raisonne alors par récurrence sur n , pour établir que $u_{n+1} = u_n - \frac{g(u_n)}{g'(u_n)}$, n entier naturel.
- Il établit algébriquement que si la suite (u_n) converge alors elle convergera vers le réel l vérifiant $l = 1 - \frac{g(l)}{g'(l)}$, c'est-à-dire α .

E_2 teste la validité de ce résultat, avant d'énoncer sa conjecture, via l'usage d'approximations successives de α par u_n , $n = 1, 2, 3, 4$, en estimant à chaque fois l'erreur commise.

S_2 est alors constitué de l'expression algébrique de g , de la formule de récurrence de la suite (u_n) et de la conjecture.

II.4.3.2 Le milieu de référence

L'un des paramètres à prendre en considération dans cette analyse, au regard du résultat de l'expérimentation de la situation de l'antiphérèse, est la difficulté des étudiants à opérationnaliser les outils de preuve de l'analyse réelle. Nous préconisons dans ce sens, une intervention quasi-instantanée du professeur, à tout moment du processus de la validation formelle, afin d'amener les étudiants à constamment se confronter au lien existant entre les interprétations empiriques, et la mise en œuvre des outils de preuve de l'analyse réelle.

Les connaissances de E_2 devront l'amener à investiguer divers techniques de preuves relatives à la convergence d'une suite, dont nous citons :

- étudier la monotonie de la suite et rechercher un minorant (ou majorant selon le résultat de la monotonie),
- étudier les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) ,
- utiliser la technique développée dans la phase 2, dont l'idée consiste à majorer $|u_{n+1} - \alpha|$ partant du fait que la suite $u_{n+1} = f(u_n)$ est telle que f' est majorée par un réel strictement inférieur à 1.

E_1 sait qu'en écrivant la suite $u_{n+1} = u_n - \frac{g(u_n)}{g'(u_n)}$ sous la forme $u_{n+1} = h(u_n)$, il lui est

possible d'étudier le comportement de la fonction h , de tenter si, possible de majorer la fonction h' . E_2 sait que la fonction h' s'écrit en fonction de g , g' et g'' .

E_1 calcule les expressions algébriques de g' et g'' , ses connaissances vont lui permettre de majorer $\frac{g''}{g'}$ sur un intervalle contenant tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

De plus, les connaissances de E_2 vont lui permettre d'écrire que

$$u_{n+1} - a = (u_n - a) - \frac{g(u_n) - g(a)}{g'(u_n)}.$$

L'intervention du professeur devra permettre aux étudiants de faire fonctionner la formule de Taylor dans l'intervalle (u_n, α) , et à un ordre permettant de trouver un lien entre g , g' et g'' et établir une expression exploitable de $|u_{n+1} - \alpha|$.

Les connaissances de E_2 contiennent la capacité à formuler des opérations algébriques de majoration, il en déduit que $|u_{n+1} - a| \leq \frac{|u_n - a|}{2(1 + \sin u_n)} |u_n - a|$.

E_1 établit par récurrence que $|u_n - a| \leq 10^{-2}$, sachant que $0.73 < \alpha < 0.74$ (encadrement retrouvé depuis la phase 1) et que $u_0 = 0.73$.

E_1 en déduit que $|u_{n+1} - a| \leq \frac{10^{-2}}{2(1 + \sin 0.72)} |u_n - a|$.

Mais, M_1 est de plus finalisé par la question de déterminer un entier n_0 de sorte que u_{n_0} soit une valeur approchée de α à 10^{-10} près.

E_1 sait utiliser la fonction \ln dans des opérations de majoration, il en déduit alors l'entier n_0 ($n_0 \geq 4$) en recourant à l'inégalité obtenue à l'étape précédente au terme d'une récurrence descendante.

E_1 compare les valeurs de n_0 retrouvées pour les deux suites convergeant vers α (132 en utilisant la suite récurrente associée à la fonction cosinus, et 4 en utilisant la méthode de Newton).

S_1 comporte donc un exemple générique d'approximation *rapide* de solutions d'équation du type $f(x) = x$, dans le cas où cette équation n'est pas résoluble par l'usage des techniques algébriques à disposition.

Dans S_0 , le professeur peut s'appuyer sur les étudiants pour généraliser leurs connaissances, à cette occasion une discussion sur les conditions de convergence de la suite construite à partir de la méthode de Newton devra amener les étudiants à assurer, du moins empiriquement un usage "raisonnée" d'une telle méthode.

P_0 va pouvoir institutionnaliser une méthode de l'analyse réelle : La méthode de Newton, d'approximation de solutions d'équation du type $f(x) = x$ (ou $g(x) = 0$), dans le cas où cette équation n'est pas résoluble par l'usage des techniques algébriques à disposition des étudiants, en tenant compte de certaines conditions (utiliser la méthode dans un intervalle contenant une unique solution, relier le choix du premier terme aux conditions devant être satisfaites par g' et g'').

III. Analyse a posteriori

Comme pour la situation de l'antiphérèse de $\sqrt{2}$, nous procédons à l'analyse a posteriori suivant deux axes :

1. Un premier axe comporte une description des calculs, expérimentations et conjectures des étudiants, une analyse aussi bien des preuves des étudiants et des interventions du professeur que des difficultés rencontrées par les étudiants.
2. Un deuxième axe comporte une discussion du modèle théorique à travers un retour aussi bien sur les savoirs visés que sur les questions posées par les situations. Nous essayons de compléter à cette occasion, l'étude faite dans le cadre de la situation de l'antiphérèse de $\sqrt{2}$.

III.1. Déroulement effectif

La situation du point fixe de cosinus a été expérimentée dans une classe de première année université mathématiques- informatique de la faculté des sciences de Tunis. La séance expérimentale a duré deux heures, et s'est déroulée avec 22 étudiants, invités à travailler en 5 groupes. A côté des étudiants, trois autres personnes étaient présentes : un intervenant (**I**) jouant le rôle du professeur (c'est nous qui le faisons), le professeur de la classe en question (qui n'a pas du tout intervenu lors de la séance), un seul observateur ayant la charge de noter l'intégralité des échanges des étudiants avec l'intervenant et dans la mesure du possible au sein des groupes.

L'intégralité de la transcription de la séance se trouve en Annexe VIII. Nous signalerons certains passages des traces écrites des étudiants (travaux élaborés par chacun des groupes avant de procéder aux échanges collectifs avec l'ensemble de la classe), à chaque fois que cela est nécessaire.

III.1.1 *Calculs, expérimentations et conjectures*

Nous procédons à cette étude en trois étapes conformément au déroulement de l'expérimentation suivant les trois phases.

a) Conjectures sur l'existence du point fixe de cosinus

La question préliminaire plongée dans le milieu concerne la possibilité de trouver les solutions "exactes", si elles existent, d'une équation donnée. Cette question a tout de suite généré un certain malaise au niveau de la classe, ce n'est qu'à l'issue de l'intervention du professeur (**I**) pour les susciter à donner des exemples que le débat

s'est déclenché. Les étudiants semblent avoir une "idée" assez contraignante de ce qu'ils doivent faire en classe de mathématiques : il est difficile pour eux d'accepter de chercher sans savoir à quoi ils vont aboutir, la question posée étant générale, les étudiants ont préféré s'abstenir de répondre tant qu'ils n'ont pas un "modèle de démonstration" à proposer.

Plusieurs exemples d'équations résolubles par les outils algébriques ont été donnés, notamment du type $P(x) = 0$ où P est un polynôme à coefficients dans \mathbb{Z} de degré 2 ou 3 ; les exemples d'équations, déclarées par les étudiants, comme ne pouvant pas avoir de solutions "exactes" sont associées en particulier, aux fonctions trigonométriques.

La donnée des exemples a motivé l'entrée dans la question de l'existence du point fixe de cosinus. Avant la distribution de la base matérielle relative à cette phase, les réponses étaient partagées entre la possibilité d'étudier la question d'existence du point fixe " [...] pour l'existence de la solution...oui..." et l'impossibilité de le faire " [...] Non ! On peut pas...". L'exploitation de la représentation graphique de la fonction $g : x \mapsto \cos x - x$ (la représentation graphique de g intercepte l'axe des abscisses en un seul point) leur a permis de conjecturer graphiquement que la fonction cosinus possède un point fixe dans $[0,1]$ " [...] d'après le graphique, $g(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[0,1]$ ".

Dans certaines des traces écrites des étudiants, une formulation de cette conjecture est explicitée, précédée par un calcul algébrique permettant de trouver le lien entre la fonction et le point fixe de cosinus. Dont voici ci-contre un exemple.

$$\cos x = x \Rightarrow \cos x - x = 0 \Rightarrow g(x) = 0.$$

Or d'après la représentation graphique C_g , $g(x) = 0$ admet une unique solution dans $]0,1[$.

Au terme de cette étape, les étudiants ne se sont pas posés la question de l'existence et de l'unicité du point fixe de cosinus dans \mathbb{R} , ce travail ne sera entrepris que lors de la validation formelle.

b) Conjectures sur la convergence de la suite $(x_{n+1} = \cos x_n)$ vers le point fixe de cosinus

A la fin de la première phase, les étudiants se sont d'ores et déjà posés le problème du calcul de valeurs approchées du point fixe de cosinus à des erreurs de plus en plus petites. A ce stade, les étudiants se sont complètement intégrés dans le jeu et un débat sur les nombres réels et leur manifestation s'est déclenché, donnant lieu à des questionnements du type " Mais à la fin...c'est pareil...on ne peut pas trouver une

valeur exacte ??". Les étudiants ont pu, en faisant un lien avec les logiciels de calcul approché, se convaincre que la donnée d'une suite d'approximations successives convergente vers un nombre permet d'une part de le spécifier (en l'absence d'une valeur "exacte" !) et d'autre part d'en donner des valeurs approchées. L'efficacité de cette suite repose sur sa performance à permettre de calculer "rapidement" de telles valeurs, à des erreurs de plus en plus petites. Pour les étudiants, la "rapidité" est entendue pragmatiquement du point de vue de l'économie du calcul de ces termes selon une démarche successive.

Nous exposons ci-dessous la séquence qui nous a paru porter en germe un début de réflexion de la part des étudiants, sur la différence entre irrationnels algébriques et irrationnels transcendants.

E₃ ... Comment on appelle des nombres, comme le point fixe de cosinus ?

I : ...c'est à dire ?

E₃ : ...qui n'a pas de valeur exacte...mais qui existe...on l'a vu...

I : ...est ce que $\sqrt{2}$ a une valeur exacte ?

E₁₂ : Oui...c'est $\sqrt{2}$!!

I : Qu'en est il de e alors ?

E₃ : ...Pour $\sqrt{2}$, on sait que le carré c'est 2...mais pour e... c'est pas pareil...

Sans avoir de base théorique, les étudiants ont pu exprimer que $\sqrt{2}$ est la solution d'une équation polynomiale à coefficients dans \mathbb{Q} , ce qui n'est pas le cas de e et du point fixe de cosinus.

Les questions prévues comme devant être plongées dans le milieu pour introduire la suite $(x_{n+1}=\cos x_n)$, ont été entièrement prises en charge par les étudiants "*...on change de vitesse...!!*". Les étudiants ont pu formuler que :

- pour tenter d'approcher plus "rapidement" le point fixe de cosinus (α), il suffit de chercher une suite qui lui est convergente et de déterminer l'indice n_0 de sorte que u_{n_0} soit une valeur approchée à une erreur près ;
- comme $\cos a = a$, il est possible de regarder ce qui se passe si l'on choisi une suite de la forme $x_{n+1}=\cos(x_n)$, et $x_0 \in [0, 1]$ (le choix de l'intervalle est en lien avec le résultat établi dans la première phase).

Comme prévu a priori, tablant sur le graphique de la fonction cosinus et de la première bissectrice, les étudiants ont pu construire successivement les termes de la suite $(x_n)_n$ et conjecturer qu'elle converge vers le point fixe de cosinus et que tous les termes de la suite sont compris entre 0 et 1 (rappelons que $x_0 = 1$). Du reste, les étudiants n'ont pas cherché à estimer les erreurs commises en approchant le point fixe de cosinus, par des termes consécutifs de la suite, préférant se suffire du graphique.

c) Conjectures sur l'existence et la construction d'une suite convergeant vers le point fixe de cosinus en utilisant la méthode de Newton

Au terme de la deuxième phase, les étudiants ont laissé paraître une certaine motivation à vouloir construire une nouvelle suite qui converge vers le point fixe de cosinus de sorte qu'il leur soit "possible" d'en calculer une valeur approchée à 10^{-10} près sans devoir assumer 134 opérations ! (le terme de la suite répondant à la question dans la phase 2 est x_{134}).

E₉ : ...on change de vitesse encore une fois !!...il faut bien le rattraper ce nombre !

E : ...si ça se trouve, on va découvrir une méthode qui est utilisée par des logiciels pour approcher rapidement et de plus près un nombre qui n'a pas de valeur exacte...

I : ...peut-être pourquoi pas...

E : ...alors, comment ils font dans ce cas ?

Comme nous l'avons déjà mentionné¹⁹⁹, dans le niveau du cursus choisi, les étudiants sont aussi destinés à un enseignement informatique, donc à la programmation d'algorithmes de calcul numérique tout en étant en mesure de juger de la "fiabilité" de ces algorithmes. La séquence ci-dessus, montre que la situation a permis aux étudiants d'établir un lien entre les méthodes d'approximations successives et les programmes de calcul numérique implémentés dans les ordinateurs.

Comme nous l'avons prévu a priori, les étudiants ont pu se représenter successivement le procédé de construction itératif des termes de la suite construite à partir de la méthode de Newton. Ils ont de plus, utilisé l'équation de la tangente à C_g en u_0 pour établir que $u_1 = u_0 - \frac{g(u_0)}{g'(u_0)}$. Un raisonnement par récurrence leur a permis de se convaincre que $u_{n+1} = u_n - \frac{g(u_n)}{g'(u_n)}$, n entier naturel.

¹⁹⁹ Cf. Chapitre 5.

La question relative au choix de remplacer la courbe de g ($g : x \mapsto \cos x - x$) par celle de sa tangente a été soulevée dans une discussion au sein d'un groupe de travail : un étudiant s'adresse aux membres de son groupe " *On écrit l'équation de la tangente...pourquoi, on remplace par la tangente ?*", sans pouvoir attendre de réponse.

La question de l'étudiant aurait pu susciter une première discussion graphique sur les conditions de convergence de la suite construite par la méthode de Newton, mais elle n'a pas été exploitée lors du débat en dépit des tentatives du professeur (I).

Plus précisément, si on alimente le milieu d'un exemple graphique, il est possible de voir que la méthode de Newton consiste à remplacer la valeur approchée \overline{OM} de \overline{OA} , par \overline{ON} de sorte que l'approximation soit améliorée.

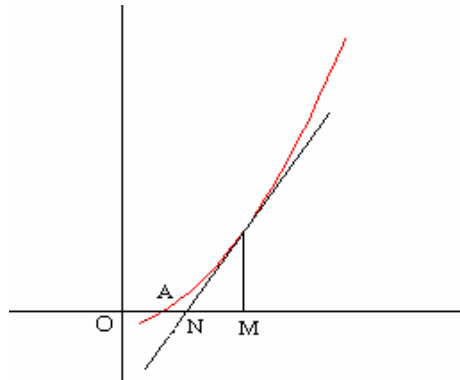


Fig. 8.4 : Exemple graphique et choix du premier terme de la suite dans la méthode de Newton

L'aspect graphique du problème permet d'avancer dans la question du choix de la valeur approchée initiale (ou du premier terme de la suite), de façon à être sûr de la convergence de la méthode. La donnée de contre-exemples graphiques contribue à avancer dans l'étude de cette question.

Par contre la "rapidité quadratique" de la convergence ne peut être ici esquissée.

Du reste, les étudiants ont pu voir à partir de la représentation graphique de g que la construction de u_1 à partir de u_0 , sous entend que u_1 est une meilleure approximation de α que u_0 .

A côté du graphique, les étudiants ont utilisé la résolution algébrique de l'équation $-\frac{g(x)}{g'(x)} = 0$, pour conjecturer que la suite ainsi construite converge vers α .

III.1.2 Preuves des étudiants/Intervention de l'enseignant

Nous utilisons l'organisation adoptée dans le paragraphe précédent pour faire cette étude.

a) Visualisation graphique du théorème des valeurs intermédiaires et retour sur la preuve formelle

Comme prévu a priori, les étudiants s'engagent dans le processus de preuve formelle de l'existence du point fixe de cosinus, en tablant graphiquement sur le théorème des valeurs intermédiaires comme outil de preuve " [...] pour l'existence...ça se voit sur le graphique...c'est le théorème des valeurs intermédiaires".

De la même façon que lors du débat collectif, les travaux des étudiants au sein des groupes (ce travail étant antérieur au débat collectif), tablent en majorité sur le théorème des valeurs intermédiaires pour prouver d'abord l'existence du point fixe de cosinus dans l'intervalle $[0,1]$.

Ci-contre, un exemple générique de ces travaux, repéré dans les traces écrites.

- Existence ?

La fonction g est continue sur \mathbb{R} , en particulier sur $[0, 1]$.

$$g(0) = \cos 0 - 0 = 1$$

$$g(1) = \cos 1 - 1 < 0$$

$$g(1).g(0) < 0$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in]0,1[$ tel que $g(c) = 0$.

A la suite de ce travail, les étudiants se sont explicitement posés la question d'unicité du point fixe de cosinus en proposant de montrer que g est une bijection de \mathbb{R} sur $g(\mathbb{R})$.

E_6 : Pour l'existence ...ça y est...il reste à montrer l'unicité du point fixe de cosinus...

E_1 : g est une bijection de \mathbb{R} sur $g(\mathbb{R})$...

L'étude du signe de la fonction dérivée de g , leur a permis aisément de montrer que la fonction cosinus admet un unique point fixe dans \mathbb{R} . Ce travail a été entrepris aussi bien lors du débat collectif qu'au sein des groupes (travail antérieur au débat collectif).

Ci-contre un modèle de preuve repéré dans certaines des traces écrites des étudiants (remarquons que les étudiants n'étaient pas tenu d'établir sur leur traces écrites des preuves syntaxiquement correctes au sein du travail de groupes : la consigne était de trouver d'abord les outils théoriques à mettre en œuvre pour ensuite organiser la preuve lors du travail collectif).

- *Unicité ?*

g est continue et dérivable sur \mathbb{R}

$$g'(x) = -\sin x - 1$$

g est strictement décroissante dans \mathbb{R} , donc g est une bijection de \mathbb{R} sur $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

La démarche des étudiants part d'abord de la preuve de l'existence du point fixe de cosinus en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, alors même que g est une bijection de \mathbb{R} sur $g(\mathbb{R})$, et il aurait été suffisant d'utiliser ce résultat pour affirmer l'existence et l'unicité du point fixe de cosinus dans \mathbb{R} . Nous pouvons interpréter cette attitude, en avançant deux raisons complémentaires :

- le graphique a bien permis de visualiser le théorème des valeurs intermédiaires : ceci vient à l'appui de ce que nous avons prévu (Cf. Chapitre 6, pour plus de détails) ;
- cette visualisation a permis aux étudiants d'identifier le rôle du théorème pour affirmer l'existence du point fixe de cosinus, et y recourir dans la preuve formelle.

Du reste, le point fixe de cosinus n'a pas de valeur "exacte" (les étudiants n'en connaissent pas la forme), l'usage efficace de la méthode de dichotomie leur a permis d'encadrer le point fixe de cosinus entre 0.73 et 0.74.

A l'inverse de ce qu'on a prévu a priori, les étudiants ont pu mettre en action la méthode de dichotomie sans qu'une intervention du professeur (**I**) soit nécessaire. Cette méthode étant une technique largement utilisée en fin du lycée.

b) Procédures formelles sur les conditions de convergence de la suite $(x_{n+1} = \cos x_n)$ vers le point fixe de cosinus

Lors du débat collectif, la question est posée " [...] qu'est ce que vous proposez pour étudier la convergence de cette suite ? " afin d'engager les étudiants dans le processus de preuve formelle relative à la convergence de la suite $(x_n)_n$ vers le point fixe de cosinus.

Comme pour la situation de l'antiphérèse de $\sqrt{2}$, nous avons pu repérer, dans les traces écrites des étudiants, des tentatives pour procéder à la preuve de la convergence de la suite vers le point fixe de cosinus en tablant sur le graphique (en particulier sur le

comportement des sous-suites paire et impaire) et entamer l'étude des sous- suites paire et impaire sans que l'étude ne soit vraiment exhaustive.

Dans les traces écrites des étudiants d'un des groupes de travail, nous avons pu noter un recours au théorème des accroissements finis. Toutefois ces traces rendent plutôt compte de leur réflexion et ne peuvent pas être interprétées en terme de preuve, nous en présentons ci-contre un aperçu.

$$x_{n+1} = \cos x_n \text{ et } x_0 = 1$$

$$0 \leq x_n \leq 1, n \geq 0.$$

$$f'(x) = -\sin x \text{ et } |f'(x)| \leq \sin 1$$

Inégalités des accroissements finis

$$|f(x_n) - \alpha| \leq \sin 1 |x_n - \alpha|$$

$$|x_{n+1} - \alpha| \leq \sin 1 |x_n - \alpha|$$

.....

$$|x_1 - \alpha| \leq \sin 1 |x_0 - \alpha|$$

$$|x_n - \alpha| \leq (\sin 1)^n |x_0 - \alpha|$$

$$(\sin 1)^n < 10^{-10}$$

Lors du débat collectif, les étudiants pointent d'abord que la fonction cosinus est décroissante sur \mathbb{R} et qu'il est donc possible de procéder à l'étude des sous-suites paire et impaire sachant qu'elles sont monotones.

E : ...la fonction cosinus n'est ni croissante, ni décroissante...

E₁ : ...on utilise suites extraites...

E : ...suites adjacentes...

I : Est ce que l'un d'entre vous pourrait passer au tableau et expliquer son idée ?

E₁ (au tableau) :

(x_{2n+1}) est croissante et (x_{2n}) est décroissante...

(Oralement) mais il faut montrer...

(écrit) $x_{2n+3} = \cos(\cos x_{2n+1})$

(Oralement) ...on doit comparer x_{2n+1} et x_{2n+3} ... on sait que f est décroissante...

Toutefois, les étudiants ont préféré s'abstenir d'investiguer cette idée en laissant entendre que " [...] c'est long...on voit une autre méthode...". Pareillement en ce qui concerne le recours aux suites de Cauchy qui n'était pas envisageable dans l'analyse a priori ; les étudiants ont proposé de majorer $|x_{n+p} - x_n|$ et montrer que la suite est de Cauchy pour en déduire qu'elle est convergente.

Encore une fois, cette attitude montre que les étudiants

- retiennent un ensemble de techniques pour montrer la convergence d'une suite ;
- ont des difficultés à persévérer dans la recherche dès que des incertitudes à l'encontre du "bon aboutissement" de leurs efforts s'installent (Cf. Robert, 2003).

Se rendant compte que les techniques, proposées d'une manière assez anarchique, n'ont pas conduit au résultat souhaité, les étudiants ont tenté de réorganiser leurs connaissances en revenant sur le comportement de la fonction f " [...] on sait que f est décroissante...on utilise le théorème des accroissements finis...". Comme prévu a priori, l'usage de ce théorème les a porté à majorer f' dans l'intervalle $[0, 1]$. L'intervention du professeur (I), devait les amener à se restreindre au résultat de cette majoration pour conclure sur la convergence de la suite $(x_n)_n$ vers le point fixe de cosinus. A cette occasion, une certaine latitude est laissée aux étudiants pour interagir et s'apercevoir du rôle simplificateur du théorème du point fixe, dès que certaines conditions sont vérifiées (dès que la fonction est contractante).

Du reste, les étudiants n'ont pas trouvé de difficultés à procéder à une récurrence et identifier le terme u_{n_0} de sorte qu'il soit une valeur approchée du point fixe de cosinus à 10^{-10} près et se rendre compte que son calcul est interminable (c'est le 134^{ème} terme).

c) Procédures formelles sur les conditions de convergence de la suite

$(u_{n+1} = u_n - \frac{g(u_n)}{g'(u_n)})$ vers le point fixe de cosinus

Une fois que la relation de récurrence relative à la suite construite à partir de la méthode de Newton est établie (et démontrée par le principe de récurrence en partant de $u_0 = 0.73$), les étudiants se posent la question de l'étude de la convergence d'une telle suite " [...] donc, on doit montrer qu'elle converge vers α ...". Leurs premiers essais tablent sur l'efficacité de la procédure utilisée dans la deuxième phase " [...] on peut

utiliser le théorème des accroissements finis...". En écrivant la relation de récurrence sous la forme $u_{n+1} = h(u_n)$, ils calculent h' et s'aperçoivent que h' s'écrit en fonction de g , g' et g'' ($h' = \frac{g \times g''}{g'^2}$). Leur hésitation concernant la possibilité de majorer h' par un réel strictement inférieur à 1, dans un intervalle contenant tous les termes de la suite, et leur prise en compte des possibilités offertes s'ils arrivent à trouver "une relation entre $(u_n - a)$ et $(u_{n+1} - a)$ ", a permis au professeur (**I**) d'intervenir pour les amener à exploiter la formule de Taylor à un ordre et dans un intervalle appropriés.

A cette occasion, une première interprétation empirique liée au choix de u_0 table sur le graphique pour constater que la valeur donnée à u_0 ainsi que les constructions successives des termes de la suite participent aux exigences liées aux conditions de convergence. Plus précisément, afin de pouvoir majorer $|u_{n+1} - a|$ par le produit de $|u_n - a|$ et d'un réel strictement inférieur à 1, les étudiants ont constaté que deux conditions complémentaires devaient être remplies : une "bonne" majoration de $\left| \frac{g''}{g'} \right|$ et une "bonne" majoration de $|u_n - a|$, dans les deux cas, le choix de u_0 est déterminant.

$$\mathbf{I} \text{ avec } E_1 \text{ (au tableau)} : \left| \frac{g''(c_n)}{g'(u_n)} \right| \leq \frac{1}{|\sin u_n + 1|}, \text{ donc } |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{|u_n - \alpha|}{2(1 + \sin u_n)} |u_n - \alpha|$$

E_z : ...on sait que $0.73 < \alpha < 0.74$... et u_0 aussi... il est égal à 0.73....

E_t : ...dans le graphique u_n aussi...

\mathbf{I} : Précisez...qu'est ce que vous pouvez dire de $|u_n - \alpha|$...

E : $u_2 = 0.7390$... donc $|u_2 - \alpha| < 0.01$...

E : ...on a la même chose pour u_3 ...

\mathbf{I} avec E_1 (au tableau) : On montre par récurrence que $|u_n - \alpha| \leq 10^{-2}$, pour tout n .

[...]

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{10^{-4}}{2(1 + \sin(0.72))} \leq 10^{-2} .$$

E_1 : ...maintenant on fait comme pour l'autre suite...

$$E : \frac{10^{-2}}{2(1 + \sin(0.72))} \text{ est strictement plus petit que } 1 \dots$$

Du reste, une première approche de la question liée à la "rapidité" quadratique a été initiée par l'un des étudiants laissant "intuitivement" entendre ce que Newton traduisait par convergence quadratique en ces termes " Tu gagneras deux fois plus de chiffres dans l'approximation à chaque opération."²⁰⁰.

$$E : \dots \text{ on va majorer valeur absolue de } \frac{g''(c_n)}{g'(u_n)} \dots$$

$$E_1 \dots \text{ on va majorer } |u_{n+1} - \alpha| \text{ par le produit d'un réel et } (u_n - \alpha)^2 \dots$$

$$E : n_0 \text{ sera plus petit !!}$$

Cette intervention n'a pas pu être exploitée lors du débat collectif en dépit d'une tentative de la part du professeur (I) visant à amener l'étudiant à préciser son idée.

Par ailleurs, nous pouvons concrètement affirmer que les étudiants ont trouvé dans la méthode de Newton, un moyen pour approcher successivement le point fixe de cosinus à des erreurs de plus en plus petites, de sorte à pouvoir effectuer un calcul raisonnable pour trouver les valeurs recherchées (dans ce cas, le terme approchant le point fixe de cosinus à 10^{-10} près est égal à u_4).

III.1.3 Difficultés liées à la conceptualisation d'objets 'institutionnalisés', routines des étudiants et nécessités des situations

Prenant appui sur les paramètres liés au travail des étudiants, relevés dans la situation de l'antiphèrèse de $\sqrt{2}$, nous allons tenter de pointer ici ceux qui ont intervenu dans la situation du point fixe de cosinus. Nous n'avons par ailleurs pas pu observer des aspects liés au travail des étudiants, autres que ceux identifiés dans la situation de l'antiphèrèse de $\sqrt{2}$.

Dans la situation du point fixe de cosinus, les paramètres liés au travail des étudiants que nous retenons, sont :

²⁰⁰ Cité dans (Chabert et al., 1994, p. 215).

- Les étudiants retiennent un ensemble de techniques pour montrer la convergence d'une suite mais ont des difficultés à les mettre en œuvre et persévérer dans la recherche d'une technique répondant à la question.
- De la même façon que pour la situation de l'antiphérèse de $\sqrt{2}$, les étudiants ne présentent pas de difficultés à utiliser les connaissances de fin du lycée : travail dans le registre algébrique ou le registre graphique, usage de la méthode de dichotomie, etc.
- Les étudiants se sont engagés plus facilement dans un travail de recherche, d'essais et de conjectures, à l'inverse de ce qui s'est passé dans la situation de l'antiphérèse de $\sqrt{2}^{201}$.
- Il reste parfois difficile d'interpeller leur "curiosité", les amener à se poser des questions.

III.2 Le point fixe de cosinus et les connaissances des étudiants

La situation s'est déroulée dans sa grande majorité conformément à ce qui a été prévu. Dans ce qui suit nous procédons à l'étude des connaissances préalables exploitées et celles construites en la contrastant avec l'étude faite dans le cadre de la situation de l'antiphérèse de $\sqrt{2}^{202}$.

Presque que toutes les connaissances préalables qui ont été exploitées dans la situation de l'antiphérèse, l'ont été dans la situation du point fixe de cosinus :

- connaissances relatives à des raisonnements (rôle des exemples et des contre-exemples),
- connaissances relatives au calcul algébrique,
- connaissances graphiques,
- connaissances relatives à l'approximation d'un nombre (définition de la valeur approchée d'un nombre à une erreur près, représentation successive d'un processus d'itération).

Par ailleurs, la situation du point fixe de cosinus a permis aux étudiants d'exploiter d'autres connaissances relatives à l'approximation d'un nombre :

²⁰¹ Rappelons que dans le cadre de la situation de l'antiphérèse, un tel engagement a pris la forme d'une négociation continue du début jusqu'à la fin.

²⁰² Pour plus de détails concernant les connaissances préalables et à construire, se reporter au de mise en fonctionnement des connaissances ainsi qu'au chapitre 6.

- si une suite converge vers un réel alors quelque soit l'erreur que l'on se fixe, il existe un ordre à partir duquel tous les termes de la suite approchent ce réel à cette erreur près,
- la méthode de dichotomie (dans le cas où certaines hypothèses sont vérifiées) permet d'approcher un nombre à une erreur fixée à priori.

Par contre, les étudiants n'ont pas pu exploiter le fait que l'expression de la tangente en un point d'abscisse a est la meilleure approximation affine de la fonction associée, dans un voisinage de a .

Enfin, le fait qu'ils soient convaincus de l'existence d'un nombre (grâce à un théorème d'existence) et de l'impuissance des outils algébriques à l'expliciter a poussé les étudiants à avancer dans le jeu de la situation.

Une grande part des connaissances que nous prévoyons de construire par le biais de la situation du point fixe de cosinus ont pu aboutir :

- Les connaissances relatives à la construction d'une suite convergeant vers un réel dont on ne connaît pas la forme (en terme de représentation algébrique) ont été abordées efficacement pour le point fixe de cosinus, à travers l'usage de la méthode de Newton. Les conditions théoriques d'application de la méthode de Newton, ont été approchées empiriquement en se basant essentiellement sur le graphique pour un "bon choix" du premier terme de la suite, afin d'assurer sa convergence.
- Les étudiants ont pu construire des connaissances aussi bien relatives à la précision d'approximation qu'à l'estimation de la convergence (juger de la rapidité de la convergence). Du reste, ils ont pu reconnaître que sous certaines conditions, il est possible d'approcher l'image d'un réel par une fonction par l'image d'un réel par un polynôme de degré fixé arbitrairement.

Enfin, les connaissances relatives au contrôle de la validité des résultats empiriques en les reliant aux définitions et théorèmes sont :

- étant donné un réel a , si pour tout réel α , il existe un ordre à partir duquel tous les termes d'une suite sont dans un intervalle de centre a et de rayon α , alors cette suite converge vers a ;
- lorsqu'un nombre est défini implicitement et que les outils algébriques à disposition ne permettent pas de l'expliciter, il est possible de construire des approximations successives de ce nombre ;

- manipuler des énoncés formels comportant ou non une suite de quantificateurs, d'inégalités, etc.

Nous pouvons d'ores et déjà avancer que le travail sur les nombres, accompli par les étudiants (produire des encadrements de limite, des valeurs approchées, des déclarations justifiées sur la nature des nombres, etc.) est plus concluant que celui généré par la situation de l'antiphérèse de $\sqrt{2}$.

Nous complétons dans ce qui suit cette étude par des éléments d'analyse nous permettant de conclure sur les opportunités offertes par la situation du point fixe de cosinus pour :

- permettre de donner une dimension expérimentale aux savoirs enseignés (définition et théorèmes de convergence d'une suite, théorème des valeurs intermédiaires, théorèmes du point fixe, théorème des accroissements finis et formule de Taylor) ;
- revenir efficacement à la dimension formelle.

III.2.1 Retour sur les savoirs visés et l'institutionnalisation prévue

La situation du point fixe de cosinus a permis aux étudiants d'organiser leurs connaissances sur les nombres en fonction d'un certain nombre de théorèmes fondamentaux de l'analyse réelle. Les étudiants ont pu à cette occasion, construire toutes les connaissances prévues relatives au contrôle de la validité des résultats empiriques en les reliant aux définitions et théorèmes.

La construction d'une suite convergeant vers le point fixe de cosinus a permis aux étudiants (qui n'en connaissent pas la forme) de prendre conscience que les objets de l'analyse réelle peuvent exister (via le théorème du point fixe) ne pas être explicités mais être approchés de façon de plus en plus précise. Deux suites convergeant vers le point fixe de cosinus ont été construites : l'une est définie par la fonction cosinus et l'autre est définie à partir de la méthode de Newton.

L'étude des conditions de convergence de la suite définie par la fonction cosinus a permis aux étudiants d'exploiter à bon escient les hypothèses du théorème du point fixe dans le cas où la fonction considérée est strictement contractante.

L'étude suivant une dialectique empirico-théorique des conditions de convergence de la suite construite à partir de la méthode de Newton, a permis aux étudiants de revenir sur la formule de Taylor. La question de la rapidité de la convergence a servi d'appui pour engager les étudiants dans le jeu de la situation.

III.2.2 Retour sur les questions posées par la situation

Nous pensons raisonnable d'affirmer que la situation du point fixe de cosinus a organisé la confrontation des étudiants aux questions de l'existence et de la construction des objets de l'analyse réelle, du rôle de la dimension expérimentale et des preuves pragmatiques dans l'acquisition des savoirs institutionnalisés.

a) Différence entre existence formelle des objets et existence pragmatique

Dans l'organisation générale de l'ingénierie, l'un des enjeux est de pouvoir convaincre les étudiants que les objets de l'analyse réelle existants sont parfois accessibles²⁰³ : pour cela nous avons tablé sur les questions d'approximations successives de nombres.

Dans le cadre de la situation du point fixe de cosinus, le réel choisi est un nombre transcendant, ce choix a permis de confronter les étudiants au lien entre nombres réels, approximations successives et limites dans une problématique d'existence et de meilleure approximation d'un point fixe.

Du reste, la question de l'unicité de l'objet (donc de l'unicité de la limite de la suite vers lequel elle converge) n'a pas été traitée dans les deux situations de l'ingénierie. La question de l'unicité suppose de revenir sur la question de "l'égalité" en analyse réelle, nous pensons que les approximations successives se retrouvent dans cette question même si on n'a pas pris la peine de l'évaluer à la suite du travail des étudiants dans la situation.

b) Confrontation des étudiants à un milieu double

Comme pour la situation de l'antiphérèse de $\sqrt{2}$, le milieu objectif est la base de la phase expérimentale et doit permettre aux étudiants de travailler sur des objets spécifiques, avec des preuves pragmatiques et leur offrir l'opportunité de conjecturer, rechercher, calculer, etc. Ce milieu a pu fonctionner comme prévu dans toutes les phases de la situation.

Le milieu de référence devait permettre aux étudiants de produire des preuves formelles tout en veillant à la mise en défaut de l'application *automatique* des définitions, théorèmes et formalisme du cours et de les relier aux connaissances sur les nombres. Tout au long de leur travail dans la situation du point fixe de cosinus, les étudiants ont pris progressivement conscience que les conditions d'application des théorèmes ne peuvent être un point aveugle du processus de preuve.

²⁰³ Au sens que nous avons déjà adopté.

IV. Conclusion

Comme pour la situation de l'antiphérèse de $\sqrt{2}$, la situation du point fixe a amené les étudiants de première année d'université à prendre en charge des questions de savoir généralement non abordées à ce niveau du cursus : irrationalité (transcendance), approximations, construction, etc. La mise en œuvre de situations à dimension a-didactique a permis de confronter les étudiants à des connaissances sur les nombres et leur lien avec la validité des énoncés formels de l'analyse réelle.

Au terme des résultats des expérimentations, nous voulons souligner l'intérêt et/ou la portée de faire travailler les étudiants sur des situations telles que les situations du point fixe de cosinus et de l'antiphérèse de $\sqrt{2}$. Pour cela, nous convoquons trois points essentiels :

1. Saut conceptuel sur les nombres : Le travail dans les situations a permis aux étudiants d'envisager les nombres réels avec leur statut d'objet mathématique. La focalisation sur les méthodes numériques d'approximations successives a favorisé un accès à cet objet. Au final, les questions qui portaient au départ sur les nombres, concourent à l'émergence du problème général de l'accessibilité, et donc d'une réflexion méta-mathématique. Cette accessibilité a donné la clé d'un travail sur un réseau de savoirs de l'analyse réelle : densité de \mathbb{Q} dans \mathbb{R} , limite d'une suite, point fixe, segments emboîtés, valeurs intermédiaires, accroissements finis, formule de Taylor.
2. Problématique existence/accessibilité : La question de l'existence des objets spécifiques a permis, non seulement de dévoluer les situations, mais aussi de tirer le travail des étudiants vers la dimension pragmatique. Dans les situations proposées, les étudiants ont été amenés à problématiser la question d'existence des objets mathématiques. De ce fait, un travail de va et vient entre preuves pragmatiques et preuves formelles s'est installé, favorisant l'émergence du lien entre la procédure de recherche (mise en œuvre dans le milieu objectif) et la preuve finalement établie.
3. Lien entre variables micro-didactiques et variables macro-didactiques : Les valeurs des variables micro-didactiques, dont le modèle est issue d'une réflexion épistémologique, contribuent à la prise en compte d'une évolution progressive dans les valeurs des variables macro-didactiques de la transition. En effet, la construction des milieux objectifs et de références dépend du choix que nous avons fait des valeurs des variables micro-didactiques, ces variables ayant été retenues en vertu de l'hypothèse épistémologique, à savoir : nature du nombre, type de la suite, nature de la suite, comportement de la suite, type d'équation, type d'approximation sollicitée, type d'erreur et méthode d'approximation. En plongeant les étudiants dans un milieu

mixte où la problématique et les moyens de résolution font appel à des connaissances générales de l'analyse réelle, il a été possible de favoriser un jeu souhaité sur plusieurs valeurs des variables macro-didactiques : degré de formalisation, degré de généralisation, registre de validation, conversions entre registres, mode d'intervention des notions, degré d'autonomie sollicité.

CONCLUSION GENERALE

I. Le modèle des Variables Macro-Didactiques (VMD)

I.1 Validité du modèle VMD

L'étude faite, dans notre mémoire de DEA, de la transition lycée/université en analyse réelle avait mis en évidence des composantes multiples susceptibles de creuser l'écart entre l'enseignement secondaire et l'enseignement supérieur, et de rendre difficile le travail des étudiants dans la mesure où ces derniers sont confrontés à des modifications majeures dans toutes les dimensions de leur travail et dans les connaissances en jeu. Dans de nombreux travaux, la question s'était déjà largement posée des moyens que se donne ou pourrait se donner l'enseignement des mathématiques à l'entrée à l'université pour gérer des variations aussi importantes et permettre aux étudiants d'accéder aux objets de l'analyse réelle. Cette recherche se fixait pour but de reprendre cette question en réintroduisant certaines questions épistémologiques, en approfondissant l'étude du travail des étudiants dans différentes conditions, et en proposant une ingénierie basée sur deux situations à dimension a-didactique.

Dans le DEA nous avons proposé une grille d'analyse à l'aide de variables macro-didactiques, dont certaines empruntées aux travaux de Robert : l'une des questions essentielles de cette thèse était de tester l'efficacité de ce modèle pour la construction d'une progression dans l'apprentissage des concepts de base de l'analyse réelle.

Cette grille s'est révélée être un outil efficace pour maîtriser la construction de situations basées sur l'heuristique numérique ; de plus, ces situations doivent conduire les étudiants à concevoir des objets mathématiques dont seule l'existence est établie. Un axe majeur de notre étude a donc été la vérification expérimentale de cette acquisition d'objets et de certaines méthodes de l'analyse réelle. Dans cette démarche, le modèle VMD est à la fois un outil de construction de situations et un élément de test de la validité des connaissances acquises par les étudiants.

I.2 De l'enseignement "ordinaire" vers l'identification des savoirs visés

Au terme de l'étude faite dans la première partie, nous avons pu mettre en évidence quatre types de difficultés liées à l'apprentissage de l'analyse réelle à l'entrée à l'université :

1. Difficultés à comprendre et à utiliser le formalisme de l'analyse réelle, ou en général le langage de l'analyse réelle.
2. Difficultés à entamer une preuve en analyse réelle (à mettre en œuvre une définition, un théorème, etc.).
3. Difficultés à produire des exemples et des contre-exemples, et par suite une sorte de "désœuvrement mathématique" s'installe empêchant les étudiants de s'investir dans la recherche et de développer une compréhension intuitive des concepts de l'analyse réelle.
4. Difficultés à mettre en accord les objets de l'analyse réelle et les *concepts images* qui leurs sont associés.

La nature de ces difficultés nous a permis de pointer que leur prise en compte, dans un enseignement de l'analyse réelle, va de pair avec la prise en compte d'au moins deux paramètres, à savoir :

1. Des caractéristiques épistémologiques de l'analyse réelle, soient :
 - Les questions relatives aux notions de suite, limite, fonction dérivent de la structure de $(\mathbb{R}, | \cdot |)$ en tant qu'espace métrique et des savoirs de base du calcul différentiel, fondés sur la notion d'approximation.
 - Les savoirs de l'analyse réelle sont particulièrement imbriqués. Le recours aux méthodes numériques d'approximations successives permet de mettre en œuvre un système satisfaisant de ces savoirs, et de faire apparaître sa cohérence.
 - Le recours aux approximations permet de localiser et d'approcher certains objets de l'analyse réelle dont l'existence est établie.
 - La construction des savoirs table sur un va et vient permanent entre le point de vue intuitif et le point de vue formel. En particulier, l'intuition est suscitée par des tâtonnements sur des exemples et des contre-exemples.
2. Un équilibre dans les valeurs de certaines variables macro-didactiques de la transition, à savoir : le degré de formalisation, le degré de généralisation, le registre de validation, les conversions entre registres, le mode d'intervention des notions, et degré d'autonomie sollicité.

Avant d'utiliser ces résultats dans la perspective de la construction de l'ingénierie dans le cadre de la Théorie des Situations Didactiques, nous avons procédé dans une deuxième partie à une investigation du terrain institutionnel comportant une étude des

pratiques enseignantes par le biais d'un questionnaire posé à des enseignants de première année d'université. Ces pratiques ont également fait l'objet d'observations de classe chez un enseignant de mathématiques en première année, où nous avons tenté de dégager la gestion de l'enseignant et le travail des étudiants. Ce que nous visions en particulier, c'est une meilleure définition du travail réel des étudiants dans des conditions classiques, afin de nous donner les moyens de cerner de façon plus précise l'espace qu'il reste à investir dans une ingénierie.

L'analyse du questionnaire enseignant a permis de repérer dans l'échantillon interrogé trois formes d'homogénéité que nous avons décrit aux moyens de trois profils-type, dont deux s'inscrivent dans un contrat décrit par Brousseau comme instituant "*[...] un moyen fictif mais formel d'instruction mis à la disposition de l'apprenant par l'enseignant. Cette fiction épistémologique fait d'ailleurs partie du savoir enseigné.*" (Brousseau, 1996, p.21).

En dépit de ce résultat, nous avons pu constater qu'une proportion assez représentative d'enseignants de l'échantillon laisse entendre l'utilité, dans un enseignement de l'analyse réelle à l'entrée à l'université, du recours aux méthodes numériques.

Notons que ce recours avait déjà été tenté en France dans l'enseignement secondaire au début des années 1980, mais cette tentative avait échoué. On peut identifier au moins deux raisons à cet échec :

- Le niveau d'enseignement n'était pas adéquat pour une introduction des approximations numériques débouchant sur des validations, les élèves ne disposant pas, même à terme, d'outils formels permettant de dépasser la simple constatation empirique.
- Comme nous l'avons montré dans les chapitres relatifs à l'expérimentation, la construction de situations réellement productives débouchant sur des connaissances de l'analyse réelle nécessite un dosage rigoureux des VMD, de façon à articuler heuristique (le travail sur les réels) et validation (le travail sur le formalisme).

L'observation de classes ordinaires a eu pour but d'étudier la question du travail effectif des étudiants ainsi que la gestion de l'enseignant. L'étude faite nous a montré à l'évidence que les savoirs formels n'outillent pas les étudiants pour faire un travail heuristique et ne les amènent pas à se poser la question de la nature, de la localisation ou de l'explicitation des objets mathématiques dont l'existence a été établie.

Le contrat classique privilégie ainsi les preuves formelles, lesquelles enferment les étudiants dans un fonctionnement incompréhensible pour eux, ce qui constitue l'une des

raisons de la pauvreté de leur travail. Or on sait par ailleurs que, dans leur travail, la majorité des mathématiciens experts privilégie plutôt la démarche de mettre en relation les savoirs sur des cas particuliers qui s'avèrent pertinents du point de vue de la généralisation, afin de voir comment ils interagissent : c'est ainsi qu'on opère en mathématiques pour se convaincre du fonctionnement d'objets nouveaux.

Les situations proposées dans l'ingénierie doivent donc être organisées en prenant en compte des conditions didactiques de mise en œuvre de preuves pragmatiques. De plus, la connaissance de \mathbb{R} ayant été identifiée comme un préalable et un outil pour des connaissances plus formalisées de l'analyse réelle, le milieu théorique des situations doit être conçu de sorte que l'approximation et la recherche de valeurs approchées jouent un rôle essentiel. Nous avons adopté de ce fait l'hypothèse épistémologique selon laquelle :

Le recours aux méthodes numériques d'approximations de nombres permet d'organiser des situations relatives aux concepts de limite, de suite et de fonction. Ces situations permettent ensuite de revenir sur des énoncés formalisés et sur les savoirs académiques, en prenant en compte la construction des connaissances des étudiants.

D'où la question centrale mise en travail dans la troisième partie de cette thèse : quelles expériences numériques, quelles situations pertinentes pourraient faciliter l'entrée des étudiants dans la problématique de l'analyse réelle (nombres réels, suites, limites et fonctions) sans perdre de vue une signification "expérimentale" ou heuristique ?

A travers cette question, nous nous sommes fixées comme enjeu la mise en place d'une ingénierie. Nous avons donc aménagé des situations à l'entrée à l'université, qui permettent :

- un approfondissement des connaissances numériques et de la structure de \mathbb{R} , une prise en compte des connaissances du secondaire ;
- le développement d'un processus comportant une phase expérimentale avec des allers-retours entre preuves pragmatiques et preuves formelles ;
- un retour satisfaisant sur les savoirs visés et le formalisme.

L'analyse, grâce à notre modèle des VMD, de l'enchaînement des situations est ce qui a permis d'assurer cette articulation, comme signalé plus haut.

II. Construction et apport de l'ingénierie

II.1 La théorie des situations didactiques : validité dans l'enseignement de l'Analyse à l'entrée à l'université

Dans une problématique de situations traitant un retour sur les savoirs et le formalisme introduits par le biais d'investigations concrètes du niveau du secteur (ou du champ théorique), le but est de développer une forme de conceptualisation qui dérive d'une pensée double : naturelle et formelle. Notre choix s'est porté sur la construction de situations à dimension a-didactique (Cf. Bloch, 1999) à un niveau du cursus où les savoirs académiques de l'analyse réelle ont déjà été "introduits", notre hypothèse s'énonçant ainsi :

Les situations qui réintroduisent une phase expérimentale permettant un travail heuristique sur des objets spécifiques, avec des preuves pragmatiques, vont offrir beaucoup plus d'opportunités de conjectures, de calculs, etc. et permettre un retour au formalisme dans un milieu de référence informé par le milieu objectif précédemment visité.

Ces situations ne sont pas des situations fondamentales ; de plus ces situations ne prennent pas uniquement en charge des *connaissances d'ordre I*²⁰⁴.

Les situations construites et analysées dans le cadre de la TSD ont porté sur des exemples génériques : ceci signifie que les objets spécifiques ainsi que leur mode de traitement sont en rapport mathématique étroit avec la question générale traitée. L'institutionnalisation a concerné des méthodes de l'analyse réelle (les méthodes des approximations successives visées) et des procédures. En particulier, les procédures concernent le lien entre les outils d'investigation et de preuves utilisés.

Le recours aux méthodes numériques d'approximations successives a favorisé l'organisation de situations à dimension a-didactique qui prennent en compte la dialectique sémantique/syntaxique dans un processus de preuve, et qui permettent un retour efficace sur les savoirs visés.

En organisant des situations qui suscitent, de la part des étudiants, des allers/retours entre le milieu objectif et celui de référence et la mise en œuvre de procédures et de

²⁰⁴ Au sens de Sackur et al. (2005) : les *connaissances d'ordre I* sont les définitions, les axiomes et les contenus des énoncés mathématiques vrais.

méthodes de l'analyse réelle, nous avons permis la formulation d'énoncés ressortissant de *connaissances d'ordre II* voire *d'ordre III*²⁰⁵.

La construction des milieux objectifs et de référence doit tabler aussi bien sur un équilibre des valeurs des *variables macro-didactiques* de la transition retenues ci-haut, que sur les valeurs spécifiques aux *variables micro-didactiques* identifiées à partir de considérations épistémologiques.

En regard de toutes les conditions auxquelles les valeurs des variables doivent être soumises, deux situations ont été retenues :

1. L'antiphérèse de racine de 2, qui table sur la construction de la meilleure approximation rationnelle de $\sqrt{2}$ et, dans la mesure du possible, sa généralisation à un irrationnel de la même forme. La méthode utilisée est basée sur les fractions continues et a été introduite historiquement par Théon de Smyrne au temps d'Euclide.
2. Le point fixe de cosinus, qui prend appui sur une discussion de la qualité de l'approximation du point fixe de cosinus, donnée par la méthode de dichotomie par comparaison à une autre approximation que l'on peut construire, c'est celle donnée par la méthode de Newton.

Dans tous les cas, l'ingénierie prévue doit amener les étudiants à travailler sur la nature des nombres (rationnels, irrationnels, algébriques, transcendants), les sous-ensembles de \mathbb{R} et l'approximation des réels non rationnels ; ceci dans la perspective plus large de revenir sur la réintroduction du théorème de densité de \mathbb{Q} dans \mathbb{R} , de la définition et de théorèmes de convergence d'une suite, du théorème du point fixe, du théorème des segments emboîtés, du théorème des valeurs intermédiaires, du théorème des accroissements finis et de la formule de Taylor, tout en insistant sur la dimension expérimentale (calculer, rechercher, conjecturer, etc.).

II.2 Les effets de l'ingénierie : les savoirs issus des situations expérimentées

La situation de l'antiphérèse de $\sqrt{2}$ et celle du point fixe de cosinus mettent en jeu des questions qui ne seraient même pas l'objet de situations didactiques à ce niveau : irrationalité, approximations, construction de suites, etc. Le travail de validation dans

²⁰⁵ Dans l'acception de Sackur et al. (2005), les connaissances d'ordre II sont celles qui portent sur le fonctionnement soit de la sémiosis mathématiques, soit des démonstrations. Les *connaissances d'ordre III participent, indirectement, de la définition des mathématiques*. Il suit que certaines connaissances Méta (au sens de Robert) seraient des *connaissances d'ordre III*.

les situations oblige les étudiants à mettre en jeu le fonctionnement du formalisme sur des objets et avec des questions spécifiques.

Le premier objectif que l'on a fixé aux situations table sur un élargissement du champ d'expérience des étudiants relativement à la nature des nombres réels et à leurs manifestations.

Le travail dans les situations produit un changement épistémologique dans la façon des étudiants de concevoir les nombres comme $\sqrt{2}$ ou le point fixe de cosinus. Ces nombres, qui avaient le statut d'un signe que l'on met pour désigner une chose inconnue, peuvent alors être envisagés avec leur statut d'objet mathématique, relié à d'autres objets et incorporant des règles – ce que Pierce nomme un symbole/argument.

Les situations mettent à la disposition des étudiants un milieu objectif et des fondations expérimentales qui leur permettent de procéder dans la majorité des cas à un travail heuristique. Ils peuvent formuler des preuves pragmatiques en exploitant des connaissances graphiques, des connaissances liées au calcul algébriques, certaines des connaissances relatives à l'approximation d'un nombre et des connaissances sur le raisonnement relatives au rôle des exemples et des contre-exemples dans les phases de recherche et de conjectures.

L'entrée dans un processus de preuves mixtes – comportant des allers/retours entre preuves pragmatiques et preuves formelles – est rendu obligatoire par la "non accessibilité" des objets spécifiques en jeu. Ainsi la consistance du milieu objectif autorise toujours un retour aux procédures mises en œuvre, d'où des allers-retours entre les déclarations formelles et les processus de construction (processus numériques, graphiques, géométriques). Dans le cadre des situations de l'antiphérèse de $\sqrt{2}$ et du point fixe de cosinus, nous pouvons affirmer qu'un retour efficace aussi bien sur le théorème de densité, que sur les théorèmes des valeurs intermédiaires et du point fixe (existence et construction de suites d'approximations successives d'un réel) s'opère. Du reste, lors des séances, les étudiants ont pu mettre en œuvre la définition et certains théorèmes de convergence d'une suite, le théorème des accroissements finis et la formule de Taylor.

L'un des enjeux relatif à la construction de l'ingénierie (et visant l'institutionnalisation) est de trouver le moyen pour que les situations traitent d'exemples génériques. Dans cette perspective, il apparaît que le temps didactique de mise en œuvre d'une telle situation en classe est un paramètre important – une VMD supplémentaire. Ce temps ne peut se réduire à une seule séance, et ce si l'on veut :

- exploiter efficacement l'exemple traité dans un but de généralisation ;

- contrôler véritablement certaines des connaissances acquises par les étudiants.

La mise en œuvre de situations à dimension a-didactique telles que celles de l'antiphérèse de $\sqrt{2}$ et du point fixe de cosinus permet donc non seulement de confronter les étudiants à des connaissances sur les nombres, mais aussi de construire un lien avec la validité des énoncés formels de l'analyse réelle.

II.3 Deux étapes dans l'apprentissage de l'analyse réelle

Au terme des résultats des expérimentations, nous voulons souligner que la portée de travail des étudiants sur les situations expérimentées est majeure, car elle concerne trois points essentiels :

1. Un saut conceptuel sur les nombres : le travail dans les situations a permis aux étudiants d'envisager les nombres réels avec leur statut d'objet mathématique. La focalisation sur les méthodes numériques d'approximations successives a favorisé un accès indirect à cet objet. Au final, les questions qui portaient au départ sur les nombres, concourent à l'émergence du problème général de l'accessibilité, et donc d'une réflexion méta-mathématique (*Connaissances d'ordre II voire d'ordre III*). Cette accessibilité est ce qui donne la clé d'un travail sur un réseau de savoirs de l'analyse réelle : densité de \mathbf{Q} dans \mathbf{IR} , limite d'une suite, point fixe, segments emboîtés, valeurs intermédiaires, accroissements finis, formule de Taylor.
2. Problématique existence/accessibilité : la question de l'existence des objets spécifiques permet, non seulement de dévoluer les situations, mais aussi de tirer le travail des étudiants vers la dimension pragmatique, ce qui les conduit à problématiser la question d'existence des objets mathématiques. De ce fait, un travail de va et vient entre preuves pragmatiques et preuves formelles s'installe, favorisant l'émergence du lien entre la procédure de recherche (mise en œuvre dans le milieu objectif) et la preuve finalement établie.
3. Le lien entre variables micro-didactiques et variables macro-didactiques : les valeurs des variables micro-didactiques, dont le modèle est issu d'une réflexion épistémologique, contribuent à la prise en compte d'une évolution progressive dans les valeurs des variables macro-didactiques de la transition lycée/université en analyse réelle. En effet, la construction des milieux objectifs et de référence dépend du choix que nous avons fait des valeurs des variables micro-didactiques, ces variables ayant été retenues en vertu de l'hypothèse épistémologique, à savoir : nature du nombre, type de la suite, nature de la suite, comportement de la suite, type d'équation, type d'approximation sollicitée, type d'erreur et méthode

d'approximation. En plongeant les étudiants dans un milieu mixte où la problématique et les moyens de résolution font appel à des connaissances générales de l'analyse réelle, il a été possible de favoriser un jeu souhaité sur plusieurs valeurs des variables macro-didactiques : degré de formalisation, degré de généralisation, registre de validation, conversions entre registres, mode d'intervention des notions, degré d'autonomie sollicité.

Un résultat essentiel de notre travail est donc la construction de la progression de situations grâce au modèle VMD. Cette progression est ce qui permet d'articuler les éléments du processus d'entrée dans les connaissances de l'analyse réelle : la situation de l'antiphérèse donne un statut à des nombres vus jusque là comme des "notations" (des indices selon Peirce) ; celle du point fixe de cosinus permet d'aller plus loin dans la conceptualisation. Elle donne accès à des nombres réels qu'on ne sait pas expliciter, et donc oblige à mettre en œuvre des procédures formelles de traitement de ces nombres. Bien entendu ces procédures ne peuvent être que des énoncés analytiques.

Nous avons donc clairement identifié deux étapes irréductibles l'une à l'autre dans l'enseignement/apprentissage de l'analyse réelle : la première mène d'un travail pragmatique de recherche d'approximation d'un nombre tel que $\sqrt{2}$ à la conception de nombres irrationnels ; la deuxième amène à concevoir que, pour contrôler des objets non descriptibles de façon simple, il est nécessaire de mettre en œuvre des énoncés formels d'une certaine nature. En dehors des savoirs académiques ainsi construits, il apparaît de façon incontournable que les situations sont porteuses de *connaissances d'ordre II ou d'ordre III*.

III. Limites et perspectives de la recherche

Au terme des résultats de cette recherche, les questions d'unicité sont restées à l'écart. Si nous partons du fait que de telles questions peuvent être réglées assez facilement dans le cadre de la syntaxe de la théorie de l'analyse réelle utilisée (en analyse non standard, l'unicité ne prend pas la même forme), nous pouvons affirmer que leur niveau dépasse largement celui du début de l'université.

La question que l'on peut poser est la suivante : les étudiants de début de première année d'université ont-ils jamais mis en doute l'unicité de la limite d'une suite quand elle existe ? Pour étudier cette question, il aurait été possible de faire travailler les étudiants sur de diverses instanciations de suites bornées de sorte à pouvoir extraire deux sous-suites qui ne convergent pas vers la même limite. Il aurait été aussi possible, suite aux situations, d'interroger les étudiants sur le statut de l'égalité en analyse réelle

en posant par exemple la question suivante : *Soit a et b deux réels. On sait que $\forall \varepsilon > 0, |a - b| < \varepsilon$, que peut-on dire de a et de b ?*

A l'issue de ce travail, nous ne sommes pas sûre que les procédures utilisées par les étudiants en seraient modifiées. Ce que nous pouvons confirmer tient dans le fait que la problématique syntaxe de l'analyse réelle/situations se retrouve dans cette question.

Par ailleurs, les questions de reproductibilité n'ont à ce jour été traitées que par les assurances, que donne l'application du modèle, de ce que les situations construites sont bien à la source des connaissances prévues. Dans le cadre de cette recherche, il nous importe de souligner que la dimension clinique de la théorie des situations didactiques est partie intégrante de la méthodologie. Dans ce sens, la reproductibilité devrait être assurée par un contrôle des conditions et des variables didactiques. Nous avons par ailleurs noté que l'ingénierie proposée comporte des situations où l'a-didactique est sensible au temps didactique ; le temps didactique de mise en œuvre de chacune de ces deux situations ne peut donc se réduire à une seule séance, si l'on veut observer des connaissances relativement stabilisées.

Nombre d'études sur l'enseignement de l'analyse réelle (Artigue, Trouche, Vandebrouk, etc. en France ; Tall, Dubinsky, Mamona-Downs, etc. dans la recherche anglophone), ont adopté une entrée par la construction d'un milieu instrumenté par des calculatrices et des logiciels de calcul formel. Or il est de notoriété publique que le recours aux TICE nécessite d'avoir les moyens de contrôler un autre type de connaissances : celui lié au fonctionnement de la calculatrice ou du logiciel utilisés, soient les processus d'instrumentalisation et d'instrumentation.

En dépit des possibilités offertes par un milieu construit sur la base des TICE (visualiser, contourner des tâches calculatoires, donner des aperçus sur ce qui est valide ou non de la théorie, etc.), il est essentiel – ne serait-ce que pour des raisons de non disponibilité des outils – de penser des situations dans un milieu *papier/crayon*, ce qui peut d'ailleurs faciliter la confrontation des étudiants à des contraintes supplémentaires liées aux connaissances spécifiques à l'usage des TICE.

Au terme de ce travail de thèse, il convient de souligner que la problématique de l'enseignement de l'analyse réelle à l'entrée à l'université est loin d'être épuisée. D'autres éclaircissements sont à fournir quand au rôle de l'enseignant du supérieur dans sa démarche pour faciliter l'acquisition des savoirs de l'analyse réelle. Or, l'analyse complémentaire de réalisations de séances ordinaires est susceptible de nous éclairer sur ce phénomène, et de nous informer davantage sur la nature du travail des étudiants dans le contrat classique. Il est également nécessaire d'observer des enseignants aux prises

avec les situations que nous avons expérimentées (ou d'autres de même nature), afin de parfaire nos connaissances sur l'expertise didactique du professeur (cf. Bloch, 1999). Ceci pourrait aussi nous éclairer sur les facteurs conduisant un enseignant à adopter, ou non, des situations de ce type.

En prenant appui sur le milieu théorique des situations fondamentales de l'analyse réelle tel que nous l'avons construit, il est aussi possible d'introduire d'autres situations expérimentales et d'étudier plus en profondeur les connaissances des étudiants dans le contrat instauré par de telles situations.

Enfin, la construction d'une organisation didactique de longue durée – du type de celle mise en œuvre par A. Gonzalez-Martin sur l'intégrale impropre – concernant les théorèmes fondamentaux de l'analyse réelle serait aussi certainement d'un grand intérêt. Elle pourrait constituer une base de travail pour des enseignants du supérieur et offrir un terrain d'observation extrêmement riche.

BIBLIOGRAPHIE

BIBLIOGRAPHIE GENERALE SUR LA DIDACTIQUE

ALCOCK L., WEBER K. (2005) Referentiel and syntactic approaches to proof ; case studies from a transition course. *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, vol. 2, pp. 33-40, Editions Chick H-L et Vincent J-L.

ARTAUD M., MENOTTI G. (2005) La praxéologie comme unité d'analyse des processus didactiques- Etude de cas. *Actes électroniques de la XII^e Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques*, La Pensée Sauvage, Grenoble.

ARTIGUE M. (1990) Ingénierie didactique. *RDM*, vol. 9/3, pp. 281-308, La Pensée Sauvage, Grenoble.

ARTIGUE M. (1991) Epistémologies et didactique. *RDM*, vol. 10/2.3, pp. 241-286, La Pensée Sauvage, Grenoble.

ARTIGUE M. (2006) Apprendre les mathématiques au niveau universitaire : ce que les recherches récentes nous apprennent dans ce domaine. *Annales des Didactiques et des Sciences Cognitives*, vol. 11, pp. 269-288, IREM de Strasbourg.

ARTIGUE M., BATANERO C., KENT P. (2007) Mathematics thinking and learning at post secondary level. *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, pp. 1011-1049, Editions Lester, Greenwich.

BLOCH I. (1999) L'articulation du travail mathématique du professeur et de l'élève dans l'enseignement de l'analyse en première scientifique. *RDM*, vol. 19/2, pp. 135-194, La Pensée Sauvage, Grenoble.

BLOCH I. (2002) Différents niveaux de modèles de milieu dans la théorie des situations. *Actes de la XI^e Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques*, pp. 125-139, La Pensée Sauvage, Grenoble.

BLOCH I. (2005) Dimension a-didactique et connaissance nécessaire : un exemple de 'retournement' de situation. In M-H. Salin et al. (eds), *Sur la théorie des situations didactiques*, pp. 143-152, La Pensée Sauvage, Grenoble.

BLOCH I. (2008) How mathematical signs work in a class of students with special needs: Can the interpretation process become operative? *Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 5)*, Larnaca, university of Cyprus, pp. 1140-1150.

BOSCH M., CHEVALLARD Y. (1999) La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique. *RDM*, vol. 19/1, pp. 77-123, La Pensée Sauvage, Grenoble.

BOSCH M., GASCON J. (2002) Theories & Empiries. *Actes de la XI^e Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques*, pp. 23-40. La Pensée Sauvage, Grenoble.

BOSCH M., FONSECA C., GASCON J. (2004) Incompletud de organizaciones matematicas locales en las instituciones escolares. *RDM*, vol. 24/2-3, pp. 205-250, La Pensée Sauvage, Grenoble.

BROUSSEAU G. (1986) Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *RDM*, vol. 7/2, pp. 135-194, La Pensée Sauvage, Grenoble.

BROUSSEAU G. (1996) L'enseignant dans la théorie des situations didactiques. *Actes de la VIII^e école d'été de didactique des mathématiques*, IREM de Clermont-Ferrand.

CHEVALLARD Y. (1999) L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *RDM*, vol. 19/2, pp.221-265, La Pensée Sauvage, Grenoble.

CHEVALLARD Y. (2003) Organiser l'étude, écologie et régulation. *Actes de la XI^e Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques*, pp. 41-56, La Pensée Sauvage, Grenoble.

CHEVALLARD Y. (2004) Approche anthropologique du rapport au savoir et didactique des mathématiques. Maury S., Caillot M. (eds), *Rapport au savoir et didactique*, pp. 81-104, Editions Fabert, Paris.

COMITI C., GRENIER D, MARGOLINAS C. (1995) Niveaux de connaissances en jeu lors d'interactions en situation de classe et modélisation de phénomènes didactiques. In Arsac et alii (eds), *Différents Types de savoirs et leurs articulations*, La Pensée Sauvage, Grenoble.

CONNE F. (1992) Savoir et connaissance dans la perspective de la transposition didactique. *RDM*, vol. 12/2.3, pp. 221-270, La Pensée Sauvage, Grenoble.

DUBINSKY E. (1991) Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In D. Tall (ed), *Advanced Mathematical Thinking*, pp. 95-123, Kluwer Academic Publishers.

DUVAL R. (1993) Registres de représentations sémiotiques et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactiques et de sciences cognitives*, vol. 5, pp. 37-65, IREM de Strasbourg.

FENNEMA E., LOEF M. (1992) Teachers knowledge and its impact. *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, pp. 147-164, Editions D. Grows.

GLAESER G. (1999) *Une introduction à la didactique expérimentale des mathématiques*, La Pensée Sauvage, Grenoble.

GUEUDET G. (2008) Investigating the secondary-tertiary transition. *ESM*, vol. 67, pp. 237-254, Editions Springer.

IANNONE P., NARDI E. (2008) The interplay between syntactic and semantic knowledge in proof production : Mathematicians perspectives. *Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 5)*, Larnaca, Cyprus, pp. 2300-2310.

MARGOLINAS C. (1994) Jeux de l'élève et du professeur dans une situation complexe. *Séminaire DidaTech, IMAG*, pp. 27-83, Université Joseph Fourier, Grenoble.

MARGOLINAS C. (2001) - Situations, milieux, connaissances - Analyse de l'activité du professeur. *Actes de la XI^e école d'été de didactique des mathématiques*, pp. 141-156, La Pensée Sauvage, Grenoble.

MOORE R-C. (1994) Making the transition to formal proof. *ESM*, vol. 27, pp. 249-266.

NARDI E., IANNONE P. (2005) To appear and to be : Acquiring the "genre speech" of university mathematics. *Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 4)*, San Feliu de Guixols, Spain.

ROBERT A. (1992) Projets longs et ingénieries pour l'enseignement universitaire : questions de problématique et de méthodologie. Un exemple : un enseignement annuel de licence en formation continue. *RDM*, vol. 12/2-3, pp.181-220, La Pensée Sauvage, Grenoble.

ROBERT A. (1997) Niveaux de conceptualisation et enseignement secondaire. In Dorier et al. (eds), *L'enseignement de l'Algèbre linéaire en question*, La Pensée Sauvage, Grenoble.

ROBERT A. (1998) Outil d'analyse des contenus mathématiques enseignés au lycée et à l'Université. *RDM*, vol. 18/2, pp. 191-230, La Pensée Sauvage, Grenoble.

ROBERT A. (2003) Tâches mathématiques et activités des élèves : une discussion sur le jeu des adaptations introduites au démarrage des exercices en classe de collège. *Petit x*, vol. 62, pp. 61-71, IREM de Grenoble.

ROBERT A. (2004) Une analyse de séance de mathématique du collège, à partir d'une vidéo filmée en classe : la question des alternatives dans les pratiques des enseignants. *Petit x*, vol. 65, pp. 52-79, IREM de Grenoble.

ROBERT A., ROGALSKI M. (2004) Problèmes d'introduction et autres problèmes de recherche au lycée. *Repères-IREM*, vol. 54, pp. 77-103.

ROBERT A. (2007) Stabilité des pratiques des enseignants de mathématiques (second degré) : une hypothèse, des inférences en formation. *RDM*, vol. 27/3, pp. 271-310, La Pensée Sauvage, Grenoble.

SACKUR C., ASSUDE T., MAUREL M., DROUHARD J-P., PAQUELIER Y. (2005) L'expérience de la nécessité mathématique. *RDM*, vol. 25/1, pp. 57-90, La Pensée Sauvage, Grenoble.

SFARD A. (1991) On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on process and objects as different sides of the same coin. *ESM*, vol. 22, pp. 1-36.

TALL D., VINNER S. (1981) Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *ESM*, vol. 12/2, pp. 151-169.

TALL D. (2004) Thinking through three worlds of mathematics. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME)*, Bergen, Norway, vol. 4, pp. 281-288.

TALL D., MEJIA-RAMOS J-P. (2006) The long term cognitive development of different types of reasoning and proof. *Conference on explanation and proof in mathematics, philosophical and educational perspectives*, Essen, Germany, 2006.

TALL D. (2007) Embodiement, symbolism and formalism in undergraduate mathematics Education. *Plenary at the 10th Conference of the Special Interest Group of*

the Mathematical Association of America on Research in Undergraduate Mathematics Education (CRUME), Mission Valley, California.

THOMPSON A-G. (1992) Teachers' beliefs and conceptions : a synthesis of the research. *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, pp. 127-146, Editions D. Grows.

TROUCHE L. (2007) Environnements informatisés d'apprentissage : quelle assistance didactique pour la construction des instruments mathématiques ? In R. Floris, F. Conne (eds.), *Environnements informatiques, enjeux pour l'enseignement des mathématiques. Intégrer des artefacts complexes, en faire des instruments au service de l'enseignement et de l'apprentissage*, pp. 19-38, De Boeck, Bruxelles.

WEBER K., ALCOCK L. (2004) Semantic and syntactic proof productions. *ESM*, vol. 56/2-3, pp. 209-234, Editions Springer.

WEBER K., ALCOCK L., RADU I. (2007) Proving styles in advanced mathematics. *Proceedings of the 10th Conference of the Special Interest Group of the Mathematical Association of America on Research in Undergraduate Mathematics Education (CRUME)*, Mission Valley, California.

BIBLIOGRAPHIE SUR HISTOIRE DES SCIENCES ET EPISTEMOLOGIE

APERY R. (1982) Mathématique constructive. *Penser les mathématiques*, Séminaire de philosophie et mathématiques de l'école normale supérieure (J. Dieudonné, M. Loi, R. Thom), pp. 58-72, Editions du Seuil.

BONIFACE J. (2002) *Les constructions des nombres réels dans le mouvement d'arithmétisation de l'Analyse*. Editions Ellipses, Paris.

BONIFACE J. (2004) *Hilbert et la notion d'existence en mathématiques*. Librairie Philosophique J. Vrin.

BONNARD M. (1988) Les avatars de l'axiome du choix. D'où vient-il ? Où se cache-t-il ? A quoi nous sert-il ? *IREM de Rouen - Journées Nationales*, pp. 135-150.

BOUVERESSE J. (1987) *La force de la règle, Wittgenstein et l'invention de la nécessité*. Editions Minuit, Paris.

BRUTTER C-P. (2000) *La construction des nombres. Histoire et Epistémologie.* Editions Ellipses, Paris.

CAVEING (1994) *Essai sur le savoir mathématique dans la Mésopotamie et l'Égypte ancienne.* Presses Universitaires de Lille.

CAVEING (1998) *L'irrationalité dans les mathématiques grecques jusqu'à Euclide.* Editions Septentrion, Presses Universitaires.

CHABERT et al. (1994) *Histoire d'algorithmes, du caillou à la puce.* Editions Belin, Paris.

DAHAN-DALMEDICO A., PEIFFER J. (1986) *Une histoire des mathématiques. Routes et dédales.* Editions du Seuil.

DIEUDONNE J. (1978) *Abrégé d'histoire des mathématiques. Tome I.* Editions Hermann, Editeurs des sciences et des arts.

DIEUDONNE J. (1987) *Pour l'honneur de l'esprit humain – Les mathématiques aujourd'hui.* Collection Pluriel, Editions Hachette.

DHOMBRES J., DAHAN-DALMEDICO A., BKOUCHE R., HOUZEL C., GUILLEMOT M. (1987) *Mathématiques au fil des âges.* IREM, Groupe Epistémologie et Histoire, Editions Gauthier Villars.

DHOMBRES J. (1978) *Nombre, mesure et continu. Epistémologie et histoire.* Editions Nathan, Paris.

DUGAC P. (2003) *Histoire de l'analyse. Autour de la notion de limite et de voisinage.* Editions Vuibert.

FRIEDELMEYER J-P. (1993) Eclairages historiques pour l'enseignement de l'analyse. *Repères-IREM*, vol. 13, pp. 111-129, Editions Topiques.

GUICHARD J. (2000) *L'infini au carrefour de la philosophie et des mathématiques.* IREM- Histoire des mathématiques, Editions Ellipses, Paris.

HAIRER E., WANNER G. (2000) *L'analyse au fil de l'histoire.* Editions Springer.

KLEINER I. (2001) History of infinitely small and infinitely large in calculus. *ESM*, vol. 48, pp. 137-174.

LOMBARDI H. (1999) À propos du théorème des accroissements finis. *Repères-IREM*, vol. 34, pp. 55-69.

LOMBARDI H. (2003) Le programme de Hilbert et les mathématiques constructives. *Repères-IREM*, vol. 50, pp. 85-105.

PETITOT J. (1992) *Idéalités mathématiques et réalité objective. Approche transcendantale*. Séminaire d'Epistémologie des Mathématiques, Ecole des Hautes Etudes en Sciences Sociales, Paris.

RASHED R. (1986) *Sharaf Al-Din Al-Tusi, Œuvres mathématiques*. Editions Les Belles Lettres, Paris.

RASHED R. (1984) *Entre arithmétique et algèbre. Recherche sur l'histoire des mathématiques arabes*. Editions Les Belles Lettres, Paris.

ROGERS L. (1995) Is it possible to reconstruct mathematical knowledge in history ? *History and epistemology in mathematics education, Proceedings of the First European Summer University*, pp. 105-114, IREM de Montpellier.

SIERPINSKA A. (1985) Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite. *RDM*, vol 6/1, pp. 5-67, La Pensée Sauvage, Grenoble.

SMIDA H. (2003) Le réel et l'imaginaire en mathématiques. *Actes du colloque : Le Réel et l'Imaginaire en Politique et en Sciences*. Editions Beit El Hikma, Tunis.

STOLL A. (1993) Comment l'histoire des mathématiques peut nous dévoiler une approche possible du calcul intégral. *Repères-IREM*, vol. 11, pp. 47-62.

TOURNES D. (1997) *L'intégration approchée des équations différentielles ordinaires (1671-1914)*. Thèse université Paris 7 - Denis Diderot, Villeneuve d'Ascq, Presses Universitaires du Septentrion.

YOUSCHKEVITCH A-P. (1976) *Les mathématiques arabes (VIII^e - XV^e siècles)*. Librairie Philosophique J. Vrin.

BIBLIOGRAPHIE SUR L'ANALYSE

DIEUDONNE J. (1980) *Calcul infinitésimal*. Editions Hermann, Paris.

DIXMIER J. (1973) *Cours de mathématiques*. Editions Gauthier Villars, Paris.

HARDY G-H., WRIGHT E-M. (1968) *An Introduction to the theory of numbers*. Oxford Press, Clarendon.

ROGALSKI M., ROBERT A., POUYANNE N. (2001) *Carrefours entre Analyse Algèbre et Géométrie*. Collection CAPES/Agrégation. Ellipses, Paris.

BIBLIOGRAPHIE SUR LA DIDACTIQUE DE L'ANALYSE

AHA (Groupe Approche Heuristique de l'analyse) (1996) Une approche heuristique de l'analyse. *Repères-IREM*, vol. 25, Topiques Editions, Metz.

ALCOCK L., SIMPSON A-P. (2005) Convergence of sequences and series 2 : interactions between non-visual reasoning and the learner's beliefs about their own role. *ESM*, vol. 58/1, pp. 77-110.

ARTIGUE M. (1996) Réformes et contre-réformes de l'enseignement de l'analyse (1902-1994). In Belhoste B., Gispert H. et Hulin N. (eds), pp. 195-216, Vuibert et INRP, Paris.

ARTIGUE M. (1998) L'évolution des problématiques en didactique de l'Analyse. *RDM*, vol. 18/2, La Pensée Sauvage, Grenoble.

ARTIGUE M. (2001) L'entrée dans le champ conceptuel de l'analyse, réformes curriculaires, recherches didactiques, où en est-on ? *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques*, pp. 207-301, IREM et ARDM, Paris.

ARTIGUE M. (2003) Evolutions et perspectives de l'enseignement de l'Analyse au lycée. *L'OUVERT 107*, Paris.

BENBACHIR A., ZAKI M. (2001) Production d'exemples et de contre exemples en Analyse : Etude de cas en première d'université. *ESM*, vol. 47, pp. 273-295.

BERGE A. (2004) *Un estudio de la evolucion del pensamiento matematico : el ejemplo de la conceptualizacion del conjunto de los numeros reales y de la nocion de completitud en la ensenanza universitaria*. Doctorat thesis, University of Buenos Aires.

BIREBENT A. (2008) La rupture algébrique/analytique dans le numérique : questions écologiques et instrumentales. *Actes électroniques de la XIII^e Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques*, Editions La Pensée Sauvage.

BLOCH I (2000) *L'enseignement de l'analyse à la charnière lycée/université*. Thèse, Université Bordeaux I.

BLOCH I. (2003) Teaching functions in a graphic milieu : What forms of knowledge enable students to conjecture and prove ? *ESM*, vol. 52, pp. 3-28.

BLOCH I., CHIOCCA C-M., JOB P., SCHNEIDER M. (2008) Du numérique aux limites : Quelle forme prend la transition secondaire/supérieur dans le champ des nombres et de l'analyse ? *Actes électroniques de la XIII^e Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques*, Editions La Pensée Sauvage.

BRIDOUX S. (2008) Utiliser une définition, une tâche simple a priori, le cas de la topologie de \mathbb{R}^N . *Actes électroniques du Colloque EMF 2006*, Editions du CRP, faculté d'éducation de l'Université de Sherbrooke.

BRONNER A. (1997) *Etude didactique des nombres réels*. Thèse, laboratoire Leibniz IMAG, Université Joseph Fourier, Grenoble.

CHELLOUGUI F. (2003) Approche didactique de la quantification dans la classe de mathématique de l'enseignement tunisien. *Petit x*, vol. 61, pp. 11-34, IREM de Grenoble.

CHELLOUGUI F. (2008) Les paradoxes de la formalisation dans l'élaboration d'un concept clef de la transition lycée/université. *Actes électroniques du Colloque EMF 2006*, Editions du CRP, faculté d'éducation de l'université de Sherbrooke.

CHIN E-T., TALL D. (2002) Proof as formal procept in advanced mathematical thinking. *Proceedings of the International Conference on Mathematics Understanding and Proving to Understanding*, pp. 97-107, National Taiwan Normal University.

DA SILVA DIAS M. (2002) *Reta real, conceito imagem e conceito definição*. Thèse, PUC - SP, Sao Paulo, Bresil.

DELEDICQ H. (1996) Est-il possible d'enseigner l'analyse aujourd'hui ? *Repères-IREM*, vol. 24, pp. 79-101.

DURAND-GUERRIER V., ARSAC G. (2003) Méthodes de raisonnement et leurs modélisations logiques. Spécificité de l'analyse. Quelles implications didactiques ? *RDM*, vol. 23/3, pp. 295-342.

GHEDAMSI I. (2003) *Transition lycée/université en Analyse - Cas de la limite : mise en évidence de facteurs de ruptures*. Mémoire de DEA, ISEFC, Tunis.

GRUGNETTI L., MAFFINI A., MARCHINI C. (2006) Activités didactiques à caractère vertical pour la construction du concept de limite. *Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives*, vol. 11, pp. 229-250, IREM de Strasbourg.

GONZALES-MARTIN et al. (2005) La integral impropia. Una ingeniera didactica para su ensenanza. *Reflexiones sobre el Aprendizaje del Calculo y su Enseñanza*, pp. 249-268, Bd. Moreverlledo, México.

HERSANT M., VANDEBROUCK F. (2006) Base d'exercices de mathématiques en ligne et phénomène d'enseignement apprentissage. *Repères-IREM*, vol. 62, pp. 71-84.

HITT F. (2006) Students' functional representations and conceptions in the construction of mathematical concepts. An example : the concept of limit. *Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives*, vol. 11, pp. 251-267, IREM de Strasbourg.

KAHANE et al. (2002) *Commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques. Rapport d'étape sur le calcul*. Ministère de l'Education Nationale, Paris.

LE THAI BAO T-T. (2007) *Etude didactique des relations entre notion de limite et décimalisation des nombres réels dans un environnement calculatrice*. Thèse de Doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble.

LUTZ R., MAKHLOUF A., MEYER E. (1996) *Fondement pour un enseignement de l'analyse en terme d'ordre de grandeur : les réels dévoilés*. APMEP, brochure n°103, Paris.

MACEDO LEME J. (2003) *Aspectos processuais e estruturais da noção de derivada*. Thèse, PUC - SP, Sao Paulo, Bresil.

MAMONA-DOWNS J. (2001) Letting the intuitive bear on the formal ; a didactical approach for the understanding of the limit of a sequence. *ESM*, vol. 48, pp. 259-288.

MASCHIETTO M. (2001) Fonctionnalités des représentations graphiques dans la résolution de problèmes d'analyse à l'Université. *RDM*, vol. 21/1.2, pp. 123-156, La Pensée Sauvage, Grenoble.

MAUREL M., SACKUR C. (2003) Mémoires de DEUG. *Cahier de la Commission Inter-IREM Université*, pp. 89-96, IREM de Lyon.

MIZONY M. (2006) Le calcul formel dans l'enseignement des mathématiques. *Repères-IREM*, vol. 62, pp. 85-68.

MONAGHAN J. (2001) Young peoples' ideas of infinity. *ESM*, vol. 48, pp. 239-257.

PERRIN-GLORIAN M-J. (1999) La tangente est-elle vraiment la droite qui approche le mieux la courbe au voisinage d'un point ? *Repères-IREM*, vol. 34, *Editions Topiques, Metz*.

PRZENIOSLO M. (2004) Images of the limit of function formed in the course of mathematical studies at the university. *ESM*, vol. 55, pp. 103-132.

ROBERT A. (1982) L'acquisition de la notion de convergence des suites numériques dans l'enseignement supérieur. *RDM*, vol. 3/3, La Pensée Sauvage, Grenoble.

SACKUR C., MAUREL M. (2002) La Presqu'île- Une introduction aux fonctions de deux variables en DEUG. *Actes de la XI^e Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques*, pp. 167-176, La Pensée Sauvage, Grenoble.

STOLL A. (1998) Tangente à une courbe : résoudre les problèmes par le mouvement. *Repères-IREM*, vol. 30, pp. 95-109, Editions Topiques.

SMIDA H. (2004) L'enseignement des mathématiques en Tunisie : genèse et destinée. *Actes électroniques du colloque EMF 2003*. Editions, CNP, Tunis.

SMIDA H., GHEDAMSI I. (2008) Pratiques enseignantes dans la transition lycée/université en Analyse. *Actes électroniques du Colloque EMF 2006*, Editions du CRP, faculté d'éducation de l'université de Sherbrooke.

TALL D. (1980) Mathematical intuition with special reference to limiting processes. *Proceedings of the fourth International Congress on Mathematical Education*, pp. 170-176.

TALL D. (1985) Understanding the calculus. *Mathematics teaching*, Vol. 111, pp. 49-53.

TALL D. (1990) A versatile approach to calculus and numerical methods. *Teaching mathematics and its applications*, vol. 9/3, pp. 124-131.

TALL D. (1991) Intuition and rigour : the role of visualisation in the calculus. *Visualisation in mathematics*, *Mathematical Association of America*, vol. 19, pp. 105-109, Editions Zimmermann et Cunningham.

TALL D (1992). The transition to advanced mathematical thinking: functions, limits, infinity and proof. *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, pp. 495-511, Editions DA, Grouws.

TALL D. (1996) Functions and calculus. In A Bishop, K. Clements C. Keitel, J. Kilpatrick et C. Laborde (eds). *International Handbook of Mathematics Education*, pp. 289-325, Kluwer Academic Publishers.

TALL D., PINTO M. (1996) Student teachers conceptions of the rational numbers. *Proceedings of PMP*, Valencia, vol. 4, pp. 139-146.

TALL D. (2002) Natural and formal infinities. *ESM*, vol. 48/2-3, pp. 199-238.

VANDEBROUCK F., CAZES C. (2005) Analyse de fichiers de traces d'étudiants : aspects didactiques. *Revue des Sciences et Technologies de l'Information et de la Communication pour l'Education et la Formation (STICEF)*, vol. 12, pp. 1-33.

VANDEBROUCK F. (2008) Résultats sur l'activité des élèves en classes de seconde. In Fabrice Vandebrouck (eds). *La classe de mathématiques : activité des élèves et pratiques des enseignants*, Octarès Editions, Collection *Formation* dirigée par P. Rabardel et P. Pastré.

WINSLOW C. (2008) Les problèmes de transition dans l'enseignement de l'analyse : Quelques apports des approches diverses de la didactique. *Actes électroniques du Colloque EMF 2006*, Editions du CRP, faculté d'éducation de l'université de Sherbrooke.

ANNEXES

ANNEXE III

(ANNEXE CHAPITRE 3)

Annexe III.1 – Questionnaire aux enseignants

Informations personnelles

- a) Etablissement d'origine.....
- b) Age.....Sexe.....
- c) Nombre d'années d'enseignement dans le supérieur.....
- d) Grade.....
- e) Ancienneté dans le grade.....
- f) Avez-vous déjà enseigné un cours d'analyse en MI1 ?.....
Si oui, durant combien d'années.....
Si oui, l'avez-vous enseigné durant les dix dernières années ?.....
- g) Avez-vous déjà enseigné un TD d'analyse en MI1 ?.....
Si oui, durant combien d'années.....
Si oui, l'avez-vous enseigné durant les dix dernières années ?.....
- h) Avez-vous déjà enseigné au lycée en classe de terminale ?
- Si oui, durant combien d'années.....
- Si oui, avez-vous enseigné ce niveau du cursus durant les dix dernières années.....



Ce questionnaire est destiné à des enseignants qui ont assuré ou non un cours ou un TD d'Analyse réelle en première année.

Si vous faites partie de ceux qui n'ont jamais assuré un cours ou un TD d'Analyse réelle en première année, veuillez répondre dans le sens des choix que vous auriez fait au cas où vous auriez la charge de cet enseignement.

Merci pour votre collaboration.

Veillez pour les questions de 1) jusqu'à 13), mettre une croix dans une seule des quatre cases de l'échelle, dont la première (a) équivaut à la mesure jamais et la dernière (d) équivaut à la mesure toujours.

- 1) Dans quelle mesure proposez-vous aux étudiants des exercices d'Analyse réelle dont la résolution nécessite le recours à une technique de routine.

--	--	--	--
- 2) Dans quelle mesure proposez-vous aux étudiants des exercices d'Analyse réelle consistant à démontrer des théorèmes du cours.

--	--	--	--
- 3) Dans quelle mesure proposez-vous aux étudiants des exercices d'Analyse réelle dont la résolution nécessite l'utilisation du symbolisme et des règles de la logique mathématiques.

--	--	--	--
- 4) Dans quelle mesure proposez-vous aux étudiants des exercices d'Analyse réelle où ils ont recours à l'illustration graphique de la définition d'une notion.

--	--	--	--
- 5) Dans quelle mesure proposez-vous aux étudiants des exercices d'Analyse réelle où ils sont amenés à utiliser la calculatrice.

--	--	--	--
- 6) Dans quelle mesure proposez-vous aux étudiants des exercices d'Analyse réelle où ils sont amenés à utiliser la calculatrice graphique.

--	--	--	--
- 7) Proposez-vous aux étudiants des exercices d'Analyse réelle où ils sont amenés à faire des expérimentations en utilisant un support graphique.

--	--	--	--
- 8) Dans quelle mesure proposez-vous aux étudiants des exercices d'Analyse réelle pour lesquels ils sont amenés à formuler une conjecture.

--	--	--	--
- 9) Dans quelle mesure proposez-vous aux étudiants des exercices d'Analyse réelle faisant appel à plusieurs notions à la fois, à traiter chez eux.

--	--	--	--
- 10) Dans quelle mesure utilisez-vous les quantificateurs quand vous énoncez une définition d'une notion de l'Analyse réelle.

--	--	--	--
- 11) Dans quelle mesure donnez-vous des exemples d'applications des théorèmes d'Analyse réelle que vous énoncez.

--	--	--	--
- 12) Dans quelle mesure utilisez-vous un support graphique lorsque vous définissez une notion de l'Analyse réelle.

--	--	--	--
- 13) Dans quelle mesure expliquez-vous l'idée mathématique sous-tendue par un énoncé de l'Analyse réelle.

--	--	--	--



Si vous choisissez plus d'une réponse pour les questions 14), 15) et 16), veuillez classer les réponses (en les numérotant par 1, 2, etc.) selon le choix qui vous convient le plus.

14) Faites-vous le choix d'admettre un théorème d'Analyse réelle parce que vous estimez que :

- La démonstration est technique.
- La démonstration est facile et laissée à la charge de l'étudiant.
- La démonstration est difficile.
- La démonstration n'affecte pas le déroulement de la suite du cours.
- L'énoncé est évident.
- Il suffit de convaincre en utilisant un support graphique ou autre.
- L'énoncé est un pré requis des étudiants.

15) Faites-vous le choix de démontrer un théorème d'Analyse réelle :

- Pour prouver qu'il est vrai du point de vue logico-théorique.
- Pour faire comprendre les notions en jeu.
- Parce que vous estimez que la démonstration est importante pour le déroulement de la suite du cours.

16) Selon vous, les difficultés les plus courantes rencontrées par les étudiants dans l'apprentissage de l'Analyse réelle en première année concernent

- L'utilisation du symbolisme et du formalisme mathématiques.
- L'utilisation des règles de la logique mathématique.
- La compréhension des notions mathématiques.
- Le raisonnement.

← Veuillez pour les questions de 17) jusqu'à 20), répondre par oui ou par non. →

17) Démontrez-vous

- Tous les théorèmes.
- La plupart des théorèmes.
- Aucun théorème.

18) Parmi ces théorèmes, quels sont ceux que vous démontrez.

Théorème des segments emboîtés.

Théorème de Bolzano-Weierstrass.

Théorème des valeurs intermédiaires.

Théorème de Rolle.

Théorème des accroissements finis.

19) Pensez-vous que le programme d'Analyse réelle en première année devrait contenir une partie de calcul numérique faisant appel à des outils technologiques.

20) Adoptez-vous la chronologie spécifiée dans le programme pour enseigner les notions de l'Analyse réelle ?



Veillez pour les questions de 21) jusqu'à 23), formuler une réponse.

21) Au cas où vous n'adoptez pas la chronologie spécifiée dans le programme, veuillez mentionner la chronologie que vous adoptez ?

.....
.....
.....
.....
.....

22) Sur une liste d'exercices proposés, quel est le pourcentage d'exercices que vous corrigez vous-même.....

23) Sur une liste d'exercices proposés, quel est le pourcentage d'exercices dont la solution est proposée par les étudiants.....

ANNEXE III.2

Tableau des fréquences pour chaque modalité

	Utilisation du graphique V1	Utilisation du formalisme et des règles logiques V2	Compréhension des idées mathématiques V3	
	Q12	Q10	Q11	Q13
1	7,02	8,77	7,02	7,02
2	22,81	28,07	12,28	17,54
3	42,11	21,05	26,32	31,58
4	26,32	35,09	52,63	35,09
manquante	1,75	7,02	1,75	8,77
Total	98,25	92,98	98,25	91,23

ANNEXE IV

(ANNEXE CHAPITRE 4)

Séance du 13 octobre
Durée 2h
Nombre d'étudiants environ 30

Suites réelles

P₁ : On a vu la dernière fois la définition d'une suite qui converge vers l.

P₂ : $(u_n)_n$ converge vers l $\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 \quad |u_n - l| < \epsilon$.

P₃ : Dire qu'une suite diverge c'est à dire qu'elle ne converge pas.

P₄ : Exercice 3

$a \in \mathbb{R} ; u_n = a^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

c'est ce que j'ai appelé la dernière fois une suite géométrique de raison a...

P₅ :

$a = 0 ; \begin{matrix} u_n \rightarrow 0 \\ n \rightarrow +\infty \end{matrix}$

$a = 1 ; \begin{matrix} u_n \rightarrow 1 \\ n \rightarrow +\infty \end{matrix}$

$a = -1 ; (u_n)_n$ diverge

c'est ce qu'on a étudié la dernière fois.

P₆ : On va étudier le cas où $a \in]-1, 1[; a \neq 0$.

On va montrer que si a est égale à un demi, un quart, un sixième, la suite converge vers zéro.

On va le faire avec la définition, c'est à dire quelque soit epsilon positif, il existe n_0 appartient à \mathbb{N}

P₇ : Est ce qu'il y a quelqu'un qui veut passer au tableau...

Le professeur charge un étudiant de le faire...

E₁ : $\forall \epsilon > 0, \dots$

P₈ : Ecrit d'abord, on veut...

$\begin{matrix} u_n \rightarrow 0 \\ n \rightarrow +\infty \end{matrix}$

E₂ : $\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 \quad |u_n| < \epsilon$.

$|u_n| = |a^n| < \epsilon \Leftrightarrow |a|^n < \epsilon. \quad (1)$

P₉ : On applique à (1) le log des deux côtés, on a le droit, les deux membres sont positifs...

E₃ : ... $\Leftrightarrow n \log|a| < \log e$.

Or $0 < |a| < 1$

$\log|a| < 0 \Leftrightarrow n > \frac{\log e}{\log|a|}$

* Si $0 < e < 1 \Leftrightarrow 0 > \log e$. Il suffit de prendre $n_0 = E\left[\frac{\log e}{\log|a|}\right] + 1$. $\forall n \geq n_0 ; |u_n| < e$

* Si $e > 1 \Leftrightarrow \log e > 0$. Donc $\frac{\log e}{\log|a|} < 0$.

P₁₀ : $n > \frac{\log e}{\log|a|}$ toujours
 $\forall n \in \mathbb{N}$

Il suffit de prendre $n_0=0$.

$\forall n \geq 0 ; |u_n| < e$.

P₁₁ : Si on résume, on écrit que...

$$u_n \rightarrow 0$$

$$n \rightarrow +\infty$$

P₁₂ : 3) On suppose que $a \notin [-1, 1]$.

c'est le contraire de valeur absolue de a inférieur ou égal à 1...

$$a \notin [-1, 1] \Leftrightarrow |a| > 1.$$

P₁₃ : Il y a plusieurs manières de voir ce cas là...

E₄ : On peut le faire avec les sous suites...

P₁₄ : Oui, mais aussi par l'absurde...

$(u_n)_n$ diverge ?

On suppose $\begin{matrix} u_n \rightarrow l \\ n \rightarrow +\infty \end{matrix}$

P₁₅ : Vous avez vu dans le cours que toute suite convergente est ...

E₅ : De Cauchy...

P₁₆ : Sinon bornée...raisonnement par l'absurde, on suppose le contraire...

... $\Rightarrow (u_n)_n$ bornée.

M est strictement positif car si M est nul, u_n est nul, ce n'est pas le cas...

$$\exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M.$$

P₁₈ :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |a^n| \leq M \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, |a|^n \leq M$$

$$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, n \operatorname{Log}|a| \leq \operatorname{Log}M$$

là aussi on applique Log le Log est bien définie...

$$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, n \leq \frac{\operatorname{Log}|M|}{\operatorname{Log}|a|}$$

P₁₉ : Est ce que c'est vrai ça ?

E₆ : Non madame absurde car \mathbb{N} n'est pas majoré.....

P₂₀ : Non ça c'est absurde, c'est comme si l'ensemble des entiers naturels est fini...

$$\mathbf{P}_{21} : n_0 = E \left[\frac{\operatorname{Log}M}{\operatorname{Log}|a|} \right] + 1 > \frac{\operatorname{Log}M}{\operatorname{Log}|a|}$$

c'est une manière de voir que c'est absurde...

$(u_n)_n$ ne converge pas $\Leftrightarrow (u_n)_n$ diverge

E₇ : ...on peut le faire avec les sous suites...

P₂₂ : Vous pouvez aussi faire avec les sous suites, je ne sais pas si c'est plus rapide...

P₂₃ : ...une suite convergente est bornée, mais bornée n'est pas nécessairement convergente...

exemple $(-1)^n$

P₂₄ : Ceci résume tous les cas des suites géométriques selon la raison k...

donc on a trouvé...

$$u_n = a^n$$

$$\text{si } |a| < 1 ; u_n \xrightarrow[n]{} 0$$

$$\text{si } |a| > 1 ; (u_n)_n \text{ diverge}$$

$$\text{si } a = 1 ; u_n \xrightarrow[n]{} 1$$

$$\text{si } a = -1 ; (u_n)_n \text{ diverge}$$

P₂₅ : Je vous rappelle un résultat du cours, un moyen de montrer qu'une suite est divergente, c'est de trouver deux sous suites qui convergent vers des valeurs différentes...

$$\mathbf{E}_8 : u_n = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \left(1 + \frac{1}{n} \right)$$

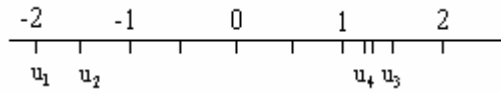
P₂₆ : Il n'y a pas de problèmes pour $1 + \frac{1}{n} \dots$

$\frac{1}{n}$ tend vers 0 donc $1 + \frac{1}{n}$ tend vers 1...cette suite ne commence pas par 0 car on a $\frac{1}{n} \dots$

$$E_9 : u_1 = -2, u_2 = -\frac{3}{2}, u_3 = \frac{4}{3}, u_4 = \frac{5}{4}.$$

P₂₇ : ...on prend des exemples...pour voir un peu la nature de la suite...

P₂₈ :



P₂₉ : ...on cherche des suites extraites qui ne convergent pas vers le même réel

$$E_{10} : u_{4n} = (-1)^{2n(4n+1)} \left(1 + \frac{1}{4n} \right)$$

P₃₀ : Quelle est sa parité ce nombre $2n(4n+1)$...

E₁₁ : Impair...euh...p...

P₃₁ : ... c'est un multiple de 2...

$$E_{12} : u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$$

$$P_{32} \text{ (corrige)} : u_{4n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$$

E₁₃ :

$$\begin{aligned} u_{4n+1} &= (-1)^{(2n+1)(4n+1)} \left(1 + \frac{1}{4n+1} \right) \\ &= - \left(1 + \frac{1}{4n+1} \right) \end{aligned}$$

$$u_{4n+1} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -1, 1 \neq -1 \text{ donc } (u_n)_n \text{ est divergente.}$$

P₃₃ : Elle est comment cette suite...

E₁₄ : Elle est convergente vers 0.....

$$E_{15} : v_n = \frac{\cos(2n^3 + 1)}{(n+1)}$$

$$\cos(2n^3 + 1) \text{ est bornée car } \left| \cos(2n^3 + 1) \right| \leq 1$$

$$\frac{1}{n+1} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 \text{ donc } v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

P₃₄ (simultanément avec E₁₅) : Cosinus de n'importe quoi est toujours compris entre -1 et 1.

P₃₅ : Dans le cours nous avons vu un théorème, si $(a_n)_n$ tend vers 0 et $(b_n)_n$ est bornée,

$(a_n b_n)_n$ tend vers 0.

E₁₆ :

$$\begin{aligned}w_n &= \sqrt{n^2 + 1} - n \\ &= \frac{(\sqrt{n^2 + 1})^2 - n^2}{\sqrt{n^2 + 1} + n} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1} + n}\end{aligned}$$

P₃₆ : Je veux la coincer entre deux termes qui tendent vers 0...

E₁₇ : On ne peut pas directement passer à la limite...

P₃₇ : Eh...oui...bon vous êtes habitués à faire ça...si vous voulez... $\sqrt{n^2 + 1}$ tend vers $+\infty$ plus n tend vers $+\infty$...ou bien oui...on va encadrer...

E₁₈ : $0 < w_n \leq \frac{1}{n}$ et $\frac{1}{n} \rightarrow 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0$.

E₁₉ : C'est quoi le théorème sur suite bornée et suite tend vers 0...

P₃₈ : Vous avez vu ça dans le cours...

P₃₉ : Pour la majoration qu'on vient de faire, elle n'est pas valable pour $n=0$...mais c'est pas grave puisqu'on cherche limite en $+\infty$...

E₂₀ : $t_n = \sin\left(n \frac{\pi}{2}\right)$, $t_0 = 0$, $t_1 = 1$, $t_2 = 0$, $t_3 = -1$ et $t_4 = 0$.

P₄₀ : ...ça se voit que c'est une suite qui ne converge pas...donc chercher des suites extraites qui ne convergent pas vers la même valeur...

E₂₁ : On a $t_{2n} = \sin(n\pi) = 0$, donc $t_{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

$$t_{2n+1} = \sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \sin n\pi \cos \frac{\pi}{2} + \cos n\pi \sin \frac{\pi}{2} = \cos n\pi = (-1)^n.$$

$(t_n)_n$ est une suite divergente.

P₄₁ : Si on veut prendre d'autres suites extraites...

$$t_{4n+1} = \sin\left((4n+1)\frac{\pi}{2}\right), t_{4n+1} = \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \text{ donc } t_{4n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

$$\mathbf{P_{42}} : C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

$$S_n = \frac{n!}{p!(n-p)! n^p}, p \in \mathbb{N}^* \text{ fixé, } n \in \mathbb{N}, \forall n \geq p.$$

$$S_n = \frac{1}{p!} \cdot \frac{n(n-1)\dots 1}{(n-p)\dots 1 \cdot n^p} = \frac{1}{p!} \cdot \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{n^p}$$

P43 : Il y a combien de termes en haut...

E22 : Il y a p termes...

P44 : ...comment on le sait...

Le professeur écrit dans un coin du tableau $n - (n - p + 1) + 1 = p$ termes...

$$\mathbf{P45} : S_n = \frac{1}{p!} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{(n-1)}{n} \dots \frac{(n-p+1)}{n} = \frac{1}{p!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{p-1}{n}\right)$$

$$1 - \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

$$1 - \frac{2}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

...

$$1 - \frac{p-1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

$$S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} p!$$

P46 : Avant de faire l'exercice 7, je rappelle la définition d'une suite de Cauchy....

P47 : $(u_n)_n$ est de Cauchy $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_0, \forall m \geq n_0 ; |u_m - u_n| < \varepsilon$.

P48 : Vous avez vu en cours plusieurs résultats de suite de Cauchy...

si $(u_n)_n$ est convergente alors $(u_n)_n$ est de Cauchy

$(u_n)_n$ convergente $\Rightarrow (u_n)_n$ de Cauchy

P49 : Un autre moyen de montrer qu'une suite n'est pas convergente, c'est de montrer qu'elle n'est pas de Cauchy...

$(u_n)_n$ n'est pas de Cauchy $\Rightarrow (u_n)_n$ est divergente

Dans \mathbb{R} : $(u_n)_n$ de Cauchy $\Rightarrow (u_n)_n$ convergente

P50 : On appelle ça \mathbb{R} complet...en fait c'est ça \mathbb{R} complet...

$$\mathbf{P51} : n \geq 1, u_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$$

$$u_1 = 1, u_2 = \frac{3}{2} \text{ et } u_3 = \frac{11}{6}$$

$$u_{2n} - u_n = \left(1 + \dots + \frac{1}{n}\right) - \left(\frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2n}\right) = \underbrace{\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}}_{n \text{ termes}}$$

$$\frac{1}{2n} \leq \frac{1}{n+1}$$

$$\frac{1}{2n} \leq \frac{1}{n+2}$$

...

$$\frac{1}{2n} \leq \frac{1}{2n}$$

$$\Rightarrow n \cdot \frac{1}{2n} \leq \left(\frac{1}{n+1}\right) \left(\frac{1}{n+2}\right) \dots \left(\frac{1}{2n}\right)$$

$$u_{2n} - u_n \geq \frac{1}{2}$$

P52 : ...donc on utilise la négation de la définition de Cauchy...

E23 : ...c'est quoi la négation ?

P53 : la négation de la définition de Cauchy est ...

$$(u_n)_n \text{ n'est pas de Cauchy} \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0, \forall n_0 \in \mathbb{N}, \exists n \geq n_0, \exists m \geq n_0 ; |u_m - u_n| \geq \varepsilon$$

P54 : ...la négation...le quelque soit devient existe et le existe devient quelque soit...

P55 :

$$|u_{2n} - u_n| \geq \frac{1}{2}, \forall n \geq 1$$

$$\text{Pour } \varepsilon = \frac{1}{2}; \forall n_0 \in \mathbb{N}^*, n = n_0 \geq n_0; m = 2n_0 \geq n_0$$

$$|u_m - u_n| = |u_{n_0} - u_{2n_0}| = u_{2n_0} - u_{n_0} \geq \frac{1}{2}.$$

...donc il existe epsilon, il existe m, il existe n tels que quelque soit n_0 dans \mathbb{N}^* ...

$$(u_n)_n \text{ n'est pas de Cauchy} \Rightarrow (u_n)_n \text{ est divergente}$$

E24 : Pourquoi n_0 appartient à \mathbb{N}^* , il n'y a pas dans la définition...

P56 : ...ça dépend de la suite...

P57 : Cet exemple est pareil...par contre on va montrer qu'elle est de Cauchy...

$$u_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}, n \geq 1$$

$$\text{Pour tous } 0 < n < m, \text{ on a } |v_n - v_m| \leq \frac{1}{n+1}$$

$$\text{On a } m > n ; m = n + p, v_n - v_{n+p} = \frac{(-1)^n}{n+1} + \dots + \frac{(-1)^{n+p-1}}{n+p}$$

P58 : On ne peut pas calculer sa limite...bon sa limite c'est $\log 2$

Séance du 3 novembre

Durée 2h

Nombre d'étudiants environ 30

Fonctions (Limites- continuité)

P₅₉ : On va montrer que χ_{IQ} n'est pas continue en tout point de \mathbb{R} .

E₂₅ : Exercice 7

$$\chi_{IQ}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in IQ \\ 0 & \text{si } x \notin IQ \end{cases}$$

Mq χ_{IQ} n'est continue en aucun point de \mathbb{R}

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$

$$1) x_0 \in IQ \Rightarrow \chi_{IQ}(x_0) = 1$$

P₆₀ : D'après l'exercice 4 quand on a un ensemble qui est dense dans \mathbb{R} ...

Le professeur énonce le résultat...

E₂₅ (suite) : Comme $\mathbb{R} \setminus IQ$ est dense dans $\mathbb{R} \Rightarrow \exists (x_n)_n \subset \mathbb{R} \setminus IQ$ tq $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x_0$ et

$$\chi_{IQ}(x_n) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \chi_{IQ}(x_n) = 0 \neq \chi_{IQ}(x_0) = 1$$

donc χ_{IQ} n'est pas continue sur IQ

P₆₁ : Je rappelle le critère de continuité ...

Le professeur écrit au tableau le critère par les suites...

$$\mathbf{E}_{26} : 2) x_0 \in \mathbb{R} \setminus IQ \Rightarrow \chi_{IQ}(x_0) = 0$$

Comme IQ est dense dans \mathbb{R}

$$\Rightarrow \exists (x_n)_n \subset IQ \text{ tq } \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x_0 \text{ et}$$

$$\chi_{IQ}(x_n) = 1, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \chi_{IQ}(x_n) = 1 \neq \chi_{IQ}(x_0) = 0$$

donc χ_{IQ} n'est pas continue sur $\mathbb{R} \setminus IQ$

(1) et (2) $\Rightarrow \chi_{IQ}$ n'est continue en aucun point de \mathbb{R} .

P₆₂ : Je répète si $x_0 \in IQ$, on utilise la densité de $\mathbb{R} \setminus IQ$ dans \mathbb{R} ...

P₆₃ : On aurait pu montrer la non continuité en utilisant la définition...

2^{ème} méthode

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, Mq $\chi_{\mathbb{IQ}}$ n'est pas continue en x_0 ?

P₆₄ : ...donc on va montrer la négation de la définition...

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \eta > 0 / \exists x, |x - x_0| < \eta \text{ et } |\chi_{\mathbb{IQ}}(x) - \chi_{\mathbb{IQ}}(x_0)| > \varepsilon$$

P₆₅ : Je veux chercher ε donc si $\chi_{\mathbb{IQ}}(x) = 1$, ça ne m'intéresse pas, si $\chi_{\mathbb{IQ}}(x) = 0$

c'est bon, je peux prendre $\varepsilon = \frac{1}{2}$...

1^{er} Cas :

$$x_0 \in \mathbb{IQ} \Rightarrow \chi_{\mathbb{IQ}}(x_0) = 1$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2}, \forall \eta > 0, \text{ cherchons } x \text{ tq } -\eta < x - x_0 < \eta$$

$x_0 - \eta$ et $x_0 + \eta \in \mathbb{R}$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{IQ}$ est dense dans \mathbb{R}

$$\begin{aligned} \Rightarrow \exists x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{IQ} \text{ tq } x_0 - \eta < x < x_0 + \eta \\ \Rightarrow |x - x_0| < \eta \end{aligned}$$

$$|\chi_{\mathbb{IQ}}(x) - \chi_{\mathbb{IQ}}(x_0)| > \frac{1}{2} = \varepsilon.$$

f n'est pas continue en x_0 .

2^{ème} Cas :

$x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{IQ}$, on a de même $\chi_{\mathbb{IQ}}$ n'est pas continue en x_0 .

P₆₆ : Je vous donne une fonction que vous avez vu dans le cours et que vous n'avez pas traité...

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{IQ} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{IQ} \end{cases}$$

f est continue uniquement en 0 ?

P₆₇ : Comment on va faire pour montrer que f est continue en 0...

E₂₇ : ...on utilise limite à droite et limite à gauche...

P₆₈ : Non, on n'a pas besoin...

P₆₉ :

1) Mq f est continue en 0 $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \eta / \forall x, |x| < \eta \Rightarrow |f(x) - 0| < \varepsilon$.

$$\forall x, |f(x)| = \begin{cases} |x| & \text{si } x \in \mathbb{IQ} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{IQ} \end{cases}$$

$$|f(x)| \leq |x|, \forall x \in \mathbb{R} \text{ (car } 0 \leq |x|, \forall x)$$

$|f(x)| < \eta$ si $|x| < \eta$, il suffit de prendre $\varepsilon = \eta$.

$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta = \varepsilon / \forall x, |x| < \eta \Rightarrow |f(x)| < \eta = \varepsilon$.

$\Rightarrow f$ est continue en 0.

P₇₀ : ...on a vu dans l'exercice 4, ce qu'on obtient quand on a un ensemble qui est dense dans \mathbb{R} ...

2) $x_0 \neq 0$, montrons que f n'est pas continue en x_0 ?

i/ si $x_0 \in \mathbb{Q}^*$, $f(x_0) = x_0$.

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans \mathbb{R}

$\Rightarrow \exists (\alpha_n)_n \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tq $\alpha_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} x_0$, donc $f(\alpha_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 \neq f(x_0)$.

f n'est pas continue en x_0 .

ii/ si $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $f(x_0) = 0$.

\mathbb{Q} est dense dans \mathbb{R}

$\Rightarrow \exists (\alpha_n)_n \subset \mathbb{Q}$ tq $\alpha_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} x_0$, donc $f(\alpha_n) = \alpha_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} x_0 \neq f(x_0)$.

f n'est pas continue en x_0 .

C1 : f n'est continue qu'en 0.

P₇₁ : Les 3 exercices qui restent, ce sont des applications du théorème des valeurs intermédiaires.

P₇₂ : Il faut que l'intervalle soit fermé, borné...

Théorème des valeurs intermédiaires

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ / f est continue sur $[a, b]$ / $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$.

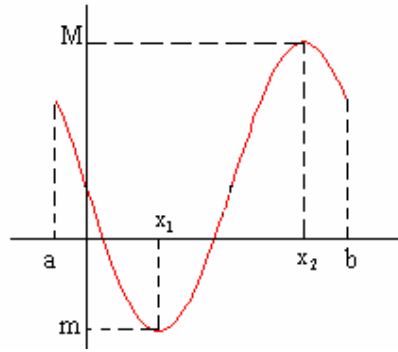
Alors

1) f est bornée et atteint ses bornes :

$\exists m, M / m \leq f(x) \leq f(M)$.

$\exists x_1, x_2 \in [a, b] / m = f(x_1) = \inf \{f(x); x \in [a, b]\}$ et

$M = f(x_2) = \sup \{f(x); x \in [a, b]\}$.



2) f prend toutes les valeurs comprises entre $f(a)$ et $f(b)$.

$\forall \alpha$ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, $\exists x \in [a, b] / f(x) = \alpha$.

3) Si $f(a) \cdot f(b) < 0$, alors $\exists c \in]a, b[/ f(c) = 0$.

4)

$$f([a, b]) = [m, M]$$

$$(\Rightarrow \forall \alpha \in [m, M]; \exists x \in [a, b] / f(x) = \alpha)$$

...ça, c'est la même chose que 1)...

P73 : Exercice 8

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ périodique de période $T > 0$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x + T) = f(x)$$

$$\Rightarrow f(x + nT) = f(x), \forall n \in \mathbb{Z}$$

...ça veut dire quoi périodique de période T ...

P74 : ...comme cosinus, je peux ajouter $4\pi, 6\pi, 2\pi$...

P75 : 1) f est continue sur $\mathbb{R} \stackrel{?}{\Rightarrow} f$ est bornée sur \mathbb{R} .

f est continue sur $\mathbb{R} \Rightarrow f$ est continue sur $[0, T]$, donc f est bornée sur $[0, T]$

$\exists m, M$ tels que $m \leq f(x) \leq M ; \forall x \in [0, T]$.

P76 : Soit $x \in \mathbb{R}$, $m \leq f(x) \leq M$? $\frac{x}{T} \in \mathbb{R}$

...je veux me ramener à l'intervalle $[0, T]$...

P77 :

$$E\left(\frac{x}{t}\right) \leq \frac{x}{t} \leq E\left(\frac{x}{t}\right) + 1, E\left(\frac{x}{t}\right) = n, n \in \mathbb{Z}$$

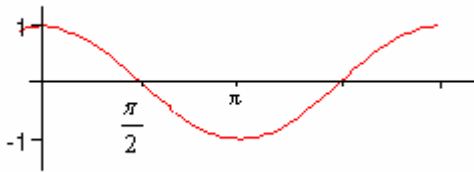
$$nT \leq x \leq nT + T$$

$$0 \leq x - nT \leq T$$

$$\Rightarrow m \leq f(x - nT) \leq M .$$

E28 : on a $m = f(a)$ et $M = f(b)$...

P78 : Attention, ce n'est pas toujours le cas, d'ailleurs, je n'ai pas besoin de ça...ça se voit pour cosinus...



P79 : On poursuit...

$f(x - nT) = f(x)$ car f est T -périodique.

$$m \leq f(x) \leq M \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, m \leq f(x) \leq M \Rightarrow f \text{ est bornée sur } \mathbb{R} .$$

P80 :

2) f périodique de période T .

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l \Rightarrow f \text{ est constante.}$$

...on n'a plus f continue, donc on n'a plus T.V.I....

E29 : On peut faire la démonstration par l'absurde ...

P81 : supposons f non constante

$$\Rightarrow \exists x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 \neq x_2 \mid f(x_1) \neq f(x_2)$$

Le professeur efface ensuite ce qu'il vient d'écrire...

P82 : Oui ... mais bon, on peut faire directement...

Montrons que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = l$?

$$x_n = x + nT, n \in \mathbb{N}.$$

$$\left. \begin{array}{l} x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty \\ \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} f(x_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l \\ \text{(a)} \end{array}$$

$$\text{or } f(x_n) = f(x + nT) \underset{f \text{ T-périodique}}{=} f(x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f(x) \text{ (b)}. \text{ (a) et (b)} \Rightarrow f(x) = l.$$

E30 : On peut faire par l'absurde ...

P83 : Bon ...

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \beta > 0, \forall x > \beta, |f(x) - l| < \varepsilon$. Supposons f non constante,

$\exists x_1 \neq x_2$ tq $f(x_1) \neq f(x_2)$.

On prend $\varepsilon = \frac{1}{3} |f(x_1) - f(x_2)|$, $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ et $n_2 \in \mathbb{N}$ tq $x_1 + n_1 T > \beta$ et $x_2 + n_2 T > \beta$,

$|f(x_1 + n_1 T) - l| < \varepsilon$ et $|f(x_2 + n_2 T) - l| < \varepsilon \Rightarrow |f(x_1) - l| < \varepsilon$ et $|f(x_2) - l| < \varepsilon$,

$3\varepsilon = |f(x_1) - f(x_2)| \leq |f(x_1) - l| + |f(x_2) - l| < 2\varepsilon$.

Ce qui est absurde donc f est constante.

E₃₁ : je n'ai pas compris...

P₈₄ : je répète ...

Le professeur relit ce qui est écrit au tableau...

Séance du 14 décembre

Durée 2h

Nombre d'étudiants environ 30

Fonctions- dérivabilité, fonctions réciproques

P₈₅ : On va appliquer le théorème des Accroissements finis pour $x = 10000$ et la fonction c' est racine ...

$$\mathbf{P_{86}} : \sqrt{10001} \approx 100 = \sqrt{10000}, f(x) = \sqrt{x}$$

f est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

$$\begin{aligned} f(x+1) - f(x) &= \sqrt{10001} - \sqrt{10000} \\ &= 1f'(x+\theta) \\ &= 1f'(10000+\theta) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{10000+\theta}} \end{aligned}$$

$$\text{donc } \sqrt{10001} = 100 + \frac{1}{2\sqrt{10000+\theta}}$$

Donc si on suppose que $\sqrt{10001} \approx 100$ l'erreur commise est égale à $\frac{1}{2\sqrt{10000+\theta}}$.

P₈₇ :

$$0 < \theta < 1$$

$$10000 < 10000 + \theta < 10001$$

$$100 < \sqrt{10000+\theta} < \sqrt{10001}$$

...parce qu'on veut la limite supérieure de l'erreur...

P₈₈ :

$$\frac{1}{2\sqrt{10001}} < \frac{1}{2\sqrt{10000+\theta}} < \frac{1}{200} = 0.005$$

...on a une majoration de l'erreur grâce au T. A. F.

P₈₉ : Dans cette question c'est le contraire, on nous donne l'erreur et on nous demande de trouver $\text{Log}101$...

$$\mathbf{P_{90}} : f(x) = \text{Log}x. \forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) = \frac{1}{x}.$$

On va l'écrire pour $h=1$ et $x=100$.

$$f(101) - f(100) = 1f'(100+\theta).$$

$\text{Log}(101) = \text{Log}(100) + \frac{1}{100 + \theta}$. Si on prend $\text{Log}(101) \approx \text{Log}(100)$, l'erreur

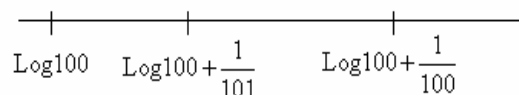
$$l = \frac{1}{100 + \theta}.$$

$$\frac{1}{101} < \frac{1}{100 + \theta} < \frac{1}{100}.$$

$\text{Log}100$ n'est pas la bonne valeur approchée de $\text{Log}101$ avec une erreur égale à $\frac{1}{20000}$.

...comme valeur approchée, on ne peut pas prendre $\text{Log}100$ car dans ce cas l'erreur n'est pas inférieure à $\frac{1}{20000}$...

P₉₁ : On va essayer de voir qu'est ce qu'on va prendre...



Car $\frac{1}{101} < \frac{1}{100 + \theta} < \frac{1}{100}$, donc $\text{Log}100 + \frac{1}{101} < \text{Log}101 < \text{Log}100 + \frac{1}{100}$.

E₃₂ : Madame je n'ai pas compris...

P₉₂ : *le Professeur redit ce qui est écrit au tableau...*

P₉₃ : Maintenant qu'elle est la distance entre $\text{Log}100 + \frac{1}{101}$ et $\text{Log}100 + \frac{1}{100}$...

$$\mathbf{P_{94}} : = \left(\frac{1}{100} - \frac{1}{101} \right) = \frac{1}{10100} < \frac{1}{10000}$$

Donc on prend pour valeur approchée de $\text{Log}101$

$$\frac{1}{2} \left(\left(\text{Log}100 + \frac{1}{100} \right) + \left(\text{Log}100 + \frac{1}{101} \right) \right).$$

$x = \text{Log}100 + \frac{1}{2} \dots \approx \text{Log}101$, x est une valeur approchée de $\text{Log}101$ d'erreur e et

$$e < \frac{d}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{20000} < \frac{1}{20000}$$

E₃₃ : Est-ce que l'erreur c'est la distance ...

P₉₅ : Oui l'erreur c'est la distance...

P₉₆ : On a vu l'intérêt des accroissements finis à calculer des valeurs avec des erreurs, donc ce sont des applications du T.A.F pour déterminer des valeurs approchées...

P₉₇ : Une autre application du T.A.F pour montrer qu'une suite converge ...

On va passer au T.A.F général.

P₉₈ : f est continue sur $]a, b[$, f est dérivable sur $]a, b[$,

$$\exists c \in]a, b[, f(b) - f(a) = (b - a)f'(c).$$

P₉₉ : On va travailler avec $x > 1$ parce que c 'est suffisant...

$$f(x) = \text{Log}(\text{Log}|x|)$$

$$\forall x > 1.$$

$$f \text{ continue dérivable sur }]1, +\infty[, f'(x) = \frac{1}{x \text{Log} x}, \forall x > 1.$$

P₁₀₀ : On va essayer d'écrire T.A.F dans des intervalles du type $[2, 3]$, $[3, 4]$, ...

$$\mathbf{P_{101}} : * \text{ T.A.F sur } [2, 3], \exists c_2 \in]2, 3[, f(3) - f(2) = \frac{1}{c_2 \text{Log} c_2}$$

$$\text{Log}(\text{Log}3) - \text{Log}(\text{Log}2) = \frac{1}{c_2 \text{Log} 2}$$

$$* \text{ T.A.F sur } [3, 4], \exists c_3 \in]3, 4[, f(4) - f(3) = \frac{1}{c_3 \text{Log} 3}$$

$$\text{Log}(\text{Log}4) - \text{Log}(\text{Log}3) = \frac{1}{c_3 \text{Log} c_3}$$

etc... jusqu'à l'intervalle $[n-1, n]$,

$$\exists c_{n-1} \in]n-1, n[, \text{Log}(\text{Log}n) - \text{Log}(\text{Log}(n-1)) = \frac{1}{c_{n-1} \text{Log}(n-1)}$$

$$* 2 < c_2 < 3$$

$$\frac{1}{3 \text{Log} 3} < \frac{1}{c_2 \text{Log} c_2} < \frac{1}{2 \text{Log} 2}$$

.
.
.

$$\frac{1}{n \text{Log} n} < \frac{1}{c_{n-1} \text{Log} c_{n-1}} < \frac{1}{(n-1) \text{Log}(n-1)}$$

P₁₀₂ : Je vais faire la somme...

$$\frac{1}{3 \text{Log} 3} + \dots + \frac{1}{n \text{Log} n} < \frac{1}{c_2 \text{Log} c_2} + \dots + \frac{1}{c_{n-1} \text{Log} c_{n-1}} < \frac{1}{2 \text{Log} 2} + \dots + \frac{1}{(n-1) \text{Log}(n-1)}$$

$$u_n = \frac{1}{2\text{Log}2} + \dots + \frac{1}{n\text{Log}n}$$

P₁₀₃ : C'est cette inégalité qui nous intéresse ...

Donc on a

$$u_n - \frac{1}{2\text{Log}2} < \text{Log}(\text{Log}n) - \text{Log}(\text{Log}2) < u_n - \frac{1}{n\text{Log}n}$$

$$u_n > \frac{1}{n\text{Log}n} + \text{Log}(\text{Log}n) - \text{Log}(\text{Log}2)$$

Donc $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$.

P₁₀₄ : C'est une autre utilité du T.A.F pour montrer qu'une suite diverge...

E₃₄ : Pourquoi on n'a pas travaillé directement sur $[2, n]$...

... sans réponse ...

P₁₀₅ : L'exercice 9, ça va être encore fonctions réciproques...

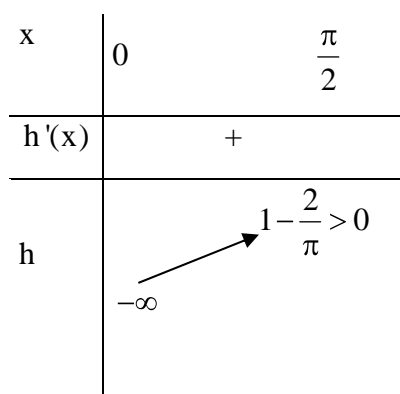
Exercice 9 :

$$1) \exists ! a \in \left] 1, \frac{\pi}{2} \right[\text{ tq } \sin a = \frac{1}{a} ?$$

P₁₀₆ : Quelle est la fonction à considérer d'abord....

$$\mathbf{P_{107}} : h(x) = \sin x - \frac{1}{x}, x \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[, h \text{ est continue et dérivable sur } \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$$

$$h'(x) = \cos x + \frac{1}{x^2} > 0, \text{ d'où } h \text{ est croissante.}$$



h est continue et strictement croissante donc bijective,

$$\left. \begin{array}{l} h(1) < 0 \\ h\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0 \end{array} \right\} \exists a \in \left] 1, \frac{\pi}{2} \right[\text{ tq } h(a) = 0$$

h est bijective donc a est unique. $\exists! a \in \left]1, \frac{\pi}{2}\right[$ tq $\sin a = \frac{1}{a}$.

P108 : 2) $f(x) = \frac{\sin x}{1 - x \sin x}$; $x \in]-a, a[$

$1 - x \sin x = 0$ donne $\sin x = \frac{1}{x}$.

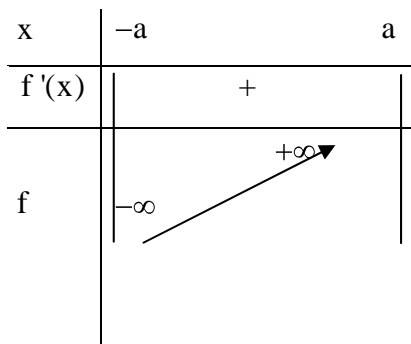
$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $\sin x - \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow x = a$. Donc $\forall x \in [0, a[$, $1 - x \sin x \neq 0$

Or la fonction est impaire, donc $\forall x \in]-a, 0]$, $1 - x \sin x \neq 0$.

f est bien définie $\forall x \in]-a, a[$

f est continue, dérivable sur $] -a, a[$ et $f'(x) = \frac{\cos x + \sin^2 x}{(1 - x \sin x)^2}$.

$a < \frac{\pi}{2}$ donc $] -a, a[\subset \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\Rightarrow \cos x > 0, \forall x \in]-a, a[$.



f est continue et strictement croissante donc bijective

$f^{-1} = g : \mathbb{R} \rightarrow]-a, a[$

f est dérivable sur $] -a, a[$ et $f'(x) > 0, \forall x \in]-a, a[\Rightarrow g$ est dérivable sur \mathbb{R} .

$\forall x \in \mathbb{R}; g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{\frac{\cos(g(x)) + \sin^2(g(x))}{(1 - g(x) \sin(g(x)))^2}}$.

ANNEXE VI

(ANNEXE CHAPITRE 6)

Trois organigrammes d'enseignement de l'Analyse

A partir de la construction choisie de IR

	DEDEKIND	CAUCHY	DEVELOPPEMENT DECIMAL ILLIMITE
HYPOTHESES	$(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ EST UN CORPS TOTALEMENT ORDONNE.	$(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ EST UN CORPS TOTALEMENT ORDONNE. AXIOME DES SEGMENTS EMBOITES.	$(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ EST UN CORPS TOTALEMENT ORDONNE. AXIOME D'ARCHIMEDE.
CONSTRUCTIO N	TOUT NOMBRE REEL R EST DEFINI PAR DEUX COUPURES DE DEDEKIND (C_1, C_2) ET (C'_1, C'_2) FORMANT UNE PARTITION DE \mathbb{Q} ($C_1 =]-\infty, r]$ ET $C_2 =]r, +\infty[$; $C'_1 =]-\infty, r[$ E T $C'_2 = [r, +\infty[$).	TOUT NOMBRE REEL $r \in \mathbb{S} / \sim$ TELS $S = \left\{ \begin{array}{l} \text{suites de Cauchy de} \\ \text{rationnels} \end{array} \right\}$ $\sim : (u_n)_n \sim (v_n)_n \Leftrightarrow (u_n - v_n)_n$ TEND VERS 0. $r = \overline{(u_n)_n}$.	TOUT NOMBRE REEL $r \in \mathbb{S} / \sim$ $S = \left\{ s = p + \sum_{k \geq 1} \frac{a_k}{10^k}, \right.$ $\left. p \in \mathbb{Z} \text{ et } a_i = 0, \dots, 9 \right\}$ ON POSE $s_n = p + \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{10^k}$, $\sim : s \sim s' \Leftrightarrow (s_n - s'_n)_n$ TEND VERS 0. EN DECOULE, $s \sim s' \Leftrightarrow s = s'$ ou bien s et s' SONT LES D.D.I PROPRE ET IMPROPRE DE R.
RESULTATS INTRINSEQUES	$(\mathbb{R}, +, \cdot)$ EST UN CORPS TOTALEMENT ORDONNE. TOUTE PARTIE DE \mathbb{R} NON VIDE ET MAJOREE (RESP. MINOREE) ADMET UNE BORNE SUPERIEURE (RESP. UNE BORNE INFERIEURE).	$(\mathbb{R}, +, \cdot)$ EST UN CORPS TOTALEMENT ORDONNE. TOUTE SUITE DE CAUCHY DE \mathbb{R} CONVERGE DANS \mathbb{R} .	$(\mathbb{R}, +, \cdot)$ EST UN CORPS TOTALEMENT ORDONNE.

Les propriétés liées à la topologie de l'ordre se déduisent l'une de l'autre en fonction de la construction choisie

DEDEKIND	CAUCHY	D.D.I.
ARCHIMEDE.	DENSITE DE IQ DANS IR.	THEOREME DE LA BORNE SUPERIEURE.
DENSITE DE IQ DANS IR.	ARCHIMEDE.	DENSITE DE IQ DANS IR.
THEOREMES DES SUITES MONOTONES ET BORNEES.	THEOREME DE LA BORNE SUPERIEURE.	THEOREMES DES SUITES MONOTONES ET BORNEES.
THEOREMES DES SUITES ADJACENTES (THEOREMES DES SEGMENTS)	THEOREMES DES SUITES MONOTONES ET BORNEES.	THEOREMES DES SEGMENTS EMBOITES (THEOREMES DES SUITES)

EMBOITES).

SUITES EXTRAITES ET CONVERGENCE
PAR LES SUITES PAIRES ET IMPAIRES.

THEOREME DE BOLZANO-
WEIRESTRASS. COMPLETUE DE \mathbb{R} .

THEOREMES DES SUITES
ADJACENTES

(THEOREMES DES SEGMENTS
EMBOITES).

SUITES EXTRAITES ET
CONVERGENCE PAR LES SUITES
PAIRES ET IMPAIRES.

THEOREME DE BOLZANO-
WEIRESTRASS.

ADJACENTES).

COMPLETUE DE \mathbb{R} .

SUITES EXTRAITES ET
CONVERGENCE PAR LES SUITES
PAIRES ET IMPAIRES.

THEOREME DE BOLZANO-
WEIRESTRASS.

ANNEXE VII

(ANNEXE CHAPITRE 7)

Séance du vendredi 01.12.2006 à partir de 10h30

Durée 2h

Nombre d'étudiants 30

Phase 1

I : Quelle différence y a-t-il entre un irrationnel et un rationnel ?

E₁ : Un rationnel est un quotient, un irrationnel n'est pas un quotient...

I : Avez-vous un moyen pour dire qu'un nombre n'est pas un rationnel ?

E₂ : Un rationnel, je peux l'écrire sous la forme p sur q tels que p et q sont premiers entre eux...

I : D'accord et un irrationnel ?

E₂ : Un irrationnel est un quotient...mais le résultat ne peut pas être un entier...

E₃ (a intervenu) : Non...

I : Oui...un irrationnel ?

E₃ : Un irrationnel n'est pas un quotient...

I : Pour montrer qu'un nombre n'est pas un irrationnel, vous faites quoi ?

E₃ : Un irrationnel est la somme de rationnels et d'un irrationnel...

I : Que faites-vous avec l'autre irrationnel...

E₁ : r est irrationnel, donc il n'existe pas (n, m) appartenant à $\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}$ tel que $n.r = m$.

I : Et comment on peut être sûr qu'il n'existe pas (n, m) ...

Prof : Comment peux-tu montrer que $\sqrt{2}$ n'est pas un rationnel ?

E₃ : On suppose que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, donc $2 = \frac{p^2}{q^2}$...

I : On peut donc utiliser un moyen fort, à savoir, l'arithmétique, pour conclure l'irrationalité de $\sqrt{2}$... Dans ce qui suit, on va vous proposer une situation, qui utilise un moyen heuristique- dans le cadre géométrique... pour constater que $\sqrt{2}$ est un irrationnel...

E : C'est quoi heuristique ?

F : Expérimental...

I : Expérimental, dans le sens où le support utilisé- géométrique- se prête à l'expérimentation et à la découverte...

I : Avancez pour travailler par groupe de 2 ou de 3 étudiants...

Prof : Un travail en groupe et en silence.

E (à son prof) : Madame, on nous demande une méthode géométrique pour démontrer que $\sqrt{2}$ est un irrationnel...

Prof : Oui, c'est ça.

DISTRIBUTION DES IMPRIMES RELATIFS A LA PREMIERE PHASE.

I : La première chose qu'on vous demande, est donc de déterminer si le processus d'itération s'arrête ou pas...

GROUPE 1

- IL N'A PAS MIS TRIANGLE ISOCELE DANS L'EXERCICE...

- PAS GRAVE...CE N'EST PAS IMPORTANT QUE ÇA SOIT ISOCELE...

PUIS, QUELQUES QUESTIONS DES ETUDIANTS A PROPOS DE L'ENONCE.

I : Alors...je vous lis l'énoncé (elle explique les données au tableau)...

T_0 est isocèle et rectangle...on retranche le côté de l'angle droit, on obtient S_1 ...on construit la perpendiculaire ...on obtient un triangle rectangle...

E : Isocèle ?

I : C'est à vous de le dire...et ainsi de suite...

E (inaudible) : Déjà, qu'est ce qui dit que le triangle est isocèle...

...PAUSE...

QUATRE ELEVES DISENT "ON DOIT CONJECTURER..."

I : On vous donne encore 7 à 8 minutes pour discuter la première question...Est ce que le processus s'arrête ou pas ? On comparera les réponses...

GROUPE 1

- ...DANS CE TRIANGLE RECTANGLE, LES COTES DE L'ANGLE DROIT SONT ISOMETRIQUES,

DONC $\hat{C} = \hat{B} = 45^\circ$...

- TE VOILA FORT EN MATHS...

GROUPE 4

- ...LA QUESTION C'EST POURQUOI ELLE EST INFINIE L'ITERATION...

GROUPE 1

- ... $\sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2} a$ ET $\sqrt{2} a > a$ DONC LE PROCESSUS NE S'ARRETE PAS...

...PAUSE...

I : Excusez moi, c'est fini... on va discuter vos résultats, est ce que le processus s'arrête ?

E₄ : Il s'arrête avec la limite... ??

E₅ : On ne parle pas de limite ici...

I : Dites nous ça veut dire quoi s'arrête avec la limite ?

E₄ : ...la longueur de l'hypoténuse devient très petite jusqu'à s'annuler ...

E₆ : ... $\sqrt{2} r_n > r_n$... et $\sqrt{2} r_n$ est l'hypoténuse du triangle rectangle de côté r_n ...

E : ...le triangle est isocèle...

I : Est ce que tu es entrain d'utiliser, comme tes camarades l'ont dit, le fait que le triangle est isocèle ?

E₆ : Oui... S_n est de longueur ...

I : ...tu passes au tableau...

E : ...itération finie... je pense ça devient de plus en plus petit jusqu'à s'arrêter...

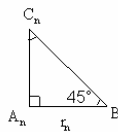
I : Est ce que vous partagez la même idée ?

E₆ (au tableau) : Non... tout d'abord, le triangle est isocèle... par récurrence... supposons qu'il est isocèle... l'angle est égale à 45° ...

E : Mme, on calcule la longueur ...

I : On attend qu'il finisse, puis on verra votre méthode... l'un veut utiliser les longueurs, l'autre ... les angles... et on verra...

E₆ (au tableau) : C'est évident 45° rectangle alors, T_{n+1} l'est...



... car si le triangle T_n est isocèle

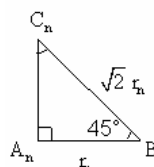
I : Je ne suis pas encore convaincue... tu pars de quel ordre n ... pour T_n ...

E₆ : ...de T_0 ...

I : Ok...

I : Maintenant tu vas nous dire si le processus s'arrête ou pas...

E₆ (au tableau) : Dans ce triangle



on a :

$$r_{n+1} = \sqrt{2}r_n - r_n$$

$$r_{n+1} = r_n(\sqrt{2} - 1)$$

$$r_{n+1} = r_0(\sqrt{2} - 1)^{n+1}$$

... (r_n) est une suite géométrique de raison $\sqrt{2} - 1$ et de premier terme $r_0 = 1$...

Alors $\forall n \in \mathbb{N}, r_n > 0$.

I : Eh...ça y est ...

E : ...c'est strictement positif...

$$E_1 : \begin{array}{l} 1 < \sqrt{2} < 2 \Rightarrow 0 < \sqrt{2} - 1 < 1 \\ \text{si } n \rightarrow +\infty \text{ alors } r_n \rightarrow 0 \end{array}$$

I : ...tu veux dire que ça s'arrête...

E : ...non ça s'arrête pas...à l'infini ça tend vers zéro...

I : Expliquez...juste..." quand $n \rightarrow +\infty, r_n \rightarrow 0$ "...

E₁ : ...une suite convergente vers un réel l...ça ne veut pas dire qu'à partir d'un certain rang, le terme qui le suit soit égal à l...

...si on dit égal à zéro...après un certain rang $\sqrt{2} - 1 = 0$, ce qui est impossible...

I : ...laisse ça...traduit " quand $n \rightarrow +\infty, r_n \rightarrow 0$ "...

E : la quantité r_n est aussi petite que l'on veut, sans jamais atteindre zéro...l'itération ne s'arrête jamais...

I : ...tout le monde est convaincu ? (Hochement de tête...)... l'itération ne s'arrête donc pas...

I : Pouvez-vous interpréter numériquement ce résultat...

...PAUSE...

E₇ (inaudible) : ...dans le triangle ACB...

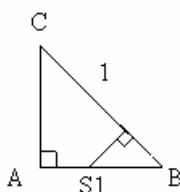
I : ...tu es donc entrain d'interpréter numériquement ce résultat ...

E₇ : Oui...

I : Tu peux passer au tableau...

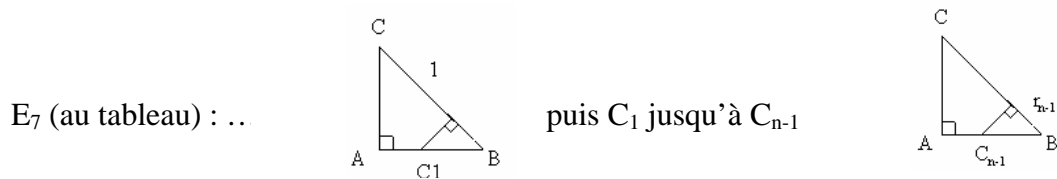
E₇ : Ok...

E₇ (au tableau) : On a



$$CB^2 = AC^2 + AB^2 \Rightarrow CB = \sqrt{2}.$$

I : On s'est mis d'accord que c'est le segment qui est noté S_1 et le point C_1 ...



$$C_{n-1}B^2 = r_{n-1}^2 + r_{n-1}^2$$

$$C_{n-1}B = \sqrt{2} r_{n-1}$$

$$C_{n-2}B = \sqrt{2} r_{n-2} \dots \text{ et puis } \dots \text{ par récurrence..}$$

I : ...en utilisant la récurrence...oui...

E : pour $n = 1$, $CB = \sqrt{2}$ et $C_{n-2}B = \sqrt{2} \dots$

Prof : Qu'est ce que tu veux montrer ?

E7 : ...que le processus ne s'arrête pas...

I : ...tu vas établir une égalité...et qu'est ce que tu vas dire de plus...

E7 : ... $C_{n-2}B = \sqrt{2} \dots$ ne s'arrête pas car il n'existe pas r fois quelque chose égale zéro...

I : ...qu'est ce que tu peux en déduire ... ? pour $\sqrt{2} \dots$?

E7 (voie basse) : ...irrationnel...

I : ...est ce qu'on peut dire que $\sqrt{2}$ est irrationnel d'après ce qu'elle a établi...

E7 : ...oui...mais... (elle réfléchit puis regagne sa place)

I : ...peut-on interpréter le résultat par rapport à la nature de $\sqrt{2} \dots$ par rapport au fait qu'il soit ...rationnel ...ou non...est ce que le fait que le processus ne s'arrête pas, vous permet de dire que $\sqrt{2}$ ne peut pas s'écrire sous la forme d'un quotient...

I : ...je vous donne encore 3 minutes...sinon on laisse ceci en suspens...

E8 : ...j'ai pas compris ce que vous voulez dire...pouvez-vous l'expliquer...

I : ...est ce qu'il y a une relation éventuelle entre le fait que le processus d'itération ne s'arrête et l'irrationalité de $\sqrt{2} \dots$

E9 : ...est ce qu'il y a une relation !!! ...relation ...

I : ...c'est à vous de le dire...est-il possible de le voir...grâce à cette itération...

S'il n'y a plus de réponses...on accède à la deuxième phase...

FIN DE LA PHASE 1 APRES ENVIRON 40 MINUTES, C'EST A DIRE A ENVIRON 11H10.

Phase 2

I : Est-il possible de construire une suite de rationnels qui converge vers $\sqrt{2}$?

E : Oui...

Prof : Est ce qu'elle existe d'abord ?

E₁ : ...par exemple : $\frac{E(10^n \sqrt{2})}{10^n}$...

Prof : Ah hein...

Prof : ...répondez-nous tout d'abord...

I : ...pourquoi est-il possible de trouver une suite de rationnels qui converge vers $\sqrt{2}$...

E : Car l'ensemble des rationnels est dense dans \mathbb{R} .

Prof : ça veut dire quoi ?

E : ...dans toute portion de \mathbb{R} , il existe un rationnel...

Prof : C'est quoi l'autre caractérisation par les suites...

E (murmure) : ... suite de rationnels...qui converge vers un irrationnel...

Prof : Tout nombre irrationnel est une limite d'une suite de rationnels...

I : Ok...on passe à la deuxième phase...

DISTRIBUTION DES IMPRIMES RELATIFS A LA DEUXIEME PHASE.

...PAUSE...

- 4 PAIRES D'ELEVES TRAVAILLENT ENSEMBLE,

- 3 FILLES ONT LAISSE TOMBER LE TRAVAIL,

- LE RESTE DES ES CHERCHENT INDIVIDUELLEMENT.

I : Etes-vous d'accord avec les constructions proposées...quelqu'un peut-il nous expliquer le procédé...

E₁₀ : on a u_1 ...

I : ...on commence par u_0 ...

E₁₀ (explique parfaitement le procédé au tableau en utilisant une figure) : ... u_0 est donné, u_1 est obtenu en projetant....

I : ...donc de proche en proche, on construit sur l'axe des abscisses, une suite de nombres u_k , vérifiant...

Le but de l'exercice est de construire une suite de rationnels qui converge vers $\sqrt{2}$.

...PAUSE...

Prof : Quelle est la suite que vous êtes entrain de chercher ?

$$E_1 : \dots u_{n+1} = 1 + \frac{1}{1 + u_n} \dots$$

I : ...vous conjecturez que la suite en question est définie par $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{1 + u_n}$ et...

Prof : Lisez ce que dit la question, deux choses : vous allez montrer que c'est une suite de rationnels et qu'elle converge vers $\sqrt{2}$...

I (reformule la phrase) : ...

Prof : Comment ?

E : ...supposons qu'il est rationnel...

I : c'est qui, il ?...le terme général de la suite ?...

Prof : vous avez dit rationnel, c'est à dire quoi ?

$$E : \text{On suppose que } u_n = \frac{p_n}{q_n} \dots$$

Prof : Et après ?

E :

I : ...vous allez donc faire une récurrence...et puis...

E : ...

I : Pouvez-vous écrire ceci sur vos feuilles...

...PAUSE...

I : Quelqu'un veut-il passer au tableau ?

Prof (s'adressant à un élève de la première rangée à l'extrémité) : ...c'est facile pour toi de sortir...c'est juste pour démontrer par récurrence que u_n est rationnel, pour tout n ...

$$E_{11} \text{ (au tableau)} : u_0 = 1, u_{n+1} = f(u_n) = 1 + \frac{1}{1 + u_n}$$

E₁₂ : ...on suppose que u_n appartient à \mathbb{Q} ...

I : Votre camarade vous dit de supposer que $u_n \in \mathbb{Q}$...

E₁₁ (au tableau) : ...vérification... $u_0 \in \mathbb{Q}$.

On suppose que $u_n \in \mathbb{Q}$

I : ...c'est-à-dire...

$$E_{11} \text{ (au tableau)} : \exists p_n \text{ et } q_n \text{ tq } u_n = \frac{p_n}{q_n} \dots$$

E₁₁ (efface et réécrit) : $\exists (p_n, q_n) \in \mathbb{R} \dots$

I : ... \mathbb{R} ?

E₁₁ (ferme) : Non.

I : ...pas d'accord avec toi-même...

E₁₃ : ... \mathbb{Z} ...

E₁₁ (au tableau) : $\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}$

Prof : ...l'inverse !

E₁₁ (efface et réécrit) : $\exists (p_n, q_n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \text{ tq } u_n = \frac{p_n}{q_n}$

$$u_{n+1} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{p_n}{q_n}} = \dots = \frac{2q_n + p_n}{p_n + q_n}$$

$$p_{n+1} = 2q_n + p_n \text{ et } q_{n+1} = q_n + p_n (*)$$

I (efface et écrit dans un côté du tableau les deux égalités (*)) : ...comment as-tu établi ces égalités ?

E₁₁ (murmure et reprend au tableau) : ... $u_n = \frac{p_n}{q_n}$ et $u_{n+1} = \frac{2q_n + p_n}{p_n + q_n}$, donc rationnel...

E₁₄ : ...la suite est une suite de rationnels...

I : Voilà...c'est une suite de rationnels... et comment va-t-on faire pour montrer qu'elle est convergente vers $\sqrt{2}$?

E₁ : ...on pose la suite $v_n = |u_n - \sqrt{2}|$, et on montre que (v_n) est décroissante et minorée...d'ailleurs elle est minorée...

I : ...c'est-à-dire...

E₁ (répète ce qu'il a dit) : ...

Prof : Qu'est ce que te donne l'espoir de pouvoir le faire ?

E₁ : ...c'est une méthode qui me tente, je voudrais l'essayer...

I : Ok, on vous donne le temps ...

E₁₄ : J'utilise la définition...

I : ...formelle ?

E₁₄ : Eh... (u_n) est décroissante

I : Est-ce que tout le monde est d'accord ?

E₁₅ : ...elle est décroissante...

E₁₆ : Non...elle n'est ni croissante, ni décroissante...

E₁ : ...on utilise les sous suites...

I : Oui, c'est-à-dire ?

E₁ : Si les deux suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite alors (u_n) converge ...

I : Comment tu vas procéder pour établir ce résultat ?

E₁ : Je démontre que l'une est croissante et l'autre est décroissante...

Prof : Adjacentes !

I : Voilà donc une méthode possible...à creuser...y a-t-il un autre groupe qui propose une autre méthode ?

E₁₇ : ...on suppose qu'il existe L tel que $f(L) = L$...

E₁₈ : Il faut que f soit continue pour ce L ...

Prof : Vous avez commencé votre phrase par "si f est continue... "

E₁₇ : Oui, j'ai dit ça...

I : Continue (dans le sens de poursuivre ce qu'il a à dire)...

Prof : Déjà la fonction qui à x associe $\frac{1}{1+x}$ présente un problème...

E₁₇ :

I : Pour dire que si la suite converge, alors elle convergera vers L vérifiant..., on doit s'assurer de quoi ?

E₁₉ : ...que $L > 0$...

I : ...mieux encore...

E₁₉ : ... $L \geq 1$... f est continue sur $[1, +\infty[$...

E₁₇ : On suppose que f converge vers $L \in \mathbb{Q}$, et on résout l'équation...

I : ...on obtient ...

E₁₇ : $L^2 = 2$..

I : ...alors...L est rationnel ou irrationnel ...si elle converge, elle va converger vers...

E₁₇ : ...vers $\sqrt{2}$...

I : ...à ce stade, nous sommes donc en possession de 3 techniques à investiguer...la technique qui utilise les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) ... la technique qui utilise la définition formelle...et la technique qui part de l'étude de la convergence de la suite et se poursuit par la résolution de l'équation $f(L) = L$ dans le cas où la suite est convergente et la fonction f est continue sur un intervalle contenant tous les termes de la suite...

...PAUSE...

Prof : ... (u_n) est une suite récurrente... $u_{n+1} = f(u_n)$...qu'est ce que vous pouvez dire de f ...

Prof (écrit au tableau) : $u_0 = 1$, $u_{n+1} = f(u_n)$...pour l'étude de cette suite, nous avons traité deux cas ...

E_{20} : ...la fonction f est décroissante...

I : ...vous voulez donc utiliser le comportement de la fonction f , pour étudier la suite...

E : $f \circ f$ est croissante...

Prof : L'étude de $f \circ f$ nous donne des informations sur les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) ...

Prof (s'adressant à E_{20}) : Comment tu as vu qu'elle est décroissante ?

E_{20} (passe au tableau) :

$$f(x) = 1 + \frac{1}{1+x}, f'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} < 0$$

→ f est décroissante

I : L'un de vos camarades a déjà proposé le recours à la définition formelle...serait-il possible d'utiliser f' pour encadrer $|u_n - \sqrt{2}|$...

E_{20} (au tableau) : ... $\sqrt{2}$ est égal à f de lui-même...

I : ...vas-y... $\sqrt{2}$ est égal à f de lui-même...

$$E_{20} \text{ (au tableau) : } |u_{n+1} - \sqrt{2}| = |f(u_n) - f(\sqrt{2})|$$

Prof : Qu'est ce que ça vous rappelle...

E : f continue sur...

E_{20} (au tableau) : f dérivable sur $]1, +\infty[$, $\exists c \in \dots$ (puis oralement... $]1, +\infty[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$...)

I : ...quel autre résultat pouvez-vous appliquer...qu'est ce que l'inégalité des accroissements finis...

Prof : Pardon ! car moi je ne parle pas de l'inégalité des accroissements finis...utilisez moi le théorème des accroissements finis...

E_{20} (au tableau) :

$$(u_{n+1} - \sqrt{2}) = f'(c)(u_n - \sqrt{2}) \text{ et } |f'(c)| \leq \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow |u_{n+1} - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{4} |u_n - \sqrt{2}|$$

Prof : Qu'est ce que ça vous rappelle...

E : f est lipchitzienne...

Prof : ...et après on fait quoi ? f est contractante donc la suite est convergente...quelle est sa limite ?

E : $\frac{1}{k}$...

Prof : Quel $\frac{1}{k}$! C'est quoi le théorème que nous avons vu quand on a corrigé l'exercice de la série...toute fonction strictement contractante admet un point !

E : point fixe...

Prof : $(u_n - \sqrt{2})$ est égal à quoi ? c'est quoi $(u_n - \sqrt{2})$?

E₂₀ (au tableau) : $u_n - \sqrt{2} = f(u_{n-1}) - \sqrt{2}$

I : Si l'on procède de proche en proche...qu'est ce qu'on obtient ?

E₂₀ (au tableau) : $|u_{n+1} - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{4^{n+1}} |u_0 - \sqrt{2}|$, donc (u_n) converge vers $\sqrt{2}$

I (résume les techniques possibles en pointant celle qu'on a utilisé) : ...

I : ...avant d'entamer la troisième et dernière phase...pouvez-vous expliquer le choix de f sachant que la suite en question devra converger vers $\sqrt{2}$...

E₂₁ : ...car $1 + \frac{1}{1 + \sqrt{2}} = \sqrt{2}$...

I : ...ce qui signifie...

E₂₁ (écrit au tableau) : $(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1) = 1 (**)$

I : ...grâce à cette relation, nous avons donc fait le choix de considérer la fonction f en question...

FIN DE LA PHASE 2 APRES ENVIRON 50 MINUTES, C'EST A DIRE A ENVIRON 12H.

Phase 3

I : ...au terme de la phase 2, nous avons pu voir que la densité de \mathbb{Q} dans \mathbb{R} prouve l'existence d'une suite de rationnels convergeant vers $\sqrt{2}$, la suite choisie étant récurrente... la fonction f établie à partir de la relation (**), étant k -lipchitzienne et $0 < k < 1$...maintenant on va voir s'il est possible d'encadrer $\sqrt{2}$ entre termes consécutifs de cette suite de sorte que la valeur absolue de leur différence soit inférieure à 10^{-9} .

DISTRIBUTION DES IMPRIMES RELATIFS A LA TROISIEME PHASE.

I (consigne) : ...N'oubliez pas les données écrites au tableau...est ce que vous avez des calculatrices ?

Es : Non...

E : Je peux apporter une...

I : Non...pas la peine.

...PAUSE...

CERTAINS ELEVES FONT DES GESTES LAISSANT ENTENDRE QU'ILS SONT FATIGUES.

E₁ SORT PUIS REVIENT.

I : Alors...vos constatations ?

E₁₆ : On a $|u_{n+1} - \sqrt{2}| \leq \dots$ on a d'après le tableau $u_0 < \sqrt{2} < u_1$, et on a u_2, u_3 etc. Alors on peut encadrer entre deux termes...

I (reformule) : ...

E₁ : ...on peut encadrer $\sqrt{2}$ entre $\frac{E(10^n \sqrt{2})}{10^n}$ et $\frac{E(10^{n+1} \sqrt{2})}{10^{n+1}}$...

Prof : tu t'éloignes de l'exercice...ce qu'on veut c'est d'utiliser cette suite...l'esprit de l'exercice ...

E₁ : Ah...on est encore là...

Es (rient) : ...

I : Ok ...c'est pas grave...

E₁₆ : p_{n+1} sur q_{n+1} est égal à

I : Qu'est ce que tu comptes faire ? Tu vas remplir le tableau ou quoi ?

E₁₆ (sort, de son propre gré, au tableau) :

$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = \frac{2q_n + p_n}{p_n + q_n}$$

$$\left| u_{n+1} - \sqrt{2} \right| < \frac{1}{4^{n+1}} \left| u_0 - \sqrt{2} \right|$$

$$\left| \frac{2q_n + p_n}{p_n + q_n} - \sqrt{2} \right| < \frac{1}{4^{n+1}} \left| u_0 - \sqrt{2} \right|$$

E₁₆ : ...et on enlève la valeur absolue...

I : ...ça va aboutir à quoi...

...PAUSE...

I : Qu'est ce qu'on cherche ? Observer le tableau numérique et dites moi s'il y a une méthode que l'on peut utiliser ...comme ça...sans avoir à trop réfléchir...

E₂₂ : On termine de remplir le tableau...

I : ...et on cherche quoi ?

E₂₂ : On fait le calcul...

I : Il va être comment ce calcul...est ce que c'est vite fait ?

E₂₂ : Non ! Long...

I : Comment vous passez donc de u_n à u_{n+1} ?

$$E_{22} : u_{n+1} = \frac{2q_n + p_n}{p_n + q_n} \dots$$

I : ... u_n s'écrit $\frac{p_n}{q_n}$...et on voudrait que u_{n+1} s'écrit $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$...eh ...la fraction est comment ?

E₂₂ : ... premiers entre eux...

I : D'abord faites le calcul et regarder si la fraction est irréductible...

E₂₂ : ... $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = \frac{2q_n + p_n}{p_n + q_n}$...comme p_{n+1} et q_{n+1} sont premiers entre eux alors les autres

aussi...

I : Passe au tableau...est ce que ceci est vrai....

E₂₃ : Non...

I : Donne-moi un contre exemple...

$$E_{23} : \frac{5}{3} = \frac{10}{6} \dots$$

E₂₂ (au tableau) : ...si ceci étant alors $p_{n+1} = 2q_n + p_n$ et $q_{n+1} = q_n + p_n$...

I : Alors...on peut poursuivre le calcul...

UN ELEVE LAISSE ENTENDRE QU'IL A FAIM...(12H20)

I : ÇA Y EST ...ON A TERMINE...JUSTE 10 MINUTES...

L'ELEVE INSISTE ET SORT.

E₂₄ (au tableau) : Supposons que p_n et q_n sont premiers entre eux et montrons que $2q_n + p_n$ et $q_n + p_n$ sont premiers entre eux...d divise $2q_n+p_n$ (oralement)...

Prof : ...écrit ce que tu viens de dire... d divise $2q_n+p_n$...

E₂₄ (au tableau, oralement) : d divise a et b alors d divise le P.G.C.D...

I : d divise a et b alors d divise ?

E₂₄ (au tableau, oralement) : $a - b$! alors $d = 1$...

E₂₄ (au tableau) : d divise $(2q_n+p_n) - (q_n+p_n) = q_n$

d divise $(q_n+p_n) - q_n = p_n$

p_n et q_n sont premiers entre eux donc, $2q_n + p_n$ et $q_n + p_n$ sont premiers entre eux.

I : Qu'est ce qu'on va faire maintenant...

Es : On continue (de remplir le tableau)...

I + Es (remplissent le tableau et retrouvent deux termes consécutifs dont la différence est inférieur à 10^{-9}) :

n	0	1	2	3	4
p_n	1	3	7	17	41
q_n	1	2	5	12	29

I : Pourquoi est-on sûr que $\sqrt{2}$ est bien encadré entre ces deux termes...

Es (murmurent) : ...c'est évident...

I : ...si par exemple, on voulait que la différence soit inférieure à 10^{-25} ...

E₂₅ : On a $|u_{n+1} - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{4^{n+1}} |u_0 - \sqrt{2}| \leq 10^{-9}$ et on applique Log...

I : Mais là, qu'est ce que tu aurais trouvé...

Prof : Imène veut $u_{n+1} - u_n$ mais pas une valeur approchée...

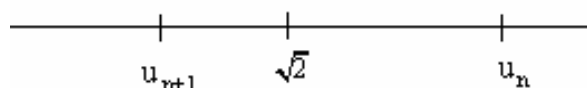
E₂₂ : Mme $u_{n+1} - u_n = (u_{n+1} - \sqrt{2}) - (u_n - \sqrt{2})$...

I : ...tu peux passer au tableau...

Es : ...la prochaine fois (12h30)...

Prof : Juste un mot...

Prof (écrit au tableau) : Vous avez



Rendre $|u_{n+1} - u_n| \leq 10^{-9}$...revient à rendre...

IL EST 12H 30 PASSE, LA MAJORITE DES ETUDIANTS SORT.

CERTAINS ETUDIANTS DEMANDENT LA JUSTIFICATION DE L'IRRATIONALITE DE $\sqrt{2}$ DANS LA PHASE 1.

Suite de la phase 1

I (développe l'écriture de $\sqrt{2}$ en fraction continue infinie, en rappelant la figure) : ...

I : Pour votre culture, cette écriture est le développement de $\sqrt{2}$ en fraction continue...comment à partir de cette écriture, on peut dire que $\sqrt{2}$ est irrationnel... ?

(Silence)

I : ...si le nombre en question est un rationnel...est ce que ce développement est infini...

Es : Non ! fini !

I : Eh...dans ce cas le développement est infini...

Es (murmurent) : ...c'est donc ainsi...mais c'est simple...

IL SEMBLE QUE POUR LES ETUDIANTS L'EQUIVALENCE ENTRE RATIONNEL ET DEVELOPPEMENT EN FRACTION CONTINUE FINIE VA DE SOI.

I : Si vous le dites...

ANNEXE VIII

(ANNEXE CHAPITRE 8)

Séance du vendredi 08.12.2006 à partir de 8h30

Durée 2h

Nombre d'étudiants 22

Phase 1

I : Est-il possible de trouver à chaque fois, la solution exacte, si elle existe, d'une équation donnée ?

E_s : murmurent...

SILENCE DANS LA SALLE.

I : Pouvez-vous donner des exemples d'équations possédant des solutions, dont on peut donner les valeurs exactes ?

E₁ : L'équation $x^2 = -1$...

E₂ : Non...elle a une solution dans \mathbb{C} ...

DONNEE D'UNE VARIETE D'EXEMPLES ET DE CONTRE-EXEMPLES.

I : On vous propose l'équation $\cos x = x$...Avez-vous un moyen pour étudier les solutions éventuelles de cette équation ?

E₁ : Non ! on peut pas...

I : Ne vous précipitez pas !

E₃ : Pour l'existence de la solution...Oui.....

I : Comment ?...

SILENCE DANS LA SALLE.

I : On va vous proposer un exercice qui va vous aider à étudier l'existence de solutions de cette équation...Vous allez travailler par groupes de 4...

DISTRIBUTION DES IMPRIMES RELATIFS A LA PREMIERE PHASE.

E₁ : Ah...j'ai oublié, la fonction $\cos x - x$...

...PAUSE...

I : Alors...Quelles sont vos réponses ?

E₄ : D'après le graphique, $g(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $(0,1)$...

E₅ : La fonction g est continue sur \mathbb{R} , en particulier sur $(0,1)$... $g(0)$ fois $g(1)$ est strictement négatif, donc il existe c dans $]0,1[$ tel que $g(c) = 0$...

I : Pourquoi...

E₇ : le graphique le montre, c'est le "T.V.I" ...ça se voit...

E₆ : Pour l'existence ...ça y est...il reste à montrer l'unicité du point fixe de cosinus...

E₁ : g est une bijection de \mathbb{R} sur $g(\mathbb{R})$...

E₅ : g est dérivable sur \mathbb{R} et $g'(x) = -\sin x - 1$, donc g est strictement décroissante sur \mathbb{R} ...g est une bijection de \mathbb{R} sur $g(\mathbb{R})$ qui est égal à \mathbb{R} ..donc la solution α est unique...

I : Avez-vous un moyen pour donner une valeur approchée de α à 10^{-2} ?

E₇ : On divise le segment en deux...

I : Lequel ?

E₈ : (0,1) puis on calcule $g\left(\frac{1}{2}\right)$...et on cherche un intervalle plus petit...

I : Pouvez-vous passer au tableau...

E₈ (au tableau, usage des résultats numériques donnés par la calculatrice) :

$$\left. \begin{array}{l} g(0) = 1 \text{ et } g(1) = -0.46 \\ g(0.5) = 0.38 \end{array} \right\} \text{ donc } \alpha \in \left] \frac{1}{2}, 1 \right[, \text{ l'erreur est égale à } \frac{1}{2}$$

$$g(0.75) = -0.02 \text{ donc } \alpha \in \left] \frac{3}{4}, \frac{1}{2} \right[, \text{ l'erreur est égale à } \frac{1}{2^2}$$

$$g\left(\frac{5}{8}\right) = 0.625 \text{ donc } \alpha \in \left] \frac{5}{8}, \frac{3}{4} \right[, \text{ l'erreur est égale à } \frac{1}{2^3}$$

$$g\left(\frac{11}{6}\right) = 0.09 \text{ donc } \alpha \in \left] \frac{11}{6}, \frac{3}{4} \right[, \text{ l'erreur est égale à } \frac{1}{2^4}$$

$$g\left(\frac{23}{32}\right) = 0.03 \text{ donc } \alpha \in \left] \frac{23}{32}, \frac{3}{4} \right[, \text{ l'erreur est égale à } \frac{1}{2^5}$$

$$g\left(\frac{47}{64}\right) = 0.008 \text{ donc } \alpha \in \left] \frac{47}{64}, \frac{3}{4} \right[, \text{ l'erreur est égale à } \frac{1}{2^6}$$

E₇ : 47 sur 64 est à peu près égal à 0.73...3 sur 4 est égale à 0.75...

E₈ (au tableau) : On calcule $g(0.74)$...

$$g(0.74) = -0.002 \text{ donc } 0.73 < \alpha < 0.74 .$$

I : Que pensez-vous de cette méthode ...Et si l'on veut affiner encore plus l'erreur commise ?

E₁ : trop longue...problème...

I : Est-il possible de trouver un moyen d'approcher plus rapidement ce nombre ?

E₉ : On change de vitesse !!

I : Eh oui, on va essayer...Avez-vous une idée ?

E₁₀ : On cherche une suite qui converge vers α et on détermine l'indice n_0 ...

I : Lequel ?

E₁₀ : u_{n_0} est une valeur approchée à dix puissance ce qu'on veut près de α ...

E₉ : Cette suite si elle converge, elle converge vers α tel que $\cos \alpha = \alpha$...

SILENCE DANS LA SALLE.

E₁₀ : $u_{n+1} = f(u_n)$...donc $u_{n+1} = \cos(u_n)$...

I : Plus précisément, qu'est ce vous proposez comme suite ?

E₁₀ : La suite (u_n) telle que $u_{n+1} = \cos u_n$...

E₈ : la suite est définie pour tout entier naturel...

I : A quoi est égale u_3 ...

E₈ : $\cos u_2$ et $u_2 = \cos u_1$ et ...il faut choisir un réel u_0 ...

I : Peux-tu être plus précis ?

E₁₁ : ...appartient à l'intervalle $(0, 1)$...

E₁ : Mais à la fin...c'est pareil...on ne peut pas trouver une valeur exacte ??

E₁₂ : ...même avec des logiciels performants ?

I : C'est à dire ?

E₁₂ : Il y a des logiciels qui permettent de donner des valeurs très approchées de nombres...comme pour e ...

I : Comment procèdent ces logiciels ?

E₁₂ : Je pense qu'ils utilisent des suites puis calculent les termes qu'ils veulent...

I : N'importe quelle(s) suite(s) ?

E₃ ...Comment on appelle des nombres, comme le point fixe de cosinus ?

I : ...c'est à dire ?

E₃ : ...qui n'a pas de valeur exacte...mais qui existe...on l'a vu...

I : ...est ce que $\sqrt{2}$ a une valeur exacte ?

E₁₂ : Oui...c'est $\sqrt{2}$!!

I : Qu'en est il de e alors ?

E₃ : ...Pour $\sqrt{2}$, on sait que le carré c'est 2...mais pour e ... c'est pas pareil...

E : ...On peut connaître sa valeur en utilisant la calculatrice...avec plusieurs chiffres après la virgule...

I : ...des nombres comme le point fixe de cosinus et e d'ailleurs...s'appellent nombres transcendants...

FIN DE LA PHASE 1 APRES ENVIRON 30 MINUTES.

Phase 2

I : Pour revenir à la suite proposée par votre camarade...

Dans cette deuxième phase, l'objectif est de l'étudier à travers le support qu'on vous propose...

DISTRIBUTION DES IMPRIMES RELATIFS A LA DEUXIEME PHASE.

E₁ : La suite (x_n) converge vers α ?

I : C'est à vous de l'étudier et de voir...

E₁ : Il faut le montrer ?

E₁₃ : Bien sûr !!

...PAUSE...

I : Alors...qu'est ce que vous en pensez ? Que proposez-vous pour étudier la convergence de cette suite ?

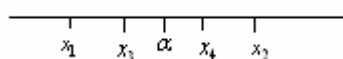
E : ...la fonction cosinus n'est ni croissante, ni décroissante...

E₁ : ...on utilise suites extraites...

E : ...suites adjacentes...

I : Est ce que l'un d'entre vous pourrait passer au tableau et expliquer son idée ?

E₁ (au tableau) :



(x_{2n+1}) est croissante et (x_{2n}) est décroissante...

(Oralement) mais il faut montrer...

(écrit) $x_{2n+3} = \cos(\cos x_{2n+1})$

(Oralement) ...on doit comparer x_{2n+1} et x_{2n+3} ...on sait que f est décroissante...

E : Non...c'est long ...on voit une autre méthode...

E₁₃ : ...on utilise suite de Cauchy...

E₁₃ (au tableau) : $|x_{n+p} - x_n| = |\cos(x_{n+p-1}) - \cos(x_{n-1})| < 2$

I : Qu'est ce que vous voulez montrer ...

E₁₃ : ...que la suite est de Cauchy, donc elle est convergente...il faut écrire x_{n+p} en utilisant x_n ...

E : ... x_{n+p} est égal à cosinus de cosinus de cosinus...de x_n ...c'est la même chose...c'est long...

E₅ : On sait que f est décroissante...on utilise le théorème des accroissements finis...

I : Pouvez-vous être plus précis ?

E : f est décroissante...donc on n'a pas d'informations sur la monotonie de la suite (x_n) ...on peut utiliser le théorème des accroissements finis...

I : Pouvez-vous préciser vos hypothèses ? ...celles qui vous ont amené à utiliser le théorème des accroissements finis ...vous travaillez sur quel intervalle ...

E : ...on sait que α est compris entre 0 et 1...sur le graphique...

E₅ : ... x_n est compris entre 0 et 1...il faut le montrer !

E : ...par récurrence...

E₅ (au tableau) : On montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq x_n \leq 1$.

I : Eh puis...

E : f est continue sur $(0,1)$ fermé et elle est dérivable sur $(0, 1)$ ouvert...donc on peut utiliser le théorème des accroissements finis...

I : Qu'est ce qui vous reste à faire ?

$$E_5 \text{ (au tableau)} : \begin{cases} x_0 = 1 \\ x_{n+1} = \cos x_n \end{cases}$$

D'après le théorème des accroissement finis, il existe $c \in]0,1[$ tel que $f(x_n) - f(\alpha) = f'(c)(x_n - \alpha)$.

E : On doit montrer que (x_n) converge vers α ...

E₅ (au tableau) : On calcule $f'(c)$...

$$f'(c) = -\sin c \text{ donc } f(x_n) - f(\alpha) = -\sin c(x_n - \alpha)$$

SILENCE DANS LA SALLE.

I : Et après...

E : $f(x_n) - f(\alpha)$ est égal à $x_{n+1} - \alpha$...

E₅ (au tableau) : ...on veut montrer que la suite converge...

I : Est ce que quelqu'un peut nous rappeler la définition d'une suite convergente ?

E₁ : ... la limite est égale à un réel...

I : ...plus précisément...

E₁ : ... x_n moins α inférieur à ε ..

On peut utiliser x_{n+1} moins α ...

$$E_5 \text{ (au tableau) : } |x_{n+1} - \alpha| = |-\sin c| |x_n - \alpha|$$

E : ...il faut qu'il soit inférieur à ε ...

I : Qui "il" ?

$$E_5 \text{ (au tableau) : } |-\sin c| \leq \sin 1 < 1 \text{ donc } |x_{n+1} - \alpha| \leq \sin 1 |x_n - \alpha|$$

I : ...est ce qu'on a vraiment besoin d'aller plus loin...ici...

E : ...c'est tout...c'est suffisant... !

I : ... qu'en est-il du rôle du théorème du point fixe...

(reprise de l'énoncé du théorème)...

E : ...on aurait pu utiliser uniquement ce théorème depuis le début...

I : ...oui... même pour l'existence et l'unicité du point fixe de cosinus...

E₃ : ...il faut trouver n_0 ...

I : ...oui ?...

Prof : Allez-y poursuivez de la même façon avec x_n et x_{n-1} ...

$$E_5 \text{ (au tableau) : } |x_{n+1} - \alpha| \leq \sin 1 |x_n - \alpha|$$

$$|x_n - \alpha| \leq \sin 1 |x_{n-1} - \alpha|$$

.....

$$|x_1 - \alpha| \leq \sin 1 |x_0 - \alpha|$$

$$\text{donc } |x_n - \alpha| \leq \sin^n(1) |x_0 - \alpha|.$$

E₃ : ...pour trouver x_{n_0} une valeur approchée de α à 10^{-10} près...

$$E_5 \text{ (au tableau) : } |x_n - \alpha| \leq \sin^n(1) |x_0 - \alpha| < 10^{-10}$$

(Oralement) on cherche n_0 ...

$$\sin^{n_0}(1) |x_0 - \alpha| < \sin^{n_0}(1) < 10^{-10}$$

E : ...on applique log...

$$E_5 \text{ (au tableau) : } \sin^{n_0}(1) < 10^{-10} \text{ donc } \log(\sin^{n_0}(1)) < \log(10^{-10})$$

$$n_0 \log(\sin 1) < -10 \log 10$$

E : ...sin 1 est égal à 0.84...

$$E_5 \text{ (au tableau) : } n_0 > \frac{-10 \log 10}{\log(\sin 1)}$$

I : ...il suffit de prendre quelle valeur pour n_0 ?

E : ...partie entière de moins 10 log de 10...plus 1...ça donne...133 virgule...donc on prend 134...c'est encore très long pour calculer x_{134} ...

I : ...alors, on essaye d'être plus rapide ?

FIN DE LA PHASE 2 APRES ENVIRON 40 MINUTES.

Phase 3

I : ...C'est encore long ?...on peut toujours chercher un moyen beaucoup plus rapide afin d'approcher de plus près le point fixe de la fonction cosinus ...

E₉ : ...on change de vitesse encore une fois !!...il faut bien le rattraper ce nombre !

E : ...si ça se trouve, on va découvrir une méthode qui est utilisée par des logiciels pour approcher rapidement et de plus près un nombre qui n'a pas de valeur exacte...

I : ...peut-être pourquoi pas...

E : ...alors, comment ils font dans ce cas ?

I : C'est ce qu'on va découvrir dans cette dernière phase...

DISTRIBUTION DES IMPRIMES RELATIFS A LA TROISIEME PHASE.

I : On vous donne à peu près 10 minutes pour lire les énoncés et essayer de répondre à la consigne.

APRES QUELQUES MINUTES **E₃** S'ADRESSE AUX MEMBRES DE SON GROUPE :

- ON ECRIT L'EQUATION DE LA TANGENTE...POURQUOI, ON REMPLACE PAR LA TANGENTE ?

I : Alors...quelles sont vos idées ? On parle dans la consigne de *suite ainsi construite*...Qui est ce qui peut nous en dire plus ?

E₃ : On écrit l'équation de la tangente à la courbe de la fonction...

I : On peut discuter au tableau...

E₃ (au tableau) : L'équation de la tangente au point d'abscisse u_0 est $y = g'(u_0)(x - u_0) + g(u_0)$.

(Oralement) ...pour trouver u_1 , y doit être égal à 0...

$$g'(u_0)(x - u_0) + g(u_0) = 0$$

$$\text{donc } x = u_0 - \frac{g(u_0)}{g'(u_0)} =$$

$$\text{D'où } u_1 = u_0 - \frac{g(u_0)}{g'(u_0)} \approx 0.74$$

E : On peut trouver u_2 , si on a u_1 ...

I : Comment... ?

E₁₃ : Kif Kif...on fait la même chose ...

E₃ (au tableau) : $u_2 = u_1 - \frac{g(u_1)}{g'(u_1)} \approx 0.74$

E : ...on sait que $0.73 < \alpha < 0.74$...les valeurs sont très proches de α ...

E : ...on veut trouver u_n ?

I : Qu'est ce que tu entends par "construction d'une suite"...

E₁ : ...on cherche u_n , pour tout n ...

E₃ (au tableau) :

(Oralement) on peut faire la même chose pour u_{n+1} et u_n ...

E : ...par récurrence... ?

E₃ (au tableau) : $u_0 = 0.73$

$$u_1 = u_0 - \frac{g(u_0)}{g'(u_0)}$$

On suppose que c'est vrai jusqu'à l'ordre n ...

$$u_n = u_{n-1} - \frac{g(u_{n-1})}{g'(u_{n-1})}$$

L'équation de la tangente au point d'abscisse u_n est $y = g'(u_n)(x - u_n) + g(u_n)$

$$\text{donc } u_{n+1} = u_n - \frac{g(u_n)}{g'(u_n)}$$

I (intervient) : Comment tu t'es servi de ton hypothèse "On suppose que ..." ?

E₃ (hésite) : ...si on remplace u_n par...mais on n'a pas besoin...

I : ...qu'est ce qui est "vrai jusqu'à l'ordre n "...

E : ...on a utilisé que u_n est construit...tous les termes sont construits jusqu'à u_n ...

E₁ : ...mais on dit que u_{n+1} est l'abscisse du point d'intersection de la tangente en u_n et de l'axe des abscisses...

I : ...et donc... qu'est ce qui est "vrai jusqu'à l'ordre n "...

E : ...dans l'exercice, il est dit que "on obtient à chaque fois u_n , l'abscisse du point ..." ...donc on a u_n et on cherche u_{n+1} ...

E₃ (au tableau) : la suite (u_n) est définie par
$$\begin{cases} u_0 = 0.73 \\ u_{n+1} = u_n - \frac{g(u_n)}{g'(u_n)} \end{cases}$$

E_x : ...on nous demande de voir si la suite converge ...

E_y : ...c'est une suite récurrente...donc $f(1)=1$...

I : Pouvez-vous préciser f , l , ...

E : ...si la suite converge, alors elle converge vers l , tel que $l = l - \frac{g(l)}{g'(l)} \dots$

E₃ (au tableau) : $l = l - \frac{g(l)}{g'(l)}$ donc $\frac{g(l)}{g'(l)} = 0$

E : ... $g'(l)$ est différent de 0...

E₃ (au tableau) : $g(l)=0$

Donc $\cos l = l$, d'où $l = \alpha$.

I : Est ce que tout le monde est satisfait... ?

E : ...donc, on doit montrer qu'elle converge vers α ...

E₁ : On peut utiliser le théorème des accroissements finis ?

I : Si vous voulez passer au tableau pour voir...

E₁ (au tableau) : $u_{n+1} = h(u_n)$, $h(x) = x - \frac{g(x)}{g'(x)}$ donc

$$h'(x) = 1 - \frac{g'(x) - g(x)g''(x)}{g'^2(x)} = \frac{g(x)g''(x)}{g'^2(x)} = \frac{(\cos x - x) \dots}{\dots}$$

E : ...est ce qu'on va trouver $h'(x)$ inférieur à un réel...

E₁ : ... dans l'autre exercice...on a $g'(x)$ strictement inférieur à 1...

I : ... en utilisant le T.A.F on a pu majorer $|x_{n+1} - \alpha|$ par $k|x_n - \alpha|$ et k est strictement inférieur à 1.....

E : ...on ne voit pas que $h'(x)$...est strictement inférieur à 1... h' s'écrit à l'aide g , g' et g'' ...

I : Pouvez-vous indiquer une formule qui met en relation g , g' et g''

Que pensez-vous de la formule de Taylor...

E (hésitant) : ...à l'ordre 2... g est de classe C^2

E₁ : ...on veut une relation entre $(u_n - \alpha)$ et $(u_{n+1} - \alpha)$

I avec E₁ (au tableau) : Oui ...

g est de classe C^2 , la formule de Taylor de g en u_n à l'ordre 2 prouve qu'il existe un réel c_n

$$\text{tel que } g(u_n) = g(\alpha) + (u_n - \alpha)g'(u_n) + \frac{1}{2}(u_n - \alpha)^2 g''(c_n), n \geq 0.$$

$$\text{D'autre part, } u_{n+1} - \alpha = (u_n - \alpha) - \frac{g(u_n) - g(\alpha)}{g'(u_n)}, n \geq 0.$$

$$\text{Il en résulte que } u_{n+1} - \alpha = -\frac{g''(c_n)}{g'(u_n)} \cdot \frac{(u_n - \alpha)^2}{2}, n \geq 0.$$

I : Qu'est ce qui nous reste à faire ?

E : ...on va majorer valeur absolue de $\frac{g''(c_n)}{g'(u_n)}$...

E₁... on va majorer $|u_{n+1}-\alpha|$ par le produit d'un réel et $(u_n-\alpha)^2$...

E : n_0 sera plus petit !!

I : Peux-tu préciser ?.....

E₁ :...on calcule $g''(x)$...

I avec **E₁** (au tableau) :

$$g''(x)=-\cos x \text{ et } g'(x)=-\sin x-1$$

E : ...valeur absolue de cosinus x est inférieur à 1...

I avec **E₁** (au tableau) : $\left| \frac{g''(c_n)}{g'(u_n)} \right| \leq \frac{1}{|\sin u_n + 1|}$,

$$\text{donc } |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{|u_n - \alpha|}{2(1 + \sin u_n)} |u_n - \alpha|$$

E₂ : ...on sait que $0.73 < \alpha < 0.74$...et u_0 aussi...il est égal à 0.73....

E_t :...dans le graphique u_n aussi...

I : Précisez...qu'est ce que vous pouvez dire de $|u_n - \alpha|$...

E : $u_2 = 0.7390$...donc $|u_2 - \alpha| < 0.01$...

E : ...on a la même chose pour u_3 ...

I avec **E₁** (au tableau) : On montre par récurrence que $|u_n - \alpha| \leq 10^{-2}$, pour tout n.

$$\text{On a } |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{|u_n - \alpha|}{2(1 + \sin u_n)} |u_n - \alpha|$$

$0.73 < 1 < 0.74$ et $|u_n - \alpha| \leq 10^{-2}$, donc $0.72 < u_n < 0.75$.

$$\text{D'où } |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{10^{-4}}{2(1 + \sin(0.72))} \leq 10^{-2} .$$

E₁ : ...maintenant on fait comme pour l'autre suite...

E : $\frac{10^{-2}}{2(1 + \sin(0.72))}$ est strictement plus petit que 1...

I : ...c'est à peu près égal à 0.006...

I avec E_1 (au tableau) : On pose $k = \frac{10^{-2}}{2(1 + \sin(0.72))}$ et $k < 10^{-2}$.

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq 10^{-2} |u_n - \alpha|$$

$$|u_n - \alpha| \leq 10^{-2} |u_{n-1} - \alpha|$$

.....

$$|u_1 - \alpha| \leq 10^{-2} |u_0 - \alpha|$$

Donc $|u_{n+1} - \alpha| \leq 10^{-2n-2} |u_0 - \alpha| \leq 10^{-2n-4}$.

La suite (u_n) converge vers α .

E : ...on applique log pour trouver n_0 ...

I : Est ce qu'on a vraiment besoin ici ...

E₁₃ : ...pour $n = 3$, 10^{-2n-4} est égal à 10^{-10} ...

I : Donnez-nous une valeur approchée de α à 10^{-10} près...

E₁₃ : ... u_4 ...qu'on peut calculer rapidement...

FIN DE LA PHASE 3 APRES ENVIRON 50 MINUTES.