HAL
open science

Propriétés stochastiques de systèmes dynamiques et théorèmes limites : deux exemples.

Mikaël Erwan Olivier Roger

To cite this version:

Mikaël Erwan Olivier Roger. Propriétés stochastiques de systèmes dynamiques et théorèmes limites : deux exemples.. Mathématiques [math]. Université Rennes 1, 2008. Français. NNT : . tel-00362479

HAL Id: tel-00362479

https://theses.hal.science/tel-00362479v1

Submitted on 18 Feb 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'Ordre : 3799

T H È S E

Présentée

DEVANT L'UNIVERSITÉ DE RENNES I

pour obtenir

le grade de DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE RENNES I

Mention Mathématiques et Applications

par

Mikaël ROGER

Institut de Recherche Mathématique de Rennes

École Doctorale MATISSE

U.F.R. de Mathématiques

TITRE DE LA THÈSE :

Propriétés stochastiques de systèmes dynamiques et théorèmes limites : deux exemples

Soutenue le 18 décembre 2008 devant la Commission d'Examen

COMPOSITION DU JURY :

M.	G. COHEN	Rapporteur
M.	J.-P. CONZE	Directeur
M.	L. HERVÉ	Examinateur
M.	S. LE BORGNE	Directeur
M.	B. PETIT	Examinateur
M.	B. SCHMITT	Rapporteur

Remerciements

En premier lieu, c'est naturellement à mes directeurs Jean-Pierre Conze et Stéphane Le Borgne que je souhaite exprimer ma sincère gratitude, pour leur patience, leur disponibilité. J'ai particulièrement apprécié de toujours quitter leurs bureaux fort de nombreuses suggestions, critiques ou interrogations. Merci à eux pour leur encouragement et les discussions toujours très ouvertes au cours de ces trois années.
Je remercie mes rapporteurs Guy Cohen et Bernard Schmitt pour leur patient travail de relecture de ce manuscrit et la justesse de leurs commentaires. Merci également à Loïc Hervé et à Bernard Petit d'avoir accepté de faire partie du jury de cette thèse, qui s'inspire de quelques uns de leurs travaux.

A mes parents et grands-parents, sans lesquels rien de tout ceci n'aurait pu voir le jour. A mon explosif petit chimiste amusant, et Isis, si sage dans la méditation et vive à la souris.

Au cercle vertueux de mes amis rennais, pour lesquels quelques lignes de remerciements confinent également à l'ingratitude. Qui ne regrette les bons mots ment. Aux vaillants chevaliers teutoniques de la belote eponyme : Vicky, qui nous a tout appris ; JR, protagoniste de toute bonne controverse ; Yann , jovial en toutes circonstances ; Mathilde, toujours rieuse, et Clement, edile calembourgeois. *A Olivier, dont la dimension ne se réduit pas à être un camarade de la première heure. A Flavie, Thomas & Audrey, Nicolas & Céline, Sébastien, Aurélien, Mylène, Nolwenn et Nathalie. A Jérôme à l'humour et aux idées plus affutés que le sabre. A Corentin et plusieurs discussions (tranquilles) au coin du feu.*

A l'équipe de foot du vendredi, notamment les organisateurs Gweltaz, Delphine, Richard et Lionel. Aux doctorants de l'IRMAR que j'ai eu plaisir à côtoyer, avec une mention spéciale à mes collègues de bureau.

A l'équipe de théorie ergodique, pour l'accueil bienveillant qu'elle réserve à ses doctorants.

Aux personnels d'entretien, secrétaires dévouées et attentionnées, et bibliothécaires aussi aimables qu'efficaces.
Aux acteurs du magistère MMMI pour l'excellence de la formation offerte. Un grand merci à Michel Pierre, Arnaud Debussche, Grégory Vial, Gabriel Caloz, et à l'ENS Cachan Bretagne en général.
A l'ensemble des personnes qui ont su éveiller ma curiosité intellectuelle depuis mes premiers pas.
Longue vie à la communauté du logiciel libre qui diffuse des logiciels aussi performants que LaTeX, Scilab, Open Office, ou Geogebra.

Enfin, contre toute attente, je tiens à remercier Jacques Chirac -président de la République Française- d'avoir mis fin à la conscription.

Table des matières

I TLL pour des « matrices de Pisot » 9

1 Introduction 12

2 TLL pour les sous-shifts de type fini bilatères 15

2.1 Opérateur de transfert 16

2.2 Opérateurs perturbés et propriétés spectrales 17

2.3 Apériodicité et variance 19

2.4 Théorème limite local pour le sous-shift de type fini unilatère . 21

2.5 Théorème limite local pour les sous-shifts de type fini bilatères 25

3 Codage des automorphismes hyperboliques du tore 30

3.1 Notations, « matrices de Pisot » 30

3.2 Codage markovien des automorphismes 31

3.3 Mesure d'entropie maximale 31

3.4 Codage sofique 32

3.5 Relèvement au sous-shift 34

3.6 Autosimilarité et mesure de Lebesgue 35

4 TLL pour les « matrices de Pisot »et sous-variétés instables 40

4.1 Apériodicité 40

4.2 Théorème limite local et sous-variété instable 46

4.3 Théorème limite local pour les sommes de Riesz-Raïkov associées à une « matrice de Pisot » 48

4.4 Comparaison des sommes ergodiques pour des v égaux modulo $\mathbb{Z}$ 48

4.5 Théorème limite local sur le tore 49

II TLC pour des composées d'automorphismes du tore 53

1 Introduction et notations 55

2 Décorrélation et variance 57

2.1 Décorrélation 57

2.2 Variance 59

3 Théorème limite central 60

3.1 Condition de séparation des fréquences 60

3.2 Application d'un critère de Komlòs 63

3.3 Majoration de $|\mathbb{E}[e^{ix\frac{S_n}{\|S_n\|_2}}] - e^{-\frac{1}{2}x^2}|$ 67

3.4 Approximation par une loi normale 68
4 Le cas stationnaire 70
4.1 Ergodicité, décorrélation globale 70
4.2 Non nullité de la variance 74
5 Exemples I 75
5.1 Cas de $SL(2, \mathbb{Z}^+)$ 75
5.2 Une méthode de cônes 78
5.3 Cas de faibles perturbations 78
5.4 « Kicked systems » 86
6 Exemples II (Suites aléatoires indépendantes) 87
7 Preuve du lemme 101
8 Figures 104

Introduction

Théorèmes limites sur un exemple

Dans cette courte introduction, on se propose de présenter sur un exemple les différents théorèmes limites qui motivent ce travail sur un système dynamique simple. Les preuves sont classiques et ne seront pas détaillées.

Un automorphisme hyperbolique du tore

On se place sur le tore $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ appartenant à $SL(2, \mathbb{Z})$. On lui associe une transformation du tore

$$\tau : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2;\ x \mapsto Mx \bmod \mathbb{Z}^2.$$

La matrice M possède deux valeurs propres réelles : $\kappa = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ et $\kappa^{-1} = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$, avec $\kappa > 1 > \kappa^{-1}$. On note $v_u = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ (resp. $v_s = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$) un vecteur propre « instable »(resp. « stable ») associé à la valeur propre κ (resp. κ^{-1}).

Cette matrice M est dite hyperbolique, et le réel κ est appelé nombre de Pisot, il est l'unique racine de module strictement plus grand que 1 d'un polynôme à coefficients entiers. La transformation τ est un automorphisme du tore. Notons que la mesure de Lebesgue λ est invariante par τ : pour tout ensemble mesurable $A \subset \mathbb{T}^2$, on a :

$$\lambda(\tau^{-1}(A)) = \lambda(A).$$

Etant donnée une position initiale x, on souhaite décrire le comportement asymptotique la suite des positions futures $(\tau^j x)_{j\geq 0}$.

Théorèmes limites

Etant donnée une fonction $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{R}$, et $x \in \mathbb{T}^2$, on définit la suite $(S_N f)_{N\geq 1}$ des sommes ergodiques par :

$$S_N f(x) = \sum_{j=0}^{N-1} f(\tau^j x), \quad \forall N \geq 1. \tag{1}$$

Loi des grands nombres (LGN)

Pour une fonction $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{T}^2, \mathbb{R})$, on montre que

$$\frac{1}{N} S_N f(x) \xrightarrow[N\to+\infty]{L^1} \int_{\mathbb{T}^2} f(u)\mathrm{d}\lambda(u), \tag{2}$$

pour λ-presque-tout $x \in [0, 1[$.

En d'autres termes, la moyenne le long d'une orbite s'approche la moyenne spatiale, pour la mesure λ. Ce résultat est ici une conséquence du théorème ergodique de Birkhoff, le système dynamique $(\mathbb{T}^2, \tau, \lambda)$ étant ergodique.

Théorème de la limite centrale (TLC)

Pour une fonction $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{R}$ suffisamment régulière (par exemple, $|\hat{f}(n)| \leq C|n|^{-\alpha}$, pour $C > 0$ et $\alpha > 1/2$), on montre que, pour un paramètre de variance asymptotique σ^2, on a

$$\sqrt{N} \left| \frac{1}{N} S_N f(\cdot) - \int_{\mathbb{T}^2} f(u)\mathrm{d}\lambda(u) \right| \xrightarrow[N\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2). \tag{3}$$

Pour montrer ce résultat, on peut par exemple utiliser les fonctions caractéristiques pour montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\mathbb{E}[e^{\mathbf{i}\frac{t}{\sqrt{N}} S_N f(\cdot)}] \xrightarrow[N\to+\infty]{} e^{\frac{-t^2}{2\sigma^2}}$

Théorème limite local (TLL)

On peut préciser le comportement local, avec f comme dans le théorème précédent, en montrant que pour tous réels $a < b$, on a

$$\sigma\sqrt{2\pi N}\ \lambda\left(\left\{x \in \mathbb{T}^2; S_N f(x) - N\int_{\mathbb{T}^2} f(u)\mathrm{d}\lambda(u) \in [a, b]\right\}\right) \xrightarrow[N\to+\infty]{} b - a. \tag{4}$$

Objectifs

Dans cette thèse on va établir des théorèmes limites locaux pour des sommes ergodiques associées à des matrices plus générales (chapitre I) et des théorèmes limites centraux pour des produits d'automorphismes du tore (chapitre II).

Chapitre I

Théorème limite local pour les sommes de Riesz-Raïkov associées à des « matrices de Pisot »

Sommaire

1 Introduction 12

2 TLL pour les sous-shifts de type fini bilatères 15

2.1 Opérateur de transfert 16

2.2 Opérateurs perturbés et propriétés spectrales 17

2.3 Apériodicité et variance 19

2.4 Théorème limite local pour le sous-shift de type fini unilatère 21

2.5 Théorème limite local pour les sous-shifts de type fini bilatères 25

3 Codage des automorphismes hyperboliques du tore . . . 30

3.1 Notations, « matrices de Pisot » 30

3.2 Codage markovien des automorphismes 31

3.3 Mesure d'entropie maximale 31

3.4 Codage sofique 32

3.5 Relèvement au sous-shift 34

3.6 Autosimilarité et mesure de Lebesgue 35

4 TLL pour les « matrices de Pisot »et sous-variétés instables 40

4.1 Apériodicité 40

4.2 Théorème limite local et sous-variété instable 46

4.3 Théorème limite local pour les sommes de Riesz-Raïkov associées à une « matrice de Pisot » 48

4.4 Comparaison des sommes ergodiques pour des v égaux modulo $\mathbb{Z}$ 48

4.5 Théorème limite local sur le tore 49

Etant donnés un nombre de Pisot θ et une fonction höldérienne f, on démontre un résultat analogue au théorème limite local obtenu par Bernard Petit [Pet96] sur les sommes de Riesz-Raïkov. Son travail utilise une condition d'apériodicité portant sur un relèvement F de f dans un certain sous-shift de type fini, qui peut être difficile à vérifier sur les exemples. Quand θ est unitaire, on montre le résultat à la seule condition que f ne soit pas constante. La construction présentée permet également d'obtenir un théorème limite local pour les « matrices de Pisot ».

1 Introduction

Etant donné un nombre réel $\theta > 1$, les sommes de Riesz-Raïkov associées à θ et à une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et 1-périodique sont les sommes définies par

$$S_n f(x) := \sum_{i=0}^{n-1} f(\theta^i x). \tag{I.1}$$

L'étude des propriétés stochastiques de ces sommes a été introduite par D. Raïkov ([Raï36]), qui a montré la loi des grands nombres (LGN) dans le cas $\theta = 2$, pour f intégrable :

$$\frac{1}{N} S_N f(x) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f(u)\, du, \text{ pour Lebesgue-presque tout } x \in [0,1]. \tag{I.2}$$

F. Riesz ([Rie45]) a remarqué qu'il s'agissait d'un exemple d'application du théorème ergodique de Birkhoff. Depuis, de nombreux auteurs se sont intéressés au comportement asymptotique de ces sommes, pour différentes valeurs de θ, d'autres choix de régularité de la fonction f et en considérant d'autres théorèmes limites que la loi des grands nombres.

Un premier raffinement consiste à établir pour certaines classes de fonctions le théorème de la limite centrale (TLC) :

$$\frac{S_N f - N \int_0^1 f\, du}{\sqrt{N}} \xrightarrow[N\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2), \tag{I.3}$$

où la variance asymptotique σ^2 est définie par $\sigma^2 = \lim\limits_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \|S_N f\|_2^2$,

Quand il a lieu, un tel résultat fournit la vitesse dans la loi des grands nombres. Une autre question qui peut être examinée est la validité du théorème limite local (TLL) (en notant λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$) :

$$\sigma\sqrt{2\pi N}\ \lambda\left(\left\{x \in [0,1], S_N f(x) - N\int_0^1 f(u)\, du \in [a,b]\right\}\right) \xrightarrow[N\to+\infty]{} b - a, \tag{I.4}$$

ainsi que celle de la loi du logarithme itéré (LLI) :

$$\limsup_{N\to+\infty} \frac{\sqrt{N}}{\sigma\sqrt{2\ln(\ln N)}} \left|\frac{1}{N} S_N f(x) - \int_0^1 f(u)\, du\right| \leq 1, \text{ pour Lebesgue-p. t. } x \in [0,1], \tag{I.5}$$

Mentionnons enfin les versions multidimensionnelles des propriétés précédentes.

En ce qui concerne la LGN, elle a été montrée par F.Riesz et D.Raïkov pour tout entier $\theta > 1$. Plus récemment, E. Rio ([Rio00]) l'a établie pour presque tout réel $\theta > 1$. L'équidistribution de la suite $(\theta^n x)_{n\geq 0}$ pour presque tout x a été montrée,

pour Lebesgue presque tout $\theta > 1$ par J. F. Koksma. Elle a été étendue au cas multidimensionnel par E. Lesigne ([Les98]).

Pour le TLC, sous des hypothèses de régularité de f, une première version a été établie par par R.Fortet ([For40]) pour tout entier $\theta > 1$. Puis S. Takahashi (1962) et R. Kaufman (1980) on montré le TLC pour certains $\theta > 1$ entiers algébriques.

Etant donné une fonction f développable en série de Fourier, on note $(\hat{f}(n))$ la suite de ses coefficients de Fourier. Pour les fonctions f vérifiant $|\hat{f}(n)| \leq K|n|^{-\alpha}$, pour $K > 0$ et $\alpha > \frac{1}{2}$, B. Petit ([Pet92]) a établi le TCL pour tout $\theta > 1$, en explicitant la condition de non-dégénerescence de la variance. Soit $\forall m \in \mathbb{N}, \theta^m \notin \mathbb{Q}$ et alors $\sigma^2 = \displaystyle\int_0^1 f(u)^2\, du$. Soit il existe un couple (a, b) d'entiers premiers entre eux, tel que $\dfrac{a}{b} = \theta^{\inf\{m, \theta^m \in \mathbb{Q}\}}$, auquel cas $\sigma^2 = \displaystyle\int_0^1 f(u)^2\, du + 2\sum_{n\geq 1}\int_0^1 f(a^n u) f(b^n u)\, du$, avec $\sigma^2 = 0$ si et seulement s'il existe une fonction $g \in L^2$ telle que $f(\cdot) = g(a\cdot) - g(b\cdot)$. En fait, l'hypothèse de régularité moins contraignante $\displaystyle\sum_{\ell\geq 0}\left(\sum_{2^\ell \leq n < 2^{\ell+1}} |\hat{f}(n)|^2\right)^{\frac{1}{2}} < +\infty$ suffit et sous cette hypothèse, vérifiée en particulier par les fonctions höldériennes, K. Fukuyama a donné une version multidimensionnelle du TCL ([Fuk94]).

La LIL a été prouvée pour $\theta > 1$ entier, par G. Maruyama et I. Ibragimov.

En ce qui concerne le TLL, le cas θ entier a été traité par Moskvin et Postnikov [MP78]. P. Calderoni M. Campanino, et D. Capocaccia ([CCC85]) l'ont montré pour θ nombre de Pisot de degré 2 et pour certaines fonctions f indicatrices d'intervalles. Leur méthode, bien qu'utilisant également la notion de partition de Markov, est différente de celle proposée ici.

B. Petit [Pet96] traite le cas où θ est un nombre de Pisot et f est höldérienne. La preuve de ce résultat utilise un codage symbolique $\varphi : X \to \mathbb{T}$ construit à partir des θ-développements de réels. Les théorèmes limites sont prouvés sur le décalage symbolique (X, σ), puis leurs analogues pour les sommes de Riesz-Raïkov en sont déduites à l'aide d'un résultat d'approximation. La condition de non-dégénerescence de la variance, portant sur le relèvement dans le décalage de l'observable f, est la suivante :
(AP) $f \circ \varphi$ n'est pas de la forme $u \circ s - u + \alpha + k\beta$, pour $u \in \mathcal{L}^\infty, \alpha \in \mathbb{R}, \beta > 0$ et $k : X \to \mathbb{Z}$. Elle est toutefois dificile à vérifier.

Sommes de Riesz-Raïkov étendues

Dans ce travail, inspiré du précédent, on traite un cas de TLL, pour des sommes de Riesz-Raïkov étendues, i.e. pour des sommes $S_N f(x) = \displaystyle\sum_{i=0}^{N-1} f(A^i x)$, pour $f : \mathbb{R}^r \longrightarrow \mathbb{R}$ höldérienne, avec $M \in SL(d, \mathbb{Z})$ matrice hyperbolique, de sous-espace

vectoriel dilatant F_u de dimension $r < d$, π la projection de F_u sur $\mathbb{R}^r$, et $A = \pi^{-1}M\pi$.

Notre condition (APF) de non-dégénerescence de la variance a l'avantage d'être explicite, en terme du développement en série de Fourier de f :
(APF) pour toute fréquence $k \in \mathbb{Z}^d$ telle que $\mathrm{Card}(\{(M^\top)^s k, s \in \mathbb{Z}\} \cap (\mathbb{Z}^r \times \{0\}^{d-r})) \geq 2$, $f \in \{e_{(M^\top)^s k}, s \in \mathbb{Z}\}^\perp$.

Le cas particulier des nombres de Pisot unitaires est obtenu en prenant pour matrice M la matrice compagnon de θ. Dans ce cas, l'hypothèse (APF) est automatiquement vérifiée par les fonctions f non nulles presque partout et on retrouve alors le résultat de B. Petit, mais avec une condition plus simple à vérifier que la condition (AP) dans le cas unitaire.

Notations 1.1. Etant donnée M une matrice hyperbolique de $SL(d, \mathbb{Z})$, on note F_u le sous-espace vectoriel M-invariant associé aux valeurs propres de module supérieur à 1 et r sa dimension.

Soit $(e_1, \ldots, e_d)$ la base canonique de $\mathbb{R}^d$.

Définition 1.2. *Une matrice M du type précédent satisfait la condition (Π), s'il existe des vecteurs $(e_{i_1}, \ldots, e_{i_r})$ dans cette base tels que, en notant $V = \mathrm{Vect}(e_{i_1}, \ldots, e_{i_r})$, l'application $\pi : F_u \to V$, restriction à F_u de la projection sur V parallèlement au sous-espace* $\mathrm{Vect} < (e_j)_{j \notin \{i_1, \ldots, i_r\}} >$, *soit une bijection.*

Cette condition est en particulier réalisée lorsque le polynôme caractéristique de M est irréductible sur $\mathbb{Q}$, on peut choisir $V = \mathrm{Vect} < e_1 >$.

Cette condition est également réalisée dans le cas d'une matrice M diagonale par blocs, et dont les polynômes caractéristiques des restrictions aux blocs sont irréductibles, il suffit de choisir, exactement un des vecteurs $(e_{i_1}, \ldots, e_{i_r})$ dans chaque bloc.

Par exemple, pour $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, on peut prendre $V = \mathrm{Vect} < \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} >$
.

Dans toute la suite, on suppose cette condition (Π) vérifiée. Quitte à permuter les vecteurs $(e_1, \ldots, e_n)$, on considérera dans la suite que $V =< e_1, \ldots, e_r >$, afin de simplifier les notations.

Notations 1.3. Notons A l'application linéaire dilatante sur V définie par $A := \pi M \pi^{-1}$.

L'action de A sur V donne lieu à une généralisation des sommes de Riesz-Raïkov (I.1) : si f est une fonction 1-périodique définie sur V, on considère les sommes

$$S_n f(t) = \sum_{i=0}^{n-1} f(A^i t). \tag{I.6}$$

Les sommes du type (I.1) correspondant à un nombre de Pisot θ s'obtiennent en prenant pour M la matrice compagne du polynôme minimal de θ.

Le résultat principal de ce travail est le théorème limite local suivant pour les sommes (I.6) qui étend le résultat de B. Petit cité plus haut (tout au moins dans la cas unitaire). Ce théorème est valide sous une condition (APF) d'apériodicité (condition 4.1 précisée plus loin) qui présente l'avantage d'être vérifiable sur des exemples par un calcul de coefficients de Fourier. Notons λ (resp. λ_r) la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{T}^r$).

Théorème 4.7 *Soit $M \in SL(n, \mathbb{Z})$ une matrice hyperbolique vérifiant les conditions (Π)(c.f. 1.2) et (DE)(c.f. 4.6). Soient r la dimension de son sous-espace propre associé à ses valeurs propres de module supérieur à un, π la bijection associée (c.f. définition 1.2) et $A = \pi M \pi^{-1}$. Soit f une fonction α-höldérienne sur $\mathbb{R}^r$, 1-périodique, non constante, telle que $\int f \ d\lambda_r = 0$ et vérifiant (APF)(c.f. 4.1) . Alors $\sigma_f^2 = \lim_{k \to +\infty} \frac{1}{k} \int (S_k f)^2 \ d\lambda_r$ est strictement positif et pour tout intervalle $I \subset \mathbb{R}$, on a :*

$$\sigma_f \sqrt{2\pi n} \lambda_r \left(\left\{ v \in [0,1]^r, \sum_{i=0}^{n-1} f(A^i v) \in I \right\} \right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \lambda(I).$$

Les étapes de la démonstration sont les suivantes. On utilise tout d'abord un codage symbolique, lié à la notion de partition de Markov. On prouve ensuite une version un peu plus générale du théorème limite local pour un sous-shift de type fini et une fonction höldérienne. On peut alors traduire ce résultat sur le tore à l'aide de l'application de codage, et un résultat d'approximation permet de préciser le comportement des sommes de type "Riesz-Raïkov" sur la variété instable. On en déduit finalement un théorème limite local sur le tore, grâce à la souplesse introduite dans les résultats précédents, en remarquant que les mesures introduites sur les sous-variétés instables s'approchent de la mesure de Lebesgue sur V.

2 Théorème limite local pour les sous-shifts de type finis bilatères

Dans cette partie, on se place dans le cadre général d'un sous-shift de type fini bilatère (X, σ), associé à une matrice de transition B irréductible, muni de l'unique mesure d'entropie maximale σ-invariante notée μ. (X^+, σ) désigne le sous-shift unilatère et μ^+ (ou simplement μ) la mesure d'entropie maximale sur ce facteur.

Nous rappelons la méthode permettant d'obtenir un théorème limite local pour les fonctions régulières dans ce cadre. En même temps nous obtenons une extension de ce résultat classique qui est adaptée à l'application aux sommes de Riesz-Raïkov présentée dans les sections suivantes.

2.1 Opérateur de transfert

La matrice B est irréductible et apériodique.

Notations 2.1. *Notons β l'unique valeur propre de module maximal de la matrice de transition B, L un vecteur propre de Perron à gauche de B et R le vecteur propre de Perron à droite de B, vérifiant les relations :*

$$L^\top B = \beta L^\top,\ BR = \beta R,\ \sum_{i=1}^{n} L_i R_i = 1.$$

On peut alors définir une matrice stochastique Q en posant :

$$\forall i, j \in I,\ Q_{i,j} = B_{i,j}\frac{R_i}{\beta R_j}.$$

Soit q le vecteur défini par $q_i = L_i R_i$, pour tout $i \in I$.

Le vecteur q est un vecteur de probabilité stationnaire pour Q. En effet, pour tout $i \in I$, on a :

$$\sum_{j=1}^{m} Q_{i,j} q_j = \sum_{j=1}^{m} B_{i,j} L_j \frac{R_i}{\beta} = q_i.$$

Notation 2.2. On note μ^+ l'unique mesure sur le sous-shift unilatère X^+ muni de sa tribu borélienne B qui est invariante par le décalage σ et d'entropie maximale. On appelle cylindre les ensemble $[i_0, \dots, i_k] = \{x \in X,\ x_0 = i_0, \dots x_k = i_k\}$, pour k entier, et $i_0 \dots i_k$ un mot admissible. La mesure μ^+ est définie sur les cylindres par :

$$\mu^+([i_0, \dots, i_k]) = L_{i_0} R_{i_k} \beta^{-k}.$$

Elle se prolonge en mesure invariante sur le sous-shift bilatère X notée μ.
Enfin, on définie la distance d sur X^+ par $d(x, y) = 2^{-\min\{i,\ x_i \neq y_i\}}$.

L'entropie de (X, σ, μ) est égale à $\ln \beta$. Pour plus de détails, on peut se reporter à [Kit98] p.155, ou encore à [Buz07].

Notations 2.3. Dans la suite, λ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, α un réel $\in]0, 1]$ et $\mathcal{H}_\alpha$ l'espace de Banach des fonctions α-höldériennes de X^+ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme de Hölder $\| \ \|_\alpha$ définie, pour $f \in \mathcal{H}_\alpha$, par :

$$\|f\|_\alpha = \|f\|_\infty + [f]_\alpha, \tag{I.7}$$

où

$$[f]_\alpha = \sup_{x\neq y, x_0=y_0} \frac{|f(x)-f(y)|}{d(x,y)^\alpha}.$$

L'opérateur de Perron-Frobenius-Ruelle relativisé markovien P opérant sur l'espace des fonctions höldériennes f sur X^+ est défini par :

$$Pf(x) = \sum_{i:B(i,x_0)=1} Q_{i,x_0} f(ix), x \in X.$$

Cet opérateur vérifie la relation de dualité suivante :

Proposition 2.4. *Pour toutes fonctions f et g appartenant à $\mathcal{H}_\alpha$, on a :*

$$\int_X Pf(x)g(x)\mathrm{d}\mu(x) = \int_X f(x) g\circ\sigma(x)\mathrm{d}\mu(x).$$

2.2 Opérateurs perturbés et propriétés spectrales

Rappelons quelques propriétés spectrales des opérateurs perturbés (c.f.[HH01]).

Etant donnée une fonction F, on définit la famille d'opérateurs perturbés $(P_t)_{t\in\mathbb{R}}$, pour tout réel t par :

$$P_t f = P(e^{itF} f). \tag{I.8}$$

On montre par récurrence la relation de dualité suivante :

Proposition 2.5. *Pour toutes fonctions f et g appartenant à $\mathcal{H}_\alpha$, on a, pour tout $n \geq 1$:*

$$\int_X P_t^n f(x)g(x)\mathrm{d}\mu(x) = \int_X f(x) e^{\mathbf{i}tS_nF(x)} g\circ\sigma^n(x)\mathrm{d}\mu(x),$$

où $S_nF(x) = \sum_{k=0}^{n-1} F\circ\sigma^k(x)$.

L'action de l'opérateur P régularise les fonctions. Considérons deux suites x et y ayant la même coordonnée d'indice nul : $x_0 = y_0$.

$$\begin{aligned}
|Pf(x) - Pf(y)| &\leq |\sum_{i:B(i,x_0)=1} q_{i,x_0} f(ix) - \sum_{i:B(i,y_0)=1} q_{i,y_0} f(iy)| \\
&\leq |\sum_{i:B(i,x_0)=1} Q_{i,x_0} f(ix) - \sum_{i:B(i,x_0)=1} Q_{i,x_0} f(iy)| \\
&\leq \sum_{i:B(i,x_0)=1} Q_{i,x_0} 2^{-\alpha}[f]_\alpha \\
&\leq 2^{-\alpha}[f]_\alpha
\end{aligned}$$

Pour tout $n \geq 1$, on a donc

$$[P^n f]_\alpha \leq 2^{-n\alpha}[f]_\alpha.$$

On établit les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned}
\|Pf\|_\infty &\leq \|f\|_\infty,\ \|P_t f\|_\infty \leq \|f\|_\infty,\ \|Pf\|_{1,\mu} \leq \|f\|_{1,\mu} \\
\|Pf\|_\alpha &\leq \|f\|_\infty + 2^{-\alpha}[f]_\alpha, \\
\|P^n f\|_\alpha &\leq C'\|f\|_\infty + 2^{-n\alpha}[f]_\alpha, \forall n > 0 \\
\|P_t f\|_\alpha &\leq [e^{itF}]_\alpha \|f\|_\infty + 2^{-\alpha}[f]_\alpha, \\
\|P_t^n f\|_\alpha &\leq C'[e^{itF}]_\alpha \|f\|_\infty + 2^{-n\alpha}[f]_\alpha, \forall n > 0.
\end{aligned}$$

L'étude des propriétés spectrales de P montre que le spectre de P est constitué de la valeur propre simple 1 et d'un ensemble contenu dans le disque de centre 0 et de rayon < 1.

Rapelons le lemme suivant, d'après le lemme 3.9 de [HH01].

Lemme 2.6. *Soit $(\mathcal{B}, \| \ \|)$ un espace de Banach. Soit V_0 opérateur linéaire borné sur ($\mathcal{B}$ de rayon spectral $r(V_0)$. Pour tout $r > r(V_0)$, il existe η et C tels que $\|V - V_0\| < \eta \Rightarrow \|V^n\| \leq Cr^n$.*

On vérifie que, pour une constante C', $\|P_t - P_s\| \leq C'|t - s|$. En effet

$$\begin{aligned}
\|(P_t - P_s)f\|_\alpha &\leq C[e^{itF} - e^{isF}]_\alpha \|f\|_\infty + 2^{-\alpha}\|e^{itF} - e^{isF}\|_\infty \|f\|_\alpha \\
&\leq C(t-s)\|F\|_\alpha \|f\|_\infty + 2^{-\alpha}|t-s|\|F\|_\infty \|f\|_\alpha.
\end{aligned}$$

Pour $|t|$ suffisamment petit, si r_t est tel que $r(P_t) < r_t < 1$, alors il existe $\varepsilon_t > 0$ tel que

$$|t - s| < \varepsilon_t \Rightarrow \|P_s^n\| \leq Cr_t^n, \forall n \geq 0.$$

Par une méthode de perturbation, on montre qu'il existe un voisinage $[-\delta, \delta]$ de 0 tel que (c.f. [HH01], partie III-2) le spectre de P_t est constitué d'une valeur propre simple dominante $\gamma_t \underset{t\to 0}{=} 1 - \sigma_F^2 \frac{t^2}{2} + o(t^2)$ (associée à un vecteur propre noté v_t, avec $v_0 = 1$) et d'un sous-ensemble contenu dans un disque de rayon $\gamma_t < 1$. Le réel σ_F coïncide avec la variance asymptotique de F qui sera définie plus bas.

Lemme 2.7. *Sous l'hypothèse d'apériodicité, pour tout compact K de $\mathbb{R}$ de diamètre suffisamment petit et ne contenant pas 0, il existe des constantes $\rho_K < 1$ et $C_K > 0$ telles que pour $t \in K$,*

$$\|P_t^n\|_\alpha \leq C_K \rho_K^n.$$

Pour t suffisamment petit, nous avons la décomposition suivante pour P_t :

$$P_t h = \gamma_t \mu(\Pi_t^1 h) v_t + \Pi_t^0 h,$$

où Π_t^1 est le projecteur sur le sous-espace propre dominant et Π_t^0 le projecteur sur un supplémentaire.

Dans la suite, nous noterons $\delta > 0$ et $\rho \in]0,1[$ des réels tels que, pour une constante $C > 0$ et toute fonction α-höldérienne, on ait :

$$\|(\Pi_t^0)^n f\|_\alpha \leq C\rho^n, \forall n \geq 1, \forall t, |t| \leq \delta. \tag{I.9}$$

En particulier, l'opérateur P s'écrit $f \to P(f) = \mu(f) + Q(f)$, où Q est un opérateur vérifiant :

$$\|Q^n f\|_\alpha \leq C\rho^n, \forall n \geq 1. \tag{I.10}$$

2.3 Apériodicité et variance

Définition 2.8. *(Apériodicité) On dit qu'une fonction mesurable $F : X \to \mathbb{R}$ est apériodique s'il n'existe pas de fonction mesurable h et de réels γ, β tels que :*

$$\exp(2i\pi\gamma(F - \beta)) = \frac{h \circ \sigma}{h}.$$

Soit G une fonction α-höldérienne sur X^+, apériodique, telle que $\mu(G) = 0$. On a alors $\sigma_G^2 = \mu(G^2) + 2\sum_{k\geq 1} \mu(G\ G \circ \sigma^k) > 0$

La fonction G étant d'intégrale nulle, nous avons :

$$\int G\ G \circ \sigma^k\ d\mu = \int G\ Q^k G\ d\mu.$$

On en déduit qu'il existe deux constantes positives C et $\rho < 1$ pour lesquelles :

$$|\int G\ G \circ \sigma^k\ d\mu| \leq \|G\|_\infty \|Q^k G\|_1 \leq \|G\|_\infty \|Q^k G\| \leq C\rho^k.$$

En développant, on obtient :

$$\int (S_n G)^2\ d\mu = n \int G^2\ d\mu + 2\sum_{k=1}^{n-1}(n-k) \int G\ G \circ \sigma^k\ d\mu.$$

Ceci permet de définir la variance asymptotique σ_G :

$$\sigma_G^2 = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \int (S_n G)^2\ \ d\mu = \int G^2\ d\mu + 2\sum_{k=1}^{+\infty} \int G\ G \circ \sigma^k\ d\mu.$$

Notons que l'apériodicité de G entraîne $\sigma_G > 0$. En effet, supposons qu'on ait $\sigma_G = 0$.

$$\begin{aligned}
\int (S_nG)^2 \, d\mu &= n \int G^2 \, d\mu + 2 \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) \int G \, G \circ \sigma^k \, d\mu \\
&= n \left(\int G^2 \, d\mu + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \int G \, G \circ \sigma^k \, d\mu \right) - 2 \sum_{k=1}^{n-1} k \int G \, G \circ \sigma^k \, d\mu \\
&= n \left(\int G^2 \, d\mu + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \int G \, G \circ \sigma^k \, d\mu \right) - 2n \sum_{k=n}^{+\infty} \int G \, G \circ \sigma^k \, d\mu \\
&- 2 \sum_{k=1}^{n-1} k \int G \, G \circ \sigma^k \, d\mu = 0 + O(1).
\end{aligned}$$

Ainsi $(S_nG)_n$ est une suite bornée dans L^2. Soit S une limite faible d'une sous-suite $(S_{n_k}G)$. En utilisant la propriété de mélange, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\|G - (S - S \circ \sigma)\|_2^2 &= \lim_k < G - (S - S \circ \sigma), G - (S_{n_k}G - S_{n_k}G \circ \sigma) > \\
&= \lim_k < G - (S - S \circ \sigma), G \circ \sigma^{n_k}) >= 0.
\end{aligned}$$

Ceci montre que $G = S - S \circ \sigma$. Or, d'après la définition (2.8), une fonction höldérienne et apériodique ne peut pas s'écrire sous cette forme, ce qui établit le résultat.

Prenons maintenant pour F une fonction d'intégrale nulle α-höldérienne sur X apériodique. Nous verrons plus loin que F est cohomologue à une fonction F^+ α-höldérienne sur X^+ apériodique :

$$F = F^+ \circ \pi_0 + u_0 \circ \sigma - u_0,$$

où u_0 est $\frac{\alpha}{2}$-höldérienne sur X et π_0 est l'application

$$\pi_0 : X \to X^+, \quad (x_k)_{k \in \mathbb{Z}} \to (x_k)_{k \geq 0}.$$

On peut appliquer ce qui précède en prenant pour G la fonction F^+. Cette fonction est apériodique si F est apériodique et les variances sont égales :

$$S_nF = S_nF^+ \circ \pi_0 + u_0 \circ \sigma^n - u_0.$$

D'où : $|\|S_nF\|_2 - \|S_nF^+ \circ \pi_0\|_2| \leq 2\|u_0\|_2$, ce qui entraîne

$$\sigma_{F^+}^2 = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \int (S_nF^+)^2 \, d\mu = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \int (S_nF)^2 \, d\mu = \sigma_F^2.$$

En résumé nous avons la proposition suivante qui permet d'assurer, dans toute la suite que *la variance σ_F associée à une fonction höldérienne apériodique est non nulle* :

Proposition 2.9. *Si F est une fonction α-höldérienne et apériodique sur X. La variance*

$$\sigma_F^2 = \mu(F^2) + 2\sum_{k\geq 1} \mu(F\ F\circ\sigma^k) \tag{I.11}$$

est finie et > 0.

On peut également se reporter à [GH88] lemme 3 p.76, ou [HH01] à ce sujet.

2.4 Théorème limite local pour le sous-shift de type fini unilatère

On va établir un résultat général symbolique dans cette sous-partie, qui sera utilisé dans la suite via le codage des automorphismes hyperboliques du tore.

Rappelons d'abord un premier énoncé d'un théorème local, dont on trouvera une démonstration dans [Pet96] ou [HH01] (p. 95, en utilisant le théorème A^* p. 82) :

Théorème 2.10. *Soit F une fonction α-höldérienne sur X^+ apériodique, telle que $\mu(F) = 0$, de variance asymptotique σ_F. On a alors, pour tout intervalle $I \subset \mathbb{R}$:*

$$\sigma_F\sqrt{2\pi n}\mu^+\left(\left\{x\in X^+, \sum_{i=0}^{n-1} F\circ\sigma^i(x)\in I\right\}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda(I).$$

On va adapter la preuve donnée dans [Pet96] pour montrer une extension du résultat précédent :

Théorème 2.11. *Soit F une fonction α-höldérienne sur X^+ telle que $\mu^+(F) = 0$, apériodique, de variance asymptotique σ_F. Soit (c_n) une famille de fonctions α-höldériennes $X^+ \to \mathbb{R}$ telle que, pour un réel $\beta \in]0, \frac{1}{2}[$, on ait, pour tout n :*

$$\|c_n\|_\infty = o(n^{\frac{1}{2}-\beta}),\ \ln[c_n]_\alpha = o(n^{1-\beta}). \tag{I.12}$$

On a alors, pour tout intervalle $I \subset \mathbb{R}$:

$$\sigma_F\sqrt{2\pi n}\mu^+(\{x\in X:\ c_n(x) + \sum_{i=0}^{n-1} F\circ\sigma^i(x)\in I\}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda(I).$$

<u>Preuve</u> Considérons un nombre $\beta \in]0, \frac{1}{2}[$ et une suite c_n de fonctions telles que

$$\|c_n\|_\infty = o(n^{\frac{1}{2}-\beta}),\ \ln[c_n]_\alpha = o(n^{1-\beta}). \tag{I.13}$$

On note $\mathcal{K}$ l'ensemble des fonctions de $L^1(\mathbb{R})$ dont la transformée de Fourier est à support compact. Posons :

$$S_nF(x) = \sum_{i=0}^{n-1} F(\sigma^i x).$$

Rappelons que la condition d'apériodicité entraîne $\sigma_F > 0$. Par l'argument de Breiman [Bre68], il suffit de montrer que, pour tout $g \in \mathcal{K}$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{2\pi n}\sigma_F \mu^+ \left(g(c_n(.) + S_n F(.))\right) = \lambda(g).$$

Soit $g \in \mathcal{K}$ et $a > 0$ tels que le support de $\hat{g}$ soit contenu dans $[-a, a]$. Posons :

$$A_n = \sqrt{2\pi n}\sigma_F \int g(c_n(x) + S_n F(x))\ d\mu^+(x).$$

Introduisons un réel positif $\xi > 1 - \beta$ et coupons en deux la somme $S_n F$:

$$S_n F = S_{[n^\xi]} F + (S_{n-[n^\xi]} F) \circ \sigma^{[n^\xi]}.$$

En écrivant $g(u) = \frac{1}{2\pi} \int \hat{g}(t) e^{-itu}\ dt$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
A_n &= \sqrt{\frac{n}{2\pi}}\sigma_F \int_X \int_{\mathbb{R}} \hat{g}(t) e^{itc_n(x)+itS_nF(x)}\ dt\ d\mu^+(x) \\
&= \sqrt{\frac{n}{2\pi}}\sigma_F \int_{\mathbb{R}} \hat{g}(t) \int_X e^{itc_n(x)+itS_nF(x)}\ d\mu^+(x)\ dt \\
&= \sqrt{\frac{n}{2\pi}}\sigma_F \int_{\mathbb{R}} \hat{g}(t) \int_X e^{itc_n(x)+itS_{[n^\xi]}F+itS_{n-[n^\xi]}F\circ\sigma^{[n^\xi]}(x)}\ d\mu^+(x)\ dt \\
&= \sqrt{\frac{n}{2\pi}}\sigma_F \int_{\mathbb{R}} \hat{g}(t) \left(\int_X P_t^{n-[n^\xi]} \left(P^{[n^\xi]} \left(e^{it(c_n+S_{[n^\xi]}F)}\right)\right)(x)\ \ d\mu^+(x)\right)\ dt \\
&= B_n^1 + B_n^2 + B_n^3,
\end{aligned}$$

où :

$$\begin{aligned}
B_n^1 &= \sqrt{\frac{n}{2\pi}}\sigma_F \int_{]-\frac{\delta}{n^\eta},\frac{\delta}{n^\eta}[} \hat{g}(t) \int_X e^{itc_n(x)+itS_nF(x)}\ d\mu^+(x)\ dt; \\
B_n^2 &= \sqrt{\frac{n}{2\pi}}\sigma_F \int_{\frac{\delta}{n^\eta}\le|t|\le\delta} \hat{g}(t) \left(\int_X P_t^{n-[n^\xi]} \left(P^{[n^\xi]} \left(e^{it(c_n+S_{[n^\xi]}F)}\right)\right)(x)\ \ d\mu^+(x)\right)\ dt; \\
B_n^3 &= \sqrt{\frac{n}{2\pi}}\sigma_F \int_{\delta\le|t|\le a} \hat{g}(t) \left(\int_X P_t^{n-[n^\xi]} \left(P^{[n^\xi]} \left(e^{it(c_n+S_{[n^\xi]}F)}\right)\right)(x)\ \ d\mu^+(x)\right)\ dt.
\end{aligned}$$

η désignant un nombre dans $]0, 1[$ qui sera choisi ultérieurement.

Intéressons-nous tout d'abord à la fonction $P^{[n^\xi]}\left(e^{it(c_n+S_{[n^\xi]}F)}\right)$. La variation de la fonction $e^{it(c_n+S_{[n^\xi]}F)}$ vérifie :

$$[e^{it(c_n+S_{[n^\xi]}F)}]_\alpha \le t\left([c_n]_\alpha + \sum_{i=0}^{[n^\xi]-1} [F\circ\sigma^i]_\alpha\right) = t\left([c_n]_\alpha + \sum_{i=0}^{[n^\xi]-1} 2^{\alpha i}[F]_\alpha\right).$$

On en déduit

$$[P^{[n^\xi]}\left(e^{it(c_n+S_{[n^\xi]}F)}\right)]_\alpha \leq 2^{-\alpha[n^\xi]}t[c_n]_\alpha + t[F]_\alpha \sum_{i=0}^{[n^\xi]-1} 2^{-\alpha([n^\xi]-i)}.$$

Comme ξ est supérieur à $1-\beta$, la suite des variations des fonctions $P^{[n^\xi]}\left(e^{it(c_n+S_{[n^\xi]}F)}\right)$ est bornée. Majorons maintenant successivement B_n^3, B_n^2 et B_n^1.

- B_n^3 :

Nous avons par le lemme 2.7, pour $\delta \leq |t| \leq a$,

$$\|P_t^{n-[n^\xi]}\left(P^{[n^\xi]}\left(e^{it(c_n+S_{[n^\xi]}F)}\right)\right)\|_\alpha \leq C\rho^n \|P^{[n^\xi]}\left(e^{it(c_n+S_{[n^\xi]}F)}\right)\|_\alpha \leq C'\rho^n;$$

donc :

$$B_n^3 = \sqrt{\frac{n}{2\pi}}\sigma_F \int_{\delta\leq|t|\leq a} \hat{g}(t)\left(\int_X P_t^{n-[n^\xi]}\left(P^{[n^\xi]}\left(e^{it(c_n+S_{[n^\xi]}F)}\right)\right)(x)\ \ d\mu^+(x)\right)\ dt \to 0.$$

- B_n^1

L'inégalité

$$|e^{itc_n(x)+itS_nF(x)} - e^{itS_nF(x)}| \leq |t|\|c_n\|_\infty$$

assure qu'en remplaçant B_n^1 par $\sqrt{\frac{n}{2\pi}}\sigma_F \int_{]-\frac{\delta}{n^\eta},\frac{\delta}{n^\eta}[} \hat{g}(t)\int_X e^{itS_nF(x)}\ d\mu^+(x)\ dt$ on fait une erreur majorée par $C\delta^2 n^{\frac{1}{2}-2\eta}\|c_n\|_\infty$. Elle tend vers 0 sous la condition $\|c_n\|_\infty = o(n^{2\eta-\frac{1}{2}})$. Cette condition est remplie si $\frac{1}{2}-\beta < 2\eta - \frac{1}{2}$ c'est-à-dire si $\eta > \frac{1}{2} - \frac{\beta}{2}$.

Etudions maintenant l'expression B_n' obtenue en remplaçant e^{itc_n} par 1. En faisant le changement de variable $\sigma_F\sqrt{n}t = t'$, on obtient :

$$B_n' = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{]-\frac{\delta\sigma_F\sqrt{n}}{n^\eta},\frac{\delta\sigma_F\sqrt{n}}{n^\eta}[} \hat{g}(\frac{t}{\sigma_F\sqrt{n}})\left(\int_X P^n_{\frac{t}{\sigma_F\sqrt{n}}}(1)(x)\ d\mu^+(x)\right)\ dt.$$

Nous avons :

$$P^n_{\frac{t}{\sigma_F\sqrt{n}}}(1)(x) = \gamma^n_{\frac{t}{\sigma_F\sqrt{n}}}\mu(\Pi^1_{\frac{t}{\sigma_F\sqrt{n}}}1)\ v_{\frac{t}{\sigma_F\sqrt{n}}} + (\Pi^0_{\frac{t}{\sigma_F\sqrt{n}}})^n(1).$$

Le deuxième terme est proche de $(\Pi_0^0)^n(1)$ et donc majoré par $C\rho^n$, d'après (I.9). Pour le premier terme, nous avons les convergences :

$$\gamma^n_{\frac{t}{\sigma_F\sqrt{n}}} \to e^{-\frac{1}{2}t^2},\ \mu(\Pi^1_{\frac{t}{\sigma_F\sqrt{n}}}1) \to \mu(\Pi_0^1 1) = 1,\ v_{\frac{t}{\sigma_F\sqrt{n}}} \to v_0 = 1.$$

On peut alors appliquer le théorème de convergence dominée et obtenir que B_n' converge vers $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} \hat{g}(0)e^{\frac{-t^2}{2}}\ dt = \int_{\mathbb{R}} g(x)\ dx$, si l'intervalle d'intégration tend vers l'infini, c'est-à-dire si $\eta < \frac{1}{2}$.

- B_n^2

Soit $\frac{\delta}{n^\eta} \leq |t| \leq \delta$. Comme $\gamma_t \underset{t\to 0}{=} 1 - \frac{1}{2}\sigma_F^2 t^2 + o(t^2)$, γ_t est inférieur à $1 - \dfrac{\sigma_F^2}{4}\dfrac{\delta^2}{n^{2\eta}}$, pour δ petit.

En appliquant le lemme 2.6, partant de la relation

$$\begin{aligned} P_t^{n-[n^\xi]}\left(P^{[n^\xi]}\left(e^{it(c_n+S_{[n^\xi]}F)}\right)\right) &= \gamma_t^{n-[n^\xi]}\mu^+(\Pi_t^1\left(P^{[n^\xi]}\left(e^{it(c_n+S_{[n^\xi]}F)}\right)\right))\, v_t \\ &\quad +(\Pi_t^0)^{n-[n^\xi]}\left(P^{[n^\xi]}\left(e^{it(c_n+S_{[n^\xi]}F)}\right)\right), \end{aligned}$$

on obtient la majoration :

$$\begin{aligned} \|P_t^{n-[n^\xi]}\left(P^{[n^\xi]}\left(e^{it(c_n+S_{[n^\xi]}F)}\right)\right)\|_\infty &\leq \gamma_t^{n-[n^\xi]}\|\mu^+(\Pi_t^1\left(P^{[n^\xi]}\left(e^{it(c_n+S_{[n^\xi]}F)}\right)\right) v_t\|_\infty \\ &\quad +C\rho^{n-[n^\xi]}[\left(P^{[n^\xi]}\left(e^{it(c_n+S_{[n^\xi]}F)}\right)\right)]_\alpha \\ &\leq C\delta(e^{-\frac{1}{4}\sigma^2\delta^2(n-[n^\xi])n^{-2\eta}} + 2\rho^{n-[n^\xi]}). \end{aligned}$$

D'où la convergence vers 0 de B_n^2 :

$$B_n^2 \leq C\delta^2\sqrt{n}(e^{-\frac{1}{4}\sigma^2\delta^2 n^{1-2\eta}-n^{\xi-2\eta}} + 2\rho^{n-[n^\xi]}).$$

En prenant pour η un nombre vérifiant $\frac{1}{2} - \frac{\beta}{2} < \eta < \frac{1}{2}$, on établit donc la convergence de A_n vers $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \hat{g}(0)e^{\frac{-t^2}{2}}\, dt = \int_{\mathbb{R}} g(x)\, dx$. $\square$

2.5 Théorème limite local pour les sous-shifts de type fini bilatères

Nous allons nous ramener au cas unilatère en utilisant la méthode de réduction de Bowen ([Bow75], p.11). Nous l'appliquerons pour obtenir des fonctions dépendant uniquement des coordonnées supérieures ou égales à un entier $-\ell$. Nous ferons dans la suite varier ℓ afin d'approcher uniformément les fonctions régulières sur X par des fonctions "unilatères".

Soit ℓ un entier. Pour tout t dans l'alphabet, soit $(a_k(t))_{k\in\mathbb{Z}}$ un élément de X tel que $a_{-\ell}(t) = t$. Soit $r_\ell : X \to X,\ (x_k)_{k\in\mathbb{Z}} \mapsto (x_k^\ell)_{k\in\mathbb{Z}}$, où pour tout k

$$x_k^\ell = \begin{cases} x_k, \text{ si } k \geq -\ell, \\ a_k(x_{-\ell}), \text{ sinon.} \end{cases}$$

(Le passé de $r_\ell(x)$ "antérieur" à $-\ell$ ne dépend que de $x_{-\ell}$.)

Lemme 2.12. *Soient F une fonction α-höldérienne sur X et $\ell \in \mathbb{N}$. Il existe $C > 0$, des fonctions $F^{\ell,+}$ $\alpha/2$-höldérienne ne dépendant que des coordonnées supérieures à $-\ell$ et u_ℓ $\frac{\alpha}{2}$-höldérienne sur X telles que :*

$$\begin{aligned} F &= F^{\ell,+} + u_\ell \circ \sigma - u_\ell, \\ \|u_\ell\|_\infty &\leq 2^{-\alpha\ell}\|F\|_\alpha,\ \|u_\ell\|_{\frac{\alpha}{2}} \leq C\|F\|_\alpha. \end{aligned}$$

Les fonctions $F^{\ell,+}$ sont toutes cohomologues entre elles. En posant $h_\ell := \sum_{j=0}^{\ell-1} F\sigma^j r_0$:

$$F^{\ell,+} \circ \sigma^\ell = F^{0,+} + h_\ell \circ \sigma - h_\ell.$$

<u>Preuve</u> Posons :

$$u_\ell = \sum_{j=0}^{+\infty} F \circ \sigma^j - F \circ \sigma^j \circ r_\ell.$$

Pour tout $x \in X$, $\sigma^j x$ et $\sigma^j \circ r_\ell x$ coïncident sur $\{-j-\ell, \ldots, +\infty\}$, donc :

$$|F \circ \sigma^j x - F \circ \sigma^j \circ r_\ell x| \leq [F]_\alpha 2^{-\alpha(l+j)}.$$

Ainsi u_ℓ est bien définie et $\|u_\ell\|_\infty \leq 2^{-\alpha\ell}[F]_\alpha$.

Si x et y coïncident sur les coordonnées $\{-n, \ldots, n\}$, alors $r_\ell(x)$ et $r_\ell(y)$ aussi (r_ℓ impose le même passé à x et y si $n \geq \ell$ et ne change pas les coordonnées $\{-n, \ldots, n\}$ sinon) et, pour tout $0 \leq j \leq n$, on a

$$|F \circ \sigma^j x - F \circ \sigma^j y| \leq [F]_\alpha 2^{\alpha(-n+j)};$$

$$|F \circ \sigma^j r_\ell(x) - F \circ \sigma^j r_\ell(y)| \leq [F]_\alpha 2^{\alpha(-n+j)};$$

d'où :

$$|u_\ell x - u_\ell y| \leq \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} |F\circ\sigma^j x - F\circ\sigma^j y| + \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} |F\circ\sigma^j r_\ell(x) - F\circ\sigma^j r_\ell(y)| + 2 \sum_{j=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor+1}^{+\infty} [F]_\alpha \, 2^{-j-\ell}.$$

On obtient donc :

$$\|u_\ell\|_{\alpha/2} \leq C\|F\|_\alpha.$$

Posons $F^{\ell+}(x) = F(x) + u_\ell(\sigma x) - u_\ell(x)$. Cette quantité ne dépend que des coordonnées $\{x_{-\ell}, x_{-\ell+1}, \ldots\}$. En effet :

$$\begin{aligned} F^{\ell+}(x) &= F(x) + \sum_{j=0}^{+\infty} \left(F \circ \sigma^{j+1} x - F \circ \sigma^j r_\ell \sigma x\right) - \sum_{j=0}^{+\infty} \left(F \circ \sigma^j x - F \circ \sigma^j r_\ell x\right) \\ &= F(r_\ell x) + \sum_{j=0}^{+\infty} \left(F \circ \sigma^{j+1} r_\ell x - F \circ \sigma^j r_\ell \sigma x\right). \end{aligned}$$

La fonction

$$F^{\ell,+}(\sigma^\ell x) = F(r_\ell \, \sigma^\ell x) + \sum_{j=0}^{+\infty} [F(\sigma^{j+1} r_\ell \, \sigma^\ell x) - F(\sigma^j r_\ell \, \sigma^{\ell+1} x)]$$

ne dépend, elle, que des coordonnées positives.

Comme

$$\begin{aligned} \sigma^{\ell+j} r_0(x) &= \sigma^{\ell+j}(....a_{-1}(x_0)x_0.....) \\ &= \sigma^j(....a_{-1}(x_0)....x_\ell.....) = \sigma^j r_\ell \sigma^\ell(x) \end{aligned}$$

on a $F(\sigma^{\ell+j} r_0 x) = F(\sigma^j r_\ell \sigma^\ell x)$, et

$$\begin{aligned} u_\ell \circ \sigma^\ell &= \sum_{j=0}^{+\infty} [F \circ \sigma^{\ell+j} - F \circ \sigma^j r_\ell \, \sigma^\ell] \\ &= \sum_{j=0}^{+\infty} [F \circ \sigma^{\ell+j} - F \circ \sigma^{\ell+j} r_0] \\ &= \sum_{j=\ell}^{+\infty} [F \circ \sigma^j - F \circ \sigma^j r_0] = u_0 - \sum_{j=0}^{\ell-1} [F\sigma^j - F\sigma^j r_0]. \end{aligned}$$

Cela permet d'exprimer $F^{\ell,+} \circ \sigma^\ell - F^{0,+}$ et d'obtenir :

$$\begin{aligned} F^{\ell,+} \circ \sigma^\ell - F^{0,+} &= F\sigma^\ell - F + u_\ell \sigma^{\ell,+} - u_\ell \sigma^\ell + u_0 - u_0 \sigma \\ &= F\sigma^\ell - F + \sum_{j=0}^{\ell-1} [F\sigma^j - F\sigma^j r_0] - \sum_{j=0}^{\ell-1} [F\sigma^{j+1} - F\sigma^j r_0 \sigma] \\ &= \sum_{j=0}^{\ell-1} [F\sigma^j r_0 \sigma - F\sigma^j r_0]. \end{aligned}$$

En posant $h_\ell := \sum_{j=0}^{\ell-1} F\sigma^j r_0$, nous avons donc :

$$F^{\ell,+} \circ \sigma^\ell = F^{0,+} + h_\ell \circ \sigma - h_\ell$$

□

Théorème 2.13. *Soit $F : X \to \mathbb{R}$ une fonction α-höldérienne, apériodique, et vérifiant $\mu(F) = 0$. Soit $\beta \in]0, \frac{1}{2}[$ et soit (c_n) une famille de fonctions α-höldériennes $X \to \mathbb{R}$ telle que pour tout n, on ait :*

$$\|c_n\|_\infty \leq n^{\frac{1}{2}-\beta} \qquad \ln[c_n]_\alpha \leq n^{1-\beta}.$$

Alors, pour tout intervalle $I \subset \mathbb{R}$, on a :

$$\sigma_F\sqrt{2\pi n}\mu\left(\left\{x \in X, c_n(x) + \sum_{i=0}^{n-1} F \circ \sigma^i(x) \in I\right\}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda(I).$$

<u>Preuve</u> Considérons un nombre $\beta \in]0, \frac{1}{2}[$ et une suite c_n de fonctions telles que

$$\|c_n\|_\infty = o(n^{\frac{1}{2}-\beta}),\ \ln[c_n]_\alpha = o(n^{1-\beta}). \tag{I.14}$$

Posons :

$$A_n = \sqrt{2\pi n}\sigma_F \int g(c_n(x) + S_nF(x))\ d\mu(x).$$

On a :

$$\begin{aligned} A_n &= \sqrt{\frac{n}{2\pi}}\sigma_F \int_X \int_{\mathbb{R}} \hat{g}(t) e^{itc_n(x)+itS_nF(x)}\ dt\ d\mu(x) \\ &= \sqrt{\frac{n}{2\pi}}\sigma_F \int_{\mathbb{R}} \hat{g}(t) \int_X e^{itc_n(x)+itS_nF(x)}\ d\mu(x)\ dt \\ &= C_n^1 + C_n^2 + C_n^3, \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} C_n^1 &= \sqrt{\frac{n}{2\pi}}\sigma_F \int_{]-\frac{\delta}{n^\eta},\frac{\delta}{n^\eta}[} \hat{g}(t) \int_X e^{itc_n(x)+itS_nF(x)}\ d\mu(x)\ dt; \\ C_n^2 &= \sqrt{\frac{n}{2\pi}}\sigma_F \int_{\frac{\delta}{n^\eta}\leq|t|\leq\delta} \hat{g}(t) \int_X e^{itc_n(x)+itS_nF(x)}\ d\mu(x)\ dt. \\ C_n^3 &= \sqrt{\frac{n}{2\pi}}\sigma_F \int_{\delta\leq|t|\leq a} \hat{g}(t) \int_X e^{itc_n(x)+itS_nF(x)}\ d\mu(x)\ dt. \end{aligned}$$

Comme dans le cas unilatère, si $\frac{1}{2} - \frac{\beta}{2} < \eta < \frac{1}{2}$, le premier terme, C_n^1, se comporte comme $\sqrt{\frac{n}{2\pi}}\sigma_F \int_{]-\frac{\delta}{n^\eta},\frac{\delta}{n^\eta}[} \hat{g}(t) \int_X e^{itS_nF(x)}\ d\mu(x)\ dt$ lorsque n tend vers l'infini, c'est-à-dire tend vers $\int_{\mathbb{R}} g(x)\ dx$. Le terme C_n^3 se traite également comme dans le cas unilatère.

Reste à montrer que C_n^2 tend vers 0. Le lemme 2.12, assure l'existence des fonctions $F^+, u_\ell, c_n^+, v_{n,\ell}$ höldériennes telles que :

$$\begin{aligned}
F &= F^+ \circ r_\ell + u_\ell \circ \sigma - u_\ell, \\
c_n &= c_n^+ \circ r_\ell + v_{n,\ell} \circ \sigma - v_{n,\ell}, \\
\|v_{n,\ell}\|_\infty &\leq C2^{-\alpha l}[c_n]_\alpha \\
\|u_\ell\|_\infty &\leq C2^{-\alpha l}[F]_\alpha \\
\left[c_n^+\right]_{\alpha/2} &\leq C[c_n]_\alpha \\
\left[F^+\right]_{\alpha/2} &\leq C[F]_\alpha
\end{aligned}$$

Utilisons cette écriture pour exprimer C_n^2 :

$$\begin{aligned}
C_n^2 &= \sqrt{\frac{n}{2\pi}}\sigma_F \int_{\frac{\delta}{n^\eta}|t|\leq\delta} \hat{g}(t) \int_X e^{itc_n(x)+itS_nF(x)}\ d\mu(x)\ dt \\
&= \sqrt{\frac{n}{2\pi}}\sigma_F \int_{\frac{\delta}{n^\eta}|t|\leq\delta} \hat{g}(t) \int_X e^{it(c_n^{\ell+}(x)+S_nF^{\ell+}(x)+u_\ell(x)-u_\ell\circ\sigma^n(x)+v_n^\ell(x)-v_n^\ell\circ\sigma)}\ d\mu(x)\ dt
\end{aligned}$$

Prenons ℓ égal à $[n^\zeta]$, pour $\zeta > 1-\beta$. Les majorations rappelées ci-dessus assurent alors que

$$\|u_\ell \circ \sigma^\ell - u_\ell \circ \sigma^{n+\ell} + v_n^{\ell+1} - v_n^\ell \circ \sigma\|_\infty < C2^{-\alpha n^\zeta}[c_n]_\alpha$$

On en déduit

$$|C_n^2 - \sqrt{\frac{n}{2\pi}}\sigma_F \int_{\frac{\delta}{n^\eta}<|t|\leq\delta} \hat{g}(t) \int_X e^{it(c_n^{\ell+}(x)+S_nF^{\ell+}(x))}\ d\mu(x)\ dt| \leq C\delta\sqrt{n}2^{-\alpha n^\zeta}2^{\alpha n^{1-\beta}}.$$

Le membre de droite de cette inégalité tend vers 0, il nous suffit maintenant de montrer que $\sqrt{\frac{n}{2\pi}}\sigma_F \int_{\frac{\delta}{n^\eta}|t|\leq\delta} \hat{g}(t) \int_X e^{it(c_n^{\ell+}(x)+S_nF^{\ell+}(x))}\ d\mu(x)\ dt$ tend vers 0. C'est une quantité analogue à celle que nous avons dans la preuve du théorème "unilatère". Mais nous avons ici une famille de fonctions $F^{\ell+}$ dépendant de ℓ au lieu d'une fonction fixe.

L'égalité

$$F^{\ell,+} \circ \sigma^\ell = F^{0,+} + h_\ell \circ \sigma - h_\ell.$$

permet d'écrire, grâce à l'invariance de μ,

$$\begin{aligned}
&\sqrt{\frac{n}{2\pi}}\sigma_F \int_{\frac{\delta}{n^\eta}<|t|\leq\delta} \hat{g}(t) \int_X e^{it(c_n^{\ell+}(x)+S_nF^{\ell+}(x))}\ d\mu(x)\ dt \\
&\quad = \sqrt{\frac{n}{2\pi}}\sigma_F \int_{\frac{\delta}{n^\eta}<|t|\leq\delta} \hat{g}(t) \int_X e^{it(c_n^{\ell+}\circ\sigma^\ell(x)+S_nF^{0+}(x)+h_\ell\circ\sigma^n(x)-h_\ell(x))}\ d\mu(x)\ dt
\end{aligned}$$

Comme dans le cas unilatère, introduisons un réel positif $\xi > \zeta$ et scindons en deux la somme $S_n F^{0,+}$:

$$S_n F^{0,+} = S_{[n^\xi]} F^{0,+} + (S_{n-[n^\xi]} F^{0,+}) \circ \sigma^{[n^\xi]}.$$

$$\begin{aligned}
&\sqrt{\frac{n}{2\pi}}\sigma_F \int_{\frac{\delta}{n^\eta}<|t|\leq\delta} \hat{g}(t) \int_X e^{it(c_n^{\ell+}\circ\sigma^\ell(x)+S_n F^{0+}(x)+h_\ell\circ\sigma^n(x)-h_\ell(x))}\, d\mu(x)\, dt \\
&= \sqrt{\frac{n}{2\pi}}\sigma_F \int_{\frac{\delta}{n^\eta}<|t|\leq\delta} \hat{g}(t) \int_X e^{it(c_n^{\ell+}\circ\sigma^\ell(x)+S_{[n^\xi]}F^{0,+}+(S_{n-[n^\xi]}F^{0,+})\circ\sigma^{[n^\xi]}(x)+h_\ell\circ\sigma^n(x)-h_\ell(x))}\, d\mu(x)\, dt \\
&= \sqrt{\frac{n}{2\pi}}\sigma_F \int_{\frac{\delta}{n^\eta}<|t|\leq\delta} \hat{g}(t) \int_X P_{t,F^{0,+}}^{n-[n^\xi]}(P^{[n^\xi]}(e^{it(c_n^{\ell+}\circ\sigma^\ell(x)+S_n F^{0+}(x)-h_\ell(x))}))e^{ith_\ell(x)}\, d\mu(x)\, dt
\end{aligned}$$

La suite des variations des fonctions $P^{[n^\xi]}(e^{it(c_n^{\ell+}\circ\sigma^\ell+S_n F^{0+}-h_\ell)})$ est bornée car $\xi > \zeta > 1-\beta$, $\ell = [n^\zeta]$ et

$$\begin{aligned}
[P^{[n^\xi]}(e^{it(c_n^{\ell+}\circ\sigma^\ell+S_{[n^\xi]}F^{0+}-h_\ell)})]_{\alpha/2} &\leq 2^{-\frac{\alpha}{2}n^\xi}|t|[c_n^{\ell+}\circ\sigma^\ell + S_{[n^\xi]}F^{0+} - h_\ell]_{\alpha/2} \\
&\leq C2^{-\frac{\alpha}{2}n^\xi}|t|(2^{\frac{\alpha}{2}\ell}[c_n]_\alpha + [F^{0+}]_{\alpha/2}\sum_{i=0}^{[n^\xi]-1} 2^{\frac{\alpha}{2}i} + [\sum_{j=0}^{\ell-1} F\sigma^j r_0]_{\alpha/2}) \\
&\leq C2^{-\frac{\alpha}{2}n^\xi}|t|(2^{\frac{\alpha}{2}\ell}2^{\frac{\alpha}{2}n^{1-\beta}} + [F^{0+}]_{\alpha/2}\sum_{i=0}^{[n^\xi]-1} 2^{\frac{\alpha}{2}i} + [F]_{\alpha/2}\sum_{i=0}^{\ell-1} 2^{\frac{\alpha}{2}i}).
\end{aligned}$$

D'autre part, par hypothèse, F est apériodique, F^{0+} homologue à F l'est donc aussi et le lemme 2.7 est valable pour l'opérateur $P_{t,F^{0+}}$. Par une étude identique à celle menée dans le cas unilatère, on montre que, pour tout $|t| \geq \delta/n^\eta$,

$$\|P_{t,F^{0,+}}^{n-[n^\xi]}(P^{[n^\xi]}(e^{it(c_n^{\ell+}\circ\sigma^\ell-h_\ell)}))\|_\infty \leq C\delta(e^{-\frac{1}{4}\sigma^2\delta^2(n-[n^\xi])n^{-2\eta}} + 2\rho^{n-[n^\xi]}),$$

ce qui entraîne

$$C_n^2 \leq C\sqrt{n}e^{-cn^{1-2\eta}}.$$

□

3 Codage des automorphismes hyperboliques du tore

3.1 Notations, « matrices de Pisot »

Notations 3.1. Comme plus haut, nous considérons une matrice hyperbolique $M \in SL(d, \mathbb{Z})$, vérifiant la condition (Π) (voir la définition 1.2). Nous lui associons l'application notée T_M (ou simplement T) : $\mathbb{T}^d \to \mathbb{T}^d$ définie par

$$T_M : \ \xi \mapsto M\xi \bmod \mathbb{Z}^d \ .$$

L'espace $\mathbb{R}^d$ se décompose en somme directe $F_u \oplus F_s$, où F_u est le sous-espace dilaté (instable) M-invariant de dimension r associé aux valeurs propres de module supérieur à 1, F_s le sous-espace contracté (stable). Cette décomposition induit deux feuilletages du tore en feuilles respectivement contractées et dilatées sous l'action de T.

Comme plus haut, $(e_1, \ldots, e_d)$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^d$, V est l'espace vectoriel engendré par $(e_1, \ldots, e_r)$.

La mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, sur les tores ou sur l'espace vectoriel V est notée λ. Dans le cas du tore $\mathbb{T}^r$ ou de V, on la notera aussi λ_r.

Enfin $\pi : F_u \to V$ est la restriction à F_u de la projection parallèle au sous-espace $Vect(e_{r+1}, \ldots, e_d)$ est une bijection et A est l'application linéaire de V sur lui-même définie par $A := \pi M \pi^{-1}_{|V}$.

π_u est la projection sur le sous-espace dilaté parallèlement F_s. On note $M_u = M_{|F_u}$, $M_s = M_{|F_s}$.

La matrice $A = \pi M \pi^{-1} \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$ vérifie, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\pi M^k \pi^{-1} = A^k \pi$. On dira que A est une « matrice de Pisot ». Dans le cas $r = 1$, une telle matrice s'identifie à un nombre de Pisot. On note $\tau_0 = \max\{|\lambda|, \lambda \in Sp(M), |\lambda| < 1\}$. Comme dans le cas $r = 1$, on a, pour un $\tau > \tau_0$:

$$\forall k \in \mathbb{Z}^d, \ \|M^i \pi_s k\| \underset{i \to +\infty}{=} \mathcal{O}(\tau^i). \tag{I.15}$$

Nombres de Pisot unimodulaires

Rappelons qu'un nombre de Pisot est un entier algébrique réel supérieur à 1, dont tous les éléments conjugués ont des modules inférieurs à 1.

Soit θ un nombre de Pisot de polynôme minimal $P \in \mathbb{Z}[X]$ de degré d, $P(x) = x^d + a_1 x^{d-1} + ... + a_{d-1}x + 1$ étant à coefficients entiers et unitaire. Une propriété importante des nombres de Pisot est que $d(\theta^k, \mathbb{Z}) = O(\tau^k)$, pour un réel $\tau < 1$.

Soit M la matrice compagne de θ, i.e. $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & . & -1 \\ 1 & 0 & . & -a_1 \\ 0 & 1 & . & -a_2 \\ . & . & . & . \\ 0 & . & 1 & -a_{d-1} \end{pmatrix}$.

Les valeurs propres de M sont toutes de module strictement inférieur à 1, sauf une qui est de module strictement supérieur à 1, et dont le déterminant est 1 ou -1. L'application

$$T_M : \mathbb{T}^d \to \mathbb{T}^d,\ \xi \mapsto M\xi \bmod 1$$

est un automorphisme hyperbolique du tore.

3.2 Codage markovien des automorphismes

On se reportera à [Bow75] pour les résultats que nous rappelons maintenant.

Il existe une partition markovienne $\mathcal{R} = (\mathcal{R}_i)_{i\in I}$ du tore $\mathbb{T}^d$, où I est un alphabet fini de cardinal m. Cette famille $\mathcal{R}$ possède les propriétés suivantes :

(a) les ensembles $\mathcal{R}_i$ sont des parallélogrammes fermés de la forme $\mathcal{R}_i^s \times \mathcal{R}_i^u$, où $\mathcal{R}_i^s$ est une feuille locale contractée et $\mathcal{R}_i^s$ une feuille dilatée ;

(b) pour tous i, j, $\mathcal{R}_i = \overline{\mathrm{int}(\mathcal{R}_i)}$ et $\mathrm{int}(\mathcal{R}_i) \cap \mathrm{int}(\mathcal{R}_j) = \emptyset$;

(c) si $T^{-1}\mathcal{R}_i \cap \mathcal{R}_j$ est d'intérieur non vide, alors $T^{-1}\mathcal{R}_i^u \subset \mathcal{R}_j^u$,

(d) si $T\mathcal{R}_i \cap \mathcal{R}_j$ est d'intérieur non vide, alors $T\mathcal{R}_i^s \subset \mathcal{R}_j^s$.

On note B la matrice de transition définie par :

$$B_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{si l'intérieur de } \mathcal{R}_i \cap T^{-1}\mathcal{R}_j \text{ est non vide,} \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Notation 3.2. Dans la suite X désigne le *sous-décalage bilatère de type fini* d'alphabet I, muni du décalage noté σ, dont les mots (x_i) vérifient la conditon d'admissibilité $B_{x_i,x_{i+1}} = 1, \forall i \in \mathbb{Z}$. Le sous-décalage unilatère facteur de X est noté X^+.

On peut montrer le résultat suivant :

Proposition 3.3. *Il existe un sous-ensemble $\mathcal{B} \subset \mathbb{T}^d$ de mesure de Lebesgue pleine tel que l'application*

$$\Psi : X \to \mathcal{B},\quad (x_\ell)_{\ell\in\mathbb{Z}} \mapsto \bigcap_{\ell\in\mathbb{Z}} T_M^{-\ell} R_{x_\ell}$$

soit bijective.

3.3 Mesure d'entropie maximale

La matrice B est irréductible et apériodique, compte-tenu de l'hyperbolicité de M qui implique la propriété de mélange pour la transformation T_M.

Utilisons les notations 2.1. Notons β l'unique valeur propre de module maximal de la matrice de transition B, L un vecteur propre de Perron à gauche de B et R le vecteur propre de Perron à droite de B, vérifiant les relations :

$$L^\top B = \beta L^\top,\ BR = \beta R,\ \sum_{i=1}^{n} L_i R_i = 1.$$

Notons Q la matrice définie par :

$$\forall i, j \in I,\ Q_{i,j} = B_{i,j}\frac{R_i}{\beta R_j}.$$

Notation 3.4. On note μ^+ (ou simplement μ) l'unique mesure sur le sous-shift X^+ muni de sa tribu borélienne B qui est invariante par le décalage σ et d'entropie maximale. Elle est définie sur les cylindres par :

$$\mu([i_0, \ldots, i_k]) = L_{i_0} R_{i_k} \beta^{-k}.$$

Elle se prolonge en mesure invariante sur le sous-shift bilatère X notée également μ.

L'entropie de (X, σ, μ) est égale à $\ln \beta$. Pour plus de détails, on peut se reporter à [Kit98] p.155, ou encore à [Buz07].

3.4 Codage sofique

Soit $D = \bigcup_{i \in I} \widetilde{\mathcal{R}_i} \subset \mathbb{R}^d$ un domaine fondamental pour le réseau $\mathbb{Z}^d$ formé des parallélogrammes correspondant à la partition markovienne notés $\widetilde{\mathcal{R}_i}$. Pour tout $\xi \in \mathcal{B}$, on note $\widetilde{\xi}$ son représentant dans le domaine fondamental.

Lemme 3.5. *Il existe une famille finie $\Xi \subset \mathbb{Z}^d$ de vecteurs à coordonnées entières $(k_{i,j})_{i,j \in I}$ tels que, pour tout $(i,j) \in I^2$ tel que $B_{i,j} \neq 0$ et pour tout $\xi \in \mathcal{B} \cap \mathcal{R}_i \cap T^{-1}\mathcal{R}_j$, on ait :*

$$M\widetilde{\xi} - \widetilde{T\xi} = k_{i,j}.$$

Pour une démonstration de ce résultat, voir [Le 99a] (lemme 1, p.1047). La preuve repose sur les propriétés de Markov (c) et (d).

Rappelons qu'un codage est dit *sofique* lorsqu'il est facteur d'un sous-shift de type fini par une application continue.

Théorème 3.6. *Il existe un sous-décalage sofique $Y \subset \Xi^{\mathbb{Z}}$, facteur du sous-décalage X par une application $\rho : X \to Y$, tel que $(\mathbb{T}^d, T_M)$ soit facteur du système sofique (Y, σ) par l'application höldérienne ϕ de Y dans $\mathbb{T}^d$:*

$$\phi :\ (y_i)_{i \in \mathbb{Z}} \mapsto \sum_{i=1}^{+\infty} \pi_u(M^{-i} y_i) - \sum_{i=-\infty}^{0} \pi_s(M^{-i} y_i)\ mod\ \mathbb{Z}^d.$$

Cette factorisation correspond au diagramme :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\rho"] \arrow[dr, "\Psi"'] & Y \arrow[d, "\phi"] \\ & \mathbb{T}^d \end{tikzcd}$$

<u>Preuve</u> Il s'agit du théorème 1 de [Le 99a], dont on reprend la démonstration :

Soit ξ un point de $\mathcal{B}$. Il est codé, grâce à la partition markovienne par une unique suite $x \in X$, telle que pour tout n entier, $T^n\xi$ appartient à $\mathcal{R}_{x_n}$. D'après le lemme précédent, pour tout n, il existe $k_{x_n x_{n+1}} \in \Xi$ pour lequel :

$$\widetilde{T^{n+1}\xi} = M\widetilde{T^n\xi} - k_{x_n x_{n+1}}.$$

Par récurrence, on montre, pour n positif, l'égalité :

$$\widetilde{T^n\xi} = M^n\widetilde{\xi} - M^{n-1}k_{x_0x_1} - M^{n-2}k_{x_1x_2} - \cdots - k_{x_{n-1}x_n}.$$

On en déduit, en composant par $M^{-n}\pi_u$, que l'on a :

$$\pi_u\widetilde{\xi} = M^{-n}\pi_u\widetilde{T^n\xi} + \sum_{i=1}^{n} M^{-i}\pi_u k_{x_{i-1}x_i}.$$

Comme M^{-1} est contractante en restriction à F_u, il vient :

$$\pi_u\widetilde{\xi} = \sum_{i=1}^{+\infty} M^{-i}\pi_u k_{x_{i-1}x_i}.$$

De la même façon, on montre l'égalité :

$$\pi_s\widetilde{\xi} = -\sum_{i=-\infty}^{0} M^{-i}\pi_s k_{x_{i-1}x_i}.$$

Pour tout point ξ de $\mathcal{B}$, on a :

$$\widetilde{\xi} = \pi_u\widetilde{\xi} + \pi_s\widetilde{\xi} = \sum_{i=1}^{+\infty}\pi_u(M^{-i}k_{x_{i-1}x_i}) - \sum_{i=-\infty}^{0}\pi_s(M^{-i}k_{x_{i-1}x_i}).$$

Posons $Y = \left\{(k_{x_{i-1}x_i})_{i\in\mathbb{Z}}, x \in X\right\}$ et définissons l'application $\rho : X \to Y$ par

$$\rho(x) = (k_{x_{i-1}x_i})_{i\in\mathbb{Z}}.$$

Pour tout ξ appartenant à $\mathcal{B}$, il existe une unique suite x de X telle que : $\Psi(x) = \xi = \widetilde{\xi} \bmod \mathbb{Z}^d = \sum_{i=1}^{+\infty}\pi_u(M^{-i}k_{x_{i-1}x_i}) - \sum_{i=-\infty}^{0}\pi_s(M^{-i}k_{x_{i-1}x_i}) \bmod \mathbb{Z}^d = \phi(\rho(x))$. Finalement, $\phi \circ \rho$ et Ψ coïncident sur $\Psi^{-1}(\mathcal{B})$ qui est dense dans X, donc sont égales. $\square$

Nous utiliserons ce codage par des entiers dans la section 4.

3.5 Relèvement au sous-shift

Définition 3.7. *On définit des applications θ_J et $\theta_{J,u}$ de X dans V permettant de relever au sous-shift l'action dilatante sur V :*

$$\begin{aligned}\theta_J : &\quad (x_i)_{i\in\mathbb{Z}} \mapsto \pi \sum_{i=-J}^{+\infty} \pi_u(M^{-i}k_{x_{i-1}x_i}) - \pi \sum_{i=-\infty}^{-J-1} \pi_s(M^{-i}k_{x_{i-1}x_i}),\\ \theta_{J,u} : &\quad (x_i)_{i\in\mathbb{Z}} \mapsto \pi \sum_{i=-J}^{+\infty} \pi_u(M^{-i}k_{x_{i-1}x_i}).\end{aligned}$$

On note d une distance métrique sur $\mathbb{R}^d$.

Lemme 3.8. *Il existe $c > 0$ tel que, uniformément en x, modulo 1, on ait :*

$$d(A^k\theta_{J,u}(x), \theta_J \circ \sigma^k x) \leq c\tau^{k+J}.$$

<u>Preuve</u>

$$\begin{aligned}A^k\theta_{J,u}(x) &= A^k\pi \sum_{-J}^{+\infty} \pi_u M^{-i} k_{x_{i-1}x_i}\\ &= \sum_{-J}^{+\infty} \pi M^k \pi_u M^{-i} k_{x_{i-1}x_i} = \pi \sum_{-J-k}^{+\infty} \pi_u M^{-i} k_{x_{i+k-1}x_{i+k}}.\end{aligned}$$

Par ailleurs, comme $\displaystyle\sum_{i=-J-k+1}^{-J} \pi_u M^{-i} k_{x_{i+k-1}x_{i+k}} + \sum_{i=-J-k+1}^{-J} \pi_s M^{-i} k_{x_{i+k-1}x_{i+k}}$ est un entier, on obtient :

$$\begin{aligned}\theta_J(\sigma^k x) &= \pi \sum_{-J}^{+\infty} \pi_u M^{-i} k_{x_{i+k-1}x_{i+k}} - \pi \sum_{-\infty}^{-J-1} \pi_s M^{-i} k_{x_{i+k-1}x_{i+k}}\\ &\equiv \pi \sum_{-J-k}^{+\infty} \pi_u M^{-i} k_{x_{i+k-1}x_{i+k}} - \pi \sum_{-\infty}^{-J-k-1} \pi_s M^{-i} k_{x_{i+k-1}x_{i+k}} \bmod 1.\end{aligned}$$

En utilisant (I.15), on en déduit qu'il existe $c > 0$ tel que :

$$|A^k\theta_{J,u}(x) - \theta_J(\sigma^k x) \bmod 1| \leq c\tau^{k+J}. \quad \square$$

Lemme 3.9. *θ_0 est höldérienne.*

<u>Preuve</u> Soient x, x' tels que $x_i = x'_i$, pour tout $|i| \leq L$. Nous avons

$$\begin{aligned}\theta_0(x) - \theta_0(x') &= \sum_{i=1}^{+\infty} \pi_u M^{-i}(k_{x_{i-1}x_i} - k_{x'_{i-1}x'_i}) - \sum_{i=-\infty}^{0} \pi_s M^{-i}(k_{x_{i-1}x_i} - k_{x'_{i-1}x'_i})\\ &= \sum_{i=L+1}^{+\infty} \pi_u M^{-i}(k_{x_{i-1}x_i} - k_{x'_{i-1}x'_i}) - \sum_{i=-\infty}^{-L} \pi_s M^{-i}(k_{x_{i-1}x_i} - k_{x'_{i-1}x'_i}) \bmod 1.\end{aligned}$$

Comme $M_u = M_{|F_u}$ est dilatante et $M_s = M_{|F_s}$ est contractante, il existe deux constantes $C > 0$ et $0 < \tau < 1$ telles que :

$$|\theta_0(x) - \theta_0(x')| \leq C\tau^L. \tag{I.16}$$

Plus géneralement, nous avons

$$|\theta_J(x) - \theta_J(x')| \leq C\tau^{L-J}. \tag{I.17}$$

□

Notations 3.10. A une fonction $f : V \to \mathbb{R}$ α-höldérienne et 1-périodique, on associe la fonction $\bar{f}$ également α-höldérienne et 1-périodique de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\bar{f}(x_1, \ldots, x_d) = f(x_1, \ldots, x_r).$$

Lemme 3.11. *La fonction $\bar{f} \circ \theta_J$ ne dépend pas de J, est α-höldérienne sur X et nous avons uniformément en J et x*

$$|f(A^k\theta_{J,u}(x)) - \bar{f}(\theta_J \circ \sigma^k x)| \leq C\tau^{\alpha k}. \tag{I.18}$$

Preuve Le premier point repose sur le même calcul que le lemme précédent : pour tout x et tout J, $\theta_J(x) - \theta_0(x) = 0 \bmod 1$. Le lemme 3.9 implique que $\bar{f} \circ \theta_J$ est α-höldérienne. Le dernier point résulte du lemme 3.8.

3.6 Autosimilarité et mesure de Lebesgue

Rappelons que λ_r est la mesure de Lebesgue sur V, μ la mesure bilatère d'entropie maximale pour le sous-décalage (X, B, σ).

Proposition 3.12. *La mesure image de μ par $\theta_{0,u}$ est de la forme $g\lambda_{|\theta_{0,u}(X)}$, où la densité g est constante sur les images des m cylindres $[a]$.*

Preuve Par un argument d'autosimilarité, on montre que le décalage bilatère (X, σ, μ) est sofique, intrinsèquement ergodique et que son entropie topologique vaut $\log(\Delta)$, où Δ est la valeur absolue du déterminant de $M_u = M_{|F_u}$. (Voir [Le 99b], théorème III-6 p.70).

Par ailleurs, en reprenant les notations de la partie 3.3, en notant B la matrice de transition associée au codage et β sa valeur propre (positive) de module supérieur à 1, on sait que l'entropie de (X, σ, μ) vaut $\ln \beta$.

L'intrinsèque ergodicité assure que :

$$\ln \Delta = \ln \beta \tag{I.19}$$

Plaçons-nous dans le cas $J = 0$.

Notons X_{a_n} le sous-ensemble de suites admissibles suivant a_n. En partitionnant X en les cylindres de longueur n, nous avons :

$$\theta_{0,u}(X) = \bigcup_{a_1...a_n \text{ mot de } X} \theta_{0,u}([a_1...a_n])$$

et

$$\theta_{0,u}([a_1...a_n]) = \sum_{i=0}^{n-1} M^{-i}\Pi_u(k_{a_i,a_{i+1}}) + M^{-n}\theta_{0,u}(X_{a_n}),$$

d'où :

$$\lambda(\theta_{0,u}([a_1...a_n])) = \Delta^{-n}\lambda(\theta_{0,u}(X_{a_n})).$$

On en déduit que $\theta_{0,u}(X)$ est de λ-mesure non nulle.

Le sous-shift étant apériodique, $\theta_{0,u}([a])$ est d'intérieur non vide et donc il existe un mot admissible $ab_1...b_k$ tel que $\theta_{0,u}([a])$ contient $\theta_{0,u}(ab_1...b_k)$ en son intérieur. Ce mot n'est donc pas nécessaire pour recouvrir le bord.

Ceci implique qu'il existe $\Delta' < \Delta$ et $C > 0$ tels que, pour recouvrir le bord de $\theta_{0,u}([a])$, on a besoin de moins de Δ'^k images par $\theta_{0,u}$ de cylindres de longueur k.

L'argument d'entropie a montré que $\beta = \Delta$. Donc $\lambda_r(\partial\theta_{0,u}[a])) = 0$.

Il en est de même des images de tous les cylindres de X par $\theta_{0,u}$. Comme $\theta_{0,u}[a]$ est la réunion des $\theta_{0,u}[aa_1...a_n]$ lorsque $aa_1...a_n$ décrit l'ensemble des mots de X de longueur $n+1$ commençant par a et comme le diamètre des ensembles tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini, il existe un mot $ab_1...b_k$ tel que $\theta_{0,u}[ab_1...b_k]$ soit contenu dans l'intérieur de $\theta_{0,u}[a]$.

Le sous-décalage de type fini $X' \subset X$ obtenu à partir de X en interdisant le mot $ab_1...b_k$ fournit un sous-ensemble de suites admissibles suffisant pour coder les points du bord de $\theta_{0,u}[a]$.

Comme X est irréductible, l'entropie topologique $\mathrm{Log}\Delta'$ de (X', σ) est strictement inférieure à celle $\mathrm{Log}\Delta$ de X.

Pour tout n, on a :

$$\lambda(\partial\theta_{0,u}[a]) \leq \sum_{ab_1...b_n \text{ mot de } X'} \lambda(\theta_{0,u}[ab_1...b_n]) \leq C\Delta'^{n+1}\Delta^{-n} \leq C(\Delta'/\Delta)^n,$$

ce qui implique $\lambda(\theta_{0,u}[a]) = 0$.

Montrons maintenant qu'il n'y a pas recoupement des intérieurs des images par $\theta_{0,u}$. Supposons que, au contraire, deux cylindres $[a_1...a_n]$ et $[b_1...b_n]$ aient des images par $\theta_{0,u}$ dont les intérieurs se recoupent. Il existe alors un mot $[a_1...a_kc_{k+1}...c_{k+\ell}]$ tel que

$$\theta_{0,u}[a_1...a_kc_{k+1}...c_{k+\ell}] \subset \theta_{0,u}[b_1...b_k].$$

Le sous-décalage de type fini $X'' \subset X$ obtenu à partir de X en interdisant le mot $a_1...a_kc_{k+1}...c_{k+\ell}$ fournit un sous-ensemble de suites admissibles suffisant pour

coder les points de $\theta_{0,u}(X)$. Par le même calcul que précédemment, on montre que cela entraîne que $\theta_{0,u}[X]$ est de mesure nulle, ce qui est absurde.

Les ensembles $\theta_{0,u}[a_1...a_n]$ sont donc d'intérieurs disjoints et de bords négligeables pour la mesure de Lebesgue.

La réunion $\theta_{0,u}[a] = \bigcup_{b:B_{a,b}=1} \theta_{0,u}[ab]$ étant presque-sûrement disjointe, on a :

$$\lambda(\theta_{0,u}[a]) = \sum_{b:B_{a,b}=1} \lambda(\theta_{0,u}[ab]) = \sum_b B_{a,b}\Delta^{-1}\lambda(\theta_{0,u}[b]).$$

Notons W le vecteur colonne de composantes $\lambda(\theta_{0,u}([a]))_{a=1,...,m}$. La relation précédente signifie W est un vecteur propre à droite de B :

$$W_a = \Delta^{-1}\sum_b B_{a,b}W_b.$$

Il est donc proportionnel à R : il existe $D > 0$ tel que $\lambda(\theta_{0,u}([a])) = DR_a, \forall a = 1, ..., m$, où m est le nombre de caractères de l'alphabet. Ceci permet de comparer les mesures μ et $\theta^*_{0,u}\lambda$. Nous avons :

$$\begin{aligned} \lambda(\theta_{0,u}[a_1...a_n]) &= \Delta^{1-n}\lambda(\theta_{0,u}[a_n]) \\ \mu([a_1...a_n]) &= L_{a_1}R_{a_n}\Delta^{1-n}; \end{aligned}$$

d'où :

$$\lambda(\theta_{0,u}[a_1...a_n]) = DL_{a_1}\mu([a_1...a_n]).$$

Cela signifie que $\theta^*_{0,u}\mu$ coïncide avec la mesure $(\sum_{a=1}^{m}(DL_a)^{-1}1_{\theta_{0,u}[a]})\lambda$ sur l'ensemble des images par $\theta_{0,u}$ des cylindres de X.

Comme ces images engendrent la tribu borélienne, on en déduit que la mesure image de μ est de la forme $g\lambda_{|\theta_{0,u}(X)}$, où la densité g est constante sur les images des m cylindres $[a]$:

$$\theta^*_{0,u}\mu = (\sum_{a=1}^{m}(DL_a)^{-1}1_{\theta_{0,u}[a]})\lambda$$

et plus généralement :

$$\theta^*_{J,u}\mu = (\sum_{a=1}^{m}(DL_a)^{-1}1_{\theta_{J,u}[a]})\lambda.$$

□

Notations 3.13. On note $K_{V,J}$ (ou simplement K_J) le support (compact) de la mesure $\theta^*_{J,u}\mu$. Ce support est de λ_r-mesure non nulle. On définit la mesure $m_{K,V,J}$ sur V, pour tout A mesurable, par :

$$m_{K,V,J}(A) = \frac{\lambda_r(K_{V,J} \cap A)}{\lambda_r(K_{V,J})}.$$

$K_{V,J}$ est la réunion des images par $\theta_{0,u}$ des cylindres de X, les ensembles $\theta_{0,u}[a]$ sur lesquels g est constant.

On note k_J le nombre d'hypercubes à sommets entiers contenus dans l'un des ensembles $1_{\theta_{0,u}[a]}$ et H_J la réunion de ces hypercubes (chacun est désigné par le point à coordonnées entières le plus petit au sens lexicographique) et $R_J = K_{V,J} \setminus H_J$.

Le résultat suivant permet de comparer les volumes de R_J et de H_J.

Lemme 3.14. *Soit $J \in \mathbb{N}$. Il existe un réel $\kappa \in]0,1[$ tel que*

$$\frac{\lambda_r(R_J)}{\lambda_r(K_{V,J})} \leq \kappa^J \tag{I.20}$$

<u>Preuve</u> Rappelons que

$$K_{V,J} = \theta_{J,u}(X) = \{\pi\pi_u(\sum_{i=-J}^{+\infty} M^{-i} k_{x_{i-1},x_i}), x \in X\}$$

et que

$$R_J = K_{V,J} \setminus (\bigcup_{k \in \mathcal{H}_J} (V_0 + k)),$$

où $V_0 = \pi([0;1]^d) = [0;1]^r$.

L'ensemble $\mathcal{H}_J$ est défini comme l'ensemble des sommets à coordonnées entières tels que les parallélépipèdes portés par ces sommets soient contenus dans l'un des ensembles $1_{\theta_{0,u}[a]}$.

Pour simplifier, nous ferons le raisonnement pour le bord $\partial K_{V,J}$ de $K_{V,J}$. Nous considérons que $\mathcal{H}_J$ est l'ensemble des sommets à coordonnées entières tels que les cubes portés par ces sommets soient contenus dans $K_{V,J}$. On traite de façon analogue le bord des ensembles $1_{\theta_{0,u}[a]}$.

On recouvre le bord $\partial K_{V,J}$ par une réunion, notée S_J, d'images par $\theta_{J,u}$ de cylindres de longueur J : il existe un entier $\mathcal{J}_J$ et des cylindres $([a_{-J}^{(i)}, ..., a_{-1}^{(i)}])_{1 \leq i \leq \mathcal{J}_J}$ tels que, en notant

$$\mathcal{C}(i) := \theta_{J,u}([a_{-J}^{(i)}, ..., a_{-1}^{(i)}]),$$

on ait :

$$\partial K_{V,J} \subset S_J = \bigcup_{i=1}^{\mathcal{J}_J} \mathcal{C}(i).$$

En reprenant l'argument de la proposition 3.12, on obtient l'existence de deux réels $c_1 > 0$ et $\Delta' \in]1, \Delta[$ tels que

$$\mathcal{J}_J \leq c_1 \Delta'^J.$$

Comme il n'existe qu'un nombre fini (et indépendant de J par autosimilarité) de modèles de cylindres, on en déduit qu'il existe une constante $C > 0$ indépendante de J (et de $i \in \{1, ..., \mathcal{J}_J\}$) et une suite $(Q_i)_{1 \leq i \leq \mathcal{J}_J}$ de parallélépipèdes tels que :

a) $\forall 1 \leq i \leq \mathcal{J}_J,\ \lambda(\mathcal{C}(i)) \leq C\lambda(Q_i)$,
b) $\forall 1 \leq i \leq \mathcal{J}_J,\ 2^r\lambda(V_0) \leq \lambda(Q_i) \leq 2^{r+1}\lambda(V_0)$.

Finalement, on obtient $R_J \subset \bigcup_{i=1}^{\mathcal{J}_J} Q_i$ et donc :

$$\lambda(R_J) \leq \mathcal{J}_J \max_{1\leq i\leq \mathcal{J}_J} \lambda(Q_i) \leq c_2\Delta'^J,$$

pour une constante $c_2 > 0$.

On conclut en remarquant qu'il existe deux constantes positives $c_3 \leq c_4$ telles que $c_3\Delta^J \leq \lambda(K_{V,J}) \asymp c_4\Delta^J$ et en prenant $\kappa > \Delta'/\Delta$.

□

Remarque 3.15. Un résultat analogue peut être obtenu en restriction aux ensembles $\theta_{0,u}[a]$ sur lesquels la densité g est constante.

4 Théorème limite local pour les « matrices de Pisot » et sous-variétés instables

4.1 Apériodicité

On peut alors appliquer le théorème 2.13 à $\bar{f} \circ \theta_0$. Pour ce faire on va commencer par montrer l'apériodicité, en utilisant la bijectivité de l'automorphisme, c.f. [Le 99b].

La condition **(APF)** suivante entraîne l'apériodicité.

Définition 4.1. *Une fonction $f : V \to \mathbb{R}$ satisfait la condition (APF), si elle vérifie :*

$$\forall k \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\},\ \mathrm{Card}(\{(M^\top)^s k, s \in \mathbb{Z}\} \cap V) \geq 2 \Rightarrow f \in \{\exp(2i\pi < (M^\top)^s k, . >), s \in \mathbb{Z}\}^\perp.$$

Le cas $r = 1$ (cas des nombres de Pisot) est particulier.

Proposition 4.2. *Si $r = 1$, la condition (APF) est vérifiée dès que f est non constante.*

<u>Preuve</u> On note $c_k = c_k(f)$ les coefficients de Fourier de $\bar{f}$.

Soit $k \in \mathbb{Z}^d$ non nul. Supposons qu'il existe deux entiers $s < s'$ et deux entiers η, η' tels que :

$$(M^\top)^s k = \eta e_1 \text{ et } (M^\top)^{s'} k = \eta' e_1.$$

Alors $(M^\top)^{s'} k = (M^\top)^{s'-s} \eta e_1$, donc η' est multiple de η, et $(M^\top)^{s'-s} e_1 = \frac{\eta'}{\eta} e_1$. Aucune puissance de $M^\top$ n'ayant de vecteur propre à coordonnées entières, on peut donc conclure qu'il existe au plus un élément de la suite $((M^\top)^s k)_{s \in \mathbb{Z}}$ colinéaire à e_1. Mais alors, la suite $(c_{(M^\top)^s k})_{s \in \mathbb{Z}}$ prend au plus deux valeurs, avec au plus un saut pour l'indice de colinéarité. Comme cette suite doit tendre vers 0 lorsque $|s|$ tend vers l'infini, on en conclut que cette suite est constante égale à 0. Finalement, pour tout $\ell \neq 0$, on obtient $c_\ell = 0$. Donc $\bar{f}$ est la fonction constante égale à c_0, donc f aussi. Ainsi, dans le cas $r = 1$, la condition (APF) est automatiquement vérifiée pour f non constante. $\square$

Pour $r \geq 2$, exhibons des matrices M, et des fonctions non constantes ne vérifiant pas cette condition (APF) :

la matrice $M^\top = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}^\top$ envoie le vecteur $k_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ successivement sur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et sur $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, elle possède deux valeurs propres de module strictement

plus grand que 1 et une valeur propre à l'intérieur du disque unité. Soit $c > 0$. La fonction f définie par :

$$f : t \mapsto c\exp(2i\pi < k_0, t >) - c\exp(2i\pi < (M^\top)^2 k_0, t >)$$

est 1-périodique, höldérienne, non constante, et ne vérifie pas la condition (APF), tout en ne dépendant que de (t_1, t_2).

Il reste à voir que cette condition entraîne l'apériodicité :

Proposition 4.3. *Soit $f : V \mapsto \mathbb{R}$ une fonction 1-périodique, α-höldérienne non constante, vérifiant (APF). Alors $\bar{f} \circ \theta_0$ est apériodique, i.e. il n'existe pas de fonction h sur le sous-décalage et de réels γ, β tels que* $\exp(2i\pi\gamma(\bar{f} \circ \theta_0 - \beta)) = \frac{h \circ \sigma}{h}$.

<u>Preuve</u> La démonstration se fait en plusieurs étapes.

• Etape 1 : Si l'équation précédente est satisfaite, on peut se ramener au cas où h est continue (et même höldérienne) de module 1 sur X, en reprenant la méthode de [GH88] p.90.

Commençons par le module : L'égalité précédente assure $\left|\frac{h \circ \sigma}{h}\right| = 1$ pour tout x, donc quitte à remplacer h par $x \mapsto \frac{h}{|h|}$, on peut supposer que $|h|$ vaut 1.

En ce qui concerne la régularité de h, l'équation multiplicative s'écrit aussi, en posant $h = e^{iv}$ et $\phi = 2\pi\gamma(\bar{f} \circ \theta_0 - \beta)$:

$$\forall x, \quad \phi(x) + 2n(x) = v \circ \sigma(x) - v(x),$$

pour une fonction n à valeurs entières, et une fonction v à valeurs réelles qui permet de relever $u = e^{iv}$. Ainsi

$$e^{i\phi} = e^{i(v \circ \sigma - v)}.$$

Mais alors,

$$P(e^{i\phi} h) = P(e^{iv \circ \sigma}) = P(h \circ \sigma) = h.$$

L'opérateur $P_\phi : g \mapsto P(e^{i\phi} g)$ vérifie encore une inégalité analogue à celle vérifiée pr P_t (de type Lasota-Yorke). Par l'absurde, supposons que 1 n'est pas valeur propre de P_ϕ dans l'espace H des fonctions höldériennes. On a alors :

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (P_\phi^k) g = 0,$$

pour toute fonction α-höldérienne g, donc, P_ϕ étant une contraction de L^1, nous aurions aussi convergence en norme $\| \ \|_1$, pour f dans $L^1(\mu)$. Ceci impliquerait $P_\phi h = h = 0$, ce qui est impossible. Il existe donc une fonction höldérienne u' telle que $h = h'$-p.p., vérifiant $P_\phi h' = h'$.

Par passage à l'adjoint, on obtient $e^{i\phi} = \frac{h' \circ \sigma}{h'}$. Quitte à changer h en h', cela termine l'étape 1.

• Etape 2 : Si l'équation fonctionnelle précédente est satisfaite, il existe une fonction g continue sur $\mathbb{T}^d$ telle que :

$$h = g \circ \psi,$$

où $\psi : X \mapsto \mathbb{T}^d$ est l'application de codage définie précédemment.

On commence par montrer le résultat suivant :

Lemme 4.4. *Soient $x, x' \in X$ tels que $\Psi(x) = \Psi(x')$. Il existe un ensemble fini $\mathcal{E}$ de $\mathbb{T}^d$ tel que si $\psi(x) \notin \mathcal{E}$, alors il existe $x'' \in X$ tel que :*

$\psi(x) = \psi(x') = \psi(x'')$,

$d(\sigma^n x, \sigma^n x'') \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, *et*

$d(\sigma^n x', \sigma^n x'') \xrightarrow[n\to-\infty]{} 0$.

Preuve

· Le cas où il existe un entier n tel que $x_n = x'_n$ se traite en posant $x'' = (\dots, x'_{n-1}, x'_n, x_{n+1}, \dots)$, qui est bien admissible.

· Le cas où il existe un entier n tel que la transition de x_n à x'_{n+1} soit admissible se traite en posant $x'' = (\dots, x'_{n-1}, x'_n, x_{n+1}, \dots)$. De même pour la transition de x'_n à x_{n+1}.

· Supposons que, pour tout n, $x_n \neq x'_n$ et qu'aucune des transitions de x_n à x'_{n+1} ou de x'_n à x_{n+1} ne soit admissible. Il s'ensuit que, pour tout n, $T^n\psi(x) \in \partial\mathcal{R}_{x_n} \cap \partial\mathcal{R}_{x'_n}$. En effet, $T^{n-1}\psi(x)$ est dans $\partial\mathcal{R}_{x'_{n-1}}$. Si $T^n\psi(x)$ appartient à l'intérieur de $\mathcal{R}_{x_n}$, il est dans l'intersection de cet intérieur et de $T\mathcal{R}_{x'_{n-1}}$ et, l'intersection étant non vide,la transition est possible.

Traitons le cas où $\psi(x)$ est sur les bords stables de $\mathcal{R}_{x_0}$ et $\mathcal{R}_{x'_0}$.

- Supposons qu'il existe $n \geq 1$ tel que $T^n\psi(x)$ est sur l'intérieur des bords instables de $\mathcal{R}_{x_n}$ et $\mathcal{R}_{x'_n}$. La transition de x_{n-1} à x'_n est alors admissible, ce qui est impossible.
- Supposons qu'il existe $n \leq -1$ tel que $T^n\psi(x)$ est sur les bords instables de $\mathcal{R}_{x_n}$ et $\mathcal{R}_{x'_n}$, alors la transition de x_n à x'_{n+1} est admissible, ce qui est impossible.
- Le seul cas envisageable est donc le cas où pour tout n, $T^n\psi(x)$ est sur les bords stables de $\mathcal{R}_{x_n}$ et $\mathcal{R}_{x'_n}$.

Notons S le compact réunion (finie) des bords stables de tous les parallélogrammes, de sorte que :

$$\psi(x) \in \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} T^n S.$$

En tant que réunion finie d'intersections strictement décroissantes de compacts dont le diamètre tend vers 0, cette intersection est finie. Le cas où $\psi(x)$ est sur les bords instables de $\mathcal{R}_{x_0}$ et $\mathcal{R}_{x'_0}$ est analogue.

Il n'y a donc qu'un enemble fini $\mathcal{E}$ de points de $\mathbb{T}^d$ pour lesquels on ne donne pas de construction explicite de codage intermédiaire x''.

Si x, x' sont deux points de X tels que $\psi(x) = \psi(x')$ ne soit pas dans $\mathcal{E}$, montrons que $h(x) = h(x')$.

Par l'absurde, s'il existe $a > 0$ tel que $|h(x) - h(x')| = a$, alors comme $\bar{f} \circ \theta_0 = \bar{f} \circ \pi \circ \psi$, on a :

$$\exp(2i\pi\lambda(\bar{f} \circ \theta_0(\sigma x) - \beta)) = \frac{h(\sigma^2 x)}{h(\sigma x)} = \frac{h(\sigma^2 x')}{h(\sigma x')}.$$

Les quantités considérées étant de module 1, nous obtenons :

$$|h(\sigma^2 x') - h(\sigma^2 x)| = |h(\sigma x') - h(\sigma x)|.$$

Plus généralement, on montre que pour tout entier n :

$$|h(\sigma^n x') - h(\sigma^n x)| = |h(x') - h(x)| = a.$$

Or le lemme précédent et la continuité de h assurent que $|h(\sigma^n x') - h(\sigma^n x)| \to 0$ lorsque $n \to +\infty$ ou lorsque $n \to -\infty$, ce qui est contradictoire. Ainsi on peut factoriser h par ψ sur $\mathbb{T}^d \setminus \mathcal{E}$, où $\mathcal{E}$ désigne l'ensemble donné par lemme précédent, en posant :

$$g_{|\mathbb{T}^d \setminus \mathcal{E}} = h \circ \psi^{-1}.$$

Pour prolonger g en une application continue sur $\mathbb{T}^d$, on va montrer qu'elle est höldérienne, donc uniformément continue sur $\mathbb{T}^d \setminus \mathcal{E}$.

Notons A le nombre maximal de parallélépipèdes adjacents d'un parallèlépipède donné de la partition de Markov, et δ le diamètre maximal d'un élément de cette partition. Soit $\varepsilon > 0$, et $n \in \mathbb{N}$ tel que $\|M\|^n \varepsilon \leq \delta$.

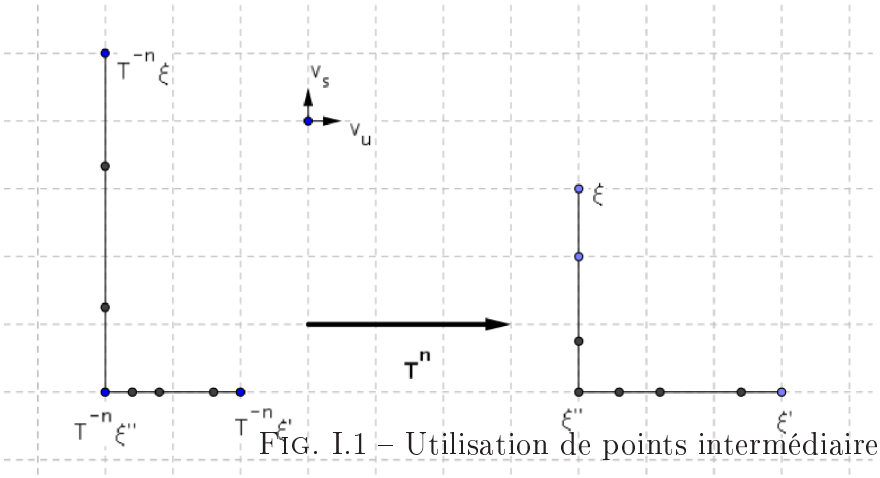

FIG. I.1 – Utilisation de points intermédiaires

Soient ξ et ξ' deux points de $\mathbb{T}^d \setminus \mathcal{E}$, tels que $|\xi - \xi'| \leq \varepsilon$. Soient $x, x' \in X$ tels que $\xi = \psi(x)$ et $\xi' = \psi(x')$. Nous allons introduire des points intermédiaires pour majorer $|g(\xi) - g(\xi')|$, à l'aide de leurs codages.

Parmi l'ensemble des points ζ in $\mathbb{T}^d$ tels que ξ et ζ sont sur la même feuille stable $F_s(\zeta)$, et tels que ξ' et ζ sont sur la même feuille instable $F_u(\zeta)$, on considère le point ξ'' tel que $|\xi - \xi''| + |\xi'' - \xi'|$ est minimale.

Notons R le nombre de parallélépipèdes de la partition de Markov. Introduisons n_1 points $\zeta_1, \ldots, \zeta_{n_1}$, avec $n_1 \leq R$ appartenant à l'intersection du segment stable $[T^{-n}\xi, T^{-n}\xi'']$ et du bord (instable) des parallélépipèdes. Soient z'_0 un codage de $T^{-n}\xi$ et z_{n_1} un codage de $T^{-n}\xi''$. Pour i allant de 1 à n_1, ζ_i admets deux codages z_i et z'_i tels que z_i coïncides avec z'_{i-1} sur la coordonnée nulle. De plus, la propriété de Markov nous assure qu'ils coïncidentsur toutes les coordonnées positives. Comme $\|M\|^n \varepsilon \leq \delta)$, pour i allant de 1 à n_1, les points $\xi_i = T^n \zeta_i$ appartiennent au segment stable $[\xi, \xi'']$. Pour i allant de 1 à n_1 les codages « décalés » $y_i = \sigma^n z_i$ et $y'_i = \sigma^n z'_i$ sont deux codages de ξ_i tels que y'_i et y_{i+1} coïncident sur $\{-n, \ldots, n\}$.

Posons $\xi_0 = \xi$, $\xi_{n_1+1} = \xi''$. Comme précédemment, en travaillant cette fois avec les images par T^n du segment instable $[\xi'', \xi']$, on construit n_2 points $\xi_{n_1+2}, \ldots, \xi_{n_1+n_2+1}$, de codages respectifs y_{n_1+1} and $y'_{n_1+1}, \ldots, y_{n_1+n_2+1}$ and $y'_{n_1+n_2+1}$, avec $n_2 \leq R$, de sorte que, pour tout i compris entre $n_1 + 1$ et $n_1 + n_2 + 1$, y'_i et y_{i+1} coïncident sur $\{-n, \ldots, n\}$.

Considérons tout d'abord le cas particuler lorsque aucun des points $\xi_1, \ldots, \xi_{n_1+n_2+2}$ n'appartient à $\mathcal{E}$.

La fonction h étant α-hölderienne, on a

$$\begin{aligned}
|g(\xi) - g(\xi')| &\leq \sum_{i=0}^{n_1+n_2+1} |g(\xi_i) - g(\xi_{i+1})| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n_1+n_2+1} |g \circ \psi(y'_i) - g \circ \psi(y_{i+1})| \\
&= \sum_{i=1}^{n_1+n_2+1} |h(y'_i) - h(y_{i+1})| \\
&\leq c_h(n_1 + n_2 + 2)2^{-n\alpha} \\
&\leq c_h(2R + 2)2^{-n\alpha}.
\end{aligned}$$

Dans le cas ou certains de points $\xi_1, \ldots, \xi_{n_1+n_2+2}$ appartiennent à $\mathcal{E}$, on note $d_{\mathcal{E}}$ la distance minimale entre deux points de $\mathcal{E}$, et l'on note v_u le vecteur $\frac{\min(d_{\mathcal{E}}, \epsilon)\xi' - \xi''}{\|\xi' - \xi''\|}$ et v_s le vecteur $\frac{\min(d_{\mathcal{E}}, \epsilon)\xi - \xi''}{\|\xi - \xi''\|}$. On remplace les points $\xi_1, \ldots, \xi_{n_1+1}$ par les points $\xi_1 + v_u, \ldots, \xi_{n_1+1} + v_u$, et les points $\xi_{n_1+3}, \ldots, \xi_{n_1+n_2+1}$ par les points $\xi_{n_1+3} + v_u, \ldots, \xi_{n_1+n_2+1} + v_u$. La calcul avec ces nouveaux points qui ne sont pas dans $\mathcal{E}$ (quitte à multiplier v_u et v_s par une constante appatenant à $]0, 1[$) pour des codages sont alors de la même forme que les précédents.

On a donc montré que $|g(\xi)-g(\xi')| \leq c_g \frac{-\ln|\xi-\xi'|}{\ln\|M\|}|\xi-\xi'|^{\frac{\alpha\ln 2}{\ln\|M\|}}$, pour une constante c_g, qui ne dépend que de h. Ceci montre que g est $\frac{\alpha\ln 2}{2\ln\|M\|}$-hölderienne.

• Etape 3 : l'équation $\exp(2i\pi\gamma(\bar{f}-\beta)) = \frac{g\circ T}{g}$ n'a pas de solution continue si $\bar{f}$ n'est pas constante et vérifie (APF). On utilise les séries de Fourier, c.f. [Le 99b].

Supposons l'existence d'une solution g continue, 1-périodique. Il existe donc un relèvement continu ζ tel que pour tout t,

$$g(t) = e^{2i\pi\zeta(t)}.$$

Par périodicité, il existe $a \in \mathbb{Z}^d$, tel que

$$\zeta(t+k) = \zeta(t) + < a, k >, \forall k \in \mathbb{Z}^d.$$

La fonction $\chi : t \mapsto \zeta(t) - < a, t >$ est 1-périodique. Pour $k \in \mathbb{Z}^d$ on a :

$$\begin{aligned}\zeta(Mt)-\zeta(t) &= \chi(Mt) + < a, Mt > -\chi(t) - < a, t > \\ &= \chi(Mt) - \chi(t) - < (M^\top - I)a, t > .\end{aligned}$$

De l'égalité $\exp(2i\pi\gamma(\bar{f}(t)-\beta)) = \exp(2i\pi(\zeta(Mt)-\zeta(t)))$, on déduit pour tout t l'existence d'un entier ℓ_t tel que :

$$\gamma(\bar{f}(t)-\beta) - \chi(Mt) + \chi(t) + < (M^\top - I)a, t >= \ell_t.$$

Par continuité du membre de gauche et connexité, on en déduit qu'il existe un entier ℓ tel que $\ell = \ell_t$, pour tout t. La fonction $t \mapsto \gamma(\bar{f}(t)-\beta) - \chi(Mt) + \chi(t) - \ell$ est continue 1-périodique, donc bornée, ce qui implique $(M^\top - I)a = 0$, et 1 n'étant pas valeur propre de M, on en déduit que $a = 0$. Finalement $\chi(MT) - \chi(t)$ est indépendant de $(t_{r+1}, \ldots, t_d)$, car $\bar{f}(t)$ l'est. En développant χ en série de Fourier, on obtient :

$$\begin{aligned}\chi(MT)-\chi(t) &= \sum_k c_k e^{2i\pi<k,Mt>} - \sum_k c_k e^{2i\pi<k,t>} \\ &= \sum_k (c_{(M^\top)^{-1}k} - c_k) e^{2i\pi<k,t>}.\end{aligned}$$

Pour k n'appartenant pas au sous-espace V engendré par $e_1, \ldots, e_r$), on a donc :

$$c_{(M^\top)^{-1}k} - c_k = 0.$$

Soit $k_0 \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$. Si $\mathrm{Card}\{(M^\top)^s k_0, s \in \mathbb{Z}\} \cap V \leq 1$, la suite $(c_{(M^\top)^s k_0})_{s\in\mathbb{Z}}$ admet au plus un saut, et comme elle doit décroître à l'infini, elle doit être nulle. Sinon, la condition (APF) assure le résultat. □

4.2 Théorème limite local et sous-variété instable

Remarquons que le résultat d'approximation 3.8 est valable quel que soit J entier. Ceci va permettre d'obtenir un nouveau théorème limite local sur la sous-variété instable, en faisant dépendre J de n. Notons $\theta^*_{J,u}\mu$ la mesure image de μ par $\theta_{J,u}$.

Lemme 4.5. *Soit f une fonction α-höldérienne sur V, 1-périodique, telle que $\lambda_r(f) = 0$, non constante vérifiant (APF), soit $\gamma \in]0, \frac{1}{2}[$, et soit (c_n) une famille de fonctions α-höldériennes sur V telle que pour tout n, on ait : $\|c_n\|_\infty \leq n^\gamma \|f\|_\infty$, $\ln \|c_n\|_\alpha = o(n\|f\|)$.*

Alors $\sigma_f^2 = \mu((f\circ\theta_0)^2) + 2\sum_{k\geq 1} \mu(f\circ\theta_0 . f\circ\theta_0\circ\sigma^k)$ est strictement positif, et pour tout intervalle $I \subset \mathbb{R}$, et une suite d'entiers $(J(n))_{n\geq 0}$ vérifiant $J(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} n^\zeta$, pour un $\zeta \in]0, 1-\gamma[$, on a :

$$\sigma_f\sqrt{2\pi n}\theta^*_{J(n),u}\mu\left(\left\{v \in V, c_n(v) + \sum_{i=0}^{n-1} f(A^i v) \in I\right\}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda(I).$$

<u>Preuve</u> Soient $I = [a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et

$$A(I, n) = \left\{x \in X, c_n \circ \theta_0(x) + \sum_{i=0}^{n-1} \bar{f}\circ\theta_0(\sigma^i x) \in I\right\}.$$

D'après le lemme 3.8, on a :

$$\forall x, \left|f(A^k\theta_{J,u}x) - \bar{f}\circ\theta_J(\sigma^k x)\right| \leq c_f(c\tau^{k+J})^\alpha = c'\tau^{(k+J)\alpha}.$$

On en déduit que :

$$\left|\sum_{i=0}^{n-1} \bar{f}\circ\theta_J(\sigma^i x) - \sum_{i=0}^{n-1} f(A^k\theta_{J,u}(x))\right| \leq \frac{c'}{1-\tau^\alpha}\tau^{\alpha(J)} = c''\tau^{\alpha(n^\gamma+J)}.$$

Soit $\varepsilon > 0$. On note $I_\varepsilon^+ = [a - \frac{\varepsilon}{4}, b + \frac{\varepsilon}{4}]$, et $I_\varepsilon^- = [a + \frac{\varepsilon}{4}, b - \frac{\varepsilon}{4}]$. Posons :

$$\begin{aligned} B_J^+(I, n, \varepsilon) &= \left\{x \in X, c_n \circ \theta_J(x) + \sum_{i=0}^{n-1} \bar{f}\circ\theta_J(\sigma^i x) \in I_\varepsilon^+\right\}; \\ B_J^-(I, n, \varepsilon) &= \left\{x \in X, c_n \circ \theta_J(x) + \sum_{i=0}^{n-1} \bar{f}\circ\theta_J(\sigma^i x) \in I_\varepsilon^-\right\}. \end{aligned}$$

Rappelons que $\bar{f}\circ\theta_J = \bar{f}\circ\theta_0$, pour tout J.

Il existe J_0 tel que pour tout $J \geq J_0$, pour tout n, on ait :

$$c"\tau^{\alpha(n^\gamma+J)} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pour $n \geq n_0$, on obtient alors les inclusions :

$$B_J^-(I,n,\varepsilon) \subset A(I,n) \subset B_J^+(I,n,\varepsilon).$$

Soit $\tilde{\alpha} > 0$. En se reportant à l'équation (I.17), on obtient l'existence d'une constante $C_{\tilde{\alpha}}$ telle que pour tous $x, y \in X$, on ait :

$$\left|\theta_{J(n)}(x) - \theta_{J(n)}(y)\right| \leq C_{\tilde{\alpha}} \tau^{-J(n)} d(x,y)^{\tilde{\alpha}}.$$

Pour tous $x, y \in X$, on a :

$$\frac{\left|c_n \circ \theta_{J(n)}(x) - c_n \circ \theta_{J(n)}(y)\right|}{d(x,y)^{\alpha\tilde{\alpha}}} \leq \frac{\left|c_n \circ \theta_{J(n)}(x) - c_n \circ \theta_{J(n)}(y)\right|}{\left|\theta_{J(n)}(x) - \theta_{J(n)}(y)\right|^{\alpha}} \frac{\left|\theta_{J(n)}(x) - \theta_{J(n)}(y)\right|^{\alpha}}{d(x,y)^{\alpha\tilde{\alpha}}}$$

La fonction $c_n \circ \theta_{J(n)} : X \to \mathbb{R}$ est donc $\alpha\tilde{\alpha}$-höldérienne, et vérifie :

$$\begin{aligned} \|c_n \circ \theta_{J(n)}\|_\infty &\leq n^\gamma \|f\|_\infty; \\ \left[c_n \circ \theta_{J(n)}\right]_{\alpha\tilde{\alpha}} &\leq C_{\tilde{\alpha}} \tau^{-J(n)} \left[c_n\right]_\alpha \left[\theta_{J(n)}\right]_{\tilde{\alpha}}^{\alpha}. \end{aligned}$$

Par hypothèse, $\ln \|c_n\|_\alpha = o(n\|f\|)$. Comme $J(n) = o(n)$, on en déduit que

$$\ln \|c_n \circ \theta_{J(n)}\|_{\alpha\tilde{\alpha}} = O(J(n)) + \ln \|c_n\|_\alpha = o(n\|f\|_\infty).$$

En utilisant les lemmes 2.13 et 3.11, on obtient alors :

$$\begin{aligned} \sqrt{2\pi n}\theta_{J,u}^*\mu\left(\left\{v \in V, c_n(v) + \sum_{i=0}^{n-1} f(A^i v) \in I_\varepsilon^+\right\}\right) \\ &= \sqrt{2\pi n}\mu(B_J^+(I,n,\varepsilon)) \\ &= \sqrt{2\pi n}\mu\left(\left\{x \in X, c_n \circ \theta_J(x) + \sum_{i=0}^{n-1} \bar{f} \circ \theta_J(\sigma^i x) \in I_\varepsilon^+\right\}\right) \\ &= \sqrt{2\pi n}\mu\left(\left\{x \in X, c_n \circ \theta_J(x) + \sum_{i=0}^{n-1} \bar{f} \circ \theta_0(\sigma^i x) \in I_\varepsilon^+\right\}\right) \\ &\xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\lambda(I_\varepsilon^+)}{\sigma_f}. \end{aligned}$$

Ainsi il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$:

$$\left|\sqrt{2\pi n}\mu(B_J^+(I,n,\varepsilon)) - \frac{\lambda(I_\varepsilon^+)}{\sigma_f}\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Mais alors, quitte à diviser ε par $\sigma_f > 0$, on a :

$$\left|\sqrt{2\pi n}\mu(B_J^+(I,n,\varepsilon)) - \frac{\lambda(I)}{\sigma_f}\right| \leq \left|\sqrt{2\pi n}\mu(B_J^+(I,n,\varepsilon)) - \frac{\lambda(I_\varepsilon^+)}{\sigma_f}\right| + \frac{\lambda(I_\varepsilon^+ \setminus I)}{\sigma_f} \leq \varepsilon.$$

De même, on montre qu'il existe n_1 tel que pour tout $n \geq n_1$:

$$\left|\sqrt{2\pi n}\mu(B_J^-(I,n,\varepsilon)) - \frac{\lambda(I)}{\sigma_f}\right| \leq \varepsilon.$$

Or :

$$\sqrt{2\pi n}\mu(A(I,n)) - \frac{\lambda(I)}{\sigma_f} \quad \in \quad \left[\sqrt{2\pi n}\mu(B_J^-(I,n,\varepsilon)) - \frac{\lambda(I)}{\sigma_f}, \sqrt{2\pi n}\mu(B_J^+(I,n,\varepsilon)) - \frac{\lambda(I)}{\sigma_f}\right].$$

Ainsi, pour $n \geq \max(n_0, n_1)$, on a :

$$\left|\sqrt{2\pi n}\theta^*_{J(n),u}\mu\left(\left\{v \in V, c_n(v) + \sum_{i=0}^{n-1} f(A^i v) \in I\right\}\right) - \frac{\lambda(I)}{\sigma_f}\right| \leq \varepsilon. \quad \square$$

4.3 Théorème limite local pour les sommes de Riesz-Raïkov associées à une « matrice de Pisot »

Dans cette partie, on montre que le TLL obtenu précédemment permet d'obtenir un TLL sur le tore, lorsque l'on impose une condition sur J en fonction de n, en comparant la mesure de Lebesgue sur le tore aux mesures $\theta^*_{J(n),u}\mu$ sur V.

4.4 Comparaison des sommes ergodiques pour des v égaux modulo $\mathbb{Z}$

Soit $f : V \to \mathbb{R}$ höldérienne, 1-périodique et non constante vérifiant (APF). Soit $k \in \mathbb{Z}^r \subset V$, et $\|k\|_\infty$ sa norme infinie usuelle C_f la constante de Hölder de f. On note toujours $A = \pi M \pi^{-1}$.

Définition 4.6. *Notons $\{\cdot\}$ la partie fractionnaire des réels. Une matrice M du type précédent satisfait la condition (DE), si la matrice $A = \pi M \pi^{-1}$ vérifie :*

$$\max_{1 \leq p,q \leq r} \{(A^i)_{p,q}\} \xrightarrow[i \to +\infty]{} 0. \ \textit{(DE)}$$

Cette condition est en particulier réalisée lorsque M est une matrice compagnon d'un nombre de Pisot unimodulaire.

Dans la suite, on suppose cette condition (DE) vérifiée.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n} f(A^i(v+k)) &= \sum_{i=0}^{n^\gamma-1} f(A^i(v+k)) + \sum_{i=n^\gamma}^{n} f(A^i(v+k)) \\
&= \sum_{i=0}^{n^\gamma-1} f(A^i(v+k)) + \sum_{i=n^\gamma}^{n} f(A^i(v)) + \sum_{i=n^\gamma}^{n} \big(f(A^i(v+k)) - f(A^i v)\big) \\
&= c_n(v+k) + \sum_{i=n^\gamma}^{n} f(A^i(v)) + \sum_{i=n^\gamma} c_f(\|k\|_\infty \tau^i)^\alpha \\
&= c_n(v+k) + \sum_{i=n^\gamma}^{n} f(A^i(v)) + O(c_f \|k\|_\infty^\alpha \tau^{\alpha n^\gamma}),
\end{aligned}$$

où $c_n(v) = \sum_{i=0}^{n^\gamma-1} f(A^i v)$ définit une fonction höldérienne dont on contrôle les normes infinies et de Hölder comme dans les hypothèses du lemme 4.5.

Soit $I =]a, b[$ un intervalle réel. Posons :

$$\begin{aligned}
I^+(\|k\|_\infty, n) &=]a - c_f\|k\|_\infty^\alpha \tau^{\alpha n^\gamma}, b + c_f\|k\|_\infty^\alpha \tau^{\alpha n^\gamma}[; \\
I^-(\|k\|_\infty, n) &=]a + c_f\|k\|_\infty^\alpha \tau^{\alpha n^\gamma}, b - c_f\|k\|_\infty^\alpha \tau^{\alpha n^\gamma}[.
\end{aligned}$$

En notant $\bar{V} = V \bmod 1$, on en déduit les deux inégalités :

$$\begin{aligned}
&\lambda_r\left(\left\{v \in \bar{V}, c_n(v+k) + \sum_{i=n^\gamma}^{n} f(A^i(v)) \in I^-(\|k\|_\infty, n)\right\}\right) \\
&\leq \lambda_r\left(\left\{v \in \bar{V}, \sum_{i=0}^{n} f(A^i(v+k)) \in I\right\}\right) \\
&\leq \lambda_r\left(\left\{v \in \bar{V}, c_n(v+k) + \sum_{i=n^\gamma}^{n} f(A^i(v)) \in I^+(\|k\|_\infty, n)\right\}\right).
\end{aligned}$$

4.5 Théorème limite local sur le tore

En reprenant le théorème 4.5, pour une famille d'entiers $(J(n))_{n\geq 0}$ adaptée, ces estimations vont permettre de montrer le résultat suivant :

Théorème 4.7. *Soit $M \in SL(n, \mathbb{Z})$ une matrice hyperbolique vérifiant les conditions (Π) et (DE). Soient r la dimension de son sous-espace propre associé à ses valeurs propres de module supérieur à un, π la bijection associée (c.f. définition 1.2) et $A = \pi M \pi^{-1}$. Soit f une fonction α-höldérienne sur $\mathbb{R}^r$, 1-périodique, non constante,*

telle que $\int f \quad d\lambda_r = 0$ *et vérifiant (APF). Alors* $\sigma_f^2 = \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{k}\int (S_k f)^2 \quad d\lambda_r$ *est strictement positif et pour tout intervalle* $I \subset \mathbb{R}$*, on a :*

$$\sigma_f\sqrt{2\pi n}\lambda_r\left(\left\{v \in [0,1]^r, \sum_{i=0}^{n-1} f(A^i v) \in I\right\}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda(I).$$

<u>Preuve</u> Soit $\gamma < \frac{1}{2}$, et $\zeta \in]0, \min(\gamma, 1-\gamma)[$. Fixons une suite d'entiers $(J(n))_n$ vérifiant :

$$J(n) \underset{n\to+\infty}{=} o(n^\zeta); \tag{I.21}$$

$$\ln n \underset{n\to+\infty}{=} o(J(n)). \tag{I.22}$$

On rappelle (c.f. lemme 3.13) que pour tout J entier, $\mathcal{H}_J$ désigne l'ensemble des sommets k à coordonnées entières intervenant dans le découpage de $K_{V,J}$ en hypercubes. Comme le diamètre de $K_{V,J}$ est borné par $c_4\Delta^J$, pour une constant $c_4 > 0$, on en déduit que pour $k \in \mathcal{H}_J$, $\|k\| \le c_4\Delta^J$. Comme $\zeta < \gamma$, on a pour tout $k \in \mathcal{H}_{J(n)}$,

$$\|k\|^\alpha \tau^{\alpha n^\gamma} \le c_4 \Delta^{\alpha n^\zeta}\tau^{\alpha n^\gamma} \xrightarrow{n\to+\infty} 0.$$

Notons

$$I =]a; b[, \quad I_n^- =]a + c_f \max_{k\in\mathcal{H}_{J(n)}} \|k\|^\alpha \tau^{\alpha n^\gamma};\ b - c_f \max_{k\in\mathcal{H}_{J(n)}} \|k\|^\alpha \tau^{\alpha n^\gamma}[.$$

On dispose d'une suite $(\varphi_n)_{n\ge1}$ d'identités approchées de la forme $\varphi_n(.) = n^r\varphi(n.)$.

Pour tout $k \in \mathcal{H}_{J(n)}$, on pose

$$e_{k,n} = \varphi_n * 1_{V_0+k},$$

où $V_0 = [0,1[^r$ et

$$e_n : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}, v \to \sum_{k\in\mathcal{H}_{J(n)}} \left(e_{k,n}(v) + \sum_{i=0}^{n^\gamma-1} f(A^i(v-k)) - f(A^i v)\right).$$

Ainsi, comme $\|e_n\|_\infty \le n^\gamma\|f\|_\infty$ et $\|e_n\|_\alpha \le C$, on déduit du lemme 4.5 que

$$\sigma_f\sqrt{2\pi n}\,\theta^*_{J(n),u}\mu(\{v \in \mathbb{R}^r, \sum_{i=0}^{n-1} f(A^i v) \in I_n^-\}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda(I). \tag{I.23}$$

Il reste à comparer le membre de gauche avec $\lambda_r(\{v \in V_0, \sum_{i=0}^{n-1} f(A^i v) \in I_n^-\})$.

Pour cela, rappelons que, d'après la proposition 3.12, on a :

$$\theta^*_{J(n),u}\mu = \sum_{a=1}^{m} g_{a,J(n)}\lambda_r(1_{K_{V,J(n),a}}) = \sum_{a=1}^{m} \Delta^{-J(n)}\lambda_r(K_{V,J(n),a}),$$

où l'on note $K_{V,J(n),a} = \theta_{J(n),u}([a])$ et $g_a = (DL_a)^{-1}$, pour $1 \leq a \leq m$.

Notons $R_{J(n),a}$ l'ensemble $K_{V,J(n),a}$ privé des parallélépipèdes ayant une intersection non vide avec $\partial K_{V,J(n),a}$.

Notons $\mathcal{H}_{J(n),a}$ l'ensemble des sommets inférieurs pour l'ordre lexicographique de parallélépipèdes contenus dans $K^o_{V,J(n),a}$.

Pour $k \in \mathcal{H}_{J(n),a}$, soit $U_{k,n} = (V_0 + k) \setminus (\partial V_0 + k + B_\infty(0, \varepsilon(n)))$, où $\varepsilon(n) = \frac{1}{n}$, l'intérieur réduit de $\varepsilon(n)$ de $V_0 + k$.

Soit enfin $W_{k,n} = (V_0 + k) \setminus U_{k,n}$ le bord élargi de $\varepsilon(n)$ de $V_0 + k$.

Fixons $a \in \{1, \ldots, m\}$. Nous avons :

$$\begin{aligned}
& \lambda(\{v \in K_{V,J(n),a} \ / \ e_n(v) + \sum_{i=0}^{n-1} f(A^i v) \in I_n^-\}) \\
= & \sum_{k \in \mathcal{H}_{J(n),a}} \lambda(\{v \in V_0 + k \ / \ e_n(v) + \sum_{i=0}^{n-1} f(A^i v) \in I_n^-\}) \\
& + \lambda(\{v \in R_{J(n),a} \ / \ e_n(v) + \sum_{i=0}^{n-1} f(A^i v) \in I_n^-\}) \\
\leq & \sum_{k \in \mathcal{H}_{J(n),a}} \lambda(\{v \in U_{k,n} \ / \ e_{k,n}(v) + \sum_{i=0}^{n^\gamma - 1} (f(A^i(v-k)) - f(A^i v)) \\
+ & \sum_{i=0}^{n^\gamma - 1} f(A^i v) + \sum_{i=n^\gamma}^{n-1} (f(A^i v) - f(A^i(v-k))) + \sum_{i=n^\gamma}^{n-1} f(A^i(v-k)) \in I_n^-\}) \\
& + \lambda(\cup_{k \in \mathcal{H}_{J(n),a}} W_{k,n}) + \lambda(R_{J(n),a}).
\end{aligned}$$

Comme, d'après (DE), $\sum_{i=n^\gamma}^{n-1} (f(A^i v) - f(A^i(v-k))) \leq c_f \max_{k \in \mathcal{H}_{J(n),a}} \|k\|^\alpha \tau^{\alpha n^\gamma}$, on en déduit :

$$\begin{aligned}
& \lambda(\{v \in K_{V,J(n),a} \ / \ e_n(v) + \sum_{i=0}^{n-1} f(A^i v) \in I_n^-\}) \\
\leq & \sum_{k \in \mathcal{H}_{J(n),a}} \lambda(\{v \in U_{k,n} \ / \ \sum_{i=0}^{n-1} f(A^i v) \in I\}) + \lambda(\cup_{k \in \mathcal{H}_{J(n),a}} W_{k,n}) + \lambda(R_{J(n),a}) \\
\leq & \ Card(\mathcal{H}_{J(n),a}) \lambda(\{v \in V_0 \ / \ \sum_{i=0}^{n-1} f(A^i v) \in I\}) + 2\lambda(\cup_{k \in \mathcal{H}_{J(n),a}} W_{k,n}) + \lambda(R_{J(n),a}).
\end{aligned}$$

Ainsi, en sommant sur a, on obtient :

$$\begin{aligned}&\sum_{a=1}^{m} g_a \lambda(\{v \in K_{V,J(n),a} \ / \ e_n(v) + \sum_{i=0}^{n-1} f(A^i v) \in I_n^-\}) \\ \leq \ & \sum_{a=1}^{m} g_a [Card(\mathcal{H}_{J(n),a}) \lambda(\{v \in V_0 \ / \ \sum_{i=0}^{n-1} f(A^i v) \in I\}) + 2\lambda(\cup_{k \in \mathcal{H}_{J(n),a}} W_{k,n}) + \lambda(R_{J(n),a})];\end{aligned}$$

d'où :

$$\lambda(\{v \in V_0 \ / \ \sum_{i=0}^{n-1} f(A^i v) \in I\}) \geq \tag{I.24}$$

$$\frac{\theta^*_{J(n),u} \mu(\{v \ / \ e_n(v) + \sum_{i=0}^{n-1} f(A^i v) \in I_n^-\}) - \sum_{a=1}^{m} g_a [2\lambda(\cup_{k \in \mathcal{H}_{J(n),a}} W_{k,n}) + \lambda(R_{J(n),a})]}{\sum_{a=1}^{m} g_a Card(\mathcal{H}_{J(n),a})}.$$

Par ailleurs, en utilisant le lemme 3.14 et la définition des $W_{k,n}$, on obtient, pour tout a :

$$(Card(\mathcal{H}_{J(n),a}))^{-1} 2\lambda(\cup_{k \in \mathcal{H}_{J(n),a}} W_{k,n}) + \lambda(R_{J(n),a})] = \mathcal{O}(\kappa^{J(n)} + 2\varepsilon(n)). \tag{I.25}$$

Les inégalités (I.23), (I.25) et (I.25) donnent alors, pour $n \to +\infty$:

$$\sigma_f \sqrt{2\pi n} \lambda(\{v \in V_0 \ / \ \sum_{i=0}^{n-1} f(A^i v) \in I\}) \geq (1 + o(1))\lambda(I) - \sqrt{n}\mathcal{O}(\kappa^{J(n)} + 2\varepsilon(n))). \tag{I.26}$$

En procédant de même avec

$$I_n^+ =]a - c_f \max_{k \in \mathcal{H}_{J(n)}} \|k\|^\alpha \tau^{\alpha n^\gamma} ; \ b + c_f \max_{k \in \mathcal{H}_{J(n)}} \|k\|^\alpha \tau^{\alpha n^\gamma} [\ ,$$

on montre que, pour $n \to +\infty$,

$$\sigma_f \sqrt{2\pi n} \lambda(\{v \in V_0 \ / \ \sum_{i=0}^{n-1} f(A^i v) \in I\}) \leq (1 + o(1))\lambda(I) + \sqrt{n}\mathcal{O}(\kappa^{J(n)} + 2\varepsilon(n))). \tag{I.27}$$

Par construction,

$$\sqrt{n}\varepsilon(n) \xrightarrow{n \to +\infty} 0.$$

En utilisant (4.5), on obtient également

$$\sqrt{n}\kappa^{J(n)} \xrightarrow{n \to +\infty} 0.$$

Par encadrement, les majorations (I.26) et (I.27) fournissent le résultat. □

Chapitre II

Théorème limite central pour des composées d'automorphismes du tore

Sommaire

1 Introduction et notations 55

2 Décorrélation et variance 57

2.1 Décorrélation 57

2.2 Variance 59

3 Théorème limite central 60

3.1 Condition de séparation des fréquences 60

3.2 Application d'un critère de Komlòs 63

3.3 Majoration de $|\mathbb{E}[e^{ix\frac{S_n}{\|S_n\|_2}}] - e^{-\frac{1}{2}x^2}|$ 67

3.4 Approximation par une loi normale 68

4 Le cas stationnaire 70

4.1 Ergodicité, décorrélation globale 70

4.2 Non nullité de la variance 74

5 Exemples I 75

5.1 Cas de $SL(2, \mathbb{Z}^+)$ 75

5.2 Une méthode de cônes 78

5.3 Cas de faibles perturbations 78

5.4 « Kicked systems » 86

6 Exemples II (Suites aléatoires indépendantes) 87

7 Preuve du lemme 101

8 Figures 104

1 Introduction et notations

Pour un automorphisme τ_A du tore $\mathbb{T}^d$, $d \geq 2$, associé à une matrice A à coefficients entiers sans valeurs propres racines de l'unité, on sait que le théorème limite central (TLC) est vérifié pour les sommes ergodiques de fonctions f régulières,

$$S_N f = \sum_{k=0}^{N-1} f \circ \tau_A^k.$$

Nous étudions ici la situation où la suite des itérés d'un unique automorphisme est remplacée par une suite de composés d'automorphismes.

Appelons *système dynamique séquentiel* une suite (τ_n) de transformations non singulières sur une espace probabilisé $(X, \mathcal{A}, m)$. L'étude sur des exemples du comportement asymptotique des sommes $\sum_1^n f(\tau_k \circ \tau_{k-1} \cdots \circ \tau_1 x)$, pour des fonctions f définies sur X a été abordées dans plusieurs travaux. Dans le cas non inversible, l'exemple des suites d'applications dilatantes de l'intervalle a été traité dans ([CR07]). Une classe d'exemples d'applications inversibles peut être construite de la façon suivante.

Soit A et B deux matrices dans $Sl(d, \mathbb{Z})$.Considérons le système séquentiel obtenu en choisissant une suite (τ_n) avec $\tau_n x = Ax$ mod 1, ou $\tau_n x = Bx$ mod 1,

La question se pose de la décroissance exponentielle de la décorrélation $(\langle f \circ \tau_k \circ \tau_{k-1} \cdots \circ \tau_1, f \rangle)$, pour une fonction f höldérienne, et d'un théorème de la limite centrale pour le système séquentiel (cf. Open questions in *Contemp. Math., vol. 430 (2007)*). Nous nous proposons ici de traiter quelques exemples où une réponse positive peut être apportée à cette question, sous certaines conditions portant sur A et B.

Etant données deux matrices A et B de $SL(d, \mathbb{Z})$, à une suite $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans $\{A, B\}$, nous associons donc la suite $(\tau_i)_{i \in \mathbb{N}}$ d'automorphismes du tore $\mathbb{T}^d$ définis par :

$$\tau_i : \mathbb{T}^d \to \mathbb{T}^d, \ x \mapsto A_i^t x \text{ mod } 1.$$

(Nous définissons ces applications à l'aide de matrices transposées, afin de simplifier par la suite l'écriture des développements en série de Fourier.)

Pour une fonction $f : \mathbb{T}^d \to \mathbb{R}$, nous étudions le comportement asymptotique en loi des sommes :

$$S_N f = \sum_{k=0}^{N-1} f(\tau_k ... \tau_1 .). \tag{II.1}$$

Nous commençons en section 2 par établir une propriété de décorrélation sous une condition de dilatation portant sur l'action sur $\mathbb{Z}^d$. En section 3 nous donnons

des conditions suffisantes qui assurent l'approximation par une loi normale de la loi des sommes normalisées $\frac{1}{\|S_n\|_2} S_N f$. La méthode repose sur la notion de système multiplicatif développée notamment par Komlòs [Kom73]. Nous nous inspirons de son application par B. Petit [Pet92]. Dans les sections 5 et 6, des exemples de situations pour lesquelles ces conditions sont satisfaites sont présentés. Nous donnons des exemples dans le cas stationaire où un théorème central limite peut être obtenu presque sûrement en ω ("quenched" CLT).

Notations

Soit d un entier ≥ 2. La norme $\|\cdot\|$ est définie sur $\mathbb{R}^d$ par

$$\|x\| = \max_{1\leq i\leq d} |x_i|, x \in \mathbb{R}^d.$$

La mesure de Lebesgue sur $\mathbb{T}^d$ est notée λ (ou dt). Elle est invariante par les automorphismes du tore. Les caractères du tore $\mathbb{T}^d$, $t \to e^{2\pi i\langle n,t\rangle}$, $n = (n_1, ..., n_d) \in \mathbb{Z}^d$, sont notés $\chi(n, t)$.

L'action sur les caractères d'un produit d'automorphismes $\tau_j ... \tau_i$, $j \geq i$, correspond à l'action sur les caractères des matrices définissant les automorphismes *composées à droite*. Pour $i \leq j$ entiers, nous noterons

$$A_i^j \quad = \quad A_i \dots A_j. \tag{II.2}$$

Définissons la norme de Hölder de degré α d'une fonction f höldérienne de degré α sur le tore par

$$\|f\|_\alpha = \|f\|_\infty + \sup_{x\neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x, y)^\alpha}.$$

Notons $\mathcal{H}_\alpha^0$ l'ensemble des fonctions höldériennes de degré α sur le tore.

Pour $h \in L^2(\mathbb{T}^d, \lambda)$, les coefficients de Fourier de h sont notés $(\hat{h}(n), n \in \mathbb{Z}^d)$. Etant donné $\alpha > 0$, on définit :

$$\|h\|_{\mathcal{F},\alpha} = \sup_{n\in\mathbb{Z}^d\setminus\{0\}} \left(|\hat{h}(n)| \prod_{i=1,\dots,d} (1 + |n_i|)^\alpha \right), \tag{II.3}$$

$$\mathcal{F}_\alpha^0 = \left\{ h \in L^2(\mathbb{T}^d, \lambda) : \int_{\mathbb{T}^d} h \, d\lambda = 0 \text{ et } \|h\|_{\mathcal{F},\alpha} < \infty \right\}. \tag{II.4}$$

Nous avons donc, par définition de $\|h\|_{\mathcal{F},\alpha}$, pour $h \in \mathcal{F}_\alpha^0$:

$$|\hat{h}(n)| \leq \|h\|_{\mathcal{F},\alpha} \prod_{i=1,\dots,d} (1 + |n_i|)^{-\alpha}, \ \forall n = (n_1, ..., n_d) \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}, \tag{II.5}$$

et $\mathcal{F}_\alpha^0$ est un espace vectoriel normé pour la norme $\| \ \|_{\mathcal{F},\alpha}$. Cet espace contient l'espace $\mathcal{H}_\alpha^0$ des fonctions höldériennes de degré α de moyenne nulle.

Proposition 1.1. *Pour $\alpha > \frac{1}{2}$, il existe une constante $K(\alpha) > 0$ telle que, pour tout $D \geq 1$ et toute fonction $h \in \mathcal{F}_\alpha^0$:*

$$\sum_{\|n\|>D} |\hat{h}(n)|^2 \leq K(\alpha)\|h\|_{\mathcal{F},\alpha}^2 D^{\frac{1}{2}-\alpha}. \tag{II.6}$$

En particulier nous avons pour toute fonction $h \in \mathcal{F}_\alpha^0$: $\|h\|_2 < K^{\frac{1}{2}}(\alpha)\|h\|_\alpha$.

<u>Preuve</u> Rappelons que $\|n\| = \max_{1\leq i\leq d} |n_i|$, pour $n = (n_1, \ldots, n_d)$. Noto|ns $i(n)$ un entier tel que $|n_{i(n)}| = \max\{|n_i|, 1 \leq i \leq d\}$.

Nous avons :

$$\begin{aligned}
\sum_{\|n\|\geq D} |\hat{h}(n)|^2 &\leq \|h\|_{\mathcal{F},\alpha}^2 \sum_{\|n\|\geq D} \prod_{i=1,\ldots,d} (1+|n_i|)^{-2\alpha} \\
&\leq \|h\|_{\mathcal{F},\alpha}^2 \sum_{\|n\|\geq D} [(1+|n_{i(n)}|)^{-\alpha+\frac{1}{2}} \ (1+|n_{i(n)}|)^{-(\alpha+\frac{1}{2})} \prod_{1\leq i\leq d, i\neq i(n)} (1+|n_i|)^{-2\alpha}] \\
&\leq \|h\|_{\mathcal{F},\alpha}^2 \frac{1}{D^{\alpha-\frac{1}{2}}} \sum_{\|n\|\geq D} \left[(1+|n_{i(n)}|)^{-(\alpha+\frac{1}{2})} \prod_{1\leq i\leq d, i\neq i(n)} (1+|n_i|)^{-2\alpha}\right] \\
&\leq \|h\|_{\mathcal{F},\alpha}^2 \frac{1}{D^{\alpha-\frac{1}{2}}} \sum_{n\in\mathbb{Z}^d\setminus\{0\}} \prod_{1\leq i\leq d} (1+|n_i|)^{-(\alpha+\frac{1}{2})} \\
&\leq \|h\|_{\mathcal{F},\alpha}^2 \frac{1}{D^{\alpha-\frac{1}{2}}} (\sum_{k\in\mathbb{Z}^d\setminus\{0\}} \frac{1}{|k|^{\alpha+\frac{1}{2}}})^d \leq \|h\|_{\mathcal{F},\alpha}^2 (\frac{2\alpha+1}{2\alpha-1})^d \frac{1}{D^{\alpha-\frac{1}{2}}}.
\end{aligned}$$

□

Dans les paragraphes 2, 3, 4, 5 c'est l'espace $\mathcal{F}_\alpha^0$ qui est utilisé. Il a l'avantage de permettre une présentation simple des méthodes et des calculs lorsque $\alpha > 1/2$. Au paragraphe 6, la méthode est reprise dans le cas des produits aléatoires de matrices avec l'espace $\mathcal{H}_\alpha^0$. On utilise alors la convolution pour se ramener au cas des polynômes trigonométriques (aucune condition sur $\alpha > 0$ n'est nécessaire).

2 Décorrélation et variance

2.1 Décorrélation

Condition 2.1. *Il existe des constantes $C > 0$, $\delta > 0$ et $\lambda > 1$ telles que*

$$\forall i \leq j, \forall p \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}, \|A_i^j p\| \geq C\|p\|^{-\delta}\lambda^{j-i}.$$

Dans les exemples, le facteur $\|p\|^{-\delta}$ est lié à un temps d'entrée logarithmique dans un cône dilatant des itérés des vecteurs à coordonnées entières non nuls sous l'action des produits A_i^j.

Notons que la condition 2.1 entraîne, d'après le choix de la norme $\| \|$, l'inégalité :

$$\forall i \leq j,\ \forall p \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\},\ \prod_{k=1,\dots,d} [1 + |(A_i^j p)_k|] \geq C\|p\|^{-\delta}\lambda^{j-i}.$$

Montrons qu'elle implique une propriété de mélange exponentiel sur les fonctions appartenant à $\mathcal{F}_\alpha^0$.

Proposition 2.2. *(Inégalité de mélange) Soit $(A_i)_{i\geq 1}$ une suite de $SL(d,\mathbb{Z})$ vérifiant la condition 2.1. Pour tout $\alpha > \frac{1}{2}$, il existe des constantes $C_\alpha > 0$ et $\kappa_\alpha \in]0,1[$ telles que pour toutes fonctions $\psi, \phi \in \mathcal{F}_\alpha^0$:*

$$\forall \ell, i \in \mathbb{N},\ \left| \int_{\mathbb{T}^d} \phi(t)\overline{\psi(\tau_{i+\ell}\dots\tau_{i+1}\, t)}\mathrm{d}t \right| \leq C_\alpha[\|\psi\|_2\|\phi\|_{\mathcal{F},\alpha} + \|\psi\|_{\mathcal{F},\alpha}\|\phi\|_2]\, \kappa_\alpha^\ell. \quad \text{(II.7)}$$

<u>Preuve</u> : Rappelons la notation (II.2) : $A_{i+1}^{i+\ell} = A_{i+1}\dots A_{i+\ell}$, pour $\ell, i \geq 0$. Nous avons :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}^d} \phi(t)\overline{\psi(\tau_{i+\ell}\dots\tau_{i+1}\, t)}\ \mathrm{d}t &= \sum_{n\neq 0}\sum_{m\neq 0} \hat{\phi}(n)\,\overline{\hat{\psi}(m)} \int \chi(n - A_{i+1}^{i+\ell}m, t)\mathrm{d}t \\ &= \sum_{m\neq 0}\sum_{n=A_{i+1}^{i+\ell}m} \hat{\phi}(n)\,\overline{\hat{\psi}(m)}. \end{aligned}$$

Soit $D > 1$. Nous pouvons écrire

$$\left| \int_{\mathbb{T}^d} \phi(t)\overline{\psi(\tau_{i+\ell}\dots\tau_{i+1}\, t)}\ \mathrm{d}t \right| \leq \sum_{m\neq 0} |\hat{\phi}(A_{i+1}^{i+\ell}m)|\,|\hat{\psi}(m)| = (1) + (2),$$

avec $(1) := \sum_{\|m\|\leq D} |\hat{\phi}(A_{i+1}^{i+\ell}m)|\,|\hat{\psi}(m)|$ et $(2) := \sum_{\|m\|>D} |\hat{\phi}(A_{i+1}^{i+\ell}m)|\,|\hat{\psi}(m)|$.

Utilisons la condition 2.1 et notons qu'il y a $2^d D^d$ d-uples entiers m intervenant dans l'expression (1). Nous avons :

$$(1) \leq \|\psi\|_2\|\phi\|_{\mathcal{F},\alpha} \sum_{\|m\|\leq D}\prod_{j=1}^{d} \frac{1}{(1 + |(A_{i+1}^{i+\ell}m)_j|)^\alpha} \leq 2^d\|\psi\|_2\|\phi\|_{\mathcal{F},\alpha} D^{d+\alpha\delta}\ \lambda^{-\ell\alpha}.$$

La somme $\displaystyle\sum_{\|m\|>D} |\hat{\phi}(A_{i+1}^{i+\ell}m)|^2$ est majorée par $\sum_{m\in\mathbb{Z}} |\hat{\phi}(A_{i+1}^{i+\ell}m)|^2$ qui est égale à $\|\phi\|_2^2$, l'application $m \to A_{i+1}^{i+\ell}m$ étant une bijection de $\mathbb{Z}^d$. D'autre part,

$$\sum_{\|m\|>D} |\hat{\psi}(m)|^2 \leq \|\psi\|_{\mathcal{F},\alpha}^2 (\frac{2\alpha+1}{2\alpha-1})^d \frac{1}{D^{\alpha-\frac{1}{2}}}.$$

Nous avons donc pour une constante K_α la majoration :

$$(2) \leq K_\alpha\|\psi\|_{\mathcal{F},\alpha}\ \|\phi\|_2 D^{-\frac{1}{2}(\alpha-\frac{1}{2})}.$$

Prenons $D = \lambda^{\frac{\ell\alpha}{(d+\alpha\delta+\frac{1}{2}(\alpha-\frac{1}{2})}}$. Soit κ_α la constante $\lambda^{-\frac{\alpha(\alpha-\frac{1}{2})}{2(d+\alpha\delta)+\alpha-\frac{1}{2}}} \in]0,1[$.

Nous obtenons une décroissance exponentielle :

$$\left|\int_{\mathbb{T}^d} \phi(t)\psi(\tau_{i+\ell}...\tau_{i+1}\,t)\mathrm{d}t\right| \leq [C\|\psi\|_2\ \|\phi\|_{\mathcal{F},\alpha} + K_\alpha\|\psi\|_{\mathcal{F},\alpha}\ \|\phi\|_2]\,\kappa_\alpha^\ell.$$

□

2.2 Variance

Une étape préalable à la preuve du théorème limite central est d'assurer un contrôle de la variance.

Notations 2.3. Soit (τ_i) une suite d'automorphismes du tore. Notons, pour toute fonction de carré intégrable $f : \mathbb{T}^d \to \mathbb{R}$, pour $N \geq 1$:

$$\begin{aligned} S_N f(t) &= \sum_{k=1}^{N} f(\tau_k \cdots \tau_1\, t), \\ \sigma_N^2(f) &= \frac{1}{N}\int |S_N(t)|^2\ dt. \end{aligned}$$

Dans le cas où $(\tau_k...\tau_1)$ est la suite (τ^k) des puissances d'un unique automorphisme ergodique, cette suite a une limite (variance asymptotique) pour toute fonction régulière. Montrons que, sous la condition 2.1, la suite $(\sigma_N^2(f))_{N\geq 1}$ est bornée :

Lemme 2.4. *Soit (τ_i) une suite d'automorphismes vérifiant la condition 2.1. Pour $\alpha > \frac{1}{2}$, il existe une constante $C(\alpha)$ telle que, pour toute fonction $f \in \mathcal{F}_\alpha^0$:*

$$\sigma_N^2(f) \leq C(\alpha)\|f\|_2\|f\|_\alpha, \forall N \geq 1. \tag{II.8}$$

Plus généralement, pour tout $M \geq 1$ et tout bloc $[M, M+L-1]$ de longueur $L \geq 1$, nous avons :

$$\int |\sum_{j=M}^{M+L-1} f(\tau_j...\tau_M\, t)|^2\ dt \leq C(\alpha)\|f\|_2\|f\|_\alpha L. \tag{II.9}$$

<u>Preuve</u> Soient $K = K_\alpha$ et $\kappa = \kappa(\alpha)$ donnés par la proposition 2.2. Nous avons :

$$\begin{aligned} \|S_N f\|_2^2 &= \sum_{k=0}^{N-1} \|f(\tau_k...\tau_1.)\|_2^2 + 2\sum_{0\leq k<k'\leq N-1} \int f(\tau_k...\tau_1 t) f(\tau_{k'}...\tau_1 t)\mathrm{d}t \\ &= N\|f\|_2^2 + 2\sum_{r=1}^{N-1}\sum_{\ell=0}^{N-1-r} \int f(t) f(\tau_{\ell+r}\cdots\tau_{\ell+1}\,t)\mathrm{d}t \\ &\leq N\|f\|_2^2 + 2\sum_{r=1}^{N-1}(N-r)K\|f\|_2\|f\|_{\mathcal{F},\alpha}\kappa^r \\ &\leq N\left(\|f\|_2^2 + 2\frac{K}{1-\kappa}\|f\|_2\|f\|_{\mathcal{F},\alpha}\right). \end{aligned}$$

L'inégalité (II.9) résulte d'un calcul analogue. □

Equidistribution des suites $(\tau_k \cdots \tau_1 x)_{k\geq 1}$

Dans le cas d'une seule transformation ergodique, le théorème de Birkhoff implique la loi forte des grands nombres pour les fonctions intégrables. Dans la situation traitée ici, nous avons également une loi forte des grands nombres pour les fonctions régulières.

Rappelons le lemme classique suivant :

Lemme 2.5. *Si $(Z_n)_{n\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires centrées de carré integrable telle que $|\mathbb{E}(Z_k Z_{k+\ell})| \leq \varepsilon_\ell, \forall k, \ell \geq 1$, où (ε_n) est une suite de réels sommable, la loi des grands nombres est vérifiée par la suite (Z_n).*

Ceci implique :

Proposition 2.6. *Soit (τ_i) une suite d'automorphismes vérifiant la condition 2.1. Pour toute fonction $f \in \mathcal{F}^0_\alpha$, pour λ-p.p. x,*

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(\tau_k \cdots \tau_1 x) = 0.$$

Preuve Nous appliquons le lemme précédent à $Z_n = f(\tau_n \cdots \tau_1 .)$. La proposition 2.2 assure la décorrélation de la suite (Z_n) :

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}(Z_k Z_{k+\ell})| &= |\int_{\mathbb{T}^d} f(\tau_k \cdots \tau_1 t)\ f(\tau_{k+\ell} \cdots \tau_1 t)\ dt| \\ &= |\int_{\mathbb{T}^d} f(t)\ f(\tau_{k+\ell} \cdots \tau_{k+1} t)\ dt| \leq C\|\phi\|_2 \|\phi\|_{\mathcal{F},\alpha}\, \kappa^\ell. \end{aligned}$$

□

Une conséquence est que, pour λ-presque tout x, la suite $(\tau_n \cdots \tau_1 x)_{n\geq 1}$ est équidistribuée dans le tore $\mathbb{T}^d$.

3 Théorème limite central

3.1 Condition de séparation des fréquences

Nous supposerons vérifiée la condition suivante :

Condition 3.1. *Il existe des constantes C_1, c, γ, $C_1 > 0$, $\gamma > 1$, telles que, pour tout $p \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$, tout $\ell \geq 1$, tout $r \geq 1$, on ait*

$$\|A_1^{\ell+r} p\| \ \geq C_1 \gamma^{r - c\log\|p\|} \|A_1^\ell\|. \tag{II.10}$$

Notons que la condition 3.1 porte sur la suite (A_1^ℓ), alors que la condition de dilatation 2.1 porte sur les "blocs" A_i^j. Nous l'établirons par la suite pour certaines familles d'exemples.

Proposition 3.2. *Sous la condition 3.1, pour tout réel $D \geq 1$, il existe une constante $\rho(D) \geq 1$ pour laquelle les propriétés suivantes sont satisfaites :*

1) Pour tout entier $s \geq 1$, pour toute suite croissante de s entiers, $\ell_1 < \ell_2 < ... < \ell_s$ vérifiant $\ell_{j+1} \geq \ell_j + \rho(D)$, $j = 1, ..., s-1$, pour toute famille $p_1, p_2, ..., p_s \in \mathbb{Z}^d$ telle que $p_s \neq 0$ et $\|p_j\| \leq D$ pour $j = 1, ..., s$, nous avons :

$$\sum_{j=1}^{s} A_1^{\ell_j} p_j \neq 0. \tag{II.11}$$

2) Pour tout entier $s \geq 1$, pour toute suite croissante de $2s$ entiers, $\ell_1 < \ell'_1 < \ell_2 < \ell'_2 < ... < \ell_s < \ell'_s$ vérifiant $\ell_{j+1} \geq \ell'_j + \rho(D)$, pour $j = 1, ..., s-1$, pour toutes familles $p_1, p_2, ..., p_s$ et $p'_1, p'_2, ..., p'_s \in \mathbb{Z}^d$ telles que $A_1^{\ell'_s} p'_s + A_1^{\ell_s} p_s \neq 0$ et $\|p_j\|, \|p'_j\| \leq D$ pour $j = 1, ..., s$, nous avons :

$$\sum_{j=1}^{s} [A_1^{\ell'_j} p'_j + A_1^{\ell_j} p_j] \neq 0. \tag{II.12}$$

<u>Preuve</u> Montrons la deuxième propriété, dont la première est un cas particulier. Supposons qu'on ait $\sum_{j=1}^{s} [A_1^{\ell'_j} p'_j + A_1^{\ell_j} p_j] = 0$. On a alors :

$$A_1^{\ell'_s} p'_s + A_1^{\ell_s} p_s = \sum_{j=1}^{s-1} [A_1^{\ell'_j} p'_j + A_1^{\ell_j} p_j].$$

La condition 3.1 va permettre d'appliquer des majorations du type :

$$\|A_1^{\ell_j} p_j\| \leq D \|A_1^{\ell_j}\| \leq C_1^{-1} D \gamma^{-(\ell_s - \ell_j) + c \ln \|q_s\|} \|A_1^{\ell_s} q_s\|,$$

pour $q_s \in \mathbb{Z}_*^d$ et $\|p_j\| \leq D$, et d'obtenir une contradiction en utilisant l'existence d'un "gap" entres les ℓ_j.

Distinguons deux cas :

1) Cas où $\ell'_s - \ell_s$ est petit : $0 \leq \ell'_s - \ell_s \leq \rho_1$

Posons $q_s = A_{\ell_s+1}^{\ell'_s} p'_s + p_s$. C'est par hypothèse un élément non nul de $\mathbb{Z}^d$ et sa norme est majorée par $2D \max(\|A\|, \|B\|)^{\rho_1}$. Soit $C_2 = \ln \max(\|A\|, \|B\|)$. D'après

(3.1), nous avons la majoration :

$$\begin{aligned}
\|A_1^{\ell'_s}p'_s + A_1^{\ell_s}p_s\| &= \|A_1^{\ell_s}q_s\| \\
&\leq C_1^{-1}D[\sum_{j=1}^{s-1}\gamma^{-(\ell_s-\ell'_j)+c\ln\|q_s\|}\|A_1^{\ell_s}q_s\| + \sum_{j=1}^{s-1}\gamma^{-(\ell_s-\ell_j)+c\ln\|q_s\|}\|A_1^{\ell_s}q_s\|] \\
&\leq C_1^{-1}D\gamma^{c\ln\|q_s\|}\|A_1^{\ell_s}q_s\|\ [\sum_{j=1}^{s-1}\gamma^{-(\ell_s-\ell'_j)} + \sum_{j=1}^{s-1}\gamma^{-(\ell_s-\ell_j)}] \\
&\leq 4C_1^{-1}D^2\gamma^{cC_2\rho_1}\ [\sum_{j=1}^{s-1}\gamma^{-j\rho(D))}]\ \|A_1^{\ell_s}q_s\| \\
&\leq \frac{4}{C_1(1-\gamma^{-\rho(D)})}D^2\gamma^{cC_2\rho_1-\rho(D)}\ \|A_1^{\ell_s}q_s\|.
\end{aligned}$$

2) Cas où $\ell'_s - \ell_s$ est grand.

Notons que l'on peut supposer que $p'_s \neq 0$, car dans le cas contraire on aurait $p_s \neq 0$ et on raisonnerait en majorant $\|A_1^{\ell_s}p_s\|$.

Nous pouvons majorer de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
\|A_1^{\ell'_s}p'_s\| &\leq \|A_1^{\ell_s}p_s\| + C_1^{-1}D[\sum_{j=1}^{s-1}\gamma^{-(\ell'_s-\ell'_j)+c\ln\|p'_s\|}\|A_1^{\ell'_s}p'_s\| + \sum_{j=1}^{s-1}\gamma^{-(\ell'_s-\ell_j)+c\ln\|p'_s\|}\|A_1^{\ell'_s}p'_s\|] \\
&\leq C_1^{-1}D\gamma^{c\ln\|p'_s\|}\|A_1^{\ell'_s}p'_s\|\ [\gamma^{-(\ell'_s-\ell_s)} + \sum_{j=1}^{s-1}\gamma^{-(\ell'_s-\ell_j)} + \sum_{j=1}^{s-1}\gamma^{-(\ell'_s-\ell_j)}] \\
&\leq C_1^{-1}D[\gamma^{c\ln D-\rho_1} + 2\gamma^{-\rho(D)}]\ \|A_1^{\ell'_s}p'_s\| \leq C_1^{-1}D[\gamma^{c\ln D-\rho_1} + 2]\ \|A_1^{\ell'_s}p'_s\|.
\end{aligned}$$

Choisissons ρ_1 tel que $C_1^{-1}D[\gamma^{c\ln D-\rho_1} + 2] < 1$, puis $\rho(D)$ tel que

$$\frac{4}{C_1(1-\gamma^{-\rho(D)})}D^2\gamma^{cC_2\rho_1-\rho(D)} < 1.$$

Le facteur de $\|A_1^{\ell_s}q_s\|$ à droite dans le premier cas est < 1 et le facteur de $\|A_1^{\ell'_s}p'_s\|$ à droite dans le deuxième cas est < 1. Dans les deux cas nous obtenons une contradiction. □

La proposition permet d'obtenir des propriétés de multiplicativité. Par exemple, la propriété 1) dans la proposition 3.2 implique :

Propriété 3.3. *Si g est un polynôme trigonométrique tel que $\hat{g}(p) = 0$ pour $\|p\| > D$, si $\ell_1 < \ell_2 < ... < \ell_s$ est une suite croissante d'entiers telle que $\ell_{j+1} \geq \ell_j + \rho(D)$ pour $j = 1, ..., s-1$, alors*

$$\int \prod_{j=1}^{s} g(\tau_{\ell_j}...\tau_1 t)\ dt = 0.$$

Nous examinons maintenant le TCL pour les sommes S_n

3.2 Application d'un critère de Komlòs

Dans cette partie, le résultat que l'on va établir repose sur la notion de système multiplicatif (voir Komlòs [Kom73] pour cette notion). Il s'inspire de la méthode utilisée par B. Petit [Pet92]. Nous donnons une forme quantitative de ce résultat en terme d'estimation de la fonction caractéristique pour un système multiplicatif. La preuve est donnée en section 7.

Lemme 3.4. *Soient u un entier ≥ 1, $(\zeta_k)_{0\leq k\leq u-1}$ une famille de u variables aléatoires réelles, a un réel > 0. Notons, pour $x \in \mathbb{R}$:*

$$\begin{aligned} Z(x) &= \exp(ix\sum_{k=0}^{u-1}\zeta_k),\ Q(x) = \prod_{k=0}^{u-1}(1+ix\zeta_k), \\ Y &= \sum_{k=0}^{u-1}\zeta_k^2,\quad \delta = \max_{0\leq k\leq u-1}\|\zeta_k\|_\infty. \end{aligned}$$

Nous avons alors, pour une constante C, pour x tel que $|x|\,\delta \leq 1$,

$$|\mathbb{E}[Z(x)] - e^{-\frac{1}{2}a\,x^2}| \leq Cu|x|^3\delta^3 + \frac{1}{2}x^2\|Q(x)\|_2\|Y-a\|_2 + |1-\mathbb{E}[Q(x)]|, \quad \text{(II.13)}$$

et, pour x tel que $|x|\delta \leq 1$ et $|x|\|Y-a\|_2^{\frac{1}{2}} \leq 1$,

$$|\mathbb{E}[Z(x)] - e^{-\frac{1}{2}a\,x^2}| \leq C\,u\,|x|^3\delta^3 + (3+2\,e^{-\frac{1}{2}a\,x^2}\,\|Q(x)\|_2)|x|\|Y-a\|_2^{\frac{1}{2}} + e^{-\frac{1}{2}ax^2}|1-\mathbb{E}[Q(x)]| \quad \text{(II.14)}$$

Dans le cas où $\mathbb{E}[Q(x)] = 1, \forall x$, le majorant se réduit à :

$$Cu\,|x|^3\delta^3 + (3+2\,e^{-\frac{1}{2}a\,x^2}\,\|Q(x)\|_2)\,|x|\|Y-a\|_2^{\frac{1}{2}}. \quad \text{(II.15)}$$

Remplacement de S_n par une somme "à trous"

Pour appliquer le lemme 3.4, nous remplaçons les sommes S_n par une somme de blocs séparés par un intervalle de longueur Δ.

Soit β un réel $\in]0,1[$ que l'on précisera plus loin, Δ un entier ≥ 1 que l'on prendra $\Delta > \rho(D)$, où $\rho(D)$ est le "gap" défini plus haut dans la proposition 3.2.

Posons (pour n suffisamment grand)

$$w_n = n^{1-\beta},\ v_n := \lfloor n/w_n \rfloor,\ u_n := \lfloor n/v_n \rfloor, \quad \text{(II.16)}$$

$$L_{k,n} := kv_n,\ R_{k,n} := (k+1)v_n - \Delta, \quad \text{(II.17)}$$

$$I_{k,n} := [L_{k,n},\ R_{k,n}],\ \text{pour } 0 \leq k \leq u_n - 1. \quad \text{(II.18)}$$

Dans la suite, on considère un polynôme trigonométrique à valeurs réelles. Nous remplaçons la somme $S_n(t) = \sum_{\ell=1}^{n} g(\tau_\ell ... \tau_1 t)$ par la somme "à trous"

$$S'_n(t) := \sum_{k=0}^{u_n-1} T_{k,n}(t), \tag{II.19}$$

avec

$$T_{k,n}(t) = \sum_{L_{k,n}<\ell\leq R_{k,n}} g(\tau_\ell ... \tau_1 t). \tag{II.20}$$

On a donc effectué un découpage de l'intervalle $[1, n]$ en u_n blocs de longueur v_n. Le nombre de blocs est à peu près égal à $w_n = n^{1-\beta}$ et leur longueur à peu près égale à n^β.

Les entiers $L_{k,n}$ et $R_{k,n}$ sont respectivement les extrémités gauches et droites des blocs et les blocs sont séparés par un intervalle de longueur Δ.

Le tableau de v.a. $(T_{k,n})$ forme un système multiplicatif.

Expression de $|T_{k,n}(t)|^2$

$$\begin{aligned}
|T_{k,n}(t)|^2 &= \Big(\sum_{\ell'\in I_{k,n}} \sum_{p'\in\mathbb{Z}^d} \hat{g}(p')\chi(A_1^{\ell'}p', t)\Big)\Big(\sum_{\ell\in I_{k,n}} \sum_{p\in\mathbb{Z}^d} \overline{\hat{g}(p)}\chi(-A_1^{\ell}p, t)\Big) \\
&= \sum_{p,p'\in\mathbb{Z}^d} \sum_{\ell,\ell'\in I_{k,n}} \hat{g}(p')\overline{\hat{g}(p)}\chi(A_1^{\ell'}p' - A_1^{\ell}p, t) \\
&= \sigma_{k,n}^2 + W_{k,n}(t),
\end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned}
\sigma_{k,n}^2 = \int |T_{k,n}(t)|^2 dt &= \sum_{p,p'\in\mathbb{Z}^d} \hat{g}(p')\overline{\hat{g}(p)} \sum_{\ell,\ell'\in I_{k,n}} 1_{A_1^{\ell'}p' = A_1^{\ell}p}, \\
W_{k,n}(t) &= \sum_{p,p'\in\mathbb{Z}^d} \hat{g}(p')\overline{\hat{g}(p)} \sum_{\ell,\ell'\in I_{k,n}: A_1^{\ell'}p' \neq A_1^{\ell}p} \chi(A_1^{\ell'}p' - A_1^{\ell}p, t).
\end{aligned}$$

Application du lemme 3.4

Nous appliquons le lemme 3.4 au tableau de v.a. $(T_{k,n}, 0 \leq k \leq u_n - 1)$. Avec les notations du lemme, nous avons donc, pour un n fixé : $u = u_n$ et, pour $k = 0, ..., u_n - 1$,

$$\begin{aligned}
\zeta_k &= T_{k,n},\ Y = Y_n = \sum_{k=0}^{u_n-1} |T_{k,n}|^2, \\
a &= a_n = \mathbb{E}(Y_n) = \sum_k \sigma_{k,n}^2.
\end{aligned}$$

Pour appliquer le lemme (3.4), nous majorons sucessivement les quantités intervenant dans l'inégalité (II.13).

1) *Majoration de* $u_n\delta_n$
Nous avons

$$u_n\delta_n^3 = u_n \max_{0\le k\le u_n-1} \|T_{k,n}\|_\infty^3 \le Cn^{1-\beta}n^{3\beta} = Cn^{1+2\beta}.$$

2) Montrons que $\mathbb{E}[Q_n(x)] = 1$.
L'expression de $Q_n(x) = Q_n(x,t)$ (la variable d'intégration étant t) est ici

$$Q_n(t,x) = \prod_{k=0}^{u_n-1} \left(1 + ixT_{k,n}(t)\right). \tag{II.21}$$

En développant le produit, nous obtenons :

$$Q_n(t,x) = 1 + \sum_{s=1}^{u_n} (ix)^s \sum_{0\le k_1<\cdots<k_s\le u_n-1} \prod_{j=1}^{s} T_{k_j,n}(t).$$

Les produits $\prod_{j=1}^s T_{k_j,n}(t)$ sont des combinaisons d'expressionss de la forme : $\chi(\sum_{j=1}^s A_1^{\ell_j} p_j, t)$, avec $\ell_j \in I_{k_j,n}$ et $\|p_j\| \le D$.

La propriété 1 de la proposition 3.2 implique $\sum_{j=1}^s A_1^{\ell_j} p_j \ne 0$, d'où : $\displaystyle\int \prod_{j=1}^{s} T_{k_j,n}(t)\mathrm{d}t = 0$.

3) *Majoration de* $\|Y_n - a_n\|_2$
De façon générale, soient $U_1, ..., U_L$ des v.a.r. de carré intégrable telles que

$$\mathbb{E}[(U_k - \mathbb{E}\,U_k)(U_{k'} - \mathbb{E}\,U_{k'})] = 0, \forall 1 \le k < k' \le L,$$

alors

$$\begin{aligned} \|\sum_k U_k - \sum_k \mathbb{E}\,U_k\|_2^2 &= \sum_k \mathbb{E}\,U_k^2 - (\sum_k \mathbb{E}\,U_k)^2 \\ &\le \sum_k \mathbb{E}\,U_k^2 \le L \max_k \|U_k\|_\infty \max_k \mathbb{E}(|U_k|). \end{aligned}$$

Nous appliquons cette majoration à $U_k = (T_{k,n})^2$ et $L = u_n$ (en notant que $T_{k,n}^2 = \sigma_{k,n}^2 + W_{k,n}$ et que nous avons l'orthogonalité : $\int W_{k,n}W_{k',n}dt = 0$, $1 \le k < k' < u_n$ (cas particulier à l'ordre 2 du raisonnement du point 4)).

En utilisant des majorations "grossières" de $\|T_{k,n}\|_\infty^2$ et de $\|T_{k,n}\|_2^2$, elle implique :

$$\|\sum_k T_{k,n}^2 - \sum_k \sigma_{k,n}^2\|_2^2 \le CC'\|g\|_2\|g\|_\alpha u_n v_n^2 \max_k \sigma_{k,n}^2 = C''n^{1+\beta} \max_k \sigma_{k,n}^2.$$

Nous avons donc pour une constante C :

$$|x|\|Y_n - a_n\|_2^{\frac{1}{2}} \leq |x| n^{\frac{1+\beta}{4}} \max_k \sigma_{k,n}^{\frac{1}{2}}. \tag{II.22}$$

4) *Majoration de* $\mathbb{E}|Q_n(x)|^2$

C'est le point principal de la preuve. Nous avons :

$$\begin{aligned} |Q_n(x,t)|^2 &= \prod_{k=0}^{u_n-1}(1+x^2|T_{k,n}(t)|^2) = \prod_{k=0}^{u_n-1}[1+x^2\sigma_{k,n}^2 + x^2 W_{k,n}(t)] && \text{(II.23)} \\ &= \prod_{k=0}^{u_n-1}[1+x^2\sigma_{k,n}^2] \prod_{k=0}^{u_n-1}[1+\frac{x^2}{1+x^2\sigma_{k,n}^2}W_{k,n}(t)] && \text{(II.24)} \end{aligned}$$

Nous allons montrer que l'intégrale en t du deuxième terme est égale à 1. Le premier facteur dans (II.24) est constant et la majoration $1+y \leq e^y, \forall y \geq 0$, fournit la majoration :

$$\prod_{k=0}^{u_n-1}[1+x^2\sigma_{k,n}^2] \leq e^{x^2\sum_{k=0}^{u_n-1}\sigma_{k,n}^2} = e^{a_n x^2},$$

ce qui entraîne la majoration :

$$\int |Q_n(x,t)|^2 \, dt \leq e^{a_n x^2}.$$

Il reste à montrer que

$$\int \prod_{k=0}^{u_n-1}[1+\frac{x^2}{1+x^2\sigma_{k,n}^2}W_{k,n}(t)] \, dt = 1.$$

En le développant, on obtient que le produit est de la forme

$$1 + \sum_{s=1}^{u_n} \sum_{0\leq k_1<\ldots k_s<u_n} C_{k_1}(t)\ldots C_{k_s}(t),$$

où $C_k(t) = \frac{x^2}{1+x^2\sigma_{k,n}^2}W_{k,n}(t)$.

Les produits $W_{k_1}(t)\ldots W_{k_s}(t)$ sont des combinaisons linéaires d'expressions de la forme

$$\chi(\sum_{j=1}^{s}[A_1^{\ell'_j}p'_j - A_1^{\ell_j}p_j], t),$$

où $\ell_j, \ell'_j \in I_{k_j,n}$, $A_1^{\ell'_j}p'_j \neq A_1^{\ell_j}p_j$, $j = 1,\ldots,s$ (cf. notation (II.18)) et les p_j, p'_j, qui correspondent aux termes non nuls du polynôme trigonométrique g, sont des vecteurs entiers de norme $\leq D$.

Le choix du "gap" dans la définition des intervalles $I_{k_j,n}$ assure par la proposition 3.2 que $\sum_{j=1}^{s} A_1^{\ell'_j}p'_j - A_1^{\ell_j}p_j \neq 0$ et donc l'intégrale du deuxième facteur dans (II.24) se réduit à 1.

3.3 Majoration de $|\mathbb{E}[e^{ix\frac{S_n}{\|S_n\|_2}}] - e^{-\frac{1}{2}x^2}|$

Nous rassemblons les majorations obtenues précédemment. En changeant les notations, notons maintenant $S'_n = \sum_k T_{k,n}$ les sommes avec trous et S_n les sommes $\sum_1^n g(\tau_k ... \tau_1 x)$. Les majorations des quantités intervenant dans l'inégalité (3.4) concerne les sommes S'_n.

Majoration de l'erreur dans le remplacement de S_n par S'_n

$$\begin{aligned}
\|S_n - S'_n\|_2^2 &= \int |\sum_{k=0}^{u_n-1} \sum_{R_{k,n}<\ell\leq L_{k+1,n}} g(\tau_\ell ... \tau_1 t)|^2 \, dt \\
&= \sum_{k=0}^{u_n-1} \int |\sum_{R_{k,n}<\ell\leq L_{k+1,n}} g(\tau_\ell ... \tau_1 t)|^2 \, dt \\
&\quad +2 \sum_{0<k<k'\leq u_n-1} \int \sum_{R_{k,n}<\ell\leq L_{k+1,n}} g(\tau_\ell ... \tau_1 t) \sum_{R_{k',n}<\ell'\leq L_{k'+1,n}} g(\tau_{\ell'} ... \tau_1 t) \, dt.
\end{aligned}$$

Les intervalles de sommation sont de longueur Δ. La deuxième somme dans l'expression précédente est nulle d'après la propriété 3.3. Dans la première somme chaque intégrale est majorée par $C\|g\|_2\|g\|_\alpha\Delta^2$ (par $C\|g\|_2\|g\|_\alpha\Delta$ sous la condition 2.1 cf. (II.9)). Ceci implique, pour un Δ fixe :

$$\|S_n - S'_n\|_2^2 \leq C\|g\|_2\|f\|_\alpha \, \Delta^2 \, u_n \leq C' n^{1-\beta}. \tag{II.25}$$

Ceci implique :

$$|\|S_n\|_2^2 - \|S'_n\|_2^2| \leq 2\|S_n\|_2\|S_n - S'_n\|_2 + \|S_n - S'_n\|_2^2 \leq C[\|S_n\|_2 n^{\frac{1-\beta}{2}} + n^{1-\beta}] \tag{II.26}$$

D'autre part, soient $Z_n(x) = e^{ixS_n}$, $Z'_n(x) = e^{ixS'_n}$. Nous avons :

$$|\mathbb{E}[Z_n(x) - Z'_n(x)]| \leq \mathbb{E}[|1 - e^{ix(S_n - S'_n)}|] \leq |x|\mathbb{E}[|S_n - S'_n|] \leq |x|\|S_n - S'_n\|_2;$$

d'où :

$$|\mathbb{E}[Z_n(x) - Z'_n(x)]| \leq C|x|n^{\frac{1-\beta}{2}}. \tag{II.27}$$

D'après l'inégalité (II.27), le lemme 3.4 (inégalité (II.15)), les inégalités (II.26) et (II.22), nous obtenons :

$$\begin{aligned}
& |\mathbb{E}[e^{ixS_n}] - e^{-\frac{1}{2}\|S_n\|_2^2 x^2}| \\
\leq\ & |\mathbb{E}[e^{ixS_n}] - \mathbb{E}[e^{ixS'_n}]| + |\mathbb{E}[e^{ixS'_n}] - e^{-\frac{1}{2}a_n x^2}| + |e^{-\frac{1}{2}a_n x^2} - e^{-\frac{1}{2}\|S_n\|_2^2 x^2}| \\
\leq\ & |\mathbb{E}[e^{ixS_n}] - \mathbb{E}[e^{ixS'_n}]| + |x|^3 u_n \delta_n^3 + (3 + 2\, e^{-\frac{1}{2}a\, x^2} \, \|Q(x)\|_2) \, |x| \|Y - a\|_2^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}x^2 |a_n - \|S_n\|_2^2| \\
\leq\ & C[|x|n^{\frac{1-\beta}{2}} + |x|^3 n^{1+2\beta} + |x| n^{\frac{1+\beta}{4}} \max_k \sigma_{k,n}^{\frac{1}{2}} + |x|^2 \|S_n\|_2 n^{\frac{1-\beta}{2}} + |x|^2 n^{1-\beta}].
\end{aligned}$$

Remplaçons maintenant x par $x\|S_n\|_2^{-1}$. Nous obtenons :

$$\begin{aligned}
&|\mathbb{E}[e^{ix\frac{S_n}{\|S_n\|_2}}] - e^{-\frac{1}{2}x^2}| \\
\leq\ & C[|x|\|S_n\|_2^{-1}|n^{\frac{1-\beta}{2}} + |x|^3\|S_n\|_2^{-3}n^{1+2\beta} + |x|\|S_n\|_2^{-1}n^{\frac{1+\beta}{4}}\max_k \sigma_{k,n}^{\frac{1}{2}} \\
&+|x|^2\|S_n\|_2^{-1}n^{\frac{1-\beta}{2}} + |x|^2\|S_n\|_2^{-2}n^{1-\beta}].
\end{aligned}$$

Avec la majoration de $\sigma_{k,n}^{\frac{1}{2}}$ en $n^{\frac{\beta}{2}}$, il en résulte :

$$\begin{aligned}
&|\mathbb{E}[e^{ix\frac{S_n}{\|S_n\|_2}}] - e^{-\frac{1}{2}x^2}| \\
\leq\ & C[|x|\|S_n\|_2^{-1}|n^{\frac{1-\beta}{2}} + |x|^3\|S_n\|_2^{-3}n^{1+2\beta} + |x|\|S_n\|_2^{-1}n^{\frac{1+3\beta}{4}} \\
&+|x|^2\|S_n\|_2^{-1}n^{\frac{1-\beta}{2}} + |x|^2\|S_n\|_2^{-2}n^{1-\beta}]. \qquad \text{(II.28)}
\end{aligned}$$

Si on suppose que $\|S_n\|_2 \geq Cn^{\delta}$, on obtient :

$$\begin{aligned}
&|\mathbb{E}[e^{ix\frac{S_n}{\|S_n\|_2}}] - e^{-\frac{1}{2}x^2}| \\
\leq\ & C[|x|n^{-\frac{(\beta-1+2\delta)}{2}} + |x|^3n^{-(-2\beta-1+3\delta)} + |x|n^{-\frac{(-3\beta-1+4\delta)}{4}} \\
&+|x|^2n^{-\frac{(\beta-1+2\delta)}{2}} + |x|^2n^{-(\beta-1+2\delta)}]. \qquad \text{(II.29)}
\end{aligned}$$

3.4 Approximation par une loi normale

Inégalité de Esseen

Si X, Y sont deux v.a.r. definies sur un même espace probabilisé, on définit leur distance en loi par :

$$d(X,Y) = \sup_{x\in\mathbb{R}} |\mathbb{P}(X \leq x) - \mathbb{P}(Y \leq x)|.$$

Soit $H_{X,Y}(x) := |\mathbb{E}(e^{ixX}) - \mathbb{E}(e^{ixY})|$. Choisissons pour Y une v.a. Y_σ de loi $N(0,\sigma^2)$ (la densité en x de Y_σ s'écrit $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{\sigma^2}}$, sa fonction caractéristique $e^{-\frac{1}{2}\sigma^2x^2}$).

Rappelons l'inégalité suivante (cf. Feller, *An introduction to probability theory and its application*, p. 512) : si l'espérance de X tend vers zéro et si la différence des fonctions de répartition des lois de X et de Y tend vers zéro $\pm\infty$, alors pour tout $U > 0$,

$$d(X,Y_\sigma) \leq \frac{1}{\pi}\int_{-U}^{U} H_{X,Y}(x)\frac{dx}{x} + \frac{24}{\pi}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\frac{1}{U}.$$

On a $|H_{X,Y_{\sigma_n}}| \leq \sum_{i=1}^{5} n^{-\gamma_i}|x|^{\alpha_i}$, ce qui permet de majorer $d(X,Y_1)$ par

$$\frac{C}{U} + \sum_{i=1}^{5} n^{-\gamma_i}\frac{1}{\alpha_i}U^{\alpha_i}.$$

Pour optimiser le choix de $U = U_n$, posons $U_n = n^\gamma$ avec $\gamma = \min_i \frac{\gamma_i}{\alpha_i+1}$.
Ceci fournit la majoration

$$d(\frac{S_n}{\|S_n\|_2}, Y_1) \leq Cn^{-\gamma}.$$

D'après l'inégalité (II.29), il suffit de calculer

$$\begin{aligned}\gamma &= \min(\frac{\beta-1+2\delta}{4}, \frac{-2\beta-1+3\delta}{4}, \frac{-3\beta-1+4\delta}{8}, \frac{\beta-1+2\delta}{6}, \frac{\beta-1+2\delta}{3}) \\ &= \min(\frac{-2\beta-1+3\delta}{4}, \frac{-3\beta-1+4\delta}{8}, \frac{\beta-1+2\delta}{6}). \qquad \text{(II.30)}\end{aligned}$$

Pour $\delta = \frac{1}{2}$ on obtient :

$$\gamma = \min(\frac{-4\beta+1}{8}, \frac{-3\beta+1}{8}, \frac{\beta}{6}) = \min(\frac{-4\beta+1}{8}, \frac{\beta}{6}).$$

En posant $\beta = \frac{3}{16}$, on obtient $\gamma = \frac{1}{32}$. Ceci donne une vitesse de convergence d'ordre $n^{-\frac{1}{32}}$. On a donc :

Théorème 3.5. *Supposons les conditions 2.1 et 3.1 vérifiées, et supposons qu'il existe un entier n_0 et une constante $C_1 > 0$ tels que pour tout $n \geq n_0$, $\|S_n\| \geq C_1 n^{\frac{1}{2}}$. Alors il existe une constante C, telle que :*

$$d(\frac{S_n}{\|S_n\|_2}, Y_1) \leq Cn^{-\frac{1}{32}}, \forall n \geq n_0. \qquad \text{(II.31)}$$

Les résultats précédents peuvent être utilisés lorsque l'on sait que la limite de $n^{-\frac{1}{2}}\|S_n\|_2$ existe et est non nulle (se reporter au cas stationnaire, ci-après) : la suite $(n^{-\frac{1}{2}} S_n)_{n\geq 1}$ converge alors en loi vers la loi normale $N(0,1)$ avec une vitesse de convergence donnée par (II.31).

On peut aussi obtenir une vitesse de convergence d'ordreW $n^{-\delta}$, pour un $\delta > 0$, pour une sous-suite, à condition que la variance $\|S_{n_k}\|_2$ soit suffisamment grande :
Le long d'une sous-suite (n_k) telle que $\|S_{n_k}\|_2 \geq C_1 n_k^\delta$, avec $\delta > 3/7$, la sous-suite des sommes renormalisées $\|S_{n_k}\|_2^{-1} S_{n_k}$ converge en loi vers la loi normale $N(0,1)$.
En effet, dans (II.30), pour obtenir $\gamma > 0$, il suffit de vérifier les inégalités :

$$-2\beta-1+3\delta > 0,\ -3\beta-1+4\delta > 0,\ \beta-1+2\delta > 0.$$

soit encore :

$$1-2\delta < \beta < \min(\frac{3\delta-1}{2}, \frac{4\delta-1}{3}) = \frac{3\delta-1}{2}.$$

Pour $\delta > \frac{3}{7}$ et $\beta = \frac{1}{7}$, on obtient $\gamma > 0$.

Dans les résultats ci-dessus, on étudie le cas des polynômes trigonométriques. En utilisant une approximation, on peut les étendre au cas des fonctions höldériennes.

Ceci sera détaillé au paragraphe 6, lorsque les choix de A et B sont indépendants. Nous nous contentons ici d'exprimer l'approximation en termes de variance.

Soit f une fonction de $\mathcal{F}_\alpha^0$ ($\alpha > \frac{1}{2}$). Pour un entier D, écrivons $f = g_D + h_D$, où g_D est le polynôme trigonometrique suivant $g_D(t) = \sum_{n:\|n\|\leq D} \hat{f}(n)\chi(n,t)$.

On a $S_N f = S_N g_D + S_N h_D$, avec $\hat{h}_D(n) = 0$, pour $\|n\| \leq D$ et supposons vérifiée la condition 2.1 :

$$\sigma_N^2(h_D) \leq C\|h_D\|_2\|h_D\|_\alpha \leq C\|h_D\|_2\|f\|_\alpha.$$

On obtient :

$$|\sigma_N(f) - \sigma_N(g_D)| \leq \sigma_N(h_D) \leq \sqrt{C\|f\|_\alpha}\ (\sum_{n:\|n\|>D} |\hat{f}(n)|^2)^{\frac{1}{4}} \ \to 0, \text{ when } D \to \infty. \tag{II.32}$$

4 Le cas stationnaire

Nous étudions dans cette section la situation où la suite est engendrée par un processus stationnaire. Dans ce cas on peut obtenir une information sur la non nullité presque sûre de la variance. La stationarité est exprimée à l'aide du formalisme des produits gauches.

4.1 Ergodicité, décorrélation globale

Considérons deux matrices A et B dans $Sl(d,\mathbb{Z})$.

Notations 4.1. Considérons un système dynamique (Ω, μ, θ), où θ est une transformation mesurable et inversible sur l'espace probabilisé (Ω, μ) et pour laquelle μ est invariante. On suppose que le système est ergodique. Notons $X = \mathbb{T}^d$, et τ_A, τ_B les automorphismes de X associés à A et B. L'espace produit $\Omega \times X$ est muni de la mesure produit $\nu := \mu \times \lambda$.

Soient $\omega \to A(\omega)$ une application mesurable de Ω vers $\{A, B\}$, et τ l'application $\omega \to \tau(\omega) := \tau_{A(\omega)} \in \{\tau_A, \tau_B\}$. Le produit gauche θ_τ on $\Omega \times X$ est défini par

$$\theta_\tau : \Omega \times X \to \Omega \times X;\ (\omega, t) \mapsto (\theta\omega, \tau(\omega)t).$$

Soit F appartenant à $L^2(\Omega \times X)$ et, pour tout $p \in \mathbb{Z}^d$, notons $F_p(\omega), p \in \mathbb{Z}^d$ son coefficient de Fourier coefficient d'ordre p dans le développement en la variable t. F peut s'écrire :

$$F(\omega, t) = \sum_{p\in\mathbb{Z}^d} F_p(\omega)\chi(p,t),$$

avec $\sum_{p\in\mathbb{Z}^d}\int |F_p(\omega)|^2\ d\mu(\omega) < \infty$.

Pour $k \geq 1$, $i \leq j$, $\omega \in \Omega$, notons

$$\begin{aligned} \tau(k,\omega) &= \tau(\theta^{k-1}\omega)\dots\tau(\omega), \\ A_i^j(\omega) &= A(\theta^i\omega)A(\theta^{i+1}\omega)...A(\theta^j\omega) \end{aligned}$$

et, pour $f \in \mathrm{L}^2(X,\mathbb{R})$,

$$S_n(\omega,f)(t) := \sum_{k=1}^{n} f(\tau(k,\omega)t).$$

En écrivant $\tilde{f}(\omega,t) = f(t)$, on obtient :

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\theta_\tau^k(\omega,t)) &= \sum_{m\in\mathbb{Z}^d} \hat{f}_m(\theta^k\omega)\chi(m,\tau(k,\omega)t) = \sum_{m\in\mathbb{Z}^d} \hat{f}_m(\theta^k\omega)\chi(A_1^k(\omega)m,t) \\ &= \sum_{\ell\in\mathbb{Z}^d} \hat{f}_{(A_1^k(\omega))^{-1}\ell}(\theta^k\omega)\chi_\ell(t). \end{aligned}$$

Désignons par $\mathcal{F}_\alpha^0(\Omega)$ l'espace des fonctions

$$\mathcal{F}_\alpha^0(\Omega) = \Big\{F \in L^2(\Omega\times\mathbb{T}^d,\nu) : F_0 = 0\ \mu \text{ p.p. et } \sup_\omega \|F(\omega,.)\|_{\mathcal{F},\alpha} < \infty\Big\}. \quad \text{(II.33)}$$

Ainsi pour $F \in \mathcal{F}_\alpha^0(\Omega)$, en notant $\|F\|_{\mathcal{F},\alpha} := \sup_\omega \|F(\omega,.)\|_{\mathcal{F},\alpha}$, on a :

$$|F_p(\omega)| \leq \|F\|_{\mathcal{F},\alpha} \prod_{i=1,\dots,d} (1+|p_i|)^{-\alpha}, \forall\omega\in\Omega, \forall p = (p_1,...,p_d) \in \mathbb{Z}_*^d.$$

Le décorrelation exponentielle sera une conséquence de la condition suivante, qui est la version uniforme de la condition 2.1 sur tous les produits possibles de matrices prises dans l'ensemble $\{A,B\}$.

Condition 4.2. *Il existe des constantes $C > 0$, $\delta > 0$ et $\lambda > 1$ telles que*

$$\forall r \geq 1, \forall(i_1,...,i_r) \in \{0,1\}^r,\ \forall p \in \mathbb{Z}^d\setminus\{0\}, \|A_{i_1}...A_{i_r}p\| \geq C\|p\|^{-\delta}\lambda^r.$$

Proposition 4.3. *Sous la condition 4.2, le système $(\Omega\times X,\theta_\tau,\mu\otimes\lambda)$ est mélangeant sur l'orthogonal des fonctions ne dépendant que de la coordonnée ω. Le mélange a lieu à vitesse exponentielle sur l'espace $\mathcal{F}_\alpha^0$. En particulier, si (Ω,μ,θ) est ergodique, alors le système dynamique $(\Omega\times X,\theta_\tau,\mu\otimes\lambda)$ est ergodique.*

<u>Preuve</u> Soit D un réel ≥ 1 et considérons des polynômes trigonométriques F,G de $L^2(\Omega\times X)$, avec $F(\omega,t) = \sum_{0<\|p\|\leq D} F_p(\omega)\chi(p,t)$, $G(\omega,t) = \sum_{0<\|p\|\leq D} G_p(\omega)\chi(p,t)$.

Supposons d'abord que les coefficients de Fourier $F_p(\omega)$ de F sont nuls pour tout ω et tout p tels que $\|p\| > D$. On a :

$$\begin{aligned}
\langle F \circ \theta_\tau^n, F\rangle_\nu &= \int\int (\sum_p F_p(\theta^n\omega)\chi(A_1^n(\omega)p,t))(\overline{\sum_q G_q(\omega)\chi(q,t)})\ dt\ d\mu(\omega) \\
&= \sum_{p,q}\int\int F_p(\theta^n\omega)\chi(A_1^n(\omega)p,t))(\sum_q \overline{G_q(\omega)\chi(q,t)})\ dt\ d\mu(\omega) \\
&= \sum_{p,q}\int F_p(\theta^n\omega)\,\overline{G_q(\omega)}\ 1_{A_1^n(\omega)p=q}\ d\mu(\omega).
\end{aligned}$$

D'après la condition 4.2 il existe une constante C_1 ne dépendant pas de D telle que $A_1^n(\omega)p \neq q$, pour $n \geq C_1 \ln D$. On a donc $\langle F \circ \theta_\tau^n, F\rangle = 0$, pour $n \geq C_1 \ln D$.

Supposons maintenant que F appartient à $\mathcal{F}_\alpha^0(\Omega)$, $\alpha > \frac{1}{2}$, et écrivons $F = F_D + F - F_D$, où $F_D(\omega,t) = \sum_{\|p\|\leq D} F_p(\omega)\chi(p,t)$. En posant $D = \exp(C_1^{-1}n)$ et en utilisant l'inégalité de laproposition 1.1, on obtient une vitesse exponentielle de décorrelation pour les fonctions de $\mathcal{F}_\alpha^0(\Omega)$, $\alpha > \frac{1}{2}$.

Par un argument de densité, ceci montre que $\lim_n \langle F \circ \theta_\tau^n, F\rangle_\nu = 0$ pour F appartenant à $L^2(\nu)$ orthogonale aux fonctions qui ne dépendent que de ω. Si le système (Ω, μ, θ) est ergodique, ceci implique l'ergodicité du système. □

Dans toute la suite de cette section nous supposons vérifiée la condition 4.2.

Nous allons montrer que, pour presque tout ω, la suite $(n^{-\frac{1}{2}}\|S_n(\omega,f)\|_2)$, converge vers une limite et étudier le cas où cette limite est nulle. Remarquons que la norme $\|S_n(\omega,f)\|_2$ est calculée relativement à la variable t, ω étant fixé.

Proposition 4.4. *Pour tout $f \in \mathcal{F}_\alpha^0(\mathbb{T}^d)$, pour μ-presque tout $\omega \in \Omega$, la suite $(n^{-\frac{1}{2}}\|S_n(\omega,f)\|_2)$ admet une limite $\sigma^2(f)$ ne dépendant pas de ω.*

De plus $\sigma^2(f) = 0$, si et seulement si f est solution de l'équation de cobord suivante :

$$\exists h \in L^2(\nu),\ \text{pour p.t. } t \in \mathbb{T}^d, f(t) = h(\theta\omega, \tau(\omega)t) - h(\omega,t). \tag{II.34}$$

<u>Preuve</u> La convergence de la suite des variances (globales, i.e. pour le système $(\Omega \times X, \theta_\tau)$)

$$(n^{-1}\int\int |S_n(\omega,f)|^2\ dt\, d\omega)_{n\geq 1}$$

vers une variance asymptotique limite σ^2 est une propriété générale des systèmes dynamiques, quand on considère une fonction f pour laquelle la décorrélation est satisfaite avec une vitesse exponentielle, ou plus généralement quand la série des décorrélations est sommable.

Dans ce cas, on sait également que $\sigma = 0$ si et seulement si f est un cobord dans les fonctions de carré intégrable.

Le système $(\Omega \times \mathbb{T}^d, \theta_\tau, d\omega \times dt)$ est ergodique, d'après la proposition 4.3.

En notant $F(\omega, t) := f(t)$, nous avons $S_n(\omega, f)(t) = \sum_{k=0}^{n-1} F(\theta_\tau^k(\omega, t))$, d'où :

$$\begin{aligned}
\frac{\|S_n(\omega, f)\|_2^2}{n} &= \frac{1}{n}\sum_{\ell=0}^{n-1}\sum_{\ell'=0}^{n-1}\int_{\mathbb{T}^d} F(\theta_\tau^\ell(\omega,t))F(\theta_\tau^{l'}(\omega,t))\,dt \\
&= \|f\|^2 + \frac{2}{n}\sum_{\ell=0}^{n-2}\sum_{r=1}^{n-1-\ell}\int_{\mathbb{T}^d} F(\theta_\tau^\ell(\omega,t))F(\theta_\tau^{\ell+r}(\omega,t))\,dt \\
&= \|f\|^2 + \frac{2}{n}\sum_{r=1}^{n-1}\sum_{\ell=0}^{n-1-r}\int_{\mathbb{T}^d} F(\theta_\tau^\ell(\omega,t))F(\theta_\tau^{\ell+r}(\omega,t))\,dt \\
&= \|f\|^2 + 2\sum_{r=1}^{n-1}\int_{\mathbb{T}^d}\frac{1}{n}\sum_{\ell=0}^{n-1}(F.F\circ\theta_\tau^r)(\theta_\tau^\ell(\omega,t))\,dt \\
&- 2\sum_{r=1}^{n-1}\int_{\mathbb{T}^d} F(\theta_\tau^\ell(\omega,t))\frac{1}{n}\sum_{\ell=n-r}^{n-1} F(\theta_\tau^{\ell+r}(\omega,t))\,dt.
\end{aligned}$$

Posons

$$\begin{aligned}
a_{\ell,r} &:= \int_{\mathbb{T}^d} F(\theta_\tau^\ell(\omega,t))F(\theta_\tau^{\ell+r}(\omega,t))\,dt \\
&= \int_{\mathbb{T}^d} f(t)\ f(A(\theta^{\ell+1}\omega)A(\theta^{\ell+1}\omega)...A(\theta^{\ell+r}\omega)t))\,dt
\end{aligned}$$

La condition 4.2assure que,pour une constante C et pour un réel $\kappa < 1$,on a la majoration :

$$|a_{\ell,r}| \leq C\|f\|_2\|f\|_{\mathcal{F},\alpha}\kappa^r. \tag{II.35}$$

Ceci implique :

$$\left|\sum_{r=1}^{n-1}\int_{\mathbb{T}^d} F(\theta_\tau^\ell(\omega,t))\frac{1}{n}\sum_{l=n-r}^{n-1} F(\theta_\tau^{\ell+r}(\omega,t))\,dt\right| \leq C\|f\|_2\|f\|_{\mathcal{F},\alpha}\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n-1} r\kappa^r,$$

donc ce terme tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$.

De plus, pour ν-p.t. (ω, t), la suite $\left(\frac{1}{n}\sum_{\ell=0}^{n-1}(F.F\circ\theta_\tau^r)(\theta_\tau^\ell(\omega,t))\right)_n$ tend vers $\ell_r := \int_{\Omega\times\mathbb{T}^d}(F.F\circ\theta_\tau^r)\,d\omega\,dt$,d'après le théorème ergodique.

(II.35) permet d'utiliser le apssage à la limite précédent pour μ-p.t. ω :

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{r=1}^{n-1}\int_{\mathbb{T}^d} F(\omega,t)\frac{1}{n}\sum_{\ell=0}^{n-2} F(\theta_\tau^r(\omega,t))\,dt = \sum_{r=1}^{+\infty}\int_{\mathbb{T}^d}\ell_r < +\infty.$$

Ainsi pour μ-p.t. ω, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\|S_n(\omega,f)\|^2}{n} = \|f\|_2^2 + 2\sum_{r=1}^{+\infty} \ell_r = \lim_n \int\int \frac{|S_n(\omega,f)|^2}{n}\, dt\, d\mu(\omega).$$

□

4.2 Non nullité de la variance

Examinons plus en détails la condition de cobord. Par convention, $A_0^0(\omega) = Id$. Pour $j,p \in \mathbb{Z}^d$, notons $D(j,p)$ l'ensemble $\{k \geq 0 : A_0^k(\omega)j = p\}$ et $c(j,p,\omega) = \#\left\{k : A_0^k(\omega)j = p\right\}$. Nous allons utiliser le lemme élémentaire suivant :

Lemme 4.5. *SoitJ un sous-ensemble fini de $\mathbb{Z}_*^d$. Sous la condition 4.2, il existe M tel que,*

$$\forall p \in \mathbb{Z}^d, \forall j \in J,\ \#\{k : A_1^k(\omega)j = p\} \leq M. \tag{II.36}$$

<u>Preuve</u> Fixons $j \in J$, et soit $k_1 := \inf\{k \in D(j,p)\}$. Si k_2 appartient à $D(j,p)$ avec $k_2 > k_1$, alors $A_1^{k_2}(\omega)j = p = A_1^{k_1}(\omega)j$, de sorte que : $A_{k_1+1}^{k_2}(\omega)j = j$. D'après la condition 4.2, cela implique que le nombre de tels k_2 est fini, et borné indépendamment de p. Comme J est fini, on obtient (II.36). □

Proposition 4.6. *Supposons vérifiée la condition 4.2. Soit f polynôme trigonométrique de $L^2(\mathbb{T}^d)$. S'il existe $g \in L^2(\Omega \times \mathbb{T}^d)$ telle que $\int g d\nu = 0$ et $f = g - g \circ \theta_\tau$, alors g est aussi un polynôme trigonométrique.*

<u>Preuve</u> Soit $f = \sum_{j\in J} f_j \chi_j$, où J est un sous-ensemble fini de $\mathbb{Z}^d$. Soit $g \in L^2$ telle que $\int g\, d\nu = 0$ et $f(t) = g(\theta\omega, \tau(\omega)t) - g(\omega,t)$.

En utilisant la relation de cobord, nous avons $\sum_{k=0}^{N-1}(1-\frac{k}{N})f\circ\theta_\tau^k = g - \frac{1}{N}\sum_1^N g\circ\theta_\tau^k$. Comme g appartient à L^2, par ergodiqueité, on obtient la convergence en norme L^2

$$g = \lim_N \sum_{k=0}^{N-1}(1-\frac{k}{N})f\circ\theta_\tau^k.$$

De plus les sommes $\sum_{k=0}^{N-1}(1-\frac{k}{N})f\circ\theta_\tau^k$ sont bornées en norme $L^2(\nu)$ et on a :

$$\sum_{k=0}^{N-1}(1-\frac{k}{N})f\circ\theta_\tau^k = \sum_{p\in\mathbb{Z}^d}\sum_{k=1}^{N}[\sum_{j\,:\,A_0^k(\omega)j=p}(1-\frac{k}{N})\ f_j]\chi_p, \tag{II.37}$$

avec $\sup_N \sum_{p\in\mathbb{Z}^d}\ (\sum_{k=1}^N\ [\sum_{j\,:\,A_0^k(\omega)j=p}(1-\frac{k}{N})\ f_j])^2 < \infty$ pour p.t. ω.

On peut donc passer à la limite lorsque N tend vers $+\infty$ dans (II.37) pour obtenir :

$$g(\omega,.) = \sum_{p\in\mathbb{Z}^d}[\sum_{j\,:\exists k\geq 1:\,A_0^k(\omega)j=p} f_j]\ \chi_p = \sum_{p\in\mathbb{Z}^d}[\sum_{j\in J} c(j,p,\omega)\ f_j]\ \chi_p.$$

Pour tout p, comme J est fini et comme $c(j,p,\omega)$ prend des valeurs entières bornées d'après (II.36), les quantités $(|\sum_{j\in J} c(j,m,\omega)f_j|)_{m\in\mathbb{Z}^d}$ ne peuvent prendre qu'un nombre fini de valeurs distinctes. Notons V l'ensemble de ces valeurs.

Comme $g \in L^2(\nu)$, $g(\omega,.)$ est de carré intégrable par rapport à la mesure λ pour presque tout ω. Notons $\delta > 0$ un minorant de $V \setminus \{0\}$. On a $\delta^2 \#\{m \in \mathbb{Z}^d : \sum_{j\in J} c(j,m,\omega)f_j \neq 0\} \leq \|g(\omega,.)\|_2^2$, de sorte que le cardinal est fini pour presque tout ω. Ceci montre que g est un polynôme trigonométrique. $\square$

Corollaire 4.7. *Si f est un cobord à coefficients de Fourier positifs, alors f est constante.*

<u>Preuve</u> En utilisant le fait que les $c(j,m,\omega)$ sont des entiers positifs ou nuls, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\|g(\omega,.)\|_2^2 &= \sum_m \left(\sum_{j\in J} c(j,m,\omega)f_j\right)^2 \geq \sum_m \left(\sum_{j\in J} c(j,m,\omega)f_j^2\right)\\ &\geq \sum_{j\in J}\left(\sum_m c(j,m,\omega)\right) f_j^2.\end{aligned}$$

Pour $j \neq 0$, on a $\sum_m c(j,m,\omega) = +\infty$, donc nécessairement $f_j = 0$. $\square$

Les résultats précédents permettent ainsi d'établir un TCL "quenched" (i.e. pour presque tout ω) dans le cas stationnaire ergodique pour des matrices dans $SL(2,\mathbb{Z})$ positives, avec pour les polynômes trigonométriques un critère de non nullité de la variance (qui est effectif quand les coefficients de Fourier sont positifs).

5 Exemples I

5.1 Cas de $SL(2,\mathbb{Z}^+)$

Dans le cas de matrices A et B à coefficients positifs, les conditions 3.1 et 2.1 sont satisfaites, si la propriété suivante (sur l'entrée des vecteurs à coefficents entiers dans le cône des vecteurs positifs sous l'action des produits $A_\ell ... A_{\ell+r}$) est vérifiée :

Propriété 5.1. *Il existe une constante c telle que*

$$\forall p \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\},\ A_\ell^{\ell+r} p \in \mathbb{R}_+^d, \forall r \geq c \ln \|p\|,\ \forall \ell \geq 1. \tag{II.38}$$

Nous allons étudier le comportement des produits de matrices 2×2 prises dans $\{A,B\}$ à coefficients strictement positifs entiers et montrer que la propriété 5.1 est satisfaite.

Soit M une matrice 2×2 à coefficients >0, de valeurs propres réelles distinctes $r=r(M)s=s(M)$.

Soit

$$F=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

avec $ad-bc=1$, la matrice de conjugaison telle que $M=F\tilde{M}F^{-1}$, où $\tilde{M}$ est la matrice diagonale $\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}$.

Lemme 5.2. *La matrice M s'écrit :*

$$M=\begin{pmatrix} (r-s)u+s & -(r-s)v \\ (r-s)w & -(r-s)u+r \end{pmatrix},$$

avec $u=ad\in]0,1[$, $v=ab<0$, $w=cd>0$.

<u>Preuve</u> La positivité des coefficients de M implique $v<0$, $w>0$. En multipliant la relation $ad-bc=1$ par ad, nous obtenons $u^2-vw=u$, d'où $u=ad>0$. En multipliant la même relation par bc nous obtenons $adbc-(bc)^2=bc$, d'où $bc<0$, ce qui implique $1-ad>0$. $\square$

Posons $\lambda=\frac{w}{u}=\frac{u-1}{v}$. Nous avons $\lambda>0$ et la matrice M s'écrit

$$M=r\begin{pmatrix} u & \lambda^{-1}(1-u) \\ \lambda u & 1-u \end{pmatrix}+s\begin{pmatrix} 1-u & -\lambda^{-1}(1-u) \\ -\lambda u & u \end{pmatrix}.$$

Pour tout vecteur $X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, nous avons donc :

$$MX=r(ux+\lambda^{-1}(1-u)y)\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \end{pmatrix}+s(x-\lambda^{-1}y)\begin{pmatrix} 1-u \\ -\lambda u \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs propres de M sont $\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \end{pmatrix}$, de valeur propre r et $\begin{pmatrix} 1-u \\ -\lambda u \end{pmatrix}$, de valeur propre s.

Considérons maintenant deux matrices A et B dans $SL(2,\mathbb{Z})$ à coefficients >0 et prenons pour M un produit de n matrices à valeurs dans $\{A,B\}$. On a donc $s(M)=r(M)^{-1}$.

La matrice M envoie le cône $\mathbb{R}_+^2$ strictement dans lui-même :

$$M\mathbb{R}_+^2\subset A\mathbb{R}_+^2\bigcup B\mathbb{R}_+^2.$$

Il en résulte que la pente λ du vecteur propre positif de M est encadrée entre deux constantes ne dépendant que de A et B : il existe $\delta>0$ tel que $\delta\leq\lambda\leq\delta^{-1}$,

pour la pente $\lambda = \lambda(M)$ associée à M, produit quelconque de matrices prises dans $\{A, B\}$.

Comme $u \in]0,1[$, ceci entraîne que le vecteur $\begin{pmatrix} 1-u \\ -\lambda u \end{pmatrix}$ est borné indépendamment du choix de M produit de matrices prises dans $\{A, B\}$.

De plus, il existe des constante $C' > 0$ et $\gamma > 1$ telles que la valeur propre positive $r(M)$, pour M, produit de n matrices à valeurs dans $\{A, B\}$, vérifie :

$$r(M) \geq C'\gamma^n.$$

Ainsi la composante MX sur le vecteur propre contractant a une norme majorée par $s(M)C\|X\|$ et donc majorée par $CC'\gamma^{-n}\|X\|$, si M est un produit de n matrices.

Posons

$$\begin{aligned} \zeta &= ux + \lambda^{-1}(1-u)y \\ \varphi &= s(x - \lambda^{-1}y)(1-u) \\ \psi &= -s(x - \lambda^{-1}y)\lambda u. \end{aligned}$$

En changeant éventuellement X en $-X$, on peut supposer $\zeta \geq 0$.

Les composantes de MX sont $r\zeta + \varphi$ et $\lambda r\zeta + \psi$.

Soit $X \in \mathbb{Z}^2$ non nul. Le vecteur MX étant à coordonnées entières non nulles, nous avons :

$$r\zeta + |\varphi| + \lambda r\zeta + |\psi| \geq |r\zeta + \varphi| + |\lambda r\zeta + \psi| \geq 1.$$

D'où :

$$r\zeta \geq \frac{1}{1+\lambda} - \frac{1}{1+\lambda}(|\varphi| + |\psi|).$$

Pour avoir $r\zeta + \varphi > 0$ et $\lambda r\zeta + \psi > 0$, il suffit de vérifier :

$$1 \geq (2 + \lambda|\varphi| + \psi), \ \lambda \geq (1 + 2\lambda)|\psi| + \lambda|\varphi|.$$

Les quantités à droite étant en $C\gamma^{-n}\|X\|$, ceci démontre le lemme :

Lemme 5.3. *Si p est un vecteur non nul à coordonnées entière, il existe $n_0 \leq C \log \|p\|$ tel que $Mp \in \mathbb{R}^2_+$, pour tout produit de longueur $n \geq n_0$ de matrices à valeurs dans $\{A, B\}$.*

Notons le corollaire suivant de ce qui précède et de la proposition 2.6.

Corollaire 5.4. *Soit $(A_k)_{k\geq 1}$ une suite de matrices à valeurs dans $\{A, B\}$, où A et B sont deux matrices à coefficients > 0 dans $SL(2,\mathbb{Z}_+)$. Soient $\tau_k : x \to A_k x \bmod 1$ les automorphismes du tore correspond. Alors, pour presque tout x dans $\mathbb{T}^d$, la suite $(\tau_k ... \tau_1 x)_{k\geq 1}$ est équidistribuée dans $\mathbb{T}^d$.*

5.2 Une méthode de cônes

Pour obtenir en dimension 2 la propriété 5.1, nous pouvons également reprendre les résultats de Ayyer et Stenlund ([AS07a]). Leur méthode repose sur la propriété de cône suivante :

Définition 5.5. *(Propriété de cône) Un couple (A_0, A_1) d'automorphismes hyperboliques du tore possède la propriété de cône si les cônes suivants existent :*
Un cône de dilatation $\mathcal{E}$ tel que pour $i = 1, 2$:
- $A_i\mathcal{E} \subset \mathcal{E}$;
- il existe $\lambda_{\mathcal{E}} > 1$ tel que pour tout $x \in \mathcal{E}$, $|A_i x| \geq \lambda_{\mathcal{E}}|x|$;
- le sous-espace vectoriel instable $E_u^{A_i}$ ne se trouve pas le long du bord $\partial\mathcal{E}$: $E_u^{A_i} \cap \partial\mathcal{E} = \{0\}$.

Un cône de contraction $\mathcal{C}$ tel que $\mathcal{C} \cap \mathcal{E} = \{0\}$ et
- $A_i^{-1}\mathcal{C} \subset \mathcal{C}$;
- il existe $\lambda_{\mathcal{C}} < 1$ tel que pour tout $x \in \mathcal{C}$, $|A_i^{-1}x| \geq \lambda_{\mathcal{C}}^{-1}|x|$;
- le sous-espace vectoriel stable $E_s^{A_i}$ ne se trouve pas le long du bord $\partial\mathcal{C}$: $E_s^{A_i} \cap \partial\mathcal{C} = \{0\}$.

Cette propriété a plusieurs implications, dont l'une, appelée (39) dans [AS07a], est analogue à la propriété 5.1.

En particulier, lorsque A et B sont deux matrices hyperboliques de $SL(2, \mathbb{Z}^+)$, on vérifie immédiatement la propriété de cône (définition 5.5), en posant $\mathcal{E} = {\mathbb{R}_+^*}^2 \cup {\mathbb{R}_-^*}^2$ et $\mathcal{C} = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_- \cup \mathbb{R}_- \times \mathbb{R}_+$.

Comme la propriété de cône (définition 5.5) est vérifiée pour un couple si et seulement si elle est vérifiée pour le couple de ses inverses (cf. remarque 1 de [AS07a]), on en déduit que pour tout couple (A, B) de matrices de $SL(2, \mathbb{Z})$, ayant des coefficients diagonaux de signe opposé des coefficients non-diagonaux, la propriété de cône 5.5 est vérifiée.

5.3 Cas de faibles perturbations

Etant donnée une matrice hyperbolique A, il s'agit de vérifier que l'on peut construire des cônes de contraction et de dilatation, contenant les directions propres de A, tels que pour toute matrice B suffisamment proche (pour une norme matricielle donnée) de A, la propriété de cône (définition 5.5) soit vérifiée.

Notion de proximité

Notations : On considère une matrice C appartenant à $SL(2, \mathbb{Z})$, possédant deux valeurs propres $\lambda_C, \lambda_C^{-1}$, avec $\lambda_C > 1 > \lambda_C^{-1}$. On note E_u^C le sous-espace vectoriel associé à la valeur propre λ_C, et E_s^C le sous-espace vectoriel associé à

la valeur propre λ_C^{-1}.
On note $|\cdot|_2$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^2$.
On note $\pi_{u,C}$ la projection sur E_u^C parallèlement à E_s^C, et $\pi_{s,C} = Id - \pi_{u,C}$.
On note (e_u^C, e_s^C) une base de vecteurs propres unitaires associée aux valeurs propres $(\lambda_C, \lambda_C^{-1})$.

On définit la norme $|\cdot|_C$ par la formule suivante, pour $x \in \mathbb{R}^2$:

$$|x_u e_u^C + x_s e_s^C|_C = |x_u| + |x_s|. \tag{II.39}$$

L'inégalité triangulaire, l'homogénéité et la séparation sont vérifiées par $|\cdot|_C$, il s'agit donc d'une norme.

Condition de "ρ-proximité"

Définition 5.6. *Considérons deux matrices A et B dans $SL(2,\mathbb{Z})$ hyperboliques. Soit $\rho \in]0,1[$. On dit que B est "ρ-proche" de A lorsque :*

1. *La matrice de passage de (e_u^B, e_s^B) à (e_u^A, e_s^A), notée Q, est telle que :*

$$\begin{cases} |q_{1,1}| \in]1-\frac{\rho}{2}, 1+\frac{\rho}{2}[; \\ |q_{1,2}| \in [0, \frac{\rho}{2}[, \quad |q_{2,1}| \in [0, \frac{\rho}{2}[\\ |q_{2,2}| \in]1-\frac{\rho}{2}, 1+\frac{\rho}{2}[. \end{cases}$$

On dit que A et B sont "ρ-proches" lorsqu'en outre les coefficients de Q^{-1} vérifient les mêmes inégalités.

Le premier point impose aux directions dilatantes et contractantes d'être proches. Le second assure un contrôle des projections des vecteurs proches des directions dilatantes. Remarquons, en utilisant la formule $Q^{-1} = (\det Q)^{-1}(\mathrm{Com}\ Q)^\top$, que les coefficients de Q^{-1} vérifient des inégalités du même type, mais pour rendre cette propriété réflexive, il est nécessaire d'imposer les mêmes inégalités aux coefficients de Q^{-1}.

Lemme 5.7. *Soient $\rho \in]0,1[$, A et B telles que B est ρ-proche de A. Les normes $|\cdot|_A$ et $|\cdot|_B$ vérifient :*

$$(1+\rho)^{-1}|\pi_{u,A}(\cdot)|_B \leq |\pi_{u,A}(\cdot)|_A \leq (1+\rho)|\pi_{u,A}(\cdot)|_B.$$

$$(1+\rho)^{-1}|\pi_{u,B}(\cdot)|_A \leq |\pi_{u,B}(\cdot)|_B \leq (1+\rho)|\pi_{u,B}(\cdot)|_A.$$

<u>Preuve</u> On a : $e_u^A = Qe_u^B$. Ainsi :

$$|e_u^A|_B = |\pi_{u,B}(e_u^A) + \pi_{s,B}(e_u^A)|_B = |\pi_{u,B}(e_u^A)|_B + |\pi_{s,B}(e_u^A)|_B \leq (1+\rho)|e_u^A|_2.$$

Soit $x = x_1 e_1^A$, pour $x_1 \in \mathbb{R}$. Rappelons que les vecteurs propres sont choisis unitaires. Par inégalité triangulaire, on obtient :

$$|x|_B \leq |x_u||e_u^A|_B \leq |x_u|(1+\rho) \leq (1+\rho)|x|_A.$$

On en déduit le résultat en échangeant les rôles de A et B. $\square$

Métrique hilbertienne

Définitions 5.8. *Soit K un cône convexe fermé de $\mathbb{R}^d$, et H un hyperplan de $\mathbb{R}^d$. Si x et y sont deux éléments distincts de $K \cap H$, l'ensemble des réels r tels que $rx + (1-r)y$ appartient à K est un intervalle $[a(x,y), b(x,y)]$. Notons $M(x,y)$ et $N(x,y)$ les deux réels de l'intervalle $[1, +\infty]$ tels que :*

$$a(x,y) = \frac{1}{1 - N(x,y)};\ b(x,y) = \frac{M(x,y)}{M(x,y) - 1}.$$

Notons également :

$$h_0(x,y) = a(x,y)x + (1 - a(x,y))y;\ h_1(x,y) = b(x,y)x + (1 - b(x,y))y.$$

On appelle distance de Hilbert, l'application

$$\begin{aligned} \theta_K :\ & \mathbb{R}_*^d \times \mathbb{R}_*^d \to \mathbb{R}^+ \\ & (x,y) \mapsto \ln(M(x,y)N(x,y)). \end{aligned}$$

θ_K est une pseudo-métrique, pouvant être infinie.

On définit également :

$$\kappa = \max_{(x,y)\in K,\ M\in\{A,B\}} \left\{ \tanh\left(\frac{1}{4}\theta_K(Mh_0(x,y), Mh_1(x,y)) \right) \right\}.$$

On montre alors (c.f. [FS88]) que pour tous $x, y \in K$, on a les inégalités :

$$\theta_K(Ax, Ay) \leq \kappa\theta_K(x,y). \tag{II.40}$$

$$\theta_K(Bx, By) \leq \kappa\theta_K(x,y). \tag{II.41}$$

Remarquons que pour un cône K fermé, lorsque $K \setminus \{0\}$ est envoyé par A et B dans son intérieur, A et B contractent strictement la métrique θ_K du facteur $\kappa < 1$. Dans le cas où K fermé est envoyé par A et B dans l'intérieur (origine exceptée) de $-K$, A et B contractent la métrique hilbertienne associée à $-K$ et $-H$, que l'on note encore θ_K.

Cônes de dilatation et de contraction

Soient A et B deux matrices à coefficients entiers.

Notation Pour $\eta > 0$, introduisons le sous-ensemble homogène :

$$C_u(A,\eta) = \left\{ x \in \mathbb{R}^d : |\pi_{s,A}(x)|_A \leq \eta|\pi_{u,A}(x)|_A \right\}. \tag{II.42}$$

Ainsi, $x \in C_u(A,\eta)$ si et seulement si $|x_s| \leq \eta|x_u|$.

Condition 5.9. *On dit que A et B vérifient la condition de "C_u-invariance" lorsqu'il existe un $\eta > 0$ tel que $C_u(A, \eta)$ est envoyé, par A ou B, strictement dans son intérieur (origine exceptée).*

La proposition suivante établit une condition suffisante de C_u-invariance.

Proposition 5.10. *Soit $A \in SL(2, \mathbb{Z})$ hyperbolique. Soit $\eta > 0$ tel que $C_u(A, \eta)$ soit un cône de dilatation pour A, au sens de (5.5). Il existe $\rho > 0$ tel que, si $B \in SL(2, \mathbb{Z})$ est hyperbolique, ρ-proche de A, alors il existe $\kappa < 1$ tel que $AC_u(A, \eta) \subset C_u(A, \kappa\eta)$, et $BC_u(A, \eta) \subset C_u(A, \kappa\eta)$. Ainsi A et B vérifient la condition 5.9 de C_u-invariance.*

Preuve Elle repose sur trois lemmes.

Lemme 5.11. *On se place sous les hypothèses de la proposition 5.10. Alors il existe $0 < \kappa_1 < 1$ tel que*

$$A(C_u(A, \eta)) \subset C_u(A, \kappa_1\eta) \text{ et } B(C_u(B, \eta)) \subset C_u(B, \kappa_1\eta).$$

De plus, pour tout $z \in C_u(A, \eta)$, on a :

$$|Az|_A \geq \lambda_A(1 + \eta)^{-1}|z|_A.$$

Preuve Soit $z \in C_u(A, \eta)$. Comme $|\pi_{s,A}z|_A \leq \eta|\pi_{u,A}z|_A$, on déduit :

$$|\pi_{u,A}z|_A \geq (1 + \eta)^{-1}|z|_A.$$

Nous avons :

$$\begin{aligned} |\pi_{u,A}(Az)|_A &= |A\pi_{u,A}z|_A \geq \lambda_A|\pi_{u,A}z|_A \\ |\pi_{s,A}(Az)|_A &= |A\pi_{s,A}z|_A \leq \lambda'_A|\pi_{s,A}z|_A. \end{aligned}$$

Donc

$$AC_u(A, \eta) \subset C_u(A, \lambda'_A\lambda_A^{-1}\eta).$$

□

Notons : $\psi(\eta, \rho) := \frac{(1+\rho)\eta+\rho/2}{1-\rho/2-\eta\rho/2}$. Pour tout $\eta > 0$, nous avons : $\lim_{\rho\to 0} \psi(\eta, \rho) = \eta$.

Le lemme suivant précise les inclusions relatives de tels sous-espaces homogènes (les plus dilatants) sous l'action de A et B.

Dans les deux lemmes suivants, on considère un réel $\rho > 0$ et deux matrices $A, B \in SL_d(\mathbb{Z})$, ρ-proches.

Lemme 5.12. *Pour tout $\eta > 0$, on a les inclusions :*

$$C_u(B, \eta) \subset C_u\left(A, \psi(\eta, \rho)\right) \text{ et } C_u(A, \eta) \subset C_u\left(B, \psi(\eta, \rho)\right).$$

Preuve Soit $x \in C_u(A,\eta)$. En utilisant la matrice de passage Q, on a :

$$\begin{aligned}
|\pi_{s,B}(x)|_B &= |\pi_{s,B}(\pi_{s,A}x) + \pi_{s,B}(\pi_{u,A}x)|_B \\
&\leq |\pi_{s,B}(\pi_{s,A}x)|_B + |\pi_{s,B}(\pi_{u,A}x)|_B \\
&\leq |q_{2,2}||\pi_{s,A}x|_A + \frac{\rho}{2}|\pi_{u,A}x|_A \\
&\leq ((1+\rho)\eta + \frac{\rho}{2})|\pi_{u,A}x|_A.
\end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}
|\pi_{u,B}(x)|_B &= |\pi_{u,B}(\pi_{u,A}x) + \pi_{u,B}(\pi_{s,A}x)|_B \\
&\geq |\pi_{u,B}(\pi_{u,A}x)|_B - |\pi_{u,B}(\pi_{s,A}x)|_B \\
&\geq (1-\frac{\rho}{2})|\pi_{u,A}x|_A - \frac{\rho}{2}|(\pi_{s,A}x)|_A \\
&\geq (1-\frac{\rho}{2}-\frac{\rho}{2}\eta)|(\pi_{u,A}x)|_A.
\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$|\pi_{s,B}(x)|_B \leq \psi(\eta,\rho)|\pi_{u,B}(x)|_B.$$

On montre de même la seconde inclusion. □

On peut alors préciser l'action de B sur ces sous-espaces homogènes.

Lemme 5.13. *Sous les hypothèses de la proposition 5.10, pour $\kappa_1 < 1$ donné par le lemme 5.11, nous avons :*

$$B(C_u(A,\eta)) \subset C_u\left(A, \psi(\kappa_1\psi(\eta,\rho),\rho)\right)$$

et pour tout $z \in C_u(A,\eta)$,

$$|Bz|_B \geq \left((1-\rho/2-\eta\rho/2)\lambda_B - ((1+\rho)\eta+\rho/2)\lambda_B^{-1}\right)|z|_A.$$

Preuve D'après le lemme 5.12, nous avons : $C_u(A,\eta) \subset C_u\left(B,\psi(\eta,\rho)\right)$. Il en résulte :

$$\begin{aligned}
B(C_u(A,\eta)) &\subset B(C_u\left(B,\psi(\eta,\rho)\right)) \\
&\subset C_u\left(B, \frac{\lambda_B^{-1}}{\lambda_B}\psi(\eta,\rho)\right) \\
&\subset C_u\left(A, \psi(\frac{\lambda_B^{-1}}{\lambda_B}\psi(\eta,\rho),\rho)\right).
\end{aligned}$$

Soit $z \in C_u(A,\eta)$.

$$\begin{aligned}
|Bz|_B &\geq |B\pi_{u,B}z|_B - |B\pi_{E_B}z|_B \\
&\geq \lambda_B|\pi_{u,B}z|_B - \lambda_B^{-1}|\pi_{E_B}z|_B \\
&\geq \left((1-\rho/2-\eta\rho/2)\lambda_B - \lambda_B^{-1}((1+\rho)\eta+\rho/2)\right)|z|_A. \quad \square
\end{aligned}$$

On peut alors terminer la preuve de la proposition 5.10.

Posons $D_u = \left\{x \in C_u(A,\eta),\, x_1^A \geq 0\right\}$. L'image de $D_u \setminus \{0\}$ par A ou par B est strictement incluse dans $D_u \cup -D_u$. Il s'agit bien d'un sous-ensemble homogène, stable par combinaison convexe.

Notons θ_D la métrique de Hilbert associée à un hyperplan H et $\kappa < 1$ le facteur de contraction par A et B.

Comme AD_u est un fermé inclus dans l'intérieur de D_u, il existe $C < +\infty$ tel que :

$$\sup\left\{\theta_{D_u}(u,v) : u, v \in AD_u\right\} \leq C.$$

Ainsi,

$$\tanh\left(\frac{1}{4}\theta_{D_u}(Ah_0(x,y), Ah_1(x,y))\right) \leq \tanh\left(\frac{C}{4}\right) < 1.$$

En procédant de même pour BD_u, on montre que $\kappa < 1$. Ainsi, le sous-ensemble D_u est invariant par A et B, et est strictement contracté pour θ_{D_u}.

En outre, les inégalités des lemmes 5.11 et 5.13 assurent la croissance exponentielle des $|\cdot|_A$, sous l'action de (A_i). $\square$

Cône de contraction

Notation Pour $\eta > 0$, introduisons le sous-ensemble homogène :

$$C_s(A,\eta) = \left\{x \in \mathbb{R}^d : |\pi_{u,A}(x)|_A \leq \eta |\pi_{s,A}(x)|_A\right\}. \tag{II.43}$$

Ainsi, $x \in C_s(A,\eta)$ si et seulement si $|x_u| \leq \eta |x_s|$.

Condition 5.14. *On dit que A et B vérifient la condition de "C_s-invariance" lorsqu'il existe un $\eta > 0$ tel que $C_u(A,\eta)$ est envoyé strictement dans son intérieur (origine exceptée), par A^{-1} ou par B^{-1}.*

La proposition suivante s'établit comme la proposition 5.10 :

Proposition 5.15. *Soit $A \in SL(2,\mathbb{Z})$ hyperbolique. Soit $\eta > 0$ tel que $C_s(A,\eta)$ soit un sous-ensemble de contraction pour A, au sens de (5.5). Il existe $\rho > 0$ tel que, si $B \in SL(2,\mathbb{Z})$ est hyperbolique, ρ-proche de A, alors il existe $\kappa < 1$ tel que $A^{-1}C_s(A,\eta) \subset C_s(A,\kappa\eta)$, et $B^{-1}C_s(A,\eta) \subset C_s(A,\kappa\eta)$. Ainsi A et B vérifient la condition 5.14 de C_s-invariance.*

Temps d'atteinte logarithmique d'un cône de dilatation commune

On déduit de ce qui précède que pour une matrice $A \in SL(2,\mathbb{Z})$ hyperbolique fixée, et $\eta > 0$ fixé (et tel que $C_u(A,\eta)$ et $C_s(A,\eta)$ sont disjoints), il existe un voisinage de A dans l'ensemble des matrices hyperboliques de $SL(2,\mathbb{Z})$, telle que pour toute matrice B dans ce voisinage , la propriété de cône (définition 5.5) est vérifiée pour le couple (A,B), c.f. figure II.1. On a donc montré :

Proposition 5.16. *Soit $A \in SL(2,\mathbb{Z})$ hyperbolique. Soit $\eta > 0$ tel que $C_s(A,\eta)$ soit un sous-ensemble de contraction pour A, au sens de (5.5). Il existe $\rho > 0$ tel que, si $B \in SL(2,\mathbb{Z})$ est hyperbolique, ρ-proche de A, alors le couple (A,B) vérifie la propriété de cône (définition 5.5).*

Un exemple sans propriété de cône

Donnons un exemple de deux endomorphismes A et B ayant une direction dilatante, telle que l'action d'une suite bien choisie (A_1^p) sur un entier $m \in \mathbb{Z}^d$ soit périodique. Dans ce cas, la propriété de cône (définition 5.5) n'est pas vérifiée.

Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, et $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Comme on peut s'en convaincre sur la figure II.2 faisant apparaître les directions stables et instables de ces deux endomorphismes, il existe un secteur angulaire du plan pour lequel A et B ont des comportements très différents en faisant varier les abscisses et les ordonnées en sens opposé. Exhibons une suite (A_1^p) agissant périodiquement sur un entier m situé dans ce secteur angulaire. Soit $m = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Considérons la suite d'endomorphismes $(A_i)_{i\geq 1}$ définie par : $A_i = A$ si i est impair, $A_i = B$ sinon. On a $BAm = m$, donc la suite $(A_1^p m)_{p\geq 1}$, où $A_1^p = \prod_{i=1}^{p} A_i$, est 2-périodique.

Interprétation en terme de condition d'angle

Notations L'hyperplan E_s^A partitionne l'espace en deux demi-espaces, l'un fermé P_A^+ contenant e_u^A, l'autre ouvert P_A^- contenant $-e_u^A$. L'hyperplan E_s^B partitionne l'espace en deux demi-espaces, l'un P_B^+ contenant e_u^B, l'autre P_A^- contenant $-e_u^B$. On peut alors définir quatre secteurs angulaires $S_1 = P_A^+ \bigcap P_B^+ \supset \{e_u^A\}, S_2 = P_A^- \bigcap P_B^- \supset \{-e_u^A\}, S_3 = P_A^+ \bigcap P_B^-, S_4 = P_A^- \bigcap P_B^+$.

La condition suivante assure la décroissance stricte des normes à chaque itération de A ou B dans les secteurs S_3 et S_4 :

Condition 5.17. *On dit que A et B vérifient la condition "d'angle contractant" s'il existe $\kappa < 1$ tel que pour tout $x \in S_3$, on ait :*

$$\begin{array}{lll} Ax \in S_3 & \Rightarrow & |Ax|_A \leq \kappa |x|_A \text{ et } |Ax|_B \leq \kappa |x|_B; \\ Bx \in S_3 & \Rightarrow & |Bx|_A \leq \kappa |x|_A \text{ et } |Bx|_B \leq \kappa |x|_B. \end{array}$$

Exemple 5.18. Pour $A = \begin{pmatrix} 11 & 10 \\ 12 & 11 \end{pmatrix}$, et $B = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$, on peut expliciter les calculs avec Maple. Pour A, on calcule (de manière approchée) les valeurs propres $(\lambda_A, \lambda_A^{-1}) = (21.95, 0.046)$ et les vecteurs propres associés $(e_u^A, e_s^A) = \left(\begin{pmatrix} 0.67 \\ 0.74 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -0.67 \\ 0.74 \end{pmatrix} \right)$.

Pour B, on calcule (de manière approchée) les valeurs propres $(\lambda_B, \lambda_B^{-1}) = (11.91, 0.084)$ et les vecteurs propres associés $(e_u^B, e_s^B) = \left(\begin{pmatrix} -0.645 \\ 0.764 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.645 \\ 0.764 \end{pmatrix}\right)$.

On en déduit que :

$$\begin{aligned} |Ae_s^A|_A &\approx 0.0455488|e_s^A|_A \\ |Ae_s^B|_A &\approx 0.8581489|e_s^B|_A \\ |Be_s^B|_B &\approx 0.0839202|e_s^B|_A \\ |Be_s^A|_B &\approx 0.5227744|e_s^A|_B. \end{aligned}$$

Cela nous assure (nous sommes en dimension 2) que A et B vérifient bien la condition 5.17, en prenant $\kappa = 0.8581490$.

Exemple 5.19. Pour $A = \begin{pmatrix} -16 & 17 \\ 15 & -16 \end{pmatrix}$, et $B = \begin{pmatrix} -15 & 16 \\ 14 & -15 \end{pmatrix}$, on peut expliciter les calculs avec Maple. Pour A, on calcule (de manière approchée) les valeurs propres $(\lambda_A, \lambda_A^{-1}) = (-31.97, -0.031)$ et les vecteurs propres associés $(e_u^A, e_s^A) = \left(\begin{pmatrix} 0.73 \\ 0.68 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -0.729 \\ 0.685 \end{pmatrix}\right)$. Pour B, on calcule (de manière approchée) les valeurs propres $(\lambda_B, \lambda_B^{-1}) = (-29.97, -0.033)$ et les vecteurs propres associés $(e_u^B, e_s^B) = \left(\begin{pmatrix} 0.730 \\ 0.683 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -0.730 \\ 0.683 \end{pmatrix}\right)$.

On en déduit que :

$$\begin{aligned} |Ae_s^A|_A &\approx 0.03128|e_s^A|_A \\ |Ae_s^B|_A &\approx 0.09795|e_s^B|_A \\ |Be_s^B|_B &\approx 0.09608|e_s^B|_A \\ |Be_s^A|_B &\approx 0.09586|e_s^A|_B. \end{aligned}$$

Cela nous assure (nous sommes en dimension 2) que A et B vérifient bien la condition 5.17, en prenant $\kappa = 0.09795$.

Lemme 5.20. *Soient $A, B \in SL(d, \mathbb{Z})$ deux matrices hyperboliques. Notons Q la matrice de passage de (e_u^A, e_s^A) à (e_u^B, e_s^B). Il existe $\varepsilon > 0$ tel que, si $|q_{1,2}| \leq \varepsilon$ et $|q_{2,1}| \leq \varepsilon$, alors A et B vérifient la propriété de cône (définition 5.5).*

<u>Preuve</u> Remarquons que S_3 se rapproche de $< e_s^A >$ lorsque ε tend vers 0. On en déduit qu'il existe $\eta = \eta(\varepsilon)$ vérifiant $\eta(\varepsilon) \longrightarrow [\varepsilon \to 0]0$, tel que pour tout $x = x_u e_u^A + x_s e_s^A \in S_3$, $|x_u| \leq \eta |x_s|$.
Comme $Ax = x_u A e_u^A + x_s A e_s^A$, on en déduit l'existence d'un réel $\kappa_1 < 1$, tel que pour ε suffisamment petit, on a :

$$|Ax|_A \leq \kappa_1 |x|_A.$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}
Bx &= x_u B e_u^A + x_s B e_s^A \\
&= x_u B\left(\pi_{s,B}(e_u^A) + \pi_{u,B}(e_u^A)\right) + x_s B\left(\pi_{s,B}(e_s^A) + \pi_{u,B}(e_s^A)\right) \\
&= x_u \pi_{s,A}\left(B(\pi_{E_B}(e_u^A)) + B(\pi_{u,B}(e_u^A))\right) + x_s \pi_{s,A}\left(B(\pi_{E_B}(e_s^A)) + B(\pi_{u,B}(e_s^A))\right) \\
&+ x_u \pi_{u,A}\left(B(\pi_{E_B}(e_u^A)) + B(\pi_{u,B}(e_u^A))\right) + x_s \pi_{u,A}\left(B(\pi_{E_B}(e_s^A)) + B(\pi_{u,B}(e_s^A))\right).
\end{aligned}$$

Lorsque ε tend vers 0, pour $i \geq 2$, $\pi_{E_B}(e_i^A)$ se rapproche de $< (e_i^B)_{2\leq i\leq d} >$. On en déduit l'existence d'un réel $\kappa_2 < 1$, tel que pour ε suffisamment petit, on a $|Bx|_A \leq \kappa_1 |x|_A$. On procède de même pour la norme $|\cdot|_B$. On en déduit alors le résultat. $\square$

Il s'agit bien là d'une condition d'angles entre $(< e_u^B >, < e_s^B >)$ et $(< e_u^B >, < e_s^B >)$: ces hyperplans se rapprochent si et seulement si $|q_{1,2}|$ et des $|q_{2,1}|$ tendent vers 0.

5.4 « Kicked systems »

Soit A une matrice hyperbolique $SL(2,\mathbb{Z})$ et (B_n) une suite dans $SL(2,\mathbb{Z})$ telle que la suite $(\text{trace}(B_n))$ est bornée. Soit $p \geq 1$ un entier fixé. Nous considérons la suite de transformations du tore $\mathbb{T}^2$ définie par :

$$\theta_n x = B_n A^p B_{n-1} A^p ... B_1 A^p x \text{ mod } 1. \tag{II.44}$$

L. Polterovich et Z. Rudnick ont appelé une suite de cette forme (II.44) un “kicked" système et ont défini le mélange stable (“stable mixing") pour A comme la propriété que, pour toute suite de "kicks" (B_k) avec trace bornée, il existe p_0 tel que la suite définie par (II.44) est mélangeante, pour tout $p \geq p_0$.

Ils ont montré ([PR04]) que A est stablement mélangeante si et seulement si A n'est pas conjuguée à son inverse. Leur résultat permet d'obtenir une condition de décorrélation exponentielle : Si f et g sont des fonctions höldériennes, il existe des constantes C et $0 < \kappa < 1$ telles que

$$|\langle f \circ \theta_n, g\rangle| \leq C\kappa^n, \ \forall n \geq 1.$$

Cec implique en particulier, pour f höldérienne la majoration, pour une constante C :

$$\|S_n f\|_2 \leq Cn.$$

Par contre la propriété de "séparation des fréquences" permettant d'appliquer la méthode de la section 3 nécessite des hypothèses supplémentaires.

6 Exemples II (Suites aléatoires indépendantes)

Soit $\mathcal{A}$ un ensemble fini de matrices $d \times d$ à coefficients entiers de déterminant ± 1. On suppose que le système $\mathcal{A}$ est totalement irréductible (cf. [GR89] pour cette notion) et qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^d$ dans laquelle chaque élément de $\mathcal{A}$ est à coefficients positifs. Nous appelons $\mathcal{C}$ le cône des vecteurs à coefficients positifs dans la base $\mathcal{B}$.

On munit $\mathcal{A}$ d'une probabilité p (chargeant tous les éléments de $\mathcal{A}$) et $\Omega = \mathcal{A}^{\mathbf{N}} = \{\omega = (\omega_n), \omega_n \in \mathcal{A}, \forall n \in \mathbb{N}\}$ de la mesure produit $p^{\otimes \mathbf{N}}$. Un élément ω de Ω étant donné, nous noterons $A_k(\omega)$ (ou plus simplement A_k) sa k-ième coordonnée.

Dans ce paragraphe nous allons montrer que, **pour presque toute suite** ω, l'action des produits $A_n(\omega) \dots A_1(\omega)$ sur le tore donne lieu à un théorème limite central. Nous donnons ainsi une preuve (dans un cas légèrement plus général et par une méthode différente) du théorème "quenched" (i.e. pour presque tout ω) de [AS07b]. En outre, nous obtenons une (petite) vitesse de convergence dans ce théorème.

La proposition suivante est une conséquence directe de l'invariance stricte de $\mathcal{C}$ par les matrices appartenant à $\mathcal{A}$.

Proposition 6.1. *Il existe $c > 0$ et $\gamma > 1$ tels que, pour tout n, pour tous $A_1, \dots, A_n$ éléments de $\mathcal{A}$, tout vecteur x appartenant à $\mathcal{C}$, on ait*

$$\|A_1 \dots A_n x\| \geq c\|A_1 \dots A_n\|\|x\| \geq c\gamma^n \|x\|.$$

De cette proposition on déduit la minoration suivante, valable pour tous $k, l \geq 1$ entiers :

$$\|A_1 \dots A_{k+l}\| \geq c^2 \|A_1 \dots A_k\| \|A_{k+1} \dots A_{k+l}\|.$$

Proposition 6.2. *Pour tout $M > 0$, il existe $L > 0$ tel que, pour presque tout ω, il existe un rang $N(\omega) < \infty$ tel que, pour tout k vecteur entier de norme inférieure à n^M,*

$$A_{n-[L \ln n]} \dots A_n k \in \pm\mathcal{C}, \ \forall n > N(\omega).$$

Dans la preuve de la proposition 6.2, nous utiliserons le lemme suivant :

Lemme 6.3. *Pour tout $M > 0$, la probabilité qu'il existe un vecteur entier k de norme inférieure à n^M tel que $A_1 \dots A_n k$ n'appartienne pas à $\pm\mathcal{C}$ est majorée par $C\xi^n$, pour un certain $0 < \xi < 1$.*

<u>Preuve</u> Les outils utilisés dans cette démonstration sont issus des travaux sur les produits de matrices aléatoires de Guivarc'h et Raugi (cf. [GR89], [Gui90]).

Il existe $0 < \alpha < 1$ tel que, pour tout vecteur y n'appartenant pas à $\pm\mathcal{C}$ et tout vecteur x non nul appartenant à $\cup_{A\in\mathcal{A}} A\mathcal{C}$,

$$\frac{|<x,y>|}{\|x\|\|y\|} \leq \alpha.$$

Pour tout $x \in \mathcal{C}$ non nul, tout ω, la suite de vecteurs

$$\frac{A_1(\omega)\dots A_n(\omega)(x)}{\|A_1(\omega)\dots A_n(\omega)(x)\|}$$

converge exponentiellement vite vers un vecteur unitaire $z(\omega)$ appartenant à $\cup_{A\in\mathcal{A}} A\mathcal{C}$. La loi ν de la variable aléatoire z satisfait des propriétés de régularité ([Gui90]). En particulier, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\sup_{x\in\mathbf{S}^{d-1}} \int_{\mathbf{S}^{d-1}} |<x,y>|^{-\delta} d\nu(y) < +\infty.$$

On en déduit immédiatement la majoration suivante : pour $x \in \mathbf{S}^{d-1}$ et $\epsilon > 0$,

$$\nu\{y \in \mathbf{S}^{d-1} \ / \ |<x,y>| < \epsilon\} \leq \left(\sup_{x\in\mathbf{S}^{d-1}} \int_{\mathbf{S}^{d-1}} |<x,y>|^{-\delta} d\nu(y)\right) \epsilon^{\delta}.$$

Écrivons $A_1(\omega)\dots A_n(\omega) = K_1^{(n)} D_n K_2^{(n)}(\omega)$ la décomposition polaire de $A_1(\omega)\dots A_n(\omega)$. La décomposition polaire n'est pas unique mais le défaut d'unicité n'est pas gênant pour les propriétés qui nous intéressent. La suite de vecteurs $K_1^{(n)} e_1$ converge exponentiellement vite vers $\pm z(\omega)$ (variable aléatoire de loi ν).

La suite ${}^tK_2^{(n)} e_1$ converge exponentiellement vite en loi vers une probabilité ν' (analogue de ν pour l'action à droite de Ω sur les vecteurs lignes. En effet l'action de $A_1(\omega)\dots A_n(\omega)$ à droite sur les vecteurs lignes ne donne pas lieu à une convergence en direction, mais la loi est la même que pour l'action de $A_n(\omega)\dots A_1(\omega)$ pour laquelle on a une convergence rapide en direction pour les vecteurs d'un cône déduit de $\mathcal{C}$. Il existe $0 < \beta < 1$ et $C > 0$ tels que, pour toute fonction lipschitzienne ϕ sur la sphère $\mathbf{S}^{d-1}$,

$$\left|\int \phi({}^tK_2^{(n)} e_1) d\mu(\omega) - \int_{\mathbf{S}^{d-1}} \phi(v) d\nu'(v)\right| \leq C\beta^n [\phi],$$

où $[\phi]$ désigne la quantité $\sup |\phi(x) - \phi(y)|/d(x,y)$.

Appelons $d_i^{(n)}$ les coefficients de la matrice diagonale D_n. Le théorème 5 de [Gui90] montre qu'il existe $C > 0$, $\zeta > 1$, $0 < \xi_0 < 1$ tels que, pour tout $i > 1$, si ω n'appartient pas à un ensemble $\mathcal{E}$ de mesure inférieure à $C\xi_0^n$, on a

$$|d_1^{(n)}| > C\zeta^n |d_i^{(n)}|.$$

Fixons un entier naturel n, un réel positif ϵ_n et x un vecteur tel que $| < x,^t K_2^{(n)} e_1 > | > \epsilon_n \|x\|$. L'écriture de x

$$x = \sum_i < x,^t K_2^{(n)} e_i >^t K_2^{(n)} e_i$$

dans la base orthonormée ${}^t K_2^{(n)} e_1, \ldots,^t K_2^{(n)} e_d$ permet d'exprimer $A_1(\omega) \ldots A_n(\omega) x$ sous la forme suivante

$$A_1(\omega) \ldots A_n(\omega) x = \sum_i < x,^t K_2^{(n)} e_i > K_1^{(n)} D_n K_2^{(n)t} K_2^{(n)} e_i,$$

soit

$$A_1(\omega) \ldots A_n(\omega) x = \sum_i < x,^t K_2^{(n)} e_i > d_i^{(n)} K_1^{(n)} e_i.$$

On peut alors facilement minorer le produit scalaire lorsque ω n'appartient pas à $\mathcal{E}$:

$$\begin{aligned} | < \frac{A_1(\omega) \ldots A_n(\omega)(x)}{\|A_1(\omega) \ldots A_n(\omega)(x)\|}, K_1^{(n)} e_1 > | &= \frac{| < x,^t K_2^{(n)} e_1 > d_1^{(n)} |}{\|A_1(\omega) \ldots A_n(\omega)(x)\|} \\ &\geq \frac{| < x,^t K_2^{(n)} e_1 > d_1^{(n)} |}{\sum_i | < x,^t K_2^{(n)} e_i > | |d_i^{(n)}|} \\ &\geq \frac{1}{\sum_i \frac{|<x,^t K_2^{(n)} e_i>|}{|<x,^t K_2^{(n)} e_1>|} \frac{|d_i^{(n)}|}{|d_1^{(n)}|}} \geq \frac{1}{1 + \frac{d-1}{C\zeta^n \epsilon_n}}. \end{aligned}$$

Soient $1 < \zeta' < \zeta$. De la minoration précédente on déduit que, pour tout $L > 0$, il existe un entier N tel que pour $n > N$, on a

$$| < \frac{A_1(\omega) \ldots A_n(\omega)(x)}{\|A_1(\omega) \ldots A_n(\omega)(x)\|}, K_1^{(n)} e_1 > | \geq \alpha' > \alpha,$$

dès que $| < x,^t K_2^{(n)} e_1 > | > \zeta'^{-n} \|x\|$. Comme $K_1^{(n)} e_1$ converge vers $\pm z(\omega)$ appartenant à $\cup_{A \in \mathcal{A}} A(\pm \mathcal{C})$ et que tout élément y n'appartenant pas à $\pm \mathcal{C}$ vérifie $| < y, z(\omega) > | \leq \alpha \|y\|$, on en déduit que, pour tout $L > 0$, il existe N tel que, pour $n > N$, on a $A_1(\omega) \ldots A_n(\omega)(x)$ appartient à $\pm \mathcal{C}$ si $| < x,^t K_2^{(n)} e_1 > | > \zeta'^{-n} \|x\|$ et si ω n'appartient pas à $\mathcal{E}$. Un vecteur x étant donné, étudions maintenant la probabilité

$$\mu\{\omega \ / \ | < x,^t K_2^{(n)} e_1 > | < \zeta'^{-n} \|x\|\}.$$

On peut considérer sans perte de généralité que x appartient à la sphère $\mathbf{S}^{d-1}$. Considérons une suite de fonctions lipschitziennes ϕ_n sur la sphère telles que ϕ_n vaille 1 sur l'ensemble $\{y : | < x, y > | < \zeta'^{-n}\}$, 0 sur l'ensemble $\{y : | < x, y > | > 2\zeta'^{-n}\}$, et soit telle que $[\phi_n] < C\zeta'^n$. On a :

$$\begin{aligned} & \mu\{\omega \ / \ | < x,^t K_2^{(n)} e_1 > | < \zeta'^{-n} \|x\|\} \\ \leq & \int \phi_n({}^t K_2^{(n)} e_1) d\mu(\omega) \leq \int_{\mathbf{S}^{d-1}} \phi_n(v) d\nu'(v) + C\beta^n \zeta'^n \\ \leq & \ \nu'\{v \ / \ | < x, v > | < 2\zeta'^{-n}\} + C\beta^n \zeta'^n \leq (2\zeta'^{-n})^\delta + C\beta^n \zeta'^n. \end{aligned}$$

La probabilité qu'il existe un vecteur k entier de norme inférieure à n^M tel que

$$|\langle k, {}^t K_2^{(n)} e_1\rangle| < \zeta'^{-n}\|k\|$$

est donc majorée par

$$n^{dM}((2\zeta'^{-n})^\delta + C\beta^n\zeta'^{-n}).$$

La probabilité qu'il existe un vecteur entier k de norme inférieure à n^M tel que le vecteur $A_1(\omega)\dots A_n(\omega)k$ n'appartienne pas à $\pm\mathcal{C}$ est donc majorée par $n^{dM}((2\zeta'^{-n})^\delta + C\beta^n\zeta'^{-n}) + C\xi_0^n$. Si ζ' est inférieur à β^{-1}, cette quantité est majorée par $C\xi^n$ pour un nombre ξ strictement compris entre 0 et 1. □

Preuve de la proposition 6.2 L'invariance de la probabilité μ par le décalage sur Ω assure que la probabilité qu'il existe un vecteur entier k de norme inférieure à n^M tel que $A_{n-[L\log n]}\dots A_n k$ n'appartienne pas à $\pm\mathcal{C}$ est majorée par $Cn^{L\log\xi}$. Pour L supérieur à $|\log\xi|^{-1}$, ces probabilités sont sommables. Le lemme de Borel-Cantelli assure donc que la probabilité de la limite supérieure des ensembles considérés est nulle. □

On démontre de la même façon les énoncés suivants.

Lemme 6.4. *Il existe $\chi > 1$ tel que la probabilité qu'il existe un vecteur entier k de norme inférieure à χ^n tel que $A_{[n/2]}\dots A_n k$ n'appartienne pas à $\pm\mathcal{C}$ est majorée par $C\xi^n$, pour un certain $0 < \xi < 1$.*

Proposition 6.5. *Il existe $\chi > 1$, tel que pour presque tout ω, à partir d'un certain rang, pour tout k vecteur entier de norme inférieure à χ^n*

$$A_{[n/2]}\dots A_n k \in \pm\mathcal{C}.$$

Rappelons que la norme de Hölder d'ordre α d'une fonction f höldérienne d'ordre α sur le tore est définie par

$$\|f\|_\alpha = \|f\|_\infty + \sup_{x\neq y}\frac{|f(x)-f(y)|}{d(x,y)^\alpha}.$$

Proposition 6.6. *Il existe une suite de polynômes trigonométriques (ϕ_n) telle que, pour tout n,*
- $\phi_n = \sum_{\|k\|<dn} c_k\, e^{2i\pi<k,.>}$ (ϕ_n est d'ordre inférieur à dn),
- il existe $C > 0$ tel que, pour toute fonction f höldérienne de ordre α sur le tore,

$$\|\phi_n * f - f\|_\infty < C\|f\|_\alpha n^{-\alpha}.$$

On peut prendre, par exemple, pour (ϕ_n) la suite des produits des noyaux de Fejer en chacune des coordonnées. Si l n'est pas entier, on désigne par ϕ_l le polynôme $\phi_{[l]}$.

Dans la suite nous considèrerons des fonctions höldériennes, i.e. höldériennes d'un certain ordre $\alpha \in]0,1]$, l'ordre α de la fonction apparaissant dans les preuves.

Corollaire 6.7. *Pour presque tout ω dans Ω, toutes fonctions f et g höldériennes sur le tore de moyenne nulle, il existe $C(\omega) < +\infty$ et $0 < \kappa < 1$ tels que :*

$$|\int_{\mathbf{T}^d} f(A_n^t(\omega)\dots A_1^t(\omega)x)\, g(x)\, dx\, d\mu(\omega)| \leq C(\omega)\kappa^n.$$

<u>Preuve</u> Donnons-nous un nombre $\eta > 1$ et, pour tout n, f_n et g_n deux polynômes trigonométriques de moyenne nulle de degrés inférieurs à η^n. D'après la proposition ci-dessus, si $\eta < \chi$, pour presque tout ω, $A_{[n/2]}\dots A_n(\omega)k \in \pm\mathcal{C}$. On a alors, d'après la proposition 6.1. et le fait que $A_{[n/2]}\dots A_n(\omega)k$ est un vecteur à coordonnées entières, pour tout k vecteur entier de norme inférieure à η^n,

$$\|A_1\dots A_n(\omega)k\| > C\gamma^{[n/2]}\|A_{[n/2]}\dots A_n(\omega)k\| \geq C\gamma^{[n/2]}.$$

Si $\eta < \gamma^{1/2}$, les polynômes $f_n(A_n^t(\omega)\dots A_1^t(\omega)\cdot)$ et g_n sont orthogonaux à partir d'un certain rang. Supposons que f et g soient toutes les deux höldériennes d'ordre $\alpha > 0$. Fixons un nombre $\eta < \min(\gamma^{1/2}, \chi)$. On a alors :

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbf{T}^d} f(A_n^t(\omega)\dots A_1^t(\omega)x)g(x)dxd\mu(\omega)\\
\leq\ & |< f(A_n^t(\omega)\dots A_1^t(\omega)\cdot), \phi_{\eta^n} * g - g >|\\
&+|< (f - \phi_{\eta^n} * f)(A_n^t(\omega)\dots A_1^t(\omega)\cdot), \phi_{\eta^n} * g >|\\
&+|< \phi_{\eta^n} * f(A_n^t(\omega)\dots A_1^t(\omega)\cdot), \phi_{\eta^n} * g >|\\
\leq\ & C\eta^{-n\alpha/3} + |< \phi_{\eta^n} * f(A_n^t(\omega)\dots A_1^t(\omega)\cdot), \phi_{\eta^n} * g >|
\end{aligned}$$

Or, pour presque tout ω, le terme $|< \phi_{\eta^n} * f(A_n^t\dots A_1^t(\omega)\cdot), \phi_{\eta^n} * g >|$ est nul à partir d'un certain rang. □

Corollaire 6.8. *Pour toutes fonctions f et g höldériennes sur le tore de moyenne nulle, il existe $C > 0$ et $0 < \kappa < 1$ tels que :*

$$|\int_\Omega \int_{\mathbf{T}^d} f(A_n^t(\omega)\dots A_1^t(\omega)x)\, g(x)\, dx\, d\mu(\omega)| \leq C\kappa^n.$$

<u>Preuve</u> Donnons-nous encore un nombre $\eta < \min(\gamma^{1/2}, \chi)$ et, pour tout n, f_n et g_n deux polynômes trigonométriques de moyenne nulle de degrés inférieurs à η^n. D'après le lemme 6.4., par un calcul identique à celui de la preuve précédente, on montre que, sauf si ω appartient à un ensemble $\mathcal{E}_n$ de mesure inférieure à $C\xi^n$, les polynômes $f_n(A_n^t(\omega)\dots A_1^t(\omega)\cdot)$ et g_n sont orthogonaux à partir d'un rang uniforme sur $\mathcal{E}_n^c$. On a alors

$$\begin{aligned}
&|\int_\Omega \int_{\mathbf{T}^d} f_n(A_n^t(\omega)\dots A_1^t(\omega)x)g_n(x)\, dx\, d\mu(\omega)|\\
&\leq |\int_{\mathcal{E}_n} \int_{\mathbf{T}^d} f_n(A_n^t(\omega)\dots A_1^t(\omega)x)g_n(x)dxd\mu(\omega)|\\
&\quad +|\int_{\mathcal{E}_n^c} \int_{\mathbf{T}^d} f_n(A_n^t(\omega)\dots A_1^t(\omega)x)g_n(x)dxd\mu(\omega)|\\
&\leq C\xi^n\|f_n\|_\infty\|g_n\|_\infty
\end{aligned}$$

On montre le corollaire pour les fonctions höldériennes en utilisant le même procédé d'approximation que dans la preuve précédente. □

Corollaire 6.9. *Pour presque tout ω dans Ω, pour toute fonction höldérienne f définie sur le tore, il existe $C(\omega) < \infty$ tel que*

$$\|\sum_{j=0}^{n-1} f(A_j^t(\omega)\dots A_1^t(\omega)\cdot)\|_2^2 \leq C(\omega)\, n \log n.$$

Preuve On utilise les mêmes idées que pour les deux autres corollaires. Pour tout n, il est possible d'approcher f par un polynôme trigonométrique de moyenne nulle de degré inférieur à une puissance n^M de n de telle façon que, pour tout ω, la suite des normes

$$\|\sum_{j=0}^{n-1}(f - f_n)(A_j^t(\omega)\dots A_1^t(\omega).)\|_2$$

soit bornée. Un calcul classique donne l'égalité

$$\|\sum_{j=0}^{n-1} f_n(A_j^t(\omega)\dots A_1^t(\omega)\|_2^2 = n\|f_n\|_2^2 + 2\sum_{0\leq l<m<n} \langle f_n(A_m^t(\omega)\dots A_{l+1}^t(\omega)\cdot), f_n\rangle.$$

La proposition 6.2. assure qu'il existe $L > 0$, tel que pour presque tout ω, pour tout vecteurs entier k de norme inférieure à n^M, pour m assez grand, $A_{m-[L\log n]}\dots A_m(\omega)k$ appartient à $\mathcal{C}$. Grâce à la proposition 6.1., on en déduit que, pour tout vecteurs entier k de norme inférieure à n^M, pour m assez grand, $\|A_{m-[L\log n]-[L'\log n]}\dots A_m(\omega)k\|$ est supérieure à $C\gamma^{[L'\log n]}$. Si $L'\log\gamma > M$, les polynômes $f_n(A_m^t\dots A_{l+1}^t(\omega)\cdot)$ et f_n sont orthogonaux à partir d'un certain rang. On a donc

$$\begin{aligned}
&\|\sum_{j=0}^{n-1} f_n(A_j^t(\omega)\dots A_1^t(\omega)\|_2^2\\
&\leq n\|f_n\|_2^2 + 2\sum_{m>l>m-[L\log n]-[L'\log n]} < f_n({}^tA_m\dots{}^tA_{l+1}(\omega)\cdot), f_n >\\
&\leq (n + 2n(L+L')\log n + C)\|f_n\|_2^2.
\end{aligned}$$

□

En utilisant les résultats précédents et la méthode de Komlòs décrite ci-dessus, on peut obtenir un théorème limite central. La condition 3.1 n'est pas vérifiée en général, mais on peut reprendre les calculs du paragraphe 3Sous la condition suivante.

Condition 6.10. *Etant donné $R = 2\ln\max\{\|A\| \ / \ A \in \mathcal{A}\} > 0$ et $M > 0$, supposons qu'il soit possible d'associer à ω des nombres réels $\gamma > 1$, $L' > L + M/\ln\gamma > L > (1+M)/\ln\gamma$, $c' > 0$ tels que*
– pour tout point non nul $p \in \mathbf{Z}^d$ de norme inférieure à $2n^M$, tout $l \geq 1$, et tout $r \geq L\ln n$, on ait

$$\|A_1^n p\| \geq c'\gamma^{r-L\ln n}\|A_1^{n-r}\|,$$

– pour tout point non nul $p \in \mathbf{Z}^d$ de norme inférieure à n^{M+2RL}, tout $l \geq 1$, et tout $r \geq L' \ln n$, on ait

$$\|A_1^n p\| \geq c' \gamma^{r-L' \ln n} \|A_1^{n-r}\|.$$

En utilisant deux fois le lemme suivant, on montre que presque toute suite satisfait cette condition.

Lemme 6.11. *Pour tous $M > 0$ et $R > 0$, il existe $L' > L > 0$, $\gamma > 1$, $c > 0$ tels que, presque surement, pour un entier n suffisamment grand, pour tout point non nul $p \in \mathbf{Z}^d$ de norme inférieure à n^M, et tout $r \geq L \ln n$, on ait*

$$\|A_1^n p\| \geq c^2 \gamma^{r-L \ln n} \|A_1^{n-r}\|.$$

Preuve La proposition 6.2 implique l'existence d'un $L > 0$ tel que, presque surement, pour tout point non nul $p \in \mathbf{Z}^d$ de norme inférieure à n^M, on ait

$$A_{n-[L \ln n]+1} \dots A_n k \in \pm \mathcal{C}, \ \forall n > N(\omega).$$

On a donc

$$\|A_1^n p\| = \|A_1^{n-[L \ln n]} A_{n-[L \ln n]+1} \dots A_n p\| \geq c \|A_1^{n-[L \ln n]}\| \geq c^2 \gamma^{r-L \ln n} \|A_1^{n-r}\|.$$

□

On peut maintenant reprendre mot à mot une partie du paragraphe 3.

Proposition 6.12. *Pour une suite ω satisfaisant la condition 6.10, pour tout réel $M \geq 1$, les propriétés suivantes sont satisfaites :*

1) À partir d'un certain rang en n, pour tout entier $s \geq 1$, pour toute suite croissante de s entiers, $\ell_1 < \ell_2 < \dots < \ell_s < n$ vérifiant $\ell_{j+1} \geq \ell_j + 2L' \log n$, $j = 1, \dots, s-1$, pour toute famille $p_1, p_2, \dots, p_s \in \mathbb{Z}^d$ telle que $p_s \neq 0$ et $\|p_j\| \leq n^M$ pour $j = 1, \dots, s$, nous avons :

$$\sum_{j=1}^{s} A_1^{\ell_j} p_j \neq 0. \tag{II.45}$$

2) À partir d'un certain rang en n, pour tout entier $s \geq 1$, pour toute suite croissante de $2s$ entiers, $\ell_1 < \ell'_1 < \ell_2 < \ell'_2 < \dots < \ell_s < \ell'_s$ vérifiant $\ell_{j+1} \geq \ell'_j + 2L' \log n$, pour $j = 1, \dots, s-1$, pour toutes familles $p_1, p_2, \dots, p_s$ et $p'_1, p'_2, \dots, p'_s \in \mathbb{Z}^d$ telles que $A_1^{\ell'_s} p'_s + A_1^{\ell_s} p_s \neq 0$ et $\|p_j\|, \|p'_j\| \leq n^M$ pour $j = 1, \dots, s$, nous avons :

$$\sum_{j=1}^{s} [A_1^{\ell'_j} p'_j + A_1^{\ell_j} p_j] \neq 0. \tag{II.46}$$

Preuve Montrons la deuxième propriété, dont la première est un cas particulier. Le vecteur $\sum_{j=1}^{s} [A_1^{\ell'_j} p'_j + A_1^{\ell_j} p_j] =$ n'est nul que si

$$A_1^{\ell'_s} p'_s + A_1^{\ell_s} p_s = -\sum_{j=1}^{s-1} [A_1^{\ell'_j} p'_j + A_1^{\ell_j} p_j].$$

La condition 6.10 va permettre d'appliquer des majorations du type :

$$\|A_1^{\ell_j} p_j\| \leq \|p_j\| \|A_1^{\ell_j}\| \leq c^{-1} n^M \gamma^{\ell_j - \ell_s + L' \log n} \|A_1^{\ell_s - L' \log n}\|$$

et de montrer, en utilisant l'existence d'un "gap" entres les ℓ_j, que l'égalité ne peut avoir lieu.

Distinguons deux cas :

1) Cas où $\ell'_s - \ell_s$ est petit : $0 \leq \ell'_s - \ell_s \leq 2L \log n$ ou bien $p'_s = 0$.

Posons $q_s = A_{\ell_s+1}^{\ell'_s} p'_s + p_s$. C'est par hypothèse un élément non nul de $\mathbb{Z}^d$ et sa norme est majorée par $n^M \max\{\|A\| \ / \ A \in \mathcal{A}\}^{2L \log n} + n^M \leq 2n^{M+2RL}$. D'après (6.10), nous avons la majoration :

$$\begin{aligned}
\|\sum_{j=1}^{s-1} [A_1^{\ell'_j} p'_j + A_1^{\ell_j} p_j]\| &\leq n^M \sum_{j=1}^{s-1} \gamma^{-(\ell_s - \ell'_j - 2L' \ln n) + L \ln n} \|A_1^{\ell_s - L' \ln n}\| \\
&\quad + n^M \sum_{j=1}^{s-1} \gamma^{-(\ell_s - \ell_j - 2L' \ln n) + L \ln n} \|A_1^{\ell_s - 2L' \ln n}\| \\
&\leq n^M \|A_1^{\ell_s - 2L' \ln n}\| \ [\sum_{j=1}^{s-1} \gamma^{-2(s-j-1)L' \ln n + L \ln n} + \sum_{j=1}^{s-1} \gamma^{-2(s-j-1)L' \ln n + L \ln n}] \\
&\leq 2[\sum_{j=1}^{s-1} n^{M - 2(s-j-1)L' \ln n + L \ln n \ln \gamma}] \ \|A_1^{\ell_s - 2L' \ln n}\| \\
&\leq C n^M \gamma^{L \ln n} \|A_1^{\ell_s - 2L' \ln n}\|.
\end{aligned}$$

En outre, comme $\ell_s > 2L' \ln n$ et $\|q_s\| \leq 2n^{M+RL}$,on a

$$\begin{aligned}
\|A_1^{\ell'_s} p'_s + A_1^{\ell_s} p_s\| &= \|A_1^{\ell_s} q_s\| \\
&\geq c \gamma^{L' \ln n} \|A_1^{\ell_s - 2L' \ln n}\|.
\end{aligned}$$

Comme $L' > L + M/\ln \gamma$, le facteur $c\gamma^{L' \ln n}$ est plus grand que $Cn^M \gamma^{L \ln n}$ pour n suffisamment grand. L'égalité ne peut donc pas avoir lieu.

2) Cas où $\ell'_s - \ell_s$ est grand : $\ell'_s - \ell_s \geq 2L \log n$ et $p'_s \neq 0$.

Nous avons :

$$\begin{aligned}
&\|A_1^{\ell_s} p_s - \sum_{j=1}^{s-1} [A_1^{\ell'_j} p'_j + A_1^{\ell_j} p_j]\| \\
\leq\ & n^M \|A_1^{\ell_s}\| + n^M [\sum_{j=1}^{s-1} (\|A_1^{\ell_j}\| + \|A_1^{\ell'_j}\|)] \\
\leq\ & n^M \gamma^{-L \log n} \|A_1^{\ell_s + L \log n}\| + 2cn^M \|A_1^{\ell_s + L \log n}\| \ \sum_{j=1}^{s-1} \gamma^{(-2(s-j)+1)L \log n} \\
\leq\ & 2n^{M - L \log \gamma} [1 + \sum_{j=1}^{s-1} n^{-2jL \log \gamma}] \ \|A_1^{\ell_s + L \log n}\|.
\end{aligned}$$

Comme $L > (1+M)/\ln\gamma$, le facteur devant $\|A_1^{\ell'_s - L\ln n}\|$ tend vers 0. Mais d'autre part, comme $\ell'_s - \ell_s \geq 2L\ln n$ nous avons aussi :

$$\|A_1^{\ell'_s} p'_s\| \geq c\|A_1^{l'_s - L\ln n}\| \geq c^2\|A_1^{l_s + L\ln n}\|.$$

Pour n suffisamment grand., l'égalité ne peut donc pas avoir lieu. □

La proposition permet d'obtenir des propriétés de multiplicativité. Par exemple, la propriété 1) dans la proposition 3.2 implique :

Propriété 6.13. *Si, pour tout n, g_n est un polynôme trigonométrique tel que $\hat{g}_n(p) = 0$ pour $\|p\| > n^M$, si $\ell_1 < \ell_2 < ... < \ell_s < n$ est une suite croissante d'entiers telle que $\ell_{j+1} \geq \ell_j + L\log n$ pour $j = 1, ..., s-1$, alors*

$$\int \prod_{j=1}^{s} g_n(\tau_{\ell_j} ... \tau_1 t)\ dt = 0.$$

Nous examinons maintenant le TCL pour les sommes S_n. Nous allons reprendre les majorations du paragraphe 3.2 pour appliquer le lemme 3.4 dans le cas aléatoire.

Passage des polynômes trigonométriques aux fonctions höldériennes

Pour toute fonction höldérienne f, il existe un entier M tel que, pour tout n, un polynôme trigonométrique g_n de degré inférieur à n^M, avec

$$\|S_n f - S_n g_n\|_2 \leq n^{-4}.$$

De cette inégalité et des calculs suivants, on déduit le TLC pour les fonctions höldériennes pour presque toute suite.

Remplacement de S_n par une somme "à trous"

Pour appliquer le lemme 3.4, nous remplaçons les sommes S_n par une somme de blocs séparés par un intervalle de longueur Δ.

Soient β un réel $\in]0,1[$ que l'on précisera plus loin et $\Delta_n = [2L\log n]$.

Posons

$$w_n = n^{1-\beta},\ v_n := \lfloor n/w_n \rfloor,\ u_n := \lfloor n/v_n \rfloor, \tag{II.47}$$

$$L_{k,n} := kv_n,\ R_{k,n} := (k+1)v_n - \Delta_n, \tag{II.48}$$

$$I_{k,n} := [L_{k,n},\ R_{k,n}],\ \text{pour } 0 \leq k \leq u_n - 1. \tag{II.49}$$

Nous remplaçons la somme $S_n(t) = \sum_{\ell=1}^{n} g_n(\tau_\ell ... \tau_1 t)$ par la somme "à trous"

$$S'_n(t) := \sum_{k=0}^{u_n - 1} T_{k,n}(t), \tag{II.50}$$

avec

$$T_{k,n}(t) = \sum_{L_{k,n}<\ell\leq R_{k,n}} g_n(\tau_\ell ... \tau_1 t). \tag{II.51}$$

On a donc effectué un découpage de l'intervalle $[1, n]$ en u_n blocs de longueur v_n. Le nombre de blocs est à peu près égal à $w_n = n^{1-\beta}$ et leur longueur à peu près égale à n^β.

Les entiers $L_{k,n}$ et $R_{k,n}$ sont respectivement les extrémités gauches et droites des blocs et les blocs sont séparés par un intervalle de longueur Δ_n. La seule différence avec ce qui a été fait au paragraphe 3 est que la taille des trous Δ_n dépend maintenant de n.

Le tableau de v.a. $(T_{k,n})$ forme un système multiplicatif.

Application du lemme 3.4

Nous appliquons le lemme 3.4 au tableau de v.a. $(T_{k,n}, 0 \leq k \leq u_n - 1)$. Avec les notations du lemme, nous avons donc, pour un n fixé : $u = u_n$ et, pour $k = 0, ..., u_n - 1$,

$$\begin{aligned} \zeta_k &= T_{k,n},\ Y = Y_n = \sum_{k=0}^{u_n-1} |T_{k,n}|^2, \\ a &= a_n = \mathbb{E}(Y_n) = \sum_k \sigma_{k,n}^2. \end{aligned}$$

Pour appliquer le lemme (3.4), nous majorons sucessivement les quantités intervenant dans l'inégalité (II.13).

1) *Majoration de* $u_n\delta_n^3$
Nous avons

$$u_n\delta_n^3 = u_n \max_k \|T_{k,n}\|_\infty^3 \leq Cn^{1-\beta}n^{3\beta} = Cn^{1+2\beta}.$$

2) La propriété 1 de la proposition 6.12 implique que $\mathbb{E}[Q_n(x)] = 1$.

3) *Majoration de* $\|Y_n - a_n\|_2$
On montre comme au paragraphe 3 qu'on a :

$$\|\sum_k T_{k,n}^2 - \sum_k \sigma_{k,n}^2\|_2^2 \leq Cw_n v_n^2 \max_k \sigma_{k,n}^2 = C'' n^{1+\beta} \max_k \sigma_{k,n}^2.$$

Nous avons donc pour une constante C :

$$|x|\|Y_n - a_n\|_2^{\frac{1}{2}} \leq |x| n^{\frac{1+\beta}{4}} \max_k \sigma_{k,n}^{\frac{1}{2}}. \tag{II.52}$$

4) *Majoration de* $\mathbb{E}|Q_n(x)|^2$

Nous avons :

$$|Q_n(x,t)|^2 = \prod_{k=0}^{u_n-1}[1+x^2\sigma_{k,n}^2] \prod_{k=0}^{u_n-1}[1+\frac{x^2}{1+x^2\sigma_{k,n}^2}W_{k,n}(t)],$$

avec

$$\int |Q_n(x,t)|^2\ dt \leq e^{a_n x^2}.$$

En développant le produit

$$\int \prod_{k=0}^{u_n-1}[1+\frac{x^2}{1+x^2\sigma_{k,n}^2}W_{k,n}(t)]\ dt = 1$$

on montre qu'il est de la forme

$$1+\sum_{s=1}^{u_n}\sum_{0\leq k_1<...k_s<u_n} C_{k_1}(t)...C_{k_s}(t),$$

où $C_k(t) = \frac{x^2}{1+x^2\sigma_{k,n}^2}W_{k,n}(t)$.

Les produits $W_{k_1}(t)...W_{k_s}(t)$ sont des combinaisons linéaires de la forme

$$\chi(\sum_{j=1}^{s}[A_1^{\ell'_j}p'_j - A_1^{\ell_j}p_j], t),$$

où $\ell_j, \ell'_j \in I_{k_j,n}$, $A_1^{\ell'_j}p'_j \neq A_1^{\ell_j}p_j$, $j=1,...,s$ (cf. notation (II.18)) et les p_j, p'_j, qui correspondent aux termes non nuls du polynôme trigonométrique g_n, sont des vecteurs entiers de norme $\leq n^M$.

Le choix du "gap" dans la définition des intervalles $I_{k_j,n}$ assure par la proposition 6.12 que $\sum_{j=1}^{s} A_1^{\ell'_j}p'_j - A_1^{\ell_j}p_j \neq 0$ et donc l'intégrale du deuxième facteur dans (II.53) se réduit à 1.

Majoration de l'erreur dans le remplacement de S_n par S'_n

$$\begin{aligned}
\|S_n - S'_n\|_2^2 &= \int |\sum_{k=0}^{u_n-1}\sum_{R_{k,n}<\ell\leq L_{k+1,n}} g(\tau_\ell...\tau_1 t)|^2\ dt \\
&= \sum_{k=0}^{u_n-1}\int |\sum_{R_{k,n}<\ell\leq L_{k+1,n}} g(\tau_\ell...\tau_1 t)|^2\ dt \\
&\quad +2\sum_{0<k<k'\leq u_n-1}\int \sum_{R_{k,n}<\ell\leq L_{k+1,n}} g(\tau_\ell...\tau_1 t)\sum_{R_{k',n}<\ell'\leq L_{k'+1,n}} g(\tau_{\ell'}...\tau_1 t)\ dt.
\end{aligned}$$

Les intervalles de sommation sont de longueur $[2L\log n]$. La deuxième somme dans l'expression précédente est nulle d'après la propriété 3.3. Dans la première somme chaque intégrale est majorée par $C\,[2L\log n]^2$. Ceci implique :

$$\|S_n - S'_n\|_2^2 \leq C\,[2L\log n]^2\ u_n \leq C' n^{1-\beta}\log^2 n. \tag{II.53}$$

Ceci implique :

$$\begin{aligned} |\|S_n\|_2^2 - \|S'_n\|_2^2| &\leq 2\|S_n\|_2\|S_n - S'_n\|_2 + \|S_n - S'_n\|_2^2 \\ &\leq C[\|S_n\|_2 n^{\frac{1-\beta}{2}}\ln^2 n + n^{1-\beta}\ln^2 n]. \end{aligned} \tag{II.54}$$

D'autre part, soient $Z_n(x) = e^{ixS_n}$, $Z'_n(x) = e^{ixS'_n}$. Nous avons :

$$|\mathbb{E}[Z_n(x) - Z'_n(x)]| \leq \mathbb{E}[|1 - e^{ix(S_n - S'_n)}|] \leq |x|\mathbb{E}[|S_n - S'_n|] \leq |x|\|S_n - S'_n\|_2;$$

d'où :

$$|\mathbb{E}[Z_n(x) - Z'_n(x)]| \leq C|x|n^{\frac{1-\beta}{2}}\log n. \tag{II.55}$$

D'après l'inégalité (II.55), le lemme 3.4 (inégalité (II.15)), les inégalités (II.54) et (II.52), nous obtenons :

$$\begin{aligned} &|\mathbb{E}[e^{ixS_n}] - e^{-\frac{1}{2}\|S_n\|_2^2 x^2}| \\ \leq\ & C[|x|n^{\frac{1-\beta}{2}}\ln n + |x|^3 n^{1+2\beta} + |x|n^{\frac{1+\beta}{4}}\max_k \sigma_{k,n}^{\frac{1}{2}} + |x|^2\|S_n\|_2 n^{\frac{1-\beta}{2}}\ln n + |x|^2 n^{1-\beta}\ln^2 n]. \end{aligned}$$

Remplaçons maintenant x par $x\|S_n\|_2^{-1}$ et utilisons la majoration de $\sigma_{k,n}^{\frac{1}{2}}$ en n^β. Il en résulte :

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}[e^{ix\frac{S_n}{\|S_n\|_2}}] - e^{-\frac{1}{2}x^2}| \ \leq\ & C[|x|\|S_n\|_2^{-1}|n^{\frac{1-\beta}{2}}\ln n + |x|^3\|S_n\|_2^{-3}n^{1+2\beta} + |x|\|S_n\|_2^{-1}n^{\frac{1+3\beta}{4}}\ln^2 n \\ & + |x|^2\|S_n\|_2^{-1}n^{\frac{1-\beta}{2}}\ln^2 n + |x|^2\|S_n\|_2^{-2}n^{1-\beta}\ln^2 n + |x|^2 n^{1-\beta}\ln^2 n]. \end{aligned}$$

On établit ainsi le résultat suivant.

Proposition 6.14. *Pour presque toutω, et si $\|S_n\| \sim \sigma n^{\frac{1}{2}}$, nous avons, pour une constante C, la majoration*

$$d(\frac{S_n}{\|S_n\|_2}, Y_1) \leq Cn^{-\frac{1}{33}}.$$

Mais nous avons par ailleurs la proposition suivante.

Proposition 6.15. *Pour toute fonction höldérienne f de moyenne nulle sur le tore, pour μ-presque tout $\omega \in \Omega$, la suite $(n^{-\frac{1}{2}}\|S_n(\omega, f)\|_2)$ admet une limite $\sigma^2(f)$ ne dépendant pas de ω.*

Preuve Nous reprenons les notations du paragraphe 4. En notant $F(\omega,t) := f(t)$, nous avons $S_n(\omega,f)(t) = \sum_{k=0}^{n-1} F(\theta_\tau^k(\omega,t))$, d'où :

$$\begin{aligned}
\frac{\|S_n(\omega,f)\|^2}{n} &= \frac{1}{n}\sum_{\ell=0}^{n-1}\sum_{\ell'=0}^{n-1}\int_{\mathbb{T}^d} F(\theta_\tau^\ell(\omega,t))F(\theta_\tau^{l'}(\omega,t))\,dt \\
&= \|f\|^2 + \frac{2}{n}\sum_{\ell=0}^{n-2}\sum_{r=1}^{n-1-\ell}\int_{\mathbb{T}^d} F(\theta_\tau^\ell(\omega,t))F(\theta_\tau^{\ell+r}(\omega,t))\,dt \\
&= \|f\|^2 + \frac{2}{n}\sum_{r=1}^{n-1}\sum_{\ell=0}^{n-1-r}\int_{\mathbb{T}^d} F(\theta_\tau^\ell(\omega,t))F(\theta_\tau^{\ell+r}(\omega,t))\,dt.
\end{aligned}$$

Commençons par étudier la somme

$$\frac{2}{n}\sum_{r=1}^{n^\alpha}\sum_{\ell=0}^{n-1-r}\int_{\mathbb{T}^d} F(\theta_\tau^\ell(\omega,t))F(\theta_\tau^{\ell+r}(\omega,t))\,dt.$$

La deuxième partie du deuxième membre de l'égalité suivante

$$\begin{aligned}
\frac{2}{n}\sum_{r=1}^{n^\alpha}\sum_{\ell=0}^{n-1-r}\int_{\mathbb{T}^d} F(\theta_\tau^\ell(\omega,t))F(\theta_\tau^{\ell+r}(\omega,t))\,dt &= 2\sum_{r=1}^{n^\alpha}\int_{\mathbb{T}^d}\frac{1}{n}\sum_{\ell=0}^{n-1}(F.F\circ\theta_\tau^r)(\theta_\tau^\ell(\omega,t))\,dt \\
&- 2\sum_{r=1}^{n^\alpha}\frac{1}{n}\sum_{\ell=n-r}^{n-1}\int_{\mathbb{T}^d} F(\theta_\tau^l(\omega,t))F(\theta_\tau^{\ell+r}(\omega,t))\,dt
\end{aligned}$$

est majorée par $2\|f\|_2^2 n^{2\alpha-1}$. Pour $\alpha < 1/2$, la somme il nous suffit donc d'étudier

$$2\sum_{r=1}^{n^\alpha}\int_{\mathbb{T}^d}\frac{1}{n}\sum_{\ell=0}^{n-1}(F.F\circ\theta_\tau^r)(\theta_\tau^\ell(\omega,t))\,dt.$$

Notons ψ_j la fonction définie sur Ω par

$$\psi_j = \int_{\mathbb{T}^d} F.F\circ\theta^j - \int_{\Omega\times\mathbb{T}^d} F.F\circ\theta^j.$$

La fonction ψ_j ne dépend que des j premières coordonnées de ω. Si θ désigne le décalage sur Ω, on a donc $\int_\Omega \psi_j.\psi_j\circ\theta^l\,d\omega = 0$ si $l > j$.

Montrons maintenant que, pour tout $0 < \alpha < 1$, $j < n^\alpha$, $\eta > 2\alpha$, $\mathbb{E}((\sum_{m=0}^{n-1}\psi_j\circ\theta^m)^4) < Cj^2n^2 < Cn^{2+\eta}$. Il suffit de développer la puissance quatrième de $\sum_{m=0}^{n-1}\psi_j\circ\theta^m$:

$$(\sum_{m=0}^{n-1}\psi_j\circ\theta^m)^4 = \sum_{i,k,l,m}\psi_j\circ\theta^i\,\psi_j\circ\theta^k\,\psi_j\circ\theta^l\,\psi_j\circ\theta^m,$$

et de remarquer que le nombre de quadruplets (i,k,l,m)tels que $i<k\leq i+j$ et $l<m\leq l+j$ est majoré par j^2n^2 et que, si $i+j<k$ ou $l+j<m$, alors l'intégrale du terme correspondant est nulle. Pour tout $\epsilon>0$, la probabilité

$$\mathbb{P}(\sup_{j=1,\dots,n^\alpha}|\sum_{m=0}^{n-1}\psi_j\circ\theta^m>n^\beta\epsilon)$$

est majorée par $\sum_{j=1}^{n^\alpha}\mathbb{E}((\sum_{m=0}^{n-1}\psi_j\circ\theta^m)^4)/\varepsilon^4n^{4\beta}$, donc par $Cn^{2+\eta+\alpha-4\beta}$. Cette suite est sommable si on prend par exemple, $\beta=0,8$, $\alpha=0,01$ et $\eta=0,02$.

Il existe donc $0<\beta<1$ et $\alpha>0$ tels que, presque sûrement,

$$\lim_n\frac{1}{n^\beta}\sup_{j=1,\dots,n^\alpha}|\sum_{m=0}^{n-1}\psi_j\circ\theta^m|=0.$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^{n^\alpha}\int_{\mathbb{T}^d}\frac{1}{n}\sum_{\ell=0}^{n-1}(F.F\circ\theta_\tau^r)(\theta_\tau^\ell(\omega,t))\,dt &= \sum_{r=1}^{n^\alpha}\frac{1}{n}\sum_{\ell=0}^{n-1}\psi_r\circ\sigma^l\\ &+ \sum_{r=1}^{n^\alpha}\int_{\Omega\times\mathbb{T}^d}\frac{1}{n}\sum_{\ell=0}^{n-1}(F.F\circ\theta_\tau^r)(\theta_\tau^\ell(\omega,t))\,dt\ d\omega\\ &= \sum_{r=1}^{n^\alpha}n^{\beta-1}\frac{1}{n^\beta}\sum_{\ell=0}^{n-1}\psi_r\circ\sigma^l\\ &+ \sum_{r=1}^{n^\alpha}\int_{\Omega\times\mathbb{T}^d}(F.F\circ\theta_\tau^r)(\omega,t)\,dt\ d\omega.\end{aligned}$$

Prenons $\alpha>0$ et $\beta>0$ tels que $\alpha<1-\beta$ et tels que presque sûrement

$$\lim_n\frac{1}{n^\beta}\sup_{j=1,\dots,n^\alpha}|\sum_{m=0}^{n-1}\psi_j\circ\theta^m|=0.$$

Alors, ce qui précède montre que

$$\sum_{r=1}^{n^\alpha}\int_{\mathbb{T}^d}\frac{1}{n}\sum_{\ell=0}^{n-1-r}(F.F\circ\theta_\tau^r)(\theta_\tau^\ell(\omega,t))\,dt$$

converge presque sûrement vers

$$\sum_{r=1}^{\infty}\int_{\Omega\times\mathbb{T}^d}(F.F\circ\theta_\tau^r)(\omega,t)\,dt\ d\omega.$$

Considérons maintenant la somme

$$\sum_{r=n^\alpha+1}^{n-1}\int_{\mathbb{T}^d}\frac{1}{n}\sum_{\ell=0}^{n-1-r}(F.F\circ\theta_\tau^r)(\theta_\tau^\ell(\omega,t))\,dt.$$

Pour un entier n donné, remplaçons f par un polynôme g_n choisi de degré inférieur à n^M tel que $\|f - g_n\|_\infty < n^{-4}$. Le lemme 6.11 montre que, presque sûrement, les fréquences du polynôme $g_n\theta^{l+r}$ sont toutes supérieures à $c\gamma^{n^{\alpha/2}/2}\|A_1^{l+r-n^{\alpha/2}}\|$ donc à $c^2\gamma^{n^{\alpha/2}/2}\|A_1^l\|\|A_{l+1}^{l+r-n^{\alpha/2}}\|$ ou encore à $c^2\gamma^{n^\alpha/2}\|A_1^l\|$. Les fréquences du polynôme $g_n\theta^l$ sont toutes inférieures à $n^M\|A_1^l\|$. Donc, si $r > n^\alpha$, presque sûrement, à partir d'un certain rang, toutes les intégrales $\int_{\mathbb{T}^d} \frac{1}{n}\sum_{\ell=0}^{n-1}(g_n.g_n \circ \theta_\tau^r)(\theta_\tau^\ell(\omega,t))\,dt$ sont nulles.

Presque sûrement en ω, on a donc :

$$\begin{aligned}\lim_n \frac{\|S_n(\omega,f\|^2}{n} &= \|f\|^2 + 2\sum_{r=1}^{\infty}\int_{\Omega\times\mathbb{T}^d}(F.F\circ\theta_\tau^r)(\omega,t)\,dt\;d\omega \\ &= \lim_n \int_{\Omega\times\mathbb{T}^d}\frac{1}{n}[\sum_{k=0}^{n-1}F(\theta_\tau^k(\omega,t))]^2\;dtd\omega\end{aligned}$$

□

Les deux propositions précédentes nous permettent d'énoncer le principal résultat du paragraphe.

Théorème 6.16. *Soit $\mathcal{A}$ un ensemble fini de matrices carrées à coefficients entiers de déterminant ± 1 tel que le système $\mathcal{A}$ soit totalement irréductible et tel qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^d$ dans laquelle chaque élément de $\mathcal{A}$ soit à coefficients positifs. Pour presque toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour une mesure produit sur $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$, pour toute fonction höldérienne f telle que $\sigma(f) > 0$, la suite*

$$\frac{1}{\sigma(f)\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n} f(A_k^t(\omega)\dots A_1^t(\omega)\cdot)$$

converge en loi vers la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.

Comme dans la proposition 6.14, on a ici aussi une vitesse de convergence en $n^{-1/33}$.

7 Preuve du lemme 3.4

Rappelons l'énoncé du lemme.

Lemme 7.1. *Soient u un entier ≥ 1, $(\zeta_k)_{0\leq k\leq u-1}$ une famille de u variables aléatoires réelles, a un réel > 0. Notons, pour $x \in \mathbb{R}$:*

$$\begin{aligned}Z(x) &= \exp(ix\sum_{k=0}^{u-1}\zeta_k),\;\; Q(x) = \prod_{k=0}^{u-1}(1+ix\zeta_k), \\ Y &= \sum_{k=0}^{u-1}\zeta_k^2,\quad \delta = \max_{0\leq k\leq u-1}\|\zeta_k\|_\infty.\end{aligned}$$

Nous avons alors, pour une constante C, pour x tel que $|x|\,\delta \leq 1$,

$$|\mathbb{E}[Z(x)] - e^{-\frac{1}{2}a\,x^2}| \leq Cu|x|^3\delta^3 + \frac{1}{2}x^2\|Q(x)\|_2\|Y-a\|_2 + |1-\mathbb{E}[Q(x)]|, \quad \text{(II.56)}$$

et, pour x tel que $|x|\delta \leq 1$ et $|x|\|Y-a\|_2^{\frac{1}{2}} \leq 1$,

$$|\mathbb{E}[Z(x)] - e^{-\frac{1}{2}a\,x^2}| \leq C\,u\,|x|^3\delta^3 + (3 + 2\,e^{-\frac{1}{2}a\,x^2}\,\|Q(x)\|_2)\,|x|\|Y-a\|_2^{\frac{1}{2}} + e^{-\frac{1}{2}a\,x^2}\,|1-\mathbb{E}[Q(x)]| \quad \text{(II.57)}$$

1) Posons

$$\psi(y) = (1+iy)e^{-\frac{1}{2}y^2}e^{-iy}. \quad \text{(II.58)}$$

En écrivant $\psi(y) = \rho(y)e^{i\theta(y)}$, où $\rho(y) = |\psi(y)|$, nous avons :

$$\begin{aligned} \ln\rho(y) &= \frac{1}{2}[\ln(1+y^2) - y^2], \\ \tan(\theta(y)) &= \frac{y - \tan y}{1 + y\tan y}. \end{aligned}$$

Un calcul élémentaire fournit pour une constante C_1 les majorations suivantes :

$$|\ln\rho(y)| \leq \frac{1}{6}|y|^3,\ |\theta(y)| \leq C_1|y|^3,\ \forall y \in [-1,1]. \quad \text{(II.59)}$$

Ecrivons : $Z(x) = Q\,\exp(-\frac{1}{2}x^2\,Y)\,[\prod_{k=0}^{u-1}\psi(x\zeta_k)]^{-1}$. En utilisant le fait que $\ln\rho(x\zeta_k) \leq 0$, on obtient :

$$\begin{aligned} |Z(x) - Q(x)\,\exp(-\frac{1}{2}x^2\,Y)| &= |Z(x) - Z(x)\prod_{k=0}^{u-1}\psi(x\zeta_k)| = |1 - \prod_{k=0}^{u-1}\psi(x\zeta_k)| \\ &\leq |1 - e^{\sum_{k=0}^{u-1}\ln\rho(x\zeta_k)}| + |1 - e^{i\sum_{k=0}^{u-1}\theta(x\zeta_k)}| \\ &\leq \sum_{k=0}^{u-1}|\ln\rho(x\zeta_k)| + \sum_{k=0}^{u-1}|\theta(x\zeta_k)|. \end{aligned}$$

Pour $|x|\max_k\|\zeta_k\|_\infty \leq 1$, nous pouvons appliquer la majoration (II.59). En utilisant l'inégalité

$$|1-e^s| \leq (e-1)|s| \leq 2|s|, \forall s \in [-1,1] \quad \text{(II.60)}$$

nous obtenons pour une constante C :

$$|Z(x) - Q(x)\,\exp(-\frac{1}{2}x^2\,Y)| \leq C|x|^3\sum_{k=0}^{u-1}|\zeta_k|^3 \leq Cu|x|^3\delta^3.$$

2) Nous avons par ailleurs, Y étant une variable aléatoire positive :

$$\left|\exp(-\frac{1}{2}x^2Y) - \exp(-\frac{1}{2}a\,x^2)\right| \leq \frac{x^2}{2}\,|Y-a|\,.$$

Finalement nous obtenons pour $|x| \max_k \|\zeta_k\|_\infty \leq 1$:

$$\begin{aligned}
& |Z(x) - \exp(-a\,\frac{x^2}{2})Q(x)| \\
\leq\ & |Z(x) - Q(x)\exp(-\frac{x^2}{2}Y)| + |Q(x)\,[\exp(-\frac{x^2}{2}Y) - \exp(-a\,\frac{x^2}{2})]| \\
\leq\ & C u\,|x|^3\delta^3 + \frac{x^2}{2}|Q(x)|\,|Y-a|;
\end{aligned}$$

d'où, pour pour $|x| \max_k \|\zeta_k\|_\infty \leq 1$, la majoration (II.56) de l'énoncé :

$$\begin{aligned}
|\mathbb{E}[Z(x)] - \exp(-a\,\frac{x^2}{2})| &= |\mathbb{E}[Z(x) - e^{-\frac{1}{2}a\,x^2}Q(x) + e^{-\frac{1}{2}a\,x^2}Q(x) - 1)]| \\
&\leq |\mathbb{E}[Z(x) - e^{-\frac{1}{2}a\,x^2}Q(x)]| + e^{-\frac{1}{2}a\,x^2}|\mathbb{E}[Q(x) - 1)]| \\
&\leq C u\,|x|^3\delta^3 + \frac{x^2}{2}\mathbb{E}[|Q(x)||Y-a|] + e^{-\frac{1}{2}a\,x^2}|1 - \mathbb{E}[Q(x)]| \\
&\leq C u\,|x|^3\delta^3 + \frac{x^2}{2}\|Q(x)\|_2\|Y-a\|_2 + |1 - \mathbb{E}[Q(x)]|.
\end{aligned}$$

3) La méthode précédente est évidemment pénalisante, car $Q_n(x)$, dont l'intégrale est de l'ordre de $e^{\frac{1}{2}\sigma_n^2 x^2}$, introduit, pour x grand, une très mauvaise majoration de la quantité

$$|\mathbb{E}[Z_n(x)] - \exp(-\sigma_n^2\frac{x^2}{2})|.$$

Nous pouvons obtenir une majoration plus précise, utilisable dans le cas où la quantité $e^{-\frac{1}{2}a\,x^2}\,\|Q(x)\|$ est bornée.

Pour $0 \leq \varepsilon \leq 1$, soit $A_\varepsilon(x) = \{t : x^2|Y(t) - a| \leq \varepsilon\}$. Nous avons les majorations suivantes :

$$\begin{aligned}
& |\mathbb{E}[1_{A_\varepsilon(x)}(Z(x) - \exp(-a\,\frac{x^2}{2}))]| \\
\leq\ & C\,u\,|x|^3\delta^3 + \mathbb{E}[1_{A_\varepsilon(x)}\,(|Q(x)\,[\exp(-\frac{x^2}{2}Y) - e^{-\frac{1}{2}a\,x^2})]| \\
+\ & e^{-\frac{1}{2}a\,x^2}[|1 - \mathbb{E}(Q(x)| + \mathbb{E}(1_{A_\varepsilon(x)}|1 - Q(x)|) \\
\leq\ & C\,u\,|x|^3\delta^3 + e^{-\frac{1}{2}a\,x^2}\|Q(x)\|_2\|1_{A_\varepsilon(x)}[\exp(-\frac{x^2}{2}(Y-a)) - 1]\|_2 \\
+\ & e^{-\frac{1}{2}a\,x^2}[|1 - \mathbb{E}(Q(x))| + \mathbb{E}(1_{A_\varepsilon^c(x)}|1 - Q(x)|)].
\end{aligned}$$

Par (II.60) nous avons

$$\|1_{A_\varepsilon(x)}\,[\exp(-\frac{x^2}{2}(Y-a)) - 1]\|_2 \leq \varepsilon,$$

et par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\mathbb{E}(1_{A_\varepsilon^c(x)}|1 - Q(x)|)] \leq \mathbb{P}(A_\varepsilon^c(x)) + \|Q(x)\|_2(\mathbb{P}(A_\varepsilon^c(x)))^{\frac{1}{2}},$$

ce qui implique :

$$\begin{aligned}
& |\mathbb{E}[1_{A_\varepsilon(x)}(Z(x) - \exp(-a\,\frac{x^2}{2}))]| \\
\leq\ & C\,u\,|x|^3\delta^3 + e^{-\frac{1}{2}a\,x^2}\|Q(x)\|_2\,\varepsilon \\
+\ & e^{-\frac{1}{2}a\,x^2}[|1 - \mathbb{E}(Q(x))| + \mathbb{P}(A_\varepsilon^c(x)) + \|Q(x)\|_2(\mathbb{P}(A_\varepsilon^c(x)))^{\frac{1}{2}}] \\
\leq\ & C\,u\,|x|^3\delta^3 + e^{-\frac{1}{2}a\,x^2}\|Q(x)\|_2\,[\varepsilon + (\mathbb{P}(A_\varepsilon^c(x)))^{\frac{1}{2}}] + e^{-\frac{1}{2}a\,x^2}[|1 - \mathbb{E}(Q(x))| + \mathbb{P}(A_\varepsilon^c(x))].
\end{aligned}$$

Pour le choix de $\varepsilon = |x|\|Y - a\|_2^{\frac{1}{2}}$, nous avons :

$$\mathbb{P}(A_\varepsilon^c(x)) \leq \varepsilon^{-2}x^4\|Y - a\|_2^2 \leq x^2\|Y - a\|_2.$$

En reportant cette inégalité dans la majoration précédente, il en résulte :

$$\begin{aligned}
& |\mathbb{E}[1_{A_\varepsilon(x)}(Z(x) - \exp(-a\,\frac{x^2}{2})]| \\
\leq\ & C\,u\,|x|^3\delta^3 + 2|x|\,e^{-\frac{1}{2}a\,x^2}\,\|Q(x)\|_2\,\|Y - a\|_2^{\frac{1}{2}} + e^{-\frac{1}{2}a\,x^2}\,[|1 - \mathbb{E}(Q(x))| + x^2\|Y - a\|_2].
\end{aligned}$$

D'où, sous les conditions

$$|x|\delta \leq 1 \text{ et } \ |x|\|Y - a\|_2^{\frac{1}{2}} \leq 1, \tag{II.61}$$

l'inégalité (II.57).

$$\begin{aligned}
& |\mathbb{E}[Z(x)] - \exp(-\frac{1}{2}a\,x^2)| \leq |\mathbb{E}[1_{A_\varepsilon(x)}(Z(x) - \exp(-a\,\frac{x^2}{2}))]| + 2\mathbb{P}(A_\varepsilon^c(x)) \\
\leq\ & C\,u\,|x|^3\delta^3 + 2\,|x|\,e^{-\frac{1}{2}a\,x^2}\,\|Q(x)\|_2\,\|Y - a\|_2^{\frac{1}{2}} + e^{-\frac{1}{2}a\,x^2}\,[|1 - \mathbb{E}(Q(x))|] + 3\,|x|^2\|Y - a\|_2.
\end{aligned}$$

□

8 Figures

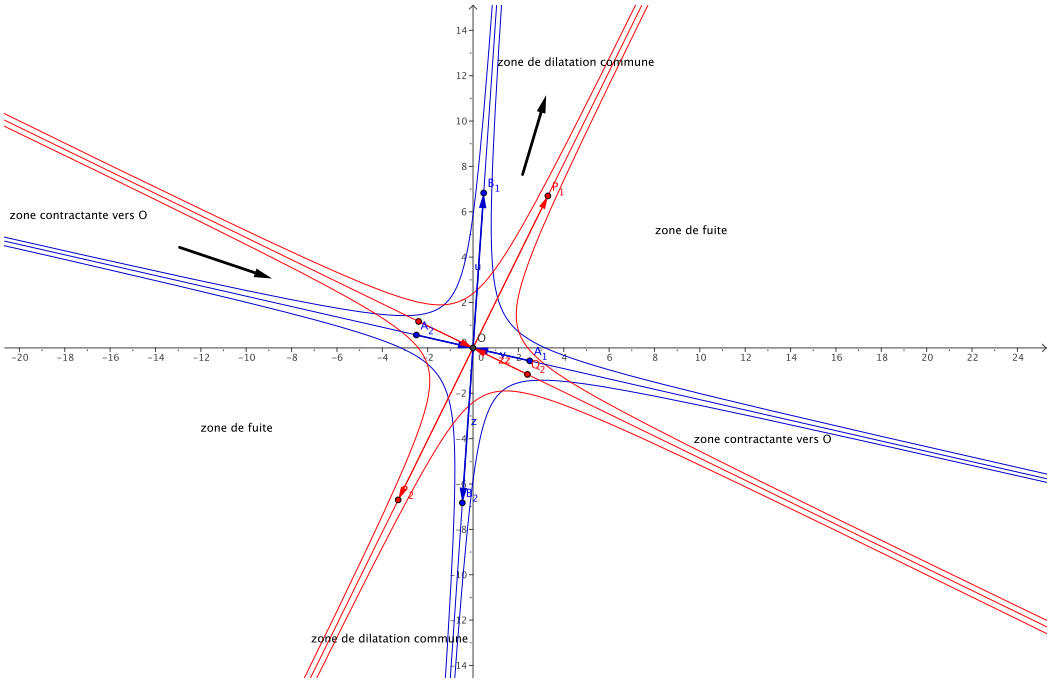

FIG. II.1 – Exemple de situation favorable en terme de cônes

Pour de telles situations on peut découper l'espace en trois zones :

- *une zone de "dilatation commune" sur laquelle A et B dilatent exponentiellement tous les vecteurs.*
- *une zone "contractante vers 0" sur laquelle A et B contractent exponentiellement tous les vecteurs. Pour les vecteurs à coordonnées entières non toutes nulles, on peut donner une borne supérieure du nombre d'itérations nécessaires pour quitter cette zone.*
- *Une zone "de fuite" sur laquelle on se déplace sous l'action de A et B le long d'hyperboles (d'hyperboloïdes en dimension supérieure à 2), pour atteindre la zone de dilatation commune.*

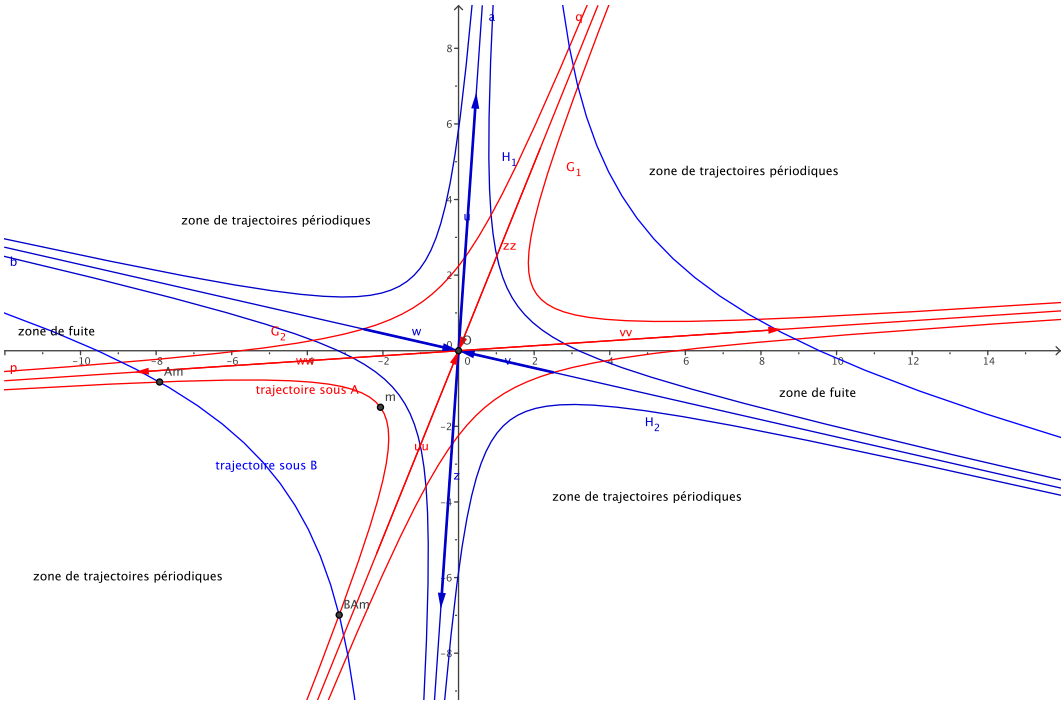

FIG. II.2 – Exemple de situation défavorable en terme de cônes, présence d'orbites périodiques

Bibliographie

[AS07a] A. Ayyer and M. Stenlund, *Exponential decay of correlations for randomly chosen hyperbolic toral automorphisms*, preprint (2007).

[AS07b] Liverani C. Ayyer, A. and M. Stenlund, *Quenched clt for random toral automorphism*, preprint (2007).

[Bow75] Rufus Bowen, *Equilibrium states and the ergodic theory of Anosov diffeomorphisms*, vol. 470, Lecture notes in mathematics, Springer, Berlin, 1975.

[Bre68] Leo Breiman, *Probability*, Addison-Wesley Publishing Company (1968).

[Buz07] Jérôme Buzzi, *Hyperbolicity through entropies*, Notes de l'école d'été de probabilités de Saint-Flour, 2007.

[CCC85] P. Calderoni, M. Campanino, and D. Capocaccia, *A local limit theorem for a sequence of interval transformations*, Ergodic Theory and Dynamical Systems **5** (1985), no. 2, 185–201.

[CR07] Jean-Pierre Conze and Albert Raugi, *Limit theorems for sequential expanding dynamical systems of* $[0, 1]$, Contemporary Mathematics, vol. 430 (2007).

[For40] R. Fortet, *Sur une suite egalement répartie*, Studia Math. **9** (1940), 54–70. MR MR0005546 (3,169e)

[FS88] P. Ferrero and B. Schmitt, *Produits aléatoires d'opérateurs matrices de transfert*, Probab. Theory Related Fields **79** (1988), no. 2, 227–248. MR MR958289 (90e :47006)

[Fuk94] Katusi Fukuyama, *The central limit theorem for Riesz-Raikov sums*, Probab. Theory Related Fields **100** (1994), no. 1, 57–75. MR MR1292190 (95i :60020)

[GH88] Yves Guivarc'h and Jean Hardy, *Théorèmes limites pour une classe de chaînes de Markov et applications aux difféomorphismes d'Anosov*, Annales de l'institut Henri Poincaré (B) Probabilités et Statistiques **24** (1988), no. 1, 73–98.

[GR89] Yves Guivarc'h and Albert Raugi, *Propriétés de contraction d'un semi-groupe de matrices inversibles. coefficients de liapunoff d'un produit de matrices aléatoires indépendantes*, Israel J. Math. **65, 26** (1989), 165–196.

[Gui90] Yves Guivarc'h, *Produits de matrices aléatoires et applications aux propriétés géométriques des sous-groupes du groupe linéaire*, Ergodic Theory Dynam. Systems **10, 3** (90), 483–512.

[HH01] Hubert Hennion and Loïc Hervé, *Limit theorems for Markov chains and stochastic properties of dynamical systems by quasi-compactness*, Lecture notes in mathematics, Springer, Berlin, 2001.

[Kit98] Bruce Kitchens, *Symbolic dynamics*, Universitext, Springer, Berlin, 1998.

[Kom73] J. Komlos, *A central limit theorem for multiplicative systems*, Canad. Math. Bull. **16** (1973), no. 1, 67–73.

[Le 99a] Stéphane Le Borgne, *Algébricité des partitions markoviennes des automorphismes hyperboliques du tore*, C. R. Acad. Sci. Paris **328** (1999).

[Le 99b] ———, *Un codage sofique des automorphismes hyperboliques du tore*, Boletim da sociedade brasileira de matemática (1999).

[Les98] Emmanuel Lesigne, *Loi des grands nombres pour des sommes de Riesz-Raikov multidimensionnelles*, Compositio Math. **110** (1998), no. 1, 39–49. MR MR1601658 (99c :11096)

[MP78] D. A. Moskvin and A. G. Postnikov, *A local limit theorem for the distribution of fractional parts of an exponential function*, Akademiya Nauk SSSR. Teoriya Veroyatnosteĭ i ee Primeneniya **23** (1978), 540–547.

[Pet92] Bernard Petit, *Le théorème limite central pour des sommes de Riesz-Raïkov*, Probab. Theory Related Fields **93** (1992), no. 4, 407–438.

[Pet96] ———, *θ-transformations, θ-shifts and limit theorems for some Riesz-Raïkov sums*, Ergodic Theory Dynam. Systems **16** (1996), no. 2, 335–364.

[PR04] Leonid Polterovich and Zeev Rudnick, *Stable mixing for cat maps and quasi-morphisms of the modular group*, ETDS **24** (2004), 609–619.

[Raï36] D. Raïkov, *On some arithmetical properties of summable functions*, Rec. Math. Moscow **1** (1936), 377–383.

[Rie45] Frédéric Riesz, *Sur la théorie ergodique*, Comment. Math. Helv. **17** (1945), 221–239. MR MR0014218 (7,255b)

[Rio00] Emmanuel Rio, *Lois fortes des grands nombres presque sûres pour les sommes de Riesz-Raikov*, Probab. Theory Related Fields **118** (2000), no. 3, 342–348. MR MR1800536 (2002a :60044)