HAL
open science

Décomposition de domaine et stratégies de relocalisation non-linéaire pour la simulation de grandes structures raidies avec flambage local

Philippe Cresta

To cite this version:

Philippe Cresta. Décomposition de domaine et stratégies de relocalisation non-linéaire pour la simulation de grandes structures raidies avec flambage local. Sciences de l'ingénieur [physics]. École normale supérieure de Cachan - ENS Cachan, 2008. Français. NNT : . tel-00363656

HAL Id: tel-00363656

https://theses.hal.science/tel-00363656v1

Submitted on 24 Feb 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° ENSC-2008/115

THÈSE DE DOCTORAT DE
L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE CACHAN

Présentée par

Philippe CRESTA

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE CACHAN

Domaine :
MÉCANIQUE - GÉNIE MÉCANIQUE - GÉNIE CIVIL

Sujet de la thèse :

Décomposition de domaine et stratégies de relocalisation non-linéaire pour la simulation de grandes structures raidies avec flambage local

Thèse présentée et soutenue à Cachan le 10 juillet 2008 devant le jury composé de :

PIERRE ALART	Professeur à l'Université Montpellier 2	Président
ALAIN COMBESCURE	Professeur à l'INSA de Lyon	Rapporteur
FRÉDÉRIC FEYEL	Maître de Recherches - HdR à l'ONERA	Rapporteur
STÉPHANE GUINARD	Ingénieur de Recherche à EADS Innovation Works	Examinateur
OLIVIER ALLIX	Professeur à l'ENS de Cachan	Directeur de thèse
CHRISTIAN REY	Professeur à l'ENS de Cachan	Directeur de thèse

Laboratoire de Mécanique et Technologie
ENS Cachan/CNRS UMR 8535/UPMC/PRES UniverSud Paris
61 Avenue Président Wilson, 94235 CACHAN CEDEX (France)

Résumé

Le travail porte sur la description et l'évaluation de stratégies adaptées pour la simulation de grandes structures avec non-linéarités non équitablement réparties, tel le flambage local dans les structures aéronautiques. Une stratégie dite de « relocalisation non-linéaire » est présentée, permettant l'introduction de schémas de résolution non-linéaire par sous-structure au sein des méthodes de décomposition de domaine classiques. Deux types de conditions aux limites sont proposés pour les problèmes locaux indépendants. Les résultats en termes de performances sont présentés sur des exemples de structures représentatives des cas industriels. Enfin, une stratégie de résolution multiéchelle s'appuyant sur une décomposition micro/macro des champs d'interface est proposée pour la résolution des problèmes linéarisés obtenus pour les structures de plaques et coques. Son application dans le cadre non-linéaire est présentée, ainsi que les perspectives de recherche ouvertes par ces travaux.

Abstract

The work focuses on the description and evaluation of strategies adapted to the simulation of large structures with unbalanced nonlinearities, such as local buckling in aeronautical structures. A so-called « nonlinear relocalization » strategy is presented, which enable the use of nonlinear schemes within substructures in the framework of classical domain decomposition methods. Two different types of boundary conditions are proposed to solve the resulting independent and local nonlinear problems. Results in terms of performance are presented on structures representative of the industrial cases. In a second part, a multiscale strategy based on micro/macro decomposition of interface fields is proposed for the solving of linearized equations obtained for plate and shell structures. Its application in a nonlinear framework is also presented, as well as research perspectives opened by this work.

Je tiens à remercier ici toutes les personnes sans qui ce travail n'aurait pu être mené à bout.
Merci tout d'abord à Didier Guedra-Degeorges pour m'avoir proposé ce sujet d'étude et m'avoir fait confiance. Merci à Serge Maison-Le-Poëc pour m'avoir accueilli au sein de son équipe à Suresnes pendant trois ans, ainsi qu'à Laurent Chambon pour m'avoir permis de terminer ce travail dans son équipe toulousaine. Je remercie également tous mes collègues de Suresnes et Toulouse, pour leur accueil et leur soutien tout au long de ma thèse.

Je tiens bien sûr à remercier Olivier et Christian pour avoir dirigé conjointement ces travaux. Ce fut pour moi une expérience très enrichissante, tant sur le plan scientifique qu'humain. J'espère que notre collaboration durera.

Merci également à l'ensemble des membres du jury pour avoir consacré du temps à la lecture de ces travaux et pour leurs remarques constructives. Merci à Pierre Alart d'avoir accepté de présider ce jury, à Alain Combescure et Frédéric Feyel d'avoir bien voulu être rapporteurs et à Stéphane Guinard pour avoir suivi mes travaux pendant toute la durée de ma thèse.

Merci enfin à l'ensemble des membres du LMT, où j'ai passé une bonne partie de mon temps ces dernières années. Je n'oublierai pas de sitôt l'ambiance agréable du centre de calcul. Un merci particulier à Hugo pour son aide et ses conseils, à Frisou pour son dévouement et à tous les autres, thésards, chercheurs et personnels administratifs, que je n'ai pas la place de nommer ici.

Table des matières

Table des matières v

Table des figures xi

Liste des tableaux xv

Introduction 1

Partie I Modélisation et Simulation Numérique des Structures Elancées 9

1 Contexte et outils pour l'analyse des structures élancées 13
1 Structures élancées et non-linéarités géométriques 14
1.1 Problème de référence en grandes transformations 14
1.1.1 Cinématique et notion de configuration 14
1.1.2 Principe des puissances virtuelles 15
1.2 Descriptions des structures élancées 16
1.2.1 Modélisation 16
1.2.2 Eléments finis pour les structures élancées 18
1.3 Formulation du problème non-linéaire discrétisé 20
1.3.1 Formulation lagrangienne totale 20
1.3.2 Formulation lagrangienne réactualisée 22
1.3.3 Formulations corotationnelles 22
1.4 Flambage des structures élancées 27
2 Méthodes de résolution des problèmes non-linéaires 32
2.1 Méthodes de Newton 32
2.1.1 Principes de base 32
2.1.2 Application au calcul de structures non-linéaires 32
2.1.3 Méthodes dérivées 34
2.2 Méthodes de continuation 36
2.3 Méthodes alternatives 37
2.3.1 Méthode asymptotique numérique 37
2.3.2 Méthode LaTIn 38

3 Bilan du chapitre 39

2 Stratégies de Calcul Avancées pour la Résolution de Problèmes de Grande Taille 41

1 Problématique 43
2 Etude préliminaire de quelques approches classiques : Intérêts et limites . 44
2.1 Quelques approches utilisées en bureau d'étude 44
2.1.1 Approches descendantes 44
2.1.2 Techniques de raffinement local 45
2.2 Illustration 45
2.2.1 Présentation du modèle retenu 45
2.2.2 Calcul non-linéaire de référence 46
2.2.3 Présentation des méthodes alternatives 47
2.2.4 Déroulement des calculs 48
2.2.5 Analyse qualitative des résultats 49
2.2.6 Bilan 52
3 Les stratégies de calcul multiéchelles 53
3.1 Méthodes basées sur la théorie de l'homogénéisation 53
3.1.1 Théorie de l'homogénéisation des milieux périodiques . 53
3.1.2 Extensions de la théorie de l'homogénéisation au non-linéaire 55
3.2 Méthodes de superposition et d'enrichissement 57
3.2.1 Méthode de Projection de Dirichlet Hiérarchique 57
3.2.2 Méthode Arlequin 58
3.2.3 Méthodes multigrilles 60
3.2.4 Méthodes basées sur la Partition de l'Unité : GFEM, XFEM 61
4 Les méthodes de sous-structuration et de décomposition de domaine . . . 62
4.1 Principes généraux de sous-structuration 62
4.1.1 Problème de référence 62
4.1.2 Décomposition de domaine 63
4.1.3 Condensation, Super-éléments 64
4.2 Méthodes de décomposition de domaine 65
4.2.1 Approches primales 65
4.2.2 Approches duales 67
4.2.3 Préconditionneurs et problèmes grossiers 68
4.2.4 Approches mixtes 69
4.3 Les Méthodes Newton-Krylov-Schur 70
4.3.1 Principe et mise en œuvre 70
4.3.2 Techniques d'accélération 71
4.3.3 Inadaptation aux non-linéarités localisées 73
4.4 La méthode LaTIn micro/macro 74
4.4.1 Reformulation du problème de référence 74
4.4.2 Séparation d'échelle aux interfaces 75
4.4.3 Stratégie de résolution 76

4.5 Décomposition de domaine et dynamique transitoire 78
4.5.1 Equations de la dynamique transitoire 78
4.5.2 Dynamique explicite et sous-cyclage 79
4.5.3 Dynamique implicite et décomposition de domaine . . 80
4.5.4 Méthodes de couplage implicite/explicite 81
4.5.5 Méthodes de couplage fluide/structure 82
5 Bilan du chapitre 82

Partie II Proposition de Stratégies Adaptées à la Problématique des Grandes Structures Non-linéaires 85

3 Stratégies de relocalisation non-linéaire 89
1 Présentation des stratégies de relocalisation non-linéaire 91
1.1 Principe général 91
1.2 Comparaison avec d'autres approches 92
1.2.1 Analogie avec l'intégration de lois de comportement non-linéaires 92
1.2.2 Analogie avec les méthodes de zoom structural 92
1.2.3 Analogie avec les techniques de « sous-cyclage » et de couplage en dynamique transitoire 93
1.2.4 Analogie avec la méthode LaTIn 93
2 Stratégie de relocalisation non-linéaire à déplacements imposés 94
2.1 Description 94
2.2 Mise en œuvre numérique 96
2.2.1 Etape locale non-linéaire 96
2.2.2 Etape globale linéaire 97
2.2.3 Algorithme général 98
2.2.4 Détails sur le schéma incrémental dans les résolutions non-linéaires par sous-structure 99
2.3 Illustration dans le cas des structures de poutres 101
2.3.1 Description du cas d'étude 101
2.3.2 Solution de référence 101
2.3.3 Mise en oeuvre d'une stratégie Newton-Krylov-Schur . 103
2.3.4 Mise en œuvre de la stratégie de relocalisation non-linéaire 105
3 Stratégie de relocalisation non-linéaire mixte 107
3.1 Vers des conditions aux limites mixtes pour les problèmes locaux 107
3.2 Description de l'approche 107
3.3 Mise en œuvre numérique 109
3.3.1 Etape locale non-linéaire 109
3.3.2 Etape globale linéaire 110
3.3.3 Algorithme général 111
3.4 Application aux treillis de poutres 112
3.5 Influence du choix de la direction de recherche **k** 113

4 Analyses et performances des stratégies de relocalisation non-linéaire . . 114
4.1 Comparaison des différentes méthodes 114
4.2 Influence du critère d'arrêt local 115
4.3 Décomposition de domaine et non-linéarités localisées 117
4.4 Mise en œuvre parallèle et Performances 119
4.4.1 Parallélisme et équilibrage de charge 119
4.4.2 Granularité et speed-up 120
5 Bilan du chapitre 122

4 Mise en œuvre numérique pour les structures de plaques et coques 123
1 Plateforme de développement 124
1.1 Choix d'une plateforme 124
1.2 Librairie LMTpp 125
1.2.1 Principes de base et structure de la librairie 125
1.2.2 Programmation symbolique et Génération de code . . . 125
1.2.3 Outils de calcul algébrique 129
1.2.4 Outils de méta-programmation pour la méthode des Eléments Finis 129
2 Implémentation de la méthode pour les plaques et coques 130
2.1 Structure générale du code de calcul 130
2.2 Formulation en grands déplacements pour les structures de plaques et coques 130
2.3 Décomposition de domaine 134
2.4 Calcul du paramètre de raideur d'interface **k** pour les plaques et coques 136
3 Illustration et résultats comparatifs sur un exemple de caisson aéronautique 138
3.1 Cas test de référence : Caisson raidi 138
3.2 Résultats comparatifs 138
4 Bilan du chapitre 141

5 Approche multi-échelle pour les structures de plaques et coques 143
1 Principe de la stratégie multi-échelle 145
1.1 Problème sous-structuré de référence 145
1.2 Séparation d'échelle aux interfaces 146
1.3 Stratégie de résolution 147
1.3.1 Etape locale par sous-structure : 147
1.3.2 Etape de couplage aux interfaces : 147
2 Mise en œuvre numérique 149
2.1 Discrétisation et séparation micro/macro 149
2.2 Etape locale par sous-structure 150
2.3 Etape de couplage aux interfaces 151
3 Définition de bases macro pour les structures élancées 153
3.1 Rappels pour les milieux continus classiques 153
3.2 Cas des plaques 154
3.3 Influence de la base macro sur la convergence de la stratégie . . . 158

3.4 Cas des coques 160
3.4.1 Traitement du degré de rotation normal 160
3.4.2 Proposition de modes macros génériques pour les coques 161
3.4.3 Illustration 162
4 Sur la mise en œuvre dans le cadre non-linéaire 164
4.1 Description 164
4.2 Projecteurs macro et non-linéarité géométrique 164
4.3 Sur la mise à jour des directions de recherche 166
5 Bilan du chapitre 166

Conclusions et Perspectives **169**

Bibliographie **171**

Annexes **189**

A Modèle et Elément de poutre de Navier-Bernoulli **191**
1 Modèle de poutre de Navier-Bernoulli 191
2 Discrétisation et fonctions d'interpolations 192
3 Matrice de raideur élastique 193
4 Efforts intérieurs 194

B Formulation corotationnelle pour les éléments de poutres **195**
1 Choix du repère corotationnel 195
2 Extraction des déplacements et rotations déformantes 196
3 Opérateurs corotationnels 197
4 Efforts internes 198
5 Opérateur de raideur tangent dans le repère global 199

C Modélisation des plaques **201**
1 Cinématique de plaque 201
2 Puissances des Efforts Intérieurs 203
3 Lois de comportement généralisées 203
4 Prise en compte des rotations normales 204

Table des figures

1 Essai statique de certification sur une structure d'avion complète (source : EADS) . . . 1
2 Flambage local entre raidisseurs d'une zone du fuselage (source : EADS) 3

1.1 Définition du problème . . . 14
1.2 Définition des configurations . . . 15
1.3 Structures élancées de types coque ($e << min(L_1, L_2)$) et poutre ($max(d_1, d_2) << L$) . . . 17
1.4 Illustration des différentes configurations, des repères associés et des opérateurs de rotation . . . 23
1.5 Schéma d'implémentation de la procédure corotationnelle indépendante des éléments . . . 24
1.6 Illustration des branches fondamentales et bifurquées . . . 29
1.7 Premiers mode de flambage d'un panneau raidi chargé en cisaillement, obtenus par une étude de stabilité. Les couleurs représentent le déplacement hors-plan (axe z). . . . 30
1.8 Solution flambée du panneau raidi pour un chargement de $200\ 000N$, obtenue par un calcul non-linéaire géométrique complet. Les couleurs représentent le déplacement hors-plan (axe z). . . . 31
1.9 Procédure itérative de Newton . . . 32
1.10 Comportement de type snapback (à gauche) et snapthrough (à droite) . . . 37
1.11 Procédure itérative de la LaTIn . . . 38

2.1 Géométrie du panneau raidi étudié . . . 45
2.2 Solution à $t = t_1$ . . . 46
2.3 Solution à $t = t_2$ . . . 46
2.4 Solution à $t = t_3$ . . . 46
2.5 Evolution du déplacement suivant y du point d'application de l'effort . . . 46
2.6 Ré-analyse locale sur un panneau raidi en flexion : modèles associés à chaque échelle . . . 47
2.7 Illustration d'une technique de collage cinématique sur une structure de panneau raidi en flexion . . . 48
2.8 Evolution du déplacement suivant y du point d'application de l'effort pour les 3 modèles introduits . . . 49

2.9 Evolution du déplacement suivant y du point d'application de l'effort pour les 3 modèles introduits : zoom sur la zone de flambage initial 50
2.10 Comparaison de la solution de référence (analyse globale fine) et la solution obtenue par ré-analyse locale. Les couleurs représentent le déplacement hors-plan (suivant z) 51
2.11 Evolution du déplacement hors-plan du point A pour les trois modèles introduits 52
2.12 Définition de la cellule élémentaire 54
2.13 Simulation d'une structure fissurée par la méthode Arlequin 58
2.14 Décomposition de domaines 63
2.15 Etapes de résolution des stratégies NKS avec 4 sous-domaines 71
2.16 Décomposition en sous-structures et interfaces 74

3.1 Etapes de résolution des stratégies avec relocalisation non-linéaire 92
3.2 Représentation graphique des deux types de schémas incrémentaux utilisés pour les problèmes locaux non-linéaires 100
3.3 Structure de treillis de poutre 101
3.4 Géométrie initiale et solution déformée 103
3.5 Décomposition de domaine et discrétisation 104
3.6 Evolution de la déformée de la structure au cours des itérations de la méthode mixte avec relocalisation non-linéaire 113
3.7 Influence de la direction de recherche **k** sur le nombre d'itération globales 114
3.8 Nb. total d'itérations globales (problèmes linéaires condensés) 115
3.9 Nb. total d'itérations non-linéaires locales dans les sous-structures 115
3.10 Nb. d'incréments de chargement globaux 115
3.11 Influence du critère d'arrêt local sur le nombre d'itérations globales de la stratégie de relocalisation avec conditions de Dirichlet 116
3.12 Influence du critère d'arrêt local sur le nombre total d'itérations locales de la stratégie de relocalisation avec conditions de Dirichlet 116
3.13 Nouvelle Décomposition de domaine 118
3.14 Influence de la décomposition de domaine sur le nombre de calculs globaux pour les différentes stratégies 119
3.15 Mise en oeuvre parallèle de l'algorithme de résolution avec relocalisation non-linéaire 120
3.16 Temps de calcul et transferts de données entre processeurs pour une structure décomposée en 5 sous-domaines 121

4.1 Structure de la plateforme de calcul LMTpp 126
4.2 Elément triangulaire à 3 nœuds : géométrie, interpolation et points d'intégration 126
4.3 Représentation schématique de la structure du code 131
4.4 Détermination du repère corotationnel à partir de la géométrie courante . 132
4.5 Définition des « boîtes » associées aux maillages 135
4.6 Détermination des zones d'intersection et des noeuds correspondants . . . 135
4.7 Détermination des noeuds d'interface 135

4.8 Détermination des nœuds du voisinage d'une interface (p=2) 137
4.9 Détermination des nœuds du voisinage d'un nœud interface (p=2) 137
4.10 Géométrie du caisson raidi 138
4.11 Conditions aux limites et chargement 139
4.12 Décomposition de domaine et maillages associés 139
4.13 Solution déformée du caisson raidi en flexion 139
4.14 Evolution de l'erreur relative (échelle logarithmique) en fonction des itérations pour les trois stratégies 140

5.1 Exemple de séparation micro/macro d'un champs d'interface 147
5.2 Modes de déformation macro pour une interface 2D (déformée en lignes interrompues) 154
5.3 Modes de déformation macro pour une interface 3D (déformée en lignes interrompues) 155
5.4 Sous-structure et interface considérées 156
5.5 Modes macroscopiques pour les plaques - illustrations des modes de déformation au sein de la sous-structure, pour chacun des modes macro de déplacement de l'interface 157
5.6 Plaque décomposée en 5 sous-structures 158
5.7 Structure déformée, solution du problème linéaire 158
5.8 Evolution de l'erreur en fonction des itérations pour différents choix de bases macro, pour 5 sous-structures 159
5.9 Evolution de l'erreur en fonction des itérations pour différents choix de bases macro, pour 10 sous-structures 160
5.10 Exemples d'interfaces pour des sous-structures de coques 160
5.11 Structure de coque décomposée en 5 sous-structures et conditions aux limites 163
5.12 Structure déformée, solution du problème linéaire 163
5.13 Evolution de l'erreur en fonction des itérations pour $N_M = 10$ 163
5.14 Illustration de l'influence des hypothèses de résolution (linéaire ou non) sur la solution lointaine pour un chargement à torseur nul sur la géométrie initiale 165

A.1 Illustration d'un mode de déformation du modèle de Navier-Bernoulli . . 191
A.2 Element fini de poutre à deux nœuds 192

B.1 Illustration des configurations et repères 195

C.1 Illustration de la cinématique des plaques 201
C.2 Mode de vrillage dans une plaque 204

Liste des tableaux

2.1 Récapitulatif des temps de calcul pour les différents modèles 49

3.1 Caractéristiques géométriques et propriétés matériau pour la structure de treillis de poutre 102
3.2 Résultats de convergence d'une méthode de Newton avec pas de chargement initial maximal 104
3.3 Résultats de convergence d'une méthode NKS avec pas de chargement initial maximal 105
3.4 Résultats de convergence d'une méthode NKS avec relocalistaion non-linéaire et pas de chargement initial maximal 106
3.5 Résultats de convergence d'une méthode NKS avec relocalistaion non-linéaire et pas de chargement initial maximal 106
3.6 Résultats de convergence d'une méthode NKS avec relocalistaion non-linéaire mixte et pas de chargement initial maximal, $\mathbf{k}^s = \mathbf{K}Tbb^q$ pour toutes les interfaces 112
3.7 Résultats de convergence d'une méthode NKS avec relocalistaion non-linéaire mixte et pas de chargement initial maximal, $\mathbf{k}^s = \mathbf{S}_T^q$ pour toutes les interfaces 112

4.1 Cas d'un caisson raidi - Résultats de convergence : approche NKS classique, et approches avec relocalisation de type primale ou mixte 140

Liste des algorithmes

1 Méthode de Newton avec pas adaptatif 35
2 Méthode Newton-Krylov-Schur 72
3 Méthode NKS avec relocalisation non-linéaire - approche primale 98
4 Méthode NKS avec relocalisation non-linéaire - approche mixte 111

Introduction

Problématique industrielle

Dans le secteur aéronautique, les approches classiquement utilisées pour le développement et la certification de nouveaux produits s'appuient sur un grand nombre d'essais à différentes échelles, allant des détails microscopiques (ex. : coupons matériau) à l'avion complet (Figure 1), en passant par toutes les échelles intermédiaires : détails structuraux (ex. : jonctions boulonnées, cordons de soudure), sous-structures (ex. : panneaux raidis) ou sous-ensembles (ex. : tronçon de fuselage). Dans le but de réduire les coûts et les durées de ces processus dans un contexte fortement concurrentiel, ces essais sont aujourd'hui de plus en plus souvent complétés, voire remplacés, par des simulations au moyen de modèles et de discrétisations adaptés à chacune de ces échelles. Les avancées dans ce domaine permettent déjà aujourd'hui de mieux comprendre les phénomènes mécaniques et accélérer les cycles de développement, en simulant le comportement de solutions technologiques avant même les premiers prototypes. Les challenges à relever dans le domaine de la simulation en mécanique restent cependant nombreux.

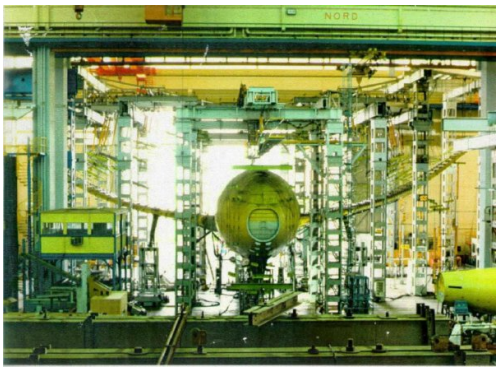

Figure 1: Essai statique de certification sur une structure d'avion complète (source : EADS)

Les structures aéronautiques sont constituées d'éléments élancés susceptibles de flamber au-delà d'une charge critique. Lors des essais structuraux de certification, réalisés sur des fuselages complets, on observe localement l'apparition de zones de flambage de la peau, formant des cloques entre les raidisseurs (Figure 2). Avec l'augmentation du char-

gement, ces zones non-linéaires peuvent s'étendre et provoquer des redistributions de contraintes dans la structure. Pour les charges de service couramment rencontrées, ces phénomènes sont réversibles, le matériau restant dans le domaine élastique. Cependant, ils peuvent provoquer des concentrations de contrainte au niveau des bases des raidisseurs et être à l'origine de décollements locaux menant à la rupture globale. La simulation de telles structures, au comportement fortement non-linéaire, mettant en jeu des phénomènes à la fois à une très grande échelle et au niveau local, reste très difficile à mettre en œuvre. En effet, l'utilisation de l'échelle de modélisation la plus fine pour des structures de très grande taille (menant à plusieurs dizaines ou centaines de millions de degrés de liberté) reste encore inaccessible en raison du coût de calcul prohibitif et/ou de capacités mémoire insuffisantes. Par ailleurs, la finesse de modélisation n'est pas, *a priori*, nécessaire en tous points de la structure.

Stratégies de calcul avancées

Le développement d'approches multi-échelles, couplant les différents niveaux de modélisation et permettant la simulation de structures complètes de très grande taille, avec un réalisme et une robustesse garantissant les résultats obtenus, s'avère indispensable.

Ces approches ne sont pas nouvelles. Elles sont même d'usage courant dans le domaine linéaire où les différentes parties d'un avion sont calculées indépendamment par des approches de type sous structuration. Elles conduisent dans ce cas à une solution "exacte", c'est-à-dire en pratique à la solution Eléments Finis qui aurait été obtenue avec le maillage fin de toute la structure. Dans le domaine non linéaire, le besoin d'approches multi échelles est sans doute encore plus important. Elles sont cependant très souvent restreintes aujourd'hui à des approches descendantes, c'est-à-dire du global vers le local, le retour étant impossible faute de méthodes adéquates. Les ingénieurs des bureaux d'études réalisent ainsi aujourd'hui des calculs approximatifs au moyen d'analyses descendantes de ce type. La première étape correspond à une simulation simplifiée, tant du point de vue géométrique que du point de vue du comportement, sur la structure complète. Elle est suivie par une série d'analyses fines non-linéaire sur des zones d'intérêt en tenant compte des conditions aux interfaces en déplacement ou en effort, conditions obtenues par le calcul global initial. Ces méthodes n'offrent qu'un dialogue limité entre les échelles introduites et ne peuvent traiter que les non-linéarités localisées n'ayant pas d'influence sur la réponse globale. Les redistributions de flux d'efforts en particulier ne peuvent être pris en compte de manière automatique et doivent faire l'objet d'une attention particulière, souvent au moyen de règles métier ou d'expertises particulières. D'autres travaux, basés sur la théorie de l'homogénéisation, proposent des extensions aux cas non-linéaires, mais sont associées à des hypothèses très restrictives (périodicité, séparation des échelles,...) qui ne sont pas vérifiées en général pour le calcul de structures.

Le développement de nouvelles stratégies de calcul efficaces nécessite d'être abordé de manière globale, en considérant à la fois la physique du problème, les algorithmes et les architectures des calculateurs. Concernant ce dernier point, on peut noter deux tendances actuelles. La première concerne les processeurs, pour lesquels la priorité donnée par les constructeurs correspond aux architectures dites multi-coeurs, c'est-à-dire constituées du

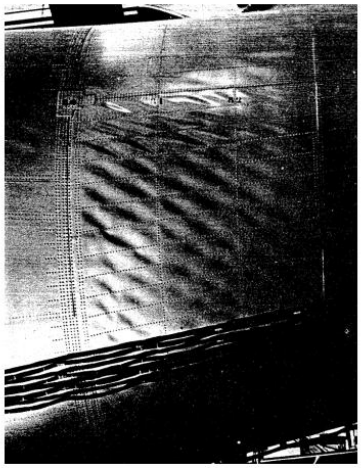

Figure 2: Flambage local entre raidisseurs d'une zone du fuselage (source : EADS)

nombre élevé d'unités de calcul par processeur, pouvant travailler indépendamment tout en ayant accès à la même mémoire centrale. Ces architectures sont ainsi une alternative à une montée en fréquence devenue complexe à mettre en oeuvre technologiquement. Ce choix devrait permettre d'assurer pour les années à venir une augmentation des puissances de calcul en accord avec la désormais célèbre loi de Moore. En contrepartie, les méthodes de programmation devront s'adapter à ce type d'architecture en permettant la parallélisation des tâches élémentaires pour être efficaces.

La deuxième tendance concerne les supercalculateurs. On peut ainsi noter avec intérêt que parmi les 500 calculateurs les plus puissants au monde, plus de 80% sont aujourd'hui des clusters, c'est-à-dire des stations de travail classiques, appelées dans ce contexte « noeuds », mises en réseau pour travailler en commun (source : www.top500.org, novembre 2007). Si ces architectures ont le grand intérêt d'être relativement peu onéreuses, parce que construites à partir de composants standards, il est encore une fois nécessaire de prendre en compte leurs spécificités lors du développement d'algorithmes. En particulier, ces architectures à mémoire distribuée (chaque processeur n'a un accès direct qu'a la mémoire vive locale) requièrent des protocoles d'échanges de données entre noeuds pour communiquer via le réseau. Des protocoles standard aujourd'hui largement répendus (PVM, MPI) permettent une programmation simplifiée, mais les performances restent limitées par les caractéristiques des réseaux utilisés. La notion de grille de calcul étend aujourd'hui le principe des clusters à des machines réparties sur des sites différents. Elle correspond par ailleurs à l'organisation industrielle des grands groupes aéronautiques (plusieurs sites, nombreux sous-traitants) et sera très certainement amenée à se développer dans les années à venir. Ces remarques nous amènent à réfléchir à des stratégies de calcul parallèles capables de minimiser les échanges de données.

Les progrès de l'informatique permettent ainsi aujourd'hui de partager les coûts de calcul et les besoins en mémoire entre plusieurs processeurs/machines. Des problèmes de plus en plus importants deviennent accessibles à conditions de mettre en place des méthodes parallèles adaptées. Cette dernière décennie a vu le développement de solveurs

parallèles capables d'exploiter la puissance de ces supercalculateurs. On peut citer des solveurs directs, qui s'appuient sur la parallélisation des étapes de factorisation des matrices (MUMPS, SCALAPACK,...), ou bien des solveurs itératifs basés soit sur des techniques de décomposition de domaines (BDD, FETI,...), soit sur des approches multi-grilles. Ces approches itératives, et en particuliers les méthodes de décomposition de domaine, se sont révélées être extrêmement efficaces pour la résolution de très grands problèmes, en permettant leur résolution en parallèle sur un grand nombre de processeurs, contrairement aux approches directes qui font toujours l'objet de travaux de recherche pour augmenter leur extensibilité. Les méthodes de décomposition de domaine apportent ainsi des solutions efficaces à la résolution de grands problèmes linéaires. De nombreux travaux ont permis de leur adjoindre des préconditionneurs parallèles pertinents et elles sont considérées comme matures pour la résolution des problèmes linéaires volumiques. Elles font d'ailleurs déjà l'objet de développements dans plusieurs codes « Eléments Finis » commerciaux. Des perspectives d'amélioration sont cependant envisageables pour le traitement des structures élancées de plaques et coques, ainsi que pour les structures fortement hétérogènes. La méthode LaTIn Micro/Macro apporte des solutions à ce dernier problème au moyen d'une procédure d'homogénéisation automatique des comportements des sous-structures donnant un sens mécanique très fort au problème macroscopique associé.

Un premier pas vers le domaine non-linéaire consiste à exploiter les méthodes de décomposition de domaine classiques dans le cadre de schémas de type Newton, formant la famille des méthodes dites de Newton-Krylov-Schur. Elles permettent ainsi de traiter en parallèle la résolution de chacun des systèmes linéaires successifs obtenus par linéarisation du problème non-linéaire de base. Les résultats obtenus montrent cependant des limitations en termes de convergence pour les problèmes où les effets non-linéaires sont non-équitablement répartis. En effet, dans ce cas précis, mais très courant lorsqu'on considère de grandes structures hétérogènes, le processus itératif - global - est piloté par les non-linéarités apparaissant au niveau local. Il en résulte un grand nombre d'itérations, et donc de calculs globaux et d'échanges de données, alors que la plus grande partie de la structure peut parfois rester dans le domaine linéaire.

Objectifs et Travaux réalisés

Le pari à l'origine de cette thèse est ainsi né du constat fait que les méthodes numériques existantes n'étaient pas particulièrement adaptées à la résolution de problèmes non-linéaires de grande taille, en particulier en présence de non-linéarités localisées. Elles sont en effet très souvent développées à partir de considérations algébriques, et ne prennent pas en compte les particularités des comportements non-linéaires considérés. En particulier, les méthodes de décomposition de domaine ont été pensées et optimisées pour la résolution de systèmes linéaires et leur utilisation dans le cadre d'un schéma de Newton se révèle non-optimale.

On peut remarquer que ces stratégies comportent plusieurs schémas itératifs imbriqués, qui peuvent nous amener à nous poser plusieurs questions : Peut-on mieux organiser les différents processus itératifs ? Quels schémas de résolution non-linéaire adaptés

peut-on envisager de mettre en place ? A quel niveau, ou échelle, de la structure doivent-ils opérer ? Ces questions n'ont été, à notre connaissance, que peu abordées jusqu'ici en calcul des structures. Nous proposons dans ces travaux quelques voies d'exploration permettant des améliorations notables, sans pour autant représenter une réponse unique à cette problématique qui, nous en sommes convaincus, sera l'un des enjeux de la recherche pour les années à venir.

Dans un premier temps, nous avons cherché à découpler le pilotage des non-linéarités locales et du calcul global au moyen de schémas non-linéaires adaptés. De la même manière que l'approche FE^2, qui associe à un point de Gauss d'un modèle global un modèle élément finis non-linéaire , nous proposons ici une modification de l'algorithme des approches NKS classiques en introduisant une étape de résolution non-linéaire locale au niveau de chaque sous-structure, aussi appelée étape de relocalisation non-linéaire. Cette étape, composée de processus indépendants, permet ainsi d'adapter au mieux les schémas incrémentaux et itératifs associés à chaque sous-structure en fonction des non-linéarités présentes. La boucle externe permet d'assurer le couplage des différents domaines, c'est-à-dire la continuité des déplacements et l'équilibre des efforts au moyen de la résolution d'un problème linéaire global condensé sur les interfaces.

Nous présentons deux versions qui ont été successivement développées pour l'analyse de structures de treillis de poutres avec flambage : une première où les résolutions non-linéaires locales sont réalisées en imposant des conditions aux limites en déplacement – à partir de la solution obtenue à l'étape globale – et une seconde où nous introduisons des conditions aux limites mixtes permettant de transférer déplacements et efforts. Les performances de ces méthodes sont comparées à celles des approches classiques, et les différents paramètres sont étudiés. L'extension aux structures de plaques et coques raidies est ensuite proposée.

Dans un second temps, nous avons exploré les possibilités d'amélioration du solveur itératif linéaire en proposant une extension de l'approche LaTIn Micro/Macro aux structures de plaques et coques s'appuyant sur une séparation d'échelles appropriée. La partie macroscopique des champs solution est utilisée pour la définition d'un problème global d'interface assurant l'extensibilité de la méthode, alors que la partie microscopique peut être déterminée par des calculs locaux. Le problème macroscopique alors obtenu au moyen d'une procédure d'homogénéisation automatique s'avère très pertinent pour les problèmes fortement hétérogènes. L'application dans un cadre non-linéaire géométrique exige cependant d'être attentif à la définition des opérateurs de changement d'échelle et des opérateurs homogénéisés.

Ce rapport, synthétisant l'ensemble de notre travail sur ce sujet, s'articule donc autour de cinq chapitres, regroupés en deux parties :

Les deux premiers chapitres forment une première partie qui reprend les acquis bibliographiques.

Le premier chapitre présente la problématique des structures élancées, les modèles et discrétisations associés, ainsi que les méthodes classiques de résolution des pro-

blèmes non-linéaires de ce type.

Le deuxième chapitre a pour ambition de dresser un panorama des méthodes numériques avancées pour la résolution des problèmes de grande taille. Nous les avons classées en deux familles : les méthodes de décomposition de domaine et les méthodes multiéchelles.

Les trois chapitres suivants forment la deuxième partie de ce rapport et correspondent au cœur de notre travail.

Le troisième chapitre introduit une technique de relocalisation non-linéaire associée aux méthodes de décomposition de domaine classiques. Elle permet de découpler le pilotage des phénomènes non-linéaires locaux et de diminuer fortement le nombre d'itérations de ces stratégies. Les algorithmes sont présentés ainsi que leur application à des structures non-linéaires de treillis de poutres.

Le quatrième chapitre présente l'application des méthodes de relocalisation non-linéaires aux structures tridimensionnelles de plaques et coques. Les stratégies précédemment présentées sont étendues et mises en œuvre au sein d'une plateforme de calcul moderne pour la résolution de problèmes quasi-industriels.

Le cinquième chapitre , plus prospectif, est consacré à l'extension des approches micro-macro initiées par [Ladevèze] au cas des structures de plaques et coques. L'introduction d'une séparation d'échelle au niveau des interfaces nous permet d'écrire un problème global de taille réduite, tout en conservant les informations mécaniques nécessaires à l'efficacité de la méthode.

Première partie

Modélisation et Simulation Numérique des Structures Elancées

Cette première partie est consacrée à la présentation de la problématique étudiée ainsi qu'à un état-de-l'art des stratégies de calcul mises en oeuvre aujourd'hui pour y faire face. Deux chapitres sont consacrés à cette partie :

- *Le chapitre 1 présente la problématique des structures élancées, les phénomènes non-linéaires associés et les techniques classiques de résolution.*
- *Le chapitre 2 présente tout d'abord les approches descendantes classiques utilisées dans l'industrie pour le calcul de grandes structures, à travers un exemple permettant d'illustrer la problématique de la thèse. Dans un deuxième temps, sont décrites les stratégies de calcul avancées existantes pour la résolution des problèmes de grande taille ou des problèmes comportant plusieurs échelles caractéristiques.*

CHAPITRE 1

Contexte et outils pour l'analyse des structures élancées

Ce chapitre a pour double objectif de présenter le cadre de l'étude et la problématique associée, ainsi que de dresser un rapide état de l'art des méthodes et techniques de résolution classiques. Nous rappellerons ainsi dans une première section les équations qui régissent le comportement des structures élancées élastiques en grandes transformations, puis dans une seconde section nous évoquerons brièvement les techniques les plus courantes de résolution de problèmes non-linéaires.

Sommaire

1 Structures élancées et non-linéarités géométriques 14

1.1 Problème de référence en grandes transformations 14

1.2 Descriptions des structures élancées 16

1.3 Formulation du problème non-linéaire discrétisé 20

1.4 Flambage des structures élancées 27

2 Méthodes de résolution des problèmes non-linéaires 32

2.1 Méthodes de Newton 32

2.2 Méthodes de continuation 36

2.3 Méthodes alternatives 37

3 Bilan du chapitre 39

1 Structures élancées et non-linéarités géométriques

Nous nous intéressons dans le cadre de ces travaux aux structures élancées, c'est-à-dire aux structures dont les élements constitutifs ont une ou plusieurs dimensions petites par rapport aux autres. C'est le cas des structures de poutres, de plaques ou de coques, que l'ont retrouve dans de nombreux produits de l'industrie automobile ou de l'aéronautique. Du fait de leurs caractéristiques géométriques, les structures élancées sont susceptibles de connaitre de grands déplacements et de grandes rotations. Leur étude doit ainsi le plus souvent se faire dans le cadre général des grandes transformations.

1.1 Problème de référence en grandes transformations

Nous présentons dans cette section quelques notions de la mécanique des milieux continus en grandes transformations. Nous nous restreignons aux problèmes hyper-élastiques, sans force suiveuse, conservatifs et soumis à des chargements quasi-statiques isothermes. Plus de détails sur la mécanique des milieux continus en transformations finies pourront être trouvées dans [Malvern 69, Truesdell 04, Valid 77] par exemple. Nous reprenons ici la présentation et les notations issues de [Salençon 00a, Salençon 00b].

1.1.1 Cinématique et notion de configuration

On considère un solide déformable en mouvement dans un référentiel $\mathcal{R}$. Son volume est noté Ω_R, sa surface $\partial\Omega_R$. Cette configuration, libre de contraintes, est appelée configuration de référence et est notée C_R. Elle correspond à l'état du milieu au repos.

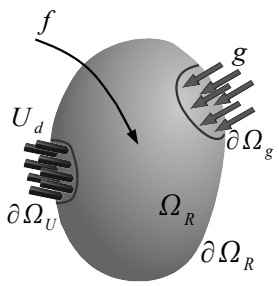

Figure 1.1: Définition du problème

Ce solide est soumis à un chargement volumique f sur Ω et un chargement surfacique g sur $\partial\Omega_g \subset \partial\Omega$, ainsi qu'à des conditions aux limites de Dirichlet U_d sur $\partial\Omega_U$. Sous l'action de ces sollicitations, le solide se déforme. Dans le cadre général des grandes transformations (grands déplacements/rotations, grandes déformations), on distingue la configuration actuelle déformée $C_t(\Omega)$ de la configuration de référence $C_R(\Omega_R)$. Elle est en général inconnue et on cherche précisément à la déterminer.

Dans le repère $R(0, X_1, X_2, X_3)$, on désigne par M un point de Ω_R repéré par le vecteur $\underline{X}$. Ce même point matériel est noté m à l'instant t, et est repéré par le vecteur $\underline{x}$. Le vecteur $\underline{\xi}$ représente le déplacement du point entre l'instant initial et l'instant t, soit :

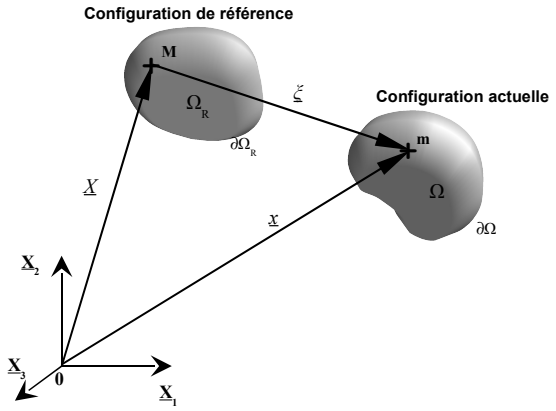

Figure 1.2: Définition des configurations

$$\underline{x} = \underline{X} + \underline{\xi}(\underline{X}, t) \tag{1.1}$$

On note $\underline{\underline{F}}(\underline{X}, t)$ le gradient de la transformation défini par :

$$\underline{\underline{F}}(\underline{X}, t) = \frac{\partial \underline{x}}{\partial \underline{X}} = \underline{\underline{I_d}} + \frac{\partial \underline{\xi}}{\partial \underline{X}} \tag{1.2}$$

Une mesure des déformations est donnée par le tenseur de Green-Lagrange $\underline{\underline{e}}$, couramment utilisé dans le cadre des non-linéarités géométriques :

$$\underline{\underline{e}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{F}}^t.\underline{\underline{F}} - \underline{\underline{I_d}}) \tag{1.3}$$

soit :

$$\underline{\underline{e}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \underline{\xi}}{\partial \underline{X}} + \left(\frac{\partial \underline{\xi}}{\partial \underline{X}}\right)^t\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \underline{\xi}}{\partial \underline{X}}\right)^t.\frac{\partial \underline{\xi}}{\partial \underline{X}} \tag{1.4}$$

Cette mesure de déformation, non-linéaire, est objective, c'est-à-dire qu'elle n'est pas affectée par des mouvements de corps rigides.

1.1.2 Principe des puissances virtuelles

La résolution du problème mécanique par une méthode variationnelle passe par l'écriture du Principe des Puissances Virtuelles qui met en jeu les différentes actions s'exerçant sur le milieu dans sa configuration actuelle C_t, dans un champ de vitesse virtuelles $\hat{U}(x)$.

La configuration la plus naturelle pour l'écriture du Principe des Puissances Virtuelles est ainsi la configuration actuelle C_t, mais on préfère en général la ramener sur la configuration C_R, connue.

La puissance des efforts intérieurs dans un mouvement virtuel à vitesse $\underline{\hat{U}}$ s'exprime alors :

$$P_i(\underline{\hat{U}}) = -\int_{\Omega_R} \underline{\underline{\pi}} : \underline{\underline{\hat{e}}}(\underline{\hat{U}}) d\Omega_R \tag{1.5}$$

où $\underline{\underline{\pi}}$ est le tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff, qui mesure relativement à C_R l'état de contrainte sur C_t, et $\underline{\underline{\hat{e}}}(\underline{\hat{U}})$ le taux de déformation lagrangien, défini par :

$$\underline{\underline{\hat{e}}}(\underline{\hat{U}}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \underline{\hat{U}}}{\partial \underline{X}} + \left(\frac{\partial \underline{\hat{U}}}{\partial \underline{X}}\right)^t\right) + \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial \underline{\xi}}{\partial \underline{X}}\right)^t . \frac{\partial \underline{\hat{U}}}{\partial \underline{X}} + \left(\frac{\partial \underline{\hat{U}}}{\partial \underline{X}}\right)^t . \frac{\partial \underline{\xi}}{\partial \underline{X}}\right) \tag{1.6}$$

Dans le cadre de l'hyperélasticité, on suppose que les contraintes de Piola-Kirchhoff $\underline{\underline{\pi}}$ et le tenseur de Green-Lagrange $\underline{\underline{e}}$ vérifient la loi de comportement linéaire suivante :

$$\underline{\underline{\pi}} = \underline{\underline{\underline{\underline{A}}}}_R \underline{\underline{e}}$$

ce qui donne finalement :

$$P_i(\underline{\hat{U}}) = -\int_{\Omega_R} \underline{\underline{\hat{e}}}(\underline{\hat{U}}) : \underline{\underline{\underline{\underline{A}}}}_R \underline{\underline{e}} d\Omega_R \tag{1.7}$$

De même, on obtient pour l'expression des puissances des efforts extérieurs l'équation suivante :

$$P_e(\underline{\hat{U}}) = \int_{\Omega_R} \frac{d\Omega}{d\Omega_R} \underline{f}.\underline{\hat{U}} d\Omega_R + \int_{\partial\Omega_g} \frac{da}{da_R} \underline{g}.\underline{\hat{U}} da_R \tag{1.8}$$

d'où l'expression finale suivante pour le PPV :

$$P_i + P_e = -\int_{\Omega_R} \underline{\underline{\hat{e}}}(\underline{\hat{U}}) : \underline{\underline{\underline{\underline{A}}}}_R \underline{\underline{e}}\, d\Omega_R + \int_{\Omega_R} J \underline{f}.\underline{\hat{U}} d\Omega_R + \int_{\partial\Omega_g} \frac{da}{da_R} \underline{g}.\underline{\hat{U}} da_R = 0, \forall \underline{\hat{U}} \tag{1.9}$$

Remarque : On peut également définir une configuration intermédiaire C_0, dernière configuration connue à partir de laquelle l'application d'un incrément de chargement conduit à la configuration actuelle C_t. Le point m_0, transporté de M sur C_0, a pour coordonnées $\underline{x}_0 = \underline{x}_0(\underline{X}, t)$. Cette configuration permet une formulation plus naturelle du problème dans le cas de chargement incrémentaux. On a alors, pour le Principe des Puissances Virtuelles :

$$-\int_{\Omega_0} \underline{\underline{\hat{e}}}_0(\underline{\hat{U}}) : \underline{\underline{\underline{\underline{A}}}}_0 \underline{\underline{e}}_0 d\Omega_0 + \int_{\Omega_0} \frac{d\Omega}{d\Omega_0} \underline{f}.\underline{\hat{U}} d\Omega_0 + \int_{\partial\Omega_{g_0}} \frac{da}{da_0} \underline{g}.\underline{\hat{U}} da_0 = 0 \tag{1.10}$$

où $\underline{\underline{e}}_0$, $\underline{\underline{\hat{e}}}_0$ et $\underline{\underline{\underline{\underline{A}}}}_0$ sont relatifs à $\mathcal{C}_0$.

1.2 Descriptions des structures élancées

1.2.1 Modélisation

Les théories des structures élancées (poutres, membranes, plaques, coques, ...) s'appuient sur une description particulière de leur cinématique prenant en compte leurs caractéristiques géométriques, associée à des hypothèses sur l'état de contrainte (par exemple contraintes antiplanes dans les poutres, et planes dans les plaques).

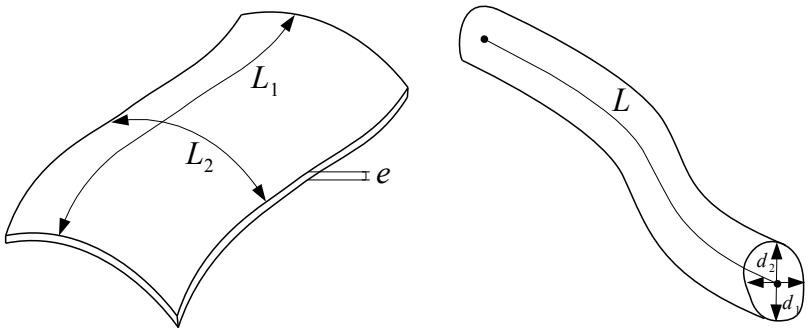

Figure 1.3: Structures élancées de types coque ($e << min(L_1, L_2)$) et poutre ($max(d_1, d_2) << L$)

■ Modèles de poutres

Il existe deux principaux modèles de poutres largement répandus pour la modélisation des structures élancées : le modèle de Timoshenko et le modèle de Navier-Bernouilli.

Pour les poutres de Timoshenko, on fait l'hypothèse cinématique que les sections droites restent planes et indéformables dans leur plan. La position $\underline{x}$ à un instant donné t d'un point M, repéré par $\underline{X}$ dans la configuration initiale de la poutre s'écrit alors :

$$\underline{x}(\underline{X}, t) = \underline{X} + \underline{\overline{\xi}}(X, t) + \underline{\underline{R}}(X, t).\underline{X}_{\text{section}} \tag{1.11}$$

où le vecteur $\underline{\overline{\xi}}$ caractérise la translation de la section droite, et $\underline{\underline{R}}$ sa rotation, $\underline{X}_{\text{section}}$ repérant M dans la section par rapport à son centre d'inertie. Si on se restreint à des petites perturbations, on peut approximer la rotation des sections par :

$$\underline{\underline{R}}(\underline{X}, t).\underline{X}_{\text{section}} \approx \underline{\omega}(X, t) \wedge \underline{X}_{\text{section}} \tag{1.12}$$

Pour le modèle de Navier-Bernouilli, en plus de l'hypothèse précédente, on se place dans le cas d'une poutre suffisamment élancée pour négliger les effets inertiels associés aux rotations de sections devant les effets associées aux translations de la ligne moyenne :

$$\underline{\hat{\omega}}(\underline{X}, t) = \underline{e}_x \wedge \frac{\overline{\xi}}{dx} + \hat{\Omega}_{\underline{X}}(\underline{X})\underline{e}_x \tag{1.13}$$

où $\underline{e}_x$ est le vecteur unitaire suivant l'axe de la poutre.

Cette hypothèse permet de réduire les champs inconnus du problème aux trois composantes du déplacement de la ligne moyenne et à la rotation axiale. En effet la rotation de la section est alors directement liée au déplacement de la ligne directrice. Ce modèle est présenté en Annexe A.

En pratique, le modèle de poutre de Navier-Bernoulli est ainsi réservé aux poutres très élancées, celui de Timoshenko pour les poutres plus épaisses.

■ **Modèles de plaques et coques**

Des cinématiques analogues à celles des poutres ont été proposées pour les plaques et coques. La théorie des plaques minces est basée sur les travaux de Kirchhoff en 1850 [Kirchhoff 50]. Une relaxation des hypothèses a été proposée par Reissner [Reissner 45, Reissner 85] et Mindlin [Mindlin 51] pour étendre la théorie aux plaques plus épaisses. Des théories générales de coques pour les structures courbes ont été proposées dans [Koiter 59, Timoshenko 59]. Nous présentons dans l'Annexe C le modèle classique de Mindlin, utilisé plus loin pour le calcul de structures aéronautiques.

■ **Théorie des poutres, plaques et coques en grands déplacements**

Dans le cadre général des grands déplacements, l'approximation (1.12) n'est plus valable, mais s'exprime au moyen d'opérateurs de rotations. On utilise alors l'expression complète du champ de déplacement pour le calcul des déformations de Green-Lagrange. Différentes approches ont été développées dans [Simo 85, Reissner 72] pour les poutres en grands déplacements et rotations, ainsi que dans [Simmonds 72, Valid 95, Ramm 99, Koiter 80, Libai 88, Hughes 81a] et dans [Hughes 81b] pour les structures de plaques et coques. Elles aboutissent en général à des développement relativement complexes. Comme nous le verrons par la suite, moyennant des hypothèses de petites déformations locales, un choix pertinent de configuration de référence et une décomposition appropriée du mouvement, les théories linéaires pourront être réutilisées pour le calcul en grands déplacements.

1.2.2 Eléments finis pour les structures élancées

Une fois un modèle retenu, le calcul de structures passe par la discrétisation des équations d'équilibre. Une technique très largement répandue en calcul des structures est la méthode des éléments finis, basée sur une approximation de la solution sur un espace adapté. Les fonctions de forme de cette base sont définies sur un maillage de la structure, constitué de formes géométriques simples, les éléments. La cinématique et les hypothèses particulières des modèles de poutres, plaques et coques nécessitent de développer des éléments finis adaptés. En particulier, les inconnues nodales sont dans le cas général les déplacements u_x, u_y et u_z, ainsi que les rotations θ_x, θ_y et θ_z. Pour ne pas encombrer inutilement les notations, elles seront le plus souvent rassemblées sans distinction dans le vecteur q.

De très nombreux éléments ont ainsi été développés dans les précédentes décennies. La littérature sur le sujet est d'ailleurs extrêmement vaste et ne cesse d'être complétée. Leur utilisation pour le calcul de structures et, plus encore, leur implémentation dans un code de recherche exige de connaître leurs particularités et les problématiques qui leur sont souvent associées. Les éléments les plus couramment rencontrés sont présentés en détail dans [Batoz 90] ou [Zienkiewicz 05]. Nous nous contentons ici de présenter les principales familles d'éléments, les notions qui doivent être maîtrisées, et les problèmes classiques liés à leur mise en oeuvre.

■ Eléments de poutres

Pour les poutres de Navier-Bernoulli, on peut citer les éléments classiques à deux noeuds avec un choix de fonctions d'interpolation cubiques de Hermite pour les déplacements transverses, et linéaires pour le déplacement axial et la torsion. Les poutres plus épaisses sont en général modélisées par des éléments de poutres de Timoshenko avec des fonctions d'interpolation de même ordre pour le déplacement transverse et la rotation associée. Ces éléments présentent cependant un phénomène de blocage en cisaillement transverse lorsque l'épaisseur devient petite et que l'on réalise une intégration exacte de l'opérateur de raideur. Les solutions couramment apportées proposent soit d'effectuer une sous-intégration numérique du terme de raideur en cisaillement, soit de postuler une forme approchée pour les déformations. Il existe aussi des éléments dits mixtes, basés sur un principe variationnel à deux champs (Hellinger-Reissner [Reissner 50]) ou à trois champs (Hu-Washizu [Washizu 82]), obtenus en relaxant le relation déformation-déplacement ou la relation de comportement. Il est alors possible de faire des hypothèses indépendantes sur les champs de déplacement et de déformation, et de postuler une forme particulière pour ces derniers. Les éléments de poutres de Navier-Bernoulli, utilisés par la suite dans ces travaux, sont présentés plus en détails dans l'annexe A.

■ Eléments de plaques

Concernant les plaques minces, il existe de très nombreux éléments triangulaires et quadrangulaires basés sur la théorie de Kirchhoff. La principale difficulté de cette théorie réside dans la nécessité d'assurer la continuité $\mathcal{C}^1$ du déplacement transverse w. Certains éléments utilisant des fonctions d'interpolation non-conformes, c'est-à-dire ne vérifiant pas complètement cette continuité, ont été proposés, ainsi que d'autres vérifiant complètement la continuité, au prix d'un plus grand nombre d'inconnues ou de singularités nodales. Cependant, ces derniers sont peu pratiques à l'usage et ne donnent pas toujours de meilleurs résultats. On notera enfin l'existence d'éléments mixtes, et en particuliers ceux mettant en oeuvre des contraintes additionnelles de type Kirchhoff Discret [Wempner 68, Dhatt 70, Batoz 72].

Les plaques plus épaisses sont traitées par des éléments s'appuyant sur la théorie de Reissner-Mindlin, prenant en compte le cisaillement transverse. De façon analogue aux poutres de Timoshenko, une formulation en déplacement classique avec les mêmes fonctions d'interpolation pour les déplacements et les rotations mène à un phénomène de blocage en cisaillement transverse. Les mêmes solutions peuvent être mises en oeuvre pour remédier à ce problème. Nous citerons ici, parmi les nombreux éléments existants, les éléments mixtes avec contraintes de type Discrete Shear [Oñate 92].

■ Eléments de coques

Les structures de coques, c'est-à-dire de courbure non-nulle, peuvent être discrétisées de deux façons : soit en utilisant un assemblage en 3 dimensions d'éléments de plaques classiques, soit en développant des éléments prenant en compte cette géométrie particulière, au moyen d'éléments iso-paramétriques par exemple. Dans le cas d'assemblage d'éléments plans, une attention particulière doit être portée au degré de liberté correspondant aux rotations selon la normale à l'élément. Celle-ci n'entre pas en compte dans

l'expression de la formulation variationnelle, ce qui peut mener, dans le cas d'éléments coplanaires juxtaposés, à une indétermination. Ce problème peut être résolu soit en éliminant les inconnues posant un problème, soit en leur attribuant une raideur arbitraire, soit encore en définissant une déformation associée et en modifiant l'expression du travail des efforts intérieurs [Allman 84, Bergan 85]. Enfin des éléments de coques volumiques, prenant en compte des hypothèses de Reissner-Mindlin, ont aussi été proposés [Ahmad 70].

La plupart de ces éléments ont été initialement développés dans le cadre linéaire des petites perturbations. Leur mise en oeuvre en grandes déformations exige d'utiliser la forme complète du tenseur des déformations de Green-Lagrange ce qui peut mener, dans le cas le plus général des éléments incurvés, à des développements relativement complexes.

1.3 Formulation du problème non-linéaire discrétisé

Afin de mener des calculs de structures élancées dans le cadre de grands mouvements, il convient de définir la formulation du problème matriciel obtenu après discrétisation. Nous avons ici choisi comme technique de discrétisation la méthode des éléments finis. Le système algébrique non-linéaire résultant dépend cependant de la configuration choisie pour écrire les équations d'équilibre. Nous présentons tout d'abord dans cette section les deux formulations les plus répandues, avant de présenter une formulation corotationnelle particulièrement adaptée aux structures élancées.

1.3.1 Formulation lagrangienne totale

En notant q le vecteur des inconnues nodales d'un élément, et en choisissant l'écriture vectorielle pour $\underline{\underline{e}}$, on obtient les relations suivantes pour les déplacements :

$$\left[\underline{\xi}\right] = \mathbf{N}(\underline{X}).q(t) \tag{1.14}$$

et pour les déformations de Green-Lagrange :

$$\left[\underline{\underline{e}}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial \underline{\xi}}{\partial \underline{X}} + \left(\frac{\partial \underline{\xi}}{\partial \underline{X}}\right)^t\right] + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \underline{\xi}}{\partial \underline{X}}\right)^t . \frac{\partial \underline{\xi}}{\partial \underline{X}} \tag{1.15}$$

$$= \mathbf{B}_L.q + \frac{1}{2}\mathbf{B}_{NL}(q,q) \tag{1.16}$$

où $\mathbf{N}(\underline{X})$ est la matrice rassemblant les fonctions de forme élémentaires, $\mathbf{B}_L$ la partie linéaire de l'opérateur de déformation et $\mathbf{B}_{NL}$ la partie quadratique.

De la même manière, en choisissant la même discrétisation pour les vitesses virtuelles $\underline{\hat{U}}$ et en notant $\underline{\hat{u}}$ le vecteur des inconnues nodales correspondantes, on a :

$$[\underline{\hat{u}}] = \mathbf{N}(\underline{X}).\underline{\hat{u}}(t) \tag{1.17}$$

ce qui mène à l'expression suivante pour le taux de déformation lagrangien $\underline{\underline{\hat{e}}}$:

$$\left[\underline{\underline{\hat{e}}}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial \underline{\hat{U}}}{\partial \underline{X}} + \left(\frac{\partial \underline{\hat{U}}}{\partial \underline{X}}\right)^t\right] + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \underline{\xi}}{\partial \underline{X}}\right)^t . \frac{\partial \underline{\hat{U}}}{\partial \underline{X}} + \left(\frac{\partial \underline{\hat{U}}}{\partial \underline{X}}\right)^t . \frac{\partial \underline{\xi}}{\partial \underline{X}}\right] \tag{1.18}$$

$$= \mathbf{B}_L.\hat{u} + \mathbf{B}_{NL}(q, \hat{u}) \tag{1.19}$$

La formulation lagrangienne totale se base sur l'expression du Principe des puissances virtuelles exprimé sur la configuration de référence $\mathcal{C}_R$ (1.9). En substituant dans cette expression les relations précédentes, on obtient :

$$\hat{u}^t . \int_{\Omega_R} \left(\mathbf{B}_L^t + \mathbf{B}_{\text{NL}}^t(q, .)\right) .\mathbf{A}_R . \left(\mathbf{B}_L.q + \frac{1}{2}\mathbf{B}_{NL}(q, q)\right) d\Omega_R \; =$$

$$\hat{u}^t . \int_{\Omega_R} \mathbf{N}^t.\mathbf{J}.f \; d\Omega_R + \hat{u}^t . \int_{\partial\Omega_R} \mathbf{N}^t . \frac{da}{da_R}.g \; da_R \quad , \quad \forall \hat{u} \in U_{CA} \tag{1.20}$$

ce qui mène au système algébrique suivant :

$$F_{\text{int}}(q) + F_{\text{ext}} = 0 \tag{1.21}$$

avec

$$F_{\text{int}}(q) = \int_{\Omega_R} \left(\mathbf{B}_L^t + \mathbf{B}_{\text{NL}}^t(q, .)\right) .\mathbf{A}_R . \left(\mathbf{B}_L.q + \frac{1}{2}\mathbf{B}_{NL}(q, q)\right) d\Omega_R \tag{1.22}$$

$$F_{\text{ext}} = \int_{\Omega_R} \mathbf{N}^t.\mathbf{J}.f \; d\Omega_R + \int_{\partial\Omega_R} \mathbf{N}^t . \frac{da}{da_R}.g \; da_R \tag{1.23}$$

Bien souvent, on est amené à linéariser ce problème autour d'une configuration $\mathcal{C}_t$ à l'instant t. On obtient alors l'opérateur de raideur tangent $\mathbf{K}_T$, défini par :

$$\mathbf{K}_T = \frac{\partial F_{\text{int}}}{\partial q} \tag{1.24}$$

soit :

$$\mathbf{K}_T = \int_{\Omega_R} \mathbf{B}_{\text{NL}}^t(., .).\mathbf{A}_R . \left(\mathbf{B}_L.q + \frac{1}{2}\mathbf{B}_{NL}(q, q)\right) d\Omega_R + \int_{\Omega_R} \mathbf{B}_{\text{L}}^t.\mathbf{A}_R.\mathbf{B}_{\text{L}} d\Omega_R$$

$$+ \int_{\Omega_R} \left[\mathbf{B}_{\text{L}}^t.\mathbf{A}_R.\mathbf{B}_{\text{NL}}(q_t, .) + \mathbf{B}_{\text{NL}}^t(q_t, .).\mathbf{A}_R.\mathbf{B}_{\text{L}} + \mathbf{B}_{\text{NL}}^t(q_t, .).\mathbf{A}_R.\mathbf{B}_{\text{NL}}(q_t, .)\right] d\Omega_R \tag{1.25}$$

ou encore :

$$\mathbf{K}_T = \mathbf{K}_T^G + \mathbf{K}_T^E + \mathbf{K}_T^D \tag{1.26}$$

Dans cette dernière équation, $\mathbf{K}_T^E$ représente la matrice de raideur élastique construite sur la configuration de référence $\mathcal{C}_R$, $\mathbf{K}_T^G$ la matrice de raideur géométrique associée à l'état de contraintes existant sur la configuration $\mathcal{C}_t$ et calculé sur $\mathcal{C}_R$, et $\mathbf{K}_T^D$ matrice fonction des déplacements q à l'instant t, appelée matrice des déplacements initiaux.

1.3.2 Formulation lagrangienne réactualisée

La formulation lagrangienne réactualisée est basée sur le Principe des Puissances Virtuelles exprimé dans une configuration $\mathcal{C}_0$ plus proche de la configuration actuelle que $\mathcal{C}_R$. Elle est particulièrement utilisée dans les approches incrémentales, où l'on utilise la configuration $\mathcal{C}_t$ à l'instant t pour déterminer la solution du problème à l'instant $t + \Delta t$.

En suivant la même démarche que pour la formulation lagrangienne totale, on aboutit à l'expression de l'opérateur de raideur $\mathbf{K}^T$ suivante :

$$\mathbf{K}_T = \mathbf{K}_T^E + \mathbf{K}_T^G \tag{1.27}$$

avec

$$\mathbf{K}_T^E = \int_{\Omega_t} \mathbf{B}_{\mathrm{L}}^t.\mathbf{A}_t.\mathbf{B}_{\mathrm{L}} d\Omega_t \tag{1.28}$$

et

$$\mathbf{K}_T^G = \int_{\Omega_R} \mathbf{B}_{\mathrm{NL}}^t(.,.).\mathbf{A}_t.\left(\mathbf{B}_L.q + \frac{1}{2}\mathbf{B}_{NL}(q,q)\right) d\Omega_t \tag{1.29}$$

On peut remarquer que la matrice des déplacements initiaux disparaît dans la formulation lagrangienne réactualisée. Cependant, il est maintenant nécessaire de transporter la loi de comportement sur la configuration $\mathcal{C}_t$ et l'intégration doit se faire sur la géométrie déformée. Le cas des éléments de poutres et plaque devient alors plus délicat à traiter.

1.3.3 Formulations corotationnelles

Si les formulations précédentes permettent bien de mener des calculs analytiques ou des simulations numériques, elles s'avèrent peu commodes pour diverses raisons.

Les déformations de Green-Lagrange et les contraintes de Piola-Kirchhoff de deuxième espèce sont les plus couramment utilisées en analyse non-linéaire, car elles sont à la fois objectives, conjuguées et adaptées aux grandes déformations. Cependant, leur interprétation n'est pas évidente, et l'expression des lois de comportement en grandes transformations passe le plus souvent par une conversion du tenseur de Piola-Kirchhoff de deuxième espèce en tenseur des contraintes de Cauchy, opération qui peut être coûteuse.

Par ailleurs, la prise en compte des grands déplacements exige de redévelopper des modèles de plaques et coques adaptés, ainsi que les éléments finis associés. Ces développements peuvent mener à des modèles relativement complexes, et leur implémentation doit être réalisée pour chacun des types d'éléments précédemment introduits. Or, très souvent, les grandes transformations des structures élancées ne sont associées qu'à de petites déformations de leurs éléments constitutifs. Les mouvements sont ainsi majoritairement constitués d'une composante rigidifiante.

Pour ces raisons, des approches alternatives dites corotationnelles ont été proposées. Elles proposent de choisir comme configuration de référence une configuration obtenue par une rotation rigidifiante, et d'exprimer déformations et contraintes dans un repère tournant avec la matière. Dans le cas des milieux massifs, on fait souvent le choix d'une décomposition polaire du gradient $\mathbf{F} = \mathbf{R}.\mathbf{U} = \mathbf{V}.\mathbf{R}$. Il s'agit en général d'une décomposition faite au niveau continu et qui varie en tout point. De telles approches et les outils mathématiques associés, en particulier pour le traitement des opérateurs de rotation et pour

les dérivations, sont étudiées dans [Truesdell 60, Bathe 73, Belytschko 79, Hughes 80, Argyris 82].

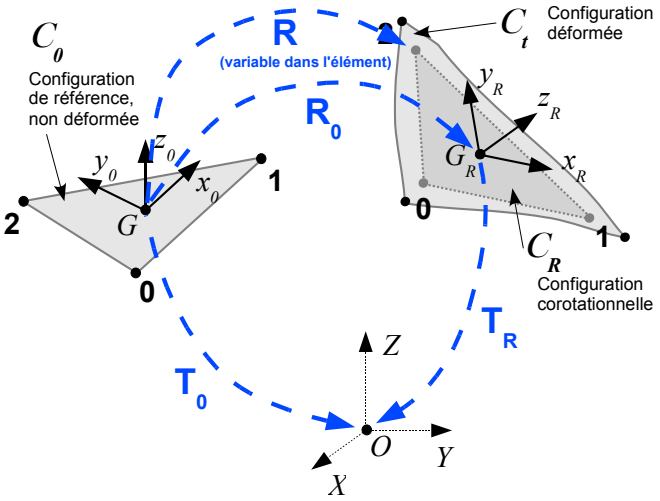

Figure 1.4: Illustration des différentes configurations, des repères associés et des opérateurs de rotation

Pour les structures élancées, on préfère en général choisir un repère corotationnel lié à la géométrie des éléments, et tournant avec eux (voir Figure 1.4). On fait alors porter les non-linéarités des grands mouvements sur les changements de repères, les déformations élémentaires restant linéaires dans le repère corotationnel. Une synthèse complète des Eléments Finis corotationnels est proposée dans [Felippa 05]. Elle fait suite aux travaux antérieurs présentés, entre autres, dans [Wempner 69, Belytschko 73, Bergan 76, Nour-Omid 91, Crisfield 96]. Cette approche fait l'hypothèse de petite perturbations dans le repère corotationnel. Elle a ainsi pour avantage de permettre la réutilisation des opérateurs des éléments linéaires classiques déjà existants. Elle permet en outre de s'affranchir des problèmes rencontrés avec une formulation Lagrangienne Totale dans le cas de grandes rotations. La Figure 1.4 illustre les différentes configurations considérées, ainsi que les opérateurs de rotation permettant de passer d'un repère à l'autre.

La stratégie agit comme une étape intermédiaire située entre le calcul de la matrice de raideur élémentaire (identique au cas linéaire, dans le repère corotationnel) et l'assemblage de l'opérateur global, indépendamment de l'élément considéré. Sa mise en oeuvre est illustrée sur la Figure 1.5. Dans cette figure, les deux blocs de droite représentent les fontions élémentaires classiques, pouvant être reprises dans les librairies EF existentes, et les blocs de gauche les méthodes d'assemblage et de résolution du logiciel. Il s'agit d'une stratégie efficace, simple à implémenter et qui est utilisée dans de nombreux codes commerciaux ou de recherche. Pour ces raisons, ce sera la formulation non-linéaire que nous adopterons par la suite pour les calculs en post-flambage des structures élancées de poutres et plaques.

Les deux blocs de la procédure corotationnelle a proprement parler correspondent à une phase préliminaire d'extraction des déplacements et rotations déformants, et à une

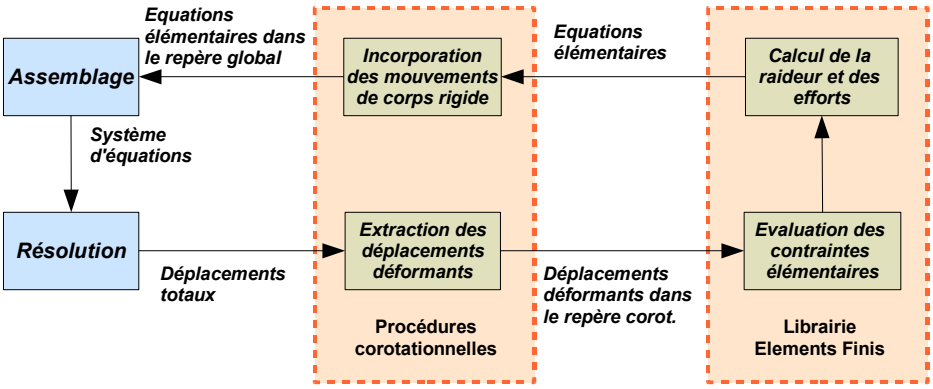

Figure 1.5: Schéma d'implémentation de la procédure corotationnelle indépendante des éléments

phase de transport du problème tangent élémentaire dans le repère global.

■ Extraction des déplacements et rotations déformantes

Il s'agit dans cette étape d'extraire des déplacements et rotations totaux les déplacements et rotations de corps rigides pour obtenir ceux engendrant des déformations dans le repère corotationnel. Cette opération est réalisée en trois étapes, pour chaque nœud a d'un élément e :

1. Calcul des coordonnées nodales $\tilde{x}_a^e$ dans le repère élémentaire initial (configuration C_0) par rapport au centre de gravité a^e de l'élément, à partir des coordonnées globales x_a^e :
$$\tilde{x}_a^e = \mathbf{T}_0^e.(x_a^e - a^e) \tag{1.30}$$
2. Calcul des coordonnées nodales de l'élément déformé $\bar{x}_a^e = x_a^e + u_a^e$ et du nouveau centre de gravité b^e. Détermination du repère corotationnel C_R, *i.e.* de l'opérateur de rotation $\mathbf{T}_R^e$. Calcul des coordonnées de l'élément déformé dans le repère corotationnel :
$$\tilde{x}_{Ra}^e = \mathbf{T}_R^e.(\bar{x}_a^e - b^e) \tag{1.31}$$
3. Calcul des déplacements déformants $\tilde{u}_{da} = \tilde{x}_{Ra}^e - \tilde{x}_a^e$ et de l'opérateur de rotation déformant $\tilde{\mathbf{R}}_{da}^e = \mathbf{T}_R^e \mathbf{R}_a^e (\mathbf{T}_0^e)^t$, où $\mathbf{R}_a^e$ est l'opérateur de rotation du nœud a entre la configuration $\mathcal{C}_0$ et la configuration finale $\mathcal{C}_t$, puis extraction des angles de rotation déformants $\tilde{\theta}_{da}^e$, à partir du vecteur axial de $\tilde{\mathbf{R}}_{da}^e$.

Remarque : Le choix de la configuration corotationnelle C_R n'est pas unique. Elle doit cependant « suivre au mieux » la structure dans son mouvement. En général, on s'appuie sur les nœuds de l'élément déformé pour définir le repère orthonormal associé à la configuration corotationnelle. Des détails peuvent être trouvés dans l'Annexe B pour les

éléments de poutres, et dans le Chapitre 4 pour les éléments triangulaires de plaques. Une solution optimale peut aussi être recherchée en choisissant le repère dans lequel des déplacements déformants sont les plus petits. Ce choix passe alors par la résolution d'un problème d'optimisation local, par une méthode de moindres carrés par exemple.

■ Passage du repère corotationnel au repère global

Cette étape consiste à opérer une transformation du problème tangent exprimé dans le repère corotationnel pour le ramener dans le repère global. Cette étape n'est pas immédiate car elle exige de prendre en compte correctement les termes de rotation dans les différents repères lors des opérations de différentiation. Nous ne présentons ici que les résultats principaux de cette démarche, dont tous les détails peuvent être trouvés dans [Felippa 05].

1. *Efforts internes :*

   Dans le repère corotationnel, on fait l'hypothèse des petites déformations qui, dans le cas d'un matériau élastique, permet d'écrire les efforts intérieurs $\tilde{F}^e_{int}$ comme dérivant d'un potentiel élastique W^e :

$$\tilde{F}^e_{int} = \frac{\partial \mathrm{W}^e}{\partial \tilde{q}^e_d} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \mathrm{W}^e}{\partial \tilde{u}^e_d} \\ \\ \dfrac{\partial \mathrm{W}^e}{\partial \tilde{\theta}^e_d} \end{bmatrix} \tag{1.32}$$

   En utilisant le jacobien $\mathbf{J}^e$ défini par :

$$\mathbf{J}^e = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \tilde{u}^e_d}{\partial u^e} & \dfrac{\partial \tilde{u}^e_d}{\partial \omega^e} \\ \\ \dfrac{\partial \tilde{\theta}^e_d}{\partial u^e} & \dfrac{\partial \tilde{\theta}^e_d}{\partial \omega^e} \end{bmatrix} \tag{1.33}$$

   on obtient l'expression des efforts intérieurs dans le repère global :

$$F^e_{int} = \mathbf{J}^t \tilde{F}^e_{int} \tag{1.34}$$

   Il est pratique de décomposer le jacobien en $\mathbf{J} = \mathbf{HPT}$, où $\mathbf{P}$ est le projecteur extrayant la partie déformante des déplacements et rotations exprimés dans le repère corotationnel, $\mathbf{T}$ s'écrit en fonction de l'opérateur de rotation $\mathbf{T}^e_R$:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}^e_R & 0 \\ \\ 0 & \mathbf{T}^e_R \end{bmatrix} \tag{1.35}$$

et **H** est un opérateur reliant les variations du vecteur des rotations $\tilde{\theta}_d^e$ dans le repère corotationnel aux variations du vecteur de Spins $\tilde{\omega}_d^e$, adapté aux rotations finies dans le repère global, soit :

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & \dfrac{\delta\tilde{\theta}_d^e}{\delta\tilde{\omega}_d^e} \end{bmatrix} \tag{1.36}$$

Au final, on obtient :

$$\delta q_d^e = \mathbf{HPT}\delta q^e \tag{1.37}$$

$$F_{int}^e = \mathbf{T}^t\mathbf{P}^t\mathbf{H}^t\tilde{F}_{int}^e \tag{1.38}$$

2. *Opérateur de raideur :*

L'opérateur de raideur tangent cohérent $\mathbf{K}_T^e$ d'un élément e est défini comme la dérivée des efforts internes par rapport aux degrés de liberté q^e dans le repère global :

$$\mathbf{K}_T^e = \frac{\partial F_{int}^e}{\partial q^e} \tag{1.39}$$

En prenant pour F_{int}^e l'expression (1.38) et après différention, on obtient :

$$\begin{aligned} \delta F_{int}^e = \delta\mathbf{T}^t\mathbf{P}^t\mathbf{H}^t\tilde{F}_{int}^e + \mathbf{T}^t\delta\mathbf{P}^t\mathbf{H}^t\tilde{F}_{int}^e + \mathbf{T}^t\mathbf{P}^t\delta\mathbf{H}^t\tilde{F}_{int}^e + \mathbf{T}^t\mathbf{P}^t\mathbf{H}^t\delta\tilde{F}_{int}^e \\ = (\mathbf{K}_{\mathrm{GR}}^e + \mathbf{K}_{\mathrm{GP}}^e + \mathbf{K}_{\mathrm{GM}}^e + \mathbf{K}_{\mathrm{M}}^e)\delta q^e \end{aligned} \tag{1.40}$$

où $\mathbf{K}_{\mathrm{M}}^e$ est appelée « matrice de raideur matérielle », $\mathbf{K}_{\mathrm{GP}}^e$ « matrice géométrique de projection de l'équilibre », $\mathbf{K}_{\mathrm{GM}}^e$ « matrice géométrique de correction du moment » et $\mathbf{K}_{\mathrm{GR}}^e$ « matrice géométrique de rotation ».

Ces différentes matrices peuvent être exprimées en fonction de l'opérateur de raideur élastique $\tilde{\mathbf{K}}^e$, exprimé dans le repère corotationnel. Ainsi on obtient :

$$\mathbf{K}_{\mathrm{M}}^e = \mathbf{T}^t\mathbf{P}^t\mathbf{H}^t\tilde{\mathbf{K}}^e\mathbf{HPT} \tag{1.41}$$

$$\mathbf{K}_{\mathrm{GP}}^e = -\mathbf{T}^t\mathbf{G}^t\mathbf{F}_n^t\mathbf{PT} \tag{1.42}$$

$$\mathbf{K}_{\mathrm{GM}}^e = \mathbf{T}^t\mathbf{P}^t\mathbf{LPT} \tag{1.43}$$

$$\mathbf{K}_{\mathrm{GR}}^e = -\mathbf{T}^t\mathbf{F}_{nm}\mathbf{GT} \tag{1.44}$$

où les opérateurs **G**, $\mathbf{F}_n$, **L** et $\mathbf{F}_{nm}$ sont indépendants de la formulation de l'élément et basés uniquement sur sa topologie. Leur interprétation et leur expression générale sont explicitées dans [Felippa 05]. L'expression dans le cas des éléments plans de poutres est rappelée dans l'Annexe B.

■ **Bilan**

Pour résumer, la formulation corotationnelle aboutit, pour les efforts intérieurs et l'opérateur de raideur élémentaires, aux expressions suivantes :

$$F_{int}^e = \mathbf{T}^t\mathbf{P}^t\mathbf{H}^t\tilde{\mathbf{K}}^e\tilde{q}_d^e \tag{1.45}$$

$$\mathbf{K}_T^e = \mathbf{T}^t\left(\mathbf{P}^t\mathbf{H}^t\tilde{\mathbf{K}}^e\mathbf{HP} + \mathbf{P}^t\mathbf{LP} - \mathbf{F}_{nm}\mathbf{G} - \mathbf{G}^t\mathbf{F}_n^t\mathbf{P}\right)\mathbf{T} \tag{1.46}$$

On peut démontrer que l'opérateur de raideur assemblé ainsi calculé devient symétrique quand on approche l'équilibre, pour des efforts imposés conservatifs. On pourra donc utiliser une version symétrisée de l'opérateur et un solveur moins coûteux, tout en conservant une convergence quadratique.

Moyennant certaines approximations, des versions simplifiées des expressions précédentes peuvent être obtenues. Ainsi, en faisant l'hypothèse que $\mathbf{H} = \mathbf{I}$ et $\mathbf{P} = \mathbf{I}$ dans l'expression (1.38), tout en conservant ces deux opérateurs dans (1.37), on obtient la variante proposée par Bergan et al. dans [Nygard 89] :

$$F_{int}^e = \mathbf{T}^t\tilde{\mathbf{K}}^e\tilde{q}_d^e \tag{1.47}$$

$$\mathbf{K}_T^e = \mathbf{T}^t\left(\tilde{\mathbf{K}}^e\mathbf{HP} - \mathbf{F}_{nm}\mathbf{G}\right)\mathbf{T} \tag{1.48}$$

La symétrie de l'opérateur est alors perdue, même à l'équilibre, ce qui impose l'utilisation d'un solveur adapté pour conserver de bonnes propriétés de convergence. Par ailleurs, les approximations faites imposent de travailler avec un maillage relativement fin.

Enfin, une version intermédiaire consiste à faire l'hypothèse que $\mathbf{H} = \mathbf{I}$, mais à conserver $\mathbf{P}$ dans (1.38). On obtient alors :

$$F_{int}^e = \mathbf{T}^t\mathbf{P}^t\tilde{\mathbf{K}}^e\tilde{q}_d^e \tag{1.49}$$

$$\mathbf{K}_T^e = \mathbf{T}^t\left(\mathbf{P}^t\tilde{\mathbf{K}}^e\mathbf{HP} - \mathbf{F}_{nm}\mathbf{G} - \mathbf{G}^t\mathbf{F}_n^t\mathbf{P}\right)\mathbf{T} \tag{1.50}$$

Dans cette approche, l'opérateur de raideur assemblé tend de nouveau vers un opérateur symétrique à l'équilibre. La convergence quadratique sera donc assurée avec une version symétrisée de l'opérateur, à condition d'utiliser un maillage suffisamment fin, pour respecter l'approximation introduite. **Cette formulation sera celle qui sera retenue dans la suite de ces travaux.**

1.4 Flambage des structures élancées

Une particularité du comportement des structures élancées est leur sensibilité au flambage, qui correspond à une instabilité de l'équilibre de la structure, liée aux non-linéarités géométriques induites par des transformations finies.

Afin d'expliquer ce phénomène, on est amené à étudier des petits mouvements autour d'une configuration $\mathcal{C}_0$ donnée. On peut alors linéariser l'expression du PPV sur la configuration $\mathcal{C}_0$. En choisissant pour les déplacements inconnus $\underline{\xi}$ et les vitesses virtuelles $\underline{\hat{U}}$ le même espace V de fonctions cinématiquement admissibles et en utilisant la loi de comportement transportée sur $\mathcal{C}_0$ (1.10), le champ $\underline{\xi}$ est alors solution de :

$$\mathcal{K}_0(\underline{\xi}, \underline{\hat{U}}) = \Delta\mathcal{P}_e(\underline{\hat{U}}) \qquad \forall \underline{\hat{U}} \in V \tag{1.51}$$

avec

$$V = \left\{ \underline{\hat{U}} : \underline{\Omega}_0 \to \Re^3 \ \ , \ \ \hat{U}_i \in H^1(\Omega_0) \ \ , \ \ \hat{U}_i = 0 \ \ sur \ \ \partial\Omega_U \right\} \tag{1.52}$$

et où l'opérateur de raideur $\mathcal{K}_0$ est constitué des deux termes suivants :

– le terme classique de raideur élastique

$$\mathcal{K}_0^E(\underline{\xi}, \underline{\hat{U}}) = \int_{\Omega_0} \underline{\underline{\epsilon}}_0^L(\underline{\xi}) : \underline{\underline{\underline{\underline{A}}}}_0 : \underline{\underline{\epsilon}}_0^L(\underline{\hat{U}}) d\Omega_0 \tag{1.53}$$

où $\underline{\underline{\epsilon}}_0^L(\underline{\xi})$ est la partie linéaire des déformations exprimées dans $\mathcal{C}_0$:

$$\underline{\underline{\epsilon}}_0^L(\underline{\xi}) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \underline{\xi}}{\partial \underline{x}_0} \right)^t + \frac{\partial \underline{\xi}}{\partial \underline{x}_0} \right] \tag{1.54}$$

– un terme supplémentaire de raideur géométrique, dû au changement de géométrie en présence de contraintes initiales

$$\mathcal{K}_0^G(\underline{\xi}, \underline{\hat{U}}) = \int_{\Omega_0} \frac{\partial \underline{\xi}}{\partial \underline{x}_0} . \underline{\underline{\sigma}}_0 : \frac{\partial \underline{\hat{U}}}{\partial \underline{x}_0} d\Omega_0 \tag{1.55}$$

soit :

$$\mathcal{K}_0(\underline{\xi}, \underline{\hat{U}}) = \mathcal{K}_0^E(\underline{\xi}, \underline{\hat{U}}) + \mathcal{K}_0^G(\underline{\xi}, \underline{\hat{U}}) \tag{1.56}$$

dans lequel l'opérateur de raideur élastique $\mathcal{K}_0^E(\underline{\xi}, \underline{\hat{U}})$ est, *a priori*, défini positif alors que l'opérateur de raideur géométrique $\mathcal{K}_0^G(\underline{\xi}, \underline{\hat{U}})$ dépend linéairement de l'état de précontrainte $\underline{\underline{\sigma}}_0$. Il peut ainsi exister un niveau de précontrainte pour lequel l'opérateur de raideur $\mathcal{K}_0(\underline{\xi}, \underline{\hat{U}})$ ne soit plus plus défini positif. On parle alors de *charge critique de flambement eulérien*. Cette charge critique λ_c peut correspondre soit à un point de bifurcation soit à un point limite. Les différents comportements sont illustrés Figure 1.6 sur une courbe classique effort/déplacement. Dans le premier cas, la branche d'équilibre fondamentale croise une autre branche d'équilibre admissible pour la structure (appelée branche bifurquée) au point de bifurcation. Cette branche est associée à un potentiel inférieur à celui de la branche fondamentale et sera privilégié par la structure. Le second cas correspond à un niveau de chargement admissible maximal sur la branche d'équilibre fondamentale de la structure.

La problématique du flambage est de première importance dans le dimensionnement de structures élancées car celui-ci s'avère être un des modes de ruine prépondérants, ou

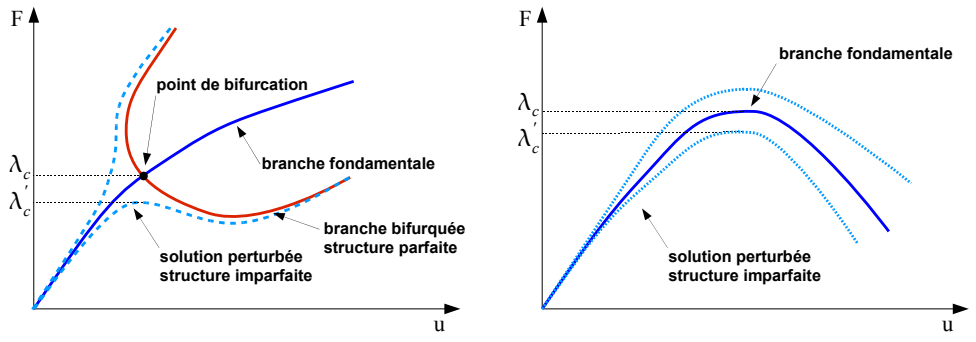

Figure 1.6: Illustration des branches fondamentales et bifurquées

ayant un rôle significatif dans le processus de dégradation. Elle a fait l'objet d'une très grande quantité d'études, aussi bien analytiques, numériques qu'expérimentales.

L'étude analytique des charges critiques pour des structures simples a été faite dès 1744 dans [Euler 44]. Il existe aujourd'hui des formules pour les charges critiques de flambages de poutres, plaques et cylindres dans de nombreuses configurations de conditions aux limites et de chargements.

Avec l'arrivée des premiers calculateurs, des formulations discrètes comme celle proposée par la méthode des éléments finis ont permis l'analyse de géométries plus complexes. Le développement des structures élancées passe aujourd'hui quasi-systématiquement par divers types d'analyses, parmi lesquelles :

■ l'analyse de stabilité

Ce type d'analyse recherche les charges critiques de flambage et les modes associés d'une structure linéaire élastique soumise à un chargement mécanique. La théorie de la stabilité élastique a été introduite dans [Koiter 45, Timoshenko 61]. Un bilan des développements plus récents pour les cas non-linéaires avec rupture ou endommagement peut être trouvé dans [Bazant 03]. Le phénomène de flambage a lieu dès que l'unicité de la solution du problème d'équilibre 1.51 est perdue, c'est-à -dire lorsque la dérivée seconde de l'énergie potentielle du système s'annule. L'analyse de stabilité revient donc à résoudre le problème aux valeurs propres généralisé suivant :

$$\mathcal{K}_0^E(\underline{\xi}, \underline{\hat{U}})x = \lambda \mathcal{K}_0^G(\underline{\xi}, \underline{\hat{U}})x \tag{1.57}$$

La figure 1.7 représente les deux premiers modes de flambage issus d'une analyse linéaire de stabilité après discrétisation par la méthode des éléments finis pour une structure de panneau raidi soumis à un chargement de double cisaillement. Les comportements non-linéaires peuvent être pris en compte dans le cadre d'une analyse de stabilité incrémentale [Combescure 95].

■ l'analyse en post-flambage

L'analyse de stabilité permet de déterminer les charges critiques de flambage d'une structure et de s'assurer de la stabilité dans des conditions de chargement de la structure

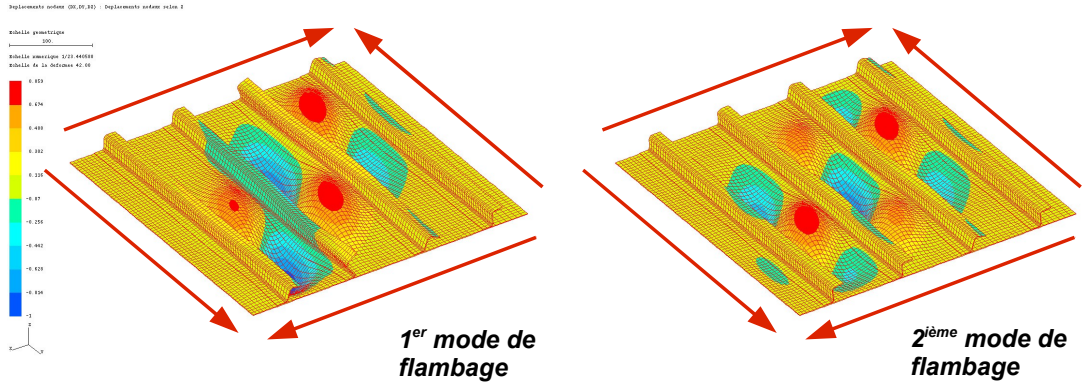

Figure 1.7: Premiers mode de flambage d'un panneau raidi chargé en cisaillement, obtenus par une étude de stabilité. Les couleurs représentent le déplacement hors-plan (axe z).

en service. Pour certaines structures devant être certifiées pour des chargements extrêmes, et dans le but de déterminer le scénario de ruine, il peut être nécessaire d'effectuer un calcul non-linéaire complet. **C'est ce type d'analyse qui fait l'objet des travaux de cette thèse.**

La figure 1.8 présente le résultat d'un telle analyse sur la structure de panneau raidi précédemment introduite.

Les problématiques liées à ce type d'analyse sont nombreuses. On peut citer, entre autres, celle du pilotage des calculs, de la détection des bifurcations ou du suivi des chemins d'équilibre. Ces différents points sont abordés dans [Arbocz 87]. D'une manière générale, les calculs au post-flambage sont souvent difficiles à mener et à interpréter, et très coûteux en ressources de calcul. Nous présenterons dans les sections suivantes quelques techniques de résolution de tels problèmes non-linéaires. C'est cette problématique de coût de calcul que nous aborderons plus précisément dans ces travaux.

Concernant plus particulièrement les structures aéronautiques qui nous intéressent ici, on observe, lors des essais et des simulations réalisés sur des structures représentatives, une première bifurcation correspondant à un flambage de la « peau » entre les raidisseurs. La structure reste cependant le plus souvent globalement stable, du fait de sa conception raidie, et peut admettre une augmentation de la charge relativement importante, accompagnée éventuellement de changements de modes de flambage. Dans un deuxième temps seulement, se développe un mode de flambage plus global, au niveau des raidisseurs, entraînant la ruine de la structure. Le plus souvent, c'est un mode de dégradation local, par exemple le décollement d'un raidisseur, qui survient, du fait des déformations engendrées par le flambage de peau. Ce mode de dégradation ultime n'est bien sûr pas envisagé pour le dimensionnement des structures aéronautiques dans leur domaine d'utilisation, ce jusqu'aux charges extrêmes. **Aussi, par la suite, nous nous intéresserons plus particulièrement à la première phase du calcul non-linéaire, avant la ruine complète de la**

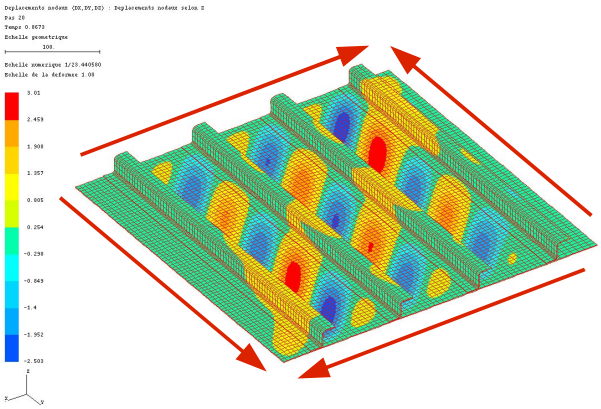

Figure 1.8: Solution flambée du panneau raidi pour un chargement de $200\ 000N$, obtenue par un calcul non-linéaire géométrique complet. Les couleurs représentent le déplacement hors-plan (axe z).

structure, c'est-à-dire à la phase globalement stable.

■ l'analyse de sensibilité aux imperfections

Le flambage, et en particulier les charges critiques, peuvent être très sensibles aux défauts de géométrie des structures étudiées. En présence de tels défauts, les chemins d'équilibre de la structure sont modifiés (lignes discontinues sur la figure 1.6). Pour certaines catégories de structures, la charge limite peut être fortement réduite. C'est donc un phénomène important qui doit être pris en compte dans la conception. Ce problème de flambage des structures imparfaites a été formalisé dans [Koiter 45] pour les structures élastiques. Un exemple peut être trouvé dans [Arbocz 69] pour les coques cylindriques. Le cas des structures plastiques a été étudié entre autres dans [Hutchinson 74]. Une étude du flambage non-linéaire de cylindres sous pression avec des imperfections d'épaisseur est présenté dans [Combescure 01].

Les défauts généralement introduits comme imperfections initiales peuvent être de plusieurs types : il peut s'agir soit des modes de flambage, obtenus pas une analyse de stabilité préalable et particulièrement pénalisants, soit de défauts aléatoires, soir encore de défauts liés au procédé de fabrication et obtenus par une mesure sur les structures réelles.

Dans leur phase de flambage initial, globalement stable, les structures de panneaux raidis que nous considérons sont relativement peu sensibles aux imperfections. Ici encore, l'expérience éprouvée de la conception aéronautique et des méthodes de fabrication justifie que nous ne prenions pas en compte par la suite les imperfections des structures.

2 Méthodes de résolution des problèmes non-linéaires

Nous présentons brièvement dans cette section les méthodes les plus couramment employées pour la résolution de systèmes d'équations non-linéaires, à savoir les méthodes de Newton, ainsi que quelques approches plus originales ou particulièrement adaptées aux non-linéaritées de flambage : les méthodes de continuation, les méthodes d'ordre supérieur et la méthode LaTIn.

2.1 Méthodes de Newton

2.1.1 Principes de base

La méthode de Newton ou méthode de Newton-Raphson est une méthode numérique itérative de résolution des équations du type $f(x) = 0$. Elle a été initialement proposée par [Newton 71] en 1687 et repose sur la méthode du point fixe. Plus précisément, l'approximation de la solution x_i à l'itération i étant donnée, x_{i+1} est déterminé par :

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \tag{1.58}$$

On peut montrer que cette méthode converge de manière quadratique dans un voisinage de la solution x^* (pour les racines simples de la fonction). Par contre, elle peut diverger si le point de départ de la procédure est trop éloigné de x^*. Ainsi, on peut commencer par estimer une approximation de la solution par une méthode grossière, puis appliquer la méthode de Newton pour améliorer la précision. La figure 1.9 illustre le comportement de la méthode pour une fonction f à valeurs dans $\Re$.

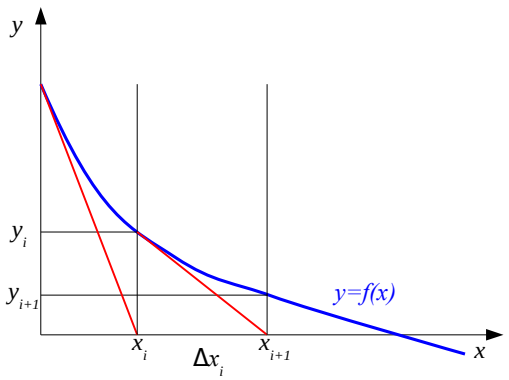

Figure 1.9: Procédure itérative de Newton

2.1.2 Application au calcul de structures non-linéaires

En mécanique des structures, le problème non-linéaire à résoudre, après discrétisation par la méthode des éléments finis et choix d'une formulation adaptée, est du type :

$$R(q) = F_{\text{int}}(q) + F_{\text{ext}} = 0 \tag{1.59}$$

La mise en œuvre d'une méthode de Newton-Raphson pour sa résolution passe par la linéarisation de cette équation. La solution q étant connue, la fonction $R(q)$ est approchée par son développement limité au premier ordre :

$$R(q + \Delta q) \approx R(q) + \frac{\partial R}{\partial q}\Delta q \tag{1.60}$$

En notant comme précédemment $\dfrac{\partial R}{\partial q} = \mathbf{K}_T$, on obtient Δq par la résolution du système linéaire suivant :

$$\mathbf{K}_T(q)\Delta q = -R(q) \tag{1.61}$$

soit :

$$\Delta q = -\left(\mathbf{K}_T(q)\right)^{-1} R(q) \tag{1.62}$$

en faisant l'hypothèse que le problème initial est bien posé, de sorte que cette inversion ait un sens.

Plusieurs méthodes numériques permettent de réaliser cette opération. Elle se traduit le plus souvent par une première étape de factorisation de la matrice $\mathbf{K}_T$ (en fonction des caractéristiques de la matrice, factorisation de type **LU**, **LDL**^{t}, ...) puis par la résolution des deux systèmes triangulaires obtenus.

Ces résolutions linéaires sont réalisées au sein d'un processus itératif qui permet de calculer les corrections Δq successives au vecteur solution q. Les itérations sont stoppées lorsque le résidu relatif $\eta = \|R(q)\| \,/\, \|F_{ext}\|$ devient inférieur à une valeur critique η^c.

En outre, la méthode nécessite d'être mise en œuvre dans le cadre d'une procécdure incrémentale, où le chargement est appliqué en plusieurs incréments successifs. En effet, comme nous l'avons vu, la convergence n'est assurée qu'au voisinage de la solution du problème. Pour cette raison, on doit se restreindre à de petites variations du chargement. Par ailleurs les sollicitations peuvent évoluer dans le temps, être cycliques, etc. même si nous nous plaçons ici dans le cadre d'une réponse quasi-statique de la structure, paramétrée par un temps fictif d'évolution.

Au final, le problème à résoudre est le suivant : partant d'un état, supposé en équilibre, caractérisé par un chargement F_{ext0} et un déplacement q_0, on cherche, par une procédure itérative de Newton, l'incrément de déplacement Δq correspondant à un incrément de chargement donné ΔF_{ext} et vérifiant les équations d'équilibre discrétisé. Une fois cet incrément déterminé, le déplacement est mis à jour, et un nouvel incrément de chargement peut être appliqué, jusqu'à atteindre le chargement total F_{ext}^{tot}.

Déterminer la séquence optimale de pas de chargement n'est cependant pas une tâche aisée : si l'incrémént de chargement est trop important, la procédure itérative de Newton converge très difficilement, voire diverge ; à l'inverse si l'incrément est très petit, le nombre d'itérations pour converger devient très faible, mais un très grand nombre de pas de chargement peut être nécessaire pour appliquer le chargement total.

Ainsi, en pratique, plutôt que de fixer *a priori* cette séquence de chargement, après avoir fixé un premier incrément $\Delta F_0 = \theta.F_{ext}^{tot}$ ($\theta \in]0,1]$), il est courant d'utiliser une méthode de pas adaptatif. Il existe de très nombreuses approches, dont :

1. une version standard qui consiste à diviser par deux l'incrément courant en cas de non-convergence après un nombre fixé d'itérations, et à l'augmenter en le multipliant par un paramètre réel, supérieur à un, après plusieurs convergences rapides.
2. une méthode plus fine qui consiste, en cas de convergence, à modifier l'incrément de chargement selon la formule 1.63 pour atteindre un nombre optimal d'itérations à chaque incrément, fixé *a priori* :

$$\Delta F_{p+1} = \Delta F_p . \left(\frac{i_{opt}}{i_p} \right)^{\alpha} \tag{1.63}$$

où ΔF_p est le p^{eme} incrément de chargement, i_p le nombre d'itérations à convergence du p^{eme} pas, i_{opt} un nombre optimal d'itérations recherché et α un paramètre strictement positif. L'incrément est ainsi adapté (augmenté ou réduit) en fonction du comportement au pas précédent.

L'ensemble de la procédure itérative incrémentale est résumé dans l'algorithme 1, avec la procédure adaptative du deuxième type.

2.1.3 Méthodes dérivées

Dans de nombreux cas, et en particulier lorsque le nombre d'inconnues devient important, le calcul de l'opérateur linéarisé et sa factorisation peuvent être très coûteux voire prohibitif. Nous décrivons ici les méthodes dérivées de la Méthode de Newton-Raphson qui tentent de pallier cet inconvénient : la méthode sécante, la méthode pseudo-Newton et la Méthode BFGS.

■ **Newton sécant**, où méthode de la sécante

La méthode de la sécante est une méthode dérivée de celle de Newton où l'on remplace $f'(x_i)$ par une approximation :

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} \tag{1.64}$$

On obtient alors la relation de récurrence suivante :

$$x_{i+1} = x_i - \frac{x_i - x_{i-1}}{f(x_i) - f(x_{i-1})} f(x_i) \tag{1.65}$$

Le calcul de l'opérateur tangent n'est plus nécessaire, mais la convergence est plus lente : pour des valeurs initiales x_0 et x_1 suffisamment proches de la solution x^*, la méthode a un ordre de convergence de $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \simeq 1,618$ (le « nombre d'or »). Toutefois, la fonction f doit être 2 fois continuement différentiable et x^* doit être une racine simple de l'équation.

Algorithme 1 Méthode de Newton avec pas adaptatif

Initialisation : $F_{ext} = 0,\ \Delta F = \theta.F_{ext}^{tot},\ q = 0$
boucle pour $p = 0$ à p_{max} **faire** {incréments de chargement}
  $F_{ext} = F_{ext} + \Delta F_{ext}$
  si $\|F_{ext}\| > \|F_{ext}^{tot}\|$ **alors**
    $F_{ext} = F_{ext}^{tot}$
  fin si
  boucle pour $i = 0$ à i_{max} **faire** {itérations de Newton}
    - Calcul du résidu $R = F_{ext} + F_{int}$
    - Indicateur d'erreur $\eta = \frac{\|R\|}{\|F_{ext}\|}$: **Si** $\eta < \eta^c$ Sortie
    - Calcul de l'opérateur tangent $\mathbf{K}_T$
    - Factorisation de $\mathbf{K}_T$
    - Résolution de $\mathbf{K}_T.\Delta q = -R$
    - Mise à jour de q : $q = q + \Delta q$
  fin boucle
  si $\eta > \eta_c$ **alors** {non-convergence}
    Réduction de l'incrément de chargement :
    $F_{ext} = F_{ext} - \Delta F_{ext}$
    $\Delta F_{ext} = \Delta F_{ext}/2$
  sinon {convergence}
    si $F_{ext} = F_{ext}^{tot}$ **alors** {Fin du calcul}
      Sortie
    sinon {Incrément adaptatif}
      $\Delta F_{ext} = \Delta F_{ext}.\,(i_{opt}/i)^{\alpha}$
    fin si
  fin si
fin boucle

■ **Pseudo-Newton**

Dans cette autre variante de la méthode de Newton-Raphson, on conserve un même opérateur linéarisé au cours des itérations d'un incrément de chargement. Son calcul n'est ainsi effectué qu'une seule fois par incrément, et non plus à chaque itération. Le coût de calcul s'en trouve fortement allégé. La vitesse de convergence est bien sûr détériorée par rapport à la méthode de Newton-Raphson. La méthode n'est à conseiller que pour les systèmes faiblements non-linéaires, ou de petits incréments de chargement. Elle reste cependant robuste dans pour les cas où Newton-Raphson l'est.

■ **Méthode quasi-Newton**

Les approches quasi-Newton proposent d'utiliser des approximations A_i de l'opérateur tangent $K^T(q_i)$, qui sont mises à jour à chaque itération par :

$$A_{i+1} = A_i + \Delta A_i \tag{1.66}$$

La méthode *BFGS* (pour Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno) propose une mise à jour de A au moyen des vecteurs des efforts internes précédents [Broyden 70]. L'opérateur tangent réel n'est calculé à aucun moment. Cependant, la méthode fait l'hypothèse que la fonction peut localement être approximée par une fonction quadratique dans un voisinage de la solution.

La méthode *BFGS* s'avère être peu coûteuse et plutôt robuste, en particulier pour les structures avec un comportement « durcissant » (contrairement à la méthode de Newton-Raphson). La convergence est plus rapide que pour les méthodes quasi-Newton. Son comportement dans le cas de bifurcations ou de point limite n'est cependant pas toujours satisfaisant.

2.2 Méthodes de continuation

Si les méthodes de type Newton présentées plus haut permettent la résolution de nombreux probèmes non-linéaires, elles sont très peu robustes vis-à-vis de certains comportement malheureusement souvent rencontrés dans les structures élancées. Les comportement de snap-through (ou claquage) et de snap-back, schématiquements représentés sur les courbes Efforts-Déplacements des figures 1.10 en sont deux exemples emblématiques. Dans les deux cas, le pilotage classique en effort échoue au delà d'un point limite. Un pilotage en déplacement n'aboutit que dans le cas du claquage, à condition de ne pas se retrouver au court des itérations sur un point où l'opérateur tangent devient nul.

Des méthodes dites de continuation ont cependant été développées, entre autres par Riks [Riks 72] et Crisfield [Crisfield 88]. Elles permettent de réaliser un pilotage mixte en effort et déplacement en modifiant la méthode de Newton pour rechercher la solution à l'intersection avec un hyperplan ou une hypersphère de l'espace F-U. Elles consistent ainsi à étendre l'espace des inconnues en adjoignant aux déplacements q le facteur λ relatif au chargement, ou à l'évolution d'une variable du calcul (par ex. une longueur de fissuration), en écrivant $F(t) = \lambda(t)F_{ext}$.

On se ramène alors à la résolution d'un problème à $n_{ddl} + 1$ inconnues (q, λ) formé par les n_{ddl} équations d'équilibre :

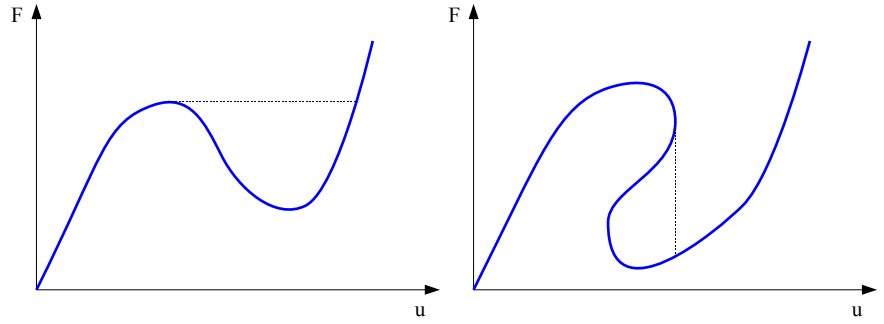

Figure 1.10: Comportement de type snapback (à gauche) et snapthrough (à droite)

$$R(q, \lambda) = F_{\{int}(q) + \lambda F_{ext} = 0 \tag{1.67}$$

et une équation supplémentaire de la forme :

$$f(q, \lambda) = 0 \tag{1.68}$$

Le choix de cette équation n'est pas unique. La technique de la longueur d'arc (arc-length) propose de rechercher (q, λ) sur une boule centrée sur le dernier point calculé (q_0, λ_0) et délimitant son voisinage au sens d'une norme spécifique. On peut citer plusieurs variantes : la méthode de la longueur d'arc linéarisée (ou de l'hyperplan) [Riks 72, Riks 79], celle de la longueur d'arc cylindrique [Podovan 82, Ramm 81b, Ramm 81a], ou bien celle de la longueur d'arc sphérique (ou de l'hypersphère) [Crisfield 88].

Remarque : Les structures aéronautiques qui nous intéresseront par la suite sont des structures raidies, spécifiquement conçues pour résister à des chargements allant au delà de la charge initiale de flambage de peau. Pour de telles structures, une méthode de continuation ne devient nécessaire qu'à partir de la charge de ruine globale, en général beaucoup plus élévée. Pour des chargements plus faibles, une méthode de Newton classique convient généralement. Ce sera notre choix par la suite.

2.3 Méthodes alternatives

2.3.1 Méthode asymptotique numérique

La méthode asymptotique numérique a été proposée par Azrar, Cochelin et Potier-Ferry dans [Azrar 91, Azrar 93]. Elle a été appliquée à de nombreux domaines de la mécanique : problèmes non-linéaires géométriques [Zahrouni 99], équations de Navier-Stokes, contacts, visco-plasticité, etc.. Elle dérive des méthodes de perturbations introduites par [Koiter 45] et s'appuie sur un développement de chaque inconnue du problème sous la forme d'une série entière à un ordre n donné, en fonction d'un paramètre de contrôle. Après injection de ces développements dans les équations du problème, on se ramène alors à la résolution successive de n systèmes linéaires identiques, où seul le second membre varie. L'opération de factorisation peut ainsi être réalisée une seule fois. Il

est intéressant de noter que la taille de l'incrément de chargement n'est déterminée qu'a posteriori, puisqu'on a une expression de l'écart de la solution approximée à la solution.

Cette méthode montre une très grande robustesse vis-à-vis des comportements de type snap-back et snap-through. Concernant le passage des points de bifurcation, une stratégie de détection des instabilités et de branchement par perturbation a été proposée dans [Boutyour 04].

2.3.2 Méthode LaTIn

La méthode LaTIn (pour « Large Time Increment Method ») est une stratégie de calcul originale pour la résolution des problèmes non-linéaires d'évolution, décrite en détails dans [Ladevèze 85, Ladevèze 99a]. Sa particularité réside dans le fait qu'il ne s'agit pas d'une méthode incrémentale : la résolution se fait itérativement sur tout l'intervalle de temps et tout l'espace. On a donc à chaque itération une approximation de la solution complète de la structure.

Elle repose sur trois principes de mise en oeuvre :

1. la séparation des difficultés, et une répartition des équations du problème en deux groupes : les équations linéaires, éventuellement globales (équations de liaison et d'équilibre, loi d'état) et les équations locales, éventuellement non-linéaires (loi d'évolution des matériaux non-linéaires, contact, etc.).
2. une résolution itérative à deux étapes : on cherche les solutions successives des deux groupes d'équations précédents au moyen de directions de recherches $\mathbf{E}^+$ et $\mathbf{E}^-$. La solution est cherchée sur tout l'espace et sur tout le temps à chaque itération.
3. une représentation adaptée des inconnues, par exemple comme une somme de chargements radiaux (produits d'une fonction du temps par une fonction d'espace).

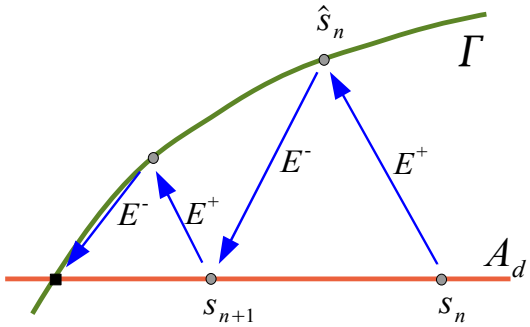

Figure 1.11: Procédure itérative de la LaTIn

Elle est particulièrement bien adaptée à la résolution des problémes mettant en oeuvre des matériaux non-linéaires où les non-linéarités sont locales. Cette approche a ainsi été appliquée aux problèmes d'élasto-plasticité [Boisse 89] et visco-plasticité [Cognard 89], à des problèmes de dynamique [Royer 90, Ladevèze 96] ou pour l'analyse du délaminage [Allix 87]. Elle a aussi été mise en oeuvre pour les grandes transformations [Bussy 90]

et le flambage [Boucard 97] grâce à une formulation corotationnelle permettant de séparer les équations non-linéaires et linéaires. Avec un choix approprié de directions de recherche, la stratégie peut-être considérée comme une méthode de continuation permettant de piloter les phénomènes instables.

Elle apporte aussi une réponse intéressante à la problématique des études paramétriques, la méthode pouvant être initialisée par une solution d'un calcul précédent, et les fonctions d'espace pouvant être réutilisés [Boucard 99, Boucard 01]. Enfin, nous verrons dans le chapitre suivant une mise en oeuvre de la méthode LaTIn dans le cadre des méthodes de décomposition de domaine.

3 Bilan du chapitre

Sans vouloir être exhaustif, ce chapitre a dressé un rapide panorama d'un champ très vaste de la recherche en mécanique des structures. Nous avons ainsi présenté successivement la problématique des structures élancées dans le cadre des grandes transformations, les modèles et discrétisations associés, les formulations non-linéaires les plus courantes ainsi que quelques méthodes classiques pour la résolution des problèmes non-linéaires obtenus. Même si ces notions ne constituent pas le point central de nos travaux, elles en constituent néanmoins une brique de base indispensable à la compréhension des choix faits par la suite, et précisent le contexte de l'étude.

CHAPITRE 2

Stratégies de Calcul Avancées pour la Résolution de Problèmes de Grande Taille

Ce chapitre a pour objectif de dresser un état de l'art des méthodes et techniques de résolution existantes adaptées à la résolution des problèmes de grande taille. Après avoir illustré la problématique à partir des approches « globales-locales » classiquement utilisées dans l'industrie, nous présentons deux familles de stratégies plus innovantes pour le calcul de grandes structures : les approches multi-échelles et les méthodes de décomposition de domaine.

Sommaire

1 Problématique 43

2 Etude préliminaire de quelques approches classiques : Intérêts et limites 44

2.1 Quelques approches utilisées en bureau d'étude 44

2.2 Illustration 45

3 Les stratégies de calcul multiéchelles 53

3.1 Méthodes basées sur la théorie de l'homogénéisation 53

3.2 Méthodes de superposition et d'enrichissement 57

4 Les méthodes de sous-structuration et de décomposition de domaine . . 62

4.1 Principes généraux de sous-structuration 62

4.2 Méthodes de décomposition de domaine 65

4.3 Les Méthodes Newton-Krylov-Schur 70

4.4 La méthode LaTIn micro/macro 74

4.5 Décomposition de domaine et dynamique transitoire 78
5 Bilan du chapitre 82

1 Problématique

Nous avons présenté dans le chapitre précédent la problématique des structures élancées ainsi que les principales méthodes de résolution des problèmes non-linéaires associés. Ces méthodes reposent toutes sur le calcul de l'opérateur de raideur de la structure, dont la taille correspond au nombre de degrés de liberté du système discrétisé, et à la résolution du problème linéaire correspondant. Pour de très grandes structures (plusieurs mètres ou dizaines de mètres) possédant des détails structuraux fins, le nombre d'inconnues peut devenir extrêmement important, classiquement de l'ordre de plusieurs millions ou dizaines de millions. Les solveurs directs, basés sur la factorisation de la matrice de raideur, exigeraient alors des calculateurs ayant des capacités de mémoire gigantesques –au delà des possibilités actuelles– ainsi qu'un temps de calcul incompatible avec les contraintes industrielles de développement de produits. Outre les recherches en algorithmique visant à rendre plus efficace la parallélisation des solveurs directs, plusieurs stratégies permettent de contourner ces difficultés, avec plus ou moins de succès. Nous les avons classées ici en deux grandes familles.

Dans la première catégorie de méthodes, que nous rassemblons ici sous la dénomination de méthodes multi-échelles, on utilise des hypothèses particulières du problème de base (découplage ou séparation des échelles, périodicité, localisation du phénomène d'intérêt, etc.) pour le simplifier et le rendre abordable, en général au moyen de plusieurs modèles associés à chacune des échelles d'études considérées. Les approches descendantes utilisées dans l'industrie en sont un exemple que nous illustrons dans la section suivante sur un exemple concret. D'autres méthodes, basées sur la théorie de l'homogénéisation, proposent de construire un problème global macroscopique de plus petite taille représentatif du problème initial et qui pourra être résolu par une méthode classique. Une étape supplémentaire locale peut ensuite donner accès aux quantités d'intérêt sur le modèle microscopique. D'autres encore, qualifiées de méthodes de superposition ou d'enrichissement, s'attachent à superposer à la solution d'un problème macroscopique un enrichissement microscopique dans les zones d'intérêt.

Dans la deuxième famille de méthodes, nous avons regroupé les approches basées sur les techniques de sous-structuration et de décomposition de domaine, qui cherchent à résoudre le problème fin complet en effectuant un partitionnement du problème initial en problèmes de taille inférieure. Les approches modernes comme la LatIn micro/macro, qui font partie de cette dernière famille, proposent d'introduire un problème global homogénéisé pour améliorer les performances du solveur itératif généralement associé, les transformant en véritables méthodes multi-échelles.

Nous proposons de décrire ces diverses méthodes dans les sections suivantes, après avoir illustré les intérêts et limites des techniques classiquement utilisées dans les bureaux d'études d'ingénierie.

2 Etude préliminaire de quelques approches classiques : Intérêts et limites

2.1 Quelques approches utilisées en bureau d'étude

2.1.1 Approches descendantes

Les approches descendantes sont les stratégies majoritairement utilisées aujourd'hui par les ingénieurs pour le développement de structures complexes. Reprenant la structure organisationnelle classique de la pyramide des essais, elles reposent sur un grand nombre de modèles numériques « emboîtés », adaptés à chaque échelle de modélisation, de sorte à maîtriser la taille et la complexité de chacun des problèmes à résoudre [Cornuault 98].

Dans le secteur aéronautique, on associe par exemple à la structure complète de l'avion un modèle linéaire très grossier, constitué d'éléments de plaques et poutres, où les détails structuraux (fixations, passages de câbles, ...) ne sont pas représentés ou bien sont idéalisés (raidisseurs remplacés par des poutres, ...). Etant donné la taille des structures considérées, ces modèles atteignent cependant vite des tailles conséquentes, en dépit des approximations réalisées. Ils permettent cependant, par application des efforts aérodynamiques calculés par ailleurs, d'avoir une approximation raisonnable des flux d'effort dans la structure. Aux échelles inférieures, on utilise des modèles plus précis sur des zones restreintes de la structure, comme des tronçons de fuselages ou d'ailes. Les géométries peuvent être un peu mieux respectées (ex. forme des raidisseurs), les maillages sont plus fins, certains détails structuraux apparaissent, des analyses non-linéaires peuvent être menées. A un niveau de modélisation encore plus fin, on peut envisager des géométries encore plus réalistes, tridimensionnelles, ou des détails technologiques très fins : on peut citer pour exemple des zones de fixation avec modélisations des alésages et des rivets, et avec prise en compte des zones de contact, ou bien encore des zones endommagées : fissure, délaminage, ... Ces approches sont ainsi souvent qualifiés de méthodes de « zoom structural », ou de ré-analyse locale .

Le point faible de ces approches réside dans les techniques de couplage mises en oeuvre, qui restent extrêmement pauvres. En effet, il ne s'agit le plus souvent que d'une transmission unidirectionnelle des informations, du modèle global grossier vers les modèles raffinés, d'où leur qualification d'approches descendantes. En pratique, des quantités mécaniques, déplacements ou flux d'efforts, sont extraites de la solution globale grossière pour servir de conditions aux limites des calculs raffinés à l'échelle inférieure, après interpolation aux noeuds du maillage fin. Des règles métiers ont été définies pour assurer le conservatisme, i.e. la surestimation de la charge critique ou de rupture, de telles approches dans les cas considérés. Cependant, elle ne peuvent prendre en compte au niveau global les effets tels que les redistributions de contrainte induits par des comportements locaux adoucissants. Elles sont ainsi limitées aux cas où le comportement local n'a pas d'influence notable sur la réponse globale de la structure, ce qui est très restrictif.

Pour finir, on peut citer des travaux qui s'appuient sur ces approches descendantes en permettant un certain retour d'information du modèle local vers le modèle global [Hirai 84, Mao 91, Whitcomb 91]. Ces méthodes proposent en général de prendre en

compte les résultats du modèle local pour corriger le modèle global, et éventuellement d'itérer jusqu'à vérifier l'équilibre. Elles restent cependant limitées à des géométries simples, des comportements globaux linéaires ou des cas de chargement restreints.

2.1.2 Techniques de raffinement local

Une deuxième méthode que l'on peut rencontrer dans les bureaux d'étude, en particulier dans les zones les plus complexes, est la méthode de raffinement local par collage de modèles : le modèle fin de la zone d'intérêt est " collé " au modèle grossier du reste de la structure par l'intermédiaire d'éléments d'interface. Le calcul est réalisé sur l'ensemble de la structure et permet de prendre en compte un réel couplage entre les modèles.

On peut citer notamment les techniques de collage cinématique, où on introduit des contraintes cinématiques au moyen de multiplicateurs de Lagrange pour assurer que les déplacements des noeuds du maillage fin, dit « esclaves », vont suivre la cinématique des noeuds, arêtes ou facettes du maillage global, dit « maître ».

L'approche permet ainsi de coupler des modèles ayant un raffinement différent sans avoir à réaliser une adaptation des maillages sur les zones de collage, étape souvent fastidieuse.

2.2 Illustration

Nous proposons d'illustrer les intérêts et limites de ces approches à travers leur mise en oeuvre pour le calcul d'un panneau raidi avec flambage.

2.2.1 Présentation du modèle retenu

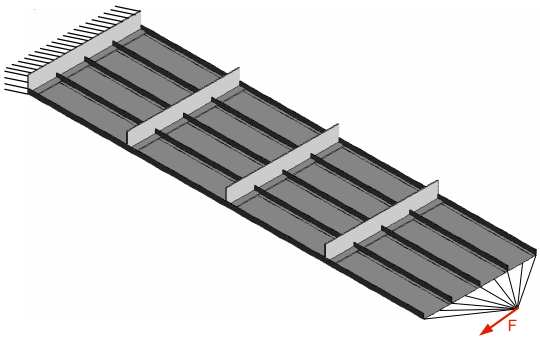

Figure 2.1: Géométrie du panneau raidi étudié

La figure 2.1 représente la géométrie du cas test retenu pour cette illustration. La structure est un panneau raidi, fixé à son extrémité gauche et où on bloque les déplacements selon z des cadres (raidisseurs transverses) afin d'éviter un mode de flambage global. On impose un chargement en effort de $10\ 000N$ par l'intermédiaire d'éléments rigides liés à l'extrémité droite, de sorte à mettre globalement la structure en flexion dans le plan xOy. Le matériau utilisé est de l'aluminium ($E = 70\ 000Mpa$). L'épaisseur de la peau est de $1mm$, pour des dimensions de la structure de $2400mm \times 680mm$.

2.2.2 Calcul non-linéaire de référence

Afin de servir de référence, on effectue un calcul direct non-linéaire sur le modèle global maillé finement. Le modèle comporte plus de 127 000 degrés de liberté, ce qui reste raisonnable pour mener l'analyse en question. Le calcul est mené au moyen du logiciel Samcef (module Mecano), selon une méthode de Newton-Raphson. La résolution nécessite 319 itérations et un temps CPU d'un peu plus d'une heure et demie sur une station de travail de type PC (processeur Opteron, $1Go$ de RAM). Les figures 2.2, 2.3 et 2.4 représentent les solutions obtenues pour trois niveaux de chargements différents.

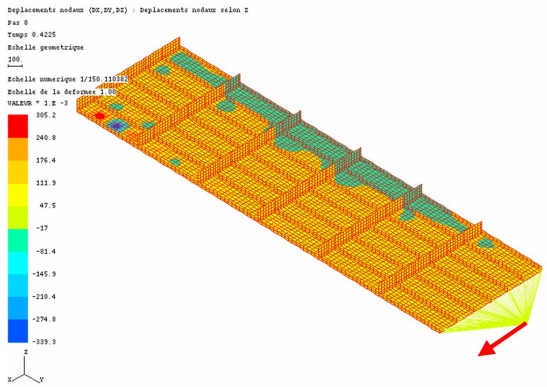

Figure 2.2: Solution à $t = t_1$

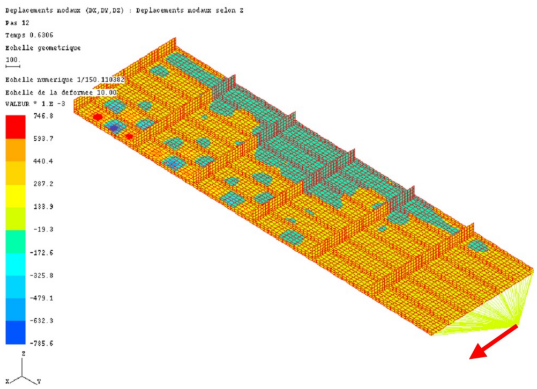

Figure 2.3: Solution à $t = t_2$

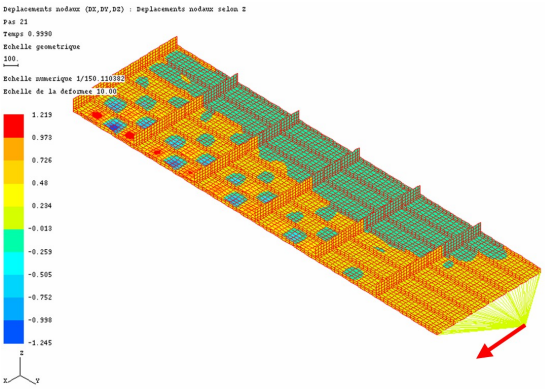

Figure 2.4: Solution à $t = t_3$

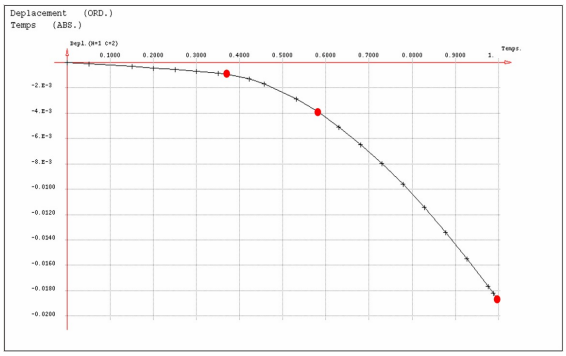

Figure 2.5: Evolution du déplacement suivant y du point d'application de l'effort

On observe l'apparition de flambages locaux dans la zone de compression maximale, qui se propagent au reste de la structure au fur et à mesure de l'augmentation du chargement. Le tracé du déplacement du point d'application de l'effort en fonction du niveau de chargement (figure 2.5) met bien en évidence la non-linéarité globale induite par le phénomène non-linéaire local. Les trois niveaux de chargement correspondant aux figures précédentes sont repérés par des ronds pleins sur cette courbe.

2.2.3 Présentation des méthodes alternatives

Nous mettons maintenant en œuvre les deux méthodes précédemment présentées : les approches descendantes et les approches de raffinement local par collage de modèle.

■ Approches descendantes

Afin de mettre en oeuvre la méthode de ré-analyse locale introduite plus haut, nous définissons deux nouveaux modèles numériques : un modèle grossier de l'ensemble de la structure et un modèle fin de la zone où le phénomène de flambage est susceptible de s'initier. On utilise, pour faire la liaison entre ces deux modèles, la commande `.ZOOM` de Samcef. Cette dernière permet d'imposer sur les frontières d'un maillage (ici le modèle fin local) les déplacements obtenus par l'analyse préliminaire d'un modèle plus grossier. Le traitement des conditions aux limites en effort n'est pas directement disponible dans ce code et demande des développements externes pour réaliser les transferts de champs. Pour cette raison, cette approche n'est pas présentée ici, même si elle est souvent privilégiée dans les bureaux d'étude. La figure 2.6 illustre les maillages des différents modèles et leur interaction.

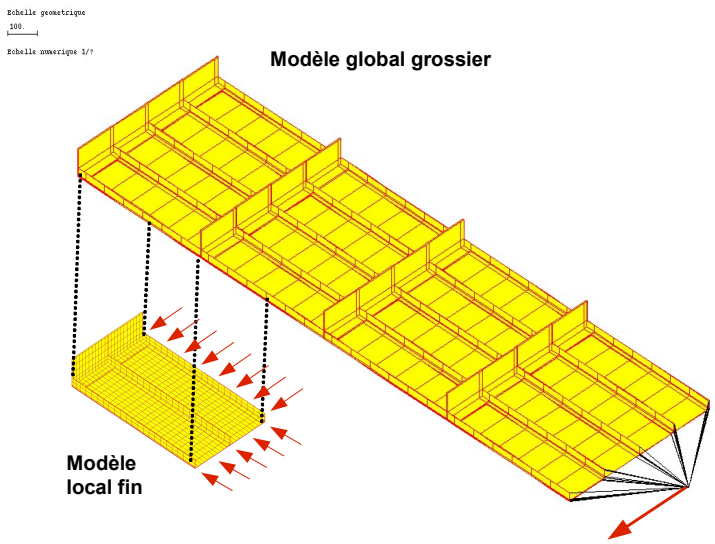

Figure 2.6: Ré-analyse locale sur un panneau raidi en flexion : modèles associés à chaque échelle

■ Raffinement local

Afin d'assurer un meilleur couplage entre le modèle global et un modèle fin local, nous proposons de remplacer une zone du maillage global par le maillage fin, et de les « coller ». Nous utilisons à cette fin la fonction `.STICK` de Samcef, qui effectue un collage cinématique des nœuds du maillage fin sur les facettes des éléments du maillage grossier. La figure 2.7 représente le maillage résultant.

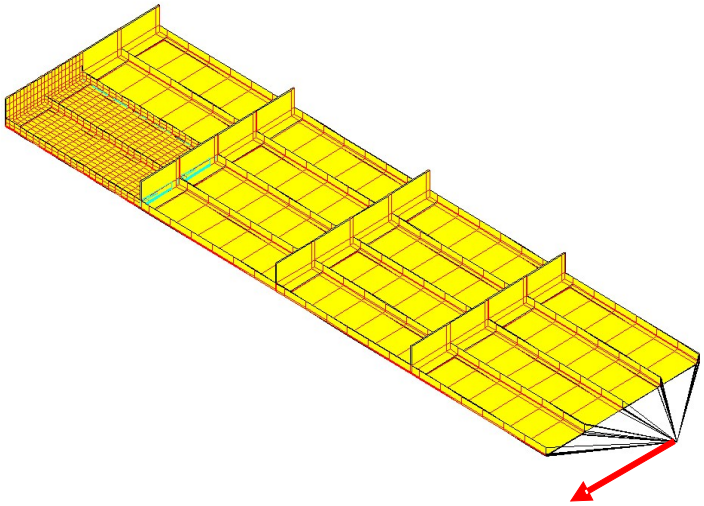

Figure 2.7: Illustration d'une technique de collage cinématique sur une structure de panneau raidi en flexion

2.2.4 Déroulement des calculs

Pour l'approche descendante, la procédure de calcul suit les étapes suivantes :
- un premier calcul non-linéaire sur le modèle global grossier est réalisé, en imposant le chargement extérieur décrit plus haut,
- un calcul non-linéaire sur le modèle local fin est ensuite mené, en utilisant comme conditions aux limites les déplacements obtenus à chaque incrément de l'étape globale, et en interpolant linéairement entre ces points.

Chacune de ces résolution est effectuée au moyen du logiciel Samcef (module Mecano) grâce à un algorithme de Newton-Raphson. Le nombre d'incréments de chargement est fixé à 100 afin de pouvoir suivre finement le phénomène non-linéaire, et une méthode de pas adaptatif est utilisée en cas de non-convergence.

Remarque : Le calcul non-linéaire sur le modèle global est imposé par le code choisi ici. Dans la pratique, on se contente souvent d'un calcul linéaire sur le modèle global grossier.

Dans le cas du modèle localement raffiné, le calcul non-linéaire est mené de la même manière sur le problème couplé défini plus haut.

Les temps de calcul pour les différentes méthodes sont récapitulés dans le tableau 2.1. On peut constater ici la différence en terme de temps de calcul entre l'analyse globale fine et les méthodes présentées ci-dessus. Ces écarts expliquent l'intérêt suscité par de telle stratégies dans les bureaux d'études. L'analyse qualitative des résultats souligne cependant les limites de telles approches.

Problème	Nombre de d.d.l.	Nombre d'itérations globales	Temps CPU pour la résolution N.L.
Global Fin	127123	319	1h 31min 54s
Global grossier	17965	211	6min 6s
puis : Local fin	17058	309	8min 29s
Localement raffiné	32469	333	16min 54s

Tableau 2.1: Récapitulatif des temps de calcul pour les différents modèles

2.2.5 Analyse qualitative des résultats

On s'intéresse dans cette partie aux résultats obtenus par les différentes stratégies, afin de mieux comprendre les approximations faites et de déterminer leurs domaines de validité. Nous nous intéressons successivement aux résultats sur la réponse globale et sur les quantités d'intérêt locales.

■ Au niveau global

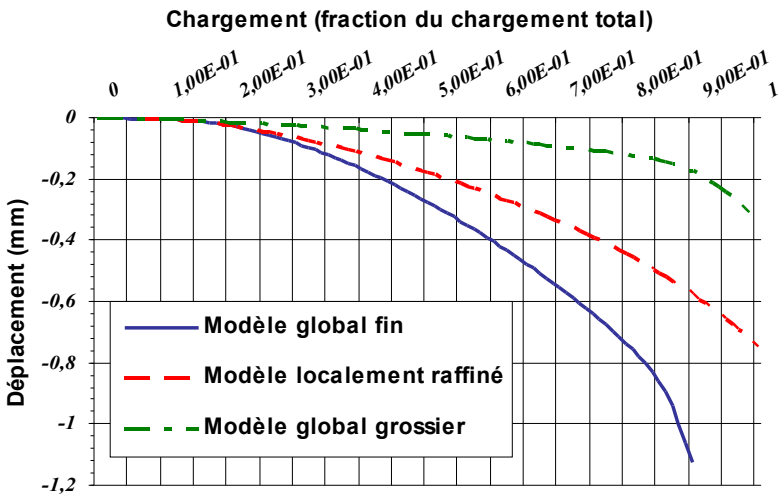

Figure 2.8: Evolution du déplacement suivant y du point d'application de l'effort pour les 3 modèles introduits

Les figures 2.8 et 2.9 présentent l'évolution du déplacement selon y du point d'application de la force sur la structure globale, pour un chargement compris respectivement entre 0 et $10\ 000N$ ($t = 0$ à $t = 1$) et entre 0 et $3\ 000N$ ($t = 0$ à $t = 0,3$). On y compare les courbes obtenues pour le modèle global fin de référence, le modèle global grossier utilisé pour l'approche descendante, et pour le modèle localement raffiné. On peut remarquer que les trois courbes sont tout d'abord concordantes jusqu'à $t = 0,15$, première apparition du flambage de peau. La solution est en effet linéaire et les trois méthodes sont

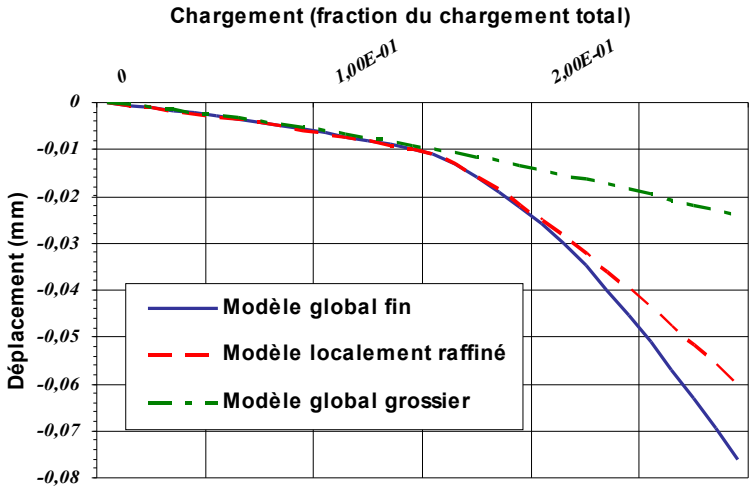

Figure 2.9: Evolution du déplacement suivant y du point d'application de l'effort pour les 3 modèles introduits : zoom sur la zone de flambage initial

presque équivalentes. On observe ensuite une divergence des trois courbes. La solution du calcul global grossier reste pratiquement linéaire jusqu'à un niveau de chargement plus élevé qui correspond au flambage global de la structure à $t = 0,8$. La solution du calcul avec raffinement local présente quant à elle la même bifurcation que la solution complète, correspondant à l'apparition du flambage dans la zone raffinée, pour $t = 0,15$ jusqu'à $t = 0,2$. Au-delà de ce niveau de chargement, on a en effet l'apparition du flambage dans la zone non-raffinée, ce que le modèle avec raffinement local ne peut prendre en compte.

En résumé, la méthode de ré-analyse locale ne permet pas de prendre en compte les non-linéarités au niveau global, du fait du caractère unidirectionnel du transfert de champ. La méthode de raffinement local, quant à elle, est une bonne approximation tant que les non-linéarités restent dans la zone raffinée.

■ Au niveau local

Nous nous intéressons maintenant à la solution locale dans la zone d'intérêt, où se produit le phénomène non-linéaire de flambage. La figure 2.10 présente ainsi les solutions déformées obtenues par les trois méthodes, respectivement le calcul complet, la méthode de raffinement local avec collage et la méthode de ré-analyse locale, pour un chargement de $2\,000N$. Les couleurs représentent l'amplitude du déplacement hors-plan (suivant l'axe z).

Si les résultats obtenus par la méthode de raffinement local sont très proches des résultats du calcul complet à ce niveau de chargement, on observe ici un écart relativement important (de l'ordre de 20%) pour les résultats obtenus par la méthode de ré-analyse locale. Plus grave encore, on peut noter que le phénomène de flambage est ici sous-estimé. Le flambage pouvant être à l'origine de la rupture des raidisseurs, on voit ici une limitation de cette méthode d'analyse. En effet, les déplacements obtenus à partir du modèle grossier, plus rigide, sont forcément sous-estimés par rapport à la solution de référence.

Remarque : On peut nuancer quelque peu ces propos. En effet, on n'a pu ici tester que des conditions aux limites en déplacement, la récupération des conditions aux limites en effort n'étant pas implémentée dans Samcef. Or, les efforts obtenus à partir du modèle grossier sont au contraire surestimés. Les résultats obtenus en récupérant les flux d'effort devraient donc être plutôt conservatifs, tout en restant relativement éloignés de la solution de référence. Dans tous les cas, on peut remarquer que la méthode ne permet pas l'échange d'informations entre les échelles et reste donc extrêmement approximative pour les phénomènes étudiés ici.

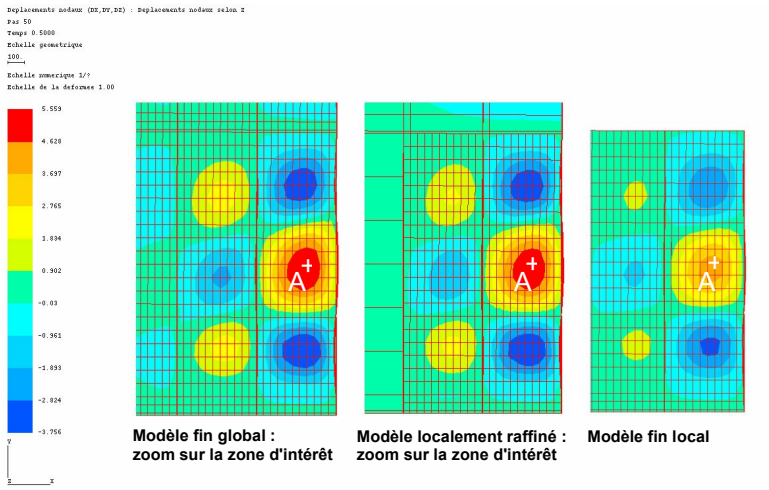

Figure 2.10: Comparaison de la solution de référence (analyse globale fine) et la solution obtenue par ré-analyse locale. Les couleurs représentent le déplacement hors-plan (suivant z)

Afin de comparer plus précisément les méthodes, la figure 2.11 représente l'évolution du déplacement hors-plan d'un point A de la structure, situé en milieu de zone de flambage et marqué d'une croix sur la figure 2.10, pour chacune de ces stratégies. On peut remarquer que les trois modèles donnent une valeur identique pour la charge de première bifurcation, à $t = 0,15$. Ceci est un résultat plutôt attendu car il s'agit ici de la zone présentant les premières non-linéarités. La structure conserve un comportement global linéaire jusqu'au flambage de cette zone, pour lequel les méthodes sont presque équivalentes. La prédiction de la charge globale critique dépend cependant d'un choix approprié de la zone de raffinement, laissé au savoir-faire du métier.

Si l'on s'intéresse maintenant au comportement en post-flambage, on remarque que la solution obtenue par raffinement local est assez proche de la solution de référence pour un chargement inférieur à $t = 0,7$, c'est-à-dire avant que les phénomènes de flambage global n'apparaissent. Au contraire, la solution par ré-analyse locale est sensiblement différente. Cet écart provient des conditions aux limites imposées, issues du calcul grossier et qui ne prennent pas en compte le comportement local et la redistribution des flux d'efforts dans la structure. Il est ainsi difficile d'utiliser ces résultats pour calculer des critères de rupture locaux par exemple. Dans le cas de conditions aux limites imposées en déplacement, on

peut cependant estimer *a posteriori* la qualité de la solution locale en mesurant la non-vérification de l'équilibre entre les modèles local et global sur l'interface.

L'écart observé à partir de $t = 0,7$ s'explique par l'échelle du phénomène en jeu. Ce dernier n'est plus du tout un phénomène local puisqu'on observe un flambage global de la structure inter-cadres. Les méthodes étudiées ici ne permettent pas de le prendre en compte.

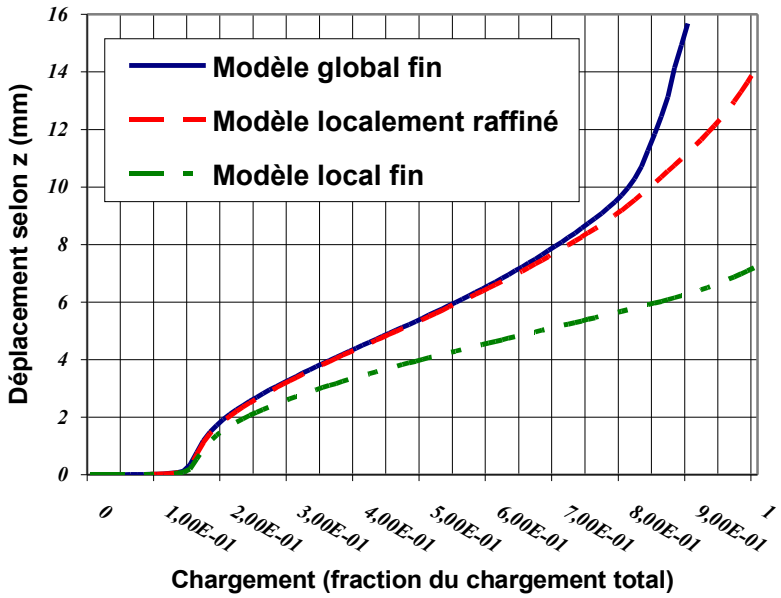

Figure 2.11: Evolution du déplacement hors-plan du point A pour les trois modèles introduits

2.2.6 Bilan

Cet exemple d'application nous a permis d'illustrer les intérêts et limites des deux approches classiquement utilisées en bureaux d'étude.

On a ainsi observé que les deux méthodes permettaient de bien prévoir la charge critique initiale de flambage, pour un coup de calcul bien inférieur au coup du calcul global finement discrétisé – quand celui-ci est possible – ce qui explique pour une grande part leur succès dans un contexte industriel. Cependant la solution en post-flambage peut présenter des écarts plus ou moins importants avec la solution de référence, en fonction de la modélisation choisie et du niveau de chargement. Par ailleurs, toutes ces méthodes nécessitent de connaître a priori la zone à raffiner, où le comportement va être non-linéaire, de s'assurer que les non-linéarités éventuelles restent bien incluses dans cette partie du modèle. De même, l'opération de mise en donnée peut s'avérer fastidieuse si elle n'est pas automatisée par le code EF utilisé.

3 Les stratégies de calcul multiéchelles

Nous dressons dans cette section un état de l'art non-exhaustif des stratégies de calcul multiéchelles les plus répandues pour traiter des problèmes de grande taille nécessitant la prise en compte de détails structuraux précis, ou bien caractérisés par des phénomènes se produisant à des échelles différentes. Les approches multiéchelles, comme leur nom l'indique, proposent des solutions techniques pour la prise en compte des divers niveaux de détails d'un modèle numérique, ainsi que pour le couplage de ces modèles. Nous présentons ici les principales familles de stratégies multi-échelles, outre les approches descendantes que nous venons d'illustrer en détail : les approches basées sur la théorie de l'homogénéisation et les approches reposant sur des techniques d'enrichissements ou de superpositions.

3.1 Méthodes basées sur la théorie de l'homogénéisation

De nombreuses méthodes multiéchelles reposent sur le principe d'homogénéisation. Le but ici est de construire, à partir de connaissances particulières sur le modèle fin, qualifié de « micro », un modèle global « macro » représentatif de taille raisonnable. Les premiers travaux ont permis de mettre en place des méthodes d'homogénéisation pour les matériaux au moyen d'études analytiques ou semi-analytiques à l'échelle microscopique. Ces approches permettent de définir des comportements macroscopiques entre des quantités moyennes « effectives » [Eshelby 57, Hashin 62, Mori 73]. Cependant, ce comportement macroscopique ne permet pas de remonter à des propriétés locales de la solution. Des méthodes plus générales appelées « Unit Cell Methods » et permettant de prendre en compte des mécanismes de plus en plus complexes au niveau microscopique ont ensuite été proposées [Christman 89, Tvergaard 90, Sluis 99]. Elles permettent d'identifier un modèle macroscopique par des « essais numériques » sur un volume élémentaire représentatif (VER) de la structure, mais aussi d'obtenir des informations locales sur la solution. Cependant, leur application reste difficile dans le cas de problèmes à forts gradients ou de problèmes non-linéaires, et la séparation d'échelle n'est pas explicite. La première méthode d'homogénéisation véritablement multi-échelle, proposée par Sanchez-Palencia pour les milieux périodiques, ainsi que quelques approches qui en dérivent sont présentées dans le prargraphes qui suivent.

3.1.1 Théorie de l'homogénéisation des milieux périodiques

La théorie de l'homogénéisation des milieux périodiques, basée sur l'analyse asymptotique, propose une approche multiéchelle mettant en jeu un problème « macro » et un problème « micro » permettant de remonter aux propriétés locales [Sanchez-Palencia 74, Benssoussan 78, Sanchez-Palencia 80]. Cette théorie est utilisable dans le cas où la structure est constituée d'un motif périodique appelé volume élémentaire représentatif (VER). L'utilisation de cette théorie a notamment été menée pour l'étude des matériaux composites. Dans ce cas de figure, la solution à l'échelle de la microstructure est quasi-périodique (superposition d'une valeur moyenne quasi-constante par maille et d'une solution microscopique dont la forme se reproduit d'une maille à l'autre) au moins loin des

bords de la structure, et d'autant mieux que la structure est grande par rapport à la maille élémentaire ($l \ll L$). On peut alors tenir compte de cette propriété pour découpler les effets aux différentes échelles.

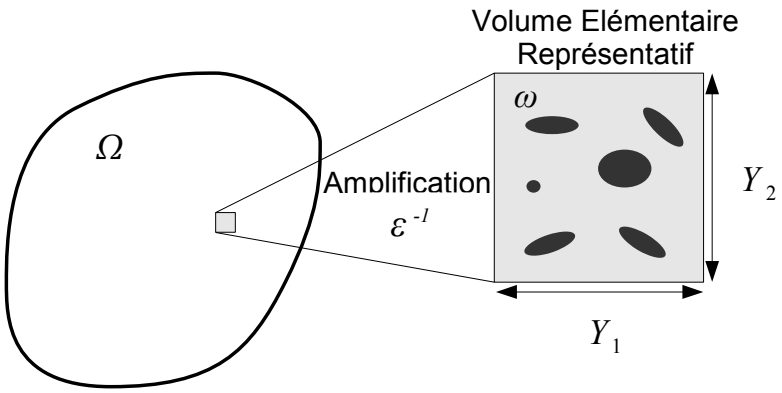

Figure 2.12: Définition de la cellule élémentaire

L'idée consiste alors à introduire deux variables (une par échelle) pour décrire la solution : une variable de position macroscopique $\underline{X}$ à l'échelle de la structure (L), et une variable de position microscopique $\underline{y}$ à l'intérieur du VER dont l'amplitude varie dans un intervalle de largeur l. En notant le rapport d'échelles $\epsilon = \frac{l}{L}$, on définit une variable $\underline{Y} = \frac{\underline{y}}{\varepsilon}$ (*zoom*) dont l'amplitude de variation est comparable à celle de la variable $\underline{X}$. Toutes les variables du problème sont écrites en fonction de $\underline{X}$ et $\underline{y}$. On suppose alors que ces variables sont $\underline{Y}$-périodiques par rapport à $\underline{y}$. Les grandeurs sont alors recherchées sous la forme d'un développement asymptotique en ε. Ainsi la solution en déplacement du problème s'écrira :

$$\underline{u}(\underline{X}, \underline{y}) = \underline{u}_0(\underline{X}, \underline{y}) + \varepsilon\, \underline{u}_1(\underline{X}, \underline{y}) + \varepsilon^2\, \underline{u}_2(\underline{X}, \underline{y}) + \dots$$

Ce développement est d'autant plus pertinent que ε est petit, c'est-à-dire lorsque la séparation d'échelle est clairement établie.

La deuxième étape consiste à introduire les développements asymptotiques dans les équations du problème (équilibre, relation de comportement, équations cinématiques), puis à séparer les termes selon leur ordre vis-à-vis du paramètre ε. Les méthodes d'homogénéisation du premier ordre tronquent le développement à l'ordre 1 et permettent ainsi de déterminer le champ macroscopique $\underline{u}_0$ et le champ microscopique $\underline{u}_1$. On peut alors écrire une succession de problèmes aux différents ordres en ε :

Problème à l'ordre ε^{-1} : $\mathrm{div}_y(\underline{\underline{\underline{\underline{K}}}}\, \underline{\underline{\epsilon}}_y(\underline{u}_0)) = \underline{0}$. Ce problème démontre que $\underline{u}_0$ est indépendant de $\underline{y}$: $\underline{u}_0(\underline{M}) = \underline{u}_0(\underline{X})$. On notera $\underline{\underline{\epsilon}}_0 = \underline{\underline{\epsilon}}_X(\underline{u}_0)$.

Problème à l'ordre ϵ^0 : $\mathrm{div}_y(\underline{\underline{\underline{\underline{K}}}}\, \underline{\underline{\epsilon}}_y(\underline{u}_1)) = -\mathrm{div}_y(\underline{\underline{\underline{\underline{K}}}}\, \underline{\underline{\epsilon}}_0)$. Ce problème est écrit sur un VER ω où $\underline{X}$ est fixé et $\underline{\underline{\epsilon}}_0$ est supposé connu et uniforme sur ω. Ce problème

correspond à la détermination d'une solution périodique fonction de $\underline{Y}$ pour toutes les déformations macroscopiques $\underline{\underline{\epsilon}}_0$. On construit alors un opérateur de localisation $\underline{\underline{\underline{\underline{H}}}}(\underline{y})$ reliant la déformation locale à la déformation macroscopique $\underline{\underline{\epsilon}}_0$:

$$\underline{\underline{\epsilon}}_y(\underline{u}_1) = \underline{\underline{\underline{\underline{H}}}}\,\underline{\underline{\epsilon}}_0$$

Problème à l'ordre ϵ^1 : $\mathrm{div}_X(\underline{\underline{\underline{\underline{K}}}}\,\underline{\underline{\epsilon}}_0) + \mathrm{div}_y(\underline{\underline{\underline{\underline{K}}}}\,(\underline{\underline{\epsilon}}_X(\underline{u}_1) + \underline{\underline{\epsilon}}_y(\underline{u}_2))) + \underline{f}_d = \underline{0}$ Le problème obtenu à l'ordre 1 n'est en général pas résolu. Seule la condition d'existence du problème est exploitée et conduit à la définition du problème macroscopique portant sur des quantités moyennées sur le VER ω :

$$\int_\omega \mathrm{div}_X(\underline{\underline{\sigma}}^M) + \underline{f}_d \,\mathrm{d}\omega = \underline{0}$$

En notant, $< \cdot >_\omega = \int_\omega \cdot \mathrm{d}\omega$, on obtient :

$$\begin{aligned} < \mathrm{div}_X \underline{\underline{\sigma}}^M >_\omega + < \underline{f}_d >_\omega &= \underline{0} \\ \underline{\underline{\sigma}}^M = < \underline{\underline{\sigma}}^m >_\omega &= < \underline{\underline{\underline{\underline{K}}}} + \underline{\underline{\underline{\underline{K}}}}\,\underline{\underline{\underline{\underline{H}}}} >_\omega < \underline{\underline{\epsilon}}_0 >_\omega \\ \text{avec} < \underline{\underline{\epsilon}}_0 >_\omega &= \underline{\underline{\epsilon}}_0 = \underline{\underline{\epsilon}}^M \end{aligned}$$

Le comportement homogénéisé macroscopique s'écrit : $\underline{\underline{\underline{\underline{K}}}}^M = < \underline{\underline{\underline{\underline{K}}}} + \underline{\underline{\underline{\underline{K}}}}\,\underline{\underline{\underline{\underline{H}}}} >_\omega$.

Cette approche constitue une véritable stratégie de calcul à deux échelles. Elle met en place un problème à l'échelle macroscopique et permet de remonter aux propriétés locales de la solution par l'intermédiaire d'un opérateur de localisation. Cependant, l'approche repose sur deux hypothèses fortes : la périodicité et un rapport d'échelle très grand (ε petit). L'hypothèse de périodicité ne permet pas d'homogénéiser les matériaux près des bords ou des zones à forts gradients où cette hypothèse n'est plus vérifiée. Des traitements spécifiques des zones de bord ont été proposés dans [Auriel 82, Dumontet 86]. Cette méthode n'est pas non plus directement applicable au calul de structures, même périodiques, l'hypothèse de séparation d'échelle n'étant pas vérifiée en général.

3.1.2 Extensions de la théorie de l'homogénéisation au non-linéaire

Des extensions de la théorie classique de l'homogénéisation des milieux périodiques ont été proposées pour des problèmes non-linéaires. Certaines approches s'appuient sur le développement asymptotique de toutes les variables du problème : déformations anélastiques [Devries 89], variables d'endommagement [Fish 97].

D'autres méthodes proposent de réaliser un calcul microscopique non-linéaire (généralement sur une cellule élémentaire) de manière à définir le comportement macroscopique correspondant. Les problèmes microscopiques peuvent être résolus par une technique éléments finis standard [Smit 98, Feyel 00] ou par d'autres techniques telles que la « Voronoï Cell Finite Element Method » [Ghosh 95]. La résolution du problème macroscopique est généralement réalisée par une méthode éléments finis classique et la loi

de comportement macroscopique est obtenue en chaque point d'intérêt par la résolution des problèmes microscopiques. Dans ce paragraphe, deux extensions représentatives sont présentées.

■ **Méthode Eléments Finis à deux niveaux :** FE^2

La méthode des éléments finis à deux niveaux (FE^2) [Feyel 00] est basée sur une discrétisation de type éléments finis de la structure globale, correspondant au problème macroscopique. L'originalité de la méthode vient de l'association, à chaque point d'intégration du maillage précédent, d'un modèle microscopique d'un VER. Connaissant le tenseur des déformations macroscopiques ε_0, l'opération de localisation consiste à appliquer des conditions de périodicité au VER tel que :

$$\underline{u}(\underline{x}) = \underline{\underline{\epsilon}}_0 \underline{x} + \underline{v}(\underline{x}) \tag{2.1}$$

$\underline{v}$ étant la composante périodique de $\underline{u}$.

Le problème microscopique consiste à déterminer le champ de déformation et de contrainte sur le VER à partir des conditions de périodicité et de la relation de comportement non-linéaire microscopique. Ce problème est résolu par une méthode de type Newton-Raphson. Une fois la solution obtenue, une étape d'homogénéisation consistant à moyenner le champ de contrainte sur le VER permet de remonter à la contrainte macroscopique $\underline{\underline{\Sigma}} = \ll \underline{\underline{\sigma}} \gg$. Connaissant la contrainte macroscopique, celle ci est introduite dans l'algorithme de Newton-Raphson du problème macro. Une méthode de perturbation permet enfin d'obtenir une approximation de la matrice tangente macro, réactualisée à chaque itération, lorsque la convergence du problème non-linéaire sur le VER est atteinte. Les calculs microscopiques sont indépendants et peuvent être résolus en parallèle sur plusieurs processeurs. Cette technique constitue ainsi une extension de la théorie de l'homogénéisation aux cas non-linéaires, mais présente les mêmes limitations que la théorie de l'homogénéisation classique : elle reste pertinente uniquement lorsque les échelles sont bien séparées. Par ailleurs, elle peut s'avérer relativement coûteuse.

■ **Milieux continus généralisés au niveau macroscopique**

Dans le cas où les échelles ne peuvent plus être séparées, une amélioration consiste à utiliser des milieux continus généralisés de type Cosserat ou second gradient [Cosserat 09, Zhu 97, Forest 98, Kouznetsova 02, Feyel 03] au niveau macroscopique. Cette cinématique macroscopique enrichie, pour laquelle un champ de rotation vient s'ajouter au champ de déplacement classique, permet alors de mieux prendre en compte au niveau macroscopique de forts gradients tels que les bandes de cisaillement ou les singularités.

Généralement difficile à construire, le comportement du milieu continu généralisé est, dans la stratégie proposée dans [Kouznetsova 02], déterminé de façon automatique. Un milieu du second gradient est considéré au niveau macroscopique. Cette fois ci le déplacement sur une cellule élémentaire fait intervenir deux tenseurs macroscopiques, $\underline{\underline{E}}^M$ tenseur d'ordre 2 constant et $\underline{\underline{\underline{G}}}^M$ tenseur d'ordre 3, tels que :

$$\underline{u}(\underline{x}) = \underline{\underline{E}}^M \cdot \underline{x} + \frac{1}{2}\underline{\underline{\underline{G}}}^M : (\underline{x} \otimes \underline{x}) + \underline{u}^m(\underline{x})$$

La condition de périodicité est à nouveau utilisée. La stratégie de résolution est identique à celle du premier ordre (FE^2). Par homogénéisation (moyenne sur la cellule), deux contraintes macroscopiques sont extraites de la solution du problème microscopique en utilisant la relation :

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) = \underline{\underline{\sigma}}^M(\underline{x}) + \underline{\underline{\sigma}}^m(\underline{x}) = \underline{\underline{\Sigma}}^M + \underline{\underline{\underline{\underline{Q}}}}^M \cdot \underline{x} + \underline{\underline{\sigma}}^m(\underline{x})$$

Ces différentes stratégies ne fournissent donc pas une forme « close » de la loi de comportement macroscopique mais déduisent une relation entre les quantités duales macroscopiques en chaque point d'intérêt de la structure en résolvant des problèmes à l'échelle microscopique. Elles ne nécessitent donc pas d'hypothèse *a priori* sur le modèle macroscopique qui est déterminé de façon automatique. L'enrichissement de la cinématique macroscopique peut permettre de prendre en compte des gradients de déformation et traiter ainsi plus aisément des problèmes où la séparation des échelles « macro » et « micro » n'est plus aussi évidente que dans le cas des structures périodiques. En particulier, elle est bien adaptée aux structures élancées en flexion, pour lesquelles la déformation dans l'épaisseur varie linéairement. Néanmoins, cette question de la séparation des échelles persiste dans le cas où l'on souhaite prendre en considération des gradients encore plus importants tels que ceux provoqués par la présence de fissures ou les effets de bords.

3.2 Méthodes de superposition et d'enrichissement

Les approches décrites précédemment et basées sur des techniques d'homogénéisation permettent d'opérer un passage de l'échelle « micro » à l'échelle « macro » en définissant un problème macroscopique issu d'analyses à l'échelle microscopique. Les approches étudiées dans cette partie adoptent un point de vue différent et cherchent plutôt à substituer ou superposer à la solution d'un problème macroscopique un enrichissement microscopique dans les zones d'intérêt.

3.2.1 Méthode de Projection de Dirichlet Hiérarchique

Introduite par Oden et Zohdi [Zohdi 96, Oden 97, Oden 99], la méthode de Projection de Dirichlet Hiérarchique (HDPM) consiste à résoudre un problème homogénéisé macroscopique, sur un maillage régulier dont un élément correspond à une cellule représentative du matériau considéré. Le comportement homogénéisé est déterminé par une technique d'homogénéisation quelconque (par exemple la théorie de l'homogénéisation des milieux périodiques). Un estimateur de sensibilité construit sur la solution macroscopique permet de localiser les zones du maillage macroscopique nécessitant une ré-analyse. Une correction microscopique est alors déterminée dans ces zones en résolvant sur les cellules concernées des problèmes locaux prenant en compte la microstructure pour des conditions aux limites homogènes de type Dirichlet provenant du problème macroscopique. La solution corrigée est ensuite le prolongement des contributions locales sur la structure complète. Un estimateur d'erreur *a posteriori* permet alors de déterminer la qualité de la solution corrigée. Si le critère d'erreur n'est pas satisfait, l'opérateur homogénéisé est amélioré pour certaines cellules et on résout à nouveau le problème micro-macro, on

peut aussi modifier le maillage macroscopique dans certaines zones si l'erreur n'est toujours pas satisfaisante. Le lien de parenté de cette approche avec les méthodes adaptatives est évident : un premier calcul macroscopique étant proposé, un estimateur de qualité *a posteriori* construit à partir de la solution macroscopique permet de détecter les zones les plus erronées. Si, dans les démarches adaptatives, diminuer l'erreur consiste à raffiner le maillage dans ces zones, dans l'approche proposée par Zohdi et Oden, cela consiste à adapter non pas la taille de maille mais plutôt l'échelle de modélisation du matériau : ce qui constitue toute la force de l'approche. Cependant, la théorie de l'homogénéisation étant classiquement utilisée pour définir l'opérateur macroscopique $\mathbf{K}^M$, on est confronté à la même difficulté de séparation des échelles.

3.2.2 Méthode Arlequin

La méthode Arlequin, introduite par Ben Dhia [Ben Dhia 98, Ben Dhia 01] permet de superposer à un problème macroscopique une analyse plus fine dans des régions d'intérêt. Cette approche permet alors de faire dialoguer des modèles différents tant au niveau de la discrétisation que de la nature des équations qui les régissent. Le raccord des deux problèmes s'écrit de manière faible dans le volume des zones de jonction et non pas sur des interfaces comme c'est le cas pour la plupart des approches. Ainsi, dans ces zones, la superposition des modèles est gérée par l'introduction de fonctions de pondération dans le principe des puissances virtuelles utilisé pour l'écriture de la formulation globale. La méthode Arlequin s'avère particulièrement intéressante pour l'étude de l'influence d'un détail structural ou d'un défaut micro sur une structure de grande taille : le patch représentant le modèle micro peut être maillé indépendamment. La figure 2.13 présente un exemple d'application réalisé au sein du logiciel *Code_Aster*. Il s'agit d'une plaque rectangulaire, sans défaut, sur laquelle on positionne un patch représentant une entaille, avec un maillage adapté à ce type de géométrie. L'avantage de la méthode est de pouvoir positionner le modèle micro à divers endroits sans avoir à remailler le modèle global, et ainsi explorer à moindre coût les différents scénarios.

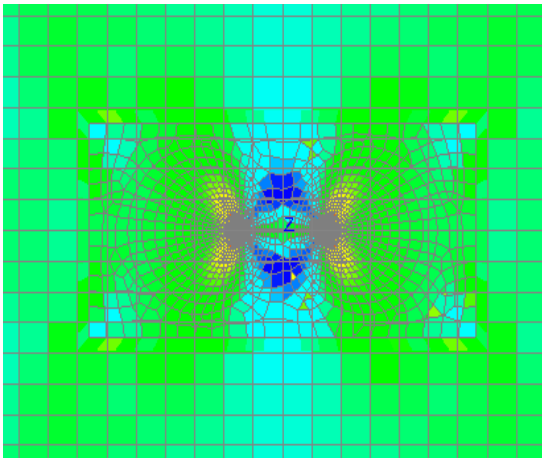

Figure 2.13: Simulation d'une structure fissurée par la méthode Arlequin

Nous proposons de décrire ici les principes de base de la méthode. On considère la superposition de deux modèles de structures élastiques linéaires. Le premier modèle est le modèle grossier et est associé au domaine Ω^M. Le deuxième modèle est le modèle fin et est associé au domaine d'intérêt Ω^m.

La méthode consiste à chercher un couple solution $\underline{u} = (\underline{u}^M, \underline{u}^m) \in \mathcal{U}_{\text{ad}} \times \mathcal{U}^m \overset{déf}{=} \mathcal{W}_{\text{ad}}$ où la solution grossière $\underline{u}^M$ est définie sur tout le domaine $\Omega = \Omega^M$ et où la solution fine $\underline{u}^m$ est définie uniquement sur le domaine Ω^m. On précise que $\mathcal{U}^m = H^1(\Omega^m)$ et que les conditions limites ne sont appliquées que sur Ω^M pour simplifier. Le problème s'énonce alors comme suit : trouver $(\underline{u}, \underline{\lambda}^m) \in \mathcal{W}_{\text{ad}} \times \mathcal{U}^m$ tel que $\forall (\underline{u}^*, \underline{\lambda}^{m*}) \in \mathcal{W}_{\text{ad},0} \times \mathcal{U}^m$:

$$\begin{aligned} a_\alpha(\underline{u}, \underline{u}^*) + b(\underline{\lambda}^m, \underline{u}^*) &= l_\alpha(\underline{u}^*) \\ b(\underline{\lambda}^{m*}, \underline{u}) &= 0 \end{aligned}$$

où :

$$\begin{aligned} a_\alpha(\underline{u}, \underline{u}^*) &= \int_{\Omega=\Omega^M} \alpha \operatorname{Tr}\left(\underline{\underline{\epsilon}}(\underline{u}^M) \underline{\underline{\underline{\underline{K}}}}\, \underline{\underline{\epsilon}}(\underline{u}^{M*})\right) \mathrm{d}\Omega + \cdots \\ &\qquad \int_{\Omega^m} (1-\alpha) \operatorname{Tr}\left(\underline{\underline{\epsilon}}(\underline{u}^m) \underline{\underline{\underline{\underline{K}}}}\, \underline{\underline{\epsilon}}(\underline{u}^{m*})\right) \mathrm{d}\Omega \\ b(\underline{\lambda}^{m*}, \underline{u}) &= \left(\underline{\lambda}^{m*}, \underline{u}^M - \underline{u}^m\right)_{H^1(\Omega^m)} \\ l_\alpha(\underline{u}^*) &= \int_{\Omega=\Omega^M} \alpha \underline{f}_d \cdot \underline{u}^{M*} \mathrm{d}\Omega + \int_{\Omega^m} (1-\alpha) \underline{f}_d \cdot \underline{u}^{m*} \mathrm{d}\Omega + \int_{\partial_2\Omega} \underline{F}_d \cdot \underline{u}^{M*} \mathrm{d}\Gamma \end{aligned}$$

Le paramètre scalaire de pondération α est un champ scalaire tel que $\alpha \in [0, 1]$ dans Ω et $\alpha = 1$ dans $\Omega \setminus \Omega^m$. $\left(\cdot, \cdot\right)_{H^1(\Omega^m)}$ représente le produit scalaire classique sur $H^1(\Omega^m)$. Cette formulation est donc mixte et le multiplicateur de Lagrange λ^m permet de garantir l'égalité des champs $\underline{u}^M$ et $\underline{u}^m$ au sens faible sur la zone de jonction $\Omega^{Mm} = \Omega^m$. La solution est alors définie comme suit :

$$\underline{u} = \begin{cases} \underline{u}^M & \text{sur } \Omega \setminus \Omega^m \\ \alpha\, \underline{u}^M + (1-\alpha)\, \underline{u}^m & \text{sur } \Omega^m \end{cases}$$

La qualité du raccord dans la zone de jonction dépend du choix de l'espace du multiplicateur de Lagrange $\underline{\lambda}^m$ appelé espace « médiateur ». Le choix classique qui a été fait ici consiste à prendre $H^1(\Omega^{Mm} = \Omega^m)$, mais prendre le dual de $H^1(\Omega^m)$ peut paraître plus judicieux. Cependant, si ce choix ne pose pas de problème en continu, il est plus difficile à réaliser en discret. La définition de l'espace d'approximation du multiplicateur de Lagrange dans la zone de jonction reste délicate et fait encore l'objet de travaux. Notons aussi que le raccord réalisé ici dans le volume permet en général de faire dialoguer correctement les deux modèles, permettant ainsi « d'échanger beaucoup plus d'information » qu'un raccord surfacique. Cependant, tout ceci a un prix à payer qui est celui de l'intégration numérique dans le volume du produit scalaire $\left(\cdot, \cdot\right)_{H^1(\Omega^m)}$ lorsque les discrétisations

de $\underline{u}^M$ et de $\underline{u}^m$ ne sont pas compatibles dans la zone de jonction.

La méthode Arlequin propose une approche originale permettant de superposer dans une même zone des états mécaniques issus de modélisations pouvant être très différentes. Néanmoins une difficulté persiste dans le choix de l'espace d'approximation du multiplicateur de Lagrange permettant de recoller en volume les deux modèles dans leur zone de jonction. Par ailleurs, le problème matriciel à résoudre résulte de l'assemblage des deux modèles grossier et fin initiaux, avec les termes de couplages introduits précédemment, et sa résolution peut poser des problèmes du fait de sa taille ou de son conditionnement. Des approches itératives permettant d'éviter l'assemblage du problème complet sont en cours d'étude [Elkhodja 07], de même que l'extension des techniques de patchs au cas non-linéaire [Rey 07].

3.2.3 Méthodes multigrilles

La performance de stratégie de résolution itérative pour des problèmes linéaires de grande taille repose sur le fait que ces méthodes captent rapidement les grandes longueurs de variation mais ont des difficultés à capter les petites variations. L'idée des méthodes multigrilles initiées par [Southwell 35] et [Fedorenko 64] consiste à transporter le calcul sur une hiérarchie de grilles plus grossières que celle initiale, et à y saisir rapidement, via les méthodes de relaxation, toutes les composantes fréquentielles de la solution discrète.

La méthode 2-grilles met en place une stratégie constituée de cycles en V entre une grille grossière et une grille fine emboitée pour résoudre le système micro $\mathbf{K}_m q_m = f_m$. Dans un premier temps, plusieurs itérations sont réalisées sur la grille fine de manière à lisser la solution en diminuant les hautes fréquences contenues dans l'erreur. Le résidu $r_m^{(i)} = f_m - \mathbf{K}_m q_m^{(i)}$ obtenu est alors restreint à la grille grossière par un opérateur de restriction $\mathbf{R}$: $r_M^{(i)} = \mathbf{R} r_m^{(i)}$. On résout ensuite le problème de résidu $\mathbf{K}_M e_M^{(i)} = r_M^{(i)}$ associé au maillage grossier où $\mathbf{K}_M$ est l'opérateur $\mathbf{K}_m$ restreint à la grille grossière. Un opérateur de prolongement permet enfin de passer de la grille grossière à la grille fine en ajoutant une correction à la solution $q_m^{(i)}$. Pour des systèmes symétriques définis positifs, le nombre de V-cycles nécessaires pour atteindre une précision relative donnée est indépendant du nombre N d'inconnues, de sorte que le coût global de la résolution correspond à seulement $\mathcal{O}(N)$ évaluations de résidu sur la grille fine. Les approches multigrilles permettent d'accélérer fortement la convergence des méthodes itératives classiques pour la résolution des grands systèmes linéaires. Une attention particulière doit cependant être portée au choix des opérateurs de restriction et prolongement.

Pour résoudre des problèmes non-linéaires, il peut être envisagé d'utiliser les méthodes multigrille pour la résolution des problèmes linéaires obtenus au sein d'un processus itératif de Newton. Des versions plus récentes, comme la méthode FAS (pour « Full Approximation Storage ») proposent de traiter le problème non-linéaire directement, sans étape de linéarisation, en plaçant les non-linéarités à l'intérieur des itérations multigrilles et en réalisant des relaxations non-linéaires au moyen d'une méthode de Jacobi par bloc. La méthode permet ainsi de réaliser des calculs sans avoir à assembler de matrices glo-

bales, mais les résultats obtenus démontrent que pour certains problèmes le coût de calcul peut être pénalisé par un nombre plus élevé d'itérations globales et d'évaluations du résidu non-linéaire [Mavriplis 01].

3.2.4 Méthodes basées sur la Partition de l'Unité : GFEM, XFEM

La méthode de la partition de l'unité, proposée initialement par Melenk et Babuška [Melenk 96], est une généralisation de la méthode des Eléments Finis qui permet de définir des espaces d'approximation conformes de nature *a priori* quelconque. Ces fonctions notées $\psi_j(\underline{x})$ sont pondérées par les fonctions de forme $\varphi_i(\underline{x})$ (souvent de type éléments finis) formant une partition de l'unité le domaine : $\sum_{i \in \mathbf{I}} \varphi_i(\underline{x}) = 1$. Le déplacement solution s'écrit alors de la manière suivante :

$$\underline{u}_h(\underline{x}) = \sum_{i \in \mathbf{I}} \underline{u}_i \varphi_i(\underline{x}) + \sum_{i \in \mathbf{I}} \sum_{j \in \mathbf{J}_i} a_j^{(i)} \psi_j(\underline{x}) \varphi_i(\underline{x})$$

où $\mathbf{I}$ représente une partition sans recouvrement de la structure et les $a_j^{(i)}$ sont des coefficients constants inconnus du problème. Cette approximation est capable de reproduire n'importe quelle fonction.

La méthode des éléments finis généralisés GFEM [Strouboulis 00] et la méthode des éléments finis étendus XFEM [Moës 99] combinent une approche éléments finis standard (FEM) avec la méthode de partition de l'unité. L'espace d'approximation FEM est enrichi par des fonctions spéciales provenant d'une certaine connaissance du problème que l'on cherche à traiter.

La méthode des éléments finis étendus utilise le cadre de la partition de l'unité pour introduire diverses discontinuités dans un modèle éléments finis sans avoir à en modifier le maillage. Ces discontinuités peuvent être des discontinuités du champ de déplacement provenant de la présence d'une fissure traversant le maillage, ou bien encore des discontinuités sur les dérivées normales du champ de déplacement modélisant des sauts de déformation à l'interface entre plusieurs matériaux. Pour décrire géométriquement les surfaces de discontinuités, la XFEM s'appuie sur la technique des Level-Sets qui consiste à représenter une surface (suffisamment régulière) par l'interpolation éléments finis de la fonction distance signée à cette surface. Les fonctions spéciales introduites sont de plusieurs types selon les zones considérées : des fonctions de Heaviside pour les discontinuités, les solutions asymptotiques pour les champs en pointe de fissure.

La méthode des éléments finis généralisés propose quant à elle d'introduire des fonctions spéciales permettant de rendre compte du comportement local d'une zone donnée. Une série de problèmes élémentaires, appelés "handbooks" sont résolus numériquement à l'échelle fine et permettent de traiter des problèmes contenant de nombreux détails structuraux.

4 Les méthodes de sous-structuration et de décomposition de domaine

Nous avons vu dans la section précédente des techniques multi-échelles permettant de tirer partie de certaines hypothèses du modèle de base. Certaines d'entre elles permettent ainsi de mener des analyses fines en certaines zones d'une structure globale plus grossièrement décrite. Des discrétisations adaptées sont associées à chacune des échelles et des couplages peuvent être réalisés par différentes techniques : transfert de champs, condensation statique, recollement cinématique, etc., permettant ainsi de prendre en compte des détails « micro » dans un calcul global grossier. Les hypothèses faites sont cependant parfois restrictives et inadaptées au calcul de structures hétérogènes.

Par ailleurs, on recherche souvent à obtenir la solution fine sur l'ensemble du domaine et non uniquement sur une zone déterminée à l'avance. Or, de tels calculs ne peuvent être traités, comme nous l'avons vu, par une méthode de résolution directe, trop coûteuse. Cette problématique a conduit à la mise en place des méthodes de sous-structuration et de décomposition de domaine. Elle reposent sur les techniques de condensation des inconnues et sur une décomposition de la structure étudiée en plusieurs domaines, ou sous-structures, qui pourront être traitées séparément. Suivant l'approche retenue, la résolution du problème condensé peut être directe ou itérative. Dans le premier cas, le problème condensé est assemblé et résolu classiquement. Dans le second cas, un processus itératif assure le transfert des inconnues du problème aux interfaces entre les domaines, de façon à obtenir la solution complète à convergence.

4.1 Principes généraux de sous-structuration

4.1.1 Problème de référence

Nous nous plaçons ici dans le cadre de l'élasticité linéaire en conditions HPP. Considérons un domaine Ω soumis aux chargements $\underline{f}, \underline{g}$ définis dans le premier chapitre. Le problème de référence s'écrit de la manière suivante :

Trouver $\underline{u}$ vérifiant :

- l'admissibilité statique sur Ω

$$\int_\Omega \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\epsilon}}(\underline{\hat{u}})dx = \int_\Omega \underline{f}.\underline{\hat{u}}dx + \int_{\partial\Omega} \underline{g}.\underline{\hat{u}}ds \ , \ \forall \underline{\hat{u}} \in V \tag{2.2}$$

avec $\underline{\underline{\sigma}} = K\underline{\underline{\epsilon}}(\underline{u})$.

- l'admissibilité cinématique :

$$\underline{u} = U_d \quad sur \quad \partial\Omega_U \tag{2.3}$$

Sous condition que l'opérateur K définisse une forme bilinéaire symétrique définie coercive sur l'espace des tenseurs d'ordre 2, et que $mes(\partial\Omega_U) > 0$, ce problème admet une solution unique.

4.1.2 Décomposition de domaine

La décomposition de domaine sans recouvrement consiste à établir une partition du domaine initial en n sous-domaines, comme illustré figure 2.14 dans le cas $n = 2$.

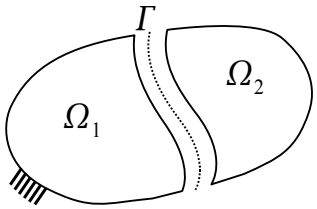

Figure 2.14: Décomposition de domaines

L'interface Γ entre deux sous-structures est définie par :

$$\Gamma = \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2 \tag{2.4}$$

Le problème de référence peut alors s'écrire sur chacun des sous-domaines i :

Trouver $\underline{u_i}$ vérifiant :

- l'admissibilité statique sur Ω_i

$$\int_{\Omega_i} \underline{\underline{\sigma}}_i : \underline{\underline{\epsilon}}_i(\underline{\hat{u}})_i dx = \int_{\Omega_i} \underline{f}.\underline{\hat{u}}_i dx + \int_{\partial\Omega_i} \underline{g}_i.\underline{\hat{u}}_i ds + \int_{\Gamma} \underline{F}_i ds \ \ , \ \ \forall \underline{\hat{u}}_i \in V_i \tag{2.5}$$

avec $\underline{\underline{\sigma}}_i = K\underline{\underline{\epsilon}}(\underline{u}_i)$.

- l'admissibilité cinématique :

$$\underline{u}_i = U_d \quad sur \quad \partial\Omega_U \tag{2.6}$$

Les conditions sur l'interface entre les sous-structures s'écrivent sur chaque interface :

- pour la continuité des déplacements :

$$\underline{u}_1 = \underline{u}_2 \quad sur \quad \Gamma \tag{2.7}$$

- pour l'équilibre des efforts :

$$\underline{F}_1 + \underline{F}_2 = 0 \quad sur \quad \Gamma \tag{2.8}$$

L'ensemble des équations (2.5) à (2.8) est strictement équivalent au système global initial (equations (2.2) et (2.3)). L'extension à n sous-domaines exige de porter une attention particulière aux « coins », c'est-à-dire aux points connectés à plus de deux sous-domaines (voir [Gosselet 03]).

4.1.3 Condensation, Super-éléments

On considère une sous-structure Ω_E ayant une interface Γ avec une sous-structure voisine. L'opérateur de Steklov-Poincaré est l'opérateur qui associe au déplacement imposé sur l'interface l'effort de réaction résultant sur la même interface.

$$\underline{u}_\Gamma \longrightarrow \underline{f}_\Gamma = \mathcal{S}(\underline{u}_\Gamma) \tag{2.9}$$

On appelle complément de Schur **S** la version discrétisée de cet opérateur, associée aux équations d'équilibre discrètes de la sous-structure considérée :

$$\mathbf{K}u = f \tag{2.10}$$

Si on note avec un indice b les quantités d'interfaces, et avec un indice i les autres, on peut récrire l'équation (2.10) sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ii} & \mathbf{K}_{ib} \\ \mathbf{K}_{bi} & \mathbf{K}_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_i \\ f_b \end{bmatrix} \tag{2.11}$$

On obtient alors à partir de la première ligne :

$$u_i = \mathbf{K}_{ii}{}^{-1} \left(f_i - \mathbf{K}_{ib} u_b \right) \tag{2.12}$$

puis par substitution dans la deuxième ligne :

$$\left(\mathbf{K}_{bb} - \mathbf{K}_{bi} \mathbf{K}_{ii}{}^{-1} \mathbf{K}_{ib} \right) u_b = f_b - \mathbf{K}_{bi} K_{ii}{}^{-1} f_i \tag{2.13}$$

soit :

$$\mathbf{S} u_b = r \tag{2.14}$$

Le calcul de cet opérateur est en général réalisé au moyen d'une factorisation partielle de **K** où on a réarrangé les lignes et colonnes pour placer celles correspondant aux inconnues internes en premier. La résolution du problème initial se ramène alors à la résolution du problème condensé suivie d'une étape de relocalisation des déplacement internes grâce à la relation (2.12).

Cette technique est assez largement utilisée pour la création de sous-structures condensées, appelées communément « super-éléments ». Elle permet de réduire de manière importante le nombre de degrés de liberté d'un calcul, en éliminant les inconnues internes de certaines zones. Des calculs initialement trop coûteux peuvent ainsi devenir accessibles. On peut noter que la résolution du problème condensé, suivi par une étape de détermination des solutions internes par sous-structure, permet d'obtenir la solution du problème discrétisé initial. Par ailleurs, elles est adaptée au processus de développement en usage dans l'industrie, et permet des échanges de modèles discrets entre partenaires industriels, via les opérateurs condensés, sans dévoiler les détails structuraux internes.

Ces approches sont cependant aujourd'hui limitées au cas linéaire, voire au cas de grands déplacements/rotations de sous-structures linéaires. Par ailleurs, la matrice condensée obtenue présente l'inconvénient d'être une matrice pleine, très coûteuse à factoriser.

4.2 Méthodes de décomposition de domaine

Les premiers travaux sur les méthodes de décomposition de domaine sont généralement attribués à H. Schwarz, qui dès 1869 proposa une méthode de résolution d'équations aux dérivées partielles en séparant le domaine d'étude en deux sous domaines se recouvrant partiellement. L'avènement des ordinateurs dans la deuxième moitiée du XXième siècle, et en particulier des ordinateurs parallèles, a fortement relancé l'étude de ces méthodes, et permis de nouveaux développements. En calcul des structures, on privilégie souvent les méthodes dites « sans recouvrement », plus faciles à mettre en oeuvre. Elle reposent pour la plupart sur la condensation sur les interfaces de chaque problème posé par sous-structure, et conduisent à un problème posé uniquement en termes d'inconnues d'interfaces de plus petite taille. Par ailleurs, ce problème n'est en général pas résolu directement mais au moyen d'un solveur itératif adapté, n'exigeant pas l'assemblage du problème global. Cette décomposition, associée à un choix judicieux de solveur itératif, est particulièrement bien adaptée aux architectures des calculateurs parallèles. Les seuls problèmes devant être assemblés sont les problèmes locaux par sous-structure, dont le traitement numérique reste abordable.

Les méthodes de décomposition de domaine sans recouvrement peuvent être classées en trois familles : les approches primales (*Balancing Domain Decomposition Method* [Mandel 93]), les approches duales (*Finite Element Tearing and Interconnecting* (FETI) [Farhat 91]) et les approches mixtes (Méthode du Lagrangien augmenté [Glowinski 90], LaTin Micro/Macro [Ladevèze 00a]). Les premières approches proposées n'étaient cependant pas numériquement extensibles, c'est-à-dire qu'elles ne conservaient par leur efficacité pour un nombre croissant de sous-structures. La question de la propagation d'une information globale lors de la résolution itérative s'est ainsi naturellement posée. Elle a conduit à la mise en place de problèmes grossiers variés issus de la vérification partielle des conditions de transmission entre les sous-structures. Nous en présentons les principes de base dans les paragraphes suivants. Pour plus de détails, une revue quasi-exhaustive des différentes approches peut être trouvée dans [Gosselet 06], dont nous reprenons ici les notations.

4.2.1 Approches primales

L'approche primale consiste à écrire la continuité des efforts aux interfaces, exprimés en fonction des déplacements d'interface supposés *a priori* continus. Le problème est formulé en termes de déplacements au interfaces.

Si on considère un système algébrique de la forme $\mathbf{K}u = f$, on peut le récrire, en réordonnant lignes et colonnes, sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ii}^1 & 0 & \dots & 0 & \mathbf{K}_{ib}^1 \mathbf{A}^{1^t} \\ 0 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \mathbf{K}_{ii}^n & \mathbf{K}_{ib}^n \mathbf{A}^{nt} \\ \mathbf{A}^1 \mathbf{K}_{bi}^1 & \dots & \dots & \mathbf{A}^n \mathbf{K}_{bi}^n & \sum_s \mathbf{A}^s \mathbf{K}_{bb}^s \mathbf{A}^{st} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i^1 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_i^n \\ u_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_i^1 \\ \vdots \\ \vdots \\ f_i^n \\ \sum_s \mathbf{A}^s f_b^s \end{bmatrix} \tag{2.15}$$

où $\mathbf{A}^s$ est l'opérateur d'assemblage permettant de relier les degrés de liberté d'interface globaux, notés u_b, aux degrés de liberté d'interface de chaque sous-structure s.

L'élimination des inconnues internes u_i^s pour chaque sous-structure s au moyen de l'expression (2.12) mène à la résolution du problème suivant, posé sur les inconnues d'interfaces u_b :

$$\mathbf{S}_p u_b = r_p \tag{2.16}$$

avec $\mathbf{S}_p$ le complément de Schur primal défini par :

$$\mathbf{S}_p = \sum_s \mathbf{A}^s \mathbf{S}_p^s \mathbf{A}^{st} = \sum_s \mathbf{A}^s \left(\mathbf{K}_{bb}^s - \mathbf{K}_{bi}^s \mathbf{K}_{ii}^{s\,-1} \mathbf{K}_{ib}^s \right) \mathbf{A}^{st} \tag{2.17}$$

et le second membre condensé sur l'interface :

$$r_p = \sum_s \mathbf{A}^s b_p^s = \sum_s \mathbf{A}^s \left(f_b^s - \mathbf{K}_{bi}^s \mathbf{K}_{ii}^{s\,-1} f_i^s \right) \tag{2.18}$$

Après résolution de ce système et détermination de u_b, on obtient les solutions internes u_i au moyen de l'expression :

$$u_i^s = \mathbf{K}_{ii}^{s\,-1} \left(f_i^s - \mathbf{K}_{ib}^s \mathbf{A}^{st} u_b \right) \tag{2.19}$$

L'inversion de $\mathbf{K}_{ii}^s$ correspond à la résolution d'un problème avec des conditions de Dirichlet à l'interface. Il est donc bien posé et admet une solution.

On observe dans l'équation (3.15) que l'opérateur $\mathbf{S}_p$ est un assemblage de contributions locales. Son inversion est cependant extrêmement coûteuse : elle passe par le calcul des compléments de Schur locaux, assemblage, factorisation de l'opérateur assemblé (qui est une matrice pleine). Pour cette raison, on privilégie plutôt des solveurs itératifs de Krylov (gradient conjugué, GMRES, etc.), comme dans le cas de la méthode BDD. Une revue des principales méthodes itératives pour la résolution de systèmes creux linéaires est disponible dans [Saad 00]. Ces solveurs ne requièrent que des produits matrice/vecteur, qui peuvent ici être réalisés au niveau des sous-structures, en parallèle, sans avoir à assembler le problème global. Il suffit ensuite de rassembler les contributions locales du vecteur produit. Qui plus est, le calcul explicite des compléments de Schur locaux n'est pas nécessaire : le produit par $\mathbf{S}_p$ revenant à une résolution d'un système du type $\mathbf{K}_{ii} x = b$.

En fonction des propriétés de l'opérateur, on choisit comme solveur itératif un algorithme de Gradient conjugué (cas symétrique défini positif) ou l'algorithme GMRes.

La convergence de ces procédures itératives dépend énormément du conditionnement du système à résoudre, c'est-à-dire du rapport entre la plus grande et la plus petite valeur propre de la matrice. Pour cette raison, l'utilisation de préconditionneurs efficaces s'avère nécessaire. Nous en présenterons une famille dans la section 4.2.3.

4.2.2 Approches duales

L'approche duale consiste à écrire la continuité des déplacements aux interfaces, exprimés en fonction des efforts d'interfaces supposés *a priori* équilibrés. On définit ainsi une inconnue d'interface λ_b qui permet d'écrire pour chaque sous-structure :

$$\mathbf{K}^s u^s = f^s + \mathbf{t}^{st}\underline{\mathbf{A}}^{st}\lambda_b \tag{2.20}$$

où $\underline{\mathbf{A}}^s$ est un opérateur d'assemblage signé, et $\mathbf{t}^s$ l'opérateur de trace des degrés de liberté d'une sous-structure s sur les degrés d'interface. Cette équation n'a, en général, pas de solution, puisqu'il s'agit de résoudre l'équilibre d'une sous-structure soumise uniquement à un chargement en effort sur son interface (condition de Neumann). En l'absence de conditions de Dirichlet, on a en effet une solution définie à un mode de corps rigide près. On peut néanmoins définir une pseudo-inverse K^+ qui vérifie :

$$\forall x \in Im(\mathbf{K}), \mathbf{K}\mathbf{K}^+ x = x \tag{2.21}$$

On peut alors exprimer u^s comme la somme d'une partie déformante et d'une partie de mouvement de corps rigide (à énergie nulle), en notant $\mathbf{R}^s$ une base de $ker(\mathbf{K}^s)$ et α^s l'amplitude des déplacements de corps rigide associés :

$$u^s = \mathbf{K}^{s+}\left(f^s + \mathbf{t}^{st}\underline{\mathbf{A}}^{st}\lambda_b\right) + \mathbf{R}^s\alpha^s \tag{2.22}$$

Le chargement ne doit pas travailler dans les déplacements de corps rigide, ce qui se traduit par :

$$\mathbf{R}^{st}\left(f^s + \mathbf{t}^{st}\underline{\mathbf{A}}^{st}\lambda_b\right) = 0 \tag{2.23}$$

L'écriture de la continuité des déplacements aux interfaces permet d'obtenir le problème d'interface suivant :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S}_d & \mathbf{G} \\ \mathbf{G}^t & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_b \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r_d \\ -e \end{bmatrix} \tag{2.24}$$

avec les notations :

$$\begin{gathered} \mathbf{S}_d = \textstyle\sum_s \underline{\mathbf{A}}^s\mathbf{t}^s\mathbf{K}^{s+}\mathbf{t}^{st}\underline{\mathbf{A}}^{st} \\ r_d = \textstyle\sum_s \underline{\mathbf{A}}^s\mathbf{t}^s\mathbf{K}^{s+}f^s \\ \mathbf{G} = (\ldots, \underline{\mathbf{A}}^s\mathbf{t}^s\mathbf{R}^s, \ldots) \\ \alpha^t = (\ldots, \alpha^{st}, \ldots) \\ e^t = \left(\ldots, f^{sT}\mathbf{R}^s, \ldots\right) \end{gathered}$$

Comme pour les approches primales, une technique itérative est utilisée pour la résolution du problème condensé aux interfaces. Il s'agit d'une méthode itérative de type gradient conjugué préconditionné projeté, où la projection est associée à la contrainte d'équilibre des sous-domaines. Cette phase de projection peut alors être considérée comme un

problème macroscopique grossier garantissant à chaque itération la continuité des modes rigides des sous-domaines au niveau des interfaces. Ce problème global fait de la méthode FETI une stratégie de calcul à deux échelles et la rend numériquement extensible. Cependant, le problème macroscopique est relativement pauvre puisqu'il est simplement associé aux modes rigides qui sont des modes à énergie nulle. Pour palier ce problème, la méthode FETI2 [Farhat 96] apporte une amélioration consistant à vérifier des contraintes supplémentaires sur le déplacement, telles que la continuité en moyenne sur les interfaces, ou la continuité des déplacements des « coins » pour les problèmes de plaques et coques [Farhat 98, Le Tallec 98]. La phase de projection du gradient devient alors un problème macroscopique enrichi. Ces premiers travaux ont ainsi donné lieu à une version plus aboutie appelée FETI-DP (*Dual-primal FETI method*) [Farhat 01].

4.2.3 Préconditionneurs et problèmes grossiers

Les méthodes BDD et FETI permettent d'atteindre des performances remarquables moyennant le choix d'un préconditionneur adéquat pour l'algorithme itératif de résolution. Un préconditionneur doit être une bonne approximation de l'inverse de l'opérateur du problème d'interface. Pour être efficace, il doit autant que possible consister en un assemblage de contributions locales. Un choix classique consiste ainsi à prendre une somme pondérée des inverses des contributions locales, ce qui conduit respectivement pour les approches primales et duales aux préconditionneurs suivants :

$$\widetilde{\mathbf{S}}_p^{-1} = \sum_s \mathbf{W}^s \mathbf{S}_d^s \mathbf{W}^{st} \tag{2.25}$$

$$\widetilde{\mathbf{S}}_d^{-1} = \sum_s \underline{\mathbf{W}}^s \mathbf{S}_p^s \underline{\mathbf{W}}^{st} \tag{2.26}$$

Le préconditionneur de l'approche primale revient à résoudre des problèmes de Neumann pour chaque sous-structure (d'où l'appellation de préconditionneur de Neumann-Neumann), le préconditionneur dual revenant lui à résoudre des problèmes de Dirichlet. Les matrices diagonales de pondération $\mathbf{W}$ et $\underline{\mathbf{W}}$ permettent de donner un sens mécanique au préconditionneur. Elles permettent de prendre en compte les différences de rigidité de part et d'autre de l'interface ([Rixen 99]). Des versions simplifiées de ces préconditionneurs (versions « lumped » ou « superlumped ») ont aussi été proposées pour allégé les coûts de calcul. Elles consistent à choisir des approximations de l'opérateur de Schur dans l'expression du préconditionneur. Pour plus de détails, on pourra se référer à [Gosselet 06].

Comme nous l'avons vu précédemment, un problème grossier apparait naturellement dans l'écriture du problème de l'approche duale. Il s'agit d'un problème posé en terme de mouvement de corps rigides des sous-structures, qui est associé à une contrainte d'équilibre des sous-domaines vis-à-vis des chargements extérieurs. Il est introduit dans la résolution itérative du problème condensé au moyen d'un algorithme de type gradient conjugué projeté. De la même manière, on definit pour les approches primales un problème grossier semblable, associé au préconditionneur. Avec les préconditonneurs optimaux et

les problèmes grossiers permettant de propager l'information, il a été démontré que les approches primales et duales étaient équivalentes [Klawonn 01], avec un conditionnement

$$\kappa = O\left(1 + \log\frac{H}{h}\right)^2$$

où h représente la taille caractéristique des éléments finis, et H celle des sous-structures.

Une approche hybride a été proposée dans [Gosselet 03]. Elle propose un cadre unifié pour les deux approches primales et duales, et permet de choisir pour chaque inconnue du problème de la traiter de façon primale ou duale. Des préconditionneurs et des problèmes grossiers peuvent être définis en reprenant les principes de ceux des méthodes primales et duales. Cette méthode est particulièrement adaptée aux problèmes multi-champs comme par exemple en poro-élasticité [Gosselet 04].

4.2.4 Approches mixtes

Les approches mixtes n'imposent la continuité ou l'équilibre d'aucun champ *a priori* et formulent le problème d'interface à la fois sur les efforts et les déplacements. Il existe plusieurs versions d'approches mixtes, selon qu'elles s'appuient sur un formalisme de type Lagrangien augmenté [Fortin 83, Glowinski 90] ou sur une approche LATIN comme dans [Ladevèze 85, Ladevèze 99a], selon qu'on considère les interfaces comme des sous-structures à part entière ou pas. Nous adoptons ici l'approche proposée par les méthodes dites FETI-2-champs [Series 03].

Dans le cas d'une décomposition en deux sous-domaine, les conditions d'interface s'écrivent :

$$\left\{\begin{array}{ll} u_b^1 - u_b^2 & = 0 \\ \lambda_b^1 + \lambda_b^2 & = 0 \end{array}\right. \tag{2.27}$$

ce qui peut s'écrire

$$\left\{\begin{array}{ll} \lambda_b^1 + \lambda_b^2 + \mathbf{A}^1\left(u_b^1 - u_b^2\right) & = 0 \\ \lambda_b^1 + \lambda_b^2 + \mathbf{A}^2\left(u_b^2 - u_b^1\right) & = 0 \end{array}\right. \tag{2.28}$$

sous la condition que $(\mathbf{A}^1 + \mathbf{A}^2)$ soit inversible, où $\mathbf{A}^i$ est un opérateur qui peut être interprété comme une raideur d'interface associée à la sous-structure i.

On introduit alors l'inconnue $\mu_b^i = \lambda_b^i + \mathbf{A}^i u^i$, ce qui donne pour les conditions d'interface :

$$\left\{\begin{array}{ll} \mu_b^1 + \mu_b^2 - \left(\mathbf{A}^1 + \mathbf{A}^2\right) u_b^2 & = 0 \\ \mu_b^1 + \mu_b^2 - \left(\mathbf{A}^1 + \mathbf{A}^2\right) u_b^1 & = 0 \end{array}\right. \tag{2.29}$$

et pour l'équilibre local pour chacune des sous-structures :

$$\left\{\begin{array}{ll} \left(\mathbf{S}_p^1 + \mathbf{A}^1\right) u_b^1 & = \mu_b^1 + b_p^1 \\ \left(\mathbf{S}_p^2 + \mathbf{A}^2\right) u_b^2 & = \mu_b^2 + b_p^2 \end{array}\right. \tag{2.30}$$

Si on choisi $\mathbf{A}^i$ de telle sorte que $(\mathbf{S}_p^i + \mathbf{A}^i)$ soit inversible, on peut extraire u_b^i des équations d'équilibre et le substituer dans (X.X), ce qui donne le système final :

$$\begin{bmatrix} I & I - \left(\mathbf{A}^1 + \mathbf{A}^2\right)\left(\mathbf{S}_p^2 + \mathbf{A}^2\right)^{-1} \\ I - \left(\mathbf{A}^1 + \mathbf{A}^2\right)\left(\mathbf{S}_p^1 + \mathbf{A}^1\right)^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu^1 \\ \mu^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\mathbf{A}^1 + \mathbf{A}^2\right)\left(\mathbf{S}_p^2 + \mathbf{A}^2\right)^{-1} b_p^1 \\ \left(\mathbf{A}^1 + \mathbf{A}^2\right)\left(\mathbf{S}_p^1 + \mathbf{A}^1\right)^{-1} b_p^2 \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

Cette dernière expression permet de donner une interprétation à l'opérateur $\mathbf{A}^i$. On observe en effet qu'en choisissant $\mathbf{A}^1 = \mathbf{S}_p^2$ et $\mathbf{A}^2 = \mathbf{S}_p^1$, l'opérateur du système (2.31) devient l'opérateur identité, et la solution est obtenue directement. L'opérateur $\mathbf{A}^i$ doit ainsi approcher le complément de Schur des sous-structures voisines pour obtenir le meilleur conditionnement possible. La généralisation à n sous-structures induit une choix optimal pour $\mathbf{A}^i$ correspondant au complément de Schur sur l'interface du domaine i de l'opérateur de l'ensemble des sous-structures restantes. Un tel choix n'est bien entendu pas réaliste, car il ne respecte plus la localisation des données, et plusieurs approximations ont été proposées, parmi lesquelles : le complément de Schur de la sous-structure voisine uniquement, le complément de Schur d'une zone correspondant aux noeuds voisins de l'interface uniquement, ou bien encore la matrice de raideur de l'interface de la structure voisine.

Enfin, contrairement aux approches duales, l'opérateur par sous-structure $(\mathbf{S}_p^i + \mathbf{A}^i)$ est inversible. Le problème global associé aux modes rigides n'est donc plus strictement nécessaire. La mise en œuvre itérative de la méthode exige cependant la définition d'un problème grossier global pour assurer le transfert d'information sur l'ensemble de la structure, et non-uniquement de voisin à voisin. Ceci est en général réalisé au moyen d'une méthode de Krylov augmentée, prenant en compte des contraintes d'admissibilité globales. En pratique, on choisit le plus souvent le même problème que dans les méthodes BDD et FETI. Un autre problème global grossier, issu d'une procédure d'homogénéisation, est proposé dans l'approche mixte LaTIn micro/macro [Ladevèze 99a]. Il rend l'approche particulièrement efficace pour les problèmes hétérogènes, au prix d'un plus grand espace grossier.

4.3 Les Méthodes Newton-Krylov-Schur

4.3.1 Principe et mise en œuvre

Les méthodes de décomposition de domaine classiques que nous venons de présenter (BDD, FETI, etc.) permettent la résolution de problèmes linéaires sur des calculateurs à architecture distribuée. Elles ouvrent ainsi la voie à la résolution de problèmes linéaires de plusieurs millions de degrés de liberté.

En outre, elles ont été mises en œuvre au sein de schémas de Newton pour la résolution de problèmes non-linéaires de grande taille, formant la famille des méthodes dites « Newton-Krylov-Schur ». Ces méthodes doivent leur nom à :

– la méthode de Newton pour la linéarisation et le schéma itératif-incrémental,

– la sous-structuration et la condensation de Schur pour l'écriture du problème aux interfaces,
– le solveur itératif parallèle de Krylov pour la résolution du problème linéaire condensé aux interfaces

La figure 2.15 illustre les différentes étapes de cette famille de stratégies dans le cas d'une structure décomposé en 4 sous-domaines.

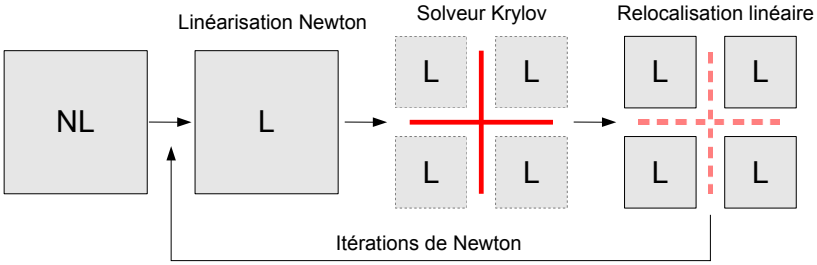

Figure 2.15: Etapes de résolution des stratégies NKS avec 4 sous-domaines

De telles approches ont été décrites dans [De Roeck 92, Rey 94] pour la résolution de problèmes tridimensionnels non-linéaires élastiques, dans [Farhat 00] pour le calcul de grandes structures élancées ou bien encore dans [Barboteu 01] pour la résolution de problèmes multi-contacts. Elles reprennent toutes les étapes décrites plus précisément dans l'algorithme 2, les différences résidant essentiellement dans les choix faits pour la méthode de Newton et la méthode de décomposition de domaine. Ces approches apportent une première réponse à la résolution des problèmes non-linéaires de grande taille, en rendant possible l'utilisation des moyens de calcul parallèle.

4.3.2 Techniques d'accélération

Les approches Newton-Krylov-Schur ont pour inconvénient de mener à la résolution d'un grand nombre de systèmes linéaires, et donc d'appels aux solveurs parallèles, engendrant de nombreuses communications entres les différents processeurs. Des techniques d'accélération de convergence ont ainsi été proposées pour accélérer les processus itératifs de Krylov. Elles s'appuient sur la construction, au cours des résolutions linéaires successives, de bases de solutions, ou sous-espace de Krylov, qui pourront être réutilisées lors des résolutions suivantes. La stratégie GIRKS (pour *Generalized Iterative Reuse of Krylov Subspaces*) [Risler 00] est la combinaison de la technique d'initiation IRKS (*Iterative Reuse of Krylov Subspaces*) et du préconditionnement GKC (*Generalized Krylov Correction*) [Rey 96].

La méthode IRKS permet d'évaluer une initialisation de la solution pertinente vis-à-vis des espaces précédemment construits. Elle repose sur la résolution itérative du système en projection sur les espaces de Krylov précédents, en utilisant pour préconditionneur l'inverse des opérateurs antérieurs projetés sur leurs sous-espaces. L'approximation obtenue à la stagnation de la procédure sert d'initialisation. L'algorithme GKC consiste à corriger le préconditionneur de façon pertinente vis-à-vis des résolutions précédentes de

Algorithme 2 Méthode Newton-Krylov-Schur

Initialisation : $F_{ext} = 0,\ \Delta F = \theta.F_{ext}^{tot}$
boucle pour $p = 0$ à p_{max} **faire** *[schéma incrémental]*
  $F_{ext} = F_{ext} + \Delta F$
  si $\|F_{ext}\| > \|F_{ext}^{tot}\|$ **alors** $F_{ext} = F_{ext}^{tot}$
  boucle pour $i = 0$ à i_{max} **faire** *[itérations de Newton]*
    Assemblage des opérateurs locaux tangents $\mathbf{K}_T^s$ par sous-structure
    Factorisation des $\mathbf{K}_{Tii}^s$
    Calcul du résidu condensé par sous-structure : r^s
    Résolution du problème condensé *[Solveur itératif de Krylov]* : $\mathbf{S}_T.\Delta u_b = r$
    Calcul des solutions intérieures : $\Delta u_i^s = \mathbf{K}_{ii}^{s\,-1}\left(f_i^s - \mathbf{K}_{ib}^s \mathbf{A}^{sT} \Delta u_b\right)$
    Mise à jour de u_b et u_i^s
    Calcul de l'erreur $\eta = \frac{\|r\|}{\|F_{ext}\|}$
    si $\eta < \eta^{crit}$ **alors** sortie
  fin boucle
  si $\eta > \eta^{crit}$ **alors** *[non-convergence]*
    Réduction de l'incrément de chargement :
    $F_{ext} = F_{ext} - \Delta F$
    $\Delta F = \Delta F/2$
  sinon *[convergence]*
    si $F_{ext} = F_{ext}^{tot}$ **alors** sortie *[fin du calcul]*
    sinon $\Delta F = \Delta F.\,(i_{opt}/i)^{\alpha}$ *[incrément adaptatif]*
  fin si
fin boucle

manière à vérifier approximativement une condition d'optimalité. Plus de détails peuvent être trouvés dans [Rey 00].

Une application au calcul d'une structure lamifiée acier-élastomère équipant les boosters d'Ariane 5 a été présentée dans [Gosselet 02]. Des gains numériques de l'ordre de 100 (en utilisant 17 processeurs) ont été démontrés par rapport à une approche classique sans décomposition de domaine (gain de 60 sans l'utilisation de GIRKS), dans le cas d'un comportement sans flambage. Lorsque le niveau de chargement induit un phénomène de flambage, les gains se limitent à environ 60, avec ou sans GIRKS. En effet, le flambage induit des changements importants de l'opérateur tangent et de son spectre, rendant les espaces de Krylov précédents peu pertinents.

Un inconvénient de la méthode GIRKS est la possibilité de stagnation lors de la résolution d'un système linéaire, nécessitant une remise à zéro des espaces de Krylov stockés. L'approche SRKS (*Selective Reuse of Krylov Subspace*) [Gosselet 02] propose de pallier ce problème en améliorant les qualités spectrales des problèmes linéaires au moyen d'une sélection pertinente des vecteurs des sous-espaces précédents et en résolvant de manière exacte le problème grossier issu de l'augmentation. La méthode a démontré une grande stabilité, du fait de l'utilisation d'un solveur exact, pour un coût additionnel limité. L'approche n'apporte cependant pas d'amélioration aux cas où les opérateurs varient trop fortement, comme pour le flambage par exemple.

4.3.3 Inadaptation aux non-linéarités localisées

Au delà de la problématique d'accélération des solveurs itératifs pour le problème linéaire condensé aux interfaces, se pose la question de l'adaptation d'un schéma de Newton pour la résolution de très grands problèmes non-linéaires, en particulier lorsque les non-linéarités ne sont pas équitablement réparties. La convergence d'un algorithme de Newton n'est en effet assurée qu'au voisinage de la solution. Un phénomène très non-linéaire, comme c'est le cas du flambage, même localisé, va ainsi exiger un schéma incrémental adapté, et un grand nombre de résolutions linéaires pour passer le point de bifurcation ou le point limite. Ces itérations vont être réalisées sur la totalité de la structure, alors qu'une grande partie peut rester dans le domaine linéaire. La stratégie paraît ainsi être mal adaptée.

Une caractéristique de la méthode réside dans l'utilisation de deux procédures itératives, l'une pour la résolution du problème non-linéaire au moyen d'un schéma de Newton, l'autre pour la résolution du problème linéaire condensé aux interfaces. Une voie d'amélioration pourrait être dans la recherche d'une meilleure coordination de ces deux schémas imbriqués. Une inversion des itérations du schéma de Newton et du solveur de Krylov a ainsi été proposée dans [De Roeck 92], mais ne s'est pas avérée pertinente en terme de coût de calcul pour les problèmes considérés. Une autre voie d'amélioration consisterait à modifier la stratégie de Newton pour l'adapter aux non-linéarités localisées et aux méthodes de décomposition de domaine. Nous reviendrons dans le chapitre 3 sur des propositions pertinentes de modifications des méthodes NKS classiques.

4.4 La méthode LaTIn micro/macro

La méthode mixte basée sur la LaTIn (voir section 2.3.2 du chapitre 1) est une méthode mixte de décomposition de domaine qui a été initialement proposée pour la résolution de problèmes d'assemblages de structures avec des interfaces aux comportements complexes [Blanzé 93, Blanzé 96, Champaney 97, Champaney 99, Ladevèze 00b].

Ces approches étaient initialement mono-échelle, aucun problème global n'étant défini. Une première vision multiéchelles a été introduite par Ladevèze et Dureisseix dans [Ladevèze 98], garantissant l'extensibilité de la méthode et la rendant comparable aux méthodes BDD ou FETI. Afin de mieux prendre en compte les structures fortement hétérogènes, une seconde approche multiéchelles basée sur une procédure d'homogénéisation automatique en espace a été proposé dans [Ladevèze 99b, Ladevèze 00a, Loiseau 01, Ladevèze 01], puis une version avec homogénéisation en espace et en temps [Ladevèze 02a, Ladevèze 03, Nouy 03] pour traiter des problèmes caractérisés par des phénomènes à différentes échelles de temps.

La méthode a été utilisée pour traiter des problèmes associés aux structures fortement hétérogènes [Loiseau 01, Ladevèze 01], avec contact [Ladevèze 02b], pour des problèmes multiphysiques [Néron 03], de fissuration en association à la méthode XFEM [Guidault 05, Guidault 07, Guidault 08] ou encore pour la simulation de systèmes de tenségrité [Nineb 05, Alart 08] ou de modèles micro de composites stratifiés endommageables [Violeau 07]. Une présentation de la mise en œuvre de la stratégie pour le calcul de structures industrielles est faite dans [Allix 06].

Nous présentons ici la version avec homogénéisation en espace dans le cas de liaisons parfaites.

4.4.1 Reformulation du problème de référence

Dans cette approche, la structure est décomposée en sous-structures et interfaces, chacune ayant ses propres variables et équations. Une sous-structure Ω_E est soumise à l'action de son environnement c'est-à-dire, outre les efforts volumiques extérieurs $\underline{f}$, aux efforts $\underline{F}_E$ et déplacements $\underline{U}_E$ sur sa frontière $\partial\Omega_E$. De même, une interface entre deux sous-structures Ω_E et $\Omega_{E'}$ engendre une relation de comportement (au sens large) entre $(\underline{F}_E, \underline{F}_{E'})$ et $(\underline{U}_E, \underline{U}_{E'})$ (voir Figure 2.16).

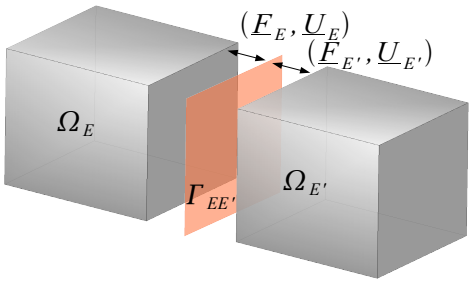

Figure 2.16: Décomposition en sous-structures et interfaces

Le problème de référence devient : Trouver $s = \{s_E\}$ avec $s_E = \left(\underline{\underline{\epsilon}}_E, \underline{U}_E, \underline{\underline{\sigma}}_E, \underline{F}_E\right)$

vérifiant :

– l'admissibilité statique sur Ω_E :

$$\int_{\Omega_E} \underline{\underline{\sigma}}_E : \underline{\underline{\epsilon}}(\hat{\underline{u}}_E)dx = \int_{\Omega_E} \underline{f}.\hat{\underline{u}}_E dx + \int_{\partial\Omega_E} \underline{F}_E.\hat{\underline{u}}_E ds \ , \ \forall \hat{\underline{u}}_E \in V_E \tag{2.32}$$

– l'admissibilité cinématique sur Ω_E : $\exists \underline{u}_E \in V_E$ tel que

$$\underline{\underline{\epsilon}}_E = \underline{\underline{\epsilon}}(\underline{u}_E) \quad \text{et} \quad \underline{u} = \underline{U}_E \quad sur \quad \partial\Omega_E \tag{2.33}$$

– la relation de comportement sur Ω_E :

$$\underline{\underline{\sigma}}_E = \mathbf{K}\underline{\underline{\epsilon}}(\underline{u}_E) \tag{2.34}$$

– le comportement (au sens large) des interfaces $\Gamma_{EE'}$:
  – interfaces parfaites :

$$\underline{U}_E = \underline{U}_{E'} \tag{2.35}$$

$$\underline{F}_E + \underline{F}_{E'} = 0 \tag{2.36}$$

  – conditions aux limites de Dirichlet :

$$\underline{U}_E = \underline{U}_d|_{\Gamma_{EE'}} \tag{2.37}$$

  – conditions aux limites de Neumann :

$$\underline{F}_E + \underline{g}\big|_{\Gamma_{EE'}} = 0 \tag{2.38}$$

4.4.2 Séparation d'échelle aux interfaces

On introduit, au niveau des interfaces, une séparation d'échelle micro/macro. Des espaces de dimension finie sont ainsi choisis pour les déplacements et efforts macroscopiques. En pratique, les fonctions de base sont choisies égales et contiennent les parties affines des déplacements et des efforts sur chaque interface.

On définit ainsi les parties macro $\underline{F}^M$ et $\underline{U}^M$ des champs d'interface comme la projection des efforts et déplacements sur les espaces macro correspondants, au sens du produit scalaire travail sur l'interface.

Les parties micro sont simplement définies par :

$$\underline{F}^m = \underline{F} - \underline{F}^M \quad \text{et} \quad \underline{U}^m = \underline{U} - \underline{U}^M$$

Le choix fait pour le projecteur conduit naturellement au découplage des travaux des parties micro et macro sur l'interface, soit :

$$\int_\Gamma \underline{F}.\underline{U} ds = \int_\Gamma \left(\underline{F}^M.\underline{U}^M + \underline{F}^m.\underline{U}^m\right) ds \tag{2.39}$$

Un point capital de la méthode consiste ensuite à définir des conditions d'admissibilité sur les quantités macro : efforts et déplacements sont contraints à vérifier respectivement les conditions d'équilibre et de continuité aux interfaces dans le cas d'interfaces parfaites :

$$\underline{U}_E^M = \underline{U}_{E'}^M \tag{2.40}$$

$$\underline{F}_E^M + \underline{F}_{E'}^M = 0 \tag{2.41}$$

Remarque : Dans le cas d'interfaces de contact, il convient d'assurer uniquement l'admissibilité des efforts macros, un glissement macroscopique pouvant survenir au niveau des interfaces.

4.4.3 Stratégie de résolution

On reformule le problème de référence sous la forme suivante : trouver $s = \{s_E\}$ vérifiant les deux groupes d'équations suivantes :

■ **un groupe d'équations linéaires**, noté A_d et vérifiant :
- l'admissibilité statique et cinématique sur chaque sous-structure Ω_E ((2.32) et (2.33)),
- l'admissibilité des variables macro $\underline{F}_E$ (2.41) et $\underline{U}_E$ (2.40) ,

■ **un groupe d'équations locales**, noté Γ et vérifiant :
- les relations de comportement des variables micro aux interfaces ((2.35), (2.36), (2.37) et (2.38)),
- le comportement des sous-structures (2.34).

On applique ensuite la méthode LaTIn présentée dans la section 2.3.2 du chapitre 1, qui consiste à construire successivement des approximations de la solution vérifiant Γ et A_d, au moyen de directions de recherche $\mathbf{E}^+$ et $\mathbf{E}^-$. Une itération de la méthode comporte ainsi les deux étapes suivantes :

- Etape locale à l'itération n :

  Connaissant une approximation $s_n \in \mathbf{A}_d$ de la solution s, on cherche à construire une approximation $\hat{s}_{n+1/2} \in \mathbf{\Gamma}$, de sorte que $\left(\hat{s}_{n+1/2} - s_n\right)$ suive la direction de recherche $\mathbf{E}^+$ définie de la manière suivante, pour chaque sous-structure Ω_E :

$$\begin{array}{rcrcl} \left(\hat{\underline{\underline{\sigma}}}_E - \underline{\underline{\sigma}}_E\right) & + & \mathbf{K}\left(\hat{\underline{\underline{\epsilon}}}_E - \underline{\underline{\epsilon}}_E\right) & = & 0 \\ \left(\hat{\underline{F}}_E^m - \underline{F}_E^m\right) & - & \mathbf{k}^m\left(\hat{\underline{U}}_E^m - \underline{U}_E^m\right) & = & 0 \end{array}$$

  où $\mathbf{k}^m$ est un paramètre de la méthode qui peut être interprété comme une rigidité « micro » de l'interface. La combinaison des directions de montée, des relations de comportement des sous-structures et interfaces permet de définir explicitement les équations résolues à l'étape locale [Ladevèze 99a, Loiseau 01, Nouy 03]. Il s'agit de problèmes locaux sur les sous-structures et les interfaces. Ils conduisent donc à un degré de parallélisme optimal.

– Etape linéaire à l'itération n :

Connaissant $\hat{s}_{n+1/2} \in \mathbf{\Gamma}$, le problème consiste à construire une approximation $s_{n+1} \in \mathbf{A}_d$, de sorte que $\left(s_{n+1} - \hat{s}_{n+1/2}\right)$ suive la direction de recherche $\mathbf{E}^-$ définie de la manière suivante, pour chaque sous-structure Ω_E :

$$\begin{array}{rcrcl} \left(\underline{\underline{\sigma}}_E - \hat{\underline{\underline{\sigma}}}_E\right) & - & \mathbf{K}\left(\underline{\underline{\epsilon}}_E - \hat{\underline{\underline{\epsilon}}}_E\right) & = & 0 \\ \left(\underline{F}_E^m - \hat{\underline{F}}_E^m\right) & + & \mathbf{k}^m\left(\underline{U}_E^m - \hat{\underline{U}}_E^m\right) & = & 0 \end{array}$$

Les équations associées aux sous-structures et la direction de recherche micro conduisent à la formulation de problèmes par sous-structure, appelés problèmes « micro », qui consistent à trouver $\underline{u}_E \in V_E$ tel que $\forall \hat{\underline{u}}_E \in V_E$,

$$\int_{\Omega_E} \underline{\underline{\epsilon}}(\hat{\underline{u}}_E) : \mathbf{K}\underline{\underline{\epsilon}}(\underline{u}_E)dx + \int_{\partial\Omega_E} \hat{\underline{u}}_E^m.\mathbf{k}^m\underline{u}_E^m ds = \int_{\Omega_E} \underline{f}.\hat{\underline{u}}_E dx + \int_{\partial\Omega_E} \left(\hat{\underline{F}}_E^m + \mathbf{k}^m\hat{\underline{U}}_E^m\right).\hat{\underline{u}}_E^m ds + \int_{\partial\Omega_E} \underline{F}_E^M.\hat{\underline{u}}_E^M ds \quad (2.42)$$

Si $\mathbf{k}^m$ est un opérateur positif et $\underline{F}_E^M$ équilibre les efforts extérieurs, ce problème admet une solution unique à un mode rigide $\underline{\alpha}_E$ près. La résolution de ce problème nécessite cependant de déterminer au préalable les efforts macro d'interface $\underline{F}_E^M$, ce qui ne peut se faire que par l'écriture d'un problème global couplant toutes les sous-structures. Pour ce faire, on peut écrire à partir du problème (2.42) la relation :

$$\underline{U}_E^M = \widetilde{\underline{U}}_E^M + \mathbf{L}_E\left(\left\{\underline{F}_E^M\right\}\right) + \underline{\alpha}_E \quad (2.43)$$

où $\widetilde{\underline{U}}_E^M$ dépend uniquement des quantités de l'étape locale précédente et des données, et où $\left\{\underline{F}_E^M\right\}$ est la partie de $\underline{F}_E^M$ à résultantes et moments nuls sur $\partial\Omega_E$. L'opérateur $\mathbf{L}_E$ est un opérateur de comportement homogénéisé de la sous-structure Ω_E, calculé une fois en début de processus itératif.

La prise en compte *a priori* de l'admissibilité de $\underline{U}^M$ et $\underline{F}^M$, ainsi que des relations de comportement homogénéisées permet alors de définir un problème « macro », qui peut s'écrire de la manière suivante : trouver $\underline{F}^M$ et $\{\underline{\alpha}_E\}_{E\in\mathbf{E}}$, tels que :

$$\forall \underline{F}^{M*} \in \mathcal{F}_0^M\ ,\quad \sum_{E\in\mathbf{E}} \int_{\partial\Omega_E} \underline{F}_E^{M*}.\left(\widetilde{\underline{U}}_E^M + \mathbf{L}_E\left(\left\{\underline{F}_E^M\right\}\right) + \underline{\alpha}_E\right) ds = \int_{\partial\Omega_E\cap\partial\Omega_U} \underline{F}_E^{M*}.U_d ds \quad (2.44)$$

$$\forall E \in \mathbf{E}, \forall \underline{\alpha}_E^*,\quad \int_{\partial\Omega_E} \underline{F}_E^M.\underline{\alpha}_E^* ds = \int_{\Omega_E} \underline{\mathrm{f}}.\underline{\alpha}_E^* dx \quad (2.45)$$

La résolution du problème linéaire complet est ainsi réalisée en trois étapes :

- Une première étape, dite « micro », correspondant à un calcul par sous-structure avec pour second membre les données de l'étape locale précédente, c'est-à-dire sans prendre en compte les efforts macro d'interface $\underline{F}_E^M$ dans (2.42).
- Les champs $\widetilde{\underline{U}}_E^M$ étant déterminés, on obtient les quantités macro $\underline{U}_E^M$ et $\underline{F}_E^M$ en résolvant le problème macroscopique (2.44),(2.45).
- Un second calcul micro (2.42) est alors réalisé, avec pour second membre l'effort macro $\underline{F}_E^M$ ainsi obtenu. La solution complète est alors la somme des solutions des deux étapes micro.

Le contrôle et l'arrêt de l'algorithme peut être réalisé au moyen d'une mesure de l'écart entre s et $\hat{s}$, basée sur les directions de recherches, ou, plus classiquement, par une mesure du résidu (vérification de l'équilibre des efforts et de la continuité des déplacements aux interfaces). En pratique, la convergence de la méthode est assez rapide, même dans le cas de structures fortement hétérogènes. Les directions de recherche sont cependant des paramètres importants de la méthode qu'il convient de choisir avec soin. Une optimisation du paramètre $\mathbf{k}^m$ a été proposé dans [Violeau 03]. Enfin, pour les problèmes comportant un très grand nombre de sous-structures, et afin d'éviter l'assemblage d'un problème grossier de taille importante, l'introduction d'une troisième échelle et du problème « super-macro » associé a été proposée dans [Loiseau 02].

Par ailleurs, le choix de l'espace macroscopique doit lui aussi être adapté au problème considéré afin d'assurer l'extensibilité de la méthode. Une base macroscopique adaptée aux discontinuités des champs d'interface a ainsi été proposée par Allix et Guidault dans [Guidault 05] pour le calcul de structures fissurées. L'adaptation de la base macro aux cas de structures de plaques et coques reste cependant à réaliser. Enfin, la problématique des grands déplacements induit, comme nous le verrons dans le chapitre 5, des changements de géométrie des interfaces qui devront être pris en compte pour assurer la pertinence du problème macroscopique.

4.5 Décomposition de domaine et dynamique transitoire

Nous avons présenté jusqu'ici quelques méthodes de décomposition de domaine adaptées à la résolution des problèmes linéaires obtenus dans le cadre de l'analyse statique - ou quasi-statique - de structures. La communauté scientifique s'est aussi, et depuis plusieurs décennies, intéressée à de telles approches pour les problèmes de dynamique transitoire. Nous décrivons ici quelques stratégies développées qui, bien que non-directement applicables aux problèmes de post-flambage en quasi-statique, ont pu nous inspirer.

4.5.1 Equations de la dynamique transitoire

En dynamique transitoire, les effets inertiels et cinétiques sont pris en compte. Le système matriciel à résoudre est de la forme :

$$\mathbf{M}\ddot{u} + \mathbf{C}\dot{u} + \mathbf{K}u = F^{ext} \tag{2.46}$$

La résolution passe par le choix d'un schéma d'intégration temporelle, par exemple un schéma de Newmark, permettant d'approximer l'évolution des déplacements et des vitesses au cours d'un intervalle de temps Δt, en fonction de deux paramètres α et β :

$$u^{n+1} = u^n + \Delta t \dot{u}^n + \frac{\Delta t^2}{2}(1-2\beta)\ddot{u}^n + \Delta t^2 \beta \ddot{u}^{n+1} \tag{2.47}$$

$$\dot{u}^{n+1} = \dot{u}^n + \Delta t(1-\gamma)\ddot{u}^n + \Delta t \gamma \ddot{u}^{n+1} \tag{2.48}$$

En fonction des valeurs de β et γ, le schéma est qualifié d'explicite (les champs à l'incrément $n+1$ ne dépendent que des valeurs à l'incrément n) ou bien d'implicite (dans le cas inverse). Le schéma est inconditionnellement stable pour $2\beta \geqslant \gamma \geqslant 1/2$.

4.5.2 Dynamique explicite et sous-cyclage

Dans le cas explicite ($\beta = 0$, $\gamma = 0$), on fait par ailleurs en général l'approximation d'une matrice de masse **M** diagonale. Le problème à résoudre devient alors extrêmement simple à résoudre, puisque local en espace :

$$\mathbf{M}\ddot{u}^{n+1} = F^{ext} - F^{nt}(\dot{u}^n, u^n) \tag{2.49}$$

Cependant ces schémas ont pour inconvénient d'être liés à une condition de stabilité : la condition de Courant. Plus précisément le pas de temps Δt doit vérifier :

$$\Delta t < 2/\omega_{max} \tag{2.50}$$

où ω_{max} est la plus grande fréquence propre du système linéarisé. En pratique, l'incrément de chargement est limité, pour un milieu homogène, par les zones les plus finement maillées. Cette condition de stabilité peut être extrêmement pénalisante pour les modèles nécessitant un raffinement local par exemple.

Les méthodes de sous-cyclage, ou « subcycling », proposent de contourner cette difficulté en découpant le modèle initial en sous-domaines homogènes [Belytschko 77, Neal 89]. Un pas de temps optimal peut alors être utilisé pour chaque sous-domaine, seule la zone finement maillée exigeant un pas de temps réduit. Le « dialogue » entre les sous-domaines est réalisé régulièrement, à chaque pas de temps de la zone maillée la plus grossièrement par exemple. Les champs exprimés sur la grille temporelle grossière sont en général interpolés linéairement sur la grille fine. Du fait de la simplicité des équations obtenues dans le cadre explicite, la parallélisation de cette stratégie est triviale : il n'y a pas de système linéaire global a inverser. La méthode conduit à une réduction extrêmement importante du temps total de calcul en permettant un découplage des schémas incrémentaux. Elle est déjà disponible dans de nombreux codes de dynamique explicite.

4.5.3 Dynamique implicite et décomposition de domaine

En dynamique implicite, on peut se ramener, à chaque incrément de temps, à un problème écrit sous la même forme qu'en quasi-statique :

$$\hat{\mathbf{K}}u = \hat{F} \tag{2.51}$$

où $\hat{\mathbf{K}}$ est une matrice de raideur équivalente, définie par :

$$\hat{\mathbf{K}} = \mathbf{K} + \frac{\gamma}{\beta\Delta t}\mathbf{C} + \frac{1}{\beta\Delta t^2}\mathbf{M} \tag{2.52}$$

et β,γ les paramètres du schéma de Newmark retenu.

Ce problème peut être résolu par une méthode de décomposition classique, comme la méthode FETI par exemple. Comme nous l'avons vu, ces solveurs nécessitent cependant de nombreuses communications entre sous-structures, du fait du couplage fort entre les opérateurs. Une famille de stratégies alternatives (algorithmes « Group Implicit »), proposée dans [Sotelino 90], propose de relâcher le couplage pour réduire le problème d'interface. Plus précisément, l'algorithme comporte les étapes suivantes, pour chaque pas de temps :

1. pour chaque sous-domaine, résolution d'un problème libre (sans connexion aux interfaces) au moyen d'un schéma implicite,
2. restauration de la compatibilité du champ de déplacement aux interfaces au moyen d'une règle de moyenne, pondérée par les masses de part et d'autre de l'interface,
3. calcul des vitesses et accélérations à partir du champ de déplacement modifié et passage au pas de temps suivant.

Cette approche présente l'avantage d'être modulaire, extensible, stable (mêmes conditions de stabilité que le schéma de Newmark utilisé) et de réduire fortement les échanges de données entre sous-structures. Elle reste cependant approximative, l'équilibre aux interfaces n'étant pas assuré, et nécessite, pour obtenir des résultats suffisamment précis de limiter le pas de temps à une valeur critique liée à la taille caractéristique L_s des sous-domaines et à la célérité des ondes dans le milieu :

$$\Delta t < min_s(L_s/c) \tag{2.53}$$

Cette condition, similaire à la condition de Courant, est très pénalisante, et les avantages d'un schéma implicite disparaissent en grande partie. Une amélioration de la méthode est proposée dans [Modak 00]. Elle consiste à assurer l'équilibre aux interfaces au moyen d'un processus itératif additionnel. L'algorithme modifié permet de retrouver la précision d'un schéma de Newmark non-partitionné. Enfin, son interaction avec un schéma itératif de résolution non-linéaire a été étudié. Plus particulièrement, deux versions ont été comparées, suivant que la non-linéarité était prise en compte dans le schéma itératif de ré-équilibrage ou bien dans un schéma itératif séparé, au sein de ce premier. Les résultats en terme de temps de calcul semblent privilégier cette deuxième solution pour les problèmes considérés (treillis de poutres).

4.5.4 Méthodes de couplage implicite/explicite

Il existe plusieurs méthodes permettant de réaliser le couplage entre différents schémas d'intégration temporelle, qu'ils soient implicites ou explicites. On peut citer les méthodes mixtes décrites dans [Hughes 78] et permettant le couplage de schémas différents au sein d'une procédure d'incrémentation en temps commune (mêmes pas de temps par sous-structures). A l'inverse, une méthode de couplage implicite/explicite à pas de temps multiples, autorisant une gestion différentiée des schémas d'incrémentation temporelle, est présentée dans [Gravouil 01], ou encore [Combescure 03].

Le couplage est réalisé au moyen d'une technique de type Schur duale portant sur les inter-efforts d'interface. Il est démontré par ailleurs qu'en assurant la continuité des vitesses aux interfaces, l'algorithme est stable, quels que soient les schémas d'intégration.

La stratégie se résume alors, à chaque piquet de temps et dans le cas linéaire, aux étapes suivantes :

1. pour chaque sous-domaine, résolution d'un problème libre (sans connexion aux interfaces),
2. résolution d'un problème global condensé aux interface, détermination des inter-efforts,
3. pour chaque sous-domaine, résolution d'un problème « contraint », à partir des résultats du problème condensé,
4. pour chaque sous-domaine, assemblage des contributions des deux problèmes.

L'opérateur condensé global s'exprime comme un assemblage d'opérateurs de masse pondérés, et est constant si les pas de temps sont constants. Il peut dans ce cas être assemblé et factorisé une fois pour toute.

Une extension au cas non-linéaire est aussi présentée, pour les non-linéarités matérielles et géométriques. Dans le cas explicite, seul le problème libre par sous-structure devient non-linéaire. Au contraire, dans le cas implicite, il est nécessaire d'ajouter un schéma itératif supplémentaire pour assurer l'équilibre non-linéaire.

Plusieurs développements sont venus compléter cette famille de méthodes. Une extension aux maillages non-compatibles entre sous-structures est présentée dans [Herry 02] et une technique de gestion des contacts entre sous-domaines dans le cas explicite/explicite est introduite dans [Bourel 06].

Enfin, un problème multi-échelle en espace, s'appuyant sur les approches multigrilles, est introduit dans [Gravouil 03]. La partie de la solution à petite longueur de variation est obtenue sur le problème raffiné par sous-structure, la partie à grande longueur de variation sur le problème grossier. Le couplage entre sous-domaines est réalisé au niveau grossier, les maillages incompatibles étant traités au sein d'un sous-domaine et non plus au niveau des interfaces. Le cas non-linéaire est traité au moyen d'un seul schéma itératif, gérant à la fois l'équilibre non-linéaire et les deux échelles d'espace, au moyen d'étapes de relaxations non-linéaires, de façon similaire à la méthode FAS. Une des particularités intéressantes de la stratégie est que les non-linéarités sont traitées localement, par sous-structure sur la grille fine d'interpolation temporelle.

4.5.5 Méthodes de couplage fluide/structure

Les méthodes de couplage fluide/structure peuvent être vues comme un cas particulier des méthodes de décomposition de domaine en dynamique transitoire, limitées à deux sous-domaines. Ainsi, dans le cas de problèmes non-linéaires fortement couplés d'interaction fluide/structure (circulation artérielle, instabilités de structures élancées dans un écoulement, etc.), il est souvent nécessaire de réaliser une résolution implicite du problème dynamique de couplage. Parce que les équations et les techniques de résolution de part et d'autre sont relativement différentes, il est préférable de ne pas assembler le problème complet, mais de s'appuyer sur des solveurs locaux non-linéaires spécialisés.

Les stratégies les plus répandues, de type « Dirichlet-Neumann », proposent de résoudre de manière séquentielle les problèmes des domaines fluide et structure, se ramenant à un formalisme de type point fixe ou quasi-Newton, comme décrit dans [Le Tallec 05] dans le cas de grandes déformations.

Le problème peut aussi être écrit selon le formalisme des approches Steklov-Poincaré [Deparis 06, Dettmer 06]. Il est alors possible d'effectuer la résolution non-linéaire en parallèle dans les deux domaines pour le calcul des résidus non-linéaires d'interface. La correction des inconnues d'interfaces peut être obtenue dans le cadre d'une méthode itérative de Richardson préconditionnée, ou d'une méthode de Newton-Raphson.

5 Bilan du chapitre

Nous avons présenté dans ce chapitre diverses méthodes proposant des solutions au calcul de problèmes linéaires ou non-linéaires de grande taille. Un première famille d'approches propose de tirer partie de certaines hypothèses du problème initial pour le traiter d'une manière adaptée, au prix d'approximations sur la solution finale. Les approches « globales-locales » permettent ainsi le calcul de modèles fins locaux avec des conditions aux limites provenant d'un calcul de la structure complète modélisée à une échelle supérieure. La méthode n'est cependant, en général, que descendante et est limité aux phénomènes locaux n'ayant pas d'influence sur l'équilibre local.

Les méthodes basées sur la théorie de l'homogénéisation proposent, quant à elles, de construire à partir d'une description fine de la structure un modèle grossier équivalent et de séparer les échelles « micro » et « macro ». Les approches d'homogénéisation classiques restent cependant limitées aux cas où la séparation des échelles est suffisamment importante, rendant leur application au calcul de structures difficile. Les idées contenues dans la théorie de l'homogénéisation peuvent cependant être reprises pour la définition de problèmes grossiers permettant d'assurer l'extensibilité des méthodes multiéchelles parallèles.

D'autres techniques permettent enfin la superposition de modèles associés à différentes échelles de modélisation, et assurent la communication entre ces différentes échelles. Elles sont cependant limitées à des problèmes où la zone d'intérêt est réduite.

Dans une seconde section, nous avons présenté les approches basées sur les techniques de sous-structuration et de décomposition de domaine. Elles proposent des so-

lutions pour le calcul des grandes structures hétérogènes nécessitant une résolution du problème complet. Les techniques de super-éléments, déjà très utilisées pour la simulation dans le domaine linéaire, tirent profit des techniques de condensation pour réduire la taille des problèmes à résoudre.

Les méthodes classiques de décomposition de domaine proposent des techniques de résolution itératives et parallèles des problèmes condensés aux interfaces. Associées à des préconditionneurs et à un problème grossier pertinents, elles sont très efficaces pour la résolution des problèmes linéaires de très grande taille.

Les approches Newton-Krylov-Schur, qui mettent en œuvre ces solveurs parallèles dans le cadre d'un schéma de Newton, apportent une première réponse à la problématique des grandes structures non-linéaires. Elles se sont révélées cependant peu adaptées aux cas où les non-linéarités sont non-équitablement réparties, ou bien localisées sur une zone de la structure globale. Nous présentons dans les chapitres 3 et 4 une évolution de ces approches permettant de traiter de façon pertinente ces problèmes.

Nous avons aussi, dans ce chapitre, brièvement présenté une méthode de décomposition de domaine alternative : la méthode mixte LaTIn micro/macro, qui propose d'introduire dans le schéma itératif de résolution un problème global issu d'un processus d'homogénéisation numérique du problème initial. Elle permet d'obtenir d'excellentes performances pour les structures même fortement hétérogènes, mais n'a été jusqu'ici appliquée qu'aux problèmes bi- ou tri-dimensionnels élastiques ou viscoélastiques en petites déformations. Une première adaptation aux structures de plaques et coques fera l'objet du chapitre 5.

Enfin, nous avons terminé ce chapitre par une rapide présentation des travaux existant dans le domaine de la dynamique transitoire. Les méthodes proposées ne peuvent cependant pas être directement appliquées au problème quasi-statique de post-flambage : elles sont en effet bien souvent adaptées aux problèmes où les effets inertiels sont prépondérants. Elles présentent cependant un vivier d'idées et de techniques avancées pour le couplage de domaines ou d'algorithmes, dont certaines nous ont inspirés.

Deuxième partie

Proposition de Stratégies Adaptées à la Problématique des Grandes Structures Non-linéaires

Dans cette seconde partie, nous présentons diverses stratégies que nous avons mises en place pour une résolution efficace des problèmes présentés dans la première partie. Trois chapitres sont proposés :

- *Le chapitre 3 présente une stratégie de relocalisation non-linéaire pour les méthodes de décomposition de domaine. Elle permet de découpler le pilotage des phénomènes non-linéaires locaux et de diminuer fortement le nombre d'itérations de ces stratégies. Les algorithmes sont présentés ainsi que leur application à des structures non-linéaires de treillis de poutres.*
- *Le chapitre 4 présente l'application des méthodes de relocalisation non-linéaires aux structures tridimensionnelles de plaques et coques. Les stratégies précédemment présentées sont étendues et mises en œuvre au sein d'une plateforme de calcul moderne pour la résolution de problèmes quasi-industriels.*
- *Le chapitre 5, plus prospectif, est consacré à l'extension des approches micro-macro développées dans [Ladevèze 99b] au cas des structures de plaques et coques. L'introduction d'une séparation d'échelle au niveau des interfaces nous permet d'écrire un problème global de taille réduite, tout en conservant les informations mécaniques nécessaires à l'efficacité de la méthode.*

CHAPITRE 3

Stratégies de relocalisation non-linéaire

Nous présentons dans ce chapitre une famille de stratégies de calcul adaptées des méthodes Newton-Krylov-Schur classiques. Le principe de relocalisation non-linéaire, permettant un traitement différencié des sous-domaines, est tout d'abord présenté. Une première version utilisant des conditions aux limites en déplacement est ensuite introduite, puis une amélioration grâce à des conditions aux limites mixtes. Ce chapitre a fait l'objet d'une publication [Cresta 07a] et plusieurs communications [Cresta 05b, Allix 05, Cresta 05a].

Sommaire

1 Présentation des stratégies de relocalisation non-linéaire 91
1.1 Principe général 91
1.2 Comparaison avec d'autres approches 92
2 Stratégie de relocalisation non-linéaire à déplacements imposés 94
2.1 Description 94
2.2 Mise en œuvre numérique 96
2.3 Illustration dans le cas des structures de poutres 101
3 Stratégie de relocalisation non-linéaire mixte 107
3.1 Vers des conditions aux limites mixtes pour les problèmes locaux . 107
3.2 Description de l'approche 107
3.3 Mise en œuvre numérique 109
3.4 Application aux treillis de poutres 112
3.5 Influence du choix de la direction de recherche **k** 113
4 Analyses et performances des stratégies de relocalisation non-linéaire . 114
4.1 Comparaison des différentes méthodes 114
4.2 Influence du critère d'arrêt local 115

4.3 Décomposition de domaine et non-linéarités localisées 117
4.4 Mise en œuvre parallèle et Performances 119
5 Bilan du chapitre 122

Nous avons présenté dans le chapitre 2 plusieurs stratégies de calcul pour la résolution des problèmes linéaires, ou non, de grandes structures. Parmi celles-ci, les approches Newton-Krylov-Schur (NKS) connaissent un succès grandissant. En associant les méthodes classiques de décomposition de domaine à un schéma itératif de type Newton, elles rendent possible la résolution de très grands systèmes non-linéaires, et représentent à ce titre un des principaux outils d'ores et déjà disponibles pour le calcul haute performance.

En calcul des structures, et en particulier dans le cas des structures élancées, les non-linéarités sont fréquemment localisées : des phénomènes de plasticité ou d'endommagement peuvent survenir dans des zones de surcontrainte (bord de trou, ...), certaines zones sont susceptibles de flamber, ... Les stratégies NKS, ne pouvant différencier le traitement de chacune des zones de la structure globale, engendrent un grand nombre d'itérations et d'échanges de données entre les noeuds de calcul associés à chacune des sous-structures.

Dans ce chapitre, nous proposons une nouvelle famille de méthodes de décomposition de domaine pour les problèmes non-linéaires s'appuyant sur des résolutions non-linéaires locales par sous-structures. Deux variantes sont tour-à-tour présentées et les résultats numériques sont comparés aux approches classiques sur des structures de treillis de poutres. Une dernière section présente l'application de ces stratégies à la simulation de structures non-linéaires de plaques et coques.

1 Présentation des stratégies de relocalisation non-linéaire

1.1 Principe général

L'idée principale de la relocalisation non-linéaire est d'autoriser un traitement différencié des sous-structures en leur associant un solveur non-linéaire. Le but recherché est de concentrer l'effort numérique sur les zones le nécessitant réellement au moyen d'itérations locales, par sous-structures, c'est-à-dire à une échelle pertinente vis-à-vis du phénomène, et permettant de vérifier le comportement non-linéaire. Les itérations globales ont alors pour objectif d'assurer le couplage entre les sous-structures. Ce couplage peut être réalisé en assurant l'équilibre aux interfaces, par exemple, permettant ainsi la redistribution des efforts. Ce rééquilibrage est permis par la résolution d'un problème global tangent portant sur les inconnues d'interfaces et permettant d'assurer l'extensibilité de la méthode. D'autres choix de couplage sont possibles, comme des couplages mixtes, menant à des problèmes locaux et globaux légèrement différents et que nous précisons dans les sections suivantes.

La figure 3.1 présente schématiquement les étapes des méthodes avec relocalisation non-linéaire et peut être rapprochée de la figure 2.15 associée aux approches Newton-Krylov-Schur classiques. Dans les deux cas, la boucle de chargement incrémental associée au schéma de Newton global n'est pas représentée. La différence majeure concerne l'étape de calcul des déplacements internes par sous-structure, qui devient non-linéaire. Elle est assurée par un solveur itératif par sous-structure, éventuellement associé à un schéma incrémental indépendant.

Au contraire, l'étape globale de résolution du problème condensé aux interfaces reste, comme nous le verrons par la suite, très proche de celle des approches NKS.

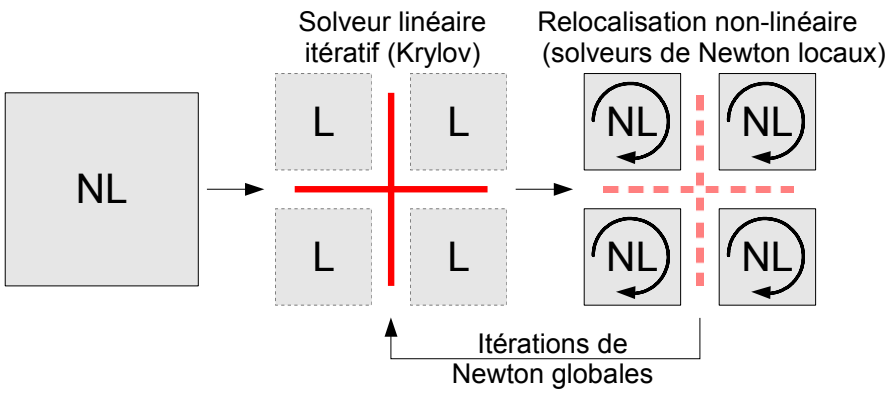

Figure 3.1: Etapes de résolution des stratégies avec relocalisation non-linéaire

1.2 Comparaison avec d'autres approches

1.2.1 Analogie avec l'intégration de lois de comportement non-linéaires

Du fait de la présence de plusieurs schémas itératifs imbriqués, la stratégie est analogue aux schémas de résolution pouvant être mis en oeuvre pour certains comportements de matériaux complexes non-linéaire, comme les matériaux élasto-plastiques endommageables : l'intégration du comportement non-linéaire est effectuée au moyen d'un algorithme spécifique (par exemple, une méthode de retour radial [Ortiz 86]) en chaque point de Gauss du modèle élément fini, l'ensemble étant inséré dans un schéma de Newton. Dans notre cas, c'est le comportement non-linéaire de la sous-structure dans son ensemble qu'on cherche à vérifier. Chaque sous-structure peut ainsi être vue comme une sorte de super-élément non-linéaire dont le comportement est « intégré » au moyen d'un modèle élément fini associé à un solveur non-linéaire, par exemple un schéma de Newton. La stratégie peut aussi être rapprochée des approches FE^2 présentées dans le chapitre 2, à la différence près que le transfert d'information entre les échelles est, ici, « exact » : aucune hypothèse de séparation d'échelle ou de périodicité n'est utilisée. La méthode reste ainsi valable dans les zones de fort gradient.

1.2.2 Analogie avec les méthodes de zoom structural

La stratégie mise en oeuvre ici peut d'une certaine façon être rapprochée des méthodes présentées dans la section 3 du deuxième chapitre. Chaque itération globale de la stratégie présentée reprend les étapes d'une technique classique de zoom structural : on effectue un calcul global linéaire (dans notre cas il s'agit du problème condensé sur les interfaces, et non un modèle classique Elément-Fini grossier), suivi par une étape de relocalisation non-linéaire sur un modèle fin. La vérification *a posteriori* de l'admissibilité des champs d'interface permet de déterminer la qualité de la solution. En cas d'écart trop important, une correction des déplacements d'interfaces est recherché en utilisant les raideurs tangentes par sous-structures pour assembler le nouveau problème global. Puis de nouveaux calculs non-linéaires par sous-structures sont réalisés et ainsi de suite jusqu'à rééquilibrage de l'ensemble de la structure et convergence.

La méthode proposée dans ce chapitre peut ainsi être vue comme une automatisation du processus global/local précédemment présenté, avec construction et correction automatique du modèle global associé à la description fine. Il s'agit d'une réponse au manque de communication entre les échelles que nous avions souligné précédemment. De plus, on ne fait pas ici de choix *a priori* sur les zones à décrire finement, même si de telles approches peuvent être envisagées.

1.2.3 Analogie avec les techniques de « sous-cyclage » et de couplage en dynamique transitoire

Nous avons vu dans le chapitre 2 quelques techniques de « sous-cyclage » et de couplage implicite/explicite à pas de temps multiples. Ces approches permettent un traitement différencié des multiples zones d'une structure, ou d'un fluide, via des schémas d'intégration et d'incrémentation locaux. Elles sont particulièrement efficaces pour la résolution de problèmes non-linéaires nécessitant des raffinements de maillages locaux, présentant des phénomènes à différentes échelles de temps ou bien régis par des équations différentes.

L'approche de relocalisation non-linéaire que nous introduisons ici reprend de nombreux principes à ces méthodes, tout en les adaptant au cas quasi-statique non-linéaire implicite. En particulier, l'utilisation de solveurs non-linéaire par sous-structure permet d'adapter les schémas incrémentaux de manière indépendante, et le couplage entre sous-structures est assuré à chaque incrément de chargement global.

La principale différence réside dans le problème d'interface à résoudre. En quasi-statique, les effets inertiels sont négligés, la propagation est immédiate, et le choix du problème global condensé devient primordial afin d'assurer l'extensibilité de la stratégie. Il est cependant très proche de ce qui est proposé par certaines méthodes de couplage fluide/structure, qui sont basées sur une formulation de type Steklov-Poincaré, une estimation non-linéaire des résidus d'interface et un algorithme de Newton pour le problème de couplage [Deparis 06, Dettmer 06].

1.2.4 Analogie avec la méthode LaTIn

La stratégie de relocalisation non-linéaire reprend deux des trois principes de base de la stratégie de résolution LaTIn présentée dans le chapitre 1 :

- la séparation des difficultés en deux groupes d'équations : d'une part les équations non-linéaires par sous-structures et d'autre les équations globales d'admissibilité aux interfaces,
- une résolution itérative à deux étapes, correspondant à chacun des deux groupes d'équations précédents, associée à des directions de recherche appropriées.

Comme nous le verrons par la suite, la stratégie avec relocalisation non-linéaire peut ainsi être écrite en suivant ce formalisme. Le troisième principe de base de la méthode LaTIn, qui est une représentation appropriée des champs solutions sur le domaine espace-temps, n'est pas considéré ici. La méthode est mise en œuvre dans un cadre incrémental. Ce point pourrait cependant faire l'objet de travaux futurs.

2 Stratégie de relocalisation non-linéaire à déplacements imposés

2.1 Description

Nous proposons une première stratégie de relocalisation non-linéaire s'appuyant sur les approches NKS existantes. Elle propose d'utiliser les **déplacements** issus de la résolution du problème global condensé comme conditions aux limites sur les interfaces pour les calculs non-linéaires par sous-structure. Ainsi, on vérifie à chaque instant l'admissibilité des déplacements d'interface entre les sous-structures.

La méthode comporte les deux étapes suivantes, résolues itérativement pour un niveau de chargement donné :

■ **Etape locale non-linéaire**

Etant donnés les déplacements d'interface $\underline{U}$ obtenus à l'itération précédente, on recherche **sur chaque sous-structure** une solution du problème non-linéaire soumis aux chargement externes et à des **conditions de Dirichlet** sur les interfaces. Cette étape revient à trouver, pour chaque sous-structure s, le champ de déplacement solution $\underline{u}^s$ vérifiant :

– l'admissibilité statique sur la configuration déformée Ω_t^s :

$$\int_{\Omega_t^s} \underline{\underline{\sigma}}^s : \underline{\underline{\epsilon}}^s(\underline{\hat{u}}^s)dx = \int_{\Omega_t^s} \underline{f}.\underline{\hat{u}}^s dx + \int_{\partial\Omega_t^s} \underline{g}^s.\underline{\hat{u}}^s ds \ , \ \forall \underline{\hat{u}}^s \in V^s \tag{3.1}$$

– le comportement élastique :

$$\underline{\underline{\sigma}}^s = \underline{\underline{\underline{\underline{\mathbf{A}}}}}_t \ \underline{\underline{\epsilon}}(\underline{u}^s) \tag{3.2}$$

– l'admissibilité cinématique :

$$\underline{u}^s = \underline{U}_d \quad sur \quad \partial\Omega_U^s \tag{3.3}$$

$$\underline{u}^s = \underline{U} \quad sur \quad \Gamma \cap \partial\Omega^s \tag{3.4}$$

La solution obtenue à la fin de cette étape vérifie donc toutes les équations du problème de base, hormis l'équilibre aux interfaces entre sous-structures, qui n'est pas assuré.

C'est cette étape que nous nommons « **étape de relocalisation non-linéaire** ».

■ **Etape globale linéaire**

Etant donnés les efforts d'interfaces $\underline{F}_E$ obtenus à l'étape locale non-linéaire précédente, on cherche une correction $\underline{\Delta U}$ du champ de déplacement d'interface $\underline{U}$ permettant de vérifier l'équilibre des efforts interfaciaux, soit pour chaque interface $\Gamma_{EE'}$:

$$\underline{F}_E + \underline{F}_{E'} = 0 \tag{3.5}$$

Cette correction n'est pas réalisée interface par interface, mais au niveau global sur le problème condensé aux interfaces. Plus précisément, on cherche à annuler le résidu d'équilibre aux interfaces, $\underline{r}$, qui peut s'écrire comme une fonction non-linéaire des déplacements d'interface $\underline{U}$:

$$\underline{r} = \mathcal{S}_{NL}(\underline{U}) \tag{3.6}$$

où $\mathcal{S}_{NL}$ est l'opérateur de Steklov-Poincaré non-linéaire du problème de référence.

Pour ce faire, on réalise l'équivalent d'une itération de Newton, c'est-à-dire la résolution du problème obtenu par linéarisation de (3.6), soit :

$$\mathcal{S}_T \underline{\Delta U} = \underline{r} \tag{3.7}$$

où $\mathcal{S}_T$ est l'opérateur de Steklov-Poincaré tangent :

$$\mathcal{S}_T = \frac{\partial \mathcal{S}_{NL}(\underline{U})}{\partial \underline{U}} \tag{3.8}$$

Les déplacements d'interface $\underline{U}$ sont alors corrigés de $\underline{\Delta U}$, avant d'être utilisés pour les résolutions locales non-linéaires de l'itération suivante, et ainsi de suite jusqu'à convergence.

Le problème (3.7) est exactement identique à celui résolu à chaque itération de Newton dans les approches Newton-Krylov-Schur. La seule différence concerne le second membre $\underline{r}$: l'équilibre et le comportement des sous-structures étant vérifiés au cours de l'étape locale non-linéaire précédente, ce dernier ne provient que des défauts d'équilibre aux interfaces, soit $\underline{F}_E + \underline{F}_{E'}$ pour une interface $\Gamma_{EE'}$.

Le processus itératif est arrêté lorsque l'ensemble des équations du problème de base sont vérifiées : équilibre et comportement non-linéaire des sous-structures et équilibre des efforts d'interface.

Remarque : Alors que les approches Newton-Krylov-Schur classiques proposent de condenser sur les interfaces le problème tangent global obtenu dans le cadre d'un schéma de Newton, l'approche présentée ici propose de résoudre par une stratégie de Newton le problème non-linéaire condensé aux interfaces (3.6). Vu de cette façon, l'étape non-linéaire locale n'est rien d'autre que l'étape de calcul du résidu non-linéaire d'interface $\underline{r}$. De la même façon, cette remarque suffit à apporter la preuve de la convergence (quadratique) de la méthode, sous les hypothèses classiques de convergence de la méthode de Newton. Dans [Pebrel 08], les auteurs présentent le même concept dans le cadre d'une méthode de décomposition duale.

2.2 Mise en œuvre numérique

Décrivons maintenant les équations discrètes et les stratégies numériques pour la résolution du problème ainsi reformulé.

2.2.1 Etape locale non-linéaire

L'étape locale correspond à la résolution, par sous-structure, d'un problème non-linéaire géométrique à déplacements imposés ΔU sur les interfaces avec les autres sous-structures. Il peut être résolu par une méthode itérative de Newton. En faisant le choix d'une formulation non-linéaire adaptée au problème, comme la formulation corotationnelle présentée dans le chapitre 1, on aboutit finalement à la résolution d'une succession de problèmes linéaires tangents de la forme $\mathbf{K}_T.\Delta u = f$, que l'on peut ré-écrire sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{Tii} & \mathbf{K}_{Tib} \\ \mathbf{K}_{Tbi} & \mathbf{K}_{Tbb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u_i \\ \Delta u_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_i \\ f_b \end{bmatrix} \tag{3.9}$$

où l'indice i se rapporte aux degrés de libertés internes et l'indice b aux degrés de liberté des interfaces.

Il existe plusieurs techniques classiques permettant d'imposer des déplacements ΔU sur les interfaces, parmi lesquelles :

– l'élimination directe des inconnues d'interface u_b :

$$\Delta u_i = \mathbf{K}_{Tii}{}^{-1} \left(f_i - \mathbf{K}_{Tib} \Delta U \right) \tag{3.10}$$

  qui est la plus directe mais exige de travailler avec des sous-matrices de l'opérateur de raideur $\mathbf{K}$.

– la pénalisation, qui consiste à ajouter un terme de raideur k_p suffisamment grand aux termes diagonaux de la sous-matrice $\mathbf{K}_{Tbb}$ et à modifier le second membre pour obtenir :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{Tii} & \mathbf{K}_{Tib} \\ \mathbf{K}_{Tbi} & \mathbf{K}_{Tbb} + k_p \mathbf{I}_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u_i \\ \Delta u_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_i \\ f_b + k_p.\Delta U \end{bmatrix} \tag{3.11}$$

  Cette approche est largement répandue du fait de sa simplicité de programmation, mais elle n'est pas exacte et peut mener à des systèmes mal conditionnés.

– la dualisation via l'introduction de multiplicateurs de Lagrange λ, menant à un problème du type :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{Tii} & \mathbf{K}_{Tib} & 0 \\ \mathbf{K}_{Tbi} & \mathbf{K}_{Tbb} & \mathbf{I}_d \\ 0 & \mathbf{I}_d & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u_i \\ \Delta u_b \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_i \\ f_b \\ \Delta U \end{bmatrix} \tag{3.12}$$

  Cette approche, assez courante, est exacte. Elle engendre cependant une augmentation de la taille du problème à résoudre, qui peut devenir très coûteux. Par ailleurs,

l'opérateur obtenu n'est plus forcément défini positif. Des variantes de la méthode permettent cependant d'éviter ce problème : les techniques du Lagrangien augmenté et du double multiplicateur de Lagrange.

Le choix entre ces différentes techniques doit être fait en prenant en compte à la fois les considérations théoriques (vérification exacte ou approchée) et pratiques (facilité de programmation, disponibilité dans les outils utilisés, conditionnement des matrices,etc.). Il n'a pas cependant d'influence directe sur le comportement global de la stratégie. Pour les exemples qui suivent, nous avons retenu une technique de pénalisation.

Le processus itératif par sous-structure est interrompu lorsque le résidu devient suffisamment petit, soit :

$$\eta_{local} < \eta_{local}^{crit} << 1 \tag{3.13}$$

où η_{local} est le résidu relatif, comparant f aux efforts extérieurs imposés à la structure, dont l'expression dépend de la technique choisie pour imposer les déplacements, et η_{local}^{crit} un critère de convergence prédéfini.

2.2.2 Etape globale linéaire

Après discrétisation, le problème global linéaire s'écrit sous la forme d'un système matriciel :

$$\mathbf{S}_T \Delta U = r \tag{3.14}$$

où l'opérateur $\mathbf{S}_T$ est l'opérateur de Schur classique, obtenu par assemblage des opérateurs tangents locaux condensés $\mathbf{S}_T^s$:

$$\mathbf{S}_T = \sum_s \mathbf{A}^s \mathbf{S}_T^s \mathbf{A}^{st} = \sum_s \mathbf{A}^s \left(\mathbf{K}_{T\,bb}^{\;s} - \mathbf{K}_{T\,bi}^{\;s} \mathbf{K}_{T\,ii}^{\;s\;-1} \mathbf{K}_{T\,ib}^{\;s} \right) \mathbf{A}^{st} \tag{3.15}$$

en reprenant les notations indicielles introduites dans le chapitre 2, et où $\mathbf{K}_T{}^s$ est l'opérateur de raideur tangent d'une sous-structure s, obtenu à la fin de l'étape de non-linéaire locale précédente.

Le second membre r est le résidu condensé sur les interfaces :

$$r = \sum_s \mathbf{A}^s r^s = \sum_s \mathbf{A}^s \left(f_b^s - \mathbf{K}_{T\,bi}^{\;s} \mathbf{K}_{T\,ii}^{\;s\;-1} f_i^s \right) \tag{3.16}$$

On peut noter que dans le cas d'une résolution exacte des problèmes non-linéaires par sous-structures, les résidus intérieurs f_i^s sont nuls, de sorte que le résidu condensé ne provient que des défauts d'équilibre des termes f_b^s aux interfaces. En pratique, le terme f_i^s, bien que très petit, n'est pas rigoureusement nul et il est préférable de conserver l'expression complète (3.16) pour le calcul du second membre r, en particulier dans le cas où les critères de convergence locaux sont relâchés (voir section 4.2).

Le problème est ainsi, sur la forme, exactement identique au problème global condensé utilisé dans les méthodes NKS classiques. Sa résolution peut donc être réalisée exactement de la même manière, au moyen de solveurs itératifs parallèles de Krylov, avec les mêmes techniques de préconditionnement que dans les méthodes de décomposition de domaine (BDD, FETI, etc.).

2.2.3 Algorithme général

L'algorithme 3 reprend l'ensemble des étapes de la résolution. L'étape linéaire globale, identique à celle définie dans les approches NKS classiques, est résolue au moyen d'un solveur itératif de Krylov, qui peut être parallélisé. Sa mise en œuvre numérique est semblable en tout points, et ne fera pas ici l'objet d'une étude plus poussée. Les résolutions non-linéaires par sous-structure sont réalisées au moyen de schémas de Newton-Raphson locaux. Il est important de noter qu'elles sont complètement indépendantes et donc parallélisables de manière triviale.

Algorithme 3 Méthode NKS avec relocalisation non-linéaire - approche primale

faire *[itérations de Newton globales]*
- Assemblage des opérateurs locaux tangents $\mathbf{K}_T^s$ par sous-structure
- Factorisation des $\mathbf{K}_{T\,ii}^{s}$
- Calcul du résidu condensé par sous-structure : r^s
- Résolution du problème condensé *[Solveur itératif de Krylov]* : $\mathbf{S}_T.\Delta U = r$
- Mise à jour de U
- **faire** *[itérations de Newton locales]*
  - Calcul des solutions intérieures : $\Delta u_i^s = \mathbf{K}_{T\,ii}^{s\,-1}\left(f_i^s - \mathbf{K}_{T\,ib}^{s} A^{sT}\Delta U\right)$
  - Mise à jour de u_i^s, $\mathbf{K}^s$ et f_i^s
- **jusqu'à** $\eta_{local} < \eta_{local}^{crit}$

jusqu'à $\eta_{global} < \eta_{global}^{crit}$

La méthode est très semblable dans sa mise en œuvre aux méthodes NKS classiques 2, et son implémentation ne demande que très peu de modifications. Par ailleurs, ces dernières ne concernent que l'étape locale par sous-structure et ne vient modifier ni la structure de données, ni l'implémentation parallèle. Pour ces raisons, l'approche avec relocalisation non-linéaire à déplacements imposés peut être mise en œuvre assez rapidement dans tout code Eléments Finis disposant d'un solveur de type Newton-Krylov-Schur.

Au final, l'algorithme présente des schémas de Newton-Raphson imbriqués : un schéma global pour l'équilibrage des efforts aux interfaces, et des schémas locaux pour la résolution des problèmes non-linéaires par sous-structure. On pourrait ainsi qualifier cette approche de schéma de Newton « multi-niveaux ». A chacun de ces schémas est associé un critère de convergence η^{crit}, portant sur la vérification de l'équilibre dans chacune des sous-structures au niveau local, et sur l'équilibre des interfaces au niveau global.

Enfin, par souci de lisibilité, nous avons omis, dans l'algorithme 3, les schémas incrémentaux associés à chacune des procédures de Newton. Au niveau global, il s'agit d'un pilotage classique du chargement extérieur F_{ext}, mis en œuvre de la même manière que pour les approches NKS. Au niveau local, le schéma incrémental mis en place permet un pilotage différencié des calculs non-linéaires par sous-structure, en fonction des non-linéarités locales présentes.

2.2.4 Détails sur le schéma incrémental dans les résolutions non-linéaires par sous-structure

Comme nous l'avons précisé plus haut, nous avons fait le choix d'utiliser une méthode de Newton-Raphson pour les résolutions non-linéaires par sous-structure, l'équilibre entre les sous-structures étant ensuite assuré lors de l'étape de correction linéaire globale. Le même type de schéma incrémental adaptatif que celui utilisé au niveau global peut être mis en œuvre, permettant de différencier de manière automatique les séquences d'incréments au sein de chacune des sous-structures.

Nous présentons ici deux variantes possibles pour le schéma incrémental associé aux solveurs non-linéaires locaux, suivant la solution retenue comme point de départ du calcul :

■ Schéma incrémental avec reprise de la dernière solution

Dans cette version, les calculs non-linéaires locaux sont menés en partant de la solution obtenue lors de la précédente étape locale non-linéaire. Ainsi, à l'itération globale p, on cherche la solution non-linéaire par sous-structure pour des déplacements d'interface donnés U_p, en prenant comme point de départ la solution obtenue pour des déplacements d'interface U_{p-1} . Le pilotage incrémental porte sur l'incrément de déplacement $\Delta U = U_{p-1} - U_p$. Cette version correspond au Cas 1 illustré sur la Figure 3.2.

L'approche s'apparente alors aux techniques de sous-cyclage déjà répandues en dynamique explicite, qui permettent un pilotage incrémental différencié par sous-structure entre deux « piquets de temps » globaux. Dans le cas présent d'une résolution quasi-statique implicite, il est cependant nécessaire d'introduire une boucle itérative pour assurer le rééquilibrage, avant d'incrémenter sur le chargement global.

■ Schéma incrémental complet

Dans cette version, les calculs locaux non-linéaires sont menés, à chaque nouvelle itération globale p, en partant de la solution convergée de l'incrément global précédent, obtenue pour des déplacements d'interface U_0 – ou bien de la configuration initiale s'il s'agit du premier incrément global. Le pilotage du calcul porte alors sur l'incrément de déplacement $\Delta U = U_p - U_0$. Cette approche est comparée à la précédente sur la Figure 3.2.

Cette variante s'approche plus de la démarche proposée dans la méthode LaTIn où, à chaque itération globale, le problème est résolu sur tout l'intervalle de temps de l'étude. L'avantage de l'approche est de proposer un cadre général pour traiter les phénomènes non-linéaires irréversibles, ou dépendant de l'histoire du chargement : plasticité, rupture, propagation de fissure, etc. L'inconvénient est d'engendrer un coût de calcul bien supérieur à la première approche, où l'incrément de déplacement diminue à chaque itération globale pour atteindre, à la limite, 0. Ici, jusqu'à convergence du problème global, on doit résoudre à chaque itération des problèmes locaux aussi coûteux que ceux de la première itération.

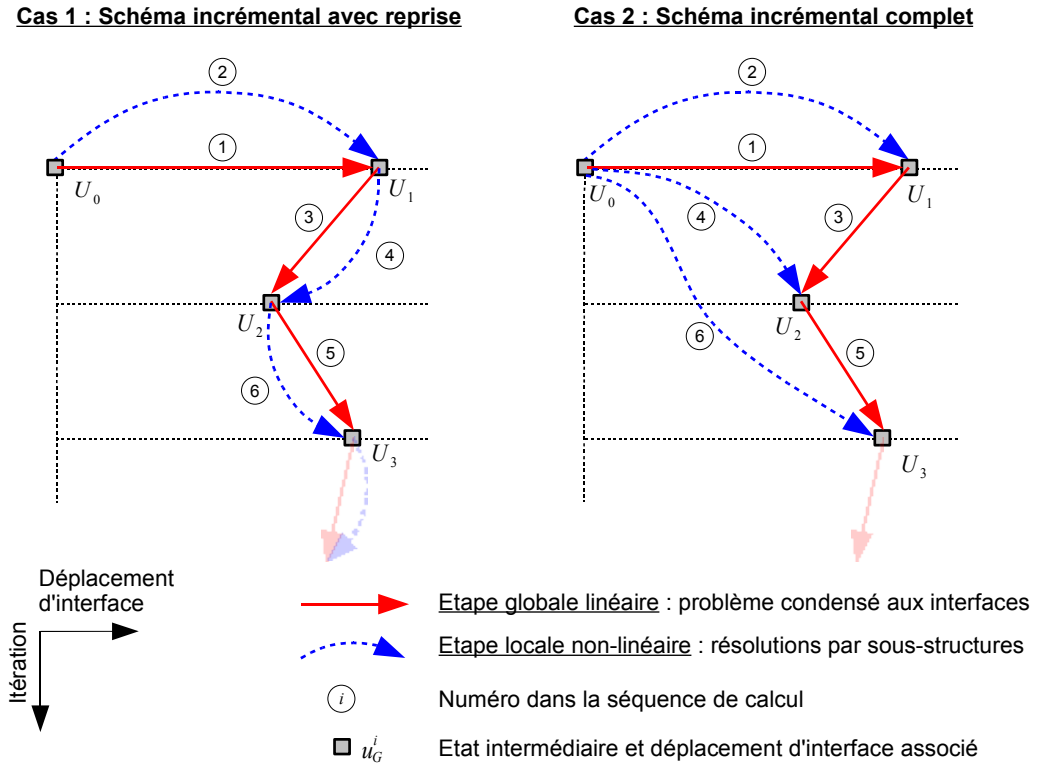

Figure 3.2: Représentation graphique des deux types de schémas incrémentaux utilisés pour les problèmes locaux non-linéaires

Dans le cas présent du flambage de grandes structures hyperélastiques soumises à des charges mortes, dérivant d'un potentiel W, il n'y a pas a proprement parler d'effet d'histoire. Cependant, le problème peut admettre plusieurs solutions – minimums locaux de W – dont l'une ou l'autre peut être privilégiée par la stratégie de résolution retenue, voire même par des paramètres de la stratégie comme la taille des incréments de chargement. Cette problématique est un sujet de recherche ouvert, même lors de l'emploi de méthodes de résolutions classiques comme les méthodes de Newton. Néanmoins, pour des structures tridimensionnelles suffisamment complexes, asymétriques ou soumises à des chargements asymétriques, il existe en général une solution préférentielle, vers laquelle la plupart des méthodes vont converger. Cette particularité permet de justifier l'emploi de la première approche, même si une vérification *a posteriori* peut être nécessaire. On peut par exemple envisager, pour estimer la robustesse de la solution, d'effectuer, après convergence avec la première approche, une itération de vérification reprenant le schéma incrémental de la deuxième approche. Une modification de la solution démontre une sensibilité de la solution vis-à-vis de la stratégie retenue.

Dans tous les exemples que nous présentons par la suite, nous vérifierons systématiquement que la solution obtenue par les approches que nous proposons est identique à celle obtenue par une méthode de Newton classique réalisée au préalable.

2.3 Illustration dans le cas des structures de poutres

Avant de présenter les performances des stratégies de relocalisation non-linéaire, nous présentons les résultats obtenus par les méthodes classiques (méthode de Newton et méthode Newton-Krylov-Schur). La structure retenue est un treillis présentant des comportements non-linéaires de flambage similaires aux cas industriels qui motivent ce travail (section de fuselage, caisson de voilure, ..., voir le chapitre Introduction), tout en conservant une simplicité de mise en œuvre. Ces développements ont été réalisés sur la plateforme de calcul scientifique Matlab. Les résultats obtenus serviront de référence pour la comparaison des diverses approches.

2.3.1 Description du cas d'étude

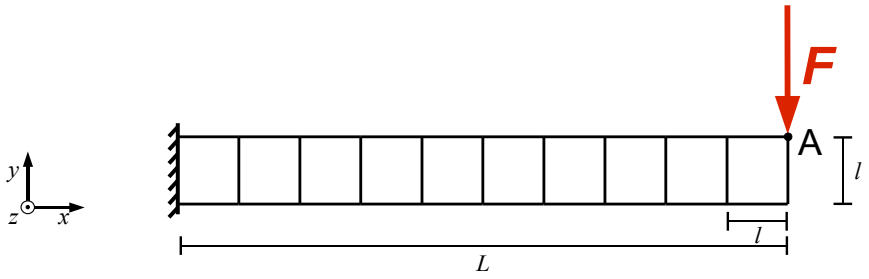

Figure 3.3: Structure de treillis de poutre

La figure 3.3 présente la structure retenue pour tester, comparer et analyser les résultats des différentes méthodes. Il s'agit d'un problème bidimensionnel de treillis de poutres, dont les caractéristiques géométriques et du matériau sont rassemblées dans le tableau 3.1. Le modèle de poutre retenu est le modèle de Navier-Bernoulli. L'extrémité gauche de la structure est bloquée, et un chargement (effort vertical F) est appliqué au coin supérieur droit (point A), de façon à mettre la structure en flexion. Les poutres supérieures se trouvent ainsi et extension alors que celles de la zone inférieure, en compression, sont susceptibles de flamber. Afin de favoriser le flambage dans une zone de la structure, la poutre $p1$, située près de la zone de fixation, a été affaiblie (module d'Young inférieur de 5% au module du reste de la structure). Cette modification locale peut correspondre en pratique à un détail structural pénalisant (réduction de section, alésage, ...), à un défaut ou un endommagement de la structure.

2.3.2 Solution de référence

La structure de treillis est discrétisée au moyen d'éléments finis de Navier-Bernoulli à 2 nœuds, avec 3 degrés de liberté par nœud : deux déplacements (u_x et u_y, respectivement suivant les axes $\vec{x}$ et $\vec{y}$) et une rotation ($\theta_z = \partial u_y / \partial x$ suivant l'axe $\vec{z}$). Dans cet exemple, chaque portion de poutre, de longueur l, est discrétisée au moyen de 11 nœuds (10 éléments), de longueurs respectives L_e. Le problème total comporte donc 300 éléments et 292 nœuds (soit $292 * 3 = 876$ inconnues).

Longueur totale L	$10\ m$
Longueur élémentaire l	$1\ m$
Section S	$39\ mm^2$
Inertie I	$126\ mm^4$
Module de Young E	$200\ 000\ Pa$
Effort F	$500\ N$

Tableau 3.1: Caractéristiques géométriques et propriétés matériau pour la structure de treillis de poutre

Afin d'obtenir une solution de référence, une première résolution est réalisée au moyen d'une méthode directe classique (algorithme de Newton sur le problème complet assemblé). La formulation retenue pour l'expression du problème linéarisé est une formulation corotationnelle (voir Chapitre 1) adaptée aux problèmes élastiques en grands déplacements et grandes rotations. L'opérateur de raideur tangent élémentaire peut s'exprimer, dans le repère global, sous la forme :

$$\mathbf{K}_{Te} = \mathbf{T}^t \left(\mathbf{P}^t \tilde{\mathbf{K}}_e \mathbf{H} \mathbf{P} - \mathbf{F}_{mn} \mathbf{G} - \mathbf{G}^t \mathbf{F}_n^t \mathbf{P} \right) \mathbf{T} \tag{3.17}$$

où $\mathbf{H}$, $\mathbf{F}_{mn}$, $\mathbf{G}$ et $\mathbf{F}_n$ sont des opérateurs précisés dans l'annexe B, liés à la raideur géométrique de la structure précontrainte, $\mathbf{T}$ l'opérateur de rotation permettant de passer du repère corotationnel au repère global et $\tilde{\mathbf{K}}_e$ l'opérateur de raideur élémentaire de l'élément de poutre dans le repère corotationnel. Sous les hypothèses de petites perturbations dans ce repère, la matrice $\tilde{\mathbf{K}}_e$ est de la forme suivante (voir Annexe A) :

$$\tilde{\mathbf{K}}_e = \begin{bmatrix} \frac{ES}{L_e} & 0 & 0 & -\frac{ES}{L_e} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L_e^3} & -\frac{6EI}{L_e^2} & 0 & -\frac{12EI}{L_e^3} & -\frac{6EI}{L_e^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L_e^2} & \frac{4EI}{L_e} & 0 & \frac{6EI}{L_e^2} & \frac{2EI}{L_e} \\ -\frac{ES}{L_e} & 0 & 0 & \frac{ES}{L_e} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L_e^3} & \frac{6EI}{L_e^2} & 0 & \frac{12EI}{L_e^3} & \frac{6EI}{L_e^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L_e^2} & \frac{2EI}{L_e} & 0 & \frac{6EI}{L_e^2} & \frac{4EI}{L_e} \end{bmatrix} \tag{3.18}$$

où les lignes et colonnes se rapportent, dans l'ordre, aux inconnues u_{x1}, u_{y1}, θ_{z1}, u_{x2}, u_{y2} et θ_{z2}.

La structure initiale et la solution déformée obtenue à convergence sont tracées sur la figure 3.4. On peut ici mesurer l'importance des déplacements et rotations de l'extrémité droite de la structure. Comme attendu, un phénomène de flambage apparaît dans la zone en compression. Le phénomène est très localisé mais il modifie de façon importante le comportement global de la structure.

Comme nous l'avons vu dans le chapitre 1, les schémas de Newton doivent être mis en oeuvre au sein d'une stratégie incrémentale. En pratique, nous recherchons un premier incrément de chargement le plus grand possible pour la résolution non-linéaire, puis nous utilisons une méthode de pas adaptatif pour le reste du calcul. Nous avons retenu ici une version relativement simple d'adaptation du pas de chargement qui consiste à diviser par

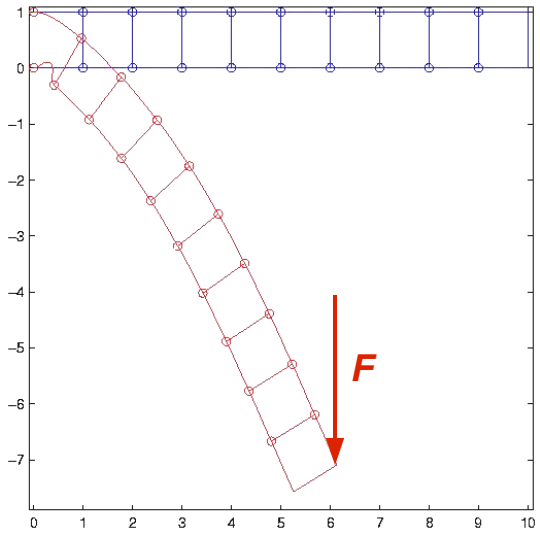

Figure 3.4: Géométrie initiale et solution déformée

deux l'incrément courant en cas de non-convergence après un nombre fixé d'itération (ici 10 itérations), et à l'augmenter en le multipliant par un paramètre supérieur à 1, après plusieurs incréments convergés. C'est cette technique qui sera privilégiée dans la suite de ces travaux.

Pour l'exemple présenté plus haut, l'incrément de chargement maximal retenu (par pas de $5N$) vaut $55N$ (la méthode diverge avec un chargement de $60N$). Après 3 convergence successives, l'incrément est multiplié par 2. Le tableau 3.2 reprend les résultats obtenus en termes de nombre de nombre d'itérations globales de l'algorithme de Newton pour chacun des incréments de chargement réalisés, et pour un critère de convergence relatif, portant sur le résidu, fixé à $\eta = 10^{-6}$. On observe pour l'incrément numéro 6 une divergence nécessitant de diminuer l'incrément en cours. Ce phénomène correspond à l'apparition du phénomène de flambage local, qui nécessite un pilotage approprié. Ce phénomène local induit ainsi une augmentation du nombre de calculs globaux.

2.3.3 Mise en oeuvre d'une stratégie Newton-Krylov-Schur

Dans un second temps, nous choisissons une approche Newton-Krylov-Schur classique. Nous avons retenu ici pour le solveur du problème condensé une approche primale de type BDD avec préconditionneur optimal (voir section 4 du premier chapitre). Le solveur itératif retenu est le solveur GMRES, adapté à la résolution des problèmes non-symétriques. La décomposition de domaine est précisée sur la figure 3.5. Afin de pouvoir la contrôler, nous avons opté pour une décomposition définie par l'utilisateur.

Chaque sous-structure comporte 31 noeuds, soit 93 degrés de liberté, et 2 ou 4 noeuds d'interface avec les sous-structures voisines. Le problème condensé porte quant à lui sur 16 noeuds, soit 48 degrés de liberté.

Les résultats de convergence obtenus par une méthode de type NKS (tableau 3.3)

Pas de chargement	**Chargement (N)**	**Nombre d'itérations globales**
1	55	8
2	110	7
3	165	7
4	275	9
5	385	7
6	500	10 (divergence)
7	440	7
8	500	8
Total :		**63**

Tableau 3.2: Résultats de convergence d'une méthode de Newton avec pas de chargement initial maximal

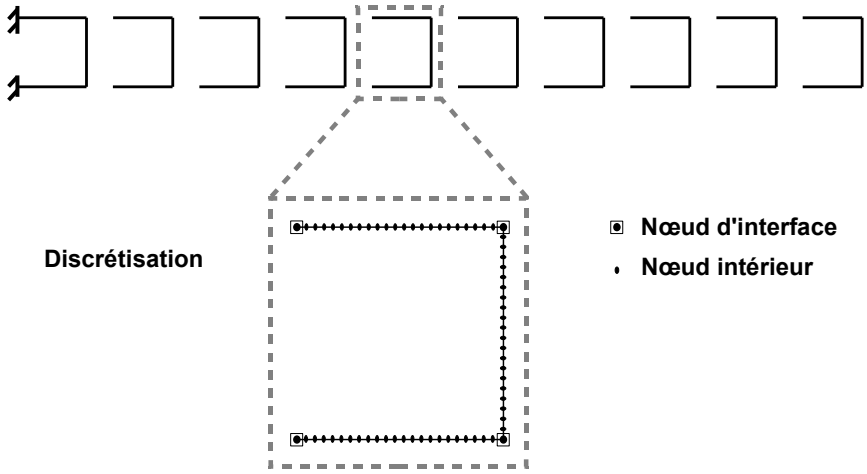

Figure 3.5: Décomposition de domaine et discrétisation

sont exactement identiques à ceux obtenus par une méthode de Newton classique (tableau 3.2) : les mêmes systèmes linéaires sont résolus, seule la technique de résolution étant différente (solveur direct remplacé par un solveur itératif parallèle). En particulier, on obtient un nombre de résolutions globales de 63, soit autant d'appels au solveur GMRES.

Pour mémoire, la méthode BDD requiert la résolution de $2n$ systèmes linéaires par sous-structure, avec n le nombre d'itérations nécessaires à sa convergence, chacun des opérateurs linéaires par sous-structure n'étant assemblé et factorisé qu'une seule fois. L'étape de relocalisation des inconnues internes n'exige qu'un seul calcul linéaire par sous-structure, dont le coût est en général négligé devant celui du solveur de Krylov. C'est à l'issue de cette étape que le nouvel opérateur tangent par sous-structure est assemblé et factorisé. Dans le cas des méthodes NKS, le nombre total d'assemblages et de factorisations d'opérateurs linéaires est ainsi égal au nombre de sous-structures multiplié

Pas de chargement	**Chargement (N)**	**Nombre d'itérations globales**	**Nombre total de calculs locaux**
1	55	8	80
2	110	7	70
3	165	7	70
4	275	9	90
5	385	7	70
6	500	10 (divergence)	100
7	440	7	70
8	500	8	80
Total :		**63**	**630**

Tableau 3.3: Résultats de convergence d'une méthode NKS avec pas de chargement initial maximal

par le nombre d'itérations globales de l'algorithme de Newton. Dans le cas présent, il s'élève à $10 \times 63 = 630$. Par la suite nous appellerons « nombre de calculs locaux » ce produit. Le « nombre de calculs globaux » se réfère lui au nombre d'appels au solveur itératif, c'est-à-dire au nombre de résolutions du problème linéaire global condensé aux interfaces.

Remarque : Nous ne nous intéressons pas, dans le cadre de cette étude, à la convergence du solveur itératif pour le problème linéaire condensé aux interfaces. Le nombre d'itérations nécessaires dépend en effet principalement du conditionnement du système à résoudre et a fait l'objet de nombreux travaux sur les méthodes de décompositions de domaines et leurs préconditionneurs (voir Chapitre 2).

2.3.4 Mise en œuvre de la stratégie de relocalisation non-linéaire

La stratégie de calcul avec relocalisation non-linéaire a été mise en œuvre pour la résolution du problème de treillis de poutres. Un schéma incrémental avec reprise de la dernière solution est choisi. L'incrément initial retenu est l'incrément complet ΔU issu de l'étape globale. En cas de non-convergence, il est automatiquement adapté, selon les mêmes règles qu'au niveau global. On obtient une solution à convergence identique à la solution de référence.

Le tableau 3.4 présente les résultats obtenus pour le même incrément initial que pour les approches classiques ($55N$). On remarque que la relocalisation non-linéaire permet de réduire d'environ 25% le nombre d'itérations globales à chaque pas de chargement. Plus important encore, l'algorithme réussit à « passer » l'instabilité de flambage sans avoir à réduire l'incrément de chargement entre les pas 5 et 6. La stratégie permet ainsi de découpler le pilotage des schémas de résolution non-linéaires locaux et globaux.

Nous avons ensuite recherché le nouvel incrément de chargement initial maximal admissible par la méthode. Il s'avère dans le cas présent être de $100N$, soit pratiquement

Pas de chargement	**Chargement (N)**	**Nombre d'itérations globales**	**Nombre total de calculs locaux**
1	55	6	86
2	110	6	81
3	165	5	71
4	275	6	82
5	385	6	79
6	500	6	81
Total :		**35**	**480**

Tableau 3.4: Résultats de convergence d'une méthode NKS avec relocalistaion non-linéaire et pas de chargement initial maximal

deux fois plus grand que précédemment. Les résultats obtenus avec ce nouvel incrément initial sont présentés dans le tableau 3.5. La stratégie permet ainsi de réduire considérablement le nombre de calculs globaux et locaux.

Pas de chargement	**Chargement (N)**	**Nombre d'itérations globales**	**Nombre total de calculs locaux**
1	100	5	78
2	200	5	79
3	300	6	89
4	500	6	94
Total :		**22**	**340**

Tableau 3.5: Résultats de convergence d'une méthode NKS avec relocalistaion non-linéaire et pas de chargement initial maximal

3 Stratégie de relocalisation non-linéaire mixte

3.1 Vers des conditions aux limites mixtes pour les problèmes locaux

Les résultats présentés dans la section précédente montrent une amélioration significative des performances des stratégies NKS grâce à l'introduction de l'étape de relocalisation non-linéaire par sous-structure. Les conditions aux limites en déplacement sont un choix naturel bien adapté aux formulations Eléments Finis et n'exigent que très peu de modifications des stratégies NKS classiques.

Ce type de conditions aux limites peut cependant être pénalisant et engendrer des difficultés de convergence –voire des divergences– des calculs non-linéaires locaux. Ces difficultés surviennent en particulier pour les zones de la structure subissant de grands déplacements (extrémité droite du treillis) et pour lesquelles les déplacements obtenus après résolution du premier problème global linéaire sont très éloignés de la solution non-linéaire, alors que les sous-structures ne subissent principalement qu'un déplacement de corps rigide.

Par ailleurs on peut se demander pourquoi privilégier ainsi les déplacements, alors même que les flux d'efforts peuvent contenir une information mécanique très pertinente. C'est en particulier ce qui est établi aux grandes échelles par le principe de Saint-Venant.

Pour ces raisons, et dans le but de relâcher les contraintes dues aux conditions aux limites de Dirichlet sur les calculs locaux, nous proposons dans cette partie d'explorer les possibilité offertes par des conditions aux limites mixtes. Reprenant l'approche proposée par la méthode LaTIn et autres méthodes mixtes présentées dans le chapitre 2, nous choisissons de travailler à la fois avec les efforts et les déplacements aux interfaces, et de les associer à un choix pertinent de directions de recherche. Nous précisons dans cette section le schéma itératif qui en découle.

3.2 Description de l'approche

Nous choisissons de reformuler le problème de référence selon le formalisme de la stratégie LaTIn. Les inconnues sont les déplacements $\underline{u}$ et contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$ par sous-structure, ainsi que les efforts $\underline{F}$ et déplacements $\underline{U}$ des interfaces. Les équations sont séparées en deux groupes :

- le groupe des équations non-linéaires vérifiant le comportement et l'équilibre des sous-structures,
- le groupe des équations linéaires vérifiant l'admissibilité statique et cinématique des champs d'interface $\underline{U}$ et $\underline{F}$.

La solution est recherchée itérativement dans chacun de ces deux groupes au moyen de directions de recherche appropriées, menant à la résolution des problèmes suivants :

■ Etape locale non-linéaire

Etant donnés des efforts $\underline{F}^s$ (équilibrés) et déplacements $\underline{U}^s$ (égaux de part et d'autre) aux interfaces, déterminés par un calcul global précédent (ou une étape d'initialisation), on recherche les champs de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}^s$ et de déplacement $\underline{u}^s$, par sous-structure Ω^s,

vérifiant l'équilibre et le comportement, au moyen d'une direction de recherche définie sur $\Gamma \cap \partial\Omega^s$:

$$\underline{\underline{\sigma}}^s\big|_{\Gamma\cap\partial\Omega^s}.\underline{n} - \underline{F}^s = \mathbf{k}\,(\underline{u}^s|_{\Gamma\cap\partial\Omega^s} - \underline{U}^s) \tag{3.19}$$

où $\mathbf{k}$ est un opérateur assimilable à une rigidité d'interface et $\underline{n}$ le vecteur normal à $\partial\Omega^s$. Ce choix de direction de recherhce correspond à une condition aux limites mixte de type Robin sur $\partial\Omega^s$. Le problème à résoudre peut alors se poser ainsi :

Trouver $\underline{u}^s$ vérifiant :

– l'admissibilité statique sur la configuration Ω^s_t, associée aux directions de recherche :

$$\int_{\Omega^s_t} \underline{\underline{\sigma}}^s : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\hat{u}}^s)dx + \int_{\Gamma\cap\partial\Omega^s} \mathbf{k}\underline{u}^s.\underline{\hat{u}}^s ds = \int_{\Omega^s_t} \underline{f}^s.\underline{\hat{u}}^s dx + \int_{\Gamma\cap\partial\Omega^s} (\mathbf{k}\underline{U}^s - \underline{F}^s).\underline{\hat{u}}^s ds + \int_{\partial\Omega^s_t/\Gamma} \underline{g}^s.\underline{\hat{u}}^s ds \ , \ \forall \underline{\hat{u}}^s \in V^s \tag{3.20}$$

– le comportement élastique :

$$\underline{\underline{\sigma}}^s = \underline{\underline{\underline{\underline{\mathbf{A}}}}}_t\ \underline{\underline{\epsilon}}(\underline{u}^s) \tag{3.21}$$

– l'admissibilité cinématique éventuelle, liée aux conditions de Dirichlet sur le problème inital :

$$\underline{u}^s = \underline{U}_d \quad sur \quad \partial\Omega^s_U \tag{3.22}$$

$$\tag{3.23}$$

L'emploi de conditions aux limites mixtes, à condition que $\mathbf{k}$ soit défini positif, rend le problème bien posé, et ceci même en l'absence de conditions aux limites de Dirichlet sur une partie de la frontière. L'existence et l'unicité de la solution restent liées au type d'équations d'équilibre non-linéaires considérées.

Comme dans le cas des méthodes de relocalisation non-linéaire à déplacement imposé, cette étape permet de traiter localement les non-linéarités et de concentrer les efforts numériques sur les zones les plus non-linéaires.

■ **Etape globale linéaire**

La seconde étape consiste à rechercher des champs d'effort $\underline{F}$ et de déplacement $\underline{U}$ admissibles aux interfaces, c'est-à-dire respectivement continus et équilibrés de part et d'autre d'une interface Γ^i :

$$\underline{U}^1 = \underline{U}^2, \tag{3.24}$$

$$\underline{F}^1 + \underline{F}^2 = 0 \tag{3.25}$$

Connaissant les champs $\underline{u}^s|_{\Gamma^i\cap\partial\Omega^s}$ et $\underline{\underline{\sigma}}^s\big|_{\Gamma^i\cap\partial\Omega^s}.\underline{n}$ déterminés à l'étape locale non-linéaire précédente pour les sous-structures Ω^s connectés à Γ^i, on recherche les champs

$\underline{U}^j$ et $\underline{F}^j$ ($j \in \{1,2\}$) vérifiant les équations (3.24),(3.25) au moyen d'une direction de recherche $\mathcal{L}^j$ définie de part et d'autre de l'interface :

$$\mathcal{L}^j \left(\underline{U}^j - \underline{u}^s|_{\Gamma^i \cap \partial\Omega^s}\right) = \underline{F}^j - \underline{\underline{\sigma}}^s\big|_{\Gamma^i \cap \partial\Omega^s} .\underline{n} \tag{3.26}$$

où Ω^s est la sous-structure connectée au coté j de Γ^i.

Défini ainsi, le problème est local par interface. Aucun problème global ne permet le transfert d'information à l'échelle de la structure complète et la propagation d'information ne se fait que progressivement au cours des itérations. Une telle approche ne permet pas l'extensibilité de la méthode et ne peut être envisagé pour un grand nombre de sous-structures. Pour cette raison, on cherche plutôt à définir un problème couplant toutes les interfaces et permettant une propagation de l'information sur l'ensemble de la structure à chaque itération.

En pratique, on choisit donc comme direction de recherche l'opérateur tangent de Steklov-Poincaré $\mathcal{S}_T^s$ associé à chaque sous-structure s. Par définition, il couple entre eux les champs d'effort et de déplacement de toutes les interfaces de chaque sous-structure. En utilisant (3.24), (3.25) et cette direction de recherche particulière, on obtient alors le problème global suivant posé sur les déplacements d'interface :

$$\mathcal{S}_T \underline{U} = \underline{r} \tag{3.27}$$

où $\mathcal{S}_T$ est l'opérateur de Steklov-Poincaré associé au problème global linéarisé, et $\underline{r}$ est un résidu condensé aux interfaces provenant à la fois des défauts d'équilibre et des sauts de déplacement aux interfaces. Nous l'explicitons plus loin, dans sa version discrétisée.

Les efforts d'interfaces sont ensuite déterminés au moyen de la direction de recherche $\mathcal{S}_T^s$:

$$\underline{F}^s = \underline{\underline{\sigma}}^s\big|_{\Gamma \cap \partial\Omega^s} .\underline{n} + \mathcal{S}_T^s(U^s - \underline{u}^s|_{\Gamma \cap \partial\Omega^s}) \tag{3.28}$$

Remarque : Une autre façon de rendre extensible le problème linéaire d'interface est d'adjoindre aux problèmes locaux d'interface un problème pertinent à l'échelle globale. L'approche LaTIn micro/macro (voir Chapitre 2) repose sur ce principe. Nous en présentons une extension aux structures de plaques et coques dans le Chapitre 5.

3.3 Mise en œuvre numérique

3.3.1 Etape locale non-linéaire

Les problèmes non-linéaires (3.20) par sous-structure s sont résolus au moyen d'une méthode de Newton. Les systèmes linéaires obtenus à chaque itération, prenant en compte la direction de recherche $\mathbf{k}^s$, permettent de calculer les corrections de déplacement Δu^s. En séparant inconnues internes (notées avec l'indice i) et inconnues d'interfaces (indice b), ce système linéaire peut s'écrire :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}^s_{Tii} & \mathbf{K}^s_{Tib} \\ \mathbf{K}^s_{Tbi} & \mathbf{K}^s_{Tbb} + \mathbf{k}^s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u^s_i \\ \Delta u^s_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f^s_i \\ f^s_b + \mathbf{k}^s.\Delta U^s - F^s \end{bmatrix} \tag{3.29}$$

où ΔU^s et F^s proviennent de l'étape globale linéaire précédente, et f^s est le résidu d'équilibre à l'itération considérée.

La résolution de ces systèmes peut être réalisée de manière indépendante sous-structure par sous-structure, sans échange de données. Elle est facile à mettre en œuvre sur une architecture distribuée.

La direction de recherche $\mathbf{k}^s$ utilisée à l'étape locale est un paramètre important de la méthode. Il est intéressant de remarquer que, lorsque $\mathbf{k}^s$ tend vers l'infini (au sens de ses valeurs propres par exemple), les conditions aux limites aux interfaces tendent vers des conditions de Dirichlet, et les systèmes obtenus correspondent à une méthode de pénalisation.

A l'inverse, un paramètre $\mathbf{k}^s$ nul, revient à effectuer des résolutions locales non-linéaires avec des conditions aux limites de Neumann. Dans le cas général, de tels problèmes n'ont pas de solution unique, et peuvent être définis à un mouvement de corps rigide près. Une telle approche nécessiterait de traiter de manière adaptée ces modes de déplacement, comme cela est proposé dans la méthode FETI. Nous n'envisagerons pas ce cas par la suite.

L'opérateur $\mathbf{k}^s$ permet ainsi de passer de manière continue d'une approche à déplacements imposés à une approche à efforts imposés. Il offre une liberté supplémentaire pour optimiser les performances de la méthode, le cas limite correspondant à l'approche à déplacements imposés n'ayant aucune raison d'offrir les meilleurs performances.

Un choix optimal classique pour la direction de recherche $\mathbf{k}^s$ est, pour une sous-structure s donnée, l'opérateur tangent de l'ensemble des autres sous-structures, condensé sur ses interfaces. Un tel opérateur peut être assimilé à la rigidité « ressentie » par la sous-structure s, représentant le comportement de l'environnement de l'interface. En pratique, cet opérateur étant extrêmement coûteux à calculer (de l'ordre de grandeur du problème initial), on peut se contenter d'une approximation, correspondant au complément de Schur d'une zone proche de l'interface par exemple. Les travaux présentés dans [Violeau 03] pour l'optimisation de la direction de recherche $\mathbf{k}$ de la méthode LaTIn ont ainsi démontré de bons résultats de convergence malgré une estimation grossière de cet opérateur, approximé par un scalaire correspondant à sa plus grande valeur propre. Nous montrons plus loin l'influence du choix de ce paramètre pour la stratégie que nous proposons.

3.3.2 Etape globale linéaire

Après discrétisation, le problème global linéaire s'écrit sous la forme suivante :

$$\mathbf{S}_T U = r \tag{3.30}$$

avec

$$\mathbf{S}_T = \sum_s \mathbf{A}^s \mathbf{S}^s_T \mathbf{A}^{st} \qquad \text{et} \qquad r = \sum_s \mathbf{A}^s (\mathbf{S}^s_T u^s_b + f^s_b - \mathbf{K}^s_{Tbi} \mathbf{K}^{s\,-1}_{Tii} f^s_i) \tag{3.31}$$

et, pour chaque sous-structure s :

$$F^s = f_b^s + \mathbf{S}_T^s(U^s - u_b^s) \tag{3.32}$$

Le problème (3.30) est très proche du problème condensé des méthodes NKS classiques : l'opérateur condensé $\mathbf{S}_T$ est identique, seul le second membre r diffère, à cause des discontinuités des déplacements issus des calculs locaux. De ce fait, le problème peut être résolu par une méthode de décomposition de domaine itérative classique, en particulier avec les mêmes préconditionneurs.

L'équation (3.32), quant à elle, permet de déterminer, une fois les déplacements admissibles U connus, les efforts admissibles F sur les interfaces de chacune des sous-structures. Il s'agit d'une étape de post-traitement qui peut être menée indépendamment sur chaque sous-structure et ne demande pas d'effort particulier.

Enfin, ici encore, on remarque que lorsque les déplacements u_b^s provenant des calculs non-linéaire locaux sont égaux de part et d'autre (c'est le cas lorsque **k** tend vers l'infini), le problème (3.30) – et plus particulièrement le second membre – tend vers le problème tangent des approches NKS classique.

3.3.3 Algorithme général

L'algorithme 4 détaille les étapes de la résolution. Comme pour l'approche précédente, l'étape globale linéaire est résolue au moyen d'un solveur itératif de Krylov, qui peut être parallélisé. Les résolutions non-linéaires par sous-structures sont quant à elles complètement indépendantes et donc parallélisables de manière triviale. Ici encore, les schémas incrémentaux ne sont pas indiqués, afin de faciliter la lecture. Ils sont identiques dans leur principe à ce qui a été présenté pour la méthode de relocalisation non-linéaire à déplacements imposés.

Algorithme 4 Méthode NKS avec relocalisation non-linéaire - approche mixte

faire *[itérations de Newton globales]*
- Assemblage des opérateurs locaux tangents $\mathbf{K}_T^s$ par sous-structure
- Factorisation des $\mathbf{K}_{Tii}^s$
- Calcul du second membre condensé modifié r^s par sous-structure
- Résolution du problème condensé *[Solveur itératif de Krylov]* : $S_T.U = r$
- Calcul par sous-structure de l'effort admissible : $F^s = f_b^s + \mathbf{S}_T^s(U^s - u_b^s)$
- Calcul des paramètres de recherche **k**
- **faire** *[itérations de Newton locales]*
  - Problème mixte par sous-structure : $\Delta u^s = \mathbf{K}^s + \mathbf{k}^{-1}\left(f^s + \mathbf{k}U - F\right)$
  - Mise à jour de u^s, $\mathbf{K}^s$ et f^s
- **jusqu'à** $\eta_{local} < \eta_{local}^{crit}$

jusqu'à $\eta_{global} < \eta_{global}^{crit}$

3.4 Application aux treillis de poutres

La stratégie de relocalisation non-linéaire mixte a été appliquée au treillis de poutres déjà présenté. Les résultats obtenus sont rassemblé dans les tableaux 3.6 et 3.7 pour deux différents choix du paramètre **k**. Dans le premier cas, nous avons pris pour direction de recherche de chacune des interfaces les sous-matrices de l'opérateur des sous-structures voisines correspondant aux degrés de liberté de l'interface, soit $\mathbf{K}^q_{Tbb}$ en suivant les notations déjà introduites et en considérant la sous-structure voisine q. Dans un second temps, la direction de recherche choisie est le complément de Schur $\mathbf{S}^q_T$ de la sous-structure voisine sur l'interface considérée.

Pas de chargement	**Chargement (N)**	**Nombre d'itérations globales**	**Nombre total de calculs locaux**
1	500	9	638
Total :		**9**	**638**

Tableau 3.6: Résultats de convergence d'une méthode NKS avec relocalistaion non-linéaire mixte et pas de chargement initial maximal, $\mathbf{k}^s = \mathbf{K}Tbb^q$ pour toutes les interfaces

Pas de chargement	**Chargement (N)**	**Nombre d'itérations globales**	**Nombre total de calculs locaux**
1	500	6	420
Total :		**6**	**420**

Tableau 3.7: Résultats de convergence d'une méthode NKS avec relocalistaion non-linéaire mixte et pas de chargement initial maximal, $\mathbf{k}^s = \mathbf{S}^q_T$ pour toutes les interfaces

Un des avantages de la méthode avec conditions mixtes est de relâcher les contraintes dues aux conditions aux limites sur les problèmes locaux. Elle permet alors de traiter des incréments de chargement plus grands au niveau global, et de réduire par la même occasion la quantité de données échangées. Ainsi, dans les deux cas, le chargement total a pu être appliqué **en un seul incrément**, et la convergence est atteinte pour un nombre relativement faible d'itérations.

La figure 3.6 présente l'évolution de la déformée de la structure au cours des itérations de la méthode. Les petites croix correspondent à la solution de l'étape linéaire globale. On observe en particulier la discontinuité des déplacements aux interfaces entre les sous-structures dans les premières itérations, puis leur « recollement » à convergence. On remarque que la méthode converge très rapidement, le phénomène non-linéaire de flambage étant bien décrit dès l'itération 2 ou 3. Les itérations suivantes permettent d'affiner

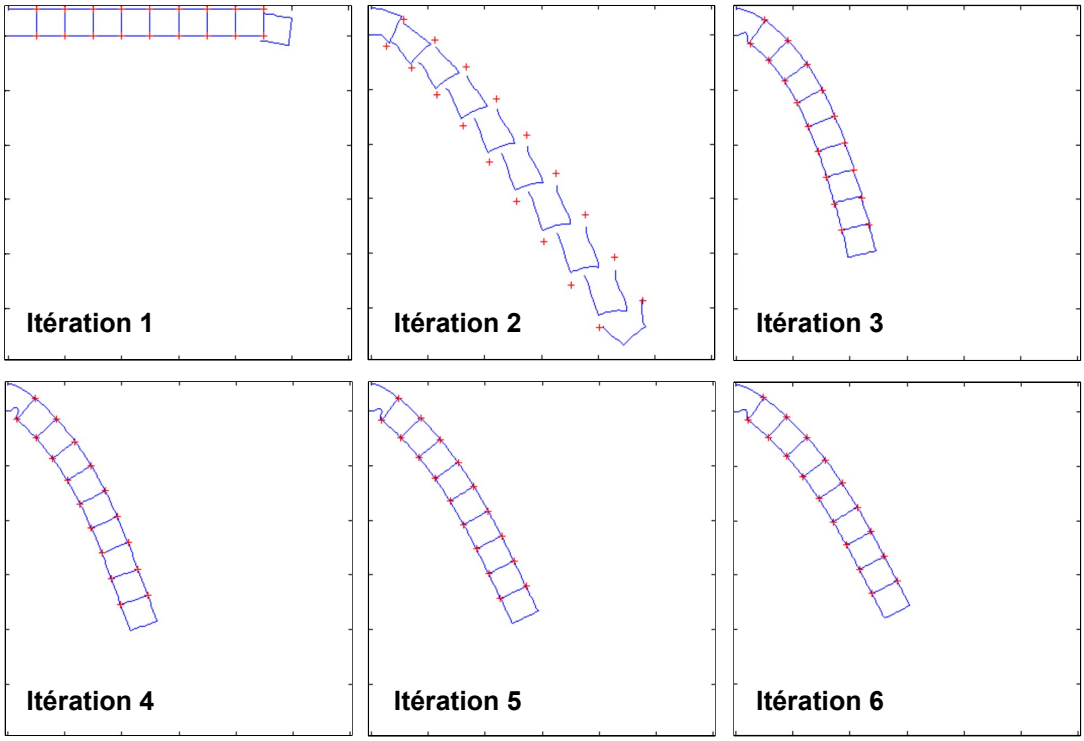

Figure 3.6: Evolution de la déformée de la structure au cours des itérations de la méthode mixte avec relocalisation non-linéaire

la redistribution des contraintes et l'équilibre de la structure. La solution finale obtenue est identique, à l'erreur de convergence près, à celle obtenue par les approches NKS.

3.5 Influence du choix de la direction de recherche k

Nous avons donné plus haut une interprétation physique pour la direction de recherche $\mathbf{k}$, ainsi que deux exemples classiques d'approximations couramment retenues : $\mathbf{S}_T^q$ et $\mathbf{K}_{Tbb}^q$. Afin d'évaluer plus précisément l'influence de $\mathbf{k}$ sur les performances de la stratégie, nous proposons d'étudier l'évolution du nombre d'itérations globales de la stratégie lorsqu'on modifie d'un facteur α ces deux opérateurs classiques.

La figure 3.7 présente ainsi le nombre d'itérations globales pour la résolution du problème de treillis de poutre avec $\mathbf{k} = \alpha.\mathbf{S}_T$ et $\mathbf{k} = \alpha.\mathbf{K}_{bb}$, α variant entre 10^{-2} et 10^2. On observe des performances optimales pour α proche de $10^{-0.5}$ dans le premier cas, et pour α proche de 10^{-1} dans le second. Pour des valeurs très grandes ou très petites du paramètre α les performances se dégradent. On remarque ici encore qu'elles tendent vers les performances de l'approche à déplacements imposés quand α devient grand (soit $\mathbf{k}$ tendant vers l'infini). Pour des petites valeurs de α, on observe une instabilité de la stratégie, au niveau des itérations globales comme au niveau des résolutions locales par sous-structures. Un paramètre α raisonnable peut être défini *a priori* en s'appuyant sur

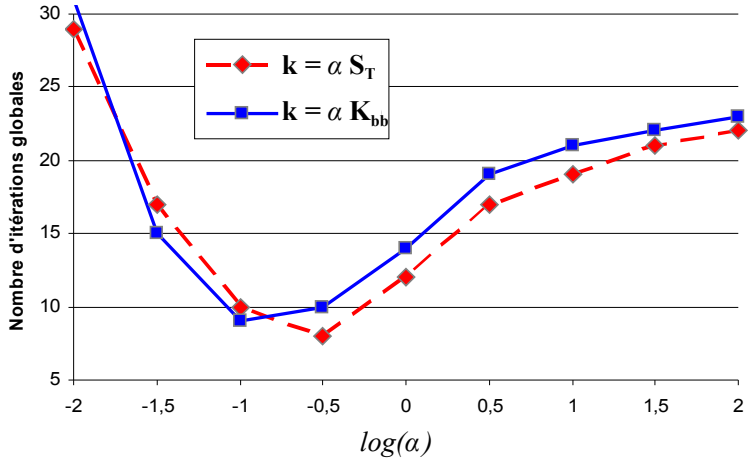

Figure 3.7: Influence de la direction de recherche **k** sur le nombre d'itération globales

les rapports d'échelles entre la taille globale de la structure et celle d'une sous-structure ou d'un élément, le but étant d'approcher la valeur de l'opérateur condensé du reste de la structure sur l'interface d'une sous-structure donnée.

4 Analyses et performances des stratégies de relocalisation non-linéaire

4.1 Comparaison des différentes méthodes

Les figures 3.8, 3.9 et 3.10 présentent les résultats comparatifs pour les différentes stratégies appliquées aux cas du treillis de poutres, respectivement en termes d'itérations globales, de calculs locaux et d'incréments de chargement. La première série de résultats (Cas *a)*) a été obtenue par une méthode de Newton-Krylov-Shur classique, avec un incrément initial maximal permettant la convergence. La deuxième série (Cas *b)*) correspond à la méthode avec relocalisation non-linéaire à déplacements imposés avec le même incrément initial que dans le Cas *a)*, alors que la troisième série (Cas *c)*) a été obtenue en déterminant le nouvel incrément maximal admissible. Enfin les résultats de la série *d)* correspondent à l'approche mixte. Les autres paramètres de la méthode sont choisis de façon identique (décomposition de domaine, critères de convergence, schémas adaptatifs globaux et locaux, etc.).

Ces figures permettent de mesurer la diminution du coût de calcul, et en particulier du nombre d'incréments et d'itérations globales. Ces approches sont ainsi particulièrement adaptées aux architectures de calcul pénalisées par les échanges de données. Le nombre de calculs par sous-struture diminue lui aussi, même si de manière moins spectaculaire. En outre, on peut noter que le rapport entre le nombre de calculs locaux et le nombre d'itérations globales augmente.

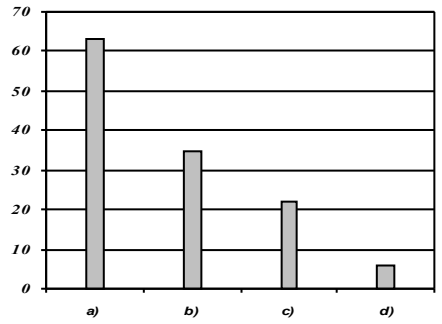

Figure 3.8: Nb. total d'itérations globales (problèmes linéaires condensés)

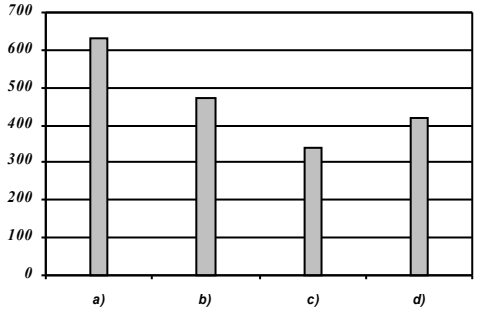

Figure 3.9: Nb. total d'itérations non-linéaires locales dans les sous-structures

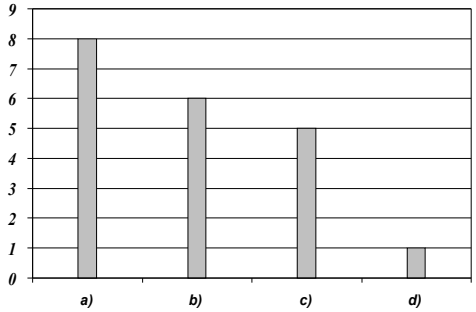

Figure 3.10: Nb. d'incréments de chargement globaux

Stratégie de résolution	**Incrément initial**
a) Newton-Krylov-Schur classique	55 N
b) Relocalisation non-linéaire primale	55 N
c) Relocalisation non-linéaire primale	100 N
d) Relocalisation non-linéaire mixte	500 N

Enfin, en regardant plus précisément le nombre d'itérations sous-structure par sous-structure (non-représenté ici), on observe que le plus grand nombre de calculs locaux correspond, comme attendu, aux zones ayant le comportement le plus non-linéaire (flambage local, etc.). Les efforts numériques sont ainsi concentrés sur les zones le nécessitant le plus, au prix d'un déséquilibrage de l'algorithme. La méthode se révèle cependant très prometteuse et ouvre de nombreuses perspectives pour le futur.

4.2 Influence du critère d'arrêt local

La stratégie présentée dans ce chapitre propose d'introduire des résolutions non-linéaires locales sur chacune des sous-structures. En pratique, on choisit comme solveur local un schéma incrémental-itératif de Newton-Raphson. Il est alors légitime de se poser la question de l'influence des paramètres de la méthode, et en particulier du critère de convergence, sur les performances globales de la stratégie.

Pour déterminer l'influence du critère de convergence local, une étude paramétrique a été réalisée. Nous présentons ici les résultats pour la stratégie de relocalisation avec conditions de Dirichlet. Le critère de convergence global correspondant au schéma de Newton sur le problème condensé aux interfaces a été fixé à $\eta_{glob} = 10^{-6}$, et plusieurs calculs sont réalisés pour des valeurs du critère local η_{loc} allant de 1 à 10^{-6} d'erreur relative. Les résultats obtenus sont présentés sur les figures 3.11 et 3.12. **Dans tous les cas, le critère de convergence local n'a pas d'influence sur la qualité de la solution obtenue : la précision du résultat est définie par le critère global de convergence.**

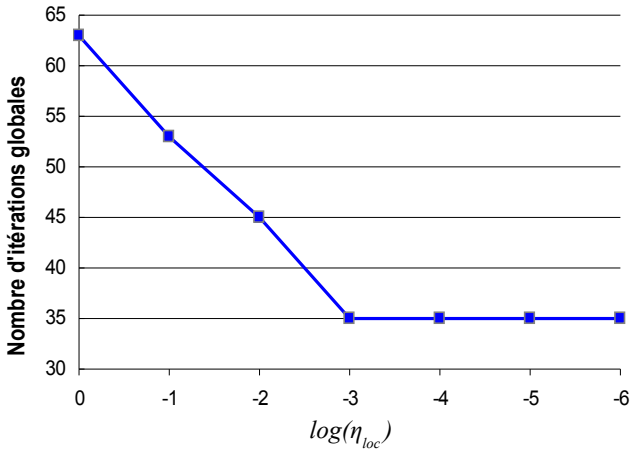

Figure 3.11: Influence du critère d'arrêt local sur le nombre d'itérations globales de la stratégie de relocalisation avec conditions de Dirichlet

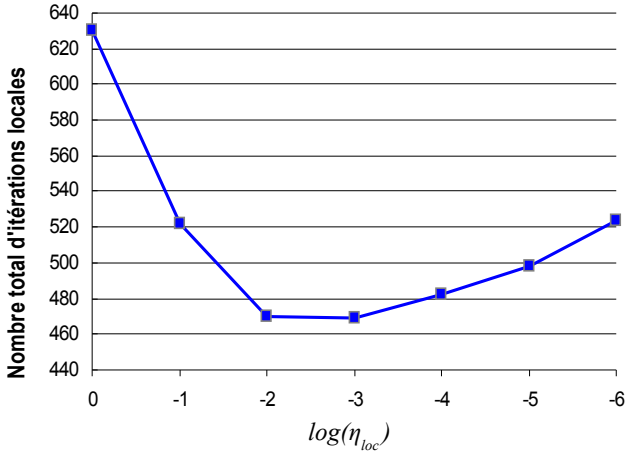

Figure 3.12: Influence du critère d'arrêt local sur le nombre total d'itérations locales de la stratégie de relocalisation avec conditions de Dirichlet

Sur la première figure, correspondant au nombre d'itérations globales en fonction du critère local de convergence, on observe que le nombre d'itérations diminue dans un premier temps avant de se stabiliser pour des critères inférieurs à 10^{-3}. Le cas limite $\epsilon_{loc} = 1$ correspond aux approches NKS classiques, un calcul linéaire étant réalisé après chaque résolution globale. On observe sur ce graphique qu'il n'est pas nécessaire d'imposer un critère de convergence local très petit pour obtenir un nombre minimal d'itérations : l'algorithme se contente d'un critère local bien plus élevé que le niveau d'erreur désiré au niveau global.

Si on s'intéresse au nombre de calculs locaux, on observe une première tendance à la baisse, suivie par une remontée plus lente. Il existe ainsi une valeur optimale qui minimise le nombre de calculs locaux. En particulier, il est inutile, et même pénalisant, de choisir un critère de convergence local identique au critère global. En pratique, un critère de convergence plutôt élevé, de l'ordre de la racine carrée du critère de convergence global est suffisant pour le schéma non-linéaire local. Un critère plus fin n'induit qu'une augmentation du nombre de calculs locaux, sans améliorer, comme nous l'avons vu, les performances globales. Ce résultat permet ainsi de limiter le nombre de calculs locaux par sous-structure, puisqu'une solution fine n'est pas nécessaire. La méthode devient d'autant plus performante, en particulier pour les non-linéarités plus diffuses nécessitant une effort numérique réparti.

Des résultats comparables sont obtenus avec la stratégie de relocalisation avec conditions aux limites mixtes.

4.3 Décomposition de domaine et non-linéarités localisées

L'étape non-linéaire locale étant par définition attachée aux sous-structures, le choix de la décomposition de domaine va naturellement influencer le comportement des méthodes proposées dans ce chapitre. En particulier, on s'attend à ce que la taille des sous-structures et la position des interfaces vis-à-vis des phénomènes non-linéaires considérés soit de première importance. S'il est difficile de réaliser une étude générale de leur influence, nous pouvons néanmoins comparer deux situations différentes, une bien adaptée au phénomène et l'autre particulièrement mal choisie, afin de déterminer la sensibilité de la méthode vis-à-vis de ce paramètre.

Nous proposons ainsi, pour la structure de treillis déjà étudiée, une nouvelle décomposition de domaine illustrée sur la figure 3.13. Cette décomposition a été obtenue à partir de la précédente en scindant la sous-structure la plus à gauche en deux, en plein milieu de la zone de flambage local. L'hypothèse de localité de la non-linéarité n'est ainsi plus vérifiée, puisque le phénomène est dorénavant réparti sur deux sous-structures.

La figure 3.14 compare les résultats obtenus avec la décomposition de domaine initiale et avec la décomposition modifiée pour chacune de méthodes de relocalisation non-linéaires décrites précédemment. On remarque que dans le cas des méthodes NKS classiques, la décomposition de domaine n'a pas d'influence sur le nombre d'itérations de la stratégie. Ceci est un résultat attendu, étant donné que la non-linéarité n'est traitée qu'au niveau global. La décomposition de domaine n'a une influence que sur le solveur

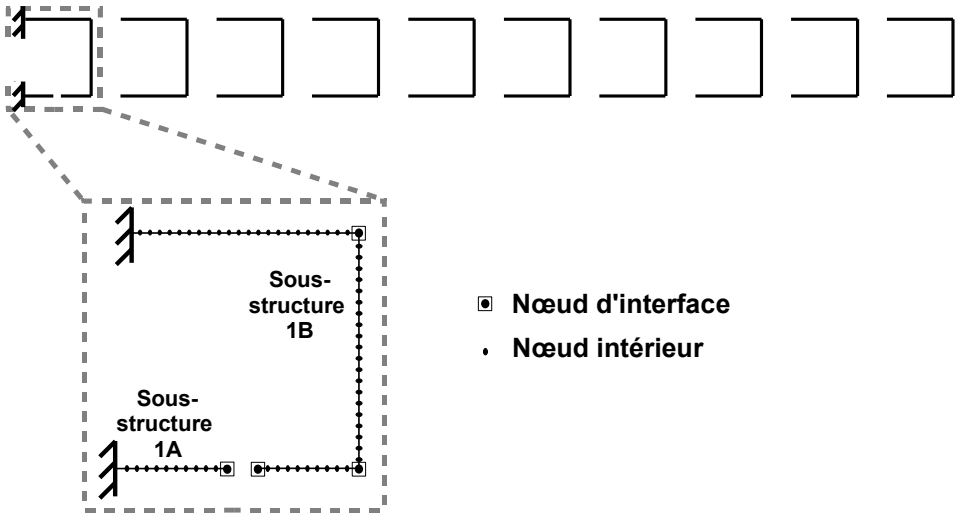

Figure 3.13: Nouvelle Décomposition de domaine

linéaire itératif choisi pour la résolution des problèmes condensés aux intervalles, et donc éventuellement sur le nombre d'itérations du solveur de Krylov. La solution obtenue pour chaque système linéaire ne dépendant pas de cette décomposition de domaine, le schéma de Newton se comporte de manière identique, quelle que soit la décomposition de domaine réalisée.

Il en est autrement des schémas avec relocalisation non-linéaire. On observe ainsi dans les trois cas représentés ici une augmentation plus ou moins importante du nombre d'itérations globales des méthodes. En particulier, la stratégie mixte ne converge plus en un seul incrément de chargement mais en exige alors deux, d'où un nombre doublé d'itérations. Ce résultat s'explique ici assez bien par le fait que la non-linéarité de flambage, répartie sur deux sous-structures, ne peut plus être traitée uniquement au niveau local et est en partie reportée au niveau global. Le découplage entre les échelles n'est ainsi plus assuré et le schéma itératif global en subit les conséquences. Dans tous les cas, cependant, les stratégies de relocalisation restent beaucoup moins coûteuses que les stratégies NKS classiques, alors même que la décomposition de domaine choisie ici est très pénalisante vis-à-vis du phénomène non-linéaire localisé.

En conclusion, les coûts de calcul des stratégies de relocalisation dépendent de la décomposition de domaine choisie. La variation est cependant raisonnable, et la méthode reste, dans tous les cas que nous avons pu tester, plus intéressante que pour les approches NKS classiques. On peut noter que des résultats optimaux sont obtenus lorsque les phénomènes non-linéaires sont localisés au sein d'une seule sous-structure. La connaissance *a priori* du comportement de la structure, ou l'expertise du modélisateur, sont ainsi primordiales dans le choix. Dans le cas des structures aéronautiques par exemple, le découpage est facilité par la présence de zones raidies ou de renforts structuraux moins susceptibles de flamber que les zones courantes.

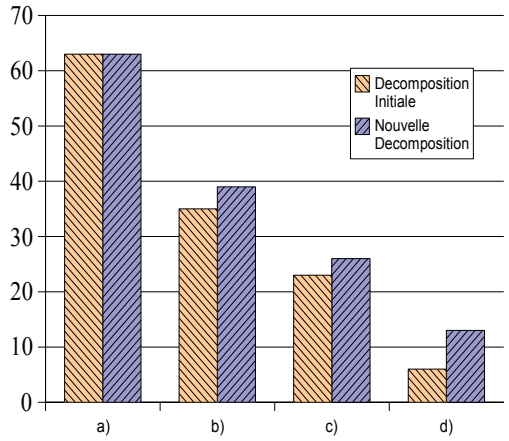

Figure 3.14: Influence de la décomposition de domaine sur le nombre de calculs globaux pour les différentes stratégies

Enfin, nous verrons dans la section suivante qu'il existe d'autre contraintes liées à la décomposition de domaine et aux problématiques de répartition des tâches, synchronisation, etc..

4.4 Mise en œuvre parallèle et Performances

4.4.1 Parallélisme et équilibrage de charge

Les stratégies avec relocalisation non-linéaire, tout comme les méthodes classiques Newton-Krylov-Schur auxquelles elles s'apparentent, sont naturellement adaptées aux architectures parallèles. La figure 3.15 illustre le déploiement de ces méthodes dans un environnement distribué. L'étape globale linéaire est résolue au moyen d'un solveur itératif de Krylov qui ne nécessite que des produit locaux matrice-vecteur. Des échanges d'informations sont cependant nécessaires à chaque itération. A l'inverse, l'étape locale non-linéaire par sous-structure consiste en des calculs totalement indépendants.

Une mise œuvre parallèle classique associe chaque sous-structure à un des processeurs d'un calculateur distribué. Le déroulement de chacun des processus de l'algorithme peut être représenté en fonction du temps selon le diagramme présenté figure 3.16. Comme on peut le constater sur cette figure, dans le cas où les processus n'exigent pas un temps de traitement équivalent, certains processeurs peuvent passer une grande partie du temps à attendre la fin des processus s'executant sur les autres processeurs. Dans le cas présenté ici, la résolution non-linéaire locale associée à la sous-structure 1 exige un temps plus important que pour les autres sous-structures, et la plupart des processeurs vont donc rester inactifs en attendant la fin de ce calcul. De tels temps d'attentes pénalisent l'efficacité de la méthode, et on cherche en général à répartir au mieux les charges sur les différents processeurs.

Cette problématique est déjà traitée pour la mise en œuvre efficace des méthodes de

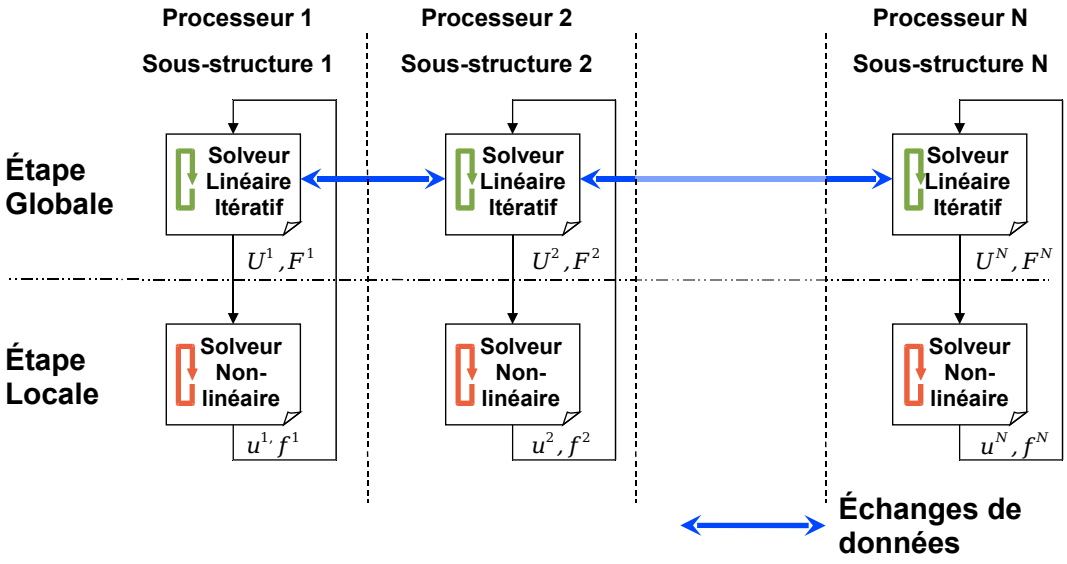

Figure 3.15: Mise en oeuvre parallèle de l'algorithme de résolution avec relocalisation non-linéaire

décomposition de domaine classiques, et des méthodes synchrones en général. La décomposition est effectuée de manière automatique de façon à ce que chacun des problèmes locaux (factorisation et résolution du système linéaire) représente un coût de calcul le plus uniforme possible, au moyen de l'algorithme de partitionnement de graphe `METIS` par exemple. En effet, dans ce cas, les coûts de calcul associés peuvent être estimés, en fonction de la taille des matrices ou de leur largeur de bande.

Dans le cas présent, il est beaucoup plus difficile d'évaluer *a priori* le coût des calculs non-linéaires par sous-structure, qui dépend non seuleument des opérateurs, mais aussi du niveau de chargement. Une estimation possible consiste à considérer le nombre d'itérations nécessaires pour les résolutions non-linéaires locales à l'itération précédente. Cependant, ce coût peut évoluer au cours des itérations globales. Dans de telles situations, on peut envisager d'utiliser des méthodes de répartition dynamique, les processus étant alloués en cours d'exécution sur les noeuds de calcul disposant de ressources. L'utilisation d'un nombre de processeurs inférieur au nombre de sous-structures peut faciliter de telles optimisations de charge. Des réponses à cette problématique sont développées au sein de la communauté informaticienne [Diekmann 97]. Les approches les plus prometteuses permettent l'affectation des processus sur une architecture distribuée de façon complètement transparente pour l'utilisateur, en transformant un cluster en une machine virtuelle unique (www.kerrighed.org, openmosix.sourceforge.net, openssi.eu, [Lottiaux 05]).

4.4.2 Granularité et speed-up

En calcul parallèle, la granularité mesure le rapport entre la quantité de calculs et la quantité de données échangées. Les problèmes dit à « grain fin » sont en général des pro-

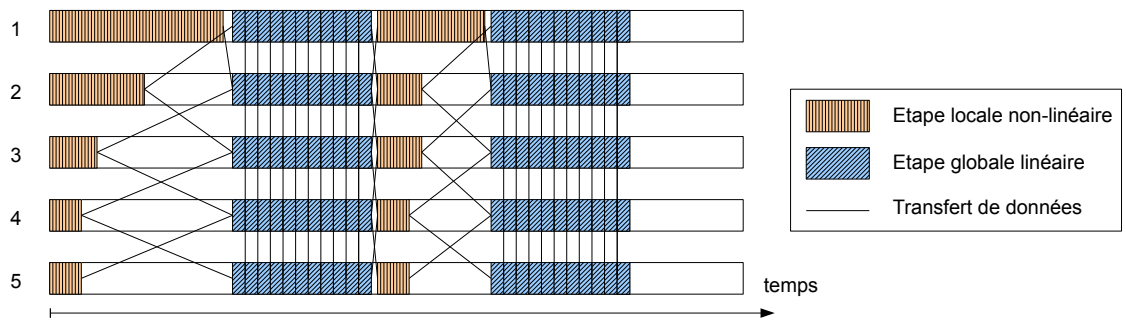

Figure 3.16: Temps de calcul et transferts de données entre processeurs pour une structure décomposée en 5 sous-domaines

blèmes fortement couplés où les calculs individuels sont relativement peu importants en terme de temps de calcul par rapport aux échanges de données, très fréquents. A l'opposé, les problèmes à « gros grain » sont des problèmes pour lesquels les échanges de données sont réalisés moins fréquemment après une grande quantité de calculs.

Les problèmes à grains fins sont ainsi largement pénalisés par les architectures à mémoire distribuée. Dans le cas des méthodes NKS, les échanges de données sont très nombreux, à chaque itération du solveur itératif de Krylov, et la granularité est relativement faible, le coût de l'étape de relocalisation linéaire et de mise à jour de l'opérateur tangent par sous-structure étant en général négligeable par rapport à celui du solveur de Krylov. En effet, chaque itération d'un solveur de Krylov avec préconditionneur nécessite la résolution de deux problèmes linéaires par sous-structure.

Les approches de relocalisation non-linéaire permettent d'augmenter la granularité en introduisant des calculs locaux plus coûteux ne demandant pas d'échanges de données. Elles sont donc particulièrement adaptées aux architectures de type cluster, pénalisées par leur réseau de communication inter-nodal.

Plus précisément, on définit le « speed-up » d'un algorithme parallèle comme le rapport entre la vitesse de calcul lorsqu'on utilise un seul processeur et celle avec l'utilisation de N processeurs. Toute les étapes ne pouvant être parallélisées, ce nombre est en général inférieur à N et s'exprime selon la loi d'Amdahl [Amdahl 88] :

$$S(N) = \frac{T(1)}{T(N)} = \frac{T_s + T_p}{T_s + T_p/N} \tag{3.33}$$

où T_p est le temps correspondant à la partie parallélisable du calcul et T_s à la partie séquentielle, non-parallélisable. Un version plus réaliste permet de prendre en compte le temps séquentiel moyen T_{is} passé dans les étapes de communication et T_{ip} le temps additionnel lié à la parallélisation et couvrant le temps d'attente :

$$S(N) = \frac{T_s + T_p}{T_s + N * T_{is} + T_p/N + T_{ip}} \tag{3.34}$$

On peut ainsi remarquer sur cette dernière formule tout l'intérêt qu'il y a à minimiser le temps d'attente ainsi que la granularité dans le processus parallèle afin d'augmenter le speed-up. C'est l'objectif des schémas non-linéaires locaux que nous avons introduits, associés à une répartition correcte des charges de calcul.

Remarque : En pratique le speed-up peut atteindre des valeurs supérieures à N, du fait d'une utilisation optimisée des ressources pour la résolution de problèmes de plus petite taille, comme la mémoire vive par exemple.

5 Bilan du chapitre

Nous avons présenté dans ce chapitre une famille de méthodes de décomposition de domaine avec relocalisation non-linéaire particulièrement efficaces pour la simulation de structures avec non-linéarités localisées. Deux versions ont été intoduites, une première où les problèmes non-linéaires locaux sont réalisés à déplacements imposés, et une seconde utilisant des conditions aux limites mixtes aux interfaces. Les performances de ces méthodes ont été comparées à celle obtenues par une stratégie Newton-Krylov-Schur sur des exemples de treillis de poutres avec flambage local. La famille de méthodes proposées permet ainsi une réduction importante du nombre d'itérations globales et de la quantité d'informations échangées entre les solveurs locaux.

CHAPITRE 4

Mise en œuvre numérique pour les structures de plaques et coques

Nous présentons dans ce chapitre la mise en œuvre numérique des stratégies de relocalisation non-linéaire présentées dans le chapitre 3 pour la résolution de problèmes tridimensionnels de plaques et coques. Les performances obtenues sont illustrées sur un exemple de caisson aéronautique. Ce chapitre a fait l'objet de communications [Cresta 06b, Rey 06b, Cresta 06a, Rey 06a, Allix 06].

Sommaire

1 Plateforme de développement 124

1.1 Choix d'une plateforme 124

1.2 Librairie LMTpp 125

2 Implémentation de la méthode pour les plaques et coques 130

2.1 Structure générale du code de calcul 130

2.2 Formulation en grands déplacements pour les structures de plaques et coques 130

2.3 Décomposition de domaine 134

2.4 Calcul du paramètre de raideur d'interface **k** pour les plaques et coques 136

3 Illustration et résultats comparatifs sur un exemple de caisson aéronautique 138

3.1 Cas test de référence : Caisson raidi 138

3.2 Résultats comparatifs 138

4 Bilan du chapitre 141

1 Plateforme de développement

1.1 Choix d'une plateforme

Pour des raisons de facilité de développement et de disponibilité, les stratégies de relocalisation non-linéaires ont été initialement développées *ab initio* sur la plateforme de calcul scientifique Matlab. L'application à des structures de poutres a été présentée dans la section précédente. Bien que très simples, les treillis étudiés présentent des similitudes de comportement avec les applications aéronautiques considérées. Elles présentent cependant des particularités, en particulier sur le type d'interfaces entre sous-structures – ici des interfaces ponctuelles – , qui ne sont pas représentatives des applications visées. Nous proposons ici l'extension des méthodes précédentes aux structures de plaques et coques.

Cette extension nous a confronté à deux problèmes principaux :

1. l'écriture d'un code élément-fini non-linéaire pour les structures de plaques et coques se révèle être un travail extrêmement lourd, exigeant un investissement conséquent avant même de pouvoir implémenter les méthodes proposées ici. Un tel travail semble incompatible avec les contraintes de temps liées à une thèse. Par ailleurs s'il impose une parfaite compréhension de toutes les composantes du code final et peut s'avérer très formateur, il reste relativement peu innovant.
2. la simulation de structures tridimensionnelles de plaques et coques de complexité géométrique croissante induit un nombre de degrés de liberté en croissance rapide. Un code comme Matlab, dont l'objectif est de faciliter le développement au moyen d'un langage interprété, simple et interactif, n'est pas optimisé pour la résolution de grands problèmes de ce type. Les temps de calcul et la mémoire requise peuvent alors devenir prohibitifs, même pour des problèmes relativement petits (quelques milliers de degrés de liberté).

Pour ces raisons, plusieurs solutions alternatives ont été envisagées :

– **l'implémentation au sein d'un code de calcul Eléments Finis existant** : Si cette option permet de reprendre l'existant et toutes les fonctionnalités du code industriel ou semi-industriel, elle nécessite cependant d'avoir accès soit aux sources du code, soit à des routines utilisateurs ou des scripts de méta-programmation au sein du code pour travailler sur les données ou les méthodes. Peu de codes sont cependant suffisamment ouverts pour permettre de développer librement, en imposant en général des contraintes techniques importantes sur les implémentations réalisables. L'accès au code source, quant il est permis, peut s'avérer fastidieux, du fait de sa taille et de sa complexité. Enfin, l'usage de ces codes impose, le plus souvent, l'achat de licences onéreuses, même si quelques initiatives libres sont intéressantes (cf. CodeASTER).

– **l'utilisation de librairies existantes** : Il peut s'agir de plusieurs types de librairies : certaines, générales, développées pour le calcul scientifique, disposent d'un

grand nombre de fonctions pour l'analyse numérique de grands systèmes, le parallélisme, etc. D'autres visent plus particulièrement les problèmes issus de la méthode des éléments finis. Elle sont le plus souvent libres et gratuitement distribuées. La construction du code final peut alors s'appuyer sur ces briques de base, éventuellement multiples. La liberté de programmation est totale, mais de nombreuses fonctionnalités devront être implémentées.

Les contraintes industrielles (licences, propriété intellectuelle, pérennité, etc.) et techniques (liberté d'implémentation, facilité du développement, etc.) nous ont amenés à choisir la deuxième option et de nous appuyer, de façon naturelle, sur la plateforme logicielle développé au LMT Cachan. Nous la décrivons brièvement dans son principe et sa structure dans la section suivante.

1.2 Librairie LMTpp

1.2.1 Principes de base et structure de la librairie

La plateforme logicielle LMTpp a été créée dans le but de pérenniser les développements internes au laboratoire, de faciliter la maintenance et de diminuer les développements redondants tout en offrant des outils adaptés aux besoins des chercheurs [Leclerc 05, Leclerc 07, Caignot 07].

En particulier, elle repose sur une triple exigence :

- offrir un développement aisé et accéléré, sur le modèle des langages interprétés de Matlab ou Scilab, à travers un langage concis et lisible, une architecture flexible et inter-opérable,
- garantir une vitesse d'exécution optimale pour la simulation de problèmes de grande taille, grâce à une programmation moderne en C++,
- offrir des fonctionnalités avancées pour la simulation en mécanique, permettant des analyses poussées comparables à celles rendues possibles par les codes EF commerciaux.

La solution développée propose, pour répondre à ces besoins, un ensemble d'outils d'assistance génériques à la création de codes (pré-calculs), un découplage des différentes concepts (équations, représentation, méthode de résolution...), et une optimisation des opérations algébriques, constituant une plate-forme générique, flexible et performante. La structure de la plateforme de développement est résumée sur la figure 4.1. Nous en décrivons ici les principes de base.

1.2.2 Programmation symbolique et Génération de code

Une des originalités de la plateforme est la possibilité d'utiliser le calcul symbolique et la génération de code pour accélérer, simplifier et optimiser le développement de nouvelles méthodes. Un des exemples d'utilisation de ces techniques de programmation concerne la définition de la formulation mécanique et l'obtention du problème algébrique

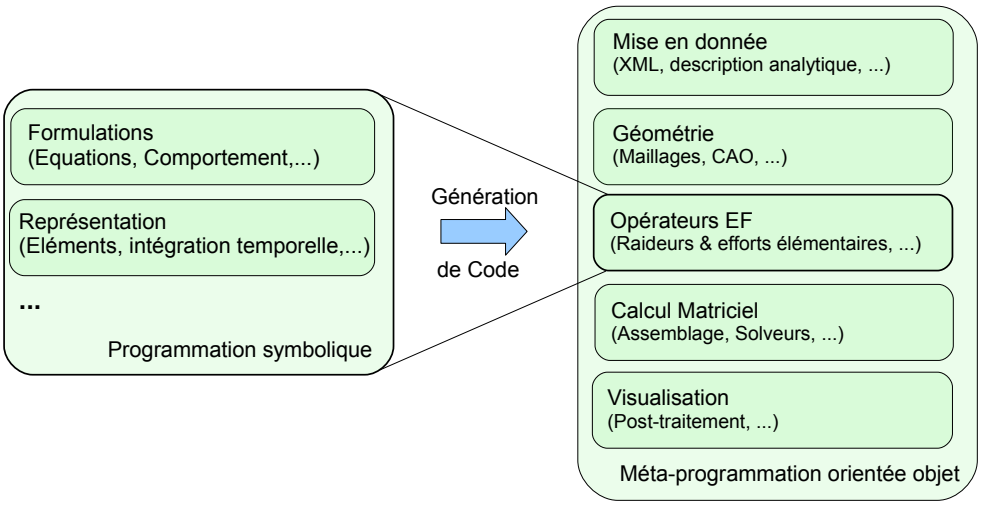

Figure 4.1: Structure de la plateforme de calcul LMTpp

discrétisé. Dans ce cas précis, il suffit de définir d'une part la discrétisation retenue et d'autre part l'expression continue du principe des puissances virtuelles. La procédure de génération de code se charge de construire le code source en C++ définissant les fonctions de calcul des opérateurs de raideur élémentaires.

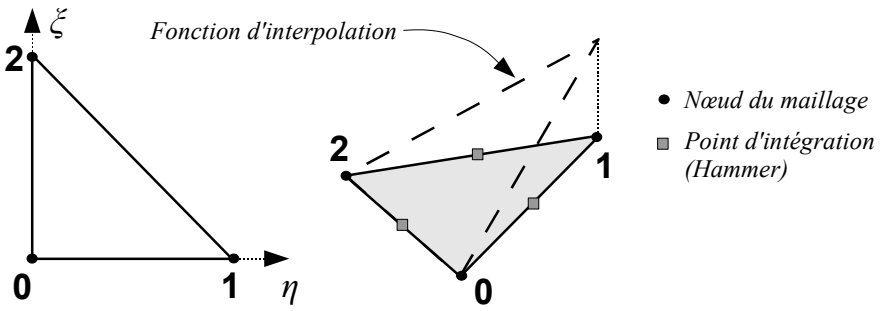

Figure 4.2: Elément triangulaire à 3 nœuds : géométrie, interpolation et points d'intégration

Considérons le cas simple d'un problème bi-dimensionnel d'élasticité linéaire discrétisé au moyen d'éléments triangulaires à interpolation linéaire. On définit en langage *Python* la discrétisation correspondent à l'élément de référence représenté sur la figure 4.2, c'est-à-dire successivement :

1. **la géométrie de l'élément** , nœuds, arêtes, coordonnées du système d'axe associé à l'élément de référence :

```
can_directly_be_represented_by = 'Triangle'

interval_var_inter = [
```

```
  [0,1],
  [0,1-var_inter[0]],
]

children = [
  { 'name':'Bar', 'nodes':[0, 1], 'var':[  var_inter[0]  ,    number(0)]   },
  { 'name':'Bar', 'nodes':[1, 2], 'var':[ 1-var_inter[0] ,  var_inter[0]]  },
  { 'name':'Bar', 'nodes':[2, 0], 'var':[   number(0)    , 1-var_inter[0]] },
]
```

2. **les fonctions de forme pour l'interpolation des champs** :

```
interpolation["nodal"] = (1-var_inter[0]-var_inter[1]) * val[0] + \
                         var_inter[0]                  * val[1] + \
                         var_inter[1]                  * val[2]
```

3. **les points pour l'intégration numérique des champs**, ici avec un point pour l'intégration des champs constants et trois points de Hammer pour les champs linéaires :

```
gauss_points[1] = [
  ( 1.0/2.0, { var_inter[0] : 1.0/3.0, var_inter[1] : 1.0/3.0 } ),
]
gauss_points[2] = [
  ( 1.0/6.0, { var_inter[0] : 1.0/2.0, var_inter[1] : 0.0 } ),
  ( 1.0/6.0, { var_inter[0] : 1.0/2.0, var_inter[1] : 1.0/2.0 } ),
  ( 1.0/6.0, { var_inter[0] : 0.0,     var_inter[1] : 1.0/2.0 } ),
]
```

Dans un second temps, on définit le problème d'élasticité, à travers :

1. **la donnée des paramètres** : le module d'Young, le coefficient de Poisson, la densité, etc., ainsi que la description de l'inconnue `dep` et des efforts appliqués :

```
elastic_modulus = Variable( interpolation='global', default_value='210e9')
poisson_ratio = Variable( interpolation='global', default_value='0.33')
density = Variable( interpolation='global', default_value='7800')

dep = Variable( unknown=True, nb_dim='2', default_value='0.0' )

f_nodal = Variable( nb_dim='2', nb_der=0, default_value='0.0,0.0')
f_surf = Variable( nb_dim='2', default_value='0.0,0.0')
f_vol = Variable( interpolation='global', nb_dim='2', default_value='0.0,0.0')
```

2. **l'écriture du principe des puissances virtuelles :**

```
def formulation():
  epsilon = grad_sym_col(dep.expr)
  epstest = grad_sym_col(dep.test)

  sigma = mul(hooke_isotrope(elastic_modulus.expr,poisson_ratio.expr,dim),epsilon)

  for i in range(2): res = sigma[i] * epstest[i]
  for i in range(2,epsilon.size()): res += 2 * sigma[i] * epstest[i]

  res -= density.expr * dot( f_vol.expr, dep.test )
  res = res*dV - dot( f_surf.expr, dep.test )*dS - dot( f_nodal.expr, dep.test )*dN

  return res
```

L'appel de cette dernière fonction `formulation()` renvoie ainsi **l'expression symbolique** P_M des puissances virtuelles en un point M donné :

$$P_M(u,\hat{u}) = [\varepsilon(u)\mathbf{K}\varepsilon(\hat{u}) - \rho f_{vol}.\hat{u}] * dV - f_{surf}.\hat{u} * dS - f_{nodal}.\hat{u}_{nodal} * dN \tag{4.1}$$

où dV, dS et dN sont des notations permettant de différencier les termes volumiques, surfaciques et nodaux.

Afin d'obtenir la fonction permettant le calcul de l'opérateur de raideur élémentaire, il est nécessaire d'effectuer une série d'opérations symboliques. L'expression P_M est tout d'abord intégrée numériquement sur la géométrie de l'élément. Pour le terme volumique, on retient une intégration numérique au moyen de 3 points de Hammer H_i :

$$\int_\Omega P_M^{Vol} dV = \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{6} \left[\varepsilon(u)\mathbf{K}\varepsilon(\hat{u}) - \rho f_{vol}.\hat{u}\right](H_i) \tag{4.2}$$

Le terme surfacique est intégré sur l'élément de barre associé à chacune des arêtes du triangle, et les termes nodaux peuvent être directement sommés. L'expression symbolique des termes $\mathbf{K}_{Tij}$ de la matrice de raideur tangente élémentaire est obtenue en dérivant le résultat précédent par rapport aux différentes composantes du champ virtuel (`dep.test` dans le script en *Python*, $\hat{u}$ dans l'équation 4.1) puis par rapport aux inconnues du problème (`dep.expr` ou u), soit :

$$\mathbf{K}_{Tij} = \frac{\partial^2 P}{\partial u_i \partial \hat{u}_j}(u,0) \tag{4.3}$$

De la même manière, on obtient le second membre du système linéarisé par dérivation symbolique de P par rapport à $\hat{u}$:

$$F_i = -\frac{\partial P}{\partial \hat{u}_j}(u,0) \tag{4.4}$$

A chaque étape, l'expression symbolique est « factorisée » : les sous-expressions utilisées plusieurs fois sont mises en commun pour réduire le nombre d'opérations finales. Le résultat est enfin transcrit en code source (en C++) définissant les fonctions de calcul des opérateurs matriciels et du second membre en fonction des différents paramètres (géométrie de l'élément, propriétés matériaux, forces appliquées, solution courante, etc.). L'ensemble de ces étapes de calcul symbolique et de génération de code peuvent être relativement coûteuses, mais elles ne sont réalisées qu'au moment de la compilation du code. Par ailleurs, les fonctions obtenues sont écrites automatiquement dans une forme optimisée du point de vue du coût de calcul, et permettent d'avoir un opérateur tangent exact à partir uniquement de la donnée des travaux virtuels (4.1).

Après compilation, ces fonctions peuvent être appelées, pour chacun des éléments du maillage considéré, pour les calcul des termes élémentaires et l'assemblage du problème tangent global :

$$\mathbf{K}_T.\Delta U = F \tag{4.5}$$

1.2.3 Outils de calcul algébrique

Il existe de très nombreuses bibliothèques de fonctions d'algèbre linéaire (BLAS, LAPACK, ATLAS, GOTO, etc.). Il est cependant difficile de trouver des outils à la fois flexibles, performants et libres, offrant une grande généricité, une vitesse optimisée et un stockage adapté aux problématiques considérées.

Les outils de calcul algébrique utilisés ici se basent sur la librairie `LFMat` développée par H. Leclerc pour la manipulation des matrices obtenues dans le cadre de la méthode des éléments finis (lfmat.sourceforge.net).Il s'agit d'une bibliothèque libre, écrite en C++, générique et entièrement paramétrée, grâce à l'utilisation de la notion de « template » (ou patron). Une attention particulière a été portée sur le stockage en mémoire pour une utilisation optimale des instructions SIMD des processeurs modernes. De même, l'usage de la mémoire cache, beaucoup plus rapide, a été optimisé, aboutissant à des performances tout à fait intéressantes (solveur jusqu'à 8 fois plus rapide que la version standard disponible dans LAPACK).

Les matrices peuvent contenir n'importe quel type de données (entier, double précision, flottant, expression symbolique, etc.) et l'utilisateur peut choisir l'orientation (ligne ou colonne) ainsi que le stockage et la structure (matrice pleine, « skyline » ou creuse). Enfin, les matrices peuvent être définies avec une taille fixe, permettant une optimisation supplémentaire au moment de la compilation. La plupart des méthodes classiques sont ainsi disponibles (produit, factorisation, ...) et permettent de programmer simplement les algorithmes de calcul matriciel, tout en étant particulièrement performantes.

1.2.4 Outils de méta-programmation pour la méthode des Eléments Finis

De très nombreux objets et méthodes couramment associés aux techniques du calcul élément-fini sont disponibles au sein de la plateforme et peuvent être directement utilisés pour le développement des nouvelles méthodes. L'objectif n'étant pas d'en faire ici une liste exhaustive, nous nous contentons d'en citer les principaux.

On retrouve tout d'abord la définition de tous les objets géométriques classiques : nœuds, éléments, maillages, ... ainsi que les méthodes de base permettant de les créer, les modifier, les explorer, ... Des méthodes sont par ailleurs disponibles pour importer ou exporter ces données dans différents formats génériques (.unv, .avs).

De la même façon, les fonctions d'assemblage de l'opérateur de raideur et du second membre ou de mise à jour des matrices élémentaires sont déjà implémentées, le développeur n'intervenant qu'au niveau des formulations élémentaires pour préciser la discrétisation et le comportement.

Concernant la mise en données, des outils permettent d'utiliser le langage *xml* pour la description des paramètres du modèle et de la méthode. D'autres fonctions permettent de faire le lien entre la plateforme de calcul et des environnements de pré- et post-traitement, pour la génération des maillages (*gmsh* , *Samcef*, etc.) et la visualisation des résultats (*Paraview*, http ://paraview.org).

2 Implémentation de la méthode pour les plaques et coques

2.1 Structure générale du code de calcul

Les stratégies de relocalisation non-linéaires primale et mixte ont été mises en œuvre au sein de cette plateforme pour le calcul de structures élancées tridimensionnelles. La structure du code de calcul réalisé est résumée dans la figure 4.3. Elle reprend les principes généraux introduits dans le chapitre 3. On y retrouve en particulier les deux schémas incrémentaux-itératifs de Newton, au niveau global pour le problème d'interface, et au niveau local, par sous-structure.

L'adaptation des stratégies de calcul aux grandes structures de plaques et coques a cependant nécessité de nouveaux développements que nous décrivons plus en détails dans les sections suivantes. Il s'agit en particulier du développement d'une formulation non-linéaire pour les éléments de plaques, d'une gestion générique des sous-structures, ou encore de méthodes de calcul des directions de recherche **k** pour les étapes locales non-linéaires.

2.2 Formulation en grands déplacements pour les structures de plaques et coques

Nous avons retenu le modèle de plaque de Mindlin, largement répandu pour le calcul de structures élancées (voir Chapitre 1), associé à un modèle de membrane pour le comportement dans le plan. Le modèle de Mindlin est adapté aux plaques relativement épaisses et prend en compte les contraintes de cisaillement transverse dans les éléments. Il a été mis en œuvre pour des éléments triangulaires et quadrangulaires à fonctions d'interpolation linéaires. Les inconnues nodales sont les déplacements u_x, u_y, u_z et les rotations θ_x, θ_y, θ_z.

La formulation retenue pour sa mise en œuvre dans un cadre non-linéaire géométrique est une formulation corotationnelle semblable à celle choisie pour les structures de poutres. Son implémentation est cependant ici simplifiée par l'utilisation du calcul symbolique et de la génération de code. En particulier, il n'est plus nécessaire d'implémenter le calcul complet des opérateurs de raideurs élémentaires et des opérateurs de raideur géométrique. En effet, seule l'expression du principe des puissances virtuelles, exprimé dans le repère corotationnel, est nécessaire. Les étapes de dérivation symbolique permettent d'obtenir automatiquement l'opérateur tangent exact. Cette partie de la programmation ne s'effectue pas en C++, mais en langage *Python*, plus convivial et plus souple. Nous en décrivons ici les principales étapes :

1. **Détermination du repère corotationnel** :
   La première étape de la formulation corotationnelle est de faire un choix de repère, dit corotationnel, c'est-à-dire tournant avec les éléments. Ce dernier s'appuie sur la déformée courante de l'élément considéré. Nous avons retenu ici une version des plus simples, qui consiste à choisir le premier vecteur du repère, x_R, parallèle à l'arête entre les nœuds 0 et 1, puis le second vecteur y_R, orthogonal au premier, dans le plan de l'élément, du côté du nœud 2, et enfin le troisième vecteur z_R de sorte

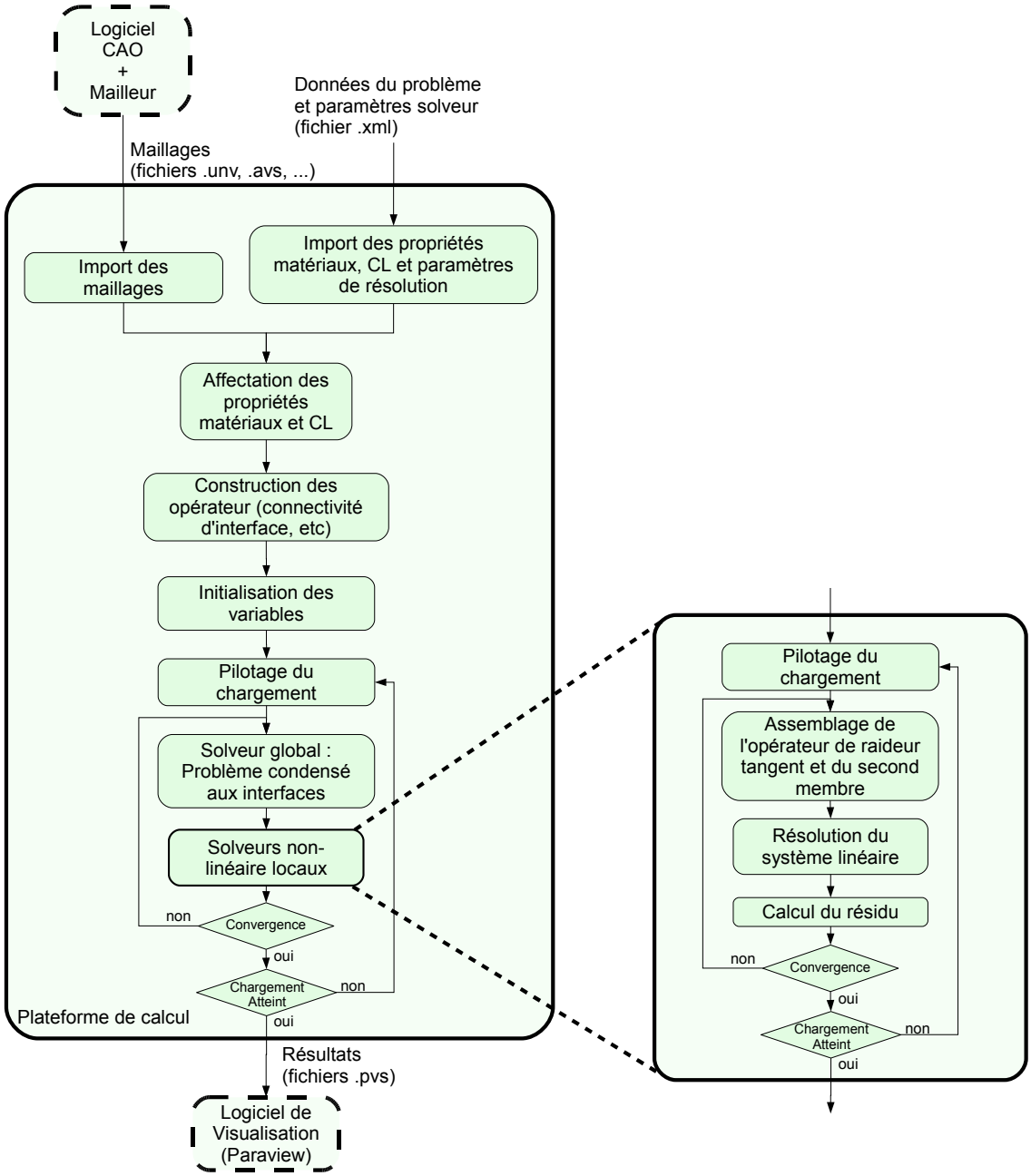

Figure 4.3: Représentation schématique de la structure du code

à former une base orthonormée directe. L'origine du repère est placée au centre de gravité de l'élément déformé. La figure 4.4 illustre cette construction. L'inconvé-

nient principal de ce choix est la dépendance du repère corotationnel à la numérotation des nœuds du maillage. Il existe cependant des versions plus sophistiquées, indépendantes de la numérotation, que nous n'avons pas mises en œuvre ici.

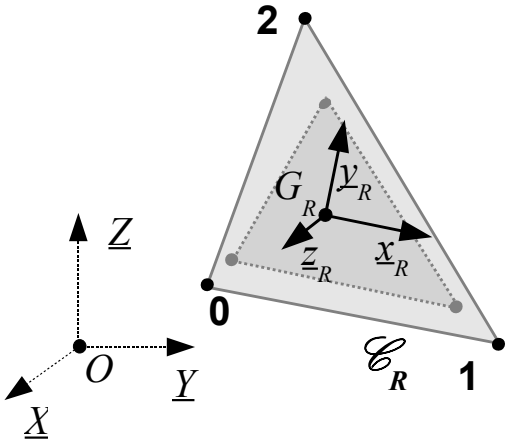

Figure 4.4: Détermination du repère corotationnel à partir de la géométrie courante

2. **Extraction des déplacements déformants dans le repère corotationnel** :
   Le choix du repère corotationnel étant fait, on détermine la partie déformante u_d du champ de déplacement u et θ_d du champ de rotation θ, dans le repère corotationnel, en extrayant le mouvement de corps rigide associé (déplacements et rotations). Cette étape est réalisée en suivant la démarche présentée dans la section 1.3.3 du Chapitre 1. La même opération est réalisée sur les champs virtuels $\hat{u}$ et $\hat{\theta}$.

3. **Ecriture de la formulation variationnelle dans le repère corotationnel** :
   Dans le repère corotationnel, on écrit le principe des puissances virtuelles à partir des expressions symboliques des champs réels et virtuels déformants, u_d, θ_d, $\hat{u}_d$ et $\hat{\theta}_d$. L'avantage de la formulation corotationnelle est de permettre l'écriture des puissances virtuelles sous l'hypothèse des petites perturbations, comme présenté dans l'Annexe C. On obtient donc pour la puissance des efforts intérieurs :

$$P_i(u_d, \theta_d, \hat{u}_d, \hat{\theta}_d) = \int_\Omega \Big[\gamma(u_d)^t.\mathbf{K}_m.\gamma(\hat{u}_d) + \chi(\theta_d)^t.\mathbf{K}_f.\chi(\hat{\theta}_d) \\ + \tau(u_d, \theta_d)^t.\mathbf{K}_t.\tau(\hat{u}_d, \hat{\theta}_d) + \delta(\theta_d z)^t.\mathbf{K}_{drill}.\delta(\hat{\theta}_d z) \Big] \, dV \quad (4.6)$$

   en notant $\gamma(.)$ les déformations de membrane, $\chi(.)$ les déformations de flexion, $\tau(.)$ les déformations de cisaillement transverse et $\delta(.)$ les déformations de « drilling ». Toutes ces mesures de déformations sont prises dans leur forme linéarisée et sont explicités en détail dans l'Annexe C.
   Les matrices $\mathbf{K}_m$, $\mathbf{K}_f$, $\mathbf{K}_t$ et $\mathbf{K}_{drill}$ sont les matrices de comportement généralisé, associées respectivement aux modes de déformations de membrane, de flexion, de

cisaillement transverse et de « drilling », elles aussi définies en annexe à partir de l'épaisseur h de la plaque, du module d'Young E du matériau et de son coefficient de Poisson ν.

La puissance des efforts extérieurs est, quant à elle, exprimée de façon classique dans le repère global. On pourrait envisager de l'exprimer dans le repère corotationnel dans le cas de forces suiveuses ou de pression, non considérées ici.

$$P_e(u_d, \theta_d, \hat{u_d}, \hat{\theta}_d) = \int_\Omega (f_{vol})^t.\hat{u}\, dV + \sum_{n \in N} \Big((f_{nodal})^t.\hat{u} + (m_{nodal})^t.\hat{\theta} \Big) \tag{4.7}$$

Remarque 1 : Dans l'équation (C.14), le produit scalaire $x^t.y$ n'est pas le produit scalaire euclidien classique mais une version modifiée, prenant en compte de manière correcte les termes de cisaillement dans le calcul de l'énergie en notation vectorielle.

Remarque 2 : Les modèles de membranes et de plaques les plus classiques ne prennent en compte que cinq degré de liberté par nœud : u_x, u_y, u_z, θ_x et θ_y. Cependant, en pratique, afin de pouvoir réaliser des assemblages d'éléments non-coplanaires, on introduit un troisième degré de rotation θ_z , dit de « drilling », sans sens physique. Afin d'obtenir des opérateurs de raideur définis positif, on modifie le plus souvent le principe des puissances virtuelles en ajoutant une énergie de « drilling », au moyen d'un opérateur de raideur $\mathbf{K}_{drill}$. Afin de ne pas perturber le résultat, le paramètre k_{drill} doit être choisi de sorte que l'énergie associée à ces modes de déformations reste négligeable devant l'énergie de déformation totale.

La procédure de génération de code précédemment décrite (intégration puis dérivation symbolique des puissances virtuelles) permet d'obtenir, de façon transparente pour le développeur, la fonction en C++ qui réalisera le calcul numérique de l'opérateur tangent élémentaire et du second membre. Cette opération est réalisée pour chaque type d'élément retenu, formulation et éléments étant définis de manière indépendante.

Remarque 3 : Les éléments de plaque de Mindlin de premier ordre présentent un phénomène de blocage en cisaillement transverse pour les petites épaisseurs h. Il convient de modifier l'intégration numérique du terme de cisaillement pour améliorer le comportement.

Remarque 4 : Si l'approche symbolique permet de simplifier le développement de nouveaux éléments à partir de la seule donnée de la formulation faible, elle présente cependant quelques inconvénients ou limitations :

– La mise en oeuvre de formulations d'éléments discrètes, de type *Discrete Kichhoff* ou *Discrete Shear*, n'est pas plus simple à mettre en oeuvre que par les techniques classiques. De plus, dans ce cas, la définition de la formulation n'est plus indépendante du type d'élément considéré.
– La dérivation symbolique permet de déterminer l'opérateur tangent élémentaire exact, ce qui peut être relativement coûteux à calculer, alors que certains termes sont bien souvent complètement négligeables. Une approche plus efficace consisterait à prendre en compte les ordres de grandeurs des expressions manipulées afin d'effectuer des simplifications automatiques, par approximation au cours du calcul symbolique. Ce point n'a pas été abordé dans le cadre de ces travaux.

2.3 Décomposition de domaine

La plupart des méthodes de décomposition de domaine s'appuient sur une technique de décomposition automatique du maillage initial, en général au moyen d'un algorithme de partitionnement de graphes non structurés, comme l'algorithme METIS par exemple. Cette approche a pour avantage de ne pas exiger d'intervention humaine, et mène en général à des décompositions équilibrées permettant, en théorie, un parallélisme optimal. Néanmoins, on observe bien souvent des découpages peu intuitifs (élancement extrême, interfaces très irrégulières ou réduites à un noeud,...) menant à des problèmes de conditionnement du système d'équation final. Par ailleurs, dans le cas des stratégies de relocalisation non-linéaires, l'équilibrage n'est plus assuré par ce type d'approches.

Nous avons fait le choix dans nos travaux d'une décomposition de domaine définie par l'utilisateur. Elle offre l'avantage d'un contrôle complet du découpage du problème initial. Par ailleurs, elle s'inscrit assez naturellement dans la démarche de mise en données classique, et permet de prendre en compte l'expertise de l'utilisateur dans la définition des sous-structures, en particulier dans le cadre des stratégies de relocalisation non-linéaire. La problématique de la mise en données pour le calcul parallèle ou le calcul collaboratif reste cependant encore largement inexplorée.

En pratique, et afin de faciliter la mise en données, seule la donnée des maillages des sous-structures est ici nécessaire, les interfaces entre sous structures étant reconstruites automatiquement. Les maillages de chaque sous-structure sont ainsi réalisés dans un mailleur au choix de l'utilisateur et doivent être exportés dans un des formats acceptés par la plateforme. Chacun des fichiers est ensuite relu par le code de calcul, qui crée les maillages correspondants dans sa structure de données.

L'étape suivante consiste à détecter automatiquement les interfaces entre les différentes sous-structures. Afin de minimiser le coût de recherche des noeuds d'interfaces, nous procédons à une sélection des nœuds potentiels par étapes :

1. Pour chacun sous-structure s, on détermine l'intervalle multidimensionnel I^s comprenant l'ensemble des noeuds du maillage (voir Figure 4.5) :

$$I^s = [x^s_{min}, x^s_{max}] \times \ [y^s_{min}, y^s_{max}] \times \ [z^s_{min}, z^s_{max}]$$

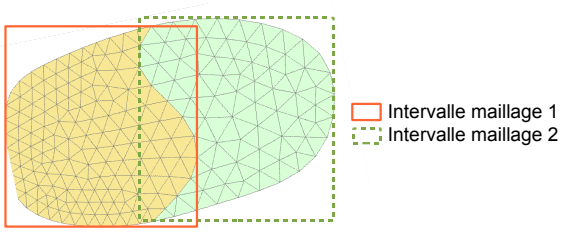

Figure 4.5: Définition des « boîtes » associées aux maillages

2. On détermine dans un second temps les intersections des intervalles I^s ainsi obtenus. Une intersection non-nulle indique deux sous-structures potentiellement connectées. Afin de réduire encore une fois le coût de calcul, on ne conserve que les noeuds de chaque maillage situés dans la zone d'intersection $I^{inter} = I^s \cap I^{s'}$ (Figure 4.6).

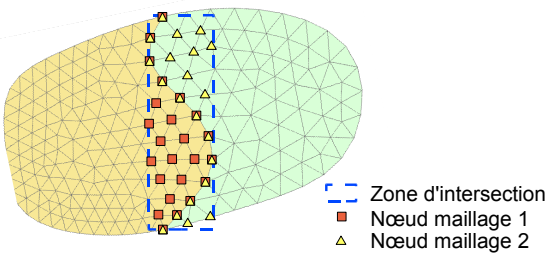

Figure 4.6: Détermination des zones d'intersection et des noeuds correspondants

3. Pour chacun des couples de sous-structures (s, s') ainsi déterminés, on cherche maintenant les noeuds en correspondance, inclus dans I^{inter} (Figure 4.7). La recherche ne s'effectue alors plus que sur un nombre réduit de noeuds, et l'algorithme conserve de bonne performances même pour des sous-structures de très grande taille. Le test de correspondance s'effectue sur les coordonnées des noeuds, à une tolérance près fixée par l'utilisateur.

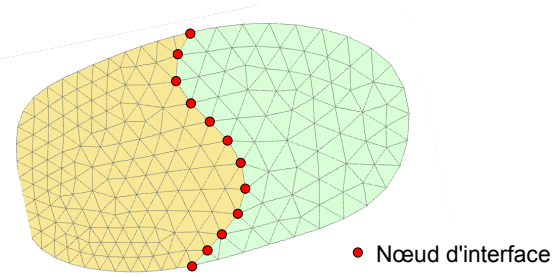

Figure 4.7: Détermination des noeuds d'interface

Remarque : Cette approche ne permet de considérer que le cas de maillages conformes aux interfaces. La généralisation aux interfaces non-conformes demanderait des informations supplémentaires sur les groupes de noeuds en vis-à-vis, ou bien un traitement des données s'appuyant sur les informations de géométrie des sous-structures.

2.4 Calcul du paramètre de raideur d'interface k pour les plaques et coques

Nous avons vu dans la section 3.3 du chapitre 3 que le paramètre **k** introduit dans l'approche mixte correspondait à une certaine raideur d'interface et qu'un choix optimal était la raideur « vue » par une interface. Un tel opérateur n'étant pas accessible à un coût raisonnable, on en cherche en général une approximation. Nous proposons ici les trois approximations que nous avons retenues et mises en œuvre.

■ Complément de Schur de la sous-structure voisine

Une première approximation consiste, comme pour ce qui a été présenté dans le cas des structures de poutres, à choisir pour chaque interface le complément de Schur de la sous-structure directement connectée. Ce choix peut cependant s'avérer coûteux lorsque les sous-structures comportent un grand nombre de degrés de liberté. Par ailleurs, l'opérateur obtenu est plein, de taille égale au nombre de degrés de liberté de l'interface. Outre les problèmes liés au stockage de l'opérateur et au transfert de données entre processeurs, ce choix vient fortement augmenter le coût de l'opération d'assemblage $\mathbf{K} + \mathbf{k}$, $\mathbf{K}$ ayant une structure de matrice creuse qu'il faudra alors largement modifier, de nombreux termes non-nuls provenant de **k**. Par ailleurs, la factorisation des opérateurs obtenus par sous-structure est extrêmement pénalisée, du fait de l'augmentation importante de leur largeur de bande.

Afin de contourner ces effets néfastes, on peut se contenter d'approximations de cet opérateur, notamment en ne conservant que :
- la diagonale de l'opérateur,
- une bande diagonale de largeur réduite (le nombre d'inconnues nodales par exemple, soit 6 dans notre cas),
- les termes correspondant à des termes non-nuls déjà existant dans la structure de la matrice creuse de l'opérateur de raideur **K**.

Les résultats obtenus dans les exemples présentés plus loin montrent que ces approximations, éventuellement associées à un paramètre multiplicatif α, permettent une diminution importante du coût tout en permettant de conserver de bonnes propriétés de convergence.

■ Complément de Schur du voisinage de l'interface

Afin d'éviter le calcul explicite de l'opérateur de Schur complet de la sous-structure voisine, nous avons mis en œuvre une méthode permettant de ne condenser que l'opérateur associé à une zone proche de l'interface. La recherche de la zone est réalisée en considérant les connectivités du maillage : on ne retient que les nœuds dont la distance à l'interface (i.e. le chemin le plus court à un nœud de l'interface, en termes de nombre d'arêtes) est inférieure à un paramètre p donné. La figure 4.8 représente la zone pour $p = 2$.

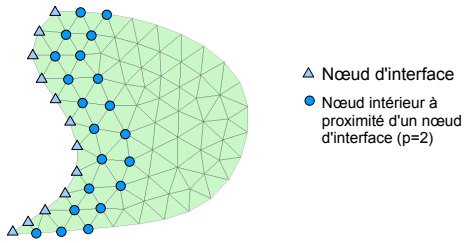

Figure 4.8: Détermination des nœuds du voisinage d'une interface (p=2)

Un inconvénient de cette méthode, comme dans le cas précédent, est de générer encore une fois des opérateurs pleins. Les même techniques que précédemment peuvent être retenues pour diminuer leur taux de remplissage.

■ Assemblage de compléments de Schur locaux

Une autre approche permettant de réduire la largeur de bande de l'opérateur d'interface **k**, proposée initialement dans [Magoulès 06], a été implémentée. Son principe repose sur une approximation de l'opérateur de raideur d'interface par une somme de contributions locales. Plus précisément, pour chaque nœud de l'interface, on calcule le complément de Schur d'une zone d'influence (quelques éléments de profondeur) sur un patch d'interface local autour de ce nœud, comme illustré figure 4.9 pour une profondeur $p = 2$.

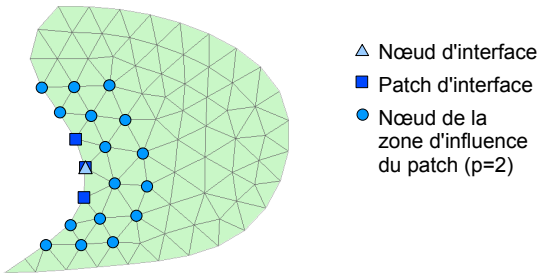

Figure 4.9: Détermination des nœuds du voisinage d'un nœud interface (p=2)

L'ensemble de ces contributions locales, éventuellement calculées en parallèle, sont ensuite rassemblées pour former l'opérateur **k**. Il s'agit d'un opérateur creux qui a pour avantage de ne pas modifier la structure de remplissage de la matrice de raideur de la sous-structure. Il requiert cependant un grand nombre de calculs de compléments de Schur.

3 Illustration et résultats comparatifs sur un exemple de caisson aéronautique

3.1 Cas test de référence : Caisson raidi

La structure retenue pour illustrer les performances des différentes stratégies est une structure de caisson raidi plus proche des applications industrielles considérées que les treillis présentés jusqu'ici. La figure 4.10 présente la géométrie du caisson de section rectangulaire et raidi par 8 raidisseurs internes. Il est encastré à une de ces extrémités et est soumis à un effort de flexion sur l'autre (voir figure 4.11). Le matériaux est de l'aluminium de module d'Young $E = 70\,000\ MPa$ et de coefficient de Poisson $\nu = 0,3$. L'épaisseur des parois est de $2\ mm$, la longueur totale fait $8\ m$. Cette structure est décomposée en 8 sous-domaines (ici identiques) représentés sur la figure 4.12. Les éléments choisis sont des éléments triangulaires de Mindlin à 3 nœuds. Le maillage comporte plus de 400 noeuds par sous-structure et 800 éléments, soit plus de $2\,400$ inconnues (déplacements et rotations nodales) par sous-structure, et $20\,000$ inconnues pour l'ensemble de la structure.

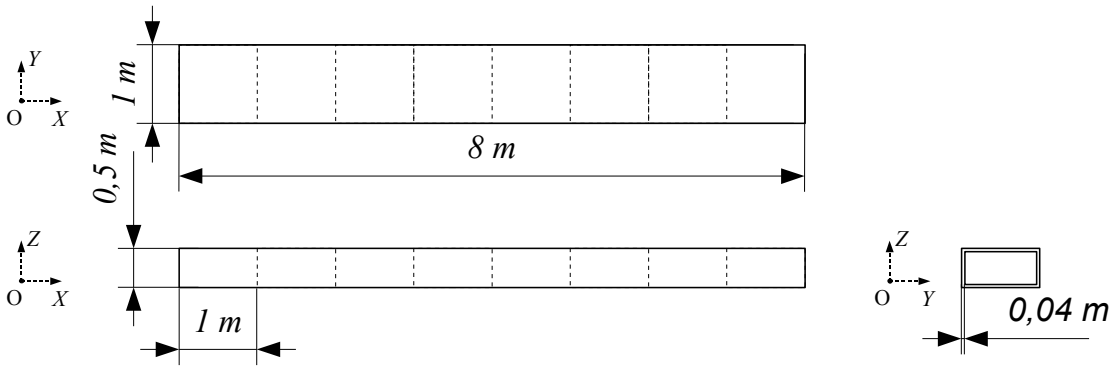

Figure 4.10: Géométrie du caisson raidi

La figure 4.13 présente la solution déformée du caisson obtenue par une approche Newton-Krylov-Schur considérée ici comme méthode de référence. On s'assurera par la suite que les solutions en déplacement obtenues par les différentes méthodes sont bien identiques à celle-ci. On observe bien la présence de modes locaux de flambage à proximité de la zone de fixation, sur la face en compression. Concernant les performances de la méthode NKS, il est nécessaire d'effectuer quatre incréments pour appliquer le chargement complet, faute de quoi le schéma itératif diverge. Au final, il est nécessaire de résoudre 18 systèmes linéaires condensés aux interfaces.

3.2 Résultats comparatifs

Les différentes méthodes de relocalisation non-linéaire ont été utilisées pour la résolution de ce problème. La figure 4.14 représente l'évolution de l'erreur globale (en échelle

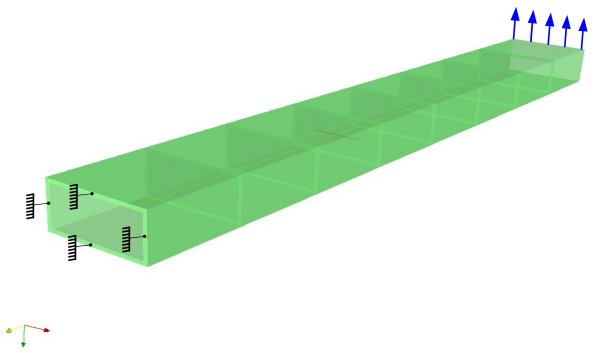

Figure 4.11: Conditions aux limites et chargement

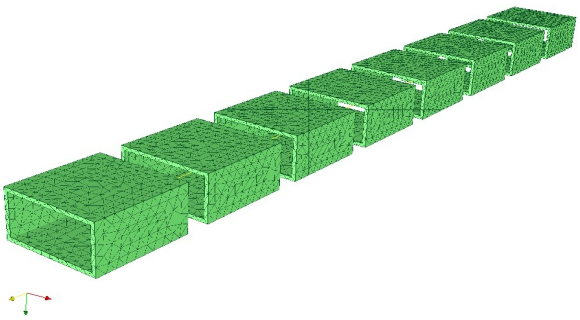

Figure 4.12: Décomposition de domaine et maillages associés

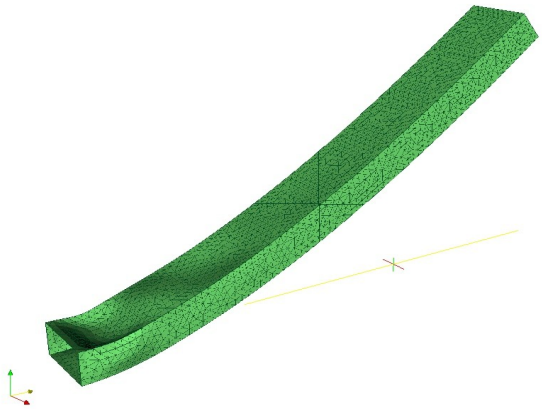

Figure 4.13: Solution déformée du caisson raidi en flexion

logarithmique) en fonction des itérations pour la méthode NKS, la stratégie avec relocalisation non-linéaire à déplacements imposés et la stratégie avec relocalisation non-linéaire mixte. Pour cette dernière méthode, la direction de recherche **k** a été calculée selon la méthode de l'assemblage de compléments de Schur locaux décrite plus haut, avec un paramètre de profondeur $p = 3$. Le critère de convergence global a été fixé dans tous les cas à $\epsilon_{glob} = 10^{-6}$ et le critère de convergence locale à $\epsilon_{loc} = 10^{-3}$. On observe l'amélioration significative du nombre d'itération globales avec les méthodes de relocalisation

globales. En particulier, alors que 4 incréments étaient nécessaires sur ce problème avec une approche NKS, il n'en faut plus que 2 avec la stratégie de relocalisation non-linéaire à déplacements imposés, et la méthode mixte converge en un seul incrément de chargement.

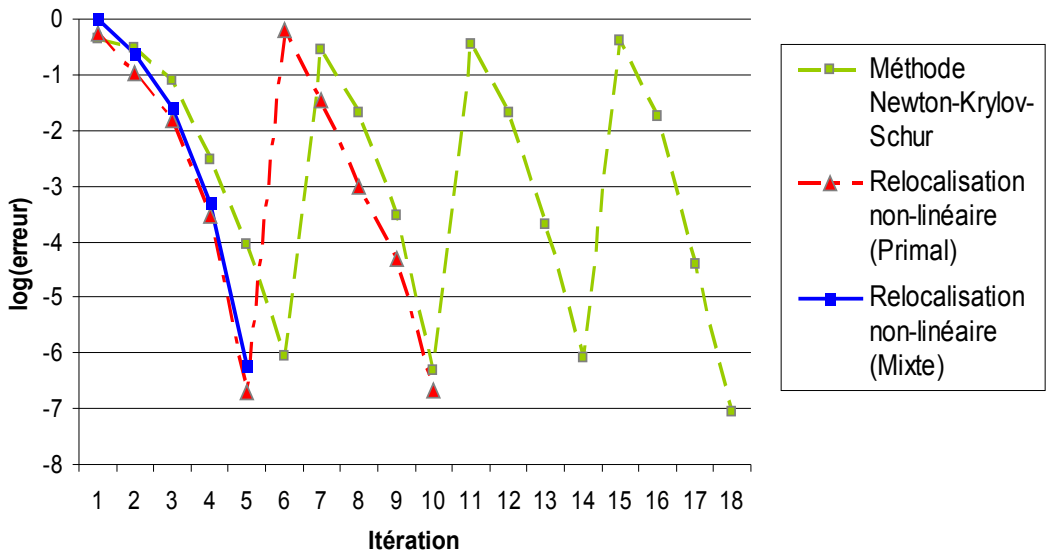

Figure 4.14: Evolution de l'erreur relative (échelle logarithmique) en fonction des itérations pour les trois stratégies

Le tableau 4.1 récapitule l'ensemble des résultats obtenus par chacune des différentes stratégies. Ces résultats confirment clairement ceux obtenus précédemment sur le cas plus simple d'une structure de treillis de poutre. Si la réduction du nombre de calculs locaux n'est pas très importante (de l'ordre de 14%), le nombre de résolutions de problèmes globaux est quant à lui très significativement diminué (gain d'un facteur de 3.6).

Stratégie	**Nombre de pas de chargement**	**Nombre d'itérations globales**	**Nombre total de calculs locaux**
NKS	4	18	144
Relocalisation non-linéaire (primal)	2	10	155
Relocalisation non-linéaire (mixte)	1	5	154

Tableau 4.1: Cas d'un caisson raidi - Résultats de convergence : approche NKS classique, et approches avec relocalisation de type primale ou mixte

4 Bilan du chapitre

Dans ce chapitre, nous avons décrit une mise en œuvre numérique efficace des stratégies de relocalisation non-linéaire déjà présentées, utilisant des techniques modernes de programmation. Le code de calcul obtenu a été utilisée pour la simulation de structures aéronautiques tridimensionnelles avec flambage local. L'application à un caisson raidi représentatif d'une structure aéronautique a ainsi permis de confirmer les résultats obtenus dans le chapitre 3 et d'illustrer l'avantage des stratégies de relocalisation non-linéaire, et en particulier de leur version mixte, sur les approches Newton-krylov-Schur classiques, considérées aujourd'hui les plus avancées pour la résolution de ce type de problèmes.

CHAPITRE 5

Approche multi-échelle pour les structures de plaques et coques

Nous proposons dans ce chapitre une approche multi-échelle pour les problèmes de plaques et coques s'appuyant une séparation micro-macro des champs d'interfaces. Après avoir présenté la méthode, nous proposons un choix pertinent pour l'espace macroscopique homogénéisé. La méthode est ensuite mise en œuvre pour des problèmes linéaires. L'extension au cas non-linéaires et les problématiques qui lui sont associées sont enfin évoquées. Ce chapitre a fait l'objet d'une communication [Cresta 07b].

Sommaire

1 Principe de la stratégie multi-échelle 145
1.1 Problème sous-structuré de référence 145
1.2 Séparation d'échelle aux interfaces 146
1.3 Stratégie de résolution 147
2 Mise en œuvre numérique 149
2.1 Discrétisation et séparation micro/macro 149
2.2 Etape locale par sous-structure 150
2.3 Etape de couplage aux interfaces 151
3 Définition de bases macro pour les structures élancées 153
3.1 Rappels pour les milieux continus classiques 153
3.2 Cas des plaques 154
3.3 Influence de la base macro sur la convergence de la stratégie 158
3.4 Cas des coques 160
4 Sur la mise en œuvre dans le cadre non-linéaire 164
4.1 Description 164
4.2 Projecteurs macro et non-linéarité géométrique 164
4.3 Sur la mise à jour des directions de recherche 166

5 Bilan du chapitre 166

Dans les chapitres précédents, nous avons proposé une approche multi-niveaux pour la gestion des non-linéarités associées aux structures élancées, basée sur les méthodes de décomposition de domaine, et plus précisément sur les approches Newton-Krylov-Schur, via l'introduction d'une étape de relocalisation non-linéaire.

Cette stratégie nécessite, après chaque étape non-linéaire locale, la résolution d'un problème linéaire tangent global, posé sur les inconnues d'interfaces. Jusqu'ici, nous avons utilisé, comme dans le cas des approches Newton-Krylov-Schur, un solveur itératif préconditionné de type Krylov (voir chapitre 2. Son extensibilité vis-à-vis du nombre de sous-structures considérées est assurée au moyen d'un problème grossier portant sur les mouvements de corps rigides des sous-structures, éventuellement augmenté de modes particuliers pertinents.

Dans ce chapitre, nous présentons une approche alternative pour la résolution itérative du problème global, s'appuyant sur les principes de la méthode LaTIn micro/macro (voir chapitre 2), étendue ici au cas des structures élancées considérées. Elle repose sur l'utilisation d'un problème grossier particulièrement pertinent, obtenu par homogénéisation numérique du problème initial.

1 Principe de la stratégie multi-échelle

1.1 Problème sous-structuré de référence

Nous nous intéressons ici à la résolution du problème **linéaire** résolu à l'étape globale des stratégies de relocalisation non-linéaire. Nous nous plaçons dans le cadre général de la version avec conditions aux limites mixtes, celle avec conditions aux limites de Dirichlet pouvant être vue comme un cas limite (voir Chapitre 3).

On considère une structure composée de sous-domaines Ω_s et d'interfaces parfaites Γ_i entre ces sous-domaines. Les champs de déplacement (et éventuellement de rotation) et d'effort (et moments) sur une interface Γ_i sont notés $\underline{U}_j^i$ et $\underline{F}_j^i$, l'indice j se rapportant au côté considéré. Ces mêmes champs, rapportés aux interfaces d'une sous-structure Ω_s, sont notés $\underline{U}^s$ et $\underline{F}^s$.

Les équations du problème sont alors réparties en deux groupes :

■ **le groupe des équations d'admissibilité statique et cinématique des champs d'interface, soit, pour chaque interface Γ_i :**

$$\underline{U}_1^i = \underline{U}_2^i \tag{5.1}$$

$$\underline{F}_1^i + \underline{F}_2^i = 0 \tag{5.2}$$

■ **le groupe des équations de comportement tangent des sous-structure, soit, pour chaque sous-structure Ω_s :**

$$\mathcal{S}_T^s \ (\underline{U}^s - \underline{u}^s|_{\Gamma\cap\partial\Omega^s}) = \underline{F}^s - \underline{\underline{\sigma}}^s\big|_{\Gamma\cap\partial\Omega^s} .\underline{n} \tag{5.3}$$

où $\mathcal{S}_T^s$ est l'opérateur de Steklov-Poincaré associé au problème linéarisé autour de la configuration considérée, et les champs $\underline{u}^s$ et $\underline{\underline{\sigma}}^s.\underline{n}$ sont des données du problème, provenant de l'étape non-linéaire locale antérieure.

1.2 Séparation d'échelle aux interfaces

La stratégie multi-échelle proposée ici s'appuie sur une décomposition des champs d'interface, à savoir les déplacements $\underline{U}$ et les efforts $\underline{F}$, comme la somme d'une partie macroscopique et d'une partie microscopique :

$$\underline{F} = \underline{F}_M + \underline{F}_m \tag{5.4}$$
$$\underline{U} = \underline{U}_M + \underline{U}_m \tag{5.5}$$

Cette décomposition est choisie de sorte que le travail des quantités d'interface soit partitionné entre une contribution micro et une contribution macro, soit :

$$\langle \underline{F}, \underline{U} \rangle_{\Gamma_i} = \langle \underline{F}_M, \underline{U}_M \rangle_{\Gamma_i} + \langle \underline{F}_m, \underline{U}_m \rangle_{\Gamma_i} \tag{5.6}$$

où $\langle ., . \rangle_{\Gamma_i}$ est la forme bilinéaire travail définie sur les espaces des quantités d'interface par :

$$\langle \underline{F}, \underline{U} \rangle_{\Gamma_i} = \int_{\Gamma_i} \underline{F} \ \underline{U} d\Gamma \tag{5.7}$$

Les parties macroscopiques des efforts et déplacements sont obtenues au moyen d'un projecteur unique $\mathcal{P}_M$ sur les espaces macroscopiques respectifs :

$$\underline{F}_M = \mathcal{P}_M(\underline{F}) \tag{5.8}$$
$$\underline{U}_M = \mathcal{P}_M(\underline{U}) \tag{5.9}$$

En notant $\underline{e}_k^M$ les vecteurs d'une base de l'espace macroscopique orthogonale au sens du produit scalaire $\langle ., . \rangle_{\Gamma_i}$, ce projecteur est défini par :

$$\mathcal{P}_M(\underline{F}) = \sum_{k=1}^{n_M} \langle \underline{F}, \underline{e}_k^M \rangle_{\Gamma_i} \underline{e}_k^M \tag{5.10}$$

Les fonctions de base de l'espace macroscopique sont choisies *a priori* en fonction de considérations mécaniques. La figure 5.1 illustre un exemple de décomposition micro/macro pour une fonction quelconque. L'espace macro retenu dans cet exemple est l'espace des fonctions affines.

Les choix classiques d'espaces macro adaptés aux problèmes bi- et tri-dimensionnels sont rappelés dans la section 3.1 de ce chapitre, et une extension aux structures de plaques et coques est ensuite proposée.

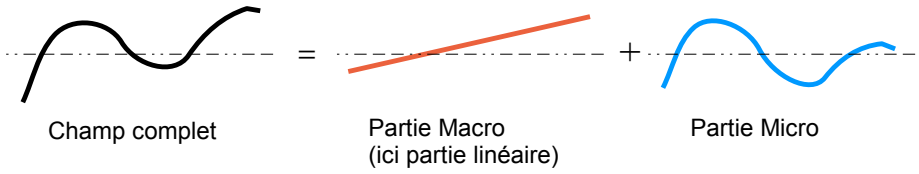

Figure 5.1: Exemple de séparation micro/macro d'un champs d'interface

1.3 Stratégie de résolution

La stratégie de résolution micro-macro s'appuie sur le schéma de résolution itératif de la méthode LaTIn, présenté dans le chapitre 1. Elle consiste à rechercher successivement une approximation des champs solutions vérifiant chacun des deux groupes d'équations, au moyen de directions de recherches supplémentaires. Ainsi, chaque itération du processus est constituée de deux étapes :

1.3.1 Etape locale par sous-structure :

Cette étape consiste à trouver une approximation $\underline{\widehat{U}}$ et $\underline{\widehat{F}}$ des champs solutions vérifiant le comportement tangent des sous-structures, soit :

$$\mathcal{S}_T^s \left(\underline{\widehat{U}}^s - \underline{u}^s|_{\Gamma\cap\partial\Omega^s} \right) = \underline{\widehat{F}}^s - \underline{\underline{\sigma}}^s\big|_{\Gamma\cap\partial\Omega^s} .\underline{n} \tag{5.11}$$

On ajoute une relation supplémentaire, paramétrée par une direction de recherche k^s, et permettant de relier $\underline{\widehat{U}}$ et $\underline{\widehat{F}}$ aux valeurs des champs $\underline{U}$ et $\underline{F}$ obtenus à l'itération précédente. Cette relation peut s'exprimer, pour chaque sous-structure Ω_s :

$$\underline{\widehat{F}}^s - \underline{F}^s = k^s(\underline{\widehat{U}}^s - \underline{U}^s) \tag{5.12}$$

Par substitution de cette relation dans (5.11), on obtient au final l'équation suivante :

$$(\mathcal{S}_T^s + k^s)\, \underline{\widehat{U}}^s = k^s \underline{U}^s - \underline{F}^s + \mathcal{S}_T^s\, \underline{u}^s|_{\Gamma\cap\partial\Omega^s} - \underline{\underline{\sigma}}^s\big|_{\Gamma\cap\partial\Omega^s} .\underline{n} \tag{5.13}$$

qui correspond, pour chacune des sous-structures, à la résolution d'un problème condensé avec conditions aux limites mixtes sur les interfaces. L'opérateur k^s peut être interprété comme la raideur de l'environnement de la sous-structure Ω_s.

1.3.2 Etape de couplage aux interfaces :

A cette étape, connaissant les champs $\underline{\widehat{U}}$ et $\underline{\widehat{F}}$ provenant de l'étape précédente, on cherche la nouvelle approximation de $\underline{U}$ et $\underline{F}$ vérifiant les équations d'admissibilité statique (5.2) et cinématique (5.1). Cette étape n'est pas réalisée sur les champs d'interface complets, mais de manière indépendante sur leurs parties micro et macro, soit :

$$\underline{U}_m^1 = \underline{U}_m^2 \tag{5.14}$$

$$\underline{F}_m^1 + \underline{F}_m^2 = \underline{0} \tag{5.15}$$

et :

$$\underline{U}_M^1 = \underline{U}_M^2 \tag{5.16}$$
$$\underline{F}_M^1 + \underline{F}_M^2 = \underline{0} \tag{5.17}$$

On associe, pour chacune des parties micro et macro, des directions de recherches permettant de relier les efforts et déplacements recherchés ($\underline{U}$ et $\underline{F}$) à ceux obtenus à l'étape précédente ($\widehat{\underline{U}}$ et $\widehat{\underline{F}}$), soit, pour chaque côté j de l'interface considérée :

$$k_m^j(\underline{U}_m^j - \widehat{\underline{U}}_m^j) = \underline{F}_m^j - \widehat{\underline{F}}_m^j \tag{5.18}$$

$$k_M^j(\underline{U}_M^j - \widehat{\underline{U}}_M^j) = \underline{F}_M^j - \widehat{\underline{F}}_M^j \tag{5.19}$$

Le choix de ces directions de recherche est important pour l'efficacité de la stratégie. Le principe est ici de définir des directions de recherches **locales** par interface pour la partie **micro**, afin d'obtenir des problèmes d'interfaces découplés, et des directions de recherche **globales** pour la partie **macro**, afin de définir un problème global grossier pour assurer l'extensibilité de la stratégie itérative.

■ Etape de couplage sur la partie micro :

Pour la partie micro, il convient de choisir comme directions de recherche k_m^i, de part et d'autre de chaque interface considérée, des opérateurs locaux par interface travaillant sur l'espace des champs microscopiques. Cet opérateur peut être vu comme un rigidité micro d'interface, et peut être déterminé à partir des opérateurs de raideur des sous-structures adjacentes.

En combinant ces directions de recherche micro et les équations d'admissibilité sur la partie micro, on obtient, pour chaque interface, les équations permettant de déterminer les déplacements $\underline{U}_m$:

$$(k_m^1 + k_m^2)\underline{U}_m = \sum_{j=1,2} \left(k_m^j \widehat{\underline{U}}_m^j - \widehat{\underline{F}}_m^j \right) \tag{5.20}$$

et les efforts $\underline{F}_m^j$:

$$\underline{F}_m^j = \widehat{\underline{F}}_m^j + k_m^j \left(\underline{U}_m - \widehat{\underline{U}}_m^j \right) \tag{5.21}$$

■ Etape de couplage sur la partie macro

Pour la partie macro, il est nécessaire de choisir des opérateurs **par sous-structure** permettant de lier les inconnues macroscopiques de toutes les interfaces, comme dans le cas de la stratégie mixte présentée dans le chapitre 3. L'extensibilité de la méthode est ainsi permise grâce à une propagation d'une partie de l'information sur l'ensemble de la structure à chaque itération.

Comme dans le cas précédent, il convient de choisir un opérateur macro ayant un sens particulier vis-à-vis du problème mécanique considéré, et plus particulièrement un opérateur associé au comportement tangent de chaque sous-structure, travaillant dans l'espace des champs macroscopiques d'interface. En reprenant les concepts développés dans les approches multigrilles ou la méthode LaTIn micro/macro, nous proposons d'effectuer une projection sur l'espace macroscopique de l'opérateur de Steklov-Poincaré tangent par sous-structure $\mathcal{S}_T^s$. La direction de recherche macro par sous-structure $\mathcal{S}_M^s$ s'écrit alors :

$$\mathcal{S}_M^s = \mathcal{P}_M^s.\mathcal{S}_T^s.\mathcal{P}_M^{s\ t} \tag{5.22}$$

Elle peut ainsi être vue comme un opérateur de comportement homogénéisé de la sous-structure Ω_s et permet de construire un problème global pertinent. Au final, en combinant les directions de recherche pour chaque sous-structure et les conditions d'admissibilité sur les efforts et déplacements macroscopiques, on obtient un problème global en déplacements de la forme suivante :

$$\mathcal{S}_M \underline{U}_M = \sum_s \left(\mathcal{S}_M^s \widehat{\underline{U}}_M^s - \widehat{\underline{F}}_M^s \right) \tag{5.23}$$

2 Mise en œuvre numérique

Nous présentons dans cette section les systèmes matriciels obtenus par discrétisation des équations continues précédentes, ainsi qu'un choix possible de directions de recherche.

2.1 Discrétisation et séparation micro/macro

Les champs d'interface sont interpolés sur des fonctions de forme éléments finis classiques définies sur les interfaces. Ces fonctions sont notées $\underline{\varphi}_i$.

Les champs d'interface peuvent donc être définis par la donnée des vecteurs U et F dont la taille correspond au nombre de degrés de liberté de l'interface :

$$\underline{U} = \sum_i U_i \, \underline{\varphi}_i \tag{5.24}$$

$$\underline{F} = \sum_i F_i \, \underline{\varphi}_i \tag{5.25}$$

Les champs micro sont interpolés sur les mêmes fonctions, soit :

$$\underline{U}_m = \sum_i U_{mi} \, \underline{\varphi}_i \tag{5.26}$$

$$\underline{F}_m = \sum_i F_{mi} \, \underline{\varphi}_i \tag{5.27}$$

ainsi que les vecteurs de base de l'espace macro :

$$\underline{e}_k^M = \sum_{i=1} e_{k\ i}^M \, \underline{\varphi}_i \tag{5.28}$$

Les champs macro, quant à eux, sont définis par leurs composantes sur chacun des vecteurs de base $\underline{e}_k^M$, soit :

$$\underline{U}_M = \sum_{k=1}^{N_M} U_{Mk}\, \underline{e}_k^M \tag{5.29}$$

$$\underline{F}_M = \sum_{k=1}^{N_M} F_{Mk}\, \underline{e}_k^M \tag{5.30}$$

L'opérateur de projection macro discrétisé $\mathbf{P}_M$ s'exprime alors :

$$\mathbf{P}_M = \mathbf{e}^M \mathbf{e}^{M^t} \mathbf{M} \tag{5.31}$$

où $\mathbf{e}^M$ rassemble les vecteurs e_k^M, et où $\mathbf{M}$ est assimilable à une matrice de masse de l'interface, définie par :

$$\mathbf{M}_{ij} = \left\langle \underline{\varphi}_i, \underline{\varphi}_j \right\rangle_{\Gamma_i} \tag{5.32}$$

On en déduit les équations d'extraction des parties micro des champs d'interface :

$$U_m = (\mathbf{Id} - \mathbf{e}^M \mathbf{e}^{M^t} \mathbf{M}) U \tag{5.33}$$

$$F_m = (\mathbf{Id} - \mathbf{e}^M \mathbf{e}^{M^t} \mathbf{M}) F \tag{5.34}$$

ainsi que des parties macro :

$$U_M = \mathbf{e}^{M^t} \mathbf{M}\, U \tag{5.35}$$

$$F_M = \mathbf{e}^{M^t} \mathbf{M}\, F \tag{5.36}$$

Les champs totaux s'expriment enfin :

$$U = U_m + U_M \mathbf{e}^M \tag{5.37}$$

$$F = F_m + F_M \mathbf{e}^M \tag{5.38}$$

$$\tag{5.39}$$

2.2 Etape locale par sous-structure

Après discrétisation, l'étape locale par sous-structure correspond à la résolution d'un problème condensé sur les degrés de liberté d'interface, avec conditions aux limites mixtes. En pratique, plutôt que de calculer explicitement le complément de Schur de l'opérateur de raideur tangent $\mathbf{K}_T^s$, on préfère résoudre le problème discrétisé complet par sous-structure. On obtient alors le système d'équations linéaire suivant, posé sur les inconnues en déplacement $\widehat{u}^s$ au sein de la sous-structure Ω_s :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{Tii}^s & \mathbf{K}_{Tib}^s \\ \mathbf{K}_{Tbi}^s & \mathbf{K}_{Tbb}^s + \mathbf{k}^s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{u}_i^s \\ \widehat{u}_b^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_i^s \\ f_b^s + \mathbf{k}^s . U^s - F^s \end{bmatrix} \tag{5.40}$$

où U^s et F^s proviennent de l'étape globale linéaire précédente, f^s de l'étape de relocalisation non-linéaire précédente, et où $\mathbf{k}^s$ est l'opérateur de raideur d'interface discrétisé. Sous condition de positivité de $\mathbf{K}_T^s$ et de stricte positivité $\mathbf{k}^s$, ce problème admet une solution unique. Les différents problèmes sont locaux par sous-structure et peuvent être résolus de manière indépendante, en parallèle.

Le vecteur $\widehat{U}^s$ des déplacements d'interface est obtenu par restriction de $\widehat{u}^s$ aux degrés de liberté d'interface, soit :

$$\widehat{U}^s = \widehat{u}_b^s \tag{5.41}$$

Les efforts d'interface $\widehat{F}^s$ sont ensuite déterminés au moyen de la direction de recherche :

$$\widehat{F}^s = F^s + \mathbf{k}^s(\widehat{U}^s - U^s) \tag{5.42}$$

Le choix de l'opérateur $\mathbf{k}^s$ peut être réalisé de la même manière que pour l'étape de relocalisation non-linéaire, en particulier par la méthode d'assemblage de compléments de Schur locaux présenté dans le chapitre 4. Il s'agit d'un compromis permettant d'obtenir une bonne estimation de la raideur des sous-structures environnantes et un remplissage de matrice le plus faible possible, afin de ne pas augmenter la largeur de bande de l'opérateur linéaire à factoriser.

En pratique, on calcule une fois pour toute et on stocke l'opérateur d'interface $\mathbf{k}^i$, correspondant à une interface Γ_i. L'opérateur de sous-structure $\mathbf{k}^s$ est obtenu par assemblage des opérateurs $\mathbf{k}^i$ pour chacune des interfaces de la sous-structure Ω_s.

2.3 Etape de couplage aux interfaces

L'étape de couplage aux interfaces est réalisée indépendamment sur les parties micro et macro des champs d'interface. Nous présentons ici les problèmes obtenus à chaque échelle.

■ Couplage sur la partie micro

Les déplacements micro d'interface U_m sont déterminés, pour chaque interface Γ_i, par la résolution de l'équation suivante :

$$(\mathbf{k}_m^1 + \mathbf{k}_m^2)U_m = \sum_{j=1,2} \left(\mathbf{k}_m^j \widehat{U}_m^j - \widehat{F}_m^j\right) \tag{5.43}$$

où les opérateurs $\mathbf{k}_m^j$ sont des matrices carrées ayant pour taille le nombre de degrés de liberté de l'interface, et représentant la rigidité « micro » des sous-structures de part et d'autre. On choisira en pratique les mêmes directions de recherche qu'à l'étape locale, en s'assurant au besoin que les champs obtenus font bien partie de l'espace des solutions microscopiques par une projection sur l'espace micro :

$$\mathbf{k}_m = \mathbf{P}_m \mathbf{k} \mathbf{P}_m^t \tag{5.44}$$

Ces problèmes par interface sur les quantités micro sont indépendants entre eux, et peuvent être résolus en parallèle. On détermine ensuite les efforts d'interface grâce à la relation suivante :

$$F_m^i = \widehat{F}_m^i + \mathbf{k}_m^i \left(U_m - \widehat{U}_m^i \right) \tag{5.45}$$

■ **Couplage sur la partie macro**

Les déplacements macro d'interface U_M sont obtenus par la résolution du problème global suivant, provenant de la discrétisation du problème (5.23) :

$$\mathbf{S}_M U_M = \sum_s \mathbf{A}_M^s \left(\mathbf{S}_M^s u_m^s - f_m^s \right) \tag{5.46}$$

où $\mathbf{A}_M^s$ est l'opérateur d'assemblage macro permettant d'associer les degrés de libertés macro de chaque sous-structure aux degrés macro globaux, et où l'opérateur macro global assemblé $\mathbf{S}_M$ est défini par :

$$\mathbf{S}_M = \sum_s \mathbf{A}_M^s \mathbf{S}_M^s \mathbf{A}_M^{s\ t} \tag{5.47}$$

On obtient ensuite directement les efforts macro grâce à la relation suivante, définie par sous-structure :

$$F_M^s = f_m^s + \mathbf{S}_M^s \left(U_M^s - u_M^s \right) \tag{5.48}$$

Les opérateurs macro par sous-structure $\mathbf{S}_M^s$ sont calculés une fois pour toute en début de processus itératif. Nous avons vu plus haut qu'ils pouvaient s'écrire formellement comme la projection des opérateurs de Schur sur l'espace macro, soit :

$$\mathbf{S}_M^s = \mathbf{e}^{M\,t} \mathbf{M} \,.\, \mathbf{S}_T^s \,.\, \mathbf{M}^t \mathbf{e}^M \tag{5.49}$$

Ce sont donc des matrices carrées dont la taille est égale au produit du nombre d'interfaces de la sous-structure Ω_s par la dimension n_M de l'espace macro.

En pratique, le calcul explicite de ce produit peut être relativement coûteux, puisque il nécessite de calculer explicitement le complément de Schur de la structure considérée, puis d'effectuer deux produits entre des matrices pleines de taille relativement grande (opération de complexité en $\mathcal{O}(n^2)$, n étant le nombre d'inconnues d'interface). Une autre technique de calcul, moins coûteuse, consiste à construire $\mathbf{S}_M^s$ en résolvant une série de problèmes par sous-structure où l'on choisit successivement comme second membre les fonctions de base de l'espace macro, toutes les autres composantes étant prises nulles. Le coût de cette approche est relativement faible, puisqu'il n'y a qu'un petit nombre de fonctions macro, et qu'elle ne nécessite que d'effectuer des calculs linéaires par sous-structure, l'opérateur de raideur ayant généralement déjà été factorisé.

3 Définition de bases macro pour les structures élancées

L'efficacité de la stratégie multi-échelle proposée ici, tout comme celle de la méthode LATIN micro/macro, réside dans un choix pertinent de l'espace macroscopique pour les champs solutions. Après avoir rappelé un choix optimal dans le cas des milieux continus classiques, nous présentons une extension au cas des structures de plaques et coques.

3.1 Rappels pour les milieux continus classiques

Le choix d'une base macroscopique adaptée à la résolution des problèmes de mécanique des milieux continus classiques a été assez largement étudié dans des travaux antérieurs [Loiseau 01]. Il a été montré numériquement que, pour garantir l'extensibilité numérique de la stratégie multi-échelle, les espaces macroscopiques doivent contenir au minimum, pour les déplacements, les modes de corps rigide des interfaces (déplacements et rotations) et, pour les efforts, les résultantes et moments. Ce choix est guidé par le principe de Saint Venant, qui stipule que seuls les résultante et moment d'un champs d'effort ont une influence sur la solution à une certaine distance de la zone d'application. La partie microscopique complémentaire ne modifie que localement la solution du problème, et n'apporte pas d'information pertinente au niveau global. Ces considérations mécaniques donnent ainsi une pertinence particulière à la séparation d'échelle réalisée.

En pratique, on choisi généralement les fonctions affines par interface pour les déplacements et efforts macro. Outre les modes d'interfaces précédemment cités, l'espace macro ainsi défini comprend des modes d'extension ou de cisaillement des interfaces qui, même s'ils ne sont pas rigoureusement indispensables à l'extensibilité, peuvent améliorer la convergence de la méthode.

Au final, il faut quatre fonctions de base macro pour une interface Γ en deux dimensions. Une base orthonormée possible est la suivante :

$$\left\{\underline{e}_1^M, \underline{e}_2^M, \underline{e}_3^M, \underline{e}_4^M\right\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{mes(\Gamma)}}\underline{n}_1 \ , \ \frac{1}{\sqrt{mes(\Gamma)}}\underline{n}_2 \ , \right.$$

$$\left. \frac{1}{\sqrt{I_3}}\underline{e}_3 \wedge \underline{GM} \ , \ \left(\left(\underline{n}_1 \cdot \underline{GM}\right) n_1\right)^{\perp} \right\}$$

où $\underline{GM}$ le vecteur position ayant pour origine le centre d'inertie de Γ, $\mathbf{I}$ est la matrice d'inertie de l'interface ($\mathbf{I} = \int_\Gamma \underline{GM} \otimes \underline{GM} ds$), $\underline{n}_1$ et $\underline{n}_2$ ses deux premiers vecteurs propres, $\underline{e}_3$ le vecteur normal au plan d'étude et I_3 le moment principal de l'interface au point G suivant la direction $\underline{e}_3$. La notation $^\perp$ correspond à une orthonormalisation d'un vecteur par rapport aux vecteurs précédents, réalisée par un procédé d'orthogonalisation de Schmidt par exemple.

Cette base est illustrée sur la figure 5.2 dans le cas d'une interface plane de géométrie quelconque. Les deux premiers vecteurs correspondent ainsi à des déplacements suivant

$\underline{n}_1$ et $\underline{n}_2$, le troisième vecteur correspond à une extension $\underline{n}_1$, le quatrième à une rotation (linéarisée) selon $\underline{e}_3$.

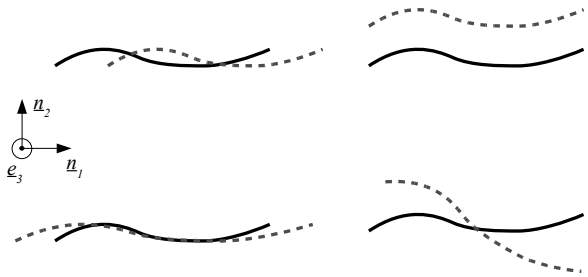

Figure 5.2: Modes de déformation macro pour une interface 2D (déformée en lignes interrompues)

Ces expressions peuvent être étendues au cas tridimensionnel, menant à une base de 9 fonctions macro par interface (trois déplacements, trois rotations, deux extensions et un mode de cisaillement). Les divers modes d'interfaces sont illustrés sur la figure 5.3. Ces modes macros restent cependant limités aux structures massives, et leur adaptation est nécessaire pour traiter les problèmes de structures élancées, modélisées au moyen de plaques et coques. Nous proposons dans les sections suivantes de telles adaptations.

3.2 Cas des plaques

Nous considérons ici la restriction du problème au cas des plaques, c'est à dire des **structures élancées planes**. Contrairement aux structures massives, le champ solution contient non seulement les **déplacements suivant les trois directions** de l'espace u_x, u_y et u_z, mais aussi les **deux rotations** dans le plan θ_x et θ_y.

En suivant les même considérations mécaniques que dans le cas précédent, nous proposons la base macro suivante, correspondant à une approximation affine partielle des déplacements et rotations d'interface, chaque vecteur de base étant représenté par un couple de vecteurs de déplacement et de rotation. La base proposée est constituée de :

– trois modes de **déplacement rigide** :

$$\left\{\underline{e}_1^M, \underline{e}_2^M, \underline{e}_3^M\right\} = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{mes(\Gamma)}} \underline{n}_1, \underline{0} \right), \right.$$

$$\left. \left(\frac{1}{\sqrt{mes(\Gamma)}} \underline{n}_2, \underline{0} \right), \left(\frac{1}{\sqrt{mes(\Gamma)}} \underline{n}_3, \underline{0} \right) \right\}$$

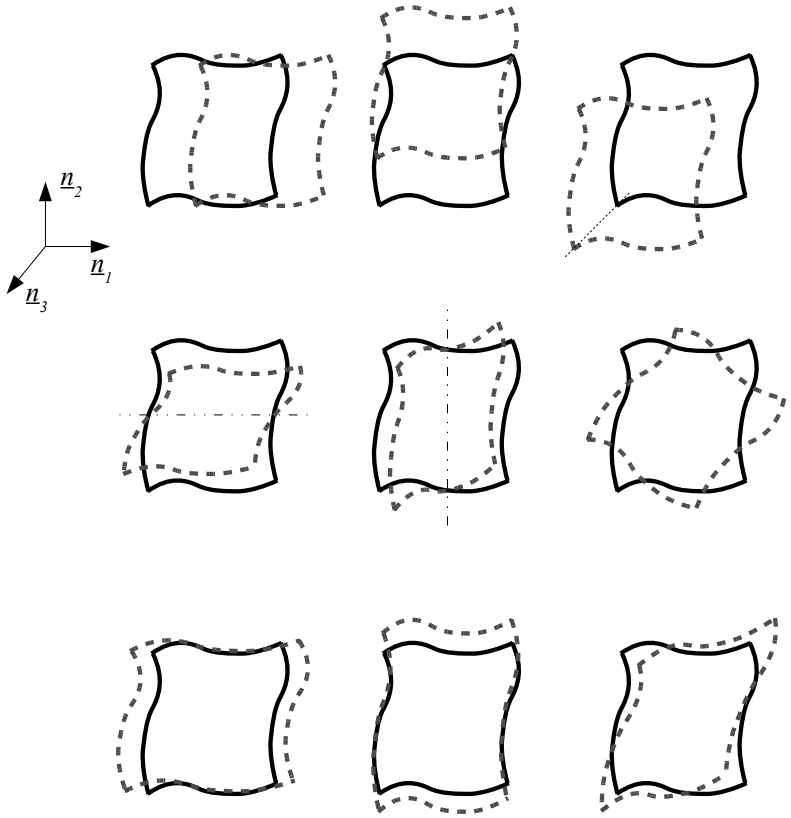

Figure 5.3: Modes de déformation macro pour une interface 3D (déformée en lignes interrompues)

– trois modes de **rotation rigide** :

$$\left\{\underline{e}_4^M, \underline{e}_5^M, \underline{e}_6^M\right\} = \left\{\left(\frac{1}{2\sqrt{I_1}}\underline{n}_1 \wedge \underline{GM}, \frac{1}{2}\underline{n}_1\right),\right.$$

$$\left.\left(\frac{1}{2\sqrt{I_2}}\underline{n}_2 \wedge \underline{GM}, \frac{1}{2}\underline{n}_2\right), \left(\frac{1}{\sqrt{I_3}}\underline{n}_3 \wedge \underline{GM}, \underline{0}\right)\right\}$$

– un mode d'**extension**, correspondant à la partie linéaire du déplacement suivant $\underline{n}_1$:

$$\left\{\underline{e}_7^M\right\} = \left\{\left(\left(\underline{n}_1 \cdot \underline{GM}\right)\underline{n}_1, \underline{0}\right)^{\perp}\right\}$$

– un mode de « **vrillage** » d'interface, correspondant à la partie linéaire de la rotation suivant $\underline{n}_1$:

$$\left\{\underline{e}_8^M\right\} = \left\{\left(\left(\underline{n}_1 \cdot \underline{GM}\right)\underline{n}_1 \wedge \underline{GM}, \left(\underline{n}_1 \cdot \underline{GM}\right)\underline{n}_1\right)^{\perp}\right\}$$

Dans le cas d'interfaces rectilignes ($\underline{n}_1$ et $\underline{GM}$ colinéaires), certains de ces vecteurs deviennent singuliers et nécessitent d'être redéfinis. C'est le cas pour $\underline{e}_4^M$ ($I_1 = 0$) pour lequel on choisit alors l'expression suivante :

$$\left\{\underline{e}_4^M\right\} = \{(\underline{0}, \underline{n}_1)\}$$

On peut vérifier que cette base est dans tous les cas orthogonale pour le produit scalaire $\langle ., . \rangle$ associé au travail sur les interfaces et que ses vecteurs sont normés :

$$\forall (i,j) \quad \left\langle \underline{e}_i^M, \underline{e}_j^M \right\rangle = \left\langle \left(\underline{u}_i^M, \underline{\theta}_i^M\right), \left(\underline{u}_j^M, \underline{\theta}_j^M\right) \right\rangle = \int_\Gamma \left(\underline{u}_i^M \underline{u}_j^M + \underline{\theta}_i^M \underline{\theta}_j^M\right) ds = \delta_{ij} \quad (5.50)$$

Remarque : Les formulations théoriques classiques de plaques ne prennent pas en compte la rotation normale dans le calcul des puissances virtuelles. Cependant, en pratique, afin de pouvoir réaliser des assemblage d'éléments non-coplanaires, on introduit un troisième degré de rotation, dit de « drilling », sans sens physique (voir Annexe C). Pour cette raison, il ne doit pas être traité de la même façon que les autres degrés de rotation pour l'extraction des composantes macro des champs d'interfaces, ce qui explique la différence entre $\underline{e}_6^M$ et les autres vecteurs de base macro pour la rotation ($\underline{e}_4^M$ et $\underline{e}_5^M$). On peut cependant être amené à lui définir un mode macro propre, afin de propager cette information, non-physique mais pouvant intervenir dans l'estimateur d'erreur. Sans problème macro, la convergence des inconnues correspondantes devient en effet très lente, même si le problème « physique », lui, converge toujours de façon optimale. Il convient alors d'ajouter à la base macro le vecteur supplémentaire suivant :

$$\left\{\underline{e}_9^M\right\} = \left\{\left(\underline{\mathbf{0}}, \frac{1}{\sqrt{mes(\Gamma)}}\underline{n}_3\right)\right\}$$

A des fins d'illustration, on considère une plaque carrée, fixée sur un de ses côtés et ayant une interface rectiligne sur le côté opposé (figure 5.4). Les solutions internes (déplacements et rotations des noeuds de la structure) correspondant aux modes macro d'interface définis plus haut sont représentées sur la figure 5.5.

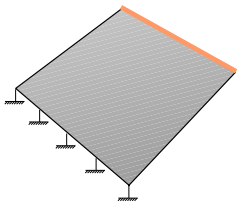

Figure 5.4: Sous-structure et interface considérées

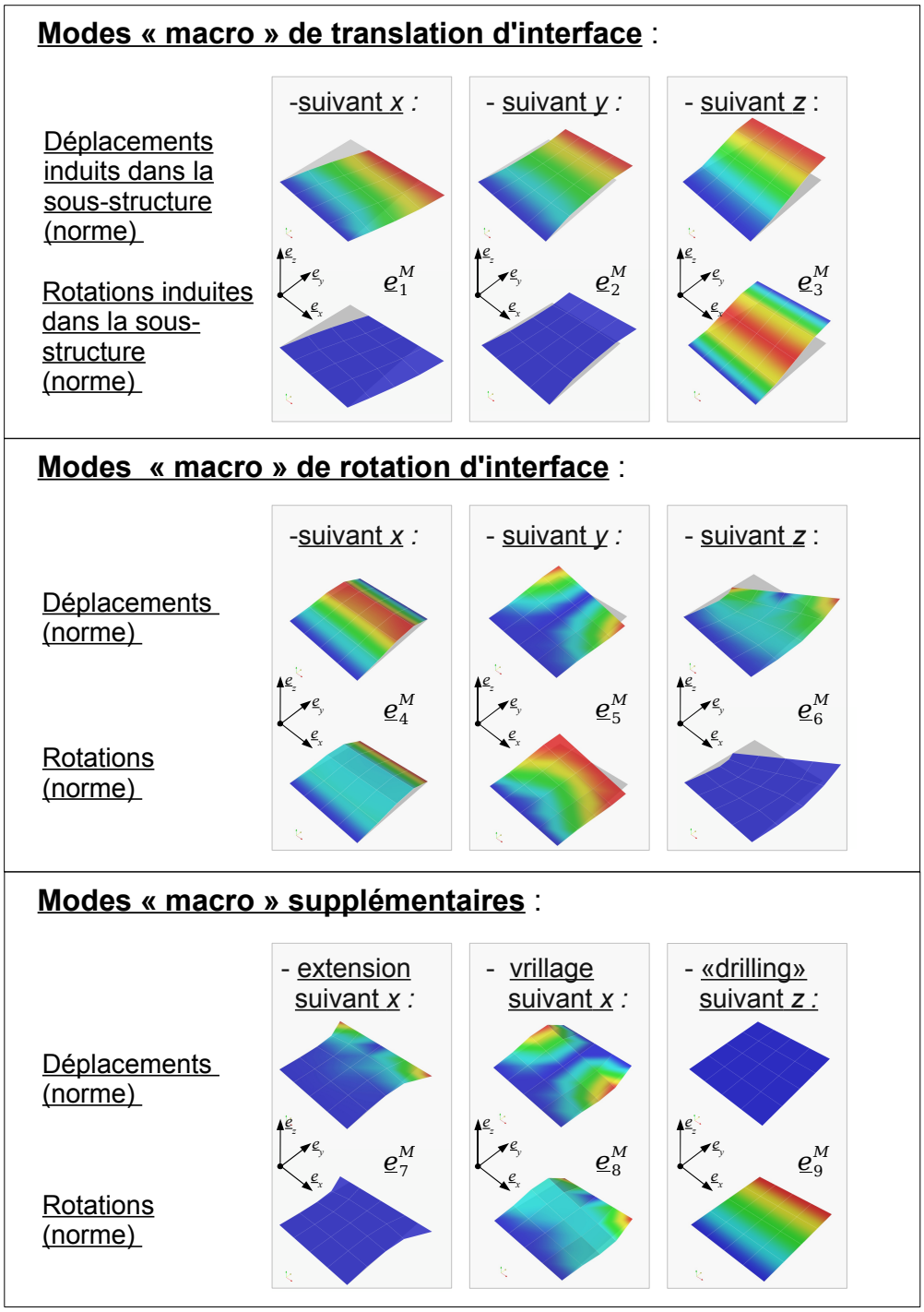

Figure 5.5: Modes macroscopiques pour les plaques - illustrations des modes de déformation au sein de la sous-structure, pour chacun des modes macro de déplacement de l'interface

3.3 Influence de la base macro sur la convergence de la stratégie

Le choix de la base macroscopique a une importance cruciale dans les performances de la stratégie itérative micro/macro. En effet, l'extensibilité de la méthode est assurée par un choix pertinent de l'espace macro, qui doit comprendre au minimum la partie des champs d'interface ayant une influence lointaine, comme énoncé par le principe de Saint-Venant. Cependant, un nombre trop important de fonctions de base macro peut engendrer un coût de calcul par itération plus élevé, à cause de l'augmentation de la taille du problème global, sans pour autant augmenter la vitesse de convergence.

Afin d'illustrer l'importance de ce choix, on considère la structure présenté sur la figure 5.6. Il s'agit d'une plaque rectangulaire, décomposée en 5 sous-structures. Elle est encastrée à son extrémité gauche, et on lui applique un chargement arbitraire à l'autre extrémité, de sorte que tous les modes de déformation possibles soient activés. La solution du problème d'élasticité linéaire correspondant est représentée sur la figure 5.7.

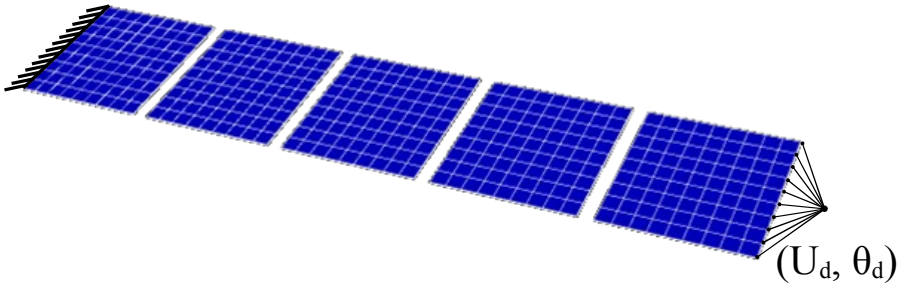

Figure 5.6: Plaque décomposée en 5 sous-structures

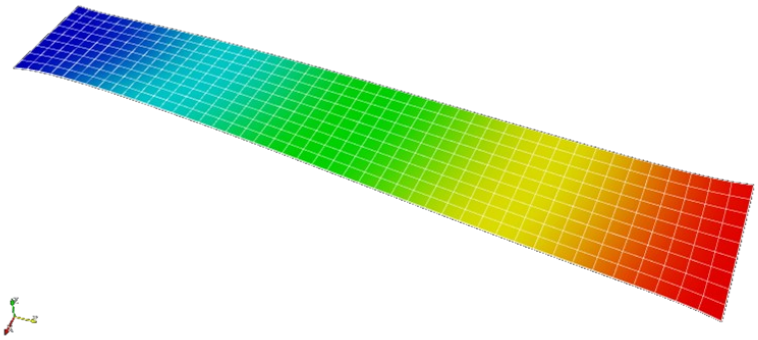

Figure 5.7: Structure déformée, solution du problème linéaire

La figure 5.8 présente l'évolution de l'erreur relative au cours des itérations de l'algorithme, en fonction du nombre N_M de fonctions macro retenues par interface, soit respectivement : aucun mode macro ($N_M = 0$) ; uniquement les trois déplacements ($N_M = 3$) ; les trois déplacement et les trois rotations ($N_M = 6$) ; les déplacements, rotations et une extension ($N_M = 7$) ; les déplacements et rotations, l'extension et le mode de vrillage ($N_M = 8$).

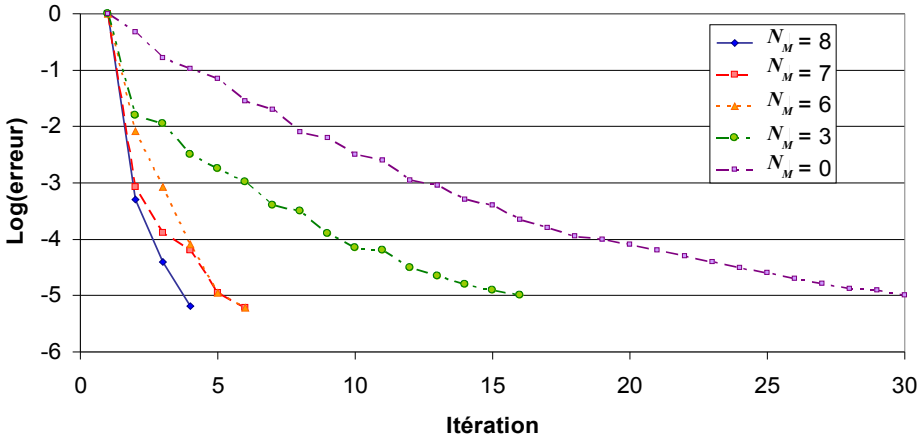

Figure 5.8: Evolution de l'erreur en fonction des itérations pour différents choix de bases macro, pour 5 sous-structures

On note dans le premier cas une convergence extrêmement lente du procédé itératif. Il n'y a en effet ici pas de problème macroscopique, seul à permettre la propagation de l'information sur l'ensemble de la structure. Le transfert d'information de ne se fait donc que par l'intermédiaire des problèmes microscopiques, transmettant uniquement l'information d'une sous-structure à celles qui lui sont adjacentes.

Lorsque la taille de l'espace macroscopique augmente, on peut observer comme attendu une meilleure convergence. Ainsi, si l'on choisi pour l'espace macro les trois déplacements d'interface, une partie de l'information est, dès la première itération, transmise à l'ensemble de la structure, d'où un résidu diminuant fortement dès les premières itérations. On note cependant par la suite un net ralentissement de la convergence : les rotations d'interfaces et moments associés, non présents dans l'espace macro ne sont transmis que de sous-structure à sous-structure.

On peut constater une bonne convergence de la stratégie dès six modes macro par interface (trois translations et trois rotations). L'ajout de modes supplémentaires (extension et vrillage) permet d'améliorer encore un peu des performances en termes d'itérations, au prix d'un problème macro de plus grande taille. Au final, on peut remarquer qu'avec un choix optimal pour la base macroscopique, le nombre d'itération est extrêmement faible (inférieur à cinq), alors que la taille totale du problème macroscopique n'est que de : $n_{interface} \times N_M = 4 \times 8 = 32$.

La même étude a été réalisée sur une plaque décomposée en 10 sous-structures afin d'illustrer l'extensibilité de la stratégie. Les courbes de convergence obtenues sont représentées sur la figure 5.9. On remarque que le nombre d'itérations nécessaires augmente largement pour un nombre de fonctions macro inférieur à six. La méthode est encore en partie mono-échelle, et n'est pas extensible. Au contraire, pour une dimension supérieure de l'espace macro, le nombre d'itérations est stable, démontrant l'extensibilité de la stratégie vis-à-vis du nombre de sous-domaines.

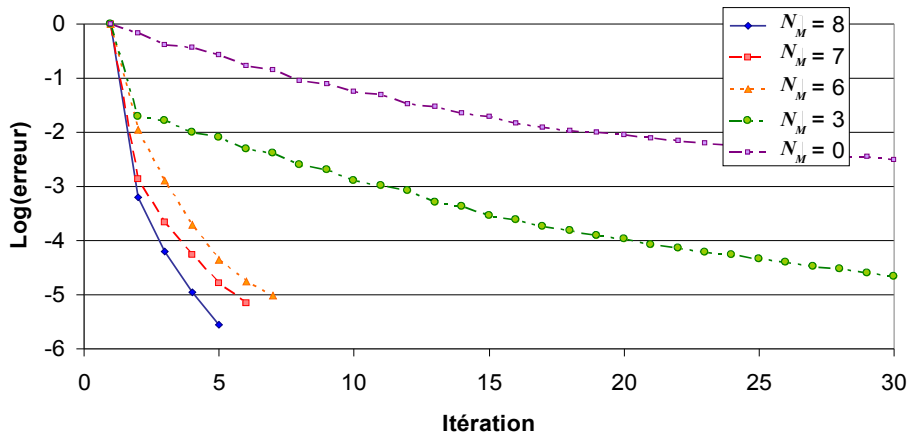

Figure 5.9: Evolution de l'erreur en fonction des itérations pour différents choix de bases macro, pour 10 sous-structures

3.4 Cas des coques

Dans le cas général, les structures élancées sont susceptibles d'occuper les trois directions de l'espace. Plus précisément, dans le cas d'une décomposition en sous-structures, les interfaces ne sont plus rectilignes, ni même planes. Quelques exemples sont présentés sur la Figure 5.10.

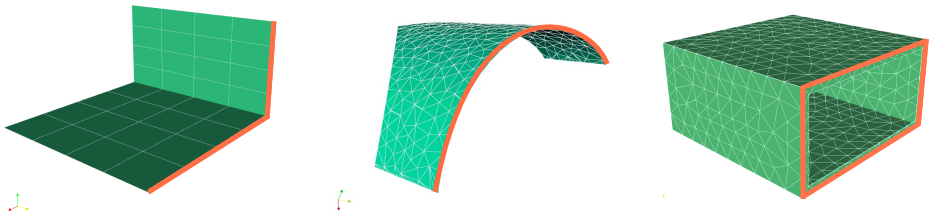

Figure 5.10: Exemples d'interfaces pour des sous-structures de coques

Il convient alors d'étendre la base macroscopique précédente pour prendre en compte l'aspect tridimensionnel de l'interface. De la même manière, il convient de généraliser la gestion des rotations normales aux cas où tous les éléments ne sont pas coplanaires.

3.4.1 Traitement du degré de rotation normal

Comme nous l'avons vu, le degré de rotation normal aux éléments n'est introduit que pour des raisons de compatibilité des éléments lors de l'assemblage global, et est associé, dans la formulation de l'élément, à une raideur artificielle non physique. Il en résulte, à l'issu de l'étape locale par sous-structure, des valeurs de rotations non-nulles qui ne doivent pas être traitées de la même manière que les autres degrés de rotation pour l'extraction des parties macro.

Dans ce but, nous proposons de modifier l'opérateur d'interface $\mathbf{M}$, utilisé pour définir le projecteur macroscopique $\mathbf{P}_M$ et pour l'intégration du travail des champs d'interface, de telle sorte que les termes de rotation normale ne soient plus pris en compte.

Plus précisément, lors du calcul des termes $\mathbf{M}_{ij}^e = \left\langle \underline{\varphi}_i, \underline{\varphi}_j \right\rangle_e$ au sein d'un élément e de l'interface Γ, les fonctions d'interpolation correspondant aux rotations normales sont remplacées par la fonction identiquement nulle sur l'élément. Les termes $\mathbf{M}_{ij}$ correspondant sont alors nuls.

Ce choix a deux conséquences :

- les rotations normales à un élément d'interface ne rentrent plus en compte dans le calcul du travail d'interface correspondant à cet élément : soit un champ élémentaire de déplacement et rotation $\underline{U}^e = (\underline{u}^e, \underline{\theta}^e)$ dont la seule composante est une composante de rotation normale, on a alors :

$$\forall \underline{F}^e \ , \ \langle \underline{U}^e, \underline{F}^e \rangle_e = \{U^e\}^t \cdot \mathbf{M} \cdot \underline{F}^e = 0$$

- les rotations normales à un élément d'interface n'entrent plus en compte dans le calcul de la projection sur l'espace macro, soit pour le même vecteur $\underline{U}^e$:

$$U_M^e = \mathbf{e}^M \mathbf{e}^{M^t} \mathbf{M} \ U^e = 0$$

3.4.2 Proposition de modes macros génériques pour les coques

Comme dans les cas présentés précédemment et afin de garantir l'extensibilité, les modes associés aux modes rigides d'interfaces doivent être compris dans les modes macros. On dénombre ainsi les six modes suivants, définis pour les déplacements et les rotations d'interface de la même façon sur chacune des directions principales de l'interface :

- trois modes de **déplacements rigide** :

$$\forall i \in \{1,2,3\} \ , \ \underline{e}_i^M = \left(\frac{1}{\sqrt{mes(\Gamma)}} \underline{n}_i, \underline{0} \right)$$

- trois modes de **rotation rigide** :

$$\forall i \in \{1,2,3\} \ , \ \underline{e}_i^M = \left(\frac{1}{2\sqrt{I_i}} \underline{n}_i \wedge \underline{GM}, \frac{1}{2} \underline{n}_i \right)$$

A ces modes strictement requis pour assurer l'extensibilité, on ajoute des modes d'extension, de cisaillement ou de vrillage. Ils correspondent aux approximations linéaires des champs aux interfaces :

– trois modes d'**extension**, correspondant à la partie linéaire du déplacement suivant $\underline{n}_i$:

$$\forall i \in \{1,2,3\} \ , \ \underline{e}_i^M = ((\underline{n}_i \cdot \underline{GM})\, \underline{n}_i, \underline{0})^{\perp}$$

– trois modes de **cisaillement** :

$$\forall (i,j,k) \in \{(1,2,3),(2,3,1),(3,1,2)\} \ ,$$
$$\underline{e}_i^M = \left(\frac{1}{2} \left(\underline{n}_j \cdot \underline{GM}\right) \underline{n}_k + \frac{1}{2} \left(\underline{n}_k \cdot \underline{GM}\right) \underline{n}_j, \underline{0} \right)^{\perp}$$

– trois modes de **vrillage**, correspondant à la partie linéaire de la rotation suivant $\underline{n}_i$:

$$\forall i \in \{1,2,3\} \ , \ \underline{e}_i^M = ((\underline{n}_i \cdot \underline{GM})\, \underline{n}_i \wedge \underline{GM}, (\underline{n}_i \cdot \underline{GM})\, \underline{n}_i)^{\perp}$$

Comme précédemment, certains modes de déformation macro peuvent devenir singuliers, ou très peu pertinents, pour certaines géométries d'interfaces particulières dont il n'est pas facile de faire une liste exhaustive. On se contentera ainsi le plus souvent d'une partie de ces modes macro non-rigides. Ceci rend pour l'instant l'approche micro/macro difficile à mettre en œuvre dans le cas le plus général, nécessitant une certaine expertise dans le choix de bases macros. On peut cependant envisager dans le futur d'établir une classification des géométries d'interfaces en se basant, par exemple, sur les importances relatives des valeurs propres de l'opérateur d'inertie.

3.4.3 Illustration

Nous illustrons dans ce paragraphe les résultats obtenus pour la résolution d'un problème linéaire d'une structure de coque. La figure 5.11 représente une structure test de panneau courbe soumis à un chargement de traction. Les modes macroscopiques retenus sont les six modes de corps rigides, associés à deux modes d'extension, un mode de vrillage, et un mode de cisaillement. La solution en déplacement est représentée sur la figure 5.12 et l'évolution de l'erreur au cours des itérations est tracée sur la figure 5.13. La convergence est ici très rapide, puisq'il suffit de quelques itérations pour atteindre une erreur relative inférieure à 10^{-5}. Le choix proposé pour les fonctions macroscopiques semble ainsi tout à fait adapté : il permet de traiter l'information pertinente au niveau global de la structure.

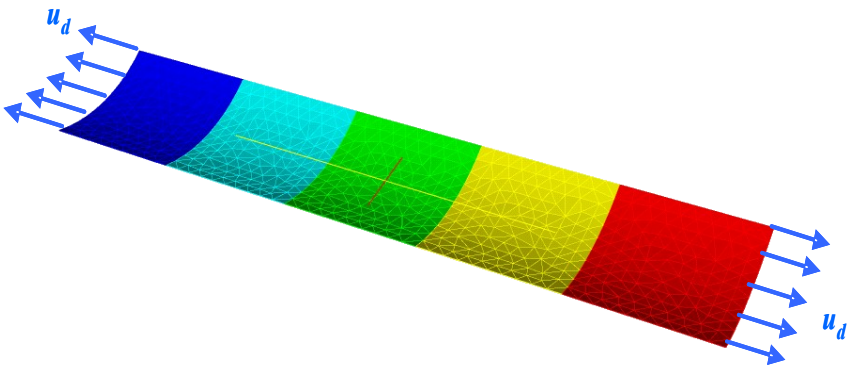

Figure 5.11: Structure de coque décomposée en 5 sous-structures et conditions aux limites

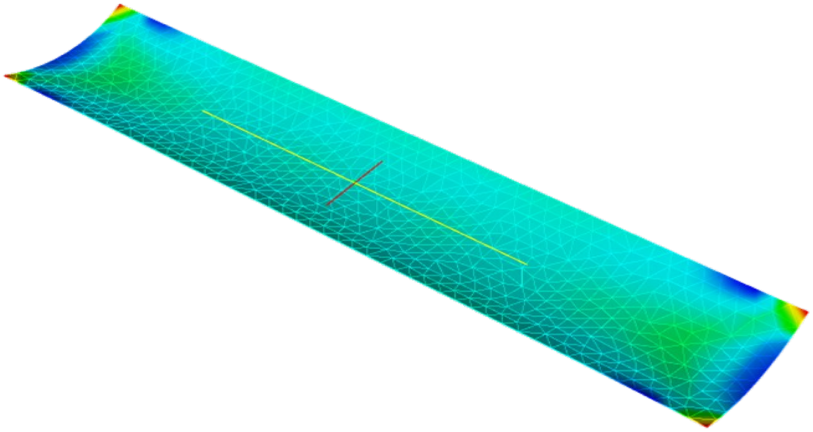

Figure 5.12: Structure déformée, solution du problème linéaire

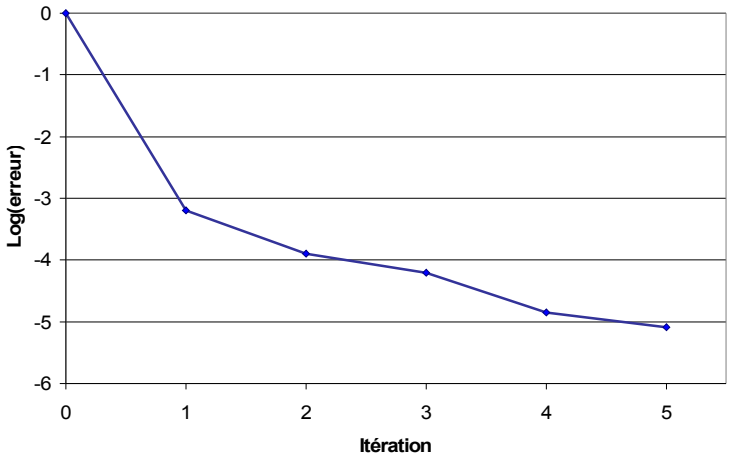

Figure 5.13: Evolution de l'erreur en fonction des itérations pour $N_M = 10$

4 Sur la mise en œuvre dans le cadre non-linéaire

4.1 Description

Le solveur multi-échelle proposé dans les sections précédentes est adapté à la résolution de problèmes linéaires de structures de plaques et coques. A ce titre, il est analogue aux solveurs itératifs de type Krylov, mis en œuvre dans les méthodes de décomposition de domaine classiques.

Ainsi, pour la résolution de structures non-linéaires, le solveur micro/macro peut être utilisé comme solveur linéaire au sein d'un schéma de Newton extérieur, éventuellement associé à une étape de relocalisation. Cette stratégie ne pose pas de problème d'implémentation particulier. Dans un but d'optimisation du coût de calcul, on peut cependant s'interroger sur la nécessité ou non de recalculer, pour chaque nouvel appel à la stratégie micro/macro, l'ensemble des opérateurs de la méthode (opérateurs de recherche, projecteurs, etc.).

Un inconvénient majeur de cette approche est la multiplication de schémas itératifs imbriqués, alors même que les concepts mis en œuvre sont très proches : décomposition en sous-structure, calculs locaux avec conditions aux limites mixtes, problème global de couplage d'interface, etc.. Une deuxième solution pourrait ainsi consister à fusionner les différents schémas itératifs. La nouvelle stratégie consisterait à intégrer l'étape de relocalisation non-linéaire au sein du solveur micro/macro, au niveau des étapes locales par sous-structure. Les itérations du solveur micro/macro viendraient se substituer aux itérations de la boucle de Newton extérieure. Dans ce cas, il convient de s'interroger sur la pertinence, au cours des itérations, des directions de recherche : précédemment définies à partir des opérateurs de comportement tangent, leur mise à jour pourrait s'avérer nécessaire pour conserver les performances. Plus encore, le problème de séparation micro/macro est loin d'être trivial dans le cadre des grandes déformations. Dans les paragraphes suivants, nous montrerons à ce sujet quelques difficultés apportées par les non-linéarités géométriques.

4.2 Projecteurs macro et non-linéarité géométrique

La base macroscopique $\mathbf{e}^M$, et donc le projecteur $\mathbf{P}^M$, s'expriment directement à partir de la géométrie de l'interface considérée. Or, dans le cas de problèmes non-linéaires géométriques, cette géométrie est susceptible d'évoluer avec le chargement. Les projecteurs deviennent alors dépendants des déplacements et déformations des interfaces, et l'extraction des composantes macroscopiques devient un problème **non-linéaire**.

La figure 5.14 illustre cette problématique pour une plaque soumise à un chargement extrémal F_d d'efforts nodaux selon la direction normale à la structure. Ce chargement est réparti le long de l'interface selon une fonction sinusoïdale le long de l'interface, définie de sorte que ses composantes sur l'espace macroscopique initial soient nulles (chargement à torseur nul) :

$$\mathbf{P}_{M0}.F_d = 0 \tag{5.51}$$

Selon le principe de Saint-Venant, un tel chargement n'a, dans le cadre linéaire, qu'une influence localisée autour de la zone d'introduction de l'effort. Ceci se vérifie sur la solution de gauche, correspondant à la solution du problème linéarisé pour la structure considérée. Les déformation induites sont localisées à proximité de la zone d'application d'effort.

Si on réalise dans un second temps une analyse non-linéaire en grands déplacements (solution de droite), on constate que, du fait du changement de géométrie de l'interface, le même chargement nodal induit cette fois-ci une flexion globale de la structure. L'effort imposé a maintenant une composante macro non-nulle :

$$\mathbf{P}_{Mt}.F_d \neq 0 \tag{5.52}$$

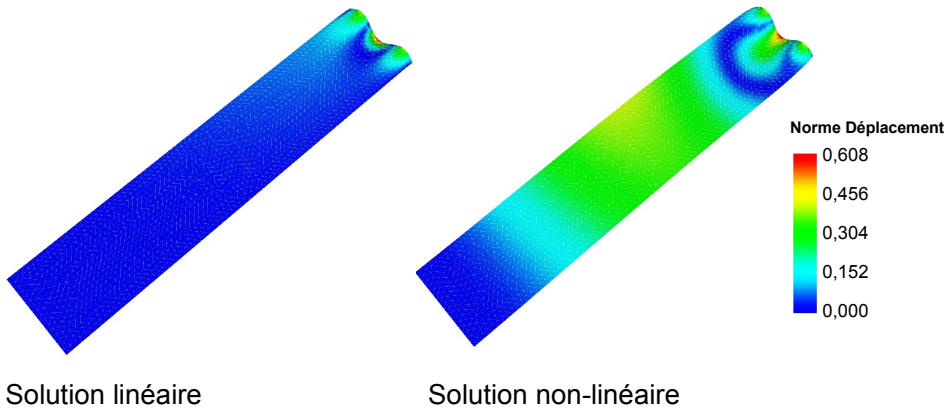

Figure 5.14: Illustration de l'influence des hypothèses de résolution (linéaire ou non) sur la solution lointaine pour un chargement à torseur nul sur la géométrie initiale

L'utilisation des projecteurs initiaux, calculés à partir de la configuration de référence, ne permet donc pas d'extraire l'information pertinente au niveau global dans le cadre de grands déplacements / grandes rotations. Cette information, pourtant importante à l'échelle de la structure, n'est plus alors transmise que par les problèmes d'interface. La convergence de l'algorithme peut en être sévèrement affectée, la méthode perdant ses propriétés d'extensibilité.

Afin de conserver un taux de convergence correct, il semble donc nécessaire, dans le cas des structures avec non-linéarités géométriques, de mettre à jour périodiquement les opérateurs de projection. Cette procédure peut cependant engendrer des coûts supplémentaires importants. Il parait cependant réaliste de considérer que, sous certaines conditions, cette mise à jour ne soit pas nécessaire, ou bien puisse être réalisée de façon approximée. Nous pensons en particulier au cas des interfaces peu déformées, pour lesquelles la mise à jour peut être omise, ou bien au cas des interfaces ayant subi une transformation rigidifiante, pour lesquelles la mise à jour des projecteurs et bases macro devrait être réalisable à moindre coût. Ce traitement optimisé du calcul des opérateurs d'interface nécessite de définir des indicateurs de leur déformation, ou de l'influence de cette déformation sur l'espace macro, ainsi que des extracteurs des mouvements de corps rigides associés. Un

approche reprenant les principes de décomposition de la transformation qui ont été introduits pour la formulation corotationnelle présentée dans le premier chapitre pourrait être envisageable. Par manque de temps, ces développement n'ont pu être mis en œuvre.

Remarque : Dans le cas de non-linéarités des comportements des matériaux, en petits déplacements, on considère en général que les modifications de géométrie sont négligeables. Les projecteurs sont ainsi constants et peuvent ainsi être calculés une fois pour toute. La stratégie micro/macro est alors être bien plus simple à mettre en œuvre et plus efficace. Elle a d'ailleurs fait l'objet de travaux pour des comportements visco-élastiques ou endommageables [Ladevèze 03, Violeau 07].

4.3 Sur la mise à jour des directions de recherche

Les directions de recherche $\mathbf{k}^s$ pour l'étape locale par sous-structure, ou $\mathbf{k}_m^i$ pour la partie micro de l'étape de couplage aux interfaces, sont calculées à partir d'approximations de la raideur des sous-structures environnantes. Une évaluation précise n'étant pas requise, leur mise à jour n'est *a priori* pas nécessaire. Ceci est cependant à modérer dans le cas de grandes rotations des interface considérées : du fait de l'importante anisotropie des structures élancées, les raideurs en membrane et en cisaillement peuvent avoir plusieurs ordres de grandeur d'écart. Une rotation de 90° par exemple, permutant ces deux caractéristiques, peut ainsi avoir une importance non négligeable sur la pertinence des directions de recherche. Il paraît donc judicieux de mettre à jour ces opérateurs dans le cas de grandes rotations d'interface.

A l'inverse, les opérateurs $\mathbf{S}_M^s$ associés à la partie macro de l'étape de couplage aux interfaces ont un sens physique très précis, puisqu'ils permettent de définir un problème global représentant le comportement macroscopique tangent de la structure. Ils sont ainsi obtenus par projection sur l'espace macro des opérateurs de Schur tangents $\mathbf{S}^s$ et peuvent être amenés à évoluer dans deux cas :

- une modification de l'opérateur de raideur tangente $\mathbf{K}^s$ de la sous-structure : c'est en particulier le cas lorsqu'un flambage local apparaît, provoquant, en général, une chute de raideur,
- une évolution des projecteurs macro $\mathbf{P}_M^s$, due à une déformation de l'interface.

Ici encore, des estimateurs de l'impact de ces modifications sur les performances de la méthode restent à définir, la mise à jour systématique de l'ensemble de ces opérateurs n'étant pas concevable dans le cas d'un schéma itératif unique.

5 Bilan du chapitre

Nous avons présenté, dans ce chapitre terminal, une stratégie multiéchelle de résolution des structures de plaques et coques s'appuyant sur une séparation des champs d'interface en parties micro et macro. Un espace macroscopique adapté aux structures élancées a été proposé, prenant en compte les spécificités des éléments structuraux classiques. La stratégie a été mise en œuvre sur des exemples de panneaux et coques courbées, et montre

des résultats encourageants. Ces approches, en définissant un problème global pertinent, permettent une résolution en un nombre limité d'itérations et une bonne extensibilité pour les problèmes hétérogènes.

Des possibilités d'extension au cas non-linéaire ont été proposées et les principales difficultés associées ont été présentées. Des travaux restent cependant à mener quant à la robustesse, la généricité et la mise en œuvre pratique de telles approches pour des structures industrielles.

Conclusions et Perspectives

Les travaux réalisés dans le cadre de cette thèse, et rassemblés dans ce rapport, ont visé à apporter des réponses à la problématique du calcul de grandes structures non-linéaires, dans un contexte de montée en puissance des simulations numériques dans les processus de développement et de certification aéronautiques.

La première partie du rapport s'est concentrée sur la présentation de la problématique et des méthodes numériques associées. Dans un premier chapitre, nous avons ainsi rappelé les bases de la modélisation des structures élancées, les non-linéarités associées ainsi que les méthodes classiques de résolution non-linéaire. Un second chapitre a été consacré aux méthodes numériques plus avancées : les méthodes multiéchelles, adaptées aux problèmes possédant plusieurs échelles caractéristiques, et les méthodes de décomposition de domaine, dédiées au calcul parallèle de grandes structures. Ces stratégies de calcul avancées ont aujourd'hui une certaine maturité et commencent à apparaître dans les codes de calcul commerciaux. Elles présentent cependant de gros inconvénients pour leur application aux cas envisagés. En effet, si ces techniques sont particulièrement adaptées à la résolution de problèmes linéaires, leur adaptation efficace aux cas non-linéaires reste un champ d'étude ouvert, en particulier pour les structures possédant des non-linéarités non-équitablement réparties.

Dans la seconde partie, nous avons présenté le cœur de notre travail. En partant des problèmes rencontrés par les approches classiques, nous avons cherché à mieux organiser les différents schémas de résolution, en prenant mieux en compte les phénomènes non-linéaires survenant aux différentes échelles. Nous avons ainsi introduit le principe de relocalisation non-linéaire, associé aux méthodes de décomposition de domaine classiques. Dans une première version, nous avons proposé d'insérer au sein des stratégies Newton-Krylov-Schur une étape de résolution non-linéaire par sous-structure, à déplacements d'interface imposés. Une seconde version a étendu ce principe à des conditions aux limites mixtes, plus générales. Les résultats obtenus sur des structures de treillis de poutres avec flambage local ont démontré l'apport de ces stratégies de résolution pour les problèmes avec non-linéarités locales, grâce au découplage des schémas de résolution par sous-structure. Nous avons par la suite décrit l'extension de la stratégie numérique pour la résolution de problèmes tridimensionnels de plaques. Pour finir, le dernier chapitre, plus prospectif, a ouvert la voie vers une famille de solveurs multi-échelles pour la résolution

des grandes structures hétérogènes de plaques et coques. En s'appuyant sur une décomposition micro/macro pertinente des champs d'interface et une stratégie d'homogénéisation numérique des comportements par sous-structure, une stratégie de résolution itérative a été présentée et mise en œuvre dans le cas linéaire. L'application à la résolution de problèmes non-linéaire a fait l'objet d'une section qui a présenté les possibilités d'application ainsi que les challenges restant encore à relever.

Les résultats présentés dans ce document ont permis d'ouvrir des perspectives d'application intéressantes pour le calcul de grandes structures non-linéaires. En réduisant le nombre de calculs à l'échelle globale et, par là-même, la quantité d'informations échangées entre les solveurs associés aux différentes sous-structures, les méthodes proposées apportent une réponse pertinente à la distribution des calculs non-linéaires, que ce soit pour le calcul du flambage local de structures élancées, ou pour tout autre problème ayant des non-linéarités localisées (soudage de grandes structures, propagation de fissure, endommagement, etc.).

Les perspectives de recherche sont par ailleurs très nombreuses. Une première voie d'exploration, entrouverte en fin de thèse, concerne l'intégration de la stratégie de relocalisation non-linéaire au sein des itérations du solveur global micro/macro. Si, comme nous l'avons précisé, une telle stratégie reste délicate à mettre en œuvre dans le cas d'interfaces déformables, un premier développement dans le cas de non-linéarités des matériaux sous l'hypothèse des petites perturbations semble tout à fait envisageable. Par ailleurs, l'introduction d'un problème global non-linéaire, capable de prendre en compte les non-linéarités à l'échelle de la structure (grands déplacements et rotations), pourrait aussi largement améliorer les performances de la stratégie dans le cas des structures fortement élancées. Une approche corotationnelle à l'échelle des sous-structures, et non plus des éléments, nous paraît être une piste intéressante. On peut aussi envisager, dans le but de donner encore plus de souplesse dans l'utilisation de la méthode, l'extension de la stratégie aux cas de maillages incompatibles aux interfaces, ou encore aux interfaces de contact. Enfin, concernant les performances numériques, nous avons déjà souligné l'importance de la mise en oeuvre de la méthode dans un environnement permettant une répartition des coûts de calcul. Une autre piste intéressante semble être celle des techniques d'accélération des résolutions non-linéaires locales, basées sur la construction de bases de solutions adaptées (bases de Krylov, bases modales, Proper Orthogonal Decomposition, etc.) et sur les techniques d'approximation radiale en temps et espace.

Pour conclure, les travaux réalisés dans le cadre de cette thèse ont débouché sur la présentation de quelques voies pour l'amélioration des stratégies de calcul adaptées aux grandes structures non-linéaires. Ils ont ouvert de nombreuses perspectives d'application dans ce domaine ainsi qu'un grand nombre de perspectives de recherche. Nous en avons cité ici quelques unes pour lesquelles nous envisageons de poursuivre nos efforts. Les travaux à réaliser dans le domaine restent très nombreux mais nous paraissent très prometteurs. Les progrès qui en découleront pour le calcul de structures nous rapprocheront un peu plus, dans les années à venir, de la simulation de structures complexes, non-linéaires et de très grande taille.

Bibliographie

[Ahmad 70] S. Ahmad, B.M. Irons & O.C. Zienkiewicz. *Analysis of thick and thin shell structures by curved finite elements*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 2, pages 419–451, 1970.

[Alart 08] P. Alart & D. Dureisseix. *A scalable multiscale LATIN method adapted to nonsmooth discrete media*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 197, no. 5, pages 319–331, 2008.

[Allix 87] O. Allix. Délaminage : approche par la mécanique de l'endommagement, pages 39–53. Calcul des Structures et Intelligence Artificielle. Pluralis, 1987.

[Allix 05] O. Allix, P. Cresta & Ch. Rey. *On a mixed non-linear domain decomposition method and its efficiency for post-buckling analysis*. In US National Congress on Computational Mechanics, Austin, TA, 24-28 juillet 2005.

[Allix 06] O. Allix. *Multiscale Strategy for Solving Industrial Problem*. In Computational Mechanics : Solids, Structures and Coupled Problems, pages 107–126. Springer, 2006.

[Allman 84] D.J. Allman. *A compatible triangular element including vertex rotations for plane elasticity analysis*. Computers and Structures, vol. 19, pages 1–8, 1984.

[Amdahl 88] G.M. Amdahl. *Limits of expectation*. Intern. J. Supercomput. Applns., vol. 2, pages 88–94, 1988.

[Arbocz 69] J. Arbocz & C.D. Babcock. *The effect of general imperfections on the buckling of cylindrical shells*. J. Appl. Mech. Trans. ASME, vol. 36, pages 28–38, 1969.

[Arbocz 87] J. Arbocz, M. Potier-Ferry, J. Singer & V. Tvergaard. Buckling and post-buckling, volume 288 of *Lecture Notes in Physics*. Springer-Verlag, 1987.

[Argyris 82] J.H. Argyris. *An excursion into large rotations*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 32, pages 85–155, 1982.

[Auriel 82] G. Auriel, G. Boubal & P. Ladevèze. *Sur une méthode de calcul des effets locaux*. Comptes Rendus des Troisièmes Journées Nationales sur les Composites, JNC3, pages 279–288, 1982.

[Azrar 91] L. Azrar, B. Cochelin, N. Damil & M. Potier-Ferry. An asymptotic numerical method to compute bifurcating branches, pages 117–131. New Advances in Computational Structural Mechanics. Elsevier, p. ladevèze and o.c. zienkiewicz edition, 1991.

[Azrar 93] L. Azrar, B. Cochelin, N. Damil & M. Potier-Ferry. *An asymptotic numerical method to compute the post-buckling behaviour of elastic plates and shells*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 36, pages 1251–1277, 1993.

[Barboteu 01] M. Barboteu, P. Alart & M. Vidrascu. *A domain decomposition strategy for nonclassical frictional multi-contact problems*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 190, pages 4785–4803, 2001.

[Bathe 73] K.-J. Bathe, E. Ramm & E.L. Wilson. *Finite element formulations for large deformation dynamic analysis*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 7, pages 255–271, 1973.

[Batoz 72] J.L. Batoz & G. Dhatt. *Development of two simple shell elements*. Journal of AIAA, vol. 10, pages 237–238, 1972.

[Batoz 90] J.L. Batoz & G. Dhatt. Modélisation des structures par éléments finis. Vol 2. Poutres et plaques. Hermes, 1990.

[Bazant 03] Z.P. Bazant & L. Cedolin. Stability of structures - elastic, inelastic, fracture, and damage theories. Courier Dover Publications, 2003.

[Belytschko 73] T. Belytschko & B.J. Hsieh. *Nonlinear transient finite element analysis with convected coordinates*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 7, pages 255–271, 1973.

[Belytschko 77] T. Belytschko & R. Mullen. *Explicit integration of structural problems*. Finite Elements in Nonlinear Mechanics, vol. 2, pages 697–720, 1977.

[Belytschko 79] T. Belytschko & B.J. Hsieh. *Application of higher order corotational stretch theories to nonlinear finite element analysis*. Comput. Struct., vol. 11, pages 175–182, 1979.

[Ben Dhia 98] H. Ben Dhia. *Multiscale mechanical problems : the Arlequin method*. Compte Rendu de l'Académie des Sciences, vol. 326, pages 899–904, 1998.

[Ben Dhia 01] H. Ben Dhia & G. Rateau. *Analyse mathématique de la méthode Arlequin mixte*. Compte Rendu de l'Académie des Sciences, vol. 332, pages 649–654, 2001.

[Benssoussan 78] A. Benssoussan, J.-L. Lions & G. Papanicolaou. Asymptotic analysis for periodic structures. North-Holland Pub., 1978.

[Bergan 76] P.G. Bergan & G. Horrigmoe. *Incremental variational principles and finite element models for nonlinear problems*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 7, pages 201–217, 1976.

[Bergan 85] P.G. Bergan & C.A. Felippa. *A triangular membrane element with rotational degrees of freedom*. CMAME, vol. 50, pages 25–69, 1985.

[Blanzé 93] C. Blanzé, R. Danwé, P. Ladevèze & J.P. Moreau. *Une méthode pour l'étude d'assemblage de structures massives*. In Actes du premier Colloque National en Calcul de Structures, Giens, pages 1104–1113. Hermes, 1993.

[Blanzé 96] C. Blanzé, L. Champaney, J.Y. Cognard & P. Ladevèze. *A Modular Approach to Structure Assembly Computations : Application to Contact Problems*. Engineering Computations, vol. 13, no. 1, pages 15–32, 1996.

[Boisse 89] P. Boisse, P. Ladevèze & P. Rougée. *A large time increment method for elastoplastic problems*. Eur. J. Mech., vol. 8, pages 257–275, 1989.

[Boucard 97] P.-A. Boucard & P. Ladevèze. *Post-buckling analysis using a non-incremental method*. In 15th IMACS World Congress on Scientific Computation, Modelling and Applied Mathematics, volume 3, pages 449–454, 1997.

[Boucard 99] P.-A. Boucard & P. Ladevèze. *Une application de la méthode LaTIn au calcul multirésolution de structures non-linéaires*. Revue européenne des éléments finis, vol. 8, pages 903–920, 1999.

[Boucard 01] P.-A. Boucard. *Application of the LaTIn method to the calculation of response surfaces*. In K.J. Bath, editeur, Proceeding of the First MIT Conference on Computational Fluid and Solid Mechanics, volume 1, pages 78–81, Cambridge, USA, 2001.

[Bourel 06] B. Bourel, A. Combescure & L. Di Valentin. *Handling contact in multi-domain simulation of automobile crashes*. Finite Elements in Analysis and Design, vol. 42, pages 766–779, 2006.

[Boutyour 04] E. H. Boutyour, H. Zahrouni, M. Potier-Ferry & M. Boudi. *Bifurcation points and bifurcated branches by an asymptotic numerical method and Padé approximants*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 60, pages 1987–2012, 2004.

[Broyden 70] C.G. Broyden. *The Convergence of a Class of Double-rank Minimization Algorithms*. Journal of the Institute of Mathematics and Its Applications, vol. 6, pages 76–90, 1970.

[Bussy 90] P. Bussy, P. Rougée & P. Vauchez. *The large time increment method for numerical simulation of metal forming processes*. In Proceedings of Numerical Methods in Engineering, pages 102–109, Swansea, 1990.

[Caignot 07] A. Caignot. *Calcul multiéchelle et parallèle de mésomodéles de liaison avec frottement*. In Colloque National en Calcul des Structures, Giens, 2007.

[Champaney 97] L. Champaney, J.-Y. Cognard, D. Dureisseix & P. Ladevèze. *Large scale applications on parallel computers of a mixed domain decomposition method.* Computional Mechanics, vol. 19, pages 253–263, 1997.

[Champaney 99] L. Champaney, J.Y. Cognard & P. Ladevèze. *Modular Analysis of Assemblages of Three-dimensional Structures with Unilateral Contact Conditions*. Computers and Structures, vol. 73, pages 249–266, 1999.

[Christman 89] T. Christman, A. Needleman & S. Suresh. *An experimental and numbererical study of deformation in metal-ceramic composites*. Acta Metallurgica, vol. 37, no. 11, pages 3029–3050, 1989.

[Cognard 89] J.-Y. Cognard. *Une nouvelle approche des problèmes de plasticité et de viscoplasticité : la Méthode à Grand Incrément de Temps*. PhD thesis, Université Paris VI, 1989. Thèse.

[Combescure 95] A. Combescure. *Etude de la stabilité non-linéaire géométrique et non-linéaire matériau des coques minces. Application aux coques de révolution avec imperfections soumises à des chargements complexes.* PhD thesis, Ecole Doctorale MEGA, Lyon, 1995. Thèse d'habilitation à diriger des recherches.

[Combescure 01] A. Combescure & G. Gusic. *Nonlinear buckling of cylinders under external pressure with nonaxisymmetric thickness imperfections using the COMI axisymmetric shell element.* International Journal of Solids and Structures, vol. 38, pages 6207–6226, 2001.

[Combescure 03] A. Combescure, A. Gravouil & B. Herry. *An algorithm to solve transient structural non-linear problems for non-matching time-space domains*. Computers and Structures, vol. 81, pages 1211–1222, 2003.

[Cornuault 98] C. Cornuault. *Modélisation mécanique et optimisation des structures d'avions*. Nouvelle revue d'aéronautique et d'astronautique, vol. 1, pages 35–53, 1998.

[Cosserat 09] E. Cosserat & F. Cosserat. Théorie des milieux déformables. Hermann et fils (Paris), 1909.

[Cresta 05a] P. Cresta, O. Allix, Ch. Rey & S. Guinard. *Analyse multi-échelle du flambage de grandes structures*. In Congrès français de mécanique, Troyes, 29 août-2 septembre 2005.

[Cresta 05b] P. Cresta, O. Allix, Ch. Rey & S. Guinard. *Efficient non-linear domain decomposition methods for the post-buckling analysis of large aeronautical structures*. In EUCASS (1st European Conference for Aero-Space Sciences), Moscou, 4-7 juillet 2005.

[Cresta 06a] P. Cresta. *Méthodes de décomposition de domaine avec relocalisation non-linéaire pour le calcul au post-flambage de grandes structures*. In 7ièmes Journée du LMT "'La vision de la mécanique moderne au LMT-Cachan, Belgodère, 31 mai-2 juin 2006.

[Cresta 06b] P. Cresta, O. Allix, Ch. Rey & S. Guinard. *On multilevel strategies for nonlinear computations with domain decomposition : application to post-bucklings*. In ECCM 2006 (Third European Conference on Computational Mechanics), Lisbone, 5-9 juin 2006.

[Cresta 07a] P. Cresta, O. Allix, Ch. Rey & S. Guinard. *Nonlinear localization strategies for domain decomposition methods : application to post-buckling analyses*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 196, pages 1436–1446, 2007.

[Cresta 07b] P. Cresta, O. Allix, Ch. Rey & S. Guinard. *Une stratégie multi-échelle non-linéaire pour le calcul de grandes structures*. In 8e Colloque National en Calcul des Structures, Giens, 21-25 mai 2007.

[Crisfield 88] M.A. Crisfield. Non-linear finite-element analysis of solids and structures, volume 1. J.Wiley and Sons, 1988.

[Crisfield 96] M.A. Crisfield & G.F. Moita. *A unified co-rotational for solids, shells and beams*. Int. J. Solids Struc., vol. 33, pages 2969–2992, 1996.

[De Roeck 92] Y.-H. De Roeck, P. Le Tallec & M. Vidrascu. *A domain-decomposed solver for nonlinear elasticity*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 99, pages 187–207, 92.

[Deparis 06] S. Deparis, M. Discacciati, G. Fourestey & A. Quarteroni. *Fluid-structure algorithms based on Steklov-Poincare operators*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 195, pages 5797–5812, 2006.

[Dettmer 06] W. Dettmer & D. Perić. *A computational framework for fluid-structure interaction : Finite element formulation and applications*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 195, pages 5754–5779, 2006.

[Devries 89] F. Devries, H. Dumontet, G. Duvaut & F. Léné. *Homogenization and damage for composite structures*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 27, pages 285–298, 1989.

[Dhatt 70] G. Dhatt. *An efficient triangular shell element*. Journal of AIAA, vol. 8, pages 2100–2102, 1970.

[Diekmann 97] R. Diekmann, B. Monien & R. Preis. *Load balancing strategies for distributed memory machines*. In H. Satz F. Karsch, B. Monien, editor, Multiscale Phenomena and Their Simulation. World Scientific., pages 255–266, 1997.

[Dumontet 86] H. Dumontet. *Study of a boundary layer problem in elastic composite*. Mathematical Modelling and Numerical Analysis, vol. 20, pages 265–286, 1986.

[Elkhodja 07] N. Elkhodja, H. Ben Dhia & F.-X. Roux. *Modélisation de structures multi-défauts dans le cadre Arlequin et approches par sous-domaines*. In Colloque National en Calcul de Structures, 2007.

[Eshelby 57] J.D. Eshelby. *The determination of the field of an ellipsoidal inclusion and related problems*. In Proceedings of the Royal Society of London, volume 241 of *A*, pages 376–396, 1957.

[Euler 44] L. Euler. Methodus inveniendi lineas curvas : maximi minimive propietate gaudentes sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti. Marcum-Michaelem Bousquet, Lausanne-Genève, 1744.

[Farhat 91] C. Farhat & F.-X. Roux. *A method of finite element tearing and interconnecting and its parallel solution algorithm*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 32, pages 1205–1227, 1991.

[Farhat 96] C. Farhat, K. Pierson & M. Lesoinne. *A simple and unified framework for accelerating the convergence of iterative substructuring methods with Lagrange multipliers : Applications to the design of new FETI coarse problems*. Technical Report CU-CAS-96-26, Center for Aerospaces Structures, CU, 1996.

[Farhat 98] C. Farhat & J. Mandel. *The two-level FETI method for static and dynamic plate problems – part I : An optimal iterative solver for biharmonic systems*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 155, pages 129–152, 1998.

[Farhat 00] C. Farhat, K. Pierson & M. Lesoinne. *The second generation FETI methods and their application to the parallel solution of large-scale linear and geometrically non-linear structural analysis problems*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 184, pages 333–374, 2000.

[Farhat 01] C. Farhat, M. Lesoinne, P. Le Tallec, K. Pierson & D. Rixen. *FETI-DP : A dual-primal unified FETI method - Part I : A faster alternative to the two-level FETI method*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 50, pages 1523–1544, 2001.

[Fedorenko 64] R.P. Fedorenko. *The speed of convergence of one iterative process*. USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics, vol. 4, pages 227–235, 1964.

[Felippa 92] C.A. Felippa & C. Militello. *Membrane triangles with corner drilling freedoms - II. The ANDES element*. Finite Elements in Analysis and Design, vol. 12, pages 189–201, 1992.

[Felippa 03] C.A. Felippa. *A study of optimal membrane triangles with drilling freedoms*. CMAME, vol. 192, pages 2125–2168, 2003.

[Felippa 05] C.A. Felippa & B. Haugen. *A unified formulation of small-strain corotational finite elements : I. Theory*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 194, pages 2285–2335, 2005.

[Feyel 00] F. Feyel & J.-L. Chaboche. *FE^2 multiscale approach for modelling the elastoviscoplastic behaviour of long fiber SiC/Ti composite materials*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 183, pages 309–330, 2000.

[Feyel 03] F. Feyel. *A multilevel finite element method (FE^2) to describe the response of highly non-linear structures using generalized continua*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 192, pages 3233–3244, 2003.

[Fish 97] J. Fish, K. Sheck, M. Pandheeradi & M.S. Shepard. *Computational plasticity for composite structures based on mathematical homogenization : theory and practice*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 148, pages 53–73, 1997.

[Forest 98] S. Forest & K. Sab. *Cosserat overall modeling of heterogeneous materials*. Mechanics Research Communications, vol. 25, no. 4, pages 449–454, 1998.

[Fortin 83] M. Fortin & R. Glowinski. Augmented lagrangian methods : Applications to the numerical solution of boundary-value problems. Studies in Mathematics and its Applications, 15. Elsevier, 1983.

[Ghosh 95] S. Ghosh, K. Lee & S. Moorthy. *Multiple scale analysis of heterogeneous elastic structures using homogenisation theory and Voronoï cell finite element method*. International Journal of Solids and Structures, vol. 32, no. 1, pages 27–62, 1995.

[Glowinski 90] R. Glowinski & P. Le Tallec. *Augmented lagrangian interpretation of the nonoverlapping Schwartz alternating method*. In Third International Symposium on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations, pages 224–231. Philadelphia, SIAM, 1990.

[Gosselet 02] P. Gosselet & C. Rey. *On a selective reuse of Krylov subspaces in Newton-Krylov approaches for nonlinear elasticity*. In Proceedings of the 14th conference on Domain decomposition methods, pages 419–426, 2002.

[Gosselet 03] P. Gosselet. *Méthodes de décomposition de domaine et méthodes d'accélération pour les problèmes multichamps en mécanique non-linéaire*. PhD thesis, Université Paris 6, 2003.

[Gosselet 04] P. Gosselet, V. Chiaruttini, C. Rey & F. Feyel. *A monolithic strategy based on an hybrid domain decomposition method for multiphysic problems. Application to poroelasticity*. Revue Européenne des Eléments Finis, vol. 13, pages 523–534, 2004.

[Gosselet 06] P. Gosselet & C. Rey. *Non-overlapping domain decomposition methods in structural mechanics*. Arch. Comput. Meth. Engng., vol. 13, pages 515–572, 2006.

[Gravouil 01] A. Gravouil & A. Combescure. *Multi-time-step explicit/implicit method for non-linear structural dynamics*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 50, pages 199–225, 2001.

[Gravouil 03] A. Gravouil & A. Combescure. *Multi-time-step and two-scale domain decomposition method for non-linear structural dynamics*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 58, pages 1545–1569, 2003.

[Guidault 05] P.-A. Guidault. *Une stratégie de calcul pour les structures fissurées : analyse locale-globale et approche multiéchelle pour la fissuration*. PhD thesis, ENS de Cachan, 2005.

[Guidault 07] P.-A. Guidault, O. Allix, L. Champaney & J.-P. Navarro. *A two-scale approach with homogeneization for the computation of cracked structures*. Computers & Structures, vol. 85, pages 1360–1371, 2007.

[Guidault 08] P.-A. Guidault, O. Allix, L. Champaney & C. Cornuault. *A multiscale extended finite element method for crack propagation*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 197, pages 381–399, 2008.

[Hashin 62] Z. Hashin. *The elastic moduli of heterogeneous materials*. ASME Journal for Applied Mechanics, vol. 29, pages 143–150, 1962.

[Herry 02] B. Herry, L. Di Valentin & A. Combescure. *An approach to the connection between subdomains with non-matching meshes for transient mechanical analysis*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 55, pages 973–1003, 2002.

[Hirai 84] I. Hirai, B.P. Wang & W.D. Pilkey. *An efficient zooming method for finite element analysis*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 20, pages 1671–1683, 1984.

[Hughes 78] TJR. Hughes & W. Liu. *Implicit-explicit finite elements in transient analysis : stability theory*. Journal of Applied Mechanics, vol. 45, pages 371–374, 1978.

[Hughes 80] T.J.R. Hughes & J. Winget. *Finite rotation effects in numerical integration of rate constitutive equations arising in large deformation analysis*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 15, pages 1862–1867, 1980.

[Hughes 81a] T.J.R Hughes & W.-K. Liu. *Nonlinear finite element analysis of shells : Part I. Three-dimensional shells*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 26, pages 331–362, 1981.

[Hughes 81b] T.J.R Hughes & W.-K. Liu. *Nonlinear finite element analysis of shells : Part II. Two-dimensional shells*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 27, pages 167–182, 1981.

[Hutchinson 74] J.W. Hutchinson. *Plastic buckling (post-bifurcation and imperfection sensitivity)*. Advances in applied mechanics, vol. 14, pages 67–144, 1974.

[Kirchhoff 50] G. Kirchhoff. *Über das Gleichqewicht und die Bewegung einer elastichen Scheibe*. J. Reine und Angewandte Mathematik, vol. 40, pages 51–88, 1850.

[Klawonn 01] A. Klawonn & O. Windlund. *FETI and Neumann-Neumann iterative substructuring methods : connections and new results*. Comm. pure and appl. math., vol. LIV, pages 57–90, 2001.

[Koiter 45] W.T. Koiter. *On the stability of Elastic Equilibrium*. PhD thesis, Wright-Patterson air force base, Hollande, 1945. Traduction anglaise : Affdl-tr-70-25, february 1970.

[Koiter 59] W.T. Koiter. A consistent first approximation in the general theory of thin elastic shells. TH Delft, 1959.

[Koiter 80] W.T. Koiter. The intrinsic equations of shell theory with some applications, volume 5 (The E. Reissner anniversary volume) of *Mechanics today*, pages 139–154. Pergamon Press, New York, s. nemat-nasser edition, 1980.

[Kouznetsova 02] V. Kouznetsova, M.G.D. Geers & W.A.M. Brekelmans. *Multiscale constitutive modelling of heterogeneous materials with a gradient-enhanced computational homogenization scheme*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 54, pages 1235–1260, 2002.

[Ladevèze 98] P. Ladevèze & D. Dureisseix. *A 2-level and mixed computational strategy for structural analysis*. Contemporary Mathematics, vol. 218, pages 246–253, 1998.

[Ladevèze 99a] P. Ladevèze. Nonlinear computational structural mechanics - new approaches and non-incremental methods of calculation. Springer Verlag, Berlin, 1999.

[Ladevèze 99b] P. Ladevèze & D. Dureisseix. *Une nouvelle stratégie de calcul micro/macro en mécanique des structures*. Compte Rendu de l'Académie des Sciences, vol. 327, pages 1327–1244, 1999.

[Ladevèze 00a] P. Ladevèze & D. Dureisseix. *A micro/macro approach for parallel computing of heterogeneous structures*. International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, vol. 1, pages 18–28, 2000.

[Ladevèze 00b] P. Ladevèze, H. Lemoussu & P.A. Boucard. *A Modular Approach to 3-D Impact Computation with Frictional Contact*. Computers and Structures, vol. 78, no. 1-3, pages 45–51, 2000.

[Ladevèze 01] P. Ladevèze, O. Loiseau & D. Dureisseix. *A micro-macro and parallel computational strategy for highly heterogeneous structures*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 52, pages 121–138, 2001.

[Ladevèze 02a] P. Ladevèze & A. Nouy. *A multiscale computational method with time and space homogeneization*. C. R. Mécanique, vol. 330, pages 1–7, 2002.

[Ladevèze 02b] P. Ladevèze, A. Nouy & O. Loiseau. *A multiscale computational approach for contact problems*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 191, pages 4869–4891, 2002.

[Ladevèze 03] P. Ladevèze & A. Nouy. *On a multiscale computational strategy with time and space homogenization for structural mechanics*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 192, pages 3061–3087, 2003.

[Ladevèze 85] P. Ladevèze. *Sur une famille d'algorithmes en mécanique des structures*. C.-r. séances Acad. sci., Sér. 2 Méc.-phys. chim. sci. univers sci. terre, vol. 300, pages 41–44, 1985.

[Ladevèze 96] P. Ladevèze. Mécanique non-linéaire des structures – nouvelle approche et méthodes de calcul non incrémentales. Hermes, Paris, 1996.

[Le Tallec 05] P. Le Tallec, J.-F. Gerbeau, P. Hauret, & M. Vidrascu. *Fluid structure interaction problems in large deformation*. C. R. Mecanique, vol. 333, pages 910–922, 2005.

[Le Tallec 98] P. Le Tallec, J. Mandel & M. Vidrascu. *A Neumann-Neumann domain decomposition algorithm for solving plate and shell problems*. SIAM J. Num. Ana., vol. 35, pages 836–867, 98.

[Leclerc 05] H. Leclerc. *Nouveaux outils de mécanique et d'analyse numérique pour le LMT*. In Séminaire du LMT Cachan, 2005. http ://www.lmt.ens-cachan.fr/seminaire/transparents/leclerc-transparents.pdf.

[Leclerc 07] H. Leclerc. *Plateforme metil : optimisations et facilités liées à la génération de code*. In Colloque National en Calcul des Structures, Giens, 2007.

[Libai 88] A. Libai & J.G. Simmonds. The nonlinear theory of elastic shells : One spatial dimension. Academic Press, New York, 1988.

[Loiseau 01] O. Loiseau. *Une stratégie de calcul multiéchelle pour les structures hétérogènes*. PhD thesis, ENS de Cachan, 2001.

[Loiseau 02] O. Loiseau, P. Ladevèze & D. Dureisseix. *Sur une stratégie de calcul multiéchelle pour l'analyse des structures composites : discrétisation et performances*. Revue Européenne des Eléments Finis, vol. 11, pages 349–362, 2002.

[Lottiaux 05] R. Lottiaux, P. Gallard, G. Vallee, C. Morin & B. Boissinot. *OpenMosix, OpenSSI and Kerrighed : a comparative study*. In CCGRID '05 : Proceedings of the Fifth IEEE International Symposium on Cluster Computing and the Grid (CCGrid'05) - Volume 2, pages 1016–1023, Washington, DC, USA, 2005. IEEE Computer Society.

[Magoulès 06] F. Magoulès, F.-X. Roux & L. Series. *Algebraic Dirichlet-to-Neumann mapping for linear elasticity problems with extreme contrasts in the coefficients*. Applied Mathematical Modelling, vol. 30, pages 702–713, 2006.

[Malvern 69] L.E. Malvern. Introduction to the mechanics of a continuous medium. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1969.

[Mandel 93] J. Mandel. *Balancing domain decomposition*. Communication in Applied Numerical Methods, vol. 9, pages 233–241, 1993.

[Mao 91] K.M. Mao & C.T. Sun. *A refined global-local finite element analysis method*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 32, pages 29–43, 1991.

[Mavriplis 01] D.J. Mavriplis. *Multigrid approaches to non-linear diffusion problems on unstructured meshes*. Numer. Linear Algebra Appl., vol. 8, pages 499–512, 2001.

[Melenk 96] J.M. Melenk & I. Babuška. *The Partition of Unity Finite Element Method : Basic Theory and Applications*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 139, pages 289–314, 1996.

[Mindlin 51] R.D. Mindlin. *Influence of rotatory inertia and shear in flexural motions of isotropic elastic plates*. Journal of Applied Mechanics, vol. 18, pages 31–38, 1951.

[Modak 00] S. Modak & E.D. Sotelino. *The iterative group implicit algorithm for parallel transient finite element analysis*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 47, pages 869–885, 2000.

[Moës 99] N. Moës, J. Dolbow & T. Belytschko. *A finite element method for crack growth without remeshing*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 46, pages 131–150, 1999.

[Mori 73] T. Mori & K. Tanaka. *Average stress in the matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions*. Acta Metallurgica, vol. 21, pages 571–574, 1973.

[Neal 89] M.O. Neal & T. Belytschko. *Explicit-Explicit Subcycling witth Non-Integer Time Step Ratios for Structural Dynamic Systems*. Computers and Structures, vol. 31, pages 871–880, 1989.

[Néron 03] D. Néron, P. Ladevèze, D. Dureisseix & B. A. Schrefler. *A computational strategy for multiphysics problems involving multiscale aspects*. In D.R.J. Owen, E. Oñate & B. Suárez, editeurs, Proceedings of the Seventh International Conference on Computational Plasticity, page 128. CIMNE, Barcelona, Spain, 2003.

[Newton 71] I. Newton. Methodus fluxionum et serierum infinitorum. publié en 1736, 1671.

[Nineb 05] S. Nineb, P. Alart & D. Dureisseix. *Approche multiéchelle des systèmes de tenségrité*. In Lavoisier, editeur, Actes du Septième Colloque National en Calcul des Structures, Giens, France, volume 1, pages 81–86. Hermèsï¿½ Science, 2005.

[Nour-Omid 91] B. Nour-Omid & C.C. Rankin. *Finite rotation analysis and consistent linearization using projectors*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 93, pages 353–384, 1991.

[Nouy 03] A. Nouy. *Une stratégie de calcul multiéchelle avec homogéisation en temps et en espace pour le calcul de structures fortement hétérogènes*. PhD thesis, ENS de Cachan, 2003.

[Nygard 89] M.K. Nygard & P.G. Bergan. *Advances in treating large rotations for nonlinear problems*. In State-of-the-Art Surveys on Computational Mechanics, ASME, A.K. Noor, J.T. Oden (Eds.), pages 305–332(Chapter 10), New York, 1989. Springer-Verlag.

[Oden 97] J.T. Oden & T.I. Zohdi. *Analysis and adaptative modelling of highly heterogeneous structures*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 148, pages 367–392, 1997.

[Oden 99] J.T. Oden, K. Vemaganti & N. Moës. *Hierarchical modelling of heterogeneous solids*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 172, pages 2–25, 1999.

[Oñate 92] E. Oñate, O.C. Zienkiewicz, B. Suárez & R.L. Taylor. *A general methodology for deriving shear constrained Reissner-Mindlin plate elements*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 33, pages 345–367, 1992.

[Ortiz 86] M. Ortiz & J.C. Simo. *An analysis of a new class of integration algorithms for elastoplastic constitutive relations*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 23, pages 353–366, 1986.

[Pebrel 08] J. Pebrel, Ch. Rey & P. Gosselet. A nonlinear dual domain decomposition method : application to structural problems with damage. Submitted to International Journal for Multiscale Computational Engineering, 2008.

[Podovan 82] J.P. Podovan & T.Arechaga. *Formal convergence characteristics of elliptically constrained incremental Newton-Raphson algorithms*. Int.J.Engng.Sci., vol. 20, pages 1077–1097, 1982.

[Ramm 81a] E. Ramm. *The Riks/Wepner approach - an extension of the displacement control method in non-linear analysis*. In E. Hinton et al., editeur, Non-linear Computational Mechanics, pages 63–86, Swansea, 1981. Pineridge.

[Ramm 81b] E. Ramm. *Strategies for tracing the non-linear response near limit-points*. In W. Wunderlich, editeur, Non-linear Finite element Analysis in structural Mechanics, pages 63–89, Berlin, 1981. Springer-verlag.

[Ramm 99] E. Ramm. *From Reissner plate theory to three dimensions in large deformation shell analysis*. Z. angew. Math. Mech., vol. 79, pages 1–8, 1999.

[Reissner 45] E. Reissner. *The effect of transverse shear deformation the bending of elastic plates*. Journal of Applied Mechanics, vol. 12, pages 69–76, 1945.

[Reissner 50] E. Reissner. *On a variational theorem in elasticity*. Journal of Mathematics and Physics, vol. 29, pages 90–95, 1950.

[Reissner 72] E. Reissner. *On one-dimensional finite strain beam theory : the plane problem*. J. Appl. Math. Phys., vol. 23, pages 795–804, 1972.

[Reissner 85] E. Reissner. *Reflexions on the theory of elastic plates*. Appl. Mech. Rev., vol. 38, pages 1453–1464, 1985.

[Rey 94] Ch. Rey. *Développement d'algorithmes parallèles de résolution en calcul non-linéaire de structures hétérogènes*. PhD thesis, Ecole Normale Supérieure de Cachan, 1994. Thèse de Doctorat.

[Rey 96] Ch. Rey. *Une technique d'accélération de la résolution de problèmes d'élasticité non linéaire par décomposition de domaine*. Compte Rendu de l'Académie des Sciences, vol. 322 Série IIb, pages 601–606, 1996.

[Rey 00] Ch. Rey. *Approches itératives pour le calcul de structures non-linéaire*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie, 2000. Habilitation à diriger des recherches.

[Rey 06a] Ch. Rey, P. Cresta, O. Allix & S. Guinard. *Domain decomposition methods with nonlinear localization for post-buckling computation of slender structures*. In 7th World Congress on Computational Mechanics, Los Angeles, California, 16-22 juillet 2006.

[Rey 06b] Ch. Rey, P. Gosselet, P. Cresta & O. Allix. *Interface conditions and nonlinear localization for domain decomposition methods*. In Challenges in Computational Mechanics, Cachan, 10-12 mai 2006.

[Rey 07] C. Rey, P. Gosselet & J. Pebrel. *Computational strategy on nonlinear patches with mixed transfer conditions*. In USNCCM 9 - 9th US National Congress on Computational Mechanics, 2007.

[Riks 72] E. Riks. *The application of Newton's methods to the problem of elastic stability*. Journal of Applied Mechanics, vol. 39, pages 1060–1065, 1972.

[Riks 79] E. Riks. *An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems*. International Journal of Solids and Structures, vol. 15, pages 524–551, 1979.

[Risler 00] F. Risler & Ch. Rey. *Iterative accelerating algorithms with Krylov subspaces for th solution to large-scale nonlinear problems*. Numerical Algorithms, vol. 23, pages 1–30, 2000.

[Rixen 99] D. Rixen & C. Farhat. *A simple and efficient extension of a class of substructure based preconditioners to heterogeneous structural mechanics*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 44, pages 489–516, 1999.

[Royer 90] Ch. Royer. *Une approche des problèmes de dynamique non-linéaire par la Méthode à Grand Incrément de Temps*. PhD thesis, Université Paris VI, 1990. Thèse.

[Saad 00] Y. Saad. Iterative methods for sparse linear systems. PWS Publishing Company, 3rd edition, 2000.

[Salençon 00a] J. Salençon. Mécanique des milieux continus. Tome I : Concepts généraux. Les Editions de l'Ecole polytechnique, Palaiseau, 2000.

[Salençon 00b] J. Salençon. Mécanique des milieux continus. Tome II : Thermoélasticité. Les Editions de l'Ecole polytechnique, Palaiseau, 2000.

[Sanchez-Palencia 74] E. Sanchez-Palencia. *Comportement local et macroscopique d'un type de milieux physiques hétérogènes*. International Journal for Engineering Science, vol. 12, pages 231–251, 1974.

[Sanchez-Palencia 80] E. Sanchez-Palencia. *Non homogeneous media and vibration theory*. In Lecture Note in Physics, volume 127. Springer Verlag, 1980.

[Series 03] L. Series, F. Feyel & F.-X. Roux. *Une méthode de décomposition de domaine avec deux multiplicateurs de Lagrange*. In Actes du 16^{ime} congrès français de mécanique, 2003.

[Simmonds 72] J.G. Simmonds & D.A. Danielson. *Nonlinear shell theory with finite rotation and stress function vectors*. J. Appl. Mech., vol. 39, pages 1085–1090, 1872.

[Simo 85] J.C. Simo. *A finite strain beam formulation. the three-dimensional dynamic problem : Part I.* Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 49, pages 55–70, 1985.

[Sluis 99] O. Van Der Sluis, P.H.J. Vosbeek, P.J.G. Schreurs & H.E.H Meijer. *Homogenization of heterogeneous polymers*. Int. J. of Sol. and Struc., vol. 36, pages 3193–3214, 1999.

[Smit 98] R.J.M. Smit, W.A.M. Brekelmans & H.E.H. Meijer. *Prediction of the mechanical behaviour of non-linear heterogeneous systems by multi-level finite element modelling*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 155, pages 181–192, 1998.

[Sotelino 90] E.D. Sotelino. *A Class of Concurrent Algorithm for Transient Finite Element Analysis*. PhD thesis, Brown University, Providence, RI, 1990. Ph.D. Dissertation.

[Southwell 35] R.V. Southwell. *Stress calculation in frameworks by the method of systematic relaxation of constraints*. In Proceedings of The Royal Society of Edinburg, Section A, volume 151, pages 56–95. Philadelphia, SIAM, 1935.

[Strouboulis 00] T. Strouboulis, I. Babuska & K. Copps. *The design and analysis of the Generalized Finite Element Method*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 181, pages 43–69, 2000.

[Timoshenko 59] S.P. Timoshenko & S. Woinowski-Krieger. Theory of plates and shells. McGraw-Hill, New York, 2nd edition edition, 1959.

[Timoshenko 61] S.P. Timoshenko. Theory of elastic stability. McGraw-Hill, New York, 1961.

[Truesdell 60] C. Truesdell & R.A. Toupin. The classical field theories, volume III/1 of *Handbuch Der Physik*, pages 226–790. Springer-Verlag, Berlin, s. flügge edition, 1960.

[Truesdell 04] C. Truesdell & W. Noll. The non-linear theories of mechanics. Springer-Verlag, 2004.

[Tvergaard 90] V. Tvergaard. *Analysis of tensile properties for a whisker-reinforced metal-matrix composite*. Acta Metallurgica, vol. 38, no. 2, pages 185–194, 1990.

[Valid 77] R. Valid. La mécanique des milieux continus et le calcul des structures. Eyrolles, Paris, 1977.

[Valid 95] R. Valid. The nonlinear theory of shells through variational principles. Wiley, New York, 1995.

[Violeau 03] D. Violeau. Sur une amélioration de la stratégie de calcul multiéchelle avec homogénisation. Mémoire du DEA TACS, LMT-Cachan, juin 2003.

[Violeau 07] D. Violeau. *A micromodel based computation for laminated composites.* PhD thesis, ENS of Cachan, France, 2007.

[Washizu 82] K. Washizu. Variational methods in elasticity and plasticity. Pergamon Press, New York, 3rd edition edition, 1982.

[Wempner 68] G.A. Wempner, J.T. Oden & D.K. Cross. *Finite element analysis of thin shells*. Proc. Am. Soc. Civ. Eng., vol. 14, pages 1273–1294, 1968.

[Wempner 69] G.A. Wempner. *Finite elements, finite rotations and small strains of flexible shells*. Int. J. Solids Struc., vol. 5, pages 117–153, 1969.

[Whitcomb 91] J.D. Whitcomb. *Iterative global/local finite element analysis*. Computers and Structures, vol. 40, pages 1027–1031, 1991.

[Zahrouni 99] H. Zahrouni, B. Cochelin & M. Potier-Ferry. *Computing finite rotations of shells by an asymptotic-numerical method*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 175, pages 71–85, 1999.

[Zhu 97] H.T. Zhu, H.M. Zhib & E.C. Aifantis. *Strain gradients and continuum modeling of size effect in metal matrix composites*. Acta Mechanica, vol. 121, pages 165–176, 1997.

[Zienkiewicz 05] O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor & J.Z. Zhu. The finite element method. Volume 2 : For solid and structural mechanics. Butterworth-Heinemann, 6th edition edition, 2005.

[Zohdi 96] T.I. Zohdi, J.T. Oden & G.J. Rodin. *Hierarchical modeling of heterogeneous bodies*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 138, pages 273–298, 1996.

Annexes

ANNEXE A

Modèle et Elément de poutre de Navier-Bernoulli

Nous présentons dans cette annexe le modèle de poutre de Navier-Bernoulli et l'élément de poutre correspondant, sous l'hypothèse de petites perturbations. Nous nous limitons ici au cas bi-dimensionnel d'une poutre évoluant dans le plan $(O, \underline{X}, \underline{Y})$.

L'élément obtenu est utilisé dans ces travaux pour la simulation de treillis de poutres en grands déplacements, au moyen d'une formulation corotationnelle (voir chapitre 1) permettant la réutilisation des opérateurs élémentaires linéaires.

1 Modèle de poutre de Navier-Bernoulli

Les hypothèses cinématiques retenues pour le modèle de poutre de Navier-Bernoulli sont les suivantes :

- les sections droites de la poutre restent planes et indéformables dans leur plan,
- les sections restent orthogonales à la ligne moyenne.

Elle sont particulièrement adaptées aux poutres très élancées.

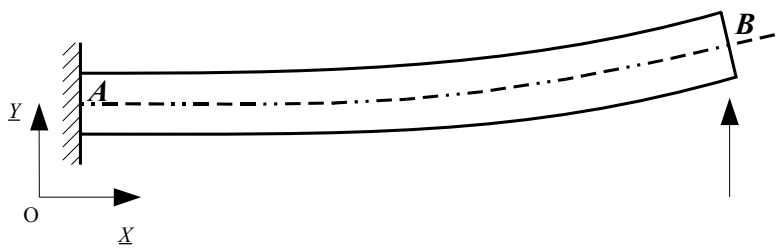

Figure A.1: Illustration d'un mode de déformation du modèle de Navier-Bernoulli

Ces hypothèses permettent de réduire les champs inconnus du problème aux composantes u_x et u_y du déplacement de la ligne moyenne. En effet la rotation θ_z de la section est alors directement liée au déplacement de la ligne directrice (Figure A.1). Dans le cas des petites perturbation, cette relation s'exprime ainsi :

$$\theta_z = \frac{\partial u_y}{\partial x} \tag{A.1}$$

L'ensemble V des vitesses virtuelles admissibles vis-à-vis de ces hypothèses cinématiques est :

$$V = \left\{ \underline{\hat{U}}, \exists(\underline{\hat{u}}, \hat{\theta}_z) : (A, B) \rightarrow \Re^2 \times \Re, \underline{\hat{U}}(\underline{x}) = \underline{\hat{u}}(x) - y\hat{\theta}_z(x)\underline{X}, \forall \underline{x} = (x, y) \right\} \tag{A.2}$$

L'expression de la puissance des efforts intérieurs peut alors s'écrire sous la forme :

$$P_i(\underline{\hat{U}}) = -\int_A^B \left[N.\frac{d\hat{u}_x}{\mathrm{dx}} + M.\frac{d^2\hat{u}_y}{\mathrm{dx}^2} \right] \mathrm{dx} \tag{A.3}$$

où N est l'effort normal dans l'élément de poutre, et M le moment fléchissant, définis par :

$$N(x) = \int_{S(x)} \sigma_{xx} dS \quad , \quad M(x) = -\int_{S(x)} y\sigma_{xx} dS \tag{A.4}$$

Enfin, les lois de comportement généralisées s'expriment ainsi :

$$N(x) = E(x).S(x).\frac{\partial u_x}{\partial x} \tag{A.5}$$

$$M(x) = E(x).I\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} \tag{A.6}$$

où E est le module d'Young (éventuellement variable selon x, mais constant dans la section), S l'aire de la section considérée et I le moment d'inertie géométrique de la section par rapport à l'axe $\underline{Z}$:

$$I = \int_S y^2 dS \tag{A.7}$$

2 Discrétisation et fonctions d'interpolations

On considère un élément fini de poutre de longueur L_e illustré sur la figure A.2. Sa géométrie s'appuie sur la ligne moyenne de la structure de poutre considérée.

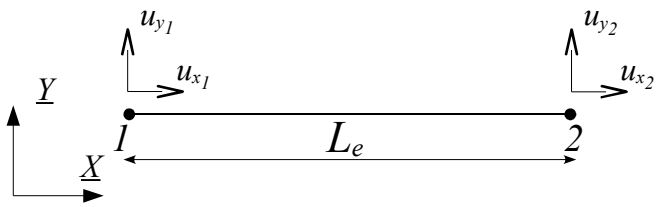

Figure A.2: Element fini de poutre à deux nœuds

Le premier terme dans l'expression (A.3) correspond au travail des efforts de traction dans un mouvement virtuel d'extension/compression. Ce dernier ne faisant intervenir que des dérivées premières, le champ des déplacements axiaux u_x peut être interpolé linéairement :

$$u_x(x) = (1-\eta)u_{x1} + \eta u_{x2} \tag{A.8}$$

où on a posé $\eta = x/L_e$.

Par ailleurs, du fait de la présence de dérivées secondes dans le terme de flexion et afin de permettre la continuité entre deux éléments du déplacement u_y et de sa dérivé $\theta_z = \partial u_y/\partial x$, on choisit pour l'interpolation des déplacements u_y le polynôme de degré 3 suivant :

$$\begin{aligned} u_y(x) = (1-3\eta^2+2\eta^3)u_{y_1} + (\eta - 2\eta^2 + \eta^3)\ L_e\ \theta_{z1} \\ + (3\eta^2 - 2\eta^3)u_{y_2} + (-\eta^2+\eta^3)\ L_e\ \theta_{z2} \end{aligned} \tag{A.9}$$

L'ensemble de ces équations peut alors se mettre sous la forme :

$$\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = \mathbf{N}(x).q \tag{A.10}$$

où q est le vecteur rassemblant les 6 degrés de liberté de l'élémént :

$$q^t = [u_{x1} \quad u_{y_1} \quad \theta_{z1} \quad u_{x2} \quad u_{y_2} \quad \theta_{z2}] \tag{A.11}$$

3 Matrice de raideur élastique

Les déformations généralisées de l'élément de poutre s'écrivent, pour les déformations axiales :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{u_{x2} - u_{x1}}{l} \tag{A.12}$$

et pour les déformations de flexion :

$$\partial\theta_z/\partial x = \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} \tag{A.13}$$

$$= (6-12\eta)\frac{u_{y_2} - u_{y_1}}{L_e^2} + (6\eta - 4)\frac{\theta_{z1}}{L_e} + (6\eta - 2)\frac{\theta_{z2}}{L_e} \tag{A.14}$$

soit encore :

$$\varepsilon(\eta) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \partial\theta_z/\partial x \end{bmatrix} = \mathbf{B}(\eta).q \tag{A.15}$$

On obtient alors la matrice de raideur élastique par substitution de ces relations dans (A.3) :

$$\mathbf{K}_e = \int_0^1 \mathbf{B}^t(\eta).\mathbf{A}.\mathbf{B}(\eta)\ L_e\ d\eta \tag{A.16}$$

où **A** est la matrice de comportement généralisé suivante :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} ES & 0 \\ 0 & EI \end{bmatrix} \tag{A.17}$$

L'expression (A.16) peut être intégré analytiquement pour obtenir finalement la matrice de raideur élémentaire $\mathbf{K}_e$:

$$\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} \frac{ES}{L_e} & 0 & 0 & -\frac{ES}{L_e} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L_e^3} & -\frac{6EI}{L_e^2} & 0 & -\frac{12EI}{L_e^3} & -\frac{6EI}{L_e^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L_e^2} & \frac{4EI}{L_e} & 0 & \frac{6EI}{L_e^2} & \frac{2EI}{L_e} \\ -\frac{ES}{L_e} & 0 & 0 & \frac{ES}{L_e} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L_e^3} & \frac{6EI}{L_e^2} & 0 & \frac{12EI}{L_e^3} & \frac{6EI}{L_e^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L_e^2} & \frac{2EI}{L_e} & 0 & \frac{6EI}{L_e^2} & \frac{4EI}{L_e} \end{bmatrix} \tag{A.18}$$

4 Efforts intérieurs

Les efforts généralisés de résultante et de moment dans l'élément de poutre s'obtiennent à partir des déformations généralisées ε :

$$\Sigma = \begin{bmatrix} N \\ M_z \end{bmatrix} = \mathbf{A}.\varepsilon \tag{A.19}$$

Pour un état de contraintes donné, les efforts internes nodaux (résultante et moment) sont donc :

$$F_{elem} = -\int_0^1 \mathbf{B}^t(\eta).\Sigma\, L_e\, d\eta \tag{A.20}$$

$$= -[-N \quad \frac{M_{z2} - M_{z1}}{L_e} \quad -M_{1z} \quad N \quad \frac{M_{z1} - M_{z2}}{L_e} \quad M_{2z}]^t \tag{A.21}$$

ANNEXE B

Formulation corotationnelle pour les éléments de poutres

Nous présentons dans cette annexe la mise en œuvre détaillée de la formulation corotationnelle, présentée dans [Felippa 05] et dans le chapitre 1, pour un élément de poutre à deux nœuds évoluant dans le plan $(0, \underline{X}, \underline{Y})$, tel que décrit dans l'annexe A. En particulier, nous présentons les différents opérateurs nécessaires au calcul des efforts et opérateurs tangents. Les inconnues nodales sont les déplacements u_x et u_y, ainsi que la rotation θ.

1 Choix du repère corotationnel

Nous considérons un élément de poutre à deux nœuds réprésenté par le segment $(1, 2)$ dans sa configuration initiale. Dans la configuration finale, les nœuds 1 et 2 deviennent respectivement 1_t et 2_t, et l'élément se déforme, comme illustré sur la figure B.1.

On associe à l'élément dans sa configuration initiale un repère $\mathcal{R}_0$, ayant comme base orthonormée directe $(\underline{X}_0, \underline{Y}_0)$, et comme origine le centre de gravité de l'élément G_0. La base $(\underline{X}_0, \underline{Y}_0)$ est choisie de sorte que $\underline{X}_0$ soit colinéaire au vecteur liant les nœuds 1 et 2.

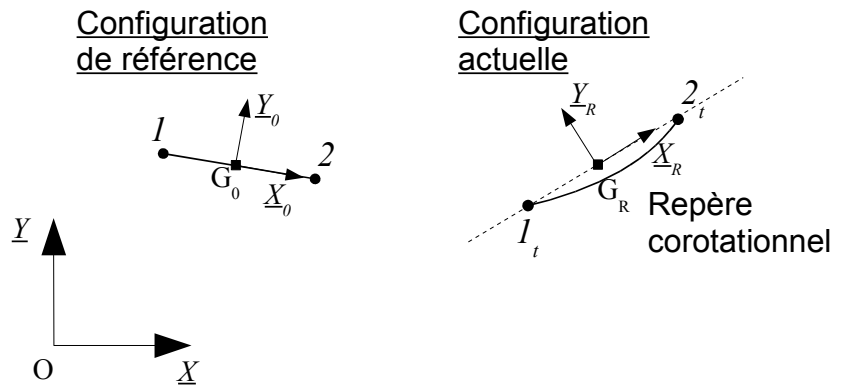

Figure B.1: Illustration des configurations et repères

De la même manière, on définit le repère corotationnel $\mathcal{R}_R$ par la donnée d'une base orthonormée directe $(\underline{X}_R, \underline{Y}_R)$, $\underline{X}_R$ colinéaire à $\left(\vec{1_t 2_t}\right)$, et d'une origine G_R située au milieu du segment $[1_t 2_t]$.

2 Extraction des déplacements et rotations déformantes

La première étape pour la mise en œuvre de la formulation corotationnelle est de déterminer la composante « déformante » des déplacements et rotations entre la configuration de référence et la configuration finale.

En deux dimensions, la base orthonormée directe de chacun des repères élémentaires est définie par l'angle θ qu'elle forme avec la base $(\underline{X}, \underline{Y})$ du repère global. On obtient les angles θ_0 et θ_R correspondant respectivement aux bases des repères de référence et corotationnel grâce aux équations suivantes :

$$\theta_0 = arctan\left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right) \tag{B.1}$$

$$\theta_R = arctan\left(\frac{y_{2_t} - y_{1_t}}{x_{1_t} - x_{1_t}}\right) \tag{B.2}$$

où x et y sont les abscisses et ordonnées des œuds en indice.

Par la suite, on rassemble dans les vecteurs R_0 et R_t les coordonnées des nœuds de l'éléments ainsi que la rotation associée, respectivement dans les configurations de référence et finale, exprimées dans le repère global :

$$R_0 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 0 \\ x_2 \\ y_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad R_t = \begin{bmatrix} x_{1t} \\ y_{1t} \\ \theta_{1_t} \\ x_{2t} \\ y_{2t} \\ \theta_{2_t} \end{bmatrix} \tag{B.3}$$

L'étape suivante consiste à exprimer les coordonnées nodales dans les repères élémentaires, grâce aux relations suivantes :

$$\tilde{R}_0 = \mathbf{T}_0.\mathbf{P}_u.R_0 \tag{B.4}$$

$$\tilde{R}_t = \mathbf{T}.\mathbf{P}_u.R_t \tag{B.5}$$

où $\mathbf{P}_u$ est un projecteur permettant d'exprimer les coordonnées par rapport au point G de l'élément :

$$\mathbf{P}_u = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & -0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{B.6}$$

et où $\mathbf{T}_0$ et $\mathbf{T}$ sont les opérateurs de changement de bases définis par :

$$\mathbf{T}^t = \begin{bmatrix} cos(\theta_R) & -sin(\theta_R) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ sin(\theta_R) & cos(\theta_R) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & cos(\theta_R) & -sin(\theta_R) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & sin(\theta_R) & cos(\theta_R) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{B.7}$$

$$\mathbf{T}_0{}^t = \begin{bmatrix} cos(\theta_0) & -sin(\theta_0) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ sin(-\theta_0) & cos(\theta_0) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & cos(\theta_0) & -sin(\theta_0) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & sin(\theta_0) & cos(\theta_0) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{B.8}$$

Les déplacements déformants $\tilde{u}_d$ correspondent à la variation de position des nœuds exprimés dans les repères élémentaires, soit :

$$\tilde{u}_d = \tilde{R}_t - \tilde{R}_0 \tag{B.9}$$

Les rotations déformantes θ_d sont obtenues en soustrayant la rotation de corps rigide correspondant au passage de $\mathcal{R}_0$ à $\mathcal{R}_R$:

$$\theta_{d1} = \theta_1 - (\theta_R - \theta_0) \tag{B.10}$$

$$\theta_{d2} = \theta_2 - (\theta_R - \theta_0) \tag{B.11}$$

puis sont insérés dans le vecteur $\tilde{u}_d$.

3 Opérateurs corotationnels

L'expression de l'opérateur tangent dans le repère globale passe par la définition préliminaire de quelques opérateurs particuliers à la formulation corotationnelle, que nous précisons ici dans le cas de l'élément de poutre à 2 noeuds. Il est important de noter que ces opérateurs dépendent uniquement de la topologie de l'élément, mais pas du modèle continu ou de l'interpolation retenue. Ces opérateurs sont :

– la matrice $\mathbf{P}_u$ de projection en déplacement : cet opérateur de dimension 6×6, déjà introduit plus haut, permet d'extraire la partie déformante des déplacements.

– la matrice **S** de « bras de levier » par rapport au centre de l'élément : cette matrice ce réduit dans le cas 2D pour l'élément considéré au vecteur suivant :

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2}L_t & 1 & 0 & \frac{1}{2}L_t & 1 \end{bmatrix}^t \tag{B.12}$$

où L_t est la longueur de l'élément déformé.

– la matrice **G** de « correction de spin » : cette matrice relie les variations de spin de l'élément, c'est-à-dire sa rotation instantanée par rapport à son centre de gravité, aux variations des degrés de liberté nodaux. Elle se réduit, dans le cas 2D et pour l'élément considéré, au vecteur suivant :

$$\mathbf{G} = [0 \quad -L_t \quad 0 \quad 0 \quad L_t \quad 0]^t \tag{B.13}$$

Contrairement à **S**, l'opérateur **G** dépend non seulement de la géométrie de l'élément, mais aussi du choix fait pour déterminer le repère corotationnel.

– la matrice **H**, reliant les variations du vecteur des rotations θ_d dans le repère corotationnel aux variations du vecteur de spin ω_d. Dans le cas bidimensionnel, il n'y a pas lieu de distinguer rotation et spin, et $\mathbf{H} = \mathbf{I}$.

– la matrice $\mathbf{P}_\theta$ de projection en rotation :

$$\mathbf{P}_\theta = \mathbf{SG} \tag{B.14}$$

– la matrice de projection complète $\mathbf{P} = \mathbf{P}_u - \mathbf{P}_\theta$.

Remarque : Tous les opérateurs sont relativement simples pour l'élément de poutre en deux dimension. Leur expression dans le cas général en trois dimension devient cependant beaucoup plus complexe, en particulier dans la gestion des rotations selon les trois axes, qui ne forment pas un groupe commutatif et nécessitent une attention particulière. La procédure de génération automatique de code décrite dans le chapitre 4 permet cependant de s'affranchir de l'écriture de ces opérateurs..

4 Efforts internes

Le calcul des efforts internes est réalisé selon la dernière approximation présentée au chapitre 1 :

$$F_{elem} = \mathbf{T}^t.\mathbf{P}^t.\tilde{\mathbf{K}}_e.\tilde{u}_d \tag{B.15}$$

où $\tilde{\mathbf{K}}_e$ est l'opérateur de raideur élémentaire en petites déformations, exprimé dans le repère corotationnel :

$$\tilde{\mathbf{K}}_e = \begin{bmatrix} \frac{ES}{L_e} & 0 & 0 & -\frac{ES}{L_e} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L_e^3} & -\frac{6EI}{L_e^2} & 0 & -\frac{12EI}{L_e^3} & -\frac{6EI}{L_e^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L_e^2} & \frac{4EI}{L_e} & 0 & \frac{6EI}{L_e^2} & \frac{2EI}{L_e} \\ -\frac{ES}{L_e} & 0 & 0 & \frac{ES}{L_e} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L_e^3} & \frac{6EI}{L_e^2} & 0 & \frac{12EI}{L_e^3} & \frac{6EI}{L_e^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L_e^2} & \frac{2EI}{L_e} & 0 & \frac{6EI}{L_e^2} & \frac{4EI}{L_e} \end{bmatrix} \tag{B.16}$$

5 Opérateur de raideur tangent dans le repère global

En reprenant les résultats du chapitre 1, l'opérateur de raideur tangent, exprimé dans le repère global, est obtenu par la relation suivante :

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{T}^t.(\mathbf{P}^t.\tilde{\mathbf{K}}_e.\mathbf{H}.\mathbf{P} - F_{nm}.G - G^t.F_n^t.\mathbf{P}).\mathbf{T} \tag{B.17}$$

où les opérateurs **T**, **P**, **H**, et G ont été explicité plus haut.

Dans le cas des éléments de poutre à deux nœuds, les vecteurs F_{nm} et F_n, liés à l'état de contrainte dans l'élément, sont définis par :

$$F_n = F_{nm} = \mathbf{Spin}.\mathbf{P}^t.\tilde{\mathbf{K}}_e.\tilde{u}_d \tag{B.18}$$

avec :

$$\mathbf{Spin} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{B.19}$$

.

ANNEXE C

Modélisation des plaques

Nous présentons dans cette annexe le modèle de plaque de Reissner-Mindlin, associé à un modèle de membrane pour le comportement dans le plan. Ces modèles sont utilisés pour la simulation des structures aéronautiques présentées dans le chapitre 4. Nous nous limitons dans cette annexe à la description des modèles sous l'hypothèse des petites perturbations. Par la suite, il sera associé à une formulation corotationnelle pour la gestion des non-linéarités géométriques (grands déplacements et grandes rotations). Enfin, nous ne présentons pas ici les opérateurs discrétisés, qui sont obtenus de façon automatique au moyen de la procédure de calcul symbolique présentée dans le chapitre 4.

1 Cinématique de plaque

On considère une plaque, c'est-à-dire une structure élancée plane, d'épaisseur h petite devant les autres dimensions. Sa cinématique est décrite, en chaque point de sa surface moyenne, par les déplacements u_x, u_y et u_z selon les trois axes, ainsi que par les rotations θ_x et θ_y (voir figure C.1).

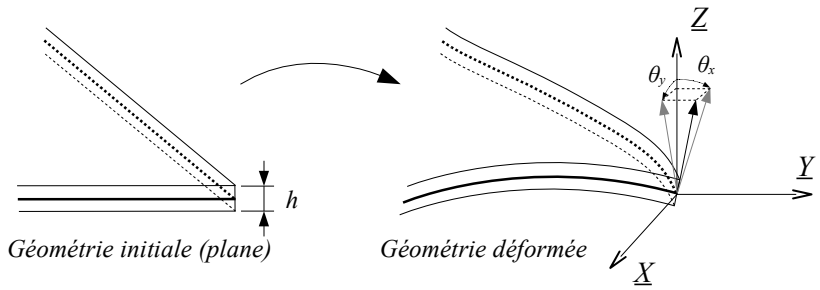

Figure C.1: Illustration de la cinématique des plaques

On néglige par ailleurs les variations d'épaisseurs, et on considère que les segments traversant la structure initalements orthogonaux à la surface moyenne restent rectiligne après déformation. Contrairement aux hypothèses faites pour les poutres de Navier-Bernoulli (ou les plaques de Kirchhoff), nous n'imposons pas de relation *a priori* entre rotation

et dérivées du déplacement u_z. Cette cinématique, autorisant les modes de cisaillement transverse, est particulièrement adaptée aux plaques relativement épaisses.

On peut différentier plusieurs modes de déformation :

– les déformations de membrane $\underline{\underline{\gamma}}$, associées aux déplacements dans le plan :

$$\underline{\underline{\gamma}} = \frac{1}{2}\left[\underline{\underline{\nabla u}}_{(\underline{X},\underline{Y})} + \left(\underline{\underline{\nabla u}}_{(\underline{X},\underline{Y})}\right)^t\right] \tag{C.1}$$

où $\underline{u}_{(\underline{X},\underline{Y})}$ est le vecteur des déplacements dans le plan $(\underline{X},\underline{Y})$:

$$\underline{u}_{(\underline{X},\underline{Y})} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix}$$

– les déformations de flexion $\underline{\underline{\chi}}$, associées aux rotations de la structure :

$$\underline{\underline{\chi}} = \frac{1}{2}\left[\underline{\underline{\nabla \beta}} + \left(\underline{\underline{\nabla \beta}}\right)^t\right] \tag{C.2}$$

où $\underline{\beta}$ est le vecteur des rotations défini par :

$$\underline{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_y \\ -\theta_x \end{bmatrix}$$

– les déformations de cisaillement τ, associées à la non-vérification des hypothèses de Kirchhoff ($\beta_x = \partial u_z/\partial x$, etc.) :

$$\underline{\tau} = \underline{\nabla u}_z + \underline{\beta} \tag{C.3}$$

Ces différentes mesures de déformations peuvent aussi s'écrire sous la notation vectorielle suivante :

$$\gamma = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u_x}{\partial x} \\ \dfrac{\partial u_y}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u_x}{\partial y} + \dfrac{\partial u_y}{\partial x} \end{bmatrix} \quad , \quad \chi = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \beta_x}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \beta_y}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \beta_x}{\partial y} + \dfrac{\partial \beta_y}{\partial x} \end{bmatrix} \quad , \quad \tau = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u_z}{\partial x} + \beta_x \\ \dfrac{\partial u_z}{\partial y} + \beta_y \end{bmatrix}$$

2 Puissances des Efforts Intérieurs

A partir de la cinématique précédemment décrite, on peut écrire l'expression de la puissance des efforts intérieurs dans un mouvement virtuel $(\underline{\hat{u}}, \underline{\hat{\theta}})$:

$$P_i = \int_\Omega \left[N^t.\gamma(\hat{u}) + M^t.\chi(\hat{\theta}) \ + T^t.\tau(\hat{u}, \hat{\theta}) \right] dV \tag{C.4}$$

où les vecteurs N, M, T sont les flux d'efforts et de moments généralisés définis à partir du tenseur des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$ défini sur la géométrie tridimensionnelle, soit :

– les flux d'efforts dans le plan, associés au modèle de membrane :

$$N = \begin{bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx} \, dz \\ \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yy} \, dz \\ \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xy} \, dz \end{bmatrix} \tag{C.5}$$

– les flux de moments, associés au modèle de plaque :

$$M = \begin{bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_{-h/2}^{h/2} z \, \sigma_{xx} \, dz \\ \int_{-h/2}^{h/2} z \, \sigma_{yy} \, dz \\ \int_{-h/2}^{h/2} z \, \sigma_{xy} \, dz \end{bmatrix} \tag{C.6}$$

– les flux d'efforts tranchants, associés au cisaillement transverse dans le modèle de plaque :

$$T = \begin{bmatrix} T_{xz} \\ T_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xz} dz \\ \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yz} \, dz \end{bmatrix} \tag{C.7}$$

3 Lois de comportement généralisées

On considère ici le cas d'un matériau constitutif élastique isotrope. A partir de ses propriétés - le module d'Young E et le coefficient de Poisson ν - , des hypothèses cinématiques, de l'expression des flux d'efforts et moments généralisés ainsi que des puissances virtuelles des efforts intérieurs, on obtient les lois de comportement élastiques généralisées pour le modèle de poutre considéré, à travers les matrices $\mathbf{K}_m$, $\mathbf{K}_f$ et $\mathbf{K}_t$ suivantes, associées respectivement aux modes de déformations de membrane, de flexion et de cisaillement transverse :

$$\mathbf{K}_m = \frac{E.h}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \tag{C.8}$$

$$\mathbf{K}_f = \frac{E.h^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \tag{C.9}$$

$$\mathbf{K}_t = \begin{bmatrix} \kappa Eh(2+2\nu) & 0 \\ 0 & \kappa Eh(2+2\nu) \end{bmatrix} \tag{C.10}$$

où κ est un facteur de correction permettant de prendre en compte la différence entre le champ de déplacement réel et la cinématique retenue dans ce modèle. En statique, une valeur couramment admise est $\kappa = \frac{5}{6}$.

Ces différents opérateurs permettent de relier facilement les déformations et les flux généralisés, exprimés sous la notation vectorielle :

$$N = \mathbf{K}_m \gamma \quad , \quad M = \mathbf{K}_f \chi \quad , \quad T = \mathbf{K}_t \tau \tag{C.11}$$

4 Prise en compte des rotations normales

Les rotations θ_z n'entrent pas en compte dans les modèles classiques de membranes ou de plaques, et en particulier dans ceux présentés ici. Dans le cas général, il convient cependant d'introduire un champ de rotation normale, afin de permettre l'assemblage de modèles de plaques non-coplanaires. C'est le cas par exemple pour le modélisation de surfaces incurvées au moyen d'éléments plans de plaques.

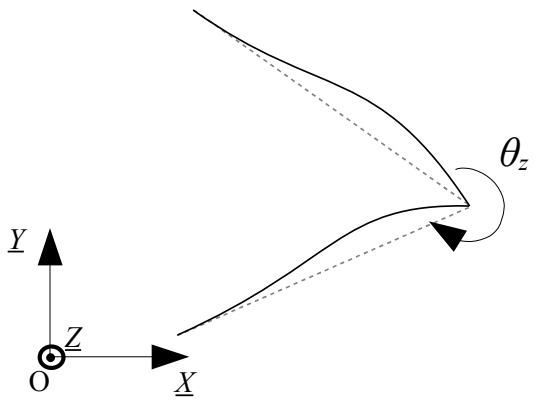

Figure C.2: Mode de vrillage dans une plaque

Il est ainsi envisageable d'introduire une cinématique de membrane particulière prenant en compte des modes de déformation physiques de vrillage dans le plan (voir figure C.2). Ces modèles ont mené au développement de divers éléments finis avec vrillage, ou « drilling » [Allman 84, Bergan 85, Felippa 92, Felippa 03]. Il est cependant plus courant d'introduire un mode de déformation artificiel, sans réel sens physique. On l'associe, dans le calcul des puissances virtuelles, à une raideur suffisamment petite pour ne pas perturber les résultats, mais strictement positive afin que l'opérateur obtenu soit bien défini.

Dans les travaux présentés ici, la déformation de vrillage retenue s'exprime ainsi :

$$\delta(\theta_z) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \theta_z}{\partial x} \\ \\ \dfrac{\partial \theta_z}{\partial y} \end{bmatrix} \tag{C.12}$$

et on note $\mathbf{K}_{drill}$ l'opérateur de raideur associé :

$$\mathbf{K}_{drill} = \begin{bmatrix} k_{drill} & 0 \\ 0 & k_{drill} \end{bmatrix} \tag{C.13}$$

Au final, la puissance des efforts virtuels s'écrit, sous sa forme complète :

$$\begin{aligned} P_i(u, \theta, \hat{u}, \hat{\theta}) = \int_\Omega \Big[& \gamma(u)^t.\mathbf{K}_m.\gamma(\hat{u}) + \chi(\theta)^t.\mathbf{K}.\chi(\hat{\theta}) \\ & + \tau(u, \theta)^t.\mathbf{K}_t.\tau(\hat{u}, \hat{\theta}) + \delta(\theta_z)^t.\mathbf{K}_{drill}.\delta(\hat{\theta}_z) \Big] \, dV \end{aligned} \tag{C.14}$$