HAL
open science

Tressages d'espaces de tenseurs

Thomas Grapperon

To cite this version:

Thomas Grapperon. Tressages d'espaces de tenseurs. Physique mathématique [math-ph]. Université de la Méditerranée - Aix-Marseille II, 2008. Français. NNT : . tel-00364341

HAL Id: tel-00364341

https://theses.hal.science/tel-00364341

Submitted on 25 Feb 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université de la Méditerranée Aix-Marseille II
U.F.R. Sciences de Luminy
École Doctorale n° 352

Thèse

présentée pour obtenir le grade de

Docteur de l'Université de la Méditerranée

Spécialité : Physique Théorique

par

Thomas Grapperon

Tressages d'espaces de tenseurs

Soutenue publiquement le 25 novembre 2008

Jury

M. Robert Coquereaux	Membre du Jury
M. Christian Duval	Président du Jury
M. Sergeï Khoroshkin	Rapporteur
M. Oleg Ogievetsky	Directeur de thèse
M. Philippe Roche	Rapporteur

Introduction

Je vends des pommes, des poires,
et des scoubidoubi-ou ah…

Sacha Distel, *Scoubidou (des pommes… des poires…)*, 1958

Toutes les théories physiques comprennent à un moment ou à un autre (le plus souvent dès le début) un principe de symétrie. Un philosophe arguerait qu'elles ne sont qu'un artifice créé par l'Homme pour pouvoir approcher de manière maitrisée des problèmes complexes et que rien ne force la Nature, *a priori*, à posséder des symétries. Toujours-est-il que les théories physiques que nous avons baties pour modéliser la Nature en sont remplies et que ces principes de symétrie permettent parfois d'anticiper de nouvelles propriétés vérifiées ensuite par l'expérience. Ainsi, l'étude des symétries elles-mêmes est indissociable des progrès réalisés et à venir en physique théorique et en mathématiques.

Si la symétrie présentée par un cercle ou un réseau cristallin est évidente, celle présentée par un plat de spaghettis ou une pelote de laine l'est moins. Intuitivement, on associe à la notion de symétrie une structure rigide, parfaitement définie par des contraintes sans lesquelles l'Homme ne pourrait voir « la même chose ». De fait, tout réside dans la définition de cette « même chose », et nous quittons à cette fin le domaine de la rhétorique pour celui des mathématiques. Les symétries sont alors encodées par l'action d'un groupe et celui qui décrit l'action d'un coup de fourchette dans un plats de spaghettis (infinis) est appelé groupe des tresses.

Il existe souvent de nombreuses manières de définir un groupe précis, et ceci est particulièrement vrai pour le groupe des tresses. Si nous le définissons par générateurs et relations, nous pouvons obtenir, entre autres, une relation appelée relation de tresses par les mathématiciens ou équation de Yang-Baxter par les physiciens. La première chose qui saute aux yeux lorsque l'on rencontre cette relation est sa symé-

trie syntaxique : si A et B sont des générateurs tels que $AB \neq BA$, alors

$$ABA = BAB.$$

Sa simplicité permet à cette relation d'apparaître dans de nombreux domaines de la physique ou des mathématiques.

Le premier à avoir formalisé le groupe des tresses est Emil Artin en 1925 [6], bien que la relation de tresse ait apparu dans les travaux d'Adolf Hurwitz une trentaine d'années plus tôt lors d'investigations sur la classification topologique des polynômes complexes [51, 36]. Les tresses, dans leur acceptation commune, intéressaient déjà depuis longtemps les mathématiciens puisque Gauß écrivait dans ses carnets vers 1820 qu'elles semblaient fournir une bonne méthode pour coder des nœuds [76], assertion qui a été prouvée cent ans plus tard par James Alexander [2].

Après l'article fondateur d'Artin, de nombreuses propriétés et connexions avec d'autres domaines des mathématiques ont été découvertes : en 1947, Artin identifie le groupe des tresses comme sous-groupe du groupe d'automorphismes du groupe libre et résoud le problème des mots [7]. En 1962, Ralph Fox et Lee Neuwirth redécouvrent l'interprétation originelle de Hurwitz du groupe des tresses comme groupe fondamental d'un espace de configurations [42]. En 1969, Frank Garside résoud dans son unique article le problème des mots et le problème de conjugaison [46], et cette procédure peut être appliquée à une généralisation du groupe de tresses que sont les groupes d'Artin-Tits [29, 31]. En 1976, Joan Birman identifie le groupe des tresses avec un groupe de difféotopie [15]. Cette approche a permis à Stephen Bigelow de démontrer, en 2001 seulement, que les groupes des tresses étaient linéaires, c'est-à-dire isomorphes à un sous-groupe du groupe linéaire et admettent alors une représentation fidèle [13, 14]. Le temps qu'il a fallu pour obtenir ce résultat fondamental montre bien que sous l'apparente simplicité du groupe des tresses se cache un objet mathématique complexe. De la même manière, il a fallu attendre Patrick Dehornoy en 1995 pour découvrir que le groupe des tresses est un groupe ordonnable [28]. En 1985, Vaughan Jones découvre un nouveau polynôme invariant de nœud (plus tard généralisé comme un cas particulier du polynôme HOMFLY-PT [44, 77]) à l'aide de représentations des groupes des tresses sur des algèbres de Hecke [54, 53]. En 1989, Edward Witten créé une théorie quantique des champs topologique qui permet de donner une interprétation physique au polynôme de Jones [95].

L'équation de Yang-Baxter apparait en physique dans de nombreux domaines. Chen Ning Yang l'a inventée en 1967 lors de l'étude du problème quantique à plusieurs corps en une dimension interagissant via des fonctions δ de Dirac. En intro-

duisant l'Ansatz de Bethe, il découvre que la matrice de diffusion S à n particules se factorise en produit de matrices S à deux particules et que l'équation de Yang-Baxter est alors une condition de cohérence de cette factorisation [96, 97]. En 1971, Rodney Baxter étudie le modèle à huit sommets en mécanique statistique et retrouve l'équation de Yang-Baxter comme une condition nécessaire à la commutation de matrices de transfert [9]. Il découvre six ans plus tard que même dans le cas d'un réseau arbitraire, la fonction de partition est inchangée lors de déplacements parallèles aux mailles et appelle cette propriété Z-invariance [10]. L'année suivante, Alekandr Zamolodchikov montre que le mécanisme de factorisation des matrices S est le même que celui de la Z-invariance [98].

Au début des années 1980, Evgeny Sklyanin, Ludwig Fadeev et Leon Takhtajan concilient les résultats des systèmes intégrables quantiques et classiques en créant la méthode de diffusion quantique inverse (QISM) et donnent une version dite classique de l'équation de Yang-Baxter [85]. Il apparait alors que lors de la quantification de systèmes classiques, certaines structures subissent des transformations quantiques. En particulier, certaines algèbres de Lie sont transformées en une déformation (un développement en série formelle) de leur algèbre universelle enveloppante. Vladimir Drinfeld se rend alors compte au milieu des années 1980 [34, 35] que le langage des algèbres de Hopf permet décrire ces déformations dans le cadre de la QISM, et l'équation de Yang-Baxter est alors satisfaite par une matrice prenant en compte la déformation d'une algèbre de Hopf cocommutative en une algèbre de Hopf presque cocommutative, donnant ainsi formellement naissance aux groupes quantiques.

Nous observons donc que l'équation de Yang-Baxter est au cœur de nombreux problèmes aussi bien en mathématiques qu'en physique. Ainsi, tout résultat concernant cette équation est susceptible d'avoir des applications dans différentes branches. Le propos de cette thèse est d'établir une nouvelle solution de cette équation, et nous présentons maintenant le plan que nous avons choisi. Dans une première partie, nous introduisons les groupes des tresses qui sont le support des résultats de cette thèse. Nous donnons plusieurs définitions afin de mettre en exergue son ubiquité, et nous étudions très brièvement le problème des mots comme prétexte à l'obtention de propriétés utiles. Ce chapitre ne contient que des résultats standards et permet de préciser les notations et conventions pour le lecteur averti.

Dans un second chapitre, nous passons dans l'algèbre de groupe du groupe des

tresses et nous présentons les analogues tressés. Ils constituent un sujet assez récent et relativement peu étudié des mathématiques. De prime abord, on peut s'interroger sur leur place dans une thèse portant sur l'équation de Yang-Baxter. Le fait est qu'ils se sont imposés dans le principal résultat de cette thèse de manière relativement inattendue. De manière remarquable, les analogues tressés que nous présentons permettent de construire une combinatoire tressée. En effet, nous étudions dans ce chapitre des objets de l'algèbre de groupe du groupe des tresses qui sont analogues (!) à des factorielles et des coefficients binomiaux. À l'instar de ces derniers, ils sont soumis à de nombreuses propriétés et relations combinatoires comme le développement binomial de Newton ou la convolution de Chu-Vandermonde. Une autre propriété remarquable des analogues tressés est qu'ils sont aussi analogues d'autres analogues célèbres : les q-analogues. Ainsi nous pouvons intercaler ces derniers entre les analogues tressés et leurs objets classiques et construire une chaîne « analogue tressé » →« q-analogue » → « objet classique ». À la fin de ce chapitre, nous présentons pour la beauté de l'art des analogues tressés pour les nombres de Fuß-Catalan. Ces derniers n'apparaissent pas par la suite, mais leur traitement est direct à la vue des concepts présentés auparavant. Ce chapitre contient donc des résultats plus ou moins standards sur les analogues tressés et permet de terminer les préparatifs à l'abord de la seconde partie de cette thèse. La sous-section sur les nombres de Fuß-Catalan est originale.

La seconde partie de cette thèse est divisée en deux chapitres. Dans le troisième chapitre, nous précisons la définition d'un tressage en utilisant le langage des catégories. Nous postulons alors une certaine structure sur des relations de commutation entre tenseurs et nous dérivons le système d'équations qui doit être satisfait pour que ces relations encodent un tressage. Ce système d'équations comporte une infinité d'équations non-linéaires dont les variables sont des éléments de l'algèbre de groupe du groupe des tresses. Nous approchons donc le système aux petits ordres et étudions ses propriétés principales. Nous arrivons alors à conjecturer une solution dont nous démontrons la validité. Nous étudions ensuite certaines propriétés de cette solution. En particulier, nous montrons qu'elle est unique à un isomorphisme près. Après avoir exprimé son inverse, nous montrons que la forme présentée de cette solution étant polynomiale en les générateurs du groupe des tresse (elle appartient à la restriction de l'algèbre de groupe du groupe des tresse au monoïde des tresses positives), elle est alors la seule dont l'inverse soit polynomiale en l'inverse des générateurs. Nous nous intéressons alors au cas unidimensionnel et nous donnons l'expression de cette solution en termes de q-analogues. Nous terminons le chapitre en montrant

que cette solution n'appartient pas au noyau de la projection canonique du groupe des tresses sur le groupe symétrique.

Dans le dernier chapitre de cette thèse, nous généralisons la solution obtenue au troisième chapitre. Plus précisément, nous modifions la structure imposée sur les relations de commutation entre tenseurs en stipulant qu'elles se décomposent sur des tenseurs dont les ordres sont congrus aux ordres des tenseurs de départ modulo un nombre entier arbitraire. Nous étudions alors de quelle manière le système d'équations est modifié et nous adaptons en conséquence les formules présentées au second chapitre. Nous conjecturons alors une solution à ce nouveau système dont nous démontrons la validité. Les matrices correspondant à ces tressages étant parcourues de plus ou moins larges bandes diagonales de zéros, nous qualifions de zébrés ces nouveaux tressages. Le contenu de ces deux chapitres est totalement original.

Nous fournissons enfin en annexe les équations constituant les premiers stades du système résolu au troisième chapitre.

❦

Quelques connexions entre le groupe des tresses, l'équation de Yang-Baxter et d'autres domaines de la physique et des mathématiques.

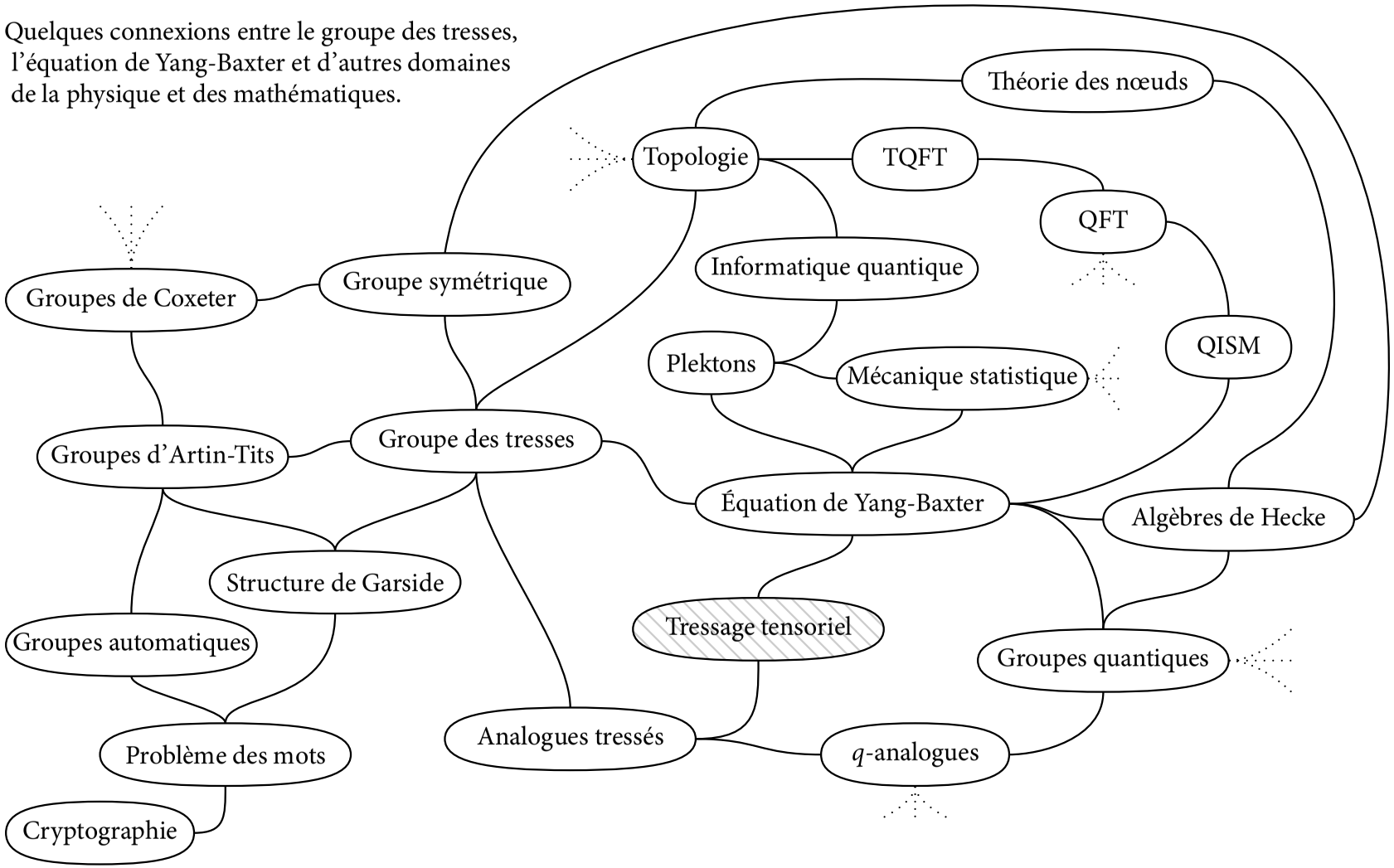


Table des matières

Introduction 3

Table des matières 9

I Le groupe des tresses et les analogues tressés 13

1 Le groupe des tresses 15

1.1 Définitions 15

1.1.1 Définition géométrique 15

1.1.2 Présentation d'Artin 17

1.1.3 Présentation de Birman, Ko et Lee 18

1.1.4 Groupes de difféotopie 19

1.1.5 Groupe d'homotopie et groupe libre 21

1.1.6 Espaces de configuration 21

1.1.7 Groupes quantiques 22

1.2 Propriétés 24

1.2.1 Deux involutions remarquables 25

1.2.2 Ordre invariant 25

1.3 Groupes d'Artin-Tits 27

1.3.1 Liens avec le groupe symétrique 27

1.3.2 Le problème des mots dans le groupe des tresses 28

1.3.2.1 Renversement de mot 29

1.3.2.2 Structure de Garside 30

1.3.2.3 Application au groupe des tresses 33

1.3.2.4 Solutions alternatives 34

1.3.3 Le problème de conjugaison et la cryptographie tressée . . . 35

1.3.3.1 Le problème de conjugaison dans $\mathbf{B}_n$ 35

1.3.3.2 Cryptographie tressée 36

1.4 Éléments et identités remarquables 37

1.4.1 Tressage élémentaire 37
1.4.2 Tresse fondamentale 40

2 Analogues tressés **45**
2.1 Rappels sur les q-analogues 45
2.1.1 q-nombres et q-factorielles 46
2.1.2 q-coefficients binomiaux 46
2.1.3 q-symboles de Pochhammer 49
2.2 Analogues tressés 50
2.2.1 Nombres tressés et symétriseurs 50
2.2.2 Battages quantiques 52
2.2.3 Extension aux arguments négatifs 58
2.2.4 Symboles de Pochhammer tressés 62
2.2.5 Nombres de Fuß-Catalan 65

II Tressages d'espaces de tenseurs **73**

3 Tressages d'espaces de tenseurs **75**
3.1 Tressages 75
3.1.1 Tressage pour un espace de tenseurs 77
3.1.2 Relation de tresse pour un espace de tenseurs 79
3.2 Génèse d'une solution 79
3.2.1 Remarques préliminaires 80
3.2.2 Étude du système aux petits ordres 80
3.2.2.1 Ordre 0 80
3.2.2.2 Ordre 1 81
3.2.2.3 Ordre 2 81
3.2.2.4 Ordre 3 82
3.2.2.5 Ordres supérieurs 83
3.3 Twist 85
3.4 Solution 88
3.5 Unicité de la solution 93
3.5.1 Changement de variables 94
3.5.2 Un palindrome 98
3.6 Inverse 100
3.7 Le cas unidimensionnel 102
3.8 Remarque 103

4 Tressage zébré **107**
4.1 Variations 109
4.1.1 Tressage élémentaire zébré 109
4.1.2 Choix admissibles 113
4.1.3 Battages et tresses fondamentales zébrés 114
4.1.4 Structure interne 116
4.1.5 Symboles de Pochhammer zébrés 117
4.2 Système et solution 121
4.2.1 Système zébré 121
4.2.2 Solution zébrée 121
4.3 Propriétés 127
4.3.1 Twist scalaire 127
4.3.2 Absorption des degrés de liberté internes 128

Annexe **133**

A Premiers ordres **133**
A.0 Ordre 0, 1 équation 133
A.1 Ordre 1, 6 équations 133
A.2 Ordre 2, 20 équations 134
A.3 Ordre 3, 50 équations 135
A.4 Ordre 4, 105 équations 136

Bibliographie **141**

Première partie

Le groupe des tresses et les analogues tressés

CHAPITRE 1

LE GROUPE DES TRESSES

Le groupe des tresses est le terrain de jeu de cette thèse. Ce groupe est présent dans de très nombreux domaines des mathématiques et de la physique. Le fait le plus remarquable est sans doute la disparité entre la simplicité de certaines de ses définitions et la richesse des propriétés dont il jouit.

Dans ce chapitre, nous donnons plusieurs définitions du même objet pour forcer l'emphase sur son ubiquité. Nous étudions ensuite quelques propriétés et nous nous intéressons au problème des mots. Sa résolution fournit en effet un plan commode à l'introduction de certains concepts et l'établissement de propriétés. Nous nous penchons enfin sur deux éléments particuliers et indispensables à la formulation des analogues tressés.

1.1 Définitions

1.1.1 Définition géométrique

Nous commençons par donner une version géométrique et intuitive des tresses, ainsi que de la structure de groupe dont elle peuvent être munies.

Soit $P_n = \{p_1, \ldots, p_n\}$ un ensemble de n points d'affixes réelles dans $\mathbf{C}$. Sans perte de généralité, nous pouvons choisir $p_k = k$, $1 \leq k \leq n$.

Un sous-ensemble de $\mathbf{C} \times [0,1]$ formé par l'union de n arcs disjoints liant $P_n \times \{0\}$ à $P_n \times \{1\}$, monotones dans la seconde variable, représente une tresse dite géomé-

trique à n brins. Elle correspond à la notion usuelle de tresse. Deux tresses géométriques sont équivalentes s'il est possible de déformer l'une en l'autre par le biais d'une famille continue de tresses géométriques et nous parlerons alors d'isotopie régulière (et non ambiante puisque les arcs sont monotones dans la seconde variable).

Nous pouvons dessiner une tresse géométrique dans le plan en projetant $\mathbf{C}\times[0,1]$ sur $[1,n]\times[0,1]$, le long de la composante imaginaire. Nous demandons cependant que la tresse soit en position dite générale ou régulière, i.e. de telle manière que les images des brins s'intersectent transversalement, avec exactement deux brins à chaque point d'intersection. À chaque point d'intersection (ou croisement), nous enregistrons l'information perdue lors de la projection en brisant la courbe du brin passant en dessous (celui qui, au point d'intersection, avait la composante imaginaire la plus grande par exemple) de part et d'autre du croisement, voir la figure 1.1. Nous parlerons dans ce cas du diagramme d'une tresse, et un théorème de Reidemeister assure alors que l'isotopie régulière est prise en compte par l'équivalence des diagrammes sous les mouvements de Reidemeister de type (II) et (III), cf. figure 1.2 [79]. Le mouvement de type (I) étendrait l'équivalence à une isotopie ambiante, ce qui est exclu pour les tresses (mais autorisé pour les entrelacs). Les éléments du groupe des tresses sont les classes d'équivalence des tresses par isotopie régulière. Par la suite, nous sous-entendrons ces classes quand nous parlerons de tresses.

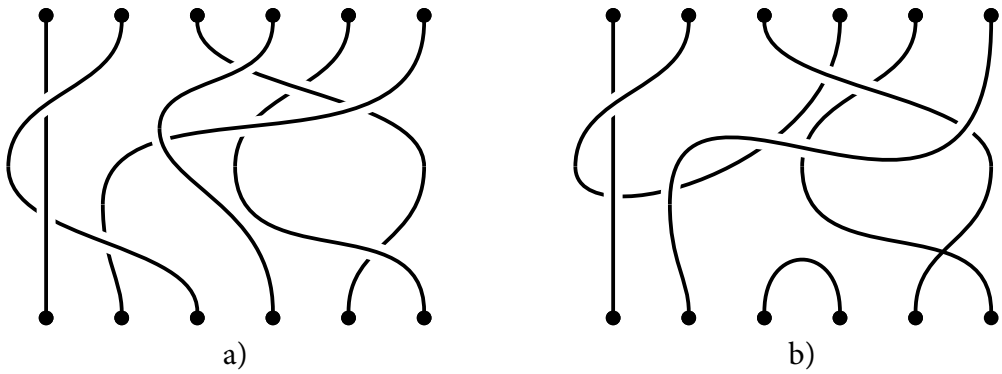


FIGURE 1.1: Diagrammes a) d'une tresse géométrique à 6 brins, et b) d'un objet qui n'est pas une tresse géométrique (ici un entrelacs singulier).

Nous pouvons définir une multiplication pour deux tresses ayant des nombres de brins identiques. Si A et B sont deux tresses à n brins, nous définissons le produit AB comme la tresse obtenue en fusionnant la fin (concordement à la variable temporelle) des brins de A avec le début de ceux de B, et en redimensionnant de telle sorte qu'$AB \subset \mathbf{C}\times[0,1]$. Nous observons alors que la tresse où tous les brins sont des segments parallèles est un élément neutre pour cette multiplication. Cela

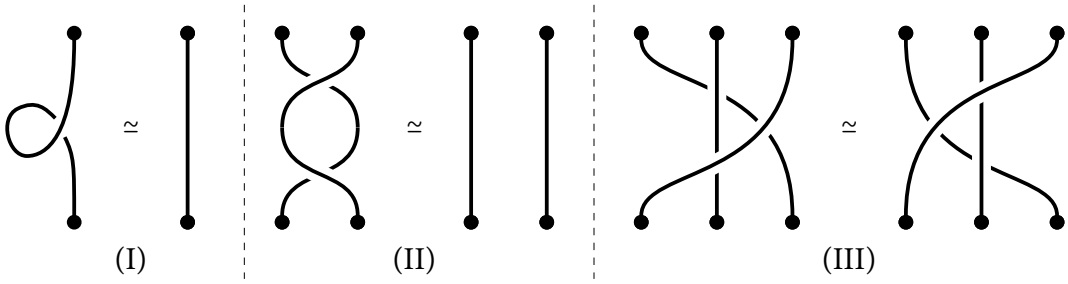


FIGURE 1.2: Mouvements de Reidemeister de types (I), (II) et (III).

permet de définir l'inverse d'une tresse. Si nous notons A^{-1} la tresse symétrique à A par rapport au plan $\mathbf{C} \times \{\frac{1}{2}\}$, nous nous apercevons qu'en passant au niveau des diagrammes, chaque croisement de AA^{-1} est dans la configuration d'un mouvement de Reidemeister de type (II) ou de son symétrique par rapport à un plan vertical (disjoint des brins). Dès lors, AA^{-1} est isotope à l'élément neutre. Puisque A^{-1} est aussi une tresse et peut toujours être construite, la multiplication définie ci-dessus munit automatiquement les tresses à même nombre de brins d'une structure de groupe que l'on appelle groupe des tresses à n brins et que l'on note $\mathbf{B}_n$.

1.1.2 Présentation d'Artin

La présentation classique du groupe des tresses est celle donnée par Artin en 1925 [6]. Le groupe des tresses à n brins $\mathbf{B}_n$ est le groupe engendré par $n-1$ générateurs σ_i, $1 \leq i \leq n-1$ soumis aux relations

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \qquad \text{si} \quad 1 \leq i \leq n-2, \tag{1.1}$$

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \qquad \text{si} \quad |i-j| \geq 2. \tag{1.2}$$

L'équation (1.1) est appelé relation de tresses ou équation de Yang-Baxter, et (1.2), commutation à distance ou relation de localité. Concernant l'équivalence de cette définition du groupe des tresse avec celle du groupe des tresses géométriques, on pourra consulter [60] par exemple. C'est l'approche du groupe des tresses privilégiée dans cette thèse.

Nous avons représenté sur la figure 1.3 les diagrammes correspondant à un générateur et à son inverse. En identifiant la multiplication à droite par la concaténation en bas, nous fixons ainsi une convention que nous utiliserons tout au long de cette thèse. Nous avons représenté sur les figures 1.4 et 1.5 les diagrammes correspondant à des relations liant les générateurs de la présentation d'Artin. Nous notons que les

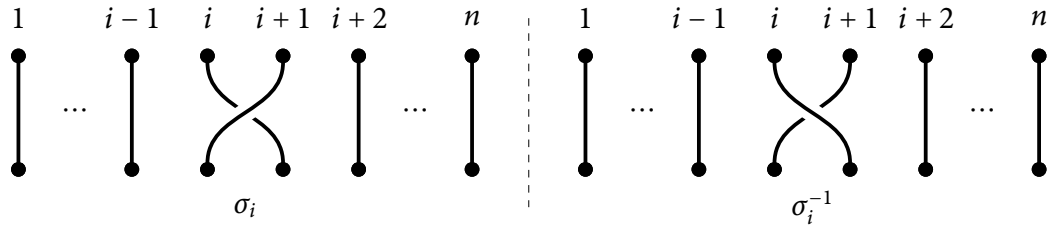


FIGURE 1.3: Diagrammes d'un générateur σ_i d'Artin ainsi que de son inverse.

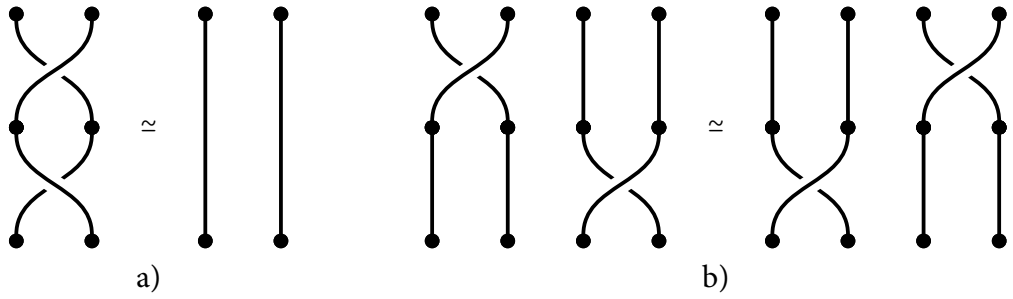


FIGURE 1.4: Diagrammes correspondant aux égalités a) $\sigma_1\sigma_1^{-1} = 1$ et b) $\sigma_1\sigma_3 = \sigma_3\sigma_1$.

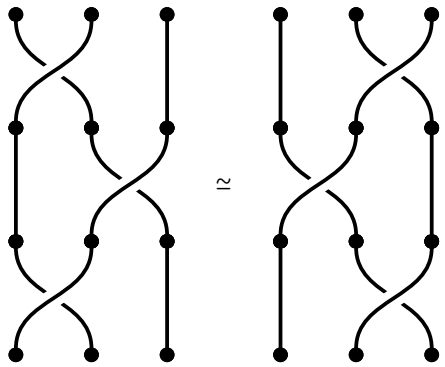


FIGURE 1.5: Diagramme correspondant à l'égalité $\sigma_1\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2$.

diagrammes 1.4a) et 1.5 correspondent respectivement aux mouvements de Reidemeister de type (II) et (III).

1.1.3 Présentation de Birman, Ko et Lee

Une autre présentation du groupe des tresses a été donnée par Joan Birman, Ki Hyoung Ko et Sang Jin Lee en 1998 [17, 18]. Nous définissons, à l'aide des générateurs d'Artin, $\sigma_{s,t} = (\sigma_{t-1}\cdots\sigma_{s+1})\sigma_s(\sigma_{s+1}^{-1}\cdots\sigma_{t-1}^{-1})$, $1 \leq s < t \leq n$. Définissons de plus $\sigma_{s,t} = \sigma_{t,s}$, avec la convention d'écrire en premier le plus petit indice. La présentation dite BKL

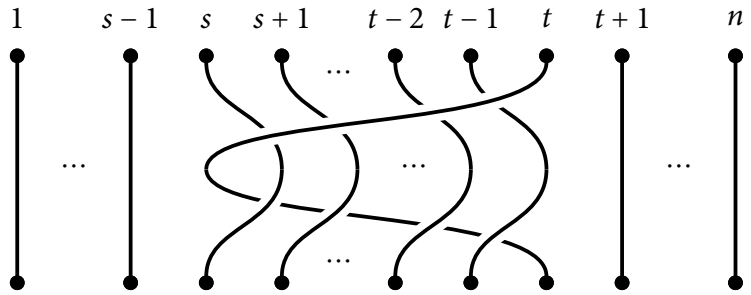


FIGURE 1.6: Diagramme d'un générateur $\sigma_{s,t}$ de la présentation BKL.

a pour générateurs $\{\sigma_{s,t}, 1 \leq s < t \leq n\}$ et comme relations

$$\sigma_{s,t}\sigma_{r,s} = \sigma_{r,t}\sigma_{s,t} = \sigma_{r,s}\sigma_{r,t} \quad \text{si} \quad 1 \leq r < s < t \leq n, \tag{1.3}$$

$$\sigma_{s,t}\sigma_{q,r} = \sigma_{q,r}\sigma_{s,t} \quad \text{si} \quad (t-r)(t-q)(s-r)(s-q) > 0. \tag{1.4}$$

Cette présentation est parfois appelée présentation duale de celle d'Artin en raison du rôle joué par certains éléments (voir p.34). Notons que cette présentation contient les générateurs d'Artin puisque $\sigma_i = \sigma_{i,i+1}$, pour tout $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Nous avons représenté le diagramme d'un générateur de cette présentation sur la figure 1.6.

1.1.4 Groupes de difféotopie

Soit D^2 un disque de $\mathbf{C}$. Nous notons D_n la paire (D^2, P_n) où P_n est un ensemble de n points sur l'axe réel à l'intérieur de D^2. Le groupe de difféotopie (ou *mapping class group*) $\mathrm{MCG}(D_n)$ est le groupe de l'ensemble des classes d'isotopies des homéomorphismes préservant l'orientation $\varphi\colon D^2 \to D^2$ qui fixent le bord point par point et qui fixent globalement P_n, c'est-à-dire $\forall z \in \partial D^2, \varphi(z) = z$ et $\forall z' \in \mathbf{P}_n, \varphi(z') \in P_n$. Deux homéomorphismes φ et ψ représentent donc le même élément si et seulement s'ils sont isotopes via une famille d'homéomorphismes fixant point par point le bord et P_n. La structure de groupe est donnée par composition.

On peut démontrer que les groupes $\mathbf{B}_n$ et $\mathrm{MCG}(D_n)$ sont isomorphes [15, 32]. Avec la présentation d'Artin, privilégiée pour les questions algorithmiques, c'est le point de vue le plus utilisé dans la littérature.

Dans [41], les auteurs remarquent que tout homéomorphisme de D_n fixant le bord et les pointures peut être représenté par son action sur une triangulation de D^2, en particulier sur le diamètre réel (supportant donc P_n). Nous avons alors une représentation graphique appelée diagramme en courbes, cf. figures 1.7 et 1.8.

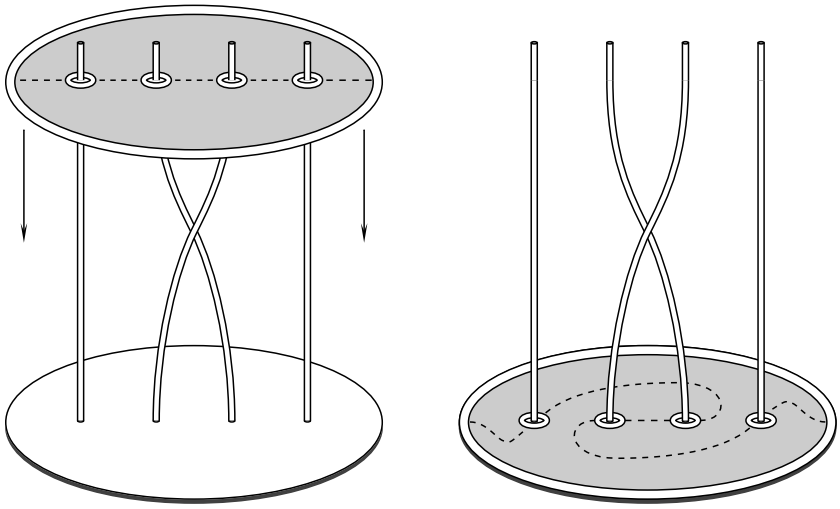


FIGURE 1.7: Illustration intuitive du générateur σ_2 de $\mathbf{B}_4$ vu comme un homeomorphisme. On considère une tresse géométrique rigide à travers laquelle on fait glisser un cercle rigide supportant une membrane flexible percée de quatre trous.

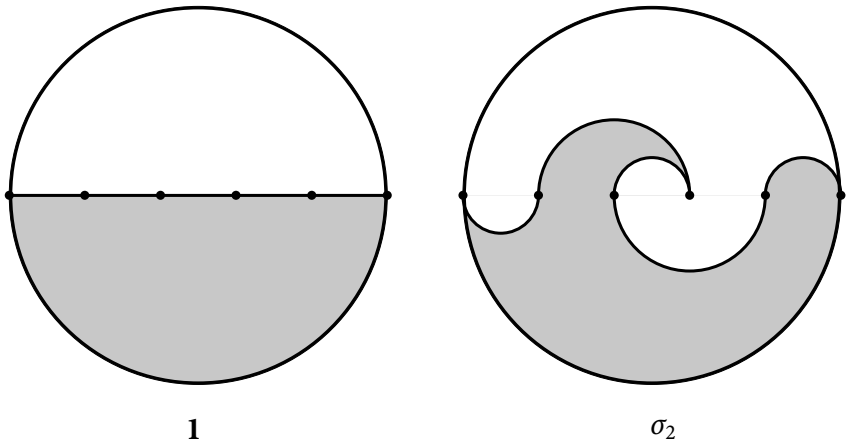


FIGURE 1.8: Diagrammes en courbes de deux éléments du groupe des tresses $\mathbf{B}_4$.

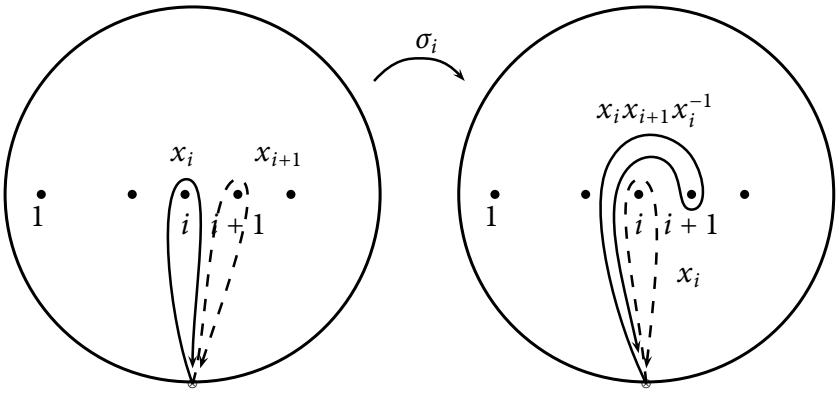


FIGURE 1.9: L'action d'un élément de $\mathbf{B}_n$ sur les générateurs du groupe fondamental de D_n

1.1.5 Groupe d'homotopie et groupe libre

Nous venons de voir qu'un élément de $\mathbf{B}_n$ pouvait être vu comme un homéomorphisme de D_n sur lui même. En particulier, un tel homéomorphisme envoie des boucles de D_n sur d'autres et induit ainsi un automorphisme de son groupe fondamental [7, 15]. Ce dernier est le groupe libre de rang n F_n : pour chaque pointure i, $1 \leq i \leq n$, on choisit une boucle qui en fait le tour et on la note x_i. De telles boucles génèrent le groupe fondamental de D_n. En observant la figure 1.9, nous obtenons un homomorphisme de $\mathbf{B}_n$ sur $\mathrm{Aut}(F_n)$, $\sigma_i \mapsto \widetilde{\sigma}_i$, $1 \leq i < n$ avec

$$\widetilde{\sigma}_i : \begin{cases} x_i \mapsto x_i x_{i+1} x_i^{-1} ; \\ x_{i+1} \mapsto x_i ; \\ x_k \mapsto x_k, \quad \text{pour } k \neq i, i+1. \end{cases}$$

1.1.6 Espaces de configuration

L'espace de configuration de n points dans le plan complexe $\mathbf{C}$ est

$$\mathsf{C}_{\hat{n}} = \left\{ (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbf{C} \times \cdots \times \mathbf{C} | z_i \neq z_j \text{ si } i \neq j \right\}.$$

Nous noterons $\vec{z} = (z_1, \ldots, z_n)$ un point de $\mathsf{C}_{\hat{n}}$. Le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ agit sur $\mathsf{C}_{\hat{n}}$ en permutant les coordonnées dans chaque $\vec{z} \in \mathsf{C}_{\hat{n}}$. L'espace orbite de cette action est alors $\mathsf{C}_n = \mathsf{C}_{\hat{n}}/\mathfrak{S}_n$ et nous notons τ la projection associée $\mathsf{C}_{\hat{n}} \to \mathsf{C}_n$. En choisissant un

point de base $\vec{p} = (p_1, \ldots, p_n)$, on définit le groupe des tresses $\mathbf{B}_n$ ainsi que le groupe des tresses pures $\mathbf{P}_n$ (cf. 1.3.1) comme les groupes fondamentaux

$$\mathbf{B}_n = \pi_1(\mathsf{C}_n, \tau(\vec{p})) \quad \text{et} \quad \mathbf{P}_n = \pi_1(\mathsf{C}_{\hat{n}}, \vec{p}).$$

Dans ce cas, l'isotopie des tresses géométriques est reportée vers l'homotopie des chemins de $\pi_1(\mathsf{C}_n, \tau(\vec{p}))$.

1.1.7 Groupes quantiques

Nous présentons les algèbres de Hopf quasi-triangulaires et le lien qui existe entre ces dernières et l'équation de Yang-Baxter.

Le point de départ est une algèbre de Hopf $\mathcal{U}$, c'est-à-dire un espace vectoriel $\mathcal{U}$ sur un corps $\mathbf{k}$, muni de cinq applications : une multiplication $m\colon \mathcal{U} \otimes \mathcal{U} \to \mathcal{U}$, une unité $\eta\colon \mathbf{k} \to \mathcal{U}$, une comultiplication $\Delta\colon \mathcal{U} \to \mathcal{U} \otimes \mathcal{U}$, une coünité $\epsilon\colon \mathcal{U} \to \mathbf{k}$, et un anti-automorphisme, l'antipode $S\colon \mathcal{U} \to \mathcal{U}$.

Ces applications ne peuvent être définies de manière indépendante. On trouvera les relations qui les lient dans [22] ou [39] par exemple. Toujours-est-il que l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Hopf si nous définissons les cinq applications précédement citées de la manière suivante : la multiplication est la multiplication ordinaire de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$, $\eta(\alpha) = \alpha\mathbf{1}$ ($\alpha \in \mathbf{k}$). Sur les générateurs x de $\mathfrak{g}$, la comultiplication est $\Delta_0(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$, la coünité $\epsilon(x) = 0$ et l'antipode $S(x) = -x$. Cette algèbre de Hopf est cocommutative, c'est-à-dire $\tau \circ \Delta = \Delta$, où τ est l'application de transposition : $\tau(a \otimes b) = b \otimes a$.

Nous entendons par déformation de $\mathcal{U}$ la déformation du coproduit Δ_0 en un autre coproduit Δ tel que le développement formel en série de ce dernier est $\Delta(x) = \Delta_0(x) + \alpha\phi_1(x) + \alpha^2\phi_2(x) + \ldots$, où $\phi_k \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{U}$. On appelle α paramètre de déformation.

Une algèbre de Hopf est dite presque cocommutative si il existe un élément inversible $\mathcal{R} \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{U}$ tel que

$$\tau \circ \Delta(x)\mathcal{R} = \mathcal{R}\Delta(x), \ \forall x \in \mathcal{U}, \tag{1.5}$$

Nous supposons ce cas de figure pour la suite. On peut en effet montrer qu'une déformation cocommutative d'une algèbre enveloppante universelle est toujour triviale [69].

Une algèbre de Hopf est alors quasi-triangulaire si

$$(\Delta \otimes \mathbf{1})\mathcal{R} = \mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{23}, \quad (\mathbf{1} \otimes \Delta)\mathcal{R} = \mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{12}, \tag{1.6}$$

où, si $\mathcal{R} = \sum a_{(1)} \otimes b_{(2)}$, la notation utilisée est

$$\mathcal{R}_{ij} = \sum \mathbf{1} \otimes \cdots \otimes a_{(1)} \otimes \cdots \otimes b_{(2)} \otimes \cdots \otimes \mathbf{1},$$

où $\mathcal{R}$ apparait en i-ème et en j-ème position. Par la suite, on ommettra le signe somme.

Calculons maintenant $(\mathbf{1} \otimes \tau \circ \Delta)\mathcal{R}$ de deux manières différentes : en vertu de la deuxième partie de (1.6), nous avons

$$(\mathbf{1} \otimes \tau \circ \Delta)\mathcal{R} = (\mathbf{1} \otimes \tau)(\mathbf{1} \otimes \Delta)\mathcal{R} = (\mathbf{1} \otimes \tau)\mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{12} = \mathcal{R}_{12}\mathcal{R}_{13}.$$

Cependant, en vertu de (1.5), nous avons

$$(\mathbf{1} \otimes \tau \circ \Delta)\mathcal{R} = \mathcal{R}_{23}((\mathbf{1} \otimes \Delta)\mathcal{R})\mathcal{R}_{23}^{-1} = \mathcal{R}_{23}\mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{12}\mathcal{R}_{23}^{-1}.$$

L'égalité des deux équation précédentes implique alors que

$$\mathcal{R}_{12}\mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{23} = \mathcal{R}_{23}\mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{12}, \tag{1.7}$$

l'équation de Yang-Baxter (quantique). On appele R-matrice une matrice solution de cette équation. Pour toute représentation matricielle ρ sur un espace vectoriel V de l'algèbre $\mathcal{U}$, $R = (\rho \otimes \rho)(\mathcal{R})$ est une matrice solution des mêmes équations. Ainsi, les algèbres de Hopf quasi-triangulaires permettent de générer plusieurs solutions de la sorte à partir d'une seule solution $\mathcal{R}$.

Considérons donc une algèbre de Hopf quasi-triangulaire $\mathcal{U}$ et soit $\mathcal{U}^*$ l'algèbre de Hopf duale. L'appariement entre $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}^*$ satisfait les relations $\langle \Delta a, x \otimes y\rangle = \langle a, xy\rangle$ et $\langle a \otimes b, \Delta x\rangle = \langle ab, x\rangle$. Soit alors ρ une représentation de $\mathcal{U}$ sur un espace vectoriel V. On a donc $\rho(x) = T^i_j(x)$, $x \in \mathcal{U}$. Sur les éléments de matrice T^i_j, le coproduit s'exprime simplement :

$$\begin{aligned}\langle \Delta T^i_j, x \otimes y\rangle = \langle T^i_j, xy\rangle = T^i_j(xy) = T^i_k(x)T^k_j(x) = \\ = \langle T^i_k, x\rangle\langle T^k_j, y\rangle = \langle T^i_k \otimes T^k_j, x \otimes y\rangle,\end{aligned}$$

et ainsi

$$\Delta T^i_j = T^i_k \otimes T^k_j. \tag{1.8}$$

Les relations de commutation entre les éléments de matrice T^i_j sont exprimées à l'aide d'une R-matrice R, l'image de la R-matrice universelle $\mathcal{R} = a_i \otimes b_i$ dans la représentation ρ : $R = \rho(a_i) \otimes \rho(b_i)$. Soit $\Delta(x) = u_\alpha \otimes v_\alpha$. Alors,

$$\langle T_1 T_2, x\rangle = \langle T_1 \otimes T_2, u_\alpha \otimes v_\alpha\rangle = T_1(u_\alpha)T_2(v_\alpha). \tag{1.9}$$

Puisque H est presque cocommutative, nous avons $u_\alpha \otimes v_\alpha = \mathcal{R}^{-1}(v_\alpha \otimes u_\alpha)\mathcal{R}$ et ainsi

$$\begin{aligned}
\langle T_1 \otimes T_2, u_\alpha \otimes v_\alpha \rangle &= \langle T_1 \otimes T_2, \mathcal{R}^{-1}(v_\alpha \otimes u_\alpha)\mathcal{R} \rangle \\
&= (T_1 \otimes T_2)(\mathcal{R}^{-1}(v_\alpha \otimes u_\alpha)\mathcal{R}) \\
&= (T_1 \otimes T_2)(\mathcal{R}^{-1})\ (T_1 \otimes T_2)(v_\alpha \otimes u_\alpha)\ (T_1 \otimes T_2)(\mathcal{R}) \\
&= R^{-1} T_1(v_\alpha) T_2(u_\alpha) R \\
&= R^{-1} T_2(u_\alpha) T_1(v_\alpha) R.
\end{aligned}$$

Si nous comparons se résultat à (1.9), nous obtenons la relation $T_1 T_2 = R^{-1} T_2 T_1 R$ ou plutôt

$$R T_1 T_2 = T_2 T_1 R$$

Nous pouvons réécrire cette relation de manière différente [40]. Soit P la permutation des facteurs dans $V \otimes V$, $P(x \otimes y) = y \otimes x$, et soit $\hat{R} = PR$ alors $PRT_1T_2 = PT_2T_1R = T_1T_2PR$ et ainsi

$$\hat{R} T_1 T_2 = T_1 T_2 \hat{R}. \tag{1.10}$$

On peut se demander la forme que prend l'équation de Yang-Baxter exprimée en termes de R-matrice $\hat{R}$. Notons tout d'abord que $P_{12}P_{23}P_{12} = P_{12}(P_{13}P_{23}) = (P_{23}P_{12})P_{23}$ (les parenthèses repèrent juste les opérateurs permutés par rapport à l'étape précédente). Si nous multiplions l'équation de Yang-Baxter (1.7) à gauche par $P_{12}P_{13}P_{23}$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
P_{12}P_{13}P_{23}R_{12}R_{13}R_{23} &= P_{12}P_{13}P_{23}R_{23}R_{13}R_{12} \\
(P_{23}P_{12})P_{23}R_{12}R_{13}R_{23} &= P_{12}(P_{23}P_{12})R_{23}R_{13}R_{12} \\
P_{23}P_{12}(R_{13}P_{23})R_{13}R_{23} &= P_{12}P_{23}(R_{13}P_{12})R_{13}R_{12} \\
P_{23}(R_{23}P_{12})(R_{12}P_{23})R_{23} &= P_{12}(R_{12}P_{23})(R_{23}P_{12})R_{12}
\end{aligned}$$

soit

$$\hat{R}_{23}\hat{R}_{12}\hat{R}_{23} = \hat{R}_{12}\hat{R}_{23}\hat{R}_{12}. \tag{1.11}$$

1.2 Propriétés

Nous rassemblons ici quelques propriétés du groupe des tresses $\mathbf{B}_n$. Les groupes $\mathbf{B}_0$ et $\mathbf{B}_1$ sont triviaux, le groupe $\mathbf{B}_2$, qui ne possède qu'un générateur, est isomorphe à $(\mathbf{Z}, +)$. Ce sont les seuls groupes des tresses abéliens. Le dernier isomorphisme classique est $\mathbf{B}_3$ qui est isomorphe au groupe de nœud du nœud de trèfle (le groupe fondamental du complément du nœud dans $\mathbf{R}^3$)[80].

Le groupe $\mathbf{B}_n$ est un sous-groupe de $\mathbf{B}_{n+1}$. Les relations (1.1) et (1.2) sont en effet invariantes lors de la translation $\sigma_i \mapsto \sigma_{i+1}$ (et $\sigma_j \mapsto \sigma_{j+1}$). Nous pouvons ainsi engendrer $\mathbf{B}_{n+1}$ en adjoignant à $\mathbf{B}_n$ un générateur σ_n tel que $\sigma_n\sigma_{n-1}\sigma_n = \sigma_{n-1}\sigma_n\sigma_{n-1}$ et $\sigma_n\sigma_i = \sigma_i\sigma_n$ pour tout $i \leq n-2$, tout en conservant les relations n'impliquant pas σ_n. De fait, il existe une séquence de sous-groupes $\mathbf{B}_0 \subset \mathbf{B}_1 \subset \cdots \subset \mathbf{B}_n$, et nous noterons $\mathbf{B}_\infty$ la limite inductive de cette séquence quand n tend vers l'infini. Ainsi, $\mathbf{B}_\infty$ est présenté par une infinité dénombrable de générateurs soumis aux relations (1.1) et (1.2). C'est de cette limite qu'il sera question par la suite quand nous référerons au groupe des tresses, sauf mention explicite.

Le centre de $\mathbf{B}_n$ est assez petit : il est généré par l'élément $(\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_{n-1})^n$. Nous verrons plus tard que cet élément correspond au carré de la tresse fondamentale Δ_n.

1.2.1 Deux involutions remarquables

Considérons la présentation d'Artin. Il existe, dans $\mathbf{B}_n$, deux involutions remarquables. La première, notée ι_v, est l'automorphisme $\sigma_i \mapsto \sigma_{n-i}$, $1 \leq i \leq n-1$. La seconde est l'anti-automorphisme canonique $\iota_\mathrm{h}\colon \sigma_i \mapsto \sigma_i$, $1 \leq i \leq n-1$. Nous utiliserons souvent ces applications dans la suite de cette thèse.

Au niveau des tresses géométriques, la première envoie une tresse vers son image sous une rotation de $\pm\pi$ selon un axe porté par $\frac{n}{2}\times[0,1]$. La seconde envoie une tresse vers son image sous une rotation de $\pm\pi$ selon l'axe $\mathbf{R}\times\frac{1}{2}$ (voir figure 1.10). Puisque ces deux rotations d'angle π ont des axes orthogonaux, elle commutent. Ce résultat peut directement être observé sur les générateurs : ι_v n'agit que sur les indices, alors que ι_h n'agit que sur l'ordre des générateurs.

Nous verrons plus tard comment l'automorphisme ι_v peut être réalisé comme une conjugaison dans $\mathbf{B}_n$.

1.2.2 Ordre invariant

Il a été démontré assez récemment que les groupes des tresses sont ordonnables (unilatèrement) [28], c'est-à-dire qu'il existe une relation notée $<$, invariante à gauche, c'est-à-dire telle que, pour $f, g, h \in \mathbf{B}_n$, $f < g \Rightarrow hf < hg$ (ou $fh < gh$ pour un ordre invariant à droite). Nous rappelons le résultat standard (voir [73] par exemple) :

Proposition 1. *L'algèbre de groupe d'un groupe ordonnable est une algèbre à division, c'est-à-dire qu'elle ne contient pas de diviseur de zéro.*

Démonstration. Soient $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i g_i$ et $y = \sum_{j=1}^m \beta_j h_j$ deux éléments de $\mathbf{k}G$ avec G un groupe ordonnable à gauche, où $g_i, h_j \in G$ et où l'on suppose que la somme pour

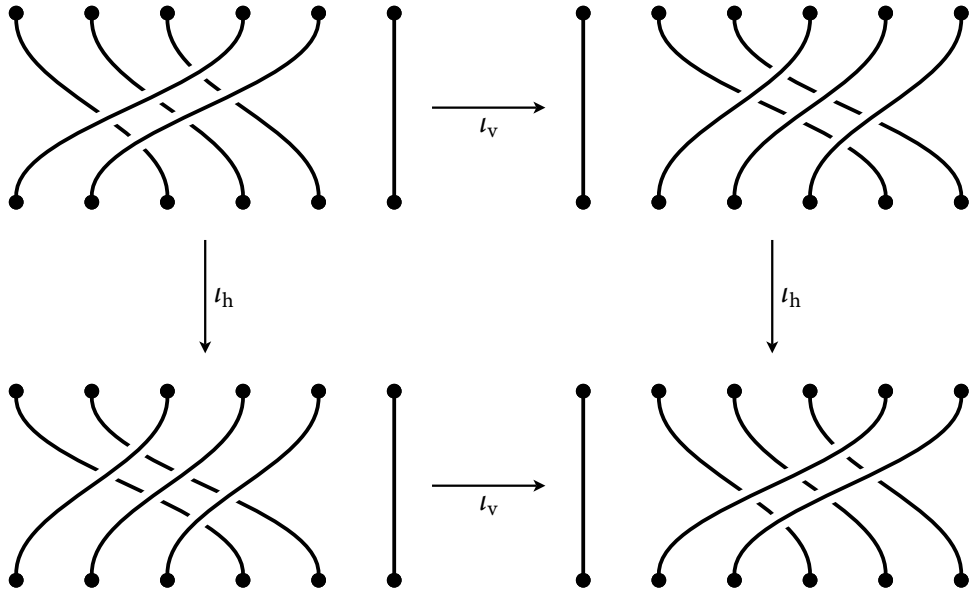


FIGURE 1.10: L'action des deux involutions ι_v et ι_h sur le diagramme d'une tresse à six brins.

y est écrite de telle manière que $h_j < h_{j+1}$. Les coefficients α_i et β_j sont des éléments non-nuls de $\mathbf{k}$. Le produit xy est donc

$$xy = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \alpha_i \beta_j g_i h_j.$$

La nullité du produit xy impliquerait qu'un terme soit annulé par d'autres. Parmi les nm termes du produit, considérons le terme $\alpha_p \beta_q g_p h_q$ tel que $g_p h_q$ soit minimal par rapport à l'ordre. En particulier, $g_p h_q \leq g_p h_1$, mais l'invariance à gauche implique l'inégalité opposée, ainsi $g_p h_q = g_p h_1$ et alors $h_q = h_1$. Dès lors, si $g_k h_l$ est minimal, nous devons avoir $l = q = 1$ et donc $g_k = g_p$. Ceci implique que $g_p h_q$ est l'unique élément minimal du développement et puisque $\alpha_p \beta_q \neq 0$, le produit ne peut être nul. □

Corollaire 2. *L'algèbre de groupe* $\mathbf{kB}_\infty$ *est une algèbre à division.*

Le monoïde $\mathbf{B}_\infty^+$ est ordenable de la même manière, et ainsi, $\mathbf{k}[\mathbf{B}_\infty^+]$ ne possède pas de diviseurs de zéro non plus. L'unicité du tressage tensoriel exposé dans cette thèse dépend directement de ce résultat.

Une autre conséquence directe de l'existence d'un ordre invariant est l'absence d'éléments de torsion dans le groupe des tresses. En effet, pour $1 \neq g \in \mathbf{B}_n$ si $1 < g$, $1 < g^k \ \forall k$, et si $g < 1$, $g^k = 1 \Rightarrow g^{1+k} = g$, impossible si $g \neq 1$, et ainsi $g^k < g^\ell$ si $k < l$.

Ce résultat était connu bien avant l'existence d'un ordre invariant. La question de savoir si tout groupe sans torsion admet un ordre invariant reste à ce jour ouverte.

1.3 Groupes d'Artin-Tits

Nous présentons ici les liens qui existent entre $\mathbf{B}_n$ et le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$. Nous considerons le groupe symétrique comme groupe de Coxeter afin d'introduire la notion de groupe des tresses généralisé ou groupe d'Artin-Tits.

1.3.1 Liens avec le groupe symétrique

Pour fixer les notations, rappelons qu'une présentation $(\Sigma|R)$ est la donnée d'un ensemble de générateurs Σ et d'un ensemble de relations R liant ces générateurs. Nous remplacerons les parenthèses par des crochets lorsque nous considérerons l'objet (groupe, monoïde, ...) engendré par cette présentation.

En tant que groupe de Coxeter, $\mathfrak{S}_n$ est isomorphe au groupe de symétrie du $n-1$-simplexe régulier, c'est-à-dire A_{n-1} dans la classification à l'aide de diagrammes de Coxeter-Dynkin [24, 25]. Le groupe $\mathfrak{S}_n$ a donc pour présentation

$$\mathfrak{S}_n = \left\langle \widehat{\sigma}_1, \widehat{\sigma}_2, \ldots, \widehat{\sigma}_{n-1} \middle| (\widehat{\sigma}_i \widehat{\sigma}_j)^{(m^{A_{n-1}})_{ij}} = 1 \right\rangle, \tag{1.12}$$

avec $(m^{A_{n-1}})_{ij}$ la matrice symétrique $(n-1)\times(n-1)$

$$\left(m^{A_{n-1}}\right)_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 3 & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & 3 & 1 & \ddots & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 3 \\ 2 & 2 & \cdots & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

Les générateurs des présentations des groupes de Coxeter sont des involutions ($m_{ii} = 1$), ce qui permet leurs formulations compactes. On peut cependant vérifier que la présentation

$$\mathfrak{S}_n = \left\langle \widehat{\sigma}_1, \widehat{\sigma}_2, \ldots, \widehat{\sigma}_{n-1} \middle| \widehat{\sigma}_i^2 = 1, \mathrm{prod}(\widehat{\sigma}_i, \widehat{\sigma}_j, (m^{A_{n-1}})_{ij}) = \mathrm{prod}(\widehat{\sigma}_j, \widehat{\sigma}_i, (m^{A_{n-1}})_{ji}) \right\rangle, \tag{1.13}$$

avec $\mathrm{prod}(x, y, m) = xyxy\ldots$, un mot de $2m$ lettres, est équivalente à la présentation (1.12). Nous avons ici découplé la torsion des générateurs de la présentation. Nous vérifions alors que la présentation

$$\left(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1} \middle| \mathrm{prod}(\sigma_i, \sigma_j, (m^{A_{n-1}})_{ij}) = \mathrm{prod}(\sigma_j, \sigma_i, (m^{A_{n-1}})_{ji})\right)$$

est celle du groupe des tresses à n brins.

Un groupe d'Artin-Tits est un groupe construit à partir d'une présentation de Coxeter que l'on prive de l'involutivité de ses générateurs [92, 33, 21]. Ainsi, $\mathbf{B}_n$ est le groupe d'Artin-Tits associé au groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$. De nombreuses propriétés, notamment concernant le problème des mots, sont partagées par les groupes d'Artin-Tits. Quand le groupe de Coxeter est d'ordre fini, on parlera de groupe d'Artin-Tits sphérique [50]. C'est le cas du groupe des tresses. Mentionnons qu'il existe des généralisations aux groupes de Coxeter non finis ou à des matrices qui ne sont pas des matrices de Coxeter, mais elles sont moins bien comprises que le cas sphérique [32].

Dans le cas qui nous intéresse, il existe ainsi une projection canonique $\pi\colon \mathbf{B}_n \to \mathfrak{S}_n$, $\sigma_i \mapsto \widehat{\sigma}_i$, $1 \leq i \leq n-1$. Les relations liant les générateurs étant les mêmes, c'est un homomorphisme surjectif de groupes, dont le noyau est un sous-groupe normal appelé groupe des tresses pures et noté $\mathbf{P}_n$, et nous avons la suite exacte

$$1 \longrightarrow \mathbf{P}_n \longrightarrow \mathbf{B}_n \longrightarrow \mathfrak{S}_n \longrightarrow 1. \tag{1.14}$$

1.3.2 Le problème des mots dans le groupe des tresses

Le problème des mots pour un groupe consiste à décider, dans une présentation donnée, si deux mots représentent le même élément du groupe. De prime abord d'aspect technique, c'est en réalité un problème fondamental, et Max Dehn en faisait déjà, avec le problème de conjugaison, un des problèmes classiques de décision [27].

On sait depuis Novikov et Boone [68, 19] qu'il existe des groupes à présentation finie pour lesquels le problème des mots est indécidable, historiquement un des premiers exemples de problème indécidable qui ne soit ni un problème de logique ni d'algorithmique. Ce n'est pas le cas pour le groupe des tresses : les problèmes des mots et de conjugaison ont été résolus par Garside pour le groupe des tresses en 1964 [46], et cette solution a été étendue aux groupes d'Artin-Tits sphériques à la fois par Brieskorn et Saito et par Deligne en 1972 [21, 33].

Les aspects décisionnaires n'apparaissent pas dans cette thèse, mais l'étude du problème des mots (et de conjugaison) dans le groupe des tresses est riche en enseignements. Il a en effet mené à de nouvelles découvertes et amélioré la compréhension du groupe des tresses. De nos jours, il constitue le fer de lance de la recherche dans ce domaine, et dans ceux, nombreux, qui s'y rattachent.

Le problème des mots dans $\mathbf{B}_n$ peut être résolu de nombreuses manières. Nous présentons ici l'approche de Garside [46], quoique nous obtiendrons déjà le résultat

attendu en chemin. Nous définirons alors un élément particulier qui sera utile dans la suite de la thèse.

1.3.2.1 Renversement de mot

Pour Σ un ensemble non vide de lettres, nous parlerons de Σ-mot pour un mot composé de lettres de Σ, et de $\Sigma^{\pm}$-mot pour un mot composé de lettres de $\Sigma \cup \Sigma^{-1}$, où Σ^{-1} est une copie disjointe de Σ contenant une lettre σ_i^{-1} pour chaque σ_i de Σ. Ainsi, les Σ-mots sont dits positifs, et la présentation d'un groupe $(\Sigma|R)$ sera dite positive si R est constitué uniquement de relations $u = v$ avec u et v des Σ-mots non vides. Nous noterons $(\Sigma|R)^+$ la présentation du monoïde correspondant. Notons alors qu'une présentation d'un groupe d'Artin-Tits comme celle donnée par (1.13) est positive, mais pas celle du groupe de Coxeter correpondant puisque $\sigma_i^2 = \varepsilon$ où ε est le mot vide.

Définition 3. Soit $(\Sigma|R)$ une présentation positive de groupe et w, w' deux $\Sigma^{\pm}$-mots. Nous dirons que w est *R-renversable à droite* en w' et nous noterons $w \overset{R}{\rightsquigarrow} w'$ si w' peut être obtenu de w en un nombre fini d'étapes consistant soit à enlever des sous-mots $\sigma_i^{-1}\sigma_i$, soit à remplacer des sous-mots $\sigma_i\sigma_j$ par vu^{-1} tels que $(\sigma_i v = \sigma_j u) \in R$.

Le R-renversement à droite consiste à utiliser les relations de R pour déplacer les lettres négatives à droite et les positives à gauche en transformant itérativement des motifs $-+$ en motifs $+-$. Nous notons que l'effacement de $\sigma_i^{-1}\sigma_i$ est compatible si nous considèrons (abusivement) que pour tout $\sigma_i \in \Sigma$, la relation triviale $\sigma_i = \sigma_i$ appartient à R. Nous définissons le R-renversement à gauche de manière symétrique.

Si $(\sigma_i v = \sigma_j u) \in R$, alors et $\sigma_i\sigma_j$ et vu^{-1} sont R-équivalents et $w \overset{R}{\rightsquigarrow} w'$ implique que w et w' représentent le même élément de $\langle\Sigma|R\rangle$. De même, si u, v, u' et v' sont des mots positifs tels que $u^{-1}v \overset{R}{\rightsquigarrow} v'u'^{-1}$, uv' et vu' représentent le même élément de $\langle\Sigma|R\rangle^+$. Plus particulièrement, si u et v sont des mots positifs, $u^{-1}v \overset{R}{\rightsquigarrow} \varepsilon$ implique que u et v représentent le même élément de $\langle\Sigma|R\rangle^+$. Nous dirons que la présentation $(\Sigma|R)^+$ est *complète pour le renversement à droite* si la réciproque est vraie. C'est le cas bilatèrement pour le groupe des tresses, mais aussi pour tout groupe d'Artin-Tits, et nous déduisons alors de la complétude pour le renversement que tout monoïde d'Artin-Tits est simplifiable, c'est-à-dire que, pour tous $u, v, w, w' \in \langle\Sigma|R\rangle^+$, $uw = uw' \Rightarrow w = w'$ et $wv = w'v \Rightarrow w = w'$(voir [32, 29]).

Définition 4. On dira que z est un *plus petit commun multiple à droite* ou ppcm à droite de deux éléments x et y d'un monoïde M si z est un multiple à droite pour x et y, c'est-à-dire qu'il existe x_z et y_z tels que $z = xx_z = yy_z$, et que tout multiple

commun à droite de x et y est un multiple à droite de z. De même, on dira que z est un *plus grand commun diviseur à gauche* ou pgcd à gauche de deux éléments x et y de M s'il existe z_x et z_y dans M tels que $z_x = z^{-1}x$ et $z_y = z^{-1}y$ et que tout diviseur commun à gauche de x et y est un diviseur à gauche de z. On définit les communs multiples à gauche et communs diviseurs à droite de manière symétrique.

Dans le cas du monoïde $\mathbf{B}_n^+$, aucun élément ne possède une chaîne infinie de diviseurs et l'existence de ppcm à droite (resp. à gauche) est équivalente à l'existence de pgcd à gauche (resp. à droite). Or on démontre tout couple d'éléments d'un monoïde d'Artin-Tits admet un pgcd à droite et un pgcd à gauche [29]. Dès lors, le monoïde muni $\mathbf{B}_n^+$ de la relation de divisibilité forme un treillis [46].

Un théorème d'Ore [70, 23] implique qu'un monoïde simplifiable M pour lequel tout couple d'éléments admet un multiple commun à droite se plonge dans un groupe de fractions à droite, c'est-à-dire qu'il existe un groupe G contenant M et tel que tout élément de G admette la décomposition xy^{-1}, avec x, y dans M. La proposition impliquant des multiples communs à gauche est vraie aussi. Ainsi le monoïde $\mathbf{B}_n^+$ se plonge dans $\mathbf{B}_n$ et le groupe des tresses est un groupe de fractions, à gauche et à droite. En conséquence, le renversement des mots résout le problème des mots pour le groupe des tresses.

Le cas général des groupes d'Artin-Tits est moins simple, car l'existence de pgcd n'implique pas forcément celle de ppcm. Cependant, Paris a démontré par une méthode différente que les monoïdes d'Artin-Tits se plongent dans leurs groupes respectifs (leurs groupifications) [71].

1.3.2.2 Structure de Garside

Nous considérons le cas de groupes d'Artin-Tits sphériques, c'est-à-dire associés à un groupe de Coxeter d'ordre fini. Par la suite, Γ dénote le graphe (ou une matrice) de Coxeter d'un groupe de Coxeter W_Γ, et A_Γ et A_Γ^+ les groupe et monoïde d'Artin-Tits correspondant. La présentation associée à Γ est $(\Sigma_\Gamma | R_\Gamma)$.

Soit $w_g \in W_\Gamma$, on appelle longueur de w_g (par rapport à Σ_Γ) et on note $\ell(w_g)$ le plus petit entier $k \geq 0$ tel que w_g soit le produit de k éléments de Σ_Γ. On appelle décomposition réduite de w_g (par rapport à Σ_Γ) tout mot w de longueur égale à $\ell(w_g)$. Nous avons alors $\ell(w_g w'_g) \leq \ell(w_g) + \ell(w'_g)$ (l'égalité étant réalisée lorsque le mot ww' est une décomposition réduite de $w_g w'_g$). Pour un graphe de Coxeter Γ, nous avons le lemme suivant :

Lemme 5 (Lemme d'échange, [20]Ch.IV, n°1.4 lemme 3)**.** *Si u est un mot réduit et si*

$\widehat{\sigma}_i u$ n'est pas réduit, il existe alors un mot réduit u' obtenu en enlevant une lettre de u tel que $\widehat{\sigma}_i u'$ et u représentent le même élément de W_Γ. En conséquence, si u et u' sont deux mots réduits représentant le même élément de W_Γ, on peut passer de l'un à l'autre en utilisant des uniquement les relations R_Γ de la présentation.

Corollaire 6 ([31] et [20]Ch.IV, n°1.5 prop. 4)**.** *Soit Γ un graphe de Coxeter,*

(i) *Pour tout $x \in W_\Gamma$, $\ell(x\widehat{\sigma}_i) = \ell(x) \pm 1$;*

(ii) *Un groupe de Coxeter W_Γ est d'ordre fini si et seulement si il existe un élément w_0 de longueur maximale. Dans un tel cas, l'élément w_0 est unique et si u est un mot réduit, w_0 admet une expression commençant par u ainsi qu'une expression finissant par u.*

Soit $\pi\colon A_\Gamma \to W_\Gamma$ le morphisme surjectif de groupes d'un groupe d'Artin-Tits sur son groupe de Coxeter. On définit une application réciproque à droite $\varpi\colon W_\Gamma \to A_\Gamma$ (une section) telle que pour $w \in W_\Gamma$, $\varpi(w)$ soit un élément de A_Γ représenté par une décomposition réduite w. Autrement dit, le domaine de ϖ est l'ensemble des mots réduits de W_Γ, c'est-à-dire des mots tels que $\ell(ww') = \ell(w) + \ell(w')$. On appelle cette application réciproque section de Matsumoto [66, 90, 93].

Lemme 7. *Soit w_0 l'élément le plus long d'un groupe de Coxeter fini W_Γ, et soit $\Delta_\Gamma = \varpi(w_0)$, alors, pour tout élément x de A_Γ^+, les propositions suivantes sont équivalentes :*

(i) *x est dans l'image de ϖ ;*

(ii) *x est un diviseur à gauche de Δ_Γ ;*

(iii) *x est un diviseur à droite de Δ_Γ.*

Démonstration. Supposons que (i) soit vraie, alors x résulte d'une décomposition réduite u dans W_Γ. En vertu du corollaire 6, le mot w_0 a alors une décomposition réduite de la forme uv. En relevant à A_Γ, nous obtienons $\Delta_\Gamma = x\varpi(v)$, ce qui implique (ii). On utilise le même argument de manière symétrique pour impliquer (iii).

Montrons maintenant la réciproque $(ii) \Rightarrow (i)$. Soit $\mathrm{Im}(\varpi)$ l'image de ϖ. Un diviseur à gauche d'un élément $x \in \mathrm{Im}(\varpi)$ est dans $\mathrm{Im}(\varpi)$. En effet, supposons que y soit un diviseur à gauche de x dans A_Γ^+. Il existe alors une expression $\sigma_{i_1}\cdots\sigma_{i_p}$ de x telle que y ait pour expression $\sigma_{i_1}\cdots\sigma_{i_q}$ avec $q \leq p$. Puisque les relations R_Γ préservent la longueur, toutes les expressions de x dans A_Γ^+ sont de longueur p et l'expression $\widehat{\sigma}_{i_1}\cdots\widehat{\sigma}_{i_p}$ est donc une décomposition réduite de $\pi(x)$ dans W_Γ. Le corollaire 6 impliquant que la multiplication par $\widehat{\sigma}_i$ augmente ou diminue la longueur d'une unité au plus, un préfixe d'un mot réduit est un mot réduit, et ainsi $y = \varpi(\pi(y)) \in \mathrm{Im}(\varpi)$. En

particulier, tout diviseur à gauche de Δ_Γ est dans l'image de ϖ, c'est-à-dire $(ii) \Rightarrow (i)$. L'argument pour $(iii) \Rightarrow (i)$ est symétrique. □

Définition 8. Un élément Δ d'un monoïde M est appelé *élément de Garside* si ses diviseurs à gauche et à droite coïncident, génèrent M et sont en nombre fini. Un *monoïde de Garside* est un couple (M, Δ) où M est un monoïde simplifiable pout lequel tout couple d'éléments admet un ppcm à gauche et à droite, et où Δ est un élément de Garside de M. Enfin, si G est un groupe, une *structure de Garside* pour G est un monoïde de Garside (M, Δ) tels que M soit un sous-monoïde de G et que G soit un groupe de fractions à droite et à gauche de M.

Proposition 9. *Soit Γ le graphe de Coxeter d'un groupe W_Γ fini, et soit Δ_Γ le relevé du plus long élément de W_Γ à A_Γ^+, alors $(A_\Gamma^+, \Delta_\Gamma)$ est une structure de Garside pour le groupe d'Artin-Tits A_Γ.*

Démonstration. Les générateurs $\sigma_i = \varpi(\widehat{\sigma_i})$ de A_Γ^+ appartiennent à l'image de ϖ. En vertu du lemme 7, ils divisent à gauche et à droite le relevé du plus long élément de W_Γ. Ainsi les diviseurs de Δ_Γ génèrent A_Γ^+. Puisque les diviseurs de Δ_Γ sont en bijection avec les éléments de W_Γ, ils sont en nombre fini, et Δ_Γ est bien un élément de Garside de A_Γ^+.

Toujours en vertu du lemme 7, deux éléments de $\mathrm{Im}(\varpi)$ admettent Δ_Γ comme multiple commun à droite. Le monoïde A_Γ^+ est alors simplifiable et tout couple d'éléments admet un ppcm à droite ainsi qu'à gauche (cf. [29]). Ainsi, A_Γ est un groupe de fractions à droite et à gauche de A_Γ^+. □

Pour la suite, nous notons $x \wedge y$ le pgcd à gauche de x et y.

Proposition 10. *Si (M, Δ) est une structure de Garside pour G, tout élément de G admet une unique expression $x^{-1}y$ avec $x, y \in M$ et $x \wedge y = 1$.*

Si (Σ, R) est une présentation pour M complète pour le renversement, la décomposition unique d'un élément représenté par un mot w est obtenue par un double renversement de w : on écrit w en vu^{-1} en reversant à droite, puis vu^{-1} en $u'^{-1}v'$ en renversant à gauche. Alors, u' et v' représentent respectivement x et y.

Démonstration. La décomposition est unique : soit $x^{-1}y = x'^{-1}y'$. Choisissons z, z' tels que $zx = z'x'$. On a alors $zy = zxx^{-1}y = z'x'x'^{-1}y' = z'y'$. l'hypothèse $x \wedge y = 1$ implique que $zx \wedge zy = z$. Similairement, $x' \wedge y' = 1$ implique que $z'x' \wedge z'y' = z'$ et alors $z = zx \wedge zy = z'x' \wedge z'y' = z'$, soit $x = x'$ et $y = y'$.

Concernant la seconde partie, w, vu^{-1} et $u'^{-1}v'$ représentent le même élément de G. Par construction, $u'v$ et $v'u$ représentent le ppcm à gauche des éléments représentés par v et u et n'ont donc pas d'autre diviseur commun que 1. □

On se restreint donc à chercher des formes normales dans le monoïde de Garside. Pour un monoïde de Garside (M, Δ), les diviseurs de Δ sont dits *simples*, et pour tout couple x, y du monoïde, on notera $x \supseteq y$ si tout diviseur simple à gauche de xy est un diviseur à gauche de y. On peut alors montrer que $x \supseteq y \supseteq z$ implique que $x \supseteq yz$ [29, 31].

Proposition 11. *Soit (M, Δ) un monoïde de Garside. Tout élément de M admet une unique décomposition $x_1 \cdots x_p$ avec $x_1, \ldots, x_p$ simples et tels que $x_k \supseteq x_{k+1}$ pour tout k.*

Démonstration. Tout élément x de M admet $s_1 \doteq x \wedge \Delta$ comme diviseur simple maximal. Définissons par récurrence $s_k = (s_{k-1}^{-1} \cdots s_1^{-1}) \wedge \Delta$. Si x divise Δ^c, le processus doit s'arrêter après c étapes et les éléments s_k sont donc en nombre fini. Alors, $s_k \supseteq s_{k+1} \cdots s_p$ pour tout k et plus particulièrement $s_k \supseteq s_{k+1}$.

Supposons que $s_1 \cdots s_p$ soit une décomposition satisfaisant les hypothèses de la proposition, alors $s_k \supseteq s_{k+1} \cdots s_p$ et s_k est le diviseur simple maximal de $s_k \cdots s_p$ pour tout k, et la décomposition est donc celle énoncée. □

Cette décomposition est appelée *forme normale à gauche* de x et l'entier p complexité (ou longueur canonique) de x.

1.3.2.3 Application au groupe des tresses

Le groupe des tresses $\mathbf{B}_n$ est le groupe d'Artin-Tits associé au groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ avec pour générateurs les $n-1$ transpositions d'éléments voisins $(i, i+1) = \widehat{\sigma}_i$, $1 \leq i \leq n-1$. L'élément le plus long de $\mathfrak{S}_n$ est $w_0 = (1, n)(2, n-1) \cdots (\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1) = (1, 2)(1, 3) \cdots (1, n)$ avec $\lfloor k \rfloor$ la partie entière de k. Cet élément est constitué de $\binom{n}{2}$ générateurs et possède $\binom{n}{2} \prod_{k=1}^{n-1} (2k-1)^{k-n}$ écritures réduites différentes (une pour chaque tableau d'Young correspondant au diagramme $(n-1, n-2, \ldots, 1)$, voir [86]), et est maximal pour les ordres de Bruhat (ou fort) et faible [87]. Relevé au groupe des tresses, cet élément a pour expression $\Delta_n = (\sigma_1)(\sigma_2 \sigma_1) \cdots (\sigma_{n-1} \sigma_{n-2} \cdots \sigma_1)$.

Le monoïde $\mathbf{B}_n^+$ muni de Δ_n forme donc une structure de Garside pour le groupe des tresses $\mathbf{B}_n$. L'élément de Garside Δ_n étant un commun multiple à gauche et à droite pour tous les générateurs σ_i du monoïde, on peut s'en servir comme dénominateur universel et toute tresse z de $\mathbf{B}_n$ peut alors s'écrire comme $\Delta_n^k x$ avec $k \in \mathbf{Z}$ et $x \in \mathbf{B}_n^+$. La décomposition est unique si l'on requiert que k, appelé alors *infimum* de

z, soit maximal. La longueur canonique (ou complexité) c est le nombre d'éléments simples nécessaires à l'écriture de x et on appelle *supremum* de z la somme de l'infimum et de la longueur canonique, ces concepts étant utiles pour l'étude du problème de conjugaison [46, 16].

Dès lors, la donnée de k et de x sous forme normale constitue une forme dite forme canonique à gauche ou *left greedy normal form* (voire tout sous-ensemble de {*left, greedy, normal, standard, canonical, Garside*} *form*). L'approche de Garside n'est, de loin, pas la méthode la plus efficace pour résoudre le problème des mots. Elle a été considérablement améliorée au cours des années [1, 91, 37, 17, 18, 43, 48].

Considérons la présentation BKL de la sous-section 1.1.3. Nous avons dans ce cas $\frac{n(n-1)}{2}$ générateurs $\sigma_{s,t}$, $1 \leq s < t \leq n$ et l'élément de Garside est de la forme $\delta_n = \sigma_{n-1,n} \cdots \sigma_{2,3}\sigma_{1,2}$, de longueur $n-1$ vis-à-vis des générateurs de cette présentation. Ces valeurs mises en rapport avec les $n-1$ générateurs et l'élément de Garside de longueur $\frac{n(n-1)}{2}$ de la présentation d'Artin font que l'on considère cette présentation comme la présentation *duale* de celle d'Artin. L'ensemble des diviseurs à gauche de δ_n est de cardinal le n-ième nombre de Catalan $\frac{(2n)!}{(n+1)!n!}$, plus petit que les $n!$ diviseurs de Δ_n [16]. Ceci a contribué à la publicité initiale de cette présentation, car les auteurs de [18] pensaient alors pouvoir trouver un algorithme polynomial pour le problème de conjugaison (cf. infra), mais la croissance exponentielle des nombres de Catalan rend le problème aussi coûteux qu'avec la présentation d'Artin. Si elle n'améliore pas le problème de conjugaison dans le groupe des tresses, l'existence même de cette présentation prouve qu'il peut exister plusieurs structures de Garside pour un groupe donné. Il semble que les présentations d'Artin et de Birman, Ko et Lee soient les seules présentations positives du groupe des tresses pour lesquelles une structure de Garside existe [62]. Il a été prouvé [12] que tout groupe d'Artin-Tits sphérique admet une présentation duale et on trouvera explicitement ces présentations dans [74]. Cependant, le problème de savoir si tout groupe de Garside admet une structure de Garside duale, où même le nombre de structures de Garside admissibles pour un groupe d'Artin reste à l'heure actuelle ouvert.

1.3.2.4 Solutions alternatives

Il existe de nombreuses solutions au problème des mots dans le groupe des tresses. Celle de Garside n'est historiquement pas la première, puisqu'Artin avait déjà trouvé une autre forme normale, obtenue par une procédure appelée peignage (ou *combing* [7]). La définition de formes normales n'est pas la seule méthode pour résoudre le problème des mots. Thurston a démontré que $\mathbf{B}_n$ était automatique [38], c'est-à-dire

qu'il existe un automate fini permetant de résoudre le problème des mots. Ce dernier est basée sur les *left greedy normal form* et traduit le fait que l'on puisse définir la forme normale de $w\sigma_i$ à partir de celle de w à l'aide d'un transducteur. Pour n fixé, la complexité du problème des mots est alors quadratique sur la longueur des mots. Notons que le retournement des mots évoqué plus haut possédait déjà cette caractéristique. Pour plus d'informations, on pourra consulter [38, 30] ou [16] par exemple.

1.3.3 Le problème de conjugaison et la cryptographie tressée

Le problème de conjugaison consiste, dans sa version la plus simple, à décider si pour deux éléments donnés x et x' dans un groupe, il existe y dans ce groupe tel que $x = y^{-1}x'y$. Une variante plus complexe demande un algorithme pour trouver y s'il existe. Nous présentons très brièvement dans cette sous-section la problématique de sa résolution dans le groupe des tresses ainsi qu'une application potentielle : la cryprographie.

1.3.3.1 Le problème de conjugaison dans $\mathbf{B}_n$

S'il existe de nombreux algorithmes pour résoudre le problème des mots dans le groupe des tresses, un seul est connu pour le problème de conjugaison. Ce dernier, inventé par Garside [46], consiste à trouver un ensemble fini de conjugués pour un élément w nommé *Summit Set* et noté $\mathbf{SS}_x$, et tel que si x est un conjugé de x', $\mathbf{SS}_x = \mathbf{SS}_{x'}$, alors que dans le cas contraire, $\mathbf{SS}_x \cap \mathbf{SS}_{x'} = \varnothing$. Dans le cas où cet ensemble est trouvé, il donne aussi l'élément v tel que $x = y^{-1}x'y$. Malheureusement (ou heureusement pour d'autres, cf. infra) et après de nombreuses améliorations, cet algorithme reste exponentiel aussi bien dans la longueur des mots que dans le rang du groupe des tresses.

L'ensemble $\mathbf{SS}_x$ dans sa totalité et un élément de $\mathbf{SS}_{x'}$ doivent donc être calculés pour décider si x et x' sont conjugués. Si l'extraction d'un élément de $\mathbf{SS}_{x'}$ peut être mené rapidement, la taille de $\mathbf{SS}_x$ est en général inprédictible. Le problème a été simplifié dans [37], où l'on se restreint à calculer un sous-ensemble $\mathbf{SSS}_x$ de $\mathbf{SS}_x$ appelé *Super Summit Set*. Il est consitué de tous les éléments conjugués à x ayant la complexité la plus petite possible. On associe à une tresse x de $\mathbf{B}_n$ ayant pour forme normale $(k; x_1, \ldots, x_c)$ les tresses

$$\partial_+(x) = \Delta_n^k \cdot x_2 \cdots x_c \Delta_n^k x_1 \Delta_n^{-k} \quad \text{et} \quad \partial_-(x) = \Delta_n^k \cdot \Delta_n^k x_c \Delta_n^{-k} x_1 \cdots x_{c-1},$$

appelées respectivement *cyclage* et *décyclage* de x [18, 37]. Par construction, elle sont conjuguées à x. Si une tresse x n'appartient pas à son **SSS**, c'est-à-dire qu'elle n'a pas la complexité minimale dans sa classe de conjugaison, alors en la cyclant ou décyclant au plus $\frac{n(n-1)}{2}$ fois, on trouvera un conjugué à x de complexité strictement plus petite [30]. Ainsi, en répétant l'opération, on arrive à obtenir en un ensemble fini d'étapes un conjugué $x^* \in \mathbf{SSS}(x)$.

Si un élément x appartient à son **SSS**, alors l'ensemble **SSS** tout entier peut être obtenu en saturant x par les conjugaisons par des tresses simples, et en ne conservant que les éléments même complexité que x. On continue jusqu'à ce qu'on ne puisse plus rajouter de conjuguées. On a ainsi une procédure pour décider si deux tresses x et x' sont conjuguées :

- En cyclant et décyclant, on trouve un conjugué x^* à x appartenant à $\mathbf{SSS}(x)$;
- En cyclant et décyclant, on trouve un conjugué x'^* à x' appartenant à $\mathbf{SSS}(x')$;
- On détermine l'intégralité de $\mathbf{SSS}(x)$ en saturant x^* par conjugaison par des tresses simples ;
- Alors x et x' sont conjuguées si et seulement si $x'^* \in \mathbf{SSS}(x)$.

Si l'on a gardé une trace des tresses avec lesquelles on conjugue à chaque étape, on trouve aussi y tel que $x = y^{-1}x'y$. Cependant, en remarquant qu'il y a $n!$ tresses simples dans $\mathbf{B}_n$, on devine que le problème de l'énumération de $\mathbf{SSS}(x)$ reste coûteux en temps pour des valeurs typiques comme $n = 50$.

Il existe un sous-ensemble de **SS** encore plus petit défini dans [48] et appelé *Ultra Summit Set* qui semble rendre la complexité polynomiale.

1.3.3.2 Cryptographie tressée

En cryptographie moderne, deux problèmes sont levés : comment crypter un message, et comment faire pour que les sempiternels Alice et Bob s'accordent sur le choix d'une clef ? Dans la pratique, les méthodes majoritaires sont respectivement l'algorithme Rivest-Shamir-Adleman (RSA) et l'échange de clefs Diffie-Hellman-Merkle. Ils reposent respectivement sur les difficultés de la factorisation de grands nombres et du calcul du logarithme discret. Les autres schémas de cryptographie reposent principalement sur des variantes et combinaisons de ces deux problèmes. Cependant, Peter Shor a trouvé deux célèbres algorithmes polynomiaux en temps résolvant ces problèmes [84], la difficulté étant reportée au fait qu'ils sont conçus pour un ordinateur quantique. Toutefois, la réalisation d'une telle machine (et les tresses peuvent y jouer un rôle, voir [26, 67, 78]) mettrait à mal la majorité des systèmes cryptographiques utilisés. Des alternatives à ces deux problèmes sont donc souhaitables.

À première vue, le problème de conjugaison semble être un bon candidat : on sait

manipuler les tresses relativement rapidement puisque le problème des mots est résolu en temps polynomial, et le problème de conjugaison reste difficile. De nombreux schémas utilisant les tresses ont été proposés, mais aucun n'a résisté à des attaques menées à l'aide d'ordinateurs personnels. Il y a deux obstacles à l'implémentation d'une cryptographie tressée. Concernant les nombres premiers, il n'y a pas d'ambiguïté : plus ils sont grands, plus leur produit sera difficile à factoriser. Pour les tresses, il existe deux paramètres : le rang du groupe dans lequel on travaille, et la longueur des mots considérés. Si le rang est trop petit, on résoud facilement le problème de conjugaison. S'il est trop grand, et de manière surprenante, des tresses générées aléatoirement se sont trouvées trop simples pour résister à des attaques [30, 45]. Enfin, si on augmente trop la longueur des mots, le problème des mots devient significatif et nuit à la mise en place pratique. De manière générale, les schémas sont mis en place avec des mots de l'ordre de mille lettres dans $\mathbf{B}_{50}$.

Le second problème est que la cryptographie moderne repose sur deux piliers séculaires. Depuis Euclide, la communauté mathématique a eu le temps de se rendre compte de la difficulté réelle de tels problèmes. Le problème de conjugaison dans le groupe des tresses a été résolu au milieu du XXe siècle, mais est étudié activement depuis une vingtaine d'années pendant lesquelles de nombreux progrès ont été réalisés. La difficulté du problème de conjugaison repose à l'heure actuelle uniquement sur notre méconnaissance des *Summit Sets*, et il semble prématuré de vouloir construire un système reposant sur notre ignorance d'un sujet assez récent.

1.4 Éléments et identités remarquables

Commençons par définir un endomorphisme canonique et une notation pratique. Nous notons avec une flèche pointant vers le haut suivie d'un nombre ℓ l'image d'un élément de $\mathbf{B}_\infty$ sous l'action de l'endomorphisme $\sigma_i \mapsto \sigma_{i+\ell} \doteq \sigma_i^{\uparrow\ell}$. Nous étendons canoniquement cette notation aux algèbres de groupe du groupe des tresses et du groupe symétrique.

1.4.1 Tressage élémentaire

Nous présentons ici deux types d'éléments remarquables du groupe des tresses. On peut considérer le générateur σ_i comme celui correspondant au diagramme où un brin (le $i+1$-ème) passe au dessus (selon la convention adoptée ici) d'un autre (le i-ème). On généralise cette notion et on notera $\beta_{a,b}$ la tresse dont le diagramme correspond à celui où a brins passent par dessus b brins. Nous allons maintenant

traduire la multiplication du groupe des tresses pour ces éléments. On a facilement l'expression en termes de générateurs pour la tresse dont le diagramme correspond à un brin passant par dessus b brins :

$$\beta_{1,b} = \sigma_b \sigma_{b-1} \cdots \sigma_1,$$

et celle dont le diagramme correspond à a brins passant par dessus un brin :

$$\beta_{a,1} = \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_a.$$

Nous définissons conventionellement $\beta_{a,0} = \beta_{0,a} = 1$, $\forall a$. On a clairement $\beta_{1,1}^{\uparrow a} = \sigma_{a+1}$. Dès lors, les relations (1.1) et (1.2) prennent respectivement les formes

$$\beta_{1,1}^{\uparrow i}\beta_{1,1}^{\uparrow i+1}\beta_{1,1}^{\uparrow i} = \beta_{1,1}^{\uparrow i+1}\beta_{1,1}^{\uparrow i}\beta_{1,1}^{\uparrow i+1} \qquad \text{si} \quad 0 \leq i \leq n-2, \tag{1.15}$$

$$\beta_{1,1}^{\uparrow i}\beta_{1,1}^{\uparrow j} = \beta_{1,1}^{\uparrow j}\beta_{1,1}^{\uparrow i} \qquad \text{si} \quad |i-j| \geq 2. \tag{1.16}$$

Ainsi, sans même connaître explicitement $\beta_{a,b}$, nous savons déjà que, pour $k \geq a+b$,

$$\beta_{a,b}\beta_{c,d}^{\uparrow k} = \beta_{c,d}^{\uparrow k}\beta_{a,b}. \tag{1.17}$$

Nous pouvons alors donner l'expression de $\beta_{a,b}$: on commence par faire passer le premier des a brins par dessus b brins, puis on répète l'opération avec le second, et ce jusqu'au a-ième, et ainsi,

$$\beta_{a,b} = \beta_{1,b}\beta_{1,b}^{\uparrow 1}\cdots\beta_{1,b}^{\uparrow a-1} \tag{1.18}$$

$$= (\sigma_b\sigma_{b-1}\cdots\sigma_1)(\sigma_{b+1}\sigma_b\cdots\sigma_2)\cdots(\sigma_{a+b-1}\sigma_{a+b-2}\cdots\sigma_a). \tag{1.19}$$

Par construction même, on a pour $0 < k < a$,

$$\beta_{a,b} = \beta_{1,b}\beta_{1,b}^{\uparrow 1}\cdots\beta_{1,b}^{\uparrow k-1} \cdot \beta_{1,b}^{\uparrow k}\beta_{1,b}^{\uparrow k+1}\cdots\beta_{1,b}^{\uparrow a-1} = \beta_{k,b}\beta_{a-k,b}^{\uparrow k}. \tag{1.20}$$

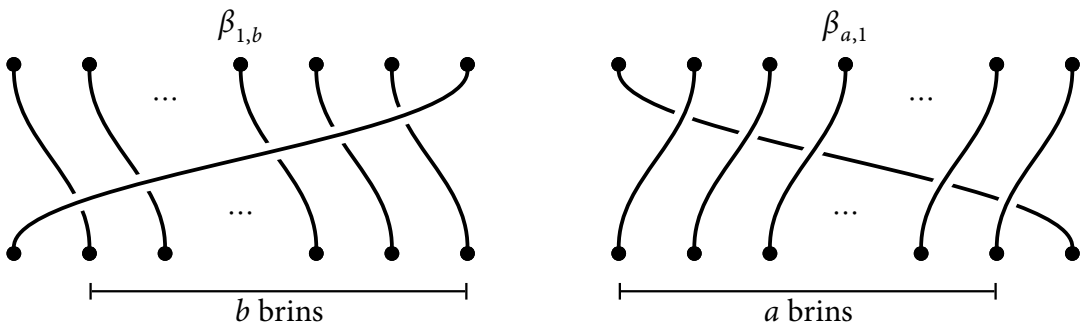


FIGURE 1.11: Représentation diagrammatique des éléments $\beta_{1,b}$ et $\beta_{a,1}$.

Considérons le produit $\beta_{1,b}^{\uparrow i}\beta_{1,b}^{\uparrow i+1}$. Le j-ème générateur de $\beta_{1,b}^{\uparrow i+1}$ commute à gauche jusqu'au j-ème générateur de $\beta_{1,b}^{\uparrow i}$. Dans l'expression (1.18), nous pouvons ainsi regrouper à gauche les premiers générateurs de chaque $\beta_{1,b}^{\uparrow i}$, $0 \leq i \leq a-1$, et répéter l'opération avec les seconds et ainsi de suite jusqu'au dernier pour trouver

$$\begin{aligned}\beta_{a,b} &= (\sigma_b\sigma_{b+1}\cdots\sigma_{a+b-1})(\sigma_{b-1}\sigma_b\cdots\sigma_{a+b-2})\cdots(\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_a) && (1.21)\\ &= \beta_{a,1}^{\uparrow b-1}\beta_{a,1}^{\uparrow b-2}\cdots\beta_{a,1}. && (1.22)\end{aligned}$$

Ici encore, par construction et pour $0 < k < b$,

$$\beta_{a,b} = \beta_{a,1}^{\uparrow b-1}\beta_{a,1}^{\uparrow b-2}\cdots\beta_{a,1}^{\uparrow k}\cdot\beta_{a,1}^{\uparrow k-1}\beta_{a,1}^{\uparrow k-2}\cdots\beta_{a,1} = \beta_{a,b-k}^{\uparrow k}\beta_{a,k}. \tag{1.23}$$

L'équivalence des définitions (1.19) et (1.21) est assurée par le fait que les générateurs satisfont la relation de tresse. Dans le dernier chapitre de cette thèse, nous introduisons des éléments acceptent les éléments $\beta_{a,b}$ comme cas particulier, et pour lesquels nous vérifions explicitement la cohérence des généralisations des relations (1.20) et (1.23).

Notons que $\beta_{1,1}^{\uparrow i}\beta_{1,1}^{\uparrow i+1} = \beta_{2,1}^{\uparrow i}$ et la relation de tresse (1.15) peut alors s'écrire

$$\beta_{2,1}^{\uparrow i}\beta_{1,1}^{\uparrow i} = \beta_{1,1}^{\uparrow i+1}\beta_{2,1}^{\uparrow i} \quad \text{si} \quad 1 \leq i \leq n-2.$$

Nous allons maintenant généraliser cette relation. Pour tout $0 \leq k < a+b$,

$$\begin{aligned}\beta_{a+b,1}\beta_{1,1}^{\uparrow k} &= \sigma_1\cdots\sigma_k\sigma_{k+1}\sigma_{k+2}\sigma_{k+3}\cdots\sigma_{a+b}\cdot(\sigma_{k+1})\\ &= \sigma_1\cdots\sigma_k\sigma_{k+1}\sigma_{k+2}(\sigma_{k+1})\sigma_{k+3}\cdots\sigma_{a+b}\\ &= \sigma_1\cdots\sigma_k(\sigma_{k+2})\sigma_{k+1}\sigma_{k+2}\sigma_{k+3}\cdots\sigma_{a+b}\\ &= (\sigma_{k+2})\sigma_1\cdots\sigma_k\sigma_{k+1}\sigma_{k+2}\sigma_{k+3}\cdots\sigma_{a+b}\\ &= \beta_{1,1}^{\uparrow k+1}\beta_{a+b,1},\end{aligned}$$

et cette propriété s'étend aisément à $\beta_{a,b}$ dont tous les générateurs ont un index strictement inférieur à $a+b$:

$$\beta_{a+b,1}\beta_{a,b} = \beta_{a,b}^{\uparrow 1}\beta_{a+b,1},$$

mais $\beta_{a+b,c} = \beta_{a+b,1}^{\uparrow c-1}\beta_{a+b,1}^{\uparrow c-2}\cdots\beta_{a+b,1}$ et nous pouvons appliquer récursivement la propriété précédente pour trouver

$$\beta_{a+b,c}\beta_{a,b} = \beta_{a,b}^{\uparrow c}\beta_{a+b,c}, \tag{1.24}$$

ou, puisque (1.20) implique que $\beta_{a+b,c} = \beta_{b,c}\beta_{a,c}^{\uparrow b} = \beta_{a,c}\beta_{b,c}^{\uparrow a}$,

$$\beta_{b,c}\beta_{a,c}^{\uparrow b}\beta_{a,b} = \beta_{a,b}^{\uparrow c}\beta_{a,c}\beta_{b,c}^{\uparrow a}, \tag{1.25}$$

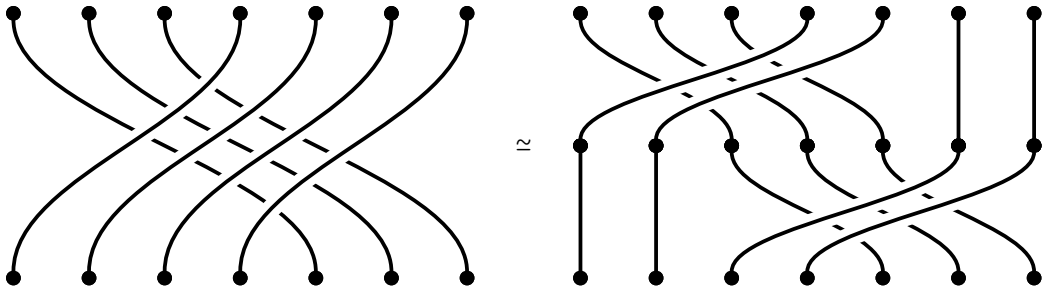


FIGURE 1.12: Représentation diagrammatique de la décomposition $\beta_{4,3} = \beta_{2,3}\beta_{2,3}^{\uparrow 2}$.

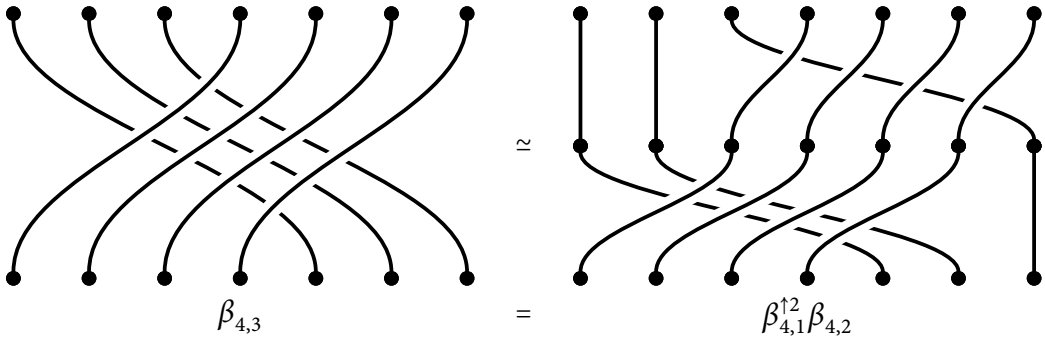


FIGURE 1.13: Représentation diagrammatique de la décomposition $\beta_{4,3} = \beta_{4,1}^{\uparrow 2}\beta_{4,2}$.

or, en vertu de (1.23), $\beta_{a,c}^{\uparrow b}\beta_{a,b} = \beta_{a,b}^{\uparrow c}\beta_{a,c} = \beta_{a,b+c}$, et (1.25) implique que

$$\beta_{b,c}\beta_{a,b+c} = \beta_{a,b+c}\beta_{b,c}^{\uparrow a}. \tag{1.26}$$

Les relations (1.20), (1.23), (1.24) et (1.26) font que la famille $\{\beta_{a,b}\}_{a,b\geq 0}$ est un tressage dans la catégorie des tresses (voir [60]). L'équation (1.25) peut être considérée comme une version étendue de l'équation de Yang-Baxter. Elle réapparaitra au chapitre 3.

1.4.2 Tresse fondamentale

Un autre élément remarquable a déjà été évoqué plus haut concernant les formes normales. On définit donc l'élément de Garside Δ_n de $\mathbf{B}_n$ de la manière suivante :

$$\Delta_n = \beta_{1,1}\beta_{1,2}\cdots\beta_{1,n-1} \tag{1.27}$$

$$= (\sigma_1)(\sigma_2\sigma_1)\cdots(\sigma_{n-1}\sigma_{n-2}\cdots\sigma_1). \tag{1.28}$$

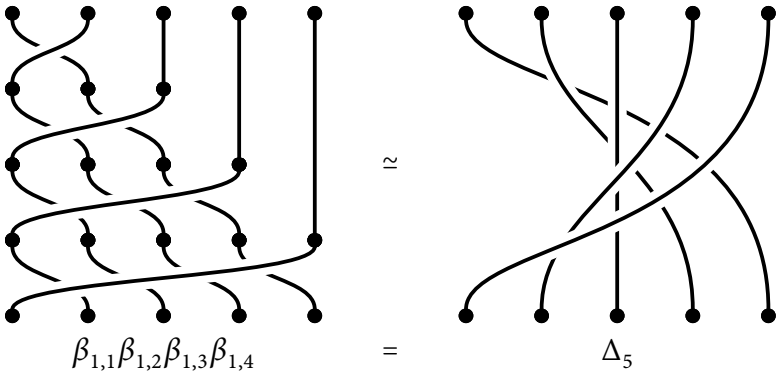


FIGURE 1.14: Représentation diagrammatique de la décomposition $\beta_{1,1}\beta_{1,2}\beta_{1,3}\beta_{1,4} = \Delta_5$.

Proposition 12. *Pour tous entiers $k \leq n$,*

$$\Delta_n = \Delta_k \beta_{n-k,k} \Delta_{n-k} \tag{1.29}$$

Démonstration. Par définition, on a

$$\Delta_n = \beta_{1,1}\beta_{1,2}\cdots\beta_{1,k-1}\beta_{1,k}\cdots\beta_{1,n-1} = \Delta_k \beta_{1,k}\cdots\beta_{1,n-1}.$$

À partir du terme $\beta_{1,k}$, on factorise les tressages à l'aide de (1.23) : $\beta_{1,k+1} = \beta_{1,k}^{\uparrow 1}\beta_{1,1}$, $\beta_{1,k+2} = \beta_{1,k}^{\uparrow 2}\beta_{1,2}$, jusqu'au dernier terme, $\beta_{1,n-1} = \beta_{1,k}^{\uparrow n-k-1}\beta_{1,n-k-1}$. Dès lors, le premier facteur de chaque terme commute à distance avec tous les seconds facteurs des termes situés à gauche. En regroupant ces facteurs à gauche, on obtient alors

$$\begin{aligned}\beta_{1,k}\cdots\beta_{1,n-k-1} &= \beta_{1,k}\beta_{1,k}^{\uparrow 1}\cdots\beta_{1,k}^{\uparrow n-k-1}\cdot\beta_{1,1}\beta_{1,2}\cdots\beta_{1,n-k-1}\\ &= \beta_{n-k,k}\Delta_{n-k}.\end{aligned}$$

□

Corollaire 13. *Pour n et p deux entiers, on a le monomorphisme de groupes $\mathbf{B}_n \to \mathbf{B}_{pn}$ donné par $\sigma_i \mapsto \Delta_{2p}^{\uparrow(i-1)p}$, $1 \leq i \leq n-1$.*

Démonstration. Sous cette application, et pour $1 \leq i \leq n-1$, nous avons $\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i \mapsto \Delta_{2p}^{\uparrow(i-1)p}\Delta_{2p}^{\uparrow ip}\Delta_{2p}^{\uparrow(i-1)p}$, mais en vertu de (1.29) et (1.25),

$$\begin{aligned}\Delta_{2p}^{\uparrow(i-1)p}\Delta_{2p}^{\uparrow ip}\Delta_{2p}^{\uparrow(i-1)p} &= \Delta_p^{\uparrow(i-1)p}\beta_{p,p}^{\uparrow(i-1)p}\Delta_p^{\uparrow(i-1)p}\Delta_p^{\uparrow ip}\beta_{p,p}^{\uparrow ip}\Delta_p^{\uparrow ip}\Delta_p^{\uparrow(i-1)p}\beta_{p,p}^{\uparrow(i-1)p}\Delta_p^{\uparrow(i-1)p}\\ &= \beta_{p,p}^{\uparrow(i-1)p}\beta_{p,p}^{\uparrow ip}\beta_{p,p}^{\uparrow(i-1)p}\Delta_p^{2\uparrow(i-1)p}\Delta_p^{2\uparrow ip}\Delta_p^{2\uparrow(i+1)p}\\ &= \beta_{p,p}^{\uparrow ip}\beta_{p,p}^{\uparrow(i-1)p}\beta_{p,p}^{\uparrow ip}\Delta_p^{2\uparrow(i-1)p}\Delta_p^{2\uparrow ip}\Delta_p^{2\uparrow(i+1)p}\\ &= \Delta_p^{\uparrow ip}\beta_{p,p}^{\uparrow ip}\Delta_p^{\uparrow ip}\Delta_p^{\uparrow(i-1)p}\beta_{p,p}^{\uparrow(i-1)p}\Delta_p^{\uparrow(i-1)p}\Delta_p^{\uparrow ip}\beta_{p,p}^{\uparrow ip}\Delta_p^{\uparrow ip}\\ &= \Delta_{2p}^{\uparrow ip}\Delta_{2p}^{\uparrow(i-1)p}\Delta_{2p}^{\uparrow ip},\end{aligned}$$

l'image de $\sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}$. Puisque $\Delta_{2p}^{\uparrow ip}\Delta_{2p}^{\uparrow jp} = \Delta_{2p}^{\uparrow jp}\Delta_{2p}^{\uparrow ip}$ si $|i-j| > 1$, le corollaire est prouvé. □

Nous reviendrons sur cette propriété dans le dernier chapitre.

Proposition 14. *Pour $a + b + c \leq n$,*

$$\Delta_n \beta_{a,b}^{\uparrow c} = \beta_{b,a}^{\uparrow n-a-b-c}\Delta_n \tag{1.30}$$

Démonstration. En vertu de (1.26), on a pour $k > 1$ la quasi-commutation $\beta_{1,k}\sigma_k = \sigma_{k-1}\beta_{1,k}$, soit en appliquant reccursivement,

$$\begin{aligned}
\Delta_{k+1}\sigma_k &= \beta_{1,1}\beta_{1,2}\cdots\beta_{1,k}\sigma_k \\
&= \beta_{1,1}\beta_{1,2}\cdots\beta_{1,k-1}\sigma_{k-1}\beta_{1,k} \\
&= \beta_{1,1}\sigma_1\beta_{1,2}\cdots\beta_{1,k-1}\beta_{1,k} \\
&= \sigma_1\beta_{1,1}\beta_{1,2}\cdots\beta_{1,k-1}\beta_{1,k} \\
&= \sigma_1\Delta_{k+1},
\end{aligned}$$

et cette égalité est aussi vraie pour $k = 1$ puisque $\Delta_2 = \sigma_1$. Ainsi en vertu de (1.29) et pour $k < n$,

$$\begin{aligned}
\Delta_n\sigma_k &= \Delta_{n-k-1}\beta_{k+1,n-k-1}\Delta_{k+1}\sigma_k \\
&= \Delta_{n-k-1}\beta_{k+1,n-k-1}\sigma_1\Delta_{k+1} \\
&= \Delta_{n-k-1}\sigma_{n-k+1}\beta_{k,n-k}\Delta_{k+1} \\
&= \sigma_{n-k}\Delta_{n-k-1}\beta_{k+1,n-k-1}\Delta_{k+1} \\
&= \sigma_{n-k}\Delta_n.
\end{aligned}$$

On en déduit alors que pour $k < n$, $\Delta_n\beta_{1,1}^{\uparrow k-1} = \beta_{1,1}^{\uparrow n-k-1}\Delta_n$, et ainsi, pour $j + k \leq n$,

$$\begin{aligned}
\Delta_n\beta_{1,j}^{\uparrow k-1} &= \Delta_n\beta_{1,1}^{\uparrow j+k-2}\cdots\beta_{1,1}^{\uparrow k-1} \\
&= \beta_{1,1}^{\uparrow n-j-k-1}\Delta_n\beta_{1,1}^{\uparrow j+k-3}\cdots\beta_{1,1}^{\uparrow k-1} \\
&= \beta_{1,1}^{\uparrow n-j-k}\beta_{1,1}^{\uparrow n-j-k+1}\cdots\beta_{1,1}^{\uparrow n-k-1}\Delta_n \\
&= \beta_{j,1}^{\uparrow n-j-k}\Delta_n,
\end{aligned}$$

ce qui implique que, pour $a + b + c \leq n$

$$\begin{aligned}
\Delta_n\beta_{a,b}^{\uparrow c} &= \Delta_n\beta_{1,b}^{\uparrow c}\beta_{1,b}^{\uparrow c+1}\cdots\beta_{1,b}^{\uparrow c+a-1} \\
&= \beta_{b,1}^{\uparrow n-b-c-1}\Delta_n\beta_{1,b}^{\uparrow c+1}\cdots\beta_{1,b}^{\uparrow c+a-1} \\
&= \beta_{b,1}^{\uparrow n-b-c-1}\beta_{b,1}^{\uparrow n-b-c-2}\cdots\beta_{b,1}^{\uparrow n-b-c-a}\Delta_n \\
&= \beta_{b,a}^{\uparrow n-a-b-c}\Delta_n,
\end{aligned}$$

comme attendu. □

Corollaire 15. *L'automorphisme de* $\mathbf{B}_n$ $\iota_{\mathrm{v}}\colon \sigma_i \mapsto \sigma_{n-i}$, $1 \leq i \leq n-1$ *peut être réalisé comme la conjugaison par* Δ_n.

❧

CHAPITRE 2

ANALOGUES TRESSÉS

> Break it up, break it up ! I'm sick of all this bloody fighting. If it's not the bloody Treaty of Utrecht it's the bloody binomial theorem !
>
> Eric Idle, *Monty Python's Flying Circus, Royal Episode*

Le propos de ce chapitre est de construire des analogues tressés pour la factorielle, les coefficients binomiaux et les symboles de Pochhammer. Ces analoques apparaissent de manière explicite dans le tressage tensoriel. Nous commencerons par des rappels sur les q-analogues. Le sujet étant très vaste, nous nous restreignons aux q-analogues dont nous donnerons des analogues tressés en second lieu. Ces analogues jouent un rôle primordial dans la suite de cette thèse.

2.1 Rappels sur les q-analogues

Nous commençons par un exemple : soit $q \in \mathbf{k}$, considérons la série

$$[n]_q = \sum_{j=0}^{n-1} q^j = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}. \tag{2.1}$$

Il est clair que lorsque q tend vers 1, $[n]_q$ tend vers n. La q-série $[n]_q$ est l'archétype de ce que l'on appelle un q-analogue ou q-extension : la généralisation aux q-séries

d'un objet mathématique que l'on qualifiera de « classique » (ici le nombre n) telle qu'elle se réduise à cet objet quand q tend vers une certaine valeur (ici 1). Dans ce cas particulier, on parlera donc du q-nombre $[n]_q$. Il existe cependant d'autres types d'analogues que les q-séries, et d'autres objets classiques que les nombres entiers. Notons que l'on impose pas ici de structure particulière ni sur les analogues, ni sur leur contrepartie classique. Dès lors, la condition d'existence d'un analogue pour un objet est très lâche : il faut juste qu'il existe une application de l'analogue vers l'objet classique ! La qualité et l'interêt des analogues se mesurent donc au nombre de similitudes ou d'analogies entre les deux objets. Comme nous allons le voir par la suite, les q-analogues supportent une généralisation non-seulement aux entiers naturels, mais aussi à la factorielle, aux symboles de Pochhammer ou aux coefficients binomiaux. Ils peuvent aussi généraliser des objets et des structures plus élaborées comme l'exponentielle, les fonctions hypergéométriques, la dérivation, l'analyse de Fourier, etc. Dans tous les cas, la littérature est très fournie et on trouvera plus d'informations sur les q-analogues et leur utilisation pratique dans [4], [3], [63] ou [47] par exemple.

2.1.1 q-nombres et q-factorielles

Nous venons de voir un q-analogue d'un nombre, le q-nombre $[n]_q$. Notons que si n est un entier naturel (ce qui est supposé par la suite), $[n]_q$ est un polynôme de degré $n-1$ et que puisque $[n]_q - q[n]_q = 1 - q^n$, $[n]_q = \frac{1-q^n}{1-q}$. On a aussi, pour $0 \leq b \leq a$,

$$[a-b]_q + q^{a-b}[b]_q = \frac{1 - q^{a-b} + q^{a-b} - q^a}{1-q} = [a]_q . \tag{2.2}$$

Nous définissons aussi un q-analogue pour la factorielle de n :

$$[n]_q! = [n]_q [n-1]_q \cdots [1]_q . \tag{2.3}$$

Puisque c'est un polynôme en q, il est clair que $\lim_{q\to 1} [n]_q! = n!$.

2.1.2 q-coefficients binomiaux

Nanti de la q-factorielle, on peut définir un q-analogue pour les coefficients binomiaux [57, 63, 47] :

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{[n]_q!}{[k]_q![n-k]_q!}. \tag{2.4}$$

Dès lors,

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}_q &= \frac{[n+1]_q!}{[k]_q!\,[n+1-k]_q!} \\
&= \frac{[n+1]_q\,[n]_q!}{[k]_q!\,[n+1-k]_q!} \\
&\overset{(2.2)}{=} \frac{\left([k]_q + q^k\,[n+1-k]_q\right)[n]_q!}{[k]_q!\,[n+1-k]_q!} \\
&= \frac{[n]_q!}{[k-1]_q!\,[n-k+1]_q!} + q^k \frac{[n]_q!}{[k]_q!\,[n-k]_q!},
\end{aligned}$$

et on obtient ainsi un q-analogue de la première relation de Pascal :

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_q + q^k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q. \tag{2.5}$$

À la vue de (2.4), ces coefficients ont la symétrie

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n \\ n-k \end{bmatrix}_q. \tag{2.6}$$

Ainsi,

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n+1 \\ n+1-k \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q + q^{n+1-k} \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_q$$

fournit un second q-analogue pour la première relation de Pascal :

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q + q^{n+1-k} \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_q. \tag{2.7}$$

Nous avons donc facilement obtenu deux q-analogues différents d'un même objet classique. Ceci est dû au fait que la formule de sommation des q-nombres (2.2) n'est pas symétrique à droite lorsque $b \to a-b$, alors que sa limite l'est. Nous retrouverons un phénomène semblable dans le cas des analogues tressés, ainsi qu'un degré de liberté supplémentaire dû à l'action non triviale de l'endomorphisme $\sigma_i \mapsto \sigma_{i+\ell}$ dans $\mathbf{B}_n$ et à la non-commutativité des objets considérés.

À l'aide de ces relations, et puisque

$$\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix}_q = 1,$$

on peut montrer récursivement que ces coefficients sont des polynômes en q. Définis par (2.4), ils ont pour degré la différence des degrés du numérateur et du dénominateur, c'est-à-dire $\frac{n(n-1)}{2} - \left(\frac{k(k-1)}{2} - \frac{(n-k)(n-k-1)}{2}\right) = k(n-k)$. Puisque ce sont des

polynômes, il n'y a pas de précautions particulières à prendre lors du passage à la limite et on a bien

$$\lim_{q\to 1}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \binom{n}{k}.$$

Puisque $[n]_q! = \frac{(1-q^n)(1-q^{n-1})\cdots(1-q)}{(1-q)^n}$, on a

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{(1-q^n)(1-q^{n-1})\cdots(1-q^{n-k+1})}{(1-q^k)(1-q^{k-1})\cdots(1-q)} = \prod_{i=0}^{k-1}\frac{(1-q^{n-i})}{(1-q^{i+1})} = \frac{(q;q)_n}{(q;q)_k\,(q;q)_{n-k}}, \quad (2.8)$$

où $(q;q)_x$ est un symbole de Pochhammer définit dans la sous-section suivante. Ces q-coefficients binomiaux sont aussi appelés coefficients (ou polynômes) gaussiens. Notons que $[n]_{q^{-1}} = q^{1-n}[n]_q$, $[n]_{q^{-1}}! = q^{\frac{n(n-1)}{2}}[n]_q!$ et alors $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix}\right]_{q^{-1}} = q^{-k(n-k)}\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix}\right]_q$. Puisque le coefficient $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix}\right]_q$ est de degré $k(n-k)$, on en déduit que les coefficients gaussiens sont des polynômes symétriques. Dans la littérature, certains préfèrent définir les q-coefficients binomiaux comme $\left[\!\left[\begin{smallmatrix} n \\ n-k \end{smallmatrix}\right]\!\right]_q = q^{-k(n-k)}\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix}\right]_{q^2}$ qui est une quantité symétrique lors de l'échange de q en q^{-1} (voir [52] par exemple).

Ces coefficients possèdent aussi une interpretation combinatoire. Par exemple, le coefficient $\left[\begin{smallmatrix} m+n \\ m \end{smallmatrix}\right]_q$ est la fonction génératrice du nombre de partitions d'un entier k dont le diagramme de Ferrer (ou d'Young) est contenu dans un rectangle de côtés m et n. C'est d'ailleurs cette interprétation qui a amené Sylvester à démontrer l'unimodalité de la séquence des coefficients du polynôme $\left[\begin{smallmatrix} k \\ n-k \end{smallmatrix}\right]_q$, voir [89, 3, 88, 75] par exemple. De même, le coefficient $\left[\begin{smallmatrix} k \\ n-k \end{smallmatrix}\right]_q$ compte le nombre de sous-espaces de dimension k de $\mathbf{F}_q^n$, où $\mathbf{F}_q$ est un corps fini d'ordre q (et donc où q est la puissance d'un nombre premier), voir [57] pour la démonstration ainsi que d'autres interprétations.

À l'instar des coefficients binomiaux, les q-coefficients binomiaux sont sujets à de nombreuses identitées, elles-même le plus souvent q-analogues d'identités impliquant des coefficient binomiaux. Par exemple, à l'aide d'applications multiples des q-analogues de la première relation de Pascal, on trouve directement deux q-analogues pour chacune des deux secondes identités de Pascal (corollaires 2 et 3 du traité original [72] ou *upper* et *parallel summation* dans [49], et *Christmas Stocking Theorems* ailleurs) :

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ k+1 \end{bmatrix}_q = \sum_{j=k}^{n} q^{(k+1)(n-j)}\begin{bmatrix} j \\ k \end{bmatrix}_q = \sum_{j=k}^{n} q^{j-k}\begin{bmatrix} j \\ k \end{bmatrix}_q, \quad (2.9)$$

et

$$\begin{bmatrix} n+k+1 \\ k \end{bmatrix}_q = \sum_{j=0}^{k} q^{j}\begin{bmatrix} n+j \\ j \end{bmatrix}_q = \sum_{j=0}^{k} q^{(n+1)(k-j)}\begin{bmatrix} n+j \\ j \end{bmatrix}_q. \quad (2.10)$$

Nous avons aussi un q-analogue pour la convolution de Vandermonde,

$$\begin{bmatrix} m+n \\ k \end{bmatrix}_q = \sum_{j=0}^{k} q^{(m-j)(k-j)}\begin{bmatrix} m \\ j \end{bmatrix}_q\begin{bmatrix} n \\ k-j \end{bmatrix}_q, \quad (2.11)$$

ainsi que pour la factorisation de coefficients multinomiaux

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} n-k \\ \ell \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n \\ k, \ell \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n \\ \ell \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} n-\ell \\ k \end{bmatrix}_q. \tag{2.12}$$

Nous donnons enfin une relation moins célèbre, q-analogue de l'identité (5.25) de [49] :

$$\sum_k (-1)^k q^{\frac{k(k+1)}{2}+k(\ell-m)} \begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} n+\ell-k \\ \ell \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n+\ell-m \\ n \end{bmatrix}_q. \tag{2.13}$$

Cette identité (du moins son analogue tressé qui est défini dans la prochaine section) est utilisée plus tard dans cette thèse.

2.1.3 q-symboles de Pochhammer

Nous définissons aussi un q-analogue pour le symbole de Pochhammer :

$$(s;q)_n = \prod_{k=0}^{n-1} (1 - sq^k), \tag{2.14}$$

Le symbole de Pochhammer classique ou factorielle croissante $(s)_n = \frac{(s+n-1)!}{(s-1)!}$ n'est pas directement la limite du q-symbole de Pochhammer quand q tend vers 1. Cependant,

$$\begin{aligned} \frac{[s+n-1]_q!}{[s-1]_q!} &= [s]_q [s+1]_q \cdots [s+n-1]_q \\ &= \frac{(1-q^s)(1-q^{s+1})\cdots(1-q^{s+n-1})}{(1-q)^n} \\ &= \frac{(q^s;q)_n}{(1-q)^n}, \end{aligned}$$

et on a donc la limite

$$\lim_{q\to 1} \frac{(q^s;q)_n}{(1-q)^n} = (s)_n.$$

En revanche, il apparaît par définition que la limite des q-symboles de Pochhammer n'est pas mystérieuse puisque

$$\lim_{q\to 1} (s;q)_n = (1-s)^n.$$

On peut par ailleurs relier les q-symboles de Pochhammer aux q-coefficients binomiaux à l'aide du q-théorème binomial [57] :

$$(s;q)_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q s^k q^{\frac{k(k-1)}{2}} \tag{2.15}$$

Nous ne démontrons pas ces formules ici car elles correspondent à une prescription particulière (la représentation triviale $\sigma_i \mapsto q$) d'analogues tressées que nous allons maintenant présenter.

2.2 Analogues tressés

Nous allons présenter ici quelques analogues tressés. Comme nous le verrons par la suite, les analogues tressés peuvent être considérés comme des analogues non commutatifs de q-analogues, et donc d'objets classiques. Les analogues tressés sont des éléments de l'algèbre de groupe du groupe des tresses $\mathbf{B}_\infty$. L'analogie peut être réalisée en considérant la représentation triviale $\sigma_i \mapsto q$. Le rôle joué par les différentes puissances de q dans le cas des q-analogue sera ici joué par les tressages β. Ces analogues sont beaucoup moins connus que les q-analogues, mais comme nous allons le voir, leurs propriétés sont saisissantes et leur existence même laisse présager qu'il existe toute une combinatoire tressée.

2.2.1 Nombres tressés et symétriseurs

Nous suivons ici le même plan que pour les q-analogues. Le point de départ est l'algèbre de groupe $\mathbf{kB}_\infty$. Pour ce qui nous intéresse, les principales différences entre les éléments de $\mathbf{kB}_\infty$ et $\mathbf{k}[q]$ proviennent du nombre de générateurs (une infinité dénombrable pour la première, un seul pour la seconde) et que l'endomorphisme $\sigma_i \mapsto \sigma_{i+\ell}$ a une action non triviale dans $\mathbf{kB}_n$. Nous avons vu au chapitre précédant que le tressage $\beta_{x,y}$ est constitué de xy générateurs et ainsi, la représentation triviale $\sigma_i \mapsto q$ envoie cet élément sur q^{xy}. Cependant, $\beta_{x,y}$ et $\beta_{x',y'}$, avec $xy = x'y'$ sont tous deux envoyés sur q^{xy}. De même, les éléments $\beta_{1,1}^{\uparrow x}$ et $\beta_{1,1}^{\uparrow y}$ sont tous deux envoyés sur q, quels que soient x et y. Il n'existe pas de méthode canonique ou algorithmique pour générer des analogues tressés à partir de q-analogues.

Comme nous l'avons vu au chapitre précédent, il existe dans le groupe des tresses $\mathbf{B}_n$ deux involutions remarquables : l'anti-automorphisme canonique $\iota_{\mathrm{h}}\colon \sigma_i \mapsto \sigma_i$, et l'automorphisme $\iota_{\mathrm{v}}\colon \sigma_i \mapsto \sigma_{n-i}$. Nous avons déjà vu que le second peut être réalisé comme la conjugaison par Δ_n. Nous prolongeons canoniquement ces deux applications à $\mathbf{kB}_n$. Si la première se laisse prolonger dans $\mathbf{kB}_\infty$, la seconde dépend explicitement du rang du groupe des tresses considéré. Nous utiliserons donc la convention suivante : l'action de ι_{v} sur un élément $x^{\uparrow y}$ de $\mathbf{kB}_\infty$ est réalisée comme la conjugaison par Δ_k avec k le plus petit entier tel que $x^{\uparrow y} \in \mathbf{kB}_k$.

Commençons par définir le nombre tressé

$$\{n\} = \sum_{j=0}^{n-1} \beta_{1,j} = 1 + \beta_{1,1} + \beta_{1,2} + \cdots + \beta_{1,n-1}. \tag{2.16}$$

Il est alors évident que lors de la représentation triviale $\sigma_i \mapsto q$, $\{n\} \mapsto [n]_q$.

Nous avons aussi, pour $0 \leq b \leq a$,

$$\{a-b\} + \{b\}^{\uparrow a-b} \beta_{1,a-b} = \sum_{j=0}^{a-b-1} \beta_{1,j} + \sum_{j=0}^{b-1} \beta_{1,j}^{\uparrow a-b} \beta_{1,a-b}$$

Mais $\beta_{1,j}^{\uparrow a-b} \beta_{1,a-b} = \beta_{1,a-b+j}$, et un changement d'index de sommation permet de réunir les deux sommes pour trouver

$$\{a-b\} + \{b\}^{\uparrow a-b} \beta_{1,a-b} = \{a\}\,. \tag{2.17}$$

Cette formule est à comparer à (2.2). Nous obtenons automatiquement trois autres analogues tressés pour le q-nombre $[n]_q$ en considérant l'action de ι_{h}, ι_{v} et $\iota_{\mathrm{h}} \circ \iota_{\mathrm{v}}$ sur $\{n\}$. Plus particulièrement,

$$\iota_{\mathrm{h}}(\{n\}) = \{n\}_\star = \sum_{j=0}^{n-1} \beta_{j,1} = 1 + \beta_{1,1} + \beta_{2,1} + \cdots + \beta_{n-1,1},$$

et nous avons la formule de sommation

$$\{a-b\}_\star + \beta_{a-b,1} \{b\}_\star^{\uparrow a-b} = \{a\}_\star\,. \tag{2.18}$$

Nous pouvons définir d'une manière similaire à la q-factorielle la factorielle tressée :

$$\{n\}! = \{n\}\,\{n-1\}^{\uparrow 1}\,\{n-2\}^{\uparrow 2} \cdots \{1\}^{\uparrow n-1}\,. \tag{2.19}$$

Par construction, il est immédiat de constater que dans la représentation triviale $\sigma_i \mapsto q$, $\{n\}! \mapsto [n]_q!$.

La factorielle tressée possède une propriété remarquable par rapport aux nombres tressés : elle est invariante sous les deux involutions ι_{h} et ι_{v}. Dans l'algèbre $\mathbf{k}\mathfrak{S}_\infty$, définissons le symétriseur d'ordre n

$$\widehat{\mathrm{S}}(n) = \sum_{g \in \mathfrak{S}_n} g.$$

Cet élément jouit de nombreuses propriétés. Par définition, il commute avec tout élément de $\mathfrak{S}_n$, et en particulier avec $\widehat{\Delta}_n$. Ainsi, $\widehat{\Delta}_n \widehat{\mathrm{S}}(n) \widehat{\Delta}_n^{-1} = \widehat{\mathrm{S}}(n)$, c'est-à-dire

$$\widehat{\iota_{\mathrm{v}}}\left(\widehat{\mathrm{S}}(n)\right) = \widehat{\mathrm{S}}(n).$$

Si g est un élément de $\mathfrak{S}_n$, alors $\widehat{\iota_{\mathrm{h}}}(g)g = 1$. Dès lors, si l'on applique l'anti-automorphisme canonique à $\widehat{\mathrm{S}}(n)$, chaque élément est envoyé vers son inverse et alors

$$\widehat{\iota_{\mathrm{h}}}\left(\widehat{\mathrm{S}}(n)\right) = \widehat{\mathrm{S}}(n).$$

Projetons canoniquement $\{n\}$ sur $\mathbf{k}\mathfrak{S}_n$. En termes de permutations, $\widehat{\{n\}} \doteq \pi(\{n\})$ correspond à la somme des n permutations $(12\dots i)_{i=1}^{i=n}$. Les éléments de $\widehat{\{n\}}! = \widehat{\{n\}}\widehat{\{n-1\}}^{\uparrow 1}\cdots\widehat{\{1\}}^{\uparrow n-1}$ sont donc de la forme $(12\dots i_1)(23\dots i_2)\cdots(i_n)$, avec $k \leq i_k \leq n$. Clairement, ces éléments sont en bijection avec l'ensemble des n-uplets $\{i_1,\dots,i_n\}$, $i \neq \ell \Rightarrow i_k \neq i_\ell$ qui est de cardinal $n!$ (i_k correspond à l'antécédent de k). $\widehat{\{n\}}!$ est donc la somme de $n!$ permutations différentes de n éléments, c'est-à-dire

$$\widehat{\{n\}}! = \widehat{\mathrm{S}}(n).$$

Les involutions ι_{v} et ι_{h} n'influant pas sur la réductibilité des mots ni dans $\mathfrak{S}_n$, ni dans $\mathbf{B}_n$, on en déduit que

$$\iota_{\mathrm{v}}(\{n\}!) = \iota_{\mathrm{h}}(\{n\}!) = \{n\}! = \mathrm{S}(n). \tag{2.20}$$

En appliquant ι_{h} à (2.19), on obtient alors une nouvelle égalité :

$$\{n\}! = \{1\}_\star^{\uparrow n-1}\cdots\{n-2\}_\star^{\uparrow 2}\{n-1\}_\star^{\uparrow 1}\{n\}_\star\,. \tag{2.21}$$

2.2.2 Battages quantiques

On définit les battages quantiques de manière similaire aux q-coefficients binomiaux, c'est-à-dire comme le rapport de factorielles tressés (ou symétriseurs). Ainsi,

$$Ш_{k,n-k} = \{n\}!\cdot\{k\}!^{-1}\ \{n-k\}!^{-1\uparrow k} \tag{2.22}$$

On observe que

$$\begin{aligned}
Ш_{k,n+1-k} &= \{n+1\}!\cdot\{k\}!^{-1}\ \{n+1-k\}!^{-1\uparrow k}\\
&\overset{(2.21)}{=} \{n\}!^{\uparrow 1}\{n+1\}_\star\cdot\{k\}!^{-1}\ \{n+1-k\}!^{-1\uparrow k}\\
&\overset{(2.18)}{=} \{n\}!^{\uparrow 1}\left(\{k\}_\star+\beta_{k,1}\{n-k+1\}_\star^{\uparrow k}\right)\cdot\{k\}!^{-1}\ \{n+1-k\}!^{-1\uparrow k}\\
&= \{n\}!^{\uparrow 1}\cdot\{k-1\}!^{-1\uparrow 1}\ \{n+1-k\}!^{-1\uparrow k-1+1}+\\
&\qquad\qquad + \{n\}!^{\uparrow 1}\cdot\{k\}!^{-1\uparrow 1}\ \{n-k\}!^{-1\uparrow k+1}\beta_{k,1}\\
&= Ш_{k-1,n+1-k}^{\uparrow 1} + Ш_{k,n-k}^{\uparrow 1}\beta_{k,1},
\end{aligned}$$

soit

$$Ш_{k,n+1-k} = Ш_{k-1,n+1-k}^{\uparrow 1} + Ш_{k,n-k}^{\uparrow 1}\beta_{k,1}. \tag{2.23}$$

Cette relation est un analogue tressé pour le q-analogue de la première relation de Pascal (2.5). À la différence des (q-)coefficients binomiaux, les battages ne sont pas symétriques dans leurs arguments. Nous avons cependant la relation

$$\Delta_n Ш_{k,n-k} = Ш_{n-k,k}\Delta_n, \tag{2.24}$$

c'est-à-dire $\iota_{\mathrm{v}}\left(Ш_{k,n-k}\right) = Ш_{n-k,k}$. En effet, en vertu de (1.30),

$$\begin{aligned}
\Delta_n Ш_{k,n-k} &= \Delta_n \{n\}! \cdot \{k\}!^{-1} \ \{n-k\}!^{-1\uparrow k} \\
&= \{n\}! \cdot \Delta_n \{k\}!^{-1} \ \{n-k\}!^{-1\uparrow k} \\
&= \{n\}! \cdot \{k\}!^{-1\uparrow n-k} \Delta_n \ \{n-k\}!^{-1\uparrow k} \\
&= \{n\}! \cdot \{k\}!^{-1\uparrow n-k} \ \{n-k\}!^{-1} \Delta_n \\
&= Ш_{n-k,k} \Delta_n .
\end{aligned}$$

Nous pouvons alors conjuguer par Δ_{n+1} la relation (2.23) pour obtenir

$$\begin{aligned}
Ш_{n+1-k,k} &= \Delta_{n+1}^{-1} Ш_{k-1,n+1-k}^{\uparrow 1} \Delta_{n+1} + \Delta_{n+1}^{-1} Ш_{k,n-k}^{\uparrow 1} \beta_{k,1} \Delta_{n+1} \\
&= \Delta_{n+1}^{-1} \Delta_{n+1} Ш_{n+1-k,k-1} + \Delta_{n+1}^{-1} \Delta_{n+1} Ш_{n-k,k} \beta_{1,k}^{\uparrow n-k},
\end{aligned}$$

soit, en effectuant le changement de variables $k \to n+1-k$,

$$Ш_{k,n+1-k} = Ш_{k,n-k} + Ш_{k-1,n-k+1} \beta_{1,n-k+1}^{\uparrow k-1}. \tag{2.25}$$

Nous avons donc deux analogues tressés pour la première relation de Pascal (2.5), pour les battages quantiques définis par (2.22). Évidemment, Nous pouvons considérer l'image de ces battages sous l'anti-automorphisme canonique ι_{h}. Nous aurions alors obtenu

$$\iota_{\mathrm{h}}\left(Ш_{k,n-k}\right) = Ш_{\star k,n-k} = \{k\}!^{-1} \ \{n-k\}!^{-1\uparrow k} \cdot \{n\}!, \tag{2.26}$$

ainsi que les deux relations de Pascal

$$Ш_{\star k,n+1-k} = Ш_{\star k-1,n+1-k}^{\uparrow 1} + \beta_{1,k} Ш_{\star k,n-k}^{\uparrow 1} \tag{2.27}$$

et

$$Ш_{\star k,n+1-k} = Ш_{\star k,n-k} + \beta_{n-k+1,1}^{\uparrow k-1} Ш_{\star k-1,n-k+1}. \tag{2.28}$$

Ces battages n'intervenant pas par la suite, nous laisserons de côté leurs propriétés qui peuvent être aisément déduites de celles des battages définis par (2.22).

Puisque $Ш_{0,n} = Ш_{n,0} = 1$, et en vertu de (2.23) ou (2.25), les battages quantiques sont des polynômes en les générateurs σ_i. Puisque (2.23)(ou (2.25)) est envoyée par la représentation triviale $\sigma_i \mapsto q$ vers (2.5)(ou (2.7)), les battages quantiques sont envoyés vers les q-coefficients binomiaux

$$Ш_{k,n-k} \overset{\sigma_i \mapsto q}{\longmapsto} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q .$$

On trouvera l'expression des premiers battages dans le tableau 2.1.

n	Battage
0	$Ш_{0,0} = 1$
1	$Ш_{0,1} = 1$ $Ш_{1,0} = 1$
2	$Ш_{0,2} = 1$ $Ш_{1,1} = 1 + \beta_{1,1}$ $Ш_{2,0} = 1$
3	$Ш_{0,3} = 1$ $Ш_{1,2} = 1 + \beta_{1,1} + \beta_{1,2}$ $Ш_{2,1} = 1 + \beta_{1,1}^{\uparrow 1} + \beta_{2,1}$ $Ш_{3,0} = 1$
4	$Ш_{0,4} = 1$ $Ш_{1,3} = 1 + \beta_{1,1} + \beta_{1,2} + \beta_{1,3}$ $Ш_{2,2} = 1 + \beta_{1,1}^{\uparrow 1} + \beta_{1,1}\beta_{1,1}^{\uparrow 1} + \beta_{1,1}^{\uparrow 2}\beta_{1,1}^{\uparrow 1} + \beta_{1,1}\beta_{1,1}^{\uparrow 2}\beta_{1,1}^{\uparrow 1} + \beta_{2,2}$ $Ш_{3,1} = 1 + \beta_{1,1}^{\uparrow 2} + \beta_{2,1}^{\uparrow 1} + \beta_{3,1}$ $Ш_{4,0} = 1$
5	$Ш_{0,5} = 1$ $Ш_{1,4} = 1 + \beta_{1,1} + \beta_{1,2} + \beta_{1,3} + \beta_{1,4}$ $Ш_{2,3} = 1 + \beta_{1,1}^{\uparrow 1} + \beta_{1,2}^{\uparrow 1} + \beta_{2,1} + \beta_{1,3}^{\uparrow 1} + \beta_{1,1}\beta_{1,2}^{\uparrow 1} + \beta_{2,2} + \beta_{1,1}\beta_{1,3}^{\uparrow 1} + \beta_{1,2}\beta_{1,3}^{\uparrow 1} + \beta_{2,3}$ $Ш_{3,2} = 1 + \beta_{1,1}^{\uparrow 2} + \beta_{2,1}^{\uparrow 1} + \beta_{1,2}^{\uparrow 2} + \beta_{3,1} + \beta_{1,1}^{\uparrow 3}\beta_{2,1}^{\uparrow 1} + \beta_{2,2}^{\uparrow 1} + \beta_{1,1}^{\uparrow 3}\beta_{3,1} + \beta_{2,1}^{\uparrow 1}\beta_{3,1} + \beta_{3,2}$ $Ш_{4,1} = 1 + \beta_{1,1}^{\uparrow 3} + \beta_{2,1}^{\uparrow 2} + \beta_{3,1}^{\uparrow 1} + \beta_{4,1}$ $Ш_{5,0} = 1$

TABLE 2.1: Expression des battages $Ш_{k,n-k}$ jusqu'à $n = 5$

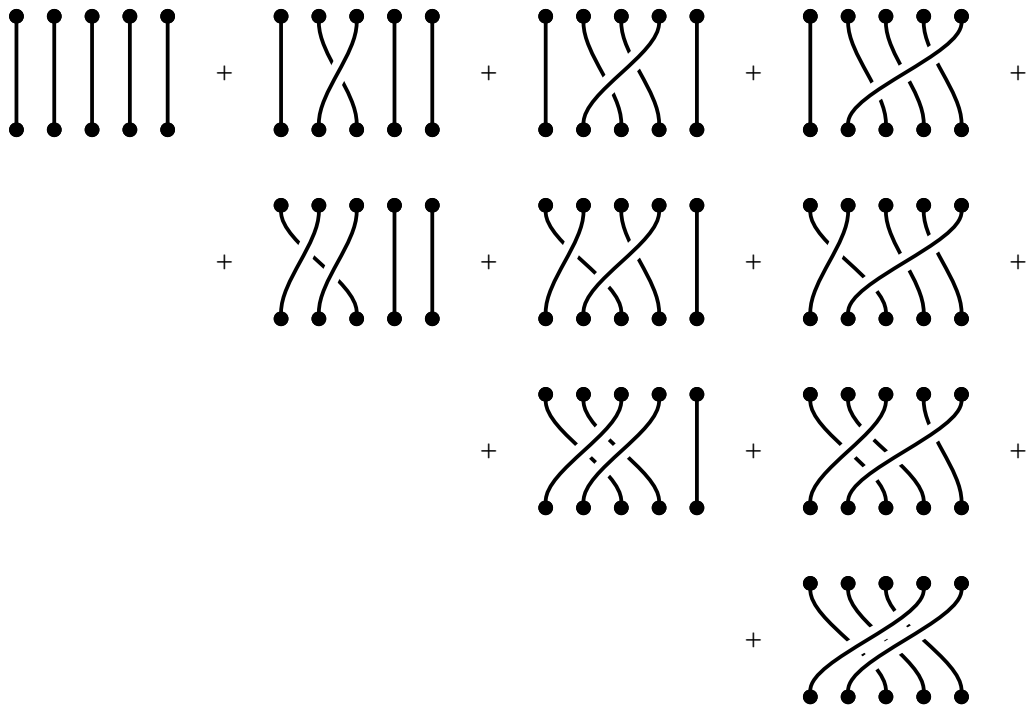


FIGURE 2.1: Les diagrammes des dix tresses géométriques composant le battage $Ш_{2,3}$

L'interprétation combinatoire des battages quantiques est évidente si l'on dessine les diagrammes correspondant à chaque monôme. Ainsi, le battage $Ш_{k,n-k}$ contient des tresses de $\mathbf{B}_n$, où un bloc de k brins considéré à la fin de la tresse se mélange à un bloc de $n-k$ brins restant, sans que jamais les k brins et les $n-k$ ne se mélangent intrasèquement. Le battage quantique est la somme de tous les diagrammes possibles respectant cette condition. Projété sur le groupe symétrique, il correspond à la somme de tous les inverses des permutations qui préservent l'ordre relatif d'ensembles connexes de k et $n-k$ éléments. Évidemment, il existe $\binom{n}{k}$ telles permutations. Considérer la représentation triviale $\widehat{\sigma}_i \mapsto 1$ pour un battage revient donc à compter le nombre de ses éléments.

On a, pour les battages, deux équivalents pour chaque *Christmas Stocking Theorem* : en appliquant récursivement les relations (2.23) et (2.25), on trouve

$$Ш_{k+1,n-k} = \sum_{j=k}^{n} Ш_{k,j-k}^{\uparrow n-j+1} \beta_{k+1,n-j} = \sum_{j=k}^{n} Ш_{k,j-k} \beta_{1,j-k}^{\uparrow k+1} \tag{2.29}$$

et

$$Ш_{k,n+1} = \sum_{j=0}^{k} Ш_{j,n}^{\uparrow k-j+1} \beta_{j,1}^{\uparrow k-j} = \sum_{j=0}^{k} Ш_{j,n} \beta_{k-j,n+1}^{\uparrow j+1}, \tag{2.30}$$

que l'on comparera aux équations (2.9) et (2.10)

Nous considérerons la convolution de Vandermonde tressée dans la section suivante, après avoir introduit les symboles de Pochhammer tressés.

Nous avons un analogue pour la factorisation des coefficients multinomiaux (ou *trinomial revision* dans [49]). On a en effet

$$Ш_{k,n-k} Ш^{\uparrow k}_{n-k-\ell,\ell} = Ш_{k,n-k-\ell,\ell} = Ш_{n-\ell,\ell} Ш_{k,n-k-\ell} \tag{2.31}$$

puisque tous les éléments commutent à distance :

$$\begin{aligned} Ш_{k,n-k} Ш^{\uparrow k}_{n-k-\ell,\ell} &= \{n\}!\,\{k\}!^{-1}\,\{n-k\}!^{-1\uparrow k}\,\{n-k\}!^{\uparrow k}\,\{n-k-\ell\}!^{-1\uparrow k}\,\{\ell\}!^{-1\uparrow n-\ell} \\ &= \{n\}!\,\{k\}!^{-1}\,\{n-k-\ell\}!^{-1\uparrow k}\,\{\ell\}!^{-1\uparrow n-\ell} \\ &= \{n\}!\,\{n-\ell\}!^{-1}\,\{\ell\}!^{-1\uparrow n-\ell}\,\{n-\ell\}!\,\{k\}!^{-1}\,\{n-k-\ell\}!^{-1\uparrow k} \\ &= Ш_{n-\ell,\ell} Ш_{k,n-k-\ell}. \end{aligned}$$

Marc Rosso a défini une algèbre pour laquelle le produit des éléments est réalisée par l'action des battages. La propriété (2.31) implique alors directement que les algèbres de battages quantiques sont associatives [81, 83, 82].

Nous mentionnons aussi pour y faire référence plus tard les quasi-commutations évidentes

$$Ш_{k,n-k}\beta_{\ell,n} = \beta_{\ell,n} Ш^{\uparrow \ell}_{k,n-k} \quad \text{et} \quad Ш^{\uparrow \ell}_{k,n-k}\beta_{n,\ell} = \beta_{n,\ell} Ш_{k,n-k}. \tag{2.32}$$

Nous avons enfin la relation importante pour la suite :

Proposition 16. *Pour i, j et l*

$$\sum_k (-1)^k Ш_{k,j-k} \Delta^{\uparrow k}_{j-k} Ш^{\uparrow k}_{l,i-k} \beta_{l,k} = \Delta_j Ш^{\uparrow j}_{l-j,i}. \tag{2.33}$$

Démonstration. Nous allons procéder par récurrence sur les variables j, i et l. Notons que cette égalité est un analogue tressé pour l'identité (5.25) de [49], après négation supérieure du membre de droite ($\binom{n}{k} = (-1)^k \binom{n+k-1}{k}$). Nous commençons par vérifier l'hypothèse de récurrence sur j. En chemin, nous allons générer par application successive de (2.25) et (2.23) trois sommes. La première satisfait la récurrence, alors que les deux autres s'annulent mutuellement. Pour $j = 0$, la relation est clairement vraie pour tout i et l. Sèq lors, pour $j + 1$, le premier battage du membre de gauche de (2.33) se décompose à l'aide de (2.25) en deux nouveaux battages de tailles plus petites. Nous pouvons alors séparer la somme en deux nouvelles, précisément,

$$\sum_k (-1)^k Ш_{k,j-k} \Delta^{\uparrow k}_{j+1-k} Ш^{\uparrow k}_{l,i-k} \beta_{l,k}, \tag{2.34}$$

et

$$\sum_k (-1)^k Ш_{k-1,j-k+1} \beta^{\uparrow k-1}_{1,j-k+1} \Delta^{\uparrow k}_{j+1-k} Ш^{\uparrow k}_{l,i-k} \beta_{l,k}. \tag{2.35}$$

L'étape clef consiste à décomposer le second battage de (2.34) à l'aide de (2.23) :

$$Ш^{\uparrow k}_{l,i-k} = Ш^{\uparrow k+1}_{l-1,i-k} + Ш^{\uparrow k+1}_{l,i-k-1} \beta^{\uparrow k}_{l,1}$$

Cela permet de décomposer (2.34) en deux sommes distinctes :

$$\sum_k (-1)^k Ш_{k,j-k} \Delta^{\uparrow k}_{j+1-k} Ш^{\uparrow k+1}_{l-1,i-k} \beta_{l,k}, \tag{2.36}$$

et

$$\sum_k (-1)^k Ш_{k,j-k} \Delta^{\uparrow k}_{j+1-k} Ш^{\uparrow k+1}_{l,i-k-1} \beta^{\uparrow k}_{l,1} \beta_{l,k}. \tag{2.37}$$

Ainsi, l'expression du membre de gauche de (2.33) pour $j+1$ est (2.35)+(2.36)+(2.37). Nous vérifions alors que (2.35) + (2.37) = 0 : en réalisant le changement de variable de sommation $k = k' + 1$ dans (2.35), nous obtenons

$$(2.35) = -\sum_k (-1)^{k'} Ш_{k',j-k'} \beta^{\uparrow k'}_{1,j-k'} \Delta^{\uparrow k'+1}_{j-k'} Ш^{\uparrow k'+1}_{l,i-k'-1} \beta_{l,k'+1}.$$

Notons que dans (2.37), $\beta^{\uparrow k}_{l,1} \beta_{l,k} = \beta_{l,k+1}$. D'un autre côté, la définition (1.27) nous permet de construire un élément de Garside plus gros dans (2.35) : $\beta^{\uparrow k'}_{1,j-k'} \Delta^{\uparrow k'+1}_{j-k'} = \Delta^{\uparrow k'}_{j-k'+1}$. Il est alors immédiat de constater que (2.35) est formellement égale à l'opposée de (2.37). Il ne reste ainsi que (2.36). Nous avons

$$Ш_{k,j-k} \Delta^{\uparrow k}_{j+1-k} Ш^{\uparrow k+1}_{l-1,i-k} \beta_{l,k} = \beta_{1,j} \cdot Ш^{\uparrow 1}_{k,j-k} \Delta^{\uparrow k+1}_{j-k} Ш^{\uparrow k+1}_{l-1,i-k} \beta^{\uparrow 1}_{l-1,k}. \tag{2.38}$$

En effet, le membre de droite de (2.38) est

$$\begin{aligned}
(2.38\mathrm{R}) &= \beta_{1,j} \cdot Ш^{\uparrow 1}_{k,j-k} \Delta^{\uparrow k+1}_{j-k} Ш^{\uparrow k+1}_{l-1,i-k} \beta^{\uparrow 1}_{l-1,k} \\
&\overset{(1.26)}{=} \left[Ш_{k,j-k} \Delta^{\uparrow k}_{j-k} \beta_{1,1j} \right] Ш^{\uparrow k+1}_{l-1,i-k} \beta^{\uparrow 1}_{l-1,k} \\
&\overset{(1.23)}{=} Ш_{k,j-k} \Delta^{\uparrow k}_{j-k} \left[\beta^{\uparrow k}_{1,j-k} \beta_{1,k} \right] Ш^{\uparrow k+1}_{l-1,i-k} \beta^{\uparrow 1}_{l-1,k} \\
&\overset{(1.27)(1.17)}{=} Ш_{k,j-k} \left[\Delta^{\uparrow k}_{j-k+1} \right] \left[Ш^{\uparrow k+1}_{l-1,i-k} \beta_{1,k} \right] \beta^{\uparrow 1}_{l-1,k} \\
&\overset{(1.20)}{=} Ш_{k,j-k} \Delta^{\uparrow k}_{j-k+1} Ш^{\uparrow k+1}_{l-1,i-k} \left[\beta_{l,k} \right].
\end{aligned} \tag{2.39}$$

Dès lors,

$$\begin{aligned}
\sum_k (-1)^k Ш_{k,j-k} \Delta^{\uparrow k}_{j+1-k} Ш^{\uparrow k+1}_{l-1,i-k} \beta_{l,k} &= \\
= \beta_{1,j} \sum_k (-1)^k Ш^{\uparrow 1}_{k,j-k} \Delta^{\uparrow k+1}_{j-k} Ш^{\uparrow k+1}_{l-1,i-k} \beta^{\uparrow 1}_{l-1,k} &= \\
= \beta_{1,j} \Delta^{\uparrow 1}_{j} Ш^{\uparrow j+1}_{l-j+1,i} &= \Delta_{j+1} Ш^{\uparrow j+1}_{l-j+1,i},
\end{aligned} \tag{2.40}$$

ce qui montre la récurrence sur j. La récurrence sur i et l est directe : à l'aide de la relation de Pascal (2.25), nous montrons aisément que le membre de gauche de (2.33) se décompose comme un battage selon ces deux arguments. Les valeurs aux bords étant les mêmes, la proposition est démontrée. □

2.2.3 Extension aux arguments négatifs

Nous pouvons étendre la définition des battages aux arguments négatifs. Nous rappelons que la factorielle décroissante (ou produit séquentiel descendant) est $(n)^{\underline{k}} = n(n-1)\cdots(n-k+1)$, avec la notation de [49] (voir [61]). Notons que pour n naturel, $(-n)^{\underline{k}} = -n(-n-1)\cdots(-n-k+1) = (-1)^k n(n+1)\cdots(n+k-1) = (-1)^k(n+k-1)^{\underline{k}}$. Ainsi, ni nous substituons m par $-n$ dans le coefficient binomial $\binom{m}{k} = \frac{(m)^{\underline{k}}}{k!}$, nous obtenons

$$\binom{-n}{k} = \frac{(-n)^{\underline{k}}}{k!} = (-1)^k \frac{(n+k-1)^{\underline{k}}}{k!} = (-1)^k \binom{n+k-1}{k} \tag{2.41}$$

Cette relation parfois appelée *négation supérieure* possède un grand intérêt pratique, voir [49] par exemple. Puisque

$$\binom{-n}{k} = (-1)^k \binom{n+k-1}{k} = (-1)^{2k} \binom{-(n+k-1)+k-1}{k} = \binom{-n}{k}, \tag{2.42}$$

cette relation est valide quelle que soit le signe de n. Notons que la symétrie vis-à-vis de l'argument du bas est perdue, $\binom{-n}{k} \neq \binom{-n}{-n-k}$, mais nous avons toutefois

$$\binom{-n-1}{k} = (-1)^k \binom{n+k}{k} = (-1)^k \binom{n+k}{n} = (-1)^{n+k} \binom{-k-1}{n-1}, \tag{2.43}$$

et ainsi

$$(-1)^k \binom{-n-1}{k-1} = (-1)^n \binom{-k-1}{n-1}. \tag{2.44}$$

Cette relation, qui n'est valide que pour n et k naturels, est la contrepartie dans le triangle de Pascal « supérieur » de la relation $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. Si cette dernière met en relation des coefficients situés sur la même ligne dans le triangle de Pascal « inférieur », la relation (2.44) lie des coefficients situés sur la même colonne du triangle supérieur, voir figure 2.2.

Nous allons maintenant procéder à une construction analogue pour définir les battages avec un argument négatif (le second, nous discuterons l'autre cas à la fin de la sous-section). Avant de commencer, il nous faut prolonger la définition des nombres tressés et des tressages élémentaires aux arguments négatifs. Nous introduisons une autre involution, et nous notons par une dague l'automorphisme de $\mathbf{kB}_\infty$ $\sigma_i \mapsto \sigma_i^\dagger \doteq$

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & & & & & 0 & & \\
 & & & & & & & & & 0 & \binom{-5}{0} & & \\
 & & & & & & & & 0 & \binom{-4}{0} & \binom{-4}{1} & & \\
 & & & & & & & 0 & \binom{-3}{0} & \binom{-3}{1} & \binom{-3}{2} & & \cdots \\
 & & & & & & 0 & \binom{-2}{0} & \binom{-2}{1} & \binom{-2}{2} & \binom{-2}{3} & & \\
 & & & & & 0 & \binom{-1}{0} & \binom{-1}{1} & \binom{-1}{2} & \binom{-1}{3} & \binom{-1}{4} & & \\
 & & & & 0 & \binom{0}{0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\
 & & & 0 & \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & 0 & & & & & & \\
 & & 0 & \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & 0 & & & & & & \\
 & 0 & \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & 0 & & & & & & \\
0 & \binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} & 0 & & & & & & \\
 & & & \vdots & & & & & & & & &
\end{array}
$$

FIGURE 2.2: Le triangle de Pascal étendu

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & & & & & 0 & & \\
 & & & & & & & & & 0 & Ш_{0,-5} & & \\
 & & & & & & & & 0 & Ш_{0,-4} & Ш_{1,-5} & & \\
 & & & & & & & 0 & Ш_{0,-3} & Ш_{1,-4} & Ш_{2,-5} & & \cdots \\
 & & & & & & 0 & Ш_{0,-2} & Ш_{1,-3} & Ш_{2,-4} & Ш_{3,-5} & & \\
 & & & & & 0 & Ш_{0,-1} & Ш_{1,-2} & Ш_{2,-3} & Ш_{3,-4} & Ш_{4,-5} & & \\
 & & & & 0 & Ш_{0,0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\
 & & & 0 & Ш_{0,1} & Ш_{1,0} & 0 & & & & & & \\
 & & 0 & Ш_{0,2} & Ш_{1,1} & Ш_{2,0} & 0 & & & & & & \\
 & 0 & Ш_{0,3} & Ш_{1,2} & Ш_{2,1} & Ш_{3,0} & 0 & & & & & & \\
0 & Ш_{0,4} & Ш_{1,3} & Ш_{2,2} & Ш_{3,1} & Ш_{4,0} & 0 & & & & & & \\
 & & & \vdots & & & & & & & & &
\end{array}
$$

FIGURE 2.3: Le triangle de Pascal étendu pour les battages

σ_i^{-1}, $\forall i$. Nous notons par une double dague l'action successive de l'automorphisme précédent et la conjugaison par la tresse fondamentale.

Nous avons la décomposition (1.23) :

$$\beta_{1,y} = \beta_{1,x}^{\uparrow y-x}\beta_{1,y-x}.$$

En spécifiant $y = 0$ dans cette relation, nous obtenons

$$\beta_{1,-x} = \beta_{1,x}^{-1\uparrow -x}. \tag{2.45}$$

Pour les nombres tressés, nous avons la décomposition (2.17) :

$$\{y-x\} + \{x\}^{\uparrow y-x}\beta_{1,y-x} = \{y\}\,, \tag{2.46}$$

et en spécifiant $y = 0$, nous obtenons

$$\{-x\} = -\{x\}^{\uparrow -x}\beta_{1,-x} = -\{x\}^{\uparrow -x}\beta_{1,x}^{-1\uparrow -x} = -\left(\{x\}\,\beta_{1,x}^{-1}\right)^{\uparrow -x}, \tag{2.47}$$

or, en vertu de (1.23) et (2.16),

$$\{x\}\,\beta_{1,x}^{-1} = \sum_{j=0}^{x-1}\beta_{1,j}\cdot\beta_{1,j}^{-1}\beta_{1,x-j}^{-1\uparrow j} = \sum_{j=0}^{x-1}\beta_{1,x-j}^{-1\uparrow j},$$

mais $\beta_{1,x-j}^{-1\uparrow j} = \Delta_{x+1}^{-1}\beta_{x-j,1}^{-1}\Delta_{x+1}$ si $0 \le j \le x-1$, et ainsi

$$\begin{aligned}\{x\}\,\beta_{1,x}^{-1} &= \Delta_{x+1}^{-1}\sum_{j=0}^{x-1}\beta_{x-j,1}^{-1}\Delta_{x+1} = \Delta_{x+1}^{-1}\sum_{j'=1}^{x}\beta_{j',1}^{-1}\Delta_{x+1} = \\ &= \Delta_{x+1}^{-1}\sum_{j''=0}^{x-1}\beta_{j'',1}^{-1\uparrow 1}\beta_{1,1}^{-1}\Delta_{x+1} = \Delta_{x+1}^{-1}\sum_{j''=0}^{x-1}\beta_{j'',1}^{-1\uparrow 1}\Delta_{x+1}\beta_{1,1}^{-1\uparrow x-1},\end{aligned} \tag{2.48}$$

cependant,

$$\Delta_{x+1}^{-1}\sum_{j''=0}^{x-1}\beta_{j'',1}^{-1\uparrow 1}\Delta_{x+1} = \Delta_{x+1}^{-1}\beta_{x,1}^{-1}\sum_{j''=0}^{x-1}\beta_{j'',1}^{-1\uparrow 1}\beta_{x,1}\Delta_x = \Delta_x^{-1}\sum_{j''=0}^{x-1}\beta_{j'',1}^{-1}\Delta_x$$

or $\beta_{j'',1}^{-1} = \beta_{1,j''}^{\dagger}$, et ainsi

$$\{-x\} = -\Delta_x^{-1\uparrow -x}\sum_{j''=0}^{x-1}\beta_{1,j''}^{\dagger\uparrow -x}\Delta_x^{\uparrow -x}\beta_{1,1}^{\dagger\uparrow -1} = -\{x\}^{\ddagger\uparrow -x}\beta_{1,1}^{\dagger\uparrow -1}. \tag{2.49}$$

Étendons maintenant la définition de la factorielle décroissante tressée aux nombres négatifs. Classiquement, nous avons $(n)^{\underline{k}} = n(n-1)\cdots(n-k+1)$. Nous définissons alors

$$\{n\}^{\underline{k}} = \begin{cases}\prod_{j=0}^{k-1}\{n-j\}^{\uparrow j} & \text{si} \quad n \ge 0\\ \prod_{j=-k+1}^{0}\{n+j\}^{\uparrow -j} & \text{si} \quad n < 0\end{cases}, \tag{2.50}$$

où l'on écrit tout d'abord le terme correspondant à la borne inférieure du produit puis les successeurs à droite. Nous vérifions alors immédiatement qu'en considérant la représentation triviale $\sigma_i \mapsto 1$, pour n naturel, $\{n\}^{\underline{k}} \mapsto n(n-1)\cdots(n-k+1)$ et $\{-n\}^{\underline{k}} \mapsto (-n-k+1)(-n-k+2)\cdots n$. À la vue de l'équation (2.49), nous avons alors

$$\begin{aligned}\{-n\}^{\underline{k}} &= \{-n-k+1\}^{\uparrow k-1}\{-n-k+2\}^{\uparrow k-2}\cdots\{-n-1\}^{\uparrow 1}\{-n\}\\ &= \{-(n+k-1)\}^{\uparrow k-1}\{-(n+k-2)\}^{\uparrow k-2}\cdots\{-n\}\\ &= (-1)^k\{n+k-1\}^{\ddagger\uparrow -n}\beta_{1,1}^{\dagger\uparrow k-2}\{n+k-2\}^{\ddagger\uparrow -n}\beta_{1,1}^{\dagger\uparrow -k-3}\cdots\{n\}^{\ddagger\uparrow -n}\beta_{1,1}^{\dagger\uparrow -1}\\ &= (-1)^k\{n+k-1\}^{\ddagger\uparrow -n}\{n+k-2\}^{\ddagger\uparrow -n}\cdots\{n\}^{\ddagger\uparrow -n}\beta_{1,1}^{\dagger\uparrow k-2}\beta_{1,1}^{\dagger\uparrow -k-3}\cdots\beta_{1,1}^{\dagger\uparrow -1},\end{aligned} \tag{2.51}$$

mais $\beta_{1,1}^{\dagger\uparrow k-2}\beta_{1,1}^{\dagger\uparrow -k-3}\cdots\beta_{1,1}^{\dagger\uparrow -1} = \beta_{1,k}^{\dagger\uparrow -1}$ et

$$\begin{aligned}&\{n+k-1\}^{\ddagger\uparrow -n}\{n+k-2\}^{\ddagger\uparrow -n}\cdots\{n\}^{\ddagger\uparrow -n} =\\ &\qquad = \Delta_{n-k+1}^{\uparrow -n}\{n+k-1\}^{\dagger\uparrow -n}\{n+k-2\}^{\dagger\uparrow -n+1}\cdots\{n\}^{\dagger\uparrow -n+k-1}\Delta_{n-k+1}^{-1\uparrow -n}\end{aligned} \tag{2.52}$$

impliquent alors que

$$\{-n\}^{\underline{k}} = (-1)^k\Delta_{n+k-1}^{\uparrow -n}\{n+k-1\}^{\dagger\underline{k}\uparrow -n}\Delta_{n+k-1}^{-1\uparrow -n}\beta_{1,k}^{\dagger\uparrow -1} \tag{2.53}$$

Nous avons $Ш_{k,n-k} = \{n\}^{\underline{k}}\{k\}!^{-1}$. En substituant n par $-n$, cette expression devient

$$Ш_{k,-(n+k)} = \{-n\}^{\underline{k}}\{k\}!^{-1} = (-1)^k\Delta_{n+k-1}^{\uparrow -n}\{n+k-1\}^{\dagger\underline{k}\uparrow -n}\Delta_{n+k-1}^{-1\uparrow -n}\beta_{1,k}^{\dagger\uparrow -1}\{k\}!^{-1}. \tag{2.54}$$

Notons que $\{x\}!^{\dagger} = \Delta_x^{-1}\{x\}! = \Delta_x^{\dagger}\{x\}!$ puisque Δ_x est divisible par toute tresse simple (le relevé de toute permutation de $\mathfrak{S}_x$) à droite (ou à gauche par ailleurs). Le reste correspond alors à la somme de $n!$ inverses de tresses simples différentes, ce qui prouve l'assersion. Nous avons alors

$$\Delta_{n+k-1}^{-1\uparrow -n}\beta_{1,k}^{\dagger\uparrow -1}\{k\}!^{-1} = \Delta_{n+k-1}^{-1\uparrow -n}\beta_{1,k}^{\dagger\uparrow -1}\{k\}!^{\dagger -1}\Delta_k^{\dagger} = \{k\}!^{\dagger -1\uparrow -n}\Delta_{n+k-1}^{-1\uparrow -n}\beta_{1,k}^{\dagger\uparrow -1}\Delta_k^{\dagger},$$

mais $\beta_{1,k}^{\dagger\uparrow -1}\Delta_k^{\dagger} = \Delta_{k+1}^{\dagger\uparrow -1}$ et

$$\Delta_{n+k-1}^{\uparrow -n}\{n+k-1\}^{\dagger\underline{k}\uparrow -n}\{k\}!^{\dagger -1\uparrow -n}\Delta_{n+k-1}^{-1\uparrow -n} = \Delta_{n+k-1}^{\uparrow -n}Ш_{k,n-1}^{\dagger\uparrow -n}\Delta_{n+k-1}^{-1\uparrow -n} = Ш_{n-1,k}^{\dagger\uparrow -n},$$

et nous pouvons alors conclure

$$Ш_{k,-n-k} = (-1)^k Ш_{n-1,k}^{\dagger\uparrow -n}\Delta_{k+1}^{\dagger\uparrow -1}. \tag{2.55}$$

Cette relation préserve la relation de Pascal (2.23) :

$$Ш_{k,-n-k} = Ш_{k-1,-n-k}^{\uparrow 1} + Ш_{k,-n-k-1}^{\uparrow 1}\beta_{k,1}.$$

En effet, via (2.55), cette relation devient

$$Ш^{\dagger\uparrow-n}_{n-1,k}\Delta^{\dagger\uparrow-1}_{k+1} = -Ш^{\dagger\uparrow-n}_{n,k-1}\Delta^{\dagger}_{k} + Ш^{\dagger\uparrow-n}_{n,k}\Delta^{\dagger}_{k+1}\beta_{k,1} \tag{2.56}$$

mais le fait que $\Delta^{\dagger\uparrow-1}_{k+1} = \beta^{\dagger\uparrow-1}_{1,k}\Delta^{\dagger}_{k}$ et $\Delta^{\dagger}_{k+1}\beta_{k,1} = \Delta^{\dagger}_{k}\beta^{\dagger}_{1,k}\beta_{k,1} = \Delta^{\dagger}_{k}$ permet de simplifier (2.56) des deux côtés à droite par $\Delta^{\dagger}_{k}$. Nous obtenons alors après réarrangement et en décalant de n brins vers la gauche

$$Ш^{\dagger}_{n,k} = Ш^{\dagger}_{n,k-1} + Ш^{\dagger}_{n-1,k}\beta^{\dagger\uparrow n-1}_{1,k}$$

qui n'est autre que la relation de Pascal (2.25). Nous remarquons donc que la relation (2.23) se réalise pour les battages avec argument négatif à droite comme (2.25) pour des battages avec arguments positifs. En revanche, (2.25) n'est pas satisfaite par les battages avec argument négatif à droite. Cela n'est pas surprenant dans la mesure où nous avons montré que cette relation est liée à l'identification $\Delta_n Ш_{n,n-k} = Ш_{n-k,n}\Delta_n$ qui n'est vraie que lorsque les arguments sont positifs (cf. supra). Nous pouvons cependant refléter pour les battages avec argument négatif à droite la symétrie des colonnes du triangle de Pascal supérieur. Nous avons

$$Ш_{k,-n-1-k} = (-1)^k Ш^{\dagger\uparrow-n-1}_{n,k}\Delta^{\dagger\uparrow-1}_{k+1}, \tag{2.57}$$

mais $Ш^{\dagger}_{n,k} = \Delta^{\dagger}_{n+k}Ш^{\dagger}_{k,n}\Delta_{n+k}$ or

$$Ш_{n,-n-1-k} = (-1)^n Ш^{\dagger\uparrow-k-1}_{k,n}\Delta^{\dagger\uparrow-1}_{n+1} \tag{2.58}$$

et ainsi,

$$Ш_{k,-n-1-k} = (-1)^{k-n}\Delta^{\dagger\uparrow-n-1}_{n+k}Ш^{\uparrow k-n}_{n,-n-1-k}\Delta^{\uparrow k-n-1}_{n+1}\Delta^{\uparrow-n-1}_{n+k}\Delta^{\dagger\uparrow-1}_{k+1}, \tag{2.59}$$

ou, de manière plus symétrique,

$$(-1)^k\Delta^{\uparrow-1}_{n+k}\cdot Ш^{\uparrow n}_{k,-n-1-k}\Delta^{\uparrow n-1}_{k+1} = (-1)^n Ш^{\uparrow k}_{n,-n-1-k}\Delta^{\uparrow k-1}_{n+1}\cdot\Delta^{\uparrow-1}_{n+k} \tag{2.60}$$

est un analogue tressé de la relation (2.44).

2.2.4 Symboles de Pochhammer tressés

Nous pouvons définir un analogue tressé pour les symboles de Pochhammer, avec $s \in \mathbf{k}$:

$$\Pi(s;\beta_{1,1})_n \doteq \Pi(s)_n = \prod_{k=0}^{n-1}\left(1 - s\beta_{1,k}\right) = (1-s)\left(1 - s\beta_{1,1}\right)\cdots\left(1 - s\beta_{1,n-1}\right). \tag{2.61}$$

Nous définissons aussi formellement le symbole tronqué à gauche

$$ {}^{\delta}\Pi(s)_n \doteq \Pi(s)_{\delta}^{-1}\Pi(s)_{\delta+n}. $$

Clairement, dans la représentation triviale $\sigma_i \mapsto q$, $\Pi(s)_n \mapsto (s;q)_n$, et ${}^{\delta}\Pi(s)_n \mapsto \frac{(s;q)_{n+\delta}}{(s;q)_{\delta}}$. Nous avons aussi les quasi-commutations évidentes

$$ \Pi(s)_n\beta_{\ell,n} = \beta_{\ell,n}\Pi(s)_n^{\uparrow\ell} \quad \text{et} \quad \Pi(s)_n^{\uparrow\ell}\beta_{n,\ell} = \beta_{n,\ell}\Pi(s)_n. \tag{2.62} $$

Ce symbole peut être développé à l'aide d'un analogue tressé pour le théorème binomial standard :

Proposition 17.

$$ {}^{\delta}\Pi(s)_n = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i s^i \text{Ш}_{i,n-i}^{\uparrow\delta}\beta_{i,\delta}\Delta_i. \tag{2.63} $$

Démonstration. Nous allons le démontrer par récurrence sur δ. Nous devons vérifier au préalable que la récurrence peut s'initialiser correctement. Vérifions-le donc par récurrence sur n. Si $\delta = 0$, l'équation (2.63) est clairement vraie pour $n = 1$ (triviale par convention pour $n = 0$). Dès-lors, pour $n \to n+1$,

$$ \begin{aligned} {}^{0}\Pi(s)_{n+1} &= {}^{0}\Pi(s)_n \cdot \left(1 - s\beta_{1,n}\right) \\ &= \sum_{i=0}^{n}(-1)^i s^i \text{Ш}_{i,n-i}\Delta_i \cdot \left(1 - s\beta_{1,n}\right) \\ &= 1 + \sum_{i=1}^{n}(-1)^i s^i \text{Ш}_{i,n-i}\Delta_i + \sum_{i'=0}^{n-1}(-1)^{i'+1}s^{i'+1}\text{Ш}_{i',n-i'}\Delta_{i'}\beta_{1,n} + \\ &\qquad + (-1)^{n+1}s^{n+1}\Delta_n\beta_{1,n}. \end{aligned} \tag{2.64} $$

On souhaite maintenant ammener le plus à gauche possible l'élément $\beta_{1,n}$ apparaissant dans les deux derniers termes. Notons que puisque $i' \leq n$, on peut décomposer $\beta_{1,n} = \beta_{1,n-i'}^{\uparrow i'}\beta_{1,i'}$, et donc

$$ \Delta_{i'}\beta_{1,n} = \Delta_{i'}\beta_{1,n-i'}^{\uparrow i'}\beta_{1,i'} = \beta_{1,n-i'}^{\uparrow i'}\Delta_{i'}\beta_{1,i'} = \beta_{1,n-i'}^{\uparrow i'}\beta_{1,i'}\Delta_{i'+1} = \beta_{1,n-i'}^{\uparrow i'}\Delta_{i'+1}. \tag{2.65} $$

Ainsi, utiliser (2.65) et réaliser le changement de variable de sommation $i' = i - 1$ dans la seconde somme permet de la réécrire dans la première :

$$ {}^{\delta}\Pi(s)_{n+1} = 1 + \sum_{i=1}^{n}(-1)^i s^i \left[\text{Ш}_{i,n-i} + \text{Ш}_{i-1,n-i+1}\beta_{1,n-i+1}^{\uparrow i-1}\right]\Delta_i + (-1)^{n+1}s^{n+1}\Delta_{n+1} \tag{2.66} $$

mais, en vertu de (2.25),

$$ \text{Ш}_{i,n-i} + \text{Ш}_{i-1,n-i+1}\beta_{1,n-i+1}^{\uparrow i-1} = \text{Ш}_{i,n+1-i}, $$

ce qui permet de réécrire le membre de droite de (2.66) comme une somme de 0 à $n+1$ et de finir la preuve de l'initialisation. On souhaite maintenant vérifier l'hypothèse de récurrence pour δ. Par construction, il suffit alors de vérifier que

$$ {}^{\delta}\Pi(s)_n \left(1 - s\beta_{1,\delta+n}\right) = \left(1 - s\beta_{1,\delta}\right) {}^{\delta+1}\Pi(s)_n. $$

On a ${}^{\delta}\Pi(s)_n \left(1 - s\beta_{1,\delta+n}\right) = {}^{\delta}\Pi(s)_{n+1}$ mais

$$ \begin{aligned} {}^{\delta}\Pi(s)_{n+1} &= \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i s^i Ш^{\uparrow\delta}_{i,n+1-i} \beta_{i,\delta} \Delta_i \\ &\overset{(2.23)}{=} \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i s^i Ш^{\uparrow\delta+1}_{i-1,n+1-i} \beta_{i,\delta} \Delta_i + \sum_{i'=0}^{n+1} (-1)^{i'} s^{i'} Ш^{\uparrow\delta+1}_{i',n-i'} \beta^{\uparrow\delta}_{i',1} \beta_{i',\delta} \Delta_{i'} \\ &= \sum_{i'=0}^{n} (-1)^{i'+1} s^{i'+1} Ш^{\uparrow\delta+1}_{i',n-i'} \beta_{i'+1,\delta} \Delta_{i'+1} + \sum_{i'=0}^{n} (-1)^{i'} s^{i'} Ш^{\uparrow\delta+1}_{i',n-i'} \beta_{i',\delta+1} \Delta_{i'} \\ &= \sum_{i'=0}^{n} (-1)^{i'+1} s^{i'+1} Ш^{\uparrow\delta+1}_{i',n-i'} \beta_{i'+1,\delta} \beta_{i',1} \Delta_{i'} + {}^{\delta+1}\Pi(s)_{n+1} \\ &= -s\beta_{1,\delta} \sum_{i'=0}^{n} (-1)^{i'} s^{i'} Ш^{\uparrow\delta+1}_{i',n-i'} \beta_{i',\delta+1} \Delta_{i'} + {}^{\delta+1}\Pi(s)_{n+1} \\ &= \left(1 - s\beta_{1,\delta}\right) {}^{\delta}\Pi(s)_{n+1}, \end{aligned} $$

car

$$ \beta_{i'+1,\delta} \cdot \Delta_{i'+1} = \beta_{1,\delta} \beta^{\uparrow 1}_{i',\delta} \cdot \beta_{i',1} \Delta_{i'} = \beta_{1,\delta} \beta_{i',\delta+1} \Delta_{i'}, $$

ce qui finit la preuve du theorème binomial tressé. □

Nous pouvons alors simplement obtenir un analogue tressé pour la convolution de Vandermonde :

Proposition 18.

$$ Ш_{a+c,b+d} = \sum_j Ш_{a-j,b+j} Ш^{\uparrow a+b}_{c+j,d-j} \beta^{\uparrow a-j}_{c+j,b+j}. \tag{2.67} $$

Démonstration. Nous avons

$$ \Pi(s)_n = \Pi(s)_k {}^{k}\Pi(s)_{n-k}, $$

c'est-à-dire

$$ \begin{aligned} \sum_{i=0}^{n} (-1)^i s^i Ш_{i,n-i} \Delta_i &= \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{n-k} (-1)^{i+j} s^{i+j} Ш_{i,k-i} \Delta_i Ш^{\uparrow k}_{j,n-k-j} \beta_{j,k} \Delta_j \\ &= \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{n-k} (-1)^{i+j} s^{i+j} Ш_{i,k-i} Ш^{\uparrow k}_{j,n-k-j} \beta_{j,k} \Delta_i^{\uparrow j} \Delta_j, \end{aligned} $$

soit, en réalisant dans le membre de droite le changement de variables $i' = i + j$, $j' = j$,

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i s^i \text{Ш}_{i,n-i}\Delta_i =$$
$$= \sum_{i'=0}^{n}\sum_{j'=\max(0,i'-k)}^{\min(n-k,i')}(-1)^{i'}s^{i'}\text{Ш}_{i'-j',k-i'+j'}\text{Ш}^{\uparrow k}_{j',n-k-j'}\beta_{j',k}\Delta^{\uparrow j'}_{i'-j'}\Delta_{j'},$$

mais, $\beta_{j',k}\Delta^{\uparrow j'}_{i'-j'}\Delta_{j'} = \beta^{\uparrow i'-j'}_{j',k-i'+j}\beta_{j',i'-j'}\Delta^{\uparrow j'}_{i'-j'}\Delta_{j'} = \beta^{\uparrow i'-j'}_{j',k-i'+j}\Delta_{i'}$, et ainsi

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i s^i \text{Ш}_{i,n-i}\Delta_i = \sum_{i'=0}^{n}(-1)^{i'}s^{i'}\left(\sum_{j'=\max(0,i'-k)}^{\min(n-k,i')}\text{Ш}_{i'-j',k-i'+j'}\text{Ш}^{\uparrow k}_{j',n-k-j'}\beta^{\uparrow i'-j'}_{j',k-i'+j}\right)\Delta_{i'}.$$

En identifiant termes à termes, nous terminons la démonstration. □

2.2.5 Nombres de Fuß-Catalan

Nous pouvons définir récursivement les battages à l'aide de la relation de Pascal (2.23) via

$$\text{Ш}_{x,y} = \text{Ш}^{\uparrow 1}_{x-1,y} + \text{Ш}^{\uparrow 1}_{x,y-1}\beta_{x,1} \tag{2.68}$$

et $\text{Ш}_{x,y} = 0$ si $y < 0$ et $\text{Ш}_{0,y} = 1$ si $0 \leq y$. Un phénomène intéressant se produit si nous relachons les conditions aux bords. Définissons donc récursivement les éléments $\mathfrak{F}^{(\alpha)}_{x,y}$ tels que, pour $\alpha \in \mathbf{Z}$,

$$\mathfrak{F}^{(\alpha)}_{x,y} = \mathfrak{F}^{(\alpha)\uparrow 1}_{x-1,y} + \mathfrak{F}^{(\alpha)\uparrow 1}_{x,y-1}\beta_{x,1} \tag{2.69}$$

et $\mathfrak{F}^{(\alpha)}_{\ell,(\alpha-1)\ell} = 0$, $0 < \ell$ et $\mathfrak{F}^{(\alpha)}_{0,k} = 1$, $0 \leq k$.

Clairement, $\mathfrak{F}^{(0)}_{k,n-k} = \text{Ш}_{k,n-k}$. De plus, pour $\alpha = 1$, les conditions aux bords $\mathfrak{F}^{(1)}_{\ell,0} = 0$ permettent d'identifier $\mathfrak{F}^{(1)}_{k,n-k} = \text{Ш}_{k,n-k-1}$. Nous avons aussi le

Lemme 19. *Pour $k \geq 0$,*

$$\mathfrak{F}^{(\alpha)}_{1,\alpha+k} = \text{Ш}_{1,k} = \{k+1\}\,. \tag{2.70}$$

Démonstration. Par applications répétées de (2.69), et puisque $\mathfrak{F}^{(\alpha)}_{1,\alpha-1} = 0$, nous avons

$$\begin{aligned}
\mathfrak{F}^{(\alpha)}_{1,\alpha+k} &= 1 + \mathfrak{F}^{(\alpha)\uparrow 1}_{1,\alpha+k-1}\beta_{1,1}\\
&= 1 + \beta_{1,1} + \mathfrak{F}^{(\alpha)\uparrow 2}_{1,\alpha+k-2}\beta_{1,2}\\
&= 1 + \beta_{1,1} + \beta_{1,2} + \cdots + \mathfrak{F}^{(\alpha)\uparrow k}_{1,\alpha+k-k}\beta_{1,k}\\
&= 1 + \beta_{1,1} + \beta_{1,2} + \cdots + \beta_{1,k} + 0\\
&= \textstyle\sum_{j=0}^{k}\beta_{1,j} = \{k+1\}\,.
\end{aligned}$$

□

Nous donnons maintenant l'explication de la dénomination de ces éléments : nous avons la propriété suivante :

Proposition 20. *Dans la représentation triviale* $\sigma_i \mapsto 1$,

$$\mathfrak{F}^{(\alpha)}_{x,y} \mapsto \frac{y-(\alpha-1)x}{x+y}\binom{x+y}{x}. \tag{2.71}$$

Démonstration. Sous ce morphisme, le membre de droite de (2.69) est envoyé vers

$$\begin{aligned}
&\frac{y-(\alpha-1)(x-1)}{x+y-1}\binom{x+y-1}{x-1} + \frac{y-1-(\alpha-1)x}{x+y-1}\binom{x+y-1}{x} = \\
&= \frac{y-1-(\alpha-1)x}{x+y-1}\left(\binom{x+y-1}{x-1} + \binom{x+y-1}{x}\right) + \frac{\alpha}{x+y-1}\binom{x+y-1}{x-1} \\
&= \frac{y-1-(\alpha-1)x}{x+y-1}\binom{x+y}{x} + \frac{\alpha}{x+y-1}\frac{x}{x+y}\binom{x+y}{x} \\
&= \left(\frac{y-1-(\alpha-1)x}{x+y-1} + \frac{\alpha}{x+y-1}\frac{x}{x+y}\right)\binom{x+y}{x} \\
&= \left(\frac{x+y-1}{x+y-1}\right)\frac{y-(\alpha-1)x}{x+y}\binom{x+y}{x} = \frac{y-(\alpha-1)x}{x+y}\binom{x+y}{x},
\end{aligned}$$

et les conditions limites,

$$\mathfrak{F}^{(\alpha)}_{\ell,(\alpha-1)\ell} = 0 \mapsto \frac{(\alpha-1)\ell-(\alpha-1)\ell}{\alpha\ell}\binom{\alpha\ell}{\ell} = 0,$$

et

$$\mathfrak{F}^{(\alpha)}_{0,k} = 1 \mapsto \frac{k}{k}\binom{k}{0} = 1,$$

$0 < \ell$, $0 \leq k$ finissent la preuve. □

Corollaire 21. *Dans la représentation triviale* $\sigma_i \mapsto 1$,

$$\mathfrak{F}^{(\alpha)}_{n-1,(\alpha-1)n+1} \mapsto \frac{1}{(\alpha-1)n+1}\binom{\alpha n}{n} \doteq C^{(\alpha)}_n,$$

les nombres de Fuß-Catalan d'ordre α.

Démonstration. D'après la proposition précédente,

$$\begin{aligned}
\mathfrak{F}^{(\alpha)}_{n-1,(\alpha-1)n+1} &\mapsto \frac{(\alpha-1)n+1-(\alpha-1)(n-1)}{\alpha n}\binom{\alpha n}{n-1} \\
&\mapsto \frac{\alpha}{\alpha n}\frac{n}{(\alpha-1)n+1}\frac{(\alpha n)!}{n!((\alpha-1)n)!} \\
&\mapsto \frac{1}{(\alpha-1)n+1}\binom{\alpha n}{n}.
\end{aligned}$$

□

Plus particulièrement, dans la représentation triviale, $\mathfrak{F}^{(2)}_{n-1,n+1} \mapsto \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = C_n$, le n-ième nombre de Catalan. Ces nombres possèdent de très nombreuses interprétations combinatoires (voir [88] par exemple [1]), et nous allons voir comment les monômes constitutifs de $\mathfrak{F}^{(2)}_{n-1,n+1}$ sont en bijection avec quelques objets dénombrés par de tels nombres.

n	C_n	$\mathfrak{F}^{(2)}_{n-1,n+1}$
1	1	1
2	2	$1 + \sigma_1$
3	5	$1 + \sigma_2 + \sigma_1\sigma_2 + \sigma_3\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3\sigma_2$
4	14	$1 + \sigma_3 + \sigma_3\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_2\sigma_3 + \sigma_4\sigma_2\sigma_3 + \sigma_5\sigma_3\sigma_2 + \sigma_3\sigma_4\sigma_2\sigma_3 + \sigma_5\sigma_4\sigma_2\sigma_3 + \sigma_4\sigma_1\sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_5\sigma_4\sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_4\sigma_1\sigma_2\sigma_3 + \sigma_5\sigma_4\sigma_1\sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_5\sigma_4\sigma_1\sigma_2\sigma_3$

Table 2.2: Les premiers nombres de Catalan tressés

Nous pouvons donner une interprétation combinatoire à ces éléments. Nous rappelons qu'un mot de Dyck de type α et de longueur αn est une chaîne de αn lettres $X_1, \ldots, X_\alpha$ telle que tout préfixe contient autant ou plus de lettres X_i que de lettres X_j, $1 \leq i < j \leq \alpha$. Par exemple, pour $\alpha = 2$ et $n = 3$, $X_1X_1X_1X_2X_2X_2$ ou $X_1X_2X_1X_1X_2X_2$ sont des mots de Dyck, mais $X_1X_2X_2X_1X_1X_2$ n'en est pas un puisque le préfixe $X_1X_2X_2$ contient plus de X_2 que de X_1. Un chemin de Dyck de type α et de longueur αn est un chemin $(x_1(t), \ldots, x_\alpha(t))|_{t=0}^{t=n\alpha}$ de $\mathbf{N}^\alpha$, monotone pour chaque coordonnée, et tel que $(x_1(0), \ldots, x_\alpha(0)) = (0, \ldots, 0)$, $(x_1(n\alpha), \ldots, x_\alpha(n\alpha)) = (\alpha, \ldots, \alpha)$, et $x_i(t) \geq x_j(t)$ si $i < j$, $\forall t \in [0, n\alpha]$. Les mots de Dyck peuvent canoniquement être mis en bijection avec les chemins de Dyck en lisant les mots de gauche à droite et en associant à chaque lettre X_i un déplacement d'une unité dans la direction portant la coordonnée x_i. Le nombre de chemins de Dyck de type α et de longueur $n\alpha$ est le nombre de Fuß-Catalan $C_n^{(\alpha)}$. Par exemple, pour $\alpha = 2$ et $n = 3$, il existe cinq chemins (et donc cinq mots) de Dyck, cf. figure 2.4.

Dans le cas particulier $\alpha = 2$, nous pouvons remplacer les symboles X_1 et X_2 respectivement par "(" et ")" et les mots de Dyck correspondent alors aux expressions correctement parenthésées. Par exemple, les mots de la figure 2.4 correspondent respectivement aux expressions $((()))$, $(()())$, $()(())$, $(())()$ et $()()()$. Nous constatons que les permutations associées aux monômes de l'image de $\mathfrak{F}^{(2)}_{n-1,n+1}$ sous l'anti-automorphisme ι_{h} correspondent aux permutations des éléments de l'ensemble or-

1. Le recencement des interprétations combinatoires des nombres de Catalan est une passion de Richard Stanley. En juillet 2008, il en dénombre 166 sur sa page web http://www-math.mit.edu/~rstan/ec/.

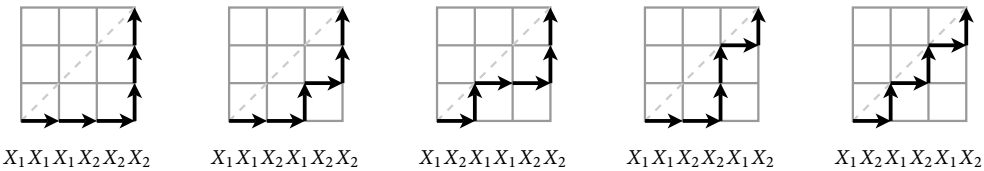


FIGURE 2.4: Les cinq chemins et mots de Dyck de longueur 6 pour $\alpha = 2$.

donné $\{X_1, \ldots, X_1, X_2, \ldots, X_2\}$, chaque plage contenant α lettres, qui génèrent les mots de Dyck. Nous pouvons donc associer à chaque monôme de $\mathfrak{F}^{(2)}_{n-1,n+1}$ un mot et un chemin de Dyck. Les chemins de la figure 2.4 correspondent respectivement aux monômes de $\mathfrak{F}^{(2)}_{2,4}$ du tableau 2.2 ou de la figure 2.5.

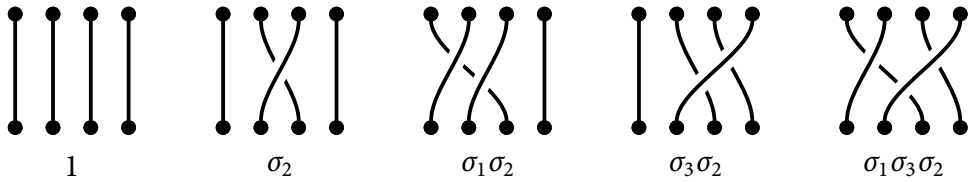


FIGURE 2.5: Les cinq diagrammes des tresses constituant le nombre de Catalan tressé $\mathfrak{F}^{(2)}_{1,3}$.

Nous savons que les nombres de Fuß-Catalan $C_n^{(\alpha)}$ comptent le nombre d'arbres α-aires complets à n nœuds, ou similairement le nombre de manières d'associer n applications d'un opérateur α-aire à $n+1$ facteurs. Nous allons utiliser une bijection entre les chemins de Dyck et les arbres pour associer un arbre à chaque monôme de $\mathfrak{F}^{(\alpha)}_{n-1,(\alpha-1)n+1}$. Nous nous restreignons pour simplifier au cas $\alpha = 2$ et donc aux arbres binaires, la généralisation à $\alpha \in \mathbf{N}$ étant directe.

Considérons un arbre binaire à n nœuds. On appelle *préordre transversal* ou *parcours préfixe* la procédure qui consiste à parcourir un arbre via l'algorithme 1, où Gauche(n) et Droite(n) renvoient les nœuds enfants respectivement à gauche et à droite d'un nœud n.

Algorithme 1 Préordre transversal

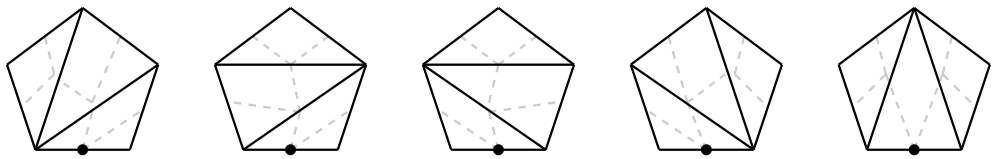
Entrées: un nœud n d'un arbre
  Transcription Dyck (n)
  si Gauche$(n) \neq \varnothing$ **alors**
    Préordre transversal (Gauche(n))
  finsi
  si Droite$(n) \neq \varnothing$ **alors**
    Préordre transversal (Droite(n))
  finsi

De manière plus imagée, il consiste à parcourir l'arbre (en dehors) en partant à gauche de la première branche gauche et en conservant toujours une branche à droite. Cette procédure appliquée à la racine d'un arbre binaire permet de visiter une fois et une seule chaque nœud. Pour α arbitraire, l'algorithme comprend α conditions sur les enfants. Pour contruire le mot de Dyck, on part du mot vide. Nous choisissons d'orienter les arbres de bas en haut, i.e. la racine est le nœud le plus bas. Si on se déplace vers le haut et vers la gauche, la fonction Transcription Dyck (n) concatène à droite la lettre X_1 avec le mot de Dyck, si on se déplace vers le bas et vers la droite, elle concatène la lettre X_2, et elle ne fait rien dans les autres cas. Dans le cas particulier de $\mathfrak{F}_{2,4}^{(2)}$, les arbres correspondants sont représentés sur la figure 2.6. Si nous notons par des parenthèses l'opérateur binaire correspondant, nous obtenons alors respectivement les parenthésages $(((ab)c)d)$, $((a(bc))d)$, $(a((bc)d))$, $(a(b(cd)))$ et $((ab)(cd))$. Historiquement, les nombres de Catalan ont été découverts par Euler (et

Figure 2.6: Les cinq arbres binaires à trois nœuds et les mots de Dyck correspondants.

son assistant Fuß) lors de l'étude de dissections de polygones réguliers en triangles par des diagonales. Ainsi il existe C_n manières de disséquer un polygone à $n+2$ côtés en triangles en tenant compte de l'orientation. La bijection entre de telles dissections et les arbres binaires est très simple : on choisit le centre d'un côté particulier du polygone disséqué qui sera la racine de l'arbre. Ce côté est aussi le côté d'un triangle et on

trace deux segments joignant ce point aux milieux des deux autres côtés, considérant que milieu du côté à gauche (resp. à droite) de la médiane issue du point particulier est un enfant à gauche (resp. à droite) de la racine, et on répète itérativement la procédure pour chaque enfant. Le segments tracés dessinent alors directement les arbres binaires recherchés. Pour $n = 3$, nous avons représenté les dissections d'un pentagone ainsi que les mots de Dyck correspondants sur la figure 2.7. Ainsi, nous avons



$X_1X_1X_1X_2X_2X_2$ $X_1X_1X_2X_1X_2X_2$ $X_1X_2X_1X_1X_2X_2$ $X_1X_1X_2X_2X_1X_2$ $X_1X_2X_1X_2X_1X_2$

FIGURE 2.7: Les cinq dissections de pentagone en triangles par des diagonales et les mots de Dyck correspondants.

vu que nous pouvions associer à certaines tresses des mots, des chemins de Dyck, des arbres et des dissections. Compte tenu du grand nombre d'interprétations combinatoires des nombres de Catalan, il est probable que l'approche tressée apporte un regard nouveau sur certains problèmes.

Remarque 22. Pour $\alpha = -1$, dans la représentation triviale, $\mathfrak{F}^{(-1)}_{k,n-2k} \mapsto \frac{n}{n-k}\binom{n-k}{k}$. Combinatoirement, cela correspond au nombre de manières de sélectionner k objets non consécutifs deux à deux parmis n objets rangés en cercle (pour n objets rangés en ligne, il existe $\binom{n-k+1}{k}$ telles sélections). Cette observation a été utilisée par Kaplansky pour démontrer une conjecture de Touchard sur le problème des ménages, voir [58, 59, 94].

Remarque 23. Nous pouvons appliquer récursivement la relation (2.69) sur elle même pour trouver deux généralisations des formules de sommation supérieures (2.29) et parallèles (2.30). Nous trouvons alors

$$\mathfrak{F}^{(\alpha)}_{k,(\alpha-1)k+n} = \sum_{j=1}^{n} \mathfrak{F}^{(\alpha)\uparrow n-j+1}_{k-1,(\alpha-1)k+j}\beta_{k,n-j} \tag{2.72}$$

et

$$\mathfrak{F}^{(\alpha)}_{k,(\alpha-1)n} = \sum_{j=0}^{k} \mathfrak{F}^{(\alpha)\uparrow k-j+1}_{j,(\alpha-1)n-1}\beta^{\uparrow k-j}_{j,1}. \tag{2.73}$$

On définit le nombre de ballots $B(m,j) = \frac{m-j}{m+j}\binom{m+j}{j}$. Ces nombres apparaissent dans le problème éponyme qui consiste à évaluer la probabilité que, dans une élection

entre deux candidats A et B, A ait constament plus de voix que B lors du dépouillement, voir [11, 5]. En substituant $k = m - 1$, $n = m + 1$ et $\alpha = 2$ dans (2.73), nous obtenons

$$\mathfrak{F}^{(2)}_{m-1,m+1} = \sum_{j=0}^{m-1} \mathfrak{F}^{(2)\uparrow m-j}_{j,m} \beta^{\uparrow m-1-j}_{j,1} \tag{2.74}$$

qui est envoyée par la représentation triviale sur

$$C_n = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{m-j}{m+j} \binom{m+j}{j} = \sum_{j=0}^{m-1} B(m,j). \tag{2.75}$$

Cette relation est exposée dans [8] par exemple. Nous pouvons alors considérer $\mathfrak{F}^{(2)}_{j,m}$ comme un analogue tressé du nombre de ballot $B(m,j)$.

Nous terminons ce chapitre par un tableau récapitulatif de quelques analogues tressés utiles pour la suite.

Nom	Classique	q-analogue	Analogue tressé
Tressage	1	q^{mn}	$\beta_{m,n}$
Élement de Garside	1	$q^{\frac{n(n-1)}{2}}$	Δ_n
Nombre	n	$[n]_q$	$\{n\}$
Factorielle	$n!$	$[n]_q!$	$\{n\}!$
Battage	$\binom{n}{k}$	$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$	$Ш_{k,n-k}$
Symbole de Pochhammer	$(1-s)^n$	$(s;q)_n$	$\Pi(s)_n$
Symétrie	$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$	$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n \\ n-k \end{bmatrix}_q$	$Ш_{k,n-k} = \Delta_n^{-1} Ш_{n-k,k} \Delta_n$
Factorisation trinomiale	$\binom{n}{k}\binom{n-k}{\ell} = \binom{n}{\ell}\binom{n-\ell}{k}$	$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} n-k \\ \ell \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n \\ \ell \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} n-\ell \\ k \end{bmatrix}_q$	$Ш_{k,n-k} Ш^{\uparrow k}_{n-k-\ell,\ell} = Ш_{n-\ell,\ell} Ш_{k,n-k-\ell}$
Première relation de Pascal	$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$	$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q + q^k \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q$	$Ш_{k,n-k} = Ш^{\uparrow 1}_{k-1,n-k} + Ш^{\uparrow 1}_{k,n-1-k} \beta_{k,1}$
		$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = q^{n-k} \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q + \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q$	$Ш_{k,n-k} = Ш_{k-1,n-k} \beta^{\uparrow k-1}_{1,n-k} + Ш_{k,n-1-k}$
Sommation supérieure	$\binom{n+1}{k+1} = \sum_{j=k}^{n} \binom{j}{k}$	$\begin{bmatrix} n+1 \\ k+1 \end{bmatrix}_q = \sum_{j=k}^{n} q^{(k+1)(n-j)} \begin{bmatrix} j \\ k \end{bmatrix}_q$	$Ш_{k+1,n-k} = \sum_{j=k}^{n} Ш^{\uparrow n-j+1}_{k,j-k} \beta_{k+1,n-j}$
		$\begin{bmatrix} n+1 \\ k+1 \end{bmatrix}_q = \sum_{j=k}^{n} q^{j-k} \begin{bmatrix} j \\ k \end{bmatrix}_q$	$Ш_{k+1,n-k} = \sum_{j=k}^{n} Ш_{k,j-k} \beta^{\uparrow k+1}_{1,j-k}$
Sommation parallèle	$\binom{n+k+1}{k} = \sum_{j=0}^{k} \binom{n+j}{j}$	$\begin{bmatrix} n+k+1 \\ k \end{bmatrix}_q = \sum_{j=0}^{k} q^{(n+1)(k-j)} \begin{bmatrix} n+j \\ j \end{bmatrix}_q$	$Ш_{k,n+1} = \sum_{j=0}^{k} Ш_{j,n} \beta^{\uparrow j+1}_{k-j,n+1}$
		$\begin{bmatrix} n+k+1 \\ k \end{bmatrix}_q = \sum_{j=0}^{k} q^{j} \begin{bmatrix} n+j \\ j \end{bmatrix}_q$	$Ш_{k,n+1} = \sum_{j=0}^{k} Ш^{\uparrow k-j+1}_{j,n} \beta^{\uparrow k-j}_{j,1}$
Développement binomial	$(1-s)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k s^k \binom{n}{k}$	$(s;q)_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k s^k q^{\frac{k(k-1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$	$\Pi(s)_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i s^i Ш_{i,n-i} \Delta_i$
Convolution de Vandermonde	$\binom{m+n}{k} = \sum_{j=0}^{k} \binom{m}{j}\binom{n}{k-j}$	$\begin{bmatrix} m+n \\ k \end{bmatrix}_q = \sum_{j=0}^{k} q^{(m-j)(k-j)} \begin{bmatrix} m \\ j \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} n \\ k-j \end{bmatrix}_q$	$Ш_{k,m+n-k} = \sum_{j=0}^{k} Ш_{j,m-j} Ш^{\uparrow a+b}_{k-j,n-k+j} \beta^{\uparrow j}_{k-j,m-j}$

Table 2.3: Formulaire pour les analogues. On passe des analogues tressés aux q-analogues en considérant la représentation triviale $\sigma_i \mapsto q$ et des q-analogues aux objets classiques en prenant la limite $q \to 1$.

Deuxième partie

Tressages d'espaces de tenseurs

CHAPITRE 3

Tressages d'espaces de tenseurs

> However beautiful the strategy,
> you should occasionally look at the
> results.
>
> Winston Churchill

Nous sommes maintenant parés pour aborder le résultat principal de cette thèse. Dans ce chapitre, nous formalisons la notion de tressage aperçue dans le premier chapitre. Nous définissons ensuite le problème et lui donnons une solution dont nous étudions quelques propriétés. Comme nous le verrons, cette solution est construite à partir d'analogues tressés définis au chapitre précédent.

3.1 Tressages

Projeté sur le groupe symétrique, chaque membre de la relation (1.1) correspond à la permutation $(i, i+2)$ des éléments d'un ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$. Localement, elle envoie le sous-ensemble $\{i, i+1, i+2\}$ vers $\{i+2, i+1, i\}$, et (1.1) correspond à l'égalité de deux réalisations de cette transformation en termes de transpositions d'éléments voisins. Ainsi, on peut commencer par transposer les deux premiers, puis les deux derniers, et à nouveau les deux premiers, ou bien commencer par les deux derniers,

puis les deux premiers et enfin les deux derniers. L'équation (1.1) est le relevé à $\mathbf{B}_n$ de cette propriété qui est celle caractérisant un tressage.

Les tressages se formalisent aisément dans le langage des catégories [55, 56]. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie tensorielle (ou monoïdale) stricte, c'est-à-dire une catégorie $\mathcal{C}$ munie d'un foncteur $\otimes\colon \mathcal{C}\times\mathcal{C} \to \mathcal{C}$ appelé produit tensoriel, et sans contrainte d'associativité. Le fait d'être strict n'est pas restrictif puisque toute catégorie tensorielle est équivalente à une catégorie tensorielle stricte (voir par exemple [60]). Nous trivialisons simplement les contraintes d'associativité pour raccourcir les notations, mais ce qui suit peut être prolongé aux catégories tensorielles avec contrainte d'associativité.

Notons $\tau\colon \mathcal{C}\times\mathcal{C} \to \mathcal{C}\times\mathcal{C}$ le foncteur de renversement (*flip*) défini par $\tau(U,V) = (V,U)$ pour tout couple d'objets U et V de $\mathcal{C}$. Dès lors, une contrainte de commutativité ϑ est un isomorphisme naturel $\vartheta\colon \otimes \to \otimes\tau$, et donc un isomorphisme fonctoriel $\vartheta_{U,V}\colon U\otimes V \to V\otimes U$.

Une catégorie tressée est alors une catégorie tensorielle munie d'une telle contrainte de commutativité, appelée tressage, qui permet la commutativité des deux hexagones du théorème de cohérence de Mac Lane [64, 65]. Dans notre cas sans contrainte d'associativité, ils se résument à des triangles :

$$\vartheta_{U,V\otimes W} = (\mathbf{1}_V\otimes\vartheta_{U,W})(\vartheta_{U,V}\otimes\mathbf{1}_W) \quad \text{et} \quad \vartheta_{U\otimes V,W} = (\vartheta_{U,W}\otimes\mathbf{1}_V)(\mathbf{1}_U\otimes\vartheta_{V,W}), \tag{3.1}$$

pour tous objects U, V et W de $\mathcal{C}$. Cependant, le tressage hérite de la fonctorialité du *flip*, c'est-à-dire que

$$(g\otimes f)\vartheta_{U,V} = \vartheta_{U',V'}(f\otimes g), \tag{3.2}$$

pour tous morphismes $f\colon U \to U'$ et $g\colon V \to V'$.

Plus particulièrement, si on spécifie $f = \vartheta_{U,V}\colon U\otimes V \to V\otimes U$ et $g = \mathbf{1}_W\colon W \to W$ dans (3.2), on retrouve directement, à l'aide de la seconde égalité de (3.1), une variante étendue de l'équation de Yang-Baxter :

$$(\vartheta_{V,W}\otimes\mathbf{1}_U)(\mathbf{1}_V\otimes\vartheta_{U,W})(\vartheta_{U,V}\otimes\mathbf{1}_W) = (\mathbf{1}_W\otimes\vartheta_{U,V})(\vartheta_{U,W}\otimes\mathbf{1}_V)(\mathbf{1}_U\otimes\vartheta_{V,W}). \tag{3.3}$$

On obtiendrait bien sûr un résultat similaire avec une prescription opposée pour f et g, et la première égalité de (3.1). Nous remarquons qu'il existe deux manières de réordonner un triplet $U\otimes V\otimes W$ en $W\otimes V\otimes U$ à l'aide de tressages et l'égalité (3.3) reflète précisément cette équivalence. Elle correspond en effet à la commutativité du diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & U \otimes V \otimes W \arrow[dl, "(\vartheta_{U,V} \otimes \mathbf{1}_W)"'] \arrow[dr, "(\mathbf{1}_U \otimes \vartheta_{V,W})"] & \\
V \otimes U \otimes W \arrow[d, "(\mathbf{1}_V \otimes \vartheta_{U,W})"] & & U \otimes W \otimes V \arrow[d, "(\vartheta_{U,W} \otimes \mathbf{1}_V)"'] \\
V \otimes W \otimes U \arrow[dr, "(\vartheta_{V,W} \otimes \mathbf{1}_U)"'] & & W \otimes U \otimes V \arrow[dl, "(\mathbf{1}_W \otimes \vartheta_{U,V})"] \\
 & W \otimes V \otimes U &
\end{tikzcd}$$

De plus, ceci implique que l'isomorphisme naturel $\vartheta_{V,V}$ est une solution de l'équation de Yang-Baxter pour tout objet V d'une catégorie tressée. Si V est un espace vectoriel de dimension finie, on appelle la paire $(V, \vartheta_{V,V})$ espace vectoriel tressé et dans ce cas on note traditionnelement $\hat{R} \doteq \vartheta_{V,V}$ (voir la sous-section 1.1.7). Le propos de ce chapitre est de construire un tressage de l'espace des tenseurs $T(V) = \bigoplus_k V^{\otimes k}$, satisfaisant (3.3) à partir d'une solution $\hat{R}$ de l'équation de Yang-Baxter.

3.1.1 Tressage pour un espace de tenseurs

Soit $\mathbf{k}$ un corps commutatif de caractéristique nulle, et V un $\mathbf{k}$-espace vectoriel tressé de dimension N et de tressage $\hat{R}$. Ce tressage induit une représentation du groupe des tresses $\mathbf{B}_n \to \mathrm{Aut}(V^{\otimes n})$ via $\sigma_i \mapsto \hat{R}_{i,i+1} \doteq \mathbf{1}_V^{\otimes(i-1)} \otimes \hat{R} \otimes \mathbf{1}_V^{\otimes(n-i-1)}$, où $\hat{R}$ agit sur les i-ème et $i+1$-ème copies de V. Cette représentation est tacite dans toute la suite de cette thèse.

Considérons maintenant l'espace de tenseurs $T(V) = \bigoplus_k V^{\otimes k}$. Nous désirons en faire un espace tressé à l'aide du tressage $\hat{R}$, c'est-à-dire trouver une R-matrice $\mathbf{R}\colon T(V) \otimes T(V) \to T(V) \otimes T(V)$. Nous prolongeons la notation des indices des R-matrices $\hat{R}$ à $\mathbf{R}$, et nous cherchons donc un automorphisme de $T(V) \otimes T(V)$ tel que, dans $T(V) \otimes T(V) \otimes T(V)$,

$$\mathbf{R}_{12}\mathbf{R}_{23}\mathbf{R}_{12} = \mathbf{R}_{23}\mathbf{R}_{12}\mathbf{R}_{23}, \tag{3.4}$$

où $\mathbf{R}_{ij}$ agit sur les i-ème et j-ème copies de $T(V)$. Nous avons vu à la section 1.4 que la famille $\{\beta_{y,x}\}, x, y \geq 0$ forme un tressage dans la catégorie des tresses. Nous pouvons identifier les objets de cette catégorie avec les différentes puissances tensorielles de V dans $T(V)$, et ainsi la matrice $\mathbf{R}$ telle que $\mathbf{R}\big|_{V^{\otimes k} \otimes V^{\otimes n-k}} = \beta_{n-k,k}$, $0 \leq k \leq n$ est un

tressage de $T(V)$. On qualifie ce tressage de *diagonal* puisque dans ce cas

$$\mathbf{R}\big|_{V^{\otimes k}\otimes V^{\otimes n-k}} : V^{\otimes k}\otimes V^{\otimes n-k} \to V^{\otimes n-k}\otimes V^{\otimes k}. \tag{3.5}$$

Nous avons l'isomorphisme canonique $V^{\otimes l}\otimes V^{\otimes k}\to V^{\otimes(l+k)}$. Le résultat principal de cette thèse est la construction d'un tressage $\mathbf{R}$ de $T(V)$ tel que, non trivialement,

$$\mathbf{R}\big|_{V^{\otimes k}\otimes V^{\otimes n-k}} : V^{\otimes k}\otimes V^{\otimes n-k} \to \bigoplus_{i+j=n} V^{\otimes i}\otimes V^{\otimes j}. \tag{3.6}$$

Étant donnée une base pour V, la restriction de $\mathbf{R}$ à $\bigoplus_{k=0}^{n} V^{\otimes k}\otimes V^{\otimes n-k}$ est donc une matrice carrée $(n+1)N^n\times(n+1)N^n$. Par ailleurs, nous avons $T(V)\otimes T(V)\simeq \bigoplus_n\left(\bigoplus_{k=0}^{n} V^{\otimes k}\otimes V^{\otimes n-k}\right)$ et à n fixé, nous adoptons pour $\bigoplus_{k=0}^{n} V^{\otimes k}\otimes V^{\otimes n-k}$ la base lexicale inverse sur l'ordre des tenseurs

$$\left\{V^{\otimes n}\otimes V^{\otimes 0}, V^{\otimes n-1}\otimes V^{\otimes 1},\dots,V^{\otimes 0}\otimes V^{\otimes n}\right\}.$$

En raison de l'ordre arbitraire des tenseurs que nous allons manipuler, l'utilisation d'indices tensoriels est rapidement rédhibitoire. Nous adoptons donc la notation suivante : l'élément $x^{i_1 i_2\dots i_a}\otimes y^{j_1 j_2\dots j_b}\in V^{\otimes a}\otimes V^{\otimes b}$ sera noté $x_{a\rangle}y^{\uparrow a}_{b\rangle}$. Pour être plus précis, si nous dénotons par $1,2,\dots,k$ les copies de V dans $V^{\otimes k}$, nous noterons $x^{\uparrow a}_{b\rangle}$ un tenseur d'ordre b appartenant aux copies numérotées de $1+a$ à $a+b$. Par convention, $x_{0\rangle}\in V^{\otimes 0}\simeq\mathbf{k}$. Dans la restriction de $\mathbf{R}$ à $V^{\otimes a}\otimes V^{\otimes b}$, nous noterons $\left\{\begin{smallmatrix} a & b\\ & c\end{smallmatrix}\right\}$ la sous-matrice de taille $N^{(a+b)}\times N^{(a+b)}$ agissant sur un élément de $V^{\otimes c}\otimes V^{\otimes a+b-c}$. Avec ces notations, nous pouvons écrire l'action correspondant à (3.6)

$$\mathbf{R}\big|_{V^{\otimes b}\otimes V^{\otimes c}} : x^{i_1\dots i_b}\otimes y^{j_1\dots j_c}\mapsto \sum_{k=0}^{b+c}\left\{\begin{smallmatrix} b & c\\ & k\end{smallmatrix}\right\}^{i_1\dots i_b j_1\dots j_c}_{h_1\dots h_k l_1\dots l_{b+c-k}} y^{h_1\dots h_k}\otimes x^{l_1\dots l_{b+c-k}}$$

comme

$$\mathbf{R}\big|_{V^{\otimes b}\otimes V^{\otimes c}} : x_{b\rangle}y^{\uparrow b}_{c\rangle}\mapsto \sum_{k=0}^{b+c}\left\{\begin{smallmatrix} b & c\\ & k\end{smallmatrix}\right\} y_{k\rangle}x^{\uparrow k}_{b+c-k\rangle}. \tag{3.7}$$

Cependant, il se trouve, *a posteriori*, qu'un tel tressage pour lequel à ordre constant tous les éléments de matrice $\left\{\begin{smallmatrix} n-j & j\\ & k\end{smallmatrix}\right\}$, $0\le j,k\le n$ sont non nuls n'existe pas. Nous nous restreignons alors à un la quête d'un tressage tel que $\left\{\begin{smallmatrix} n-j & j\\ & k\end{smallmatrix}\right\}=0$ si $k>j$. Dans un tel cas, (3.7) se réduit à

$$\mathbf{R}\big|_{V^{\otimes b}\otimes V^{\otimes c}} : x_{b\rangle}y^{\uparrow b}_{c\rangle}\mapsto \sum_{k=0}^{c}\left\{\begin{smallmatrix} b & c\\ & c-k\end{smallmatrix}\right\} y_{c-k\rangle}x^{\uparrow c-k}_{b+k\rangle}. \tag{3.8}$$

Par exemple,

$$\mathbf{R}\big|_{V^{\otimes 3}\otimes V^{\otimes 2}} : x_{3\rangle}y^{\uparrow 3}_{2\rangle}\mapsto \left\{\begin{smallmatrix} 3 & 2\\ & 2\end{smallmatrix}\right\} y_{2\rangle}x^{\uparrow 2}_{3\rangle}+\left\{\begin{smallmatrix} 3 & 2\\ & 1\end{smallmatrix}\right\} y_{1\rangle}x^{\uparrow 1}_{4\rangle}+\left\{\begin{smallmatrix} 3 & 2\\ & 0\end{smallmatrix}\right\} y_{0\rangle}x^{\uparrow 0}_{5\rangle}.$$

3.1.2 Relation de tresse pour un espace de tenseurs

Pour être un tressage, **R** doit satisfaire l'équation de Yang-Baxter, ou de manière équivalente $\mathbf{R}\big|_{V^{\otimes b}\otimes V^{\otimes c}}$ doit satisfaire l'équation (3.3). Avec les notations que nous venons de définir, nous sommes capables de réécrire cette relation sous forme matricielle pour un espace de tenseurs.

Considérons trois tenseurs $x_{b\rangle}$, $y^{\uparrow b}_{c\rangle}$, et $z^{\uparrow b+c}_{d\rangle}$. L'équation (3.3) implique que les deux manières de réordonner le triplet $x_{b\rangle}y^{\uparrow b}_{c\rangle}z^{\uparrow b+c}_{d\rangle}$, à l'aide des relations de commutation (3.8), doivent coïncider. Si nous appliquons la procédure qui commence par permuter les deux derniers tenseurs (le membre de gauche de (3.3)), nous obtenons

$$x_{b\rangle}y^{\uparrow b}_{c\rangle}z^{\uparrow b+c}_{d\rangle} = \sum_{k_1=0}^{d}\sum_{k_2=0}^{d-k_1}\sum_{k_3=0}^{c+k_1}\left\{\begin{smallmatrix} c & d \\ d-k_1 & \end{smallmatrix}\right\}^{\uparrow b}\left\{\begin{smallmatrix} b & d-k_1 \\ d-k_1-k_2 & \end{smallmatrix}\right\}\left\{\begin{smallmatrix} b+k_2 & c+k_1 \\ c+k_1-k_3 & \end{smallmatrix}\right\}^{\uparrow d-k_1-k_2}\times$$
$$\times\, z_{d-k_1-k_2\rangle}y^{\uparrow d-k_1-k_2}_{c+k_1-k_3\rangle}x^{\uparrow c+d-k_2-k_3}_{b+k_2+k_3\rangle}.$$

En appliquant la procédure qui commence par permuter les deux premiers tenseurs (le membre de droite de (3.3)), nous obtenons alors

$$x_{b\rangle}y^{\uparrow b}_{c\rangle}z^{\uparrow b+c}_{d\rangle} = \sum_{k'_1=0}^{c}\sum_{k'_2=0}^{d}\sum_{k'_3=0}^{d-k'_2}\left\{\begin{smallmatrix} b & c \\ c-k'_1 & \end{smallmatrix}\right\}\left\{\begin{smallmatrix} b+k'_1 & d \\ d-k'_2 & \end{smallmatrix}\right\}^{\uparrow c-k'_1}\left\{\begin{smallmatrix} c-k'_1 & d-k'_2 \\ d-k'_2-k'_3 & \end{smallmatrix}\right\}\times$$
$$\times\, z_{d-k'_2-k'_3\rangle}y^{\uparrow d-k'_2-k'_3}_{c-k'_1+k'_3\rangle}x^{\uparrow c+d-k'_1-k'_2}_{b+k'_1+k'_2\rangle}.$$

Bien entendu, ces deux expressions doivent être égales. Nous réalisons alors le changement de variables de sommation $i = k_1+k_2 = k'_2+k'_3$ et $l = k_1-k_3 = k'_3-k'_1$. Cela permet d'égaler les termes apparaissant devant un même triplet $z_{d-i\rangle}y^{\uparrow d-i}_{c+l\rangle}x^{\uparrow c+d-i+l}_{b+i-l\rangle}$. Les sommes sur i et l étant alors les mêmes des deux côtés, Nous réalisons l'égalité terme à terme pour i et l. Nous obtenons alors comme forme matricielle de l'équation (3.3) pour l'espace des tenseurs le système

$$\sum_{k=\max(0,l)}^{i}\left\{\begin{smallmatrix} c & d \\ d-k & \end{smallmatrix}\right\}^{\uparrow b}\left\{\begin{smallmatrix} b & d-k \\ d-i & \end{smallmatrix}\right\}\left\{\begin{smallmatrix} b+i-k & c+k \\ c+l & \end{smallmatrix}\right\}^{\uparrow d-i} =$$
$$= \sum_{k=\max(0,l)}^{\min(i,c+l)}\left\{\begin{smallmatrix} b & c \\ c+l-k & \end{smallmatrix}\right\}\left\{\begin{smallmatrix} b-l+k & d \\ d-i+k & \end{smallmatrix}\right\}^{\uparrow c+l-k}\left\{\begin{smallmatrix} c+l-k & d-i+k \\ d-i & \end{smallmatrix}\right\}, \quad (3.9)$$

avec $0 \leq i \leq d$ et $-c \leq l \leq i$.

3.2 Génèse d'une solution

Dans cette section, nous commençons par approcher le système (3.9) pour de petites valeurs, et nous constatons quelques propriétés.

3.2.1 Remarques préliminaires

Avant d'aller plus loin, nous fixons des conventions. Le système (3.9) provient du réordonnement de trois quantités tensorielles d'ordres respectifs b, c, et d, et dès-lors implique au plus des tenseurs appartenant à $V^{\otimes(b+c+d)}$. Soit n un nombre. Nous choisissons alors de considérer le sous-système généré par (3.9) pour toutes les configurations pour lesquelles $b+c+d = n$ et nous appellerons n l'ordre du sous-système.

Considérons maintenant le nombre d'équations générées pour un ordre donné. Pour c et d fixés, nous obtenons, à partir des valeurs possibles de i et l, $(1+d)(1+c+\frac{1}{2}d)$ équations. Pour $b+c+d = n$ fixé, nous générons alors $\frac{(n+2)^4-(n+2)^2}{12}$ nouvelles équations, mais introduisons seulement $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ nouvelles variables par rapport à l'ordre $n-1$. Le système est donc hautement surdéterminé.

Avec les notations que nous avons définies, le tressage diagonal de $T(V)$ agit sur des vecteurs comme

$$x_{1\rangle} y_{1\rangle}^{\uparrow 1} \mapsto \beta_{1,1} y_{1\rangle} x_{1\rangle}^{\uparrow 1},$$

mais dans notre cas,

$$\mathbf{R}\big|_{V\otimes V} : x_{1\rangle} y_{1\rangle}^{\uparrow 1} \mapsto \left\{ {1 \atop 1} {1 \atop } \right\} y_{1\rangle} x_{1\rangle}^{\uparrow 1} + \left\{ {1 \atop 0} {1 \atop } \right\} y_{0\rangle} x_{2\rangle},$$

et nous imposons alors par cohérence avec le tressage diagonal

$$\left\{ {1 \atop 1} {1 \atop } \right\} \propto \beta_{1,1}.$$

Nous verrons dans la section suivante que cette prescription est tout-à-fait générale. En raison de la forme des relations de commutation (3.8), nous sommes amenés à considérer un tressage de $T(V)$ comme une représentation de l'algèbre de groupe $\mathbf{kB}_\infty$. Le fait que cette algèbre soit une algèbre à division nous a alors permis de simplifier certaines équations de (3.9) et ainsi conjecturer une solution.

3.2.2 Étude du système aux petits ordres

Dans cette sous section, nous approchons le système aux petits ordres. Nous avons porté en annexe l'integralité des équations du système jusqu'à l'ordre 4.

3.2.2.1 Ordre 0

Le sous-système n'est constitué que d'une équation triviale $\left\{ {0 \atop 0} {0 \atop } \right\}\left\{ {0 \atop 0} {0 \atop } \right\}\left\{ {0 \atop 0} {0 \atop } \right\} = \left\{ {0 \atop 0} {0 \atop } \right\}\left\{ {0 \atop 0} {0 \atop } \right\}\left\{ {0 \atop 0} {0 \atop } \right\}$. Nous sommes donc libres de fixer la valeur

$$\left\{ {0 \atop 0} {0 \atop } \right\} = \dot{q}$$

3.2.2.2 Ordre 1

Il y a, à cet ordre, six équations et trois nouvelles inconnues. Une d'elles dépend de la valeur des deux autres qui restent sans contraintes. Les deux inconnues libres sont $\left\{ {0 \atop 1} {1 \atop 0} \right\}$ et $\left\{ {1 \atop 0} {0 \atop 0} \right\}$ et nous choisissons, pour simplifier *a posteriori*,

$$\left\{ {0 \atop 1} {1 \atop 0} \right\} = \dot{q}^2 p_\uparrow \quad \text{and} \quad \left\{ {1 \atop 0} {0 \atop 0} \right\} = \dot{q}^2 p_\downarrow .$$

L'inconnue restante ne l'est alors plus car le système impose que

$$\left\{ {0 \atop 0} {1 \atop 0} \right\} = \dot{q}\left(1 - \dot{q}^{-2}\left\{ {1 \atop 0} {0 \atop 0} \right\}\left\{ {0 \atop 1} {1 \atop 0} \right\}\right). \tag{3.10}$$

Nous cherchons ici une solution où tous les éléments $\left\{ {x \atop z} {y \atop} \right\}$ apparaissant dans le tressage (3.8) sont non nuls et nous ajoutons donc « à la main » la condition $\dot{q}^2 \neq p_\uparrow p_\downarrow$. Pour résumer nous avons jusque ici

$$\left\{ {0 \atop 0} {0 \atop 0} \right\} = \dot{q}, \quad \left\{ {0 \atop 0} {1 \atop 0} \right\} = \dot{q}(1 - \dot{q}^2 p_\uparrow p_\downarrow), \quad \left\{ {0 \atop 1} {1 \atop 0} \right\} = \dot{q}^2 p_\uparrow, \quad \left\{ {1 \atop 0} {0 \atop 0} \right\} = \dot{q}^2 p_\downarrow .$$

Nous pouvons d'ores et déjà donner l'expression de $\left\{ {0 \atop n} {n \atop} \right\}$ à tout ordre. En substituant $b = c = 0$, $d = n > 0$ et $i = l = 1$ dans (3.9), nous obtenons la relation

$$\dot{q} p_\uparrow \left\{ {0 \atop n-1} {n \atop} \right\}\left\{ {0 \atop n-1} {n-1 \atop} \right\} = \left\{ {0 \atop n} {n \atop} \right\}\left\{ {0 \atop n-1} {n \atop} \right\}. \tag{3.11}$$

Nous avons $\left\{ {0 \atop 1} {1 \atop} \right\} = \dot{q}^2 p_\uparrow$ et par induction $\left\{ {0 \atop n-1} {n-1 \atop} \right\}$ commute avec $\left\{ {0 \atop n-1} {n \atop} \right\}$. L'équation (3.11) peut alors être simplifiée des deux côtés par le terme présupposé non nul $\left\{ {0 \atop n-1} {n \atop} \right\}$ pour obtenir $\left\{ {0 \atop n} {n \atop} \right\} = \dot{q} p_\uparrow \left\{ {0 \atop n-1} {n-1 \atop} \right\}$ et donc

$$\left\{ {0 \atop n} {n \atop} \right\} = q^{n+1} p_\uparrow^n . \tag{3.12}$$

De la même manière, substituer $b = d = i = 0$, $c = n > 0$ et $l = -1$ permet d'exprimer

$$\left\{ {n \atop 0} {0 \atop} \right\} = q^{n+1} p_\downarrow^n . \tag{3.13}$$

3.2.2.3 Ordre 2

À partir de maintenant, nous ne considérons qu'un sous-ensemble d'équations nécessaires à la définition des nouvelles variables. Nous faisons l'hypothèse (qui sera confirmée par la suite) que les équations omises n'apportent pas d'information supplémentaire sur les inconnues.

Nous avons, à cet ordre, la relation importante

$$\left\{ {1 \atop 1} {1 \atop} \right\}\left\{ {1 \atop 1} {1 \atop} \right\}^{\uparrow 1}\left\{ {1 \atop 1} {1 \atop} \right\} = \left\{ {1 \atop 1} {1 \atop} \right\}^{\uparrow 1}\left\{ {1 \atop 1} {1 \atop} \right\}\left\{ {1 \atop 1} {1 \atop} \right\}^{\uparrow 1}$$

qui n'est autre que l'équation de Yang-Baxter. La prescription réalisée plus haut est donc générale et dans $\mathbf{kB}_2^+$, nous choisissons de normaliser *a posteriori* le système en posant $\left\{ {1 \atop 1} {1 \atop 1} \right\} = \dot{q}^3 p_\uparrow p_\downarrow \beta_{1,1}$. Les éléments $\left\{ {0 \atop 2} {2 \atop 0} \right\}$ et $\left\{ {2 \atop 0} {0 \atop 0} \right\}$ étant définis par (3.12) et (3.13), il reste alors trois inconnues. À cet ordre, elle commutent toutes et l'équation

$$\dot{q}^3 p_\uparrow p_\downarrow (1 - \dot{q}^2 p_\uparrow p_\downarrow) \left\{ {0 \atop 1} {2 \atop 2} \right\} \beta_{1,1} + \left\{ {0 \atop 0} {2 \atop 2} \right\} \left\{ {0 \atop 1} {2 \atop 2} \right\} = \dot{q}(1 - \dot{q}^2 p_\uparrow p_\downarrow) \left\{ {0 \atop 1} {2 \atop 2} \right\}$$

peut être simplifiée des deux côtés par $\left\{ {0 \atop 1} {2 \atop 2} \right\}$ pour obtenir

$$\left\{ {0 \atop 0} {2 \atop 2} \right\} = \dot{q}(1 - \dot{q}^2 p_\uparrow p_\downarrow)(1 - \dot{q}^2 p_\uparrow p_\downarrow \beta_{1,1}).$$

Il reste alors deux inconnues, mais les équations restantes ne les définissent pas individuellement. Elles définissent en revanche leur produit $\left\{ {1 \atop 0} {1 \atop 1} \right\} \left\{ {0 \atop 1} {2 \atop 2} \right\}$:

$$\left\{ {1 \atop 0} {1 \atop 1} \right\} \left\{ {0 \atop 1} {2 \atop 2} \right\} = \dot{q}^4 p_\uparrow p_\downarrow (1 - \dot{q}^2 p_\uparrow p_\downarrow)(1 - \dot{q}^2 p_\uparrow p_\downarrow \beta_{1,1})(1 + \beta_{1,1}). \tag{3.14}$$

Une étude exhaustive des petits ordres montre qu'il n'existe pas, ni à cet ordre, ni aux suivants, de relation permettant de fixer une factorisation pour ce produit. Nous sommes ainsi libres de choisir n'importe quelle expression compatible avec (3.14) pour $\left\{ {1 \atop 0} {1 \atop 1} \right\}$ et $\left\{ {0 \atop 1} {2 \atop 2} \right\}$. Pour la suite, nous faisons le choix

$$\left\{ {1 \atop 0} {1 \atop 1} \right\} = \dot{q}^2 p_\downarrow (1 - \dot{q}^2 p_\uparrow p_\downarrow \beta_{1,1}) \quad \text{et} \quad \left\{ {0 \atop 1} {2 \atop 2} \right\} = \dot{q}^2 p_\uparrow (1 + \beta_{1,1})(1 - \dot{q}^2 p_\uparrow p_\downarrow),$$

les autres possibilités étant étudiées dans la section 3.5.

3.2.2.4 Ordre 3

À cet ordre, nous découvrons une structure initiée à l'ordre 2 et qui se perpétue à tous les ordres : à l'aide d'éléments d'ordres inférieurs, nous pouvons exprimer la plupart des inconnues, dans le cas présent,

$$\left\{ {0 \atop 3} {3 \atop 3} \right\} = \dot{q}^4 p_\uparrow^3, \quad \left\{ {1 \atop 2} {2 \atop 2} \right\} = \dot{q}^4 p_\uparrow^2 p_\downarrow \beta_{2,1}, \quad \left\{ {2 \atop 1} {1 \atop 1} \right\} = \dot{q}^4 p_\uparrow^1 p_\downarrow^2 \beta_{1,2}, \quad \left\{ {3 \atop 0} {0 \atop 0} \right\} = \dot{q}^4 p_\downarrow^3,$$

et

$$\left\{ {1 \atop 1} {2 \atop 1} \right\} = \dot{q}^3 p_\uparrow p_\downarrow (1 + \beta_{1,1}^{\uparrow 1}) \beta_{1,1} (1 - \dot{q}^2 p_\uparrow p_\downarrow \beta_{1,1}^{\uparrow 1}).$$

Il reste alors un ensemble de variables dont l'expression dépend d'un choix pour la factorisation du produit

$$\left\{ {2 \atop 0} {1 \atop 1} \right\} \left\{ {0 \atop 2} {3 \atop 3} \right\} = \dot{q}^6 p_\uparrow^2 p_\downarrow^2 (1 - \dot{q}^2 p_\uparrow p_\downarrow)(1 - \dot{q}^2 p_\uparrow p_\downarrow \beta_{1,2})(1 + \beta_{1,1}^{\uparrow 2} + \beta_{2,1}).$$

Comme à l'ordre précédent, il n'y a pas de relations supplémentaires ni à cet ordre, ni aux suivants, pour fixer une factorisation. Nous choisissons alors

$$\left\{ {2 \atop 0} {1 \atop 1} \right\} = \dot{q}^3 p_\downarrow^2 (1 - \dot{q}^2 p_\uparrow p_\downarrow \beta_{1,2}) \quad \text{et} \quad \left\{ {0 \atop 2} {3 \atop 3} \right\} = \dot{q}^3 p_\uparrow^2 (1 + \beta_{1,1}^{\uparrow 2} + \beta_{2,1})(1 - \dot{q}^2 p_\uparrow p_\downarrow).$$

Une fois ce choix fait, nous pouvons exprimer les trois inconnues restantes dont l'expression dépend des valeurs individuelles de $\left\{ {2 \atop 0} {1 \atop} \right\}$ et $\left\{ {0 \atop 2} {3 \atop} \right\}$:

$$\left\{ {1 \atop 0} {2 \atop} \right\} = \dot{q}^2 p_\downarrow (1 - \dot{q}^2 p_\uparrow p_\downarrow \beta_{1,1})(1 - \dot{q}^2 p_\uparrow p_\downarrow \beta_{1,2}),$$

$$\left\{ {0 \atop 1} {3 \atop} \right\} = \dot{q}^2 p_\uparrow (1 + \beta_{1,1} + \beta_{1,2})(1 - \dot{q}^2 p_\uparrow p_\downarrow)(1 - \dot{q}^2 p_\uparrow p_\downarrow \beta_{1,1}^{\uparrow 1}),$$

et

$$\left\{ {0 \atop 0} {3 \atop} \right\} = \dot{q}(1 - \dot{q}^2 p_\uparrow p_\downarrow)(1 - \dot{q}^2 p_\uparrow p_\downarrow \beta_{1,1})(1 - \dot{q}^2 p_\uparrow p_\downarrow \beta_{1,2}).$$

Le fait que $\left\{ {0 \atop 2} {2 \atop} \right\}$ ait pu être exprimé directement à l'ordre 2 vient de la commutativité de $\mathbf{B}_2$. Cette propriété disparaît à partir de l'ordre 3. Nous verrons toutefois dans la section 3.5 que cet élément n'est pas sensible au choix de factorisation, mais sa détermination à l'aide des équations (3.9) exige la connaissance explicite d'éléments qui en dépendent.

3.2.2.5 Ordres supérieurs

À l'ordre 4, presque toutes les inconnues sont déterminées à partir d'éléments d'ordres inférieurs. Toutefois, l'expression des éléments $\left\{ {3 \atop 0} {1 \atop} \right\}$, $\left\{ {2 \atop 0} {2 \atop} \right\}$, $\left\{ {1 \atop 0} {3 \atop} \right\}$, $\left\{ {0 \atop 0} {4 \atop} \right\}$, $\left\{ {0 \atop 1} {4 \atop} \right\}$, $\left\{ {0 \atop 2} {4 \atop} \right\}$ et $\left\{ {0 \atop 3} {4 \atop} \right\}$ dépend à nouveau d'un choix de factorisation pour le produit $\left\{ {3 \atop 0} {1 \atop} \right\}\left\{ {0 \atop 3} {4 \atop} \right\}$ dont la valeur est parfaitement déterminée à partir d'élément d'ordres inférieurs.

Comme nous l'avons déjà mentionné, le système (3.9) est très largement surdéterminé. Aux petits ordres, nous avons réussi à trouver une solution, et nous avons observé qu'une grande partie des équations générées était redondante. Nous faisons donc l'hypothèse qu'une solution existe et que la structure préssentie aux petits ordres se propage pour tout n. Nous avons alors extrait de (3.9) un sous-système minimal qui, par hypothèse, fournit toute l'information encodée dans (3.9) et suffit donc à déterminer une solution à tout ordre. Comme nous l'avons remarqué, il existe deux types d'équations : celles définissant univoquement les nouveaux éléments à l'aide d'éléments d'ordres inférieurs (les éléments entourés de la figure 3.2), et celles exprimant des relations entre éléments du même ordre (les éléments de la figure 3.2 liés par des flèches) et qui permet leur détermination explicite dès lors qu'un choix de factorisation est effectué pour l'expression du produit $\left\{ {n-1 \atop 0} {1 \atop} \right\}\left\{ {0 \atop n-1} {n \atop} \right\}$ (voir section 3.5). Ce dernier cas concerne à l'ordre n l'ensemble

$$\mathcal{A}_n = \left\{ \left\{ {n-1 \atop 0} {1 \atop} \right\}, \left\{ {n-2 \atop 0} {2 \atop} \right\}, \ldots, \left\{ {1 \atop 0} {n-1 \atop} \right\} \right\} \cup \left\{ \left\{ {0 \atop n-1} {n \atop} \right\}, \left\{ {0 \atop n-2} {n \atop} \right\}, \ldots, \left\{ {0 \atop 1} {n \atop} \right\} \right\} \cup \left\{ \left\{ {0 \atop 0} {n \atop} \right\} \right\}$$

Le sous-système sus-mentionné est alors séparé en deux parties. La première est composée de trois équations formelles différentes et permet de définir explicitement

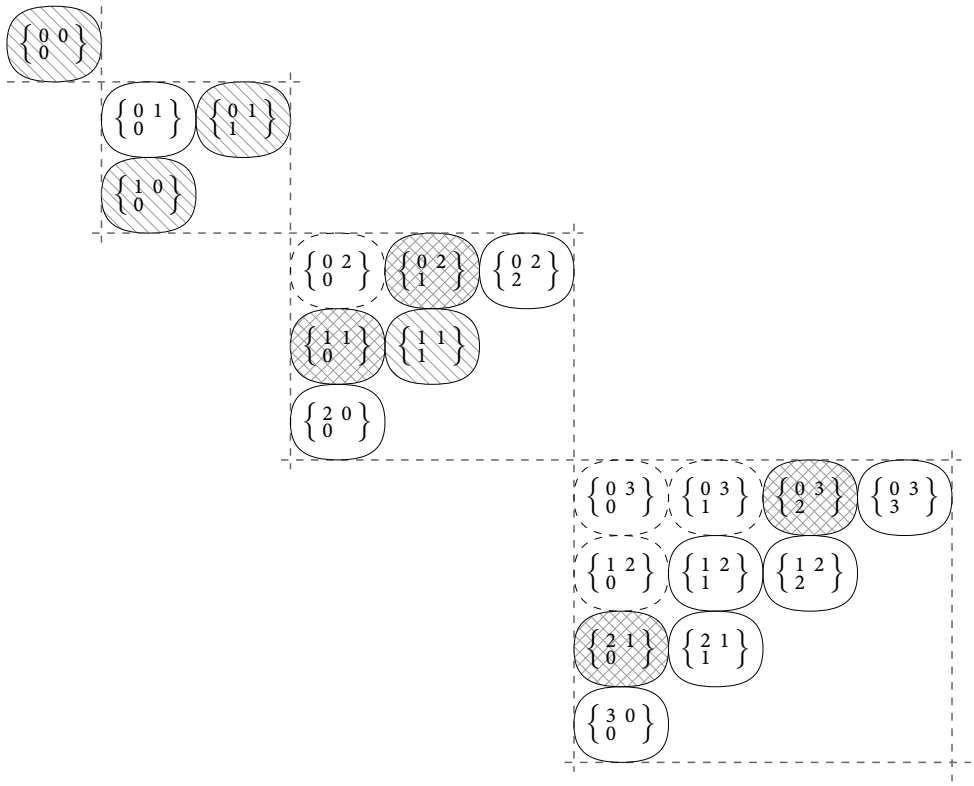


FIGURE 3.1: Les éléments de matrice non-nuls du tressage recherché dans la base lexicale inverse ordre par ordre et leur détermination : les éléments avec hachures obliques simples sont les paramètres libres de la solution, ceux avec hachures croisées obliques sont des éléments dont on ne connait que l'expression de leur produit, ceux entourés d'un trait pointillé dépendent d'un choix de factorisation du produit des éléments croisés obliques du même ordre, et les éléments restant sont déterminées univoquement à partir d'éléments du même ordre ou d'ordres inférieurs.

le premier groupe d'inconnues, celles entourées dans la figure 3.2 :

$$\left\{ {0 \atop n-\omega_1-1} \; {n-\omega_1 \atop} \right\}^{\uparrow \omega_1} \left\{ {\omega_1 \atop n-\omega_1-1} \; {n-\omega_1-1 \atop} \right\} \left\{ {\omega_1 \atop 1} \; {1 \atop} \right\}^{\uparrow n-1-\omega_1} = \\ = \left\{ {\omega_1 \atop 0} \; {0 \atop} \right\} \left\{ {\omega_1 \atop n-\omega_1} \; {n-\omega_1 \atop} \right\} \left\{ {0 \atop n-\omega_1-1} \; {n-\omega_1 \atop} \right\}, \quad (3.15)$$

$$\left\{ {1 \atop \omega_2-1} \; {\omega_2-1 \atop} \right\}^{\uparrow n-\omega_2} \left\{ {n-\omega_2 \atop \omega_2-1} \; {\omega_2-1 \atop} \right\} \left\{ {n-\omega_2 \atop 0} \; {1 \atop} \right\}^{\uparrow \omega_2-1} = \\ = \left\{ {n-\omega_2 \atop 0} \; {1 \atop} \right\} \left\{ {n-\omega_2+1 \atop \omega_2-1} \; {\omega_2-1 \atop} \right\} \left\{ {0 \atop \omega_2-1} \; {\omega_2-1 \atop} \right\}, \quad (3.16)$$

$$\sum_{k=0}^{\omega_4} \left\{ {0 \atop n-\omega_3-k} \; {n-\omega_3 \atop} \right\}^{\uparrow \omega_3} \left\{ {\omega_3 \atop n-\omega_3-\omega_4} \; {n-\omega_3-k \atop} \right\} \left\{ {\omega_3+\omega_4-k \atop 0} \; {k \atop} \right\}^{\uparrow n-\omega_3-\omega_4} = \\ = \left\{ {\omega_3 \atop 0} \; {0 \atop} \right\} \left\{ {\omega_3 \atop n-\omega_3-\omega_4} \; {n-\omega_3 \atop} \right\} \left\{ {0 \atop n-\omega_3-\omega_4} \; {n-\omega_3-\omega_4 \atop} \right\}, \quad (3.17)$$

avec $0 \leq \omega_1 \leq n-2$, $1 \leq \omega_2 \leq 2$, $1 \leq \omega_3 \leq n-2$ et $1 \leq \omega_4 \leq n-\omega_3-1$.

La seconde partie est aussi séparée en trois équations formelles qui lient les inconnues restantes à l'ordre n :

$$\sum_{k=0}^{\omega_5} \left\{ {0 \atop \omega_5-k} \; {\omega_5 \atop} \right\}^{\uparrow n-\omega_5} \left\{ {n-\omega_5 \atop 0} \; {\omega_5-k \atop} \right\} \left\{ {n-k \atop 0} \; {k \atop} \right\} = \dot{q} \left\{ {n-\omega_5 \atop 0} \; {0 \atop} \right\} \left\{ {n-\omega_5 \atop 0} \; {\omega_5 \atop} \right\}, \tag{3.18}$$

$$\sum_{k=0}^{1} \left\{ {n-1 \atop 1-k} \; {1 \atop} \right\} \left\{ {0 \atop 0} \; {1-k \atop} \right\} \left\{ {1-k \atop n-1} \; {n-1+k \atop} \right\} = \sum_{k=0}^{1} \left\{ {0 \atop n-1-k} \; {n-1 \atop} \right\} \left\{ {k \atop k} \; {1 \atop} \right\}^{\uparrow n-1-k} \left\{ {n-1-k \atop 0} \; {k \atop} \right\}, \tag{3.19}$$

$$\sum_{k=0}^{\omega_6} \left\{ {0 \atop n-k} \; {n \atop} \right\} \left\{ {0 \atop n-\omega_6} \; {n-k \atop} \right\} \left\{ {\omega_6-k \atop 0} \; {k \atop} \right\}^{\uparrow n-\omega_6} = \dot{q} \left\{ {0 \atop n-\omega_6} \; {n \atop} \right\} \left\{ {0 \atop n-\omega_6} \; {n-\omega_6 \atop} \right\}, \tag{3.20}$$

avec $2 \leq \omega_5 \leq n-1$ et $2 \leq \omega_6 \leq n$ (les plages ne sont pas symétriques puisque le cas $\omega_5 = n$ mène à la même équation que $\omega_6 = n$). Ce sous-système n'est bien sûr ni unique ni canonique. Il semble toutefois donner les équations les plus simples. À l'aide de ce dernier, nous sommes parvenus à conjecturer une solution à tout ordre.

3.3 Twist

Nous venons de voir qu'une solution au système (3.9) semble exister. Supposons donc que nous ayons un tressage $\mathbf{R}\colon T(V)^{\otimes 2} \to T(V)^{\otimes 2}$ et $\mathbf{F}$ un autre tressage, inversible, de $T(V)$ tel que

$$\mathbf{R}_{12}\mathbf{F}_{23}\mathbf{F}_{12} = \mathbf{F}_{23}\mathbf{F}_{12}\mathbf{R}_{23} \quad \text{et} \quad \mathbf{R}_{23}\mathbf{F}_{12}\mathbf{F}_{23} = \mathbf{F}_{12}\mathbf{F}_{23}\mathbf{R}_{12}, \tag{3.21}$$

alors

$$\mathbf{F}_{23}\mathbf{F}_{12}\mathbf{F}_{23} \cdot \mathbf{R}_{12}\mathbf{R}_{23}\mathbf{R}_{12} = \mathbf{F}_{12}\mathbf{F}_{23}\mathbf{F}_{12} \cdot \mathbf{R}_{23}\mathbf{R}_{12}\mathbf{R}_{23}, \tag{3.22}$$

mais le membre de gauche de cette équation est égal à

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_{23}\mathbf{F}_{12}\mathbf{F}_{23} \cdot \mathbf{R}_{12}\mathbf{R}_{23}\mathbf{R}_{12} &= \mathbf{F}_{23}\mathbf{R}_{23}\mathbf{F}_{12}\mathbf{F}_{23}\mathbf{R}_{23}\mathbf{R}_{12} \\
&= \mathbf{F}_{23}\mathbf{R}_{23}\mathbf{F}_{23}^{-1}\mathbf{F}_{23}\mathbf{F}_{12}\mathbf{F}_{23}\mathbf{R}_{23}\mathbf{R}_{12} \\
&= \mathbf{F}_{23}\mathbf{R}_{23}\mathbf{F}_{23}^{-1}\mathbf{F}_{12}\mathbf{F}_{23}\mathbf{F}_{12}\mathbf{R}_{23}\mathbf{R}_{12} \\
&= \mathbf{F}_{23}\mathbf{R}_{23}\mathbf{F}_{23}^{-1}\mathbf{F}_{12}\mathbf{R}_{12}\mathbf{F}_{23}\mathbf{F}_{12}\mathbf{R}_{12} \\
&= \mathbf{F}_{23}\mathbf{R}_{23}\mathbf{F}_{23}^{-1}\mathbf{F}_{12}\mathbf{R}_{12}\mathbf{F}_{12}^{-1}\mathbf{F}_{12}\mathbf{F}_{23}\mathbf{F}_{12}\mathbf{R}_{12} \\
&= \mathbf{F}_{23}\mathbf{R}_{23}\mathbf{F}_{23}^{-1}\mathbf{F}_{12}\mathbf{R}_{12}\mathbf{F}_{12}^{-1}\mathbf{F}_{23}\mathbf{F}_{12}\mathbf{F}_{23}\mathbf{R}_{12} \\
&= \mathbf{F}_{23}\mathbf{R}_{23}\mathbf{F}_{23}^{-1}\mathbf{F}_{12}\mathbf{R}_{12}\mathbf{F}_{12}^{-1}\mathbf{F}_{23}\mathbf{R}_{23}\mathbf{F}_{23}^{-1} \cdot \mathbf{F}_{23}\mathbf{F}_{12}\mathbf{F}_{23}.
\end{aligned}$$

et le membre de droite de (3.22) est obtenu par la substitution des indices $12 \leftrightarrow 23$. Nous en déduisons que si $\mathbf{R}$ et $\mathbf{F}$ sont deux solutions de l'équation de Yang-Baxter

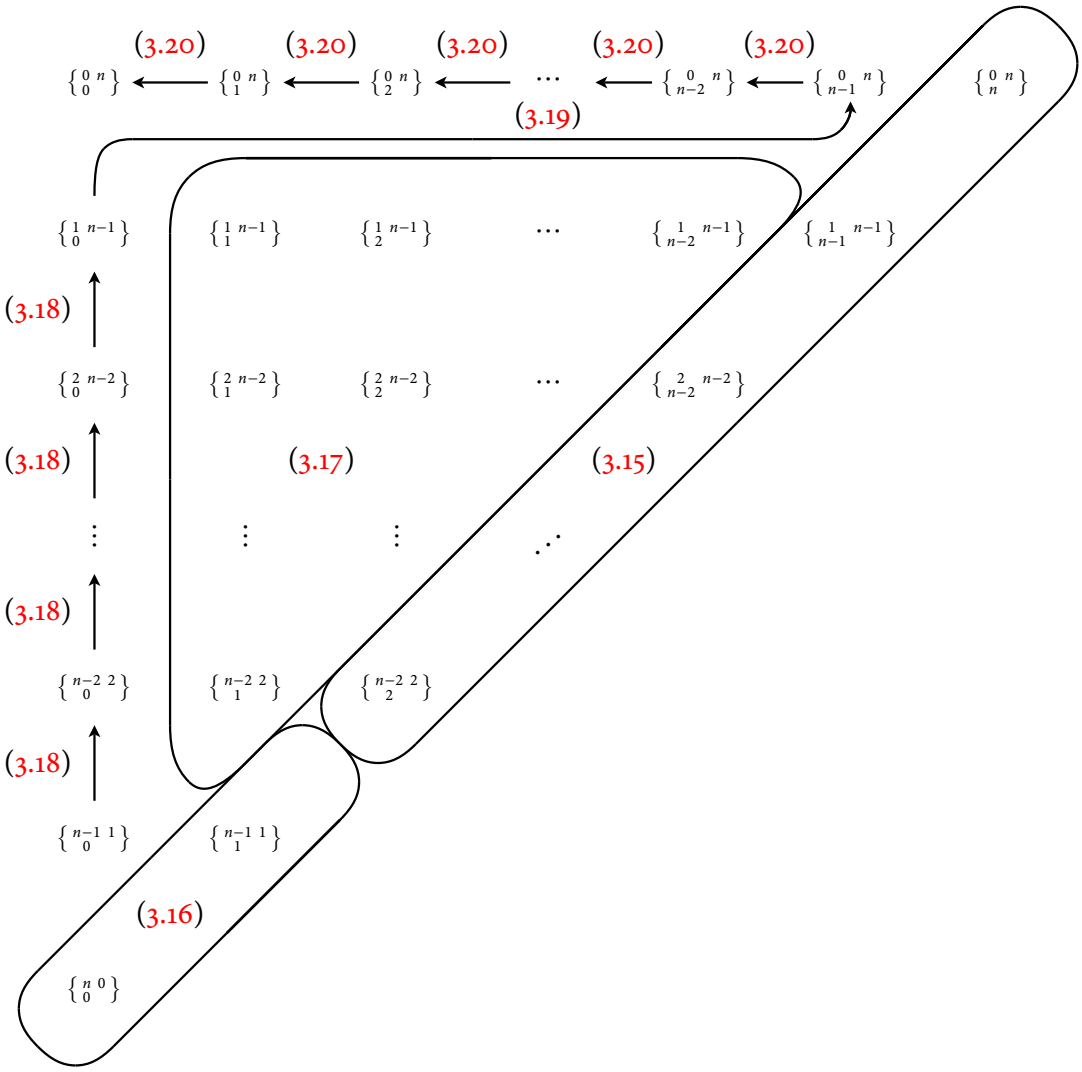


FIGURE 3.2: L'ensemble des éléments apparaissant à l'ordre n ainsi que les équations qui permettent leur détermination.

satisfaisant (3.21), alors $\mathbf{FRF}^{-1}$ est aussi une solution de l'équation de Yang-Baxter, appelée *twist* de la solution $\mathbf{R}$ par $\mathbf{F}$. Nous allons, grâce à cette procédure, absorber un degré de liberté du tressage tensoriel, plus précisément fusionner les dépendances en $p_\uparrow$ et en $p_\downarrow$ en une seule.

Considérons donc un *twist* diagonal $\mathbf{F}$ tel que

$$\mathbf{F}\colon x_{b\rangle}\, y_{c\rangle}^{\uparrow b} \mapsto \mu_{b,c}\, P_{b,c}\, y_{c\rangle} x_{b\rangle}^{\uparrow c},$$

où $\mu_{b,c} \in \mathbf{k}$ et $P_{b,c}$ est l'opérateur de *flip* $V^{\otimes b} \otimes V^{\otimes c} \to V^{\otimes c} \otimes V^{\otimes b}$. Cet opérateur satisfait naturellement l'équation de Yang-Baxter. Pour qu'il soit un *twist*, $\mathbf{F}$ soit satisfaire

les équations (3.21) qui se traduisent respectivement sur ses éléments de matrice F comme

$$\sum_{g=0}^{c} \left\{ {b \atop g} \; {c} \right\} \mathrm{F}^{\uparrow g}_{b+c-g,d} \mathrm{F}_{g,d} z_{d\rangle} y^{\uparrow d}_{g\rangle} x^{\uparrow d+g}_{b+c-g\rangle} = \sum_{g=0}^{c} \mathrm{F}^{\uparrow b}_{c,d} \mathrm{F}_{b,d} \left\{ {b \atop g} \; {c} \right\}^{\uparrow d} z_{d\rangle} y^{\uparrow d}_{g\rangle} x^{\uparrow d+g}_{b+c-g\rangle}$$

et

$$\sum_{h=0}^{d} \left\{ {c \atop h} \; {d} \right\}^{\uparrow b} \mathrm{F}_{b,h} \mathrm{F}^{\uparrow h}_{b,c+d-h} z_{h\rangle} y^{\uparrow h}_{c+d-h\rangle} x^{\uparrow c+d}_{b\rangle} = \sum_{h=0}^{d} \mathrm{F}_{b,c} \mathrm{F}^{\uparrow c}_{b,d} \left\{ {c \atop h} \; {d} \right\} z_{h\rangle} y^{\uparrow h}_{c+d-h\rangle} x^{\uparrow c+d}_{b\rangle}$$

soit, après quasi-commutation des éléments de **R** avec les *flips*,

$$\mu_{b+c-g,d}\,\mu_{g,d} = \mu_{b,d}\,\mu_{c,d}, \qquad 0 \le g \le c, \tag{3.23}$$

et

$$\mu_{b,h}\,\mu_{b,c+d-h} = \mu_{b,c}\,\mu_{b,d}, \qquad 0 \le h \le d. \tag{3.24}$$

En posant $b = 0$, $c = x + 1$ et $g = 1$ dans (3.23), nous trouvons $\mu_{x,d}\mu_{1,d} = \mu_{0,d}\mu_{x+1,d}$ soit

$$\mu_{x,d} = \mu^{x}_{1,d}\,\mu^{-(x-1)}_{0,d}, \tag{3.25}$$

et en posant $c = 0$, $d = y + 1$ et $h = 1$ dans (3.24), $\mu_{b,1}\mu_{b,y} = \mu_{b,0}\mu_{b,y+1}$ soit

$$\mu_{b,y} = \mu^{y}_{b,1}\,\mu^{-(y-1)}_{b,0}. \tag{3.26}$$

En substituant (3.25) dans (3.26), nous obtenons finalement

$$\mu_{x,y} = \frac{\mu^{xy}_{11}\,\mu^{(x-1)(y-1)}_{00}}{\mu^{(x-1)y}_{01}\,\mu^{x(y-1)}_{10}},$$

avec les paramètres libres μ_{00}, μ_{11}, μ_{01} et μ_{10}. Lors du *twist* $\mathbf{R} \to (\mathbf{FRF}^{-1})_{21}$ (la permutation finale sert à rétablir la triangularité originale), les éléments de matrice de **R** sont affectés de telle sorte que

$$\left\{ {x \atop z} \; {y} \right\} \to \mu_{y,x}\,\mu^{-1}_{x+y-z,z} \left\{ {x \atop z} \; {y} \right\} = \mu^{(x-z)(y-z)} \left(\frac{\mu_{01}}{\mu_{10}} \right)^{x-z} \left\{ {x \atop z} \; {y} \right\} \tag{3.27}$$

où $\mu = \frac{\mu_{11}\mu_{00}}{\mu_{10}\mu_{01}}$. En particulier, nous avons

$$\left\{ {0 \atop 1} \; {1} \right\} \to \frac{\mu_{10}}{\mu_{01}} \left\{ {0 \atop 1} \; {1} \right\} \quad \text{et} \quad \left\{ {1 \atop 0} \; {0} \right\} \to \frac{\mu_{01}}{\mu_{10}} \left\{ {1 \atop 0} \; {0} \right\} \tag{3.28}$$

et nous pouvons profiter de la liberté sur μ_{01} et μ_{10} pour avoir, après *twist*, $\left\{ {0 \atop 1} \; {1} \right\} = \left\{ {1 \atop 0} \; {0} \right\}$. L'égalité est réalisée si $\mu^2_{10} = \frac{p_\downarrow}{p_\uparrow}\mu^2_{01}$. Nous faisons le choix $\mu_{10} = \sqrt{\frac{p_\downarrow}{p_\uparrow}}\mu_{01}$ et

$\mu = 1$. Définissons $q = \dot{q}^{-1}\sqrt{p_\uparrow{}^{-1}p_\downarrow{}^{-1}}$. Nous multiplions alors le *twist* de la solution par $q\dot{q}^{-1}$. Ce faisant, nous considérons alors la solution $\dot{q}^{-2}\sqrt{p_\uparrow{}^{-1}p_\downarrow{}^{-1}}(\mathbf{FRF}^{-1})_{21}$ en notant q la valeur de $\left\{\begin{smallmatrix}0&0\\0&\end{smallmatrix}\right\}$. Cette solution est celle que nous aurions obtenue en posant $\left\{\begin{smallmatrix}0&0\\0&\end{smallmatrix}\right\} = q$, $\left\{\begin{smallmatrix}0&1\\1&\end{smallmatrix}\right\} = \left\{\begin{smallmatrix}1&0\\0&\end{smallmatrix}\right\} = q^2$ et $\left\{\begin{smallmatrix}1&1\\1&\end{smallmatrix}\right\} = q^3\beta_{1,1}$ (c'est-à-dire en posant $p_\uparrow = p_\downarrow = 1$ dans la sous-section 3.2), mais nous venons de voir qu'elle est équivalente, à un *twist* près, à la solution esquissée dans la sous-section précédente, et nous nous plaçons donc dans ce cas de figuire par la suite.

3.4 Solution

Nous sommes maintenant en mesure d'écrire une solution pour le système (3.9) :

Proposition 24. *Définissons* ${}^a\Pi_b \doteq {}^a\Pi(q^2)_b$, *alors les éléments*

$$\left\{\begin{smallmatrix}x&y\\z&\end{smallmatrix}\right\} = q^{(1+x+z)} \cdot Ш^{\uparrow x}_{z,y-z} \cdot \beta_{z,x} \cdot {}^x\Pi^{\uparrow z}_{y-z} \tag{3.29}$$

avec $q^2 \neq 1$ *et* $0 \leq z \leq y$ *sont non-nuls et forment une solution dans* $\mathbf{kB}^+_\infty$ *de* (3.9).

Démonstration. Notons tout d'abord que puisque $q^{-2} \neq 1$, $\Pi_1 = (1-q^2) \neq 0$. Cette restriction sur les valeurs possibles de q assure qu'un symbole de Pochhammer tressé n'annule pas l'expression présentée. La restriction sur z implique quant à elle que les battages sont non-nuls. Puisque le groupe des tresses est libre de torsion et que les éléments définis par (3.29) sont des polynômes en les générateurs de $\mathbf{B}^+_\infty$, ils sont non-nuls.

La preuve consiste alors simplement à injecter l'Ansatz (3.29) dans le système (3.9) pour vérifier sa validité. Puisque les termes générés sont assez longs, nous traiterons, par commodité, chaque côté du système de manière séparée. Ainsi, nous noterons respectivement (3.9L) et (3.9R) les côtés gauche et droit du système (3.9) dans lequel on a injecté l'Ansatz (3.29), et nous devons donc vérifier que (3.9L) = (3.9R). Plus précisement, nous avons

$$\begin{aligned}(3.9\mathrm{L}) = \sum_{k=\max(0,l)}^{i} & \underbrace{q^{(1+c+d-k)+(1+b+d-i)+(1+b+(i-k)+c+l)}}_{(q\mathrm{L})} \times \\ & \times Ш^{\uparrow c+b}_{d-k,k}\beta^{\uparrow b}_{d-k,c} \cdot {}^c\Pi^{\uparrow b+d-k}_{k} \cdot Ш^{\uparrow b}_{d-i,i-k}\beta_{d-i,b} \cdot {}^b\Pi^{\uparrow d-i}_{i-k} \times \\ & \times Ш^{\uparrow b+d-k}_{c+l,k-l}\beta^{\uparrow d-i}_{c+l,b+(i-k)} \cdot {}^{b+i-k}\Pi^{\uparrow c+d-(i-l)}_{k-l},\end{aligned} \tag{3.30}$$

et

$$(3.9\mathrm{R}) = \sum_{k=\max(0,l)}^{\min(i,c+l)} \underbrace{q^{(1+b+c-(k-l))+(1+b+(k-l)+d-(i-k))+(1+c-(k-l)+d-i)}}_{(q\mathrm{R})} \times$$
$$\times \text{Ш}^{\uparrow b}_{c-(k-l),k-l}\beta_{c-(k-l),b} \cdot {}^{b}\Pi^{\uparrow c-(k-l)}_{k-l} \cdot \text{Ш}^{\uparrow b+c}_{d-(i-k),i-k}\beta^{\uparrow c-(k-l)}_{d-(i-k),b+(k-l)} \times$$
$$\times {}^{b+k-l}\Pi^{\uparrow c+d-(i-l)}_{i-k} \cdot \text{Ш}^{\uparrow c-(k-l)}_{d-i,k}\beta_{d-i,c-(k-l)} \cdot {}^{c-(k-l)}\Pi^{\uparrow d-i}_{k}. \quad (3.31)$$

Nous allons maintenant procéder à de nombreux réarrangements. Notons tout d'abord que le second symbole de Pochhammer de (3.9L) peut être déplacé et réécrit à gauche du dernier symbole de Pochhammer. Ce faisant, il commute à distance avec tous les termes qu'il rencontre sauf $\beta^{\uparrow d-i}_{c+l,b+(i-k)}$ avec lequel il quasi-commute en vertu de (2.62) :

$${}^{b}\Pi^{\uparrow d-i}_{i-k}\beta^{\uparrow d-i}_{c+l,b+(i-k)} = \beta^{\uparrow d-i}_{c+l,b+(i-k)}\,{}^{b}\Pi^{\uparrow c+d-(i-l)}_{i-k}.$$

Par définition même, ce symbole peut être fusionné avec le suivant :

$${}^{b}\Pi^{\uparrow c+d-(i-l)}_{i-k} \cdot {}^{b+i-k}\Pi^{\uparrow c+d-(i-l)}_{k-l} = {}^{b}\Pi^{\uparrow c+d-(i-l)}_{i-l}.$$

Le même phénomène se produit avec les premiers et seconds symboles de Pochhammer de (3.9R) et mène au même symbole fusionné, indépendant de l'indice de sommation k. De plus, ce nouveau symbole de Pochhammer qui apparaît à la position du second commute à distance avec tous les termes à sa droite et peut être réécrit à la même position que dans le membre de gauche. Puisque ces symboles ne dépendent pas de l'indice de sommation et que l'identité sied dans une algèbre à division, on peut simplifier de ce symbole (3.9L) et (3.9R) à droite. Nous renommons ces deux membres simplifiés (3.9L)′ et (3.9R)′.

Dans (3.9L)′ on réalise les factorisations suivantes :

$$\beta^{\uparrow b}_{d-k,c} = \beta^{\uparrow b}_{d-i,c}\beta^{\uparrow b+d-i}_{(i-k),c} \quad \text{et} \quad \beta^{\uparrow d-i}_{c+l,b+(i-k)} = \beta^{\uparrow b+d-i}_{c+l,(i-k)}\beta^{\uparrow d-i}_{c+l,b}$$

Notons que le symbole de Pochhammer restant commute à distance avec tous les termes à droite jusqu'à la gauche du dernier battage. Ainsi, en utilisant (2.32), on peut facilement vérifier que les termes de (3.9L)′ compris entre le monôme en q et ce symbole de Pochhammer sont

$$\text{Ш}^{\uparrow c+b}_{d-k,k}\beta^{\uparrow b}_{d-i,c}\beta^{\uparrow b+d-i}_{(i-k),c}\text{Ш}^{\uparrow b}_{d-i,i-k}\beta_{d-i,b} = \text{Ш}^{\uparrow c+b}_{d-k,k}\text{Ш}^{\uparrow c+b}_{d-i,i-k}\beta^{\uparrow b}_{d-i,c}\beta_{d-i,b}\beta^{\uparrow b+d-i}_{(i-k),c}.$$

Les deux battages se factorisent de manière différente à l'aide de (2.31) :

$$\text{Ш}^{\uparrow c+b}_{d-k,k}\text{Ш}^{\uparrow c+b}_{d-i,i-k} = \text{Ш}^{\uparrow c+b}_{d-i,i-k,k} = \text{Ш}^{\uparrow c+b}_{d-i,i}\text{Ш}^{\uparrow c+b+d-i}_{i-k,k},$$

et on obtient

$$(3.9\mathrm{L})' = \sum_{k=\max(0,l)}^{i} (q\mathrm{L}) \cdot Ш^{\uparrow b+c}_{d-i,i} \beta_{d-i,b+c} \cdot Ш^{\uparrow c+b+d-i}_{i-k,k} \beta^{\uparrow b+d-i}_{(i-k),c} \times$$
$$\times {}^{c}\Pi^{\uparrow b+d-k}_{k} \cdot Ш^{\uparrow b+d-k}_{c+l,k-l} \beta^{\uparrow b+d-i}_{c+l,i-k} \cdot \beta^{\uparrow d-i}_{c+l,b} \quad (3.32)$$

Le traitement de $(3.9\mathrm{R})'$ demande un peu plus de travail. Les termes entre le premier battage et le dernier symbole de Pochhammer sont, en vertu de (2.32) et (2.31),

$$\beta_{c-(k-l),b} Ш^{\uparrow b+c}_{d-(i-k),i-k} \cdot \beta^{\uparrow c-(k-l)}_{d-(i-k),b+(k-l)} Ш^{\uparrow c-(k-l)}_{d-i,k} \beta_{d-i,c-(k-l)} =$$
$$= Ш^{\uparrow b+c}_{d-i,k,i-k} \beta_{c-(k-l),b} \beta^{\uparrow c-(k-l)}_{d-(i-k),b+(k-l)} \beta_{d-i,c-(k-l)}, \quad (3.33)$$

mais, concordement à (1.23) et (1.20),

$$\beta^{\uparrow c-(k-l)}_{d-(i-k),b+(k-l)} = \beta^{\uparrow b+c-(k-l)}_{d-i,(k-l)} \beta^{\uparrow c-(k-l)}_{d-i,b} \beta^{\uparrow b+c+d-(i+k-l)}_{k,k-l} \beta^{\uparrow c+d-(i+k-l)}_{k,b} \quad (3.34)$$

et ainsi

$$\begin{aligned}
&\beta_{c-(k-l),b} \beta^{\uparrow c-(k-l)}_{d-(i-k),b+(k-l)} \beta_{d-i,c-(k-l)} = \\
&\overset{(3.34)}{=} \beta_{c-(k-l),b} \left[\beta^{\uparrow b+c-(k-l)}_{d-i,k-l} \beta^{\uparrow c-(k-l)}_{d-i,b} \beta^{\uparrow b+c+d-(i+k-l)}_{k,k-l} \beta^{\uparrow c+d-(i+k-l)}_{k,b} \right] \beta_{d-i,c-(k-l)} \\
&\overset{(1.17)(1.17)}{=} \left[\beta^{\uparrow b+c-(k-l)}_{d-i,k-l} \beta_{c-(k-l),b} \right] \beta^{\uparrow c-(k-l)}_{d-i,b} \left[\beta_{d-i,c-(k-l)} \beta^{\uparrow b+c+d-(i+k-l)}_{k,k-l} \beta^{\uparrow c+d-(i+k-l)}_{k,b} \right] \\
&\overset{(4.12)}{=} \beta^{\uparrow b+c-(k-l)}_{d-i,k-l} \left[\beta^{\uparrow b}_{d-i,c-(k-l)} \beta_{d-i,b} \beta^{\uparrow d-i}_{c-(k-l),b} \right] \beta^{\uparrow b+c+d-(i+k-l)}_{k,k-l} \beta^{\uparrow c+d-(i+k-l)}_{k,b} \\
&\overset{(1.23)(1.17)}{=} \left[\beta^{\uparrow b}_{d-i,c} \right] \beta_{d-i,b} \left[\beta^{\uparrow b+c+d-(i+k-l)}_{k,k-l} \beta^{\uparrow d-i}_{c-(k-l),b} \right] \beta^{\uparrow c+d-(i+k-l)}_{k,b} \\
&\overset{(1.23)(1.20)}{=} \left[\beta_{d-i,b+c} \right] \beta^{\uparrow b+c+d-(i+k-l)}_{k,(k-l)} \left[\beta^{\uparrow d-i}_{c+l,b} \right].
\end{aligned}$$

Remarquons que l'on peut utiliser (2.62) pour faire quasi-commuter le dernier facteur de cette expression avec le symbole de Pochhammer qui lui succède dans $(3.9\mathrm{R})'$. Pour finir, nous pouvons factoriser le multi-battage de (3.33) comme

$$Ш^{\uparrow b+c}_{d-i,k,i-k} = Ш^{\uparrow b+c}_{d-i,i} Ш^{\uparrow b+c+d-i}_{k,i-k}$$

et ainsi réécrire $(3.9\mathrm{R})'$ sous la forme

$$(3.9\mathrm{R})' = \sum_{k=\max(0,l)}^{\min(i,c+l)} (q\mathrm{R}) \cdot Ш^{\uparrow b+c}_{d-i,i} \beta_{d-i,b+c} \cdot Ш^{\uparrow b+d-i}_{c-(k-l),k-l} Ш^{\uparrow b+c+d-i}_{k,i-k} \times$$
$$\times \beta^{\uparrow b+c+d-(i+k-l)}_{k,(k-l)} \cdot {}^{c-(k-l)}\Pi^{\uparrow b+d-i}_{k} \cdot \beta^{\uparrow d-i}_{c+l,b}. \quad (3.35)$$

Il est alors immédiat de constater que les deux premiers termes suivant le monôme en q dans (3.32) et (3.35), tout comme les derniers, sont les même et ne dépendent pas de l'indice de sommation k. Comme précédemment, on réalise la simplification par ces trois termes. Nous remarquons alors que les termes restant alors dans les deux expressions sont tous décalés d'au moins $(b+d-i)$ positions. La relation (3.32) = (3.35) reste vraie si on la ramène en première position. On réalise donc la simplification par les trois éléments énoncée, puis le décalage en première position afin de simplifier la notation, et nous renommons le résultat (3.9L)″ et (3.9R)″.

Il est maintenant temps de développer les symboles de Pochhammer tressés à l'aide du théorème binomial (2.63). Celui de (3.9L)″ donne

$$ {}^{c}\Pi_k^{\uparrow(i-k)} = \sum_{j=0}^{k}(-1)^j q^{2j} \cdot Ш_{j,k-j}^{\uparrow c+(i-k)} \beta_{j,c}^{\uparrow(i-k)} \Delta_j^{\uparrow(i-k)}. $$

et on incorpore le monôme en q dans $(q\mathrm{L})$ pour obtenir

$$ (q\mathrm{L})' = q^{3+2(b+c+d)-2k+l+2j}. $$

De l'autre côté, le symbole de Pochhammer restant dans (3.9R)″ est

$$ {}^{c-(k-l)}\Pi_k = \sum_{j=0}^{k}(-1)^j q^{2j} Ш_{j,k-j}^{\uparrow c-(k-l)} \beta_{j,(c-(k-l))} \Delta_j, $$

et rajouter le monôme en q dans $(q\mathrm{R})$ donne ici

$$ (q\mathrm{R})' = q^{3+2(b+c+d)-2i+l+2j}. \tag{3.36} $$

Nous allons maintenant réarranger les éléments générés par le developpement des symboles de Pochhammer dans leurs membres respectif. Avant cela, nous remarquons que tous les battages en jeu sont non-nuls exactement à l'intérieur des plages de sommation. Nous allons donc, pour alléger la notation, omettre les bornes des indices de sommation et laisser les battages maintenir cette information et commander ces sommes. Concernant (3.9L)″, nous avons

$$ (3.9\mathrm{L})'' = \sum_{k,j}(-1)^j (q\mathrm{L})' \cdot Ш_{i-k,k}^{\uparrow c} \beta_{i-k,c} Ш_{j,k-j}^{\uparrow c+(i-k)} \beta_{j,c}^{\uparrow(i-k)} \Delta_j^{\uparrow(i-k)} \cdot Ш_{c+l,k-l}^{\uparrow(i-k)} \beta_{c+l,i-k}. \tag{3.37} $$

Puisque le second battage commute à distance avec les éléments qui le précède, nous pouvons, à l'aide de (2.31), factoriser

$$ Ш_{i-k,k}^{\uparrow c} Ш_{j,k-j}^{\uparrow c+(i-k)} = Ш_{i-k,j,k-j}^{\uparrow c} = Ш_{j+i-k,k-j}^{\uparrow c} Ш_{i-k,j}^{\uparrow c}. $$

De plus, nous avons, en vertu de (1.20),

$$\beta_{i-k,c}\beta_{j,c}^{\uparrow(i-k)} = \beta_{j+i-k,c}.$$

Le nouveau deuxième battage quasi-commute avec cet élément, concordement à (2.32) et nous pouvons alors réécrire

$$(3.9\mathrm{L})'' = \sum_{k,j}(-1)^j(q\mathrm{L})' \cdot \text{Ш}^{\uparrow c}_{j+i-k,k-j}\beta_{j+i-k,c}\text{Ш}_{i-k,j}\Delta_j^{\uparrow(i-k)}\text{Ш}^{\uparrow(i-k)}_{c+l,k-l}\beta_{c+l,i-k}. \tag{3.38}$$

Par commodité pour la suite, on réalise le changement de variables de sommation $j = j' - i + k$ et $k = i - k'$, et nous notons $(q\mathrm{L})''$ l'image de $(q\mathrm{L})'$ sous ce changement. Alors

$$(3.9\mathrm{L})'' = \sum_{k',j'}(-1)^{j'-k'}(q\mathrm{L})'' \cdot \text{Ш}^{\uparrow c}_{j',i-j'}\beta_{j',c}\text{Ш}_{k',j'-k'}\Delta_{j'-k'}^{\uparrow k'}\text{Ш}^{\uparrow k'}_{c+l,i-k'-l}\beta_{c+l,k'}. \tag{3.39}$$

De l'autre côté, nous avons

$$(3.9\mathrm{R})'' = \sum_{k,j}(-1)^j(q\mathrm{R})' \cdot \text{Ш}_{c-(k-l),k-l}\text{Ш}^{\uparrow c}_{k,i-k}\beta_{k,k-l}^{\uparrow c-(k-l)}\text{Ш}^{\uparrow c-(k-l)}_{j,k-j}\beta_{j,(c-(k-l))}\Delta_j. \tag{3.40}$$

Comme précédemment, nous déplaçons le troisième battage à droite du second en le faisant quasi-commuter à gauche en vertu de (2.32), et alors

$$\text{Ш}^{\uparrow c}_{k,i-k}\text{Ш}^{\uparrow c}_{j,k-j} = \text{Ш}^{\uparrow c}_{j,k-j,i-k} = \text{Ш}^{\uparrow c}_{j,i-j}\text{Ш}^{\uparrow c+j}_{k-j,i-k}.$$

Notons par ailleurs que

$$\begin{aligned}\beta_{k,k-l}^{\uparrow c-(k-l)}\beta_{j,(c-(k-l))} &\overset{(1.20)}{=} \left[\beta_{j,k-l}^{\uparrow c-(k-l)}\beta_{k-j,k-l}^{\uparrow c-(k-j-l)}\right]\beta_{j,(c-(k-l))}\\ &\overset{(1.17)}{=} \beta_{j,k-l}^{\uparrow c-(k-l)}\left[\beta_{j,(c-(k-l))}\beta_{k-j,k-l}^{\uparrow c-(k-j-l)}\right]\\ &\overset{(1.23)}{=} \left[\beta_{j,c}\right]\beta_{k-j,k-l}^{\uparrow c-(k-j-l)}.\end{aligned} \tag{3.41}$$

Ainsi, nous pouvons réécrire

$$(3.9\mathrm{R})'' = \sum_{k,j}(-1)^j(q\mathrm{R})'\text{Ш}^{\uparrow c}_{j,i-j}\beta_{j,c}\text{Ш}^{\uparrow j}_{c-(k-l),k-l}\text{Ш}^{\uparrow c+j}_{k-j,i-k}\beta_{(k-j),(k-l)}^{\uparrow c-(k-j-l)}\Delta_j. \tag{3.42}$$

Nous avons vu dans (3.36) que le monôme en q ne dépend pas de l'indice de sommation k. Nous pouvons alors réaliser la somme sur k comme une convolution de Vandermonde et réécrire à l'aide de (2.67)

$$\sum_k \text{Ш}^{\uparrow j}_{c-(k-l),k-l}\text{Ш}^{\uparrow c+j}_{k-j,i-k}\beta_{k-j,k-l}^{\uparrow c-(k-j-l)} = \text{Ш}^{\uparrow j}_{c+l-j,i-l}, \tag{3.43}$$

soit, en quasi-commutant et en fusionnant à l'aide de (1.23),

$$(3.9\mathrm{R})'' = \sum_j (-1)^j (q\mathrm{R})' \cdot \text{Ш}^{\uparrow c}_{j,i-j} \beta_{j,c} \Delta_j \text{Ш}^{\uparrow j}_{c+l-j,i-l}. \tag{3.44}$$

L'égalité entre (3.39) et (3.44) peut être considérée comme une égalité entre des polynômes en q à coefficients dans $\mathbf{kB}^+_\infty$, et doit donc être réalisée à puissance de q identique. Le changement de variables effectué plus haut pour obtenir (3.39) implique alors que l'égalité doit être réalisée pour chaque $j' = j$, et nous nous sommes donc ramenés à vérifier que

$$\sum_k (-1)^k \text{Ш}_{k,j-k} \Delta^{\uparrow k}_{j-k} \text{Ш}^{\uparrow k}_{c+l,i-l-k} \beta_{c+l,k} = \Delta_j \text{Ш}^{\uparrow j}_{c+l-j,i-l}. \tag{3.45}$$

En vertu de la proposition 16, cette relation est vraie, et ainsi (3.29) est bien une solution de (3.9). □

3.5 Unicité de la solution

Nous allons maintenant discuter de l'unicité de la solution (3.29). Nous avons trouvé cette solution en resolvant les petits ordres du système (3.9) et en conjecturant une forme générale qui est, comme nous venons de le voir, bel et bien un tressage. Aux petits ordres, nous avons fait trois observations : la première est que les équations générées à l'ordre n n'apportent pas de nouvelle information sur les variables d'ordres strictement plus petits. Cela a permis de résoudre le système ordres par ordres, avec l'espoir qu'aucune information contradictoire (ou supplémentaire et compatible, cf. infra) n'apparaisse aux ordres suivants. Le fait que (3.29) soit bien un tressage confirme cette hypothèse.

La seconde observation concerne les degrés de liberté d'une solution. Nous avions quatre variables possédant des degrés de liberté, précisément $\left\{\begin{smallmatrix}0&0\\0&\end{smallmatrix}\right\}$, $\left\{\begin{smallmatrix}0&1\\1&\end{smallmatrix}\right\}$, $\left\{\begin{smallmatrix}1&0\\0&\end{smallmatrix}\right\}$ et $\left\{\begin{smallmatrix}1&1\\1&\end{smallmatrix}\right\}$. Cette dernière doit satisfaire l'équation de Yang-Baxter, et nous sommes libres de choisir toute solution inversible. Nous imposons que tous les éléments de matrice générés soient non nuls, et cela implique une relation supplémentaire sur les trois éléments restants (voir la définition (3.10) de l'élément $\left\{\begin{smallmatrix}0&1\\0&\end{smallmatrix}\right\}$). Cependant, nous avons absorbé la dépendance de la solution en $\left\{\begin{smallmatrix}0&1\\1&\end{smallmatrix}\right\}$ et $\left\{\begin{smallmatrix}1&0\\0&\end{smallmatrix}\right\}$ à l'aide d'un *twist* et d'un redimensionnement (cf. section 3.3) et la non nullité de $\left\{\begin{smallmatrix}0&1\\0&\end{smallmatrix}\right\}$ est alors simplement équivalente à $\left\{\begin{smallmatrix}0&0\\0&\end{smallmatrix}\right\}^2 \neq 1$.

La troisième observation concerne le dernier degré de liberté du système. Nous avons remarqué qu'à l'ordre n, presque toutes les inconnues étaient définies à l'aide

de variables d'ordres inférieurs. Seul l'ensemble

$$\mathcal{A}_n = \left\{ \left\{ {}^{n-1}_{0}\ {}^{1} \right\}, \left\{ {}^{n-2}_{0}\ {}^{2} \right\}, \dots, \left\{ {}^{1}_{0}\ {}^{n-1} \right\} \right\} \cup \left\{ \left\{ {}^{0}_{n-1}\ {}^{n} \right\}, \left\{ {}^{0}_{n-2}\ {}^{n} \right\}, \dots, \left\{ {}^{0}_{1}\ {}^{n} \right\} \right\} \cup \left\{ \left\{ {}^{0}_{0}\ {}^{n} \right\} \right\}$$

requiert une attention particulière. Le système (3.9) fournit des relations liant les inconnues des sous-ensembles présentés de $\mathcal{A}_n$ et définir un élément dans chaque sous ensemble permet de définir la totalité du sous-ensemble. L'élément $\left\{ {}^{0}_{0}\ {}^{n} \right\}$ est à part car il peut aussi bien appartenir au premier sous-ensemble qu'au second. Le système fournit aussi une expression faite d'éléments d'ordres inférieurs ou déjà définis pour le produit $\left\{ {}^{n-1}_{0}\ {}^{1} \right\} \left\{ {}^{0}_{n-1}\ {}^{n} \right\}$, mais n'indique aucune prescription particulière pour sa factorisation. Ainsi, la valeur prise par le sous-ensemble $\mathcal{A}_n$ dépend d'un choix pour la factorisation du produit $\left\{ {}^{n-1}_{0}\ {}^{1} \right\} \left\{ {}^{0}_{n-1}\ {}^{n} \right\}$. C'est le dernier degré de liberté restant pour la solution et il se présente à tout ordre strictement supérieur à un.

3.5.1 Changement de variables

À l'ordre 2, les éléments $\left\{ {}^{2}_{1}\ {}^{0} \right\}$ et $\left\{ {}^{1}_{0}\ {}^{1} \right\}$ commutent (ils appartiennent à $\mathbf{kB}_2^+$ qui est abélienne) et nous reportons la discussion sur cette propriété à la sous-section suivante. Ormis ce fait, rien (excepté la polynomialité de la solution) ne nous empêche de choisir $\left\{ {}^{2}_{1}\ {}^{0} \right\} = 1$ et d'assigner le reste du produit (voir (3.14)) à $\left\{ {}^{1}_{0}\ {}^{1} \right\}$. Puisque les variables à l'ordre 3 sont définies à l'aide de variables d'ordre 2 (et moins). Ainsi, ce choix particulier aura un effet sur les éléments d'ordre 3 et supérieurs. De plus, à l'ordre 3, nous avons aussi une liberté pour factoriser le produit $\left\{ {}^{2}_{0}\ {}^{1} \right\} \left\{ {}^{0}_{2}\ {}^{3} \right\}$ dont l'expression est par ailleurs dépendante du choix effectué à l'ordre précédent. Cela semble mener à une infinité de solutions, mais nous allons voir qu'elles correspondent simplement à l'expression de (3.29) dans des bases différentes.

Proposition 25. *Soit un ensemble d'éléments inversibles* $\{\mathrm{W}(k) \in \mathbf{kB}_k\}_{k=0}^{n}$. *Si les éléments de matrice* $\left\{ {}^{x}_{z}\ {}^{y} \right\}$, $x + y \leq n$ *sont une solution du système* (3.9) *jusqu'à l'ordre* n, *alors*

$$\left\{ {}^{x}_{z}\ {}^{y} \right\}' = \mathrm{W}(x)\mathrm{W}(y)^{\uparrow x} \left\{ {}^{x}_{z}\ {}^{y} \right\} \mathrm{W}(z)^{-1} \mathrm{W}(x+y-z)^{-1\uparrow z},$$

où $x + y \leq n$ *est aussi une solution de* (3.9).

Démonstration. Notons tout d'abord que $\mathrm{W}(n)\mathrm{W}(m)^{\uparrow n} = \mathrm{W}(m)^{\uparrow n}\mathrm{W}(n)$, puisque le plus grand indice des générateurs de $\mathrm{W}(n)$ est au plus $n-1$ et le plus petit de $\mathrm{W}(m)^{\uparrow n}$ au moins $n+1$. Cette remarque est aussi vraie pour les inverses. La preuve est alors directe et consiste à remplacer $\left\{ {}^{x}_{z}\ {}^{y} \right\}$ par $\left\{ {}^{x}_{z}\ {}^{y} \right\}'$ dans (3.9). Les nouveaux termes W qui dépendent des indices de sommation k se simplifient directement grâce à la

commutation à distance susmentionnée. Ceux qui restent peuvent être extraits des sommes et sont les mêmes de chaque côtés de l'équation. □

Proposition 26. *Définissons un ensemble d'éléments inversibles* $\{\mathrm{W}(k) \in \mathbf{kB}_k\}_{k=0}^{\infty}$ *tels que* $\mathrm{W}(k) = 1$ *si* $k < n$. *Alors, le changement de variables de la proposition* (25) *coïncide avec la solution alternative de* (3.9) *où l'on choisit une prescription différente de* (3.29) *pour la factorisation du produit* $\left\{ {n-1 \atop 0} \; {1 \atop} \right\}\left\{ {0 \atop n-1} \; {n \atop} \right\}$.

Démonstration. Nous dénoterons par une apostrophe la solution obtenue de (3.29) par un changement de variables et par une étoile celle obtenue pour une assignation différente pour $\left\{ {n-1 \atop 0} \; {1 \atop} \right\}$ et $\left\{ {0 \atop n-1} \; {n \atop} \right\}$.

Puisque $\mathrm{W}(k) = 1$ si $k < n$, toutes les variables d'ordre strictement inférieur à n ne sont pas affectées par le changement de variables.

À l'ordre n, les seuls éléments qui dépendent de l'assignation de $\left\{ {n-1 \atop 0} \; {1 \atop} \right\}$ et $\left\{ {0 \atop n-1} \; {n \atop} \right\}$ forment l'ensemble $\mathcal{A}_n$ évoqué plus haut. Du point de vue du changement de variables, les seuls éléments $\left\{ {x \atop z} \; {n-x \atop} \right\}$ modifiés sont ceux pour lesquels $x = 0$ ou $x = n$ ou $z = 0$ ou $z = n$. Cependant, $x = n \Rightarrow z = 0$ puisque $z \leq n - x$, et alors $\left\{ {n \atop 0} \; {0 \atop} \right\}' = \mathrm{W}(n)\left\{ {n \atop 0} \; {0 \atop} \right\}\mathrm{W}(n)^{-1}$ mais $\left\{ {n \atop 0} \; {0 \atop} \right\}$ commute avec $\mathrm{W}(n)$ et n'est donc pas modifié. Similairement, $z = n \Rightarrow x = 0$ et $\left\{ {0 \atop n} \; {n \atop} \right\}$ n'est pas modifié. Il ne reste ainsi que les éléments pour lesquels ($x = 0$ et $z \neq n$) ou ($z = 0$ et $x \neq n$), c'est-à-dire précisément l'ensemble $\mathcal{A}_n$.

Il est clair que le changement de variables correspond au choix alternatif pour $\left\{ {n-1 \atop 0} \; {1 \atop} \right\}$ et $\left\{ {0 \atop n-1} \; {n \atop} \right\}$ puisque

$$\begin{aligned}\left\{ {n-1 \atop 0} \; {1 \atop} \right\}^{\star}\left\{ {0 \atop n-1} \; {n \atop} \right\}^{\star} &= \left\{ {n-1 \atop 0} \; {1 \atop} \right\}\left\{ {0 \atop n-1} \; {n \atop} \right\} = \\ &= \left\{ {n-1 \atop 0} \; {1 \atop} \right\}\mathrm{W}(n)^{-1}\mathrm{W}(n)\left\{ {0 \atop n-1} \; {n \atop} \right\} = \left\{ {n-1 \atop 0} \; {1 \atop} \right\}'\left\{ {0 \atop n-1} \; {n \atop} \right\}',\end{aligned}$$

mais nous devons nous assurer que cette propriété se propage correctement aux autres éléments, à commencer par l'ensemble $\mathcal{A}_n$.

Pour définir les éléments $\left\{ {n-\omega_5 \atop 0} \; {\omega_5 \atop} \right\}^{\star}$, $2 \leq \omega_5 \leq n - 1$, nous utilisons les relations (3.18). Nous les réécrivons pour collecter tous les $\left\{ {n-\omega_5 \atop 0} \; {\omega_5 \atop} \right\}^{\star}$ dans le membre de droite :

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{\omega_5-1} \left\{ {0 \atop \omega_5-k} \; {\omega_5 \atop} \right\}^{\uparrow n-\omega_5}\left\{ {n-\omega_5 \atop 0} \; {\omega_5-k \atop} \right\}\left\{ {n-k \atop 0} \; {k \atop} \right\}^{\star} = \\ &\qquad = \left(\left\{ {n-\omega_5 \atop 0} \; {0 \atop} \right\}\left(q - \left\{ {0 \atop 0} \; {\omega_5 \atop} \right\}^{\uparrow n-\omega_5}\right) - \left\{ {n \atop 0} \; {0 \atop} \right\}\left\{ {0 \atop \omega_5} \; {\omega_5 \atop} \right\}\right)\left\{ {n-\omega_5 \atop 0} \; {\omega_5 \atop} \right\}^{\star}. \qquad (3.46)\end{aligned}$$

Notons que les inconnues du n-ième ordre apparaissent seulement aux positions les plus à droite des deux côtés (les termes diagonaux sont déjà définis, qui plus est in-

changés). Pour $\omega_5 = 2$,

$$\left\{ {0 \atop 1} \; {2} \right\}^{\uparrow n-2} \left\{ {n-2 \atop 0} \; {1} \right\} \left\{ {n-1 \atop 0} \; {1} \right\}^{\star} = \left(\left\{ {n-2 \atop 0} \; {0} \right\} \left(q - \left\{ {0 \atop 0} \; {2} \right\}^{\uparrow n-2} \right) - \left\{ {n \atop 0} \; {0} \right\} \left\{ {0 \atop 2} \; {2} \right\} \right) \left\{ {n-2 \atop 0} \; {2} \right\}^{\star}. \tag{3.47}$$

Exprimer $\left\{ {n-1 \atop 0} \; {1} \right\}^{\star}$ comme $\left\{ {n-1 \atop 0} \; {1} \right\}'$ dans le membre de gauche mène simplement à une multiplication à droite par $\mathrm{W}(n)^{-1}$ du membre de gauche avec la solution (3.29). Puisque l'égalité sied dans une algèbre à division, il n'y a alors pas d'ambiguïté à définir $\left\{ {n-2 \atop 0} \; {2} \right\}^{\star} = \left\{ {n-2 \atop 0} \; {2} \right\} \mathrm{W}(n)^{-1} = \left\{ {n-2 \atop 0} \; {2} \right\}'$. Puisque toutes les inconnues restantes de la forme $\left\{ {n-\omega_5' \atop 0} \; {\omega_5'} \right\}^{\star}$, $3 \leq \omega_5' \leq n-1$ sont définies inductivement à partir de cette relation impliquant des éléments $\left\{ {n-\omega_5 \atop 0} \; {\omega_5} \right\}^{\star}$, $\omega_5 < \omega_5'$, nous déduisons $\left\{ {n-\omega_5 \atop 0} \; {\omega_5} \right\}^{\star} = \left\{ {n-\omega_5 \atop 0} \; {\omega_5} \right\} \mathrm{W}(n)^{-1} = \left\{ {n-\omega_5 \atop 0} \; {\omega_5} \right\}'$, $2 \leq \omega_5 \leq n-1$.

La même méthode peut être appliquée avec les relations (3.20) et une multiplication à gauche par $\mathrm{W}(n)$ pour obtenir $\left\{ {0 \atop n-\omega_6} \; {n} \right\}^{\star} = \mathrm{W}(n) \left\{ {0 \atop n-\omega_6} \; {n} \right\} = \left\{ {0 \atop n-\omega_6} \; {n} \right\}'$, $2 \leq \omega_6 \leq n-1$ (notons que $\omega_6 = n$ implique aussi une multiplication à droite par $\mathrm{W}(n)^{-1}$, comme dans le cas précédent). Ainsi, à l'ordre n, l'ensemble $\mathcal{A}_n$ est modifié concordement à la proposition, et la solution alternative coïncide avec un changement de variables.

Aux ordres suivants, les termes diagonaux demeurent inchangés. En effet, les composants des W satisfont à la fois (1.26) et (1.24) et ainsi,

$$\mathrm{W}(m)\mathrm{W}(p)^{\uparrow m} \left\{ {m \atop p} \; {p} \right\} \mathrm{W}(p)^{-1} \mathrm{W}(m)^{-1\uparrow p} = \mathrm{W}(m)\mathrm{W}(m)^{-1} \left\{ {m \atop p} \; {p} \right\} \mathrm{W}(p)\mathrm{W}(p)^{-1} = \left\{ {m \atop p} \; {p} \right\}$$

et la solution alternative coïncide avec le changement de variables pour les termes diagonaux, à tout ordre.

À l'ordre $n+1$, nous réécrivons (3.17) pour collecter les termes d'ordre $n+1$ dans le membre de droite :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\omega_4} \left\{ {0 \atop n+1-\omega_3-k} \; {n+1-\omega_3} \right\}^{\star\uparrow\omega_3} \left\{ {\omega_3 \atop n+1-\omega_3-\omega_4} \; {n+1-\omega_3-k} \right\}^{\star} \left\{ {\omega_3+\omega_4-k \atop 0} \; {k} \right\}^{\star\uparrow n+1-\omega_3-\omega_4} &= \\ = \left(\left\{ {\omega_3 \atop 0} \; {0} \right\} \left\{ {0 \atop n+1-\omega_3-\omega_4} \; {n+1-\omega_3-\omega_4} \right\} - \left\{ {\omega_3+\omega_4 \atop 0} \; {0} \right\} \left\{ {0 \atop n+1-\omega_3} \; {n+1-\omega_3} \right\} \right) &\times \\ \times \left\{ {\omega_3 \atop n+1-\omega_3-\omega_4} \; {n+1-\omega_3} \right\}^{\star}, \end{aligned} \tag{3.48}$$

avec $1 \leq \omega_3 \leq n-1$ et $1 \leq \omega_4 \leq n-\omega_3$. Nous avons déjà vu que jusqu'à l'ordre n, la solution alternative coïncidait avec un changement de variables. Puisque tous les éléments du membre de gauche de cette équation sont au plus d'ordre n, nous pouvons décrire l'effet d'un choix différent de factorisation à l'aide d'un changement de variables. En vertu de commutations à distance et d'annulations, nous trouvons

alors que chaque sommand est multiplié à gauche par $\mathrm{W}(\omega_3)\mathrm{W}(n+1-\omega_3)^{\uparrow\omega_3}$ et à droite par $\mathrm{W}(n+1-\omega_3-\omega_4)^{-1}\mathrm{W}(\omega_3+\omega_4)^{-1\uparrow n+1-\omega_3-\omega_4}$, tous deux indépendants de l'indice de sommation. Dans le membre de droite, le premier facteur est composé d'un terme diagonal (qui plus est scalaire) qui n'est pas affecté par un différent choix de factorisation. Le seul terme restant est alors $\left\{ {\omega_3 \atop n+1-\omega_3-\omega_4} \; {n+1-\omega_3 \atop} \right\}$ qui est, pour un autre choix de factorisation, multiplié des deux côtés par les mêmes éléments que le membre de gauche, comme prédit par un changement de variables.

Pour pouvoir étendre cette propriété aux ordre supérieurs, nous devons finalement vérifier que l'ensemble $\mathcal{A}_{n+1}$ est modifié de la même manière par un choix différent de factorisation et par un changement de variables. La relation (3.19) donne pour le produit $\left\{ {n \atop 0} \; {1 \atop} \right\}^\star \left\{ {0 \atop n} \; {n+1 \atop} \right\}^\star$

$$q\left\{ {n \atop 0} \; {1 \atop} \right\}^\star \left\{ {0 \atop n} \; {n+1 \atop} \right\}^\star = \left\{ {0 \atop 0} \; {1 \atop} \right\} \left(\left\{ {0 \atop n} \; {n \atop} \right\} \left\{ {n \atop 0} \; {0 \atop} \right\} - \left\{ {n \atop 1} \; {1 \atop} \right\} \left\{ {1 \atop n} \; {n \atop} \right\} \right) + \left\{ {0 \atop n-1} \; {n \atop} \right\}^\star \left\{ {1 \atop 1} \; {1 \atop} \right\}^{\uparrow n-1} \left\{ {n-1 \atop 0} \; {1 \atop} \right\}^\star .$$

Dans le membre de droite de cette relation, le dernier terme est celui de (3.29) multiplié à gauche par $\mathrm{W}(n)$ et à droite par $\mathrm{W}(n)^{-1}$. Le premier terme, bien qu'inchangé, est multiplié des deux côtés de la même manière. Ainsi,

$$\left\{ {n \atop 0} \; {1 \atop} \right\}^\star \left\{ {0 \atop n} \; {n+1 \atop} \right\}^\star = \mathrm{W}(n) \left\{ {n \atop 0} \; {1 \atop} \right\} \left\{ {0 \atop n} \; {n+1 \atop} \right\} \mathrm{W}(n)^{-1},$$

ce qui est compatible avec le changement de variables susmentioné. Bien sûr, nous rencontrons un nouveau degré de liberté, mais la fin de cette preuve assurera que tout nouveau choix de factorisation pourra être construit comme un autre changement de variables commençant à l'ordre $n+1$.

Maintenant, à l'ordre n, nous définissons $\left\{ {n+1-\omega_5 \atop 0} \; {\omega_5 \atop} \right\}^\star$, $2 \le \omega_5 \le n$ à l'aide des relations (3.18)

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\omega_5-1} \left\{ {0 \atop \omega_5-k} \; {\omega_5 \atop} \right\}^{\star\uparrow n+1-\omega_5} \left\{ {n+1-\omega_5 \atop 0} \; {\omega_5-k \atop} \right\}^\star \left\{ {n+1-k \atop 0} \; {k \atop} \right\}^\star &= \\ = \left(\left\{ {n+1-\omega_5 \atop 0} \; {0 \atop} \right\} \left(q - \left\{ {0 \atop 0} \; {\omega_5 \atop} \right\}^{\star\uparrow n+1-\omega_5} \right) - \left\{ {n+1 \atop 0} \; {0 \atop} \right\} \left\{ {0 \atop \omega_5} \; {\omega_5 \atop} \right\} \right) \left\{ {n+1-\omega_5 \atop 0} \; {\omega_5 \atop} \right\}^\star . \end{aligned} \tag{3.49}$$

Si $\omega_5 = 2$,

$$\left\{ {0 \atop 1} \; {2 \atop} \right\}^{\uparrow n-1} \left\{ {n-1 \atop 0} \; {1 \atop} \right\}^\star \left\{ {n \atop 0} \; {1 \atop} \right\}^\star = \left(\left\{ {n-1 \atop 0} \; {0 \atop} \right\} \left(q - \left\{ {0 \atop 0} \; {2 \atop} \right\}^{\uparrow n-1} \right) - \left\{ {n+1 \atop 0} \; {0 \atop} \right\} \left\{ {0 \atop 2} \; {2 \atop} \right\} \right) \left\{ {n-1 \atop 0} \; {2 \atop} \right\}^\star .$$

Nous savons déjà comment le membre de gauche est transformé pour la solution alternative : il est multiplié à droite par $\mathrm{W}(n+1)^{-1}$ (la présence d'un terme supplémentaire de ce côté n'y change rien). Ainsi, la propriété observée à l'ordre n se perpetue à l'ordre suivant, au moins pour $\omega_5 = n-1$. Pour $\omega_5 = n$, le membre de gauche est

en plus multiplié à gauche par $\mathrm{W}(n)^{\uparrow 1}$. En multipliant concordement le membre de droite, et en insérant $\mathrm{W}(n)^{-1\uparrow 1}\mathrm{W}(n)^{\uparrow 1}$ après le facteur entre parenthèses, nous aboutissons à la même conclusion : $\left\{\begin{smallmatrix} n+1-\omega_5 & \omega_5 \\ 0 & \end{smallmatrix}\right\}^{\star} = \left\{\begin{smallmatrix} n+1-\omega_5 & \omega_5 \\ 0 & \end{smallmatrix}\right\}\mathrm{W}(n+1)^{-1} = \left\{\begin{smallmatrix} n+1-\omega_5 & \omega_5 \\ 0 & \end{smallmatrix}\right\}'$, $2 \leq \omega_5 \leq n$.

Comme précédement, cette procédure peut être menée avec les relations (3.20) pour obtenir $\left\{\begin{smallmatrix} 0 & n+1 \\ n+1-\omega_6 & \end{smallmatrix}\right\}^{\star} = \mathrm{W}(n+1)\left\{\begin{smallmatrix} 0 & n+1 \\ n+1-\omega_6 & \end{smallmatrix}\right\} = \left\{\begin{smallmatrix} 0 & n+1 \\ n+1-\omega_6 & \end{smallmatrix}\right\}'$, $2 \leq \omega_6 \leq n$, (et comme avant, $\omega_6 = n+1$ mène à une multiplication supplémentaire et compatible à droite par $\mathrm{W}(n+1)^{-1}$) , ce qui finit de montrer que la solution alternative à l'ordre $n+1$ coïncide avec le changement de variables présenté. Dès lors, la résolution des équations (3.48) à l'ordre $n+1$ construit une relation de récurrence qui propage le choix de factorisation aux ordres successifs comme un changement de variables. □

Corollaire 27. *Soit* $\mathrm{F}(k,n) = \prod_{\alpha=n}^{k}\left\{\begin{smallmatrix} \alpha-1 & 1 \\ 0 & \end{smallmatrix}\right\}$ *et* $\mathrm{G}(k,n) = \prod_{\alpha=n}^{k}\left\{\begin{smallmatrix} 0 & \alpha \\ \alpha-1 & \end{smallmatrix}\right\}^{-1}$, *avec* $n \geq 2$ *et* $\left\{\begin{smallmatrix} x & y \\ z & \end{smallmatrix}\right\}$ *définis par la solution* (3.29). *Alors en vertu de* (25), *le changement de variables pour lequel* $\mathrm{W}(k) = \mathrm{F}(k,n)$ *correspond à la solution où* $\left\{\begin{smallmatrix} n-2 & 1 \\ 0 & \end{smallmatrix}\right\}' = \left\{\begin{smallmatrix} n-2 & 1 \\ 0 & \end{smallmatrix}\right\}$ *et* $\left\{\begin{smallmatrix} n-1 & 1 \\ 0 & \end{smallmatrix}\right\}' = 1$. *Similairement, le changement de variables pour lequel* $\mathrm{W}(k) = \mathrm{G}(k,n)$ *correspond à la solution pour laquelle* $\left\{\begin{smallmatrix} 0 & n-1 \\ n-2 & \end{smallmatrix}\right\}' = \left\{\begin{smallmatrix} 0 & n-1 \\ n-2 & \end{smallmatrix}\right\}$ *et* $\left\{\begin{smallmatrix} 0 & n \\ n-1 & \end{smallmatrix}\right\}' = 1$.

3.5.2 Un palindrome

Comme annoncé plus haut, à l'ordre 2 nous avons une possibilité de plus car les éléments de matrices commutent. Ainsi, nous pouvons choisir $\left\{\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \end{smallmatrix}\right\}^{\star} \propto \left\{\begin{smallmatrix} 0 & 2 \\ 1 & \end{smallmatrix}\right\}$ et $\left\{\begin{smallmatrix} 0 & 2 \\ 1 & \end{smallmatrix}\right\}^{\star} \propto \left\{\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \end{smallmatrix}\right\}$. Nous allons maintenant voir de quelle manière cette liberté est prise en compte par un changement de variables.

Soit ι_{h} l'anti-automorphisme canonique de $\mathbf{kB}_{\infty}$ et $\mathrm{S}(n)$ le symétriseur d'ordre n (voir chapitre 2). Nous rappelons que $\iota_{\mathrm{h}}\beta_{a,b} = \beta_{b,a}$ et $\iota_{\mathrm{h}}\mathrm{S}(n) = \mathrm{S}(n)$. Considérons alors le produit

$$\Xi_n = \left\{\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \end{smallmatrix}\right\}\left\{\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \end{smallmatrix}\right\}\left\{\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 0 & \end{smallmatrix}\right\}\cdots\left\{\begin{smallmatrix} n-1 & 1 \\ 0 & \end{smallmatrix}\right\} \times \left\{\begin{smallmatrix} 0 & n \\ n-1 & \end{smallmatrix}\right\}\cdots\left\{\begin{smallmatrix} 0 & 3 \\ 2 & \end{smallmatrix}\right\}\left\{\begin{smallmatrix} 0 & 2 \\ 1 & \end{smallmatrix}\right\}\left\{\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \end{smallmatrix}\right\}. \tag{3.50}$$

Proposition 28. *Le produit* Ξ_n *est invariable sous un changement de base.*

Démonstration. Directe en utilisant (25). Nous collectons un scalaire à gauche et son inverse à droite, les autres termes s'annulant mutuellement. □

Nous choisissons alors la solution (3.29), pour laquelle $\left\{\begin{smallmatrix} n-1 & 1 \\ 0 & \end{smallmatrix}\right\} = q^n \cdot {}^{n-1}\Pi_1$ et $\left\{\begin{smallmatrix} 0 & n \\ n-1 & \end{smallmatrix}\right\} = q^n \cdot \Pi_1 Ш_{n-1,1}$. Il est alors facile de constater que $\Xi_n = q^{n(n+1)}(\Pi_1)^n \cdot \Pi_n \mathrm{S}(n)$, où $\Pi_n = \prod_{k=0}^{n-1}(1 - q^2\beta_{1,k})$ est un symbole de Pochhammer tressé.

Proposition 29. *L'élement Ξ_n est un palindrome dans* $\mathbf{kB}_\infty$*, c'est-à-dire* $\iota_{\mathrm{h}}\Xi_n = \Xi_n$ *ou plus explicitement,* $\mathrm{S}(n)\iota_{\mathrm{h}}\Pi_n = \Pi_n\mathrm{S}(n)$.

Démonstration. Nous procédons par récurrence avec des symboles de Pochhammer génériques. Les cas $n = 0, 1, 2$ étant clairement vrais, on suppose que pour n arbitraire, $\mathrm{S}(n)\iota_{\mathrm{h}}\Pi(s)_n = \Pi(s)_n\mathrm{S}(n)$. Alors, pour $n+1$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{S}(n+1)\iota_{\mathrm{h}}\Pi(s)_{n+1} &= \mathrm{S}(n+1)(1 - s\beta_{n,1})\iota_{\mathrm{h}}\Pi(s)_n \\
&\overset{(2.31)(2.31)}{=} \text{Ш}_{n,1}\mathrm{S}(n)\iota_{\mathrm{h}}\Pi(s)_n - s\text{Ш}_{1,n}\mathrm{S}(n)^{\uparrow 1}\beta_{n,1}\iota_{\mathrm{h}}\Pi(s)_n \\
&\overset{(\text{h.r.})}{=} \text{Ш}_{n,1}\Pi(s)_n\mathrm{S}(n) - s\text{Ш}_{1,n}\beta_{n,1}\Pi(s)_n\mathrm{S}(n) \\
&= \left(\text{Ш}_{n,1} - s\text{Ш}_{1,n}\beta_{n,1}\right)\Pi(s)_n\mathrm{S}(n).
\end{aligned} \tag{3.51}$$

Nous avons besoin du lemme suivant :

Lemme 30.

$$\left(\text{Ш}_{n,1} - s\text{Ш}_{1,n}\beta_{n,1}\right)\Pi(s)_n = \Pi(s)_{n+1}\text{Ш}_{n,1}. \tag{3.52}$$

Démonstration. Nous procédons encore par récurrence. Notons que les relations de Pascal (2.25) et (2.23) impliquent que

$$\text{Ш}_{n+1,1} = 1 + \text{Ш}_{n,1}\beta_{1,1}^{\uparrow n} = \text{Ш}_{n,1}^{\uparrow 1} + \beta_{n+1,1}, \tag{3.53}$$

et

$$\text{Ш}_{1,n+1} = \text{Ш}_{1,n} + \beta_{1,n+1}. \tag{3.54}$$

Supposons que (3.52) soit vraie pour n arbitraire (elle est vraie pour $n = 0$), alors pour $n+1$,

$$\begin{aligned}
&\left(\text{Ш}_{n+1,1} + s\text{Ш}_{1,n+1}\beta_{n+1,1}\right)\Pi(s)_{n+1} = \\
&\qquad \overset{(3.53)(3.54)}{=} \Pi(s)_{n+1}\left(1 - s\beta_{1,n+1}\beta_{n+1,1}\right) + \\
&\qquad\qquad + \left[\left(\text{Ш}_{n,1} - s\text{Ш}_{1,n}\beta_{n,1}\right)\Pi(s)_n\right]\beta_{1,1}^{\uparrow n}(1 - s\beta_{1,n}) \\
&\qquad \overset{(\text{h.r.})}{=} \Pi(s)_{n+1}\left(1 - s\beta_{1,n+1}\beta_{n+1,1} + \text{Ш}_{n,1}\beta_{1,1}^{\uparrow n}(1 - s\beta_{1,n})\right) \\
&\qquad = \Pi(s)_{n+1}\left(\left[1 + \text{Ш}_{n,1}\beta_{1,1}^{\uparrow n}\right] - s\beta_{1,n+1}\left[\text{Ш}_{n,1}^{\uparrow 1} + \beta_{n+1,1}\right]\right) \\
&\qquad \overset{(3.53)(3.53)}{=} \Pi(s)_{n+1}\left(1 - s\beta_{1,n+1}\right)\text{Ш}_{n+1,1} = \Pi(s)_{n+2}\text{Ш}_{n+1,1},
\end{aligned} \tag{3.55}$$

comme attendu. □

En injectant (3.52) dans (3.51), nous pouvons alors réécrire

$$\mathrm{S}(n+1)\iota_{\mathrm{h}}\Pi(s)_{n+1} = \Pi(s)_{n+1}\text{Ш}_{n,1}\mathrm{S}(n) = \Pi(s)_{n+1}\mathrm{S}(n+1),$$

ce qui finit la preuve de la proposition. □

Corollaire 31. *Il existe un changement de base pour lequel* $\left\{ {k-1 \atop 0} \; {1 \atop} \right\}' = \iota_{\mathrm{h}} \left\{ {0 \atop k-1} \; {k \atop} \right\}$ *et* $\left\{ {0 \atop k-1} \; {k \atop} \right\}' = \iota_{\mathrm{h}} \left\{ {k-1 \atop 0} \; {1 \atop} \right\}$ *pour chaque* $k \leq n$. *Ce changement de base correspond à* $\mathrm{W}(n) = \mathrm{S}(n)^{-1} \cdot \Pi_n = \iota_{\mathrm{h}} \Pi_n \cdot \mathrm{S}(n)^{-1}$.

Dans $\mathbf{kB}_2^+$ l'action de ι_{h} est triviale puisqu'il n'y a qu'un générateur, et le corrolaire indique alors que la solution pour laquelle $\left\{ {1 \atop 0} \; {1 \atop} \right\}^\star = \left\{ {0 \atop 1} \; {2 \atop} \right\}$ et $\left\{ {0 \atop 1} \; {2 \atop} \right\}^\star = \left\{ {1 \atop 0} \; {1 \atop} \right\}$ correspond à un changement de base. Les symboles de Pochhammer tressés ainsi que les symétriseurs pouvant être définis pour une valeur de n arbitrairement grande, nous concluons que cette solution correspond à celle pour laquelle $\left\{ {x \atop z} \; {y \atop} \right\}^\star = \iota_{\mathrm{h}} \left\{ {z \atop x} \; {x+y-z \atop} \right\}$.

Ainsi, nous avons vu dans cette section que la liberté offerte pour la factorisation des produits $\left\{ {n-1 \atop 0} \; {1 \atop} \right\} \left\{ {0 \atop n-1} \; {n \atop} \right\}$ pour chaque n pouvait entièrement être prise en compte par un changement de variables. Nous allons voir dans la section suivante que la solution (3.29) possède une propriété unique.

3.6 Inverse

Nous avons vu que toutes les solutions du système (3.9) sont de la forme (3.29). Nous constatons aisément qu'en renommant les copies des espaces dans un ordre décroissant, on trouve une solution correspondant à un tressage dont l'image est formée par des tenseurs dont l'ordre lexical croît. Plus précisément, si on postule des relations de commutation de la forme

$$x_{b\rangle} y_{c\rangle}^{\uparrow b} \mapsto \sum_{k=0}^{b} \left\{ {b \atop c+k} \; {c \atop} \right\}_* y_{c+k\rangle} x_{b-k\rangle}^{\uparrow c+k}, \tag{3.56}$$

elles forment un tressage si

$$\left\{ {x \atop z} \; {y \atop} \right\}_* = q_*^{(1+y+x+y-z)} \cdot \text{Ш}_*(z-y, x+y-z) \cdot \beta_{*y,x+y-z}^{\uparrow z-y} \cdot \prod_{\epsilon=y}^{z-1} \left(1 - q_*^2 \cdot \beta_{*\epsilon,1}\right). \tag{3.57}$$

Bien entendu, étant données des valeurs pour q_* et $\beta_{*1,1}$, tous les tressages de la forme (3.56), dépendant à chaque ordre du choix de factorisation du produit $\left\{ {1 \atop n} \; {n-1 \atop} \right\}_* \left\{ {n \atop 1} \; {0 \atop} \right\}_*$, peuvent être obtenues par un changement de variables dans (3.57). Puisque l'inverse d'un tressage est aussi un tressage, et en vertu de la triangularité de la solution (3.29), son inverse est de la forme (3.57). Nous devons donc trouver un éventuel changement de variables dans (3.57) pour en faire l'inverse de (3.29).

Soient $\left[{x \atop z} \; {y \atop} \right]$ les éléments de l'inverse, nous avons

$$\sum_{i=0}^{n} \left\{ {x \atop i} \; {n-x \atop} \right\} \left[{i \atop y} \; {n-i \atop} \right] = \delta_{xy}. \tag{3.58}$$

Les termes diagonaux permettent de fixer $q_* = q^{-1}$ et $\beta_{*1,1} = \beta_{1,1}^{-1}$. On a alors $\beta_{*a,b} = \beta_{b,a}^{-1}$. Pour $x = n-1$ et $y = n$, (3.58) donne

$$\sum_{i=0}^{n} \left\{ {n-1 \atop i} \; {1 \atop} \right\} \left[{i \atop n} \; {n-i \atop} \right] = \left\{ {n-1 \atop 0} \; {1 \atop} \right\} \left[{0 \atop n} \; {n \atop} \right] + \left\{ {n-1 \atop 1} \; {1 \atop} \right\} \left[{1 \atop n} \; {n-1 \atop} \right] = 0,$$

c'est-à-dire

$$\left[{1 \atop n} \; {n-1 \atop} \right] = -\left(\left\{ {n-1 \atop 1} \; {1 \atop} \right\} \right)^{-1} \left\{ {n-1 \atop 0} \; {1 \atop} \right\} \left[{0 \atop n} \; {n \atop} \right].$$

Le membre de droite de cette équation est complètement déterminé et permet de trouver

$$\left[{1 \atop n} \; {n-1 \atop} \right] = q^{-n} \left(1 - q^{-2} \cdot \beta_{1,n-1}^{-1} \right) = q_*^{n} \left(1 - q_*^{2} \cdot \beta_{*n-1,1} \right) = \left\{ {1 \atop n} \; {n-1 \atop} \right\}_*.$$

On en déduit deux conséquences : $\left[{1 \atop n} \; {n-1 \atop} \right]$ est complètement déterminé, et ainsi tous les éléments à cet ordre le sont. De plus, aucun changement de variables n'est nécessaire et

$$\left[{x \atop z} \; {y \atop} \right] = \left\{ {x \atop z} \; {y \atop} \right\}_*.$$

Proposition 32. *À un changement scalaire de variables ou un twist près, la solution* (3.29) *est la seule solution de* (3.9) *qui soit polynomiale en* $\beta_{1,1}$ *et dont l'inverse soit polynomiale en* $\beta_{1,1}^{-1}$.

Démonstration. Nous constatons directement que l'inverse définie par (3.57) avec $q_* = q^{-1}$ et $\beta_{*1,1} = \beta_{1,1}^{-1}$ est un polynôme en $\beta_{1,1}^{-1}$. La proposition (26) indique que tout choix différent pour la factorisation du produit $\left\{ {n-1 \atop 0} \; {1 \atop} \right\} \left\{ {0 \atop n-1} \; {n \atop} \right\}$ est équivalent à un changement de variables dans la solution (3.29).

Supposons un autre choix de factorisation à l'ordre n, alors $\mathrm{W}(n)$ est par définition un polynôme en $\left[\beta_{1,1}, \beta_{1,1}^{-1}\right]$ et nous pouvons imposer sans perte de généralité $\mathrm{W}(x) = 1$ pour $x < n$. Nous avons $\left\{ {n-1 \atop 0} \; {1 \atop} \right\} = q^n(1 - q^2\beta_{1,n-1})$ qui est premier (ou atomique) dans l'algèbre du monoïde $\mathbf{B}_\infty^+$. Si on souhaite que $\left\{ {n-1 \atop 0} \; {1 \atop} \right\}^\star = \left\{ {n-1 \atop 0} \; {1 \atop} \right\} \mathrm{W}(n)^{-1}$ reste polynomial, soit $\mathrm{W}(n)^{-1}$ est un polynôme en $\beta_{1,1}$, soit $\mathrm{W}(n)^{-1}$ est un polynôme en $\left[\beta_{1,1}, \beta_{1,1}^{-1}\right]$ divisant à droite $(1 - q^2\beta_{1,n-1})$, c'est-à-dire $(1 - q^2\beta_{1,n-1})^{-1}$ fois un polynôme en $\beta_{1,1}$.

De l'autre côté, $\left\{ {0 \atop n-1} \; {n \atop} \right\} = q^n \text{Ш}_{n-1,1}$ est premier aussi, et $\mathrm{W}(n)$ est soit un polynôme en $\beta_{1,1}$, soit un polynôme en $\left[\beta_{1,1}, \beta_{1,1}^{-1}\right]$ divisant à gauche $\text{Ш}_{n-1,1}$, c'est-à-dire un polynôme en $\beta_{1,1}$ fois $\text{Ш}_{n-1,1}{}^{-1}$.

L'intersection de ces conditions pour $n > 2$ contient seulement deux cas (le troisième étant scalaire) : soit $\mathrm{W}(n) \propto (1 - q^2\beta_{1,n-1})$, soit $\mathrm{W}(n) \propto \text{Ш}_{n-1,1}{}^{-1}$. Pour le premier cas,

$$\left[{n \atop 1} \; {0 \atop} \right]^\star = \mathrm{W}(n) \left[{n \atop 1} \; {0 \atop} \right] \propto (1 - q^2\beta_{1,n-1}) \text{Ш}_*(1, n-1),$$

alors que pour le second,

$$\left[\begin{smallmatrix} 1 & n-1 \\ n & \end{smallmatrix}\right]^{\star} = \left[\begin{smallmatrix} 1 & n-1 \\ n & \end{smallmatrix}\right] \mathrm{W}(n)^{-1} \propto (1 - q^{-2}\beta_{*n-1,1})\text{Ш}_{n-1,1}.$$

Pour le premier cas, le plus haut ordre est celui de $\beta_{1,n-1}$ et pour le second, celui de $\beta_{n-1,1}$. Ainsi, dans les deux cas, le plus haut ordre pour les générateurs est $n-1$ et le résultat n'est pas un polynôme en $\beta_{1,1}^{-1}$.

Pour $n = 2$, le cas $\mathrm{W}(n) \propto (1 - q^2\beta_{1,n-1})\text{Ш}_{n-1,1}{}^{-1}$ est aussi permis, mais son action mène simplement à la transposition de la solution (3.29), reportant la propriété aux ordres suivants. □

3.7 Le cas unidimensionnel

Quand V est unidimensionnel, le générateur $\beta_{1,1} = t$ est un scalaire. La solution (3.29) prend alors la forme

$$\left\{\begin{smallmatrix} x & y \\ z & \end{smallmatrix}\right\} = q^{1+x+z}\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}_t t^{xz}\frac{(q^2;t)_{x+y-z}}{(q^2;t)_x}, \tag{3.59}$$

où $\left[\begin{smallmatrix} n \\ m \end{smallmatrix}\right]_q$ est un q-coefficient binomial et $(a;q)_n = \prod_{k=0}^{n-1}(1 - aq^k)$ un q-symbole de Pochhammer (voir chapitre 2). Ici, tous deux dépendent du paramètre t. En dévoloppant le symbole de Pochhammer à l'aide du théorème binomial, on obtient

$$\left\{\begin{smallmatrix} x & y \\ z & \end{smallmatrix}\right\} = \sum_{j=0}^{y-z}(-1)^j q^{1+x+z+2j}\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}_t\begin{bmatrix} y-z \\ j \end{bmatrix}_t = \sum_{j=0}^{y-z}(-1)^j q^{1+x+z+2j}\begin{bmatrix} y \\ z, j \end{bmatrix}_t. \tag{3.60}$$

Dans la limite $t \to 1$,

$$\left\{\begin{smallmatrix} x & y \\ z & \end{smallmatrix}\right\}_{t=1} = q^{1+x+z}\binom{y}{z}(1-q^2)^{y-z}, \tag{3.61}$$

qui, injectée dans (3.9) et après réarrangement, donne l'identité

$$\sum_k \binom{a}{k}\binom{b+k}{k-c}(1-q)^k q^{a-k} = \sum_k \binom{a}{k}\binom{b}{k-c}(1-q)^k. \tag{3.62}$$

En spécifiant $q = \frac{1}{2}$, on obtient plus particulièrement, avec $d = a - c$,

$$\sum_k \binom{a}{k}\binom{a+b-k}{d-k} = \sum_k \binom{a}{k}\binom{b}{d-k}2^k. \tag{3.63}$$

Revenons au tressage (3.61). Soit φ le nombre d'or. Les prescriptions $q = -\varphi$ et $q = \varphi^{-1} \doteq \bar{\varphi}$ permettent de simplifier d'avantage l'expression du tressage. En effet, $(1-\varphi^2) = -\varphi$ et $(1-\bar{\varphi}^2) = \bar{\varphi}$, et alors

$$\left\{\begin{smallmatrix} x & y \\ z & \end{smallmatrix}\right\}_{-\varphi} = (-1)^{1+x+y}\varphi^{1+x+y}\binom{y}{z} \tag{3.64}$$

et

$$\left\{ \begin{smallmatrix} x & y \\ z & \end{smallmatrix} \right\}_{\bar{\varphi}} = \bar{\varphi}^{1+x+y} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}. \tag{3.65}$$

Ainsi, les matrices

$$\begin{pmatrix}
-\varphi & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\
\cdot & \varphi^2 & \varphi^2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\
\cdot & \varphi^2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\
\cdot & \cdot & \cdot & -\varphi^3 & -2\varphi^3 & -\varphi^3 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\
\cdot & \cdot & \cdot & -\varphi^3 & -\varphi^3 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\
\cdot & \cdot & \cdot & -\varphi^3 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \varphi^4 & 3\varphi^4 & 3\varphi^4 & \varphi^4 & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \varphi^4 & 2\varphi^4 & \varphi^4 & \cdot & \cdots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \varphi^4 & \varphi^4 & \cdot & \cdot & \cdots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \varphi^4 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdot & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix}
\bar{\varphi} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\
\cdot & \bar{\varphi}^2 & \bar{\varphi}^2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\
\cdot & \bar{\varphi}^2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \bar{\varphi}^3 & 2\bar{\varphi}^3 & \bar{\varphi}^3 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \bar{\varphi}^3 & \bar{\varphi}^3 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \bar{\varphi}^3 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \bar{\varphi}^4 & 3\bar{\varphi}^4 & 3\bar{\varphi}^4 & \bar{\varphi}^4 & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \bar{\varphi}^4 & 2\bar{\varphi}^4 & \bar{\varphi}^4 & \cdot & \cdots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \bar{\varphi}^4 & \bar{\varphi}^4 & \cdot & \cdot & \cdots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \bar{\varphi}^4 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdot & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{pmatrix}$$

où les points représentent 0, réalisent des tressages de l'espace des polynômes non commutatifs à deux indéterminées x et y dans la base lexicale inverse ordre par ordre $\{x^0y^0, x^1y^0, x^0y^1, x^2y^0, x^1y^1, \ldots\}$.

3.8 Remarque

Proposition 33. *Soit π la projection canonique $\mathbf{kB}_\infty \to \mathbf{k}\mathfrak{S}_\infty$ et $\varpi\colon \mathbf{k}\mathfrak{S}_\infty \to \mathbf{kB}_\infty$ la section de Matsumoto correspondante (voir p.31), alors pour la solution (3.9),*

$$\varpi \circ \pi\left(\left\{ \begin{smallmatrix} x & y \\ z & \end{smallmatrix} \right\}\right) = \left\{ \begin{smallmatrix} x & y \\ z & \end{smallmatrix} \right\}.$$

Démonstration. Puisque $\left\{ {x \atop z} \; {y \atop} \right\} \in \mathbf{kB}^+_\infty$, il est suffisant de vérifier qu'aucun monôme non trivial dans la solution (3.29) n'appartient au noyau de π, c'est-à-dire que la restriction $\left\{ {x \atop z} \; {y \atop} \right\}\Big|_{\mathbf{kP}^+_\infty}$ est proportionelle à l'identité.

Au niveau des tresses géométriques, cela signifie que deux brins ne se croisent jamais plus d'une fois (la contraposée étant une condition nécessaire pour qu'une tresse non trivale soit pure). Si nous développons le symbole de Pochammer de (3.29) à l'aide de (2.63), et que nous oublions les coefficients scalaires, nous trouvons une somme de termes de la forme

$$Ш^{\uparrow x}_{z,y-z}\beta_{z,x}Ш^{\uparrow x+z}_{k,y-z-k}\beta^{\uparrow z}_{k,x}\Delta^{\uparrow z}_k = Ш^{\uparrow x}_{z,k,y-z-k}\beta_{z+k,x}\Delta^{\uparrow z}_k. \tag{3.66}$$

On adopte la convention du chapitre 1 pour les générateurs, à savoir une mutiplication verticale de haut en bas, et pour $\beta^{\uparrow i}_{1,1}$ le diagramme où le i-ème brin (en comptant en bas) passe en avant du $i+1$-ème. On comptera les brins à partir du bas et de la gauche par la suite.

Pour chaque monôme constitutif de $Ш_{a,b}$, chacun des a premiers brins peut au plus croiser une fois chacun des b brins restant, et ne croise jamais un des $a-1$ autres premiers brins. Réciproquement, aucun des b brins ne croise un des $b-1$ brins restants. Ainsi, dans $Ш_{a,b}$, si un des premiers a brins croise un des b suivants, ce sera en avant de ces derniers. La même chose est vraie pour $\beta_{a,b}$ puisque cet élément est constitutif de $Ш_{a,b}$. Enfin, l'élément Δ_a introduit pour chaque brin exactement un croisement avec chacun des $a-1$ brins restants.

Nous voyons alors que la tresse géométrique contenue dans 3.66 est constituée de quatre ensembles de respectivement z, k, x, et $y-z-k$ brins (voir figure 3.3). Les z premiers brins sont en avant de tous les autres, et ne se croisement pas. Les k brins suivants croisent en avant des $x+y-z-k$ restant, se croisant exactement une fois chacun. les deux ensembles restants ne se croisent pas. Ainsi, tout monôme de la solution (3.29) peut être représenté par une tresse géométrique dans laquelle deux brins se croisent au plus une fois. Ce monôme est alors projeté sur une décomposition réduite de $\mathbf{k}\mathfrak{S}_n$. □

❧

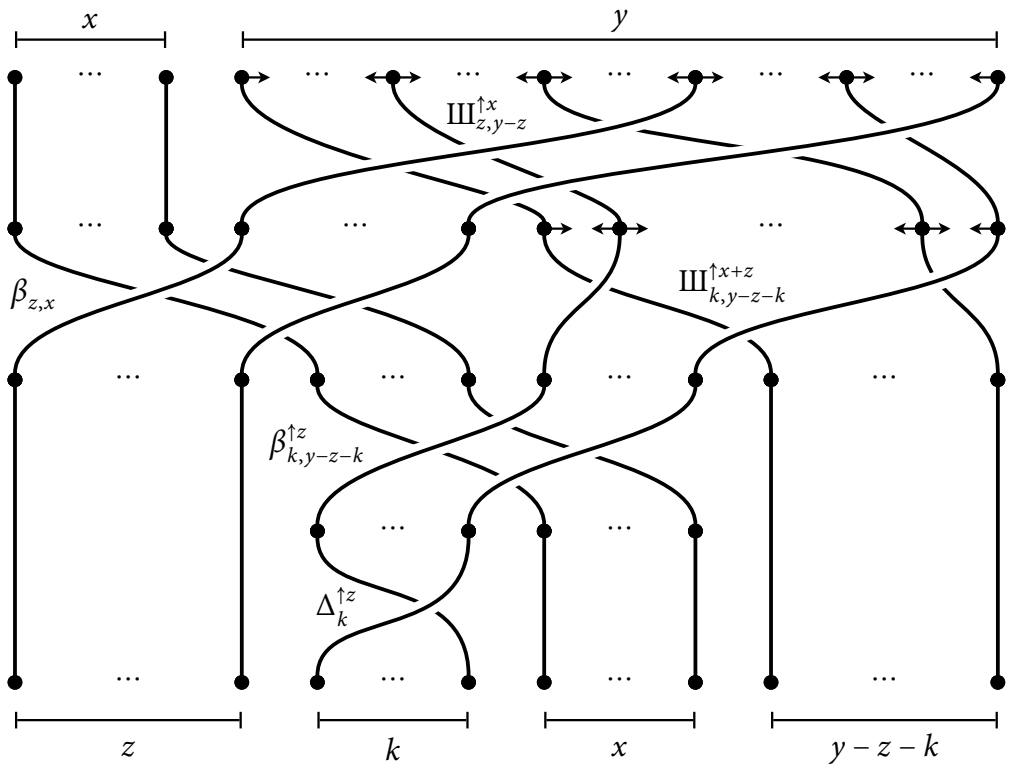


FIGURE 3.3: Un monôme du tressage (3.29)

CHAPITRE 4

TRESSAGE ZÉBRÉ

> Now go away or I shall taunt you a second time !
>
> John Cleese, *Monty Python and the Holy Grail*

Dans le chapitre précédent, nous avons trouvé un tressage de l'espace des tenseurs $T(V)$. Plus particulièrement, ce dernier realise les relations de commutation

$$x_{b\rangle} y_{c\rangle}^{\uparrow b} = \sum_{k=0}^{c} \left\{ {b \atop c-k} \; {c} \right\} y_{c-k\rangle} x_{b+k\rangle}^{\uparrow c-k}, \tag{4.1}$$

avec tous les $\left\{ {x \atop z} \; {y} \right\}$ non nuls si $0 \leq z \leq y$. Pour diverses raisons, on peut désirer des relations de commutation qui préservent la parité de l'ordre des tenseurs, ce qui n'est pas le cas de (4.1). Ainsi, nous souhaitons avoir un tressage qui s'exprime comme les relations de commutation

$$x_{b\rangle} y_{c\rangle}^{\uparrow b} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{c}{2} \rfloor} \left\{ {b \atop c-2k} \; {c} \right\}' y_{c-2k\rangle} x_{b+2k\rangle}^{\uparrow c-2k} \tag{4.2}$$

où $\lfloor j \rfloor$ représente la partie entière d'un nombre rationnel j. La solution simple $\left\{ {x \atop z} \; {y} \right\}' = \left\{ {x \atop z} \; {y} \right\}$, cette dernière étant exprimée par (3.29), n'est plus un tressage. Il faut donc trouver une nouvelle solution à de nouvelles équations. À la vue des relations de commutation (4.1), nous nous attendons à ce que les équations conditionnant un tressage

$$
{}^{(2)}\mathbf{R}\Big|_{\substack{V^{\otimes k}\otimes V^{\otimes l}\\ k+l=6}} = \begin{pmatrix}
\left\{ {0 \atop 0} {6 \atop } \right\} & 0 & \left\{ {0 \atop 2} {6 \atop } \right\} & 0 & \left\{ {0 \atop 4} {6 \atop } \right\} & 0 & \left\{ {0 \atop 6} {6 \atop } \right\} \\
0 & \left\{ {1 \atop 1} {5 \atop } \right\} & 0 & \left\{ {1 \atop 3} {5 \atop } \right\} & 0 & \left\{ {1 \atop 5} {5 \atop } \right\} & 0 \\
\left\{ {2 \atop 0} {4 \atop } \right\} & 0 & \left\{ {2 \atop 2} {4 \atop } \right\} & 0 & \left\{ {2 \atop 4} {4 \atop } \right\} & 0 & 0 \\
0 & \left\{ {3 \atop 1} {3 \atop } \right\} & 0 & \left\{ {3 \atop 3} {3 \atop } \right\} & 0 & 0 & 0 \\
\left\{ {4 \atop 0} {2 \atop } \right\} & 0 & \left\{ {4 \atop 2} {2 \atop } \right\} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \left\{ {5 \atop 1} {1 \atop } \right\} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\left\{ {6 \atop 0} {0 \atop } \right\} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
$$

$$
{}^{(3)}\mathbf{R}\Big|_{\substack{V^{\otimes k}\otimes V^{\otimes l}\\ k+l=6}} = \begin{pmatrix}
\left\{ {0 \atop 0} {6 \atop } \right\} & 0 & 0 & \left\{ {0 \atop 3} {6 \atop } \right\} & 0 & 0 & \left\{ {0 \atop 6} {6 \atop } \right\} \\
0 & 0 & \left\{ {1 \atop 2} {5 \atop } \right\} & 0 & 0 & \left\{ {1 \atop 5} {5 \atop } \right\} & 0 \\
0 & \left\{ {2 \atop 1} {4 \atop } \right\} & 0 & 0 & \left\{ {2 \atop 4} {4 \atop } \right\} & 0 & 0 \\
\left\{ {3 \atop 0} {3 \atop } \right\} & 0 & 0 & \left\{ {3 \atop 3} {3 \atop } \right\} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \left\{ {4 \atop 2} {2 \atop } \right\} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \left\{ {5 \atop 1} {1 \atop } \right\} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\left\{ {6 \atop 0} {0 \atop } \right\} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
$$

FIGURE 4.1: Restriction à l'ordre 6 des relations de commutation pour respectivement $\alpha = 2$ et $\alpha = 3$, dans la base lexicale inverse sur l'ordre des tenseurs.

soient assez similaires à celles du système (3.9). Nous verrons que c'est le cas. Une solution qui préserve la parité est une solution dont les éléments $\left\{ {x \atop z} {y \atop } \right\}'$ non nuls sont ceux pour lesquels $z \equiv y \mod (2)$ (et $0 \leq z \leq y$ dans notre cas). Dans ce chapitre, nous généralisons ce type de relations de commutation à d'autres où les éléments non nuls sont ceux pour lesquels $z \equiv y \mod (\alpha)$ et $0 \leq z \leq y$, avec α un entier non nul. On qualifiera alors de *α-zébrées* des relations de commutation qui préservent le reste de la division entière par α et qui sont alors de la forme

$$
x_{b\rangle} y_{c\rangle}^{\uparrow b} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{c}{\alpha} \rfloor} \left\{ {b \atop c-\alpha k} {c \atop } \right\} y_{c-\alpha k\rangle} x_{b+\alpha k\rangle}^{\uparrow c-\alpha k}. \tag{4.3}
$$

La dénomination « zébré » provient du fait que les blocs correspondant à un ordre donné dans la matrice agissant sur $T(V)$ sont parcourus de bandes diagonales de zéros. Les éléments nons nuls forment alors des bandes diagonales d'un élément de large qui sont séparées les unes des autres par des bandes de $\alpha - 1$ zéros de large (voir figure 4.1). Notons que la solution (3.29) qui préserve l'ordre des tenseurs modulo 1 est donc un tressage 1-zébré.

4.1 Variations

Soit α un entier naturel non nul. Pour x un autre entier, nous avons la décomposition $x = \alpha\underline{x} + \overline{x}$, avec $\underline{x}$ et $\overline{x}$ respectivement les quotient et reste de la division de x par α.

4.1.1 Tressage élémentaire zébré

Nous définissons ici une extension des tressages $\beta_{x,y}$ utilisés jusqu'ici. Pour simplifier les explications dans les calculs, nous adoptons la convention suivante : une expression apparaissant entre crochets est le résultat de l'application de la relation à laquelle il est fait référence en début de ligne.

Soient $(\alpha+1)^2$ élements $\beta^{\sharp}_{y,x} \in \mathbf{kB}^{+}_{x+y}$, $0 \le x, y \le \alpha$, tels que, pour $x, y, z \in [0, \alpha]$,

$$\beta^{\sharp\uparrow x}_{z,y}\beta^{\sharp}_{z,x}\beta^{\sharp\uparrow z}_{y,x} = \beta^{\sharp}_{y,x}\beta^{\sharp\uparrow y}_{z,x}\beta^{\sharp}_{z,y}, \quad \text{et} \quad \beta^{\sharp}_{0,x} = 1 = \beta^{\sharp}_{x,0}. \tag{4.4}$$

Nous voulons alors définir $\beta^{\sharp}_{Y,X}$ pour tous entiers X et Y à l'aide des relations

$$\beta^{\sharp}_{Y,X} = \beta^{\sharp\uparrow\overline{X}+\alpha\delta}_{Y,\alpha(\underline{X}-\delta)}\beta^{\sharp}_{Y,\overline{X}+\alpha\delta} \tag{4.5}$$

et

$$\beta^{\sharp}_{Y,X} = \beta^{\sharp}_{\overline{Y}+\alpha\delta',X}\beta^{\sharp\uparrow\overline{Y}+\alpha\delta'}_{\alpha(\underline{Y}-\delta'),X}, \tag{4.6}$$

avec $\delta \in [0, \underline{X}]$ et $\delta' \in [0, \underline{Y}]$. Nous devons avant toute chose vérifier que ces relations sont cohérentes et compatibles. Nous observons que si ces éléments existent, ils peuvent commuter à distance,

$$\beta^{\sharp}_{Y_1,X_1}\beta^{\sharp\uparrow Z}_{Y_2,X_2} = \beta^{\sharp\uparrow Z}_{Y_2,X_2}\beta^{\sharp}_{Y_1,X_1} \quad \text{si } X_1 + Y_1 \le Z, \tag{4.7}$$

puisque (4.5) et (4.6) impliquent toutes deux $\beta^{\sharp}_{Y_1,X_1} \in \mathbf{kB}_{X_1+Y_1}$ et $\beta^{\sharp\uparrow Z}_{Y_2,X_2} \in \mathbf{kB}^{\uparrow Z}_{X_2+Y_2}$.

Si nous appliquons deux fois (4.5), nous obtenons, avec $0 \le \delta_2 \le \delta_1 \le \underline{X}$,

$$\begin{aligned}
\beta^{\sharp}_{Y,X} &\overset{(4.5)}{=} \left[\beta^{\sharp\uparrow\overline{X}+\alpha\delta_1}_{Y,\alpha(\underline{X}-\delta_1)}\beta^{\sharp}_{Y,\overline{X}+\alpha\delta_1}\right] \\
&\overset{(4.5)}{=} \beta^{\sharp\uparrow\overline{X}+\alpha\delta_1}_{Y,\alpha(\underline{X}-\delta_1)}\left[\beta^{\sharp\uparrow\overline{X}+\alpha\delta_2}_{Y,\alpha(\delta_1-\delta_2)}\beta^{\sharp}_{Y,\overline{X}+\alpha\delta_2}\right] \\
&= \beta^{\sharp\uparrow\overline{X}+\alpha\delta_2+\alpha(\delta_1-\delta_2)}_{Y,\alpha(\underline{X}-\delta_2-(\delta_1-\delta_2))}\beta^{\sharp\uparrow\overline{X}+\alpha\delta_2}_{Y,\alpha(\delta_1-\delta_2)} \cdot \beta^{\sharp}_{Y,\overline{X}+\alpha\delta_2} \\
&\overset{(4.5)}{=} \left[\beta^{\sharp\uparrow\overline{X}+\alpha\delta_2}_{Y,\alpha(\underline{X}-\delta_2)}\right]\beta^{\sharp}_{Y,\overline{X}+\alpha\delta_2} \\
&\overset{(4.5)}{=} \left[\beta^{\sharp}_{Y,X}\right].
\end{aligned}$$

Il en est de même pour deux applications successives de (4.6). Ces deux relations sont donc auto-cohérentes. Considérons alors l'application successive de (4.5) puis

de (4.6). Nous obtenons

$$\begin{aligned}\beta^{\sharp}_{Y,X} &\overset{(4.5)}{=} \left[\beta^{\sharp\uparrow\overline{X}+\alpha\delta_1}_{Y,\alpha(\underline{X}-\delta_1)}\beta^{\sharp}_{Y,\overline{X}+\alpha\delta_1}\right] \\ &\overset{(4.6)(4.6)}{=} \left[\beta^{\sharp\uparrow\overline{X}+\alpha\delta_1}_{\overline{Y}+\alpha\delta'_1,\alpha(\underline{X}-\delta_1)}\beta^{\sharp\uparrow\overline{X}+\overline{Y}+\alpha(\delta_1+\delta'_1)}_{\alpha(\underline{Y}-\delta'_1),\alpha(\underline{X}-\delta_1)}\right]\left[\beta^{\sharp}_{\overline{Y}+\alpha\delta'_2,\overline{X}+\alpha\delta_1}\beta^{\sharp\uparrow\overline{Y}+\alpha\delta'_2}_{\alpha(\underline{Y}-\delta'_2),\overline{X}+\alpha\delta_1}\right].\end{aligned} \tag{4.8}$$

Nous devons alors considérer les cas $\delta'_1 \leq \delta'_2$ et $\delta'_1 \geq \delta'_2$. Dans le premier cas, et à l'aide de (4.6),

$$\beta^{\sharp}_{\overline{Y}+\alpha\delta'_2,\overline{X}+\alpha\delta_1} = \beta^{\sharp}_{\overline{Y}+\alpha\delta'_1,\overline{X}+\alpha\delta_1}\beta^{\sharp\uparrow\overline{Y}+\alpha\delta'_1}_{\overline{Y}+\alpha(\delta'_2-\delta'_1),\overline{X}+\alpha\delta_1}, \tag{4.9}$$

mais $\beta^{\sharp\uparrow\overline{X}+\overline{Y}+\alpha(\delta_1+\delta'_1)}_{\alpha(\underline{Y}-\delta'_1),\alpha(\underline{X}-\delta_1)}$ commute à distance avec $\beta^{\sharp}_{\overline{Y}+\alpha\delta'_1,\overline{X}+\alpha\delta_1}$ en vertu de (4.7). De plus, le dernier terme de (4.9) peut être fusionné avec le dernier de (4.8) à l'aide de (4.6) :

$$\beta^{\sharp\uparrow\overline{Y}+\alpha\delta'_1}_{\overline{Y}+\alpha(\delta'_2-\delta'_1),\overline{X}+\alpha\delta_1}\beta^{\sharp\uparrow\overline{Y}+\alpha\delta'_2}_{\alpha(\underline{Y}-\delta'_2),\overline{X}+\alpha\delta_1} = \beta^{\sharp\uparrow\overline{Y}+\alpha\delta'_1}_{\overline{Y}+\alpha(\underline{Y}-\delta'_1),\overline{X}+\alpha\delta_1},$$

Ainsi, le membre de droite de (4.8) peut être réécrit comme

$$\begin{aligned}\beta^{\sharp\uparrow\overline{X}+\alpha\delta_1}_{\overline{Y}+\alpha\delta'_1,\alpha(\underline{X}-\delta_1)}\beta^{\sharp}_{\overline{Y}+\alpha\delta'_1,\overline{X}+\alpha\delta_1}\beta^{\sharp\uparrow\overline{X}+\overline{Y}+\alpha(\delta_1+\delta'_1)}_{\alpha(\underline{Y}-\delta'_1),\alpha(\underline{X}-\delta_1)}\beta^{\sharp\uparrow\overline{Y}+\alpha\delta'_1}_{\overline{Y}+\alpha(\underline{Y}-\delta'_1),\overline{X}+\alpha\delta_1} &= \\ = \beta^{\sharp}_{\overline{Y}+\alpha\delta'_1,X}\beta^{\sharp\uparrow\overline{Y}+\alpha\delta'_1}_{\overline{Y}+\alpha(\underline{Y}-\delta'_1),X} &= \beta^{\sharp}_{Y,X}.\end{aligned} \tag{4.10}$$

Dans le cas $\delta'_1 \geq \delta'_2$, nous réécrivons le dernier terme de (4.8) comme

$$\beta^{\sharp\uparrow\overline{Y}+\alpha\delta'_2}_{\alpha(\underline{Y}-\delta'_2),\overline{X}+\alpha\delta_1} = \beta^{\sharp\uparrow\overline{Y}+\alpha\delta'_2}_{\alpha(\delta'_1-\delta'_2),\overline{X}+\alpha\delta_1}\beta^{\sharp\uparrow\overline{Y}+\alpha\delta'_1}_{\alpha(\underline{Y}-\delta'_1),\overline{X}+\alpha\delta_1}.$$

Le premier terme de cette expression peut être fusionné avec $\beta^{\sharp}_{\overline{Y}+\alpha\delta'_2,\overline{X}+\alpha\delta_1}$ pour obtenir

$$\beta^{\sharp}_{\overline{Y}+\alpha\delta'_2,\overline{X}+\alpha\delta_1}\beta^{\sharp\uparrow\overline{Y}+\alpha\delta'_2}_{\alpha(\delta'_1-\delta'_2),\overline{X}+\alpha\delta_1} = \beta^{\sharp}_{\overline{Y}+\alpha\delta'_1,\overline{X}+\alpha\delta_1},$$

permettant de retrouver l'expression (4.10) et finissant ainsi de vérifier la compatibilité de (4.5) et (4.6). À l'aide de ces relations, nous pouvons réaliser une factorisation remarquable :

Proposition 34. *Pour tout X et Y, on a la décomposition*

$$\beta^{\sharp}_{Y,X} = \beta^{\sharp\uparrow\overline{X}}_{\overline{Y},\alpha\underline{X}} \cdot \beta^{\sharp}_{\overline{Y},\overline{X}} \cdot \beta^{\sharp\uparrow\overline{X}+\overline{Y}}_{\alpha\underline{Y},\alpha\underline{X}} \cdot \beta^{\sharp\uparrow\overline{Y}}_{\alpha\underline{Y},\overline{X}}. \tag{4.11}$$

Ainsi, à l'aide de (4.5) et (4.6), tout élément $\beta^{\sharp}_{Y,X}$ peut être exprimé à l'aide de produits d'éléments $\beta^{\sharp}_{y,x}$, $0 \leq x, y \leq \alpha$ (voir figure 4.2). De plus, (4.4) se propage à de tels éléments :

Proposition 35. *Pour tout X, Y et Z,*

$$\beta^{\sharp\uparrow X}_{Z,Y}\beta^{\sharp}_{Z,X}\beta^{\sharp\uparrow Z}_{Y,X} = \beta^{\sharp}_{Y,X}\beta^{\sharp\uparrow Y}_{Z,X}\beta^{\sharp}_{Z,Y}. \tag{4.12}$$

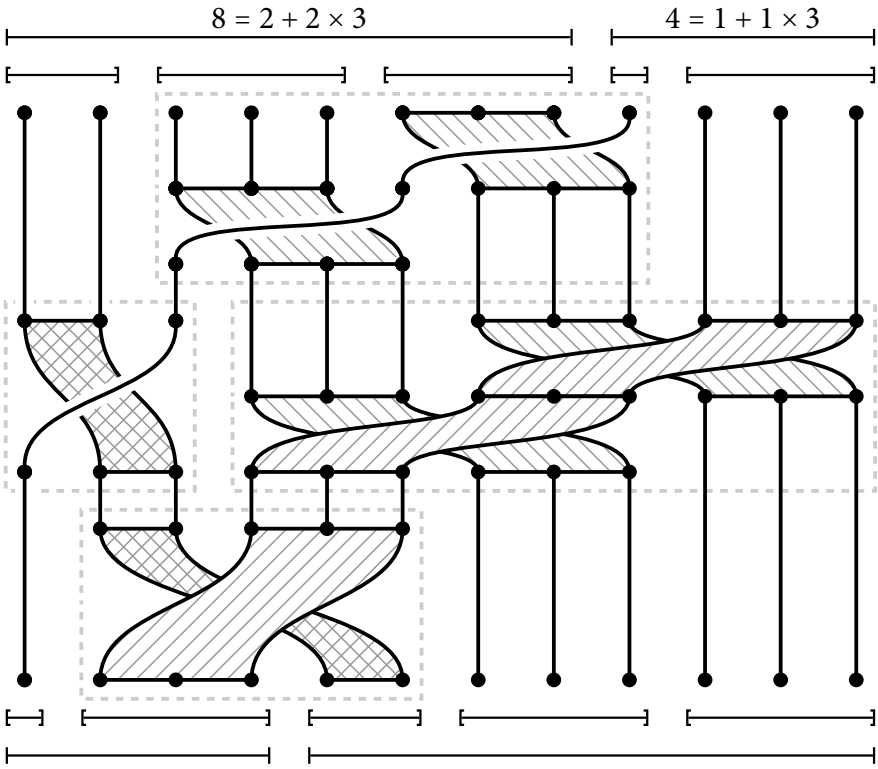


FIGURE 4.2: Décomposition de $\beta^{\sharp}_{4,8} = \beta^{\sharp\uparrow 2}_{1,6}\beta^{\sharp}_{1,2}\beta^{\sharp\uparrow 3}_{3,6}\beta^{\sharp\uparrow 1}_{3,2}$ pour $\alpha = 3$.

Démonstration. Nous allons procéder par récurrence sur X, Z et Y. Cette relation est par définition vraie si $X, Y, Z \leq \alpha$. Supposons qu'elle le soit pour un triplet $\{X, Y, Z\}$ ainsi que pour tout triplets $\{\hat{X}, \hat{Y}, \hat{Z}\}$, $0 \leq \hat{X} \leq X$, $\underline{0} \leq \hat{Y} \leq Y$ et $0 \leq \hat{Z} \leq Z$. Alors, pour $\dot{X} = X + 1$, nous sommes face à deux cas : soit $\overline{\dot{X}} = \overline{X} + 1$, $\underline{\dot{X}} = \underline{X}$ (si $\alpha \neq 1$), soit $\overline{\dot{X}} = 0$, $\underline{\dot{X}} = \underline{X} + 1$. Dans le premier cas,

$$
\begin{aligned}
\beta^{\sharp}_{Y,\dot{X}}\beta^{\sharp\uparrow Y}_{Z,\dot{X}}\beta^{\sharp}_{Z,Y} &= \beta^{\sharp}_{Y,X+1}\beta^{\sharp\uparrow Y}_{Z,X+1}\beta^{\sharp}_{Z,Y} \\
&\overset{(4.5)(4.5)}{=} \left[\beta^{\sharp\uparrow\overline{X}+1}_{Y,\alpha\underline{X}}\beta^{\sharp}_{Y,\overline{X}+1}\right]\left[\beta^{\sharp\uparrow Y+\overline{X}+1}_{Z,\alpha\underline{X}}\beta^{\sharp\uparrow Y}_{Z,\overline{X}+1}\right]\beta^{\sharp}_{Z,Y} \\
&\overset{(4.7)}{=} \beta^{\sharp\uparrow\overline{X}+1}_{Y,\alpha\underline{X}}\left[\beta^{\sharp\uparrow Y+\overline{X}+1}_{Z,\alpha\underline{X}}\beta^{\sharp}_{Y,\overline{X}+1}\right]\beta^{\sharp\uparrow Y}_{Z,\overline{X}+1}\beta^{\sharp}_{Z,Y} \\
&\overset{(\text{h.r.})}{=} \beta^{\sharp\uparrow\overline{X}+1}_{Y,\alpha\underline{X}}\beta^{\sharp\uparrow Y+\overline{X}+1}_{Z,\alpha\underline{X}}\left[\beta^{\sharp\uparrow\overline{X}+1}_{Z,Y}\beta^{\sharp}_{Z,\overline{X}+1}\beta^{\sharp\uparrow Z}_{Y,\overline{X}+1}\right] \\
&\overset{(\text{h.r.})}{=} \left[\beta^{\sharp\uparrow X+1}_{Z,Y}\beta^{\sharp\uparrow\overline{X}+1}_{Z,\alpha\underline{X}}\beta^{\sharp\uparrow Z+\overline{X}+1}_{Y,\alpha\underline{X}}\right]\beta^{\sharp}_{Z,\overline{X}+1}\beta^{\sharp\uparrow Z}_{Y,\overline{X}+1} \\
&\overset{(4.7)}{=} \beta^{\sharp\uparrow X+1}_{Z,Y}\beta^{\sharp\uparrow\overline{X}+1}_{Z,\alpha\underline{X}}\left[\beta^{\sharp}_{Z,\overline{X}+1}\beta^{\sharp\uparrow Z+\overline{X}+1}_{Y,\alpha\underline{X}}\right]\beta^{\sharp\uparrow Z}_{Y,\overline{X}+1} \\
&\overset{(4.5)(4.5)}{=} \beta^{\sharp\uparrow X+1}_{Z,Y}\left[\beta^{\sharp}_{Z,\overline{X}+1+\alpha\underline{X}}\right]\left[\beta^{\sharp\uparrow Z}_{Y,\overline{X}+1+\alpha\underline{X}}\right] \\
&= \beta^{\sharp\uparrow\dot{X}}_{Z,Y}\beta^{\sharp}_{Z,\dot{X}}\beta^{\sharp\uparrow Z}_{Y,\dot{X}}
\end{aligned}
\tag{4.13}
$$

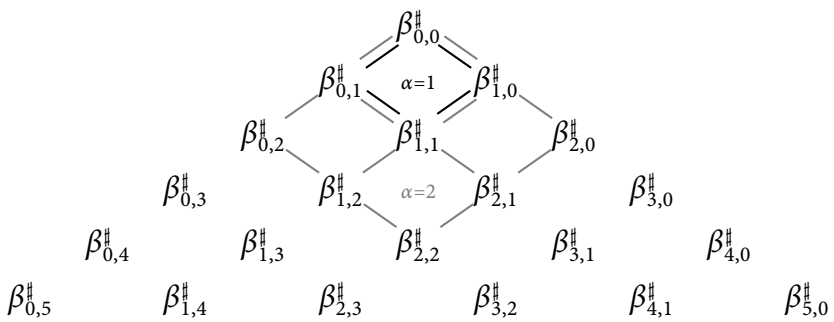


FIGURE 4.3: Les ensembles d'éléments nécessaires à la définition des éléments $\beta^\sharp_{x,y}$ pour $\alpha = 1$ et $\alpha = 2$.

Le second cas, $\overline{\dot{X}} = 0$, $\underline{\dot{X}} = \underline{X} + 1$, donne

$$\begin{aligned}\beta^\sharp_{Y,\dot{X}}\beta^{\sharp\uparrow Y}_{Z,\dot{X}}\beta^\sharp_{Z,Y} &= \beta^\sharp_{Y,\alpha(\underline{X}+1)}\beta^{\sharp\uparrow Y}_{Z,\alpha(\underline{X}+1)}\beta^\sharp_{Z,Y}\\ &\overset{(4.5)(4.5)}{=} \left[\beta^{\sharp\uparrow\alpha}_{Y,\alpha\underline{X}}\beta^\sharp_{Y,\alpha}\right]\left[\beta^{\sharp\uparrow Y+\alpha}_{Z,\alpha\underline{X}}\beta^{\sharp\uparrow Y}_{Z,\alpha}\right]\beta^\sharp_{Z,Y},\end{aligned} \tag{4.14}$$

par exemple. À partir de ce point, ces éléments vont suivre exactement le même algorithme que celui du premier cas et mener à la même conclusion. De plus, en raison du rôle symétrique de X et de Z dans (4.12), la vérification de l'hypothèse de récurrence sur Z est similaire, suivant juste une direction opposée.

Dès lors, soit $\dot{Y} = Y + 1$. Comme précédemment, nous sommes face à deux cas. Nous ne vérifions que le premier, le second étant procéduralement le même. Ainsi, si $\overline{\dot{Y}} = \overline{Y} + 1$, $\underline{\dot{Y}} = \underline{Y}$, alors

$$\begin{aligned}\beta^\sharp_{\dot{Y},X}\beta^{\sharp\uparrow\dot{Y}}_{Z,\overline{X}+\alpha\underline{X}}\beta^\sharp_{Z,\dot{Y}} &= \beta^\sharp_{Y+1,X}\beta^{\sharp\uparrow Y+1}_{Z,X}\beta^\sharp_{Z,Y+1}\\ &\overset{(4.6)(4.5)}{=} \left[\beta^\sharp_{\overline{Y}+1,X}\beta^{\sharp\uparrow\overline{Y}+1}_{\alpha\underline{Y},X}\right]\beta^{\sharp\uparrow Y+1}_{Z,X}\left[\beta^{\sharp\uparrow\overline{Y}+1}_{Z,\alpha\underline{Y}}\beta^\sharp_{Z,\overline{Y}+1}\right]\\ &\overset{(\text{h.r.})}{=} \beta^\sharp_{\overline{Y}+1,X}\left[\beta^{\sharp\uparrow X+\overline{Y}+1}_{Z,\alpha\underline{Y}}\beta^{\sharp\uparrow\overline{Y}+1}_{Z,X}\beta^{\sharp\uparrow Z+\overline{Y}+1}_{\alpha\underline{Y},X}\right]\beta^\sharp_{Z,\overline{Y}+1}\\ &\overset{(4.7)}{=} \left[\beta^{\sharp\uparrow X+\overline{Y}+1}_{Z,\alpha\underline{Y}}\beta^\sharp_{\overline{Y}+1,X}\right]\beta^{\sharp\uparrow\overline{Y}+1}_{Z,X}\left[\beta^\sharp_{Z,\overline{Y}+1}\beta^{\sharp\uparrow Z+\overline{Y}+1}_{\alpha\underline{Y},X}\right]\\ &\overset{(\text{h.r.})}{=} \beta^{\sharp\uparrow X+\overline{Y}+1}_{Z,\alpha\underline{Y}}\left[\beta^{\sharp\uparrow X}_{Z,\overline{Y}+1}\beta^\sharp_{Z,X}\beta^{\sharp\uparrow Z}_{\overline{Y}+1,X}\right]\beta^{\sharp\uparrow Z+\overline{Y}+1}_{\alpha\underline{Y},X}\\ &\overset{(4.5)(4.6)}{=} \left[\beta^{\sharp\uparrow X}_{Z,\overline{Y}+1+\alpha\underline{Y}}\right]\beta^\sharp_{Z,X}\left[\beta^{\sharp\uparrow Z}_{\overline{Y}+1+\alpha\underline{Y},X}\right]\\ &= \beta^{\sharp\uparrow X}_{Z,\dot{Y}}\beta^\sharp_{Z,X}\beta^{\sharp\uparrow Z}_{\dot{Y},X},\end{aligned} \tag{4.15}$$

ce qui finit de vérifier l'hypothèse de récurrence et prouve la proposition. □

4.1.2 Choix admissibles

Intéressons-nous maintenant aux choix admissibles pour les éléments $\beta^{\sharp}_{x,y}$, c'est-à-dire ceux pour lesquels les équations (4.4) sont satisfaites. Les éléments $\beta_{x,y}$ dont nous nous sommes servis jusqu'alors sont bien évidemment compatibles avec ces relations et nous pouvons choisir $\beta^{\sharp}_{x,y} = \beta_{x,y}$. Cependant, pour $\alpha > 1$, nous n'avons plus d'équations qui imposent que les éléments $\beta^{\sharp}_{x,y}$, $0 \leq x, y \leq \alpha$ soient construits à partir de $\beta^{\sharp}_{1,1}$. Nous imposons seulement la condition $\beta^{\sharp}_{x,0} = \beta^{\sharp}_{0,x} = 1$, $0 \leq x \leq \alpha$ afin que les relations (4.5) et (4.6) soient toujours bien définies. Dès lors, nous pouvons légitimement nous demander quels sont les ensembles de α^2 éléments de $\mathbf{kB}_\infty$ satisfaisant (4.4). Commençons par un exemple. Pour $\alpha = 2$, nous avons vu à la fin du premier chapitre que Δ_4 satisfaisait à l'équation de Yang-Baxter (corollaire 13). Si nous imposons alors $\beta^{\sharp}_{2,2} = \Delta_4$, nous sommes en droit de nous demander quels choix restent possibles (s'ils existent) pour la définition des éléments restants. Il n'y a que trois relations (4.4) qui impliquent $\beta^{\sharp}_{2,2}$ et d'autres éléments non triviaux :

$$\beta^{\sharp\uparrow 2}_{1,2}\beta^{\sharp}_{1,2}\beta^{\sharp\uparrow 1}_{2,2} = \beta^{\sharp}_{2,2}\beta^{\sharp\uparrow 2}_{1,2}\beta^{\sharp}_{1,2}, \quad \beta^{\sharp\uparrow 1}_{2,2}\beta^{\sharp}_{2,1}\beta^{\sharp\uparrow 2}_{2,1} = \beta^{\sharp}_{2,1}\beta^{\sharp\uparrow 2}_{2,1}\beta^{\sharp}_{2,2}, \tag{4.16}$$

et

$$\beta^{\sharp\uparrow 2}_{2,1}\beta^{\sharp}_{2,2}\beta^{\sharp\uparrow 2}_{1,2} = \beta^{\sharp}_{1,2}\beta^{\sharp\uparrow 1}_{2,2}\beta^{\sharp}_{2,1} \tag{4.17}$$

Nous savons par ailleurs que $\Delta_4 = \beta_{1,1}\beta_{2,2}\beta_{1,1}$ (cf. prop. 12). L'équation $\beta^{\sharp\uparrow 1}_{1,2}\beta^{\sharp}_{1,1}\beta^{\sharp\uparrow 1}_{2,1} = \beta^{\sharp}_{2,1}\beta^{\sharp\uparrow 2}_{1,1}\beta^{\sharp}_{1,2}$ implique que $\beta^{\sharp}_{1,2}$ et $\beta^{\sharp}_{2,1}$ sont non triviaux si $\beta^{\sharp}_{1,1}$ statisfait l'équation de Yang-Baxter de manière non triviale et est donc proportionel à $\beta_{1,1}$. Nous pouvons alors supposer les quasi-commutations

$$\beta_{1,1}\beta^{\sharp}_{1,2} = \beta^{\sharp}_{1,2}\beta^{\uparrow 1}_{1,1} \quad \text{et} \quad \beta^{\uparrow 1}_{1,1}\beta^{\sharp}_{2,1} = \beta^{\sharp}_{2,1}\beta_{1,1} \tag{4.18}$$

(c'est une condition suffisante pour que (4.4) soit satisfaite). En substituant dans les équations (4.16) et (4.17), nous trouvons après simplification

$$\beta^{\sharp\uparrow 2}_{1,2}\beta^{\sharp}_{1,2}\beta^{\uparrow 1}_{2,2} = \beta_{2,2}\beta^{\sharp\uparrow 2}_{1,2}\beta^{\sharp}_{1,2}, \quad \beta^{\uparrow 1}_{2,2}\beta^{\sharp}_{2,1}\beta^{\sharp\uparrow 2}_{2,1} = \beta^{\sharp}_{2,1}\beta^{\sharp\uparrow 2}_{2,1}\beta_{2,2}, \tag{4.19}$$

et

$$\beta^{\sharp\uparrow 2}_{2,1}\beta_{2,2}\beta^{\sharp\uparrow 2}_{1,2} = \beta^{\sharp}_{1,2}\beta^{\uparrow 1}_{2,2}\beta^{\sharp}_{2,1}. \tag{4.20}$$

Si $\beta^{\sharp}_{1,2} = \beta_{1,2}$ et $\beta^{\sharp}_{2,1} = \beta_{2,1}$, les équations (4.18), (4.19) et (4.20) sont satisfaites. Cependant, en posant $\beta^{\sharp}_{1,2} = \beta_{1,2}\beta_{1,1} = \Delta_3$ et $\beta^{\sharp}_{2,1} = \beta_{2,1}\beta^{\uparrow 1}_{1,1} = \Delta_3$, l'équation (4.18) est satisfaite et les équations (4.19) et (4.20) reconstruisent respectivement (4.16) et (4.17). Ainsi en modifiant $\beta^{\sharp}_{2,2}$, nous avons trouvé au moins quatre choix simples, pour $\alpha = 2$:

$\alpha = 2$	$\beta^{\sharp}_{1,1}$	$\beta^{\sharp}_{2,1}$	$\beta^{\sharp}_{1,2}$	$\beta^{\sharp}_{2,2}$
Choix 1	$\beta_{1,1}$	$\beta_{2,1}$	$\beta_{1,2}$	$\beta_{2,2}$
Choix 2	$\beta_{1,1}$	$\beta_{2,1}$	$\beta_{1,2}$	Δ_4
Choix 3	$\beta_{1,1}$	Δ_3	Δ_3	$\beta_{2,2}$
Choix 4	Δ_2	Δ_3	Δ_3	Δ_4

Nous pouvons cependant aller plus loin :

Proposition 36. *L'équation* (4.4) *est préservée lors de l'action à gauche de* $\mathbf{kB}_x \times \mathbf{kB}_y^{\uparrow x}$ *sur* $\beta^{\sharp}_{y,x}$, $0 \leq x, y \leq \alpha$.

Démonstration. Soit $v_\ell^{(i)} \in \mathbf{kB}_\ell$,, $i = 1, \ldots, 6$ et $0 \leq \ell \leq \alpha$. En multipliant à gauche le membre de gauche de (4.4) par $v_x^{(1)} v_x^{(2)} v_y^{(3)\uparrow x} v_y^{(4)\uparrow x} v_z^{(5)\uparrow x+y} v_z^{(6)\uparrow x+y}$, nous obtenons grâce à de multiples (quasi-)commutations

$$\begin{aligned} v_x^{(1)} v_x^{(2)} v_y^{(3)\uparrow x} v_y^{(4)\uparrow x} v_z^{(5)\uparrow x+y} v_z^{(6)\uparrow x+y} \beta^{\sharp\uparrow x}_{z,y} \beta^{\sharp}_{z,x} \beta^{\sharp\uparrow z}_{y,x} = \\ = \left(v_y^{(3)\uparrow x} v_z^{(5)\uparrow x+y} \beta^{\sharp\uparrow x}_{z,y} \right) \left(v_x^{(1)} v_z^{(6)\uparrow x} \beta^{\sharp}_{z,x} \right) \left(v_x^{(2)\uparrow z} v_y^{(4)\uparrow x+z} \beta^{\sharp\uparrow z}_{y,x} \right), \end{aligned} \tag{4.21}$$

résultat identique à celui que l'on obtiendrait en multipliant à gauche le membre de droite de (4.4) par le même élément. Nous pouvons ainsi redéfinir $\beta^{\sharp\prime}_{y,x} = v_x \mu_y^{\uparrow x} \beta^{\sharp}_{y,x}$, $0 \leq x, y \leq \alpha$ et $v_x \in \mathbf{kB}_x$, $\mu_y \in \mathbf{kB}_y$. □

Entre autres, le choix $\beta^{\sharp}_{y,x} = \Delta_{x+y}$, $0 \leq x, y \leq \alpha$ est un choix admissible puisque $\Delta_{x+y} = \Delta_x \Delta_y^{\uparrow x} \beta_{y,x}$. Ainsi, il existe $x!y!$ manières de définir un tressage simple $\beta^{\sharp}_{y,x}$ compatible avec l'équation (4.4). Pour α donné, il existe alors $\prod_{x,y=1}^{\alpha} x!y! = \mathrm{sf}(\alpha)^{2\alpha}$ configurations simples, avec $\mathrm{sf}(x) = 1!2!\cdots x!$ la superfactorielle de x. Pour $\alpha = 2$, cela correspond à 16 configurations ; pour $\alpha = 3$, $12^6 = 2985984$.

4.1.3 Battages et tresses fondamentales zébrés

Nous pouvons dès à présent définir des variantes pour les battages et les éléments de Garside. Nous qualifierons abusivement de zébrés ces éléments puisqu'ils sont utiles à la définition d'un tressage zébré. Soit le morphisme d'algèbres de groupes $\zeta_\alpha : \mathbf{kB}_n \to \mathbf{kB}_{\alpha n}$, $\beta_{1,1}^{\uparrow i} \mapsto \beta^{\sharp\uparrow i\alpha}_{\alpha,\alpha}$. Nous notons alors $Ш^{\sharp}_{k,n-k} \doteq \zeta_\alpha(Ш_{k,n-k})$ et $\Delta^{\sharp}_{\alpha n} \doteq \zeta_\alpha(\Delta_n)$. Attention, nous avons préféré conserver pour les indices l'information combinatoire des battages au détriment de leur taille. Ainsi $Ш^{\sharp}_{k,n-k} \in \mathbf{kB}_{\alpha n}$, minimalement, et est la somme de $\binom{n}{k}$ monômes.

Puisque $\beta^{\sharp}_{x,y} = \beta_{x,y}$ est un choix admissible, nous pouvons considérer grossièrement ces nouveaux éléments comme des (α, α)-cablages des éléments originaux puisque le seul tressage élémentaire utilisé est $\beta^{\sharp}_{\alpha,\alpha}$.

Nous exprimons ici l'image sous ζ_α de nombreuses identités définies dans les sections 1.4 et 2.2, principalement pour y faire référence plus tard. Ainsi, les éléments de Garside zébrés suivent la relation de récurrence

$$\Delta^\sharp_{\alpha(n+1)} = \Delta^\sharp_{\alpha n}\beta^\sharp_{\alpha,\alpha n} \quad \text{et} \quad \Delta^\sharp_0 = 1, \tag{4.22}$$

ainsi que la décomposition

$$\Delta^\sharp_{\alpha n} = \Delta^\sharp_{\alpha k}\beta^\sharp_{\alpha(n-k),\alpha k}\Delta^\sharp_{\alpha(n-k)} \tag{4.23}$$

et la commutation spéciale

$$\Delta^\sharp_{\alpha n}\beta^{\sharp\uparrow\alpha c}_{\alpha a,\alpha b} = \beta^{\sharp\uparrow\alpha(n-a-b-c)}_{\alpha b,\alpha a}\Delta^\sharp_{\alpha n} \quad \text{si} \quad a+b+c \leq n \tag{4.24}$$

Les battages satisfont évidemment

$$Ш^\sharp_{k,n-k}\beta^\sharp_{\ell\alpha,n\alpha} = \beta^\sharp_{\ell\alpha,n\alpha}Ш^{\sharp\uparrow\ell\alpha}_{k,n-k} \quad \text{et} \quad Ш^{\sharp\uparrow\ell\alpha}_{k,n-k}\beta^\sharp_{n\alpha,\ell\alpha} = \beta^\sharp_{n\alpha,\ell\alpha}Ш^\sharp_{k,n-k}. \tag{4.25}$$

et la relation de récurrence

$$Ш^\sharp_{k,n+1-k} = Ш^{\sharp\uparrow\alpha}_{k-1,n+1-k} + Ш^{\sharp\uparrow\alpha}_{k,n-k}\beta^\sharp_{\alpha k,\alpha}. \tag{4.26}$$

Ils possèdent aussi la symétrie

$$Ш^\sharp_{k,n-k}\Delta^\sharp_{\alpha n} = \Delta^\sharp_{\alpha n}Ш^\sharp_{n-k,k} \tag{4.27}$$

et satisfont donc à l'autre analogue pour la première relation de Pascal

$$Ш^\sharp_{k,n-k} + Ш^\sharp_{k-1,n-k+1}\beta^{\sharp\uparrow\alpha(k-1)}_{\alpha,\alpha(n-k+1)} = Ш^\sharp_{k,n-k+1}. \tag{4.28}$$

Nous avons enfin la factorisation

$$Ш^\sharp_{a,b+c}Ш^{\sharp\uparrow a}_{b,c} = Ш^\sharp_{a,b,c} = Ш^\sharp_{a+b,c}Ш^\sharp_{a,b}, \tag{4.29}$$

ainsi que l'analogue de la convolution de Vandermonde

$$\sum_k Ш^\sharp_{a-k,b+k}Ш^{\sharp\uparrow\alpha(a+b)}_{c+k,d-k}\beta^{\sharp\uparrow\alpha(a-k)}_{\alpha(c+k),\alpha(b+k)} = Ш^\sharp_{a+c,b+d}. \tag{4.30}$$

et l'identité

$$\sum_k (-1)^k Ш^\sharp_{k,j-k}\Delta^{\sharp\uparrow\alpha k}_{\alpha(j-k)}Ш^{\sharp\uparrow\alpha k}_{l,i-k}\beta^\sharp_{\alpha l,\alpha k} = \Delta^\sharp_{\alpha j}Ш^{\sharp\uparrow\alpha j}_{l-j,i}. \tag{4.31}$$

4.1.4 Structure interne

Comme nous allons le voir dans la suite, l'élaboration d'un tressage α-zébré demande l'introduction de nouveaux degrés de liberté. Dans le cas $\alpha = 1$, ils correspondent aux scalaires $p_\uparrow$ et $p_\downarrow$ que nous avons absorbé à l'aide d'un *twist*. Nous considèrerons l'action d'un *twist* scalaire sur une solution zébrée dans la section 4.3.1.

Définissons donc les $2(\alpha+1)$ éléments $p_{\uparrow x}$ et $p_{\downarrow x}$ de $\mathbf{k}[B_x]$, $0 \le x \le \alpha$, tels que, pour $x, y \le \alpha$,

$$p_{\uparrow 0} = 1 = p_{\downarrow 0}, \quad p_{\uparrow x} p_{\downarrow x} = p_{\downarrow x} p_{\uparrow x}, \tag{4.32}$$

et

$$p_{\downarrow y}\beta^\sharp_{y,x} p_{\uparrow x} = p_{\uparrow x}^{\uparrow y}\beta^\sharp_{y,x} p_{\downarrow y}^{\uparrow x}, \quad p_{\uparrow y}^{\uparrow x} p_{\uparrow x}\beta^\sharp_{y,x} = \beta^\sharp_{y,x} p_{\uparrow y} p_{\uparrow x}^{\uparrow y}, \quad \text{et} \quad p_{\downarrow y}^{\uparrow x} p_{\downarrow x}\beta^\sharp_{y,x} = \beta^\sharp_{y,x} p_{\downarrow y} p_{\downarrow x}^{\uparrow y}. \tag{4.33}$$

Comme précédement, nous définissons $p_{\uparrow X}$ et $p_{\downarrow X}$ pour tout entier à l'aide des relations

$$p_{\uparrow X} = p_{\uparrow \overline{X}} p_{\uparrow \alpha \underline{X}}^{\uparrow \overline{X}} \quad \text{et} \quad p_{\uparrow \alpha \underline{X}} = p_{\uparrow \alpha} p_{\uparrow \alpha}^{\uparrow \alpha} \cdots p_{\uparrow \alpha}^{\uparrow \alpha(\underline{X}-1)}, \tag{4.34}$$

and

$$p_{\downarrow X} = p_{\downarrow \overline{X}} p_{\downarrow \alpha \underline{X}}^{\uparrow \overline{X}} \quad \text{et} \quad p_{\downarrow \alpha \underline{X}} = p_{\downarrow \alpha} p_{\downarrow \alpha}^{\uparrow \alpha} \cdots p_{\downarrow \alpha}^{\uparrow \alpha(\underline{X}-1)}. \tag{4.35}$$

Notons que ces décompositions sont équivalentes à

$$p_{\uparrow X} = p_{\uparrow \overline{X}+\alpha k} p_{\uparrow \alpha(\underline{X}-k)}^{\uparrow \overline{X}+\alpha k} \quad \text{et} \quad p_{\downarrow X} = p_{\downarrow \overline{X}+\alpha k} p_{\downarrow \alpha(\underline{X}-k)}^{\uparrow \overline{X}+\alpha k}, \quad 0 \le k \le \underline{X}, \tag{4.36}$$

mais ici, tous les termes créés par une décomposition commutent à distance et ainsi, la commutation requise dans (4.32) se prolonge à ces éléments. Puisque (4.36) est formellement identique aux relations (4.5) et (4.6), la relation (4.33) (qui est identique à (4.4)) se prolonge aussi à ces éléments et pour tout couple d'entiers X et Y, nous avons la relation

$$p_{\uparrow X}^{\uparrow Y} p_{\downarrow Y}\beta^\sharp_{Y,X} = p_{\downarrow Y}\beta^\sharp_{Y,X} p_{\uparrow X} = \beta^\sharp_{Y,X} p_{\uparrow X} p_{\downarrow Y}^{\uparrow X}, \tag{4.37}$$

ainsi que celle obtenue après la permutation de $p_\uparrow$ et $p_\downarrow$.

L'introduction des nouveaux éléments induit de nouvelles relations :

Proposition 37. *Nous avons*

$$p_{\uparrow n} Ш^{\sharp\uparrow\overline{n}}_{\underline{k},\underline{n-k}} = Ш^{\sharp\uparrow\overline{n}}_{\underline{k},\underline{n-k}} p_{\uparrow n} \quad \textit{et} \quad p_{\downarrow n} Ш^{\sharp\uparrow\overline{n}}_{\underline{k},\underline{n-k}} = Ш^{\sharp\uparrow\overline{n}}_{\underline{k},\underline{n-k}} p_{\downarrow n}. \tag{4.38}$$

Démonstration. La preuve étant la même dans les deux cas, nous ne montrons que la première. Notons que la partie $p_{\uparrow \overline{n}}$ correspondant au reste dans $p_{\uparrow n}$ commute à distance avec le battage. Par construction et en temps qu'opérateur agissant à gauche,

le battage zébré mélange des groupes de α brins de large. Ainsi, puisque les termes restant $p_{\uparrow\alpha\underline{n}}^{\uparrow\overline{n}} = p_{\uparrow\alpha}^{\uparrow\overline{n}} p_{\uparrow\alpha}^{\uparrow\overline{n}+\alpha} \cdots p_{\uparrow\alpha}^{\uparrow\overline{n}+\alpha(\underline{n}-1)}$ sont les mêmes et occupent chacun α brins, le battage ne fait que réordonner ces éléments non discernables. Nous sommes assurés par (4.33) que les $p_{\uparrow\alpha}^{\uparrow\overline{n}+\alpha k}$, $0 \leq k \leq \underline{n} - 1$ commutent convenablement avec les $\beta_{\alpha,\alpha}^{\sharp\uparrow\overline{n}+\alpha l}$, $0 \leq k \leq \underline{n}$ constituant les monômes du battage. □

4.1.5 Symboles de Pochhammer zébrés

Nous définissons maintenant un analogue zébré pour les symboles de Pochhammer. Il y en a un par reste $\overline{t}$ de la division par α possible. Soit

$$ {}^{k}\overset{\overline{t}}{\Pi}(s)_1^{\sharp} = \left(1 - s\beta_{\alpha,\alpha k}^{\sharp\uparrow\overline{t}} \cdot p_{\uparrow\alpha}^{\uparrow\overline{t}} \beta_{\alpha,\overline{t}}^{\sharp} \beta_{\overline{t},\alpha}^{\sharp} p_{\downarrow\alpha}^{\uparrow\overline{t}}\right), $$

avec $s \in \mathbf{k}$. Nous définissons alors le symbole de Pochhammer α-zébré de type $\overline{t}$ comme

$$ \overset{\overline{t}}{\Pi}(s)_n^{\sharp} = {}^{0}\overset{\overline{t}}{\Pi}(s)_1^{\sharp}\, {}^{1}\overset{\overline{t}}{\Pi}(s)_1^{\sharp} \cdots {}^{n-1}\overset{\overline{t}}{\Pi}(s)_1^{\sharp}, $$

ainsi que sa variante tronquée

$$ {}^{\delta}\overset{\overline{t}}{\Pi}(s)_n^{\sharp} = \left(\overset{\overline{t}}{\Pi}(s)_{\delta}^{\sharp}\right)^{-1} \overset{\overline{t}}{\Pi}(s)_{\delta+n}^{\sharp}. \tag{4.39} $$

Dans le cas $\alpha = 1$, il n'y a qu'un reste, 0, et $\beta_{\alpha,\overline{t}}^{\sharp} = \beta_{\overline{t},\alpha}^{\sharp} = 1$, $p_{\uparrow 1} = p_{\uparrow}$, $p_{\downarrow 1} = p_{\downarrow}$ (ces deux valeurs étant égalées à 1 par un *twist*), et nous retrouvons bien le symbole de Pochhammer des chapitres précédents.

Proposition 38. *Si $k < \underline{n}$, nous avons*

$$ p_{\uparrow n}\, {}^{k}\overset{\overline{n}}{\Pi}(s)_1^{\sharp} = {}^{k}\overset{\overline{n}}{\Pi}(s)_1^{\sharp} p_{\uparrow n} \quad \textit{et} \quad p_{\downarrow n}\, {}^{k}\overset{\overline{n}}{\Pi}(s)_1^{\sharp} = {}^{k}\overset{\overline{n}}{\Pi}(s)_1^{\sharp} p_{\downarrow n} \tag{4.40} $$

et

$$ \beta_{m,n}^{\sharp}\, {}^{k}\overset{\overline{n}}{\Pi}(s)_1^{\sharp\uparrow m} = {}^{k}\overset{\overline{n}}{\Pi}(s)_1^{\sharp} \beta_{m,n}^{\sharp} \quad \textit{et} \quad \beta_{n,m}^{\sharp}\, {}^{k}\overset{\overline{n}}{\Pi}(s)_1^{\sharp} = {}^{k}\overset{\overline{n}}{\Pi}(s)_1^{\sharp\uparrow m} \beta_{n,m}^{\sharp} \tag{4.41} $$

Démonstration. Les deux premières égalités sont les conséquences directes d'applications répétées de (4.37) et de la définition des termes $p_{\uparrow n}$ et $p_{\downarrow n}$.

Pour la troisième égalité, nous avons

$$\begin{aligned}
\beta^{\sharp}_{m,\overline{n}+\alpha\underline{n}}\beta^{\sharp\uparrow\overline{n}+m}_{\alpha,\alpha k}\beta^{\sharp\uparrow m}_{\alpha,\overline{n}}\beta^{\sharp\uparrow m}_{\overline{n},\alpha} &\overset{(4.5)(4.5)}{=} \left[\beta^{\sharp\uparrow\alpha(k+1)+\overline{n}}_{m,\alpha(\underline{n}-k-1)}\beta^{\sharp\uparrow\alpha k+\overline{n}}_{m,\alpha}\beta^{\sharp}_{m,\overline{n}+\alpha k}\right]\left[\beta^{\sharp\uparrow m}_{\alpha,\overline{n}+\alpha k}\right]\beta^{\sharp\uparrow m}_{\overline{n},\alpha}\\
&\overset{(4.12)}{=} \beta^{\sharp\uparrow\alpha(k+1)+\overline{n}}_{m,\alpha(\underline{n}-k-1)}\left[\beta^{\sharp}_{\alpha,\overline{n}+\alpha k}\beta^{\sharp\uparrow\alpha}_{m,\overline{n}+\alpha k}\beta^{\sharp}_{m,\alpha}\right]\beta^{\sharp\uparrow m}_{\overline{n},\alpha}\\
&\overset{(4.7)(4.5)}{=} \left[\beta^{\sharp}_{\alpha,\overline{n}+\alpha k}\beta^{\sharp\uparrow\alpha(k+1)+\overline{n}}_{m,\alpha(\underline{n}-k-1)}\right]\left[\beta^{\sharp\uparrow\alpha+\overline{n}}_{m,\alpha k}\beta^{\sharp\uparrow\alpha}_{m,\overline{n}}\right]\beta^{\sharp}_{m,\alpha}\beta^{\sharp\uparrow m}_{\overline{n},\alpha}\\
&\overset{(4.5)(4.12)}{=} \beta^{\sharp}_{\alpha,\overline{n}+\alpha k}\left[\beta^{\sharp\uparrow\alpha+\overline{n}}_{m,\alpha(\underline{n}-1)}\right]\left[\beta^{\sharp}_{\overline{n},\alpha}\beta^{\sharp\uparrow\overline{n}}_{m,\alpha}\beta^{\sharp}_{m,\overline{n}}\right]\\
&\overset{(4.7)(4.5)}{=} \beta^{\sharp}_{\alpha,\overline{n}+\alpha k}\left[\beta^{\sharp}_{\overline{n},\alpha}\beta^{\sharp\uparrow\alpha+\overline{n}}_{m,\alpha(\underline{n}-1)}\right]\left[\beta^{\sharp}_{m,\overline{n}+\alpha}\right]\\
&\overset{(4.5)(4.5)}{=} \left[\beta^{\sharp\uparrow\overline{n}}_{\alpha,\alpha k}\beta^{\sharp}_{\alpha,\overline{n}}\right]\beta^{\sharp}_{\overline{n},\alpha}\left[\beta^{\sharp}_{m,\overline{n}+\alpha\underline{n}}\right].
\end{aligned} \tag{4.42}$$

Il ne reste alors que le facteur $p^{\uparrow\overline{n}}_{\uparrow\alpha}p^{\uparrow\overline{n}}_{\downarrow\alpha}$ qui, concordement à (4.37), quasi-commute :

$$\beta^{\sharp}_{m,\overline{n}+\alpha\underline{n}}p^{\uparrow\overline{n}}_{\uparrow\alpha}p^{\uparrow\overline{n}}_{\downarrow\alpha} = p^{\uparrow\overline{n}+m}_{\uparrow\alpha}p^{\uparrow\overline{n}+m}_{\downarrow\alpha}\beta^{\sharp}_{m,\overline{n}+\alpha\underline{n}},$$

et permet de conclure. La dernière égalité est prouvée de manière similaire. □

Nous pouvons enfin obtenir un analogue zébré au théorème binomial

Proposition 39. *Nous avons*

$$^{\delta}\overset{\overline{t}}{\Pi}(s)^{\sharp}_{n} = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i s^i Ш^{\sharp\uparrow\alpha\delta+\overline{t}}_{i,n-i}\beta^{\sharp\uparrow\overline{t}}_{\alpha i,\alpha\delta}\Delta^{\sharp\uparrow\overline{t}}_{\alpha i}p^{\uparrow\overline{t}}_{\uparrow\alpha i}\beta^{\sharp}_{\alpha i,\overline{t}}\beta^{\sharp}_{\overline{t},\alpha i}p^{\uparrow\overline{t}}_{\downarrow\alpha i}, \tag{4.43}$$

Démonstration. Comme pour le cas $\alpha = 1$, nous allons procéder par récurrence sur δ. Nous vérifions l'initialisation pour $\delta = 0$ en menant une récurrence sur n. La proposition étant clairement vraie pour $n = 0, 1$, supposons que (4.43) soit vraie pour une valeur de n arbitraire. Alors, pour $n + 1$,

$$\begin{aligned}
^{0}\overset{\overline{t}}{\Pi}(s)^{\sharp}_{n+1} &= {}^{0}\overset{\overline{t}}{\Pi}(s)^{\sharp}_{n}\,{}^{n}\overset{\overline{t}}{\Pi}(s)^{\sharp}_{1}\\
&= \sum_{i=0}^{n}(-1)^i s^i Ш^{\sharp\uparrow\overline{t}}_{i,n-i}\Delta^{\sharp\uparrow\overline{t}}_{\alpha i}p^{\uparrow\overline{t}}_{\uparrow\alpha i}\beta^{\sharp}_{\alpha i,\overline{t}}\beta^{\sharp}_{\overline{t},\alpha i}p^{\uparrow\overline{t}}_{\downarrow\alpha i}\left(1 - s\beta^{\sharp\uparrow\overline{t}}_{\alpha,\alpha(n+\delta)}p^{\uparrow\overline{t}}_{\uparrow\alpha}\beta^{\sharp}_{\alpha,\overline{t}}\beta^{\sharp}_{\overline{t},\alpha}p^{\uparrow\overline{t}}_{\downarrow\alpha}\right)\\
&= 1 + \sum_{i=1}^{n}(-1)^i s^i Ш^{\sharp\uparrow\overline{t}}_{i,n-i}\Delta^{\sharp\uparrow\overline{t}}_{\alpha i}p^{\uparrow\overline{t}}_{\uparrow\alpha i}\beta^{\sharp}_{\alpha i,\overline{t}}\beta^{\sharp}_{\overline{t},\alpha i}p^{\uparrow\overline{t}}_{\downarrow\alpha i} +\\
&\quad + \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^{i+1}s^{i+1}Ш^{\sharp\uparrow\overline{t}}_{i,n-i}\Delta^{\sharp\uparrow\overline{t}}_{\alpha i}p^{\uparrow\overline{t}}_{\uparrow\alpha i}\beta^{\sharp}_{\alpha i,\overline{t}}\beta^{\sharp}_{\overline{t},\alpha i}p^{\uparrow\overline{t}}_{\downarrow\alpha i}\beta^{\sharp\uparrow\overline{t}}_{\alpha,\alpha n}p^{\uparrow\overline{t}}_{\uparrow\alpha}\beta^{\sharp}_{\alpha,\overline{t}}\beta^{\sharp}_{\overline{t},\alpha}p^{\uparrow\overline{t}}_{\downarrow\alpha} +\\
&\qquad + (-1)^{n+1}s^{n+1}\Delta^{\sharp\uparrow\overline{t}}_{\alpha n}p^{\uparrow\overline{t}}_{\uparrow\alpha n}\beta^{\sharp}_{\alpha n,\overline{t}}\beta^{\sharp}_{\overline{t},\alpha n}p^{\uparrow\overline{t}}_{\downarrow\alpha n}\beta^{\sharp\uparrow\overline{t}}_{\alpha,\alpha n}p^{\uparrow\overline{t}}_{\uparrow\alpha}\beta^{\sharp}_{\alpha,\overline{t}}\beta^{\sharp}_{\overline{t},\alpha}p^{\uparrow\overline{t}}_{\downarrow\alpha}.
\end{aligned} \tag{4.44}$$

Nous allons maintenant déplacer le plus possible à gauche les $\beta^{\sharp\uparrow\overline{t}}_{\alpha,\alpha n}$ apparaissant dans les deux derniers termes de cette équation. Notons que puisque $i \leq n$, nous pouvons décomposer

$$\beta^{\sharp\uparrow\overline{t}}_{\alpha,\alpha n} = \beta^{\sharp\uparrow\overline{t}+\alpha i}_{\alpha,\alpha(n-i)}\beta^{\sharp\uparrow\overline{t}}_{\alpha,\alpha i},$$

et alors

$$\Delta^{\sharp\uparrow\bar{t}}_{\alpha i}\, p^{\uparrow\bar{t}}_{\uparrow\alpha i}\beta^{\sharp}_{\alpha i,\bar{t}}\beta^{\sharp}_{\bar{t},\alpha i}p^{\uparrow\bar{t}}_{\downarrow\alpha i}\left[\beta^{\sharp\uparrow\bar{t}}_{\alpha,\alpha n}\right] = \left[\beta^{\sharp\uparrow\bar{t}+\alpha i}_{\alpha,\alpha(n-i)}\right]\Delta^{\sharp\uparrow\bar{t}}_{\alpha i}\, p^{\uparrow\bar{t}}_{\uparrow\alpha i}\beta^{\sharp}_{\alpha i,\bar{t}}\beta^{\sharp}_{\bar{t},\alpha i}p^{\uparrow\bar{t}}_{\downarrow\alpha i}\left[\beta^{\sharp\uparrow\bar{t}}_{\alpha,\alpha i}\right].$$

Maintenant,

$$\begin{aligned}
p^{\uparrow\bar{t}}_{\uparrow\alpha i}\beta^{\sharp}_{\alpha i,\bar{t}}\beta^{\sharp}_{\bar{t},\alpha i}p^{\uparrow\bar{t}}_{\downarrow\alpha i}\beta^{\sharp\uparrow\bar{t}}_{\alpha,\alpha i}p^{\uparrow\bar{t}}_{\uparrow\alpha}\beta^{\sharp}_{\alpha,\bar{t}}\beta^{\sharp}_{\bar{t},\alpha}p^{\uparrow\bar{t}}_{\downarrow\alpha} &\overset{(4.33)}{=} \beta^{\sharp}_{\alpha i,\bar{t}}\beta^{\sharp}_{\bar{t},\alpha i}\beta^{\sharp\uparrow\bar{t}}_{\alpha,\alpha i}\beta^{\sharp}_{\alpha,\bar{t}}\beta^{\sharp}_{\bar{t},\alpha}\left[p^{\uparrow\bar{t}+\alpha}_{\uparrow\alpha i}\, p^{\uparrow\bar{t}}_{\uparrow\alpha}p^{\uparrow\bar{t}+\alpha}_{\downarrow\alpha i}\, p^{\uparrow\bar{t}}_{\downarrow\alpha}\right]\\
&\overset{(4.12)}{=} \beta^{\sharp}_{\alpha i,\bar{t}}\left[\beta^{\sharp\uparrow\alpha i}_{\alpha,\bar{t}}\beta^{\sharp}_{\alpha,\alpha i}\beta^{\sharp\uparrow\alpha}_{\bar{t},\alpha i}\right]\beta^{\sharp}_{\bar{t},\alpha}p^{\uparrow\bar{t}}_{\uparrow\alpha(i+1)}p^{\uparrow\bar{t}}_{\downarrow\alpha(i+1)}\\
&\overset{(4.12)}{=} \left[\beta^{\sharp\uparrow\bar{t}}_{\alpha,\alpha i}\beta^{\sharp}_{\alpha,\bar{t}}\beta^{\sharp\uparrow\alpha}_{\alpha i,\bar{t}}\right]\beta^{\sharp\uparrow\alpha}_{\bar{t},\alpha i}\beta^{\sharp}_{\bar{t},\alpha}p^{\uparrow\bar{t}}_{\uparrow\alpha(i+1)}p^{\uparrow\bar{t}}_{\downarrow\alpha(i+1)}\\
&\overset{(4.6)(4.5)}{=} \beta^{\sharp\uparrow\bar{t}}_{\alpha,\alpha i}\left[\beta^{\sharp}_{\alpha(i+1),\bar{t}}\right]\left[\beta^{\sharp}_{\bar{t},\alpha(i+1)}\right]p^{\uparrow\bar{t}}_{\uparrow\alpha(i+1)}p^{\uparrow\bar{t}}_{\downarrow\alpha(i+1)}\\
&= \beta^{\sharp\uparrow\bar{t}}_{\alpha,\alpha i}p^{\uparrow\bar{t}}_{\uparrow\alpha(i+1)}\beta^{\sharp}_{\alpha(i+1),\bar{t}}\beta^{\sharp}_{\bar{t},\alpha(i+1)}p^{\uparrow\bar{t}}_{\downarrow\alpha(i+1)}.
\end{aligned} \tag{4.45}$$

De même,

$$\begin{aligned}
\Delta^{\sharp\uparrow\bar{t}}_{\alpha i}\beta^{\sharp\uparrow\bar{t}}_{\alpha,\alpha(n+\delta)} &= \Delta^{\sharp\uparrow\bar{t}}_{\alpha i}\beta^{\sharp\uparrow\bar{t}+\alpha(i+\delta)}_{\alpha,\alpha(n-i)}\beta^{\sharp\uparrow\bar{t}}_{\alpha,\alpha i}\\
&\overset{(4.7)}{=} \left[\beta^{\sharp\uparrow\bar{t}+\alpha(i+\delta)}_{\alpha,\alpha(n-i)}\right]\Delta^{\sharp\uparrow\bar{t}}_{\alpha i}\beta^{\sharp\uparrow\bar{t}}_{\alpha,\alpha i}\\
&\overset{(4.22)}{=} \beta^{\sharp\uparrow\bar{t}+\alpha i}_{\alpha,\alpha(n-i)}\left[\Delta^{\sharp\uparrow\bar{t}}_{\alpha(i+1)}\right].
\end{aligned} \tag{4.46}$$

À l'aide des relations (4.45) and (4.46), nous pouvons réécrire les deux derniers termes de (4.44). Dès lors, réaliser le changement de variable de sommation $i' = i-1$ dans la seconde somme permet de l'incorporer dans la première pour obtenir

$$\begin{aligned}
{}^{0}\overset{\bar{t}}{\Pi}(s)^{\sharp}_{n}\,{}^{n}\overset{\bar{t}}{\Pi}(s)^{\sharp}_{1} = 1 + \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i}s^{i}\Big[&\text{Ш}^{\sharp\uparrow\bar{t}}_{i,n-i} + \text{Ш}^{\sharp\uparrow\bar{t}}_{i-1,n-i+1}\beta^{\sharp\uparrow\alpha(i-1)+\bar{t}}_{\alpha,\alpha(n-i+1)}\Big]\times\\
&\times\Delta^{\sharp\uparrow\bar{t}}_{\alpha i}\, p^{\uparrow\bar{t}}_{\uparrow\alpha i}\beta^{\sharp}_{\alpha i,\bar{t}}\beta^{\sharp}_{\bar{t},\alpha i}p^{\uparrow\bar{t}}_{\downarrow\alpha i}+\\
+(-1)^{n+1}s^{n+1}&\beta^{\sharp\uparrow\bar{t}}_{\alpha(n+1),\alpha\delta}\Delta^{\sharp\uparrow\bar{t}}_{\alpha(n+1)}p^{\uparrow\bar{t}}_{\uparrow\alpha(n+1)}\beta^{\sharp}_{\alpha(n+1),\bar{t}}\beta^{\sharp}_{\bar{t},\alpha(n+1)}p^{\uparrow\bar{t}}_{\downarrow\alpha(n+1)},
\end{aligned} \tag{4.47}$$

mais en vertu de (4.28),

$$\text{Ш}^{\sharp\uparrow\bar{t}}_{i,n-i} + \text{Ш}^{\sharp\uparrow\bar{t}}_{i-1,n-i+1}\beta^{\sharp\uparrow\alpha(i-1)+\bar{t}}_{\alpha,\alpha(n-i+1)} = \text{Ш}^{\sharp\uparrow\bar{t}}_{i,n+1-i},$$

ce qui permet de réécrire le membre de droite de (2.66) comme une somme allant de 0 à $n+1$ et ainsi termine l'induction sur n.

Nous allons alors procéder à la vérification de la récurrence sur δ. Comme pour le cas $\alpha = 1$, il suffit de vérifier que

$${}^{\delta}\overset{\bar{t}}{\Pi}(s)^{\sharp}_{n}\left(1 - s\beta^{\sharp\uparrow\bar{t}}_{\alpha,\alpha(n+\delta)}\cdot p^{\uparrow\bar{t}}_{\uparrow\alpha}\beta^{\sharp}_{\alpha,\bar{t}}\beta^{\sharp}_{\bar{t},\alpha}p^{\uparrow\bar{t}}_{\downarrow\alpha}\right) = \left(1 - s\beta^{\sharp\uparrow\bar{t}}_{\alpha,\alpha\delta}\cdot p^{\uparrow\bar{t}}_{\uparrow\alpha}\beta^{\sharp}_{\alpha,\bar{t}}\beta^{\sharp}_{\bar{t},\alpha}p^{\uparrow\bar{t}}_{\downarrow\alpha}\right){}^{\delta+1}\overset{\bar{t}}{\Pi}(s)^{\sharp}_{n}.$$

Notons que par définition,

$${}^{\delta}\overset{\bar{t}}{\Pi}(s)^{\sharp}_{n}\left(1 - s\beta^{\sharp\uparrow\bar{t}}_{\alpha,\alpha(n+\delta)}\cdot p^{\uparrow\bar{t}}_{\uparrow\alpha}\beta^{\sharp}_{\alpha,\bar{t}}\beta^{\sharp}_{\bar{t},\alpha}p^{\uparrow\bar{t}}_{\downarrow\alpha}\right) = {}^{\delta}\overset{\bar{t}}{\Pi}(s)^{\sharp}_{n+1},$$

alors

$$
\begin{aligned}
{}^{\delta}\overset{\overline{t}}{\Pi}(s)^{\sharp}_{n+1} &= \sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i s^i \text{Ш}^{\sharp\uparrow\alpha\delta+\overline{t}}_{i,n+1-i}\beta^{\sharp\uparrow\overline{t}}_{\alpha i,\alpha\delta}\Delta^{\sharp\uparrow\overline{t}}_{\alpha i}p^{\uparrow\overline{t}}_{\uparrow\alpha i}\beta^{\sharp}_{\alpha i,\overline{t}}\beta^{\sharp}_{\overline{t},\alpha i}p^{\uparrow\overline{t}}_{\downarrow\alpha i}\\
&\overset{(4.26)}{=} \sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i s^i \text{Ш}^{\sharp\uparrow\alpha(\delta+1)+\overline{t}}_{i-1,n+1-i}\beta^{\sharp\uparrow\overline{t}}_{\alpha i,\alpha\delta}\Delta^{\sharp\uparrow\overline{t}}_{\alpha i}p^{\uparrow\overline{t}}_{\uparrow\alpha i}\beta^{\sharp}_{\alpha i,\overline{t}}\beta^{\sharp}_{\overline{t},\alpha i}p^{\uparrow\overline{t}}_{\downarrow\alpha i}+\\
&\quad+\sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i s^i \text{Ш}^{\sharp\uparrow\alpha(\delta+1)+\overline{t}}_{i,n-i}\beta^{\sharp\uparrow\alpha\delta+\overline{t}}_{\alpha i,\alpha}\beta^{\sharp\uparrow\overline{t}}_{\alpha i,\alpha\delta}\Delta^{\sharp\uparrow\overline{t}}_{\alpha i}p^{\uparrow\overline{t}}_{\uparrow\alpha i}\beta^{\sharp}_{\alpha i,\overline{t}}\beta^{\sharp}_{\overline{t},\alpha i}p^{\uparrow\overline{t}}_{\downarrow\alpha i}\\
&= \sum_{i'=0}^{n}(-1)^{i'+1} s^{i'+1} \text{Ш}^{\sharp\uparrow\alpha(\delta+1)+\overline{t}}_{i',n-i'}\beta^{\sharp\uparrow\overline{t}}_{\alpha(i'+1),\alpha\delta}\times\\
&\qquad\qquad\times\Delta^{\sharp\uparrow\overline{t}}_{\alpha(i'+1)}p^{\uparrow\overline{t}}_{\uparrow\alpha(i'+1)}\beta^{\sharp}_{\alpha(i'+1),\overline{t}}\beta^{\sharp}_{\overline{t},\alpha(i'+1)}p^{\uparrow\overline{t}}_{\downarrow\alpha(i'+1)}+\\
&\quad+\sum_{i=0}^{n}(-1)^i s^i \text{Ш}^{\sharp\uparrow\alpha(\delta+1)+\overline{t}}_{i,n-i}\beta^{\sharp\uparrow\overline{t}}_{\alpha i,\alpha(\delta+1)}\Delta^{\sharp\uparrow\overline{t}}_{\alpha i}p^{\uparrow\overline{t}}_{\uparrow\alpha i}\beta^{\sharp}_{\alpha i,\overline{t}}\beta^{\sharp}_{\overline{t},\alpha i}p^{\uparrow\overline{t}}_{\downarrow\alpha i}.
\end{aligned}
\tag{4.48}
$$

Dans la somme sur i', nous avons

$$
\beta^{\sharp\uparrow\overline{t}}_{\alpha(i'+1),\alpha\delta}\Delta^{\sharp\uparrow\overline{t}}_{\alpha(i'+1)} = \beta^{\sharp\uparrow\overline{t}}_{\alpha,\alpha\delta}\beta^{\sharp\uparrow\overline{t}+\alpha}_{\alpha i',\alpha\delta}\cdot\Delta^{\sharp\uparrow\overline{t}+\alpha}_{\alpha i'}\beta^{\sharp\uparrow\overline{t}}_{\alpha i',\alpha},
\tag{4.49}
$$

et

$$
\beta^{\sharp}_{\alpha(i'+1),\overline{t}}\beta^{\sharp}_{\overline{t},\alpha(i'+1)} = \beta^{\sharp}_{\alpha i',\overline{t}}\beta^{\sharp\uparrow\alpha i'}_{\alpha,\overline{t}}\beta^{\sharp\uparrow\alpha i'}_{\overline{t},\alpha}\beta^{\sharp}_{\overline{t},\alpha i'}.
\tag{4.50}
$$

Ainsi, en multipliant (4.49) par (4.50) à droite,

$$
\begin{aligned}
\beta^{\sharp\uparrow\overline{t}}_{\alpha(i'+1),\alpha\delta}\Delta^{\sharp\uparrow\overline{t}}_{\alpha(i'+1)}\beta^{\sharp}_{\alpha(i'+1),\overline{t}}\beta^{\sharp}_{\overline{t},\alpha(i'+1)} &= \beta^{\sharp\uparrow\overline{t}}_{\alpha,\alpha\delta}\beta^{\sharp\uparrow\overline{t}+\alpha}_{\alpha i',\alpha\delta}\Delta^{\sharp\uparrow\overline{t}+\alpha}_{\alpha i'}\beta^{\sharp\uparrow\overline{t}}_{\alpha i',\alpha}\beta^{\sharp}_{\alpha i',\overline{t}}\beta^{\sharp\uparrow\alpha i'}_{\alpha,\overline{t}}\beta^{\sharp\uparrow\alpha i'}_{\overline{t},\alpha}\beta^{\sharp}_{\overline{t},\alpha i'}\\
&\overset{(4.5)}{=} \beta^{\sharp\uparrow\overline{t}}_{\alpha,\alpha\delta}\beta^{\sharp\uparrow\overline{t}+\alpha}_{\alpha i',\alpha\delta}\Delta^{\sharp\uparrow\overline{t}+\alpha}_{\alpha i'}\left[\beta^{\sharp}_{\alpha i',\overline{t}+\alpha}\right]\beta^{\sharp\uparrow\alpha i'}_{\alpha,\overline{t}}\beta^{\sharp\uparrow\alpha i'}_{\overline{t},\alpha}\beta^{\sharp}_{\overline{t},\alpha i'}\\
&\overset{(4.12)}{=} \beta^{\sharp\uparrow\overline{t}}_{\alpha,\alpha\delta}\beta^{\sharp\uparrow\overline{t}+\alpha}_{\alpha i',\alpha\delta}\Delta^{\sharp\uparrow\overline{t}+\alpha}_{\alpha i'}\left[\beta^{\sharp}_{\alpha,\overline{t}}\beta^{\sharp}_{\overline{t},\alpha}\right]\beta^{\sharp}_{\alpha i',\overline{t}+\alpha}\beta^{\sharp}_{\overline{t},\alpha i'}\\
&\overset{(4.7)(4.5)}{=} \beta^{\sharp\uparrow\overline{t}}_{\alpha,\alpha\delta}\left[\beta^{\sharp}_{\alpha,\overline{t}}\beta^{\sharp}_{\overline{t},\alpha}\right]\beta^{\sharp\uparrow\overline{t}+\alpha}_{\alpha i',\alpha\delta}\Delta^{\sharp\uparrow\overline{t}+\alpha}_{\alpha i'}\left[\beta^{\sharp\uparrow\overline{t}}_{\alpha i',\alpha}\beta^{\sharp}_{\alpha i',\overline{t}}\right]\beta^{\sharp}_{\overline{t},\alpha i'}\\
&\overset{(4.12)}{=} \beta^{\sharp\uparrow\overline{t}}_{\alpha,\alpha\delta}\beta^{\sharp}_{\alpha,\overline{t}}\beta^{\sharp}_{\overline{t},\alpha}\beta^{\sharp\uparrow\overline{t}+\alpha}_{\alpha i',\alpha\delta}\left[\beta^{\sharp\uparrow\overline{t}}_{\alpha i',\alpha}\Delta^{\sharp\uparrow\overline{t}}_{\alpha i'}\right]\beta^{\sharp}_{\alpha i',\overline{t}}\beta^{\sharp}_{\overline{t},\alpha i'}\\
&\overset{(4.5)}{=} \beta^{\sharp\uparrow\overline{t}}_{\alpha,\alpha\delta}\beta^{\sharp}_{\alpha,\overline{t}}\beta^{\sharp}_{\overline{t},\alpha}\left[\beta^{\sharp\uparrow\overline{t}+\alpha}_{\alpha i',\alpha(\delta+1)}\right]\Delta^{\sharp\uparrow\overline{t}}_{\alpha i'}\beta^{\sharp}_{\alpha i',\overline{t}}\beta^{\sharp}_{\overline{t},\alpha i'}.
\end{aligned}
\tag{4.51}
$$

Les éléments internes $p^{\uparrow\overline{t}}_{\uparrow\alpha}$ et $p^{\uparrow\overline{t}}_{\downarrow\alpha}$ suivent le même chemin que $\beta^{\sharp}_{\alpha,\overline{t}}$ et $\beta^{\sharp}_{\overline{t},\alpha}$. Grâce à la commutation à distance avec le battage, nous donc pouvons réécrire la première somme de (4.48) comme

$$
-s\beta^{\sharp\uparrow\overline{t}}_{\alpha,\alpha\delta}p^{\uparrow\overline{t}}_{\uparrow\alpha}\beta^{\sharp}_{\alpha,\overline{t}}\beta^{\sharp}_{\overline{t},\alpha}p^{\uparrow\overline{t}}_{\downarrow\alpha}\sum_{i'=0}^{n}(-1)^{i'}s^{i'}\text{Ш}^{\sharp\uparrow\alpha(\delta+1)+\overline{t}}_{i',n-i'}\beta^{\sharp\uparrow\overline{t}}_{\alpha i',\alpha(\delta+1)}\Delta^{\sharp\uparrow\overline{t}}_{\alpha i'}p^{\uparrow\overline{t}}_{\uparrow\alpha i'}\beta^{\sharp}_{\alpha i',\overline{t}}\beta^{\sharp}_{\overline{t},\alpha i'}p^{\uparrow\overline{t}}_{\downarrow\alpha i'},
$$

c'est-à-dire

$$
{}^{\delta}\overset{\overline{t}}{\Pi}(s)^{\sharp}_{n+1} = \left(1 - s\beta^{\sharp\uparrow\overline{t}}_{\alpha,\alpha\delta}\cdot p^{\uparrow\overline{t}}_{\uparrow\alpha}\beta^{\sharp}_{\alpha,\overline{t}}\beta^{\sharp}_{\overline{t},\alpha}p^{\uparrow\overline{t}}_{\downarrow\alpha}\right)^{\delta+1}\overset{\overline{t}}{\Pi}(s)^{\sharp}_{n},
$$

ce qui montre la récurrence sur δ et finit la démonstration de la proposition. □

4.2 Système et solution

4.2.1 Système zébré

Nous établissons ici le système d'équations que doivent satisfaire les éléments de matrice d'un tressage zébré. Nous utilisons la même procédure qu'à la sous-section 3.1.2, à savoir le réordonnement d'un triplet de tenseurs $x_{b\rangle} y^{\uparrow b}_{c\rangle} z^{\uparrow b+c}_{d\rangle}$ de deux manières différentes, cette fois-ci à l'aide des relations de commutation (4.3).

Si nous commençons par les deux derniers tenseurs, nous aboutissons à

$$\begin{aligned} x_{b\rangle} y^{\uparrow b}_{c\rangle} z^{\uparrow b+c}_{d\rangle} &= \\ &= \sum_{k_1=0}^{\underline{d}} \sum_{k_2=0}^{\underline{d}-k_1} \sum_{k_3=0}^{\underline{c}+k_1} \left\{ {}^{c}_{d-\alpha k_1} \; {}^{d} \right\}^{\uparrow b} \left\{ {}^{b}_{d-\alpha(k_1+k_2)} \; {}^{d-\alpha k_1} \right\} \left\{ {}^{b+\alpha k_2}_{c+\alpha(k_1-k_3)} \; {}^{c+\alpha k_1} \right\}^{\uparrow d-\alpha(k_1+k_2)} \times \\ &\qquad \times z_{d-\alpha(k_1+k_2)\rangle} y^{\uparrow d-\alpha(k_1+k_2)}_{c+\alpha(k_1-k_3)\rangle} x^{\uparrow c+d-\alpha(k_2+k_3)}_{b+\alpha(k_2+k_3)\rangle}. \end{aligned} \tag{4.52}$$

La procédure qui commence par les deux premiers tenseurs aboutit quant à elle à

$$\begin{aligned} x_{b\rangle} y^{\uparrow b}_{c\rangle} z^{\uparrow b+c}_{d\rangle} &= \\ &= \sum_{k'_1=0}^{\underline{c}} \sum_{k'_2=0}^{\underline{d}} \sum_{k'_3=0}^{\underline{d}-k'_2} \left\{ {}^{b}_{c-\alpha k'_1} \; {}^{c} \right\} \left\{ {}^{b+\alpha k'_1}_{d-\alpha k'_2} \; {}^{d} \right\}^{\uparrow c-\alpha k'_1} \left\{ {}^{c-\alpha k'_1}_{d-\alpha(k'_2+k'_3)} \; {}^{d-\alpha k'_2} \right\} \times \\ &\qquad \times z_{d-\alpha(k'_2+k'_3)\rangle} y^{\uparrow d-\alpha(k'_2+k'_3)}_{c-\alpha(k'_1-k'_3)\rangle} x^{\uparrow c+d-\alpha(k'_1+k'_2)}_{b+\alpha(k'_1+k'_2)\rangle}. \end{aligned} \tag{4.53}$$

Les relations de commutation sont donc assiciatives si (4.52) = (4.53). Nous réalisons dans ces deux relations le changement de variables $i = k_1 + k_2 = k'_2 + k'_3$ et $l = k_1 - k_3 = k'_3 - k'_1$. Il permet d'égaliser termes à termes les éléments agissant sur le même triplet $z_{d-\alpha i\rangle} y^{\uparrow d-\alpha i}_{c+\alpha l\rangle} x^{\uparrow c+d+\alpha(i-l)}_{b+\alpha(i-l)\rangle}$, et ((4.52) = (4.53)) est alors équivalente à

$$\begin{aligned} &\sum_{k=\max(0,l)}^{i} \left\{ {}^{c}_{d-\alpha k} \; {}^{d} \right\}^{\uparrow b} \left\{ {}^{b}_{d-\alpha i} \; {}^{d-\alpha k} \right\} \left\{ {}^{b+\alpha(i-k)}_{c+\alpha l} \; {}^{c+\alpha k} \right\}^{\uparrow d-\alpha i} = \\ &\qquad = \sum_{k=\max(0,l)}^{\min(i,\underline{c}+l)} \left\{ {}^{b}_{c-\alpha(k-l)} \; {}^{c} \right\} \left\{ {}^{b+\alpha(k-l)}_{d-\alpha(i-k)} \; {}^{d} \right\}^{\uparrow c-\alpha(k-l)} \left\{ {}^{c-\alpha(k-l)}_{d-\alpha i} \; {}^{d-\alpha(i-k)} \right\} \end{aligned} \tag{4.54}$$

avec $0 \leq i \leq \underline{d}$ et $-\underline{c} \leq l \leq i$.

4.2.2 Solution zébrée

Proposition 40. *Soit* $\overset{\overline{t}}{\Pi}{}^{\sharp}_{n} \doteq \overset{\overline{t}}{\Pi}(1)^{\sharp}_{n}$, *alors*

$$\left\{ {}^{X}_{Z} \; {}^{Y} \right\} = q \cdot \text{Ш}^{\sharp\uparrow X+\overline{Z}}_{\underline{Z},\underline{Y-Z}} \cdot p_{\downarrow X} \beta^{\sharp}_{Z,X} p_{\uparrow Z} \cdot {}^{\underline{X}}\overset{\overline{X}}{\Pi}{}^{\sharp\uparrow Z}_{\underline{Y-Z}} \tag{4.55}$$

est une solution du système (4.54)

Démonstration. La preuve est la même que pour le cas $\alpha = 1$, mais un peu plus longue. Elle consiste à injecter l'Ansatz (4.55) dans le système (4.54) pour vérifier sa validité. Comme précédement, nous allons séparer les membres de gauche et de droite du système (4.54) et nous noterons alors respectivement (4.54L) et (4.54R) les membres de gauche et de droite de (4.54) dans lesquels nous avons injecté (4.55). Pour être plus explicite, nous devons alors vérifier que (4.54L) = (4.54R) avec

$$\begin{aligned}(4.54\mathrm{L}) = \sum_{k=\max(0,l)}^{i} & q^3 \text{Ш}^{\sharp\uparrow c+b+\overline{d}}_{\underline{d}-k,k} p^{\uparrow b}_{\downarrow c} \beta^{\sharp\uparrow b}_{d-\alpha k,c} p^{\uparrow b}_{\uparrow d-\alpha k} \cdot {}^{\underline{c}}\overline{\prod}_{k}^{\sharp\uparrow b+d-\alpha k} \times \\ & \times \text{Ш}^{\sharp\uparrow b+\overline{d}}_{\underline{d}-i,i-k} p_{\downarrow b} \beta^{\sharp}_{d-\alpha i,b} p_{\uparrow d-\alpha i} \cdot {}^{\underline{b}}\overline{\prod}_{i-k}^{\sharp\uparrow d-\alpha i} \times \\ & \times \text{Ш}^{\sharp\uparrow b+d-\alpha k+\overline{c}}_{\underline{c}+l,k-l} p^{\uparrow d-\alpha i}_{\downarrow b+\alpha(i-k)} \beta^{\sharp\uparrow d-\alpha i}_{c+\alpha l,b+\alpha(i-k)} p^{\uparrow d-\alpha i}_{\uparrow c+\alpha l} \cdot {}^{\underline{b}+i-k}\overline{\prod}_{k-l}^{\sharp\uparrow c+d-\alpha(i-l)},\end{aligned} \tag{4.56}$$

et

$$\begin{aligned}(4.54\mathrm{R}) = \sum_{k=\max(0,l)}^{\min(i,\underline{c}+l)} & q^3 \text{Ш}^{\sharp\uparrow b+\overline{c}}_{\underline{c}-(k-l),k-l} p_{\downarrow b} \beta^{\sharp}_{c-\alpha(k-l),b} p_{\uparrow c-\alpha(k-l)} \cdot {}^{\underline{b}}\overline{\prod}_{k-l}^{\sharp\uparrow c-\alpha(k-l)} \times \\ & \times \text{Ш}^{\sharp\uparrow b+c+\overline{d}}_{\underline{d}-(i-k),i-k} p^{\uparrow c-\alpha(k-l)}_{\downarrow b+\alpha(k-l)} \beta^{\sharp\uparrow c-\alpha(k-l)}_{d-\alpha(i-k),b+\alpha(k-l)} p^{\uparrow c-\alpha(k-l)}_{\uparrow d-\alpha(i-k)} \cdot {}^{\underline{b}+k-l}\overline{\prod}_{i-k}^{\sharp\uparrow c+d-\alpha(i-l)} \times \\ & \times \text{Ш}^{\sharp\uparrow c-\alpha(k-l)+\overline{d}}_{\underline{d}-i,k} p_{\downarrow c-\alpha(k-l)} \beta^{\sharp}_{d-\alpha i,c-\alpha(k-l)} p_{\uparrow d-\alpha i} \cdot {}^{\underline{c}-(k-l)}\overline{\prod}_{k}^{\sharp\uparrow d-\alpha i},\end{aligned} \tag{4.57}$$

Dans (4.54L), le second symbole de Pochhammer peut être déplacé vers la droite jusqu'à la gauche du dernier. En chemin, il commute à distance avec tous les termes qu'il rencontre sauf $\beta^{\sharp\uparrow d-\alpha i}_{c+\alpha l,b+\alpha(i-k)}$ avec lequel il quasi-commute conformément à (4.41) :

$$ {}^{\underline{b}}\overline{\prod}_{i-k}^{\sharp\uparrow d-\alpha i} \beta^{\sharp\uparrow d-\alpha i}_{c+\alpha l,b+\alpha(i-k)} = \beta^{\sharp\uparrow d-\alpha i}_{c+\alpha l,b+\alpha(i-k)} {}^{\underline{b}}\overline{\prod}_{i-k}^{\sharp\uparrow c+d-\alpha(i-l)}. $$

Dès lors, les deux derniers symboles de Pochhammer peuvent être fusionnés par définition (4.39) :

$$ {}^{\underline{b}}\overline{\prod}_{i-k}^{\sharp\uparrow c+d-\alpha(i-l)} {}^{\underline{b}+i-k}\overline{\prod}_{k-l}^{\sharp\uparrow c+d-\alpha(i-l)} = {}^{\underline{b}}\overline{\prod}_{i-l}^{\sharp\uparrow c+d-\alpha(i-l)}. \tag{4.58}$$

Le même phénomène se produit avec les premier et second symboles de Pochhammer dans (4.54R) et mène au même symbole que (4.58), indépendant de la variable de sommation k. De plus, ce nouveau symbole, qui apparaît en position du second, commute à distance à droite avec tous les termes restants. Nous pouvons alors procéder à la simplication à droite des équations (4.54L) et (4.54R) par le symbole (4.58). Nous remarquons par ailleurs que dans les deux équations, le facteur $p_{\downarrow b}$

commute à distance à gauche avec tous ses prédécesseurs, et de la même manière, le facteur $p_{\uparrow d-\alpha i}$ commute à distance à droite avec tous ses successeurs. Nous renommons alors respectivement (4.54L)′ et (4.54R)′ les équations (4.54L) et (4.54R) simplifiées de (4.58), $p_{\downarrow b}$ et $p_{\uparrow d-\alpha i}$.

Dans (4.54L)′ nous procédons aux scissions suivantes :

$$\begin{aligned}
\beta^{\sharp\uparrow b}_{d-\alpha k,c} &= \beta^{\sharp\uparrow b}_{d-\alpha i,c}\beta^{\sharp\uparrow b+d-\alpha i}_{\alpha(i-k),c}\\
p^{\uparrow b}_{\uparrow d-\alpha k} &= p^{\uparrow b}_{\uparrow d-\alpha i}p^{\uparrow b+d-\alpha i}_{\uparrow\alpha(i-k)}\\
p^{\uparrow d-\alpha i}_{\downarrow b+\alpha(i-k)} &= p^{\uparrow d-\alpha i}_{\downarrow b}p^{\uparrow b+d-\alpha i}_{\downarrow\alpha(i-k)}\\
\beta^{\sharp\uparrow d-\alpha i}_{c+\alpha l,b+\alpha(i-k)} &= \beta^{\sharp\uparrow b+d-\alpha i}_{c+\alpha l,\alpha(i-k)}\beta^{\sharp\uparrow d-\alpha i}_{c+\alpha l,b}
\end{aligned} \tag{4.59}$$

Notons que le terme $p^{\uparrow d-\alpha i}_{\downarrow b}$ de la troisième équation commute à distance avec le battage à sa gauche dans (4.54L)′. Cette commutation est implicite dans la suite. Notons aussi que le symbole de Pochhammer restant commute à distance à droite jusqu'à la gauche du dernier battage. Ainsi, en utilisant (4.25), nous pouvons vérifier que les facteurs de (4.54L)′ autres que le symbole de Pochhammer sont

$$\begin{aligned}
&Ш^{\sharp\uparrow c+b+\overline{d}}_{\underline{d}-k,k}p^{\uparrow b}_{\downarrow c}\beta^{\sharp\uparrow b}_{d-\alpha i,c}\beta^{\sharp\uparrow b+d-\alpha i}_{\alpha(i-k),c}p^{\uparrow b}_{\uparrow d-\alpha i}p^{\uparrow b+d-\alpha i}_{\uparrow\alpha(i-k)}Ш^{\sharp\uparrow b+\overline{d}}_{\underline{d}-i,i-k}\beta^{\sharp}_{d-\alpha i,b}p^{\uparrow d-\alpha i}_{\downarrow b} =\\
&\quad = Ш^{\sharp\uparrow c+b+\overline{d}}_{\underline{d}-k,k}Ш^{\sharp\uparrow c+b+\overline{d}}_{\underline{d}-i,i-k}p^{\uparrow b}_{\downarrow c}p_{\downarrow b}p^{\uparrow b+c}_{\uparrow d-\alpha i}\beta^{\sharp\uparrow b}_{d-\alpha i,c}\beta^{\sharp}_{d-\alpha i,b}\beta^{\sharp\uparrow b+d-\alpha i}_{\alpha(i-k),c}p^{\uparrow b+d-\alpha i}_{\uparrow\alpha(i-k)}.
\end{aligned} \tag{4.60}$$

Les deux battages peuvent se factoriser différemment en vertu de (4.29) :

$$Ш^{\sharp\uparrow c+b+\overline{d}}_{\underline{d}-k,k}Ш^{\sharp\uparrow c+b+\overline{d}}_{\underline{d}-i,i-k} = Ш^{\sharp\uparrow c+b+\overline{d}}_{\underline{d}-i,i-k,k} = Ш^{\sharp\uparrow c+b+\overline{d}}_{\underline{d}-i,i}Ш^{\sharp\uparrow c+b+d-\alpha i}_{i-k,k},$$

et on a donc

$$\begin{aligned}
(4.54\mathrm{L})' = \sum_{k=\max(0,l)}^{i} &Ш^{\sharp\uparrow c+b+\overline{d}}_{\underline{d}-i,i}p^{\uparrow b}_{\downarrow c}p_{\downarrow b}p^{\uparrow b+c}_{\uparrow d-\alpha i}\beta^{\sharp\uparrow b}_{d-\alpha i,c}\beta^{\sharp}_{d-\alpha i,b}\times\\
&\times Ш^{\sharp\uparrow c+b+d-\alpha i}_{i-k,k}\beta^{\sharp\uparrow b+d-\alpha i}_{\alpha(i-k),c}p^{\uparrow b+d-\alpha i}_{\uparrow\alpha(i-k)}\cdot{}^{\underline{c}}_{\overline{c}}\Pi^{\sharp\uparrow b+d-\alpha k}_{k}\times\\
&\times Ш^{\sharp\uparrow b+d-\alpha k+\overline{c}}_{\underline{c}+l,k-l}p^{\uparrow b+d-\alpha i}_{\downarrow\alpha(i-k)}\beta^{\sharp\uparrow b+d-\alpha i}_{c+\alpha l,\alpha(i-k)}\cdot\beta^{\sharp\uparrow d-\alpha i}_{c+\alpha l,b}p^{\uparrow d-\alpha i}_{\uparrow c+\alpha l}
\end{aligned} \tag{4.61}$$

Regardons maintenant (4.54R)′. Les facteurs entre le premier battage et le symbole de Pochhammer sont, en vertu de (4.25),

$$\begin{aligned}
&\beta^{\sharp}_{c-\alpha(k-l),b}p_{\uparrow c-\alpha(k-l)}Ш^{\sharp\uparrow b+c+\overline{d}}_{\underline{d}-(i-k),i-k}p^{\uparrow c-\alpha(k-l)}_{\downarrow b}p^{\uparrow b+c-\alpha(k-l)}_{\downarrow\alpha(k-l)}\times\\
&\quad\times\beta^{\sharp\uparrow c-\alpha(k-l)}_{d-\alpha(i-k),b+\alpha(k-l)}p^{\uparrow c-\alpha(k-l)}_{\uparrow d-\alpha(i-k)}Ш^{\sharp\uparrow c-\alpha(k-l)+\overline{d}}_{\underline{d}-i,k}p_{\downarrow c-\alpha(k-l)}\beta^{\sharp}_{d-\alpha i,c-\alpha(k-l)} =\\
&= p_{\downarrow b}p^{\uparrow b}_{\downarrow c}Ш^{\sharp\uparrow b+c+\overline{d}}_{\underline{d}-i,k,i-k}p^{\uparrow b+c}_{\uparrow d-\alpha(i)}\beta^{\sharp}_{c-\alpha(k-l),b}\beta^{\sharp\uparrow c-\alpha(k-l)}_{d-\alpha(i-k),b+\alpha(k-l)}\beta^{\sharp}_{d-\alpha i,c-\alpha(k-l)}p^{\uparrow d-\alpha i}_{\uparrow c+\alpha l},
\end{aligned} \tag{4.62}$$

mais (4.5) et (4.6) impliquent que

$$\beta^{\sharp\uparrow c-\alpha(k-l)}_{d-\alpha(i-k),b+\alpha(k-l)} = \beta^{\sharp\uparrow b+c-\alpha(k-l)}_{d-\alpha i,\alpha(k-l)}\beta^{\sharp\uparrow c-\alpha(k-l)}_{d-\alpha i,b}\beta^{\sharp\uparrow b+c+d-\alpha(i+k-l)}_{\alpha k,\alpha(k-l)}\beta^{\sharp\uparrow c+d-\alpha(i+k-l)}_{\alpha k,b} \tag{4.63}$$

et ainsi

$$\begin{aligned}
&\beta^{\sharp}_{c-\alpha(k-l),b}\beta^{\sharp\uparrow c-\alpha(k-l)}_{d-\alpha(i-k),b+\alpha(k-l)}\beta^{\sharp}_{d-\alpha i,c-\alpha(k-l)} = \\
&\overset{(4.63)}{=} \beta^{\sharp}_{c-\alpha(k-l),b}\Big[\beta^{\sharp\uparrow b+c-\alpha(k-l)}_{d-\alpha i,\alpha(k-l)}\beta^{\sharp\uparrow c-\alpha(k-l)}_{d-\alpha i,b}\beta^{\sharp\uparrow b+c+d-\alpha(i+k-l)}_{\alpha k,\alpha(k-l)}\times \\
&\qquad\times\beta^{\sharp\uparrow c+d-\alpha(i+k-l)}_{\alpha k,b}\Big]\beta^{\sharp}_{d-\alpha i,c-\alpha(k-l)} \\
&\overset{(4.7)(4.7)}{=} \Big[\beta^{\sharp\uparrow b+c-\alpha(k-l)}_{d-\alpha i,\alpha(k-l)}\beta^{\sharp}_{c-\alpha(k-l),b}\Big]\beta^{\sharp\uparrow c-\alpha(k-l)}_{d-\alpha i,b}\times \\
&\qquad\times\Big[\beta^{\sharp}_{d-\alpha i,c-\alpha(k-l)}\beta^{\sharp\uparrow b+c+d-\alpha(i+k-l)}_{\alpha k,\alpha(k-l)}\beta^{\sharp\uparrow c+d-\alpha(i+k-l)}_{\alpha k,b}\Big] \\
&\overset{(4.12)}{=} \beta^{\sharp\uparrow b+c-\alpha(k-l)}_{d-\alpha i,\alpha(k-l)}\Big[\beta^{\sharp\uparrow b}_{d-\alpha i,c-\alpha(k-l)}\beta^{\sharp}_{d-\alpha i,b}\beta^{\sharp\uparrow d-\alpha i}_{c-\alpha(k-l),b}\Big]\times \\
&\qquad\times\beta^{\sharp\uparrow b+c+d-\alpha(i+k-l)}_{\alpha k,\alpha(k-l)}\beta^{\sharp\uparrow c+d-\alpha(i+k-l)}_{\alpha k,b} \\
&\overset{(4.5)(4.7)}{=} \Big[\beta^{\sharp\uparrow b}_{d-\alpha i,c}\Big]\beta^{\sharp}_{d-\alpha i,b}\Big[\beta^{\sharp\uparrow b+c+d-\alpha(i+k-l)}_{\alpha k,\alpha(k-l)}\beta^{\sharp\uparrow d-\alpha i}_{c-\alpha(k-l),b}\Big]\beta^{\sharp\uparrow c+d-\alpha(i+k-l)}_{\alpha k,b} \\
&\overset{(4.6)}{=} \beta^{\sharp\uparrow b}_{d-\alpha i,c}\beta^{\sharp}_{d-\alpha i,b}\beta^{\sharp\uparrow b+c+d-\alpha(i+k-l)}_{\alpha k,\alpha(k-l)}\Big[\beta^{\sharp\uparrow d-\alpha i}_{c+\alpha l,b}\Big].
\end{aligned}$$

Nous remarquons qu'à l'aide de (4.41) et (4.40), nous pouvons réécrire le dernier facteur de cette expression, ainsi que son successeur dans (4.62), à droite du symbole de Pochhammer dans (4.54R)′. Pour finir, le battage de (4.62) se factorise comme

$$Ш^{\sharp\uparrow b+c+\overline{d}}_{\underline{d}-i,k,i-k} = Ш^{\sharp\uparrow b+c+\overline{d}}_{\underline{d}-i,i}Ш^{\sharp\uparrow b+c+d-\alpha i}_{k,i-k}$$

et nous pouvons alors réécrire (4.54R)′ comme

$$\begin{aligned}
(4.54\mathrm{R})' = \sum_{k=\max(0,l)}^{\min(i,\underline{c}+l)} & p^{\uparrow b}_{\downarrow c}p_{\downarrow b}Ш^{\sharp\uparrow b+c+\overline{d}}_{\underline{d}-i,i}p^{\uparrow b+c}_{\uparrow d-\alpha(i)}\beta^{\sharp\uparrow b}_{d-\alpha i,c}\beta^{\sharp}_{d-\alpha i,b}Ш^{\sharp\uparrow b+d+\overline{c}-\alpha i}_{\underline{c}-(k-l),k-l}\times \\
&\times Ш^{\sharp\uparrow b+c+d-\alpha i}_{k,i-k}\beta^{\sharp\uparrow b+c+d-\alpha(i+k-l)}_{\alpha k,\alpha(k-l)}{}_{\underline{c}-(k-l)}\overset{\overline{c}}{\Pi}{}^{\sharp\uparrow b+d-\alpha i}_{k}\beta^{\sharp\uparrow d-\alpha i}_{c+\alpha l,b}p^{\uparrow d-\alpha i}_{\uparrow c+\alpha l}.
\end{aligned} \tag{4.64}$$

Nous pouvons alors immédiatement constater que les six premiers ainsi que les deux derniers facteurs de (4.61) et (4.64) sont les mêmes et peuvent être extraits de la somme. Comme précédement, nous simplifions donc ces deux expressions par ces huit facteurs. Tous les facteurs restants ont un décalage d'au moins $(b+d-\alpha i)$ positions. Nous ramenons donc les deux nouveaux membres en première position et nous les renommons respectivement comme (4.54L)″ et (4.54R)″.

Il est maintenant temps de développer les symboles de Pochhammer à l'aide de (4.43). Le symbole de (4.54L)″ est

$$\begin{aligned}
{}_{\underline{c}}\overset{\overline{c}}{\Pi}{}^{\sharp\uparrow\alpha(i-k)}_{k} = \sum_{j=0}^{k}(-1)^{j}Ш^{\sharp\uparrow c+\alpha(i-k)}_{j,k-j}\beta^{\sharp\uparrow\overline{c}+\alpha(i-k)}_{\alpha j,\alpha\underline{c}}\Delta^{\sharp\uparrow\overline{c}+\alpha(i-k)}_{\alpha j}p^{\uparrow\overline{c}+\alpha(i-k)}_{\uparrow\alpha j}\times \\
\times\beta^{\sharp\uparrow\alpha(i-k)}_{\alpha j,\overline{c}}\beta^{\sharp\uparrow\alpha(i-k)}_{\overline{c},\alpha j}p^{\uparrow\overline{c}+\alpha(i-k)}_{\downarrow\alpha j}.
\end{aligned} \tag{4.65}$$

et celui de (4.54R)″,

$$\underline{c}-(k-l)\,\overline{\Pi}^{\sharp}_{k} = \sum_{j=0}^{k}(-1)^{j}\text{Ш}^{\sharp\uparrow c-\alpha(k-l)}_{j,k-j}\beta^{\sharp\uparrow\overline{c}}_{\alpha j,\alpha(\underline{c}-(k-l))}\Delta^{\sharp\uparrow\overline{c}}_{\alpha j}p^{\uparrow\overline{c}}_{\uparrow\alpha j}\beta^{\sharp}_{\alpha j,\overline{c}}\beta^{\sharp}_{\overline{c},\alpha j}p^{\uparrow\overline{c}}_{\downarrow\alpha j}. \tag{4.66}$$

Nous allons maintenant réarranger ces nouveaux facteurs dans leurs membres respectifs. Notons que les battages sont non nuls exactement à l'intérieur des plages de sommation. Nous oublions donc cette information et laissons les sommes courir de $-\infty$ à $+\infty$, les battages conservant les termes nécessaires. Pour (4.54L)″, nous avons

$$\begin{aligned}(4.54\text{L})'' = \sum_{k,j}(-1)^{j}\text{Ш}^{\sharp\uparrow c}_{i-k,k}\beta^{\sharp}_{\alpha(i-k),c}p_{\uparrow\alpha(i-k)}\text{Ш}^{\sharp\uparrow c+\alpha(i-k)}_{j,k-j}\beta^{\sharp\uparrow\overline{c}+\alpha(i-k)}_{\alpha j,\alpha\underline{c}}\times\\ \times\Delta^{\sharp\uparrow\overline{c}+\alpha(i-k)}_{\alpha j}p^{\uparrow\overline{c}+\alpha(i-k)}_{\uparrow\alpha j}\beta^{\sharp\uparrow\alpha(i-k)}_{\alpha j,\overline{c}}\beta^{\sharp\uparrow\alpha(i-k)}_{\overline{c},\alpha j}p^{\uparrow\overline{c}+\alpha(i-k)}_{\downarrow\alpha j}\text{Ш}^{\sharp\uparrow\overline{c}+\alpha(i-k)}_{\underline{c}+l,k-l}\times\\ \times p_{\downarrow\alpha(i-k)}\beta^{\sharp}_{c+\alpha l,\alpha(i-k)}.\end{aligned} \tag{4.67}$$

Puisque le second battage commute à distance à gauche avec les deux facteurs qui le précèdent, nous pouvons factoriser à l'aide de (4.29)

$$\text{Ш}^{\sharp\uparrow c}_{i-k,k}\text{Ш}^{\sharp\uparrow c+\alpha(i-k)}_{j,k-j} = \text{Ш}^{\sharp\uparrow c}_{i-k,j,k-j} = \text{Ш}^{\sharp\uparrow c}_{j+i-k,k-j}\text{Ш}^{\sharp\uparrow c}_{i-k,j}. \tag{4.68}$$

De plus, nous pouvons réécrire les termes internes à l'immédiate droite de ces deux battages. Ce faisant, les termes de même type fusionnent par définitions (4.34) et (4.35). À l'immédiate droite des deux battages, nous avons ainsi

$$p^{\uparrow c}_{\uparrow\alpha(i-k)}p^{\uparrow c+\alpha(i-k)}_{\uparrow\alpha j}p^{\uparrow c}_{\downarrow\alpha(i-k)}p^{\uparrow c+\alpha(i-k)}_{\downarrow\alpha j} = p^{\uparrow c}_{\uparrow\alpha(j+i-k)}p^{\uparrow c}_{\downarrow\alpha(j+i-k)} \tag{4.69}$$

Remarquons que l'application consécutive de (4.5) puis (4.6) implique que

$$\beta^{\sharp}_{\alpha(i-k),c}\beta^{\sharp\uparrow\overline{c}+\alpha(i-k)}_{\alpha j,\alpha\underline{c}}\beta^{\sharp\uparrow\alpha(i-k)}_{\alpha j,\overline{c}} = \beta^{\sharp}_{\alpha(i-k),c}\beta^{\sharp\uparrow\alpha(i-k)}_{\alpha j,c} = \beta^{\sharp}_{\alpha(j+i-k),c}. \tag{4.70}$$

Le second battage de (4.68) commute à distance avec les termes (4.69) et quasi-commute avec le tressage élémentaire (4.70) en vertu de (4.25). Nous pouvons ainsi réécrire

$$\begin{aligned}(4.54\text{L})'' = \sum_{k,j}(-1)^{j}\text{Ш}^{\sharp\uparrow c}_{j+i-k,k-j}p^{\uparrow c}_{\uparrow\alpha(j+i-k)}p^{\uparrow c}_{\downarrow\alpha(j+i-k)}\times\\ \times\beta^{\sharp}_{\alpha(j+i-k),c}\text{Ш}^{\sharp}_{i-k,j}\Delta^{\sharp\uparrow\alpha(i-k)}_{\alpha j}\beta^{\sharp\uparrow\alpha(i-k)}_{\overline{c},\alpha j}\text{Ш}^{\sharp\uparrow\overline{c}+\alpha(i-k)}_{\underline{c}+l,k-l}\beta^{\sharp}_{c+\alpha l,\alpha(i-k)}.\end{aligned}$$

Par commodité pour la suite, nous réalisons dès à présent le changement de variables de sommation $j = j' - i + k$ et $k = i - k'$:

$$\begin{aligned}(4.54\text{L})'' = \sum_{k',j'}(-1)^{(j'-k')}\text{Ш}^{\sharp\uparrow c}_{j',i-j'}p^{\uparrow c}_{\uparrow\alpha j'}p^{\uparrow c}_{\downarrow\alpha j'}\times\\ \times\beta^{\sharp}_{\alpha j',c}\text{Ш}^{\sharp}_{k',j'-k'}\Delta^{\sharp\uparrow\alpha k'}_{\alpha(j'-k')}\beta^{\sharp\uparrow\alpha k'}_{\overline{c},\alpha(j'-k')}\text{Ш}^{\sharp\uparrow\overline{c}+\alpha k'}_{\underline{c}+l,i-k'-l}\beta^{\sharp}_{c+\alpha l,\alpha k'}.\end{aligned} \tag{4.71}$$

De l'autre côté, nous avons

$$(4.54\mathrm{R})'' = \sum_{k,j}(-1)^j \text{Ш}^{\sharp\uparrow\overline{c}}_{\underline{c}-(k-l),k-l}\text{Ш}^{\sharp\uparrow c}_{k,i-k}\beta^{\sharp\uparrow c-\alpha(k-l)}_{\alpha k,\alpha(k-l)}\text{Ш}^{\sharp\uparrow c-\alpha(k-l)}_{j,k-j}\times$$
$$\times\,\beta^{\sharp\uparrow\overline{c}}_{\alpha j,\alpha(\underline{c}-(k-l))}\Delta^{\sharp\uparrow\overline{c}}_{\alpha j}p^{\uparrow\overline{c}}_{\uparrow\alpha j}\beta^{\sharp}_{\alpha j,\overline{c}}\beta^{\sharp}_{\overline{c},\alpha j}p^{\uparrow\overline{c}}_{\downarrow\alpha j}. \quad (4.72)$$

Comme précédemment, nous pouvons réécrire le troisième battage à droite du second, toujours en utilisant (4.25). Nous avons alors, en vertu de (4.29),

$$\text{Ш}^{\sharp\uparrow c}_{k,i-k}\text{Ш}^{\sharp\uparrow c}_{j,k-j} = \text{Ш}^{\sharp\uparrow c}_{j,k-j,i-k} = \text{Ш}^{\sharp\uparrow c}_{j,i-j}\text{Ш}^{\sharp\uparrow c+\alpha j}_{k-j,i-k}.$$

De plus, notons que

$$\begin{aligned}\beta^{\sharp\uparrow c-\alpha(k-l)}_{\alpha k,\alpha(k-l)}\beta^{\sharp\uparrow\overline{c}}_{\alpha j,\alpha(\underline{c}-(k-l))} &= \beta^{\sharp\uparrow c-\alpha(k-l)}_{\alpha j,\alpha(k-l)}\beta^{\sharp\uparrow c-\alpha(k-j-l)}_{\alpha(k-j),\alpha(k-l)}\beta^{\sharp\uparrow\overline{c}}_{\alpha j,\alpha(\underline{c}-(k-l))}\\ &= \beta^{\sharp\uparrow c-\alpha(k-l)}_{\alpha j,\alpha(k-l)}\beta^{\sharp\uparrow\overline{c}}_{\alpha j,\alpha(\underline{c}-(k-l))}\beta^{\sharp\uparrow c-\alpha(k-j-l)}_{\alpha(k-j),\alpha(k-l)} \quad (4.73)\\ &= \beta^{\sharp\uparrow\overline{c}}_{\alpha j,\alpha\underline{c}}\beta^{\sharp\uparrow c-\alpha(k-j-l)}_{\alpha(k-j),\alpha(k-l)}\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}&\beta^{\sharp\uparrow c-\alpha(k-l)}_{\alpha k,\alpha(k-l)}\beta^{\sharp\uparrow\overline{c}}_{\alpha j,\alpha(\underline{c}-(k-l))}\Delta^{\sharp\uparrow\overline{c}}_{\alpha j}p^{\uparrow\overline{c}}_{\uparrow\alpha j}\beta^{\sharp}_{\alpha j,\overline{c}}\beta^{\sharp}_{\overline{c},\alpha j}p^{\uparrow\overline{c}}_{\downarrow\alpha j} =\\ &\quad= p^{\uparrow c}_{\uparrow\alpha j}p^{\uparrow c}_{\downarrow\alpha j}\beta^{\sharp\uparrow c-\alpha(k-l)}_{\alpha k,\alpha(k-l)}\beta^{\sharp\uparrow\overline{c}}_{\alpha j,\alpha(\underline{c}-(k-l))}\Delta^{\sharp\uparrow\overline{c}}_{\alpha j}\beta^{\sharp}_{\alpha j,\overline{c}}\beta^{\sharp}_{\overline{c},\alpha j} =\\ &\quad\quad= p^{\uparrow c}_{\uparrow\alpha j}p^{\uparrow c}_{\downarrow\alpha j}\beta^{\sharp\uparrow\overline{c}}_{\alpha j,\alpha\underline{c}}\beta^{\sharp\uparrow c-\alpha(k-j-l)}_{\alpha(k-j),\alpha(k-l)}\beta^{\sharp}_{\alpha j,\overline{c}}\Delta^{\sharp}_{\alpha j}\beta^{\sharp}_{\overline{c},\alpha j}.\end{aligned}$$

Nous pouvons ainsi réécrire

$$(4.54\mathrm{R})'' = \sum_{k,l}(-1)^j\text{Ш}^{\sharp\uparrow c}_{j,i-j}p^{\uparrow c}_{\uparrow\alpha j}p^{\uparrow c}_{\downarrow\alpha j}\beta^{\sharp\uparrow\overline{c}}_{\alpha j,\alpha\underline{c}}\times$$
$$\times\,\text{Ш}^{\sharp\uparrow\overline{c}+\alpha j}_{\underline{c}-(k-l),k-l}\text{Ш}^{\sharp\uparrow c+\alpha j}_{k-j,i-k}\beta^{\sharp\uparrow c-\alpha(k-j-l)}_{\alpha(k-j),\alpha(k-l)}\Delta^{\sharp\uparrow\overline{c}}_{\alpha j}\beta^{\sharp}_{\alpha j,\overline{c}}\beta^{\sharp}_{\overline{c},\alpha j}. \quad (4.74)$$

Grâce aux manipulations que nous venons d'effectuer, nous pouvons réaliser la somme sur k comme une convolution de Vandermonde (4.30) :

$$\sum_k \text{Ш}^{\sharp\uparrow\overline{c}+\alpha j}_{\underline{c}-(k-l),k-l}\text{Ш}^{\sharp\uparrow c+\alpha j}_{k-j,i-k}\beta^{\sharp\uparrow c-\alpha(k-j-l)}_{\alpha(k-j),\alpha(k-l)} = \text{Ш}^{\sharp\uparrow\overline{c}+\alpha j}_{\underline{c}+l-j,i-l}, \quad (4.75)$$

et alors, en fusionnant à l'aide de (4.5),

$$(4.54\mathrm{R})'' = \sum_j(-1)^j\text{Ш}^{\sharp\uparrow c}_{j,i-j}p^{\uparrow c}_{\uparrow\alpha j}p^{\uparrow c}_{\downarrow\alpha j}\beta^{\sharp}_{\alpha j,c}\Delta^{\sharp}_{\alpha j}\beta^{\sharp}_{\overline{c},\alpha j}\text{Ш}^{\sharp\uparrow\overline{c}+\alpha j}_{\underline{c}+l-j,i-l} \quad (4.76)$$

L'équation $(4.54\mathrm{L})'' = (4.54\mathrm{R})''$ doit être réalisée pour tout choix compatible pour $p_{\uparrow\alpha}$ et $p_{\downarrow\alpha}$, et doit ainsi être réalisée termes à termes pour tout $j' = j$ dans (4.71)

et (4.76). Tout cela simplifie drastiquement la vérification puisque la dernière étape de la preuve est de montrer que

$$\sum_k (-1)^k \text{Ш}^\sharp_{k,j-k} \Delta^{\sharp\uparrow\alpha k}_{\alpha(j-k)} \beta^{\sharp\uparrow\alpha k}_{\overline{c},\alpha(j-k)} \text{Ш}^{\sharp\uparrow\overline{c}+\alpha k}_{\underline{c}+l,i-l-k} \beta^\sharp_{c+\alpha l,\alpha k} = \Delta^\sharp_{\alpha j} \beta^\sharp_{\overline{c},\alpha j} \text{Ш}^{\sharp\uparrow\overline{c}+\alpha j}_{\underline{c}+l-j,i-l}. \tag{4.77}$$

Dans le membre de gauche, nous scindons le dernier tressage élémentaire à l'aide (4.6) :

$$\beta^\sharp_{c+\alpha l,\alpha k} = \beta^\sharp_{\overline{c},\alpha k} \beta^{\sharp\uparrow\overline{c}}_{\alpha(\underline{c}+l),\alpha k},$$

mais le premier de ces deux nouveaux éléments commute à distance à gauche avec le battage et peut être fusionné à l'aide de (4.5) avec le tressage élémentaire à sa gauche :

$$\beta^{\sharp\uparrow\alpha k}_{\overline{c},\alpha(j-k)} \beta^\sharp_{\overline{c},\alpha k} = \beta^\sharp_{\overline{c},\alpha j}.$$

Ce nouveau tressage quasi-commute à gauche avec l'élément de Garside et le premier battage (il les décale de $\overline{c}$ positions). Dans le membre de droite, ce tressage quasi-commute de la même manière avec l'élément de Garside. Nous procédons à la simplification par cet élément à gauche des deux côtés. Il reste alors une identité dont tous les termes sont décalés d'au moins $\overline{c}$ positions. En la ramenant en première position, nous devons montrer

$$\sum_k (-1)^k \text{Ш}^\sharp_{k,j-k} \Delta^{\sharp\uparrow\alpha k}_{\alpha(j-k)} \text{Ш}^{\sharp\uparrow\alpha k}_{\underline{c}+l,i-l-k} \beta^\sharp_{\alpha(\underline{c}+l),\alpha k} = \Delta^\sharp_{\alpha j} \text{Ш}^{\sharp\uparrow\alpha j}_{\underline{c}+l-j,i-l}, \tag{4.78}$$

mais cette relation n'est autre que (4.31) avec $i-l \to i$, $j \to j$, $\underline{c}+l \to l$, ce qui finit la preuve.

□

4.3 Propriétés

Explorons maintenant quelques propriétés de cette solution.

4.3.1 Twist scalaire

Lorsque $\alpha = 1$, nous avons quatre paramètres dont dépend la solution : q, $p_\uparrow$, $p_\downarrow$ et $\beta_{1,1}$ (voir sections 3.2 et 3.3). Dans ce cas particulier, $p_\uparrow$ et $p_\downarrow$ sont des éléments de $\mathbf{kB}^+_1 \simeq \mathbf{k}$. Nous avons alors fusionné sans encombre la dépendance en ces éléments de la solution (3.29) à l'aide d'un *twist* scalaire, c'est-à-dire pour lequel les coefficients $\mu_{x,y}$ sont des scalaires.

Pour α générique, les degrés de liberté $p_{\uparrow x}$ et $p_{\downarrow x}$, $0 \leq x \leq \alpha$ sont des éléments de $\mathbf{kB}^+_x$, et si nous comptons avoir quelque action sur ces derniers à l'aide d'un *twist*,

nous devons introduire des coefficients $\mu_{x,y}$ appartenant à des algèbres de groupes non abéliennes. Cela pose un problème quand on cherche à résoudre les équations caractérisant un *twist*, puisqu'on ne sait alors pas comment ces coefficients quasi-commutent avec la solution (4.55), et nous ne pouvons alors pas extraire de système simple pour les éléments de matrice. En revanche, dans le cas scalaire, on observe une variation du cas exposé dans la section 3.3.

Supposons que le *twist* soit de la même forme que dans la section 3.3. En écrivant les deux relations qui doivent etre satisfaites, nous extrayons deux systèmes :

$$\mu_{b+\alpha(\underline{c}-g),d}\,\mu_{\overline{c}+\alpha g,d} = \mu_{b,d}\,\mu_{c,d}, \qquad 0 \leq g \leq \underline{c}, \tag{4.79}$$

et

$$\mu_{b,\overline{d}+\alpha h}\,\mu_{b,c+\alpha(\underline{d}-h)} = \mu_{b,c}\,\mu_{b,d}, \qquad 0 \leq h \leq \underline{d}. \tag{4.80}$$

En posant $b = \overline{x}$, $\underline{c} = \underline{x} + 1$, $\overline{c} = \overline{x}$ et $g = 1$ dans (4.79), nous trouvons $\mu_{\overline{x}+\alpha\underline{x},d}\,\mu_{\overline{x}+\alpha,d} = \mu_{\overline{x},d}\,\mu_{\alpha(\underline{x}+1)+\overline{x},d}$ soit

$$\mu_{x,d} = \left(\mu_{\overline{x}+\alpha,d}\right)^{\underline{x}}\left(\mu_{\overline{x},d}\right)^{-(\underline{x}-1)}. \tag{4.81}$$

De même, en posant $c = \overline{y}$, $\underline{d} = \underline{y} + 1$, $\overline{d} = \overline{y}$ et $h = 1$ dans (4.80), nous trouvons $\mu_{b,\overline{y}+\alpha}\,\mu_{b,\overline{y}+\alpha\underline{y}} = \mu_{b,\overline{y}}\,\mu_{b,\alpha(\underline{y}+1)+\overline{y}}$ soit

$$\mu_{b,x} = \left(\mu_{b,\overline{y}+\alpha}\right)^{\underline{y}}\left(\mu_{b,\overline{y}}\right)^{-(\underline{y}-1)}. \tag{4.82}$$

En substituant (4.81) dans (4.82), nous obtenons finalement

$$\mu_{x,y} = \frac{\left(\mu_{\overline{x}+\alpha,\overline{y}+\alpha}\right)^{\underline{x}\underline{y}}\left(\mu_{\overline{x},\overline{y}}\right)^{(\underline{x}-1)(\underline{y}-1)}}{\left(\mu_{\overline{x},\overline{y}+\alpha}\right)^{(\underline{x}-1)\underline{y}}\left(\mu_{\overline{x}+\alpha,\overline{y}}\right)^{\underline{x}(\underline{y}-1)}}, \tag{4.83}$$

avec $4\alpha^2$ paramètres libres $\mu_{a,b}$, $0 \leq a, b \leq 2\alpha - 1$.

4.3.2 Absorption des degrés de liberté internes

À la vue des résultats des sous-sections 4.1.2 et 4.1.4, nous pouvons nous demander s'il est possible d'absorber les degrés de liberté offert par les éléments $p_{\uparrow y}$ et $p_{\downarrow x}$ dans la définition des éléments $\beta^{\sharp}_{y,x}$ en définissant $\beta^{\flat}_{y,x} = p_{\downarrow x}p^{\uparrow x}_{\uparrow y}\beta^{\sharp}_{y,x}$, $0 \leq x, y \leq \alpha$. Cependant, nous avons $\left\{\begin{smallmatrix} X & 0 \\ 0 & \end{smallmatrix}\right\} = qp_{\downarrow X}$, $\left\{\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ Z & \end{smallmatrix}\right\} = qp_{\uparrow Z}$ et $\left\{\begin{smallmatrix} X\alpha & Y\alpha \\ Y\alpha & \end{smallmatrix}\right\} = qp_{\downarrow Y\alpha}p^{\uparrow X\alpha}_{\uparrow Y\alpha}\beta^{\sharp}_{Y\alpha,X\alpha}$. Si nous définissons $\beta^{\flat}_{0,x} = p_{\downarrow x}$ ou $\beta^{\flat}_{y,0} = p_{\uparrow y}$, nous perdons les formules pour la décomposition des éléments $\beta^{\flat}_{Y,X}$, pour la même raison que nous ne pouvions absorber le nombre q dans des éléments $p_{\uparrow y}$ et $p_{\downarrow x}$. Ceci ne pose qu'un problème pratique puisqu'il suffirait alors de forcer la décomposition à se comporter comme celle des éléments $\beta^{\sharp}_{Y,X}$.

Les battages et les symboles de Pochhammer (en faisant abstraction des éléments qui dépendent du reste de la division par α) sont construits à l'aide de l'élément $\beta^{\sharp}_{\alpha,\alpha}$. Si nous modifions la définition de l'élément $\beta^{\flat}_{\alpha,\alpha} = p_{\downharpoonleft\alpha} p^{\uparrow\alpha}_{\uparrow\alpha} \beta^{\sharp}_{\alpha,\alpha}$ pour faire disparaître les éléments $p_{\uparrow\alpha}$ et $p_{\downharpoonleft\alpha}$ de l'expression de $\left\{ {\alpha \atop \alpha} {\alpha \atop \alpha} \right\}$, nous modifions *de facto* l'expression des battages et des symboles de Pochhammer. Il convient alors de distinguer les éléments « combinatoires » (les monômes des battages et les éléments qui ne dépendent pas du reste de la division par α dans les symboles de Pochhammer) des autres éléments (le monôme central et les éléments qui dépendent du reste dans les symboles de Pochhammer). L'expression du tressage devient alors

$$\left\{ {X \atop Z} {Y \atop} \right\} = \text{Ш}^{\sharp\uparrow X+\overline{Z}}_{\underline{Z},\underline{Y-Z}} \cdot \beta^{\flat}_{Z,X} \cdot {}^{\underline{X}}\overset{\overline{X}}{\prod}{}^{\sharp\,\flat\uparrow Z}_{\underline{Y-Z}},$$

avec

$${}^{k}\overset{\overline{X}}{\prod}{}^{\sharp\,\flat}_{1} = \left(1 - \beta^{\sharp\uparrow\overline{X}}_{\alpha,\alpha k} \cdot \beta^{\flat}_{\alpha,\overline{X}} \beta^{\flat}_{\overline{X},\alpha}\right).$$

L'expression est plus simple, mais nous venons de voir qu'elle n'est qu'une réécriture de l'expression (4.55) avec une notation différente. Ces degrés de liberté ne semblent pas pouvoir être reportés dans un *twist*.

❧

Annexe

ANNEXE A

PREMIERS ORDRES DU SYSTÈME (3.9)

Nous rassemblons exhaustivement ici les quatres premiers ordres du système d'équations (3.9) que doivent satisfaire les éléments de matrice $\left\{\begin{smallmatrix} x & y \\ z & \end{smallmatrix}\right\}$ d'un tressage de l'espace des tenseurs. Nous repérons les équations à l'aide du symbole $\left|\frac{i_1\, i_2\, i_3}{i'_1\, i'_2\, i'_3}\right|$ et l'équation correspondante est alors obtenue en considérant les éléments de matrice qui agissent sur $z_{i'_1\rangle} y^{\uparrow i'_1}_{i'_2\rangle} x^{\uparrow i'_1+i'_2}_{i'_3\rangle}$ lorsque l'on réordonne de deux manières differentes un triplet $x_{i_1\rangle} y^{\uparrow i_1}_{i_2\rangle} z^{\uparrow i_1+i_2}_{i_3\rangle}$. Pour des raisons d'édition, nous modifions la notation des variables de la manière suivante : nous portons en italique en bas à droite un éventuel décalage de l'élément de matrice le long des brins. Nous omettons cette valeur lorsque le décalage est nul. Ainsi, $\left\{\begin{smallmatrix} x & y \\ z & t \end{smallmatrix}\right\} = \left\{\begin{smallmatrix} x & y \\ z & \end{smallmatrix}\right\}^{\uparrow t}$. Pour les ordres 0, 1, 2, 3 et 4, nous énumérons alors respectivement 1, 6, 20, 50 et 105 équations.

A.0 Ordre 0, 1 équation

$$\left|\frac{000}{000}\right| \left\{\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \end{smallmatrix}\right\}\left\{\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \end{smallmatrix}\right\}\left\{\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \end{smallmatrix}\right\} = \left\{\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \end{smallmatrix}\right\}\left\{\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \end{smallmatrix}\right\}\left\{\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \end{smallmatrix}\right\}$$

A.1 Ordre 1, 6 équations

$$\left|\frac{001}{100}\right| \left\{\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \end{smallmatrix}\right\}\left\{\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \end{smallmatrix}\right\}\left\{\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right\} = \left\{\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \end{smallmatrix}\right\}\left\{\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \end{smallmatrix}\right\}\left\{\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \end{smallmatrix}\right\}$$

$$\left|\frac{001}{001}\right| \left\{\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \end{smallmatrix}\right\}\left\{\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \end{smallmatrix}\right\}\left\{\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \end{smallmatrix}\right\} + \left\{\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \end{smallmatrix}\right\}\left\{\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \end{smallmatrix}\right\}\left\{\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \end{smallmatrix}\right\} = \left\{\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \end{smallmatrix}\right\}\left\{\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \end{smallmatrix}\right\}\left\{\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \end{smallmatrix}\right\}$$

$$\left|\frac{001}{010}\right| \left\{\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \end{smallmatrix}\right\}\left\{\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \end{smallmatrix}\right\}\left\{\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \end{smallmatrix}\right\} = \left\{\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \end{smallmatrix}\right\}\left\{\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \end{smallmatrix}\right\}\left\{\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \end{smallmatrix}\right\}$$

$$\left|\frac{010}{001}\right| \left\{\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 1\\ 0 & \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}0 & 1\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{010}{010}\right| \left\{\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 1\\ 1 & \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}0 & 1\\ 1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & \mathit{1}\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{100}{001}\right| \left\{\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & \mathit{1}\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}$$

A.2 Ordre 2, 20 équations

$$\left|\frac{002}{200}\right| \left\{\begin{matrix}0 & 2\\ 2 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 2\\ 2 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & \mathit{2}\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 2\\ 2 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 2\\ 2 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{002}{101}\right| \left\{\begin{matrix}0 & 2\\ 2 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 2\\ 1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & \mathit{1}\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}0 & 2\\ 1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 1\\ 1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 1\\ 0 & \mathit{1}\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 2\\ 1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 1\\ 1 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{002}{110}\right| \left\{\begin{matrix}0 & 2\\ 1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 1\\ 1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 1\\ 1 & \mathit{1}\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 2\\ 2 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 2\\ 1 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{002}{002}\right| \left\{\begin{matrix}0 & 2\\ 2 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 2\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}0 & 2\\ 1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 1\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 1\\ 0 & \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}0 & 2\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 2\\ 0 & \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 2\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{002}{011}\right| \left\{\begin{matrix}0 & 2\\ 1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 1\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 1\\ 1 & \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}0 & 2\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 2\\ 1 & \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 2\\ 1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 1\\ 0 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{002}{020}\right| \left\{\begin{matrix}0 & 2\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 2\\ 2 & \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 2\\ 2 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 2\\ 0 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{011}{101}\right| \left\{\begin{matrix}1 & 1\\ 1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 1\\ 1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 1\\ 0 & \mathit{1}\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}0 & 1\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 1\\ 1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 1\\ 1 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{011}{110}\right| \left\{\begin{matrix}1 & 1\\ 1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 1\\ 1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 1\\ 1 & \mathit{1}\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}0 & 1\\ 1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 1\\ 1 & \mathit{1}\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 1\\ 1 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{011}{002}\right| \left\{\begin{matrix}1 & 1\\ 1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 1\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 1\\ 0 & \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}1 & 1\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 2\\ 0 & \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}0 & 1\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 1\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{011}{011}\right| \left\{\begin{matrix}1 & 1\\ 1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 1\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 1\\ 1 & \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}1 & 1\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 2\\ 1 & \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}0 & 1\\ 1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 1\\ 0 & \mathit{1}\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}0 & 1\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 1\\ 1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 1\\ 0 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{011}{020}\right| \left\{\begin{matrix}1 & 1\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 2\\ 2 & \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}0 & 1\\ 1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 1\\ 1 & \mathit{1}\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 1\\ 0 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{020}{002}\right| \left\{\begin{matrix}2 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 2\\ 0 & \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}0 & 2\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{020}{011}\right| \left\{\begin{matrix}2 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 2\\ 1 & \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}0 & 2\\ 1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & \mathit{1}\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{020}{020}\right| \left\{\begin{matrix}2 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 2\\ 2 & \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}0 & 2\\ 2 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & \mathit{2}\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{101}{101}\right| \left\{\begin{matrix}0 & 1\\ 1 & \mathit{1}\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 1\\ 1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & \mathit{1}\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 1\\ 1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 1\\ 1 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{101}{002}\right| \left\{\begin{matrix}0 & 1\\ 1 & \mathit{1}\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 1\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}0 & 1\\ 0 & \mathit{1}\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 1\\ 0 & \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 1\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{101}{011}\right| \left\{\begin{matrix}0 & 1\\ 0 & \mathit{1}\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 1\\ 1 & \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 1\\ 1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 1\\ 0 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{110}{002}\right| \left\{\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & \mathit{1}\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 1\\ 0 & \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}1 & 1\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{110}{011}\right| \left\{\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & \mathit{1}\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 1\\ 1 & \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}1 & 1\\ 1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & \mathit{1}\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{200}{002}\right| \left\{\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & \mathit{2}\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}2 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}$$

A.3 Ordre 3, 50 équations

$$\left|\frac{003}{300}\right| \left\{\begin{matrix}0 & 3\\3 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 3\\3 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 0\\0 & \mathit{3}\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}0 & 0\\0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 3\\3 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 3\\3 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{003}{201}\right| \left\{\begin{matrix}0 & 3\\3 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 3\\2 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 0\\0 & \mathit{2}\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}0 & 3\\2 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 2\\2 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 1\\0 & \mathit{2}\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}0 & 0\\0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 3\\2 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 2\\2 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{003}{210}\right| \left\{\begin{matrix}0 & 3\\2 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 2\\2 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 1\\1 & \mathit{2}\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}0 & 0\\0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 3\\3 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 3\\2 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{003}{102}\right| \left\{\begin{matrix}0 & 3\\3 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 3\\1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2 & 0\\0 & \mathit{1}\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}0 & 3\\2 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 2\\1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 1\\0 & \mathit{1}\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}0 & 3\\1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 1\\1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 2\\0 & \mathit{1}\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}0 & 0\\0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 3\\1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 1\\1 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{003}{111}\right| \left\{\begin{matrix}0 & 3\\2 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 2\\1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 1\\1 & \mathit{1}\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}0 & 3\\1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 1\\1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 2\\1 & \mathit{1}\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}0 & 0\\0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 3\\2 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 2\\1 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{003}{120}\right| \left\{\begin{matrix}0 & 3\\1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 1\\1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 2\\2 & \mathit{1}\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}0 & 0\\0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 3\\3 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 3\\1 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{003}{003}\right| \left\{\begin{matrix}0 & 3\\3 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 3\\0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}3 & 0\\0 & \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}0 & 3\\2 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 2\\0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2 & 1\\0 & \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}0 & 3\\1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 1\\0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 2\\0 & \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}0 & 3\\0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 0\\0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 3\\0 & \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}0 & 0\\0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 3\\0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 0\\0 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{003}{012}\right| \left\{\begin{matrix}0 & 3\\2 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 2\\0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2 & 1\\1 & \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}0 & 3\\1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 1\\0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 2\\1 & \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}0 & 3\\0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 0\\0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 3\\1 & \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}0 & 0\\0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 3\\1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 1\\0 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{003}{021}\right| \left\{\begin{matrix}0 & 3\\1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 1\\0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 2\\2 & \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}0 & 3\\0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 0\\0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 3\\2 & \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}0 & 0\\0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 3\\2 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 2\\0 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{003}{030}\right| \left\{\begin{matrix}0 & 3\\0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 0\\0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 3\\3 & \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}0 & 0\\0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 3\\3 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 3\\0 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{012}{201}\right| \left\{\begin{matrix}1 & 2\\2 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 2\\2 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 1\\0 & \mathit{2}\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}0 & 1\\0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 2\\2 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 2\\2 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{012}{210}\right| \left\{\begin{matrix}1 & 2\\2 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 2\\2 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 1\\1 & \mathit{2}\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}0 & 1\\1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 2\\2 & \mathit{1}\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 2\\2 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{012}{102}\right| \left\{\begin{matrix}1 & 2\\2 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 2\\1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 1\\0 & \mathit{1}\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}1 & 2\\1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 1\\1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 2\\0 & \mathit{1}\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}0 & 1\\0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 2\\1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 1\\1 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{012}{111}\right| \left\{\begin{matrix}1 & 2\\2 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 2\\1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 1\\1 & \mathit{1}\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}1 & 2\\1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 1\\1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 2\\1 & \mathit{1}\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}0 & 1\\1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 2\\1 & \mathit{1}\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 1\\1 & \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}0 & 1\\0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 2\\2 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 2\\1 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{012}{120}\right| \left\{\begin{matrix}1 & 2\\1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 1\\1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 2\\2 & \mathit{1}\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}0 & 1\\1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 2\\2 & \mathit{1}\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 2\\1 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{012}{003}\right| \left\{\begin{matrix}1 & 2\\2 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 2\\0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2 & 1\\0 & \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}1 & 2\\1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 1\\0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 2\\0 & \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}1 & 2\\0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 0\\0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 3\\0 & \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}0 & 1\\0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 2\\0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 0\\0 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{012}{012}\right| \left\{\begin{matrix}1 & 2\\2 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 2\\0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2 & 1\\1 & \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}1 & 2\\1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 1\\0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 2\\1 & \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}1 & 2\\0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 0\\0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 3\\1 & \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}0 & 1\\1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 2\\0 & \mathit{1}\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 0\\0 & \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}0 & 1\\0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 2\\1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 1\\0 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{012}{021}\right| \left\{\begin{matrix}1 & 2\\1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 1\\0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 2\\2 & \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}1 & 2\\0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 0\\0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 3\\2 & \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}0 & 1\\1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 2\\1 & \mathit{1}\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 1\\0 & \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}0 & 1\\0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 2\\2 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 2\\0 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{012}{030}\right| \left\{\begin{matrix}1 & 2\\0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 0\\0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 3\\3 & \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}0 & 1\\1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 2\\2 & \mathit{1}\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 2\\0 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{021}{102}\right| \left\{\begin{matrix}2 & 1\\1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 1\\1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 2\\0 & \mathit{1}\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}0 & 2\\0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2 & 1\\1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 1\\1 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{021}{111}\right| \left\{\begin{matrix}2 & 1\\1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 1\\1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 2\\1 & \mathit{1}\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}0 & 2\\1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 1\\1 & \mathit{1}\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 1\\1 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{021}{120}\right| \left\{\begin{matrix}2 & 1\\1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 1\\1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 2\\2 & \mathit{1}\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}0 & 2\\2 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 1\\1 & \mathit{2}\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2 & 1\\1 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{021}{003}\right| \left\{\begin{matrix}2 & 1\\1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 1\\0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 2\\0 & \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}2 & 1\\0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 0\\0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 3\\0 & \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}0 & 2\\0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2 & 1\\0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 0\\0 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{021}{012}\right| \left\{\begin{matrix}2 & 1\\1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 1\\0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 2\\1 & \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}2 & 1\\0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 0\\0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 3\\1 & \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}0 & 2\\1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 1\\0 & \mathit{1}\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 0\\0 & \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}0 & 2\\0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2 & 1\\1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 1\\0 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{021}{021}\right| \left\{\begin{matrix}2 & 1\\1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 1\\0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 2\\2 & \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}2 & 1\\0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 0\\0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 3\\2 & \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}0 & 2\\2 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 1\\0 & \mathit{2}\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2 & 0\\0 & \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}0 & 2\\1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 1\\1 & \mathit{1}\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 1\\0 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{021}{030}\right| \left\{\begin{matrix}2 & 1\\0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 0\\0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 3\\3 & \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}0 & 2\\2 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 1\\1 & \mathit{2}\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2 & 1\\0 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{030}{003}\right| \left\{\begin{matrix}3 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 3\\ 0 & \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}0 & 3\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}3 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{030}{012}\right| \left\{\begin{matrix}3 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 3\\ 1 & \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}0 & 3\\ 1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{030}{021}\right| \left\{\begin{matrix}3 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 3\\ 2 & \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}0 & 3\\ 2 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{030}{030}\right| \left\{\begin{matrix}3 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 3\\ 3 & \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}0 & 3\\ 3 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & 3\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}3 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{102}{201}\right| \left\{\begin{matrix}0 & 2\\ 2 & 1\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 2\\ 2 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 2\\ 2 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 2\\ 2 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{102}{102}\right| \left\{\begin{matrix}0 & 2\\ 2 & 1\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 2\\ 1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}0 & 2\\ 1 & 1\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 1\\ 1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 2\\ 1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 1\\ 1 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{102}{111}\right| \left\{\begin{matrix}0 & 2\\ 1 & 1\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 1\\ 1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 2\\ 2 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 2\\ 1 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{102}{003}\right| \left\{\begin{matrix}0 & 2\\ 2 & 1\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 2\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}3 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}0 & 2\\ 1 & 1\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 1\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2 & 1\\ 0 & \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}0 & 2\\ 0 & 1\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 2\\ 0 & \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 2\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{102}{012}\right| \left\{\begin{matrix}0 & 2\\ 1 & 1\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 1\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2 & 1\\ 1 & \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}0 & 2\\ 0 & 1\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 2\\ 1 & \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 2\\ 1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 1\\ 0 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{102}{021}\right| \left\{\begin{matrix}0 & 2\\ 0 & 1\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 2\\ 2 & \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 2\\ 2 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 2\\ 0 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{111}{102}\right| \left\{\begin{matrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 1\\ 1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}1 & 1\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2 & 1\\ 1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 1\\ 1 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{111}{111}\right| \left\{\begin{matrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 1\\ 1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}1 & 1\\ 1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 1\\ 1 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{111}{003}\right| \left\{\begin{matrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 1\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2 & 1\\ 0 & \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 2\\ 0 & \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}1 & 1\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2 & 1\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{111}{012}\right| \left\{\begin{matrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 1\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2 & 1\\ 1 & \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 2\\ 1 & \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}1 & 1\\ 1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}1 & 1\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2 & 1\\ 1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 1\\ 0 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{111}{021}\right| \left\{\begin{matrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 2\\ 2 & \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}1 & 1\\ 1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 1\\ 0 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{120}{003}\right| \left\{\begin{matrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 2\\ 0 & \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}1 & 2\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}3 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{120}{012}\right| \left\{\begin{matrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 2\\ 1 & \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}1 & 2\\ 1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{120}{021}\right| \left\{\begin{matrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 2\\ 2 & \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}1 & 2\\ 2 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{201}{102}\right| \left\{\begin{matrix}0 & 1\\ 1 & 2\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2 & 1\\ 1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}2 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2 & 1\\ 1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 1\\ 1 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{201}{003}\right| \left\{\begin{matrix}0 & 1\\ 1 & 2\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2 & 1\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}3 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}0 & 1\\ 0 & 2\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2 & 1\\ 0 & \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}2 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2 & 1\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{201}{012}\right| \left\{\begin{matrix}0 & 1\\ 0 & 2\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2 & 1\\ 1 & \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}2 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2 & 1\\ 1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 1\\ 0 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{210}{003}\right| \left\{\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2 & 1\\ 0 & \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}2 & 1\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}3 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{210}{012}\right| \left\{\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2 & 1\\ 1 & \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}2 & 1\\ 1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{300}{003}\right| \left\{\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & 3\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}3 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}3 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}3 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}3 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}$$

A.4 Ordre 4, 105 équations

$$\left|\frac{004}{400}\right| \left\{\begin{matrix}0 & 4\\ 4 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 4\\ 4 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & 4\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 4\\ 4 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 4\\ 4 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{004}{301}\right| \left\{\begin{matrix}0&4\\4&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0&4\\3&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1&0\\0&3\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}0&4\\3&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0&3\\3&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0&1\\0&3\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}0&0\\0&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0&4\\3&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0&3\\3&\end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{004}{310}\right| \left\{\begin{matrix}0&4\\3&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0&3\\3&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0&1\\1&3\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}0&0\\0&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0&4\\4&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0&4\\3&\end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{004}{202}\right| \left\{\begin{matrix}0&4\\4&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0&4\\2&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2&0\\0&2\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}0&4\\3&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0&3\\2&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1&1\\0&2\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}0&4\\2&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0&2\\2&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0&2\\0&2\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}0&0\\0&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0&4\\2&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0&2\\2&\end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{004}{211}\right| \left\{\begin{matrix}0&4\\3&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0&3\\2&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1&1\\1&2\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}0&4\\2&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0&2\\2&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0&2\\1&2\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}0&0\\0&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0&4\\3&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0&3\\2&\end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{004}{220}\right| \left\{\begin{matrix}0&4\\2&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0&2\\2&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0&2\\2&2\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}0&0\\0&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0&4\\4&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0&4\\2&\end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{004}{103}\right| \left\{\begin{matrix}0&4\\4&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0&4\\1&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}3&0\\0&1\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}0&4\\3&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0&3\\1&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2&1\\0&1\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}0&4\\2&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0&2\\1&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1&2\\0&1\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}0&4\\1&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0&1\\1&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0&3\\0&1\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}0&0\\0&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0&4\\1&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0&1\\1&\end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{004}{112}\right| \left\{\begin{matrix}0&4\\3&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0&3\\1&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2&1\\1&1\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}0&4\\2&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0&2\\1&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1&2\\1&1\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}0&4\\1&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0&1\\1&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0&3\\1&1\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}0&0\\0&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0&4\\2&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0&2\\1&\end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{004}{121}\right| \left\{\begin{matrix}0&4\\2&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0&2\\1&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1&2\\2&1\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}0&4\\1&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0&1\\1&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0&3\\2&1\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}0&0\\0&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0&4\\3&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0&3\\1&\end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{004}{130}\right| \left\{\begin{matrix}0&4\\1&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0&1\\1&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0&3\\3&1\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}0&0\\0&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0&4\\4&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0&4\\1&\end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{004}{004}\right| \left\{\begin{matrix}0&4\\4&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0&4\\0&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}4&0\\0&\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}0&4\\3&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0&3\\0&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}3&1\\0&\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}0&4\\2&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0&2\\0&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2&2\\0&\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}0&4\\1&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0&1\\0&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1&3\\0&\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}0&4\\0&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0&0\\0&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0&4\\0&\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}0&0\\0&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0&4\\0&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0&0\\0&\end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{004}{013}\right| \left\{\begin{matrix}0&4\\3&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0&3\\0&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}3&1\\1&\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}0&4\\2&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0&2\\0&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2&2\\1&\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}0&4\\1&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0&1\\0&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1&3\\1&\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}0&4\\0&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0&0\\0&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0&4\\1&\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}0&0\\0&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0&4\\1&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0&1\\0&\end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{004}{022}\right| \left\{\begin{matrix}0&4\\2&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0&2\\0&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2&2\\2&\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}0&4\\1&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0&1\\0&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1&3\\2&\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}0&4\\0&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0&0\\0&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0&4\\2&\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}0&0\\0&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0&4\\2&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0&2\\0&\end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{004}{031}\right| \left\{\begin{matrix}0&4\\1&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0&1\\0&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1&3\\3&\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}0&4\\0&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0&0\\0&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0&4\\3&\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}0&0\\0&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0&4\\3&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0&3\\0&\end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{004}{040}\right| \left\{\begin{matrix}0&4\\0&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0&0\\0&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0&4\\4&\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}0&0\\0&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0&4\\4&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0&4\\0&\end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{013}{301}\right| \left\{\begin{matrix}1&3\\3&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0&3\\3&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0&1\\0&3\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}0&1\\0&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1&3\\3&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0&3\\3&\end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{013}{310}\right| \left\{\begin{matrix}1&3\\3&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0&3\\3&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0&1\\1&3\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}0&1\\1&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0&3\\3&1\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1&3\\3&\end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{013}{202}\right| \left\{\begin{matrix}1&3\\3&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0&3\\2&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1&1\\0&2\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}1&3\\2&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0&2\\2&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0&2\\0&2\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}0&1\\0&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1&3\\2&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0&2\\2&\end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{013}{211}\right| \left\{\begin{matrix}1&3\\3&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0&3\\2&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1&1\\1&2\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}1&3\\2&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0&2\\2&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0&2\\1&2\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}0&1\\1&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0&3\\2&1\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1&2\\2&\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}0&1\\0&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1&3\\3&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0&3\\2&\end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{013}{220}\right| \left\{\begin{matrix}1&3\\2&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0&2\\2&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0&2\\2&2\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}0&1\\1&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0&3\\3&1\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1&3\\2&\end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{013}{103}\right| \left\{\begin{matrix}1&3\\3&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0&3\\1&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2&1\\0&1\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}1&3\\2&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0&2\\1&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1&2\\0&1\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}1&3\\1&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0&1\\1&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0&3\\0&1\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}0&1\\0&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1&3\\1&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0&1\\1&\end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{013}{112}\right| \left\{\begin{matrix}1&3\\3&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0&3\\1&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2&1\\1&1\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}1&3\\2&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0&2\\1&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1&2\\1&1\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}1&3\\1&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0&1\\1&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0&3\\1&1\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}0&1\\1&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0&3\\1&1\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1&1\\1&\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}0&1\\0&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1&3\\2&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0&2\\1&\end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{013}{121}\right| \left\{\begin{matrix}1&3\\2&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0&2\\1&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1&2\\2&1\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}1&3\\1&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0&1\\1&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0&3\\2&1\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}0&1\\1&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0&3\\2&1\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1&2\\1&\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}0&1\\0&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1&3\\3&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0&3\\1&\end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{013}{130}\right| \left\{\begin{matrix}1&3\\1&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0&1\\1&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0&3\\3&1\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}0&1\\1&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0&3\\3&1\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1&3\\1&\end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{013}{004}\right| \left\{\begin{matrix}1&3\\3&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0&3\\0&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}3&1\\0&\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}1&3\\2&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0&2\\0&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2&2\\0&\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}1&3\\1&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0&1\\0&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1&3\\0&\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}1&3\\0&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0&0\\0&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0&4\\0&\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}0&1\\0&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1&3\\0&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0&0\\0&\end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{013}{013}\right| \left\{\begin{matrix}1&3\\3&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0&3\\0&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}3&1\\1&\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}1&3\\2&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0&2\\0&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2&2\\1&\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}1&3\\1&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0&1\\0&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1&3\\1&\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}1&3\\0&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0&0\\0&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0&4\\1&\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}0&1\\1&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0&3\\0&1\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1&0\\0&\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}0&1\\0&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1&3\\1&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0&1\\0&\end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{013}{022}\right| \left\{\begin{matrix}1&3\\2&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0&2\\0&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2&2\\2&\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}1&3\\1&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0&1\\0&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1&3\\2&\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}1&3\\0&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0&0\\0&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0&4\\2&\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}0&1\\1&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0&3\\1&1\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1&1\\0&\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}0&1\\0&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1&3\\2&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0&2\\0&\end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{013}{031}\right| \left\{\begin{matrix}1 & 3\\ 1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 1\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 3\\ 3 & \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}1 & 3\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 4\\ 3 & \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}0 & 1\\ 1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 3\\ 2 & 1\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 2\\ 0 & \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}0 & 1\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 3\\ 3 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 3\\ 0 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{013}{040}\right| \left\{\begin{matrix}1 & 3\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 4\\ 4 & \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}0 & 1\\ 1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 3\\ 3 & 1\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 3\\ 0 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{022}{202}\right| \left\{\begin{matrix}2 & 2\\ 2 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 2\\ 2 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 2\\ 0 & 2\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}0 & 2\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2 & 2\\ 2 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 2\\ 2 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{022}{211}\right| \left\{\begin{matrix}2 & 2\\ 2 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 2\\ 2 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 2\\ 1 & 2\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}0 & 2\\ 1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 2\\ 2 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{022}{220}\right| \left\{\begin{matrix}2 & 2\\ 2 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 2\\ 2 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 2\\ 2 & 2\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}0 & 2\\ 2 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 2\\ 2 & 2\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2 & 2\\ 2 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{022}{103}\right| \left\{\begin{matrix}2 & 2\\ 2 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 2\\ 1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}2 & 2\\ 1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 1\\ 1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 3\\ 0 & 1\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}0 & 2\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2 & 2\\ 1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 1\\ 1 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{022}{112}\right| \left\{\begin{matrix}2 & 2\\ 2 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 2\\ 1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}2 & 2\\ 1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 1\\ 1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 3\\ 1 & 1\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}0 & 2\\ 1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 1\\ 1 & \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}0 & 2\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2 & 2\\ 2 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 2\\ 1 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{022}{121}\right| \left\{\begin{matrix}2 & 2\\ 2 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 2\\ 1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}2 & 2\\ 1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 1\\ 1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 3\\ 2 & 1\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}0 & 2\\ 2 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 2\\ 1 & 2\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2 & 1\\ 1 & \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}0 & 2\\ 1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 2\\ 1 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{022}{130}\right| \left\{\begin{matrix}2 & 2\\ 1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 1\\ 1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 3\\ 3 & 1\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}0 & 2\\ 2 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 2\\ 2 & 2\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2 & 2\\ 1 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{022}{004}\right| \left\{\begin{matrix}2 & 2\\ 2 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 2\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2 & 2\\ 0 & \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}2 & 2\\ 1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 1\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 3\\ 0 & \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}2 & 2\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 4\\ 0 & \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}0 & 2\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2 & 2\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{022}{013}\right| \left\{\begin{matrix}2 & 2\\ 2 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 2\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2 & 2\\ 1 & \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}2 & 2\\ 1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 1\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 3\\ 1 & \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}2 & 2\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 4\\ 1 & \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}0 & 2\\ 1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}0 & 2\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2 & 2\\ 1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 1\\ 0 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{022}{022}\right| \left\{\begin{matrix}2 & 2\\ 2 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 2\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2 & 2\\ 2 & \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}2 & 2\\ 1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 1\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 3\\ 2 & \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}2 & 2\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 4\\ 2 & \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}0 & 2\\ 2 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 2\\ 0 & 2\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}0 & 2\\ 1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 1\\ 0 & \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}0 & 2\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2 & 2\\ 2 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 2\\ 0 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{022}{031}\right| \left\{\begin{matrix}2 & 2\\ 1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 1\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 3\\ 3 & \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}2 & 2\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 4\\ 3 & \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}0 & 2\\ 2 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 2\\ 1 & 2\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2 & 1\\ 0 & \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}0 & 2\\ 1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 2\\ 0 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{022}{040}\right| \left\{\begin{matrix}2 & 2\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 4\\ 4 & \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}0 & 2\\ 2 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 2\\ 2 & 2\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2 & 2\\ 0 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{031}{103}\right| \left\{\begin{matrix}3 & 1\\ 1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 1\\ 1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 3\\ 0 & 1\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}0 & 3\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}3 & 1\\ 1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 1\\ 1 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{031}{112}\right| \left\{\begin{matrix}3 & 1\\ 1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 1\\ 1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 3\\ 1 & 1\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}0 & 3\\ 1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 1\\ 1 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{031}{121}\right| \left\{\begin{matrix}3 & 1\\ 1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 1\\ 1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 3\\ 2 & 1\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}0 & 3\\ 2 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2 & 1\\ 1 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{031}{130}\right| \left\{\begin{matrix}3 & 1\\ 1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 1\\ 1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 3\\ 3 & 1\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}0 & 3\\ 3 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 1\\ 1 & 3\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}3 & 1\\ 1 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{031}{004}\right| \left\{\begin{matrix}3 & 1\\ 1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 1\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 3\\ 0 & \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}3 & 1\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 4\\ 0 & \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}0 & 3\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}3 & 1\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{031}{013}\right| \left\{\begin{matrix}3 & 1\\ 1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 1\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 3\\ 1 & \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}3 & 1\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 4\\ 1 & \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}0 & 3\\ 1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2 & 1\\ 0 & 1\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}0 & 3\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}3 & 1\\ 1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 1\\ 0 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{031}{022}\right| \left\{\begin{matrix}3 & 1\\ 1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 1\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 3\\ 2 & \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}3 & 1\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 4\\ 2 & \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}0 & 3\\ 2 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}0 & 3\\ 1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 1\\ 0 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{031}{031}\right| \left\{\begin{matrix}3 & 1\\ 1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 1\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 3\\ 3 & \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}3 & 1\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 4\\ 3 & \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}0 & 3\\ 3 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 1\\ 0 & 3\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}3 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}0 & 3\\ 2 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2 & 1\\ 0 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{031}{040}\right| \left\{\begin{matrix}3 & 1\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 4\\ 4 & \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}0 & 3\\ 3 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 1\\ 1 & 3\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}3 & 1\\ 0 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{040}{004}\right| \left\{\begin{matrix}4 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 4\\ 0 & \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}0 & 4\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}4 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{040}{013}\right| \left\{\begin{matrix}4 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 4\\ 1 & \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}0 & 4\\ 1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}3 & 0\\ 0 & 1\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{040}{022}\right| \left\{\begin{matrix}4 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 4\\ 2 & \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}0 & 4\\ 2 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{040}{031}\right| \left\{\begin{matrix}4 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 4\\ 3 & \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}0 & 4\\ 3 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & 3\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}3 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{040}{040}\right| \left\{\begin{matrix}4 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 4\\ 4 & \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}0 & 4\\ 4 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & 4\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}4 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{103}{301}\right| \left\{\begin{matrix}0 & 3\\ 3 & 1\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 3\\ 3 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & 3\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 3\\ 3 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 3\\ 3 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{103}{202}\right| \left\{\begin{matrix}0 & 3\\ 3 & 1\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 3\\ 2 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}0 & 3\\ 2 & 1\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 2\\ 2 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 3\\ 2 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 2\\ 2 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{103}{211}\right| \left\{\begin{matrix}0 & 3\\ 2 & 1\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 2\\ 2 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 3\\ 3 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 3\\ 2 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{103}{103}\right| \left\{\begin{matrix}0 & 3\\ 3 & 1\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 3\\ 1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}3 & 0\\ 0 & 1\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}0 & 3\\ 2 & 1\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 2\\ 1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2 & 1\\ 0 & 1\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}0 & 3\\ 1 & 1\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 1\\ 1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 3\\ 1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 1\\ 1 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{103}{112}\right| \left\{\begin{matrix}0 & 3\\ 2 & 1\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 2\\ 1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}0 & 3\\ 1 & 1\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 1\\ 1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 3\\ 2 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 2\\ 1 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{103}{121}\right| \left\{\begin{matrix}0 & 3\\ 1 & 1\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 1\\ 1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 3\\ 3 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 3\\ 1 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{103}{004}\right| \left\{\begin{matrix}0 & 3\\ 3 & 1\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 3\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}4 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}0 & 3\\ 2 & 1\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 2\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}3 & 1\\ 0 & \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}0 & 3\\ 1 & 1\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 1\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2 & 2\\ 0 & \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}0 & 3\\ 0 & 1\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 3\\ 0 & \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 3\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{103}{013}\right| \left\{\begin{matrix}0 & 3\\ 2 & 1\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 2\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}3 & 1\\ 1 & \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}0 & 3\\ 1 & 1\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 1\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2 & 2\\ 1 & \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}0 & 3\\ 0 & 1\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 3\\ 1 & \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 3\\ 1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 1\\ 0 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{103}{022}\right| \left\{\begin{matrix}0 & 3\\ 1 & 1\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 1\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2 & 2\\ 2 & \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}0 & 3\\ 0 & 1\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 3\\ 2 & \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 3\\ 2 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 2\\ 0 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{103}{031}\right| \left\{\begin{matrix}0 & 3\\ 0 & 1\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 3\\ 3 & \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 3\\ 3 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 3\\ 0 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{112}{202}\right| \left\{\begin{matrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 2\\ 2 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}1 & 1\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2 & 2\\ 2 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 2\\ 2 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{112}{211}\right| \left\{\begin{matrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 2\\ 2 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}1 & 1\\ 1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 2\\ 2 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{112}{103}\right| \left\{\begin{matrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 2\\ 1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2 & 1\\ 0 & 1\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 1\\ 1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}1 & 1\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2 & 2\\ 1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 1\\ 1 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{112}{112}\right| \left\{\begin{matrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 2\\ 1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 1\\ 1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}1 & 1\\ 1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 1\\ 1 & \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}1 & 1\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2 & 2\\ 2 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 2\\ 1 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{112}{121}\right| \left\{\begin{matrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 1\\ 1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}1 & 1\\ 1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 2\\ 1 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{112}{004}\right| \left\{\begin{matrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 2\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}3 & 1\\ 0 & \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 1\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2 & 2\\ 0 & \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 3\\ 0 & \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}1 & 1\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2 & 2\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{112}{013}\right| \left\{\begin{matrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 2\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}3 & 1\\ 1 & \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 1\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2 & 2\\ 1 & \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 3\\ 1 & \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}1 & 1\\ 1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}1 & 1\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2 & 2\\ 1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 1\\ 0 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{112}{022}\right| \left\{\begin{matrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 1\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2 & 2\\ 2 & \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 3\\ 2 & \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}1 & 1\\ 1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 1\\ 0 & \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}1 & 1\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2 & 2\\ 2 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 2\\ 0 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{112}{031}\right| \left\{\begin{matrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 3\\ 3 & \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}1 & 1\\ 1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 2\\ 0 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{121}{103}\right| \left\{\begin{matrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 1\\ 1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}1 & 2\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}3 & 1\\ 1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 1\\ 1 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{121}{112}\right| \left\{\begin{matrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 1\\ 1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}1 & 2\\ 1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 1\\ 1 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{121}{121}\right| \left\{\begin{matrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 1\\ 1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}1 & 2\\ 2 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2 & 1\\ 1 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{121}{004}\right| \left\{\begin{matrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 1\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2 & 2\\ 0 & \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}2 & 1\\ 0 & 1\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 3\\ 0 & \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}1 & 2\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}3 & 1\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{121}{013}\right| \left\{\begin{matrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 1\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2 & 2\\ 1 & \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}2 & 1\\ 0 & 1\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 3\\ 1 & \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}1 & 2\\ 1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2 & 1\\ 0 & 1\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}1 & 2\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}3 & 1\\ 1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 1\\ 0 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{121}{022}\right| \left\{\begin{matrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 1\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2 & 2\\ 2 & \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}2 & 1\\ 0 & 1\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 3\\ 2 & \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}1 & 2\\ 2 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}1 & 2\\ 1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 1\\ 0 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{121}{031}\right| \left\{\begin{matrix}2 & 1\\ 0 & 1\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 3\\ 3 & \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}1 & 2\\ 2 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2 & 1\\ 0 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{130}{004}\right| \left\{\begin{matrix}3 & 0\\ 0 & 1\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 3\\ 0 & \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}1 & 3\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}4 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{130}{013}\right| \left\{\begin{matrix}3 & 0\\ 0 & \mathit{1}\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 3\\ 1 & \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}1 & 3\\ 1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}3 & 0\\ 0 & \mathit{1}\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{130}{022}\right| \left\{\begin{matrix}3 & 0\\ 0 & \mathit{1}\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 3\\ 2 & \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}1 & 3\\ 2 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2 & 0\\ 0 & \mathit{2}\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{130}{031}\right| \left\{\begin{matrix}3 & 0\\ 0 & \mathit{1}\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 3\\ 3 & \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}1 & 3\\ 3 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & \mathit{3}\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}3 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{202}{202}\right| \left\{\begin{matrix}0 & 2\\ 2 & \mathit{2}\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2 & 2\\ 2 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2 & 0\\ 0 & \mathit{2}\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}2 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2 & 2\\ 2 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 2\\ 2 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{202}{103}\right| \left\{\begin{matrix}0 & 2\\ 2 & \mathit{2}\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2 & 2\\ 1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}3 & 0\\ 0 & \mathit{1}\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}0 & 2\\ 1 & \mathit{2}\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2 & 1\\ 1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2 & 1\\ 0 & \mathit{1}\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}2 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2 & 2\\ 1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 1\\ 1 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{202}{112}\right| \left\{\begin{matrix}0 & 2\\ 1 & \mathit{2}\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2 & 1\\ 1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2 & 1\\ 1 & \mathit{1}\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}2 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2 & 2\\ 2 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 2\\ 1 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{202}{004}\right| \left\{\begin{matrix}0 & 2\\ 2 & \mathit{2}\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2 & 2\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}4 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}0 & 2\\ 1 & \mathit{2}\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2 & 1\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}3 & 1\\ 0 & \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}0 & 2\\ 0 & \mathit{2}\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2 & 2\\ 0 & \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}2 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2 & 2\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{202}{013}\right| \left\{\begin{matrix}0 & 2\\ 1 & \mathit{2}\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2 & 1\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}3 & 1\\ 1 & \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}0 & 2\\ 0 & \mathit{2}\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2 & 2\\ 1 & \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}2 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2 & 2\\ 1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 1\\ 0 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{202}{022}\right| \left\{\begin{matrix}0 & 2\\ 0 & \mathit{2}\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2 & 2\\ 2 & \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}2 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2 & 2\\ 2 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 2\\ 0 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{211}{103}\right| \left\{\begin{matrix}1 & 1\\ 1 & \mathit{2}\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2 & 1\\ 1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2 & 1\\ 0 & \mathit{1}\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}2 & 1\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}3 & 1\\ 1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 1\\ 1 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{211}{112}\right| \left\{\begin{matrix}1 & 1\\ 1 & \mathit{2}\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2 & 1\\ 1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2 & 1\\ 1 & \mathit{1}\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}2 & 1\\ 1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2 & 1\\ 1 & \mathit{1}\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 1\\ 1 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{211}{004}\right| \left\{\begin{matrix}1 & 1\\ 1 & \mathit{2}\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2 & 1\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}3 & 1\\ 0 & \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}1 & 1\\ 0 & \mathit{2}\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2 & 2\\ 0 & \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}2 & 1\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}3 & 1\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{211}{013}\right| \left\{\begin{matrix}1 & 1\\ 1 & \mathit{2}\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2 & 1\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}3 & 1\\ 1 & \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}1 & 1\\ 0 & \mathit{2}\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2 & 2\\ 1 & \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}2 & 1\\ 1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2 & 1\\ 0 & \mathit{1}\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}2 & 1\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}3 & 1\\ 1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 1\\ 0 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{211}{022}\right| \left\{\begin{matrix}1 & 1\\ 0 & \mathit{2}\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2 & 2\\ 2 & \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}2 & 1\\ 1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2 & 1\\ 1 & \mathit{1}\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 1\\ 0 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{220}{004}\right| \left\{\begin{matrix}2 & 0\\ 0 & \mathit{2}\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2 & 2\\ 0 & \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}2 & 2\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}4 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{220}{013}\right| \left\{\begin{matrix}2 & 0\\ 0 & \mathit{2}\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2 & 2\\ 1 & \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}2 & 2\\ 1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}3 & 0\\ 0 & \mathit{1}\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{220}{022}\right| \left\{\begin{matrix}2 & 0\\ 0 & \mathit{2}\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2 & 2\\ 2 & \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}2 & 2\\ 2 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2 & 0\\ 0 & \mathit{2}\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{301}{103}\right| \left\{\begin{matrix}0 & 1\\ 1 & \mathit{3}\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}3 & 1\\ 1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}3 & 0\\ 0 & \mathit{1}\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}3 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}3 & 1\\ 1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 1\\ 1 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{301}{004}\right| \left\{\begin{matrix}0 & 1\\ 1 & \mathit{3}\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}3 & 1\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}4 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}0 & 1\\ 0 & \mathit{3}\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}3 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}3 & 1\\ 0 & \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}3 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}3 & 1\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{301}{013}\right| \left\{\begin{matrix}0 & 1\\ 0 & \mathit{3}\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}3 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}3 & 1\\ 1 & \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}3 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}3 & 1\\ 1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 1\\ 0 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{310}{004}\right| \left\{\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & \mathit{3}\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}3 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}3 & 1\\ 0 & \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}3 & 1\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}4 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{310}{013}\right| \left\{\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & \mathit{3}\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}3 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}3 & 1\\ 1 & \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}3 & 1\\ 1 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}3 & 0\\ 0 & \mathit{1}\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}$$

$$\left|\frac{400}{004}\right| \left\{\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & \mathit{4}\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}4 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}4 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}4 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}4 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & \end{matrix}\right\}$$

Bibliographie

[1] Sergeï Ivanovich Adian, *Fragments of the word Δ in a braid group*, Mathematical Notes **36** (1984), 505–510.

[2] James W. Alexander, *A lemma on a system of knotted curves*, Procedings of the National Academy of Sciences of USA **9** (1923), 93–95.

[3] George E. Andrews, *The theory of partitions*, Encyclopaedia of Mathematics and its Applications, Cambridge University Press, 1984.

[4] George E. Andrews, Richard Askey, et Roy Ranjan, *Special functions*, Encyclopaedia of Mathematics and its Applications, vol. 71, Cambridge University Press, 1999.

[5] Désiré André, *Solution directe du problème résolu par M. Bertrand*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris **105** (1887), 436–437.

[6] Emil Artin, *Theorie der Zöpfe*, Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg **4** (1925), 47–72.

[7] ———, *Theory of braids*, The Annals of Mathematics **48** (1947), n° 1, 101–126.

[8] Jean-Christophe Aval, *Multivariate Fuss-Catalan numbers*, Discrete Mathematics **308** (2008), 4660–4669.

[9] Rodney Baxter, *Partition function of the eight vertex lattice model*, Annals of Physics **70** (1972), 193–228.

[10] ———, *Solvable eight vertex model on an arbitrary planar lattice*, Philosophical Transactions of the Royal Society, London **289** (1978), 315–346.

[11] Joseph Bertrand, *Solution d'un problème*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris **105** (1887), 369.

[12] David Bessis, *The dual braid monoid*, Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure **36** (2003), n° 5, 647–683.

[13] Stephen Bigelow, *The Burau representation is not faithful for $n = 5$*, Geometry and Topology **3** (1999), 397–404.

[14] ———, *Braid groups are linear*, Journal of the American Mathematical Society **14** (2001), 471–486.

[15] Joan Birman, *Braids, links, and mapping class groups.*, Annals of Mathematics Studies, vol. 82, Princeton University Press, 1974.

[16] Joan Birman et Tara Brendle, *Braids : A survey*, Handbook of Knot Theory (William Menasco et Morwen Thistlethwaite, eds.), Elsevier, 2004.

[17] Joan Birman, Ki Hyoung Ko, et Sang Jin Lee, *A new approach to the word and conjugacy problems in the braid groups*, Advances in Mathematics **139** (1998), n° 2, 322–353.

[18] ———, *The infimum, supremum and geodesic length of a braid conjugacy class*, Advances in Mathematics **164** (2001), 41–56.

[19] William Boone, *The word problem*, Proceedings of the National Academy of Sciences **44** (1958), n° 10, 1061–1065.

[20] Nicolas Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie, chapitres 4, 5 et 6*, Éléments de mathématique, Masson, 1968.

[21] Egbert Brieskorn et Kyoji Saito, *Artin-Gruppen und Coxeter-Gruppen*, Inventiones Mathematicae **17** (1972), 245–271.

[22] Vyjayanthi Chari et Andrew Pressley, *A guide to quantum groups*, Cambridge University Press, 1994.

[23] Alfred Clifford et Gordon Preston, *The algebraic theory of semigroups*, Mathematical Surveys, vol. 7, American Mathematical Society, 1961.

[24] Harold Scott MacDonald Coxeter, *Regular polytopes*, 3rd ed., Dover, 1973.

[25] ———, *The beauty of geometry : Twelve essays*, Dover, 1999.

[26] Sankar Das Sarma, Michael Freedman, et Chetan Nayak, *Topologically protected qubits from a possible non-Abelian fractional quantum Hall state*, Physical Review Letters **94** (2005), n° 166802, 1–4.

[27] Max Dehn, *Über unendliche diskontinuierliche Gruppen*, Mathematische Annalen **71** (1911), n° 1, 116–144.

[28] Patrick Dehornoy, *Braid groups and left distributive operations*, Transactions of the American Mathematical Society **345** (1994), n° 1, 115–151.

[29] ———, *Groupes de Garside*, Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure **35** (2002), 267–306.

[30] ———, *Braid-based cryptography*, Group Theory, Statistics, and Cryptography (Alexei G. Myasnikov et Valdimir Shpilrain, eds.), Contemporary Mathematics, vol. 360, AMS, 2004.

[31] ———, *Lectures notes on Artin-Tits groups*, Summer School in Combinatorics of Groups and Algebras, CIRM, 2004.

[32] Patrick Dehornoy, Ivan Dynnikov, Dale Rolfsen, et Bert Wiest, *Why are braids orderable ?*, vol. 14, Panoramas et Synthèses, 2002.

[33] Pierre Deligne, *Les immeubles des groupes de tresses généralisés*, Inventiones Mathematicae **17** (1972), 273–302.

[34] Vladimir Drinfeld, *Hopf algebras and the quantum Yang–Baxter equation*, Soviet mathematics. Doklady **32** (1985), 254–258.

[35] ———, *Quantum groups*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians of Berkeley 1986 (1987), 798–820.

[36] Mohamed El Marraki, Nicolas Hanusse, Jörg Zipperer, et Alexander Zvonkin, *Cacti, braids and complex polynomials*, Séminaire Lotharingien de Combinatoire **37** (1997), n° B37b, 1.

[37] Elsayed A. Elrifai et Hugh R. Morton, *Algorithms for positive braids*, The Quarterly Journal of Mathematics **45** (1994), 479–497.

[38] David B. A. Epstein, James W. Cannon, Derek F. Holt, Silvio V. F. Levy, Michael S. Paterson, et William P. Thurston, *Word processing in groups*, Jones and Bartlett Publishers, 1992.

[39] Pavel Etingof et Olivier Schiffmann, *Lectures on quantum groups*, International Press, 2001.

[40] Ludwig Fadeev, Nicolai Reshetikhin, et Leon Takhtajan, *Quantization of Lie groups and Lie algebras*, Leningrad Mathematical Journal **1** (1990), n° 1, 193–225.

[41] Roger Fenn, Michael Greene, Dale Rolfsen, Colin Rourke, et Bert Wiest, *Ordering the braid groups*, Pacific Journal of Mathematics **191** (1999), n° 1, 49–74.

[42] Ralph Fox et Lee Neuwirth, *The braid groups*, Mathematica Scandinavica **10** (1962), 119–126.

[43] Nuno Franco et Juan Gonzalez-Meneses, *Conjugacy problem for braid groups and Garside groups*, Journal of Algebra **266** (2003), n° 1, 112–132.

[44] Peter Freyd, David Yetter, James Hoste, William Lickorish, Kenneth Millett, et Ocneanu Adrian, *A new polynomial invariant of knots and links*, Bulletin of the American Mathematical Society **12** (1985), 103–111.

[45] David Garber, *Braid group cryptography*, Braid PRIMA school in Singapore, June 2007, 2007.

[46] Frank Garside, *The braid group and other groups*, The Quarterly Journal of Mathematics **20** (1969), n° 1, 235–254.

[47] George Gasper Jr. et Mizan Rahman, *Basic hypergeometric series*, 2nd ed., Encyclopaedia of Mathematics and its Applications, vol. 96, Cambridge University Press, 1998.

[48] Volker Gebhardt, *A new approach to the conjugacy problem in Garside groups*, Journal of Algebra **292** (2005), 282–302.

[49] Ronald L. Graham, Donald E. Knuth, et Oren Patashnik, *Concrete mathematics : A foundation for computer science*, 2nd ed., Addison-Wesley Professional, 1994.

[50] James E. Humphreys, *Reflection groups and coxeter groups*, Cambrige Studies in Advanced Mathematics, vol. 29, Cambridge University Press, 1990.

[51] Adolf Hurwitz, *Über Riemann'sche Fläche mit gegeben Verzweigungspunkten*, Mathematische Annalen **39** (1891), 1–61.

[52] Michio Jimbo, *A q-difference analogue of $U(\mathfrak{g})$ and the Yang-Baxter equation*, Letters in Mathematical Physics **10** (1985), 63–69.

[53] Vaughan Jones, *Hecke algebra representations of braid groups and link polynomials*, Annals of Mathematics **126** (1987), 335–388.

[54] ———, *A polynomial invariant for knots via von Neumann algebras*, Bulletin of the American Mathematical Society **12** (1987), 335–388.

[55] André Joyal et Ross Street, *The geometry of tensor calculus, I*, Advances in Mathematics **88** (1991), 55–112.

[56] ———, *Braided tensor categories*, Advances in Mathematics **102** (1993), 20–78.

[57] Victor Kac et Pokman Cheung, *Quantum calculus*, Universitext, Springer-Verlag, 2002.

[58] Irvin Kaplansky, *Solution of the problème des ménages*, Bulletin of the American Mathematical Society **49** (1943), 784–785.

[59] Irvin Kaplansky et John Riordan, *The problème des ménages*, Scripta Mathematica **12** (1946), 113–124.

[60] Christian Kassel, *Quantum groups*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 155, Springer-Verlag, New York, 1995.

[61] Donald E. Knuth, *Two notes on notation*, American Mathematical Monthly **99** (1992), n° 5, 403–422.

[62] Ki Hyoung Ko et Jae Woo Han, *Positive presentations of the braid groups and the embedding problem*, Mathematische Zeitschrift **240** (2002), n° 1, 211–232.

[63] Roelof Koekoek et René F. Swarttouw, *The Askey-scheme of hypergeometric orthogonal polynomials and its q-analogue*, Tech. Report 98-17, Delft University of Technology, Faculty of Information Technology and Systems, Department of Technical Mathematics and Informatics, 1998.

[64] Saunders Mac Lane, *Natural associativity and commutativity*, Rice University Studies **49** (1963), 28–46.

[65] ———, *Categories for the working mathematician*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 5, Springer-Verlag, New York, 1971.

[66] Hideya Matsumoto, *Générateurs et relations des groupes de Weyl généralisés*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris (1964), n° 258, 3419–3422.

[67] Chetan Nayak, Steven H. Simon, Ady Stern, Michael Freedman, et Sankar Das Sarma, *Non-Abelian anyons and topological quantum computation*, Reviews of Modern Physics (2008).

[68] Pyotr Sergeyevich Novikov, *On the algorithmic unsolvability of the word problem in group theory*, Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics **44** (1955), 1–143.

[69] Oleg Ogievetsky, *Uses of quantum spaces*, Quantum Symmetries in Theoretical Physics and Mathematics (Robert Coquereaux, Ariel Garcia, et Roberto Trinchero, eds.), Contemporary Mathematics, vol. 294, AMS, 2002, Proceedings of the Bariloche School, January 10-21, 2000, Bariloche, Patagonia, Argentina.

[70] Oystein Ore, *Linear equations in non-commutative fields*, The Annals of Mathematics **32** (1931), n° 3, 463–477.

[71] Luis Paris, *Artin monoids inject in their groups*, Commentarii Mathematici Helvetici **77** (2002), n° 3, 609–637.

[72] Blaise Pascal, *Traité du triangle arithmétique avec quelques autres petits traitez sur la même matière*, Guillaume Desprez, 1665.

[73] Donald S. Passman, *The algebraic structure of group rings*, Pure and applied mathematics, John Wiley & Sons, 1977.

[74] Matthieu Picantin, *Explicit presentations for the dual braid monoids*, Comptes Rendus, Mathématique **334** (2002), 843–848.

[75] Robert A. Proctor, *Solution of two difficult combinatorial problems with linear algebra*, American Mathematical Monthly **89** (1982), n° 10, 721–734.

[76] Józef Przytycki, *Classical roots of knot theory*, Chaos, Solitons and Fractals **9** (1998), n° 5, 531–545.

[77] Józef Przytycki et Pawel Traczyk, *Conway algebras and skein equivalence of links*, Proceedings of the American Mathematical Society **100** (1987), 744–748.

[78] Robert Raussendorf, Jim Harrington, et Kovid Goyal, *Topological fault-tolerance in cluster state quantum computation*, New Journal of Physics **9** (2007), n° 199.

[79] Kurt Reidemeister, *Knotten und Gruppen*, Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg **5** (1927), 7–23.

[80] Dale Rolfsen, *Knots and links*, Mathematics Lecture Series, vol. 7, Publish Or Perish, 1976.

[81] Marc Rosso, *Groupes quantiques et algèbres de battage quantiques*, Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série 1, Mathématique **320** (1995), n° 2, 145–148.

[82] ———, *Integrals of vertex operators and quantum shuffles*, Letters in Mathematical Physics **41** (1997), 161–168.

[83] ———, *Quantum groups and quantum shuffles*, Inventiones Mathematicae **133** (1998), n° 2, 339–416.

[84] Peter W. Shor, *Polynomial-time algorithms for prime factorization and discrete logarithms on a quantum computer*, SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing **26** (1997), n° 5, 1484–1509.

[85] Evgeny Sklyanin, *Quantum version of the method of inverse scattering problem*, Journal of Soviet Mathematics **19** (1982), 1546–1596.

[86] Richard P. Stanley, *On the number of reduced decompositions of elements of Coxeter groups*, European Journal of Combinatorics **5** (1984), 359–372.

[87] ———, *Enumerative combinatorics, volume 1*, Cambrige Studies in Advanced Mathematics, vol. 49, Cambridge University Press, 2000.

[88] ———, *Enumerative combinatorics, volume 2*, Cambrige Studies in Advanced Mathematics, vol. 62, Cambridge University Press, 2001.

[89] James Joseph Sylvester, *Proof of the hitherto undemonstrated fundamental theorem of invariants*, Philosophical Magazine **5** (1878), 178–188.

[90] Mitsuhiro Takeuchi, *A survey on Nichols algebras*, Algebraic structures and their representations : XV coloquio latinoamericano de algebra (José Antonio de la Peña, Enersto Vallejo, et Natig Atakishiyev, eds.), Contemporary Mathematics, vol. 376, 2003, p. 105–117.

[91] William P. Thurston, *On the geometry and dynamics of diffeomorphisms of surfaces*, Bulletin of the American Mathematical Society **19** (1988).

[92] Jacques Tits, *Normalisateurs de tores, I. groupes de Coxeter Étendus*, Journal of Algebra **4** (1966), 96–116.

[93] ———, *Le probleme des mots dans les groupes de Coxeter*, Symposia Mathematica (INDAM, Rome, 1967/68), Academic Press, London, 1969, p. 175–185.

[94] Jacques Touchard, *Sur un problème des permutations*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris **198** (1934), 631–633.

[95] Edward Witten, *Quantum field theory and the Jones polynomial*, Communications in Mathematical Physics **121** (1989), n° 3, 351–399.

[96] Chen Ning Yang, *Some exact results for the many-body problem in one dimension with repulsive δ-function interaction*, Physical Review Letters **19** (1967), n° 23, 1312–1314.

[97] ———, *S matrix for the one-dimensional N-body problem with repulsive or attractive δ-function interaction*, Physical Review **168** (1968), n° 5, 1920–1923.

[98] Alexander B. Zamolodchikov, *Z_4-symmetric factorized S-matrix in two space-time dimensions*, Communications in Mathematical Physics **69** (1979), n° 2, 165–178.

Résumé

Le sujet de cette thèse est l'établissement d'une nouvelle solution de l'équation de Yang-Baxter. Cette équation est présente dans de très nombreux domaines de la physique théorique (systèmes intégrables, mécanique statistique, QISM,...) ou des mathématiques (théorie des nœuds, groupes quantiques,...), mais l'étude de ses solutions est difficile (équations non-linéaires, variables non-commutatives, etc.). Une solution de l'équation de Yang-Baxter est aussi appelée tressage.

Dans une première partie, nous présentons des résultats généraux sur le groupe des tresses et son algèbre de groupe. Nous nous intéressons ensuite aux analogues tressés que l'on peut considérer comme des analogues non-commutatifs de q analogues. Nous présentons entre autres des analogues pour les coefficients binomiaux, les symboles de Pochhammer et les nombres de Fuß-Catalan, ainsi que pour le développent binomial et la convolution de Vandermonde. Ces deux premiers chapitres contiennent des résultats plus ou moins standards et forment l'assise des résultats qui suivent. La définition des nombres de Fuß-Catalan est toutefois originale.

Dans une seconde partie, nous abordons les tressages d'espaces de tenseurs. Nous commençons par présenter les équations qui doivent être satisfaites par un tel objet et nous donnons une solution dont nous montrons l'unicité. Dans un dernier chapitre, nous plaçons ce tressage dans un contexte plus général et nous présentons les tressages dits « zébrés » qui prennent en compte une éventuelle cyclicité dans l'ordre des tenseurs sur lesquels ils se projettent. Le contenu de ces deux derniers chapitres est original. Nous fournissons ainsi une nouvelle solution de l'équation de Yang-Baxter et explorons ses propriétés.

Mot-clefs : Tressage, Groupe des tresses, Équation de Yang-Baxter, Analogue tressé.

Abstract

The main result of this thesis is the presentation of a new solution of the Yang-Baxter equation. This equation appears in many areas of theoretical physics (integrable systems, statistical mechanics, QISM,...) and of mathematics (knot theory, quantum groups,...), but the study of its solutions is quite difficult (non-linear equations, non commutative variables, etc.). A solution of the Yang-Baxter equation is also called braiding.

In a first part, we present general results about the braid group and its group ring. We then focus on braided analogs which may be seen as non commutative analogs of q-analogs. We present, among other results, analog for binomial coefficients, Pochhammer symbols and Fuß-Catalan numbers, as well as analogs for the standard binomial expansion formula and the Chu-Vandermonde convolution. These two first chapters contain quite standard results and set the basis of the results appearing in the sequel. The part on Fuß-Catalan numbers is original.

In a second part, we study tensor braidings. We begin by setting off the system of equations which must be fulfilled and give a solution. We proove that this solution is unique and we study some of its properties. In a last chapter, we put this solution in a more general framework and present "striped" braidings which are taking account of a cyclic pattern on the orders of tensors on which they project. The result contained in these two last chapter is original. We thus present a new solution of the Yang-Baxter equation and explore its properties.

Keywords: Braiding, Braid group, Yang-Baxter equation, Braided analogue.

Discipline : Physique Théorique

Laboratoire : Centre de Physique Théorique
163 avenue de Luminy
13288 Marseille CEDEX 9