



**HAL**  
open science

# Simulation de l'interaction rotor/stator pour des turbo-machines aéronautiques en configuration non-accidentelle

Alain Batailly

► **To cite this version:**

Alain Batailly. Simulation de l'interaction rotor/stator pour des turbo-machines aéronautiques en configuration non-accidentelle. Sciences de l'ingénieur [physics]. Ecole Centrale de Nantes (ECN), 2008. Français. NNT: . tel-00364945

**HAL Id: tel-00364945**

**<https://theses.hal.science/tel-00364945>**

Submitted on 4 Mar 2009

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ÉCOLE CENTRALE DE NANTES

École Doctorale

Sciences Pour l'Ingénieur, Géosciences, Architecture

Année 2008

N° B.U :

Thèse de Doctorat

Spécialité : GÉNIE MÉCANIQUE

Présentée et soutenue publiquement par :

Alain BATAILLY

Date : 19 décembre 2008

À L'ÉCOLE CENTRALE DE NANTES

Titre

Simulation de l'interaction rotor/stator pour des turbo-machines  
aéronautiques en configuration non-accidentelle

Jury

<i>Président</i>	M. BERTHILLIER	<i>Professeur, Université de Franche-Comté</i>
<i>Rapporteurs</i>	E. BALMES	<i>Professeur, École Nationale Supérieure d'Arts et Métiers</i>
	F. THOUVEREZ	<i>Professeur, École Centrale de Lyon</i>
<i>Examineurs</i>	P. CARTRAUD	<i>Directeur de thèse, Professeur, École Centrale de Nantes</i>
	M. LEGRAND	<i>Assistant Chercheur, Université McGill</i>
	J.-P. LOMBARD	<i>Ingénieur de Recherche, Snecma</i>
	B. PESEUX	<i>Professeur émérite, École Centrale de Nantes</i>
	C. PIERRE	<i>Doyen, Université McGill</i>

---

Directeur de thèse : P. CARTRAUD

Laboratoire : GÉM

Co-encadrant : C. PIERRE

Laboratoire : Université McGill

N° ED : 498-029



Dans le cadre de la conception de turbo-machines aéronautiques, l'amélioration du rendement est assurée, entre autres, par la diminution du jeu fonctionnel entre les parties tournantes et statiques, telles que les roues aubagées et le carter qui les entoure. Cette stratégie a des conséquences sur le comportement vibratoire des turbo-machines en favorisant l'apparition de contacts structuraux entre les sommets d'aubes et le carter, par exemple. Lorsque plusieurs points de contact co-existent, des phénomènes d'interaction modale peuvent apparaître. La simulation de ces phénomènes, potentiellement dangereux, dans un cadre industriel est au cœur de notre étude. Du fait de la dimension du problème à traiter, des méthodes de réduction modale sont utilisées : une méthode à interfaces fixes, la méthode de Craig-Bampton, et une méthode à interfaces libres, la méthode de Craig-Martinez. L'étude porte notamment sur la performance de ces méthodes de réduction lorsqu'elles sont associées à une non linéarité de type contact. Le phénomène d'interaction modale est tout d'abord étudié sur des modèles 2D simplifiés avec l'analyse de la sensibilité des régimes d'interaction à la taille des modèles réduits, puis sur les modèles 3D industriels pour lesquels la solution vraie n'est pas accessible. La gestion du contact dans le 3D fait appel aux B-splines bicubiques surfaciques afin d'assurer de meilleures propriétés à la surface de contact et de faciliter la résolution numérique. Les résultats obtenus à l'aide des deux méthodes de réduction modale sont comparés et permettent de déterminer la méthode la plus appropriée pour l'industrialisation du code présentée en annexe de ce mémoire.

**Mots-clés** : synthèse modale, interaction modale, méthode de Craig-Bampton, méthode de Craig-Martinez, mécanique du contact, B-splines, interaction rotor/stator , méthode des éléments finis, dynamique explicite

### Detection of modal interaction on aircraft engines in a non-accidental context



Designers have long time worked for a better efficiency of aircraft engines and one of the main challenges lies in minimizing the clearance between the rotating and stationary parts. This technology directly affects the vibratory response of aircraft engines and consequently contributes to the ignition of contacts between the blades tips and surrounding casings. If contact occurs on several simultaneous locations over the casing, specific phenomena may occur such as modal interaction. This study focuses on detecting this potentially dangerous phenomenon in an industrial framework. Because of the large number of degrees of freedom, component mode synthesis methods are considered: a fixed-interface one - namely the Craig-Bampton method - and a free-interface one - namely the Craig-Martinez method. The use of these methods in a contact framework is investigated. First, modal interaction phenomena are explored with simplified 2D models, analyzing the influence of kinematic restrictions on its detection. Then, 3D industrial models are used for which the "true" solution cannot be performed. Contact treatment involves bicubic uniform B-spline surfaces for a better numerical behavior of the solution algorithm. Results obtained with both Craig-Bampton and Craig-Martinez methods are compared in order to evaluate the most appropriate method for industrial applications such as the one presented in the appendices of the thesis.

**Keywords:** Modal reduction, modal synthesis, Craig-Bampton method, Craig-Martinez method, contact mechanic, B-splines, rotor/stator interaction, finite element method, explicit dynamic.

Discipline : Sciences de l'Ingénieur

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>5</b>
<b>1 Réduction modale</b>	<b>9</b>
1.1 Présentation générale	9
1.2 Principe	11
1.3 Aspects théoriques	12
1.3.1 Choix des méthodes présentées	12
1.3.2 Méthodes à interfaces fixes	13
1.3.3 Méthodes à interfaces libres	15
1.3.4 Méthode SVD	18
1.3.5 Convergence	20
1.3.6 Limites des critères	21
1.4 Réduction modale d'un modèle industriel DAM	21
1.4.1 Présentation des structures	21
1.4.2 Conditions limites et frontières	22
1.4.3 Réduction des modèles éléments finis	23
1.4.4 Validation et évaluation des modèles réduits	24
1.5 Simulations de contact sur une aube	31
1.5.1 Avant-propos	31
1.5.2 Hypothèses de l'étude	32
1.5.3 Symétrie cyclique	33
1.5.4 Double réduction modale	34
1.5.5 Bilan	35
1.6 Conclusion	35
<b>2 Traitement du contact</b>	<b>37</b>
2.1 Algorithme de contact	38
2.1.1 Théorie et généralités	38
2.1.2 Gestion du contact	39
2.1.3 B-splines surfaciques bi-cubiques	40
2.2 Validation de l'algorithme de contact	42
2.2.1 Matériau souple et vitesse relative faible	43
2.2.2 Matériau souple et grande vitesse relative	43
2.2.3 Matériau rigide et grande vitesse relative	46
2.2.4 Bilan	46
2.3 Approximations relatives à la gestion du contact	46
2.4 Étude de la consistance énergétique du schéma d'intégration	49

2.4.1	Cas sans frottement . . . . .	50
2.4.2	Cas avec frottement . . . . .	54
2.5	Problèmes non-linéaires et réduction modale . . . . .	54
2.5.1	Réduction de modèles non-linéaires . . . . .	55
2.5.2	Réduction modale et contact . . . . .	56
2.5.3	Procédure de validation . . . . .	57
2.6	Réduction modale et modèle non-linéaire simple . . . . .	58
2.6.1	Réduction modale et validation . . . . .	59
2.6.2	Poutre avec non-linéarité cubique . . . . .	61
2.6.3	Poutre avec contact . . . . .	63
2.7	Problèmes numériques relatifs aux modes d'attache . . . . .	64
2.8	Conclusion . . . . .	67
<b>3</b>	<b>Interaction modale 2D</b> . . . . .	<b>69</b>
3.1	Modélisation des structures . . . . .	70
3.1.1	Roue aubagée . . . . .	70
3.1.2	Carter . . . . .	71
3.1.3	Analyse physique du modèle . . . . .	72
3.1.4	Choix du pas de temps . . . . .	73
3.2	Réduction modale . . . . .	73
3.3	Contexte et objectifs de l'étude d'interaction . . . . .	75
3.4	Évaluation des modèles réduits pour un cas de contact . . . . .	77
3.4.1	Méthode de Craig-Bampton . . . . .	78
3.4.2	Méthode de Craig-Chang-Martinez . . . . .	81
3.4.3	Bilan . . . . .	85
3.5	Influence des restrictions cinématiques sur le phénomène d'interaction modale . . . . .	86
3.5.1	Étude du modèle avec restrictions cinématiques sur le carter et la roue aubagée . . . . .	87
3.5.2	Étude du modèle avec restrictions cinématiques sur le carter . . . . .	90
3.5.3	Étude du modèle sans restriction cinématique . . . . .	93
3.6	Conclusion . . . . .	95
<b>4</b>	<b>Interaction modale 3D</b> . . . . .	<b>97</b>
4.1	Notions préliminaires . . . . .	98
4.2	Définition des paramètres d'étude . . . . .	99
4.2.1	Description du cas de charge . . . . .	99
4.2.2	Rigidité du carter : observations et conséquences . . . . .	101
4.2.3	Convergence des modèles réduits . . . . .	102
4.3	Influence du coefficient de frottement . . . . .	111
4.3.1	Observations temporelles . . . . .	111
4.3.2	Observations fréquentielles . . . . .	112
4.4	Détection des vitesses critiques . . . . .	114
4.4.1	Comparaison des modèles sur la plage de fonctionnement du DAM . . . . .	115
4.4.2	Validité des modèles réduits . . . . .	117
4.5	Influence des diamètres nodaux . . . . .	119
4.5.1	Familles modales retenues pour l'étude d'influence . . . . .	120
4.5.2	Considérations physiques . . . . .	120

4.5.3	Premiers résultats . . . . .	121
4.5.4	Optimisation de la base de réduction . . . . .	123
4.5.5	Étude de la famille modale 1F . . . . .	126
4.6	Conclusion . . . . .	127

**Conclusion générale** **131**

**A Calculs des modes de réduction pour des structures à symétrie cyclique** **135**

A.1	Rappels théoriques sur la notion de symétrie cyclique . . . . .	136
A.2	Création des secteurs élémentaires . . . . .	137
A.3	Symétrie cyclique et méthode de réduction modale . . . . .	137
A.3.1	Calcul des modes encastrés et libres . . . . .	138
A.3.2	Calcul des modes statiques . . . . .	139
A.3.3	Gain total en nombre d'opérations . . . . .	144
A.3.4	Calcul des modes d'attache . . . . .	144
A.3.5	Symétrie cyclique et méthode de Craig-Martinez . . . . .	146
A.4	Calcul des modèles réduits . . . . .	147

**B Validation de l'algorithme : cas hyperélastique** **149**

B.1	Description du cas test . . . . .	149
B.2	Résultats . . . . .	150
B.2.1	Pénétrations . . . . .	150
B.2.2	Résultats suivant orthogonale à la surface de contact . . . . .	151
B.2.3	Résultats suivant orthogonale au déplacement . . . . .	152
B.3	Conclusion . . . . .	152

**C Interaction modale 2D : compléments** **155**

C.1	Interaction à deux diamètres . . . . .	155
C.2	Interaction à trois diamètres . . . . .	157
C.3	Conclusion . . . . .	159

**D Application industrielle** **161**

D.1	Intégration du code dans l'environnement Snecma . . . . .	161
D.1.1	Présentation du chaînage . . . . .	161
D.1.2	Précisions sur la démarche adoptée . . . . .	162
D.2	Application : calcul sur un modèle industriel . . . . .	163
D.3	Perspectives, travaux envisagés . . . . .	163

« L'homme de science le sait bien, lui, que seule la science, a pu, au fil des siècles, lui apporter l'horloge pointeuse et le parcmètre automatique sans lesquels il n'est pas de bonheur terrestre possible. »

*Pierre Desproges*

# Remerciements

Mes remerciements vont en premier lieu à mes encadrants : Patrice Cartraud, professeur à l'École Centrale de Nantes, et Mathias Legrand, assistant chercheur à l'université McGill de Montréal. Par leur présence et leur disponibilité tout au long de ma thèse, ils m'ont permis d'avancer dans mon travail dans les meilleures conditions. Je tiens également à remercier Christophe Pierre, doyen de la faculté de génie de l'université McGill de Montréal, pour m'avoir accueilli dans son laboratoire pendant un peu plus de deux ans. Enfin, Je souhaite remercier les personnes qui ont suivi mon travail au sein de l'entreprise Snecma : Jean-Pierre Lombard, Pierrick Jean et Jérôme Dupeux.

Si la plus grande partie de ma thèse a été réalisée au sein du laboratoire de dynamique des structures et d'acoustique de l'université McGill, j'ai également travaillé au sein de l'institut de recherche en génie civil et mécanique (GéM) à l'École Centrale de Nantes et dans le département méthodes de l'entreprise Snecma sur le site de Villaroche. Je tiens à remercier l'ensemble des personnes que j'ai rencontrées dans ces différents endroits. Parmi celles-ci, je veux remercier tout particulièrement Benoît Magnain qui, malgré des conditions particulièrement délicates, a su trouver le temps de m'aider lors de ma rédaction.

Tout au long de ma thèse, le soutien et l'accompagnement de ma famille et de mes amis furent d'une aide précieuse, je tiens donc à remercier mes parents, mes deux sœurs Audrey et Sophie et bien entendu Biru, ma petite amie avec qui j'ai partagé ces années à Montréal.

Je souhaiterais remercier des personnes qui ont joué un rôle important pour moi tout au long de ces trois années. À Nantes tout d'abord, je tiens à remercier chaleureusement Céline Dubois et Steven Marguet (dans l'ordre alphabétique bien entendu) avec qui les nombreuses discussions et débats parfois vifs sur de multiples sujets m'ont toujours passionné. À Montréal ensuite, les différents moments passés en compagnie de Karine Dubois et d'Alexandre Lamoureux sont pour Biru et moi-même parmi nos meilleurs souvenirs de notre vie québécoise, je leur adresse de sincères remerciements. Je tiens également à adresser mes remerciements à Nicolas Desramaut, Jennifer Ponte et Sébastien Roques pour les très bons moments passés ensemble.

Enfin, je tiens à remercier mes amis qui, à Montréal ou ailleurs, ont toujours été de bonne compagnie tout au long de ces trois ans, notamment : Céline Arzur, Vincent Augusto, Guillaume Aumaitre, Thi-Liên Do, Mathieu Grégoire, Anthony Guégan, Emmanuelle Laure et Charles Le Denmat.



# Nomenclature

$\beta$	Largeur angulaire d'un secteur d'une structure à symétrie cyclique
$\mathbf{U}$	Vecteur de ddls dans l'espace de la symétrie cyclique
$\mathbf{x}$	Vecteur de ddls dans l'espace éléments finis
$\mathbf{Y}$	Matrice représentant indifféremment les matrices masse ou raideur $\mathbf{M}$ ou $\mathbf{K}$
$\delta t$	Pas de temps des schémas d'intégration utilisés
$\delta\Omega$	Pas utilisé pour les itérations en vitesses de rotation de la roue aubagée
$\eta$	Paramètre de réduction de la méthode de Craig-Bampton
$\Gamma_c$	Surface de contact
$\Phi$	Matrice de passage d'une méthode CMS
$\Phi_e$	Matrice des modes encastrés
$\Phi_s$	Matrice des modes statiques
$\mathbf{D}$	Matrice amortissement
$\mathbf{F}$	Vecteur force généralisé
$g$	fonction distance
$\mathbf{I}$	Matrice identité
$\mathbf{K}$	Matrice raideur
$\mathbf{M}$	Matrice masse
$\mathbf{n}$	Vecteur unitaire normal à la surface étudiée
$\mathbf{P}$	Point matériel
$\mathbf{R}$	Matrice de flexibilité résiduelle
$\mathbf{U}^{n_d}$	Restriction du vecteur $\mathbf{U}$ aux ddls associés à l'harmonique $n_d$
$\mathbf{x}_1$	Coefficients modaux
$\mathbf{x}_i$	Restriction du vecteur $\mathbf{x}$ au ddls du secteur $i$

---

$\mathbf{Y}_0$	Matrice élémentaire au sens de la symétrie cyclique associée à la matrice $\mathbf{Y}$
$\mathbf{Y}_1$	Matrice élémentaire de couplage au sens de la symétrie cyclique associée à la matrice $\mathbf{Y}$
$\mu$	Coefficient de frottement
$\nu$	Coefficient de Poisson
$\omega$	pulsation propre
$\Omega_1$	Matrice des pulsations propres au carré retenues dans la troncature modale
$\Omega_2$	Matrice des pulsations propres au carré exclues de la troncature modale
$\Omega_c(n_d)$	Vitesse critique de rotation pour une excitation à $n_d$ diamètres
$\phi$	Paramètre de réduction de la méthode de Craig-Martinez
$\rho$	Masse volumique
$\xi_{CA}$	Coefficient d'amortissement modal du carter
$\xi_{RA}$	Coefficient d'amortissement modal de la roue aubagée
$\zeta_{n_d}$	Coefficient d'influence du diamètre nodal $n_d$
$e$	Exposant relatif à un solide esclave
$m$	Exposant relatif à un solide maître
$n_{d,c}$	Exposant relatif à la restriction au terme cosinus de l'harmonique $n_d$ d'un vecteur dans l'espace de la symétrie cyclique
$n_{d,s}$	Exposant relatif à la restriction au terme sinus de l'harmonique $n_d$ d'un vecteur dans l'espace de la symétrie cyclique
$l$	Indice relatif à la troncature modale
$CA$	Indice relatif au carter
$CB$	Indice relatif à la méthode de Craig-Bampton
$CM$	Indice relatif à la méthode de Craig-Martinez
$RA$	Indice relatif à la roue aubagée
$f$	Indice relatif aux ddl frontières
$i$	Indice relatif aux ddl intérieurs
$s$	Indice relatif à la méthode SVD
$B_{ni}$	Polynôme de pondération d'une B-spline
$E$	Module d'Young

---

$E_a$	Énergie dissipée par amortissement
$E_c$	Énergie cinétique
$E_d$	Énergie de déformation
$E_T$	Énergie totale
$f$	fréquence
$N$	Nombre de ddls par secteur élémentaire d'une structure à symétrie cyclique
$N_a$	Nombre de secteurs de la structure étudiée
$n_d$	Nombre de diamètres nodaux d'un mode d'une structure à symétrie cyclique
$N_t$	Nombre de ddls total de la structure étudiée
$N_i(s)$	Fonction de forme
$t_c$	Temps au cours duquel un chargement est appliqué sur le carter
$t_s$	Temps d'une simulation



# Introduction

Les travaux de cette thèse, co-financés par l'Association Nationale de la Recherche Technique, s'inscrivent dans le cadre d'un partenariat entre la société Snecma Groupe SAFRAN, l'équipe Structures et Simulations du laboratoire GÉM de l'École Centrale Nantes et le laboratoire « Dynamiques des Structures et Vibration » de l'université McGill de Montréal.

## Problématique industrielle

Depuis le premier modèle opérationnel de turbo-machine aéronautique, le DB 670 développé par le constructeur allemand Daimler-Benz en 1943, de très nombreuses évolutions technologiques en termes de matériaux et de conception ont abouti à l'augmentation du facteur de compression entre les parties haute et basse pression et ainsi optimiser leur rendement. Ces évolutions ont permis le développement des turbo-machines dans l'aéronautique civil.

L'optimisation de ces turbo-machines est aujourd'hui encore un enjeu majeur pour concevoir des moteurs d'avion modernes et limiter la consommation en carburant. Pour ce faire, plusieurs axes de recherches existent tels que des évolutions matériaux avec l'introduction de matériaux composites plus légers et la minimisation des pertes aérodynamiques.

Une partie de ces pertes aérodynamiques provient du jeu entre le sommet des aubes et le carter entourant la roue aubagée, pouvant entraîner des chutes pression dans les différents étages de la turbo-machine et ainsi diminuer son rendement. La réduction du jeu entre les sommets des aubes et le carter est donc logiquement une priorité pour les concepteurs. Toutefois, la diminution de ce jeu n'est pas sans conséquence sur le fonctionnement de la turbo-machine en favorisant l'apparition de contacts entre les aubes des roues aubagées et le carter qui les entoure. En configuration non-accidentelle, ces contacts peuvent être la conséquence de déformations de la roue aubagée du fait des efforts centrifuges, de la déformation du carter du fait d'efforts extérieurs (charge de manœuvre) ou sous l'effet d'un gradient de température aboutissant à une ovalisation du carter. D'autres phénomènes peuvent être à l'origine de l'initiation du contact aube/carter, notamment en configuration accidentelle, mais ils ne sont pas traités dans ce mémoire.

Si la simulation de tels phénomènes est possible grâce à l'utilisation de la méthode des éléments finis, des limites existent en termes de modélisation. Les modèles 3D éléments finis de structures industrielles complexes telles qu'une roue aubagée ou un carter contiennent usuellement plusieurs centaines de milliers, voire plusieurs millions, de degrés de liberté. La ma-



**Figure 1** - Photographie d'un moteur d'avion de type CFM56, avec l'aimable autorisation de Snecma.

nipulation de modèles de telle taille dans le cas d'une simulation non-linéaire comme un cas de contact aboutit à des temps de calculs extrêmement pénalisants. Pour pallier à cet inconvénient des méthodes, dites de réduction modale, existent. Elles permettent d'envisager l'utilisation de modèles éléments finis complexes en diminuant leur nombre de degrés de liberté grâce à une projection sur une base adaptée au problème étudié.

Un des objectifs de notre étude est le choix et l'évaluation d'une méthode de réduction modale à interfaces libres pour l'étude de l'interaction modale sur des modèles 3D industriels de roue aubagée et de carter fournis par Snecma. Les résultats obtenus par cette méthode devront être confrontés à ceux obtenus avec une méthode à interfaces fixes, le but étant de déterminer la méthode la plus appropriée à l'étude du contact aube/carter et de l'interaction modale. Par ailleurs, notre étude doit permettre de fournir à Snecma un code d'interaction suffisamment général pour pouvoir lancer une simulation de contact aube/carter avec n'importe quel couple roue aubagée/carter.

La thèse [48] réalisée en partenariat entre l'École Centrale de Nantes et la société Snecma a constitué un travail de référence pour notre étude (cette thèse faisait elle-même suite à d'autres travaux tels que [35] et [5]). Le travail présenté s'inscrit dans la suite de cette thèse, il y sera donc fait fréquemment référence tout au long du mémoire.

## Interaction modale

Lorsque le contact entre les aubes de la roue aubagée et le carter est initié en plusieurs points, l'interaction entre les deux structures peut aboutir à des déformations importantes si chaque structure est excitée selon un de ses modes propre. En particulier, les structures à symétrie cyclique telles que les roues aubagées et les carters favorisent l'apparition de modes

propres tournants [48] sur les deux structures entre lesquels des contacts peuvent aboutir au phénomène d'interaction dite « modale ». L'apparition de ce type d'interaction est soumise à certaines conditions [12] :

- les deux structures acquièrent des déformées propices à un échange d'énergie, c'est-à-dire qu'elles vibrent toutes les deux selon un ou deux modes à même diamètre
- chaque structure vibre à la fréquence propre du mode considéré
- les vitesses de propagation des modes tournants dans le repère fixe coïncident

Ces différentes conditions se traduisent par la relation

$$\omega_c = n_d \Omega_{CA} - \omega_{RA} \quad (1)$$

où  $\omega_{CA}$  et  $\omega_{RA}$  sont respectivement les pulsations propres du carter et de la roue aubagée d'un mode à  $n_d$  diamètres nodaux. Cette relation permet de définir les vitesses critiques  $\Omega_c$  des roues aubagées, ce qui sera repris dans les chapitres 3 et 4.

## Organisation du mémoire

Le mémoire est composé de quatre chapitres dont un des objectifs majeurs est d'évaluer la possibilité d'utilisation d'une méthode de réduction modale pour la simulation du phénomène d'interaction modale sur des modèles éléments finis 3D de structures industrielles complexes. Cette évaluation sous-entend une comparaison à une méthode de réduction modale à interfaces fixes.

Une présentation générale des différentes méthodes de réduction existantes est effectuée dans le chapitre 1. Si le choix de la méthode à interfaces fixes, la méthode de Craig-Bampton, est guidé par les travaux précédents et notamment [48], le choix de la méthode à interfaces libres, la méthode de Craig-Martinez, résulte d'une étude bibliographique et de la prise en compte des spécificités des simulations à réaliser, en l'occurrence la présence de contacts, qui nécessitent l'accès direct à certains déplacements physiques dans l'espace réduit. Une fois les modèles réduits obtenus, leur convergence spatiale, c'est-à-dire la convergence en termes de représentation physique du modèle éléments finis, est mise en évidence à l'aide de deux critères : la comparaison des fréquences propres et le calcul d'indicateurs d'erreur en énergie de déformation. Ce premier chapitre se termine sur la présentation d'une méthode de double réduction modale permettant de simuler un cas de contact aube/carter avec une aube en sur-longueur.

La présentation de l'algorithme de contact utilisé dans notre étude constitue la première partie du chapitre 2. Cet algorithme est détaillé, la gestion du contact à l'aide de B-splines surfaciques bi-cubiques y est explicitée et les hypothèses faites pour optimiser l'algorithme sont justifiées. L'utilisation de B-splines surfaciques permet de générer une surface plus adaptée à la gestion du contact qu'un maillage éléments finis classique en éliminant le problème de discontinuité de la normale à la surface lors du passage d'un élément fini à son voisin. Une validation du code de contact est proposée en deux étapes : (1) tout d'abord en comparant, sur un cas test d'impact entre deux solides, les résultats obtenus avec ceux d'un code de contact

reposant sur un algorithme différent avec schéma d'intégration implicite développé dans [55] pour plusieurs paramètres matériaux et différentes vitesses relatives. Puis, (2) en réalisant des bilans énergétiques simplifiés mettant en évidence le caractère non-dissipatif du code. La dernière partie du chapitre 2 porte sur l'étude de la performance des méthodes de réduction modale utilisées, qui sont linéaires, avec un problème de contact non-linéaire dans le cas d'une poutre encastree avec ajout d'une raideur non-linéaire ou gestion de contact. Cette étude est la première étape d'un examen approfondi de la performance des méthodes de réduction linéaires avec un problème de contact non-linéaire qui est détaillé dans les chapitres 3 et 4 sur des modèles de plus en plus complexes.

Le chapitre 3 porte sur l'étude d'interaction modale pour des modèles 2D simplifiés d'un couple roue aubagée/carter. Le contexte de l'étude est précisé en rappelant les travaux précédents menés sur le sujet tels que [51]. Les modèles 2D sont réduits à l'aide des méthodes de Craig-Bampton et de Craig-Chang-Martinez, la convergence des modèles réduits pour chaque type de régime d'interaction est montrée. Les résultats de cette étude de convergence permettent de valider la possibilité de prédire des régimes d'interaction avec des modèles réduits ayant très peu de degrés de liberté (ddl) et constitue la deuxième étape du travail sur la performance des méthodes de réduction linéaires avec un problème de contact.

Dans une deuxième partie, une étude sur l'influence des restrictions cinématiques considérées dans [51] est présentée. Le but est d'évaluer l'influence de telles restrictions sur la détection des régimes d'interaction.

Enfin, le dernier chapitre de ce mémoire décrit l'étude menée sur les modèles réduits des modèles 3D de roue aubagée et de carter par les deux méthodes de réduction considérées. La première partie de ce chapitre porte sur la convergence des modèles réduits et permet d'évaluer les paramètres de réduction nécessaires pour obtenir des résultats précis, cette partie constitue la dernière étape du travail de compatibilité entre méthode de réduction linéaires et problème de contact. Les résultats obtenus par les deux modèles réduits sont comparés, leur concordance permettant de pallier l'absence de solution de référence éléments finis.

## Normalisation des résultats

Dans un souci de confidentialité des données industrielles associées aux modèles étudiés, l'ensemble des valeurs numériques de ce mémoire associées aux vitesses de rotation, aux fréquences des réponses, aux déplacements et aux énergies des structures ont été normalisées, et sont donc adimensionnelles.

---

# Réduction modale

## Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Présentation générale</b>	<b>9</b>
<b>1.2</b>	<b>Principe</b>	<b>11</b>
<b>1.3</b>	<b>Aspects théoriques</b>	<b>12</b>
<b>1.4</b>	<b>Réduction modale d'un modèle industriel DAM</b>	<b>21</b>
<b>1.5</b>	<b>Simulations de contact sur une aube</b>	<b>31</b>
<b>1.6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>35</b>

---

## 1.1 Présentation générale

La méthode des éléments finis permet de construire des modèles numériques pour analyser des structures mécaniques. La structure est discrétisée en nœuds reliés les uns aux autres par un maillage d'éléments (tétraèdres, parallélépipèdes...). La précision et la fiabilité de ces modèles dépend notamment du respect de la géométrie de la structure à étudier et a pour conséquence directe le raffinement des maillages utilisés. Ainsi, l'étude de structures industrielles complexes peut aboutir à des modèles numériques de plusieurs millions de degrés de liberté. Si la manipulation de modèles de telle taille est aujourd'hui possible grâce à de puissants calculateurs, elle pose de nombreux problèmes en termes de stockage (il n'est pas possible de stocker ces modèles dans la mémoire vive de l'ordinateur) et, surtout, en termes de temps de calculs.

Des méthodes ont été développées pour réduire la taille des modèles éléments finis afin d'optimiser les simulations. Ces méthodes, dites de condensation, de réduction ou encore de synthèse modale (également méthodes CMS de l'anglais *Component Mode Synthesis*), permettent d'associer les avantages de la description d'un maillage fin aux faibles temps de calculs des modèles contenant peu de degrés de liberté. Le terme « modes composants » (*component modes*) désigne tout ensemble de vecteurs de Ritz utilisés comme base pour la description des déplacements des points d'une structure. Ces modes ont un sens physique : ils peuvent être des modes propres (vibration libre), des modes contraints (modes statiques : déformées statiques de la structure avec déplacements imposés) ou des modes d'attache (déformées statiques de la structure sous un

chargement imposé), l'ensemble de ces termes est reprécisé dans la suite du mémoire. D'autres vecteurs tels que ceux dits de Krylov [22] sont parfois utilisés comme modes composants.

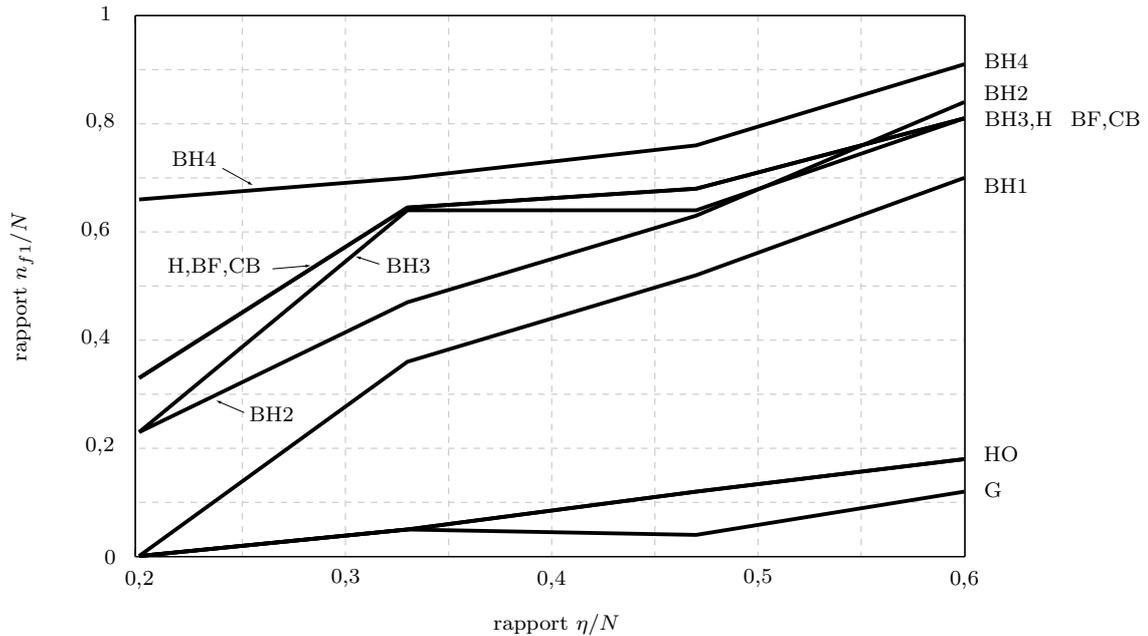
Historiquement les méthodes de réduction modale ont été développées en mécanique au début des années soixante. On peut notamment citer deux articles écrits par Hurty en 1960 et 1965 [42][43]. Plus précisément, dans [43] est présentée une analyse dynamique de structures reposant sur l'utilisation de modes propres. La publication [19] en 1968 est le prolongement logique de travaux de Hurty : en remarquant que la méthode proposée dans [43] pouvait être simplifiée en utilisant des modes encastrés (modes propres de la structure après encastrement de sa frontière) les auteurs développent en fait la méthode CMS à interfaces fixes à laquelle ils donneront leur nom (Craig-Bampton) et qui est encore aujourd'hui l'une des méthodes de réduction modale les plus utilisées.

Les premiers développements concernant les méthodes de réduction modale à interfaces libres (dont la base modale est essentiellement composée de modes libres) suivront quelques années plus tard, notamment en 1969 avec Goldman [32] et Hou [40]. MacNeal développe la première méthode à interfaces libres avec correction pseudo-statique [54]<sup>1</sup>. Ces travaux seront repris et complétés par Rubin [68] en 1974. Enfin, à la fin des années soixante-dix, Hintz [39] développe la première méthode de réduction modale à interfaces mixtes. Cette méthode sera optimisée et implémentée dans le code MSC-Nastran (méthode des super-éléments C-set) en 1979 [37]. En parallèle à ces différents travaux, des méthodes dites à interfaces chargées ont été développées [11]. Par la suite de nombreuses contributions ont été apportées aux méthodes de réduction modale, notamment [56] et [53] où est présentée une méthode CMS à interfaces libres utilisée dans ce mémoire. Les courbes tracées sur la figure 1.1 sont extraites de l'article [10], elles ont pour but d'établir une comparaison entre les différentes méthodes de réduction modale. Elles permettent d'estimer, pour un nombre de modes (en % du nombre total de modes disponibles) dans la base de réduction d'une méthode CMS, le nombre (en % du nombre de fréquences propres calculables) de fréquences propres approchées avec un écart inférieur à 1 %. L'étude [10] est, entre autres, à l'origine de l'utilisation de la méthode CMS de Craig-Bampton [19] dans la plupart des études du programme de développement de la navette spatiale américaine [1].

Les méthodes de réduction modale précédemment citées reposent toutes sur l'utilisation de *modes composants* et ont donc un sens physique. D'autres méthodes de réduction modale ont été développées d'un point de vue plus numérique telles les méthodes POD *Proper Orthogonal Decomposition* (appelée méthode SVD *Singular Value Decomposition* dans le cas d'un espace de dimension finie) [69], [18] et [46]. Un paragraphe indépendant leur est réservé. Ces méthodes présentent des originalités dans la façon de créer le modèle réduit. Elles font appel aux développements les plus récents en termes de réduction [69], [18], [46], et [75] et méritent notre attention en vue d'une possible amélioration de la gestion des non-linéarités inhérentes aux

---

1. La lecture de [54] est par ailleurs particulièrement éclairante sur l'origine des méthodes de réduction modale. L'auteur affirme en effet que le théorème de Foster [30], utilisé en génie électrique pour synthétiser des réseaux [57], peut être vu comme le premier travail associé à la synthèse d'une structure complexe (ici un réseau électrique) en vue d'obtenir une structure équivalente simplifiée.



**Figure 1.1** - Comparaison de méthodes de réduction modale : Evolution du rapport  $n_{f1}/N$  (nombre de fréquences propres approchées à moins de 1% près rapporté au nombre de ddls de la structure moins le nombre de modes rigides) en fonction du rapport  $\eta/N$  (nombre de modes conservés dans la base de réduction rapporté au nombre de ddls intérieurs). Nom des méthodes, BH1 : Benfield Hruda (interfaces libres), BH2 : Benfield-Hruda (interfaces fixes), BH3 : Benfield-Hruda (interfaces chargées), BH4 : Benfield-Hruda (interfaces mixtes), H : Hurty, BF : Bajan-Feng, CB : Craig-Bampton, HO : Hou, et G : Goldman.

phénomènes de contact.

Enfin, il est important de préciser que les méthodes de réduction modale sont très fréquemment associées à la sous-structuration, c'est-à-dire à la décomposition de la structure étudiée en structures de plus petite taille. Cette notion n'est pas détaillée dans ce mémoire car les modèles réduits calculés sont obtenus directement à partir des modèles éléments finis entiers.

Suite à une brève description du principe et des aspects théoriques des méthodes de réduction modale, ce chapitre donne les détails des méthodes à interfaces fixes et à interfaces libres retenues pour la réduction des modèles éléments finis de roue aubagée et de carter étudiés. C'est en effet parmi ces deux types de méthodes qu'il est possible de trouver celles qui sont le mieux adaptées à la gestion du contact directement sur des modèles réduits. La réduction de ces modèles et la convergence des modèles réduits obtenus sont ensuite présentées. Enfin, l'obtention d'un modèle réduit permettant de gérer le contact sur une seule aube est proposée à l'aide d'une double réduction modale.

## 1.2 Principe

L'application d'une méthode de réduction modale consiste à diminuer la dimension de l'espace d'étude défini par le maillage de la structure. En effet, la dimension (notée  $n$ ) des matrices masse, raideur et amortissement d'une structure dépend directement du nombre de degrés de

liberté (et donc de nœuds) associés au maillage du modèle éléments finis. Dans la pratique, les  $n$  degrés de liberté de la structure sont indépendants d'un point de vue mathématique mais ne sont pas tous sollicités du fait de certaines considérations physiques telle que les couplages mécaniques entre différents ddls. Il apparaît ainsi possible de diminuer la dimension de l'espace d'étude.

Une méthode de réduction modale correspond à la projection de l'équation du mouvement

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{F} \quad (1.1)$$

sur une base réduite plus adaptée à la résolution du problème étudié. C'est principalement le choix de cette base qui différencie les méthodes de réduction. Il est fréquent de classer les méthodes de réduction modale en quatre catégories : les méthodes à interfaces fixes [19], à interfaces libres [21], à interfaces mixtes [54] et à interfaces chargées [67].

### 1.3 Aspects théoriques

Quelle que soit la méthode CMS appliquée, il est nécessaire de décomposer la structure étudiée en sous-ensembles. La figure 1.2 présente cette décomposition dans un cas général. Le volume matériel  $\Omega$  est délimité par le contour  $\partial\Omega$  sur lequel peuvent s'appliquer des conditions limites en déplacements  $\partial\Omega_u$  ou en effort  $\partial\Omega_f$ , avec :  $\partial\Omega = \partial\Omega_u \cup \partial\Omega_f$ . L'ensemble  $\partial\Omega_f$  est lui même scindé en deux sous ensembles pour différencier le domaine où les efforts imposés sont nuls au cours du temps  $\partial\Omega_{f0}$  de celui où les efforts appliqués peuvent être non nuls  $\partial\Omega_{f1}$ , avec :  $\partial\Omega_f = \partial\Omega_{f1} \cup \partial\Omega_{f0}$ .

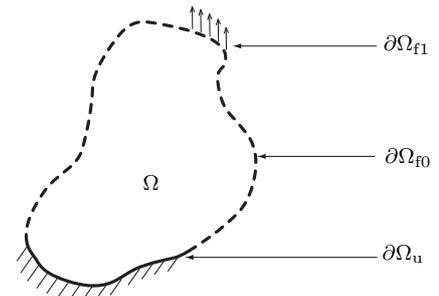


Figure 1.2 - Représentation générale d'une structure.

On définit par le terme ddls « intérieurs » tous les ddls appartenant à l'ensemble  $\Omega \cup \partial\Omega_{f0}$  et par le terme ddls « frontières » tous ceux appartenant à l'ensemble  $\partial\Omega_u \cup \partial\Omega_{f1}$ . Concrètement, cette décomposition se traduit par une réorganisation des matrices masse, raideur et amortissement entre ddls intérieurs et frontières. Les aspects théoriques développés pour chaque méthode supposent simplement que les matrices masse et raideur  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{K}$  et  $\mathbf{D}$  associées au modèle éléments finis de la structure étudiée sont connues.

#### 1.3.1 Choix des méthodes présentées

Deux méthodes de réduction modale retiennent notre attention dans cette étude : les méthodes de Craig-Bampton (interfaces fixes) et de Craig-Martinez (interfaces libres). Le choix de ces méthodes est conditionné par l'algorithme de contact, ces deux méthodes de réduction modale ayant la particularité de permettre de conserver dans l'espace réduit certains ddls physiques choisis, tels que ceux sur lesquels le contact est pris en compte. Dans cette étude,

les méthodes de réduction modale sont associées à un algorithme de contact, des corrections sur les déplacements sont effectuées à chaque pas de temps sur les nœuds en contact. Sans la présence des ddl de ces nœuds dans l'espace réduit, un retour dans l'espace éléments finis serait nécessaire à chaque pas de temps pour pouvoir accéder aux différents déplacements de la structure. Ces passages d'un espace à un autre auraient pour conséquence des temps de calculs inenvisageables.

### 1.3.2 Méthodes à interfaces fixes

De nombreuses méthodes de réduction modale à interfaces fixes ont été développées depuis la méthode proposée dans [43]. La plupart d'entre elles sont listées sur la figure 1.1, on peut notamment citer : la méthode de Benfield-Hruda [11][10], la méthode de Bajan-Feng [6] et la méthode de Craig-Bampton [19]. Comme mentionné dans le paragraphe 1.1 la méthode de Craig-Bampton est celle qui s'est imposée comme méthode de CMS de référence. Sa stabilité numérique, sa simplicité de mise en œuvre et la qualité des modèles réduits obtenus (voir figure 1.1) sont des atouts majeurs qui font qu'elle est utilisée presque automatiquement lorsque cela est possible. Encore récemment, de nombreux travaux ont été réalisés autour de la méthode de Craig-Bampton, on peut notamment mentionner les travaux [58] et [59] sur l'obtention des matrices des modèles réduits à partir de mesures expérimentales.

Les détails de la mise en place de la méthode CMS de Craig-Bampton sont donnés dans ce paragraphe.

#### 1.3.2.1 Construction du modèle réduit

Les matrices masse et raideur  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{K}$  sont tout d'abord réorganisées en permutant lignes et colonnes suivant qu'elles sont associées à un ddl intérieur (indiqué  $i$ ) ou à un ddl frontière (indiqué  $f$ ). Afin d'alléger les notations, les matrices obtenues sont toujours notées  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{K}$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ii} & \mathbf{K}_{if} \\ \mathbf{K}_{fi} & \mathbf{K}_{ff} \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{ii} & \mathbf{M}_{if} \\ \mathbf{M}_{fi} & \mathbf{M}_{ff} \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

Il faut alors calculer les modes de la base de réduction de la méthode de Craig-Bampton. Il en existe deux types :

- **les modes statiques** :  $\Phi_s$ , il s'agit de déformées statiques de la structure lorsqu'un déplacement unitaire est imposé sur un ddl frontière, tous les autres ddl de la frontière étant encastés. Il y a donc autant de modes statiques que de ddl frontières. Ils sont obtenus en résolvant le problème statique suivant

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ii} & \mathbf{K}_{if} \\ \mathbf{K}_{fi} & \mathbf{K}_{ff} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_s \\ \mathbf{I} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

$$\mathbf{K}_{ii}\Phi_s + \mathbf{K}_{if}\mathbf{I} = \mathbf{0} \quad (1.4)$$

D'où l'expression des modes statiques (sur les ddls intérieurs)

$$\Phi_s = -\mathbf{K}_{ii}^{-1}\mathbf{K}_{if} \quad (1.5)$$

- **les modes encastrés** :  $\Phi_e$ . Ces modes correspondent à la résolution du problème aux valeurs propres

$$\left( \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ii} & \mathbf{K}_{if} \\ \mathbf{K}_{fi} & \mathbf{K}_{ff} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{ii} & \mathbf{M}_{if} \\ \mathbf{M}_{fi} & \mathbf{M}_{ff} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \Phi_e \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

Il s'agit donc des modes propres de la structure en considérant sa frontière encastrée. C'est cette condition d'encastrement de la frontière (ou interface) qui est à l'origine du nom de la méthode.

Une matrice de passage  $\Phi$  de Craig-Bampton peut alors être construite

$$\Phi = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \Phi_s & \Phi_e \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

En l'état, cette matrice constitue un simple changement de variable. La réduction se fait en considérant que seul un nombre restreint  $\eta$  de modes encastrés sont conservés dans la matrice de passage : seules les  $\eta$  premières colonnes de la matrice  $\Phi_e$ , notées  $\Phi_{e,\eta}$  sont retenues (en supposant que les modes sont rangés suivant l'ordre croissant des fréquences propres associées). Ceci permet d'obtenir la matrice de réduction  $\Phi_{CB}$  de la méthode de Craig-Bampton

$$\Phi_{CB} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \Phi_s & \Phi_{e,\eta} \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

Cette matrice est cohérente avec la réorganisation des matrices  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{K}$  de l'équation (1.2), elle permet de définir le changement de variable

$$\mathbf{x} = \Phi_{CB}\mathbf{x}_{CB} \quad (1.9)$$

et de projeter l'équation du mouvement (1.1) sur la base réduite

$$\mathbf{M}_{CB}\ddot{\mathbf{x}}_{CB} + \mathbf{D}_{CB}\dot{\mathbf{x}}_{CB} + \mathbf{K}_{CB}\mathbf{x}_{CB} = \mathbf{F}_{CB} \quad (1.10)$$

avec  $\mathbf{K}_{CB} = \Phi_{CB}^T \mathbf{K} \Phi_{CB}$ ,  $\mathbf{M}_{CB} = \Phi_{CB}^T \mathbf{M} \Phi_{CB}$ ,  $\mathbf{D}_{CB} = \Phi_{CB}^T \mathbf{D} \Phi_{CB}$  et  $\mathbf{F}_{CB} = \Phi_{CB}^T \mathbf{F}$ . En pratique, lorsqu'on considère un amortissement de type proportionnel ou modal, la matrice  $\mathbf{D}_{CB}$  est calculée directement dans l'espace réduit à partir des matrices  $\mathbf{K}_{CB}$  et  $\mathbf{M}_{CB}$  ce qui permet d'éviter un calcul coûteux en manipulant les matrices  $\mathbf{K}$  et  $\mathbf{M}$ .

### 1.3.2.2 Particularités de la méthode de Craig-Bampton

En explicitant le changement de variable de l'équation (1.9), il vient

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}_f \\ \mathbf{x}_i \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \Phi_s & \Phi_{e,\eta} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_f \\ \mathbf{x}_\eta \end{pmatrix} \quad (1.11)$$

Le vecteur réduit  $\mathbf{x}_r = [\mathbf{x}_f \ \mathbf{x}_\eta]^T$  se partage entre deux types de coordonnées. Des coordonnées physiques  $\mathbf{x}_f$  correspondant aux ddls frontières et des coordonnées modales  $\mathbf{x}_\eta$  relatives à l'influence des  $\eta$  modes encastres de la base de réduction dans la solution calculée. Cette mixité de l'espace réduit s'avère un atout majeur de la méthode de Craig-Bampton dans son utilisation pour la gestion du contact (voir paragraphe 1.3.1). La méthode de Craig-Bampton est particulièrement simple à mettre en œuvre. L'étude [26] est un des nombreux exemples d'utilisation de la méthode de Craig-Bampton dans un contexte industriel. Il existe toutefois d'autres méthodes de réduction pouvant être plus adaptées que la méthode de Craig-Bampton dans certains cas comme les méthodes à interfaces libres, et dont l'application pour l'étude des phénomènes d'interaction modale constitue un des objectifs majeurs du travail présenté dans ce mémoire.

### 1.3.3 Méthodes à interfaces libres

Tout comme pour les méthodes de réduction modale à interfaces fixes, de nombreuses méthodes de réduction modale à interfaces libres ont été développées pour des applications diverses. Les plus fréquemment citées dans la littérature sont les méthodes de Craig-Chang [20], de MacNeal [54], de Rubin [68] et de Craig-Martinez [56]. De nombreuses variantes existent mais toutes ces méthodes ont pour point commun de s'appuyer sur une troncature modale du modèle éléments finis étudié. Cette troncature est ensuite éventuellement enrichie par apport de certains types de modes (d'attache ou inertiels par exemple).

Les différentes méthodes évoquées dans la suite de cette section sont présentées de la méthode la plus simple à la méthode la plus complexe à mettre en œuvre, on s'intéressera particulièrement aux méthodes de Craig-Martinez et de Craig-Chang-Martinez dans la suite de ce mémoire.

#### 1.3.3.1 Troncature modale

La troncature modale est une méthode dite à « interfaces libres » car on projette le vecteur inconnu sur les  $m$  premiers modes libres de la structure. Considérons la décomposition du vecteur solution  $\mathbf{x}$  de la façon suivante

$$\mathbf{x} = \Phi_1 \mathbf{x}_1 + \Phi_2 \mathbf{x}_2 \quad (1.12)$$

avec  $\Phi_1$  la matrice contenant en colonnes les  $m$  premiers modes propres conservés et  $\Phi_2$  la matrice contenant en colonnes les  $n - m$  derniers modes non pris en compte. Les matrices réduites du système sont alors simplement

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_1 &= \Phi_1^T \mathbf{K} \Phi_1 = \text{diag}(\omega_{i,i=1,\dots,m}^2) \\ \mathbf{M}_1 &= \Phi_1^T \mathbf{M} \Phi_1 = \mathbf{I} \end{aligned} \quad (1.13)$$

Le vecteur réduit étant  $\mathbf{x}_1$  tel que

$$\mathbf{x} = \Phi_1 \mathbf{x}_1 \quad (1.14)$$

Dans le cas des problèmes de contact qui nous préoccupent, la simple troncature modale présente un inconvénient face à la méthode de Craig-Bampton, elle ne permet pas d'avoir accès directement aux degrés de libertés frontières. Ce défaut peut être corrigé en intégrant un terme dit de « correction pseudo-statique ».

### 1.3.3.2 Terme de correction pseudo-statique

Nous considérons dans ce paragraphe l'équation du mouvement (1.1) sans amortissement

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{F} \quad (1.15)$$

Le vecteur  $\mathbf{x}$  est projeté sur la base modale non tronquée de la même façon que pour la troncature modale (voir équation (1.12)). En injectant cette projection dans l'équation (1.15) on obtient

$$\mathbf{M}(\Phi_1\ddot{\mathbf{x}}_1 + \Phi_2\ddot{\mathbf{x}}_2) + \mathbf{K}(\Phi_1\mathbf{x}_1 + \Phi_2\mathbf{x}_2) = \mathbf{F} \quad (1.16)$$

L'équation (1.16) est multipliée à gauche par  $\Phi_1^T$  puis par  $\Phi_2^T$ . Les  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{K}$ -orthogonalités des matrices  $\Phi_i$  aboutissent aux deux équations suivantes

$$\begin{aligned} (\Omega_1 - \omega^2\mathbf{I})\mathbf{x}_1 &= \Phi_1^T\mathbf{F} \\ (\Omega_2 - \omega^2\mathbf{I})\mathbf{x}_2 &= \Phi_2^T\mathbf{F} \end{aligned} \quad (1.17)$$

On effectue alors ce qui est *l'approximation pseudo-statique* en considérant que les pulsations  $\omega$  du domaine d'étude sont très inférieures à la pulsation propre minimale des modes éliminés

$$\forall \omega_i \in \text{diag}(\Omega_2), \omega \ll \omega_i \Rightarrow \Omega_2\mathbf{x}_2 \simeq \Phi_2^T\mathbf{F} \quad (1.18)$$

Dans le cas d'un problème statique,  $\mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{F}$ . En injectant la projection définie dans l'équation (1.12), il vient

$$\Phi_2\mathbf{x}_2 = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{F} - \Phi_1\mathbf{x}_1 \quad (1.19)$$

Or, en statique, les équations (1.17) s'écrivent

$$\Omega_1\mathbf{x}_1 = \Phi_1^T\mathbf{F} \quad (1.20)$$

soit, après inversion

$$\mathbf{x}_1 = \Omega_1^{-1}\Phi_1^T\mathbf{F} \quad (1.21)$$

Il en résulte que

$$\Phi_2\mathbf{x}_2 = (\mathbf{K}^{-1} - \Phi_1\Omega_1^{-1}\Phi_1^T)\mathbf{F} \quad (1.22)$$

Le terme  $(\mathbf{K}^{-1} - \Phi_1\Omega_1^{-1}\Phi_1^T)$  est appelé flexibilité statique résiduelle et est noté  $\mathbf{R}$ . Il vient alors

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \Phi_1\mathbf{x}_1 + \Phi_2\mathbf{x}_2 \\ &= \Phi_1\mathbf{x}_1 + (\mathbf{K}^{-1} - \Phi_1\Omega_1^{-1}\Phi_1^T)\mathbf{F} \end{aligned} \quad (1.23)$$

autrement dit

$$\mathbf{x} = \Phi_1\mathbf{x}_1 + \mathbf{R}\mathbf{F} \quad (1.24)$$

### 1.3.3.3 Flexibilité statique résiduelle : $\mathbf{R}$

Les colonnes de la matrice  $\mathbf{R}$  ont la propriété d'être  $\mathbf{K}$  et  $\mathbf{M}$  orthogonales vis à vis des modes libres de la base tronquée  $\Phi_1$ , c'est-à-dire

$$\mathbf{R}\mathbf{K}\Phi_1 = \mathbf{0}, \text{ et } \mathbf{R}\mathbf{M}\Phi_1 = \mathbf{0} \quad (1.25)$$

En effet, il suffit de revenir à la définition de  $\mathbf{R}$  pour prouver cette orthogonalité

$$\mathbf{R} = \mathbf{K}^{-1} - \Phi_1 \Omega_1^{-1} \Phi_1^T \quad (1.26)$$

en multipliant cette équation à droite par le terme  $\mathbf{K}\Phi_1$  il vient

$$\mathbf{R}\mathbf{K}\Phi_1 = (\mathbf{K}^{-1} - \Phi_1 \Omega_1^{-1} \Phi_1^T) \mathbf{K}\Phi_1 \quad (1.27)$$

après développement et réorganisation des termes l'équation se simplifie

$$\mathbf{R}\mathbf{K}\Phi_1 = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{K}\Phi_1 - \Phi_1 \Omega_1^{-1} \Phi_1^T \mathbf{K}\Phi_1 \Rightarrow \mathbf{R}\mathbf{K}\Phi_1 = \Phi_1 - \Phi_1 \Omega_1^{-1} \Omega_1 \quad (1.28)$$

pour obtenir finalement

$$\mathbf{R}\mathbf{K}\Phi_1 = \Phi_1 - \Phi_1 \Rightarrow \mathbf{R}\mathbf{K}\Phi_1 = \mathbf{0} \quad (1.29)$$

### 1.3.3.4 Méthode de Craig-Martinez

Le but de la méthode de Craig-Martinez est d'intégrer la correction pseudo-statique précédemment définie à la troncature modale pour obtenir les ddls frontières directement dans l'espace réduit. La condensation repose sur le principe d'une troncature de la base modale avec correction pseudo-statique. Une méthode similaire à celle-présentée ci-dessous est détaillée dans [15]. Contrairement à la méthode de Craig-Bampton la construction de la matrice de passage ne s'effectue pas simplement par un calcul de modes composants.

L'équation (1.24) est le point de départ de la construction de la matrice de passage  $\Phi_{\text{CM}}$ . Cette équation est réorganisée pour séparer les ddls frontières des ddls intérieurs

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}_f \\ \mathbf{x}_i \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{1f} \\ \Phi_{1i} \end{bmatrix} \mathbf{x}_1 + \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{ff} & \mathbf{R}_{if} \\ \mathbf{R}_{fi} & \mathbf{R}_{ii} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{F}_f \\ \mathbf{F}_i \end{pmatrix} \quad (1.30)$$

Les nœuds intérieurs ne sont pas chargés au cours de la simulation, en conséquence  $\mathbf{F}_i = 0$  et l'équation (1.30) se simplifie en

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}_f \\ \mathbf{x}_i \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{1f} \\ \Phi_{1i} \end{bmatrix} \mathbf{x}_1 + \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{ff} \\ \mathbf{R}_{fi} \end{bmatrix} \mathbf{F}_f \quad (1.31)$$

La première ligne de cette équation permet d'exprimer  $\mathbf{F}_f$  en fonction de  $\mathbf{x}_f$  et  $\mathbf{x}_1$

$$\mathbf{F}_f = \mathbf{R}_{ff}^{-1} (\mathbf{x}_f - \Phi_{1f} \mathbf{x}_1) \quad (1.32)$$

En injectant cette expression de  $\mathbf{F}_f$  dans la deuxième ligne de (1.31) il vient

$$\mathbf{x}_i = \Phi_{1i}\mathbf{x}_1 + \mathbf{R}_{if}\mathbf{R}_{ff}^{-1}(\mathbf{x}_f - \Phi_{1f}\mathbf{x}_1) \quad (1.33)$$

soit, après factorisation

$$\mathbf{x}_i = (\Phi_{1i} - \mathbf{R}_{if}\mathbf{R}_{ff}^{-1}\Phi_{1f})\mathbf{x}_1 + \mathbf{R}_{if}\mathbf{R}_{ff}^{-1}\mathbf{x}_f \quad (1.34)$$

Ce qui s'écrit sous la forme matricielle

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}_f \\ \mathbf{x}_i \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{R}_{if}\mathbf{R}_{ff}^{-1} & \Phi_{1i} - \mathbf{R}_{if}\mathbf{R}_{ff}^{-1}\Phi_{1f} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_f \\ \mathbf{x}_1 \end{pmatrix} \quad (1.35)$$

soit,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}_f \\ \mathbf{x}_i \end{pmatrix} = \Phi_{CM} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_f \\ \mathbf{x}_1 \end{pmatrix} \quad (1.36)$$

La matrice de passage  $\Phi_{CM}$  permet alors de projeter l'équation du mouvement sur l'espace réduit et de construire les matrices réduites de la structure de la même façon que pour la méthode de Craig-Bampton comme décrit par l'équation (1.40).

### 1.3.3.5 Enrichissement de la base de réduction avec modes d'attache

Un mode d'attache [21] représente la déformée statique de la structure étudiée en imposant un effort unitaire sur un ddl de sa frontière et en laissant les autres ddls de la frontière libres. Il y a donc autant de modes d'attache que de ddls dans la frontière. Dans le cas de la méthode de Craig-Martinez décrite précédemment, l'ajout de modes d'attache consiste à enrichir les termes  $\Phi_{1i}$  et  $\Phi_{1f}$  de l'équation (1.35) avec des colonnes correspondant aux modes d'attache : il s'agit de la méthode dite de Craig-Chang-Martinez.

L'ajout de ces modes d'attache n'est pas sans conséquence sur la stabilité numérique de la méthode de Craig-Martinez. Les problèmes numériques rencontrés au cours de notre étude sont détaillés dans la suite de ce chapitre. Ils sont tels que l'enrichissement de la méthode de Craig-Martinez par les modes d'attache n'a pu être réalisé que sur des modèles de petite taille dans le cadre de l'étude d'interaction 2D. L'étude d'interaction modale sur des modèles industriels 3D est faite uniquement avec la méthode de Craig-Martinez.

### 1.3.4 Méthode SVD

La méthode SVD (*Singular Value Decomposition*) fait partie des développements les plus récents associés à la description en faible dimension de modèles de grande taille avec pour but de conserver la description précise de certains phénomènes. Cette méthode constitue l'application des méthodes POD (*Proper Orthogonal Decomposition*) à des problèmes de dimension finie. L'originalité de ces méthodes tient dans la construction du modèle réduit réalisée à partir d'un nombre fini de solutions calculées dans l'espace éléments finis non réduit.

### 1.3.4.1 Réduction

Considérons un modèle éléments finis de dimension  $n$ . L'hypothèse faite est que l'état du système sur les  $m$  premiers pas de temps de la simulation est connu. Il est ainsi possible de définir la matrice  $\mathbf{A}$  ( $m$  colonnes et  $n$  lignes) contenant, sur chaque colonne, l'état du système à chaque pas de temps. La méthode SVD consiste à décomposer la matrice  $\mathbf{A}$  comme suit

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T \quad (1.37)$$

$\mathbf{U}$  est une matrice orthogonale carrée de dimension  $n$ ,  $\mathbf{V}$  est une matrice orthogonale carrée de dimension  $m$  et  $\mathbf{\Sigma}$  est une matrice rectangulaire de taille  $n \times m$  composée de termes nuls sauf sur sa diagonale (c'est-à-dire les termes  $\Sigma_{jj}$  avec  $j \in [1, r = \min(n, m)]$ ) notés  $\sigma_j$ . Ces termes non négatifs sont organisés par ordre décroissant sur la diagonale de telle sorte que

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r \geq 0 \quad (1.38)$$

On appelle approximation de rang  $k$  ( $k < r$ ) de la matrice  $\mathbf{A}$  la matrice  $\mathbf{A}_k$  définie par

$$\mathbf{A}_k = \mathbf{U}_k \mathbf{\Sigma}_k \mathbf{V}_k^T \quad (1.39)$$

$\mathbf{V}_k$  et  $\mathbf{U}_k$  étant les restrictions respectives de  $\mathbf{V}$  et  $\mathbf{U}$  à leurs  $k$  premières colonnes.  $\mathbf{\Sigma}_k$  est obtenue à partir de la matrice  $\mathbf{\Sigma}$  en imposant  $\sigma_{k+1} = \sigma_{k+2} = \dots = \sigma_r = 0$ . L'optimalité de cette approximation est notamment démontrée dans [18]. La matrice  $\mathbf{A}_k$  contient les  $k$  vecteurs qui permettent la meilleure approximation des  $m$  vecteurs initiaux au sens de la norme de Frobenius. Les vecteurs ainsi obtenus peuvent être utilisés pour projeter l'équation du mouvement (1.1) sur une base adaptée au problème étudié

$$\mathbf{M}_s \ddot{\mathbf{x}}_s + \mathbf{D}_s \dot{\mathbf{x}}_s + \mathbf{K}_s \mathbf{x}_s = \mathbf{F}_s \quad (1.40)$$

avec  $\mathbf{K}_s = \mathbf{A}_k^T \mathbf{K} \mathbf{A}_k$ ,  $\mathbf{M}_s = \mathbf{A}_k^T \mathbf{M} \mathbf{A}_k$ ,  $\mathbf{D}_s = \mathbf{A}_k^T \mathbf{D} \mathbf{A}_k$  et  $\mathbf{F}_s = \mathbf{A}_k^T \mathbf{F}$ .

### 1.3.4.2 Avantages et limitations

Le principal atout des méthodes SVD par rapport aux autres méthodes de réduction modale tient dans la prise en compte du chargement réel (et non pas décomposé sur un ensemble de modes statiques ou d'attache) dans le modèle réduit. Toutefois, cette prise en compte se fait par un calcul du modèle complet sur quelques pas de temps et permet de donner deux limitations évidentes

1. les temps de calculs peuvent être extrêmement pénalisants (même sur un faible nombre de pas de temps) pour certains types de simulations ;
2. la connaissance du chargement est critique, un chargement dont les composantes ne sont pas clairement définies (comme ça peut être le cas pour l'étude de l'interaction modale) nécessitera de calculer plusieurs bases et donc augmentera le nombre de simulations à effectuer sur le modèle éléments finis.

Du fait de la complexité du chargement et de la taille des modèles éléments finis considérés, l'étude de l'interaction modale sur des modèles éléments finis de turbo-machines ne semble pas se prêter à l'utilisation de la méthode SVD.

### 1.3.5 Convergence

La maîtrise de la réduction des modèles éléments finis impose de pouvoir définir la qualité des modèles réduits. Il existe un grand nombre de critères du fait du nombre considérable d'applications associées aux méthodes de réduction modale. La liste des critères présentés est donc non exhaustive mais permet de refléter l'éventail de critères disponibles dans la littérature.

**Calcul des fréquences propres.** Ce critère est le plus simple et le plus rapide de tous, il s'agit simplement de calculer les fréquences propres du système réduit et de les comparer aux fréquences propres du modèle éléments finis. Ce critère permet donc une évaluation rapide du modèle réduit mais n'apporte que peu d'informations.

**Critère d'assurance modale (MAC).** Ce critère a été défini par Ewins [28] et permet une comparaison des vecteurs propres du modèle réduit avec ceux du modèle éléments finis. Il s'écrit

$$\text{MAC}_{\mathbf{Q},i,j} = \frac{(\mathbf{z}_{\text{rm},j}^{\text{T}} \mathbf{Q} \mathbf{z}_i)^2}{(\mathbf{z}_{\text{rm},j}^{\text{T}} \mathbf{Q} \mathbf{z}_{\text{rm},j})(\mathbf{z}_i^{\text{T}} \mathbf{Q} \mathbf{z}_i)} \quad (1.41)$$

avec

- $\mathbf{z}_{\text{rm},j}$  le  $j^{\text{e}}$  vecteur propre du modèle réduit dans l'espace éléments finis ;
- $\mathbf{z}_i$  le  $i^{\text{e}}$  vecteur propre du modèle éléments finis ;
- $\mathbf{Q}$  une matrice de pondération pouvant être la matrice identité  $\mathbf{I}$  (auquel cas on parle du critère MAC classique) ou encore la matrice masse  $\mathbf{M}$  du modèle éléments finis.

Le critère MAC est reconnu pour son efficacité mais peut poser des problèmes de temps de calculs puisqu'il demande de connaître les modes propres du système réduit dans l'espace éléments finis.

**Indicateurs d'erreur en énergie de déformation.** Les travaux réalisés dans [14], portent notamment sur le calcul des  $m$  premiers modes propres d'une structure élastique. C'est-à-dire les  $m$  premières solutions propres  $(\omega_j, \Phi_j)$  telles que

$$[\mathbf{K} - \omega_j^2 \mathbf{M}] \Phi_j = 0 \quad (1.42)$$

L'auteur détaille la méthode utilisée : « *la méthode d'itération sur les résidus qui fait partie des méthodes d'itération sur les sous-espaces, dont l'hypothèse sous-jacente est qu'une bonne approximation de la solution de (1.42) peut être recherchée dans un sous-espace engendré par les colonnes (vecteurs de Ritz) d'une matrice rectangulaire  $\mathbf{T}$ , comportant  $N$  lignes et  $NR \ll N$  colonnes ( $N$  étant le nombre de ddls du modèle considéré).* » À chaque itération, il s'agit donc de vérifier la qualité des vecteurs propres obtenus relativement à un critère préalablement défini. Dans le cas de notre étude, la matrice  $\mathbf{T}$  définie dans [14] correspond à la matrice  $\Phi$  de passage de réduction modale et les modes propres à évaluer sont ceux du modèle réduit développés sur l'espace éléments finis. Notons  $\mathbf{z}_{\text{rm},i}$  le  $i^{\text{e}}$  mode propre du modèle réduit et  $\omega_i$  la pulsation propre associée du modèle non réduit. On définit

$$\mathbf{r}_i = [\mathbf{K} - \omega_i^2 \mathbf{M}] \Phi \mathbf{z}_{\text{rm},i} \neq \mathbf{0} \quad (1.43)$$

appelé résidu associé au mode propre  $i$ . Ce résidu est non nul du fait de l'approximation engendrée par la réduction modale. Ce résidu étant homogène à un effort, l'auteur propose de calculer la réponse statique  $\mathbf{r}_{s,i}$  associée à cet effort

$$\mathbf{r}_{s,i} = \hat{\mathbf{K}}^{-1} \mathbf{r}_i \quad (1.44)$$

L'opérateur  $\hat{\mathbf{K}}$  est homogène à une raideur et est habituellement la matrice raideur  $\mathbf{K}$  sauf lors de la présence de modes de corps rigide pouvant engendrer des problèmes numériques. Un ensemble d'opérateurs admissibles sont alors détaillés dans [14], nous nous restreindrons ici à l'utilisation de la matrice  $\mathbf{K}$ . Ce résidu en déplacement permet alors de considérer deux types d'indicateurs d'erreur :

- $\epsilon_{i,1} = \frac{\mathbf{r}_{s,i}^T \mathbf{K} \mathbf{r}_{s,i}}{\Phi_{z_i}^T \mathbf{K} \Phi_{z_i}}$ , indicateur d'erreur en énergie de déformation ;
- $\epsilon_{i,2} = \frac{\mathbf{r}_{s,i}^T \mathbf{M} \mathbf{r}_{s,i}}{\Phi_{z_i}^T \mathbf{M} \Phi_{z_i}}$ , indicateur d'erreur en énergie cinétique.

Nous n'utiliserons dans la suite de notre étude que l'indicateur d'erreur en énergie de déformation.

### 1.3.6 Limites des critères

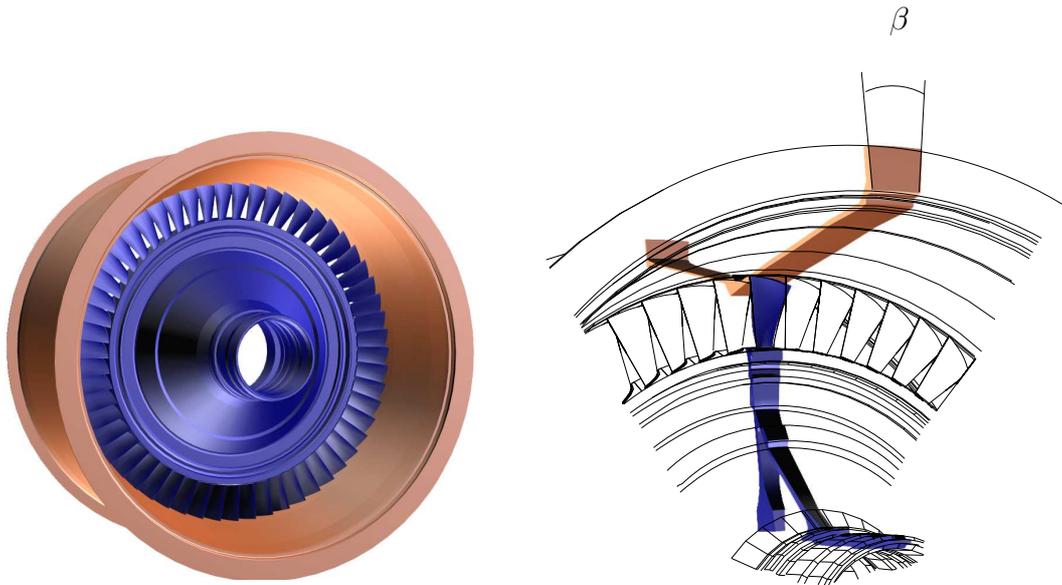
Les différents critères détaillés précédemment sont limités car ils ne présentent pas la même pertinence pour toutes les méthodes de réduction. En particulier, lorsque la base de réduction est composée de modes libres de la structure (troncature modale, Craig-Martinez, ou de Craig-Chang-Martinez...) il faut interpréter les résultats avec la plus grande prudence. En effet, d'un point de vue strictement théorique, les modes propres de la structure sont parfaitement approchés par le modèle réduit de par leur présence dans la base de réduction, il en va de même pour les fréquences propres. Si la base de réduction contient  $m$  modes propres, les critères définis précédemment donneront des résultats parfaits tant que la comparaison se limitera aux  $m$  premiers modes propres. Sur ces  $m$  premiers modes propres, les critères MAC, de convergence en fréquences et les indicateurs d'erreurs définiront un modèle réduit par une méthode de réduction modale contenant ces  $m$  modes propres comme nécessairement meilleur qu'un modèle réduit par la méthode de Craig-Bampton.

Il faut donc rester prudent quant à l'interprétation des résultats obtenus avec les différents critères, qui ne présagent pas, par exemple, du comportement dynamique du modèle réduit entre deux fréquences propres consécutives.

## 1.4 Réduction modale d'un modèle industriel DAM

### 1.4.1 Présentation des structures

Le couple roue aubagée/carter considéré dans cette étude est un étage du compresseur haute-pression. Ces structures présentent la particularité d'être à symétrie cyclique. La figure 1.3 représente ces structures et le secteur élémentaire associé. La roue aubagée et le carter sont décomposés en cinquante-six secteurs identiques (il y a 56 aubes sur la roue), l'angle défini par



**Figure 1.3** - Ensemble roue aubagée carter ainsi que d'un secteur élémentaire associé.

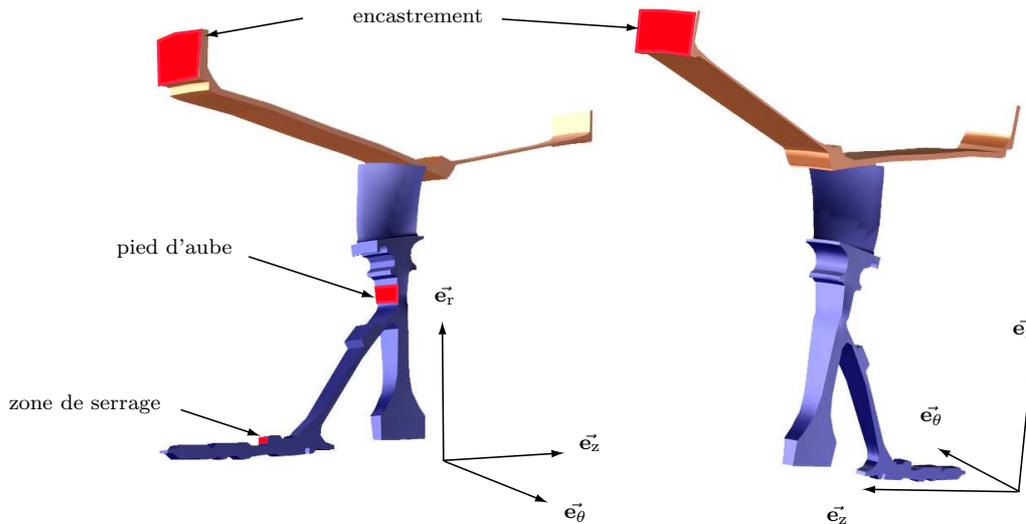
un secteur est donc  $\beta = \frac{2\pi}{56}$ . Les propriétés de la symétrie cyclique sont utilisées pour le calcul des modes composants les bases de réduction. La roue aubagée compte  $N_{RA}$  ddls au total et  $n_{RA}$  ddls par secteur, le carter en compte  $N_{CA}$  et  $n_{CA}$  ddls par secteur.

### 1.4.2 Conditions limites et frontières

Toutes les zones sur lesquelles sont appliquées des conditions aux limites de type encastrement sont représentées sur la figure 1.4. Le secteur du carter est encasté en deux zones représentées en rouge. Le secteur de la roue aubagée comporte deux zones sur lesquelles sont appliquées des conditions limites en déplacement : la zone de serrage et la zone de pied d'aube. Afin d'en simplifier la gestion, les conditions limites appliquées sur ces deux zones sont également de type encastrement (relativement à l'arbre de rotation). Dans le cas précis de notre étude, la définition de la frontière au sens des méthodes de réduction modale de chaque structure est directement associée à la gestion du contact, telle que présentée dans le paragraphe 2.1.3. Pour chacune des cinquante-six aubes, trois nœuds  $A_1$ ,  $A_2$  et  $A_3$  sont retenus et pas tous les nœuds du sommet d'aube afin de limiter les temps de calculs. Le choix de ces trois nœuds résulte d'essais réalisés à Snecma sur les zones de contact privilégiées. En vis-à-vis de ces trois nœuds, quatre nœuds  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  et  $C_4$  sont retenus sur le carter, ces nœuds sont choisis de façon à ce que leur coordonnées suivant l'axe  $\vec{e}_z$  encadrent les coordonnées des nœuds frontières en tête d'aube

$$z_{C_1} \leq z_{A_1} \leq z_{C_2} \leq z_{A_2} \leq z_{C_3} \leq z_{A_3} \leq z_{C_4} \quad (1.45)$$

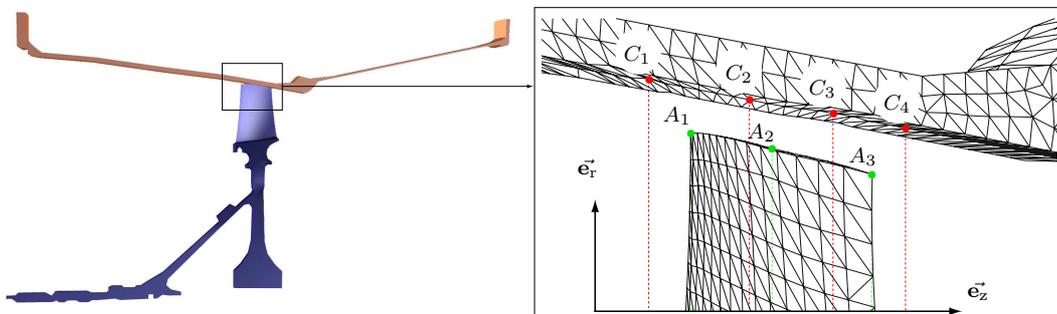
La figure 1.5 représente graphiquement la position de ces différents nœuds sur un secteur de chaque structure. Il est possible de retenir plusieurs couches de quatre nœuds par secteur du carter selon la taille du secteur et le raffinement du maillage utilisé. La seule condition à



**Figure 1.4** - Conditions limites appliquées sur la roue aubagée et sur le carter.

respecter est de n'avoir qu'un nœud frontière d'aube au contact sur un même élément de la spline surfacique comme cela est explicité dans le paragraphe 2.1.3. Un choix satisfaisant pour notre étude est de prendre cent douze ensembles de quatre nœuds frontières sur la circonférence du carter.

Le choix de ces nœuds frontières est directement lié à la gestion du contact et la construction de la B-spline surfacique bi-cubique détaillée dans le paragraphe 2.1.3.



**Figure 1.5** - Représentation des frontières de réduction pour chaque structure.

### 1.4.3 Réduction des modèles éléments finis

Les conditions aux limites étant prises en compte et la frontière étant correctement définie, il est possible de procéder à la réduction des structures. Les détails techniques de l'ensemble de cette procédure sont décrits en annexe A, seules les grandes étapes de cette phase de réduction sont mentionnées :

1. création des secteurs élémentaires au sens de la symétrie cyclique ;
2. extraction des données (matrices masse et raideur des secteurs élémentaires et listes de nœuds frontières) depuis Ansys, lecture sous Matlab ;

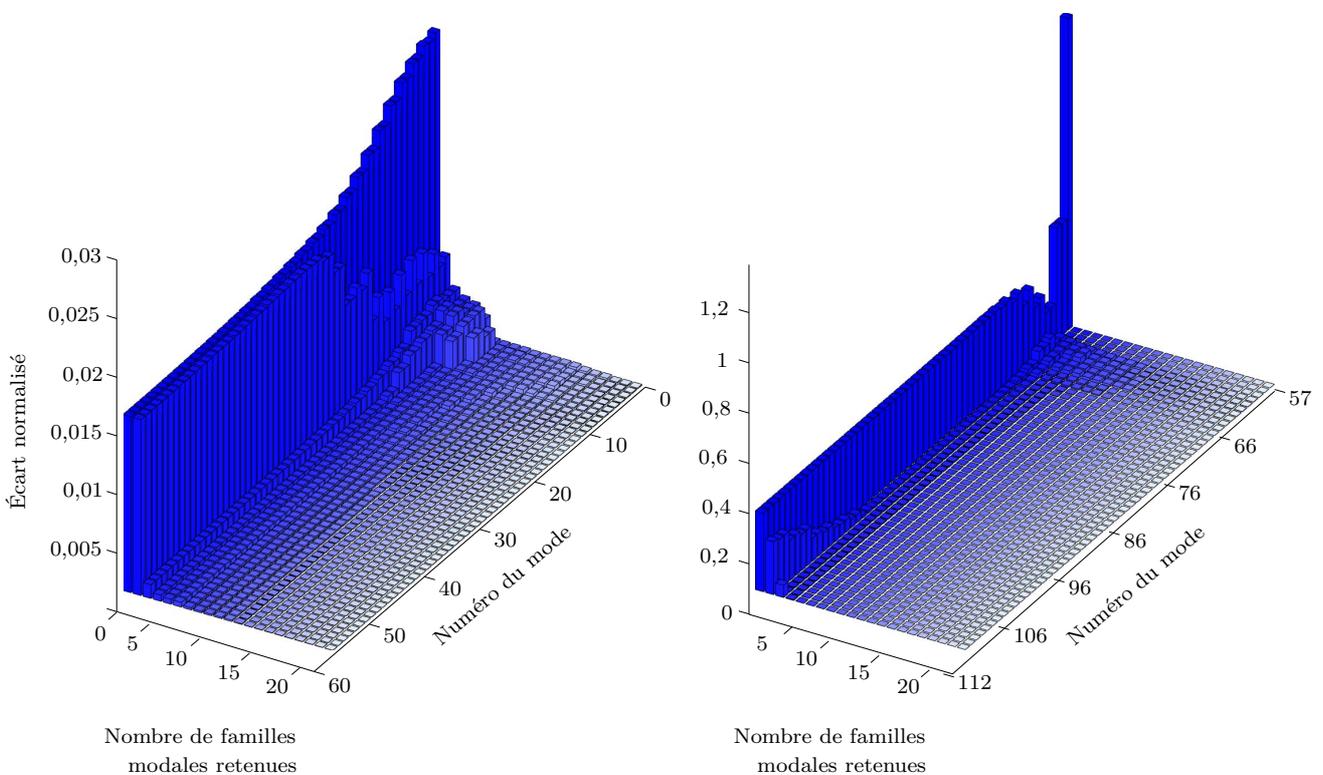
3. calcul des modes composants des bases des réductions modales pour chaque structure en utilisant les propriétés de la symétrie cyclique ;
  - modes libres,
  - modes encastrés,
  - modes statiques,
4. calcul des modèles réduits.

L'ensemble de ces modes sont calculés sous Matlab et comparés aux modes calculés dans Ansys. À la précision numérique près, les résultats obtenus dans les deux cas sont identiques pour tous les modes.

#### 1.4.4 Validation et évaluation des modèles réduits

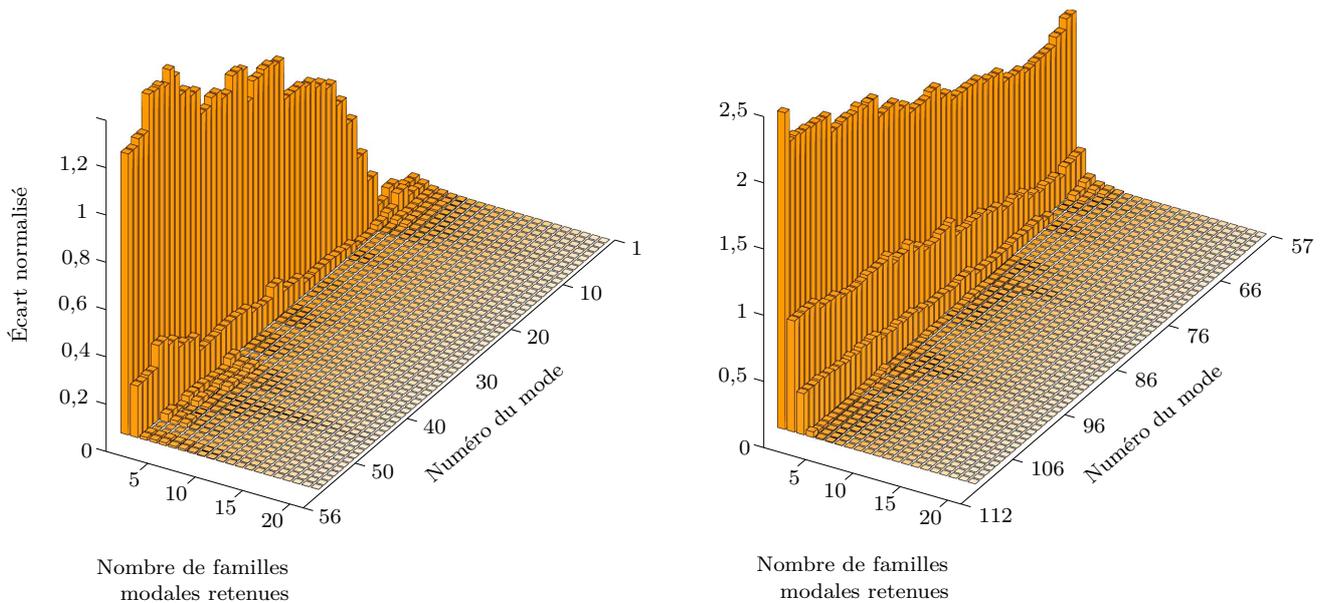
La procédure de validation est présentée pour les modèles réduits avec la méthode de Craig-Bampton et de Craig-Martinez. Les résultats obtenus montrent que la convergence en fréquences en fonction de la richesse de la base de réduction est atteinte pour les deux méthodes et que les indicateurs d'erreur en énergie de déformation tendent vers zéro lorsque la base de réduction est enrichie, quelle que soit la méthode considérée.

##### 1.4.4.1 Méthode de Craig-Bampton



**Figure 1.6** - Écart entre les fréquences propres pour les modes 1F et 1T des modèles réduits et éléments finis en fonction du nombre de modes encastrés conservés dans la base de réduction de Craig-Bampton pour la roue aubagée.

**Convergence en fréquences.** Afin d'évaluer la convergence en termes d'écart entre les fréquences propres des modèles réduits de la roue aubagée et du carter par rapport aux modèles éléments finis, la base de réduction utilisée varie de 0 à  $25 \times m$  modes ( $m$  étant le nombre de secteurs de la structure,  $m = 56$  pour la roue aubagée et pour le carter). Pour la roue aubagée, on s'intéresse aux modes 1F (premiers modes de flexion des aubes) et aux modes 1T (premiers modes de torsion des aubes), soit cent douze modes propres. Quant au carter, ses cent douze

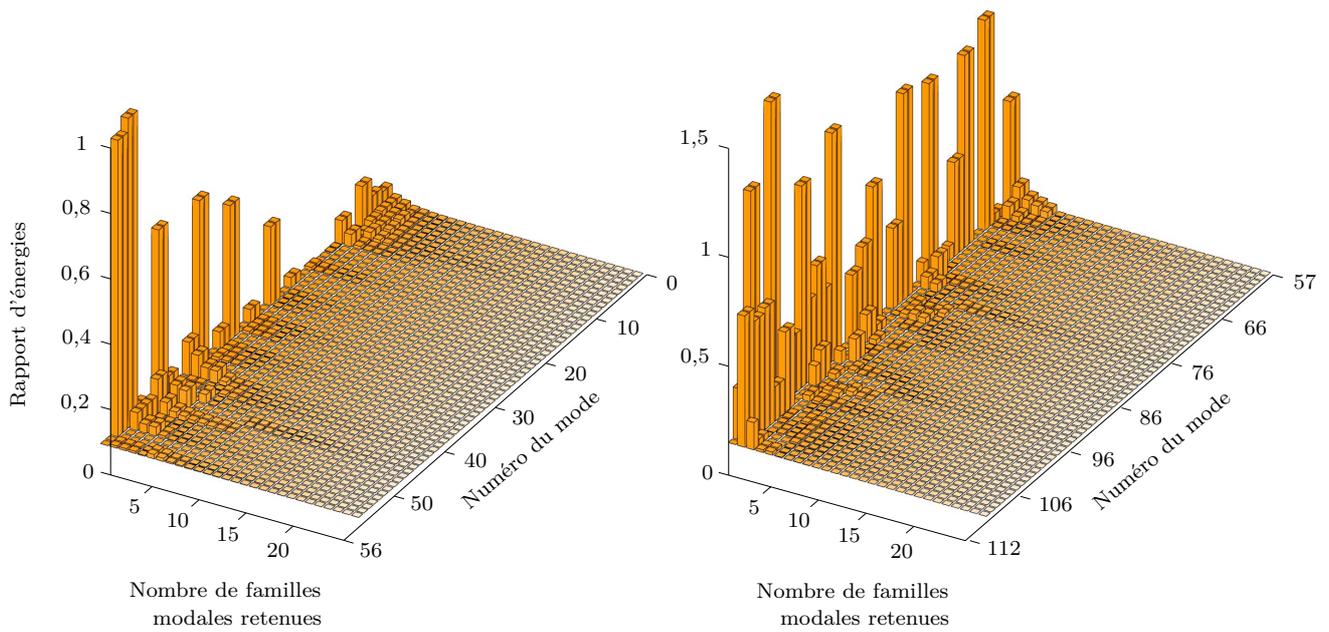


**Figure 1.7** - Écart entre les fréquences propres pour modes  $n^{\circ} = 1$  à 112 des modèles réduits et éléments finis en fonction du nombre de modes encastrés conservés dans la base de réduction de Craig-Bampton pour le carter.

premiers modes propres sont étudiés. Les comparaisons des fréquences propres entre modèle réduit et modèle éléments finis sont présentées sur la figure 1.6 pour la roue aubagée et sur la figure 1.7 pour le carter. Une convergence très rapide est observée pour les fréquences propres des modèles réduits vers les fréquences propres des modèles éléments finis (écart tendant vers 0% au fur et à mesure que le nombre de modes encastrés augmente).

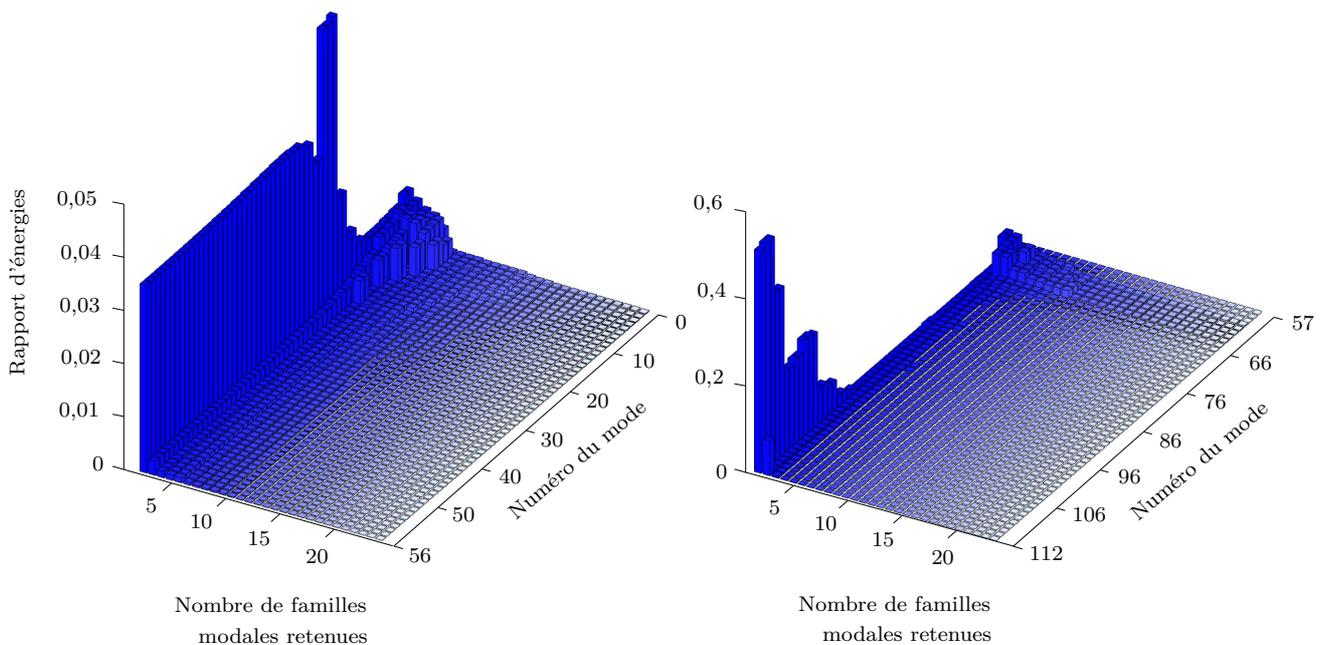
**Calcul des indicateurs d'erreur pour le carter.** L'indicateur d'erreur considéré maintenant est celui en énergie de déformation présenté dans le paragraphe 1.3.5. Ce critère permet d'évaluer l'énergie de déformation du résidu défini par l'équation (1.43) ramenée à l'énergie de déformation du mode propre correspondant. Physiquement, il s'agit d'estimer l'énergie de déformation nécessaire pour passer du mode propre approché au mode propre du modèle éléments finis relativement à l'énergie de déformation de ce mode propre.

On définit ainsi un indicateur d'erreur par mode propre et par base de réduction considérée. La figure 1.8 montre l'évolution de cet indicateur pour les cent douze premiers modes propres du carter lorsque la base de réduction contient entre 0 et  $25 \times 56$  modes encastrés. L'indicateur d'énergie tend vers zéro lorsque la base de réduction modale est enrichie. Ceci signifie que l'énergie de déformation du résidu défini par l'équation (1.43) devient négligeable par rapport



**Figure 1.8** - Indicateur d'erreur en énergie de déformation pour les modes  $n^{\circ} = 1$  à 112 des modèles réduits et éléments finis en fonction du nombre de modes encastrés conservés dans la base de réduction de Craig-Bampton pour le carter.

à l'énergie de déformation du mode propre éléments finis lorsque la base modale est enrichie. Les modes propres calculés pour le modèle réduit sont bien également des modes propres des modèles éléments finis.



**Figure 1.9** - Indicateur d'erreur en énergie de déformation pour les modes  $n^{\circ} = 1$  à 112 des modèles réduits et éléments finis en fonction du nombre de modes encastrés conservés dans la base de réduction de Craig-Bampton pour la roue aubagée.

**Calculs des résidus pour la roue aubagée.** De même que pour le carter, les indicateurs d'erreur en énergie de déformation, calculés pour la roue aubagée et tracés sur la figure 1.9, montrent la convergence des modes propres du modèle réduit vers les modes propres du modèle éléments finis. Il est remarquable que les résultats obtenus semblent meilleurs que pour le carter : avec seulement  $\eta = 56$  modes encastrés dans la base de réduction, l'indicateur d'erreur en énergie de déformation ne dépasse pas 5 % pour la roue aubagée alors qu'il dépasse 95 % pour le carter.

#### 1.4.4.2 Méthode de Craig-Martinez

**Approximation.** Comme cela a déjà été mentionné dans ce chapitre, l'obtention des modèles réduits associés aux modèles éléments finis de structures industrielles complexes peut nécessiter de très longs temps de calculs. L'utilisation des propriétés de symétrie cyclique permet de les réduire et de ne pas avoir à gérer des matrices de trop grande taille.

Dans le cas de la méthode de Craig-Martinez, le calcul de la correction pseudo-statique  $\mathbf{R}$  définie dans le paragraphe 1.3.3.2 pose problème pour des structures de grande taille. En effet, l'obtention de cette matrice requiert de calculer l'inverse de la matrice raideur  $\mathbf{K}$  de la structure étudiée. Or, que ce soit pour le carter ou pour la roue aubagée, l'obtention de cette matrice inverse n'est pas envisageable numériquement du fait de la taille des matrices. Une technique classique permettant de limiter les temps de calculs est de procéder à la résolution d'un système linéaire de type  $\mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{b}$  avec  $\mathbf{b}$  une restriction de la matrice identité à certaines de ses colonnes permettant d'obtenir les colonnes désirées de l'inverse de la matrice  $\mathbf{K}$ . Or, cette résolution de système linéaire est-elle même impossible dans notre cas sans envisager l'utilisation de solveurs optimisés du fait de la taille de la matrice  $\mathbf{K}$ .

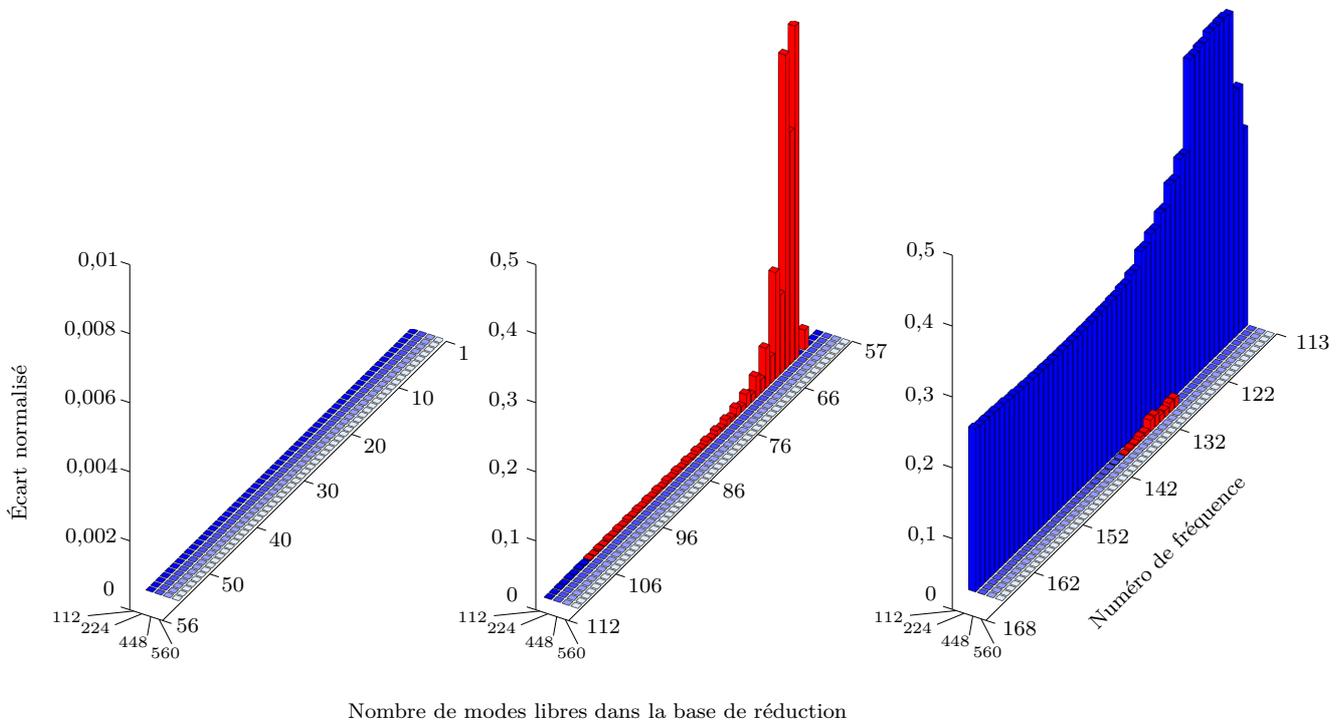
Le fait de travailler dans l'espace associé à la symétrie cyclique pourrait permettre la résolution de ces problèmes mais une procédure très coûteuse en temps de calcul serait nécessaire pour *chaque* modèle réduit. Le choix est donc fait d'introduire une approximation dans le calcul de la correction pseudo-statique pour pouvoir obtenir les modèles réduits de Craig-Martinez en optimisant les temps de calculs. La méthode choisie est la suivante : une approximation est faite sur la matrice raideur  $\mathbf{K}$  en considérant, *uniquement pour le calcul de la correction pseudo-statique*, qu'elle est diagonale par blocs, les termes de couplage  $\mathbf{K}_1$  définis dans l'équation (A.1) sont négligés. L'inverse de la matrice raideur  $\mathbf{K}$  est alors également diagonale par blocs et la matrice de correction pseudo-statique  $\mathbf{R}$  peut-être aisément calculée.

Il n'est pas possible d'évaluer *a priori* l'influence de cette approximation sur les modèles réduits. Les résultats de convergence spatiale présentés dans la suite de ce chapitre permettent de justifier le bien-fondé de cette approximation.

**Convergence en fréquences.** Quatre bases modales sont considérées, contenant respectivement les  $\phi = 112, 224, 448$  et  $560$  premiers modes propres du modèle éléments finis pour la roue aubagée et le carter. La méthode de Craig-Martinez présente l'inconvénient nécessiter un calcul de réduction modale par base contrairement à la méthode de Craig-Bampton pour laquelle il suffit de faire un calcul avec une base très riche puis de tronquer les matrices masse et raideur pour les obtenir sur une base moins riche. Ceci explique le plus faible nombre de bases modales

prises en compte avec la méthode de Craig-Martinez.

Les résultats obtenus en termes de convergence pour la méthode de Craig-Bampton sont à l'origine du choix des bases de réduction pour la méthode de Craig-Martinez de façon à pouvoir comparer les deux méthodes. Les figures 1.10 et 1.11 montrent l'évolution de l'écart entre les

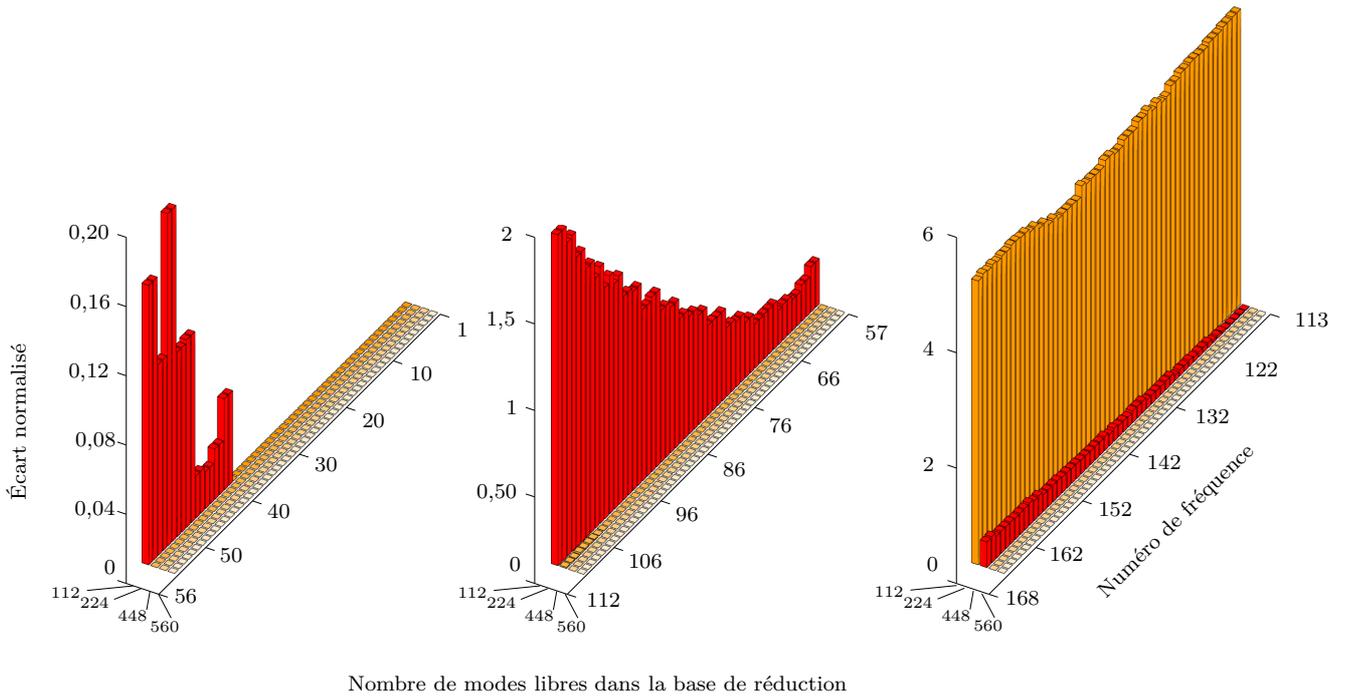


**Figure 1.10** - Écart entre les fréquences propres pour les modes  $n^o = 1$  à 168 des modèles réduits et éléments finis en fonction du nombre de modes libres conservés dans la base de réduction de Craig-Martinez pour la roue aubagée.

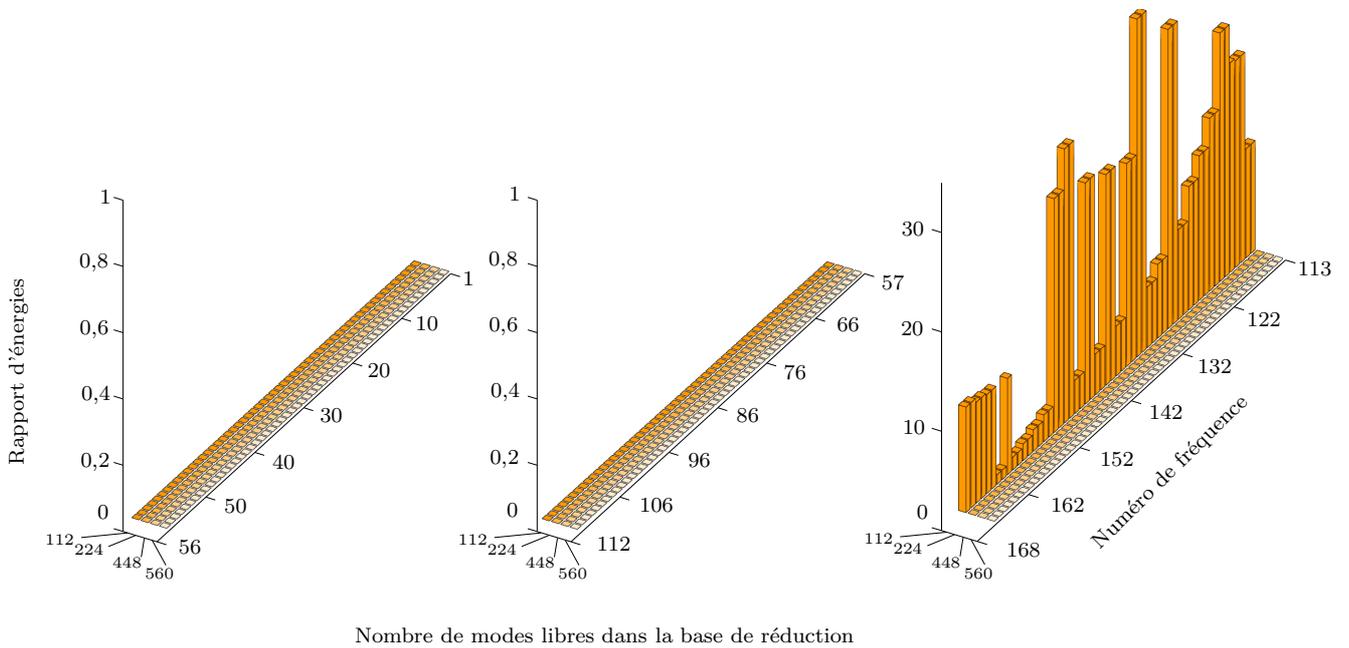
fréquences propres des modèles réduits et des modèles éléments finis pour la roue aubagée et le carter dans le cas de la méthode de Craig-Martinez. Que ce soit pour la roue aubagée ou pour le carter, la base modale contenant les cent douze premiers modes propres doit, théoriquement, permettre d'obtenir les cent douze premières fréquences propres. Or plusieurs des fréquences propres des modèles réduits (correspondant aux colonnes (■) sur les figures 1.10 et 1.11) présentent des écarts très significatifs par rapport aux fréquences propres du modèle éléments finis.

De tels écarts ne peuvent provenir d'erreurs numériques et il est donc fortement probable que l'approximation faite sur le calcul de la correction pseudo-statique ait des conséquences directes sur la qualité des modèles réduits dès les basses fréquences. Les effets de cette approximation sont particulièrement visibles pour le carter.

L'enrichissement de la base modale permet cependant d'obtenir finalement des écarts nuls (à la précision numérique près) entre les fréquences des modèles réduits et les fréquences des modèles éléments finis. L'origine des écarts détectés ne peut être déterminée avec le seul critère d'écart des fréquences propres, il est nécessaire de calculer les indicateurs d'erreur en énergie de déformation.



**Figure 1.11** - Écart entre les fréquences propres pour les modes  $n^o = 1$  à 168 des modèles réduits et éléments finis en fonction du nombre de modes libres conservés dans la base de réduction de Craig-Martinez pour le carter.



**Figure 1.12** - Indicateurs d'erreur en énergie de déformation pour les modes  $n^o = 1$  à 168 des modèles réduits et éléments finis en fonction du nombre de modes libres conservés dans la base de réduction de Craig-Martinez pour le carter.

**Calcul des indicateurs d'erreur pour le carter et la roue aubagée.** Contrairement à ce qu'indiquait les calculs des écarts en fréquences propres, les valeurs des indicateurs d'erreur en énergie de déformation sont cohérents avec la méthode utilisée : avec  $\phi = 112$  modes propres

dans la base de réduction, les cent douze premiers indicateurs d'erreur en énergie de déformation sont numériquement nuls. Au delà des cent douze premiers modes, les indicateurs d'erreur en énergie de déformation pour les modes  $n^o = 113$  à 168 (et les suivants) laissent apparaître des écarts très importants.

Il faut revenir à la définition des indicateurs, donnée dans le paragraphe 1.3.5, pour comprendre la cohérence entre ces résultats et ceux obtenus pour les écarts en fréquences propres. L'indicateur d'erreur est défini uniquement relativement à un mode propre  $i$  du modèle réduit sans avoir aucun moyen de vérifier que ce mode propre correspond effectivement au mode  $i$  du modèle éléments finis, il permet donc uniquement de savoir si le mode propre calculé dans l'espace réduit est effectivement un mode propre du modèle éléments finis.

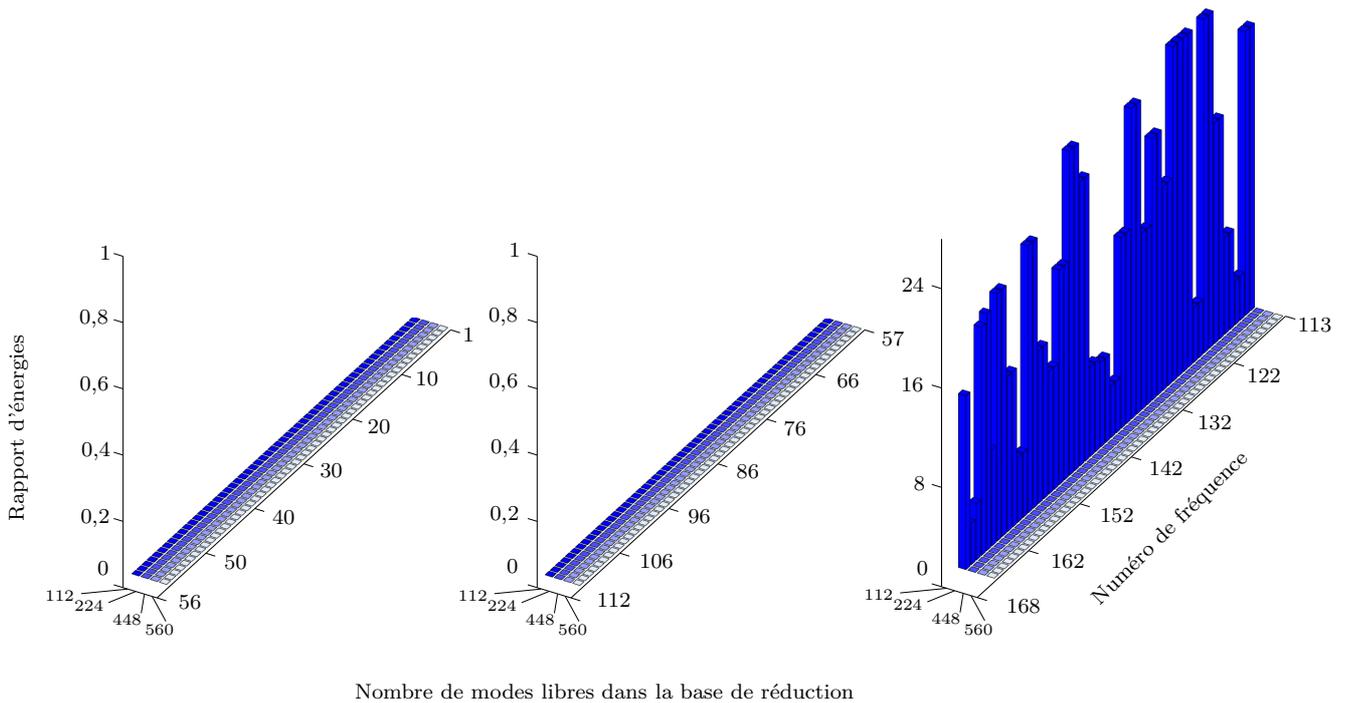
Les résultats présentés sur les figures 1.10, 1.11, 1.12 et 1.13 montrent que l'approximation effectuée sur le calcul de la correction pseudo-statique entraîne la disparition de certains modes propres du spectre des modèles réduits calculés : les modes propres calculés avec ces modèles sont bien des modes propres du modèle élément finis (ce qui est attesté par les indicateurs d'erreur en énergie de déformation numériquement nuls) mais les  $i$  premiers modes propres de ces modèles réduits ne sont pas automatiquement les  $i$  premiers modes propres du modèle éléments finis (ce que traduisent les forts écarts en fréquence). La conclusion directe de ces résultats est que le nombre de modes propres conservés dans la base de réduction de la méthode de Craig-Martinez doit être relativisé face au nombre des premiers modes propres réellement approchés par les modes propres des modèles réduits.

Les résultats montrent que l'approximation sur la matrice  $\mathbf{K}$  pour le calcul du terme de correction pseudo-statique  $\mathbf{R}$  n'empêche pas la convergence spatiale des modèles réduits mais que pour obtenir une bonne approximation de la  $n^e$  fréquence propre, il faut un nombre de modes propres supérieur à  $n$  dans la base de réduction. L'augmentation du nombre de modes propres sera à prendre en compte dans l'analyse des résultats des études d'interaction modale effectuées dans le chapitre 4 de ce mémoire.

#### 1.4.4.3 Conclusions

L'ensemble des critères considérés met en évidence la convergence des modèles réduits calculés par les méthodes de Craig-Bampton et de Craig-Martinez vers les modèles éléments finis pour la roue aubagée et le carter pour les cent-douze premiers modes propres. Le critère qui semble être le plus sévère est celui reposant sur le calcul des indicateurs d'erreur en énergie de déformation. Cela justifie *a posteriori* la prudence à garder vis-à-vis du critère de convergence en fréquences propres qui donne une tendance mais n'est pas assez précis comme le confirme l'étude menée dans [7]. Toutefois, l'étude de convergence menée sur les modèles réduits par la méthode de Craig-Martinez montre tout l'intérêt que peut avoir ce critère en fréquences. L'évaluation d'un modèle réduit en fonction d'un seul de ces deux critères peut ainsi s'avérer trompeuse.

Les résultats obtenus doivent être relativisés : si les modèles réduits convergent bien vers les modèles éléments finis, ceci ne constitue qu'une condition nécessaire à l'étude des interactions



**Figure 1.13** - Indicateurs d'erreur en énergie de déformation pour les modes  $n^o = 1$  à 168 des modèles réduits et éléments finis en fonction du nombre de modes libres conservés dans la base de réduction de Craig-Martinez pour la roue aubagée.

et ne permet pas de conclure quant au comportement des modèles réduits dans le cadre d'une simulation de contact aube/carter. En effet, les méthodes de réduction modale considérées sont linéaires et la combinaison de ces méthodes avec un algorithme de contact doit être validée avant de pouvoir conclure quant à la validité des résultats obtenus. Cette validation est présentée dans le chapitre 3 de ce mémoire ainsi que dans [9]. D'autre part, il est possible que les modes à haute fréquence (absents des bases de réduction) jouent un rôle non négligeable dans le comportement des structures lors du contact. La suite du présent mémoire se propose notamment d'éclaircir ces points.

## 1.5 Simulations de contact sur une aube

**Remarque :** seule la méthode de Craig-Bampton est considérée dans cette section du mémoire.

### 1.5.1 Avant-propos

Un essai industriel classiquement associé à l'étude du contact aube/carter consiste à faire tourner une roue aubagée avec une aube en sur-longueur. Le contact entre la roue aubagée et le carter étant localisé sur une aube, les simulations numériques associées ne prennent souvent en compte que le secteur de la roue avec une aube en sur-longueur, comme sur la figure 1.14. Des conditions limites de type encastrement sont imposées sur les frontières cycliques de ce secteur. Bien souvent, le carter est rigide de façon à limiter les temps de calculs. Ce type de

simulation a déjà effectué à Snecma (avec le code LS-Dyna). La gestion d'un modèle éléments finis complexe pour le secteur, la rigidité du carter et la non prise en compte de la dynamique de la roue en sont les principales limitations.

Cette section du mémoire présente l'application de méthodes de réduction modale à ce type de simulation. La méthode de double réduction modale présentée permet de simuler le contact aube/carter *avec un carter flexible et prise en compte de la dynamique de l'ensemble de la roue aubagée* (supposée parfaitement accordée) tout en conservant des temps de calculs *identiques* à ceux des simulations classiques.

### 1.5.2 Hypothèses de l'étude

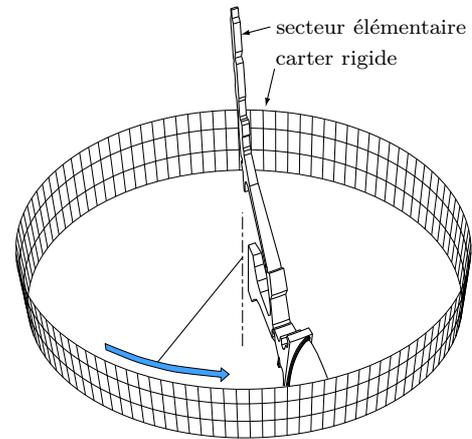
**Remarque :** *Les hypothèses énoncées dans la suite de cette section sont valables pour l'ensemble de ce mémoire.*

Les modèles 2D et 3D de roues aubagées et de carters utilisés dans ce mémoire sont étudiés en considérant des hypothèses plus ou moins restrictives : (1) on ne considère aucun flux, les roues aubagées tournent dans le vide ; (2) la pesanteur est négligée les structures ne se déforment pas sous l'influence de leur propre poids ; (3) les roues aubagées sont supposées parfaitement accordées et sont donc à symétrie cyclique ; (4) les effets centrifuges sont négligés dans l'étude d'interaction 2D et 3D sur la roue aubagée.

L'hypothèse (4) mérite d'être détaillée. En effet, la roue aubagée étant sujette au raidissement centrifuge, ses matrices masse et raideur sont en fait théoriquement dépendantes de sa vitesse de rotation  $\Omega$ . En pratique, cela signifie que pour chaque vitesse de rotation étudiée il est nécessaire de calculer un modèle réduit. Compte tenu des plages de vitesses considérées ainsi que du nombre de simulations envisagées il n'est pas possible de prendre en compte le raidissement centrifuge dans notre étude.

Il faut cependant signaler qu'il existe des possibilités de prendre en compte le raidissement centrifuge de la roue aubagée directement dans un modèle réduit. Si ce type d'enrichissement du modèle réduit présente un intérêt théorique, il peut se révéler gênant dans l'optique d'une comparaison entre deux méthodes de réduction, ce qui est l'objet de notre étude. C'est pourquoi les modèles multi-vitesses ne sont pas pris en compte. Toutefois, dans le cadre du développement du code d'interaction au sein de l'entreprise Snecma, l'utilisation du logiciel Samcef permet de prendre en compte le raidissement centrifuge comme cela est présenté dans l'annexe D du mémoire.

Enfin, notre étude n'a pas pour but de proposer une formulation complète en grands déplacements et grandes déformations, l'objectif est d'étudier l'apparition du phénomène d'interaction modale par l'intermédiaire de contacts structuraux. Elle est donc menée dans le cadre des



**Figure 1.14** - Simulation type de contact aube/carter.

petites perturbations.

### 1.5.3 Symétrie cyclique

La roue aubagée réduite dans les paragraphes précédents contient des nœuds frontières sur chacune de ses aubes. La frontière de réduction ainsi définie est, tout comme la roue aubagée, à symétrie cyclique. Cette condition de symétrie de la frontière est essentielle pour pouvoir optimiser le calcul des modes de la base de réduction de la méthode de Craig-Bampton. Dans

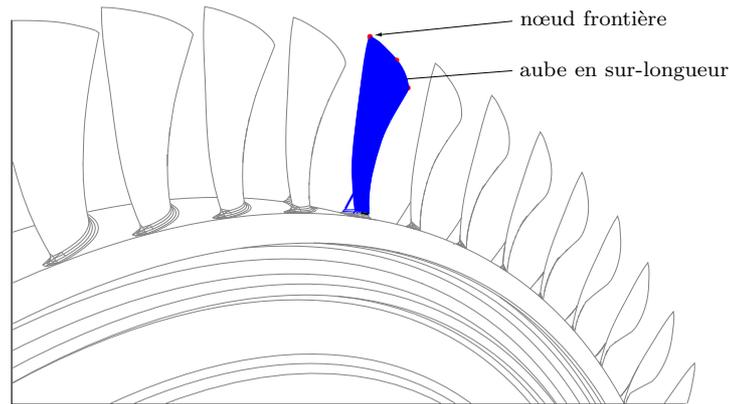


Figure 1.15 - Gestion du contact sur l'aube en sur-longueur

le cas où l'ensemble de la roue aubagée est modélisé, il paraît naturel de vouloir appliquer une méthode de réduction modale pour limiter les temps de calculs. La frontière de réduction se limite logiquement aux nœuds sur lesquels on gère le contact uniquement sur l'aube en sur-longueur comme illustré sur la figure 1.15.

Par conséquent, il y a rupture de la symétrie cyclique de la frontière de réduction. Ceci entraîne logiquement la rupture de la symétrie cyclique des conditions d'encastrement pour le calcul des modes encastres. Autrement dit, une fois les conditions d'encastrement de la frontière prises en compte dans les matrices masse et raideur éléments finis de la roue aubagée, ces matrices *ne sont plus circulantes* comme le montre la figure 1.16. Les matrices masse et raideur

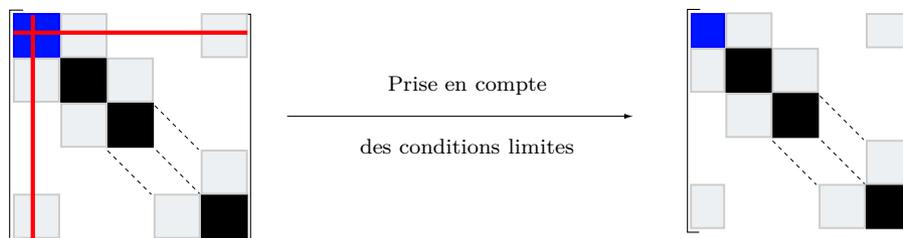


Figure 1.16 - Perte du caractère circulant des matrices masse et raideur lors de la rupture de symétrie des conditions limites par prise en compte des encastres des nœuds frontières sur un secteur. Code couleur : matrice élémentaire d'un secteur ( $\mathbf{K}$  ou  $\mathbf{M}$ ) (■), matrice élémentaire du secteur avec aube en sur-longueur ( $\mathbf{K}$  ou  $\mathbf{M}$ ) (■) et bloc de couplage entre secteurs (■).

de la roue n'étant plus circulantes, leur passage dans l'espace de la symétrie cyclique ne permet

plus d'obtenir des matrices diagonales par blocs mais des matrices pleines ne permettant pas de gagner en temps de calculs sur l'obtention des modes composants la base de réduction modale. Il n'y a donc plus d'intérêt à travailler dans cet espace pour calculer les modes composant la base de réduction modale.

### 1.5.4 Double réduction modale

La symétrie cyclique ne permettant plus de gagner en temps de calcul sur l'obtention de la base de réduction modale, une double réduction modale est envisagée afin de pouvoir obtenir un modèle réduit de la roue aubagée dont les nœuds frontières ne sont que sur l'aube en sur-longueur.

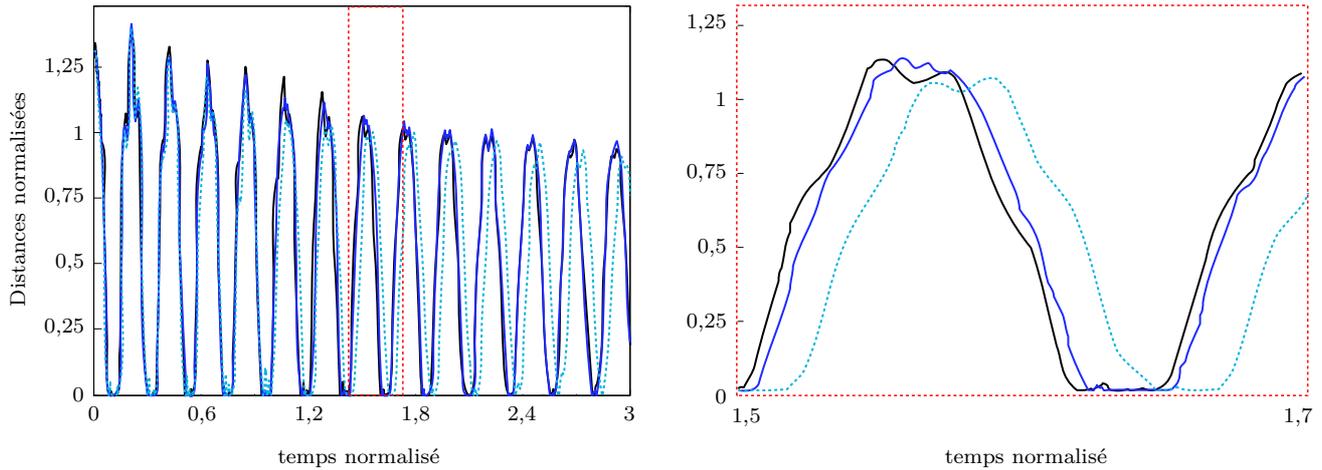
Une première réduction est faite en appliquant la méthode de Craig-Bampton avec une frontière de réduction à symétrie cyclique<sup>2</sup> : l'obtention de ce modèle et sa convergence modale ont été décrits dans le paragraphe 1.4.4.1. Un grand nombre de modes encastrés ( $\eta = 1680$  pour les modèles 3D et  $\eta = 110$  pour les modèles 2D dans notre étude) doivent être conservés dans la base de réduction pour que ce modèle réduit représente au mieux la dynamique de la roue aubagée. D'un point de vue strictement théorique, le modèle obtenu pourrait être utilisé pour gérer le contact sur une seule aube mais il peut être grandement optimisé en réduisant les ddls associés aux aubes n'intervenant pas dans la gestion du contact.

C'est cette deuxième réduction qui a été étudiée plus précisément. Deux méthodes sont envisagées et comparées :

- une réduction statique de type Guyan sur les ddls frontières (méthode notamment présentée dans [8]) ;
- une deuxième réduction de type Craig-Bampton sur le modèle réduit.

Les deux combinaisons ont été évaluées sur le modèle de roue aubagée 2D présenté dans le chapitre 2 de [34]. L'auteur met en évidence la qualité des modèles réduits obtenus dans chaque cas mais donne un avantage à la double réduction Craig-Bampton/Craig-Bampton qui converge plus rapidement (dans le cas des structures étudiées) et permet donc de travailler sur des modèles de plus petite taille. Les résultats présentés sont résumés par les courbes tracées sur la figure 1.17 sur la distance aube/carter qui est tracée pour trois types de modèles réduits : (1) (—) un modèle de référence avec une seule réduction de Craig-Bampton (dont la convergence est validée dans le chapitre 3), (2) (-.-.-) un modèle obtenu par double réduction modale Craig-Bampton avec  $\eta_1 = 110$  modes encastrés puis réduction statique en conservant  $\nu = 63$  modes et enfin (3) (—) un modèle obtenu par une double réduction de Craig-Bampton ( $\eta_1 = 110$  modes encastrés conservés pour la première réduction et  $\eta_2 = 63$  modes encastrés conservés pour la seconde réduction). Un léger déphasage est observable sur la figure 1.17 entre les courbes

2. Le modèle réduit qui est ainsi obtenu ne présente pas d'aube en sur-longueur mais permet la gestion du contact sur une seule de ces aubes. Le fait de considérer que le modèle réduit obtenu est valable dans le cas d'une roue avec une aube en sur-longueur (c'est-à-dire une roue désaccordée), reviendrait à négliger cette rupture de symétrie dans l'obtention du modèle, il s'agirait d'un détalonnage approché qui n'est pas étudié dans ce mémoire.



**Figure 1.17** - Distance aube/carter observée pour les deux combinaisons de méthodes de réduction pour une taille de modèle réduit équivalente : Craig-Bampton  $\eta_1 = 110$  + Guyan  $\nu = 63$  (---); Craig-Bampton  $\eta_1 = 110$  + Craig-Bampton  $\eta_2 = 63$  (—); Craig-Bampton  $\eta = 110$  (—)

obtenues avec le modèle de référence et le modèle obtenu en combinant une réduction de Craig-Bampton et une réduction statique. Ces résultats justifient l'application de la double réduction modale de Craig-Bampton au cas 3D, plusieurs calculs ont été réalisées sur les modèles DAM introduits dans le chapitre 1. Les résultats d'une simulation sont observables sur la figure 1.18.

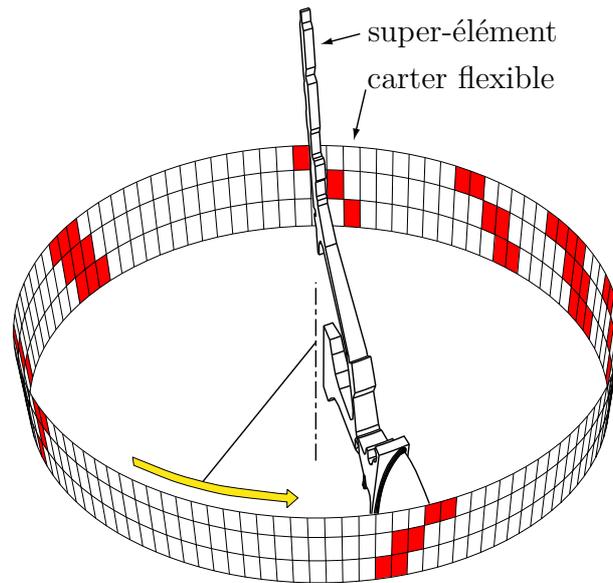
### 1.5.5 Bilan

La procédure décrite permet de créer des modèles réduits adaptés à la gestion du contact sur une seule aube d'une roue aubagée. Malgré leur petite taille (de l'ordre de 200 ddls), ces modèles prennent en compte la dynamique de la roue aubagée entière. Par ailleurs, le carter modélisé est flexible ce qui permet d'envisager des études d'interaction plus poussées que les cas avec carter rigide. Dans le cadre des calculs déjà réalisés sous LS-Dyna vingt-quatre minutes sont nécessaires pour simuler la rotation du secteur (modèle éléments finis non réduit) sur un tour avec carter rigide. À fréquence de processeur comparable, les calculs présentés dans cette section demandent des temps de calculs équivalents (autour de vingt-cinq minutes par tour) mais permettent d'intégrer la dynamique de la roue aubagée entière et de gérer un carter flexible.

## 1.6 Conclusion

Ce chapitre a permis de présenter les différentes méthodes de réduction utilisées dans ce mémoire. Le choix des méthodes ainsi que les approximations qui ont été nécessaires à la gestion de modèles 3D de très grande taille ont été détaillés et justifiés. Deux critères ont été retenus pour évaluer la qualité des modèles réduits : la comparaison des fréquences propres et l'indicateur d'erreur en énergie de déformation.

Ces deux critères ont permis d'observer la convergence spatiale des modèles réduits de Craig-



**Figure 1.18** - Zones de contact aube/carter observées pour une simulation 3D. ( $\Omega = 1000 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $\mu = 0,15$  et contact initié par flexion d'aube)

Bampton et de Craig-Martinez. Cette convergence est une condition nécessaire pour pouvoir envisager l'étude du phénomène d'interaction modale mais la convergence des simulations doit être également mise en évidence. Cette convergence suppose implicitement de bonnes performances des méthodes de réduction utilisées avec le problème de contact étudié.

Cette étude d'évaluation des méthodes de réduction linéaires utilisée pour un problème de contact non-linéaire est au cœur de la suite du mémoire. La première étape de cette étude de compatibilité est notamment l'objet du chapitre 2 avec l'étude des vibrations d'une poutre encastrée dans le cas de problèmes non-linéaires. L'étude se poursuit dans les chapitres suivants 3 et 4 dans le cas des études d'interaction 2D et 3D.

---

# Traitement du contact

## Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Algorithme de contact</b>	<b>38</b>
<b>2.2</b>	<b>Validation de l'algorithme de contact</b>	<b>42</b>
<b>2.3</b>	<b>Approximations relatives à la gestion du contact</b>	<b>46</b>
<b>2.4</b>	<b>Étude de la consistance énergétique du schéma d'intégration</b>	<b>49</b>
<b>2.5</b>	<b>Problèmes non-linéaires et réduction modale</b>	<b>54</b>
<b>2.6</b>	<b>Réduction modale et modèle non-linéaire simple</b>	<b>58</b>
<b>2.7</b>	<b>Problèmes numériques relatifs aux modes d'attache</b>	<b>64</b>
<b>2.8</b>	<b>Conclusion</b>	<b>67</b>

---

Ce chapitre présente les différents algorithmes et méthodes utilisés pour la résolution des problèmes de contact traités dans ce mémoire. Ce travail s'inscrit dans la suite de plusieurs études menées en collaboration entre l'École Centrale de Nantes et Snecma, ainsi, le choix de l'algorithme de contact et du type de schéma d'intégration utilisé ne repose pas sur une réflexion personnelle mais résulte de travaux antérieurs (essentiellement [51]). C'est pourquoi l'algorithme de contact et le schéma d'intégration sont présentés dans ce mémoire sans étude comparative relativement aux autres méthodes existantes et envisageables.

Il est rappelé ici que l'objectif de cette thèse est d'étudier les performances des méthodes de synthèse modale pour des problèmes de contact rotor-stator. Ainsi, des résultats des modèles réduits seront comparés à ceux de modèles non réduits, le traitement numérique du contact étant strictement identique dans les deux modèles.

A la suite de ces présentations, l'algorithme de contact est détaillé dans le cas 3D et certaines simplifications sont introduites dans la gestion du contact. L'influence de ces simplifications est évaluée sur un cas test d'impact entre deux structures.

Enfin, l'algorithme de contact est validé d'un point de vue énergétique par un bilan d'énergie simplifié sur une simulation avec les modèles plans 2D et une simulation avec les modèles industriels 3D.

## 2.1 Algorithme de contact

L'algorithme de gestion du contact présenté dans cette section a été initialement développé dans [48] et repose sur les travaux de Carpenter [16]. Cette section a donc pour but de rappeler quelques notions fondamentales de la mécanique du contact et de présenter brièvement l'algorithme utilisé. La présentation de l'algorithme reprend en grande partie celle faite dans [48] et [50].

### 2.1.1 Théorie et généralités

Les efforts sur lesquels notre attention se porte sont les efforts de contact entre le sommet des aubes et le carter. Les équations du mouvement sont obtenues en appliquant le principe des travaux virtuels en reprenant, pour l'essentiel, la procédure détaillée dans [47].

Pour tout point matériel  $\mathbf{P}^m$  appartenant à la surface de contact  $\Gamma_c^{(m)}$  du solide maître  $\Omega^m$ , il est possible de trouver, sur la surface de contact  $\Gamma_c^{(e)}$  du solide esclave  $\Omega^e$ , le point  $\mathbf{P}^e$  plus proche point du point  $\mathbf{P}^m$  en résolvant l'équation

$$\mathbf{P}^e(\mathbf{P}^m) = \operatorname{argmin}_{\mathbf{P}^i \in \Gamma_c^{(e)}} \|\mathbf{P}^m - \mathbf{P}^i\|_2 \quad (2.1)$$

Tenant compte de ces notations, il est possible de définir la fonction distance entre les deux solides  $\Omega^e$  et  $\Omega^m$

$$\mathbf{g}(\mathbf{P}) = \mathbf{g}_0(\mathbf{P}) + (\mathbf{x}^m(\mathbf{P}^m) - \mathbf{x}^e(\mathbf{P}^e(\mathbf{P}^m))) \cdot \mathbf{n} \quad (2.2)$$

$\mathbf{g}_0(\mathbf{P})$  représentant la distance initiale (positive) entre les deux structures et  $\mathbf{n}$  la normale extérieure à la surface  $\Gamma_c^{(e)}$  au point  $\mathbf{P}^e$ . Les conditions de contact, plus communément appelées conditions de Kuhn et Tucker dans la littérature, sont telles que

$$\forall \mathbf{x} \in \Gamma_c^{(m)} : \mathbf{t}_N \geq 0, \mathbf{g} \geq 0, \mathbf{t}_N \mathbf{g} = 0 \quad (2.3)$$

où  $\mathbf{t}_N$  représente la pression de contact, supposée positive, agissant sur la surface  $\Gamma_c^{(e)}$ . À ces conditions de contact s'ajoute la loi de Coulomb utilisée pour la gestion du frottement

$$\begin{aligned} \|\mathbf{t}_T\| &\leq \mu \mathbf{t}_N \\ \|\mathbf{t}_T\| < \mu \mathbf{t}_N &\Rightarrow \mathbf{v}_T = \mathbf{0} \\ \|\mathbf{t}_T\| = \mu \mathbf{t}_N &\Rightarrow \exists \alpha > 0 \text{ tel que } \mathbf{v}_T = \alpha \frac{\mathbf{t}_T}{\|\mathbf{t}_T\|} \end{aligned} \quad (2.4)$$

où  $\mathbf{t}_T$  représente l'effort tangentiel et  $\mathbf{v}_T$  la vitesse relative de glissement dans la direction tangentielle. La formulation faible du problème de contact peut être écrite de la manière suivante :

trouver le champ de déplacement  $\mathbf{x}$  tel que pour déplacement virtuel admissible  $\delta \mathbf{x}$  :

$$\int_{\Omega} \rho \ddot{\mathbf{u}} \delta \mathbf{u} dV + \int_{\Omega} \bar{\boldsymbol{\sigma}} : \delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} dV = \int_{\Gamma_c} (\mathbf{t}_N \delta \mathbf{g} + \mathbf{t}_T \delta \mathbf{u}_T) dS + \int_{\Omega} f_d \delta \mathbf{u} dV + \int_{\Gamma_c} \mathbf{t}_d \delta \mathbf{u} dS \quad (2.5)$$

où  $\mathbf{t}_N$  et  $\mathbf{t}_T$  sont contraints par les relations (2.3) et (2.4).

### 2.1.2 Gestion du contact

L'équation de la dynamique, écriture matricielle de l'équation 2.5

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{F} \quad (2.6)$$

est résolue par le schéma temporel explicite des différences finies centrées. Dans le cadre de ce schéma, les vecteurs vitesse et accélération s'écrivent

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{x}}_n &= \frac{\mathbf{x}_{n+1} - 2\mathbf{x}_n + \mathbf{x}_{n-1}}{\delta t^2} \\ \dot{\mathbf{x}}_n &= \frac{\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_{n-1}}{2\delta t} \end{aligned} \quad (2.7)$$

L'algorithme de gestion du contact s'écrit alors :

1. *prédiction* des déplacements  $\mathbf{x}_{n+1}$  du pas de temps courant  $n$  en ignorant les éventuelles pénétrations entre les deux structures. Ces déplacements prédits  $\mathbf{x}_{n+1,p}$  s'expriment comme suit

$$\mathbf{x}_{n+1,p} = \left[ \frac{\mathbf{M}}{\delta t^2} + \frac{\mathbf{D}}{2\delta t} \right]^{-1} \left( \mathbf{f}_n^{ext} + \left[ \frac{2\mathbf{M}}{\delta t^2} - \mathbf{K} \right] \mathbf{u}_n + \left[ \frac{\mathbf{D}}{2\delta t} - \frac{\mathbf{M}}{\delta t^2} \right] \mathbf{u}_{n-1} \right) \quad (2.8)$$

2. *détermination* des fonctions distances entre les deux structures, fonctions rassemblées dans un vecteur  $\mathbf{d}_{n+1,p}$  d'après l'équation 2.2. Une procédure de recherche identifiant les éventuelles pénétrations est mise en œuvre. La surface spline décrite dans le paragraphe 2.1.3 prenant appui sur le carter est alors utilisée. Des simplifications provenant de la nature du mouvement du rotor permettent d'accélérer cette étape. Le fait de satisfaire les conditions de non-pénétration implique que les fonctions distances à la fin du pas de temps  $n$ , autrement dit chaque composante du vecteur  $\mathbf{d}_{n+1}$  soit positive ou nulle

$$\mathbf{d}_{n+1} = \mathbf{C}_N^T \mathbf{x}_{n+1} + \mathbf{d}_0 \geq 0 \quad (2.9)$$

où le vecteur  $\mathbf{d}_0$  contient les distances initiales entre les deux structures. Puisque  $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_{n+1,p} + \mathbf{x}_{n+1,c}$ <sup>1</sup>, la relation (2.9) est alors reprise sous une forme analogue

$$\mathbf{C}_N^T \mathbf{x}_{n+1,c} + \mathbf{d}_{n+1,p}^- = 0 \quad (2.10)$$

où  $\mathbf{d}_{n+1,p}^- = Proj_{\mathbb{R}_-^{S_d}}(\mathbf{d}_{n+1,p})$  et  $S_d = size(\mathbf{d}_{n+1,p})$ .

3. *correction* des déplacements grâce au calcul des efforts de contact selon les directions normale et tangentielle. Cette étape entraîne l'apparition des inconnues de contact dans

---

1. au pas de temps  $n + 1$ , les déplacements recherchés  $\mathbf{x}_{n+1}$  sont la somme des déplacements prédits  $\mathbf{x}_{n+1,p}$  (calculés sans contrainte de contact) et des déplacements corrigés  $\mathbf{x}_{n+1,c}$  (incluant l'effet des efforts de contact)

la direction normale, aussi dits multiplicateurs de Lagrange  $\lambda$  dans les équations du mouvement

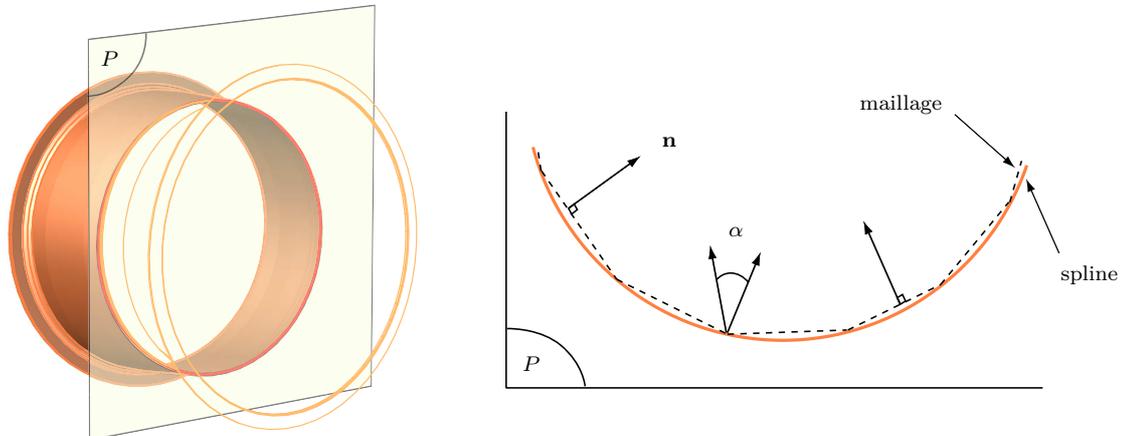
$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_{n+1,p} - \left[ \frac{\mathbf{M}}{\delta t^2} + \frac{\mathbf{D}}{2\delta t} \right]^{-1} \mathbf{C}_{NT} \lambda \quad (2.11)$$

La nouvelle matrice  $\mathbf{C}_{NT}$  contient les contraintes de contact dans les directions normale et tangentielle. À cause des vitesses relatives élevées entre le carter et le sommet des aubes, il est supposé que seul la phase de glissement existe entre les deux corps. Finalement, les équations (2.10) et (2.11) peuvent être réécrites de telle manière que les multiplicateurs de Lagrange sont solution de

$$\lambda = \left( \mathbf{C}_N^T \left[ \frac{\mathbf{M}}{\delta t^2} + \frac{\mathbf{D}}{2\delta t} \right]^{-1} \mathbf{C}_{NT} \right)^{-1} \mathbf{d}_{n+1,p} \quad (2.12)$$

### 2.1.3 B-splines surfaciques bi-cubiques

Les développements théoriques présentés dans cette section sont issus essentiellement de [49] et [50]. La gestion du contact sur la surface extérieure d'une structure discrétisée à l'aide de la méthode des éléments finis telle que le modèle 3D du carter présenté dans le chapitre 1 pose notamment des problèmes en termes de continuité de la normale  $\mathbf{n}$  définie dans l'équation (2.2). La figure 2.1 met en évidence, de façon volontairement exagérée, le problème de discontinuité



**Figure 2.1** - Problème de discontinuité de la normale à la surface de contact sur un maillage éléments finis classique.

de la normale en montrant l'existence d'un angle  $\alpha > 0$  entre les normales de deux éléments consécutifs du maillage.

Afin de remédier à ce problème, le choix a été fait de représenter la surface de contact du carter par une B-spline surfacique bi-cubique.

#### 2.1.3.1 Généralités

L'intérêt des courbes paramétriques de type B-splines est de pouvoir approcher à une précision près un champ de points. Les courbes splines linéiques ne dépendent que d'un paramètre

et ont notamment été utilisées dans [48] pour modéliser une ligne de contact sur un carter 3D. Leur extension aux surfaces implique logiquement une dépendance à deux paramètres (notés  $p_1$  et  $p_2$ ) et l'équation d'une surface peut être écrite comme le produit tensoriel de deux splines linéiques :

$$S(p_1, p_2) = (x(p_1, p_2), y(p_1, p_2), z(p_1, p_2)) = \sum_{i=0}^{N_{p_1}-1} \sum_{j=0}^{N_{p_2}-1} Q_{ij} B_{ni}(u) B_{nj}(v) \quad (2.13)$$

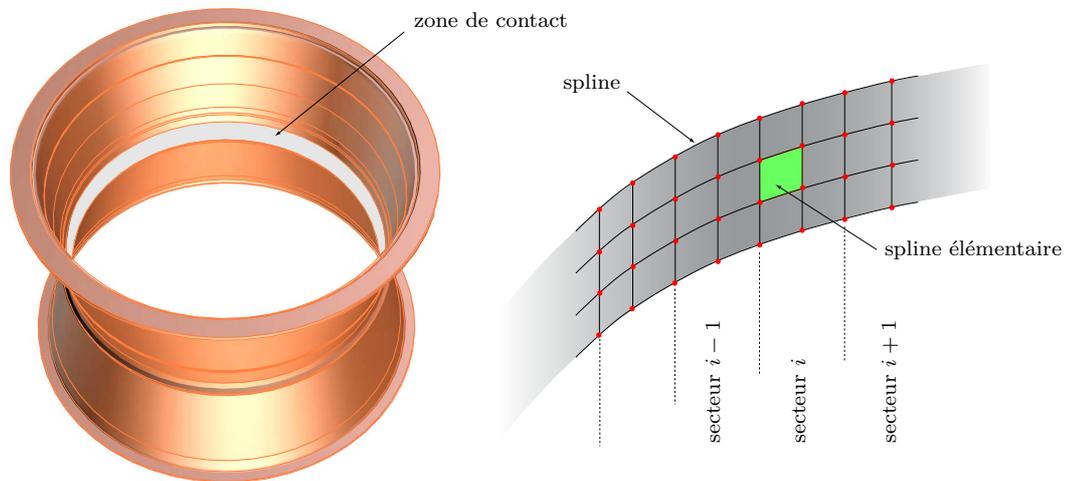
Une spline surfacique nécessite donc deux vecteurs de nœuds  $(u_i)_{i=0, N_{p_1}}$  et  $(v_j)_{j=0, N_{p_2}}$  et un quadrillage de points de contrôle  $Q_{ij}$ . Les polynômes  $B_{ni}$  et  $B_{nj}$  sont définis par la relation dite de Cox-de-Boor :

$$B_{00}(u) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [u_0, u_1] \\ 0 & \text{si } t \notin [u_0, u_1] \end{cases} \quad (2.14)$$

$$B_{ni}(u) = \begin{cases} \frac{u-u_i}{u_{i+n}-u_i} B_{n-1,i}(u) + \frac{u_{i+n+1}-u}{u_{i+n+1}-u_{i+1}} B_{n-1,i+1}(u) & \text{si } u \in [u_i, u_{n+1+i}] \\ 0 & \text{si } u \notin [u_i, u_{n+1+i}] \end{cases}$$

### 2.1.3.2 Construction

Une B-spline surfacique bi-cubique minimale est composée de seize points de contrôle, elle constitue l'élément de base de la B-spline surfacique bi-cubique développée sur la surface de contact du carter. La B-spline surfacique bi-cubique est construite de façon à contenir certains



**Figure 2.2** - Surface de contact et de la B-spline surfacique bi-cubique considérée dans l'étude 3D.

nœuds du carter situés sur la zone de contact potentiel avec le sommet des aubes. Ces nœuds sont pris par groupes de quatre comme mentionné dans le paragraphe 1.4.2, le nombre de groupes de nœuds considérés définit le niveau d'approximation de la surface réelle du carter.

Le carter utilisé dans notre étude se décompose en 56 secteurs élémentaires, il est choisi de prendre deux groupes de quatre nœuds par secteur comme le montre la figure 2.2 : un groupe de quatre nœuds est pris sur l'intersection entre la bande de contact et la frontière cyclique droite du secteur, l'autre groupe correspond au milieu de la bande de contact sur le secteur.

Ces nœuds du maillage utilisés pour la construction de la surface sont bien entendu les mêmes que ceux conservés dans le modèle réduit du carter. Ainsi, à chaque pas de temps, la surface de contact peut être mise à jour directement à partir du modèle réduit.

## 2.2 Validation de l'algorithme de contact

L'algorithme de contact présenté dans les sections précédentes a été développé dans [48] et [51]. Il a été développé initialement pour résoudre un problème de contact entre un point et une surface. Sa généralisation à un cas de contact entre un ensemble de points et une surface a été réalisé dans le cadre de notre étude et demande d'être validée.

Dans de nombreuses études traitant du contact en mécanique, la validation de l'algorithme de contact utilisé est faite en procédant à la résolution d'un cas de contact simple dont la solution analytique est connue [16], [23] et [41]. La validation d'un cas de contact 3D est plus délicate du fait de la difficulté d'avoir une solution analytique. C'est pourquoi dans le cadre de notre étude la validation de l'algorithme de contact utilisé est faite par comparaison des résultats avec un autre code utilisant un algorithme différent pour une même simulation. On s'intéresse particulièrement à évaluer la capacité du code à gérer le contact pour des vitesses très élevées comme c'est le cas en sommet d'aube d'une roue aubagée. Le cas de contact doit cependant rester suffisamment simple pour être adaptable aux différents codes.

Les résultats obtenus avec le code présenté précédemment sont ainsi comparés à ceux obtenus avec un code de contact développé par Magnain [55], [29], en utilisant la gestion du contact présentée dans [24], dans le cadre de son doctorat à l'université d'Évry. Ce code s'appuie sur un schéma implicite du premier ordre et la méthode dite du « bi-potentiel » pour la gestion du contact et se différencie ainsi de l'algorithme utilisé pour notre étude. Le détail de l'algorithme de ce code n'a toutefois pas pu être obtenu.

Un cas de contact a été défini de façon à être compatible (en termes de gestion des maillages, des conditions limites et initiales) avec les deux codes de contact. Ce cas de contact et le maillage utilisé sont décrits sur la figure 2.3. Les paramètres communs aux différentes simulations réalisées sont :

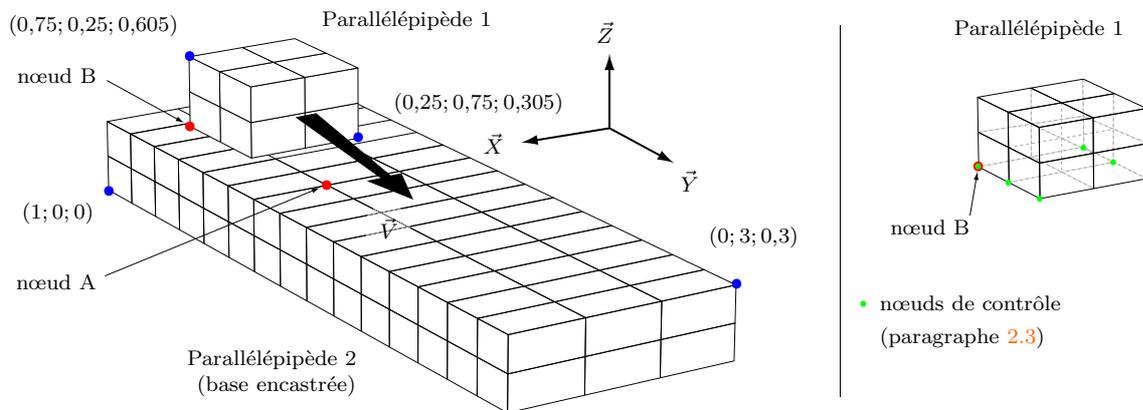
- pas de temps  $\delta t = 1 \cdot 10^{-6} \text{ s}^2$  ;
- coefficient de frottement  $\mu = 0,2$  ;
- coefficient de Poisson  $\nu = 0,2$  ;
- densité  $\rho = 1\,000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  ;
- jeu initial 5 mm.

Trois séries de simulations seront comparées en faisant varier les vitesses initiales du parallélépipède supérieur « 1 » et les paramètres matériaux. Les différents cas étudiés sont : matériau souple et vitesse faible, matériau souple et grande vitesse, matériau rigide et grande vitesse. Ces différentes simulations ont pour but de s'approcher progressivement (grâce au cas maté-

---

2. Une étude de convergence a été menée sur les déplacements des différents ddls de chaque parallélépipède pour déterminer cette valeur du pas de temps.

riau rigide et grande vitesse) de la configuration d'un cas de contact aube/carter. Pour chaque



**Figure 2.3** - Représentation du cas de contact utilisé pour comparer les algorithmes.

simulation, les résultats présentés sont les déplacements suivant les trois ddl des nœuds A (appartenant au parallélépipède 2) et B (appartenant au parallélépipède 1). On s'intéresse à la comparaison des déplacements obtenus avec les deux codes. Seuls les déplacements sont directement accessibles en sortie du code de Magnain, c'est ce qui explique l'absence de comparaison des efforts de contact.

### 2.2.1 Matériau souple et vitesse relative faible

Les paramètres utilisés pour cette simulation sont :

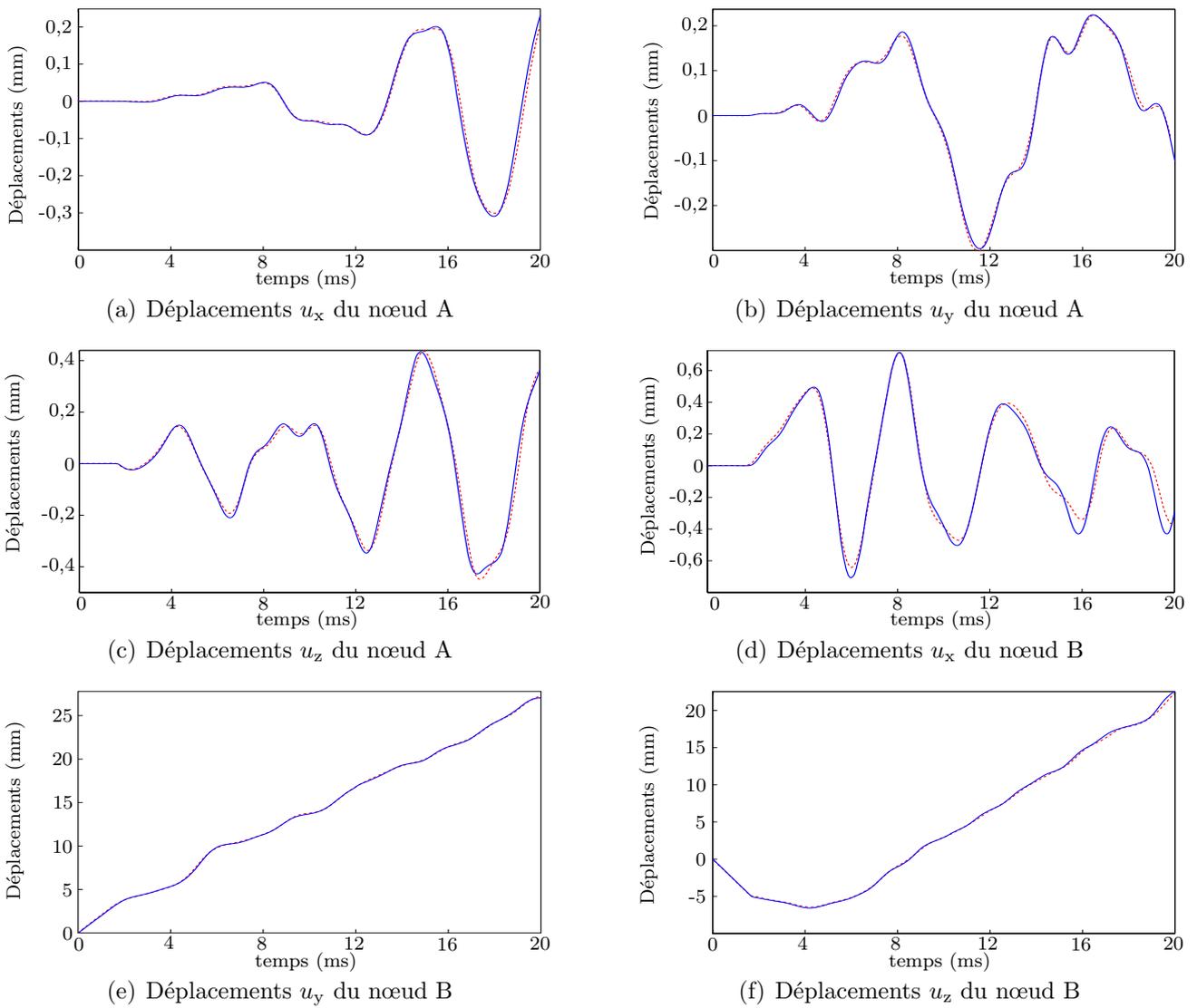
- temps de simulation  $t_s = 20$  ms ;
- module d'Young  $E = 3,6 \cdot 10^7$  Pa ;
- coordonnées du vecteur vitesse  $\vec{V}$  :
  - $V_x = 0$  m · s<sup>-1</sup>,
  - $V_y = 2$  m · s<sup>-1</sup>,
  - $V_z = -3$  m · s<sup>-1</sup>.

Les déplacements obtenus pour les deux codes sont superposés pour chaque ddl de chacun des deux nœuds considérés et sont représentés sur les différents graphiques de la figure 2.4. Quel que soit le ddl et le nœud observé, les déplacements obtenus par les deux codes se superposent presque parfaitement.

### 2.2.2 Matériau souple et grande vitesse relative

L'étude du cas de contact entre deux matériaux souples avec une vitesse relative élevée est un cas d'étude intermédiaire. Les paramètres utilisés pour cette simulation sont :

- temps de simulation  $t_s = 20$  ms ;
- module d'Young  $E = 3,6 \cdot 10^7$  Pa ;
- coordonnées du vecteur vitesse  $\vec{V}$  :



**Figure 2.4** - Cas d'un matériau souple et contact à faible vitesse : comparaisons des déplacements obtenus avec le code d'interaction (—) et avec le code de Magnain (.....) pour les ddl  $u_x$ ,  $u_y$  et  $u_z$  des nœuds A et B.

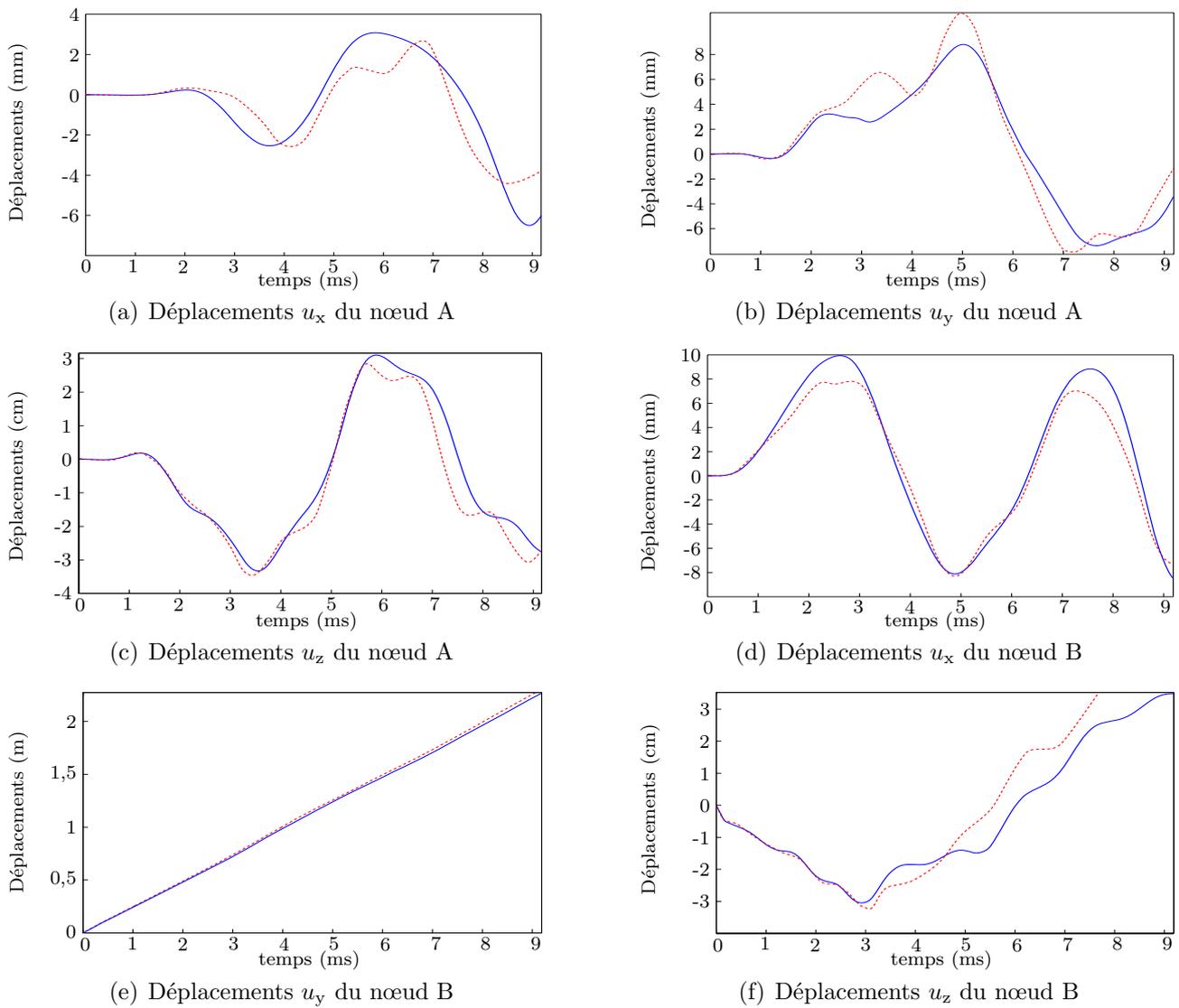
- $V_x = 0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ,
- $V_y = 250 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ,
- $V_z = -30 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

La valeur choisie pour la composante  $V_y$  du vecteur vitesse  $\vec{V}$  se justifie par l'ordre de grandeur des vitesses de contact dans un cas d'interaction aube/carter. En effet, dans le cas des modèles 3D étudiés dans ce mémoire, présentés dans le chapitre 1, lorsque la roue aubagée tourne à une vitesse  $\Omega = 7,5$ , la vitesse dans la direction tangente au carter est du même ordre de grandeur que  $V_y$ .

Des différences sensibles sont observables sur la figure 2.5 entre les résultats obtenus par le code d'interaction et le code développé par Magnain. Il est fortement probable que ce cas de contact souligne une limite associée au cadre d'étude considéré. En effet, la combinaison

de grandes vitesses relatives et de matériaux souples a pour conséquence d'engendrer des déformations très significatives sur les différentes structures en contact. Si le code développé par Magnain se place justement dans le cadre des grandes transformations, notre étude, quant à elle, suppose des petites perturbations.

Il est cependant intéressant d'observer que les amplitudes des déplacements restent dans l'ensemble similaires entre les deux codes. Surtout, le déplacement d'ensemble du parallélépipède 1 (figure 2.5(e)) est très proche pour les deux codes, les courbes se superposent bien.



**Figure 2.5** - Cas d'un matériau souple et contact à grande vitesse : comparaisons des déplacements obtenus avec le code d'interaction (—) et avec le code de Magnain (.....) pour les ddl  $u_x$ ,  $u_y$  et  $u_z$  des nœuds A et B.

### 2.2.3 Matériau rigide et grande vitesse relative

L'étude du cas de contact entre deux matériaux rigides avec une vitesse relative élevée est le cas d'étude qui nous place au plus près d'une simulation de contact aube/carter. Certains paramètres tels que le temps de simulation sont modifiés car la simulation est beaucoup plus courte.

- temps de simulation  $t_s = 9,5$  ms ;
- module d'Young  $E = 2,1 \cdot 10^{11}$  Pa ;
- coordonnées du vecteur vitesse  $\vec{V}$  :
  - $V_x = 0$  m · s<sup>-1</sup>,
  - $V_y = 250$  m · s<sup>-1</sup>,
  - $V_z = -30$  m · s<sup>-1</sup>.

Parmi les différents déplacements tracés sur la figure 2.6, on remarque que la grande rigidité des matériaux entraîne des déplacements très faibles et à plus haute fréquence sur les deux parallélépipèdes. Il est donc beaucoup plus délicat de comparer les déplacements obtenus avec les deux codes. On s'intéresse plus particulièrement aux amplitudes de vibration, similaires pour les deux codes. En particulier, les figures 2.6(a), 2.6(b), 2.6(c) et 2.6(d) montrent que l'enveloppe des courbes obtenues se confondent bien entre les différents codes.

Par ailleurs, les déplacements d'ensemble du parallélépipède 1 obtenus par les deux codes concordent parfaitement comme l'attestent les figures 2.6(e) et 2.6(f). Contrairement au cas de contact avec un matériau souple, la combinaison de grandes vitesses relatives et de matériaux rigides n'aboutit pas à de grandes déformations : ce cas de contact est donc compatible avec le cadre des petites déformations dans lequel se place le code d'interaction.

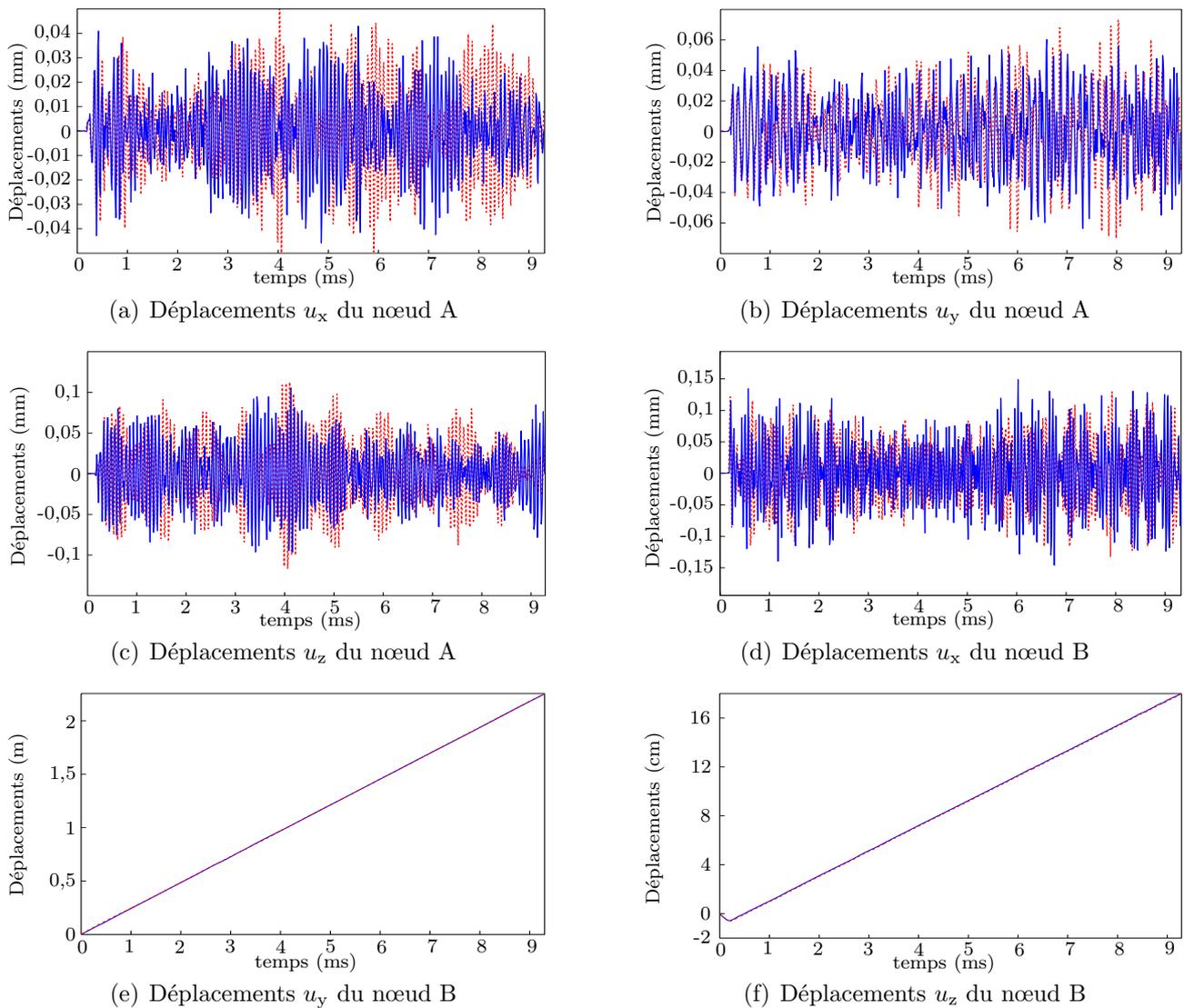
### 2.2.4 Bilan

L'ensemble des simulations réalisées sur les deux codes de contact ont permis d'observer une bonne concordance des résultats, particulièrement dans les cas d'un matériau souple avec une vitesse faible et d'un matériau rigide avec vitesse élevée. Lorsque la vitesse relative est élevée et que les matériaux sont souples, des écarts significatifs apparaissent entre les deux codes du fait que l'on ne peut plus considérer avoir à faire à des petites perturbations. Il apparaît ainsi clairement que le code d'interaction n'est pas aussi général que le code développé par Magnain, ses limites telles que la restriction au cadre des petites perturbations sont mises en évidence.

La bonne concordance des résultats observée pour le cas de contact entre matériaux rigides avec une vitesse relative élevée nous permet de valider le code de contact et montrent que les hypothèses faites sont cohérentes avec le type d'étude envisagé.

## 2.3 Approximations relatives à la gestion du contact

L'algorithme de contact présenté précédemment reste relativement coûteux en temps de calcul dans le cas des simulations 3D. Aussi, dans le but d'optimiser ces temps de calculs et



**Figure 2.6** - Cas d'un matériau rigide et contact à grande vitesse : comparaisons des déplacements obtenus avec le code d'interaction (—) et avec le code de Magnain (.....) pour les ddl  $u_x$ ,  $u_y$  et  $u_z$  des nœuds A et B.

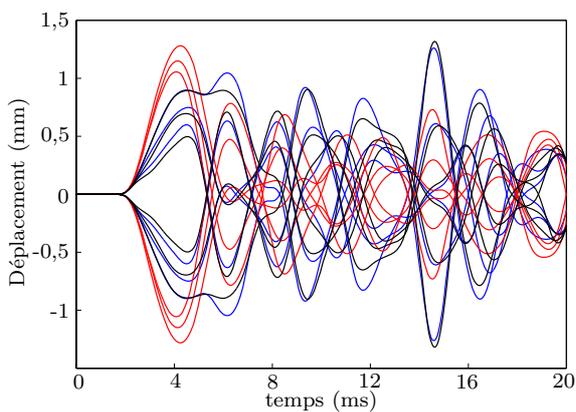
d'assurer une plus grande stabilité numérique, deux hypothèses simplificatrices sont formulées. Ces deux hypothèses découlent de l'ordre de grandeur des vitesses relatives, très élevées, dans le cas du contact aube/carter :

1. la vitesse de rotation de la roue aubagée est telle qu'il est impossible d'avoir des phases de collement entre le sommet des aubes et le carter. Par conséquent, quand il y a contact structurel, seule la phase de glissement frottant de la loi de Coulomb 2.4 est considérée ;
2. les forces de frottement dans la direction  $\vec{z}$  sont négligées.

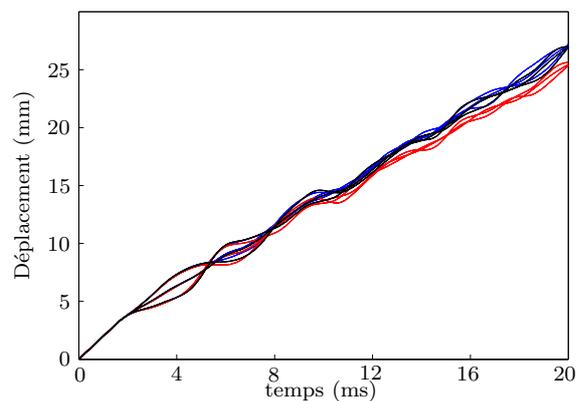
La première conséquence de ces hypothèses est que la matrice de contact dans la direction tangentielle est constante et peut être construite à l'extérieur de la boucle temporelle de l'algorithme de résolution, permettant ainsi un gain significatif en temps de calcul.

Leur influence est évaluée sur le cas particulier d'impact entre deux parallélépipèdes présenté sur la figure 2.3 en reprenant les trois cas étudiés précédemment pour valider l'algorithme : un cas avec matériau souple et vitesse faible (étudié dans le paragraphe 2.2.1), un cas avec matériau souple et grande vitesse (étudié dans le paragraphe 2.2.2) et un cas avec matériau rigide et grande vitesse (étudié dans le paragraphe 2.2.3). Dans chaque cas, une simulation est réalisée en utilisant l'algorithme de contact sans approximation (—), l'algorithme en considérant l'hypothèse 1 (—) et l'algorithme en considérant les hypothèses 1 et 2 (—).

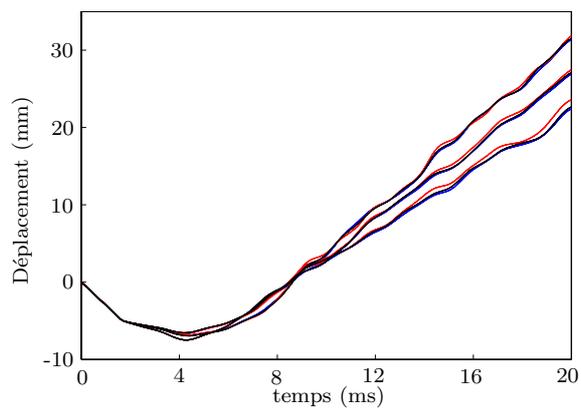
Du fait de l'amplitude des déplacements et des plus grandes durées des phases de contact, le cas associant des matériaux souples et une vitesse relative faible est le cas pour lequel les hypothèses faites sont difficilement justifiables. Les déplacements des nœuds de contrôle du parallélépipède 1 (cf. figure 2.3) sont tracés dans les directions  $\vec{x}$ ,  $\vec{y}$  et  $\vec{z}$  sur les figures 2.7(a), 2.7(b) et 2.7(c). Les déplacements les plus perturbés par la prise en compte des différentes hypothèses sont bien évidemment ceux suivant la direction  $x$ . Les autres déplacements observés ne sont pas modifiés de façon significative par la prise en compte des hypothèses. Pour les deux autres cas



(a) Cas matériau souple et vitesse faible, déplacements  $\mathbf{u}_x$  des nœuds de contrôle.



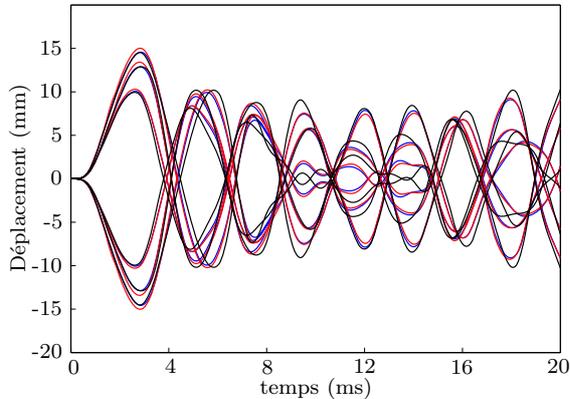
(b) Cas matériau souple et vitesse faible, déplacements  $\mathbf{u}_y$  des nœuds de contrôle.



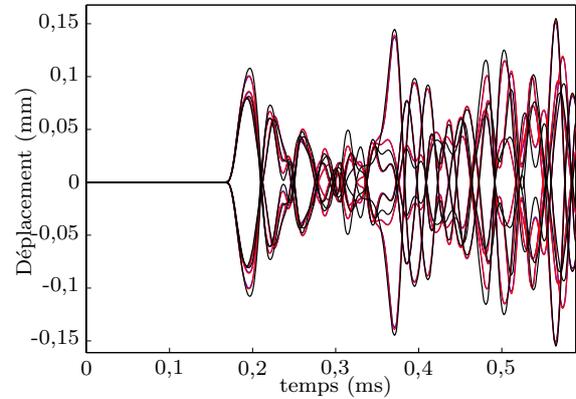
(c) Cas matériau souple et vitesse faible, déplacements  $\mathbf{u}_z$  des nœuds de contrôle.

**Figure 2.7** - Déplacements  $\mathbf{u}_x$ ,  $\mathbf{u}_y$  et  $\mathbf{u}_z$  des nœuds de contrôle du parallélépipède 1 dans le cas d'un matériau souple et d'une faible vitesse relative, sans hypothèse sur la gestion du contact (—), en considérant l'hypothèse 1 (—) et en considérant les hypothèses 1 et 2 (—).

d'étude, seuls les déplacements dans la direction  $\vec{x}$  des nœuds de contrôle sont présentés. En effet, de même que pour le premier cas d'étude, les autres déplacements, suivant les directions  $\vec{y}$  et  $\vec{z}$ , ne sont pas influencés significativement par les hypothèses faites. La comparaison entre les



(a) Cas matériau souple et vitesse élevée, déplacements  $\mathbf{u}_x$  des nœuds de contrôle.



(b) Cas matériau rigide et vitesse élevée, déplacements  $\mathbf{u}_x$  des nœuds de contrôle.

**Figure 2.8** - Déplacements  $\mathbf{u}_x$  des nœuds de contrôle du parallélépipède 1 dans le cas d'une vitesse relative élevée pour un matériau souple ou rigide, sans hypothèse sur la gestion du contact (—), en considérant l'hypothèse 1 (—) et en considérant les hypothèses 1 et 2 (—).

figures 2.7(a) et 2.8(a) laisse apparaître de façon évidente que l'augmentation de la vitesse relative permet de diminuer nettement l'influence des hypothèses faites puisque les déplacements dans la direction  $x$  se superposent bien. En revanche, il semble que la rigidité des matériaux n'ait pas d'influence comme le montre la comparaison entre les figures 2.8(a) et 2.8(b) : dans les deux cas<sup>3</sup> les déplacements suivant la direction  $x$  sont similaires, avec ou sans hypothèse simplificatrice.

## 2.4 Étude de la consistance énergétique du schéma d'intégration

En cohérence avec l'ensemble des études présentées dans ce mémoire, les bilans énergétiques sont effectués pour deux types d'études d'interactions modales : une étude 2D avec des modèles plans de roue aubagée et de carter présentés au chapitre 3 et une étude 3D qui sera exposée au chapitre 4 avec des modèles industriels. Comme dans la plupart des études faisant intervenir une gestion de contact entre structures, l'aspect énergétique est fondamental : il s'agit de déterminer si l'algorithme de contact utilisé permet de conserver l'énergie totale du système au cours du temps. En d'autres termes, les bilans énergétiques permettent de démontrer la validité de l'algorithme utilisé en s'assurant qu'il n'est pas dissipatif.

3. les résultats pour un matériau rigide sont présentés sur une durée beaucoup plus faible car la haute fréquence des vibrations ne permet pas de comparer visuellement les déplacements sur la durée totale de la simulation

Les algorithmes utilisés pour chaque étude ne sont pas rigoureusement identiques, certaines approximations sont faites relativement à la gestion du contact dans le cas 3D (cf. paragraphe 2.3), c'est pourquoi un bilan énergétique est fait pour chacune de ces études. Le bilan énergétique proposé dans cette section admet les simplifications suivantes :

- la non prise en compte des effets centrifuges sur la roue aubagée (ceci est une hypothèse de départ de notre étude) ;
- la non prise en compte de l'énergie cinétique associée à la rotation de la roue aubagée.

### 2.4.1 Cas sans frottement

La valeur du coefficient de frottement  $\mu$  est prise égale à zéro afin d'annuler le travail des forces de frottement. Pour ce cas précis, rien ne s'oppose à la rotation de la roue aubagée au cours du temps. En conséquence l'énergie  $E_\Omega$  nécessaire à sa rotation est constante. L'énergie totale du système  $E_T$  s'écrit

$$E_T(t) = \underbrace{E_{c_{RA}}(t) + E_{d_{RA}}(t) + E_{a_{RA}}(t) + E_\Omega(t)}_{\text{Énergie de la roue aubagée}} + \underbrace{E_{c_{CA}}(t) + E_{d_{CA}}(t) + E_{a_{CA}}(t)}_{\text{Énergie du carter}} = cste \quad (2.15)$$

L'énergie de rotation  $E_\Omega$  étant constante, il vient

$$E_T(t) = \underbrace{E_{c_{RA}}(t) + E_{d_{RA}}(t) + E_{a_{RA}}(t)}_{\text{Énergie de la roue aubagée}} + \underbrace{E_{c_{CA}}(t) + E_{d_{CA}}(t) + E_{a_{CA}}(t)}_{\text{Énergie du carter}} = cste_2 \quad (2.16)$$

où :

- $E_{c_{CA}}(t)$  et  $E_{c_{RA}}(t)$  représentent respectivement les énergies cinétiques du carter et de la roue aubagée ;
- $E_{d_{CA}}(t)$  et  $E_{d_{RA}}(t)$  représentent respectivement les énergies de déformation du carter et de la roue aubagée ;
- $E_{a_{CA}}(t)$  et  $E_{a_{RA}}(t)$  représentent respectivement les énergies dissipées du fait de l'amortissement du carter et de la roue aubagée.

les vecteurs solutions contenant les déplacements du carter et de la roue aubagée à chaque instant  $t_N$  sont respectivement notés  $\mathbf{x}_{CA}(t_N)$  et  $\mathbf{x}_{RA}(t_N)$ . Les énergies cinétiques et de déformation de chaque structure sont calculées à chaque pas de temps

$$\begin{aligned} E_{c_{RA}}(t_N) &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}_{RA}^T(t_N) \mathbf{M}_{RA} \dot{\mathbf{x}}_{RA}(t_N) \\ E_{d_{RA}}(t_N) &= \mathbf{x}_{RA}^T(t_N) \mathbf{K}_{RA} \mathbf{x}_{RA}(t_N) \\ E_{c_{CA}}(t_N) &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}_{CA}^T(t_N) \mathbf{M}_{CA} \dot{\mathbf{x}}_{CA}(t_N) \\ E_{d_{CA}}(t_N) &= \mathbf{x}_{CA}^T(t_N) \mathbf{K}_{CA} \mathbf{x}_{CA}(t_N) \end{aligned} \quad (2.17)$$

Les énergies dissipées par amortissement sont définies par les intégrales

$$\begin{aligned} E_{a_{RA}}(t) &= \int_0^t \dot{\mathbf{x}}_{RA}^T(t) \mathbf{D}_{RA} \dot{\mathbf{x}}_{RA}(t) dt \\ E_{a_{CA}}(t) &= \int_0^t \dot{\mathbf{x}}_{CA}^T(t) \mathbf{D}_{CA} \dot{\mathbf{x}}_{CA}(t) dt \end{aligned} \quad (2.18)$$

Numériquement, ces énergies sont calculées comme suit

$$\begin{aligned} E_{\text{aRA}}(t_N) &= h \sum_{i=0}^n \dot{\mathbf{x}}_{\text{RA}}^T(t_i) \mathbf{D}_{\text{RA}} \dot{\mathbf{x}}_{\text{RA}}(t_i) \\ E_{\text{aCA}}(t_N) &= h \sum_{i=0}^n \dot{\mathbf{x}}_{\text{CA}}^T(t_i) \mathbf{D}_{\text{CA}} \dot{\mathbf{x}}_{\text{CA}}(t_i) \end{aligned} \quad (2.19)$$

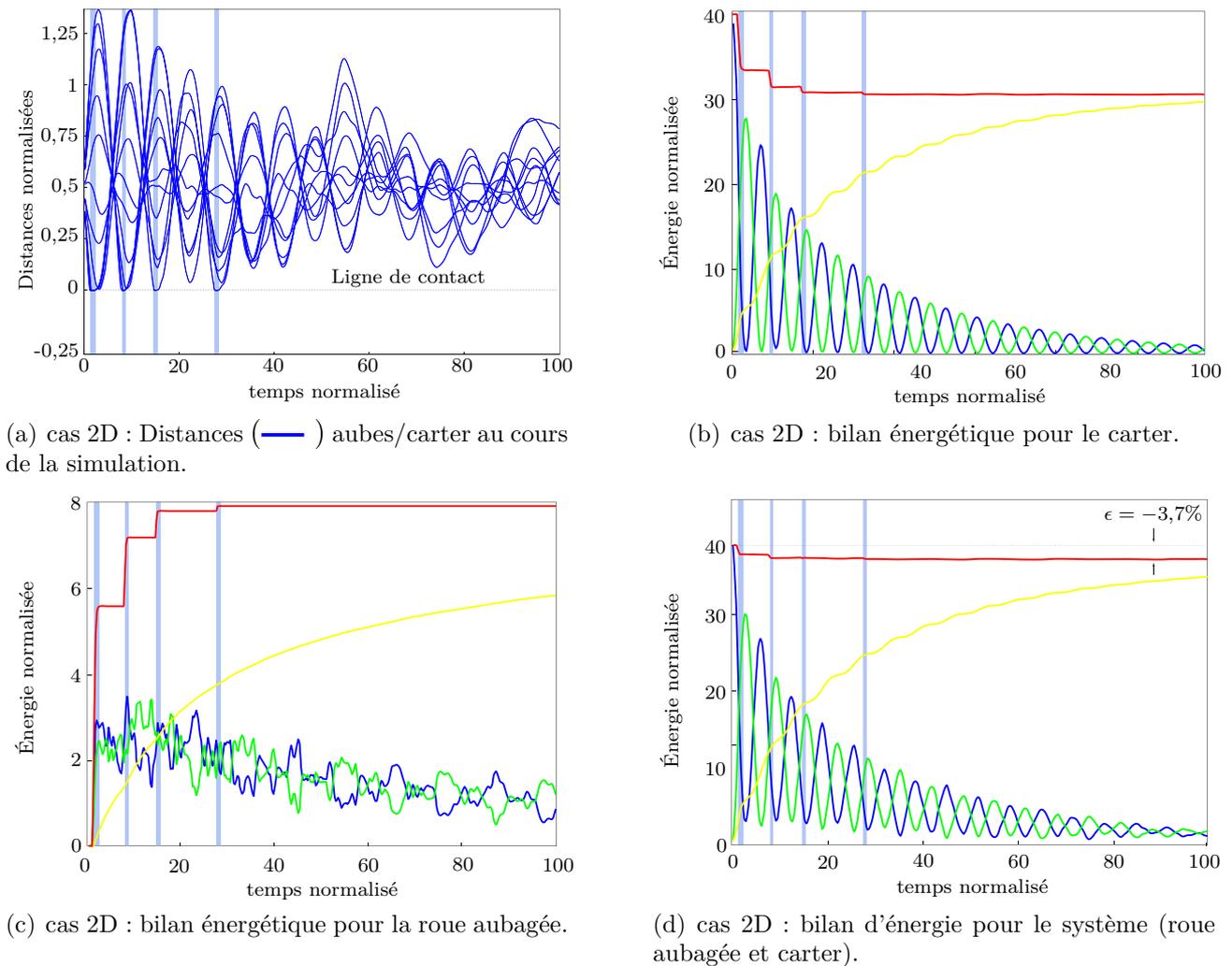
### 2.4.1.1 Cas 2D

Le bilan énergétique est effectué sans restriction cinématique sur le carter, par conséquent c'est le modèle éléments finis de cette structure qui est utilisé dans cette simulation. En revanche, afin de limiter les temps de calculs, une réduction modale de type Craig-Bampton est effectuée sur la roue aubagée : 88 modes sont conservés dans la base de réduction, en accord avec les conclusions de l'étude de convergence qui sera présentée au chapitre 3. Aucun chargement n'est appliqué sur le carter, le choix est fait d'initier son mouvement en imposant des conditions initiales en déplacement suivant un mode à deux diamètres. Ce choix permet d'assurer que l'énergie totale du système doit être constante au cours du temps (aucun apport d'énergie du fait de l'absence de chargement). Les paramètres de la simulation d'interaction sont les suivants :

- vitesse de rotation de la roue aubagée :  $\Omega = 1, 2$  ;
- durée de la simulation : 100 ;
- pas de temps :  $\delta t = 2,5 \cdot 10^{-7}$  s ;
- jeu aube/carter : 0,5 ;
- coefficient d'amortissement de chaque structure :  $\xi_{\text{RA}} = 0,005$  et  $\xi_{\text{CA}} = 0,03$ .

L'évolution des distances aubes/carter pour l'ensemble des aubes de la roue aubagée au cours du temps est exposée sur la figure 2.9(a), l'observation de ces distances permet d'identifier quatre périodes de contact aube/carter au cours de la simulation (zones de couleur bleu clair). Un bilan des énergies relatif à chaque structure est illustré sur les figures 2.9(b) et 2.9(c). Que ce soit pour le carter ou pour la roue aubagée, la somme des énergies de déformation et cinétique décroît au profit de l'énergie absorbée par amortissement. L'énergie totale de chaque structure varie en fonction du temps. Plus précisément, la figure 2.9(b) montre une diminution de l'énergie totale du carter au cours du temps. Cette diminution se fait par palier, chaque chute coïncidant exactement avec une phase de contact. L'énergie du carter est en fait transférée à la roue aubagée du fait du contact, ce que montre l'évolution de l'énergie totale de la roue aubagée, croissante par palier, sur la figure 2.9(c).

À la suite des bilans d'énergie relatifs à chaque structure, un bilan d'énergie pour l'ensemble du système est donné sur la figure 2.9(d). Ce bilan permet de voir que les zones de contact entraînent de très légères pertes d'énergie (baisse de 3,7 % sur l'ensemble de la simulation). La première zone de contact est, à elle seule, responsable de la quasi-totalité de cette perte d'énergie. Or, cette zone est également celle pour laquelle le contact est le plus sévère avec un grand nombre d'aubes au contact avec le carter (8 au total). La sévérité du contact est par ailleurs amplifiée par les approximations des déplacements des têtes d'aubes résultant de la réduction modale de la roue aubagée. En conclusion, la légère diminution d'énergie observée ne



**Figure 2.9** - Bilans d'énergie pour la simulation de contact réalisée sur les modèles 2D : pour chacun de ces bilans, l'énergie totale  $E_T$  (—) est calculée comme la somme des énergies amortie  $E_a$  (—), cinétique  $E_c$  (—) et de déformation  $E_d$  (—). Les zones (—) correspondent aux instants pendant lesquelles une ou plusieurs aubes sont en contact avec le carter et coïncident avec les différentes variations des énergies totales.

semble pas imputable à l'algorithme de contact en tant que tel. La non variation d'énergie sur les autres zones de contact le montre.

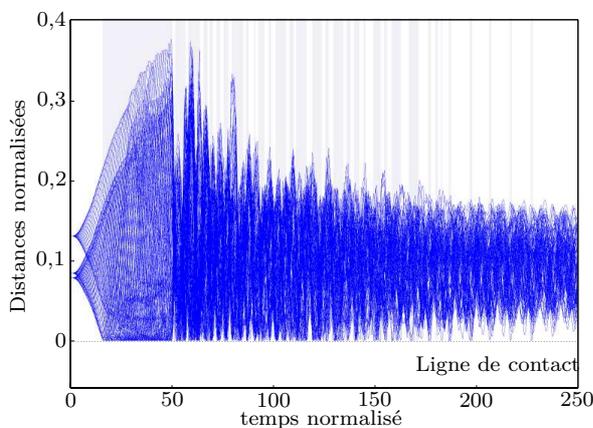
### 2.4.1.2 Cas 3D

Le bilan énergétique réalisé pour la simulation d'interaction 3D repose sur les mêmes hypothèses que pour l'étude précédente : les effets centrifuges sont négligés sur la roue aubagée et on ne prend pas en compte l'énergie cinétique associée à la rotation d'ensemble de la roue aubagée. Le bilan énergétique est donc exactement celui présenté par les équations (2.16) et (2.17). La simulation effectuée est en tout point similaire (pénétration équivalente, coefficients d'amortissement et paramètres de réduction) à la simulation « type » qui sera présentée dans le chapitre 4 à l'exception du temps d'application du chargement et de la vitesse de rotation de

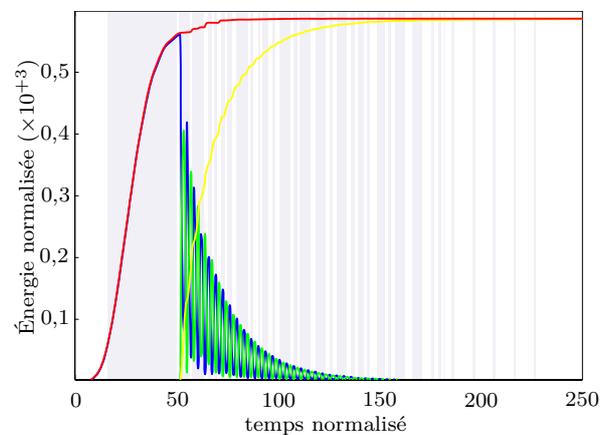
la roue aubagée ici fixée à 5. Il s'avère que pour pouvoir donner un sens au bilan d'énergie, la roue aubagée et le carter doivent être laissés libre d'interagir sans imposer d'effort extérieur. On distingue ainsi deux phases :

- $t = 0$  à  $t = 50$ , un effort est imposé sur le carter (déformation selon un mode à deux diamètres) de façon à initier le contact avec la roue aubagée,
- $t = 50$ , le carter est relâché, les deux structures sont libres d'interagir.

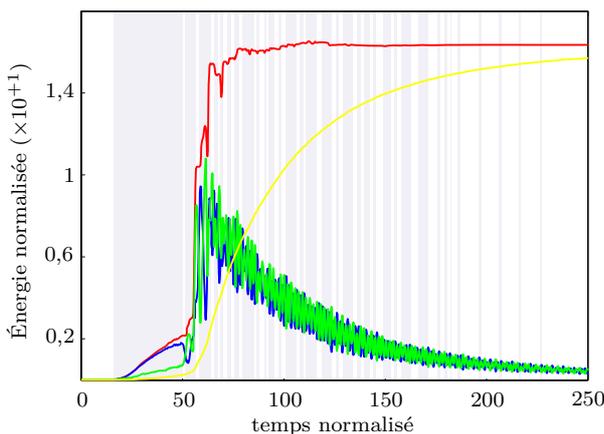
La figure 2.10(a) permet de visualiser l'évolution des distances aubes/carter pour tous les nœuds frontières des 56 aubes de la roue aubagée. Les zones de couleur bleu clair correspondent aux périodes de contact, la diminution de leur fréquence au cours de la simulation traduit l'amortissement des vibrations sur la roue aubagée et sur le carter. Les figures 2.10(b) et 2.10(c)



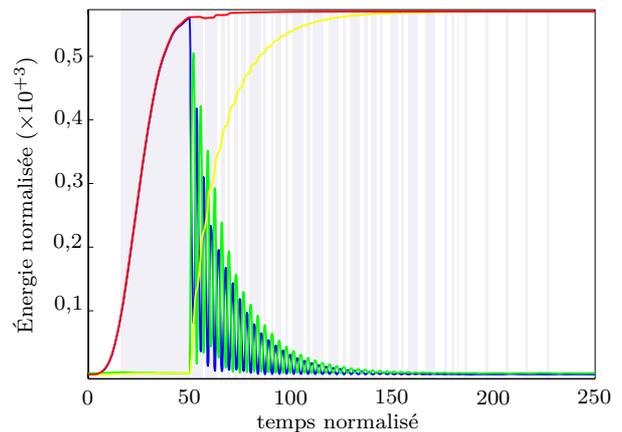
(a) cas 3D : Distances (—) aubes/carter au cours de la simulation.



(b) cas 3D : bilan énergétique pour le carter dans le cas de la simulation 3D.



(c) cas 3D : bilan énergétique pour la roue aubagée dans le cas de la simulation 3D.



(d) cas 3D : bilan d'énergie pour le système (roue aubagée et carter) dans le cas 3D.

**Figure 2.10** - Bilans d'énergie pour la simulation de contact réalisée sur les modèles 3D : pour chacun de ces bilans, l'énergie totale  $E_T$  (—) est calculée comme la somme des énergies amortie  $E_a$  (—), cinétique  $E_c$  (—) et de déformation  $E_d$  (—). Les zones (—) correspondent aux instants pendant lesquelles une ou plusieurs aubes sont en contact avec le carter.

exposent les évolutions des énergies relatives au carter et à la roue aubagée au cours de la simulation. L'énergie totale du carter augmente entre les instants  $t = 0$  et  $t = 50$  du fait du chargement imposé puis se stabilise. Contrairement au cas 2D, les échanges d'énergie entre la roue aubagée et le carter ne sont pas clairement identifiables du fait du grand nombre de contacts et de la différence d'ordre de grandeur entre les énergies ( $E_{TCA} \simeq 25E_{TRA}$ ).

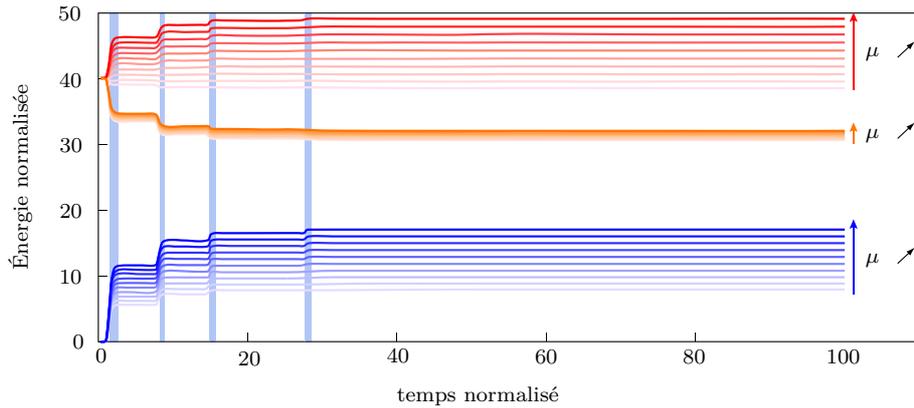
De même que pour les bilans d'énergie précédents, l'évolution de l'énergie totale du système (en rouge sur la figure 2.10(d)) se décompose en deux phases : elle augmente lorsque l'effort est imposé sur le carter puis reste stable sur l'ensemble de la simulation. Une très légère augmentation est visible peu après le relâchement du carter. Globalement, sur l'ensemble de la simulation l'énergie totale du système est stable et permet de montrer que l'algorithme utilisé n'est pas dissipatif.

## 2.4.2 Cas avec frottement

Physiquement, le frottement entre les aubes et le carter s'oppose au mouvement de rotation de la roue, entraînant de la dissipation énergétique et l'énergie totale du système doit diminuer en conséquence. Cette analyse n'est valide que si on considère que la roue aubagée possède une énergie initiale  $E_{\Omega}$  du fait de sa rotation et que cette énergie peut décroître (pertes dues au frottement, transfert d'énergie sur le carter, énergie amortie ...). Nous touchons là les limites de notre analyse énergétique : la vitesse de rotation de la roue étant constante, il n'est pas possible de connaître l'énergie nécessaire à cette rotation lors du frottement aube/carter. Il semble raisonnable de penser que le fait d'imposer une vitesse constante amplifie le mouvement de la tête d'aube lors du contact, augmentant ainsi l'énergie transférée au carter ( $E_{CCA}$  et  $E_{dCA}$ ) et ne rendant pas compte du ralentissement de la roue aubagée ( $E_{cRA}$ ) sous l'effet des forces de frottement. On aboutit ainsi, paradoxalement, au fait que l'augmentation du coefficient de frottement se traduit par une augmentation de l'énergie totale du système roue/carter. Cette hypothèse est corroborée par la figure 2.11 qui permet de voir que l'augmentation d'énergie totale avec le coefficient de frottement provient essentiellement de l'augmentation d'énergie de la roue aubagée. L'analyse de l'influence de la valeur du coefficient de frottement  $\mu$  dans le cas 3D aboutit à des conclusions similaires. Les figure 2.12(a), 2.12(b) et 2.12(c) permettent de mettre en évidence le fait que l'augmentation de l'énergie totale du système accompagnant l'augmentation de la valeur du coefficient de frottement  $\mu$  est essentiellement due à l'augmentation de l'énergie de la roue aubagée.

## 2.5 Problèmes non-linéaires et réduction modale

Le problème défini par l'équation (2.5) est non-linéaire du fait de la non-différentiabilité des termes liés au frottement qui imposent à la solution de passer soudainement de l'état de collement à celui de glissement. Si la méthode classique des éléments finis est habituellement utilisée pour résoudre ce problème, des limites d'ordre informatique (temps de calcul et sto-



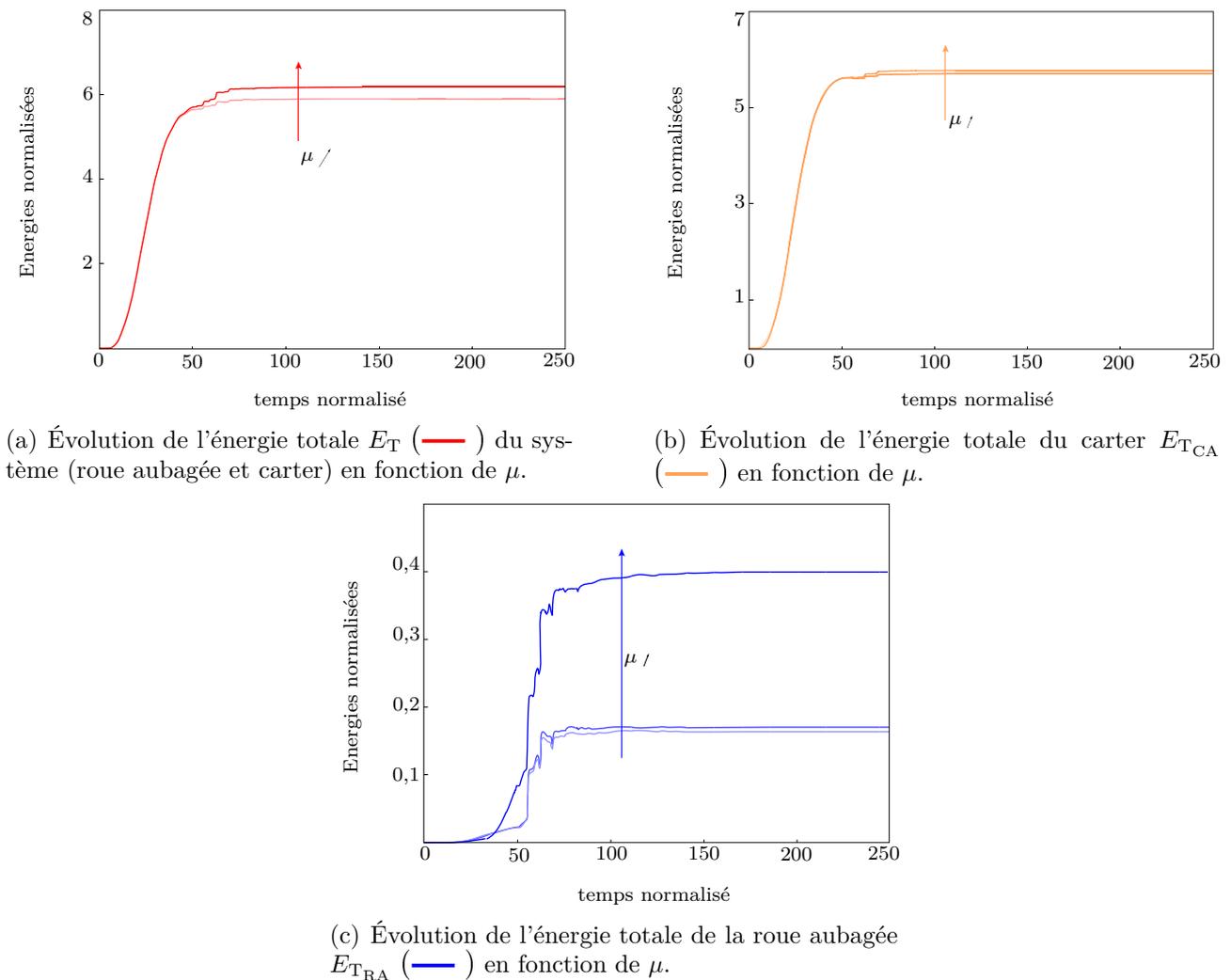
**Figure 2.11** - cas 2D : évolution de l'énergie totale  $E_T$  (—) du système (roue aubagée et carter) en fonction du coefficient de frottement  $\mu$ . Les évolutions des énergies totales du carter  $E_{T_{CA}}$  (—) et de la roue aubagée  $E_{T_{RA}}$  (—) permettent d'observer que l'évolution du coefficient de frottement se traduit essentiellement par une augmentation de l'énergie totale de la roue aubagée. Les zones (—) correspondent aux instants pendant lesquelles une ou plusieurs aubes sont en contact avec le carter.

ckage) nous empêchent d'envisager l'utilisation de cette méthode pour des modèles contenant un grand nombre de ddls tels que les modèles industriels de roue aubagée et de carter. Le choix a été fait de réduire les modèles éléments finis en utilisant des méthodes de réduction modale (CMS, *Component Mode Synthesis*). Ces méthodes ont été détaillées dans le chapitre 1 pour pouvoir réduire des modèles éléments finis linéaires [43], [20], [71], leur combinaison à un algorithme de contact ne va donc pas de soi et doit être validée.

### 2.5.1 Réduction de modèles non-linéaires

Les premières références trouvées dans la littérature dans lesquelles des méthodes de réduction modale sont appliquées à la résolution de problèmes non-linéaires datent du début des années 1980. Ces premières études portent sur le comportement vibratoire des arbres de rotation [31], [61] et [62] (l'étude proposée dans [62] étant une généralisation à un cas non-linéaire de [31] et [61]) et la prise en compte de caractéristiques non-linéaires de ces structures qui sont réduites grâce à la méthode de Craig-Bampton [19]. La réduction de modèles non-linéaires à l'aide de méthodes de réduction modale a également été faite dans d'autres domaines tels que le suivi et le diagnostic de machines industrielles [45], l'industrie informatique [77], l'industrie micro-mécanique [52] ou encore l'industrie automobile [74]. Dans tous les cas, les modèles étudiés sont non-linéaires et les auteurs montrent la bonne précision des résultats obtenus sous certaines hypothèses simplificatrices avec l'utilisation de méthodes de réduction modale en soulignant le gain considérable en temps de calcul.

Une étude attentive des références bibliographiques sur l'application des méthodes de réduction modale à des problèmes non-linéaires montre que seules un petit nombre d'entre elles ne sont pas associées à l'étude de structures tournantes dans l'aéronautique. C'est en effet dans ce domaine précis que de nombreux travaux ont été réalisés. Des méthodes de réduction modale ont été développées de façon à tenir compte de la non-linéarité des structures grâce au



**Figure 2.12** - cas 3D : Évolution de l'énergie totale  $E_T$  (—) du système (roue aubagée et carter) et des énergies totales du carter  $E_{T_{CA}}$  (—) et de la roue aubagée  $E_{T_{RA}}$  (—) en fonction de  $\mu$ .

calcul de modes normaux non-linéaires (NNM, *Nonlinear Normal Modes*) [2], [3]. L'emploi de ces modes non-linéaires est actuellement l'objet de plusieurs travaux parmi lesquels on peut citer [4] et [44].

## 2.5.2 Réduction modale et contact

Le caractère non-linéaire d'un problème peut ne pas être associé à la nature des modèles mais au type de simulation réalisée comme lorsqu'une raideur non-linéaire est prise en compte ou, comme dans le cas de notre étude, qu'un cas de contact est étudié. Il existe quelques études et notamment des thèses de doctorat réalisées en lien avec la société Snecma.

A notre connaissance, les premières études publiées sur l'utilisation de méthodes de réduction modale pour étudier des cas de contact ou d'impact remontent à 1990 [76]. Cette étude constitue pour partie la base théorique d'autres études d'impact sur poutres notamment [25] et [27]. Une

autre étude similaire d'impact [73] a été réalisée plus récemment. Pour chacune de ces trois études, les auteurs utilisent une loi de Hertz [38] [33] pour la gestion d'impact. La méthode CMS utilisée n'est pas toujours explicitée, il s'agit souvent d'une troncature modale avec dans le cas de [73] (étude dont les résultats obtenus avec le modèle réduit sont directement comparés à des résultats expérimentaux) ajout des modes de flexibilité résiduelle pour approcher au mieux le comportement dynamique des ddls linéaires réduits. Dans tous les cas, les résultats présentés montrent une très bonne convergence des résultats avec un faible nombre de modes dans la base de réduction. Toutefois, les résultats [27] semblent montrer que l'utilisation d'une méthode CMS tend à sous-évaluer les efforts de contact, relativement à la taille du modèle. Un très grand nombre de modes semble nécessaire pour pallier à cet inconvénient.

Plus récemment, plusieurs thèses de doctorat ont combiné avec succès des méthodes de réduction CMS (le plus souvent c'est la méthode de Craig-Bampton qui est choisie du fait de son implémentation dans le code Samcef) avec des algorithmes de contact. Ces thèses ont porté sur le frottement en pied d'aube [60] [17] et sur la modélisation de dispositifs d'amortissement par frottement sec [64]. Elles ont pour point commun de considérer des modèles industriels de plusieurs centaines de milliers de ddls qui ne peuvent être étudiés avec la méthode classique des éléments finis. La réduction modale n'occupant pas un rôle central dans tous ces travaux, les critères de convergence des modèles réduits ne sont pas toujours explicités. Dans le cas [17], la base de réduction est choisie de telle sorte que les fréquences propres obtenues pour deux modes spécifiques soient très proches de celles obtenues avec le modèle éléments finis avec un écart de l'ordre de 0,2 %.

### 2.5.3 Procédure de validation

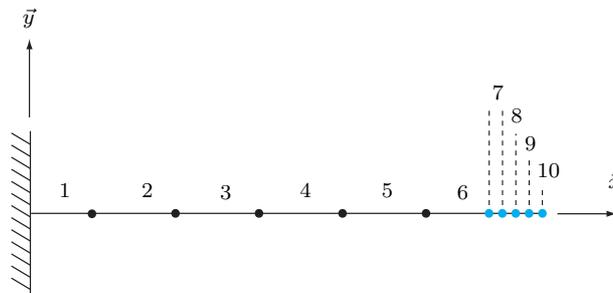
Les différentes références bibliographiques et descriptions données dans les précédents paragraphes montrent que l'utilisation de méthodes de réduction modale linéaires pour la résolution de problèmes non-linéaires ne constitue pas une nouveauté mais seul un nombre restreint de publications est disponible. D'autre part, compte tenu de la sévérité des cas de contact rencontrés dans notre étude (provenant essentiellement des vitesses relatives très élevées entre la roue aubagée et le carter) il paraît nécessaire de valider numériquement la combinaison de méthodes de réduction modale avec l'algorithme de contact décrit dans ce chapitre.

Il est proposé de valider progressivement cette combinaison. (1) Tout d'abord un modèle « académique » de poutre encastree est étudié. Deux simulations non-linéaires sont mises en œuvre l'une en considérant une non-linéarité cubique et l'autre en gérant le contact en extrémité de la poutre. Les résultats obtenus pour les deux simulation et pour chaque méthode de réduction considérée (méthode de Craig-Bampton et méthode de Craig-Martinez) sont comparés à ceux du modèle éléments finis. Outre la comparaison et l'évaluation des méthodes de réduction, ce cas simple a pour mérite de mettre en évidence certaines limitations de l'algorithme de contact. (2) Une étude similaire sur les modèles 2D de roue aubagée et de carter est menée avec les deux méthodes de réduction. Cette étude, qui sera présentée en première partie du

chapitre 3, permet de confirmer la qualité des modèles réduits en montrant la convergence des résultats vers ceux obtenus avec les modèles éléments finis. L'étude de convergence est menée pour différents régimes d'interaction (régimes amorti, entretenu et bloqué) permettant ainsi de vérifier la convergence des méthodes de condensation pour des régimes sensibles et délicats à simuler. (3) Enfin, une étude est menée sur les modèles industriels 3D en première partie du chapitre 4, elle vise à comparer les résultats obtenus pour les deux méthodes de réduction. Cette comparaison est faite après validation de la convergence des différents modèles.

## 2.6 Réduction modale et modèle non-linéaire simple

Les études menées précédemment ont permis de montrer la bonne convergence des modèles réduits des structures industrielles vers les modèles éléments finis en termes de fréquences propres et de modes propres. Toutefois, le choix de ces méthodes de réduction modale (méthode de Craig-Bampton et méthode de Craig-Martinez) repose sur l'hypothèse que des méthodes de réduction modale linéaires sont adaptées à la simulation de cas de contact. Si les méthodes de réduction modale sont séduisantes de par leur simplicité de mise en œuvre, leurs performances dans des situations non-linéaires restent à établir, ce qui constitue l'objectif principal de l'exemple suivant. Cette étude se propose de montrer la convergence des simulations avec modèles réduits vers les résultats obtenus grâce au modèle éléments finis non réduit dans le cas d'une structure simple : une poutre encastrée, et pour deux types de non-linéarités : une non linéarité cubique provenant d'un ressort non-linéaire et un cas de contact. La poutre étudiée



**Figure 2.13** - Représentation du maillage de la poutre étudiée.

est représentée sur la figure 2.13, elle se compose de 10 éléments finis poutres de type Euler-Bernoulli à 3 ddl ( $u$ ,  $v$  et  $\theta$ ) 3 par nœuds et est encastrée à son extrémité gauche ( $x = 0$ ). Les 6 premiers éléments (numérotés 1 à 6) sont de longueur  $l_1 = 10/64$  m, les éléments numérotés 7 à 10 sont de longueur  $l_2 = 1/64$  m. Dans la dernière partie de cette étude le dernier élément numéroté 10 a une longueur variable  $l_v \in [0,001\text{m}; 1\text{m}]$  afin de pouvoir évaluer la proximité des modes d'attache calculés sur des nœuds voisins. Les paramètres matériaux de la poutre sont les mêmes pour toutes les études menées avec non-linéarité cubique et gestion du contact et sont résumés dans le tableau 2.1.

Paramètres	Poutre
module d'Young (MPa)	$E = 2,1 \cdot 10^5$
masse volumique ( $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ )	$\rho = 7800$
épaisseur (m)	$h = 0,01$
largeur (m)	$w = 0,1$
nombre de ddls	$n_{ddl} = 30$
amortissement modal	$\xi = 0,008$

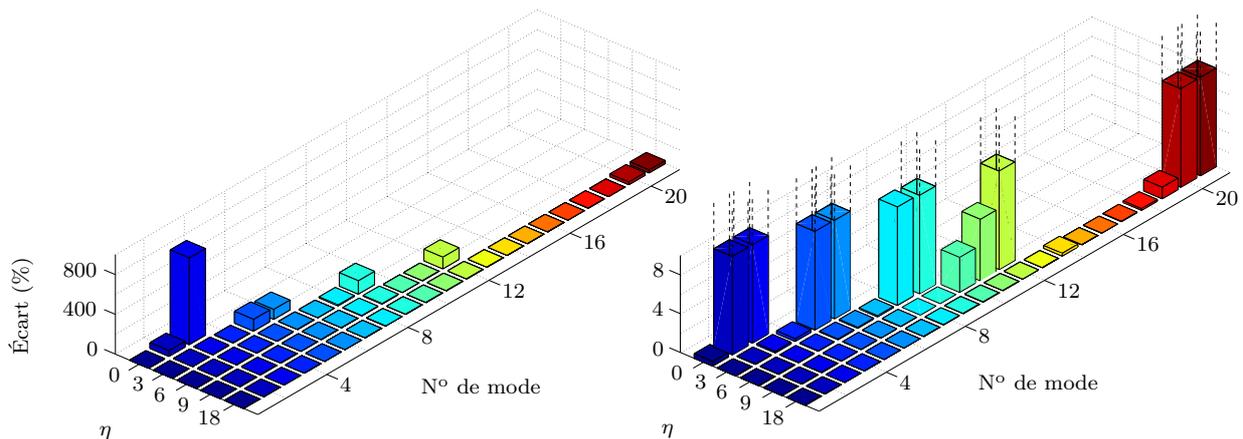
**Tableau 2.1** - Propriétés matériaux et géométrie de la poutre.

## 2.6.1 Réduction modale et validation

La méthode de Craig-Chang-Martinez est particulièrement inadaptée à une structure de type poutre comme le montre l'étude menée en fin de section sur la proximité des modes d'attache. L'origine des problèmes observés est un mauvais conditionnement des matrices masse et raideur des modèles réduits. Afin d'éviter des problèmes numériques et de simplifier la réduction modale, la poutre est réduite en utilisant les méthodes de Craig-Bampton et de Craig-Martinez (toutes deux définies dans le chapitre 1). La convergence des modèles réduits est vérifiée à l'aide de deux critères : le calcul des résidus en énergie de déformation et l'écart relatif entre les fréquences propres du modèle éléments finis et des modèles réduits pour différentes bases de réduction.

### 2.6.1.1 Convergence du modèle réduit par méthode de Craig-Bampton

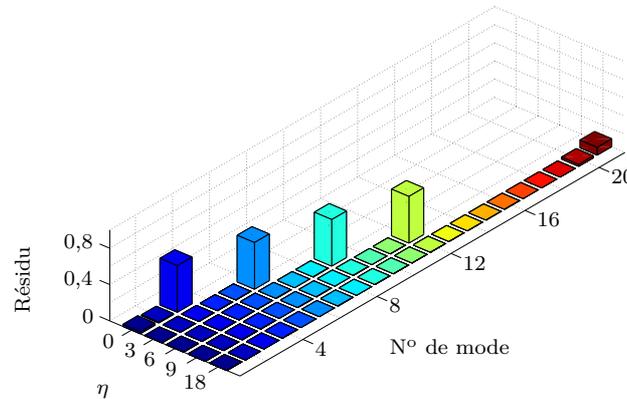
La frontière de réduction modale est constituée uniquement du nœud 10 pour les deux modèles réduits. dans le cas de la réduction de Craig-Bampton, il y a donc 3 modes statiques (relativement aux ddls  $x$ ,  $y$  et  $\theta$  du nœud 10) et  $\eta$  modes encastrés. Les figures 2.14 et 2.15



**Figure 2.14** - Écart entre les fréquences propres des modèles réduits par méthode de Craig-Bampton calculés pour différentes valeurs de  $\eta$  et les fréquences du modèle éléments finis (un agrandissement pour les écarts entre 0 et 8% permet de mieux visualiser les petits écarts).

montrent l'évolution de l'écart entre fréquences propres et des résidus lorsque la base modale de réduction est enrichie, c'est-à-dire lorsque le paramètre  $\eta$  augmente. Les deux critères permettent de voir la convergence du modèle réduit vers le modèle éléments finis. Pour chaque

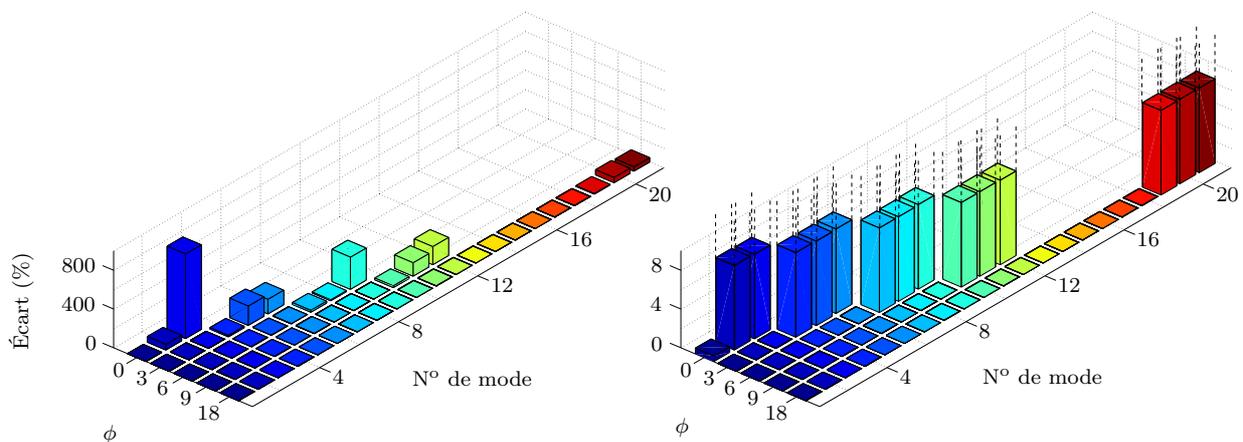
base modale considérée, le système réduit comporte  $(\eta + 3)$  ddls. Quelle que soit la valeur de  $\eta$ , les trois dernières fréquences propres (rangées par ordre croissant) présentent un écart significatif (supérieur à 1%) par rapport aux fréquences du modèle éléments finis. Des observations similaires sont faites relativement aux résidus en énergie de déformation.



**Figure 2.15** - Résidu en énergie de déformation pour chaque mode propre des modèles réduits par méthode de Craig-Bampton calculés pour différentes valeurs de  $\eta$ .

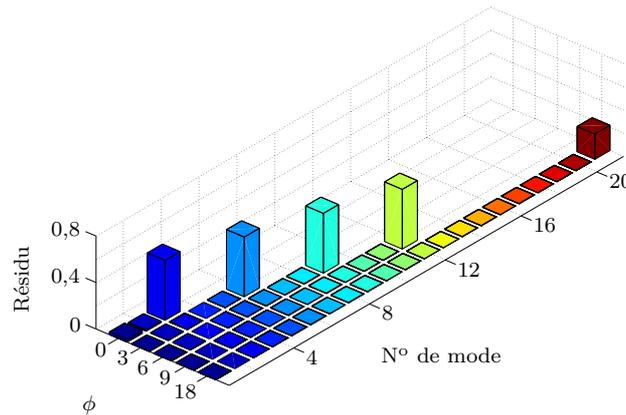
### 2.6.1.2 Convergence du modèle réduit par méthode de Craig-Martinez

De même que dans le paragraphe précédent, la frontière de réduction est constituée uniquement du nœud 10. Le nombre de modes libres conservés dans la base de réduction est noté  $\phi$ . Les deux critères considérés : l'écart des fréquences propres (représenté en fonction de la valeur



**Figure 2.16** - Écart entre les fréquences propres des modèles réduits par méthode de Craig-Martinez calculés pour différentes valeurs de  $\phi$  et les fréquences du modèle éléments finis (un agrandissement pour les écarts entre 0 et 8% permet de mieux visualiser les petits écarts).

de  $\phi$  sur la figure 2.16) et l'évolution des résidus (également représentés en fonction de la valeur de  $\phi$  sur la figure 2.17) montrent la convergence du modèle réduit vers le modèle éléments finis. Quelle que soit la méthode de réduction utilisée, la convergence vers zéro des résidus en énergie de déformation prouve que les  $(\eta + 3)$  (ou  $(\phi + 3)$  selon la méthode considérée) modes propres du modèle réduit convergent effectivement vers les modes propres du modèle éléments finis, le

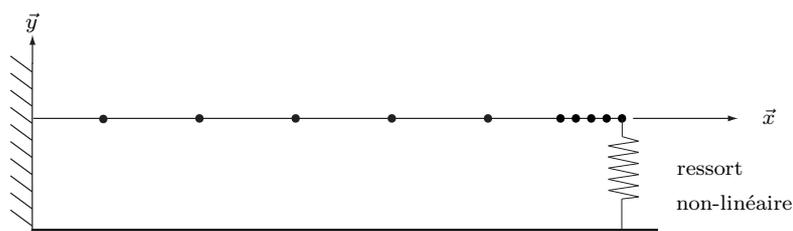


**Figure 2.17** - Résidu en énergie de déformation pour chaque mode propre des modèles réduits par méthode de Craig-Martinez calculés pour différentes valeurs de  $\phi$ .

fait que les  $(\eta + 3)$  ou  $(\phi + 3)$  fréquences propres du modèle réduit convergent vers les premières fréquences propres du modèle éléments finis prouve finalement que les  $(\eta + 3)$  ou  $(\phi + 3)$  modes propres obtenus convergent bien vers les premiers modes propres du modèle éléments finis. Les figures 2.14, 2.15, 2.16 et 2.17 ne permettent pas de distinguer clairement les deux méthodes de réduction utilisées du fait, très vraisemblablement, de la simplicité de la structure étudiée.

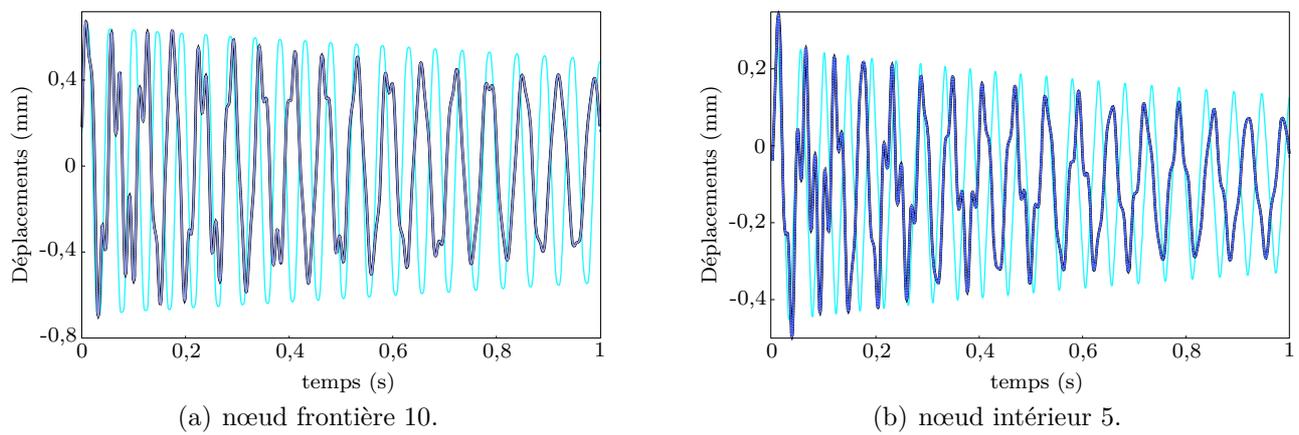
### 2.6.2 Poutre avec non-linéarité cubique

Un ressort non linéaire (non linéarité cubique, la tension  $T$  dans le ressort étant donnée par la relation  $T\vec{y} = ka^3\vec{y}$  avec  $a$  l'allongement du ressort et  $k$  la raideur du ressort) est positionné entre l'extrémité non encastree de la poutre et un socle fixe, il agit suivant la direction  $\vec{y}$  comme le montre la figure 2.18. L'extrémité non-encastree de la poutre est éloignée de sa position d'équilibre par sollicitation du premier mode de flexion de la poutre, celle-ci est ensuite laissée libre d'osciller au cours du temps. Outre le modèle éléments finis, dix modèles réduits sont



**Figure 2.18** - Représentation de la non linéarité cubique introduite sur la structure étudiée.

évalués correspondant à cinq valeurs des paramètres  $\eta$  et  $\phi$  : 0, 3, 6, 9 et 18. La convergence des déplacements observés sur les modèles réduits vers les déplacements de la solution éléments finis est vérifiée sur le ddl  $y$  du nœud intérieur 5 (figure 2.19(b) pour la méthode de Craig-Bampton et figure 2.20(b) pour la méthode de Craig-Martinez) ainsi que sur le ddl  $y$  du nœud frontière 10 (figure 2.19(a) pour la méthode de Craig-Bampton et figure 2.20(a) pour la méthode de Craig-Martinez). Le choix de ce nœud intérieur est arbitraire, il a l'avantage d'être proche de la zone de déplacement maximal permettant ainsi d'observer des déplacements d'amplitude

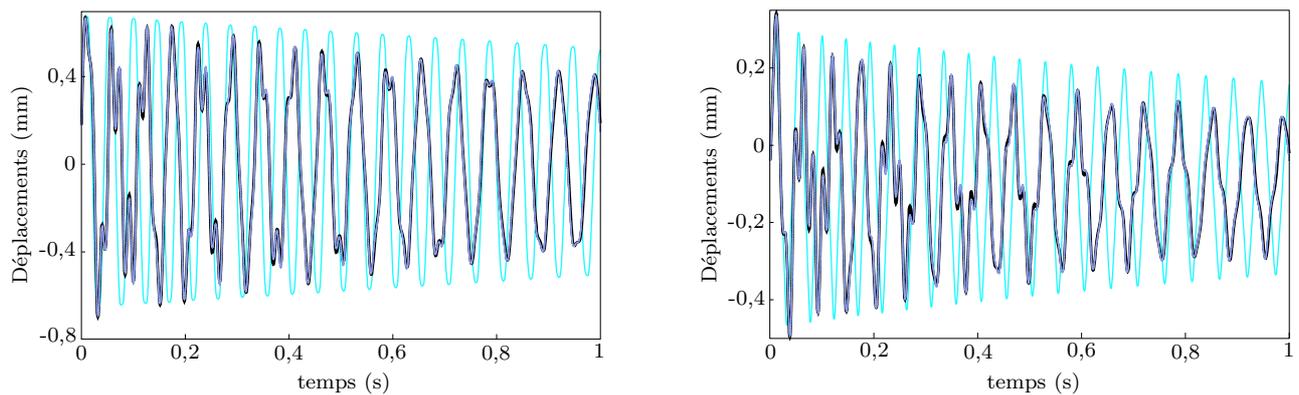


**Figure 2.19** - Déplacements pour le modèle Craig-Bampton avec  $\eta = 0$  (— cyan);  $\eta = 3$  (--- blue);  $\eta = 6$  (— blue);  $\eta = 9$  (..... cyan);  $\eta = 18$  (— black) et éléments finis (— black).

significative mais des résultats parfaitement similaires sont observés sur tous les autres nœuds intérieurs de la poutre. Dans le cas des modèles réduits par méthode de Craig-Bampton, dès que le paramètre  $\eta$  vérifie

$$\eta \geq 3 \quad (2.20)$$

les courbes obtenues se superposent presque parfaitement à la solution éléments finis. Aucun déphasage temporel n'est observé entre les modèles réduits et le modèle éléments finis, les amplitudes des déplacements obtenus sur les nœuds intérieur et frontière correspondent parfaitement. Les conclusions sont exactement similaires quant aux modèles réduits par la méthode de Craig-Martinez. Cette étude nous permet de vérifier que les méthodes de réduction modale li-



(a) Déplacements du nœud 10 de la poutre obtenu pour différentes bases modales (méthode de Craig-Martinez) et avec le modèle éléments finis.

(b) Déplacements du nœud intérieur 5 de la poutre obtenu pour différentes bases modales (méthode de Craig-Martinez) et avec le modèle éléments finis.

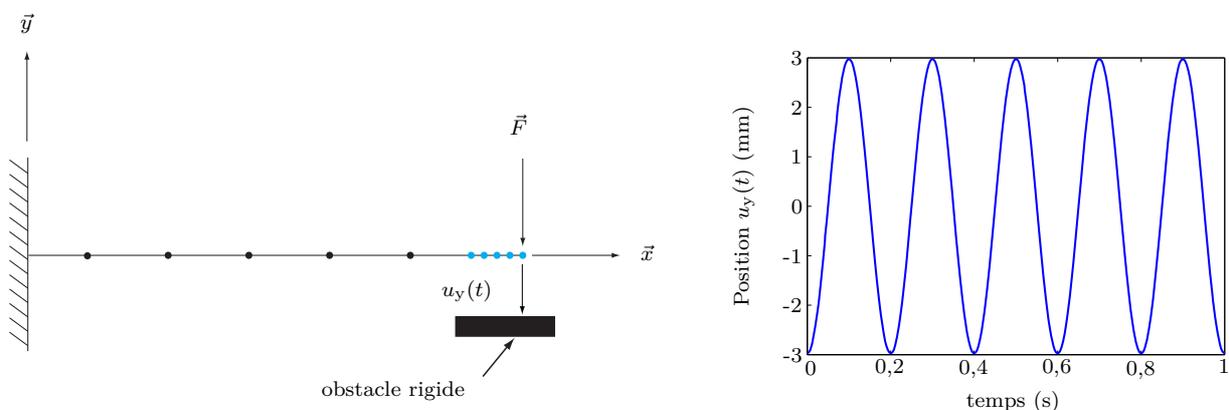
**Figure 2.20** - Déplacements obtenus sur des nœuds intérieur et frontière au cours du temps pour les différents modèles considérés (Craig-Martinez et éléments finis) :  $\phi = 0$  (— cyan);  $\phi = 3$  (--- blue);  $\phi = 6$  (— blue);  $\phi = 9$  (..... cyan);  $\phi = 18$  (— black) et EF (— black).

néaires telles que les méthodes de Craig-Bampton et de Craig-Martinez permettent de converger

très rapidement vers la solution éléments finis d'une simulation comportant une non-linéarité cubique.

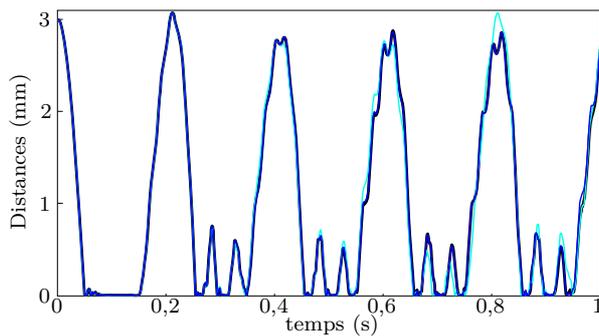
### 2.6.3 Poutre avec contact

La non-linéarité cubique est maintenant remplacée par un obstacle rigide horizontal dont la position  $u_y(t)$  selon l'axe  $\vec{y}$  est variable : le contact entre la poutre et cet obstacle est géré les nœuds 6 à 10 de la poutre. À l'instant  $t = 0$  l'obstacle rigide se met en mouvement, il est alors à 3 mm de la poutre ( $u_y(0) = -3$ ) puis il oscille autour de la position  $u_y = 0$  avec une amplitude de 6 mm et une fréquence de 5 Hz. La position de l'obstacle au cours du temps est visible sur la figure 2.21. Le déplacement de l'obstacle rigide permet d'initier le contact avec

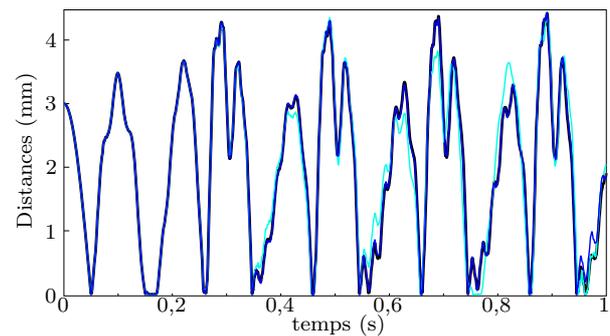


**Figure 2.21** - Représentation de la poutre et de l'obstacle ainsi que de l'évolution de l'amplitude  $F$  du chargement appliqué sur le nœud 10 de la poutre, selon la direction  $y$ , au cours du temps.

la poutre, la simulation est effectuée sur une durée de 1 s, période sur laquelle la poutre vibre en fonction des contacts avec l'obstacle. Le pas de temps choisi est  $\delta t = 5 \cdot 10^{-7}$  s, ce choix résulte d'une étude de convergence résumée sur la figure 2.22. Dans le cadre de cette étude, on s'intéresse aux déplacements du ddl  $y$  des nœuds 6 et 10 qui correspondent aux deux extrémités de la zone de contact sur la poutre. Les courbes tracées sur les figures 2.23(a), 2.23(b), 2.24(a) et 2.24(b) montrent la convergence des déplacements obtenus pour les différents modèles réduits vers les déplacements obtenus avec le modèle éléments finis lorsque la base de réduction est enrichie. De même que pour l'étude menée avec une non-linéarité cubique, on n'observe pas de différence nette entre les méthodes de Craig-Bampton et de Craig-Martinez. La convergence est par ailleurs très rapide puisque pour les deux méthodes, six modes sont suffisants pour obtenir une bonne approximation des résultats obtenus avec le modèle éléments finis non réduit. Les conclusions quant à la convergence des modèles réduits vers le modèle éléments finis sont les mêmes que celles déjà faites dans le cas de l'étude avec non-linéarité cubique. Les méthodes de réduction modale de Craig-Bampton et de Craig-Martinez permettent donc, sur ce cas simple de contact, de converger rapidement vers la solution éléments finis.

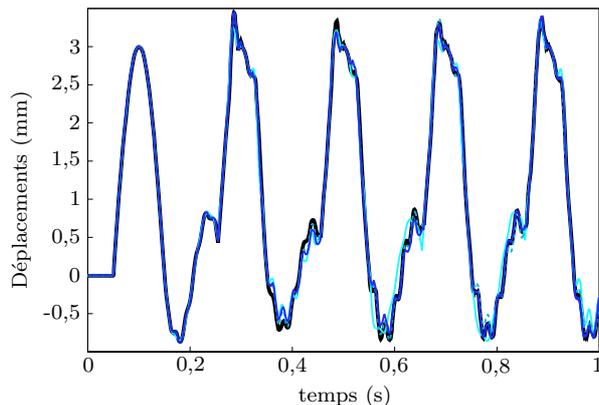


(a) Déplacements du nœud 6 de la poutre obtenu pour différents pas de temps avec le modèle éléments finis.

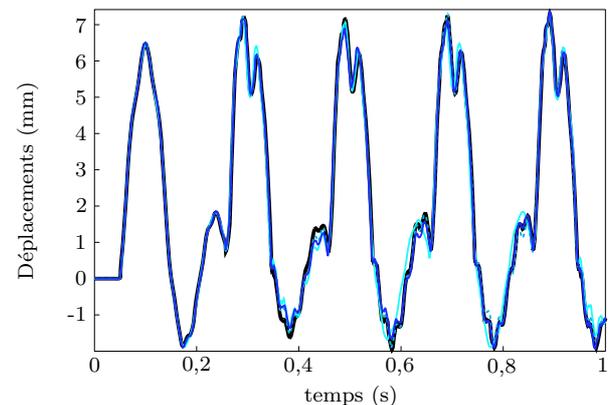


(b) Distance poutre/obstacle au niveau du nœud 10 différents pas de temps avec le modèle éléments finis.

**Figure 2.22** - Distances poutre/obstacle en deux nœuds de la poutre pour différents pas de temps :  $\delta t = 5 \cdot 10^{-6}$  s (—);  $\delta t = 1 \cdot 10^{-6}$  s (—);  $\delta t = 5 \cdot 10^{-7}$  s (—). Pour un pas de temps inférieur à  $\delta t = 5 \cdot 10^{-7}$  s tels que  $\delta t = 2,5 \cdot 10^{-7}$  s,  $\delta t = 1 \cdot 10^{-7}$  s et  $\delta t = 5 \cdot 10^{-8}$  s les courbes se superposent et aucune différence n'est visible.



(a) Déplacements du nœud 6 de la poutre obtenu pour différentes bases modales (méthode de Craig-Bampton) et avec le modèle éléments finis.

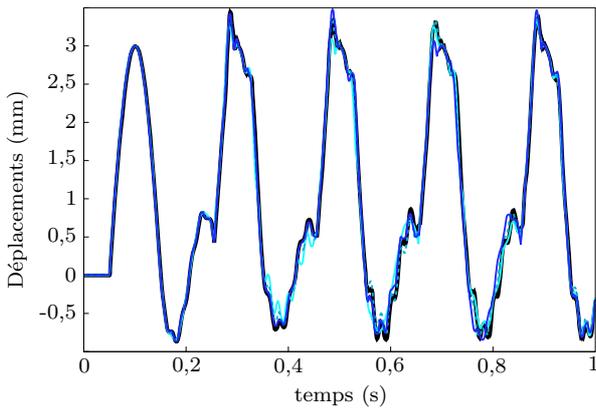


(b) Déplacements du nœud 10 de la poutre obtenu pour différentes bases modales (méthode de Craig-Bampton) et avec le modèle éléments finis.

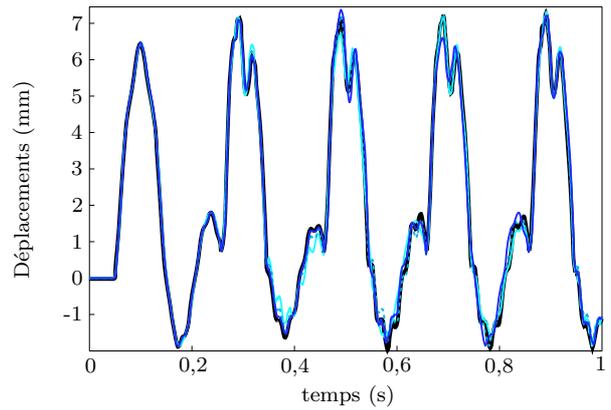
**Figure 2.23** - Déplacements obtenus sur les nœuds à chaque extrémité de la zone de contact au cours du temps pour les différents modèles considérés (Craig-Bampton et éléments finis) :  $\eta = 0$  (—);  $\eta = 3$  (---);  $\eta = 6$  (—) et EF (—).

## 2.7 Problèmes numériques relatifs aux modes d'attache

Les modes d'attache peuvent être vus comme le complément idéal d'une base de réduction modale à interfaces libres. De par leur nature, ils représentent la base vectorielle sur laquelle peut se décomposer tout chargement appliqué sur la frontière de la structure réduite. Malheureusement leur utilisation entraîne très souvent des problèmes numériques importants. En effet, le problème est que les modes d'attache peuvent être très proches les uns des autres. Les problèmes rencontrés avec l'utilisation de ces modes dans le cadre de notre étude sont associés dans la plupart des cas à un mauvais conditionnement des matrices masse et raideur réduites. La conséquence directe de ce mauvais conditionnement est la grande instabilité numérique des



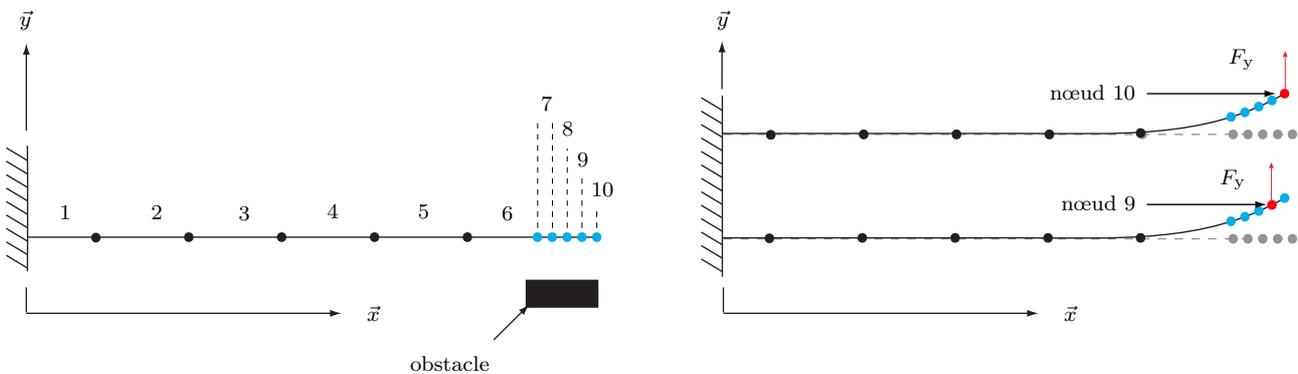
(a) Déplacements du nœud 6 de la poutre obtenu pour différentes bases modales (méthode de Craig-Martinez) et avec le modèle éléments finis.



(b) Déplacements du nœud 10 de la poutre obtenu pour différentes bases modales (méthode de Craig-Martinez) et avec le modèle éléments finis.

**Figure 2.24** - Déplacements obtenus sur les nœuds à chaque extrémité de la zone de contact au cours du temps pour les différents modèles considérés (Craig-Martinez et éléments finis) :  $\phi = 0$  (—);  $\phi = 3$  (- - -);  $\phi = 6$  (—) et EF (—).

simulations. Prenons l'exemple d'une poutre dont le maillage à l'extrémité serait raffiné afin de pouvoir, par exemple, optimiser la gestion d'un contact éventuel (voir figure 2.25). Si les 5 nœuds frontières choisis sont très proches (en bleu sur la figure 2.25), alors les déformées statiques pour des efforts unitaires appliqués dans une même direction sur des nœuds voisins ou très proches seront très voisines. L'étude de la proximité mathématique des modes d'attache



**Figure 2.25** - Représentation d'un cas simple de structure pour laquelle les modes d'attache calculés sont mathématiquement très similaires.

a été faite dans le cas de la structure présentée sur la figure 2.25. La poutre se compose de 10 éléments finis poutres de type Euler-Bernoulli à trois ddl ( $u$ ,  $v$  et  $\theta$ ) par nœuds et est encastée à son extrémité gauche ( $x = 0$ ). Les 6 premiers éléments (numérotés 1 à 6) sont de longueur  $l_1 = 10/64$  m, les éléments numérotés 7 à 9 sont de longueur  $l_2 = 1/64$  m et le dernier élément numéroté 10 est de longueur variable  $l_v \in [0,001 \text{ m}; 1 \text{ m}]$ .

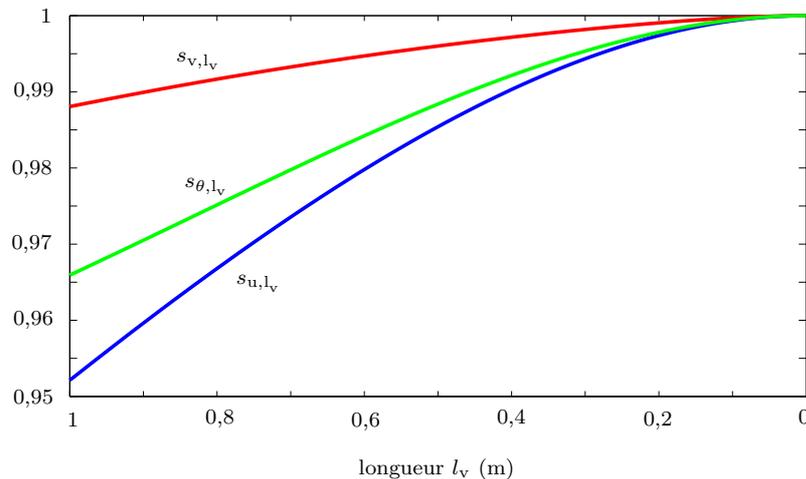
Le but de l'étude est de comparer mathématiquement les modes d'attache obtenus pour les nœuds 9 et 10 en calculant le produit scalaire des deux modes d'attache relatifs au même ddl ( $u$ ,  $v$  ou  $\theta$ ) en fonction de la longueur  $l_v$  de l'élément 10.

Pour cela, on note :  $\mathbf{P}_{u,l_v}(n)$  le mode d'attache calculé pour le ddl  $u$  sur le nœud  $n$  et pour la longueur d'élément 10 qui est  $l_v$ . On s'intéresse aux quantités  $s_{u,l_v}$ ,  $s_{v,l_v}$  et  $s_{\theta,l_v}$  définies par

$$\begin{aligned} s_{u,l_v} &= \frac{\mathbf{P}_{u,l_v}^T(9) \cdot \mathbf{P}_{u,l_v}(10)}{\|\mathbf{P}_{u,l_v}^T(9)\| \cdot \|\mathbf{P}_{u,l_v}(10)\|} \\ s_{v,l_v} &= \frac{\mathbf{P}_{v,l_v}^T(9) \cdot \mathbf{P}_{v,l_v}(10)}{\|\mathbf{P}_{v,l_v}^T(9)\| \cdot \|\mathbf{P}_{v,l_v}(10)\|} \\ s_{\theta,l_v} &= \frac{\mathbf{P}_{\theta,l_v}^T(9) \cdot \mathbf{P}_{\theta,l_v}(10)}{\|\mathbf{P}_{\theta,l_v}^T(9)\| \cdot \|\mathbf{P}_{\theta,l_v}(10)\|} \end{aligned} \quad (2.21)$$

Les quantités définies sont simplement des produits scalaires. Un produit scalaire égal à 1 indique que les vecteurs sont colinéaires, l'espace vectoriel engendré par ces deux modes est alors de dimension 1.

La figure 2.26 montre l'évolution de ces trois produits scalaires en fonction de la longueur  $l_v$  (variant de 1 à 0) de l'élément 10 de la structure. Les courbes des valeurs des différents produits



**Figure 2.26** - Variation des quantités  $s_{u,l_v}$  (—),  $s_{v,l_v}$  (—) et  $s_{\theta,l_v}$  (—) en fonction de la longueur  $l_v$ .

scalaires permettent de confirmer le fait que des modes d'attache (relativement à un ddl de même nature) calculés pour des nœuds très proches n'apportent que très peu d'information puisqu'ils sont presque numériquement colinéaires. Plus les nœuds sont proches (plus  $l_v$  est faible) et plus la colinéarité des modes d'attache est vérifiée.

**Généralisation / cas de modèles industriels.** Dans le cadre de notre étude, les nœuds constituant la frontière de réduction pour la roue aubagée sont pris en sommet d'aube. Considérant la taille des modèles (plusieurs millions de ddls), si ces nœuds sont trop proches, la proximité mathématique de certains modes d'attache va engendrer des problèmes numériques. En effet, si des modes de la base de réduction modale sont colinéaires, le rang de la matrice réduite deviendra nécessairement inférieur à son nombre de colonnes et ne sera plus inversible. C'est là l'origine des problèmes numériques rencontrés à l'utilisation des modes d'attache pour les modèles 3D industriels. Pour les résoudre il suffirait, théoriquement, d'orthonormer les modes d'attache et

éliminer ceux qui n'apportent pas assez d'information et génèrent par conséquent des problèmes numériques. Dans la pratique, cette orthonormalisation ne suffit pas, probablement du fait du très grand nombre de zéros numériques contenus dans certains modes.

## 2.8 Conclusion

Ce chapitre a permis de présenter brièvement l'algorithme de contact utilisé pour les études d'interaction 2D et 3D des chapitres 3 et 4. La procédure de validation a montré la concordance des résultats obtenus avec un code existant et reposant sur un algorithme totalement différent en termes de gestion du contact et de schéma d'intégration. Par ailleurs, des bilans énergétiques simplifiés ont permis de mettre en évidence le caractère non-dissipatif de l'algorithme.

Les hypothèses réalisées, pour optimiser les temps de calculs et la stabilité numérique, relatives à la gestion du contact 3D ont été validées en montrant que sur un cas de contact à haute vitesse, les résultats ne sont pas modifiés de façon significative.

L'étude réalisée relativement aux performances des méthodes de réduction modale linéaires avec un problème non-linéaire sur un cas de poutre encastrée constitue la première étape d'un travail plus général dont le but est de valider les résultats des simulations 3D de contact aube/carter. Cette étude a également permis de mettre en évidence les difficultés résultant de l'ajout de modes d'attache dans la base de réduction.



---

## Interaction modale 2D

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Modélisation des structures</b> . . . . .	<b>70</b>
<b>3.2</b>	<b>Réduction modale</b> . . . . .	<b>73</b>
<b>3.3</b>	<b>Contexte et objectifs de l'étude d'interaction</b> . . . . .	<b>75</b>
<b>3.4</b>	<b>Évaluation des modèles réduits pour un cas de contact</b> . . . . .	<b>77</b>
<b>3.5</b>	<b>Influence des restrictions cinématiques sur le phénomène d'interaction modale</b> . . . . .	<b>86</b>
<b>3.6</b>	<b>Conclusion</b> . . . . .	<b>95</b>

---

Le phénomène d'interaction modale correspond à une configuration dynamique particulière entre deux structures à symétrie cyclique (telles la roue aubagée et le carter qui l'entoure) ou axiale dans laquelle les échanges d'énergie entre les structures peuvent aboutir à de très grandes déformations. Cette interaction est initiée par un ou plusieurs contacts entre les deux structures pouvant résulter, par exemple, des déformations du carter sous l'effet d'un gradient de température.

Il existe peu de références dans la littérature associées à ces phénomènes. À notre connaissance, la première publication qui y fait référence est une thèse de doctorat réalisée à l'Imperial College de Londres par Schmiechen [70] soutenue en 1997 (Ce travail a été décrit et commenté dans [48]). La seule autre référence est l'article [51]. C'est dans le cadre défini par cet article que se place notre étude. L'auteur s'est intéressé à la détection d'interactions sur des modèles mécaniques 2D simplifiés dans le but de pouvoir mieux comprendre leur apparition et d'envisager des moyens de les prédire. L'ensemble de ces travaux sont décrits dans la deuxième partie de ce chapitre.

Tout d'abord, une étude de convergence est menée pour valider la performance des méthodes de réduction modale avec le problème non-linéaire de contact traité sur les modèles 2D de roue aubagée et de carter pour les différents régimes d'interaction généralement observés. Cette étude s'inscrit dans la logique de validation de l'utilisation des méthodes de réduction modale avec l'algorithme de contact, elle prolonge l'étude menée sur un modèle de poutre encastree dans le chapitre 1. Dans une seconde partie, il s'agit d'évaluer l'impact d'approximations de différentes

natures sur l'apparition des régimes d'interaction. Cette étude est menée en élargissant progressivement l'espace d'étude, trois types de simulations sont effectuées : (1) entre un carter et une roue aubagée pour lesquels les déplacements sont projetés sur les deux premiers modes au diamètre de l'excitation considérée comme dans [51], (2) entre un carter dont les déplacements sont projetés sur les deux premiers modes au diamètre de l'excitation considérée et un modèle réduit par méthode CMS de la roue aubagée et, (3) entre le modèle éléments finis du carter un le modèle réduit par méthode CMS de la roue aubagée. Dans tous les cas, le contact entre les aubes de la roue aubagée et le carter est initié en déformant le carter selon un mode dont le nombre de diamètres varie suivant la simulation réalisée.

L'ensemble de ce chapitre constitue un travail préparatoire à l'analyse et à la simulation d'interactions sur les modèles industriels 3D. Bien que très simplifiés, les modèles 2D doivent nous permettre de mieux comprendre l'apparition d'interactions modales.

**Remarque :** *les résultats présentés dans ce chapitre sont obtenus pour des simulations particulièrement sensibles d'un point de vue numérique. Il a été observé des résultats différents (par exemple dans le type de régime détecté) pour une même simulation réalisée sur deux machines différentes. Aussi, afin de garder des résultats cohérents et comparables, la totalité des simulations présentées dans ce chapitre ont été lancées sur un même ordinateur<sup>1</sup>.*

## 3.1 Modélisation des structures

Des modèles 2D plans de la roue aubagée et du carter sont considérés. Ces modèles reprennent ceux proposés dans [48]. La modélisation se veut réaliste dans le sens où le contact dans la direction normale et les forces de frottement tangentielles sont tous deux pris en compte.

### 3.1.1 Roue aubagée

La roue aubagée se compose de vingt-deux aubes à l'image du nombre d'aubes de certains modèles de soufflantes comme ceux étudiés dans [48]. Le travail reprend en grande partie [48] et [51]. La seule différence tient dans la modélisation du disque de la roue aubagée, représenté dans notre cas par des poutres courbes au lieu de croisillons de poutres droites. Le nombre de poutres courbes selon la direction radiale est paramétrable et fixé à 1, comme montré sur la figure 3.1, de façon à limiter la taille du modèle. Chaque aube est discrétisée avec le même nombre d'éléments poutres droites Euler-bernoulli avec trois ddls par nœud ( $u$ ,  $v$  et  $\theta$ ). La courbure globale de l'aube est réalisée en imposant un angle  $a_i$  entre les poutres  $i$  et  $i + 1$ . L'angle entre deux aubes est noté  $\phi$  avec  $\phi = 2\pi/22$ . Il y a en tout sept cent quarante-huit ddls dans ce modèle de roue aubagée pour notre étude. Selon la direction de flexion  $v$ , les fonctions

---

1. La configuration étant la suivante : Dell Precision PWS 390, Dual-Core Intel(R) CPU 2,13 GHz, 4GB de mémoire RAM et avec Matlab r2007b

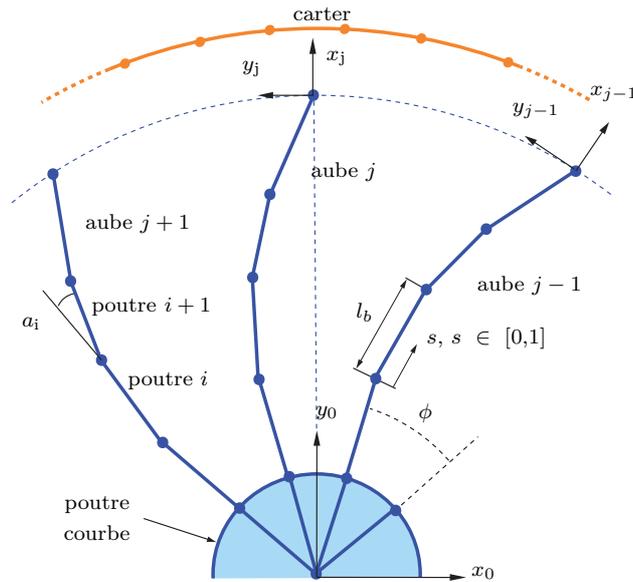


Figure 3.1 - Modèle de roue aubagée utilisé dans notre étude.

de formes sont

$$\begin{aligned} N_1(s) &= 1 - 3s^2 + 2s^3; & N_2(s) &= l_b(s - 2s^2 + s^3) \\ N_3(s) &= 3s^2 - 2s^3; & N_4(s) &= l_b(-s^2 + s^3) \end{aligned} \quad (3.1)$$

Elles sont linéaires selon la direction de traction  $u$

$$M_1(s) = 1 - s; \quad M_2(s) = s \quad (3.2)$$

Le champ de déplacement discrétisé de l'élément  $i$  dont les nœuds sont notés  $i$  et  $i + 1$  s'écrit

$$\begin{aligned} v_r^i(s) &= N_1(s)v_r^i + N_2(s)\theta_r^i + N_3(s)v_r^{i+1} + N_4(s)\theta_r^{i+1} \\ \theta_r^i(s) &= N_{1,s}(s)v_r^i + N_{2,s}(s)\theta_r^i + N_{3,s}(s)v_r^{i+1} + N_{4,s}(s)\theta_r^{i+1} \\ u_r^i(s) &= M_1(s)u_r^i + M_2(s)u_r^{i+1} \end{aligned} \quad (3.3)$$

### 3.1.2 Carter

Le carter est représenté par un cylindre de faible épaisseur et est discrétisé à l'aide d'éléments poutres courbes à deux nœuds. Il y en a tout quarante sur la circonférence, soit cent soixante dds. Un système de coordonnées cylindriques ayant pour vecteurs unitaires  $e_{r_c}$  et  $e_{\theta_c}$  est associé

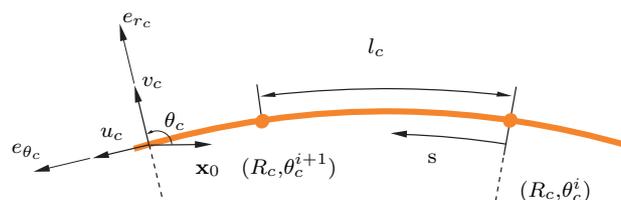


Figure 3.2 - Élément poutre courbe du carter entre les nœuds  $i$  et  $i + 1$ .

au carter. La modélisation éléments finis comporte quatre ddls par nœuds  $u_c$ ,  $u_{c,s}$ ,  $v_c$  et  $v_{c,s}$  comme le montre la figure 3.2. La position initiale du nœud  $i$  est repérée par le doublet  $(R_c, \theta_c^i)$ ,  $R_c$  étant le rayon du carter. Les fonctions de forme sont identiques à celles utilisées pour la roue aubagée en remplaçant  $x$  par  $s$  et  $l_b$  par la longueur  $l_c$  d'un élément fini du carter dans l'équation (3.1) où  $s$  (appartenant à l'intervalle  $[0,1]$ ) est la variable locale. Cette formulation est présentée dans [66].

Le champ de déplacement discrétisé de l'élément  $i$  dont les nœuds sont notés  $i$  et  $i+1$  s'écrit

$$\begin{aligned} u_c^i(s) &= N_1(s)u_c^i + N_2(s)u_{c,s}^i + N_3(s)u_c^{i+1} + N_4(s)u_{c,s}^{i+1} \\ v_c^i(s) &= N_1(s)v_c^i + N_2(s)v_{c,s}^i + N_3(s)v_c^{i+1} + N_4(s)v_{c,s}^{i+1} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Le tableau 3.1 détaille les propriétés mécaniques des modèles. Celles-ci sont cohérentes avec

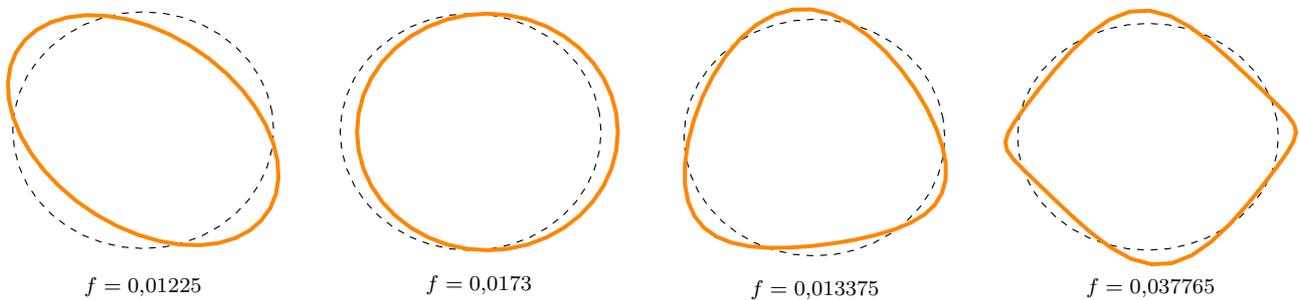


Figure 3.3 - Quatre premiers modes propres du carter.

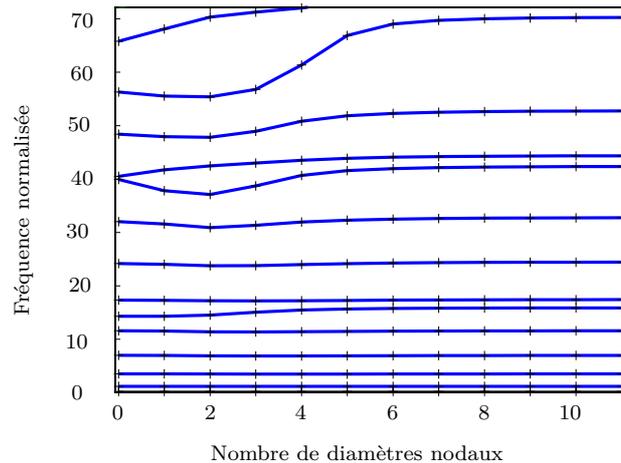
la volonté d'avoir un carter qui puisse se déformer sous l'impact des aubes de la roue aubagée. C'est pourquoi le module d'Young du carter est beaucoup plus faible que celui de la roue aubagée. Par ailleurs, quatre modes propres du carter sont représentés sur la figure 3.3.

	Carter	Roue aubagée
module d'Young normalisé	$E_{CA} = 2,8 \cdot 10^3$	$E_{RA} = 8,3 \cdot 10^6$
masse volumique ( $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ )	$\rho_{CA} = 2\,800$	$\rho_{RA} = 7\,800$
épaisseur normalisée	$h_{CA} = 5$	$h_{RA} = 5$
largeur normalisée	$w_{CA} = 50$	$w_{RA} = 50$
rayon normalisée	$R_{CA} = 250,5$	$R_{RA} = 250$
nombre de ddls	$n_{CA} = 160$	$n_{RA} = 748$
amortissement modal	$\xi_{CA} = 0,03$	$\xi_{RA} = 0,005$
nombre d'aubes		$N = 22$

Tableau 3.1 - Propriétés des modèles 2D

### 3.1.3 Analyse physique du modèle

Le graphique 3.4 permet d'évaluer la qualité du modèle utilisé pour la représentation de la roue aubagée. Sur ce graphique, chaque courbe correspond à un mode d'aube sur la roue aubagée. À basse fréquence, ces courbes sont presque parfaitement plates, signifiant que les



**Figure 3.4** - Diagramme des fréquences propres de la roue aubagée en fonction des diamètres nodaux.

différents diamètres sont excités à des fréquences très proches. La première ligne à 0,22 correspond aux modes dits «  $1F$  », c'est-à-dire les modes à diamètres avec les aubes vibrant suivant leur premier mode de flexion. Lorsque la fréquence augmente, ces courbes deviennent plus irrégulières à cause de l'influence grandissante du disque (du couplage inter-aube dans notre cas) sur la vibration des aubes.

### 3.1.4 Choix du pas de temps

Le pas de temps  $\delta t$  est choisi en accord avec la condition classique en analyse linéaire

$$\delta t < \frac{2}{\omega_{max}} = 8,49 \cdot 10^{-7} \text{ s} \quad (3.5)$$

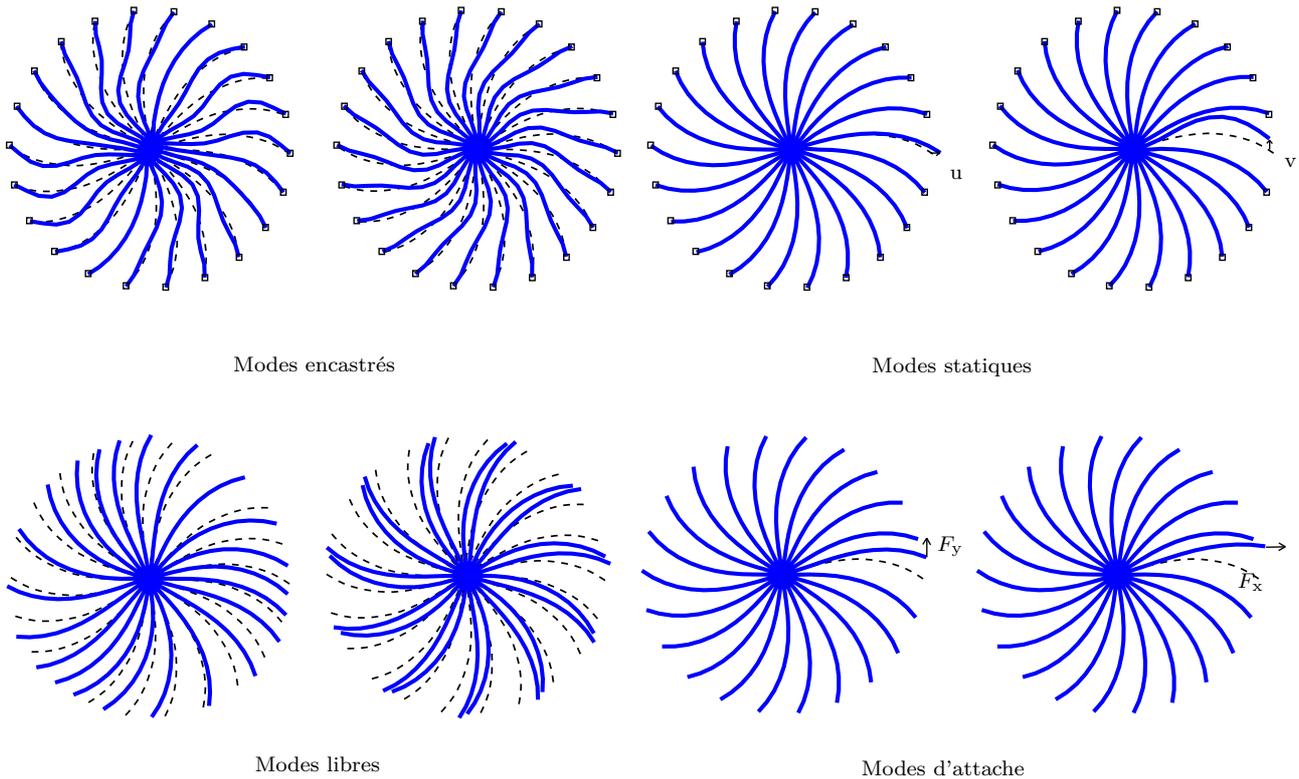
cette condition sert de point de départ pour la recherche d'un pas de temps adapté au problème de contact étudié. Pour les simulations réalisées, le pas de temps choisi est :  $\delta t = 2,5 \cdot 10^{-7} \text{ s}$ .

## 3.2 Réduction modale

La notion de réduction modale est longuement détaillée dans le chapitre 1 qui lui est consacré. Elle ne concerne ici que la roue aubagée car la modélisation du carter avec une seule couche d'éléments rend tous ses nœuds nécessaires à la gestion du contact. Par conséquent, le carter ne peut pas être réduit. Dans le cadre de l'étude d'interaction 2D, nous considérons deux méthodes : celle de Craig-Bampton et celle de Craig-Chang-Martinez. La principale différence entre ces deux méthodes est la composition de la base de réduction modale :

- modes statiques et modes encastrés, cf. chapitre 1 pour la méthode de Craig-Bampton ;
- modes d'attache et modes libres, cf. chapitre 1 pour la méthode de Craig-Chang-Martinez.

Chacun de ces types de modes sont représentés pour la roue aubagée sur la figure 3.5. Afin de réduire le nombre de simulations, la méthode de Craig-Bampton est celle qui est utilisée dans l'étude d'interaction, la méthode de Craig-Chang-Martinez est uniquement utilisée dans

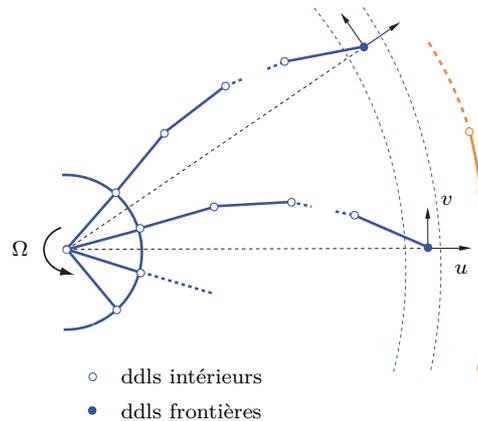


**Figure 3.5** - Quelques modes de chaque base de réduction.

un cadre plus restreint dans le but de s'assurer de la cohérence des résultats obtenus par les deux méthodes.

Les frontières sont définies pour chaque structure comme le montre la figure 3.6. Cette frontière correspond à la zone de contact qui est fortement non linéaire. Si le choix des nœuds frontières paraît ainsi clairement imposé par la zone de contact choisie, il en va autrement du choix des ddl frontières. En effet, l'algorithme de contact corrige les déplacements des nœuds frontières à chaque pas de temps : il faut donc pouvoir conserver les ddl  $u$  et  $v$  dans la frontière. Le troisième ddl  $\theta$  peut être théoriquement inclus ou exclus de cette frontière sans que cela n'influe sur la gestion du contact. Les différentes simulations réalisées avec la méthode de Craig-Bampton montrent que la prise en compte du ddl  $\theta$  dans la frontière ne change pas les résultats de façon significative. En revanche, pour ce qui est de la méthode de réduction modale de Craig-Chang-Martinez, l'ajout du ddl  $\theta$  se révèle être une source supplémentaire de problèmes numériques 2 (du fait de l'ajout des modes d'attache correspondant).

Par conséquent, de façon à conserver des modèles similaires entre les différentes simulations réalisées et les différentes méthodes de réduction utilisées, seuls les ddl  $u$  et  $v$  des nœuds frontières sont conservés dans la frontière de réduction modale. Malgré tout, les problèmes numériques évoqués dans le chapitre 2 concernant l'ajout des modes d'attache dans la base de réduction de la méthode de Craig-Chang-Martinez apparaissent clairement dans notre étude et ont pour conséquence un mauvais conditionnement des matrices masse et raideur réduites. Les problèmes n'ont pas pour origine la proximité des nœuds sur lesquels sont calculés les modes



**Figure 3.6** - Description de la frontière de la roue aubagée.

d'attache (comme c'était le cas pour le modèle de poutre encasté étudié dans le chapitre 2) mais, du fait de la simplicité du modèle, la proximité des déformées statiques des modes d'attache calculés sur un même nœud frontière pour les différents ddl. Il est donc nécessaire de procéder à l'orthonormalisation de la base de réduction modale. La relative petite taille des modèles considérés permet de corriger facilement les problèmes numériques mais il est à prévoir que l'utilisation des modes d'attache sur un modèle 3D sera particulièrement compliquée.

### 3.3 Contexte et objectifs de l'étude d'interaction

L'étude d'interaction modale 2D s'inscrit dans la suite du travail réalisé dans [48] et [51]. L'auteur a proposé d'étudier les interactions modales entre des structures dont les mouvements sont projetés sur l'espace engendré par leurs deux premiers modes propres à  $n_d$  diamètres. De fortes restrictions sont ainsi appliquées sur la cinématique des structures. Le contact entre la roue aubagée et le carter est initié par déformation du carter sous application d'un effort, l'amplitude de cet effort est telle que le déplacement radial maximum est égal au double du jeu initial entre les structures. L'effort est appliqué sur un temps fixe  $t_c$  au-delà duquel les deux structures sont laissées libres d'interagir (dans [51],  $t_c = 100 \mu s$ ). Trois types de régimes d'interaction ont pu être identifiés dans cette étude, ils sont présentés sur les figures 3.7(a), 3.7(b) et 3.7(c) où apparaissent les distances normalisées aubes/carter en fonction du temps (une courbe par aube).

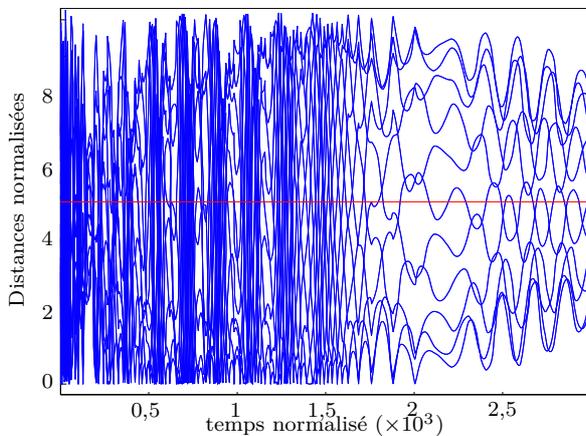
Tout d'abord un régime « amorti » tel que celui représenté sur la figure 3.7(a), il s'agit du cas le plus évident : les aubes de la roue aubagée sont en contact avec le carter sur un court laps de temps puis les amplitudes des vibrations de chaque structure diminuent jusqu'au retour à la position initiale.

Le second régime d'interaction détecté dans [51] et présenté sur la figure 3.7(b) est dit « entretenu ». Lorsque ce type de régime est détecté, les amplitudes de vibration des deux structures se maintiennent à un niveau stable au cours du temps. Les différentes études menées ont abouti à remarquer que ce type de régime n'apparaît que lorsque le nombre de diamètre de

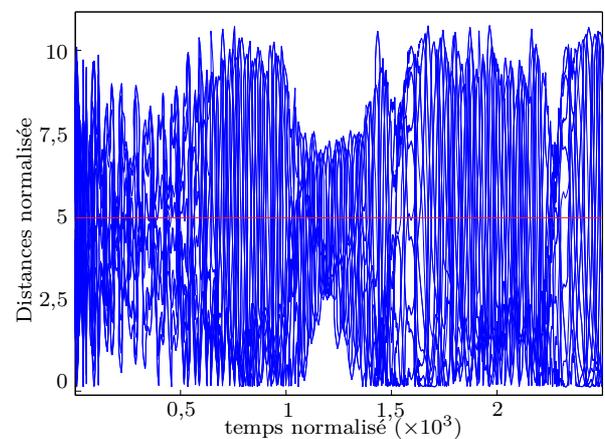
l'effort appliqué sur le carter ne divise pas le nombre d'aube de la roue aubagée.

Enfin, le troisième type de régime est qualifié de régime « bloqué », il n'a été détecté que lorsque le nombre de diamètres de l'effort appliqué sur le carter divise le nombre d'aubes de la roue aubagée (typiquement pour une ovalisation du carter, c'est-à-dire  $n_d = 2$ , avec un modèle de roue aubagée contenant un nombre pair d'aubes). Ce régime se caractérise par le fait qu'une ou plusieurs aubes restent en contact permanent avec le carter comme le montre la figure 3.7(c).

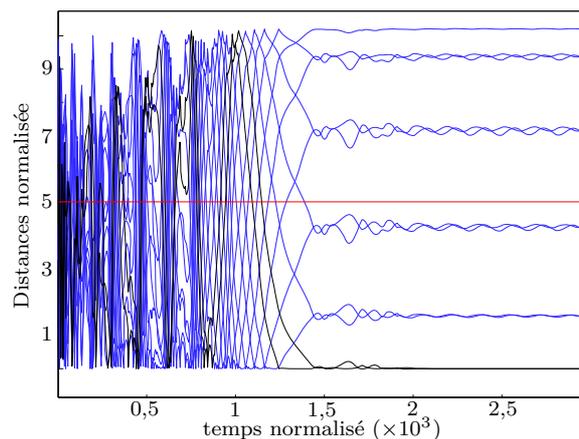
À ces trois types de régimes s'ajoute bien évidemment un régime divergent qui se traduit par une augmentation à l'infini du niveau de vibrations de chaque structure. Comme le montre la suite de l'étude et les travaux précédents, l'apparition d'un régime divergent est favorisée par une vitesse de rotation élevée (au delà de la vitesse critique) ou un coefficient de frottement trop élevé. Un des objectifs de notre étude est d'évaluer l'importance des restrictions cinématiques



(a) Régime amorti observé dans [51] :  $\Omega = 0,4$  et chargement sur le carter appliqué suivant un mode à deux diamètres.



(b) Régime entretenu observé dans [51] :  $\Omega = 1,755$  et chargement sur le carter appliqué suivant un mode à quatre diamètres.



(c) Régime bloqué observé dans [51] :  $\Omega = 0,55$  et chargement sur le carter appliqué suivant un mode à deux diamètres. Les aubes bloquées sont mises en évidence et tracées en noir (—).

**Figure 3.7** - Différents régimes d'interaction observés dans [51]. Jeu initial (—) et évolution des distances aubes/carter (—) en fonction du temps

imposées dans [51] et donc d'analyser des cas d'interactions modales pour des modèles éléments finis simples 2D non restreints.

Au préalable, il faut justifier la compatibilité entre une méthode de réduction modale linéaire telle que la méthode de Craig-Bampton et un problème de contact tel que celui présenté dans le chapitre 1 dans le cas des simulations réalisées avec les modèles 2D de roue aubagée et de carter. Ceci fait l'objet de la section suivante.

### 3.4 Évaluation des modèles réduits pour un cas de contact

Les méthode de réduction de Craig-Bampton et de Craig-Chang-Martinez sont appliquées sur la roue aubagée en faisant varier la richesse de la base de réduction (c'est-à-dire le nombre  $\eta$  de modes encastrés conservés pour la méthode de Craig-Bampton et le nombre  $\phi$  de modes libres conservés pour la méthode de Craig-Chang-Martinez). Le carter est limité cinématiquement : il est projeté sur ces deux premiers modes à deux diamètres<sup>2</sup> ou trois diamètres<sup>3</sup> selon la simulation considérée.

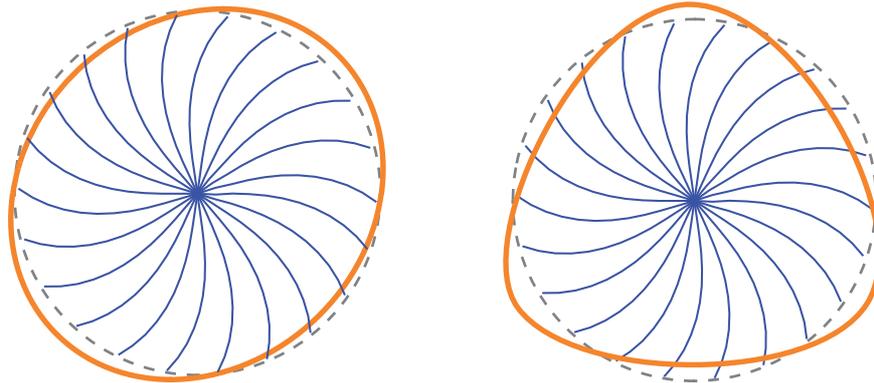
Pour chaque méthode, ce sont trois simulations correspondant à des régimes d'interaction différents qui sont effectuées pour vérifier la convergence des modèles réduits vers la solution éléments finis de référence : un cas amorti pour une excitation à deux diamètres (similaire à celui représenté sur la figure 3.7(a)) dont le but est de valider la convergence de la détection des quelques contacts avant amortissement, un cas bloqué pour une excitation à deux diamètres (similaire à celui représenté sur la figure 3.7(c)) et un cas entretenu pour une excitation à trois diamètres afin de montrer la fiabilité des modèles réduits en termes de prédiction des différents régime. Dans les deux premiers cas, le chargement appliqué sur le carter est suivant un mode à deux diamètres tel celui représenté sur la figure 3.8(a), et selon un mode à trois diamètres pour la dernière simulation comme sur la figure 3.8(b). Pour tous les cas de contact considérés, le temps d'application de l'effort sur le carter est  $t_c = 350$ , temps après lequel les deux structures sont laissées libres d'interagir. L'amplitude de l'effort est choisie de façon à ce que le déplacement radial maximum sur le carter soit de 1,25 . Les propriétés matériaux des deux structures sont celles décrites dans le tableau 3.1. La vitesse de rotation de la roue aubagée est de 1,2 pour le cas amorti, 1,9 pour le cas bloqué (avec une excitation à deux diamètres :  $n_d = 2$ ) et respectivement 1,7 et 1,9 (avec une excitation à trois diamètres :  $n_d = 3$ ) pour le cas entretenu pour les méthodes de Craig-Bampton et de Craig-Martinez<sup>4</sup>. Enfin le coefficient de frottement  $\mu$  est choisi égal à 0,2.

---

2. La projection des mouvements du carter sur ces deux premiers modes à deux diamètres permet de l'ovaliser, ce qui correspond à une déformation type lors de l'application d'un gradient de température.

3. Cette projection n'est utilisée que dans le but vérifier la convergence des modèles réduits dans le cas d'un mode entretenu

4. Deux simulations sont considérées car la méthode de Craig-Chang-Martinez donne des résultats différents de la méthode de Craig-Bampton pour la détection des régimes entretenus.



(a) Déformation du carter sous un chargement à deux diamètres.

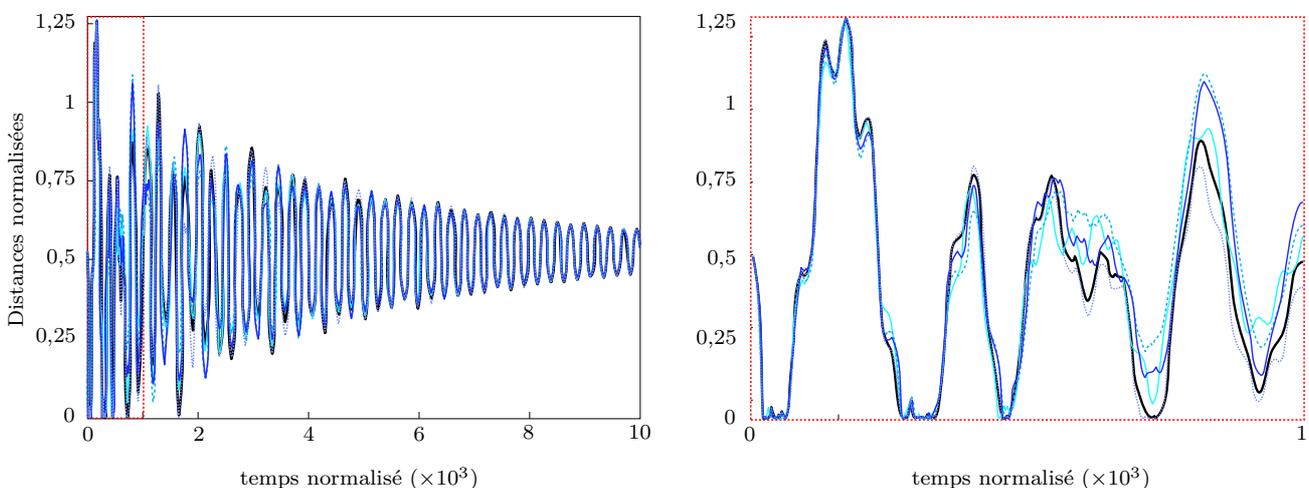
(b) Déformation du carter sous un chargement à trois diamètres.

**Figure 3.8** - Déformées statiques du carter (—) (et profil initial (---)) pour les différents chargements considérés.

### 3.4.1 Méthode de Craig-Bampton

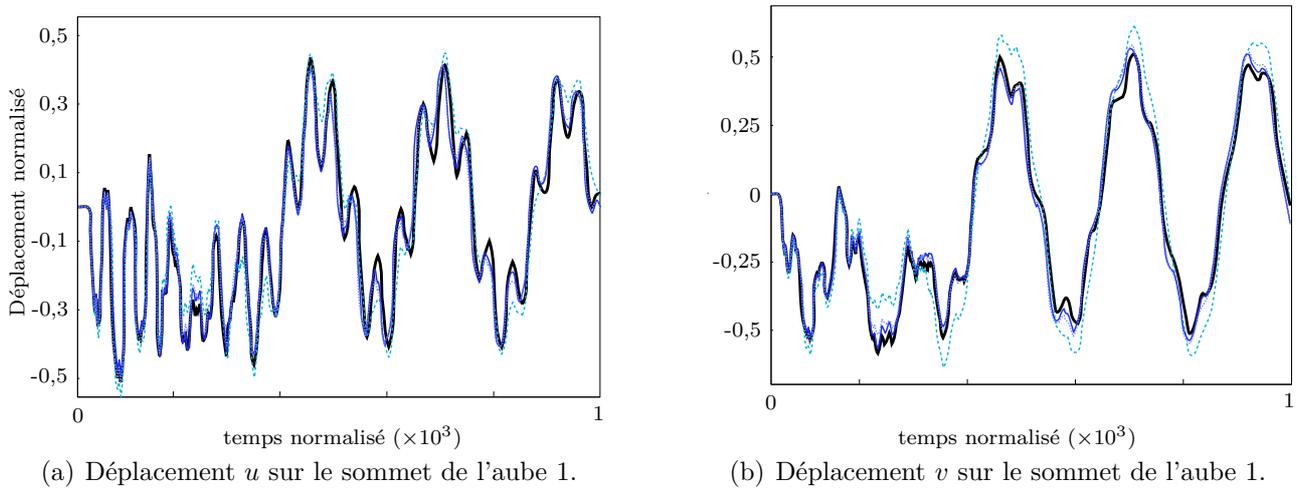
#### 3.4.1.1 Régime amorti

Le temps d'application du chargement  $t_c = 350$  sur le carter est choisi suffisamment long de façon à pouvoir obtenir, pour chaque aube, plusieurs contacts avec le carter. Le temps de simulation  $t_s = 10^4$  permet d'observer l'amortissement des oscillations et de vérifier que les réponses des modèles réduits sont en phase avec la solution éléments finis. Les figures 3.9, 3.10(a)



**Figure 3.9** - Distance entre le sommet de l'aube 10 et le carter au cours du temps pour différentes bases modales et agrandissement (la courbe  $\eta = 0$  n'est pas tracée sur cet agrandissement).  $\eta = 0$  (—);  $\eta = 44$  (---);  $\eta = 88$  (—);  $\eta = 220$  (.....);  $u_{ef}(t)$  (—)

et 3.10(b) permettent d'analyser la convergence du modèle réduit vers la solution éléments finis non réduite notée  $u_{ef}$  lorsque la base de réduction est enrichie. Les résultats sont présentés sur l'aube 1, ce choix est parfaitement arbitraire et la convergence est visible sur l'ensemble des aubes de la roue aubagée. Le cas où la base modale ne contient aucun mode encastré ( $\eta = 0$ ) n'est représenté que sur la figure 3.9, ce cas aboutit à un mode bloqué dont l'apparition est



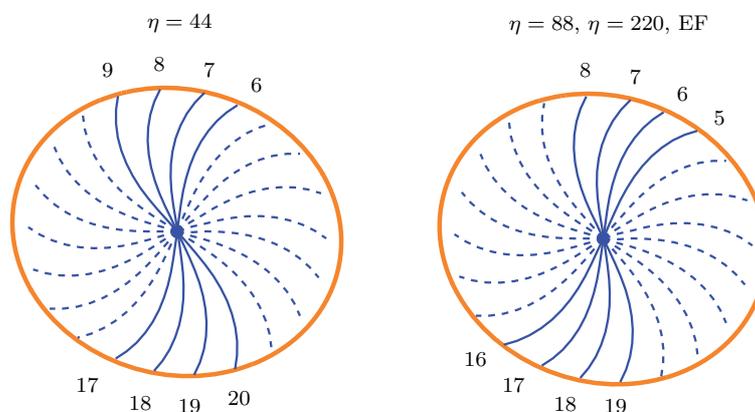
**Figure 3.10** - Déplacements des ddls  $u$  et  $v$  en sommet de l'aube 1 pour différentes bases modales et agrandissement :  $\eta = 44$  (---);  $\eta = 88$  (—);  $\eta = 220$  (.....);  $u_{ef}(t)$  (—)

très probablement favorisée par les restrictions cinématiques inhérentes à une base modale très pauvre.

Les déplacements obtenus pour les ddls  $u$  et  $v$  de l'aube 1 convergent très rapidement vers ceux obtenus avec le modèle éléments finis total même pour une base comportant très peu de modes encastrés ( $\eta = 44$ ).

### 3.4.1.2 Régime bloqué

La possibilité de détecter un mode d'interaction modale, tel un mode bloqué, est essentielle pour notre étude. Comme l'ont montré les précédentes études sur le sujet, la détection de régimes d'interaction est extrêmement sensible d'un point de vue numérique. Une grande rigueur s'impose pour les simulations à lancer : toutes les simulations de ce paragraphe ont donc été lancées sur la même machine afin d'éviter les sensibilités en termes de type de processeur, de système d'exploitation ou de version du logiciel Matlab. Quelle que soit la base modale utilisée,



**Figure 3.11** - Numéros des aubes en contact permanent (—) (aubes ne touchant pas le carter (.....)) avec le carter (—) pour les différentes simulations réalisées.

on observe pour toutes les simulations effectuées un régime bloqué (figures 3.12(a) et 3.12(b)). D'autre part, les solutions obtenues avec les modèles réduits convergent pour l'ensemble des paramètres (distances aubes/carter, déplacements  $u$  et  $v$  représentés sur les figures 3.13(a) et 3.13(b)) vers la solution éléments finis. La figure 3.12(b) permet de mettre en évidence que les aubes étant en contact permanent avec le carter ne sont pas les mêmes pour toutes les simulations, cette figure permet de voir qu'alors que l'aube 5 est en contact permanent (distance aube/carter nulle) pour les simulations éléments finis et pour les bases modales avec 88 et 220 modes encastrés, elle vibre pour la simulation effectuée avec 44 modes encastrés. Plus précisément, la figure 3.11 représente les aubes en contact permanent pour les différentes simulations. Une base de réduction trop pauvre entraîne une plus grande approximation du déplacement des sommets d'aube et peut ainsi aboutir au décalage de l'initialisation du blocage aube/carter, c'est-à-dire de la prise de contact. Dans notre cas, l'initiation du mode bloqué se fait soit sur les aubes 8 et 19 soit sur les aubes 9 et 20. Toutefois, l'enrichissement de la base de réduction permet de converger en termes de prise de contact puisque seul la base la plus pauvre ( $\eta = 44$ ) présente un décalage à ce niveau.

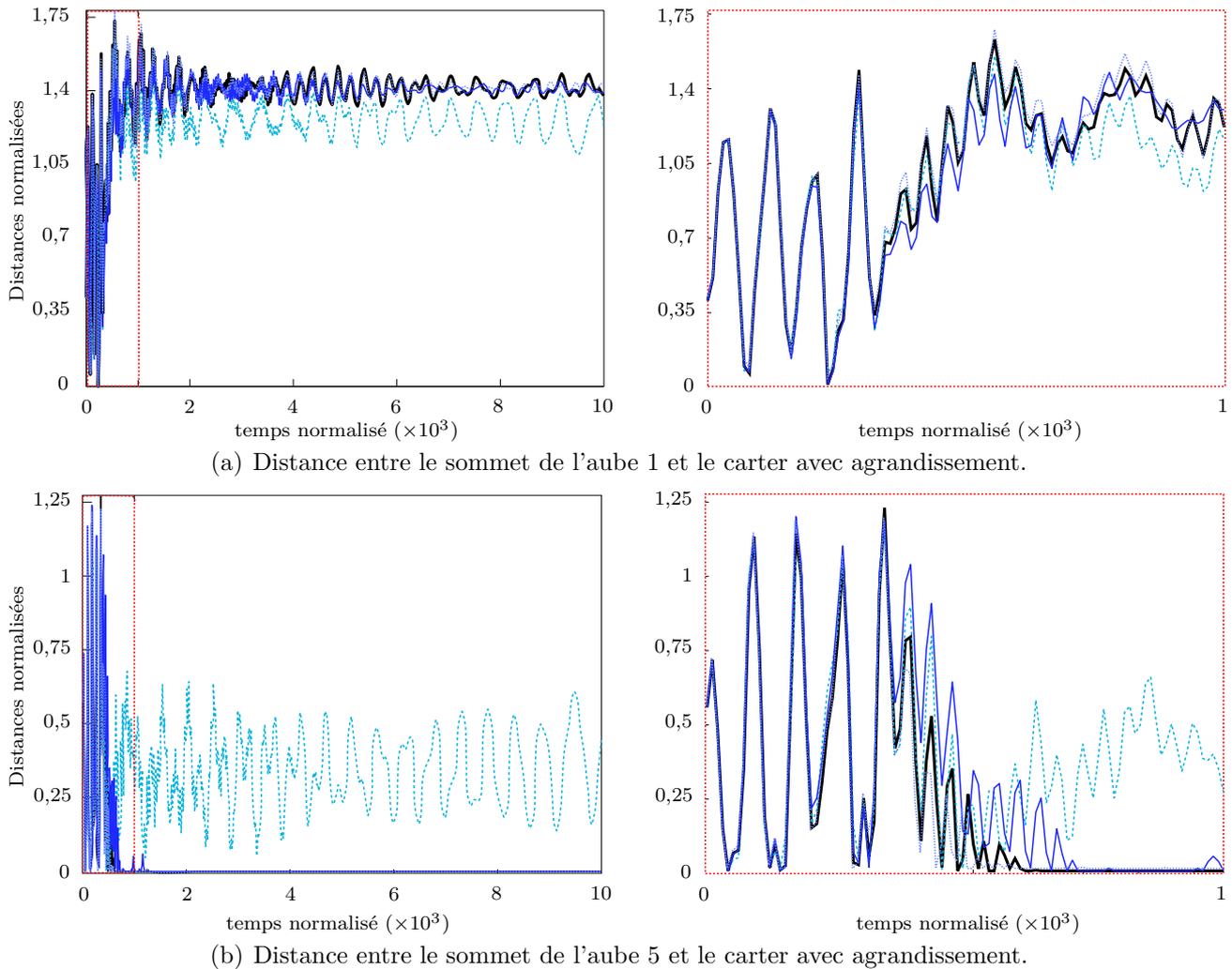
### 3.4.1.3 Régime entretenu

Des trois régimes présentés en début de section, le régime entretenu est probablement le plus contraignant et le plus délicat à simuler. En effet, il ne présente aucun amortissement du niveau de vibration, ni après perte de contact comme pour un régime amorti, ni après prise de contact comme pour un régime bloqué. Ce type de régime se caractérise par une succession de prises de contact sur un temps court, on parle de « micro-blocage ». Les figures 3.14(a) et 3.14(b) montrent la convergence des distances aube/carter pour les aubes 1 et 6 vers la solution éléments finis de référence lorsque le nombre de modes encastrés conservés dans la base de réduction augmente. Il est remarquable qu'il faut un très grand nombre de modes encastrés ( $\eta = 220$  sur un maximum 704 modes encastrés<sup>5</sup>) pour converger en termes de prise de contact et d'amplitude, confirmant la grande sensibilité numérique des régimes entretenus. Bien que la convergence en termes de prise de contact soit relativement lente, il est intéressant de remarquer que des bases de réduction contenant peu de modes encastrés aboutissent également à un régime entretenu comme le montre la figure 3.15(a). Cette figure est en tout point comparable à la figure 3.15(b) qui représente l'ensemble des distances aube/carter pour la solution éléments finis de référence.

En conclusion, les modèles réduits par la méthode de Craig-Bampton permettent dans tous les cas de converger vers la solution éléments finis de référence. La prise de contact apparaît comme l'élément le plus sensible à la base de réduction choisie mais quelle que soit la richesse de cette base, lorsqu'elle contient plus de quarante-quatre modes encastrés, les régimes simulés correspondent au régime obtenu avec le modèle de référence.

---

5. Le nombre maximum de modes encastrés est obtenu en soustrayant au nombre total de ddl (748), le nombre de ddl frontières retenus pour la réduction modale (44).



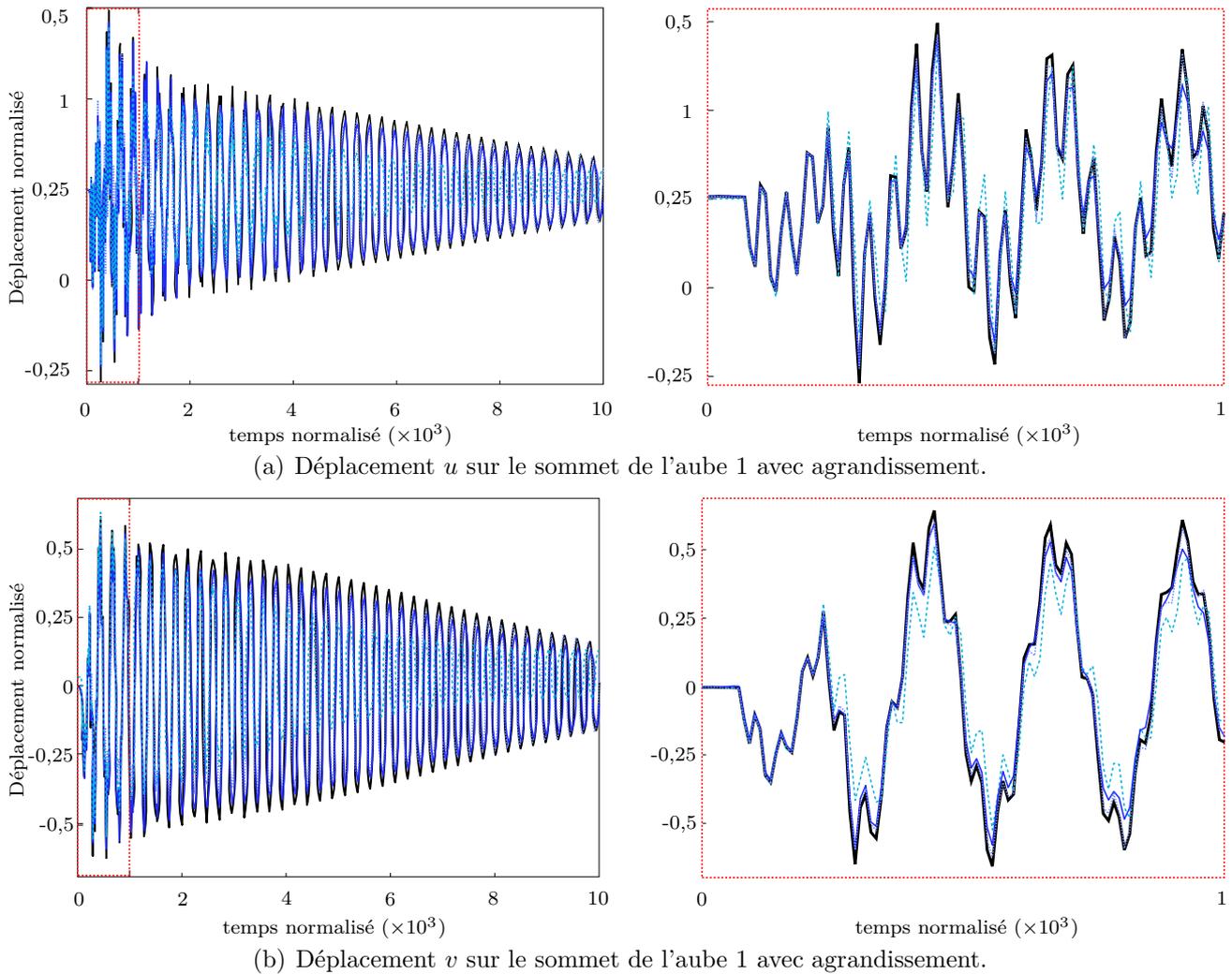
**Figure 3.12** - Distances aube/carter pour différentes bases modales :  $\eta = 44$  (---);  $\eta = 88$  (—);  $\eta = 220$  (.....);  $u_{ef}(t)$  (—)

### 3.4.2 Méthode de Craig-Chang-Martinez

L'étude menée dans le chapitre 2 sur un modèle de poutre encasté a permis de mettre en évidence la sensibilité numérique de la méthode de Craig-Chang-Martinez. Afin d'obtenir un modèle réduit de roue aubagée numériquement utilisable, une orthogonalisation des modes d'attache (relativement aux modes propres présents dans la base de réduction) est nécessaire.

Le paramètre de réduction  $\phi$  correspond au nombre de modes libres contenus dans la base de réduction, auquel doivent s'ajouter quarante-quatre modes d'attache (autant que de ddls frontières) et quarante-quatre ddls physiques pour obtenir la taille totale du modèle réduit. Par conséquent, pour une valeur identique des paramètres de réduction  $\eta$  et  $\phi$ , le modèle réduit obtenu par méthode de Craig-Chang-Martinez contient quarante-quatre ddls de plus que celui obtenu par méthode de Craig-Bampton.

De même que pour la méthode de Craig-Bampton, la convergence des modèles réduits obtenus par méthode de Craig-Chang-Martinez est évaluée pour les trois régimes d'interaction :



**Figure 3.13** - Déplacements des ddl  $u$  et  $v$  pour différentes bases modales :  $\eta = 44$  (---);  $\eta = 88$  (—);  $\eta = 220$  (.....);  $u_{ef}(t)$  (—)

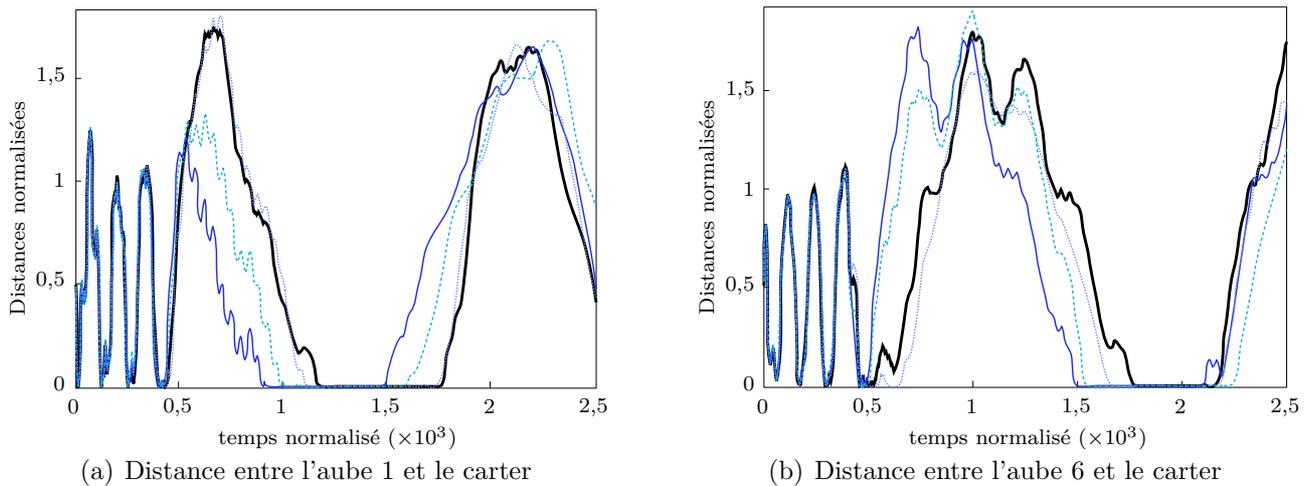
amorti, bloqué et entretenu.

### 3.4.2.1 Régime amorti

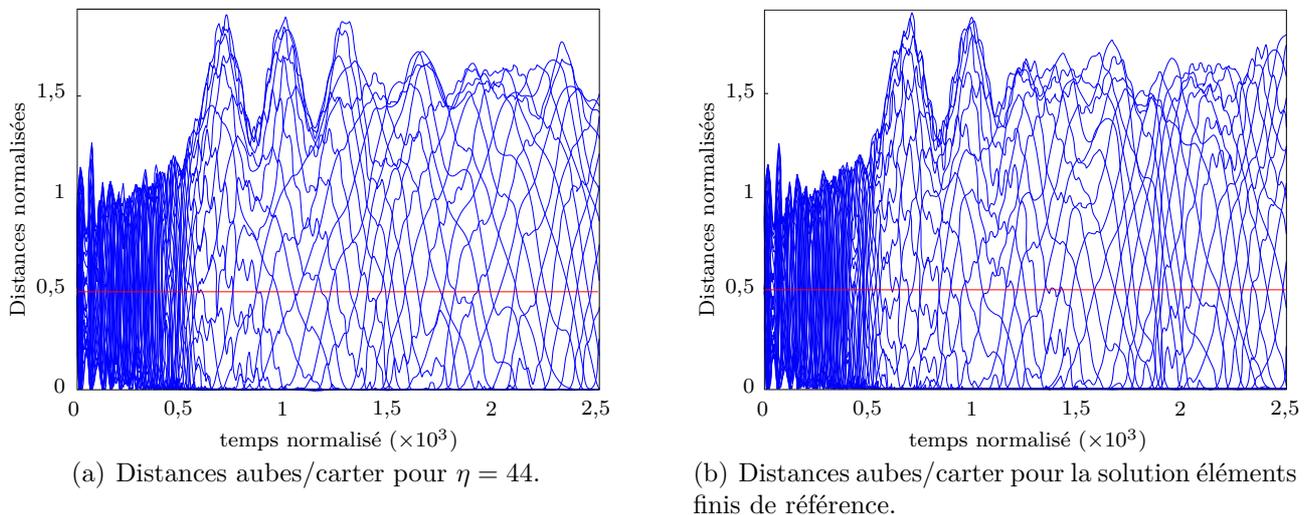
Les paramètres de la simulation sont les mêmes que ceux utilisés dans le paragraphe 3.4.1.1 pour valider la convergence des modèles réduits avec la méthode de Craig-Bampton. La figure 3.16 montre clairement la convergence de la distance aube/carter sur l'aube 1 au cours du temps lorsque la base de réduction est enrichie. Une convergence similaire est observée sur les autres aubes ainsi que pour les déplacements en tête d'aube. Les paramètres sont :

- $\Omega = 1,2$ ;
- $\mu = 0,2$ ;
- Effort sur le carter tel que le déplacement radial maximum est de 1,25.

La bonne convergence des résultats permet de valider la détection des contacts avec la méthode de Craig-Chang-Martinez.



**Figure 3.14** - Distances aubes/carter pour deux aubes de la roue aubagée obtenues pour différentes valeurs du paramètre  $\eta$  :  $\eta = 44$  (---);  $\eta = 88$  (—);  $\eta = 220$  (.....);  $u_{ef}(t)$  (—).

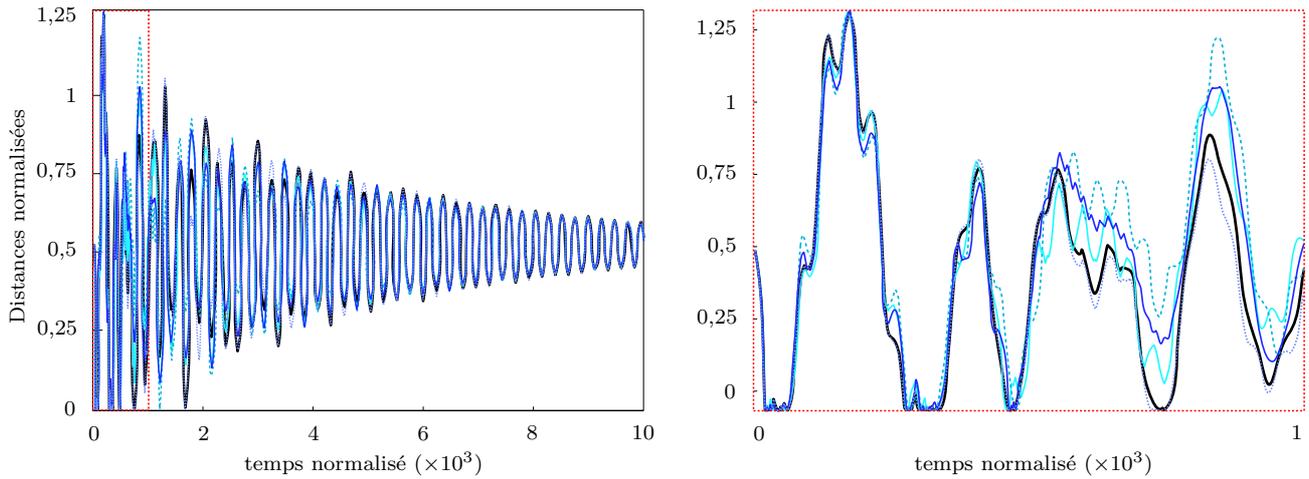


**Figure 3.15** - Juxtaposition des distances aubes/carter obtenues dans le cas d'un régime entretenu avec un modèle réduit par méthode de Craig-Bampton ( $\eta = 44$ ) et avec le modèle éléments finis de référence.

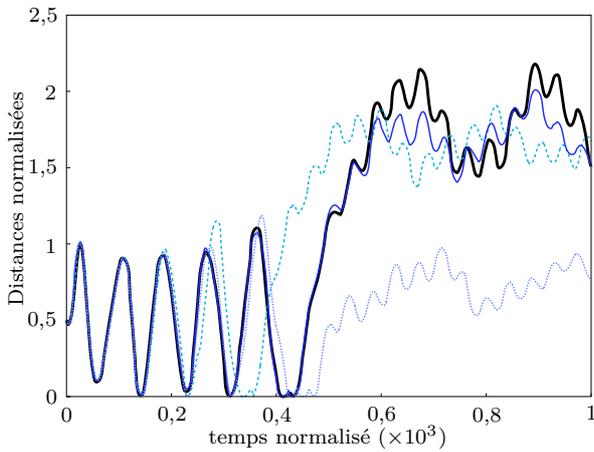
### 3.4.2.2 Régime bloqué

L'observation de la convergence des résultats obtenus avec les modèles réduits par méthode de Craig-Bampton est plus délicate lorsqu'on considère un régime bloqué. L'étude menée dans le paragraphe 3.4.1.2 a mis en évidence que la convergence des résultats est particulièrement sensible en termes de prise de contact. Les courbes de distances aubes/carter tracées sur les figures 3.17(a), 3.17(b) et 3.17(c) reflètent ce décalage de blocage entre les différentes simulations effectuées. On observe une convergence en termes de régime : toutes les simulations permettent d'obtenir un régime bloqué mais les aubes en contact permanent avec le carter varient avec la base modale.

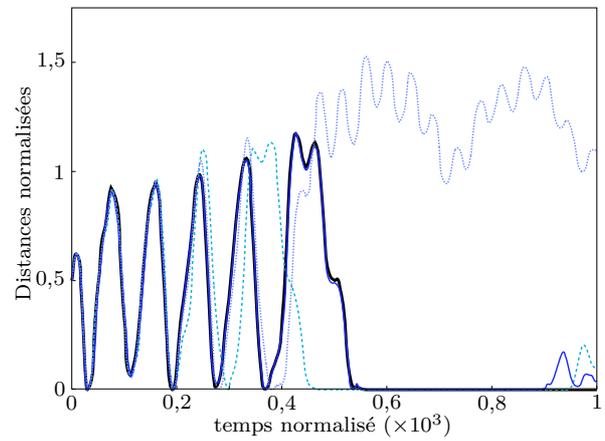
Pour une base modale contenant  $\phi = 220$  modes libres, la prise de contact se fait sur la même



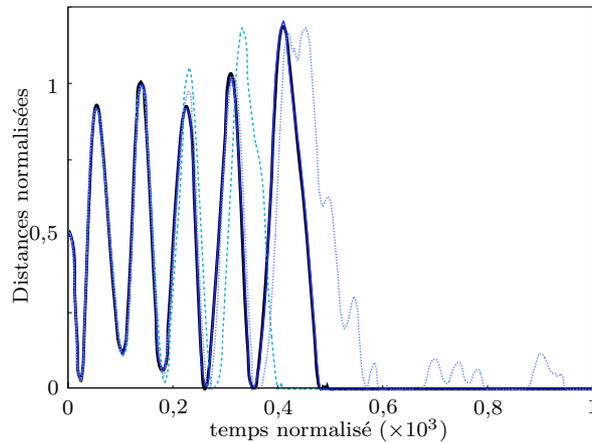
**Figure 3.16** - Distance aube/carter pour l'aube 10 dans le cas d'un régime amorti en fonction de la richesse de la base de réduction.  $\phi = 0$  (—);  $\phi = 44$  (---);  $\phi = 88$  (—);  $\phi = 220$  (.....);  $u_{ef}(t)$  (—)



(a) Distance entre l'aube 2 et le carter.



(b) Distance entre l'aube 6 et le carter.



(c) Distance entre l'aube 8 et le carter.

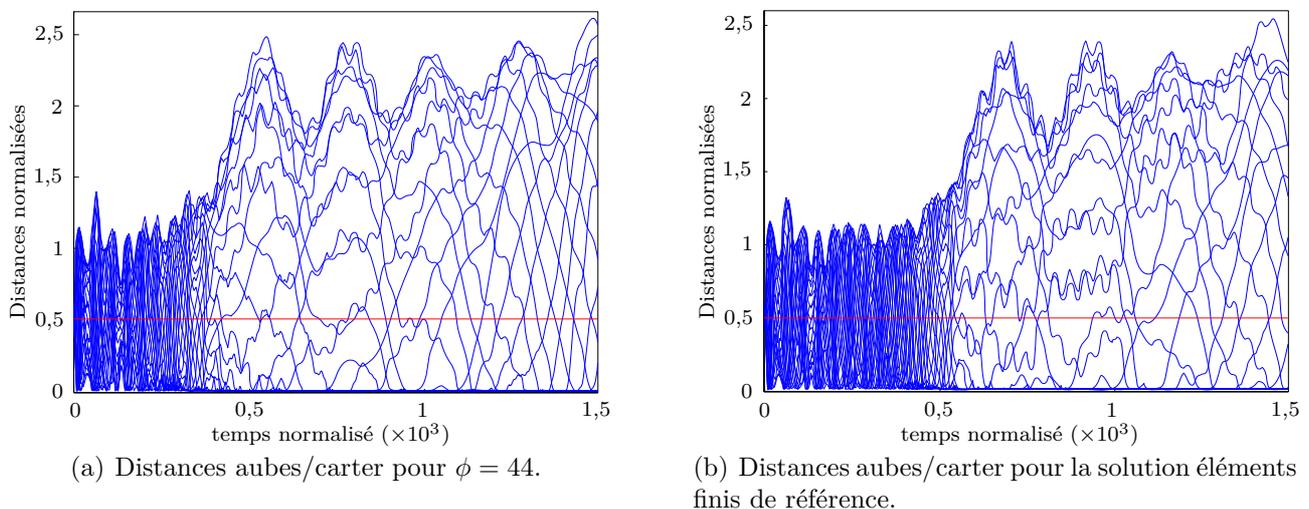
**Figure 3.17** - Distances aube/carter pour différentes bases modales dans le cas d'un régime bloqué.  $\phi = 44$  (---);  $\phi = 88$  (—);  $\phi = 220$  (.....);  $u_{ef}(t)$  (—).

aube que pour la solution éléments finis de référence, alors que quatre-vingt huit modes encastres suffisaient dans le cas de la méthode de Craig-Bampton. La sensibilité numérique des modèles obtenus par méthode de Craig-Chang-Martinez est ici mise en évidence comparativement aux modèles réduits par la méthode de Craig-Bampton.

### 3.4.2.3 Régime entretenu

Dernier régime sur lequel est testée la convergence des modèles réduits obtenus par méthode de Craig-Chang-Martinez, le régime entretenu est le plus délicat à détecter du fait, notamment, d'une multitude de prises de contacts au cours du temps.

Il apparaît extrêmement délicat de détecter ce type de régimes. Le régime détecté dans le paragraphe 3.4.1.3 ne peut être détecté, les itérations sur le nombre de modes dans la base modale laissant simplement apparaître une alternance de régimes amortis et de régimes entretenus. Il faut augmenter la vitesse de rotation jusqu'à la valeur  $\Omega = 1,9$  pour observer un régime entretenu quel que soit le nombre de modes conservés dans la base de réduction. Les conclusions sont alors identiques à celles obtenues pour les modèles réduits obtenus par méthode de Craig-Bampton : la convergence en prise de contact nécessite un grand nombre de modes libres dans la base de réduction mais un faible nombre de modes ( $\phi = 44$ ) suffit à obtenir un régime entretenu comme le montre la figure 3.18(a). La solution éléments finis obtenu pour ce régime est représentée sur la figure 3.18(b), la comparaison avec la figure 3.18(a) permet de juger de la bonne qualité des résultats obtenus.



**Figure 3.18** - Juxtaposition des distances aube/carter obtenues avec un modèle réduit par méthode de Craig-Martinez ( $\eta = 44$ ) et avec le modèle éléments finis de référence.

### 3.4.3 Bilan

Pour les trois cas simulés : amorti, bloqué et entretenu, les résultats montrent une bonne convergence des solutions obtenues avec les modèles réduits vers la solution éléments finis. Outre la bonne détection des premiers contacts aubes/carter, les modèles réduits permettent

une bonne prédiction des modes d'interaction et ce, dès que les bases modales de contiennent 88 modes (encastrés dans le cas de la méthode de Craig-Bampton et libres dans le cas de la méthode de Craig-Chang-Martinez).

Les résultats obtenus sont similaires pour les deux méthodes de réduction, à l'exception de l'étude de convergence pour un mode entretenu : dans ce cas particulier, la méthode de Craig-Chang-Martinez ne permet pas d'obtenir la convergence dans tous les cas étudiés vers un mode entretenu contrairement à la méthode de Craig-Bampton.

Ces résultats justifient que la suite de l'étude d'interaction modale sur les modèles 2D sera menée uniquement avec les modèles réduits par méthode de Craig-Bampton. Compte tenu du nombre très élevé de simulations à effectuer, la base modale considérée pour l'étude de l'influence des restrictions cinématiques contiendra quatre-vingt-huit modes encastrés, les résultats précédents ayant démontré la bonne précision du modèle. Ces quatre-vingt-huit modes correspondent à huit modes par harmonique double de la roue aubagée et quatre modes par harmonique simple.

### 3.5 Influence des restrictions cinématiques sur le phénomène d'interaction modale

La validation précédente concernant l'utilisation de méthodes de réduction modale linéaires pour un problème de contact permet d'envisager l'étude de l'interaction modale entre les modèles 2D précédemment introduits. Dans la littérature, cependant, le problème de l'interaction modale a été précédemment abordé en imposant des restrictions cinématiques telles que les projections sur les 2 premiers modes du diamètre de l'excitation. Dans cette section, l'objectif est d'analyser les conséquences des choix de modélisation sur les régimes d'interaction obtenus. L'étude se décompose en trois étapes, chacune associée à un espace d'étude de dimension de plus en plus grande :

1. étude de l'interaction modale avec restrictions cinématiques à partir de l'espace réduit de Craig-Bampton. Le but de cette étude est d'évaluer dans un espace réduit les zones d'interaction potentielles associées aux modèles 2D. La roue aubagée est réduite selon la méthode de Craig-Bampton, les déplacements de ce modèle réduit sont ensuite projetés sur les deux premiers modes propres du diamètre  $n_d$  de l'excitation du carter. Le carter est directement projeté sur les deux premiers modes au diamètre  $n_d$  de son excitation. Cette étude est faite pour plusieurs valeurs du paramètre  $n_d$  en itérant sur la vitesse de rotation de la roue aubagée et sur le coefficient de frottement  $\mu$ . La notation «  $S1$  » utilisée dans la suite de cette section fait référence à ce modèle ;
2. étude intermédiaire : interaction modale entre la roue aubagée réduite par méthode de Craig-Bampton et le carter, projeté sur les deux premiers modes propres du diamètre de l'excitation imposée. Les paramètres de réduction pour la roue aubagée sont ceux définis à la suite de l'étude de convergence réalisée dans ce chapitre (paragraphe 3.4.3). Les

simulations sont lancées sur les zones d'interaction définies par l'étude de l'interaction modale avec restrictions cinématiques. La notation «  $S2$  » est utilisée dans la suite pour se référer à cette étude ;

- interaction entre la roue aubagée réduite par méthode de Craig-Bampton et le carter éléments finis. Il s'agit de l'étude la plus générale : aucune restriction cinématique n'est appliquée sur les structures (autres que celles inhérentes à la réduction modale de la roue aubagée). Cette étude est notée «  $S3$  » dans la suite de cette section.

### 3.5.1 Étude du modèle avec restrictions cinématiques sur le carter et la roue aubagée

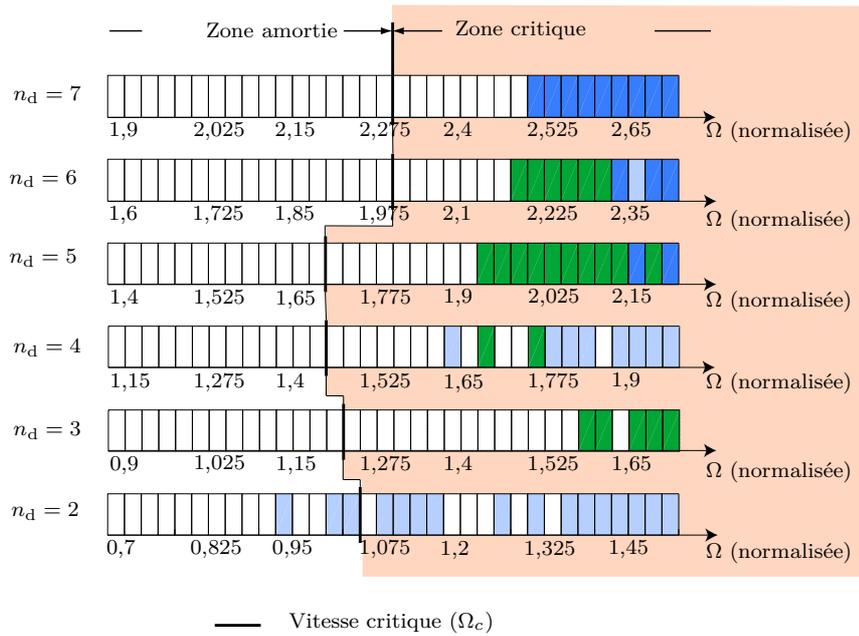
L'étude menée est très proche de celle réalisée dans [51]. La principale différence est liée aux modes propres sur lesquels sont projetés les déplacements de la roue aubagée. En effet, ces modes sont calculés dans l'espace réduit de Craig-Bampton et non plus dans l'espace éléments finis. Cette étude a donc pour but d'évaluer l'influence de l'utilisation d'une méthode CMS sur la détection des régimes d'interaction entre roue aubagée et carter pour différentes valeurs de  $n_d$ , de vitesse de rotation  $\Omega$  et de frottement  $\mu$ . Il s'agit donc de détecter des zones (couples  $(\Omega, \mu)$  pour chaque  $n_d$ ) d'interaction. Dans un premier temps, six valeurs de  $n_d$  sont prises en compte (2,3,4,5,6 et 7) : des simulations sont lancées pour chaque valeur de  $n_d$  en itérant sur la vitesse de rotation  $\Omega$ . Enfin, Le temps d'application du chargement sur le carter est  $t_c = 350$ .

Comme mentionné précédemment, le cas  $n_d = 2$  présente un intérêt particulier d'un point de vue industriel, il peut être vu au premier ordre comme la déformation du carter associée à une montée de température, et sera donc étudié plus en détails : des itérations plus fines en vitesse de rotation et en frottement sont menées pour cette valeur de  $n_d$ . Le tableau 3.2 rappelle les vitesses critiques associées aux modèles 2D de notre étude calculées avec la formule (1). Pour chaque valeur de  $n_d$ , les itérations en vitesse de rotation sont faites sur un intervalle

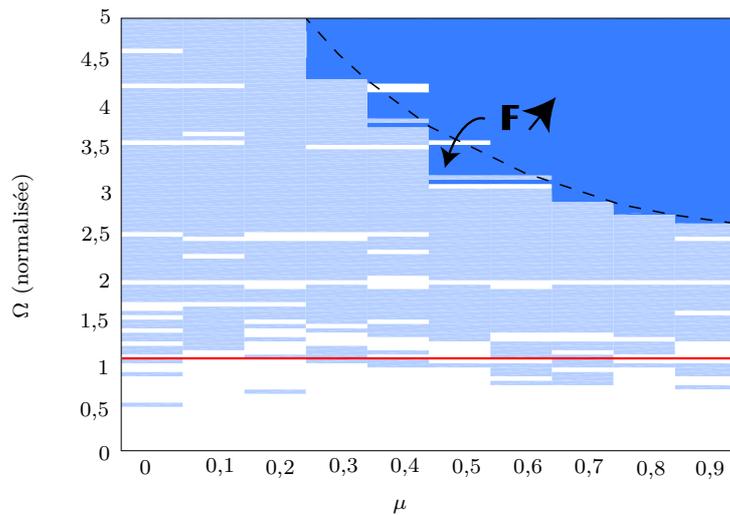
$[\Omega_c(n_d) - 0,4; \Omega_c(n_d) + 0,4]$ . La figure 3.19 illustre les différents régimes obtenus pour chaque valeur de  $n_d$  et pour les toutes les valeurs de  $\Omega$ . À l'exception du cas  $n_d = 2$ , tous les régimes d'interaction (bloqués ou entretenus) sont observés au-delà de la vitesse critique. Les régimes bloqués ne sont observés que pour des valeurs paires de  $n_d$ , essentiellement pour les valeurs  $n_d = 2$  et  $n_d = 4$ . Les nombreuses simulations lancées pour le cas  $n_d = 2$  permettent d'obtenir la carte des zones d'interaction dessinée sur la figure 3.20. Cette carte laisse apparaître trois zones distinctes. Les zones (■) correspondent aux régimes divergents, observés pour

$n_d$	vitesses critiques : $\Omega_c(n_d)$ (normalisées)
2	1,07485
3	1,2239
4	1,4618
5	1,73205
6	2,01735
7	2,31135

**Tableau 3.2** - Vitesses de rotation critiques pour la roue aubagée obtenues avec la relation (1).



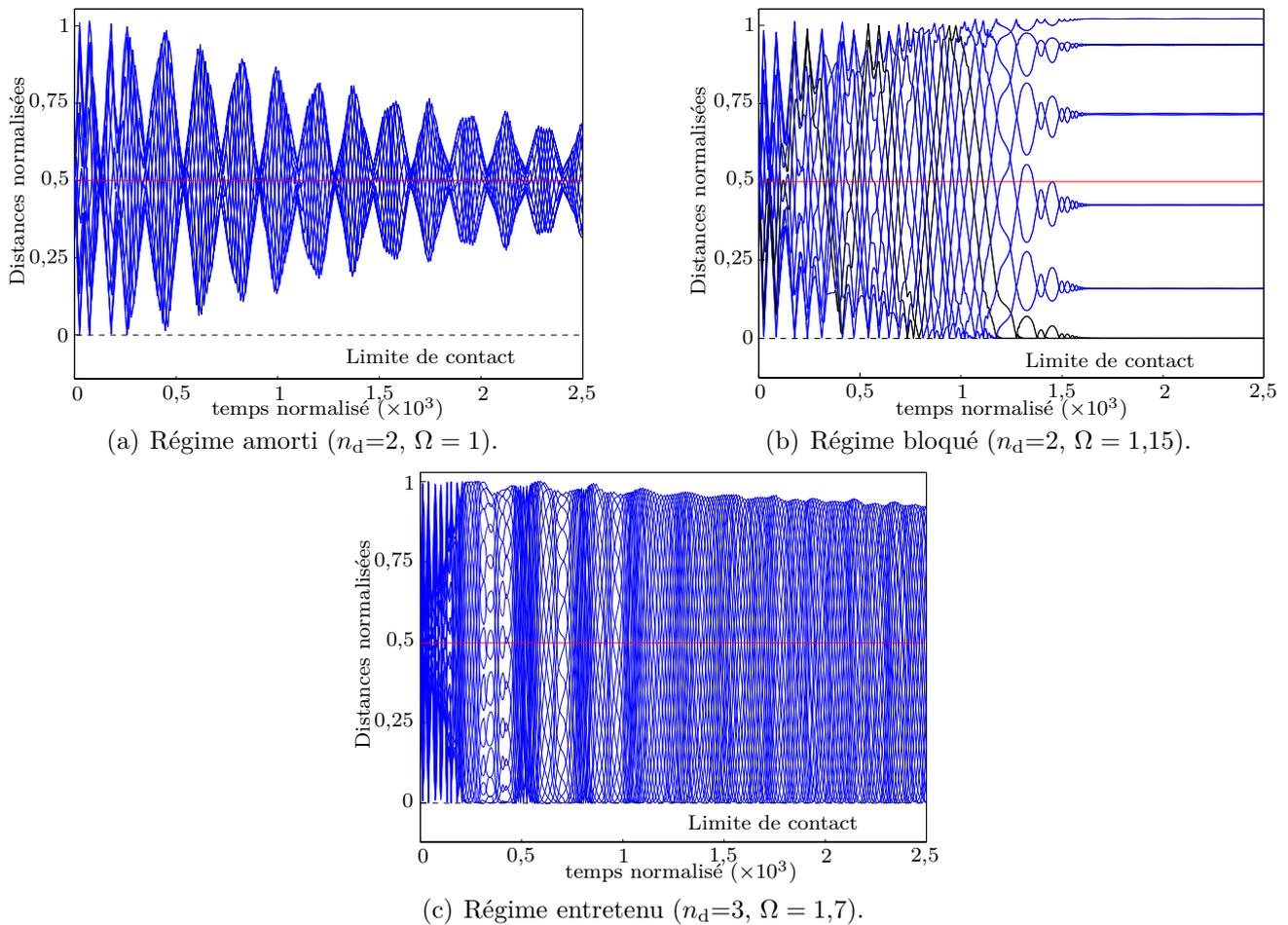
**Figure 3.19** - Régimes détectés pour plusieurs types d'excitation sur le carter ( $n_d$  variant de 2 à 7 avec un coefficient de frottement  $\mu = 0,2$ ) : régime bloqué (■), régime entretenu (■) et régime divergent (■). Les régimes amortis sont représentés en blanc.



**Figure 3.20** - Régimes observés en fonction de la vitesse de rotation  $\Omega$  et du coefficient de frottement  $\mu$  pour  $n_d = 2$  : régime bloqué (■) et régime divergent (■). La vitesse critique (—) vaut  $\Omega_c = 1,07485$ . Les zones blanches correspondent à des régimes amortis.

une valeur élevée du coefficient de frottement et de hautes vitesses de rotation, les zones (■) représentent les régimes bloqués et la zone blanche les modes amortis. La frontière entre régimes bloqués et divergents est particulièrement nette. Il est à noter que cette frontière dépend directement de l'amplitude de l'effort appliqué sur le carter (qui, dans le cas présent, est tel que le déplacement radial maximum du carter est  $d_{\max} = 1$ ). Plus grand est cet effort, plus instables sont les interactions et plus les régimes divergents apparaissent pour des valeurs de vitesses et de frottements plus faibles. La frontière entre les régimes amortis et bloqués est

moins clairement délimitée mais la correspondance avec la vitesse critique est notable. Chaque type de régime observé est représenté sur les figures 3.21(a), 3.21(b) et 3.21(c). Les différentes



**Figure 3.21** - Distances aubes/carter (—) ((—)) pour les aubes en contact permanent) et jeu initial (—) pour les différents régimes d'interaction obtenus dans le cadre de l'étude S1.

simulations effectuées sont cohérentes avec les résultats obtenus dans [51]. Bien que faisant référence à des modèles cinématiquement contraints via la projection sur les modes à diamètres, il est raisonnable de penser que la figure 3.20 contient l'ensemble des zones d'interaction possible (pour le cas  $n_d = 2$ ) pour les modèles 2D éléments finis de notre étude. Autrement dit, si il y a interaction entre des modèles plus riches pour  $n_d = 2$ , elle apparaîtra forcément sur un modèle obtenu par projection sur les modes à deux diamètres. En effet, si on suppose qu'une interaction modale peut se produire selon des modes à deux diamètres, alors quel que soit l'espace d'étude (modalement réduit, Craig-Bampton ou éléments finis), les deux structures se projettent parfaitement selon des modes à deux diamètres sans contribution possible des autres modes à diamètre. Ce qui ne peut être que favorisé par l'élimination *a priori* de ces autres modes, c'est-à-dire en effectuant dès le début une projection des structures sur les modes à deux diamètres. Ceci justifie que l'étude d'interaction modale (à  $n_d$  diamètres) entre la roue aubagée non cinématiquement contrainte et le carter cinématiquement contraint se fait à partir

des zones d'interaction précédemment déterminées.

### 3.5.2 Étude du modèle avec restrictions cinématiques sur le carter

L'étude sur le modèle S2 est menée avec un modèle réduit de la roue aubagée obtenu en appliquant la méthode de Craig-Bampton mais en gardant pour le carter les restrictions cinématiques précédemment introduites. En accord avec les résultats de l'étude de convergence menée dans ce chapitre, la base de réduction choisie se compose de quatre-vingt huit modes encastres :  $\eta = 88$ . Malgré l'application de la méthode de Craig-Bampton, les temps de calculs restent élevés et il n'est pas envisageable d'obtenir une carte similaire à celle obtenue (figure 3.20) pour l'étude S1. Ceci explique le nombre de simulations plus faible effectuées dans cette étude.

Le modèle de carter utilisé est le même que dans l'étude S1. Deux types d'efforts lui sont appliqués correspondant à deux valeurs du paramètre  $n_d$  : une excitation selon un mode à deux diamètres (ovalisation,  $n_d = 2$ ) ou une excitation selon un mode à trois diamètres ( $n_d = 3$ ). Les autres paramètres de l'étude sont :

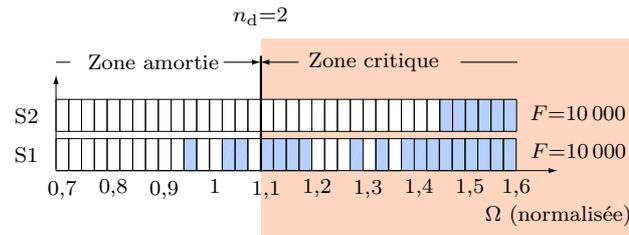
- le coefficient de frottement, fixé à  $\mu = 0,3$  ;
- le temps d'application du chargement sur le carter reste  $t_c = 350$  ;
- l'amplitude de l'effort  $F$  sur le carter est telle que le déplacement radial maximum sur le carter est  $d_{\max} = 1$  ;
- la vitesse de rotation  $\Omega$ , paramètre sur lequel les simulations sont itérées.

La valeur du coefficient de frottement est augmentée par rapport à la valeur par défaut utilisée dans l'étude S1 ( $\mu = 0,2$ ) car les simulations ont montré que cette valeur est trop faible pour détecter des régimes d'interaction pour l'étude S2.

#### 3.5.2.1 Déformation à deux diamètres du carter

Les simulations sont lancées en tenant compte des résultats de l'étude S1. La vitesse critique de la roue aubagée correspondant à  $n_d = 2$  est  $\Omega_c(2) = 1,07485$ . Le choix est fait d'itérer en vitesse de rotation autour de cette vitesse critique sur l'intervalle  $[0,7 ; 1,6]$  avec un pas  $\delta\Omega = 0,025$ .

La comparaison des résultats obtenus entre les simulations réalisées avec et sans restrictions cinématiques sur la roue aubagée nous renseigne sur leur rôle dans la détection des régimes d'interaction. La figure 3.22 expose l'ensemble des résultats obtenus. La plupart des régimes observés sont de type amorti comme celui tracé sur la figure 3.24(a). En ce qui concerne les régimes d'interaction (régimes bloqués) détectés, tel celui présenté sur la figure 3.24(b), il est remarquable que le niveau de vibration des aubes n'étant pas en contact permanent avec le carter ne s'amortit pas avec le temps contrairement à ce qui a été observé dans l'étude S1. Plusieurs remarques s'imposent à la vue des résultats. Tout d'abord, toutes les vitesses de rotation pour lesquelles un régime d'interaction est détecté dans l'espace S2 sont toutes des vitesses permettant de détecter un régime d'interaction dans l'espace S1. Ensuite, le nombre de régimes d'interaction détectés dans l'espace S2 est très inférieur au nombre de régimes d'interaction obtenus dans l'espace S1.



**Figure 3.22** - Régimes bloqués (■) détectés pour  $n_d=2$  pour les études S1 et S2.

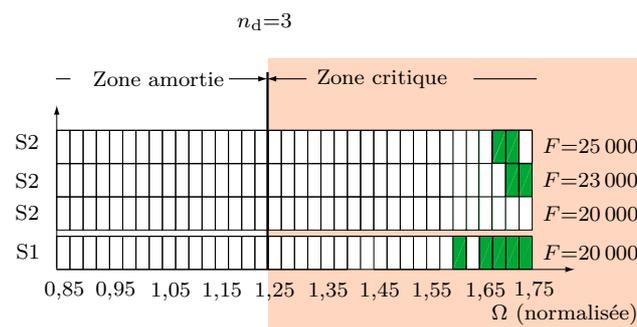
Il semble donc que les restrictions cinématiques imposées sur la roue aubagée dans l'étude S1 favorisent artificiellement la détection des régimes d'interaction lorsque le carter est soumis à un chargement suivant un mode à deux diamètres.

### 3.5.2.2 Déformation à trois diamètres du carter

Le fait d'imposer un chargement selon un mode à trois diamètres (ce qui implique la projection des déplacements du carter sur ses deux premiers modes à trois diamètres :  $n_d = 3$ ) doit permettre d'observer des régimes entretenus tels que ceux présentés dans le cadre de l'étude de convergence.

Le principe de l'étude est le même que pour le cas  $n_d = 2$  traité précédemment : les simulations sont réalisées pour plusieurs vitesses de rotation en itérant autour de la vitesse critique  $\Omega_c(3) = 1,2239$  sur l'intervalle  $[0,85 ; 1,75]$ . Comme le laisse apercevoir les résultats de l'étude S1 sur la figure 3.19 seuls quelques modes entretenus ont pu être détectés lorsque des restrictions cinématiques sont appliquées sur la roue aubagée et sur le carter.

Les résultats obtenus sont donnés sur la figure 3.23. À effort constant, aucun régime entretenu n'est observé avec le modèle réduit de la roue aubagée, tous les régimes sont amortis sur l'intervalle de vitesses étudié, confirmant la raréfaction des régimes d'interaction lorsque la roue aubagée n'est plus restreinte cinématiquement. Des simulations ont été réalisées en augmentant

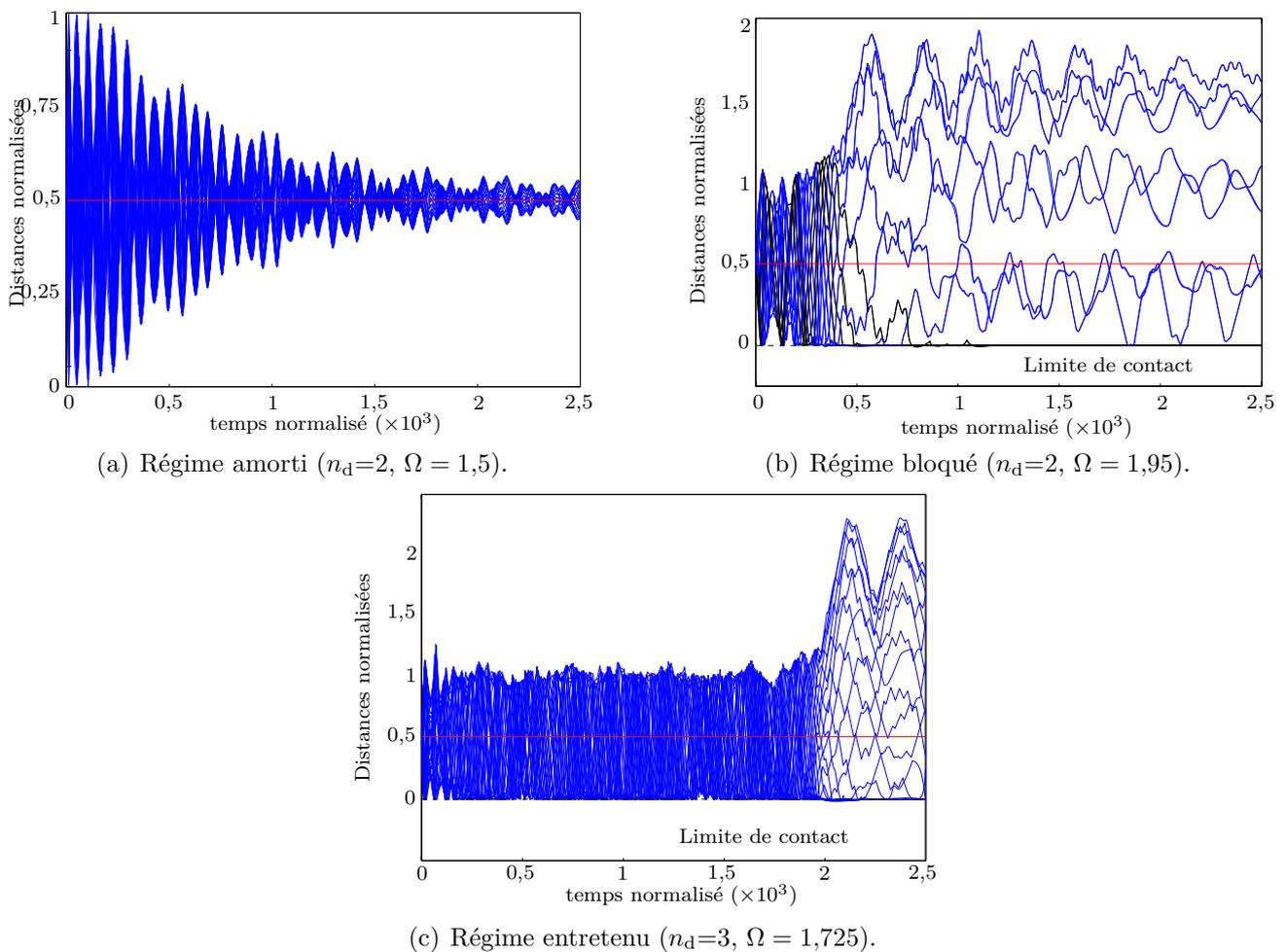


**Figure 3.23** - Régimes entretenus (■) détectés pour  $n_d=3$  pour les études S1 et S2.

l'amplitude de l'effort de 15 % ( $F = 23\,000$ ) puis de 25 % ( $F = 25\,000$ ). Cette augmentation de l'amplitude de l'effort appliqué sur le carter est une autre façon de contraindre la cinématique de la roue aubagée et il est alors possible d'observer des régimes entretenus comme le montre la figure 3.23. Un régime entretenu est représenté sur la figure 3.24(c), il apparaît moins régulier en termes d'amplitude des oscillations en comparaison avec le régime entretenu obtenu dans le

cadre de l'étude S1 présenté sur la figure 3.21(c) (restrictions cinématiques sur le carter et la roue aubagée), le niveau de vibration reste constant entre les instants  $t = 0$  et  $t = 2 \cdot 10^3$  avec une succession de micro-blocages. Par la suite, ce niveau de vibration augmente subitement pour atteindre celui d'un régime bloqué, des micro-blocages plus longs sont alors observés. Une prise de contact similaire à celle observée pour un régime bloqué semble impossible du fait de la dissymétrie de la configuration géométrique qui en résulterait (à cause de la non divisibilité du nombre d'aubes, 22 par le nombre de diamètres de l'excitation  $n_d = 3$ ).

Les résultats obtenus sont en accord avec ceux obtenus pour le cas  $n_d = 2$  en montrant que la présence de restrictions cinématiques sur la roue aubagée favorise la détection de modes d'interaction.



**Figure 3.24** - Distances aubes/carter (—) ((—) pour les aubes en contact permanent) pour les différents régimes d'interaction détectés dans le cadre de l'étude S2, jeu initial (—)

### 3.5.2.3 Conclusion

L'étude S2 menée sans restriction cinématiques sur la roue aubagée a permis de mettre en évidence que les restrictions cinématiques imposées sur les structures telles celles de l'étude S1 ou celles utilisées dans [51] favorisent la détection de régimes d'interaction. Les deux séries

de simulations effectuées ont également permis de vérifier les liens entre les types de régimes obtenus et la divisibilité du nombre d'aube par le nombre de diamètres de l'excitation évoqués dans [48].

Les résultats obtenus permettent de penser que la détection d'un régime d'interaction entre deux modèles éléments finis sans restriction cinématique ni sur le carter, ni sur la roue aubagée, sera défavorisée.

### 3.5.3 Étude du modèle sans restriction cinématique

L'étude avec le modèle S3 est faite sans restriction cinématique autres que celles inhérentes à la réduction par méthode de Craig-Bampton de la roue aubagée. Le modèle réduit est le même que celui utilisé pour l'étude avec le modèle S2. Quant au carter, c'est le modèle éléments finis non réduit qui est utilisé. Les temps de calculs sont donc considérablement augmentés par rapport aux deux études précédentes.

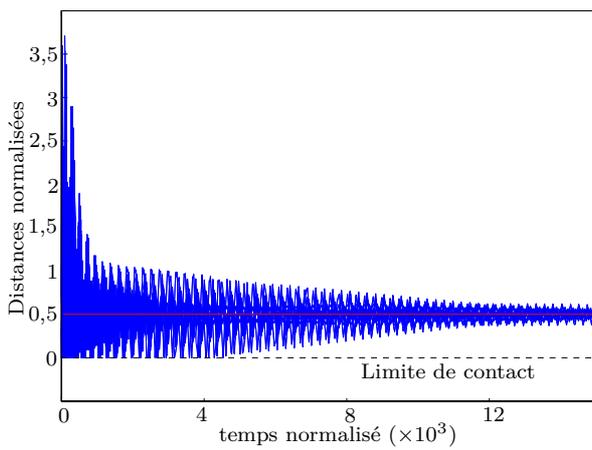
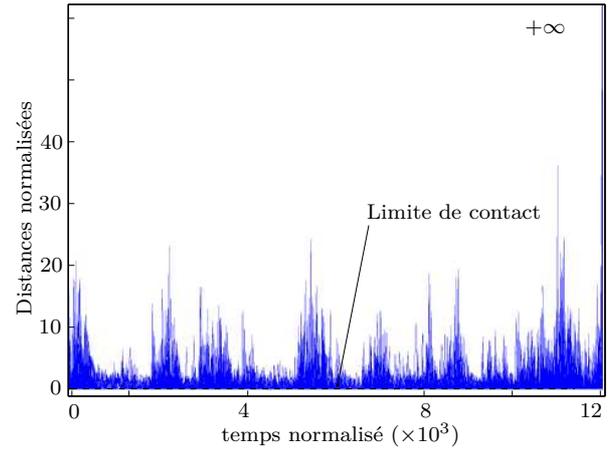
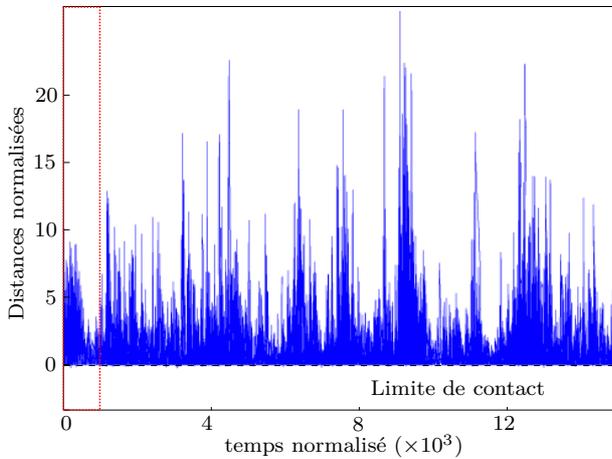
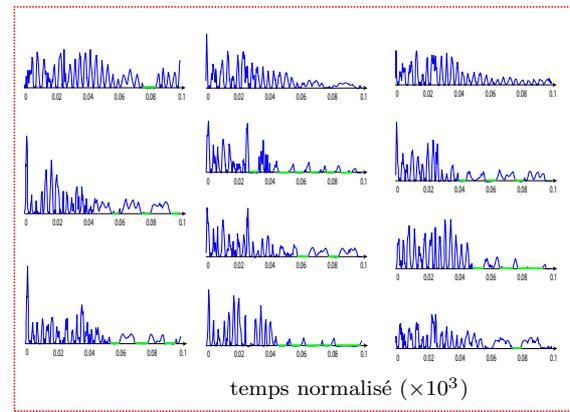
De même que pour l'étude S2, le coefficient de frottement est  $\mu = 0,3$ , le temps d'application du chargement (imposant une ovalisation du carter :  $n_d = 2$ ) sur le carter est toujours  $t_c = 350$  mais l'amplitude de l'effort est augmentée de façon à ce que le déplacement radial maximum observé sur le carter est 1,75.

De nombreuses simulations sont lancées au delà de la vitesse critique  $\Omega_c(2) = 1,07485$  jusqu'à une vitesse égale à 3,5. Seuls deux types de régimes sont détectés : des régimes amortis classiques tels que celui donné sur la figure 3.25(a) et des régimes divergents tels que celui présenté sur la figure 3.25(b). Les premiers régimes divergents sont détectés au-delà de  $\Omega = 3,3$ , vitesse de transition nettement inférieure à celle observée ( $\Omega \simeq 4,15$ ) avec des restrictions cinématiques dans le cadre de l'étude S1 sur la figure 3.20.

Seule exception à ces résultats, un régime non amorti mais non divergent est observé pour la vitesse  $\Omega = 3,28$ , il est représenté sur la figure 3.25(c). Le caractère non divergent de ce régime est à relativiser compte tenu du niveau de vibration observé : la distance aube/carter pouvant atteindre 450 soit près de 10 % du rayon du carter. Les limites de notre étude semblent donc atteintes, en effet il convient de rappeler que celle-ci se place dans le cadre des petites perturbations. Toutefois, il est intéressant de remarquer que ce régime non amorti et non divergent comporte plusieurs phases de micro-blocages sur certaines aubes entre les instants  $t = 0$  et  $t = 1 \cdot 10^3$ , période au cours de laquelle le niveau de vibration reste cohérent avec le cadre de notre étude. Aussi, les résultats présentés dans la suite de ce paragraphe relativement à l'analyse de ce régime portent uniquement sur l'intervalle de temps  $[t = 0 ; t = 2,5 \cdot 10^3]$ .

Soit  $u(t)$  le vecteur contenant les déplacements des ddls de la roue aubagée à l'instant  $t$ , en supposant que le déplacement de la roue aubagée se décompose principalement suivant ses vingt-deux premiers modes propres (modes à diamètre associés au premier mode de flexion, 1F, des aubes), il vient

$$u(t) = \sum_{i=1}^{N_t} u_i(t) \Phi_i \simeq \sum_{i=1}^{22} u_i(t) \Phi_i \quad (3.6)$$

(a) Régime amorti ( $n_d=2$ ,  $\Omega = 3$ ).(b) Régime divergent ( $n_d=2$ ,  $\Omega = 3,5$ ).(c) Cas d'interaction modale sans restriction cinématique ( $n_d=2$ ,  $\Omega = 3,28$ ), agrandissement pour chaque aube (il y a onze courbes du fait de la symétrie du problème :  $n_d = 2$ ).

**Figure 3.25** - Distances aubes/carter (—) pour l'ensemble des régimes détectés dans le cadre de l'étude S3, jeu initial (—) et micro-blocages (—).

les coefficients  $u_i(t)$  sont ensuite combinés suivant le diamètre auquel ils sont associés

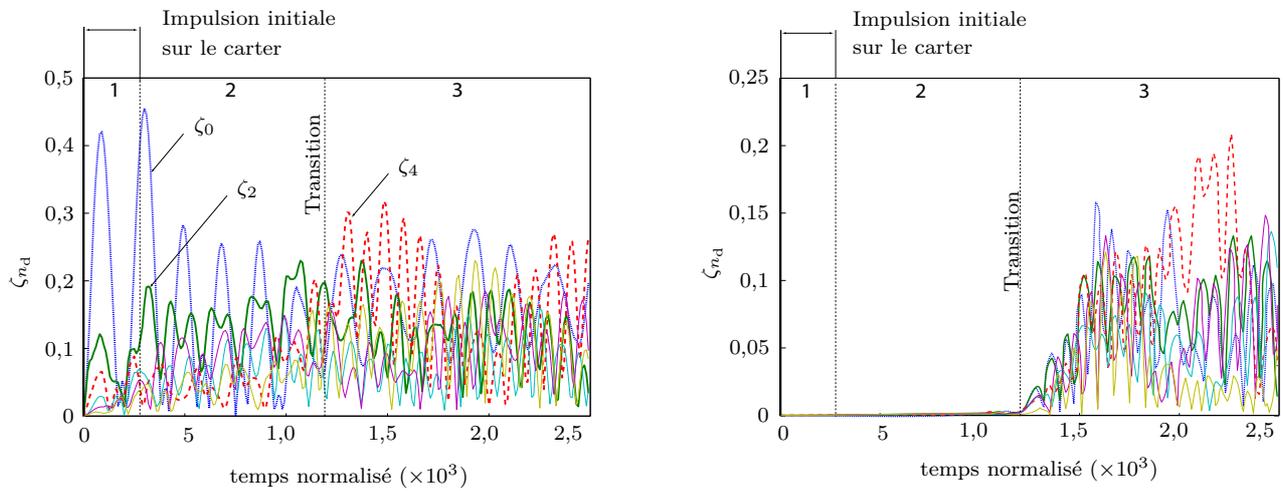
$$\text{pour } (i,j) \in [1; 22], \text{ si } n_d(\Phi_i) = n_d(\Phi_j), \text{ alors} \quad (3.7)$$

$$\zeta_{n_d}(t) = \sqrt{u_i(t)^2 + u_j(t)^2}$$

C'est l'évolution de ces coefficients  $\zeta_{n_d}(t)$  qui est tracée sur les figures 3.26(a) et 3.26(b) pour le régime non amorti et non divergent et sur la figure 3.26(c) pour un régime amorti. L'excitation sur le carter étant à deux diamètres, il est cohérent d'observer que ce sont les coefficients associés aux modes propres à diamètres pairs qui sont initialement prépondérants. Toutefois, dans le cas du régime non amorti (figure 3.26(b)) et contrairement à ce qui se passe dans le cas amorti (figure 3.26(c)) les coefficients modaux associés aux modes à diamètres impairs deviennent soudainement non négligeables. Cette « transition » s'observe également sur la figure 3.26(a) avec une soudaine augmentation de l'influence des modes propres à quatre diamètres.

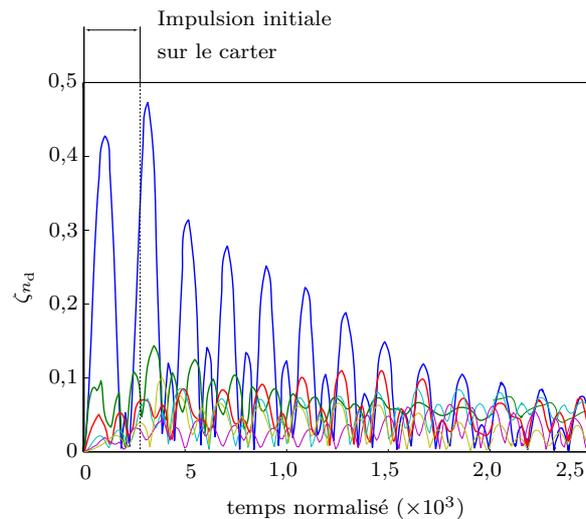
L'absence d'autres régimes d'interaction empêche d'établir un lien entre l'évolution des

coefficients d'influence et le fait que le régime soit non amorti mais ces résultats justifient le fait d'envisager l'analyse des résultats en termes d'influence des diamètres nodaux pour des simulations plus complexes telles que les simulations sur les modèles industriels 3D.



(a) Influence des modes propres à diamètres pairs dans le cas du régime 3.25(c).

(b) Influence des modes propres à diamètres impairs dans le cas du régime 3.25(c).



(c) Influence des modes propres à diamètres au cours du temps dans le cas du régime amorti 3.25(a).

**Figure 3.26** - Coefficients d'influence des différents diamètres pour les régimes détectés dans le cadre de l'étude S3. Le code couleur pour les principaux diamètres est marqué sur la figure 3.26(a).

## 3.6 Conclusion

Ce chapitre a permis de réaliser une étude approfondie sur les performances des méthodes de synthèse modale avec le problème de contact considéré puis d'évaluer l'influence de restrictions cinématiques sur la détection des régimes d'interaction.

L'étude de convergence a souligné la qualité des modèles réduits obtenus par méthode de Craig-Bampton en termes de prédiction des régimes d'interaction, ainsi que sa stabilité. En revanche, les modèles réduits par méthode de Craig-Chang-Martinez se sont révélés plus sensibles numériquement et la convergence vers la solution éléments finis de référence a parfois nécessité un grand nombre de modes ( $\phi \geq 220$ ) dans la base de réduction.

Concernant l'étude de l'influence des restrictions cinématiques sur la détection des régimes d'interaction, trois séries de simulations ont été lancées et détaillées dans ce chapitre en faisant varier le niveau de restriction : d'un cas fortement contraint dans lequel les déplacements du carter et de la roue aubagée sont projetés sur leurs deux premiers modes au diamètre de l'excitation appliquée (étude S1) au cas le moins contraint en simulant l'interaction sur le modèle éléments finis du carter et sur un modèle réduit de la roue aubagée (étude S3). Les résultats obtenus ont permis de mettre en évidence que les restrictions cinématiques imposées dans le cadre de l'étude S1 et de [51] favorisent artificiellement la détection des régimes d'interaction, l'élimination de ces contraintes aboutissant à une raréfaction des régimes d'interaction détectés.

Le modèle le plus riche, sans restriction cinématique, est ainsi plus précis et semble mieux adapté pour simuler le contact aube/carter. En revanche, sa complexité nous empêche de l'utiliser pour une étude paramétrique à cause de temps de calculs bien trop longs. Il y a donc un compromis à trouver entre un modèle contraint cinématiquement mais qui permet de mener des études paramétriques et un modèle plus riche permettant de mener à bien des simulations plus précises.

Si les résultats obtenus en termes de convergence des modèles réduits ainsi que leur performance avec le problème de contact étudié sont très encourageants en vue de l'étude à mener sur les modèles industriels 3D, la difficulté à détecter des modes d'interaction dans le cadre de l'étude S3 laisse penser que la détection d'interactions sur des modèles 3D sera particulièrement délicate. L'étude du comportement de modèles industriels 3D et la recherche d'interactions est l'objet du chapitre suivant.

# Interaction modale 3D

## Sommaire

<b>4.1</b>	<b>Notions préliminaires</b>	<b>98</b>
<b>4.2</b>	<b>Définition des paramètres d'étude</b>	<b>99</b>
<b>4.3</b>	<b>Influence du coefficient de frottement</b>	<b>111</b>
<b>4.4</b>	<b>Détection des vitesses critiques</b>	<b>114</b>
<b>4.5</b>	<b>Influence des diamètres nodaux</b>	<b>119</b>
<b>4.6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>127</b>

L'objectif de l'étude d'interaction modale sur des modèles industriels de roue aubagée et de carter est tout d'abord d'évaluer les modèles réduits obtenus dans le chapitre 1 et d'éprouver leur fiabilité pour une simulation de contact 3D. L'évaluation de ces modèles va nous amener à définir les paramètres de réduction  $\phi_{RA}$ ,  $\phi_{CA}$ ,  $\eta_{RA}$  et  $\eta_{CA}$  permettant de mener l'étude sur une plage de vitesse réaliste. Ces modèles sont ensuite utilisés pour conduire une étude d'interaction dont le cadre est défini par les paramètres suivant :

- le nombre de diamètres de l'excitation appliquée sur le carter :  $n_d$  ;
- l'amplitude du chargement correspondant :  $Amp$  ;
- le temps d'application du chargement sur le carter :  $t_c$  ;
- la vitesse de rotation de la roue aubagée :  $\Omega$  ;
- le coefficient de frottement entre les aubes et le carter :  $\mu$ .

La première partie de ce chapitre présente la justification du choix de chacun de ces paramètres ainsi que l'influence de certains paramètres sur les modèles réduits étudiés.

Contrairement à l'étude menée sur les modèles 2D dans le chapitre 3 il n'est pas envisageable de rechercher directement d'éventuels régimes d'interaction entre le carter et la roue aubagée car chaque simulation demande plusieurs heures de calculs (les temps de calculs moyens sont de l'ordre d'une heure de temps CPU pour 5 ms simulées). Il n'est donc pas possible de mener une recherche des régimes d'interaction en itérant sur les différents paramètres des simulations comme cela a été fait pour les modèles 2D. La connaissance des vitesses critiques « réelles » associées au couple roue aubagée/carter est fondamentale pour une future recherche de régimes d'interaction, ce qui justifie l'intérêt porté à leur détection.

Outre l'étude d'interaction, ce chapitre a également pour but d'apprécier l'emploi d'une méthode de réduction modale à interfaces libres pour la simulation des interactions modales initiées par contact aube/carter. Les premières simulations d'interaction ayant été réalisées avec la méthode de Craig-Bampton dans [48] sur un cas de contact simplifié, l'utilisation d'une autre méthode de réduction modale, de nature différente, répond à un double objectif : d'une part la confronter aux résultats obtenus par la méthode de Craig-Bampton (aucune simulation éléments finis ne pouvant être faite pour assurer la convergence des simulations) et d'autre part, estimer la méthode la plus appropriée pour mener à bien une étude d'interaction modale en prenant en compte plusieurs critères tels que la stabilité numérique, la taille des modèles réduits et la complexité de mise en œuvre de la méthode.

Enfin, la détection de vitesses critiques est réalisée pour chaque modèle réduit en itérant sur la vitesse de rotation de la roue aubagée. Il est à noter que l'étude du comportement des structures à proximité d'une vitesse critique a pour conséquence de nous éloigner du domaine de fonctionnement réel des structures étudiées puisque que le DAM utilisé dans notre étude tourne habituellement à des vitesses inférieures à  $\Omega = 10$ . Ainsi, des résultats correspondant à deux types d'itérations en vitesse de rotation sont présentés en fin de chapitre :

1. de 5 à 12,5 pour l'étude de l'influence des paramètres physiques et numériques (coefficient de frottement et richesse de la base de réduction modale) sur une plage de fonctionnement réaliste ;
2. de 5 à 30 : une étude théorique pour observer la réponse des structures autour de la première vitesse critique pour une excitation à deux diamètres.

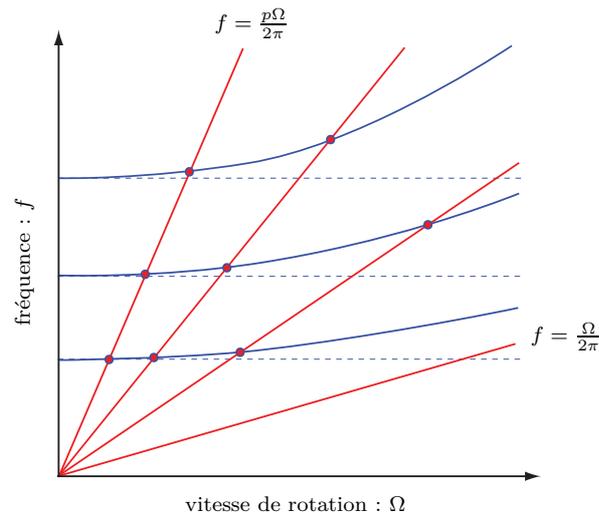
## 4.1 Notions préliminaires

Une partie importante des résultats donnés dans ce chapitre sont présentés dans l'espace fréquentiel en utilisant une représentation similaire à celle utilisée pour les *diagrammes de Campbell*. Ce type de diagramme est fréquemment utilisé en dynamique des rotors et a pour but de représenter les différentes zones de résonance, il montre classiquement les fréquences propres du rotor sur l'axes des ordonnées et les fréquences d'excitation sur l'axe des abscisses. Les droites (—), telles celles de la figure 4.1, habituellement tracées sur les diagrammes de Campbell ont pour équation

$$f = p \frac{\Omega}{2\pi} \quad (4.1)$$

$p$  étant un entier naturel et  $\Omega$  la vitesse de rotation du rotor en radian par seconde. Les intersections de ces droites avec les lignes d'évolution (—) ou (.....) des fréquences propres permettent de définir des zones de résonance fondamentales à prendre en compte pour la conception des rotors. Dans le cadre de notre étude, la valeur de  $p$  est limitée à

$$p = kn_d \quad (4.2)$$



**Figure 4.1** - Diagramme de Campbell : évolution des fréquences propres avec raidissement centrifuge (—) ou sans (.....) en fonction de la vitesse de rotation de la structure.

avec  $n_d$  le nombre de diamètre de l'excitation imposée sur le carter et  $k$  un entier naturel. C'est pourquoi dans la suite de ce chapitre seules les droites d'équation

$$f = n_d \frac{k\Omega}{2\pi} \quad (\text{dans notre étude, } n_d = 2) \quad (4.3)$$

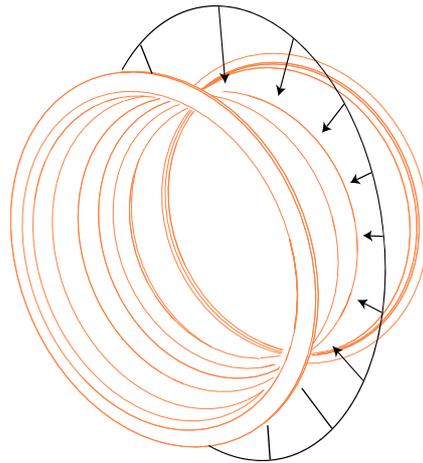
seront représentées.

## 4.2 Définition des paramètres d'étude

Parmi tous les paramètres d'étude présentés en introduction, seul le coefficient de frottement  $\mu$  est imposé :  $\mu = 0,15$ . Cette valeur correspond à une moyenne des coefficients de frottements observés dans le cas du contact roue aubagée/carter et est donnée par Snecma. Toutefois, l'étude de l'influence d'une variation de ce coefficient est présentée dans la suite du chapitre afin de s'assurer de la robustesse des simulations réalisées.

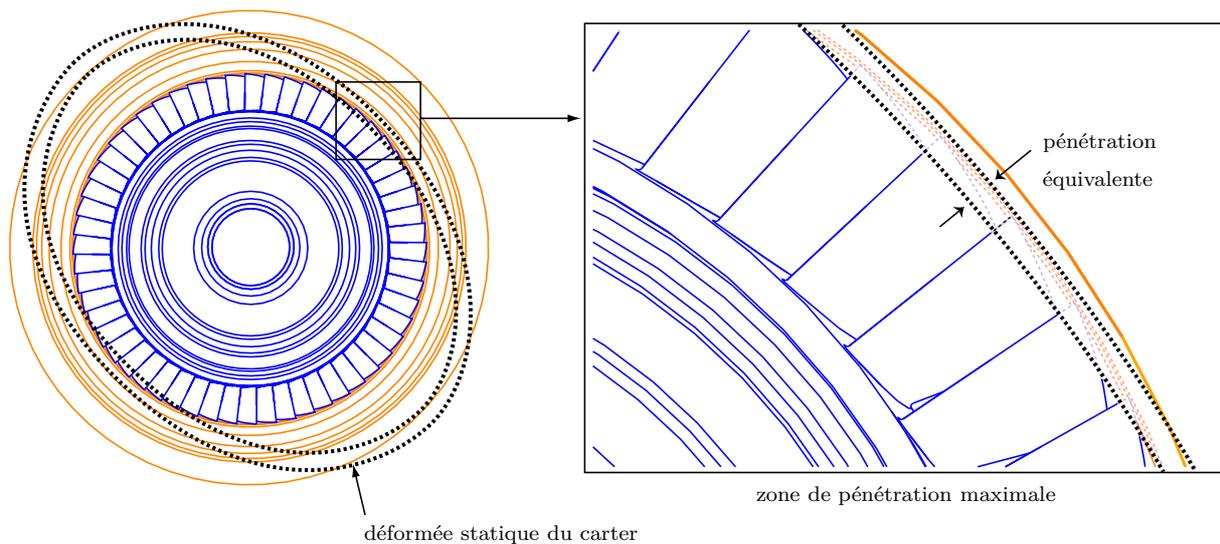
### 4.2.1 Description du cas de charge

Lors du fonctionnement d'une turbo-machine, en configuration non-accidentelle, le carter subit principalement des déformations d'origine thermique dues aux hautes températures de fonctionnement. Ces déformations thermiques correspondent classiquement à une « ovalisation » du carter, soit une excitation selon un mode à deux diamètres. C'est pourquoi le chargement considéré dans notre étude déforme le carter selon un mode à deux diamètres :  $n_d = 2$  tel que présenté sur la figure 4.2. L'amplitude de ce chargement est paramétrable. Elle est fixée en fonction du déplacement radial maximal observé sur la déformée statique du carter comparativement au rayon de la roue aubagée. La déformée statique est obtenue en appliquant un effort (calcul statique) sur le modèle réduit du carter sans prendre en compte la roue aubagée. Le déplacement radial maximal du carter au niveau des nœuds frontières permet ainsi de définir une



**Figure 4.2** - *Chargement extérieur selon un mode à deux diamètres sur le carter.*

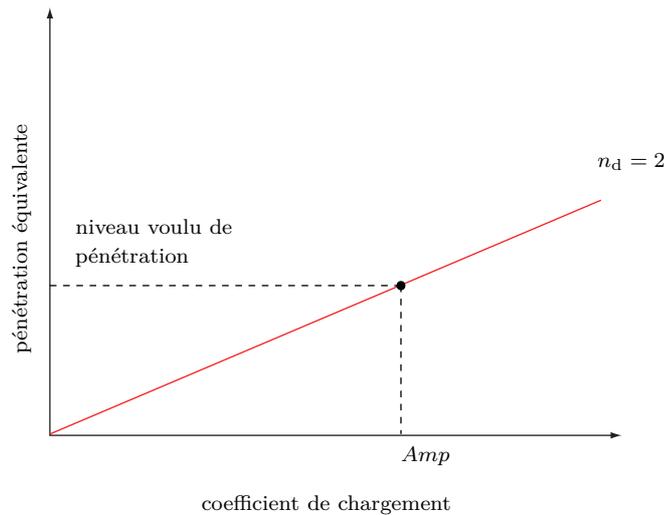
« pénétration équivalente » correspondant à la différence entre la position des nœuds frontières de la roue aubagée et la position calculée en statique des nœuds frontières du carter comme décrit sur la figure 4.3. L'amplitude du chargement appliqué sur le carter est défini en fonction



**Figure 4.3** - *Pénétration équivalente pour un cas de chargement à deux diamètres.*

de cette pénétration équivalente. Le principe du calcul de l'amplitude du chargement repose sur une relation linéaire la liant à la pénétration voulue (du fait qu'il s'agit d'un calcul statique, figure 4.4). Dans toutes les simulations effectuées dans ce chapitre, la valeur de la pénétration équivalente est fixée à 0,05 pour un jeu initial variant de 0,075 à 0,14, ceci impose directement la valeur du coefficient multiplicatif  $Amp$ <sup>1</sup>. Ce chargement est imposé progressivement grâce à une loi de type exponentielle. Contrairement à ce qui a été fait dans le cas de l'étude d'interaction modale 2D, le chargement est ici maintenu au cours du temps. Le temps d'application

1. La valeur exacte du coefficient utilisé dans notre étude est  $Amp = 1,49$ , ce coefficient multiplie le chargement selon un mode à deux diamètres appliqué sur le carter



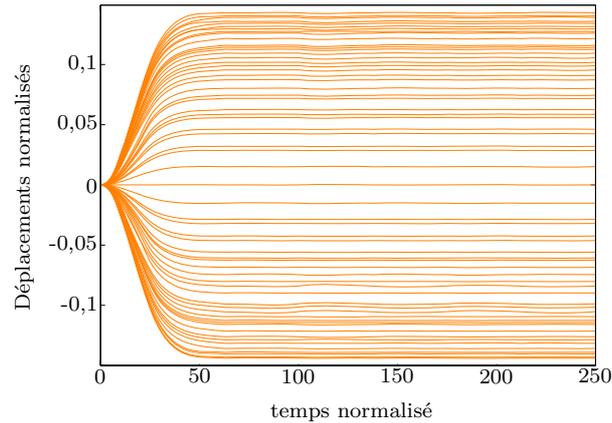
**Figure 4.4** - Variation de la pénétration équivalente en fonction du niveau de chargement.

du chargement est donc toujours égal au temps de simulation ( $t_c = 250$  ou  $t_c = 500$  selon les simulations).

#### 4.2.2 Rigidité du carter : observations et conséquences

Les paramètres matériaux fournis par Snecma sont tels que le carter est beaucoup plus rigide que la roue aubagée. En conséquence, relativement au niveau de vibration observé sur la roue aubagée, le carter est quasi-rigide. Ces premières observations expliquent que l'étude d'interaction modale 3D soit essentiellement centrée sur la roue aubagée. Cette grande rigidité du carter a également pour conséquence de limiter considérablement l'intérêt d'une réduction modale dynamique sur le carter. La figure 4.5 permet d'observer<sup>2</sup> que malgré l'établissement de contacts avec la roue aubagée (à partir de  $t = 27$ ), le niveau de vibration dû au contact sur le carter est extrêmement faible : de l'ordre de  $5 \cdot 10^{-8}$  alors que les vibrations observées sur la roue aubagée sont de l'ordre de  $5 \cdot 10^{-5}$ . En aucun cas des différences significatives de comportement ne pourront être remarquées entre les deux méthodes de réduction utilisées. En particulier, le modèle réduit du carter par méthode de Craig-Martinez est sensible numériquement du fait, notamment, du phénomène de modes manquants mentionné dans le chapitre 1, et requiert un plus grand nombre de modes libres pour compenser cette insuffisance. L'enrichissement de ce modèle est en contradiction totale avec le comportement quasi-statique de la structure au cours des différentes simulations. Il semble plus cohérent de *porter toute notre attention sur la roue aubagée et de n'utiliser qu'un seul modèle pour le carter* : le plus stable, celui de Craig-Bampton. C'est pourquoi, pour toutes les simulations lancées dans ce chapitre, le carter est réduit avec la méthode de Craig-Bampton en conservant 112 modes encastés dans la base de réduction :

2. La simulation est effectuée avec une vitesse de rotation de la roue aubagée  $\Omega = 12,5$ , en considérant un chargement à deux diamètres (ce qui peut être observé par la répartition des déplacements radiaux), une amplitude  $Amp = 1,49$ , un coefficient de frottement  $\mu = 0,15$  et avec les modèles réduits de Craig-Bampton :  $\eta_{RA} = 336$  et  $\eta_{CA} = 112$ .



**Figure 4.5** - *Déplacement radial (—) de chaque nœud frontière du carter en fonction du temps. Une fois l'effort appliqué, le niveau de vibration des nœuds est de l'ordre de  $5 \cdot 10^{-8}$ .*

$$\eta_{cA} = 112.$$

En accord avec les résultats présentés sur la figure 1.8, le choix est fait de ne pas se limiter à une réduction statique pour pouvoir représenter au mieux la déformation du carter selon un mode à deux diamètres. La grande rigidité du carter a un impact direct sur la détection des vitesses critiques telles que définies par l'équation (1) : plus le carter est rigide, plus la première pulsation propre  $\omega_c$  est élevée.

Dans le cas de notre étude, pour  $n_d = 2$ , la première pulsation propre de la roue aubagée est  $\omega_{cRA} \simeq 30,05$ , celle du carter est  $\omega_{cCA} \simeq 43,48$ , l'équation (1) nous donne ainsi que la première vitesse critique vaut  $\Omega_c = 36,765$ . Cette vitesse de rotation est plus de trois fois et demi supérieure à la vitesse maximale de la plage de fonctionnement de la roue aubagée et entraîne des cas de contact particulièrement sévères du fait de la vitesse linéaire en sommet d'aube qui est proche de  $v_s = 4,75$ .

Ces observations, associées aux remarques déjà faites sur les temps de calcul, nous amènent à reconsidérer la détection des vitesses critiques en ne prenant en compte que la roue aubagée et le type de chargement, c'est pourquoi l'étude menée dans la deuxième partie de ce chapitre définit comme vitesse critique la vitesse

$$\Omega_c = \frac{\omega_{cRA}}{n_d} \quad (4.4)$$

qui correspond ainsi à l'excitation de la roue aubagée suivant sa première fréquence propre au nombre de diamètre  $n_d$ .

### 4.2.3 Convergence des modèles réduits

Les paramètres  $\eta_{RA}$  et  $\phi_{RA}$  correspondent respectivement au nombre de modes encastrés retenus dans la base de réduction de Craig-Bampton et au nombre de modes libres gardés dans la base de réduction de Craig-Martinez pour le calcul des modèles réduits de la roue aubagée.

Une première étude de convergence effectuée dans le chapitre 1 a permis de mettre en évidence la convergence spatiale des différents modèles réduits lorsque les paramètres  $\eta_{RA}$  et  $\phi_{RA}$

augmentent. Le nombre de modes propres et le contenu fréquentiel nécessaires à la simulation d'interaction modale sous le chargement décrit dans le paragraphe précédent ne peuvent pas être connus *a priori*, il est nécessaire de vérifier la convergence des résultats en lançant des simulations en faisant varier les paramètres  $\eta_{RA}$  ou  $\phi_{RA}$ .

Une telle démarche est classique dans le cadre des méthodes numériques dans lesquelles on cherche une approximation d'une solution inconnue : l'espace d'approximation est enrichi jusqu'à obtenir la convergence des résultats, on parle de convergence asymptotique. Usuellement, la valeur convergée est considérée comme une bonne approximation de la solution du problème.

Cette section propose d'établir trois types de convergence :

- la convergence des résultats obtenus avec le modèle réduit de Craig-Bampton pour la roue aubagée ;
- la convergence des résultats obtenus avec le modèle réduit de Craig-Martinez pour la roue aubagée ;
- la convergence générale des simulations effectuées en comparant les résultats obtenus pour des méthodes de réduction modale différentes.

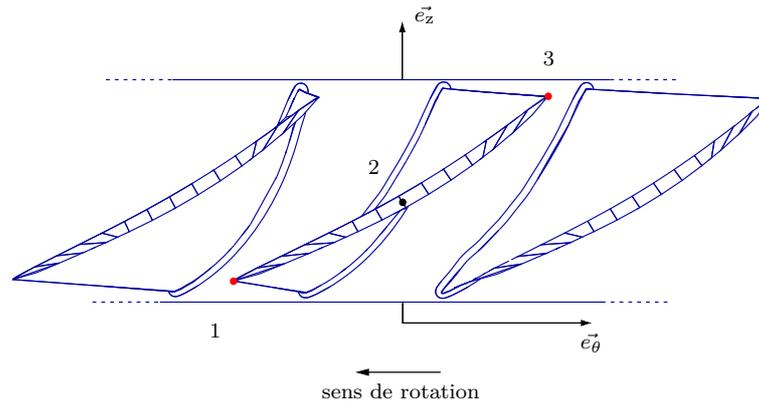
L'ensemble des résultats associé à la convergence des méthodes de réduction ainsi qu'à la comparaison des deux méthodes est exposé de deux façons : d'une part des résultats dans l'espace temporel (courbes de déplacements, de distances aube/carter ou d'évolution des efforts de contact) et d'autre part des résultats dans l'espace fréquentiel (spectre des réponses et évolution des spectres en fonction d'un paramètre tel que la vitesse de rotation de la roue aubagée ou le coefficient de frottement).

Chaque type de résultat permet de mettre en avant différents aspects des convergences observées : les résultats dans l'espace temporel sont utiles pour juger la qualité des résultats en termes d'instant de détection des phases de contact et permettent de visualiser d'éventuels déphasages ; les résultats dans l'espace fréquentiel permettent quant à eux de juger de la stabilité du spectre des réponses lorsque la base modale est enrichie.

Du fait du chargement appliqué sur le carter, deux nœuds viennent au contact lors des simulations réalisées : les nœuds 1 et 3 représentés en rouge sur la figure 4.6. Les simulations sont pour la plupart<sup>3</sup> conduites sur une durée de 250 ce qui correspond à un peu plus de 9 tours de la roue aubagée pour  $\Omega = 12,5$ . Le contact est établi peu avant l'instant  $t = 30$ , alors jusqu'à  $t = 220$  une série de contacts forcés entre le carter et la roue aubagée est simulée. Les transformées de Fourier sont toutes réalisées, une fois le contact établi et le régime stabilisé, sur le signal obtenu entre  $t = 125$  et  $t = 250$  sur le signal correspondant au déplacement suivant le ddl  $u_\theta$  du nœud 1 (composante du déplacement selon le vecteur  $\vec{e}_\theta$ ) de l'aube 1. Ce ddl est mis en jeu lorsque l'aube répond en flexion et en torsion selon ses premiers modes de vibrations propres.

---

3. comme mentionné dans le paragraphe 4.2.1 certaines simulations sont effectuées sur une durée de 500, notamment lorsqu'on cherche à améliorer la définition des spectres obtenus dans l'espace fréquentiel. Dans ce cas, les transformées de Fourier sont réalisées sur le signal obtenu entre les instants  $t = 125$  et  $t = 500$ .



**Figure 4.6** - Nœuds frontières en tête d'aube sur lesquels le contact avec le carter est traité.

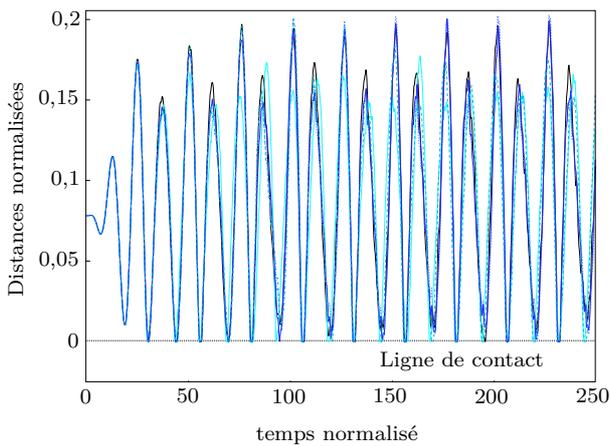
#### 4.2.3.1 Méthode de Craig-Bampton

**Remarque :** Les courbes tracées dans l'espace temporel et utilisées pour visualiser la convergence des résultats ont été choisies arbitrairement, des résultats similaires sont obtenus pour tous les autres ddl frontières des modèles étudiés.

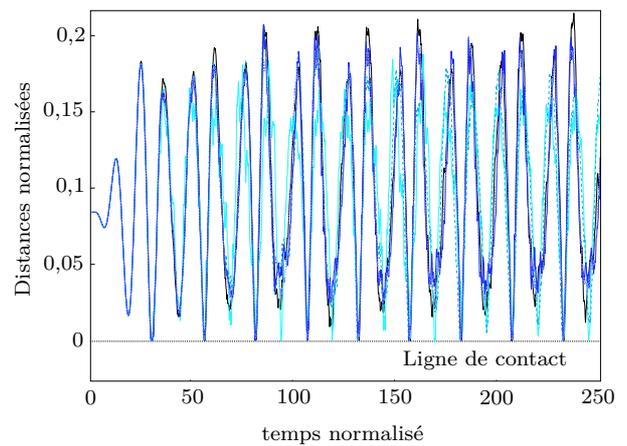
La roue aubagée est réduite à l'aide de la méthode de Craig-Bampton [19]. Les simulations sont réalisées avec une vitesse de rotation de la roue de 12,5, choisie de façon à couvrir la plage de fonctionnement ( $\Omega < 10,5$ ). L'augmentation du paramètre  $\eta_{RA}$  aboutit rapidement à la convergence des résultats dans l'espace temporel. Les figures 4.7(a) et 4.7(b) permettent de visualiser l'évolution de la distance entre l'aube 1 et le carter au cours du temps respectivement pour les nœuds 3 et 1. Les simulations ont été lancées pour des valeurs de  $\eta_{RA}$  variant de 0 à 1 680 en augmentant de 56 le nombre de modes dans la base de réduction entre chaque simulation.

Pour plus de clarté dans la présentation des résultats, seules les courbes obtenues pour les valeurs 0, 168, 336, 504 et 1120 du paramètre  $\eta_{RA}$  sont tracées. Les courbes correspondant à des valeurs de  $\eta_{RA}$  comprises entre 336 et 1 680 ne permettent pas de voir de différence significative dans l'espace temporel. Que ce soit pour le nœud 1 ou pour le nœud 3, les courbes tracées attestent de la convergence très rapide des résultats. Plus étonnant, les courbes sont bien en phase même pour de très faibles valeurs du paramètre  $\eta_{RA}$  alors que les études menées précédemment sur des modèles simplifiés (poutre et modèle 2D) mettaient en évidence un déphasage entre la solution réduite sans mode encastré et la solution éléments finis. La complexité du modèle peut être, paradoxalement, à l'origine de cette amélioration grâce au très grand nombre de modes statiques considérés. La principale différence entre les courbes obtenues pour des bases très pauvres ( $\eta_{RA} = 0$  jusqu'à  $\eta_{RA} = 168$ ) et des bases plus riches ( $\eta_{RA} \geq 336$ ) se situe au niveau de l'approximation de l'amplitude des distances : une valeur minimale du paramètre  $\eta_{RA}$  pour obtenir des amplitudes convergées est  $\eta_{RA} = 336$ .

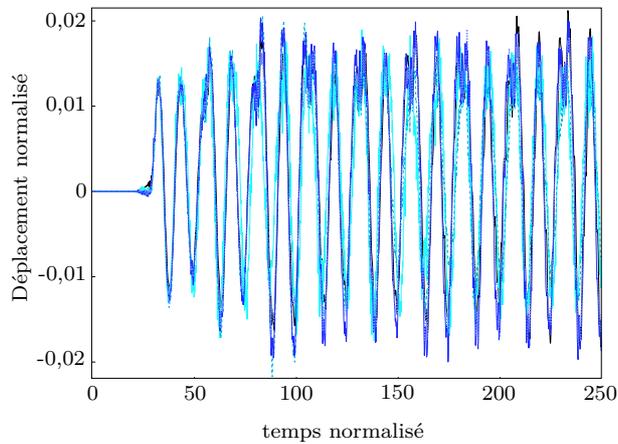
La figure 4.7(c) représente l'évolution du ddl  $u_\theta$  (suivant l'axe  $e_\theta$ ) du nœud 1 de l'aube 1 au cours du temps. Les remarques en termes de convergence sont exactement les mêmes que pour les distances aubes/carter données précédemment. Des résultats identiques sont obtenus pour



(a) Distance aube/carter pour le nœud 3 de l'aube 1 en fonction de la valeur du paramètre de réduction  $\eta_{RA}$ .



(b) Distance aube/carter pour le nœud 1 de l'aube 1 en fonction de la valeur du paramètre de réduction  $\eta_{RA}$ .



(c) Déplacement du ddl  $u_\theta$  du nœud 1 de l'aube 1 en fonction de la valeur du paramètre de réduction  $\eta_{RA}$ .

**Figure 4.7** - Déplacements et de distances aubes/carter pour les différents modèles réduits calculés par méthode de Craig-Bampton :  $\eta_{RA} = 0$  (—);  $\eta_{RA} = 168$  (- - -);  $\eta_{RA} = 336$  (—);  $\eta_{RA} = 504$  (· · · ·);  $\eta_{RA} = 1120$  (—).

tous les autres ddls frontières des autres aubes.

Enfin, la figure 4.8 présente l'évolution du spectre des réponses obtenues pour différentes bases modales ( $\eta_{RA} = 0, 168, 336, 504, 672, 840$  et  $1120$ ) entre les instants  $t = 125$  et  $t = 250$  de chaque simulation. Les maxima locaux de chaque courbe sont projetés dans le plan  $(\vec{x}, \vec{y})$  et reliés entre eux (—) pour présenter l'évolution de leur position en fonction de la valeur du paramètre  $\eta_{RA}$ . Ces maxima deviennent très stables en fréquence dès que  $\eta_{RA}$  dépasse la valeur 336. Que ce soit dans l'espace fréquentiel ou dans l'espace temporel, la valeur  $\eta_{RA} = 336$  s'impose comme celle à partir de laquelle les résultats ont convergé : une grande stabilité est observée en termes de contenu fréquentiel des réponses au delà de cette valeur, de même que pour l'amplitude des réponses temporelles. Par ailleurs, cette valeur de  $\eta_{RA}$  implique un facteur de réduction de la roue aubagée très satisfaisant, supérieur à 2000.

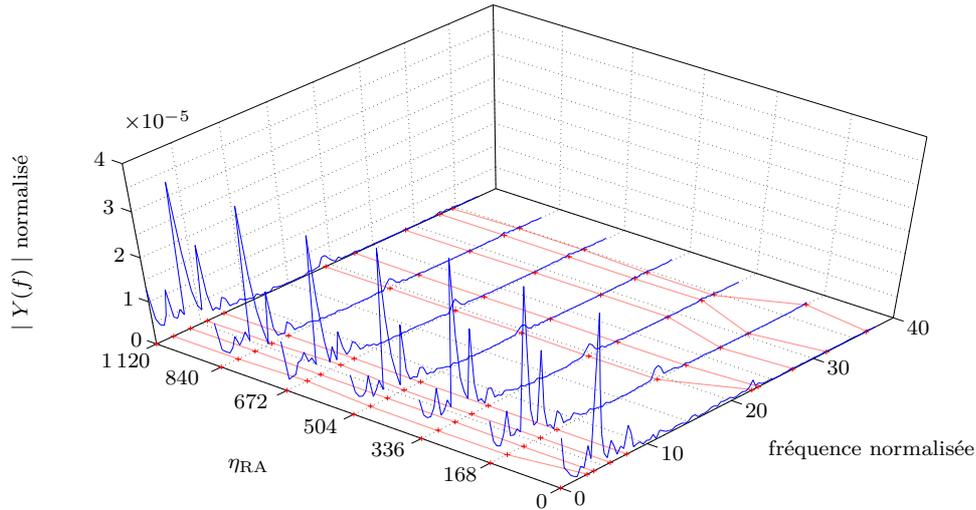


Figure 4.8 - Spectres de réponse en fonction de  $\eta_{RA}$ .

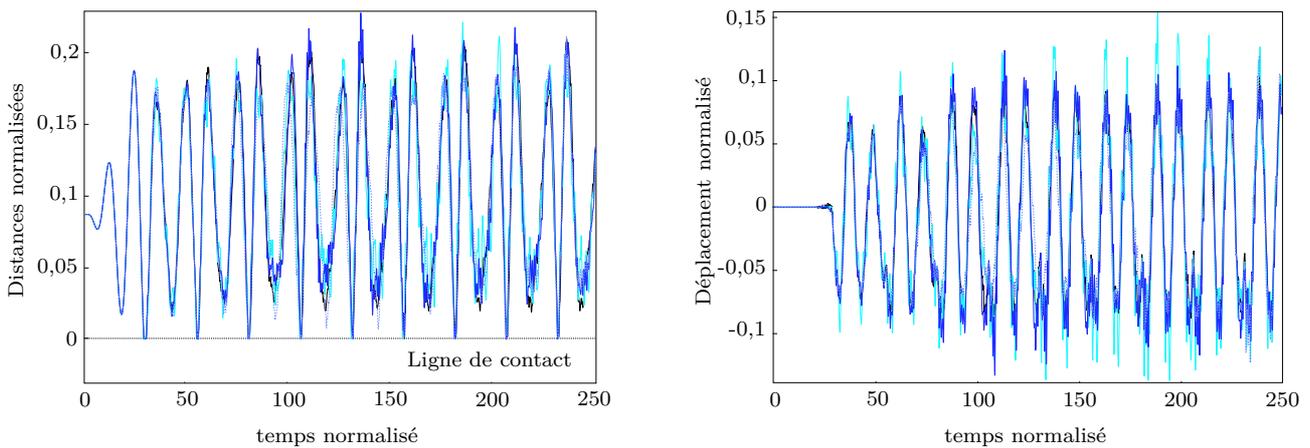
Il convient de rappeler que la valeur du paramètre  $\eta$  est relative à la vitesse de rotation de la roue aubagée  $\Omega = 12,5$ . Le modèle réduit est donc utilisable pour toute valeur de la vitesse de rotation comprise dans l'intervalle  $[0; 12,5]$ . Pour des vitesses plus élevées il est impossible de dire *a priori* si la valeur de  $\eta$  est suffisante pour avoir des résultats convergés.

#### 4.2.3.2 Méthode de Craig-Martinez

L'étude de la convergence des simulations avec la roue aubagée réduite par méthode de Craig-Martinez est menée à bien en considérant un plus petit nombre de bases modales que pour l'étude de convergence précédente. Cinq valeurs du paramètre de réduction  $\phi_{RA}$  sont prises en compte :  $\phi_{RA} = 56, 112, 224, 448$  et  $560$ . Plusieurs raisons motivent ce choix restreint de bases de réduction. Tout d'abord, la méthode de Craig-Martinez nécessite une procédure de réduction pour chaque valeur du paramètre  $\phi_{RA}$  (comme expliqué dans le chapitre 1) or cette procédure est extrêmement coûteuse en temps de calculs. Par ailleurs, l'absence de différence significative entre les simulations réalisées avec les modèles réduits par la méthode de Craig-Bampton pour de grandes valeurs du paramètre  $\eta_{RA}$  indiquent qu'il n'est pas utile de considérer des valeurs trop élevées du paramètre  $\phi_{RA}$  (même si aucun lien n'est fait *a priori* entre le type de convergence de chacune des méthodes).

Deux séries de courbes sont dessinées dans l'espace temporel sur les figures 4.9(a) et 4.9(b). Ces figures décrivent respectivement l'évolution en fonction du temps de la distance aube/carter au niveau du nœud 1 de l'aube 1 et le déplacement selon le ddl  $u_z$  sur ce même nœud. Les différentes courbes sont parfaitement en phase et se superposent bien dès que  $\phi_{RA}$  atteint la valeur 224. Les courbes acquises pour les valeurs  $\phi_{RA} \geq 448$  sont notamment moins bruitées. Les courbes obtenues pour l'ensemble des nœuds frontières donnent des résultats parfaitement similaires en termes de convergence.

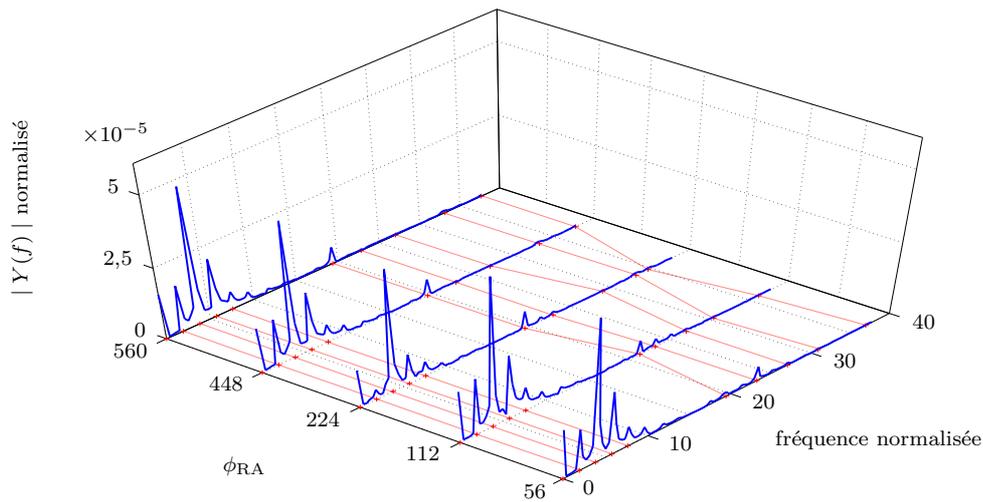
Concernant les résultats dans l'espace fréquentiel, la figure 4.10 donne le spectre des réponses entre les instants  $t = 125$  et  $t = 250$  de chaque simulation. De même que pour la figure 4.8,



(a) Distance aube/carter pour le nœud 1 de l'aube 1 en fonction de  $\phi_{RA}$ .

(b) Déplacement du ddl  $z$  pour le nœud 1 de l'aube 1 en fonction de  $\phi_{RA}$ .

**Figure 4.9** - Déplacements et de distances aubes/carter pour les différents modèles réduits calculés par méthode de Craig-Martinez :  $\phi_{RA} = 56$  (—);  $\phi_{RA} = 112$  (—);  $\phi_{RA} = 224$  (.....);  $\phi_{RA} = 448$  (—).



**Figure 4.10** - Spectres de réponse en fonction de  $\phi_{RA}$ .

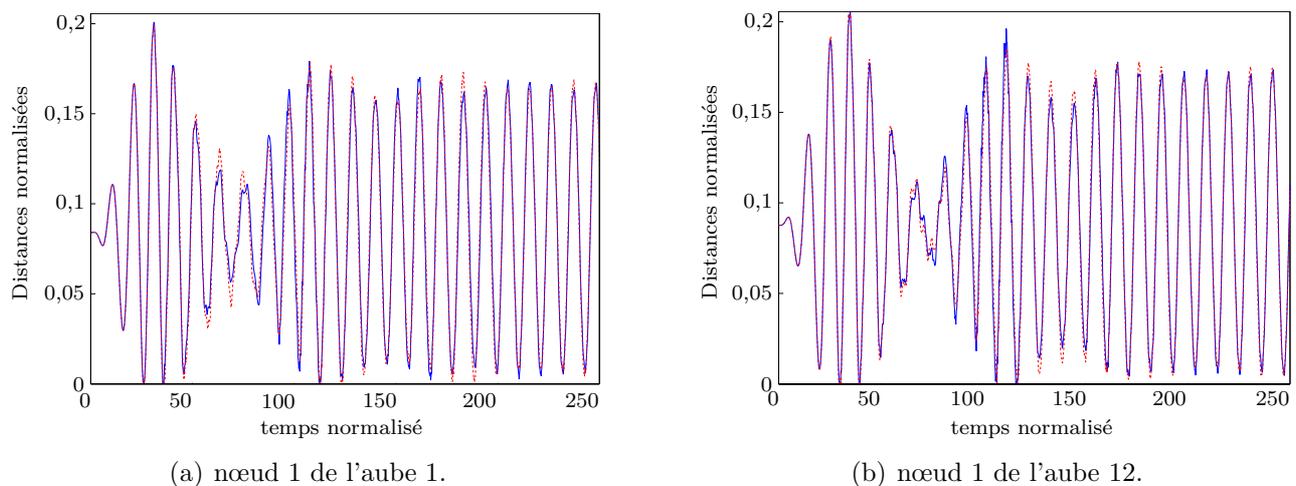
les courbes rouges représentent l'évolution de la position des maxima locaux en fonction de la valeur du paramètre  $\phi_{RA}$ . Une grande stabilité de la position de ces maxima est observée entre les valeurs  $\phi_{RA} = 448$  et  $\phi_{RA} = 560$ . Les différents résultats présentés permettent de conclure que la valeur du paramètre  $\phi_{RA}$  la plus adaptée est  $\phi_{RA} = 448$ .

Il est intéressant de remarquer que cette valeur est légèrement plus élevée que celle choisie pour le paramètre  $\eta_{RA}$ . Cet écart est cohérent avec les remarques faites lors de l'étude des modèles réduits par méthode de Craig-Martinez dans le chapitre 1 relativement au phénomène de modes manquants. En conséquence, il est fortement probable que l'hypothèse faite pour le calcul des modèles réduits avec la méthode de Craig-Martinez (relativement à l'inversion de la matrice raideur  $\mathbf{K}$ ) joue un rôle important dans l'écart entre les valeurs des paramètres  $\eta_{RA}$  et  $\phi_{RA}$ .

### 4.2.3.3 Comparaison des deux modèles réduits

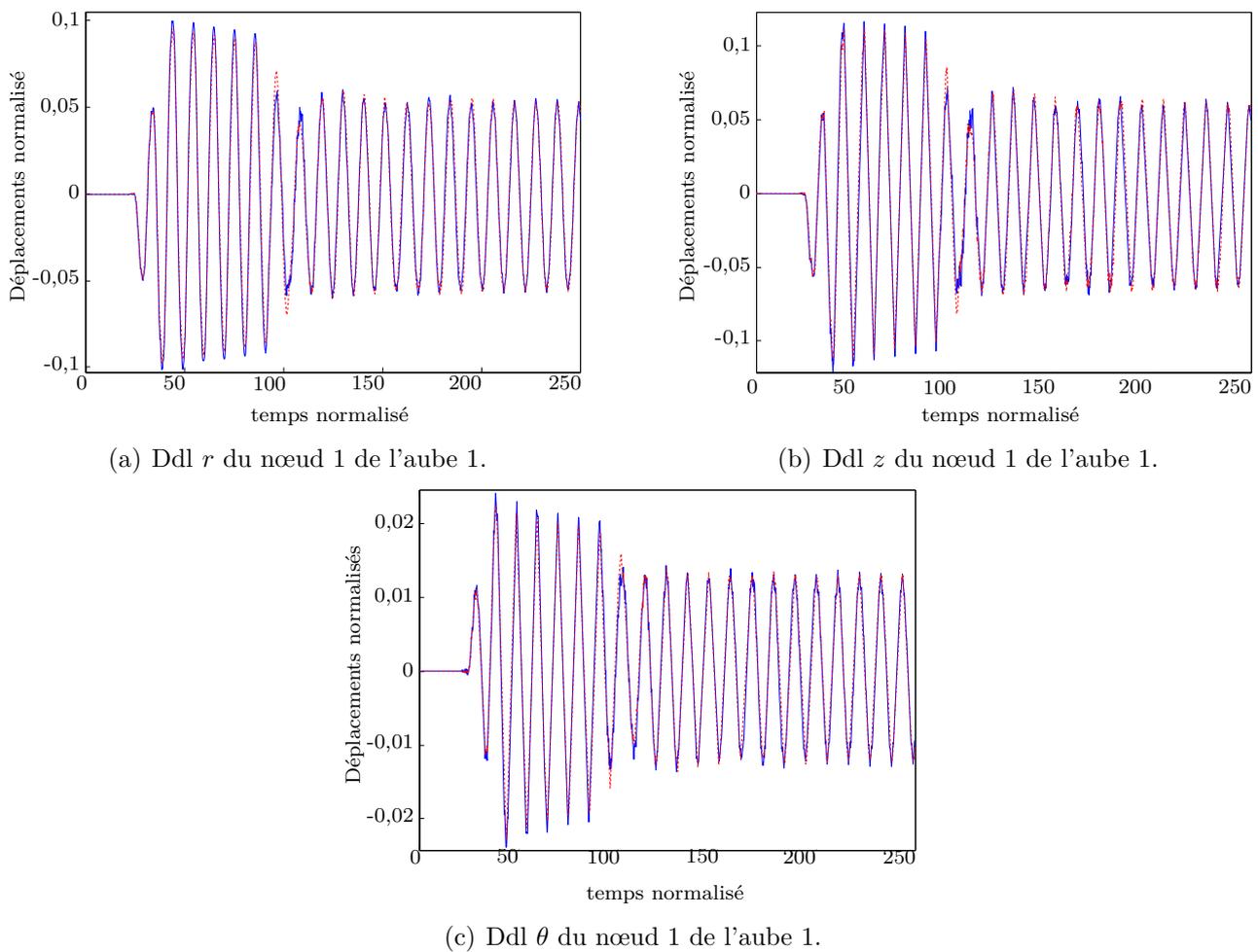
Les modèles réduits de Craig-Martinez et de Craig-Bampton ont été étudiés indépendamment les uns des autres. L'absence de référence éléments finis donne une importance particulière à l'erreur entre les solutions obtenues par des méthodes dont les modes composants sont très différents. Les convergences observées pour chaque méthode doivent être comparées pour valider les résultats : les simulations effectuées avec chaque modèle réduit étant parfaitement identiques, les solutions doivent être identiques. La comparaison est présentée sur des simulations avec une vitesse de rotation  $\Omega = 14,5$ . Cette vitesse de rotation est supérieure, par choix, à celle des simulations pour évaluer la convergence des résultats mais reste inférieure à la vitesse critique théorique. L'hypothèse est faite que cette vitesse de rotation appartient à la plage de validité des modèles réduits, ce que les résultats obtenus confirment *a posteriori*. Une étude plus précise de la plage de validité des modèles réduits est proposée dans le paragraphe 4.4.

De même que pour les études de convergence précédentes, les comparaisons entre les modèles réduits sont présentés dans l'espace temporel (figures 4.11(a), 4.11(b), 4.12(a), 4.12(b), 4.12(c) et 4.13(a)) et dans l'espace fréquentiel (figure 4.13(b)). Sur toutes les figures, les courbes (.....) sont relatives à la méthode de Craig-Martinez alors que les courbes (—) sont relatives à la méthode de Craig-Bampton.



**Figure 4.11** - Comparaison des distances aubes/carter en fonction du temps obtenues avec les modèles réduits de Craig-Bampton (—) et de Craig-Martinez (.....).

Les courbes tracées sur les figures 4.11(a) et 4.11(b) représentent l'évolution de la distance aube/carter respectivement sur le nœud 1 de l'aube 1 et sur le nœud 1 de l'aube 12 au cours du temps pour chaque méthode de réduction. Elles permettent de souligner une bonne concordance des résultats obtenus par des méthodes de réduction différentes, celles-ci sont parfaitement en phase. Certaines amplitudes sont cependant légèrement plus importantes avec la méthode de Craig-Martinez. Les courbes tracées sur les figures 4.12(a), 4.12(b) et 4.12(c) mettent en évidence l'évolution des déplacements des ddl  $u_r$ ,  $u_z$  et  $u_\theta$  du nœud 1 de l'aube 1 au cours du temps pour chaque méthode de réduction. Là encore, les courbes se superposent bien et ne



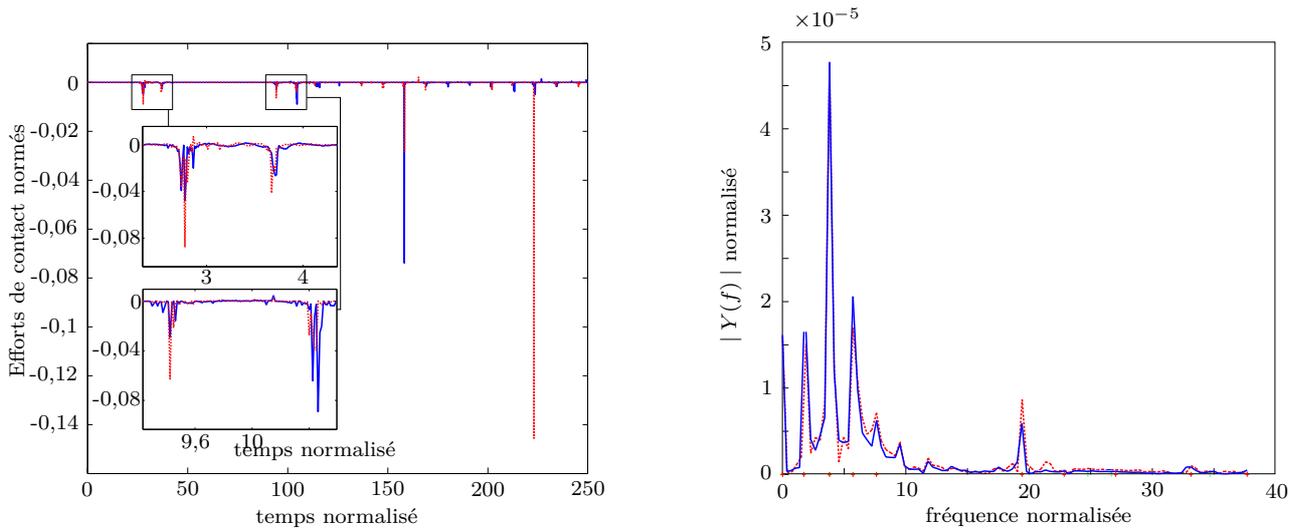
**Figure 4.12** - Comparaison des déplacements des ddl  $u_r$ ,  $u_\theta$  et  $u_z$  en fonction du temps obtenues avec les modèles réduits de Craig-Bampton (—) et de Craig-Martinez (.....).

permettent pas de voir de différence significative entre les deux méthodes de réduction modale. Les efforts de contact (pour le nœud 1 de l'aube 1) au cours du temps pour chaque méthode de réduction tracées sur la figure 4.13(a) permettent d'observer que la détection des contacts est rigoureusement identique entre les deux méthodes, ce qui est visible par la bonne superposition des différents pics. L'amplitude de l'effort varie d'une méthode de réduction à l'autre mais l'absence de phase de blocage, et donc d'effort appliqué de façon continue, empêche d'analyser de façon pertinente les efforts de contact.

Enfin, la figure 4.13(b) représente la comparaison des spectres des réponses obtenues pour chaque méthode de réduction modale. La bonne superposition des courbes permet de confirmer dans l'espace fréquentiel les résultats précédemment obtenus dans l'espace temporel : le contenu fréquentiel des réponses est très similaire.

#### 4.2.3.4 Apport des modes encastrés

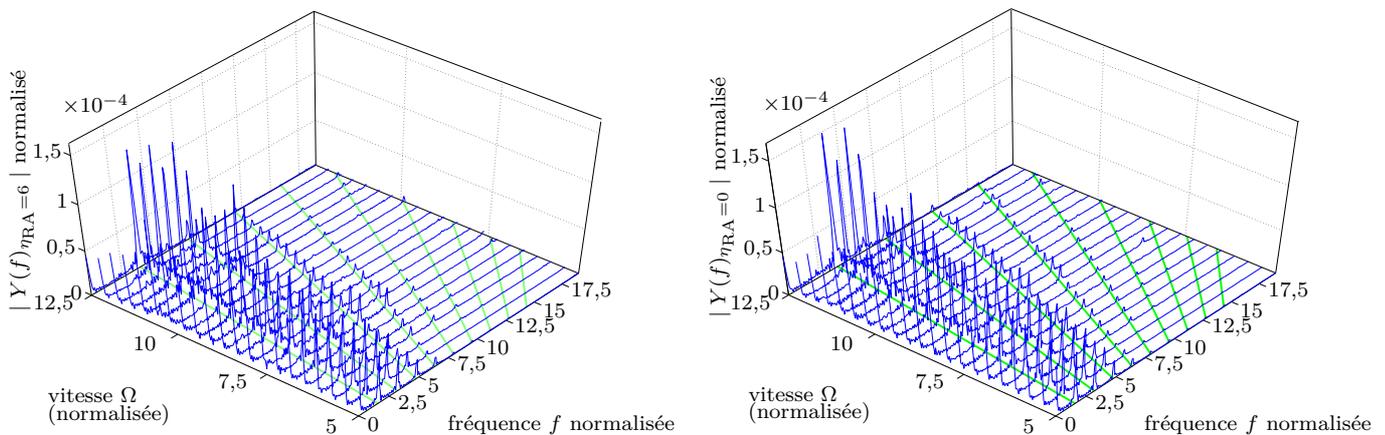
Dans le cas particulier de la méthode de Craig-Bampton, une étude a été menée pour tenter de visualiser dans l'espace fréquentiel l'influence des 336 modes encastrés retenus. Les



(a) Comparaison de l'effort de contact sur le nœud 1 de l'aube 1 obtenu avec le modèle réduit par méthode de Craig-Bampton (—) et avec le modèle réduit par méthode de Craig-Martinez (.....).

(b) Superposition des spectres des réponses obtenues pour le modèle réduit de Craig-Bampton (—) et de Craig-Martinez (.....).

**Figure 4.13** - Comparaison des modèles réduits par méthode de Craig-Bampton et par méthode de Craig-Martinez d'effort de contact et de spectre fréquentiel.



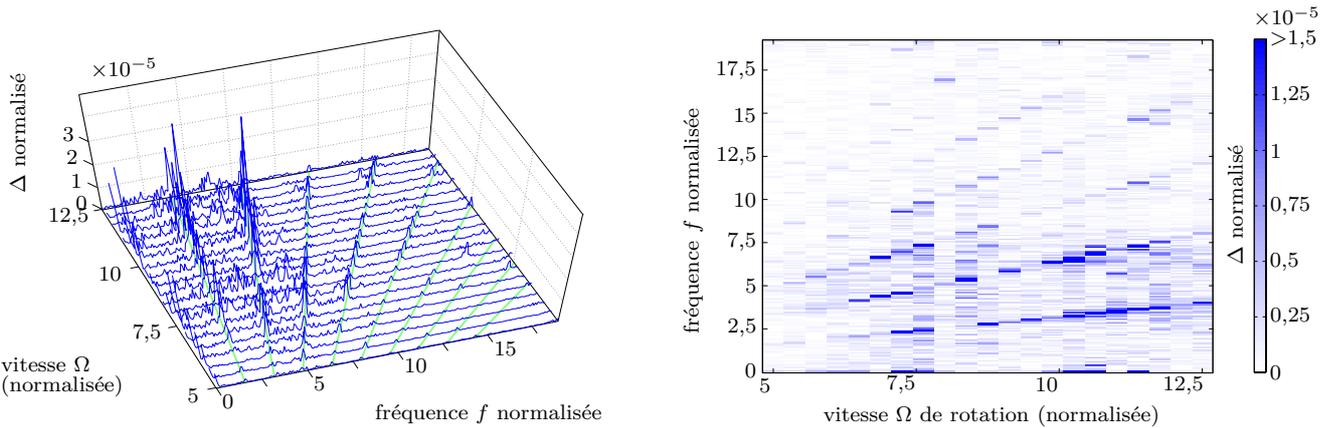
(a) Spectres avec le modèle réduit de Craig-Bampton avec 336 modes encastrés ( $\eta_{RA} = 6$ ).

(b) Spectres obtenus le modèle réduit de Craig-Bampton sans mode encastré ( $\eta_{RA} = 0$ ).

**Figure 4.14** - Spectres (—) avec le modèle réduit de Craig-Bampton avec et sans mode encastré pour des fréquences de rotation comprises entre les valeurs 0,8 et 2. Les droites  $f = n_d \frac{k\Omega}{\pi}$  (—) sont tracées pour  $k$  variant de 1 à 9.

paramètres de la simulation sont ceux présentés dans les paragraphes précédents, les simulations sont réalisées en itérant sur la vitesse de rotation de la roue aubagée, de 5 à 12,5 (on rappelle que la plage de fonctionnement du modèle DAM considéré est  $\Omega < 10,5$ ). On s'intéresse donc au rôle joué par les modes encastrés sur la plage de fonctionnement du DAM, en dessous de la première vitesse critique pour une excitation à deux diamètres.

Les spectres affichés sur les figures 4.14(a) et 4.14(b) correspondent respectivement aux



(a) Norme de l'écart entre les spectres obtenus avec la méthode de Craig-Bampton avec et sans mode encastré. Les droites  $f = n_d \frac{k\Omega}{\pi}$  (—) sont tracées pour  $k$  variant de 1 à 9.

(b) Représentation à l'aide d'un code couleur de la norme de l'écart entre les spectres obtenus avec la méthode de Craig-Bampton avec et sans mode encastré.

**Figure 4.15** - Norme de l'écart entre les spectres avec et sans mode encastré :  $\Delta = \| | Y(f)_{\eta_{RA}=0} | - | Y(f)_{\eta_{RA}=6} | \|$

spectres des réponses des modèles réduits avec l'intégralité des modes statiques et 336 modes encastrés et aux spectres des réponses des modèles réduits avec l'intégralité des modes statiques et aucun mode encastré. Les différences entre ces deux figures nous éclairent quant à l'apport des modes encastrés dans la base de réduction mais également sur ce que les modes statiques, seuls, permettent de représenter. La norme de l'écart entre ces deux séries de spectres est indiquée sur les figures 4.15(a) et 4.15(b). La figure 4.15(b) permet de mieux voir les zones les plus sensibles à l'ajout des modes encastrés. Il apparaît assez nettement que ces zones coïncident avec les droites d'équation  $f = n_d \frac{k\Omega}{\pi}$  avec  $n_d = 2$  et  $k \in \mathbb{N}^*$ . Ainsi, les modes statiques seuls permettent de bien déterminer quelles sont les fréquences principales du spectre et les modes encastrés permettent d'affiner l'amplitude du pic obtenu pour chaque fréquence et donc de converger vers la solution éléments finis. Ces résultats ont l'avantage d'illustrer l'influence de l'enrichissement de la base de réduction plus explicitement qu'avec l'analyse dans le domaine temporel exposée sur les figures 4.7(a), 4.7(b) et 4.7(c).

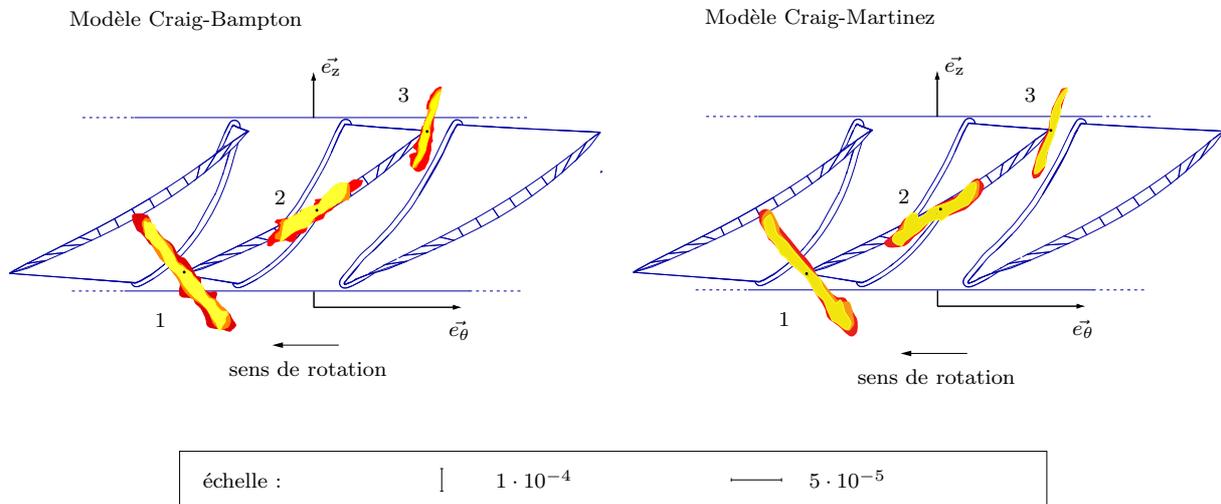
## 4.3 Influence du coefficient de frottement

### 4.3.1 Observations temporelles

Le coefficient de frottement a été imposé à 0,15 dans les paragraphes précédents. Son influence sur la qualité des simulations et son domaine admissible (d'un point de vue numérique) doivent être déterminées dans le but de maîtriser l'ensemble des paramètres des simulations.

La figure 4.16 représente la projection des déplacements des trois nœuds frontières de l'aube 1 observés tout au long de la simulation ( $\Omega = 14,5$ ) dans le plan  $(\vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$  pour différents  $\mu$ . Trois valeurs nous intéressent ici : 0,15, 0,3 et 0,6. Cette représentation graphique permet de voir le rôle

minime de la valeur du coefficient de frottement sur l'évolution de l'amplitude des déplacements pour les deux types de modèles réduits avec chaque méthode de réduction. Les modèles réduits



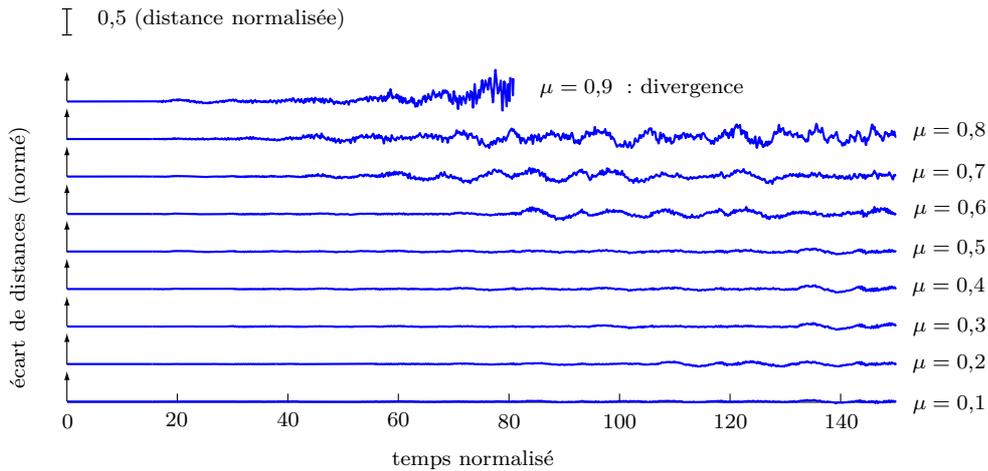
**Figure 4.16** - Déplacements des trois nœuds frontières de l'aube 1 dans le plan  $(e_\theta, e_z)$  pour  $\mu = 0,15$  (—);  $\mu = 0,3$  (—) et  $\mu = 0,6$  (—).

de Craig-Bampton et de Craig-Martinez semblent peu dépendants du coefficient de frottement pour ce qui est des amplitudes des déplacements en tête d'aube. Dans un cas comme dans l'autre les variations d'amplitude de ces déplacements ne dépassent pas 5% par rapport aux amplitudes calculées avec  $\mu = 0,15$ . La faible influence du coefficient de frottement est confirmée, dans le cas du modèle réduit par la méthode de Craig-Bampton, par la figure 4.17 qui représente l'influence de l'augmentation du coefficient de frottement sur les distances aubes/carter au cours du temps. Chaque courbe montre l'écart entre la distance aube/carter obtenue avec un coefficient de frottement  $\mu$  avec la distance aube/carter calculée dans les mêmes conditions mais sans frottement. Un écart très faible est observé pour des valeurs de  $\mu$  comprises entre 0 et 0,6 (ce qui est cohérent avec les résultats présentés sur la figure 4.16), des écarts plus significatifs apparaissent pour des valeurs supérieures avec un cas divergent pour une valeur  $\mu = 0,9$ .

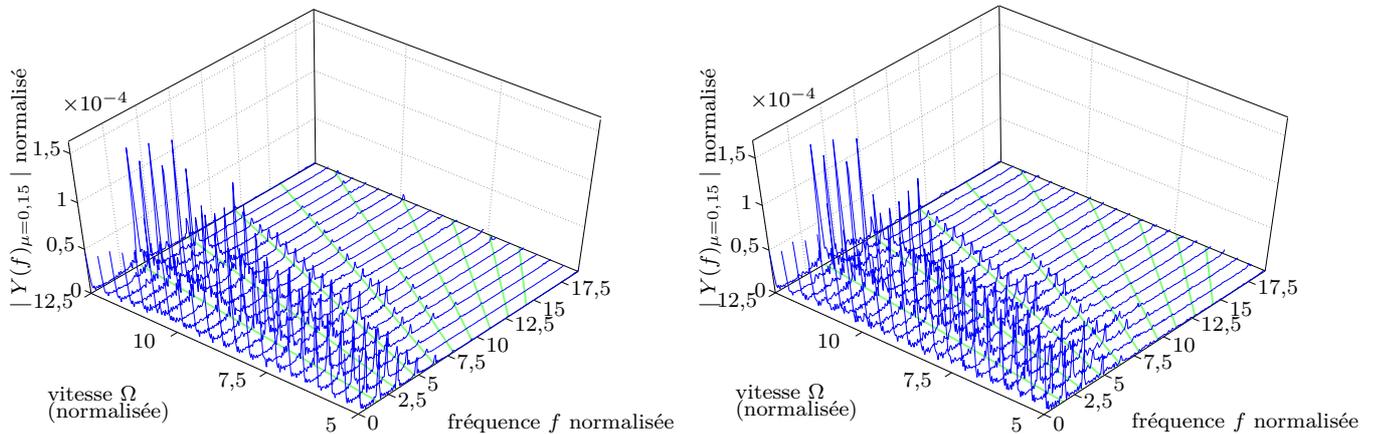
### 4.3.2 Observations fréquentielles

Prenant en compte, d'une part, le fait que l'influence du coefficient de frottement semble identique pour les deux méthodes dans le domaine temporel et, d'autre part, les temps de calculs très longs nécessaires à une étude dans le domaine fréquentiel, seul le modèle réduit par la méthode de Craig-Bampton est étudié dans ce paragraphe.

Les observations dans le domaine fréquentiel ont pour but de comparer le comportement des modèles de Craig-Bampton pour  $\mu = 0,15$  et  $\mu = 0,6$ . Les itérations en vitesse sont effectuées sur une plage réaliste entre 5 et 12,5. Les spectres obtenus sont présentés sur les figures 4.20(a)



**Figure 4.17** - Écarts observés entre la distance aube/carter au niveau du nœud 1 de l'aube 1 obtenue sans frottement et cette même distance obtenue avec différentes valeurs du coefficient de frottement  $\mu$ .

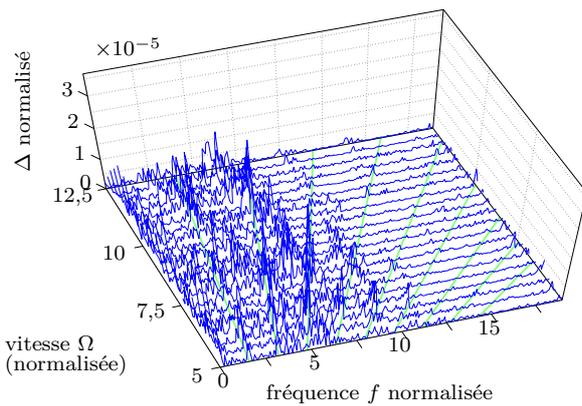


(a) Spectres (—) obtenus avec le modèle de Craig-Bampton pour  $\mu = 0,15$ .

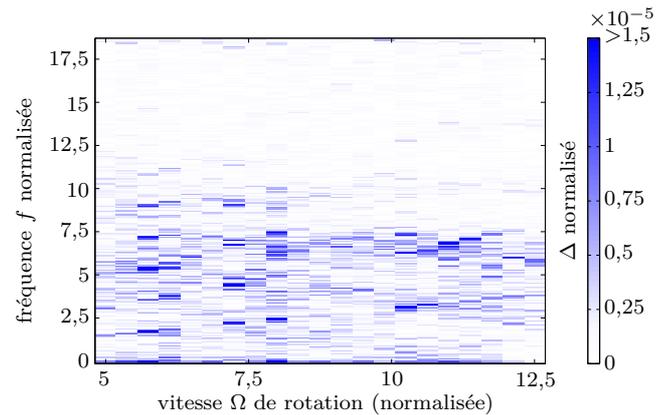
(b) Spectres (—) obtenus avec le modèle de Craig-Bampton pour  $\mu = 0,6$ .

**Figure 4.18** - Spectres (—) obtenus avec les modèles de Craig-Bampton pour deux valeurs de  $\mu$ . Les droites  $f = n_d \frac{k\Omega}{\pi}$  (—) sont tracées pour  $k$  variant de 1 à 9.

et 4.18(b). De même que pour l'étude concernant l'influence des modes encastés, la norme des écarts entre ces deux séries de spectres est représentée de deux façons sur les figures 4.19(a) et 4.19(b). En particulier, la figure 4.19(b) permet, grâce au code couleur utilisé, de visualiser aisément les plages de fréquences les plus influencées par l'élévation du coefficient de frottement. Contrairement à ce qui avait pu être observé précédemment, les lignes  $y = 2k\Omega$  semblent n'avoir aucun lien avec les modifications observées. C'est en fait toute une plage de fréquence comprise entre les valeurs 0 et 10 des spectres qui est modifiée. L'influence de l'élévation du coefficient de frottement paraît relativement peu dépendante de la vitesse de rotation de la roue aubagée. Les résultats pour  $\mu = 0,6$  prouvent que le modèle de Craig-Bampton choisi est suffisamment riche pour admettre des coefficients de frottement largement supérieurs à celui demandé par Snecma :  $\mu = 0,15$ .



(a) Norme de l'écart entre les spectre obtenus pour les modèles de Craig-Bampton pour  $\mu = 0,6$  et  $\mu = 0,15$ . Les droites  $f = n_d \frac{k\Omega}{\pi}$  (—) sont tracées pour  $k$  variant de 1 à 9.



(b) Norme de l'écart entre les spectre obtenus pour les modèles de Craig-Bampton pour  $\mu = 0,6$  et  $\mu = 0,15$  représenté à l'aide d'un code couleur.

**Figure 4.19** - Norme de l'écart entre les spectre obtenus pour les modèles de Craig-Bampton pour  $\mu = 0,6$  et  $\mu = 0,15$  :  $\Delta = || Y(f)_{\mu=0,15} | - | Y(f)_{\mu=0,6} ||$

Que ce soit dans le domaine temporel ou dans le domaine fréquentiel, cette valeur du coefficient de frottement est une valeur basse de la plage admissible par le modèle réduit grâce à la méthode de Craig-Bampton. Les résultats sont supposés identiques pour le modèle réduit de Craig-Martinez, cette hypothèse est justifiée par la comparaison de l'influence de la valeur du coefficient de frottement pour les deux modèles dans le domaine temporel.

## 4.4 Détection des vitesses critiques

Cette section a pour but de répondre à la question qui est à l'origine de l'étude présentée dans ce mémoire : est-il possible et, si oui, avantageux d'envisager l'étude d'interaction modale sur des modèles 3D industriels avec une méthode de réduction à interfaces libres ? La performance d'une méthode d'interaction modale à interfaces libres a été mise en évidence dans les sections précédentes en montrant la convergence des modèles réduits de Craig-Martinez. Il reste à comparer, dans le cadre des simulations envisagées dans notre étude, l'utilisation des modèles réduits obtenus avec les méthodes de Craig-Bampton et de Craig-Martinez.

Les premières études réalisées sur un modèle simplifié de poutre et sur les modèles plans 2D de roue aubagée et de carter ont permis de dégager des tendances quant au comportement des méthodes de réduction de Craig-Bampton et de Craig-Martinez, notamment relativement à leur stabilité numérique (supérieure dans le cas de la méthode de Craig-Bampton), mais elles n'ont pas permis de discriminer une méthode au profit d'une autre. L'étude de la réduction modale des modèles industriels 3D de roue aubagée et de carter a mis en évidence certaines difficultés numériques relatives à la mise en place de la méthode de Craig-Martinez qui demande des opérations plus complexes que la méthode de Craig-Bampton avec notamment l'inversion de la matrice de raideur  $\mathbf{K}$ . Enfin, et c'est probablement la restriction la plus pénalisante

en vue d'une éventuelle industrialisation du code d'interaction, peu de codes éléments finis permettent d'utiliser directement la méthode de Craig-Martinez contrairement à la méthode de Craig-Bampton (notamment implémentée dans le logiciel SAMCEF).

Différentes simulations sont effectuées en itérant sur la vitesse de rotation de la roue aubagée. Les modèles réduits ont été configurés (choix des paramètres  $\eta_{RA}$  et  $\phi_{RA}$ ) de façon à ce que les simulations de contact convergent pour une vitesse de rotation  $\Omega = 12,5$ . La comparaison des modèles décrite dans le paragraphe 4.2.3.3 a confirmé que les modèles étaient encore valides pour une vitesse de rotation  $\Omega = 14,5$ .

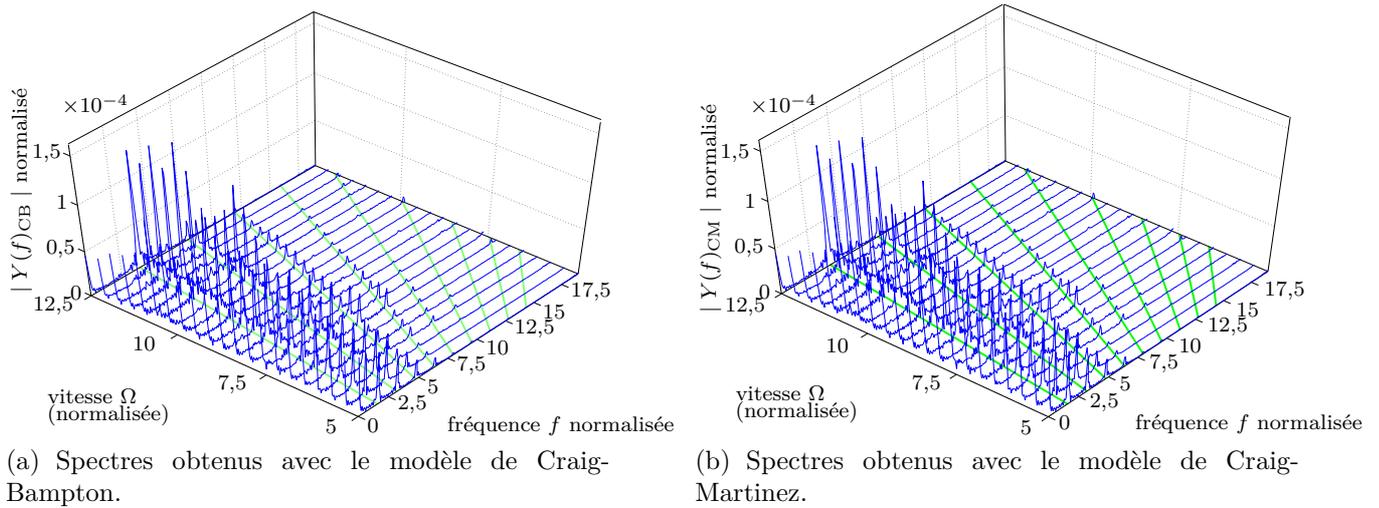
Dans un premier temps, les simulations couvrent la plage de fonctionnement du DAM pour des vitesses de rotation comprises entre 5 et 12,5. Les simulations sont réalisées sur une durée de 500 soit environ 16 tours de roue aubagée pour une vitesse de rotation égale à 10. La présentation des résultats est exposée dans le domaine temporel et dans le domaine fréquentiel en effectuant une transformée de Fourier du signal correspondant au déplacement suivant le ddl  $u_\theta$  du nœud 1 de l'aube 1 une fois le régime établi entre les instants  $t = 100$  et  $t = 500$ . L'objectif de cette étude est d'établir sur la plage de fonctionnement du DAM les différences visibles entre les deux types de modèles réduits.

L'autre étude est menée sur une plage de fonctionnement beaucoup plus large de façon à inclure la première vitesse critique de rotation de la roue aubagée :  $\Omega_{c,n_d=2} = 15,025$ . La plage de vitesses de rotation prises en compte va de 5 à 30. Outre le comportement des modèles réduits autour de la vitesse critique de rotation, cette étude doit pouvoir permettre d'évaluer la limite de validité des modèles réduits obtenus.

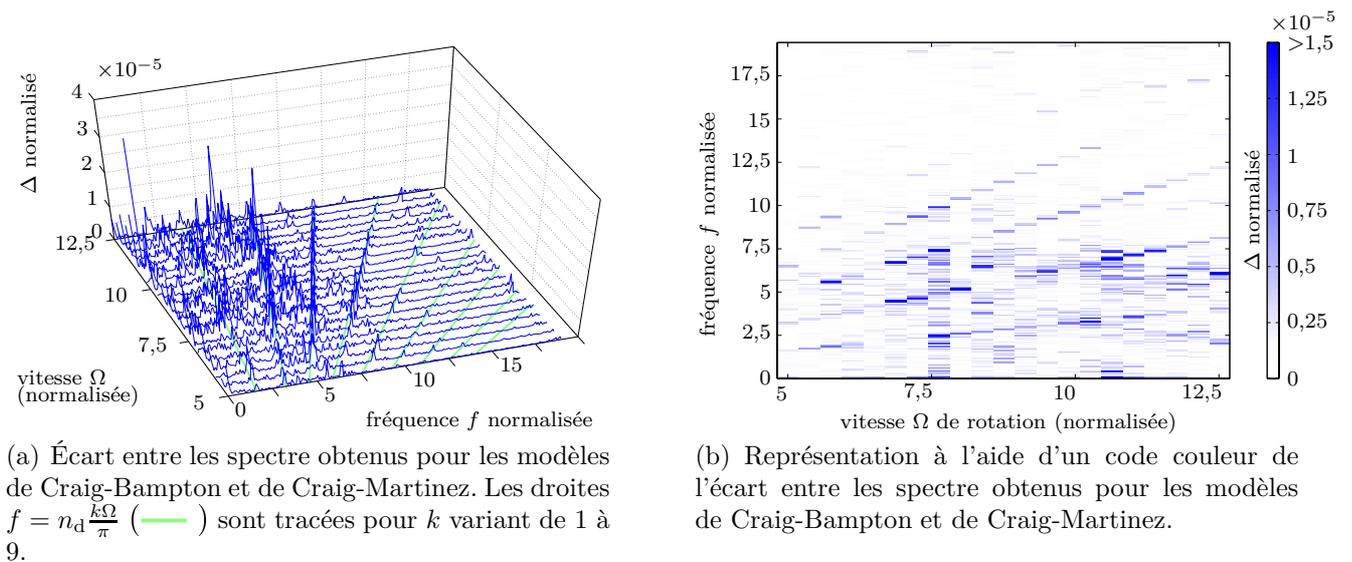
#### 4.4.1 Comparaison des modèles sur la plage de fonctionnement du DAM

Les modèles réduits par les méthode de Craig-Martinez et de Craig-Bampton sont comparés dans l'espace fréquentiel en itérant sur la vitesse de rotation entre 5 et 12,5. Ces itérations sont présentées dans l'espace fréquentiel sur la figure 4.20(a) pour le modèle de Craig-Bampton et sur la figure 4.20(b) pour le modèle réduit de Craig-Martinez. La norme de l'écart entre ces deux séries de spectre est représentée sur la figure 4.21(a), une autre visualisation de cette norme de l'écart à l'aide d'un code couleur est proposée sur la figure 4.21(b).

Les écarts les plus importants entre les deux spectres sont observés sur les droites  $f = n_d \frac{k\Omega}{\pi}$ . Le niveau d'écart est variable suivant la vitesse de rotation sans pour autant dégager de lien entre le niveau d'écart et l'évolution de la vitesse de rotation. Toutefois, les écarts observés sur la figure 4.21(b) méritent d'être précisés par des résultats dans l'espace temporel. Les distances aubes/carter tracées sur les différents graphiques de la figure 4.22 apportent quelques précisions quant à leur signification. Les écarts les plus importants détectés dans l'espace fréquentiel correspondent à la vitesse de rotation  $\Omega = 7,5$ . Or pour cette vitesse, peu d'écarts sont visibles dans l'espace temporel comme le montre le troisième graphique de la figure 4.22. Inversement, les écarts les plus importants détectés dans l'espace temporel correspondent à la vitesse de rotation  $\Omega = 11$ , vitesse pour laquelle les écarts obtenus dans l'espace fréquentiel sont très faibles. En



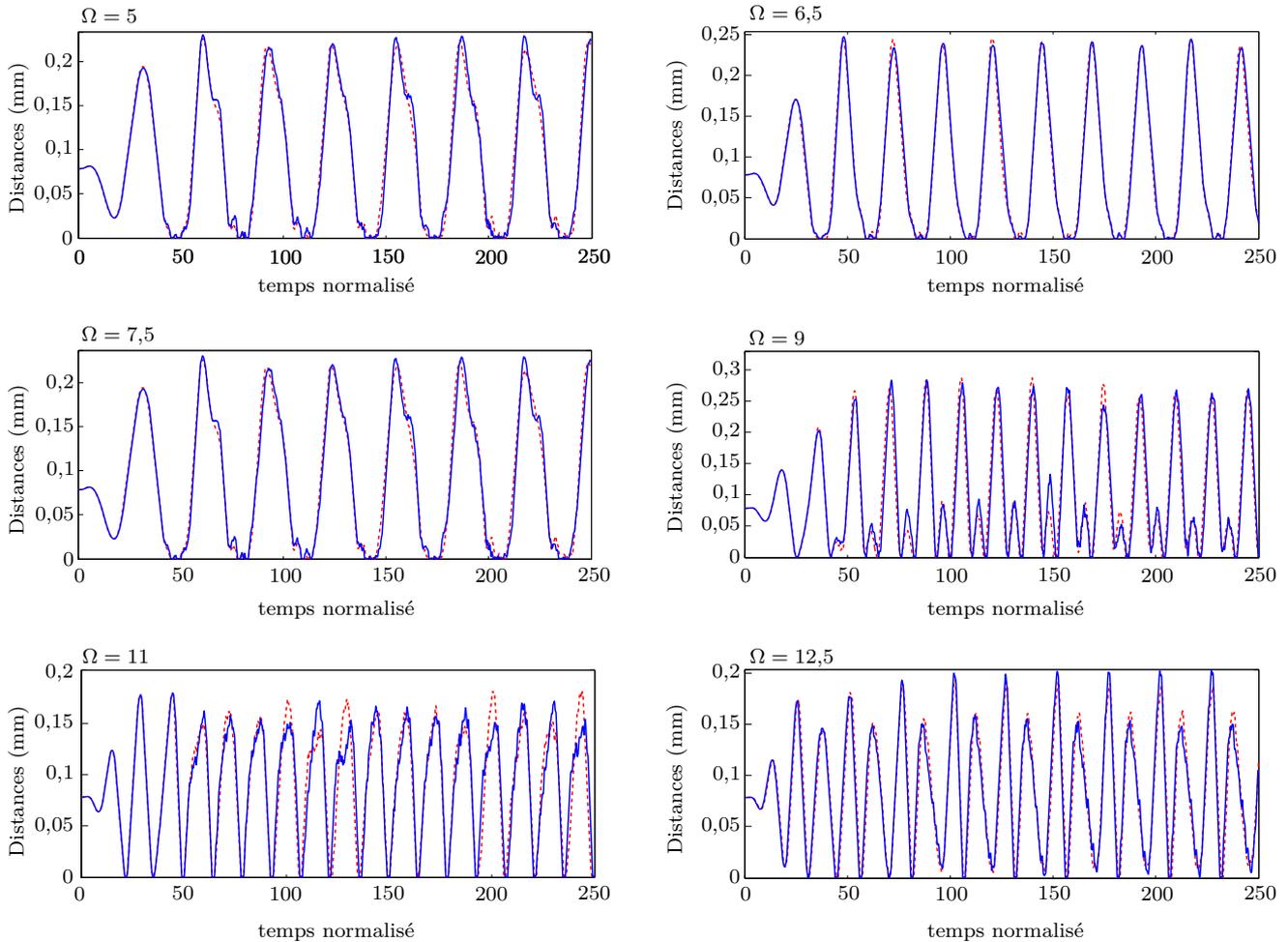
**Figure 4.20** - Spectres (—) obtenus avec les modèles de Craig-Bampton et de Craig-Martinez. Les droites  $f = n_d \frac{k\Omega}{\pi}$  (—) sont tracées pour  $k$  variant de 1 à 9.



**Figure 4.21** - Norme de l'écart entre les spectre obtenus pour les modèles de Craig-Bampton et de Craig-Martinez :  $\Delta = || Y(f)_{CB} | - | Y(f)_{CM} ||$

réalité, les résultats présentés dans l'espace temporel confirment la très grande correspondance des résultats obtenus pour chaque modèle réduit.

L'observation des résultats permet de conclure que sur la plage de fonctionnement du DAM, les deux modèles réduits donnent des résultats parfaitement comparables, aucun élément ne peut nous permettre à ce stade de favoriser l'emploi d'une méthode de réduction plutôt qu'une autre.



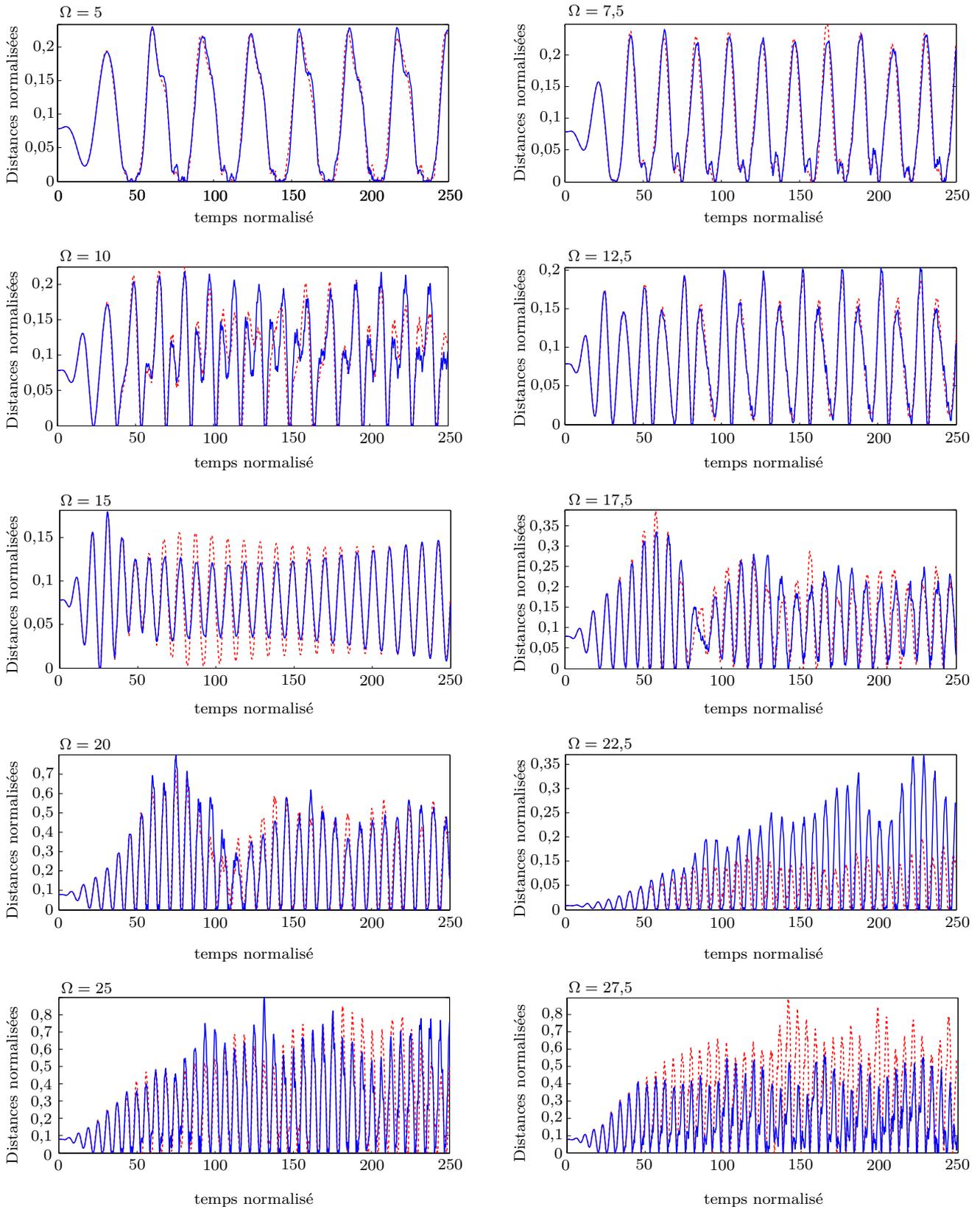
**Figure 4.22** - Comparaison des distances aube/carter au niveau du nœud 3 de l'aube 1 entre le modèle de Craig-Bampton (—) et le modèle de Craig-Martinez (.....).

#### 4.4.2 Validité des modèles réduits

Le fait d'itérer en vitesse de rotations jusqu'à des vitesses aussi élevées que  $\Omega = 30$  implique une excitation de la roue à haute fréquence (relativement à la vitesse de rotation  $\Omega = 12,5$  pour laquelle les modèles réduits ont été paramétrés) et laisse ainsi supposer que la limite de validité des modèles réduits sera atteinte quelle que soit la méthode de réduction considérée. De même que ce qui a été fait précédemment, les résultats de ce paragraphe sont présentés dans l'espace fréquentiel (figure 4.24(b)) et dans l'espace temporel (figure 4.23).

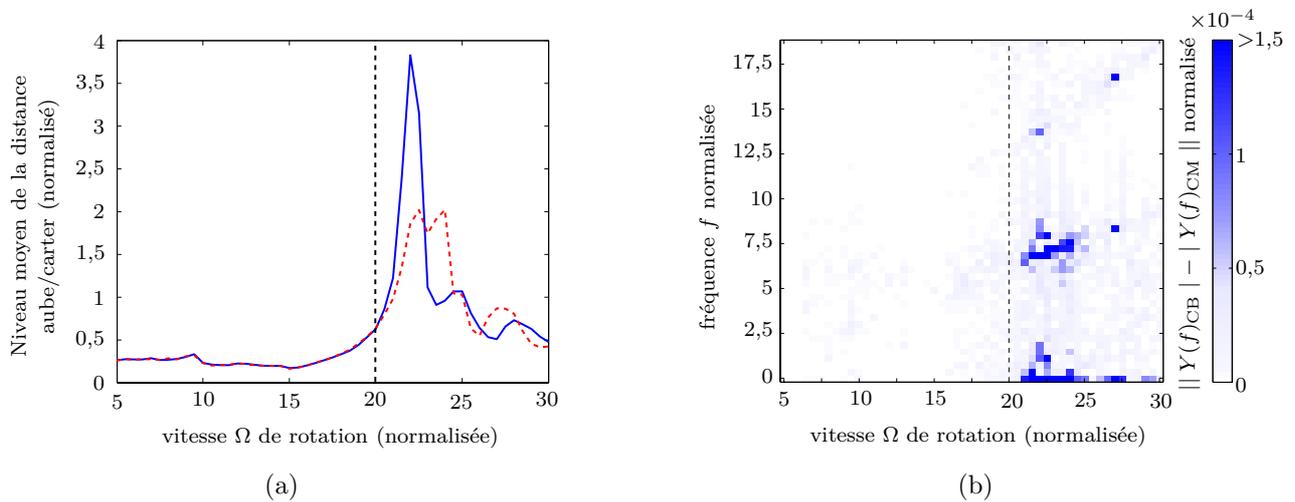
Les représentations des distances aubes/carter dans l'espace temporel permettent d'observer des écarts importants entre les deux modèles pour des vitesses de rotation de 22,5, 25 et 27,5. Plus précisément, l'évolution de l'écart entre les deux modèles est visualisable sur la figure 4.24(a) sur laquelle sont tracées les évolutions des niveaux moyens de vibration<sup>4</sup> en fonction de la vitesse de rotation de la roue aubagée. La valeur  $\Omega = 20$  apparaît comme la limite de correspondance entre les deux modèles. Ce résultat est confirmé par la représentation

4. pour chaque simulation réalisée, ce niveau correspond à la moyenne arithmétique des valeurs maximales des distances aubes/carter pour chaque nœud frontière de la roue aubagée.



**Figure 4.23** - Distances aube/carter au niveau du nœud 3 de l'aube 1 pour différentes vitesses de rotation entre le modèle Craig-Bampton (—) et le modèle Craig-Martinez (.....).

de la norme de l'écart entre les spectres fréquentiels obtenus pour chaque modèle réduit sur la figure 4.24(b). Au delà de la vitesse  $\Omega = 20$  des écarts très importants sont visibles entre les amplitudes des spectres. Les résultats obtenus dans les domaines fréquentiel et temporel



**Figure 4.24** - Mise en évidence de la limite de la plage de validité des modèles réduits.

permettent de définir la plage de validité des modèles réduits :  $\Omega \in [0; 20]$ . Cette plage est relative aux paramètres de réduction des modèles  $\eta$  et  $\phi$  mais également au type de simulation effectué. Des variations du coefficient de frottement ou de l'amplitude de l'effort appliqué sur le carter influent directement sur la validité des modèles réduits. Au delà de la vitesse  $\Omega = 20$ , l'absence de solution éléments finis de référence ne permet pas de dire quelle méthode donne les meilleurs résultats.

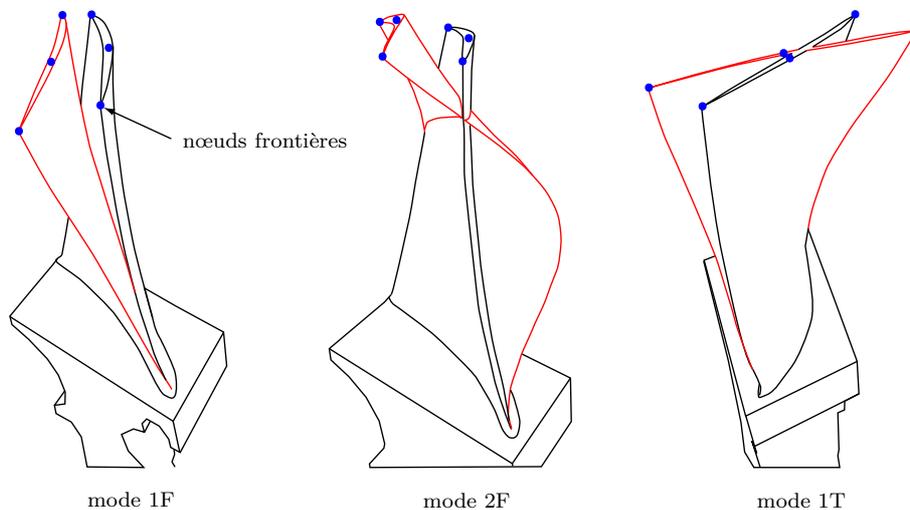
## 4.5 Influence des diamètres nodaux

Outre les analyses temporelle et fréquentielle effectuées pour la plupart des résultats donnés dans les paragraphes précédents, l'étude de l'influence des différents diamètres nodaux complète avantageusement l'analyse des résultats. En effet, une étude fréquentielle classique ne permet pas de déterminer avec précision l'influence des diamètres nodaux du fait de la grande proximité des fréquences propres pour les premières familles modales. En pratique, il est donc impossible à partir d'une analyse fréquentielle d'optimiser les bases de réduction modale en procédant à l'élimination des modes dont la contribution est négligeable. Il est donc proposé dans la suite de cette section d'évaluer la possibilité d'optimisation des bases de réduction modale à partir d'une analyse d'influence en termes de diamètres nodaux. La démarche utilisée pour déterminer l'influence de chaque diamètre est celle présentée dans le paragraphe 3.5.3. À chaque diamètre  $n_d$  d'une famille modale est associé un coefficient d'influence  $\zeta_{n_d}$ .

### 4.5.1 Familles modales retenues pour l'étude d'influence

Le nombre de familles modales sur lesquelles vont être étudiées l'influence des différents modes à diamètre est en rapport direct avec la valeur des paramètres de réduction  $\eta_{RA} = 336$  et  $\phi_{RA} = 448$  définis dans les paragraphes 4.2.3.1 et 4.2.3.2. En effet, au sens des critères de convergence tels que définis dans le chapitre 1, de tels paramètres de réduction permettent notamment d'obtenir une très bonne approximation des trois premières familles modales, soit cent soixante-huit modes propres.

Chacune de ces familles correspond à un type différent de vibration des aubes de la roue aubagée, il s'agit des modes 1F (premiers modes de flexion des aubes), 1T (premiers modes de torsion des aubes) et 2F (seconds modes de flexion des aubes) qui sont représentés sur un secteur de la roue aubagée sur la figure 4.25.

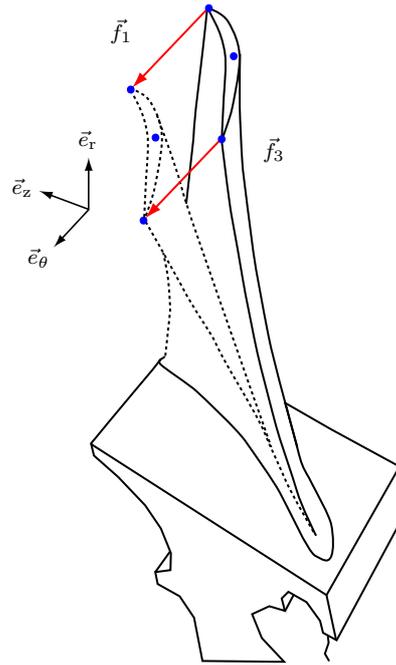


**Figure 4.25** - Modes propres de la roue aubagée représentés sur un seul secteur. L'aube déformée est représentée en (—).

### 4.5.2 Considérations physiques

L'influence des différentes familles modales et l'influence de chaque diamètre au sein d'une famille sont étudiées dans le cas des simulations de contact aube/carter définies en début de ce chapitre. Comme cela a été mentionné dans le paragraphe 4.2.3, le chargement appliqué sur le carter est tel que ce sont les nœuds sur le bord de fuite et sur le bord d'attaque qui viennent en contact avec le carter. Par conséquent, des efforts sont appliqués sur ces nœuds en sommet d'aube lors des phases de contact dans la direction opposée au sens de rotation de la roue aubagée comme le montre la figure 4.26. Compte tenu des nœuds potentiellement en contact avec le carter, du sens de rotation ainsi que des hypothèses faites sur le traitement du contact, il semble logique de penser que ce sont les modes de flexion de type 1F et 2F qui seront les plus sollicités au cours des simulations de contact.

Il convient de rappeler que l'ensemble des hypothèses émises sont relatives au chargement du



**Figure 4.26** - Représentation des efforts de contact et hypothèse de déformation de l'aube sous leurs effets.

carter, on pourrait tout à fait envisager un cas de charge conduisant à un contact aube/carter localisé, par exemple, sur le nœud frontière sur le bord d'attaque ou sur le bord de fuite, dans ce cas il serait logique d'envisager la prédominance des modes de torsion et non pas des modes de flexion.

### 4.5.3 Premiers résultats

Les résultats présentés dans ce paragraphe montrent l'influence des différents diamètres nodaux au cours d'une simulation de contact aube/carter pour les trois premières familles modales et pour deux vitesses de rotation :  $\Omega = 10$  et  $\Omega = 15$ . Soit une vitesse de rotation incluse dans la plage physique et une vitesse à proximité de la première vitesse critique de rotation.

Nous rappelons la procédure d'obtention des coefficients d'influence  $\zeta_{n_d}$  : soit la projection dans la base modale de la solution  $u(t)$

$$u(t) = \sum_{i=1}^{N_t} u_i(t) \Phi_i \quad (4.5)$$

seules les trois premières familles de modes sont considérées dans le cas présent, on fait donc l'hypothèse

$$u(t) \simeq \underbrace{\sum_{i=1}^{56} u_{i,1F}(t) \Phi_{i,1F}}_{\text{famille 1F}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{56} u_{i,1T}(t) \Phi_{i,1T}}_{\text{famille 1T}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{56} u_{i,2F}(t) \Phi_{i,2F}}_{\text{famille 2F}} \quad (4.6)$$

Les coefficients  $u_{i,1F}(t)$  sont simplement notés  $u_i(t)$  afin d'alléger les notations. Pour chaque famille (1F, 1T ou 2F), les coefficients  $u_i(t)$  sont combinés suivant le nombre de diamètres du mode propre auquel ils sont associés

$$\text{pour } (i,j) \in [1; 56], \text{ si } n_d(\Phi_i) = n_d(\Phi_j), \text{ alors} \quad (4.7)$$

$$\zeta_{n_d}(t) = \sqrt{u_i(t)^2 + u_j(t)^2}$$

**Remarque :** *Seules les courbes relatives à des diamètres dont l'influence n'est pas négligeable sont représentées sur les figures de cette section. Par ailleurs, les résultats présentés dans l'ensemble du paragraphe 4.5.3 sont obtenus à partir des modèles réduits de Craig-Bampton, les résultats obtenus avec les modèles réduits de Craig-Martinez sont similaires, ce qui est attesté par une comparaison plus complète faite dans le paragraphe 4.5.5.*

#### 4.5.3.1 Premier cas : $\Omega = 10$

Les figures 4.27(a), 4.27(b) et 4.27(c) mettent en évidence les influences des différents diamètres nodaux au sein de chaque famille modale considérée au cours de la simulation. En conformité avec ce qui était prévu, il apparaît que la famille modale 1F est nettement prédominante : les différences d'ordre de grandeur entre les coefficients d'influence  $\zeta_{n_d}$  l'atteste.

Plus précisément, la figure 4.27(a) indique la prédominance des diamètres pairs  $n_d = 2$ ,  $n_d = 4$  et  $n_d = 0$  dans la réponse de la roue aubagée. Ces résultats sont bien évidemment liés à la parité du nombre de diamètre de l'excitation imposée sur le carter ( $n_d = 2$ ). Globalement, les coefficients d'influence des différents diamètres des familles 1T ou 2F sont vingt fois inférieurs aux coefficient d'influence des premiers diamètres pairs de la famille 1F.

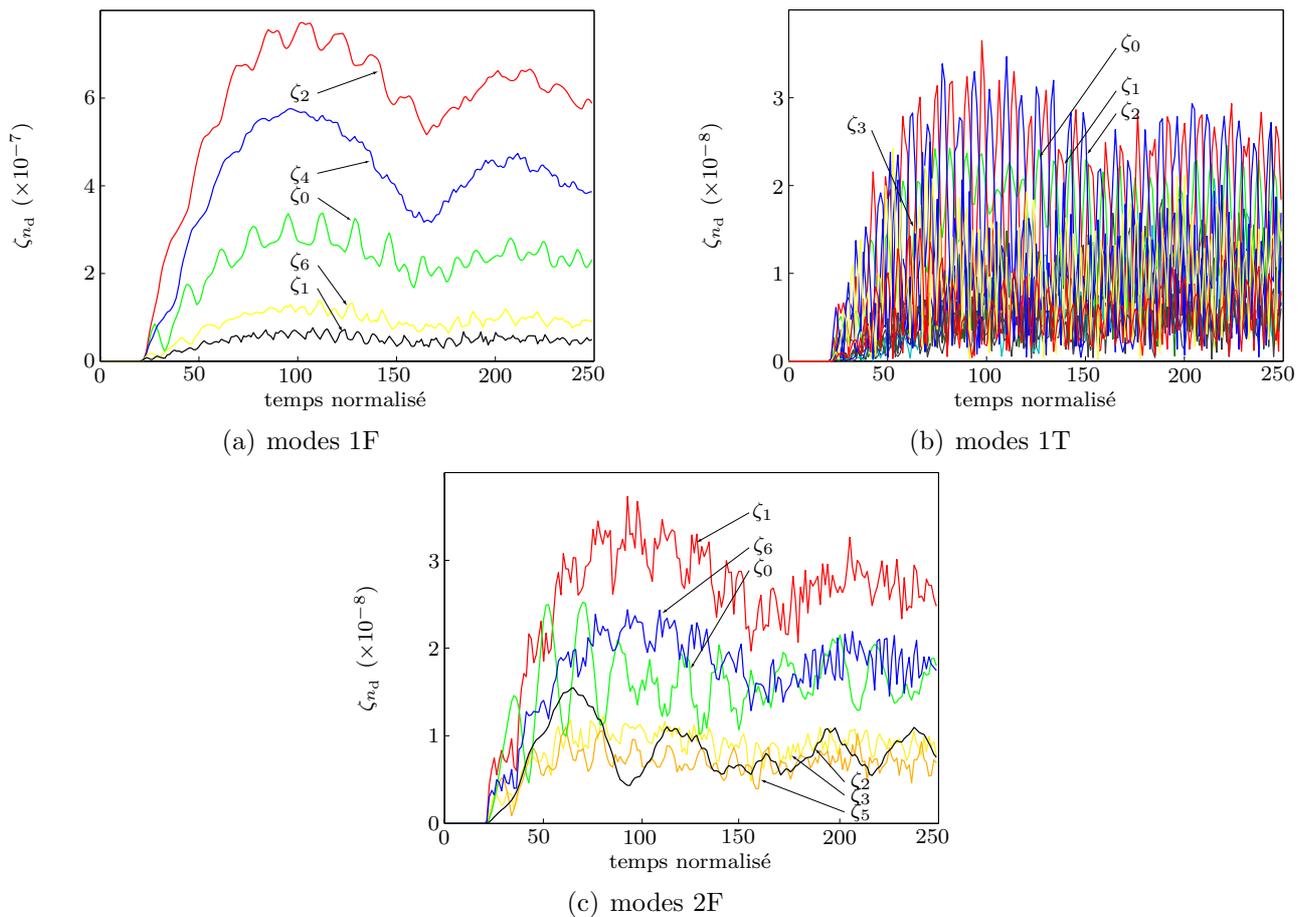
#### 4.5.3.2 Deuxième cas : $\Omega = 15$

La vitesse  $\Omega = 15$  présente un intérêt particulier car elle correspond à la première vitesse critique : la roue aubagée est excitée suivant sa première fréquence propre à deux diamètres. Les courbes tracées sur les figures 4.28(a), 4.28(b) et 4.28(c) soulignent la prédominance de la famille 1F mais également et surtout, la prédominance des modes à deux diamètres au sein de cette famille. En effet, la figure 4.28(a) se distingue clairement de la figure 4.27(a) par l'évolution du coefficient d'influence  $\zeta_2$  qui est plus de six fois supérieur aux coefficients  $\zeta_4$  et  $\zeta_0$ .

Quant aux familles 1T et 2F, il est remarquable que les coefficients d'influence de chaque diamètre de ces familles modales sont entre vingt et cinquante fois inférieurs au coefficient  $\zeta_2$  de la famille 1F.

#### 4.5.3.3 Bilan

Quelle que soit la vitesse de rotation, il apparaît que la famille 1F est celle qui a le plus d'influence dans les résultats obtenus (relativement aux paramètres de simulation). La prédominance des modes correspondant aux diamètres nodaux  $n_d = 0$ ,  $n_d = 2$ ,  $n_d = 4$  et  $n_d = 6$ , qui sont les seuls à avoir une influence significative au cours de la simulation permet d'envisager une optimisation de la base de réduction modale en éliminant les modes correspondant aux



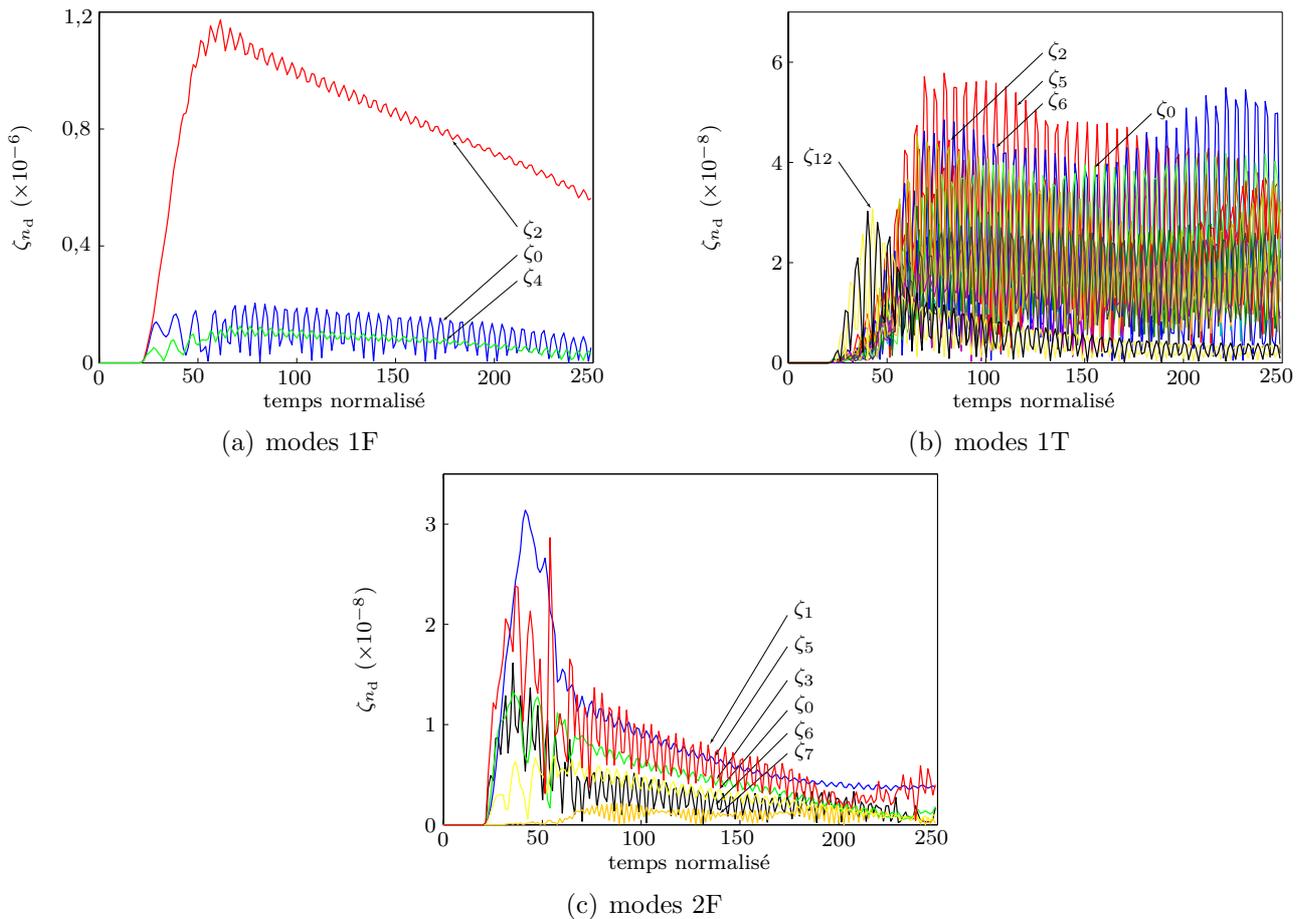
**Figure 4.27** - Influence des différents diamètres nodaux pour  $\Omega = 10$ .

autres diamètres modaux. Le paragraphe suivant présente les résultats obtenus lorsque cette optimisation est faite sur la base de réduction de Craig-Martinez.

#### 4.5.4 Optimisation de la base de réduction

La mise en évidence du rôle négligeable joué par certains modes à diamètres au cours de la simulation nous oriente naturellement à les éliminer de la base de réduction. Dans le cas de la méthode de Craig-Martinez, cette élimination se traduit par une diminution du nombre de modes propres dans la base de réduction puisque les modes par rapport auxquels sont calculés les coefficients d'influence sont explicitement ceux composant la base de réduction de Craig-Martinez. Une étude similaire est envisageable avec le modèle réduit de Craig-Bampton mais il faudrait alors déterminer une correspondance entre les coefficients d'influence modale relatifs à des modes propres et les modes encastrés qui composent la base de réduction ou, plus simplement, calculer directement des coefficients d'influence relatifs aux modes encastrés.

Le point de départ de cette étude est donc le modèle réduit de Craig-Martinez utilisé précédemment dans ce chapitre avec  $\phi = 448$ . En accord avec les résultats des paragraphes 4.5.3.1 et 4.5.3.2, seuls les modes correspondant aux diamètres nodaux  $n_d = 0$ ,  $n_d = 2$ ,  $n_d = 4$  et  $n_d = 6$



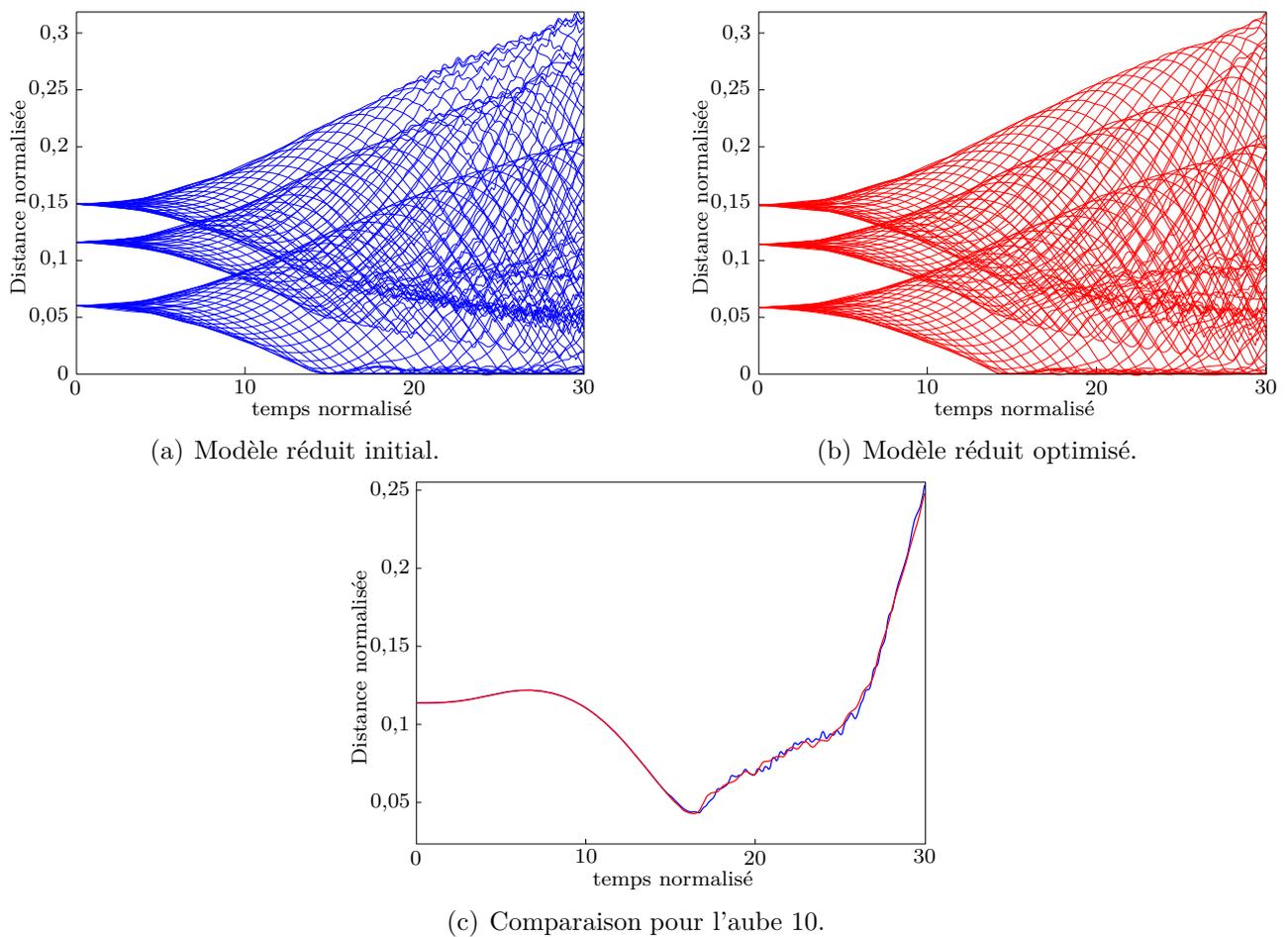
**Figure 4.28** - Influence des différents diamètres nodaux pour  $\Omega = 15$ .

des huit premières familles modales sont conservés dans la base de réduction. Contrairement au cas des modèles 2D tels que présentés dans le chapitre 3, l'élimination de certains modes à diamètres n'introduit pas de restrictions cinématiques puisqu'on se place dans le cadre d'une simulation pour laquelle il a été montré que les modes éliminés jouent un rôle négligeable.

L'optimisation de la base de réduction ne dégrade pas les résultats au début de la phase de contact comme le montre les figures 4.29(a) et 4.29(b). Une comparaison sur l'aube 10 est tracée sur la figure 4.29(c).

La base modale du modèle optimisé contient sept modes pour chacune des huit familles modales conservées, elle contient donc au total cinquante-six modes propres. Ceci est à mettre en rapport avec la taille du modèle réduit utilisé qui contenant quatre cent quarante-huit modes. En prenant en compte le nombre nœuds frontières ( $n_{\text{front}} = 504$ ), la taille totale des modèles réduits varie de neuf cent cinquante-deux à cinq cent soixante ddls, soit une diminution de 41,2 %.

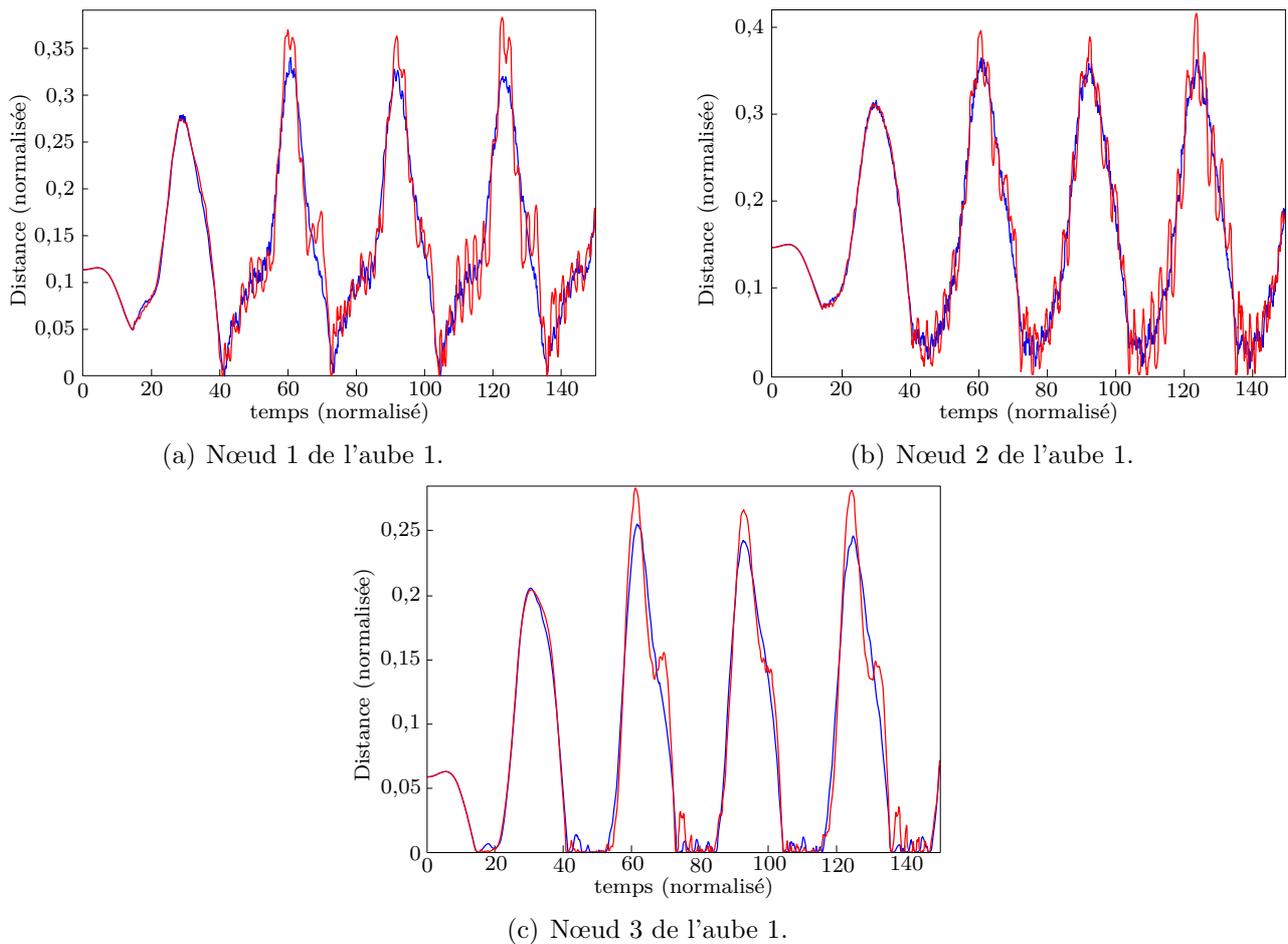
Lorsque le contact est maintenu, des différences sensibles apparaissent entre les résultats obtenus avec le modèle réduit initial et avec le modèle réduit optimisé. Les résultats obtenus avec le modèle réduit optimisé semblent dégradés par rapport au modèle réduit initial : les



**Figure 4.29** - Comparaison des distances aubes/carter lors de l'initiation du contact avec le carter entre le modèle réduit initial (—) et le modèle réduit optimisé (—).

courbes sont plus bruitées et des différences en termes d'amplitude sont visibles comme le montrent les figures 4.30(a) et 4.30(b). Toutefois, la détection du contact n'est pas altérée par l'optimisation de la base de réduction, et la figure 4.30(c) atteste de la bonne concordance des résultats obtenus pour les deux modèles sur le nœud le plus fréquemment en contact sur le carter.

En conclusion, il est probable que l'optimisation proposée soit trop sévère numériquement pour obtenir des résultats concordants avec le modèle réduit initial. En particulier, la légère dissymétrie du cas de contact entre les nœuds sur les bords de fuite et d'attaque (visible notamment par la différence de durée du contact entre le nœud et le carter sur les figures 4.30(a) et 4.30(c)) indique que le comportement de l'aube en torsion n'est probablement pas à négliger. Toutefois, compte tenu du gain en termes de taille des modèles ainsi que de la simplicité de la procédure, l'optimisation des bases de réduction en fonction du cas de charge et des différents paramètres de la simulation est à considérer dès qu'un grand nombre de simulations doit être lancé comme cela peut être le cas pour une étude paramétrique ou des itérations en vitesses de rotation par exemple.



**Figure 4.30** - Comparaison des distances aubes/carter pour les trois nœuds frontières de l'aube 1 entre le modèle réduit initial (—) et le modèle réduit optimisé (—).

#### 4.5.5 Étude de la famille modale 1F

Compte tenu des résultats des sections précédentes, la dernière section de ce chapitre porte logiquement sur la famille modale 1F en comparant les coefficients d'influence des huit premiers diamètres de cette famille (les plus significatifs) pour les modèles réduits de Craig-Bampton et de Craig-Martinez (avec les paramètres de réduction initiaux :  $\eta_{RA} = 336$  et  $\phi_{RA} = 448$ ) en fonction de la vitesse de rotation sur l'ensemble de la plage de validité des modèles réduits.

Les figures 4.31 et 4.32 présentent l'ensemble des résultats obtenus en termes d'analyse de l'influence des huit premiers diamètres nodaux de la famille modale 1F sur la plage de validité des modèles réduits. Par choix, toutes les figures ont la même échelle, ceci permet de mettre en valeur les diamètres prépondérants.

Les deux séries de figures sont similaires, seules quelques légères différences sont observables quant à l'allure des coefficients d'influences des diamètres  $n_d = 0$  et  $n_d = 2$ , avec une évolution moins régulière dans le cas des modèles de Craig-Martinez. Quelques écarts sont également observables à basse vitesse pour les diamètres  $n_d = 4$  et  $n_d = 6$  mais les ordres de grandeur des

coefficients associés à ces diamètres sont très faibles par rapport à ceux des diamètres  $n_d = 0$  et  $n_d = 2$ .

À l'exception du cas  $n_d = 2$ , toutes les figures montrent un minimum d'influence des différents diamètres autour de la vitesse  $\Omega = 15$ . Ceci est cohérent avec l'excitation de la roue aubagée sur sa première fréquence propre à deux diamètres.

De façon générale, les résultats obtenus pour l'influence des diamètres nodaux de la famille 1F pour les modèles de Craig-Bampton et de Craig-Martinez corroborent leur concordance sur la plage de validité : les résultats obtenus sont très proches pour les deux modèles réduits.

En particulier, les derniers résultats obtenus confirment que dans le cas de notre simulation de contact aube/carter, un nombre important de modes, tels que ceux dont les diamètres nodaux sont impairs, peuvent être éliminés de la base de réduction<sup>5</sup>. En contre-partie, il pourrait être intéressant d'envisager l'enrichissement de cette base sur certains diamètres (surtout  $n_d = 2$  dans notre cas).

## 4.6 Conclusion

Ce dernier chapitre a notamment permis de valider, grâce à l'emploi de deux méthodes de réduction différentes et à l'observation de résultats concordants, la combinaison de méthodes de réduction modale linéaires avec le problème de contact envisagé avec des modèles industriels 3D. Cette validation est la dernière étape d'une étude de compatibilité menée dans les chapitres 2 et 3 sur des modèles de poutre encastree et de roue aubagée 2D. Les modèles réduits des structures industrielles obtenus avec les méthodes de Craig-Bampton et de Craig-Martinez, telles que présentées dans le chapitre 1, ont été configurés pour converger sur la plage de rotation réelle de la roue aubagée. En accord avec les résultats des précédents chapitres, la convergence a été obtenue pour de faibles valeurs des paramètres de réduction  $\eta_{RA}$  et  $\phi_{CA}$  comparativement à la taille initiale des modèles éléments finis.

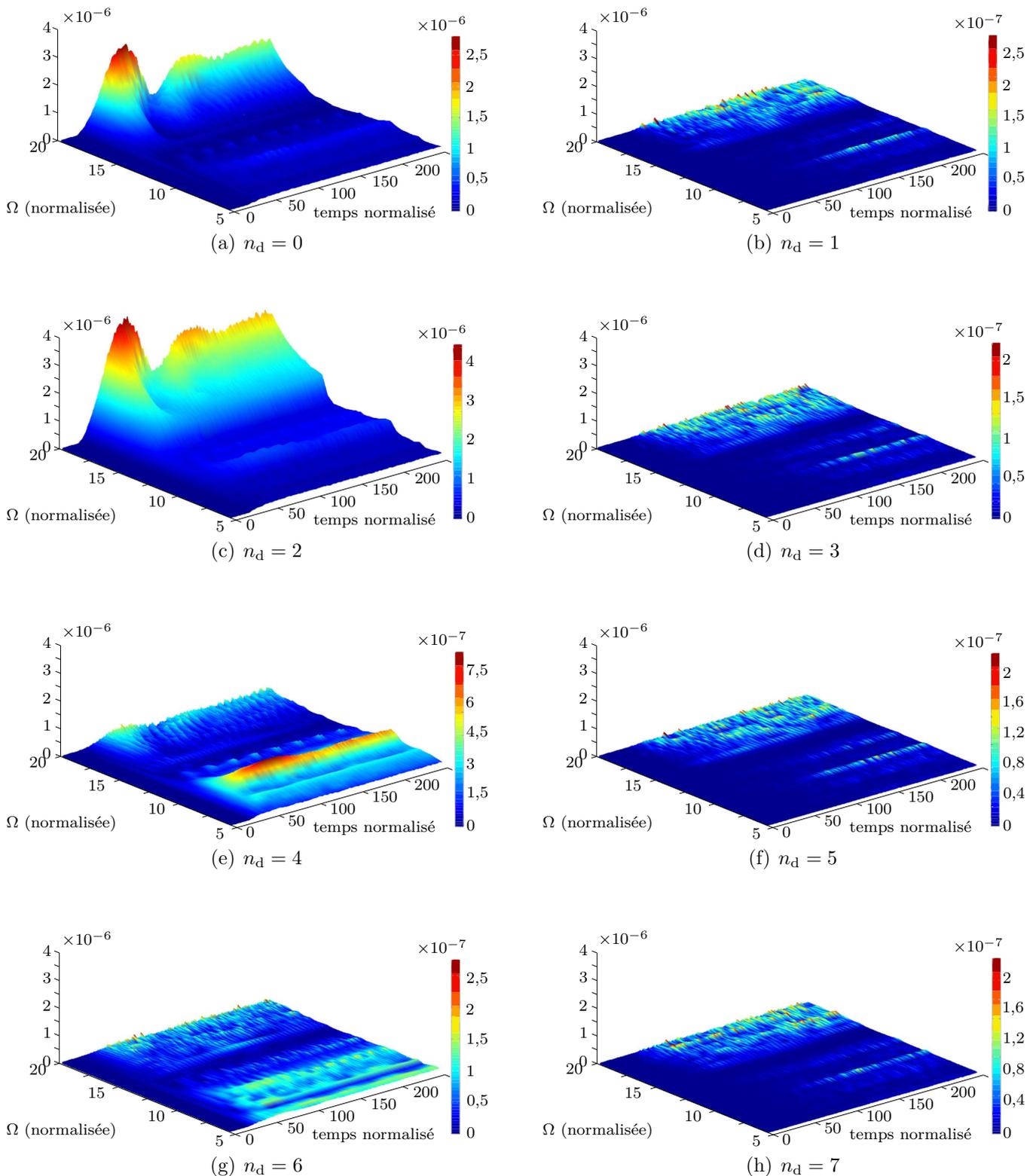
Un élément important de l'étude menée concerne le modèle du carter. Il a été constaté que le modèle fourni par Snecma est particulièrement rigide, ce qui a eu pour conséquence de réorienter l'étude : la rigidité du carter empêchant d'envisager la détection de régimes d'interaction comme cela a été fait dans le chapitre 3. La notion de vitesse critique a ainsi été simplifiée pour simplement correspondre à une excitation de la roue aubagée selon une des ses fréquences propres. Par conséquent, l'étude menée dans ce chapitre s'est focalisée sur la roue aubagée.

L'approximation utilisée pour la mise en place de la méthode de Craig-Martinez n'a pas permis une comparaison directe des deux méthodes en termes de temps de calculs mais cette étude a permis de mettre en évidence certains avantages et inconvénients de chaque méthode. Contrairement aux premières observations faites sur les modèles 2D, aucune différence n'a pu être relevée entre les deux méthodes de réduction modale en termes de sensibilité numérique. Il a été montré que les résultats obtenus sont similaires sur une large plage de vitesses de

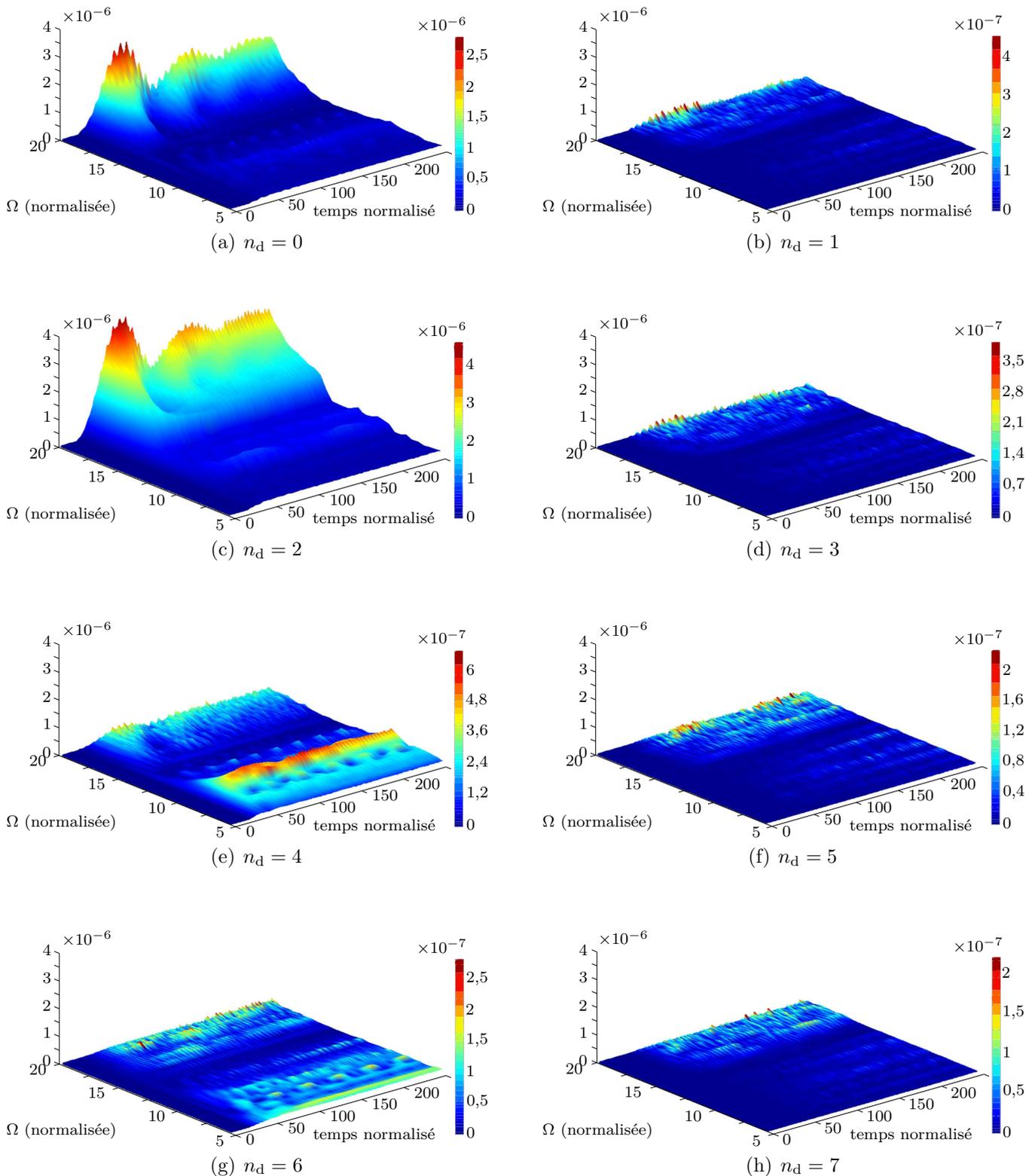
---

5. Cette observation n'est pas un résultat général, elle dépend directement du type de sollicitation appliquée sur le carter.

rotation. La mise en œuvre de la méthode de Craig-Bampton présente un avantage important sur la méthode de Craig-Martinez puisqu'une seule procédure de réduction permet d'obtenir plusieurs modèles réduits (par troncature de la matrice obtenue). En revanche, si on se place dans le cas d'une recherche de modes d'interaction avec un grand nombre de simulations à effectuer, et qu'une pré-étude sur les diamètres nodaux les plus influents est faite, alors la méthode de Craig-Martinez permet d'obtenir facilement des modèles réduits optimisés.



**Figure 4.31** - Influence des huit premiers diamètres nodaux en fonction du temps et pour différentes vitesses de rotation de la roue aubagée dans le cas des simulations effectuées sur les modèles réduits par méthode de Craig-Bampton. Chaque graphique est volontairement représenté avec une échelle identique pour les coefficients d'influence de façon à mettre en évidence les modes intervenant le plus au cours des simulations.



**Figure 4.32** - Influence des huit premiers diamètres nodaux en fonction du temps et pour différentes vitesses de rotation de la roue aubagée dans le cas des simulations effectuées sur les modèles réduits par méthode de Craig-Martinez. Chaque graphique est volontairement représenté avec une échelle identique pour les coefficients d'influence de façon à mettre en évidence les modes intervenant le plus au cours des simulations.

# Conclusion générale

## Bilan de l'étude présentée

Une partie importante des travaux présentés dans ce mémoire a eu pour but de montrer la performance des méthodes de réduction modale linéaires utilisées (méthodes de Craig-Bampton et de Craig-Martinez) avec un problème de contact, et en particulier avec la gestion du contact aube/carter sur des modèles 3D. D'un modèle simple de poutre encastree, aux modèles 3D des structures industrielles, les simulations réalisées ont montré la convergence des résultats obtenus avec les différents modèles réduits quand le nombre de modes constituant la base de réduction augmente. Les différentes études de convergence nous ont également permis de mieux évaluer les avantages et inconvénients de chaque méthode relativement aux simulations envisagées : si dans le cas d'un modèle simple de poutre encastree, aucune différence significative n'est apparue, la comparaison des méthodes sur des simulations 3D a permis de mettre en évidence les difficultés de mise en œuvre inhérentes à la méthode de Craig-Martinez telle que la nécessité de calculer un modèle réduit par base modale considérée.

L'ensemble des résultats concernant la méthode de Craig-Martinez sur les simulations 3D sont à relativiser compte-tenu de l'approximation qui a été faite sur le calcul de la correction pseudo-statique. Il a été montré que cette hypothèse n'empêche pas la convergence spatiale des modèles réduits mais a probablement pour conséquence de nécessiter une base de réduction plus riche nous empêchant de faire des comparaisons de temps de calculs par exemple.

L'algorithme de contact utilisé a été validé en procédant à la comparaison des résultats obtenus pour des simulations tests réalisées avec un autre code reposant sur un algorithme implicite et un traitement du contact différent. En tout deux cas tests ont été utilisés : un cas avec variation des propriétés matériaux et des vitesses relatives présenté dans le corps du mémoire et un cas avec des matériaux hyperélastiques et de faibles vitesses relatives présenté en annexe. Ces deux séries de simulation ont montré une très bonne concordance des résultats lorsque les matériaux sont souples et avec de faibles vitesses relatives. La comparaison avec de grandes vitesses relatives a permis de montrer la bonne correspondance des résultats obtenus sur un cas de contact proche des conditions du contact aube/carter. Enfin, des bilans énergétiques faits sur des simulations de contact 2D et 3D ont permis de souligner le caractère non-dissipatif de l'algorithme.

Relativement au phénomène d'interaction modale, il a été mis en évidence (dans le cadre de l'étude sur les modèles 2D de roue aubagée et de carter) que les restrictions cinématiques appli-

quées sur la roue aubagée ou le carter favorisent artificiellement leur apparition. Les différents régimes d'interaction identifiés dans [51] dans le cas d'une excitation selon un mode à deux diamètres avec restrictions cinématiques ont été également détectés dans un espace d'étude plus large sans restriction cinématique sur la roue aubagée. Bien qu'aucun de ces modes d'interaction n'ait pu être clairement identifié dans l'espace le plus général, sans aucune restriction cinématique, des phénomènes de micro-blocages ont été mis en évidence. L'absence de détection de régimes d'interaction pour des modèles 2D non contraints cinématiquement a logiquement orienté la façon de mener l'étude d'interaction modale sur les modèles 3D. Dans le cadre précis d'une étude sur les modèles 2D, les résultats obtenus nous conduisent à distinguer deux types d'études : (1) une étude de précision pour laquelle le modèle sans restriction cinématique sera favorisé, et (2) une étude de type paramétrique pour laquelle le grand nombre de simulations à effectuer peut justifier l'utilisation d'un modèle contraint, moins précis mais permettant de fortement diminuer les temps de calculs.

Prenant en compte les résultats de l'étude 2D et les temps de calculs nécessaires à une simulation 3D, l'accent a été mis sur la comparaison des méthodes de réduction utilisées et sur la démonstration de la convergence des résultats obtenus.

Cette étude sur les modèles 3D a été menée en étudiant en premier lieu la convergence des modèles réduits de Craig-Bampton et de Craig-Martinez. Ils ont pu être comparés et l'obtention d'une plage de validité commune a permis de conforter la convergence des résultats. À la présentation des résultats dans les domaines temporel et fréquentiel, a été ajoutée une étude de l'influence des différents diamètres nodaux au cours de la simulation. Le rôle négligeable joué par certains modes a permis de mettre en évidence une possibilité d'optimisation de la base de réduction particulièrement adaptée à la méthode de Craig-Martinez.

Malgré tout, la méthode de réduction modale à interfaces fixes de Craig-Bampton est celle qui nous semble la plus adaptée à l'étude d'interaction modale sur des modèles 3D complexes. Cette méthode présente plusieurs avantages tels que la possibilité d'obtenir à partir d'une seule procédure de réduction modale plusieurs modèles réduits (par troncature des matrices réduites), une stabilité numérique reconnue et vérifiée dans l'ensemble des simulations effectuées dans le cadre de notre étude ainsi que sa disponibilité dans de nombreux codes industriels. En comparaison, la méthode de Craig-Martinez demande un temps de mise en œuvre plus important et s'est montrée très sensible numériquement.

Conformément aux objectifs énoncés, notre étude a permis de mettre au point un code intégré à l'environnement industriel Snecma, en accord avec les conclusions énoncées précédemment, c'est la méthode de Craig-Bampton qui a été choisie pour procéder à la réduction des modèles éléments finis. Ce code représente un travail non négligeable réalisé au cours de notre étude sur une période de trois mois passés au sein de l'entreprise Snecma. Ce code constitue une application industrielle mais ne présente pas d'intérêt en tant que tel d'un point de vue recherche, c'est pourquoi il n'est que brièvement présenté en annexe. Ce code permet d'envisager une étude de contact aube/carter à vitesse de rotation constante sur tout couple de structures

carter/roue aubagée. Il permet notamment de prendre en compte le raidissement centrifuge de la roue aubagée, palliant ainsi à une des restrictions de notre étude.

Enfin, une application originale de la double réduction modale a également été présentée dans le chapitre 1 dans le but de simuler le contact entre une roue aubagée avec une aube en sur-longueur et un carter flexible. L'utilisation de méthodes de réduction modale permet de gérer un carter flexible, de prendre en compte la dynamique de la roue aubagée entière tout en gardant des temps de calculs équivalents.

## Perspectives

Plusieurs axes de recherches sont envisageables à la suite de notre étude. Le premier concerne l'amélioration du modèle. En effet, le code de contact intégré à l'environnement Snecma peut encore être enrichi et la prise en compte de l'usure du carter (par modélisation de l'abradable) présente un intérêt majeur à moyen terme. Par ailleurs, il a été envisagé d'utiliser le code de contact comme outil pour optimiser le profil des aubes suivant leur réponse vibratoire à un chargement donné.

Relativement à l'étude présentée dans ce mémoire, l'amélioration de la mise en œuvre de la méthode de réduction modale de Craig-Martinez serait nécessaire pour permettre une étude plus approfondie de l'optimisation des bases de réduction en fonction du rôle négligeable joué par certains modes à diamètre. Il a été montré que l'approximation sur le calcul du terme de correction pseudo-statique n'empêche pas la convergence des modèles réduits nécessaire à notre étude mais, en revanche, elle peut être pénalisante pour l'optimisation de la base de réduction au sens où elle introduit une approximation sur les modes composants la base de réduction.

En lien avec cette volonté d'optimiser la base de réduction, l'application de différents types de chargements (en changeant le nombre de diamètres de l'excitation sur le carter) pourrait permettre de confirmer le lien observé entre la parité des diamètres des modes les plus influents et la parité de l'excitation appliquée sur le carter. Ceci permettrait d'établir des règles d'optimisation *a priori* de façon à limiter les temps de calculs.

Enfin, concernant le phénomène d'interaction modale, il semble qu'un modèle plus souple, dont les vitesses critiques sont plus proches de la plage de fonctionnement, est plus adapté à la détection des régimes d'interaction. Outre leur relative simplicité, c'est la différence de rigidité entre le carter et la roue aubagée pour les modèles 2D qui a facilité la détection des régimes d'interaction.





---

# Calculs des modes de réduction pour des structures à symétrie cyclique

Cette annexe présente l'ensemble de la démarche adoptée pour calculer les modèles réduits de la roue aubagée et du carter en utilisant leurs propriétés de symétrie cyclique, de la création des secteurs élémentaires au sens de la symétrie cyclique au calcul des modèles réduits. Ces calculs n'ont, à notre connaissance, pas été explicités dans la littérature auparavant.

Quelques articles ont été trouvés relativement à l'utilisation des propriétés de symétrie cyclique associées à l'utilisation de méthodes de réduction modale parmi lesquels nous pouvons citer [65] et [36]. La méthode utilisée dans ces deux articles diffère de celle explicitée dans cette annexe. En effet, il est possible de combiner symétrie cyclique et méthodes de réduction modale de deux manières :

1. méthode utilisée dans [65], création d'un modèle réduit pour chaque secteur élémentaire de la structure, les équations du mouvement de l'ensemble de la structure étant obtenues grâce à des relations de compatibilité entre secteurs élémentaires ;
2. méthode présentée dans cette annexe, création d'un modèle réduit pour la structure entière, les propriétés de symétrie cyclique étant uniquement utiles à réduire fortement le temps de calcul des modes composants de la base de réduction.

Les deux méthodes se distinguent par la division ou non de la structure en sous-structures. Les éléments supposés connus au début de cette procédure sont les matrices masse et raideur d'un secteur de chacune des structures.

**Remarque :** le terme « frontière », utilisé dans cette partie du mémoire, peut désigner deux notions différentes : la frontière de réduction 1 ou la frontière au sens de la symétrie cyclique (nœuds liant deux secteurs). Afin d'éviter toute confusion, il ne sera jamais utilisé seul : on ne parlera que de « frontière de réduction » ou de « frontière cyclique ».



Bladh [13] donne l'expression générale du changement de variable entre les deux espaces

$$\mathbf{x}_i = \frac{1}{\sqrt{N_a}} \mathbf{U}^0 + \sqrt{\frac{2}{N_a}} \sum_{n_d=1}^{E(\frac{N_a}{2})} [\mathbf{U}^{n_d,c} \cos((i-1)n_d\beta) + \mathbf{U}^{n_d,s} \sin((i-1)n_d\beta)] + \frac{(-1)^{i-1}}{\sqrt{N_a}} \mathbf{U}^{\frac{N_a}{2}} \quad (\text{A.5})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^0 &= \frac{1}{\sqrt{N_a}} \sum_{i=1}^{N_a} \mathbf{x}_i \\ \mathbf{U}^{n_d,c} &= \sqrt{\frac{2}{N_a}} \sum_{i=1}^{N_a} \mathbf{x}_i \cos((i-1)n_d\beta) \\ \mathbf{U}^{n_d,s} &= \sqrt{\frac{2}{N_a}} \sum_{i=1}^{N_a} \mathbf{x}_i \sin((i-1)n_d\beta) \\ \mathbf{U}^{\frac{N_a}{2}} &= \frac{1}{\sqrt{N_a}} \sum_{i=1}^{N_a} (-1)^{i-1} \mathbf{x}_i \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Le passage dans l'espace de la symétrie cyclique est un simple changement de base qui permet d'obtenir des matrices masse et raideur qui sont diagonales par bloc dans le nouvel espace. Ce changement de base étant possible grâce à la symétrie de la structure qui permet d'avoir des matrices masse et raideur circulantes.

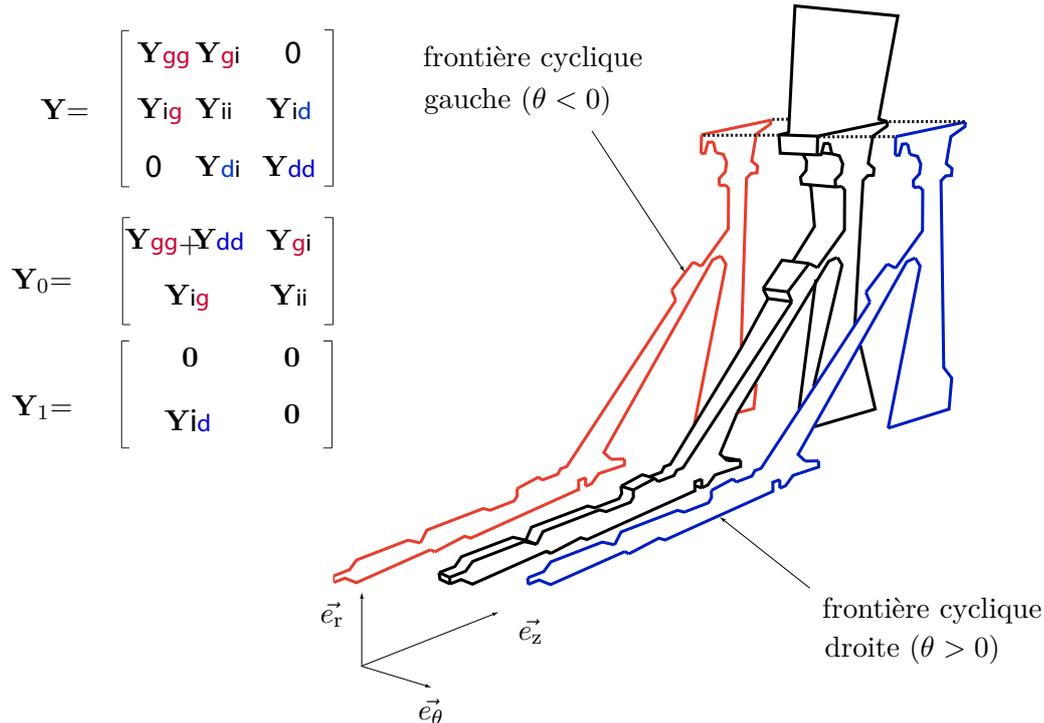
## A.2 Création des secteurs élémentaires

Les structures à symétrie cyclique sont habituellement maillées sur un seul secteur qui est ensuite développé autour de l'axe de symétrie pour former la structure entière. Si le secteur est développé tel quel, une couche de nœuds sera redondante à la frontière entre chaque secteur. Le secteur élémentaire au sens de la symétrie cyclique est donc simplement défini comme le secteur éléments finis auquel sont retirés ces nœuds redondants (frontière gauche ou frontière droite sur la figure A.1). L'obtention de ces secteurs élémentaires nécessite logiquement une réorganisation des ddls de chaque secteur suivant leur appartenance ou non aux frontières cycliques gauche et droite. La figure A.1 représente également la réorganisation des matrices masse et raideur ( $\mathbf{Y} = \mathbf{K}$  ou  $\mathbf{Y} = \mathbf{M}$ ) entre les ddls appartenant à la frontière cyclique gauche indicés  $_g$ , les ddls appartenant à la frontière cyclique droite indicés  $_d$  et ceux entre les deux frontières indicés  $_i$ . La matrice  $\mathbf{Y}_0$  correspond au secteur élémentaire de la symétrie cyclique, la matrice  $\mathbf{Y}_1$  correspond au couplage entre ces secteurs élémentaires (voir équation (A.1)).

## A.3 Symétrie cyclique et méthode de réduction modale

Ce paragraphe présente la façon de calculer les modes composants des méthodes de réduction modale en appliquant la symétrie cyclique. Il se décompose en trois parties relatives au calcul de chaque type de modes :

1. modes encastrés et modes libres
2. modes statiques



**Figure A.1** - Réorganisation des matrices des secteurs pour obtenir les secteurs élémentaires au sens de la symétrie cyclique.

### 3. modes d'attache

## A.3.1 Calcul des modes encastrés et libres

### A.3.1.1 Méthode :

La résolution d'un problème aux valeurs propres étant indépendante de la base dans laquelle on se trouve, le calcul des vecteurs propres et valeurs propres d'une structure à symétrie cyclique peut donc être fait dans l'espace harmonique. Dans cet espace (voir équation (A.2)) les matrices masse et raideur sont diagonales par blocs. La résolution du problème aux valeurs propres de la structure éléments finis (de dimension  $N_a \times N$ ) se limite donc à la résolution de  $(E(\frac{N_a}{2}) - 1)$  problèmes aux valeurs propres de dimension  $2N$  et un ou deux (suivant la parité de  $N_a$ ) problèmes aux valeurs propres de dimension  $N$ , permettant ainsi un gain de temps considérable.

La procédure est valable pour les modes libres comme pour les modes encastrés. Toutefois, le calcul des modes encastrés demande la prise en compte de l'encastrement des ddls de la frontière de réduction sur les secteurs élémentaires (suppression de lignes et colonnes des matrices  $\mathbf{Y}_0$  et  $\mathbf{Y}_1$ ).

### A.3.1.2 Gain en temps de calcul pour les modes encastrés :

Le nombre d'opérations nécessaires d'un point de vue algorithmique pour la résolution d'un problème aux valeurs propres (taille  $N \times N$ ) est  $O(N^3)$ .

- Dans le cadre de la combinaison Craig-Bampton et symétrie cyclique : on doit résoudre

$\frac{N_a-1}{2}$  ( $N_a$  est supposé pair) problèmes aux valeurs propres de taille  $2N - 2N_f$  ( $N_f$  étant le nombre de ddl frontières encastres sur un secteur), un (ou deux) problème(s) aux valeurs propres de taille  $N - N_f$ . On note  $N_{op}$  le nombre d'opérations totales nécessaires.

$$N_{op} = \frac{N_a - 1}{2} \frac{(2N - 2N_f)^3}{3} + 2 \frac{(N - N_f)^3}{3} \quad (\text{A.7})$$

$$N_{op} = \frac{4}{3} \frac{(N_a - 1)}{2} (N - N_f)^3 + 2 \frac{(N - N_f)^3}{3} \quad (\text{A.8})$$

$$N_{op} = \frac{4}{3} N_a (N - N_f)^3 \quad (\text{A.9})$$

- Dans le cas de la méthode de Craig-Bampton "classique", on doit résoudre un problème aux valeurs propres de taille  $N_a \cdot N - N_a \cdot N_f$ . On note  $N_{op}^{cl}$  le nombre total d'opérations nécessaires.

$$N_{op}^{cl} = \frac{(N_a \cdot N - N_a \cdot N_f)^3}{3} \quad (\text{A.10})$$

$$N_{op}^{cl} = \frac{N_a^3}{3} (N - N_f)^3 \quad (\text{A.11})$$

En faisant les mêmes approximations que dans le cas du calcul des modes statiques, on obtient le rapport  $\frac{N_{op}}{N_{op}^{cl}}$  :

$$\frac{N_{op}}{N_{op}^{cl}} \simeq \frac{\frac{4N_a}{3} (N - N_f)^3}{\frac{N_a^3}{3} (N - N_f)^3} \quad (\text{A.12})$$

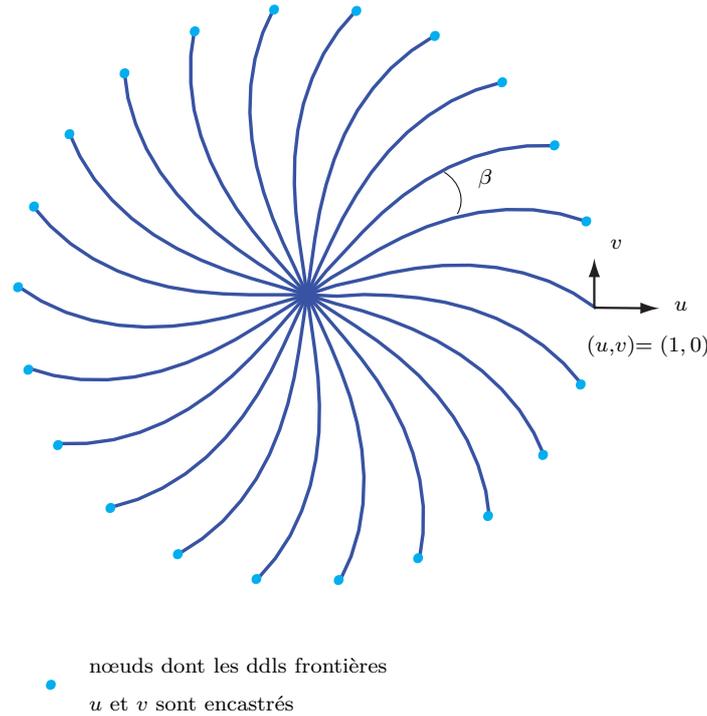
$$\frac{N_{op}}{N_{op}^{cl}} \simeq \frac{4}{N_a^2} \quad (\text{A.13})$$

### A.3.2 Calcul des modes statiques

Ces modes sont plus délicats à calculer en symétrie cyclique car les déplacements imposés sur les ddl de la frontière de réduction ne sont pas les mêmes pour tous les secteurs de la roue aubagée :

- Sur un secteur, un ddl de la frontière de réduction est imposé à 1, les autres 0,
- Sur tous les autres secteurs, les ddl de la frontière de réduction sont imposés à 0.

En revanche, il suffit de calculer les modes statiques relativement à un secteur, tous les autres s'obtenant par rotation.



**Figure A.2** - Configuration de la roue aubagée pour le calcul d'un mode statique (ddls frontières en bleu clair).

### A.3.2.1 Cas de l'harmonique 0

On cherche à calculer le mode statique pour lequel le déplacement imposé sur un ddl frontière se situe sur le secteur 1

$$\forall i \in [2, N_a], \mathbf{x}_{i,f} = \mathbf{0} \quad (\text{A.14})$$

L'équation du problème statique pour l'harmonique  $n_d = 0$  est

$$[\mathbf{Y}^0] \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{U}_f^0 \\ \mathbf{U}_i^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_f^0 \\ \mathbf{F}_i^0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.15})$$

Pour chaque système matriciel, la réorganisation des ddls en fonction des ddls sur frontière de réduction et des intérieurs est implicite. De l'équation (A.6) on obtient en particulier la relation suivante

$$\mathbf{U}^0 = \frac{1}{\sqrt{N_a}} \sum_{n=1}^{N_a} \mathbf{x}_n \quad (\text{A.16})$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{U}_f^0 \\ \mathbf{U}_i^0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{N_a}} \left[ \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{1,f} \\ \mathbf{x}_{1,i} \end{pmatrix} + \sum_{n=2}^{N_a} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{n,f} \\ \mathbf{x}_{n,i} \end{pmatrix} \right] \quad (\text{A.17})$$

En utilisant la relation (A.14), il vient

$$\begin{pmatrix} \mathbf{U}_f^0 \\ \mathbf{U}_i^0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{N_a}} \left[ \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{1,f} \\ \mathbf{x}_{1,i} \end{pmatrix} + \sum_{n=2}^{N_a} \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{x}_{n,i} \end{pmatrix} \right] \quad (\text{A.18})$$

$$\mathbf{U}_f^0 = \frac{1}{\sqrt{N_a}} \mathbf{x}_{1,f} \quad (\text{A.19})$$

$\mathbf{x}_{1,f}$  étant connu, on obtient  $\mathbf{u}_f^0$ . Par ailleurs, le terme  $\mathbf{F}_i^0$  est nul par définition des ddl intérieurs. Il reste alors l'équation

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{ii}^0 & \mathbf{Y}_{if}^0 \end{bmatrix} \mathbf{U}_i^0 + \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{if}^0 & \mathbf{Y}_{ii}^0 \end{bmatrix} \mathbf{U}_f^0 = \mathbf{0} \quad \text{avec :} \quad [\mathbf{Y}^0] = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{ff}^0 & \mathbf{Y}_{fi}^0 \\ \mathbf{Y}_{if}^0 & \mathbf{Y}_{ii}^0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.20})$$

$$\mathbf{U}_i^0 = - [\mathbf{Y}_{ii}^0]^{-1} [\mathbf{Y}_{if}^0] \mathbf{U}_f^0 \quad (\text{A.21})$$

On obtient ainsi le vecteur ( $\mathbf{U}^0$ ) au complet. La procédure détaillée est également valable pour l'obtention du vecteur ( $\mathbf{U}^{N_a}$ ) qui existe si et seulement si  $N_a$  est pair. La matrice inversée pour la résolution du système statique est de taille  $N_a$  fois inférieure à la matrice à inverser si le calcul était fait dans l'espace éléments finis.

### A.3.2.2 Cas de l'harmonique $n_d$ ( $n_d \in [1, E(\frac{N_a-1}{2})]$ )

L'harmonique  $n_d$  telle que  $n_d \in [1, E(\frac{N_a-1}{2})]$  est une harmonique pour laquelle le bloc correspondant dans la matrice raideur en symétrie cyclique est de taille  $2N$ . Pour cette harmonique, on distingue les termes « cosinus » des termes « sinus » (voir équation (A.6))

$$\mathbf{U}^{n_d,c} = \sqrt{\frac{2}{N_a}} \sum_{n=1}^{N_a} \mathbf{x}_n \cos(n-1)\beta \quad \text{et} \quad \mathbf{U}^{n_d,s} = \sqrt{\frac{2}{N_a}} \sum_{n=1}^{N_a} \mathbf{x}_n \sin(n-1)\beta \quad (\text{A.22})$$

On enlève de la somme le terme correspondant au premier secteur (sur lequel un ddl de la frontière de réduction est imposé à un)

$$\begin{pmatrix} \mathbf{U}_f^{j,c} \\ \mathbf{U}_i^{j,c} \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{2}{N_a}} \left[ \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{1,f} \\ \mathbf{x}_{1,i} \end{pmatrix} + \sum_{n=2}^{N_a} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{n,f} \\ \mathbf{x}_{n,i} \end{pmatrix} \cos(n-1)\beta \right] \quad (\text{A.23})$$

Avec (A.14) il vient

$$\begin{pmatrix} \mathbf{U}_f^{n_d,c} \\ \mathbf{U}_i^{n_d,c} \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{2}{N_a}} \left[ \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{1,f} \\ \mathbf{x}_{1,i} \end{pmatrix} + \sum_{n=2}^{N_a} \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{x}_{n,i} \end{pmatrix} \cos(n-1)\beta \right] \quad (\text{A.24})$$

$$\mathbf{U}_f^{n_d,c} = \sqrt{\frac{2}{N_a}} \mathbf{x}_{1,f} \quad (\text{A.25})$$

En suivant la même démarche avec le terme  $\mathbf{U}^{n_d,s}$  de l'équation (A.22), on obtient

$$\mathbf{U}_f^{n_d,s} = \sqrt{\frac{2}{N_a}} \mathbf{x}_{1,f} \sin(1-1)\beta = \mathbf{0} \quad (\text{A.26})$$

Le problème statique à résoudre est alors

$$[\mathbf{Y}^{n_d}] \begin{pmatrix} \mathbf{U}_f^{n_d,c} \\ \mathbf{U}_f^{n_d,s} \\ \mathbf{U}_i^{n_d,c} \\ \mathbf{U}_i^{j,s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_f^{n_d,c} \\ \mathbf{F}_f^{n_d,s} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.27})$$

$$[\mathbf{Y}_{ii}^{n_d}] \begin{pmatrix} \mathbf{U}_i^{n_d,c} \\ \mathbf{U}_i^{n_d,s} \end{pmatrix} + [\mathbf{Y}_{if}^{n_d}] \begin{pmatrix} \mathbf{U}_f^{n_d,c} \\ \mathbf{U}_f^{n_d,s} = 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad \text{avec} \quad [\mathbf{Y}^{n_d}] = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{ff}^{n_d} & \mathbf{Y}_{fi}^{n_d} \\ \mathbf{Y}_{if}^{n_d} & \mathbf{Y}_{ii}^{n_d} \end{bmatrix} \quad (\text{A.28})$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{U}_i^{n_d,c} \\ \mathbf{U}_i^{n_d,s} \end{pmatrix} = -[\mathbf{Y}_{ii}^{n_d}]^{-1} [\mathbf{Y}_{if}^{n_d}] \begin{pmatrix} \mathbf{U}_f^{n_d,c} \\ \mathbf{U}_f^{n_d,s} = 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.29})$$

Cette équation permet d'obtenir tous les termes inconnus du vecteur

$$(\mathbf{U}_j) = [\mathbf{U}_f^{n_d,c}, \mathbf{U}_i^{n_d,c}, \mathbf{U}_f^{n_d,s}, \mathbf{U}_i^{n_d,s}]^T \quad (\text{A.30})$$

La matrice inversée pour la résolution du système statique est de taille  $\frac{N_a}{2}$  fois inférieure à la matrice qui serait à inverser dans l'espace éléments finis.

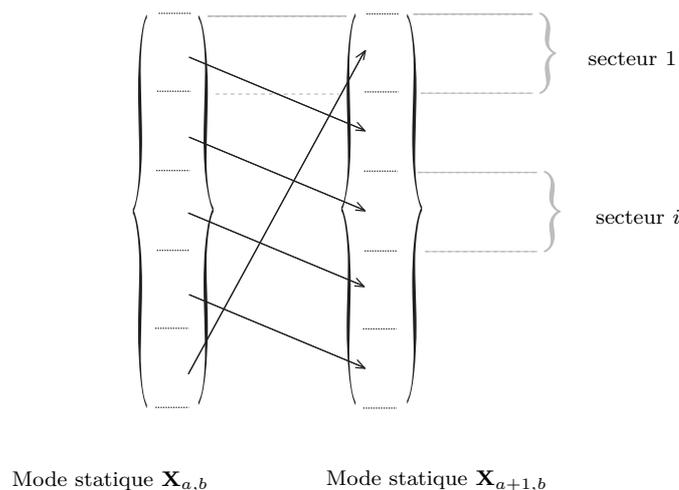
Cette méthode permet d'obtenir le vecteur  $\mathbf{U}$  des déplacements dans l'espace des coordonnées cycliques pour un mode statique.

### A.3.2.3 Cas de l'harmonique $N_a/2$

Si la deuxième harmonique simple existe (c'est-à-dire si  $N_a$  est pair), alors le calcul des modes statiques correspondant se fait exactement comme pour l'harmonique  $n_d = 0$ .

### A.3.2.4 Illustration d'un cas simple

Supposons que la roue aubagée a cinq secteurs (aubes) et qu'il y a deux ddl sur la frontière de réduction par secteur ( $u$  et  $v$  en extrémité d'aube). Il y a alors en tout dix modes statiques ( $\mathbf{X}_{a,b}$  avec  $a \in [1,5]$  et  $b \in [1,2]$  :  $\mathbf{X}_{a,b}$  est le mode statique correspondant au  $b^e$  ddl frontière du secteur  $a$ ). On suppose que les modes statiques associés aux secteur 1 (c'est-à-dire  $\mathbf{X}_{1,1}$  et  $\mathbf{X}_{1,2}$ ) sont obtenus par la méthode décrite précédemment. Il reste à construire par permutation circulaire tous les modes statiques associés aux autres secteurs.



**Figure A.3** - Permutation des coordonnées des modes statiques dans l'espace physique pour obtenir tous les modes statiques de la structure.

### A.3.2.5 Gain en temps de calcul pour les modes statiques :

Le nombre d'opérations nécessaires d'un point de vue algorithmique pour la résolution d'un système linéaire de taille  $N \times N$  est en  $O(N^2)$  et le nombre d'opérations pour l'inversion d'une matrice carrée de taille  $N \times N$  est de  $\frac{4N^3}{3}$ .

- Dans le cadre de la combinaison Craig-Bampton et symétrie cyclique : on doit résoudre (avec les mêmes notations que dans A.3.1.2)  $\frac{N_a-1}{2}$  systèmes linéaires de taille  $(2N - 2N_f)$ , impliquant une inversion de matrice de taille  $(2N - 2N_f)$ , 1 (ou 2) système(s) linéaire(s) de taille  $N - N_f$ , impliquant une inversion de matrice de taille  $N - N_f$ . On note  $N_{op}$  le nombre total d'opérations nécessaires.

$$N_{op} = \frac{2(N - N_f)^3}{3} + \frac{(N_a - 1)(N - N_f)^3}{2} + \frac{(N_a - 1)}{2} \cdot O((2N - 2N_f)^2) + 2 \cdot O((N - N_f)^2) \quad (A.31)$$

$$N_{op} = (N - N_f)^3 \left[ \frac{2}{3} + \frac{8}{3} \frac{N_a - 1}{2} \right] + O((N - N_f)^2) [2(N_a - 1) + 2] \quad (A.32)$$

- Dans le cas de la méthode de Craig-Bampton sans considération de symétrie cyclique, on doit résoudre un système linéaire de taille  $(N_a N - N_a N_f)$ , impliquant une inversion de matrice de taille  $(N_a N - N_a N_f)$ . On note  $N_{op}^{cl}$  le nombre d'opérations totales nécessaires.

$$N_{op}^{cl} = \frac{4}{3} (N_a N - N_a N_f)^3 + O((N_a N - N_a N_f)^2) \quad (A.33)$$

Il vient donc

$$\frac{N_{op}}{N_{op}^{cl}} = \frac{(N - N_f)^3 \left[ \frac{2}{3} + \frac{8}{3} \frac{(N_a - 1)}{2} \right] + O((N - N_f)^2) [2(N_a - 1) + 2]}{\frac{4}{3} (N_a N - N_a N_f)^3 + O((N_a N - N_a N_f)^2)} \quad (A.34)$$

Vu le grand nombre de ddls des modèles considérés dans notre étude et le faible nombre de ddls sur la frontière de réduction, il est légitime de négliger les termes carrés devant les termes cubiques, les termes constants devant les termes en  $N_a$  et  $N$  ainsi que de supposer  $N_f = 0$ . Dans ces conditions, il reste

$$\frac{N_{op}}{N_{op}^{cl}} \simeq \frac{N_a N^3}{N_a^3 N^3} \quad (A.35)$$

$$\frac{N_{op}}{N_{op}^{cl}} \simeq \frac{1}{N_a^2} \quad (A.36)$$

### A.3.3 Gain total en nombre d'opérations

Considérant les gains pour le calcul des modes statiques et des modes encastres, il est possible d'estimer un gain global pour la méthode de Craig-Bampton. Si la base de réduction comporte  $n_{stat}$  modes statiques et  $n_{enc}$  modes encastres, le gain (en nombre d'opérations) de l'utilisation de la combinaison de la symétrie cyclique avec la méthode de Craig-Bampton est de l'ordre de

$$Gain = \left(\frac{n_{enc} + n_{stat}}{n_{stat}}\right) \frac{N_a^2}{1} + \left(\frac{n_{enc} + n_{stat}}{n_{enc}}\right) \frac{N_a^2}{4} \quad (\text{A.37})$$

Par exemple, lorsque la roue aubagée comporte vingt-deux aubes, si la base de réduction comporte quarante-quatre modes statiques (c'est-à-dire qu'il y a deux ddl sur frontière de réduction par aube) et cent dix modes encastres, le gain est

$$Gain = \left(\frac{44}{110 + 44}\right) \frac{22^2}{1} + \left(\frac{110}{110 + 44}\right) \frac{22^2}{4} = 224,71 \quad (\text{A.38})$$

Le nombre d'opérations est donc 224 fois inférieur pour l'obtention de la matrice de passage en utilisant la symétrie cyclique.

### A.3.4 Calcul des modes d'attache

Cette section reprend la méthode présentée pour le calcul des modes statiques dans le cas de la méthode de Craig-Bampton.

**Cas de l'harmonique 0 :** On cherche à calculer le mode d'attache pour lequel l'effort imposé sur un ddl de la frontière de réduction se situe sur le secteur 1

$$\forall i \in [2, N_a], \mathbf{F}_f^i = \mathbf{0} \quad (\text{A.39})$$

L'équation du problème statique pour l'harmonique  $n_d = 0$  est

$$[\mathbf{Y}^0] \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{U}_f^0 \\ \mathbf{U}_i^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_f^0 \\ \mathbf{f}_i^0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.40})$$

Note : dans l'espace des coordonnées cycliques, un effort est noté  $\mathbf{f}$  alors qu'il est noté  $\mathbf{F}$  dans l'espace réel. Pour chaque système matriciel, la réorganisation des ddl en fonction des ddl de la frontière de réduction et des ddl intérieurs est implicite. On a la relation suivante

$$\mathbf{f}^0 = \frac{1}{\sqrt{N_a}} \sum_{n=1}^{N_a} \mathbf{F}^n \quad (\text{A.41})$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{f}_f^0 \\ \mathbf{f}_i^0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{N_a}} \left[ \begin{pmatrix} \mathbf{F}_f^1 \\ \mathbf{F}_i^1 \end{pmatrix} + \sum_{n=2}^{N_a} \begin{pmatrix} \mathbf{F}_f^n \\ \mathbf{F}_i^n \end{pmatrix} \right] \quad (\text{A.42})$$

En utilisant la relation (A.39), il vient

$$\begin{pmatrix} \mathbf{f}_f^0 \\ \mathbf{f}_i^0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{N_a}} \left[ \begin{pmatrix} \mathbf{F}_f^1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sum_{n=2}^{N_a} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \quad (\text{A.43})$$

$$\mathbf{f}_f^0 = \frac{1}{\sqrt{N_a}} \mathbf{F}_f^1 \quad (\text{A.44})$$

$\mathbf{F}_f^1$  étant connu, on obtient  $\mathbf{f}_f^0$ . Par ailleurs, le terme  $\mathbf{F}_i^0$  est nul par définition des dds intérieurs. Il reste alors l'équation

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u}_f^0 \\ \mathbf{u}_i^0 \end{pmatrix} = [\mathbf{Y}^0]^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{f}_f^0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.45})$$

On obtient ainsi le vecteur  $(\mathbf{u}^0)$  au complet. La procédure détaillée est également valable pour l'obtention du vecteur  $(\mathbf{u}^{N_a})$  qui existe si et seulement si  $N_a$  est pair. La matrice inversée pour la résolution du système statique est de taille  $N_a$  fois inférieure à la matrice inversée dans l'équation éléments finis classique.

#### A.3.4.1 Cas de l'harmonique $n_d$

La démarche adoptée est très semblable à celle déjà développée pour les harmoniques doubles dans le cas du calcul des modes statiques. ( $n_d \in [1, E(\frac{N_a-1}{2})]$ ) : l'harmonique  $j$  telle que  $n_d \in [1, E(\frac{N_a-1}{2})]$  est une harmonique pour laquelle le bloc correspondant dans la matrice raideur en symétrie cyclique est de taille  $2N$ . Pour cette harmonique, on distingue les termes « cosinus » des termes « sinus » obtenus comme suit

$$\mathbf{f}^{n_d,c} = \sqrt{\frac{2}{N_a}} \sum_{n=1}^{N_a} \mathbf{F}_n \cos(n-1)\beta \quad \text{et} \quad \mathbf{f}^{n_d,s} = \sqrt{\frac{2}{N_a}} \sum_{n=1}^{N_a} \mathbf{F}_n \sin(n-1)\beta \quad (\text{A.46})$$

On enlève de la somme le terme correspondant au premier secteur (sur lequel un ddl de la frontière de réduction est imposé à 1)

$$\mathbf{f}^{n_d,c} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_f^{n_d,c} \\ \mathbf{f}_i^{n_d,c} \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{2}{N_a}} \sum_{n=1}^{N_a} \left[ \begin{pmatrix} \mathbf{F}_f^1 \\ \mathbf{F}_i^1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{F}_f^n \\ \mathbf{F}_i^n \end{pmatrix} \right] \cos(n-1)\beta \quad (\text{A.47})$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{f}_f^{n_d,c} \\ \mathbf{f}_i^{n_d,c} \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{2}{N_a}} \left[ \begin{pmatrix} \mathbf{F}_f^1 \\ \mathbf{F}_i^1 \end{pmatrix} + \sum_{n=2}^{N_a} \begin{pmatrix} \mathbf{F}_f^n \\ \mathbf{F}_i^n \end{pmatrix} \cos(n-1)\beta \right] \quad (\text{A.48})$$

Avec (A.39) il vient

$$\begin{pmatrix} \mathbf{f}_f^{n_d,c} \\ \mathbf{f}_i^{n_d,c} \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{2}{N_a}} \left[ \begin{pmatrix} \mathbf{F}_f^1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sum_{n=2}^{N_a} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cos(n-1)\beta \right] \quad (\text{A.49})$$

$$\mathbf{f}^{n_d,c} = \sqrt{\frac{2}{N_a}} \mathbf{F}_f^1 \quad (\text{A.50})$$

En suivant la même démarche avec le terme  $(\mathbf{f}^{n_d,s})$  de l'équation (A.46), on obtient

$$\mathbf{f}_f^{n_d,s} = \sqrt{\frac{2}{N_a}} \mathbf{F}_f^1 \sin(1-1)\beta = \mathbf{0} \quad (\text{A.51})$$

Le problème statique à résoudre est alors

$$[\mathbf{Y}^{n_d}] \begin{pmatrix} \mathbf{U}_f^{n_d,c} \\ \mathbf{U}_f^{n_d,s} \\ \mathbf{U}_i^{n_d,c} \\ \mathbf{U}_i^{n_d,s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_f^{n_d,c} \\ \mathbf{F}_f^{n_d,s} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.52})$$

avec

$$[\mathbf{Y}^{n_d}] = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{ff}^{n_d} & \mathbf{Y}_{fi}^{n_d} \\ \mathbf{Y}_{if}^{n_d} & \mathbf{Y}_{ii}^{n_d} \end{bmatrix} \quad (\text{A.53})$$

Cette équation permet d'obtenir tous les termes inconnus du vecteur :

$$\mathbf{U}^{n_d} = [\mathbf{U}_f^{n_d,c}, \mathbf{U}_i^{n_d,c}, \mathbf{U}_f^{n_d,s}, \mathbf{U}_i^{n_d,s}]^T \quad (\text{A.54})$$

La matrice inversée pour la résolution du système statique est de taille  $\frac{N_a}{2}$  fois inférieure à la matrice inversée dans le cas d'une résolution classique. Cette méthode permet d'obtenir le vecteur  $\mathbf{u}$  des déplacements dans l'espace des coordonnées cycliques pour un mode d'attache.

#### A.3.4.2 Cas de l'harmonique $\frac{N_a}{2}$

Si la deuxième harmonique simple existe (c'est-à-dire si  $N_a$  est pair), alors le calcul des modes d'attache correspondant se fait exactement comme pour l'harmonique  $n_d = 0$ .

Les modes d'attache pour un secteur sont ainsi obtenus dans l'espace de la symétrie cyclique, leur recombinaison se fait à l'aide de la relation (A.6). L'obtention des modes d'attache sur les autres secteurs se fait par permutation circulaire (de même que pour les modes statiques au paragraphe A.3.2.2).

#### A.3.4.3 Gain en temps de calcul

Le calcul des modes d'attache en prenant en compte la symétrie cyclique permet des gains de temps identiques à ceux détaillés pour les modes statiques.

### A.3.5 Symétrie cyclique et méthode de Craig-Martinez

La méthode de Craig-Martinez consiste à réintroduire les degrés de liberté frontière dans le système réduit obtenu par la méthode de Craig (simple troncature modale). Les modes à calculer sont donc les modes propres et il suffit de calculer le terme correspondant à la correction pseudo-statique. Cette correction est présentée en détails dans le chapitre 1.

Le calcul de ce terme pose problème pour des modèles de très grande taille car il est nécessaire d'inverser la matrice raideur  $\mathbf{K}$  de la structure non réduite.

L'utilisation de la symétrie cyclique est avantageux pour le calcul de l'inverse (la matrice raideur  $\mathbf{K}$  étant diagonale par blocs dans l'espace de la symétrie cyclique) mais n'est pas suffisant car l'inverse de la matrice raideur doit être connue dans l'espace éléments finis.

Il est donc nécessaire d'envisager des simplifications pour pouvoir calculer l'inverse de la matrice  $\mathbf{K}$ . Une hypothèse est faite dans notre étude : la matrice  $\mathbf{K}$  est assimilée à une matrice

diagonale par blocs (uniquement pour le calcul de la correction pseudo-statique et pour les modèles 3D) contenant donc autant de blocs  $\mathbf{K}_0$  sur la diagonale que la structure a de secteurs. Cette hypothèse est validée *a posteriori* par les résultats de convergence obtenus sur les modèles réduits.

## A.4 Calcul des modèles réduits

Une fois les modes de réduction modale obtenus, la matrice de passage de la méthode de réduction modale  $\Phi$  est facilement calculable (immédiatement dans le cas de la méthode de Craig-Bampton, après hypothèses simplificatrices sur la matrice raideur dans le cas de la méthode de Craig-Martinez). Le calcul des modèles réduits se limite donc au calcul des matrices  $\mathbf{K}_r$  et  $\mathbf{M}_r$  définies par

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_r &= \Phi^T \mathbf{K} \Phi \\ \mathbf{M}_r &= \Phi^T \mathbf{M} \Phi\end{aligned}\tag{A.55}$$



# B

---

## Validation de l'algorithme : cas hyperélastique

Cette annexe s'ajoute à la comparaison du code de contact avec le code développé dans [55] présentée dans le chapitre 2. Alors que la comparaison présentée dans le mémoire s'approche, en termes de vitesses relatives et de propriétés matériaux, d'un cas de contact aube/carter, le cas présenté dans cette annexe est un des cas de validation utilisé dans [55] entre deux structures très souples avec de faibles vitesses relatives.

Les notations utilisées dans cette annexe sont les mêmes que celles du chapitre 2, le « code d'interaction » est comparé au code « Magnain ».

### B.1 Description du cas test

Le cas test consiste à simuler l'interaction entre deux blocs hyperélastiques, les paramètres mécaniques du matériau sont :

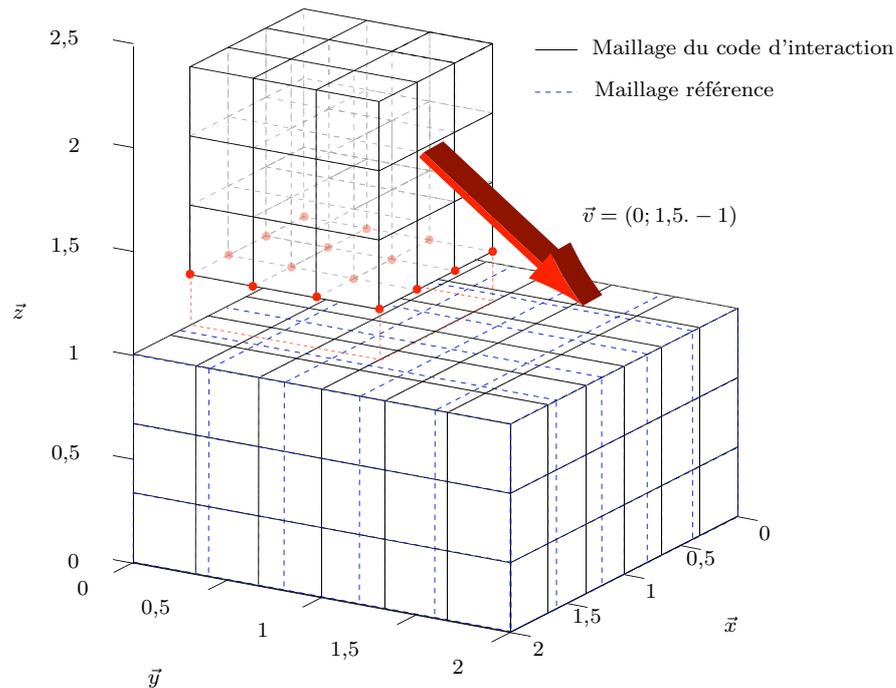
- Module d'Young :  $E = 36\,000$  Pa;
- $\nu = 0,2$ ;
- $\rho = 100$  kg · m<sup>-3</sup>

Les deux blocs sont modélisés à l'aide d'éléments brique H8. Le bloc inférieur est encastrée à sa base, le bloc supérieur est libre, on lui impose à  $t = 0$  une vitesse  $\vec{V} = (0; 1,5; -1)$ . Les deux blocs sont représentés sur la figure B.1. La figure B.2 précise quant à elle les surfaces considérées et le vocabulaire utilisé au cours de la validation :

- La surface de contact du bloc supérieur : le contact est géré au niveau des nœuds uniquement ;
- La surface de contact du bloc inférieur : le contact est géré sur l'ensemble de la surface en considérant la projection des nœuds de la surface de contact du bloc supérieur sur cette surface (non déformée).

Pour tous les résultats présentés dans cette annexe, lorsque des courbes de déplacements relatives à des nœuds de ces surfaces sont tracées, une représentation de ces surfaces sera présente à côté des courbes pour préciser les nœuds pris en compte. Enfin il est à noter qu'il existe une

différence au niveau du maillage du bloc inférieur, ce bloc est modélisé avec six éléments H8 selon les directions  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$  dans le cas du code d'interaction contrairement au cas référence où il n'y en a que cinq. Cette différence est imposée pour s'assurer qu'à chaque pas de temps, chaque élément de la surface de contact du bloc inférieur est en contact avec au plus un nœud de la surface de contact du bloc supérieur. En effet, le code d'interaction ne gère pas le contact si deux nœuds ou plus de contact du bloc supérieur se projettent sur un même élément de la surface de contact du bloc inférieur. Les paramètres de la simulation sont :



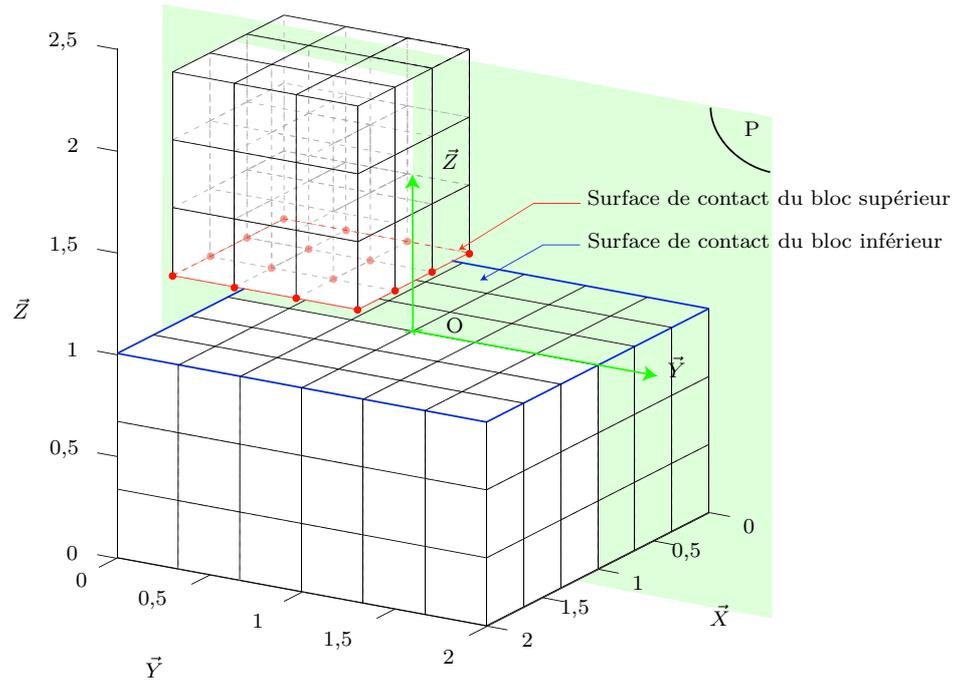
**Figure B.1** - Cas de contact considéré pour la validation du code.

- Coefficient de frottement :  $\mu = 0,2$ ;
- pas de temps :  $\delta t = 1 \cdot 10^{-5}$  s;
- temps total de la simulation : 1 s (soit  $1 \cdot 10^5$  itérations);
- enfin, il n'y a pas d'amortissement ( $\mathbf{D} = \mathbf{0}$ ).

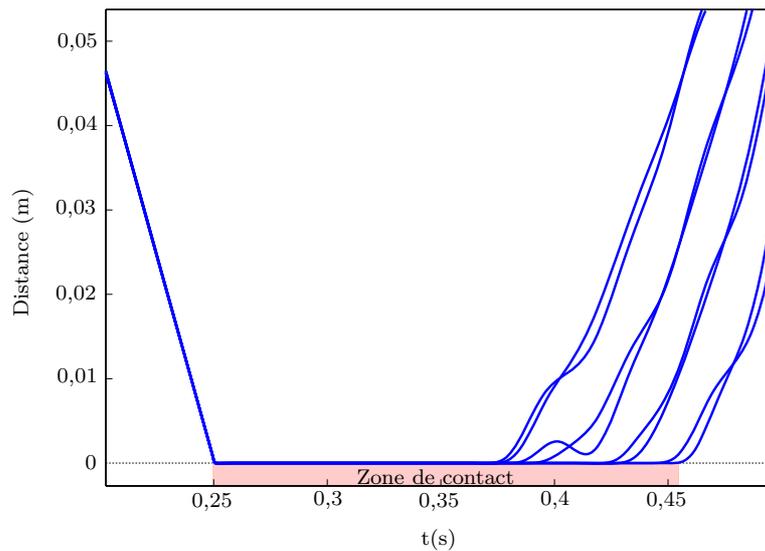
## B.2 Résultats

### B.2.1 Pénétrations

La figure B.3 est obtenue avec le code d'interaction et permet de vérifier la bonne gestion du contact en vérifiant l'absence de pénétrations lors de la phase de contact. 8 courbes distinctes sont visibles sur cette figure, il y en a en réalité 16 (une par nœud de la surface de contact de la surface de contact du bloc supérieur. Chaque courbe visible est en fait double du fait de la symétrie du cas de contact considéré par rapport au plan  $P=(O; \vec{y}; \vec{z})$  représenté sur la figure B.2.



**Figure B.2** - Représentation des surfaces de contact sur chaque bloc.

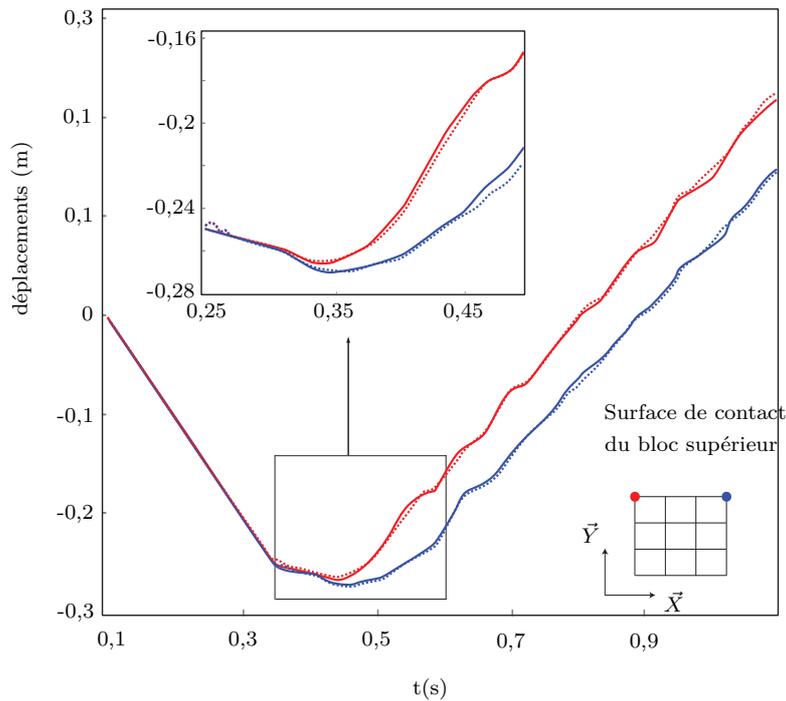


**Figure B.3** - Distances entre chaque nœud de la surface de contact du bloc supérieur et la surface de contact du bloc inférieur au cours du temps.

## B.2.2 Résultats suivant orthogonale à la surface de contact

Tous les résultats présentés dans cette section ont la même forme : les courbes tracées en pointillés sont relatives au code de référence et les courbes en traits pleins sont relatives au code d'interaction. Du fait de la symétrie du problème, toutes les courbes sont doubles. La figure B.4 présente les déplacements suivant l'axe  $\vec{z}$  de deux nœuds sur la surface de contact du bloc supérieur pour les deux codes. On observe que le code d'interaction donne des résultats très proches du code de référence. La seule différence notable est l'absence des petits rebonds

observés à l'établissement du contact, ce qui semble plus physique.



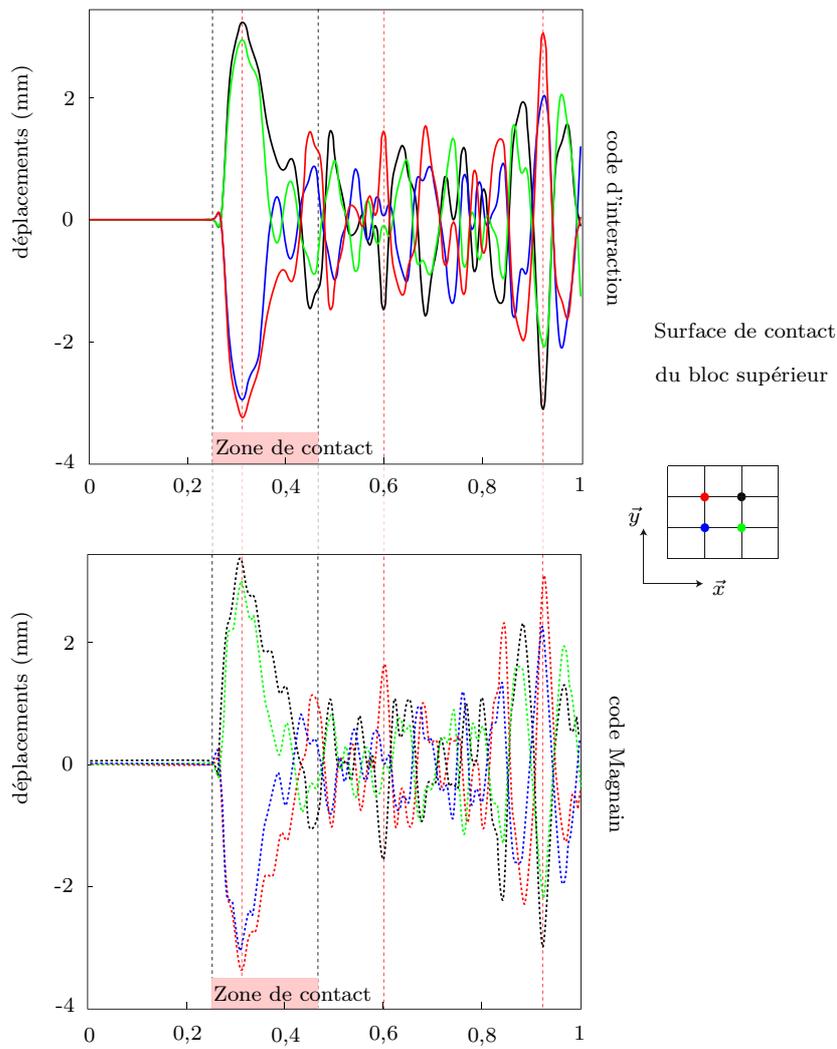
**Figure B.4** - Déplacements suivant l'axe  $\vec{z}$  observés sur les nœuds sur deux sommets de la surface de contact du bloc supérieur : code de référence (.....) et (.....) et code à valider (—) et (—).

### B.2.3 Résultats suivant orthogonale au déplacement

Les dernières courbes présentées sur la figure B.5 sont les déplacements suivant l'axe  $\vec{x}$  des quatre nœuds aux sommets de l'élément central de la surface de contact du bloc supérieur. Lors de l'impact, ces nœuds vont avoir tendance à s'écartier les uns des autres du fait de l'écrasement du bloc supérieur sur le bloc inférieur. On vérifie la symétrie du cas de contact en s'assurant de la symétrie des courbes par rapport à l'axe  $\vec{x}$  du temps de la figure B.5. Les résultats obtenus avec le code d'interaction sont très proches de ceux obtenus avec le code de référence. En termes d'amplitude des déplacements, les résultats sont similaires, les principaux pics sont observés aux mêmes instants (lignes rouges en traits pointillés).

## B.3 Conclusion

Les résultats obtenus pour cette deuxième validation du code d'interaction confirment l'étude présentée dans le corps du mémoire qui montrait une très bonne concordance des deux codes lorsque les matériaux sont souples avec de faibles vitesses relatives.



**Figure B.5** - Déplacements suivant l'axe  $\vec{x}$  observés sur les 4 nœuds aux sommets de l'élément central de la surface de contact de l'élément supérieur pour les deux codes.





---

## Interaction modale 2D : compléments

L'étude d'interaction modale effectuée à partir du modèle 2D de roue aubagée et de carter défini dans le chapitre 3 a abouti à toute une série de résultats non détaillés dans le corps du mémoire. En particulier, l'étude de détection des régimes d'interaction lorsque le carter est restreint cinématiquement (en étant projeté sur les deux premiers modes de diamètre correspondant à l'excitation voulue sur le carter) et lorsque la roue aubagée est réduite par une méthode de réduction modale a été poussée au delà des résultats présentés sur la figure 3.20. Des « cartes » similaires ont été obtenues pour le cas d'une excitation du carter selon un mode à 3 diamètres, pour les méthodes de Craig-Bampton (CB) et de Craig-Chang-Martinez (CCM) en faisant varier le nombre de modes contenus dans la base de réduction (modes propres ou encastres selon la méthode de réduction considérée).

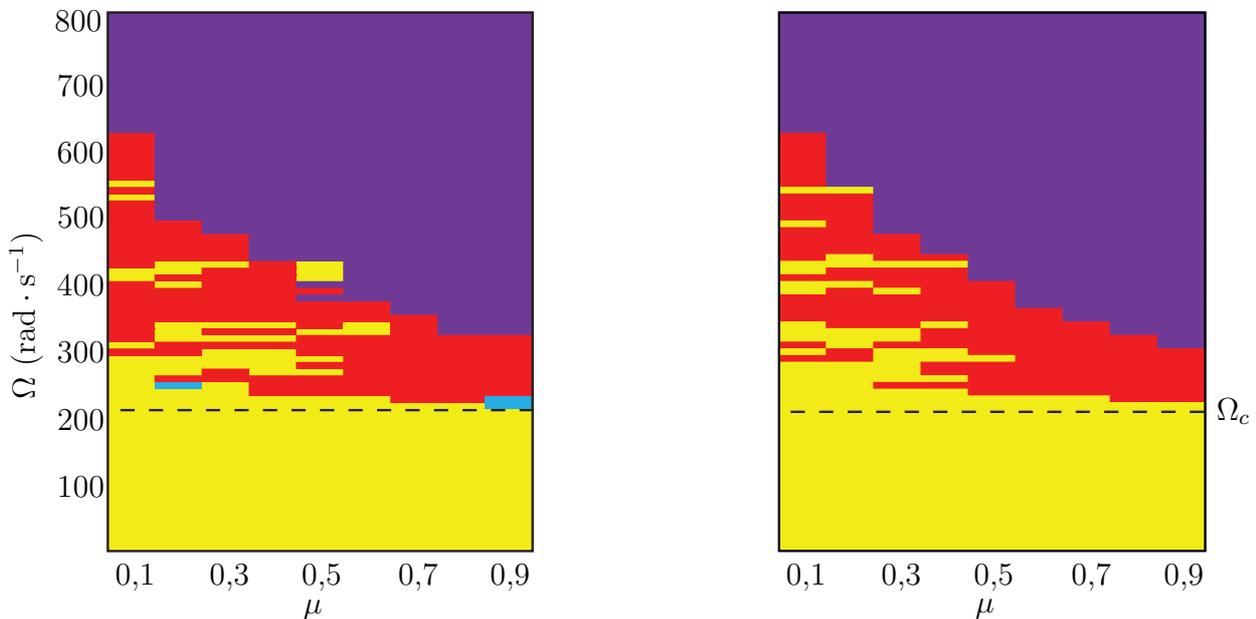
Cette annexe présente l'ensemble des cartes d'interaction obtenues pour les méthodes de Craig-Bampton et de Craig-Chang-Martinez dans le cadre de l'étude d'interaction 2D avec restrictions cinématiques sur le carter. Le chargement considéré déforme le carter selon un mode à deux ( $n_d = 2$ ) ou trois ( $n_d = 3$ ) diamètres. Les paramètres de réduction varient entre les valeurs 44 et 88 pour chaque méthode. L'influence de l'enrichissement de la base modale sur la détection d'interaction est ainsi montrée de façon plus visuelle.

**Remarque :** *les modèles réduits de Craig-Chang-Martinez utilisés dans cette annexe comportent 66 modes d'attache contre 44 pour ceux utilisés dans le chapitre 3, une orthonormalisation a été réalisée sur les vecteurs composants la base de réduction de la méthode de Craig-Chang-Martinez pour pallier aux problèmes numériques mentionnés dans le paragraphe 3.2.*

### C.1 Interaction à deux diamètres

La carte représentée sur la figure C.1(a) est le résultat des simulations d'interaction lancées avec les modèles réduits par méthode de Craig-Chang-Martinez avec 66 modes d'attache et 44 modes libres. Elle peut être directement comparée à la carte de la figure C.1(b) qui a été obtenu pour les modèles réduits par la méthode de Craig-Bampton avec 66 modes statiques

et 44 modes encastrés. La figure C.2(b) présente les résultats des simulations pour les modèles



(a)  $n_d = 2$ , méthode CCM,  $\phi = 44$ , 66 modes d'attache

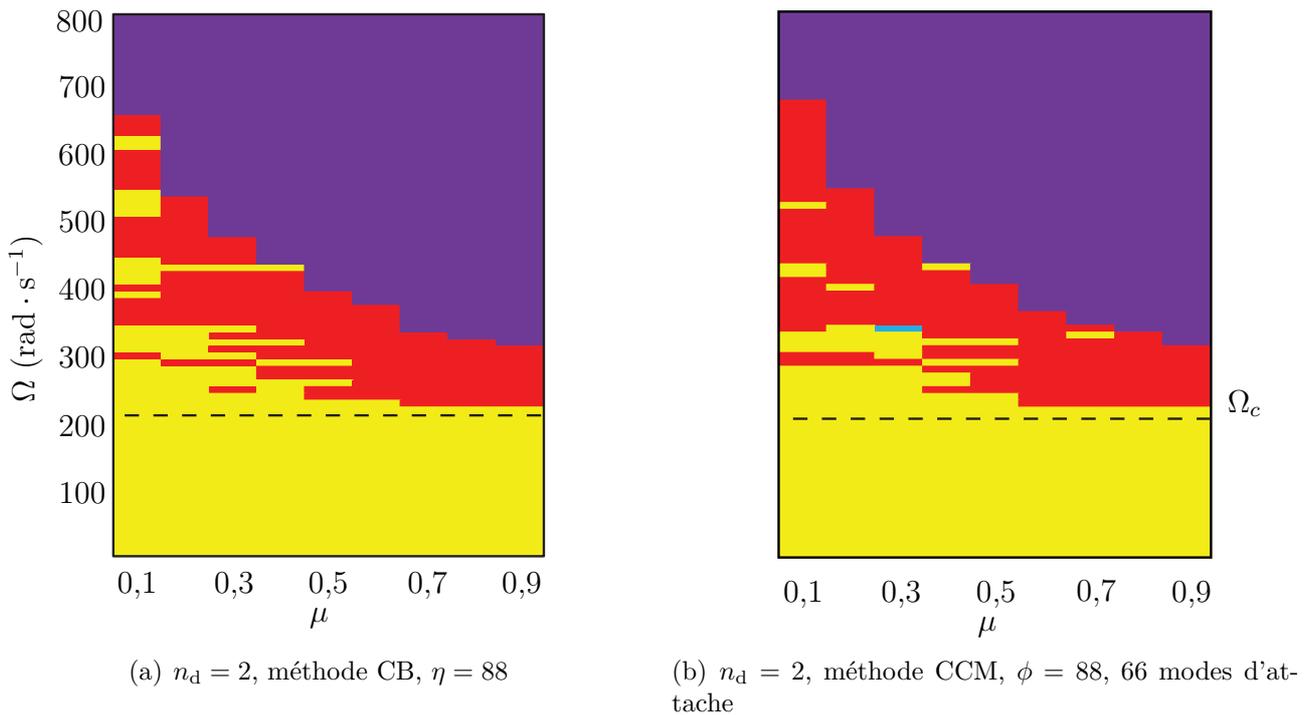
(b)  $n_d = 2$ , méthode CB,  $\eta = 44$

**Figure C.1** -  $n_d = 2$  : Cartes des régimes obtenus pour les méthodes Craig-Bampton et Craig-Chang-Martinez avec 44 modes conservés dans chaque base de réduction ;  $\Omega_c = 215 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$

réduits par méthode de Craig-Chang-Martinez avec 66 modes d'attache et 88 modes libres. Les résultats des simulations pour les modèles réduits par méthode de Craig-Bampton avec 66 modes statiques et 88 modes encastrés sont, quant à eux, présentés sur la figure C.2(a). Chaque couleur correspond à un type de régime particulier. Le calcul de la vitesse critique ( $\Omega_c = \frac{w_c}{n_d}$ ) est expliqué dans le chapitre 3. Quelle que soit la méthode de réduction utilisée, on observe que pour une vitesse de rotation inférieure à la vitesse critique l'ensemble des simulations aboutissent à des régimes amortis : les amplitudes de vibration tendent vers zéro.

L'observation des différentes cartes semble relativiser l'importance de la méthode de réduction pour l'étude d'interaction sur des modèles simplifiés 2D. En effet, les cartes C.1(a) et C.1(b), C.2(b) et C.2(a) montrent des résultats très similaires. On peut toutefois remarquer que les zones d'interaction (zones rouges) semblent plus homogène dans le cas des cartes obtenues avec la méthode de Craig-Bampton (figures C.1(b) et C.2(a)). Ceci est probablement lié à la meilleure stabilité numérique des modèles réduits calculés avec la méthode de Craig-Bampton.

La comparaison des figures C.1(b) et C.2(a) permet de juger de l'importance de l'enrichissement de la base de réduction modale. Les différences observées sont mineures ce qui revient à corroborer l'hypothèse que 44 modes encastrés sont suffisants pour composer la base de réduction modale de Craig-Bampton. Les différences entre les régimes détectés sont en revanche plus visibles lorsqu'on compare les figures C.1(a) et C.2(b). La carte obtenue avec 88 modes libres



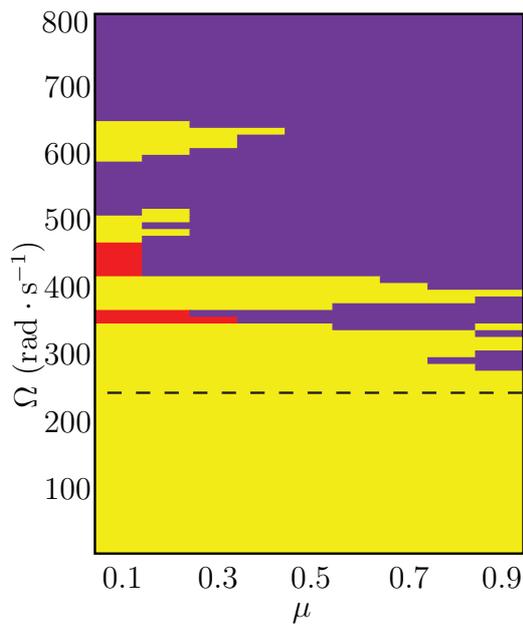
**Figure C.2** -  $n_d = 2$  : Cartes des régimes obtenus pour les méthodes Craig-Bampton et Craig-Chang-Martinez avec 88 modes conservés dans chaque base de réduction ;  $\Omega_c = 215 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$

dans la base de réduction paraît plus homogène que celle obtenue avec 44 modes. Là encore, ceci est probablement lié avec la moins grande stabilité numérique des modèles réduits par la méthode de Craig-Chang-Martinez : un plus grand nombre de modes sont nécessaires dans la base de réduction pour obtenir de bons résultats.

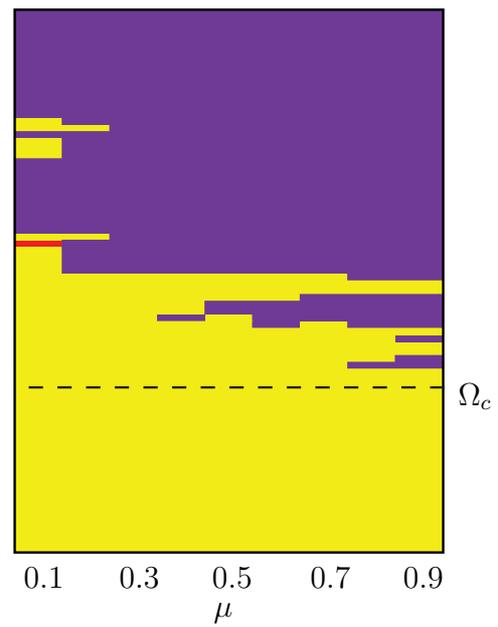
## C.2 Interaction à trois diamètres

Une étude similaire à celle présentée précédemment a également été menée pour un cas d'interaction à trois diamètres. Les deux méthodes de réduction ont été comparées en faisant varier leur base de réduction. Les cartes C.3(a) et C.3(b) montrent les résultats obtenus lorsque 44 modes encastrés ou libres, sont conservés dans la base de réduction de la méthode de Craig-Bampton ou de Craig-Chang-Martinez.

Il est remarquable que seul un nombre très faible de régimes d'interaction (régimes entretenus) ont pu être détectés. L'effort appliqué sur le carter est en fait trop élevé pour observer des régimes entretenus. Les deux méthodes de réduction donnent des résultats comparables, la zone des régimes divergents semble légèrement plus grande dans le cas de la méthode de Craig-Chang-Martinez. Enfin, les résultats obtenus avec 88 modes dans la base de réduction sont présentés sur les figures C.4(a) et C.4(b). L'enrichissement de la base de réduction est responsable de la disparition de quelques régimes entretenus détectés avec la méthode de Craig-Bampton mais les cartes restent cohérentes avec celles précédemment obtenues.

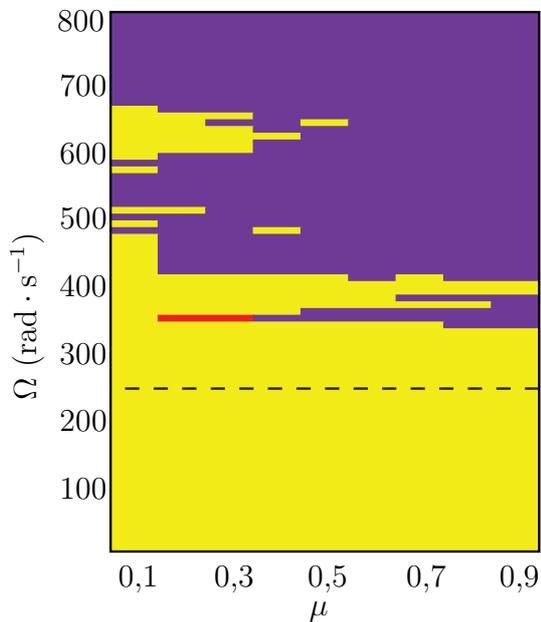


(a)  $n_d = 3$ , méthode CCM,  $\phi = 44$ , 66 modes d'attache

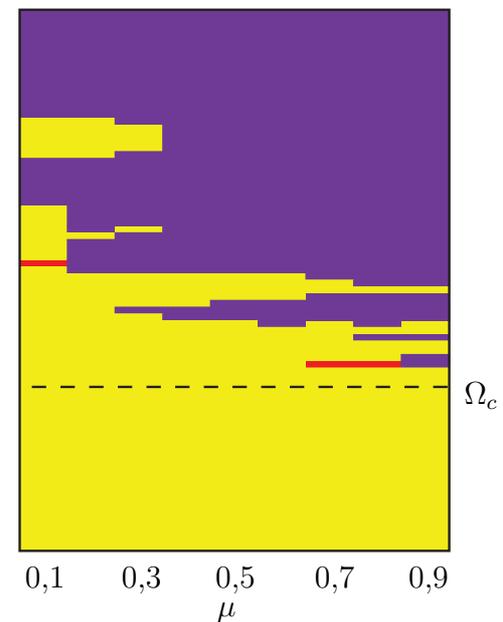


(b)  $n_d = 3$ , méthode CB,  $\eta = 44$

**Figure C.3** -  $n_d = 3$  : Cartes des régimes obtenus pour les méthodes Craig-Bampton et Craig-Chang-Martinez avec 44 modes conservés dans chaque base de réduction ;  $\Omega_c = 245 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$



(a)  $n_d = 3$ , méthode CCM,  $\phi = 88$ , 66 modes d'attache



(b)  $n_d = 3$ , méthode CB,  $\eta = 88$

**Figure C.4** -  $n_d = 3$  : Cartes des régimes obtenus pour les méthodes Craig-Bampton et Craig-Chang-Martinez avec 88 modes conservés dans chaque base de réduction ;  $\Omega_c = 245 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$

## C.3 Conclusion

Les compléments à l'étude d'interaction modale 2D présentés dans cette annexe permettent de visualiser les sensibilités de chacune des deux méthodes de réduction utilisées et de mettre en évidence la qualité des résultats obtenus avec une base modale contenant un minimum de modes ( $\eta = 44$  et  $\phi = 44$ ). Il apparaît que la méthode de Craig-Bampton est avantageuse en termes de temps de calculs, la taille des modèles réduits étant inférieure à ceux obtenus par méthode de Craig-Chang-Martinez du fait de l'absence des modes d'attache.



# D

---

## Application industrielle

Dans un souci de répondre à un besoin industriel, deux objectifs majeurs ont été fixés au début de la thèse : l'évaluation de l'utilisation d'une méthode à interfaces libres pour la simulation des interactions rotor/stator initiées par contact aube/carter et l'intégration du code d'interaction modale dans l'environnement industriel Snecma. Alors que les chapitres précédents de ce mémoire ont présenté les différents aspects théoriques associés au travail de thèse, ce chapitre récapitule succinctement le travail réalisé dans le but d'industrialiser le code d'interaction modale. Ce chapitre se décompose en trois sections : la première section est relative au travail d'intégration du code dans l'environnement Snecma, la deuxième partie présente les résultats d'une étude menée sur un modèle industriel (DAM 2008) et enfin la dernière section donne les bases des études à venir et des travaux envisagés pour enrichir le code d'interaction.

### D.1 Intégration du code dans l'environnement Snecma

L'utilisation du code d'interaction est conditionnée à l'obtention des modèles réduits des structures étudiées. Dans le cas de notre étude, ces modèles réduits ont été obtenus sous Matlab grâce à des programmes personnels ne permettant pas de réduire automatiquement et efficacement n'importe quel carter ou n'importe quelle roue aubagée. Justifiée dans le cas où l'ensemble de la chaîne de réduction doit être maîtrisée, il va de soi qu'une telle procédure n'est pas envisageable dans un contexte industriel. L'intégration du code de contact doit ainsi permettre de travailler avec n'importe quel couple roue aubagée/carter en automatisant la procédure de réduction modale. Le logiciel Samcef est utilisé pour la réduction modale. L'utilisation de ce logiciel permet également d'intégrer la prise en compte des effets centrifuges et d'envisager un post-traitement plus poussé des résultats comme, par exemple, un post-traitement en contraintes.

#### D.1.1 Présentation du chaînage

L'objectif de la procédure de chaînage du code d'interaction est de pouvoir étudier le comportement d'un couple roue aubagée/carter (dont seuls les fichiers de type « maillage » sont

accessibles) lorsqu'un contact est initié entre les deux structures. L'utilisateur du code doit être libre de pouvoir définir les paramètres suivants :

- la richesse de la base de réduction pour la roue aubagée ( $\eta_{RA}$ ),
- la richesse de la base de réduction pour le carter ( $\eta_{CA}$ ),
- les coefficients d'amortissement de chaque structure ( $\xi_{RA}$  et  $\xi_{CA}$ ),
- la vitesse de rotation de la roue aubagée ( $\Omega_{RA}$ ),
- la durée de la simulation ( $t_s$ ),
- la résolution des résultats obtenus,
- le coefficient de frottement ( $\mu$ ),
- le nombre de diamètres du chargement imposé sur le carter,
- la pénétration équivalente (cf. chapitre 4) associée au chargement sur la carter,
- la prise en compte (ou non) des effets centrifuges,
- le temps d'application du chargement ( $t_c$ ).

L'organigramme représenté sur la figure D.1 présente l'ensemble du chaînage réalisé en amont du code d'interaction. La procédure de réduction ainsi que la prise en compte des effets centrifuges sont réalisées avec le logiciel Samcef, le lien entre chaque étape est réalisé à l'aide de routines Matlab auto compilées. La méthode de réduction modale utilisée lors de la procédure de réduction sous Samcef est la méthode de Craig-Bampton, en cohérence avec les conclusions de l'étude menée sur le choix de la méthode de réduction modale la plus adaptée menée dans le chapitre 4.

## D.1.2 Précisions sur la démarche adoptée

### D.1.2.1 Cohérence des nœuds frontières

L'étape 2 de la procédure détaillée sur la figure D.1 mentionne la « cohérence » de la numérotation des nœuds frontières. Il s'agit là simplement d'une convention adoptée qui consiste à organiser la numérotation des nœuds frontières en accord avec leur position sur l'axe moteur  $\vec{z}$ . Cette condition est explicitée sur la figure D.2. Si cette cohérence des nœuds frontières n'est pas vérifiée (ce qui est fréquent puisque la numérotation automatique des nœuds dépend du logiciel de CAO utilisé et n'est pas normée) un script les renumérote automatiquement.

### D.1.2.2 Post-traitement

Le post-traitement a été programmé pour répondre aux attentes de Snecma. La fonction permet, à partir des fichiers résultats, d'obtenir l'évolution au cours du temps des :

1. efforts de contact ;
2. déplacements des nœuds frontières ;
3. distances aubes/carter ;
4. courbes d'influence des différents diamètres nodaux.

## D.2 Application : calcul sur un modèle industriel

Le modèle étudié est un couple roue aubagée/carter de type DAM (56 aubes également) dont les spécifications sont proches de celles des modèles précédemment étudiés. L'objectif est ici de valider l'automatisation de la procédure et de vérifier la qualité des résultats obtenus. Les jeux observés entre chaque nœud frontière et le carter (à  $t = 0$  s sur la figure D.3) prennent en compte les effets centrifuge sur la roue aubagée. La prise en compte de ces effets centrifuge est faite grâce au module ASEF de Samcef : c'est un module de calcul du chargement centrifuge linéaire. Les figures D.3 et D.4 montrent deux résultats types obtenus en sortie du module de post-traitement : l'évolution des distances aubes/carter et l'évolution de l'influence des différents diamètres nodaux au cours du temps. Ce chapitre n'a pas pour but d'analyser qualitativement les résultats obtenus pour cette étude, nous nous contentons de donner un exemple des résultats obtenus dans le cadre d'une simulation de contact roue aubagée/carter sur un modèle industriel.

## D.3 Perspectives, travaux envisagés

L'implémentation du code d'interaction dans un environnement industriel marque le début de l'application des différents travaux menés entre l'École Centrale de Nantes et Snecma [Thèse Arnoult, Legrand, Batailly]. Il s'agit cependant encore d'un outil prototype dont les premières évolutions devraient être l'intégration d'une loi d'usure et la généralisation des cas de charge. À très court terme, le code d'interaction sera utilisé afin de pouvoir optimiser le profil d'aubes en fonction du niveau de vibration.

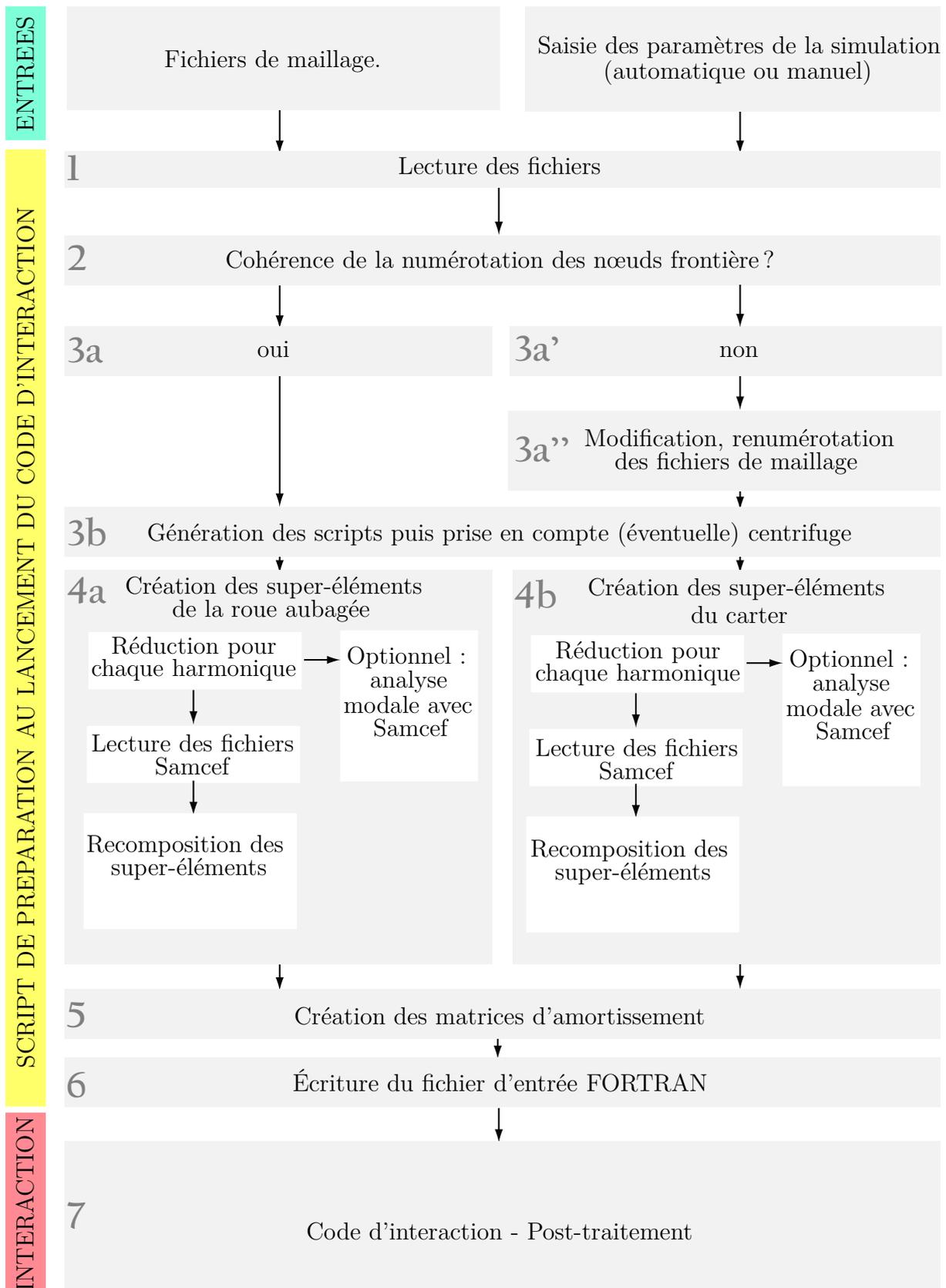
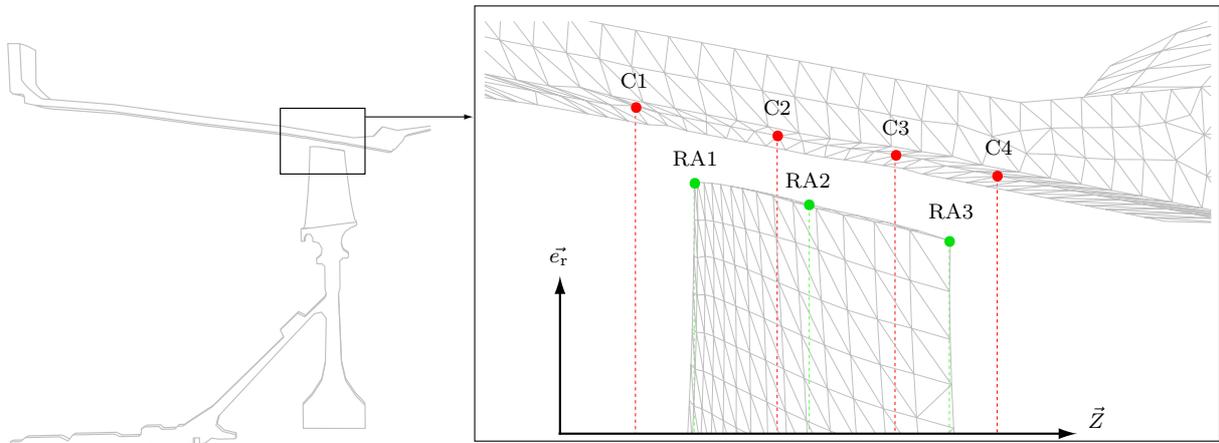


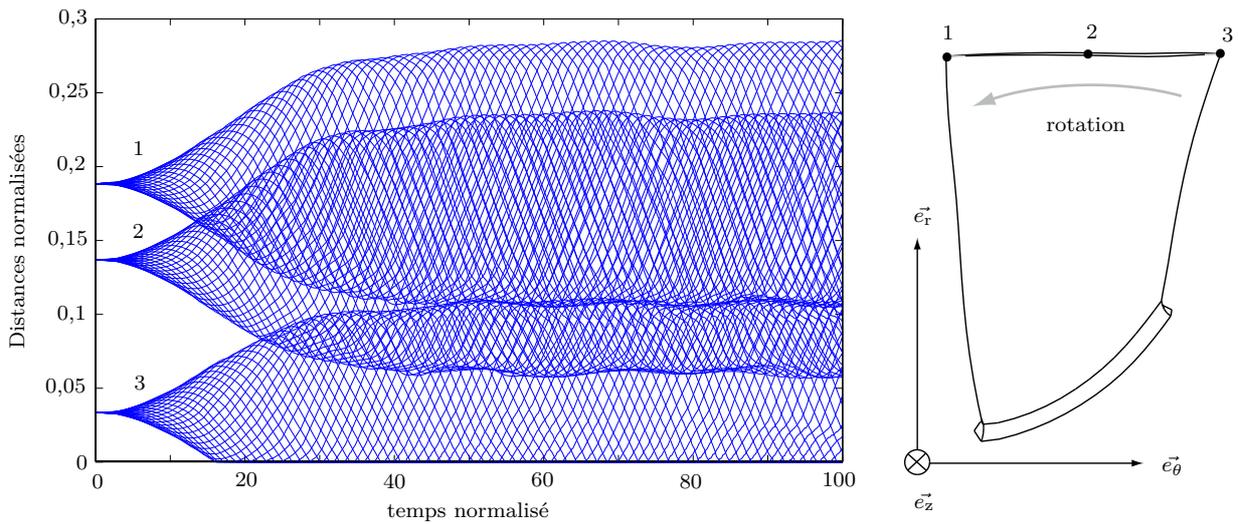
Figure D.1 - Description des étapes du code d'interaction.



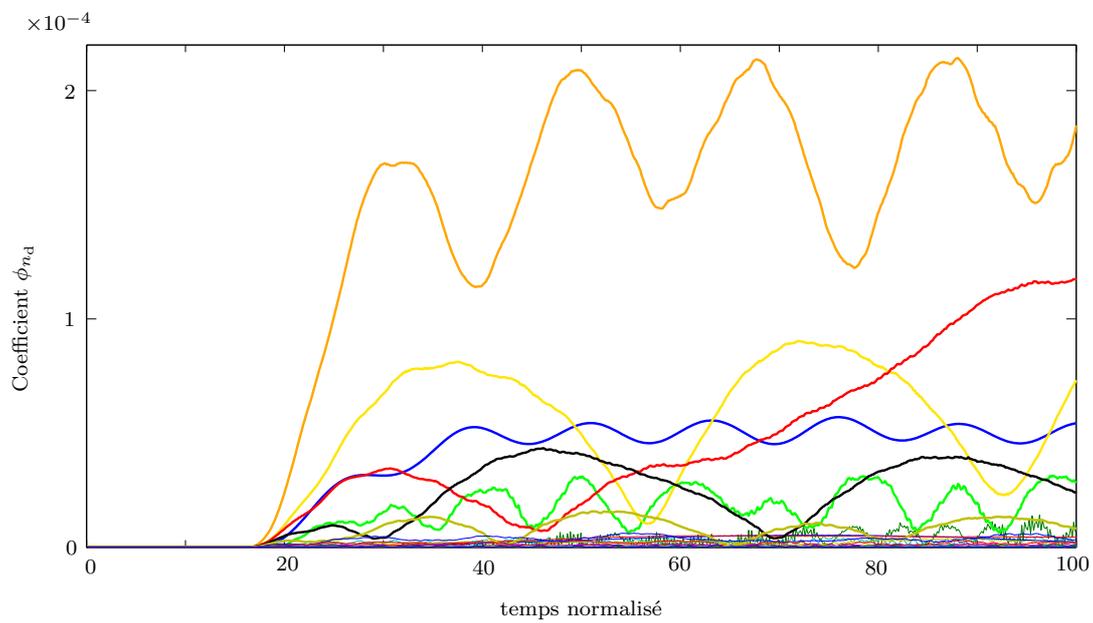
Cohérence  $\Leftrightarrow z_{C1} < z_{C2} < z_{C3} < z_{C4}$  et  $C1 < C2 < C3 < C4$

$z_{RA1} < z_{RA2} < z_{RA3}$  et  $RA1 < RA2 < RA3$

**Figure D.2** - Représentation de la notion de cohérence des nœuds frontières (" $C_i$ " et " $RA_i$ " représentent les numéros des nœuds).



**Figure D.3** - Evolution des distances aubes/carter (—) au niveau des trois nœuds frontières 1, 2 et 3 en fonction du temps.



**Figure D.4** - Evolution de l'influence des différents diamètres nodaux au cours du temps :  $n_d = 0$  (—);  $n_d = 1$  (—);  $n_d = 2$  (—);  $n_d = 3$  (—);  $n_d = 4$  (—);  $n_d = 5$  (—);  $n_d = 6$  (—).

# Références

- [1] Space shuttle payload design and development, structural/mechanical interfaces and requirements. *Rev. C., NSTS 20052*, 8:NASA–Lyndon B. Johnson Space Center. 10
- [2] P. APIWATTANALUNGGARN : *Model reduction of nonlinear structural systems using nonlinear normal modes and component mode synthesis*. Thèse de doctorat, University of Michigan. 56
- [3] P. APIWATTANALUNGGARN, S. SHAW et C. PIERRE : Component mode synthesis using nonlinear normal modes. *Proceedings of DETC'03, DETC2003/VIB-48441*, 2003. [http://www.egr.msu.edu/dvrl/presentations/Apiwat-etal\\_pIL03.pdf](http://www.egr.msu.edu/dvrl/presentations/Apiwat-etal_pIL03.pdf). 56
- [4] P. APIWATTANALUNGGARN, S. W. SHAW, C. PIERRE et D. JIANG : Finite-element based nonlinear modal reduction of a rotating beam with large-amplitude motion. *Journal of Sound and Vibration*, (9):235–263, 2003. <http://dx.doi.org/10.1177/107754603030751>. 56
- [5] E. ARNOULT : *Modélisation numérique et approche expérimentale du contact en dynamique : application au contact aubes/carter de turboréacteur*. Thèse de doctorat, Université de Nantes, 2000. 6
- [6] R. L. BAJAN, Feng C. C. et I. J. JASZLICS : Vibration analysis of complex structural systems by modal substitution. *Proc, 39<sup>th</sup> Shock and Vibration Symposium, Monterey, CA, Oct. 1968*. 13
- [7] E. BALMÈS : Parametric families of reduced finite element models. theory and applications. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 10(4):381–394, 1995. <http://www.sdtools.com/Publications.html>. 30
- [8] E. BALMÈS : Use of generalized interface degrees of freedom in component mode synthesis. *ONERA, Structures Direction*, 1999. <http://www.sdtools.com/pdf/IMAC96int.pdf>. 34
- [9] A. BATAILLY, M. LEGRAND, P. CARTRAUD, C. PIERRE et J. P. LOMBARD : Study of component mode synthesis methods in a rotor-stator interaction case. Las Vegas, Nevada. *Proceedings of the ASME 2007 International Design Engineering Technical Conferences & Computers and Information in Engineering Conference : IDETC07*, September 2007, Las Vegas, Nevada. 31
- [10] W. A. BENFIELD, C. S. BODLEY et G. MOROSOW : Modal synthesis methods. *Space shuttle dynamics and aeroelasticity working group symposium on substructure testing and synthesis*, 1972. 10, 13

- [11] W. A. BENFIELD et R. F. HRUDA : Vibration analysis of structures by component mode substitution. *AIAA Journal*, 9(7):1255–1261, July 1971. <http://www.aiaa.org/content.cfm?pageid=406&gTable=japaperimportPre97&gID=49936>. 10, 13
- [12] M. BERTHILLIER et J. P. MASCARELL : Vibration des roues aubagées : étude de l'interaction rotor-stator, rapport interne snecma ylec n dr/152/91. 1991. 7
- [13] J. R. BLADH : *Efficient predictions of the vibratory response of mistuned bladed disks by reduced order modeling*. Thèse de doctorat. 136, 137
- [14] A. BOBILLOT : *Méthodes de réduction pour le recalage. Application au cas d'Ariane 5*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Paris, France, 2002. 20, 21
- [15] K. BRAHMI : *Double condensation en sous-structuration dynamique*. Thèse de doctorat, Thèse de doctorat en sciences pour l'ingénieur, Université de Franche-Comté, 1996. <http://cat.inist.fr/?aModele=afficheN&cpsidt=6302515>. 17
- [16] N. CARPENTER, R. TAYLOR et M. KATONA : Lagrange constraints for transient finite element surface contact. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 32:103–128, 1991. <http://dx.doi.org/10.1002/nme.1620320107>. 38, 42
- [17] D. CHARLEUX : *Etude des effets de la friction en pied d'aube sur la dynamique des roues aubagées*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon, 2006. 57
- [18] A. CHATTERJEE : An introduction to the proper orthogonal decomposition. *Current Science*, 1999. <http://www.ias.ac.in/currsci/apr102000/tutorial2.pdf>. 10, 19
- [19] R. R. J. CRAIG et M. C. C. BAMPTON : Coupling of structures for dynamic analyses. *AIAA Journal*, 6(7):1313–1319, 1968. 10, 12, 13, 55, 104
- [20] R. R. J. CRAIG et C. J. CHANG : A review of substructure coupling methods for dynamic analysis. *13<sup>th</sup> Annual Meeting, Soc. For Eng. Sci., Advances in Engineering Science, 2, NASA CP-2001*, pages 393–408, 1976. 15, 55
- [21] R. R. J. CRAIG et C. J. CHANG : On the use of attachment modes in substructure coupling for dynamic analysis. *presented at AIAA/ASME 18<sup>th</sup> Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, San Diego, CA*, pages 89–99, 1977. <http://www.aiaa.org/content.cfm?pageid=406&gTable=mtgpaper&gID=53357>. 12, 18
- [22] R. R. J. CRAIG et A. L. HALE : Block-krylov component mode synthesis method for structural model reduction. *AIAA J. Guidance, Control, and Dynamics*, 11(6):562–570, 1988. <http://www.aiaa.org/content.cfm?pageid=406&gTable=japaperimportPre97&gID=20353>. 10
- [23] A. CZEKANSKI et S. A. MEGUID : Analysis of dynamic frictional contact problems using variational inequalities. *Finite Elements in Analysis and Design*, 37:861–879, 2001. [http://dx.doi.org/10.1016/S0168-874X\(01\)00072-5](http://dx.doi.org/10.1016/S0168-874X(01)00072-5). 42

- [24] G. de SAXCÉ et Z. Q. FENG : The bi-potential method : a constructive approach to design the complete contact law with friction and improved numerical algorithms. *Mathematical and Computer Modeling*, 28(4-8):225–245, 1998. [http://dx.doi.org/10.1016/S0895-7177\(98\)00119-8](http://dx.doi.org/10.1016/S0895-7177(98)00119-8). 42
- [25] J. P. DIAS et M. S. PEREIRA : Dynamics of flexible mechanical systems with contact-impact and plastic deformations. *Nonlinear Dynamics*, 8:491–512, 1995. <http://dx.doi.org/10.1007/BF00045710>. 56
- [26] S. DIEKER : An approach for the 3d dynamic mathematical modelization of big structures with special respect to ariane 5. *Acta Astronautica*, 34:139–149. <http://adsabs.harvard.edu/abs/1993graz.iafcV...D>. 15
- [27] J. L. ESCALONA, J. MAYO et J. DOMÍNGUEZ : A new numerical method for the dynamic analysis of impact loads in flexible beams. *Mechanism and Machine Theory*, 34:765–780, 1999. [http://dx.doi.org/10.1016/S0094-114X\(98\)00054-8](http://dx.doi.org/10.1016/S0094-114X(98)00054-8). 56, 57
- [28] D. J. EWINS : Modal testing : theory, practice and application. *Research Studies Press*, 2<sup>nd</sup> edition, 2000. ISBN 0-86380-218-4. 20
- [29] Z. Q. FENG, B. MAGNAIN et J. M. CROS : Solution of large deformation impact problems with friction between blatz-ko hyperelastics bodies. *International Journal of Engineering Science*, 44(1-2):113–126, 2006. [http://dx.doi.org/10.1016/S0020-7225\(03\)00216-7](http://dx.doi.org/10.1016/S0020-7225(03)00216-7). 42
- [30] R. N. FOSTER : A reactance theorem. *Bell Syst. Tech. J.*, 3(259), 1924. 10
- [31] D. A. GLASGOW et H. D. NELSON : Stability, analysis of rotor-bearings systems using component mode synthesis. *Journal of Mechanical Design*, 102(2):352–359, 1980. 55
- [32] R. L. GOLDMAN : Vibration analysis by dynamic partitioning. *AIAA Journal*, 7(6):152–1154, 1969. 10
- [33] W. GOLDSMITH : Impact : the theory and physical behaviour of colliding solids. *London : E. Arnold Ltd*, 1960. ISBN 0486420043, 9780486420042. 57
- [34] A. GUÉGAN : Parameter study of the bladed disk/casing interaction through direct contact in aero-engine assemblies. Mémoire de D.E.A., Ecole Centrale de Nantes, 2008. 34
- [35] I. GUILLOTEAU : *Modélisation du contact en dynamique : construction d'un élément simplifié de contact et application à l'interaction rotor/stator*. Thèse de doctorat, Université de Nantes, 1999. 6
- [36] R. HENRY et G. FERRARIS : Substructuring and wave propagation : an efficient technique for impeller dynamic analysis. *Journal for Engineering for Gas Turbines and Power*, 1984. <http://cat.inist.fr/?aModele=afficheN&cpsidt=9530179>. 135
- [37] D. N. HERTING : A general purpose, mulit-stage, component-mode synthesis method. *presented at AIAA/ASME 20<sup>th</sup> Structure Dynamics Conference*, 1979. 10
- [38] H. HERTZ : Schriften vermischten inhalts. *Gesammelte Werke*, 1, 1895. 57

- [39] R. M. HINTZ : Analytical methods in component modal synthesis. *AIAA Journal*, 13(8):1007–1016, 1975. 10
- [40] S. HOU : Review of modal synthesis techniques and a new approach. *The Shock and Vibration Bulletin*, (40):25–39, 1969. 10
- [41] N. HU : A solution method for dynamic contact problems. *Computers & Structures*, 63(6):1053–1063, 1997. [http://dx.doi.org/10.1016/S0045-7949\(96\)00408-7](http://dx.doi.org/10.1016/S0045-7949(96)00408-7). 42
- [42] W. C. HURTY : Vibrations of structural systems by component mode synthesis. *Proc. American Society of Civil Engineers, J. Eng. Mech. Div.*, 3(4):138–147, 1960. 10
- [43] W. C. HURTY : Dynamic analysis of structural systems using component modes. *AIAA Journal*, 3(4):678–685, 1965. 10, 13, 55
- [44] D. JIANG, C. PIERRE et S. W. SHAW : Nonlinear normal modes for vibratory systems under harmonic excitation. *Journal of Sound and Vibration*, 288:791–812, 2005. <http://dx.doi.org/10.1016/j.jsv.2005.01.009>. 56
- [45] S. KAWAMURA, T. NAITO, H. M. ZAHID et H. MINAMOTO : Analysis of nonlinear steady state vibration of a multi-degree-of-freedom system using component mode synthesis method. *Applied Acoustics*, 69:624–633, 2008. 55
- [46] K. KUNISCH et S. VOLKWEIN : Galerkin proper orthogonal decomposition methods for a general equation in fluid dynamics. *SIAM J. NUMER. ANAL.*, 40(2):492–515, 2002. <http://dx.doi.org/10.1137/S0036142900382612>. 10
- [47] T. LAURSEN : *Computational contact and impact mechanics*. 2002. 38
- [48] M. LEGRAND : *Modèles de prédiction de l'interaction rotor/stator dans un moteur d'avion*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Nantes, Nantes, FRANCE, 2005. <http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00011631/fr/>. 6, 7, 38, 41, 42, 69, 70, 75, 93, 98
- [49] M. LEGRAND : Rapport de recherche, post-doc de mathias legrand. Rapport technique, 2007. 40
- [50] M. LEGRAND, A. BATAILLY et C. PIERRE : Full 3d strategies for bladed disk-casing contact interaction in turbomachinery. *Colloque vibrations chocs et bruit*, 2008. 38, 40
- [51] M. LEGRAND, C. PIERRE, P. CARTRAUD et J. P. LOMBARD : Two-dimensional modeling of an aircraft engine structural bladed disk-casing modal interaction. *Journal of Sound and Vibration*, 319(1-2):366–391, January 2009. <http://dx.doi.org/10.1016/j.jsv.2008.06.019>, aussi disponible sur HAL. 8, 37, 42, 69, 70, 75, 76, 77, 87, 89, 92, 96, 132
- [52] W. Z. LIN, K. H. LEE, S. P. LIM et Y. C. LIANG : Proper orthogonal decomposition and component mode synthesis in macromodel generation for the dynamic simulation of a complex mems device. *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 13:646–654, 2003. <http://dx.doi.org/10.1088/0960-1317/13/5/316>. 55
- [53] J. P. LOMBARD : *Contribution à la réduction des modèles éléments finis par synthèse modale*. Thèse de doctorat, U.F.R des sciences et techniques de l'université de Franche-Comté, France, 1999. <http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00351693/fr/>. 10

- [54] R. H. MACNEAL : A hybrid method of component mode synthesis. *Journal of Computers and Structures*, 1(4):581–601, 1971. 10, 12, 15
- [55] B. MAGNAIN : *Développement d'algorithmes et d'un code de calcul pour l'étude des problèmes de l'impact et du choc*. Thèse de doctorat, Université d'Évry-Val d'Essonne, 2006. 8, 42, 149
- [56] D. R. MARTINEZ, T. G. CARNE, D. L. GREGORY et A. K. MILLER : Combined experimental/analytical modeling using component mode synthesis. *Computers & Structures*, 78:583–590, 1984. 10, 15
- [57] W. MATHIS et R. PAULI : Network theorems. *Standard online article, John Wiley & Sons*, 1999. <http://dx.doi.org/10.1002/047134608X.W2507>. 10
- [58] J. A. MORGAN, C. PIERRE et G. M. HULBERT : Calculation of component mode synthesis matrices from measured frequency response functions, part 1 : theory. *ASME J. Vibration and Acoustics*, 120:503–508, 1998. <http://dx.doi.org/10.1115/1.2893858>. 13
- [59] J. A. MORGAN, C. PIERRE et G. M. HULBERT : Calculation of component mode synthesis matrices from measured frequency response functions, part 2 : application. *ASME J. Vibration and Acoustics*, 120:509–516, 1998. <http://dx.doi.org/10.1115/1.2893859>. 13
- [60] S. NACIVET : *Modélisation du frottement en pied d'aube par une approche fréquentielle*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon, 2002. 57
- [61] H. D. NELSON et W. L. MEACHAM : Transient analysis of rotor bearing systems using component mode synthesis. ASME Paper 81-GT-110. 55
- [62] H. D. NELSON, W. L. MEACHAM, D. P. FLEMING et A. F. KASCAK : Nonlinear analysis of rotor-bearing systems using component mode synthesis. *Journal of Engineering for Power*, 105:606–614, 1983. 55
- [63] V. OMPRAKASH : A cyclic symmetry approach to the structural dynamic analysis of bladed disks. *Communications in applied numerical methods*, 8:81–91, 1992. <http://dx.doi.org/10.1002/cnm.1630080203>. 136
- [64] O. POUDOU : *Modeling and analysis of the dynamics of dry-friction-damped structural systems*. Thèse de doctorat, University of Michigan, 2007. 57
- [65] Henry R. : Calcul des fréquences et modes des structures répétitives circulaires. *Journal de mécanique appliquée*, 4:61–82. 135
- [66] P. RAVEENDRANATH, G. SINGH et B. PRADHAN : Free vibration of arches using beam element based on a coupled polynomial displacement field. *Journal of Computational and applied mathematics*, 168:383–391, 2000. 72
- [67] D. J. RIXEN : A dual craig-bampton method for dynamic substructuring. *Journal of Computational and applied mathematics*, 168:383–391, 2004. <http://dx.doi.org/10.1016/j.cam.2003.12.014>. 12

- [68] S. RUBIN : Dynamic analysis of structural systems using component modes. *AIAA paper No. 74-386, AIAA 15<sup>th</sup> Structures, St. Dynamics, and Materials Conference, Las Vegas, Nevada, 1974.* 10, 15
- [69] R. SAMPAIO et C. SOIZE : Remarks on the efficiency of pod for model reduction in non-linear dynamics of continuous elastic systems. *International Journal For Numerical Methods in Engineering*, 72:22–45, 2007. <http://dx.doi.org/10.1002/nme.1991>. 10
- [70] P. SCHMIECHEN : *Travelling wave speed coincidence*. Thèse de doctorat, College of Science, Technology and Medicine, London, UK, 1997. ISBN-13 : 978-3183260119. 69
- [71] D. M. TRAN : Component mode synthesis methods using interface modes. application to structures with cyclic symmetry. *Computers & Structures*, 79:209–222, 2000. <http://cat.inist.fr/?aModele=afficheN&cpsidt=59363>. 55
- [72] R. VAIDYANATHAN, S. SANTHANAM et V. RAMAMURTI : Static and dynamic analysis of an aerofoil bladed disc using the concept of cyclic symmetry. *Communications in numerical methods in engineering*, 19 :313-324, 2003. <http://dx.doi.org/10.1002/cnm.571>. 136
- [73] E. L. B. Van de VORST, M. F. HEERTJES, D. H. VAN CAMPEN et A. DE KRAKER : Experimental and numerical analysis of the steady state behaviour of a beam system with impact. *Journal of Sound and Vibration*, 212:321–336, 1998. <http://dx.doi.org/10.1006/jsvi.1997.1447>. 57
- [74] G. VERROS et S. NATSIAVAS : Ride dynamics of nonlinear vehicle models using component mode synthesis. *Journal of Vibration and Acoustics*, 124:427–434, 2002. <http://dx.doi.org/10.1115/1.1473828>. 55
- [75] C. WOLTER, M. A. TRINADE et R. SAMPAIO : Reduced-order model for an impacting beam using the karhunen-loève expansion. *Tendências em Matemática Aplicada e Computacional*, 3(2):217–226, 2002. [http://www.sbmac.org.br/tema/seletas/docs/v3\\_2/0Wolter.pdf](http://www.sbmac.org.br/tema/seletas/docs/v3_2/0Wolter.pdf). 10
- [76] S. C. WU et E. J. HAUG : A substructure technique for dynamics of flexible mechanical systems with contact-impact. *Journal of Mechanical Design*, 112:390–398, 1990. <http://dx.doi.org/10.1115/1.2912620>. 56
- [77] J. YANG, Z. LIU et S. CHEN : Application of component mode synthesis to vibration analysis of disk spindle assembly with hydrodynamic bearings. 2000. <http://ieeexplore.ieee.org/ielx5/7223/19470/00898940.pdf?arnumber=898940>. 55