HAL
open science

Equations de diffusion paramétrée par la portée des interactions à longue distance.

Armel Andami Ovono

To cite this version:

Armel Andami Ovono. Equations de diffusion paramétrée par la portée des interactions à longue distance.. Mathématiques [math]. Université de Poitiers, 2009. Français. NNT : . tel-00365445v2

HAL Id: tel-00365445

https://theses.hal.science/tel-00365445v2

Submitted on 4 Mar 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR de l'Université de Poitiers

(Faculté des Sciences Fondamentales et Appliquées)

(Diplôme national- arrêté du 25 avril 2002)

Ecole Doctorale **Sciences Pour l'Ingénieur & Aéronautique SPI&A**

Secteur de Recherche : **Mathématiques et leurs interactions**

Présentée et soutenue publiquement
par:

Armel Andami Ovono

Equations de diffusion paramétrée par la portée des interactions à longue distance

---

Directeur de thèse: **Arnaud Rougirel**

Soutenue le 24 Février 2009
Devant la commission d'examen

Jury

Vitaly Volpert	Directeur de Recherches, Institut Camille Jordan, Lyon 1	Rapporteur
Bernard Brighi	Professeur, Université de Mulhouse	Rapporteur
Emmanuel Chasseigne	Maître de Conférences, Université François Rabelais de Tours	Examinateur
Hassan Emamirad	Professeur, Université de Poitiers	Examinateur
Alain Miranville	Professeur, Université de Poitiers	Examinateur
Arnaud Rougirel	Maître de conférences(HDR) , Université de Poitiers	Examinateur

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier Arnaud Rougirel pour avoir accepté de diriger cette thèse avec tant de patience et de rigueur, les rendez-vous de mardi après midi resteront des moments particuliers de ma vie.

Alain Miranville m'a apporté une aide précieuse tant sur le plan scientifique que moral. Je lui serai toujours reconnaissant de m'avoir permis de rencontrer Giulio Schimperna, Olivier Goubet, Grzegorz Karch et bien d'autres...Grâce à toi j'ai pu effectuer ma thèse dans de bonnes conditions.

Je tiens à exprimer toute ma gratitude à Michel Chipot pour nos nombreuses discussions lors de son passage à l'Université de Poitiers.

Je remercie Pierre Torasso pour son accueil en master à l'Université de Poitiers et pour ses nombreux conseils. Je remercie également Pol Vanhaecke pour ses encouragements et son grand sens de l'écoute.

Je suis très reconnaissant envers Vitaly Volpert et Bernard Brighi pour l'intérêt qu'ils ont porté à mes travaux et d'avoir accepté d'en être rapporteurs. Je tiens à exprimer toute ma gratitude à Emmanuel Chasseigne et Hassan Emamirad pour avoir accepté de faire partie de ce jury.

Je réserve une place spéciale à Brigitte Brault, Jocelyne Attab, Nathalie Marlet, Nathalie Mongin et Benoît Metrot pour la disponibilité et la gentillesse dont ils ont fait preuve durant toutes ces années.

Je remercie également Abderrazak Bouaziz, Patrice Tauvel, Morgan Pierre, Anne Bertrand, Marc Arnaudon, Marc Van Leeuwen, Madalina Petcu, Clément Dombry, Frédéric Bosio et tous les autres membres du laboratoire pour l'ambiance très agréable qui règne à la cafétaria et au Laboratoire de Mathématiques. Ah Bosio !! Tes fous rires, tes blagues et surtout tes talents pour la chanson me manqueront beaucoup...

Je pense également à François, Bernadette et Abderrahim avec lesquels j'ai partagé mon bureau pendant 3 ans.

Je n'oublie pas la famille des doctorants. Les anciens Greg, Mohamed, Idriss, Marie Eve, Patrice, Ariane, Anne, Céline, Patience, Kohélé, Sami, Guilhem et Paul. Les nouveaux Gang, Le, Willy, Toufic, Anouar, Batoul, Wesam, Houssam, Khaoula, Caro et Hélène. Merci pour tous les bons moments passés ensemble.

Enfin je ne saurai terminer ce difficile exercice sans penser à ma famille, mes amis et tous ceux qui de près ou de loin se reconnaîtront dans ce travail.

Grace cette thèse est aussi la tienne.

A la mémoire de Delphine Avomo Ovono,
Le révérend pasteur Andami Ossima Jonas,
et de Christiane Andeme Ebang.

Table des matières

Table des matières i

1 Introduction **1**
1 Modélisation et position du problème 1
2 Présentation des résultats 5
3 Plan de la thèse 5

2 Quelques rappels **7**

3 Problème stationnaire associé **13**
1 Quelques résultats d'existence et unicité 13
2 Continuité de la solution u_r 18
3 Cas où 'a' est croissante et $r = diam(\Omega)$ 24
4 Quelques propriétés locales des solutions stationnaires 25
4.1 Critère général d'inversibilité 26
4.2 Quelques applications 28
4.3 Le cas $r = diam(\Omega)$ 32
4.4 Application au cas 'a' croissant 36
5 Un petit résultat de parité 37

4 Phase transitoire des solutions stationnaires **39**
1 Convergence de la solution w_r 39
2 Principe de comparaison 42
2.1 Le cas $n = 1$ 42
2.2 Généralisation pour les solutions radiales 44

5 Résultats numériques du problème stationnaire **63**
1 Caractérisation de $L_r(x)$ 65
2 Convergence de l'algorithme de Newton 66
3 Le cas où a est croissant 69
4 Exemple de a ayant la forme d'une gaussienne 71
4.1 Premier cas : $l(\phi)$ "petit" 71
4.2 Deuxième cas : $l(\phi)$ "grand" 72

6 Etude du problème parabolique **79**
1 Résultats d'existence et d'unicité 79
2 Existence d'un attracteur global 84
2.1 Existence d'un borné absorbant dans $L^2(\Omega)$ 84
2.2 Estimation uniforme en temps 86

2.3 Estimation L^∞ de la solution 90

Bibliographie **95**

Chapitre 1

Introduction

1 Modélisation et position du problème

Un grand nombre de problèmes en biologie et en physique conduisent à des équations de diffusion non linéaires et non locales voir M.Chipot [eMC03], [Chi00], S.A Gourley [eSA05], [Gou00] et aussi dans [ePA06] et bien d'autres...
Nous commençons par donner ici une motivation principale à l'introduction de problèmes non locaux trouvant tout son sens dans les phénomènes de diffusion en dynamique de populations. Nous considérons des bactéries confinées dans un domaine Ω. Trois situations peuvent se produire. La première est la naissance de bactéries, la deuxième est la mort de bactéries et enfin la troisième est le déplacement de bactéries dans Ω. C'est précisemment ce déplacement de bactéries connu sous le nom de diffusion qui va nous intéresser. Soit l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \gamma \Delta u = f \tag{1.1}$$

modélisant la diffusion de nos bactéries dans le domaine Ω, où $u(t,x)$ est la densité de bactéries au point x à l'instant t, γ le coefficient de diffusion de ces bactéries et f la densité des naissances de ces bactéries. On remarquera qu'ici f et γ peuvent dépendre de x,t et de u rendant donc les termes f et γ locaux. Nous nous plaçons dans la situation où le coefficient de diffusion γ dépend uniquement de x,t et u et f dépend uniquement de x et de t c'est-à-dire que $\gamma = \gamma(t,x,u)$ et $f = f(t,x)$. La principale difficulté expérimentale dans ce type de problème est la mesure de la densité ponctuelle u des bactéries de masse ponctuelle. Pour pallier ce problème une des solutions a été de mesurer notre densité u dans un voisinage de x ce qui est a priori plus aisé de manière pratique et donc de substituer dans notre équation u par $\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} u$, où $B(x,r)$ désigne la boule de centre x et de rayon r. L'équation (1.1) devient alors dans Ω trouver u_r solution de

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} - \gamma\left(t, x, \frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} u_r\right)\Delta u_r(t,x) = f(t,x) \tag{1.2}$$

lorsque $r \to 0$. D'autres types d'approches permettent de construire des problèmes non locaux, voir [Lov95]. Le modèle que nous allons étudier généralise une classe

de problèmes non locaux pouvant s'écrire sous la forme générale

$$\begin{cases} u_t - a(\int_\Omega u)\Delta u = f & \text{dans} \quad \mathbb{R}^+ \times \Omega \\ u(t,x) = 0 & \text{sur} \quad \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega \\ u(0,.) = u_0 & \text{dans} \quad \Omega \end{cases} \tag{1.3}$$

où $\partial\Omega$ définit le bord de Ω. Les fonctions f et u_0 sont telles que $f, u_0 \in L^2(\Omega)$. Ce type d'équations a été l'objet de très nombreuses récentes études voir [eBL01], [eBL99], [eLM01], [eM03], [Sie06], [eMC04], [eMC03], [eAR] et [eJF92]. Plus précisemment il est présenté des résultats d'existence, d'unicité, de solutions stationnaires et de comportement asymptotique de solutions. Pour notre étude nous nous intéresserons à l'équation

$$\begin{cases} u_t - div(a(l_r(u(t)))\nabla u) = f & \text{dans} \quad \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ u(x,t) = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega \times \mathbb{R}^+ \\ u(.,0) = u_0 & \text{dans} \quad \Omega \end{cases} \tag{1.4}$$

avec

$$l_r(u(t)) = \int_{B(x,r)\cap\Omega} g(y)u(y,t)dy. \tag{1.5}$$

$B(x,r)$ désignant la boule de centre x et de rayon r et g une fonction définie telle que $g \in L^2(\Omega)$. La fonction g joue donc un rôle crucial de "poids" dans (1.5). Lorsque $g \equiv 1$ est un cas typique de la diffusion dans les problèmes en dynamique de populations. En effet en considérant $B(x,r) \cap \Omega$ un sous domaine de Ω et $g \equiv 1$ l'équation (1.4) peut décrire l'évolution de la densité d'une population $u(x,t)$ soumis à une vitesse de diffusion proportionnelle à $a(l_r(u))$. f représente la densité de naissances de la population et $l_r(u)$ la population totale du sous domaine $B(x,r) \cap \Omega$ de Ω. De manière plus générale lorsque g n'est pas égal à 1, ce type de modèle a de nombreuses applications en théorie de l'élasticité et dans les modèles de diffusion de la chaleur. Pour plus de précision voir [Chi00], [Cia86] .

D'un point de vue mathématique l'équation (1.4) présente un intérêt particulier notamment dans la recherche des solutions stationnaires lorsque le paramètre r varie. En effet le problème stationnaire associé sous la forme faible à (1.4) s'écrit

$$(P_r) \begin{cases} -div(a(l_r(u))\nabla u) = f & \text{dans} \quad \Omega \\ u \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \tag{1.6}$$

Lorsque $r = 0$ le problème

$$(P_0) \begin{cases} -a(0)\Delta u = f & \text{dans} \quad \Omega \\ u \in H_0^1(\Omega), \end{cases}$$

est linéaire et admet une unique solution par simple application du théorème de Lax Milgram. En revanche lorsque $r = d$ où d représente le diamètre de Ω, M.Chipot et B.Lovat ont montré dans [eBL01] que le nombre de solutions du problème

$$(P_d) \begin{cases} -a(l(u))\Delta u = f & \text{dans} \quad \Omega \\ u \in H_0^1(\Omega), \end{cases}$$

avec

$$l(u) = \int_\Omega g(y)u(y)dy$$

est le même que celui donné par le problème dans $\mathbb{R}$

$$a(\mu)\mu = l(\phi), \tag{1.7}$$

avec $l(\phi) = \int_\Omega g(y)\phi(y)dy$ et $\mu = \int_\Omega g(y)u(y)dy$. Ici, ϕ désigne la solution faible du problème

$$\begin{cases} -\Delta\phi = f & \text{dans} \quad \Omega \\ \phi \in H_0^1(\Omega), \end{cases}$$

et a une application de $\mathbb{R}$ dans $(0, +\infty)$. Si l'on suppose par exemple que $l(\phi) > 0$

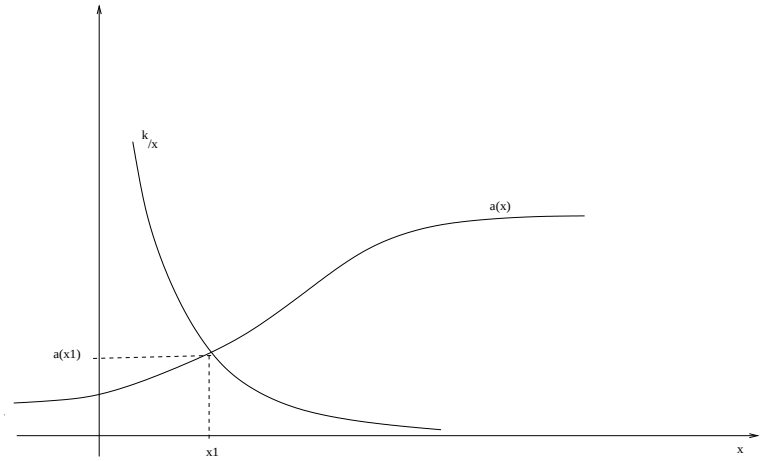

FIG. 1.1 – Unicité de la solution

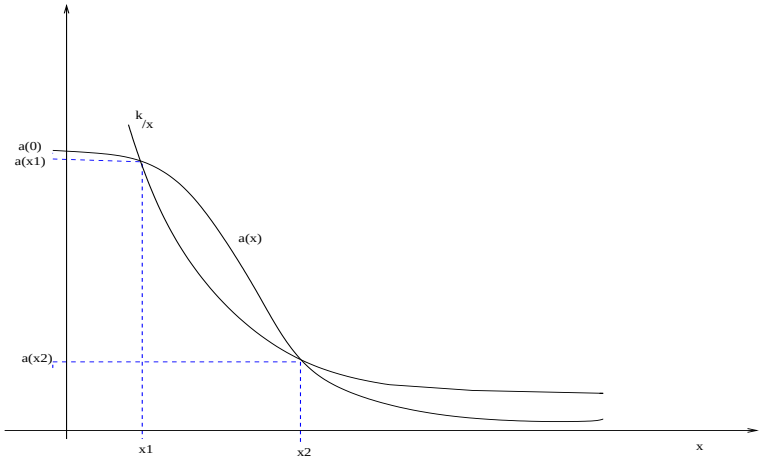

FIG. 1.2 – Solutions multiples

alors on voit bien que le problème (1.6) admet une ou plusieurs solutions en $r = d$ comme représenté sur fig 1.1 et fig 1.2. En considèrant le cas où (P_d) admet plusieurs solutions il est donc important de remarquer que lorsque r décrit l'intervalle $[0, d]$, notre problème stationnaire associé passe d'un problème classique de Laplace avec

des conditions simples de Dirichlet qui admet une unique solution à un problème non local admettant plusieurs solutions. La question du compte du nombre de solutions du problème (P_r) en fonction de r se pose donc très naturellement. Plus précisemment, existe t'il une branche globale de solutions possédant des points de bifurcations ? Un cas similaire peut aussi être considéré lorsque l'on considère à la place de $l_r(u)$ la fonctionnelle $L_r(u)$ telle que

$$L_r(u) = \fint_{B(x,r)\cap\Omega} g(y)u(y)dy,$$

avec

$$\fint_{B(x,r)\cap\Omega} g(y)u(y)\,dy = \frac{1}{|B(x,r)\cap\Omega|}\int_{B(x,r)\cap\Omega} g(y)u(y)\,dy.$$

On montre dans ce cas voir [Chi04] que lorsque le paramètre r décrit l'intervalle $[0,d]$, notre problème stationnaire associé fait la transition entre le problème local

$$\begin{cases} -div(a(u)\nabla u) = f \quad \text{dans} \quad \Omega \\ u \in H_0^1(\Omega), \end{cases}$$

et le problème non local

$$\begin{cases} -div(a(L_d(u))\nabla u) = f \quad \text{dans} \quad \Omega \\ u \in H_0^1(\Omega), \end{cases}$$

avec

$$L_d(u) = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega g(y)u(y)\,dy.$$

Revenons à l'étude de notre problème stationnaire associé (P_r). La principale difficulté dans l'étude du nombre de solutions du problème (P_r) en fonction r est la difficulté d'appliquer en théorie de bifurcations directement à notre problème une variante du théorème [eGP95] qui suit :

Théorème 1.1. *Soit X, Y deux espaces de Banach. On suppose que $F \in C^2(\mathbb{R}\times X, Y)$ est tel que $F(\lambda, u^\star) = 0$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $\lambda^\star$ tel que $L = F_u(\lambda^\star, u^\star)$ vérifie*

(i) $ker(L)$ est de dimension 1, c'est à dire $w^\star \in X$, $\quad w^\star \neq 0$ tel que $ker(L) = \{t\,w^\star \,:\, t \in \mathbb{R}\}$,

(ii) $\mathcal{R}$ est fermé et $codim(\mathcal{R}) = 1$,

avec $\mathcal{R} = \mathcal{R}(L)$. De plus si l'on note $\mathcal{M}$ l'application linéaire $F_{u,\lambda}(\lambda^\star, u^\star)$ et que

$$\mathcal{M}\,w^\star \notin \mathcal{R}.$$

Alors $\lambda^\star$ est un point de bifurcation pour F. De plus l'ensemble de solutions des points non triviaux de $F = 0$ est au voisinage de $(\lambda^\star, u^\star)$ une unique courbe C^1 de représentation paramétrique sur $ker(L)$.

Une autre question très importante est aussi celle de l'unicité de (P_r) pour tout $r \in [0,d]$. En effet si nous montrons que les problèmes (P_0) et (P_d) admettent une unique solution, il est en revanche plus difficile de montrer que le problème (P_r) lui aussi admet une unique solution $\forall r \in]0,d[$, c'est précisemment ce qui se produit lorsque a est croissante. Plusieurs autres questions se posent aussi : étude du comportement asymptotique, de principe de comparaison de solutions...

2 Présentation des résultats

Pour le problème stationnaire, nous commençons par démontrer à r fixé un théorème d'existence et en ajoutant une condition de Lipschitz sur a qui nous garantit l'unicité (théorème 3.1). Cette condition est réutilisée sur a pour prouver la continuité de l'application $r \mapsto u_r$ dans le cas particulier où $g \equiv 1$ et de manière générale (théorème 3.6). Nous présentons ensuite un critère général d'inversibilité dépendant de r dans le cas où $g \equiv 1$ (théorème 3.11). Ce critère très important va par la suite nous permettre en exemple d'application de retrouver des résultats d'inversibilités déja connu en $r = d$ dans [eBL01], [eBL99].

Après avoir démontré la convergence forte dans $H_0^1(\Omega)$ de u_r vers respectivement les solutions u_0 et u_d de (P_0) et (P_d), nous prouvons d'abord pour $n = 1$ puis généralisé en $n > 1$ un principe de comparaison (proposition 4.11) d'une solution u_r de (P_r), u_d de (P_d) et de la solution u_0 de (P_0) dans le cas de solutions radiales symétriques. Grâce à ce principe (proposition 4.23 et proposition 4.19) nous montrons sous certaines conditions que pour

– si a est croissante on a que

$$u_d \leq u_r \leq u_0 \quad \forall r \in [0, d]$$

– si a est décroissante on a que

$$u_0 \leq u_r \leq u_d \quad \forall r \in [0, d].$$

L'utilisation de ce principe de comparaison va nous permettre ensuite de généraliser le compte du nombre de solutions stationnaires du problème (P_r) mais cette fois pour $r \in [0, d]$ en fonction de a (proposition 4.15 et proposition 4.18). Nous terminons l'étude du problème stationnaire par l'existence de branches locales et ou globales de solutions (théorème 4.34). Nous donnons quelques applications numériques de ce principe de comparaison utilisant une méthode de point fixe et de Newton (proposition 4.23).

Pour ce qui est du problème parabolique, nous commençons par montrer l'existence et l'unicité d'une solution au problème (théorème 6.1). Ensuite nous donnons un résultat d'existence de borné absorbant dans $L^2(\Omega)$ puis dans $H_0^1(\Omega)$ ce qui par la suite nous permettra de montrer l'existence d'un attracteur global associé à notre problème (théorème 6.4). Pour finir grâce à la méthode d'itérations de Moser nous démontrons une estimation L^∞ de la solution en fonction d'estimations L^q, $q > 1$ (théorème 6.6).

3 Plan de la thèse

Dans le chapitre 2, nous nous contentons de rappeler très brièvement des versions de théorèmes adaptées de la théorie de bifurcations et des semi-groupes.

Dans le chapitre 3, nous commençons par donner un résultat d'existence et une condition d'unicité du problème stationnaire associé à mon problème à r fixé. Après avoir donné un résultat général d'inversibilité du problème associé en fonction du paramètre r, nous donnons un exemple d'application au cas où $r = diam(\Omega)$ avec $diam(\Omega)$ =diamètre de Ω et a croissant.

Dans le chapitre 4 toujours en considérant le problème stationnaire, nous montrons un résultat de convergence forte de notre solution lorsque r converge vers 0 et $diam(\Omega)$. Parallèlement nous montrons un principe de comparaison de solutions dans le cas de solutions radiales symétriques. Ce principe est ensuite adapté pour généraliser le compte du nombre de solutions stationnaires introduite par M.Chipot [eBL01] [Chi00] et montrer un résultat d'existence de branches locales et globales de solutions.

Dans le chapitre 5 nous présentons au travers d'une méthode de points fixes et de Newton une application numérique du principe de comparaison décrit dans le chapitre 4 aux cas où a est croissant et a a la forme d'une gaussienne.

Enfin, dans le chapitre 6 nous commençons par étudier l'existence d'un attracteur global associé à notre problème d'évolution, avant de montrer au travers d'itérations de Moser une estimation L^∞ de la solution de mon problème d'évolution en fonction d'estimations L^q, $q > 1$.

Chapitre 2

Quelques rappels

Dans cette partie nous introduisons quelques notions de bases apparaissant tout au long de mon étude. Pour la preuve de certains résultats se reporter aux références mentionnées.

Théorème 2.1. *[eJM83] Soit Ω un ouvert quelconque de $\mathbb{R}^n$. Si v est une fonction de $H_0^1(\Omega)$, la fonction $\tilde{v}$, prolongement de v par 0 dans $\mathbb{R}^n \backslash \Omega$, appartient à $H^1(\mathbb{R}^n)$.*

Inégalité de Poincaré-Sobolev [eJMR99] *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ contenu dans une bande, par exemple $\{(x_1, \ldots, x_N), |x_1| \leq a\}$ $a > 0$. Alors il existe une constante $c(\Omega) > 0$ telle que pour tout $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, on ait*

$$\int_\Omega |u(x)|^p dx \leq c(\Omega) \int_\Omega |\nabla u(x)|^p dx,$$

où $1 \leq p < +\infty$.

Définition 2.2. *[eJM83] Un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ est 1-régulier si Ω est borné et si sa frontière Γ est une variété de classe $\mathcal{C}^1$ de dimension $n-1$, Ω étant d'un seul coté de Γ.*

Théorème 2.3. *(Théorème de trace) [eJM83] On suppose que l'ouvert Ω est 1-régulier. Alors $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ est dense dans $H^1(\Omega)$ et l'application $\gamma_0 :\ v \mapsto \gamma_0 v = v/_\Gamma$ de $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ dans $L^2(\Gamma)$ se prolonge par continuité en une application linéaire et continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Gamma)$ encore notée γ_0.*

Théorème 2.4. ***Inégalité d'interpolation*** *([Bre83])Si $f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq q \leq \infty$, alors $f \in L^r(\Omega)$ pour tout $p \leq r \leq q$ et on a l'inégalité d'interpolation*

$$\|f\|_{L^r(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)}^{\alpha} \|f\|_{L^q(\Omega)}^{1-\alpha} \quad \text{où} \quad \frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q} \quad (0 \leq \alpha \leq 1). \tag{2.1}$$

Théorème 2.5. *(Théorème de Lax-Milgram) Soit V un espace de Hilbert réel. Soient L une forme linéaire continue sur V et a une forme bilinéaire continue et coercive. Alors, il existe une et une seule fonction $u \in V$ tel que*

$$a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in V. \tag{2.2}$$

De plus, si a est symétrique c'est à dire que $a(v,w) = a(w,v)$ pour tout $(v,w) \in V \times V$ alors u est solution de (2.2) est équivalente à u est solution du problème d'optimisation suivant :

$$J(u) = \min\{J(v),\ v \in V\},$$

avec

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - L(v).$$

Théorème 2.6. *(Théorème de point fixe de Schauder) Soit V un espace de Banach, C un convexe compact non vide de V et $T : C \longrightarrow C$ une application continue. Alors T admet un point fixe, c'est à dire qu'il existe un $u_0 \in C$ tel que $Tu_0 = u_0$.*

On a aussi

Théorème 2.7. *(Variante du théorème de point fixe de Schauder) Soit V un espace de Banach, C un convexe fermé non vide de V et $T : C \longrightarrow C$ une application continue tel que TC soit relativement compact. Alors T admet un point fixe, c'est à dire qu'il existe un $u_0 \in C$ tel que $Tu_0 = u_0$.*

Théorème 2.8. *(Théorème de l'application contractante de Picard) Soit (X,d) un espace métrique complet non vide. Soit $S : X \longrightarrow X$ telle qu'il existe un $\epsilon > 0$ avec $0 < \epsilon < 1$ tel que*

$$\epsilon\, d(u,v) \geq d(Su, Sv).$$

Alors, il existe un seul point fixe $u \in X$ vérifiant $Su = u$.

Nous présentons ici sous une forme appropriée pour notre étude le théorème des fonctions implicites qui jouera un rôle très important dans notre analyse.

Théorème 2.9. *[eGP95] Soit $F \in C^k(\Lambda \times U, Y)$, $\quad k \geq 1$, où Y désigne un espace de Banach et Λ (resp U) est un sous-ensemble ouvert de l'espace de Banach T (resp X). Supposons que $F(\lambda^\star, u^\star) = 0$ et que $F_u(\lambda^\star, u^\star) \in Inv(X,Y)$*
alors il existe un voisinage Θ de $\lambda^\star$ dans T et $U^\star$ de $u^\star$ dans X et une application $g \in C^k(\Theta, X)$ telle que

(i) $F(\lambda, g(\lambda)) = 0$ *pour tout* $\lambda \in \Theta$,

(ii) $F(\lambda, u) = 0, (\lambda, u) \in \Theta \times U \quad$ *implique que* $\quad u = g(\lambda)$,

(iii) $g'(\lambda) = -[F_u(p)]^{-1} \circ F_\lambda(p)$, *où* $\quad p = (\lambda, g(\lambda)) \quad$ *et* $\quad \lambda \in \Theta$.

Théorème 2.10. *Soit E un espace vectoriel normé et $\mathcal{K}(E)$ l'ensemble des opérateurs compacts. Si $T \in \mathcal{K}(E)$ alors*

a) $N(I-T)$ *est de dimension finie,*

b) $R(I-T)$ *est fermé, et plus precisement* $\quad R(I-T) = N(I-T^\star)^\perp$

c) $N(I-T) = \{0\} \Leftrightarrow R(I-T) = E$

d) $dimN(I-T) = dimN(I-T^\star)$.

Remarque 2.11. *L'alternative de Fredholm est souvent utilisée pour résoudre des équations de la forme $u - Tu = f$. Elle exprime le fait que :*

– *ou bien pour tout $f \in E$ l'équation $u - Tu = f$ admet une unique solution*

– *ou bien l'équation homogène $u - Tu = 0$ admet $k > 0$ solutions linéairement indépendantes et , dans ce cas, l'équation non homogène $u - Tu = f$ est résoluble si et seulement si f vérifie k conditions d'orthogonalité, c'est à dire que $f \in N(I - T^\star)^\perp$*

Soit X un espace de Banach, de norme $\|.\|_X$

Définition 2.12. *Pour $a, b \in R$ on désigne par*

$$L^p(a, b, X), \qquad 1 \leq p < +\infty$$

l'espace (des classes de) fonctions $f : (a, b) \longrightarrow X$ qui sont mesurables et telles que

$$\int_a^b \|f(t)\|_X^p dt < +\infty,$$

et par $L^\infty(a, b, X)$ l'espace des fonctions bornées sur (a, b) c'est à dire qu'il existe un M tel que

$$\|f(t)\|_X \leq M \qquad \text{p.p} \quad t \in (a, b).$$

Nous avons aussi :

Théorème 2.13. *[Chi00] Les espaces $L^p(a, b, X), \quad 1 \leq p \leq +\infty$ sont des espaces de Banach equippés de la norme*

$$\|f\|_{L^p(a,b,X)} = (\int_a^b \|f(t)\|_X^p dt)^{\frac{1}{p}}, \qquad 1 \leq p < +\infty$$

$$\|f\|_{L^\infty(a,b,X)} = \inf\{M \in \mathbb{R} \quad | \quad \|f(t)\|_X \leq M \quad \text{p.p} \quad t \in (a, b)\}.$$

Remarque 2.14. *Si X, Y sont deux espaces de Banach tels que*

$$X \hookrightarrow Y \quad (\textit{injection} \quad \textit{continue}),$$

Alors il est clair que

$$D'(a, b; X) \hookrightarrow D'(a, b; Y)$$

et

$$L^p(a, b, X) \hookrightarrow L^p(a, b; Y), \quad 1 \leq p \leq +\infty$$

On considère maintenant V et H deux espaces de Hilbert tels que

$$V \hookrightarrow H \hookrightarrow V',$$

et

$$V \quad \textit{dense} \quad \textit{dans} \quad H$$

où V' est le dual de V. Nous pouvons montrer que

Théorème 2.15. *[Chi00] $H^1(a, b; V, V')$ est un espace de Hilbert pour la norme*

$$\|u\|_1^2 = \|u\|_{L^2(a,b;V)}^2 + \|u_t\|_{L^2(a,b;V')}^2.$$

On a aussi

Théorème 2.16. *[Chi00] Soit $u \in H^1(a,b;V,V')$. Alors u peut être identifié avec une fonction continue sur $[a,b]$ à valeur dans H. De plus*

$$H^1(a,b;V,V') \hookrightarrow C([a,b];H)$$

où $C([a,b];H)$ désigne l'espace des fonctions continues sur $[a,b]$ à valeurs dans H muni de la topologie de la convergence uniforme sur $[a,b]$.

Aussi

Théorème 2.17. *[Chi00] Si $u \in H^1(a,b;V,V')$, alors pour tout $v \in V$*

$$\frac{d}{dt}(u(.),v) =< u_t(.),v > \quad in \quad D'(a,b).$$

Lemme 2.18. ***lemme de Gronwall uniforme***
Soit g, h et y telles que $g,h,y,y' \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$. On suppose que

$$y' \leq gy + h, \quad \forall t \geq t_0$$

et que

$$\int_t^{t+r} g(s)\,ds \leq a_1, \quad \int_t^{t+r} h(s)\,ds \leq a_2, \quad et \quad \int_t^{t+r} y(s)\,ds \leq a_3$$

avec $t \geq t_0$ où t_0 et $r > 0$ sont fixés. Alors

$$y(t+r) \leq (\frac{a_3}{r} + a_2)exp(a_1), \quad \forall t \geq t_0.$$

On désignera dans tout ce qui suit par H un espace de Banach(dans certain cas nous prendrons $H = L^2(\Omega)$) et $S(t)$ défini par $S(t) : H \to H$ avec $t \geq 0$ un semi groupe.

Définition 2.19. *On suppose que $f \in L^2(\Omega)$ et que β_0 est une partie bornée de $L^2(\Omega)$. On dit que β_0 est un ensemble borné absorbant pour l'équation (1.4) si $\forall B \in L^2(\Omega)$ borné il existe un $t_0 = t_0(B)$ tel que pour tout $t \geq t_0$*

$$S(t)B \subset \beta_0.$$

Définition 2.20. *Soit $u_0 \in H$ on appelle ensemble ω limite de u_0 l'ensemble noté $\omega(u_0)$(s'il existe) défini par*

$$\omega(u_0) = \bigcap_{s\geq 0} \overline{\bigcup_{t\geq s} S(t)u_0}$$

De même si $B \subset H$ alors

$$\omega(B) = \bigcap_{s\geq 0} \overline{\bigcup_{t\geq s} S(t)B}.$$

Proposition 2.21. *On suppose que $B \in H$ et $\exists t_0$ tel que $\bigcap_{t\geq t_0} \bigcup S(t)B$ est relativement compact dans H, Alors $\omega(B)$ est non vide compact et invariant.*

Définition 2.22. *On dit que l'on peut associé un attracteur global $\mathcal{A}$ à $S(t)$ si $S(t)$ est compact, non vide, invariant et attire tous les bornés de H.*

Proposition 2.23. *Si $S(t)$ vérifie la propriété : $\forall B \subset H$ borné, $\exists t_0 = t_0(B)$ tel que $\bigcap_{t \geq t_0} \bigcup S(t)B$ est relativement compact, alors $S(t)$ est uniformément compact pour t grand.*

Théorème 2.24. *On suppose que $S(t)$ admet un borné absorbant $\mathcal{B} \subset H$ et que $S(t)$ est uniformément compact pour t grand. Alors $\mathcal{A} = w(\mathcal{B})$ est non vide, compact, invariant et attire les bornés de H.*

Chapitre 3

Problème stationnaire associé

On suppose que $f \in H^{-1}(\Omega)$ le dual de $H_0^1(\Omega)$. Par problème stationnaire associé, on entend ici le problème suivant : trouver un $u = u(x)$ tel que

$$\begin{cases} -div(a(l_r(u))\nabla u) = f & \text{dans} \quad \Omega \\ u = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{3.1}$$

où l_r est définie par $l_r(u)(x) = \int_{B(x,r)\cap\Omega} g(y)u(y)dy$. On suppose $r \in \mathbb{R}^+$ et que $g \in L^2(\Omega)$. Sous sa forme faible u est donc la solution du problème

$$\begin{cases} u \in H_0^1(\Omega) \\ \int_\Omega a(l_r(u))\nabla u \nabla \phi dx =< f, \phi > \qquad \forall \phi \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \tag{3.2}$$

où $<.,.>$ désigne le crochet de dualité entre $H^{-1}(\Omega)$ et $H_0^1(\Omega)$. On supposera de plus que a est telle que

$$a : \mathbb{R} \longrightarrow]0, \infty[\quad \text{est} \quad \text{continue} \tag{3.3}$$

$$0 < m \leq a(\epsilon) \leq M \quad \forall \epsilon \in \mathbb{R}. \tag{3.4}$$

1 Quelques résultats d'existence et unicité

Théorème 3.1. *(Existence) Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, a une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $(0, +\infty)$ tel qu'il existe deux constantes m,M tel que*

$$0 < m \leq a(\epsilon) \leq M \quad \forall \epsilon \in \mathbb{R}$$

et $g \in L^2(\Omega)$. Pour tout $r \in [0, diam(\Omega)]$, r fixé le problème (3.2) admet une solution $u \in H_0^1(\Omega)$.

Démonstration. Pour démontrer ce théorème nous allons utiliser la méthode du point fixe de Schauder. On sait que pour tout $w \in L^2(\Omega)$ le problème

$$\begin{cases} u \in H_0^1(\Omega) \\ \int_\Omega a(l_r(w))\nabla u \nabla \phi dx =< f, \phi > \qquad \forall \phi \in H_0^1(\Omega), \end{cases} \tag{3.5}$$

admet une unique solution (théorème de Lax-Milgram) d'où l'existence de $u = T_r(w)$. Prenons $\phi = u$ dans (3.5) il vient que

$$\int_\Omega a(l_r(w))|\nabla u|^2 dx =< f, u > . \tag{3.6}$$

(3.4) et (3.6) nous donne

$$m\|u\|_V^2 \leq |f|_\star \|u\|_V$$

où nous avons posé $V = H_0^1(\Omega)$ et

$$\|u\|_V^2 = \int_\Omega |\nabla u|^2 dx$$

et $|.|_\star$ la norme de $H^{-1}(\Omega)$ avec $|f|_\star = \sup\limits_{\substack{u\neq 0 \\ u\in H_0^1(\Omega)}} \dfrac{|< f, u >|}{\|u\|_V}$. Il vient que

$$\|u\|_V \leq \frac{|f|_\star}{m}. \tag{3.7}$$

Ce qui fait que

$$|u|_2 \leq \frac{h(\Omega)|f|_\star}{m} = C, \tag{3.8}$$

où $|u|_2^2 = \int_\Omega |u(x)|^2 dx$ et $h(\Omega)$ désigne la constante de Poincaré Sobolev c'est-à-dire

$$|u|_2 \leq h(\Omega)\, \|u\|_V. \tag{3.9}$$

En posant $B = \{v \in L^2(\Omega), |v|_2 \leq C\}$, il est clair que l'application

$$w \longrightarrow u = T_r(w)$$

est une application de B dans lui même. De plus (3.7) nous montre que u appartient à un borné de $H_0^1(\Omega)$ qui est relativement compact dans $L^2(\Omega)$, d'où

$$\begin{aligned} T_r : L^2(\Omega) &\longrightarrow L^2(\Omega) \quad \text{est} \quad \text{compact} \\ w &\longrightarrow T_r(w) = u. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Pour terminer la preuve il suffit que nous montrions que T est continue. Soit $w_n \in B$ tel que

$$w_n \longrightarrow w \quad \text{dans} \quad B. \tag{3.11}$$

Posons $u_n = T(w_n)$ la solution de (3.5) c'est-à-dire que u_n est la solution du problème

$$\begin{cases} u_n \in H_0^1(\Omega) \\ \int_\Omega a(l_r(w_n))\nabla u_n \nabla \phi dx =< f, \phi > \qquad \forall \phi \in H_0^1(\Omega_l). \end{cases} \tag{3.12}$$

D'après (3.7), (3.8) et (3.11) on peut extraire des sous suites que l'on renommera en indices n tel que

- $w_n \longrightarrow w \quad p.p \quad dans \quad \Omega,$
- $\nabla u_n \rightharpoonup \nabla u \quad dans \quad L^2(\Omega),$
- $u_n \longrightarrow u \quad dans \quad L^2(\Omega).$

Ce qui fait que $l_r(w_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} l_r(w) \quad p.p\ \Omega$. En effet on a

$$\begin{aligned} |l_r(w_n)(x) - l_r(w)(x)| &\leq \int_{B(x,r)\cap\Omega} |g(y)||w_n(y) - w(y)|dy \\ &\leq |g|_2 |w_n - w|_2. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Ce qui montre bien que $l_r(w_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} l_r(w) \quad p.p\ \Omega$. D'où

$$a(l_r(w_n))\nabla v \longrightarrow a(l_r(w))\nabla v \quad \text{dans} \quad L^2(\Omega) \tag{3.14}$$

$$\nabla u_n \rightharpoonup \nabla u \quad \text{dans} \quad L^2(\Omega). \tag{3.15}$$

Avant de passer à la limite nous énonçons un lemme intéressant

Lemme 3.2. *[Chi00] Soit H un espace de Hilbert et x_n et y_n deux suites tels que*

$$x_n \rightharpoonup x, \quad y_n \longrightarrow y$$

alors on que

$$\lim_{n\to\infty} (x_n, y_n) = (x, y).$$

Démonstration. On a que

$$|(x_n, y_n) - (x, y)| = |(x_n - x, y) + (x_n, y_n - y)| \leq |(x_n - x, y)| + |x_n||y_n - y|,$$

en y ajoutant le fait que $x_n \rightharpoonup x$ pour le premier terme, et que x_n est borné dans H, on obtient le résultat. □

Revenons maintenant à la preuve du théorème 3.1. En passant à la limite dans (3.12), en utilisant (3.14), (3.15) et le lemme 3.2 on obtient

$$\int_\Omega a(l_r(w))\nabla u \nabla \phi dx =< f, \phi > \qquad \forall \phi \in H_0^1(\Omega_l).$$

Ce qui montre que $u = T_r(w)$. Nous avons montré que $u_n \longrightarrow u$ dans $H_0^1(\Omega)$ faiblement (vrai pour une suite extraite) montrons que c'est en fait toute la suite qui converge. Soit u_{nk} une autre suite extraite tel que

$$u_{nk} \longrightarrow \tilde{u} \quad dans \quad L^2(\Omega) \tag{3.16}$$

$$\nabla u_{nk} \rightharpoonup \nabla \tilde{u} \quad dans \quad L^2(\Omega). \tag{3.17}$$

En combinant (3.16), (3.17) et le lemme 3.2 et en utilisant le même raisonnement que précédemment il vient que

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega a(l_r(w_n))\nabla u_{nk} \nabla \phi dx = \int_\Omega a(l_r(w))\nabla \tilde{u} \nabla \phi dx.$$

Ce qui montre que $\tilde{u}$ est aussi solution de (3.5) . Grâce à l'unicité de (3.5) on conclut que $u = \tilde{u}$, ce qui montre bien que, u_n a pour unique limite possible $u = T_r(w)$, et démontre que T_r est continue. Ce qui achève la preuve de l'existence. □

Dans ce qui va suivre nous examinons une propriété pour laquelle nous avons l'unicité. Nous commençons par examiner un cas modèle lorsque $g \equiv 1$. On a le résultat suivant :

Proposition 3.3. *(Unicité) On prend $g \equiv 1$. On suppose toujours que (3.4) et (3.3) sont vérifiées. Si de plus a est tel que*

$$|a(z_1) - a(z_2)| \leq \gamma |z_1 - z_2| \qquad \forall (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2, \tag{3.18}$$

pour tout γ tel que

$$|f|_\star \gamma < \frac{m^2}{|\Omega|^{1/2} h(\Omega)}, \tag{3.19}$$

où $h(\Omega)$ désigne la constante de Poincaré Sobolev et $|\Omega|$ la mesure de Ω. Alors le problème (3.2) admet une unique solution.

Démonstration. L'existence est donnée par le théorème 3.1. Si u, v sont deux solutions de l'équation (3.2), il vient que

$$\int_\Omega (a(l_r(u))\nabla u - a(l_r(v))\nabla v)\nabla \phi dx = 0 \qquad \forall \phi \in H_0^1(\Omega). \tag{3.20}$$

De plus on sait que

$$a(l_r(u))\nabla u - a(l_r(v))\nabla v = (a(l_r(u)) - a(l_r(v))\nabla u + a(l_r(v))\nabla(u - v), \tag{3.21}$$

(3.20) et (3.21) nous donne bien

$$\int_\Omega (a(l_r(u)) - a(l_r(v))\nabla u \nabla \phi + a(l_r(v))\nabla(u - v)\nabla \phi dx = 0 \qquad \forall \phi \in H_0^1(\Omega). \tag{3.22}$$

Si on prend $\phi = u - v$ dans (3.22) on a que

$$\int_\Omega a(l_r(v))|\nabla(u - v)|^2 dx = -\int_\Omega (a(l_r(u)) - a(l_r(v))\nabla u \nabla(u - v) dx \tag{3.23}$$

d'où

$$\int_\Omega a(l_r(v))|\nabla(u - v)|^2 dx \leq \int_\Omega |a(l_r(u)) - a(l_r(v))||\nabla u||\nabla(u - v)| dx. \tag{3.24}$$

Il est clair que

$$|a(l_r(u)) - a(l_r(v))| \leq \gamma |l_r(u - v)|, \tag{3.25}$$

de plus

$$|l_r(u)(x)| \leq \int_{B(x,r)\cap\Omega} |u(y)| dy. \tag{3.26}$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz à (3.26) on obtient

$$|l_r(u(x))| \leq |\Omega|^{1/2} h(\Omega) \|u\|_V, \tag{3.27}$$

où bien sûr $h(\Omega)$ désigne la constante de Poincaré Sobolev et $|\Omega|$ la mesure de Ω. De (3.25) et (3.27) on a que

$$|a(l_r(u)) - a(l_r(v))| \leq \gamma |\Omega|^{1/2} h(\Omega) \|u - v\|_V, \tag{3.28}$$

en combinant (3.28) et (3.24) on a

$$\int_\Omega a(l_r(v))|\nabla(u-v)|^2dx \leq \gamma|\Omega|^{1/2}h(\Omega)\|u-v\|_V \int_\Omega |\nabla u||\nabla(u-v)|dx. \tag{3.29}$$

De l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans (3.29) et (3.4) il résulte que

$$m\|u-v\|_V^2 \leq \gamma\,|\Omega|^{1/2}h(\Omega)\|u-v\|_V^2\|u\|_V \tag{3.30}$$

En utilisant le fait que

$$\|u\|_V \leq \frac{|f|_\star}{m},$$

(voir (3.7)) on obtient que

$$m\|u-v\|_V^2 \leq \gamma\,|\Omega|^{1/2}h(\Omega)\frac{|f|_\star}{m}\|u-v\|_V^2,$$

d'où si $u \neq v$, on a

$$m^2 \leq \gamma\,|\Omega|^{1/2}h(\Omega)|f|_\star.$$

Il suffit donc de prendre pour finir

$$|f|_\star\gamma < \frac{m^2}{|\Omega|^{1/2}h(\Omega)}$$

pour avoir

$$u = v.$$

Ce qui termine la preuve. □

De manière plus générale nous avons le résultat suivant :

Proposition 3.4. *On suppose que $g \in L^2(\Omega)$. On suppose toujours que (3.4) et (3.3) sont vérifiées. Si de plus a est tel que*

$$|a(z_1)-a(z_2)| \leq \gamma|z_1-z_2| \qquad \forall(z_1,z_2)\in\mathbb{R}^2, \tag{3.31}$$

pour tout γ tel que

$$|g|_2\,|f|_\star < \frac{m^2}{\gamma\,h(\Omega)}, \tag{3.32}$$

où $h(\Omega)$ est la constante de Poincaré-Sobolev. Alors le problème (3.2) admet une unique solution.

Démonstration. Comme précedemment soient u, v deux solutions de l'équation (3.2). On avait d'après (3.24) que

$$\int_\Omega a(l_r(v))|\nabla(u-v)|^2dx \leq \int_\Omega |a(l_r(u))-a(l_r(v))||\nabla u||\nabla(u-v)|dx. \tag{3.33}$$

Comme par hypothèse

$$|a(l_r(u))-a(l_r(v))| \leq \gamma|l_r(u-v)|,$$

et qu'en appliquant les inégalité de Cauchy-Schwarz et de Poincaré Sobolev on a

$$|l_r(u)(x)| \leq |g|_2\, h(\Omega)\|u\|_V, \tag{3.34}$$

avec $h(\Omega)$ désignant la constante de Poincarré, il découle que

$$|a(l_r(u)) - a(l_r(v))| \leq \gamma|g|_2\, h(\Omega)\|u - v\|_V. \tag{3.35}$$

En combinant (3.33), (3.35) et en y adjoignant (3.4) on a

$$m\|u - v\|^2 \leq \gamma\, |g|_2\, h(\Omega)\|u - v\|_V^2\|u\|_V, \tag{3.36}$$

puis en utilisant le fait que

$$\|u\|_V \leq \frac{|f|_\star}{m},$$

on obtient

$$m\|u - v\|_V^2 \leq \gamma\, |g|_2\, h(\Omega)\frac{|f|_\star}{m}\|u - v\|_V^2,$$

ce qui donne $u = v$ ou

$$m^2 \leq \gamma\, |g|_2\, h(\Omega)|f|_\star.$$

Il suffit donc de prendre pour finir

$$|f|_\star\, |g|_2 < \frac{m^2}{\gamma\, h(\Omega)}$$

pour avoir $u = v$. Ce qui termine la preuve. □

2 Continuité de la solution u_r

Nous donnons ici un résultat de continuité au sens que si r et s sont très proches alors u_r et u_s restent eux aussi très proches. Comme dans le cas de l'unicité nous commençons par un cas modèle lorsque $g \equiv 1$. On a le résultat suivant :

Proposition 3.5. *On suppose que $g \equiv 1$ et que les hypothèses de la proposition 3.3 sont toujours vérifiées c'est à dire que (3.4), (3.18) et (3.19). Alors l'application*

$$\begin{aligned} G : [0, diam(\Omega)] &\to H_0^1(\Omega) \\ r &\to G(r) = u_r \end{aligned}$$

est continue, avec u_r la solution de (3.2).

Démonstration. Soit u la solutions du problème

$$\begin{cases} u \in H_0^1(\Omega) \\ \int_\Omega a(l_r(u))\nabla u \nabla \phi dx =< f, \phi > \qquad \forall \phi \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \tag{3.37}$$

et v la solution du problème

$$\begin{cases} v \in H_0^1(\Omega) \\ \int_\Omega a(l_s(v))\nabla v \nabla \phi dx =< f, \phi > \qquad \forall \phi \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \tag{3.38}$$

avec s et r appartenant à $[0, diam(\Omega)]$. (3.37) et (3.38) nous donnent

$$\int_\Omega (a(l_r(u))\nabla u - a(l_s(v))\nabla v)\nabla\phi dx = 0 \qquad \forall\phi \in H_0^1(\Omega). \tag{3.39}$$

Comme

$$\begin{aligned} a(l_r(u))\nabla u - a(l_s(v))\nabla v =& (a(l_r(u)) - a(l_r(v))\nabla u + (a(l_r(v)) - a(l_s(v))\nabla u \\ &+ a(l_s(v))\nabla(u-v). \end{aligned} \tag{3.40}$$

En combinant (3.39) et (3.40) puis en prenant $\phi = u - v$ on a que

$$\begin{aligned} \int_\Omega a(l_s(v))|\nabla(u-v)|^2 dx =& -\int_\Omega (a(l_r(u)) - a(l_r(v))\nabla u\nabla(u-v)dx \\ &- \int_\Omega (a(l_r(v)) - a(l_s(v))\nabla u\nabla(u-v)dx \end{aligned} \tag{3.41}$$

(3.41) et (3.4) nous donnent

$$\begin{aligned} m\|u-v\|_V^2 \leq& \int_\Omega |(a(l_r(u)) - a(l_r(v))||\nabla u||\nabla(u-v)|dx \\ &+ \int_\Omega |(a(l_r(v)) - a(l_s(v))||\nabla u||\nabla(u-v)|dx, \end{aligned} \tag{3.42}$$

il est aisé de voir en utilisant (3.27) que

$$|a(l_r(u)) - a(l_r(v))| \leq \gamma|\Omega|^{1/2}h(\Omega)\|u-v\|_V \tag{3.43}$$

il nous reste à majorer l'expression

$$|a(l_r(v)) - a(l_s(v))|.$$

Par hypothèse sur a on sait que

$$|a(l_r(v)) - a(l_s(v))| \leq \gamma\,|l_r(v) - l_s(v)|.$$

De plus

$$|l_r(v)(x) - l_s(v)(x)| = \left|\int_{B(x,r)\cap\Omega} v(y)dy - \int_{B(x,s)\cap\Omega} v(y)dy\right|.$$

Ce qui fait que

$$|l_r(v) - l_s(v)| = \left|\int_\Omega 1_{B(x,r)}(y)v(y)dy - \int_\Omega 1_{B(x,s)}(y)v(y)dy\right|,$$

où $1_A(y)$ est défini par

$$1_A(y) = \begin{cases} 1 & si \quad y \in A \\ 0 & si \quad y \notin A, \end{cases}$$

et donc en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|l_r(v) - l_s(v)| \leq \left(\int_\Omega |1_{B(x,r)} - 1_{B(x,s)}|^2 dy\right)^{\frac{1}{2}} h(\Omega)\|v\|_V \tag{3.44}$$

On sait que

$$|1_A - 1_B|^2 = 1_A^2 + 1_B^2 - 2\,1_A 1_B = 1_A + 1_B - 1_A 1_B - 1_A 1_B = 1_{A\cup B} - 1_{A\cap B},$$

et donc lorsque $B \subset A$

$$|1_A - 1_B|^2 = 1_A - 1_B. \tag{3.45}$$

De même on sait qu'en dimension n l'expression du volume d'une boule de rayon R est donnée pour n pair ($n = 2p$) par

$$v_n = 2\,V_{2p} = \frac{\pi^p}{p!}R^{2p},$$

et pour n impair ($n = 2p-1$) par

$$v_n = 2\,V_{2p-1} = \frac{2^{2p-1}(p-1)!\pi^{p-1}}{(2p-1)!}R^{2p-1}.$$

Si on suppose sans perte de généralité que $B(x,s) \subset B(x,r)$, en utilisant (3.45) il vient que

$$\int_\Omega |1_{B(x,r)} - 1_{B(x,s)}|^2 dy = \int_\Omega (1_{B(x,r)} - 1_{B(x,s)})dy.$$

En y adjoignant le résultat sur le volume de la boule on a

$$\int_\Omega |1_{B(x,r)} - 1_{B(x,s)}|^2 dy \le k\,|r^n - s^n| \tag{3.46}$$

où k est une constante dépendant de n. (3.44) et (3.46) nous donnent

$$|l_r(v) - l_s(v)| \le k^{\frac{1}{2}}\,|r^n - s^n|^{\frac{1}{2}} h(\Omega)\|v\|_V \tag{3.47}$$

d'où

$$|a(l_r(v)) - a(l_s(v))| \le \gamma\, k^{\frac{1}{2}}|r^n - s^n|^{\frac{1}{2}} h(\Omega)\|v\|_V. \tag{3.48}$$

(3.42), (3.43) et (3.48) nous donnent

$$\begin{aligned} m\|u-v\|_V^2 \le & \gamma|\Omega|^{1/2}h(\Omega)\|u-v\|_V \int_\Omega |\nabla u||\nabla(u-v)|dx \\ & + \gamma k^{\frac{1}{2}}|r^n - s^n|^{\frac{1}{2}}h(\Omega)\|v\|_V \int_\Omega |\nabla u||\nabla(u-v)|dx. \end{aligned} \tag{3.49}$$

En utilisant (3.7) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur le membre de droite on a

$$m\|u-v\|_V^2 \le \gamma|\Omega|^{1/2}h(\Omega)\frac{|f|_\star}{m}\|u-v\|_V^2 + \gamma k^{\frac{1}{2}}|r^n - s^n|^{\frac{1}{2}}h(\Omega)\frac{|f|_\star^2}{m^2}\|u-v\|_V, \tag{3.50}$$

et aussi

$$(m - \gamma|\Omega|^{1/2}h(\Omega)\frac{|f|_\star}{m})\|u-v\|_V^2 \le \gamma k^{\frac{1}{2}}|r^n - s^n|^{\frac{1}{2}}h(\Omega)\frac{|f|_\star^2}{m^2}\|u-v\|_V. \tag{3.51}$$

Il résulte de (3.19) et l'inégalité de Young que

$$\frac{1}{2}(m - \gamma|\Omega|^{1/2}h(\Omega)\frac{|f|_\star}{m})\|u-v\|_V^2 \le \frac{\gamma^2 k|r^n - s^n|\,h(\Omega)^2|f|_\star^4}{2m^3(m^2 - \gamma|\Omega|^{1/2}h(\Omega)\,|f|_\star)}. \tag{3.52}$$

D'où la continuité de la solution. □

Nous donnons une généralisation de la proposition 3.5.

Théorème 3.6. *On suppose que $g \in L^2(\Omega)$ et que les hypothèses du théorème 3.4 sont toujours vérifiées c'est à dire que (3.3), (3.4) (3.31) et (3.32). Alors l'application*

$$\begin{aligned} G : [0, diam(\Omega)] &\to H_0^1(\Omega) \\ r &\to G(r) = u_r \end{aligned}$$

est continue, avec u_r la solution de (3.2).

Démonstration. Pour faire la preuve de ce théorème nous avons besoin du lemme suivant

Lemme 3.7. *On suppose que $g \in L^2(\Omega)$ et que (3.3), (3.4), (3.31) et (3.32) sont vérifiées. Pour $s, r \in [0, diam(\Omega)]$ on a que u et v désignent respectivement les solutions de*

$$\begin{cases} u \in H_0^1(\Omega) \\ \int_\Omega a(l_r(u))\nabla u \nabla \phi dx =< f, \phi > \qquad \forall \phi \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \tag{3.53}$$

et de

$$\begin{cases} v \in H_0^1(\Omega) \\ \int_\Omega a(l_s(v))\nabla v \nabla \phi dx =< f, \phi > \qquad \forall \phi \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \tag{3.54}$$

Alors on a que

$$|l_r(u)(x) - l_s(v)(x)| \leq |g|_2 \left(h(\Omega)\|u - v\|_V + C\,|s^n - r^n|^{1/\beta(n)}\|v\|_V\right), \tag{3.55}$$

avec $h(\Omega)$ désignant la constante de Poincaré-Sobolev, C une constante dépendant de Ω et de n et $\beta(n)$ défini par

$$\beta(n) = \begin{cases} 2 & si\ n = 1 \\ 3 & si\ n = 2 \\ n & si\ n \geq 3. \end{cases}$$

Démonstration. On a que

$$|l_r(u)(x) - l_s(v)(x)| = \left| \int_{B(x,r)\cap\Omega} g(y)u(y)dy - \int_{B(x,s)\cap\Omega} g(y)v(y)dy \right|,$$

ce qui fait, que si $s > r$, on a

$$|l_r(u)(x) - l_s(v)(x)| \leq \int_{B(x,r)\cap\Omega} |g(y)(u-v)(y)|dy + \int_{(B(x,s)\setminus B(x,r))\cap\Omega} |g(y)v(y)|dy. \tag{3.56}$$

En isolant le premier terme du membre de droite et en lui appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a que

$$\int_{B(x,r)\cap\Omega} |g(y)(u-v)(y)|dy \leq (\int_{B(x,r)\cap\Omega} |g(y)|^2 dy)^{1/2} |u - v|_2, \tag{3.57}$$

ce qui donne bien en utilisant l'inégalité de Poincaré-Sobolev que

$$\int_{B(x,r)\cap\Omega} |g(y)(u-v)(y)|dy \leq h(\Omega)\|g\|_2\|u-v\|_V, \tag{3.58}$$

où $h(\Omega)$ désigne la constante de Poincaré. Etudions maintenant le deuxième terme du membre de droite de l'inégalité (3.56). Pour cela supposons pour commencer que $n=1$, n étant bien sûr la dimension de Ω. Dû à l'injection continue de $H_0^1(\Omega)$ dans $C(\overline{\Omega})$ on a que

$$\int_{(B(x,s)\backslash B(x,r))\cap\Omega} |g(y)v(y)|dy \leq C_1\|v\|_V \int_\Omega 1_{B(x,s)\backslash B(x,r)}(y)|g(y)|dy, \tag{3.59}$$

où C_1 est telle que $\|.\|_\infty \leq C_1\|.\|_V$. Ainsi en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\int_{(B(x,s)\backslash B(x,r))\cap\Omega} |g(y)v(y)|dy \leq C_1\|v\|_V|g|_2|2r-2s|^{1/2}. \tag{3.60}$$

Pour $n=2$ on prend $p=6$. Pour $n\geq 3$, on pose $p=\frac{2n}{n-2}$. En utilisant l'inégalité de Hölder on a que

$$\int_{(B(x,s)\backslash B(x,r))\cap\Omega} |g(y)v(y)|dy \leq \left(\int_{(B(x,s)\backslash B(x,r))\cap\Omega} |g(y)|^{p'}dy\right)^{1/p'} |v|_p, \tag{3.61}$$

avec $|v|_p^p = \int_\Omega |v(y)|^p dy$ et $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$. En utilisant l'injection de Sobolev de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^p(\Omega)$ on a que

$$|v|_p \leq C_2|\nabla v|_2. \tag{3.62}$$

Si on utilise de nouveau l'inégalité de Hölder avec $q := 2/p'$, il vient

$$\left(\int_{(B(x,s)\backslash B(x,r))\cap\Omega} |g(y)|^{p'}dy\right)^{1/p'} |v|_p \leq C_2\left[\left(\int_\Omega |g(y)|^2dy\right)^{1/q} |B(x,s)\backslash B(x,r)|^{1/q'}\right]^{1/p'} |\nabla v|_2, \tag{3.63}$$

avec $\frac{1}{q}+\frac{1}{q'}=1$. D'où

$$\left(\int_{(B(x,s)\backslash B(x,r))\cap\Omega} |g(y)|^{p'}dy\right)^{1/p'} |v|_p \leq C_2\left(\int_\Omega |g(y)|^2dy\right)^{1/2} |B(x,s)\backslash B(x,r)|^{1/q'p'}|\nabla v|_2, \tag{3.64}$$

Comme la mesure $|B(x,r)|$ de $B(x,r)$ est égale à $c_n r^n$, l'inégalité (3.63) devient alors

$$\int_{(B(x,s)\backslash B(x,r))\cap\Omega} |g(y)v(y)|dy \leq c_n^{1/q'p'}C_2\left(\int_\Omega |g(y)|^2dy\right)^{1/2} |s^n-r^n|^{1/q'p'}\|v\|_V. \tag{3.65}$$

D'où

$$\int_{(B(x,s)\setminus B(x,r))\cap\Omega} g(y)v(y)dy \leq c_n^{1/q'p'} C_1\, |g|_2 |s^n - r^n|^{1/q'p'} \|v\|_V. \tag{3.66}$$

En utilisant (3.60) lorsque $n = 1$ et en vérifiant que lorsque $n = 2$, $p'q' = 3$ et que pour tout $n \geq 3$, $p'q' = n$ on obtient

$$\int_{(B(x,s)\setminus B(x,r))\cap\Omega} |g(y)v(y)|dy \leq c_n^{1/\beta(n)} C_2\, |g|_2 |s^n - r^n|^{1/\beta(n)} \|v\|_V, \tag{3.67}$$

où $\beta(n)$ est définie de la façon suivante

$$\beta(n) = \begin{cases} 2 & si\ n = 1 \\ 3 & si\ n = 2 \\ n & si\ n \geq 3. \end{cases} \tag{3.68}$$

(3.58) et (3.67) nous donne bien

$$|l_r(u)(x) - l_s(v)(x)| \leq |g|_2\, (h(\Omega)\|u - v\|_V + c_n^{1/\beta(n)} C_1 |s^n - r^n|^{1/\beta(n)} \|v\|_V). \tag{3.69}$$

Ce qui achève la preuve du lemme. □

Revenons à la preuve de notre théorème. En utilisant (3.39) et (3.40) on a

$$\int_\Omega (a(l_s(v))\nabla(u - v)\nabla\phi = -\int_\Omega (a(l_r(u)) - a(l_s(v)))\nabla u \nabla\phi dx \qquad \forall \phi \in H_0^1(\Omega). \tag{3.70}$$

En prenant $\phi = u - v$ dans (3.70), (3.4) et (3.31) il vient que

$$m\, \|u - v\|_V^2 \leq \gamma |l_r(u) - l_s(v)| \int_\Omega |\nabla u||\nabla(u - v)|dx, \tag{3.71}$$

et en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a

$$m\, \|u - v\|_V^2 \leq \gamma |l_r(u) - l_s(v)| \|u\|_V \|u - v\|_V. \tag{3.72}$$

En utilisant le lemme 3.7 et (3.72) il résulte que

$$\begin{aligned} m\, \|u - v\|_V^2 \leq & \gamma |g|_2 (\, h(\Omega)\|u - v\|_V^2\, \|u\|_V \\ & + c_n^{1/\beta(n)} C_1\, |s^n - r^n|^{1/\beta(n)} \|u\|_V\, \|v\|_V \|u - v\|_V\,). \end{aligned} \tag{3.73}$$

Ainsi (3.73) et (3.7) nous donne

$$\left(m - \gamma |g|_2\, h(\Omega)\, \frac{|f|_\star}{m}\right) \|u - v\|_V^2 \leq c_n^{1/\beta(n)} C_2\, |s^n - r^n|^{1/\beta(n)} \frac{|f|_\star^2}{m^2} \|u - v\|_V. \tag{3.74}$$

$$\left(m - \gamma |g|_2\, h(\Omega)\, \frac{|f|_\star}{m}\right) \|u - v\|_V \leq c_n^{1/\beta(n)} C_2\, |s^n - r^n|^{1/\beta(n)} \frac{|f|_\star^2}{m^2}. \tag{3.75}$$

Ce qui montre bien la continuité. □

3 Cas où 'a' est croissante et $r = diam(\Omega)$

On a que :

Proposition 3.8. *On suppose que $f \in H^{-1}(\Omega)$, $f \geq 0$, $g \in L^2(\Omega)$, $g \geq 0$ et de plus que les conditions (3.3) et (3.4) sont satisfaites. Si a est croissante alors pour $r = diam(\Omega)$ le problème (3.2) admet une unique solution.*

On commence par rappeler que la condition $f \in H^{-1}(\Omega)$, $f \geq 0$ signifie que

$$< f, \phi >_{H^{-1},H_0^1} \geq 0 \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega),\ \phi \geq 0.$$

Pour faire la preuve de cette proposition nous avons besoin du lemme qui va suivre dû à M.Chipot et B.Lovat [eBL01] . Soit ϕ la solution faible du problème

$$\begin{cases} -\Delta\phi = f & \text{dans} \quad \Omega \\ \phi \in H_0^1(\Omega), \end{cases} \tag{3.76}$$

il est clair en utilisant le théorème de Lax-Milgram que le problème (3.76) admet une unique solution. Nous rappelons que la solution ϕ du problème (3.76) qui vient d'être construit est celle qui va nous servir dans le lemme qui suit.

Lemme 3.9. *[Chi00] Pour $r = diam(\Omega)$ le problème (3.2) admet le même nombre de solutions que le problème dans $\mathbb{R}$ suivant :*

$$a(\mu)\mu = l(\phi) \tag{3.77}$$

où $l(\phi) = \int\limits_{\Omega} g(y)\phi(y)dy$.

Démonstration. Soit u une solution du problème (3.1), comme $r = diam(\Omega)$ il vient que $l_r(u) = l(u)$. Ce qui entraine que $a(l(u))$ est une constante. La première équation de (3.1) peut donc s'écrire

$$-\Delta(a(l(u))u) = f \quad dans \quad \Omega. \tag{3.78}$$

Dû à l'unicité, en identifiant (3.76) et (3.78) on a que

$$a(l(u))u = \phi, \tag{3.79}$$

l étant linéaire en appliquant l des deux cotés de l'égalité on obtient

$$a(l(u))l(u) = l(\phi). \tag{3.80}$$

Ce qui montre bien que $l(u) \in \mathbb{R}$ est bien solution de (3.77).
Réciproquement, soit μ une solution de (3.77) alors puisque $a(\mu) \neq 0$, il existe une unique solution faible au problème

$$\begin{cases} -a(\mu)\Delta u = f & \text{dans} \quad \Omega \\ u \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \tag{3.81}$$

Dû à l'unicité des problèmes (3.76) et (3.81) il vient que

$$a(\mu)u = \phi. \tag{3.82}$$

En prenant l de part et d'autre de l'égalité on obtient :

$$a(\mu)l(u) = l(\phi) = a(\mu)\mu. \tag{3.83}$$

Comme $a(\mu) \neq 0$, on a

$$l(u) = \mu. \tag{3.84}$$

De (3.81) et (3.84) il résulte bien que u est une solution de (3.1). Ce qui termine la preuve du lemme. □

Remarque 3.10. *Le lemme 3.9 nous permet de voir que si $l(\phi) = 0$ alors $\mu = 0$ ce qui a pour conséquence que l'unique solution du problème (3.2) est $u = \frac{\phi}{a(0)}$ qui est aussi la solution de (3.2) en $r = 0$. Le fait de prendre dans certains exemples $f \geq 0$ et $f \not\equiv 0$ permettra d' obtenir d'après le principe du maximum $l(\phi) > 0$ et donc des solutions de (3.2) strictement positives.*

Revenons maintenant à la preuve de la proposition 3.8.

Démonstration. Soit μ_1 et μ_2 deux solutions du problème (3.77) on a bien que

$$a(\mu_1)\mu_1 = a(\mu_2)\mu_2. \tag{3.85}$$

De la remarque 3.10 on déduit que μ_1 et μ_2 positifs. Sans perte de généralité on peut supposer que $\mu_1 \geq \mu_2 \geq 0$, (3.85) peut alors se réecrire sous la forme

$$(a(\mu_1) - a(\mu_2))\mu_1 + a(\mu_2)(\mu_1 - \mu_2) = 0 \tag{3.86}$$

a étant croissante il vient que
- $(a(\mu_1) - a(\mu_2))\mu_1 = 0$,
- $a(\mu_2)(\mu_1 - \mu_2) = 0$.

Comme $\mu_1 \geq 0$ (voir remarque 3.10) on a $\mu_1 = \mu_2$. Ce qui termine la preuve de la proposition. □

4 Quelques propriétés locales des solutions stationnaires

On suppose dans tout ce qui va suivre que

$$a \in C^1(\mathbb{R}) \quad \inf_{\mathbb{R}} a > 0, \quad \sup_{\mathbb{R}} a < \infty, \tag{3.87}$$

$f \in H^{-1}(\Omega)$, $V = H_0^1(\Omega)$ et lorsque cela ne posera pas de confusion $\|.\|_V = \|.\|$. On définit l'application $F : \mathbb{R}_+ \times H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ par

$$F(r, u) = -div(a(l_r(u))\nabla u) - f.$$

4.1 Critère général d'inversibilité

Nous commençons d'abord par montrer que pour tout $r > 0$ l'application

$$u \mapsto F(r, u)$$

est dérivable en u et que sa dérivée est telle que $\forall w \in H_0^1(\Omega)$ on a

$$D_u F(r, u)(w) = -div(a(l_r(u))\nabla w) - div(a'(l_r(u))l_r(w)\nabla u).$$

Pour cela nous fixons $r > 0$ et $u \in H_0^1(\Omega)$, puis posons

$$A(w) = -div(a(l_r(u))\nabla w) - div(a'(l_r(u))l_r(w)\nabla u).$$

On a $A \in L(H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega))$ et montrons que si l'on pose

$$R(w) = F(r, u + w) - F(r, u) - A(w),$$

alors $R(w) = o(\|w\|)$ c'est à dire que

$$\lim_{\substack{\|w\| \to 0 \\ w \neq 0}} \frac{\|R(w)\|}{\|w\|} = 0.$$

On a que

$$\begin{aligned} < R(w), \phi >= & \int_\Omega a(l_r(u) + l_r(w))\nabla u \nabla \phi + \int_\Omega a(l_r(u) + l_r(w))\nabla w \nabla \phi \\ & - \int_\Omega a(l_r(u))\nabla u \nabla \phi - \int_\Omega a(l_r(u))\nabla w \nabla \phi - \int_\Omega a'(l_r(u))l_r(w)\nabla u \nabla \phi. \end{aligned} \tag{3.88}$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned} < R(w), \phi >= & \int_\Omega (a(l_r(u) + l_r(w)) - a(l_r(u)) - a'(l_r(u))l_r(w))\nabla u \nabla \phi \\ & + \int_\Omega (a(l_r(u) + l_r(w)) - a(l_r(u)))\nabla w \nabla \phi. \end{aligned} \tag{3.89}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et une petite majoration il vient que

$$\begin{aligned} | < R(w), \phi > | \leq & \|a(l_r(u) + l_r(w)) - a(l_r(u)) - a'(l_r(u))l_r(w)\|_\infty \|u\|_V \|\phi\|_V \\ & + \|a(l_r(u) + l_r(w)) - a(l_r(u))\|_\infty \|w\|_V \|\phi\|_V. \end{aligned} \tag{3.90}$$

D'où

$$\begin{aligned} \|R(w)\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq & \|a(l_r(u) + l_r(w)) - a(l_r(u)) - a'(l_r(u))l_r(w)\|_\infty \|u\|_V \\ & + \|a(l_r(u) + l_r(w)) - a(l_r(u))\|_\infty \|w\|_V. \end{aligned} \tag{3.91}$$

Ce qui fait bien en supposant $w \neq 0$ que

$$\begin{aligned} \frac{\|R(w)\|_{H^{-1}}}{\|w\|_V} \leq & \|a(l_r(u) + l_r(w)) - a(l_r(u)) - a'(l_r(u))l_r(w)\|_\infty \frac{\|u\|_V}{\|w\|_V} \\ & + \|a(l_r(u) + l_r(w)) - a(l_r(u))\|_\infty. \end{aligned} \tag{3.92}$$

Puisque

$$a(l_r(u)+l_r(w))-a(l_r(u))=a'(l_r(u))l_r(w)+\theta(|l_r(w)|)$$

avec $\theta(|l_r(w)|)$ tel que

$$\lim_{\substack{|l_r(w)|\to 0\\ l_r(w)\neq 0}}\frac{\theta(|l_r(w)|)}{|l_r(w)|}=0.$$

En y ajoutant (3.27), l'inégalité (3.92) devient alors

$$\frac{\|R(w)\|_{H^{-1}}}{\|w\|_V}\leq\frac{|\theta(|l_r(w)|)|}{\|w\|_V}\|u\|_V+C\|a'\|_\infty\|w\|_V+\theta(|l_r(w)|). \tag{3.93}$$

De plus on sait aussi en utilisant (3.27) que

$$\frac{|\theta(|l_r(w)|)|}{\|w\|_V}\leq C\frac{|\theta(|l_r(w)|)|}{|l_r(w)|}, \tag{3.94}$$

(3.94) et (3.93) nous permettent de conclure que

$$\lim_{\substack{\|w\|\to 0\\ w\neq 0}}\frac{\|R(w)\|}{\|w\|}=0.$$

On démontre le résultat suivant

Théorème 3.11. *Soit u une solution du problème $F(r,u)=0$. On suppose que r est fixé et $\|a'\|_\infty<\frac{m}{c}$, $g\equiv 1$ avec $c=|B(0,r)|^{1/2}h(\Omega)\|u\|_V$ où $|B(0,r)|$ désigne la mesure de la boule de centre 0 et de rayon r et $h(\Omega)$ la constante de Poincaré définie comme dans (3.9). Alors on a que l'application*

$$\begin{aligned} D_u(r,u): H_0^1(\Omega) &\longrightarrow H^{-1}(\Omega)\\ w &\longmapsto D_uF(r,u)(w), \end{aligned} \tag{3.95}$$

avec

$$D_uF(r,u)(w)=-div(a(l_r(u))\nabla w)-div(a'(l_r(u))l_r(w)\nabla u)$$

est un isomorphisme .

Démonstration. Soit

$$\begin{aligned} B: H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R}\\ (w,\phi) &\longmapsto B(w,\phi), \end{aligned} \tag{3.96}$$

avec

$$B(w,\phi)=\int_\Omega a(l_r(u))\nabla w\nabla\phi dx+\int_\Omega a'(l_r(u))l_r(w)\nabla u\nabla\phi dx. \tag{3.97}$$

Il est facile de montrer que B est bilinéaire et continue, de plus

$$\left|\int_\Omega a'(l_r(u))l_r(w)\nabla u\nabla\phi dx\right|\leq\int_\Omega|a'(l_r(u))||l_r(w)||\nabla u||\nabla\phi|dx,$$

d'où en utilisant (3.27) il vient que

$$\left|\int_\Omega a'(l_r(u))l_r(w)\nabla u\nabla w dx\right|\leq|B(0,r)|^{1/2}h(\Omega)\|a'\|_\infty\|u\|_V\|w\|_V^2. \tag{3.98}$$

De plus (3.97) et (3.98) nous donne bien que

$$B(w,w) \geq (m - |B(0,r)|^{1/2}h(\Omega))\|a'\|_\infty \|u\|_V)\|w\|_V^2.$$

En prenant

$$c = |B(0,r)|^{1/2}h(\Omega)\|u\|_V$$

et comme par hypothèse

$$m - c\|a'\|_\infty > 0,$$

on a que B est coercive. Par application du théorème de Lax Milgram pour tout $f \in H^{-1}(\Omega)$ il existe un unique $w \in H_0^1(\Omega)$ tel que

$$\begin{cases} w \in H_0^1(\Omega) \\ D_u(r,u)(w) = f, \end{cases}$$

d'où la bijectivité. $D_uF(r,u)$ étant bijective, continue et linéaire on applique le théorème de l'application ouverte voir [Bre83] pour conclure que $(D_uF(r,u))^{-1}$ est continue. Ce qui termine la preuve du théorème. □

4.2 Quelques applications

Nous donnons quelques applications du théorème 3.11. On suppose que $r = diam(\Omega) = d$ et que $l(u) = \int_\Omega u(y)dy$. On suppose que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Commençons par montrer que l'application

$$\begin{aligned}]0,+\infty[&\to \mathbb{R} \\ r &\mapsto l_r(u)(x) \end{aligned}$$

est dérivable p.p $x \in \Omega$. En effet, soit $r > 0$ et $u \in H_0^1(\Omega)$ on sait que u peut être prolongé par 0 en dehors de Ω (voir théorème 2.1) par la fonction $\tilde{u} \in H^1(\mathbb{R}^N)$ définie par :

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x) & x \in \Omega \\ 0 & x \in \mathbb{R}^N \diagdown \Omega. \end{cases} \tag{3.99}$$

Si on suppose que $\tilde{u}$ est continue sur $\mathbb{R}^N$ alors on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} l_r(u)(x) &= \frac{\partial}{\partial r}\left(\int_{B(x,r)\cap\Omega} \tilde{u}(y)\,dy\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial r}\left(\int_{\|\sigma\|=1}\int_0^r \tilde{u}(x+s\sigma)s^{N-1}\,dsd\sigma\right) \\ &= \int_{\|\sigma\|=1} \tilde{u}(x+r\sigma)r^{N-1}\,d\sigma \\ &= \int_{\partial(B(x,r)\cap\Omega)} u(y)\,dy. \end{aligned} \tag{3.100}$$

Le cas général se démontre par densité. En effet soit une suite $\tilde{\rho}_n$ de $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ telle que

$$\rho_n \to u \text{ dans } H_0^1(\Omega), \tag{3.101}$$

avec ρ_n la restriction de $\tilde{\rho}_n$ à Ω. Il est clair au vu de la continuité de l'application $u \mapsto l_r(u)$ que

$$l_r(\rho_n) \longrightarrow l_r(u) \quad \text{p.p } x \in \Omega. \tag{3.102}$$

De plus on a que

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial}{\partial r} l_r(\rho_n)(x) - \int_{\partial(B(x,r)\cap\Omega)} u(y)\,dy\right| &= \left|\int_{\partial(B(x,r)\cap\Omega)} \rho_n(y)\,dy - \int_{\partial B(x,r)\cap\Omega} u(y)\,dy\right| \\ &\leq \int_{\partial(B(x,r)\cap\Omega)} |\rho_n(y) - u(y)|\,dy \\ &\leq |\partial(B(x,r)\cap\Omega)|^{1/2} |\rho_n - u|_{L^2(\partial(B(x,r)\cap\Omega))}\end{aligned}$$

et

$$\left|\frac{\partial}{\partial r} l_r(\rho_n)(x) - \int_{\partial(B(x,r)\cap\Omega)} u(y)\,dy\right| \leq C\,|\partial(B(x,r)\cap\Omega)|^{1/2} \|\rho_n - u\|_{H_0^1(\Omega)}, \tag{3.103}$$

où C est une constante strictement positive telle que $|u|_{L^2(\partial(B(x,r)\cap\Omega))} \leq C\|u\|_{H^1(\Omega)}$ (voir théorème 2.3). En utilisant (3.101) dans l'équation (3.103) précédente on a que

$$\frac{\partial}{\partial r} l_r(\rho_n) \longrightarrow \int_{\partial(B(x,r)\cap\Omega)} u(y)\,dy \quad \text{uniformément.} \tag{3.104}$$

On conclut donc en utilisant (3.102) et (3.104) que

$$\frac{\partial}{\partial r} l_r(u)(x) = \int_{\partial(B(x,r)\cap\Omega)} u(y)\,dy \quad \text{p.p} \quad \text{dans} \quad \Omega.$$

On montre aussi que l'application

$$\begin{aligned}]0,+\infty[&\to H^{-1}(\Omega) \\ r &\mapsto F(r,u)\end{aligned}$$

est dérivable en r et que sa dérivée est

$$D_r F(r,u) = -div(a'(l_r(u))\frac{\partial}{\partial r} l_r(u)\nabla u). \tag{3.105}$$

Proposition 3.12. *L'application*

$$\begin{aligned} F:\ (0,\infty)\times H_0^1(\Omega) &\to H^{-1}(\Omega) \\ (r,u) &\mapsto -div(a(l_r(u))\nabla u) - f,\end{aligned} \tag{3.106}$$

est C^1 *dans* $(0,\infty)\times H_0^1(\Omega)$.

Démonstration. Pour montrer que F est C^1 dans $(0,\infty)\times H_0^1(\Omega)$, F étant continue dans $(0,\infty)\times H_0^1(\Omega)$ nous avons besoin de montrer que les applications

$$\begin{aligned} D_r F &: (0,\infty)\times H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega) \\ D_u F &: (0,\infty)\times H_0^1(\Omega) \to \mathcal{L}(H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega))\end{aligned} \tag{3.107}$$

sont continues. En effet soient (r,u) et $Y = \mathbb{R}\times H_0^1(\Omega)$. On définit la norme de Y par $\|.\|_Y = |.| + \|.\|_V$ de tel sorte que pour tout $(r,u)\in Y$ on ait $\|(r,u)\|_Y = |r| + \|u\|_V$

où $|.|$ désigne simplement la valeur absolue. On considère (r_n, u_n) et (r, u) tel que $r_n \to r$ et $u_n \to u$. On a que pour tout $w \in H_0^1(\Omega)$

$$\Big| < D_uF(r_n, u_n)w - D_uF(r, u)w, \phi > \Big| = \Big| \int_\Omega a'(l_{r_n}(u_n))l_{r_n}(w)\nabla u_n \nabla\phi$$
$$- \int_\Omega a'(l_r(u))l_r(w)\nabla u\nabla\phi + \int_\Omega a(l_{r_n}(u_n))\nabla w\nabla\phi - \int_\Omega a(l_r(u))\nabla w\nabla\phi\Big|,$$

et aussi

$$\begin{aligned}
&\Big| < D_uF(r_n, u_n)w - D_uF(r, u)w, \phi > \Big| = \Big| \int_\Omega (a'(l_{r_n}(u_n)) - a'(l_{r_n}(u)))l_{r_n}(w)\nabla u_n\nabla\phi \\
&+ \int_\Omega a'(l_{r_n}(u))l_{r_n}(w)\nabla(u_n - u)\nabla\phi + \int_\Omega a'(l_{r_n}(u))(l_{r_n}(w) - l_r(w))\nabla u\nabla\phi \\
&+ \int_\Omega (a'(l_{r_n}(u)) - a'(l_r(u)))l_r(w)\nabla u\nabla\phi + \int_\Omega (a(l_{r_n}(u_n)) - a(l_{r_n}(u)))\nabla w\nabla\phi \\
&+ \int_\Omega (a(l_{r_n}(u)) - a(l_r(u)))\nabla w\nabla\phi\Big|,
\end{aligned} \tag{3.108}$$

et donc

$$\begin{aligned}
&\Big| < D_uF(r_n, u_n)w - D_uF(r, u)w, \phi > \Big| \leq \\
&\int_\Omega |a'(l_{r_n}(u_n)) - a'(l_{r_n}(u))||l_{r_n}(w)||\nabla u_n||\nabla\phi| \\
&+ \int_\Omega |a'(l_{r_n}(u))||l_{r_n}(w)||\nabla(u_n - u)||\nabla\phi| + \int_\Omega |a'(l_{r_n}(u))||l_{r_n}(w) - l_r(w)||\nabla u||\nabla\phi| \\
&+ \int_\Omega |a'(l_{r_n}(u)) - a'(l_r(u))||l_r(w)||\nabla u||\nabla\phi| + \int_\Omega |a(l_{r_n}(u_n)) - a(l_{r_n}(u))||\nabla w||\nabla\phi| \\
&\int_\Omega |a(l_{r_n}(u)) - a(l_r(u))||\nabla w||\nabla\phi|,
\end{aligned} \tag{3.109}$$

En utilisant (3.27), (3.47) et (3.109) on a

$$\begin{aligned}
&\Big| < D_uF(r_n, u_n)w - D_uF(r, u)w, \phi > \Big| \leq \\
&\|a'(l_{r_n}(u_n)) - a'(l_{r_n}(u))\|_\infty (|\Omega|^{1/2}h(\Omega))^2 \|w\| \|u_n\| \|\phi\| \\
&+ \|a'\|_\infty |\Omega|^{1/2}h(\Omega)\|w\| \|u_n - u\| \|\phi\| + \|a'\|_\infty k^{\frac{1}{2}} |r_n^N - r^N|^{\frac{1}{2}} h(\Omega)\|w\| \|u\| \|\phi\| \\
&+ \|a'(l_{r_n}(u_n)) - a'(l_r(u))\|_\infty \|u\||\Omega|^{1/2}h(\Omega) \|w\| \|u\| \|\phi\| \\
&+ \|a(l_{r_n}(u_n)) - a(l_{r_n}(u))\|_\infty \|w\|\|\phi\| + \|a(l_{r_n}(u)) - a(l_r(u))\|_\infty \|w\| \|\phi\|,
\end{aligned} \tag{3.110}$$

où N représente la dimension de Ω et $\|a\|_\infty = \sup_{x\in\Omega} |a(x)|$. On déduit de (3.110) que

$$\begin{aligned}
&\|D_uF(r_n,u_n) - D_uF(r,u)\|_{\mathcal{L}(H_0^1(\Omega),H^{-1}(\Omega))} \leq \\
&\|a'(l_{r_n}(u_n)) - a'(l_{r_n}(u))\|_\infty (|\Omega|^{1/2}h(\Omega))^2 \|u_n\| \\
&+ \|a'\|_\infty |\Omega|^{1/2}h(\Omega)\|u_n - u\| + \|a'\|_\infty k^{\frac{1}{2}} |r_n^N - r^N|^{\frac{1}{2}} h(\Omega)\, \|u\| \\
&+ \|a'(l_{r_n}(u_n)) - a'(l_r(u))\|_\infty \|u\| |\Omega|^{1/2}h(\Omega)\|u\| \\
&+ \|a(l_{r_n}(u_n)) - a(l_{r_n}(u))\|_\infty + \|a(l_{r_n}(u)) - a(l_r(u))\|_\infty .
\end{aligned} \tag{3.111}$$

D'après le lemme 3.7 on a

$$|l_{r_n}(u_{r_n})(x) - l_r(u)(x)| \leq h(\Omega)\|u_{r_n} - u\|_{H_0^1(\Omega)} + C\, |r_n^N - r^N|^{1/\beta(N)} \|u\|_{H_0^1(\Omega)}. \tag{3.112}$$

En utilisant le fait que

$$\begin{aligned}
&r_n \to r \quad dans \quad \mathbb{R} \\
&u_n \to u \quad dans \quad H_0^1(\Omega),
\end{aligned} \tag{3.113}$$

on obtient

$$l_{r_n}(u_n) \to l_{r_n}(u) \quad \text{uniformément dans} \quad \Omega. \tag{3.114}$$

En considérant (3.114), (3.113) et le fait que $a \in C^1(\mathbb{R})$ pour passer à la limite dans (3.110) on a bien que

$$\|D_uF(r_n,u_n) - D_uF(r,u)\|_{\mathcal{L}(H_0^1(\Omega),H^{-1}(\Omega))} \to 0 \quad \text{lorsque} \quad (r_n,u_n) \longrightarrow (r,u).$$

Ce qui prouve bien que

$$D_uF : (0,\infty) \times H_0^1(\Omega) \to \mathcal{L}(H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega))$$

est continue et cela pour tout $(r,u) \in (0,\infty) \times H_0^1(\Omega)$. De la même manière on montre que $\|D_rF(r_n,u_n) - D_rF(r,u)\|_{H^{-1}(\Omega)} \to 0$ lorsque $(r_n,u_n) \longrightarrow (r,u)$.Ce qui prouve bien que

$$D_rF : (0,\infty) \times H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$$

est continue et cela pour tout $(r,u) \in (0,\infty) \times H_0^1(\Omega)$. □

Nous pouvons maintenant montrer le résultat suivant :

Proposition 3.13. *On suppose que $g \equiv 1$ et que le problème $F(d,u) = 0$ admet une unique solution $u^\star$ et que de plus*

$$m - c\|a'\|_\infty > 0 \tag{3.115}$$

où $c = h(\Omega)|\Omega|^{1/2}\|u^\star\|_V$ alors il existe un $\beta > 0$ et un $\delta > 0$ tel que pour tout $r \in]d-\beta, d+\beta[$, le problème $F(r,u) = 0$ admet une unique solution u telle que pour $\|u - u^\star\| \leq \delta$.

Démonstration. La preuve est une conséquence directe du théorème des fonctions implicites 2.9 . Soit $u^\star$ l'unique solution du problème, dû à (3.115) on applique le théorème 3.11 pour montrer que $D_uF(d,u^\star)$ est un isomorphisme de $H_0^1(\Omega)$ dans $H^{-1}(\Omega)$. Le théorème 2.9 des fonctions implicites nous permet donc de conclure qu'il existe un $\beta > 0$ et un $\delta > 0$ tel que pour tout $r \in]d-\beta, d+\beta[$, le problème $F(r,u) = 0$ admet une solution pour $\|u - u^\star\| \leq \delta$. □

Dans ce qui va suivre nous allons montrer un résultat qui généralise la proposition 3.13. On pose toujours

$$F(r,u) = -div(a(l_r(u))\nabla u) - f.$$

On suppose de plus que si $r = diam(\Omega)$ alors il existe exactement k solutions au problème

$$F(d,u) = 0. \tag{3.116}$$

Soient $\{u_i^\star\}_{i=1,\dots,k}$ ces k solutions, on a le résultat suivant :

Proposition 3.14. *On suppose que $g \equiv 1$. Soient $\{u_i^\star\}_{i=1,\dots,k}$ les k solutions du problème (3.116) et*

$$m - c_1\|a'\|_\infty > 0 \tag{3.117}$$

où

$$c_1 = \max_{1\le i\le k} c_i$$

avec $c_i = |\Omega|^{1/2}h(\Omega)\|u_i^\star\|_V, \quad \forall i \in \{1,\dots,k\}$. Alors il existe un $\beta > 0$ tel que pour tout $r \in]d-\beta, d+\beta[$, le problème $F(r,u) = 0$ admet exactement k solutions.

Démonstration. La preuve utilise les mêmes arguments que précédemment. Soient $\{u_i^\star\}_{i=1,\dots,k}$ les k solutions de (3.116), il est clair que (dû au théorème 3.11 et dû à (3.117)) $D_uF(d,u_i^\star)$ est un isomorphisme de $H_0^1(\Omega)$ dans $H^{-1}(\Omega)$ et cela $\forall i \in \{1,\dots,k\}$, nous appliquons comme cela a été fait dans le cas précédent le théorème 2.9 des fonctions implicites localement à chaque solution, pour conclure qu'il existe un $\beta_i > 0$ et $\delta_i > 0$ tel que pour tout $r \in]d-\beta_i, d+\beta_i[$, le problème $F(r,u_i) = 0$ admet une unique solution pour $\|u - u_i^\star\| \le \delta_i$. En posant simplement

$$\beta = \min_{1\le i\le k}\{\beta_i\}$$

il vient que pour tout $r \in]d-\beta, d+\beta[$, le problème $F(r,u) = 0$ admet au moins k solutions.

Montrons qu'il admet au plus k solutions pour terminer la preuve. Pour cela supposons qu'il existe une branche de solutions tel que pour tout $r_n \in [d-\beta, d[$, le problème $F(r_n,u_{r_n}) = 0$ admet sans perte de généralité $k+1$ solutions avec β définie comme ci dessus. On considère maintenant u_{r_n} la solution du problème $F(r_n,u_{r_n}) = 0$, lorsque $r_n \to d$, il est clair au vu des méthodes de compacité utilisées pour passer à la limite dans le théorème 3.1 que $u_{r_n} \to u_1 \quad dans \quad H_0^1(\Omega)$ où u_1 est une solution du problème $F(d,u) = 0$. Ce qui est en contradiction avec le fait que d'après le théorème des fonctions implicites, il existe un $\beta_i > 0$ et un $\delta_i > 0 \quad i \in \{1,\dots,k\}$ tel que pour les k solutions du problème $F(d,u) = 0$, on a pour tout $r \in]d-\beta_i, d+\beta_i[$, le problème $F(r,u) = 0$ admet une unique solution pour $\|u-u_i\| \le \delta_i$. Ce qui achève la preuve. □

4.3 Le cas $r = diam(\Omega)$

Nous donnons dans ce qui suit un critère important d'inversibilité utilisant l'alternative de Fredholm. On montre le résultat suivant :

Théorème 3.15. *On suppose que $f \in H^{-1}(\Omega)$, $f \not\equiv 0$ et $g \equiv 1$. Soit $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que $F(d,u) = 0$ et soit $D_uF(d,u)$ l'opérateur linéaire tel que*

$$\begin{aligned} D_uF(d,u) : H_0^1(\Omega) &\longrightarrow H^{-1}(\Omega) \\ w &\longmapsto D_uF(d,u)(w), \end{aligned} \tag{3.118}$$

avec

$$D_uF(r,u)(w) = -a'(l(u))l(w)\Delta u - a(l(u))\Delta w,$$

alors $F'_u(d,u)$ est inversible si et seulement si $a'(l(u))l(u) + a(l(u)) \neq 0$.

Pour faire la démonstration de ce théorème nous avons besoin des lemmes suivants :

Lemme 3.16. *On considère le problème*

$$\begin{cases} -a'(l(u))l(w)\Delta u - a(l(u))\Delta w = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega, \\ w \in H_0^1(\Omega), \end{cases} \tag{3.119}$$

avec u la solution du problème

$$\begin{cases} -a(l(u))\Delta u = f \quad \text{dans} \quad \Omega, \\ u \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \tag{3.120}$$

On pose

$$X_u = \{v \in H_0^1(\Omega) \quad v = mu, \quad m \in \mathbb{R}\}.$$

Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de (3.119) alors

$$\mathcal{S} \subset X_u.$$

Démonstration. On considère $\phi_1 \equiv 0$ l'unique solution du problème

$$\begin{cases} -\Delta\phi_1 = 0 \qquad \text{dans} \quad \Omega, \\ \phi_1 \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \tag{3.121}$$

Soit w une solution de (3.119), comme $a'(l(u))$, $l(w)$ et $a(l(u))$ sont des constantes la première expression de (3.119) peut se réecrire

$$-\Delta(a'(l(u))l(w)u + a(l(u))w) = 0, \tag{3.122}$$

(3.121) et (3.122) nous donne

$$a'(l(u))l(w)u + a(l(u))w = 0. \tag{3.123}$$

D'où

$$w = cu$$

avec $c = -\frac{a'(l(u))}{a(l(u))}l(w)$, ce qui prouve bien que

$$\mathcal{S} \subset X_u.$$

□

On a aussi

Lemme 3.17. *$D_uF(d,u)$ est inversible si et seulement si $ker(D_uF(d,u)) = \{0\}$.*

Démonstration. La condition nécessaire est triviale, nous nous contenterons donc de montrer la condition suffisante. Si $ker(D_uF(d,u)) = \{0\}$ alors on a que le problème

$$\begin{cases} -a'(l(u))l(w)\Delta u - a(l(u))\Delta w = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega, \\ w \in H_0^1(\Omega), \end{cases} \tag{3.124}$$

admet $w \equiv 0$ comme unique solution . Soit B l'opérateur linéaire

$$\begin{aligned} B : H_0^1(\Omega) &\longrightarrow H^{-1}(\Omega) \\ w &\longmapsto Bw = -a'(l(u))l(w)\Delta u. \end{aligned} \tag{3.125}$$

On sait que B est continu. En effet

$$< Bw, \phi >= \int_\Omega a'(l(u))l(w)\nabla u \nabla \phi, \tag{3.126}$$

en utilisant (3.27) dans (3.126) on a que

$$| < Bw, \phi > | \leq |\Omega|^{\frac{1}{2}} h(\Omega) \|a'\|_\infty \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|w\|_{H_0^1(\Omega)} \|\phi\|_{H_0^1(\Omega)}$$

d'où la continuité.

Pour $g \in H^{-1}(\Omega)$ le problème

$$\begin{cases} -a'(l(u))l(w)\Delta u - a(l(u))\Delta w = g \quad \text{dans} \quad \Omega \\ w \in V, \end{cases} \tag{3.127}$$

peut se reécrire

$$Bw - a(l(u))\Delta w = g. \tag{3.128}$$

L'opérateur $-\Delta$ défini par

$$\begin{aligned} -\Delta : H_0^1(\Omega) &\longrightarrow H^{-1}(\Omega) \\ b &\longmapsto -\Delta b, \end{aligned} \tag{3.129}$$

étant inversible, (3.128) devient alors

$$(-\Delta^{-1} \circ B)w + a(l(u))w = -\Delta^{-1} g. \tag{3.130}$$

Ce qui fait bien

$$\left(\frac{1}{a(l(u))} (-\Delta^{-1} \circ B) + I \right) w = h, \tag{3.131}$$

avec

$$h = -\frac{1}{a(l(u))} \Delta^{-1} g.$$

D'où l'équivalence des problèmes (3.127) et (3.131).

$-\Delta^{-1}$ est compact (conséquence de l'injection compacte de $H_0^1(\Omega)$ dans $H^{-1}(\Omega)$), de plus comme B est continu il vient que $-\Delta^{-1} \circ B$ est compact. On peut donc appliquer l'alternative de Fredholm à (3.131) pour affirmer que

– ou bien le problème

$$\left(\frac{1}{a(l(u))}(-\Delta^{-1}\circ B)+I\right)w=h$$

admet une unique solution et dans ce cas $\left(\frac{1}{a(l(u))}(-\Delta^{-1}\circ B)+I\right)$ est inversible ce qui implique que $D_uF(d,u)$ est inversible

– ou bien le problème

$$\left(\frac{1}{a(l(u))}(-\Delta^{-1}\circ B)+I\right)w=0 \tag{3.132}$$

admet un nombre fini $k>1$ de solutions indépendantes.

On va montrer que ce dernier cas est impossible c'est-à-dire que le problème (3.132) admet une unique solution et donc $k=1$. En effet on a montré que les problèmes

$$D_uF(d,u)w=0$$

et

$$\left(\frac{1}{a(l(u))}(-\Delta^{-1}\circ B)+I\right)w=0,$$

sont équivalents. Comme par hypothèse

$$ker(D_uF(d,u))=\{0\},$$

il est donc naturel que le problème (3.132) admette lui aussi une unique solution, ce qui contredit le fait que $k>1$. On a bien montré que dans tous les cas

$$\left(\frac{1}{a(l(u))}(-\Delta^{-1}\circ B)+I\right),$$

est inversible ce qui implique que $D_uF(d,u)$ est inversible et termine la preuve. □

Revenons maintenant à la preuve du théorème.

Démonstration. (Théorème 3.15) Pour montrer la condition nécessaire nous faisons un raisonnement par contraposé, en d'autres termes nous montrons que si $a'(l(u))l(u)+a(l(u))=0$ alors $D_uF(d,u)$ est non inversible. Supposons que

$$a'(l(u))l(u)+a(l(u))=0$$

alors en prenant $u=w$ on a que

$$D_uF(d,u)u=-a'(l(u))l(u)\Delta u-a(l(u))\Delta u=0,$$

il résulte donc que

$$D_uF(d,u)u=0.$$

Comme $u\not\equiv 0$ (principe du maximum car $f\not\equiv 0$), il vient que $D_uF(d,u)$ est non inversible.

Pour la condition suffisante on procède comme précédemment par un raisonnement par contraposé. On suppose donc que $D_u(d,u)$ est non inversible. D'après le lemme 3.17 on a $ker(D_uF(d,u)) \neq \{0\}$. Soit $w \in ker(D_uF(d,u))$ avec $w \neq 0$. En utilisant (3.123) on a que

$$a'(l(u))l(w)u + a(l(u))w = 0. \tag{3.133}$$

On sait aussi d'après l'équation (3.133) que $l(w) \neq 0$. En effet si $l(w) = 0$ on aurait d'après (3.133) que $a(l(u))w = 0$ et donc $w = 0$ ce qui est absurde et montre bien que $l(w) \neq 0$. En appliquant l à l'équation (3.133) on obtient

$$a'(l(u))l(w)l(u) + a(l(u))l(w) = 0.$$

Il résulte que

$$a'(l(u))l(u) + a(l(u)) = 0.$$

Ce qui prouve bien la condition suffisante, et termine la preuve du théorème. □

4.4 Application au cas 'a' croissant

On considère toujours ϕ la solution faible du problème

$$\begin{cases} -\Delta\phi = f & \text{dans} \quad \Omega \\ \phi \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \tag{3.134}$$

Alors on a le résultat suivant :

Corollaire 3.18. *On suppose que (3.3) et (3.4) sont vérifiées. On prend $f \in H^{-1}(\Omega)$, $g \equiv 1$, $f \geq 0$ et a croissant. Si*

$$m - c\|a'\|_\infty > 0 \tag{3.135}$$

où $c = h(\Omega)|\Omega|^{1/2}\|u^\star\|_V$ avec $u^\star$ l'unique solution du problème en $r = d$ alors il existe un $\beta > 0$ et un $\delta > 0$ tel que $\forall r \in]d-\beta, d+\beta[$ le problème $F(r,u) = 0$ admette une unique solution pour $\|u - u^\star\| \leq \delta$.

Démonstration. On a d'après le principe du maximum que $\phi > 0$ dans Ω, ce qui entraine que $l(\phi) > 0$. En appliquant la proposition 3.8 on a que le problème $F(d,u) = 0$ admet une unique solution. La proposition 3.13 et (3.136) nous donne bien le résultat souhaité. □

Remarque 3.19. *Un résultat similaire au corollaire 3.18 peut être obtenu dans le cas décroissant, il s'énoncerait de la façon suivante*

On suppose que (3.3) et (3.4) sont vérifiées. On prend $f \in H^{-1}(\Omega)$, $f \leq 0$ et a décroissant. Si

$$m - c\|a'\|_\infty > 0 \tag{3.136}$$

où $c = h(\Omega)|\Omega|^{1/2}\|u^\star\|_V$ avec $u^\star$ l'unique solution du problème en $r = d$ alors il existe un $\beta > 0$ et un $\delta > 0$ tel que $\forall r \in]d-\beta, d+\beta[$ le problème $F(r,u) = 0$ admette une unique solution pour $\|u - u^\star\| \leq \delta$.

La preuve découle du fait que cette fois $l(\phi) < 0$. Soit μ_1 et μ_2 deux solutions du problème en $r = d$ on a bien que

$$a(\mu_1)\mu_1 = a(\mu_2)\mu_2 \tag{3.137}$$

Sans perte de généralité on peut supposer que $\mu_1 \geq \mu_2$ l'égalite peut se réecrire sous la forme

$$(a(\mu_1) - a(\mu_2))\mu_1 + a(\mu_2)(\mu_1 - \mu_2) = 0, \tag{3.138}$$

a étant décroissante il vient que

$$(a(\mu_1) - a(\mu_2))\mu_1 = 0 \quad et \quad a(\mu_2)(\mu_1 - \mu_2) = 0.$$

Ce qui implique bien que $\mu_1 = \mu_2$ et donc l'unicité. On applique comme dans le cas croissant la proposition 3.13 pour conclure.

Remarque 3.20. *Le cas $l(\phi) = 0$ est un cas singulier, dans la mesure où dans ce cas le problème $F(d, u) = 0$ admet une unique solution u tel que $u = \frac{\phi}{a(0)}$, ce qui montre en appliquant la proposition 3.13 qu'il existe un $\beta > 0$ tel que le problème $F(r, u(r)) = 0$ admette une unique solution $\forall r \in]d - \beta, d + \beta[$ et cela quelque soit la monotonie de a.*

5 Un petit résultat de parité

Nous donnons ici des conditions pour lesquelles on peut déterminer la parité de la solution u.

Proposition 3.21. *On suppose que $r = diam(\Omega)$, Ω est symétrique par rapport à 0, $f \in H^{-1}(\Omega)$ et f est paire c'est à dire*

$$< f, h >=< f, \check{h} > \quad \forall h \in H_0^1(\Omega)$$

avec $\check{h}(x) = h(-x)$. Si u est une solution du problème (3.2) alors u est paire.

Remarque 3.22. *Avant de faire la preuve de cette proposition on peut remarquer que si $r = diam(\Omega)$ alors on sait que la solution u du problème (3.2) s'écrit $u = \frac{\phi}{a(\mu)}$ ($a(\mu)$ étant constante) et il est clair que si ϕ est paire u l'est aussi. Pour la preuve de la proposition, on montrera donc que ϕ est paire.*

Démonstration. Soit ϕ la solution du problème

$$\begin{cases} -\Delta\phi = f & \text{dans} \quad \Omega \\ \phi = 0 & \text{dans} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.139}$$

Sous la forme faible on a que

$$\int_\Omega \nabla\phi\nabla h =< f, h > \quad \forall h \in H_0^1(\Omega).$$

Soit v telle que $v(x) = \phi(-x)$, on a

$$\int_\Omega \nabla v(x)\nabla h(x)dx = \int_\Omega \nabla\phi(-x)\nabla h(x)dx.$$

En faisant un changement de variable $y = -x$ et en utilisant le fait que Ω soit symétrique par rapport à 0, on obtient

$$\int_\Omega \nabla v \nabla h \, dx = \int_\Omega -(\nabla \phi)(y)(\nabla h)(-y) \, dy,$$

et donc

$$\int_\Omega \nabla v \nabla h = \int_\Omega (\nabla \phi)(y) \nabla_y \{h(-y)\}. \tag{3.140}$$

Ce qui fait bien

$$\int_\Omega \nabla v \nabla h = \int_\Omega \nabla \phi(y) \nabla \check{h}(y) dy =< f, \check{h} > .$$

Dû à la parité de f c'est à dire que

$$< f, \check{h} >=< f, h > \quad \forall h \in V,$$

avec $\check{h}(x) = h(-x)$ il vient que

$$\int_\Omega \nabla v \nabla h =< f, h >= \int_\Omega \nabla \phi \nabla h \quad \forall h \in V, \tag{3.141}$$

l'unicité de (3.139) nous permet de conclure que $v = \phi$. Ce qui achève la preuve de la proposition. $\square$

Chapitre 4

Phase transitoire des solutions stationnaires

On considère toujours Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et de bord $\partial\Omega$. Soit a une fonction continue vérifiant

$$0 < m \leq a(\epsilon) \leq M \quad \forall \epsilon \in \mathbb{R}.$$

Soit $f \in H^{-1}(\Omega)$, on considère les problèmes sous leur forme faible

$$\begin{cases} v \in H_0^1(\Omega) \\ -a(0)\Delta v = f \quad \text{dans } \Omega, \end{cases} \tag{4.1}$$

$$\begin{cases} u \in H_0^1(\Omega) \\ -a(l(u))\Delta u = f \quad \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{4.2}$$

Nous nous intéressons ici au comportement d'une solution w_r du problème

$$\begin{cases} w_r \in H_0^1(\Omega) \\ -div(a(l_r(w_r))\nabla w_r) = f \quad \text{dans } \Omega, \end{cases} \tag{4.3}$$

lorsque le paramètre r varie. On rappelle qu'ici

$$\begin{aligned} l_r(w_r)(x) &= \int_{B(x,r)\cap\Omega} g(y)w_r(y)dy \\ l(u) &= \int_\Omega g(y)u(y)dy, \end{aligned} \tag{4.4}$$

et $g \in L^2(\Omega)$.

1 Convergence de la solution w_r

Dans cette section nous montrons à travers le résultat qui suit le comportement de la solution w_r lorsque r tend respectivement vers 0 ou $diam(\Omega)$. Plus précisemment nous allons montrer que w_r converge vers v et u respectivement lorsque r tend vers 0 et $diam(\Omega)$ avec v la solution de (4.1) et u une solution de (4.2). On a le résultat suivant

Théorème 4.1. *Soit w_r la solution de (4.3), alors on a que*

$$w_r \underset{r\to 0}{\longrightarrow} v \quad \text{dans} \quad H_0^1(\Omega) \ \textit{fortement.} \tag{4.5}$$

De plus si (3.3), (3.4) (3.31) et (3.32) sont vérifiées alors on a que

$$w_r \underset{r\to diam(\Omega)}{\longrightarrow} u \quad \text{dans} \quad H_0^1(\Omega) \ \textit{fortement.} \tag{4.6}$$

Avec v et u respectivement les solutions de (4.1) et de (4.2).

Démonstration. Nous commencons par montrer (4.5).
Il est clair en utilisant (3.7) qu'il existe un $v_\star \in H_0^1(\Omega)$ et une sous-suite que l'on renomme w_r tel que pour $r \to 0$

$$w_r \rightharpoonup v_\star \quad \text{dans} \quad H_0^1(\Omega), \quad w_r \to v_\star \quad \text{dans} \quad L^2(\Omega), \quad w_r \to v_\star \quad \text{p.p dans} \quad \Omega. \tag{4.7}$$

De plus comme

$$l_r(w_r) \longrightarrow 0 \quad \text{p.p dans} \quad \Omega, \tag{4.8}$$

en utilisant (4.7) et (4.8), on obtient

$$\nabla w_r \rightharpoonup \nabla v_\star \quad \text{dans} \quad (L^2(\Omega))^n, \tag{4.9}$$

$$a(l_r(w_r))\nabla\phi \rightharpoonup a(0)\nabla\phi \quad \text{dans} \quad (L^2(\Omega))^n. \tag{4.10}$$

En utilisant le lemme 3.2 pour passer à la limite dans (3.2) on a que

$$\int_\Omega a(0)\nabla v_\star \nabla\phi dx =< f, \phi > \qquad \forall \phi \in H_0^1(\Omega). \tag{4.11}$$

Ce qui montre bien que $v_\star = v$. Pour conclure il suffit de voir que ce qui est vrai pour une sous suite extraite l'est aussi pour toute la suite grâce à l'unicité de (4.11). Il reste cependant à prouver que cette convergence dans $H_0^1(\Omega)$ est forte. Pour cela nous prenons $\phi = w_r$ dans (4.3), il vient immédiatement en passant à la limite que

$$\lim_{r\to 0}\int_\Omega a(l_r(w_r))|\nabla w_r|^2 dx = \lim_{r\to 0} < f, w_r >=< f, v >= \int_\Omega a(0)|\nabla v|^2 dx. \tag{4.12}$$

Comme

$$m\|\nabla(w_r - v)\|^2 \leq \int_\Omega a(l_r(w_r))|\nabla(w_r - v)|^2 dx, \tag{4.13}$$

il vient que

$$m\|\nabla(w_r - v)\|^2 \leq \int_\Omega a(l_r(w_r))|\nabla w_r|^2 - 2\int_\Omega a(l_r(w_r))\nabla w_r \nabla v + \int_\Omega a(l_r(w_r))|\nabla v|^2. \tag{4.14}$$

En utilisant (4.12), (4.10) et le lemme 3.2 pour passer à la limite dans (4.14), on obtient

$$\lim_{r\to 0}\left(\int_\Omega a(l_r(w_r))|\nabla w_r|^2 - 2\int_\Omega a(l_r(w_r))\nabla w_r \nabla v + \int_\Omega a(0)|\nabla v|^2\right) = 0. \tag{4.15}$$

Il résulte que

$$w_r \longrightarrow v \quad dans \quad H_0^1(\Omega) \quad \text{fortement lorque} \quad r \to 0,$$

ce qui montre bien (4.5).

La démonstration pour montrer (4.6) est identique, il suffit simplement de voir que

$$l_r(w_r) \longrightarrow l(u) \quad \text{p.p dans} \quad \Omega.$$

En effet en utilisant toujours (3.7) il existe un $u_\star \in H_0^1(\Omega)$ et une sous-suite que l'on renomme w_r tel que pour $r \to d$

$$w_r \rightharpoonup u_\star \quad \text{dans} \quad H_0^1(\Omega), \quad w_r \to u_\star \quad \text{dans} \quad L^2(\Omega), \quad w_r \to u_\star \quad \text{p.p dans} \quad \Omega. \tag{4.16}$$

En utilisant le fait que

$$\left| \int_{B(x,r)\cap\Omega} g(y)(u(y) - w_r(y))dy \right| \leq |g|_2 |u - w_r|_2, \tag{4.17}$$

pour estimer $|l(u)(x) - l_r(w_r)(x)|$ on obtient en utilisant le lemme 3.7 que

$$|l(u)(x) - l_r(w_r)(x)| \leq |g|_2 \, |u - w_r|_2 + c_n^{1/\beta(n)} C_1 \, h(\Omega) |d^n - r^n|^{1/\beta(n)} \|w_r\|_V, \tag{4.18}$$

avec $h(\Omega)$ désignant la constante de Poincaré-Sobolev, C_1 une constante telle que $|.|_p \leq C_1 \, \|.\|_V$, c_n une constante dépendant de n et $\beta(n)$ défini par

$$\beta(n) = \begin{cases} 2 & si \; n = 1 \\ 3 & si \; n = 2 \\ n & si \; n \geq 3. \end{cases}$$

Il vient immédiatement lorsque $r \to d$ en utilisant (4.16) et (4.17) dans (4.18) que

$$l_r(w_r) \longrightarrow l(u) \quad \text{uniformément dans} \quad \Omega.$$

et en particulier

$$l_r(w_r) \longrightarrow l(u) \quad \text{p.p} \quad \text{dans} \quad \Omega.$$

Ce qui termine la preuve du théorème. □

Remarque 4.2. *Dans le cas où le problème 4.3 admet plusieurs solutions le résultat (4.6) reste vrai mais à une sous suite près. En effet l'absence d'unicité de (4.2) ne nous permettant de conclure au fait que ce qui est vrai pour une sous suite l'est aussi pour toute la suite.*

Remarque 4.3. *Le résultat 4.6 peut être aussi obtenu si nous considérons*

$$L_r(w_r)(x) = \fint_{B(x,r)\cap\Omega} w_r(y)dy$$

à la place de $l_r(w_r)$, les hypothèses sur a restants valides c'est à dire que le problème local

$$\begin{cases} u \in H_0^1(\Omega) \\ \int_\Omega a(u)\nabla u \nabla \phi dx = < f, \phi > \qquad \forall \phi \in H_0^1(\Omega), \end{cases} \tag{LC}$$

admet une unique solution. Pour plus de détails voir [Chi04]

2 Principe de comparaison

Dans cette partie nous donnerons notre contribution sur un principe du comparaison de la solution de (4.3). Plus précisemment nous montrerons sous certaines conditions qu'une solution w_r de (4.3) reste toujours comprise entre la solution de (4.1) et une solution de (4.2) pour $r \in [0, diam(\Omega)]$. On peut d'ores et déjà remarquer que comparer une solution w_r de (4.3) avec une solution v de (4.2) permet de comparer w_r avec n'importe quelle autre solution de (4.2). En effet, on a que les solutions $\{v_i\}_{i\in I}$ avec I fini de (4.2) s'écrivent sous la forme $v_i = \frac{\phi}{a(\mu_i)}$ voir lemme 3.9, ce qui permet en $r = diam(\Omega)$ de comparer les différentes solutions de (4.2). Ce résultat est très important dans la mesure où pour un i fixé, $i \in I$, si on sait comparer la solution w_r de (4.3) avec v_i ($w_r \leq v_i$ ou $w_r \geq v_i$) alors on saura aussi comparer w_r avec v_j, j fixé, $j \neq i$ et $j \in I$.

Définition 4.4. *On dit qu'un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est symétrique si*

$$\Omega = \mathbb{R}^n \quad ou \quad \Omega = B_a = \{x \in \mathbb{R}^n,\ |x| < a\}$$

ou

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n,\ a < |x| < b\}$$

où $0 < a < b \leq \infty$ (un anneau si $b < \infty$)

Avant de donner des résultats plus généraux de notre étude, nous commençons par un cas assez élémentaire.

2.1 Le cas $n = 1$

Nous supposerons dans la suite que $\Omega = (-l, l)$ où l est un réel strictement positif, $f \in L^2(\Omega)$, $f \geq 0$ et que f est paire. On a

Lemme 4.5. *On suppose que $a, b \in C(\overline{\Omega})$ avec a et b paires. Soient u et v les solutions des problèmes*

$$\begin{cases} -(a(x)u')' = f \quad dans \quad]-l, l[\\ u \in H_0^1(]-l, l[) \cap H^2(]-l, l[), \end{cases} \tag{4.19}$$

et

$$\begin{cases} -(b(x)v')' = f \quad dans \quad]-l, l[\\ v \in H_0^1(]-l, l[) \cap H^2(]-l, l[). \end{cases} \tag{4.20}$$

Si $0 < a \leq b$ sur $\overline{\Omega}$ alors u et v sont paires et vérifient $u \geq v$ dans $\Omega =]-l, l[$.

Démonstration. f étant paire, on a en utilisant la proposition 3.21 que u et v sont paires. Pour commencer nous supposons que $a, b \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$. On vérifie que pour tout $x \in [0, l]$ on a que

$$u'(x) = -\frac{1}{a(x)} \int_0^x f(y)dy \quad et \quad v'(x) = -\frac{1}{b(x)} \int_0^x f(y)dy. \tag{4.21}$$

Ce qui montre grâce au fait que $a \leq b$ *p.p* que pour tout $x \in [0, l]$, $u'(x) \leq v'(x)$. Comme $u(l) = v(l) = 0$ il vient alors que

$$u(x) = \int_l^x u'(t)dt \geq \int_l^x v'(t)dt = v(x). \tag{4.22}$$

De la parité de u et v on démontre aussi de la même façon que pour tout $x \in [-l, 0]$ on a $u(x) \geq v(x)$. Ce qui montre bien que $u \geq v$ *p.p.* La démonstration dans le cas général se fait par densité (voir proposition 4.11). □

Lemme 4.6. *Nous supposons que $a \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$. Soit T l'application définie par*

$$\begin{array}{rcl} T : L^2(\Omega) & \longrightarrow & L^2(\Omega) \\ v & \longrightarrow & T(v) = u, \end{array}$$

avec u la solution du problème

$$\begin{cases} u \in H_0^1(\Omega) \\ -(a(l_r(v)u')' = f \text{ dans } \quad \Omega. \end{cases} \tag{4.23}$$

Soit

$$K = \left\{ y \in H_0^1(]-l, l[) \cap H^2(]-l, l[),\ y \text{ paire},\ |y|_2 \leq \frac{h(\Omega)\,|f|_\star}{m} \right\},$$

avec $h(\Omega)$ la constante de Poincaré-Sobolev. Alors on a que $T(K) \subset K$.

Démonstration. Soit $v \in K$ montrons que $T(v) = u \in K$. On a que

$$\begin{cases} u \in H_0^1(]-l, l[) \\ -(a(l_r(v)u')' = f \text{ dans } \quad]-l, l[. \end{cases} \tag{4.24}$$

Il est clair que le problème (4.24) admet une unique solution $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$. Dû à l'injection continue et compacte $H_0^1(\Omega)$ dans $C(\overline{\Omega})$ on a bien que $u \in C(\overline{\Omega})$. On a aussi (voir (3.8)) que $|u|_2 \leq \frac{h(\Omega)\,|f|_\star}{m}$. Pour finir f étant paire et $v \in K$ on a d'après la proposition 3.21 que u est paire. Ce qui montre que $u = T(v) \in K$ et achève la démonstration. □

Nous pouvons maintenant donner le résultat principal de cette partie

Théorème 4.7. *On suppose que $f \in L^2(\Omega)$, $f \geq 0$, f paire, $g = 1$, $f \not\equiv 0$ et la fonction a vérifie les hypothèses (3.3), (3.4),(3.18), (3.19) et est décroissante. Soit $r \in [0, diam(\Omega)]$. On désigne par u, v et w_r respectivement la solution paire du problème*

$$\begin{cases} u \in H_0^1(\Omega) \\ -(a(0)u')' = f \quad \text{dans} \quad]-l, l[\end{cases} \tag{4.25}$$

une solution paire du problème

$$\begin{cases} v \in H_0^1(\Omega) \\ -(a(l(v))v')' = f \quad \text{dans} \quad]-l, l[\end{cases} \tag{4.26}$$

et w_r une solution paire de

$$\begin{cases} w_r \in H_0^1(\Omega) \\ -(a(l_r(w_r))w_r')' = f \quad dans \quad]-l,l[. \end{cases} \tag{4.27}$$

On a :

$$0 < u \leq w_r \leq v$$

Démonstration. Le fait que u, v et w_r soient paires résultent de la proposition 3.21. Soit

$$K_2 = \{w \in K \cap [u,v]\},$$

avec $[u,v]$ désignant

$$\{w \in L^2(\Omega),\ u \leq w \leq v\}.$$

Il est clair que $K_2 \neq \emptyset$ car contenant u, il est aussi facile de voir que K_2 est convexe et fermé dans $L^2(\Omega)$. Soit $w_r \in K_2$, on sait au vu de la décroissance de a que

$$a(l_r(v)) \leq a(l_r(w_r)) \leq a(l_r(u)). \tag{4.28}$$

En appliquant le lemme 4.5, il vient que

$$u \leq T(w_r) \leq v. \tag{4.29}$$

L'application

$$\begin{aligned} T : L^2(\Omega) &\longrightarrow L^2(\Omega) \\ w_r &\longmapsto T(w_r) = w, \end{aligned} \tag{4.30}$$

avec w la solution du problème

$$\begin{cases} w \in H_0^1(\Omega) \\ -div(a(l_r(w_r))\nabla w) = f \quad \text{dans} \quad \Omega \end{cases} \tag{4.31}$$

étant continue, on conclut la preuve du théorème par une application du théorème de point fixe comme dans le théorème 3.1 pour montrer que $w_r \in K_2$. □

2.2 Généralisation pour les solutions radiales

Dans tout ce qui va suivre on suppose que $n > 1$ et que Ω est la boule ouverte de $\mathbb{R}^n$ de rayon $d/2$. Pour chaque fonction u dans $L_r^2(\Omega)$ on lui associe une fonction $\tilde{u}$ dans $L^2(0, d/2)$ définie par $u(x) = \tilde{u}(\|x\|)$ p.p $x \in \Omega$, permettant alors d'identifier $L^2(0, d/2)$ à $L_r^2(\Omega)$. Soit A tel que

$$A \in W^{1,\infty}(\Omega) \ \text{ radial}, \quad \inf_{\Omega} A > 0. \tag{4.32}$$

On considère le problème linéaire

$$-div(A(x)\nabla u) = f \quad dans \quad L^2(\Omega), \quad u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega). \tag{4.33}$$

Nous allons commencer par donner un résultat d'existence et d'unicité.

Proposition 4.8. *On suppose que $f \in L^2_r(\Omega)$ et que $f \geq 0$ alors le problème (4.33) admet une unique solution . De plus, elle est radiale et pour presque tout $x \in [0, d/2]$ on a que*

$$-(\tilde{A}\tilde{u}')' - \frac{n-1}{x}\tilde{A}\tilde{u}' = \tilde{f}(x) \tag{4.34}$$

avec

$$\tilde{u}'(x) = -\frac{1}{\tilde{A}(x)}\int_0^x \left(\frac{t}{x}\right)^{n-1} \tilde{f}(t)dt \tag{4.35}$$

Démonstration. Il est facile de voir par un calcul simple que (4.33) admet une unique solution radiale qui vérifie (4.34). De plus en posant $V = \tilde{A}\tilde{u}'$ dans (4.34), on obtient

$$-V' - \frac{n-1}{x}V = \tilde{f}. \tag{4.36}$$

En remarquant simplement que $(Vx^{n-1})' = -x^{n-1}\tilde{f}$ une petite intégration permet d'obtenir (4.35). □

Proposition 4.9. *On suppose que $\sup_{\mathbb{R}} a < \infty$, $a \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $g \equiv 1$, $\inf_{\mathbb{R}} a > 0$ et que $f \in L^2_r(\Omega)$ alors le problème (4.3) admet au moins une solution radiale.*

Démonstration. Pour tout $v \in L^2_r(\Omega)$, au vu de la définition de $l_r(v)$ c'est à dire que $l_r(v)(x) = \int_{\Omega\cap B(x,r)} v(y)\,dy$ on a que $l_r(v)(x) = l_r(v)(Rx) \quad p.p \quad x \in \Omega$ et cela pour toute rotation R de $\mathbb{R}^n$(la rotation conservant la distance). Ce qui permet de dire que $l_r(v)$ est invariant par rotation et de conclure que $a(l_r(v))$ est radial. On peut donc appliquer la proposition 4.8 pour conclure que $T(v)$ est radiale. En appliquant une méthode de point fixe on a le résultat. □

Remarque 4.10. *L'analogue de la proposition précédente lorsque l'on considère dans le cas général*

$$l_r(v)(x) = \int_\Omega g(y)v(y)dy,$$

nécessite d'imposer pour que $a(l_r(v))$ soit radiale que

$$g(Ry) = g(y) \quad \text{p.p } y \in \Omega. \tag{4.37}$$

Pour pouvoir contrôler le signe de la solution w_r de (4.3) on prendra aussi

$$g \geq 0 \quad p.p \quad dans \quad \Omega, \quad g \not\equiv 0. \tag{4.38}$$

Nous donnons maintenant un résultat principal de cette section qui permet de comparer deux solutions de l'équation (4.3) en fonction de la monotonie du coefficient de diffusion.

Proposition 4.11. *Soient $A, B \in C(\overline{\Omega})$ et vérifiant $0 < A \leq B$ dans $\overline{\Omega}$. On suppose de plus que $f \in L^2_r(\Omega)$ et $f \geq 0$. Si u et v désignent respectivement les solutions de (4.33) avec respectivement A et B. Alors on a*

$$u \geq v \quad p.p \quad dans \quad \Omega. \tag{4.39}$$

Démonstration. Nous commençons par faire la preuve pour $A, B \in W^{1,\infty}(\Omega)$. Dans ce cas comme $A \leq B$ en utilisant (4.35) il vient que $\tilde{u}' \leq \tilde{v}'$ pour tout $x \in [0, d/2]$. Puisque $\tilde{u}(d/2) = \tilde{v}(d/2) = 0$, il vient que

$$\tilde{u}(x) = \int_{d/2}^{x} \tilde{u}'(y)dy \geq \int_{d/2}^{x} \tilde{v}'(y)dy = \tilde{v}(x). \tag{4.40}$$

Dans le cas général on considère ϵ un réel stictement positif tel que $\inf_{\Omega} A - \epsilon > 0$. On pose $A_\epsilon = A - \epsilon$, on considère u_ϵ la solution du problème

$$\begin{cases} u_\epsilon \in H_0^1(\Omega) \\ -div(A_\epsilon(x)\nabla u_\epsilon) = f \quad dans \quad H^{-1}(\Omega). \end{cases} \tag{4.41}$$

Puisque $A_\epsilon + \epsilon \leq B$, alors il existe A_n et B_n dans $W^{1,\infty}(\Omega)$ tel que

$$\begin{aligned} &A_n \to A_\epsilon, \quad B_n \to B \quad dans \quad C(\overline{\Omega}) \\ &0 < c \leq A_n(x) \leq B_n(x) \quad \forall x \in \overline{\Omega}, \forall n \geq 0, \end{aligned} \tag{4.42}$$

où c est une constante indépendante de n et x. Soit u_n et v_n les solutions respectives de (4.33) avec respectivement A_n et B_n pour coefficients de diffusions. A_n et B_n étant régulières il vient que d'après ce qui précède (première partie de la preuve) que $u_n \geq v_n$. On montre aussi avec un argument de compacité comme cela a été fait dans la preuve du théorème 3.1 que les suites u_n et v_n sont telles que

$$u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} u_\epsilon, \quad v_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} v \quad p.p\ dans \quad \Omega. \tag{4.43}$$

Ainsi $u_\epsilon \geq v$. De la même façon il est facile de montrer que $u_\epsilon \longrightarrow u$ lorsque $\epsilon \to 0$. Ce qui permet de conclure que $u \geq v$. □

Avant de donner quelques applications de la proposition 4.11 nous allons donner des résultats quantitatifs à propos des solutions radiales en généralisant le lemme 3.9 (voir [Chi00]). En effet dans le lemme 3.9 on a vu que le nombre de solutions du problème 4.2 dépendait du choix de a, c'est à dire que le nombre de solutions du problème (4.2) était le même que celui du problème dans $\mathbb{R}$

$$a(\mu)\mu = l(\phi)$$

comme défini dans le lemme 3.9. Soit $I_r := [\inf_{\Omega} l_r(\phi), \sup_{\Omega} l_r(\phi)] \quad \forall r \in [0, d]$. Dans ce qui va suivre nous allons conditionner ce nombre de solutions à l'inclusion ou non de I_r à un intervalle de $\mathbb{R}$ et cela pour tout $r \in [0, d]$, ce qui permet donc de donner des résultats quantitatifs non plus uniquement en $r = d$ mais aussi lorsque $r \in [0, d]$, ce qui donne une bonne généralisation du lemme 3.9.

Lemme 4.12. *On suppose que $f \in L_r^2(\Omega)$, $f \geq 0$, $g \in L^2(\Omega)$, $a \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\inf_{\mathbb{R}} a > 0$, $\sup_{\mathbb{R}} a < \infty$ et que (4.37) et (4.38) sont vérifiées. Soit $r \in [0, d]$ et supposons que a est tel qu'il existe deux réels positifs m et M avec $0 \leq m \leq M$ tel que*

$$a(m) = \max_{[m,M]} a \quad a(M) = \min_{[m,M]} a \tag{4.44}$$

$$I_r \subset [ma(m), Ma(M)]. \tag{4.45}$$

Alors le problème (4.3) admet une solution radiale w vérifiant

$$m \leq l_r(w) \leq M \quad p.p \text{ dans } \Omega.$$

Démonstration. L'ensemble

$$E := \{w \in L^2_r(\Omega) \ : \ m \leq l_r(w) \leq M \quad p.p \text{ dans } \Omega\}$$

est fermé, convexe et non vide. En effet au vu de (4.44) et (4.45) on a que $\phi/a(m)$ appartient à E. Pour tout $v \in E$ on a en utilisant (4.44) que

$$a(M) \leq a(l_r(w)) \leq a(m). \tag{4.46}$$

$a(l_r(v))$ étant radiale on applique la proposition 4.11 à (4.46) pour avoir

$$\frac{\phi}{a(m)} \leq T_r(w) \leq \frac{\phi}{a(M)} \tag{4.47}$$

où $T_r(v)$ est définie comme dans (3.10). Puisque g est positive (4.47) nous donne

$$\frac{l_r(\phi)}{a(m)} \leq l_r(T_r(w)) \leq \frac{l_r(\phi)}{a(M)}. \tag{4.48}$$

Ainsi de (4.45) et (4.48) on déduit que $T_r(w)$ appartient à E. Pour terminer la preuve il suffit d'appliquer le théorème de point fixe de Schauder comme dans le théorème 3.1. □

Proposition 4.13. *On suppose que $f \in L^2_r(\Omega)$, $f \geq 0$, $g \in L^2(\Omega)$, $f \not\equiv 0$, $a \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\inf_{\mathbb{R}} a > 0$, $\sup_{\mathbb{R}} a < \infty$ et que (4.37) et (4.38) sont vérifiées. Soit $r \in (0, d]$ et supposons que a est tel qu'il existe trois réels positifs m_1, m_2 et M avec $0 < m_1 < m_2 < M$ tel que*

$$\begin{aligned} a(0) &= \max_{[0,m_1]} a; \quad a(m_1) = \min_{[0,m_1]} a \\ a(m_2) &= \max_{[m_2,M]} a; \quad a(M) = \min_{[m_2,M]} a \end{aligned} \tag{4.49}$$

et

$$I_r \subset [0, m_1 a(m_1)] \cap [m_2 a(m_2), Ma(M)]. \tag{4.50}$$

Alors le problème (4.3) admet au moins deux solutions radiales u et v tel que

$$\begin{aligned} 0 \leq l_r(u) &\leq m_1 \quad p.p \text{ dans } \Omega \\ m_2 \leq l_r(v) &\leq M \quad p.p \text{ dans } \Omega. \end{aligned}$$

Démonstration. On applique le lemme 4.12 avec $m = 0$ et $M = m_1$ pour avoir l'existence d'une solution u tel que $l_r(u) \leq m_1 \quad p.p \text{ dans } \Omega$. De même en réutilisant ce procédé avec $m = m_2$ et $M = M$ on a l'existence d'une solution v tel que $m_2 \leq l_r(v) \leq M \quad p.p \text{ dans } \Omega$. Puisque $m_1 < m_2$ il vient que u et v sont distincts. Ce qui achève la preuve. □

Remarque 4.14. *Une fonction a vérifiant les conditions de la proposition 4.13 existe. Nous donnons sur un exemple une façon de le prouver. En effet soit $r \in (0, d]$, $a(0) > 0$. On pose*

$$m_1 := \max I_r/a(0) \quad et \quad a(m_1) := \frac{a(0)}{2}.$$

Comme $f \not\equiv 0$ et $f \geq 0$ d'après le principe du maximum on a que $\phi > 0$. Si $g > 0$ p.p dans Ω on a que $\max I_r > 0$ et donc que $m_1 > 0$. Soit m_2 et M tel que $m_1 < m_2 < M$ et posons

$$a(m_2) := \min I_r/m_2 \quad et \quad M := 2 \max I_r/a(m_2).$$

En prenant par exemple $a(M) := a(m_2)/2$ on a que

$$m_2 a(m_2) = \min I_r \leq \max I_r = M\frac{a(m_2)}{2} = Ma(M). \tag{4.51}$$

Il suffit pour finir de supposer que a est décroissante sur $[m_2, M]$ pour voir que le m_2 et le M choisis vérifient bien les hypothèses de la proposition.

Nous allons dans ce qui suit généraliser la proposition 4.13.

Proposition 4.15. *On suppose que $f \in L^2_r(\Omega)$, $f \geq 0$, $g \in L^2(\Omega)$, $a \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\inf_{\mathbb{R}} a > 0$, $\sup_{\mathbb{R}} a < \infty$ et que (4.37) et (4.38) soient vérifiées. Soit $r \in (0, d]$ et n_1 un entier naturel impair, supposons que a est tel qu'il existe $n_1 + 1$ réels positifs $\{m_i\}_{i=0\ldots n_1}$, avec $m_0 = 0$ et pour tout $i \in \{0, \ldots, n_1 - 1\}$ on a $m_i < m_{i+1}$. Si de plus*

$$\begin{aligned} &a(m_i) = \max_{[m_i, m_{i+1}]} a; \quad a(m_{i+1}) = \min_{[m_i, m_{i+1}]} a \quad \forall i \in \{0, 2, \ldots, n_1 - 3, n_1 - 1\} \\ &I_r \subset \bigcap_{i=0,2,\ldots,n_1-3,n_1-1} [m_i a(m_i), m_{i+1} a(m_{i+1})] \end{aligned} \tag{4.52}$$

alors le problème (4.3) admet au moins $\frac{n_1+1}{2}$ solutions radiales $\{w_i\}_{i \in \{0,2,\ldots,n_1-1\}}$, vérifiant

$$m_i \leq l_r(w_i) \leq m_{i+1} \quad \forall i \in \{0, 2, \ldots, n_1 - 3, n_1 - 1\}.$$

Démonstration. Pour la démonstration nous faisons un raisonnement par récurrence. Pour $n_1 = 1$ on a vu que la proposition est vraie. En effet d'après le lemme 4.12 pour $n_1 = 1$ on a que le problème 4.3 admet au moins une solution radiale. Supposons maintenant que pour $n_1 > 1$ (4.3) admet $\frac{n_1+1}{2}$ solutions telles que ces solutions vérifient

$$m_i \leq l_r(w_i) \leq m_{i+1} \quad \forall i \in \{0, 2, \ldots, n_1 - 3, n_1 - 1\}$$

et montrons que pour $n_2 = n_1 + 2$ le problème 4.3 admet $\frac{n_2+1}{2}$ solutions telles que ces solutions vérifient

$$m_i \leq l_r(w_i) \leq m_{i+1} \quad \forall i \in \{0, 2, \ldots, n_2 - 3, n_2 - 1\}.$$

Commençons par considérer les points m_{n_2-1} et m_{n_2}. On a bien que

$$\begin{aligned} &a(m_{n_2-1}) = \max_{[m_{n_2-1}, m_{n_2}]} a; \quad a(m_{n_2-1}) = \min_{[m_{n_2-1}, m_{n_2}]} a \\ &I_r \subset [m_{n_2-1} a(m_{n_2-1}), m_{n_2} a(m_{n_2})]. \end{aligned}$$

D'où, en utilisant le lemme 4.12 on obtient l'existence d'une solution radiale w_{n_2-1} telle que

$$m_{n_2-1} \leq l_r(w_{n_2-1}) \leq m_{n_2} \quad p.p \text{ dans } \Omega.$$

De plus comme par hypothèse (4.3) admettait pour les n_1 premiers points $\frac{n_1+1}{2}$ solutions telles que ces solutions vérifiaient

$$m_i \leq l_r(w_i) \leq m_{i+1} \quad \forall i \in \{0, 2, \ldots, n_1 - 3, n_1 - 1\},$$

il vient en utilisant le fait que $m_{n_1} < m_{n_2-1}$ que (4.3) admet au moins $\frac{n_1+1}{2} + 1$ solutions. En remarquant simplement que $\frac{n_1+1}{2} + 1 = \frac{n_2+1}{2}$, on a bien que pour n_2 points le problème 4.3 admet bien $\frac{n_2+1}{2}$ solutions. Ce qui achève la démonstration. □

On a aussi

Proposition 4.16. *On suppose que $f \in L^2_r(\Omega)$, $f \geq 0$, $g \in L^2(\Omega)$, $a \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\inf_{\mathbb{R}} a > 0$, $\sup_{\mathbb{R}} a < \infty$ et que (4.37) et (4.38) sont vérifiées. Soit $r \in (0, d]$ et supposons que a est tel qu'il existe trois réels positifs m_1, m_2 et M avec $0 < m_1 < m_2 < M$ tel que*

$$\begin{aligned} a(0) &= \min_{[0,m_1]} a; \quad a(m_1) = \max_{[0,m_1]} a \\ a(m_2) &= \max_{[m_2,M]} a; \quad a(M) = \min_{[m_2,M]} a \end{aligned} \tag{4.53}$$

et

$$I_r \subset [0, m_1 a(0)] \cap [m_2 a(m_2), M a(M)]. \tag{4.54}$$

Alors le problème (4.3) admet au moins deux solutions radiales.

Pour faire la preuve de cette proposition nous avons besoin du lemme suivant

Lemme 4.17. *On suppose que $f \in L^2_r(\Omega)$, $f \geq 0$, $g \in L^2(\Omega)$, $a \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\inf_{\mathbb{R}} a > 0$, $\sup_{\mathbb{R}} a < \infty$ et que (4.37) et (4.38) soient vérifiées. Soit $r \in [0, d]$ et supposons que a est tel qu'il existe deux réels positifs m et M avec $0 \leq m \leq M$ tel que*

$$a(m) = \min_{[m,M]} a \quad a(M) = \max_{[m,M]} a \tag{4.55}$$

$$I_r \subset [m a(M), M a(m)]. \tag{4.56}$$

Alors le problème (4.3) admet une solution radiale w_r vérifiant

$$m \leq l_r(w_r) \leq M \quad p.p \text{ dans } \Omega.$$

Démonstration. On considère toujours l'ensemble

$$E := \{w_r \in L^2_r(\Omega) \ : \ m \leq l_r(w_r) \leq M \quad p.p \text{ dans } \Omega\}$$

qui est fermé , convexe et non vide. En effet au vu de (4.55) et (4.56) on a que

$$l_r(\phi) \leq M a(m),$$

ce qui fait

$$l_r\left(\frac{\phi}{a(m)}\right) \leq M.$$

Et aussi

$$l_r(\phi) \geq ma(M),$$

ce qui fait en considérant le fait que $a(m) \leq a(M)$ que

$$l_r\left(\frac{\phi}{a(m)}\right) \geq m.$$

On a bien $\phi/a(m)$ appartient à E. Pour tout $w_r \in E$ on a en utilisant (4.55) que

$$a(m) \leq a(l_r(w_r)) \leq a(M). \tag{4.57}$$

En appliquant la proposition 4.11 à (4.57) comme dans le lemme 4.12 on a

$$\frac{\phi}{a(M)} \leq T_r(w_r) \leq \frac{\phi}{a(m)} \tag{4.58}$$

où $T_r(w_r)$ est définie comme dans (3.10). Puisque g est positive (4.58) nous donne

$$\frac{l_r(\phi)}{a(M)} \leq l_r(T_r(w_r)) \leq \frac{l_r(\phi)}{a(m)}. \tag{4.59}$$

Ainsi de (4.56) et (4.59) on déduit que $T_r(w_r)$ appartient à E. Pour terminer la preuve il suffit d'appliquer le théorème de point fixe de Schauder comme dans le théorème 3.1. □

Revenons maintenant à la preuve de la proposition 4.17

Démonstration. On applique le lemme 4.16 avec $m = 0$ et $M = m_1$ pour avoir l'existence d'une solution w_r tel que $l_r(w_r) \leq m_1$ *p.p dans* Ω. De même on applique le lemme 4.12 avec $m = m_2$ et $M = M$ pour avoir l'existence d'une solution v tel que $m_2 \leq l_r(v) \leq M$. Puisque $m_1 < m_2$ il vient que w_r et v sont distincts. Ce qui termine la preuve de la proposition. □

Comme pour la proposition 4.13 nous généralisons la proposition 4.16 .

Proposition 4.18. *On suppose que* $f \in L^2_r(\Omega), f \geq 0, g \in L^2(\Omega), a \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\inf_{\mathbb{R}} a > 0, \sup_{\mathbb{R}} a < \infty$ *et que (4.37) et (4.38) soient vérifiées. Soit* $r \in (0, d]$ *et* $n_1 > 1$ *un entier naturel impair, supposons que* a *est tel qu'il existe* $n_1 + 1$ *réels positifs* $\{m_i\}_{i=0\ldots n_1}$, *avec* $m_0 = 0$ *et pour tout* $i \in \{0, \ldots, n_1 - 1\}$ *on a* $m_i < m_{i+1}$. *Si de plus*

$$\begin{aligned}
&a(m_i) = \min_{[m_i, m_{i+1}]} a; \quad a(m_{i+1}) = \max_{[m_i, m_{i+1}]} a \\
&a(m_{i+2}) = \max_{[m_{i+1}, m_{i+2}]} a; \quad a(m_{i+3}) = \min_{[m_{i+1}, m_{i+2}]} a \quad \forall i \in \{0, 4, 8, \ldots, n_1 - 7, n_1 - 3\} \\
&I_r \subset \bigcap_{i=0,4,8,\ldots,n_1-7,n_1-3} \{[m_i a(m_i), m_{i+1} a(m_i)] \cap [m_{i+2} a(m_{i+2}), m_{i+3} a(m_{i+3})]\}.
\end{aligned} \tag{4.60}$$

alors le problème (4.3) admet au moins $\frac{n_1+1}{2}$ *solutions radiales* $\{w_i\}_{i \in \{0,2,\ldots,n_1-1\}}$, *vérifiant*

$$m_i \leq l_r(w_i) \leq m_{i+1} \quad \forall i \in \{0, 2, \ldots, n_1 - 3, n_1 - 1\}.$$

Démonstration. Pour la démonstration nous faisons un raisonnement par récurrence. Pour $n_1 = 3$ on a vu que la proposition est vraie. En effet d'après la proposition 4.16 pour $n_1 = 3$ on a que le problème 4.3 admet au moins deux solutions radiales. Supposons maintenant que pour $n_1 > 3$ (4.3) admet $\frac{n_1+1}{2}$ solutions telles que ces solutions vérifient

$$m_i \leq l_r(w_i) \leq m_{i+1} \quad \forall i \in \{0, 2, \ldots, n_1 - 3, n_1 - 1\}$$

et montrons que pour $n_2 = n_1 + 4$ le problème 4.3 admet $\frac{n_2+1}{2}$ solutions telles que ces solutions vérifient

$$m_i \leq l_r(w_i) \leq m_{i+1} \quad \forall i \in \{0, 2, \ldots, n_2 - 3, n_2 - 1\}.$$

Commençons par considérer les points m_{n_2-3}, m_{n_2-2}, m_{n_2-1} et m_{n_2}. On a bien que

$$\begin{aligned}
&a(m_{n_2-3}) = \min_{[m_{n_2-3}, m_{n_2-2}]} a; \quad a(m_{n_2-2}) = \max_{[m_{n_2-3}, m_{n_2-2}]} a \\
&a(m_{n_2-1}) = \max_{[m_{n_2-1}, m_{n_2}]} a; \quad a(m_{n_2}) = \min_{[m_{n_2-1}, m_{n_2}]} a \\
&I_r \subset [m_{n_2-3}a(m_{n_2-3}), m_{n_2-2}a(m_{n_2-2})] \cap [m_{n_2-1}a(m_{n_2-1}), m_{n_2}a(m_{n_2})].
\end{aligned}$$

D'où en utilisant la proposition 4.16 on obtient l'existence de deux solutions radiales w_{n_2-3} et w_{n_2-1} telles que

$$\begin{aligned}
m_{n_2-3} \leq l_r(w_{n_2-3}) \leq m_{n_2-2} \quad &\text{p.p dans } \Omega \\
m_{n_2-1} \leq l_r(w_{n_2-1}) \leq m_{n_2} \quad &\text{p.p dans } \Omega.
\end{aligned}$$

De plus comme par hypothèse (4.3) admet pour les n_1 premiers points $\frac{n_1+1}{2}$ solutions telles que ces solutions vérifiaient

$$m_i \leq l_r(w_i) \leq m_{i+1} \quad \forall i \in \{0, 2, \ldots, n_1 - 3, n_1 - 1\},$$

il vient en utilisant le fait que $m_{n_1} < m_{n_2-3}$ que (4.3) admet au moins $\frac{n_1+1}{2} + 2$ solutions. En remarquant simplement que $\frac{n_1+1}{2} + 2 = \frac{n_2+1}{2}$, on a bien que pour n_2 points le problème 4.3 admet bien $\frac{n_2+1}{2}$ solutions. Ce qui achève la démonstration. □

Nous allons maintenant donner quelques résultats qualitatifs de ces solutions.

Proposition 4.19. *On suppose que $f \in L^2_r(\Omega)$, $f \geq 0$, $g \in L^2(\Omega)$, $a \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\inf_{\mathbb{R}} a > 0$, $\sup_{\mathbb{R}} a < \infty$ et que (4.37) et (4.38) soient vérifiées. Soit ϕ la solution du problème (3.76) et on considère pour tout $r \in [0, d]$, w_r une solution de (4.3). Alors on a que*

$$\frac{\phi}{\sup_{[0,\infty)} a} \leq T_r(w_r) \leq \frac{\phi}{\inf_{[0,\infty)} a} \tag{4.61}$$

Démonstration. Puisque f est positive il découle du principe du maximum que w_r l'est aussi. Il résulte bien que

$$\inf_{[0,\infty)} a \leq a(l_r(w_r)) \leq \sup_{[0,\infty)} a \quad \text{p.p dans } \Omega. \tag{4.62}$$

Il suffit pour finir d'appliquer la proposition 4.11 à (4.62). □

D'après le lemme 3.9 on sait que toute solution u du problème (4.2) s'écrit sous la forme $u = \frac{\phi}{a(\mu)}$ avec μ définie par

$$\mu = \int_\Omega g(y)u(y)dy.$$

De même il est évident de voir que v la solution du problème (4.1) s'écrit $v = \frac{\phi}{a(0)}$. La monotonie de l'application $u \mapsto l_r(u)$, nous permet donc de comparer $a(0)$ et $a(\mu_d)$ c'est à dire que l'on peut avoir $a(0) \leq a(\mu_d)$ ou $a(0) \geq a(\mu_d)$. Commençons par considérer le cas où $a(0) \geq a(\mu_d)$ c'est à dire $u_0 \leq u_d$. On a le résultat suivant :

Proposition 4.20. *On suppose que $f \in L^2_r(\Omega)$, $f \geq 0$, $g \in L^2(\Omega)$, (4.37) et (4.38). Si de plus on a que*

(i) il existe une solution μ de (3.77) avec $a(\mu) = \min_{[0,\mu]} a$.

(ii) $a(0) = \max_{[0,\mu]} a$.

Alors il existe une solution radiale w_r de (4.3) tel que

$$v \leq w_r \leq u, \tag{4.63}$$

avec $u = \frac{\phi}{a(\mu)}$ et $v = \frac{\phi}{a(0)}$.

Démonstration. Nous utilisons comme précédemment une méthode de point fixe dans E avec

$$E = \{w \in L^2_r(\Omega)\ v \leq w \leq u\}.$$

Soit $w \in E$, dû à (4.38) on a que

$$0 \leq l_r(w) \leq l_r(u) \leq l(u) = \mu \quad dans\ \Omega. \tag{4.64}$$

Ainsi en utilisant (i) et (ii) on obtient

$$a(0) \geq a(l_r(w)) \geq a(\mu). \tag{4.65}$$

On applique ensuite la proposition 4.11 pour déduire que

$$v \leq T_r(w_r) \leq u. \tag{4.66}$$

On conclut simplement avec le théorème de point fixe de Schauder. □

Remarque 4.21. *Dans la proposition 4.20 les hypothèses (i) et (ii) nous permettent bien de voir que dans le cas particulier de fonctions décroissantes des hypothèses supplémentaires ne seraient pas nécessaires pour avoir le principe de comparaison annoncé $v \leq w_r \leq u$. Cependant nous verrons dans la suite que le cas où $a(0) \leq a(\mu)$, il nécessite des hypothèses supplémentaires.*

Nous considérons maintenant le cas où $a(0) \leq a(\mu)$ c'est à dire $u \leq v$ (en utilisant la proposition 4.11). Le résultat qui suit découle directement de la proposition 4.19

Corollaire 4.22. *On suppose que $f \in L^2_r(\Omega)$, $f \geq 0$, $g \geq 0$, $g \in L^2(\Omega)$, (4.37) et (4.38). Si de plus on a que*

(i) il existe une solution μ de (3.77) avec $a(\mu) = \sup_{[0,\infty)} a$.

(ii) $a(0) = \inf_{[0,\infty)} a$.

Alors il existe une solution radiale w_r de (4.3) tel que

$$u \leq w_r \leq v, \tag{4.67}$$

avec $u = \frac{\phi}{a(\mu)}$ et $v = \frac{\phi}{a(0)}$.

Démonstration. On applique simplement la proposition 4.19 avec $v = \phi / \inf_{[0,\infty)} a$ et $u = \phi / \sup_{[0,\infty)} a$. □

On a aussi

Proposition 4.23. *On suppose que $f \in L^2_r(\Omega)$, $f \geq 0$, $g \geq 0$, $g \in L^2(\Omega)$ et (4.37). Si de plus on a que*

(i) il existe une solution μ de (3.77) avec $a(\mu) = \max_{[0,\mu]} a$ et

$$\sup_{x\in\Omega} l_r(\phi)(x) \leq a(0)\,\mu_d. \tag{4.68}$$

(ii) $a(0) = \min_{[0,\mu]} a$.

Alors il existe une solution radiale w_r de (4.3) tel que

$$u \leq w_r \leq v, \tag{4.69}$$

avec $u = \frac{\phi}{a(\mu)}$.

Démonstration. Soit $\overline{a} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\overline{a}(\mu_1) = \begin{cases} a(\mu) & si\ 0 \leq \mu_1 \leq \mu \\ a(0) & si\ \mu_1 \leq 0 \\ a(\mu_d) & si\ \mu \leq \mu_1. \end{cases} \tag{4.70}$$

Soit $\overline{w_r}$ une solution du problème

$$\begin{cases} w_r \in H^1_0(\Omega) \cap H^2(\Omega) \cap L^2_r(\Omega) \\ -div(\overline{a}(l_r(w_r))\nabla w_r) = f \quad dans \quad L^2(\Omega). \end{cases} \tag{4.71}$$

L'existence d'une solution $\overline{w_r}$ au problème (4.71) est bien sûr assurée par la remarque 4.10. En utilisant le corollaire 4.22 et la définition de $\overline{a}$ on a que $u \leq \overline{w_r} \leq v$. De plus u et g étant positif il vient immédiatement que

$$0 \leq l_r(\overline{w_r}) \leq l_r(v) = \frac{l_r(\phi)}{a(0)}.$$

En utilisant (4.68) on a,

$$0 \leq l_r(\overline{w_r}) \leq \mu. \tag{4.72}$$

Ce qui donne par définition de $\overline{a}$ en utilisant (4.72) que $\overline{a}(l_r(\overline{w_r})) = a(l_r(\overline{w_r}))$ et donc que $\overline{w_r}$ est une solution de (4.3). De plus $\overline{w_r}$ vérifie bien

$$u \leq \overline{w_r} \leq v.$$

□

Remarque 4.24. *On a vu que le fait de considérer $a(0) \leq a(\mu)$ nous oblige à mettre une hypothèse (4.68) rendant l'utilisation en pratique de la proposition 4.23 très facile pour des r proche de 0 mais en revanche très difficile lorsque r est très proche du diamètre de Ω.*

Nous essayons dans ce qui suit d'avoir un résultat similaire à la proposition 4.20.

Proposition 4.25. *Si $f \in L^2_r(\Omega), f \geq 0, \quad g \geq 0, g \in L^2(\Omega)$, (4.37), (4.38) et que a est croissante sur $[0, l_d(u_0)]$ alors pour tout $r \in [0, d]$ il existe une solution radiale w_r de (4.3) tel que*

$$\frac{a(l(u))}{a(l(v))} u \leq w_r \leq v, \tag{4.73}$$

où u et v désignent respectivement les solutions de (4.2) et (4.1).

Démonstration. Soit

$$E := L^2_r(\Omega) \cap \left[\frac{a(l(u))}{a(l(v))} u, v\right]$$

qui est fermé , convexe et non vide (car contenant v) . Soit $w \in E$. Comme g et v sont positives et que a est croissante sur $[0, l(v)]$, il découle que

$$a(0) \leq a(l_r(w_r)) \leq a(l_r(v)) \leq a(l(v)). \tag{4.74}$$

Une application de la proposition 4.11 nous donne

$$\frac{\phi}{a(l(v))} \leq T_r(w_r) \leq v. \tag{4.75}$$

où $T_r(w_r)$ est définie comme dans (3.10). De plus comme $\phi = a(\mu)u$ pour toute solution u de (4.2) il résulte que $T_r(w_r) \in E$. On applique le théorème de point fixe pour conclure. □

Remarque 4.26. *Comme annoncé le résultat obtenu dans le cas où $a(0) \leq a(\mu)$ est moins précis que celui que nous avions dans le cas $a(0) \geq a(\mu)$. En effet le fait que $u \leq v$ montre que $\frac{a(l(u))}{a(l(v))} \leq 1$. Ce phénomène s'explique par le fait que la monotonie de l'application $w \mapsto l_r(w_)$ s'adapte mieux au cas $a(0) \geq a(\mu_d)$.*

Nous donnons pour une fonction particulière a un résultat plus précis de notre principe de comparaison.

Proposition 4.27. *On suppose que $f \in L^2_r(\Omega), f \geq 0, \quad g \geq 0, g \in L^2(\Omega)$ (4.37) et que a est croissante sur $[0, \mu_d]$. Si a vérifie*

$$a(\mu_1) = \begin{cases} a_1(0) & si\ \mu_1 \leq 0 \\ a_1(\mu) & si\ 0 \leq \mu_1 \leq \mu \\ a_1(\mu_d) & si\ \mu \leq \mu_1, \end{cases} \tag{4.76}$$

où a_1 désigne une fonction croissante définie sur $\mathbb{R}$. Alors pour tout $r \in [0, d]$ il existe une solution w_r de (4.3) tel que

$$u \leq w_r \leq v, \tag{4.77}$$

où u et v désignent respectivement les solutions de (4.2) et (4.1).

Démonstration. Soit $w_r \in L^2_r(\Omega)$ satisfaisant

$$u \leq w_r \leq v.$$

Puisque g et v sont positives et que par définition de a voir (4.76), alors on a que

$$a(0) \leq a(l_r(w_r)) \leq a(l(v)) \leq a(\mu). \tag{4.78}$$

En appliquant simplement la proposition 4.11 on obtient

$$u \leq T_r(w_r) \leq v. \tag{4.79}$$

On conclut simplement en appliquant toujours une méthode de point fixe. □

Nous étudions dans ce qui va suivre au moyen de la théorie de bifurcations quelques propriétés des branches de solutions de notre problème. Pour cela nous commençons par repréciser quelques notions.

Définition 4.28. *Etant donné un $u : [0,d] \to H^1_0(\Omega)$, on dit que le graphe de u est une branche globale de solutions si*

(i) $u \in C([0,d], H^1_0(\Omega))$,

(ii) $u(r)$ *est une solution de (4.3) pour tout r appartenant à* $[0,d]$.

Si u est définie uniquement sur un sous intervalle de $[0,d]$ de mesure positive on parlera dans ce cas de branche locale de solutions.

Définition 4.29. *([eGP95]) Soit $\{(r,u_r) : r \in [0,d]\}$ une branche de solutions et $r_0 \in [0,d]$. On dit que r_0 est un point de bifurcation pour cette branche s'il existe une suite (r_n, u_{r_n}) dans $[0,d] \times H^1_0(\Omega)$ tel que pour tout n, u_{r_n} est une solution de (4.3), $u_{r_n} \neq u_{r_0}$ et*

$$(r_n, u_{r_n}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} (r_0, u_{r_0}) \quad \textit{dans } \mathbb{R} \times H^1_0(\Omega) \tag{4.80}$$

Avant de donner le résultat principal de partie nous commençons par donner un résultat d'existence et d'unicité d'une branche locale de solutions.

Proposition 4.30. *On suppose que $f \in H^{-1}(\Omega)$, $a \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$, $g \equiv 1$ et que a vérifie (3.4). Soit $r \in [0,d]$ et w_{r_0} la solution du problème (4.3) en r_0 vérifiant*

$$\frac{|\Omega|^{1/2} h(\Omega) |f|_\star |a'|_\infty}{(\inf\limits_{\mathbb{R}} a(l_{r_0}(w_{r_0})) - p|a'|_\infty)^2} < 1, \tag{4.81}$$

où $|a'|_\infty$ désigne $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |a'(x)|$ et p une constante strictement positive. Alors il existe un $\epsilon, \delta > 0$ tel que pour tout $r \in [r_0 - \epsilon, r_0 + \epsilon]$ le problème (4.3) admet une unique solution dans la boule fermée de $H^1_0(\Omega)$ de rayon δ et centrée en w_{r_0} désignée par $B(w_{r_0}, \delta, H^1_0(\Omega))$.

Démonstration. Nous allons pour faire la preuve utiliser le théorème de point fixe de Banach sur la boule $B(w_{r_0}, \delta, H_0^1(\Omega))$ c'est à dire que nous allons montrer que T_r défini comme dans (3.10) envoie la boule $B(w_{r_0}, \delta, H_0^1(\Omega))$ sur elle même, et est contractante. Soit p_2 une constante positive définie comme dans (3.47) par $p_2 = k^{\frac{1}{2}} h(\Omega)$ et $p > 0$ une constante tel que

$$\begin{aligned} &\inf_{\mathbb{R}} a(l_{r_0}(w_{r_0}) - |a'|_\infty p > 0 \\ &c_1 := \frac{|\Omega|^{1/2} h(\Omega) |f|_\star |a'|_\infty}{(\inf_{\mathbb{R}} a(l_{r_0}(w_{r_0}) - |a'|_\infty p)^2} < 1. \end{aligned} \tag{4.82}$$

Le fait que $a \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$ et (4.81) nous garantit l'existence d'un tel p. On pose

$$c_2 := \frac{p_2 |f|_\star |a'|_\infty |\nabla w_{r_0}|_2}{(\inf_{\mathbb{R}} a(l_{r_0}(w_{r_0})) - |a'|_\infty p)^2}. \tag{4.83}$$

Soit $\epsilon > 0$ tel que

$$|\Omega|^{1/2} h(\Omega) \frac{q(\epsilon)}{1 - c_1} c_2 + p_2\, q(\epsilon) |\nabla w_{r_0}|_2 \leq p, \tag{4.84}$$

où $q(\epsilon) = C|\epsilon|^{1/2}$ et C est une constante positive vérifiant $|r^n - r_0^n|^{1/2} \leq C|r - r_0|^{1/2}$. Si on pose

$$\delta = \frac{q(\epsilon) c_2}{1 - c_1}, \tag{4.85}$$

alors pour tout $r \in [r_0 - \epsilon, r_0 + \epsilon]$ et v appartenant à $B(w_{r_0}, \delta, H_0^1(\Omega))$, avec $u = T_r(v)$ on a

$$\int_\Omega a(l_r(v)) \nabla u \nabla \phi = \int_\Omega a(l_{r_0}(w_{r_0})) \nabla w_{r_0} \nabla \phi, \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega) \tag{4.86}$$

ce qui fait

$$\int_\Omega a(l_{r_0}(w_{r_0})) \nabla (u - w_{r_0}) \nabla \phi + \int_\Omega (a(l_r(v)) - a(l_{r_0}(w_{r_0}))) \nabla u \nabla \phi = 0. \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega) \tag{4.87}$$

En prenant $\phi = u - w_{r_0}$, on obtient

$$\inf_{\mathbb{R}} a(l_{r_0}(w_{r_0}) \int_\Omega |\nabla (u - w_{r_0})|^2 \leq \int_\Omega |a(l_r(v)) - a(l_{r_0}(w_{r_0}))| |\nabla u| |\nabla (u - w_{r_0})|. \tag{4.88}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans (4.88) et le fait que $a \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$ on obtient après un petit calcul

$$\inf_{\mathbb{R}} a(l_{r_0}(w_{r_0}) |\nabla (u - w_{r_0})|_2 \leq |a'|_\infty \, |l_r(v) - l_{r_0}(w_{r_0})| \, |\nabla u|_2. \tag{4.89}$$

Comme on avait pour $g \equiv 1$, il vient

$$|l_r(v)(x) - l_{r_0}(w_{r_0})(x)| \leq h(\Omega) |\Omega|^{1/2} |\nabla (v - w_{r_0})|_2 + k^{\frac{1}{2}} h(\Omega) \, |r^n - r_0^n|^{1/2} |\nabla w_{r_0}|_2.$$

D'où

$$|l_r(v)(x) - l_{r_0}(w_{r_0})(x)| \leq h(\Omega) |\Omega|^{1/2} \delta + k^{\frac{1}{2}} h(\Omega)\, q(r - r_0) |\nabla w_{r_0}|_2,$$

En posant

$$\gamma = |\Omega|^{1/2} h(\Omega)\,\delta + p_2\, q(r - r_0)|\nabla w_{r_0}|_2$$

on déduit que

$$|l_r(v) - l_{r_0}(w_{r_0})| \leq \gamma. \tag{4.90}$$

En utilisant (4.89) et (4.90) on a

$$|\nabla(u - w_{r_0})|_2 \leq \frac{|a'|_\infty |\nabla u|_2}{\inf\limits_{\mathbb{R}} a(l_{r_0}(w_{r_0}))}\gamma. \tag{4.91}$$

De plus comme

$$|\nabla u|_2 \leq \frac{|a'|_\infty |f|_\star}{\inf\limits_{\mathbb{R}} a(l_r(v))} \tag{4.92}$$

(4.91) devient alors

$$|\nabla(u - w_{r_0})|_2 \leq \frac{|a'|_\infty |f|_\star}{\inf\limits_{\mathbb{R}} a(l_{r_0}(w_{r_0}))\inf\limits_{\mathbb{R}} a(l_r(v))}\gamma. \tag{4.93}$$

Puisque $p > \gamma$ (car $q(r - r_0) \leq q(\epsilon)$) on a que

$$a(l_r(v)) \geq a(l_{r_0}(w_{r_0})) - p\,|a'|_\infty. \tag{4.94}$$

(4.93) et (4.94) nous donne

$$|\nabla(u - w_{r_0})|_2 \leq \frac{|a'|_\infty |f|_\star}{\inf\limits_{\mathbb{R}} a(l_{r_0}(w_{r_0}))\{\inf\limits_{\mathbb{R}} a(l_{r_0}(w_{r_0})) - p\,|a'|_\infty\}}\gamma. \tag{4.95}$$

Ce qui fait que

$$\begin{aligned}|\nabla(u - w_{r_0})|_2 \leq & \frac{|a'|_\infty |f|_\star}{\inf\limits_{\mathbb{R}} a(l_{r_0}(w_{r_0}))(\inf\limits_{\mathbb{R}} a(l_{r_0}(w_{r_0})) - p\,|a'|_\infty)}|\Omega|^{1/2} h(\Omega)\,\delta \\ & + \frac{|a'|_\infty |f|_\star}{\inf\limits_{\mathbb{R}} a(l_{r_0}(w_{r_0}))(\inf\limits_{\mathbb{R}} a(l_{r_0}(w_{r_0})) - p\,|a'|_\infty)} p_2\, q(r - r_0)|\nabla u_{r_0}|_2.\end{aligned} \tag{4.96}$$

Ce qui fait avec (4.82) et (4.83)

$$|\nabla(u - u_{r_0})|_2 \leq \frac{\inf\limits_{\mathbb{R}} a(l_{r_0}(w_{r_0})) - p\,|a'|_\infty}{\inf\limits_{\mathbb{R}} a(l_{r_0}(w_{r_0}))} c_1\,\delta + \frac{\inf\limits_{\mathbb{R}} a(l_{r_0}(w_{r_0})) - p\,|a'|_\infty}{\inf\limits_{\mathbb{R}} a(l_{r_0}(w_{r_0}))} c_2\, q(r - r_0). \tag{4.97}$$

Comme $\dfrac{\inf\limits_{\mathbb{R}} a(l_{r_0}(w_{r_0})) - p\,|a'|_\infty}{\inf\limits_{\mathbb{R}} a(l_{r_0}(w_{r_0}))} < 1$ et (4.85) il vient que

$$|\nabla(u - u_{r_0})|_2 \leq c_1\,\delta + c_2\, q(r - r_0) = \delta. \tag{4.98}$$

Ce qui montre bien que T_r envoie bien la boule $B(u_{r_0}, \delta, H_0^1(\Omega))$ sur elle même. Montrons maintenant qu'elle est contractante. Pour cela on pose $u_1 = T_r(v_1)$ et $u_2 = T_r(v_2)$. On a que

$$\int_\Omega a(l_r(v_1))\nabla u_1 \nabla\phi = \int_\Omega a(l_r(v_2))\nabla u_2 \nabla\phi, \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega) \tag{4.99}$$

ce qui fait

$$\int_\Omega a(l_r(v_2))\nabla(u_1-u_2)\nabla\phi + \int_\Omega (a(l_r(v_1)) - a(l_r(v_2)))\nabla u_1 \nabla\phi = 0. \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega) \tag{4.100}$$

En prenant $\phi = u_1 - u_2$ comme dans (4.88), on obtient

$$\inf_{\mathbb{R}} a(l_r(v_2)) \int_\Omega |\nabla(u_1-u_2)|^2 \leq \int_\Omega |a(l_r(v_1)) - a(l_r(u_2))||\nabla u_1||\nabla(u_1-u_2)|. \tag{4.101}$$

Ce qui donne

$$|\nabla(u_1-u_2)|_2 \leq \frac{p_1|a'|_\infty |f|_\star}{\inf\limits_{\mathbb{R}} a(l_r(v_2)) \inf\limits_{\mathbb{R}} a(l_r(v_1))} |\nabla(v_1-v_2)|_2. \tag{4.102}$$

c'est à dire en utilisant toujours le fait que

$$\begin{aligned} \inf_{\mathbb{R}} a(l_r(v_1)) &\geq \inf_{\mathbb{R}} a(l_{r_0}(w_{r_0})) - p\,|a'|_\infty \\ \inf_{\mathbb{R}} a(l_r(v_2)) &\geq \inf_{\mathbb{R}} a(l_{r_0}(w_{r_0})) - p\,|a'|_\infty \end{aligned} \tag{4.103}$$

on a

$$|\nabla(u_1-u_2)|_2 \leq \frac{|\Omega|^{1/2} h(\Omega)|f|_\star |a'|_\infty}{(\inf\limits_{\mathbb{R}} a(l_{r_0}(w_{r_0})) - p\,|a'|_\infty)^2} |\nabla(v_1-v_2)|_2. \tag{4.104}$$

Ce qui donne en utilisant (4.82) que T_r est une contraction. On conclut en appliquant le théorème du point fixe de Banach. □

On a aussi

Corollaire 4.31. *Si $f \in H^{-1}(\Omega)$, $a \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$ et que $\inf\limits_{\mathbb{R}} a = m > 0$ alors on a*

(i) Si r est suffisamment petit alors (4.3) admet une unique solution.

(ii) Si

$$\frac{|\Omega|^{1/2} h(\Omega)|f|_\star |a'|_\infty}{m^2} < 1 \tag{4.105}$$

alors (4.3) admet une unique solution pour tout $r \in [0, d]$.

Démonstration. Si on remplace $|\Omega|^{1/2}h(\Omega)$ par $|B(0,r)|^{1/2}h(\Omega)$ dans (4.104) on obtient pour r suffisamment petit l'unicité. On rappelle qu'une telle substitution est possible dû au fait que pour estimer $|\Omega \cap B(0,r)|$ dans (3.27) on aurait pu prendre

$$|\Omega \cap B(0,r)| \leq |B(0,r)| \quad \text{à la place de} \quad |\Omega \cap B(0,r)| \leq |\Omega|.$$

De même en prenant $v_1 = u_1$ et $v_2 = u_2$ dans (4.104) et en considérant (4.105) on montre que la condition (4.105) est une condition suffisante pour montrer l'unicité du problème (4.3) et cela pour tout $r \in [0, d]$. □

Remarque 4.32. *Nous avons vu dans la proposition 4.30 que δ dépendait de r_0 rendant donc à priori le résultat d'unicité dépendant de r_0, nous allons dans ce qui va suivre donner un résultat d'unicité indépendamment de r_0.*

On a

Théorème 4.33. *On suppose que $f \in H^{-1}(\Omega)$, $a \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$ et que $\inf_{\mathbb{R}} a > 0$. Si de plus on a*

(i) il existe un nombre positif μ_1 tel que $a(\mu_1) = min_{[0,\mu_1]} a$;

(ii) pour tout $r \in [0, d]$, w_r est une solution de (4.3) et

$$0 \leq l_r(w_r)(x) \leq \mu_1 \quad \text{p.p } x \in \Omega; \tag{4.106}$$

(iii) il existe un $\lambda > 0$ tel que

$$|\Omega|^{1/2} h(\Omega) |f|_\star |a'|_{\infty,[-\lambda,\mu_1+\lambda]} \frac{1}{a(\mu_1)^2} < 1. \tag{4.107}$$

Alors il existe un $\delta > 0$(indépendant de r et de w_r) tel que pour tout $r \in [0, d]$, (4.3) admet une unique solution dans $B(w_r, \delta, H_0^1(\Omega))$.

Démonstration. On pose $J = [-\lambda, \mu_1 + \lambda]$. Soit $p > 0$ tel que

$$\begin{aligned} &a(\mu_1) - |a'|_{\infty,J} p > 0 \\ &\frac{|\Omega|^{1/2} h(\Omega) |f|_\star |a'|_{\infty,J}}{(a(\mu_1) - |a'|_{\infty,J} p)^2} < 1. \end{aligned} \tag{4.108}$$

Soit $\delta > 0$ vérifiant

$$|\Omega|^{1/2} h(\Omega)\, \delta \leq min(\lambda, p). \tag{4.109}$$

En utilisant (4.90) et (4.106) on a que pour u solution de (4.3) appartenant à $B(w_r, \delta, H_0^1(\Omega))$

$$-|\Omega|^{1/2} h(\Omega)\delta \leq l_r(u) \leq l_r(w_r) + |\Omega|^{1/2} h(\Omega)\delta. \tag{4.110}$$

Ainsi en utilisant (4.109), (4.110) on montre aisément que $l_r(u)(x) \in J$. De plus on sait d'après (4.102) que

$$|\nabla(u - w_r)|_2 \leq \frac{|\Omega|^{1/2} h(\Omega) |a'|_{\infty,J} |f|_\star}{\inf_{\mathbb{R}} a(l_r(w_r)) \inf_{\mathbb{R}} a(l_r(u))} |\nabla(u - w_r)|_2. \tag{4.111}$$

Au vu de la condition (i) et (ii) on a que

$$\inf_{\mathbb{R}} a(l_r(w_r)) \geq a(\mu_1). \tag{4.112}$$

De plus on a que

$$\inf_{\mathbb{R}} a(l_r(u)) \geq \inf_{\mathbb{R}} a(l_r(w_r)) - |\Omega|^{1/2} h(\Omega) |a'|_{\infty,J} \delta. \tag{4.113}$$

(4.112) et (4.113) nous donne

$$\inf_{\mathbb{R}} a(l_r(u)) \geq a(\mu_1) - |\Omega|^{1/2} h(\Omega) |a'|_{\infty,J} \delta, \tag{4.114}$$

et aussi en utilisant (4.109)

$$\inf_{\mathbb{R}} a(l_r(u)) \geq a(\mu_1) - p|a'|_{\infty,J}. \tag{4.115}$$

De (4.112) et (4.115) il résulte donc que (4.111) devient

$$|\nabla(u-w_r)|_2 \leq \frac{|\Omega|^{1/2}h(\Omega)|a'|_{\infty,J}|f|_\star}{(a(\mu_1)-p|a'|_{\infty,J})^2}|\nabla(u-w_r)|_2. \tag{4.116}$$

En y adjoignant (4.108) on obtient l'unicité. □

Nous pouvons maintenant donner le résultat principal de cette partie qui nous donne un critère d'existence et d'unicité de branche globale de solutions radiales.

Théorème 4.34. *On suppose que $f \in L^2_r(\Omega)$, $f \geq 0$, $g \equiv 1$ et que l'on a*

(i) il existe une solution μ_d de (3.77) avec $a(\mu_d) = \min\limits_{[0,\mu_d]} a$.

(ii) $a(0) = \max\limits_{[0,\mu_d]} a$.

Si de plus $a \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$ et il existe un $\lambda > 0$ tel que

$$|\Omega|^{1/2}h(\Omega)|f|_\star|a'|_{\infty,[-\lambda,\mu_d+\lambda]}\frac{1}{a(\mu_d)^2} < 1, \tag{4.117}$$

alors on a

(i) pour tout $r \in [0,d]$, (4.3) admet une unique solution radiale w_r dans $[v,u]$, où v et u désignent respectivement la solution de (4.3) en $r=0$ et une solution de (4.3) en $r=d$.

(ii) $\{(r,w_r) : r \in [0,d]\}$ est une branche globale de solutions n'admettant pas de points de bifurcations,

(iii) cette branche globale de solutions est l'unique branche globale,

(iv) si a est décroissante sur $[0,\mu_d]$ alors l'application $r \mapsto w_r$ est croissante.

Démonstration. Soit w_r une solution de (4.3). Si l'on considère $\bar{a}$ comme dans (4.70) les hypothèses de la proposition 4.20 sont vérifiées. D'où l'existence d'une solution radiale $w_r \in [v,u]$ du problème

$$\begin{cases} -div(\bar{a}(l_r(w_r))\nabla w_r) = f \text{ dans } \Omega \\ w_r \in H^1_0(\Omega). \end{cases} \tag{4.118}$$

Comme $\overline{a} \geq a(\mu_d)$ il vient immédiatement que (4.117) devient

$$|\Omega|^{1/2}h(\Omega)|f|_\star|\overline{a}'|_{\infty,[-\lambda,\mu_d+\lambda]}\frac{1}{a(\mu_d)^2} < 1,$$

le corollaire 4.31 nous permet donc de conclure que (4.118) admet une unique solution. Ce qui prouve (i). Souvenez vous que pour $a = \overline{a}$ on avait que la solution w_r vérifiait l'hypothèse (4.81). En utilisant (4.117) et le fait que $m \leq a(\mu_d)$ avec m défini comme dans (3.3) on montre en utilisant la proposition 3.5 que l'application

$$\begin{aligned} [0,\infty] &\to H^{-1}(\Omega) \\ r &\mapsto w_r \end{aligned} \tag{4.119}$$

est continue. De plus comme

$$0 \leq l_r(w_r) \leq \mu_d, \tag{4.120}$$

on déduit de la proposition 4.30 que $\{(r, w_r) : r \in [0, d]\}$ est une branche globale de solutions. De plus en utilisant le théorème 4.33 on montre que cette branche n'admet pas de points de bifurcations, ce qui prouve (ii). Soit $\{(r, w_r) : r \in [0, d]\}$ une branche globale de solutions. On définit l'ensemble

$$E = \{r \in [0, d] : w_r = v_r\}.$$

Dû à la continuité de $w_r - v_r$ on a que E est fermé. Comme w_r vérifie

$$0 \leq l_r(w_r) \leq \mu_d, \tag{4.121}$$

il vient en utilisant le théorème 4.33 que E est ouvert. Ce qui nous garantit dû à la connexité de E qu'il est soit vide soit égal à$[0, d]$. Comme pour $r = 0$ on a $w_0 = v_0$, il est donc égal à $[0, d]$. Ce qui montre bien (iii). Pour finir soit $r_1, r_2 \in [0, d]$, $r_1 < r_2$ et $w \in [w_{r_1}, u] \cap L^2_r(\Omega)$ on rappelle qu'ici u désigne la solution de (4.3) en $r = d$. On a que

$$l_{r_1}(w_{r_1}) \leq l_{r_2}(w) \leq l_d(u), \tag{4.122}$$

puis dû à la décroissance de a

$$a(l_{r_1}(w_{r_1})) \geq a(l_{r_2}(w)) \geq a(l_d(u)). \tag{4.123}$$

En utilisant la proposition 4.11 on conclut immédiatement que

$$w_{r_1} \leq T_{r_2}(w) \leq u. \tag{4.124}$$

Ce qui nous donne en appliquant le théorème de point fixe de schauder l'existence d'une solution de (4.3) en $r = r_2$ appartenant à $[w_{r_1}, u] \cap L^2_r(\Omega)$. Grâce à l'unicité de la solution cette solution est bien w_{r_2}. Donc $w_{r_1} \leq w_{r_2}$. □

Corollaire 4.35. *On suppose $f \in L^2_r(\Omega)$, $f \geq 0$ et $g \equiv 1$. Alors il existe une fonction a vérifiant*

$$a \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \quad \inf_{\mathbb{R}} a > 0, \quad \sup_{\mathbb{R}} a < \infty$$

et une solution u_1 de (P_d) tel qu'il existe une branche locale de solutions et qui ne soit pas globale démarrant en u_1.

Démonstration. Il est tout à fait possible grâce au lemme 3.9 de construire une fonction a tel que le problème (P_d) admette plusieurs solutions et que a vérifie

(i) il existe une solution μ_2 de (3.77) tel que $a(\mu_2) = \min_{[0,\mu_2]} a$;

(ii) $a(0) = \max_{[0,\mu_2]} a$;

(iii) $|\Omega|^{1/2} h(\Omega) |f|_\star |a'|_{\infty,[-\lambda,\mu_d+\lambda]} \frac{1}{a(\mu_2)^2} < 1$;

(iv) il existe $\mu_1 > \mu_2$ solutions de avec $\mu_1 a'(\mu_1) \neq a(\mu_1)$.

En utilisant le fait que $\mu_1 a'(\mu_1) \neq a(\mu_1)$, le théorème 3.15 et le théorème des fonctions implicites on conclut à l'existence d'une branche locale démarrant en u^1_d avec bien sûr $u^1_d = \frac{\phi}{l_d(\mu_1)}$. De plus les hypothèses du théorème 4.34 étant vérifiées cela prouve l'existence d'une branche globale de solutions passant par u^2_d. Comme $\mu_1 > \mu_2$ il résulte que $u^1_d \neq u^2_d$, et démontre bien qu'il n'existe pas de branche globale démarrant en u^1_d □

Chapitre 5

Résultats numériques du problème stationnaire

On considère toujours que $f \in H^{-1}(\Omega)$, $V = H_0^1(\Omega)$ et

$$\begin{cases} -div(a(l_r(w_r))\nabla w_r) = f \quad \text{dans} \quad \Omega \\ w_r \in H_0^1(\Omega), \end{cases} \tag{5.1}$$

avec $l_r(w_r) = \int_{B(x,r)\cap\Omega} w_r(y)dy$. Dans cette partie notre contribution est apportée au cas $n = 1$, c'est à dire que nous étudierons le problème

$$\begin{cases} -(a(l_r(w_r))w_r')' = f \quad \text{dans}]-l,l[\\ w_r \in H_0^1(]-l,l[). \end{cases} \tag{5.2}$$

On considère toujours ici que v est la solution du problème

$$\begin{cases} -(a(0)v')' = f \quad dans \quad]-l,l[\\ v \in H_0^1(]-l,l[) \end{cases} \tag{5.3}$$

et que u est une solution du problème

$$\begin{cases} -(a(l(u))u')' = f \quad dans \quad]-l,l[\\ u \in H_0^1(]-l,l[) \end{cases} \tag{5.4}$$

La méthode utilisée est celle des éléments finis. Pour simplifier les écritures lorsqu'aucune confusion ne sera possible nous prendrons simplement $w = w_r$. Pour l'espace de discrétisation on introduit $(V_h)_{h>0}$ un sous espace de V tel que

- Pour tout $h > 0$, V^h est de dimension fini.
- $\cup_{h>0} V^h$ soit dense dans V.

Notre problème étant de trouver $w_h \in V_h$ tel que

$$\int_\Omega a(l_r(w_h))w_h'\phi_h' = \int_\Omega f\phi_h \quad \forall \phi_h \in V_h. \tag{5.5}$$

On se donne une subdivision uniforme de l'intervalle $[-l,l]$ de pas $h = \frac{2l}{N+1}$ et $x_i = -l + ih \quad i \in \{0, \cdots, N+1\}$. On définit l'espace

$$V_h = \{w \in C^0([-l,l]), \quad w(-l) = w(l) = 0, \quad w_{[x_i,x_{i+1}]} \quad \text{est affine} \quad \forall i \in \{0, \cdots, N\}\}.$$

Il s'agit bien d'un sous espace affine de V de dimension finie. On cherche donc

$$w_h(x) = \sum_{j=1}^{N} w_j \phi_j(x),$$

où les $(\phi_i)_{1\leq i\leq N}$ forment une base de V_h. Pour le calcul il est naturel de considérer (voir([eJM83]) que

$$\phi_i(x) = \begin{cases} \frac{(x-x_{i-1})}{h} & \text{si } x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \frac{(x_{i+1}-x)}{h} & \text{si } x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a bien que

$$\int_\Omega a\Big(l_r\Big(\sum_{j=1}^{N} w_j\phi_j\Big)\Big)\sum_{k=1}^{N} w_k\phi_k'(x)\phi_i'(x)dx = \int_\Omega f(x)\phi_i(x)dx \quad i = 1, \cdots, N$$

où encore

$$A(W_h)W_h = B_h,$$

où

$$W_h = \begin{pmatrix} w_1 \\ . \\ . \\ . \\ w_N \end{pmatrix} \qquad A(W_h) = (A(W_h)_{i,j})_{1\leq i,j\leq N},$$

avec

$$A(W_h)_{i,j} = \int_\Omega a(L_r(x)W_h)\phi_j'\phi_i'dx \quad avec \quad L_r(x) = \begin{pmatrix} l_r(\phi_1)(x) \\ . \\ . \\ . \\ l_r(\phi_N)(x) \end{pmatrix}$$

et

$$B_h = \begin{pmatrix} (f_1, \phi_1) \\ . \\ . \\ . \\ (f_N, \phi_N) \end{pmatrix}.$$

Pour déterminer W_h nous allons utiliser la méthode de Newton. Nous allons pour cela résoudre le problème

$$F(W_h) = 0 \quad avec \quad F(W_h) = A(W_h)W_h - B_h.$$

Avant de donner des résultats de convergence de notre problème et les résultats obtenus dans le cas de l'unicité du problème et de solutions multiples pour le problème (3.2), il est important de bien comprendre l'influence de

$$(l_r(\phi_i))_{1\leq i\leq N}.$$

1 Caractérisation de $L_r(x)$

Les différentes valeurs données par les $(l_r(\phi_i))_{1\leq i\leq N}$ sont déterminantes dans l'étude numérique à cause du fait qu'à chaque i fixé $l_r(\phi_i)$ est déterminée par la position x et le rayon r. Pour nos simulations numériques, nous prenons $l = 10$, $N = 100$ et nous donnons différentes illustrations graphiques de $l_r(\phi_i)$ avec $i = 1, 50$ et 100 , la méthode de calcul pour les intégrales est celle des trapèzes. On rappelle que les pas utilisés pour discrétiser la position et le diamètre du domaine sont les mêmes, c'est-à-dire que $h = \Delta x = \Delta r = \frac{2l}{N+1}$, et que sur les graphiques qui vont suivre X représente les valeurs du rayon r et Y les valeurs de x.

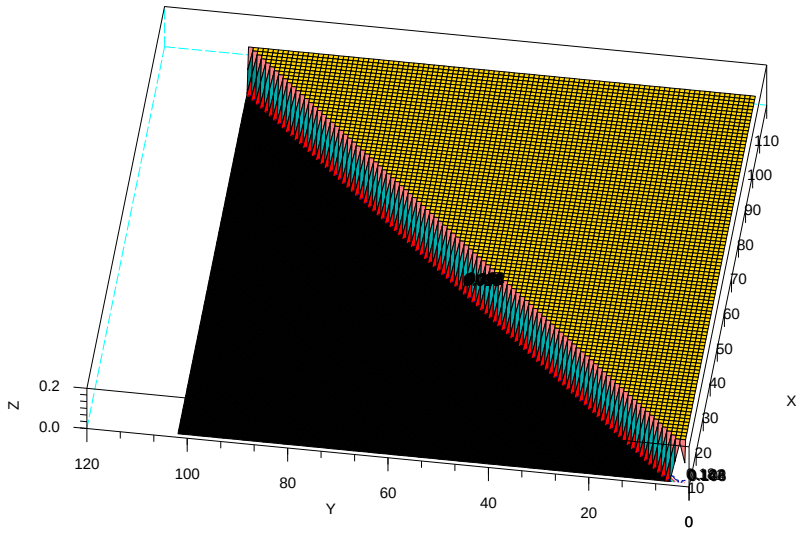

FIG. 5.1 – $l_r(\phi_i)$ avec $i = 1$

Dans le cas où $i = 1$, l'intégrale $\int_{x_j-r_k}^{x_j+r_k} \phi_1(y)dy$ est telle que

$$\int_{x_j-r_k}^{x_j+r_k} \phi_1(y)dy = \begin{cases} 0 & \text{si } [x_j - r_k, x_j + r_k] \cap [x_0, x_2] = \emptyset \\ h & \text{si } [x_0, x_2] \subset [x_j - r_k, x_j + r_k] \end{cases}$$

avec $1 \leq j, k \leq N + 1$. Ce qui est décrit respectivement par le triangle inférieur et supérieur sur la figure 5.1.

Lorsque $[x_j - r_k, x_j + r_k] \cap [x_0, x_2] \neq \emptyset$ et que $[x_0, x_2] \not\subset [x_j - r_k, x_j + r_k]$ plusieurs situations peuvent se produire, nous donnons à titre d'exemple une d'entres elles. Supposons que

$$x_0 < x_j - r_k < x_1 \text{ et que } x_2 < x_j + r_k.$$

Dans ce cas

$$\int_{x_j-r_k}^{x_j+r_k} \phi_1(y)dy = h - \frac{(x_j - r_k - x_0)^2}{2h}$$

ces situations se traduisant par la formation d'une coupe oblique d'isovaleurs entre le triangle supérieur et inférieur sur la figure 5.1. Nous donnons pour récapituler

$l_r(\phi_1)$.

$$\int_{x_j-r_k}^{x_j+r_k} \phi_1(y)dy = \begin{cases} 0 & \text{si } [x_j-r_k, x_j+r_k] \cap [x_0, x_2] = \emptyset \\ h & \text{si } [x_0, x_2] \subset [x_j-r_k, x_j+r_k] \\ h - \frac{(x_j-r_k-x_0)^2}{2h} & \text{si } x_j - r_k \in [x_0, x_1] \\ \frac{(x_2-(x_j-r_k))^2}{2h} & \text{si } x_j - r_k \in]x_1, x_2] \\ h - \frac{(x_2-(x_j+r_k)^2}{2h} & \text{si } x_j + r_k \in [x_1, x_2] \\ \frac{(x_j+r_k-x_0)^2}{2h} & \text{si } x_j + r_k \in]x_0, x_1]. \end{cases}$$

Une situation à peu près similaire se produit lorsque $i = 100$ tel que le montre

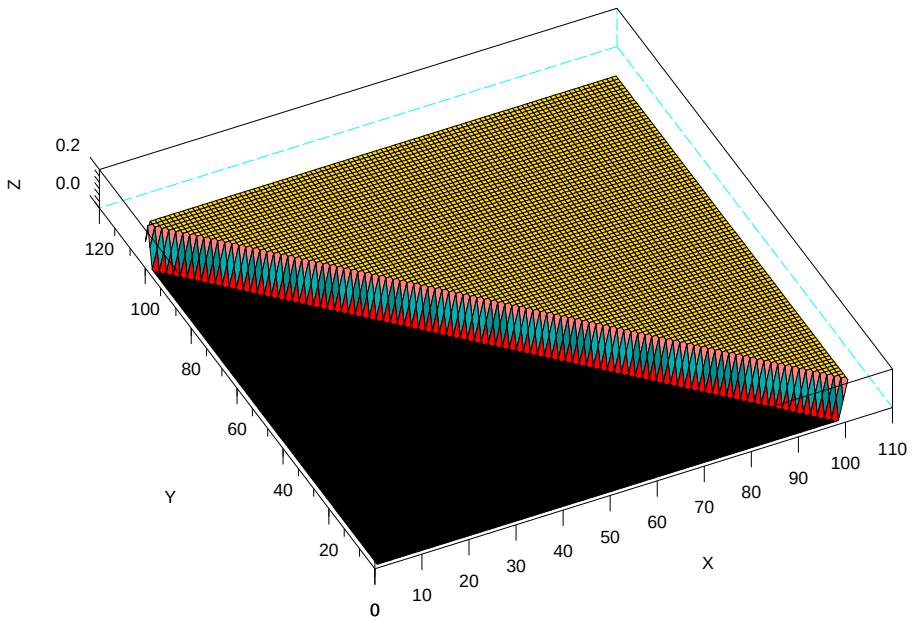

FIG. 5.2 – $l_r(\phi_i)$ avec $i = 100$

la figure 5.2, la seule différence étant bien évidemment que dans ce cas la coupe oblique est opposée à celle du cas $i = 1$. Un autre cas important est $i = 50$ qui lui nous montre une apparition de deux petites coupes symétriques par rapport à l'axe $X = 50$ (voir figure 5.3), s'expliquant par le fait que lorsque $r_k = l$ nous avons l'égalité qui suit :

$$\int_{x_j-l}^{x_j+l} \phi_1(y)dy = \int_{x_{N+2-j}-l}^{x_{N+2-j}+l} \phi_{50}(y)dy.$$

2 Convergence de l'algorithme de Newton

On a vu précédemment que nous cherchions à résoudre le problème

$$F(W_h) = 0 \quad avec \quad F(W_h) = A(W_h)W_h - B_h,$$

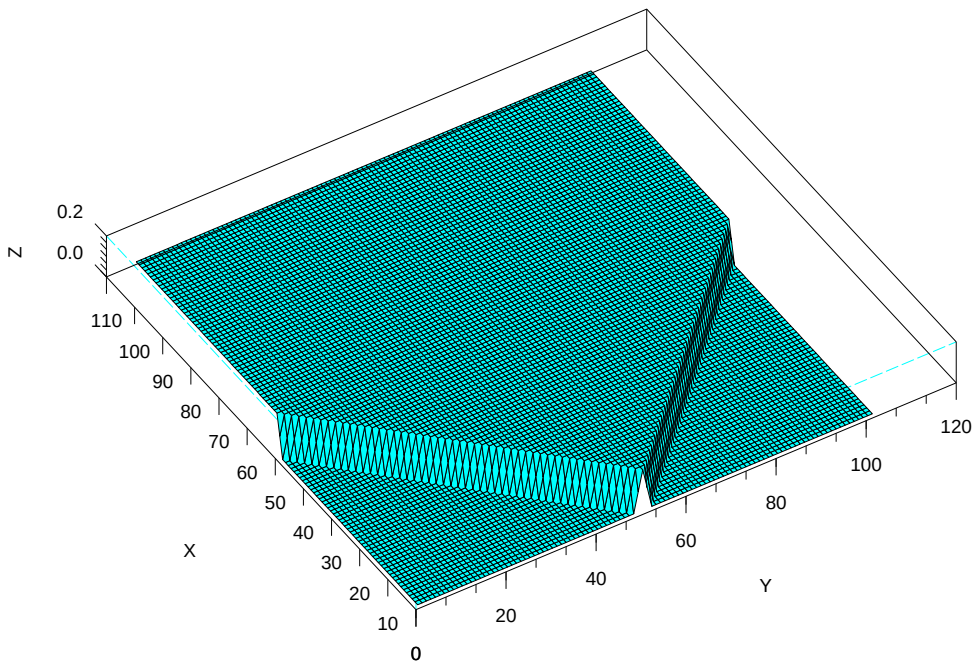

FIG. 5.3 – $l_r(\phi_i)$ avec $i = 50$

de façon itérative. Pour cela pour un choix initial $W^0 \in \mathbb{R}^N$, nous calculons

$$W^{n+1} = W^n - (F'(W^n))^{-1}F(W^n) \quad \forall n \geq 0.$$

Nous donnons ici un résultat de convergence.

Proposition 5.1. *On suppose que F est de classe C^2 de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}^N$, et que W_∞ est un zéro régulier de F c'est à dire que $F(W_\infty) = 0$ et $F'(W_\infty)$ est inversible. Il existe un réel $\beta > 0$ tel que si W^0 est tel que $\|W_\infty - W^0\| \leq \beta$, alors la méthode de Newton converge, c'est-à-dire que la suite (W^n) converge vers W_∞ , et il existe une constante $c > 0$ telle que*

$$\|W^{n+1} - W_\infty\| \leq c\|W^n - W_\infty\|^2$$

Démonstration. F' étant continue on sait qu'il existe un $\beta > 0$ tel que F' est inversible pour tout point appartenant à la boule de centre W_∞ et de rayon β. Si W^n est tel que $\|W_\infty - W^n\| \leq \beta$ alors on sait que $F'(W^n)$ est inversible. De plus on sait d'après l'algorithme de Newton que

$$W^{n+1} = W^n - F'(W^n)^{-1}F(W^n). \tag{5.6}$$

En y adjoignant le fait que $F(W_\infty) = 0$, il vient que (5.6) devient

$$W^{n+1} - W_\infty = W^n - W_\infty - F'(W^n)^{-1}(F(W^n) - F(W_\infty)). \tag{5.7}$$

En faisant un développement de taylor autour de W^n, on obtient

$$\begin{aligned} W^{n+1} - W_\infty =& W^n - W_\infty \\ & - F'(W^n)^{-1}\Big[- F'(W^n)(W_\infty - W^n) \\ & - \frac{\|W_\infty - W^n\|^2}{2} F''(W^n) + o_1(\|W_\infty - W^n\|^2)\Big], \end{aligned} \tag{5.8}$$

avec $o_1(\|W_\infty - W^n\|^2)$ tel que

$$\lim_{\|W_\infty - W^n\| \to 0} \frac{o_1(\|W_\infty - W^n\|^2)}{\|W_\infty - W^n\|^2} = 0.$$

Ce qui fait

$$W^{n+1} - W_\infty = F'(W^n)^{-1} F''(W^n) \frac{\|W_\infty - W^n\|^2}{2} + o_2(\|W_\infty - W^n\|^2), \tag{5.9}$$

et donne après un petit calcul

$$\begin{aligned} \|W^{n+1} - W_\infty\| \leq & \Big[\|F'(W^n) - F'(W_\infty)\| + \|F'(W_\infty)\|\Big]^{-1} \\ & \Big[\|F''(W^n) - F''(W_\infty)\| + \|F''(W_\infty)\|\Big] \frac{\|W_\infty - W^n\|^2}{2} + o_2(\|W_\infty - W^n\|^2). \end{aligned} \tag{5.10}$$

D'où

$$\|W^{n+1} - W_\infty\| \leq \Big[c_{F'}(\beta) + k_1\Big]^{-1} \Big[c_{F''}(\beta) + k_2\Big] \frac{\|W_\infty - W^n\|^2}{2} + o_2(\|W_\infty - W^n\|^2), \tag{5.11}$$

où $c_{F'}(\beta), k_1, c_{F''}(\beta)$ et k_2 désignent respectivement le module de continuité de F', $\|F'(W_\infty)\|$, le module de continuité de F'' et $\|F''(W_\infty)\|$. En posant

$$\epsilon = \frac{[w_{F'}(\beta) + k_1]^{-1}[w_{F''}(\beta) + k_2]}{2}$$

on obtient bien

$$\|W^{n+1} - W_\infty\| \leq \epsilon \|W^n - W_\infty\|^2$$

en supposant β suffisamment petit de tel sorte que $\beta\epsilon < 1$ cela nous permet bien de vérifier que pout tout $n \geq 0$,

$$\|W^n - W_\infty\| \leq \beta.$$

Ce qui termine la preuve. □

Nous allons donc utiliser cet algorithme pour déterminer une solution discrète w_h du problème 5.5.

3 Le cas où a est croissant

Nous donnons ici une application numérique du corollaire 4.22 et de la proposition 4.23). Ce cas est particulièrement intéressant parce qu'il nécessite dans son étude théorique des hypothèses plus fortes que le cas où a est décroissant pour comparer les solutions w_r lorsque r varie. En revanche le fait qu'il admette une unique solution pour $r = d$ nous permet une mise en oeuvre numérique beaucoup plus facile. Pour illustrer ce théorème dans un cas simple nous prenons $n = 1$, $d = 2$, $f(x) = x^2$, $N = 100$, $g = 1$ et $a(x) = exp(x) + 0.1$ voir fig 5.5. Nous rappelons qu'ici v et u désignent respectivement les solutions de

$$\begin{cases} -(a(0)v')' = f \quad dans \quad]-1,1[\\ v \in H_0^1(]-1,1[), \end{cases} \tag{5.12}$$

et

$$\begin{cases} -(a(l(u))u')' = f \quad dans \quad]-1,1[\\ u \in H_0^1(]-1,1[). \end{cases} \tag{5.13}$$

On désigne aussi par w_r, une solution de

$$\begin{cases} -(a(l_r(w_r))w_r')' = f \quad \text{dans}]-1,1[\\ w_r \in H_0^1(]-1,1[). \end{cases}$$

Nous représentons aussi les différentes valeurs de $w_r(x_{N/2})$ fig 5.4 pour bien mettre

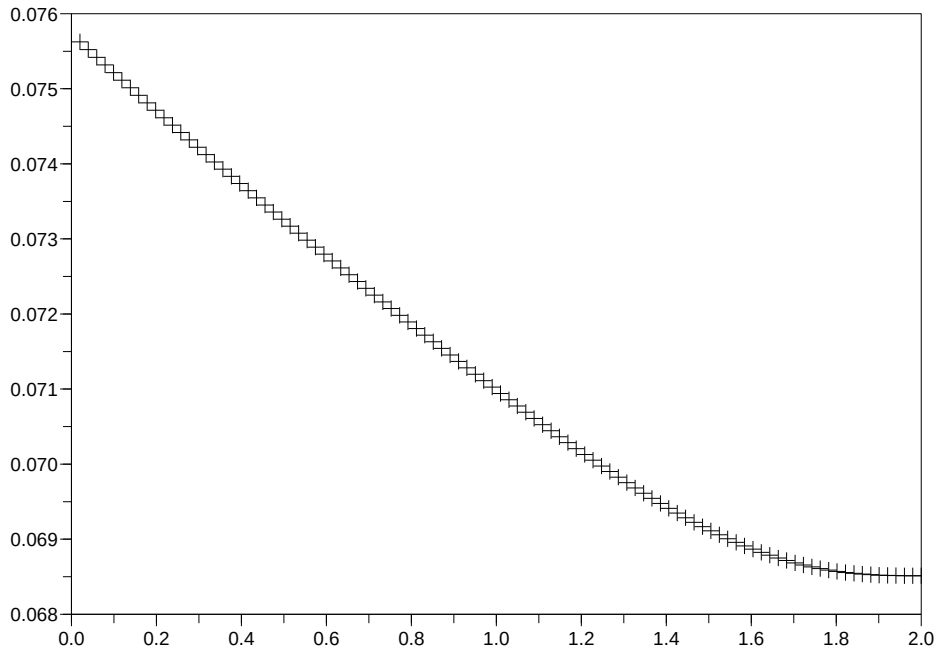

FIG. 5.4 – $w_r(x_{N/2})$ en fonction de r, avec a croissant

en évidence l'évolution de la solution w_r lorsque r va de 0 à d. On peut essayer de vé-

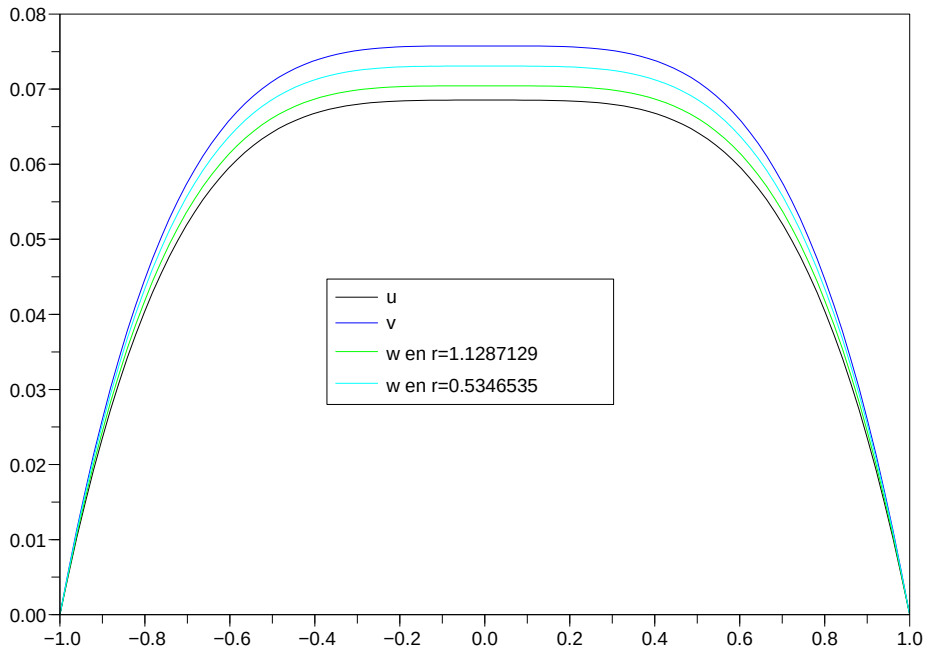

FIG. 5.5 – w_r en fonction de r, avec a croissant

rifier que certaines conditions utilisées pour montrer l'existence de notre principe de comparaison (proposition 4.23) reste valable. En effet un calcul simple nous permet de voir que

$$l_r(\phi) = -\frac{x^4 r}{6} - \frac{x^2 r^3}{3} - \frac{r^5}{30} + \frac{r}{6},$$
$$l(\phi) = \frac{2}{15}, \text{ et } \quad l(u) = 0.1096510,$$

et aussi que

$$\sup_{x\in(-1,1)} l_r(\phi)(x) \leq -\frac{r^5}{30} + \frac{r}{6},$$

où ϕ désigne la solution de (3.76). Pour $r \in [0, 1-\epsilon[\cup]1+\epsilon, 2]$ on a bien que

$$\sup_{x\in(-1,1)} l_r(\phi)(x) \leq a(0)\, l(u),$$

avec $\epsilon > 0$. Ce qui est conforme avec le fait que (voir remarque 4.24) pour r notre condition s'applique très bien. En revanche on peut souligner que pour r proche de 1 la condition

$$\sup_{x\in(-1,1)} l_r(\phi)(x) \leq a(0)\, l(u),$$

devient inutilisable.

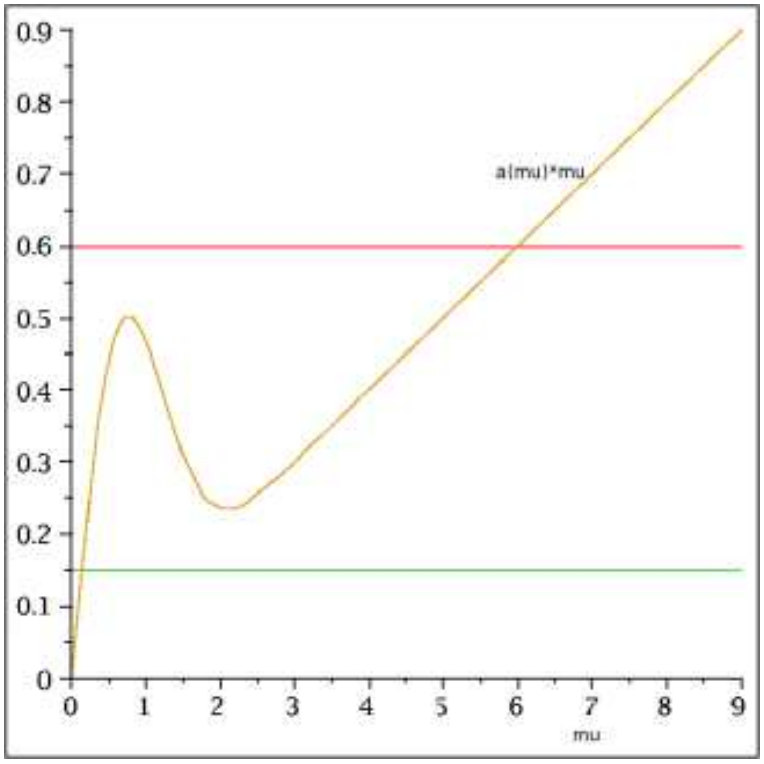

FIG. 5.6 – $a(\mu)\,\mu$ en fonction de μ

4 Exemple de a ayant la forme d'une gaussienne

Nous considérons les hypothèses du Théorème 4.7, cela dit nous substituons l'hypothèse de décroissance de a par le fait que a ait la forme d'une gaussienne. On prend donc $a(x) = exp(-x^2) + 0.1$, $l = 1$. En se souvenant que pour $r = diam(\Omega)$ le problème 3.2 admet le même nombre de solutions que le problème dans $\mathbb{R}$ suivant :

$$a(\mu)\mu = l(\phi) \tag{5.14}$$

voir lemme 3.9 il est donc important de remarquer en regardant la courbe représentative de $a(\mu)\,\mu$ que cet exemple à la particularité de nous décrire, comme nous le montre la figure 5.6 que nous avons soit l'unicité de la solution, soit plusieurs solutions.

Dans le cas de l'unicité deux cas de figure se présentent à notre étude comme le montre la figure 5.6 :

4.1 Premier cas : $l(\phi)$ "petit"

Par $l(\phi)$ "petit" on entend ici le fait que l'on ait $l(\phi)$ compris entre $]0, 0.24[$ comme le montre la figure 5.6. Nous avons pris pour la simulation numérique $N = 100$ et $f(x) = x^2$, ce qui implique que $l(\phi) = 2/15$. Pour pouvoir suivre l'évolution de w_r nous représentons aussi la courbe de w_r au point $x_{N/2}$ en fonction de r. Un petit calcul très simple nous permet de voir que $\phi = -\frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{12}$, $l(\phi) = 2/15$, $u = -0.075758\,x^4 + 0.075758$ et que $v = -0.076722\,x^4 + 0.076722$. Pour ce cas voir figure 5.8 il apparait très clairement que $u \leq w_r \leq v$ et la figure 5.7 nous permet bien d'observer que la courbe croit bien de la valeur de w_r au point $x_{N/2}$ pour $r = 0$

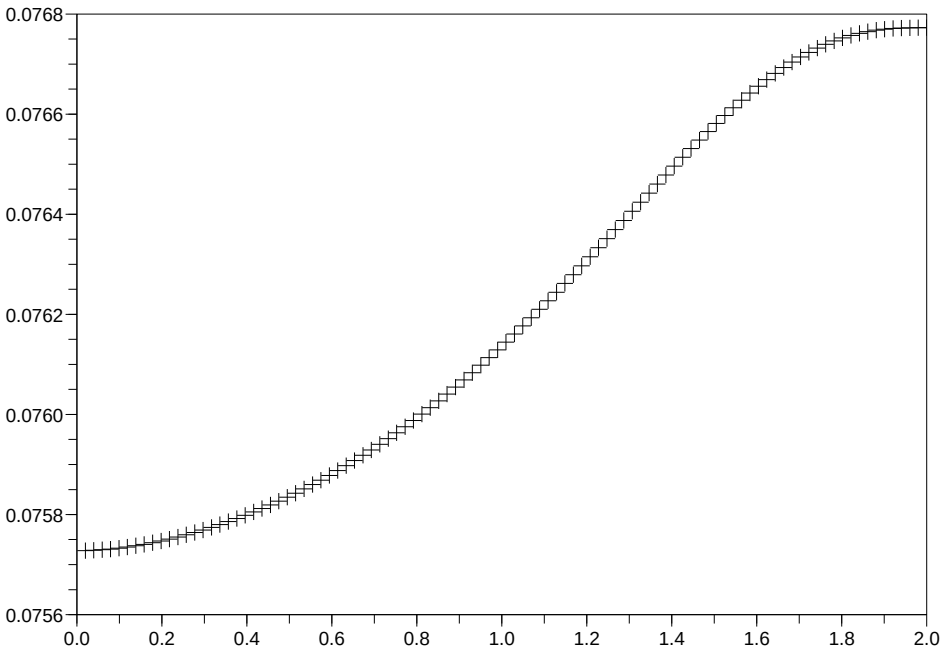

FIG. 5.7 – $w_r(x_{N/2})$ en fonction de r, $l(\phi)$ "petit"

à celle de $r = diam(\Omega)$ c'est à dire d'approximativement 0.075758 à 0.0767220, ce qui est conforme à la théorie. Dans la figure 5.8 nous avons représenté w_r en $r = 50$, u et v. Il apparait très clairement que u et v étant très proches il est plus difficile sur ce graphique de distinguer les différentes solutions ; néanmoins la figure 5.7 nous permet bien de dire qu'elles sont croissantes et que l'on a bien $u \leq w_r \leq v$. Ce cas est très intéressant parce qu'il nous montre un cas d'existence de branche globale de solutions n'admettant pas de bifurcations étudier dans le théorème 4.34 mais avec des arguments différents. Il reste cependant clair que le fait que (P_r) admette une unique solution en $r = 0$ et en $r = diam(\Omega)$ ne suffit pour justifier l'existence d'une branche globale de solutions comme on va le voir sur l'exemple qui suit.

4.2 Deuxième cas : $l(\phi)$ "grand"

Par $l(\phi)$ "grand" on entend ici aussi le fait que l'on ait $0.52 < l(\phi)$. C'est un cas assez particulier d'unicité car il nous révèle la difficulté d'étudier notre problème de façon générale avec la méthode de Newton même dans le cas de l'unicité au diamètre. Nous avons pour la simulation pris $N = 100$ et $f = 1$, ce qui implique que $l(\phi) = 2/3$. On remarque qu'en utilisant notre algorithme de Newton pour $r = 0.8316832$ notre algorithme ne converge plus, résultat de la présence de 0 dans le spectre de $F'(U)$ et donc de l'existence d'un point de bifurcation en $r = 0.8316832$ tel que représenté sur la figure 5.9. Pour pallier cette difficulté nous allons utiliser un autre algorithme de point fixe qui lui n'utilisera pas l'inverse $F'(U)$ et est en grande partie basé sur la démonstration du théorème 3.1. D'autres variantes de ce types de méthodes sont étudiées dans [Lio73] [eJR90].

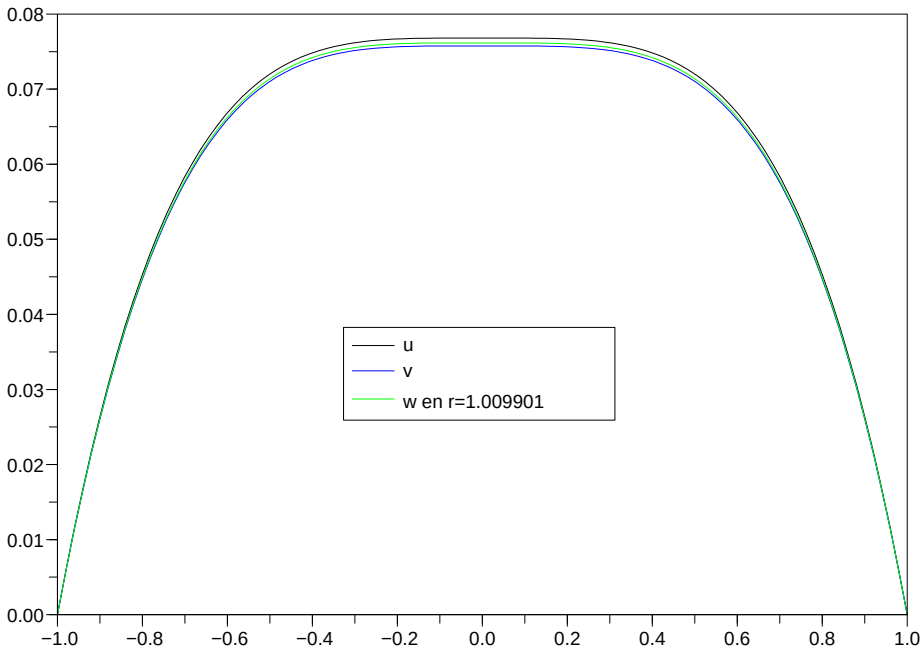

FIG. 5.8 – w_r en fonction de r, $l(\phi)$ "petit"

Pour la description et l'étude de la convergence de la nouvelle méthode nous traiterons le cas général c'est à dire que $n > 1$. En revanche nous nous ramenerons pour la mise en oeuvre numérique au cas $n = 1$. Nous cherchons donc à résoudre le problème

$$\begin{cases} -div(a(l_r(w_r))\nabla w_r) = f \\ w_r \in V. \end{cases}$$

Nous commençons par décrire un processus itératif. La solution de départ w^0 que nous allons considérer est celle prise en $r = d$. En effet comme nous l'avons vu dans le lemme 3.9 en $r = d$ la solution u de (5.12) peut être décrite de manière très explicite. Soit donc $w^0 = u$ dû au fait que $u \geq 0$ (car $f \geq 0$) il vient que $w^0 \geq 0$. Nous posons l'hypothèse de départ suivant

$$\frac{|a'|_\infty h(\Omega)|\Omega|^{1/2} \|f\|_\star}{(\inf\limits_{\mathbb{R}} a)^2} < 1,$$

où $h(\Omega)$ désigne la constante de Poincarré-Sobolev, $|\Omega|$ la mesure de Ω et $|a'|_\infty = \sup\limits_{x\in\Omega} |a'(x)|$. Supposons maintenant que u^n soit déterminé avec $w^n \geq 0$. On considère le problème linéaire en w^{n+1}

$$\begin{cases} -div(a(l_r(w^n))\nabla w^{n+1}) = f \\ w^{n+1} \in V. \end{cases}$$

Il vient immédiatement dû au fait que $a > 0$, $f \geq 0$ et en appliquant le principe du maximum que $w^{n+1} \geq 0$, ce qui montre bien que nous avons un processus itératif.

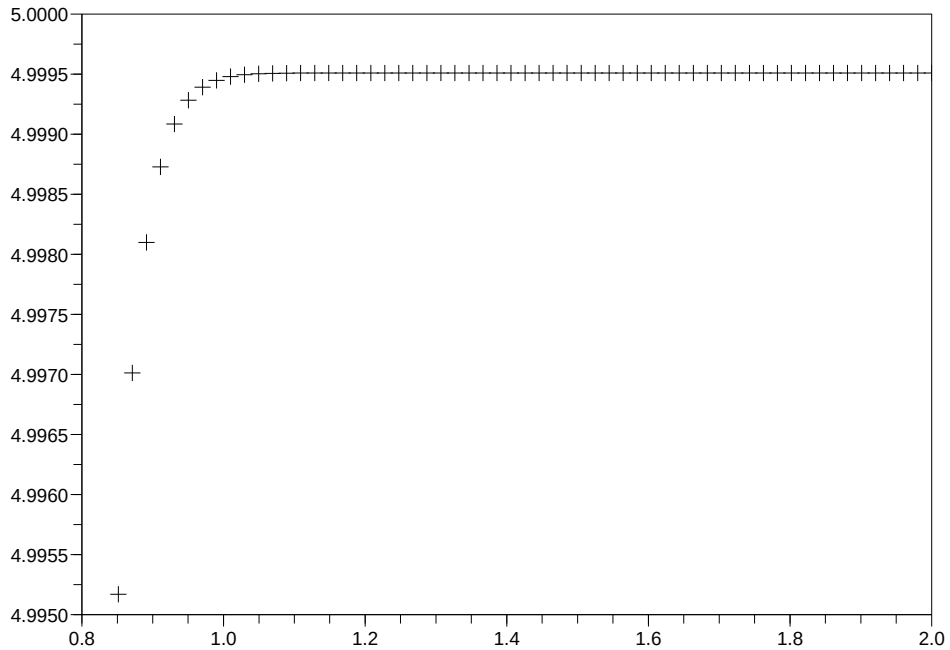

FIG. 5.9 – $w_r(x_{N/2})$ en fonction de r, $l(\phi)$ "grand"

Etudions maintenant la stabilité de ce processus. Pour cela nous commençons par montrer que

$$\|w^{n+1}\|_V \leq C \quad \text{indépendamment de n.}$$

En effet on avait (sous la forme variationnelle) que

$$\int_\Omega a(l_r(w^n))\nabla w^{n+1}\nabla\phi = \int_\Omega f\,\phi \quad \forall\phi \in V.$$

D'où en prenant $\phi = u^{n+1}$ on a

$$\|w^{n+1}\|_V^2 \leq \frac{\|w^{n+1}\|_V\,\|f\|_\star}{\inf\limits_{\mathbb{R}} a},$$

ce qui fait bien

$$\|w^{n+1}\|_V \leq C \quad \text{indépendamment de n,}$$

avec $C = \frac{\|f\|_\star}{\inf\limits_{\mathbb{R}} a}$. Pour finir nous allons montrer que si l'on pose pour tout $n \geq 0$, $h_1^n = \|w^{n+1} - w^n\|$ alors on a que $h_1^n \leq \alpha^n h_1^0$ avec $\alpha \in]0,1[$. En effet on a que pour tout $n \geq 0$

$$\int_\Omega a(l_r(w^{n+1}))\nabla w^{n+2}\nabla\phi = \int_\Omega f\,\phi \quad \forall\phi \in V, \tag{5.15}$$

et

$$\int_\Omega a(l_r(w^n))\nabla w^{n+1}\nabla\phi = \int_\Omega f\,\phi \quad \forall\phi \in V. \tag{5.16}$$

(5.16) et (5.15) nous donne après un petit calcul que

$$\int_\Omega a(l_r(w^{n+1}))\nabla(w^{n+2}-w^{n+1})\nabla\phi = -\int_\Omega (a(l_r(w^{n+1}))-a(l_r(w^n)))\nabla w^{n+1}\nabla\phi \quad \forall\phi\in V. \tag{5.17}$$

En prenant $\phi = w^{n+2} - w^{n+1}$ et en considérant (3.27) dans (5.17) il vient que

$$(\inf_{\mathbb{R}} a)\|w^{n+2} - w^{n+1}\|_V^2 \leq |a'|_\infty\, h(\Omega)\, |\Omega|^{1/2}\, \|w^{n+1} - w^n\|_V\, \|w^{n+1}\|_V\, \|w^{n+2} - w^{n+1}\|_V.$$

En y adjoignant (3.7) on obtient

$$\|w^{n+2} - w^{n+1}\|_V \leq \frac{|a'|_\infty h(\Omega)|\Omega|^{1/2}\, \|f\|_\star}{(\inf_{\mathbb{R}} a)^2}\, \|w^{n+1} - w^n\|_V. \tag{5.18}$$

De plus comme par hypothèse

$$\frac{|a'|_\infty h(\Omega)|\Omega|^{1/2}\, \|f\|_\star}{(\inf_{\mathbb{R}} a)^2} < 1,$$

il vient que (5.18) devient alors

$$h_1^{n+1} \leq \alpha\, h_1^n \quad avec \quad \alpha = \frac{|a'|_\infty h(\Omega)|\Omega|^{1/2}\, \|f\|_\star}{(\inf_{\mathbb{R}} a)^2}.$$

Ce qui démontre bien que h_1^n est décroissante. On peut donc conclure de l'existence d'un $h_1 = \inf_n h_1^n$. Ce qui termine l'étude de la convergence de notre algorithme. Pour la simulation numérique nous avons pris $f(x) = 1$, $n = 1$ et $N = 150$. On voit très clairement avec ce nouvel algorithme dans la figure 5.10 que pour r proche de 0.8211921 le terme $\|W_0 - W\|_2$ commence à être très grand. Ici bien sûr W_0 désigne la solution en $r = 0.8476821$ et W celle obtenu numériquement en $r = 0.8344371$. Cette différence est accentuée en $r = 0.8079471$ comme nous le montre les figures 5.11 et 5.12. Ce qui ne nous permettait pas avec la méthode de Newton de suivre cette solution. Cet exemple a aussi la particularité de nous montrer l'existence locale mais pas globale d'une branche de solutions à notre problème.

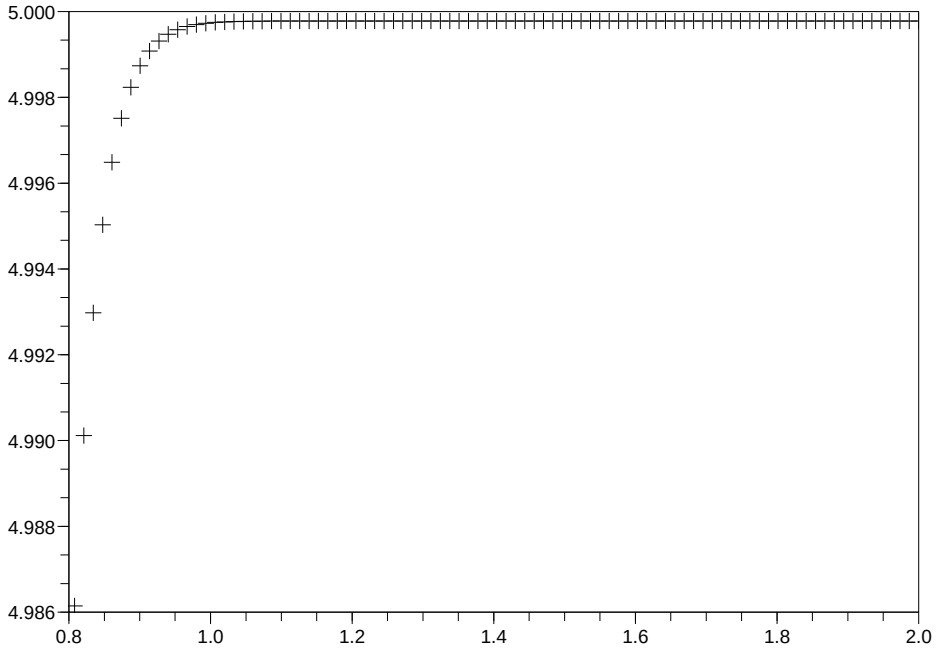

FIG. 5.10 – $w_r(x_{N/2})$ avec la méthode de point fixe , $l(\phi)$ “grand”

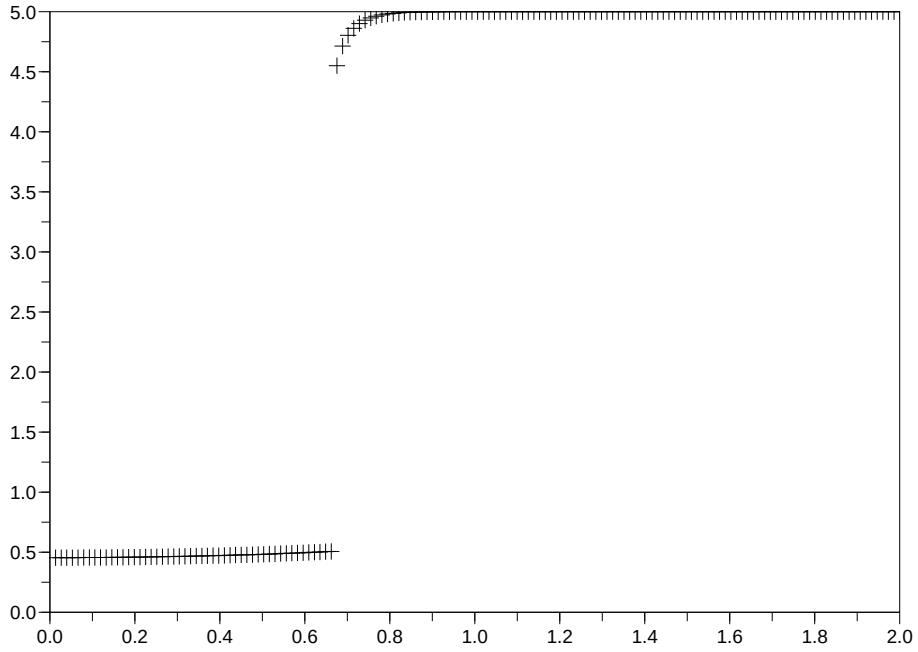

FIG. 5.11 – $w_r(x_{N/2})$ avec la méthode de point fixe, $l(\phi)$ “grand”

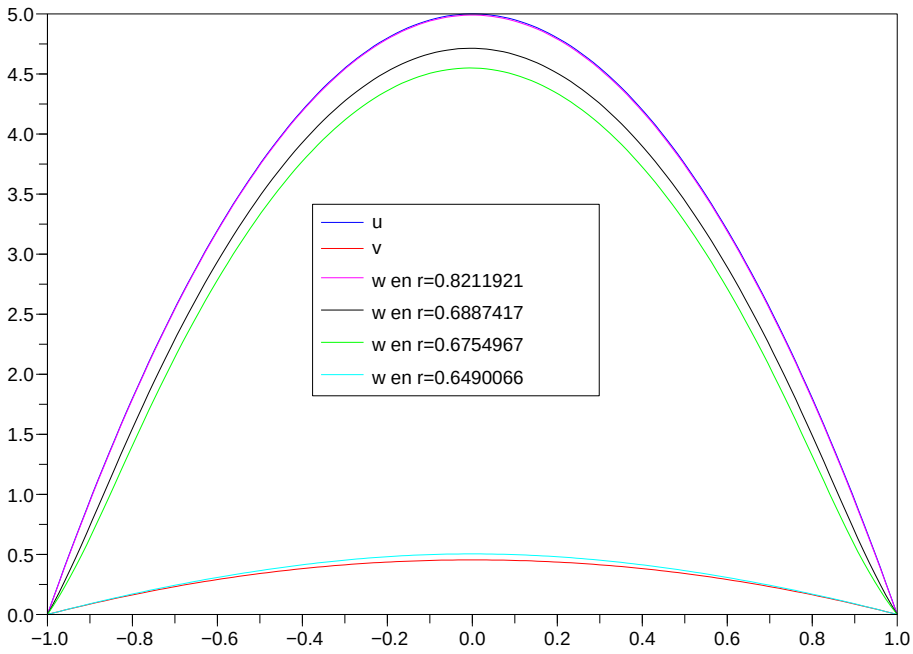

FIG. 5.12 – w_r avec la méthode de point, $l(\phi)$ "grand"

Chapitre 6

Etude du problème parabolique

Nous commençons comme dans le cas stationnaire par montrer l'existence d'une solution de notre problème parabolique.

1 Résultats d'existence et d'unicité

Dans cette partie nous montrons un premier résultat d'existence et nous donnons une condition sur a pour obtenir l'unicité du problème (1.4).
On pose $V = H_0^1(\Omega)$ et V' son dual, on prendra pour norme dans V, $\|.\|_V$ tel que

$$\|u\|_V^2 = \int_\Omega |\nabla u|^2 dx$$

$<.,.>$ désigne le crochet de dualité de V' et V. On a le résultat suivant :

Théorème 6.1. *Soit $T > 0$ et $f \in L^2(0,T,V')$ et $u_0 \in L^2(\Omega)$, on suppose les hypothèses (3.3) et (3.4) vérifiées et $g \equiv 1$ alors pour tout r fixé, $r \in [0, diam(\Omega)]$, il existe une fonction u telle que*

$$\begin{cases} u \in L^2(0,T,V), \qquad u_t \in L^2(0,T,V') \\ u(0,.) = u_0 \qquad dans \qquad \Omega \\ \frac{d}{dt}(u,\phi) + \int_\Omega a(l_r(u(t)))\nabla u \nabla \phi dx =< f, \phi > \qquad dans \quad D'(0,T) \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \tag{6.1}$$

De plus si a est lipschitz c'est-à-dire que

$$|a(l_r(u_1(t))) - a(l_r(u_2(t)))| \leq \gamma |l_r(u_1(t)) - l_r(u_2(t))| \qquad \forall (l_r(u_1(t)), l_r(u_2(t))) \in \mathbb{R}^2, \tag{6.2}$$

alors la solution de (6.1) est unique.

Avant de faire la preuve, il est nécessaire de voir que pour $r = 0$ le problème (6.1) est linéaire et la preuve résulte d'un résultat bien connu voir [eJLL88], il en est de même lorsque $r = diam(\Omega)$ voir [Chi00]. Nous nous intéresserons donc dans la suite au cas où $r \in]0, diam(\Omega)[$.

Démonstration. Nous allons utiliser le théorème de point fixe de Schauder. Si $w \in L^2(0,T,L^2(\Omega))$ alors on a que (1.5)

$$t \longrightarrow l_r(w(t)),$$

est mesurable, comme a est continue alors

$$t \longrightarrow a(l_r(w(t))),$$

l'est aussi. Le problème qui consiste à trouver $u = u(t,x)$ solution de

$$\begin{cases} u \in L^2(0,T,V) \cap C([0,T],L^2(\Omega)) \qquad u_t \in L^2(0,T,V') \\ u(0,.) = u_0 \\ \frac{d}{dt}(u,\phi) + \int_\Omega a(l_r(w(t)))\nabla u \nabla \phi dx =< f,\phi > \qquad in \quad D'(0,T) \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega), \end{cases} \tag{6.3}$$

est linéaire, de plus (6.3) admet une unique solution $u = F(w)$ voir [eJLL88], [Chi00]. Ainsi nous voulons montrer que l'application

$$w \longrightarrow F(w) = u, \tag{6.4}$$

admet un point fixe. En prenant $w = u$ dans (6.3) nous obtenons en utilisant (3.4) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u|_2^2 + m\|u\|_V^2 \leq |f|_\star \|u\|_V, \tag{6.5}$$

où $\|.\|_V$ est la norme usuelle dans V et $|f|_\star$ est la norme duale de f. On a que

$$|u|_{L^2(0,T,V)} = \left\{ \int_0^T \|u\|_V^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

En utilisant l'inégalité de Young au membre de droite de (6.5), il vient que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u|_2^2 + \frac{m}{2}\|u\|_V^2 \leq \frac{1}{2m}|f|_\star^2. \tag{6.6}$$

En intégrant (6.6) sur $(0,t)$ pour $t \leq T$ on obtient

$$\frac{1}{2}|u(t)|_2^2 + \frac{m}{2}\int_0^t \|u\|_V^2 dt \leq \frac{1}{2}|u_0|_2^2 + \frac{1}{2m}\int_0^t |f|_\star^2. \tag{6.7}$$

On en déduit qu'il existe une constante $C = C(m, u_0, f)$ telle que

$$|u|_{L^2(0,T,V)} \leq C \tag{6.8}$$

De plus de

$$< u_t, v > + < -div(a(l_r(u(t)))\nabla u), v >=< f, v > \quad \forall v \in V,$$

nous déduisons que

$$|u_t|_\star \leq M\|u\|_V + |f|_\star. \tag{6.9}$$

En élevant (6.9) au carré et en utilisant l'inégalité de Young on a que

$$|u_t|_\star^2 \leq 2M^2\|u\|_V^2 + 2|f|_\star^2. \tag{6.10}$$

En intégrant (6.10) sur $(0,t)$ et en considérant (6.8) on obtient

$$|u_t|_{L^2(0,T,V')} \leq C', \tag{6.11}$$

avec $C' = C'(m, M, f, u_0)$, où C' est indépendant de w. Il résulte de (6.8) et (6.11)

$$|u_t|^2_{L^2(0,T,V')} + |u|^2_{L^2(0,T,V)} \leq R, \tag{6.12}$$

avec $R = C^2 + C'^2$. De (6.8) et de l'inégalité de Poincaré il vient que

$$|u|_{L^2(0,T,L^2(\Omega))} \leq R', \tag{6.13}$$

En posant

$$R_1 = max(R', R), \tag{6.14}$$

et en y associant (6.13) et (6.14), il vient que l'application F envoie la boule $B(0, R_1)$ de $L^2(0, T, L^2(\Omega))$ dans elle même. Comme les boules de $H^1(0, T, V, V')$ sont relativement compactes dans $L^2(0, T, L^2(\Omega))$ (voir [eJLL88] pour plus de détails), (6.12) nous montre bien que $F(B(0, R_1)$ est relativement compact dans $B(0, R_1)$ avec

$$B(0, R_1) = \{u \in L^2(0, T, L^2(\Omega)); \quad |u|_{L^2(0,T,L^2(\Omega))} \leq R_1\}.$$

Pour pouvoir appliquer le théorème de point fixe de Schauder comme annoncé, nous avons juste besoin de montrer que F est continue de $B(0, R_1)$ dans elle même. Pour cela nous considérons w_n une suite dans $B(0, R_1)$ telle que

$$w_n \longrightarrow w \quad \text{dans} \quad L^2(0, T, L^2(\Omega)), \tag{6.15}$$

et prenons $u_n = T(w_n)$. De (6.15) et (6.12) il vient que

$$l_r(w_n) \longrightarrow l_r(w) \quad \text{dans} \quad L^2(0, T, L^2(\Omega)), \tag{6.16}$$

$$|u_{n_t}|^2_{L^2(0,T,V')} + |u_n|^2_{L^2(0,T,V)} \leq R_1, \tag{6.17}$$

où R_1 est une constante indépendante de n. Pour tout $v \in D(0, T), \phi \in V$ on a

$$-\int_0^T \int_\Omega u_n \phi v'(t) dxdt + \int_0^T \int_\Omega a(l_r(w_n(t)))\nabla u_n \nabla \phi v(t) dxdt = \int_0^T < f, \phi > v(t)dt, \tag{6.18}$$

pour passer à la limite dans (6.18) nous avons besoin de quelques propriétés. De (6.17), on montre qu'il existe un $u_\infty \in H^1(0, T, V, V')$ et une sous suite de n que l'on renommera en n telle que

$$u_n \rightharpoonup u_\infty \in H^1(0, T, V, V') \quad \text{faiblement}, \tag{6.19}$$

et

$$u_n \longrightarrow u_\infty \in L^2(0, T, L^2(\Omega)) \quad \text{fortement}. \tag{6.20}$$

De plus, en utilisant (6.16) et (3.3) on obtient

$$l_r(w_n) \rightharpoonup l_r(w) \quad \text{p.p} \quad t \in (0,T), \tag{6.21}$$

et

$$a(l_r(w_n)) \longrightarrow a(l_r(w)) \quad \text{p.p} \quad t \in (0,T), \tag{6.22}$$

et ainsi

$$a(l_r(w_n))\nabla\phi \longrightarrow a(l_r(w)))\nabla\phi \quad \text{dans } L^2((0,T)\times\Omega). \tag{6.23}$$

Maintenant que certaines propriétés sont établies , nous pouvons maintenant passer à la limite dans (6.18). Il est clair que u_∞ satisfait

$$u_\infty \in L^2(0,T,V), \qquad (u_\infty)_t \in L^2(0,T,V') \tag{6.24}$$

$$\frac{d}{dt}(u_\infty,\phi) + \int_\Omega a(l_r(w(t)))\nabla u_\infty \nabla\phi dx =< f,\phi > \qquad \text{dans} \quad D'(0,T),\ \forall\phi \in H_0^1(\Omega) \tag{6.25}$$

Puisque $u_n, u_\infty \in H^1(0,T,V,V')$ de l'injection continue de $H^1(0,T,V,V')$ dans $C([0,T],H)$ (voir théorème 2.16), on déduit que $u_n, u_\infty \in C([0,T],H)$. Ce qui nous donne en utilisant le théorème 2.17 que

$$(u_n(t),v) - (u_0,v) = \int_0^t < u_{n_t}, v > \quad \text{p.p} \quad t \in (0,T), \forall v \in V.$$

En passant à la limite on a que

$$(u_\infty(t),v) - (u_0,v) = \int_0^t < u_{\infty_t}, v >= (u_\infty(t),v) - (u_\infty(0),v) \quad \text{p.p} \quad t \in (0,T), \forall v \in V$$

c'est-à-dire que

$$(u_\infty(0) - u_0, v) \quad \forall v \in V,$$

nous avons aussi

$$(u_\infty(0) - u_0, v) \quad \forall v \in L^2(\Omega).$$

On conclut par densité que

$$u_\infty(0) = u_0.$$

Ce qui montre que $u_\infty = F(w)$. Pour finir il nous reste à montrer que (u_n) a uniquement $F(w) = u$ comme limite possible pour conclure la preuve de la continuité. Soit $\tilde{u}$ une valeur d'adhérence de u_n. Dû à (6.17), on peut extraire une sous suite que l'on désigne par u_{n_1} tel que

$$u_{n_1} \rightharpoonup \tilde{u} \in H^1(0,T,V,V') \quad \text{faiblement},$$

et

$$u_{n_1} \longrightarrow \tilde{u} \in L^2(0,T,L^2(\Omega)) \quad \text{fortement},$$

et en utilisant les mêmes arguments que précédemment pour prouver que u_∞ est la solution de (6.3) il est clair que $\tilde{u}$ est aussi une solution de (6.3). Bien évidemment de l'unicité de (6.3) il résulte que $u_\infty = \tilde{u}$. Ce qui complète la preuve de la continuité et termine la preuve de l'existence.

Pour montrer l'unicité, on considère u_1 et u_2 deux solutions (6.1), en les soustrayant on obtient dans $D'(0,T)$

$$\frac{d}{dt}(u_1-u_2,v)+\int_\Omega (a(l_r(u_1(t))\nabla u_1(t)-a(l_r(u_2(t)))\nabla u_2(t))\nabla\phi dx = 0 \qquad \forall\phi\in H_0^1(\Omega). \tag{6.26}$$

Comme

$$\begin{aligned} a(l_r(u_1(t)))\nabla u_1 - a(l_r(u_2(t)))\nabla u_2(t) &= (a(l_r(u_1(t))) - a(l_r(u_2(t)))\nabla u_1(t) \\ &\quad + a(l_r(u_2(t)))\nabla(u_1(t)-u_2(t)), \end{aligned} \tag{6.27}$$

cela nous donne

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(u_1-u_2,v)&+\int_\Omega a(l_r(u_2(t)))\nabla(u_1(t)-u_2(t))\nabla\phi dx \\ &= -\int_\Omega (a(l_r(u_1(t))) - a(l_r(u_2(t)))\nabla u_1\nabla\phi dx \quad \forall\phi\in H_0^1(\Omega). \end{aligned} \tag{6.28}$$

Puisque $u_1,u_2\in C([0,T],L^2(\Omega))$ nous avons pour $z>0$

$$l_r(u_1(t)), l_r(u_2(t)) \in [-z,z]. \tag{6.29}$$

En prenant $v=u_1-u_2$ nous déduisons par (3.4) que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_1-u_2|_2^2+m\|u_1-u_2\|_V^2 \le \int_\Omega |(a(l_r(u_1(t))) - a(l_r(u_2(t)))||\nabla u_1||\nabla(u_1-u_2)|dx. \tag{6.30}$$

De plus en y ajoutant (6.2), (6.29) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_1-u_2|_2^2+m\|u_1-u_2\|_V^2 \le \gamma|l_r(u_1(t))-l_r(u_2(t))|\|u_1\|_V\|u_1-u_2\|_V. \tag{6.31}$$

On a aussi

$$|l_r(u(t))| \le \int_{B(x,r)\cap\Omega} |u(t,y)|dy,$$

en utilisant toujours Cauchy-Schwarz, il vient que

$$|l_r(u(t)) \le |B(x,r)\cap\Omega|^{1/2}|u(t)|_2 \le |\Omega|^{1/2}|u(t)|_2, \tag{6.32}$$

où $|\Omega|$ représente la mesure de Ω. En utilisant (6.32) dans (6.31) on obtient

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_1-u_2|_2^2+m\|u_1-u_2\|_V^2 \le \gamma|\Omega|^{1/2}|u_1-u_2|_2\|u_1\|_V\|u_1-u_2\|_V. \tag{6.33}$$

En appliquant l'inégalité de Young

$$ab \le \frac{1}{2m}b^2+\frac{m}{2}a^2$$

au membre de droite de (6.33), il est clair que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_1-u_2|_2^2+m\|u_1-u_2\|_V^2 \le \frac{p(t)}{2}|u_1-u_2|_2^2+\frac{m}{2}\|u_1-u_2\|_V^2 \tag{6.34}$$

où

$$p(t) = \frac{1}{m}\gamma^2|\Omega|\|u_1\|_V^2 \in L^1(0,T).$$

On obtient

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_1 - u_2|_2^2 + \frac{m}{2}\|u_1 - u_2\|_V^2 \leq \frac{p(t)}{2}|u_1 - u_2|_2^2, \tag{6.35}$$

ainsi

$$\frac{d}{dt}|u_1 - u_2|_2^2 \leq p(t)|u_1 - u_2|_2^2. \tag{6.36}$$

En multipliant (6.36) par $e^{-\int_0^t p(s)ds}$ il vient que

$$e^{-\int_0^t p(s)ds}\frac{d}{dt}|u_1 - u_2|_2^2 - p(t)e^{-\int_0^t p(s)ds}|u_1 - u_2|_2^2 \leq 0. \tag{6.37}$$

D'où

$$\frac{d}{dt}\{e^{-\int_0^t p(s)ds}|u_1 - u_2|_2^2\} \leq 0. \tag{6.38}$$

Ce qui nous montre que $t \longmapsto e^{-\int\limits_0^t p(s)ds}|u_1 - u_2|_2^2$ est décroissante. Puisque pour $t = 0$,

$$u_1(0,.) = u_2(0,.) = u_0$$

cette fonction s'annule en 0 et comme elle est positive , elle est identiquement nulle, ce qui termine la preuve de l'unicité. □

2 Existence d'un attracteur global

On considère le problème

$$\begin{cases} u_t - div(a(l_r(u(t)))\nabla u) = f & \text{dans} \quad \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ u = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega \times \mathbb{R}^+ \\ u(0,.) = u_0 & \text{dans} \quad \Omega. \end{cases} \tag{6.39}$$

On pose

$$\begin{aligned} S(t) \ : L^2(\Omega) &\to L^2(\Omega) \\ u_0 &\mapsto u(t), \end{aligned} \tag{6.40}$$

avec $u(t)$ la solution du problème (6.39) et $t \geq 0$.

2.1 Existence d'un borné absorbant dans $L^2(\Omega)$

On suppose dans ce qui va suivre que f ne dépend pas de t et que $f \in L^2(\Omega)$.

Théorème 6.2. *Soit ρ_0 tel que $\rho_0 \geq \frac{|f|_2}{\lambda m}$ et $C_0 = C_{L^2(\Omega)}(0,\rho_0)$ la boule de centre 0 et de rayon ρ_0 de $L^2(\Omega)$ avec λ désignant la valeur propre principale de l'opérateur Laplacien avec les conditions aux limites de Dirichlet alors C_0 est positivement invariant par $S(t)$ dans $L^2(\Omega)$, si de plus $\rho_0 > \frac{|f|_2}{\lambda m}$ alors C_0 est un borné absorbant pour $S(t)$ dans $L^2(\Omega)$.*

Démonstration. En prenant $\phi = u$ dans (6.1) on a que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u|_2^2 + \int_\Omega a(l_r(u(t)))|\nabla u|^2 = (f, u). \tag{6.41}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et (3.4) on a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u|_2^2 + m|\nabla u|_2^2 \leq |f|_2|u|_2. \tag{6.42}$$

Ce qui donne

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u|_2^2 + m|\nabla u|_2^2 \leq \frac{1}{\sqrt{\lambda}}|f|_2|\nabla u|_2, \tag{6.43}$$

où λ désigne la valeur propre principale de l'opérateur Laplacien avec les conditions aux limites de Dirichlet. En appliquant l'inégalité de Young à (6.43), on a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u|_2^2 + \frac{m}{2}|\nabla u|_2^2 \leq \frac{1}{2\lambda\, m}|f|_2^2, \tag{6.44}$$

et encore en utilisant l'inégalité de Poincaré-Sobolev

$$\frac{d}{dt}|u|_2^2 + m\lambda\, |u|_2^2 \leq \frac{1}{\lambda\, m}|f|_2^2. \tag{6.45}$$

En multipliant (6.45) par $e^{\lambda\, m\, t}$, on a que

$$\frac{d}{dt}(|u|_2^2 e^{m\lambda\, t}) = \frac{d}{dt}|u|_2^2 e^{m\lambda\, t} + m\lambda\, |u|_2^2 e^{m\lambda\, t} \leq \frac{1}{\lambda\, m}|f|_2^2 e^{m\lambda\, t}. \tag{6.46}$$

Il vient en intégrant entre 0 et t

$$|u(t)|_2^2\, e^{m\lambda\, t} \leq |u_0|_2^2 + \frac{1}{(m\lambda)^2}|f|_2^2[e^{m\lambda\, t} - 1]. \tag{6.47}$$

Ainsi

$$|u(t)|_2^2 \leq |u_0|_2^2 e^{-m\lambda\, t} + \frac{1}{(m\lambda)^2}|f|_2^2[1 - e^{-m\lambda\, t}]. \tag{6.48}$$

Ce qui nous donne

$$|u(t)|_2^2 \leq |u_0|_2^2 e^{-m\lambda\, t} + \frac{1}{(m\lambda)^2}|f|_2^2. \tag{6.49}$$

Par hypothèse

$$C_0 = \{v \in L^2(\Omega), \quad |v|_2 \leq \rho_0\},$$

nous supposons aussi

$$\rho_0 \geq \frac{|f|_2}{\lambda\, m}. \tag{6.50}$$

Soit $u_0 \in C_0$. En utilisant (6.48) et (6.50) on a

$$|u(t)|_2^2 \leq \rho_0^2\, e^{-\frac{m}{\lambda}t} + \rho_0^2[1 - e^{-\frac{m}{\lambda}t}], \tag{6.51}$$

d'où

$$|u(t)|_2^2 \leq \rho_0^2.$$

Ce qui fait que $u(t) \in C_0$ et donc $S(t)\,C_0 \subset C_0$. Cela prouve bien que C_0 est positivement invariant par $S(t)$.

Supposons maintenant que

$$\rho_0 > \frac{|f|_2}{\lambda\, m},$$

et montrons que C_0 est un borné absorbant pour $S(t)$ dans $L^2(\Omega)$, c'est à dire que pour tout $B \subset L^2(\Omega)$ borné, il existe un $t_\star = t_\star(B)$ tel que pour $u_0 \in B$ on ait

$$|u(t)|_2 \leq \rho_0 \quad \forall t \geq t_\star.$$

B étant borné dans $L^2(\Omega)$, il vient qu'il existe un r_0 tel que $B \subset B_{L^2(\Omega)}(0, r_0)$. Si on prend $u_0 \in B$ alors (6.49) nous donne

$$|u(t)|_2^2 \leq r_0^2 e^{-m\lambda\, t} + \frac{1}{(m\lambda)^2}|f|_2^2. \tag{6.52}$$

Pour que $u(t) \in C_0$ il suffit que

$$r_0^2 e^{-m\lambda\, t} + \frac{1}{(m\lambda)^2}|f|_2^2 \leq \rho_0^2, \tag{6.53}$$

d'où

$$e^{-\frac{m}{\lambda}t} \leq \frac{\lambda^2\, m^2 \rho_0^2 - |f|_2^2}{\lambda^2\, m^2 r_0^2}. \tag{6.54}$$

Ainsi

$$t \geq -\frac{\lambda}{m}\, \ln\left(\frac{\lambda^2\, m^2 \rho_0^2 - |f|_2^2}{\lambda^2\, m^2 r_0^2}\right). \tag{6.55}$$

En posant

$$t_\star = \max\left(0, -\frac{\lambda}{m}\, \ln\left(\frac{\lambda^2\, m^2 \rho_0^2 - |f|_2^2}{\lambda^2\, m^2 r_0^2}\right)\right), \tag{6.56}$$

il résulte immédiatement que si

$$t \geq t_\star \quad alors \quad |u(t)|_2^2 \leq \rho_0^2.$$

Ce qui montre que $u(t) \in C_0$ pour $u_0 \in B$ et termine la preuve du théorème. □

2.2 Estimation uniforme en temps

Nous prouvons dans ce qui va suivre une estimation de u dans $L^\infty(\mathbb{R}^+, H_0^1(\Omega))$. On prendra toujours $\|u\|_V^2 = \int_\Omega |\nabla u|^2 dx$. On suppose ici que $u_0 \in H_0^1(\Omega)$.
Il est bien connu (voir [Tem97]) que $-\Delta u$ est dans $L^2(0, T, L^2(\Omega))$ pour tout $T > 0$. Nous avons donc en multipliant (6.39) par $-\Delta u(t)$ et en intégrant sur Ω que

$$(u_t, -\Delta u) + (-div(a(l_r(u))\nabla u), -\Delta u) = (f, -\Delta u). \tag{6.57}$$

On a en utilisant la formule de Green

$$(u_t, -\Delta u) = -\int_\Omega \Delta u \frac{\partial u}{\partial t} dx = \sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x_i} dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|_V^2$$

de plus en utilisant le fait que a est lipschitz on a

$$-div(a(l_r(u))\nabla u) = -a(l_r(u))\Delta u - a'(l_r(u))\nabla l_r(u).\nabla u.$$

(6.57) devient alors

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|_V^2 + (-a(l_r(u))\Delta u, -\Delta u) + (-a'(l_r(u))\nabla l_r(u).\nabla u, -\Delta u) = (f, -\Delta u). \quad (6.58)$$

De plus on sait en utilisant (3.4) que

$$(-a(l_r(u))\Delta u, -\Delta u) \geq m|\Delta u|_2^2, \quad (6.59)$$

et aussi par un calcul

$$|\nabla l_r(u)|_2 \leq |\Omega||\nabla u|_2. \quad (6.60)$$

On a en utilisant (6.60) que

$$|(-a'(l_r(u))\nabla l_r(u).\nabla u, -\Delta u)| \leq |\Omega||a'|_\infty \|u\|_V^2 |\Delta u|_2 \quad (6.61)$$

et aussi

$$(-a'(l_r(u))\nabla l_r(u).\nabla u, -\Delta u) \geq -c_1(\Omega)|a'|_\infty \|u\|_V^2 |\Delta u|_2, \quad (6.62)$$

avec $c_1(\Omega) = |\Omega|$. En utilisant (6.59) et (6.62) dans (6.58) on a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|_V^2 + m|\Delta u|_2^2 - c_1(\Omega)|a'|_\infty \|u\|_V^2 |\Delta u|_2 \leq |f|_2 |\Delta u|_2. \quad (6.63)$$

En utilisant l'inégalité de Young $ab \leq \frac{1}{2m}a^2 + \frac{m}{2}b^2$ on a que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|_V^2 + m|\Delta u|_2^2 - \frac{m}{2}|\Delta u|_2^2 - \frac{1}{2m}(c_1(\Omega)|a'|_\infty \|u\|_V^2)^2 - \frac{m}{2}|\Delta u|_2^2 \leq \frac{1}{2m}|f|_2^2. \quad (6.64)$$

Ce qui donne

$$\frac{d}{dt}\|u\|^2 \leq \frac{1}{m}|f|_2^2 + \frac{1}{m}c_1(\Omega)^2\|a'\|_\infty^2\|u\|^4. \quad (6.65)$$

Dans l'optique d'appliquer le lemme de Gronwall à (6.65) nous commençons par faire une petite estimation. On avait d'après (6.44) que

$$\frac{d}{dt}|u|_2^2 + m\|u\|^2 \leq \frac{1}{\lambda m}|f|_2^2. \quad (6.66)$$

En l'intégrant on a que

$$|u(t+t_0)|_2^2 + m\int_t^{t+t_0} \|u\|^2\, ds \leq \int_t^{t+t_0} \frac{1}{\lambda m}|f|_2^2\, ds + |u(t)|_2^2. \quad (6.67)$$

Ce qui fait bien

$$\int_t^{t+t_0} \|u\|^2\, ds \leq \frac{t_0}{\lambda m^2}|f|_2^2\, ds + \frac{1}{m}|u(t)|_2^2. \quad (6.68)$$

Maintenant nous sommes donc bien en mesure d'appliquer le lemme de Gronwall uniforme. Pour cela nous prenons respectivement à la place de y, g et h dans le

lemme 2.18 les expressions $\|u\|_V^2$, $\frac{1}{m}c_1(\Omega)^2|a'|_\infty^2\|u\|_V^2$ et $\frac{1}{m}|f|_2^2$. De même il vient en utilisant les mêmes notations que dans le lemme 2.18 que

$$a_1 = \frac{1}{m}c_1(\Omega)^2|a'|_\infty^2 a_3 \quad a_2 = \frac{t_0}{m}|f|_2^2 \quad a_3 = \frac{t_0\lambda}{m^2}|f|_2^2 + \frac{1}{m}\rho_0^2. \tag{6.69}$$

On applique simplement le lemme de Gronwall uniforme (lemme 2.18) à (6.65) pour montrer que

$$\|u(t+t_0)\| \leq (\frac{a_3}{t_0} + a_2)exp(a_1) \quad \forall t \geq 0, \tag{6.70}$$

$t_0 > 0$. Ce qui donne bien une estimation $L^\infty(t_0, +\infty, H_0^1(\Omega))$ de la solution u.

Remarque 6.3. *Une estimation à priori de u dans $L^\infty(0, t_0, H_0^1(\Omega))$ $\forall t_0 > 0$ s'obtient grâce au lemme de Gronwall classique. En effet de (6.65) on avait que*

$$\frac{d}{dt}\|u\|_V^2 \leq \frac{1}{m}|f|_2^2 + \frac{1}{m}c_1(\Omega)^2|a'|_\infty^2\|u\|_V^4. \tag{6.71}$$

De plus de (6.66) on déduit en intégrant entre 0 et t ($t \leq t_0$) que

$$|u(t)|_2^2 + m\int_0^t \|u\|_V^2\, ds \leq \int_0^t \frac{1}{\lambda\, m}|f|_2^2\, ds + |u_0|_2^2, \tag{6.72}$$

et aussi

$$\int_0^t \|u\|_V^2\, ds \leq \frac{t}{\lambda\, m^2}|f|_2^2 + \frac{1}{m}|u_0|_2^2. \tag{6.73}$$

Ce qui montre que

$$\int_0^t \|u\|_V^2\, ds \leq \alpha, \tag{6.74}$$

avec $\alpha = \frac{t_2}{\lambda m^2}|f|_2^2 + \frac{1}{m}|u_0|_2^2$, α ne dépendant pas du temps. En posant $\beta_1 = \frac{1}{m}|f|_2^2$ et $\beta_2 = \frac{1}{m}c_1(\Omega)^2|a'|_\infty^2$ dans (6.71) on a que

$$\frac{d}{dt}\|u\|_V^2 \leq \beta_1 + \beta_2\|u\|_V^4. \tag{6.75}$$

Puis en multipliant (6.75) par $e^{(-\beta_2\int_0^t \|u\|_V^2 ds)}$ ce qui est totalement justifié par (6.74) il découle que

$$\frac{d}{dt}\|u\|_V^2\, e^{(-\beta_2\int_0^t \|u\|_V^2 ds)} - \beta_2\|u\|_V^4\, e^{(-\beta_2\int_0^t \|u\|_V^2 ds)} \leq \beta_1\, e^{(-\beta_2\int_0^t \|u\|_V^2 ds)}. \tag{6.76}$$

Ce qui donne

$$\frac{d}{dt}(\|u\|_V^2\, e^{(-\beta_2\int_0^t \|u\|_V^2 ds)}) \leq \beta_1\, e^{(-\beta_2\int_0^t \|u\|_V^2 ds)}. \tag{6.77}$$

En intégrant de nouveau (6.77) entre 0 et t, on a

$$\|u(t)\|_V^2\, e^{(-\beta_2\int_0^t \|u\|_V^2 ds)} \leq \|u_0\|^2 + \int_0^t \beta_1\, e^{(-\beta_2\int_0^r \|u\|_V^2 ds)}\, dr, \tag{6.78}$$

et bien

$$\|u(t)\|_V^2 \leq \|u_0\|_V^2\, e^{(\beta_2\int_0^t \|u\|_V^2 ds)} + \int_0^t \beta_1\, e^{(-\beta_2\int_t^r \|u\|_V^2 ds)}\, dr. \tag{6.79}$$

Ce qui montre bien en utilisant (6.74) et pour t fini (ce qui est notre cas $t \leq t_0$) qu'il existe bien une constante β_3 tel que

$$\|u(t)\|_V^2 \leq \beta_3 \quad \textit{indépendamment de } t.$$

Ce qui montre que $u \in L^\infty(0, t_0, H_0^1(\Omega))$ et associé au fait que $u \in L^\infty(t_0, \infty, H_0^1(\Omega))$ démontre pour finir que $u \in L^\infty(\mathbb{R}_+, H_0^1(\Omega))$.

On a donc bien montré une estimation de $u \in L^\infty(\mathbb{R}_+, H_0^1(\Omega))$.

Maintenant que toutes les conditions sont réunies nous sommes en mesure de donner le résultat principal de cette section.

Théorème 6.4. *On suppose que $f \in L^2(\Omega)$, $u_0 \in L^2(\Omega)$ et que a vérifie (3.4) et (6.2). Soit $S(t)$ le semi groupe associé à l'équation (6.1) définie par*

$$\begin{aligned} S(t) \, : L^2(\Omega) &\to L^2(\Omega) \\ u_0 &\mapsto u(t), \end{aligned}$$

avec $u(t)$ la solution du problème (6.39). Alors (6.39) admet un attracteur global associé à $S(t)$.

Démonstration. On suppose que $u_0 \in L^2(\Omega)$ et que $|u_0|_2 \leq R$. D'après le théorème 6.2 on avait pour tout $t \geq t_0(R)$

$$S(t)\, B_{L^2(\Omega)}(0, R) \subset C_0 = C_{L^2(\Omega)}(0, \rho_0). \tag{6.80}$$

On rappelle que $C_0 = C_{L^2(\Omega)}(0, \rho_0)$ est le borné absorbant du théorème 6.2 et que $B_{L^2(\Omega)}(0, R)$ désigne la boule de centre 0 et de rayon R de $L^2(\Omega)$. Comme on avait

$$\frac{d}{dt}\|u\|_V^2 \leq \frac{1}{m}|f|_2^2 + \frac{1}{m}c_1(\Omega)^2|a'|_\infty^2\|u\|_V^4. \tag{6.81}$$

nous allons une nouvelle fois appliquer le lemme de Gronwall uniforme, mais cette fois avec $t_0 = t_0(R)$ et $t_1 > 0$ fixé. On avait (voir (6.68)) que

$$\int_t^{t+t_1} \|u\|_V^2 \, ds \leq \frac{t_1}{\lambda\, m^2}|f|_2^2 \, ds + \frac{1}{m}|u(t)|_2^2. \tag{6.82}$$

Comme $t \geq t_0(R)$ alors $|u(t)|_2^2 \leq \rho_0^2$. (6.82) devient alors

$$\int_t^{t+t_1} \|u\|^2 \, ds \leq \frac{t_1}{\lambda\, m^2}|f|_2^2 \, ds + \frac{1}{m}\rho_0^2 = a_3. \tag{6.83}$$

On a aussi comme dans (6.69)

$$a_1 = \frac{1}{m}c_1(\Omega)^2|a'|_\infty^2 a_3 \quad a_2 = \frac{t_1}{m}|f|_2^2, \tag{6.84}$$

il vient donc en appliquant le lemme de Gronwall uniforme que

$$\|u(t)\|_V \leq (\frac{a_3}{t_1} + a_2)exp(a_1) \quad \forall t \geq t_0(R) + t_1. \tag{6.85}$$

On conclut que si $|u_0| \leq R$ alors $\|u(t)\|_V \leq (\frac{a_3}{t_1} + a_2)exp(a_1) \quad \forall t \geq t_0 + t_1$. Ce qui montre que si $t \geq t_0(R) + t_1$ alors $u(t)$ est dans un borné de $H_0^1(\Omega)$ que l'on nomme $B_{H_0^1(\Omega)}(0, (\frac{a_3}{t_1} + a_2)exp(a_1))$. Ce qui démontre que $S(t)$ transforme bien pour $t \geq t_0(R) + t_1$ les bornés de $L^2(\Omega)$ en bornés de $H_0^1(\Omega)$ et donc en relativement compact de $L^2(\Omega)$ (résulte de l'injection compacte de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$) et prouve que $S(t)$ est uniformément compact pout t grand. On applique le théorème 2.24 pour conclure. □

Remarque 6.5. *Le théorème 6.4 est très important car il montre une propriété déterminante liée à l'effet régularisant des équations paraboliques qui montre en fait que $u(t) \in H_0^1(\Omega)$dès que $t \geq t_0$ même si la donnée initiale $u_0 \in L^2(\Omega)$.*

2.3 Estimation L^∞ de la solution

Dans ce qui va suivre nous obtenons des estimations L^∞ de la solution de (6.39) à partir d' estimations L^q, la méthode que nous allons employer est basée sur des itérations du type Moser, pour plus de détails sur la méthode voir ([ePS07]).
On a donc le résultat suivant :

Théorème 6.6. *Soit $n \geq 3$ et u une solution classique de (6.39) définie sur $[0, T)$. On suppose que $q > 1$ et $p > 1$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Supposons de plus que $U_q = \sup_{t<T} |u(t)|_q < \infty$, $f \in L^\infty(0, \infty, L^q(\Omega))$. Si $p < \frac{n}{n-2}$ alors $U_\infty < \infty$.*

Pour faire la preuve nous avons besoin des lemmes suivants :

Lemme 6.7. *Soit une solution classique de (6.39) sur $[0, T)$ $r \geq 1$ et $p > 1$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ avec $p < \frac{n}{n-2}$. On prend $\tilde{U}_r = \max\{1, |u_0|_\infty, U_r = sup_{t<T}|u(t)|_r\}$, posons*

$$\sigma(r) = \frac{p(n+2)}{2[r(2p - pn + n) + np]}.$$

Alors il existe une constante $C_5 = C_5(\Omega, m)$ tel que

$$\tilde{U}_{2r} \leq [C_5 \|f\|_{L^\infty(0,\infty,L^q(\Omega))}]^{\sigma(r)} r^{\sigma(r)} \tilde{U}_r.$$

Démonstration. En multipliant (6.39) par u^{2r-1} puis en utilisant l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\frac{1}{2r}\frac{d}{dt}\int_\Omega u^{2r}dx + m\frac{2r-1}{r^2}\int_\Omega |\nabla(u^r)|^2 dx \leq |f|_q |u^{2r-1}|_p. \tag{6.86}$$

Comme

$$|u^{2r-1}|_p = |u^r|_{p^{\frac{2r-1}{r}}}^{\frac{2r-1}{r}}, \tag{6.87}$$

en prenant $w = u^r$ dans (6.86) et (6.87), on a que

$$\frac{1}{2r}\frac{d}{dt}|w|_2^2 + m\frac{2r-1}{r^2}|\nabla w|_2^2 \leq |f|_q |w|_{\alpha p}^\alpha, \tag{6.88}$$

avec $\alpha = \frac{2r-1}{r}$. Soit β tel que

$$\frac{1}{\alpha p} = \beta + \frac{1-\beta}{2^\star}, \tag{6.89}$$

avec $2^\star = \frac{2n}{n-2}$. On a que $\beta \in (0,1)$.
En effet

$$\beta = \frac{2nr - (n-2)(2r-1)p}{(n+2)(2r-1)p},$$

comme $p < \frac{2r}{2r-1}\frac{n}{n-2}$ alors $\beta > 0$. De même $2n(2r-1)p > 2nr$, d'où $(n+2)(2r-1)p > 2nr - (n-2)(2r-1)p$. Ce qui montre bien que $\beta < 1$ et donc que $\beta \in (0,1)$. En utilisant l'inégalité d'interpolation (voir théorème 2.4) ; (6.88) et (6.89), nous donne

$$\frac{1}{2r}\frac{d}{dt}|w|_2^2 + m\frac{2r-1}{r^2}|\nabla w|_2^2 \leq |f|_q\left(|w|_1^{\beta}\,|w|_{2^\star}^{1-\beta}\right)^{\alpha}, \tag{6.90}$$

et en utilisant des injections de Sobolev on a que

$$\frac{1}{2r}\frac{d}{dt}|w|_2^2 + m\frac{2r-1}{r^2}|\nabla w|_2^2 \leq \left[|f|_q\left(\frac{2r}{m}\right)^{\frac{\alpha(1-\beta)}{2}}|w|_1^{\beta\alpha}\,C^{(1-\beta)\alpha}\right]\left[\left(\frac{m}{2r}\right)^{\frac{\alpha(1-\beta)}{2}}|\nabla w|_2^{(1-\beta)\alpha}\right]. \tag{6.91}$$

Puis

$$\frac{1}{2r}\frac{d}{dt}|w|_2^2 + m\frac{2r-1}{r^2}|\nabla w|_2^2 \leq \left[|f|_q\left(\frac{2r}{m}\right)^{\frac{\alpha(1-\beta)}{2}}|w|_1^{\beta\alpha}\,C^{(1-\beta)\alpha}\right]\left[\left(\frac{m}{2r}\right)|\nabla w|_2^2\right]^{\frac{\alpha(1-\beta)}{2}}, \tag{6.92}$$

comme $\beta \in (0,1)$ et $\frac{\alpha}{2} \in (0,1)$ il est clair que $\frac{\alpha(1-\beta)}{2} \in (0,1)$. En appliquant l'inégalité de Young à (6.92) avec $\frac{\alpha(1-\beta)}{2} + 1 - \frac{\alpha(1-\beta)}{2} = 1$. On obtient

$$\frac{1}{2r}\frac{d}{dt}|w|_2^2 + m\frac{2r-1}{r^2}|\nabla w|_2^2 \leq \delta\left[|f|_q^{\frac{1}{\delta}}\left(\frac{2r}{m}\right)^{\frac{\alpha(1-\beta)}{2\delta}}|w|_1^{\frac{\beta\alpha}{\delta}}\,C^{\frac{2}{\delta}}\right] + \frac{\alpha(1-\beta)}{2}\left[\left(\frac{m}{2r}\right)|\nabla w|_2^2\right], \tag{6.93}$$

avec $\delta = 1 - \frac{\alpha(1-\beta)}{2}$. En joignant le fait que $\frac{\alpha(1-\beta)}{2} \in (0,1)$ et que $\delta < 1$ dans (6.93), on a que

$$\frac{1}{2r}\frac{d}{dt}|w|_2^2 + m\frac{3r-2}{2r^2}|\nabla w|_2^2 \leq |f|_q^{\frac{1}{\delta}}\left(\frac{2r}{m}\right)^{\frac{\alpha(1-\beta)}{2\delta}}|w|_1^{\frac{\beta\alpha}{\delta}}\,C^{\frac{2}{\delta}}. \tag{6.94}$$

On pose

$$2r\sigma(r) - 1 = \frac{\alpha(1-\beta)}{2\delta} \quad et \quad 2\rho(r) = \frac{\beta\alpha}{\delta}.$$

(6.94) devient alors

$$\frac{1}{2r}\frac{d}{dt}|w|_2^2 + m\frac{3r-2}{2r^2}|\nabla w|_2^2 \leq |f|_q^{\frac{1}{\delta}}\left(\frac{2r}{m}\right)^{2r\sigma(r)-1}|w|_1^{2\rho(r)}\,C^{\frac{2}{\delta}}. \tag{6.95}$$

Ce qui fait

$$\frac{d}{dt}|w|_2^2 + m\frac{3r-2}{r}|\nabla w|_2^2 \leq |f|_q^{\frac{1}{\delta}}(2r)^{2r\sigma(r)}\left(\frac{1}{m}\right)^{2r\sigma(r)-1}|w|_1^{2\rho(r)}\,C^{\frac{2}{\delta}}. \tag{6.96}$$

De plus comme $\frac{3r-2}{r} > 1$, ainsi

$$\frac{d}{dt}|w|_2^2 + m|\nabla w|_2^2 \leq |f|_q^{\frac{1}{\delta}}\left(\frac{2r}{m}\right)^{2r\sigma(r)}|w|_1^{2\rho(r)}\,m\,C^{\frac{2}{\delta}}. \tag{6.97}$$

On vérifie que

$$\rho(r) = \frac{2nr - (n-2)(2r-1)p}{2r(p(n+2)+n) - 2n(2r-1)p},$$

et que $\rho(r) \in (0,1)$. En effet on vérifie facilement que

$$1 - \beta = \frac{2n(2r-1)p - 2nr}{(n+2)(2r-1)p},$$

et aussi que

$$\delta = \frac{\alpha(1-\beta)}{2} = \frac{r(p(n+2)+n) - n(2r-1)}{(n+2)rp}. \tag{6.98}$$

Comme

$$\alpha\beta = \frac{2nr - (n-2)(2r-1)p}{(n+2)rp} \tag{6.99}$$

alors en utilisant (6.98) et (6.99) on déduit bien que

$$\frac{\alpha\beta}{\delta} = 2\rho(r) = \frac{2nr - (n-2)(2r-1)p}{r(p(n+2)+n) - n(2r-1)p}. \tag{6.100}$$

Ce qui prouve bien que

$$\rho(r) = \frac{2nr - (n-2)(2r-1)p}{2r(p(n+2)+n) - 2n(2r-1)p}.$$

Pour finir nous montrons que $\rho(r) \in (0,1)$. Dû au fait que

$$(2r-1)(n+2)p < 2r(n+2)p. \tag{6.101}$$

En écrivant $n+2 = 2n-(n-2)$, (6.101) devient

$$-(2r-1)(n-2)p < 2r(n+2)p - 2n(2r-1)p \tag{6.102}$$

et aussi en ajoutant $2rn$ dans chaque membre de (6.102) on a

$$2nr - (2r-1)(n-2)p < 2r((n+2)p+n) - 2n(2r-1)p \tag{6.103}$$

ce qui montre bien que $\rho(r) < 1$. Pour terminer la preuve il suffit de montrer que $\rho(r) > 0$ ce qui s'obtient facilement car δ, β et α sont strictements positifs. Ce qui démontre bien que $\rho(r) \in (0,1)$. En utilisant l'inégalité de Poincaré-Sobolev et le fait que $\rho(r) < 1$ dans (6.97), il vient

$$\frac{d}{dt}|w|_2^2 + \frac{m}{C_1(\Omega)}|w|_2^2 \leq |f|_q^{\frac{1}{\delta}} \left(\frac{2r}{m}\right)^{2r\sigma(r)} |w|_1^2\, m\, C^{\frac{2}{\delta}}, \tag{6.104}$$

où $C_1(\Omega)$ désigne la constante de Poincaré-Sobolev. Ce qui fait bien

$$e^{-\frac{m}{C_1(\Omega)}t}\frac{d}{dt}\left(e^{\frac{m}{C_1(\Omega)}t}|w|_2^2\right) = \frac{d}{dt}|w|_2^2 + \frac{m}{C_1(\Omega)}|w|_2^2 \leq |f|_q^{\frac{1}{\delta}} \left(\frac{2r}{m}\right)^{2r\sigma(r)} |w|_1^2\, m\, C^{\frac{2}{\delta}}. \tag{6.105}$$

En intégrant (6.105) sur $[0,t)$ et en faisant une petite majoration, on a

$$|w(t)|_2^2 \leq |w(0)|_2^2 + \|f\|_{L^\infty(0,\infty,L^q(\Omega))}^{\frac{1}{\delta}} \left(\frac{2r}{m}\right)^{2r\sigma(r)} m\, C^{\frac{2}{\delta}} |w|_1^2. \tag{6.106}$$

Comme

$$|w(0)|_2^2 = \int_\Omega w(0)^2 dx = \int_\Omega u(0)^{2r} dx \leq |\Omega||u(0)|_\infty^{2r} \leq |\Omega|\tilde{U}_r^{2r}, \tag{6.107}$$

(6.106) et (6.107), nous donne

$$\tilde{U}_{2r}^{2r} \leq |\Omega|\tilde{U}_r^{2r} + \|f\|_{L^\infty(0,\infty,L^q(\Omega))}^{\frac{1}{\delta}} \left(\frac{2r}{m}\right)^{2r\sigma(r)} m\, C^{\frac{2}{\delta}} \tilde{U}_r^{2r}. \tag{6.108}$$

De même de $\frac{1}{\delta} > 1$ et $2r\sigma(r) > 0$ il découle

$$\tilde{U}_{2r}^{2r} \leq (C_4)^{\frac{1}{\delta}} \|f\|_{L^\infty(0,\infty,L^q(\Omega))}^{\frac{1}{\delta}} \left(\frac{2r}{m}\right)^{2r\sigma(r)} \tilde{U}_r^{2r}, \tag{6.109}$$

avec $C_4 = C_4(\Omega)$. En remarquant que $\sigma(r) = \frac{1}{2r\delta}$ il résulte que

$$\tilde{U}_{2r} \leq C_5^{\sigma(r)} \|f\|_{L^\infty(0,\infty,L^q(\Omega))}^{\sigma(r)} r^{\sigma(r)} \tilde{U}_r, \tag{6.110}$$

avec $C_5 = C_5(\Omega, m)$. Ce qui achève la preuve du lemme. □

On a aussi

Lemme 6.8. *Soit $r > 1$, $n \geq 3$, $p < \frac{n}{n-2}$ et $\sigma(r) = \frac{p(n+2)}{2[r(2p-pn+n)+np]}$ alors on a que*

$$\sigma(2^k r) \leq \theta^k \sigma(r) \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

avec $\theta \in (0,1)$.

Démonstration. En posant $c_1 = \frac{p(n+2)}{2}$, $c_2 = (2p - pn + n)$ et $c_3 = np$ on a que $\sigma(r) = \frac{c_1}{rc_2+c_3}$ avec $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}_+^\star$. Démontrons maintenant le résultat par récurrence. Pour $k = 0$ le résultat est évident, supposons maintenant que le résultat soit vrai au rang $k-1$ et montrons qu'il en est de même au rang k. On a que

$$\frac{\sigma(2^k r)}{\sigma(2^{k-1} r)} = \frac{2^{k-1} r c_2 + c_3}{2^k r c_2 + c_3} = 1 - \frac{2^{k-1} r c_2}{2^k r c_2 + c_3}.$$

Comme

$$\frac{2^{k-1} r c_2}{2^k r c_2 + c_3} = \frac{c_2}{2c_2 + \frac{c_3}{2^{k-1} r}} \geq \frac{c_2}{2c_2 + c_3},$$

d'où

$$\frac{\sigma(2^k r)}{\sigma(2^{k-1} r)} \leq 1 - \frac{c_2}{2c_2 + c_3}.$$

Il vient que

$$\sigma(2^k r) \leq \frac{c_2 + c_3}{2c_2 + c_3} \theta^{k-1} \sigma(r).$$

Ce qui donne bien

$$\sigma(2^k r) \leq \theta^k \sigma(r),$$

et termine la preuve du lemme. □

Revenons maintenant à la preuve du théorème, d'après le lemme6.7 on a que

Démonstration.

$$\tilde{U}_{2r} \leq [C_5 \|f\|_{L^\infty(0,\infty,L^q(\Omega))}]^{\sigma(r)} r^{\sigma(r)} \tilde{U}_r.$$

En itérant cette relation en prenant $r = h, r = 2h, r = 2^2h, etc$, on obtient

$$\tilde{U}_{2^{k+1}h} \leq [C_5 \|f\|_{L^\infty(0,\infty,L^q(\Omega))}]^{\lambda 1} \, 2^{\lambda 2} \, h^{\lambda 1} \, \tilde{U}_h,$$

avec

$$\lambda_1 := \sigma(h) + \sigma(2h) + \sigma(2^2h) + .. + \sigma(2^{k-1}h) + \sigma(2^k r)$$

et

$$\lambda_2 := \sigma(2h) + 2\sigma(2^2h) + 3\sigma(2^3h) + ... + (k-1)\sigma(2^{k-1}h) + k\sigma(2^k r).$$

Pour terminer la preuve il suffit de montrer que $\lambda_1, \lambda_2 < +\infty$ ce qui est clair compte tenu du fait que d'après le lemme 6.8

$$\lambda_1 \leq \sum_{\mu=0}^{k} \alpha^\mu \sigma(h) \leq \sum_{\mu=0}^{\infty} \alpha^\mu \sigma(h) = \frac{\sigma(h)}{(1-\alpha)} < \infty.$$

En remarquant aussi que

$$\sigma(2^k h) \leq \theta^{k-1} \sigma(2h) \quad \forall k \in \mathbb{N}^\star.$$

On obtient

$$\lambda_2 \leq \sum_{\mu=1}^{k} \mu \alpha^{\mu-1} \sigma(2h) \leq \sum_{\mu=1}^{\infty} \mu \alpha^{\mu-1} \sigma(2h) = \frac{\sigma(2h)}{(1-\alpha)^2} < \infty,$$

ce qui achève la preuve du théorème. □

Bibliographie

[Bre83] Haïm Brezis. *Analyse fonctionnelle.* Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. [Collection of Applied Mathematics for the Master's Degree]. Masson, Paris, 1983. Théorie et applications. [Theory and applications].

[Chi00] Michel Chipot. *Elements of nonlinear analysis.* Birkhäuser Advanced Texts : Basler Lehrbücher. [Birkhäuser Advanced Texts : Basel Textbooks]. Birkhäuser Verlag, Basel, 2000.

[Chi04] Michel Chipot. *Remarks on some class of nonlocal elliptic problems.* Elliptic and Parabolic Issues, Proceedings of the 2004 Swiss-Japanese Seminar. World Scientific, 2004.

[Cia86] P. G. Ciarlet. *Élasticité tridimensionnelle*, volume 1 of *Recherches en Mathématiques Appliquées [Research in Applied Mathematics].* Masson, Paris, 1986.

[eAR] Armel Andami Ovono et Arnaud Rougirel. Elliptic equations with diffusion parameterized by the length of nonlocal interactions. *http ://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00279310/fr/.*

[eBL99] Michel Chipot et Bruno Lovat. On the asymptotic behaviour of some nonlocal problems. *Positivity*, 3(1) :65–81, 1999.

[eBL01] Michel Chipot et Bruno Lovat. Existence and uniqueness results for a class of nonlocal elliptic and parabolic problems. *Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. A Math. Anal.*, 8(1) :35–51, 2001. Advances in quenching.

[eGP95] Antonio Ambrosetti et Giovanni Prodi. *A primer of nonlinear analysis*, volume 34 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics.* Cambridge University Press, Cambridge, 1995. Corrected reprint of the 1993 original.

[eJF92] Michel Chipot et J.-F.Rodrigues. On a class of nonlocal nonlinear elliptic problems. *RAIRO Modél. Math. Anal. Numér.*, 26(3) :447–467, 1992.

[eJLL88] Robert Dautray et Jacques-Louis Lions. *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques. Vol. 8.* INSTN : Collection Enseignement. [INSTN : Teaching Collection]. Masson, Paris, 1988.

[eJM83] P.-A.Raviart et J.-M.Thomas. *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles.* Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. [Collection of Applied Mathematics for the Master's Degree]. Masson, Paris, 1983.

[eJMR99] Jean-Émile Rakotoson et Jean-Michel Rakotoson. *Analyse fonctionnelle appliquée aux équations aux dérivées partielles.* Mathématiques. [Mathematics]. Presses Universitaires de France, Paris, 1999.

[eJR90] Michel Crouzeix et Jacques Rappaz. *On numerical approximation in bifurcation theory*, volume 13 of *Recherches en Mathématiques Appliquées [Research in Applied Mathematics]*. Masson, Paris, 1990.

[eLM01] Michel Chipot et Luc Molinet. Asymptotic behaviour of some nonlocal diffusion problems. *Appl. Anal.*, 80(3-4) :279–315, 2001.

[eM03] M.Chipot et M.Siegwart. On the asymptotic behaviour of some nonlocal mixed boundary value problems. In *Nonlinear analysis and applications : to V. Lakshmikantham on his 80th birthday. Vol. 1, 2*, pages 431–449. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2003.

[eMC03] N.-H.Chang et Michel Chipot. Nonlinear nonlocal evolution problems. *RACSAM Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Mat.*, 97(3) :423–445, 2003.

[eMC04] N.-H.Chang et Michel Chipot. On some mixed boundary value problems with nonlocal diffusion. *Adv. Math. Sci. Appl.*, 14(1) :1–24, 2004.

[ePA06] S.Genieys V.Volpert et P. Auger. Pattern and waves for a model in population dynamics with nonlocal consumption of resources. *Math. Model. Nat. Phenom.*, 1(1) :65–82 (electronic), 2006.

[ePS07] Pavol Quittner et Philippe Souplet. *Superlinear parabolic problems*. Birkhäuser Advanced Texts : Basler Lehrbücher. [Birkhäuser Advanced Texts : Basel Textbooks]. Birkhäuser Verlag, Basel, 2007. Blow-up, global existence and steady states.

[eSA05] J. F. M.Al-Omari et S. A.Gourley. A nonlocal reaction-diffusion model for a single species with stage structure and distributed maturation delay. *European J. Appl. Math.*, 16(1) :37–51, 2005.

[Gou00] S. A. Gourley. Travelling front solutions of a nonlocal Fisher equation. *J. Math. Biol.*, 41(3) :272–284, 2000.

[Lio73] Jacques.Louis Lions. *Cours d Analyse Numérique*. Cours de l École Polytechnique. Hermann, Paris, 1973.

[Lov95] Bruno Lovat. *Etudes de quelques problèmes paraboliques non locaux*. Thèse de doctorat. 1995.

[Sie06] Martin Siegwart. Asymptotic behavior of some nonlocal parabolic problems. *Adv. Differential Equations*, 11(2) :167–199, 2006.

[Tem97] Roger Temam. *Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics*, volume 68 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1997.

Titre : Equations de diffusion paramétrée par la portée des interactions à longue distance

Résumé Nous nous intéressons dans cette thèse à l'étude d'une équation parabolique quasilinéaire dans laquelle la diffusion est paramétrée par la longueur des différentes interactions non locales. Pour ce qui est du problème stationnaire associé, après avoir montré des résultats d'existence, d'unicité et de continuité. Nous présentons ensuite un critère général d'inversibilité dépendant du paramètre, ce critère très important va par la suite nous permettre en exemple d'application de retrouver des résultats d'inversibilités déjà connus lorsque le paramètre est égale au diamètre du domaine. Nous donnons ensuite un résultat de principe de comparaison de solutions symétriques radiales et une généralisation du compte du nombre de solutions. Enfin nous donnons quelques applications numériques utilisant une méthode de point fixe et de Newton pour illustrer ces résultats. Pour le problème d'évolution, après avoir montré l'existence d'un attracteur global associé à notre problème, nous démontrons une estimation L^∞ de la solution en fonction d'estimations L^q, $q > 1$ utilisant des itérations de type Moser.

Mot-clefs

Equation parabolique, solutions stationnaires, solutions radiales, principe de comparaison.

Abstract This thesis is devoted to a quasilinear parabolic equation in which the diffusion is defined by the length of different nonlocal interactions. As regards stationary problem, having shown the results of existence, uniqueness and continuity. We introduce a general criterion of inversibility later depending on parameter, this very important criterion is going to allow us in example of application to find well known results when parameter will be equal to the diameter of domain. We give then a fundamental result of comparison of solutions in the case of radial symmetrical solutions and a general implementation of count of solutions. Finally we give some numerical applications using a method of fixed point and Newton's method to illustrate these results. As regards parabolic problem having shown existence of global attractor associated to our problem, we show an estimate L^∞ of solution according to estimate L^q, $q > 1$ by using Moser's iteration.

Keywords Parabolic equation, stationary solutions, radial solutions, principle of comparison.