

**Problèmes direct et inverse de diffraction des ondes  
en milieu stratifié :**

*du domaine des basses fréquences  
à la résonance*

Marc Lambert

Département de Recherche en Électromagnétisme  
Laboratoire des Signaux et Systèmes (CNRS - Supélec - UPS)

# Plan

- Curriculum vitæ
- Le cadre général
- Le problème direct
  - Le cas 2D en polarisation TE
  - Le cas 3D vectoriel
- Le problème inverse
  - Les sources distribuées
  - Les ensembles de niveaux
  - Le gradient modifié
  - Le contraste de source
- Conclusions et perspectives

## De la recherche ...

1990-1994

**DOCTORANT** au L2S

« Caractérisation de milieux plans stratifiés par sources localisées. Application au sondage acoustique du fond sous-marin », D. Lesselier

1993 (3 mois)

« **SUMMER RESEARCH ASSISTANT** »

SACLANT Undersea Research Centre, Italie

1993-1994

**ATER** à Paris-Sud

1995 (9 mois)

**INGÉNIEUR DE RECHERCHE** au BRGM

Octobre 1995-

**CHARGÉ DE RECHERCHE CNRS**, Département de Recherche en Électromagnétisme, L2S (CNRS-Supélec-UPS)

## ... en collaboration, ...

**D. Lesselier** : directeur de thèse, directeur de recherche

### Participation à l'encadrement d'étudiants :

- thèses : G. Perrusson, D. Martinez, D. Dos Reis, C. Ramananjaona
- stages de DEA : G. Perrusson, E. Bocly, D. Dos Reis, C. Ramananjaona

### Collaborations nationales et internationales :

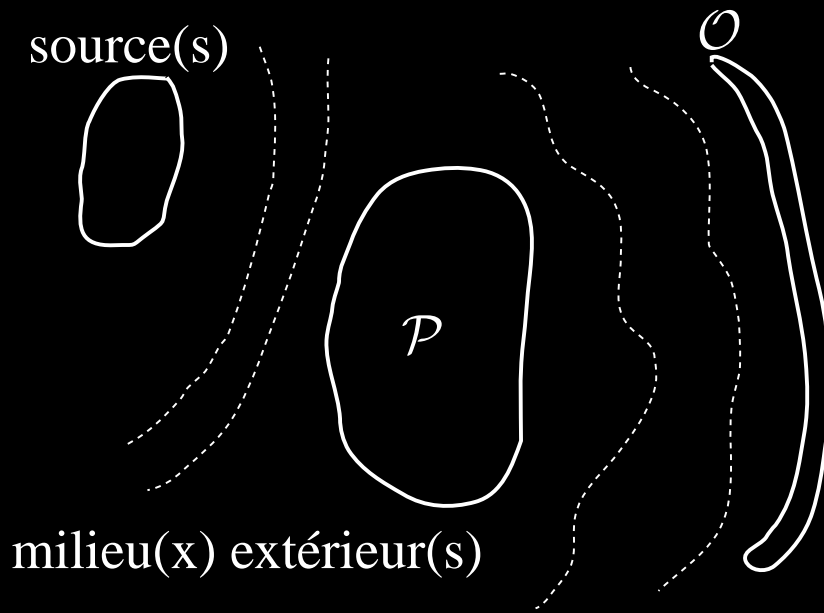
- BRGM (1996-1999) : contrat de collaboration de recherche
- Université de Patras (1997-1999) : AI Franco-Hellénique (Platon)
- ONERA (1998-2000) : contrat de collaboration de recherche
- NSF (1998-2000) : programme de recherche commun (L2S-LMA-CMW)

## ... mais aussi de l'enseignement

- |             |  |
|-------------|--|
| 1991-1993   | <b>MONITEUR</b> à l'université Paris-Sud<br>1ère et 2ème année de DUT                    |
| 1993-1994   | <b>ATER</b> à l'université Paris-Sud<br>1ère année de DEUG                               |
| depuis 1996 | <b>VACATAIRE</b> à l'université Denis Diderot<br>DEA Méthodes Physiques en Télédétection |
| depuis 1997 | <b>VACATAIRE</b> à Supélec<br>Formation continue   |
| depuis 2001 | <b>VACATAIRE</b> à l'université de Nanterre<br>1ère année de DUT                         |

# Le cadre général

# Le problème inverse de diffraction des ondes



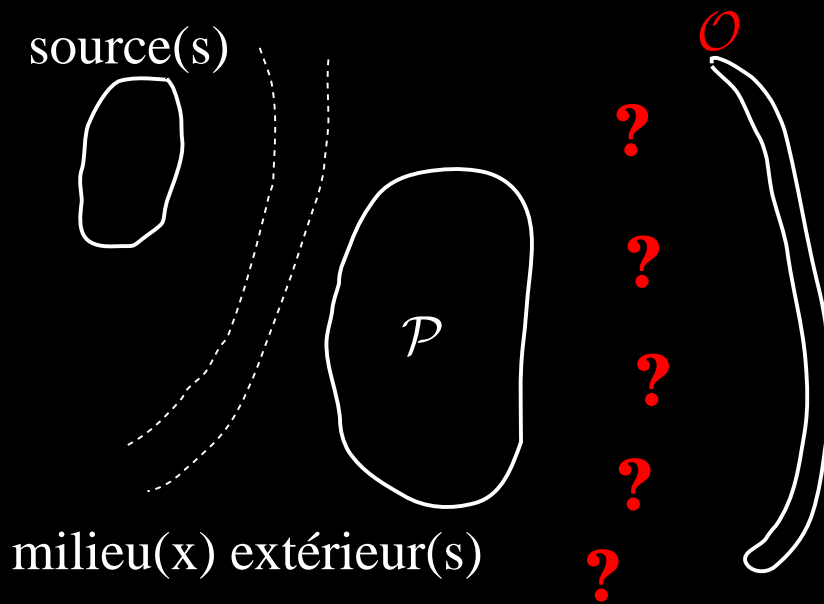
Caractéristiques des milieu(x) :

- isotrope
- linéaire
- non magnétique  
(électromagnétisme)
- fluide (acoustique)

Sources : harmonique(s)

$$\mathcal{O} = \mathcal{L}(\mathcal{P}), \text{ avec } \mathcal{L} : \ll \text{lois de la nature} \gg$$

# Le problème inverse de diffraction des ondes



Caractéristiques des milieu(x) :

- isotrope
- linéaire
- non magnétique  
(électromagnétisme)
- fluide (acoustique)

Sources : harmonique(s)

$$\mathcal{O} = \mathcal{L}(\mathcal{P}), \text{ avec } \mathcal{L} : \ll \text{lois de la nature} \gg$$

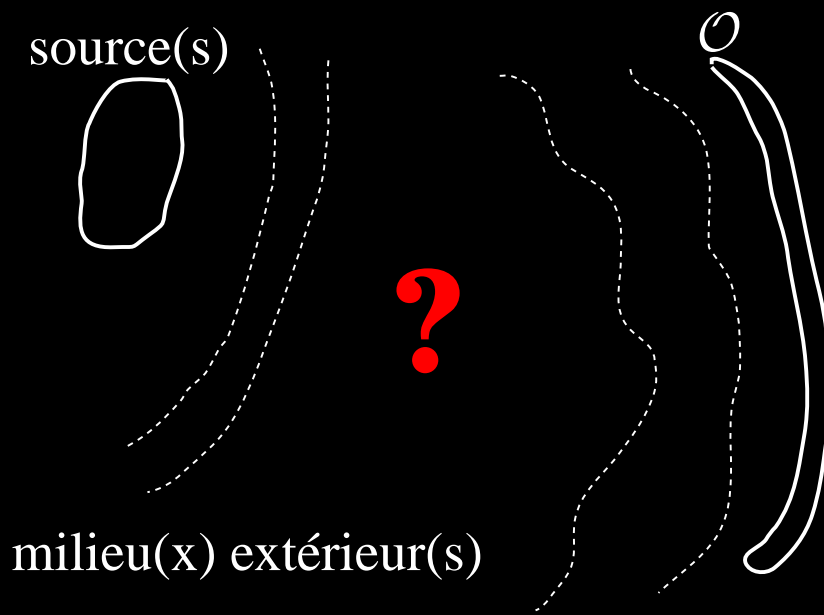


**Le problème direct** : trouver  $\mathcal{O}$  connaissant  $\mathcal{L}$  et  $\mathcal{P}$

→ problème linéaire bien posé



# Le problème inverse de diffraction des ondes



Caractéristiques des milieu(x) :

- isotrope
- linéaire
- non magnétique (électromagnétisme)
- fluide (acoustique)

Sources : harmonique(s)

$$\mathcal{O} = \mathcal{L}(\mathcal{P}), \text{ avec } \mathcal{L} : \text{« lois de la nature »}$$

☞ **Le problème direct** : trouver  $\mathcal{O}$  connaissant  $\mathcal{L}$  et  $\mathcal{P}$   
→ problème linéaire bien posé

☞ **Le problème inverse** : trouver  $\mathcal{P}$  connaissant  $\mathcal{L}$  et  $\mathcal{O}$   
→ problème non linéaire mal posé

# Le problème inverse mal-posé

## ➔ Le caractère mal-posé « théorique »

- existence
- unicité
- continuité

## ➔ Le caractère mal-posé « pratique »

- limitation des données
- imperfection des mesures, des modèles
- discrétisation des équations

## ➔ quelques idées de remèdes

- incorporation *a priori* d'information sur la solution
- ajout de termes régularisants
- diversité des informations

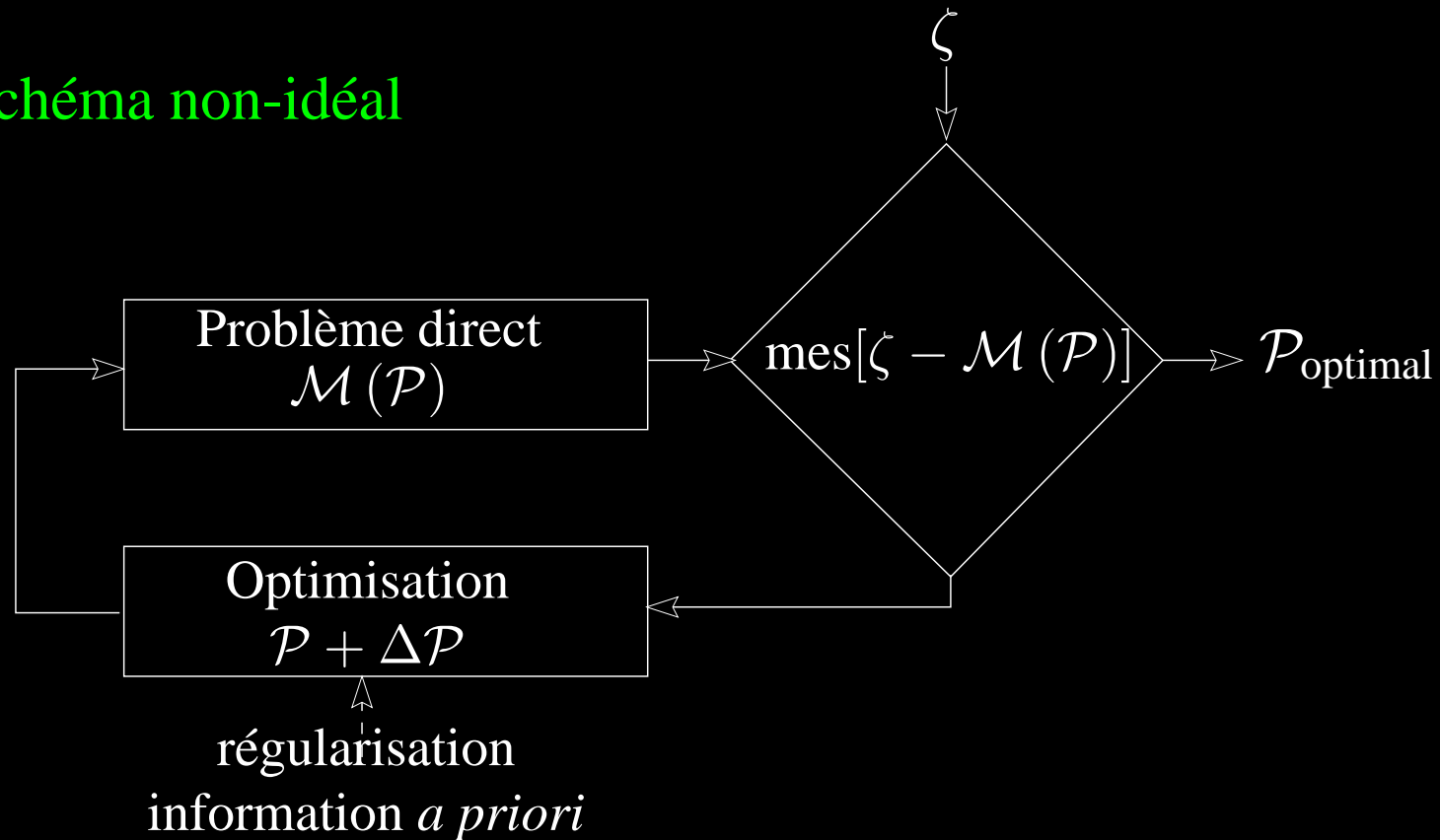
# Le schéma général

Problème inverse :  $\mathcal{P} = \mathcal{M}^{-1}(\mathcal{O})$

## 👉 Le schéma idéal

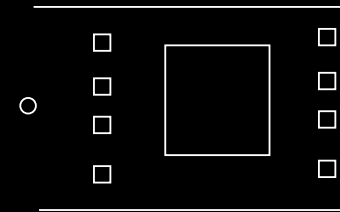
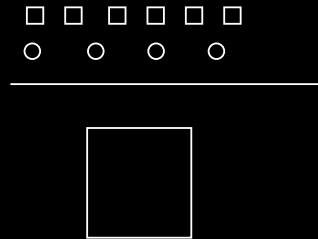
Formulation analytique de  $\mathcal{M}^{-1}$

## 👉 Le schéma non-idéal



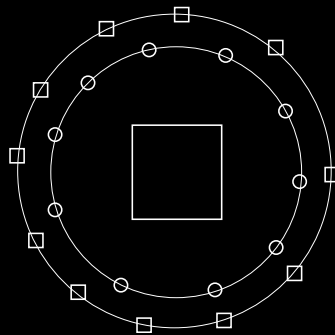
# Les configurations génériques

## ➔ Milieux stratifiés



⇒ « données d'aspect limité »

## ➔ Espace homogène



⇒ données réelles

# La formulation intégrale

Choix historique et pratique

Équation de propagation + théorème de Green + CL

Exemple de formulation : un cas 3D

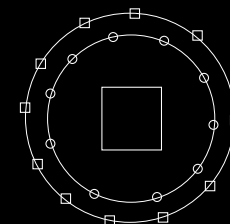
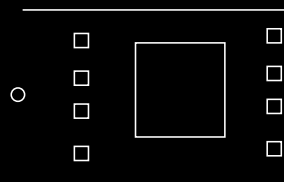
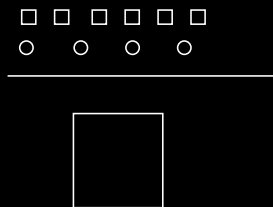
➡ Équation de couplage (ou d'état)

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}^{inc}(\mathbf{r}) + \int_{\Omega} \underline{\mathbf{G}}^{ee}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \varepsilon \chi(\mathbf{r}') \mathbf{E}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}', \quad \mathbf{r} \in \Omega$$

$$\text{avec } \chi(\mathbf{r}) = \frac{\varepsilon_{\Omega}(\mathbf{r}) - \varepsilon}{\varepsilon} \text{ et } \underline{\mathbf{G}}^{ee}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = [\underline{\mathbf{I}} + \nabla \nabla] g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$$

➡ Équation d'observation (ou de données)

$$\mathbf{H}^{dif}(\mathbf{r}) = \int_{\Omega} \underline{\mathbf{G}}^{me}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \varepsilon \chi(\mathbf{r}') \mathbf{E}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}', \quad \mathbf{r} \notin \Omega$$



# L'optimisation locale déterministe

Choix historique et pratique

But : chercher  $\mathcal{P}$  tel que  $\text{mes}[\zeta - \mathcal{M}(\mathcal{P})]$  soit minimale

## ➡ Principales caractéristiques

- Rapidité de convergence
- Minimum local (global)
- Contrainte sur la fonction coût

## ➡ Choix de la fonction coût

- Dérivable /  $\mathcal{P}$
- Incorporer des contraintes

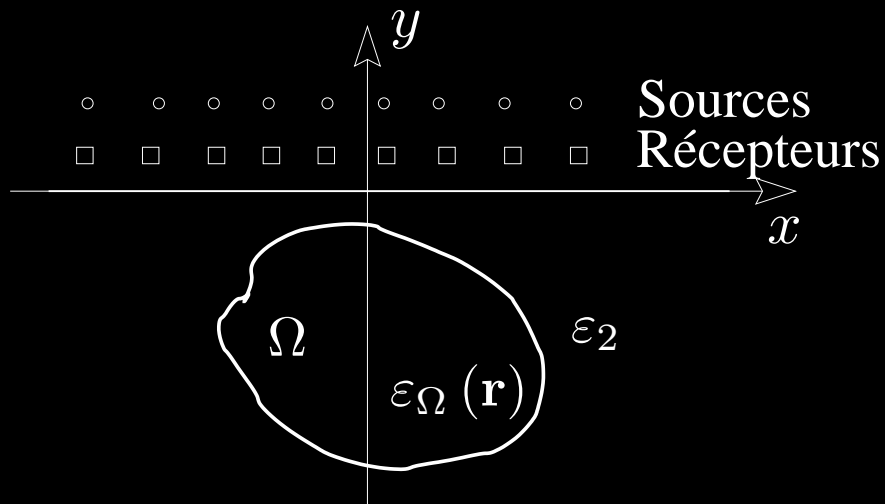
$$f(\mathcal{P}) = \|\zeta - \mathcal{M}(\mathcal{P})\|^2 \quad (+\text{régularisations})$$

# Le problème direct

# Le cas 2D en polarisation TE



# Formulation 2D en polarisation TE



- Formulation en champ  $\mathbf{E}$
- Formulation en champ  $H_z$

➔ Équation de couplage (ou d'état)

$$H_{2,z}(\mathbf{r}) = H_{2,z}^{inc}(\mathbf{r}) + \int_{\Omega} \chi(\mathbf{r}') \nabla g_{22}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \nabla H_{2,z}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}', \quad \mathbf{r} \in \Omega$$

$$\text{avec } \chi(\mathbf{r}) = \frac{\varepsilon_{\Omega}(\mathbf{r}) - \varepsilon_2}{\varepsilon_{\Omega}(\mathbf{r})}$$

➔ Équation d'observation (ou de données) dans le milieu  $i$

$$H_{i,z}^{dif}(\mathbf{r}) = \int_{\Omega} \chi(\mathbf{r}') \nabla g_{i2}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \nabla H_{2,z}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}', \quad \mathbf{r} \notin \Omega$$

# Méthode de Moments (théorie I)

## ➡ Méthode de Moments

$\Omega$  discrétisé en  $N$  cellules rectangulaires

➤  $\chi(\mathbf{r})$  constant

1 cellule rectangulaire  $\rightarrow$  2 cellules triangulaires

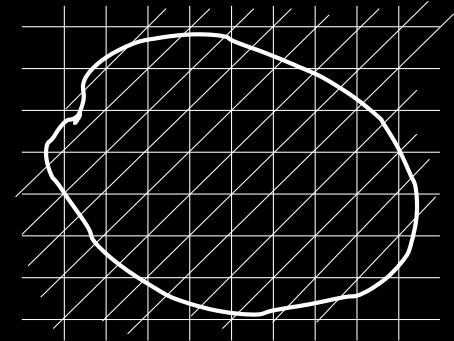
➤  $H_{2,z}(\mathbf{r})$  à variation linéaire

Équation de couplage  $\rightarrow$  système linéaire

## ➡ Résolution du système linéaire

Structure de convolution de l'équation

$\Rightarrow$  gradient conjugué + TFR



# Méthode de Moments 2D (illustration)

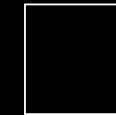
1 fréquence (400 MHz)

Données synthétiques

Encaissant :  $\varepsilon_{r,2} = 4, \sigma_2 = 10^{-4}$  S/m

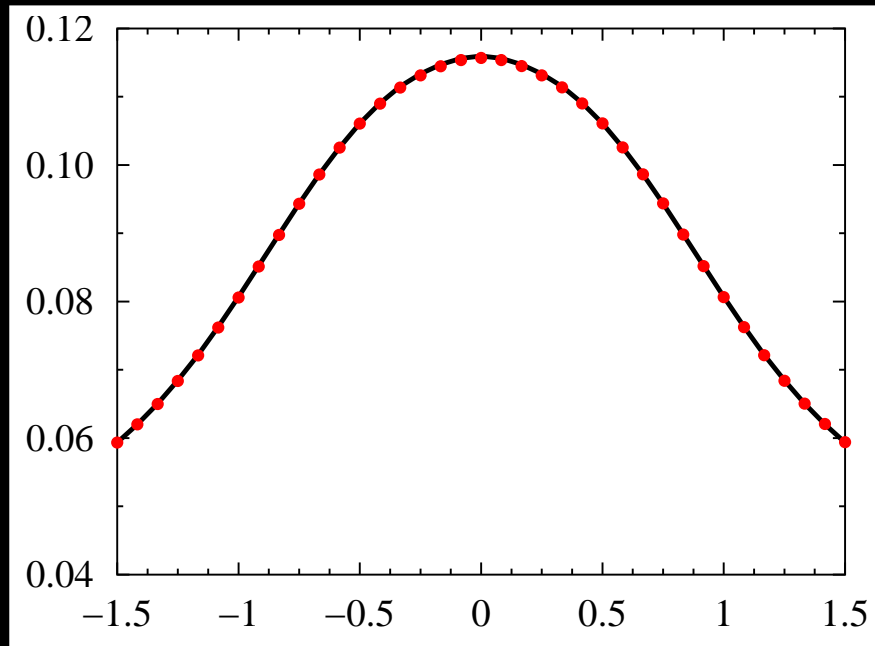
Obstacle : A ( $\varepsilon_{\Omega} = 4, \sigma_{\Omega} = 0$  S/m)

B ( $\varepsilon_{\Omega} = 16, \sigma_{\Omega} = 10^{-2}$  S/m)

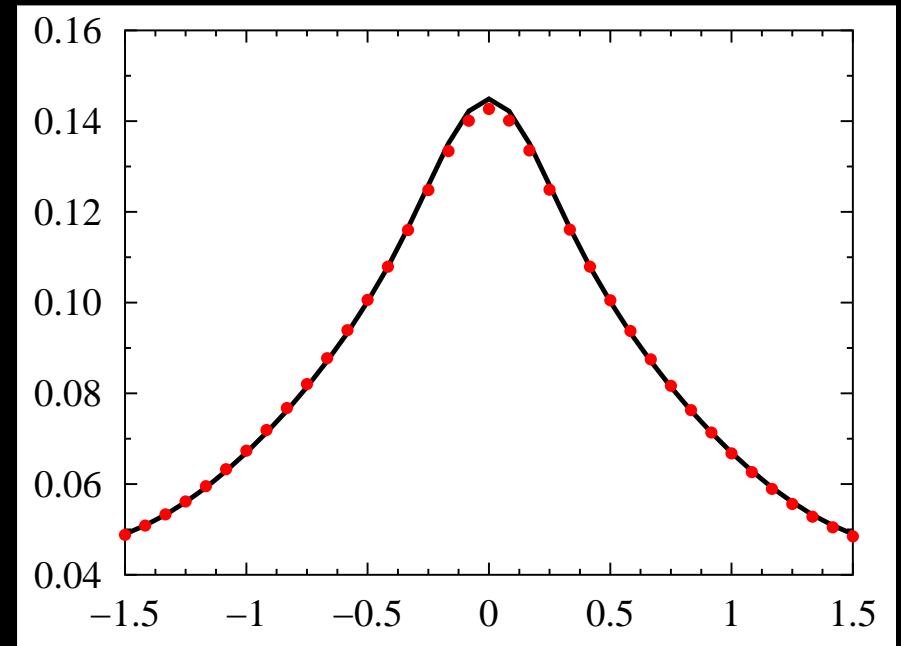


Saillard et Toso, 1997

Formulation TE



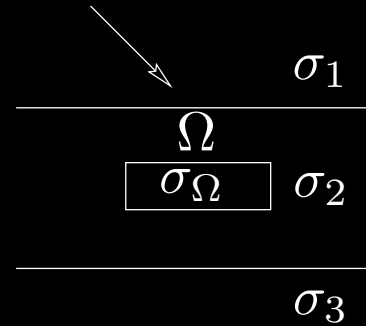
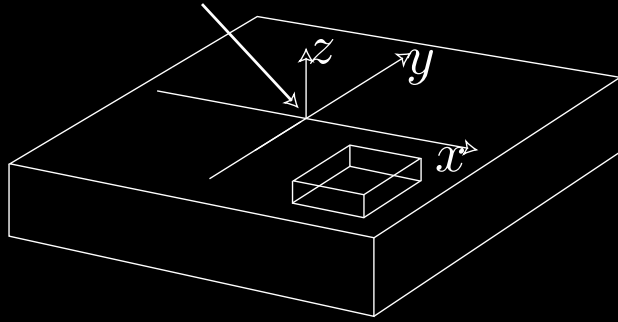
Cas A



Cas B

# Le cas 3D vectoriel

# Formulation 3D



➡ Équation de couplage (ou d'état)

$$\mathbf{E}_2(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_2^{inc}(\mathbf{r}) + j\omega\mu_0 \int_{\Omega} \underline{\mathbf{G}}_{22}^{ee}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \sigma_2 \chi(\mathbf{r}') \mathbf{E}_2(\mathbf{r}') d\mathbf{r}', \quad \mathbf{r} \in \Omega$$

$$\text{avec } \chi(\mathbf{r}) = \frac{\sigma_{\Omega}(\mathbf{r}) - \sigma_2}{\sigma_2}$$

➡ Équation d'observation (ou de données) dans le milieu  $i$

$$\mathbf{H}_i^{dif}(\mathbf{r}) = \int_{\Omega} \underline{\mathbf{G}}_{i2}^{me}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \sigma_2 \chi(\mathbf{r}') \mathbf{E}_2(\mathbf{r}') d\mathbf{r}', \quad \mathbf{r} \notin \Omega$$

# Résolution des équations 3D

## ➤ Résolution exacte

Discretisation par une méthode de moments

Système linéaire à résoudre

Gradient conjugué par transformées de Fourier rapides

## ➤ Approximations de type « Born étendu »

$\mathbf{E}_2(\mathbf{r}) \approx \underline{\Gamma}(\mathbf{r}) \mathbf{E}_2^{inc}(\mathbf{r})$ ,  $\underline{\Gamma}(\mathbf{r})$  tenseur de dépolarisation

Pas de système linéaire à résoudre

## ➤ Développement basse fréquence

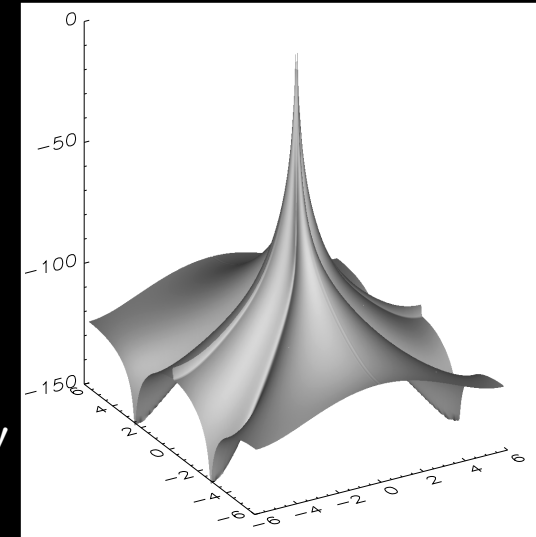
# Approximations « Born étendu »

⇒ Introduit par Habashy *et al.* (1993)

☞ Les hypothèses importantes :

- $\underline{\mathbf{G}}_{22}^{ee}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  piquée en  $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$
- Atténuation dans le milieu 2

⇒ contribution principale autour de  $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$



☞ L'approximation Localisée Non-linéaire :

$$\mathbf{E}_2(\mathbf{r}) \approx \mathbf{E}_2^{inc}(\mathbf{r}) + j\omega\mu_0 \left[ \int_{\Omega} \underline{\mathbf{G}}_{22}^{ee}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \sigma_2 \chi(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \right] \mathbf{E}_2(\mathbf{r})$$

$$\mathbf{E}_2(\mathbf{r}) \approx \underline{\Gamma}(\mathbf{r}) \mathbf{E}_2^{inc}(\mathbf{r}), \quad \underline{\Gamma}(\mathbf{r}) = \left[ \underline{\mathbf{I}} - j\omega\mu_0 \int_{\Omega} \underline{\mathbf{G}}_{22}^{ee}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \sigma_2 \chi(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \right]^{-1}$$

➤ Pas de dépolarisation ⇒  $\underline{\Gamma}(\mathbf{r})$  diagonal

☞ Autres approximations (expressions différentes de  $\underline{\Gamma}(\mathbf{r})$ )

# Méthode de Moments (théorie I)

## ➔ Méthode de Moments (point-segment)

$\Omega$  discrétisé en  $N$  cellules rectangulaires

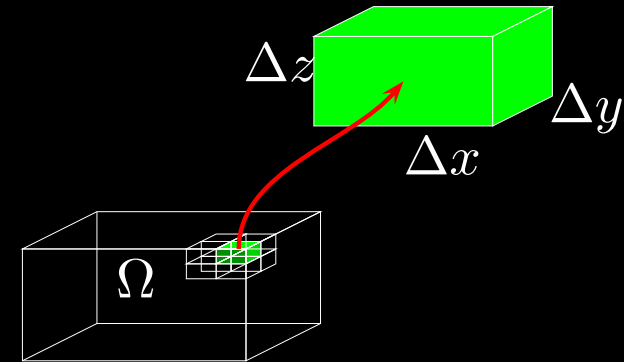
Équation de couplage  $\rightarrow$  système linéaire

$$[\mathbf{E}_2^{inc}]_N = [\mathbf{I} - \underline{\mathcal{G}}_{22}^{ee}]_{N \times N} [\mathbf{E}_2]_N$$

$$\mathbf{E}_2^{inc}(\mathbf{r}_i), i = 1, \dots, N$$

$$\mathbf{E}_2(\mathbf{r}_j), j = 1, \dots, N$$

$$\underline{\mathcal{G}}_{22}^{ee}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) = \chi(\mathbf{r}_i) \iiint_{\Delta x_j, \Delta y_j, \Delta z_j} \underline{\mathbf{G}}_{22}^{ee}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}') d\mathbf{r}, \quad i, j = 1, \dots, N$$



## ➔ Résolution du système linéaire

Structure de convolution de l'équation

$\Rightarrow$  gradient conjugué + TFR



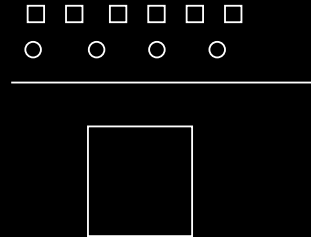
# Méthode de Moments (illustration)

1 fréquence (150 kHz)

Données réelles

Encaissant :  $\sigma_2 = 0.8 \text{ MS/m}$ ,  $d = 1.265 \text{ mm}$

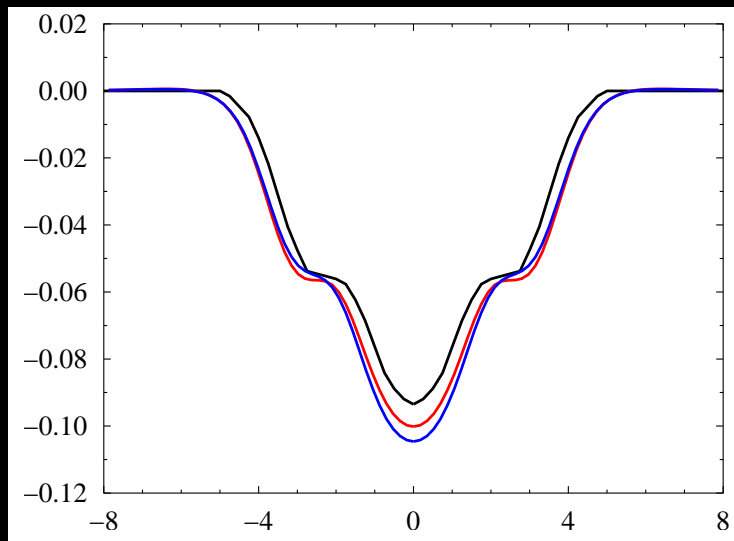
Obstacle : vide ( $5.435 \times 0.269 \times 0.064 \text{ mm}^3$ )



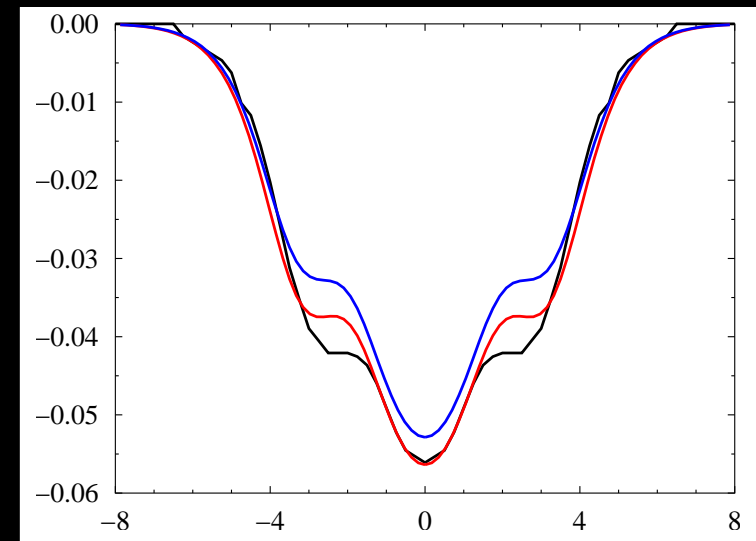
Mesure

Exact

LN



$\Re(Z)$



$\Im(Z)$

# Développement basse-fréquence (introduction)

Collaboration : G. Perrusson, B. Bougeois, G. Dassios,  
A. Charalambopoulos et G. Kamvyssas

⇒ Introduit par G. Perrusson (1996)

## Points importants :

- ☞ Combinaison d'une approximation « Born étendu » et d'un développement basse fréquence (BF)
- ☞ Expressions semi-analytiques des termes du développement BF pour des objets homogènes canoniques (sphère, ellipsoïde)

## Ce qui a été fait :

- Obstacle homogène au sein d'un espace homogène
- Extension partielle au cas d'un obstacle au sein d'un espace stratifié

# Développement BF (théorie I)

➡ Approximation de « Born étendu »

$$\mathbf{H}_2^{dif}(\mathbf{r}) \approx \frac{k_\Omega^2 - k_2^2}{j\omega\mu_0} \int_\Omega \nabla g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \wedge [\underline{\Gamma}(\mathbf{r}') \mathbf{E}_2^{inc}(\mathbf{r}')] d\mathbf{r}'$$

$$\text{avec } g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{e^{jk_2 R}}{4\pi R}, \quad R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$$

$$\underline{\Gamma}(\mathbf{r}) = \left[ \underline{\mathbf{I}} - (k_\Omega^2 - k_2^2) \left( \underline{\mathbf{I}} + \frac{\nabla\nabla}{k_2^2} \right) \int_\Omega g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d\mathbf{r}' \right]^{-1}$$

➡ Développement basse-fréquence

$$\Phi = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n (jk_2)^n \quad \text{avec } \Phi = g(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), \omega, \underline{\Gamma}(\mathbf{r}) \text{ ou } \mathbf{E}_2^{inc}(\mathbf{r})$$

➤ Limitation au 3ème ordre

$$\underline{\Gamma}_n(\mathbf{r}) \text{ fonction de } \nabla\nabla \int_\Omega \frac{d\mathbf{r}'}{R}, \int_\Omega \frac{d\mathbf{r}'}{R}, \nabla\nabla \int_\Omega R d\mathbf{r}', \int_\Omega d\mathbf{r}', \nabla\nabla \int_\Omega R^2 d\mathbf{r}'$$

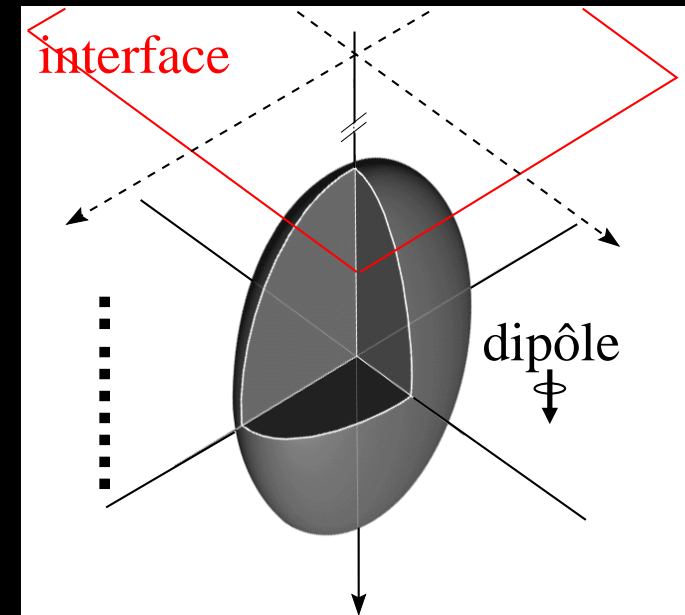
## Développement BF (théorie II)

➡ Calcul semi-analytique des termes

Obstacle canonique : ellipsoïde

Source : dipôle magnétique

⇒ expression semi-analytique de  $\underline{\Gamma}_n(\mathbf{r})$



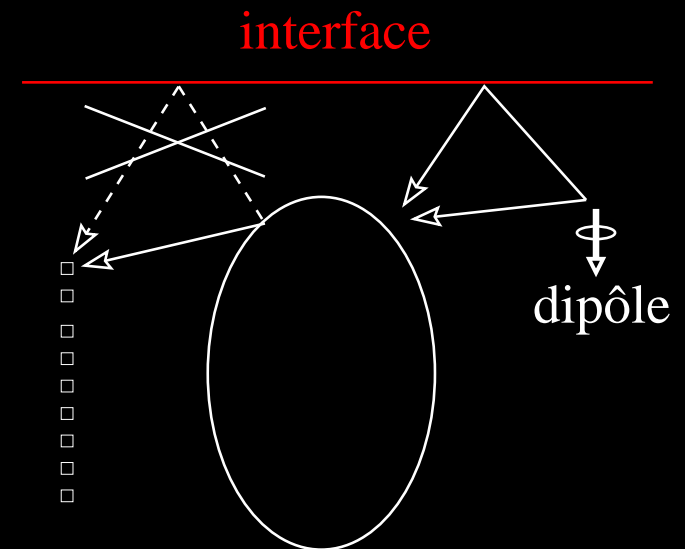
➡ Prise en compte partielle de l'interface

Rappel :  $\mathbf{E}_2(\mathbf{r}) \approx \underline{\Gamma}(\mathbf{r}) \mathbf{E}_2^{inc}(\mathbf{r})$

➤  $\mathbf{E}_2^{inc}(\mathbf{r})$  : espace stratifié

➤  $\underline{\Gamma}(\mathbf{r})$  : espace homogène

⇒ interactions obstacle/interface négligées



# Développement BF (illustration)

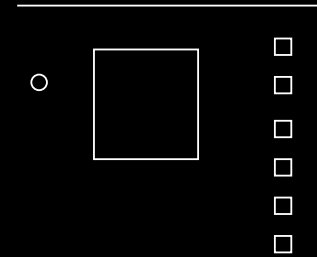
1 fréquence (500 Hz)

Données synthétiques

Encaissant :  $\sigma_2 = 2 \cdot 10^{-3}$  S/m

Obstacle : ellipsoïde vertical ( $62 \times 62 \times 15.5$  m<sup>3</sup>)

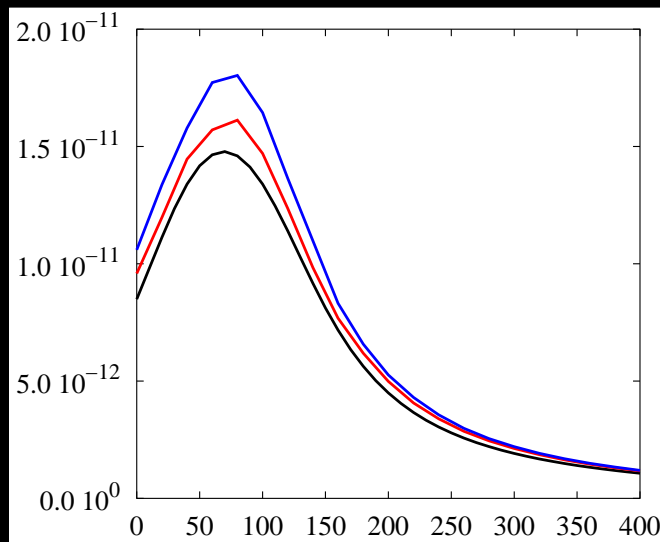
$\sigma_{\mathcal{D}} = 2 \cdot 10^{-2}$  S/m



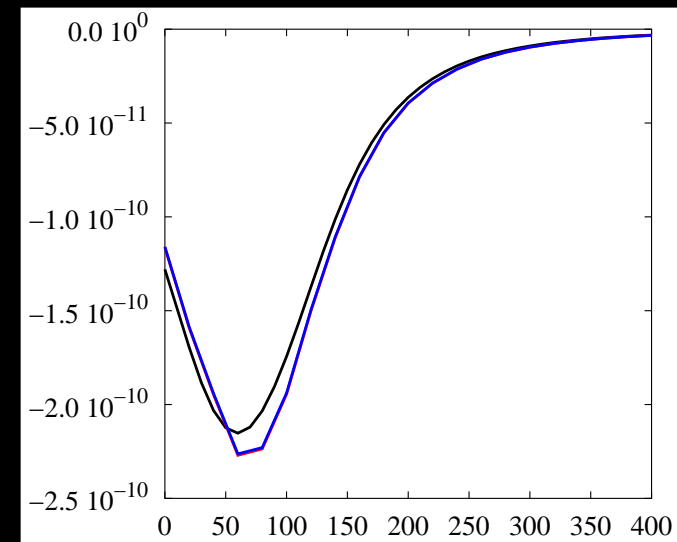
MoM (stratifié)

BF (stratifié)

BF (homogène)



$\Re (H_z)$



$\Im (H_z)$

# Le problème inverse

# Les sources distribuées (introduction)

Collaboration : E. Bocly

⇒ Introduit par C. Rozier *et al.* (1997)

## Points importants :

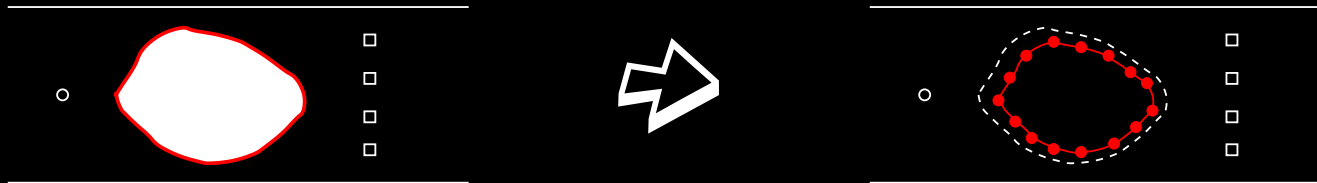
- ☞ Reconstruction d'obstacles impénétrables dans un guide d'ondes
- ☞ Obstacle remplacé par une distribution de sources

## Ce qui a été fait :

- Cas acoustique et électromagnétique
- Extension au cas d'un obstacle avec condition de Neumann
- Extension au cas d'un guide d'ondes à parois pénétrables
- Application à des données réelles (L2S et Institut Fresnel)

# Les sources distribuées (théorie I)

➡ Hypothèse : sources équivalentes



$$\text{Champ diffracté : } u^{dif}(\mathbf{r}) = \sum_{m=1}^M c_m G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_m)$$

$M, c_m, \mathbf{r}_m$  : nombre, amplitudes complexes et positions des sources

➡ Trouver  $c_m$  et  $\mathbf{r}_m$  tel que  $F$  soit minimum

$$F(\Gamma) = \frac{\|u^{dif}(\Gamma) - \zeta\|^2}{\|\zeta\|^2} + \alpha \mathcal{L}_2(\Gamma)$$

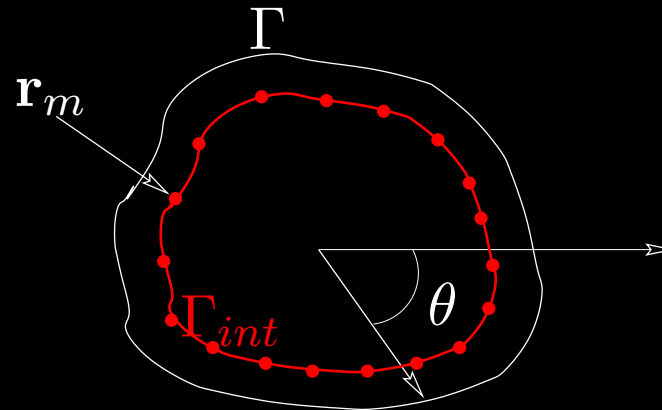
$$\text{avec } \mathcal{L}_2(\Gamma) = \begin{cases} \left[ \int_{\Gamma} u(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \right] \cdot \left[ \int_{\Gamma} u^{inc}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \right]^{-1} & \text{Dirichlet} \\ \left[ \int_{\Gamma} \partial_n u(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \right] \cdot \left[ \int_{\Gamma} \partial_n u^{inc}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \right]^{-1} & \text{Neumann} \end{cases}$$



# Les sources distribuées (théorie II)

➔ Description de  $\Gamma$  : somme trigonométrique

$$f(\theta) = a_0 + \sum_{n=1}^N a_n \cos(n\theta) + \sum_{n=1}^N a_{N+n} \sin(n\theta)$$



➔ Description de  $\Gamma_{int}$

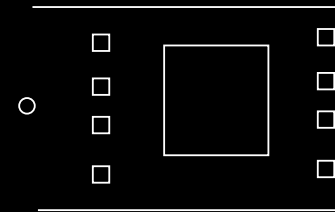
- intérieur et parallèle à  $\Gamma$
- tel que  $|\mathbf{r}_m| = \alpha f(\theta)$ ,  $m = 1, \dots, M$ ,  $\alpha < 1$

# Les sources distribuées (illustration I)

2 fréquences (30, 100 Hz)

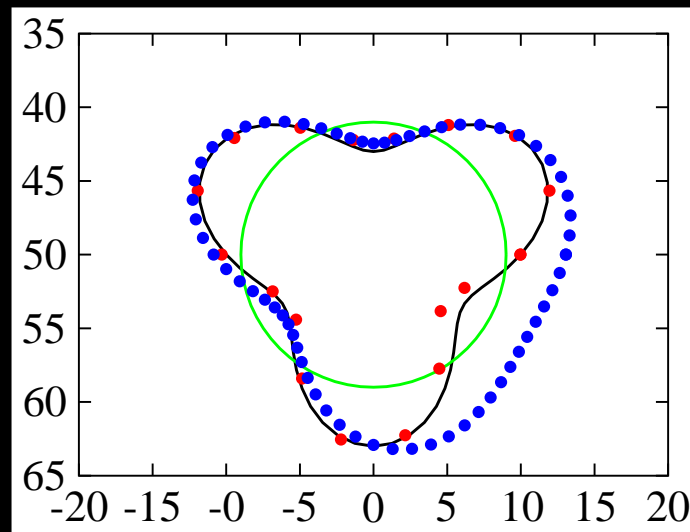
Données synthétiques, Acoustique

	$c$ (m/s)	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	$\alpha$ (dB/kHz/m)
air	350	1	0
eau	1500	1030	0
sable	1650	1800	0.3

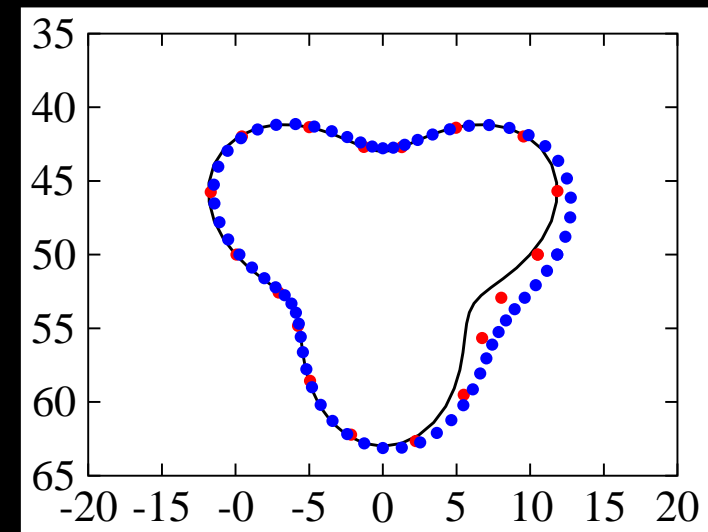


Obstacle : trèfle « mou » (Dirichlet) ou « dur » (Neumann)

30 Hz



100 Hz



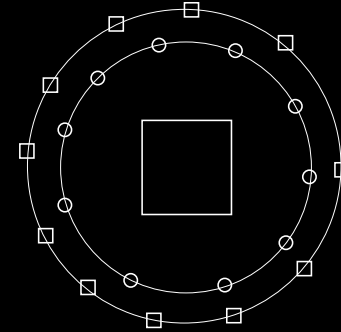
# Les sources distribuées (illustration II)

2 fréquences (4, 8 GHz)

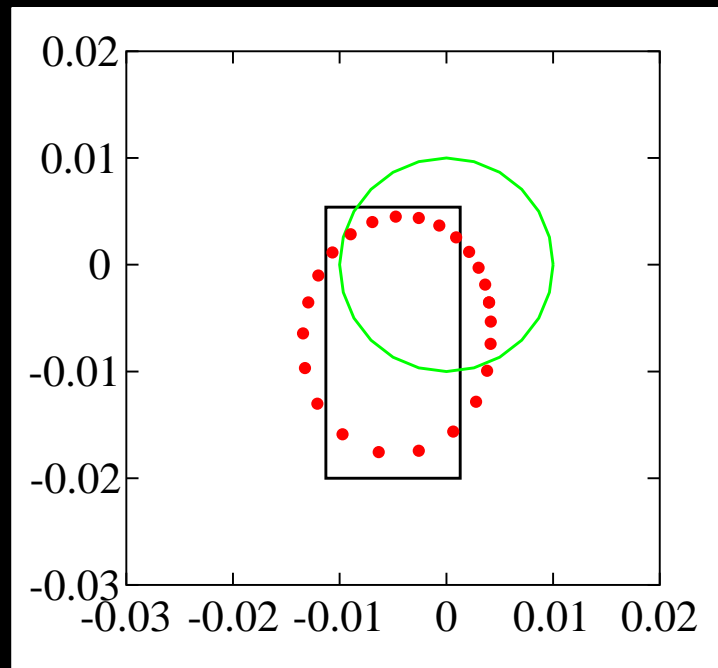
Données réelles, polarisation TM

Encaissant (air) :  $\varepsilon_2 = 1, \sigma_2 = 0$  S/m

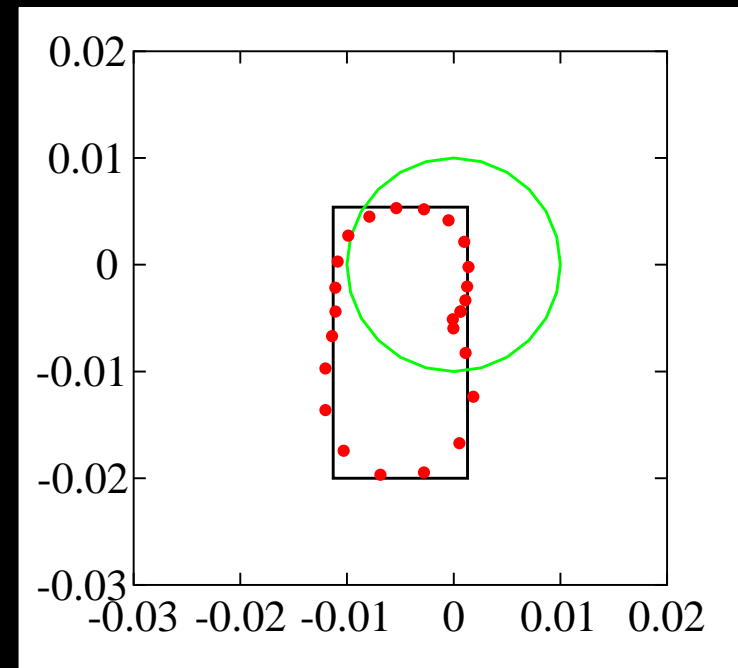
Obstacle métallique supposé parfaitement conducteur



4 GHz



8 GHz



# Les ensembles de niveaux (introduction)

Collaboration : C. Ramananjaona et J.-P. Zolésio

⇒ Introduit par A. Litman *et al.* (1998)

## Points importants :

- ☞ Reconstruction d'obstacles pénétrables binaires de propriétés connues
- ☞ Combinaison d'une méthode d'ensembles de niveaux et de « méthodes de vitesse »

## Ce qui a été fait :

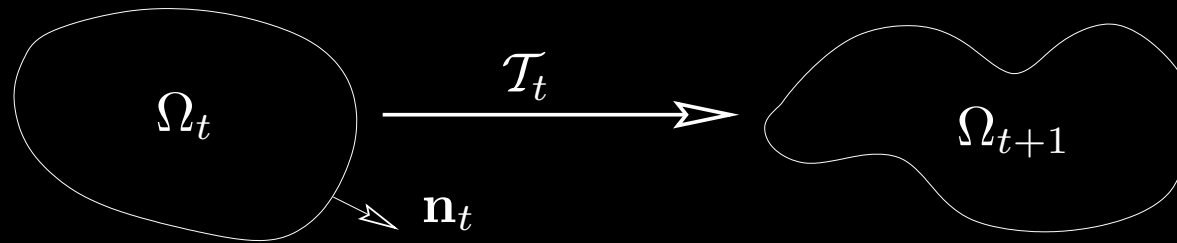
- Réécriture du cadre théorique
- Extension au cas de la polarisation TE
- Incorporation de contraintes de contour et de volume
- Application à des données réelles (Institut Fresnel)

# Les ensembles de niveaux (théorie I)

➡ Trouver  $\Omega^*$  tel que  $F$  soit minimum

$$F(\Omega^*) = \frac{\|u^{dif}(\Omega^*) - \zeta\|^2}{\|\zeta\|^2}, \quad u = E, H$$

➡ Construction d'une suite  $\{\Omega_t\}$  tel que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \Omega_t = \Omega^*$



➡ « méthodes de vitesse » :  $\mathcal{T}_t$  liée à un champ de vitesse  $\mathbf{V}_t(\mathbf{r})$

- direction :  $\mathbf{V}_t(\mathbf{r}) = V_t(\mathbf{r}) \mathbf{n}_t$
- amplitude :  $V_t(\mathbf{r})$  tel que  $\frac{d}{dt} F(\Omega_t) \leq 0$

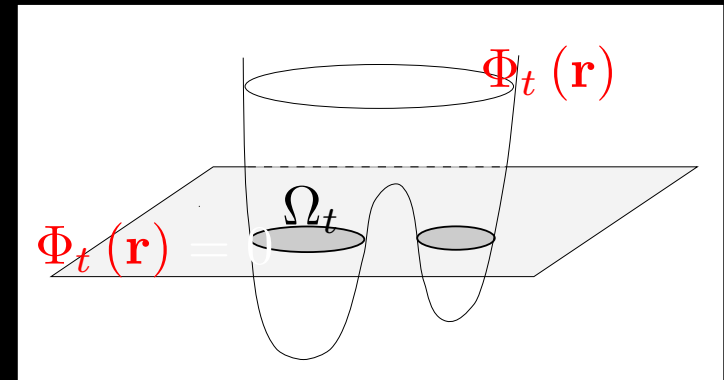
# Les ensembles de niveaux (théorie II)

➔ Les ensembles de niveaux

$$\Omega_t = \{\mathbf{r} / \Phi_t(\mathbf{r}) \leq 0\}$$

Avantages :

- apparition, disparition des obstacles
- grille fixe ( $\Rightarrow$  fonctions de Green précalculé)



➔ Évolution de  $\Phi_t(\mathbf{r})$

Équation de type Hamilton-Jacobi

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi_t(\mathbf{r}) + V_t(\mathbf{r}) \|\nabla \Phi_t(\mathbf{r})\| = 0$$

# Les ensembles de niveaux (théorie III)

## ➡ Formulation Min-Max

⇒ formulation simple de  $\frac{d}{dt} F(\Omega_t)$

$$\text{Polarisation TE : } \frac{d}{dt} F(\Omega_t) = \int_{\Gamma_t} \eta \nabla u(x) \cdot \nabla p(x) V_t(x) dx$$

$u(x)$  solution du problème direct

$p(x)$  solution du problème adjoint

$$V_t(x) = -\eta \nabla u(x) \cdot \nabla p(x)$$

⇓

$$\frac{d}{dt} F(\Omega_t) \leq 0$$

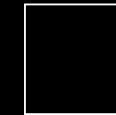
# Les ensembles de niveaux (illustration I)

1 fréquence (200 MHz)

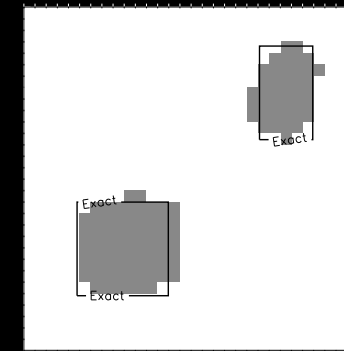
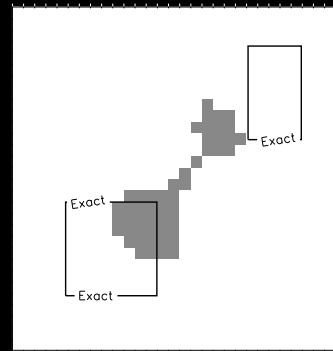
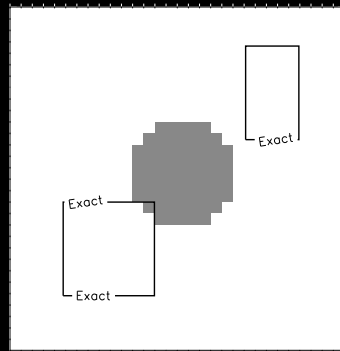
Données synthétiques, polarisation TE

Encaissant :  $\varepsilon_2 = 2, \sigma_2 = 0$  S/m

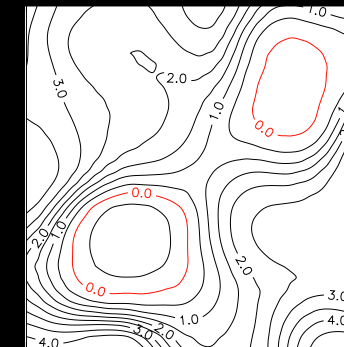
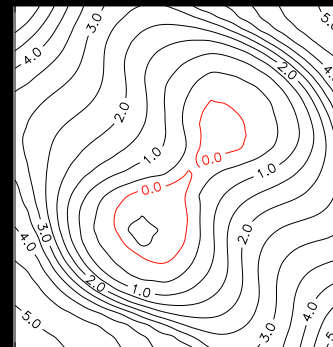
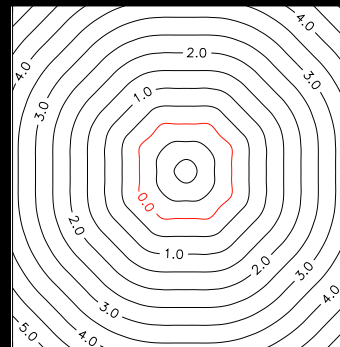
2 obstacles :  $\varepsilon_{\mathcal{D}} = 3, \sigma_{\mathcal{D}} = 0$  S/m



$\Omega_t$



$\Phi_t$





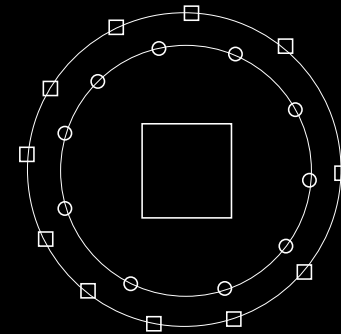
# Les ensembles de niveaux (illustration II)

1 fréquence (6 GHz)

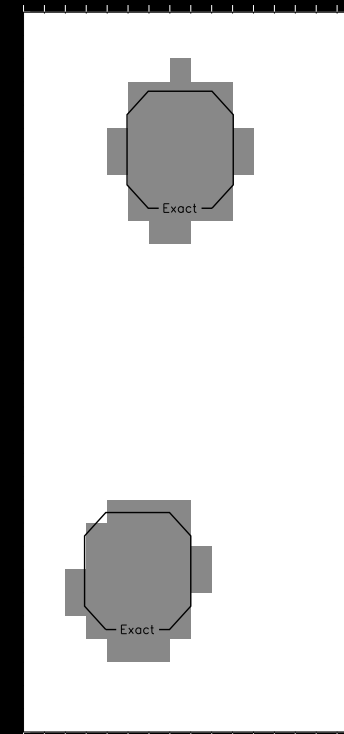
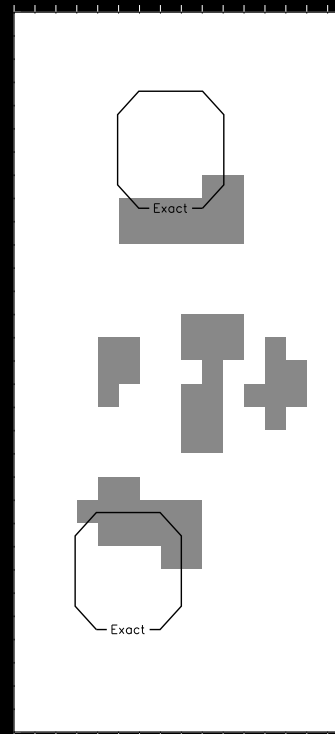
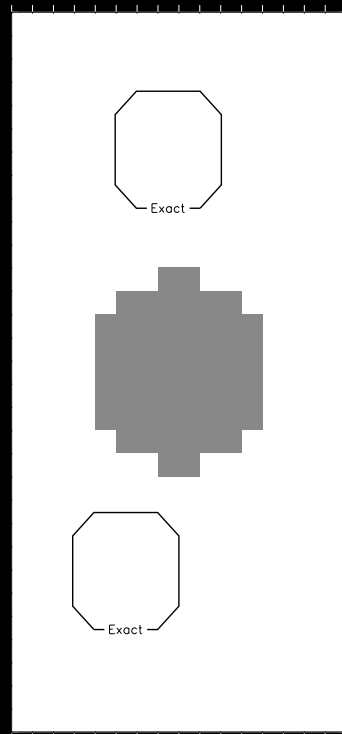
Données réelles, polarisation TM

Encaissant (air) :  $\varepsilon_2 = 1, \sigma_2 = 0$  S/m

2 obstacles :  $\varepsilon_{\mathcal{D}} = 3, \sigma_{\mathcal{D}} = 0$  S/m



$\Omega_t$



# Le gradient modifié (introduction)

Collaboration : B. J. Kooij

⇒ Introduit par R. Kleinman et P. van den Berg (1992)

Points importants :

- ☞ Reconstruction d'obstacles pénétrables
- ☞ Ni linéarisation ni résolution du problème direct

Ce qui a été fait :

- Polarisation TE (formulation en  $E$  et  $H$ )
- Introduction de contraintes (positivité, binarité)
- Données complètes et incomplètes

# Le gradient modifié (théorie)

➡ Trouver  $H_{2,i}$  et  $\chi$  tel que  $F$  soit minimum

$$F(H_{2,i}, \chi) = \frac{\sum_{i=1}^{N_S} \|\rho_i\|^2}{\sum_{i=1}^{N_S} \|\zeta_i\|^2} + \frac{\sum_{i=1}^{N_S} \|r_i\|^2}{\sum_{i=1}^{N_S} \|H_{2,i}^{inc}\|^2}$$

$$\rho_i = \zeta_i - \mathcal{G}_{21}\chi H_{2,i}$$

$$\rho_i = \|\zeta_i\|^2 - \|\mathcal{G}_{21}\chi H_{2,i}\|^2$$

$$r_i = H_{2,i}^{inc} - H_{2,i} + \mathcal{G}_{22}\chi H_{2,i}$$

# Le gradient modifié (théorie)

➡ Trouver  $H_{2,i}$  et  $\chi$  tel que  $F$  soit minimum

$$F(H_{2,i}, \chi) = \frac{\sum_{i=1}^{N_S} \|\rho_i\|^2}{\sum_{i=1}^{N_S} \|\zeta_i\|^2} + \frac{\sum_{i=1}^{N_S} \|r_i\|^2}{\sum_{i=1}^{N_S} \|H_{2,i}^{inc}\|^2} = F(\alpha^{(n)}, \beta^{(n)})$$

$$\rho_i = \zeta_i - \mathcal{G}_{21}\chi H_{2,i}$$

$$\rho_i = \|\zeta_i\|^2 - \|\mathcal{G}_{21}\chi H_{2,i}\|^2$$

$$r_i = H_{2,i}^{inc} - H_{2,i} + \mathcal{G}_{22}\chi H_{2,i}$$

➡ Introduction de 2 suites  $\{H_{2,i}^{(n)}\}$  et  $\{\chi^{(n)}\}$ ,  $n = 1, 2, \dots$

$$\chi^{(n)} = \chi^{(n-1)} + \beta^{(n)} d\chi^{(n)}$$

$$H_{2,i}^{(n)} = H_{2,i}^{(n-1)} + \alpha^{(n)} dH_{2,i}^{(n)}$$

$$\alpha^{(n)}, \beta^{(n)} \in \mathbb{C}$$

$$d\chi^{(n)}, dH_{2,i}^{(n)} = \text{directions}$$

# Le gradient modifié avec contraintes

➔ Contraintes de positivité :  $\varepsilon_r = 1 + \xi^2$  et  $\frac{\sigma}{\omega} = \eta^2$

$$\chi(\xi, \eta) = 1 - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_0 (1 + \xi^2) + j\eta^2}$$

$$\xi^{(n)} = \xi^{(n-1)} + \beta^{(n)} d\xi^{(n)} \quad \beta^{(n)} \in \mathbb{R}$$

$$\eta^{(n)} = \eta^{(n-1)} + \gamma^{(n)} d\eta^{(n)} \quad \gamma^{(n)} \in \mathbb{R}$$

# Le gradient modifié avec contraintes

➡ **Contraintes de positivité** :  $\varepsilon_r = 1 + \xi^2$  et  $\frac{\sigma}{\omega} = \eta^2$

$$\chi(\xi, \eta) = 1 - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_0 (1 + \xi^2) + j\eta^2}$$

$$\xi^{(n)} = \xi^{(n-1)} + \beta^{(n)} d\xi^{(n)} \quad \beta^{(n)} \in \mathbb{R}$$

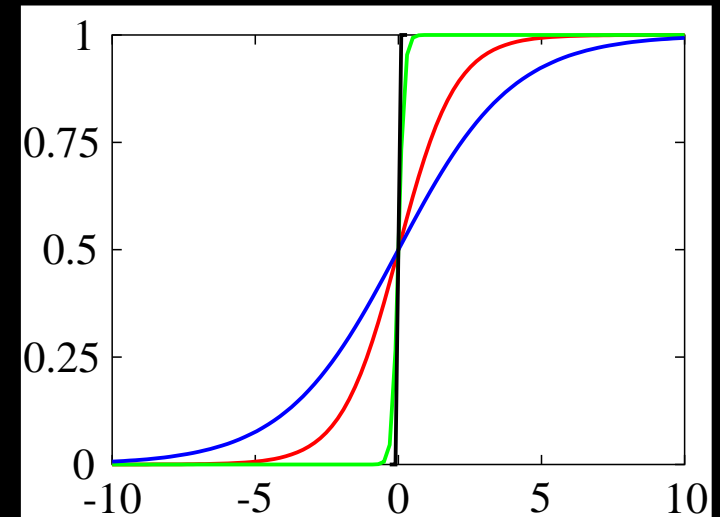
$$\eta^{(n)} = \eta^{(n-1)} + \gamma^{(n)} d\eta^{(n)} \quad \gamma^{(n)} \in \mathbb{R}$$

➡ **Contraintes de binarité** :  $\varepsilon_D^*$  connu, distribution inconnue

$$\chi(\tau) = \left[ 1 - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_D^*} \right] \psi(\tau)$$

$$\psi(\tau) = [1 + \exp(-\tau/\theta)]^{-1}$$

$$\tau^{(n)} = \tau^{(n-1)} + \gamma^{(n)} d\tau^{(n)} \quad \gamma^{(n)} \in \mathbb{R}$$



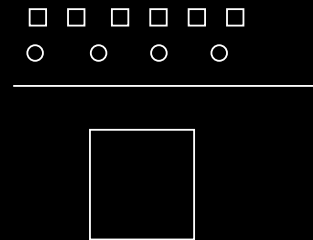
# Le gradient modifié (illustration)

4 fréquences (100, 200, 300, 400 MHz)

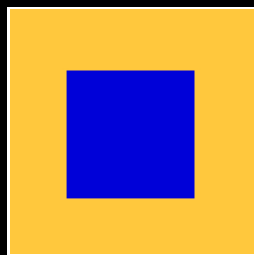
Données synthétiques, polarisation TE

Encaissant :  $\varepsilon_2 = 2, \sigma_2 = 0$  S/m

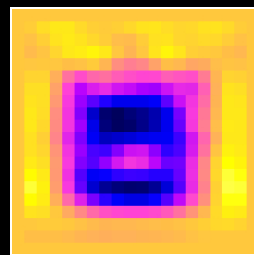
Obstacle :  $\varepsilon_D = 3, \sigma_D = 10^{-2}$  S/m



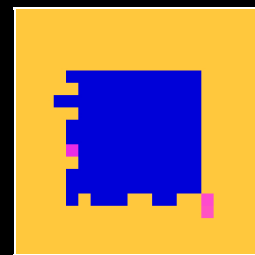
Permittivité



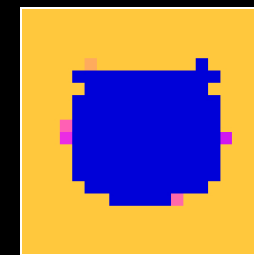
Exact



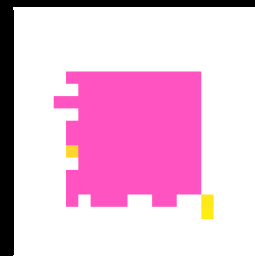
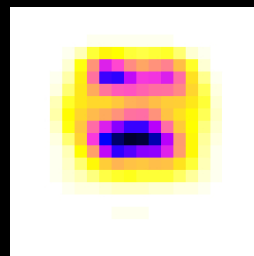
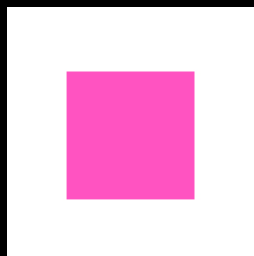
Positivité



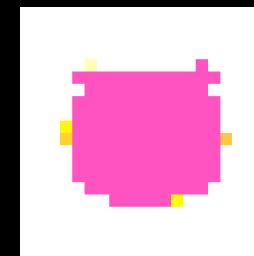
Binarité  
(module, phase)



Binarité  
(module)



Conductivité



# Le contraste de source (introduction)

Collaboration : D. Dos Reis

⇒ Introduit par P. van den Berg et R. Kleinman (1997)

Points importants :

- ☞ Reconstruction d'obstacles pénétrables
- ☞ Ni linéarisation ni résolution du problème direct

Ce qui a été fait :

- Application au cas 3D
- Introduction de contraintes de binarité
- Application au contrôle non destructif par courants de Foucault



# Le contraste de source (théorie)

Minimisation successive de 2 suites

➡ Trouver  $\mathbf{J}_{2,i}$  à  $\chi$  et  $\mathbf{E}_{2,i}$  fixés tel que  $F_1$  soit minimum

$$F_1(\mathbf{J}_{2,i}) = \frac{\sum_{i=1}^{N_S} \|\zeta_i - \mathcal{G}_{21}\chi\mathbf{J}_{2,i}\|^2}{\sum_{i=1}^{N_S} \|\zeta\|^2} + \frac{\sum_{i=1}^{N_S} \|\sigma_2\chi\mathbf{E}_{2,i} - \mathbf{J}_{2,i}\|^2}{\sum_{i=1}^{N_S} \|\sigma_2\chi\mathbf{E}_{2,i}^{inc}\|^2}$$

➡ Trouver  $\chi$  à  $\mathbf{J}_{2,i}$  et  $\mathbf{E}_{2,i}$  fixés tel que  $F_2$  soit minimum

$$F_2(\chi) = \frac{\sum_{i=1}^{N_S} \|\sigma_2\chi\mathbf{E}_{2,i} - \mathbf{J}_{2,i}\|^2}{\sum_{i=1}^{N_S} \|\sigma_2\chi\mathbf{E}_{2,i}^{inc}\|^2}$$

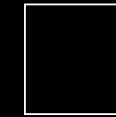
# Le contraste de source (illustration)

1 fréquence (150 kHz)

Données synthétiques

Encaissant :  $\sigma_2 = 1 \text{ MS/m}$ ,  $d = 2 \text{ mm}$

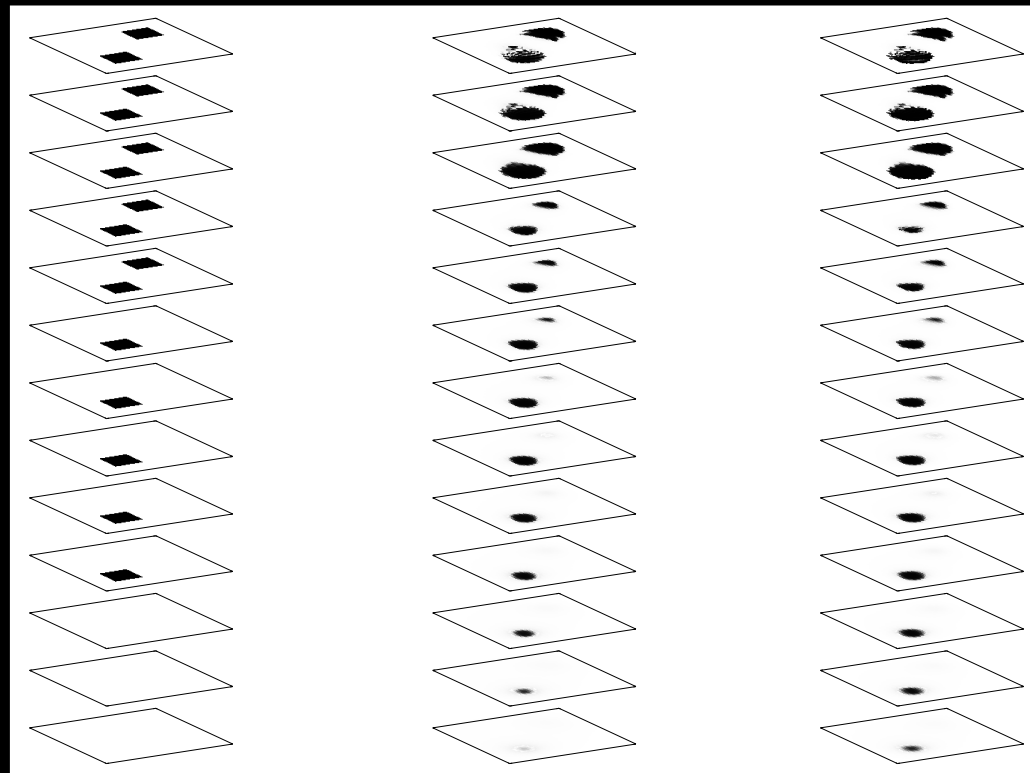
2 Obstacles : vide  $\left( 1.1 \times 1.1 \times \begin{matrix} 1 \\ 0.5 \end{matrix} \right) \text{ mm}^3$



exact

$H^{dif}$

$H_z^{dif}$



## Bilan (1996-2001)

Un travail en collaboration : chercheurs, doctorants, stagiaires

Un certain nombre de publications dont :

- M. Lambert, D. Lesselier et B. J. Kooij *Inverse Problems* **14** 1265-1283 1998
- M. Lambert et D. Lesselier *ACUSTICA - Acustica united with Acta Acustica* **86** 15-24 2000
- G. Perrusson, D. Lesselier, M. Lambert, B. Bourgeois, A. Charalambopoulos, G. Dassios *IEEE Trans. Geosci. Remote Sensing* **38** 1585-1599 2000
- C. Ramananjaona, M. Lambert, D. Lesselier et J.-P Zolésio *Inverse Problems* **17** 1087-1111 2001
- D. Dos Reis, M. Lambert et D. Lesselier *Inverse Problems* à rédiger et à livrer pour avril 2002

# Perspectives

- Passage du 2D au 3D
- Initialisation des algorithmes
- Complexification des sources
- Complexification des configurations
- Complexification des matériaux
- Complexification des objets à reconstruire
- Complexification des données

# Plan

- Curriculum vitæ
- Le cadre général
- Le problème direct
  - Le cas 2D en polarisation TE
  - Le cas 3D vectoriel
- Le problème inverse
  - Les sources distribuées
  - Les ensembles de niveaux
  - Le gradient modifié
  - Le contraste de source
- Conclusions et perspectives