



**HAL**  
open science

# Autour des surpartitions et des identités de type Rogers-Ramanujan

Olivier Mallet

► **To cite this version:**

Olivier Mallet. Autour des surpartitions et des identités de type Rogers-Ramanujan. Autre [cs.OH].  
Université Paris-Diderot - Paris VII, 2008. Français. NNT : . tel-00366067

**HAL Id: tel-00366067**

**<https://theses.hal.science/tel-00366067>**

Submitted on 5 Mar 2009

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

École doctorale de sciences mathématiques de Paris Centre

# Thèse

présentée pour l'obtention du titre de

**Docteur de l'Université Paris Diderot - Paris 7**

Spécialité : Informatique

par **Olivier Mallet**

## **Autour des surpartitions et des identités de type Rogers-Ramanujan**

Soutenue publiquement le 28/11/2008 devant le jury composé de

*Directeur de thèse :* Jeremy LOVEJOY

*Rapporteurs :* Mireille BOUSQUET-MÉLOU  
Christian KRATTENTHALER

*Examineurs :* Jean-Paul ALLOUCHE  
Gilles SCHAEFFER  
Jiang ZENG







# Remerciements

*Je souhaite tout d'abord remercier mon directeur de thèse, Jeremy Lovejoy. Son écoute attentive et ses conseils judicieux m'ont été très utiles pendant toute la durée de ma thèse et particulièrement pendant la phase de rédaction.*

*Je n'aurais pas pu entreprendre cette thèse sans Sylvie Corteel, qui a encadré mon stage de master ; c'est pendant ce stage que j'ai obtenu mes premiers résultats de recherche, qui ont fourni le gros de l'article [49]. Je la remercie chaleureusement.*

*Merci à Mireille Bousquet-Mélou — dont les remarques ont permis d'améliorer sensiblement ce manuscrit — et à Christian Krattenthaler d'avoir accepté d'être rapporteurs pour cette thèse. Merci également à Jean-Paul Allouche, Gilles Schaeffer et Jiang Zeng pour leur participation au jury.*

*Merci à Philippe Flajolet qui a éveillé mon goût pour la combinatoire, notamment par son superbe cours introductif dans le module d'analyse d'algorithmes. Merci également aux autres enseignants des cours de combinatoire et d'analyse d'algorithmes.*

*Merci à Irène Charon et Olivier Hudry, de Télécom Paris, qui ont encouragé ma vocation pour l'enseignement et la recherche et ont appuyé ma candidature au master d'informatique de Paris 6.*

*Merci à tous les collègues du LIAFA et de PPS que j'ai eu l'occasion de côtoyer pendant mes trois années de thèse, et notamment à ceux qui se sont succédé dans le bureau A39. Mention spéciale à Claire pour ses conseils bien utiles, à Mathilde pour ses discussions et ses bons gâteaux et à Christophe pour ses efforts constants d'animation du bureau.*

*Merci aux initiateurs, organisateurs et collaborateurs de cette merveilleuse tradition qu'est le gâteau du vendredi du LIAFA (auxquels les membres de PPS se sont associés depuis peu ; qu'ils en soient remerciés aussi).*

*Merci à Noëlle Delgado, à Laifa Ahmadi et Houy Kuoy, ainsi qu'à Michèle Wasse pour leur aide précieuse.*

*Parce qu'ils ont facilité mon travail de recherche, merci au personnel de la bibliothèque Mathématiques-Recherche de Jussieu, à ceux qui font tourner MathSciNet, Zentralblatt*

*MATH et arXiv, à Neil Sloane pour son On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, à Eric W. Weisstein pour MathWorld, et bien entendu à Donald Knuth et Leslie Lamport pour L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X.*

*Merci à toute ma famille pour m'avoir soutenu et encouragé même s'ils ne savaient pas forcément bien ce que je pouvais faire en thèse.*

*Merci à mes amis et à mes différents colocataires qui m'ont aidé à me sentir moins seul pendant les moments difficiles que j'ai parfois pu vivre au long de ces années.*

*Enfin, je remercie infiniment Ana, qui aurait pu n'être qu'une simple colocataire, mais qui a été beaucoup plus que cela, et dont l'affection sans bornes a joué un rôle dans l'achèvement de cette thèse. ¡Gracias por todo, mi amor!*







*La totalité est plus que la somme des parties.*

*Aristote, La Métaphysique*







# Table des matières

<b>Introduction générale</b>	<b>15</b>
Partitions et identités d'Andrews-Gordon . . . . .	16
Surpartitions . . . . .	24
<b>I Outils</b>	<b>29</b>
I.1 Coefficients $q$ -binomiaux . . . . .	31
I.2 L'identité du produit triple de Jacobi . . . . .	33
I.3 Paires de Bailey . . . . .	33
<b>II Paires de surpartitions et séries hypergéométriques basiques</b>	<b>37</b>
II.1 Introduction . . . . .	37
II.2 Les $R_{k,i}(a, b; x; q)$ . . . . .	41
II.3 Les $\tilde{R}_{k,i}(a, b; x; q)$ . . . . .	44
II.4 Corollaires . . . . .	51
II.5 Chemins . . . . .	56
II.6 Rangs successifs . . . . .	65
II.7 Dissection de Durfee et $(k, i)$ -conjugaison pour les paires de surpartitions .	72
<b>III Preuves combinatoires</b>	<b>79</b>
III.1 Chemins et séries multiples . . . . .	79
III.2 Étude combinatoire des multiplicités dans le cas des surpartitions . . . . .	89
<b>IV Surpartitions <math>n</math>-colorées</b>	<b>97</b>
IV.1 Introduction . . . . .	97
IV.2 Chemins . . . . .	105

IV.3 Surpartitions $(n + t)$ -colorées . . . . .	111
IV.4 Symboles de Frobenius . . . . .	113
IV.5 Produits infinis . . . . .	118
<b>Conclusion générale</b>	<b>121</b>
Résultats . . . . .	121
Perspectives . . . . .	122
<b>Table des figures</b>	<b>128</b>
<b>Index</b>	<b>129</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>131</b>

# Introduction générale

Dans cette introduction, après quelques remarques préliminaires sur la combinatoire basées sur [91], [95] et [60], on présente quelques définitions et résultats sur les partitions d'entiers et sur les surpartitions (qui en sont une généralisation), en insistant particulièrement sur les identités de type Rogers-Ramanujan faisant intervenir ces objets.

Cette thèse s'inscrit dans le domaine de la *combinatoire*, où l'on étudie des objets formés par un arrangement discret de « briques » élémentaires. Plus précisément, elle fait partie de la *combinatoire énumérative*, qui cherche à compter le nombre de tels objets vérifiant certaines propriétés. Soit  $\mathcal{C}$  une *classe combinatoire*, c'est-à-dire un ensemble sur lequel on peut définir une taille (application de  $\mathcal{C}$  dans  $\mathbb{N}$ ) telle que pour tout  $n$ , le nombre d'éléments de taille  $n$  est fini. Notons  $c_n$  ce nombre ; on appellera souvent, dans la suite, « objets comptés par  $c_n$  » les éléments de  $\mathcal{C}$  de taille  $n$ . On souhaite obtenir une représentation de  $c_n$ . La représentation la plus simple possible est une expression explicite, comme dans le cas des permutations où  $c_n = n!$ . Mais il n'est pas toujours possible d'obtenir une telle expression et quand c'est possible, elle est parfois très compliquée et pas très utile pour étudier les propriétés de la séquence  $(c_n)$ . C'est pourquoi on a souvent recours à une représentation analytique : la série génératrice (selon la taille) de  $\mathcal{C}$ , définie comme la série entière  $\sum_{\lambda \in \mathcal{C}} q^{|\lambda|} = \sum_{n \geq 0} c_n q^n$ , où  $|\lambda|$  est la taille de  $\lambda$ . On peut définir de même une série génératrice à plusieurs paramètres, par exemple  $\sum_{\lambda \in \mathcal{C}} x^{f(\lambda)} y^{g(\lambda)} z^{h(\lambda)} = \sum_{l \geq 0} \sum_{m \geq 0} \sum_{n \geq 0} c(l, m, n) x^l y^m z^n$ , où  $c(l, m, n)$  est le nombre d'éléments  $\lambda$  de  $\mathcal{C}$  tels que  $f(\lambda) = l$ ,  $g(\lambda) = m$  et  $h(\lambda) = n$ . Les séries génératrices permettent d'étudier de nombreuses propriétés de leurs coefficients : propriétés statistiques, comportement asymptotique, relations de récurrence, congruences... et de démontrer des identités combinatoires. Dans cette thèse, les objets qu'on va étudier par des méthodes bijectives et analytiques sont des généralisations d'une classe d'objets com-



binatoires très classiques : les partitions d'entiers.

## Partitions et identités d'Andrews-Gordon

Cette section présente quelques notions de base sur les partitions ainsi que l'histoire des identités de Rogers-Ramanujan et d'Andrews-Gordon. Pour plus de détails, on pourra se reporter à [9] et [17] ainsi qu'aux références citées dans la suite.

Une *partition* d'un entier positif  $n$  est une façon d'écrire  $n$  comme une somme d'entiers strictement positifs où l'ordre des termes ne compte pas (pour  $n = 0$ , on considère qu'il y a une partition de 0 : la partition vide). L'entier  $n$  est appelé *taille* de la partition. On note  $\lambda$  la taille d'une partition  $\lambda$ . Par convention, on range les termes de la somme (appelés *parts* de la partition) dans l'ordre décroissant, et on peut ainsi définir une partition de  $n$  comme une suite finie décroissante (au sens large) d'entiers strictement positifs dont la somme vaut  $n$ . Par exemple, les partitions de 4 sont (4), (3, 1), (2, 2), (2, 1, 1) et (1, 1, 1, 1).

Selon [50, chapitre 3], c'est dans une lettre de Leibniz à Jean Bernoulli datée de 1669 qu'on trouve la première trace d'un intérêt pour les partitions (appelées « divulsions » par Leibniz); toutefois, c'est Euler [52] qui a obtenu les premiers résultats dans ce domaine. Notons  $p(n)$  le nombre de partitions de  $n$ ; la série génératrice des partitions est définie par

$$P(q) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n)q^n.$$

Euler [53] a montré que, pour  $|q| < 1$ ,

$$P(q) = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1 - q^i}.$$

Euler a également démontré le résultat suivant :

**Théorème d'Euler.** *Pour tout entier positif  $n$ , le nombre de partitions de  $n$  en parts distinctes est égal au nombre de partitions de  $n$  en parts impaires.*

On remarque que les deux classes de partitions intervenant dans ce résultat sont, d'une part, des partitions vérifiant des conditions sur la différence entre deux parts (dire que les parts sont distinctes revient à dire qu'elles diffèrent d'au moins 1) et, d'autre part, des partitions dont les parts appartiennent à certaines classes de congruence (dire que les

parts sont impaires revient à dire qu'elles sont congrues à 1 modulo 2). C'est également le cas pour deux identités qui comptent parmi les résultats les plus célèbres de la théorie des partitions : les *identités de Rogers-Ramanujan*.

**Première identité de Rogers-Ramanujan.** *Le nombre de partitions de  $n$  en parts différent d'au moins 2 est égal au nombre de partitions de  $n$  en parts congrues à 1 ou 4 modulo 5.*

**Seconde identité de Rogers-Ramanujan.** *Le nombre de partitions de  $n$  en parts différent d'au moins 2 et supérieures ou égales à 2 est égal au nombre de partitions de  $n$  en parts congrues à 2 ou 3 modulo 5.*

Ces identités ont d'abord été énoncées sous forme analytique par Rogers [82] : pour  $|q| < 1$ , on a

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)} = \prod_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1-q^{5n+1})(1-q^{5n+4})} \quad (*)$$

et

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{n^2+n}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)} = \prod_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1-q^{5n+2})(1-q^{5n+3})}. \quad (**)$$

Elles ont été redécouvertes en 1913 par Ramanujan. Les travaux de Rogers étaient alors tombés dans l'oubli et Ramanujan n'a pu démontrer lui-même les identités. Après avoir fait appel à Hardy et à d'autres mathématiciens qui n'ont pas réussi non plus à trouver une démonstration, Ramanujan a fini par découvrir en 1917 l'article de Rogers contenant les démonstrations de (\*) et (\*\*). Entre temps, MacMahon [77] avait interprété ces résultats combinatoirement en énonçant les deux identités de partitions ci-dessus. La correspondance entre Rogers et Ramanujan a permis ensuite la découverte de nouvelles preuves plus simples [83, 84]. À la même époque, Schur a redécouvert et démontré indépendamment ces identités [86]. De nombreuses autres preuves ont été publiées depuis, analytiques comme celles de Rogers et Ramanujan, combinatoires comme celles de Schur ou de Garsia et Milne [55] ou basées sur les algèbres de Lie comme celle de Lepowsky et Wilson [69, 70]. Les identités de Rogers-Ramanujan restent parmi les plus profondes du point de vue combinatoire, la seule preuve bijective connue (celle de Garsia et Milne) étant très compliquée.

Par la suite, on a cherché à généraliser les identités de Rogers-Ramanujan. Une idée naturelle était de chercher à démontrer que le nombre de partitions en parts différent d'au moins  $d$  et supérieures ou égales à  $m$  (le cas  $d = m = 1$  correspondant au théorème d'Euler et le cas  $d = 2$  aux identités de Rogers-Ramanujan) était égal au nombre de partitions dont les parts appartiennent à un certain ensemble. Mais Lehmer [68] et Alder [7] ont montré qu'un tel résultat ne peut exister. Puis, en 1954, Alder [8] a présenté une généralisation analytique des identités de Rogers-Ramanujan basée sur une fonction et une relation de récurrence introduites par Selberg [88] mais n'a pas pu interpréter combinatoirement cette généralisation (plus tard, Andrews [21] a obtenu une interprétation combinatoire des résultats d'Alder). Enfin, en 1961, Gordon [59] a obtenu la première généralisation combinatoire de ces identités :

**Théorème de Gordon.** *Pour tous entiers  $k$  et  $i$  tels que  $k \geq 2$  et  $1 \leq i \leq k$ , soit  $A_{k,i}(n)$  le nombre de partitions de  $n$  en parts non congrues à  $0, \pm i$  modulo  $2k + 1$ . Soit  $B_{k,i}(n)$  le nombre de partitions de  $n$  de la forme  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s)$  où  $\lambda_j - \lambda_{j+k-1} \geq 2$  et au plus  $i - 1$  parts sont égales à 1. Alors pour tout entier positif  $n$ ,  $A_{k,i}(n) = B_{k,i}(n)$ .*

La première identité de Rogers-Ramanujan correspond au cas  $k = i = 2$  de ce théorème et la seconde au cas  $k = 2, i = 1$ . Le théorème d'Euler n'est par contre pas inclus dans le théorème de Gordon.

En se basant sur les travaux de Selberg [88], Andrews [11] a démontré analytiquement le théorème de Gordon. Les fonctions utilisées par Andrews sont les suivantes :

$$J_{k,i}(x; q) = H_{k,i}(xq; q)$$

et

$$H_{k,i}(x; q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{kn} q^{kn^2 + n - in + \binom{n}{2}} (1 - x^i q^{2ni})}{(q)_n (xq^n)_{\infty}}$$

avec les notations classiques ci-dessous [57] :

$$(a; q)_n = (a)_n = \prod_{i=0}^{n-1} (1 - aq^i)$$

et

$$(a_1, a_2, \dots, a_k; q)_n = (a_1, a_2, \dots, a_k)_n = (a_1; q)_n (a_2; q)_n \dots (a_k; q)_n.$$

La démonstration du théorème de Gordon présentée dans [11] est basée sur le fait que ces fonctions vérifient certaines équations aux  $q$ -différences et que  $J_{k,i}(1; q)$  peut s'écrire

comme un produit infini en utilisant l'identité du produit triple de Jacobi (voir section I.2).

Ces fonctions ont été généralisées dans [15] :

$$H_{\lambda,k,i}(a_1, \dots, a_\lambda; x; q) = \frac{(xqa_1^{-1}, \dots, xqa_\lambda^{-1})_\infty}{(xq)_\infty} \\ \times \sum_{n=0}^{\infty} \left( (-1)^{n(\lambda+1)} x^{kn} q^{\frac{1}{2}(2k-\lambda+1)n^2 + \frac{1}{2}(\lambda+1-2i)n} (a_1 \dots a_\lambda)^{-n} \right. \\ \left. \times \frac{(1-x^i q^{2ni})(x)_n (a_1, \dots, a_\lambda)_n}{(1-x)(q)_n (xqa_1^{-1}, \dots, xqa_\lambda^{-1})_n} \right)$$

et

$$J_{\lambda,k,i}(a_1, \dots, a_\lambda; x; q) = \sum_{j=0}^{\lambda} (-1)^j \sigma_j(a_1^{-1}, \dots, a_\lambda^{-1}) x^j q^j H_{\lambda,k,i-j}(a_1, \dots, a_\lambda; xq; q)$$

où  $\sigma_j$  est la  $j^{\text{e}}$  fonction symétrique élémentaire :

$$\sigma_j(X_1, \dots, X_\lambda) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_j \leq \lambda} X_{i_1} X_{i_2} \dots X_{i_j}.$$

Remarquons que ces fonctions sont de plus en plus générales quand  $\lambda$  augmente, car  $H_{\lambda,k,i}(a_1, \dots, a_\lambda; x; q) \xrightarrow{a_\lambda \rightarrow \infty} H_{\lambda-1,k,i}(a_1, \dots, a_{\lambda-1}; x; q)$  (de même pour  $J_{\lambda,k,i}$ ). Les fonctions  $J_{k,i}$  et  $H_{k,i}$  de [11] correspondent au cas  $\lambda = 0$ . De nombreux auteurs ont étudié des spécialisations des  $J_{\lambda,k,i}$  (voir la table de la page suivante), mais aucun n'a fait une étude combinatoire générale (sans spécialiser les variables  $a_1, \dots, a_\lambda$ ). De plus, le cas où  $\lambda > 1$  a été très peu étudié. Au chapitre II, on présentera une étude combinatoire générale du cas  $\lambda = 2$  (les fonctions qu'on étudiera sont obtenues en multipliant les  $J_{2,k,i}$  par un produit infini).

Dans [20], Andrews a établi une généralisation analytique des identités de Rogers-Ramanujan correspondant au théorème de Gordon :

$$\sum_{n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_{k-1} \geq 0} \frac{q^{n_1^2 + \dots + n_{k-1}^2 + n_i + \dots + n_{k-1}}}{(q)_{n_1 - n_2} \dots (q)_{n_{k-2} - n_{k-1}} (q)_{n_{k-1}}} = \prod_{n \neq 0, \pm i \pmod{2k+1}} \frac{1}{1 - q^n}.$$

Par la suite, d'autres familles de partitions ont été mises en correspondance avec celles intervenant dans le théorème de Gordon. Les correspondances entre toutes ces familles sont connues sous le nom d'*identités d'Andrews-Gordon*.

Le *rang* d'une partition a été défini par Dyson [51] comme la plus grande part moins le nombre de parts. Cette notion lui a permis d'interpréter les congruences suivantes dues

Auteurs	$J_{\lambda,k,i}(a_1, \dots, a_\lambda; x; q)$
Andrews [11]	$J_{0,k,i}(x; q)$
Andrews [13]	$J_{0,k,i}(x^\lambda; q^\lambda)$
Andrews [14]	$(-xq)_\infty J_{0,k,i+\frac{1}{2}}(x^2; q^2)$
Andrews [12]	$J_{1,k,i}(-q; x; q^2)$
Andrews [16]	$J_{\lambda,k,i}(-q, -q^2, \dots, -q^\lambda; x; q^{\lambda+1})$
Andrews et Santos [28]	$\frac{1}{(xq; q^2)_\infty} J_{1,k,i}(q; x; q^2)$
Bressoud [36]	$(-xq)_\infty J_{0, \frac{k-1}{2}, \frac{i}{2}}(x^2; q^2)$
Connor [43]	$\frac{1}{(xq; q^2)_\infty} J_{0,k,i}(x; -q)$
Corteel et Mallet [49]	$J_{1,k,i}(-1/a; x; q)$
Lovejoy [71]	$J_{1,k,k}(-1; x; q)$ $J_{1,k,1}(-q; x; q)$
Lovejoy [72]	$\frac{1}{(xq; q^2)_\infty} J_{2,k,i}(-1, q; x; q^2)$ $\frac{1}{(xq; q^2)_\infty} J_{2,k,i}(-1, -q; x; q^2)$
Lovejoy [74]	$\frac{(-xq)_\infty}{(xq)_\infty} J_{1, \frac{k-1}{2}, \frac{i}{2}}(-1; x^2; q^2)$

à Ramanujan [81] :

$$p(5n + 4) \equiv 0 \pmod{5}$$

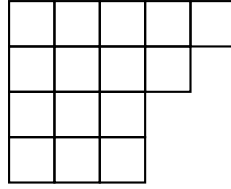
et

$$p(7n + 5) \equiv 0 \pmod{7}.$$

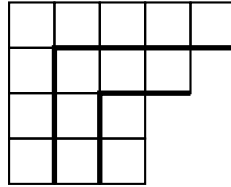
Dyson a conjecturé que les partitions de  $5n + 4$  (resp.  $7n + 5$ ) peuvent être séparées en classes de même taille selon la valeur du rang modulo 5 (resp. modulo 7), ce qui implique les congruences de Ramanujan. Ces résultats ont été démontrés par Atkin et Swinnerton-Dyer [30].

Par la suite, Atkin [29] a défini la notion de *rangs successifs*. Pour pouvoir expliquer cette notion, on va maintenant introduire certaines représentations classiques des partitions. Depuis les travaux de Sylvester [92], il est habituel de représenter une partition par un *diagramme de Ferrers* où une rangée de  $\ell$  cases correspond à une part de taille  $\ell$ . Par

exemple, la première figure de la page suivante correspond à la partition  $\lambda = (5, 4, 3, 3)$ .



On peut décomposer un tel diagramme en *équerres* comme sur la deuxième figure de la page suivante, où on a trois équerres.



On peut alors définir le  $i^{\text{e}}$  rang successif, noté  $r_i$ , comme la largeur de la  $i^{\text{e}}$  équerre moins sa hauteur. On note  $r = (r_1, r_2, \dots)$ . Dans notre exemple, on a  $r = (1, 0, -1)$ .

Une autre représentation classique est le *symbole de Frobenius* [54]. Considérons une partition de  $n$  dont le diagramme de Ferrers a  $N$  équerres. Son symbole de Frobenius est alors le tableau à deux lignes

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_N \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_N \end{pmatrix}$$

où, pour tout  $i$  compris entre 1 et  $N$ ,  $a_i$  est la largeur de la  $i^{\text{e}}$  équerre moins 1 et  $b_i$  est la hauteur de la  $i^{\text{e}}$  équerre moins 1. Par construction, les deux lignes sont des partitions en parts distinctes positives ou nulles et  $n = \sum_{i=1}^N (a_i + b_i + 1)$ . Comme la largeur de la  $i^{\text{e}}$  équerre est alors  $a_i + 1$  et que sa hauteur est  $b_i + 1$ , les rangs sont obtenus à partir du symbole de Frobenius par une simple soustraction :  $r_i = a_i - b_i$  pour  $1 \leq i \leq N$ . Dans

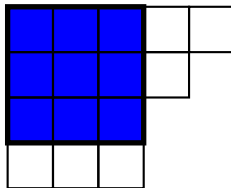
l'exemple précédent,  $N = 3$  et on obtient le symbole de Frobenius  $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$  qui nous

permet de retrouver  $r = (1, 0, -1)$ .

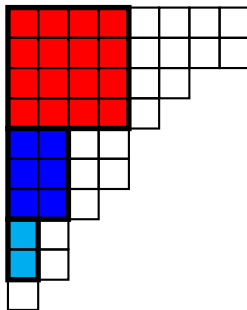
Andrews [18] a montré que si l'on note  $C_{k,i}(n)$  le nombre de partitions de  $n$  dont les rangs successifs sont compris entre  $-i + 2$  et  $2k - i - 1$ , alors  $A_{k,i}(n) = B_{k,i}(n) = C_{k,i}(n)$ .

Une autre partie des identités d'Andrews-Gordon fait appel à une certaine décomposition du diagramme de Ferrers d'une partition. Le *carré de Durfee* d'une partition  $\lambda$  [92]

est le plus grand carré entièrement contenu dans le diagramme de Ferrers de  $\lambda$ . Cette définition implique que le coin supérieur gauche du carré coïncide avec celui du diagramme, et que le côté du carré de Durfee est égal au nombre d'équerres et donc au nombre de colonnes du symbole de Frobenius. Sur la figure suivante, on a mis en évidence le carré de Durfee de la partition  $(5, 4, 3, 3)$ , qui est de côté 3.



Une généralisation a été établie par Andrews [22]. La partie du diagramme de Ferrers située sous le carré de Durfee est elle-même le diagramme de Ferrers d'une partition : cette partition possède un carré de Durfee et ainsi de suite. On peut donc définir une suite de carrés de Durfee successifs pour une partition. La dissection de Durfee introduite par Andrews est basée sur cette idée. La  $(k, i)$ -dissection de Durfee d'une partition est définie comme suit : on détermine d'abord les  $i - 1$  premiers carrés de Durfee successifs puis  $k - i$  rectangles maximaux dont la hauteur est égale à la largeur plus 1, situés les uns en dessous des autres. La figure suivante illustre la  $(4, 2)$ -dissection de la partition  $(8, 8, 6, 5, 4, 4, 3, 2, 2, 1)$ .



On dit qu'une partition est  $(k, i)$ -admissible s'il n'y a aucune part sous le dernier rectangle de sa  $(k, i)$ -dissection de Durfee et si la dernière ligne de chacun des rectangles de cette dissection est une part de la partition (c'est-à-dire s'il n'y a pas de cases appartenant au diagramme et situées à droite du rectangle dans la même ligne). Pour  $i = k$ , dire qu'une partition est  $(k, k)$ -admissible revient à dire qu'elle a au plus  $k - 1$  carrés de Durfee successifs, car il y a au plus  $k - 1$  carrés suivis de 0 rectangle et aucune part en-dessous. Par exemple, la partition de la figure précédente n'est pas  $(4, 2)$ -admissible : aucune des

deux conditions n'est respectée.

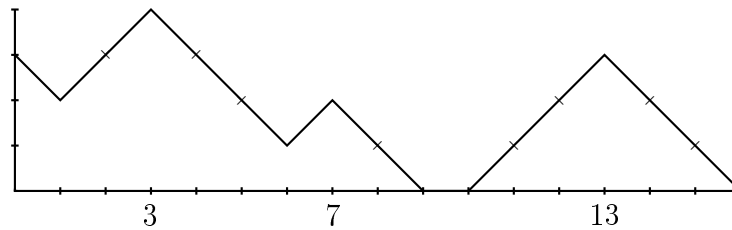
Andrews [22] a montré que le membre de gauche de la généralisation analytique des identités de Rogers-Ramanujan démontrée dans [20] est la série génératrice des partitions  $(k, i)$ -admissibles. Autrement dit, si l'on note  $D_{k,i}(n)$  le nombre de partitions de  $n$  qui sont  $(k, i)$ -admissibles, on a  $A_{k,i}(n) = B_{k,i}(n) = C_{k,i}(n) = D_{k,i}(n)$ .

Une dernière interprétation est basée sur des travaux de Burge [39, 40]. Burge a établi des correspondances entre les ensembles de partitions comptés par  $B_{k,i}(n)$ ,  $C_{k,i}(n)$  et  $D_{k,i}(n)$  par des méthodes récursives. Andrews et Bressoud [27] ont reformulé les résultats de Burge en utilisant des mots binaires, qui peuvent aussi être vus comme des chemins du plan. Enfin, Bressoud [38] a exposé à son tour ces résultats en utilisant des chemins légèrement différents, qu'on va maintenant présenter plus en détail et qu'on appellera dans la suite *chemins de Bressoud-Burge*.

On considère des chemins de longueur finie situés dans le premier quadrant. Ces chemins commencent sur l'axe des ordonnées, se terminent sur l'axe des abscisses et utilisent trois types de pas :

- Nord-Est, de  $(i, j)$  à  $(i + 1, j + 1)$  ;
- Sud-Est, de  $(i, j)$  à  $(i + 1, j - 1)$  ;
- Est, de  $(i, 0)$  à  $(i + 1, 0)$  ; un pas Est ne peut apparaître que sur l'axe des abscisses.

Un *pic* est défini comme un sommet situé sur le chemin, précédé d'un pas Nord-Est et suivi d'un pas Sud-Est. On définit l'*indice majeur* d'un chemin comme la somme des abscisses de ses pics. Par exemple, le chemin de la figure suivante possède trois pics et son indice majeur est  $3 + 7 + 13 = 23$ .



On dit qu'un chemin vérifie les  $(k, i)$ -conditions s'il commence en  $(0, k - i)$  et si aucun de ses sommets n'est de hauteur supérieure à  $k - 1$ . Par exemple, le chemin de la figure précédente vérifie les  $(5, 2)$ -conditions. Bressoud [38] a montré que si l'on note  $E_{k,i}(n)$  le nombre de chemins d'indice majeur  $n$  vérifiant les  $(k, i)$ -conditions, on a  $A_{k,i}(n) = B_{k,i}(n) = C_{k,i}(n) = D_{k,i}(n) = E_{k,i}(n)$ .



D'autres résultats très proches des identités d'Andrews-Gordon vont également nous intéresser dans cette thèse. En 1979, Bressoud [36] a obtenu un résultat très similaire au théorème de Gordon :

**Théorème [36].** *Soit  $\tilde{A}_{k,i}(n)$  le nombre de partitions de  $n$  en parts non congrues à  $0, \pm i$  modulo  $2k$ . Soit  $\tilde{B}_{k,i}(n)$  le nombre de partitions de  $n$  de la forme  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s)$  comptées par  $B_{k,i}(n)$  et telles que s'il existe  $j$  tel que  $\lambda_j - \lambda_{j+k-2} \leq 1$ , alors  $\lambda_j + \dots + \lambda_{j+k-2} \equiv i - 1 \pmod{2}$ . Alors pour tout entier positif  $n$ ,  $\tilde{A}_{k,i}(n) = \tilde{B}_{k,i}(n)$ .*

Bressoud a en fait démontré un résultat plus général qui englobe également le théorème de Gordon et celui d'Euler, mais on présente ici le théorème de Gordon et le résultat précédent de façon séparée car leurs interprétations combinatoires et leurs généralisations sont différentes.

Comme pour le théorème de Gordon, d'autres interprétations combinatoires de ce résultat ont été présentées par la suite. Bressoud [37] a montré que si l'on note  $\tilde{C}_{k,i}(n)$  le nombre de partitions dont les rangs successifs sont compris entre  $-i + 2$  et  $2k - i - 2$ , on a  $\tilde{A}_{k,i}(n) = \tilde{B}_{k,i}(n) = \tilde{C}_{k,i}(n)$ . Il a aussi donné l'interprétation en termes de chemins [38] : si  $\tilde{E}_{k,i}(n)$  est le nombre de chemins comptés par  $E_{k,i}(n)$  tels que tous les pics de hauteur  $k - 1$  ont une abscisse congrue à  $i - 1$  modulo 2, on a  $\tilde{A}_{k,i}(n) = \tilde{B}_{k,i}(n) = \tilde{C}_{k,i}(n) = \tilde{E}_{k,i}(n)$ . L'interprétation utilisant la dissection de Durfee existe aussi dans ce cas, mais elle est plus compliquée. Elle sera abordée au chapitre II.

## Surpartitions

Une *surpartition* d'un entier positif  $n$  est une suite finie décroissante d'entiers strictement positifs dont la somme vaut  $n$  et où on peut surligner la dernière occurrence d'un nombre (ou, dans une autre version de la définition, la première occurrence). La taille d'une surpartition est définie et notée de la même façon que pour une partition. Par exemple, les quatorze surpartitions de 4 sont

$$(4), (\bar{4}), (3, 1), (\bar{3}, 1), (3, \bar{1}), (\bar{3}, \bar{1}), (2, 2), (2, \bar{2}), (2, 1, 1), \\ (\bar{2}, 1, 1), (2, 1, \bar{1}), (\bar{2}, 1, \bar{1}), (1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, \bar{1}).$$

Pour calculer la série génératrice des surpartitions, on peut observer que les parts surlignées forment une partition en parts distinctes et que les parts non surlignées forment

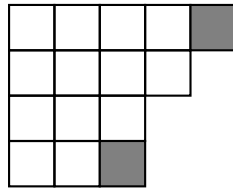
une partition ordinaire. En notant  $\bar{p}(n)$  le nombre de surpartitions de  $n$ , on a la série génératrice

$$\bar{P}(q) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{p}(n)q^n = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1+q^i}{1-q^i} = \frac{1}{\vartheta_4(0, q)}$$

où  $\vartheta_4(z, q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} e^{niz}$  est l'une des fonctions  $\vartheta$  de Jacobi [65] (la notation utilisée est celle de Whittaker et Watson [94]).

Les surpartitions ont été introduites dans [46, 45] pour interpréter et prouver combinatoirement des identités analytiques telles que la somme  ${}_1\psi_1$  de Ramanujan [61, p. 222, équation (12.12.2)] et l'identité de  $q$ -Gauss [63], mais elles étaient en fait déjà apparues sous différentes formes dans plusieurs articles sur les séries hypergéométriques basiques (voir par exemple [66] ainsi que les références données dans [80] où les surpartitions sont appelées « diagrammes de MacMahon standard »).

Comme une partition, une surpartition peut se représenter de différentes façons. Ainsi, le diagramme de Ferrers d'une surpartition est similaire à celui d'une partition, à part que les coins du diagramme peuvent être marqués, ce qui correspond à surligner la dernière occurrence de la part correspondante (un coin est une case du diagramme qui est la plus à droite dans sa ligne et la plus en bas dans sa colonne). La figure suivante représente le diagramme de Ferrers de la surpartition  $(\bar{5}, 4, 3, \bar{3})$ .



Le symbole de Frobenius d'une surpartition [47, 73] est un tableau à deux lignes

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_N \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_N \end{pmatrix}$$

où  $(a_1, \dots, a_N)$  est une partition en parts distinctes positives ou nulles et  $(b_1, \dots, b_N)$  une surpartition en parts positives ou nulles où on peut surligner la première occurrence d'un nombre. Comme pour les partitions, le symbole de Frobenius d'une surpartition de  $n$  vérifie  $\sum_{i=1}^N (a_i + b_i + 1) = n$ . Corteel et Lovejoy [47] ont montré que ces tableaux sont en bijection avec les surpartitions. Ce résultat est plus difficile à prouver que dans le cas des partitions, mais la bijection est assez simple à décrire : étant donné une surpartition  $\lambda$ , soit

$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$  la partition constituée des parts non surlignées de  $\lambda$  et  $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots)$  la partition en parts distinctes constituée des parts surlignées. Tant que  $\alpha$  ou  $\beta$  n'est pas vide, on ajoute une colonne au symbole de Frobenius de la façon suivante. Si  $\alpha_1 > \beta_1$  (ou si  $\beta$  est vide), on ajoute au symbole la colonne  $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ l(\alpha) - 1 \end{pmatrix}$ , où  $l(\alpha)$  est le nombre de parts de  $\alpha$ , et on supprime la première équerre de  $\alpha$ . Sinon, on ajoute au symbole la colonne  $\begin{pmatrix} \beta_1 \\ l(\alpha) \end{pmatrix}$ , on diminue de 1 toutes les parts de  $\alpha$  et on supprime la plus grande part de  $\beta$ . Enfin, quand on a terminé d'ajouter des colonnes, on diminue de 1 toutes les parts de la première ligne du symbole obtenu. Par exemple,  $\lambda = (\bar{8}, 7, 5, 5, \bar{5}, 4, 3, \bar{3}, 1)$  nous donne  $\alpha = (7, 5, 5, 4, 3, 1)$  et  $\beta = (8, 5, 3)$ , et on obtient le symbole de Frobenius

$$\begin{pmatrix} 7 & 5 & 4 & 2 & 0 \\ 6 & \bar{4} & 4 & 3 & \bar{1} \end{pmatrix}.$$

S'il n'y a pas de parts surlignées,  $\beta$  est vide et la ligne du bas est une surpartition où toutes les parts sont surlignées, ce qui est équivalent à une partition en parts distinctes : on retrouve bien le cas des partitions.

On peut définir le rang d'une surpartition en transposant la définition de Dyson. Lovejoy [73] a montré que ce rang peut aussi être défini à partir du symbole de Frobenius : le rang d'une surpartition, avec les notations précédentes, est égal à  $a_1 - b_1$  moins le nombre de parts non surlignées dans l'ensemble  $\{b_2, \dots, b_N\}$ .

Il n'existe pas d'analogue du théorème de Gordon pour les surpartitions pour tous  $k$  et  $i$  : on peut définir un analogue des  $B_{k,i}(n)$ , mais la série génératrice correspondante n'est pas un produit infini dans le cas général et ne peut donc pas s'interpréter comme la série génératrice d'une classe de partitions ou de surpartitions vérifiant des conditions de congruence. Toutefois, il existe deux analogues partiels des identités d'Andrews-Gordon, qui constituent la motivation initiale de cette thèse. En 2003, Lovejoy [71] a obtenu le résultat suivant :

**Théorème de Gordon pour les surpartitions.** *Soit  $\bar{A}_k(n)$  le nombre de surpartitions de  $n$  en parts non divisibles par  $k$ . Soit  $\bar{B}_k(n)$  le nombre de surpartitions de  $n$  de la forme  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\ell)$  où  $\lambda_j - \lambda_{j+k-1} \geq 1$  si  $\lambda_{j+k-1}$  est surlignée et  $\lambda_j - \lambda_{j+k-1} \geq 2$  sinon. Alors  $\bar{A}_k(n) = \bar{B}_k(n)$ .*

On remarque que dans le cas où il n'y a pas de parts surlignées, les conditions qui définissent  $\overline{B}_k(n)$  se réduisent aux conditions qui définissent  $B_{k,k}(n)$  dans le théorème de Gordon.

Un autre résultat a été démontré par Corteel et Lovejoy [47]. On définit la *partition associée* d'une partition  $\lambda$  en parts distinctes positives ou nulles comme la partition obtenue en enlevant 0 à la plus petite part de  $\lambda$ , 1 à la deuxième plus petite part de  $\lambda$  et ainsi de suite. Par exemple, la partition associée de  $(7, 6, 5, 2, 0)$  est  $(3, 3, 3, 1, 0)$ .

**Théorème [47, théorème 1.6].** *Soit  $\overline{D}_k(n)$  le nombre de surpartitions de  $n$  telles que la partition associée de la première ligne du symbole de Frobenius a au plus  $k - 2$  carrés de Durfee. Alors  $\overline{A}_k(n) = \overline{D}_k(n)$ .*

## Structure de cette thèse

Le chapitre I est un prolongement de l'introduction qui présente quelques outils analytiques indispensables. Le corps de cette thèse est constitué des chapitres II, III et IV. Le chapitre II présente une généralisation des identités d'Andrews-Gordon (et des résultats analogues basés sur le théorème de Bressoud) aux paires de surpartitions, qui seront définies dans ce chapitre. Le chapitre III présente des preuves supplémentaires de certains résultats du chapitre II. Enfin, au chapitre IV, on présente en détail d'autres objets, les surpartitions  $n$ -colorées, et on les utilise pour interpréter combinatoirement certaines séries multiples.



# Chapitre I

## Outils

Dans ce chapitre, on va introduire certains outils analytiques utiles pour l'énumération des objets qui seront étudiés dans les chapitres suivants. Ces outils appartiennent au domaine des séries hypergéométriques basiques, également appelées  $q$ -séries.

Une *série hypergéométrique basique* de base  $q$  est une série de la forme  $\sum c_n$  où  $c_{n+1}/c_n$  est une fonction rationnelle de  $q^n$  à coefficients dans  $\mathbb{C}$ ,  $q$  étant un paramètre fixé qui vérifie généralement  $|q| < 1$  pour des raisons de convergence. Comme l'indique l'ouvrage de référence de Gasper et Rahman sur le sujet [57], l'histoire de ces séries a commencé avec les travaux d'Euler [53] qui a étudié le produit infini  $(q)_\infty^{-1}$  (la série génératrice des partitions), mais elles ont vraiment pris leur essor avec Heine [62, 63, 64] qui a étudié la série

$${}_2\phi_1(a, b; c; q, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(q)_n (c)_n} z^n.$$

Les séries hypergéométriques basiques sont intimement liées à l'énumération des partitions. Comme on l'a déjà mentionné, la série génératrice des partitions est donnée par

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)q^n = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^i} = \frac{1}{(q)_\infty}.$$

En notant  $p_{dist}(n)$  le nombre de partitions de  $n$  en parts distinctes, la série génératrice des partitions en parts distinctes s'écrit

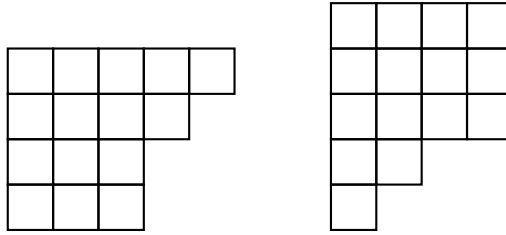
$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{dist}(n)q^n = (-q)_\infty.$$

En notant  $p_{\leq N}(n)$  le nombre de partitions de  $n$  en parts inférieures ou égales à  $N$ , la série

génératrice des partitions en parts inférieures ou égales à  $N$  s'écrit

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{\leq N}(n)q^n = \frac{1}{(q)_N}.$$

C'est également la série génératrice des partitions en au plus  $N$  parts ; ce résultat est très facile à démontrer en utilisant une bijection classique, la conjugaison. Le *conjugué* d'une partition  $\lambda$  est la partition  $\lambda'$  dont le diagramme de Ferrers est le symétrique du diagramme de Ferrers de  $\lambda$  par rapport à sa diagonale principale (voir figure I.1).



**FIG. I.1 :** Diagrammes de Ferrers de la partition  $\lambda = (5, 4, 3, 3)$  et de son conjugué  $\lambda' = (4, 4, 4, 2, 1)$ .

Il est clair que la conjugaison est involutive et qu'elle préserve la taille : le conjugué d'une partition de  $n$  est une partition de  $n$ . Comme la diagonale principale du diagramme n'est pas modifiée par la symétrie, la conjugaison préserve aussi le nombre de colonnes du symbole de Frobenius. Elle s'exprime d'ailleurs de façon très simple en utilisant cette représentation : comme une équerre de largeur  $a$  et de hauteur  $b$  est transformée par la conjugaison en une équerre de largeur  $b$  et de hauteur  $a$ , le conjugué de la partition ayant pour symbole de Frobenius

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_N \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_N \end{pmatrix}$$

est la partition ayant pour symbole de Frobenius

$$\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_N \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_N \end{pmatrix}.$$

Autrement dit, prendre le conjugué d'une partition revient à échanger les lignes du symbole de Frobenius.

## I.1 Coefficients $q$ -binomiaux

Les *coefficients  $q$ -binomiaux*, également appelés *polynômes gaussiens* car ils ont été introduits par Gauss [58], sont définis par

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{(q)_n}{(q)_k (q)_{n-k}}.$$

Leur nom vient du fait qu'ils sont des  $q$ -analogues des coefficients binomiaux classiques

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

ce qui signifie que les coefficients binomiaux sont la limite des coefficients  $q$ -binomiaux quand  $q$  tend vers 1. En effet, pour  $q \neq 1$ ,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q &= \frac{(q)_n}{(q)_k (q)_{n-k}} \\ &= \frac{\frac{(q)_n}{(1-q)^n}}{\frac{(q)_k}{(1-q)^k} \frac{(q)_{n-k}}{(1-q)^{n-k}}} \\ &= \frac{\frac{1-q}{1-q} \frac{1-q^2}{1-q} \dots \frac{1-q^n}{1-q}}{\frac{1-q}{1-q} \frac{1-q^2}{1-q} \dots \frac{1-q^k}{1-q} \times \frac{1-q}{1-q} \frac{1-q^2}{1-q} \dots \frac{1-q^{n-k}}{1-q}} \\ &= \frac{1 \cdot (1+q) \dots (1+q+\dots+q^{n-1})}{1 \cdot (1+q) \dots (1+q+\dots+q^{k-1}) \times 1 \cdot (1+q) \dots (1+q+\dots+q^{n-k-1})} \\ &\xrightarrow{q \rightarrow 1} \frac{1 \cdot 2 \dots n}{1 \cdot 2 \dots k \times 1 \cdot 2 \dots (n-k)} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \\ &= \binom{n}{k}. \end{aligned}$$

Les coefficients  $q$ -binomiaux ont une interprétation combinatoire simple qui est donnée par le théorème suivant, dont on donne la démonstration pour illustrer l'utilisation d'équations aux  $q$ -différences ( $q$ -analogues des équations aux différences classiques, comme par exemple (I.2)) dans la démonstration de résultats d'énumération ; de telles équations seront abondamment utilisées au chapitre II.

**Théorème I.1** (Sylvester [92]). *Le coefficient  $q$ -binomial  $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$  est la série génératrice des partitions en au plus  $k$  parts qui sont toutes inférieures ou égales à  $n-k$ , ou, en d'autres termes, la série génératrice des partitions dont le diagramme de Ferrers est contenu dans un rectangle de longueur  $n-k$  et de largeur  $k$ .*



*Démonstration.* On reprend la présentation d'Andrews [25]. On observe d'abord que

$$\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix}_q = 1 \quad (\text{I.1})$$

et que

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q - \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q &= \frac{(q)_{n-1}}{(q)_k (q)_{n-k}} ((1-q^n) - (1-q^k)) \\ &= \frac{(q)_{n-1}}{(q)_k (q)_{n-k}} q^k (1-q^{n-k}) \\ &= q^k \frac{(q)_{n-1}}{(q)_k (q)_{n-k-1}} \\ &= q^k \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q. \end{aligned} \quad (\text{I.2})$$

On remarque ensuite que (I.1) et (I.2) définissent de manière unique  $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$  pour tous  $n$  et  $k$  positifs ou nuls. Par ailleurs, ces deux relations permettent de montrer par récurrence que les coefficients  $q$ -binomiaux sont des polynômes.

D'autre part, en notant  $p(n-k, k, \ell)$  le nombre de partitions de  $\ell$  en au plus  $k$  parts qui sont toutes inférieures ou égales à  $n-k$ , on a

$$p(n-k, 0, \ell) = \begin{cases} 1 & \text{si } n-k = \ell = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{I.3})$$

et

$$p(0, k, \ell) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = \ell = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{I.4})$$

car la partition vide, qui est de taille 0, est la seule partition dont aucune part n'est strictement positive et la seule partition dont le nombre de parts n'est pas strictement positif.

Si on note  $F(n, k) = \sum_{\ell \geq 0} p(n-k, k, \ell) q^\ell$ , (I.3) et (I.4) impliquent que

$$F(n, 0) = F(n, n) = 1. \quad (\text{I.5})$$

De plus,  $p(n-k, k, \ell) - p(n-k, k-1, \ell)$  compte les partitions de  $\ell$  en exactement  $k$  parts qui sont toutes inférieures ou égales à  $n-k$ . On transforme chacune de ces partitions en supprimant toutes les parts égales à 1 et en enlevant 1 à chaque part supérieure à 1.

Les partitions obtenues sont de taille  $\ell - k$ , elles ont au plus  $k$  parts et chaque part est inférieure ou égale à  $n - k - 1$ . Notre transformation est clairement une bijection entre les partitions comptées par  $p(n - k, k, \ell) - p(n - k, k - 1, \ell)$  et celles comptées par  $p(n - k - 1, k, \ell - k)$ . On a donc

$$p(n - k, k, \ell) - p(n - k, k - 1, \ell) = p(n - k - 1, k, \ell - k), \quad (\text{I.6})$$

ce qui se traduit sur la série génératrice par

$$F(n, k) - F(n - 1, k - 1) = q^k F(n - 1, k). \quad (\text{I.7})$$

Donc, comme  $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$  et  $F(n, k)$  vérifient les mêmes conditions initiales (respectivement (I.1) et (I.5)) et la même équation de récurrence (respectivement (I.2) et (I.7)), ces deux quantités sont égales et le théorème I.1 est démontré.  $\square$

## I.2 L'identité du produit triple de Jacobi

Jacobi [65] a démontré le résultat suivant, que Gauss avait en fait déjà obtenu dans un manuscrit non publié (voir [80]) :

**Théorème I.2** (Identité du produit triple de Jacobi).

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} z^n q^{n^2} = (-zq, -q/z, q^2; q^2)_{\infty}. \quad (\text{I.8})$$

L'identité du produit triple de Jacobi permet de démontrer des identités analytiques de type Rogers-Ramanujan, où l'un des deux membres est une série et l'autre un produit infini. Elle est par exemple utilisée dans la démonstration analytique du théorème de Gordon due à Andrews [11].

## I.3 Paires de Bailey

Le but de cette section n'est pas d'exposer en détail la théorie des paires de Bailey, mais seulement de présenter quelques notions utilisées dans les chapitres suivants. Pour une présentation de la théorie des paires de Bailey, de son histoire et de ses applications en mécanique statistique, voir [93].

Soit  $a \in \mathbb{C}$ . Une paire de Bailey par rapport à  $a$  est un couple  $(\alpha, \beta)$  de suites vérifiant, pour tout  $n \geq 0$ ,

$$\beta_n = \sum_{r=0}^n \frac{\alpha_r}{(q)_{n-r}(aq)_{n+r}}.$$

Les paires de Bailey ont été introduites dans [31, 32]. Elles permettent, à l'aide de l'identité du produit triple de Jacobi, de démontrer les identités de Rogers-Ramanujan et d'autres identités du même type. Slater [89, 90] a ainsi obtenu 130 identités de ce type en utilisant les paires de Bailey.

Il est possible d'obtenir une paire de Bailey à partir d'une autre paire déjà connue en utilisant le théorème suivant, dû à Andrews [23, 24] :

**Théorème I.3** (Andrews). *Soit  $(\alpha, \beta)$  une paire de Bailey par rapport à  $a$ . Alors  $(\alpha', \beta')$ , où*

$$\alpha'_n = \frac{(\rho)_n(\sigma)_n(aq/\rho\sigma)^n}{(aq/\rho)_n(aq/\sigma)_n} \alpha_n \quad \text{et} \quad \beta'_n = \sum_{r=0}^n \frac{(\rho)_r(\sigma)_r(aq/\rho\sigma)^r(aq/\rho\sigma)_{n-r}}{(aq/\rho)_n(aq/\sigma)_n(q)_{n-r}} \beta_r,$$

*est aussi une paire de Bailey par rapport à  $a$  pour tous  $\rho$  et  $\sigma$  tels que les séries convergent absolument.*

En faisant tendre  $n$ ,  $\rho$  et  $\sigma$  vers l'infini dans l'identité liant les  $\beta'_n$  et les  $\alpha'_r$  qui résulte de ce théorème, on obtient que si  $(\alpha, \beta)$  est une paire de Bailey par rapport à  $a$ , on a

$$\sum_{r=0}^{\infty} a^r q^{r^2} \beta_r = \frac{1}{(aq)_{\infty}} \sum_{r=0}^{\infty} a^r q^{r^2} \alpha_r. \quad (\text{I.9})$$

La première identité de Rogers-Ramanujan est obtenue en utilisant (I.9) avec la paire de Bailey par rapport à 1 suivante [83] :

$$\alpha_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ (-1)^n q^{\frac{n(3n-1)}{2}} (1+q^n) & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad \beta_n = \frac{1}{(q)_n}$$

et en appliquant l'identité du produit triple de Jacobi. La deuxième identité de Rogers-Ramanujan est obtenue de même avec la paire de Bailey par rapport à  $q$  suivante [83] :

$$\alpha_n = (-1)^n q^{\frac{n(3n+1)}{2}} \frac{1-q^{2n+1}}{1-q} \quad \text{et} \quad \beta_n = \frac{1}{(q)_n}.$$

En appliquant le théorème I.3 itérativement, on peut, à partir d'une paire de Bailey, obtenir une suite infinie de paires appelée *chaîne de Bailey*. Les chaînes de Bailey permettent, entre autres, de démontrer la version analytique du théorème de Gordon [20]

dans le cas particulier où  $i = 1$  ou  $i = k$ , mais ne suffisent pas pour traiter le cas général. On a besoin pour cela d'un outil plus puissant : le *treillis de Bailey*. L'idée est de pouvoir passer d'une paire de Bailey à une autre paire qui ne soit pas relative au même paramètre  $a$ , ce qui est rendu possible par le lemme suivant.

**Lemme I.4** (Agarwal, Andrews et Bressoud [5]). *Soit  $(\alpha, \beta)$  une paire de Bailey par rapport à  $a$ . Alors  $(\alpha', \beta')$ , où*

$$\alpha'_n = \begin{cases} \alpha_0 & \text{si } n = 0 \\ (1-a) \left(\frac{a}{\rho\sigma}\right)^n \frac{(\rho)_n(\sigma)_n}{(a/\rho)_n(a/\sigma)_n} \left(\frac{\alpha_n}{1-aq^{2n}} - \frac{aq^{2n-2}\alpha_{n-1}}{1-aq^{2n-2}}\right) & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

$$\beta'_n = \sum_{k=0}^n \frac{(\rho)_k(\sigma)_k(a/\rho\sigma)^k(a/\rho\sigma)_{n-k}\beta_k}{(q)_{n-k}(a/\rho)_n(a/\sigma)_n}$$

est une paire de Bailey par rapport à  $aq^{-1}$  pour tous  $\rho$  et  $\sigma$  tels que les séries convergent absolument.

Le théorème I.3 et le lemme I.4 permettent de démontrer le théorème suivant [5, théorème 3.1] :

**Théorème I.5** (Agarwal, Andrews et Bressoud). *Si  $(\alpha, \beta)$  est une paire de Bailey par rapport à  $a$  et  $0 \leq i \leq k$ , alors, pour tous  $\rho_j$  et  $\sigma_j$  tels que les séries convergent absolument,*

$$\sum_{n \geq n_1 \geq \dots \geq n_k \geq 0} \frac{(\rho_1)_{n_1} \cdots (\rho_k)_{n_k} (\sigma_1)_{n_1} \cdots (\sigma_k)_{n_k}}{(q)_{n-n_1} \cdots (q)_{n_{k-1}-n_k}} \times \frac{(a/\rho_1\sigma_1)_{n-n_1} \cdots (a/\rho_i\sigma_i)_{n_{i-1}-n_i}}{(a/\rho_1)_n \cdots (a/\rho_i)_{n_{i-1}} (a/\sigma_1)_n \cdots (a/\sigma_i)_{n_{i-1}}}$$

$$\times \frac{(aq/\rho_{i+1}\sigma_{i+1})_{n_i-n_{i+1}} \cdots (aq/\rho_k\sigma_k)_{n_{k-1}-n_k} a^{n_1+\dots+n_k} q^{n_{i+1}+\dots+n_k} \beta_{n_k}}{(aq/\rho_{i+1})_{n_i} \cdots (aq/\rho_k)_{n_{k-1}} (aq/\sigma_{i+1})_{n_i} \cdots (aq/\sigma_k)_{n_{k-1}} (\rho_1\sigma_1)^{n_1} \cdots (\rho_k\sigma_k)^{n_k}}$$

$$= \frac{\alpha_0}{(q)_n(a)_n} + \sum_{t=1}^n \frac{(\rho_1)_t(\sigma_1)_t \cdots (\rho_i)_t(\sigma_i)_t a^{it}(1-a)}{(a/\rho_1)_t(a/\sigma_1)_t \cdots (a/\rho_i)_t(a/\sigma_i)_t (\rho_1 \cdots \rho_i \sigma_1 \cdots \sigma_i)^t (q)_{n-t} (a)_{n+t}}$$

$$\left( \frac{(\rho_{i+1})_t(\sigma_{i+1})_t \cdots (\rho_k)_t(\sigma_k)_t (aq)^{(k-i)t} \alpha_t}{(aq/\rho_{i+1})_t(aq/\sigma_{i+1})_t \cdots (aq/\rho_k)_t(aq/\sigma_k)_t (\rho_{i+1} \cdots \rho_k \sigma_{i+1} \cdots \sigma_k)^t (1-aq^{2t})} \right. \\ \left. - \frac{(\rho_{i+1})_{t-1}(\sigma_{i+1})_{t-1} \cdots (\rho_k)_{t-1}(\sigma_k)_{t-1}}{(aq/\rho_{i+1})_{t-1}(aq/\sigma_{i+1})_{t-1} \cdots (aq/\rho_k)_{t-1}(aq/\sigma_k)_{t-1}} \right) \\ \times \frac{(aq)^{(k-i)(t-1)} aq^{2t-2} \alpha_{t-1}}{(\rho_{i+1} \cdots \rho_k \sigma_{i+1} \cdots \sigma_k)^{t-1} (1-aq^{2t-2})} \Bigg).$$

En utilisant des valeurs particulières des paramètres  $n$ ,  $\rho_j$  et  $\sigma_j$  et en faisant appel à l'identité du produit triple de Jacobi, ce théorème permet de démontrer la version analytique du théorème de Gordon et d'autres résultats similaires [5].



# Chapitre II

## Paires de surpartitions et séries hypergéométriques basiques

### II.1 Introduction

Dans ce chapitre, basé sur [76], on étudie deux classes de séries hypergéométriques basiques :

$$R_{k,i}(a, b; x; q) = \frac{(-axq, -bxq)_\infty}{(xq, abxq)_\infty} \sum_{n \geq 0} \frac{(-abx^k)^n q^{kn^2 + (k-i+1)n - \binom{n}{2}} (-1/a, -1/b)_n (xq)_n}{(q, -axq, -bxq)_n} \\ \times \left( 1 - \frac{abx^i q^{(2n+1)i - 2n} (1 + q^n/a)(1 + q^n/b)}{(1 + axq^{n+1})(1 + bxq^{n+1})} \right) \quad (\text{II.1})$$

et

$$\tilde{R}_{k,i}(a, b; x; q) = \frac{(-axq, -bxq)_\infty}{(xq, abxq)_\infty} \sum_{n \geq 0} \frac{(-abx^{k-1})^n q^{kn^2 + (k-i)n - 2\binom{n}{2}} (-1/a, -1/b)_n (x^2q^2; q^2)_n}{(q^2; q^2)_n (-axq, -bxq)_n} \\ \times \left( 1 - \frac{abx^i q^{i(2n+1) - 2n} (1 + q^n/a)(1 + q^n/b)}{(1 + axq^{n+1})(1 + bxq^{n+1})} \right). \quad (\text{II.2})$$

Dans la première partie du chapitre, on interprète le coefficient de  $a^s b^t x^m q^n$  dans (II.1) et (II.2) en termes de paires de surpartitions. Une *paire de surpartitions* de  $n$  est un couple  $(\lambda, \mu)$  de surpartitions tel que la somme des parts de  $\lambda$  et des parts de  $\mu$  est égale à  $n$ . Par exemple, les 12 paires de surpartitions de 2 sont

$$((2), \emptyset), ((\bar{2}), \emptyset), ((1, 1), \emptyset), ((1, \bar{1}), \emptyset), ((1), (\bar{1})), ((1), (1)), \\ ((\bar{1}), (\bar{1})), ((\bar{1}), (1)), (\emptyset, (\bar{2})), (\emptyset, (2)), (\emptyset, (1, 1)), (\emptyset, (1, \bar{1})).$$

Les paires de surpartitions ont été introduites dans [46] pour démontrer combinatoirement la somme  ${}_1\psi_1$  de Ramanujan :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(a)_n}{(b)_n} z^n = \frac{(b/a, q, q/az, az; q)_{\infty}}{(b, b/az, q/a, z; q)_{\infty}}$$

pour  $|q| < 1$  et  $|\frac{b}{a}| < |z| < 1$ .

Pour pouvoir définir de façon concise les paires de surpartitions qui nous intéressent, on dira qu'un entier  $j$  apparaît *non attaché* dans la paire de surpartitions  $(\lambda, \mu)$  s'il apparaît uniquement non surligné et uniquement dans  $\mu$ . Par exemple, dans la paire de surpartitions  $((\overline{6}, 4, 4, 3), (6, \overline{4}, 4, \overline{2}, 2, 1))$ , seul 1 apparaît non attaché. Notons  $f_j(\lambda)$  (resp.  $f_{\overline{j}}(\lambda)$ ) le nombre de parts non surlignées (resp. surlignées) d'une surpartition  $\lambda$  égales à  $j$ , et  $\mathcal{O}_j(\lambda)$  le nombre de parts surlignées de  $\lambda$  inférieures ou égales à  $j$ . On définit la *valuation* d'une paire de surpartitions  $(\lambda, \mu)$  en  $j$  par

$$v_j((\lambda, \mu)) = f_j(\lambda) + f_{\overline{j}}(\lambda) + f_{\overline{j}}(\mu) + \chi(j \text{ apparaît non attaché dans } (\lambda, \mu)), \quad (\text{II.3})$$

où  $\chi$  est la fonction caractéristique usuelle :

$$\chi(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } A \text{ est vrai} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par exemple, la valuation de la paire précédente en 4 vaut 3 car  $f_4(\lambda) = 2$ ,  $f_{\overline{4}}(\lambda) = 0$ ,  $f_{\overline{4}}(\mu) = 1$  et 4 n'apparaît pas non attaché.

On peut maintenant énoncer nos deux premiers théorèmes. Dans tout ce chapitre, sauf mention contraire, on suppose que  $k \geq 2$  et que  $1 \leq i \leq k$ .

**Théorème II.1.** *Soit  $r_{k,i}(s, t, m, n)$  le nombre de paires de surpartitions  $(\lambda, \mu)$  de  $n$  avec  $m$  parts, parmi lesquelles  $s$  sont des parts surlignées de  $\lambda$  ou des parts non surlignées de  $\mu$ , et  $t$  sont des parts de  $\mu$ , où*

$$(i) \quad v_1((\lambda, \mu)) \leq i - 1;$$

$$(ii) \quad \text{pour tout } j \geq 1, \quad f_j(\lambda) + v_{j+1}((\lambda, \mu)) \leq k - 1.$$

Alors

$$R_{k,i}(a, b; x; q) = \sum_{s, t, m, n \geq 0} r_{k,i}(s, t, m, n) a^s b^t x^m q^n.$$

**Théorème II.2.** Soit  $\tilde{r}_{k,i}(s, t, m, n)$  le nombre de paires de surpartitions  $(\lambda, \mu)$  comptées par  $r_{k,i}(s, t, m, n)$  telles que s'il y a égalité dans la condition (ii) du théorème II.1 pour un certain  $j \geq 1$ , on a

$$j f_j(\lambda) + (j + 1) v_{j+1}((\lambda, \mu)) \equiv i - 1 + \mathcal{O}_j(\lambda) + \mathcal{O}_j(\mu) \pmod{2}. \quad (\text{II.4})$$

Alors

$$\tilde{R}_{k,i}(a, b; x; q) = \sum_{s, t, m, n \geq 0} \tilde{r}_{k,i}(s, t, m, n) a^s b^t x^m q^n.$$

Dans le cas des partitions ( $\lambda$  n'a pas de parts surlignées et  $\mu$  est vide), on a  $v_j((\lambda, \emptyset)) = f_j(\lambda)$  et on retrouve donc les partitions vérifiant des conditions de multiplicités dans les théorèmes de Gordon (pour le théorème II.1 et de Bressoud (pour le théorème II.2).

Ces théorèmes unifient et généralisent de nombreuses familles importantes d'identités sur les partitions, parmi lesquelles le théorème de Gordon, le théorème analogue obtenu par Bressoud [36], les théorèmes de Gordon pour les surpartitions [71], la généralisation d'Andrews des identités de Göllnitz-Gordon [12], leur analogue pour les surpartitions [72], ainsi que des résultats plus généraux obtenus en collaboration avec Corteel et Lovejoy [49, 48]. La façon dont tous ces résultats découlent des théorèmes II.1 et II.2 via l'identité du produit triple de Jacobi sera expliquée dans la section II.4, et plusieurs nouvelles familles d'identités seront présentées.

Dans la deuxième partie du chapitre, on étudie trois autres classes d'objets combinatoires comptés par  $R_{k,i}(a, b; 1; q)$  et  $\tilde{R}_{k,i}(a, b; 1; q)$ . Ces objets seront définis dans la suite du chapitre. Afin de pouvoir énoncer les autres résultats de ce chapitre, posons

$$B_{k,i}(s, t, n) = \sum_{m \geq 0} r_{k,i}(s, t, m, n)$$

et

$$\tilde{B}_{k,i}(s, t, n) = \sum_{m \geq 0} \tilde{r}_{k,i}(s, t, m, n).$$

**Théorème II.3.** Soit  $C_{k,i}(s, t, n)$  le nombre de paires de surpartitions de  $n$  dont la représentation de Frobenius possède  $s$  parts non surlignées dans la ligne du bas et  $t$  parts non surlignées dans la ligne du haut, et dont les rangs successifs sont dans l'intervalle  $[-i + 2, 2k - i - 1]$ . Soit  $D_{k,i}(s, t, n)$  le nombre de paires de surpartitions de  $n$  qui sont  $(k, i)$ -admissibles et dont la représentation de Frobenius possède  $s$  parts non surlignées



dans la ligne du bas et  $t$  parts non surlignées dans la ligne du haut. Soit  $E_{k,i}(s, t, n)$  le nombre de chemins de Bressoud-Burge généralisés d'indice majeur  $n$  vérifiant les  $(k, i)$ -conditions impaires, où le nombre de pics marqués par  $a$  (resp. marqués par  $b$ ) est  $s$  (resp.  $t$ ). Alors

$$B_{k,i}(s, t, n) = C_{k,i}(s, t, n) = D_{k,i}(s, t, n) = E_{k,i}(s, t, n).$$

**Théorème II.4.** Soit  $\tilde{C}_{k,i}(s, t, n)$  le nombre de paires de surpartitions de  $n$  dont la représentation de Frobenius possède  $s$  parts non surlignées dans la ligne du bas et  $t$  parts non surlignées dans la ligne du haut, et dont les rangs successifs sont dans l'intervalle  $[-i + 2, 2k - i - 2]$ . Soit  $\tilde{D}_{k,i}(s, t, n)$  le nombre de paires de surpartitions de  $n$  auto- $(k, i)$ -conjuguées dont la représentation de Frobenius possède  $s$  parts non surlignées dans la ligne du bas et  $t$  parts non surlignées dans la ligne du haut. Soit  $\tilde{E}_{k,i}(s, t, n)$  le nombre de chemins de Bressoud-Burge généralisés comptés par  $E_{k,i}(s, t, n)$  qui vérifient aussi les  $(k, i)$ -conditions paires. Alors

$$\tilde{B}_{k,i}(s, t, n) = \tilde{C}_{k,i}(s, t, n) = \tilde{D}_{k,i}(s, t, n) = \tilde{E}_{k,i}(s, t, n).$$

Les théorèmes II.3 et II.4 étendent des travaux sur les surpartitions obtenus en collaboration avec Corteel et Lovejoy [49, 48], qui sont eux-mêmes une généralisation aux surpartitions des identités d'Andrews-Gordon et des résultats analogues basés sur le théorème de Bressoud.

Ce chapitre est organisé comme suit : le théorème II.1 est démontré dans la section II.2 en utilisant les équations aux  $q$ -différences d'Andrews pour certaines familles de séries hypergéométriques basiques [15]. Le théorème II.2 est démontré dans la section II.3 de la même manière, à ceci près que nous avons dû établir les équations aux  $q$ -différences nécessaires. Dans la section II.4, on présente quelques unes des nombreuses identités combinatoires qui découlent des théorèmes II.1 et II.2. Dans les sections II.5 à II.7, on définit les structures combinatoires qui apparaissent dans les théorèmes II.3 et II.4 et on démontre ces théorèmes.

## II.2 Les $R_{k,i}(a, b; x; q)$

Les fonctions  $J_{\lambda,k,i}$  d'Andrews [15] sont liées à nos fonctions par l'égalité

$$R_{k,i}(a, b; x; q) = \frac{1}{(abxq)_{\infty}} J_{2,k,i}(-1/a, -1/b; x; q). \quad (\text{II.5})$$

En employant les équations aux  $q$ -différences pour les  $J_{2,k,i}$  et les  $H_{2,k,i}$  [15, équations (2.1)-(2.4),  $\lambda = 2$ ],

$$H_{2,k,i}(a, b, x; q) - H_{2,k,i-1}(a, b, x; q) = x^{i-1} J_{2,k,k-i+1}(a, b; x; q), \quad (\text{II.6})$$

$$\begin{aligned} J_{2,k,i}(a, b; x; q) &= H_{2,k,i}(a, b; xq; q) - xq(1/a + 1/b)H_{2,k,i-1}(a, b; xq; q) \\ &\quad + x^2q^2/(ab)H_{2,k,i-2}(a, b; xq; q), \end{aligned} \quad (\text{II.7})$$

$$H_{2,k,-i}(a, b; x; q) = -x^{-i}H_{2,k,i}(a, b; x; q), \quad (\text{II.8})$$

$$H_{2,k,0}(a, b; x; q) = 0 \quad (\text{II.9})$$

on peut déduire que les  $R_{k,i}(a, b; x; q)$  vérifient les égalités suivantes :

**Lemme II.5.**

$$R_{k,1}(a, b; x; q) = R_{k,k}(a, b; xq; q), \quad (\text{II.10})$$

$$\begin{aligned} R_{k,2}(a, b; x; q) - R_{k,1}(a, b; x; q) &= \frac{xq}{1 - abxq} R_{k,k-1}(a, b; xq; q) \\ &\quad + \frac{axq}{1 - abxq} R_{k,k}(a, b; xq; q) \\ &\quad + \frac{bxq}{1 - abxq} R_{k,k}(a, b; xq; q) \\ &\quad + \frac{abxq}{1 - abxq} R_{k,k}(a, b; xq; q) \end{aligned} \quad (\text{II.11})$$

et pour  $3 \leq i \leq k$ ,

$$\begin{aligned} R_{k,i}(a, b; x; q) - R_{k,i-1}(a, b; x; q) &= \frac{(xq)^{i-1}}{1 - abxq} R_{k,k-i+1}(a, b; xq; q) \\ &\quad + \frac{a(xq)^{i-1}}{1 - abxq} R_{k,k-i+2}(a, b; xq; q) \\ &\quad + \frac{b(xq)^{i-1}}{1 - abxq} R_{k,k-i+2}(a, b; xq; q) \\ &\quad + \frac{ab(xq)^{i-1}}{1 - abxq} R_{k,k-i+3}(a, b; xq; q). \end{aligned} \quad (\text{II.12})$$

*Démonstration.* On ne démontre que (II.10), la démonstration des autres égalités étant très similaire. On a

$$\begin{aligned}
R_{k,1}(a, b; x; q) &= \frac{1}{(abxq)_\infty} J_{2,k,i}(-1/a, -1/b; x; q) \\
&= \frac{1}{(abxq)_\infty} (H_{2,k,1}(-1/a, -1/b; xq; q) + abx^2q^2 H_{2,k,-1}(-1/a, -1/b; xq; q)) \\
&\quad (\text{par (II.7) et (II.9)}) \\
&= \frac{1 - abxq}{(abxq)_\infty} H_{2,k,1}(-1/a, -1/b; xq; q) \quad (\text{par (II.8)}) \\
&= \frac{1}{(ab(xq)q)_\infty} J_{2,k,k}(-1/a, -1/b; xq; q) \quad (\text{par (II.6) et (II.9)}) \\
&= R_{k,k}(a, b; xq; q).
\end{aligned}$$

□

En utilisant ces égalités, on peut déduire le théorème II.1.

*Démonstration du théorème II.1.* On observe d'abord que les équations aux  $q$ -différences du lemme II.5 et la condition initiale  $R_{k,i}(a, b; 0; q) = 1$  définissent de manière unique les fonctions  $R_{k,i}(a, b; x; q)$ . Posons

$$\widehat{R}_{k,i}(a, b; x; q) = \sum_{s,t,m,n \geq 0} r_{k,i}(s, t, m, n) a^s b^t x^m q^n.$$

On veut montrer que  $\widehat{R}_{k,i}(a, b; x; q) = R_{k,i}(a, b; x; q)$ . Pour cela, on va montrer que les fonctions  $\widehat{R}_{k,i}(a, b; x; q)$  vérifient les équations aux  $q$ -différences du lemme II.5. Il est évident que  $\widehat{R}_{k,i}(a, b; 0; q) = 1$ , puisqu'il n'y a pas de paires de surpartitions sans parts hormis la paire vide.

On remarque qu'en enlevant 1 à chaque part d'une paire de surpartitions vérifiant la condition (ii) du théorème II.1 (et en supprimant les zéros obtenus), on obtient une autre paire de surpartitions qui vérifie cette condition. De même, en ajoutant 1 à chaque part d'une paire qui vérifie la condition, on obtient une autre paire vérifiant la condition.

Commençons par (II.10). Une paire de surpartitions  $(\lambda, \mu)$  comptée par  $r_{k,1}(s, t, m, n)$  ne contient aucune part 1 et vérifie donc  $v_2((\lambda, \mu)) \leq k - 1$ . En enlevant 1 à chaque part, on obtient que  $\widehat{R}_{k,1}(a, b; x; q) = \widehat{R}_{k,k}(a, b; xq; q)$ .

Pour (II.11), on observe que la fonction

$$\widehat{R}_{k,2}(a, b; x; q) - \widehat{R}_{k,1}(a, b; x; q)$$

est la série génératrice des paires de surpartitions  $(\lambda, \mu)$  comptées par  $r_{k,2}(s, t, m, n)$  telles que  $v_1((\lambda, \mu)) = 1$ . On sépare ces paires en quatre classes disjointes : celles pour lesquelles 1 est une part de  $\lambda$ , celles pour lesquelles  $\bar{1}$  est une part de  $\lambda$ , celles pour lesquelles  $\bar{1}$  est une part de  $\mu$ , et celles où 1 apparaît non attaché. Dans le premier de ces quatre cas,  $v_2((\lambda, \mu)) \leq k - 2$ . Alors, en supprimant le 1 de  $\lambda$  ainsi que tous les 1 qui peuvent apparaître dans  $\mu$ , puis en enlevant 1 à toutes les parts restantes, on voit que ces paires de surpartitions sont engendrées par

$$\frac{xq}{1 - abxq} \widehat{R}_{k,k-1}(a, b; xq; q).$$

Dans le deuxième cas, c'est-à-dire quand  $\bar{1}$  apparaît dans  $\lambda$ , on a  $v_2((\lambda, \mu)) \leq k - 1$ . Alors, en supprimant le  $\bar{1}$  de  $\lambda$  ainsi que tous les 1 qui peuvent apparaître dans  $\mu$ , puis en enlevant 1 à toutes les parts restantes, on voit que ces paires de surpartitions sont engendrées par

$$\frac{axq}{1 - abxq} \widehat{R}_{k,k}(a, b; xq; q).$$

En procédant exactement de la même façon, on voit que les paires contenant un  $\bar{1}$  dans  $\mu$  sont engendrées par

$$\frac{bxq}{1 - abxq} \widehat{R}_{k,k}(a, b; xq; q).$$

Pour le dernier cas, celui où 1 apparaît non attaché dans la paire de surpartitions  $(\lambda, \mu)$ , on a encore  $v_2((\lambda, \mu)) \leq k - 1$ . Alors, en supprimant tous les 1 de  $\mu$  et en enlevant 1 à toutes les parts restantes, on voit que ces paires de surpartitions sont engendrées par

$$\frac{abxq}{1 - abxq} \widehat{R}_{k,k}(a, b; xq; q).$$

En regroupant toutes ces observations, on obtient (II.11).

Passons maintenant à (II.12). Comme précédemment, la fonction

$$\widehat{R}_{k,i}(a, b; x; q) - \widehat{R}_{k,i-1}(a, b; x; q)$$

est la série génératrice des paires de surpartitions comptées par  $r_{k,i}(s, t, m, n)$  telles que  $v_1((\lambda, \mu)) = i - 1$ . Et, encore une fois, on considère quatre cas :

1.  $f_1(\lambda) = i - 1$  ;
2.  $f_1(\lambda) = i - 2$  et  $f_{\bar{1}}(\lambda) = 1$  ;
3.  $f_1(\lambda) = i - 2$  et  $f_{\bar{1}}(\mu) = 1$  ;

4.  $f_1(\lambda) = i - 3$ ,  $f_{\bar{1}}(\lambda) = 1$  et  $f_{\bar{1}}(\mu) = 1$ .

Remarquons que comme  $i - 1 \geq 2$ , on ne peut pas avoir une occurrence non attachée de 1 dans  $(\lambda, \mu)$ .

Dans le premier de nos quatre cas,  $v_2((\lambda, \mu)) \leq k - i$ . Alors, en supprimant les  $i - 1$  parts égales à 1 de  $\lambda$  ainsi que tous les 1 de  $\mu$ , puis en enlevant 1 à chaque part restante, on voit que ces paires de surpartitions sont engendrées par

$$\frac{(xq)^{i-1}}{1 - abxq} \widehat{R}_{k, k-i+1}(a, b; xq; q).$$

Dans le deuxième cas, où  $f_1(\lambda) = i - 2$  et  $f_{\bar{1}}(\lambda) = 1$ , on a  $v_2((\lambda, \mu)) \leq k - i + 1$ . Alors en supprimant les  $i - 2$  parts égales à 1 et le  $\bar{1}$  de  $\lambda$ , ainsi que tous les 1 de  $\mu$ , puis en enlevant 1 à chaque part restante, on voit que ces paires de surpartitions sont engendrées par

$$\frac{axq(xq)^{i-2}}{1 - abxq} \widehat{R}_{k, k-i+2}(a, b; xq; q).$$

De même, les paires de surpartitions pour lesquelles  $f_1(\lambda) = i - 2$  et  $f_{\bar{1}}(\mu) = 1$  sont engendrées par

$$\frac{bxq(xq)^{i-2}}{1 - abxq} \widehat{R}_{k, k-i+2}(a, b; xq; q).$$

Enfin, si  $f_1(\lambda) = i - 3$ ,  $f_{\bar{1}}(\lambda) = 1$ , et  $f_{\bar{1}}(\mu) = 1$ , alors  $v_2((\lambda, \mu)) \leq k - i + 2$ . Alors, en supprimant les  $i - 3$  parts égales à 1 et le  $\bar{1}$  de  $\lambda$ , le  $\bar{1}$  et tous les 1 non surlignés de  $\mu$ , puis en enlevant 1 à chaque part restante, on voit que ces paires de surpartitions sont engendrées par

$$\frac{(axq)(bxq)(xq)^{i-3}}{1 - abxq} \widehat{R}_{k, k-i+3}(a, b; xq; q).$$

En regroupant toutes ces observations, on obtient (II.12) pour les  $\widehat{R}_{k,i}(a, b; x; q)$  et on peut maintenant en conclure que  $R_{k,i}(a, b; x; q) = \widehat{R}_{k,i}(a, b; x; q)$ , ce qui établit le théorème II.1.  $\square$

### II.3 Les $\widetilde{R}_{k,i}(a, b; x; q)$

Contrairement au cas des  $R_{k,i}(a, b; x; q)$ , il va falloir développer à partir de zéro la théorie des récurrences pour les  $\widetilde{R}_{k,i}(a, b; x; q)$ . Dans cette tâche, on suit de près la démarche

d'Andrews [15]. Pour  $k \geq 1$  et  $i \in \mathbb{Z}$ , on définit

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{2,k,i}(a, b, x; q) &= \frac{(-axq, -bxq)_\infty}{(xq)_\infty} \\ &\times \sum_{n \geq 0} \frac{(-ab)^n x^{(k-1)n} q^{kn^2+n-in-2\binom{n}{2}} (-1/a, -1/b)_n (x^2; q^2)_n (1-x^i q^{2ni})}{(q^2; q^2)_n (-axq, -bxq)_n (1-x)} \end{aligned}$$

et

$$\tilde{J}_{2,k,i}(a, b, x; q) = (abxq)_\infty \tilde{R}_{k,i}(a, b, x; q).$$

Quand  $a = 0$  ou  $b = 0$ , ces fonctions se simplifient et on retrouve les  $\tilde{H}_{k,i}$  et les  $\tilde{J}_{k,i}$  étudiées dans [48]. On va établir les résultats suivants :

**Proposition II.6.** *On a*

$$\tilde{H}_{2,k,0}(a, b, x; q) = 0, \quad (\text{II.13})$$

$$\tilde{H}_{2,k,-i}(a, b, x; q) = -x^{-i} \tilde{H}_{2,k,i}(a, b, x; q), \quad (\text{II.14})$$

$$\tilde{H}_{2,k,i}(a, b, x; q) - \tilde{H}_{2,k,i-2}(a, b, x; q) = x^{i-2} (1+x) \tilde{J}_{2,k,k-i+1}(a, b, x; q) \quad (\text{II.15})$$

et

$$\begin{aligned} \tilde{J}_{2,k,i}(a, b, x; q) &= \tilde{H}_{2,k,i}(a, b, xq; q) + (axq + bxq) \tilde{H}_{2,k,i-1}(a, b, xq; q) \\ &\quad + abx^2 q^2 \tilde{H}_{2,k,i-2}(a, b, xq; q). \end{aligned} \quad (\text{II.16})$$

*Démonstration.* Les égalités (II.13) et (II.14) sont immédiates. Pour les deux autres, on introduit quelques notations pour simplifier les calculs. On pose

$$\tilde{C}_{2,k,i}(a, b, x; q) = \frac{(xq)_\infty}{(-axq, -bxq)_\infty} \tilde{H}_{2,k,i}(a, b, x; q) \quad (\text{II.17})$$

et

$$\tilde{D}_{2,k,i}(a, b, x; q) = \frac{(xq)_\infty}{(-axq, -bxq)_\infty} \tilde{J}_{2,k,i}(a, b, x; q). \quad (\text{II.18})$$

On pose également

$$\tilde{M}_n(a, b, x; q) = \tilde{M}_n(x) = x^{(k-1)n} q^{(k-1)n^2+2n} (-ab)^n. \quad (\text{II.19})$$

Ces trois définitions sont analogues à celles données par Andrews dans [15]. Remarquons que

$$\tilde{M}_{n+1}(x) = -abx^{k-1} q^{2n(k-1)+k+1} \tilde{M}_n(x) \quad (\text{II.20})$$

et que

$$\tilde{M}_n(xq) = q^{(k-1)n} \tilde{M}_n(x). \quad (\text{II.21})$$

Nous sommes maintenant prêts à traiter le cas de (II.15). On a

$$\begin{aligned}
& \tilde{C}_{2,k,i}(a, b; x; q) - \tilde{C}_{2,k,i-2}(a, b; x; q) \\
&= \sum_{n \geq 0} \frac{\tilde{M}_n(x)(x^2; q^2)_n (-1/a, -1/b)_n}{(1-x)(q^2; q^2)_n (-axq, -bxq)_n} \times (q^{-in}(1-q^{2n}) + x^{i-2}q^{n(i-2)}(1-x^2q^{2n})) \\
&= (1+x) \sum_{n \geq 1} \frac{\tilde{M}_n(x)q^{-in}(x^2q^2; q^2)_{n-1}(-1/a, -1/b)_n}{(q^2; q^2)_{n-1}(-axq, -bxq)_n} \\
&+ x^{i-2}(1+x) \sum_{n \geq 0} \frac{\tilde{M}_n(x)q^{n(i-2)}(x^2q^2; q^2)_n(-1/a, -1/b)_n}{(q^2; q^2)_n(-axq, -bxq)_n} \\
&= (1+x) \sum_{n \geq 0} \frac{\tilde{M}_{n+1}(x)q^{-i(n+1)}(x^2q^2; q^2)_n(-1/a, -1/b)_{n+1}}{(q^2; q^2)_n(-axq, -bxq)_{n+1}} \\
&+ x^{i-2}(1+x) \sum_{n \geq 0} \frac{\tilde{M}_n(x)q^{n(i-2)}(x^2q^2; q^2)_n(-1/a, -1/b)_n}{(q^2; q^2)_n(-axq, -bxq)_n} \\
&= -abx^{k-1}q^{k-i+1}(1+x) \sum_{n \geq 0} \frac{\tilde{M}_n(x)q^{n(2k-i-2)}(x^2q^2; q^2)_n(-1/a, -1/b)_{n+1}}{(q^2; q^2)_n(-axq, -bxq)_{n+1}} \\
&+ x^{i-2}(1+x) \sum_{n \geq 0} \frac{\tilde{M}_n(x)q^{n(i-2)}(x^2q^2; q^2)_n(-1/a, -1/b)_n}{(q^2; q^2)_n(-axq, -bxq)_n} \\
&= -abx^{k-1}q^{k-i+1}(1+x) \sum_{n \geq 0} \frac{\tilde{M}_n(xq)q^{n(k-i-1)}(x^2q^2; q^2)_n(-1/a, -1/b)_{n+1}}{(q^2; q^2)_n(-axq, -bxq)_{n+1}} \\
&+ x^{i-2}(1+x) \sum_{n \geq 0} \frac{\tilde{M}_n(xq)q^{n(-k+i-1)}(x^2q^2; q^2)_n(-1/a, -1/b)_n}{(q^2; q^2)_n(-axq, -bxq)_n} \\
&= x^{i-2}(1+x) \sum_{n \geq 0} \frac{\tilde{M}_n(xq)q^{-n(k-i+1)}(x^2q^2; q^2)_n(-1/a, -1/b)_n}{(q^2; q^2)_n(-axq, -bxq)_n} \\
&- abx^{i-2}(1+x)(xq)^{k-i+1} \\
&\quad \times \sum_{n \geq 0} \frac{\tilde{M}_n(xq)q^{-n(k-i+1)+2n(k-i+1)-2n}(x^2q^2; q^2)_n(-1/a, -1/b)_{n+1}}{(q^2; q^2)_n(-axq, -bxq)_{n+1}} \\
&= x^{i-2}(1+x) \sum_{n \geq 0} \frac{\tilde{M}_n(xq)q^{-n(k-i+1)}(x^2q^2; q^2)_n(-1/a, -1/b)_n}{(q^2; q^2)_n(-axq, -bxq)_n} \\
&\times \left( 1 - \frac{abx^{k-i+1}q^{(2n+1)(k-i+1)-2n}(1+q^n/a)(1+q^n/b)}{(1-axq^{n+1})(1-bxq^{n+1})} \right) \\
&= x^{i-2}(1+x)\tilde{D}_{2,k,k-i+1}(a, b; x; q).
\end{aligned}$$

En multipliant les extrémités de la chaîne d'égalités ci-dessus par  $(-axq, -bxq)_\infty / (xq)_\infty$ ,

on obtient (II.15).

Passons maintenant à (II.16). En réduisant au même dénominateur l'expression entre parenthèses dans la définition des  $\tilde{R}_{k,i}(a, b; x; q)$ , on a

$$\begin{aligned}
 \tilde{D}_{2,k,i}(a, b; x; q) &= \sum_{n \geq 0} \frac{\tilde{M}_n(xq)q^{-in}(x^2q^2; q^2)_n(-1/a, -1/b)_n}{(q^2; q^2)_n(-axq, -bxq)_{n+1}} \\
 &\quad \times (1 + (a+b)xq^{n+1} + abx^2q^{2n+2} - x^i q^{(2n+1)i} (1 + (a+b)q^{-n} + abq^{-2n})) \\
 &= \sum_{n \geq 0} \frac{\tilde{M}_n(xq)q^{-in}(x^2q^2; q^2)_n(-1/a, -1/b)_n}{(q^2; q^2)_n(-axq, -bxq)_{n+1}} \\
 &\quad \times [(1 - x^i q^{(2n+1)i}) + (a+b)xq^{n+1}(1 - x^{i-1} q^{(2n+1)(i-1)}) \\
 &\quad + abx^2 q^{2n+2}(1 - x^{i-2} q^{(2n+1)(i-2)})] \\
 &= \frac{(1-xq)}{(1+axq)(1+bxq)} \\
 &\quad \left[ \sum_{n \geq 0} \frac{\tilde{M}_n(xq)q^{-in}((xq)^2; q^2)_n(-1/a, -1/b)_n(1 - (xq)^i q^{2ni})}{(q^2; q^2)_n(-a(xq)q, -b(xq)q)_n(1-xq)} \right. \\
 &\quad + (a+b)xq \\
 &\quad \times \sum_{n \geq 0} \frac{\tilde{M}_n(xq)q^{-(i-1)n}((xq)^2; q^2)_n(-1/a, -1/b)_n(1 - (xq)^{i-1} q^{2n(i-1)})}{(q^2; q^2)_n(-a(xq)q, -b(xq)q)_n(1-xq)} \\
 &\quad + abx^2 q^2 \\
 &\quad \left. \times \sum_{n \geq 0} \frac{\tilde{M}_n(xq)q^{-(i-2)n}((xq)^2; q^2)_n(-1/a, -1/b)_n(1 - (xq)^{i-2} q^{2n(i-2)})}{(q^2; q^2)_n(-a(xq)q, -b(xq)q)_n(1-xq)} \right] \\
 &= \frac{(1-xq)}{(1+axq)(1+bxq)} \left[ \tilde{C}_{2,k,i}(a, b; xq; q) \right. \\
 &\quad \left. + (a+b)xq \tilde{C}_{2,k,i-1}(a, b; xq; q) + abx^2 q^2 \tilde{C}_{2,k,i-2}(a, b; xq; q) \right].
 \end{aligned}$$

On multiplie les deux côtés de cette chaîne d'équations par  $(-axq, -bxq)_\infty / (xq)_\infty$ , ce qui achève la démonstration de (II.16). La proposition II.6 est donc démontrée.  $\square$

On a l'analogie du lemme II.5 pour les  $\tilde{R}_{k,i}(a, b; x; q)$  grâce à la proposition II.6.

**Lemme II.7.**

$$\tilde{R}_{k,1}(a, b; x; q) = \tilde{R}_{k,k}(a, b; xq; q), \tag{II.22}$$



$$\begin{aligned}
\tilde{R}_{k,2}(a, b; x; q) &= \frac{1}{1 - abxq} \tilde{R}_{k,k-1}(a, b; xq; q) \\
&+ \frac{xq}{1 - abxq} \tilde{R}_{k,k-1}(a, b; xq; q) \\
&+ \frac{axq}{1 - abxq} \tilde{R}_{k,k}(a, b; xq; q) \\
&+ \frac{bxq}{1 - abxq} \tilde{R}_{k,k}(a, b; xq; q),
\end{aligned} \tag{II.23}$$

et, pour  $3 \leq i \leq k$ ,

$$\begin{aligned}
\tilde{R}_{k,i}(a, b; x; q) - \tilde{R}_{k,i-2}(a, b; x; q) &= \frac{(xq)^{i-2}(1+xq)}{1 - abxq} \tilde{R}_{k,k-i+1}(a, b; xq; q) \\
&+ \frac{a(xq)^{i-2}(1+xq)}{1 - abxq} \tilde{R}_{k,k-i+2}(a, b; xq; q) \\
&+ \frac{b(xq)^{i-2}(1+xq)}{1 - abxq} \tilde{R}_{k,k-i+2}(a, b; xq; q) \\
&+ \frac{ab(xq)^{i-2}(1+xq)}{1 - abxq} \tilde{R}_{k,k-i+3}(a, b; xq; q).
\end{aligned} \tag{II.24}$$

*Démonstration du théorème II.2.* On commence par observer que pour une paire de surpartitions  $(\lambda, \mu)$  comptée par  $\tilde{r}_{k,i}(s, t, m, n)$ , si  $(\lambda, \mu) - \vec{1}$  vérifie l'égalité dans la condition (ii) du théorème II.1 en  $j$ , alors  $(\lambda, \mu)$  la vérifie aussi en  $j+1$ , la notation  $-\vec{1}$  signifiant qu'on enlève 1 à chaque part et qu'on supprime ensuite les zéros. Par conséquent, on a

$$\begin{aligned}
j f_j(\lambda - \vec{1}) + (j+1) v_{j+1}((\lambda, \mu) - \vec{1}) &= (j+1) f_{j+1}(\lambda) + (j+2) v_{j+2}((\lambda, \mu)) \\
&- (f_{j+1}(\lambda) + v_{j+2}((\lambda, \mu))) \\
&\equiv i - 1 + \mathcal{O}_{j+1}(\lambda) + \mathcal{O}_{j+1}(\mu) - (k-1) \pmod{2} \\
&\equiv k - i + \mathcal{O}_j(\lambda - \vec{1}) + \mathcal{O}_j(\mu - \vec{1}) \tag{II.25} \\
&+ \begin{cases} 0, & \text{si } \vec{1} \notin \lambda \text{ et } \vec{1} \notin \mu, \\ 0, & \text{si } \vec{1} \in \lambda \text{ et } \vec{1} \in \mu, \pmod{2}. \\ 1, & \text{sinon} \end{cases}
\end{aligned}$$

On procède maintenant comme dans la démonstration du théorème II.1. L'égalité (II.25) sera utilisée tout au long de la démonstration (parfois de façon implicite) pour garantir la condition (II.4) dans les paires de surpartitions considérées. On observe que la condition initiale  $\tilde{R}_{k,i}(a, b; 0; q) = 1$  et les équations aux  $q$ -différences du lemme II.7 définissent de manière unique les fonctions  $\tilde{R}_{k,i}(a, b; x; q)$ . Posons maintenant

$$\tilde{S}_{k,i}(a, b; x; q) = \sum_{s,t,m,n \geq 0} \tilde{r}_{k,i}(s, t, m, n) a^s b^t x^m q^n.$$

Encore une fois,  $\tilde{S}_{k,i}(a, b, 0; q) = 1$  car il n'y a qu'une paire de surpartitions sans aucune part : la paire vide. Donc, pour démontrer le théorème II.2, il suffit de montrer que les  $\tilde{S}_{k,i}(a, b, x; q)$  vérifient les mêmes équations aux  $q$ -différences que les  $\tilde{R}_{k,i}(a, b, x; q)$  du lemme II.7.

Commençons par (II.22). Une paire de surpartitions comptée par  $\tilde{r}_{k,1}(s, t, m, n)$  n'a pas de parts 1 et vérifie  $v_2((\lambda, \mu)) \leq k - 1$ . En enlevant 1 à chaque part et en faisant appel à (II.25), on voit que ces paires de surpartitions sont engendrées par  $\tilde{S}_{k,k}(a, b, xq; q)$ .

Pour (II.23), on remarque tout d'abord qu'une paire de surpartitions  $(\lambda, \mu)$  comptée par  $\tilde{r}_{k,2}(s, t, m, n)$  n'a pas de parts 1 ou vérifie  $v_1((\lambda, \mu)) = 1$ . S'il n'y a pas de parts 1,  $v_2((\lambda, \mu)) \leq k - 2$ . En effet, on ne peut pas avoir  $v_2((\lambda, \mu)) = k - 1$ , car on aurait alors  $1f_1(\lambda) + 2v_2((\lambda, \mu)) \equiv 0 \pmod{2}$ , ce qui violerait la condition (II.4) dans la définition des  $\tilde{r}_{k,2}(s, t, m, n)$ . En enlevant 1 à chaque part de  $(\lambda, \mu)$  et en faisant appel à (II.25), on voit que ces paires de surpartitions sont engendrées par

$$\tilde{S}_{k,k-1}(a, b, xq; q). \quad (\text{II.26})$$

Si  $v_1((\lambda, \mu)) = 1$ , quatre cas se présentent : 1 apparaît dans  $\lambda$ ,  $\bar{1}$  apparaît dans  $\lambda$ ,  $\bar{1}$  apparaît dans  $\mu$ , ou 1 apparaît non attaché. Dans le premier cas, on a  $v_2((\lambda, \mu)) \leq k - 2$ . En enlevant 1 à chaque part, puis en supprimant le 1 de  $\lambda$  ainsi que tous les 1 de  $\mu$ , on voit que ces paires sont engendrées par

$$\frac{xq}{1 - abxq} \tilde{S}_{k,k-1}(a, b, xq; q). \quad (\text{II.27})$$

Dans le deuxième cas, où  $\bar{1}$  apparaît dans  $\lambda$ , on a  $v_2((\lambda, \mu)) \leq k - 1$ . Remarquons que si  $v_2((\lambda, \mu)) = k - 1$ , on a  $1f_1(\lambda) + 2v_2((\lambda, \mu)) \equiv 0 \pmod{2}$ , qui est congru à  $2 - 1 + \mathcal{O}_1(\lambda) + \mathcal{O}_1(\mu)$  modulo 2 : la condition (II.4) est donc bien respectée. En supprimant le  $\bar{1}$  de  $\lambda$  ainsi que tous les 1 de  $\mu$ , puis en enlevant 1 à chaque part restante, on conclut (toujours à l'aide de (II.25)) que ces paires sont engendrées par

$$\frac{axq}{1 - abxq} \tilde{S}_{k,k}(a, b, xq; q). \quad (\text{II.28})$$

Le troisième cas, où  $\bar{1}$  apparaît dans  $\mu$ , est analogue au deuxième cas et les paires de surpartitions correspondantes sont engendrées par

$$\frac{bxq}{1 - abxq} \tilde{S}_{k,k}(a, b, xq; q). \quad (\text{II.29})$$

Enfin, on considère le cas où 1 apparaît non attaché dans la paire de surpartitions  $(\lambda, \mu)$ . Si  $v_2((\lambda, \mu)) = k - 1$ , la condition (II.4) serait violée, donc on a  $v_2((\lambda, \mu)) \leq k - 2$ . En supprimant tous les 1 non attachés et en enlevant 1 à chaque part restante, on voit que ces paires sont engendrées par

$$\frac{abxq}{1 - abxq} \tilde{S}_{k,k-1}(a, b; xq; q). \quad (\text{II.30})$$

En regroupant (II.26) – (II.30), on conclut que la récurrence (II.23) est vraie pour les fonctions  $\tilde{S}_{k,i}(a, b; x; q)$ .

On passe maintenant à la récurrence (II.24), pour laquelle on va procéder de façon très analogue. La fonction  $\tilde{S}_{k,i}(a, b; x; q) - \tilde{S}_{k,i-2}(a, b; x; q)$  est la série génératrice des paires de surpartitions  $(\lambda, \mu)$  qui sont comptées par  $\tilde{r}_{k,i}(s, t, m, n)$  et qui vérifient soit  $v_1((\lambda, \mu)) = i - 1$ , soit  $v_1((\lambda, \mu)) = i - 2$ . On considèrera huit cas, dont le dernier se divise en deux sous-cas ( $i > 3$  et  $i = 3$ ).

Dans le premier cas, supposons que  $v_1((\lambda, \mu)) = i - 1$  et  $f_1(\lambda) = i - 1$ . Alors  $v_2((\lambda, \mu)) \leq k - i$ . Les paires correspondantes sont engendrées par

$$\frac{(xq)^{i-1}}{1 - abxq} \tilde{S}_{k,k-i+1}(a, b; xq; q). \quad (\text{II.31})$$

Dans le deuxième cas, supposons que  $v_1((\lambda, \mu)) = i - 2$  et  $f_1(\lambda) = i - 2$ . Alors  $v_2((\lambda, \mu)) \leq k - i$ , car si on avait  $v_2((\lambda, \mu)) = k - i + 1$ , cela violerait la condition (II.4). Les paires correspondantes sont engendrées par

$$\frac{(xq)^{i-2}}{1 - abxq} \tilde{S}_{k,k-i+1}(a, b; xq; q). \quad (\text{II.32})$$

Dans le troisième cas, supposons que  $v_1((\lambda, \mu)) = i - 1$ ,  $f_{\overline{1}}(\lambda) = 1$  et  $f_1(\lambda) = i - 2$ . Alors  $v_2((\lambda, \mu)) \leq k - i + 1$ . Les paires correspondantes sont engendrées par

$$\frac{a(xq)^{i-1}}{1 - abxq} \tilde{S}_{k,k-i+2}(a, b; xq; q). \quad (\text{II.33})$$

Dans le quatrième cas, supposons que  $v_1((\lambda, \mu)) = i - 2$ ,  $f_{\overline{1}}(\lambda) = 1$  et  $f_1(\lambda) = i - 3$ . Alors  $v_2((\lambda, \mu)) \leq k - i + 1$ , car si on avait  $v_2((\lambda, \mu)) = k - i + 2$ , cela violerait la condition (II.4). Les paires correspondantes sont engendrées par

$$\frac{a(xq)^{i-2}}{1 - abxq} \tilde{S}_{k,k-i+2}(a, b; xq; q). \quad (\text{II.34})$$

Le cinquième et le sixième cas sont analogues respectivement au troisième et au quatrième, en remplaçant  $f_{\bar{1}}(\lambda) = 1$  par  $f_{\bar{1}}(\mu) = 1$ . Les paires correspondantes sont engendrées par

$$\frac{b(xq)^{i-1} + b(xq)^{i-2}}{1 - abxq} \tilde{S}_{k, k-i+2}(a, b; xq; q). \quad (\text{II.35})$$

Dans le septième cas, supposons que  $v_1((\lambda, \mu)) = i - 1$ ,  $f_{\bar{1}}(\lambda) = f_{\bar{1}}(\mu) = 1$  et  $f_1(\lambda) = i - 3$ . Alors  $v_2((\lambda, \mu)) \leq k - i + 2$ . Les paires correspondantes sont engendrées par

$$\frac{ab(xq)^{i-1}}{1 - abxq} \tilde{S}_{k, k-i+3}(a, b; xq; q). \quad (\text{II.36})$$

Pour le huitième cas, supposons que  $v_1((\lambda, \mu)) = i - 2$ ,  $f_{\bar{1}}(\lambda) = f_{\bar{1}}(\mu) = 1$  et  $f_1(\lambda) = i - 4$ . Cela nécessite de supposer que  $i \geq 4$ . Ici,  $v_2((\lambda, \mu)) \leq k - i + 2$  car la condition (II.4) serait violée si l'on avait  $v_2((\lambda, \mu)) = k - i + 3$ . Les paires correspondantes sont engendrées (pour  $i \geq 4$ ) par

$$\frac{ab(xq)^{i-2}}{1 - abxq} \tilde{S}_{k, k-i+3}(a, b; xq; q). \quad (\text{II.37})$$

Si  $i = 3$ , par contre, on ne peut pas avoir  $v_1((\lambda, \mu)) = i - 2 = 1$  et avoir en même temps une part  $\bar{1}$  à la fois dans  $\lambda$  et dans  $\mu$ . Cependant,  $1$  peut apparaître non attaché. On a alors  $v_2((\lambda, \mu)) \leq k - 1 (= k - i + 2)$ , et donc les paires correspondantes sont engendrées par (II.37) quand  $i = 3$ .

En additionnant (II.31) – (II.37), on obtient que (II.24) est vraie pour les  $\tilde{S}_{k,i}(a, b; x; q)$  et on peut maintenant conclure que  $\tilde{S}_{k,i}(a, b; x; q) = \tilde{R}_{k,i}(a, b; x; q)$ , ce qui achève la démonstration du théorème II.2.  $\square$

## II.4 Corollaires

En utilisant la définition alternative suivante des  $(a; q)_n$  (équivalente à la définition de la page 18 pour  $n \in \mathbb{N}$  mais valable pour tout  $n$  dans  $\mathbb{C}$ ) :

$$(a; q)_\infty = (a)_\infty = \prod_{i=0}^{\infty} (1 - aq^i)$$

$$(a; q)_n = (a)_n = \frac{(a)_\infty}{(aq^n)_\infty},$$

il est facile de montrer que

$$(a)_{-n} = \frac{(-1)^n q^{\binom{n+1}{2}}}{a^n (q/a)_n}. \quad (\text{II.38})$$

En utilisant cette égalité, on peut déduire de (II.1) et (II.2) les expressions suivantes des fonctions  $R_{k,i}(a, b; 1; q)$  et  $\tilde{R}_{k,i}(a, b; 1; q)$  :

$$R_{k,i}(a, b; 1; q) = \frac{(-aq, -bq)_\infty}{(q, abq)_\infty} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{(-1)^n q^{kn^2 + (k-i+1)n - \binom{n}{2}} (-1/a, -1/b)_n (ab)^n}{(-aq, -bq)_n} \quad (\text{II.39})$$

et

$$\tilde{R}_{k,i}(a, b; 1; q) = \frac{(-aq, -bq)_\infty}{(q, abq)_\infty} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{q^{kn^2 + kn - in - 2\binom{n}{2}} (-1/a, -1/b)_n (-ab)^n}{(-aq, -bq)_n}. \quad (\text{II.40})$$

En appliquant l'identité du produit triple de Jacobi, on trouve que de nombreuses spécialisations de (II.39) et de (II.40) sont des produits infinis avec de bonnes interprétations combinatoires. Grâce au théorème II.1, cela conduit à de nombreuses identités faisant intervenir les partitions, les surpartitions, et les paires de surpartitions. Par exemple, quand  $(a, b, q) \rightarrow (1, 1/q, q^2)$ , on obtient un produit infini dans (II.39) quand  $i = k$  :

$$\begin{aligned} R_{k,k}(1, 1/q; 1; q^2) &= \frac{(-q^2; q^2)_\infty (-q; q^2)_\infty}{(q^2; q^2)_\infty (q; q^2)_\infty} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{(-1)^n q^{2kn^2 + 2n - (n^2 - n)} (-1, -q; q^2)_n q^{-n}}{(-q^2, -q; q^2)_n} \\ &= \frac{(-q; q)_\infty}{(q; q)_\infty} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n \frac{q^{(2k-1)n^2 + 2n}}{1 + q^{2n}} \\ &= \frac{2(-q; q)_\infty}{(q; q)_\infty} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{(2k-1)n^2 + 2n}}{1 + q^{2n}} + \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{(-1)^n q^{(2k-1)n^2 + 2n}}{1 + q^{2n}} \right) \\ &= \frac{2(-q; q)_\infty}{(q; q)_\infty} \left( \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n q^{(2k-1)n^2 + 2n}}{1 + q^{2n}} + \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n q^{(2k-1)n^2}}{1 + q^{2n}} \right) \end{aligned}$$

(dans la deuxième somme, on a changé  $n$  en  $-n$  puis multiplié par  $q^{2n}$  en haut et en bas)

$$\begin{aligned} &= \frac{(-q; q)_\infty}{(q; q)_\infty} \left( 1 + 2 \sum_{n \geq 1} (-1)^n q^{(2k-1)n^2} \right) \\ &= \frac{(-q; q)_\infty}{(q; q)_\infty} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n q^{(2k-1)n^2} \\ &= \frac{(-q; q)_\infty}{(q; q)_\infty} \frac{(q^{2k-1}; q^{2k-1})_\infty}{(-q^{2k-1}; q^{2k-1})_\infty} \end{aligned}$$

où la dernière égalité vient de (I.8) et du théorème d'Euler qui implique que  $(-q; q)_\infty = (q; q^2)_\infty$ .

Dans les  $r_{k,k}(s, t, m, n)$  du théorème II.1, la spécialisation  $(a, b, q) \rightarrow (1, 1/q, q^2)$  correspond à transformer une paire de surpartitions  $(\lambda, \mu)$  en une surpartition de la façon

suivante : une part  $j$  non surlignée de  $\lambda$  est transformée en une part  $2j$ , une part  $\bar{j}$  de  $\lambda$  est transformée en une part  $\overline{2j}$ , une part  $j$  non surlignée de  $\mu$  est transformée en une part  $2j - 1$  et une part  $\bar{j}$  de  $\mu$  est transformée en une part  $\overline{2j - 1}$ . La notion de part non attachée se transpose alors aux surpartitions en disant qu'une part impaire  $2j - 1$  apparaît non attachée si  $2j, \overline{2j}$ , et  $\overline{2j - 1}$  n'apparaissent pas. La valuation  $v_j((\lambda, \mu))$  devient une valuation définie sur les surpartitions pour des nombres pairs :  $v_{2j}^1(\lambda) = f_{2j}(\lambda) + f_{\overline{2j-1}}(\lambda) + f_{\overline{2j}}(\lambda) + \chi(2j - 1 \text{ apparaît non attaché dans } \lambda)$ .

Pour le produit infini, on observe que

$$\frac{(q^{2k-1}; q^{2k-1})_\infty}{(q; q)_\infty} = \prod_{\substack{i=1 \\ 2k-1 \nmid i}}^{\infty} \frac{1}{1 - q^i}$$

est la série génératrice des partitions en parts non divisibles par  $2k - 1$ . De même,

$$\frac{(-q; q)_\infty}{(-q^{2k-1}; q^{2k-1})_\infty}$$

est la série génératrice des partitions en parts distinctes non divisibles par  $2k - 1$ . Ces deux remarques impliquent que la forme produit de  $R_{k,k}(1, 1/q; 1; q^2)$  calculée précédemment est la série génératrice des surpartitions en parts non divisibles par  $2k - 1$ , d'où le résultat suivant, qui est l'analogie pour les surpartitions des identités d'Andrews-Gordon-Göllnitz [12] :

**Corollaire II.8** (Lovejoy, [72]). *Soit  $A_k^1(n)$  le nombre de surpartitions de  $n$  en parts non divisibles par  $2k - 1$ . Soit  $B_k^1(n)$  le nombre de surpartitions  $\lambda$  de  $n$  telles que*

$$(i) \quad v_2^1(\lambda) \leq k - 1;$$

$$(ii) \quad \text{pour tout } j \geq 1, \text{ on a } f_{2j}(\lambda) + v_{2j+2}^1(\lambda) \leq k - 1.$$

Alors  $A_k^1(n) = B_k^1(n)$ .

Tous les autres résultats mentionnés après le théorème II.2 se déduisent de la même façon. Le théorème de Gordon [59] correspond au cas  $R_{k,i}(0, 0; 1; q)$ , le théorème de Bressoud [36] au cas  $\tilde{R}_{k,i}(0, 0; 1; q)$ , la généralisation d'Andrews des identités de Göllnitz-Gordon [12] au cas  $R_{k,i}(0, 1/q; 1; q^2)$ , et les théorèmes de Gordon pour les surpartitions [71] aux cas  $R_{k,k}(0, 1; 1; q)$  et  $R_{k,1}(0, 1/q; 1; q)$ . Pour plus de détails, on pourra se reporter à [49, 48].

Un autre exemple, où ni  $a$  ni  $b$  ne sont nuls, est le cas  $a = \mathbf{i}$  et  $b = -\mathbf{i}$  de (II.40), où  $\mathbf{i} = \sqrt{-1}$ . On obtient un produit infini quand  $i = k - 1$  :

$$\begin{aligned}
\tilde{R}_{k,k-1}(\mathbf{i}, -\mathbf{i}; 1; q) &= \frac{(-q^2; q^2)_\infty}{(q)_\infty^2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} 2 \frac{(-1)^n q^{(k-1)n^2+2n}}{1 + q^{2n}} \\
&= \frac{2(-q^2; q^2)_\infty}{(q)_\infty^2} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{(k-1)n^2+2n}}{1 + q^{2n}} + \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{(-1)^n q^{(k-1)n^2+2n}}{1 + q^{2n}} \right) \\
&= \frac{2(-q^2; q^2)_\infty}{(q)_\infty^2} \left( \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n q^{(k-1)n^2+2n}}{1 + q^{2n}} + \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n q^{(k-1)n^2}}{1 + q^{2n}} \right) \\
&= \frac{(-q^2; q^2)_\infty}{(q)_\infty^2} \left( 1 + 2 \sum_{n \geq 1} (-1)^n q^{(k-1)n^2} \right) \\
&= \frac{(-q^2; q^2)_\infty}{(q)_\infty^2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n q^{(k-1)n^2} \\
&= \frac{(-q^2; q^2)_\infty (q^{k-1}; q^{k-1})_\infty}{(q)_\infty^2 (-q^{k-1}; q^{k-1})_\infty} \quad (\text{par (I.8)}) \\
&= \frac{(-q)_\infty (-q^2; q^2)_\infty (q^{k-1}; q^{k-1})_\infty}{(q)_\infty (q^2; q^2)_\infty (-q^{k-1}; q^{k-1})_\infty}.
\end{aligned}$$

En appliquant le théorème II.2 et en séparant les parties réelle et imaginaire des séries génératrices, on obtient deux identités pondérées, dont l'une (correspondant à la partie réelle) est la suivante :

**Corollaire II.9.** *Soit  $A_k^2(n)$  le nombre de paires de surpartitions  $(\lambda, \mu)$  où les parts de  $\mu$  sont paires et les parts de  $\lambda$  ne sont pas divisibles par  $k - 1$ . Soit*

$$B_k^2(n) = \sum_{(\lambda, \mu) \in \mathcal{B}_{k,k-1}} \mathbf{i}^{\text{nombre de parts surlignées de } \lambda} (-\mathbf{i})^{\text{nombre de parts surlignées de } \mu}$$

où  $\mathcal{B}_{k,k-1}$  est l'ensemble des paires de surpartitions de  $n$  vérifiant les conditions du théorème II.2 pour  $i = k - 1$  (c'est-à-dire les conditions (i) et (ii) du théorème II.1 et (II.4) s'il y a égalité dans la condition (ii)) et ayant un nombre pair de parts surlignées. Alors  $A_k^2(n) = B_k^2(n)$ .

Notons que  $B_k^2(n)$  est bien un nombre réel, car il peut s'écrire

$$B_k^2(n) = \sum_{(\lambda, \mu) \in \mathcal{B}_{k,k-1}} (-1)^{\text{nombre de parts surlignées de } \mu} \times \mathbf{i}^{\text{nombre de parts surlignées de } (\lambda, \mu)}$$

et le nombre de parts surlignées de  $(\lambda, \mu)$  est pair. Par ailleurs, il est intéressant de remarquer que  $A_k^2(n)$  est une fonction non pondérée, tandis que  $B_k^2(n)$  est pondérée. D'autres interprétations non pondérées de  $A_k^2(n)$  se trouvent dans [74].

Dans notre dernier exemple, on considère le cas  $abq = 1$ . Le problème est que dans ce cas, le facteur  $1/(abxq)_\infty = 1/(x)_\infty$  qui apparaît dans  $R_{k,i}(a, b; x; q)$  et  $\tilde{R}_{k,i}(a, b; x; q)$  tend vers l'infini quand  $x$  tend vers 1. Pour remédier à ce problème, on ne considèrera pas  $R_{k,i}(a, b; 1; q)$  ou  $\tilde{R}_{k,i}(a, b; 1; q)$  comme avant, mais les limites

$$\lim_{x \rightarrow 1} (1-x)R_{k,i}(a, b; x; q) \quad (\text{II.41})$$

et

$$\lim_{x \rightarrow 1} (1-x)\tilde{R}_{k,i}(a, b; x; q). \quad (\text{II.42})$$

Ces limites se déduisent facilement de (I.8) :

$$\lim_{x \rightarrow 1} (1-x)R_{k,i}(a, 1/aq; x; q) = \frac{(-aq, -1/a)_\infty (q^{i-1}, q^{2k-i}, q^{2k-1}; q^{2k-1})_\infty}{(q)_\infty^2} \quad (\text{II.43})$$

et

$$\lim_{x \rightarrow 1} (1-x)\tilde{R}_{k,i}(a, 1/aq; x; q) = \frac{(-aq, -1/a)_\infty (q^{i-1}, q^{2k-i-1}, q^{2k-2}; q^{2k-2})_\infty}{(q)_\infty^2}. \quad (\text{II.44})$$

D'autre part, en invoquant le lemme d'Abel, selon lequel si  $|x| < 1$  et  $\lim_{m \rightarrow \infty} A_m$  existe, on a

$$\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \sum_{m \geq 0} A_m x^m = \lim_{m \rightarrow \infty} A_m,$$

les limites (II.43) et (II.44) peuvent s'interpréter comme les séries génératrices des paires de surpartitions comptées respectivement par  $r_{k,i}(s, t, \infty, n)$  et  $\tilde{r}_{k,i}(s, t, \infty, n)$  (ici, le coefficient  $A_m$  du lemme d'Abel est la série génératrice des paires de surpartitions ayant  $m$  parts et vérifiant les conditions du théorème II.1 ou du théorème II.2). Le nombre infini de parts correspond nécessairement à un nombre infini de zéros non surlignés dans  $\mu$ , puisque le facteur  $1/(abxq)_\infty$  vient des parts non surlignées de  $\mu$ . On peut enlever ces zéros non surlignés (une surpartition avec une infinité de zéros non surlignés est équivalente à une surpartition sans zéros), ce qui nous donne une paire de surpartitions normale.

Par exemple, si on prend  $(a, b, q) = (1/q, 1/q, q^2)$ , alors le produit infini dans (II.43) vaut

$$\frac{(-q; q^2)_\infty^2 (q^{2i-2}, q^{4k-2i}, q^{4k-2}; q^{4k-2})_\infty}{(q^2; q^2)_\infty^2}.$$

Pour les paires de surpartitions du théorème II.1, les parts  $j$  de  $\lambda$  deviennent  $2j$ , les parts  $\bar{j}$  de  $\lambda$  ou  $\mu$  deviennent  $2j - 1$ , et les parts  $j$  de  $\mu$  deviennent  $2j - 2$ . Étant donné que les parts surlignées sont nécessairement impaires, le surlignage devient inutile et on peut



parler simplement de paires de partitions sans parts impaires répétées. La définition d'une part non attachée devient celle-ci : on dit qu'une part paire  $2j$  de  $\mu$  est non attachée dans la paire de partitions  $(\lambda, \mu)$  si  $2j+1$  n'apparaît ni dans  $\lambda$  ni dans  $\mu$  et que  $2j+2$  n'apparaît pas dans  $\mu$ . La valuation devient une valuation pour les entiers pairs :

$$v_{2j}^3((\lambda, \mu)) = f_{2j}(\lambda) + f_{2j-1}(\lambda) + f_{2j-1}(\mu) + \chi(2j - 2 \text{ apparaît non attaché}).$$

On peut alors énoncer le résultat :

**Corollaire II.10.** *Pour  $i \geq 2$ , soit  $A_{k,i}^3(n)$  le nombre de paires de partitions  $(\lambda, \mu)$  de  $n$  telles que les parts impaires ne peuvent pas être répétées, et les parts paires de  $\mu$  ne sont pas congrues à 0 ou  $\pm(2i-2)$  modulo  $4k-2$ . Soit  $B_{k,i}^3(n)$  le nombre de paires de partitions  $(\lambda, \mu)$  de  $n$  sans parts impaires répétées, où*

$$(i) \quad f_1(\lambda) + f_2(\lambda) + f_1(\mu) \leq i - 1;$$

$$(ii) \quad \text{pour tout } j \geq 1, \text{ on a } f_{2j}(\lambda) + v_{2j+2}^3((\lambda, \mu)) \leq k - 1.$$

Alors  $A_{k,i}^3(n) = B_{k,i}^3(n)$ .

Naturellement, on montre qu'il existe un résultat similaire pour les  $\tilde{R}_{k,i}$  et  $(a, b, q) \rightarrow (1/q, 1/q, q^2)$  en utilisant (II.44) et le théorème II.2. La démonstration est laissée au lecteur.

## II.5 Chemins

Dans les trois prochaines sections, on va prouver les théorèmes II.3 et II.4. On commence, dans cette section, par définir les chemins comptés par  $E_{k,i}(s, t, n)$  et  $\tilde{E}_{k,i}(s, t, n)$  et montrer que leurs séries génératrices sont respectivement (II.39) et (II.40). Cette section est une généralisation des travaux sur les surpartitions exposés dans [49] et [48], qui généralisent eux-mêmes des résultats et des méthodes d'Andrews et Bressoud [27, section 2].

On étudie des chemins situés dans le premier quadrant qui utilisent cinq types de pas unitaires :

- Nord-Est (NE) :  $(x, y) \rightarrow (x + 1, y + 1)$  ;
- Sud-Est (SE) :  $(x, y) \rightarrow (x + 1, y - 1)$  ;

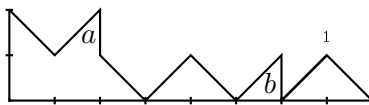
- Sud (S) :  $(x, y) \rightarrow (x, y - 1)$ ;
- Sud-Ouest (SO) :  $(x, y) \rightarrow (x - 1, y - 1)$ ;
- Est (E) :  $(x, 0) \rightarrow (x + 1, 0)$ .

Ces chemins vérifient les conditions suivantes :

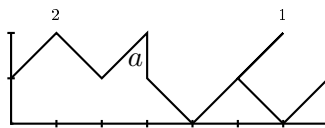
- Un pas S ou SO ne peut apparaître qu'après un pas NE,
- Un pas E ne peut apparaître qu'à hauteur 0 (la *hauteur* d'un sommet est son ordonnée),
- Les chemins commencent sur l'axe des ordonnées et se terminent sur l'axe des abscisses.

La notion la plus importante associée à ces chemins est la notion de pic. Un *pic* est un sommet précédé d'un pas NE et suivi d'un pas S (auquel cas il peut être étiqueté par  $a$  ou par  $b$  et appelé respectivement  $a$ -pic ou  $b$ -pic), d'un pas SO (auquel cas il est appelé  $ab$ -pic) ou d'un pas SE (auquel cas il est appelé 1-pic). On dit qu'un pic est *marqué par*  $a$  si c'est un  $a$ -pic ou un  $ab$ -pic, et qu'il est *marqué par*  $b$  si c'est un  $b$ -pic ou un  $ab$ -pic.

L'*indice majeur* d'un chemin est la somme des abscisses de ses pics. Pour éviter toute ambiguïté dans la représentation graphique d'un chemin, on ajoute une étiquette aux  $a$ -pics et aux  $b$ -pics et on ajoute un nombre au-dessus d'un sommet s'il y a un ou plusieurs  $ab$ -pics qui s'y trouvent (voir les figures II.1 et II.2).



**FIG. II.1 :** Exemple de chemin. Il y a deux 1-pics (situés en  $(4, 1)$  et en  $(7, 1)$ ), un  $a$ -pic (situé en  $(2, 2)$ ), un  $b$ -pic (situé en  $(6, 1)$ ), et un  $ab$ -pic (situé en  $(7, 1)$ ). La séquence des pas est SE-NE-S-SE-NE-SE-NE-S-NE-SO-NE-SE. L'indice majeur est  $2 + 4 + 6 + 7 + 7 = 26$ .



**FIG. II.2 :** Autre exemple. Il y a un 1-pic (situé en  $(1, 2)$ ), un  $a$ -pic (situé en  $(3, 2)$ ) et quatre  $ab$ -pics (situés en  $(1, 2)$ ,  $(1, 2)$ ,  $(6, 2)$  et  $(7, 1)$ ). La séquence des pas est NE-SO-NE-SO-NE-SE-NE-S-SE-NE-NE-SO-SE-NE-SO. L'indice majeur est  $1 + 1 + 1 + 3 + 6 + 7 = 19$ .

On appelle ces chemins *chemins de Bressoud-Burge généralisés*, car ils généralisent les chemins de Bressoud-Burge présentés dans l'introduction. Quand il n'y a pas de pics

marqués par  $b$ , on retrouve les chemins étudiés dans [49] et [48], et quand il n'y a que des 1-pics, on retrouve les chemins de Bressoud-Burge.

On définit maintenant les  $(k, i)$ -conditions qui apparaissent dans les théorèmes II.3 et II.4.

**Définition II.11.** *On dit qu'un chemin vérifie les  $(k, i)$ -conditions impaires s'il commence à la hauteur  $k - i$  et que sa hauteur est toujours inférieure à  $k$ . On dit qu'un chemin vérifie les  $(k, i)$ -conditions paires s'il vérifie les  $(k, i)$ -conditions impaires et que pour tout pic de coordonnées  $(x, k - 1)$ ,  $x - u + v \equiv i - 1 \pmod{2}$  où  $u$  est le nombre de  $a$ -pics à la gauche du pic et  $v$  est le nombre de  $b$ -pics à la gauche du pic.*

Cette terminologie vient du fait que les  $(k, i)$ -conditions impaires généralisent les conditions vérifiées par les chemins des identités d'Andrews-Gordon ; dans ces identités apparaissent des partitions vérifiant des conditions de congruence modulo un nombre impair. Les  $(k, i)$ -conditions paires, quant à elles, sont liées au théorème de Bressoud où interviennent des conditions de congruence modulo un nombre pair.

Par exemple, le chemin de la figure II.1 vérifie les  $(3, 1)$ -conditions paires (et donc les  $((3, 1)$ -conditions impaires) et celui de la figure II.2 vérifie les  $(3, 2)$ -conditions paires.

On considère d'abord les chemins vérifiant les  $(k, i)$ -conditions impaires. Pour cela, notons  $E_{k,i}(s, t, n, N)$  le nombre de chemins d'indice majeur  $n$  ayant  $N$  pics, dont  $s$  sont marqués par  $a$  et  $t$  par  $b$ , et vérifiant les  $(k, i)$ -conditions impaires. Pour  $0 < i \leq k$ , soit  $\mathcal{E}_{k,i}(N)$  la série génératrice de ces chemins, c'est-à-dire  $\mathcal{E}_{k,i}(N) = \mathcal{E}_{k,i}(a, b, q, N) = \sum_{s,t,n} E_{k,i}(s, t, n, N) a^s b^t q^n$ . De plus, pour  $0 \leq i < k$ , soit  $\Gamma_{k,i}(N)$  la série génératrice des chemins obtenus en supprimant le premier pas NE d'un chemin compté par  $\mathcal{E}_{k,i+1}(N)$  qui commence par un pas NE.

**Proposition II.12.** *On a les égalités suivantes :*

$$\mathcal{E}_{k,i}(N) = q^N \Gamma_{k,i-1}(N) + q^N \mathcal{E}_{k,i+1}(N) \quad (0 < i < k), \quad (\text{II.45})$$

$$\Gamma_{k,i}(N) = q^N \Gamma_{k,i-1}(N) + (a + b + q^{N-1} + abq^{1-N}) \mathcal{E}_{k,i+1}(N - 1) \quad (0 < i < k), \quad (\text{II.46})$$

$$\mathcal{E}_{k,k}(N) = q^N \Gamma_{k,k-1}(N) + q^N \mathcal{E}_{k,k}(N), \quad (\text{II.47})$$

$$\mathcal{E}_{k,i}(0) = 1, \quad (\text{II.48})$$

$$\Gamma_{k,0}(N) = 0. \quad (\text{II.49})$$

*Démonstration.* Le seul chemin compté par  $\mathcal{E}_{k,i}(0)$  est celui qui va de  $(0, k-i)$  à  $(k-i, 0)$  en n'utilisant que des pas SE. Ce chemin a pour indice majeur 0, puisqu'il n'a pas de pics. On a donc  $\mathcal{E}_{k,i}(0) = 1$  : (II.48) est vérifiée.

Si le chemin qu'on considère a au moins un pic, on peut enlever son premier pas et décaler le chemin d'une unité vers la gauche. Si  $0 < i < k$ , un chemin compté par  $\mathcal{E}_{k,i}(N)$  commence par un pas NE ou un pas SE. S'il commence par un pas NE, la suppression de ce premier pas et le décalage vers la gauche produisent un chemin compté par  $\Gamma_{k,i-1}(N)$  dont l'indice majeur est inférieur de  $N$  à celui du chemin initial, car l'abscisse de chacun des  $N$  pics a diminué de 1 : le chemin initial est donc compté par  $q^N \Gamma_{k,i-1}(N)$ . Si notre chemin commence par un pas SE, le même raisonnement montre qu'il est compté par  $q^N \mathcal{E}_{k,i+1}(N)$ . On obtient ainsi (II.45).

Pour (II.46), souvenons-nous que  $\Gamma_{k,i}(N)$  est la série génératrice des chemins obtenus en supprimant le premier pas NE d'un chemin compté par  $\mathcal{E}_{k,i+1}(N)$  et commençant par un pas NE. Les chemins comptés par  $\Gamma_{k,i}(N)$  peuvent commencer par un pas NE (et sont alors comptés par  $q^N \Gamma_{k,i-1}(N)$ , par le même raisonnement qu'au paragraphe précédent), un pas S ( $(a+b)\mathcal{E}_{k,i+1}(N-1)$ ), un pas SE ( $q^{N-1}\mathcal{E}_{k,i+1}(N-1)$ ) ou un pas SO ( $abq^{1-N}\mathcal{E}_{k,i+1}(N-1)$ ).

Pour démontrer (II.47), on remarque qu'un chemin compté par  $\mathcal{E}_{k,k}(N)$  peut commencer par un pas NE ( $q^N \Gamma_{k,k-1}(N)$ ) ou un pas E ( $q^N \mathcal{E}_{k,k}(N)$ ).

Enfin, comme la hauteur des chemins est inférieure à  $k$ , aucun chemin de hauteur initiale  $k-1$  ne peut commencer par un pas NE, donc  $\Gamma_{k,0}(N) = 0$  : (II.49) est établie.  $\square$

Remarquons que les récurrences et les conditions initiales ci-dessus définissent de manière unique les séries génératrices  $\mathcal{E}_{k,i}(N)$  et  $\Gamma_{k,i}(N)$ . On va utiliser cette remarque pour démontrer les expressions suivantes de ces séries génératrices :

### **Théorème II.13.**

$$\mathcal{E}_{k,i}(N) = (ab)^N (-1/a, -1/b)_N q^N \sum_{n=-N}^N \frac{(-1)^n q^{n((2k-1)n+3)/2+(k-i-1)n}}{(q)_{N-n} (q)_{N+n}}$$

$$\Gamma_{k,i}(N) = (ab)^N (-1/a, -1/b)_N \sum_{n=-N}^{N-1} \frac{(-1)^n q^{n((2k-1)n+3)/2+(k-i-2)n}}{(q)_{N-n-1} (q)_{N+n}}$$

*Démonstration.* Posons

$$\mathcal{E}'_{k,i}(N) = (ab)^N (-1/a, -1/b)_N q^N \sum_{n=-N}^N \frac{(-1)^n q^{n((2k-1)n+3)/2+(k-i-1)n}}{(q)_{N-n} (q)_{N+n}}$$

et

$$\Gamma'_{k,i}(N) = (ab)^N (-1/a, -1/b)_N \sum_{n=-N}^{N-1} \frac{(-1)^n q^{n((2k-1)n+3)/2+(k-i-2)n}}{(q)_{N-n-1}(q)_{N+n}}.$$

On va montrer que ces fonctions vérifient les cinq équations de la proposition II.12.

On commence par (II.45) :

$$\begin{aligned} & q^N \mathcal{E}'_{k,i+1}(N) + q^N \Gamma'_{k,i-1}(N) \\ &= (ab)^N (-1/a, -1/b)_N q^N \sum_{n=-N}^N \frac{(-1)^n q^{n((2k-1)n+3)/2+(k-i-2)n}}{(q)_{N-n}(q)_{N+n}} q^N \\ &+ (ab)^N (-1/a, -1/b)_N \sum_{n=-N}^{N-1} \frac{(-1)^n q^{n((2k-1)n+3)/2+(k-i-1)n}}{(q)_{N-n-1}(q)_{N+n}} q^N \\ &= (ab)^N (-1/a, -1/b)_N q^N \sum_{n=-N}^{N-1} \frac{(-1)^n q^{n((2k-1)n+3)/2+(k-i-1)n}}{(q)_{N-n}(q)_{N+n}} (q^{N-n} + (1 - q^{N-n})) \\ &+ (ab)^N (-1/a, -1/b)_N q^N \frac{(-1)^N q^{N((2k-1)N+3)/2+(k-i-1)N}}{(q)_0 (q)_{2N}} \\ &= (ab)^N (-1/a, -1/b)_N q^N \sum_{n=-N}^N \frac{(-1)^n q^{n((2k-1)n+3)/2+(k-i-1)n}}{(q)_{N-n}(q)_{N+n}} \\ &= \mathcal{E}'_{k,i}(N). \end{aligned}$$

Ensuite, on établit (II.46) :

$$\begin{aligned}
& q^N \Gamma'_{k,i-1}(N) + (a + b + q^{N-1} + q^{1-N} ab) \mathcal{E}'_{k,i+1}(N-1) \\
&= (ab)^N (-1/a, -1/b)_N \sum_{n=-N}^{N-1} \frac{(-1)^n q^{n((2k-1)n+3)/2+(k-i-1)n}}{(q)_{N-n-1} (q)_{N+n}} q^N \\
&+ (ab)^{N-1} (-1/a, -1/b)_{N-1} \sum_{n=-N+1}^{N-1} \frac{(-1)^n q^{n((2k-1)n+3)/2+(k-i-2)n}}{(q)_{N-n-1} (q)_{N+n-1}} (a + b + q^{N-1} + q^{1-N} ab) \\
&= (ab)^N (-1/a, -1/b)_N \sum_{n=-N}^{N-1} \frac{(-1)^n q^{n((2k-1)n+3)/2+(k-i-2)n}}{(q)_{N-n-1} (q)_{N+n}} q^{N+n} \\
&+ (ab)^{N-1} (-1/a, -1/b)_{N-1} \sum_{n=-N+1}^{N-1} \frac{(-1)^n q^{n((2k-1)n+3)/2+(k-i-2)n}}{(q)_{N-n-1} (q)_{N+n-1}} \\
&\quad \times abq^{1-N} (1 + a^{-1} q^{N-1}) (1 + b^{-1} q^{N-1}) \\
&= (ab)^N (-1/a, -1/b)_N \sum_{n=-N+1}^{N-1} \frac{(-1)^n q^{n((2k-1)n+3)/2+(k-i-2)n}}{(q)_{N-n-1} (q)_{N+n}} (q^{N+n} + (1 - q^{N+n})) \\
&+ (ab)^N (-1/a, -1/b)_N \frac{(-1)^{-N} q^{-N((2k-1)(-N)+3)/2+(k-i-2)(-N)}}{(q)_{2N-1} (q)_0} \\
&= (ab)^N (-1/a, -1/b)_N \sum_{n=-N}^{N-1} \frac{(-1)^n q^{n((2k-1)n+3)/2+(k-i-2)n}}{(q)_{N-n-1} (q)_{N+n}} \\
&= \Gamma'_{k,i}(N).
\end{aligned}$$

Pour démontrer (II.47), on montre que  $\mathcal{E}'_{k,k+1}(N) = \mathcal{E}'_{k,k}(N)$  puis on combine ce résultat avec (II.45) :

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}'_{k,k+1}(N) &= (ab)^N (-1/a, -1/b)_N q^N \sum_{n=-N}^N \frac{(-1)^n q^{n((2k-1)n+3)/2-2n}}{(q)_{N-n} (q)_{N+n}} \\
&= (ab)^N (-1/a, -1/b)_N q^N \sum_{n=-N}^N \frac{(-1)^n q^{-n((2k-1)(-n)+3)/2+2n}}{(q)_{N+n} (q)_{N-n}} \\
&\text{(en remplaçant } n \text{ par } -n) \\
&= (ab)^N (-1/a, -1/b)_N q^N \sum_{n=-N}^N \frac{(-1)^n q^{n((2k-1)n+3)/2-n}}{(q)_{N+n} (q)_{N-n}} \\
&= \mathcal{E}'_{k,k}(N).
\end{aligned}$$

On a donc, en utilisant (II.45),

$$\mathcal{E}'_{k,k}(N) = q^N \mathcal{E}'_{k,k}(N) + q^N \Gamma'_{k,k-1}(N).$$

Il est immédiat que (II.48) est vérifiée. Enfin, pour (II.49), on a

$$\begin{aligned} \Gamma'_{k,0}(N) &= (ab)^N (-1/a, -1/b)_N \sum_{n=-N}^{N-1} \frac{(-1)^n q^{n((2k-1)n+3)/2+(k-2)n}}{(q)_{N-n-1} (q)_{N+n}} \\ &= (ab)^N (-1/a, -1/b)_N \left( \sum_{n=0}^{N-1} \frac{(-1)^n q^{n((2k-1)n+3)/2+(k-2)n}}{(q)_{N-n-1} (q)_{N+n}} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=-N}^{-1} \frac{(-1)^n q^{n((2k-1)n+3)/2+(k-2)n}}{(q)_{N-n-1} (q)_{N+n}} \right). \end{aligned}$$

En remplaçant  $n$  par  $-n-1$  dans la deuxième somme et en simplifiant, on obtient l'opposé de la première somme, ce qui prouve que  $\Gamma'_{k,0}(N) = 0$ .

Puisque  $\mathcal{E}'_{k,i}(N)$  et  $\Gamma'_{k,i}(N)$  vérifient les mêmes récurrences et les mêmes conditions initiales que  $\mathcal{E}_{k,i}(N)$  et  $\Gamma_{k,i}(N)$ , on a  $\mathcal{E}_{k,i}(N) = \mathcal{E}'_{k,i}(N)$  et  $\Gamma_{k,i}(N) = \Gamma'_{k,i}(N)$ , ce qui achève la démonstration.  $\square$

Le lemme suivant est le dernier résultat dont on a besoin pour pouvoir montrer que  $E_{k,i}(s, t, n) = B_{k,i}(s, t, n)$  dans le théorème II.3.

**Lemme II.14.** *Pour tout entier  $n$ , on a*

$$\sum_{N \geq |n|} \frac{(-q^n/a, -q^n/b)_{N-n} (abq)^{N-n} (-aq, -bq)_n}{(q)_{N+n} (q)_{N-n}} = \frac{(-aq, -bq)_\infty}{(q, abq)_\infty}. \quad (\text{II.50})$$

*Démonstration.* On ne montre que le cas  $n \geq 0$ . Le cas  $n < 0$  est identique car on montre facilement, en utilisant (II.38), que

$$\frac{(-q^{-n}/a, -q^{-n}/b)_{N+n} (abq)^{N+n} (-aq, -bq)_{-n}}{(q)_{N-n} (q)_{N+n}} = \frac{(-q^n/a, -q^n/b)_{N-n} (abq)^{N-n} (-aq, -bq)_n}{(q)_{N+n} (q)_{N-n}}.$$

On a

$$\begin{aligned}
& \sum_{N \geq n} \frac{(-q^n/a, -q^n/b)_{N-n} (abq)^{N-n} (-aq, -bq)_n}{(q)_{N+n} (q)_{N-n}} \\
&= \sum_{N \geq 0} \frac{(-q^n/a, -q^n/b)_N (abq)^N (-aq, -bq)_n}{(q)_{N+2n} (q)_N} \\
&= \frac{(-aq, -bq)_n}{(q)_{2n}} \sum_{N \geq 0} \frac{(-q^n/a, -q^n/b)_N (abq)^N}{(q, q^{2n+1})_N} \\
&= \frac{(-aq, -bq)_n}{(q)_{2n}} \frac{(-aq^{n+1}, -bq^{n+1})_\infty}{(q^{2n+1}, abq)_\infty}
\end{aligned}$$

(par le corollaire 2.4 de [25] (identité de  $q$ -Gauss) avec  $n \rightarrow N$ ,  $a \rightarrow -q^n/a$ ,  $b \rightarrow -q^n/b$  et  $c \rightarrow q^{2n+1}$ )

$$= \frac{(-aq, -bq)_\infty}{(q, abq)_\infty}.$$

□

*Démonstration de l'égalité  $B_{k,i}(s, t, n) = E_{k,i}(s, t, n)$  dans le théorème II.3.* On utilise la forme close de  $\mathcal{E}_{k,i}(N)$  donnée par le théorème II.13 ; en sommant sur  $N$ , on obtient

$$\begin{aligned}
\sum_{s, t, n \geq 0} E_{k,i}(s, t, n) a^s b^t q^n &= \sum_{N \geq 0} \mathcal{E}_{k,i}(N) \\
&= \sum_{N \geq 0} (ab)^N (-1/a, -1/b)_N q^N \sum_{n=-N}^N \frac{(-1)^n q^{n((2k-1)n+3)/2+(k-i-1)n}}{(q)_{N-n} (q)_{N+n}} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n((2k-1)n+3)/2+(k-i-1)n} \sum_{N \geq |n|} \frac{(ab)^N (-1/a, -1/b)_N q^N}{(q)_{N-n} (q)_{N+n}} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-ab)^n (-1/a, -1/b)_n q^{n((2k-1)n+3)/2+(k-i)n}}{(-aq)_n (-bq)_n} \times \\
&\quad \sum_{N \geq |n|} \frac{(abq)^{N-n} (-q^n/a, -q^n/b)_{N-n}}{(q)_{N-n} (q)_{N+n}} \\
&= \frac{(-aq)_\infty (-bq)_\infty}{(q)_\infty (abq)_\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-ab)^n (-1/a, -1/b)_n q^{n((2k-1)n+3)/2+(k-i)n}}{(-aq)_n (-bq)_n} \\
&\quad \text{(par le lemme II.14)} \\
&= R_{k,i}(a, b; 1; q) \quad \text{(par (II.39))} \\
&= \sum_{s, t, n \geq 0} B_{k,i}(s, t, n) a^s b^t q^n \quad \text{(par le théorème II.1).}
\end{aligned}$$



On a donc

$$E_{k,i}(s, t, n) = B_{k,i}(s, t, n).$$

□

On traite maintenant le cas des chemins vérifiant les  $(k, i)$ -conditions paires. La plupart des arguments sont similaires à ceux utilisés pour les chemins vérifiant les  $(k, i)$ -conditions impaires. Par conséquent, on ne rentrera pas autant dans les détails. Soit  $\tilde{E}_{k,i}(s, t, n, N)$  le nombre de chemins d'indice majeur  $n$  ayant  $N$  pics, dont  $s$  sont marqués par  $a$  et  $t$  sont marqués par  $b$ , et vérifiant les  $(k, i)$ -conditions paires. Notons  $\tilde{\mathcal{E}}_{k,i}(N)$  et  $\tilde{\Gamma}_{k,i}(N)$  les analogues de  $\mathcal{E}_{k,i}(N)$  et  $\Gamma_{k,i}(N)$  dans le cas pair.

**Proposition II.15.**

$$\tilde{\mathcal{E}}_{k,i}(N) = q^N \tilde{\Gamma}_{k,i-1}(N) + q^N \tilde{\mathcal{E}}_{k,i+1}(N) \quad (0 < i < k) \quad (\text{II.51})$$

$$\tilde{\Gamma}_{k,i}(N) = q^N \tilde{\Gamma}_{k,i-1}(N) + (a + b + q^{N-1} + abq^{1-N}) \tilde{\mathcal{E}}_{k,i+1}(N-1) \quad (0 < i < k) \quad (\text{II.52})$$

$$\tilde{\mathcal{E}}_{k,k}(N) = q^N \tilde{\mathcal{E}}_{k,k-1}(N) + q^N \tilde{\Gamma}_{k,k-1}(N) \quad (\text{II.53})$$

$$\tilde{\mathcal{E}}_{k,i}(0) = 1 \quad (\text{II.54})$$

$$\tilde{\Gamma}_{k,0}(N) = 0 \quad (\text{II.55})$$

*Démonstration.* Si  $i < k$ , on procède exactement comme dans la démonstration de la proposition II.12. Si le chemin possède au moins un pic, alors quand on enlève le premier pas,  $i$  augmente ou diminue de 1 et par conséquent, la parité de  $i - 1$  change. De plus, tous les pics sont décalés de 1, donc la parité de  $x - u + v$  ne change pas (pour (II.52), si le pas qu'on enlève est un pas S, les pics ne sont pas décalés mais  $u$  ou  $v$  diminue de 1 pour tous les pics, donc le résultat est le même).

Dans le cas où  $i = k$ , remarquons qu'un chemin compté par  $\tilde{\mathcal{E}}_{k,k}(N)$  peut commencer par un pas NE ou par un pas E. S'il commence par un pas NE, il est compté par  $q^N \tilde{\Gamma}_{k,k-1}(N)$  car il est clair que le chemin obtenu en supprimant ce premier pas NE puis en décalant le chemin d'une unité vers la gauche est compté par  $\tilde{\Gamma}_{k,k-1}(N)$ . Pour les chemins qui commencent par un pas E, le fait que tous les pics de coordonnées  $(x, k - 1)$  vérifient  $x - u + v \equiv k - 1 \pmod{2}$  est équivalent au fait que tous les pics de coordonnées  $(x, k - 1)$  ont un nombre pair de pas E à leur gauche. Cela permet de montrer que les chemins obtenus en supprimant le premier pas E d'un chemin compté par  $\tilde{\mathcal{E}}_{k,k}(N)$  qui

commence par un pas E sont en bijection avec les chemins comptés par  $\tilde{\mathcal{E}}_{k,k-1}(N)$ . Cette bijection est définie de la façon suivante : si le chemin ne contient pas de pas E, on le décale vers le haut (chaque sommet  $(x, y)$  est transformé en  $(x, y + 1)$ ) et on ajoute un pas SE à la fin du chemin. Cela crée un chemin compté par  $\tilde{\mathcal{E}}_{k,k-1}(N)$  qui n'a aucun sommet sur l'axe des abscisses, hormis le sommet final. Si le chemin contient au moins un pas E, on décale vers le haut la partie du chemin qui précède le premier pas E, on transforme ce pas E en pas SE et on ne modifie pas le reste du chemin. Cela crée un chemin compté par  $\tilde{\mathcal{E}}_{k,k-1}(N)$  qui a au moins un sommet (autre que le sommet final) sur l'axe des abscisses. Dans les deux cas, il est facile de voir que l'opération est inversible.  $\square$

Comme dans le cas impair, les récurrences et les conditions initiales ci-dessus définissent de manière unique les fonctions  $\tilde{\mathcal{E}}_{k,i}(N)$  et  $\tilde{\Gamma}_{k,i}(N)$ . Dans le cas présent, on a

**Théorème II.16.**

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{E}}_{k,i}(N) &= (ab)^N (-1/a, -1/b)_N q^N \sum_{n=-N}^N (-1)^n \frac{q^{kn^2+(k-i-1)n-2\binom{n}{2}}}{(q)_{N-n}(q)_{N+n}} \\ \tilde{\Gamma}_{k,i}(N) &= (ab)^N (-1/a, -1/b)_N \sum_{n=-N}^{N-1} (-1)^n \frac{q^{kn^2+(k-i-2)n-2\binom{n}{2}}}{(q)_{N-n-1}(q)_{N+n}}\end{aligned}$$

La démonstration de ce résultat est très similaire à celle du théorème II.13.

*Démonstration de l'égalité  $\tilde{B}_{k,i}(s, t, n) = \tilde{E}_{k,i}(s, t, n)$  dans le théorème II.4.* Elle est analogue à celle de l'égalité  $B_{k,i}(s, t, n) = E_{k,i}(s, t, n)$ . En sommant sur  $N$  l'expression de  $\tilde{\mathcal{E}}_{k,i}(N)$  dans le théorème II.16, en changeant l'ordre de sommation et en utilisant le lemme II.14, on obtient

$$\sum_{s,t,n \geq 0} \tilde{E}_{k,i}(s, t, n) a^s b^t q^n = \tilde{R}_{k,i}(a, b, 1; q) = \sum_{s,t,n \geq 0} \tilde{B}_{k,i}(s, t, n) a^s b^t q^n,$$

et on en conclut que

$$\tilde{E}_{k,i}(s, t, n) = \tilde{B}_{k,i}(s, t, n).$$

$\square$

## II.6 Rangs successifs

Dans cette section, on s'intéresse aux paires de surpartitions comptées par  $C_{k,i}(s, t, n)$  et  $\tilde{C}_{k,i}(s, t, n)$ . On construit une bijection entre ces paires et les chemins de la section

précédente, ce qui va établir l'égalité entre  $C_{k,i}(s, t, n)$  et  $E_{k,i}(s, t, n)$ , d'une part, et entre  $\tilde{C}_{k,i}(s, t, n)$  et  $\tilde{E}_{k,i}(s, t, n)$ , d'autre part. Cette section est une généralisation des travaux sur les surpartitions apparaissant dans [49] et [48], qui ont eux-mêmes généralisé une bijection de Bressoud [38, section 3].

La représentation de Frobenius d'une paire de surpartitions de  $n$  [46, 47, 74] est un tableau à deux lignes

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_N \\ b_1 & b_2 & \dots & b_N \end{pmatrix}$$

où  $(a_1, \dots, a_N)$  et  $(b_1, \dots, b_N)$  sont des surpartitions en parts positives ou nulles où on peut surligner la première occurrence d'un nombre, et  $N + \sum(a_i + b_i) = n$ . On dit qu'un tel tableau est la représentation de Frobenius d'une paire de surpartitions car ces tableaux sont en bijection avec les paires de surpartitions de  $n$  [46, 96]. Par exemple, la paire de surpartitions  $((\overline{7}, 2, 2, \overline{1}), (7, \overline{3}, 2, \overline{2}, \overline{1}))$  a pour représentation de Frobenius

$$\begin{pmatrix} 5 & \overline{3} & 3 & 3 & 1 & \overline{0} \\ \overline{3} & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cet exemple est tiré de [46].

On définit maintenant les rangs successifs d'une paire de surpartitions en utilisant la représentation de Frobenius.

**Définition II.17.** *Si une paire de surpartitions a pour représentation de Frobenius*

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_N \\ b_1 & b_2 & \dots & b_N \end{pmatrix}$$

alors son  $i^e$  rang successif  $r_i$  est égal à  $a_i - b_i$  moins le nombre de parts non surlignées dans  $\{b_{i+1}, \dots, b_N\}$  plus le nombre de parts non surlignées dans  $\{a_{i+1}, \dots, a_N\}$ .

Par exemple, les rangs successifs de  $\begin{pmatrix} 5 & \overline{3} & 3 & 3 & 1 & \overline{0} \\ \overline{3} & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  sont  $(0, -1, 2, 2, 0, 0)$ . Cette définition est une généralisation des rangs successifs pour les partitions, car comme on l'a vu dans l'introduction générale, le cas des partitions correspond au cas où toutes les entrées du tableau sont surlignées. On retrouve alors la définition des rangs à partir du symbole de Frobenius donnée dans l'introduction :  $r_i = a_i - b_i$ .

On rappelle que  $C_{k,i}(s, t, n)$  est défini comme le nombre de paires de surpartitions de  $n$  dont la représentation de Frobenius possède  $s$  parts non surlignées dans la ligne du bas et  $t$  parts non surlignées dans la ligne du haut, et dont les rangs successifs sont dans l'intervalle  $[-i + 2, 2k - i - 1]$ . On va démontrer le résultat suivant :

**Proposition II.18.** *Il existe une bijection entre les chemins d'indice majeur  $n$  comptés par  $E_{k,i}(s, t, n)$  et les paires de surpartitions de  $n$  comptées par  $C_{k,i}(s, t, n)$ . Cette bijection est telle que le chemin a  $N$  pics si et seulement si la représentation de Frobenius de la paire de surpartitions a  $N$  colonnes.*

*Démonstration.* On démontre cette proposition par une bijection directe qui généralise une bijection présentée dans [49]. Étant donné un chemin compté par  $E_{k,i}(s, t, n)$ , qui commence en  $(0, k - i)$ , et un pic  $(x, y)$ , soit  $u$  (resp.  $v$ ) le nombre de  $a$ -pics (resp. le nombre de  $b$ -pics) situés à la gauche du pic. En commençant par la gauche du chemin, on construit un tableau à deux lignes *de la droite vers la gauche* en associant à ce pic une colonne du tableau  $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ , où

$$p = (x + k - i - y + u - v)/2 \quad (\text{II.56})$$

et

$$q = (x - k + i + y - 2 - u + v)/2 \quad (\text{II.57})$$

s'il y a un nombre pair de pas E à gauche du pic, et

$$p = (x + k - i + y - 1 + u - v)/2 \quad (\text{II.58})$$

et

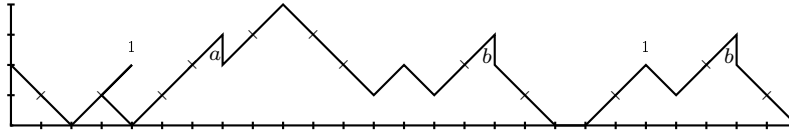
$$q = (x - k + i - y - 1 - u + v)/2 \quad (\text{II.59})$$

s'il y a un nombre impair de pas E à gauche du pic. De plus, on surligne les parts correspondantes comme suit :

- si le pic est un 1-pic, on surligne  $p$  et  $q$  ;
- si c'est un  $a$ -pic, on surligne  $p$  ;
- si c'est un  $b$ -pic, on surligne  $q$ .

Par exemple, le chemin de la figure II.3 ci-dessous correspond à la paire de surpartitions dont la représentation de Frobenius est

$$\begin{pmatrix} 14 & \overline{12} & 12 & 8 & \overline{7} & \overline{4} & \overline{3} & 2 \\ \overline{9} & \overline{8} & 8 & \overline{7} & \overline{5} & \overline{4} & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$



**FIG. II.3 :** Illustration de la correspondance entre chemins et symboles de Frobenius. Dans cet exemple, on a  $k = 5$  et  $i = 3$ .

Pour établir la proposition, il faut montrer que le résultat de cette opération est bien la représentation de Frobenius d'une paire de surpartitions comptée par  $C_{k,i}(s, t, n)$  et que l'application est inversible. La démonstration est quelque peu fastidieuse et prend quelques pages de calculs et d'observations. Vers la fin de la démonstration, on laissera de côté certains détails dans les cas analogues à ceux déjà traités.

D'abord, il n'est pas évident a priori que les nombres  $p$  et  $q$  définis ci-dessus soient des entiers. Pour le montrer, remarquons d'abord qu'au point de départ du chemin, soit en  $(x, y) = (0, k - i)$ , les quantités  $p$  et  $q$  dans (II.56) et (II.57) sont des entiers. La parité de  $x - y$ ,  $x + y$ ,  $u - v$  et  $u + v$  est préservée par les pas NE, SE et SO, tandis qu'un pas S change la parité de toutes ces quantités. Le seul problème se pose quand on a un pas E, qui change la parité de  $x - y$  et de  $x + y$ . C'est pour cela qu'on a deux cas dans la définition de  $p$  et  $q$ , ce qui garantit que notre tableau à deux lignes ne contient que des valeurs entières.

Ensuite, la définition de notre transformation implique que le nombre de pics du chemin est égal au nombre de colonnes du tableau correspondant. Elle implique également que si le chemin contient  $s$  (resp.  $t$ ) pics marqués par  $a$  (resp. par  $b$ ), alors le tableau possède  $s$  (resp.  $t$ ) parts non surlignées dans la ligne du bas (resp. du haut). On rappelle qu'un  $ab$ -pic est marqué par  $a$  et par  $b$ . En ce qui concerne  $n$ , quelle que soit la définition de  $p$  et  $q$ , on a toujours

$$p + q + 1 = x. \tag{II.60}$$

Par conséquent, si  $n$  est l'indice majeur du chemin, alors  $n$  est aussi la somme de toutes les valeurs du tableau correspondant et du nombre de colonnes.

En appliquant la définition II.17, on calcule les rangs successifs du tableau à deux lignes. Remarquons d'abord que la définition des rangs et celle de notre transformation impliquent que si  $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$  est la  $j^{\text{e}}$  colonne du tableau en partant de la gauche, le  $j^{\text{e}}$  rang successif est égal à  $p - q - u + v$ . Les pics sont tous de hauteur au moins 1, donc pour un pic  $(x, y)$  qui est précédé d'un nombre pair de pas E, on a :

$$\begin{aligned} 1 &\leq y = k - i + 1 + q - p + u - v \leq k - 1 \\ \Leftrightarrow -i + 2 &\leq p - q - u + v \leq k - i \\ \Leftrightarrow \text{le rang successif correspondant} &\text{ est } \geq -i + 2 \text{ et } \leq k - i \end{aligned} \quad (\text{II.61})$$

et si le pic est précédé d'un nombre impair de pas E, on a :

$$\begin{aligned} 1 &\leq y = p - q - u + v - k + i \leq k - 1 \\ \Leftrightarrow k - i + 1 &\leq p - q - u + v \leq 2k - i - 1 \\ \Leftrightarrow \text{le rang successif correspondant} &\text{ est } \geq k - i + 1 \text{ et } \leq 2k - i - 1. \end{aligned} \quad (\text{II.62})$$

Par conséquent, les rangs successifs du tableau sont tous dans l'intervalle  $[-i+2, 2k-i-1]$ .

Enfin, il faut montrer que dans le tableau à deux lignes que nous avons construit, chaque ligne est une surpartition en parts positives ou nulles. Dans la suite, on note  $(x_j, y_j)$  les coordonnées du  $j^{\text{e}}$  pic en partant de la droite et  $\begin{pmatrix} p_j \\ q_j \end{pmatrix}$  la colonne correspondante, c'est-à-dire la  $j^{\text{e}}$  colonne en partant de la gauche.

D'abord, on montre que  $p_N \geq 0$ . Si le pic le plus à gauche a un nombre pair de pas E à sa gauche, alors  $p_N = (x_N + k - i - y_N)/2$ . Il est facile de voir que chaque sommet a une valeur de  $x - y$  supérieure ou égale à celle du sommet précédent. Comme le chemin commence en  $(0, k - i)$ , on a  $x - y = -k + i$  au début du chemin et on a donc  $x - y \geq -k + i$  pour tous les sommets et en particulier pour le pic le plus à gauche. Si maintenant notre pic a un nombre pair de pas E à sa gauche, alors  $p_N = (x_N + y_N + k - i - 1)/2$ . Comme  $x_N \geq 1$ ,  $y_N \geq 1$  et  $k \geq i$ , on obtient que  $p_N \geq 0$ .

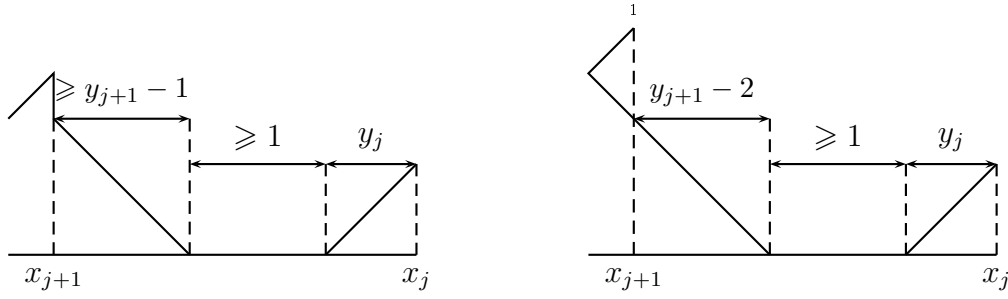
Ensuite, on montre de manière similaire que  $q_N \geq 0$ . Si le pic le plus à gauche a un nombre pair de pas E à sa gauche, alors  $q_N = (x_N + y_N - (k - i) - 2)/2$ . Le chemin

commence en  $(0, k - i)$ , les pas qui peuvent apparaître avant le pic le plus à gauche (SE, E et NE) ne font pas diminuer  $x + y$ , et il doit y avoir un pas NE avant le premier pic, qui fait augmenter  $x + y$  de 2. Par conséquent,  $x_N + y_N - (k - i) - 2 \geq 0$ . Si le pic le plus à gauche a un nombre impair de pas E à sa gauche, alors  $q_N = (x_N - y_N - (k - i) - 1)/2$ . Dans ce cas, le chemin passe par le point  $(k - i + 1, 0)$ , et comme  $x - y$  ne diminue jamais, on a  $q_N \geq 0$ .

Maintenant qu'on a prouvé que toutes les valeurs du tableau sont positives ou nulles, on va maintenant montrer que les suites  $\{p_j\}$  et  $\{q_j\}$  sont des surpartitions, c'est-à-dire que  $p_j \geq p_{j+1}$  (resp.  $q_j \geq q_{j+1}$ ) avec une inégalité stricte si  $p_{j+1}$  (resp.  $q_{j+1}$ ) est surlignée. Montrons d'abord que  $p_j \geq p_{j+1}$ . On considère quatre cas. Si le  $j^{\text{e}}$  pic (en partant de la droite) et le  $(j + 1)^{\text{e}}$  ont tous les deux un nombre pair de pas E à leur gauche, alors  $p_j - p_{j+1} = (x_j - x_{j+1} - y_j + y_{j+1} + u_j - u_{j+1} - v_j + v_{j+1})/2$ . On a toujours  $x_j - x_{j+1} \geq y_j - y_{j+1}$  car  $x - y$  ne diminue jamais le long du chemin. On ne peut avoir  $u_j - u_{j+1} - v_j + v_{j+1} < 0$  que si le  $(j + 1)^{\text{e}}$  pic est un  $b$ -pic, mais dans ce cas, on a  $x_j - x_{j+1} > y_j - y_{j+1}$ . Si le  $j^{\text{e}}$  pic et le  $(j + 1)^{\text{e}}$  pic ont tous les deux un nombre impair de pas E à leur gauche, la démonstration est identique. Si le  $j^{\text{e}}$  pic a un nombre impair de pas E à sa gauche et que le  $(j + 1)^{\text{e}}$  pic a un nombre pair de pas E à sa gauche, le résultat se montre facilement en utilisant le fait que  $x_j - x_{j+1} \geq 2$  puisqu'il y a au moins un pas E entre les deux pics. Dans le dernier cas, où le  $j^{\text{e}}$  pic a un nombre pair de pas E à sa gauche et le  $(j + 1)^{\text{e}}$  pic a un nombre impair de pas E à sa gauche, on a  $p_j - p_{j+1} = (x_j - x_{j+1} - y_j - y_{j+1} + 1 + u_j - u_{j+1} - v_j + v_{j+1})/2$ . Puisqu'il y a au moins un pas E entre le  $j^{\text{e}}$  pic et le  $(j + 1)^{\text{e}}$  pic, on a  $x_j - x_{j+1} \geq y_j + y_{j+1}$  sauf si le  $(j + 1)^{\text{e}}$  pic est un  $ab$ -pic (voir la figure II.4). Comme  $u_j - u_{j+1}$  ne peut valoir que 0 ou 1 (de même pour  $v_j - v_{j+1}$ ), on a  $1 + u_j - u_{j+1} - v_j + v_{j+1} \geq 0$  et par conséquent,  $p_j - p_{j+1} \geq 0$ . Si le  $(j + 1)^{\text{e}}$  pic est un  $ab$ -pic, on a  $x_j - x_{j+1} \geq y_j + y_{j+1} - 1$ ,  $u_j = u_{j+1}$  et  $v_j = v_{j+1}$ . On a donc également  $p_j - p_{j+1} \geq 0$ .

On a donc vu que dans tous les cas, on a  $p_j \geq p_{j+1}$ . Si  $p_{j+1}$  est surlignée, alors le  $(j + 1)^{\text{e}}$  pic est un 1-pic ou un  $a$ -pic. En reprenant les arguments précédents, on trouve que l'inégalité  $p_j \geq p_{j+1}$  est stricte quand le  $(j + 1)^{\text{e}}$  pic est un 1-pic ou un  $a$ -pic. La démonstration pour les  $\{q_j\}$ , très similaire au cas des  $\{p_j\}$  traité ci-dessus, est laissée au lecteur.

Il est assez simple de voir que l'application est inversible. En commençant par la gauche



**FIG. II.4 :** Si le  $(j + 1)^e$  pic n'est pas un *ab*-pic (à gauche), on a  $x_j - x_{j+1} \geq y_j + y_{j+1}$ . Si le  $(j + 1)^e$  pic est un *ab*-pic (à droite), on a seulement  $x_j - x_{j+1} \geq y_j + y_{j+1} - 1$  mais comme  $u_j = u_{j+1}$  et  $v_j = v_{j+1}$ ,  $p_j - p_{j+1}$  est bien positif ou nul.

du tableau, pour toute colonne  $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ , les valeurs de  $u$  et  $v$  sont déterminées par les parts surlignées des colonnes situées à droite. Par conséquent, pour retrouver la position  $(x, y)$  d'un pic dans le chemin à partir de la colonne, on doit résoudre soit les équations (II.56) et (II.57), soit les équations (II.58) et (II.59) en  $x$  et  $y$ . Seul un de ces deux systèmes d'équations admet une solution où  $x$  et  $y$  sont des entiers strictement positifs. L'équation (II.60) garantit que  $x$  n'augmente pas au cours du processus. Il y a alors une manière unique de placer les pas entre les pics, et (II.61) et (II.62) montrent que le chemin ne dépasse jamais la hauteur  $k - 1$ . Cela achève la démonstration de la proposition.  $\square$

On va conclure cette section en énonçant et en démontrant l'analogie de la proposition II.18 pour les fonctions  $\tilde{C}_{k,i}(s, t, n)$  et  $\tilde{E}_{k,i}(s, t, n)$ .

**Proposition II.19.** *Il existe une bijection entre les chemins d'indice majeur  $n$  comptés par  $\tilde{E}_{k,i}(s, t, n)$  et les paires de surpartitions de  $n$  comptées par  $\tilde{C}_{k,i}(s, t, n)$ . Cette bijection est telle que les chemins ont  $N$  pics si et seulement si la représentation de Frobenius de la paire de surpartitions a  $N$  colonnes.*

*Démonstration.* Un chemin compté par  $\tilde{E}_{k,i}(s, t, n)$  est aussi compté par  $E_{k,i}(s, t, n)$  et une paire de surpartitions comptée par  $\tilde{C}_{k,i}(s, t, n)$  est aussi comptée par  $C_{k,i}(s, t, n)$ . On peut donc appliquer la bijection utilisée dans la démonstration de la proposition II.18 à un chemin compté par  $\tilde{E}_{k,i}(s, t, n)$ . On doit alors montrer qu'aucun des rangs successifs de la paire de surpartitions correspondant ne peut être égal à  $2k - i - 1$ . Si c'était le cas, on aurait  $p - q - u + v = 2k - i - 1$  et d'après la bijection, on sait qu'on a soit  $p - q - u + v = k - i - y + 1$ , soit  $p - q - u + v = k - i + y$ . Le premier cas implique que



$y = 2 - k$ , ce qui impossible vu que  $k \geq 2$  ( $y$  est la hauteur d'un pic, donc il est supérieur ou égal à 1). Le deuxième cas implique que  $y = k - 1$  et  $p = (x + u - v + 2k - i - 2)/2$ . Comme  $p$  est un entier, on a  $x - u + v \equiv i \pmod{2}$ . Cela est interdit par la dernière condition de la définition des  $\tilde{E}_{k,i}(s, t, n)$ .  $\square$

## II.7 Dissection de Durfee et $(k, i)$ -conjugaison pour les paires de surpartitions

Dans cette section, on étudie les paires de surpartitions comptées par  $D_{k,i}(s, t, n)$  dans le théorème II.3 et par  $\tilde{D}_{k,i}(s, t, n)$  dans le théorème II.4. On achève notre démonstration de ces deux théorèmes en utilisant la théorie des paires de Bailey pour montrer que ces deux quantités sont respectivement égales à  $B_{k,i}(s, t, n)$  et  $\tilde{B}_{k,i}(s, t, n)$ . Le but est d'étendre des travaux d'Andrews [22] et de Garvan [56] aux paires de surpartitions en utilisant la représentation de Frobenius.

On commence par rappeler une bijection utile pour les surpartitions : l'algorithme de Joichi-Stanton [66]. À partir d'une surpartition  $\alpha$  de taille  $n$  en  $N$  parts positives ou nulles (où on peut surligner la première occurrence d'un nombre), on obtient une partition  $\lambda$  en  $N$  parts positives ou nulles et une partition  $\mu$  en parts distinctes positives ou nulles et strictement inférieures à  $N$ , telles que  $|\lambda| + |\mu| = n$ , de la façon suivante. On initialise d'abord  $\lambda$  à  $\alpha$ . Ensuite, pour tout  $m$  entre 1 et  $N$ , si la  $m^{\text{e}}$  part de  $\alpha$  est surlignée, on enlève le surlignage de la  $m^{\text{e}}$  part de  $\lambda$ , on diminue de un les  $m - 1$  premières parts de  $\lambda$  et on ajoute une part  $m - 1$  à  $\mu$ . Par exemple,  $\alpha = (\bar{5}, 4, \bar{3}, 3)$  nous donne  $\lambda = (4, 3, 3, 3)$  et  $\mu = (2, 0)$ .

**Définition II.20.** *On dit que  $\lambda$  est la partition associée de  $\alpha$ .*

Ainsi, étant donné une paire de surpartitions, on peut décomposer sa représentation de Frobenius en quatre partitions  $\lambda_1, \mu_1, \lambda_2, \mu_2$ , où  $\lambda_1$  et  $\mu_1$  (resp.  $\lambda_2$  et  $\mu_2$ ) sont obtenues en appliquant l'algorithme de Joichi-Stanton à la ligne du haut (resp. du bas). Par exemple, la paire de surpartitions dont la représentation de Frobenius est

$$\begin{pmatrix} 12 & 12 & \bar{7} & 6 & 5 & \bar{3} & 2 & \bar{1} \\ 14 & 12 & \bar{10} & \bar{8} & 6 & 5 & \bar{3} & 2 \end{pmatrix}$$

nous donne  $\lambda_1 = (9, 9, 5, 4, 3, 2, 1, 1)$ ,  $\mu_1 = (7, 5, 2)$ ,  $\lambda_2 = (11, 9, 8, 7, 5, 4, 3, 2)$  et  $\mu_2 = (6, 3, 2)$ .

Ensuite, on définit la notion de paire de surpartitions  $(k, i)$ -admissible qui apparaît dans l'énoncé du théorème II.3. La  $(k, i)$ -admissibilité pour les paires de surpartitions est similaire, mais pas totalement identique, à la  $(k, i)$ -admissibilité pour les partitions définie dans [22] (voir page 21).

**Définition II.21.** Soit  $\pi$  une paire de surpartitions,  $\lambda_2$  la partition associée à la deuxième ligne de son symbole de Frobenius et  $\lambda'_2$  le conjugué de  $\lambda_2$ . On dit que  $\pi$  est  $(k, i)$ -admissible si  $\lambda'_2$  est obtenu à partir d'une partition  $\nu$  en parts positives ou nulles qui a au plus  $k - 2$  carrés de Durfee en insérant une part de taille  $n_j$  dans  $\nu$  pour tout  $j$  tel que  $i \leq j \leq k - 1$ . Ici,  $n_j$  est la taille du  $(j - 1)^e$  carré de Durfee de  $\nu$  si  $j \geq 2$ , et  $n_1$  est le nombre de colonnes dans la représentation de Frobenius de la paire de surpartitions.

Par exemple, la paire de surpartitions dont la représentation de Frobenius est

$$\begin{pmatrix} 11 & \overline{10} & 9 & 5 & \overline{3} \\ \overline{12} & \overline{11} & 11 & \overline{6} & 6 \end{pmatrix}$$

est  $(4, 2)$ -admissible : on a ici  $\lambda_2 = (10, 10, 10, 6, 6)$  et donc  $\lambda'_2 = (5, 5, 5, 5, 5, 5, 3, 3, 3, 3)$ , qui est obtenue à partir de  $\nu = (5, 5, 5, 5, 5, 3, 3, 3)$  en ajoutant une part  $n_2 = 5$  et une part  $n_3 = 3$ .

On rappelle que  $D_{k,i}(s, t, n)$  est défini comme le nombre de paires de surpartitions de  $n$   $(k, i)$ -admissibles dont la représentation de Frobenius possède  $s$  parts non surlignées dans la ligne du bas et  $t$  parts non surlignées dans la ligne du haut.

**Proposition II.22.** On a la série génératrice suivante :

$$\sum_{s,t,n \geq 0} D_{k,i}(s, t, n) a^s b^t q^n = \sum_{n_1 \geq \dots \geq n_{k-1} \geq 0} \frac{q^{n_1 + n_2^2 + \dots + n_{k-1}^2 + n_i + \dots + n_{k-1}} (-1/a, -1/b)_{n_1} a^{n_1} b^{n_1}}{(q)_{n_1 - n_2} \cdots (q)_{n_{k-2} - n_{k-1}} (q)_{n_{k-1}}}. \tag{II.63}$$

*Démonstration.* Considérons une paire de surpartitions comptée par  $D_{k,i}(s, t, n)$  dont la représentation de Frobenius a  $n_1$  colonnes. En utilisant l'algorithme de Joichi-Stanton sur les deux lignes, on peut décomposer cette représentation de Frobenius de la manière suivante :

– la ligne du haut, qui est comptée par

$$\frac{(-1/b)_{n_1} b^{n_1}}{(q)_{n_1}},$$

le facteur  $1/(q)_{n_1}$  correspondant à  $\lambda_1$  et le facteur  $b^{n_1}(-1/b)_{n_1}$  à  $\mu_1$  ;

– les  $n_1$  colonnes (on rappelle que  $n = n_1 + \sum(a_j + b_j)$ ), qui sont comptées par  $q^{n_1}$  ;

– la partition  $\mu_2$  en  $n_1$  parts positives ou nulles (obtenue à partir de la ligne du bas) qui est comptée par  $(-1/a)_{n_1} a^{n_1}$  ;

– les  $k - 2$  (au plus) carrés de Durfee de  $\nu$ , qui sont comptés par  $q^{n_2^2 + \dots + n_{k-1}^2}$  ;

– les régions situées entre les carrés de Durfee de  $\nu$ , qui sont comptées, d'après le théorème I.1, par

$$\begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}_q \cdots \begin{bmatrix} n_{k-2} \\ n_{k-1} \end{bmatrix}_q ;$$

– les parts  $n_i, \dots, n_{k-1}$  insérées dans  $\nu$ , qui sont comptées par  $q^{n_i + \dots + n_{k-1}}$ .

Ces trois derniers morceaux forment  $\lambda'_2$ , le conjugué de la partition associée de la ligne du bas. En sommant sur  $n_1, \dots, n_{k-1}$ , on obtient la série génératrice :

$$\begin{aligned} & \sum_{n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_{k-1} \geq 0} \frac{(-1/b)_{n_1} b^{n_1}}{(q)_{n_1}} (-1/a)_{n_1} a^{n_1} q^{n_1} q^{n_2^2 + \dots + n_{k-1}^2} q^{n_i + \dots + n_{k-1}} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix}_q \cdots \begin{bmatrix} n_{k-2} \\ n_{k-1} \end{bmatrix}_q \\ &= \sum_{n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_{k-1} \geq 0} \frac{q^{n_1 + n_2^2 + \dots + n_{k-1}^2 + n_i + \dots + n_{k-1}} (-1/a)_{n_1} a^{n_1} (-1/b)_{n_1} b^{n_1}}{(q)_{n_1 - n_2} \cdots (q)_{n_{k-2} - n_{k-1}} (q)_{n_{k-1}}}. \end{aligned}$$

□

Pour incorporer  $D_{k,i}(s, t, n)$  dans le théorème II.3, on utilise la théorie des paires de Bailey pour montrer que la série multiple (II.63) est égale à (II.39). Plus précisément, on va utiliser le lemme suivant :

**Lemme II.23.** *Si  $(\alpha_n, \beta_n)$  est une paire de Bailey par rapport à  $q$ , alors pour tout  $0 \leq i \leq k$  on a*

$$\begin{aligned} & \frac{(abq)_\infty}{(q, -aq, -bq)_\infty} \times \sum_{n_1 \geq \dots \geq n_k \geq 0} \frac{q^{n_1 + n_2^2 + \dots + n_k^2 + n_{i+1} + \dots + n_k} (-1/a, -1/b)_{n_1} (ab)^{n_1}}{(q)_{n_1 - n_2} \cdots (q)_{n_{k-1} - n_k}} \beta_{n_k} \\ &= \frac{\alpha_0}{(q)_\infty^2} + \frac{1}{(q)_\infty^2} \sum_{n \geq 1} \frac{(-1/a, -1/b)_n (ab)^n q^{(n^2 - n)(i-1) + in} (1 - q)}{(-aq, -bq)_n} \\ & \times \left( \frac{q^{(n^2 + n)(k-i)}}{1 - q^{2n+1}} \alpha_n - \frac{q^{((n-1)^2 + (n-1))(k-i) + 2n-1}}{1 - q^{2n-1}} \alpha_{n-1} \right). \end{aligned} \quad (\text{II.64})$$

*Démonstration.* Ce résultat est un cas particulier du théorème I.5 : on pose  $a = q$ ,  $\rho_1 = -1/a$ ,  $\sigma_1 = -1/b$ , et on fait tendre  $n$  ainsi que tous les  $\rho_j$  et  $\sigma_j$  restants vers l'infini dans cette identité pour obtenir le lemme.  $\square$

*Démonstration de l'égalité  $B_{k,i}(s, t, n) = D_{k,i}(s, t, n)$  dans le théorème II.3.* Elle utilise la paire de Bailey par rapport à  $q$  suivante [89, p. 468, (B3)] :

$$\beta_n = \frac{1}{(q)_n} \quad \text{et} \quad \alpha_n = \frac{(-1)^n q^{n(3n+1)/2} (1 - q^{2n+1})}{(1 - q)}.$$

En remplaçant dans le lemme II.23 et en simplifiant, on obtient

$$\begin{aligned} & \sum_{n_1 \geq \dots \geq n_k \geq 0} \frac{q^{n_1 + n_2^2 + \dots + n_k^2 + n_{i+1} + \dots + n_k} (-1/a, -1/b)_{n_1} a^{n_1} b^{n_1}}{(q)_{n_1 - n_2} \cdots (q)_{n_{k-1} - n_k} (q)_{n_k}} \\ &= \frac{(-aq, -bq)_\infty}{(q, abq)_\infty} \left( 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{q^{kn^2 + (k-i+1)n + n(n+1)/2} (-ab)^n (-1/a, -1/b)_n}{(-aq, -bq)_n} \right. \\ & \quad \left. + \sum_{n \geq 1} \frac{q^{kn^2 - (k-i)n + n(n+1)/2} (-ab)^n (-1/a, -1/b)_n}{(-aq, -bq)_n} \right). \end{aligned}$$

En remplaçant  $n$  par  $-n$  dans la deuxième somme, en simplifiant à l'aide de (II.38), puis en remplaçant  $k$  par  $k - 1$  et  $i$  par  $i - 1$ , on aboutit à (II.39).  $\square$

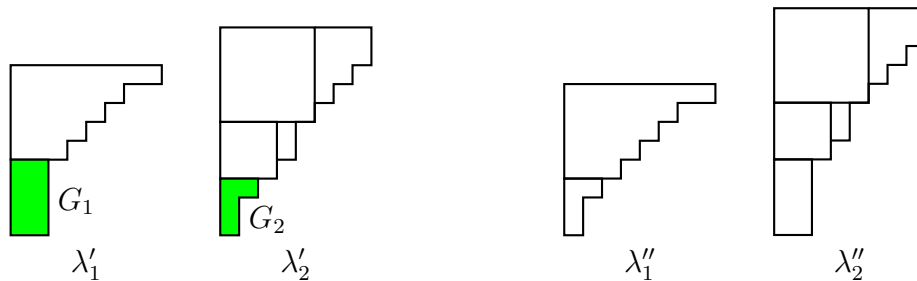
On s'intéresse maintenant aux fonctions  $\tilde{D}_{k,i}(s, t, n)$ . On définit une opération sur les paires de surpartitions, appelée  $k$ -conjugaison, qui utilise encore une fois la représentation de Frobenius. On fait appel à la décomposition d'un symbole de Frobenius décrite après la définition II.20. Notons  $\lambda'_1$  (resp.  $\lambda'_2$ ) le conjugué de  $\lambda_1$  (resp. de  $\lambda_2$ ). Alors  $\lambda'_1$  et  $\lambda'_2$  sont des partitions en parts inférieures ou égales à  $n_1$ , où  $n_1$  est le nombre de colonnes de la représentation de Frobenius. On considère deux régions. La première région, notée  $G_2$ , est la partie de  $\lambda'_2$  située sous son  $(k - 2)^e$  carré de Durfee. La deuxième région, notée  $G_1$ , est formée des parts de  $\lambda'_1$  qui sont inférieures ou égales à la taille du  $(k - 2)^e$  carré de Durfee de  $\lambda'_2$ . Si  $k = 2$ , on a  $G_2 = \lambda'_2$  et  $G_1 = \lambda'_1$ .

**Définition II.24.** *Le  $k$ -conjugué d'une paire de surpartitions est une paire de surpartitions obtenue de la façon suivante. On échange d'abord les deux régions  $G_1$  et  $G_2$  pour obtenir deux nouvelles partitions  $\lambda''_1$  et  $\lambda''_2$ . Ensuite, on les conjugue pour obtenir  $\lambda'''_1$  et  $\lambda'''_2$ . Enfin, on utilise l'algorithme de Joichi-Stanton à l'envers pour assembler  $\lambda'''_1$  et  $\mu_1$  pour former la ligne du haut et  $\lambda'''_2$  et  $\mu_2$  pour former la ligne du bas.*

On remarque que si  $\lambda'_2$  a moins de  $k - 2$  carrés de Durfee, la  $k$ -conjugaison est en fait l'identité car  $G_1$  et  $G_2$  sont vides. Remarquons aussi que cette  $k$ -conjugaison est une généralisation de la  $k$ -conjugaison pour les surpartitions définie dans [48], qui est elle-même une généralisation de la conjugaison pour les surpartitions de Lovejoy [73] et de la  $k$ -conjugaison pour les partitions de Garvan [56]. Si  $k = 2$  et qu'il n'y a pas de parts non surlignées dans le symbole de Frobenius, on retrouve la conjugaison classique des partitions décrite au chapitre I, qui consiste à intervertir les deux lignes du symbole.

En reprenant l'exemple qui suit la définition II.20, il est facile de voir qu'on a  $\lambda'_1 = (8, 6, 5, 4, 3, 2, 2, 2, 2)$  et  $\lambda'_2 = (8, 8, 7, 6, 5, 4, 4, 3, 2, 1, 1)$ . Pour  $k = 4$ , si on échange les deux régions définies ci-dessus, on a  $\lambda''_1 = (8, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 1)$  et  $\lambda''_2 = (8, 8, 7, 6, 5, 4, 4, 3, 2, 2, 2, 2)$  (voir la figure II.5). En conjuguant, on obtient les partitions  $\lambda'''_1 = (8, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 1)^1$  et  $\lambda'''_2 = (12, 12, 8, 7, 5, 4, 3, 2)$ . En appliquant l'algorithme de Joichi-Stanton à l'envers (on rappelle que  $\mu_1 = (7, 5, 2)$  et que  $\mu_2 = (6, 3, 2)$ ), on voit que le 4-conjugué de  $\pi$  est

$$\pi^{(4)} = \begin{pmatrix} 11 & 9 & \bar{7} & 6 & 5 & \bar{3} & 2 & \bar{1} \\ 15 & 15 & \bar{10} & \bar{8} & 6 & 5 & \bar{3} & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Décomposition de  $\pi$ .(b) Décomposition de  $\pi^{(4)}$ .

**FIG. II.5 :** Illustration de la 4-conjugaison. Pour la paire de surpartitions initiale  $\pi$  (sous-figure II.5(a)), on a  $\lambda'_1 = (8, 6, 5, 5, 4, 3, 2, 2, 2)$  et  $\lambda'_2 = (8, 8, 7, 6, 5, 4, 4, 3, 2, 1, 1)$ . Les régions coloriées sont échangées par la 4-conjugaison, ce qui nous donne  $\lambda''_1 = (8, 6, 5, 5, 4, 2, 1, 1)$  et  $\lambda''_2 = (8, 8, 7, 6, 5, 4, 4, 3, 3, 2, 2, 2)$  pour  $\pi^{(4)}$ , le 4-conjugué de  $\pi$  (sous-figure II.5(b)).

**Définition II.25.** On dit qu'une paire de surpartitions est auto- $k$ -conjuguée si elle est invariante par  $k$ -conjugaison.

<sup>1</sup>On remarquera que  $\lambda'''_1$  est auto-conjugué. Ce n'est que le fruit du hasard. . .

Dans la figure II.5, on n'a pas une paire de surpartitions auto-4-conjuguée car les régions échangées par la 4-conjugaison ne sont pas identiques.

**Proposition II.26.** *La série génératrice des paires de surpartitions auto- $k$ -conjuguées est*

$$\sum_{n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_{k-1} \geq 0} \frac{q^{n_1+n_2+\dots+n_{k-1}} (-1/a)_{n_1} a^{n_1} (-1/b)_{n_1} b^{n_1}}{(q)_{n_1-n_2} \dots (q)_{n_{k-2}-n_{k-1}} (q^2; q^2)_{n_{k-1}}} \quad (\text{II.65})$$

où  $n_1$  est le nombre de colonnes du symbole de Frobenius et  $n_2, \dots, n_{k-1}$  sont les tailles des  $k-2$  premiers carrés de Durfee successifs de  $\lambda'_2$ .

*Démonstration.* La décomposition d'une paire de surpartitions auto- $k$ -conjuguée est similaire à celle d'une paire de surpartitions  $(k, k)$ -admissible. Le symbole de Frobenius se décompose de la manière suivante :

- $\mu_1$ , qui est compté par  $(-1/b)_{n_1} b^{n_1}$  ;
- $\mu_2$ , qui est compté par  $(-1/a)_{n_1} a^{n_1}$  ;
- les  $n_1$  colonnes, qui sont comptées par  $q^{n_1}$  ;
- les  $k-2$  carrés de Durfee de  $\lambda'_2$ , qui sont comptés par  $q^{n_2^2+\dots+n_{k-1}^2}$  ;
- les régions situées entre les carrés de Durfee de  $\lambda'_2$ , qui sont comptées par

$$\left[ \begin{matrix} n_1 \\ n_2 \end{matrix} \right]_q \dots \left[ \begin{matrix} n_{k-2} \\ n_{k-1} \end{matrix} \right]_q ;$$

- les parts de  $\lambda'_1$  qui sont supérieures à  $n_{k-1}$ , la taille du  $(k-2)^{\text{e}}$  carré de Durfee de  $\lambda'_1$  (et qui sont bien sûr inférieures ou égales à  $n_1$ ) : elles sont comptées par

$$\frac{1}{(1 - q^{n_{k-1}+1}) \dots (1 - q^{n_1})} = \frac{(q)_{n_{k-1}}}{(q)_{n_1}} ;$$

- les deux régions identiques  $G_1$  et  $G_2$ , qui sont comptées par

$$\frac{1}{(q^2; q^2)_{n_{k-1}}},$$

car  $1/(q^2; q^2)_n$  est la série génératrice des partitions en au plus  $n$  parts paires, et c'est aussi la série génératrice des couples de partitions identiques ayant chacune au plus  $n$  parts. La preuve de ce résultat est très simple : étant donné une partition en au plus  $n$  parts paires, on divise chaque part en deux moitiés égales et on attribue la première moitié à la première partition et la deuxième moitié à la deuxième. On obtient bien ainsi deux partitions identiques en au plus  $n$  parts.

En sommant sur  $n_1, n_2, \dots, n_{k-1}$ , on obtient la série génératrice :

$$\begin{aligned} & \sum_{n_1 \geq \dots \geq n_{k-1} \geq 0} (-1/b)_{n_1} b^{n_1} (-1/a)_{n_1} a^{n_1} q^{n_1+n_2^2+\dots+n_{k-1}^2} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix}_q \dots \begin{bmatrix} n_{k-2} \\ n_{k-1} \end{bmatrix}_q \frac{(q)_{n_{k-1}}}{(q)_{n_1}} \frac{1}{(q^2; q^2)_{n_{k-1}}} \\ &= \sum_{n_1 \geq \dots \geq n_{k-1} \geq 0} \frac{q^{n_1+n_2^2+\dots+n_{k-1}^2} (-1/a)_{n_1} a^{n_1} (-1/b)_{n_1} b^{n_1}}{(q)_{n_1-n_2} \dots (q)_{n_{k-2}-n_{k-1}} (q^2; q^2)_{n_{k-1}}}. \end{aligned}$$

□

**Définition II.27.** On dit qu'une paire de surpartitions est auto- $(k, i)$ -conjuguée si elle est obtenue en prenant une paire de surpartitions auto- $k$ -conjuguée et en ajoutant une part  $n_j$  ( $n_j$  est la taille du  $(j-1)^e$  carré de Durfee successif de  $\lambda'_2$  si  $j \geq 2$ , et  $n_1$  est le nombre de colonnes du symbole de Frobenius) à  $\lambda'_2$  pour  $i \leq j \leq k-1$ .

On rappelle qu'on note  $\tilde{D}_{k,i}(s, t, n)$  le nombre de paires de surpartitions de  $n$  auto- $(k, i)$ -conjuguées dont la représentation de Frobenius a  $s$  parts non surlignées dans la ligne du bas et  $t$  parts non surlignées dans la ligne du haut. On peut maintenant achever la démonstration du théorème II.4.

*Démonstration de l'égalité  $\tilde{D}_{k,i}(s, t, n) = \tilde{B}_{k,i}(s, t, n)$  dans le théorème II.4.* Il est clair, étant donné la proposition II.26 et la définition II.27, que

$$\sum_{s, t, n} \tilde{D}_{k,i}(s, t, n) a^s b^t q^n = \sum_{n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_{k-1} \geq 0} \frac{q^{n_1+n_2^2+\dots+n_{k-1}^2+n_i+\dots+n_{k-1}} (-1/a, -1/b)_{n_1} a^{n_1} b^{n_1}}{(q)_{n_1-n_2} \dots (q)_{n_{k-2}-n_{k-1}} (q^2; q^2)_{n_{k-1}}}. \quad (\text{II.66})$$

Considérons la paire de Bailey par rapport à  $q$  suivante [89, p.468, (E3)] :

$$\beta_n = \frac{1}{(q^2; q^2)_\infty} \quad \text{et} \quad \alpha_n = \frac{(-1)^n q^{n^2} (1 - q^{2n+1})}{(1 - q)}.$$

En remplaçant dans le lemme II.23 et en raisonnant comme dans le cas de  $D_{k,i}(s, t, n)$ , on obtient que (II.66) est égal à (II.40). □

# Chapitre III

## Preuves combinatoires

Certains des résultats du chapitre II ont été démontrés par des méthodes non combinatoires, par exemple en établissant des équations aux  $q$ -différences vérifiées par les  $R_{k,i}$  et  $\tilde{R}_{k,i}$  ou en utilisant le treillis de Bailey. Il est naturel de se demander si l'on peut prouver ces résultats d'une façon purement combinatoire. Ce n'est probablement pas le cas, vu la difficulté de démontrer combinatoirement les identités de Rogers-Ramanujan qui ne sont qu'un cas très particulier de nos résultats. Cependant, dans ce chapitre, on va montrer combinatoirement la correspondance entre les chemins et les séries multiples de la section II.7, d'une part, et celle entre les chemins et les surpartitions vérifiant des conditions de multiplicités, d'autre part.

### III.1 Chemins et séries multiples

Au chapitre précédent, les chemins ont été liés combinatoirement aux paires vérifiant des conditions de rangs successifs et l'étude des paires vérifiant des conditions sur leur dissection de Durfee a fait apparaître certaines séries multiples. Dans cette section, on montre par un argument combinatoire que les séries multiples intervenant respectivement dans (II.63) et (II.66) sont les séries génératrices des chemins comptés respectivement par  $E_{k,i}(s, t, n)$  et  $\tilde{E}_{k,i}(s, t, n)$ . Ce résultat est une extension de [49, section 6.2] où les travaux de Bressoud [38] ont été généralisés aux surpartitions.

On va utiliser la notion de *hauteur relative* d'un pic. Cette notion a été définie originellement par Bressoud [38] pour les chemins de Bressoud-Burge. Une définition plus

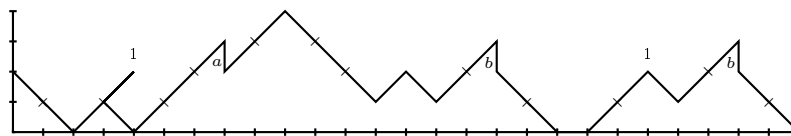


simple de la hauteur relative a été proposée par Berkovich et Paule [34] et étendue dans [49] aux chemins sans pics marqués par  $b$ . On étend à présent cette définition aux chemins définis à la section II.5.

**Définition III.1.** *La hauteur relative d'un pic  $(x, y)$  est le plus grand entier  $h$  pour lequel on peut trouver deux sommets  $(x', y - h)$  et  $(x'', y - h)$  situés sur le chemin respectivement avant et après  $(x, y)$  et tels qu'entre ces deux sommets, il n'y a pas de pic de hauteur  $> y$  et que tous les pics de hauteur  $y$  ont une abscisse  $\geq x$ .*

Cette notion est bien définie car pour  $h = 1$ , on peut toujours trouver deux sommets  $(x', y - 1)$  et  $(x'', y - 1)$  vérifiant les conditions demandées. Dans la définition originelle de Berkovich et Paule, les deux sommets doivent vérifier  $x' < x < x''$ , ce qui est équivalent à dire, dans le cas des chemins de Bressoud-Burge, que  $(x', y - h)$  et  $(x'', y - h)$  sont de part et d'autre de  $(x, y)$ . Pour nos chemins, on a toujours  $x' < x$  mais on peut avoir  $x'' = x$  si  $(x, y)$  est un  $a$ -pic ou un  $b$ -pic, ou même  $x'' = x - 1$  si c'est un  $ab$ -pic.

Par exemple, les hauteurs relatives des pics du chemin de la figure II.3 (reproduit sur la figure III.1) sont, de gauche à droite, 2, 1, 4, 1, 2, 1, 1 et 3.



**FIG. III.1 :** Illustration de la notion de hauteur relative.

Seul le cas des chemins vérifiant les  $(k, i)$ -conditions impaires sera traité en détail, le cas des  $(k, i)$ -conditions impaires étant très similaire. On va démontrer le résultat suivant :

**Proposition III.2.** *Le coefficient de  $a^s b^t q^n$  dans*

$$\frac{q^{n_1 + n_2^2 + \dots + n_{k-1}^2 + n_i + \dots + n_{k-1}} (-1/a, -1/b)_{n_1} a^{n_1} b^{n_1}}{(q)_{n_1 - n_2} \cdots (q)_{n_{k-2} - n_{k-1}} (q)_{n_{k-1}}} \quad (\text{III.1})$$

*est le nombre de chemins d'indice majeur  $n$ , avec  $s$  pics marqués par  $a$  et  $t$  pics marqués par  $b$ , vérifiant les  $(k, i)$ -conditions impaires et ayant  $n_j$  pics de hauteur relative  $\geq j$  pour  $1 \leq j \leq k - 1$ .*

De ce résultat, on peut alors déduire que

$$\begin{aligned} & \sum_{n_1 \geq \dots \geq n_{k-1} \geq 0} \frac{q^{n_1+n_2^2+\dots+n_{k-1}^2+n_i+\dots+n_{k-1}}(-1/a, -1/b)_{n_1} a^{n_1} b^{n_1}}{(q)_{n_1-n_2} \cdots (q)_{n_{k-2}-n_{k-1}} (q)_{n_{k-1}}} \\ &= \sum_{s,t,n \geq 0} E_{k,i}(s, t, n) a^s b^t q^n \\ &= R_{k,i}(a, b; 1; q), \end{aligned}$$

la dernière égalité découlant des résultats des sections II.2 et II.5.

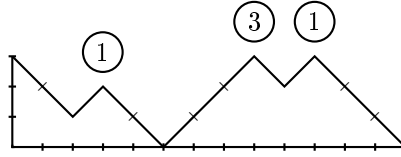
Pour démontrer cette proposition, on va utiliser un résultat de Bressoud [38] :

**Lemme III.3** (Bressoud). *Le coefficient de  $q^n$  dans*

$$\frac{q^{n_1^2+n_2^2+\dots+n_{k-1}^2+n_i+\dots+n_{k-1}}}{(q)_{n_1-n_2} \cdots (q)_{n_{k-2}-n_{k-1}} (q)_{n_{k-1}}}$$

*est le nombre de chemins de Bressoud-Burge d'indice majeur  $n$ , commençant à la hauteur  $k-i$ , dont la hauteur est toujours strictement inférieure à  $k$  et ayant  $n_j$  pics de hauteur relative  $\geq j$  pour  $1 \leq j \leq k-1$ .*

Un exemple d'un tel chemin, tiré de [38], est donné par la figure III.2. Pour ce chemin, on a  $k=4$ ,  $i=1$ ,  $n_1=3$ ,  $n_2=1$  et  $n_3=1$ .



**FIG. III.2** : Exemple de chemin de Bressoud-Burge. On a indiqué au-dessus de chaque pic sa hauteur relative.

*Démonstration de la proposition III.2.* On généralise le raisonnement de [38]. Considérons un chemin de Bressoud-Burge qui commence à la hauteur  $k-i$ , dont la hauteur est toujours strictement inférieure à  $k-1$  et ayant  $n_j$  pics de hauteur relative  $\geq j-1$  pour  $2 \leq j \leq k-1$ .

D'après le lemme III.3, ces chemins sont comptés par

$$\mathcal{P}_{k,i,\vec{n}}(q) = \frac{q^{n_2^2+\dots+n_{k-1}^2+n_i+\dots+n_{k-1}}}{(q)_{n_2-n_3} \cdots (q)_{n_{k-2}-n_{k-1}} (q)_{n_{k-1}}} \quad (\text{III.2})$$

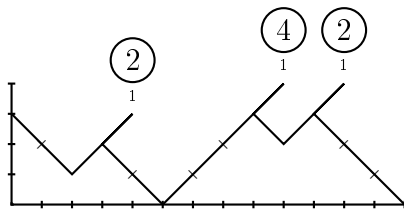
où  $2 \leq i \leq k$  et  $\vec{n} = (n_2, \dots, n_{k-1})$ . On a remplacé  $k$  par  $k-1$ ,  $i$  par  $i-1$  et  $n_j$  par  $n_{j+1}$  dans le lemme III.3 car l'algorithme qu'on va décrire va modifier les hauteurs relatives (ce

qui aura pour conséquence que dans le chemin final,  $n_j$  sera le nombre de pics de hauteur relative  $\geq j$ ) et introduire les termes en  $n_1$ , nous donnant ainsi la série génératrice sous la forme (III.1).

Pour tout  $k \geq 2$  et tout  $i$  tel que  $1 \leq i \leq k$ , on décrit un algorithme qui produit un chemin compté par (III.1) à partir d'un chemin compté par  $\mathcal{P}_{k,i,\bar{n}}(q)$  si  $i \geq 2$  ou par  $\mathcal{P}_{k,2,\bar{n}}(q)$  si  $i = 1$ , de deux partitions  $\alpha$  et  $\beta$  en parts distinctes comprises entre 0 et  $k-1$  et d'une partition  $\gamma$  en  $n_1 - n_2$  parts positives ou nulles. On illustrera les différentes étapes de cet algorithme dans le cas  $k = 5$  et  $i = 2$ , avec comme entrées de l'algorithme le chemin de la figure III.2 compté par  $\mathcal{P}_{5,2,(3,1,1)}$  et les partitions  $\alpha = (6, 3, 1, 0)$  et  $\beta = (4, 0)$ .

On devra prouver que cette procédure est bijective, que tous les chemins comptés par  $E_{k,i}(s, t, n)$  peuvent être engendrés par notre algorithme, que la distribution des hauteurs relatives n'est pas modifiée (sauf à la première étape où la hauteur relative de tous les pics augmente de 1) et que l'algorithme modifie la série génératrice comme on le souhaite.

On effectue d'abord un « soulèvement volcanique » en insérant en chaque pic un pas NE suivi d'un pas SO (voir figure III.3). Cette opération augmente toutes les hauteurs relatives de 1.

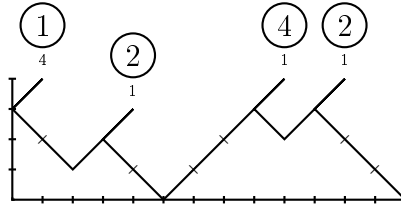


**FIG. III.3 :** Effet du soulèvement volcanique sur le chemin de la figure III.2.

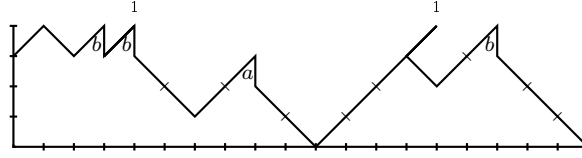
Ensuite, on insère au début du chemin le chemin d'indice majeur minimal commençant en  $(0, k-i)$  et possédant  $n_1 - n_2$   $ab$ -pics (voir figure III.4). On remarque que ces nouveaux pics sont tous de hauteur relative 1 et que ce sont les seuls pics dans ce cas, puisque le soulèvement volcanique a augmenté de 1 toutes les hauteurs relatives.

Si  $i = 1$ , on introduit un pas SE supplémentaire au début du chemin, de  $(0, k-1)$  à  $(1, k-2)$ .

Ensuite, pour tout  $j$  tel que  $1 \leq j \leq n_1$ , si  $\alpha$  contient une part  $j-1$ , on transforme le  $j^{\text{e}}$  pic en partant de la droite en  $b$ -pic, puis si  $\beta$  contient une part  $j-1$ , on transforme le  $j^{\text{e}}$  pic en partant de la droite en  $a$ -pic si c'est un  $ab$ -pic ou en 1-pic si c'est un  $b$ -pic (voir figure III.5). Ces transformations ne modifient pas les hauteurs relatives.



**FIG. III.4 :** Résultat de l'insertion du chemin minimal à  $n_1 - n_2 = 4$  pics au début du chemin de la figure III.3.



**FIG. III.5 :** Résultat de la transformation de certains pics dans le chemin de la figure III.4. Dans cet exemple,  $\alpha = (6, 3, 1, 0)$  et  $\beta = (4, 0)$ .

Enfin, pour tout  $j$  tel que  $1 \leq j \leq n_1 - n_2$ , on déplace le  $j^{\text{e}}$  pic de hauteur relative 1 à partir de la droite  $\gamma_j$  fois selon les règles illustrées par la figure III.6.

Quand on déplace un pic, il peut rencontrer le pic situé immédiatement à sa droite. On dit qu'un pic  $(x, y)$  rencontre un pic  $(x', y')$  si

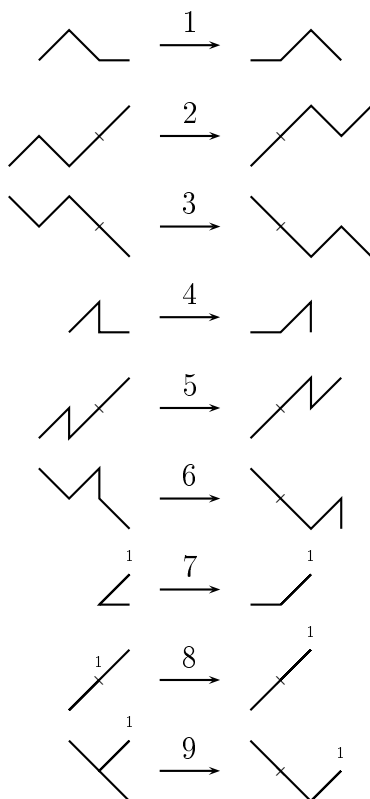
$$x' - x = \begin{cases} 2 & \text{si } (x, y) \text{ est un 1-pic} \\ 1 & \text{si } (x, y) \text{ est un } a\text{-pic ou un } b\text{-pic} \\ 0 & \text{si } (x, y) \text{ est un } ab\text{-pic.} \end{cases}$$

Dans ce cas, on abandonne le pic qu'on était en train de déplacer et on déplace le pic situé immédiatement à sa droite. Si on se retrouve avec une suite de pics contigus, on déplace le plus à droite de ces pics (voir figure III.7).

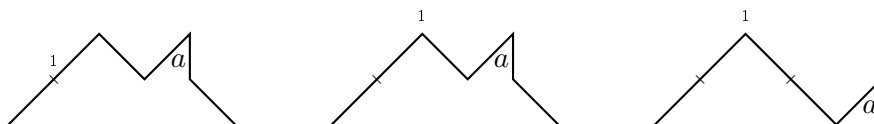
Pour achever la démonstration, on doit montrer que la distribution des hauteurs relatives n'est pas modifiée par les opérations de la figure III.6 (proposition III.4), que notre construction est inversible (proposition III.5), qu'on engendre bien tous nos chemins (proposition III.6) et que le chemin obtenu est bien compté par (III.1) (proposition III.7).  $\square$

**Proposition III.4.** *Les opérations de la figure III.6 préservent le nombre de pics de hauteur relative  $\geq j$  pour tout  $j$ .*

*Démonstration.* On va le montrer seulement pour les opérations 1, 2 et 3, la preuve pour les autres opérations étant très similaire (pour les opérations 4 et 7, la proposition se



**FIG. III.6 :** Règles de déplacement des pics de hauteur relative 1.



**FIG. III.7 :** On veut déplacer le pic de gauche de deux pas vers la droite, mais après le premier déplacement, on se retrouve avec une suite de trois pics adjacents. On déplace alors le pic le plus à droite de cette suite.

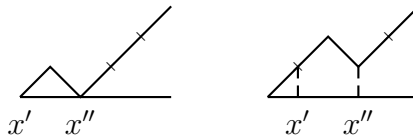
montre comme pour l'opération 1 ; pour 5 et 8, elle se montre comme pour 2 ; pour 6 et 9, elle se montre comme pour 3). On note  $p$  le pic déplacé et  $(x, y)$  ses coordonnées. De plus, on appelle *montagne* une partie d'un chemin qui commence sur l'axe horizontal ou l'axe vertical, se termine sur l'axe horizontal et ne contient aucun sommet intermédiaire sur cet axe (par exemple, le chemin de la figure III.1 a quatre montagnes et celui de la figure III.5 en a deux).

Remarquons d'abord que la hauteur relative d'un pic est nécessairement inférieure ou égale à sa hauteur (c'est-à-dire à son ordonnée) : en effet, si un pic de coordonnées  $(x, y)$  a pour hauteur relative  $h$ , il existe un sommet d'ordonnée  $y - h$  situé sur le chemin, donc  $y \geq h$  car nos chemins sont situés dans le premier quadrant. Il s'ensuit que la hauteur

relative d'un pic ne dépend que des positions des pics situés dans sa montagne. Par conséquent, pour démontrer la proposition, il suffit de s'intéresser aux hauteurs relatives des pics des montagnes affectées par le déplacement ; les autres montagnes ne sont pas modifiées, donc les hauteurs relatives de leurs pics ne changent pas.

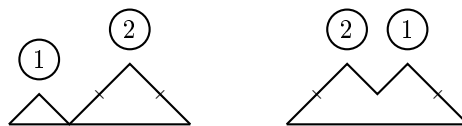
Pour l'opération 1, qui ne peut être appliquée que si  $y = 1$ , il est clair que la hauteur relative de  $p$  ne change pas. Dans ce cas,  $p$  est le seul pic de sa montagne, qui est la seule montagne affectée par le déplacement.

Pour l'opération 2, on distingue trois cas. Le premier cas est celui où  $y = 1$ . Si la hauteur du pic suivant (noté  $p_+$ ) est supérieure à 2 (voir figure III.8), la hauteur relative de  $p$  reste clairement 1 d'après la figure, la hauteur relative de  $p_+$  n'est pas modifiée car il n'apparaît pas de nouveau pic de même hauteur que  $p_+$  à sa gauche et celles des autres pics de la montagne où se trouve  $p_+$  ne changent pas non plus. Si la hauteur de  $p_+$  est égale



**FIG. III.8 :** Cas où la hauteur de  $p$  est égale à 1 et celle de  $p_+$  est supérieure à 2. On a indiqué les abscisses  $x'$  et  $x''$  qui interviennent dans la définition de la hauteur relative de  $p$  ; on constate que cette hauteur relative ne change pas.

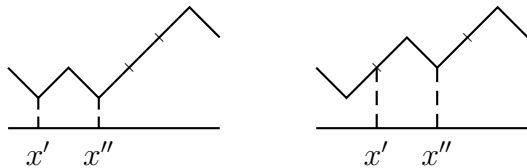
à 2,  $p$  et  $p_+$  échangent leurs hauteurs relatives (voir figure III.9) et les autres hauteurs relatives ne changent pas. Au total, le nombre de pics de hauteur relative donnée n'est pas modifié. Le deuxième cas est celui où  $y > 1$  et  $p$  est le premier pic de sa montagne.



**FIG. III.9 :** Cas où  $p$  et  $p_+$  échangent leurs hauteurs relatives. Cela ne modifie pas le nombre de pics ayant une hauteur relative donnée.

Dans ce cas, le raisonnement est similaire au cas précédent : si la hauteur de  $p_+$  est égale à  $y + 1$ ,  $p$  et  $p_+$  échangent leurs hauteurs relatives ; sinon, les hauteurs relatives ne changent pas. Enfin, si  $p$  n'est pas le premier pic de sa montagne, on distingue deux sous-cas. Si la hauteur de  $p_+$  est supérieure à  $y + 1$ , la hauteur relative de  $p$  reste 1 d'après la figure

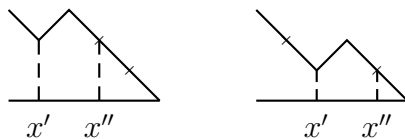
III.10, la hauteur relative de  $p_+$  ne change pas car il n'apparaît pas de nouveau pic de même hauteur que lui à sa gauche et les hauteurs relatives des autres pics ne changent pas non plus. Si la hauteur de  $p_+$  est égale à  $y + 1$ ,  $p$  et  $p_+$  vont échanger leurs hauteurs



**FIG. III.10 :** Cas où la hauteur de  $p_+$  est supérieure à  $y + 1$ . Encore une fois, la hauteur relative de  $p$  reste 1.

relatives comme dans le cas illustré par la figure III.9.

Pour l'opération 3, on distingue deux cas. Le premier est celui où  $p$  est le dernier pic de sa montagne. Dans ce cas, la hauteur relative de  $p$  reste 1 (voir figure III.11). Les hauteurs relatives des autres pics de la montagne ne sont pas modifiées. En effet, en ce qui concerne  $p_-$ , il n'y a pas de pics plus hauts que lui à sa droite, avant comme après le déplacement : sa hauteur relative ne change donc pas. Quant aux autres pics, le déplacement de  $p$  ne change rien pour eux. Dans le deuxième cas, si  $p$  n'est pas le dernier pic de sa montagne,



**FIG. III.11 :** Si  $p$  est le dernier pic de sa montagne, sa hauteur relative n'est pas modifiée.

il est également facile de voir que sa hauteur relative reste 1. Les hauteurs relatives des autres pics ne sont pas modifiées pour les mêmes raisons que précédemment.  $\square$

**Proposition III.5.** *La construction utilisée dans la démonstration de la proposition III.2 est inversible.*

*Démonstration.* On va décrire la procédure inverse. On part d'un chemin compté par (III.1). Il faut d'abord déplacer vers la gauche les pics de hauteur relative 1 : comme on sait, grâce à la proposition III.4, que le déplacement des pics dans notre algorithme ne modifie pas le nombre de pics de hauteur relative donnée, le nombre de pics insérés après le soulèvement volcanique est égal au nombre de pics de hauteur relative 1 dans le chemin compté par (III.1) obtenu à la fin de l'algorithme. On commence par le plus à gauche

de ces pics et on le déplace jusqu'au début du chemin en appliquant en sens inverse les opérations de la figure III.6. Si notre pic devient adjacent à un autre pic au cours de ce déplacement, on abandonne le pic qu'on était en train de déplacer et on déplace le pic situé immédiatement à sa gauche ; si on se retrouve avec une suite de pics contigus, on déplace le plus à gauche de ces pics. Le nombre de mouvements nécessaires pour amener notre pic jusqu'au début du chemin nous donne  $\gamma_{n_1-n_2}$ . On procède de la même façon pour les autres pics de hauteur relative 1, ce qui nous donne une partition  $\gamma$  en  $n_1 - n_2$  parts positives ou nulles (il y a  $n_1 - n_2$  pics de hauteur relative 1 et le nombre de mouvements nécessaires pour déplacer le  $i^e$  pic de hauteur relative 1 en partant de la gauche est inférieur ou égal au nombre de mouvements nécessaires pour déplacer le  $(i + 1)^e$  pic).

Ensuite, on transforme les 1-pics en  $b$ -pics et les  $a$ -pics en  $ab$ -pics : si le  $i^e$  pic en partant de la droite a été ainsi transformé, on ajoute une part  $i - 1$  dans  $\alpha$ , qui va donc être une partition en parts distinctes comprises entre 0 et  $n_1 - 1$ . Après, on transforme les  $b$ -pics en  $ab$ -pics, ce qui nous donne de même une partition  $\beta$  en parts distinctes comprises entre 0 et  $n_1 - 1$ . Tous les pics restants sont maintenant des  $ab$ -pics.

Si  $i = 1$ , on supprime le premier pas SE du chemin. Enfin, on supprime le chemin minimal comprenant les  $n_1 - n_2$  premiers pics, et pour chaque pic, on retire le pas NE qui le précède et le pas SO qui le suit. Cela diminue de 1 la hauteur de tous les pics, qui sont maintenant tous des 1-pics. Le chemin obtenu est compté par  $\mathcal{P}_{k,i,\vec{n}}(q)$  si  $i \geq 2$  et par  $\mathcal{P}_{k,2,\vec{n}}(q)$  si  $i = 1$ .  $\square$

**Proposition III.6.** *Tout chemin compté par  $E_{k,i}(s, t, n)$  peut être engendré par notre algorithme.*

*Démonstration.* On peut appliquer l'algorithme inverse décrit dans la démonstration de la proposition III.5 à n'importe quel chemin  $\mathcal{C}$  compté par (III.1), ce qui nous donne un chemin de Bressoud-Burge  $\mathcal{C}'$ . En appliquant l'algorithme direct à ce chemin, on retrouve  $\mathcal{C}$  puisque les deux procédures sont inverses l'une de l'autre. Donc, pour tout chemin compté par  $E_{k,i}(s, t, n)$ , il existe un chemin de Bressoud-Burge qui permet de l'engendrer.  $\square$

**Proposition III.7.** *Le chemin obtenu en appliquant notre algorithme est compté par (III.1).*

*Démonstration.* Le soulèvement volcanique transforme les  $n_2$  1-pics en  $ab$ -pics et augmente l'indice majeur de  $n_2$  puisque chaque pic est décalé de 1. De plus, toutes les hauteurs



relatives augmentent de 1, ce qui fait que  $n_j$  compte maintenant les pics de hauteur relative  $\geq j$ .

La contribution totale à l'indice majeur des  $ab$ -pics introduits à l'étape suivante est de  $n_1 - n_2$  (il y a  $n_1 - n_2$   $ab$ -pics qui sont tous d'abscisse 1). Au total, le soulèvement volcanique et l'insertion introduisent dans la série génératrice un facteur

$$(ab)^{n_2} q^{n_2} \times q^{n_1 - n_2} (ab)^{n_1 - n_2} = (abq)^{n_1}.$$

Si  $i = 1$ , on ajoute un pas SE supplémentaire au début du chemin, ce qui introduit un facteur  $q^{n_1}$ .

Quand on transforme le  $j^{\text{e}}$  pic en partant de la droite en  $a$ -pic, l'indice majeur augmente de  $j$  car les  $j - 1$  pics les plus à droite sont décalés de 1 vers la droite. On effectue cette transformation s'il y a une part  $j - 1$  dans  $\alpha$ ; au total, l'augmentation de l'indice majeur est égale à la taille de  $\alpha$ , qui est une partition en parts distinctes comprises entre 0 et  $n_1 - 1$ . Cette étape introduit donc un facteur  $(-1/a)_{n_1}$  et la deuxième transformation, qui utilise  $\beta$ , introduit de même un facteur  $(-1/b)_{n_1}$ .

Enfin, quand le  $j^{\text{e}}$  pic de hauteur relative 1 en partant de la droite est déplacé de  $\gamma_j$  pas vers la droite, l'indice majeur augmente de  $\gamma_j$ . Si on tient compte du déplacement de tous les pics de hauteur relative 1, l'augmentation de l'indice majeur est égale à la taille de  $\gamma$ , qui est une partition en  $n_1 - n_2$  parts positives ou nulles. Le déplacement des pics introduit donc un facteur  $\frac{1}{(q)_{n_1 - n_2}}$ .  $\square$

Dans le cas des  $(k, i)$ -conditions paires, on raisonne de la même façon en utilisant le résultat suivant, qui est l'analogie du lemme III.3 pour le cas pair :

**Lemme III.8** (Bressoud [38]). *Le coefficient de  $q^n$  dans*

$$\frac{q^{n_1^2 + n_2^2 + \dots + n_{k-1}^2 + n_i + \dots + n_{k-1}}}{(q)_{n_1 - n_2} \cdots (q)_{n_{k-2} - n_{k-1}} (q^2; q^2)_{n_{k-1}}}$$

*est le nombre de chemins de Bressoud-Burge d'indice majeur  $n$ , commençant à la hauteur  $k - i$ , dont la hauteur est toujours strictement inférieure à  $k$ , tels que tout pic de coordonnées  $(x, k - 1)$  vérifie  $x \equiv i - 1 \pmod{2}$ , et ayant  $n_j$  pics de hauteur relative  $\geq j$  pour  $1 \leq j \leq k - 1$ .*

L'analogie de  $\mathcal{P}_{k,i,\vec{n}}(q)$  est

$$\tilde{\mathcal{P}}_{k,i,\vec{n}}(q) = \frac{q^{n_2^2 + \dots + n_{k-1}^2 + n_i + \dots + n_{k-1}}}{(q)_{n_2 - n_3} \cdots (q)_{n_{k-2} - n_{k-1}} (q)_{n_{k-1}}}, \quad (\text{III.3})$$

qui est la série génératrice des chemins de Bressoud-Burge commençant à la hauteur  $k-i$ , dont la hauteur est toujours strictement inférieure à  $k-1$ , tels que tout pic de coordonnées  $(x, k-2)$  vérifie  $x \equiv i-2 \pmod{2}$ , et ayant  $n_j$  pics de hauteur relative  $\geq j-1$  pour  $2 \leq j \leq k-1$ .

Le soulèvement volcanique augmente l'abscisse et la hauteur de chaque pic de 1, ce qui fait que les pics de hauteur maximale sont maintenant les pics de coordonnées  $(x, k-1)$ , qui vérifient  $x \equiv i-1 \pmod{2}$ .

Les pics insérés à l'étape suivante ont pour coordonnées  $(1, k-i+1)$ . Si  $i=2$ , on a  $k-i+1 = k-1$  et ces nouveaux pics vérifient bien la condition  $x \equiv i-1 \pmod{2}$  (à ce stade, il n'y a que des  $ab$ -pics donc  $u$  et  $v$  sont nuls pour tous les pics); si  $i > 2$ ,  $k-i+1 < k-1$  donc l'abscisse de ces pics n'est pas contrainte.

Quand on transforme un  $ab$ -pic en  $a$ -pic,  $b$ -pic ou 1-pic, cela décale les pics situés à sa droite, ce qui nous donne la condition  $x-u+v \equiv i-1 \pmod{2}$  pour les pics de hauteur  $k-1$ .

Enfin, il faut s'assurer que le chemin va toujours vérifier les  $(k, i)$ -conditions paires après le déplacement des pics de hauteur relative 1. Si on doit déplacer un pic de hauteur  $k-1$ , sa hauteur va diminuer; les pics restants de hauteur  $k-1$  ne bougent pas et vérifient donc toujours la condition, et le chemin vérifie toujours les  $(k, i)$ -conditions paires. Par ailleurs, on peut obtenir un nouveau pic de hauteur  $k-1$  en appliquant l'une des opérations 2, 5 ou 8 à un pic de hauteur  $k-2$ ; ce pic va alors rencontrer un pic qui était déjà de hauteur  $k-1$ . En traitant chacun des trois cas (le nouveau pic de hauteur  $k-1$  est un  $ab$ -pic, c'est un  $a$ -pic ou un  $b$ -pic, ou c'est un 1-pic), on montre facilement que comme le pic qui était déjà de hauteur  $k-1$  vérifie la condition  $x-u+v \equiv i-1 \pmod{2}$ , le nouveau pic de hauteur  $k-1$  va aussi la vérifier.

## III.2 Étude combinatoire des multiplicités dans le cas des surpartitions

Notons  $f_{\underline{j}}(\lambda) = f_j(\lambda) + f_{\overline{j}}(\lambda)$  la multiplicité du nombre  $j$  dans une surpartition  $\lambda$ , c'est-à-dire le nombre total d'occurrences de  $j$  dans  $\lambda$ . Soit  $\overline{B}_{k,i}(j, n) = B_{k,i}(j, 0, n)$  le

nombre de surpartitions  $\lambda$  de  $n$  avec  $j$  parts surlignées telles que pour tout  $\ell$ ,

$$f_{\underline{1}} < i$$

$$\lambda_\ell - \lambda_{\ell+k-1} \geq \begin{cases} 1 & \text{si } \lambda_{\ell+k-1} \text{ est surlignée} \\ 2 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{III.4})$$

ou, de manière équivalente,

$$f_{\underline{1}} < i$$

$$\forall \ell, f_{\underline{\ell}} + f_{\underline{\ell+1}} < \begin{cases} k+1 & \text{si une part } \ell \text{ est surlignée} \\ k & \text{sinon.} \end{cases} \quad (\text{III.5})$$

On notera cette dernière condition  $\forall \ell, f_{\underline{\ell}} + f_{\underline{\ell+1}} < k(+1)_{\bar{\ell}}$ .

Quand on considère le cas  $\mu = \emptyset$  (cas des surpartitions) des objets intervenant dans le théorème II.1, on retrouve bien cette définition, car  $v_\ell((\lambda, \emptyset)) = f_\ell(\lambda) + f_{\bar{\ell}}(\lambda) = f_{\underline{\ell}}(\lambda)$  et la condition (ii) du théorème devient  $f_\ell(\lambda) + f_{\underline{\ell+1}}(\lambda) = f_{\underline{\ell}}(\lambda) + f_{\underline{\ell+1}}(\lambda) - f_{\bar{\ell}}(\lambda) < k$ . On a donc  $f_{\underline{\ell}}(\lambda) + f_{\underline{\ell+1}}(\lambda) < k + f_{\bar{\ell}}(\lambda)$ , ce qui est équivalent à (III.5).

Soit  $\overline{E}_{k,i}(j, n) = E_{k,i}(j, 0, n)$  le nombre de chemins de Bressoud-Burge généralisés d'indice majeur  $n$  sans pics marqués par  $b$  qui ont  $j$  pas S (ou  $j$  pics marqués par  $a$ , ce qui revient au même ici) et qui vérifient les  $(k, i)$ -conditions impaires. Le but de cette section est de démontrer le résultat suivant, dont une ébauche de preuve a été présentée dans [49] :

**Proposition III.9.** *Il existe une bijection entre les chemins comptés par  $\overline{E}_{k,i}(j, n)$  et les surpartitions comptées par  $\overline{B}_{k,i}(j, n)$ . Cette bijection est telle que le nombre de pics d'un chemin est égal à la longueur de la suite de multiplicités de la surpartition correspondante (cette notion sera définie dans la suite de la section).*

Cette bijection n'a pas été généralisée aux paires de surpartitions pour le moment.

La démonstration de la proposition III.9 est une généralisation de [39, section 3]. On va utiliser la représentation d'une surpartition comme une suite de multiplicités : on associe à une surpartition la suite finie  $(f_{\underline{0}}, f_{\underline{1}}, f_{\underline{2}}, \dots)$  où on surligne  $f_{\underline{j}}$  si  $j$  apparaît surligné. Par exemple, la suite des multiplicités de  $\lambda = (6, 6, 5, 4, 4, \overline{4}, 3, \overline{1})$  est  $(0, \overline{1}, 0, 1, \overline{3}, 1, 2)$ . Naturellement, la multiplicité  $f_{\underline{0}}$  est toujours nulle ; on l'introduit ici pour simplifier les définitions.

On dit qu'une suite  $(\underline{f}_m, \dots, \underline{f}_{m+\ell})$  est un *multuplet* ( $(\ell + 1)$ -uplet de multiplicités) si

- $\underline{f}_{m+\ell} > 0$ ;
- $\underline{f}_m$  n'est pas surlignée ;
- $\underline{f}_{m+p}$  est surlignée pour  $1 \leq p \leq \ell - 1$ .

La *longueur* d'un multuplet  $(\underline{f}_m, \dots, \underline{f}_{m+\ell})$  est  $\ell$  et son *m-poids* est  $\sum_{i=0}^{\ell} (m+i)\underline{f}_{m+i}$ . On peut définir d'une façon générale le *m-poids* d'une suite de multiplicités  $(\underline{f}_m, \dots, \underline{f}_{m+p})$  par  $\sum_{i=0}^p (m+i)\underline{f}_{m+i}$  ; on remarque que la taille d'une surpartition est égale au 0-poids de sa suite de multiplicités.

On divise la suite de multiplicités d'une surpartition en multuplets en allant de la droite vers la gauche. Quand on trouve une multiplicité strictement positive, on ferme une parenthèse à sa droite. On cherche la plus proche des multiplicités non surlignées situées à sa gauche et on ouvre une parenthèse à gauche de cette dernière multiplicité. La *longueur* d'une suite de multiplicités est définie comme la somme des longueurs des multuplets de sa décomposition. La décomposition étant unique, cette notion est bien définie. Par exemple, la suite de multiplicités  $(0, \bar{2}, 0, 2, \bar{1}, 1)$  nous donne la décomposition  $((0, \bar{2}), 0, (2, \bar{1}, 1))$  ; le multuplet  $(2, \bar{1}, 1)$  est de longueur 2 et le multuplet  $(0, \bar{2})$  est de longueur 1, donc la longueur de la suite est 3. Dans le cas des partitions traité dans [39], les multuplets sont des couples de multiplicités (multuplets de longueur 1) et la longueur d'une suite de multiplicités est simplement le nombre de ces couples.

On définit une application  $F$  qui à un multuplet de *m-poids*  $n$  et de longueur  $\ell$  associe une suite de multiplicités de *m-poids*  $n - \ell$ . Étant donné un multuplet  $(\underline{f}_m, \dots, \underline{f}_{m+\ell})$ , la suite  $F(\underline{f}_m, \dots, \underline{f}_{m+\ell})$  est calculée en utilisant l'algorithme suivant :

- si  $\underline{f}_{m+\ell} = \bar{1}$ , on enlève le surlignage de  $\underline{f}_{m+\ell}$  et on surligne  $\underline{f}_m$  ;
- si  $\underline{f}_{m+\ell} \neq \bar{1}$  et  $\ell > 1$ , on enlève le surlignage de  $\underline{f}_{m+\ell-1}$  et on surligne  $\underline{f}_m$  ;
- on diminue  $\underline{f}_{m+\ell}$  de 1 ;
- on augmente  $\underline{f}_m$  de 1.

Par exemple, pour  $m = 1$  et le multuplet  $(1, \bar{1}, \bar{3})$ , on a  $n = 12$ ,  $\ell = 2$  et  $F(1, \bar{1}, \bar{3}) = (\bar{2}, 1, \bar{2})$  qui est de 1-poids 10.

Dans la suite, on assimile une surpartition à sa suite de multiplicités. Soit  $\bar{B}_{k,i}(j, n, N)$  le nombre de surpartitions comptées par  $\bar{B}_{k,i}(j, n)$  qui sont de longueur  $N$ . On pose  $\bar{B}_{k,i}(N) = \sum_{j,n} \bar{B}_{k,i}(j, n, N) a^j q^n$ . On divise maintenant une surpartition  $\lambda$  comptée par

$\overline{\mathcal{B}}_{k,i}(N)$  en multiplets en allant de la droite vers la gauche et on applique  $F$  à chaque multiplet. Les multiplicités ne faisant pas partie d'un multiplet (qui sont forcément nulles) ne sont pas modifiées. Si la suite obtenue contient une part de taille 0 (ce qui arrive si  $\lambda$  possède un multiplet qui commence par  $f_0$ ), on supprime cette part. On note  $F(\lambda)$  la suite ainsi obtenue. Remarquons que si  $\lambda$  est de taille  $n$  et de longueur  $N$ , alors  $F(\lambda)$  est de taille  $n - N$  et de longueur  $N$  ou  $N - 1$ . Par exemple, soit  $\lambda = (0, (0, \overline{1}), (1, \overline{1}, \overline{3}))$  qui est de taille 24 et de longueur 3. On a  $F(\lambda) = \mu = ((0, \overline{1}), (0, \overline{2}), (1, \overline{2}))$ , qui a pour taille 21 et pour longueur 3. Si on applique encore une fois  $F$ , on obtient  $F(\mu) = \nu = (0, 0, (1, \overline{1}), (2, \overline{1}))$  qui a pour longueur 2 et pour taille 18 (voir la table suivante).

	$f_0$	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$	$f_5$
$\lambda$	0	(0	$\overline{1}$ )	(1	$\overline{1}$	$\overline{3}$ )
$\mu = F(\lambda)$	(0	$\overline{1}$ )	(0	$\overline{2}$ )	(1	$\overline{2}$ )
$\nu = F(\mu)$	0	0	(1	$\overline{1}$ )	(2	$\overline{1}$ )

Soit  $\overline{\mathcal{G}}_{k,i}(N)$  la série génératrice des surpartitions  $\mu = F(\lambda)$  où  $\lambda$  est une surpartition comptée par  $\overline{\mathcal{B}}_{k,i+1}(N)$  et possède un multiplet  $(f_0, f_1)$  avec  $f_1 \neq \overline{1}$ .

**Proposition III.10.** *Soit  $\lambda$  une surpartition comptée par  $\overline{\mathcal{B}}_{k,i}(N)$  avec  $N > 0$ . Alors*

1.  $\lambda$  est une surpartition de  $n$  et possède un multiplet  $(f_0, \dots, f_\ell)$  avec  $\ell > 1$  ou  $f_\ell = \overline{1}$  si et seulement si  $F(\lambda)$  est une surpartition de  $n - N$ , a une part surlignée de moins que  $\lambda$  et est comptée par  $\overline{\mathcal{B}}_{k,i}(N - 1)$ ;
2.  $\lambda$  est une surpartition de  $n$  et possède un multiplet  $(f_0, \dots, f_\ell)$  avec  $\ell = 1$  et  $f_\ell \neq \overline{1}$  si et seulement si  $F(\lambda)$  est une surpartition de  $n - N$ , a le même nombre de parts surlignées que  $\lambda$  et est comptée par  $\overline{\mathcal{G}}_{k,i-1}(N)$ ;
3.  $\lambda$  est une surpartition de  $n$  et ne possède pas de multiplet  $(f_0, \dots, f_\ell)$  si et seulement si  $F(\lambda)$  est une surpartition de  $n - N$ , a le même nombre de parts surlignées que  $\lambda$  et est comptée par  $\overline{\mathcal{B}}_{k,i+1}(N)$ .

*Soit  $\lambda$  une surpartition comptée par  $\overline{\mathcal{G}}_{k,i}(N)$ . Alors*

1.  $\lambda$  est une surpartition de  $n$  et possède un multiplet  $(f_0, \dots, f_\ell)$  avec  $\ell > 1$  ou  $f_\ell = \overline{1}$  si et seulement si  $F(\lambda)$  est une surpartition de  $n - N$ , a une part surlignée de moins que  $\lambda$  et est comptée par  $\overline{\mathcal{B}}_{k,i}(N - 1)$ ;

2.  $\lambda$  est une surpartition de  $n$  et possède un multiplet  $(f_{\underline{0}}, \dots, f_{\underline{\ell}})$  avec  $\ell = 1$  et  $f_{\underline{\ell}} \neq \bar{1}$  si et seulement si  $F(\lambda)$  est une surpartition de  $n - N$ , a le même nombre de parts surlignées que  $\lambda$  et est comptée par  $\bar{\mathcal{G}}_{k,i-1}(N)$ .
3.  $\lambda$  est une surpartition de  $n$  et ne possède pas de multiplet  $(f_{\underline{0}}, \dots, f_{\underline{\ell}})$  si et seulement si  $F(\lambda)$  est une surpartition de  $n - N + 1$ , a le même nombre de parts surlignées que  $\lambda$  et est comptée par  $\bar{\mathcal{B}}_{k,i+1}(N - 1)$ .

*Démonstration.* On ne traitera que le premier cas, les autres étant similaires. On considère une surpartition  $\lambda$  de taille  $n$  comptée par  $\bar{\mathcal{B}}_{k,i}(N)$  où  $N > 0$ . Pour chaque multiplet  $(f_{\underline{m}}, \dots, f_{\underline{m+\ell}})$ , l'application de  $F$  fait augmenter  $f_{\underline{m}}$  de 1 et diminuer  $f_{\underline{m+\ell}}$  de 1 : le  $m$ -poids du multiplet diminue donc de  $\ell$ . En sommant sur tous les multiplets, on constate que la taille de la surpartition diminue de  $N$  :  $F(\lambda)$  est donc une surpartition de  $n - N$ .

Montrons ensuite que  $F(\lambda)$  vérifie, comme  $\lambda$ , la condition  $\forall \ell, f_{\underline{\ell}} + f_{\underline{\ell+1}} < k(+1)\bar{\ell}$ . Le seul cas où la somme de deux multiplicités consécutives  $f_{\underline{m}}$  et  $f_{\underline{m+1}}$  peut augmenter est celui où l'une de ces deux multiplicités est la plus à gauche d'un multiplet. Si c'est  $f_{\underline{m}}$ , alors après l'application de  $F$ ,  $f_{\underline{m}}$  devient surlignée et on a encore  $f_{\underline{m}} + f_{\underline{m+1}} < k(+1)\bar{\ell}$ . Si c'est  $f_{\underline{m+1}}$ , alors  $f_{\underline{m}} + f_{\underline{m+1}}$  n'augmente de 1 que si  $f_{\underline{m}} = 0$  avant qu'on applique  $F$ . On sait que  $f_{\underline{m+1}} < k - 1$  avant cette opération (car  $f_{\underline{m+1}} + f_{\underline{m+2}} < k$  et  $f_{\underline{m+2}} > 0$ ), donc la condition  $f_{\underline{m}} + f_{\underline{m+1}} < k$  est vérifiée par  $F(\lambda)$ .

Si  $\lambda$  possède un multiplet  $(f_{\underline{0}}, \dots, f_{\underline{\ell}})$  avec  $\ell > 1$  ou  $f_{\underline{\ell}} = \bar{1}$ , on distingue deux cas. Si  $\ell > 1$  et  $f_{\underline{\ell}} \neq \bar{1}$ ,  $f_{\underline{\ell-1}}$  va perdre son surlignage au profit de  $f_{\underline{0}}$ , mais  $f_{\underline{0}}$  ne peut être surlignée puisqu'il n'y a aucune part 0 :  $F(\lambda)$  aura donc une part surlignée de moins que  $\lambda$ . Si  $f_{\underline{\ell}} = \bar{1}$ , c'est la part  $f_{\underline{\ell}}$  qui perd son surlignage et, comme précédemment,  $F(\lambda)$  a une part surlignée de moins que  $\lambda$ .

Intéressons-nous maintenant à l'évolution de la longueur. On dit qu'une multiplicité est *dextre* si elle est la plus à droite d'un multiplet. Il est facile de voir que la longueur d'une surpartition est égale à la somme du nombre de parts surlignées et du nombre de multiplicités dextres non surlignées. En effet, un multiplet  $(f_{\underline{m}}, \dots, f_{\underline{m+\ell}})$  a  $\ell$  parts surlignées si  $f_{\underline{m+\ell}}$  est surlignée et  $\ell - 1$  parts surlignées sinon ; en sommant sur tous les multiplets, on obtient le résultat souhaité. On sait que dans le cas présent, le nombre de parts surlignées diminue de 1 quand on applique  $F$ . Que devient le nombre de multiplicités dextres non surlignées ? Considérons un multiplet  $(f_{\underline{m}}, \dots, f_{\underline{m+\ell}})$ . Deux cas se présentent :

soit  $f_{\underline{m+\ell}}$  reste une multiplicité dextre, soit ce n'en est plus une. Dans le second cas,  $f_{m+\ell-1}$  devient dextre : pour que ce ne soit pas le cas, il faudrait que  $\lambda$  possède un multiplet  $(f_{\underline{0}}, f_{\underline{1}})$  et que soit  $f_{\underline{1}} = 1$ , soit  $f_{\underline{1}}$  devienne la multiplicité la plus à gauche d'un multiplet après l'application de  $F$ . On sait que c'est impossible dans notre cas puisque le multiplet  $(f_{\underline{0}}, \dots, f_{\underline{\ell}})$  vérifie  $\ell > 1$  ou  $f_{\underline{\ell}} = \bar{1}$ . Par conséquent, le nombre de multiplicités dextres non surlignées ne change pas et la longueur de la surpartition diminue donc de 1 quand on applique  $F$ .

Comme  $f_{\underline{1}}$  n'augmente pas ( $f_{\underline{1}}$  diminue de 1 s'il y a une paire  $(f_{\underline{0}}, f_{\underline{1}})$  dans  $\lambda$  et ne change pas sinon), on obtient que  $F(\lambda)$  est comptée par  $\bar{\mathcal{B}}_{k,i}(N-1)$ .

Réciproquement, soit  $\lambda$  une surpartition comptée par  $\bar{\mathcal{B}}_{k,i}(N)$  (avec  $N > 0$ ) telle que  $F(\lambda)$  est une surpartition de  $n-N$ , a une part surlignée de moins que  $\lambda$  et est comptée par  $\bar{\mathcal{B}}_{k,i}(N-1)$ . Tout d'abord, comme  $\lambda$  est de longueur  $N$  et que la taille d'une surpartition de longueur  $N$  diminue de  $N$  quand on applique  $F$ , on sait que  $\lambda$  est une surpartition de  $n$ . Ensuite, quand on applique  $F$ , on ne peut perdre une part surlignée qu'en surlignant une part 0 qui disparaît ensuite : on en déduit donc qu'il y a un multiplet de la forme  $(f_{\underline{0}}, \dots, f_{\underline{\ell}})$  dans  $\lambda$ . Si on avait  $\ell = 1$  et  $f_{\underline{\ell}} \neq \bar{1}$  pour ce multiplet, le nombre de parts surlignées resterait identique : on a donc  $\ell > 1$  ou  $f_{\underline{\ell}} = \bar{1}$ .

□

Quelques remarques sont nécessaires avant de passer à la suite. Tout d'abord, on a  $\bar{\mathcal{B}}_{k,i}(0) = 1$ , vu que la seule surpartition de longueur 0 est la surpartition vide. Ensuite, si  $\lambda$  est comptée par  $\bar{\mathcal{B}}_{k,1}(N)$ , on a  $f_{\underline{0}} = 0$  et  $f_{\underline{1}} = 0$  donc il n'y a pas de multiplet  $(f_{\underline{0}}, \dots, f_{\underline{\ell}})$ . En appliquant  $F$ , on obtient nécessairement une surpartition de  $n-N$  avec le même nombre de parts surlignées que  $\lambda$  qui est comptée par  $\bar{\mathcal{B}}_{k,2}(N)$ . De même, si  $\lambda$  est comptée par  $\bar{\mathcal{G}}_{k,1}(N)$ , il n'y a pas de multiplet  $(f_{\underline{0}}, \dots, f_{\underline{\ell}})$  et  $F(\lambda)$  est une surpartition de  $n-N+1$  avec le même nombre de parts surlignées que  $\lambda$  qui est comptée par  $\bar{\mathcal{B}}_{k,2}(N-1)$ .

Ces remarques et la proposition précédente impliquent que :

$$\begin{aligned}\bar{\mathcal{B}}_{k,1}(N) &= q^N \bar{\mathcal{B}}_{k,2}(N); \\ \bar{\mathcal{B}}_{k,i}(N) &= q^N (\bar{\mathcal{B}}_{k,i+1}(N) + \bar{\mathcal{G}}_{k,i-1}(N) + a \bar{\mathcal{B}}_{k,i}(N-1)), \text{ si } 1 < i \leq k; \\ \bar{\mathcal{G}}_{k,1}(N) &= q^{N-1} \bar{\mathcal{B}}_{k,2}(N-1); \\ \bar{\mathcal{G}}_{k,i}(N) &= q^{N-1} \bar{\mathcal{B}}_{k,i+1}(N-1) + q^N \bar{\mathcal{G}}_{k,i-1}(N) + a q^N \bar{\mathcal{B}}_{k,i}(N-1), \text{ si } 1 < i < k; \\ \bar{\mathcal{B}}_{k,i}(0) &= 1.\end{aligned}$$

On a maintenant tous les ingrédients nécessaires pour démontrer la proposition III.9. On remarque que  $\bar{\mathcal{B}}_{k,k+1}(N) = \bar{\mathcal{B}}_{k,k}(N)$ , car s'il existait une surpartition  $\lambda$  comptée par  $\bar{\mathcal{B}}_{k,k+1}(N)$  mais pas par  $\bar{\mathcal{B}}_{k,k}(N)$ , elle vérifierait  $f_{\underline{1}}(\lambda) = k$  et pour que la condition  $f_{\underline{0}} + f_{\underline{1}} < k(+1)_{\bar{c}}$  soit vérifiée, il devrait y avoir une occurrence surlignée de 0 dans  $\lambda$ , ce qui est impossible. De plus, on pose  $\bar{\Gamma}_{k,i}(N) = \bar{\mathcal{G}}_{k,i}(N) + a \bar{\mathcal{B}}_{k,i+1}(N-1)$  si  $i > 0$  et  $\bar{\Gamma}_{k,0}(N) = 0$ . On a alors

$$\begin{aligned}\bar{\mathcal{B}}_{k,i}(N) &= q^N (\bar{\mathcal{B}}_{k,i+1}(N) + \bar{\Gamma}_{k,i-1}(N)), \text{ si } i < k; \\ \bar{\mathcal{B}}_{k,k}(N) &= q^N \bar{\Gamma}_{k,k-1}(N) / (1 - q^N); \\ \bar{\Gamma}_{k,i}(N) &= (a + q^{N-1}) \bar{\mathcal{B}}_{k,i+1}(N-1) + q^N \bar{\Gamma}_{k,i-1}(N), \text{ si } i > 0; \\ \bar{\mathcal{B}}_{k,i}(0) &= 1; \\ \bar{\Gamma}_{k,0}(N) &= 0.\end{aligned}$$

Ces récurrences sont vérifiées par  $\bar{\mathcal{E}}_{k,i}(N)$ , la série génératrice des chemins qui n'ont pas de pics marqués par  $b$  et qui vérifient les  $(k, i)$ -conditions impaires; en effet, elles correspondent au cas  $b = 0$  de la proposition II.12. De plus, elles définissent  $\bar{\mathcal{E}}_{k,i}(N)$  de manière unique. Donc  $\bar{\mathcal{B}}_{k,i}(N) = \bar{\mathcal{E}}_{k,i}(N)$  et la proposition III.9 est démontrée.





# Chapitre IV

## Surpartitions $n$ -colorées

### IV.1 Introduction

Parmi les généralisations classiques des partitions, on trouve les *partitions planes*, ou *partitions bidimensionnelles*. Une partition plane de  $n$  est un tableau d'entiers

$$\lambda = \begin{array}{cccc} \lambda_{1,1} & \lambda_{1,2} & \lambda_{1,3} & \cdots \\ \lambda_{2,1} & \lambda_{2,2} & \lambda_{2,3} & \cdots \\ \lambda_{3,1} & \lambda_{3,2} & \lambda_{3,3} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}$$

tel que pour tout  $(i, j)$ ,  $\lambda_{i,j} \geq \lambda_{i,j+1}$  et  $\lambda_{i,j} \geq \lambda_{i+1,j}$ , et vérifiant  $\sum_{i,j} \lambda_{i,j} = n$ . Par exemple,

$$\begin{array}{cccc} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & \\ 2 & & & \\ 2 & & & \end{array}$$

est une partition plane de 19. En notant  $pp(n)$  le nombre de partitions planes de  $n$ , la série génératrice des partitions planes s'écrit, pour  $|q| < 1$  [77] :

$$PP(q) = \sum_{n=0}^{\infty} pp(n)q^n = \prod_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(1-q^i)^i}. \quad (\text{IV.1})$$

Il n'est pas évident de montrer que ce produit infini est bien la série génératrice des partitions planes (les preuves les plus simples font intervenir une bijection entre les partitions

planes et des matrices d'entiers positifs qui sont comptées par (IV.1) ; voir [79] pour un exemple d'une telle bijection). En revanche, il est beaucoup plus facile de voir que c'est la série génératrice des partitions formées en prenant les parts non plus dans l'ensemble  $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ , mais dans l'ensemble

$$\mathbb{N}^\square = \{1_1, 2_1, 2_2, 3_1, 3_2, 3_3, \dots\} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{i_1, i_2, \dots, i_i\}.$$

On dit que la *taille* d'une part  $i_j$  est  $i$  et que sa *couleur* est  $j$ . En utilisant les méthodes classiques de la théorie des partitions [25, chapitre 1], on montre que la contribution des parts  $i_j$  à la série génératrice est  $\frac{1}{1-q^i}$  et que l'ensemble des parts de taille  $i$  donne donc un facteur  $\frac{1}{(1-q^i)^i}$ , ce qui permet de conclure que (IV.1) est bien la série génératrice des partitions spéciales qu'on vient de définir. Ces partitions sont appelées *partitions avec  $n$  copies de  $n$*  ou *partitions  $n$ -colorées*, car il y a  $n$  couleurs possibles pour une part de taille  $n$ . Dans un tel objet, on ordonne les parts d'abord par ordre décroissant de taille puis par ordre décroissant de couleur. Par exemple, les partitions  $n$ -colorées de 4 sont

$$(4_4), (4_3), (4_2), (4_1), (3_3, 1_1), (3_2, 1_1), (3_1, 1_1), (2_2, 2_2), (2_2, 2_1), \\ (2_1, 2_1), (2_2, 1_1, 1_1), (2_1, 1_1, 1_1), (1_1, 1_1, 1_1, 1_1).$$

Si certains travaux sur les partitions planes avaient déjà fait intervenir des objets équivalents aux partitions  $n$ -colorées (voir par exemple [41, 42]), l'étude de ces dernières a véritablement commencé dans les années 1980 avec les travaux d'Agarwal, Andrews et Bressoud [4, 1, 2, 3, 5] ; la motivation initiale était d'interpréter combinatoirement des identités de type Rogers-Ramanujan révélées par les travaux de Baxter sur un modèle de mécanique statistique [33, chapitre 14]. On définit la *différence pondérée* de deux parts  $m_i$  et  $n_j$ , notée  $((m_i - n_j))$ , comme étant  $m - n - i - j$ . Agarwal et Andrews [4] ont obtenu le résultat suivant :

**Théorème IV.1** (Agarwal et Andrews). *Pour  $k \geq 2$  et  $0 \leq t \leq k - 1$ , soit  $A_t(k, \nu)$  le nombre de partitions (ordinaires) de  $\nu$  en parts non congrues à  $0, \pm 2(k - t) \pmod{4k + 2}$ . Pour  $k \geq 2$ , soit  $B_0(k, \nu)$  le nombre de partitions  $n$ -colorées de  $\nu$  telles que si la différence pondérée de deux parts  $m_i$  et  $n_j$  vérifiant  $m \geq n$  est négative ou nulle, alors elle est paire et supérieure ou égale à  $-2 \min(i - 1, j - 1, k - 3)$ . Alors pour tout  $\nu \geq 0$ ,  $A_0(k, \nu) = B_0(k, \nu)$ .*

Par exemple, on a  $A_0(2, 7) = B_0(2, 7) = 11$ . Les partitions comptées par  $A_0(2, 7)$  sont

$$(7), (6, 1), (5, 2), (3, 3, 1), (3, 2, 2), (3, 2, 1, 1), (3, 1, 1, 1, 1), (2, 2, 2, 1), \\ (2, 2, 1, 1, 1), (2, 1, 1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$$

et les partitions  $n$ -colorées comptées par  $A_0(2, 7)$  (qui sont simplement les partitions  $n$ -colorées de 7 dont les différences pondérées sont strictement positives) sont

$$(7_7), (7_6), (7, 5), (7_4), (7_3), (7_2), (7_1), (6_1, 1_1), (6_2, 1_1), (6_3, 1_1), (5_1, 2_1).$$

Agarwal et Andrews ont en fait obtenu un résultat plus général ; pour l'énoncer, nous allons avoir besoin d'introduire d'autres objets. Pour tout entier positif  $t$ , on définit une partition  $(n + t)$ -colorée comme une partition où il y a  $n + t$  couleurs possibles pour une part de taille  $n$  : on peut avoir des parts  $n_1, n_2, \dots, n_{n+t}$ . De plus, si  $t > 0$ , on peut avoir une unique part de taille 0. La différence pondérée pour ces objets est définie comme pour les partitions  $n$ -colorées. Par exemple, les partitions  $(n + 1)$ -colorées de 2 sont

$$(2_1), (2_1, 0_1), (1_1, 1_1), (1_1, 1_1, 0_1), (2_2), (2_2, 0_1), (1_2, 1_1), \\ (1_2, 1_1, 0_1), (2_3), (2_3, 0_1), (1_2, 1_2), (1_2, 1_2, 0_1).$$

On peut maintenant énoncer le résultat d'Agarwal et Andrews sur les partitions  $(n + t)$ -colorées :

**Théorème IV.2** (Agarwal et Andrews). *Pour  $k \geq 2$  et  $0 \leq t \leq k - 1$ , soit  $B_t(k, \nu)$  le nombre de partitions  $(n + t)$ -colorées de  $\nu$  vérifiant la condition de différence pondérée de  $B_0(k, \nu)$  et telles qu'il existe une part de la forme  $i_{i+t}$  si  $t > 0$ . Alors pour tout  $\nu \geq 0$ ,  $A_t(k, \nu) = B_t(k, \nu)$ .*

La formulation analytique du théorème IV.2, due à Agarwal, Andrews et Bressoud [5], est donnée par le théorème suivant :

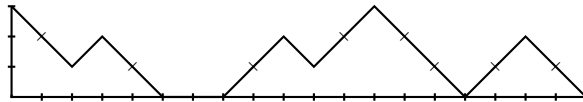
**Théorème IV.3** (Agarwal, Andrews et Bressoud). *Pour tout  $k \geq 2$ , posons  $r = \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$ , où  $\lfloor x \rfloor$  est la partie entière de  $x$ . Alors pour  $k - r - 1 \leq t \leq k - 1$ , on a*

$$\sum_{n_1 \geq \dots \geq n_r \geq 0} \frac{q^{n_1^2 + \dots + n_r^2 + n_1 + \dots + n_r + n_{k-t} + \dots + n_r + \binom{n_r}{2} \chi(k \text{ pair})}}{(q)_{n_1 - n_2} \cdots (q)_{n_{r-1} - n_r} (q)_{n_r} (q; q^2)_{n_r + 1}} = \frac{(q^{2(k-t)}, q^{2(k+t+1)}, q^{4k+2}, q^{4k+2})_\infty}{(q)_\infty}$$

et pour  $0 \leq t \leq r$ , en posant  $q^{-n_1 - \dots - n_t}(1 - q^{n_t}) = 1$  si  $t = 0$ , on a

$$\sum_{n_1 \geq \dots \geq n_r \geq 0} \frac{q^{n_1^2 + \dots + n_r^2 + n_1 + \dots + n_r - n_1 - \dots - n_t + \binom{n_r}{2} \chi(k \text{ pair})} (1 - q^{n_t})}{(q)_{n_1 - n_2} \cdots (q)_{n_{r-1} - n_r} (q)_{n_r} (q; q^2)_{n_r}} \\ = \frac{(q^{2(k-t)}, q^{2(k+t+1)}, q^{4k+2}; q^{4k+2})_\infty}{(q)_\infty}.$$

Il existe aussi une interprétation combinatoire des séries multiples du théorème IV.3 au moyen de certains chemins, due à Agarwal et Bressoud [6]. Les chemins qu'on considère ici sont les mêmes que les chemins de Bressoud-Burge, excepté que dans les chemins étudiés dans [6], qu'on appellera *chemins d'Agarwal-Bressoud* dans la suite, un sommet situé au début du chemin et suivi d'un pas SE est considéré comme un pic. Dans un tel chemin, on appelle *vallée* un sommet précédé d'un pas SE et suivi d'un pas NE. Un exemple, tiré de [6], est donné par la figure IV.1.



**FIG. IV.1** : Exemple de chemin d'Agarwal-Bressoud. Ce chemin a cinq pics (situés en  $(0, 3)$ ,  $(3, 2)$ ,  $(9, 2)$ ,  $(12, 3)$  et  $(17, 2)$ ) et trois vallées (situées en  $(2, 1)$ ,  $(10, 1)$  et  $(15, 0)$ ).

On peut maintenant énoncer le résultat d'Agarwal et Bressoud sur les chemins :

**Théorème IV.4** (Agarwal et Bressoud). *Les séries multiples du théorème IV.3 sont la série génératrice des chemins d'Agarwal-Bressoud commençant en  $(0, t)$  et n'ayant pas de vallée de hauteur supérieure à  $k - 3$  (ou pas de vallée du tout si  $k = 2$ ) où l'exposant de  $q$  compte l'indice majeur.*

Agarwal et Bressoud ont également défini une bijection entre les chemins du théorème IV.4 et les partitions  $(n + t)$ -colorées du théorème IV.3 qui permet de démontrer le théorème IV.2 d'une autre façon. Cette bijection est définie comme suit : à chaque pic  $(x, y)$  d'un chemin, on associe une part  $x_y$  dans la partition  $(n + t)$ -colorée correspondante. Par exemple, la partition  $(n + 3)$ -colorée correspondant au chemin de la figure IV.1 est  $(17_2, 12_3, 9_2, 3_2, 0_3)$ .

Dans [75], afin d'interpréter les  $q$ -séries

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(q)_{n-1} (-1)^n q^{n(n+1)/2}}{(q; q^2)_n (-q)_n},$$

$$\sum_{n \geq 0} \frac{(q)_n (-1)^n q^{n(n+1)/2}}{(q; q^2)_{n+1} (-q)_n}$$

et

$$\sum_{n \geq 0} \frac{(q)_n q^{n^2+n}}{(q; q^2)_{n+1} (-q)_n},$$

nous avons été amenés à introduire des objets qui généralisent les partitions  $n$ -colorées. Une *surpartition  $n$ -colorée* [75] est une partition  $n$ -colorée où on peut surligner la dernière occurrence d'une part  $n_j$ . Par exemple, les six surpartitions  $n$ -colorées de 2 sont

$$(2_2), (2_1), (\bar{2}_2), (\bar{2}_1), (1_1, 1_1), (1_1, \bar{1}_1).$$

Pour tout entier  $t \geq 0$ , on peut définir, de façon analogue aux partitions  $(n+t)$ -colorées, les surpartitions  $(n+t)$ -colorées, où les parts de taille  $n$  qui peuvent apparaître sont  $n_1, n_2, \dots, n_{n+t}$  et où on peut avoir une unique part de taille 0 (surlignée ou non) si  $t > 0$ . La différence pondérée pour les surpartitions  $n$ -colorées ou  $(n+t)$ -colorées est définie de la même façon que pour les partitions  $n$ -colorées ou  $(n+t)$ -colorées.

Le but de ce chapitre est de démontrer des résultats analytiques et combinatoires sur les séries suivantes, qui sont liées aux surpartitions  $(n+t)$ -colorées :

$$V_{k,t}(a, q) = \sum_{n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_r \geq 0} \frac{(-1/a)_{n_1} a^{n_1} q^{\binom{n_1+1}{2} + n_2^2 + \dots + n_r^2 - n_1 - \dots - n_t + \binom{n_r}{2} \chi(k \text{ pair})} (1 - q^{n_t})}{(q)_{n_1 - n_2} \cdots (q)_{n_{r-1} - n_r} (q)_{n_r} (q; q^2)_{n_r}} \quad (\text{IV.2})$$

où  $k \geq 2$ ,  $r = \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$ ,  $0 \leq t \leq r$ , et on pose  $q^{-n_1 - \dots - n_t} (1 - q^{n_t}) = 1$  si  $t = 0$ , et

$$W_{k,t}(a, q) = \sum_{n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_r \geq 0} \frac{(-1/a)_{n_1} a^{n_1} q^{\binom{n_1+1}{2} + n_2^2 + \dots + n_r^2 + n_1 + \dots + n_r + n_{k-t} + \dots + n_r + \binom{n_r}{2} \chi(k \text{ pair})}}{(q)_{n_1 - n_2} \cdots (q)_{n_{r-1} - n_r} (q)_{n_r} (q; q^2)_{n_{r+1}}} \quad (\text{IV.3})$$

où  $k \geq 2$ ,  $r = \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$ , et  $k - r - 1 \leq t \leq k - 1$ .

Le cas particulier  $a \rightarrow 0$  de ces séries correspond aux séries du théorème IV.3 ; l'interprétation combinatoire avec les partitions  $(n+t)$ -colorées est donnée par le théorème IV.2 et celle avec les chemins d'Agarwal-Bressoud par le théorème IV.4. Les séries  $V_{2,0}(1, q)$ ,  $V_{3,0}(1, q)$ ,  $W_{2,1}(q^{-1}, q)$  et  $W_{3,1}(q^{-1}, q)$  ont été interprétées combinatoirement dans [75] en utilisant les surpartitions  $n$ -colorées ; de plus,  $V_{3,0}(a; q)$  a été interprété en termes de chemins et de symboles de Frobenius par Corteel [44].

Les théorèmes suivants sont les interprétations combinatoires de  $V_{k,t}(a, q)$  et  $W_{k,t}(a, q)$  au moyen des surpartitions  $(n+t)$ -colorées :

**Théorème IV.5.**  $V_{k,t}(a, q)$  est la série génératrice des surpartitions  $(n+t)$ -colorées telles que

(i) pour toutes parts  $m_i$  et  $n_j$  telles que  $m \geq n$ , si  $((m_i - n_j))$  plus le nombre de parts surlignées dont la taille est dans l'intervalle  $[n, m[$  est négatif ou nul, alors cette quantité est paire et supérieure ou égale à  $-2 \min(i-1, j-1, k-3)$ , et

(ii) si  $t > 0$ , il existe une part de la forme  $x_{x+t}$ ,

où l'exposant de  $q$  compte la taille et celui de  $a$  compte le nombre de parts surlignées.

**Théorème IV.6.**  $W_{k,t}(a, q)$  est la série génératrice des surpartitions  $(n+t)$ -colorées vérifiant les conditions du théorème IV.5 telles qu'aucune part de la forme  $x_{x+t}$  n'est surlignée.

Une autre interprétation combinatoire de ces séries multiples utilise des chemins qui seront définis à la section IV.2 et qui sont très proches de ceux introduits dans [49] pour interpréter une généralisation des identités d'Andrews-Gordon aux surpartitions :

**Théorème IV.7.**  $V_{k,t}(a, q)$  est la série génératrice des chemins d'Agarwal-Bressoud généralisés commençant en  $(0, t)$  et n'ayant pas de vallée de hauteur supérieure à  $k-3$  (ou pas de vallée du tout si  $k=2$ ) où l'exposant de  $q$  compte l'indice majeur et celui de  $a$  compte le nombre de pas  $S$ .

**Théorème IV.8.**  $W_{k,t}(a, q)$  est la série génératrice des chemins vérifiant les conditions du théorème IV.7 tels que tout pic dont les coordonnées sont de la forme  $(x, x+t)$  est un 1-pic.

Une dernière interprétation combinatoire, qui est une généralisation de [4], fait intervenir des symboles de Frobenius similaires à ceux des surpartitions :

**Théorème IV.9.**  $V_{k,t}(a, q)$  est la série génératrice des symboles de Frobenius

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_N \\ b_1 & b_2 & \dots & b_N \end{pmatrix}$$

tels que la ligne du haut est une partition en parts distinctes positives ou nulles et la ligne du bas une surpartition en parts supérieures ou égales à  $-1$  où on peut surligner la

première occurrence d'une part, possédant une part 0 dans la ligne du haut si  $t > 0$ , ne possédant pas de part  $-1$  dans la ligne du bas si  $t = 0$ , et vérifiant, pour  $1 \leq i \leq N - 1$ ,

$$b_i - a_{i+1} + t \geq 3 - k - u_i, \quad (\text{IV.4})$$

$$a_i - b_{i+1} - t - 1 \geq 3 - k + u_{i+1}, \quad (\text{IV.5})$$

où  $u_i$  est le nombre de parts non surlignées dans  $\{b_{i+1}, \dots, b_N\}$ .

Dans cette série génératrice, l'exposant de  $q$  compte la taille du symbole, définie par  $\sum_{i=1}^N (a_i + b_i + 1)$ , et celui de  $a$  compte le nombre de parts non surlignées dans la ligne du bas.

**Théorème IV.10.**  $W_{k,t}(a, q)$  est la série génératrice des symboles de Frobenius vérifiant les conditions du théorème IV.9 ne possédant pas de colonne de la forme  $\begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$  avec  $b$  non surlignée.

S'il n'y a pas de parts surlignées dans les surpartitions  $(n + t)$ -colorées, pas de pas S dans les chemins ou pas de parts non surlignées dans la ligne du bas des symboles de Frobenius, ce qui correspond au cas  $a \rightarrow 0$ , on retrouve les interprétations combinatoires des séries multiples étudiées dans [5] (pour les symboles de Frobenius, la définition des symboles donnée dans [4] est équivalente mais pas exactement identique ; voir la remarque à la fin de la section IV.4).

Enfin, les spécialisations de nos séries mentionnées avant le théorème IV.5 peuvent d'écrire comme des produits infinis, ce qui implique plusieurs identités de type Rogers-Ramanujan liant les partitions ou surpartitions  $(n + t)$ -colorées aux partitions ou surpartitions ordinaires. Nous avons obtenu d'autres identités similaires, qui seront étudiées à la fin du chapitre :

**Théorème IV.11.** On a

$$V_{k,0}(1, q) = \frac{(-q)_\infty (q^{2k-1}; q^{2k-1})_\infty}{(q)_\infty (-q^{2k-1}; q^{2k-1})_\infty}; \quad (\text{IV.6})$$

$$V_{k,0}(q^{-1}, q^2) = \frac{(q^2; q^4)_\infty (q^{4k-4}, q^{4k}, q^{8k-4}, q^{8k-4})_\infty}{(q)_\infty}; \quad (\text{IV.7})$$

$$W_{k,t}(q^{-1}, q) = \frac{(-q)_\infty (q^{2k-1-2t}, q^{2k-1+2t}, q^{4k-2}, q^{4k-2})_\infty}{(q)_\infty}. \quad (\text{IV.8})$$



Chacune de ces identités peut être interprétée combinatoirement, ce qui nous donne les trois corollaires suivants.

**Corollaire IV.12.** *Soit  $A_k(\nu)$  le nombre de surpartitions en parts non divisibles par  $2k - 1$ . Soit  $B_k(\nu)$  le nombre de surpartitions  $n$ -colorées de  $\nu$  telles que pour toutes parts  $m_i$  et  $n_j$  vérifiant  $m \geq n$ , si  $((m_i - n_j))$  plus le nombre de parts surlignées dont la taille est dans l'intervalle  $[n, m[$  est négatif ou nul, alors cette quantité est paire et supérieure ou égale à  $-2 \min(i - 1, j - 1, k - 3)$ . Alors  $A_k(\nu) = B_k(\nu)$ .*

Par exemple, on a  $A_3(4) = B_3(4) = 14$ . Les surpartitions comptées par  $A_3(4)$  sont

$$(4), (\bar{4}), (3, 1), (\bar{3}, 1), (3, \bar{1}), (\bar{3}, \bar{1}), (2, 2), (2, \bar{2}), (2, 1, 1), \\ (\bar{2}, 1, 1), (2, 1, \bar{1}), (\bar{2}, 1, \bar{1}), (1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, \bar{1})$$

et les surpartitions  $n$ -colorées comptées par  $A_3(4)$  sont

$$(4_4), (4_3), (4_2), (4_1), (\bar{4}_4), (\bar{4}_3), (\bar{4}_2), (\bar{4}_1), (3_1, 1_1), (\bar{3}_1, 1_1), (3_1, \bar{1}_1), (\bar{3}_1, \bar{1}_1), (3_2, \bar{1}_1), (\bar{3}_2, \bar{1}_1)$$

(ici, comme  $k = 3$ , la condition de différence pondérée est simplement que  $((m_i - n_j))$  plus le nombre de parts surlignées dont la taille est dans  $[n, m[$  doit être positif ou nul).

Pour le deuxième corollaire, on remarque que l'opération  $a \rightarrow q^{-1}$  et  $q \rightarrow q^2$  revient à transformer, dans une surpartition  $n$ -colorée comptée par  $V_{k,0}(a, q)$ , une part  $m_i$  non surlignée en  $M_i = 2m_i$  et une part  $m_i$  surlignée en  $M_i = (2m - 1)_i$ . Les parts surlignées étant nécessairement impaires (et réciproquement), le surlignage est inutile et le résultat de la transformation peut donc être vu comme une partition  $n$ -colorée. D'autre part, il est clair que dans cette partition  $n$ -colorée, toute part  $M_i$  vérifie  $i \leq \lceil \frac{M}{2} \rceil$ , où  $\lceil x \rceil$  est le plus petit entier supérieur ou égal à  $x$ . On appellera un tel objet *partition  $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ -colorée* pour énoncer le corollaire de façon plus concise.

**Corollaire IV.13.** *Soit  $A'_k(\nu)$  le nombre de partitions de  $\nu$  en parts non congrues à 2 modulo 4 et non congrues à  $0, \pm 4k$  modulo  $8k - 4$ . Soit  $B'_k(\nu)$  le nombre de partitions  $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ -colorées de  $\nu$  où les parts impaires sont distinctes et telles que pour toutes parts  $m_i$  et  $n_j$  vérifiant  $m \geq n$ , si  $\lceil \frac{m}{2} \rceil - \lceil \frac{n}{2} \rceil - i - j$  plus le nombre de parts impaires dont la taille est dans l'intervalle  $[n - \chi(n \text{ pair}), m - \chi(m \text{ pair})[$  est négative ou nulle, alors cette quantité est paire et supérieure ou égale à  $-2 \min(i - 1, j - 1, k - 3)$ . Alors  $A'_k(\nu) = B'_k(\nu)$ .*

Par exemple, on a  $A'_2(8) = B'_2(8) = 6$ . Les partitions comptées par  $A'_2(8)$  sont

$$(7, 1), (5, 3), (5, 1, 1, 1), (3, 3, 1, 1), (3, 1, 1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$$

et les objets comptés par  $B'_2(8)$  sont

$$(8_4), (8_3), (8_2), (8_1), (7_1, 1_1), (7_2, 1_1).$$

Pour le troisième corollaire, l'opération  $a \rightarrow q^{-1}$  revient à transformer, dans une surpartition  $(n+t)$ -colorée comptée par  $W_{k,t}(a, q)$ , une part  $m_i$  surlignée en  $M_i = (m-1)_i$ ; les parts non surlignées ne sont pas modifiées.

**Corollaire IV.14.** *Soit  $A''_{k,t}(\nu)$  le nombre de surpartitions dont les parts non surlignées ne sont pas congrues à  $0, \pm(2k-1-2t)$  modulo  $4k-2$ . Soit  $B''_{k,t}(\nu)$  le nombre de surpartitions  $(n+t)$ -colorées telles que pour toutes parts  $m_i$  et  $n_j$  vérifiant  $m \geq n$ , si  $((m_i - n_j)) + \chi(m_i \text{ surlignée}) - \chi(n_j \text{ surlignée})$  plus le nombre de parts surlignées dont la taille est dans l'intervalle  $[n - \chi(n \text{ non surlignée}), m - \chi(m \text{ non surlignée})]$  est négative ou nulle, alors cette quantité est paire et supérieure ou égale à  $-2 \min(i-1, j-1, k-3)$ , et telles que si  $t > 0$ , il existe une part non surlignée de la forme  $x_{x+t}$ . Alors  $A''_{k,t}(\nu) = B''_{k,t}(\nu)$ .*

Par exemple, on a  $A''_{3,2}(5) = B''_{3,2}(5) = 10$ . Les surpartitions comptées par  $A''_{3,2}(5)$  sont

$$(5), (\bar{5}), (4, \bar{1}), (\bar{4}, \bar{1}), (3, 2), (\bar{3}, 2), (3, \bar{2}), (\bar{3}, \bar{2}), (2, 2, \bar{1}), (2, \bar{2}, \bar{1})$$

et les surpartitions  $(n+2)$ -colorées comptées par  $B''_{3,2}(5)$  sont

$$(5_7), (\bar{5}_4, 0_2), (5_3, 0_2), (\bar{5}_3, 0_2), (5_2, 0_2), (\bar{5}_2, 0_2), (5_1, 0_2), (\bar{5}_1, 0_2), (\bar{4}_1, 1_3), (4_1, 1_2).$$

Ce chapitre est organisé comme suit. Dans la section IV.2, on donne les définitions nécessaires sur les chemins et on démontre les théorèmes IV.7 et IV.8. Dans la section IV.3, on étudie l'interprétation avec les surpartitions  $(n+t)$ -colorées et on démontre les théorèmes IV.5 et IV.6. Dans la section IV.4, on démontre les théorèmes IV.9 et IV.10 relatifs aux symboles de Frobenius. Enfin, dans la section IV.5, on démontre le théorème IV.11 en utilisant le treillis de Bailey introduit au chapitre I.

## IV.2 Chemins

Les séries multiples de [5] ont été interprétées dans [6] à l'aide des chemins d'Agarwal-Bressoud. Dans cette section, on va interpréter de même nos séries multiples en utilisant

une généralisation de ces chemins. Les démonstrations seront très similaires à celle de la proposition 1.4 de [6].

Les chemins utilisés ici, qu'on appellera *chemins d'Agarwal-Bressoud généralisés*, généralisent les chemins d'Agarwal-Bressoud de la même façon que les chemins de [49] (chemins de la section II.5 sans pics marqués par  $b$ ) généralisent les chemins de Bressoud-Burge. Un chemin d'Agarwal-Bressoud généralisé utilise donc des pas NE, SE, S et E, et il n'y a que des 1-pics et des  $a$ -pics. Les autres conditions sur les chemins sont identiques. Un pic est ici un sommet précédé d'un pas NE (ou situé au début du chemin) et suivi d'un pas S ou SE. Une *vallée* est maintenant un sommet précédé d'un pas S ou SE et suivi d'un pas NE. L'indice majeur d'un chemin et la hauteur relative d'un pic sont définis comme précédemment. Un exemple est donné par la figure IV.2.



**FIG. IV.2 :** Ce chemin a quatre pics : deux 1-pics (situés en  $(0, 3)$  et en  $(8, 2)$ ) et deux  $a$ -pics (situés en  $(3, 2)$  et en  $(11, 3)$ ). Il y a deux vallées, situées en  $(2, 1)$  et en  $(9, 1)$ . L'indice majeur est  $0 + 3 + 8 + 11 = 22$ .

*Démonstration du théorème IV.7.* On commence par traiter le cas où  $k$  est impair et  $t = 0$ , pour lequel on va avoir besoin du lemme suivant [6] :

**Lemme IV.15** ([6]).

$$\frac{q^{n_1^2 + \dots + n_r^2}}{(q)_{n_1 - n_2} \cdots (q)_{n_{r-1} - n_r} (q)_{n_r} (q; q^2)_{n_r}}$$

est la série génératrice des chemins d'Agarwal-Bressoud commençant en  $(0, 0)$ , sans vallées de hauteur supérieure à  $2r - 2 = k - 3$ , et tels que pour  $1 \leq j \leq r$ , il y a exactement  $n_j$  pics dont la hauteur relative est au moins  $j$  et pour lesquels la différence entre la hauteur et la hauteur relative est au plus  $k - 2j - 1$ .

On considère un chemin d'Agarwal-Bressoud commençant en  $(0, 0)$ , sans vallées de hauteur supérieure à  $k - 5$  et tel que pour  $2 \leq j \leq r$ , il y a  $n_j$  pics dont la hauteur relative est au moins  $j - 1$  et pour lesquels la différence entre la hauteur et la hauteur relative est au plus  $k - 2j - 1$ . Par le lemme IV.15, ces chemins sont comptés par

$$\frac{q^{n_2^2 + \dots + n_r^2}}{(q)_{n_2 - n_3} \cdots (q)_{n_{r-1} - n_r} (q)_{n_r} (q; q^2)_{n_r}} \quad (\text{IV.9})$$

Le facteur  $(-1/a)_{n_1} a^{n_1} q^{\binom{n_1+1}{2}} / (q)_{n_1-n_2}$  est introduit par une procédure similaire à l'algorithme de la section III.1. Cette procédure est inspirée de [6] et [49].

On commence par effectuer un soulèvement volcanique en insérant à chaque pic un pas NE suivi d'un pas S. Cette opération introduit un facteur  $a^{n_2}$  et augmente l'indice majeur du chemin de

$$1 + 2 + \cdots + n_2 = \binom{n_2 + 1}{2}.$$

De plus, la hauteur et la hauteur relative de chaque pic augmentent de 1, donc  $n_j$  compte maintenant les pics dont la hauteur relative est au moins  $j$  et pour lesquels la différence de la hauteur et de la hauteur relative est au plus  $k - 2j - 1$ .

On insère ensuite au début de notre chemin le chemin minimal commençant en  $(0, 0)$  avec  $n_1 - n_2$   $a$ -pics de hauteur 1. La somme des abscisses de ces nouveaux pics est  $\binom{n_1 - n_2 + 1}{2}$  et ils font augmenter l'abscisse de chacun des pics déjà existants de  $n_1 - n_2$ . Remarquons qu'aucun de ces nouveaux pics n'est compté par  $n_2$  et que  $n_1$  compte maintenant le nombre total de pics. En tout, ces deux opérations introduisent un facteur

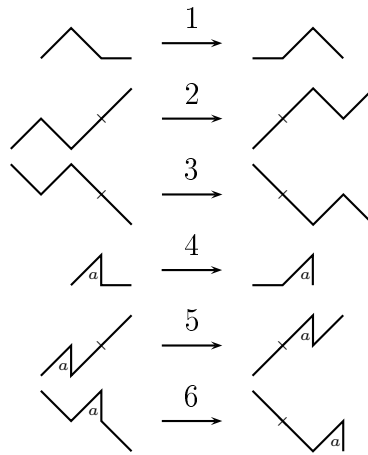
$$a^{n_2} q^{\binom{n_2+1}{2}} \times a^{n_1-n_2} q^{\binom{n_1-n_2+1}{2} + n_2(n_1-n_2)} = a^{n_1} q^{\binom{n_1+1}{2}}.$$

Le facteur  $(-1/a)_{n_1}$  correspond à une partition en parts distinctes situées entre 0 et  $n_1 - 1$ . Si cette partition contient une part  $j - 1$  ( $1 \leq j \leq n_1$ ), on transforme le  $j^e$  pic en partant de la droite en 1-pic, ce qui augmente l'indice majeur du chemin de  $j - 1$ .

Le facteur  $(q)_{n_1-n_2}^{-1}$  correspond à une partition  $(b_1, b_2, \dots, b_{n_1-n_2})$  en  $n_1 - n_2$  parts positives ou nulles. Pour  $1 \leq j \leq n_1 - n_2$ , on déplace le  $j^e$  (en partant de la droite) des pics insérés après le soulèvement volcanique  $b_j$  fois vers la droite selon les règles suivantes. La première série de règles, illustrée par la figure IV.3, est identique aux règles 1 à 6 de la figure III.6. Ici, on ne peut appliquer les règles 2 et 5 que si la hauteur du pic qu'on déplace est au plus  $k - 3$ , car sinon, on créerait une vallée de hauteur supérieure à  $k - 3$ .

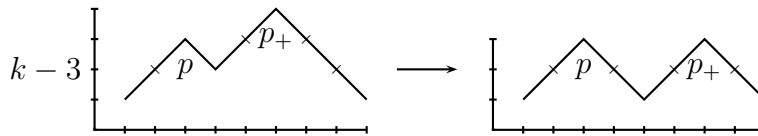
La seconde série de règles a pour but d'éviter de créer des vallées de hauteur supérieure à  $k - 3$ . Dans la suite de la démonstration, on note  $p$  le pic qu'on est en train de déplacer,  $p_+$  le pic suivant et  $p_-$  le pic précédent. Sur les figures, on ne représentera que le cas où  $p$  et  $p_+$  (ou  $p$  et  $p_-$ ) sont tous les deux des 1-pics ; le cas où au moins l'un des deux est un  $a$ -pic est très similaire.

Si  $p$  est suivi d'un pas SE (ou S) suivi de deux pas NE et que sa hauteur est au moins  $k - 2$ , on diminue la hauteur de  $p_+$  comme indiqué sur la figure IV.4. Remarquons que



**FIG. IV.3 :** La première série de règles de déplacement des pics.

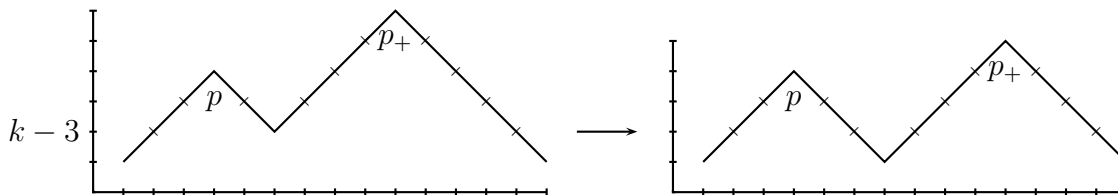
$p$  est maintenant de hauteur relative au moins 2, mais que comme la différence entre sa hauteur et sa hauteur relative est égale à  $k - 4$ , il n'est pas compté par  $n_2$ .



**FIG. IV.4 :** Première règle de la deuxième série.

Si  $p$  est précédé d'au moins deux pas NE et suivi d'au moins deux pas SE (ou d'un pas S suivi d'au moins un pas SE), aux moins une des deux vallées qui l'encadrent est de hauteur  $k - 3$  ou  $k - 4$ . On considère cinq sous-cas :

1. si la vallée à droite de  $p$  est de hauteur  $k - 3$  et que  $p_+$  est plus haut que  $p$ , on diminue la hauteur de  $p_+$  comme indiqué sur la figure IV.5 ;



**FIG. IV.5 :** Seconde règle de la deuxième série : premier cas.

2. si la vallée à droite de  $p$  est de hauteur  $k - 4$  et que  $p_+$  est plus haut que  $p$ , on augmente la hauteur de  $p$  comme indiqué sur la figure IV.6 ;
3. si la vallée à droite de  $p$  est de hauteur  $k - 3$  ou  $k - 4$  et que  $p_+$  est de même hauteur que  $p$ , on abandonne  $p$  et on déplace  $p_+$  ;

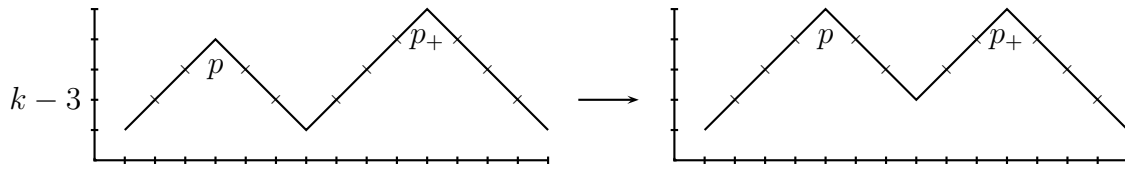


FIG. IV.6 : Seconde règle de la deuxième série : deuxième cas.

4. si la vallée à droite de  $p$  est de hauteur inférieure à  $k - 4$  et que la vallée à gauche est de hauteur  $k - 3$ , on diminue la hauteur de  $p$  comme indiqué sur la figure IV.7 ;

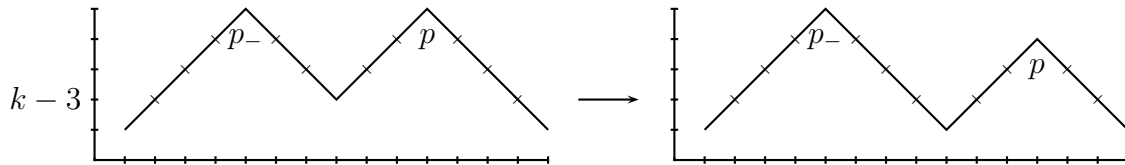


FIG. IV.7 : Seconde règle de la deuxième série : quatrième cas.

5. si la vallée à droite du pic est de hauteur inférieure à  $k - 4$  et que la vallée à gauche est de hauteur  $k - 4$ , on augmente la hauteur de  $p_-$  comme indiqué sur la figure IV.8.

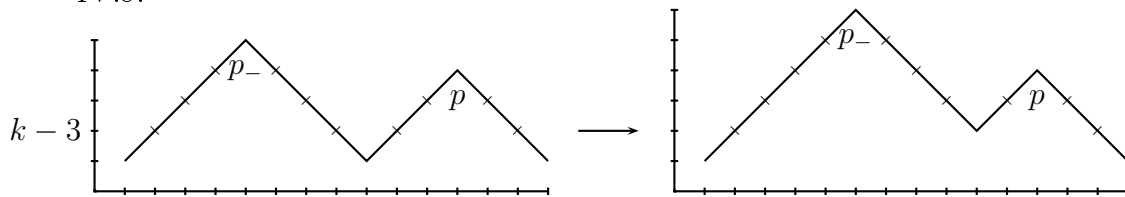


FIG. IV.8 : Seconde règle de la deuxième série : cinquième cas.

Enfin, si  $p$  rencontre  $p_+$  (au sens de la définition donnée à la page 83), on abandonne  $p$  et on déplace  $p_+$ .

Le cas où  $k$  est pair et  $t = 0$  utilise le lemme suivant [6] :

**Lemme IV.16** ([6]).

$$\frac{q^{n_1^2 + \dots + n_r^2 + \binom{n_r}{2}}}{(q)_{n_1 - n_2} \cdots (q)_{n_{r-1} - n_r} (q)_{n_r} (q; q^2)_{n_r}}$$

est la série génératrice des chemins d'Agarwal-Bressoud commençant en  $(0, 0)$ , sans vallées de hauteur supérieure à  $2r - 3 = k - 3$ , et tels que pour  $1 \leq j \leq r$ , il y a exactement  $n_j$  pics dont la hauteur relative est au moins  $j$  et pour lesquels la différence entre la hauteur et la hauteur relative est au plus  $k - 2j - 1$ .

Le reste de la démonstration est identique.

Pour  $k$  impair et  $t > 0$ , la démonstration est basée sur le lemme suivant [6, lemme 4.1,  $h = 1$ ] :

**Lemme IV.17** ([6]).

$$\frac{q^{n_1^2 + \dots + n_r^2 - n_1 - \dots - n_t} (1 - q^{n_t})}{(q)_{n_1 - n_2} \cdots (q)_{n_{r-1} - n_r} (q)_{n_r} (q; q^2)_{n_r}}$$

est la série génératrice des chemins d'Agarwal-Bressoud commençant en  $(0, t)$  qui n'ont pas de vallées de hauteur supérieure à  $2r - 2 = k - 3$  et tels que pour  $1 \leq j \leq r$ , il y a exactement  $n_j$  pics dont la hauteur relative est au moins  $j$  et pour lesquels la différence entre la hauteur et la hauteur relative est au plus  $k - 2j - 1$ .

On considère un chemin d'Agarwal-Bressoud commençant en  $(0, t)$ , sans vallées de hauteur supérieure à  $k - 5$  et tel que pour  $2 \leq j \leq r$ , il y a  $n_j$  pics dont la hauteur relative est au moins  $j - 1$  et pour lesquels la différence entre la hauteur et la hauteur relative est au plus  $k - 2j - 1$ . Par le lemme IV.17, ces chemins sont comptés par

$$\frac{q^{n_2^2 + \dots + n_r^2 - n_2 - \dots - n_t} (1 - q^{n_t})}{(q)_{n_2 - n_3} \cdots (q)_{n_{r-1} - n_r} (q)_{n_r} (q; q^2)_{n_r}} \quad (\text{IV.10})$$

et le facteur  $(-1/a)_{n_1} a^{n_1} q^{\binom{n_1+1}{2}} / (q)_{n_1 - n_2}$  est introduit comme précédemment.

Encore une fois, le cas où  $k$  est pair et  $t > 0$  est très similaire au précédent.

Dans tous les cas, on peut montrer que les pics que nous déplaçons ne sont toujours pas comptés par  $n_2$  après le déplacement et que la procédure qu'on vient de présenter est inversible.  $\square$

*Démonstration du théorème IV.8.* Elle utilise les mêmes méthodes que la démonstration du théorème précédent.

Pour  $k$  impair, on a besoin du lemme suivant :

**Lemme IV.18** ([6]).

$$\frac{q^{n_1^2 + \dots + n_r^2 + n_1 + \dots + n_{k-t-1} + 2n_{k-t} + \dots + 2n_r}}{(q)_{n_1 - n_2} \cdots (q)_{n_{r-1} - n_r} (q)_{n_r} (q; q^2)_{n_{r+1}}}$$

est la série génératrice des chemins d'Agarwal-Bressoud commençant en  $(0, t)$ , sans vallées de hauteur supérieure à  $2r - 2 = k - 3$  et tels que pour  $1 \leq j \leq r$ , il y a exactement  $n_j + 1$  pics dont la hauteur relative est au moins  $j$  et pour lesquels la différence entre la hauteur et la hauteur relative est au plus  $k - 2j - 1$ .

Soit  $k' = k - 2$ ,  $t' = t - 1$  si  $t \leq k - 2$  et  $t' = k - 3$  si  $t = k - 1$ . On considère un chemin d'Agarwal-Bressoud commençant en  $(0, t')$  sans vallées de hauteur supérieure à  $k' - 3 = k - 5$  et tel que pour  $2 \leq j \leq r$ , il y a exactement  $n_j + 1$  pics dont la hauteur relative est au moins  $j - 1$  et pour lesquels la différence entre la hauteur et la hauteur relative est au plus  $k' - 2(j - 1) - 1 = k - 2j - 1$ .

Si  $t \leq k - 2$ , on doit introduire le facteur  $(-1/a)_{n_1} a^{n_1} q^{\binom{n_1+1}{2} + n_1} / (q)_{n_1 - n_2}$ . On effectue le soulèvement volcanique et le déplacement de pics comme avant ; la seule différence est que le chemin qu'on insère commence en  $(0, t)$  et finit en  $(n_1 - n_2, t - 1)$  : il y a un 1-pic en  $(0, t)$  suivi de  $n_1 - n_2 - 1$   $a$ -pics de hauteur 1.

Si  $t = k - 1$ , on doit introduire le facteur  $(-1/a)_{n_1} a^{n_1} q^{\binom{n_1+1}{2} + n_1} / (q)_{n_1 - n_2}$ . Dans ce cas, le chemin qu'on insère commence en  $(0, k - 1)$ , passe par  $(2, k - 3)$  et finit en  $(n_1 - n_2 + 1, k - 3)$  : il y a maintenant un 1-pic en  $(0, k - 1)$  suivi de  $n_1 - n_2 - 1$   $a$ -pics de hauteur  $k - 3$ .

Dans le cas où  $k$  est pair, la démonstration est très similaire.  $\square$

### IV.3 Surpartitions $(n + t)$ -colorées

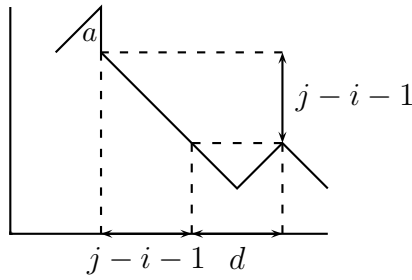
Les résultats sur les surpartitions  $(n + t)$ -colorées sont essentiellement une reformulation de ceux sur les chemins. En effet, on peut associer à un chemin compté par  $V_{k,t}$  ou  $W_{k,t}$  une surpartition  $(n + t)$ -colorée de la façon suivante : à un pic  $(x, y)$ , on fait correspondre une part  $x_y$ , qu'on surligne si et seulement si le pic correspondant est un  $a$ -pic. Par exemple, la partition  $(n + 3)$ -colorée correspondant au chemin de la figure IV.2 est  $(\overline{11}_3, 8_2, \overline{3}_2, 0_3)$ . Cette correspondance est une généralisation de celle présentée dans [6].

On va maintenant montrer comment les conditions sur les chemins se traduisent sur les surpartitions  $(n + t)$ -colorées. Considérons d'abord le cas de deux pics consécutifs  $(m, i)$  et  $(n, j)$  (avec  $m \geq n$ ) séparés par une vallée, ce qui est équivalent au fait que  $((m_i - n_j)) + \chi(n_j \text{ surlignée}) \leq 0$ .

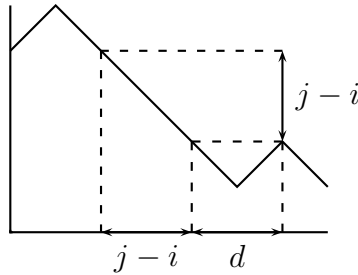
La première condition est illustrée par les figures IV.9 et IV.10. Si  $i \leq j$ , on a  $m - n \geq j - i + 2 - \chi((n, j) \text{ est un } a\text{-pic}) \geq i - j + 2 - \chi((n, j) \text{ est un } a\text{-pic})$ , donc  $((m_i - n_j)) + \chi(n_j \text{ surlignée}) \geq -2(j - 1)$  et  $((m_i - n_j)) + \chi(n_j \text{ surlignée}) \geq -2(i - 1)$ . Au total, on a  $((m_i - n_j)) + \chi(n_j \text{ surlignée}) \geq -2 \min(i - 1, j - 1)$ . Le cas  $i \geq j$  est analogue.

D'autre part, la quantité  $((m_i - n_j)) + \chi(n_j \text{ surlignée})$  est toujours paire si elle est





**FIG. IV.9 :** Illustration de la première condition sur les différences pondérées pour  $i \leq j$ , dans le cas où  $(n, j)$  est un  $a$ -pic. Remarquons que  $d$  est nécessairement pair et qu'il est supérieur ou égal à 2.

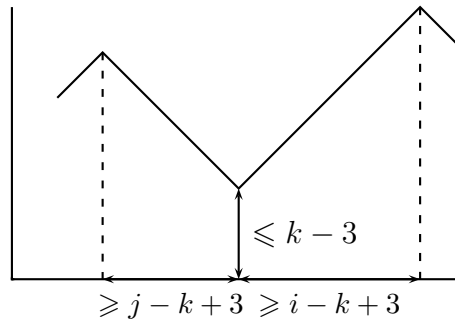


**FIG. IV.10 :** Cas où  $i \leq j$  et  $(n, j)$  est un 1-pic. Comme sur la figure précédente,  $d$  est pair et supérieur ou égal à 2.

négative ou nulle, comme le demande le théorème IV.5. En effet, si  $i \leq j$  et que  $(n, j)$  est un  $a$ -pic (figure IV.9), on a  $m - n = j - i - 1 + d$  donc  $((m_i - n_j)) + \chi(n_j \text{ surlignée}) = m - n - i - j + 1 = -2i + d$  est un nombre pair. Si  $i \leq j$  et que  $(n, j)$  est un 1-pic (figure IV.10), on a de même  $((m_i - n_j)) + \chi(n_j \text{ surlignée}) = m - n - i - j = -2i + d$  qui est un nombre pair. Là aussi, le cas  $i \geq j$  est très similaire.

La dernière condition est illustrée par la figure IV.11. Comme la vallée entre nos deux pics est de hauteur au plus  $k - 3$ , on a  $m - n \geq i + j - 2k + 6 - \chi((n, j) \text{ est un } a\text{-pic})$ , donc pour la surpartition  $(n + t)$ -colorée, on a  $((m_i - n_j)) + \chi(n_j \text{ surlignée}) \geq -2(k - 3)$ . En regroupant les deux conditions, on obtient  $((m_i - n_j)) + \chi(n_j \text{ surlignée}) \geq -2 \min(i - 1, j - 1, k - 3)$ .

Dans le cas de pics non consécutifs, on remarque que si les pas S entre nos deux pics étaient transformés en pas SE, on serait ramené au cas des partitions  $(n + t)$ -colorées, où si la différence pondérée  $((m_i - n_j))$  est négative ou nulle, alors elle est paire et supérieure ou égale à  $-2 \min(i - 1, j - 1, k - 3)$ . Un tel changement ferait augmenter  $m$  du nombre de pas S entre nos deux pics, qui est le nombre de  $a$ -pics entre  $(n, j)$  inclus et  $(m, i)$  exclu,



**FIG. IV.11** : Illustration de la dernière condition sur les différences pondérées dans le cas où  $(n, j)$  est un 1-pic.

ou, dans la surpartition  $(n+t)$ -colorée correspondante, le nombre de parts surlignées dont la taille est dans l'intervalle  $[n, m[$ . Ceci explique la condition (i) du théorème IV.5.

De plus, si  $t > 0$ , la condition sur la hauteur initiale correspond au fait qu'il existe une part de la forme  $x_{x+t}$  : si le chemin commence par un pas SE (resp. par un pas S), ce sera une part  $0_t$  (resp.  $\bar{0}_t$ ), et si le chemin commence par un pas NE, ce sera une part  $x_{x+t}$  avec  $x \geq 1$ . Il n'y a pas de condition de ce type si  $t = 0$  puisque le chemin peut commencer par un pas SE ou par un pas E. La condition supplémentaire du théorème IV.8 explique aussi clairement celle du théorème IV.6 : au 1-pic  $(x, x+t)$ , on associe une part non surlignée  $x_{x+t}$ .

## IV.4 Symboles de Frobenius

Cette section est une généralisation de la démonstration du théorème IV.2 exposée dans [4]. Notre but est de démontrer la proposition suivante, qui implique les théorèmes IV.9 et IV.10 :

**Proposition IV.19.** *Pour tous  $k$  et  $t$  tels que  $k \geq 2$  et  $0 \leq t \leq k - 1$ , il existe une bijection entre les symboles de Frobenius de taille  $\nu$  vérifiant les conditions du théorème IV.9 et les surpartitions  $(n+t)$ -colorées de  $\nu$  vérifiant les conditions du théorème IV.5. Cette bijection est telle que le symbole de Frobenius a  $N$  colonnes si et seulement si la surpartition  $(n+t)$ -colorée a  $N$  parts.*

*Démonstration.* Soit  $\bar{C}_t(k, \nu)$  le nombre de symboles de Frobenius de taille  $\nu$  vérifiant les conditions du théorème IV.9. On démontre d'abord la proposition pour  $t = 0$  : dans

ce cas, les objets comptés par  $\overline{\mathcal{C}}_0(k, \nu)$  sont simplement les symboles de Frobenius des surpartitions de taille  $\nu$  vérifiant les conditions (IV.4) et (IV.5). On définit une application  $\phi$  qui, à chaque colonne  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  d'un symbole de Frobenius, associe une part  $m_i$  de la façon suivante :

$$\phi : \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mapsto \begin{cases} (a+b+1)_{b-a+1+u} & \text{si } a \leq b+u \\ (a+b+1)_{a-b-u} & \text{si } a > b+u \end{cases}$$

où  $u$  est le nombre de parts non surlignées de la ligne du bas situées à droite de la colonne. Par ailleurs, on surligne  $m_i$  si et seulement si  $b$  n'est pas surlignée. L'application  $\phi$  ainsi définie est une bijection : c'est en fait le cas particulier  $a = 0$  de la bijection utilisée dans la démonstration de la proposition 4.1 de [49]. Dans le cas des partitions  $n$ -colorées ( $u = 0$  pour toutes les colonnes), on retrouve la bijection utilisée dans la démonstration du théorème IV.2. La bijection inverse est définie par

$$\phi^{-1} : m_i \mapsto \begin{cases} \begin{pmatrix} (m+i-1+u)/2 \\ (m-i-1-u)/2 \end{pmatrix} & \text{si } m+u \not\equiv i \pmod{2} \\ \begin{pmatrix} (m-i+u)/2 \\ (m+i-2-u)/2 \end{pmatrix} & \text{si } m+u \equiv i \pmod{2} \end{cases}$$

où  $u$  est le nombre de parts surlignées  $< m$  et l'entrée de la ligne du bas est surlignée si et seulement si  $m_i$  ne l'est pas.

Supposons maintenant qu'on a un symbole de Frobenius avec deux colonnes adjacentes  $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$  telles que  $\phi \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = m_i$  et  $\phi \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = n_j$ . Notons  $u$  (resp.  $u'$ ) le nombre de parts non surlignées situées à droite de la colonne  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  (resp. le nombre de parts non surlignées situées à droite de la colonne  $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ ). On a

$$((m_i - n_j)) = \begin{cases} 2a - u - 2d - 2 - u' & \text{si } b + u \geq a \text{ et } d + u' \geq c \\ 2b + u - 2d - 1 - u' & \text{si } b + u < a \text{ et } d + u' \geq c \\ 2a - u - 2c - 1 + u' & \text{si } b + u \geq a \text{ et } d + u' < c \\ 2b + u - 2c + u' & \text{si } b + u < a \text{ et } d + u' < c \end{cases} \quad (\text{IV.11})$$

$$= \begin{cases} -2(i - 1) + 2(b - d - 1) + u - u' & \text{si } b + u \geq a \text{ et } d + u' \geq c \\ 2(b - d) - 1 + u - u' & \text{si } b + u < a \text{ et } d + u' \geq c \\ 2(a - c) - 1 - u + u' & \text{si } b + u \geq a \text{ et } d + u' < c \\ -2(i - 1) + 2(a - c - 1) - u + u' & \text{si } b + u < a \text{ et } d + u' < c \end{cases} \quad (\text{IV.12})$$

$$= \begin{cases} -2(j - 1) + 2(a - c - 1) - u + u' & \text{si } b + u \geq a \text{ et } d + u' \geq c \\ 2(b - d) - 1 + u - u' & \text{si } b + u < a \text{ et } d + u' \geq c \\ 2(a - c) - 1 - u + u' & \text{si } b + u \geq a \text{ et } d + u' < c \\ -2(j - 1) + 2(b - d - 1) + u - u' & \text{si } b + u < a \text{ et } d + u' < c \end{cases} \quad (\text{IV.13})$$

Remarquons maintenant que par définition des symboles de Frobenius des surpartitions, on a  $a > c$ . D'autre part, si  $d$  est surlignée, on a  $b - d \geq 1$  (car seule la première occurrence d'un nombre peut être surlignée) et  $u - u' = 0$ ; dans le cas contraire, on a  $b - d \geq 0$  et  $u - u' = 1$ . Au total, on a toujours  $b - d \geq 1 - u + u'$ , donc  $b + u > d + u'$ . Par conséquent, si notre symbole de Frobenius vérifie (IV.4) et (IV.5), alors

$$((m_i - n_j)) + u - u' \geq -2(i - 1) \text{ par (IV.12),} \quad (\text{IV.14})$$

$$((m_i - n_j)) + u - u' \geq -2(j - 1) \text{ par (IV.13)} \quad (\text{IV.15})$$

et

$$((m_i - n_j)) + u - u' \geq -2(k - 3) \text{ par (IV.11),} \quad (\text{IV.16})$$

ce qui correspond bien aux conditions du théorème IV.5 ( $u - u'$  est précisément le nombre de parts surlignées dont la taille est dans l'intervalle  $[n, m]$ ). Notons que si  $k = 2$ , on n'a pas (IV.16), mais on a  $((m_i - n_j)) + u - u' \geq 1$ , comme souhaité.

De plus, seules les première et quatrième lignes de (IV.11) peuvent être négatives, donc si  $((m_i - n_j)) + u - u' < 0$ , cette quantité doit être paire.

Réciproquement, en appliquant  $\phi^{-1}$  à deux parts  $m_i$  et  $n_j$  d'une surpartition  $n$ -colorée, on a, en notant  $u$  (resp.  $u'$ ) le nombre de parts surlignées  $< m$  (resp. le nombre de parts surlignées  $< n$ ),

$$a - c = \begin{cases} \frac{1}{2}((m_i - n_j)) + i + \frac{1}{2}(u - u') & \text{si } m + u \not\equiv i, n + u' \not\equiv j \pmod{2} \\ \frac{1}{2}((m_i - n_j)) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(u - u') & \text{si } m + u \equiv i, n + u' \not\equiv j \pmod{2} \\ \frac{1}{2}((m_i - n_j)) + i + j - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(u - u') & \text{si } m + u \not\equiv i, n + u' \equiv j \pmod{2} \\ \frac{1}{2}((m_i - n_j)) + j + \frac{1}{2}(u - u') & \text{si } m + u \equiv i, n + u' \equiv j \pmod{2} \end{cases} \quad (\text{IV.17})$$

$$b - d = \begin{cases} \frac{1}{2}((m_i - n_j)) + j + \frac{1}{2}(u' - u) & \text{si } m + u \not\equiv i, n + u' \not\equiv j \pmod{2} \\ \frac{1}{2}((m_i - n_j)) + i + j - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(u' - u) & \text{si } m + u \equiv i, n + u' \not\equiv j \pmod{2} \\ \frac{1}{2}((m_i - n_j)) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(u' - u) & \text{si } m + u \not\equiv i, n + u' \equiv j \pmod{2} \\ \frac{1}{2}((m_i - n_j)) + i + \frac{1}{2}(u' - u) & \text{si } m + u \equiv i, n + u' \equiv j \pmod{2} \end{cases} \quad (\text{IV.18})$$

$$b - c = \begin{cases} \frac{1}{2}((m_i - n_j)) - \frac{1}{2}(u + u') & \text{si } m + u \not\equiv i, n + u' \not\equiv j \pmod{2} \\ \frac{1}{2}((m_i - n_j)) + i - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(u + u') & \text{si } m + u \equiv i, n + u' \not\equiv j \pmod{2} \\ \frac{1}{2}((m_i - n_j)) + j - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(u + u') & \text{si } m + u \not\equiv i, n + u' \equiv j \pmod{2} \\ \frac{1}{2}((m_i - n_j)) + i + j - 1 - \frac{1}{2}(u + u') & \text{si } m + u \equiv i, n + u' \equiv j \pmod{2} \end{cases} \quad (\text{IV.19})$$

$$a - d - 1 = \begin{cases} \frac{1}{2}((m_i - n_j)) + i + j - 1 + \frac{1}{2}(u + u') & \text{si } m + u \not\equiv i, n + u' \not\equiv j \pmod{2} \\ \frac{1}{2}((m_i - n_j)) + j - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(u + u') & \text{si } m + u \equiv i, n + u' \not\equiv j \pmod{2} \\ \frac{1}{2}((m_i - n_j)) + i - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(u + u') & \text{si } m + u \not\equiv i, n + u' \equiv j \pmod{2} \\ \frac{1}{2}((m_i - n_j)) + \frac{1}{2}(u + u') & \text{si } m + u \equiv i, n + u' \equiv j \pmod{2} \end{cases} \quad (\text{IV.20})$$

On voit facilement que  $a - c > 0$  dans le symbole de Frobenius correspondant. En effet, pour la première ligne de (IV.17), on remarque que si l'entier  $Q = ((m_i - n_j)) + u - u' \leq 0$ ,

il est pair et supérieur ou égal à  $-2(i-1)$ , donc  $a-c > 0$ . Pour la deuxième ligne, comme on sait que  $a-c$  est un entier et que si  $Q \leq 0$ , il est pair, on en déduit que  $a-c > 0$ . Pour la troisième ligne, le raisonnement est similaire. Enfin, pour la quatrième ligne, on raisonne de la même façon que pour la première ligne en remplaçant  $i$  par  $j$ .

De même, en utilisant (IV.18) et le théorème IV.5, on obtient que  $b-d+u-u' > 0$ . On montre que (IV.4) est vérifiée en utilisant (IV.19) et le théorème IV.5, et en remarquant que  $-\frac{1}{2}(u+u') = \frac{1}{2}(u-u') - u$ . De façon analogue, (IV.5) se déduit de (IV.20) et du théorème IV.5 en utilisant le fait que  $\frac{1}{2}(u+u') = \frac{1}{2}(u-u') + u'$ . La bijection est donc établie pour  $t = 0$ .

Pour  $t > 0$ , le raisonnement est similaire :  $\phi$  devient

$$\phi : \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mapsto \begin{cases} (a+b+1)_{b-a+t+1+u} & \text{si } a \leq b+t+u \\ (a+b+1)_{a-b-t-u} & \text{si } a > b+t+u \end{cases}$$

et  $\phi^{-1}$  devient

$$\phi^{-1} : m_i \mapsto \begin{cases} \begin{pmatrix} (m+i+t-1+u)/2 \\ (m-i-t-1-u)/2 \end{pmatrix} & \text{si } m+u \not\equiv i+t \pmod{2} \\ \begin{pmatrix} (m-i+t+u)/2 \\ (m+i-t-2-u)/2 \end{pmatrix} & \text{si } m+u \equiv i+t \pmod{2} \end{cases}$$

Par exemple, le symbole de Frobenius de la surpartition  $(n+3)$ -colorée  $(\overline{11}_3, 8_2, \overline{3}_2, 0_3)$  est  $\begin{pmatrix} 6 & 5 & 2 & 0 \\ 4 & \overline{2} & 0 & \overline{-1} \end{pmatrix}$ .

Dans ce cas, on doit avoir une part  $i_{i+t}$ , qui correspond à une colonne  $\begin{pmatrix} 0 \\ i-1 \end{pmatrix}$ . Cette colonne doit être la dernière du symbole de Frobenius et la part  $i_{i+t}$  doit être la plus petite part de la surpartition  $(n+t)$ -colorée ; en effet, si  $i_{i+t} \geq n_j$ , on aurait

$$((i_{i+t} - n_j)) + u - u' = i - n - i - t - j + u - u' = -n - t - j \leq -2j + u - u' < -2(j-1)$$

vu que  $0 \leq u - u' \leq 1$ .

Remarquons que comme  $t > 0$ , on peut avoir une part de taille 0 dans la surpartition  $(n+t)$ -colorée. Cette part est nécessairement la plus petite ; or, comme on sait que la

plus petite part est de la forme  $i_{i+t}$ , on en déduit que la seule part de taille 0 possible est  $0_t$ , qui correspond à la colonne  $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ . Dans le cas des partitions  $(n+t)$ -colorées traité dans [4], une part  $-1$  ne peut apparaître que dans une telle colonne, car les deux lignes du symbole sont des partitions en parts distinctes. Pour pouvoir formuler leur résultat en n'utilisant que des symboles de Frobenius de partitions classiques, les auteurs éliminent cette « colonne fantôme » et imposent au symbole de Frobenius de vérifier la condition  $a_N - r \geq 3 - k$  si  $a_N > 0$ .

D'autre part, dans le cas des surpartitions  $(n+t)$ -colorées comptées par  $W_{k,t}(a, q)$ , une part de la forme  $i_{i+t}$  est nécessairement non surlignée. Cela se traduit sur le symbole de Frobenius en disant que s'il y a une colonne de la forme  $\begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$ ,  $b$  est surlignée; on a donc le théorème IV.10.  $\square$

## IV.5 Produits infinis

Pour démontrer le théorème IV.11, on va utiliser le treillis de Bailey [5] présenté à la section I.3. Rappelons qu'une paire de Bailey par rapport à  $a$  est un couple  $(\alpha, \beta)$  de suites vérifiant, pour tout  $n \geq 0$ ,

$$\beta_n = \sum_{r=0}^n \frac{\alpha_r}{(q)_{n-r} (aq)_{n+r}}.$$

On a besoin du lemme suivant, qui est un cas particulier du théorème I.5 (théorème 3.1 de [5]) :

**Lemme IV.20.** *Si  $(\alpha_n, \beta_n)$  est une paire de Bailey par rapport à 1, on a*

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(q, -aq)_\infty} \sum_{n_1 \geq \dots \geq n_r \geq 0} \frac{(-1/a)_{n_1} a^{n_1} q^{\binom{n_1+1}{2} + n_2^2 + \dots + n_r^2}}{(q)_{n_1-n_2} \cdots (q)_{n_{r-1}-n_r}} \beta_{n_r} \\ &= \frac{\alpha_0}{(q)_\infty^2} + \frac{1}{(q)_\infty^2} \sum_{n \geq 1} \left( \frac{(-1/a)_n a^n q^{rn + (r-1)(n^2-n) + \binom{n}{2}}}{(-aq)_n (1 - q^{2n})} \alpha_n \right. \\ & \quad \left. - \frac{(-1/a)_{n-1} a^{n-1} q^{r(n-1) + (r-1)((n-1)^2 - (n-1)) + \binom{n-1}{2} + 2n-2}}{(-aq)_{n-1} (1 - q^{2n-2})} \alpha_{n-1} \right). \end{aligned}$$

*Démonstration.* On prend  $i = 0$ ,  $a = 1$ ,  $\rho_1 = -1/a$ , et on fait tendre  $n$  ainsi que tous les autres  $\rho_j$  et  $\sigma_j$  vers l'infini dans le théorème I.5 pour obtenir ce résultat.  $\square$

On démontre d'abord (IV.6) pour  $k$  impair. En prenant  $a = 1$  dans le lemme IV.20 et en utilisant la paire de Bailey par rapport à 1 [5, équation (5.7), corrigée]

$$\alpha_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ impair} \\ (-1)^{\frac{n}{2}} q^{\frac{3n^2-2n}{4}} (1+q^n) & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad \beta_n = \frac{1}{(q)_n (q; q^2)_n},$$

on obtient

$$\begin{aligned} & \sum_{n_1 \geq \dots \geq n_r \geq 0} \frac{(-1/a)_{n_1} a^{n_1} q^{\binom{n_1+1}{2} + n_2^2 + \dots + n_r^2}}{(q)_{n_1-n_2} \cdots (q)_{n_{r-1}-n_r} (q)_{n_r} (q; q^2)_{n_r}} \\ &= \frac{(-q)_\infty}{(q)_\infty} \left( 1 + \sum_{n \geq 2} \left( \frac{2}{1+q^n} \frac{q^{(r-\frac{1}{2})n^2 + \frac{n}{2}}}{1-q^{2n}} \alpha_n - \frac{2}{1+q^{n-1}} \frac{q^{(r-\frac{1}{2})(n-1)^2 + \frac{n-1}{2}}}{1-q^{2(n-1)}} \alpha_{n-1} \right) \right) \\ &= \frac{(-q)_\infty}{(q)_\infty} \left( 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{2}{1+q^{2n}} \frac{q^{(4r-2)n^2 + n(1-q^{4n})}}{1-q^{4n}} (-1)^n q^{3n^2-n} (1+q^{2n}) \right) \\ &= \frac{(-q)_\infty}{(q)_\infty} \left( 1 + 2 \sum_{n \geq 1} q^{(4r+1)n^2} (-1)^n \right) \\ &= \frac{(-q)_\infty}{(q)_\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (q^{4r+1})^{n^2} (-1)^n \\ &= \frac{(-q)_\infty}{(q)_\infty} (q^{8r+2}; q^{8r+2})_\infty (q^{4r+1}; q^{8r+2})_\infty (q^{4r+1}; q^{8r+2})_\infty \end{aligned}$$

(par (I.8))

$$\begin{aligned} &= \frac{(-q)_\infty}{(q)_\infty} \frac{(q^{4r+1}; q^{4r+1})_\infty}{(-q^{4r+1}; q^{4r+1})_\infty} \\ &= \frac{(-q)_\infty}{(q)_\infty} \frac{(q^{2k-1}; q^{2k-1})_\infty}{(-q^{2k-1}; q^{2k-1})_\infty}. \end{aligned}$$

Si  $k$  est pair, la démonstration est identique, à part qu'on utilise cette fois-ci la paire de Bailey suivante [5, équation (5.8), corrigée] :

$$\alpha_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ impair} \\ (-1)^{\frac{n}{2}} q^{\frac{n^2-2n}{4}} (1+q^n) & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad \beta_n = \frac{q^{\binom{n}{2}}}{(q)_n (q; q^2)_n}.$$

L'équation (IV.7) se démontre en utilisant les mêmes paires de Bailey, en prenant  $(a, q) = (q^{-1}, q^2)$  dans le lemme IV.20.

Pour (IV.8), on utilise le lemme suivant :



**Lemme IV.21.** Si  $(\alpha_n, \beta_n)$  est une paire de Bailey par rapport à  $q^2$ , alors pour tout  $t$  tel que  $k - r - 1 \leq t \leq k - 1$ , on a

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(q, -aq^2)_\infty} \sum_{n_1 \geq \dots \geq n_r \geq 0} \frac{(-1/a)_{n_1} a^{n_1} q^{\binom{n_1+1}{2} + n_2^2 + \dots + n_r^2 + n_1 + \dots + n_r + n_{k-t} + \dots + n_r}}{(q)_{n_1 - n_2} \cdots (q)_{n_{r-1} - n_r}} \beta_{n_r} \\ &= \frac{\alpha_0}{(q)_\infty (q^2)_\infty} + \frac{1}{(q)_\infty (q^2)_\infty} \sum_{n \geq 1} q^{(k-t-2)(n^2-n) + \binom{n}{2} + 2(k-t-1)n} (1 - q^2) \\ & \quad \times \left( \frac{q^{(t+1)n^2 + 2(t+1)n}}{1 - q^{2n+2}} \alpha_n - \frac{q^{(t+1)(n-1)^2 + 2(t+1)(n-1) + 2n}}{1 - q^{2n}} \alpha_{n-1} \right). \end{aligned}$$

*Démonstration.* On prend  $t = k - i - 1$ ,  $a = q^2$ ,  $\rho_1 = -1/a$ , et on fait tendre  $n$  ainsi que tous les autres  $\rho_j$  et  $\sigma_j$  vers l'infini dans le théorème I.5 pour obtenir ce résultat.  $\square$

On a également besoin des paires de Bailey par rapport à  $q^2$  suivantes [5, équations (5.5) et (5.6)] :

$$\alpha_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ impair} \\ (-1)^{\frac{n}{2}} q^{\frac{3n^2+2n}{4}} \frac{1-q^{2n+2}}{(q)_2} & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad \beta_n = \frac{1}{(q)_n (q; q^2)_{n+1}}$$

pour  $k$  impair, et

$$\alpha_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ impair} \\ (-1)^{\frac{n}{2}} q^{\frac{n^2-2n}{4}} \frac{1-q^{2n+2}}{(q)_2} & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad \beta_n = \frac{q^{\binom{n}{2}}}{(q)_n (q; q^2)_{n+1}}$$

pour  $k$  pair.

# Conclusion générale

## Résultats

Au chapitre II, on a tout d'abord interprété les séries hypergéométriques basiques  $R_{k,i}(a, b; x; q)$  et  $\tilde{R}_{k,i}(a, b; x; q)$  comme les séries génératrices des paires de surpartitions vérifiant certaines conditions sur les multiplicités de leurs parts, en utilisant une méthode classique basée sur les équations aux  $q$ -différences vérifiées par les  $J_{\lambda,k,i}$ . Grâce à l'identité du produit triple de Jacobi, on a montré que pour certaines valeurs des variables  $a$ ,  $b$  et  $q$ , nos fonctions peuvent s'écrire comme des produits infinis quand  $x = 1$ , ce qui implique plusieurs identités de type Rogers-Ramanujan dont certaines sont des résultats classiques. On a ensuite défini deux familles de chemins du plan et prouvé qu'elles sont comptées respectivement par  $R_{k,i}$  et  $\tilde{R}_{k,i}$  en montrant que leurs séries génératrices vérifient certaines équations de récurrence, à la manière de [27]. Grâce à une bijection entre ces chemins et des familles de paires de surpartitions vérifiant des conditions sur leurs rangs successifs, qui est une généralisation d'une bijection de [38], on a établi une autre interprétation combinatoire de nos fonctions à l'aide des rangs. Enfin, en étudiant la dissection de Durfee d'une paire de surpartitions, en généralisant la  $k$ -conjugaison de Garvan et en utilisant les paires de Bailey, on a trouvé une dernière interprétation combinatoire des  $R_{k,i}$  et des  $\tilde{R}_{k,i}$ .

Au chapitre III, on a montré que certains résultats qu'on avait démontrés au chapitre précédent par des méthodes analytiques peuvent aussi être obtenus de façon plus combinatoire. On a établi que les séries multiples associées à la dissection de Durfee sont aussi les séries génératrices de nos chemins. On a également prouvé, dans le cas des surpartitions ( $b = 0$ ), que les surpartitions vérifiant certaines conditions de multiplicités sont comptées par la même série génératrice que les chemins, en montrant que les séries génératrices

vérifient les mêmes récurrences.

Le deuxième ensemble de résultats est celui du chapitre IV. Après avoir défini deux familles de séries hypergéométriques basiques  $V_{k,t}(a, q)$  et  $W_{k,t}(a, q)$ , on les a interprétées combinatoirement en utilisant les surpartitions  $(n + t)$ -colorées, certains chemins proches de ceux du chapitre II et des symboles de Frobenius vérifiant des conditions de type « rangs décalés ». On a également montré que pour certaines valeurs de  $a$  et  $q$ , nos fonctions s'écrivent comme des produits infinis, ce qui implique des identités de type Rogers-Ramanujan liant les (sur)partitions  $(n+t)$ -colorées et les (sur)partitions ordinaires.

## Perspectives

Une première extension envisageable de notre travail consisterait à obtenir des preuves combinatoires de nos résultats là où elles n'existent pas encore. Ainsi, il serait intéressant de démontrer combinatoirement dans le cas général la correspondance entre les multiplicités et les chemins, soit par une preuve récursive qui généraliserait la section III.2, soit par une preuve directe qui généraliserait les travaux de Bressoud [38] dans le cas des partitions. On pourrait aussi chercher une bijection entre les chemins et les paires de surpartitions de la section II.7.

Un autre axe de recherche consisterait à étendre les résultats obtenus à des objets plus généraux. Pour le chapitre IV, il s'agirait d'étudier les séries  $V_{2,k,t}(a, b; q)$  et  $W_{2,k,t}(a, b; q)$  obtenues en remplaçant le facteur  $(-1/a)_{n_1} a^{n_1} q^{\binom{n_1+1}{2}}$  par  $(-1/a, -1/b)_{n_1} (abq)^{n_1}$  dans  $V_{k,t}(a, q)$  et  $W_{k,t}(a, q)$ , et de les interpréter au moyen de paires de surpartitions  $(n + t)$ -colorées et de chemins qui généraliseraient les chemins d'Agarwal-Bressoud de la même façon que les chemins du chapitre II généralisent les chemins de Bressoud-Burge. Il faudrait étudier aussi d'autres séries obtenues en remplaçant le facteur  $(q)_{n_r}$  par  $(q^2; q^2)_{n_r}$  dans  $V_{2,k,t}$  et  $W_{2,k,t}$  (autrement dit, ces séries sont à  $V_{2,k,t}$  et  $W_{2,k,t}$  ce que les  $\tilde{R}_{k,i}$  sont aux  $R_{k,i}$ ); certaines instances, dans le cas  $a = b = 0$  et  $r = 1$ , ont été étudiées dans [2]. Notons enfin que les paires de surpartitions  $n$ -colorées permettent d'interpréter combinatoirement le  $q$ -analogue du deuxième théorème de Gauss [19, équation (1.8)]

$$\sum_{N=0}^{\infty} \frac{(a)_N (b)_N q^{\binom{N+1}{2}}}{(q)_N (qab; q^2)_N} = \frac{(-q)_{\infty} (aq; q^2)_{\infty} (bq; q^2)_{\infty}}{(abq; q^2)_{\infty}}$$

et que la recherche d'une preuve bijective de ce théorème constituerait également un projet intéressant.

En ce qui concerne la généralisation des résultats du chapitre II, on sait que les  $J_{0,k,i}(x; q)$  s'interprètent combinatoirement en utilisant les partitions, les  $J_{1,k,i}(-1/a; x; q)$  en utilisant les surpartitions et les  $J_{2,k,i}(a, b; x; q)_\infty / (abxq)_\infty$  en utilisant les paires de surpartitions. Il est naturel de se demander ce qui se passe pour  $\lambda = 3$ ; cependant, on ignore pour le moment quels sont les objets à considérer dans ce cas. Quand on passe des partitions aux surpartitions puis aux paires, le facteur  $q^{n^2}$  des séries génératrices devient  $(-1/a)_n a^n q^{\binom{n+1}{2}}$  puis  $(abq)^n (-1/a, -1/b)_n$ . Pour les symboles de Frobenius, on a d'abord des symboles où les deux lignes sont des partitions en parts distinctes, puis des symboles où la ligne du bas est une surpartition et enfin des symboles où les deux lignes sont des surpartitions. Pour les chemins, on a uniquement des pics ouverts (1-pics) dans le cas des partitions, puis on autorise des pics semi-ouverts ( $a$ -pics) et enfin des pics fermés ( $ab$ -pics). À chaque fois, le mécanisme de généralisation est clair mais ne nous permet pas de comprendre comment traiter le cas  $\lambda = 3$ . La clé du problème réside peut-être dans l'étude des  $q$ -séries. On sait en effet que la correspondance entre une paire de surpartitions et son symbole de Frobenius est intimement liée à l'identité de  $q$ -Gauss; pour essayer de comprendre comment aller au-delà des paires de surpartitions, on pourrait donc chercher une preuve bijective simple d'une généralisation cette identité.

D'autres résultats combinatoires mériteraient d'être généralisés. Ainsi, on pourrait chercher à étendre aux surpartitions une généralisation du théorème de Schur [87] due à Alladi et Gordon [10] ainsi qu'une version finie des identités d'Andrews-Gordon étudiée par Berkovich et Paule [34, 35]. De plus, il serait intéressant de généraliser la notion de rangs successifs comme cela a été fait dans [26] dans le cas des partitions.

En outre, comme on l'a signalé dans l'introduction, plusieurs instances de la fonction  $J_{\lambda,k,i}$  ont été étudiées, mais il reste beaucoup à faire dans ce domaine : il existe sans doute de nombreuses autres instances qui peuvent s'écrire comme des produits infinis et conduire à des identités de type Rogers-Ramanujan. En particulier, il faudrait étudier les  $R_{k,i}$  et les  $\tilde{R}_{k,i}$  dans le cas où  $k$  et  $i$  sont des demi-entiers, comme cela a été fait par plusieurs auteurs [14, 36, 74] pour les  $J_{1,k,i}$ . Pour ne citer qu'un exemple, on sait que  $R_{2,k,3/2}(-q, -q^2; 1; q^2)$  est un produit infini. Dans le même esprit, on pourrait définir les

$\tilde{J}_{\lambda,k,i}$  pour tout  $\lambda$  et les utiliser pour prouver des identités de séries hypergéométriques basiques et des résultats combinatoires. Notons également que dans [48, section 6], on a défini une famille de fonctions qui généralise les  $J_{1,k,i}(a; x; q)$  et les  $\tilde{J}_{1,k,i}(a; x; q)$  : pour  $m \geq 1$ , on définit

$$\hat{J}_{k,i,m}(a; x; q) = \hat{H}_{k,i,m}(a; xq; q) + axq\hat{H}_{k,i-1,m}(a; xq; q),$$

où

$$\begin{aligned} \hat{H}_{k,i,m}(a; x; q) &= \sum_{n \geq 0} (-a)^n q^{kn^2+n-in-(m-1)\binom{n}{2}} x^{n(k-m-1)} \\ &\quad \times \frac{(1-x^i q^{2ni})(-1/a)_n (-axq^{n+1})_\infty (x^m; q^m)_n}{(q^m; q^m)_n (x)_\infty}. \end{aligned}$$

Le cas  $m = 1$  correspond à  $J_{1,k,i}(a; x; q)$  et le cas  $m = 2$  à  $\tilde{J}_{1,k,i}(a; x; q)$ . Les équations (II.8) et (II.9) (ou (II.13) et (II.14)) sont vraies pour  $\hat{H}_{k,i,m}(a; x; q)$  et par une démonstration analogue à celle de (II.6) ou de (II.15), on peut montrer que

$$\hat{H}_{k,i,m}(a; x; q) - \hat{H}_{k,i-m,m}(a; x; q) = x^{i-m}(1+x+x^2+\cdots+x^{m-1})\hat{J}_{k,k-i+1,m}(a; x; q).$$

Il serait intéressant de trouver une interprétation combinatoire de ces séries.

Enfin, une dernière piste à explorer est celle des algorithmes de génération pour les surpartitions et les objets liés. Il s'agirait de généraliser les algorithmes de génération exhaustive et aléatoire [67, 78] et les algorithmes de type code de Gray [85] pour les partitions.





# Table des figures

I.1	Diagrammes de Ferrers de la partition $\lambda = (5, 4, 3, 3)$ et de son conjugué $\lambda' = (4, 4, 4, 2, 1)$ . . . . .	30
II.1	Exemple de chemin de Bressoud-Burge généralisé . . . . .	57
II.2	Autre exemple de chemin de Bressoud-Burge généralisé . . . . .	57
II.3	Illustration de la correspondance entre chemins et symboles de Frobenius. Dans cet exemple, on a $k = 5$ et $i = 3$ . . . . .	68
II.4	Illustration d'un cas particulier de la démonstration de la proposition II.18	71
II.5	Illustration de la 4-conjugaison . . . . .	76
III.1	Illustration de la notion de hauteur relative. . . . .	80
III.2	Exemple de chemin de Bressoud-Burge pour la démonstration de la proposition III.2 . . . . .	81
III.3	Effet du soulèvement volcanique sur le chemin de la figure III.2. . . . .	82
III.4	Résultat de l'insertion du chemin minimal à $n_1 - n_2 = 4$ pics au début du chemin de la figure III.3. . . . .	83
III.5	Résultat de la transformation de certains pics dans le chemin de la figure III.4 . . . . .	83
III.6	Règles de déplacement des pics de hauteur relative 1. . . . .	84
III.7	Cas où le déplacement d'un pic produit une suite de pics contigus . . . . .	84
III.8	Cas où la hauteur de $p$ est égale à 1 et celle de $p_+$ est supérieure à 2 . . . . .	85
III.9	Cas où $p$ et $p_+$ échangent leurs hauteurs relatives . . . . .	85
III.10	Cas où la hauteur de $p_+$ est supérieure à $y + 1$ . . . . .	86
III.11	Cas où $p$ est le dernier pic de sa montagne . . . . .	86
IV.1	Exemple de chemin d'Agarwal-Bressoud . . . . .	100



IV.2	Exemple de chemin d'Agarwal-Bressoud généralisé . . . . .	106
IV.3	La première série de règles de déplacement des pics. . . . .	108
IV.4	Première règle de la deuxième série. . . . .	108
IV.5	Seconde règle de la deuxième série : premier cas. . . . .	108
IV.6	Seconde règle de la deuxième série : deuxième cas. . . . .	109
IV.7	Seconde règle de la deuxième série : quatrième cas. . . . .	109
IV.8	Seconde règle de la deuxième série : cinquième cas. . . . .	109
IV.9	Illustration de la première condition sur les différences pondérées pour $i \leq j$ , dans le cas où $(n, j)$ est un $a$ -pic . . . . .	112
IV.10	Cas où $i \leq j$ et $(n, j)$ est un 1-pic . . . . .	112
IV.11	Illustration de la dernière condition sur les différences pondérées dans le cas où $(n, j)$ est un 1-pic. . . . .	113

# Index

- $(a)_n$ , 18
- $(a; q)_n$ , 18
- $(a_1, a_2, \dots, a_k; q)_n$ , 18
- $\chi$ , 38
- $f_j(\lambda)$ , 89
- $J_{k,i}$ , 18
- $J_{\lambda,k,i}$ , 19
- $R_{k,i}$ , 37
- $\tilde{R}_{k,i}$ , 37
- $V_{k,t}$ , 101
- $W_{k,t}$ , 101
- $(a; q)_n$ , 51
  
- algorithme de Joichi-Stanton, 72
  
- carré de Durfee, 21
- chaîne de Bailey, 34
- chemin
  - d'Agarwal-Bressoud, 100
  - d'Agarwal-Bressoud généralisé, 106
  - de Bressoud-Burge, 23
  - de Bressoud-Burge généralisé, 56
- coefficient  $q$ -binomial, 31
- conjugaison, 30
  
- diagramme de Ferrers
  - d'une partition, 20
  - d'une surpartition, 25
  
- différence pondérée, 98, 99, 101
  
- équation aux  $q$ -différences, 18, 31
  
- hauteur relative, 79
  
- identité du produit triple de Jacobi, 33
- identités
  - d'Andrews-Gordon, 19
  - de Rogers-Ramanujan, 17
- indice majeur
  - d'un chemin de Bressoud-Burge, 23
  - d'un chemin de Bressoud-Burge généralisé, 57
  
- $k$ -conjugaison, 75
- $(k, i)$ -conditions
  - impaires, 58
  - paires, 58
- $(k, i)$ -dissection de Durfee, 22
  
- lemme d'Abel, 55
  
- montagne, 84
- multuplet, 90
  
- paire de Bailey, 33, 118
- paire de surpartitions, 37
  - auto- $(k, i)$ -conjuguée, 78
  - auto- $k$ -conjuguée, 76
  - $(k, i)$ -admissible, 73

- partition, 16
  - associée
    - d'une partition en parts distinctes, 27
    - d'une surpartition, 72
  - $(k, i)$ -admissible, 22
  - $n$ -colorée, 98
  - $(n + t)$ -colorée, 99
  - plane, 97
- pic
  - chemin d'Agarwal-Bressoud, 100
  - chemin d'Agarwal-Bressoud généralisé, 106
  - chemin de Bressoud-Burge, 23
  - chemin de Bressoud-Burge généralisé, 57
- $q$ -série, voir série hypergéométrique basique
- rang
  - d'une partition, 19
  - d'une surpartition, 26
- rangs successifs
  - d'une paire de surpartitions, 66
  - d'une partition, 20
- série génératrice, 15
  - des partitions, 16
  - des partitions planes, 97
  - des surpartitions, 25
- série hypergéométrique basique, 29
- surpartition, 24
  - $n$ -colorée, 101
  - $(n + t)$ -colorée, 101
- symbole de Frobenius
  - d'une paire de surpartitions, 65
  - d'une partition, 21
  - d'une surpartition, 25
- théorème
  - d'Euler, 16
  - de Bressoud, 24
  - de Gordon, 18
- treillis de Bailey, 35
- vallée
  - chemin d'Agarwal-Bressoud, 100
  - chemin d'Agarwal-Bressoud généralisé, 106
- valuation, 38

# Bibliographie

- [1] A. K. AGARWAL : Partitions with “ $N$  copies of  $N$ ”. In *Combinatoire énumérative (Montréal, Qué., 1985/Québec, Qué., 1985)*, vol. 1234 de *Lecture Notes in Math.*, p. 1–4. Springer, Berlin, 1986.
- [2] A. K. AGARWAL : Rogers-Ramanujan identities for  $n$ -color partitions. *J. Number Theory*, 28(3):299–305, 1988.
- [3] A. K. AGARWAL : New combinatorial interpretations of two analytic identities. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 107(2):561–567, 1989.
- [4] A. K. AGARWAL et G. E. ANDREWS : Rogers-Ramanujan identities for partitions with “ $n$  copies of  $n$ ”. *J. Combin. Theory Ser. A*, 45(1):40–49, 1987.
- [5] A. K. AGARWAL, G. E. ANDREWS et D. M. BRESSOUD : The Bailey lattice. *J. Indian Math. Soc. (N.S.)*, 51:57–73 (1988), 1987.
- [6] A. K. AGARWAL et D. M. BRESSOUD : Lattice paths and multiple basic hypergeometric series. *Pacific J. Math.*, 136(2):209–228, 1989.
- [7] H. L. ALDER : The nonexistence of certain identities in the theory of partitions and compositions. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 54:712–722, 1948.
- [8] H. L. ALDER : Generalizations of the Rogers-Ramanujan identities. *Pacific J. Math.*, 4:161–168, 1954.
- [9] H. L. ALDER : Partition identities—from Euler to the present. *Amer. Math. Monthly*, 76:733–746, 1969.
- [10] K. ALLADI et B. GORDON : Schur’s partition theorem, companions, refinements and generalizations. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 347(5):1591–1608, 1995.
- [11] G. E. ANDREWS : An analytic proof of the Rogers-Ramanujan-Gordon identities. *Amer. J. Math.*, 88:844–846, 1966.

- [12] G. E. ANDREWS : A generalization of the Göllnitz-Gordon partition theorems. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 18:945–952, 1967.
- [13] G. E. ANDREWS : Partition theorems related to the Rogers-Ramanujan identities. *J. Combinatorial Theory*, 2:422–430, 1967.
- [14] G. E. ANDREWS : Some new partition theorems. *J. Combinatorial Theory*, 2:431–436, 1967.
- [15] G. E. ANDREWS : On  $q$ -difference equations for certain well-poised basic hypergeometric series. *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)*, 19:433–447, 1968.
- [16] G. E. ANDREWS : A generalization of the classical partition theorems. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 145:205–221, 1969.
- [17] G. E. ANDREWS : Partition identities. *Advances in Math.*, 9:10–51, 1972.
- [18] G. E. ANDREWS : Sieves for theorems of Euler, Rogers, and Ramanujan. In *The theory of arithmetic functions (Proc. Conf., Western Michigan Univ., Kalamazoo, Mich., 1971)*, p. 1–20. Lecture Notes in Math., Vol. 251. Springer, Berlin, 1972.
- [19] G. E. ANDREWS : On the  $q$ -analog of Kummer’s theorem and applications. *Duke Math. J.*, 40:525–528, 1973.
- [20] G. E. ANDREWS : An analytic generalization of the Rogers-Ramanujan identities for odd moduli. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 71:4082–4085, 1974.
- [21] G. E. ANDREWS : On the Alder polynomials and a new generalization of the Rogers-Ramanujan identities. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 204:40–64, 1975.
- [22] G. E. ANDREWS : Partitions and Durfee dissection. *Amer. J. Math.*, 101(3):735–742, 1979.
- [23] G. E. ANDREWS : Multiple series Rogers-Ramanujan type identities. *Pacific J. Math.*, 114(2):267–283, 1984.
- [24] G. E. ANDREWS :  *$q$ -series : their development and application in analysis, number theory, combinatorics, physics, and computer algebra*, vol. 66 de *CBMS Regional Conference Series in Mathematics*. Publié pour le Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC, 1986.
- [25] G. E. ANDREWS : *The theory of partitions*. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, Cambridge, 1998.

- [26] G. E. ANDREWS, R. J. BAXTER, D. M. BRESSOUD, W. H. BURGE, P. J. FORRESTER et G. VIENNOT : Partitions with prescribed hook differences. *European J. Combin.*, 8(4):341–350, 1987.
- [27] G. E. ANDREWS et D. M. BRESSOUD : On the Burge correspondence between partitions and binary words. *Rocky Mountain J. Math.*, 15(2):225–233, 1985. Number theory (Winnipeg, Man., 1983).
- [28] G. E. ANDREWS et J. P. O. SANTOS : Rogers-Ramanujan type identities for partitions with attached odd parts. *Ramanujan J.*, 1(1):91–99, 1997.
- [29] A. O. L. ATKIN : A note on ranks and conjugacy of partitions. *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)*, 17:335–338, 1966.
- [30] A. O. L. ATKIN et P. SWINNERTON-DYER : Some properties of partitions. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 4:84–106, 1954.
- [31] W. N. BAILEY : Some identities in combinatory analysis. *Proc. London Math. Soc. (2)*, 49:421–425, 1947.
- [32] W. N. BAILEY : Identities of the Rogers-Ramanujan type. *Proc. London Math. Soc. (2)*, 50:1–10, 1948.
- [33] R. J. BAXTER : *Exactly solved models in statistical mechanics*. Academic Press Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], London, 1982.
- [34] A. BERKOVICH et P. PAULE : Lattice paths,  $q$ -multinomials and two variants of the Andrews-Gordon identities. *Ramanujan J.*, 5(4):409–425 (2002), 2001.
- [35] A. BERKOVICH et P. PAULE : Variants of the Andrews-Gordon identities. *Ramanujan J.*, 5(4):391–404 (2002), 2001.
- [36] D. M. BRESSOUD : A generalization of the Rogers-Ramanujan identities for all moduli. *J. Combin. Theory Ser. A*, 27(1):64–68, 1979.
- [37] D. M. BRESSOUD : Extension of the partition sieve. *J. Number Theory*, 12(1):87–100, 1980.
- [38] D. M. BRESSOUD : Lattice paths and the Rogers-Ramanujan identities. In *Number theory, Madras 1987*, vol. 1395 de *Lecture Notes in Math.*, p. 140–172. Springer, Berlin, 1989.

- [39] W. H. BURGE : A correspondence between partitions related to generalizations of the Rogers-Ramanujan identities. *Discrete Math.*, 34(1):9–15, 1981.
- [40] W. H. BURGE : A three-way correspondence between partitions. *European J. Combin.*, 3(3):195–213, 1982.
- [41] T. W. CHAUNDY : The unrestricted plane partition. *Q. J. Math., Oxf. Ser.*, 3:76–80, 1932.
- [42] M. S. CHEEMA et B. GORDON : Some remarks on two- and three-line partitions. *Duke Math. J.*, 31:267–273, 1964.
- [43] W. G. CONNOR : Partition theorems related to some identities of Rogers and Watson. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 214:95–111, 1975.
- [44] S. CORTEEL : communication personnelle.
- [45] S. CORTEEL : Particle seas and basic hypergeometric series. *Adv. in Appl. Math.*, 31(1):199–214, 2003.
- [46] S. CORTEEL et J. LOVEJOY : Frobenius partitions and the combinatorics of Ramanujan's  ${}_1\psi_1$  summation. *J. Combin. Theory Ser. A*, 97(1):177–183, 2002.
- [47] S. CORTEEL et J. LOVEJOY : Overpartitions. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 356(4):1623–1635, 2004.
- [48] S. CORTEEL, J. LOVEJOY et O. MALLET : An extension to overpartitions of the Rogers-Ramanujan identities for even moduli. *J. Number Theory*, 128(6):1602–1621, 2008.
- [49] S. CORTEEL et O. MALLET : Overpartitions, lattice paths and Rogers-Ramanujan identities. *J. Combin. Theory Ser. A*, 114(8):1407–1437, 2007.
- [50] L. E. DICKSON : *History of the theory of numbers. Vol. II : Diophantine analysis.* Chelsea Publishing Co., New York, 1966.
- [51] F. J. DYSON : Some guesses in the theory of partitions. *Eureka (Cambridge)*, 8:10–15, 1944.
- [52] L. EULER : Observationes analyticae variae de combinationibus. *Comm. Acad. Petrop.*, 13:64–93, 1741–1743, 1751.
- [53] L. EULER : *Introductio in analysin infinitorum.* Lausanne, 1748.

- [54] G. FROBENIUS : Über die charaktere der symmetrischen gruppe. *Berl. Ber.*, 1900: 516–534, 1900.
- [55] A. M. GARSIA et S. C. MILNE : A Rogers-Ramanujan bijection. *J. Combin. Theory Ser. A*, 31(3):289–339, 1981.
- [56] F. G. GARVAN : Generalizations of Dyson’s rank and non-Rogers-Ramanujan partitions. *Manuscripta Math.*, 84(3-4):343–359, 1994.
- [57] G. GASPER et M. RAHMAN : *Basic hypergeometric series*, vol. 35 de *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- [58] C. F. GAUSS : *Werke. Band II*. Georg Olms Verlag, Hildesheim, 1973. Réimpression de l’original de 1863.
- [59] B. GORDON : A combinatorial generalization of the Rogers-Ramanujan identities. *Amer. J. Math.*, 83:393–399, 1961.
- [60] R. L. GRAHAM, M. GRÖTSCHEL et L. LOVÁSZ, édés. *Handbook of combinatorics. Vol. 1, 2*. Elsevier Science B.V., Amsterdam, 1995.
- [61] G. H. HARDY : *Ramanujan. Twelve lectures on subjects suggested by his life and work*. Cambridge University Press, Cambridge, England, 1940.
- [62] E. HEINE : Über die Reihe  $1 + \frac{(q^\alpha-1)(q^\beta-1)}{(q-1)(q^\gamma-1)}x + \frac{(q^\alpha-1)(q^{\alpha+1}-1)(q^\beta-1)(q^{\beta+1}-1)}{(q-1)(q^2-1)(q^\gamma-1)(q^{\gamma+1}-1)}x^2 + \dots$ . *J. Reine Angew. Math.*, 32:210–212, 1846.
- [63] E. HEINE : Untersuchungen über die Reihe  $1 + \frac{(1-q^\alpha)(1-q^\beta)}{(1-q)(1-q^\gamma)} \cdot x + \frac{(1-q^\alpha)(1-q^{\alpha+1})(1-q^\beta)(1-q^{\beta+1})}{(1-q)(1-q^2)(1-q^\gamma)(1-q^{\gamma+1})} \cdot x^2 + \dots$ . *J. Reine Angew. Math.*, 34:285–328, 1847.
- [64] E. HEINE : *Handbuch der Kugelfunctionen. Theorie und Anwendungen*, vol. 1. Berlin. G. Reimer, 1878.
- [65] C. G. J. JACOBI : *Fundamentia Nova Theoriae Functionum Ellipticarum*. Königsberg, 1829.
- [66] J. T. JOICHI et D. STANTON : Bijective proofs of basic hypergeometric series identities. *Pacific J. Math.*, 127(1):103–120, 1987.
- [67] D. E. KNUTH : *The art of computer programming. Vol. 4, Fasc. 3 : Generating all combinations and partitions*. Addison-Wesley, Upper Saddle River, NJ, 2005.
- [68] D. H. LEHMER : Two nonexistence theorems on partitions. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 52:538–544, 1946.



- [69] J. LEPOWSKY et R. L. WILSON : The Rogers-Ramanujan identities : Lie theoretic interpretation and proof. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 78(2, partie 1):699–701, 1981.
- [70] J. LEPOWSKY et R. L. WILSON : A Lie theoretic interpretation and proof of the Rogers-Ramanujan identities. *Adv. in Math.*, 45(1):21–72, 1982.
- [71] J. LOVEJOY : Gordon’s theorem for overpartitions. *J. Combin. Theory Ser. A*, 103(2):393–401, 2003.
- [72] J. LOVEJOY : Overpartition theorems of the Rogers-Ramanujan type. *J. London Math. Soc. (2)*, 69(3):562–574, 2004.
- [73] J. LOVEJOY : Rank and conjugation for the Frobenius representation of an overpartition. *Ann. Comb.*, 9(3):321–334, 2005.
- [74] J. LOVEJOY : Overpartition pairs. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 56(3):781–794, 2006.
- [75] J. LOVEJOY et O. MALLET :  $n$ -color overpartitions, twisted divisor functions, and Rogers-Ramanujan identities. *South East Asian J. Math. Math. Sci.*, 6(2):23–36, 2008.
- [76] J. LOVEJOY et O. MALLET : Overpartition pairs and two families of basic hypergeometric series. *Adv. Math.*, 217(1):386–418, 2008.
- [77] P. A. MACMAHON : *Combinatory analysis*, vol. 2. Chelsea Publishing Co., New York, 1960.
- [78] A. NIJENHUIS et H. S. WILF : *Combinatorial algorithms*. Academic Press Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 2<sup>e</sup> édn, 1978.
- [79] I. PAK : Hook length formula and geometric combinatorics. *Sém. Lothar. Combin.*, 46:Art. B46f, 13 pages (électronique), 2001/02.
- [80] I. PAK : Partition bijections, a survey. *Ramanujan J.*, 12(1):5–75, 2006.
- [81] S. RAMANUJAN : Some properties of  $p(n)$ , the number of partitions of  $n$  [Proc. Cambridge Philos. Soc. **19** (1919), 207–210]. In *Collected papers of Srinivasa Ramanujan*, p. 210–213. AMS Chelsea Publ., Providence, RI, 2000.
- [82] L. J. ROGERS : Second memoir on the expansion of certain infinite products. *Proc. London Math. Soc.*, 25:318–343, 1894.

- [83] L. J. ROGERS : On two theorems of combinatory analysis and some allied identities. *Proc. London. Math. Soc.*, 16:315–336, 1917.
- [84] L. J. ROGERS et S. RAMANUJAN : Proof of certain identities in combinatory analysis. *Cambr. Phil. Soc. Proc.*, 19:211–216, 1919.
- [85] C. D. SAVAGE : Gray code sequences of partitions. *J. Algorithms*, 10(4):577–595, 1989.
- [86] I. SCHUR : Ein Beitrag zur additiven Zahlentheorie und zur Theorie der Kettenbrüche. *Sitzungsber. Akad. Wissensch. Berlin Phys.-Math. Klasse*, p. 302–321, 1917.
- [87] I. SCHUR : Zur additiven Zahlentheorie. *Sitzungsberichte Akad. Berlin*, 1926:488–495, 1926.
- [88] A. SELBERG : Über einige arithmetische identitäten. *Avhandlingar Norske Akademie*, 8, 1936.
- [89] L. J. SLATER : A new proof of Rogers’s transformations of infinite series. *Proc. London Math. Soc. (2)*, 53:460–475, 1951.
- [90] L. J. SLATER : Further identities of the Rogers-Ramanujan type. *Proc. London Math. Soc. (2)*, 54:147–167, 1952.
- [91] R. P. STANLEY : *Enumerative combinatorics. Vol. 1*, vol. 49 de *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- [92] J. J. SYLVESTER et F. FRANKLIN : A Constructive Theory of Partitions, Arranged in Three Acts, an Interact and an Exodion. *Amer. J. Math.*, 5(1-4):251–330, 1882.
- [93] S. O. WARNAAR : 50 years of Bailey’s lemma. *In Algebraic combinatorics and applications (Gößweinstein, 1999)*, p. 333–347. Springer, Berlin, 2001.
- [94] E. T. WHITTAKER et G. N. WATSON : *A course of modern analysis*. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
- [95] H. S. WILF : *generatingfunctionology*. Academic Press Inc., Boston, MA, 2<sup>e</sup> édn, 1994.
- [96] A. J. YEE : Combinatorial proofs of Ramanujan’s  ${}_1\psi_1$  summation and the  $q$ -Gauss summation. *J. Combin. Theory Ser. A*, 105(1):63–77, 2004.

## Résumé

Une partition d'un entier positif est une façon d'écrire ce nombre comme une somme d'entiers strictement positifs où l'ordre des termes ne compte pas. Plusieurs généralisations des partitions ont été étudiées, parmi lesquelles les surpartitions, qui sont des partitions où l'on peut surligner la dernière occurrence d'un nombre, les paires de surpartitions ou encore les partitions  $n$ -colorées, qui sont liées à un modèle de physique statistique. Dans cette thèse, on généralise aux paires de surpartitions les identités d'Andrews-Gordon, qui sont une extension d'un résultat classique de la théorie des partitions : les identités de Rogers-Ramanujan. Pour cela, on définit deux classes de séries hypergéométriques basiques et on montre que ce sont les séries génératrices des paires de surpartitions vérifiant différents types de conditions (multiplicités, rangs successifs, dissection de Durfee) et de certains chemins du plan. On montre également que pour certaines valeurs des paramètres, ces séries peuvent s'écrire comme des produits infinis, ce qui conduit à plusieurs identités de type Rogers-Ramanujan. La démonstration utilise diverses méthodes combinatoires et analytiques. On définit enfin une généralisation des partitions  $n$ -colorées, les surpartitions  $n$ -colorées, et on les utilise pour interpréter combinatoirement certaines séries multiples et démontrer d'autres identités de type Rogers-Ramanujan.

**Mots-clés** : partitions, surpartitions, partitions  $n$ -colorées, identités de type Rogers-Ramanujan

## Around overpartitions and Rogers-Ramanujan-type identities

### Abstract

A partition of a nonnegative integer is a way of writing this number as a sum of positive integers where order does not matter. Several generalizations of partitions have been studied, among which overpartitions, which are partitions where the last occurrence of a number can be overlined, overpartition pairs, and  $n$ -color partitions, which are related to a model of statistical physics. In this thesis, we generalize to overpartition pairs the Andrews-Gordon identities, which are an extension of a classical result of partition theory: the Rogers-Ramanujan identities. To do this, we define two classes basic hypergeometric series and we show that they are generating functions for overpartition pairs satisfying various kinds of conditions (multiplicities, successive ranks, Durfee dissection) and for certain lattice paths. We also show that for some values of the parameters, these series can be written as infinite products, which leads to several Rogers-Ramanujan-type identities. The proof uses various combinatorial and analytical methods. Finally, we define a generalization of  $n$ -color partitions, called  $n$ -color overpartitions, and we use these objects to interpret combinatorially certain multiple series and prove other Rogers-Ramanujan-type-identities.

**Keywords:** partitions, overpartitions,  $n$ -color partitions, Rogers-Ramanujan-type-identities