



HAL
open science

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES À COEFFICIENTS DANS DES CORPS DE SÉRIES GÉNÉRALISÉES.

Mickael Matusinski

► **To cite this version:**

Mickael Matusinski. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES À COEFFICIENTS DANS DES CORPS DE SÉRIES GÉNÉRALISÉES.. Mathématiques [math]. Université de Bourgogne, 2007. Français. NNT: . tel-00366152

HAL Id: tel-00366152

<https://theses.hal.science/tel-00366152>

Submitted on 6 Mar 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES À COEFFICIENTS DANS DES CORPS DE SÉRIES GÉNÉRALISÉES

Mickaël Matusinski

21 septembre 2007

Remerciements

Je remercie de tout coeur Jean-Philippe Rolin, le directeur de cette thèse, pour tout ce qu'il a fait. Je citerai entre autres sa gentillesse, sa confiance, son soutien, la qualité de ses conseils, sa disponibilité, sa patience... Tout ça et plus encore malgré mes difficultés : MERCI.

Merci aussi à Robert Moussu pour m'avoir donné envie de continuer les maths à un moment de grands doutes pour moi. Il a guidé mes premiers pas dans le monde mathématique, avec son amour des idées, son humanisme... et sa capacité à faire comprendre les choses même les plus compliquées. Merci pour ses conseils et son soutien constant.

Je remercie chaleureusement José Manuel Aroca d'avoir accepté de faire partie du jury et de le présider. C'est un grand honneur pour moi.

Salma Kuhlmann et à José Cano se sont intéressés à mon travail, ce qui me touche beaucoup. Je les remercie vivement d'avoir accepté d'en être rapporteurs et de surcroît de faire partie du jury.

Merci beaucoup à Pavao Mardesic pour son soutien, sa gentillesse, son intérêt pour mon travail. Je suis très touché qu'il ait accepté de faire partie du jury.

Mes remerciements vont aussi à toute l'équipe d'Equations Différentielles de l'IMB pour sa convivialité et la qualité de ses travaux et discussions. En particulier je tiens à remercier François Blais et Robert Roussari.

Je remercie aussi Rosanne Ushirobira et Marco Brunella pour leur amitié, et Bernard Perron pour sa gentillesse.

Un grand merci aux secrétaires du labo, en particulier Caroline Singvorada pour son efficacité. Merci aussi à Sylvie Vottier et Maxence Antonczyk pour leur disponibilité et leurs services (encore désolé pour mes différents déboires informatiques...). Je tiens à remercier aussi Pierre Blater et Jacqueline Alexandre pour la qualité de leur travail, le premier à la bibliothèque, la deuxième à la reprographie.

Aux thésards de l'IMB, j'adresse mes salutations et mes voeux de réussite mathématique. En particulier mon salut et mes amitiés aux anciens étudiants Marco Uribe et Cutberto Romero : gracias y saludos.

Merci de tout coeur à tous mes amis, à mon oncle et ma tante, à ma soeur et sa mère, à ma compagne pour leur soutien et leur amour.

*"Roue du firmament, je ne suis pas content de tes rotations !
Pourquoi tes leçons ? je suis immunisé contre les leçons !
Si tu penses que tu as affaire à un ignorant, à un zéro, alors
Je vais te dire : je suis un ignorant, un zéro"*

Omar Khayyam

*A mon père qui souvent disait : "J'ai toujours aimé les maths".
A mon grand-père - mon deuxième père - qui me manque tout autant que le premier.*

Table des matières

Introduction	vi
1 Théorème de Puiseux	12
1.1 Définitions	12
1.2 Exposants d'une série solution d'une équation formelle	13
1.2.1 Rationalité des exposants d'une série solution	13
1.2.2 Existence d'un dénominateur commun	14
2 Extension du théorème de Puiseux aux équations différentielles	16
2.1 Définitions et résultats	17
2.2 Exposants de la série solution	19
2.2.1 Un lemme sur les réseaux de \mathbb{R}_+ .	19
2.2.2 Résultats préliminaires	20
2.2.3 Démonstration du Théorème 2.1.12	21
3 Application : solutions d'équations différentielles sous-analytiques	24
3.1 Introduction	24
3.2 Des champs de vecteur aux équations différentielles sous-analytiques	26
3.3 Séries généralisées solutions d'équations différentielles sous-analytiques	26
4 Corps de multiséries bien ordonnées	29
4.1 Corps des multiséries de rang r	29
4.1.1 Définitions et propriétés préliminaires	29
4.1.2 Dérivation	33
4.2 Equations différentielles à coefficients dans \mathcal{M}_r	38
5 Préliminaires à la preuve du théorème principal : changements d'inconnues	45
5.1 Introduction	45
5.2 Changements de dérivations. Changements de variables polynomiaux	46
5.2.1 Changements de dérivations	46
5.2.2 Changements de variables polynomiaux	50
5.3 Eclatements - Support des changements de dérivation - Décalages	52
5.3.1 Eclatement	52
5.3.2 Support des changements de dérivation	55
5.3.3 Translation	59

6	Preuve du théorème principal : Cas d'un corps de rang 1	61
6.1	Introduction	61
6.2	Résultats préliminaires	62
6.3	Démonstration du Théorème 6.1.1	64
6.4	Cas d'un corps de rang 1	69
7	Preuve du théorème principal : cas d'un corps de rang r	72
7.1	Introduction	72
7.2	Preuve du Lemme 7.1.2: cas $l = w - 1$	73
7.3	Preuve du Lemme 7.1.2: récurrence	76
7.4	Preuve du théorème principal	77
7.5	Cas des équations réticulées	82
	Conclusion	84
	A Ensembles bien ordonnés et récurrence transfinie	87
	Bibliographie	89

Introduction

Nous étudions des équations différentielles du type $F(y, \dots, y^{(n)}) = 0$ où $F(Y_0, \dots, Y_n)$ est une série formelle en Y_0, \dots, Y_n à coefficients dans un certain corps de *séries généralisées* \mathcal{M}_r . Notre objet est de comprendre le lien existant entre l'ensemble des exposants de leurs coefficients (qu'on note $\text{Supp } F$) et les exposants des éléments de \mathcal{M}_r solutions.

Etant donné un groupe abélien totalement ordonné G , on appelle *série généralisée* à puissances dans G une expression $a = \sum_{g \in G} A_g t^g$. Les coefficients A_g sont réels, t est la variable formelle et le *support* de a (l'ensemble des puissances g telles que $A_g \neq 0$) est un sous-ensemble *bien ordonné* de G . Il est connu depuis [Hah07] que l'ensemble de ces séries muni de l'addition et de la multiplication (produit de convolution) usuelles est un corps valué. (L'hypothèse de bon ordre permet de définir le produit de convolution).

L'étude des séries généralisées se situe au confluent de récents progrès dans plusieurs domaines. Nous soulignons l'importance, dans les différents contextes que nous allons évoquer, de la *théorie des corps valués de caractéristique nulle*. Nous-mêmes utilisons dans notre travail une approche valuative.

Concernant le cas du corps $\mathbb{R}((x^{\mathbb{R}}))$ des séries de puissances réelles de x , muni de la valuation et de la dérivation usuelles, on a trois résultats récents similaires. D. Y. Grigoriev et M. F. Singer considèrent dans [GS91] des équations différentielles polynomiales $P(x, y, \dots, y^{(n)}) = 0$ avec $P \in \mathbb{Q}[[x, Y_0, \dots, Y_n]]$. Ils montrent qu'alors tout élément de $\mathbb{R}((x^{\mathbb{R}}))$ solution a ses exposants dans un \mathbb{Z} -module finiment engendré (corollaire de la section 3).

J. Cano étudie dans [Can93] des séries généralisées à exposants rationnels solutions d'équations différentielles de la forme $f(x, y, y' \dots, y^{(n)}) = 0$, où $f(x, y, \dots, y^{(n)}) \in \mathbb{R}[[x, Y_0, \dots, Y_n]]$. Il prouve qu'alors les exposants d'une telle série solution ont un dénominateur commun (série de type Puiseux : cf théorème 1), puis il détermine l'indice de Gevrey de la solution en fonction de celui de la série formelle f définissant l'équation (théorème 2).

F.Cano, R. Moussu et J.-P. Rolin montrent dans l'appendice de [CMR05] que ce résultat est encore valide pour des solutions à exposants réels d'équations différentielles formelles $f(x, y, xy', xy'') = 0$, où $f \in \mathbb{R}[[x, Y_0, Y_1, Y_2]]$: le support d'une série solution est alors *réticulé* c'est-à-dire appartient à un sous semi-groupe additif finiment engendré de \mathbb{R}_+ . Ce résultat leur est utile dans la preuve d'un théorème de désingularisation des champs de vecteurs en dimension 3 le long d'une trajectoire non-oscillante (cf théorème 1 de [CMR05]).

Ces résultats sont des cas particuliers d'un énoncé beaucoup plus général obtenu dans sa thèse par J. van der Hoeven ([vdH97]). Sans rentrer dans le détail des définitions, il peut se résumer comme suit: *une transsérie à support bien ordonné solution d'un polynôme différentiel à coefficients transséries réticulées est également réticulée*.

Les *transséries* sont des séries formelles construites itérativement à partir de \mathbb{R} , x , les opérations de corps, l'exponentielle, le logarithme et un procédé de sommation infinie analogue à

la construction des séries généralisées à partir d'un corps ordonné abstrait. On obtient ainsi un corps *totalelement ordonné, réel clos, stable par dérivation, intégration, composition et l'inversion fonctionnelle*. L'introduction des transséries est due à J. Ecalle dans sa preuve de la conjecture de Dulac (cf [É92]). Pour un survol historique concernant les transséries nous renvoyons à l'introduction de la thèse de J. van der Hoeven ([vdH97]).

On retrouve dans d'autres contextes des corps similaires à celui des transséries sous les noms de corps des *séries logarithmico-exponentielles (LE-series)*, ou encore *séries exp-log*. Indépendamment des travaux de J. Ecalle, le corps des LE-series est introduit par L. van den Dries ([vdD84][vdD86]) et B. I. Dahn et P. Göring ([DG87]) en théorie des modèles, en liaison notamment avec le problème de Tarski sur l'exponentiation réelle. Un des objets de ces travaux est de comprendre les propriétés des corps qui sont des extensions du corps des nombres réels et qui sont stables par exponentiation (c'est-à-dire un isomorphisme entre le groupe additif du corps et son sous-groupe multiplicatif d'éléments positifs).

L'introduction de ce type de corps est notamment motivée par le fait (prouvé par F.-V. Kuhlmann, S. Kuhlmann et S. Shelah dans [KKS97]) que *les corps de séries généralisées non triviaux ne peuvent pas être munis d'une exponentielle*. Néanmoins les corps de séries généralisées peuvent être munis d'une exponentielle réelle restreinte, et même de n'importe quelle fonction analytique restreinte (cf [vdMMM94]). Une étude systématique des corps ordonnés stables par les fonctions analytiques restreintes et une *exponentielle non restreinte* est faite par S. Kuhlmann dans [Kuh00] : ceux-ci peuvent être vus comme une *union dénombrable croissante de corps de séries généralisées* construite de manière récursive à partir d'un corps de séries généralisées quelconque (corps des *séries log-exp* : cf théorème 5.7).

Certains aspects des corps des séries log-exp sont déjà étudiés dans le cadre des séries généralisées par H. Hahn ([Hah07]) et dans celui des formes imbriquées par B. Salvy et J. Shackell ([SS95], [SS99]). On trouve une construction des LE-series (analogue à celle de S. Kuhlmann pour les séries exp-log) dans [vdDMM97] dans le contexte de la théorie des modèles. Pour un survol historique, nous renvoyons à l'introduction de l'ouvrage de S. Kuhlmann ([Kuh00]).

Un exemple fondamental de corps non-archimédien stable par exponentiation est fourni par les *corps de Hardy* (les corps de germes de fonctions réelles stables par différentiation). Ces corps peuvent être naturellement munis d'une valuation et d'une notion de rang (le nombre de classes archimédiennes du groupe de valuation associé).

Ces corps représentent un outil important pour l'étude des phénomènes non oscillants dans le domaine réel (la définition même des corps de Hardy impose à leurs éléments d'être non oscillants, c'est-à-dire de n'avoir qu'un nombre fini de zéros). En particulier, dans le cas d'un corps de Hardy *de rang fini*, M. Rosenlicht a prouvé qu'il existe une *échelle asymptotique finiment engendrée* (cf [Ros83][Ros83]). L'exemple fondamental de corps de Hardy stable par exponentiation est celui des *fonctions log-exp* (les germes de fonctions réelles obtenues par composition des fonctions semi-algébriques, de l'exponentielle et du logarithme) (cf G. H. Hardy [Har71][Har11]), dont les séries log-exp peuvent être vues comme la contrepartie formelle.

Ces connexions entre les corps de Hardy et les différents corps de séries log-exp ont conduit à une généralisation récente de la notion de corps de Hardy par M. Aschenbrenner et L. van den Dries : celle de *H-field* ("H" comme Hardy et comme Hahn : cf [AvdD00], [AvdD02], [AvdD05b]). Ce sont des corps différentiels ordonnés munis d'une relation de domination compatible avec l'ordre (tout élément $f \succ 1$ a une dérivée logarithmique positive) et la dérivation sur le corps (si $f \preceq 1$, alors il existe un élément c du corps de constante associé au corps tel que $f - c \prec 1$). Pour un survol historique, nous renvoyons cette fois à [AvdD05a].

Dans notre thèse, nous considérons le cas d'un groupe abélien totalement ordonné G de rang fini $r \in \mathbb{N}^*$ (c'est-à-dire avec un nombre fini de classes archimédiennes). D'après le théorème d'immersion de Hahn (cf [Hah07]), tout groupe abélien ordonné est isomorphe en tant que groupe ordonné à un sous-groupe d'un produit lexicographique de \mathbb{R} (produit de Hahn). Nous pouvons donc travailler avec le produit lexicographique de r copies de \mathbb{R} : \mathbb{R}_{lex}^r qu'on notera simplement \mathbb{R}^r , muni de l'addition composante par composante.

Nous associons à \mathbb{R}^r une copie multiplicative, notée $\mathcal{G}_r = t_1^{\mathbb{R}} \dots t_r^{\mathbb{R}}$ où t_1, \dots, t_r sont des variables formelles. Nous considérons alors le corps des multiséries de rang r $\mathcal{M}_r = \mathbb{R}[[\mathcal{G}_r]]$ dont les éléments ont leurs exposants qui sont des sous-ensembles bien ordonnés de \mathbb{R}^r (la terminologie de multisérie est empruntée à B. Salvy et J. Schackell dans [SS99]. \mathcal{G}_r est le sous-groupe de monômes et $(\mathbb{R}^r \cup \{\infty\}, +, \leq)$ est le groupe de valuation associé (on note $v : \mathcal{M}_r \rightarrow \mathbb{R}^r \cup \{\infty\}$ la valuation).

Nous munissons \mathcal{M}_r d'une dérivation avec les deux hypothèses suivantes :

(H1) pour tous $a, b \in \mathcal{M}_r$, $v(a) \leq v(b) \Leftrightarrow v(a') \leq v(b')$

(H2) $v\left(\frac{t'_k}{t_k}\right) < v\left(\frac{t'_{k+1}}{t_{k+1}}\right) \quad \forall k \in \{1, \dots, r-1\}$

Ces deux hypothèses sont légèrement plus générales que les axiomes de définition des H-fields (cf [AvdD05a]).

Afin d'énoncer notre résultat principal, nous introduisons les définitions suivantes. Étant donnés des sous-ensembles X_1, \dots, X_p bien ordonnés de $\mathbb{R}_{>(0, \dots, 0)}^r$, on appelle transformations élémentaires :

- la somme de deux sous-ensembles : $X_l + X_m = \{a + b \mid a \in X_l, b \in X_m\}$
- l'adjonction d'un nouveau générateur $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$: $X_l + \mathbb{N}\alpha$
- la génération comme semi-groupe additif : $\langle X_l \rangle = \{k_1\chi_1 + \dots + k_q\chi_q \mid k_i \in \mathbb{N}, \chi_i \in X_l, q \in \mathbb{N}\}$
- la translation négative de $\beta \in \mathbb{R}_+^*$: $(X_l)_{\geq \beta} - \beta$

A tout corps différentiel \mathcal{M}_r , on associe des sous-ensembles bien ordonnés $\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_r$ de $\mathbb{R}_{>(0, \dots, 0)}^r$ construits à partir des supports des dérivées t'_1, \dots, t'_r des générateurs t_1, \dots, t_r de \mathcal{M}_r (cf Définition 4.1.22 et Notation 4.2.9). Nous montrons que (Théorème 5.1.2) :

Soit une équation $F(y, \dots, y^{(n)}) = 0$ avec $F(Y_0, \dots, Y_n) \in \mathcal{M}_r[[Y_0, \dots, Y_n]]$ et dont le support $\text{Supp } F$ est un sous-ensemble bien ordonné de \mathbb{R}^r . Soit une solution $y_0 \in \mathcal{M}_r$ de cette équation avec $v(y_0) > \max\{(0, \dots, 0), -nv\left(\frac{t'_1}{t_1}\right)\}$. Alors les exposants de y_0 sont inclus dans un sous-ensemble bien ordonné de $\mathbb{R}_{>(0, \dots, 0)}^r$ obtenu à partir de $\text{Supp } F, \mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_r$ par un nombre fini de transformations élémentaires.

En d'autres termes, les exposants de toute série solution d'une équation différentielle à support bien ordonné dans ce type de contexte ont un degré de complexité fini relativement au support de l'équation. En particulier, nous en déduisons (Corollaire 7.5.2) l'analogue du résultat de J. Van der Hoeven cité précédemment : dans le cas d'un corps différentiel dont les dérivées des générateurs ont un support réticulé, toute solution à support bien ordonné d'une équation réticulée a elle-même ses exposants dans un réseau (nous qualifions de réticulé un ensemble inclus dans un sous-semi groupe additif de $\mathbb{R}_{>(0, \dots, 0)}^r$ dont les générateurs sont positifs)

Les résultats de D.Y.Grigoriev-M.F.Singer, J.Cano, F.Cano-R.Moussu-J.-P.Rolin, et J.Vander Hoeven s'appuient sur des généralisations du *polygone de Newton-Fine*. L'idée centrale est d'utiliser un algorithme consistant à déterminer les différents exposants dominants possibles d'une série solution en analysant les pentes des côtés du polygone associé à l'équation, puis de substituer le terme obtenu dans l'équation afin d'obtenir une nouvelle équation et donc un nouveau polygone. On obtient ainsi les différentes branches-solutions possibles. La clé de cette méthode est qu'au bout d'un nombre fini d'applications de l'algorithme, chaque branche est uniquement déterminée ("solution stabilisée" dans [GS91], situation de "point pivot" dans [Can93] et [CMR05], "équation quasi-linéaire" dans [vdH97]). Dans le cas des transséries, la démonstration est assez complexe.

Notre choix est de ne pas utiliser cette méthode, mais d'exprimer directement les relations valuatives entre les exposants des solutions et ceux des coefficients de l'équation. Tout élément y_0 de \mathcal{M}_r de valuation positive a une partie initiale de la forme

$$y_{0,k} = \sum_{(\mu_k, \dots, \mu_r) > (0, \dots, 0), \mu_k > 0} M_{(\mu_k, \dots, \mu_r)} t_k^{\mu_k} \cdots t_r^{\mu_r} \text{ pour un certain } k \in \{1, \dots, r\}.$$

Nous procédons par récurrence sur le nombre de générateurs impliqués dans l'écriture de la partie initiale de la solution considérée. Le cas initial est celui d'une partie initiale de la forme $\sum_{\mu \in \mathbb{R}} M_\mu t_r^\mu$, c'est-à-dire

ne faisant intervenir que des puissances du générateur "le moins plat" t_r .

Notre démonstration s'appuie d'abord dans le chapitre 4 sur une analyse des propriétés valuatives du corps \mathcal{M}_r pour $r \in \mathbb{N}^*$ fixé. Dans le cas du corps $\mathbb{R}((x^{\mathbb{R}}))$, on peut travailler avec une équation de la forme $F(x, y, xy', \dots, x^n y^{(n)}) = 0$ au lieu de $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$. Ainsi un monôme Ax^α avec $A \in \mathbb{R}^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}^*$ est équivalent à ses dérivées à tout ordre $x^k (Ax^\alpha)^{(k)}$ pour $k \in \{1, \dots, n\}$. Cela permet de mieux comprendre les annulations qui surviennent entre les termes lorsqu'on substitue une partie initiale de la solution dans l'équation (cf [CMR05]). Dans notre cas, on ne peut espérer obtenir une dérivation qui ait la bonne propriété pour tous les monômes de \mathcal{G}_r . Néanmoins nous définissons r nouvelles dérivations D_1, \dots, D_r adaptées au nombre de générateurs t_1, \dots, t_r impliqués dans l'écriture des monômes, c'est-à-dire telles que, pour tout $k \in \{1, \dots, r\}$, pour tous $\mu_k, \dots, \mu_r \in \mathbb{R}$, $\mu_k \neq 0$, on a $D_k(t_k^{\mu_k} \cdots t_r^{\mu_r}) \sim \mu_k t_k^{\mu_k - 1} \cdots t_r^{\mu_r}$.

L'intérêt d'une part est, comme dans le cas du corps $\mathbb{R}((x^{\mathbb{R}}))$, d'exprimer les conditions d'annulations entre les termes lorsqu'on substitue une partie initiale d'une multisérie dans l'équation, en fonction de la valuation de cette partie initiale. D'autre part, ces nouvelles dérivations nous permettent de définir les sous-ensembles bien ordonnés $\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_r$ de $\mathbb{R}_{\geq (0, \dots, 0)}^r$ cités précédemment dans l'énoncé de notre résultat principal (cf notation 4.2.9). Ces ensembles expriment en quelque sorte la "contribution du corps \mathcal{M}_r à l'enrichissement du support des solutions relativement au support de l'équation" : pour toute partie initiale de la forme

$$y_{0,k} = \sum_{(\mu_k, \dots, \mu_r) > (0, \dots, 0)} M_{(\mu_k, \dots, \mu_r)} t_k^{\mu_k} \cdots t_r^{\mu_r}, \text{ on a } \text{Supp}(\tilde{F}_{0,k}(y_{0,k}, \dots, D_k^n y_{0,k})) \subseteq \langle \text{Supp } y_{0,k} \rangle +$$

$$\text{Supp } \tilde{F}_{0,k} + \mathcal{T}_k.$$

En contrepartie, il nous faudra donc pouvoir changer de dérivation en cours de processus afin de travailler avec la dérivation adaptée au nombre de générateurs intervenant dans l'écriture de la partie initiale considérée. Les ensembles $\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_r$ nous permettent d'exprimer l'évolution du support de l'équation lorsqu'on change de dérivation (cf Propositions 5.3.8 et 5.3.13).

Une autre clé de notre preuve du théorème principal est l'introduction de la notion d'*ordre de Weierstrass* $w \in \mathbb{N}$ d'une équation à support bien ordonné (cf 6.1.2). Il s'agit d'une généralisation de la notion d'*ordre de régularité* d'une équation polynomiale ou formelle classique, comme celles considérées dans le théorème de préparation de Weierstrass (cf par exemple [KP02]). Cet ordre joue le même rôle que l'*ordre de Newton* de J. van der Hoeven dans sa preuve à l'aide du polygone de Newton-Fine (cf [vdH97], [vdH06]). Il nous permet, à l'intérieur même de la récurrence générale sur le nombre de générateurs, de raisonner par récurrence sur cet ordre.

Étant donnée une équation $F = 0$ d'ordre de Weierstrass $w \in \mathbb{N}^*$, nous traitons d'abord le cas des équations dérivées partielles d'ordre $w - 1$ de F . Certaines de ces équations sont d'ordre de Weierstrass 1 : nous montrons alors que soit le support de la multisérie considérée est inclus dans un ensemble bien ordonné associé à l'une de ces équations, soit on a stabilisation de la valuation à partir d'une partie initiale fixée de la multisérie pour toutes ces équations dérivées partielles. Dans ce dernier cas, on écrit le développement de Taylor de l'équation $F = 0$ pour une partie initiale plus longue et on montre que la somme de tous les termes correspondants aux dérivées partielles d'ordre supérieur à $w - 1$ a une valuation stabilisée. Nous nous ramenons alors pour les équations dérivées partielles d'ordre inférieur à $w - 1$ à un cas analogue au cas d'ordre de Weierstrass 1.

En itérant ce raisonnement, nous "réduisons" en quelque sorte l'ordre de Weierstrass de l'équation $F = 0$ "le long de la multisérie considérée". Pour conclure, nous remarquons qu'une équation d'ordre de Weierstrass 0 n'admet pas de solution. Puisque nous considérons une multisérie *solution* de $F = 0$, nous "réduisons" l'ordre de Weierstrass de l'équation $F = 0$ au plus à l'ordre 1.

Notre exposé se divise en sept chapitres.

L'objet des deux premiers est d'introduire notre méthode dans des cas particuliers et bien connus. Dans le premier chapitre, nous traitons le cas des équations non différentielles (chapitre 1). Nous redémontrons le fait classique suivant (Théorème 1.2.1) :

Toute série généralisée $y_0 = \sum_{j=1}^{\infty} M_{\mu_j} x^{\mu_j}$ de $\mathbb{R}((x^{\mathbb{R}}))$ solution d'une équation $f(x,y) = 0$ avec $f(x,y) \in \mathbb{R}[[x,y]]$ a des exposants μ_j rationnels avec un dénominateur commun (série de type Puiseux).

Notre méthode dans ce chapitre comme dans les suivants consiste à calculer la valuation de l'équation f évaluée en des parties initiales de plus en plus longues de la série y_0 . On montre d'abord que si les exposants d'une série généralisée ne sont pas rationnels, alors on a stabilisation de la valuation de l'équation et la série ne peut pas être solution. Ensuite nous démontrons par l'absurde que ces exposants ont un dénominateur commun : dans le cas contraire, on "réduit" l'équation à l'ordre de Weierstrass 0 et la série généralisée y_0 ne peut pas être solution.

Dans le deuxième chapitre, nous présentons une généralisation des résultats de [Can93], [GS91] et de l'annexe de [CMR05] (cf Théorème 2.1.12) :

Toute série généralisée $y_0 = \sum_{j=1}^{\infty} M_{\mu_j} x^{\mu_j}$ de $\mathbb{R}((x^{\mathbb{R}}))$ solution d'une équation formelle $f(x, y, \dots, x^n y^{(n)}) = 0$ à support réticulé (c'est-à-dire avec $f \in \mathbb{R}[[x^{\tau_1}, \dots, x^{\tau_r}]] [[Y_0, \dots, Y_n]]$ pour certains $\tau_i > 0$) a elle-même un support réticulé.

Dans le cas d'une équation d'ordre de Weierstrass 1 (ou assimilé à une équation d'ordre de Weierstrass 1 après "réduction"), nous introduisons la notion de *polynôme annulateur* (cf Définition 2.2.5). Ce polynôme est construit à l'aide des coefficients de l'équation qui déterminent son ordre de Weierstrass. Ce sont ces coefficients qui, lorsqu'on évalue l'équation en une partie initiale d'une série y_0 , fournissent les termes de plus petite valuation. La croissance de cette valuation ou sa stabilisation est une conséquence des annulations possibles entre ces termes dominants, qui elles-mêmes n'ont lieu que pour des valeurs particulières des exposants de y_0 . Une des difficultés supplémentaires du cas différentiel par rapport au cas non différentiel est que des annulations peuvent survenir du fait que des termes $a_{(i_0, \dots, i_n)} y^{i_0} \dots (x^n y^{(n)})^{i_n}$ de l'équation ayant même degré généralisé $i_0 + \dots + i_n$ et des coefficients $a_{(i_0, \dots, i_n)}$ équivalents sont eux-mêmes équivalents (cf par exemple la section 3.2.1 Introduction de [vdH02]). Ces annulations ont lieu pour les termes dominants lorsqu'un exposant de y_0 est une *racine* du polynôme annulateur. Ainsi chacune des racines positives enrichit d'un nouveau générateur le support $\text{Supp } y_0$ par rapport au support de l'équation.

Pour la preuve par récurrence (cas d'une équation d'ordre $w > 1$), nous procédons par l'absurde en supposant que les exposants de y_0 n'appartiennent à aucun réseau de \mathbb{R}_+ . Nous montrons alors que les valuations de l'équation $f = 0$ et des équations dérivées partielles de f évaluées en des parties initiales *de longueur finie* se stabilisent. La série généralisée y_0 ne peut alors pas être solution.

Le chapitre 3 est consacré à une généralisation du résultat précédent aux équations différentielles sous-analytiques (cf Théorème 3.3.1) : si une solution $y_0(x)$ d'une équation différentielle sous-analytique admet un développement asymptotique de la forme $\sum_{i=1}^{\infty} M_i x^{\mu_i}$, $\mu_i \in \mathbb{R}^+$, alors les exposants μ_i appartiennent à un réseau de \mathbb{R}^+ .

Rappelons qu'une fonction réelle est dite sous-analytique si son graphe est un ensemble sous-analytique de \mathbb{R}^2 (c'est-à-dire la projection d'un ensemble défini par des équations et inéquations analytiques). Nous montrons d'abord comment ce type d'équations peut survenir dans le cadre de la réduction des champs de vecteurs analytiques de dimension n quelconque, dans l'esprit des travaux de F. Cano, R. Moussu et J.-P. Rolin dans [CMR05].

Notre résultat découle de la décomposition des fonctions sous-analytiques obtenue par L. van den Dries, A. Macintyre et D. Marker dans [vdDMM94] ou par J.-M. Lion et J.-P. Rolin dans [LR97] : nous procédons par *récurrence sur la complexité* de l'équation sous-analytique considérée afin de nous ramener au cas des équations analytiques.

Après quelques rappels concernant les séries généralisées, nous définissons dans le chapitre 4 le corps des multiséries, la dérivation sur ce corps et les notions d'équations différentielles et de solution de ces équations.

Nous prouvons quelques propriétés élémentaires concernant notamment les valuations des

dérivées des générateurs t_1, \dots, t_r d'un corps \mathcal{M}_r . Puis nous définissons les r nouvelles dérivations D_1, \dots, D_r , et les sous-ensembles bien ordonnés de $\mathbb{R}_{\geq(0, \dots, 0)}^r$ $\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_r$ cités précédemment.

L'objet du chapitre 5 est d'obtenir quelques résultats préliminaires concernant d'une part les changements de dérivation, d'autre part certains changements d'inconnues dont nous aurons besoin.

Nous déterminons notamment le support de l'équation après changement de dérivation par rapport au support de l'équation initiale. Ce sont ces changements d'équation qui présentent le plus de difficultés, d'autant que l'ordre de Weierstrass n'est a priori pas conservé.

Les changements d'inconnues que nous utilisons sont les *éclatements* (les transformations $y = t^\mu z$ pour un certain monôme t^μ : cf section 5.3.1) et les *translations* (les transformations $y = p_S + y_1$ pour une certaine partie initiale p_S de y_0). Ce sont ces deux changements d'inconnue qui nous permettront d'appliquer la récurrence générale sur le nombre de générateurs impliqués dans l'écriture d'une partie initiale d'une multisérie y_0 . Nous en donnons quelques propriétés élémentaires, notamment comme pour les changements de dérivation, nous déterminons le support de l'équation transformée en fonction de celui de l'équation initiale.

Dans le chapitre 6, nous traitons le cas initial de la récurrence générale : la partie initiale de la solution considérée est une série généralisée à un seul générateur t_r (cf Théorème 6.1.1). Etant donnée une équation $F = 0$ d'ordre de Weierstrass $w \in \mathbb{N}^*$, comme dans le chapitre 2, nous utilisons aussi une notion de *polynôme annulateur*, et raisonnons par *récurrence descendante sur l'ordre de dérivation* $l \in \{0, \dots, w - 1\}$ des équations dérivées partielles de $F = 0$ considérées :

$$\frac{\partial^l F}{\partial Y_0^{i_0} \dots \partial Y_n^{i_n}} = 0.$$

Afin d'expliciter les ensembles bien ordonnés auxquels appartiennent les exposants de la partie initiale d'une solution, nous ne raisonnons pas par l'absurde comme dans la preuve du Théorème 2.1.12. Nous montrons par *récurrence transfinie* sur le support des parties principales considérées soit l'appartenance des exposants de y_0 à un ensemble bien ordonné convenable, soit la stabilisation de la valuation associée à l'équation. Dans ce dernier cas, nous pouvons "réduire l'ordre de Weierstrass" l'équation, c'est-à-dire travailler avec les équations dérivées partielles d'ordre de dérivation inférieur.

Nous déduisons de cette démonstration le théorème général concernant les corps de rang 1 (Théorème 6.4.1).

Le chapitre 7 est consacré à la preuve de la récurrence sur le nombre de générateurs (passage d'une solution avec une partie initiale décrite avec t_{k+1}, \dots, t_r à une autre décrite avec t_k, \dots, t_r générateurs : cf Théorème 7.1.1). Nous considérons une équation d'ordre de Weierstrass $w \in \mathbb{N}^*$ et nous raisonnons aussi par récurrence descendante sur l'ordre de dérivation $l \in \{0, \dots, w - 1\}$ des équations dérivées partielles.

Une difficulté supplémentaire provient du fait que les annulations des polynômes annulateurs ont lieu pour des valeurs particulières μ_k d'un élément $\mu = (0, \dots, 0, \mu_k, \mu_{k+1}, \dots, \mu_r)$ du support de la partie initiale de la multisérie considérée. Il reste alors à déterminer à quel ensemble bien ordonné appartiennent μ_{k+1}, \dots, μ_r pour ces valeurs de μ_k particulières. Pour cela, nous supposons que la multisérie que nous considérons est *solution* et nous nous ramenons par une *translation*, un *éclatement* et un *changement de dérivation* convenables à une équation d'un

certain ordre de Weierstrass $w' \in \mathbb{N}^*$ ayant pour solution une multisérie z_0 avec une partie initiale décrite avec t_{k+1}, \dots, t_r : on applique alors l'hypothèse de récurrence générale.

Nous en déduisons ensuite la preuve du théorème principal 5.1.2, qui correspond au cas d'une partie initiale décrite avec les r générateurs. Nous concluons avec la preuve du Corollaire 7.5.2 concernant le cas *réticulé*, moyennant un lemme de stabilité des réseaux par les transformations élémentaires citées précédemment.

Nous joignons à l'exposé une annexe A donnant quelques rappels concernant les notions d'*ensembles bien ordonnés*, de *segment initial* et de *récurrence transfinie*.

Chapitre 1

Théorème de Puiseux

Nous donnons dans ce chapitre une preuve rapide du fait classique suivant: les exposants d'une série formelle solution d'une équation formelle $f(x,y) = 0$ sont rationnels et ont un dénominateur commun. Comme dans la suite de ce travail, notre propos n'est pas de résoudre l'équation, mais de comprendre la nature des exposants de la série solution. Nous n'utilisons donc pas l'algorithme usuel qui s'appuie sur l'analyse des pentes du *polygone de Newton* de l'équation. Notre méthode consiste à montrer que la connaissance d'un développement initial suffisamment long de la série solution donne un renseignement complet sur la nature des exposants ultérieurs.

1.1 Définitions

Définition 1.1.1 Une *série généralisée* est une série formelle de la forme $y_0 = \sum_{j=1}^{\infty} M_{\mu_j} x^{\mu_j}$ où les $M_{\mu_j}, j \in \mathbb{N}$, sont des nombres réels et $(\mu_j)_{j \in \mathbb{N}}$ est une suite strictement croissante de nombres réels strictement positifs. L'ensemble des exposants μ_j tels que $M_{\mu_j} \neq 0$ est le *support* de y_0 , noté $\text{Supp } y_0$.

Pour tout réel positif α , l'ensemble $\langle y_0 \rangle_{\alpha}$ (qui peut être vide) est constitué des $(p+1)$ -uplets d'entiers naturels (l, m_1, \dots, m_p) , $p \in \mathbb{N}$, tels qu'il existe des exposants $\mu_{j_1}, \dots, \mu_{j_p}$ de la série $\langle y_0 \rangle$ vérifiant $l + m_1 \mu_{j_1} + \dots + m_p \mu_{j_p} = \alpha$. L'ensemble $\langle y_0 \rangle$ est formé des $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $\langle y_0 \rangle_{\alpha}$ est non vide.

Remarque 1.1.2 Puisque les exposants de y_0 sont positifs, il est clair que pour tout réel $\alpha \in \langle y_0 \rangle$, l'ensemble $\langle y_0 \rangle_{\alpha}$ est fini. De plus, l'ensemble $\langle y_0 \rangle$, en bijection avec un sous-ensemble de $\bigcup_{p \in \mathbb{N}} \mathbb{N}^{p+1}$, est dénombrable.

Définition 1.1.3 Soient $f(x,y) = \sum_{l,m \in \mathbb{N}} a_{l,m} x^l y^m \in \mathbb{R}[[x,y]]$ une série formelle (à exposants entiers) et $y_0 = \sum_{j=1}^{\infty} M_{\mu_j} x^{\mu_j}$ une série généralisée. La *série composée* $f(x,y_0)$ est la série généralisée $\sum_{n \in \mathbb{N}} c_{\alpha_n} x^{\alpha_n}$, où les exposants appartiennent à $\langle y_0 \rangle$ et, pour tout $\alpha_k \in \langle y_0 \rangle$, le coefficient c_{α_k} est défini par:

$$c_{\alpha_k} = \sum_{l+m_1\mu_{j_1}+\dots+m_p\mu_{j_p}=\alpha_k} a_{l,m_1+\dots+m_p} M_{\mu_{j_1}}^{m_1} \dots M_{\mu_{j_p}}^{m_p}.$$

Remarque 1.1.4 Le coefficient ci-dessus est obtenu en développant la série

$$f(x, y_0) = \sum a_{l,m} x^l \left(\sum M_{\mu_j} x^{\mu_j} \right)^m$$

Le *support* de la série composée $f(x, y_0)$ est l'ensemble des éléments α de $\langle y_0 \rangle$ tels que le coefficient c_α est non nul.

Le calcul de chacun des coefficients de la série composée $f(x, y_0)$ ne fait intervenir qu'une partie initiale *finie* de la série généralisée y_0 . De plus, si $\alpha \in \text{Supp } f(x, y_0)$, l'ensemble Σ_α des éléments de $\text{Supp } f(x, y_0)$ inférieurs ou égaux à α est fini. Donc seule une partie initiale finie de la série y_0 intervient dans le calcul des coefficients des monômes $c_\beta x^\beta$ pour $\beta \in \Sigma_\alpha$. Nous adoptons les notations suivantes:

- si $p_k = \sum_{j=1}^k M_j x^{\mu_j}$, alors $f_k = f(x, p_k)$, $f^{(i)}(x, y) = \frac{\partial^i f}{\partial y^i}(x, y)$, $f_k^{(i)} = \frac{\partial^i f}{\partial y^i}(x, p_k)$ et $f_0 = f(x, 0)$.

- $v_k = v(f_k)$, où v est la valuation usuelle qui à toute série généralisée z associe le plus petit élément de $\text{Supp } z$ si z est non nul, et $v(0) = \infty$.

- Pour tout entier $i \in \mathbb{N}$, $v_k^{(i)} = v\left(f_k^{(i)}\right)$. En particulier, $v_k^{(0)} = v_k$.

Définition 1.1.5 La série généralisée y_0 est dite *solution* de l'équation formelle $f(x, y) = 0$ si tous les coefficients de la série composée $f(x, y_0)$ sont nuls.

1.2 Exposants d'une série solution d'une équation formelle

Le résultat principal de ce chapitre est le suivant:

Théorème 1.2.1 Soit $y_0 = \sum_{j=1}^{\infty} M_{\mu_j} x^{\mu_j}$ une série généralisée solution de l'équation $f(x, y) = 0$, où $f(x, y) \in \mathbb{R}[[x, y]]$. Alors les exposants μ_j sont rationnels. De plus il existe un entier $q \in \mathbb{N}$ tel que les exposants $\mu_j \in \frac{1}{q}\mathbb{N}$.

Remarque 1.2.2 Pour démontrer ce théorème, nous utilisons le fait que nous pouvons supposer la série formelle $f(x, y)$ régulière au sens de Weierstrass en la variable y . Il suffit en effet d'écrire $f(x, y) = x^{n_0} f_0(x, y)$, où n_0 est le plus petit exposant de la variable x apparaissant dans la série $f(x, y)$ et de remarquer que la série $f_0(x, y)$ est régulière en la variable y .

1.2.1 Rationalité des exposants d'une série solution

Démonstration. Soit w l'ordre de régularité en y de la série $f(x, y)$. Supposons qu'il existe $j \in \mathbb{N}$ tel que μ_j ne soit pas rationnel. On note $j_0 + 1$ le plus petit de ces j , et donc $\mu_j \in \mathbb{Q}_+^*$ pour tout $j \leq j_0$. On en déduit que, pour tout $i \in \{0, \dots, w-1\}$, $v_{j_0}^{(i)} \in \mathbb{Q}_+$. Alors on a : $v_{j_0} \neq v_{j_0}^{(1)} + \mu_{j_0+1} \neq \dots \neq (w-1)\mu_{j_0+1} + v_{j_0}^{(w-1)} \neq w\mu_{j_0+1}$. On pose $m_0\mu_{j_0+1} + v_{j_0}^{(m_0)} = \min\{m\mu_{j_0+1} + v_{j_0}^{(m)} \mid m \in \{0, \dots, w\}\}$.

On note $\hat{y}_0 = y_0 - p_{k_0}$ et donc $v(\hat{y}_0) = \mu_{k_0+1}$. D'après la formule de Taylor, on a

$$\begin{aligned}
f(x, y_0) &= f_{k_0} + \frac{1}{1!} \hat{y}_0 f_{k_0}^{(1)} + \dots + \frac{1}{(w-1)!} \hat{y}_0^{(w-1)} f_{k_0}^{(w-1)} + \hat{y}_0^w V_k \\
&= f_{k_0} + \frac{1}{1!} x^{\mu_{k_0+1}} \hat{u}_{k_0} f_{k_0}^{(1)} + \dots + \frac{1}{(w-1)!} x^{(w-1)\mu_{k_0+1}} \hat{u}_{k_0}^{w-1} f_{k_0}^{(w-1)} + x^{w\mu_{k_0+1}} \hat{u}_{k_0}^w V_{k_0} \\
&= x^{v^{(0)}} \hat{U}_{k_0}^{(0)} + x^{\mu_{k_0+1}+v^{(1)}} \hat{U}_{k_0}^{(1)} + \dots + x^{(w-1)\mu_{k_0+1}+v^{(w-1)}} \hat{U}_{k_0}^{(w-1)} + x^{w\mu_{k_0+1}} \hat{U}_{k_0}^{(w)} \\
&= x^{m_0\mu_{j_0+1}+v_{j_0}^{(m_0)}} V_{k_0} \neq 0
\end{aligned}$$

avec $v(\hat{U}_{k_0}^{(0)}) = \dots = v(\hat{U}_{k_0}^{(w)}) = v(V_{k_0}) = 0$
 y_0 ne serait alors pas solution. □

1.2.2 Existence d'un dénominateur commun

Nous supposons donc dorénavant que les exposants de y_0 sont rationnels. Notre stratégie pour démontrer la deuxième affirmation du Théorème 1.2.1 consiste à supposer que les exposants $\mu_j \in \mathbb{Q}_+^*$ de y_0 n'ont pas de dénominateur commun et à montrer alors que la valuation v_k se stabilise et que y_0 ne peut alors être solution de l'équation $f(x, y) = 0$.

Nous utiliserons à plusieurs reprises le résultat suivant :

Lemme 1.2.3 Soient $y_0 = \sum_{j=1}^{\infty} M_{\mu_j} x^{\mu_j}$ une série généralisée et une équation $f(x, y) = 0$ avec $f(x, y) \in \mathbb{R}[[x, y]]$. Supposons qu'il existe une constante $c \geq 0$ et un entier naturel k_1 tels que, pour tout $k \geq k_1$, on peut écrire $f_{k+1} = f_k + x^{\mu_{k+1}+c} u_{k+1}$ avec $v(u_{k+1}) = 0$.

S'il existe $k_0 \geq k_1$ tel que $\mu_{k_0+1} + c \neq v_{k_0}$, alors les v_k se stabilisent à v_{k_0+1} avec $v_{k_0+1} \leq \mu_{k_0+1} + c < \mu_k + c$ pour tout $k > k_0 + 1$.

Démonstration. On démontre la stabilisation et les inégalités par une récurrence immédiate sur $k \geq k_0 + 1$ en appliquant l'inégalité triangulaire ultramétrique pour l'expression de f_{k+1} et le fait que la suite des μ_k , $k \geq 1$ est strictement croissante. □

Nous déduisons la deuxième affirmation du Théorème 1.2.1 du lemme suivant.

Lemme 1.2.4 Supposons que les exposants $\mu_j \in \mathbb{Q}_+^*$ de y_0 n'ont pas de dénominateur commun. Posons $v^{(w)} = 0$. Pour tout $l \in \{0, \dots, w-1\}$, il existe un entier k_l tel que, pour tout $k > k_l$, on a :

$$v^{(l)} + l\mu_k < v^{(l+1)} + (l+1)\mu_k < \dots < (w-1)\mu_k + v^{(w-1)} < w\mu_k$$

Démonstration. Nous procédons par récurrence descendante sur l .

a) Si $l = w-1$, $f^{(w-1)}$ est régulière d'ordre 1 au sens de Weierstrass. D'après la formule de Taylor appliquée à l'ordre 2 à f^{w-1} , on a pour tout $k \geq 0$ (on pose $f_0 = f(x, 0)$) :

$$\begin{aligned}
f_k^{(w-1)} + 1 &= f_k^{(w-1)} + M_{k+1} x^{\mu_{k+1}} f^{(w)} + M_{k+1}^2 x^{2\mu_{k+1}} b_{k+1} \\
&= f_k^{(w-1)} + x^{\mu_{k+1}} u_{k+1}^{(w-1)}
\end{aligned}$$

avec $v(b_{k+1}) \geq 0$, $v(f^{(w)}) = 0$ et $v(u_{k+1}^{(w-1)}) = 0$. Puisque les exposants μ_j n'ont pas de dénominateur commun, il existe $k_{w-1} \geq 0$ tel que $v_{k_{w-1}}^{(w-1)} \neq \mu_{k_{w-1}+1}$ (sinon on montrerait par une récurrence immédiate que les μ_k sont tous entiers). On applique le Lemme 1.2.3.

b) Si $0 \leq l < w - 1$, on applique l'hypothèse de récurrence à l'équation $f^{(l+1)}(x, y) = 0$. On obtient donc des valuations stabilisées $v^{(m)} = v_k^{(m)}$ pour $m \in \{l+1, \dots, w-1\}$ à partir d'un rang k_{l+1} , telles que pour tout $k \geq k_{l+1}$:

$$v^{(l+1)} + (l+1)\mu_k < \dots < (w-1)\mu_k + v^{(w-1)} < w\mu_k$$

D'après la formule de Taylor à l'ordre 1 pour $f^{(l)}$, on a pour tout $k \geq k_{l+1}$:

$$f_k^{(l)} + 1 = f_k^{(l)} + x^{\mu_{k+1} + v^{(l+1)}} u_{k+1}^{(l)}$$

avec $v(u_{k+1}^{(l)}) = 0$. Puisque les μ_k n'ont pas de dénominateur commun, il existe un rang $k_l \geq k_{l+1}$ tel que $v_{k_l}^{(l)} \neq \mu_{k_l+1} + v^{(l+1)}$ (sinon les μ_k auraient tous le dénominateur commun de $\mu_1, \dots, \mu_{k_{l+1}}$). On applique le Lemme 1.2.3. \square

La preuve du Théorème 1.2.1 correspond au cas $l = 0$: on a stabilisation de la valuation v_k à $v_{k_0} = v^{(0)}$ pour un certain $k_0 \in \mathbb{N}^*$, et, pour tout $k > k_0$, $v^{(0)} < v^{(l)} + l\mu_k$ pour tout $l \in \{1, \dots, w\}$.

Démonstration. Supposons que les μ_k n'ont pas de dénominateur commun. Nous montrons par récurrence sur l'ordre w en la variable y de la série formelle $f(x, y)$ qu'on a alors stabilisation de la valuation et que y_0 n'est pas solution.

On note $\hat{y}_0 = y_0 - p_{k_0}$ avec $v(\hat{y}_0) = \mu_{k_0+1}$, d'après la formule de Taylor on a :

$$\begin{aligned} f(x, y_0) &= f_{k_1} + \frac{1}{1!} \hat{y}_0 f_{k_0}^{(1)} + \dots + \frac{1}{(w-1)!} \hat{y}_0^{w-1} f_{k_0}^{(w-1)} + \hat{y}_0^w V_k \\ &= x^{v^{(0)}} \hat{U}_{k_0}^{(0)} + x^{\mu_{k_0+1} + v^{(1)}} \hat{U}_{k_0}^{(1)} + \dots + x^{(w-1)\mu_{k_0+1} + v^{(w-1)}} \hat{U}_{k_0}^{(w-1)} + x^{w\mu_{k_0+1}} \hat{U}_{k_0}^{(w)} \\ &= x_{j_0}^{v^{(0)}} V_{k_0} \neq 0 \end{aligned}$$

avec $v(\hat{U}_{k_0}^{(0)}) = \dots = v(\hat{U}_{k_0}^{(w)}) = v(V_{k_0}) = 0$.

La série y_0 n'est donc pas solution. \square

Chapitre 2

Extension du théorème de Puiseux aux équations différentielles

L'étude des séries généralisées solutions d'équations différentielles est l'objet de plusieurs publications. Les coefficients des polynômes différentiels que D. Y. Grigoriev et M. F. Singer considèrent dans [GS91] ont des exposants qui tendent vers $+\infty$. J. Cano étudie dans [Can93] des séries généralisées à exposants rationnels solutions d'équations différentielles de la forme $f(x, y, y' \dots, y^{(n)}) = 0$, où $f(x, Y_0, Y_1 \dots, Y_n) \in \mathbb{R}[[x, Y_1, \dots, Y_n]]$. Dans ces deux articles, les auteurs montrent que les exposants de la série solution appartiennent à un *réseau* (ou sous semi-groupe finiment engendré) de \mathbb{R}_+ .

F. Cano, R. Moussu et J.-P. Rolin montrent dans l'appendice de [CMR05] que ce résultat est encore valide pour des solutions à exposants réels d'équations différentielles formelles $f(x, y, xy', xy'') = 0$, où $f \in \mathbb{R}[[x, Y_0, Y_1, Y_2]]$. Dans ces trois articles, la preuve s'appuie sur l'analyse des pentes du *polygône de Newton-Fine* associé à l'équation différentielle. Dans ce chapitre nous généralisons ce dernier théorème aux équations différentielles d'ordre n , non nécessairement polynomiales, et dont les coefficients sont des séries généralisées dont le support commun est inclus dans un réseau de \mathbb{R}^+ . Comme dans le chapitre précédent, nous ne proposons pas un algorithme de calcul des exposants, et n'utilisons pas explicitement le polygône de Newton-Fine. Nous montrons que la connaissance d'un développement initial suffisamment long de la série solution permet de conclure.

Rappelons que ces résultats sont des cas particulier d'un énoncé beaucoup plus général obtenu dans sa thèse par J. van der Hoeven [vdH97]. Sans rentrer dans le détail des définitions, il peut se résumer comme suit: *une transsérie à support bien ordonné solution d'un polynôme différentiel à coefficients transséries réticulées est également réticulée*. Sa démonstration est très complexe. C'est pourquoi nous jugeons utile, dans les cas que nous considérons, de donner une preuve autonome. Cela nous permet de plus d'illustrer une méthode que nous généralisons plus loin à d'autres corps de séries (qui ne sont pas nécessairement des transséries).

2.1 Définitions et résultats

Notation 2.1.1 Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+$, et tout entier naturel $i \geq 1$, on note:

$$\begin{cases} (\lambda)_{*i} &= i! \binom{\lambda}{i} = \lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-i+1) \\ (\lambda)_{*0} &= 1 \end{cases}$$

Définition 2.1.2 Pour $n \in \mathbb{N}$, la *dérivée d'ordre n* d'un momôme généralisé x^α , $\alpha \in \mathbb{R}_+$, est définie par: $(x^\alpha)^{(n)} = (\alpha)_{*i} x^{(\alpha-n)}$. De même, la *dérivée d'ordre n* d'une série généralisée

$$y_0 = \sum_{i=1}^{\infty} M_{\mu_i} x^{\mu_i}, \mu_i > 0, \text{ est la série } y_0^{(n)} = \sum_{i=1}^{\infty} M_{\mu_i} (\mu_i)_{*n} x^{\mu_i-n}.$$

Remarque 2.1.3 La Définition 1.1.1 impose aux exposants d'une série généralisée d'être positifs. Ça n'est pas nécessairement le cas des exposants de la série dérivée y_0^n . En revanche, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la série $x^n y_0^{(n)} = x^n \sum_{j=1}^{\infty} M_{\mu_j} (\mu_j)_{*n} x^{\mu_j-n} = \sum_{j=1}^{\infty} M_{\mu_j} (\mu_j)_{*n} x^{\mu_j}$ est bien une série généralisée, de même valuation que la série y_0 .

Définition 2.1.4 Soient $\tau_1, \dots, \tau_r \in \mathbb{R}$. Le sous-semi groupe additif de \mathbb{R} engendré par τ_1, \dots, τ_r , est appelé *réseau* engendré par τ_1, \dots, τ_r . On le note $\mathbb{N}\tau_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{N}\tau_r$ ou plus simplement $\langle \tau_1, \dots, \tau_r \rangle$.

Si $\tau_1, \dots, \tau_r \in \mathbb{R}^+$, on note $\mathbb{R}[[x^{\tau_1}, \dots, x^{\tau_r}]] [[Y_0, \dots, Y_n]]$ l'anneau des séries formelles de la forme :

$$f(x, Y_0, \dots, Y_n) = \sum_{(i_0, \dots, i_n) \in \mathbb{N}^{n+1}} a_{i_0, \dots, i_n}(x) Y_0^{i_0} \cdots Y_n^{i_n} = \sum_{I \in \mathbb{N}^{n+1}} a_I(x) Y^I$$

où les a_{i_0, \dots, i_n} sont des séries généralisées dont le support est contenu dans $\langle \tau_1, \dots, \tau_r \rangle$ et $Y^I = Y_0^{i_0} \cdots Y_n^{i_n}$. Une telle série s'écrit donc également :

$$f(x, Y_0, \dots, Y_n) = \sum a_{\alpha, i_0, \dots, i_n} x^\alpha Y_0^{i_0} \cdots Y_n^{i_n} = \sum a_{\alpha, I} x^\alpha Y^I$$

où $\alpha \in \langle \tau_1, \dots, \tau_r \rangle$, $I = (i_0, i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{N}^{n+1}$ et $a_{\alpha, i_0, \dots, i_n} \in \mathbb{R}$.

Remarque 2.1.5 Le fait de considérer des équations dont les coefficients ont des exposants éventuellement non entiers nous amène à étendre la définition de l'ensemble $\langle y_0 \rangle$ défini par une série généralisée y_0 avec $v(y_0) > 0$.

Définition 2.1.6 Soient $\tau_1, \dots, \tau_r \in \mathbb{R}^+$ et $y_0 = \sum_{j=1}^{\infty} M_{\mu_j} x^{\mu_j}$ une série généralisée. Pour tout réel positif α , l'ensemble $\langle y_0 \rangle_\alpha$ (défini par la série y_0 avec $v(y_0) > 0$ et les réels τ_1, \dots, τ_r) est constitué des $(r+p)$ -uplets d'entiers positifs $(l_1, \dots, l_r, i_1, \dots, i_p)$, $p \in \mathbb{N}$, tels qu'il existe des exposants $\mu_{j_0}, \dots, \mu_{j_n}$ de la série y_0 avec

$$\alpha = l_1 \tau_1 + \dots + l_r \tau_r + i_1 \mu_{j_1} + \dots + i_p \mu_{j_p}$$

L'ensemble $\langle y_0 \rangle$ est formé des réels α tels que $\langle y_0 \rangle_\alpha$ est non vide.

Remarque 2.1.7 L'ensemble $\langle y_0 \rangle$ est le réseau de \mathbb{R}^+ engendré par les nombres τ_1, \dots, τ_r et $\mu_j, j \in \mathbb{N}$. Puisque ces générateurs sont positifs, il est clair que pour tout $\alpha \in \langle y_0 \rangle$, l'ensemble $\langle y_0 \rangle_\alpha$ est fini. De plus, l'ensemble $\langle y_0 \rangle$, en bijection avec un sous-ensemble de $\bigcup_{p \in \mathbb{N}} \mathbb{N}^{r+p}$, est dénombrable.

Définition 2.1.8 Soient $f(x, Y_0, \dots, Y_n) = \sum a_{\beta_l, I} x^{\beta_l} Y^I \in \mathbb{R}[[x^{\tau_1}, \dots, x^{\tau_r}]][[Y_0, \dots, Y_n]]$ et une série généralisée $y_0 = \sum_{i=1}^{\infty} M_{\mu_i} x^{\mu_i}$ avec $\mu_i > 0$. La *série composée* $f(x, y_0, y_0', \dots, x^n y_0^{(n)})$ est la série généralisée $\sum_{\alpha \in \langle y_0 \rangle} c_{\alpha_k} x^{\alpha_k}$, où les exposants appartiennent à $\langle y_0 \rangle$ et, pour tout $\alpha_k \in \langle y_0 \rangle$, le coefficient c_{α_k} est défini par :

$$c_{\alpha_k} = \sum a_{\beta_l, i_0^1 + \dots + i_0^{l_0}, \dots, i_n^1 + \dots + i_n^{l_n}} \frac{i_0!}{i_0^1! \dots i_0^{l_0}!} \dots \frac{i_n!}{i_n^1! \dots i_n^{l_n}!} \\ \left(\mu_{j_0^1} \right)_{*0}^{i_0^1} \dots \left(\mu_{j_0^{l_0}} \right)_{*0}^{i_0^{l_0}} \dots \left(\mu_{j_n^1} \right)_{*n}^{i_n^1} \dots \left(\mu_{j_n^{l_n}} \right)_{*n}^{i_n^{l_n}} M_{\mu_{j_0^1}}^{i_0^1} \dots M_{\mu_{j_0^{l_0}}}^{i_0^{l_0}} \dots M_{\mu_{j_n^1}}^{i_n^1} \dots M_{\mu_{j_n^{l_n}}}^{i_n^{l_n}}$$

où la somme est prise sur les t -uplets (β_l, i_s^d) tels que $\beta_l + \sum_{s=0}^n \sum_{d=1}^{l_s} i_s^d \mu_{j_s^d} = \alpha_k$ c'est-à-dire sur les éléments de $\langle y_0 \rangle_{\alpha_k}$.

Remarque 2.1.9 Le coefficient ci-dessus est obtenu en développant l'expression:

$$f(x, y_0, \dots, x^n y_0^{(n)}) = \sum a_{\beta_l, i_0, \dots, i_n} x^{\beta_l} \left(\sum M_{\mu_j} x^{\mu_j} \right)^{i_0} \dots \left(\sum M_{\mu_j} (\mu_j)_{*n} x^{\mu_j} \right)^{i_n}$$

Nous adoptons les notations suivantes:

Notation 2.1.10 Soient $k \in \mathbb{N}$, $y_0 = \sum_{j=1}^{\infty} M_{\mu_j} x^{\mu_j}$ une série généralisée et $I = (i_0, i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{N}^{n+1}$

- si $p_k = \sum_{j=1}^k M_{\mu_j} x^{\mu_j}$, on note $f_k = f(x, p_k, \dots, x^n (p_k)^n)$. En particulier, $f_0 = f(x, 0, \dots, 0) = a_0(x)$.
- $|I| = i_0 + \dots + i_n$ est la *longueur* de I et $I! = i_0! \dots i_n!$
- Pour tout réel μ , on pose $(\mu)^I = (\mu)_{*0}^{i_0} (\mu)_{*1}^{i_1} \dots (\mu)_{*n}^{i_n}$.
- Soient I et J deux multi-indices de \mathbb{N}^{n+1} . On note $I \leq J$ si $i_k \leq j_k$ pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$.
- $f^{(I)} = \frac{\partial^I f}{\partial Y_0^{i_0} \dots \partial Y_n^{i_n}}$, $f_k^{(I)} = f^{(I)}(x, p_k, \dots, x^n (p_k)^n)$ et $f_0^{(I)} = f^{(I)}(x, 0, \dots, 0)$.
- Enfin, on note $v_k^0 = v_k = v(f_k)$ et $v_k^{(I)} = v(f_k^{(I)})$.

Définition 2.1.11 La série généralisée y_0 est dite *solution de l'équation*

$$f(x, y, \dots, x^n y^{(n)}) = 0 \quad (2.1.1)$$

si tous les coefficients de la série composée $f(x, y_0, \dots, x^n y_0^{(n)})$ sont nuls.

Enonçons le résultat principal de ce chapitre:

Théorème 2.1.12 Soient $f \in \mathbb{R}[[x^{\tau_1}, \dots, x^{\tau_r}]][[Y_0, \dots, Y_n]]$ et $y_0 = \sum_{j=1}^{\infty} M_j x^{\mu_j}$ avec $\mu_j > 0$, une série généralisée solution de l'équation $f(x, y, \dots, x^n y^{(n)}) = 0$. Alors il existe des réels positifs $\sigma_1, \dots, \sigma_s$ tels que les exposants μ_j appartiennent au réseau $\langle \sigma_1, \dots, \sigma_s \rangle$.

2.2 Exposants de la série solution

2.2.1 Un lemme sur les réseaux de \mathbb{R}_+ .

Nous fixons dorénavant $f(x, Y_0, \dots, Y_n) = \sum_{I \in \mathbb{N}^{n+1}} a_I(x) Y^I \in \mathbb{R}[[x^{\tau_1}, \dots, x^{\tau_r}]][[Y_0, \dots, Y_n]]$,

avec $\mathcal{R}_0 = \langle \tau_1, \dots, \tau_r \rangle$ et une série généralisée $y_0 = \sum_{j=1}^{\infty} M_{\mu_j} x^{\mu_j}$, $\mu_j > 0$. Le fait que les exposants

des coefficients a_I appartiennent au réseau \mathcal{R}_0 permet de supposer f régulière au sens de Weierstrass, en procédant comme suit. En effet, si on appelle $\text{Supp } f$ l'ensemble des exposants $\alpha \in \mathcal{R}_0$ des coefficients a_I non nuls, cet ensemble admet un plus petit élément qui est égal à la valuation d'un des coefficients. On note $v(a_{I_0}) = \alpha_0$. Alors, en écrivant $f = x^{\alpha_0} f_0$ on peut supposer que f possède les propriétés suivantes: il existe un entier w , appelé l'ordre de Weierstrass de f , tel que:

- pour tout $I \in \mathbb{N}^{n+1}$, $v(a_I(x)) \geq 0$.
- il existe $I_0 \in \mathbb{N}^{n+1}$ tel que $|I_0| = w$ et $v(a_{I_0}(x)) = 0$ (i.e. a_{I_0} est une unité).
- pour tout $J \in \mathbb{N}^{n+1}$ avec $|J| < w$, $v(a_J(x)) > 0$.

Nous devons vérifier que cette nouvelle équation f_0 a elle-aussi un support réticulé (c'est-à-dire inclus dans un réseau du type $\langle \lambda_1, \dots, \lambda_r \rangle$ avec $\lambda > 0$ pour tout i). C'est l'objet du lemme suivant, que nous utiliserons aussi dans la suite.

Lemme 2.2.1 Soient $\Lambda = \langle \lambda_1, \dots, \lambda_r \rangle$ un réseau engendré par des nombres réels positifs, et $\alpha > 0$. Notons $(\Lambda)_{>\alpha}$ l'ensemble (supposé non vide) des éléments de Λ strictement supérieur à α . Alors il existe des réels positifs ν_1, \dots, ν_s tels que $(\Lambda)_{>\alpha} - \alpha \subset \langle \nu_1, \dots, \nu_s \rangle$.

Démonstration. Nous procédons par récurrence sur r

a) Si $r = 1$, notons $k_0 = \min \{k \in \mathbb{N} \mid k\lambda_1 > \alpha\}$. Tout élément a de $\Lambda = \langle \lambda_1 \rangle_{\geq \alpha} - \alpha$ s'écrit $k\lambda_1 - \alpha$ avec $k \in \mathbb{N}$ et $k\lambda_1 > \alpha$, ou encore:

$$a = (k - k_0)\lambda_1 + (k_0\lambda_1 - \alpha)$$

Nous concluons en posant $\nu_1 = \lambda_1$ et $\nu_2 = k_0\lambda_1 - \alpha$.

b) Supposons le lemme démontré pour des réseaux engendrés par $r - 1$ nombres réels. Considérons un réseau $\Lambda = \langle \lambda_1, \dots, \lambda_r \rangle$. Soit k_0 le plus petit des entiers positifs k tels que $k\lambda_r > \alpha$. Tout élément a de $\langle \Lambda \rangle_{>\alpha} - \alpha$ peut s'écrire sous la forme:

$$a = \sum_{i=1}^{r-1} k_i \lambda_i + k_r \lambda_r - \alpha$$

Si $k_r \geq k_0$, a s'écrit $\sum_{i=1}^{r-1} k_i \lambda_i + (k_r - k_0) \lambda_r + k_0 \lambda_r - \alpha$ et appartient à $\langle \lambda_1, \dots, \lambda_{r-1}, \lambda_r, k_0 \lambda_r - \alpha \rangle$.

Sinon a appartient à l'un des réseaux $\langle \lambda_1, \dots, \lambda_{r-1} \rangle_{>(\alpha - k_r \lambda_r)} - (\alpha - k_r \lambda_r)$, $k_r < k_0$, auxquels nous appliquons l'hypothèse de récurrence. \square

Le Théorème 2.1.12 est une conséquence immédiate de la proposition suivante, que nous démontrons par récurrence sur l'ordre de Weierstrass de f :

Proposition 2.2.2 *Il existe un entier positif s et des nombres réels positifs $\sigma_1, \dots, \sigma_s$ tels que le réseau $\mathcal{R} = \langle \sigma_1, \dots, \sigma_s \rangle$ contienne le réseau $\mathcal{R}_0 = \langle \tau_1, \dots, \tau_r \rangle$ et tels qu'on ait:*

i) soit les exposants de la série y_0 appartiennent à \mathcal{R} .

ii) soit il existe un entier positif k_0 tel que pour tout entier $k > k_0$, $v_k = v_{k_0+1}$ et tel que pour tout $k \leq k_0$, $\mu_k \in \mathcal{R}$. Dans ce cas, y_0 n'est pas solution de l'équation 2.1.1.

2.2.2 Résultats préliminaires

Nous consacrons cette section à deux résultats que nous appliquerons à plusieurs reprises. Le premier donne deux conditions de stabilisation de la valuation v_k . Il généralise le Lemme 1.2.3.

Lemme 2.2.3 *Soient une équation 2.1.1 et une série généralisée $y_0 = \sum_{j=1}^{\infty} M_{\mu_j} x^{\mu_j}$ dont les exposants μ_j sont strictement positifs. Supposons qu'il existe une constante $c \geq 0$ et un entier naturel k_1 tels que, pour tout $k \geq k_1$:*

i) On peut écrire $f_{k+1} = f_k + x^{\mu_{k+1}+c} b_{k+1}$ avec $v(b_{k+1}) \geq 0$. S'il existe un indice $k_0 \geq k_1$ tel que $\mu_{k_0+1} + c > v_{k_0}$, alors les v_k se stabilisent à v_{k_0} avec $v_k = v_{k_0} < \mu_{k_0+1} + c < \mu_k + c$ pour tout $k > k_0 + 1$.

ii) On peut écrire $f_{k+1} = f_k + x^{\mu_{k+1}+c} u_{k+1}$ avec $v(u_{k+1}) = 0$. S'il existe $k_0 \geq k_1$ tel que $\mu_{k_0+1} + c \neq v_{k_0}$, alors les v_k se stabilisent à v_{k_0+1} avec $v_{k_0+1} \leq \mu_{k_0+1} + c < \mu_k + c$ pour tout $k > k_0 + 1$.

Démonstration. On démontre la stabilisation et les inégalités par une récurrence immédiate sur $k \geq k_0 + 1$ en appliquant l'inégalité triangulaire ultramétrique pour l'expression de f_{k+1} et le fait que la suite des μ_k , $k \geq 1$ est strictement croissante. \square

Le deuxième résultat concerne les conditions d'annulation des termes dominants quand on évalue l'équation 2.1.1 en une partie principale p_k d'une série y_0 .

Étant données une équation 2.1.1 et une série généralisée $y_0 = \sum_{j=1}^{\infty} M_j x^{\mu_j}$ avec $\mu_i > 0$, nous supposons qu'il existe un multi-indice $J \in \mathbb{N}^{n+1}$ de longueur 1, un entier $k_J \geq 0$ et un réel $v^{(O)} \geq 0$ tels que, pour tout $k \geq k_J$, on a les hypothèses suivantes (v_0 désigne $v(f(x, 0, \dots, 0))$):

$$v_k^{(J)} = v_{k_J}^{(J)} = v^{(O)} \quad (2.2.1)$$

$$v^{(O)} = \min\{v_k^{(I)} \mid |I| = 1\} \quad (2.2.2)$$

$$v^{(O)} + \mu_{k+1} < \min\{v_k^{(I)} + \mu_{k+1} \mid |I| \geq 2\} \quad (2.2.3)$$

Notation 2.2.4 On note alors :

- \mathcal{A} l'ensemble des multi-indices de longueur 1 vérifiant ces propriétés
- $C_{k_J}^{(J)} x^{v^{(O)}}$ le terme dominant de $f_{k_J}^{(J)}(x, 0, \dots, 0)$
- j_J la position de 1 dans $J = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$
- $k_0 = \max\{k_J \mid J \in \mathcal{A}\}$

Définition 2.2.5 Le *polynôme annulateur* associé à l'équation 2.1.1 et à la série y_0 (sous les hypothèses 2.2.1, 2.2.2, 2.2.3) est :

$$\pi_{k_0}(X) = \sum_{J \in \mathcal{A}} C_{k_0}^{(J)}(X)_{*j_J}$$

Lemme 2.2.6 Pour tout entier $k \geq k_J$, on a $\pi_k(X) \equiv \pi_{k_0}(X) \equiv \sum_{J \in \mathcal{A}} C_{k_J}^{(J)}(X)_{*j_J}$.

Démonstration. En appliquant la formule de Taylor pour $f^{(I)}$ avec $I \in \mathcal{A}$, on obtient pour tout $k > k_I$:

$$f_k^{(I)} = f_{k_I}^{(I)} + \sum_{|J| \geq 1} \frac{1}{J!} f_{k_I}^{(I+J)} M_{\mu_{k_I+1}} x^{\mu_{k_I+1}} u_k(x)$$

avec $v(f_k^{(I)}) = v_k^{(I)} = v^{(O)} = v_{k_I}^{(I)} = v(f_{k_I}^{(I)})$ (Hypothèse 2.2.1). D'après l'Hypothèse 2.2.3, on a donc :

$$f_k^{(I)} \sim f_{k_I}^{(I)}$$

et donc $C_k^{(I)} = C_{k_I}^{(I)}$ pour tout $k > k_I$. □

Remarque 2.2.7

1) Le polynôme annulateur étant de degré inférieur ou égal à n , il a au plus n racines positives qu'on note $\{\rho_1, \dots, \rho_m\}$ avec $m \leq n$.

2) Dans le cas où f est d'ordre de Weierstrass égal à 1, il existe des multi-indices I tels que $|I| = 1$ et $v(c_I) = 0$. On note \mathcal{A} l'ensemble de ces multi-indices, et on a les hypothèses 2.2.1, 2.2.2 et 2.2.3 avec $v^{(O)} = 0$ et $k_0 = 0 = k_I$ pour tout $I \in \mathcal{A}$. On a alors :

$$\pi_{k_0}(X) = \sum_{J \in \mathcal{A}} f^{(J)}(0)(X)_{*j_J}$$

2.2.3 Démonstration du Théorème 2.1.12

Soit f d'ordre de Weierstrass $w \geq 1$. Le Théorème 2.1.12 résulte du lemme suivant, qui généralise le Lemme 1.2.4 qui a permis la preuve du Théorème 1.2.1 :

Lemme 2.2.8 Supposons qu'il n'existe aucun réseau de \mathbb{R}_+ engendré par un nombre fini de réels positifs qui contienne les exposants de la série généralisée y_0 . Posons $v^{(w)} = 0$. Pour tout $l \in \{0, \dots, w-1\}$, il existe un entier positif k_l , un multi-indice $I_l \in \mathbb{N}^{n+1}$ de longueur $|I_l| = l$ et un réel strictement positif $v^{(l)}$ tel que, pour tout $k > k_l$, on a :

- i) $v_k^{(I_l)} = v^{(l)}$
- ii) $v^{(l)} < v^{(l+1)} + \mu_k$.
- iii) $v^{(l)} = \min\{v_k^{(I)} \mid I \in \mathbb{N}^{n+1}, |I| = l\}$

Démonstration. Nous procédons par récurrence descendante sur l .

a) Si $l = w - 1$, on a $v^{(l+1)} = v^{(w)} = 0$. Pour tout multi-indice I de longueur $|I| = w - 1$, on a deux cas :

- Soit il existe un entier $k_I > 0$ tel que $v_{k_I}^{(I)} < \mu_{k_I+1}$. On applique alors le point *i*) du Lemme 2.2.3 et on a stabilisation de $v_k^{(I)}$ à $v_{k_I}^{(I)}$.

- Soit pour tout $k > 0$, on a $v_k^{(I)} \geq \mu_{k+1}$.

Montrons que l'ensemble des multi-indices vérifiant le premier cas est non vide. Puisque f est d'ordre de Weierstrass w , il existe un multi-indice I de longueur $w - 1$ tel que $f^{(I)}$ soit d'ordre 1. On note \mathcal{A} l'ensemble des multi-indices $I \in \mathbb{N}^{n+1}$ de longueur w tels que $v_0^{(I)} = 0$, et \mathcal{A}_I l'ensemble des multi-indices J avec $|J| = 1$ tels que $(I + J) \in \mathcal{A}$, c'est-à-dire tels que $v^{(I+J)} = 0$. On note $\{\rho_1^{(I)}, \dots, \rho_{m_I}^{(I)}\}$ l'ensemble des racines positives du polynôme annulateur associé à I (cf Remarque 2.2.7). D'après l'hypothèse faite concernant les exposants de y_0 , il existe un entier positif k_0 tel que $\mu_{k_0+1} \neq v_{k_0}$ et $\mu_k \notin \{\rho_1^{(I)}, \dots, \rho_{m_I}^{(I)}\}$ pour tout $k \geq k_0 + 1$ (sinon on aurait pour tout $k \geq 1$, $\mu_k \in \mathcal{R} = \langle \tau_1, \dots, \tau_r, \rho_1^{(I)}, \dots, \rho_{m_I}^{(I)} \rangle$). D'après la formule de Taylor, on a donc pour tout $k \geq k_0 + 1$:

$$f_{k+1}^{(I)} = f_k^{(I)} + (\pi_I(\mu_k) + b_{k+1}(x)) M_{k+1} x^{\mu_{k+1}} \quad \text{avec } v(b_{k+1}) > 0 \text{ et } \pi(\mu_{k+1}) \neq 0$$

Puisque $\mu_{k_0+1} \neq v_{k_0}$, on applique alors le point *ii*) du Lemme 2.2.3.

On pose k_{w-1} le plus grand des k_I à partir desquels les valuations $v_k^{(I)}$ sont stabilisées et telles que les μ_k pour $k \geq k_{w-1}$ ne soient pas racines des polynômes annulateurs associés aux multi-indices I . On pose alors $v^{(w-1)} = \min\{v_{k_{w-1}}^{(I)} \mid |I| = w - 1\}$ pour tout $k \geq k_{w-1}$, qui est bien égale à une valuation $v_{k_{w-1}}^{(I_{w-1})}$ stabilisée pour un certain multi-indice I_{w-1} de longueur $w - 1$.

b) Soit $l \in \{0, \dots, w - 1\}$ et supposons la propriété prouvée pour les éléments de $\{l, \dots, w - 1\}$. L'hypothèse de récurrence montre qu'il existe un entier $k'_l = \max\{k_i \mid i = l \dots w - 1\}$ tel que, pour tout $k \geq k'_l$

$$v^{(l)} < v^{(l+1)} + \mu_k < v^{(l+2)} + 2\mu_k < \dots < (w - l) \mu_k$$

et $v^{(l)} = \min\{v_k^{(I)} \mid i \in \mathbb{N}^{n+1}, |I| = l\}$.

Pour tout multi-indice I de longueur $|I| = l - 1$, d'après la formule de Taylor, on a donc pour tout $k \geq k'_l$:

$$f_{k+1}^{(I)} = f_k^{(I)} + M_{k+1} x^{\mu_{k+1} + v^{(l)}} b_{k+1}(x) \quad \text{avec } v(b_{k+1}) \geq 0$$

On a alors deux cas :

- Soit il existe un entier $k_I > k'_l$ tel que $v_{k_I}^{(I)} < \mu_{k_I+1} + v^{(l)}$. On applique le point *i*) du Lemme 2.2.3 et on a stabilisation de $v_k^{(I)}$ à $v_{k_I}^{(I)}$.

- Soit pour tout $k > k'_l$, on a $v_k^{(I)} \geq \mu_{k+1}$.

Montrons que l'ensemble des multi-indices vérifiant le premier cas est non vide. Il existe un multi-indice I de longueur $l - 1$ tel que $I + J = I_l$ pour un certain multi-indice J de longueur 1. On a donc $v_k^{(I+J)} = v_k^{(I_l)} = v^{(l)}$ pour tout $k \geq k'_l$. On note \mathcal{A}_I l'ensemble des multi-indices J avec $|J| = 1$ tels que $v^{(I+J)} = v^{(l)}$. On définit le *polynôme annulateur* associé à I : $\pi_{k'_l, I}(X) = \sum_{J \in \mathcal{A}_I} C_{k'_l}^{(I+J)}(X)_{*j_J}$ (où j_J désigne la position de 1 dans $J = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$).

On note alors $\{\rho_1^{(I)}, \dots, \rho_{m_I}^{(I)}\}$ l'ensemble des racines positives de $\pi_{k'_I, I}(X)$. D'après l'hypothèse faite concernant les exposants de y_0 , il existe un entier positif k_I tel que $\mu_{k_I+1} + v^{(l)} \neq v_{k_I}$ et $\mu_k \notin \{\rho_1^{(I)}, \dots, \rho_{m_I}^{(I)}\}$ pour tout $k \geq k_I + 1$ (sinon on aurait pour tout $k \geq 1$, $\mu_k \in \mathcal{R} = \langle \tau_1, \dots, \tau_r, \mu_1, \dots, \mu_{k'_I}, \rho_1, \dots, \rho_m \rangle$). D'après la formule de Taylor, on a donc pour tout $k \geq k_I + 1$:

$$f_{k+1}^{(I)} = f_k^{(I)} + (\pi(\mu_k) + b_{k+1}(x)) M_{k+1} x^{\mu_{k+1}} \quad \text{avec } v(b_{k+1}) > 0 \text{ et } \pi(\mu_{k+1}) \neq 0$$

Puisque $\mu_{k_0+1} \neq v_{k_0}$, on applique alors le point *ii*) du Lemme 2.2.3.

On pose k_{l-1} le plus grand des $k_I + 1$ à partir desquels les valuations $v_k^{(I)}$ sont stabilisées et telles que les μ_k pour $k \geq k_{l-1}$ ne sont pas racines des polynômes annulateurs associés aux multi-indices I . On pose alors $v^{(l-1)} = \min\{v_{k_{w-1}}^{(I)} \mid |I| = l - 1\}$ pour tout $k \geq k_{l-1}$, qui est bien égale à une valuation $v_{k_{l-1}}^{(I_{l-1})}$ stabilisée pour un certain multi-indice I_{l-1} de longueur $l - 1$. \square

On en déduit la démonstration du Théorème 2.1.12:

Démonstration. Supposons comme dans le lemme précédent que les exposants de la série y_0 n'appartiennent à aucun réseau de \mathbb{R}_+ finiment engendré par des nombres réels positifs. Nous pouvons appliquer le lemme avec $l = 0$.

Montrons que y_0 ne peut alors être solution de 2.1.1. On note $\hat{y}_0 = y_0 - p_{k_0+1}$ et on applique la formule de Taylor:

$$f(x, y_0, \dots, x^n y_0^{(n)}) = f_{k_0+1} + M_{k_0+2} x^{\mu_{k_0+2}} \hat{b}_{k_0+1}(x)$$

avec $v(\hat{b}_{k_0+1}) \geq 0$ et puisque $v(f_{k_0+1}) = v_{k_0+1} = v^{(0)} < \mu_{k_0+2}$ on a donc

$$f(x, y_0, \dots, x^n y_0^{(n)}) = x^{v^{(0)}} U(x) \neq 0 \quad \text{avec } v(U(x)) = 0$$

\square

Chapitre 3

Application : solutions d'équations différentielles sous-analytiques

3.1 Introduction

Nous reprenons ici le contenu de la note [MR06]. Nous montrons que si une solution $y(x)$ d'une équation différentielle sous-analytique admet un développement asymptotique de la forme $\sum_{i=1}^{\infty} c_i x^{\mu_i}$, $\mu_i \in \mathbb{R}^+$, alors les exposants μ_i appartiennent à un réseau (c'est-à-dire sous-semi-groupe finiment engendré) de \mathbb{R}^+ . Nous en déduisons un résultat analogue pour les composantes des trajectoires non oscillantes de champs de vecteurs analytiques réels en dimension n .

Soit X un champ de vecteur analytique sur une variété réelle M de dimension 3. Considérons une courbe intégrale $\gamma : t \mapsto \gamma(t)$, $t \geq 0$, de X , qu'on suppose être *sous-analytiquement non-oscillante et transcendante*. C'est-à-dire telle que tout sous-ensemble sous-analytique de M de codimension positive a un nombre fini de points d'intersection avec son support $|\gamma|$. Ainsi γ a un seul point ω -limite p . On définit :

Définition 3.1.1 Une transformation γ -admissible est une suite finie d'éclatements avec centre non singulier, et de revêtements ramifiés.

et le théorème de désingularisation suivant est démontré dans [CMR05] :

Sous les hypothèses précédentes, il existe une transformation γ -admissible $\pi : (\tilde{M}, \tilde{\gamma}, \tilde{p}) \rightarrow (M, \gamma, p)$ telle que la courbe relevée soit une courbe intégrale d'un champ de vecteur avec une partie linéaire non nilpotente (singularité élémentaire de champ de vecteur).

On se donne un système de coordonnées locales (x, y, z) de M de centre p . L'hypothèse de non-oscillation nous permet de supposer que le support $|\gamma|$ appartient au quadrant positif et que γ est paramétrée par x . Une étape clé de la preuve est le résultat suivant (Proposition 2 de [CMR05]) :

Proposition 3.1.2 *Supposons que l'axe $x = y = 0$ n'est pas invariant par le champ de vecteur X . Considérons la projection $(x, y(x))$ et supposons que $y(x)$ a un développement asymptotique $\sum_{i=0}^{\infty} c_i x^{\mu_i}$ ($\mu_i \in \mathbb{R}_+$) relativement à x . Alors les exposants μ_i appartiennent à un réseau de \mathbb{R}_+ .*

Remarque : si les exposants μ_i sont des nombres rationnels, la proposition fournit un développement asymptotique (éventuellement divergent) en *série de Puiseux* de $y(x)$.

Exemple : on considère un nombre irrationnel $\alpha > 0$ et une solution $H(x)$ de l'équation d'Euler $x^2 y' = y - x$, définie pour $x \geq 0$. Alors $z(x) = xH(x^\alpha)$ est la troisième composante de la trajectoire du champ de vecteur défini par :

$$\begin{cases} \dot{x} &= xy \\ \dot{y} &= \alpha y^2 \\ \dot{z} &= \alpha z - \alpha xy + yz \end{cases}$$

Le développement asymptotique de $z(x)$ à l'origine est une série divergente de puissances de x dont les exposants sont des nombres irrationnels appartenant au semi-groupe engendré par 1 et α .

Notre but ici est de démontrer une version n-dimensionnelle de la proposition précédente :

Théorème 3.1.3 *Soient X un champ de vecteur analytique sur une variété analytique n-dimensionnelle M , et γ une courbe intégrale de X sous-analytiquement non oscillante et transcendante. Considérons p le point ω -limite de γ , et un système de coordonnées locales analytique (x_1, \dots, x_n) de centre p , tel que $|\gamma|$ soit inclus dans l'octant positif et que γ admette une paramétrisation $x_1 \mapsto (x_1, x_2(x_1), \dots, x_n(x_1))$. Si toute composante de γ admet un développement asymptotique $\sum_{i=0}^{\infty} c_i x^{\mu_i}$, alors les exposants μ_i appartiennent à un réseau de \mathbb{R}_+ .*

Dans [CMR05], ce résultat découle d'un procédé d'élimination à deux étapes. Supposons que $\mu_1 > 2$. La première étape consiste à montrer que les composantes de $\gamma(x) = (x, y(x), z(x))$ et leurs dérivées jusqu'à l'ordre 2 vérifient un système de deux équations analytiques. La deuxième étape utilise les hypothèses concernant l'axe $x = y = 0$, en rapport avec une propriété des applications analytiques (cf [KK83]), afin d'éliminer $z(x)$ entre les deux équations. Ainsi la composante $y(x)$ vérifie une équation différentielle analytique $R(x, y(x), xy'(x), x^2 y''(x)) = 0$. Cela implique que les exposants μ_i appartiennent à un réseau de \mathbb{R}_+ , d'après le résultat prouvé dans [CMR05] qui généralise à la fois [Can93] et [GS91].

Notre approche est une généralisation de ce procédé d'élimination suivi d'une résolution. L'étape complète d'élimination, traitée dans la section 2, ne conduit plus à une équation différentielle analytique, mais à une *équation différentielle sous-analytique*. Les propriétés des exposants d'une *série généralisée* qui est le développement asymptotique d'une solution d'une équation différentielle sous-analytique sont étudiées dans la section 3.

3.2 Des champs de vecteur aux équations différentielles sous-analytiques

Nous démontrons ici le Théorème 3.1.3

Notre preuve suit celle de [CMR05]. A une ramification $x \mapsto x^q$ près, pour $q \in \mathbb{N}$ suffisamment grand (ce qui n'a pas d'incidence sur la conclusion du théorème), on peut supposer que $\mu_1 > n - 1$. Avec les notations de l'introduction, le champ de vecteur X est décrit, dans le système de coordonnées (x_1, \dots, x_n) , par n équations différentielles analytiques : $\dot{x}_i = a_i(x_1, \dots, x_n)$, $i = 1, \dots, n$. \dot{x}_i désigne la dérivée de x_i par rapport au temps t . On déduit directement de ces équations que les composantes $x_2(x_1), \dots, x_n(x_1)$ satisfont les équations $a_1(x_1, \dots, x_n) x'_j = a_j(x_1, \dots, x_n)$, $j = 2, \dots, n$, où x'_j désigne la dérivée de x_j par rapport à x_1 . Répétons $(n - 2)$ fois les opérations suivantes : calculons la dérivée de la première équation, et éliminons $x'_3(x_1), \dots, x'_n(x_1)$ dans celle-ci à l'aide des équations restantes. On obtient un système d'équations différentielles analytiques $f_j(x_1, x_2(x_1), \dots, x_2^{(n-1)}(x_1), x_3(x_1), \dots, x_n(x_1))$, $j = 2, \dots, n$.

La projection du sous-ensemble analytique A de \mathbb{R}^{2n-1} définie dans un voisinage de l'origine par les équations $f_2 = \dots = f_n = 0$ sur l'espace $\mathbb{R}^{n+1} \times \{0\}^{n-2}$ est un ensemble sous-analytique $\pi(A)$. On en déduit qu'il existe une fonction sous-analytique H telle que la courbe non oscillante $x_1 \mapsto (x_1, x_2(x_1), \dots, x_2^{(n-1)}(x_1))$ vérifie l'équation $H = 0$. Cela implique que la fonction $\varphi : x_1 \mapsto x_1^{-(n-1)} x_2(x_1)$, dont le développement asymptotique est $\sum c_i x_1^{\mu_i - (n-1)}$, est solution d'une équation différentielle sous-analytique $f(x_1, \varphi(x_1), x\varphi'(x_1), \dots, x^{n-1}\varphi^{(n-1)}(x_1)) = 0$.

Le théorème est une conséquence du résultat de la section suivante.

3.3 Séries généralisées solutions d'équations différentielles sous-analytiques

Théorème 3.3.1 *Soit f une fonction sous-analytique définie dans un voisinage de l'origine de \mathbb{R}^{n+2} . Considérons un élément ϕ d'un corps de Hardy à l'origine de \mathbb{R}_+ qui est solution de l'équation $f(x, \varphi(x), x\varphi'(x), \dots, x^n\varphi^{(n)}(x)) = 0$. Si ϕ admet un développement asymptotique*

$$\hat{\varphi}(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i x^{\mu_i}, \quad \mu_i \in \mathbb{R}_+^*, \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \mu_i = +\infty, \quad \text{alors les exposants } \mu_i \text{ appartiennent à un réseau de } \mathbb{R}_+^*.$$

Notre approche utilise le résultat du Théorème 2.1.12. Avec les notations suivantes, si on se donne une série convergente :

$$F(x, u_0, u_1, \dots, u_n) = \sum_{i, j_0, \dots, j_n} F_{i, j_0, \dots, j_n} x^{\alpha_i} u_0^{j_0} \dots u_n^{j_n}$$

où les exposants α_i appartiennent à un réseau de \mathbb{R}_+ et les j_k étant des entiers positifs, on a :

• soit $F(x, \varphi(x), \dots, x^n \varphi^{(n)}(x)) = 0$ et les exposants μ_k de son développement $\hat{\phi}$ appartiennent à un réseau de \mathbb{R}_+ ;

• soit il existe un entier naturel k_0 , un réel positif γ et une unité analytique U définie dans un voisinage de l'origine tels que, si on définit ϕ_1 par $\varphi(x) = \sum_{i=1}^{k_0} c_i x^{\mu_i} + x^{\mu_k} \varphi_1(x)$, alors

$$F(x, \varphi(x), \dots, x^n \varphi^{(n)}(x)) = x^\gamma U(x^{\beta_1}, \dots, x^{\beta_s}, \varphi_1(x), \dots, x^n \varphi_1^{(n)}(x)), \text{ avec } \gamma, \beta_1, \dots, \beta_s \in \mathbb{R}_+^*.$$

Nous dirons ici que la paire (F, ϕ) est *monomialisable* (c'est le cas où on a stabilisation de la valuation dans l'énoncé du Théorème 2.1.12).

On en déduit la preuve du Théorème 3.3.1

Démonstration. La preuve repose sur le résultat précédent et sur une description des fonctions sous-analytiques, obtenue, par exemple, dans [LR97] ou [vdDMM94]. Considérons la fonction sous-analytique de l'énoncé du théorème. On peut l'écrire comme composée finie des trois applications suivantes :

1. une fonction analytique $F : V \rightarrow \mathbb{R}$, où V est un voisinage de l'origine de \mathbb{R}^p , $p \in \mathbb{N}$,
2. une ramification $x \mapsto x^r$, pour $x \in \mathbb{R}_+$ et $r \in \mathbb{Q}_+$,
3. la fonction division D définie sur \mathbb{R}^2 par $D(x, y) = \frac{x}{y}$ si $|y| \geq |x|$, et $D(x, y) = 0$ sinon.

Cela permet de procéder par récurrence sur la *complexité* de f , en posant qu'une fonction sous-analytique est *plus simple* que f si elle est décrite dans la décomposition précédente de f . Nous démontrons ici que la dichotomie ci-dessus reste valide pour des paires (f, ϕ) où f est une fonctions sous-analytique, ce qui implique directement le théorème.

1. Si f est une fonction analytique, nous avons vu précédemment qu'on a la dichotomie d'après le théorème 2.1.12.

Supposons maintenant que f est une fonction sous-analytique, et que le résultat a été prouvé pour des fonctions sous-analytiques plus simples que f .

2. Supposons que $f = f_1^r$, avec $r \in \mathbb{Q}_+$, et f_1 *plus simple* que f . Si $f_1(x, \varphi(x), \dots, x^n \varphi^{(n)}(x)) = 0$, nous appliquons l'hypothèse de récurrence pour f_1 . Sinon, la paire (f_1, ϕ) est monomialisable, ce qui implique que (f, ϕ) l'est aussi.

3. Supposons que $f = F(f_1, \dots, f_l)$, avec F analytique et f_1, \dots, f_l fonctions sous-analytiques plus simples que f . Si ϕ est une solution d'une des équations différentielles

$f_j(x, \varphi(x), \dots, x^n \varphi^{(n)}(x)) = 0$, nous concluons à l'aide de l'hypothèse de récurrence. Sinon, il est clair que les paires $(f_1, \varphi), \dots, (f_l, \varphi)$ sont *simultanément monomialisable*. Donc, ϕ_1 définie

par $\varphi(x) = \sum_{i=1}^k c_i x^{\mu_i} + x^{\mu_k} \varphi_1(x)$ est une solution de :

$$F\left(x^{\gamma_1} U_1\left(x, \dots, x^n \varphi_1^{(n)}(x)\right), \dots, x^{\gamma_l} U_l\left(x, \dots, x^n \varphi_1^{(n)}(x)\right)\right) = 0,$$

où U_1, \dots, U_l sont analytiques et les γ_j 's appartiennent à \mathbb{R}_+ . Cette equation s'écrit :

$$F_1\left(x^{\beta_1}, \dots, x^{\beta_s}, \varphi_1(x), x \varphi_1'(x), \dots, x^n \varphi_1^{(n)}(x)\right) = 0$$

où F_1 est analytique et les β_j 's appartiennent à \mathbb{R}_+ .

4. Finalement, supposons que $f = D(f_1, f_2)$, où f_1, f_2 sont plus simples que f . Une fois encore, si les paires (f_1, φ) et (f_2, φ) sont simultanément monomialisables, on obtient :

$$f(x, \varphi(x), \dots, x^n \varphi^{(n)}(x)) = \frac{x^{\gamma_1} U_1(x, \varphi_1(x), \dots, x^n \varphi_1^{(n)}(x))}{x^{\gamma_2} U_2(x, \varphi_1(x), \dots, x^n \varphi_1^{(n)}(x))}$$

avec $\gamma_1 > \gamma_2$ and U_1, U_2 analytique. Cela prouve que la paire (f, ϕ) est elle-aussi monomialisable.
 \square

Cela conclut la preuve du Théorème 3.1.3.

Chapitre 4

Corps de multiséries bien ordonnées

Nous introduisons ici le cadre de travail pour les équations que nous traiterons dans notre théorème principal (théorème 5.1.2). Tout d'abord, nous définissons le corps de séries généralisées qui sera le corps des coefficients des équations et de leurs solutions. Nous munissons ensuite ce corps de différentes dérivations afin de pouvoir définir les équations différentielles. Enfin nous définirons quelques transformations utiles à la démonstration.

4.1 Corps des multiséries de rang r

4.1.1 Définitions et propriétés préliminaires

Une partie des résultats que nous allons énoncer sont classiques. Nous n'en donnerons pas de démonstration mais quelques références où le lecteur pourra les trouver.

Soit $(\mathcal{G}, +, \leq)$ un groupe abélien totalement ordonné. D'après [Hah07], on définit le corps des séries généralisées à coefficients réels et à exposants dans $\mathcal{G} : \mathbb{R}((\mathcal{G}))$, noté aussi $\mathbb{R}((t^{\mathcal{G}}))$ où t est une variable formelle. Les éléments de $\mathbb{R}((t^{\mathcal{G}}))$ sont les sommes formelles $a = \sum_{g \in \mathcal{G}} A_g t^g$ où

le support de a , $\text{Supp } a = \{g \in \mathcal{G} \mid A_g \neq 0\}$, est un sous-ensemble bien ordonné de \mathcal{G} . L'addition de deux éléments est définie terme à terme. Le fait que le support est bien ordonné (cf annexe A) permet de définir la multiplication de deux séries à l'aide du produit de convolution usuel :

$$\left(\sum_{g \in \mathcal{G}} A_g t^g \right) \left(\sum_{g \in \mathcal{G}} B_g t^g \right) = \sum_{g \in \mathcal{G}} C_g t^g \text{ avec } C_g = \sum_{g_1 + g_2 = g} A_{g_1} B_{g_2}$$
 (il suffit de vérifier que cette somme est finie et que le support est bien ordonné). Pour cette preuve, ainsi que pour celle de l'existence d'un inverse pour tout élément non nul, nous renvoyons à [Hah07].

$\mathbb{R}((t^{\mathcal{G}}))$ est muni d'une valuation naturelle :

$$\begin{aligned} v : \mathbb{R}((t^{\mathcal{G}})) &\rightarrow \mathcal{G} \\ a &\mapsto \min(\text{Supp } a) \end{aligned}$$

De plus, d'après le *théorème d'immersion de Hahn* dans [Hah07], \mathcal{G} est isomorphe à un sous-groupe d'un produit lexicographique de copies de \mathbb{R} , le *produit de Hahn* associé à \mathcal{G} . En particulier, si le rang de \mathcal{G} est fini égal à r , le produit de Hahn dans lequel on le plonge fini est

un produit fini de r copies de \mathbb{R} . Nous considérons donc ici le cas du groupe additif \mathbb{R}^r pour un certain rang $r \in \mathbb{N}^*$ muni de l'ordre lexicographique \geq_{lex} qu'on note \geq :

$\forall \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_r), \beta = (\beta_1, \dots, \beta_r) \in \mathbb{R}^r$,

$$\alpha > \beta \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 > \beta_1 \\ \text{ou} \\ \exists i_0 \in \{1, \dots, r-1\}, \forall i \leq i_0, \alpha_i = \beta_i \text{ et } \forall i > i_0, \alpha_i > \beta_i \end{cases}$$

Nous reprenons ici plus en détail la construction du corps de série généralisées associé à \mathbb{R}^r .

Notons $\mathcal{G}_r = t_1^{\mathbb{R}} \dots t_r^{\mathbb{R}}$ une copie multiplicative de \mathbb{R}^r par l'isomorphisme :

$$\begin{aligned} v^{-1} &: \mathbb{R}^r \rightarrow \mathcal{G}_r \\ \alpha &\mapsto t_1^{\alpha_1} \dots t_r^{\alpha_r} \end{aligned}$$

avec pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^r$, $t_1^{\alpha_1} \dots t_r^{\alpha_r} \times t_1^{\beta_1} \dots t_r^{\beta_r} = t_1^{\alpha_1 + \beta_1} \dots t_r^{\alpha_r + \beta_r}$

Notation 4.1.1 on notera $\alpha + \beta = (\alpha_1 + \beta_1, \dots, \alpha_r + \beta_r)$ et t^α quand il n'y a pas d'ambiguïté sur le r-uplet α considéré.

\mathcal{G}_r hérite d'une relation d'ordre \preceq par l'isomorphisme v : $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}^r$, $t^\alpha \preceq t^\beta \Leftrightarrow \alpha \geq \beta$. Pour toute application $a : \mathcal{G}_r \rightarrow \mathbb{R}$, on note $\text{Supp } a = \{\alpha \in \mathbb{R}^r \mid a(t^\alpha) \neq 0\}$ et on définit :

Définition 4.1.2 $\mathcal{M}_r = \{a : \mathcal{G}_r \rightarrow \mathbb{R} \mid \text{Supp } a \text{ bien ordonné}\}$ est dit l'ensemble des multiséries bien ordonnées de rang r . On notera les multiséries $a = \sum_{\alpha \in \mathbb{R}^r} A_\alpha t^\alpha$ où $A_\alpha = a(t^\alpha) \in \mathbb{R}$

En ce qui concerne les définitions et propriétés des ensembles bien ordonnés, nous renvoyons à l'annexe [A](#).

Remarque 4.1.3 \mathcal{M}_r est dans [\[AvdD05a\]](#) le corps des transséries à coefficients dans \mathbb{R} et à monômes dans \mathcal{G}_r , noté $\mathbb{R}[[\mathcal{G}_r]]$. Dans [\[vdH97\]](#), \mathcal{M}_r est le corps des séries bien ordonnées lexicographiques, noté $\mathbb{R}[[t_1; \dots; t_r]]$. Nous préférons la terminologie de multisérie utilisée dans un cas plus particulier dans [\[SS99\]](#), laissant ainsi le nom de transséries à la construction faite primitivement avec log et exp par J.Ecalle dans sa preuve [\[É92\]](#) de la conjecture de Dulac (cf [\[vdH97\]](#) Introduction).

Le résultat suivant est un cas particulier des résultats de H. Hahn dans [\[Hah07\]](#) :

Proposition 4.1.4 \mathcal{M}_r muni de l'addition :

$$a + b = \sum_{\alpha \in \mathbb{R}^r} (A_\alpha + B_\alpha) t^\alpha$$

de la multiplication :

$$a \times b = \sum_{\gamma \in \mathbb{R}^r} \left(\sum_{\alpha + \beta = \gamma} A_\alpha B_\beta \right) t^\gamma$$

et de l'élément neutre 0 pour l'addition est un corps commutatif. De plus, muni de la loi de composition externe :

$$L.a = \sum_{\alpha \in \mathbb{R}^r} (L.A_\alpha) t^\alpha$$

\mathcal{M}_r est une \mathbb{R} -algèbre.

Pour toute multisérie a , $\text{Supp } a$ étant bien ordonné, il admet un plus petit élément qu'on note $v(a)$. v ainsi défini est un prolongement à $\mathcal{M}_r - \{0\}$ de l'isomorphisme $v : \mathcal{G}_r \rightarrow \mathbb{R}^r$. On pose $v(0) = \infty$ avec $\infty > \alpha$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^r$ afin de prolonger v à \mathcal{M}_r . On montre alors que $v : \mathcal{M}_r \rightarrow \mathbb{R}$ est une valuation de laquelle découlent les relations d'équivalence suivantes :

$$a \asymp b \Leftrightarrow v(a) = v(b)$$

$$a \sim b \Leftrightarrow v(a - b) > \min\{v(a), v(b)\}$$

Le terme $A_{v(a)}t^{v(a)}$ de a correspondant à $v(a)$ est dit *terme dominant* de a , noté $\delta(a)$.

On note \mathcal{M}_r^{\succ} (respectivement \mathcal{M}_r^0 , \mathcal{M}_r^{\succ} , \mathcal{M}_r^{\preceq}) le sous-ensemble de \mathcal{M}_r : $\{a \in \mathcal{M}_r \mid v(a) > 0$ (respectivement $= 0$, < 0), $\geq 0\}$.

Nous allons déterminer les conditions pour pouvoir substituer une multisérie dans une série formelle à coefficients dans \mathcal{M}_r . Pour cela nous aurons besoin du résultat fondamental suivant :

Proposition 4.1.5 *Soit une famille $(a_i)_{i \in I} \in \mathcal{M}_r^I$ fortement sommable c'est-à-dire telle que :*

- $\bigcup_{i \in I} \text{Supp } a_i$ est un sous-ensemble bien ordonné de \mathbb{R}^r

- pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^r$, l'ensemble $\{i \in I \mid \alpha \in \text{Supp } a_i\}$ est fini.

Alors $\sum_{i \in I} a_i$ est bien défini et, si on note $a_i = \sum_{\alpha \in \mathbb{R}^r} A_\alpha^{(i)} t^\alpha$ pour tout $i \in I$, on a :

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{\alpha \in \mathbb{R}^r} \left(\sum_{i \in I} A_\alpha^{(i)} \right) t^\alpha$$

Définition 4.1.6 *On dira qu'une série formelle $F(y) = c_0 + c_1 y + c_2 y^2 + \dots \in \mathcal{M}_r[[y]]$ est bien ordonnée si $\text{Supp } F = \bigcup_{i \geq 0} \text{Supp } c_i$ est un sous-ensemble bien ordonné de \mathbb{R}^r .*

On définit $F(y_0) = \sum_{\alpha \in \mathbb{R}^r} A_\alpha t^\alpha$ avec $A_\alpha = \sum C_{m, \gamma^{(m)}} M_{\mu_1} \cdots M_{\mu_l}$ où la somme est prise sur

$m \in \mathbb{N}$ et les doublets $(\gamma^{(m)}, j_1 \mu_1 + \dots + j_l \mu_l) \in \text{Supp } c_m \times \langle \text{Supp } y_0 \rangle$ tels que $j_1 + \dots + j_l = m$ et $\gamma^{(m)} + j_1 \mu_1 + \dots + j_l \mu_l = \alpha$.

Corollaire 4.1.7 *Étant données une série bien ordonnée $F(y) \in \mathcal{M}_r[[y]]$ et une multisérie $y_0 \in \mathcal{M}_r^{\succ}$, alors $F(y_0) \in \mathcal{M}_r$*

Démonstration. Le coefficient A_α dans la définition de $F(y_0)$ est obtenu en développant la série

$$F(y_0) = \sum C_{m, \gamma^{(m)}} t^{\gamma^{(m)}} \left(\sum M_\mu t^\mu \right)^m$$

Montrons que la famille $(c_i y_0^i)_{i \in \mathbb{N}}$ est fortement sommable.

- $\text{Supp } F = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \text{Supp } c_m$ est bien ordonné par hypothèse, et puisque $\text{Supp } y_0 \subseteq \mathbb{R}_{>(0, \dots, 0)}^r$,

$\langle \text{Supp } y_0 \rangle$ l'est aussi. Donc $\text{Supp } F + \langle \text{Supp } y_0 \rangle$ est bien ordonné.

-Soit $\alpha \in \mathbb{R}^r$. A $m \in \mathbb{N}$ fixé, l'ensemble des doublets $(\gamma^{(m)}, j_1\mu_1 + \dots + j_l\mu_l) \in \text{Supp } c_m \times \langle \text{Supp } y_0 \rangle$ tels que $j_1 + \dots + j_l = m$ et $\gamma^{(m)} + j_1\mu_1 + \dots + j_l\mu_l = \alpha$ est clairement fini. On note $\langle y_0 \rangle_\alpha$ cet ensemble (éventuellement vide). Supposons qu'on ait une infinité de $m \in \mathbb{N}$ tel que $\langle y_0 \rangle_\alpha$ soit non vide. On pourrait extraire une suite infinie croissante d'éléments $j_1\mu_1 + \dots + j_l\mu_l \in \langle \text{Supp } y_0 \rangle$, à laquelle correspondrait une suite infinie décroissante d'éléments $\gamma^{(m)} = \alpha - (j_1\mu_1 + \dots + j_l\mu_l)$ de $\text{Supp } F$. C'est absurde puisque $\text{Supp } F$ est bien ordonné. \square

Ce résultat nous autorise à travailler avec des équations à coefficients dans \mathcal{M}_r

Définition 4.1.8 Soit une équation (1) : $F(y) = c_0 + c_1y + c_2y^2 + \dots = 0$ avec $F(y) \in \mathcal{M}_r[[y]]$. Une solution de (1) est une multisérie $y_0 \in \mathcal{M}_r^\times$ telle que $F(y_0) = 0 \in \mathcal{M}_r$.

Remarque 4.1.9 Dans le cas d'équations polynomiales en y , on peut aussi substituer par une multisérie $y_0 \in \mathcal{M}_r^0$ ou même $y_0 \in \mathcal{M}_r^\times$. En effet, il est clair que dans ces cas la famille $(c_i y_0^i)_{i \in I \text{ fini} \subseteq \mathbb{N}}$ est fortement sommable. Ces cas se ramènent en fait au nôtre par le changement de variable $y \leftrightarrow t^\mu y + M$ où Mt^μ est le terme dominant $\delta(y_0)$ de y_0 .

Afin d'illustrer notre propos, nous suivrons tout au long de notre exposé le même exemple suivant :

Exemple 4.1.10

$$\text{On se donne : } \begin{cases} t_1 = \exp\left(\frac{-1}{x}\right) \\ t_2 = x \\ t_3 = \frac{-1}{\log(x)} = -\log^{-1}(x) \end{cases} \quad \text{avec } x \in \mathcal{V}(0^+).$$

Un monôme $t^\alpha = t_1^{\alpha_1} t_2^{\alpha_2} t_3^{\alpha_3} = \exp\left(\frac{-\alpha_1}{x}\right) x^{\alpha_2} (-\log^{-1}(x))^{\alpha_3}$ a pour valuation $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$

dans \mathbb{R}^3 muni de l'ordre lexicographique.

Les éléments de \mathcal{M}_3 s'écrivent :

$$\begin{aligned} a &= \sum_{\alpha \in \mathbb{R}^3} t^\alpha \\ &= \sum_{\alpha_1 \in \mathbb{R}} t_1^{\alpha_1} \sum_{\alpha_2 \in \mathbb{R}} t_2^{\alpha_2} \sum_{\alpha_3 \in \mathbb{R}} M_\alpha t_3^{\alpha_3} \\ &= \sum_{\alpha_1 \in \mathbb{R}} \exp\left(\frac{-\alpha_1}{x}\right) \sum_{\alpha_2 \in \mathbb{R}} x^{\alpha_2} \sum_{\alpha_3 \in \mathbb{R}} M_\alpha (-\log^{-1}(x))^{\alpha_3} \end{aligned}$$

Le principe de notre démonstration du théorème principal (Théorème 5.1.2) consiste comme précédemment à substituer dans l'équation une partie initiale d'une multisérie y_0 (ce qui correspond à un segment initial de $\text{Supp } y_0$) et à déterminer la valuation de l'équation quand on passe à une partie initiale plus longue (c'est-à-dire quand on ajoute au segment initial considéré un segment successeur : cf annexe A pour les définitions de segment initial et successeur).

Notation 4.1.11 soit une équation (1) : $F(y) = c_0 + c_1y + c_2y^2 + \dots = 0$ avec $F(y) \in \mathcal{M}_r[[y]]$. Soit $y_0 = \sum_{\mu \in \mathbb{R}^r} M_\mu t^\mu \in \mathcal{M}_r$. Pour tout segment initial S de $\text{Supp } y_0$, on note :

- $p_S = \sum_{\mu \in S} M_\mu t^\mu$
- $f_S = F(p_S)$
- $v_S = v(f_S)$
- $\begin{cases} F^{(0)}(y) = F(y) \\ F^{(n)}(y) = n!c_n + \frac{(n+1)!}{1!}c_{n+1}y + \frac{(n+2)!}{2!}c_{n+2}y^2 + \dots \end{cases}$
- pour tout sous-ensemble bien ordonné $X \subseteq \mathbb{R}^r$, $\langle X \rangle$ désigne le semi-groupe engendré par les éléments de X . Si $X \subseteq \mathbb{R}_{\geq(0,\dots,0)}^r$ alors $\langle X \rangle$ est bien ordonné.

Nous utiliserons la généralisation suivante de la *formule de Taylor* afin d'exprimer le lien entre v_S et $v_{S \cup \tilde{S}}$ pour \tilde{S} segment successeur de S segment initial de $\text{Supp } y_0$:

Proposition 4.1.12 *Pour tout segment successeur \tilde{S} de S segment initial de $\text{Supp } y_0$, on a :*

$$f_{S \cup \tilde{S}} = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} f_S^{(n)} p_{\tilde{S}}^n$$

$$\text{où : } \begin{cases} f_S^{(0)} = F(p_S) = f_S \\ f_S^{(n)} = F^{(n)}(p_S) \end{cases}$$

Démonstration. Il suffit d'ajouter terme à terme les séries :

$$\begin{aligned} \frac{1}{n!} f_S^{(n)} p_{\tilde{S}}^n &= \frac{1}{n!} F^{(n)}(p_S) p_{\tilde{S}}^n \\ &= \left[c_n + \frac{(n+1)}{1!} c_{n+1} p_S + \frac{(n+2)(n+1)}{2!} c_{n+2} p_S^2 + \dots \right] p_{\tilde{S}}^n \end{aligned}$$

et on retrouve bien $f_{S \cup \tilde{S}} = F(p_S + p_{\tilde{S}})$. □

4.1.2 Dérivation

Afin de traiter le cas des équations différentielles, nous montrons que le choix d'une dérivée pour chacun des t_i s'étend à tout le corps \mathcal{M}_r . Tout d'abord, nous posons :

$$\begin{cases} t'_1 \in \mathcal{M}_r & \text{de terme dominant : } T_1 t^{\tau(1)} \\ \vdots \\ t'_r \in \mathcal{M}_r & \text{de terme dominant : } T_r t^{\tau(r)} \end{cases}$$

et, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^r$, pour tout $A \in \mathbb{R}^*$:

$$(A t^\alpha)' = A t^\alpha \left(\alpha_1 \frac{t'_1}{t_1} + \dots + \alpha_r \frac{t'_r}{t_r} \right)$$

On définit alors la dérivation sur \mathcal{M}_r :

Définition 4.1.13

$$\begin{aligned} d &: \mathcal{M}_r \rightarrow \mathcal{M}_r \\ a &\mapsto a' \end{aligned}$$

avec $a' = \sum_{\alpha \in \mathbb{R}^r} (A_\alpha t^\alpha)' = \sum_{\alpha \in \mathbb{R}^r} A_\alpha t^\alpha \left(\alpha_1 \frac{t'_1}{t_1} + \dots + \alpha_r \frac{t'_r}{t_r} \right)$ et : $\forall A \in \mathbb{R}, A' = 0$.

Il s'agit bien d'une dérivation :

- les propriétés de morphisme d'espace vectoriel sont trivialement vérifiées.
- pour la multiplication, on se donne $a, b \in \mathcal{M}_r$

$$\begin{aligned}
(a \times b)' &= \sum_{\gamma \in \mathbb{R}^r} \left(\sum_{\alpha+\beta=\gamma} A_\alpha B_\beta \right) t^\gamma \left(\gamma_1 \frac{t'_1}{t_1} + \dots + \frac{t'_r}{t_r} \right) \\
&= \sum_{\gamma \in \mathbb{R}^r} \left(\sum_{\alpha+\beta=\gamma} A_\alpha B_\beta \right) t^\alpha t^\beta \left(\beta_1 \frac{t'_1}{t_1} + \dots + \beta_r \frac{t'_r}{t_r} \right) \\
&\quad + \sum_{\gamma \in \mathbb{R}^r} \left(\sum_{\alpha+\beta=\gamma} A_\alpha B_\beta \right) t^\alpha t^\beta \left(\alpha_1 \frac{t'_1}{t_1} + \dots + \alpha_r \frac{t'_r}{t_r} \right) \\
&= a \times b' + a' \times b
\end{aligned}$$

On a donc :

Proposition 4.1.14 \mathcal{M}_r est un corps différentiel

De plus, nous aurons besoin de comparer les valuations des termes dérivés les uns avec les autres. Pour cela, nous ajoutons les hypothèses suivantes :

Hypothèses de compatibilité valuation-dérivation 4.1.15 Pour tous $a, b \in \mathcal{M}_r$ avec $v(a) \neq 0$ et $v(b) \neq 0$, on suppose que :

- (H1) $v(a) > v(b) \Leftrightarrow v(a') > v(b')$
(H2) $v\left(\frac{t'_k}{t_k}\right) < v\left(\frac{t'_{k+1}}{t_{k+1}}\right) \quad \forall k \in \{1, \dots, r-1\}$

Remarque 4.1.16 1) Se donner l'hypothèse (H_1) équivaut dans notre cas à supposer que v est une *valuation différentielle* au sens de M. Rosenlicht dans [Ros80]. En effet, le corollaire 1 de [Ros80] s'applique puisque $\mathcal{M}_r^\times = \mathbb{R} + \mathcal{M}_r^\times$ où \mathcal{M}_r^\times est l'anneau de valuation de v , \mathcal{M}_r^\times son idéal maximal et \mathbb{R} le sous-corps des constantes.

2) L'hypothèse (H_2) évite la difficulté que soulève M. Rosenlicht dans l'exemple 13 de [Ros80] : un corps différentiel muni d'une valuation différentielle ne vérifie pas en général le fait que $a \prec b \Rightarrow \frac{a'}{a} \succ \frac{b'}{b}$. Dans [Ros81], notre cas correspond à ce que M. Rosenlicht définit comme une *valuation de type Hardy*. Nous verrons dans les deux propositions suivantes en quoi cette hypothèse est fondamentale.

3) Un *pre-H-field* (cf [AvdD05a]) est un corps différentiel ordonné muni d'une relation de domination \preceq tel que :

- (PH1) si $f \preceq 1$ et $0 \neq g \prec 1$ alors $f' \prec \frac{g'}{g}$
(PH2) si $f \succ 1$ alors $\frac{f'}{f} > 0$

On a alors pour tous éléments f et g d'un tel corps :

- si $f, g \neq 0$ et $v(f), v(g) \neq 0$, alors $f \preceq g \Leftrightarrow f' \preceq g'$
- si $0 < v(f) \leq v(g)$ alors $v\left(\frac{f'}{f}\right) \geq v\left(\frac{g'}{g}\right)$

et donc en particulier on a nos hypothèses 4.1.15.

Nous déduisons des Hypothèses 4.1.15 les propriétés fondamentales suivantes concernant les valuations $\tau^{(k)} = (\tau_1^{(k)}, \dots, \tau_r^{(k)})$ des dérivées t'_k des générateurs.

Proposition 4.1.17

$$\begin{cases} \tau_i^{(k+1)} &= \tau_i^{(k)}, \forall i = 1..k-1 \\ \tau_k^{(k+1)} &= \tau_k^{(k)} - 1 \\ \tau_{k+1}^{(k+1)} - 1 &\geq \tau_{k+1}^{(k)} \end{cases}$$

Démonstration. Soit $k \in \{1, \dots, r-1\}$. D'après les Hypothèses 4.1.15, on a $v(t'_k) > v(t'_{k+1})$ (puisque $v(t_k) > v(t_{k+1})$) et $v\left(\frac{t'_k}{t_k}\right) < v\left(\frac{t'_{k+1}}{t_{k+1}}\right)$. Donc :

$$\begin{cases} \left(\tau_1^{(k+1)} - \tau_1^{(k)}, \dots, \tau_k^{(k+1)} - \tau_k^{(k)}, \tau_{k+1}^{(k+1)} - \tau_{k+1}^{(k)}, \dots, \tau_r^{(k+1)} - \tau_r^{(k)} \right) < (0, \dots, 0) \\ \left(\tau_1^{(k+1)} - \tau_1^{(k)}, \dots, \tau_k^{(k+1)} - \tau_k^{(k)} + 1, \tau_{k+1}^{(k+1)} - 1 - \tau_{k+1}^{(k)}, \dots, \tau_r^{(k+1)} - \tau_r^{(k)} \right) > (0, \dots, 0) \end{cases}$$

et donc :

$$\begin{cases} \tau_1^{(k+1)} &= \tau_1^{(k)} \\ &\vdots \\ \tau_{k-1}^{(k+1)} &= \tau_{k-1}^{(k)} \\ \tau_k^{(k)} &\geq \tau_k^{(k+1)} \geq \tau_k^{(k)} - 1 \end{cases}$$

En particulier, on a

$$\tau_k^{(k+1)} \geq \tau_k^{(k)} - 1 \quad (4.1.1)$$

. Or, pour tous $\alpha_k, \beta_{k+1} \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$\begin{cases} (t_k^{\alpha_k})' &= \alpha_k t_k^{\alpha_k} \frac{t'_k}{t_k} \\ (t_{k+1}^{\beta_{k+1}})' &= \beta_{k+1} t_{k+1}^{\beta_{k+1}} \frac{t'_{k+1}}{t_{k+1}} \end{cases}$$

et puisque pour tout $\alpha_k > 0$, $v(t_k^{\alpha_k}) > v(t_{k+1}^{\beta_{k+1}})$, alors on a aussi :

$$v((t_k^{\alpha_k})') > v\left(\left(t_{k+1}^{\beta_{k+1}}\right)'\right)$$

Donc pour tout $\alpha_k > 0$ et tout $\beta_{k+1} \in \mathbb{R}^*$:

$$\begin{aligned} (0, \dots, \alpha_k, -\beta_{k+1}, \dots, 0) &> \left(\tau_1^{(k+1)} - \tau_1^{(k)}, \dots, \tau_k^{(k+1)} - \tau_k^{(k)} + 1, \tau_{k+1}^{(k+1)} - 1 - \tau_{k+1}^{(k)}, \dots, \tau_r^{(k+1)} - \tau_r^{(k)} \right) \\ &= (0, \dots, 0, \tau_k^{(k+1)} - \tau_k^{(k)} + 1, \tau_{k+1}^{(k+1)} - 1 - \tau_{k+1}^{(k)}, \dots, \tau_r^{(k+1)} - \tau_r^{(k)}) \end{aligned}$$

et donc $\tau_k^{(k+1)} - \tau_k^{(k)} + 1 \leq 0$, c'est-à-dire $\tau_k^{(k+1)} \leq \tau_k^{(k)} - 1$. D'après la relation 4.1.1 précédente, on en déduit que $\tau_k^{(k+1)} = \tau_k^{(k)} - 1$.

Puisque $v\left(\frac{t'_{k+1}}{t_{k+1}}\right) - v\left(\frac{t'_k}{t_k}\right) = (0, \dots, 0, \tau_{k+1}^{(k+1)} - 1 - \tau_{k+1}^{(k)}, \dots, \tau_r^{(k+1)} - \tau_r^{(k)}) > (0, \dots, 0)$, on en déduit que $\tau_{k+1}^{(k+1)} - 1 - \tau_{k+1}^{(k)} \geq 0$. On obtient bien $\tau_{k+1}^{(k+1)} - 1 \geq \tau_{k+1}^{(k)}$. \square

Exemple 4.1.18

Soit d la dérivation usuelle par rapport à x . On a :

$$\begin{cases} t'_1 = \exp\left(\frac{-1}{x}\right)x^2 & \text{de valuation } (1, -2, 0) \\ t'_2 = 1 & \text{de valuation } (0, 0, 0) \\ t'_3 = \frac{1}{x \log^2(x)} & \text{de valuation } (0, -1, 2) \end{cases}$$

et donc :

$$\begin{cases} \frac{t'_1}{t_1} = \frac{1}{x^2} & \text{de valuation } (0, -2, 0) \\ \frac{t'_2}{t_2} = \frac{1}{x} & \text{de valuation } (0, -1, 0) \\ \frac{t'_3}{t_3} = \frac{-1}{x \log(x)} & \text{de valuation } (0, -1, 1) \end{cases}$$

On a bien l'hypothèse (H_2) de 4.1.15. Pour montrer qu'on a l'hypothèse (H_1) , il suffit de vérifier la propriété pour les monômes (en effet, la comparaison de deux multiséries et de leurs dérivées revient alors à comparer leurs termes dominants qui sont des monômes).

Soient $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) < (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$. Cela équivaut à $(\alpha_1 < \beta_1)$ ou bien $(\alpha_1 = \beta_1 \text{ et } \alpha_2 < \beta_2)$ ou bien $(\alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2 \text{ et } \alpha_3 < \beta_3)$. On a :

$$v\left(\left(\exp\left(\frac{-\alpha_1}{x}\right)x^{\alpha_2}(-\log^{-1}(x))^{\alpha_3}\right)'\right) = \begin{cases} (\alpha_1, \alpha_2 - 2, \alpha_3) & \text{si } \alpha_1 \neq 0 \\ (0, \alpha_2 - 1, \alpha_3) & \text{si } \alpha_1 = 0 \text{ et } \alpha_2 \neq 0 \\ (0, -1, \alpha_3 + 1) & \text{si } \alpha_1 = \alpha_2 = 0 \text{ et } \alpha_3 \neq 0 \\ (0, 0, 0) & \text{si } \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{et } v\left(\left(\exp\left(\frac{-\beta_1}{x}\right)x^{\beta_2}(-\log^{-1}(x))^{\beta_3}\right)'\right) = \begin{cases} (\beta_1, \beta_2 - 2, \beta_3) & \text{si } \beta_1 \neq 0 \\ (0, \beta_2 - 1, \beta_3) & \text{si } \beta_1 = 0 \text{ et } \beta_2 \neq 0 \\ (0, -1, \beta_3 + 1) & \text{si } \beta_1 = \beta_2 = 0 \text{ et } \beta_3 \neq 0 \\ (0, 0, 0) & \text{si } \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0 \end{cases}$$

Il suffit pour conclure de comparer les valuations dans chaque cas selon l'ordre lexicographique. On obtient bien dans tous les cas :

$$v\left(\left(\exp\left(\frac{-\alpha_1}{x}\right)x^{\alpha_2}(-\log^{-1}(x))^{\alpha_3}\right)'\right) < v\left(\left(\exp\left(\frac{-\beta_1}{x}\right)x^{\beta_2}(-\log^{-1}(x))^{\beta_3}\right)'\right).$$

Remarque 4.1.19 Pour pouvoir évaluer une équation non différentielle $F(y) = 0$ avec $F \in \mathcal{M}_r[[y]]$ en une multisérie $y_0 \in \mathcal{M}_r$, il suffit que celle-ci ait une valuation positive (cf corollaire 4.1.7). Cette condition n'est pas suffisante en général dans le cas différentiel : une multisérie y_0 peut avoir une valuation positive mais des dérivées de valuation négative. Dans le chapitre 2, à l'instar de F. Cano, R. Moussu et J.-P. Rolin dans [CMR05], nous avons considéré des équation différentielles sous la forme $F(x, y, xy', \dots, x^n y^{(n)}) = 0$ (cf Remarque 2.1.3).

Dans le cas des multiséries, on ne peut espérer obtenir une "bonne" dérivation D sur tout \mathcal{M}_r^\prec , c'est-à-dire vérifiant pour tout élément $y_0 \in \mathcal{M}_r^\prec$, $v(y_0) = v(D(y_0)) = \dots = v(D^n(y_0))$. En effet, toute multisérie $y_0 \in \mathcal{M}_r^\prec$ se décompose en $y_0 = y_{0,1} + \dots + y_{0,r}$ avec $\text{Supp } y_{0,k} \subseteq \{0\}^{k-1} \times \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^{r-k}$, et chacune des parties $y_{0,k}$ a une dérivée $y'_{0,k}$ de valuation $v(y_{0,k}) + v\left(\frac{t'_k}{t_k}\right)$ qui dépend donc de $k \in \{1, \dots, r\}$. C'est pourquoi nous définissons r nouvelles dérivations D_1, \dots, D_r telles que, pour tout $k \in \{1, \dots, r\}$:

$$D_k(t_k^{\alpha_k} \dots t_r^{\alpha_r}) \asymp t_k^{\alpha_k} \dots t_r^{\alpha_r} \quad \forall \alpha_i \in \mathbb{R}, \alpha_k \neq 0$$

Exemple 4.1.20 Tout élément y_0 de \mathcal{M}_3^\prec s'écrit :

$$\begin{aligned}
y_0 &= \sum_{\mu_3 > 0} M_{\mu_3} t_3^{\mu_3} + \sum_{\mu_2 > 0} t_2^{\mu_2} \sum_{\mu_{\mu_2,3} \in \mathbb{R}} M_{(\mu_2, \mu_{\mu_2,3})} t_3^{\mu_{\mu_2,3}} \\
&\quad + \sum_{\mu_1 > 0} t_1^{\mu_1} \sum_{\mu_2 \in \mathbb{R}} t_2^{\mu_{\mu_1,2}} \sum_{\mu_{\mu_1, \mu_2,3} \in \mathbb{R}} M_{(\mu_1, \mu_{\mu_1,2}, \mu_{\mu_1, \mu_2,3})} t_3^{\mu_{\mu_1, \mu_2,3}} \\
&= \sum_{\mu_3 > 0} M_{\mu_3} \left(\frac{-1}{\log(x)} \right)^{\mu_3} + \sum_{\mu_2 > 0} x^{\mu_2} \sum_{\mu_{\mu_2,3} \in \mathbb{R}} M_{(\mu_2, \mu_{\mu_2,3})} \left(\frac{-1}{\log(x)} \right)^{\mu_{\mu_2,3}} \\
&\quad + \sum_{\mu_1 > 0} \exp\left(\frac{-\mu_1}{x}\right) \sum_{\mu_2 \in \mathbb{R}} x^{\mu_{\mu_1,2}} \sum_{\mu_{\mu_1, \mu_2,3} \in \mathbb{R}} M_{(\mu_1, \mu_{\mu_1,2}, \mu_{\mu_1, \mu_2,3})} \left(\frac{-1}{\log(x)} \right)^{\mu_{\mu_1, \mu_2,3}}
\end{aligned}$$

Par exemple, la partie $y_{0,3}$ a pour dérivée :

$$\begin{aligned}
y'_{0,3} &= \left(\sum_{\mu_3 > 0} M_{\mu_3} \left(\frac{-1}{\log(x)} \right)^{\mu_3} \right)' \\
&= \sum_{\mu_3 > 0} M_{\mu_3} \left(\frac{1}{x} \right) \left(\frac{-1}{\log(x)} \right)^{\mu_3+1}
\end{aligned}$$

dont tous les termes ont une valuation de la forme $(0, -1, \mu_3 + 1) < (0, 0, 0)$.

La partie $y_{0,2}$ a pour dérivée :

$$\begin{aligned}
y'_{0,2} &= \left(\sum_{\mu_2 > 0} x^{\mu_2} \sum_{\mu_{\mu_2,3} \in \mathbb{R}} M_{(\mu_2, \mu_{\mu_2,3})} \left(\frac{-1}{\log(x)} \right)^{\mu_{\mu_2,3}} \right)' \\
&= \sum_{\mu_2 > 0} \mu_2 x^{\mu_2-1} \sum_{\mu_{\mu_2,3} \in \mathbb{R}} M_{(\mu_2, \mu_{\mu_2,3})} \left(\frac{-1}{\log(x)} \right)^{\mu_{\mu_2,3}} \\
&\quad + \sum_{\mu_2 > 0} x^{\mu_2-1} \sum_{\mu_{\mu_2,3} \in \mathbb{R}} M_{(\mu_2, \mu_{\mu_2,3})} \mu_{\mu_2,3} \left(\frac{-1}{\log(x)} \right)^{\mu_{\mu_2,3}+1}
\end{aligned}$$

et a donc pour valuation $(0, \mu_2^{(0)} - 1, \mu_{\mu_2^{(0)},3}^{(0)})$ où $(0, \mu_2^{(0)}, \mu_{\mu_2^{(0)},3}^{(0)}) = \min(\text{Supp } y_{0,2})$. Cette valuation est positive si et seulement si $v(y_{0,2}) > (0, 1, 0)$.

De même, on montre que $y'_{0,3}$ a pour valuation $(\mu_1^{(0)}, \mu_{\mu_1^{(0)},2}^{(0)} - 2, \mu_{\mu_1^{(0)}, \mu_{\mu_1,2},3}^{(0)}) > (0, 0, 0)$.

Notation 4.1.21

- pour toute dérivation D , on note: $D^i = D \circ D \circ \dots \circ D$ pour tout $i \geq 1$
- pour tout $k = 1..r$, $d_k = \delta \left(\frac{t'_k}{t_k} \right)$. On note aussi $d_0 = 1$ pour la dérivation initiale.
- $\forall k \in \{1, \dots, r\}$, $\mathcal{M}_{r,k} = \{y_0 \in \mathcal{M}_r \mid \text{Supp } y_0 \subseteq \{0\}^{k-1} \times \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^{r-k} \cup \{(0, \dots, 0)\}\}$. On note aussi $\mathcal{M}_{r,k}^<$, $\mathcal{M}_{r,k}^{\leq}$, $\mathcal{M}_{r,k}^0$ et $\mathcal{M}_{r,k}^>$ à l'instar de \mathcal{M}_r . On a pour tout $y_0 \in \mathcal{M}_r^<$, $y_0 = y_{0,1} + \dots + y_{0,r}$ avec $y_{0,k} \in \mathcal{M}_{r,k}^<$ pour tout $k \in \{1, \dots, r\}$.

Définition 4.1.22 Pour tout $k \in \{1, \dots, r\}$, on définit l'opérateur différentiel D_k par :

$$\begin{aligned}
D_k &: \mathcal{M}_r \rightarrow \mathcal{M}_r \\
a &\mapsto \frac{a'}{d_k}
\end{aligned}$$

Proposition 4.1.23 Pour tout $k \in \{1, \dots, r\}$, D_k est une dérivation sur \mathcal{M}_r telle que, pour tout $y_{0,k} \in \mathcal{M}_{r,k}$ et tout $i \in \mathbb{N}$, on a $D_k^i(y_{0,k}) \sim \mu_k^i y_{0,k}$ où $v(y_{0,k}) = \mu = (0, \dots, 0, \mu_k, \dots, \mu_r)$ avec $\mu_k \neq 0$.

Démonstration.

- Les D_k vérifient clairement les axiomes de dérivation.
- Procédons par récurrence sur i .

$i=1$: on note $\delta y_{0,k} = M_\mu t^\mu$ et on a $y'_{0,k} \sim M_\mu t^\mu \left(\mu_k \frac{t'_k}{t_k} + \dots + \mu_r \frac{t'_r}{t_r} \right)$. D'après l'hypothèse (H_2)

de 4.1.15, $v \left(\frac{t'_k}{t_k} \right) < \dots < v \left(\frac{t'_r}{t_r} \right)$ et donc $y'_{0,k} \sim M_\mu t^\mu \mu_k \frac{t'_k}{t_k} \sim M_\mu t^\mu \mu_k d_k$.

Récurrence: soit $i \in \mathbb{N}$, on suppose que $D_k^i(y_{0,k}) \sim \mu_k^i y_{0,k}$. Or, $D_k^{i+1}(y_{0,k}) = D_k(D_k^i(y_{0,k}))$ et on a le résultat d'après le cas $i = 1$ ci-dessus. \square

Exemple 4.1.24

$$\text{On définit } \begin{cases} D_1 y = x^2 y' & d_1 = \frac{1}{x^2} \\ D_2 y = x y' & d_2 = \frac{1}{x} \\ D_3 y = -x \log(x) y' & d_3 = \frac{-1}{x \log(x)} \end{cases}$$

4.2 Equations différentielles à coefficients dans \mathcal{M}_r

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Nous souhaitons travailler avec des équations différentielles d'ordre n à coefficients dans \mathcal{M}_r . Pour cela, il nous faut définir comme dans la section précédente une notion d'équation bien ordonnée. Tout d'abord, nous précisons le système de notations.

Notation 4.2.1

- pour tout multi-indice $I = (i_0, \dots, i_n) \in \mathbb{N}^{n+1}$, $\|I\| = i_1 + 2i_2 + \dots + ni_n$
- $\forall a \in \mathcal{M}_r$, $\begin{cases} a^{(I)_0} = a^{i_0} (a')^{i_1} \dots (a^{(n)})^{i_n} \\ a^{(I)_k} = a^{i_0} (D_k a)^{i_1} \dots (D_k^n a)^{i_n}, \forall k \in \{1, \dots, n\} \end{cases}$

(on notera $a^{(I)}$ et D quand il n'y a pas d'ambiguïté sur la dérivation qui intervient)

Définition 4.2.2 On dira qu'une série $F(y, \dots, D^n y) = \sum_{I \in \mathbb{N}^{n+1}} c_I y^{(I)} \in \mathcal{M}_r[[y, \dots, D^n y]]$ (avec

D une des $r+1$ dérivations précédentes) est bien ordonnée si $\text{Supp } F = \bigcup_{I \in \mathbb{N}^{n+1}} \text{Supp } c_I$ est un sous-ensemble bien ordonné de \mathbb{R}^r .

Proposition 4.2.3 Etant données une série bien ordonnée F et une multisérie $a \in \mathcal{M}_r^\prec$ avec $v(D^i a) > (0, \dots, 0)$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, alors $F(a, \dots, D^n a) \in \mathcal{M}_r$.

Démonstration. on procède par récurrence sur l'ordre de dérivation n .

Le cas initial est donné par le Corollaire 4.1.7

Nous supposons que, pour toute équation bien ordonnée $G(y, \dots, D^{n-1}y) = 0$, on peut substituer $a \in \mathcal{M}_r^\prec$ avec $v(D^i a) > (0, \dots, 0)$ pour tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$. Donc, étant donné $F(y, \dots, D^n y) = 0$ bien ordonnée, pour tout $i \in \mathbb{N}$, on a $\frac{\partial^i F}{\partial Y_n^i}(a, \dots, D^{n-1}a, 0) \in \mathcal{M}_r$. Or,

$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \text{Supp } \frac{\partial^i F}{\partial Y_n^i}(a, \dots, D^{n-1}a, 0) \subseteq \text{Supp } F + \langle \text{Supp } a \rangle + \dots + \langle \text{Supp } D^{n-1}a \rangle$ est donc bien ordonné.

D'après la formule de Taylor et le Corollaire 4.1.7, puisque $v(D^n a) > (0, \dots, 0)$, on a :

$$F(a, \dots, D^n a) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{1}{i!} \frac{\partial^i F}{\partial Y_n^i}(a, \dots, D^{n-1} a, 0) (D^n a)^i \in \mathcal{M}_r. \quad \square$$

Déterminons pour chacune des dérivations les conditions pour lesquelles on a $v(D^i a) > (0, \dots, 0)$ pour $i \in \{0, \dots, n\}$.

Proposition 4.2.4

i) Soit $a \in \mathcal{M}_r$. Alors :

$$v(a) > \max\{(0, \dots, 0), -nv(d_1)\} \Rightarrow v(a^{(i)}) > (0, \dots, 0) \quad \forall i \in \{0, \dots, n\}$$

ii) On note $v(a) = \alpha = (0, \dots, \alpha_k, \dots, \alpha_r)$ pour un certain $k \in \{1, \dots, r\}$ avec $\alpha_k \neq 0$ et on a pour tout $l \in \{1, \dots, r\}$:

- si $l \geq k$: $\forall i \in \{0, \dots, n\}, v(D_l^i(a)) > (0, \dots, 0) \Leftrightarrow \alpha > (0, \dots, 0) \Leftrightarrow \alpha_k > 0$
- si $l < k$: $\alpha_k > 0 \Rightarrow \forall i \in \{0, \dots, n\}, v(D_l^i(a)) > (0, \dots, 0)$

Démonstration.

i) On pose $v(a) = (0, \dots, 0, \alpha_k, \dots, \alpha_r) > \max\{(0, \dots, 0), -nv(d_1)\}$ où k le plus petit entier tel que $\alpha_k \neq 0$, et $a = At_k^{\alpha_k} \dots t_r^{\alpha_r} + b$ avec $v(b) > v(a)$. On démontre par récurrence sur i que $v(a^{(i)}) \geq v(a) + iv(d_1) > (0, \dots, 0)$ pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$

Si $i = 1$, d'après les Hypothèses 4.1.15, $a' = At_k^{\alpha_k} \dots t_r^{\alpha_r} \left(\alpha_k \frac{t'_k}{t_k} + \dots + \alpha_r \frac{t'_r}{t_r} \right) + b' = At_k^{\alpha_k} \dots t_r^{\alpha_r} \alpha_k d_k + \tilde{b}$ avec $v(\tilde{b}) > v(a) + v(d_k)$. D'après l'hypothèse (H_2) de 4.1.15, on a $v(d_1) < \dots < v(d_r)$, et donc $v(a') = v(a) + v(d_k) > v(a) + v(d_1) > (0, \dots, 0)$.

Si $n > i \geq 1$, on suppose que $v(a^{(i)}) \geq v(a) + iv(d_1) > (0, \dots, 0)$. Alors $v(a^{(i+1)}) \geq v(a^{(i)}) + v(d_1)$ pour les mêmes raisons que précédemment, et donc $v(a^{(i+1)}) \geq v(a) + (i+1)v(d_1) > (0, \dots, 0)$.

ii) On a le cas $l = k$ d'après la Proposition 4.1.23. Pour le cas où $l < k$, montrons que :

Lemme 4.2.5

$$\forall l < k, \forall i \in \{1, \dots, n\}, v(D_l^i a) = (0, \dots, \beta_{l_i}, \dots, \beta_r)$$

avec $l_i > l$ et $\beta_{l_i} > 0$.

Démonstration. on remarque d'après la Proposition 4.1.17 que

$v\left(\frac{d_k}{d_l}\right) = (0, \dots, 0, \tau_{l+1}^{(k)} - \tau_{l+1}^{(l)}, \dots, \tau_k^{(k)} - 1 - \tau_k^{(l)}, \dots, \tau_r^{(k)} - \tau_r^{(l)}) > (0, \dots, 0)$ et on raisonne par récurrence sur i .

$i=1$: $a' \sim \alpha_k a \frac{t'_k}{t_k} \sim \alpha_k a \times d_k$. Donc $D_l a \sim \alpha_k a \frac{d_k}{d_l}$. On a bien $v(D_l a) = v(a) + v\left(\frac{d_k}{d_l}\right) > v(a) > (0, \dots, 0)$ avec la propriété voulue.

Récurrence : supposons la propriété vraie jusqu'à un rang i . On a $v(D_l^i a) = (0, \dots, \beta_{l_i}, \dots, \beta_r)$ avec $l_i > l$ et $\beta_{l_i} > 0$. Or $D_l^{i+1} a = D_l(D_l^i a) = D_{l_i}(D_l^i a) \times \frac{d_{l_i}}{d_l}$. Donc $v(D_l^{i+1} a) = v(D_l^i a) +$

$v\left(\frac{d_{l_i}}{d_l}\right) > v(D_l^i a) > (0, \dots, 0)$ avec la propriété voulue puisque

$$v\left(\frac{d_{l_i}}{d_l}\right) = (0, \dots, 0, \tau_{l+1}^{(l_i)} - \tau_{l+1}^{(l)}, \dots, \tau_{l_i}^{(l_i)} - 1 - \tau_{l_i}^{(l)}, \dots, \tau_r^{(l_i)} - \tau_r^{(l)}) > (0, \dots, 0) \quad (l_i > l). \quad \square$$

Pour le cas $l > k$, on montre que :

Lemme 4.2.6

$$\forall l > k, \forall i \in \{1, \dots, n\}, D_l^i a \sim \alpha_k^i a \left(\frac{d_k}{d_l} \right)^i$$

Démonstration. on remarque d'après la Proposition 4.1.17 que

$$v \left(\frac{d_k}{d_l} \right) = \left(0, \dots, 0, \tau_{k+1}^{(k)} - \tau_{k+1}^{(l)}, \dots, \tau_l^{(k)} - \tau_l^{(l)} + 1, \dots, \tau_r^{(k)} - \tau_r^{(l)} \right) < (0, \dots, 0) \text{ et on raisonne par récurrence sur } i.$$

$$\underline{i=1} : a' \sim \alpha_k a \frac{t'_k}{t_k} \sim \alpha_k a \times d_k. \text{ Donc } D_l a \sim \alpha_k a \frac{d_k}{d_l}.$$

Récurrence : on suppose que $D_l^i a \sim \alpha_k^i a \left(\frac{d_k}{d_l} \right)^i$. On a :

$$v(D_l^i a) = \left(0, \dots, 0, \alpha_k, \alpha_{k+1} + i \left(\tau_{k+1}^{(k)} - \tau_{k+1}^{(l)} \right), \dots \right).$$

$$\text{Donc } D_l^{i+1} a = D_l(D_l^i a) \sim D_l \left(\alpha_k^i a \left(\frac{d_k}{d_l} \right)^i \right) \sim \alpha_k^{i+1} a \left(\frac{d_k}{d_l} \right)^{i+1}. \quad \square$$

Dans ce cas $v(D_l^i a)$ est donc du signe de a . Cela clôt la preuve de la Proposition 4.2.4 \square

On en déduit les conditions qu'une multisérie y_0 doit vérifier pour pouvoir être substituée dans une équation différentielle.

Corollaire 4.2.7 Soient $F(Y_0, \dots, Y_n) \in \mathcal{M}_r[[Y_0, \dots, Y_n]]$ bien ordonnée et $y_0 \in \mathcal{M}_r^\times$.

1. Pour pouvoir substituer y_0 dans la série $F(y, \dots, y^{(n)})$, il suffit d'avoir

$$v(y_0) > \max\{(0, \dots, 0), -nv \left(\frac{t'_1}{t_1} \right)\}$$

2. On peut toujours substituer y_0 dans une série $F(y, \dots, D_l^n y)$ pour $l \in \{1, \dots, r\}$.

Remarque 4.2.8 La condition que nous obtenons au point 1) est l'analogie dans [Can93] de la condition $v(y_0) > n$ que se donne J. Cano pour le cas d'une série généralisée y_0 élément de $\mathbb{R}((x^{\mathbb{Q}}))$. A la différence près que, dans notre cas, il ne s'agit que d'une condition suffisante. En effet, une multisérie de la forme $y_0 = \sum_{\mu > 0} M_\mu t_3^\mu$ a des dérivées de valuation positive si $v(y_0) > \max\{(0, \dots, 0), -v(d_3) - (n-1)v(d_1)\}$. Pour illustrer notre propos, nous renvoyons à l'Exemple 4.1.20.

Pour obtenir une condition nécessaire et suffisante, il faudrait considérer les différents cas suivant la forme d'une partie initiale de y_0 . Etant donné que notre objet est d'obtenir un résultat qualitatif sur la nature des exposants et non de les calculer explicitement, nous nous en tenons à la condition 1).

Nous aurons besoin de suivre l'évolution du support de l'équation au fûr et à mesure qu'on y substituera des parties principales d'une multisérie y_0 . En pratique, dans la preuve du théorème principal 5.1.2, nous substituerons des multiséries $y_{0,k} \in \mathcal{M}_{r,k}^<$ dans des équations $F(y, \dots, D_k^n y) = 0$ pour $k \in \{1, \dots, r\}$.

Notation 4.2.9 on note pour tout $k \in \{1, \dots, r\}$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_k &= \left\langle \text{Supp } \frac{D_k t_k}{t_k} \right\rangle + \dots + \left\langle \text{Supp } \frac{D_k^n t_k}{t_k} \right\rangle \\ &\quad + \dots \\ &\quad + \left\langle \text{Supp } \frac{D_k t_r}{t_r} \right\rangle + \dots + \left\langle \text{Supp } \frac{D_k^n t_r}{t_r} \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{l=k}^r \left\langle \text{Supp } \frac{D_k^i t_l}{t_l} \right\rangle \end{aligned}$$

Lemme 4.2.10 pour tout $k \in \{1, \dots, r\}$, \mathcal{T}_k est bien ordonné et inclus dans $\mathbb{R}_{\geq (0, \dots, 0)}^r$

Démonstration. il suffit de montrer que, pour tous $k < l \in \{1, \dots, r\}$ et tout $i \in \{0, \dots, n\}$, on a

$$v \left(\frac{D_k^i t_l}{t_l} \right) > (0, \dots, 0).$$

En effet, $\frac{D_k t_l}{t_l} \sim \frac{d_l}{d_k}$ qui est de valuation positive d'après (H_2) .

De plus, si $v \left(\frac{D_k^j t_l}{t_l} \right) > (0, \dots, 0)$, alors $v(D_k^j t_l) > v(t_l)$. Donc $v(D_k^{j+1} t_l) > v(D_k^j t_l)$ et

$$\text{donc } v \left(\frac{D_k^{j+1} t_l}{t_l} \right) > v \left(\frac{D_k^j t_l}{t_l} \right) > (0, \dots, 0) \quad \square$$

Proposition 4.2.11 Soit $k \in \{1, \dots, r\}$ et une multisérie $y_{0,k} \in \mathcal{M}_{r,k}$

$$\text{Supp } F(y_{0,k}, \dots, D_k^n y_{0,k}) \subseteq \text{Supp } F + \mathcal{T}_k + \langle \text{Supp } y_{0,k} \rangle$$

Montrons d'abord le résultat intermédiaire suivant :

Lemme 4.2.12 Soient $k \in \{1, \dots, r\}$, $l \in \{0, \dots, r\}$, et $j \in \{1, \dots, n\}$. Soit $y_{0,k} \in \mathcal{M}_{r,k}^<$.

Alors $\text{Supp } D_l^i y_{0,k} \subseteq \text{Supp } y_{0,k} +$

$$\bigcup_{j_1^{(k)} + \dots + j_i^{(k)} + \dots + j_1^{(r)} + \dots + j_i^{(r)} = i} \text{Supp} \left(\frac{D_l t_k}{t_k} \right)^{j_1^{(k)}} \dots \left(\frac{D_l t_k}{t_k} \right)^{j_i^{(k)}} \dots \left(\frac{D_l t_r}{t_r} \right)^{j_1^{(r)}} \dots \left(\frac{D_l t_r}{t_r} \right)^{j_i^{(r)}}$$

Démonstration.

$$\underline{i = 1} : \text{ on écrit } y_{0,k} = \sum_{\mu \in \text{Supp } y_{0,k}} M_\mu t^\mu. \text{ Donc } D_l y_{0,k} = \sum_{\mu \in \text{Supp } y_{0,k}} M_\mu t^\mu \left(\mu_k \frac{D_l t_k}{t_k} + \dots + \mu_r \frac{D_l t_r}{t_r} \right).$$

$$\text{On a bien } \text{Supp } D_l y_{0,k} \subseteq \text{Supp } y_{0,k} + \left(\text{Supp } \frac{D_l t_k}{t_k} \bigcup \dots \bigcup \text{Supp } \frac{D_l t_r}{t_r} \right).$$

Récurrence : on suppose la propriété vraie jusqu'à un rang i , c'est-à-dire :

$$\text{Supp } D_l^i y_{0,k} \subseteq \text{Supp } y_{0,k} +$$

$$\bigcup_{j_1^{(k)} + \dots + j_i^{(k)} + \dots + j_1^{(r)} + \dots + j_i^{(r)} = i} \text{Supp} \left(\frac{D_l t_k}{t_k} \right)^{j_1^{(k)}} \dots \left(\frac{D_l t_k}{t_k} \right)^{j_i^{(k)}} \dots \left(\frac{D_l t_r}{t_r} \right)^{j_1^{(r)}} \dots \left(\frac{D_l t_r}{t_r} \right)^{j_i^{(r)}}.$$

Donc $\text{Supp } D_l^{i+1} y_{0,k} \subseteq$

$$\begin{aligned}
& \bigcup_{j_1^{(k)} + \dots + i j_i^{(k)} + \dots + j_1^{(r)} + \dots + i j_i^{(r)} = i} \text{Supp } D_l \left(y_{0,k} \left(\frac{D_l t_k}{t_k} \right)^{j_1^{(k)}} \dots \left(\frac{D_l^i t_k}{t_k} \right)^{j_i^{(k)}} \dots \left(\frac{D_l t_r}{t_r} \right)^{j_1^{(r)}} \dots \left(\frac{D_l^i t_r}{t_r} \right)^{j_i^{(r)}} \right) \\
& D_l \left(y_{0,k} \left(\frac{D_l t_k}{t_k} \right)^{j_1^{(k)}} \dots \left(\frac{D_l^i t_k}{t_k} \right)^{j_i^{(k)}} \dots \left(\frac{D_l t_r}{t_r} \right)^{j_1^{(r)}} \dots \left(\frac{D_l^i t_r}{t_r} \right)^{j_i^{(r)}} \right) \\
& = D_l (y_{0,k}) \left(\frac{D_l t_k}{t_k} \right)^{j_1^{(k)}} \dots \left(\frac{D_l^i t_k}{t_k} \right)^{j_i^{(k)}} \dots \left(\frac{D_l t_r}{t_r} \right)^{j_1^{(r)}} \dots \left(\frac{D_l^i t_r}{t_r} \right)^{j_i^{(r)}} \\
& \quad + y_{0,k} D_l \left(\left(\frac{D_l t_k}{t_k} \right)^{j_1^{(k)}} \dots \left(\frac{D_l^i t_k}{t_k} \right)^{j_i^{(k)}} \dots \left(\frac{D_l t_r}{t_r} \right)^{j_1^{(r)}} \dots \left(\frac{D_l^i t_r}{t_r} \right)^{j_i^{(r)}} \right) \\
& = \sum_{\mu \in \text{Supp } y_{0,k}} M_\mu t^\mu \sum_{m=k}^r \mu_m \left(\frac{D_l t_k}{t_k} \right)^{j_1^{(k)}} \dots \left(\frac{D_l t_m}{t_m} \right)^{j_1^{(m)}+1} \dots \left(\frac{D_l^i t_r}{t_r} \right)^{j_i^{(r)}} \\
& \quad + y_{0,k} \sum_{m=k}^r \sum_{h=1}^i \left(\frac{D_l t_k}{t_k} \right)^{j_1^{(k)}} \dots \left(\frac{D_l^h t_m}{t_m} \right)^{j_h^{(m)}-1} \left(\frac{D_l^{h+1} t_m}{t_m} \right)^{j_{h+1}^{(m)}+1} \dots \left(\frac{D_l^i t_r}{t_r} \right)^{j_i^{(r)}}
\end{aligned}$$

On a bien pour tout $m \in \{k, \dots, r\}$, $j_1^{(k)} + \dots + j_1^{(m)} + 1 + \dots + i j_i^{(r)} = i + 1$, et pour tout $h \in \{1, \dots, i\}$, $j_1^{(k)} + \dots + h (j_h^{(m)} - 1) + (h + 1) (j_{h+1}^{(m)} + 1) + \dots + i j_i^{(r)} = i + 1$ \square

En ce qui concerne la Proposition 4.2.11, on a :

Démonstration. Pour tout multi-indice I , on a :

$$\text{Supp } \left(c_I y_{0,k}^{(I)} \right) \subseteq \text{Supp } c_I + \text{Supp } y_{0,k}^{i_0} + \dots + \text{Supp } (D^n y_0)^{i_n}$$

c'est-à-dire, d'après le lemme précédent :

$$\text{Supp } \left(c_I y_{0,k}^{(I)} \right) \subseteq$$

$$\begin{aligned}
& \text{Supp } c_I + \text{Supp } y_{0,k}^{|I|} + \text{Supp } \left[\left(\sum_{j_1^{(k)} + \dots + j_1^{(r)} = i_1} \left(\frac{D_l t_k}{t_k} \right)^{j_1^{(k)}} \dots \left(\frac{D_l t_r}{t_r} \right)^{j_1^{(r)}} \right) \dots \right. \\
& \left. \left(\sum_{j_1^{(k)} + \dots + n j_n^{(k)} + \dots + j_1^{(r)} + \dots + n j_n^{(r)} = n i_n} \left(\frac{D_l t_k}{t_k} \right)^{j_1^{(k)}} \dots \left(\frac{D_l^n t_k}{t_k} \right)^{j_n^{(k)}} \dots \left(\frac{D_l t_r}{t_r} \right)^{j_1^{(r)}} \dots \left(\frac{D_l^n t_r}{t_r} \right)^{j_n^{(r)}} \right) \right]
\end{aligned}$$

Donc :

$$\text{Supp } \left(c_I y_{0,k}^{(I)} \right) \subseteq \text{Supp } c_I + \text{Supp } y_{0,k}^{|I|} + \text{Supp}$$

$$\left(\sum_{h_1^{(k)} + \dots + n h_n^{(k)} + \dots + h_1^{(r)} + \dots + n h_n^{(r)} = \|I\|} \left(\frac{D_l t_k}{t_k} \right)^{h_1^{(k)}} \dots \left(\frac{D_l^n t_k}{t_k} \right)^{h_n^{(k)}} \dots \left(\frac{D_l t_r}{t_r} \right)^{h_1^{(r)}} \dots \left(\frac{D_l^n t_r}{t_r} \right)^{h_n^{(r)}} \right)$$

et donc :

$$\begin{aligned} \text{Supp } F(y_0, \dots, D^n y_0) \subseteq & \left(\bigcup_{I \in \mathbb{N}^{n+1}} \text{Supp } c_I \right) + \left(\bigcup_{j \geq 0} \text{Supp } y_{0,k}^j \right) + \left(\bigcup_{h_1^{(k)} \geq 0} \text{Supp} \left(\frac{D_l t_k}{t_k} \right)^{h_1^{(k)}} \right) \\ & + \dots + \left(\bigcup_{h_n^{(r)} \geq 0} \text{Supp} \left(\frac{D_l^n t_r}{t_r} \right)^{h_n^{(r)}} \right) \end{aligned}$$

□

Exemple 4.2.13 La condition i) du Corollaire 4.2.7 s'écrit $v(y_0) > -nv(d_1) = (0, 2n, 0) = v(x^{2n})$.

Pour tout $i \geq 1$, on a pour la dérivation D_1 :

$$\begin{cases} D_1 \left(\exp \left(\frac{-1}{x} \right) \right) = \exp \left(\frac{-1}{x} \right) \\ D_1(x) = x^2 \\ D_1(-\log^{-1}(x)) = x \log^{-2}(x) \\ D_1^i \left(\exp \left(\frac{-1}{x} \right) \right) = \exp \left(\frac{-1}{x} \right) \\ D_1^i(x^1) = i! x^{i+1} \\ D_1^i(\log^{-1}(x)) = x^i [(i-1)! \log^{-2}(x) - c_3 \log^{-3}(x) + \dots \\ \quad + (-1)^i c_i \log^{-i}(x) + (-1)^{i+1} i! \log^{-i-1}(x)] \end{cases}$$

où les c_h sont des entiers naturels non nuls.

$$\begin{aligned} \text{On a donc: } \mathcal{T}_1 &= \left\langle \text{Supp} \frac{D_1 t_1}{t_1} \right\rangle + \dots + \left\langle \text{Supp} \frac{D_1^n t_1}{t_1} \right\rangle \\ &+ \left\langle \text{Supp} \frac{D_1 t_2}{t_2} \right\rangle + \dots + \left\langle \text{Supp} \frac{D_1^n t_2}{t_2} \right\rangle \\ &+ \left\langle \text{Supp} \frac{D_1 t_3}{t_3} \right\rangle + \dots + \left\langle \text{Supp} \frac{D_1^n t_3}{t_3} \right\rangle \\ \mathcal{T}_1 &= \mathbb{N}(1,0,0) + \mathbb{N}(0,2,0) + \mathbb{N}(0,3,0) + \mathbb{N}(0,1,2) \\ &+ \mathbb{N}(0,2,2) + \mathbb{N}(0,2,3) + \mathbb{N}(0,3,3) + \mathbb{N}(0,3,4) \end{aligned}$$

Pour tout $i \geq 1$, on a pour la dérivation D_2 :

$$\begin{cases} D_2(x) = x \\ D_2(-\log^{-1}(x)) = \log^{-2}(x) \\ D_2^i(x^1) = x \\ D_2^i(-\log^{-1}(x)) = i! (-\log^{-1}(x))^{i+1} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{On a donc: } \mathcal{T}_2 &= \left\langle \text{Supp} \frac{D_2 t_2}{t_2} \right\rangle + \dots + \left\langle \text{Supp} \frac{D_2^n t_2}{t_2} \right\rangle \\ &+ \left\langle \text{Supp} \frac{D_2 t_3}{t_3} \right\rangle + \dots + \left\langle \text{Supp} \frac{D_2^n t_3}{t_3} \right\rangle \\ \mathcal{T}_2 &= \mathbb{N}(0,1,0) + \mathbb{N}(0,0,2) + \mathbb{N}(0,0,3) \end{aligned}$$

Pour tout $i \geq 1$, on a pour la dérivation D_3 :

$$\begin{cases} D_3(-\log^{-1}(x)) = -\log^{-1}(x) \\ D_3^i(-\log^{-1}(x)) = -\log^{-1}(x) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{On a donc: } \mathcal{T}_3 &= \left\langle \text{Supp} \frac{D_3 t_3}{t_3} \right\rangle + \dots + \left\langle \text{Supp} \frac{D_3^n t_3}{t_3} \right\rangle \\ \mathcal{T}_3 &= \mathbb{N}(0,0,1) \end{aligned}$$

$$\text{On a : } \begin{cases} \mathcal{T}_1 = \mathbb{N}(1,0,0) + \mathbb{N}(0,2,0) + \mathbb{N}(0,3,0) + \mathbb{N}(0,1,2) \\ \quad + \mathbb{N}(0,2,2) + \mathbb{N}(0,2,3) + \mathbb{N}(0,3,3) + \mathbb{N}(0,3,4) \\ \mathcal{T}_2 = \mathbb{N}(0,1,0) + \mathbb{N}(0,0,2) + \mathbb{N}(0,0,3) \\ \mathcal{T}_3 = \mathbb{N}(0,0,1) \end{cases}$$

On a aussi l'analogie de la Proposition 4.1.12 (on reprend les notations 2.1.10 concernant $f^{(I)}$). On choisit comme en 4.1.11 de noter f_S lorsqu'il s'agit de l'équation $F = 0$ évaluée en une partie initiale p_S de y_0 :

Proposition 4.2.14 (Formule de Taylor) *Pour tout segment initial propre S de $\text{Supp } y_0$, pour tout segment successeur \tilde{S} de S dans $\text{Supp } y_0$, on a :*

$$f_{S \cup \tilde{S}} = \sum_{I \in \mathbb{N}^{n+1}} \frac{1}{I!} f_S^{(I)} p_{\tilde{S}}^{(I)}$$

En effet, il suffit de remarquer que $f_S^{(I)}$ est bien défini : puisque F est bien ordonnée, $F^{(I)}$ l'est aussi ($\text{Supp } F^{(I)} \subseteq \text{Supp } F$).

Comme dans la section précédente, on définit y_0 *solution d'une équation bien ordonnée (1)* : $F(y, \dots, D^n y) = 0$ si et seulement si $F(y_0, \dots, D^n y_0) = 0 \in \mathcal{M}_r$.

Chapitre 5

Préliminaires à la preuve du théorème principal : changements d'inconnues

5.1 Introduction

Afin d'énoncer le théorème principal, nous faisons les définitions suivantes :

Définition 5.1.1 Soient X, Y des sous-ensembles bien ordonnés de $\mathbb{R}_{\geq(0,\dots,0)}^r$. On appellera *transformations élémentaires* :

- la *somme* de sous-ensembles bien ordonnés $X + Y = \{x + y \mid x \in X, y \in Y\}$
- les *translations négatives* τ_α pour tout $\alpha > (0, \dots, 0)$:

$$\tau_\alpha(X) = (X - \alpha)_{\geq(0,\dots,0)} = X_{\geq\alpha} - \alpha = \{x - \alpha \mid x \in X, x \geq \alpha\}$$
- la *génération comme semi-groupe additif*

$$\langle \dots \rangle : X \mapsto \langle X \rangle$$
- l'*enrichissement* ε_β par un générateur $\beta > (0, \dots, 0)$:

$$\varepsilon_\beta(X) = X + \mathbb{N}\beta$$

Notre résultat principal est :

Théorème 5.1.2 Soit une équation bien ordonnée $F(y, \dots, y^{(n)}) = \sum_{I \in \mathbb{N}^{n+1}} c_I y^{(I)_0} = 0$ avec $F(Y_0, \dots, Y_n) \in \mathcal{M}_r[[Y_0, \dots, Y_n]]$. Soit une multisérie solution $y_0 = \sum_{\mu \in \mathbb{R}^r} M_\mu t^\mu \in \mathcal{M}_r^\prec$. On

suppose que $v(y_0) > \max\{(0, \dots, 0), -nv(d_1)\}$.

Alors $\text{Supp } y_0 \subseteq \mathcal{R}$ où \mathcal{R} est un sous-ensemble bien ordonné de $\mathbb{R}_{>(0,\dots,0)}^r$ obtenu à partir de $\text{Supp } F, \mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_r$ (cf Définition 4.1.22 et Notation 4.2.9) par un nombre fini de transformations élémentaires.

Remarque 5.1.3 Pour l'hypothèse $v(y_0) > \max\{(0, \dots, 0), -nv(d_1)\}$, nous renvoyons au Corollaire 4.2.7.

On rappelle que toute multisérie $y_0 \in \mathcal{M}_r^\prec$ s'écrit $y_0 = y_{0,r} + y_{0,r-1} + \dots + y_{0,1}$ avec, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, $y_{0,k} \in \mathcal{M}_{r,k}^\prec$. Notre stratégie consiste à démontrer le résultat par récurrence descendante sur $k \in \{1, \dots, r\}$ le rang de la partie $y_{0,k}$ considérée.

Pour le cas initial de la récurrence $k = r$ (Théorème 6.1.1), nous considérons une équation $F(y, \dots, D_r^n y) = \sum_{I \in \mathbb{N}^{n+1}} c_I y^{(I)r} = 0$ avec $F(Y_0, \dots, Y_n) \in \mathcal{M}_r[[Y_0, \dots, Y_n]]$ d'un certain ordre de Weierstrass $w \in \mathbb{N}^*$, et une multisérie y_0 de partie initiale $y_{0,r} \in \mathcal{M}_{r,r}^<$. Pour démontrer le résultat, nous procéderons comme dans les chapitres 1 et 2 en introduisant une notion d'ordre de Weierstrass qui nous permettra de raisonner par récurrence descendante sur l'ordre de dérivation $l \in \{0, \dots, w-1\}$ des équations dérivées partielles de $F = 0$ considérées : $\frac{\partial^l F}{\partial Y_0^{i_0} \dots \partial Y_n^{i_n}} = 0$.

On remarque que la partie initiale $y_{0,r}$ s'écrit $\sum_{(0, \dots, 0, \mu_r) \in \text{Supp } y_0} M_{\mu_r} t_r^{\mu_r}$. C'est un cas analogue à celui d'un corps de rang 1 (cas $r = 1$), que d'ailleurs nous obtiendrons en corollaire (cf Corollaire 6.4.1) du Théorème 6.1.1.

Pour une étape k quelconque, on considère une multisérie $y_0 \in \mathcal{M}_r^<$ de partie initiale non nulle $y_{0,k} \in \mathcal{M}_{r,k}^<$ et supposons qu'on a le résultat du Théorème 7.1.1 pour le cas d'équations $G(y, \dots, D_l^n y) = 0$ avec une multisérie solution z_0 de partie initiale $z_{0,l}$ pour $l \in \{k+1, \dots, r\}$. Nous démontrons alors que le résultat est vérifié pour tous les $\mu = (0, \dots, 0, \mu_k, \dots, \mu_r) \in \text{Supp } y_{0,k}$, sauf un nombre fini de valeurs de μ_k . Dans ces cas, on considère donc des éléments $\mu = (0, \dots, 0, \mu_k, \mu_{k+1}, \dots, \mu_r) \in \{0\}^{k-1} \times \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^{r-k}$ avec μ_k fixé. Afin de déterminer μ_{k+1}, \dots, μ_r , nous nous ramenons par des changements d'inconnues et de dérivation appropriés à une équation et une multisérie correspondant au théorème à une étape $l \in \{k+1, \dots, r\}$.

Il ne reste ensuite qu'à coordonner ces résultats afin de démontrer le Théorème 5.1.2.

Pour cela, ainsi que pour mener à bien les différentes démonstrations intermédiaires, nous aurons besoin d'une part de savoir passer d'une dérivation à une autre dans l'équation considérée, d'autre part de faire certains changements d'inconnues, notamment "éclater l'équation" et la "translater le long de y_0 ". C'est l'objet des sections suivantes.

5.2 Changements de dérivations. Changements de variables polynomiaux

5.2.1 Changements de dérivations

Nous voulons passer d'une équation du type $(1)_k : F(y, \dots, D_k^n y) = 0$ à $(1)_l : \tilde{F}(y, \dots, D_l^n y) = 0$ pour tous $k, l \in \{0, \dots, r\}$ afin de nous ramener à la dérivation correspondant à la partie $y_{0,l}$ de y_0 considérée (la dérivation D_l pour laquelle on a $D_l^i y_{0,l} \asymp y_{0,l}$ pour tout i). Pour cela, il nous faut d'une part exprimer le changement de dérivation proprement dit, c'est-à-dire la relation entre les monômes différentiels $y^{j_0} \dots (D_k^n y)^{i_n}$ et $y^{j_0} \dots (D_l^n y)^{i_n}$. C'est l'objet de la proposition suivante.

D'autre part, il nous faudra vérifier qu'un tel changement de dérivation ($F(y, \dots, D_k^n y) = \tilde{F}_{k,l}(y, \dots, D_l^n y)$) est "bien défini", c'est-à-dire que l'équation $\tilde{F}_{k,l}(y, \dots, D_l^n y) = 0$ que nous obtenons a un support bien ordonné. Nous verrons que c'est bien le cas pour $k < l$ et pour $v(d_1) > (0, \dots, 0)$ pour le changement de dérivation $F(y, \dots, y^{(n)}) = \tilde{F}_{0,l}(y, \dots, D_l^n y)$ (cf Proposition 5.2.7). Dans les autres cas, nous aurons à appliquer à l'équation $\tilde{F}_{k,l}(y, \dots, D_l^n y) = 0$ un

changement d'inconnu supplémentaire: l'éclatement (cf Définition 5.3.1 et Proposition 5.3.5) pour obtenir une équation $\tilde{F}(y, \dots, D_l^n y) = 0$ dont le support est bien ordonné.

Proposition 5.2.1 Soient $k, l \in \{0, \dots, r\}$, on note $m = \frac{d_l}{d_k}$. On a $F(y, \dots, D_k^n y) = \tilde{F}_{k,l}(y, \dots, D_l^n y)$ avec pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $D_k^i y = q_{1,i} D_l y + q_{2,i} D_l^2 y + \dots + q_{i,i} D_l^i y$ où la multi-suite $(q_{j,i})_{j=1..i, i=1..n}$ est définie par :

$$\begin{cases} q_{1,1} & = m \\ q_{1,i+1} & = D_k q_{1,i} & \forall i = 1..n-1 \\ q_{j+1,i+1} & = q_{j,i} m + D_k q_{j+1,i} & \forall i = 1..n-1 \quad \forall j = 1..i-1 \\ q_{i+1,i+1} & = q_{i,i} m & \forall i = 1..n-1 \end{cases}$$

En particulier on a $q_{1,i} = D_l^{i-1} m$ et $q_{i,i} = m^i$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$.

Démonstration. on raisonne par récurrence sur i

- $i = 1$: on a, par définition des D_k , $D_k y = \frac{y'}{d_k} = \frac{d_l}{d_k} \times \frac{y'}{d_l} = \frac{d_l}{d_k} D_l y$. On pose $q_{1,1} = m$.
- Récurrence : on suppose la propriété vraie jusqu'à un rang $i \leq n-1$. On a donc $D_k^i y = q_{1,i} D_l y + q_{2,i} D_l^2 y + \dots + q_{i,i} D_l^i y$ et donc :

$$\begin{aligned} D_k^{i+1} y &= D_k q_{1,i} D_l y + q_{1,i} D_k D_l y + \dots + D_k q_{i,i} D_l^i y + q_{i,i} D_k D_l^i y \\ &= D_k q_{1,i} D_l y + q_{1,i} \frac{d_l}{d_k} D_l^2 y + \dots + D_k q_{i,i} D_l^i y + q_{i,i} \frac{d_l}{d_k} D_l^{i+1} y \\ &= D_k q_{1,i} D_l y + (q_{1,i} m + D_k q_{2,i}) D_l^2 y + \dots + (q_{i-1,i} m + D_k q_{i,i}) D_l^i y + q_{i,i} m D_l^{i+1} y \end{aligned}$$

On a bien la propriété au rang $i+1$.

Le fait que $q_{1,i} = D_l^{i-1} m$ et $q_{i,i} = m^i$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ découle par une récurrence immédiate du fait que respectivement $q_{1,i+1} = D_k q_{1,i}$ et $q_{i+1,i+1} = q_{i,i} \frac{d_l}{d_k}$. \square

Donnons maintenant les propriétés générales de la multi-suite $(q_{j,i})_{\substack{j=1..i \\ i=1..n}}$. Etant donné

un multi-indice $I = (i_0, i_1, \dots, i_l) \in \mathbb{N}^{l+1}$ pour un entier $l \in \{0, \dots, n\}$, on note $m^{(I)_k} = m^{i_0} (D_k m)^{i_1} \dots (D_k^{i_{l-1}} m)^{i_l}$

Lemme 5.2.2 Pour tous $i \in \{1, \dots, n\}$ et $j \in \{1, \dots, i\}$, $q_{j,i}$ est un polynôme différentiel en m tel que $q_{j,i} = \sum Q_I^{(j,i)} m^{(I)_k} \in \mathcal{M}_r$ où la somme est prise sur les $I \in \mathbb{N}^i$ avec $|I| = j$ et $\|I\| = i - j$.

Démonstration. nous raisonnons par récurrence sur i

$i = 1$: $q_{1,1} = m$ et $Q_{(1)}^{(1,1)} = 1$

$$i = 2: \begin{cases} q_{1,2} = D_k m & Q_{(0,1)}^{(1,2)} = 1 \\ q_{2,2} = m^2 & Q_{(2,0)}^{(2,2)} = 1 \end{cases}$$

Récurrence : supposons la propriété vraie jusqu'au rang i . On a $q_{1,i+1} = D_k^i m$, $Q_{(0,\dots,0)}^{(1,i+1)} = 1$ et $q_{i+1,i+1} = m^{i+1}$, $Q_{(i+1,0,\dots,0)}^{(i+1,i+1)} = 1$.

$$\begin{aligned} q_{j+1,i+1} &= m q_{j,i} + D_k q_{j+1,i} \\ &= \sum_{|I|=j, \|I\|=i-j} Q_I^{(j,i)} m^{(I+(1,0,\dots,0))_k} + \sum_{|I|=j+1, \|I\|=i-j-1} Q_I^{(j,i)} D_k (m^{(I)_k}) \end{aligned}$$

Pour la première somme, on pose $J = I + (1,0,\dots,0)$ et donc on a $|J| = j + 1$ et $\|J\| = i + 1 - j - 1$.

Pour la deuxième, on a :

$$\begin{aligned} D_k(m^{(I)_k}) &= D_k\left(m^{i_0} (D_k m)^{i_1} \dots (D_k^{i-1} m)^{i_{i-1}}\right) \\ &= \sum_{l=0}^{i-1} i_l m^{i_0} \dots (D_k^l m)^{i_{l-1}} (D_k^{l+1} m)^{i_{l+1}} \dots (D_k^{i-1} m)^{i_{i-1}} \end{aligned}$$

On pose $K = I + (0,\dots, -1,1,\dots,0)$ avec -1 en $l^{\text{ème}}$ position. On a $|K| = j + 1$ et $\|K\| = i + 1 - j - 1$.

On obtient donc, pour tout $l = 1, \dots, i - 1$, $Q_I^{(j+1, i+1)} = Q_{I-(1,0,\dots,0)}^{(j,i)} + (i_l + 1) Q_{I-(0,\dots,-1,1,\dots,0)}^{(j,i)}$ pour tout $I \in \mathbb{N}^{i+1}$ avec $|I| = j + 1$, $\|I\| = i + 1 - j - 1$, $i_1 \geq 1$ et $i_{i+1} \geq 1$. \square

Explicitons les premiers polynômes $q_{i,j}$:

$i = \setminus j =$	1	2	3	4	5
1	m	-	-	-	-
2	$D_k m$	m^2	-	-	-
3	$D_k^2 m$	$3D_k m.m$	m^3	-	-
4	$D_k^3 m$	$4D_k^2 m.m + 3(D_k m)^2$	$6D_k m.m^2$	m^4	-
5	$D_k^4 m$	$5D_k^3 m.m + 10D_k^2 m.D_k m$	$10D_k^2 m.m^2 + 15(D_k m)^2 m$	$10D_k m.m^3$	m^5

Exemple 5.2.3 On traite à titre d'exemple le cas des changements de dérivation $F(y, \dots, y^{(n)}) = \tilde{F}_{0,l}(y, \dots, D_l^n y)$ pour $l \in \{1,2,3\}$. On a donc pour la dérivation initiale :

$$\begin{cases} d'_1 = \left(\frac{1}{x^2}\right)' &= \frac{-2}{x^3} \\ d'_2 = \left(\frac{1}{x}\right)' &= \frac{-1}{x^2} \\ d'_3 = \left(\frac{-\log^{-1}(x)}{x}\right)' &= \frac{\log^{-1}(x) + \log^{-2}(x)}{x^2} \end{cases}$$

et pour tout $i \geq 1$:

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{x^2}\right)^{(i)} &= \frac{(-1)^i (i+1)!}{x^{i+2}} \\ \left(\frac{1}{x}\right)^{(i)} &= \frac{(-1)^i i!}{x^{i+1}} \\ \left(\frac{-\log^{-1}(x)}{x}\right)^{(i)} &= \frac{(-1)^{i-1} i! \log^{-1}(x) + l_2 \log^{-2}(x) + \dots + l_i \log^{-i}(x) + i! \log^{-i-1}(x)}{x^i} \end{cases}$$

où les l_h sont des entiers naturels non nuls.

Pour $l = 1$, les polynômes $q_{i,j}$ s'écrivent donc :

$\begin{matrix} j \\ i \end{matrix}$	1	2	3	4
1	$\frac{1}{x^2}$	-	-	-
2	$\frac{-2}{x^3}$	$\frac{1}{x^4}$	-	-
3	$\frac{6}{x^4}$	$\frac{-6}{x^5}$	$\frac{1}{x^6}$	-
4	$\frac{24}{x^5}$	$\frac{36}{x^6}$	$\frac{-12}{x^7}$	$\frac{1}{x^8}$

Pour $l = 2$:

$\begin{matrix} j \\ i \end{matrix}$	1	2	3	4
1	$\frac{1}{x}$	-	-	-
2	$\frac{-1}{x^2}$	$\frac{1}{x^2}$	-	-
3	$\frac{2}{x^3}$	$\frac{-3}{x^3}$	$\frac{1}{x^3}$	-
4	$\frac{6}{x^4}$	$\frac{11}{x^4}$	$\frac{-6}{x^4}$	$\frac{1}{x^4}$

Pour $l = 3$:

$\begin{matrix} j \\ i \end{matrix}$	1	2
1	$\frac{-\log^{-1}(x)}{x}$	-
2	$\frac{\log^{-1}(x) + \log^{-2}(x)}{x^2}$	$\frac{\log^{-2}(x)}{x^2}$
3	$\frac{-2\log^{-1}(x) - 3\log^{-2}(x) - 2\log^{-3}(x)}{x^3}$	$\frac{-3\log^{-2}(x) - 3\log^{-3}(x)}{x^3}$
4	$\frac{6\log^{-1}(x) + 11\log^{-2}(x) + 12\log^{-3}(x) + 6\log^{-4}(x)}{x^4}$	$\frac{9\log^{-2}(x) + 14\log^{-3}(x) + 9\log^{-4}(x)}{x^4}$

$\begin{matrix} i \\ j \end{matrix}$	3	4
3	$\frac{-\log^{-3}(x)}{x^3}$	-
4	$\frac{6\log^{-3}(x) + 6\log^{-4}(x)}{x^4}$	$\frac{\log^{-4}(x)}{x^4}$

On remarque que les valuations de ces polynômes $q_{i,j}$ intervenant dans le changement de dérivation sont négatives. Nous aurons alors dans ce type de situation à pratiquer un autre changement de variable afin d'obtenir effectivement une équation bien ordonnée (cf section 5.3.1). Nous déterminons d'abord les conditions pour lesquelles les séries $\tilde{F}_{k,l}$ sont bien ordonnées, en fonction des valuations des $\frac{d_l}{d_k}$ et de leurs dérivées.

5.2.2 Changements de variables polynomiaux

Etant donnée une série à support bien ordonné $F(Y_0, \dots, Y_n) \in \mathcal{M}_r[[Y_0, \dots, Y_n]]$, on effectue un changement de variable du type $Y_i = \sum_{j=0}^i q_{j,i} Z_j$, $i \in \{0, \dots, n\} = \Delta_i$ pour certains $q_{j,i} \in \mathcal{M}_r$. Nous voulons comprendre les conditions à nous donner sur ces $q_{j,i}$ pour que la série $\tilde{F}(Z_0, \dots, Z_n) = F(\Delta_0, \dots, \Delta_n) = 0$ ainsi obtenue ait un support bien ordonné. Nous appliquerons ce résultat d'une part aux équations obtenues après changement de dérivations, d'autre part à un autre changement de variable de ce type, l'éclatement, que nous étudions dans la section suivante.

Proposition 5.2.4 *Soient un monôme $m \in \mathbb{R}^* \mathcal{G}_r$ et, pour $j = 0, \dots, n$, $i = 1, \dots, n$, des polynômes différentiels $q_{j,i}$ en m de degré inférieur ou égal à i , d'ordre de dérivation inférieur ou égal à i relativement à une des $r + 1$ dérivations définies précédemment D . Soit une série à support bien ordonné $F(Y_0, \dots, Y_n) \in \mathcal{M}_r[[Y_0, \dots, Y_n]]$. On pose $\Delta_k = \sum_{j=1}^i q_{j,i} Z_i$ pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$ (où Z_0, \dots, Z_n sont des variables formelles), et $\tilde{F}(Z_0, \dots, Z_n) = F(\Delta_0, \dots, \Delta_n)$. Si, pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$, $v(D^i m) \geq (0, \dots, 0)$, alors \tilde{F} a un support bien ordonné.*

Démonstration. Pour tout multi-indice $I = (i_0, \dots, i_n) \in \mathbb{N}^{n+1}$, on note $Y^{(I)} = Y^{i_0} \dots Y^{i_n}$. On écrit $F(Y_0, \dots, Y_n) = \sum_{I \in \mathbb{N}^{n+1}} c_I Y^{(I)}$ et $\tilde{F}(Z_0, \dots, Z_n) = \sum_{I \in \mathbb{N}^{n+1}} \tilde{c}_I Z^{(I)}$, et on remarque que

$$\text{Supp } \tilde{c}_J \subseteq \bigcup_{|I|=|J|} \text{Supp } c_I + \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \text{Supp } (D^j m)^{i|I|}.$$

Donc on a :

$$\bigcup_{J \in \mathbb{N}^{n+1}} \text{Supp } \tilde{c}_J \subseteq \bigcup_{I \in \mathbb{N}^{n+1}} \text{Supp } c_I + \langle \text{Supp } m \rangle + \dots + \langle \text{Supp } D^n m \rangle$$

Si $v(m) \geq (0, \dots, 0), \dots, v(D^n m) \geq (0, \dots, 0)$, alors $\langle \text{Supp } m \rangle, \dots, \langle \text{Supp } D^n m \rangle$ sont bien ordonnés et donc $\bigcup_{J \in \mathbb{N}^{n+1}} \tilde{c}_J$ l'est aussi. \square

Pour appliquer ce résultat aux changements de dérivations, nous traduisons ces conditions en fonction de $m = \frac{d_l}{d_k}$ avec $Y_i = D_k^i y$ et $Z_i = D_l^i y$ pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$. Les $q_{j,i}$ sont les polynômes différentiels en m relativement à la dérivée D_k définis dans la Proposition 5.2.1.

Remarque 5.2.5 *Nous supposons que $v(d_k) \neq (0, \dots, 0)$ pour tout $k \in \{1, \dots, r\}$. En effet, dans le cas contraire, on aurait la dérivation initiale qui jouerait directement le rôle d'une des dérivations D_k , ce qui se traite de la même façon que les cas où on considère $k, l \in \{1, \dots, r\}$.*

Lemme 5.2.6 *Pour tous $k, l \in \{1, \dots, r\}$, on note $m = \frac{d_l}{d_k}$ et pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$, on a :*

$$1. v(d_l^{(i)}) \geq v(d_l) + iv(d_k)$$

2. Si $k < l$, $v(D_k^i m) > (0, \dots, 0)$

3. Si $k > l$, $v(D_k^i m) = (0, \dots, \beta_{l_i}^{(i)}, \dots, \beta_r^{(i)})$ avec $l_i > l$ et $\beta_{l_i} \neq 0$

Démonstration.

1. On a $v(d_1) < \dots < v(d_r)$ d'après l'hypothèse (H_2) de 4.1.15.

2. Si $k < l$, $v\left(\frac{d_l}{d_k}\right) = (0, \dots, 0, \tau_{l+1}^{(l)} - \tau_{l+1}^{(k)}, \dots, \tau_k^{(k)} - 1 - \tau_k^{(l)}, \dots, \tau_r^{(k)} - \tau_r^{(l)}) > (0, \dots, 0)$. Le résultat est une conséquence de la Proposition 4.2.4.

3. Si $k > l$, la démonstration est analogue à celle du Lemme 4.2.5 :

on a $v\left(\frac{d_l}{d_k}\right) = (0, \dots, 0, \tau_{l+1}^{(l)} - \tau_{l+1}^{(k)}, \dots, \tau_k^{(l)} - \tau_k^{(k)} + 1, \dots, \tau_r^{(l)} - \tau_r^{(k)}) < (0, \dots, 0)$ et on raisonne par récurrence sur i .

$\underline{i = 1}$: $\left(\frac{d_l}{d_k}\right)' \sim (\tau_{m_1}^{(l)} - \tau_{m_1}^{(k)}) \left(\frac{d_l}{d_k}\right) d_{m_1}$ où m_1 est le plus petit indice tel que $\tau_{m_1}^{(l)} - \tau_{m_1}^{(k)} \neq 0$. On

a $m_1 > l$ et $D_k\left(\frac{d_l}{d_k}\right) \sim (\tau_{m_1}^{(l)} - \tau_{m_1}^{(k)}) \left(\frac{d_l}{d_k}\right) \frac{d_{m_1}}{d_k}$.

Donc $v\left(D_k\left(\frac{d_l}{d_k}\right)\right) = v\left(\frac{d_l}{d_k}\right) + v\left(\frac{d_{m_1}}{d_k}\right)$. Puisque $m_1 > l$, on a :

$$v\left(\frac{d_{m_1}}{d_k}\right) = \begin{cases} (0, \dots, 0, \tau_{m_1+1}^{(m_1)} - \tau_{m_1+1}^{(k)}, \dots, \tau_k^{(m_1)} - \tau_k^{(l)} + 1, \dots, \tau_r^{(m_1)} - \tau_r^{(k)}) & \text{si } m_1 < k \\ (0, \dots, 0) & \text{si } m_1 = k \\ (0, \dots, 0, \tau_{k+1}^{(m_1)} - \tau_{k+1}^{(k)}, \dots, \tau_{m_1}^{(m_1)} - \tau_{m_1}^{(k)} + 1, \dots, \tau_r^{(m_1)} - \tau_r^{(k)}) & \text{si } m_1 > k \end{cases}$$

On a bien dans tous les cas la propriété voulue.

Récurrence : supposons la propriété vraie jusqu'à un rang i . On a $v\left(D_k^i\left(\frac{d_l}{d_k}\right)\right) = (0, \dots, \beta_{l_i}, \dots, \beta_r)$

avec $l_i > l$ et $\beta_{l_i} \neq 0$.

Or $D_k^{i+1}\left(\frac{d_l}{d_k}\right) = D_k\left(D_k^i\left(\frac{d_l}{d_k}\right)\right) = D_{l_i}\left(D_k^i\left(\frac{d_l}{d_k}\right)\right) \frac{d_{l_i}}{d_k}$, et on a le résultat pour les mêmes raisons que ci-dessus pour tous les cas concernant $v\left(\frac{d_{l_i}}{d_k}\right)$. \square

Nous en déduisons, avec la Proposition 5.2.1, le corollaire suivant que nous utiliserons à plusieurs reprises dans la preuve du théorème principal.

Corollaire 5.2.7 1. Si $v(d_1) > (0, \dots, 0)$, on peut effectuer le changement de dérivation $F(y, \dots, y^{(n)}) = \tilde{F}_{0,l}(y, \dots, D_l^n y)$ pour tout $l \in \{1, \dots, n\}$.

2. On peut toujours effectuer les changements de dérivations $F(y, \dots, D_k^n y) = \tilde{F}_{k,l}(y, \dots, D_l^n y)$ avec tous $k < l \in \{1, \dots, n\}$

Exemple 5.2.8 On a pour $k = 1$ et $l = 2$, $\frac{d_2}{d_1} = x$ et, pour tout $i \geq 1$, $D_1^i\left(\frac{d_2}{d_1}\right) = i!x^{i+1}$.

Donc $v\left(D_1^i\left(\frac{d_2}{d_1}\right)\right) = (0, i+1, 0) > (0, 0, 0)$.

Pour $k = 1$ et $l = 3$, $\frac{d_3}{d_1} = -x \log^{-1}(x)$ et, pour tout $i \geq 1$,

$$D_1^i \left(\frac{d_3}{d_1} \right) = x^{i+1} \left[-i! \log^{-1}(x) + c_2 \log^{-2}(x) \cdots + (-1)^i c_i \log^{-i}(x) + (-1)^{i+1} i! \log^{-i-1}(x) \right]$$

où les c_h sont des entiers naturels non nuls. Donc $v \left(D_1^i \left(\frac{d_3}{d_1} \right) \right) = (0, i+1, 1) > (0, 0, 0)$.

Pour $k = 2$ et $l = 3$, $\frac{d_3}{d_2} = -\log^{-1}(x)$ et, pour tout $i \geq 1$, $D_2^i \left(\frac{d_3}{d_2} \right) = (-1)^i i! \log^{-i-1}(x)$.

Donc $v \left(D_2^i \left(\frac{d_3}{d_2} \right) \right) = (0, 0, i+1) > (0, 0, 0)$.

Pour les cas où $v(d_1) < (0, \dots, 0)$ ou $k > l \in \{1, \dots, n\}$, nous introduisons un nouveau changement de variable: l'éclatement.

5.3 Eclatements - Support des changements de dérivation - Décalages

5.3.1 Eclatement

Définition 5.3.1 Soit un monôme $m \in \mathbb{R}^* \mathcal{G}_r$. On appelle éclatement par m le changement de variable $y = mz$.

Ce changement d'inconnue va nous permettre d'effectuer les changements de dérivations dans les cas problématiques où $v(d_1) < (0, \dots, 0)$ (changement de dérivation $F(y, \dots, y^{(n)}) = \tilde{F}_{0,l}(y, \dots, D_l^n y)$), ou bien $k > l \in \{1, \dots, n\}$ (changement de dérivation $F(y, \dots, D_k^n y) = \tilde{F}_{k,l}(y, \dots, D_l^n y)$). Dans ces cas, les termes $D^i m$ et donc les polynômes différentiels $q_{j,i}$ ont des valuations négatives. Par l'éclatement on obtient une équation dont les coefficients ont des valuations suffisamment grandes de sorte que, en appliquant ensuite le changement de dérivation, on obtienne une équation bien ordonnée.

Proposition 5.3.2 Soient D_l , $l \in \{0, \dots, r\}$ une des $r+1$ dérivations définies précédemment et un monôme $m = Lt^\lambda$ avec $\lambda = (0, \dots, \lambda_k, \dots, \lambda_r)$, $\lambda_k > 0$, pour un $k \geq l$ (cela implique que $v(D_l^i m) > (0, \dots, 0)$ pour tout $i \in \{0, \dots, \}$). Soit une équation bien ordonnée $F(y, \dots, D_l^n y) = 0$. Par l'éclatement $y = mz$, on obtient une équation $\hat{F}(z, \dots, D_l^n z) = 0$ telle que :

1. Si D_l est la dérivation initiale $D_0 = d$ et si $\lambda \geq \max\{(0, \dots, 0), -nv(d_1)\}$, alors l'équation $\hat{F} = 0$ est bien ordonnée. Pour les autres dérivations, $\hat{F} = 0$ est toujours bien ordonnée.

2. On note $F(y, \dots, D_l^n y) = \sum_{I \in \mathbb{N}^{n+1}} c_I y^{(I)}$ et $\hat{F}(z, \dots, D_l^n z) = \sum_{J \in \mathbb{N}^{n+1}} \hat{c}_J z^{(J)}$. Alors :

$$v(\hat{c}_J) \geq \min \left\{ v(c_I) + v(m^{(K)}) \mid j_p + \dots + j_n + k_m + \dots + k_n \leq i_p + \dots + i_n \right. \\ \left. \forall p \in \{0, \dots, n\} \text{ et } |I| = |J| = |K| \right\}$$

3. $y_0 \in \mathcal{M}_r^<$ avec $v(y_0) > v(m)$ est solution de $F(y, \dots, D_l^n y) = 0$ si et seulement si $z_0 = \frac{y_0}{m} \in \mathcal{M}_r^<$ est solution de $\hat{F}(z, \dots, D_l^n z) = 0$.

4. $\text{Supp } \hat{c}_J \subseteq \text{Supp } F + |J|\lambda + \mathcal{T}_l$ et $\text{Supp } \hat{F} \subseteq \text{Supp } F + \mathbb{N}\lambda + \mathcal{T}_l$.

Démonstration.

1. L'éclatement par m s'écrit :

$$\begin{cases} y & = mz \\ D_l y & = Dmz + mDz \\ \vdots & \\ D_l^n y & = \sum_{i=0}^n C_n^i D_l^{n-i} m D^i z \end{cases}$$

Le résultat découle donc des propositions 5.2.4 et 4.2.4.

2. Pour alléger les notations, on écrit $D_l = D$. On considère un terme $\hat{c}_J z^{(J)}$ quelconque de $\hat{F}(z, \dots, D^n z)$. On raisonne par récurrence descendante sur $p \in \{0, \dots, n\}$ pour montrer que : "pour qu'un terme $c_I y^{(I)}$ de $F(y, \dots, D^n y)$ intervienne dans le calcul de $\hat{c}_J z^{(J)}$, il faut qu'on ait $j_p + \dots + j_n \leq i_p + \dots + i_n$ pour tout $p \in \{0, \dots, n\}$ ".

$\underline{p = n}$: pour qu'un terme $c_I y^{(I)}$ de $F(y, \dots, D^n y)$ intervienne dans le calcul de $\hat{c}_J z^{(J)}$, on doit avoir $j_n \leq i_n$. En effet, seuls les termes $D^n y$ peuvent fournir des termes $D^n z$.

Récurrence : supposons la propriété vraie à un rang $p \in \{1, \dots, n\}$. On se donne $c_I y^{(I)}$ intervenant dans le calcul de $\hat{c}_J z^{(J)}$: on a $j_p + \dots + j_n \leq i_p + \dots + i_n$. Un terme $D^{p-1} z$ provient de termes $D^q y$ avec $q \geq p - 1$. Or, on a déjà $(D^p z)^{j_p} \dots (D^n z)^{j_n}$ qui provient de $(D^p y)^{i_p} \dots (D^n y)^{i_n}$. Puisque $j_p + \dots + j_n \leq i_p + \dots + i_n$, il reste au plus $i_p + \dots + i_n - (j_p + \dots + j_n)$ puissances de $D^{p-1} z$ pouvant provenir de ce terme, auxquelles peuvent s'ajouter au plus i_{p-1} puissances provenant de $(D^{p-1} y)^{i_{p-1}}$. On a donc $j_{p-1} \leq i_p + \dots + i_n - (j_p + \dots + j_n) + i_{p-1}$, c'est-à-dire $j_{p-1} + \dots + j_n \leq i_{p-1} + \dots + i_n$.

Pour conclure, il suffit de remarquer que, puisque tout $D^p y$ fournit des termes $D^{p-i} m D^i z$, on peut faire le même raisonnement avec les puissances k_0, \dots, k_n de $m, \dots, D^n m$: on montre que "pour qu'un terme $c_I y^{(I)}$ de $F(y, \dots, D^n y)$ intervienne dans le calcul de $\hat{c}_J z^{(J)}$, il faut qu'on ait $k_p + \dots + k_n \leq i_p + \dots + i_n - (j_p + \dots + j_n)$ ". De plus, il est clair que tout terme $y^{(I)}$ fournit des termes $C_K m^{(K)} z^{(J)}$ avec $|K| = |J| = |I|$ et $C_J \in \mathbb{N}^*$.

3. La partie directe est immédiate. Pour la partie réciproque, il suffit de remarquer que le changement d'inconnue inverse de l'éclatement $y = mz$ est aussi un éclatement $z = \frac{y}{m} = m^{-1}y$.

4. D'après ci-dessus, on a $\hat{c}_J = \sum c_I C_J m^{(J)}$ pour certains \tilde{J} et c_I avec $|\tilde{J}| = |J| = |I|$. On obtient le résultat d'après le Lemme 4.2.12. \square

Exemple 5.3.3 Pour illustrer le point 3 de la proposition précédente, nous pratiquons un éclatement $y = mz$ pour un monôme $m \in \mathcal{M}_r^<$ dans une équation linéaire d'ordre 2 :

$$F(y, y', y'') = c_0 + c_{(1,0,0)} y + c_{(0,1,0)} y' + c_{(0,0,1)} y'' \quad (5.3.1)$$

L'éclatement par m s'écrit :

$$\begin{cases} y & = mz \\ y' & = m'z + mz' \\ y'' & = m''z + 2m'z' + mz'' \end{cases}$$

L'équation 5.3.1 devient :

$$c_0 + (c_{(1,0,0)} m + c_{(0,1,0)} m' + c_{(0,0,1)} m'') z + (c_{(0,1,0)} m + 2c_{(0,0,1)} m') z' + c_{(0,0,1)} m'' z'' = 0$$

On a donc :

$$\begin{cases} \hat{c}_0 & = c_0 \\ \hat{c}_{(1,0,0)} & = c_{(1,0,0)}m + c_{(0,1,0)}m' + c_{(0,0,1)}m'' \\ \hat{c}_{(0,1,0)} & = c_{(0,1,0)}m + 2c_{(0,0,1)}m' \\ \hat{c}_{(0,0,1)} & = c_{(0,0,1)} \end{cases}$$

et donc :

$$\begin{cases} v(\hat{c}_{(1,0,0)}) & \geq \min\{v(c_{(1,0,0)}) + v(m), v(c_{(0,1,0)}) + v(m'), v(c_{(0,0,1)}) + v(m'')\} \\ v(\hat{c}_{(0,1,0)}) & \geq \min\{v(c_{(0,1,0)}) + v(m), v(c_{(0,0,1)}) + v(m')\} \\ v(\hat{c}_{(0,0,1)}) & = v(c_{(0,0,1)}) + v(m) \end{cases}$$

Remarque 5.3.4 On remarque qu'un terme $D^i y$ fournit par éclatement un terme analogue $D^i z$ plus des termes d'ordre de dérivation inférieur. Donc un terme $c_I y^{(I)}$ de l'équation $F(y, \dots, D^n y) = 0$ fournit un terme analogue $c_I z^{(I)}$ plus des termes $b_J z^{(J)}$ avec $|J| = |I|$ et $\|J\| < \|I\|$. pour des termes $c_I y^{(I)}$ avec $|I|$ fixé et des coefficients c_I de même valuation, on obtient par la transformation au moins un terme $c_{I_0} z^{(I_0)}$ qui ne peut pas subir d'annulation : celui pour I_0 le plus petit pour l'ordre lexicographique.

On en déduit les transformations à effectuer pour pouvoir changer de dérivation dans les cas où $v(d_1) < (0, \dots, 0)$ et $k > l \in \{1, \dots, n\}$ avec les conditions correspondantes sur la valuation de y_0 .

Proposition 5.3.5 On considère $(1)_k : F(y, \dots, D_k^n y) = 0$ et $(1)_l : \tilde{F}_{k,l}(y, \dots, D_l^n y) = 0$ pour tous $k, l \in \{0, \dots, n\}$ comme dans la Proposition 5.2.1. Alors :

1. Dans le cas où D_k est la dérivation initiale $D_0 = d$ et $v(d_1) < (0, \dots, 0)$, on considère $y_0 \in \mathcal{M}_r^<$ avec $v(y_0) > -nv(d_1)$. Alors $F(y, \dots, y^{(n)}) = \hat{F}(z, \dots, z^{(n)}) = \tilde{F}(z, \dots, D_l^n z)$ est bien ordonnée, avec $y = d_1^{-n} z$ et $\tilde{F} = \hat{F}_{0,l}$.

2. Dans le cas où $k > l \geq 1$, on considère $y_0 \in \mathcal{M}_r^<$ avec $v(y_0) > 2nv\left(\frac{d_k}{d_l}\right)$. Alors $F(y, \dots, D_k^n y) = \hat{F}(z, \dots, D_k^n z) = \tilde{F}(z, \dots, D_l^n z)$ est bien ordonnée, avec $y = \left(\frac{d_k}{d_l}\right)^{2n} z$ et $\tilde{F} = \hat{F}_{k,l}$.

Démonstration.

1. Par l'éclatement $y = d_1^{-n} z$, d'après ii) de la proposition 4.1.3, un terme $\hat{c}_J z^{(J)}$ provient de termes $c_I y^{(I)}$ avec $v(\hat{c}_J) \geq \min\{v(c_I) + v(m^{(K)}) \mid \forall l = 0..n, j_l + \dots + j_n + k_l + \dots \leq i_l + \dots + i_n \text{ et } |J| = |I| = |K|\}$. On remarque que $\|K\| + \|J\| \leq \|I\|$. Or, d'après le Lemme 5.2.6, $v\left(\left(d_1^{-n}\right)^{(i)}\right) \geq v(d_1^{-n}) + iv(d_1) = (i-n)v(d_1)$ pour tout $i = 0..n$. Donc $v\left(\left(d_1^{-n}\right)^{(K)}\right) \geq \|K\|v(d_1) - n|K|v(d_1) = \|K\|v(d_1) - n|I|v(d_1)$

D'après le Lemme 5.2.6, on a pour tout $i = 0..n$, $v\left(d_l^{(i)}\right) \geq v(d_l) + iv(d_1)$. Quand on procède au changement de dérivation pour \hat{F} , on a d'après la Proposition 5.2.1 et le Lemme 5.2.2, pour tous $i = 1..n$ et $j = 1..i$, $q_{j,i}(d_l) = \sum_{I \in \mathbb{N}^i, |I|=j, \|I\|=i-j} Q_I^{(j,i)} d_l^{(I)_0}$. Donc $v\left(Q_I^{(j,i)} d_l^{(I)_0}\right) = |I|v(d_l) +$

$\|I\|v(d_1) = jv(d_l) + (i-j)v(d_1) = j(v(d_l) - v(d_1)) + iv(d_1) \geq iv(d_1)$. Tout terme $\tilde{c}_L z^{(L)}$ de \tilde{F} provient de termes $\hat{c}_J z^{(J)}$ avec $v(\tilde{c}_L) = \|J\|v(d_1) + v(\hat{c}_J)$ et $v(\hat{c}_J) \geq \min\{v(c_I) + \|K\|v(d_1) - n|I|v(d_1)\}$ où $\|K\| + \|J\| \leq \|I\|$. Donc $v(\tilde{c}_L) \geq \min\{v(c_I) + (\|J\| + \|K\|)v(d_1) - n|I|v(d_1)\}$. Il suffit alors de remarquer que $-n|I|v(d_1) \geq -\|I\|v(d_1)$ et on a bien $v(\hat{c}_J) \geq \min\{v(c_I)\}$.

2. La preuve est identique à la précédente en remarquant que

$$v \left(D_k^i \left(\left(\frac{d_k}{d_l} \right)^{2n} \right) \right) \geq iv \left(\frac{d_{l+1}}{d_k} \right) + 2nv \left(\frac{d_k}{d_l} \right) > (i - 2n) v \left(\frac{d_l}{d_k} \right)$$

et que

$$v \left(D_k^i \left(\frac{d_l}{d_k} \right) \right) \geq v \left(\frac{d_l}{d_k} \right) + iv \left(\frac{d_{l+1}}{d_k} \right) > (i + 1) v \left(\frac{d_l}{d_k} \right)$$

(cf preuve du Lemme 5.2.6). □

Remarque 5.3.6

1. Pour le premier cas, les conditions sur y_0 sont les mêmes que, dans le Corollaire 4.2.7, celles qui nous assurent qu'on peut effectivement substituer y_0 dans l'équation initiale (1) : $F(y, \dots, y^{(n)}) = 0$. Cela correspond bien à l'hypothèse du théorème principal 5.1.2 : $v(y_0) > \max\{(0, \dots, 0), -nv(d_1)\}$

2. Le changement d'équation décrit dans le deuxième cas correspond au passage de l'étude de la partie $y_{0,k}$ de y_0 à $y_{0,l}$ avec $l < k$. Puisque $v(y_{0,l}) = (0, \dots, \mu_l, \dots, \mu_r)$ avec $\mu_l > 0$ et

$$v \left(\left(\frac{d_k}{d_l} \right)^{2n} \right) = 2n \cdot \left(0, \dots, 0, \tau_{l+1}^{(k)} - \tau_{l+1}^{(l)}, \dots, \tau_k^{(k)} - 1 - \tau_k^{(l)}, \dots, \tau_r^{(k)} - \tau_r^{(l)} \right), \text{ on aura } v \left(\frac{y_{0,l}}{\left(\frac{d_k}{d_l} \right)^{2n}} \right) >$$

$(0, \dots, 0)$. On pourra donc en pratique faire l'éclatement $y = \left(\frac{d_k}{d_l} \right)^{2n} z$ dans les cas que l'on considérera.

Exemple 5.3.7 Dans le cas $l = 1$ de notre Exemple 5.2.3 avec $n = 3$, on a l'éclatement $y = d_1^{-n} z = x^{2n} z = x^6 z$:

$$\begin{cases} y' &= 6x^5 z + x^6 z' \\ y'' &= 30x^4 z + 12x^5 z' + x^6 z'' \\ y''' &= 120x^3 z + 90x^4 z' + 18x^5 z'' + x^6 z''' \end{cases}$$

et le changement de dérivation :

$$\begin{cases} z' &= \frac{1}{x^2} D_1 z \\ z'' &= \frac{-2}{x^3} D_1 z + \frac{1}{x^4} D_1^2 z \\ z''' &= \frac{6}{x^4} D_1 z + \frac{-6}{x^5} D_1^2 z + \frac{1}{x^6} D_1^3 z \end{cases}$$

On obtient donc :

$$\begin{cases} y' &= 6x^5 z + x^4 D_1 z \\ y'' &= 30x^4 z + 88x^3 D_1 z + x^2 D_1^2 z \\ y''' &= 120x^3 z + 60x^2 D_1 z - 12x D_1^2 z + D_1^3 z \end{cases}$$

Avec les notations de la Proposition 5.3.5, on en déduit que $\text{Supp } \tilde{F} \subseteq \text{Supp } F + \mathbb{N}(0,1,0)$. Dans la section suivante, nous déterminons dans les différents cas le support des nouvelles équations obtenues par éclatement et changement de dérivation.

5.3.2 Support des changements de dérivation

Nous aurons besoin dans la preuve du théorème principal de suivre l'évolution du support de l'équation au fur et à mesure des changements de dérivations. Montrons que :

Proposition 5.3.8 1. Pour tous $1 \leq k < l$, on considère comme dans l'énoncé du corollaire 5.2.7 le changement de dérivation $F(y, \dots, D_k^n y) = \tilde{F}_{k,l}(y, \dots, D_l^n y)$. Alors on a $\text{Supp } \tilde{F}_{k,l} \subseteq \text{Supp } F + \mathcal{T}_k$

2. Pour tous $k > l \geq 1$, on considère comme dans l'énoncé de la Proposition 5.3.5 le changement de dérivation avec éclatement $F(y, \dots, D_k^n y) = \hat{F}(z, \dots, D_k^n z) = \tilde{F}(z, \dots, D_l^n z)$ (on rappelle que $y = m^{-2n} z$ où $m = \frac{d_l}{d_k}$). Alors on a $\text{Supp } \tilde{F} \subseteq \text{Supp } F + \mathcal{T}_l$

Démonstration.

1. On applique le résultat du Lemme 4.2.12 à $\frac{d_l}{d_k}$ (on rappelle que $v\left(\frac{d_l}{d_k}\right) > (0, \dots, 0)$ d'après l'hypothèse $(H)_2$ de 4.1.15

2. On considère comme dans le Lemme 5.2.2, pour tous $i \in \{1, \dots, n\}$ et $j \in \{1, \dots, i\}$, $q_{j,i} = \sum Q_I^{(j,i)} m^{(I)} \in \mathcal{M}_r$ où la somme est prise sur les $I \in \mathbb{N}^J$ avec $|I| = j$ et $\|I\| = i - j$. Nous allons déterminer $\text{Supp } q_{j,i}$. Pour cela, montrons que :

Lemme 5.3.9 Pour tout $h \in \{1, \dots, i - 1\}$, on a l'inclusion

$$\text{Supp } D_k^h m \subseteq \bigcup \text{Supp } (m^{-1})^{(J)_k} + (|J| + 1)v(m)$$

où l'union est prise sur les multi-indices $J = (j_0, \dots, j_h) \in \mathbb{N}^{h+1}$ avec $j_0 = 0$ et $\|J\| = h$.

Démonstration.

$$\underline{h = 1}: D_k m = D_k \frac{d_l}{d_k} = - \left(\frac{d_l}{d_k} \right)^2 D_k \frac{d_k}{d_l} = -m^2 D_k (m^{-1})$$

Récurrence: on considère pour $J = (j_0, \dots, j_h) \in \mathbb{N}^{h+1}$ avec $j_0 = 0$ et $\|J\| = h$:

$$\begin{aligned} D_k \left[(m^{-1})^{(J)_k} m^{|J|+1} \right] &= m^{|J|+1} D_k (m^{-1})^{(J)_k} + (m^{-1})^{(J)_k} (|J| + 1) m^{|J|} D_k m \\ &= \sum m^{|I|+1} D_k (m^{-1})^{(I)_k} - (m^{-1})^{(J+(1,0,\dots,0))_k} (|J| + 1) m^{|J|+2} \end{aligned}$$

où la somme est prise sur les $I \in \mathbb{N}^{h+2}$ avec $i_0 = 0$, $|I| = |J|$ et $\|I\| = h + 1$. \square

Lemme 5.3.10 Pour tout $h \in \{1, \dots, i - 1\}$, on a l'inclusion

$$\text{Supp } D_k^h (m^{-1}) \subseteq \bigcup \text{Supp } \left(\frac{D_l t_k}{t_k} \right)^{i_1} \dots \left(\frac{D_l^{h+1} t_k}{t_k} \right)^{i_{h+1}} + (2h - 1)v(m)$$

où l'union est prise sur les multi-indices $I = (i_0, \dots, i_{h+1}) \in \mathbb{N}^{h+2}$ avec $i_0 = 0$ et $\|I\| = 2h$.

Démonstration.

$$\underline{h = 1}: D_k (m^{-1}) = D_k \frac{d_k}{d_l} \sim \frac{d_l}{d_k} D_l \left(\frac{D_l t_k}{t_k} \right) = m \left(\frac{D_l^2 t_k}{t_k} - \left(\frac{D_l t_k}{t_k} \right)^2 \right)$$

Récurrence: on considère pour $I = (i_0, \dots, i_{h+1}) \in \mathbb{N}^{h+2}$ avec $i_0 = 0$ et $\|I\| = h + 1$:

$$\begin{aligned} D_k \left[m^{2h-1} \left(\frac{D_l t_k}{t_k} \right)^{i_1} \dots \left(\frac{D_l^{h+1} t_k}{t_k} \right)^{i_{h+1}} \right] &= (2h + 1) m^{2h-2} \left(\frac{D_l t_k}{t_k} \right)^{i_1} \dots \left(\frac{D_l^{h+1} t_k}{t_k} \right)^{i_{h+1}} \\ &\quad D_k m + m^{2h} D_l \left[\left(\frac{D_l t_k}{t_k} \right)^{i_1} \dots \left(\frac{D_l^{h+1} t_k}{t_k} \right)^{i_{h+1}} \right] \end{aligned}$$

Or, $D_k m = -m^2 D_k m^{-1} \sim -m^3 \left(\frac{D_l^2 t_k}{t_k} - \left(\frac{D_l t_k}{t_k} \right)^2 \right)$ et pour tout $j \in \{1, \dots, h+1\}$:

$$\begin{aligned} D_l \left(\frac{D_l^j t_k}{t_k} \right)^{i_j} &= i_j \left(\frac{D_l^j t_k}{t_k} \right)^{i_j-1} D_l \left(\frac{D_l^j t_k}{t_k} \right) \\ &= i_j \left(\frac{D_l^j t_k}{t_k} \right)^{i_j-1} \left(\frac{D_l^{j+1} t_k}{t_k} - \frac{D_l^j t_k D_l t_k}{t_k^2} \right) \\ &= i_j \left(\frac{D_l^j t_k}{t_k} \right)^{i_j-1} \frac{D_l^{j+1} t_k}{t_k} - i_j \frac{D_l t_k}{t_k} \left(\frac{D_l^j t_k}{t_k} \right)^{i_j} \\ &\sim i_j \frac{D_l t_k}{t_k} \left(\frac{D_l^j t_k}{t_k} \right)^{i_j-1} \frac{D_l^{j+1} t_k}{t_k} - i_j \frac{D_l t_k}{t_k} \left(\frac{D_l^j t_k}{t_k} \right)^{i_j} \end{aligned}$$

puisque $m^{-1} = \frac{d_k}{d_l} \sim \frac{D_l t_k}{t_k}$. \square

On en déduit que, pour tout $h \in \{1, \dots, i-1\}$,

$\text{Supp } D_k^h m \subseteq \bigcup \mathcal{T}_l + (j_1 + \dots + (2h-1)j_h) v(m) + (|J|+1) v(m)$ où l'union est prise sur les multi-indices $J = (j_0, \dots, j_h) \in \mathbb{N}^{h+1}$ avec $j_0 = 0$ et $\|J\| = h$. Donc $j_1 + \dots + (2h-1)j_h = 2\|J\| - |J|$ et donc $(j_1 + \dots + (2h-1)j_h) v(m) + (|J|+1) v(m) = 2h+1$.

Or, puisque pour tous $i \in \{1, \dots, n\}$ et $j \in \{1, \dots, i\}$, $q_{j,i} = \sum Q_I^{(j,i)} m^{(I)}$ avec $I \in \mathbb{N}^I$, $|I| = j$ et $\|I\| = i-j$, on a donc :

$\text{Supp } q_{j,i} \subseteq \mathcal{T}_l + \bigcup (i_0 + 3i_1 + \dots + (2(i-1)+1)i_{i-1}) v(m)$ où l'union est prise sur les $I \in \mathbb{N}^I$ avec $|I| = j$ et $\|I\| = i-j$. De plus $i_0 + 3i_1 + \dots + (2(i-1)+1)i_{i-1} = 2\|I\| + |I| = 2i-j$ et donc $i \leq 2i-j \leq 2i-1$.

Or par l'éclatement $y = m^{-2n} z$, on a $D_k^h y = \sum_{i=0}^h \binom{h}{i} D_k^{h-i} m^{-2n} D_k^i z$. On montre comme

dans le lemme précédent que :

Lemme 5.3.11 *Pour tout $h \in \{1, \dots, n\}$, on a l'inclusion*

$$\text{Supp } D_k^h (m^{-2n}) \subseteq \bigcup \text{Supp} \left(\frac{D_l t_k}{t_k} \right)^{i_1} \dots \left(\frac{D_l^{h+1} t_k}{t_k} \right)^{i_{h+1}} + (2h-2n) v(m)$$

où l'union est prise sur les multi-indices $I = (i_0, \dots, i_{h+1}) \in \mathbb{N}^{h+2}$ avec $i_0 = 0$ et $\|I\| = 2h$.

On obtient donc que $\text{Supp } D_k^{h-i} m^{-2n} \subseteq \mathcal{T}_l + (2(h-i) - 2n) v(m)$ pour tout $h \in \{1, \dots, n\}$ et tout $i \in \{0, \dots, h\}$. En facteur de $D_k^i z$, on a donc $m^{2(h-i)-2n}$ multiplié par des éléments dont le support est dans \mathcal{T}_l . Par changement de dérivation, on obtient de plus en facteur un coefficient $q_{j,i}$ consistant en des termes avec m à une puissance inférieure à $2i-1$ et des éléments dont le support est aussi dans \mathcal{T}_l . Par conséquent, on obtient un coefficient avec m à la puissance $2h-2n-1 < 0$, c'est-à-dire un coefficient $\left(\frac{d_k}{d_l} \right)^j$ avec $j \geq 1$, et des termes de valuation dans

\mathcal{T}_l . Il suffit alors de remarquer à nouveau que $\text{Supp} \frac{d_k}{d_l} \sim \text{Supp} \frac{D_l t_k}{t_k}$. \square

Exemple 5.3.12 Pour illustrer notre propos, nous traitons le cas $l = 2, k = 3$ de notre exemple. On a $\frac{d_2}{d_3} = \frac{-1}{\log^{-1}(x)}$. Donc $D_3\left(\frac{d_2}{d_3}\right) = \frac{1}{\log^{-1}(x)}$ et pour tout $h \geq 1$, $D_3^h\left(\frac{d_2}{d_3}\right) = \frac{(-1)^{h-1}}{\log^{-1}(x)}$ de support $(0,0,-1)$.

Or, pour tout $h \geq 1$, $D_3^h\left(\frac{d_3}{d_2}\right) = -\log^{-1}(x) = \frac{d_3}{d_2}$ de support $(0,0,1)$. Donc, avec les notations du Lemme 5.3.9, on a $\text{Supp } (m^{-1})^{(J)_k} = -|J|v(m) = |J|(0,0,1)$ et donc $\text{Supp } (m^{-1})^{(J)_k} + (|J|+1)v(m) = v(m) = (0,0,-1)$. On a bien $\text{Supp } D_k^h m \subseteq (0,0,-1)$.

De plus, $\frac{D_2 t_3}{t_3} = x \cdot \frac{(-\log^{-1}(x))'}{-\log^{-1}(x)} = -\log^{-1}(x) = t_3$ et pour tout $j \geq 1$, $\frac{D_2^j t_3}{t_3} = (-1)^j j! \log^{-j}(x) = j! t_3^j$ de support $(0,0,j)$. On a avec les notations du Lemme 5.3.10 $\text{Supp } \left(\frac{D_2 t_3}{t_3}\right)^{i_1} \cdots \left(\frac{D_2^{h+1} t_3}{t_3}\right)^{i_{h+1}} = \|I\|(0,0,1) = -2hv(m)$ et donc on a bien :

$$\text{Supp } D_3^h(m^{-1}) = (0,0,1) \subseteq -2hv(m) + (2h-1)v(m) = -v(m) = (0,0,1)$$

D'autre part, $D_3(m^{-2n}) = D_3(\log^{-2n}(x)) = (2n)\log^{-2n}(x)$ et pour tout $h \in \{1, \dots, n\}$ $D_3^h(m^{-2n}) = (2n)^h \log^{-2n}(x)$ de support $2n(0,0,1)$. Avec les notations du lemme 5.3.11, on a $\text{Supp } \left(\frac{D_l t_k}{t_k}\right)^{i_1} \cdots \left(\frac{D_l^{h+1} t_k}{t_k}\right)^{i_{h+1}} = \|I\|(0,0,1) = -2hv(m)$ et donc $\text{Supp } D_k^h(m^{-2n}) = 2n(0,0,1) \subseteq -2hv(m) + (2h-2n)v(m) = -2nv(m) = 2n(0,0,1)$.

En conclusion, on montre comme dans l'Exemple 5.3.7 que $\text{Supp } \tilde{F} \subseteq \mathbb{N}(0,0,n+1) + \cdots + \mathbb{N}(0,0,2n)$, et on a donc bien $\text{Supp } \tilde{F} \subseteq \text{Supp } F + \mathcal{T}_2$ puisque $\mathcal{T}_2 = \mathbb{N}(0,1,0) + \mathbb{N}(0,0,2) + \mathbb{N}(0,0,3)$.

En ce qui concerne la dérivation initiale $d = D_0$, on montre la proposition suivante que nous utiliserons à plusieurs reprise dans la preuve du théorème principal.

Proposition 5.3.13 *Pour tout $l \in \{1, \dots, r\}$, on considère :*

1. *si $v(d_1) > (0, \dots, 0)$, $F(y, \dots, y^{(n)}) = \tilde{F}_{0,l}(y, \dots, D_l^n y)$ (cf Corollaire 5.2.7). Alors on a $\text{Supp } \tilde{F}_{0,l} \subseteq \text{Supp } F + \mathcal{T}_1 + \mathbb{N}v(d_1)$*

2. *si $v(d_1) < (0, \dots, 0)$: $F(y, \dots, y^{(n)}) = \hat{F}(z, \dots, z^{(n)}) = \tilde{F}(z, \dots, D_l^n z)$ avec $y = d_1^{-n} z$ (cf proposition 5.3.5). Alors on a $\text{Supp } \tilde{F} \subseteq \text{Supp } F + \mathcal{T}_1 - \mathbb{N}v(d_1)$*

Démonstration.

1. Montrons que :

Lemme 5.3.14 *Pour tout $h \in \{0, \dots, n\}$, $\text{Supp } d_l^{(h)} \subseteq v(d_l) + hv(d_1) + \mathcal{T}_1$*

Démonstration. Le cas $h = 0$ est trivial.

On se donne $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_r) \in \text{Supp } d_l^{(h)}$ et on suppose que $\beta = v(d_l) + hv(d_1) + \theta$ avec $\theta \in \mathcal{T}_1$. Donc :

$$\begin{aligned} (t^\beta)' &= t^\beta \left(\beta_1 \frac{t'_1}{t_1} + \cdots + \beta_r \frac{t'_r}{t_r} \right) \\ &= t^\beta d_1 \left(\beta_1 \frac{D_1 t_1}{t_1} + \cdots + \beta_r \frac{D_1 t_r}{t_r} \right) \end{aligned}$$

□

Il suffit de remarquer que $v(d_i) + hv(d_1) = v\left(\frac{d_i}{d_1}\right) + (h+1)v(d_1)$ et que $v\left(\frac{d_i}{d_1}\right) = v\left(\frac{D_1 t_i}{t_i}\right) \in \mathcal{T}_1$.

2. On montre comme dans le lemme précédent que :

Lemme 5.3.15 *Pour tout $h \in \{0, \dots, n\}$, $\text{Supp} (d_1^{-n})^{(h)} \subseteq (h-n)v(d_1) + \mathcal{T}_1$*

Donc, comme dans la preuve de la proposition précédente, on obtient que $\text{Supp} (d_1^{-n})^{(h-i)} \subseteq \mathcal{T}_1 + (h-i-n)v(d_1)$ pour tout $h \in \{1, \dots, n\}$ et tout $i \in \{0, \dots, h\}$. En facteur de $z^{(i)}$, on a donc d_1^{h-i-n} multiplié par des éléments dont le support est dans \mathcal{T}_1 . Par changement de dérivation, on obtient de plus en facteur de $D_i^j z$ un coefficient $q_{j,i}$, $j \leq i$, consistant en des termes avec d_1 à la puissance $i-j$, d_i à la puissance j (cf lemme 5.2.2) et des éléments dont le support est aussi dans \mathcal{T}_1 . Par conséquent, on obtient un coefficient avec d_1 à la puissance $h-j-n-1 < 0$ et d_i à la puissance j , c'est-à-dire un coefficient $\left(\frac{d_i}{d_1}\right)^j$ avec $j \geq 1$, d_1^{h-n-1} et des termes de valuation dans \mathcal{T}_1 . Il suffit alors de remarquer à nouveau que $v\left(\frac{d_i}{d_1}\right) = v\left(\frac{D_1 t_i}{t_i}\right) \in \mathcal{T}_1$. \square

Avant de passer à la preuve du lemme principal 6.3.1 proprement dite, nous introduisons un autre changement d'inconnu que nous nommons *translation* : nous aurons besoin de "translater" l'équation le long de la multisérie y_0 associée, c'est-à-dire d'effectuer un changement de variable du type $y = y_1 + p_S$ où S segment initial de $\text{Supp } y_0$.

5.3.3 Translation

Définition 5.3.16 *Soit une équation $F(y, \dots, D_k^n y) = 0$ où $k \in \{0, \dots, r\}$. Soit une multisérie $a \in \mathcal{M}_r^<$. On appelle translation de a le changement de variable $y = a + y_1$. On note $F_{\text{Supp } a}(y_1, \dots, D_k^n y_1) = F(a + y_1, \dots, D_k^n a + D_k^n y_1) = 0$ l'équation tradlatée.*

La proposition suivante donne les propriétés qui nous seront utiles dans la preuve du théorème principal.

Proposition 5.3.17 *Soient une équation $F(y, \dots, D_k^n y) = 0$ où $k \in \{0, \dots, r\}$ et une multisérie $a \in \mathcal{M}_r^<$.*

1. *Si F est bien ordonnée et $v(D^i a) > (0, \dots, 0)$ pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$, alors $F_{\text{Supp } a}$ l'est aussi.*

2. *Si $k \neq 0$ et $a \in \mathcal{M}_{r,k}^<$, alors $\text{Supp} (F_{\text{Supp } a}) \subseteq \text{Supp } F + \langle \text{Supp } a \rangle + \mathcal{T}_k$*

Démonstration. Le changement de variable s'écrit :

$$\begin{cases} y & = y_1 + a \\ Dy & = Dy_1 + Da \\ & \vdots \\ D^n y & = D^n y_1 + D^n a \end{cases}$$

D'après la formule de Taylor, on a :

$$\begin{aligned}
F_a(y_1, \dots, D_k^n y_1) &= F(y_1 + a, \dots, D^n y_1 + D^n a) \\
&= \sum_{I \in \mathbb{N}^{n+1}} \frac{1}{I!} f_a^{(I)} y_1^{(I)}
\end{aligned}$$

De plus $f_a^{(I)} = F^{(I)}(a, \dots, D^n a) \in \mathcal{M}_r$ et d'après la Proposition 4.2.11, on a pour tout $I \in \mathbb{N}^{n+1}$: $\text{Supp } f_a^{(I)} \subseteq \text{Supp } F^{(I)} + \langle \text{Supp } a \rangle + \mathcal{T}$

Puisque $\text{Supp } F^{(I)} \subseteq \text{Supp } F$ pour tout $I \in \mathbb{N}^{n+1}$, on a : $\text{Supp } f_a^{(I)} \subseteq \text{Supp } F + \langle \text{Supp } a \rangle + \mathcal{T}$ et donc $\text{Supp } F_a^{(I)} \subseteq \text{Supp } F + \langle \text{Supp } a \rangle + \mathcal{T}$ qui est un ensemble bien ordonné.

Le deuxième point est une conséquence directe du lemme 4.2.12. \square

Remarque 5.3.18 Les coefficients de l'équation translatée sont pour tout $I \in \mathbb{N}^{n+1}$, $\frac{1}{I!} f_a^{(I)}$.

Nous pouvons maintenant passer à la démonstration du théorème principal 5.1.2. Comme nous l'avons annoncé précédemment, nous commencerons par démontrer un résultat (Théorème 6.1.1) pour une partie initiale du type $y_{0,r}$ de y_0 . Nous obtiendrons en corollaire le théorème général pour les corps de rang 1, (c'est-à-dire pour le cas $r = 1$: Corollaire 6.4.1).

Le chapitre suivant sera consacré à prouver un théorème pour une partie initiale générale du type $y_{0,k}$ pour $k \in \{1, \dots, r\}$ quelconque (Théorème 7.1.1). C'est ce résultat qui permettra d'analyser une multisérie générale y_0 selon la décomposition : $y_0 = y_{0,r} + y_{0,r-1} + \dots + y_{0,1}$. Nous pourrons alors démontrer le théorème principal 5.1.2. Nous concluerons ce chapitre par un corollaire concernant les équations *réticulées* (c'est-à-dire à support inclus dans un *réseau*).

Chapitre 6

Preuve du théorème principal : Cas d'un corps de rang 1

6.1 Introduction

Dans ce chapitre nous démontrons le résultat suivant :

Théorème 6.1.1 *Soit une équation bien ordonnée*

$$F(y, \dots, D_r^n y) = \sum_{I \in \mathbb{N}^{n+1}} c_I y^{(I)_r} = 0 \quad (6.1.1)$$

avec $F(Y_0, \dots, Y_n) \in \mathcal{M}_r[[Y_0, \dots, Y_n]]$ d'ordre de Weierstrass $w \in \mathbb{N}^*$. Soit une multisérie $y_0 = y_{0,r} + \dots + y_{0,1} \in \mathcal{M}_r^<$ avec une partie initiale non nulle $y_{0,r} = \sum_{\mu_r > 0} M_{\mu_r} t_r^{\mu_r} \in \mathcal{M}_{r,r}^<$. Alors

il existe un sous-ensemble bien ordonné \mathcal{R}_r de $\mathbb{R}_{>(0, \dots, 0)}^r$ obtenu à partir de $\text{supp } F$ et \mathcal{T}_r par un nombre fini de transformations élémentaires (cf Définition 5.1.1) tel qu'on a deux cas :

- soit $\text{supp } y_{0,r} \subseteq \mathcal{R}_r$
- soit il existe un segment initial propre S_0 de $\text{supp } y_{0,r}$ de successeur $\tilde{\mu}^{(0)}$ tel que $S_0 \subseteq \mathcal{R}_r$ et, pour tout \tilde{S} successeur de S_0 , on a $v_{S_0 \cup \tilde{S}} = v_{S_0 \cup \{\tilde{\mu}^{(0)}\}}$. On dit qu'on a stabilisation de la valuation v_S et, dans ce cas, y_0 ne peut pas être solution de 6.1.1.

Ce résultat constitue l'étape initiale de la récurrence que nous faisons sur le nombre de générateurs t_1, \dots, t_r impliqués dans l'écriture de la partie initiale de la multisérie y_0 considérée. Afin de le démontrer, nous commençons par plusieurs définitions et résultats que nous utiliserons aussi dans le chapitre suivant (où nous démontrons la récurrence et le théorème principal).

Comme dans la preuve des Théorèmes 1.2.1 et 2.1.12, nous introduisons une notion d'ordre de Weierstrass. On considère D une des $n + 1$ dérivations définies précédemment.

Définition 6.1.2 *Soit $F(Y_0, \dots, Y_n) \in \mathcal{M}_r[[Y_0, \dots, Y_n]]$ et l'équation différentielle associée*

$$F(y, \dots, D^n y) = \sum_{I \in \mathbb{N}^{n+1}} c_I y^{(I)} = 0 \quad (6.1.2)$$

On dit que cette équation est d'ordre de Weierstrass $w \in \mathbb{N}$ si et seulement si :

1. pour tout $I \in \mathbb{N}^{n+1}$, $v(c_I) \geq (0, \dots, 0)$,

2. il existe I_0 avec $|I_0| = w$ tel que $v(c_{I_0}(x)) = (0, \dots, 0)$
3. pour tout I avec $|J| < w$, $v(c_I) > (0, \dots, 0)$.

Proposition 6.1.3 *Toute équation bien ordonnée admet un ordre $w \in \mathbb{N}$ au sens de Weiersstrass .*

Démonstration. Puisque $\text{supp } F$ est bien ordonné, on divise l'équation par $t^{\min(\text{supp } F)}$. \square

Remarque 6.1.4 Nous excluons le cas où $w = 0$. En effet, dans ce cas la valuation est stabilisée quelle que soit la multisérie considérée : $v(F(y_0, \dots, D^n y_0)) = (0, \dots, 0)$ pour tout $y_0 \in \mathcal{M}_r^<$ avec $v(D^i y_0) > (0, \dots, 0)$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ (cf la formule de Taylor).

Notre démonstration du Théorème 6.1.1 suit en partie le plan que celles des Théorèmes 1.2.1 et 2.1.12. Nous évaluons l'équation en des parties initiales d'une multisérie y_0 correspondant à des segments initiaux propres de plus en plus longs de $\text{Supp } y_0$. Mais à la différence des preuves des chapitres 1 et 2, au lieu de raisonner par l'absurde, nous démontrons la dichotomie de l'énoncé du Théorème 6.1.1. Le but est d'expliciter les sous-ensembles bien ordonnés de $\mathbb{R}_{\geq(0, \dots, 0)}^r$ auxquels appartiennent les exposants de la partie initiale de y_0 dans le cas où celle-ci est solution.

Nous commençons par quelques résultats préliminaires donnant notamment des conditions élémentaires de stabilisation de la valuation de l'équation évaluée en des parties initiales de y_0 .

6.2 Résultats préliminaires

Nous consacrons cette section à deux résultats que nous appliquerons à plusieurs reprises dans ce chapitre et le suivant. Le premier donne deux conditions de stabilisation de la valuation v_k . Il généralise les Lemmes 1.2.3 et 2.2.3.

Soit un entier $k \in \{1, \dots, r\}$. On considère une équation bien ordonnée

$$F(y, \dots, D_k^n y) = \sum_{I \in \mathbb{N}^{n+1}} c_I y^{(I)_k} = 0 \quad (6.2.1)$$

avec $F(Y_0, \dots, Y_n) \in \mathcal{M}_r[[Y_0, \dots, Y_n]]$ et une multisérie $y_0 = y_{0,k} + \dots + y_{0,1} \in \mathcal{M}_r^<$ avec une partie initiale non nulle $y_{0,k} = \sum_{\mu \in \{0\}^{k-1} \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^r} M_\mu t^\mu \in \mathcal{M}_{r,k}^<$.

Lemme 6.2.1 *Supposons qu'il existe une constante $c \in \mathbb{R}_{\geq(0, \dots, 0)}^r$ et un segment initial propre S_0 de $\text{Supp } y_{0,k}$ tels que, pour tout segment successeur S de \bar{S}_0 admettant un élément successeur dans $\text{Supp } y_{0,k}$ noté $\tilde{\mu}$:*

i) On peut écrire $f_{S_0 \cup S \cup \{\tilde{\mu}\}} = f_{S_0 \cup S} + t^{\tilde{\mu}+c} b_{S_0 \cup S \cup \{\tilde{\mu}\}}$ avec $v(b_{S_0 \cup S \cup \{\tilde{\mu}\}}) \geq (0, \dots, 0)$. S'il existe un segment successeur S_1 de S_0 , d'élément successeur $\tilde{\mu}^{(1)}$ dans $\text{Supp } y_{0,k}$, tel que $\tilde{\mu}^{(1)} + c > v_{S_0 \cup S_1}$, alors les $v_{S_0 \cup S_1 \cup S}$ se stabilisent à $v_{S_0 \cup S_1}$ avec $v_{S_0 \cup S_1 \cup S} = v_{S_0 \cup S_1} < \tilde{\mu}^{(1)} + c < \tilde{\mu} + c$ pour tout segment S successeur de S_1 dans $\text{Supp } y_0$.

ii) On peut écrire $f_{S_0 \cup S \cup \{\tilde{\mu}\}} = f_{S_0 \cup S} + t^{\tilde{\mu}+c} u_{S_0 \cup S \cup \{\tilde{\mu}\}}$ avec $v(u_{S_0 \cup S \cup \{\tilde{\mu}\}}) = (0, \dots, 0)$ sauf pour μ élément d'un sous-ensemble propre E de $\text{Supp } y_{0,k}$ pour lequel on a $f_{S_0 \cup S \cup \{\tilde{\mu}\}} = f_{S_0 \cup S} + t^{\tilde{\mu}+c} b_{S_0 \cup S \cup \{\tilde{\mu}\}}$ avec $v(b_{S_0 \cup S \cup \{\tilde{\mu}\}}) \geq (0, \dots, 0)$. On a deux cas :

- Soit pour tout segment successeur S de S_0 , d'élément successeur $\tilde{\mu}$ dans $\text{Supp } y_{0,k}$, on a $\tilde{\mu} + c = v_{S_0 \cup S}$ ou $\tilde{\mu} \in E$.

- Soit il existe un segment successeur S_1 de S_0 , d'élément successeur $\tilde{\mu}^{(1)}$ dans $\text{Supp } y_{0,k}$ avec $\tilde{\mu}^{(1)} \notin \{\mu_1, \dots, \mu_m\}$ et tel que $\tilde{\mu}^{(1)} + c \neq v_{S_0 \cup S_1}$, alors les $v_{S_0 \cup S_1 \cup S}$ se stabilisent à $v_{S_0 \cup S_1 \cup \{\tilde{\mu}^{(1)}\}}$ avec $v_{S_0 \cup S_1 \cup S} = v_{S_0 \cup S_1 \cup \{\tilde{\mu}^{(1)}\}} \leq \tilde{\mu}^{(1)} + c < \tilde{\mu} + c$ pour tout segment S successeur de $S_1 \cup \{\tilde{\mu}^{(1)}\}$ dans $\text{Supp } y_0$. De plus, pour tout segment successeur S de S_0 avec $S \subsetneq S_1$, on a $\tilde{\mu} + c = v_{S_0 \cup S}$ ou $\tilde{\mu} \in E$ (on note $\tilde{\mu}$ l'élément successeur de S dans $\text{Supp } y_{0,k}$).

Démonstration.

i) On raisonne par récurrence transfinie sur l'ensemble bien ordonné $\text{Supp } y_0 \setminus (S_0 \cup S_1)$ (cf Annexe A). Etant donné un segment initial propre $S \subsetneq \text{Supp } y_0 \setminus (S_0 \cup S_1)$ (qui est donc un segment successeur de $(S_0 \cup S_1)$ dans $\text{Supp } y_0$), on note $\tilde{\mu}$ son élément successeur. On suppose que $v_{S_0 \cup S_1 \cup S} = v_{S_0 \cup S_1}$ et que $v_{S_0 \cup S_1} < \tilde{\mu}^{(1)} + c < \tilde{\mu} + c$. Or on a $f_{S_0 \cup S_1 \cup S \cup \{\tilde{\mu}\}} = f_{S_0 \cup S_1 \cup S} + t^{\tilde{\mu}+c} b_{S_0 \cup S_1 \cup S \cup \{\tilde{\mu}\}}$ avec $v(b_{S_0 \cup S_1 \cup S \cup \{\tilde{\mu}\}}) \geq (0, \dots, 0)$. D'après l'inégalité triangulaire ultramétrique, on a donc $v_{S_0 \cup S_1 \cup S \cup \{\tilde{\mu}\}} = \min\{v_{S_0 \cup S_1 \cup S}, \tilde{\mu} + c\} = v_{S_0 \cup S_1 \cup S} = v_{S_0 \cup S_1}$. De plus, si on note $\tilde{\mu}'$ le successeur de $S \cup \{\tilde{\mu}\}$, on a $\tilde{\mu}' > \tilde{\mu}$ et donc $\tilde{\mu}' + c > \tilde{\mu} + c > \tilde{\mu}^{(1)} + c > v_{S_0 \cup S_1}$.

ii) La dichotomie du point *ii)* est une conséquence immédiate de l'inégalité triangulaire ultramétrique appliquée à l'expression de $f_{S_0 \cup S \cup \{\tilde{\mu}\}}$. Dans le deuxième cas de l'énoncé du point *ii)* (le cas où on a $\tilde{\mu}^{(1)} + c \neq v_{S_0 \cup S_1}$ et $\tilde{\mu}^{(1)} \notin E$), on se ramène au cas précédent en remarquant qu'on a $v_{S_0 \cup S_1 \cup \{\tilde{\mu}^{(1)}\}} = \min\{v_{S_0 \cup S_1}, \tilde{\mu}^{(1)} + c\} < \tilde{\mu} + c$ pour $\tilde{\mu}$ élément successeur de $\tilde{\mu}^{(1)}$ (on applique l'inégalité triangulaire ultramétrique à l'expression de $f_{S_0 \cup S_1 \cup \{\tilde{\mu}^{(1)}\}}$). \square

Le deuxième résultat concerne les conditions d'annulation des termes dominants quand on évalue l'équation 6.2.1 en une partie initiale p_S d'une multisérie $y_0 = y_{0,k} + \dots + y_{0,1} \in \mathcal{M}_r^{\prec}$. On généralise la Définition 2.2.5 et le Lemme 2.2.6.

Etant données l'équation 6.2.1 et une série généralisée $y_0 \in \mathcal{M}_r^{\prec}$ de partie initiale non nulle $y_{0,k} = \sum_{\mu \in \{0\}^{k-1} \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^r} M_\mu t^\mu \in \mathcal{M}_{r,k}^{\prec}$, nous supposons qu'il existe un multi-indice $J \in \mathbb{N}^{n+1}$ de

longueur 1, un segment initial S_J de $\text{Supp } y_{0,k}$ et une constante $v^{(O)} \geq (0, \dots, 0)$ tels que, pour tout segment successeur S de S_J d'élément successeur noté $\tilde{\mu}$, on a les hypothèses suivantes (v_0 désigne $v(F(0, \dots, 0))$):

$$v_{S_0 \cup S}^{(J)} = v_{S_0}^{(J)} = v^{(O)} \quad (6.2.2)$$

$$v^{(O)} = \min\{v_{S_0 \cup S}^{(I)} \mid |I| = 1\} \quad (6.2.3)$$

$$v^{(O)} + \tilde{\mu} < \min\{v_k^{(I)} + \tilde{\mu} \mid |I| \geq 2\} \quad (6.2.4)$$

Notation 6.2.2 On note alors :

- \mathcal{A} l'ensemble des multi-indices de longueur 1 vérifiant ces propriétés
- $C_{S_J}^{(J)} x^{v^{(O)}}$ le terme dominant de $f_{S_J}^{(J)}(x, 0, \dots, 0)$
- j_J la position de 1 dans $J = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$
- $S_0 = \bigcup_{J \in \mathcal{A}} S_J$

Définition 6.2.3 Le polynôme annulateur associé à l'équation 6.2.1 et à la multisérie y_0 (sous les hypothèses 6.2.2, 6.2.3, 6.2.4) est :

$$\pi_{S_0}(X) = \sum_{J \in \mathcal{A}} C_{S_0}^{(J)}(X)^{j_J}$$

Lemme 6.2.4 Pour tout segment successeur S de S_0 , on a $\pi_{S_0 \cup S}(X) \equiv \pi_{S_0}(X) \equiv \sum_{J \in \mathcal{A}} C_{S_J}^{(J)}(X)^{j_J}$.

Démonstration. En appliquant la formule de Taylor pour $f^{(I)}$ avec $I \in \mathcal{A}$, on obtient pour tout segment successeur S de S_I , avec $\tilde{\mu}_I$ l'élément successeur de S_I :

$$f_{S \cup S_I}^{(I)} = f_{S_I}^{(I)} + \sum_{|J| \geq 1} \frac{1}{J!} f_{S_I}^{(I+J)} M_{\mu_{S_I+1}} t^{\tilde{\mu}_I} u_{S \cup S_I}$$

avec $v(f_{S \cup S_I}^{(I)}) = v_{S \cup S_I}^{(I)} = v^{(O)} = v_{S_I}^{(I)} = v(f_{S_I}^{(I)})$ (Hypothèse 6.2.2) et $v(u_{S \cup S_I}) = (0, \dots, 0)$. D'après l'Hypothèse 6.2.4, on a donc :

$$f_{S \cup S_I}^{(I)} \sim f_{S_I}^{(I)}$$

et donc $C_{S \cup S_I}^{(I)} = C_{S_I}^{(I)}$ pour tout segment successeur S de S_I . □

Remarque 6.2.5

1) Le polynôme annulateur étant de degré inférieur ou égal à n , il a au plus n racines positives qu'on note $\{\rho_1, \dots, \rho_m\}$ avec $m \leq n$.

2) Dans le cas où F est d'ordre de Weierstrass égal à 1, il existe des multi-indices I tels que $|I| = 1$ et $v(c_I) = (0, \dots, 0)$. On note \mathcal{A} l'ensemble de ces multi-indices, et on a les hypothèses 6.2.2, 6.2.3 et 6.2.4 avec $v^{(O)} = (0, \dots, 0)$ et $S_0 = \emptyset = S_I$ pour tout $I \in \mathcal{A}$. On a alors :

$$\pi_{S_0}(X) = \sum_{J \in \mathcal{A}} f^{(J)}(0)(X)^{j_J}$$

6.3 Démonstration du Théorème 6.1.1

Soit une équation 6.1.1: $F(y, \dots, D_r^n y) = \sum_{I \in \mathbb{N}^{n+1}} c_I y^{(I)_k} = 0$ d'ordre de Weierstrass $w \geq 1$ et

une multisérie $y_0 = y_{0,r} + \dots + y_{0,1} \in \mathcal{M}_r^<$ avec une partie initiale non nulle $y_{0,r} = \sum_{\mu_r > 0} M_{\mu_r} t_r^{\mu_r} \in$

$\mathcal{M}_{r,r}^<$. Le Théorème 6.1.1 résulte du lemme suivant, qui généralise les Lemmes 1.2.4 et 2.2.8 :

Lemme 6.3.1 Posons $v^{(w)} = (0, \dots, 0)$ et $\mathcal{R}_w = \text{Supp } F$. Pour tout $l \in \{0, \dots, w-1\}$. On a deux cas :

- Soit pour tout $l \in \{0, \dots, w-1\}$, il existe un segment initial propre S_l de $\text{Supp } y_{0,r}$, un multi-indice $I_l \in \mathbb{N}^{n+1}$ de longueur $|I_l| = l$ et une constante $v^{(l)} > (0, \dots, 0)$ tels que, pour tout segment successeur S de S_l dans $\text{Supp } y_0$ d'élément successeur $\tilde{\mu}$, on a :

- i) $v_{S \cup S_l}^{(I_l)} = v^{(l)}$
- ii) $v^{(l)} < v^{(l+1)} + \tilde{\mu}$.

iii) $v^{(l)} = \min\{v_{S \cup S_l}^{(I)} \mid I \in \mathbb{N}^{n+1}, |I| = l\}$

De plus, il existe des réels strictement positifs $\{\nu_1^{(l)}, \dots, \nu_{m_l}^{(l)}\}$ avec $0 \leq m_l \leq n+1$ tels que, si on pose $\mathcal{R}_l = \left(\mathcal{R}_{l+1} + \mathcal{T}_r + \left\langle (0, \dots, 0, \nu_1^{(l)}); \dots; (0, \dots, 0, \nu_{m_l}^{(l)}) \right\rangle - v^{(l+1)} \right)_{>(0, \dots, 0)}$, on a $S_l \subseteq \mathcal{R}_l$.

- Soit il existe $l_0 \in \{0, \dots, w-1\}$ tel que pour tout $l \in \{l_0+1, \dots, w-1\}$ on a les propriétés du point précédent et il existe des réels strictement positifs $\{\nu_1^{(l_0)}, \dots, \nu_{m_{l_0}}^{(l_0)}\}$ avec $0 \leq m_{l_0} \leq n$ tels que, si on pose $\mathcal{R}_{l_0} = \left(\mathcal{R}_{l_0+1} + \mathcal{T}_r + \left\langle (0, \dots, 0, \nu_1^{(l_0)}); \dots; (0, \dots, 0, \nu_{m_{l_0}}^{(l_0)}) \right\rangle - v^{(l+1)} \right)_{>(0, \dots, 0)}$, on a $\text{Supp } y_{0,r} \subseteq \mathcal{R}_{l_0}$.

Démonstration. Nous procédons par récurrence descendante sur l .

a) Si $l = w-1$, on a $v^{(l+1)} = v^{(w)} = (0, \dots, 0)$. On note \mathcal{A} l'ensemble des multi-indices $I \in \mathbb{N}^{n+1}$ de longueur w tels que $v(c_I) = (0, \dots, 0)$. Il existe un multi-indice I de longueur $w-1$ tel que $F^{(I)}$ est d'ordre 1. On note \mathcal{A}_{w-1} l'ensemble de ces multi-indices et, pour tout $I \in \mathcal{A}_{w-1}$, \mathcal{A}_I l'ensemble des multi-indices J avec $|J| = 1$ tels que $(I+J) \in \mathcal{A}$. On désigne par $\{\rho_1^{(I)}, \dots, \rho_{m_I}^{(I)}\}$ l'ensemble des racines positives du polynôme annulateur associé à I (cf Remarque 6.2.5). D'après la formule de Taylor, on a pour tout segment initial propre S de $\text{Supp } y_{0,r}$ d'élément successeur $\tilde{\mu} = (0, \dots, 0, \tilde{\mu}_r)$, pour tout segment successeur \tilde{S} de S :

$$f_{S \cup \tilde{S}}^{(I)} = f_S^{(I)} + \left(\pi_I(\tilde{\mu}_r) + b_{S \cup \tilde{S}}^{(I)} \right) M_{\tilde{\mu}} t^{\tilde{\mu}} \quad \text{avec } v \left(b_{S \cup \tilde{S}}^{(I)} \right) > (0, \dots, 0)$$

On applique alors le point *ii*) du Lemme 6.2.1 et on a deux cas :

- Soit pour tout segment initial propre S de $\text{Supp } y_{0,r}$ d'élément successeur $\tilde{\mu}$, on a $\tilde{\mu} = v_S^{(I)}$ ou $\tilde{\mu}_r \in \{\rho_1^{(I)}, \dots, \rho_{m_I}^{(I)}\}$. Montrons par récurrence transfinie (cf Théorème A.0.8) sur l'ensemble bien ordonné $\text{Supp } y_{0,r}$ que $\text{Supp } y_{0,r} \subseteq \mathcal{R}_I = \langle \text{Supp } F \rangle + \mathcal{T}_r + \left\langle (0, \dots, 0, \rho_1^{(I)}); \dots; (0, \dots, 0, \rho_{m_I}^{(I)}) \right\rangle$. On se donne un segment initial propre S de $\text{Supp } y_{0,r}$ d'élément successeur $\tilde{\mu}$. Supposons que $S \subseteq \mathcal{R}_I = \text{Supp } F^{(I)} + \mathcal{T}_r + \left\langle (0, \dots, 0, \rho_1^{(I)}); \dots; (0, \dots, 0, \rho_{m_I}^{(I)}) \right\rangle$. On a $\tilde{\mu} = v_S^{(I)}$ ou $\tilde{\mu} \in \{(0, \dots, 0, \rho_1^{(I)}), \dots, (0, \dots, 0, \rho_{m_I}^{(I)})\}$. D'après la Proposition 4.2.11, $\text{Supp } f_S^{(I)} \subseteq \text{Supp } F^{(I)} + \mathcal{T}_r + \langle S \rangle \subseteq \mathcal{R}_I$ puisque $\text{Supp } F^{(I)} \subseteq \text{Supp } F$. Donc $\tilde{\mu} = v_S^{(I)} \in \mathcal{R}_I$.

On obtient ainsi le deuxième cas du lemme avec $l_0 = w-1$

- Soit il existe un segment initial propre S_I de $\text{Supp } y_{0,r}$ d'élément successeur $\tilde{\mu}^{(I)} = (0, \dots, 0, \tilde{\mu}_r^{(I)})$ tel que $\tilde{\mu}^{(I)} \neq v_{S_I}^{(I)}$ et $\tilde{\mu}_r^{(I)} \notin \{\rho_1^{(I)}, \dots, \rho_{m_I}^{(I)}\}$. On a stabilisation de $v_S^{(I)}$ à $v_{S_I \cup \{\tilde{\mu}^{(I)}\}}^{(I)}$. On note $\hat{v}^{(I)}$ cette valuation stabilisée et on a $\hat{v}^{(I)} \leq \tilde{\mu}^{(I)} < \tilde{\mu}$ pour tout $\tilde{\mu} > \tilde{\mu}^{(I)}$.

Supposons que pour tous les multi-indices de \mathcal{A}_{w-1} on a le deuxième cas de la dichotomie précédente. On pose $S'_{w-1} = \bigcup_{I \in \mathcal{A}_{w-1}} S_I$, $\tilde{\mu}'_{w-1}$ son élément successeur et $S_{w-1} = S'_{w-1} \cup \{\tilde{\mu}'_{w-1}\}$.

On note $v_{S_{w-1}}^{(I')} = \min\{v_{S_{w-1}}^{(I)} \mid I \in \mathcal{A}_{w-1}\}$ qui est bien une valuation stabilisée $v_{S_{w-1}}^{(I')} = \hat{v}^{(I')}$. On a $\hat{v}^{(I')} \leq \tilde{\mu}'_{w-1}$ et donc, si on note $\tilde{\mu}_{w-1}$ l'élément successeur de S_{w-1} , on a $\hat{v}^{(I')} < \tilde{\mu}_{w-1}$. De plus, on montre comme pour le premier cas de la dichotomie précédente par récurrence transfinie sur S_{w-1} que $S_{w-1} \subseteq \mathcal{R}_{w-1} = \text{Supp } F^{(I')} + \mathcal{T}_r + \left\langle (0, \dots, 0, \rho_1^{(I')}); \dots; (0, \dots, 0, \rho_{m_{I'}}^{(I')}); \tilde{\mu}'_{w-1} \right\rangle$.

Pour tout multi-indice I de longueur $|I| = w-1$ avec $I \notin \mathcal{A}_{w-1}$, d'après la formule de Taylor, pour tout segment successeur S de S_{w-1} on a :

$$f_{S_{w-1} \cup S}^{(I)} = f_{S_{w-1}}^{(I)} + b_{S_{w-1} \cup S}^{(I)} M_{\tilde{\mu}_{w-1}} t^{\tilde{\mu}_{w-1}} \quad \text{avec } v \left(b_{S_{w-1} \cup S}^{(I)} \right) > (0, \dots, 0)$$

On a alors deux cas :

- Soit $v_{S_{w-1}}^{(I)} \leq \tilde{\mu}_{w-1}$. D'après l'inégalité triangulaire ultramétrique, on a donc $v_{S_{w-1} \cup S}^{(I)} = v_{S_{w-1}}^{(I)}$. On note $\hat{v}^{(I)}$ cette valuation stabilisée et on a $\hat{v}^{(I)} \leq \tilde{\mu}_{w-1} < \tilde{\mu}$ pour tout $\tilde{\mu} > \tilde{\mu}_{w-1}$.

- Soit $v_{S_{w-1}}^{(I)} > \tilde{\mu}_{w-1}$. D'après l'inégalité triangulaire ultramétrique, on a donc $v_{S_{w-1} \cup S}^{(I)} > \tilde{\mu}_{w-1} > \hat{v}^{(I)}$.

On pose donc $v^{(w-1)} = \min\{v_{S_{w-1}}^{(I)} \mid I \in \mathbb{N}^{n+1}, |I| = w-1\}$ et on a bien $v^{(w-1)} = v_{S_{w-1}}^{(I_{w-1})}$ pour un certain I_{w-1} de longueur $w-1$ (il peut s'agir d'un multi-indice qui n'est pas élément de \mathcal{A}_{w-1}). On obtient le premier cas de l'énoncé du lemme pour $l = w-1$.

b) Soit $l \in \{0, \dots, w-2\}$ et supposons qu'on a le premier cas du lemme prouvé pour les éléments de $\{l+1, \dots, w-1\}$. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe un segment initial propre $\hat{S}_l = \bigcup_{p=l+1}^{w-1} S_p$ tel que, pour tout segment successeur S de \hat{S}_l de successeur $\tilde{\mu}$, on a :

$$v^{(l+1)} + \tilde{\mu} < v^{(l+2)} + 2\tilde{\mu} < \dots < (w-l)\tilde{\mu}$$

et $v^{(l+1)} = \min\{v_{S_{l+1}}^{(I)} \mid I \in \mathbb{N}^{n+1}, |I| = l+1\} = \min\{v_{\hat{S}_l}^{(I)} \mid I \in \mathbb{N}^{n+1}, |I| = l+1\}$. De plus, $\hat{S}_l \subseteq \mathcal{R}_p$ pour un certain entier $p \geq l+1$.

On note \mathcal{A}_l l'ensemble des multi-indices I de longueur l tels qu'il existe un multi-indice J de longueur 1 avec $v_{\hat{S}_l}^{(I+J)} = v^{(l+1)}$. On définit donc pour tout $I \in \mathcal{A}_l$ le polynôme annulateur associé (cf Définition 6.2.3) et on note $\{\rho_1^{(I)}, \dots, \rho_{m_I}^{(I)}\}$ l'ensemble de ses racines strictement positives. D'après la formule de Taylor, on a pour tout segment successeur S de \hat{S}_l d'élément successeur $\tilde{\mu} = (0, \dots, 0, \tilde{\mu}_r)$:

$$f_{\hat{S}_l \cup S \cup \{\tilde{\mu}\}}^{(I)} = f_{\hat{S}_l \cup S}^{(I)} + \left(\pi_I(\tilde{\mu}_r) + b_{\hat{S}_l \cup S}^{(I)} \right) M_{\tilde{\mu}} t^{\tilde{\mu} + v^{(l+1)}} \quad \text{avec } v \left(b_{S \cup \tilde{\mu}}^{(I)} \right) > (0, \dots, 0)$$

On applique alors le point *ii*) du Lemme 6.2.1 et on a alors deux cas :

- Soit pour tout segment successeur S de \hat{S}_l dans $\text{Supp } y_{0,r}$, d'élément successeur $\tilde{\mu}$, on a $\tilde{\mu} + v^{(l+1)} = v_S$ ou $\tilde{\mu}_r \in \{\rho_1^{(I)}, \dots, \rho_{m_I}^{(I)}\}$. On en déduit comme ci-dessus par une récurrence transfinie immédiate sur l'ensemble bien ordonné $\text{Supp } y_{0,r} \setminus \hat{S}_l$ à l'aide de la Proposition 4.2.11 que $\text{Supp } y_{0,r} \setminus \hat{S}_l + v^{(l+1)} \subseteq \text{Supp } F^{(I)} + \mathcal{T}_r + \left\langle (0, \dots, 0, \rho_1^{(I)}); \dots; (0, \dots, 0, \rho_{m_I}^{(I)}) \right\rangle$. Donc on a $\text{Supp } y_{0,r} \setminus \hat{S}_l \subseteq \mathcal{R}_I = \left(\text{Supp } F^{(I)} + \mathcal{T}_r + \left\langle (0, \dots, 0, \rho_1^{(I)}); \dots; (0, \dots, 0, \rho_{m_I}^{(I)}) \right\rangle - v^{(l+1)} \right)_{>(0, \dots, 0)}$, et donc $\text{Supp } y_{0,r} \subseteq \mathcal{R}_I + \mathcal{R}_p$. C'est le deuxième cas du lemme avec $l_0 = l$ puisque $\text{Supp } F^{(I)} \subseteq \text{Supp } F$.

- Soit il existe un segment initial propre de $S_I \supseteq \hat{S}_l$ de $\text{Supp } y_{0,r}$ d'élément successeur $\tilde{\mu}_I$ tel que $\tilde{\mu}_I + v^{(l+1)} \neq v_{S_I}^{(I)}$ et $\tilde{\mu}_I \notin \{\rho_1^{(I)}, \dots, \rho_{m_I}^{(I)}\}$. On a stabilisation de $v_S^{(I)}$ à $v_{S_I \cup \{\tilde{\mu}_I\}}^{(I)}$. On note $\hat{v}^{(I)}$ cette valuation stabilisée et on a $\hat{v}^{(I)} \leq \tilde{\mu}_I < \tilde{\mu}$ pour tout $\tilde{\mu} > \tilde{\mu}_I$.

Supposons que pour tous les multi-indices de \mathcal{A}_l on a le premier cas de la dichotomie précédente. On pose $S'_l = \bigcup_{I \in \mathcal{A}_l} S_I$, $\tilde{\mu}'_l$ son élément successeur et $S_l = S'_l \cup \{\tilde{\mu}'_l\}$. On note $v_{S'_l}^{(I')} = \min\{v_{S'_l}^{(I)} \mid I \in \mathcal{A}_l\}$ qui est bien une valuation stabilisée $v_{S'_l}^{(I')} = \hat{v}^{(I')}$. On a $\hat{v}^{(I')} \leq \tilde{\mu}'_l$ et donc, si on note $\tilde{\mu}_l$ l'élément successeur de S_l , on a $\hat{v}^{(I')} < \tilde{\mu}_l$. De plus, on montre comme pour le premier cas de la dichotomie précédente par récurrence transfinie sur S_l que $S_l \subseteq \mathcal{R}_{I'} + \mathcal{R}_p$.

Pour tout multi-indice I de longueur $|I| = l$ avec $I \notin \mathcal{A}_l$, d'après la formule de Taylor, pour tout segment successeur S de S_l on a :

$$f_{S_l \cup S}^{(I)} = f_{S_l}^{(I)} + b_{S_l \cup S}^{(I)} M_{\tilde{\mu}_l} t^{\tilde{\mu}_l + v^{(l+1)}} \quad \text{avec } v \left(b_{S_l \cup S}^{(I)} \right) > (0, \dots, 0)$$

On a alors deux cas :

- Soit $v_{S_l}^{(I)} \leq \tilde{\mu}_l + v^{(l+1)}$. D'après l'inégalité triangulaire ultramétrique, on a donc $v_{S_l \cup S}^{(I)} = v_{S_l}^{(I)}$. On note $\hat{v}^{(I)}$ cette valuation stabilisée et on a $\hat{v}^{(I)} \leq \tilde{\mu}_l + v^{(l+1)} < \tilde{\mu} + v^{(l+1)}$ pour tout $\tilde{\mu} > \tilde{\mu}_l$.
- Soit $v_{S_l}^{(I)} > \tilde{\mu}_l + v^{(l+1)}$. D'après l'inégalité triangulaire ultramétrique, on a donc $v_{S_l \cup S}^{(I)} > \tilde{\mu}_l + v^{(l+1)} > \hat{v}^{(I)}$.

On pose donc $v^{(l)} = \min\{v_{S_l}^{(I)} \mid I \in \mathbb{N}^{n+1}, |I| = l\}$ et on a bien $v^{(l)} = v_{S_l}^{(I_l)}$ pour un certain I_l de longueur l (il peut s'agir d'un multi-indice qui n'est pas élément de \mathcal{A}_l), et on obtient bien le premier cas de l'énoncé du lemme pour le rang l . \square

On en déduit la démonstration du Théorème 6.1.1 :

Démonstration. On considère une équation bien ordonnée 6.1.1 : $F(y, \dots, D_r^n y) = \sum_{I \in \mathbb{N}^{n+1}} c_I y^{(I)_r} = 0$ avec $F(Y_0, \dots, Y_n) \in \mathcal{M}_r[[Y_0, \dots, Y_n]]$ d'ordre de Weierstrass $w \in \mathbb{N}^*$, et une multisérie $y_0 = y_{0,r} + \dots + y_{0,1} \in \mathcal{M}_r^<$ avec une partie initiale non nulle $y_{0,r} = \sum_{\mu_r > 0} M_{\mu_r} t^{\mu_r} \in \mathcal{M}_{r,r}^<$. Nous

pouvons appliquer le lemme précédent, et on a deux cas :

- Soit $\text{Supp } y_{0,r} \subseteq \mathcal{R}_{l_0}$ pour un $l_0 \in \{0, \dots, w-1\}$. Il suffit alors de remarquer que \mathcal{R}_{l_0} est bien obtenu à partir de $\text{Supp } F$ et \mathcal{T}_r à l'aide d'un nombre fini de transformations élémentaires, et on obtient le premier cas du Théorème 6.1.1.

- Soit dans le premier cas du lemme précédent, on a pour $l = 0$ stabilisation de la valuation v_S à v_{S_0} pour S_0 segment initial propre de $\text{Supp } y_{0,r}$. De plus $S_0 \subseteq \mathcal{R}_0$. Montrons que y_0 ne peut alors être solution de l'équation 6.1.1. On note $\hat{y}_0 = y_0 - p_{S_0}$, $\tilde{\mu}_0$ l'élément successeur de S_0 (qui est donc égal à la valuation de \hat{y}_0) et on applique la formule de Taylor :

$$f(y_0, \dots, D_r^n y_0) = f_{S_0} + M_{\tilde{\mu}_0} t^{\tilde{\mu}_0} \hat{b}_{S_0}$$

avec $v(\hat{b}_{S_0}) \geq (0, \dots, 0)$. Puisque $v(f_{S_0}) = v_{S_0} = v^{(0)} < \tilde{\mu}_0$ on a donc :

$$f(y_0, \dots, D_r^n y_0) = t^{v^{(0)}} U \neq 0 \quad \text{avec } v(U) = (0, \dots, 0)$$

\square

Exemple 6.3.2 Afin d'illustrer la démonstration, nous traitons l'équation d'ordre 1 suivante

$$(1) : (1 - t_3)y - D_3 y - \sum_{k \geq 1} t_3^{\frac{k}{k+1}} = 0$$

avec $t_3 = -\log^{-1}(x)$ et $D_3 y = -x \log(x) y'$ comme précédemment.

On considère une multisérie $y_0 = \sum_{\mu \in \mathbb{R}_+^*} M_\mu t_3^\mu$ et on remarque que pour tout $\mu \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$(1 - t_3) M_\mu t_3^\mu - D_3 (M_\mu t_3^\mu) = M_\mu (1 - \mu) t_3^\mu + M_\mu t_3^{1+\mu}.$$

Le polynôme annulateur associé à (1) est $\pi(\mu) = 1 - \mu$ de racine $\rho = 1$.

Pour tout segment initial de $\text{supp } y_0$, on a stabilisation de la valuation v_S associée à (1) sauf si on a $y_0 = \sum_{k \geq 1} (k+1)t_3^{\frac{k}{k+1}} + \hat{y}_0$ avec $v(\hat{y}_0) \geq 1$. On note $p_{S_0} = \sum_{k \geq 1} (k+1)t_3^{\frac{k}{k+1}}$ et on a alors :

$$(1)_{S_0} : (1-t_3)y - D_3y - \sum_{k \geq 1} (k+1)t_3^{1+\frac{k}{k+1}} = 0$$

Si on note $\tilde{\mu}^{(0)}$ le successeur de S_0 dans $\text{supp } y_0$, on a deux cas possibles (pour lesquels on n'a pas stabilisation de la valuation associée) : $\tilde{\mu}^{(0)} = \rho = 1$ ou $\tilde{\mu}^{(0)} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$. Dans le premier cas, le coefficient M_1 est un réel non nul quelconque. On peut considérer que le deuxième cas correspond à $M_1 = 0$. On obtient ainsi les parties initiales des différentes branches solutions de l'équation (1) : $p_{S_1} = \sum_{k \geq 1} k \geq 1(k+1)t_3^{\frac{k}{k+1}} + M_1 t_3$.

On considère donc l'équation :

$$(1)_{S_1} : (1-t_3)y - D_3y - \sum_{k \geq 1} (k+1)t_3^{1+\frac{k}{k+1}} = 0$$

avec une multisérie $y_{1,0} = \sum_{\mu > 0} M_\mu t_3^\mu$. Pour tout segment initial de $\text{supp } y_{1,0}$, on a stabilisation de

la valuation v_S associée à $(1)_{S_1}$ sauf si on a $y_{1,0} = \sum_{k \geq 1} \frac{-(k+1)^2}{k} t_3^{1+\frac{k}{k+1}} + y_{2,0}$ avec $v(y_{2,0}) \geq 2$.

On note $p_{S_2} = \sum_{k \geq 1} k \geq 1 \frac{-(k+1)^2}{k} t_3^{1+\frac{k}{k+1}}$ et on obtient une nouvelle équation :

$$(1)_{S_1 \cup S_2} : (1-t_3)y - D_3y - \sum_{k \geq 1} \frac{(k+1)^2}{k} t_3^{2+\frac{k}{k+1}} = 0$$

On montre par récurrence que toute solution y_0 de (1) s'écrit :

$$y_0 = \sum_{k \geq 1} (k+1)t_3^{\frac{k}{k+1}} + M_1 t_3 + \sum_{l \geq 1} \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^l (k+1)^{l+1}}{k(2k+1) \cdots (lk+l-1)} t_3^{l+\frac{k}{k+1}} \text{ avec } M_1 \in \mathbb{R}.$$

On a ici $\text{supp } y_0 = \{(0,0, \frac{k}{k+1}) ; k \geq 1\} + \mathbb{N}(0,0,1) \subseteq \text{supp } F + \mathcal{T}_3$ (cf Exemple 4.2.13)

Exemple 6.3.3 Nous considérons l'équation d'ordre de Weierstrass 2 :

$$(1) : F(y, D_3y) = \frac{y^2}{2} - yD_3y - \left(\sum_{k \geq 1} t_3^{\frac{k}{k+1}} \right) y + \left(\sum_{k \geq 1} (k+1)t_3^{\frac{k}{k+1}} \right) D_3y - \sum_{l \geq 1} \sum_{k \geq l} (lk-1)t_3^{\frac{k}{k+1} + \frac{l}{l+1}} - 2t_3 + \sum_{k \geq 1} (4k+3)t_3^{2+\frac{k}{k+1}} = 0$$

On a les équations dérivées partielles de (1) :

$$\begin{cases} F^{(1,0)}(y, D_3y) = y - D_3y - \sum_{k \geq 1} t_3^{\frac{k}{k+1}} = 0 \\ F^{(0,1)}(y, D_3y) = -y + \sum_{k \geq 1} (k+1)t_3^{\frac{k}{k+1}} = 0 \end{cases}$$

On considère une multisérie $y_0 = \sum_{\mu \in \mathbb{R}_+^*} M_\mu t_3^\mu$. Pour tout segment initial de $\text{supp } y_0$, on a

stabilisation de la valuation v_S associée à (1) sauf si on a $y_0 = \sum_{k \geq 1} (k+1)t_3^{\frac{k}{k+1}} + 2t_3 + \hat{y}_0$ avec

$v(\hat{y}_0) > (0,0,1)$. On note $p_{S_0} = \sum_{k \geq 1} (k+1)t_3^{\frac{k}{k+1}}$, $\tilde{\mu}^{(0)} = 1$ et $p_{S_1} = \sum_{k \geq 1} (k+1)t_3^{\frac{k}{k+1}} + 2t_3$. On

obtient $f_{S_1}^{(1,0)} = 0$, $f_{S_1}^{(0,1)} = -t_3$ et l'équation *décalée*:

$$(1)_{S_1} : \frac{y^2}{2} - yD_3y - 2t_3D_3y + \sum_{k \geq 1} (2k+1)t_3^{2+\frac{k}{k+1}} = 0$$

On procède dans $(1)_{S_1}$ à l'*éclatement* $y = t_3z$. On obtient $D_3y = t_3z + t_3D_3z$ et :

$$(\hat{1}) : \frac{-t_3^2}{2}z^2 - t_3^2zD_3z - 2t_3^2z - 2t_3^2D_3z + \sum_{k \geq 1} (4k+3)t_3^{2+\frac{k}{k+1}} = 0$$

On *divise* cette équation par t_3^2 et on obtient une équation d'ordre de Weierstrass 1 :

$$(\tilde{1}) : \frac{z^2}{2} - zD_3z - 2z - 2D_3z + \sum_{k \geq 1} (2k+1)t_3^{2+\frac{k}{k+1}} = 0$$

avec une multisérie associée $z_0 = \sum_{\nu > 0} N_\nu t_3^\nu$ telle que $\nu = \mu - 1$ et $N_\nu = M_{\nu+1}$ pour $\mu > 1$.

Le polynôme annulateur associé est $\pi(\nu) = -2(1+\nu)$ qui n'a pas de racine positive. Pour tout segment initial \tilde{S} de *supp* z_0 , on a stabilisation de la valuation $v_{\tilde{S}}$ associée à $(\tilde{1})$ sauf si on

a $z_0 = \sum_{k \geq 1} \frac{k+1}{2} t_3^{2+\frac{k}{k+1}} + z_{1,0}$ avec $v(z_{1,0}) \geq (0,0,3)$. On note $\tilde{p}_{\tilde{S}_0} = \sum_{k \geq 1} \frac{k+1}{2} t_3^{\frac{k}{k+1}}$ et l'équation

$$\text{d'écalée: } (\tilde{1})_{\tilde{S}_0} : \frac{z^2}{2} - zD_3z + (-2 + \tilde{p}_{\tilde{S}_0} - D_3\tilde{p}_{\tilde{S}_0})z - (2 + \tilde{p}_{\tilde{S}_0})D_3z + \frac{\tilde{p}_{\tilde{S}_0}^2}{2} - \tilde{p}_{\tilde{S}_0}D_3\tilde{p}_{\tilde{S}_0} = 0$$

qu'on peut écrire :

$$(\tilde{1})_{\tilde{S}_0} : \frac{z^2}{2} - zD_3z - \left(2 + \sum_{k \geq 1} \frac{2k+1}{2} t_3^{2+\frac{k}{k+1}}\right)z - \left(2 + \sum_{k \geq 1} \frac{k+1}{2} t_3^{2+\frac{k}{k+1}}\right)D_3z - \sum_{l \geq 1} \sum_{k \geq 1} \frac{(l+1)(5k+3)}{8} t_3^{4+\frac{l}{l+1}+kk+1} = 0$$

On peut continuer la résolution comme dans l'Exemple 6.3.2. On obtient une solution de (1)

correspondante $y_0 = \sum_{k \geq 1} (k+1)t_3^{\frac{k}{k+1}} + 2t_3 + \sum_{k \geq 1} \frac{k+1}{2} t_3^{3+\frac{k}{k+1}} + y_{1,0}$ et on montre que

$$\text{supp } y_0 \subseteq \sum_{k \geq 1} \mathbb{N}(0,0, \frac{k}{k+1}) + \mathbb{N}(0,0,1) = \langle \text{supp } F \rangle + \mathcal{T}_3.$$

6.4 Cas d'un corps de rang 1

Comme annoncé précédemment on en déduit le résultat pour un corps de rang 1 \mathcal{M}_1 . On note t le générateur tel que $v(t) = 1$ et D la dérivation telle que $Da \sim v(a)a$ pour tout $a \in \mathcal{M}_1$.

Corollaire 6.4.1 *Soit une équation bien ordonnée (1) : $F(y, \dots, y^{(n)}) = \sum_{I \in \mathbb{N}^{n+1}} c_I y^{(I)} = 0$ avec*

$$F(Y_0, \dots, Y_n) \in \mathcal{M}_1[[Y_0, \dots, Y_n]]. \text{ Soit } y_0 = \sum_{\mu \in \mathbb{R}} M_\mu t^\mu \in \mathcal{M}_1^\prec \text{ avec } v(y_0) > \max\{0, nv\left(\frac{t'}{t}\right)\}.$$

Alors il existe \mathcal{R} un sous-ensemble bien ordonné de \mathbb{R}_+ obtenu à partir de $\text{supp } F$ et $\left\langle \text{supp } \frac{t'}{\delta(t')} \right\rangle$ par un nombre fini de transformations élémentaires, tel qu'on a deux cas :

- soit $\text{supp } y_0 \subseteq \mathcal{R}$

- soit il existe un segment initial propre $S_0 \subsetneq \text{supp } y_0$ de successeur $\tilde{\mu}^{(0)}$ tel que $S_0 \subseteq \mathcal{R}$ et, pour tout \tilde{S} successeur de S_0 , on a $v_{S_0 \cup \tilde{S}} = v_{S_0 \cup \{\tilde{\mu}^{(0)}\}}$. On dit qu'on a stabilisation de la valuation v_S et, dans ce cas, y_0 ne peut pas être solution de (1).

Démonstration. On remarque que $\frac{Dt}{t} = \frac{\frac{t'}{t}}{\delta\left(\frac{t'}{t}\right)} = \frac{t'}{\delta(t')}$. Etant donnée l'équation (1), on procède au changement de dérivation décrit dans la Proposition 5.2.1. Dans le cas où $v\left(\frac{t'}{t}\right) > 0$, d'après le Corollaire 5.2.7, on obtient une nouvelle équation $(\tilde{1}) : \tilde{F}(y, \dots, D^n y) = 0$. La multisérie associée est y_0 et, d'après la proposition 5.3.13, on a : $\text{supp } \tilde{F} \subseteq \text{supp } F + \mathbb{N}v\left(\frac{t'}{t}\right) + \left\langle \text{supp } \frac{t'}{\delta(t')} \right\rangle$.

Dans le cas où $v\left(\frac{t'}{t}\right) < 0$, on obtient d'après la Proposition 5.3.5 une nouvelle équation $(\tilde{1}) : \tilde{F}(z, \dots, D^n z) = 0$ où $y = \delta\left(\frac{t'}{t}\right)^{-n} z$. D'après la Proposition 5.3.13, on a $\text{supp } \tilde{F} \subseteq \text{supp } F - \mathbb{N}v\left(\frac{t'}{t}\right) + \left\langle \text{supp } \frac{t'}{\delta(t')} \right\rangle$.

Dans les deux cas, on divise l'équation $(\tilde{1})$ par $t^{\min(\text{supp } \tilde{F})}$ et on obtient une équation d'un certain ordre de Weierstrass w :

$$(2) : \begin{cases} G(y, \dots, D^n y) = 0 & \text{avec } y_0 = \sum_{\mu \in \mathbb{R}} M_\mu t^\mu & \left(\text{cas } v\left(\frac{t'}{t}\right) > 0 \right) \\ G(z, \dots, D^n z) = 0 & \text{avec } z_0 = \sum_{\mu \in \mathbb{R}} M_\mu t^{\mu + nv\left(\frac{t'}{t}\right)} & \left(\text{cas } v\left(\frac{t'}{t}\right) < 0 \right) \end{cases}$$

D'après le Théorème 6.1.1, il existe \mathcal{R}_0 un sous-ensemble bien ordonné de \mathbb{R}_+ obtenu à partir de $\text{supp } G$ et $\left\langle \text{supp } \frac{t'}{\delta(t')} \right\rangle$ par un nombre fini de transformations élémentaires, et tel qu'on a deux cas :

- soit $\text{supp } y_0$ (respectivement $\text{supp } z_0$) $\subseteq \mathcal{R}_0$. Or, dans le deuxième cas, $\text{supp } z_0 = \text{supp } y_0 + nv\left(\frac{t'}{t}\right)$. Donc $\text{supp } y_0 \subseteq \mathcal{R}_0 - nv\left(\frac{t'}{t}\right)$.

- soit il existe un segment initial propre $S_0 \subsetneq \text{supp } y_0$ (respectivement $S_0 + nv\left(\frac{t'}{t}\right) \subsetneq \text{supp } z_0$) tel que $S_0 \subseteq \mathcal{R}_0$ et on a stabilisation de la valuation pour l'équation (2) à partir de S_0 (respectivement $S_0 + nv\left(\frac{t'}{t}\right)$). Cela correspond à une stabilisation de la valuation v_S pour l'équation (1) à partir de S_0 dans les deux cas, et on a $S_0 \subseteq \mathcal{R}_0$ dans le premier cas, et $S_0 \subseteq \mathcal{R}_0 - nv\left(\frac{t'}{t}\right)$ dans le deuxième cas pour les mêmes raisons que précédemment. Dans ce cas, y_0 ne peut pas être solution de $(\tilde{1})$, ni donc de (1).

Pour conclure la preuve, on remarque que $\text{supp } G = \text{supp } \tilde{F} - \min\left(\text{supp } \tilde{F}\right) \subseteq \text{supp } F +$

$\mathbb{N}|v\left(\frac{t'}{t}\right)| + \left\langle \text{supp } \frac{t'}{\delta(t')} \right\rangle - \min\left(\text{supp } \tilde{F}\right)$. Donc \mathcal{R}_0 est obtenu à partir de $\text{supp } F$ et $\left\langle \text{supp } \frac{t'}{\delta(t')} \right\rangle$ par un nombre fini de transformations élémentaires.

$$\text{On pose } \mathcal{R} = \begin{cases} \mathcal{R}_0 & \left(\text{cas } v\left(\frac{t'}{t}\right) > 0\right) \\ \mathcal{R}_0 - nv\left(\frac{t'}{t}\right) & \left(\text{cas } v\left(\frac{t'}{t}\right) < 0\right) \end{cases}$$

qui dans les deux cas est obtenu à partir de $\text{supp } F$ et $\left\langle \text{supp } \frac{t'}{\delta(t')} \right\rangle$ par un nombre fini de transformations élémentaires. \square

Nous en déduisons un résultat plus particulier concernant les solutions d'équations *réticulées*:

Définition 6.4.2 Une équation bien ordonnée (1) : $F(y, \dots, y^{(n)}) = \sum_{I \in \mathbb{N}^{n+1}} c_I y^{(I)} = 0$ avec $F(Y_0, \dots, Y_n) \in \mathcal{M}_1[[Y_0, \dots, Y_n]]$ est dite *réticulée* si son support est inclus dans un *réseau* de \mathbb{R}_+ , c'est-à-dire un sous-semi-groupe additif finiment engendré $\Lambda = \langle \lambda_1, \dots, \lambda_r \rangle$ dont les générateurs λ_i sont positifs.

Corollaire 6.4.3 Soit une équation (1) : $F(y, \dots, D^n y) = \sum_{I \in \mathbb{N}^{n+1}} c_I y^{(I)} = 0$ *réticulée*. On suppose de plus que t' a aussi un support inclus dans un réseau. Alors toute solution $y_0 \in \mathcal{M}_1^\prec$ de (1) a un support inclus dans un réseau \mathcal{R} contenant le réseau de l'équation et celui de t' .

Démonstration. Puisque y_0 est solution, on est dans le premier des deux cas du Corollaire 6.4.1. Il nous suffit de montrer que toute transformation élémentaire préserve le fait d'appartenir à un réseau.

C'est trivialement vrai pour la somme de deux réseaux, l'enrichissement par un générateur et la génération comme semi-groupe additif. Pour les translations négatives, il s'agit du résultat du Lemme 2.2.1. De ce lemme on déduit aussi le fait que $\text{supp } \frac{t'}{\delta(t')}$ est inclus dans un réseau contenant $\text{supp } t'$. \square

Chapitre 7

Preuve du théorème principal : cas d'un corps de rang r

7.1 Introduction

Nous démontrons ici le théorème suivant duquel on déduira la preuve du Théorème 5.1.2. On suppose que l'équation est d'ordre de Weierstrass $w \geq 1$ d'après la Proposition 6.1.3.

Théorème 7.1.1 *Soit $k \in \{1, \dots, r\}$ quelconque. Soit une équation bien ordonnée 6.2.1 :*

$$F(y, \dots, D_k^n y) = \sum_{I \in \mathbb{N}^{n+1}} c_I y^{(I)_k} = 0 \text{ avec } F(Y_0, \dots, Y_n) \in \mathcal{M}_r[[Y_0, \dots, Y_n]] \text{ d'ordre de Weierstrass}$$

$w \geq 1$. Soit $y_0 \in \mathcal{M}_r^<$ une solution de 6.2.1 de partie initiale $y_{0,k} = \sum_{\mu \in \{0\}^{k-1} \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^{r-k}} M_\mu t^\mu \in$

$\mathcal{M}_{r,k}^<$.

Alors il existe un sous-ensemble bien ordonné \mathcal{R}_k de $\mathbb{R}_{>(0, \dots, 0)}^r$ obtenu à partir de $\text{Supp } F$, $\mathcal{I}_k, \dots, \mathcal{I}_r$ par un nombre fini de transformations élémentaires tel que $\text{Supp } y_{0,k} \subseteq \mathcal{R}_k$

Démonstration. Nous raisonnons par récurrence descendante sur k . Le cas initial $k = r$ est donné par le Théorème 6.1.1. Pour la preuve de la récurrence, nous nous donnons un $k \in \{1, \dots, r-1\}$, une équation 6.2.1 avec une multisérie associée y_0 de partie initiale $y_{0,k}$, et nous supposons le Théorème 7.1.1 vrai pour toute équation $G(y, \dots, D_l^n y) = 0$ avec une multisérie solution z_0 de partie initiale $z_{0,l}$ pour $l \in \{k+1, \dots, r\}$. Le résultat pour cette équation 6.2.1 est donné par le lemme suivant analogue au Lemme 6.3.1 :

Lemme 7.1.2 *Etant données une équation bien ordonnée 6.2.1 et une solution $y_0 \in \mathcal{M}_r^<$ de partie initiale $y_{0,k} = \sum_{\mu \in \{0\}^{k-1} \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^{r-k}} M_\mu t^\mu \in \mathcal{M}_{r,k}^<$, on pose $v^{(w)} = (0, \dots, 0)$ et $\mathcal{R}_w = \langle \text{Supp } F \rangle$.*

Alors il existe un entier $l_0 \in \{0, \dots, w-1\}$ tel que :

1) Pour tout entier $l \geq l_0 + 1$, il existe un segment initial propre S_l de $\text{Supp } y_{0,r}$, un multi-
indice $I_l \in \mathbb{N}^{n+1}$ de longueur $|I_l| = l$ et une constante $v^{(l)} > (0, \dots, 0)$ tels que, pour tout
segment successeur S de S_l dans $\text{Supp } y_0$ d'élément successeur $\tilde{\mu}$, on a :

- i) $v_{S \cup S_l}^{(I_l)} = v^{(l)}$
- ii) $v^{(l)} < v^{(l+1)} + \tilde{\mu}$.

iii) $v^{(l)} = \min\{v_{S \cup S_l}^{(I)} \mid I \in \mathbb{N}^{n+1}, |I| = l\}$

De plus, il existe une constante $\nu_l \geq (0, \dots, 0)$ et au plus n sous-semi-groupes additifs $\mathcal{R}_{1,l}, \dots, \mathcal{R}_{p_l,l}$ de $\mathbb{R}_{\geq(0,\dots,0)}^r$ obtenus à partir de $\text{Supp } F, \mathcal{T}_k, \dots, \mathcal{T}_r$ par un nombre fini de transformations élémentaires, tels que, si on pose $\mathcal{R}_l = \mathcal{R}_{l+1} + \mathcal{T}_k + \dots + \mathcal{T}_r + \mathcal{R}_{1,l} + \dots + \mathcal{R}_{p_l,l} + \mathbb{N}\nu_l$, on a $S_l \subseteq \mathcal{R}_l$.

2) Il existe au plus n sous-semi-groupes additifs $\mathcal{R}_{1,l_0}, \dots, \mathcal{R}_{p_{l_0},l_0}$ de $\mathbb{R}_{\geq(0,\dots,0)}^r$ obtenus à partir de $\text{Supp } F, \mathcal{T}_k, \dots, \mathcal{T}_r$ par un nombre fini de transformations élémentaires, tels que, si on pose $\mathcal{R}_{l_0} = \mathcal{R}_{l_0+1} + \mathcal{T}_k + \dots + \mathcal{T}_r + \mathcal{R}_{1,l_0} + \dots + \mathcal{R}_{p_{l_0},l_0}$, on a $\text{Supp } y_{0,k} \subseteq \mathcal{R}_{l_0}$.

Nous raisonnons par récurrence descendante sur $l \in \{0, \dots, w-1\}$.

7.2 Preuve du Lemme 7.1.2 : cas $l = w - 1$

On a $v^{(l+1)} = v^{(w)} = (0, \dots, 0)$. On note \mathcal{A} l'ensemble des multi-indices $I \in \mathbb{N}^{n+1}$ de longueur w tels que $v(c_I) = (0, \dots, 0)$. Il existe un multi-indice I de longueur $w-1$ tel que $F^{(I)}$ est d'ordre 1. On note \mathcal{A}_{w-1} l'ensemble de ces multi-indices et, pour tout $I \in \mathcal{A}_{w-1}$, \mathcal{A}_I l'ensemble des multi-indices J avec $|J| = 1$ tels que $(I + J) \in \mathcal{A}$. On désigne par $\{\rho_1^{(I)}, \dots, \rho_{m_I}^{(I)}\}$ l'ensemble des racines positives du polynôme annulateur associé à I (cf Remarque 6.2.5). Etant donné un multi-indice $I \in \mathcal{A}_{w-1}$, d'après la formule de Taylor, on a pour tout segment initial propre S de $\text{Supp } y_{0,k}$ d'élément successeur $\tilde{\mu} = (0, \dots, 0, \tilde{\mu}_r, \dots, \tilde{\mu}_r)$, pour tout segment successeur \tilde{S} de S :

$$f_{S \cup \tilde{S}}^{(I)} = f_S^{(I)} + \left(\pi_I(\tilde{\mu}_k) + b_{S \cup \tilde{S}}^{(I)} \right) M_{\tilde{\mu}} t^{\tilde{\mu}} \text{ avec } v\left(b_{S \cup \tilde{S}}^{(I)}\right) > (0, \dots, 0)$$

On applique alors le point ii) du Lemme 6.2.1 et on a deux cas :

- Soit pour tout segment initial propre S de $\text{Supp } y_{0,k}$ d'élément successeur $\tilde{\mu}$, on a $\tilde{\mu} = v_S^{(I)}$ ou $\tilde{\mu}_k \in \{\rho_1^{(I)}, \dots, \rho_{m_I}^{(I)}\}$.

- Soit il existe un segment initial propre S_I de $\text{Supp } y_{0,k}$ d'élément successeur $\tilde{\mu}^{(I)} = (0, \dots, 0, \tilde{\mu}_k^{(I)}, \dots, \tilde{\mu}_r^{(I)})$ tel que $\tilde{\mu}^{(I)} \neq v_{S_I}^{(I)}$ et $\tilde{\mu}_k^{(I)} \notin \{\rho_1^{(I)}, \dots, \rho_{m_I}^{(I)}\}$. On a stabilisation de $v_S^{(I)}$ à $v_{S_I \cup \{\tilde{\mu}^{(I)}\}}^{(I)}$. On note $\hat{v}^{(I)}$ cette valuation stabilisée et on a $\hat{v}^{(I)} \leq \tilde{\mu}^{(I)} < \tilde{\mu}$ pour tout $\tilde{\mu} > \tilde{\mu}^{(I)}$.

De plus, pour tout segment initial propre S de S_I d'élément successeur $\tilde{\mu}$, on a $\tilde{\mu} = v_S^{(I)}$ ou $\tilde{\mu}_k \in \{\rho_1^{(I)}, \dots, \rho_{m_I}^{(I)}\}$.

Montrons par récurrence transfinie que, suivant les deux cas précédents, $\text{Supp } y_{0,k}$ (respectivement S_I) est inclus dans un sous-semi-groupe additif \mathcal{R}_I de $\mathbb{R}_{\geq(0,\dots,0)}^r$ de la forme :

$$\mathcal{R}_I = \langle \text{Supp } F \rangle + \mathcal{T}_k + \dots + \mathcal{T}_r + \mathcal{R}_{1,I} + \dots + \mathcal{R}_{p_I,I}$$

où p_I est un entier naturel inférieur à n et $\mathcal{R}_{1,I}, \dots, \mathcal{R}_{p_I,I}$ sont des sous-semi-groupe additifs de $\mathbb{R}_{\geq(0,\dots,0)}^r$ obtenus à partir de $\text{Supp } F, \mathcal{T}_k, \dots, \mathcal{T}_r$ par un nombre fini de transformations élémentaires.

On considère un segment initial propre S de $\text{Supp } y_{0,k}$ (respectivement S_I) d'élément successeur $\tilde{\mu}$. Supposons que S est inclus dans un semi-groupe additif \mathcal{R} contenant $\langle \text{Supp } F \rangle, \mathcal{T}_k, \dots, \mathcal{T}_r$. On a deux cas :

- Soit $\tilde{\mu} = v_S^{(I)}$. D'après la Proposition 4.2.11, $\text{Supp } f_S^{(I)} \subseteq \text{Supp } F^{(I)} + \mathcal{T}_k + \langle S \rangle \subseteq \mathcal{R}$ puisque $\text{Supp } F^{(I)} \subseteq \text{Supp } F$. Donc $\tilde{\mu} \in \mathcal{R}$.

- Soit $\tilde{\mu}_k \in \{\rho_1^{(I)}, \dots, \rho_{m_I}^{(I)}\}$. Par exemple on a $\tilde{\mu}_k = \rho_h^{(I)}$. Les calculs que nous faisons dans cette situation sont représentés de façon symbolique dans le cas $r = 2$ et $k = 1$ par la figure ??, dans laquelle les points noirs représentent les éléments du support de y_0 . Les changements de dérivation nécessaires y sont également mentionnés.

On pose $S_h = \{\mu \in \text{Supp } y_{0,k} \mid \mu_k = \rho_h^{(I)}\}$, $\sigma^{(h)} = \min(S_h)$, $S'_h = \{\mu \in \text{Supp } y_{0,k} \mid \mu < \sigma^{(h)}\}$ et $S''_h = S'_h \cup \{\sigma^{(h)}\}$. Montrons qu'il existe un sous-semi-groupe additif $\mathcal{R}_{h,I}$ de $\mathbb{R}_{\geq(0,\dots,0)}^r$ obtenu à partir de $\text{Supp } F, \mathcal{T}_k, \dots, \mathcal{T}_r$ par un nombre fini de transformations élémentaires, tel que $S_h \subseteq \mathcal{R}_{h,I}$.

Pour cela, nous remarquons que $\sigma^{(h)} = (0, \dots, 0, \rho_h^{(I)}, 0, \dots, 0, \sigma_{l,h}, \dots, \sigma_{r,h})$ pour un certain $l > k$ tel que $\sigma_{l,h} \neq 0$ et donc $p_{S_h \setminus \{\sigma^{(h)}\}} = t^{\sigma^{(h)}} \hat{z}_0$ où $\hat{z}_0 = \hat{z}_{0,l} + \dots + \hat{z}_{0,k+1} \in \mathcal{M}_r^<$ de partie initiale $\hat{z}_{0,l} \in \mathcal{M}_{r,l}^<$. Nous nous ramenons à une équation du type $G(z, \dots, D_l^n z) = 0$ dont la multisérie $z_0 = \frac{y_0 - p_{S''_h}}{t^{\sigma^{(h)}}}$ de partie initiale $\hat{z}_{0,l}$ est solution afin d'appliquer l'hypothèse de récurrence générale :

- On effectue la translation $y = y_1 + p_{S''_h}$ qui est bien définie d'après la Proposition 5.3.17. On obtient une équation $F_{S''_h}(y_1, \dots, D_k^n y_1) = 0$ avec une multisérie solution $\tilde{y}_0 = y_0 - p_{S''_h}$ de partie initiale $\tilde{y}_{0,k} = y_{0,k} - p_{S''_h}$. Puisque $S'_h \subseteq S \subseteq \mathcal{R}$, on a :

$$\text{Supp } F_{S''_h} \subseteq \text{Supp } F + \mathcal{T}_k + \langle S''_h \rangle \subseteq \mathcal{R} + \mathbb{N}\sigma^{(h)}$$

- On effectue dans l'équation précédente l'éclatement $y = t^{\sigma^{(h)}} z$ qui est bien défini d'après la Proposition 5.3.2. On obtient une équation $\hat{F}(z, \dots, D_k^n z) = \sum_{J \in \mathbb{N}^{n+1}} \hat{c}_J z^{(J)} = 0$ avec $v(\hat{c}_J) \geq \min\{v(c_I) + |J|\sigma^{(1)} \mid \forall l = 0..n, j_l + \dots + j_n + k_l + \dots + k_n \leq i_l + \dots + i_n \text{ et } |J| = |I| = |K|\}$ (cf Proposition 5.3.2 et le fait que $v(D_k^i t^{\sigma^{(h)}}) = v(t^{\sigma^{(h)}}) = \sigma^{(h)}$ pour tout $i = 0, \dots, n$).

La multisérie solution associée est $z_0 = \frac{\tilde{y}_0}{t^{\sigma^{(h)}}} = \frac{y_0 - p_{S''_h}}{t^{\sigma^{(h)}}} \in \mathcal{M}_r^<$ avec pour partie initiale $z_{0,l} = \frac{p_{S_h \setminus \{\sigma^{(h)}\}}}{t^{\sigma^{(h)}}} \in \mathcal{M}_{r,l}^<$. On a :

$$\text{Supp } \hat{F} \subseteq \text{Supp } F_{S''_h} + \mathbb{N}\sigma^{(h)} + \mathcal{T}_k \subseteq \mathcal{R} + \mathbb{N}\sigma^{(h)}$$

- On effectue le changement de dérivation $\hat{F}(z, \dots, D_k^n z) = \tilde{F}_{k,l}(z, \dots, D_l^n z)$ qui est bien défini d'après le Corollaire 5.2.7 puisque $l > k$. D'après la Proposition 5.2.1 et le Lemme 5.2.2, on a

$$D_k^i z = \sum_{j=1}^i q_{j,i} D_l^j z \text{ où } q_{j,i} \text{ polynôme différentiel en } \frac{d_l}{d_k} \text{ de degré } j, \text{ d'ordre de dérivation } i-1.$$

Or, d'après le lemme 4.2.5, on a $v(q_{j,i}) = \chi^{j,i} = (0, \dots, 0, \chi_m^{j,i}, \dots, \chi_r^{j,i})$ avec $m > k$. Donc le minimum des valuations des coefficients est réalisé pour un multi-indice I avec $|I| \in \mathbb{N}$ pour une valuation qu'on note $\chi^{(0)}$. D'après la Proposition 5.3.8, on a :

$$\text{Supp } \tilde{F}_{k,l} \subseteq \text{Supp } \hat{F} + \mathcal{T}_k \subseteq \mathcal{R} + \mathbb{N}\sigma^{(h)}$$

- On divise l'équation $\tilde{F}_{k,l} = 0$ par $t^{\chi^{(0)}}$ et on obtient une équation $G(z, \dots, D_l^n z) = 0$ d'un certain ordre de Weierstrass $\tilde{w} \in \mathbb{N}^*$. On remarque que $v(\hat{c}_{(0,\dots,0)}) > \chi^{(0)}$ (sinon on obtiendrait une équation $\tilde{F}(z, \dots, D_l^n z) = 0$ d'ordre 0 dont z_0 ne pourrait pas être solution). On a :

$$\text{Supp } G = \text{Supp } \tilde{F}_{k,l} - \chi^{(0)} \subseteq ((\mathcal{R} + \mathbb{N}\sigma^{(h)}) - \chi^{(0)})_{\geq(0,\dots,0)}$$

On applique l'hypothèse de récurrence à l'équation $G(z, \dots, D_l^n z) = 0$ avec la multisérie solution $z_0 \in \mathcal{M}_r^<$ de partie initiale $\hat{z}_{0,l} \in \mathcal{M}_{r,l}^<$. On a $\text{Supp } \hat{z}_{0,l} \subseteq \tilde{\mathcal{R}}_h$ où $\tilde{\mathcal{R}}_h$ est un sous-

semi-groupe additif de $\mathbb{R}_{\geq(0,\dots,0)}^r$ obtenu à partir de $\text{Supp } \tilde{F}, \mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_r$ par un nombre fini de transformations élémentaires. Puisque $\text{Supp } \tilde{F} \subseteq ((\mathcal{R} + \mathbb{N}\sigma^{(h)}) - \chi^{(0)})_{\geq(0,\dots,0)}$, on en déduit que $\tilde{\mathcal{R}}_h$ est obtenu à partir de $\text{Supp } F, \mathcal{T}_k, \mathcal{T}_l, \dots, \mathcal{T}_r$ par un nombre fini de transformations élémentaires.

On obtient un segment initial $S_h''' = \text{Supp } \hat{z}_{0,l} + \sigma^{(h)}$ de S_h qui est inclus dans $\tilde{\mathcal{R}}_h + \sigma^{(h)}$. On note $\tilde{\sigma}^{(h)} = \min(S_h \setminus S_h''')$ et on a $\tilde{\sigma}^{(h)} = (0, \dots, 0, \rho_h^{(I)}, 0, \dots, 0, \tilde{\sigma}_{m,h}, \dots, \tilde{\sigma}_{r,h})$ pour un entier m avec $k \leq m \leq l+1$. On pose $\tilde{S}_h = S_h \setminus S_h'''$, $\tilde{S}'_h = \{\mu \in \text{Supp } y_{0,k} \mid \mu < \tilde{\sigma}^{(h)}\}$ et $\tilde{S}''_h = \tilde{S}'_h \cup \{\tilde{\sigma}^{(h)}\}$. On se ramène alors comme précédemment à une équation du type $G(z, \dots, D_m^n z) = 0$ dont la multisérie $\tilde{z}_O = \frac{y_0 - p_{S_h''}}{t^{\tilde{\sigma}^{(h)}}}$ de partie initiale $\hat{z}_{0,m}$ est solution afin d'appliquer à nouveau l'hypothèse de récurrence générale et on montre que $\text{Supp } \hat{z}_{0,l} \subseteq \tilde{\mathcal{R}}_h$ où $\tilde{\mathcal{R}}_h$ est un sous-semi-groupe additif de $\mathbb{R}_{\geq(0,\dots,0)}^r$ obtenu à partir de $\text{Supp } F, \mathcal{T}_m, \dots, \mathcal{T}_r$ par un nombre fini de transformations élémentaires. Donc $S_h''' \cup (\text{Supp } \hat{z}_{0,l} + \tilde{\sigma}^{(h)}) \subseteq (\tilde{\mathcal{R}}_h + \tilde{\mathcal{R}}_h + \sigma^{(h)})$.

On obtient ainsi de proche en proche que S_h est inclus dans un sous-semi-groupe additif $\mathcal{R}_{h,I}$ de $\mathbb{R}_{\geq(0,\dots,0)}^r$ obtenu à partir de $\text{Supp } F, \mathcal{T}_m, \dots, \mathcal{T}_r$ par un nombre fini de transformations élémentaires. En particulier on a $\tilde{\mu} \in \mathcal{R}_{h,I}$. La récurrence transfinie est donc vérifiée si on suppose que $\mathcal{R}_{h,I} \subseteq \mathcal{R}$.

On obtient donc que $\text{Supp } y_{0,k}$ (respectivement S_I) est inclus dans un sous-semi-groupe additif \mathcal{R}_I de $\mathbb{R}_{\geq(0,\dots,0)}^r$ de la forme :

$$\mathcal{R}_I = \langle \text{Supp } F \rangle + \mathcal{T}_k + \dots + \mathcal{T}_r + \mathcal{R}_{1,I} + \dots + \mathcal{R}_{p_I,I}$$

où $p_I \leq m_I \leq n$ et $\mathcal{R}_{1,I}, \dots, \mathcal{R}_{p_I,I}$ sont des sous-semi-groupe additifs de $\mathbb{R}_{\geq(0,\dots,0)}^r$ obtenus à partir de $\text{Supp } F, \mathcal{T}_k, \dots, \mathcal{T}_r$ par un nombre fini de transformations élémentaires.

Pour conclure la preuve du lemme, on remarque qu'on a deux cas pour les multi-indices $I \in \mathcal{A}_{w-1}$:

1) Soit il existe un multi-indice $I_0 \in \mathcal{A}_{w-1}$ tel que $\text{Supp } y_{0,k} \subseteq \mathcal{R}_{I_0}$. C'est le cas où $l_0 = w-1$ dans l'énoncé du lemme.

2) Soit pour tout $I \in \mathcal{A}_{w-1}$, il existe un segment initial S_I de $\text{Supp } y_{0,k}$ tel qu'on a stabilisation de $v_S^{(I)}$ à $v_{S_I \cup \{\tilde{\mu}^{(I)}\}}^{(I)} = \hat{v}^{(I)}$ et on a $\hat{v}^{(I)} \leq \tilde{\mu}^{(I)} < \tilde{\mu}$ pour tout $\tilde{\mu} > \tilde{\mu}^{(I)}$. De plus, on a $S_I \subseteq \mathcal{R}_I$.

On pose $S'_{w-1} = \bigcup_{I \in \mathcal{A}_{w-1}} S_I$, $\tilde{\mu}'_{w-1}$ son élément successeur et $S_{w-1} = S'_{w-1} \cup \{\tilde{\mu}'_{w-1}\}$. On note $v_{S'_{w-1}}^{(I')} = \min\{v_{S'_{w-1}}^{(I)} \mid I \in \mathcal{A}_{w-1}\}$ qui est bien une valuation stabilisée $v_{S'_{w-1}}^{(I')} = \hat{v}^{(I')}$. On a $\hat{v}^{(I')} \leq \tilde{\mu}'_{w-1}$ et donc, si on note $\tilde{\mu}'_{w-1}$ l'élément successeur de S_{w-1} , on a $\hat{v}^{(I')} < \tilde{\mu}'_{w-1}$.

Pour tout multi-indice I de longueur $|I| = w-1$ avec $I \notin \mathcal{A}_{w-1}$, d'après la formule de Taylor, pour tout segment successeur S de S_{w-1} on a :

$$f_{S_{w-1} \cup S}^{(I)} = f_{S_{w-1}}^{(I)} + b_{S_{w-1} \cup S}^{(I)} M_{\tilde{\mu}'_{w-1}} t^{\tilde{\mu}'_{w-1}} \quad \text{avec } v(b_{S_{w-1} \cup S}^{(I)}) > (0, \dots, 0)$$

On a alors deux cas :

- Soit $v_{S_{w-1}}^{(I)} \leq \tilde{\mu}'_{w-1}$. D'après l'inégalité triangulaire ultramétrique, on a donc $v_{S_{w-1} \cup S}^{(I)} = v_{S_{w-1}}^{(I)}$. On note $\hat{v}^{(I)}$ cette valuation stabilisée et on a $\hat{v}^{(I)} \leq \tilde{\mu}'_{w-1} < \tilde{\mu}$ pour tout $\tilde{\mu} > \tilde{\mu}'_{w-1}$.

- Soit $v_{S_{w-1}}^{(I)} > \tilde{\mu}_{w-1}$. D'après l'inégalité triangulaire ultramétrique, on a donc $v_{S_{w-1} \cup S}^{(I)} > \tilde{\mu}_{w-1} > \hat{v}^{(I)}$.

On pose donc $v^{(w-1)} = \min\{v_{S_{w-1}}^{(I)} \mid I \in \mathbb{N}^{n+1}, |I| = w-1\}$ et on a bien $v^{(w-1)} = v_{S_{w-1}}^{(I_{w-1})}$ pour un certain I_{w-1} de longueur $w-1$ (il peut s'agir d'un multi-indice qui n'est pas élément de \mathcal{A}_{w-1}). De plus $S'_{w-1} \subseteq \mathcal{R}_{I'}$ et donc $S_{w-1} \subseteq \mathcal{R}_{I'} + \mathbb{N}\tilde{\mu}'_{w-1}$ avec $\mathcal{R}_{I'} = \langle \text{Supp } F \rangle + \mathcal{T}_k + \dots + \mathcal{T}_r + \mathcal{R}_{1,I'} + \dots + \mathcal{R}_{p_I,I'}$. On pose $\mathcal{R}_{w-1} = \mathcal{R}_{I'} + \mathbb{N}\tilde{\mu}'_{w-1}$.

7.3 Preuve du Lemme 7.1.2 : récurrence

On considère $l \in \{0, \dots, w-2\}$ et on suppose avoir les propriétés du point 1) du lemme pour les multi-indices I de longueur $|I| \geq l+1$. On a donc l'existence d'un segment initial propre

$\hat{S}_l = \bigcup_{p=l+1}^{w-1} S_p$ tel que, pour tout segment successeur S de \hat{S}_l d'élément successeur $\tilde{\mu}$, on a :

$$v^{(l+1)} + \tilde{\mu} < v^{(l+2)} + 2\tilde{\mu} < \dots < (w-l)\tilde{\mu}$$

et $v^{(l+1)} = \min\{v_{S_{l+1}}^{(I)} \mid I \in \mathbb{N}^{n+1}, |I| = l+1\} = \min\{v_{\hat{S}_l}^{(I)} \mid I \in \mathbb{N}^{n+1}, |I| = l+1\}$. De plus, $\hat{S}_l \subseteq \mathcal{R}_p$ pour un certain entier $p \geq l+1$.

On note \mathcal{A}_l l'ensemble des multi-indices I de longueur l tels qu'il existe un multi-indice J de longueur 1 avec $v_{\hat{S}_l}^{(I+J)} = v^{(l+1)}$. On définit donc pour tout $I \in \mathcal{A}_l$ le polynôme annulateur associé (cf Définition 6.2.3) et on note $\{\rho_1^{(I)}, \dots, \rho_{m_I}^{(I)}\}$ l'ensemble de ses racines strictement positives. D'après la formule de Taylor, on a pour tout segment successeur S de \hat{S}_l d'élément successeur $\tilde{\mu} = (0, \dots, 0, \tilde{\mu}_k, \dots, \tilde{\mu}_r)$:

$$f_{\hat{S}_l \cup S \cup \{\tilde{\mu}\}}^{(I)} = f_{\hat{S}_l \cup S}^{(I)} + \left(\pi_I(\tilde{\mu}_k) + b_{\hat{S}_l \cup S}^{(I)} \right) M_{\tilde{\mu}} t^{\tilde{\mu} + v^{(l+1)}} \quad \text{avec } v \left(b_{S \cup \tilde{\mu}}^{(I)} \right) > (0, \dots, 0)$$

On applique alors le point ii) du Lemme 6.2.1 et on a alors deux cas :

- Soit pour tout segment initial propre S de $\text{Supp } y_{0,k}$ d'élément successeur $\tilde{\mu}$, on a $\tilde{\mu} = v_S^{(I)} + v^{(l+1)}$ ou $\tilde{\mu}_k \in \{\rho_1^{(I)}, \dots, \rho_{m_I}^{(I)}\}$.

- Soit il existe un segment initial propre S_I de $\text{Supp } y_{0,k}$ d'élément successeur $\tilde{\mu}^{(I)} = (0, \dots, 0, \tilde{\mu}_k^{(I)}, \dots, \tilde{\mu}_r^{(I)})$ tel que $\tilde{\mu}^{(I)} + v^{(l+1)} \neq v_{S_I}^{(I)}$ et $\tilde{\mu}_k^{(I)} \notin \{\rho_1^{(I)}, \dots, \rho_{m_I}^{(I)}\}$. On a stabilisation de $v_S^{(I)}$ à $v_{S_I \cup \{\tilde{\mu}^{(I)}\}}^{(I)}$. On note $\hat{v}^{(I)}$ cette valuation stabilisée et on a $\hat{v}^{(I)} \leq \tilde{\mu}^{(I)} + v^{(l+1)} < \tilde{\mu} + v^{(l+1)}$ pour tout $\tilde{\mu} > \tilde{\mu}^{(I)}$. De plus, pour tout segment initial propre S de S_I d'élément successeur $\tilde{\mu}$, on a $\tilde{\mu} + v^{(l+1)} = v_S^{(I)}$ ou $\tilde{\mu}_k \in \{\rho_1^{(I)}, \dots, \rho_{m_I}^{(I)}\}$.

On montre comme dans la section précédente par récurrence transfinie que, suivant les deux cas précédents, $\text{Supp } y_{0,k} + v^{(l+1)}$ (respectivement $S_I + v^{(l+1)}$) est inclus dans un sous-semi-groupe additif \mathcal{R}_I de $\mathbb{R}_{\geq(0,\dots,0)}^r$ de la forme :

$$\mathcal{R}_I = \langle \text{Supp } F \rangle + \mathcal{T}_k + \dots + \mathcal{T}_r + \mathcal{R}_{1,I} + \dots + \mathcal{R}_{p_I,I}$$

où p_I est un entier naturel inférieur à n et $\mathcal{R}_{1,I}, \dots, \mathcal{R}_{p_I,I}$ sont des sous-semi-groupe additifs de $\mathbb{R}_{\geq(0,\dots,0)}^r$ obtenus à partir de $\text{Supp } F, \mathcal{T}_k, \dots, \mathcal{T}_r$ par un nombre fini de transformations élémentaires. Donc $\text{Supp } y_{0,k}$ (respectivement S_I) est inclus dans $(\mathcal{R}_I - v^{(l+1)})_{\geq(0,\dots,0)}$.

On obtient deux cas pour les multi-indices $I \in \mathcal{A}_l$:

1) Soit il existe un multi-indice $I_0 \in \mathcal{A}_l$ tel que $\text{Supp } y_{0,k} \subseteq \mathcal{R}_{I_0}$. C'est le cas où $l_0 = l$ dans l'énoncé du lemme.

2) Soit pour tout $I \in \mathcal{A}_l$, il existe un segment initial propre S_I de $\text{Supp } y_{0,k}$ tel qu'on a stabilisation de $v_S^{(I)}$ à $v_{S_I \cup \{\tilde{\mu}^{(I)}\}}^{(I)} = \hat{v}^{(I)}$ et on a $\hat{v}^{(I)} \leq \tilde{\mu}^{(I)} + v^{(l+1)} < \tilde{\mu} + v^{(l+1)}$ pour tout $\tilde{\mu} > \tilde{\mu}^{(I)}$. De plus, on a $S_I \subseteq (\mathcal{R}_I - v^{(l+1)})_{\geq(0,\dots,0)}$.

On pose $S'_I = \bigcup_{I \in \mathcal{A}_l} S_I$, $\tilde{\mu}'_I$ son élément successeur et $S_l = S'_I \cup \{\tilde{\mu}'_I\}$. On note $v_{S'_I}^{(I')} = \min\{v_{S'_I}^{(I)} \mid I \in \mathcal{A}_l\}$ qui est bien une valuation stabilisée $v_{S'_I}^{(I')} = \hat{v}^{(I')}$. On a $\hat{v}^{(I')} \leq \tilde{\mu}'_I$ et donc, si on note $\tilde{\mu}_l$ l'élément successeur de S_l , on a $\hat{v}^{(I')} < \tilde{\mu}_l + v^{(l+1)}$.

Pour tout multi-indice I de longueur $|I| = l$ avec $I \notin \mathcal{A}_l$, d'après la formule de Taylor, pour tout segment successeur S de S_l on a :

$$f_{S_I \cup S}^{(I)} = f_{S_{w-1}}^{(I)} + b_{S_I \cup S}^{(I)} M_{\tilde{\mu}_{w-1}} t^{\tilde{\mu}_l + v^{(l+1)}} \quad \text{avec } v(b_{S_I \cup S}^{(I)}) > (0, \dots, 0)$$

On a alors deux cas :

- Soit $v_{S'_I}^{(I)} \leq \tilde{\mu}_l + v^{(l+1)}$. D'après l'inégalité triangulaire ultramétrique, on a donc $v_{S_I \cup S}^{(I)} = v_{S'_I}^{(I)}$. On note $\hat{v}^{(I)}$ cette valuation stabilisée et on a $\hat{v}^{(I)} \leq \tilde{\mu}_l + v^{(l+1)} < \tilde{\mu} + v^{(l+1)}$ pour tout $\tilde{\mu} > \tilde{\mu}_l$.

- Soit $v_{S'_I}^{(I)} > \tilde{\mu}_{w-1} + v^{(l+1)}$. D'après l'inégalité triangulaire ultramétrique, on a donc $v_{S_I \cup S}^{(I)} > \tilde{\mu}_l + v^{(l+1)} > \hat{v}^{(I')}$.

On pose donc $v^{(l)} = \min\{v_{S'_I}^{(I)} \mid I \in \mathbb{N}^{n+1}, |I| = l\}$ et on a bien $v^{(l)} = v_{S'_I}^{(I)}$ pour un certain I_l de longueur l (il peut s'agir d'un multi-indice qui n'est pas élément de \mathcal{A}_l). De plus $S'_I \subseteq (\mathcal{R}_{I'} - v^{(l+1)})_{\geq(0,\dots,0)}$ et donc $S_l (\mathcal{R}_{I'} + \mathbb{N}\tilde{\mu}'_I - v^{(l+1)})_{\geq(0,\dots,0)}$ avec $\mathcal{R}_{I'} = \langle \text{Supp } F \rangle + \mathcal{T}_k + \dots + \mathcal{T}_r + \mathcal{R}_{1,I'} + \dots + \mathcal{R}_{p_I',I'}$. On pose $\mathcal{R}_l = \mathcal{R}_{I'} + \mathbb{N}\tilde{\mu}'_I$.

Pour conclure la preuve du lemme, montrons que dans le cas où $l_0 = 0$, y_0 ne pourrait pas être solution de 6.2.1. En effet dans ce cas, on aurait l'existence d'un segment initial propre S_0 de $\text{Supp } y_{0,r}$ et d'une constante $v^{(0)} > (0, \dots, 0)$ tels que, pour tout segment successeur S de S_0 dans $\text{Supp } y_0$ d'élément successeur $\tilde{\mu}$, on aurait $v_{S \cup S_0} = v^{(0)}$ et $v^{(0)} < v^{(1)} + \tilde{\mu}$. En particulier, si on pose $\hat{y}_0 = y_0 - p_{S_0}$, $\tilde{\mu}_0$ l'élément successeur de S_0 (qui est donc égal à la valuation de \hat{y}_0) et on applique la formule de Taylor :

$$f(y_0, \dots, D_k^n y_0) = f_{S_0} + M_{\tilde{\mu}_0} t^{\tilde{\mu}_0} \hat{b}_{S_0}$$

avec $v(\hat{b}_{S_0}) \geq (0, \dots, 0)$. Puisque $v(f_{S_0}) = v_{S_0} = v^{(0)} < \tilde{\mu}_0$ on a donc :

$$f(y_0, \dots, D_k^n y_0) = t^{v^{(0)}} U \neq 0 \quad \text{avec } v(U) = (0, \dots, 0)$$

□

7.4 Preuve du théorème principal

Démonstration. On considère une équation bien ordonnée

$$F(y, \dots, y^{(n)}) = \sum_{I \in \mathbb{N}^{n+1}} c_I y^{(I)_0} = 0 \quad (7.4.1)$$

avec $F(Y_0, \dots, Y_n) \in \mathcal{M}_r[[Y_0, \dots, Y_n]]$ et une multisérie $y_0 = \sum_{\mu \in \mathbb{R}^r} M_\mu t^\mu \in \mathcal{M}_r^\prec$ avec $v(y_0) > \max\{(0, \dots, 0), -nv(d_1)\}$ (cf Corollaire 4.2.7). On écrit $y_0 = y_{0,r} + y_{0,r-1} + \dots + y_{0,1}$ avec, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, $y_{0,k} = \sum_{\mu \in \text{Supp } y_{0,k}} M_\mu t^\mu \in \mathcal{M}_{r,k}^\prec$.

Montrons par récurrence descendante sur $k \in \{1, \dots, r\}$ que :

Lemme 7.4.1 *Si y_0 est solution de l'équation 7.4.1 alors, pour tout $k \in \{1, \dots, r\}$, il existe un sous-ensemble bien ordonné \mathcal{R}_k de $\mathbb{R}_{>(0, \dots, 0)}^r$ obtenu à partir de $\text{Supp } F, \mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_r$ par un nombre fini de transformations élémentaires, tel que $\text{Supp } (y_{0,r} + \dots + y_{0,k}) \subseteq \mathcal{R}_k$*

Démonstration.

• $k = r$: on procède à un changement de dérivation dans 7.4.1 pour se ramener aux hypothèses du Théorème 6.1.1. On a deux cas :

- Si $v(d_1) > (0, \dots, 0)$, on applique le changement de dérivation $F(y, \dots, y^{(n)}) = \tilde{F}_{0,r}(y, \dots, D_r^n y)$ qui est bien défini d'après le Corollaire 5.2.7. On obtient une équation bien ordonnée $\tilde{F}_{0,r}(y, \dots, D_r^n y) = 0$ avec, d'après la Proposition 5.3.13 :

$$\text{Supp } \tilde{F}_{0,r} \subseteq \text{Supp } F + \mathcal{T}_1 + \mathbb{N}v(d_1)$$

- Si $v(d_1) < (0, \dots, 0)$, on procède aux changements d'équation $F(y, \dots, y^{(n)}) = \hat{F}(z, \dots, z^{(n)}) = \tilde{F}_{0,r}(z, \dots, D_r^n z)$ avec $y = d_1^{-n} z$ (cf Proposition 5.3.5). On a d'après la Proposition 5.3.13 :

$$\text{Supp } \tilde{F}_{0,r} \subseteq \text{Supp } \hat{F} + \mathcal{T}_1 - \mathbb{N}v(d_1)$$

La multisérie associée est $z_0 = d_1^n y_0$ de partie initiale $z_{0,r} = d_1^n y_{0,r} \in \mathcal{M}_{r,r}^\prec$ (on a supposé que $v(y_0) > \max\{(0, \dots, 0), -nv(d_1)\}$).

Dans les deux cas, on divise l'équation par $t^{\min(\text{Supp } \tilde{F}_{0,r})}$ et on obtient une équation bien ordonnée $\tilde{F} = 0$ d'un certain ordre de Weierstrass $w \in \mathbb{N}^*$ (on exclut le cas où $w = 0$ puisque y_0 est supposée solution de 7.4.1). On a

$$\text{Supp } \tilde{F} \subseteq \left(\text{Supp } \hat{F} + \mathcal{T}_1 + \mathbb{N}|v(d_1)| - \min \left(\text{Supp } \tilde{F}_{0,r} \right) \right)_{\geq(0, \dots, 0)}$$

On applique le Théorème 6.1.1 avec la multisérie $y_0 \in \mathcal{M}_r^\prec$ de partie initiale $y_{0,r}$ si $v(d_1) > (0, \dots, 0)$ (respectivement avec $z_0 = d_1^n y_0 \in \mathcal{M}_r^\prec$ de partie initiale $z_{0,r} = d_1^n y_{0,r}$ si $v(d_1) < (0, \dots, 0)$) solution de 7.4.1. On obtient l'existence d'un sous-ensemble bien ordonné $\tilde{\mathcal{R}}_r$ de $\mathbb{R}_{>(0, \dots, 0)}^r$ obtenu à partir de $\text{Supp } \tilde{F}$ et \mathcal{T}_r par un nombre fini de transformations élémentaires tel qu'on a $\text{Supp } y_{0,r}$ (respectivement $\text{Supp } z_{0,r}$) $\subseteq \tilde{\mathcal{R}}_r$. Dans le deuxième cas, cela implique que $\text{Supp } y_{0,r} \subseteq \tilde{\mathcal{R}}_r - nv(d_1)$

Etant donné que $\text{Supp } \tilde{F} \subseteq \left(\text{Supp } \hat{F} + \mathcal{T}_1 + \mathbb{N}|v(d_1)| - \min \left(\text{Supp } \tilde{F}_{0,r} \right) \right)_{\geq(0, \dots, 0)}$, on en déduit que $\tilde{\mathcal{R}}_r$ (respectivement $\tilde{\mathcal{R}}_r - nv(d_1)$) est obtenu à partir de $\text{Supp } F, \mathcal{T}_1$ et \mathcal{T}_r par un nombre fini de transformations élémentaires.

$$\text{On pose donc } \mathcal{R}_r = \begin{cases} \tilde{\mathcal{R}}_r & \text{si } v(d_1) > (0, \dots, 0) \\ \tilde{\mathcal{R}}_r - nv(d_1) & \text{si } v(d_1) < (0, \dots, 0) \end{cases}$$

• **Récurrence** : on suppose le lemme vrai jusqu'à un rang $k+1$ et on note \mathcal{R}_{k+1} l'ensemble bien ordonné correspondant. On a $\text{Supp } (y_{0,r} + \dots + y_{0,k+1}) \subseteq \mathcal{R}_{k+1}$. Nous nous ramenons aux hypothèses du Théorème 7.1.1 en procédant aux changements d'équations suivants :

1) On procède dans (1) au changement de dérivation :

- si $v(d_1) > (0, \dots, 0)$, $F(y, \dots, y^{(n)}) = \tilde{F}_{0,k}(y, \dots, D_k^n y)$ (cf Corollaire 5.2.7). On obtient une équation bien ordonnée (1) : $\tilde{F}_{0,k}(y, \dots, D_k^n y) = 0$ avec, d'après la Proposition 5.3.13 :

$$\text{Supp } \tilde{F}_{0,k} \subseteq \text{Supp } F + \mathcal{T}_1 + \mathbb{N}v(d_1)$$

- si $v(d_1) < (0, \dots, 0)$, $F(y, \dots, y^{(n)}) = \hat{F}(z, \dots, z^{(n)}) = \tilde{F}_{0,k}(z, \dots, D_k^n z)$ avec $y = d_1^{-n}z$ (cf Proposition 5.3.5). On obtient une équation bien ordonnée (1) : $\tilde{F}_{0,k}(y, \dots, D_k^n y) = 0$ avec, d'après la proposition 5.3.13,

$$\text{Supp } \tilde{F}_{0,k} \subseteq \text{Supp } F + \mathcal{T}_1 - \mathbb{N}v(d_1)$$

La multisérie associée est $z_0 = d_1^n y_0 \in \mathcal{M}_r^<$ (on a supposé que $v(y_0) > \max\{(0, \dots, 0), -nv(d_1)\}$).

2) On note $S_k = \text{Supp } (y_{0,r} + \dots + y_{0,k+1})$ (respectivement $\tilde{S}_k = \text{Supp } (z_{0,r} + \dots + z_{0,k+1}) = \text{Supp } d_1^n (y_{0,r} + \dots + y_{0,k+1}) = S_k + nv(d_1)$). On procède à la *translation* de S_k (respectivement \tilde{S}_k) dans l'équation précédente qui est bien définie d'après les propositions 5.3.17 et 4.2.4. On obtient une équation $F_{S_k}(y, \dots, D_k^n y) = 0$ (respectivement $\tilde{F}_{\tilde{S}_k}(y, \dots, D_k^n y) = 0$) de support :

$$\begin{aligned} \text{Supp } F_{S_k} &= \text{Supp } \tilde{F} + \langle \text{Supp } S_k \rangle + \mathcal{T}_k \\ &\subseteq \text{Supp } F + \mathcal{T}_1 + \mathbb{N}v(d_1) + \langle \mathcal{R}_{k+1} \rangle + \mathcal{T}_k \\ (\text{respectivement } \text{Supp } \tilde{F}_{\tilde{S}_k} &\subseteq \text{Supp } F + \mathcal{T}_1 - \mathbb{N}v(d_1) + \langle \mathcal{R}_{k+1} \rangle + \mathcal{T}_k) \end{aligned}$$

3) On divise alors l'équation précédente par $t^{\min(\text{Supp } F_{S_k})}$ (respectivement par $t^{\min(\text{Supp } \tilde{F}_{\tilde{S}_k})}$) et on obtient une équation $\tilde{F}(y, \dots, D_k^n y) = 0$ (respectivement $\tilde{F}(z, \dots, D_k^n z) = 0$) d'un certain ordre de Weierstrass $w \in \mathbb{N}$ avec une multisérie associée $\tilde{y}_0 \in \mathcal{M}_r^<$ de partie initiale $\tilde{y}_{0,k} \in \mathcal{M}_{k,r}$ (respectivement $\tilde{z}_0 = d_1^n \tilde{y}_0 \in \mathcal{M}_r^<$ de partie initiale $z_{0,k} = d_1^n \tilde{y}_{0,k} \in \mathcal{M}_{k,r}$).

On applique le Théorème 7.1.1 : on obtient un ensemble bien ordonné $\tilde{\mathcal{R}}_k$ (respectivement $\tilde{\mathcal{R}}_k$) obtenu à partir de $\text{Supp } F_{S_k}$ (respectivement $\text{Supp } \tilde{F}_{\tilde{S}_k}$) et $\mathcal{T}_k, \dots, \mathcal{T}_r$ par un nombre fini de transformations élémentaires, tel que $\text{Supp } y_{0,k} \subseteq \tilde{\mathcal{R}}_k$ (respectivement $\text{Supp } z_{0,k} = \text{Supp } d_1^n y_{0,k} \subseteq \tilde{\mathcal{R}}_k$ et donc $\text{Supp } y_{0,k} \subseteq \tilde{\mathcal{R}}_k - nv(d_1)$).

Pour conclure la preuve du lemme, on pose $\mathcal{R}_k = \begin{cases} \tilde{\mathcal{R}}_k \\ \tilde{\mathcal{R}}_k - nv(d_1) \end{cases}$ et, puisque $\text{Supp } F_{S_k} \subseteq$

$\text{Supp } F + \mathcal{T}_1 + \mathbb{N}v(d_1) + \langle \mathcal{R}_{k+1} \rangle + \mathcal{T}_k$ (respectivement $\text{Supp } \tilde{F}_{\tilde{S}_k} \subseteq \text{Supp } F + \mathcal{T}_1 - \mathbb{N}v(d_1) + \langle \mathcal{R}_{k+1} \rangle + \mathcal{T}_k$), on remarque que dans les deux cas \mathcal{R}_k est obtenu à partir de $\text{Supp } F, \mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_r$ par un nombre fini de transformations élémentaires. \square

Le Théorème 5.1.2 correspond au cas $k = 1$ du lemme précédent. \square

Exemple 7.4.2 Nous illustrons notre propos en traitant l'équation suivante d'ordre de Weierstrass 1 :

$$F(y, y', y'') = 16y - 7xy' + x^2 y'' - x^4 \sum_{k \geq 1} t_3^{2 + \frac{k}{k+1}} - x^5 \sum_{k \geq 1} t_3^{\frac{k}{k+1}} - t_1 \sum_{k \geq 1} x^{1 + \frac{k}{k+1}} = 0 \quad (7.4.2)$$

Nous considérons une multisérie y_0 solution de 7.4.2 avec $v(y_0) > nv(d_1) = (0, 2, 0)$. On peut donc écrire une partie initiale de y_0 sous la forme $y_{0,3} = x^4 \sum_{\mu > 0} M_\mu t_3^\mu$, et nous pratiquons

le changement de dérivation $F(y, y', y'') = \tilde{F}_{0,3}(z, D_3 z, D_3^2 z)$ avec $y = x^4 z$. Ce changement de dérivation s'écrit (en combinant l'éclatement $y = x^4 z$ et le changement de dérivation 5.2.3) :

$$\begin{cases} y &= x^4 z \\ y' &= 4x^3 z + x^3 t_3 D_3 z \\ y'' &= 12x^2 z + x^2(7t_3 + t_3^2) D_3 z + t_3^2 D_3^2 z \end{cases}$$

On obtient, après division par $x^4 t_3^2$, l'équation :

$$\tilde{F}_{0,3}(z, D_3 z, D_3^2 z) = D_3 z + D_3^2 z - \sum_{k \geq 1} t_3^{\frac{k}{k+1}} - x \sum_{k \geq 1} t_3^{-2 + \frac{k}{k+1}} - t_1 \sum_{k \geq 1} x^{1 + \frac{k}{k+1}} = 0 \quad (7.4.3)$$

La multisérie associée est $z_0 = \frac{y_0}{x^4}$ de partie initiale $z_{0,3} = \sum_{\mu > 0} M_\mu t_3^\mu$. Le polynôme annulateur est $\pi(\mu) = \mu + \mu^2$ qui n'admet pas de racine positive. Pour tout segment initial S de z_0 on a stabilisation de la valuation associée v_S sauf si on a $z_{0,3} = \sum_{k \geq 1} \frac{k(2k+1)}{(k+1)^2} t_3^{\frac{k}{k+1}}$. On a donc

$$y_{0,3} = x^4 \sum_{k \geq 1} \frac{k(2k+1)}{(k+1)^2} t_3^{\frac{k}{k+1}}.$$

On procède au translation de $\text{Supp } y_{0,3}$ dans l'équation 7.4.2 et on obtient l'équation suivante :

$$\hat{F}(y, y', y'') = 16y - 7xy' + x^2 y'' - x^5 \sum_{k \geq 1} t_3^{\frac{k}{k+1}} - t_1 \sum_{k \geq 1} x^{1 + \frac{k}{k+1}} = 0 \quad (7.4.4)$$

avec une multisérie associée $\hat{y}_0 = y_0 - y_{0,3}$ (on a conservé le même y pour l'inconnue afin d'alléger les notations). Une partie initiale de \hat{y}_0 s'écrit *a priori* sous la forme $y_{0,2} = \sum_{\mu > 4} x^\mu \sum_{\nu_\mu \in \mathbb{R}} M_{\mu, \nu_\mu} t_3^{\nu_\mu}$.

Nous pratiquons le changement de dérivation $\hat{F}(y, y', y'') = \tilde{F}_{0,2}(z, D_2 z, D_2^2 z)$ avec $y = x^4 z$ qui s'écrit (en combinant l'éclatement $y = x^4 z$ et le changement de dérivation 5.2.3) :

$$\begin{cases} y &= x^4 z \\ y' &= 4x^3 z + x^3 D_2 z \\ y'' &= 12x^2 z + 7x^2 D_2 z + x^2 D_2^2 z \end{cases}$$

On obtient, après division par x^4 , l'équation suivante :

$$\tilde{F}_{0,2}(z, D_2 z, D_2^2 z) = D_2^2 z - x \sum_{k \geq 1} t_3^{\frac{k}{k+1}} - t_1 \sum_{k \geq 1} x^{1 + \frac{k}{k+1}} = 0 \quad (7.4.5)$$

La multisérie associée est notée $\hat{z}_0 = \frac{\hat{y}_0}{x^4}$ de partie initiale $z_{0,2} = \sum_{\mu > 0} x^\mu \sum_{\nu_\mu \in \mathbb{R}} M_{\mu, \nu_\mu} t_3^{\nu_\mu}$ (on a conservé le même μ pour alléger les notations). Le polynôme annulateur associé est $\pi(\mu) = \mu^2$ qui n'admet pas de racine strictement positive.

On a pour tous $\mu, \nu \in \mathbb{R}$, $D_2(x^\mu t_3^\nu) = \mu x^\mu t_3^\nu + \nu x^\mu t_3^{\nu+1}$ et $D_2^2(x^\mu t_3^\nu) = \mu^2 x^\mu t_3^\nu + 2\mu\nu x^\mu t_3^{\nu+1} + \nu(\nu+1)x^\mu t_3^{\nu+2}$. Pour tout segment initial \hat{S} de $z_{0,2}$, on a stabilisation de la valuation associée $\hat{v}_{\hat{S}}$ sauf si on a $z_{0,2} = x \sum_{k \geq 1} t_3^{\frac{k}{k+1}} + z_{1,2}$ avec $v(z_{1,2}) \geq (0, 1, 1)$. On translate l'équation par cette partie initiale et on obtient :

$$\tilde{F}_{1,2}(z, D_2 z, D_2^2 z) = D_2^2 z + x \sum_{k \geq 1} \frac{2k}{k+1} t_3^{1 + \frac{k}{k+1}} + x \sum_{k \geq 1} \frac{k(2k+1)}{(k+1)^2} t_3^{2 + \frac{k}{k+1}} - t_1 \sum_{k \geq 1} x^{1 + \frac{k}{k+1}} = 0 \quad (7.4.6)$$

. On peut alors réitérer ce procédé.

On montre par récurrence qu'une solution \hat{z}_0 de 7.4.5 a nécessairement une partie initiale qui s'écrit $z_{0,2} = x \left(\sum_{k \geq 1} t_3^{\frac{k}{k+1}} - \sum_{k \geq 1} \frac{2k}{k+1} t_3^{\frac{k}{k+1}} \sum_{k \geq 1} \frac{k(2k+1)}{(k+1)^2} t_3^{\frac{k}{k+1}} + \dots \right)$. Cela correspond à une solution y_0 avec comme partie initiale

$$y_{0,2} = x^4 \sum_{k \geq 1} \frac{k(2k+1)}{(k+1)^2} t_3^{\frac{k}{k+1}} + x^5 \left(\sum_{k \geq 1} t_3^{\frac{k}{k+1}} - \sum_{k \geq 1} \frac{2k}{k+1} t_3^{\frac{k}{k+1}} \sum_{k \geq 1} \frac{k(2k+1)}{(k+1)^2} t_3^{\frac{k}{k+1}} + \dots \right).$$

On procède au translation de Supp $y_{0,2}$ dans l'équation 7.4.4 et on obtient l'équation suivante :

$$\tilde{F}(y, y', y'') = 16y - 7xy' + x^2 y'' - t_1 \sum_{k \geq 1} x^{1 + \frac{k}{k+1}} = 0 \quad (7.4.7)$$

avec une multisérie associée $\tilde{y}_0 = y_0 - y_{0,3} - y_{0,2}$. Une partie initiale de \tilde{y}_0 s'écrit *a priori* sous la forme $y_{0,1} = \sum_{\lambda > 0} t_1^\lambda \sum_{\mu_\lambda \in \mathbb{R}} x^{\mu_\lambda} \sum_{\nu_{\lambda, \mu_\lambda} \in \mathbb{R}} M_{\lambda, \mu_\lambda, \nu_{\lambda, \mu_\lambda}} t_3^{\nu_{\lambda, \mu_\lambda}}$. Nous pratiquons le changement de dérivation

$\tilde{F}(y, y', y'') = \tilde{F}_{0,1}(z, D_3 z, D_3^2 z)$ avec $y = x^4 z$ qui s'écrit (en combinant l'éclatement $y = x^4 z$ et le changement de dérivation 5.2.3) :

$$\begin{cases} y &= x^4 z \\ y' &= 4x^3 z + x^2 D_1 z \\ y'' &= 12x^2 z + 6x D_1 z + D_1^2 z \end{cases}$$

On obtient, après division par x^2 , l'équation suivante :

$$\tilde{F}_{0,1}(z, D_1 z, D_1^2 z) = -x D_1 z + D_1^2 z - t_1 \sum_{k \geq 1} x^{\frac{-1}{k+1}} = 0 \quad (7.4.8)$$

La multisérie associée est notée $\tilde{z}_0 = \frac{\tilde{y}_0}{x^4}$ de partie initiale

$z_{0,1} = \sum_{\lambda > 0} t_1^\lambda \sum_{\mu_\lambda \in \mathbb{R}} x^{\mu_\lambda} \sum_{\nu_{\lambda, \mu_\lambda} \in \mathbb{R}} M_{\lambda, \mu_\lambda, \nu_{\lambda, \mu_\lambda}} t_3^{\nu_{\lambda, \mu_\lambda}}$ (on a conservé les mêmes μ_λ et $\nu_{\lambda, \mu_\lambda}$ pour alléger les

notations). Le polynôme annulateur associé est $\pi(\lambda) = \lambda^2$ qui n'admet pas de racine strictement positive.

On a pour tous $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} D_1(t_1^\lambda x^\mu t_3^\nu) &= t_1^\lambda [\lambda x^\mu t_3^\nu + x^{\mu+1} (\mu t_3^\nu + \nu t_3^{\nu+1})] \\ D_1^2(t_1^\lambda x^\mu t_3^\nu) &= t_1^\lambda [\lambda^2 x^\mu t_3^\nu + x^{\mu+1} (2\lambda \mu t_3^\nu + 2\lambda \nu t_3^{\nu+1}) + x^{\mu+2} (\mu(\mu+1) t_3^\nu \\ &\quad + (2\mu\nu + \nu) t_3^{\nu+1} + \nu(\nu+1) t_3^{\nu+2})] \end{cases}$$

$$\text{Donc } -x D_1(t_1^\lambda x^\mu t_3^\nu) + D_1^2(t_1^\lambda x^\mu t_3^\nu) = t_1^\lambda [\lambda^2 x^\mu t_3^\nu + x^{\mu+1} (\lambda(2\mu-1) t_3^\nu + 2\lambda \nu t_3^{\nu+1}) + x^{\mu+2} (\mu^2 t_3^\nu + 2\mu \nu t_3^{\nu+1} + \nu(\nu+1) t_3^{\nu+2})]$$

On a nécessairement $\lambda = 1, \nu = 0$ et donc $-x D_1(t_1 x^\mu) + D_1^2(t_1 x^\mu) = t_1 [x^\mu + (2\mu-1)x^{\mu+1} + \mu^2 x^{\mu+2}]$. Pour tout segment initial \tilde{S} de $z_{0,1}$, on a stabilisation de la valuation associée $\tilde{v}_{\tilde{S}}$ sauf si on a $z_{0,1} = t_1 \sum_{k \geq 1} x^{\frac{-1}{k+1}} + z_{1,1}$ avec $v(z_{1,1}) \geq (1, 0, 0)$. On translate l'équation par cette partie

initiale et on obtient :

$$\tilde{F}_{1,1}(z, D_1 z, D_1^2 z) = -x D_1 z + D_1^2 z - t_1 \sum_{k \geq 1} \frac{k+3}{k+1} x^{\frac{k}{k+1}} + t_1 \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^2} x^{1 + \frac{k}{k+1}} = 0 \quad (7.4.9)$$

. On peut alors réitérer ce procédé.

On montre par récurrence qu'une solution \tilde{z}_0 de 7.4.8 a nécessairement une partie initiale qui s'écrit $z_{0,2} = t_1 \left(\sum_{k \geq 1} x^{\frac{-1}{k+1}} + \sum_{k \geq 1} \frac{k+3}{k+1} x^{\frac{k}{k+1}} - \sum_{k \geq 1} \left(1 + \frac{3}{(k+1)^2} \right) x^{1+\frac{k}{k+1}} + \dots \right)$. Cela correspond à une solution y_0 de 7.4.2 qui s'écrit :

$$\begin{aligned} y_0 = & x^4 \sum_{k \geq 1} \frac{k(2k+1)}{(k+1)^2} \left(\frac{-1}{\log(x)} \right)^{\frac{k}{k+1}} \\ & + x^5 \left(\sum_{k \geq 1} \left(\frac{-1}{\log(x)} \right)^{\frac{k}{k+1}} - \sum_{k \geq 1} \frac{2k}{k+1} \left(\frac{-1}{\log(x)} \right)^{\frac{k}{k+1}} \sum_{k \geq 1} \frac{k(2k+1)}{(k+1)^2} \left(\frac{-1}{\log(x)} \right)^{\frac{k}{k+1}} + \dots \right) \\ & + \exp \left(\frac{-1}{x} \right) \left(\sum_{k \geq 1} x^{3+\frac{k}{k+1}} + \sum_{k \geq 1} \frac{k+3}{k+1} x^{4+\frac{k}{k+1}} - \sum_{k \geq 1} \left(1 + \frac{3}{(k+1)^2} \right) x^{5+\frac{k}{k+1}} + \dots \right) \end{aligned}$$

7.5 Cas des équations réticulées

Nous en déduisons un résultat plus particulier concernant les solutions d'équations *réticulées*

Définition 7.5.1 Une équation bien ordonnée 7.4.1 : $F(y, \dots, y^{(n)}) = \sum_{I \in \mathbb{N}^{n+1}} c_I y^{(I)} = 0$ avec

$F(Y_0, \dots, Y_n) \in \mathcal{M}_r[[Y_0, \dots, Y_n]]$ est dite *réticulée* si son support est inclus dans un *réseau* de $\mathbb{R}_{\geq(0, \dots, 0)}^r$, c'est-à-dire un sous-semi-groupe additif finiment engendré $\Lambda = \langle \lambda_1, \dots, \lambda_r \rangle$ dont les générateurs λ_i sont des éléments de $\mathbb{R}_{>(0, \dots, 0)}^r$.

Corollaire 7.5.2 Soit une équation (1) : $F(y, \dots, y^{(n)}) = \sum_{I \in \mathbb{N}^{n+1}} c_I y^{(I)} = 0$ réticulée. On suppose de plus que les t'_k pour $k \in \{1, \dots, r\}$ ont aussi un support inclus dans un réseau.

Alors toute solution $y_0 \in \mathcal{M}_r^<$ de (1) a un support inclus dans un réseau \mathcal{R} contenant le réseau de l'équation et celui de t'_k .

Démonstration. Il nous suffit de montrer que toute transformation élémentaire préserve le fait d'appartenir à un réseau.

C'est trivialement vrai pour la somme de deux réseaux, l'enrichissement par un générateur et la génération comme semi-groupe additif. Pour les translations négatives, il s'agit du résultat suivant (qui généralise le Lemme 2.2.1) :

Lemme 7.5.3 Soient $\Lambda = \langle \lambda_1, \dots, \lambda_l \rangle$ un réseau de $\mathbb{R}_{\geq(0, \dots, 0)}^r$ engendré par des éléments de $\mathbb{R}_{\geq(0, \dots, 0)}^r$, et $\alpha > (0, \dots, 0)$. Notons $(\Lambda)_{>\alpha}$ l'ensemble (supposé non vide) des éléments de Λ strictement supérieurs à α . Alors il existe $\nu_1, \dots, \nu_s \in \mathbb{R}_{\geq(0, \dots, 0)}^r$ tels que $(\Lambda)_{>\alpha} - \alpha \subset \langle \nu_1, \dots, \nu_s \rangle$.

Démonstration. Nous procédons par récurrence sur l

• $l = 1$: notons $k_0 = \min \{k \in \mathbb{N} \mid k\lambda_1 > \alpha\}$. Tout élément de a de $\Lambda = \langle \lambda_1 \rangle_{>\alpha} - \alpha$ s'écrit $k\lambda_1 - \alpha$ avec $k \in \mathbb{N}$ et $k\lambda_1 > \alpha$, ou encore :

$$a = (k - k_0)\lambda_1 + (k_0\lambda_1 - \alpha)$$

Nous concluons en posant $\nu_1 = \lambda_1$ et $\nu_2 = k_0\lambda_1 - \alpha$.

• Récurrence : supposons le lemme démontré pour des réseaux engendrés par $l - 1$ nombres réels. Considérons un réseau $\Lambda = \langle \lambda_1, \dots, \lambda_l \rangle$ avec $(\Lambda)_{>\alpha}$ non vide. Donc il existe un indice

$i \in \{1, \dots, l\}$ tel que $k\lambda_i > \alpha$ pour au moins un entier positif k . Soit k_0 le plus petit de ces k . Tout élément a de $\langle \Lambda \rangle_{>\alpha} - \alpha$ s'écrit sous la forme:

$$a = \sum_{j \neq i} k_j \lambda_j + k_i \lambda_i - \alpha$$

Si $k_i \geq k_0$, a s'écrit $\sum_{j \neq i} k_j \lambda_j + (k_i - k_0) \lambda_i + k_0 \lambda_i - \alpha$ et appartient à $\langle \lambda_1, \dots, \lambda_r, k_0 \lambda_r - \alpha \rangle$.

Sinon a appartient à l'un des réseaux $\langle \lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, \dots, \lambda_r \rangle_{>(\alpha - k_i \lambda_i)} - (\alpha - k_i \lambda_i)$, $k_i < k_0$, auxquels nous appliquons l'hypothèse de récurrence. \square

De ce lemme on déduit aussi le fait que les \mathcal{T}_k sont aussi inclus dans un réseau contenant les $\text{Supp } t'_k$. \square

Conclusion

Notre travail nous oriente dans trois principales directions de recherche.

1. Nos résultats (Théorèmes 3.3.1, 6.4.1 et 5.1.2) donnent une description qualitative des exposants des séries généralisées solutions d'une large classe d'équations différentielles, à l'instar des résultats de [GS91] (corollaire du théorème 4.1), [Can93] (théorème 1), [CMR05] (théorème 5) et [vdH06] (corollaire 8.38).

Dans [CMR05], F. Cano, R. Moussu et J.-P. Rolin prouvent un théorème de désingularisation des champs de vecteurs en dimension 3 (Théorème 1) le long d'une *trajectoire non oscillante* γ . Pour cela ils associent à γ (dans le cas où celle-ci est *transcendante*) le *corps de Hardy* des germes $\frac{f}{g} \circ \gamma$ avec f, g sont analytiques au point singulier isolé p considéré. Ils montrent alors que ce corps valué est isomorphe au corps des *fonctions méromorphes* en p , et considèrent les différents cas pour le *rang* (le nombre de classes archimédiennes dans le groupe de valuation) et le *rang rationnel* (le nombre maximum de valuations rationnellement indépendantes) associés à γ . En particulier, le Théorème 5 joue un rôle essentiel dans les cas où le rang rationnel de γ est strictement inférieur à la dimension 3 de la variété considérée. Dans les cas où ce rang est supérieur, la réduction des singularités est connue pour une variété de dimension finie quelconque (cf Théorème 4 de [CMR05]). Dans le chapitre 3, notre Théorème 3.3.1 généralise leur Théorème 5 dans la même optique que la preuve du théorème de désingularisation, mais dans le cas d'une variété de dimension quelconque finie.

D'autre part, l'utilisation des corps de Hardy (étant donné leur connexion avec les structures o-minimales, les H-fields et les transséries comme nous l'avons décrit dans l'introduction) conduit à considérer des corps différentiels valués abstraits. Actuellement F. Cano et C. Roche travaillent sur une généralisation du Théorème 1 (toujours en dimension 3) au cas d'une valuation abstraite définie sur les germes de fonctions méromorphes réelles au voisinage d'un point singulier :

Quelle est la généralisation du théorème de désingularisation de [CMR05] au cas d'une valuation abstraite associée au corps des fonctions méromorphes définies au voisinage du point singulier ?

Notre Théorème 5.1.2 pourrait représenter un progrès dans ce sens : il serait intéressant de *comprendre l'effet sur les champs de vecteurs des transformations que nous utilisons pour réduire les équations (translations, éclatements, changements de dérivations)*.

2. Une autre direction de recherche nous est donnée par notre méthode de démonstration. Celle-ci a des aspects que nous pouvons qualifier de constructifs (cf exemples 6.3.2 et 7.4.2) qui mériteraient d’être précisés. On devrait pouvoir obtenir un algorithme permettant de déterminer le nombre et la forme des différentes branches solutions d’une équation donnée.

Pour cela il faudrait d’abord répondre aux deux problèmes suivants :

- *minimiser la puissance des éclatements intervenant lors des changements de dérivation* (la condition que nous nous donnons pour les changements de dérivation dans la Proposition 5.3.5 est suffisante mais non nécessaire)

- *déterminer l’ordre de Weierstrass des équations obtenues après changement de dérivation* (nous pouvons montrer que l’ordre de Weierstrass d’une équation est stable par éclatement et par translation, mais pas par changement de dérivation)

On pourrait ainsi déterminer précisément le nombre de nouveaux générateurs adjoints au support de l’équation et aux \mathcal{T}_k . Un tel résultat nous conduirait à voir en les multiséries de bons candidats pour être *les représentants formels des germes de fonctions des corps de Hardy de rang fini*. En effet, des exemples importants de ces corps sont ceux naturellement associés aux solutions d’équations différentielles polynomiales (cf section 3 dans [Ros83] : $\mathbb{R}\langle y \rangle = \mathbb{R}\langle y, y', y'' \dots \rangle$ le plus petit corps stable par dérivation et contenant \mathbb{R} et y solution d’une équation différentielle polynomiale, est un corps de Hardy de rang fini). La valuation et la dérivation d’un corps de Hardy quelconque vérifient les Hypothèses 4.1.15 (cf Théorème 0 pour l’Hypothèse (H_1) et les Propositions 3 et 4 pour l’Hypothèse (H_2)). Et les corps de Hardy de rang fini admettent une *échelle asymptotique finiment engendrée* (cf section 4 de [Ros83]).

3. La troisième direction de recherche que nous envisageons est *la généralisation de notre résultat au cas de rang infini*. D’une part il s’agirait, en se donnant comme dans notre cas une équation dont les coefficients appartiennent à un corps de rang fini, de *comprendre quel degré de complexité peut atteindre une solution qu’on supposerait appartenir à un corps de rang infini*.

D’autre part, on pourrait traiter le cas où les coefficients de l’équation appartiennent à un corps de rang infini. Autrement dit : *quel est le lien entre le support de l’équation et celui de la solution dans le cas d’un corps de rang infini ?*

Cela nous permettrait non plus de supposer *donné le corps* auquel appartient la solution mais de *chercher toutes les solutions possibles*.

Le théorème d’immersion de Hahn dans [Hah07] s’applique à tout groupe ordonné Γ , y compris de rang infini (c’est-à-dire avec une infinité de classes archimédiennes). Dans ce cas, on peut considérer le produit de Hahn $H_\Gamma = \mathbb{R}^{[\Gamma]}$ ordonné lexicographiquement où $[\Gamma]$ est l’ensemble des classes archimédiennes de Γ , et le corps de séries généralisées à support bien ordonné associé $\mathbb{R}\langle\langle t^{H_\Gamma} \rangle\rangle$.

La première difficulté à laquelle nous sommes confrontés est celle de définir une “bonne” dérivation sur le corps (c’est-à-dire une dérivation vérifiant au moins nos hypothèses 4.1.15 voire celles de définition des H-fields ou d’autres). On trouve dans la récente thèse de J.M. Blanco Marañá (Valladolid 2006) une étude détaillée de cette question, avec notamment le cas de dérivations vérifiant une règle de l’Hopital comme dans le cas des pré-H-fields (cf 4.1.16).

Dans la même optique, nous pouvons aussi essayer d'appliquer notre méthode au corps des transséries (cf [vdH97]). Pour cela, nous devons d'abord déterminer sous quelles conditions nous pouvons obtenir les Hypothèses 4.1.15.

Annexe A

Ensembles bien ordonnés et récurrence transfinie

Nous rappelons quelques définitions et résultats fondamentaux concernant la théorie du bon ordre. Pour les démonstrations et une vue d'ensemble plus complète, nous renvoyons à [Bou70] et à [Kri69].

Définition A.0.4 On dit qu'un ensemble E est *bien ordonné* s'il est ordonné et si toute partie non vide de E admet un plus petit élément.

Un ensemble bien ordonné est *totalelement ordonné*.

La notion fondamentale associée à celle de bon ordre est :

Définition A.0.5 Dans un ensemble ordonné E , on appelle *segment initial* de E toute partie S de E telle que les relations $x \in S$, $y \in E$ et $y \leq x$ entraînent $y \in S$.

Toute intersection ou toute réunion de segments initiaux de E est un segment initial de E . L'ensemble E et l'ensemble vide sont eux-mêmes des segments initiaux de E .

On montre que :

Proposition A.0.6 *Dans un ensemble bien ordonné E , tout segment initial propre S de E (c'est-à-dire tel que $S \subsetneq E$) est un intervalle] \leftarrow , a [pour un certain élément a de E . On le note S_a .*

De plus, puisque E bien ordonné admet un plus petit élément e , tout segment initial propre de E est de la forme $]e, a[$ pour un élément a de E .

L'introduction de la notion de segment initial est justifiée par la proposition suivante :

Proposition A.0.7 *L'ensemble E^* des segments initiaux d'un ensemble bien ordonné E est bien ordonné pour l'inclusion ; l'application $x \mapsto S_x$ est un isomorphisme de l'ensemble bien ordonné E sur l'ensemble des segments initiaux propres de E .*

et par le principe de récurrence transfinie :

Théorème A.0.8 *Soit un ensemble bien ordonné E . Soit \mathcal{P} une propriété sur les ensembles telle qu'on a la relation :*

$$(x \in E \text{ et } \mathcal{P}(S_x) \text{ vraie}) \Rightarrow \mathcal{P}(S_x \cup \{x\}) \text{ vraie}$$

Alors $\mathcal{P}(E)$ est vraie.

La notion de bon ordre se situe aux fondements-mêmes de la théorie des ensembles.

Théorème A.0.9 (Zermelo) *Sur tout ensemble il existe un bon ordre.*

Ce théorème est équivalent à l'*axiome du choix* :

(AC) : *pour chaque ensemble E dont les éléments sont non vides et disjoints deux à deux, il existe un ensemble F dont l'intersection avec chaque élément de E est un ensemble à un seul élément.*

dont on peut donner d'autres énoncés équivalents :

(AC') : *pour tout ensemble E , il existe une application h de l'ensemble des parties non vides de E dans E telle que $h(X) \in X$ pour toute partie X non vide de E .*

(AC'') : *le produit d'une famille d'ensembles non vides est non vide.*

Bibliographie

- [AvdD00] Matthias Aschenbrenner and Lou van den Dries, *Closed asymptotic couples*, J. Algebra **225** (2000), no. 1, 309–358.
- [AvdD02] ———, *H-fields and their Liouville extensions*, Math. Z. **242** (2002), no. 3, 543–588.
- [AvdD05a] ———, *Asymptotic differential algebra*, Analyzable functions and applications, Contemp. Math., vol. 373, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005, pp. 49–85.
- [AvdD05b] ———, *Liouville closed H-fields*, J. Pure Appl. Algebra **197** (2005), 83–139.
- [Bou70] N. Bourbaki, *Éléments de mathématique. Théorie des ensembles*, Hermann, Paris, 1970.
- [Can93] José Cano, *On the series defined by differential equations, with an extension of the Puiseux polygon construction to these equations*, Analysis **13** (1993), no. 1-2, 103–119.
- [CMR05] F. Cano, R. Moussu, and J.-P. Rolin, *Non-oscillating integral curves and valuations*, J. Reine Angew. Math. **582** (2005), 107–141.
- [DG87] Bernd I. Dahn and Peter Göring, *Notes on exponential-logarithmic terms*, Fund. Math. **127** (1987), no. 1, 45–50.
- [É92] Jean Écalle, *Introduction aux fonctions analysables et preuve constructive de la conjecture de Dulac*, Actualités Mathématiques. [Current Mathematical Topics], Hermann, Paris, 1992.
- [GS91] D. Y. Grigoriev and M. F. Singer, *Solving ordinary differential equations in terms of series with real exponents*, Transactions Amer. Math. Soc. **327** (1991), no. 1, 329–351.
- [Hah07] H. Hahn, *Über die nichtarchimedischen Größensystem*, Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften, Mathematisch - Naturwissenschaftliche Klasse (Wien) **116** (1907), no. Abteilung IIa, 601–655.
- [Har11] G. H. Hardy, *Properties of logarithmico-exponential functions*, Proceedings of the London Mathematical Society **10** (1911), no. 2, 54–90.
- [Har71] ———, *Orders of infinity. The infinitär-calcül of Paul du Bois-Reymond*, Hafner Publishing Co., New York, 1971, Reprint of the 1910 edition, Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, No. 12.
- [KK83] Ludger Kaup and Burchard Kaup, *Holomorphic functions of several variables*, de Gruyter Studies in Mathematics, vol. 3, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1983, An introduction to the fundamental theory, With the assistance of Gottfried Barthel, Translated from the German by Michael Bridgland.
- [KKS97] Franz-Viktor Kuhlmann, Salma Kuhlmann, and Saharon Shelah, *Exponentiation in power series fields*, Proc. Amer. Math. Soc. **125** (1997), no. 11, 3177–3183.

- [KP02] Steven G. Krantz and Harold R. Parks, *A primer of real analytic functions*, second ed., Birkhäuser Advanced Texts: Basler Lehrbücher. [Birkhäuser Advanced Texts: Basel Textbooks], Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2002.
- [Kri69] Jean-Louis Krivine, *Théorie axiomatique des ensembles*, Collection SUP: “Le Mathématicien” 1, Presses Universitaires de France, Paris, 1969.
- [Kuh00] Salma Kuhlmann, *Ordered exponential fields*, Fields Institute Monographs, vol. 12, American Mathematical Society, Providence, RI, 2000.
- [LR97] J.-M. Lion and J.-P. Rolin, *Théorème de préparation pour les fonctions logarithmico-exponentielles*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **47** (1997), no. 3, 859–884.
- [MR06] Mickaël Matusinski and Jean-Philippe Rolin, *Generalised power series solutions of sub-analytic differential equations*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **342** (2006), no. 2, 99–102.
- [Ros80] Maxwell Rosenlicht, *Differential valuations*, Pacific J. Math. **86** (1980), no. 1, 301–319.
- [Ros81] ———, *On the value group of a differential valuation. II*, Amer. J. Math. **103** (1981), no. 5, 977–996.
- [Ros83] ———, *The rank of a Hardy field*, Trans. Amer. Math. Soc. **280** (1983), no. 2, 659–671.
- [SS95] Bruno Salvy and John Shackell, *Asymptotic forms and algebraic differential equations*, J. Symbolic Comput. **20** (1995), no. 2, 169–177.
- [SS99] ———, *Symbolic asymptotics: multiserries of inverse functions*, J. Symbolic Comput. **27** (1999), no. 6, 543–563.
- [vdD84] Lou van den Dries, *Remarks on tarski’s problem concerning $(\mathbf{R}, +, \cdot, \exp)$* , Logic colloquium ’82 (Florence, 1982), North-Holland, Amsterdam, 1984, pp. 97–121.
- [vdD86] ———, *A generalization of the Tarski-Seidenberg theorem, and some nondefinability results*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **15** (1986), no. 2, 189–193.
- [vdDMM94] Lou van den Dries, Angus Macintyre, and David Marker, *The elementary theory of restricted analytic fields with exponentiation*, Ann. of Math. (2) **140** (1994), no. 1, 183–205.
- [vdDMM97] ———, *Logarithmic-exponential power series*, J. London Math. Soc. (2) **56** (1997), no. 3, 417–434.
- [vdH97] Joris van der Hoeven, *Asymptotique automatique*, Université Paris VII, Paris, 1997, Thèse, Université Paris VII, Paris, 1997, With an introduction and a conclusion in French.
- [vdH02] ———, *A differential intermediate value theorem*, Differential equations and the Stokes phenomenon, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 2002, pp. 147–170.
- [vdH06] J. van der Hoeven, *Transseries and real differential algebra*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1888, Springer-Verlag, Berlin, 2006.