



HAL
open science

Modélisation fractale des réseaux électriques

Octavian Enacheanu

► **To cite this version:**

Octavian Enacheanu. Modélisation fractale des réseaux électriques. Sciences de l'ingénieur [physics]. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 2008. Français. NNT: . tel-00366184

HAL Id: tel-00366184

<https://theses.hal.science/tel-00366184>

Submitted on 6 Mar 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Remerciements

Le travail présenté dans ce mémoire a été réalisé dans l'équipe « Systèmes et réseaux électriques » du Laboratoire de Génie Electrique de Grenoble.

Je tiens à exprimer mes sincères remerciements à :

Monsieur Alain OUSTALOUP, Professeur à l'ENSEIRB pour avoir accepté d'être rapporteur de cette thèse ainsi que pour tous les questions, discussions et son soutien.

Monsieur Hubert PIQUET, Professeur à l'ENSEEIH pour avoir accepté d'être rapporteur de cette thèse et pour ses questions très pertinentes.

Monsieur Daniel ROYE, Professeur à l'INPG pour avoir accepté de présider le jury de ma soutenance de thèse, pour son soutien et ses conseils et aussi de m'avoir accueilli au sien de l'équipe SYREL.

Monsieur Christophe KIENY, ingénieur de recherche à EDF, d'avoir participé dans le jury de ma soutenance et pour ses conseils et questions.

Je remercie à Nicolas RETIERE, Professeur à l'UFR de Physique, pour avoir dirigé mon travail de thèse, pour la confiance qu'il m'a montré, pour son esprit critique, pour sa rigueur, son implication et surtout pour ces encouragements.

Je remercie à Delphine RIU, Maître de Conférence à l'INPG pour avoir encadrée mes travaux de thèse, pour ses compétences, son professionnalisme, sa disponibilité et son amitié. Je lui remercie particulièrement pour son soutien, son aide et ses appuis pendant la dernière année.

Je remercie également à Monsieur Mircea EREMIA et à Monsieur Constantin BULAC, Professeurs à l'Université Polytechnique de Bucarest pour m'avoir « forcé » et envoyé en tant qu'étudiant Erasmus. Un grand merci à vous deux car grâce à vous j'ai commencé et je continu à m'intéresser aux réseaux électriques.

Monsieur Seddik BACHA, Professeur à l'UJF pour m'avoir accueilli au sien de l'équipe SYREL, pour son humour, les repas d'équipe et pour son amitié.

Je voudrais aussi remercier les permanents du laboratoire, le service technique, informatique et administratif pour leur aide, leurs conseils et les bons moments passés ensembles.

Je remercie à tous les doctorants du G2Elab pour les bons moments passés ensemble pendant plus de quatre années.

Tout particulièrement je tiens remercier à Adrian Manescu, Benjamin, Bianca, Christina, Costy, Cristi, Dan, Didier, Delcho, Erwan, Iulian, Jérémie, Léa, Maria Andreica, Maria Viziteu, Michael, Monica, Nicolas (mon « premier » chef au G2Elab), Petre, Raphael, Stefan, Sylvie, Vanya.

Je remercie à ma famille qui même loin m'a encouragé et soutenu pendant toutes ces années.

Je ne peux pas finir sans remercier à mon frère, Bogdan. Il m'as beaucoup encouragé, aidé et soutenu tous ces années loin de ma famille. Sans lui je ne sais pas si j'étais capable d'arriver à écrire ces remerciements.

SOMMAIRE

Introduction générale	11
Chapitre I	15
L'évolution des réseaux électriques. Problèmes posés par leur modélisation dynamique.	15
<i>I.1. Les réseaux électriques actuels et leur évolution</i>	18
I.1.1. Le réseau électrique de distribution	18
I.1.2. Les réseaux électriques embarqués	20
<i>I.2. Le problème de la modélisation dynamique</i>	21
I.2.1 Pourquoi modéliser les réseaux électriques	21
I.2.2. Quelques techniques de réduction d'ordre des modèles.....	22
I.2.2. La modélisation d'ordre non entier.....	23
<i>I.3. Vers une modélisation fractale des réseaux électriques ?</i>	25
Chapitre II	28
Systèmes à invariance d'échelle et dérivation fractionnaire	28
<i>II.1 Introduction</i>	30
<i>II.2 Les objets fractals</i>	30
II.2.1 Quelques généralités.....	30
II.2.2 Classification des objets fractals.....	32
II.2.3 Définition de la dimension fractale	33
II.2.3.1 Notions de dimension et mesure en géométrie euclidienne	33
II.2.3.2 Dimension fractale ou de Hausdorff.....	34
II.2.3.3 Détermination de la dimension fractale	36
II.2.3.4 Classification des fractales par leur dimension de Hausdorff.....	39
II.2.4 Conclusion sur les objets fractals	41
<i>II.3 Invariance d'échelle dans les phénomènes diffusifs</i>	42
II.3.1 Le mouvement Brownien	42
II. 3.2 Invariance d'échelle et phénomène diffusif.....	43
II.3.3 Cas de la diffusion du champ magnétique – Lien avec les systèmes d'ordre non entier	44
<i>II.4 Un outil mathématique adapté à la modélisation des systèmes à invariance d'échelle : les systèmes d'ordre non entier</i>	47
II.4.1 Définition de la dérivation non entière	47
II.4.1.1 Définition de Grünwald – Letnikov [POD 99]	47
II.4.1.2 Définition de Riemann – Liouville [POD 99].....	49
II.4.1.3 Caractères implicite et explicite de la dérivation d'ordre non entier	49
II.4.2 Transformée de Laplace de la dérivée d'ordre non entier	50
II.4.3 Analyse de systèmes d'ordre 1/2	51
II.4.3.1 Analyse dans le domaine fréquentiel	51
II.4.3.2 Analyse temporelle : étude de systèmes fractionnaire	53
<i>II.5 Conclusion</i>	54
Chapitre III	56
Application aux réseaux électriques	56
<i>III.1 Introduction</i>	58
<i>III.2 Application et caractérisation des structures fractales</i>	58
III.2.1 Etat de l'art des domaines d'applications.....	59
III.2.2 Etat de l'art des méthodes de caractérisation	60

III.3 Invariance d'échelle dans les réseaux électriques.....	61
III.3.1 La fractale de Cantor.....	62
III.3.2 Présentation du réseau électrique dérivé de la fractale de Cantor.....	63
III.3.3 Etude analytique de l'impédance d'entrée.....	66
III.3.3.1 Comportements asymptotiques de l'impédance d'entrée.....	66
III.3.3.2 Comportement CPA de l'impédance d'entrée.....	67
III.3.4 Bande passante du comportement « CPA ».....	71
III.3.5 Influence des paramètres du réseau électrique sur le comportement CPA.....	75
III.3.5.1 Influence des paramètres (RLC).....	75
III.3.5.2 Autres influences.....	77
III.3.6 Réponse fréquentielle d'un réseau électrique réel.....	78
III.4 Conclusion.....	80
Chapitre IV.....	82
Eléments théoriques de la stabilité d'un système d'ordre non entier.....	82
IV.1. Introduction.....	85
IV.2. Analyse de stabilité par approche modale.....	87
IV.2.1 Construction d'un système d'état généralisé.....	87
IV.2.1.1 Equation différentielle décrivant un système dynamique.....	87
IV.2.1.2 Changement de variables.....	88
IV.2.1.3 Construction du système d'état généralisé.....	89
IV.2.2 Valeurs propres et condition de stabilité.....	90
IV.2.2.1 Valeurs propres et vecteurs propres associés.....	90
IV.2.2.2 Condition de stabilité.....	94
IV.2.3 Facteurs de participation et sensibilités.....	95
IV.2.3.1 Facteurs de participation.....	95
IV.2.3.2 Matrices de sensibilité.....	96
IV.2.4 Comportement asymptotique d'un système d'état généralisé.....	96
IV.2.5 Application de l'analyse modale à l'étude de stabilité d'un système non entier.....	99
IV.3 Conclusions.....	102
Chapitre V.....	103
Etude de stabilité d'un système de génération électrique.....	103
V.1. Introduction.....	106
V.2. Modélisation de la machine synchrone à l'aide de systèmes d'ordre non entier.....	106
V.2.1. Préambule : représentation de Park d'une machine synchrone.....	106
V.2.2. Schéma équivalent classique d'ordre entier.....	108
V.2.3. Schéma équivalent d'ordre non entier de la machine synchrone.....	110
V.2.4. Identification des paramètres du schéma équivalent d'ordre non entier de la machine synchrone.....	114
V.3. Analyse de stabilité petits signaux d'un système électrique contenant un modèle d'ordre non entier de la machine synchrone.....	119
V.3.1. Construction du système d'état généralisé.....	120
V.3.2. Valeurs propres du système d'ordre non entier de la machine synchrone.....	125
V.3.3. Facteurs de participation et matrices de sensibilité.....	128
V.4. Conclusions.....	131
Conclusions et perspectives.....	132
Bibliographie.....	136
Annexes.....	154
Annexe I.....	157

Modélisation fractale des réseaux électriques

<i>Annexe 2</i>	<i>158</i>
<i>Annexe 3</i>	<i>161</i>
<i>Annexe 4</i>	<i>163</i>
<i>Annexe 5</i>	<i>166</i>
<i>Annexe 6</i>	<i>168</i>

Introduction générale

Depuis plus d'une vingtaine d'années une attention toute particulière est portée sur l'étude de réseaux électriques afin d'améliorer leur dimensionnement, leur qualité, leur sécurité et leurs performances. En effet, les réseaux deviennent de plus en plus complexes avec l'apparition de nouvelles sources d'énergie de nature diverse et l'augmentation de dispositifs d'électronique de puissance qui servent d'interfaces de connexion ou de dispositifs de contrôle.

Ces évolutions engendrent de nombreux problèmes d'analyse et de dimensionnement des réseaux électriques modernes. Pour résoudre ces problèmes, nous proposons une démarche de modélisation et d'analyse basée sur les systèmes d'ordre non entier. Elle peut s'appliquer soit aux réseaux électriques, soit à leurs composants (machines électriques, piles à combustibles, charges, etc.).

Plus précisément, le premier objectif de ce mémoire est l'application de la théorie fractale à la modélisation dynamique des systèmes électriques afin d'obtenir des modèles plus précis et réduits. On tâchera notamment de mettre en évidence les liens qui existent entre géométrie fractale des systèmes électriques, performances fréquentielles et modélisation d'ordre non entier.

Le deuxième objectif est l'application des modèles d'ordre non entier aux études de stabilité classiquement menées sur les systèmes électriques.

Ce mémoire débutera par un court aperçu des évolutions en cours des systèmes électriques. Evidement les problèmes engendrés par ces développements seront exposés tout au long du chapitre.

Le deuxième chapitre donnera un premier aperçu théorique de la géométrie fractale et fera le lien entre cette géométrie et la dérivation d'ordre non entier. Nous aborderons notamment la propriété d'invariance d'échelle qui est constitutive de nombreux aspects des réseaux électriques.

Dans le chapitre trois, nous détaillerons une première modélisation fractale d'un réseau électrique, L'étude portera sur un réseau d'étude simplifié et sur un réseau électrique réel.

Ayant posé les bases fractales de la modélisation d'ordre non entier, le quatrième chapitre exposera une méthode d'analyse de stabilité très souvent utilisée pour l'analyse des réseaux électriques. Nous verrons en quoi elle pourrait être reprise avec une modélisation d'ordre non entier.

Finalement, le chapitre cinq achèvera ce mémoire par une étude de stabilité d'un système de génération électrique, simple mais représentatif de la plupart des systèmes de génération actuels.

Chapitre I

L'évolution des réseaux électriques. Problèmes posés par leur modélisation dynamique.

I.1. Les réseaux électriques actuels et leur évolution

Systèmes de plus en plus complexes, alimentant des charges elles-mêmes de plus en plus exigeantes, les réseaux électriques couvrent la majorité des territoire des pays électriquement développés, sont omniprésents sur les sites industriels, mais aussi dans les réseaux embarqués (voitures, avions, navires) où les générateurs, moteurs, transformateurs et actionneurs électriques sont de plus en plus utilisés.

I.1.1. Le réseau électrique de distribution

Le réseau de distribution actuel a été conçu afin d'acheminer l'énergie électrique depuis des moyens de production, raccordés au réseau de transport, vers des clients raccordés à des niveaux de tension de type BTB (0.4 – 1 kV) ou HTA (1 – 50 kV). Pour des raisons de coût et de simplicité technique, les réseaux de distribution ont une structure arborescente. Cette structure est adaptée à un système verticalement intégré dans laquelle la production d'énergie électrique est centralisée et la consommation est distribuée.

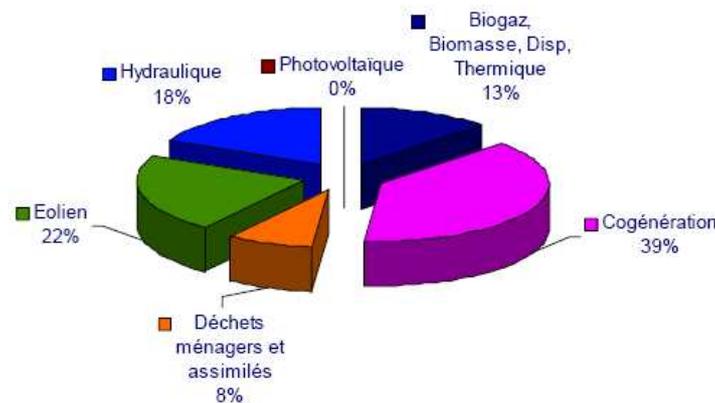


Figure I- 1: Puissance cumulée d'installations de production décentralisée injectant sur les réseaux de distribution [EDF - 07]

Ces réseaux deviennent de plus en plus complexes avec l'apparition de nombreuses sources d'énergie électrique qui ne s'appuient plus ou beaucoup moins sur des combustibles fossiles (groupes hydraulique, éolien, solaire photovoltaïque, centrales de cogénération, sources utilisant la biomasse ou les déchets, Figure I- 1) et

l'augmentation du nombre de dispositifs d'électronique de puissance qui servent d'interfaces de connexion ou de dispositifs de contrôle, Figure I- 2. Actuellement la puissance électrique injectée par ces nouvelles sources sur le réseau de distribution français est de 7100 MW, sur une puissance totale installée de 108 000 MW. Elle est habituellement nommée production décentralisée. La Figure I- 1 montre la répartition de cette puissance selon chaque type de source.

La présence de la production décentralisée au niveau des réseaux de distribution a principalement un impact sur la gestion de la tension [RIC 06], [RAM 06]. En effet, leur raccordement sur un réseau de distribution (de type arborescent) provoque une élévation locale de la tension. Cette élévation peut même provoquer des excursions de l'amplitude de la tension hors des intervalles imposés par les normes sur la qualité de l'énergie fournie (i.e. la norme européenne EN 50160).

L'électronique de puissance jusqu'ici relativement peu présente dans les réseaux électriques commence à faire son apparition d'une manière significative avec l'utilisation des sources décentralisées. C'est à l'origine de nombreux problèmes portant sur l'analyse, notamment dynamique, et le dimensionnement des réseaux.

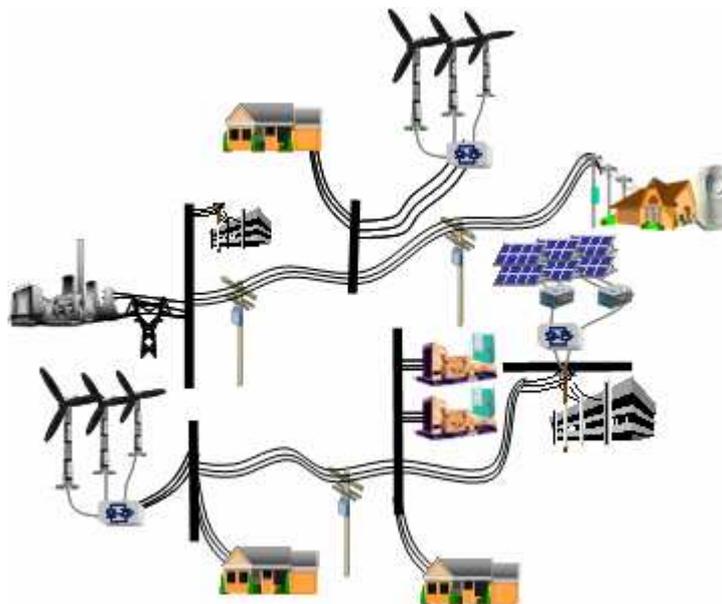


Figure I- 2: Nouvelle architecture de réseaux électriques

Ces problèmes sont surtout liés au contrôle/commande de l'électronique de puissance [ETX 03, GAZ 06, LOP 06], à la qualité de tension [ARR 85], à la fiabilité du réseau

[SAS 94] et à la conception des équipements afin de pouvoir faire transiter l'énergie « dans les 2 sens » [CAN 95].

I.1.2. Les réseaux électriques embarqués

Les réseaux embarqués, i.e. les réseaux d'alimentation électrique à bord des voitures, trains, avions ou bateaux ou les systèmes d'alimentation autonome, ont eux aussi connu ces dernières années des évolutions conséquentes, évolutions qui ont suivi directement les progrès de l'électronique de puissance.

Les contraintes sur les réseaux embarqués portent essentiellement sur le coût, l'encombrement et la fiabilité du réseau qui doit parfois être exceptionnelle (la probabilité de pannes dans l'aéronautique civile doit ainsi rester inférieure à 10^{-9} par heure de vol !), tout ceci avec l'augmentation très importante de la demande en puissance embarquée. Par exemple, dans le cas de l'automobile, une R5 consommait environ 0.5 kW, alors qu'une monoplace consomme actuellement environ 5 kW.

Ces réseaux sont :

- soit à courant continu (les réseaux automobile de 14 et 42 V),
- soit alternatif, comme par exemple à bord des bateaux avec là aussi, des niveaux de tension différentes qui cohabitent : 6,3 kV et 440 V, à une fréquence de 60 Hz pour une puissance d'environ 2x44 MW (le Queen Elisabeth II) [FIL D56],
- soit hybride, i.e. avec des étages alternatifs et continus. Par exemple dans un avion cohabitent un réseau 115 V – 400 Hz pour l'alimentation des charges de puissance (par exemple les galleys des cuisines, l'éclairage ou les ventilateurs) et un réseau 28 Vdc pour l'avionique [EMA].

L'électronique de puissance a permis de réduire considérablement la masse et d'améliorer la fiabilité et la qualité de l'énergie dans ces réseaux, mais a entraîné un certain nombre de problèmes lié principalement à leur comportement non - linéaire.

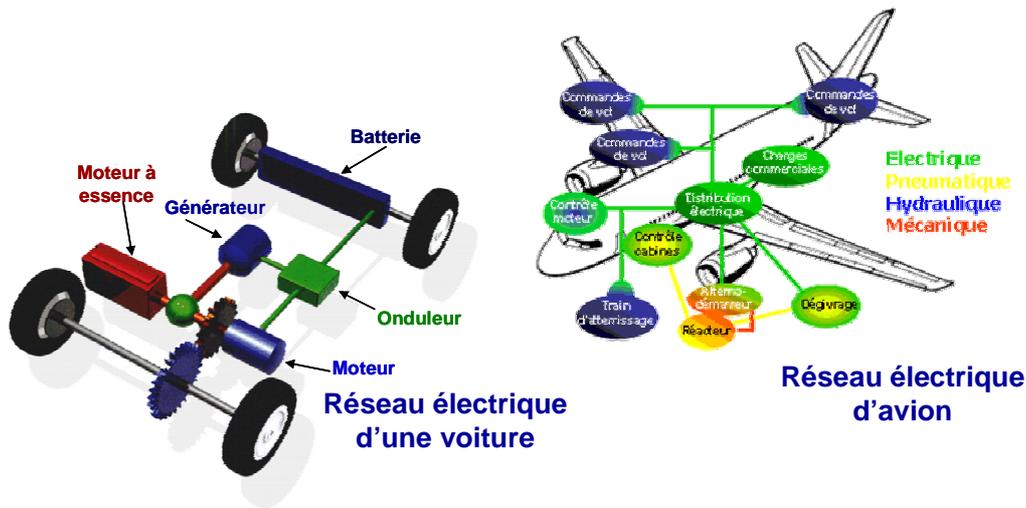


Figure I- 3: Exemples de réseaux électrique embarqués : réseau d'alimentation d'une voiture et réseau aéronautique

On peut ainsi noter des problèmes liés à la pollution harmonique qu'il faut garder dans les normes et des problèmes de stabilité liés au fonctionnement à puissance constante de certaines charges [MID 76, BAR 06, LIU 07].

I.2. Le problème de la modélisation dynamique

I.2.1 Pourquoi modéliser les réseaux électriques

Quel que soit le type de réseau, une attention toute particulière doit ainsi être portée à la qualité d'alimentation en tension d'une part, mais aussi à la sûreté et à la fiabilité des réseaux électriques, non seulement pris globalement, mais aussi au niveau de leurs composants et de leurs sous-systèmes [KUN 94]. Les réseaux d'énergie embarqués requièrent quant à eux une conception intégrant de multiples contraintes tant statiques que dynamiques ou harmoniques, ces contraintes interagissant entre elles (le choix d'un filtre passif peut ainsi dégrader le plan de tension d'un réseau) [BAR 06].

On assiste à une généralisation de l'alimentation des machines électriques par des convertisseurs ; la modélisation classique de ces machines par des schémas équivalents à paramètres constants devient inadaptée. Ces réseaux sont caractérisés par une forte complexité de structure et de comportement (fortes non linéarités).

Afin de modéliser des phénomènes physiques et électromagnétiques sur de grandes plages de fréquences, des modèles de système électrique (machines électriques, lignes, transformateurs, interfaces, etc...) de plus en plus fins sont donc requis pour diverses études de réseau, notamment de stabilité et de circulation d'harmoniques dans les réseaux. Cette amélioration des modèles nécessite l'utilisation de modèles comportant un plus grand nombre de paramètres afin de tenir compte de phénomènes de nature distribuée comme la propagation ou la diffusion [SCH 99].

Améliorer les modèles existants engendre donc une augmentation considérable du nombre de variables d'état, et donc de l'ordre, de systèmes multi - machines ; des techniques de réduction d'ordre sont alors utilisées pour diminuer les temps de calcul des algorithmes de simulation [GER 78, DEC 80].

1.2.2. Quelques techniques de réduction d'ordre des modèles

Il existe deux grandes familles de simplification de modèle, notamment dans le domaine d'automatique : les simplifications structurelles qui consistent à modifier sa structure même (c'est le cas de la linéarisation d'un modèle non-linéaire) et les réductions ont pour principe la diminution de l'ordre d'un modèle sans modification structurelle.

Les méthodes qui partent d'un modèle sous forme de représentation d'état ont pour principe d'obtenir une représentation simplifiée qui approche au mieux le comportement du réseau pour une entrée donnée. La méthode repose sur un changement de base de la représentation initiale du système d'état et sur une troncature du vecteur d'état. Ces méthodes sont valides pour des modèles linéaires et permettent généralement une réduction globale sur l'ensemble du domaine fréquentiel.

D'autres méthodes partent d'une représentation sous forme de fonction de transfert. Dans ce cas, la simplification s'effectue par réduction du nombre de paramètres caractéristiques de la fonction de transfert (pôles, zéros, gain statique pour les plus connus mais ce ne sont pas les seuls). Ces méthodes sont uniquement valables pour des modèles linéaires. Généralement elles conduisent à une réduction dans une bande fréquentielle délimitée et leurs performances sont moindres que les méthodes précédentes. Il existe enfin une troisième classe de méthodes dite de découplage des variables d'état. Elles ne sont pas à proprement parler des méthodes de réduction

puisqu'elles permettent seulement de découpler les variables d'état en plusieurs ensembles disjoints. On peut cependant aboutir à une réduction si, par exemple, seul l'ensemble correspondant aux modes dominants est conservé dans la représentation d'état. La méthode des perturbations singulières semble particulièrement intéressante car elle est valable pour tout type de système continu ou pas, linéaire ou pas, déterministe ou pas. La difficulté essentielle de ces méthodes consiste à déterminer les frontières entre variables découplables [BOR 92].

De plus, dans le domaine des réseaux électriques, différentes techniques de réduction du réseau ont été développées pour mener des analyses de stabilité et faire des simulations, il s'agit des méthodes de réduction par des équivalents dynamiques : l'analyse de la cohérence des groupes de générateurs, l'analyse modale ou encore l'approche par l'identification paramétrique.

En regardant la précision du modèle et la diminution de sa taille, les résultats obtenus avec ces différentes méthodes de réduction sont satisfaisants mais certains inconvénients sont à relever [RET 03]. Ainsi leur compacité est relative, la précision sur certaines zones de fréquence est faible, la généralité de ces méthodes n'est pas évidente suivant le type de réseau considéré et parfois, lors des transformations mathématiques ou de l'identification de composants, le sens physique du modèle ou de certains paramètres peut être perdu (par exemple par l'utilisation des inductances négatives pour le modèle de la machine synchrone) [IEE 95].

1.2.2. La modélisation d'ordre non entier

Afin d'améliorer les problèmes existants de modélisation, nous proposons une nouvelle approche basée sur les systèmes d'ordre non-entier, en utilisant notamment leurs propriétés de précision et de compacité dans le domaine fréquentiel.

L'utilisation des systèmes d'ordre non entier s'inscrit dans un contexte très large de représentation précise et condensée de phénomènes physiques décrits par des équations aux dérivées partielles. Ce concept et le formalisme mathématique de la dérivation non entière ont été introduits par Podlubny vers 1980 [POD 99]. Ces systèmes sont appliqués depuis plusieurs années dans le domaine des sciences appliquées. Ainsi, A. Oustaloup est l'un des premiers à avoir appliqué ce concept en

France avec l'équipe CRONE du LAPS de Bordeaux (Commande Robuste d'Ordre Non Entier). Ils se sont ainsi intéressés à l'application de la dérivation non entière dans les domaines suivants :

- En automatique à travers la commande CRONE (i.e. un régulateur synthétisé à partir de dérivateurs et d'intégrateurs d'ordre non entier) ; une tool-box Matlab a ainsi été développée pour permettre l'identification et l'analyse par modèle d'ordre non entier de dispositifs physiques [COI 92].
- En automobile, la dérivée non entière est utilisée en isolation vibratoire grâce à la suspension CRONE, fondée sur le principe de la commande CRONE de deuxième génération [OUS 95].

Les systèmes d'ordre non entier ont également été utilisés dans d'autres domaines de la physique comme la rhéologie, l'électronique, l'électrochimie, ... [MOR 04]. Dans tous les cas, ces systèmes sont particulièrement adaptés pour modéliser soit des phénomènes physiques de nature diffusive [RIU 02] (diffusion de la chaleur [POI 02], diffusion d'espèces gazeuses, ...) [SAB 07], soit des phénomènes intervenant sur un support physique de nature fractale (phénomène de houle sur la digue de Venise, interfaces électroniques, ...).

Concernant l'application de la dérivation d'ordre non entier dans le domaine du génie électrique, de nombreux travaux ont été menés. Ces études ont ainsi consisté à modéliser la diffusion du champ magnétique dans différentes pièces conductrices de machines électriques à l'aide de systèmes d'ordre non entier. Deux approches complémentaires peuvent ainsi être mentionnées :

- une modélisation d'ordre non entier dont l'ordre n'est pas imposé a priori mais résulte soit des caractéristiques géométriques et physiques des constituants de la machine, soit de l'identification [LIN 01, CAN 93, MAC 05],
- des modèles de machine incluant des impédances dont l'ordre est imposé (et égal à $\frac{1}{2}$) [RIU 01].

Ces approches permettent dans tous les cas de déterminer des schémas équivalents de machines électriques particulièrement précis, compacts (le nombre de paramètres peut

être diminué d'un facteur 2 par rapport aux modèles classiques d'ordre entier) et conservant un sens physique particulièrement utile pour la conception d'un système. La contrepartie réside dans la difficulté de simuler un réseau électrique incluant des impédances d'ordre non entier dans le domaine temporel. En effet, ces systèmes incluent intrinsèquement un nombre infini de modes. Il est cependant possible d'effectuer des simplifications permettant de simuler dans des temps corrects des réseaux électriques d'ordre non entier [POD 99].

Les travaux actuels, en électrochimie, sur les systèmes non entiers portent essentiellement sur les réseaux hybrides embarqués et stationnaires utilisant de nouvelles sources d'énergie (par exemple les piles à combustible [USM 06]) hybridées à un ou plusieurs dispositifs de stockage électrochimique ou mécanique [KUH 03].

I.3. Vers une modélisation fractale des réseaux électriques ?

Jusqu'à présent, les travaux ont porté essentiellement sur la modélisation fréquentielle des constituants d'un réseau : générateurs, lignes, machines, ... Les modèles d'ordre non entier permettent ainsi de réduire l'ordre du modèle du réseau consécutivement à la réduction structurelle du modèle de chaque élément qui y est connecté. La question que l'on peut alors se poser est : serait-il possible de réduire encore plus significativement l'ordre du modèle du réseau en considérant un modèle d'ordre non entier pour l'ensemble ?

Par leur complexité, les réseaux de distribution présentent des caractéristiques géométriques et électriques qui, à grande échelle, se reproduisent sous forme de motifs qui sans être exactement semblables offrent de grandes similarités. Ainsi leurs ramifications peuvent rappeler la structure d'un objet fractal (cf Figure I- 4 et Figure I- 5). Cette première perception nous a incité à nous orienter vers une utilisation des outils fractals pour modéliser et analyser le comportement dynamique des réseaux électriques. De plus, ces réseaux sont constitués de composants dont le comportement est régi par une équation de diffusion modélisée par un système d'ordre un demi. Or, les systèmes d'ordre non entier sont eux aussi liés aux objets fractals, comme nous le verrons dans les chapitres suivants. On en conclut que les objets fractals semblent

présenter un grand nombre d'atouts pour modéliser les réseaux électriques, en reconsidérant le lien entre espace et temps décrit par les équations aux dérivées partielles constitutives de ces systèmes.

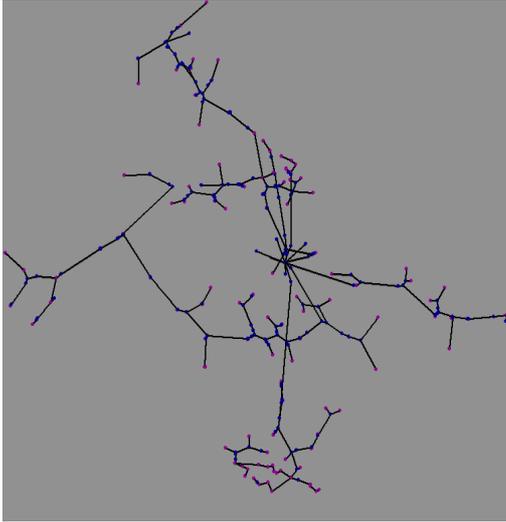


Figure I- 4: Architecture d'un réseau électrique de distribution

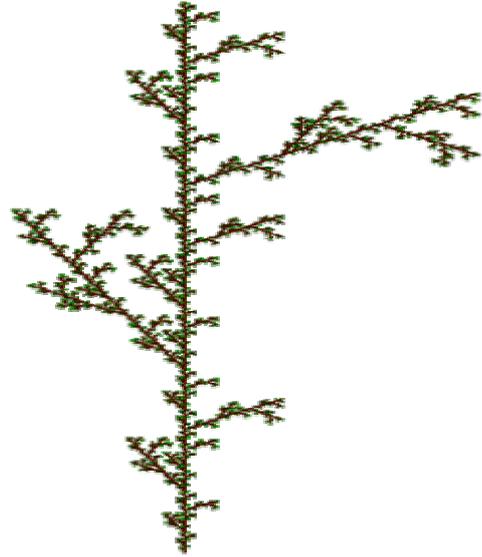


Figure I- 5 : Motif fractal semblable aux architectures de réseaux électriques [Men]

Cette thèse présente ainsi une contribution à l'application de la théorie fractale pour modéliser les réseaux électriques. Nos efforts se sont principalement concentrés sur la mise en évidence du(des) lien(s) qu'il pourrait y avoir – dans le domaine des réseaux électriques – entre la représentation spatiale du réseau, sa caractérisation dans le domaine fréquentiel et les systèmes d'ordre non entier, Figure I- 6.

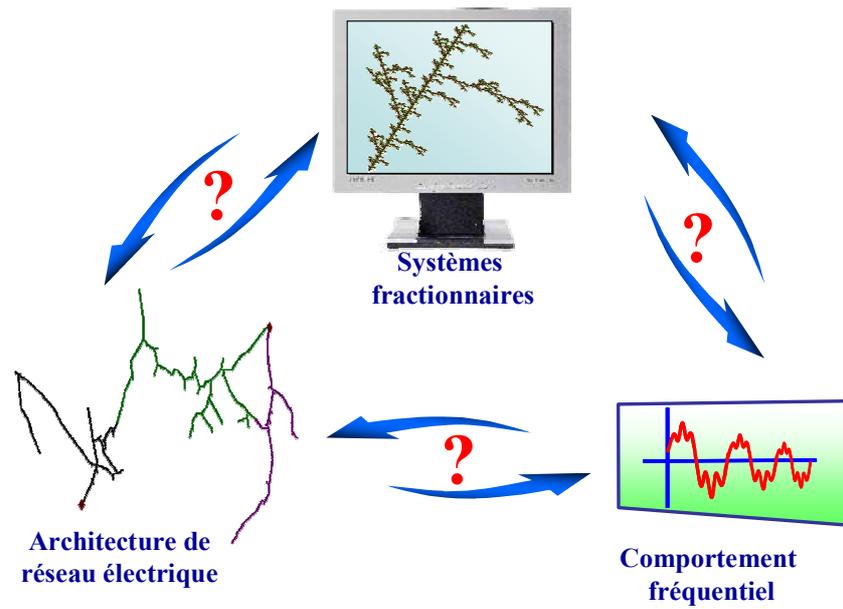


Figure I- 6: Liens (?) entre le réseau électrique, sa réponse fréquentielle et la géométrie fractale

Ayant mis en évidence ce lien, nous nous attacherons ensuite à étendre à reprendre l'étude de stabilité d'un réseau électrique modélisé par des systèmes d'ordre non entier.

Chapitre II

Systemes à invariance d'échelle et dérivation fractionnaire

II.1 Introduction

Comme nous l'avons vu en introduction dans le chapitre précédent, nous allons essayer à travers ce mémoire de mettre en évidence un caractère fractal des réseaux électriques et pour cela, il semble dans un premier temps opportun d'évoquer les caractéristiques fondamentales des objets fractals et les moyens pour les caractériser et notamment déterminer leur dimension fractale ou dimension de Hausdorff.

Nous évoquerons dans un deuxième temps quelques propriétés générales concernant ces objets, à commencer par la propriété d'invariance d'échelle.

Enfin, nous donnerons quelques définitions et propriétés sur la dérivation d'ordre non entier qui nous seront nécessaires par la suite pour la caractérisation des réseaux électriques à l'aide de la théorie des objets fractals.

II.2 Les objets fractals

II.2.1 Quelques généralités

Les objets fractals furent introduits dans les années 70 par le mathématicien B. Mandelbrot ; le terme « fractal » vient du latin « fractus » qui signifie brisé ou irrégulier.

De nombreux travaux ont montré que la fractalité était présente dans de nombreux domaines physiques, à commencer par la nature elle-même. Ainsi, le motif de base se retrouve quel que soit le point d'observation pour une branche d'arbre, une feuille de fougère (Figure II- 1), un paysage montagneux ou côtier, ou une branche de chou (chou-fleur, romanesco ou brocoli) (Figure II- 2).

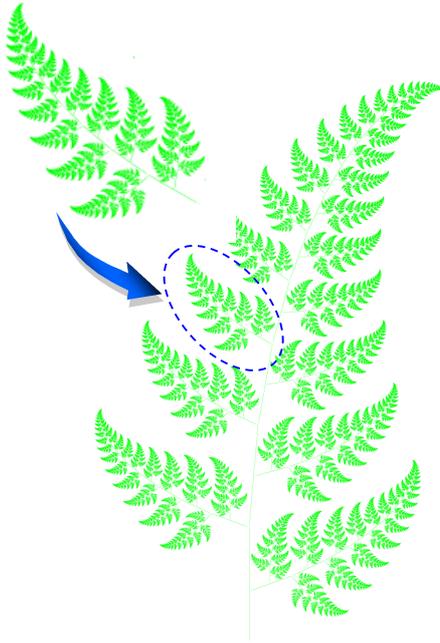


Figure II- 1: Feuille de fougère

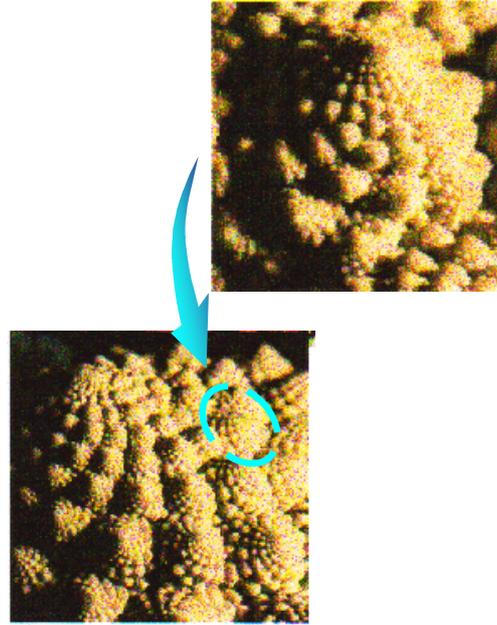


Figure II- 2: Chou Romanesco

D'après B. Mandelbrot, un objet fractal est ainsi une figure géométrique ou un objet naturel pouvant présenter une structure fort complexe, qui combine les caractéristiques suivantes (*sic*) :

- chaque partie a la forme ou structure de l'entier mais à une échelle différente et pouvant être légèrement déformée ;
- sa forme est soit très irrégulière, soit très fragmentée, donc non différentiable.

Le domaine d'application des fractales est très vaste. Les premières utilisations des fractales restent des jeux de mathématiciens autour de la définition d'objets ayant une dimension non entière, la dimension de Hausdorff ; ces objets étaient alors qualifiés de pathologiques ! [MAN 84, BAR 88].

Depuis, les objets fractals ont été utilisés dans de très nombreux domaines des sciences théoriques et expérimentales (la liste ci-dessous n'est pas exhaustive) :

- en informatique, ils sont utilisés pour la transformation d'images [PEI 89],
- en médecine, on les retrouve en neurobiologie, en électrophysiologie, en embryologie, en génétique médicale ou en ingénierie biomédicale [BAR 88, FIS 99],
- en biologie, les applications de la géométrie fractale sont immenses ; elle est ainsi utilisée pour modéliser des plantes comme les fougères, des arbres

ou même des légumes. L'homme lui aussi est concerné puisque ses réseaux sanguins et neuronaux, ou certains organes vitaux comme le rein ou les poumons présentent une structure fractale [TEI 00],

- en astrophysique, la répartition des galaxies dans l'espace pourrait être fractale [MAN 89],
- dans le domaine du multimédia, les fractales sont très souvent utilisées pour la construction graphique des jeux vidéo,
- en mécanique, on retrouve des propriétés d'invariance d'échelle dans le cas de la relaxation de l'eau sur une digue poreuse ou dans les matériaux viscoélastiques [BAR 88, MAN 89],
- en physique, les fractales sont utilisées pour la modélisation des agrégats, des aérosols, les polymères et autres colloïdes [FOR 79, GOU 96].

Dans le chapitre 3, nous évoquerons le cas des domaines de la physique où la théorie fractale est utilisée pour la modélisation de circuits présentant une invariance d'échelle plus ou moins parfaite ; ces travaux nous permettront d'appliquer cette théorie aux réseaux électriques.

II.2.2 Classification des objets fractals

Nous allons dans cette partie rappeler la manière dont les objets fractals peuvent être classés. La nature d'un objet fractal est ainsi étroitement liée au procédé de construction de cet objet. On distingue ainsi trois catégories de fractales [MAN 82] :

- les *fractales aléatoires*, i.e. non générées par des mécanismes déterministes mais par des processus stochastiques. On inclue dans cette catégorie toutes les fractales dites "naturelles" ou paysages fractals, c'est à dire les phénomènes naturels, artificiels qui ont une structure fractale. On verra cependant dans le chapitre 3 que la nature fractale des phénomènes naturels n'a généralement rien d'aléatoire mais résulte d'une optimisation de circulation des flux (théorie constructale),
- les fractales construites à partir de *systèmes de fonctions itérées* (procédé mathématique permettant de définir un certain nombre de transformations

géométriques affines). La règle de construction repose ainsi sur un remplacement géométrique fixe : d'une itération à une autre, on remplace chaque élément par un autre, identique pour tous. A titre d'exemple, cette famille regroupe l'ensemble de Cantor, le triangle ou tapis de Sierpinski, le flocon de Koch, ... etc. C'est généralement cette famille d'objets fractals qui présente une propriété d'autosimilarité,

- enfin, la dernière catégorie regroupe les fractales construites à partir d'une *relation de récurrence* en chaque point dans l'espace. On retrouve dans cette catégorie les ensembles de Julia et de Mandelbrot ainsi que les fractales de Lyapunov (voir Figure II-3).

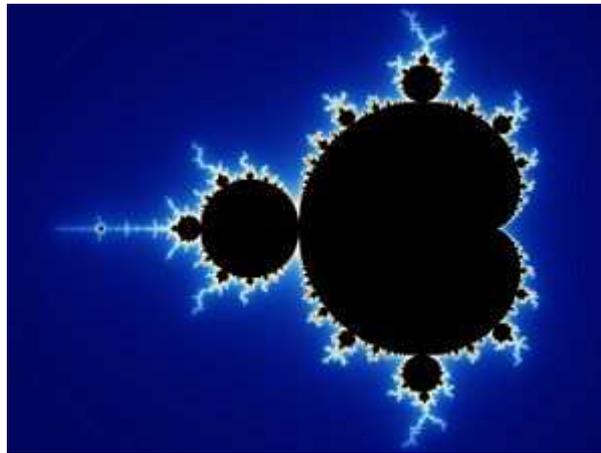


Figure II-3: Construction de l'ensemble de Mandelbrot ($Z(i+1) = [Z(i)]^2 + C$)

Une autre classification beaucoup plus descriptive des objets fractals est possible par rapport à leur dimension fractale. Nous l'évoquerons rapidement au paragraphe suivant ... après avoir défini la notion de dimension fractale.

II.2.3 Définition de la dimension fractale

II.2.3.1 Notions de dimension et mesure en géométrie euclidienne

En géométrie euclidienne, la *dimension* d'un objet est égale au nombre de paramètres (définissant une unité de mesure) nécessaires pour le décrire. La dimension d'une droite est ainsi égale à 1, puisqu'un seul paramètre, i.e. la distance entre une origine choisie et un point de cette droite, permet de la caractériser. Une figure quelconque dans le plan a quant à elle une dimension égale à 2, puisque tout point de cette figure

est décrit par 2 paramètres (une abscisse et une ordonnée). Nous qualifierons par la suite cette dimension de *topologique*.

Afin de *mesurer* une longueur, une surface ou un volume, une méthode employée consiste à recouvrir ces ensembles de pavés dont la longueur, la surface ou le volume peuvent être considérés comme une unité de mesure (cf Figure II-4).

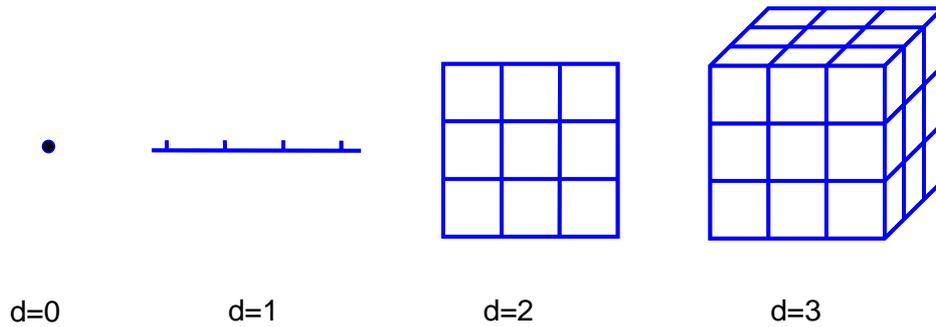


Figure II-4: Pavages de points, lignes, surfaces et volumes

Si ε désigne le côté d'un pavé, la mesure M d'un objet de dimension euclidienne d peut être approximée par la relation suivante [LeME 90] :

$$M = N \cdot \varepsilon^d = N \cdot \mu \quad \text{II- 1}$$

où N est le nombre de pavés nécessaires pour recouvrir l'objet. La grandeur μ correspond à l'unité de mesure (longueur, surface ou volume).

Cette mesure est également appelée *mesure de recouvrement*.

L'équation II- 1 peut également se réécrire sous la forme suivante :

$$N \propto \frac{1}{\varepsilon^d} = \varepsilon^{-d} \quad \text{II- 2}$$

II.2.3.2 Dimension fractale ou de Hausdorff

Pour les objets fractals, la notion de dimension est beaucoup moins triviale. Elle permet de quantifier le degré d'irrégularité et de fragmentation d'un ensemble géométrique. Notons tout de suite que, dans la grande majorité des cas, cette

dimension fractale est non-entière contrairement à la dimension topologique définie plus haut. Par ailleurs, Mandelbrot précise qu'un objet fractal possède une dimension fractale strictement supérieure à sa dimension topologique. Cette dimension permet ainsi de décrire comment l'objet fractal occupe « l'espace » lorsque le nombre d'itérations devient infini.

Pour introduire cette dimension de Hausdorff, nous allons reprendre le principe de la mesure vu au paragraphe II.3.3.1. Nous allons ainsi recouvrir un objet par un ensemble d'éléments d'unité de mesure $\mu = \varepsilon^{d(E)}$ où $d(E)$ est la dimension cherchée de l'objet.

Dans le cas où cette dimension est inconnue, on procède alors par tâtonnements en prenant comme unité de mesure une valeur $\mu = \varepsilon^\alpha$ avec un coefficient α indéterminé (on parle alors d'un α -recouvrement).

Prenons le cas simple d'un carré de longueur L , et recouvrons-le de N pavés de longueur ε . Le nombre de pavés sera bien sûr choisi tel que $N = (L/\varepsilon)^2$.

La mesure (i.e. la surface) est alors approchée par :

$$M = N \cdot \varepsilon^\alpha = (L/\varepsilon)^2 \varepsilon^\alpha = L^2 \varepsilon^{\alpha-2} \quad \text{II-3}$$

Si α est pris égal à 1, nous trouvons que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} M \rightarrow \infty$, et la surface d'un carré serait

alors infinie. Si nous prenons $\alpha = 3$, nous trouvons que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} M \rightarrow 0$, ce qui induit

que la surface d'un carré de longueur L non nulle, est nulle.

La surface du carré est finalement obtenue pour $\alpha = 2$, ce qui montre que la dimension d'un carré est bien égale à 2.

Pour généraliser cette approche aux objets fractals, prenons un objet S d'une forme quelconque, plongé dans un espace euclidien de dimension E . La méthode de calcul de la mesure consiste alors à recouvrir l'objet par non pas des pavés mais un ensemble de boules V_i de diamètre noté $diam_V_i$, et à définir la mesure élémentaire par

$\mu = (\text{diam } V_i)^\alpha$. La mesure du α -recouvrement effectué (notée $m^\alpha(S)$) est alors définie de la manière suivante [CHE 87, PEI 91, FAL 03]:

$$m^\alpha(S) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \inf \left\{ \sum (\text{diam } V_i)^\alpha : \cup V_i \supset S, \text{diam } V_i \leq \varepsilon \right\} \quad \text{II-4}$$

Cela revient à compter le nombre de boules élémentaires nécessaires pour recouvrir l'objet S, sachant que l'on ne prend en compte que les boules V_i incluses dans cet objet en faisant tendre leur rayon vers zéro.

La dimension de Hausdorff est alors définie par la relation suivante :

$$\begin{aligned} \dim S &= \inf \left\{ \alpha / m^\alpha(S) = 0 \right\} \\ &= \sup \left\{ \alpha / m^\alpha(S) = \infty \right\} \end{aligned} \quad \text{II-5}$$

La dimension de Hausdorff ou dimension fractale de l'objet S est ainsi la valeur de α pour laquelle la mesure varie subitement entre 0 et l'infini, cette valeur étant quant à elle un réel non nul.

Difficile à appréhender physiquement, cette dimension donne cependant une idée de la manière qu'a un objet fractal de remplir soit une ligne, soit un plan, soit un volume. En pratique, cette dimension de Hausdorff est rarement calculée, sans doute en raison de sa définition un tant soit peu absconde. La plupart du temps, on cherche plutôt à approcher cette dimension en effectuant un certain nombre de recouvrements, avec des diamètres de boules plus ou moins grands. Dans le cas d'objets fractals construits à partir de systèmes de fonctions itérées, la dimension peut être déterminée directement.

Le paragraphe suivant va illustrer l'application de ces deux méthodes sur le cas de l'ensemble de Cantor.

II.2.3.3 Détermination de la dimension fractale

Il existe dans certains cas simples des moyens de déterminer analytiquement la dimension fractale d'un motif à partir de sa description géométrique. C'est cette approche que nous privilégierons dans la suite pour mieux comprendre les liens entre géométrie, représentation fréquentielle et dimension. Cependant, cette démarche n'est

applicable qu'à des cas d'étude relativement triviaux (par exemple, lorsqu'on maîtrise parfaitement le procédé itératif de création du motif). Nous l'illustrons largement dans le chapitre 3.

D'un point de vue plus général, il existe d'autres techniques de « mesure » permettant une identification de la dimension fractale d'un motif. Le principe de ces techniques consiste ainsi à procéder à des recouvrements du motif avec une certaine mesure, ou à dénombrer ses similarités.

A titre d'illustration, prenons le cas de la fractale de Cantor. La Figure II- 5 ci-dessous illustre le principe de construction de cet objet.

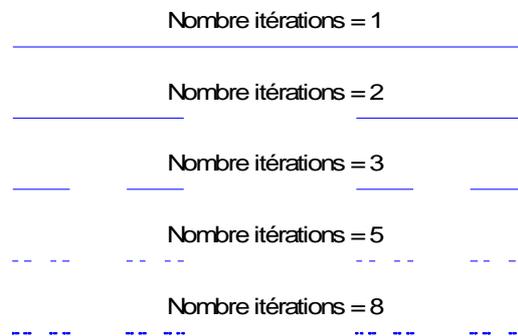


Figure II- 5: Construction de l'ensemble de Cantor

II.2.3.3.1 Détermination directe

Pour un objet fractal construit à partir d'un système de fonctions itérées, il est possible de déterminer sa dimension fractale directement à partir de l'observation d'une itération. Ainsi, cette dimension est une fonction directe du nombre d'exemplaires de taille réduite du motif initial d'une itération à l'autre (k), et du facteur de réduction à proprement dit (h) [CHE 87, MAN 89, SAP 90] :

$$d = \frac{\log(k)}{\log(h)} \quad \text{II- 6}$$

Ainsi, dans le cas de l'ensemble de Cantor, on a k égal à 2 (chaque segment se décompose en 2 segments d'une itération à l'autre) et h égal à 3 (la taille d'un segment est divisée par un facteur 3 d'une itération à l'autre). Dans ce cas, la dimension d_C de l'ensemble de Cantor est donnée par :

$$d = \frac{\log(2)}{\log(3)} \approx 0,631$$

II- 7

II.2.3.3.2 Détermination par identification (recouvrement)

Le principe de cette méthode consiste à recouvrir l'objet fractal étudié d'un certain nombre de boules (N) de rayon (R), et de tracer l'évolution de $\log(N)$ en fonction de $\log(R)$. Cette courbe suit une loi quasi-linéaire et l'identification de la pente de la droite (pente négative) donne généralement une bonne approximation de la dimension fractale de l'objet considéré.

Cette propriété que l'on utilise très fréquemment pour déterminer la dimension fractale d'un objet, est issue directement de l'équation II- 8, où le produit de N et de R^d est constant et égal à la mesure de l'objet :

$$N \propto R^{-d}$$

II- 8

Dans le cas de l'ensemble de Cantor, la figure ci-dessous représente l'évolution de $\log(N)$ en fonction de $\log(R)$. L'identification de la pente donne alors une dimension fractale approchée de 0,643. Cette méthode donne donc des résultats tout à fait pertinents.

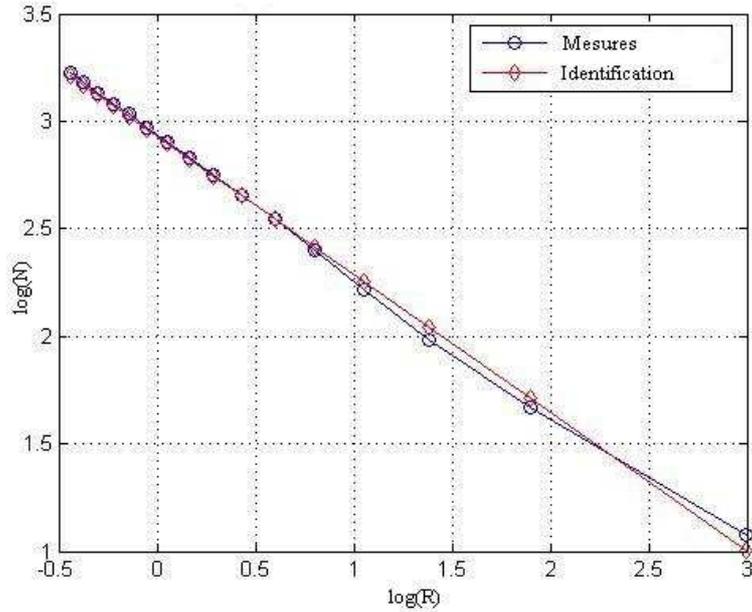


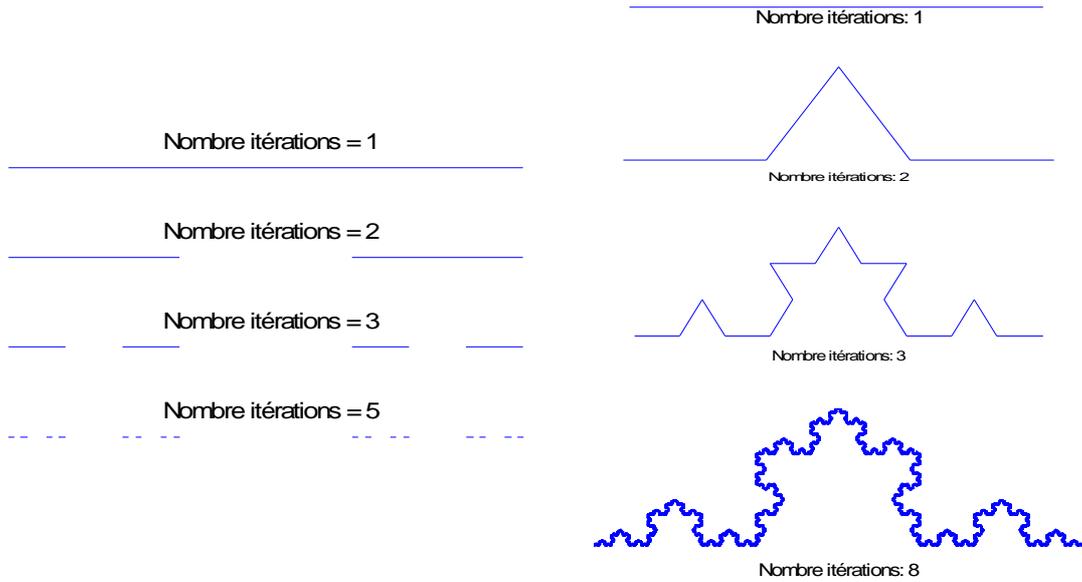
Figure II- 6: Identification de la dimension fractale de l'ensemble de Cantor

II.2.3.4 Classification des fractales par leur dimension de Hausdorff

Finalement, les objets fractals peuvent être classifiés non seulement par rapport à leur procédé de construction (itératif, récurrent ou aléatoire) mais également par rapport à leur dimension fractale. On distingue ainsi :

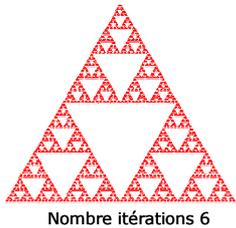
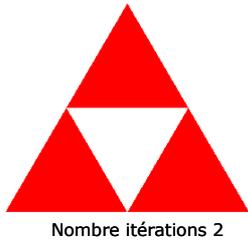
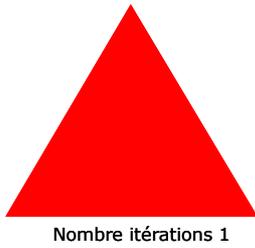
- les poussières fractales (dimension fractale comprise entre 0 et 1),
- les courbes fractales (dimension fractale comprise entre 1 et 2),
- les surfaces fractales (dimension fractale comprise entre 2 et 3),
- et enfin, les volumes fractals (dimension fractale supérieure à 3).

Les figures ci-dessous illustre ces différentes catégories sur des exemples simples. Nous n'avons pas trouvé dans la littérature d'exemple de volume fractal puisque ces objets doivent occuper dans les premières itérations un hyperespace (dimension topologique égale à 4) ce qui rend difficile leur représentation.



Poussière fractale (ensemble de Cantor)

$$d = \frac{\log(2)}{\log(3)} \approx 0,631$$

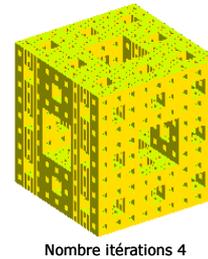
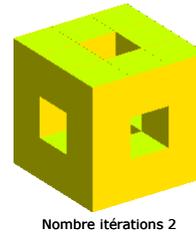
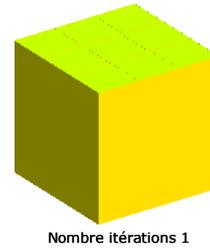


Autre courbe fractale (triangle de Sierpinski)

$$d = \frac{\log(3)}{\log(2)} \approx 1,585$$

Courbe fractale (fractale de Von Koch)

$$d = \frac{\log(4)}{\log(3)} \approx 1,262$$



Surface fractale (éponge de Menger)

$$d = \frac{\log(20)}{\log(3)} \approx 2,727$$

Figure II- 7: Classification des objets fractals en fonction de leur dimension

Finalement, cela revient à considérer qu'un objet fractal de dimension d tend, lorsque le nombre d'itérations est suffisamment grand, vers un objet de dimension topologique l'entier directement inférieur à d .

Ainsi, le générateur de l'ensemble de Cantor (un segment de longueur L) tend à un ensemble de points de dimension topologique 0. Le triangle plein générateur du triangle de Sierpinski, tend vers une courbe de dimension topologique 1. Le cube plein de l'éponge de Menger tend à n'occuper qu'une surface de dimension topologique 2.

II.2.4 Conclusion sur les objets fractals

Nous venons ainsi de montrer que les mesures et dimension utilisées traditionnellement en géométrie euclidienne, sont inappropriées pour caractériser les objets fractals ; leur mesure est en effet infinie et leur non-dérivabilité liée aux nombreuses « cassures » est problématique pour l'application des propriétés mathématiques classiques.

Il est ainsi nécessaire de recourir au principe de la mesure de Hausdorff pour déterminer la dimension fractale d'un tel objet, dimension permettant de caractériser la manière dont a l'objet pour recouvrir un espace. Des techniques de recouvrement permettent d'identifier la dimension fractale d'un objet, mais nous présenterons dans le chapitre 3 une méthode plus simple pour la déterminer dans le cas de réseaux électriques. Cette méthode sera basée sur le lien que nous avons mis en évidence entre fractalité et dérivation d'ordre non entier.

Parallèlement à ces définitions et caractérisations de motifs fractals géométrique, des phénomènes physiques peuvent également présenter une propriété d'invariance d'échelle ou d'autosimilarité. Le phénomène auquel nous allons nous intéresser dans le paragraphe suivant et qui présente cette propriété est à l'origine du fonctionnement de la plupart des dispositifs électrotechnique : la diffusion.

II.3 Invariance d'échelle dans les phénomènes diffusifs

II.3.1 Le mouvement Brownien

Le mouvement Brownien caractérise la trajectoire d'une particule microscopique se déplaçant en suspension dans un liquide. On parle aussi de particule brownienne.

Einstein, dans ses travaux pour prouver l'existence d'atomes de taille définie, suppose qu'une particule brownienne se déplace suivant une trajectoire au hasard, les changements de direction étant dus aux chocs aléatoires entre la particule et les molécules du fluide. A partir de cette hypothèse, il a démontré le lien entre le mouvement Brownien, la marche aléatoire et la diffusion [COL 89].

Cette théorie fut confirmée plus tard par l'expérience de F. Perrin, qui dessina le parcours de la particule en représentant sa position toutes les 30 secondes. La Figure II- 8 montre cette trajectoire ainsi qu'un zoom effectué à une échelle temporelle 100 fois plus petite. On retrouve ainsi approximativement la trajectoire de la particule à une autre échelle.

Le mouvement Brownien est donc caractérisé par une invariance d'échelle ou autosimilarité approchée. La théorie du mouvement Brownien permet ainsi de lier étroitement la diffusion et l'autosimilarité, donc la fractalité.



Figure II- 8: Mouvement brownien d'une particule et extrait à une échelle 100 fois plus grande d'une partie de cette trajectoire

II. 3.2 Invariance d'échelle et phénomène diffusif

Nous restons dans ce paragraphe sur l'exemple généralisable de la diffusion de particules. Le paragraphe suivant traitera du cas particulier du génie électrique et de la diffusion du champ magnétique.

Le flux de particules entre deux points d'un fluide varie proportionnellement avec la différence de concentration des particules entre ces deux points. Le coefficient de proportionnalité est appelé coefficient de diffusion (D). La relation de proportionnalité s'appelle quant à elle loi de Fick. Dans le cas d'une diffusion unidirectionnelle suivant l'axe z , cette relation s'écrit sous la forme suivante :

$$D \frac{\partial^2 n(z,t)}{\partial z^2} = \frac{\partial n(z,t)}{\partial t}$$

II- 9

où n est le nombre de particules par unité de volume.

Nous allons regarder comment se modifie la loi de Fick lorsque l'on cherche à se placer à une autre échelle géométrique : $z \rightarrow \lambda z$. On montre alors l'équivalence suivante :

$$D \cdot \frac{\partial^2 n(\lambda \cdot z, t)}{\partial z^2} = \frac{\partial n(\lambda \cdot z, t)}{\partial t}$$

II- 10

$$\Leftrightarrow \frac{D}{\lambda} \cdot \frac{\partial^2 n(z, t)}{\partial z^2} = \frac{\partial n(z, t)}{\partial t}$$

Nous retrouvons donc la même équation quelle que soit l'échelle d'observation, avec comme facteur de proportionnalité, le coefficient de diffusion D divisé par le facteur d'échelle λ . L'équation de diffusion présente ainsi une propriété d'invariance d'échelle.

II.3.3 Cas de la diffusion du champ magnétique – Lien avec les systèmes d'ordre non entier

Pour mettre en évidence ce lien, considérons le cas d'une barre conductrice placée dans une encoche rectangulaire de hauteur h , de largeur e et de longueur L_b . La barre possède une conductivité σ et une perméabilité relative μ_r . L'encoche est entourée d'un matériau ferromagnétique de perméabilité infinie et non conducteur (Figure II-9).

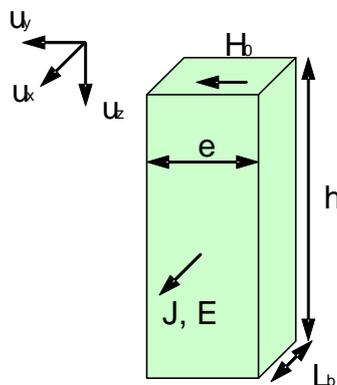


Figure II- 9: Représentation d'une barre d'encoche

L'équation de diffusion du champ magnétique H dans une hypothèse linéaire et unidirectionnelle, avec ses conditions aux limites et initiale s'écrit [ALG 70] :

$$\frac{\partial^2 H(z,t)}{\partial z^2} - \sigma\mu \frac{\partial n(z,t)}{\partial t} = 0 \quad \text{équation de la diffusion} \quad \text{II- 11}$$

$$H(z,0) = 0 \quad \text{condition initiale}$$

$$H(h,t) = 0 \quad \text{condition aux limites}$$

La solution générale de l'équation II- 11 est obtenue après avoir utilisé la transformée de Laplace :

$$\bar{H}(z,s) = P(s) \cdot \exp(z\sqrt{\sigma\mu s}) + Q(s) \cdot \exp(-z\sqrt{\sigma\mu s}) \quad \text{II- 12}$$

où : $\bar{H}(z,s) = L\{H(z,t); s\}$

Dans le cas où la hauteur de la barre est infinie ($h \rightarrow \infty$), la condition $H(\infty,t) = 0$ impose $P(s) = 0$, d'où :

$$\bar{H}(z,s) = Q(s) \cdot \exp(-z\sqrt{\sigma\mu s}) \quad \text{II- 13}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \bar{H}(z,s) = -Q(s) \cdot \sqrt{\sigma\mu s} \cdot \exp(-z\sqrt{\sigma\mu s})$$

On obtient ainsi la relation suivante :

$$\frac{\partial}{\partial z} \bar{H}(z,s) = -\sqrt{\sigma\mu} \cdot s^{1/2} \cdot \bar{H}(z,s) \quad \text{II- 14}$$

Nous verrons plus loin dans ce chapitre que la transformation de Laplace inverse d'une fonction $s^\alpha \cdot F(s)$ est égale à la dérivée d'ordre α de la fonction $f(t)$, où α n'est pas forcément entier. Ainsi, en appliquant la transformée de Laplace inverse de II- 14, on obtient la relation :

$$\frac{\partial}{\partial z} H(z, s) = -\sqrt{\sigma\mu} \cdot \frac{\partial^{1/2}}{\partial t^{1/2}} \cdot H(z, t) \quad \text{II- 15}$$

Dans le cas d'une barre de hauteur finie, on trouve une relation similaire entre la dérivée spatiale d'ordre 1 et la dérivée temporelle d'ordre 1/2 suivant [RIU 01] :

$$e^t \cdot \frac{\partial}{\partial z} H(z, \tau \cdot t) = \sqrt{\sigma\mu} \cdot \tau^{-1/2} \cdot \frac{\partial^{1/2}}{\partial t^{1/2}} \left[e^t \cdot H(z, \tau \cdot t) \right] \quad \text{II- 16}$$

A partir de l'équation de diffusion du champ magnétique, équation faisant apparaître une invariance d'échelle, nous voyons donc apparaître la notion de dérivée d'ordre non entier dont la définition sera précisée plus loin. Ce lien a été généralisé à tout phénomène de diffusion [RIU 02] et nous a permis dans des travaux antérieurs de construire des schémas équivalents de machines ou de dispositifs électrochimiques intégrant des modèles d'ordre non entier dans certaines pièces où intervient un phénomène de diffusion (zones actives d'électrodes, barres de cages d'écureuil de machines asynchrones, ...etc) [RIU 01, USM 06].

Bien sûr, nous ne prétendons pas faire de stricte équivalence entre invariance d'échelle (fractalité), diffusion et dérivation d'ordre non entier. Nous allons cependant montrer au fil de ce mémoire les différents liens entre ces objets, propriétés et outils mathématiques.

Pour terminer ce chapitre, nous allons dans cette dernière partie rappeler quelques définitions et propriétés de la dérivation d'ordre non entier afin de posséder toutes les connaissances théoriques pour mieux appréhender le chapitre suivant.

II.4 Un outil mathématique adapté à la modélisation des systèmes à invariance d'échelle : les systèmes d'ordre non entier

II.4.1 Définition de la dérivation non entière

Dans la suite, nous considérerons les notations suivantes :

- α : ordre de la dérivation (appartenant à l'ensemble des réels),
- $D^{(\alpha)}$: opérateur dérivation non entière d'ordre α ($D \equiv \frac{d}{dt}$).

Dans les études que nous effectuerons par la suite, seul le cas où le coefficient α est positif sera considéré. On parlera alors de dérivation d'ordre α . Il existe cependant des applications faisant apparaître des coefficients α négatifs ; on parle alors d'intégration d'ordre non entier.

Dans la suite, nous ne considérerons que des fonctions causales, i.e. à valeur initiale nulle.

Pour une fonction $f(t)$ continue, deux expressions permettent de définir l'opérateur dérivation non entier $D^{(\alpha)}$. Ces deux définitions sont données ci-dessous.

II.4.1.1 Définition de Grünwald – Letnikov [POD 99]

La dérivée d'ordre 1, $D^{(1)}$, de $f(t)$ s'écrit :

$$D^{(1)}f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(t-h)}{h} \quad \text{II- 17}$$

De même, la dérivée d'ordre 2, $D^{(2)}$, de $f(t)$ s'écrit :

$$D^{(2)}f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - 2 \cdot f(t-h) + f(t-2h)}{h^2} \quad \text{II- 18}$$

Pour un entier n quelconque, on peut généraliser cette relation ; la dérivation $D^{(n)}$, s'écrit alors:

$$D^{(n)}f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{j=0}^n (-1)^j \cdot C_n^j f(t - j \cdot h)$$

II- 19

$$\text{où : } C_n^j = \frac{n!}{j!(n-j)!}$$

La dérivée d'ordre α de la fonction $f(t)$, où α est un réel, est finalement une généralisation de l'expression II- 19 [POD 99]:

$$D^{(\alpha)}f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \cdot \binom{\alpha}{j} f(t - j \cdot h)$$

II- 20

$$\text{où : } \binom{\alpha}{j} = \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(j) \cdot \Gamma(\alpha - j)} \text{ avec } \Gamma(x) = \int_0^t e^{-t} \cdot t^{x-1} \text{ (fonction Gamma)}$$

Cette relation correspond à la définition de *Grünwald – Letnikov*. Pour un pas de discrétisation h très petit, la relation II- 20 peut également s'écrire :

$$D^{(\alpha)}f(t) \approx \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \cdot \binom{\alpha}{j} f(t - j \cdot h)$$

II- 21

Dans le cas d'une fonction causale, la somme infinie se réduit à une somme de K termes. La dérivation d'ordre α peut alors être calculée assez simplement en effectuant une discrétisation temporelle :

$$D^{(\alpha)}f_m \approx \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^K (-1)^j \cdot \binom{\alpha}{j} f_{m-j}$$

II- 22

où $f_m = f(t_m) = f(m \cdot h)$ où h est le pas de discrétisation.

A travers cette définition, on voit déjà apparaître l'une des propriétés de la dérivation d'ordre non entier : elle prend en compte le passé global de la fonction et donc l'ensemble de ses dynamiques.

II.4.1.2 Définition de Riemann – Liouville [POD 99]

Cette définition donne une autre expression de la dérivation d'ordre non entière d'une fonction $f(t)$, qui s'écrit ainsi :

$$D^{(\alpha)} f(t) = \sum_{j=0}^m \frac{f^{(j)}(0)t^{-\alpha+j}}{\Gamma(-\alpha+j+1)} + \frac{1}{\Gamma(-\alpha+m+1)} \int_0^t \tau^{m-\alpha} f^{(m+1)}(t-\tau) d\tau \quad \text{II- 23}$$

où m est choisi de manière à respecter les inégalités : $m \leq \alpha < m+1$

Pour une fonction $f(t)$, $(m+1)$ continûment dérivable pour $t > 0$, les expressions de *Grünwald – Letnikov* et *Riemann – Liouville* sont équivalentes.

II.4.1.3 Caractères implicite et explicite de la dérivation d'ordre non entier

Il existe deux classes de dérivations d'ordre non entier : la dérivation explicite et la dérivation implicite [OUS 95].

Pour la dérivation explicite, l'opérateur $D^{(\alpha)}$ porte directement sur la fonction $f(t)$:

$$\frac{d^\alpha f(t)}{dt^\alpha} \quad \text{II- 24}$$

La dérivation implicite quant à elle porte sur le produit de $f(t)$ par une exponentielle :

$$\frac{d^\alpha \left(f(t) \cdot e^{t/\tau} \right)}{dt^\alpha} \quad \text{II- 25}$$

Un système d'entrée $e(t)$ et de sortie $f(t)$ à caractère explicite est ainsi décrit par une équation différentielle d'ordre α du type :

$$\tau^\alpha \cdot D^\alpha f(t) + f(t) = e(t) \quad \text{II- 26}$$

Un système à caractère implicite est quant à lui décrit par une équation différentielle du type :

$$\tau^\alpha . D^\alpha \left[f(t) . e^{t/\tau} \right] = e(t) . e^{t/\tau} \quad \text{II- 27}$$

Si on reprend les équations de diffusion du champ magnétique II- 13 et II- 14, on constate ainsi que les caractères implicite ou explicite sont liés directement à la dimension finie ou non de la pièce où intervient un phénomène diffusif [RIU 01].

Pour terminer ces différentes définitions, rappelons que :

- une *équation différentielle généralisée* est une équation faisant apparaître des dérivées d'ordre non entier d'une entrée et d'une sortie ;
- un *système d'ordre non entier* est un système décrit par une (ou plusieurs) équation(s) différentielle(s) généralisée(s).

II.4.2 Transformée de Laplace de la dérivée d'ordre non entier

La transformée de Laplace d'une fonction $f(t)$ est définie par la relation :

$$F(s) = L\{f(t); s\} = \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-s \cdot t} dt \quad \text{II- 28}$$

A l'instar de la transformée de Laplace d'une dérivation d'ordre entier d'une fonction causale, la transformée de Laplace d'une dérivation d'ordre α de $f(t)$ est égale au produit de l'opérateur de Laplace s élevé à la puissance α et de la transformée de Laplace de $f(t)$:

$$L\{D^{(\alpha)}[f(t)]; s\} = s^\alpha \cdot L\{f(t); s\} \quad \text{II- 29}$$

En appliquant cette relation aux équations II- 26 et II- 27, il est possible de les caractériser dans le domaine fréquentiel. Le transfert suivant permet ainsi de définir un système caractérisé par une dérivation non entière d'ordre α explicite :

$$F_{\text{explicite}}(s) = \frac{1}{1 + (\tau \cdot s)^\alpha} \quad \text{II- 30}$$

Pour un système à caractère implicite, ce transfert s'écrit :

$$F_{\text{implicite}}(s) = \frac{1}{(1 + \tau \cdot s)^\alpha} \quad \text{II- 31}$$

II.4.3 Analyse de systèmes d'ordre 1/2

A titre applicatif, nous allons étudier dans ce paragraphe deux systèmes d'ordre non entier égal à $\frac{1}{2}$, l'un à caractère explicite et l'autre, implicite. Ces deux systèmes sont supposés à gain et de constante de temps τ unitaires. Ils peuvent ainsi être décrits par les transferts suivants :

$$F_{\text{exp}}^{1/2}(s) = \frac{1}{1 + \sqrt{s}} \quad \text{II- 32}$$

$$F_{\text{imp}}^{1/2}(s) = \frac{1}{\sqrt{1+s}}$$

Le cas considéré n'est pas lié au hasard ; nous avons ainsi montré que la diffusion dans une pièce conductrice faisait intervenir la dérivation d'ordre $\frac{1}{2}$ [RIU 01] conduisant à l'insertion d'impédances variant avec la racine carrée de la fréquence dans le schéma équivalent de machines électriques ou de piles à combustible.

II.4.3.1 Analyse dans le domaine fréquentiel

Le gain et la phase du système d'ordre $\frac{1}{2}$ implicite sont donnés par :

$$G_{\text{imp}}^{1/2}(j\omega) = \left| F_{\text{imp}}^{1/2}(j\omega) \right|_{dB} = -10 \cdot \log(1 + \omega^2) \quad \text{II- 33}$$

$$P_{\text{imp}}^{1/2}(j\omega) = -\frac{1}{2} \cdot \arctan(\omega)$$

Pour un système d'ordre $\frac{1}{2}$ explicite, son gain et sa phase sont donnés par les relations

suivantes (en utilisant la relation $\sqrt{j} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + j \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$):

$$G_{\text{exp}}^{1/2}(j\omega) = \left| F_{\text{exp}}^{1/2}(j\omega) \right|_{dB} = -20 \log \left(\left(1 + \sqrt{\omega} \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 + \left(\sqrt{\omega} \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 \right)$$

II- 34

$$P_{\text{exp}}^{1/2}(j\omega) = -\arctan \left(\frac{\sqrt{\omega}}{\sqrt{2} + \sqrt{\omega}} \right)$$

La Figure II- 10 représente dans le diagramme de Bode les transferts des systèmes d'ordre $\frac{1}{2}$ implicite et explicite. Nous avons également représenté la fonction de

transfert d'un système d'ordre entier égal à 1 décrit par : $F^1(s) = \frac{1}{1+s}$.

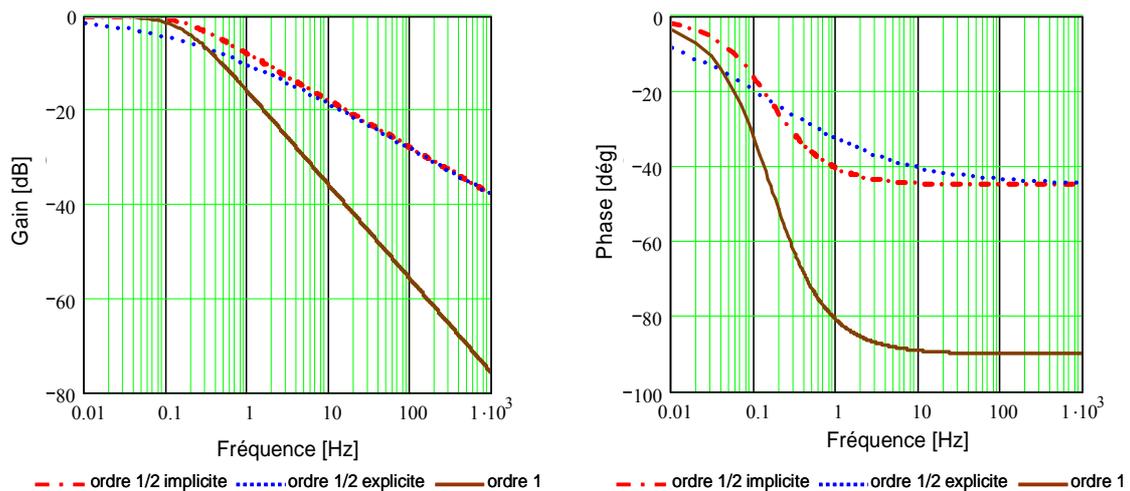


Figure II- 10: Comparaison des réponses fréquentielles de systèmes d'ordre $\frac{1}{2}$ explicite et implicite et d'un système d'ordre 1

On constate ainsi que le gain des systèmes d'ordre $\frac{1}{2}$ explicite et implicite décroît asymptotiquement avec une pente égale à -10 dB/décade, ce qui se traduit par une phase tendant vers -45° . Des différences existent entre les systèmes implicite et explicite notamment autour de la pulsation de coupure.

II.4.3.2 Analyse temporelle : étude de systèmes fractionnaire

Les réponses indicielles des systèmes implicite et explicite décrits ci-dessus sont données par les relations suivantes [OUS 95] :

$$s_{imp}^{1/2}(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi \cdot t}} - e^t \cdot \operatorname{erfc}(\sqrt{t})$$

$$s_{exp}^{1/2}(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi \cdot t}} - e^t \cdot (2 - \operatorname{erfc}(-\sqrt{t}))$$

II- 35

où : $\operatorname{erfc}(x) = \int_x^{\infty} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-t^2} dt$

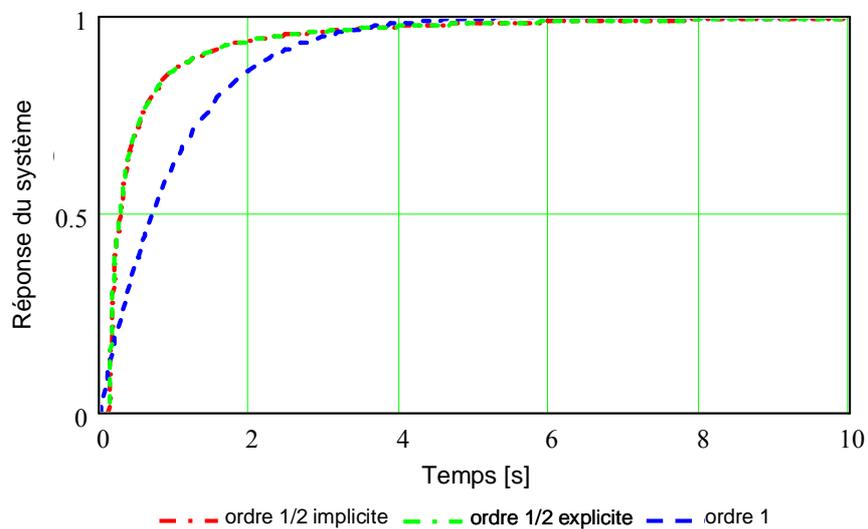


Figure II- 11: Comparaison de réponse temporelle d'un système implicite d'ordre ½ et un système entier d'ordre 1

On remarque ainsi que la réponse d'un système d'ordre non entier commence à répondre très rapidement au changement de consigne puis met un temps assez long pour atteindre la valeur finale. On retrouve ainsi une propriété remarquable et déjà évoquée des systèmes d'ordre fractionnaire : inclure à la fois des dynamiques rapides et lentes [OUS 95]. On remarque que dans le domaine fréquentiel, cette prise en compte du passé global de la fonction est décrite par un système extrêmement compact, i.e. décrit par un nombre de paramètres très réduit. C'est cette dernière propriété qui nous a fait nous intéresser de près à ces systèmes notamment dans le

domaine des réseaux électriques où il est souvent nécessaire de recourir à des techniques de réduction d'ordre. Nous reviendrons sur ce point au chapitre 5.

II.5 Conclusion

Ce chapitre, de caractère très théorique, nous a permis d'introduire et de mettre en évidence une propriété appropriée aux objets fractals, la propriété d'invariance d'échelle. Cette propriété a été aussi retrouvée dans les phénomènes diffusifs.

Les fractales sont des figures géométriques qui ne peuvent plus être décrits par la géométrie euclidienne mais sont caractérisés par une dimension non entière appelée dimension fractale.

Nous avons également évoqué les liens qu'il semble exister entre fractalité, dérivation non entière et donc systèmes d'ordre non entier.

Dans le chapitre suivant, nous allons appliquer quelques propriétés décrites ici pour tenter de caractériser un réseau électrique à partir de la théorie fractale, i.e. déterminer la dimension fractale d'un réseau électrique.

Chapitre III

Application aux réseaux électriques

III.1 Introduction

L'objet de ce chapitre est l'application de la modélisation fractale et non entière aux réseaux électriques dans un souci principal de réduction d'ordre sans perte de connaissances.

Les constats de départ sont les suivants. D'une part, la géométrie de certains réseaux électriques rappelle des objets fractals. D'autre part, les réseaux électriques raccordent de nombreux composants diffusifs aux propriétés d'invariance d'échelle (machines électriques, transformateurs, dispositifs électrochimiques). Enfin, les réseaux eux-mêmes peuvent être décrits par un système d'équations aux dérivées partielles dont on peut se demander si elles ne présentent pas les mêmes propriétés.

On peut donc se demander si la modélisation dynamique d'un réseau électrique ne pourrait pas se faire à l'aide des systèmes d'ordre non entier, la valeur de l'ordre étant donnée par la dimension fractale du réseau, qui elle-même découlerait de sa géométrie.

Pour répondre à cette interrogation, un état de l'art est tout d'abord présenté sur les applications et les méthodes de caractérisation des modèles fractals. Ensuite, dans le cas d'un réseau électrique présentant une structure fractale sans mailles (réseau de Cantor), nous établirons quelques propriétés théoriques afin de bien mettre en évidence les apports et difficultés de la modélisation fractale. Enfin, nous étudierons la modélisation non entière d'un réseau électrique réel.

III.2 Application et caractérisation des structures fractales

Nous allons dans un premier temps présenter quelques domaines d'application pour lesquels la modélisation fractale est utilisée : système respiratoire ou cerveau humain, cours d'un fleuve, dispositifs poreux (électrodes ou ... digues de mer) et enfin, quelques applications récentes à l'étude de black-out de réseaux électriques. Après ce bref état de l'art, nous exposerons les différentes méthodes de caractérisation et d'identification utilisées pour les modèles fractals.

III.2.1 Etat de l'art des domaines d'applications

On peut distinguer deux types d'application des outils fractals à la modélisation de systèmes présentant une invariance d'échelle manifeste : réseaux de neurones, ramifications du système respiratoire, structure des arbres, méandres d'un fleuve, réseaux d'habitat ou de déplacement urbain, fabrication d'électrodes ou de circuits électroniques, réseaux d'alimentation électrique, Toutes ces applications peuvent être modélisées en utilisant les outils fractals pour obtenir des lois de comportement structurellement simples mais denses en informations.

De nombreux travaux ont permis de trouver la dimension fractale de structures naturelles comme par exemple les ramifications dans un chou-fleur ou le découpage escarpé des côtes au bord de la mer. Mise à part l'intérêt parfois extraordinaire de connaître ces dimensions (égale à $\log(13)/\log(3) \approx 2,33$ pour le chou-fleur), une théorie, dite « théorie constructale » élaborée dans les années 90 par A. Bejan permet d'expliquer à partir des lois thermodynamiques la forme et l'évolution de ces systèmes naturels [BEJ 00]. Nous reparlerons de ce point particulier un peu plus loin.

D'autres travaux ont porté sur l'utilisation des outils fractals pour la caractérisation de systèmes techniques présentant une invariance d'échelle :

- dans le domaine de l'électrochimie, [SCH 75] et [LIU 85] ont ainsi montré que la rugosité des électrodes pouvait être modélisée par des circuits électriques constitué de cellules (RC) présentant un ou plusieurs facteurs de récursivité entre les paramètres. Dans [LIU 85] la rugosité est modélisée par un ensemble de rayures qui tendent à s'affiner avec la progression dans le matériau, constituant un réseau de Cantor de dimension 0,63,
- dans le domaine de l'urbanisme, les outils fractals sont utilisés pour modéliser le développement des villes. [ROD 00] montre ainsi que les rues de la ville de Tokyo présente une dimension fractale de 1,23. Dans [SIK 03], le réseau de métro de la ville de Séoul présente une dimension de 1,85. Le principal intérêt de cette modélisation réside dans l'aide à la décision politique pour l'évolution des infrastructures des grandes villes en observant l'évolution temporelle de la dimension fractale.

- enfin, dans le domaine des réseaux d'énergie électrique, des travaux menés à AREVA portent sur la modélisation fractale des réseaux de transport pour l'établissement des lois stochastiques prédisant l'apparition de black-out [SEE 08].

Cette liste ne se veut bien sûr pas exhaustive. Il existe de nombreux autres domaines d'applications de la modélisation fractale mais il ne nous a pas semblé utile de tous les lister. Cette courte liste est en effet suffisante pour illustrer les deux intérêts majeurs de la modélisation fractale : la modélisation de systèmes pouvant présenter des structures complexes avec des lois très simples et la possibilité de pouvoir prédire l'évolution de ces structures.

III.2.2 Etat de l'art des méthodes de caractérisation

Avant d'aborder la modélisation « fractale » des réseaux électriques d'énergie, revenons rapidement sur les méthodes de caractérisation ou d'identification couramment utilisées dans les domaines évoqués précédemment.

Nous avons listé trois méthodes :

- la première, la plus triviale, consiste à observer attentivement l'objet que l'on cherche à modéliser et à (essayer de) trouver la loi d'invariance d'échelle le caractérisant. Une branche de chou-fleur se divise ainsi généralement et en moyenne en 13 sous-branches 3 fois plus courtes [MAN 84]. Cette approche peut bien sûr être améliorée en intégrant des outils probabilistes ou stochastiques pour améliorer la précision du modèle,
- la deuxième repose sur le choix d'une jauge et le tracé d'une grandeur caractéristique du système étudié en fonction de la jauge. Cette représentation est bien souvent linéaire, et la pente de la droite permet de définir la dimension fractale du système. Ainsi, dans le cas du réseau de métro de Séoul, [SIK 03] a tracé l'évolution du nombre de sous-stations en fonction d'une distance élémentaire (cf figure III-1 et III-2).

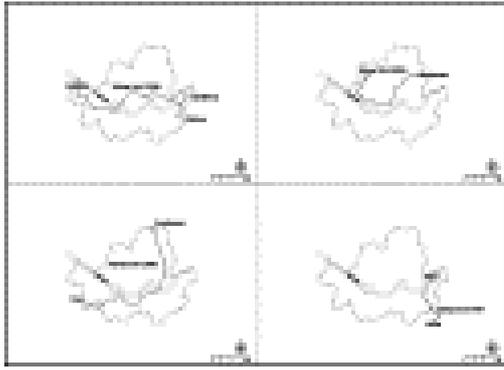


Figure III- 1: Plan du réseau de métro de Séoul [SIK 03]

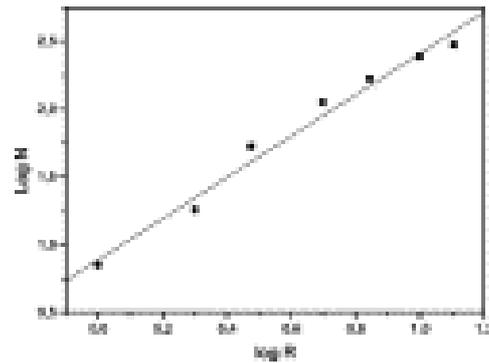


Figure III- 2: Tracé du nombre de sous-stations en fonction d'une distance élémentaire [SIK 03]

- enfin, la troisième méthode, celle que nous utiliserons par la suite, repose sur l'étude de l'impédance d'entrée du circuit électrique équivalent modélisant le réseau [LeME 82, LIU 85, KAP 85, SAP 88]. Cette troisième méthode ne s'applique bien sûr qu'aux objets dont une première analyse a permis d'établir cette modélisation sous forme de circuit. Un circuit modélisant un objet présentant une nature fractale de dimension d_f a alors une impédance d'entrée présentant dans une certaine plage de fréquences un comportement très caractéristique de la nature fractale. Cette zone se caractérise par un blocage de phase, très couramment dénommé CPA dans la littérature (pour *Constant Phase Angle*). Les références bibliographiques citées ci-dessus montrent qu'il existe un lien très étroit entre la valeur de la phase dans cette zone de CPA et la dimension d_f de l'objet. Ainsi, dans le cas du modèle uni-dimensionnel d'une électrode, [LIU 85] a montré que la phase était égale à $-\eta \frac{\pi}{2}$ avec $\eta = 1 - d_f$. Dans cette zone de fréquences bien particulière, le réseau se comporte alors comme un système d'ordre non entier égal à $-\eta$.

III.3 Invariance d'échelle dans les réseaux électriques

Dans un premier temps, nous nous intéressons à un réseau électrique « idéal » présentant une structure topologique fractale de type Cantor. Nous allons ainsi essayer de mettre en évidence les liens théoriques entre géométrie fractale, caractérisation fréquentielle et modélisation non entière. Ainsi, nous allons essayer de trouver une

méthode de détermination de la nature fractale du réseau de Cantor à partir de la mesure de son impédance. Une fois que ces liens auront été mis en évidence, nous tenterons dans un deuxième temps de caractériser le comportement fractal d'un réseau électrique quelconque.

III.3.1 La fractale de Cantor

La fractale de Cantor, également nommée ensemble ou poussière de Cantor [MAN 64] est constituée d'une myriade de points en fragmentation continue (Figure III- 3). La figure de base est un segment de droite fini dont on extrait le tiers central : l'échelle de réduction étant égale à 1/3, il reste 2 segments de longueur 1/3. L'opération d'extraction du tiers central est réitérée pour les deux tiers restants : de chacun d'eux ne subsistent que les deux autres tiers. La même opération est ensuite refaite indéfiniment pour la série de tous les tiers restants et, à l'infini, il ne subsiste plus qu'une « poussière de points » infinitésimaux.



Figure III- 3: Fractale, ensemble ou poussière de Cantor

Pour cette fractale la dimension fractale peut être calculée directement par :

$$d_f = \frac{\ln p}{\ln a} = \frac{\ln 2}{\ln 3} = 0.63 \quad \text{III- 1}$$

où p est le nombre de segments restant après chaque itération ($p=2$) et a est le facteur de réduction ($a=3$). Cette « poussière » infinitésimale est un intermédiaire entre un point de dimension nulle et une ligne de dimension 1.

III.3.2 Présentation du réseau électrique dérivé de la fractale de Cantor

Par analogie au motif fractal de Cantor, il est possible de définir un réseau électrique radial de type fractal. C'est un réseau à plusieurs étages, où les paramètres de la cellule RLC d'un étage sont liés par un facteur d'échelle aux paramètres des cellules des étages supérieurs. Pour simplifier l'étude, seules les résistance et inductance présentent un facteur d'échelle d'un étage à l'autre ; les capacités sont prises identiques. Le principe de construction de notre réseau est le suivant :

- à l'itération 0, la cellule de base correspond à un tronçon de ligne électrique de section S et de longueur L ;
- à l'itération 1, on suppose que la ligne se divise en deux tronçons de même longueur L et de section S/a . La résistance de cette nouvelle cellule est donc égale à $a.R$. L'inductance varie elle aussi avec la diminution de la section mais suivant une loi non linéaire. On note son évolution par un facteur b . Pour des questions de simplification, nous supposons que b est égal à a^2 ;
- à l'itération 2, on procède de même pour chaque tronçon ...

REMARQUE - Nous rappelons que l'objectif de cette partie consiste à exposer les développements théoriques nécessaires à la compréhension des liens entre fractalité, géométrie et caractérisation dynamique d'un réseau électrique. Les hypothèses, même grossières, que nous avons du poser seront discutées plus loin.

Notre réseau présente finalement la structure de la Figure III- 4.

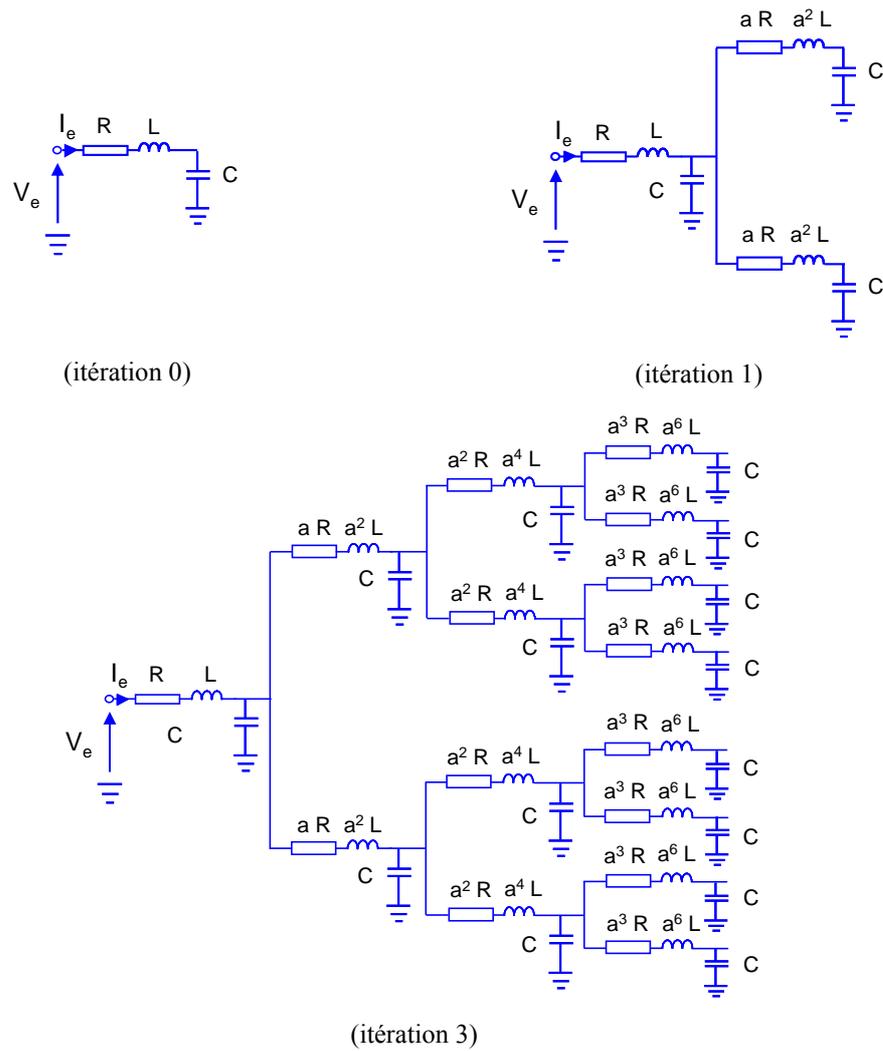


Figure III- 4: Structure du réseau électrique dérivé de la fractale de Cantor

La réponse en fréquence de l'impédance d'entrée V_e/I_e du réseau à chaque itération est donnée ci-dessous. On peut distinguer trois zones dans le comportement de cette impédance :

- un comportement inductif pour les hautes fréquences ;
- un comportement capacitif pour les basses fréquences ;
- pour les fréquences intermédiaires, un comportement correspondant à un blocage de phase (ou CPA).

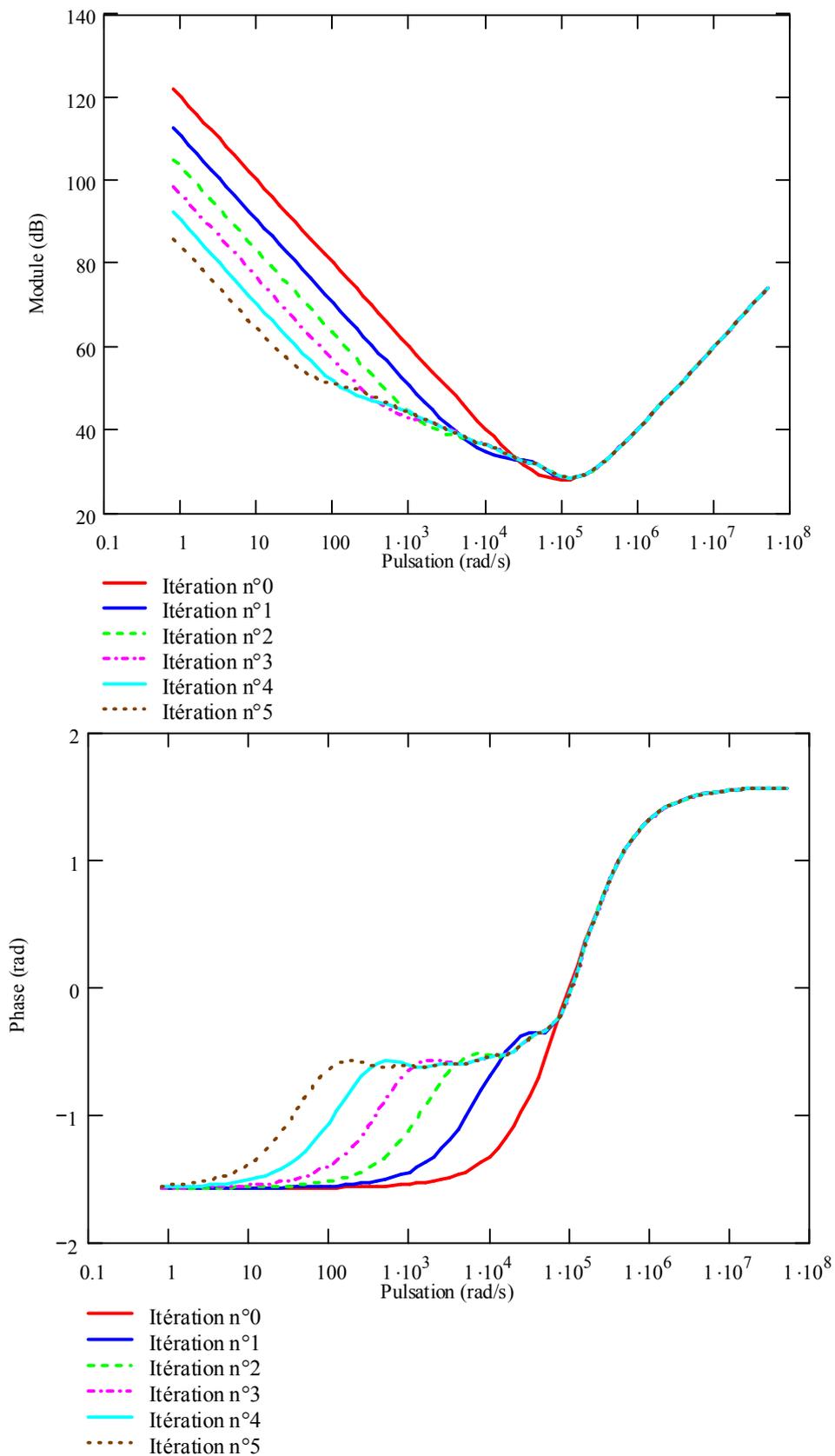


Figure III- 5: Réponse fréquentielle du réseau d'étude pour différentes itérations

($R=25 \Omega$ / $L=0.1$ mH / $C=1\mu F$ / $a=3$)

L'observation de l'impédance d'entrée du réseau permet de mettre en évidence un certain nombre de propriétés :

- il existe une zone de blocage de phase très nette apparaissant aux fréquences intermédiaires, caractéristique d'un phénomène à invariance d'échelle [LIU 85],
- cette zone de CPA, inexistante pour une ou deux cellules (RLC) mises en cascade, s'étend aux basses fréquences lorsque le nombre de cellules augmente. La valeur de la phase reste presque constant quelque soit le nombre de cellules.

Bien sûr, ces premières constatations requièrent une étude théorique plus approfondie afin de bien comprendre le lien entre la structure du réseau et son impédance d'entrée, et ceci avant de passer à l'étude de réseaux réels.

III.3.3 Etude analytique de l'impédance d'entrée

L'impédance d'entrée du réseau électrique présenté Figure III- 4 est définie par :

$$Z(\omega) = \frac{V_e}{I_e} \quad \text{III- 2}$$

où V_e et I_e sont respectivement la tension et le courant d'entrée.

Par la suite, n représentera le nombre d'étages du réseau (ou nombre d'itérations).

III.3.3.1 Comportements asymptotiques de l'impédance d'entrée

Pour les hautes fréquences, les capacités et les résistances deviennent négligeables par rapport aux inductances ; l'impédance d'entrée se met alors sous la forme :

$$Z(\omega)_{\omega \rightarrow \infty} = i\omega L \quad \text{III- 3}$$

Ainsi, pour les hautes fréquences, l'impédance présente un comportement inductif avec une phase égale à $\frac{\pi}{2}$ et un gain de pente égale à 20 dB/décade.

Pour les basses fréquences, ce sont les résistances et les inductances qui sont négligeables devant les capacités ; l'impédance d'entrée s'écrit alors :

$$Z(\omega)_{\omega \rightarrow 0} = \frac{1}{i\omega C} \left(\frac{1}{\sum_{j=0}^n 2^j} \right) = \frac{1}{i\omega C} \frac{1}{2^{n+1} - 1} \quad \text{III- 4}$$

Pour les très basses fréquences, l'impédance présente un comportement capacitif avec une phase tendant vers $-\pi/2$ et un gain de pente -20 dB/décade.

III.3.3.2 Comportement CPA de l'impédance d'entrée

Considérons un nombre fini n de cellules. Une façon commode d'écrire l'expression de l'impédance d'entrée consiste à utiliser des fractions continues :

$$Z(\omega) = R + i \cdot \omega \cdot L + \frac{1}{i \cdot \omega \cdot C + \frac{1}{aR + i \cdot \omega \cdot a^2 L + \frac{1}{i \cdot \omega \cdot C} + \dots}} \quad \text{III- 5}$$

Cette équation III- 5 peut se réécrire sous la forme :

$$Z(\omega) = R + i \cdot \omega \cdot L + \frac{1}{i \cdot \omega \cdot C + \frac{1}{a \cdot \left(R + i \cdot \omega \cdot a \cdot L + \frac{1}{i \cdot \omega \cdot a \cdot C} + \dots \right)}} \quad \text{III- 6}$$

On montre alors que Z s'écrit sous la forme d'une loi d'échelle :

$$Z(\omega) = R + i \cdot \omega \cdot L + \frac{1}{i \cdot \omega \cdot C + \frac{2}{a} \cdot \frac{1}{Z(\omega \cdot a)}} \quad \text{III- 7}$$

En supposant que l'impédance diverge plus lentement que $\frac{1}{\omega}$ quand ω tend vers 0 (hypothèse 1), on obtient la relation :

$$Z(\omega) = R + i \cdot \omega \cdot L + \frac{a}{2} \cdot Z(\omega \cdot a) \quad \text{III- 8}$$

L'équation III- 8 est une loi d'échelle (ou *scaling equation* en anglais), dont la résolution n'est pas évidente. Afin de trouver une solution à cette équation, nous utilisons une méthode reposant sur le Théorème Maître (ou *Master Theorem*) [THO 94, ROU 97] basé sur le principe de récurrence. Il consiste à réécrire l'équation III- 8 en exprimant l'impédance $Z(\omega a)$ en fonction de $Z(\omega a^2)$, puis $Z(\omega a^2)$ en fonction de $Z(\omega a^3)$, et ainsi de suite.

L'impédance d'entrée du réseau s'écrit alors en tenant compte de la deuxième itération :

$$\begin{aligned} Z(\omega) &= \frac{a}{2} \cdot \left[\frac{a}{2} \cdot Z(i\omega \cdot a^2) + R + i \cdot \omega \cdot a \cdot L \right] + R + i \cdot \omega \cdot L \\ &= \left(\frac{a}{2} \right)^2 \cdot Z(\omega \cdot a^2) + R \cdot \left(1 + \frac{a}{2} \right) + i \cdot \omega \cdot L \cdot \left(1 + \frac{a^2}{2} \right) \end{aligned} \quad \text{III- 9}$$

Puis :

$$\begin{aligned} Z(\omega) &= \frac{a}{2} \cdot \left\{ \frac{a}{2} \cdot \left[\frac{a}{2} \cdot Z(\omega \cdot a^3) + R + i \cdot \omega \cdot a^2 \cdot L \right] + R + i \cdot \omega \cdot a \cdot L \right\} + \\ &\quad + R + i \cdot \omega \cdot L \\ &= \left(\frac{a}{2} \right)^3 Z(\omega \cdot a^3) + R \cdot \left(1 + \frac{a}{2} + \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right) + i \cdot \omega \cdot L \cdot \left(1 + \frac{a^2}{2} + \left(\frac{a^2}{2} \right)^2 \right) \end{aligned} \quad \text{III- 10}$$

Ainsi, plus généralement à l'itération k :

$$\begin{aligned}
 Z(\omega) &= \left(\frac{a}{2}\right)^k \cdot Z(\omega \cdot a^k) + R \cdot \sum_{j=0}^{k-1} \left(\frac{a}{2}\right)^j + i \cdot \omega \cdot L \cdot \sum_{j=0}^{k-1} \left(\frac{a^2}{2}\right)^j \\
 &= \left(\frac{a}{2}\right)^k \cdot Z(\omega \cdot a^k) + \frac{2R}{2-a} \left(1 - \left(\frac{a}{2}\right)^k\right) + \frac{2i \cdot \omega \cdot L}{2-a^2} \left(1 - \left(\frac{a^2}{2}\right)^k\right)
 \end{aligned}
 \tag{III- 11}$$

Dans l'équation III- 11, k est fixé de telle sorte que, à une fréquence donnée, on puisse écrire $\omega \cdot a^k = \omega_0$ où ω_0 est une pulsation choisie arbitrairement. k est alors directement lié à ω_0 par :

$$k = \frac{\log \frac{\omega_0}{\omega}}{\log a}
 \tag{III- 12}$$

Avec cette définition, rien ne garantit que k soit un entier. Considérons alors k' l'entier le plus proche de k . La différence ε entre k et k' peut s'écrire sous la forme :

$$k' = k + \varepsilon = \frac{\log \frac{\omega_0}{\omega}}{\log a} + \varepsilon
 \tag{III- 13}$$

avec $\varepsilon \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

Dans le cas où $a \cdot \omega \ll \omega_0$ (hypothèse 2), ce qui impose une condition supplémentaire sur ω_0 (et donc k), le terme $\frac{\log \frac{\omega_0}{\omega}}{\log a}$ est très grand devant ε , et ce dernier peut alors être négligé.

Autrement, dans ces conditions, on peut supposer que $k = \frac{\log \frac{\omega_0}{\omega}}{\log a}$ est un entier. Et,

l'équation III- 11 peut alors être mise sous la forme suivante :

$$Z(\omega) = \left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{\log(\omega_0) - \log(\omega)}{\log a}} Z(\omega_0) + \frac{2R}{2-a} \left[1 - \left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{\log(\omega_0) - \log(\omega)}{\log a}} \right] + \frac{2i\omega L}{2-a^2} \left[1 - \left(\frac{a^2}{2}\right)^{\frac{\log(\omega_0) - \log(\omega)}{\log a}} \right] \quad \text{III- 14}$$

Cette relation peut aussi s'écrire :

$$Z(\omega) - \frac{2R}{2-a} - \frac{2i\omega L}{2-a^2} = \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^{-\eta} \left[Z(\omega_0) - \frac{2R}{2-a} - \frac{2i\omega_0 L}{2-a^2} \right] \quad \text{III- 15}$$

où : $\eta = 1 - \frac{\log 2}{\log a}$.

On pose $A(\omega) = Z(\omega) - \frac{2R}{2-a} - \frac{2i\omega L}{2-a^2}$. La relation précédente devient :

$$A(\omega) = \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^{-\eta} . A(\omega_0) \quad \text{III- 16}$$

Cette loi d'échelle est vérifiée par la fonction A suivante :

$$A(\omega) \propto (i\omega)^{-\eta} \quad \text{III- 17}$$

On suppose que l'on puisse négliger les termes résistifs et inductifs de A devant Z (hypothèse 3). L'impédance d'entrée du réseau de Cantor peut alors s'écrire :

$$Z(\omega) \propto (i\omega)^{-\eta} \quad \text{III- 18}$$

Plusieurs remarques peuvent être faites :

- si η est inférieur à 1 (ce qui est toujours vrai pour a supérieur à 1), l'hypothèse 1 est vérifiée.

- L'hypothèse 2 $a \cdot \omega \ll a \cdot \omega^k = \omega_0$ est vérifiée si k est suffisamment grand. Pour un nombre de cellules infini (ce qui revient à choisir k infini), l'hypothèse est donc toujours vraie. Pour un réseau fini, k ne peut pas dépasser la valeur du nombre de cellules. Il faudra donc que le réseau ait un nombre suffisamment important de cellules.
- Si la fréquence augmente, le terme inductif $\frac{2 \cdot i \omega L}{a^2 - 2}$ est supérieur aux deux autres termes de l'équation III- 15 et on retrouve le comportement inductif de l'impédance décrit précédemment. Nous reviendrons sur ce point et sur la validité de l'hypothèse 3 à la section suivante ;
- Dans la plage de fréquences correspondant à cette étude, le système se comporte globalement comme un système d'ordre non entier égal à $-\eta$. Ceci se traduit par le blocage de phase égal à $\frac{-\eta \cdot \pi}{2}$ identique à celui de la Figure III- 5.
- La relation $\eta = 1 - d_f$ montre le lien entre le comportement fréquentiel de l'impédance et sa structure fractale. Elle illustre également l'intérêt d'utiliser des systèmes d'ordre non entier pour caractériser une géométrie fractale.

Nous mettons ainsi en évidence différentes relations possibles entre géométrie, comportement fréquentiel (ou dynamique) et systèmes d'ordre non entier. Toutefois, nous n'avons pas démontré de strictes équivalences entre représentation fréquentielle, modélisation non entière et structure fractale. Ainsi à un système d'ordre non entier α correspond une infinité de motifs fractals de dimension $1-\alpha$. Par contre, tout réseau, présentant un blocage de phase sur une certaine plage de fréquences, peut être modélisé par une impédance d'ordre non entier.

Il reste alors à analyser la zone de fréquences où intervient le blocage de phase et l'influence des paramètres du réseau sur la largeur de cette zone.

III.3.4 Bande passante du comportement « CPA »

L'impédance d'un réseau ayant une structure fractale présente un comportement CPA dans une bande passante qu'il convient de mieux situer.

Reprenons le réseau présenté sur la Figure III- 4. Il est constitué par une mise en cascade de quadripôles d'ordre deux. Considérant que le coefficient d'amortissement

$z = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$ de la première cellule (RLC) est supérieur à l'unité, l'impédance du quadripôle Z_1 peut s'écrire sous la forme :

$$Z_1(j\omega) = \frac{\left(1 + j \frac{\omega}{\omega_{1,1}}\right) \cdot \left(1 + j \frac{\omega}{\omega_{1,2}}\right)}{j\omega C} \quad \text{III- 19}$$

où $\omega_{1,1}$ et $\omega_{1,2}$ sont les pulsations caractéristiques données par:

$$\omega_{1,1} = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} \left(z - \sqrt{z^2 - 1} \right) \quad \text{III- 20}$$

$$\omega_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} \left(z + \sqrt{z^2 - 1} \right)$$

De même, il est possible de définir les pulsations caractéristiques pour chaque cellule du réseau étudié. Pour la $n^{\text{ième}}$ cellule, ces deux pulsations s'écrivent :

$$\omega_{1,n} = \frac{1}{a^n \sqrt{L \cdot C}} \left(z - \sqrt{z^2 - 1} \right) \quad \text{III- 21}$$

$$\omega_{2,n} = \frac{1}{a^n \sqrt{L \cdot C}} \left(z + \sqrt{z^2 - 1} \right)$$

Etant donné que le facteur de réduction a est supérieur à 1 ($a=3$), il est possible de classer les pulsations caractéristiques dans l'ordre suivant :

$$\frac{1}{a^n \sqrt{L \cdot C}} \cdot \left(z - \sqrt{z^2 - 1} \right) < \dots < \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} \cdot \left(z - \sqrt{z^2 - 1} \right) < \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} \cdot \left(z + \sqrt{z^2 - 1} \right) \quad \text{III- 22}$$

Si la pulsation ω du réseau est telle que : $\omega \ll \omega_{\text{inf}} = \frac{1}{a^n \cdot \sqrt{L \cdot C}} \cdot \left(z - \sqrt{z^2 - 1} \right)$, le comportement de chaque quadripôle est capacitif. Ainsi, en deçà de cette pulsation, le réseau électrique ne présente plus un comportement anormal mais capacitif.

De même, pour des fréquences telles que : $\omega \gg \omega_{\text{sup}} = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} \cdot \left(z + \sqrt{z^2 - 1} \right)$ le réseau électrique présente un comportement inductif.

Nous avons ainsi affiné la plage de fréquences du comportement CPA. Sa bande passante est restreinte à la plage de fréquences comprise entre :

$$\omega_{\text{inf}} = \frac{1}{a^n \cdot \sqrt{L \cdot C}} \cdot \left(z - \sqrt{z^2 - 1} \right) \text{ et } \omega_{\text{sup}} = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} \cdot \left(z + \sqrt{z^2 - 1} \right).$$

Les plages de fréquence de l'impédance d'entrée sont résumées sur la Figure III- 6.

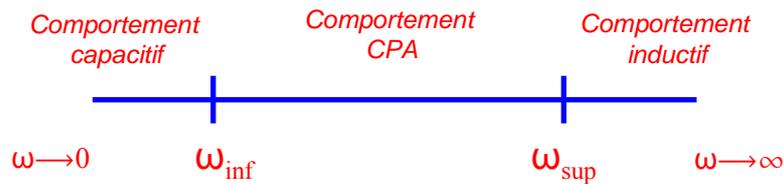


Figure III- 6: Bande passante du comportement CPA de l'impédance

Il est important de noter que plus le nombre de cellules augmente, plus la pulsation inférieure baisse de valeur, la pulsation supérieure restant constante. Autrement dit, la zone de comportement CPA s'étend vers les basses fréquences au détriment de la zone capacitive (cf. Figure III- 7 ci-dessous).

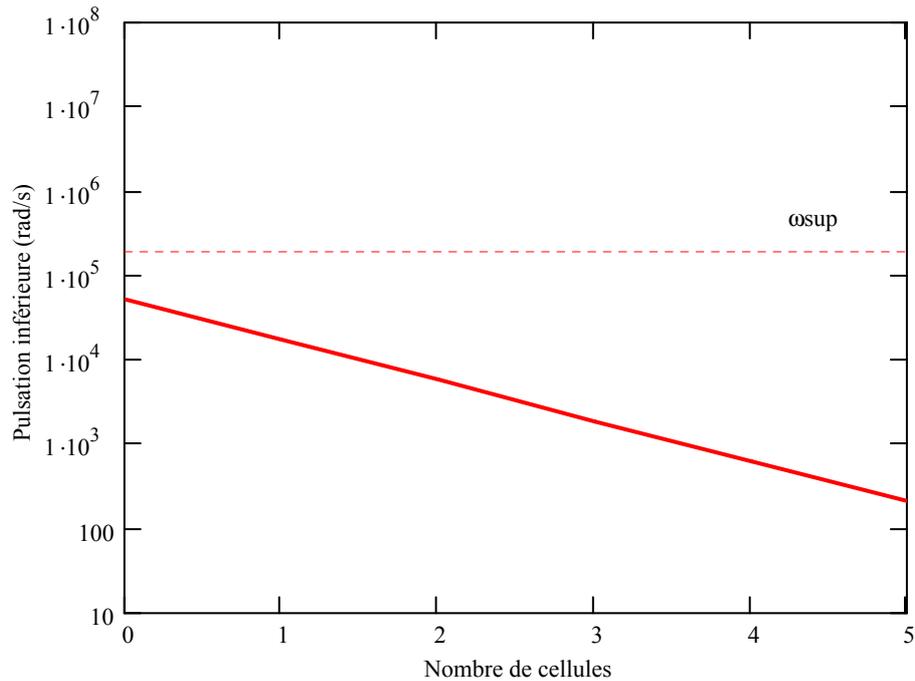


Figure III- 7: Evolution des bornes de la zone de comportement CPA

Un dernier point reste en suspens concernant l'hypothèse 3 du calcul. Elle suppose que les termes $\frac{2R}{2-a}$ et $\frac{2i\omega L}{2-a^2}$ sont négligeables devant $Z(\omega)$ dans la zone de comportement CPA. Nous vérifions sur la figure ci-dessous que c'est bien le cas pour le terme inductif. Il faut toutefois être plutôt basse fréquence pour que le terme résistif soit négligeable. Ceci nous conduit à une nouvelle interprétation de la zone de comportement CPA. C'est la zone où les comportements inductif à haute fréquence et capacitif à basse fréquence sont les plus faibles et laissent la place à une valeur d'impédance qui n'est plus limitée que par son amortissement, c'est-à-dire la résistance. Une interprétation plus géométrique peut encore être faite. A basses fréquences, les capacités « court-circuitent » le système. A hautes fréquences, les inductances « ouvrent » le système. Ce n'est que dans la zone intermédiaire que l'on voit fréquemment l'ensemble du réseau.

A noter enfin que nous retrouvons bien les bornes inférieure et supérieure de la zone de comportement CPA.

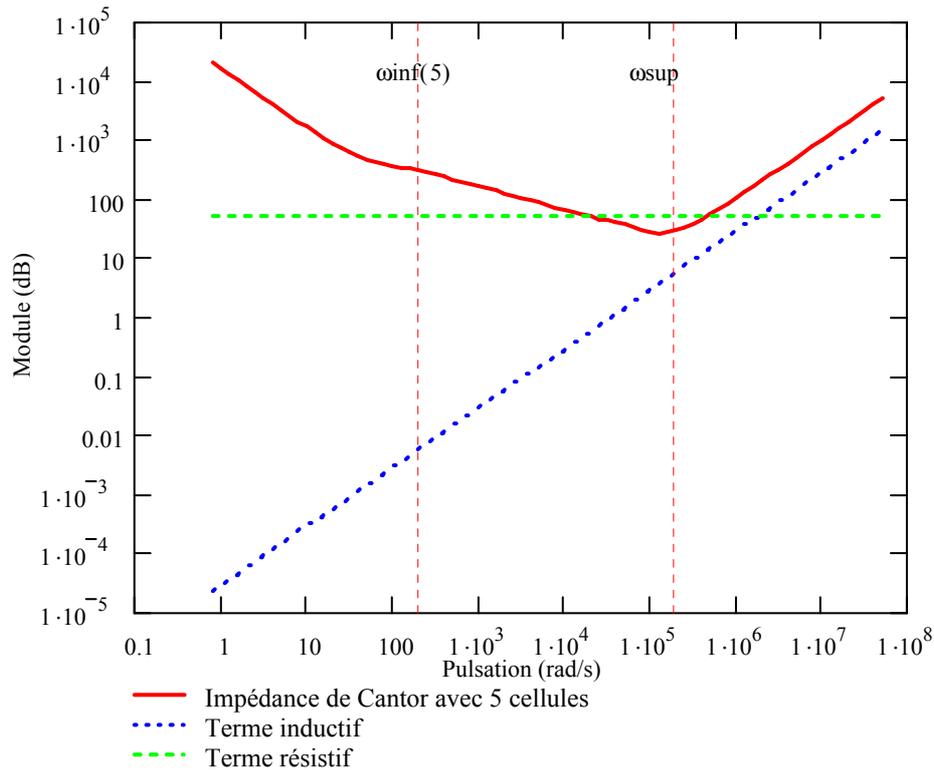


Figure III- 8: Réponse fréquentielle du réseau d'étude pour 5 itérations

III.3.5 Influence des paramètres du réseau électrique sur le comportement CPA

Avant d'analyser le comportement fractal d'un réseau électrique réel, nous allons analyser l'influence des différents paramètres du réseau de Cantor afin de tester la robustesse de l'identification de la dimension fractale à partir de la zone de blocage de phases. Pour cela, nous allons regarder sommairement (c'est-à-dire sans refaire de calculs théoriques analogues au paragraphe précédent) l'influence des paramètres R, L et C de chaque cellule. Nous verrons dans un deuxième temps l'influence des autres paramètres du réseau.

III.3.5.1 Influence des paramètres (RLC)

Nous avons montré au paragraphe précédent que l'impédance d'entrée, dans une zone de fréquences bien déterminée, présente une évolution fréquentielle ne dépendant que de la structure du réseau (mais pas du choix des paramètres (RLC) de chaque cellule. Une modification d'un ou plusieurs de ces paramètres ne devrait dès lors pas modifier la zone de blocage de phase.

La Figure III- 9, montre l'évolution du module et du gain de l'impédance du réseau électrique étudié avec les paramètres suivants : $R=10 \Omega$, $L=5 \text{ mH}$ et $C=1 \mu\text{F}$ (dans ce cas $z = 0,07$ alors que dans le cas présenté au III.3.4, z était égal à 1,25).

Nous montrons alors que la zone CPA voit apparaître des « oscillations » correspondant aux résonances du réseau électrique [LAR 96].

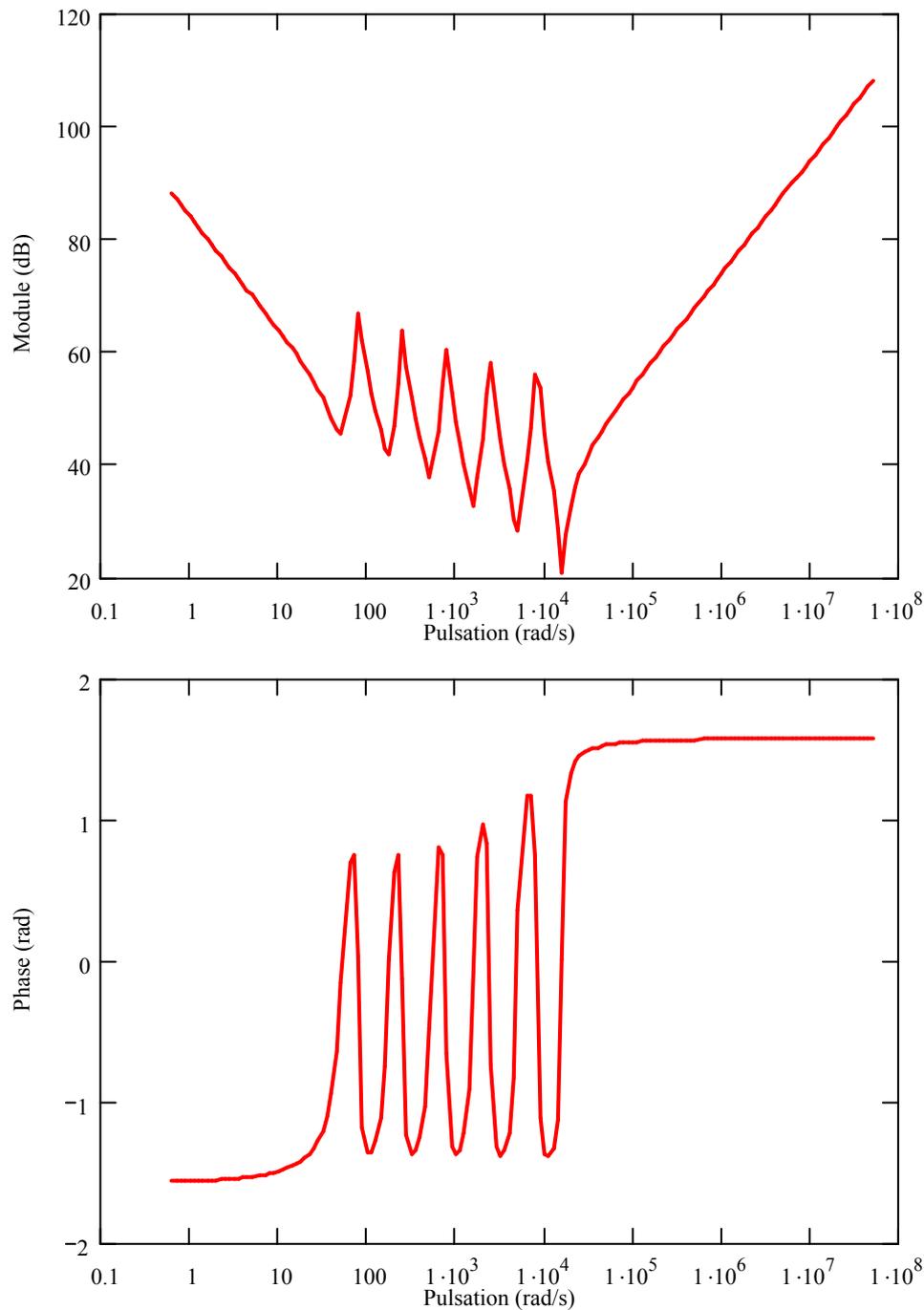


Figure III- 9: Impédance du réseau électrique (gain et module) pour un coefficient d'amortissement inférieur à 0.5 et quatre itérations

Les paramètres du réseau électrique R , L et C n'influencent pas fondamentalement le comportement fractal du réseau mais peuvent le modifier dans certains cas par des résonances. Ceci pourrait nous poser des problèmes en termes d'identification de la dimension fractale.

III.3.5.2 Autres influences

Nous listons dans ce paragraphe l'influence des autres paramètres susceptibles de modifier la zone de blocage de phase :

- La présence de charges électriques connectées en certains nœuds du réseau électrique aura plus ou moins d'influence sur la zone de blocage de phase suivant leur valeur et leur localisation. Nous avons ainsi montré qu'un ensemble de charges (R-L) connectées aux extrémités du réseau de Cantor ne modifiait pas la zone caractéristique de blocage de phase, ni en valeur, ni en bande passante. Le rapprochement des charges vers la source tend cependant à modifier la géométrie fractale du réseau, conduisant à une modification de la dimension fractale.
- Seule une source électrique a été prise en compte pour alimenter notre réseau. Dans le cas d'un système multi-sources, il pourrait être intéressant de comparer les différentes impédances d'entrée vues de chaque source afin de mieux identifier les potentielles zones de blocage de phase et donc d'améliorer la modélisation du réseau. Ce point sera d'autant plus intéressant à étudier que le réseau comporte des mailles.
- Enfin, seuls les modèles statiques des différents composants du réseau (lignes et charges) ont été utilisés dans un premier temps pour déterminer l'impédance d'entrée de notre réseau. Il sera intéressant par la suite d'évaluer la pertinence d'utiliser des modèles plus fins tenant compte par exemple de l'effet de peau ou de la propagation dans les lignes et de la diffusion dans les charges pour affiner la représentation globale du réseau. Du point de vue théorique, la juxtaposition de deux problèmes fractals, liés à la structure du réseau et au phénomène de diffusion, pourrait nous amener à utiliser d'autres outils non présentés dans ce mémoire : les multifractales.

III.3.6 Réponse fréquentielle d'un réseau électrique réel

Pour terminer ce chapitre sur la caractérisation fractale d'un réseau, nous allons nous intéresser au comportement d'un réseau électrique réel de distribution. Ce réseau comprend 189 nœuds dont 1 poste source et 103 nœuds de charge impédants et actifs consommant au total 21 MW et 10 MVar. Cinq zones peuvent être définies correspondant aux 5 départs du poste source. Le niveau de tension est fixé à 20 kV. Les longueurs des départs varient entre 6,9 km et 21,9 km [RIC - 06]. La topologie générale du réseau est décrite Figure III- 10.

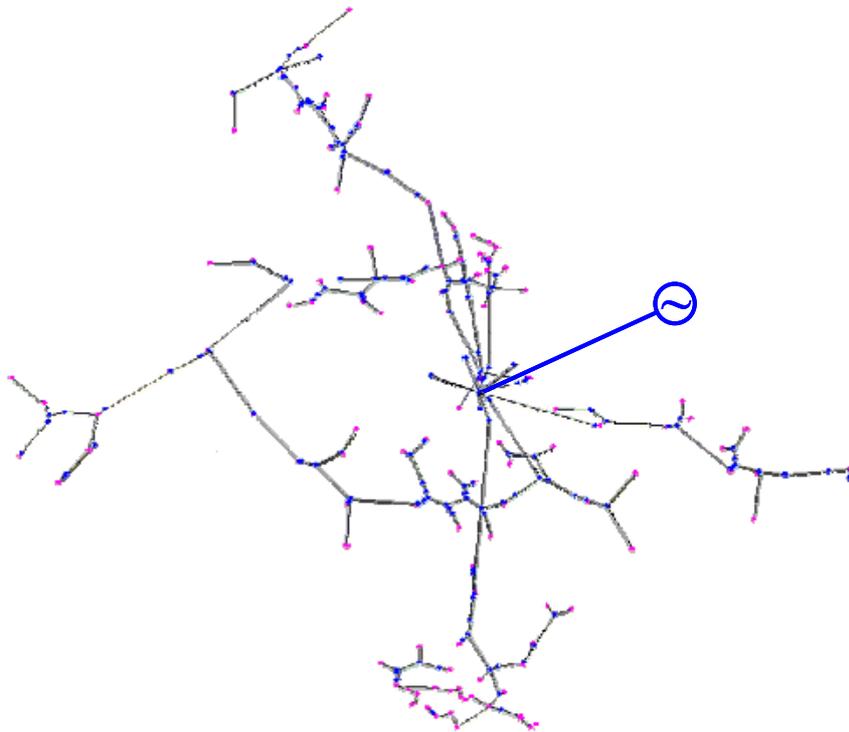


Figure III- 10: Topologie du réseau électrique réel étudié

Les module et phase de l'impédance d'entrée de ce réseau sont représentés Figure III- 11. Nous pouvons repérer trois zones distinctes de fonctionnement :

- pour les hautes fréquences (au-delà de 10 kHz), le comportement inductif des lignes et des charges prime sur les autres éléments du réseau ;
- pour les basses fréquences (en dessous de 100 Hz), le réseau a un comportement capacitif ;

- et enfin, pour les fréquences intermédiaires, nous observons l'existence d'un comportement particulier du réseau. Sans conclure trop vite, on semble noter un comportement CPA influencé par de nombreuses résonances. Il faut noter que le coefficient d'amortissement de chaque ligne électrique est relativement bas (inférieur à 0,1) ce qui va dans le sens de notre conclusion.

Cette première analyse montre qu'un réseau réel a une réponse fréquentielle qui peut se rapprocher de celle d'un réseau fractal, dans une bande de fréquences données. Il convient toutefois d'être prudent car la zone de fréquence considérée ne nous permet plus de considérer que l'hypothèse « lignes courtes » pour la modélisation du réseau est toujours justifiée. Il faudrait tenir compte d'éventuelles propagations et ne plus utiliser une représentation par de simples cellules RLC. L'impact de la propagation sur la zone de comportement CPA reste à étudier et ouvre de nouvelles perspectives pour la poursuite de ces travaux de modélisation.

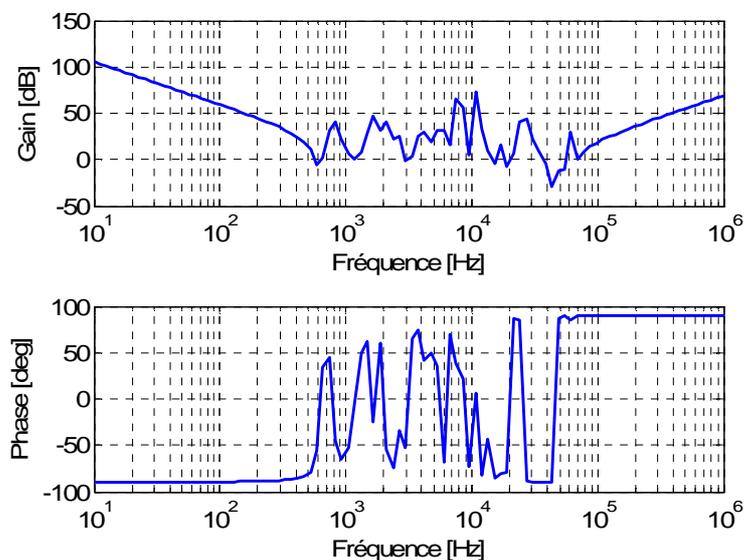


Figure III- 11: Réponse fréquentielle du réseau réel étudié

III.4 Conclusion

Ce chapitre nous a permis de mettre en évidence les liens qui existent entre la structure d'un réseau électrique et sa caractérisation fréquentielle à travers l'utilisation des outils fractals.

Ainsi, dans le cas d'un réseau présentant une structure fractale dite de Cantor, nous avons réussi à montrer théoriquement que l'impédance de ce réseau présente un comportement particulier de blocage de phase dans une bande de fréquences bien délimitée. Ce blocage de phase permet alors de retrouver la dimension fractale du réseau étudié.

Cependant, ces premiers résultats doivent être nuancés lorsque l'on s'intéresse à la modélisation d'un réseau électrique réel. Ainsi, suivant la valeur des paramètres des différents éléments du réseau et notamment le coefficient d'amortissement des différentes lignes, la zone de blocage de phase peut être difficilement décelable du fait de la présence de nombreuses résonances.

Par ailleurs, il est important de revenir sur la modélisation des différents composants du réseau étant donnée la zone de hautes fréquences où intervient le comportement fractal du réseau.

Cette première étude nous a tout de même permis d'appliquer pour la première fois les outils fractals à la modélisation des réseaux électriques, même si de nombreuses limitations sont apparues.

Chapitre IV

Eléments théoriques de la stabilité d'un système d'ordre non entier

IV.1. Introduction

La stabilité des réseaux a toujours été un sujet de première importance. Elle caractérise la propriété qu'a un réseau de revenir à un état d'équilibre à la suite d'une perturbation, grande ou petite, courte ou durable, voulue ou non. Dans un contexte de décentralisation de la production et du stockage d'énergie, de multiplication de convertisseurs d'électronique de puissance, la stabilité prend de plus en plus d'importance. Il faut en effet pouvoir continuer de garantir de bonnes performances dynamiques quelles que soient les conditions de fonctionnement ou de production et ce pour des réseaux qui peuvent être de plus en plus isolés, voire l'être totalement comme les réseaux embarqués.

La stabilité recouvre en fait de multiples définitions. On parle ainsi de stabilité petits signaux (le système est soumis à des perturbations si petites que la linéarisation des équations du système est possible) ou grands signaux (la linéarisation n'est plus possible) ; on parle également de stabilité d'angle interne, de stabilité de fréquence ou de tension [KUN 94]. Chaque type de stabilité nécessite alors une méthode d'analyse propre (en petits ou grands signaux) et un modèle du système qui soit adapté et plus ou moins précis. Dans ce chapitre, nous nous intéresserons particulièrement à la stabilité de tension d'un réseau électrique soumis à de petites perturbations. Nous resterons ainsi dans le cadre d'hypothèses linéaires, pour lesquelles des méthodes comme l'analyse modale ou fréquentielle de Nyquist donnent des résultats très satisfaisants.

Les charges électriques modernes ont non seulement l'inconvénient d'être non linéaires (du fait des interfaces d'électronique de puissance), mais aussi d'être à « puissance constante ». Ainsi, lorsqu'un système est régulé en tension avec une charge en aval à puissance constante, la relation tension/courant en entrée de la charge est caractérisée par une hyperbole. En petits signaux, la résistance équivalente qui en résulte est négative puisqu'à une diminution de la tension d'entrée correspond une augmentation du courant [MID 76, LIU 07]. Cela peut donc rendre le système instable vis-à-vis de petites perturbations.

Dans un souci de conception optimale des réseaux électriques modernes, il est donc important de disposer de méthodes pour bien étudier la participation et la sensibilité de certains paramètres vis-à-vis de la stabilité en petits signaux du système. Ces

méthodes, qu'elles dérivent de l'analyse modale ou d'approches fréquentielles, sont le plus souvent basées sur des modèles d'ordre entier. Pourtant, ils ne sont pas toujours les plus adéquats car ils peuvent être généralement d'ordre élevé afin d'être suffisamment précis sur une large plage de fonctionnement ; le modèle est alors assimilé à un modèle de type « boîte noire » et les paramètres identifiés obtenus n'ont alors souvent plus de lien avec la physique du réseau [RIU 01, KHA 01, RET 03]. Les analyses de sensibilité pour la conception du système deviennent dès lors plus difficiles.

Même si les modèles de réseaux ont été décrits principalement dans le domaine fréquentiel, ils demeurent avant tout des modèles de connaissance, liés étroitement aux caractéristiques du réseau. Nous avons ainsi privilégié les méthodes d'analyse par matrice d'état puisque nous disposons a priori de modèles dont la connaissance est suffisante pour établir la représentation d'état. Cette représentation est par ailleurs classiquement utilisée pour l'analyse de réseaux.

Les méthodes d'analyse fréquentielle peuvent de toutes façons être utilisées également, soit à partir du calcul des impédances de deux systèmes interconnectés sur un même bus puis en appliquant les critères de Nyquist ou de Middlebrook [MID 78], soit en dérivant directement à partir de la matrice d'état la fonction de transfert du système considéré. Ces méthodes d'analyse de stabilité à partir de représentations fréquentielles utilisant des impédances/admittances sont très utilisées dans les systèmes DC ou AC/DC [JOU 02, BAR 03].

Dans ce chapitre, nous proposons de mener l'étude de stabilité d'un système électrique dont les composants sont modélisés avec des impédances d'ordre non entier introduites au chapitre 3. On mettra en évidence l'apport des modèles d'ordre non entier pour l'analyse d'un réseau ou d'un système électrique au chapitre 5. Néanmoins, au préalable, nous présentons dans ce chapitre tous les éléments théoriques nécessaires pour la bonne compréhension du chapitre 5 et notamment comment mener une analyse de stabilité avec une approche modale sur un système d'ordre non entier quelconque.

IV.2. Analyse de stabilité par approche modale

IV.2.1 Construction d'un système d'état généralisé

A partir des équations électriques reliant les grandeurs (courants, flux, tensions) du modèle d'ordre non entier d'un système électrique, il est possible de construire un système d'état faisant intervenir les dérivées d'ordre non entier des variables d'état du système. Nous présentons dans ce paragraphe la méthodologie générale pour construire ce système d'état généralisé [OUS 98, HAR 98, MAT 96].

IV.2.1.1 Equation différentielle décrivant un système dynamique

Afin de déterminer la représentation d'état d'un système d'ordre non entier nous partons de l'équation différentielle générale donnée par l'équation IV- 1 obtenue à partir de la linéarisation du système considéré :

$$\sum_{n=0}^N a_n \left(\frac{d}{dt} \right)^{\alpha_n} f(t) = \sum_{m=0}^M b_m \left(\frac{d}{dt} \right)^{\beta_m} u(t) \quad \text{IV- 1}$$

$\alpha_n, \beta_m \in \mathfrak{R}$

soit :

$$a_0 \left(\frac{d}{dt} \right)^{\alpha_0} f(t) + a_1 \left(\frac{d}{dt} \right)^{\alpha_1} f(t) + \dots + a_N \left(\frac{d}{dt} \right)^{\alpha_N} f(t) = b_0 \left(\frac{d}{dt} \right)^{\beta_0} u(t) + \dots + b_M \left(\frac{d}{dt} \right)^{\beta_M} u(t) \quad \text{IV- 2}$$

où le vecteur $\bar{\alpha} = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_N)$ représente le vecteur des ordres de dérivation de la sortie $f(t)$, classés dans l'ordre croissant. Les coefficients β_j quant à eux représentent les ordres de dérivation de l'entrée $u(t)$. Les coefficients a_i et b_j sont définis en fonction des paramètres du système considéré (résistances, inductances, ... etc).

IV.2.1.2 Changement de variables

La seconde étape pour construire le système d'état généralisé consiste à effectuer le changement de variables suivant :

- la première variable introduite, x_1 , est définie comme la dérivée d'ordre α_0 de $f(t)$,
- la deuxième variable, x_2 , est définie comme la dérivée d'ordre α_1 de la fonction $f(t)$,
- la $i^{\text{ème}}$ variable x_i est définie comme la dérivée d'ordre α_{i-1} de la fonction de sortie $f(t)$.

Remarque : en général, $\alpha_0 = 0$; la variable x_1 correspond ainsi à la fonction $f(t)$.

Les nouvelles variables et les relations que l'on peut définir entre elles s'écrivent alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{d}{dt}\right)^{(\alpha_0)} f(t) = x_1(t) \\ \left(\frac{d}{dt}\right)^{(\alpha_1)} f(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^{(\alpha_1 - \alpha_0 + \alpha_0)} f(t) = x_1^{(\alpha_1 - \alpha_0)}(t) = x_2(t) \\ \vdots \\ \left(\frac{d}{dt}\right)^{(\alpha_{i-1})} f(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^{(\alpha_{i-1} - \alpha_{i-2} + \alpha_{i-2})} f(t) = x_{i-1}^{(\alpha_{i-1} - \alpha_{i-2})}(t) = x_i(t) \\ \vdots \\ \left(\frac{d}{dt}\right)^{(\alpha_{N-1})} f(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^{(\alpha_{N-1} - \alpha_{N-2} + \alpha_{N-2})} f(t) = x_{N-1}^{(\alpha_{N-1} - \alpha_{N-2})}(t) = x_N(t) \\ \left(\frac{d}{dt}\right)^{(\alpha_N)} f(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^{(\alpha_N - \alpha_{N-1} + \alpha_{N-1})} f(t) = x_N^{(\alpha_N - \alpha_{N-1})}(t) \end{array} \right. \quad \text{IV- 3}$$

Compte tenu du changement de variables, l'équation IV- 2 devient :

$$x_N^{\alpha_N - \alpha_{N-1}}(t) = -\frac{a_0}{a_N} x_1(t) - \frac{a_1}{a_N} x_2(t) - \dots - \frac{a_{N-1}}{a_N} x_N(t) + \sum_{m=1}^M \frac{b_m}{a_N} \left(\frac{d}{dt}\right)^{\beta_m} u(t) \quad \text{IV- 4}$$

IV.2.1.3 Construction du système d'état généralisé

A partir des équations IV- 3 et IV- 4, nous pouvons écrire le système d'état reliant le vecteur d'état $\bar{x}(t)$ à N composantes et le vecteur d'entrée $\bar{u}(t)$ à M composantes sous la forme :

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} x_1^{(\alpha_1 - \alpha_0)}(t) \\ x_2^{(\alpha_2 - \alpha_1)}(t) \\ \vdots \\ x_{N-1}^{(\alpha_{N-1} - \alpha_{N-2})}(t) \\ x_N^{(\alpha_N - \alpha_{N-1})}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ -\frac{a_0}{a_N} & -\frac{a_1}{a_N} & \dots & \dots & -\frac{a_{N-1}}{a_N} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{N-1}(t) \\ x_N(t) \end{bmatrix} + \\
 &+ \begin{bmatrix} 0 \dots 0 \\ 0 \dots 0 \\ 0 \dots 0 \\ 0 \dots 0 \\ \frac{b_1}{a_N} \dots \frac{b_M}{a_N} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u^{(\beta_1)}(t) \\ \vdots \\ u^{(\beta_M)}(t) \end{bmatrix}
 \end{aligned}
 \tag{IV- 5}$$

Ainsi, le système IV- 5 peut s'écrire plus généralement sous la forme :

$$\begin{cases} \bar{x}^{(\bar{n})}(t) = A \cdot \bar{x}(t) + B \cdot \bar{u}(t) \\ \bar{y}(t) = C \cdot \bar{x}(t) + D \cdot \bar{u}(t) \end{cases}
 \tag{IV- 6}$$

Ainsi, comme dans le cas entier, une représentation d'état d'ordre non entier comporte deux équations [OUS 98] :

- une équation d'état généralisée dans laquelle le vecteur d'état ne fait plus l'objet d'une dérivation unitaire mais d'une dérivation d'ordre non entier, réel ou complexe ;
- une équation d'observation.

Les vecteurs intervenant dans l'équation IV-6 sont :

- Le vecteur d'état : $\bar{x}(t) = [x_1(t) | x_2(t) | \dots | x_N(t)]^T$

- Le vecteur d'entrée (ou de commande) :

$$\bar{u}(t) = \left[u^{(\beta_1)}(t) \mid u^{(\beta_2)}(t) \mid \dots \mid u^{(\beta_M)}(t) \right]^T$$

- Le vecteur de sortie (ou d'observation) : $\bar{y}(t) = \left[y_1(t) \mid y_2(t) \mid \dots \mid y_P(t) \right]^T$

On voit également apparaître l'opérateur vectoriel $(\bar{n}) = (\alpha_1 - \alpha_0, \dots, \alpha_N - \alpha_{N-1})$ appliqué au vecteur d'état. Ainsi, ce vecteur n'est pas forcément composé de termes identiques. Néanmoins, dans les études de stabilité, on cherchera systématiquement un arrangement des variables d'état pour que les composants de ce vecteur (\bar{n}) soient les mêmes. Il pourra alors être assimilé à un nombre n réel ou complexe. A titre d'exemple, comme nous le verrons dans le chapitre 5, le système d'état généralisé d'un réseau électrique incluant un alternateur modélisé à l'aide d'impédances d'ordre fractionnaire, sera d'ordre $\frac{1}{2}$ ($n=0.5$). Le système d'état s'écrit alors :

$$\begin{cases} \bar{x}^{(n)}(t) = A \cdot \bar{x}(t) + B \cdot \bar{u}(t) \\ \bar{y}(t) = C \cdot \bar{x}(t) + D \cdot \bar{u}(t) \end{cases} \quad \text{IV- 7}$$

REMARQUE : pour $n=1$, nous retrouvons la représentation d'état classique d'un système d'ordre entier [LYA 66, KUN 94] :

$$\begin{cases} \bar{x}^{(1)}(t) = A \cdot \bar{x}(t) + B \cdot \bar{u}(t) \\ \bar{y}(t) = C \cdot \bar{x}(t) + D \cdot \bar{u}(t) \end{cases} \quad \text{IV- 8}$$

IV.2.2 Valeurs propres et condition de stabilité

IV.2.2.1 Valeurs propres et vecteurs propres associés

On peut appliquer la transformée de Laplace L au système d'état généralisé IV- 6 pour obtenir la fonction de transfert du système. Notre modèle sera obtenu à partir de

la linéarisation des véritables variables d'état du réseau (i.e. courants dans les inductances ou le couple électromagnétique) :

$$\begin{cases} L \left[\bar{x}^{(n)}(t) \right] = A \cdot L \left[\bar{x}(t) \right] + B \cdot L \left[\bar{u}(t) \right] \\ L \left[\bar{y}(t) \right] = C \cdot L \left[\bar{x}(t) \right] + D \cdot L \left[\bar{u}(t) \right] \end{cases} \quad \text{IV- 9}$$

En utilisant les relations et définitions suivantes (les valeurs initiales des toutes les grandeurs étant nulles puisque l'on considère uniquement les petites variations autour d'un point de fonctionnement) :

$$L \left[\bar{x}(t) \right] = \bar{X}(s) = [X_1(s) | X_2(s) | \dots | X_N(s)] \quad L \left[\bar{u}(t) \right] = \bar{U}(s) \quad L \left[\bar{y}(t) \right] = \bar{Y}(s)$$

$$L \left[\bar{x}^{(n)}(t) \right] = L \left[x_1^{(n)} | x_2^{(n)} | \dots | x_N^{(n)} \right]^T = \left[s^n X_1(s) | s^n X_2(s) | \dots | s^n X_N(s) \right]^T = s^n X(s)$$

Le système IV- 9 devient alors :

$$\begin{cases} s^n \cdot \bar{X}(s) = A \cdot \bar{X}(s) + B \cdot \bar{U}(s) \\ \bar{Y}(s) = C \cdot \bar{X}(s) + D \cdot \bar{U}(s) \end{cases} \quad \text{IV- 10}$$

Finalement, en combinant les deux relations de l'équation précédente, nous trouvons l'expression de la sortie $\bar{Y}(s)$:

$$\bar{Y}(s) = \left[C \left(s^n I - A \right)^{-1} B \cdot \bar{U}(s) + D \cdot \bar{U}(s) \right] = H(s) \cdot \bar{U}(s) \quad \text{IV- 11}$$

où $H(s)$ est la fonction de transfert linéarisée d'ordre non entier entre la sortie et l'entrée du système.

REMARQUE : pour $n = 1$, nous retrouvons la représentation classique d'un système d'ordre entier [KUN 94] :

$$\bar{Y}(s) = [C(sI - A)^{-1}B + D] \cdot \bar{U}(s) = H(s) \cdot \bar{U}(s) \quad \text{IV- 12}$$

Les pôles de la fonction de transfert $H(s)$ sont alors donnés la résolution de l'équation :

$$\det(s^n I - A) = 0 \quad \text{IV- 13}$$

D'un autre côté, les valeurs propres du système sont calculées à partir de la matrice A et ceci ne nécessite donc pas de techniques particulières liées aux systèmes d'ordre non entier. On voit donc bien que les pôles du système et les valeurs propres ne seront pas forcément identiques comme dans le cas où $n=1$.

Nous allons donc dans un premier temps définir les relations entre pôles du système et valeurs propres. Pour cela, nous devons introduire, pour chaque valeur propre λ_l , un vecteur Φ_l à N éléments qui satisfait la relation :

$$A \cdot \Phi_l = \lambda_l \cdot \Phi_l \quad \text{IV- 14}$$

où, Φ_l est appelé vecteur propre « droit » de la matrice A associé à la valeur propre λ_l .

De la même façon, un vecteur Ψ_l à N éléments, satisfaisant la relation :

$$\Psi_l \cdot A = \lambda_l \cdot \Psi_l \quad \text{IV- 15}$$

est appelé vecteur propre « gauche » de la matrice A associé à la valeur propre λ_l . On peut alors définir deux matrices de vecteurs propres « droits » et « gauches » de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\Phi &= [\Phi_1 \ \Phi_2 \ \dots \ \Phi_N] \\ \Psi &= [\Psi_1 \ \Psi_2 \ \dots \ \Psi_N]^T\end{aligned}\tag{IV- 16}$$

La matrice de Jordan ($\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N)$), regroupant l'ensemble des valeurs propres, vérifie l'équation suivante :

$$\begin{aligned}A \cdot \Phi &= \Phi \cdot \Lambda \\ \Psi \cdot A &= \Lambda \cdot \Psi \\ \Psi \cdot \Phi &= I\end{aligned}\tag{IV- 17}$$

où I est la matrice identité. On modifie alors le système d'état IV- 10 en introduisant le changement de variable suivant : $\bar{x} = \Phi \cdot \bar{x}_t$. Le système IV- 10 devient :

$$\begin{cases} \Phi \bar{x}_t^{(n)}(t) = A \cdot \Phi \cdot \bar{x}_t(t) + B \cdot \bar{u}(t) \\ \bar{y}(t) = C \cdot \Phi \cdot \bar{x}_t(t) + D \cdot \bar{u}(t) \end{cases}\tag{IV- 18}$$

On peut alors écrire :

$$\begin{cases} \bar{x}_t^{(n)}(t) = \Phi^{-1} A \cdot \Phi \cdot \bar{x}_t(t) + \Phi^{-1} B \cdot \bar{u}(t) \\ \bar{y}(t) = C \cdot \Phi \cdot \bar{x}_t(t) + D \cdot \bar{u}(t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{x}_t^{(n)}(t) = \Lambda \cdot \bar{x}_t(t) + B_t \cdot \bar{u}(t) \\ \bar{y}(t) = C_t \cdot \bar{x}_t(t) + D \cdot \bar{u}(t) \end{cases}\tag{IV- 19}$$

En appliquant la transformée de Laplace au système IV-19, on obtient la relation :

$$\bar{Y}(s) = \left[C_t \left(s^n I - \Lambda \right)^{-1} B_t + D \right] \bar{U}(s)\tag{IV- 20}$$

De fait, les pôles de la fonction de transfert sont obtenus en résolvant l'équation :

$$s^n - \lambda_t = 0\tag{IV- 21}$$

Ce qui permet de relier dans le cas d'un système d'état d'ordre non entier les pôles aux valeurs propres.

IV.2.2.2 Condition de stabilité

Pour que le système soit stable, il faut que les pôles p_k du système soient à partie réelle négative [LYA 66]. Ces pôles sont déterminés en résolvant l'équation IV- 21.

[OUS 05] donne la solution de l'équation IV- 21 dans le cas général où n est un complexe, s'écrivant sous la forme $n = a + i \cdot b$. Nous ne présentons ici que le cas où n est un réel. Le module ρ_k et l'argument θ_k de chaque pôle sont alors donnés par :

$$\begin{cases} \rho_k = (|\lambda_l|)^{1/n} \\ \theta_k = \frac{1}{n} \arg(\lambda_l) + \frac{2m_k\pi}{n}, \quad k = 1,2,3,\dots \end{cases} \quad \text{IV- 22}$$

où les coefficients m_k sont des entiers.

Nous allons chercher par la suite à trouver un critère de stabilité portant sur les valeurs propres.

Le calcul des pôles p_k du système s'effectue en utilisant le théorème des résidus [OUS 07]. Ce calcul permet alors de trouver une relation définissant les entiers m_k par rapport à la coupure utilisée (cf Annexe 1 présentant les principales étapes du calcul).

On montre alors que la condition de stabilité au sens de Lyapunov sur les valeurs propres du système s'écrit :

$$|\arg(\lambda_l)| > \frac{n \cdot \pi}{2} \quad \text{IV- 23}$$

REMARQUE : cette expression représente une généralisation de la condition de stabilité petits signaux d'un système d'ordre entier :

$$|\arg(\lambda_l)| > \frac{\pi}{2} \text{ dans le cas où } n=1 \quad \text{IV- 24}$$

La relation IV- 23 se traduit dans le plan complexe par une coupure entre la zone de stabilité et la zone d'instabilité. La Figure IV- 1 illustre cette coupure dans le cas où l'ordre de dérivation est égal à $\frac{1}{2}$.

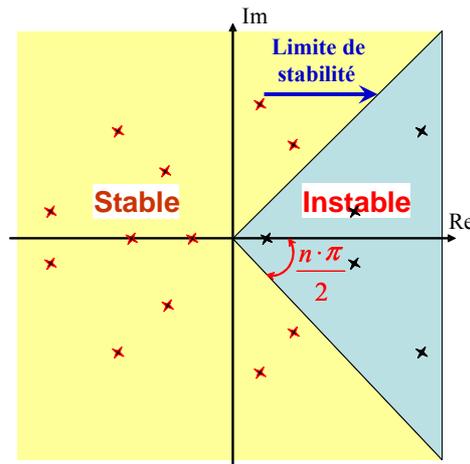


Figure IV- 1: Localisation des valeurs propres - Zones de stabilité et d'instabilité dans le plan complexe ($n=1/2$)

IV.2.3 Facteurs de participation et sensibilités

Pour améliorer l'analyse de la stabilité d'un système, il peut être intéressant de déterminer les liens entre les paramètres du système et la localisation des pôles (ou des valeurs propres). Ces liens sont généralement mis en évidence à partir des facteurs de participation et des matrices de sensibilité [KUN 94]. Nous rappelons dans ce paragraphe leur définition dans le cas de systèmes d'état classique et d'ordre non entier.

IV.2.3.1 Facteurs de participation

A l'instar d'un modèle d'état classique d'ordre entier, la matrice des facteurs de participation P est définie par :

$$P = [p_1 \ p_2 \ \dots \ p_N] \quad \text{IV- 25}$$

avec :

$$p_i = \begin{bmatrix} p_{1i} \\ p_{2i} \\ \vdots \\ p_{Ni} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{1i} \cdot \Psi_{i1} \\ \Phi_{2i} \cdot \Psi_{i2} \\ \vdots \\ \Phi_{Ni} \cdot \Psi_{iN} \end{bmatrix} \quad \text{IV- 26}$$

où Φ_{ki} est l'élément de la $k^{\text{ième}}$ ligne et de la $i^{\text{ième}}$ colonne de la matrice modale Φ , et Ψ_{ik} est l'élément de la $i^{\text{ième}}$ ligne et de la $k^{\text{ième}}$ colonne de la matrice modale ψ .

L'élément $p_{ki} = \Phi_{ki} \cdot \Psi_{ik}$ est appelé facteur de participation de la $k^{\text{ème}}$ variable d'état sur la $i^{\text{ème}}$ valeur propre. Dans le cas de valeurs propres complexes conjuguées, le facteur de participation de ces deux valeurs propres est bien sûr identique et relie la variable d'état au mode d'oscillation associé.

IV.2.3.2 Matrices de sensibilité

Cette matrice permet d'améliorer le premier niveau d'analyse fournit par les facteurs de participation en liant explicitement les valeurs propres aux éléments de la matrice d'état A , et donc aux paramètres du système. Ainsi, la sensibilité d'une valeur propre λ_i à l'élément a_{kj} de la matrice A est donné par l'équation suivante :

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial a_{kj}} = \frac{\Psi_{ik} \cdot \Phi_{ji}}{C_i} \quad \text{IV- 27}$$

où C_i est produit scalaire de $\psi_j \cdot \phi_i$.

Il faut noter que les facteurs de participation correspondent à la diagonale de la matrice de sensibilités.

IV.2.4 Comportement asymptotique d'un système d'état généralisé

La sortie $\bar{y}(t)$ du système d'état généralisé IV-10 est une combinaison linéaire des

différents modes propres du système de la forme : $L^{-1} \left\{ \left(\frac{1}{s^n - \lambda_l} \right)^q \right\} \times \bar{u}(t)$ où q est

un scalaire décrivant la multiplicité (potentielle) de la valeur propre λ_l [OUS 05].

Nous donnons alors simplement les réponses originales du transfert

$G(s) = \left(\frac{1}{s^n - \lambda_l} \right)^q$ dans le cas simple où $q = 1$, obtenues en utilisant les méthodes

d'intégration classiques des fonctions multiformes en déterminant les résidus, suivant :

$$g(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\omega}^{c+j\omega} e^{t \cdot s} G(s) ds \quad \text{IV- 28}$$

où c est supérieur aux abscisses des points singuliers de $G(s)$.

Suivant la définition adoptée pour calculer la dérivée non entière (cf chapitre 2), [MAT 96] et [OUS 05] donnent deux formulations de $g(t)$ décrites ci-dessous.

- Expression proposée par A. Oustaloup [OUS-05]

$$g(t) = L^{-1} \left(\frac{1}{s^n - \lambda_l} \right) = \sum_{k=1}^{\text{nombre de pôles}} \frac{p_k}{n \cdot \lambda_l} e^{t \cdot p_k} + \frac{\sin(n \cdot \pi)}{\pi} \int_0^\infty \frac{x^n e^{-t \cdot x}}{x^{2n} - 2 \cdot \lambda_l \cdot x^n \cos(n \cdot \pi) + \lambda_l^2} dx \quad \text{IV- 29}$$

où p_k est un pôle du système.

Le premier terme correspond au mode exponentiel « classique » d'un système d'état, mais le second terme correspond à un mode à dynamique apériodique à mémoire longue [OUS 05]. Il est intéressant de noter que ce mode peut être représenté par une réalisation d'état infinie appelée aussi représentation diffusive [MAT 96]. Cette représentation mathématique est un autre outil de modélisation utilisé pour caractériser des systèmes de nature distribuée mais que, par manque de temps, nous n'avons pas exploré.

- Expression proposée par D. Matignon [MAT 96]

$$g(t) = L^{-1} \left(\frac{1}{s^n - \lambda_l} \right) = e^{(\lambda_l)^2 t} \left(1 + \operatorname{erf}(\lambda_l \cdot t^n) \right) \quad \text{IV- 30}$$

où erf est la fonction d'erreur : $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-y^2} dy$

On s'intéresse maintenant au comportement asymptotique, pour $t \rightarrow \infty$, et au respect de la condition de stabilité. Les figures ci-dessous représentent la réponse modale $g(t)$ associée à une valeur propre λ_l dans le cas où $n = 1/2$, ceci pour trois cas de figure :

- (i) l'argument de λ_l est strictement inférieur à $n \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$,
- (ii) l'argument de λ_l est égal à $\frac{\pi}{4}$,
- (iii) l'argument de λ_l est strictement supérieur à $n \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$.

Nous avons représenté les réponses modales déterminées à partir des deux expressions présentées ci-dessus.

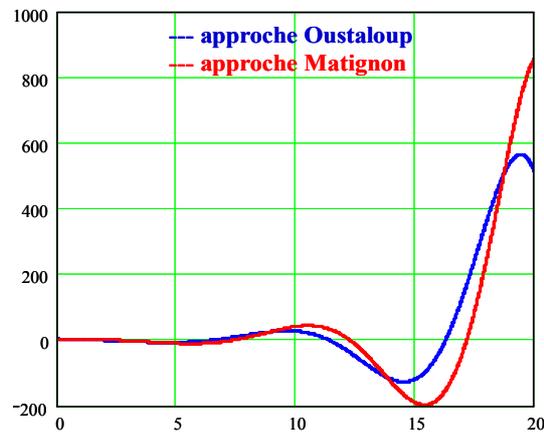


Figure IV- 2: Cas (i) : comportement asymptotique divergent.

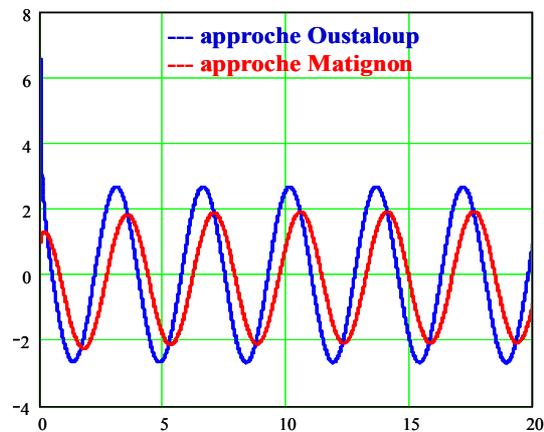


Figure IV- 3: Cas (ii) : comportement asymptotique oscillant.

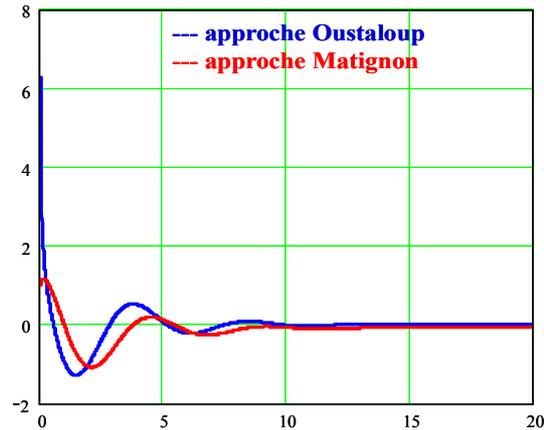


Figure IV- 4: Cas (iii) : comportement asymptotique convergent.

On constate quelques écarts entre les deux formulations présentées, mais ceci est lié aux approximations utilisées dans les deux méthodes pour calculer les intégrales.

IV.2.5 Application de l'analyse modale à l'étude de stabilité d'un système non entier

Nous allons appliquer les résultats des paragraphes précédents au cas d'un système très simple constitué par une résistance R et une inductance L mises en série et une

impédance parallèle d'ordre $\frac{1}{2}$ s'écrivant $Z_{\frac{1}{2}} = R_0 \left(1 + \left(\frac{j\omega}{\omega_0} \right)^{\frac{1}{2}} \right)$ (cf Figure IV- 5).

Nous justifierons l'approximation faite par rapport aux impédances présentées au chapitre 2 plus loin (cf chapitre 5).

Nous allons ainsi construire le système d'état généralisé et analyser la dynamique petits signaux de ce système.

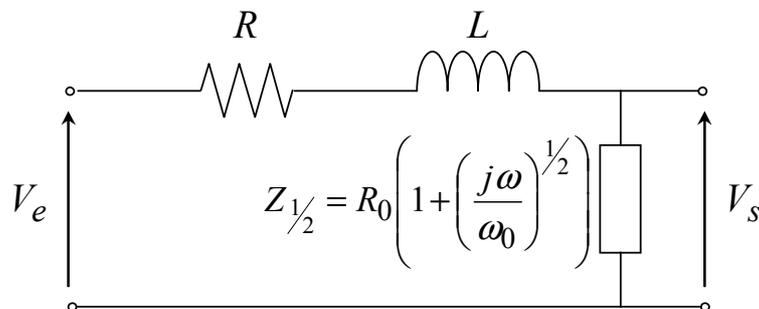


Figure IV- 5: Circuit électrique élémentaire d'ordre non entier.

A partir de la fonction de transfert $\frac{\bar{V}_s}{\bar{V}_e} = \frac{R_0 + R_0 \omega_0^{-1/2} (j\omega)^{1/2}}{(R + R_0) + R_0 \omega_0^{-1/2} (j\omega)^{1/2} + L(j\omega)^1}$, il est possible d'écrire l'équation différentielle généralisée sous la forme :

$$L\omega_0^{1/2} \left(\frac{d}{dt}\right)^1 V_s(t) + R_0 \left(\frac{d}{dt}\right)^{1/2} V_s(t) + (R + R_0) \cdot \omega_0^{1/2} \cdot V_s(t) =$$

$$R_0 \left(\frac{d}{dt}\right)^{1/2} V_e(t) + R_0 \omega_0^{1/2} \cdot V_e(t)$$

IV- 31

Suivant la méthodologie décrite au paragraphe 4.2.1, on peut alors réécrire l'équation différentielle IV- 31 sous la forme :

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^1 V_s(t) = -\frac{R_0}{L\omega_0^{1/2}} \left(\frac{d}{dt}\right)^{1/2} V_s(t) - \frac{(R + R_0)}{L} \cdot V_s(t) +$$

$$+\frac{R_0}{L\omega_0^{1/2}} \left(\frac{d}{dt}\right)^{1/2} V_e(t) + \frac{R_0}{L} \cdot V_e(t)$$

IV- 32

On peut alors définir des variables d'état $x_i(t)$ correspondant aux différents ordres de dérivation de la sortie V_s , suivant l'ordre croissant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{d}{dt}\right)^{(0)} V_s(t) = V_s(t) = x_1(t) \\ \left(\frac{d}{dt}\right)^{(1/2)} V_s(t) = V_s^{(1/2)}(t) = x_1^{(1/2)}(t) = x_2(t) \\ \left(\frac{d}{dt}\right)^{(1)} V_s(t) = V_s^{(1)}(t) = x_2^{(1/2)}(t). \end{array} \right.$$

IV- 33

L'équation IV- 32 devient alors :

$$x_2^{(1/2)}(t) = -\frac{R_0}{L\omega_0^{1/2}} x_2(t) - \frac{(R + R_0)}{L} \cdot x_1(t) +$$

$$+\frac{R_0}{L\omega_0^{1/2}} V_e^{(1/2)}(t) + \frac{R_0}{L} \cdot V_e^{(0)}(t)$$

IV- 34

On obtient ainsi le système d'état généralisé à deux variables d'état suivant :

$$\begin{bmatrix} x_1^{(1/2)}(t) \\ x_2^{(1/2)}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(R+R_0) & -\frac{1}{R_0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{R_0}{L} & \frac{R_0}{L\omega_0^{1/2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_e^{(0)}(t) \\ V_e^{(1/2)}(t) \end{bmatrix} \quad \text{IV- 35}$$

$$V_s(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

soit, sous forme plus condensée :

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}(t) = A \cdot \bar{x}(t) + B \cdot \bar{u}(t) \\ s(t) = C \cdot \bar{x}(t) + D \cdot \bar{u}(t) \end{cases} \quad \text{IV- 36}$$

$$\text{où : } \bar{x} = [x_1 \quad x_2]^T \text{ et } \bar{u} = [V_e^{(0)} \quad V_e^{(1/2)}]^T$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(R+R_0) & -\frac{1}{R_0} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{R_0}{L} & \frac{R_0}{L\omega_0^{1/2}} \end{bmatrix} \quad \text{IV- 37}$$

$$C = [1 \quad 0] \quad D = 0$$

Par la suite, on adoptera les valeurs numériques suivantes :

$$R = 1[\Omega], R_0 = 0.5[\Omega], L = 0.01[H] \text{ et } \omega_0 = 10[\text{rad} / \text{s}].$$

Les valeurs propres du système sont alors complexes conjuguées, égales à :

$$-7,906 \pm j 9.354$$

Les pôles du système, complexes conjugués également, sont donnés par :

$$-0.583 \mp j3.451$$

La réponse temporelle de la tension de sortie est alors représentée sur la Figure IV- 6.

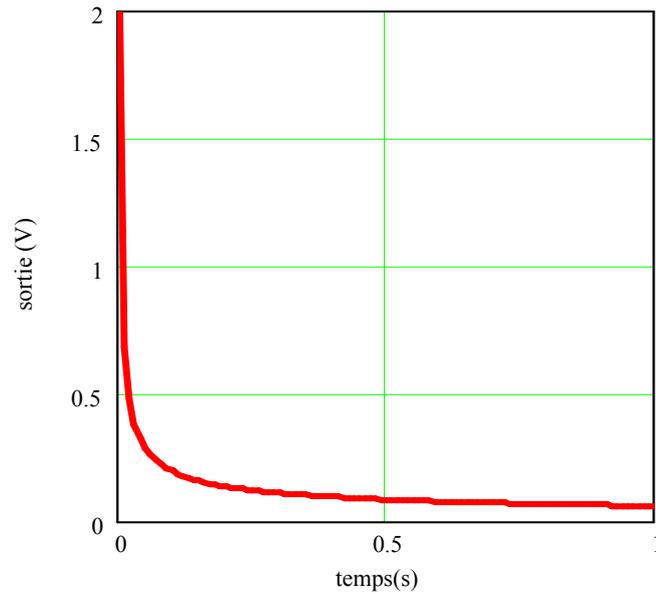


Figure IV- 6: Réponse temporelle de $V_s(t)$

IV.3 Conclusions

Ce chapitre nous a permis de montrer que les approches classiques d'études de stabilité en utilisant une approche modale étaient tout à fait généralisables aux systèmes décrits par des systèmes d'ordre non entier.

Ainsi, à partir d'un schéma équivalent d'un dispositif où un ou plusieurs systèmes d'ordre non entier sont introduits, il est possible de construire la représentation d'état généralisée à un certain ordre non entier puis d'en déduire la stabilité du système en déterminant les valeurs propres et les pôles associés.

Comme nous l'avons vu sur un exemple très simple, l'intérêt d'utiliser une analyse modale est de fournir une analyse complète de la stabilité en permettant – via le calcul des facteurs de participation et des matrices de sensibilité – de lier les paramètres du système au placement des modes et donc de pouvoir revenir à la phase de conception du système le cas échéant.

Nous pouvons ainsi développer une méthodologie d'études complète destinée aux systèmes intégrant des modèles d'ordre non entier, ou d'étendre et de généraliser les études classiques avec des modèles d'ordre entier. Le chapitre 5 comparera ainsi les résultats d'analyse de stabilité d'un système de génération simplifié avec des approches classiques et non entières.

Chapitre V

Etude de stabilité d'un système de génération électrique

V.1. Introduction

Comme nous l'avons montré dans les chapitres précédents, il devient primordial de disposer de modèle fins et précis des différents composants constituant un système électrique afin de pouvoir prévoir dès la phase de conception les performances dynamiques.

Au cours de ce chapitre, nous présenterons tout d'abord une méthode originale de modélisation de la machine synchrone basée sur les systèmes d'ordre non entier [RIU 01]. La machine synchrone constitue en effet une des sources d'alimentation les plus courantes.

Dans un deuxième temps, nous analyserons la stabilité de cet ensemble de génération en utilisant les principes et les résultats vus au chapitre précédent. L'objectif essentiel est de montrer que les méthodes classiques d'analyse de stabilité peuvent tout à fait être généralisées à la modélisation d'ordre non entier des systèmes électriques.

V. 2. Modélisation de la machine synchrone à l'aide de systèmes d'ordre non entier

V.2.1. Préambule : représentation de Park d'une machine synchrone

La modélisation de Park d'une machine triphasée permet de réduire la complexité de sa représentation mathématique. Le principe est basé sur le changement de repère des axes (a, b, c) représentant les enroulements statoriques de la machine triphasée vers les axes (d, q, o) liés au rotor de la machine, les deux axes d et q étant fixes l'un par rapport à l'autre et orthogonaux (cf Figure V- 1) [VAS 92]. Ceci requiert cependant de supposer sinusoïdale la répartition du champ dans l'entrefer de la machine et de négliger la saturation.

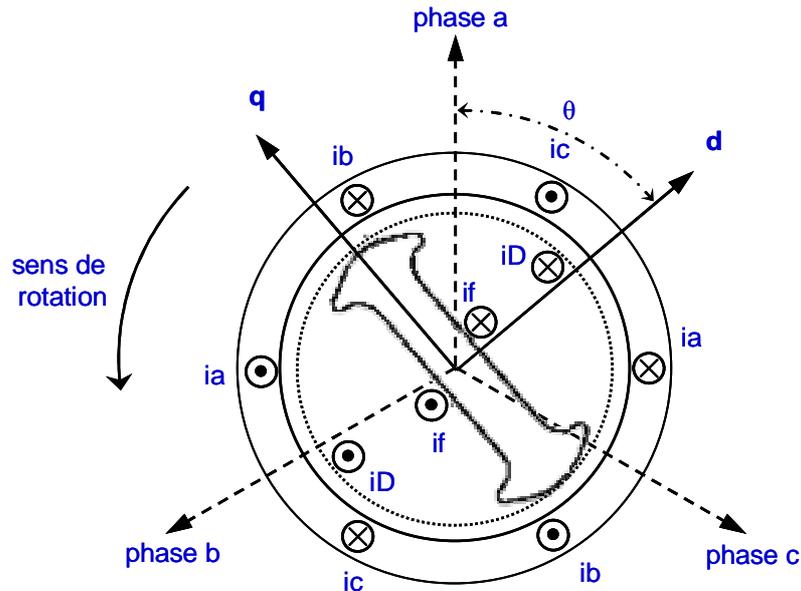


Figure V- 1: Représentation classique de la machine synchrone. Repères (a,b,c) et (d,q,o), l'axe o étant perpendiculaire au plan de la feuille [VAS 92]

Dans le cas de systèmes équilibrés en courant, nous pouvons simplifier encore cette modélisation de Park en ne tenant pas compte de l'axe homopolaire o.

Les relations de passage entre les axes (d) et (q) et (a, b, c) sont données ci-dessous pour les courants [VAS 92] :

$$\begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ i_0 \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} \cos \theta & \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \\ -\sin \theta & -\sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} = \frac{2}{3} [T] \cdot \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} \quad \text{V- 1}$$

où : T est la matrice de transformation de Park.

La même transformation s'applique aussi aux flux et aux tensions. Finalement, en considérant une machine synchrone triphasée comportant des amortisseurs et un bobinage d'excitation (indiqué par la lettre f), la représentation dans le référentiel de Park est la suivante :

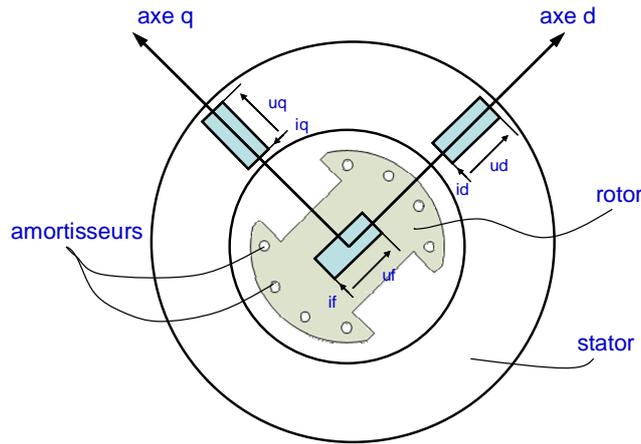


Figure V- 2 : Représentation de Park de la machine synchrone [VAS 92]

A partir de cette représentation et de la modélisation vectorielle des grandeurs électriques, on peut construire un schéma équivalent dans chacun des axes d et q de la machine.

V.2.2. Schéma équivalent classique d'ordre entier

D'après la Figure V- 2 et en l'absence d'effet de peau dans les pièces conductrices, la machine peut être modélisée par les schémas équivalents de la Figure V- 3, déduits directement des équations électriques régissant la machine [KUN 94].

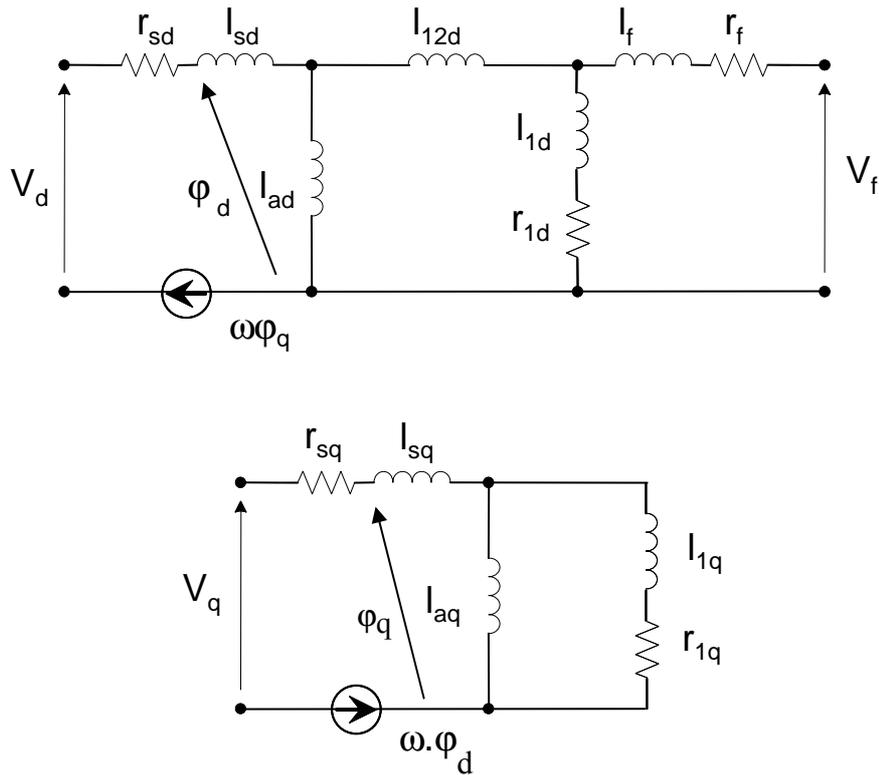


Figure V- 3: Schéma équivalent de la machine synchrone (axes d et q)

Les différents paramètres caractérisant ces schémas équivalents sont :

- Dans l'axe d :
 - la résistance (r_{sd}) et l'inductance de fuite (l_{sd}) des enroulements du stator,
 - l'inductance magnétisante (l_{ad}) représentant l'énergie stockée dans l'entrefer,
 - la résistance (r_{1d}) et l'inductance de fuite (l_{1d}) des amortisseurs,
 - la résistance (r_f) et l'inductance de fuite (l_f) des enroulements d'excitation,
 - la force électromotrice induite au stator par la rotation du rotor à la pulsation ω , qui s'écrit $\omega\cdot\varphi_q$.
- Dans l'axe q :
 - la résistance (r_{sq}) et l'inductance de fuite (l_{sq}) des enroulements du stator,
 - l'inductance magnétisante (l_{aq}) représentant l'énergie stockée dans l'entrefer,
 - la résistance (r_{1q}) et l'inductance de fuite (l_{1q}) des amortisseurs,
 - la force électromotrice induite au stator par la rotation du rotor à la pulsation ω , qui s'écrit $\omega\cdot\varphi_d$.

On ajoute également dans l'axe d , l'inductance l_{12d} qui décrit le flux mutuel entre les amortisseurs et l'excitation.

Ce schéma équivalent ne tient pas compte de l'effet de peau. Classiquement, pour améliorer la précision de ce schéma, on rajoute un certain nombre de cellules (R-L) au rotor. En théorie, le nombre de cellules doit être infini si l'on souhaite représenter finement ce phénomène distribué. En pratique, on choisit généralement de rajouter des cellules (R-L) afin d'avoir un schéma équivalent acceptable jusqu'à environ 1 kHz [CAN 93, KAM 97]. Au-delà de cette fréquence, des phénomènes capacitifs apparaissent et nécessitent une modélisation spécifique [IEE 95]. Cette démarche accroît considérablement l'ordre du schéma équivalent et conduit en même temps à une diminution de sa pertinence physique. La figure ci-dessous montre un schéma équivalent classiquement utilisé pour modéliser l'effet de peau dans les amortisseurs d'une machine synchrone [CAN-69, KAM 94, KAM 97]. A minima, le schéma équivalent est donc décrit par 11 paramètres dans l'axe d .

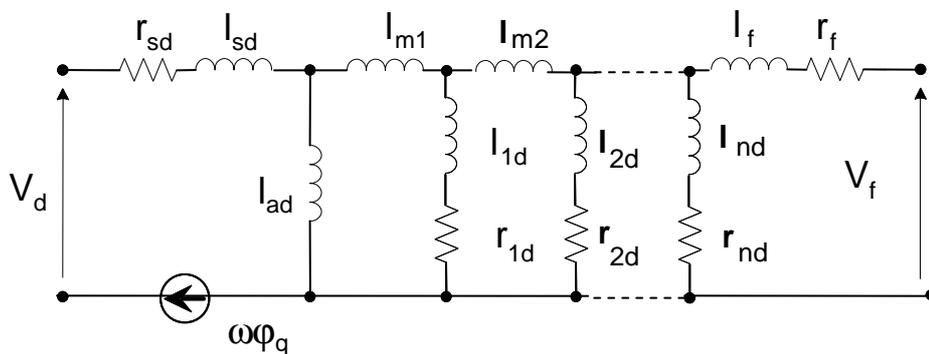


Figure V- 4: Schéma équivalent tenant compte de l'effet de peau (seul l'axe d a été représenté)

V.2.3. Schéma équivalent d'ordre non entier de la machine synchrone

Afin de disposer de modèles fréquentiels fiables et compacts sur une plage de fréquence allant jusqu'à 1 kHz, des travaux ont proposé une modélisation d'ordre non entier de la machine synchrone en introduisant des impédances d'ordre $\frac{1}{2}$ vues au chapitre II [RIU 01, CAN 93]. Par rapport aux modèles d'ordre entier présentés au

paragraphe précédent, les impédances d'ordre $\frac{1}{2}$ sont intégrées en respectant les considérations physiques suivantes :

- les courants induits sont négligés dans le bobinage du stator aux fréquences considérées.
- l'inductance représentant l'énergie magnétique stockée dans l'entrefer est supposée constante. Cette inductance est notée l_{ad} dans l'axe d et l_{aq} dans l'axe q ;
- les parties massives du rotor sont le siège de courants induits. Cette partie de la machine est donc modélisée par les impédances d'ordre $\frac{1}{2}$ suivantes :

$$\bar{Z}_{1d}^{1/2}(\omega) = \frac{L_{1d} \cdot j\omega}{\sqrt{1 + j \cdot \frac{\omega}{\omega_{1d}}}} \quad \text{V- 2}$$

$$\bar{Z}_{1q}^{1/2}(\omega) = \frac{L_{1q} \cdot j\omega}{\sqrt{1 + j \cdot \frac{\omega}{\omega_{1q}}}} \quad \text{V- 3}$$

Elles présentent un comportement inductif à basse fréquence.

- dans les enroulements d'excitation, on néglige les courants induits. De fait, ils sont modélisés par une résistance r_f et une inductance l_f ;
- le champ mutuel de fuite liant les enroulements statoriques et les amortisseurs dans l'axe (d) (respectivement l'axe (q)), n'influence pas les courants induits. On lui associe donc une inductance l_{12d} (respectivement l_{12q}) dans le modèle de la machine synchrone ;
- les amortisseurs dans les axes (d) et (q) sont modélisés par des impédances d'ordre $\frac{1}{2}$ présentant un comportement résistif à basse fréquence :

$$\bar{Z}_{2d}^{1/2}(\omega) = R_{2d} \cdot \sqrt{1 + j \cdot \frac{\omega}{\omega_{2d}}} \quad \text{V- 4}$$

$$\bar{Z}_{2q}^{1/2}(\omega) = R_{2q} \cdot \sqrt{1 + j \cdot \frac{\omega}{\omega_{2q}}} \quad \text{V- 5}$$

Tout ceci nous permet de construire les schémas équivalents d'ordre non entier de la machine synchrone dans les axes d et q (cf Figure V- 5 et Figure V- 6).

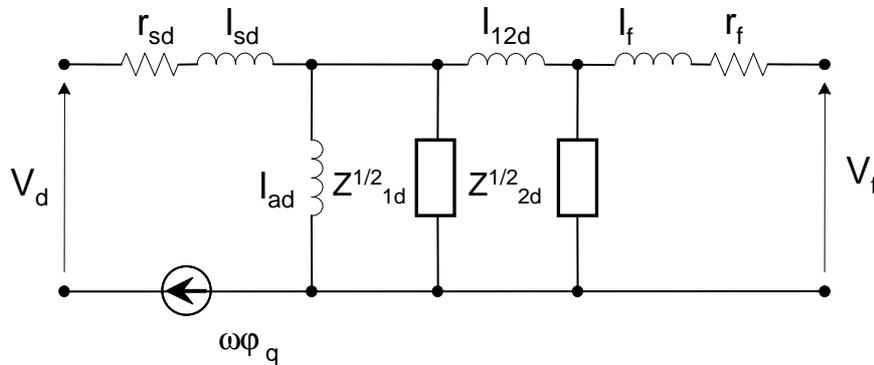


Figure V- 5: Schéma équivalent d'ordre non entier d'un alternateur (axe d)

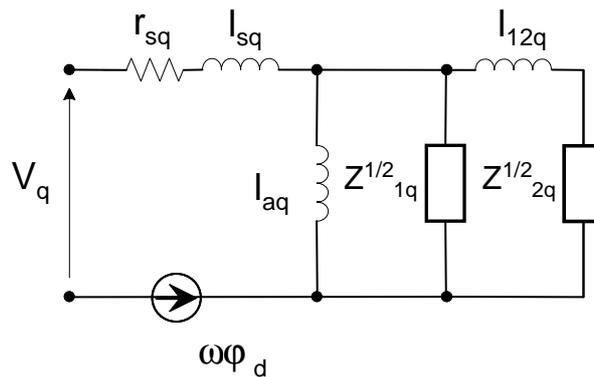


Figure V- 6: Schéma équivalent d'ordre non entier d'un alternateur (axe q)

La modélisation non entière de la machine synchrone nous conduit à manipuler des systèmes décrits par des équations différentielles généralisées à dérivées non entières implicites puisque les pièces modélisées sont de dimension finie [POD 99]. Cependant, le calcul de la réponse temporelle d'un système décrit à partir de dérivées non entières implicites s'avère relativement compliqué et long à mettre en œuvre et à résoudre. En effet, le système d'état généralisé correspondant comprend un nombre de variables d'état extrêmement important par rapport à un modèle d'ordre entier classique. Ceci vient du fait que la propriété de compacité des systèmes d'ordre non entier disparaît lorsque l'on passe du domaine fréquentiel au domaine temporel [RIU 01].

De plus, la construction de système d'état généralisé n'est pour l'heure possible que si le système n'inclue que des impédances d'ordre non entier implicites avec la même fréquence de coupure ω_0 . En effet, le calcul est basé sur le changement de variable dans le domaine de Laplace $s_1 = 1 + \frac{s}{\omega_0}$ de manière à ne considérer que des systèmes d'ordre non entier explicite en s_1 . Ce changement de variable ne convient pas lorsque le système possède plusieurs pulsations de coupure. La méthode proposée dans [RIU 01] devient donc inadéquate pour l'étude d'une machine synchrone modélisée avec quatre impédances d'ordre $\frac{1}{2}$ n'ayant a priori pas les mêmes fréquences de coupure. Nous avons donc adapté la méthode existante en approximant les systèmes implicites par des systèmes explicites.

Les impédances d'ordre $\frac{1}{2}$ des schémas équivalents de la machine synchrone sont donc approchées par les impédances suivantes :

$$\begin{aligned} \bar{Z}_{1d}^{1/2}(\omega) &= \frac{L_{1d} \cdot j\omega}{1 + \left(j \cdot \frac{\omega}{\omega_{1d}}\right)^{1/2}}, & \bar{Z}_{1q}^{1/2}(\omega) &= \frac{L_{1q} \cdot j\omega}{1 + \left(j \cdot \frac{\omega}{\omega_{1q}}\right)^{1/2}}, \\ \bar{Z}_{2d}^{1/2}(\omega) &= R_{2d} \cdot \left(1 + \left(j \cdot \frac{\omega}{\omega_{2d}}\right)^{1/2}\right), & \bar{Z}_{2q}^{1/2}(\omega) &= R_{2q} \cdot \left(1 + \left(j \cdot \frac{\omega}{\omega_{2q}}\right)^{1/2}\right). \end{aligned} \quad \text{V-6}$$

La figure ci-dessous illustre l'approximation faite sur l'impédance Z_{1d} avec les paramètres qui seront identifiés plus loin. Nous avons également superposé la variation fréquentielle de l'impédance analytique présentée au chapitre 2.

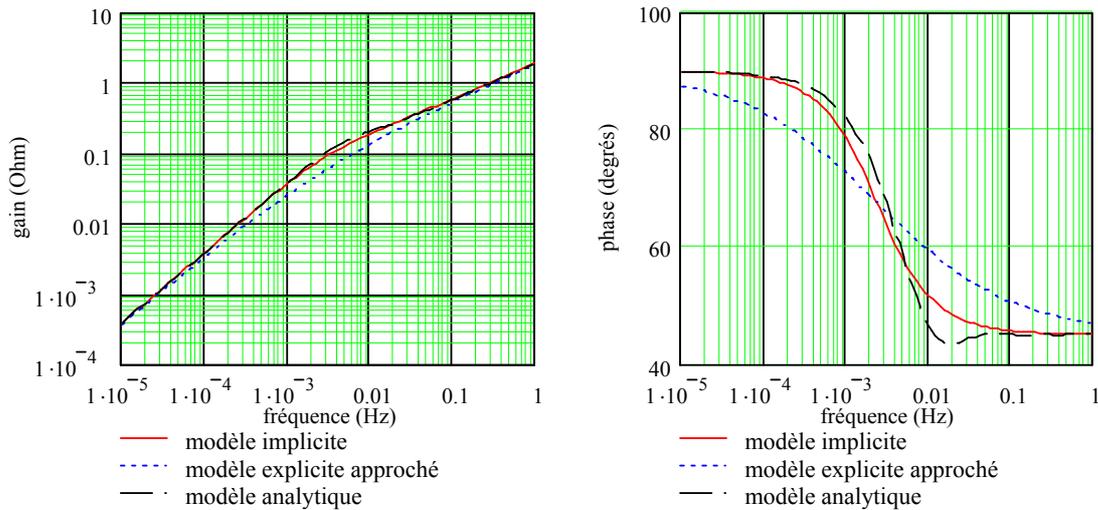


Figure V- 7: Comparaison entre modèle implicite, modèle explicite approché et modèle analytique de l'impédance d'ordre $\frac{1}{2} Z_{1d}$

Les erreurs de modélisation liées à cette approximation seront exposées pour la machine synchrone complète.

REMARQUE - les paramètres l_{12q} , R_{2q} et ω_{2q} sont difficilement identifiables puisque la branche des amortisseurs est court-circuitée aux hautes fréquences par l'impédance $Z_{1q}^{1/2}$ [RIU 01]. Nous avons donc modélisé les amortisseurs dans l'axe q par un simple circuit (R-L) de paramètres r_{2q} et l_{2q} .

V.2.4. Identification des paramètres du schéma équivalent d'ordre non entier de la machine synchrone

Afin d'obtenir les paramètres du schéma d'ordre non entier de la machine synchrone, nous nous servons des grandeurs opérationnelles obtenues par des essais SSFR (en anglais *StandStill Frequency Response tests*) [IEE 95, KAM 97]. Ce sont :

- l'inductance opérationnelle \bar{L}_d de l'axe (d) vue du stator quand l'enroulement d'excitation est en court - circuit :

$$\bar{L}_d(\omega) = l_{sd} + \frac{j\omega \cdot l_{ad} \cdot \frac{Z_{1d}^{1/2} \cdot j\omega \cdot l_{12d} + \frac{(r_f + j\omega \cdot l_f) \cdot Z_{2d}^{1/2}}{r_f + j\omega \cdot l_f + Z_{2d}^{1/2}}}{Z_{1d}^{1/2} + j\omega \cdot l_{12d} + \frac{(r_f + j\omega \cdot l_f) \cdot Z_{2d}^{1/2}}{r_f + j\omega \cdot l_f + Z_{2d}^{1/2}}}}{j\omega + \frac{Z_{1d}^{1/2} \cdot j\omega \cdot l_{12d} + \frac{(r_f + j\omega \cdot l_f) \cdot Z_{2d}^{1/2}}{r_f + j\omega \cdot l_f + Z_{2d}^{1/2}}}{Z_{1d}^{1/2} + j\omega \cdot l_{12d} + \frac{(r_f + j\omega \cdot l_f) \cdot Z_{2d}^{1/2}}{r_f + j\omega \cdot l_f + Z_{2d}^{1/2}}}}$$

V-7

- l'inductance opérationnelle \bar{L}_q de l'axe (q) vue du stator quand l'enroulement d'excitation est en court - circuit :

$$\bar{L}_q(\omega) = l_{sq} + \frac{j\omega \cdot l_{aq} \cdot \frac{Z_{1q}^{1/2} \cdot (j\omega \cdot l_{2q} + r_{2q})}{Z_{1q}^{1/2} + j\omega \cdot l_{2q} + r_{2q}}}{j\omega + \frac{j\omega \cdot l_{aq} + \frac{Z_{1q}^{1/2} \cdot (j\omega \cdot l_{2q} + r_{2q})}{Z_{1q}^{1/2} + j\omega \cdot l_{2q} + r_{2q}}}{j\omega}}$$

V-8

- La fonction de transfert $s\bar{G}$ entre le stator et l'excitation, à vide:

$$s\bar{G}(\omega) = \frac{\frac{Z_{1d}^{1/2} \cdot j\omega \cdot l_{ad}}{Z_{1d}^{1/2} + j\omega \cdot l_{ad}} \cdot Z_{2d}^{1/2}}{(j\omega \cdot l_f + r_f) \cdot \left(\frac{Z_{1d}^{1/2} \cdot j\omega \cdot l_{ad}}{Z_{1d}^{1/2} + j\omega \cdot l_{ad}} + j\omega \cdot l_{12d} + Z_{2d}^{1/2} \right) + Z_{2d}^{1/2} \cdot \left(\frac{Z_{1d}^{1/2} \cdot j\omega \cdot l_{ad}}{Z_{1d}^{1/2} + j\omega \cdot l_{ad}} + j\omega \cdot l_{12d} \right)}$$

V-9

- L'impédance \bar{Z}_{af0} entre le stator et les enroulements d'excitation :

$$\bar{Z}_{af0}(\omega) = \frac{\frac{Z_{1d}^{1/2} \cdot j\omega \cdot l_{ad}}{Z_{1d}^{1/2} + j\omega \cdot l_{ad}} \cdot Z_{2d}^{1/2}}{j\omega \cdot l_{12d} + \frac{Z_{1d}^{1/2} \cdot j\omega \cdot l_{ad}}{Z_{1d}^{1/2} + j\omega \cdot l_{ad}} + Z_{2d}^{1/2}} \quad \text{V- 10}$$

Nous disposons des mesures d'un alternateur dit de « Darlington » regroupées dans le tableau V-1. Ces données ont été récupérées dans la littérature [KAM 94] :

<i>Alternateur « Darlington »</i>	
Puissance [MVA]	1101
Tension [kV]	22
Fréquence [Hz]	60
Inductance de fuite de l'axe d, l_{sd} [pu]	0.19
Inductance synchrone de l'axe d sans saturation, l_{ad} [pu]	1.58
Inductance de fuite de l'axe q, l_{sq} [pu]	0.218
Inductance synchrone de l'axe q sans saturation, l_{aq} [pu]	1.58

Tableau V- 1: Données de l'alternateur de type Darlington

La méthode d'identification adoptée dans cette thèse est basée sur la comparaison du comportement fréquentiel de la machine à celui de son modèle dont on cherche à évaluer les paramètres. Cette méthode s'avère particulièrement efficace lorsque la fonction à identifier est non linéaire [XHU 89].

Pour évaluer les paramètres du modèle, on définit un critère que l'on nomme J suivant l'équation générale V-12. L'objectif de l'identification consistera à minimiser ce critère :

$$J(\bar{\theta}) = \sum_{i=1}^k [y_i - F(\bar{\theta})]^2 \quad \text{V- 11}$$

où :

- les fonctions $F(\bar{\theta})$ représentent les différentes grandeurs opérationnelles caractérisant la machine ;

- $y(i)$ représente les mesures des grandeurs opérationnelles
- θ_i représentent les paramètres à identifier des schémas équivalents d'ordre non entier dans les axes d et q .

Les résultats d'identification des schémas équivalents d'ordre non entier de la machine synchrone de type Darlington sont présentés dans le tableau ci-dessous.

<i>Paramètre</i>	<i>Identification</i>
L_{1d} [p.u.]	6,21
ω_{1d} [p.u.]	$1,39 \cdot 10^{-4}$
R_{2d} [p.u.]	$8 \cdot 10^{-3}$
ω_{2d} [p.u.]	0,416
l_{12d} [p.u.]	0,216
l_f [p.u.]	0,01
r_f [p.u.]	$8,016 \cdot 10^{-4}$
L_{1q} [p.u.]	4,67
ω_{1q} [p.u.]	$2,15 \cdot 10^{-4}$
r_{2q} [p.u.]	0,012
l_{2q} [p.u.]	0,166

Tableau V- 2: Paramètres identifiés de l'alternateur de « Darlington »

Afin de valider notre modèle et l'hypothèse que l'on a fait en approximant les systèmes implicites par des systèmes explicites, nous allons comparer, dans le diagramme de Bode, les grandeurs opérationnelles mesurées et identifiées avec les modèles implicite et explicite (cf Figure V- 8).

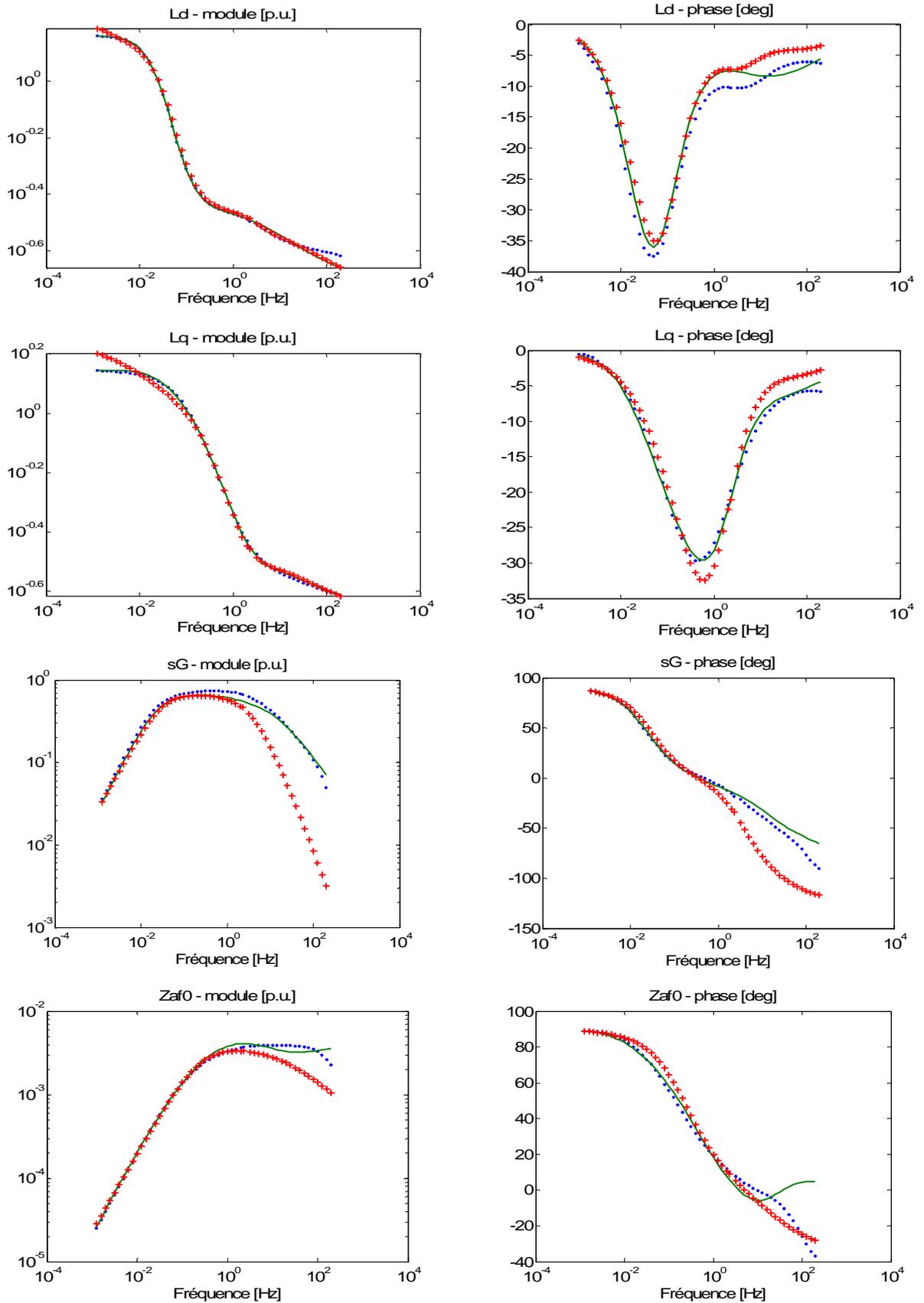


Figure V- 8: Diagrammes de Bode des grandeurs opérationnels de l'alternateur Darlington (mesures en points bleus, modèle explicite approché en croix rouge et modèle implicite en noir)

Nous pouvons voir que les modèles approchés utilisant des termes d'ordre non entier explicites donnent des résultats tout à fait acceptables par rapport aux termes implicites. L'étude dynamique de la machine synchrone sera donc poursuivie avec cette approximation.

REMARQUE - Afin de valider notre approche, nous avons également utilisé un modèle classique d'alternateur d'ordre entier que nous avons identifié. Pour plus de clarté, nous avons reporté en Annexe 2 les résultats d'identification de ce modèle ainsi que la comparaison avec les modèles d'ordre non entier des diverses grandeurs opérationnelles.

V.3. Analyse de stabilité petits signaux d'un système électrique contenant un modèle d'ordre non entier de la machine synchrone

Le système étudié est constitué de la machine synchrone identifiée au paragraphe précédent et associée à des boucles de régulation en tension et en fréquence, d'une charge fonctionnant soit à puissance constante soit à impédance constante et d'une ligne de transmission les reliant (Figure V- 9). Le fonctionnement à puissance constante (avec $P = P_o = V_o \cdot I_o$) se traduit par un comportement petits signaux équivalent à une résistance négative (R_{eq_Pcte}) alors que le fonctionnement à impédance constante (avec $Z = Z_o = V_o / I_o$) se traduit par un comportement petits signaux équivalent à une résistance positive (R_{eq_Zcte}) avec $R_{eq_Zcte} = -R_{eq_Pcte}$.

DEMONSTRATION - Considérons en effet une petite variation δV de la tension se traduisant par une variation de courant δI telle que :

$$V_o \cdot \delta I + I_o \cdot \delta V = 0 \text{ pour la charge à puissance constante}$$

$$V_o \cdot \delta I - I_o \cdot \delta V = 0 \text{ pour la charge à impédance constante}$$

Les relations entre δV et δI permettent de définir les résistances petits signaux équivalentes :

$$\frac{\delta V}{\delta I} = -\frac{V_o}{I_o} = -\frac{V_o^2}{P_o} = R_{eq_Pcte} \text{ pour la charge à puissance constante}$$

$$\frac{\delta V}{\delta I} = \frac{V_o}{I_o} = Z_o = R_{eq_Zcte} \text{ pour la charge à impédance constante}$$

Notre objectif est de reprendre l'outil d'analyse de stabilité présenté au chapitre 4 dans le cas où le modèle de la machine intègre des impédances d'ordre non entier.

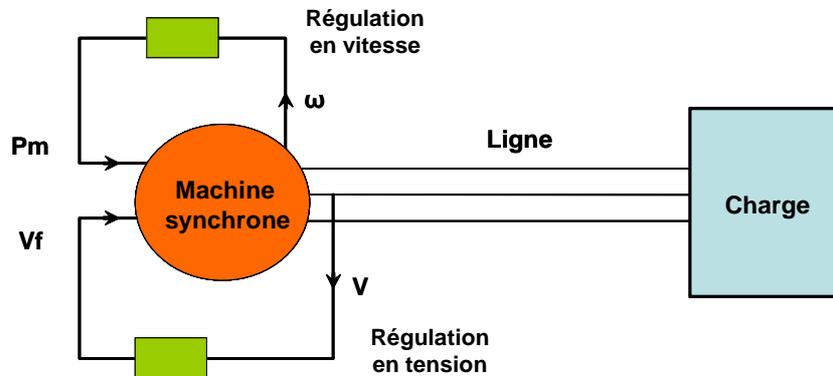


Figure V- 9: Schéma général du système étudié

La régulation de vitesse est supposée parfaite et assurant une vitesse constante de l'alternateur. Seule l'effet de la régulation de tension sur la stabilité sera pris en compte. Cette hypothèse peut être justifiée par le découplage des constantes de temps mécanique et électrique de la machine. Elle pourra bien entendu être reprise dans une étude plus poussée mais nécessitera d'avoir accès à un modèle de la turbine ou du moteur entraînant l'alternateur.

Nous avons considéré une charge consommant une puissance de 800 MVA avec un facteur de puissance unitaire. La résistance équivalente « petits signaux » est alors égale à $\pm 0,4$ pu suivant que l'on fonctionne à puissance ou impédance constantes. Dans toute cette partie, l'impédance de la ligne est supposée nulle. Pour prendre en compte cette ligne, il sera simplement nécessaire de modifier les paramètres série $r_{s_{d/q}}$ et $l_{s_{d/q}}$.

V.3.1. Construction du système d'état généralisé

La machine synchrone est modélisée par le schéma équivalent d'ordre non entier vu au paragraphe V.2.3. Dans un premier temps, afin d'exposer notre démarche le plus simplement possible, nous n'avons pas pris en compte la régulation en tension de l'alternateur. Le modèle est donc en boucle ouverte. Cette régulation a cependant été étudiée et les résultats ont été reportés en Annexe 3.

La charge est modélisée par une résistance équivalente dans les axes (d) et (q) avec $R_{d,ch} = R_{q,ch}$ = résistance petits signaux équivalente.

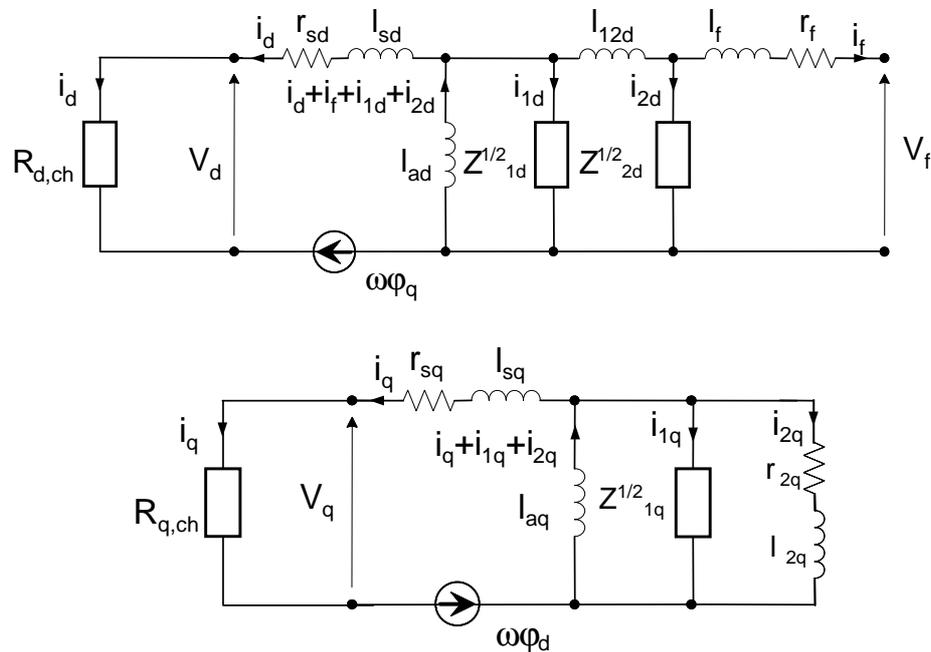


Figure V- 10: Modèle d'ordre non entier de la machine synchronisée connectée à une charge

En considérant que la pulsation ω restent constantes, le système d'équations régissant les grandeurs électriques petits signaux des schémas équivalents ci-dessus est donné dans le domaine de Laplace par :

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{d,ch} \cdot i_d = -r_{sd} \cdot i_d - l_{sd} \cdot s \cdot i_d - l_{ad} \cdot s \cdot (i_d + i_f + i_{1d} + i_{2d}) \\ V_f = -r_f \cdot i_f - l_f \cdot s \cdot i_f - l_{ad} \cdot s \cdot (i_d + i_f + i_{1d} + i_{2d}) - l_{12d} \cdot s \cdot (i_f + i_{2d}) \\ 0 = -Z_{1d}^{1/2} \cdot i_{1d} - l_{ad} \cdot s \cdot (i_d + i_f + i_{1d} + i_{2d}) \\ 0 = -Z_{2d}^{1/2} \cdot i_{2d} - l_{ad} \cdot s \cdot (i_d + i_f + i_{1d} + i_{2d}) - l_{12d} \cdot s \cdot (i_f + i_{2d}) \\ R_{q,ch} \cdot i_q = -r_{sq} \cdot i_q - l_{sq} \cdot s \cdot i_q - l_{aq} \cdot s \cdot (i_q + i_{1q} + i_{2q}) \\ 0 = -r_{2q} \cdot i_{2q} - l_{2q} \cdot s \cdot i_{2q} - l_{aq} \cdot s \cdot (i_q + i_{1q} + i_{2q}) \\ 0 = -Z_{1q}^{1/2} \cdot i_{1q} - l_{aq} \cdot s \cdot (i_q + i_{1q} + i_{2q}) \end{array} \right. \quad \text{V- 12}$$

où s est l'opérateur de Laplace.

En remplaçant $\bar{Z}_{1d}^{1/2}$, $\bar{Z}_{1q}^{1/2}$ et $\bar{Z}_{2d}^{1/2}$ par leur expression données par les relations V- 6 dans V- 12, on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 R_{d,ch} \cdot i_d = -r_{sd} \cdot i_d - l_{sd} \cdot s \cdot i_d - l_{ad} \cdot s \cdot (i_d + i_f + i_{1d} + i_{2d}) \\
 V_f = -r_f \cdot i_f - l_f \cdot s \cdot i_f - l_{ad} \cdot s \cdot (i_d + i_f + i_{1d} + i_{2d}) - l_{12d} \cdot s \cdot (i_f + i_{2d}) \\
 0 = -R_{2d} \cdot \left(1 + \left(\frac{s}{\omega_{2d}} \right)^{1/2} \right) \cdot i_{2d} - l_{ad} \cdot s \cdot (i_d + i_f + i_{1d} + i_{2d}) - \\
 \quad - l_{12d} \cdot s \cdot (i_f + i_{2d}) \\
 0 = -\frac{s \cdot L_{1d}}{1 + \left(\frac{s}{\omega_{1d}} \right)^{1/2}} \cdot i_{1d} - l_{ad} \cdot s \cdot (i_d + i_f + i_{1d} + i_{2d}) \\
 R_{q,ch} \cdot i_q = -r_{sq} \cdot i_q - l_{sq} \cdot s \cdot i_q - l_{aq} \cdot s \cdot (i_q + i_{1q} + i_{2q}) \\
 0 = -r_{2q} \cdot i_{2q} - l_{2q} \cdot s \cdot i_{2q} - l_{aq} \cdot s \cdot (i_q + i_{1q} + i_{2q}) \\
 0 = -s \cdot L_{1q} \cdot i_{1q} - \left(1 + \left(\frac{s}{\omega_{1q}} \right)^{1/2} \right) \cdot l_{aq} \cdot s \cdot (i_q + i_{1q} + i_{2q})
 \end{array} \right. \quad \text{V-13}$$

En développant puis en factorisant selon les puissances croissantes de l'opérateur de Laplace, on trouve :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 R_{d_ch} \cdot i_d = -r_{sd} \cdot i_d - l_{sd} \cdot s \cdot i_d - l_{ad} \cdot s \cdot (i_d + i_f + i_{1d} + i_{2d}) \\
 V_f = -r_f \cdot i_f - l_f \cdot s \cdot i_f - l_{ad} \cdot s \cdot (i_d + i_f + i_{1d} + i_{2d}) - l_{12d} \cdot s \cdot (i_f + i_{2d}) \\
 0 = -R_{2d} \cdot i_{2d} - \frac{R_{2d}}{\sqrt{\omega_{2d}}} s^{1/2} \cdot i_{2d} - l_{ad} \cdot s \cdot (i_d + i_f + i_{1d} + i_{2d}) - l_{12d} \cdot s \cdot (i_f + i_{2d}) \\
 0 = -L_{1d} \cdot s \cdot i_{1d} - l_{ad} \cdot s \cdot (i_d + i_f + i_{1d} + i_{2d}) - \frac{l_{ad}}{\sqrt{\omega_{1d}}} \cdot s^{3/2} \cdot (i_d + i_f + i_{1d} + i_{2d}) \\
 R_{q_ch} \cdot i_q = -r_{sq} \cdot i_q - l_{sq} \cdot s \cdot i_q - l_{aq} \cdot s \cdot (i_q + i_{1q} + i_{2q}) \\
 0 = -r_{2q} \cdot i_{2q} - l_{2q} \cdot s \cdot i_{2q} - l_{aq} \cdot s \cdot (i_q + i_{1q} + i_{2q}) \\
 0 = -L_{1q} \cdot s \cdot i_{1q} - l_{aq} \cdot s \cdot (i_q + i_{1q} + i_{2q}) - \frac{l_{aq}}{\sqrt{\omega_{1q}}} \cdot s^{3/2} \cdot (i_q + i_{1q} + i_{2q})
 \end{array} \right. \quad \text{V-14}$$

Un système d'état généralisé est alors construit en utilisant le changement de variables suivant :

$$\begin{array}{ll}
 x_1 = i_d; & x_7 = i_{1d}^{(1)}; \\
 x_2 = x_1^{(1/2)} = i_d^{(1/2)}; & x_8 = i_q; \\
 x_3 = i_f; & x_9 = x_8^{(1/2)} = i_q^{(1/2)}; \\
 x_4 = x_3^{(1/2)} = i_f^{(1/2)}; & x_{10} = i_{2q}; \\
 x_5 = i_{2d}; & x_{11} = x_{10}^{(1/2)} = i_{2q}^{(1/2)}; \\
 x_6 = x_5^{(1/2)} = i_{2d}^{(1/2)}; & x_{12} = i_{1q}^{(1)};
 \end{array}
 \tag{V-15}$$

Le système V- 14 devient :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 0 = -x_1^{(1/2)} + x_2; \\
 0 = -(l_{sd} + l_{ad}) \cdot x_2^{(1/2)} - l_{ad} \cdot x_4^{(1/2)} - l_{ad} \cdot x_6^{(1/2)} - l_{ad} \cdot x_7 - (r_d + R_{d,ch}) \cdot x_1 \\
 0 = -x_3^{(1/2)} + x_4; \\
 0 = -(l_f + l_{ad} + l_{12d}) \cdot x_4^{(1/2)} - l_{ad} \cdot x_2^{(1/2)} - (l_{ad} + l_{12d}) \cdot x_6^{(1/2)} - l_{ad} \cdot x_7 - r_f \cdot x_3 - V_f; \\
 0 = -x_5^{(1/2)} + x_6; \\
 0 = -(l_{ad} + l_{12d}) \cdot x_6^{(1/2)} - l_{ad} \cdot x_2^{(1/2)} - (l_{ad} + l_{12d}) \cdot x_4^{(1/2)} - l_{ad} \cdot x_7 - \frac{R_{2d}}{\sqrt{\omega_{2d}}} \cdot x_6 - R_{2d} \cdot x_5; \\
 0 = -\frac{l_{ad}}{\sqrt{\omega_{1d}}} \cdot (x_2^{(1/2)} + x_4^{(1/2)} + x_6^{(1/2)})^{(1/2)} - \frac{l_{ad}}{\sqrt{\omega_{1d}}} \cdot x_7 - (L_{1d} + l_{ad}) \cdot x_7 - l_{ad} \cdot (x_2^{(1/2)} + x_4^{(1/2)} + x_6^{(1/2)}); \\
 0 = -x_8^{(1/2)} + x_9; \\
 0 = -(l_{sq} + l_{aq}) \cdot x_9^{(1/2)} - l_{aq} \cdot x_{11}^{(1/2)} - l_{aq} \cdot x_{12} - (r_{sq} + R_{q,ch}) \cdot x_8; \\
 0 = -x_{10}^{(1/2)} + x_{11}; \\
 0 = -(l_{2q} + l_{aq}) \cdot x_{11}^{(1/2)} - l_{aq} \cdot x_9^{(1/2)} - l_{aq} \cdot x_{12} - r_{2q} \cdot x_{10}; \\
 0 = -\frac{l_{aq}}{\sqrt{\omega_{1q}}} \cdot x_{12}^{(1/2)} - \frac{l_{aq}}{\sqrt{\omega_{1q}}} \cdot (x_9^{(1/2)} + x_{11}^{(1/2)})^{(1/2)} - (L_{1q} + l_{aq}) \cdot x_{12} - l_{aq} \cdot x_9^{(1/2)} - l_{aq} \cdot x_{11}^{(1/2)};
 \end{array} \right.
 \tag{V-16}$$

Après avoir opéré quelques manipulations des équations linéaires ci-dessus, le système d'état généralisé peut s'écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 x_1^{(1/2)} = x_2; \\
 x_2^{(1/2)} = A_{2,1} \cdot x_1 + A_{2,3} \cdot x_3 + A_{2,6} \cdot x_6 + A_{2,7} \cdot x_7 + k_2 \cdot V_f; \\
 x_3^{(1/2)} = x_4; \\
 x_4^{(1/2)} = A_{4,1} \cdot x_1 + A_{4,3} \cdot x_3 + A_{4,6} \cdot x_6 + A_{4,7} \cdot x_7 + k_4 \cdot V_f; \\
 x_5^{(1/2)} = x_6; \\
 x_6^{(1/2)} = A_{6,1} \cdot x_1 + A_{6,3} \cdot x_3 + A_{6,6} \cdot x_6 + A_{6,7} \cdot x_7 + k_6 \cdot V_f; \\
 x_7^{(1/2)} = A_{7,1} \cdot x_1 + A_{7,2} \cdot x_2 + A_{7,3} \cdot x_3 + A_{7,4} \cdot x_4 + A_{7,5} \cdot x_5 + A_{7,6} \cdot x_6 + A_{7,7} \cdot x_7 + A_{7,4} \cdot x_4 + \\
 \quad + k_7 \cdot V_f + k_7^* \cdot V_f^{(1/2)}; \\
 x_8^{(1/2)} = x_9; \\
 x_9^{(1/2)} = A_{9,8} \cdot x_8 + A_{9,10} \cdot x_{10} + A_{9,12} \cdot x_{12}; \\
 x_{10}^{(1/2)} = x_{11}; \\
 x_{11}^{(1/2)} = A_{11,8} \cdot x_8 + A_{11,10} \cdot x_{10} + A_{11,12} \cdot x_{12}; \\
 x_{12}^{(1/2)} = A_{12,8} \cdot x_8 + A_{12,9} \cdot x_9 + A_{12,10} \cdot x_{10} + A_{11,11} \cdot x_{11} + A_{11,12} \cdot x_{12};
 \end{array} \right. \quad \text{V- 17}$$

L'expression des différents coefficients $A_{i,j}$ est donnée en Annexe 4.

Mis sous une forme matricielle, le système V- 17 s'écrit finalement sous la forme :

$$\bar{x}^{(1/2)} = A \cdot \bar{x} + B \cdot \bar{u}; \quad \text{V- 18}$$

où la matrice d'état généralisée A est donnée par :

$$A = \begin{bmatrix}
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 A_{2,1} & 0 & A_{2,3} & 0 & 0 & A_{2,6} & A_{2,7} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 A_{4,1} & 0 & A_{4,3} & 0 & 0 & A_{4,6} & A_{4,7} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 A_{6,1} & 0 & A_{6,3} & 0 & A_{6,5} & A_{6,6} & A_{6,7} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 A_{7,1} & A_{7,2} & A_{7,3} & A_{7,4} & A_{7,5} & A_{7,6} & A_{7,7} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{9,8} & 0 & A_{9,10} & 0 & A_{9,12} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{11,8} & 0 & A_{11,10} & 0 & A_{11,12} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{12,8} & A_{12,9} & A_{12,10} & A_{12,11} & A_{12,12} & 0
 \end{bmatrix} \quad \text{V- 19}$$

Les vecteurs d'entrée B et u sont donnés par :

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ k_2 & 0 \\ 0 & 0 \\ k_4 & 0 \\ 0 & 0 \\ k_6 & 0 \\ k_7 & k_7^* \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad u = \begin{bmatrix} V_f & V_f^{(1/2)} \end{bmatrix} \quad \text{V- 20}$$

REMARQUE - On peut noter dans la matrice A l'absence de couplage entre les axes d et q . En effet, la vitesse est constante et cela se traduit par la disparition dans les équations petits signaux des forces électromotrices induites qui couplent les deux axes.

V.3.2. Valeurs propres du système d'ordre non entier de la machine synchrone

Les valeurs propres de la matrice sont calculées et représentées dans le plan complexe :

- dans le cas d'une charge à impédance constante, sur la Figure V- 11,
- dans le cas d'une charge à puissance constante, sur la Figure V- 12.

Ces valeurs propres sont également récapitulées dans le Tableau V- 3.

Pour chaque cas, nous avons situé sur la même figure les résultats obtenus avec le modèle d'ordre non entier de la machine synchrone et ceux donnés par le modèle d'ordre entier présenté en Annexe 5.

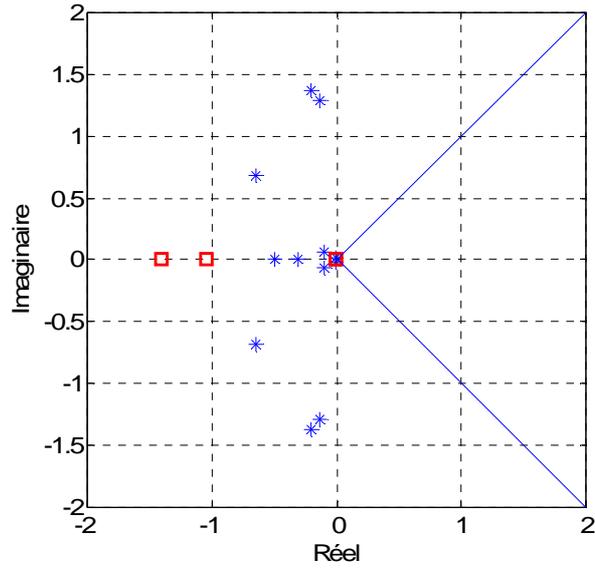


Figure V- 11: Lieux des valeurs propres du système avec une charge à impédance constante. Modèle d'ordre non entier (en bleu) et d'ordre entier (en rouge).

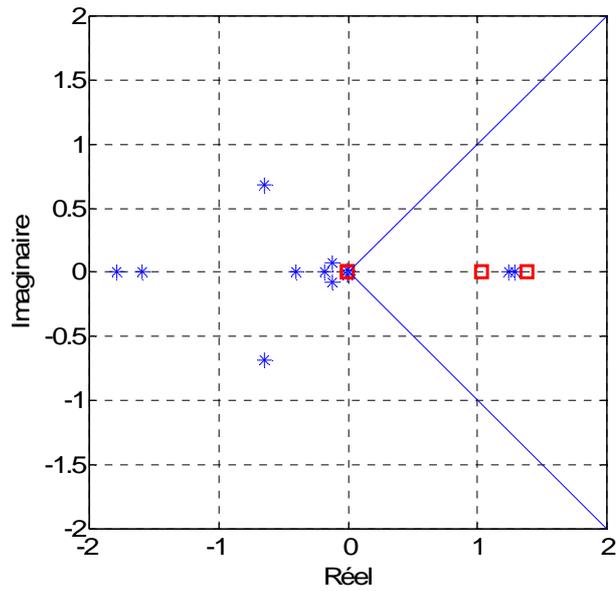


Figure V- 12: Lieux des valeurs propres du système avec une charge à puissance constante. Modèle d'ordre non entier (en bleu) et d'ordre entier (en rouge).

<i>Charge à impédance constante</i>	<i>Charge à puissance constante</i>
$-0.2034 \pm 1.3657i$	-1.7941
$-0.6521 \pm 0.6809i$	1.2904
-0.4930	$-0.6493 \pm 0.6887i$
$-0.0033 \pm 0.0206i$	-0.4016
$-0.1358 \pm 1.2898i$	$-0.0033 \pm 0.0206i$
-0.3062	-1.5891
$-0.1027 \pm 0.0657i$	1.2417
	-0.1802
	$-0.1278 \pm 0.0721i$

Tableau V- 3: Valeurs propres du système de génération (modèle d'ordre non entier)

<i>Charge à impédance constante</i>	<i>Charge à puissance constante</i>
-1.0438	1.0407
-0.0003	-0.0003
-0.0052	-0.0052
-1.4095	1.3886
-0.002	-0.002

Tableau V- 4: Valeurs propres du système de génération (modèle d'ordre entier)

Comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, le système est stable si et seulement si l'argument de chaque valeur propre λ_l obtenues avec la modélisation

d'ordre n respecte la condition $|\arg(\lambda_l)| > \frac{n \cdot \pi}{2}$.

Dans le cas d'une charge à impédance constante, on peut voir que cette condition est respectée et que notre système est stable du point de vue des variations petits signaux quel que soit le modèle utilisé.

Dans le cas d'une charge à puissance constante, on constate que certaines valeurs propres franchissent la frontière de stabilité en se déplaçant vers la droite ; le système est alors instable. Là aussi, les résultats sont analogues pour les deux modèles étudiés.

Nous allons maintenant étudier plus en profondeur la stabilité de notre système afin de pouvoir évaluer les paramètres du réseau les plus influents sur le placement des valeurs propres, et donc sur sa stabilité.

V.3.3. Facteurs de participation et matrices de sensibilité

Les facteurs de participation de notre système d'état sont donnés dans le Tableau V-5. Afin d'interpréter ces résultats, la matrice des facteurs de participation peut être lue verticalement et horizontalement. Verticalement, on peut mesurer la participation relative de la $i^{\text{ième}}$ valeur propre sur la $k^{\text{ième}}$ variable d'état, et vice-versa horizontalement. A titre d'exemple, nous pouvons voir que la variable d'état x_1 est influencée par les valeurs propres λ_1 , λ_2 et λ_5 .

Pour simplifier, nous ne faisons apparaître que les liens significatifs entre variables d'état et valeurs propres (les valeurs inférieures à 0.01 seront négligées).

	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	λ_7	λ_8	λ_9	λ_{10}	λ_{11}	λ_{12}
$x_1 = \dot{i}_d$	0.28	0.28			0.47							
$x_2 = \dot{i}_d^{(1/2)}$	0.55	0.55			-0.1							
$x_3 = \dot{i}_f$			0.04	0.04		0.46	0.46					
$x_4 = \dot{i}_f^{(1/2)}$			0.04	0.04		0.46	0.46					
$x_5 = \dot{i}_{2d}$			0.46	0.46		0.04	0.04					
$x_6 = \dot{i}_{2d}^{(1/2)}$			0.48	0.48								
$x_7 = \dot{i}_{1d}^{(1)}$	0.16	0.16			0.7							
$x_8 = \dot{i}_q$								0.33	0.33	1.4	-0.54	-0.54
$x_9 = \dot{i}_q^{(1/2)}$								0.54	0.54	-0.19	0.05	0.05
$x_{10} = \dot{i}_{2q}$										-0.4	0.7	0.7
$x_{11} = \dot{i}_{2q}^{(1/2)}$										-1.37	1.19	1.19
$x_{12} = \dot{i}_{1q}^{(1)}$								0.12	0.12	1.56	-0.4	-0.4

Tableau V- 5: Facteurs de participation du système étudié

Il est possible d'associer dans le plan complexe les variables d'état à chacune des valeurs propres. Cette association est montrée sur la Figure V- 13 :

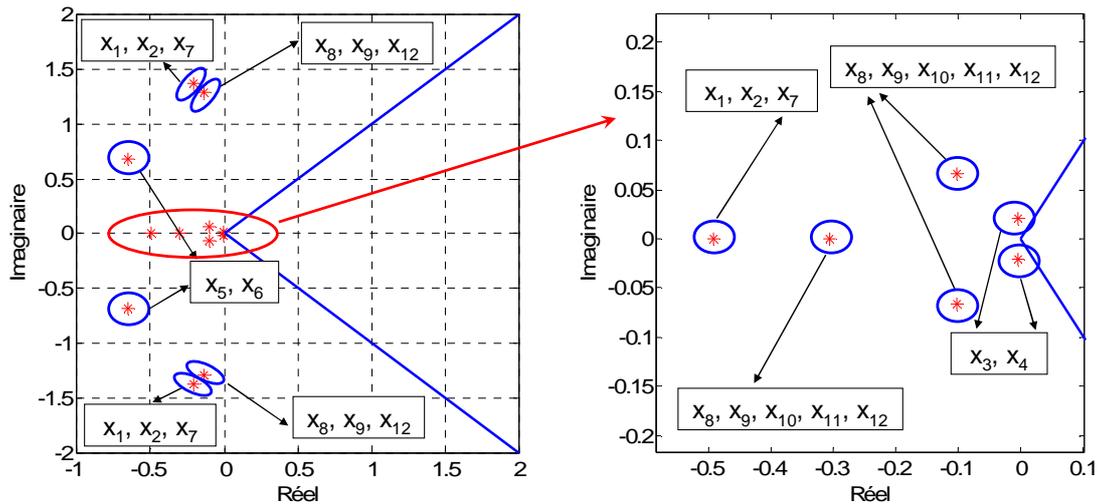


Figure V- 13: Liens entre valeurs propres et variables d'état du système

Les liens ainsi mis en évidence permettent d'analyser finement la stabilité du système à travers notamment l'étude des valeurs propres critiques i.e. des valeurs propres se trouvant à la limite de stabilité.

Il est également intéressant d'étudier les matrices de sensibilité du système correspondant à l'influence d'un éléments A_{ij} non nul de la matrice A sur chacune des valeurs propres. Les matrices de sensibilité de notre système sont données en Annexe 6.

Nous pouvons ainsi observer que quatre éléments de A sont particulièrement sensibles. Ces éléments sont $A_{6,3}$, $A_{7,3}$, $A_{11,10}$ et $A_{12,10}$. Les deux premiers éléments sont liés aux valeurs propres λ_1 , λ_2 , λ_4 , λ_6 et λ_7 ; les deux autres, aux valeurs propres λ_8 , λ_9 , λ_{11} et λ_{12} . Les éléments $A_{6,3}$ et $A_{7,3}$ sont définis en fonction notamment de r_f et l_f . Quant aux deux autres, ils dépendent des paramètres r_{2q} et l_{2q} . De fait, les valeurs propres désignées ci-dessus seront fortement influencées par ces paramètres. La Figure V- 14 et la Figure V- 15 illustrent par exemple le déplacement des valeurs propres en faisant varier l'inductance l_f d'une part et la résistance r_{2q} d'autre part.

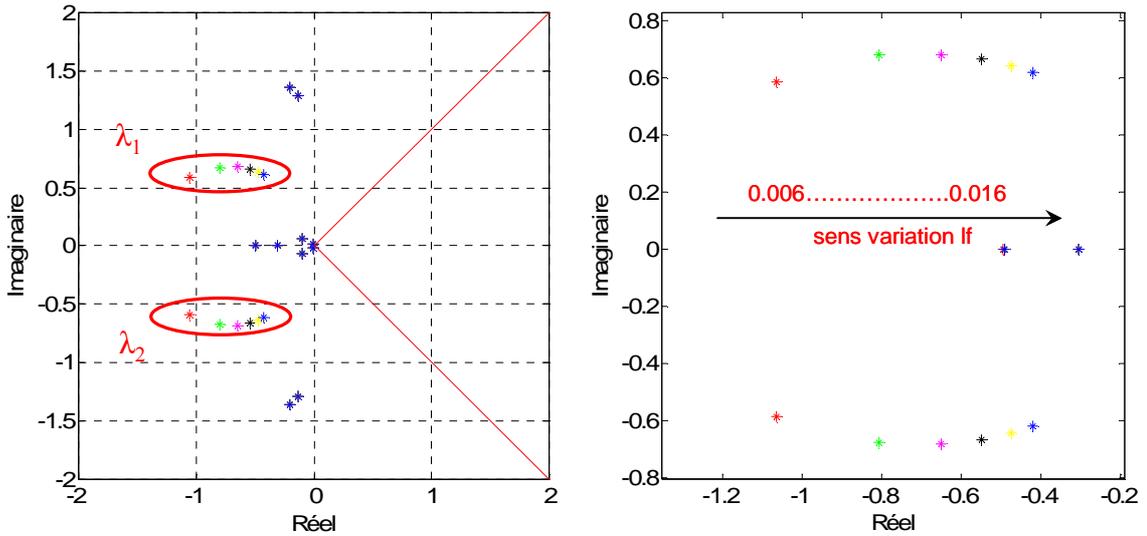


Figure V- 14: Déplacement des valeurs propres pour une variation de I_f

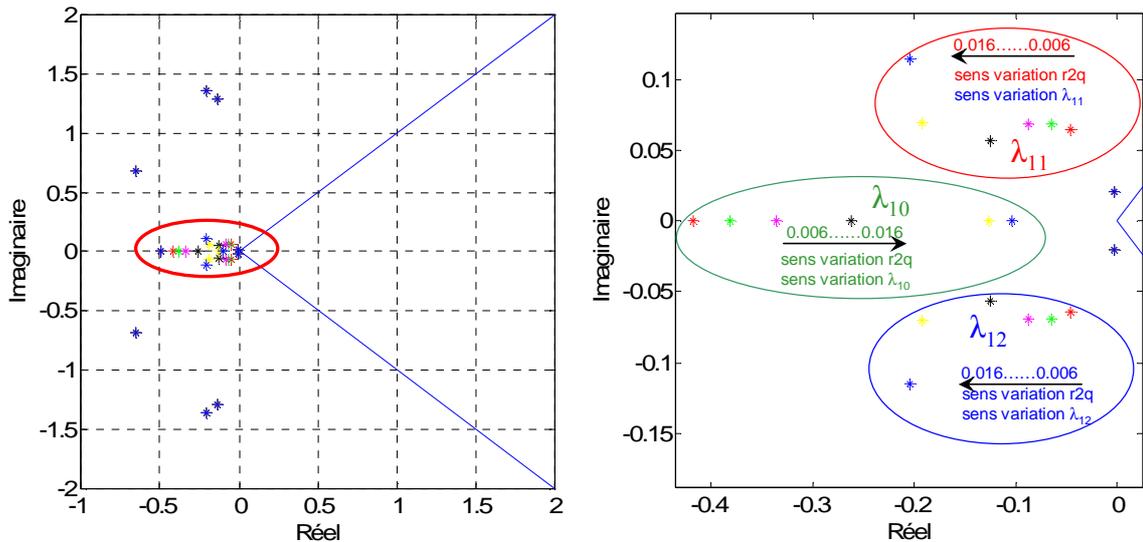


Figure V- 15: Déplacement des valeurs propres pour une variation de r_{2q}

On constate ainsi qu'en augmentant l'inductance I_f de 0.006 à 0.016 pu, le système tend à se rapprocher d'un comportement instable. Par contre, pour une modification de r_{2q} entre 0.006 et 0.016 pu, on constate que les valeurs propres ne se déplacent pas toutes de la même manière. Certaines tendent à rendre plus instables certains modes, d'autres à les stabiliser.

Ces études de participation et de sensibilité sont très importantes lors de l'analyse ou du dimensionnement d'un système électrique. Elles permettent de choisir les bons

compromis de réglage entre les paramètres du système et de déterminer l'influence des incertitudes sur leur valeur. Là encore, le modèle d'ordre non entier de la machine se révèle tout aussi approprié qu'un modèle d'ordre entier. On peut en outre gager qu'un modèle intégrant plus de connaissance permettra d'analyser plus finement le comportement dynamique du système électrique en rendant plus explicites les liens entre grandeurs de modélisation et comportement physique.

Les travaux que nous avons présentés dans ce chapitre sont restés très simples. Mais ils ont prouvé la possibilité d'une étude complète en régime dynamique d'un système électrique modélisé à l'aide de dérivations d'ordre non entier.

V.4. Conclusions

Au cours de ce chapitre nous nous sommes intéressés à la modélisation d'ordre non entier d'une machine synchrone et à l'étude de stabilité en petits signaux lorsque le système subit des petites variations. Dans le cadre des systèmes électriques, une source importante d'instabilité est liée à la présence de charges à puissance constante qui se comportent en petits signaux comme une impédance négative.

Ces résultats ont été retrouvés par l'approche modale classiquement utilisée par les électriciens et ici appliquée aux modèles d'ordre non entier. Malgré un formalisme d'écriture parfois un peu lourd pour les approches modales, l'ordre non entier a montré qu'il était parfaitement applicable, notamment dans le domaine fréquentiel où sa compacité est un atout. Ce résultat est fondamental car il ouvre de nombreuses perspectives à l'utilisation de l'ordre non entier pour l'étude dynamique des systèmes électriques modernes.

Conclusions et perspectives

Les évolutions récentes des réseaux électriques, avec l'augmentation du nombre de charges, d'actionneurs et l'apparition de nouvelles sources et de nombreux étages d'électronique de puissance, rendent leur modélisation et leur analyse de plus en plus délicates.

Il devient ainsi primordial de disposer de modèles suffisamment fins et précis pour pouvoir le cas échéant revenir sur les paramètres de conception du réseau, tout en étant d'ordre suffisamment réduit pour diminuer les temps de calcul.

Dans cette optique, les modèles de réseaux développés dans le cadre de ce mémoire en utilisant les outils mathématiques de modélisation fractale et de dérivation fractionnaire offrent des perspectives très intéressantes pour la modélisation de connaissance d'ordre réduit des systèmes complexes.

Ainsi, sur un cas d'étude certes très simple où le réseau électrique présente une arborescence de type Cantor, nous avons mis en évidence une bande de fréquences pour laquelle l'impédance d'entrée du réseau est assimilable à un système d'ordre non entier, dont l'ordre est intimement lié à la dimension fractale du réseau. Nous avons également montré que cette zone de fréquences, correspondant à un blocage de phase, met en évidence le comportement du réseau uniquement amorti par les résistances, où les effets inductifs et capacitifs pour les hautes et basses fréquences ne sont plus prédominants. Nous avons ainsi fait le lien entre la topologie du réseau, les outils fractals ou d'ordre non entier et la représentation fréquentielle.

La modélisation d'ordre non entier d'un réseau électrique pose ensuite le problème de son analyse dynamique. Nous avons ainsi montré que les approches classiques d'étude de stabilité sont tout à fait généralisables aux modèles d'ordre non entier. Ceci permet ainsi d'étendre le domaine d'études de ces modèles.

Les travaux présentés dans ce mémoire offrent de premiers résultats encourageants, mais ils doivent être poursuivis avant d'être totalement valorisables. De nombreuses pistes de recherche restent ainsi encore à explorer.

Les liens entre géométrie du réseau et dimension non entière doivent tout d'abord être renforcés et étendus à la modélisation de réseaux complexes, anisotropes et pour lesquels ont lieu des phénomènes de diffusion ou de propagation. Il sera ainsi nécessaire de revenir sur la modélisation fréquentielle des différents éléments du

réseau et de travailler sur de nouveaux outils d'identification de dimension fractale plus précis qu'en utilisant une représentation fréquentielle. C'est l'objet de la thèse d'Anis Amrane [AMR 10].

L'outil de modélisation fractale devra également être utilisé et comparé pour des applications plus ciblées « Réseaux », comme par exemple le diagnostic et la localisation de défauts dans les réseaux où une modélisation fréquentielle pourrait être pertinente [ENC 06], ou pour l'aide à la conception ou la planification de réseaux.

Un deuxième axe de recherche porterait sur la commande des réseaux. En effet, le contrôle des réseaux devient également problématique avec l'émergence de nombreuses sources de production décentralisée et la complexification de la topologie. Le concept de correcteurs d'ordre non entier qui s'adaptent à l'ordre du système à commander nous semble une étude particulièrement intéressante à mener. Dans le cas de réseaux où demeurerait certaines incertitudes de modélisation portant sur la dimension fractale identifiée ou la plage de fréquences de validité du modèle obtenu, il nous semblerait pertinent de synthétiser des correcteurs d'ordre non entier robustes qui permettraient par ailleurs de respecter certaines performances de qualité de tension suite à des perturbations. Les contrôleurs CRONE (Commande Robuste d'Ordre Non Entier) développés au LAPS de Bordeaux et appliqués sur de nombreux processus [OUS 99] nous semblent dès lors être une solution très intéressante pour répondre à ce problème.

Bibliographie

Chapitre I

- [ARR 85] J. Arrillaga, D.A. Bradley, P.S. Bodger,
Power System Harmonics,
Wiley&Sons, 1985.
- [BAR 06] F. Barruel,
Influence des charges non linéaires sur le comportement et le dimensionnement d'un réseau de bord d'avion
Thèse de doctorat de l'INP de Grenoble, 2005.
- [BOR 92] P. Borne, G. Dauphin-Tanguy, J.P. Richard, F. Rotella, I. Zambettakis,
Modélisation et identification des processus,
Tome 2, Technip, Paris, 1992.
- [CAN 95] I.M. Canay,
Determination of the model parameters of machines from the reactance operators $x_d(p)$ and $x_q(p)$,
IEEE Transaction on Energy Conversion, Vol. 8, No. 2 pp. 272 – 279,
1993.
- [CAN 05] S. Canat,
Contribution à la modélisation dynamique d'ordre non entier de la machine asynchrone à cage,
Thèse de doctorat de l'INP de Toulouse, 2005.
- [COI 02] O. Cois,
Systèmes linéaires non entiers et identification par modèle non entier : application en thermique,
Thèse de doctorat de l'Université de Bordeaux 1, 2002.
- [DEC 80] S. Deckmann, A. Pizzolante, A. Monticelli, B. Scott, O. Alsac
Studies on power system load flow equivalency
IEEE Trans. on PAS-99, No.6, Nov/Dec 1980.
- [EDF 07] site public : www.edf.fr
- [EMA XX] A. Emadi, M Ehsani, M.Miller,
Vehicular Electric Power Systems,
Ed Marcel Dekker

- [ETX 03] I. Etxeberria-Otadui,
Sur les systèmes d'électronique de puissance dédiés à la distribution électrique – Application à la qualité de l'énergie
Thèse de doctorat de l'INP de Grenoble, 2003.
- [FIL D56] G. Filliau, A. Bondu , L. Mazodier,
Le navire tout électrique, Propulsion et production d'énergie,
Techniques de l'ingénieur D 5610.
- [GAZ 06] H. Gaztanaga Arantzamendi,
Etude de structures d'intégration des systèmes de génération décentralisée : Application aux micro réseaux,
Thèse de doctorat de l'INP de Grenoble, 2006.
- [GER 78] A.J. Germond, R. Podmore
Dynamic aggregation of generating units' models
IEEE Trans. on PAS, July/August 1978.
- [IEE 95] IEEE Std,
Standard procedure for obtaining synchronous machine parameters by stand-still frequency response testing,
IEEE STD 115 1,1995.
- [KUH 03] E. Kuhn,
Contribution à la conception optimale d'une motorisation hybride parallèle : choix d'un modèle d'accumulateur,
Thèse de doctorat de l'Université Technologique de Compiègne, 2003
- [KUN 94] P.Kundur,
Power System Stability and control,
The electric Power Research Institute, McGraw-Hill Education, 1994.
- [LIN 01] J. Lin,
Modélisation et identification des systèmes d'ordre non entier,
Thèse de doctorat de l'Université de Poitiers, 2001.
- [LIU 07] P. Liutanakul,
Stabilité des réseaux embarqués. Interaction Puissance –Structure - Commande,
Thèse de doctorat de l'Institut National Polytechnique de Lorraine, 2007.
- [LOP 06] A. Lopez de Heredia Bermeo,
Commandes avancées des systèmes dédiés à l'amélioration de la qualité de l'énergie : de la basse à la montée en tension,
Thèse de doctorat de l'INP de Grenoble, 2006.

- [MAC 05] J.T. Machado, I. Jesus, A. Galhano, A.W. Malpica, F. Silva, J.K. Tar,
Fractional order dynamics in classical electro-magnetic phenomena,
Fifth EUROMECH Nonlinear Dynamics Conference ENOC, Eindhoven
pp. 1322 – 1326, 2005.
- [MID 76] R. D. Middlebrook,
*Input Filter Considerations in Design and Application of Switching
Regulators*,
Proc. IEEE IAS'76, pp. 366 – 382, 1976.
- [MOR 04] X. Moreau, O. Altet, A. Oustaloup,
Pheomenological description of the fractional differentiation in rheology,
First IFAC Workshop on Fractional Differentiation and its Applications,
Bordeaux, France, pp. 74-79, 2004.
- [OUS 95] A. Oustaloup,
La derivation non entier,
Hermès, Paris, 1995.
- [POD 99] I. Podlubny,
Fractional Differential Equation,
Mathematics in Science and Engineering, vol. 198, Academic Press, 1999.
- [POI 02] T. Poinot, A. Jemni, J-C. Trigeassou
*Parameter estimation of fractional models: application to the modeling of
diffusive systems*,
Proceedings of 15th IFAC World Congress, Barcelona, Spain, 2002.
- [RAM 06] O. Rami,
*Contrôle de tension auto adaptatif pour des productions décentralisées
d'énergie connectées au réseau électrique de distribution*
Thèse de doctorat de l'INP de Grenoble, 2006.
- [RET 03] N. Retière,
Modéliser et concevoir les réseaux d'énergie électrique,
Habilitation à diriger des recherches, UJF, Novembre 2003.
- [RIC 06] O. Richardot,
*Réglage coordonné de tension dans les réseaux de distribution à l'aide de la
production décentralisée*,
Thèse de doctorat de l'INP de Grenoble, 2006.

- [RIU 01] D. Riu,
Modélisation des courants induits dans les machines électriques par des systèmes d'ordre un demi,
Thèse de doctorat de l'INP de Grenoble, 2001.
- [RIU 02] D. Riu, N. Retière, M. Ivanès
Modélisation fractionnaire des machines électriques tournantes : de leur caractérisation fréquentielle à leur réponse temporelle,
CIFA, 2002.
- [SAB 07] J. Sabatier, O. M. Prakash, J. A. Tenreiro Machado
Advances in fractional calculus. Theoretical developments and application in physical and engineering,
Springer Netherlands, 2007.
- [SAS 94] A. Sastre,
Protection des réseaux HTA industriels et tertiaires,
Cahier technique Schneider electric,
N° 174, 1994.
- [SCH 99] A. Schellmanns,
Circuits équivalents pour transformateurs multi – enroulements : Application à la CEM conduite d'un convertisseur,
Thèse de doctorat de l'INP de Grenoble, 1999
- [USM 06] M. Usman, D. Riu, N. Retière, F. Druart, Y. Bultel
Dynamic modelling of proton exchange membrane fuel cell using non-integer derivatives
Journal of Power source, Vol. 160, No.2, 2006

Chapitre II :

- [ALG 70] P.L. Alger
Induction machines – Their behaviour and uses,
Gordon and Breach, New-York, 1970
- [BAR 88] M. Barnsley,
Fractals everywhere,
Academic Press, New – York, 1988;

- [BEN 91] L. Benguigui and M. Daoud,
Is the Suburban Railway System a Fractal?
Geographical Analysis, 23: 362-368, 1991
- [CHE 87] G. Cherbit,
Fractals : dimensions non entières et applications,
Masson, Paris, 1987;
- [COL 89] Collective,
L'ordre du chaos,
Pour la science, Belin, 1989.
- [DEK 99] M. Dekking,
Fractals: theory and applications en engineering,
Springer, London, 1999;
- [FAL 03] K. Falconer
Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications.
John Wiley & Sons, Ltd, 2003
- [FIS 95] Y. Fisher,
Fractal image compression. Theory and applications,
Springer, New – York, 1995;
- [FOR 79] S.R. Forrest and T.A. Witten,
Long range correlation in smoke aggregates,
Journal of Physics A, 12, L109, 1979
- [FRA 94] P. Frankhauser,
La Fractalité des Structures urbaines,
Edition Anthropos, diffusion Economica, Paris, collection VILLES, 1994.
- [GOU 96] J. –F. Gouyet,
Physiques et structures fractales,
Masson, Paris, 1996
- [LEV 97] V. Lévy,
Fractals en engineering: from theory to industrial applications,
Springer, London, 1997;
- [LME 90] A. Le Méhauté,
Fractal les géométries fractales,
Hermès, Paris, 1990;

- [MAN 82] B. B. Mandelbrot
The fractal geometry of nature,
W.H. Freeman and Company, 1982
- [MAN 84] B.B. Mandelbrot,
Les objets fractals : forme, hasard et dimension,
Flammarion, Paris, 1984;
- [MAN 89] B.B. Mandelbrot,
Les objets fractals: forme, hasard et dimension. Survol du langage fractal,
Flammarion, Paris, 1989;
- [OUS 95] A. Oustaloup,
La dérivation non entier,
Hermès, Paris, 1995.
- [PEI 89] H.-O. Peitgen et D. Saupe,
The Science of Fractal Images,
Springer-Verlag, New – York, 1989;
- [PEI 91] H.-O. Peitgen, D. Saupe et H. Jürgens,
Fractals for the Classroom,
Springer-Verlag, New – York, 1991;
- [POD 99] I. Podlubny,
Fractional Differential Equation,
Mathematics in Science and Engineering, vol. 198, Academic Press, 1999.
- [RIU 02] D. Riu, N. Retière, M. Ivanès
Modélisation fractionnaire des machines électriques tournantes : de leur caractérisation fréquentielle à leur réponse temporelle,
CIFA, 2002.
- [SAP 90] B. Sapoval
Les Fractales
Aditech, Paris, 1990
- [TEI 00] M. Teich S. Lowen B. Jost,
Heart rate variability: Measures and models,
2000 (prétirage).
- [USM 06] M. Usman, D. Riu, N. Retière, F. Druart, Y. Bultel
Dynamic modelling of proton exchange membrane fuel cell using non-integer derivatives
Journal of Power source, Vol. 160, No.2, 2006

Chapitre III :

- [BEJ 00] A Bejan,
Shape and Structure, from Engineering to Nature,
Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2000.
- [BOT 01] J. –M. Escané, P Escané
Modélisation des lignes et câbles,
Technique de l'Ingénieur, D1102, 2001
- [KAP 85] T. Kaplan, L.J. Gray
Effect of disorder on a fractal model for the ac response of a rough interface
Physical Review B, vol. 32, n. 11, 1985.
- [LAR 96] P. De Larminat,
Automatique : commande des systèmes linéaires,
2° Edition, Hermes, Paris, 1996.
- [LeME 82] A. Le Méhauté, G. Crepy,
Sur quelques propriétés de transferts électrochimiques en géométrie fractale,
C. R. Acad. Sc. Paris 294, série II, 685-688, 1982.
- [LIU 85] S.H. Liu,
Fractal Model for the AC Response of a Rough Interface,
Phys. Rev. Lett. 55, 529-532, 1985.
- [MAN 64] B. B. Mandelbrot, A. Blumen,
Fractal Geometry: What is it, and What Does it do? [and Discussion]
- [MAN 84] B.B. Mandelbrot,
Les objets fractals : forme, hasard et dimension,
Flammarion, Paris, 1984;
- [RIC 06] O. Richardot,
Réglage coordonné de tension dans les réseaux de distribution à l'aide de la production décentralisée,
Thèse INP de Grenoble, Octobre 2006.
- [ROD 00] V. Rodin, E. Rodina,
The fractal dimension of Tokyo's streets,
Fractals, Vol. 8, Issue 4, pp. 413-418, Décembre 2000

- [ROU 97] S. Roura
An improved Master Theorem for Divide-and-Conquer Recurrences
Source,
Proceedings of the 24th International Colloquium on Automata, Languages
and Programming (Springer-Verlag London, UK) Vol. 1256 Pages 449-
459, 1997.
- [SAP 88] B. Sapoval, J. –N. Chazalviel, J. Peyrière
Electrical response of fractal and porous interfaces
Physical Review A, vol. 38, n° 11, 1988.
- [SCH 75] W. Scheider,
Theory of the Frequency Dispersion of Electrode Polarization. Topology of
Networks with Fractional Power Frequency Dependence,
J. Phys. Chem. 79, 127-136, 1975.
- [SEE 08] F. Héliodore,
Analyse des black-out dans les réseaux électriques larges,
Journées SEEDS “Modélisation multi-physique” du socle « Méthodes et
méthodologies », Paris, Mars 2008.
- [SIK 03] K. Sik Kim, L. Benguigui, M. Marinov,
The fractal structure of Seoul’s public transportation,
Cities, Vol. 20, n°1, Feb. 2003, pp. 31-39
- [THO 94] H. Thomas, E. Charles and L. Ronald
Definition of recursion and Master Method
The MIT Press, 1994

Chapitre IV:

- [BAR 05] F. Barruel,
Influence des charges non linéaires sur le comportement et le
dimensionnement d’un réseau de bord d’avion,
Thèse de doctorat de l’INP de Grenoble, 2005
- [HAR 98] T. T. Hartley, C. F. Lorenzo,
A solution to the fundamental linear fractional order differential equation,
NASA TP-1998-208415, May 1998.

- [HAR 03] J. Harris, H. Stocker, J. W. Harris
Handbook of mathematics and computational science
Springer, 2003
- [KHA 01] T. Khaorapapong,
Modélisation d'ordre non entier des effets de fréquence dans les barres rotoriques d'une machine asynchrone,
Thèse de doctorat de l'Institut National Polytechnique de Toulouse, 2001.
- [KUN 94] P. Kundur,
Power System Stability and control,
The electric Power Research Institute, McGraw-Hill Education, 1994.
- [LAR 96] P. de Larminat
Automatique – Commande des systèmes linéaires
Hermès, 1996
- [LOR 98] C.F. Lorenzo, T.T. Hartley,
Initialization, Conceptualization, and Application in the Generalized (Fractional) Calculus,
NASA TP-1998-208693, December 1998.
- [LYA 66] A.M. Lyapunov
Stability of motion,
Academic Press, New-York and London, 1966
- [MAT 96] D. Matignon,
Stability results on fractional differential equations with applications to control processing,
Computational Engineering in Systems Applications, IMACS, IEEE-SMC, July 1996.
- [MID 76] R. D. Middlebrook,
Input Filter Considerations in Design and Application of Switching Regulators,
Proc. IEEE IAS'76, pp. 366 – 382, 1976.
- [MID 78] R. D. Middlebrook,
Design Techniques for Preventing Input – Filter Oscillations in Switched – Mode Regulators,
Proc. Powercon 5, pp. A3 – 1 to A3 – 16, 1978.
- [OUS 95] A. Oustaloup,
La dérivation non entière,
Hermès, Paris, 1995.

- [OUS 05] A. Oustaloup, O. Cois, L. Le Lay,
Représentation et identification par modèle non entier,
Hermès Science Publishing LTD, Paris: 2005.
- [RET 03] N. Retière,
Modéliser et concevoir les réseaux d'énergie électrique,
Habilitation à diriger des recherches, UJF, Novembre 2003.
- [RIU 01] D. Riu,
Modélisation des courants induits dans les machines électriques par des systèmes d'ordre un demi,
Thèse de doctorat de l'INP de Grenoble, 2001.

Chapitre V:

- [AND 02] P. M. Anderson, A.A. Fouad,
Power System, Control and Stability
John Wiley & Sons, New-York, 2nd edition 2002
- [ARN 81] P. Arnail,
Regimes transitoires et stabilité des machines à courants alternatifs
EDF Division Technique, 1981
- [BAR 05] F. Barruel,
Influence des charges non linéaires sur le comportement et le dimensionnement d'un réseau de bord d'avion,
Thèse de doctorat de l'INP de Grenoble, 2005
- [CAN 93] I.M. Canay,
Determination of the model parameters of machines from the reactance operators $x_d(p)$ and $x_q(p)$,
IEEE Transaction on Energy Conversion, Vol. 8, No. 2 pp. 272 – 279,
1993.
- [CAN 05] S. Canat,
Contribution à la modélisation dynamique d'ordre non entier de la machine asynchrone à cage,
Thèse de doctorat de l'INP de Toulouse, 2005.
- [ENA 07-1] O. Enacheanu, D. Riu, N. Retière,
Half-order modelling of electrical networks. Application to stability studies,
17th IFAC World Congress, Seoul, 2008.

- [ENA 07-2] O. Enacheanu, D. Riu, N. Retière,
Stability study of electrical power system modelled with half-order systems,
JESA 2008.
- [IEE 95] IEEE Std,
Standard procedure for obtaining synchronous machine parameters by stand-still frequency response testing,
IEEE STD 115 1,1995.
- [JOU 02] Jourdan
Stratégie de pré dimensionnement de convertisseurs statiques – Application à une alimentation 42-14 V réversible pour l’automobile,
Thèse de doctorat de l’INP de Grenoble, 2002.
- [KAB 97] H. Kabbaj,
Identification d’un modèle type circuit prenant en compte les effets de fréquence dans une machine asynchrone à cage d’écureuil,
Thèse de doctorat de l’INP de Toulouse, 2001.
- [KAM 94] I. Kamawa, P. Viarouge,
On equivalent circuit structures for empirical modelling of turbine generators,
IEEE Transactions on Energy Conversion, vol. 9, no. 3, September 1994, pp. 579-592
- [KAM 94] I. Kamawa, P. Viarouge,
A frequency domain maximum likelihood of synchronous machine high order models using SSFR test data,
IEEE Transaction on Energy Conversion, Vol. 7, No. 3 pp. 525 – 536, 1992.
- [KUN 94] P.Kundur,
Power System Stability and control,
The electric Power Research Institute, McGraw-Hill Education, 1994.
- [LAN 98] I. D. Landau,
Identification et commande des systèmes,
Hermès, Paris, 1998.
- [LIN 01] J. Lin,
Modélisation et identification des systèmes d’ordre non entier,
Thèse de doctorat de l’Université de Poitiers, 2001.

- [LJU 79] L. Ljung,
System Identification: Theory for the user,
PTR Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1979.
- [OUS 05] A. Oustaloup, O. Cois, L. Le Lay,
Représentation et identification par modèle non entier,
Hermès Science Publishing LTD, Paris 2005.
- [RAO 96] S.S. Rao,
Engineering Optimisation: Theory and practice,
John Wiley and Sons, New York, 1996.
- [RIU 01] D. Riu,
Modélisation des courants induits dans les machines électriques par des systèmes d'ordre un demi,
Thèse de doctorat de l'INP de Grenoble, 2001.
- [RIU 03] D. Riu, N. Retière,
Induced currents modelling by half-order systems – Application to hydro- and turbo-alternators,
IEEE Transactions on Energy Conversion, vol. 18, No. 1, pp. 94-99, March 2003.
- [RIU 04] R. Riu and N. Retiere,
Implicit half-order systems utilisation for diffusion phenomenon modelling,
Proceedings of the 2004 Fractional Differentiation and its Applications, pp. 447-457.
- [MOET] : site public : <http://www.eurtd.org/moet>
- [VAS 92] P. Vas.
Electrical Machines and Drives. A space vector theory approach.
Oxford Science Publications, 1992
- [XHU 89] A. Xhuvani,
Modélisation et identification des paramètres d'une machine synchrone destinée à être alimentée par un convertisseur statique,
Thèse de doctorat de l'INP de Toulouse, 1989.

Conclusions et perspectives

- [AMR 10] A. Amrane,
Objets fractals pour la modélisation et l'analyse de réseaux,
Thèse de doctorat de l'INP de Grenoble, soutenance de thèse prévue en
2010
- [ENC 06] P. Enciu
*Apport de la modélisation fréquentielle à l'analyse des défauts dans les
réseaux électriques*,
Stage Master 2 Recherche à l'INP de Grenoble, 2006.
- [OUS 99] A. Oustaloup, B. Mathieu,
La commande CRONE – du scalaire au multivariable,
Hermès, 1999

Annexes

Annexe 1

Condition de stabilité pour un système d'ordre non entier

Les module et argument du pôle de rang k d'un système d'ordre non entier $n=a+ib$ s'expriment par :

$$\begin{cases} \rho_k = (|\lambda_l| e^{b\theta_k})^{1/a} \\ \theta_k = \frac{a}{a^2 + b^2} \arg(\lambda_l) - \frac{b}{a^2 + b^2} \ln(|\lambda_l|) + \frac{2am_k\pi}{a^2 + b^2} \end{cases} \quad \text{A1-1}$$

Afin de simplifier le calcul on suppose que $n=a+ib$ soit un réel. Alors les équations A1-1 deviennent :

$$\begin{cases} \rho_k = (|\lambda_l|)^{1/n} \\ \theta_k = \frac{1}{n} \arg(\lambda_l) + \frac{2m_k\pi}{n} \end{cases} \quad \text{A1-2}$$

$$\Re(p_k) = (|\lambda_l|)^{1/a} \cdot \cos\left(\frac{1}{n} \arg(\lambda_l) + \frac{2m_k\pi}{n}\right) < 0 \quad \text{A1-3}$$

Pour que la partie réelle du pôle p_k soit négative, une condition s'impose sur son argument :

$$\frac{\pi}{2} < \left(\frac{1}{n} \arg(\lambda_l) + \frac{2m_k\pi}{n}\right) < \frac{3\pi}{2} \quad \text{A1-4}$$

D'après la condition A1-4, [OUS 05] la condition de stabilité d'un système fractionnaire :

$$|\arg(\lambda_l)| \geq \frac{n \cdot \pi}{2} \quad \text{A1-9}$$

Annexe 2

Identification du modèle d'ordre entier de l'alternateur de « Darlington »

Schémas équivalents :

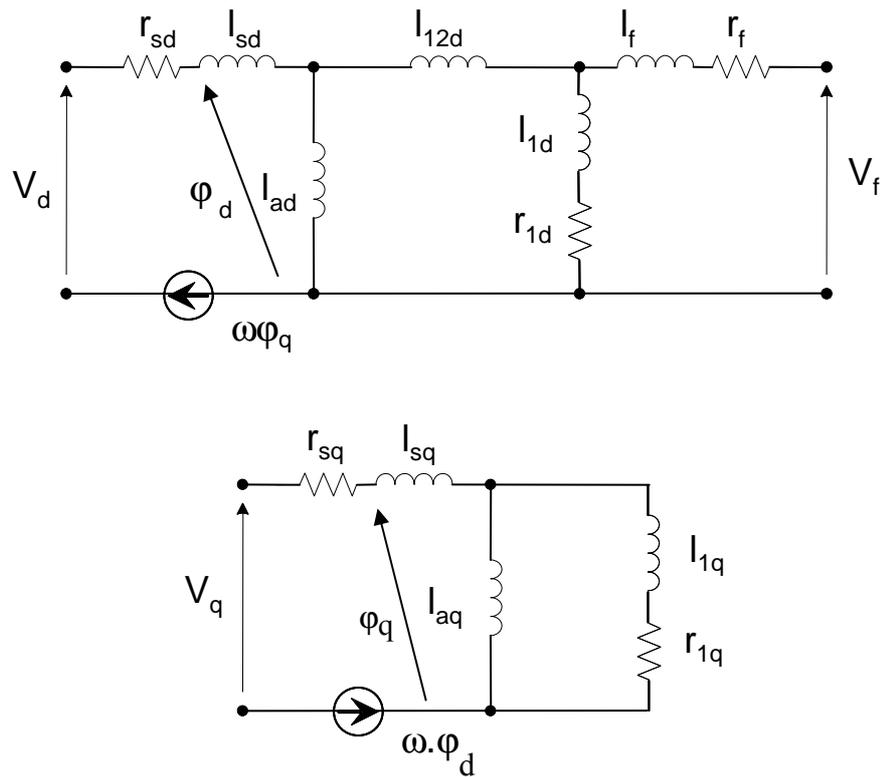


Figure A2-1 : Schéma équivalent d'ordre 2 de la machine synchrone (axes d et q)

Identification de paramètres :

<i>Paramètre</i>	<i>Identification</i>
r_{1d} [p.u.]	0.003
l_{1d} [p.u.]	0.727
l_{12d} [p.u.]	0.074
l_f [p.u.]	0.15
r_f [p.u.]	0.0006
l_{ad} [p.u.]	1.58
r_{1q} [p.u.]	0.0033
l_{1q} [p.u.]	0.073
l_{aq} [p.u.]	1.1092

Tableau A2-1 : Paramètres identifiés de l'alternateur de « Darlington », modèle entier d'ordre deux

Comparaison avec le modèle explicite d'ordre un demi :

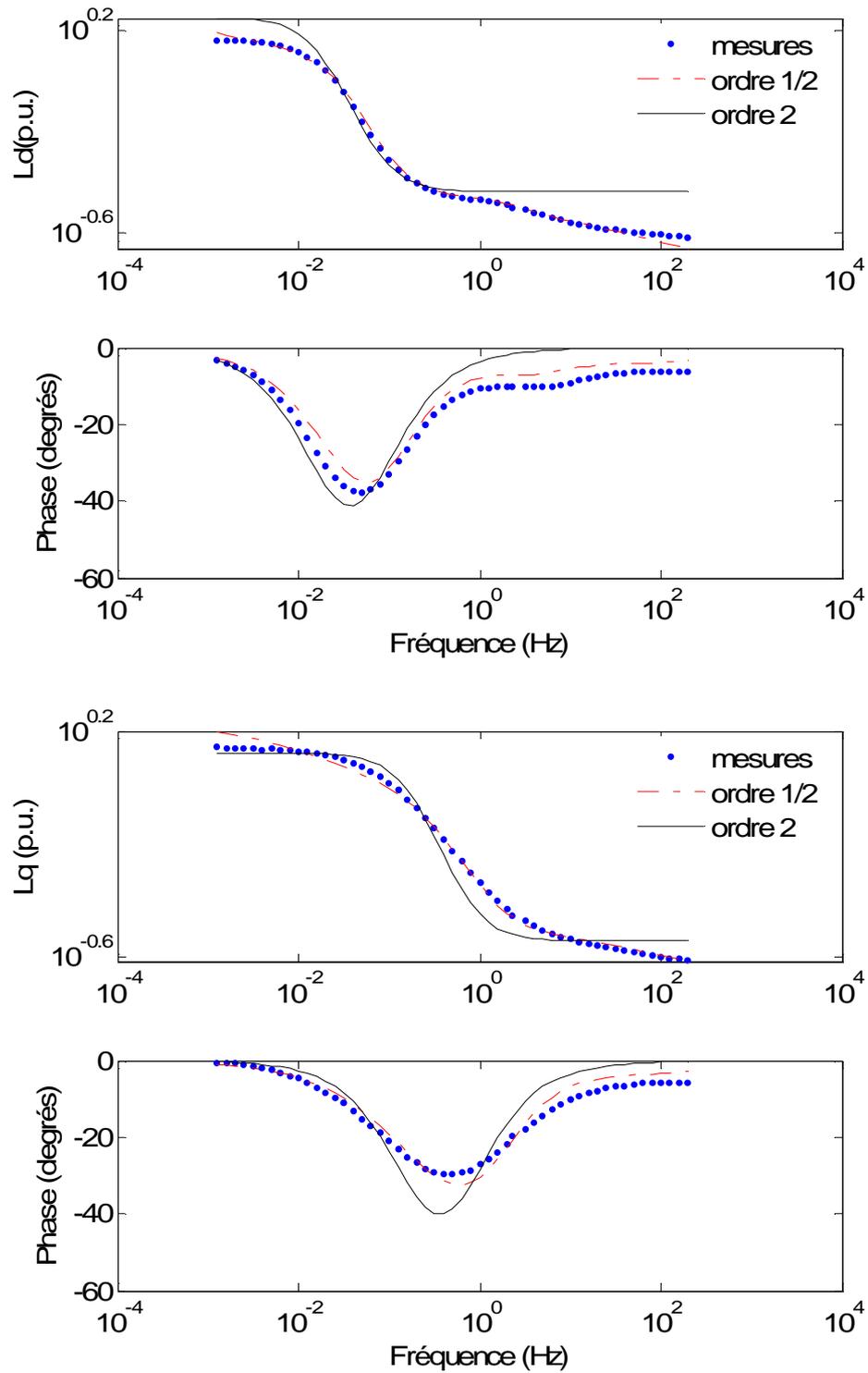


Figure A2-2 : Diagrammes de Bode de l'inductance opérationnelle L_d et L_q (mesures, modèle d'ordre un demi et modèle d'ordre 2)

Annexe 3

Système d'état généralisé et matrice d'état généralisée. Modèle d'ordre non entier de la machine synchrone et boucle de régulation en tension

Système d'équations caractérisant la machine synchrone :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 0 = -x_1^{(1/2)} + x_2; \\
 0 = -(l_d + l_{ad}) \cdot x_2^{(1/2)} - l_{ad} \cdot x_4^{(1/2)} - l_{ad} \cdot x_6^{(1/2)} - l_{ad} \cdot x_7 - (r_d + R_{d,ch}) \cdot x_1 \\
 0 = -x_3^{(1/2)} + x_4; \\
 0 = -(l_f + l_{ad} + l_{12d}) \cdot x_4^{(1/2)} - l_{ad} \cdot x_2^{(1/2)} - (l_{ad} + l_{12d}) \cdot x_6^{(1/2)} - l_{ad} \cdot x_7 - r_f \cdot x_3 - x_{13}; \\
 0 = -x_5^{(1/2)} + x_6; \\
 0 = -(l_{ad} + l_{12d}) \cdot x_6^{(1/2)} - l_{ad} \cdot x_2^{(1/2)} - (l_{ad} + l_{12d}) \cdot x_4^{(1/2)} - l_{ad} \cdot x_7 - \frac{R_{2d}}{\sqrt{\omega_{2d}}} \cdot x_6 - R_{2d} \cdot x_5; \\
 0 = -\frac{l_{ad}}{\sqrt{\omega_{1d}}} \cdot (x_2^{(1/2)} + x_4^{(1/2)} + x_6^{(1/2)})^{(1/2)} - \frac{l_{ad}}{\sqrt{\omega_{1d}}} \cdot x_7^{(1/2)} - \\
 \quad - (L_{1d} + l_{ad}) \cdot x_7 - l_{ad} \cdot (x_2^{(1/2)} + x_4^{(1/2)} + x_6^{(1/2)}); \\
 0 = -x_8^{(1/2)} + x_9; \\
 0 = -(l_q + l_{aq}) \cdot x_9^{(1/2)} - l_{aq} \cdot x_{11}^{(1/2)} - l_{aq} \cdot x_{12} - (r_q + R_{q,ch}) \cdot x_{10} - V_q; \\
 0 = -x_{10}^{(1/2)} + x_{11}; \\
 0 = -(l_{2q} + l_{aq}) \cdot x_{11}^{(1/2)} - l_{aq} \cdot x_{19}^{(1/2)} - l_{aq} \cdot x_{12} - r_{2q} \cdot x_{10}; \\
 0 = -\frac{l_{aq}}{\sqrt{\omega_{1q}}} \cdot x_{12}^{(1/2)} - \frac{l_{aq}}{\sqrt{\omega_{1q}}} \cdot (x_9^{(1/2)} + x_{11}^{(1/2)})^{(1/2)} - (L_{1q} + l_{aq}) \cdot x_{12} - l_{aq} \cdot x_9^{(1/2)} - l_{aq} \cdot x_{11}^{(1/2)}; \\
 0 = -x_{13}^{(1/2)} + x_{14} \\
 0 = -x_{14}^{(1/2)} - \frac{x_{13}}{T_r} + \frac{(V_{réf} - V_t) \cdot K_r}{T_r}
 \end{array} \right. \quad \text{A3-1}$$

Le système d'état généralisé après le changement de variable est :

$$\begin{cases}
 x_1^{(1/2)} = x_2; \\
 x_2^{(1/2)} = a_{2,1} \cdot x_1 + a_{2,5} \cdot x_5 + a_{2,6} \cdot x_6 + a_{2,7} \cdot x_7; \\
 x_3^{(1/2)} = x_4; \\
 x_4^{(1/2)} = a_{4,3} \cdot x_3 + a_{4,5} \cdot x_5 + a_{4,6} \cdot x_6 + a_{4,13} \cdot x_{13}; \\
 x_5^{(1/2)} = x_6; \\
 x_6^{(1/2)} = a_{6,1} \cdot x_1 + a_{6,3} \cdot x_3 + a_{6,5} \cdot x_5 + a_{6,6} \cdot x_6 + a_{6,7} \cdot x_7 + a_{6,13} \cdot x_{13}; \\
 x_7^{(1/2)} = a_{7,1} \cdot x_1 + a_{7,2} \cdot x_2 + a_{7,3} \cdot x_3 + a_{7,5} \cdot x_5 + a_{7,6} \cdot x_6 + a_{7,7} \cdot x_7 + \\
 \quad + a_{7,13} \cdot x_{13}; \\
 x_8^{(1/2)} = x_9; \\
 x_9^{(1/2)} = a_{9,8} \cdot x_8 + a_{9,10} \cdot x_{10} + a_{9,12} \cdot x_{12}; \\
 x_{10}^{(1/2)} = x_{11}; \\
 x_{11}^{(1/2)} = a_{11,8} \cdot x_8 + a_{11,10} \cdot x_{10} + a_{11,12} \cdot x_{12}; \\
 x_{12}^{(1/2)} = a_{12,8} \cdot x_8 + a_{12,9} \cdot x_9 + a_{12,10} \cdot x_{10} + a_{12,11} \cdot x_{11} + a_{12,12} \cdot x_{12}; \\
 x_{13}^{(1/2)} = x_{14}; \\
 x_{14}^{(1/2)} = a_{14,13} \cdot x_{13} + \xi \cdot (V_{réf} - V_t);
 \end{cases}
 \tag{A3-2}$$

La matrice d'état généralisée s'écrit :

$$A = \begin{bmatrix}
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 a_{2,1} & 0 & 0 & 0 & a_{2,5} & a_{2,6} & a_{2,7} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{2,13} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & a_{4,3} & 0 & a_{4,5} & a_{4,6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{4,13} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 a_{6,1} & 0 & a_{6,3} & 0 & a_{6,5} & a_{6,6} & a_{6,7} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{6,13} & 0 \\
 a_{7,1} & a_{7,2} & a_{7,3} & 0 & a_{7,5} & a_{7,6} & a_{7,7} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{7,13} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{9,8} & 0 & a_{9,10} & 0 & a_{9,12} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{11,8} & 0 & a_{11,10} & 0 & a_{11,12} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{12,8} & a_{12,9} & a_{12,10} & a_{12,11} & a_{12,12} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{14,13} & 0
 \end{bmatrix}
 \tag{A3-3}$$

Annexe 4

Paramètres de la matrice d'état du système d'ordre 1/2

Matrice d'état A :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{2,1} & 0 & A_{2,3} & 0 & 0 & A_{2,6} & A_{2,7} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{4,1} & 0 & A_{4,3} & 0 & 0 & A_{4,6} & A_{4,7} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{6,1} & 0 & A_{6,3} & 0 & A_{6,5} & A_{6,6} & A_{6,7} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{7,1} & A_{7,2} & A_{7,3} & A_{7,4} & A_{7,5} & A_{7,6} & A_{7,7} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{9,8} & 0 & A_{9,10} & 0 & A_{9,12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{11,8} & 0 & A_{11,10} & 0 & A_{11,12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{12,8} & A_{12,9} & A_{12,10} & A_{12,11} & A_{12,12} \end{bmatrix} \quad \text{A4-1}$$

Les paramètres de la matrice d'état A sont :

$$A_{2,1} = -\frac{rd + Rd, ch}{B};$$

$$A_{2,3} = \frac{l_{ad}}{A \cdot B} R_{2d};$$

$$A_{2,6} = \frac{l_{ad}}{A \cdot B} \frac{R_{2d}}{\sqrt{\omega_{2d}}};$$

$$A_{2,7} = \frac{l_{ad}^2}{A \cdot B} - \frac{l_{ad}}{B};$$

$$A_{4,3} = -\frac{r_f}{l_f};$$

$$A_{4,6} = \frac{R_{2d}}{l_f};$$

$$A_{4,7} = \frac{R_{2d}}{l_f \sqrt{\omega_{2d}}};$$

$$A_{6,1} = \frac{l_{ad}}{A \cdot B} r_d;$$

$$A_{6,3} = \frac{r_f}{l_f};$$

$$A_{6,5} = -C \cdot R_{2d};$$

$$A_{6,6} = -C \cdot \frac{R_{2d}}{\sqrt{\omega_{2d}}};$$

$$A_{6,7} = -C \cdot l_{ad} + \frac{l_{ad}}{l_f} + \frac{l_{ad}^2}{A \cdot B};$$

$$A_{7,1} = l_{ad} \cdot G \cdot r_d + W \frac{l_{ad}}{A} \cdot r_d;$$

$$A_{7,2} = H \cdot G \cdot r_d;$$

$$A_{7,3} = W \frac{r_f}{l_f};$$

$$A_{7,5} = l_{ad} \cdot F \cdot R_{2d} - W \cdot C \cdot R_{2d};$$

$$A_{7,6} = l_{ad} \cdot F \cdot \frac{R_{2d}}{\sqrt{\omega_{2d}}} - W \cdot C \cdot \frac{R_{2d}}{\sqrt{\omega_{2d}}};$$

$$A_{7,7} = l_{ad}^2 F + l_{ad}^2 G - J + W \left(-C \cdot l_{ad} + \frac{l_{ad}}{l_f} + \frac{l_{ad}^2}{A} \right);$$

$$A_{9,8} = -r_q \cdot Z;$$

$$A_{9,10} = N \cdot r_{2q};$$

$$A_{9,12} = N \cdot l_{aq};$$

$$A_{11,8} = -r_q \cdot M;$$

$$A_{11,10} = -\frac{r_{2q}}{V};$$

$$A_{11,12} = -\frac{l_{aq}}{V};$$

$$A_{12,8} = \frac{-l_{aq} \cdot r_q \cdot (M - Z)}{T(1+U)};$$

$$A_{12,9} = \frac{-r_q \cdot (M - Z)}{(1+U)};$$

$$A_{12,10} = \frac{-l_{aq} \cdot X}{T(1+U)};$$

$$A_{12,11} = \frac{X}{(1+U)};$$

$$A_{12,12} = \frac{-K - l_{aq} \cdot U}{T(1+U)};$$

où :

$$A = l_{ad} + l_{12d};$$

$$B = l_{ad} + l_d - \frac{l_{ad}^2}{l_{ad} + l_{12d}};$$

$$C = \frac{1}{l_f} + \frac{1}{l_{ad} + l_{12d}} + \frac{l_{ad}^2}{A^2 B};$$

$$F = -\frac{1}{l_f} + C - \frac{l_{ad}}{A \cdot B};$$

$$G = \frac{1}{B} - \frac{l_{ad}}{A \cdot B};$$

$$H = \frac{l_{ad}}{\sqrt{\omega_{1d}}};$$

$$J = l_{ad} + L_{1d};$$

$$W = H \cdot F \cdot \frac{R_{2d}}{\sqrt{\omega_{2d}}};$$

$$K = L_{1q} + l_{aq};$$

$$T = \frac{l_{aq}}{\sqrt{\omega_{1q}}};$$

$$V = l_{2q} + l_{aq} - \frac{l_{aq}^2}{l_{aq} + l_q};$$

$$M = \frac{l_{aq}}{(l_{aq} + l_q) \cdot V};$$

$$Z = \frac{1}{l_{aq} + l_q} + \frac{l_{aq}^2}{(l_{aq} + l_q)^2 \cdot V};$$

$$U = 2 \cdot M \cdot l_{aq} - \frac{l_{aq}}{V} - Z \cdot l_{aq};$$

$$X = \left(M - \frac{1}{V} \right) \cdot r_{2q}.$$

Annexe 5

Paramètres de la matrice d'état d'un système d'ordre entier

Matrice d'état A :

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & 0 & 0 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} & A_{45} \\ 0 & 0 & 0 & A_{54} & A_{55} \end{bmatrix} \quad \text{A5-1}$$

Les paramètres de la matrice d'état A sont :

$$A_{11} = \frac{-(l_{12d} + l_{ad}) \cdot l_D - l_f \cdot (l_{12d} + l_{ad}) - l_D \cdot l_f}{-(l_d + l_{ad}) \cdot l_f \cdot (l_{12d} + l_{ad}) - (l_d + l_{ad}) \cdot (l_{12d} + l_{ad}) \cdot l_D - (l_d + l_{ad}) \cdot l_D \cdot l_f + l_{ad}^2 \cdot l_D + l_{ad}^2 \cdot l_f} \cdot R_{ch,d}$$

$$A_{21} = \frac{l_{ad} \cdot l_D \cdot R_{ch,d}}{-(l_d + l_{ad}) \cdot l_f \cdot (l_{12d} + l_{ad}) - (l_d + l_{ad}) \cdot (l_{12d} + l_{ad}) \cdot l_D - (l_d + l_{ad}) \cdot l_D \cdot l_f + l_{ad}^2 \cdot l_D + l_{ad}^2 \cdot l_f}$$

$$A_{31} = \frac{l_{ad} \cdot l_f \cdot R_{ch,d}}{-(l_d + l_{ad}) \cdot l_f \cdot (l_{12d} + l_{ad}) - (l_d + l_{ad}) \cdot (l_{12d} + l_{ad}) \cdot l_D - (l_d + l_{ad}) \cdot l_D \cdot l_f + l_{ad}^2 \cdot l_D + l_{ad}^2 \cdot l_f}$$

$$A_{12} = \frac{l_{ad} \cdot l_D \cdot r_f}{-(l_d + l_{ad}) \cdot l_f \cdot (l_{12d} + l_{ad}) - (l_d + l_{ad}) \cdot (l_{12d} + l_{ad}) \cdot l_D - (l_d + l_{ad}) \cdot l_D \cdot l_f + l_{ad}^2 \cdot l_D + l_{ad}^2 \cdot l_f}$$

$$A_{22} = \frac{l_{ad}^2 - l_D \cdot (l_d + l_{ad}) - (l_d + l_{ad}) \cdot (l_{12d} + l_{ad})}{-(l_d + l_{ad}) \cdot l_f \cdot (l_{12d} + l_{ad}) - (l_d + l_{ad}) \cdot (l_{12d} + l_{ad}) \cdot l_D - (l_d + l_{ad}) \cdot l_D \cdot l_f + l_{ad}^2 \cdot l_D + l_{ad}^2 \cdot l_f} \cdot r_f$$

$$A_{32} = \frac{l_{ad}^2 + (l_d + l_{ad}) \cdot (l_{12d} + l_{ad})}{-(l_d + l_{ad}) \cdot l_f \cdot (l_{12d} + l_{ad}) - (l_d + l_{ad}) \cdot (l_{12d} + l_{ad}) \cdot l_D - (l_d + l_{ad}) \cdot l_D \cdot l_f + l_{ad}^2 \cdot l_D + l_{ad}^2 \cdot l_f} \cdot r_f$$

$$A_{13} = \frac{l_{ad} \cdot l_f \cdot r_D}{-(l_d + l_{ad}) \cdot l_f \cdot (l_{12d} + l_{ad}) - (l_d + l_{ad}) \cdot (l_{12d} + l_{ad}) \cdot l_D - (l_d + l_{ad}) \cdot l_D \cdot l_f + l_{ad}^2 \cdot l_D + l_{ad}^2 \cdot l_f}$$

$$A_{23} = \frac{-l_{ad}^2 + (l_d + l_{ad}) \cdot (l_{12d} + l_{ad})}{-(l_d + l_{ad}) \cdot l_f \cdot (l_{12d} + l_{ad}) - (l_d + l_{ad}) \cdot (l_{12d} + l_{ad}) \cdot l_D - (l_d + l_{ad}) \cdot l_D \cdot l_f + l_{ad}^2 \cdot l_D + l_{ad}^2 \cdot l_f} \cdot r_D$$

$$A_{33} = \frac{l_{ad}^2 - l_f \cdot (l_d + l_{ad}) - (l_d + l_{ad}) \cdot (l_{12d} + l_{ad})}{-(l_d + l_{ad}) \cdot l_f \cdot (l_{12d} + l_{ad}) - (l_d + l_{ad}) \cdot (l_{12d} + l_{ad}) \cdot l_D - (l_d + l_{ad}) \cdot l_D \cdot l_f + l_{ad}^2 \cdot l_D + l_{ad}^2 \cdot l_f} \cdot r_D$$

$$A_{44} = \frac{l_Q + l_{aq}}{-l_{aq}^2 + (l_q + l_{aq}) \cdot l_{aq} + (l_q + l_{aq}) \cdot l_Q} \cdot R_{ch,q}$$

$$A_{54} = \frac{l_Q + l_{aq}}{-l_{aq}^2 + (l_q + l_{aq}) \cdot l_{aq} + (l_q + l_{aq}) \cdot l_Q} \cdot R_{ch,q}$$

$$A_{45} = \frac{-l_{aq}}{-l_{aq}^2 + (l_q + l_{aq}) \cdot l_{aq} + (l_q + l_{aq}) \cdot l_Q} \cdot R_Q$$

$$A_{55} = \frac{-(l_{aq} + l_q)}{-l_{aq}^2 + (l_q + l_{aq}) \cdot l_{aq} + (l_q + l_{aq}) \cdot l_Q} \cdot R_Q$$

Annexe 6

Matrices de sensibilités du système d'ordre un demi

Indices de sensibilité de λ_1										
0.0029	0.0128	0.0000	0.0000	0.0047	0.0203	0.1515	0	0	0	0
0.4953	0.5755	0.0178	0.0206	0.4471	0.5195	0.2588	0	0	0	0
0.4953	0.5755	0.0178	0.0206	0.4471	0.5195	0.2588	0	0	0	0
0.0102	0.0025	0.8111	0.1990	0.8495	0.2084	0.0029	0	0	0	0
0.0102	0.0025	0.8111	0.1990	0.8495	0.2084	0.0029	0	0	0	0
0.0147	0.0003	8.4956	0.1766	1.2865	0.0267	0.0006	0	0	0	0
0.0147	0.0003	8.4956	0.1766	1.2865	0.0267	0.0006	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Indices de sensibilité de λ_2										
0.0090	0.0393	0.0000	0.0001	0.0143	0.0625	0.4662	0	0	0	0
0.4434	0.5152	0.0159	0.0185	0.4003	0.4651	0.2317	0	0	0	0
0.4434	0.5152	0.0159	0.0185	0.4003	0.4651	0.2317	0	0	0	0
0.0203	0.0050	1.6186	0.3972	1.6952	0.4160	0.0058	0	0	0	0
0.0203	0.0050	1.6186	0.3972	1.6952	0.4160	0.0058	0	0	0	0
0.0315	0.0007	18.2053	0.3784	2.7568	0.0573	0.0013	0	0	0	0
0.0315	0.0007	18.2053	0.3784	2.7568	0.0573	0.0013	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Indices de sensibilité de λ_3										
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0	0	0	0
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0	0	0	0
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0	0	0	0
0.0008	0.0002	0.0633	0.0155	0.0663	0.0163	0.0002	0	0	0	0
0.0008	0.0002	0.0633	0.0155	0.0663	0.0163	0.0002	0	0	0	0
0.0008	0.0000	0.4374	0.0091	0.0662	0.0014	0.0000	0	0	0	0
0.0008	0.0000	0.4374	0.0091	0.0662	0.0014	0.0000	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Indices de sensibilité de λ_4										
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0	0	0	0
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0	0	0	0
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0	0	0	0
0.0032	0.0008	0.2580	0.0633	0.2702	0.0663	0.0009	0	0	0	0
0.0032	0.0008	0.2580	0.0633	0.2702	0.0663	0.0009	0	0	0	0
0.0364	0.0008	21.0463	0.4374	3.1870	0.0662	0.0015	0	0	0	0
0.0364	0.0008	21.0463	0.4374	3.1870	0.0662	0.0015	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Indices de sensibilité de λ_5										
0.0000	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0014	0	0	0	0
0.0059	0.0069	0.0002	0.0002	0.0053	0.0062	0.0031	0	0	0	0
0.0059	0.0069	0.0002	0.0002	0.0053	0.0062	0.0031	0	0	0	0
0.0052	0.0013	0.4138	0.1015	0.4334	0.1063	0.0015	0	0	0	0
0.0052	0.0013	0.4138	0.1015	0.4334	0.1063	0.0015	0	0	0	0
0.0008	0.0000	0.4356	0.0091	0.0660	0.0014	0.0000	0	0	0	0
0.0008	0.0000	0.4356	0.0091	0.0660	0.0014	0.0000	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Indices de sensibilité de λ_6										
0.0002	0.0007	0.0000	0.0000	0.0003	0.0012	0.0087	0	0	0	0
0.0048	0.0056	0.0002	0.0002	0.0043	0.0050	0.0025	0	0	0	0
0.0048	0.0056	0.0002	0.0002	0.0043	0.0050	0.0025	0	0	0	0
0.0212	0.0052	1.6910	0.4149	1.7710	0.4346	0.0060	0	0	0	0
0.0212	0.0052	1.6910	0.4149	1.7710	0.4346	0.0060	0	0	0	0
0.0345	0.0007	19.9723	0.4151	3.0244	0.0629	0.0015	0	0	0	0
0.0345	0.0007	19.9723	0.4151	3.0244	0.0629	0.0015	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Indices de sensibilités de λ_7										
0.0200	0.0874	0.0001	0.0003	0.0319	0.1391	1.0376	0	0	0	0
0.0372	0.0432	0.0013	0.0015	0.0336	0.0390	0.0194	0	0	0	0
0.0372	0.0432	0.0013	0.0015	0.0336	0.0390	0.0194	0	0	0	0
0.0044	0.0011	0.3489	0.0856	0.3654	0.0897	0.0012	0	0	0	0
0.0044	0.0011	0.3489	0.0856	0.3654	0.0897	0.0012	0	0	0	0
0.0070	0.0001	4.0382	0.0839	0.6115	0.0127	0.0003	0	0	0	0

0.0070	0.0001	4.0382	0.0839	0.6115	0.0127	0.0003	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Indices de sensibilité de λ_8

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0.0050	0.0169	0.0098	0.0336	0.1820
0	0	0	0	0	0	0	0.4937	0.5553	0.4261	0.4792	0.2666
0	0	0	0	0	0	0	0.4937	0.5553	0.4261	0.4792	0.2666
0	0	0	0	0	0	0	0.0612	0.0045	3.1862	0.2342	0.0065
0	0	0	0	0	0	0	0.0612	0.0045	3.1862	0.2342	0.0065

Indices de sensibilité de λ_9

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0.0138	0.0471	0.0274	0.0935	0.5061
0	0	0	0	0	0	0	0.4587	0.5159	0.3958	0.4452	0.2477
0	0	0	0	0	0	0	0.4587	0.5159	0.3958	0.4452	0.2477
0	0	0	0	0	0	0	0.1219	0.0090	6.3468	0.4665	0.0130
0	0	0	0	0	0	0	0.1219	0.0090	6.3468	0.4665	0.0130

Indices de sensibilité de λ_{10}

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0.0001	0.0003	0.0002	0.0005	0.0028
0	0	0	0	0	0	0	0.0094	0.0106	0.0081	0.0092	0.0051
0	0	0	0	0	0	0	0.0094	0.0106	0.0081	0.0092	0.0051
0	0	0	0	0	0	0	0.0095	0.0007	0.4938	0.0363	0.0010
0	0	0	0	0	0	0	0.0095	0.0007	0.4938	0.0363	0.0010

Indices de sensibilité de λ_{11}											
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0.0006	0.0019	0.0011	0.0039	0.0209
0	0	0	0	0	0	0	0.0082	0.0092	0.0071	0.0080	0.0044
0	0	0	0	0	0	0	0.0082	0.0092	0.0071	0.0080	0.0044
0	0	0	0	0	0	0	0.1317	0.0097	6.8584	0.5041	0.0140
0	0	0	0	0	0	0	0.1317	0.0097	6.8584	0.5041	0.0140

Indices de sensibilité de λ_{12}											
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0.0285	0.0973	0.0566	0.1933	1.0461
0	0	0	0	0	0	0	0.0421	0.0474	0.0364	0.0409	0.0227
0	0	0	0	0	0	0	0.0421	0.0474	0.0364	0.0409	0.0227
0	0	0	0	0	0	0	0.0340	0.0025	1.7706	0.1301	0.0036
0	0	0	0	0	0	0	0.0340	0.0025	1.7706	0.1301	0.0036

Tableau A6-1 : Indices de sensibilité de chaque valeur propre

RESUME EN FRANÇAIS

Depuis plus d'une vingtaine d'années une attention toute particulière est portée sur l'étude de réseaux électriques afin d'améliorer leur dimensionnement, leur qualité, leur sécurité et leurs performances. En effet, ces réseaux deviennent de plus en plus complexes avec l'apparition de nouvelles sources d'énergie de nature diverse et l'augmentation de dispositifs d'électronique de puissance qui servent d'interfaces de connexion ou de dispositifs de contrôle. Ces évolutions engendrent de nombreux problèmes d'analyse et de dimensionnement des réseaux électriques modernes. Pour les résoudre, nous proposons une démarche originale de modélisation et d'analyse basée sur les systèmes d'ordre non entier. Elle peut s'appliquer soit aux réseaux électriques, soit à leurs composants (machines électriques, piles à combustibles, charges, etc.). Plus précisément, le premier objectif de ce mémoire est l'application de la théorie fractale à la modélisation dynamique des systèmes électriques afin d'obtenir des modèles de connaissance plus précis et d'ordre réduit. On tâchera notamment de mettre en évidence les liens qui existent entre géométrie fractale des systèmes électriques, performances fréquentielles et modélisation d'ordre non entier. Le deuxième objectif est l'application des modèles d'ordre non entier aux études de stabilité classiquement menées sur les systèmes électriques.

ABSTRACT

Since twenty years, a particular attention is focused on the study of electrical networks to improve their design, their quality and safety and at least their performance. Indeed, these electrical networks become more complex with the emergence of new sources of energy of various kinds and the rise of electronic devices which connect or control devices. These changes lead to numerous issues of analysis and design of modern electrical power networks. To solve them, the authors propose an original approach of modelling and analysis based on non-integer order systems. This approach can be applied to global power networks or to one of their components (e.g. electrical machines, fuel cell, loads). More specifically, the first aim of this PhD concerns the application of fractal theory to the dynamic modelling of electrical systems in order to obtain knowledge models which are more accurate and of reduced order. Then, this report highlights the links between fractal geometry of electrical systems, frequency performance and non-integer order modelling. The second objective is the application of non-integer order models to stability studies of electrical systems.

MOTS-CLES

Modélisation fractale, systèmes d'ordre non entier, analyse de stabilité, réseaux électriques

KEYWORDS

Fractal modelling, non-integer order systems, stability analysis, electrical networks