

Modèles stochastiques et méthodes numériques pour la fiabilité

Soutenance en vue de l'Habilitation à Diriger des Recherches

Sophie Mercier

Laboratoire d'Analyse et de Mathématiques Appliquées



21 Novembre 2008

Introduction

Le contexte

Fiabilité : étude du fonctionnement d'un *systeme*.

Systeme : n'importe quel appareil susceptible d'être en *marche* ou en *panne* à un instant donné.

Deux approches possibles :

- statique,
- *dynamique* : étude de l'évolution aléatoire d'un système modélisé par un processus stochastique.
 - ▶ aspect statistique : vise à ajuster un modèle stochastique à des données,
 - ▶ aspect **probabiliste** : étudie les propriétés d'un modèle stochastique donné.

Introduction

Mon travail

- Modèles stochastiques classiques

- ▶ Processus markoviens, semi-markoviens, de renouvellement (parties ① et ②),
- ▶ Processus markoviens déterministes par morceaux (partie ③ : fiabilité dynamique),

- Autre modèle stochastique

- ▶ Processus Gamma-Lévy bivariés (partie ④).

- Etudes

- ▶ Politiques de maintenance (partie ①),
- ▶ Calcul numérique de quantités fiabilistes (parties ②, ③ et ④),
- ▶ Sensibilité aux paramètres (partie ③ : fiabilité dynamique).

Plan de l'exposé

- 1 Politiques de maintenance
- 2 Calculs numériques par encadrement
- 3 Fiabilité dynamique
- 4 Processus Gamma-Lévy bivariés
- 5 Travaux en cours, Perspectives

Plan de l'exposé

- 1 Politiques de maintenance**
 - Travaux
 - Composants obsolètes
- 2 Calculs numériques par encadrement
- 3 Fiabilité dynamique
- 4 Processus Gamma-Lévy bivariés
- 5 Travaux en cours, Perspectives

Travaux

Processus markoviens et semi-markoviens

- P1** Sophie Bloch-Mercier (2000), Stationary availability of a semi-Markov system with random maintenance, *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, 16(3), pp. 219-234.
- P2** Sophie Bloch-Mercier (2001), Monotone Markov processes with respect to the reversed hazard rate ordering: an application to reliability, *Journal of Applied Probability*, 38(1), pp. 195-208.
- P3** Sophie Bloch-Mercier (2001), Optimal restarting distribution after repair for a Markov deteriorating system, *Reliability Engineering and System Safety*, 74(2), pp. 181-191.
- P4** Sophie Bloch-Mercier (2002), A preventive maintenance policy with sequential checking procedure for a Markov deteriorating system, *European Journal of Operational Research*, 147(3), pp. 548-576.
- P5** Sophie Mercier, **Michel Roussignol** (2003), Asymptotic failure rate of a Markov deteriorating system with preventive maintenance, *Journal of Applied Probability*, 40(1), pp. 1-19.

Travaux

Composants obsolètes

Cas de taux de panne *constants* :

- P6** Sophie Mercier, **Pierre-Etienne Labeau** (2004), Optimal replacement policy for a series system with obsolescence, *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, **20**(1), pp. 73-91, available online 10 Feb. 2004.

Cas de taux de panne *non constants* :

- P14** Sophie Mercier (2008) Optimal replacement policy for obsolete components with general failure rates, *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, **24**(3), pp. 221-235, available online 8 Jan. 2008.

Plan de l'exposé



- 1 Politiques de maintenance**
 - Travaux
 - Composants obsolètes
- 2 Calculs numériques par encadrement
- 3 Fiabilité dynamique
- 4 Processus Gamma-Lévy bivariés
- 5 Travaux en cours, Perspectives

Le problème

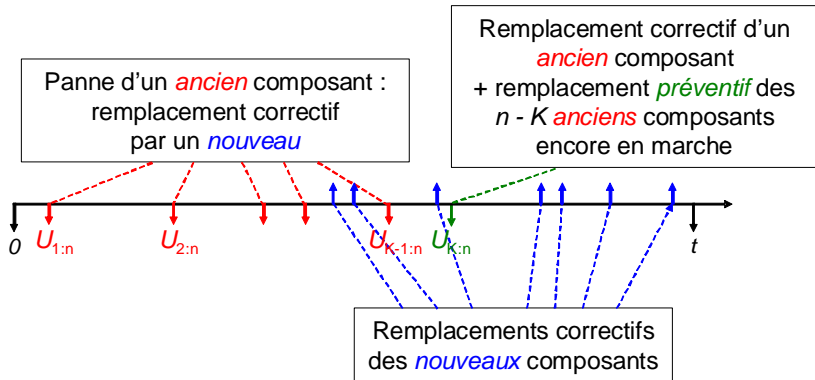
- n composants identiques et indépendants, instantanément *renouvelés* à chaque panne.
 - A $t = 0$, apparition de composants d'un *nouveau* type sur le marché :
 - ▶ même fonctionnalité que les *anciens* composants, peuvent les remplacer sans problème de compatibilité,
 - ▶ plus performants : meilleur taux de production, consommation inférieure, durées de vie plus longues.
- ➡ Les *anciens* composants deviennent *obsolètes*.

Le problème : faut-il remplacer les anciens composants par des nouveaux immédiatement à $t = 0$ (stratégie purement *préventive*) ou les remplacer au fur et à mesure qu'ils tombent en panne (stratégie purement *corrective*) ? D'autres stratégies peuvent-elles être meilleures ?

Hypothèses - Notations

- Tous les composants sont *indépendants*.
- Après $t = 0$, tous les composants en panne (*anciens* ou *nouveaux*) sont instantanément remplacés par des *nouveaux*  pour un composant fixé : processus de *renouvellement*.
On note ρ_V la fonction de renouvellement associée.
- A $t = 0$, la durée de *survie* du i -ème *ancien* composant est une v.a.r. à densité U_i  les instants de panne successifs des *anciens* composants sont les *statistiques d'ordre* de (U_1, \dots, U_n) .
On les note $(U_{1:n}, \dots, U_{n:n})$ avec $U_{1:n} < U_{2:n} \dots < U_{n:n}$ p.s..

Stratégie K



Purement *préventive* : $K = 0$, purement *corrective* $K = n$.

Coûts

Critère : coût moyen sur $[0, t]$ noté $C_K(t)$.

- Coûts de *remplacements* :
 - ▶ de déplacement de l'équipe de maintenance = r (dépendance économique entre les coûts),
 - ▶ coût de remplacement préventif = c_p ,
 - ▶ coût de remplacement correctif = c_f , avec $c_f \geq c_p$.
- Coût *constant* par unité de temps (consommation énergétique, bénéfice lié à la production) :
 - ▶ pour un ancien composant : $\eta + \nu$ avec $\nu \geq 0$,
 - ▶ pour un nouveau composant : η .

Coût induit par la stratégie K

Cas de taux non constants

Proposition (P14)

Pour $t \geq 0$ et $1 \leq K \leq n$, on a :

$$\begin{aligned}
 & C_K(t) \\
 = & n\eta t + \sum_{i=1}^K \left[(r + c_f) (F_{U_{i:n}}(t) + \mathbb{E}(\rho_V((t - U_{i:n})^+))) + \nu \mathbb{E}(U_{i:n}^t) \right] \\
 & + (n - K) \left[c_p F_{U_{K:n}}(t) + (r + c_f) \mathbb{E}(\rho_V((t - U_{K:n})^+)) + \nu \mathbb{E}(U_{K:n}^t) \right]
 \end{aligned}$$

où

$$(t - U_{i:n})^+ = \max(t - U_{i:n}, 0) \text{ et } U_{i:n}^t = \min(U_{i:n}, t).$$

Coût induit par la stratégie K

Cas de taux constants

On note λ_o et λ_n les taux de panne respectifs des anciens et des nouveaux composants. On tient compte d'un taux d'*actualisation* des coûts noté i_r .

Proposition (P6)

Pour $t \geq 0$ et $1 \leq K \leq n$, on a :

$$\begin{aligned}
 C_K(t) &= n((r + c_f) \lambda_n + \eta) \frac{1 - (1 + i_r)^{-t}}{\ln(1 + i_r)} \\
 &\quad + c_p K \binom{n}{K} (n - K) R(t, n\alpha - K + 1, K) \\
 &\quad + \sum_{j=1}^K (c_p + b) j \binom{n}{j} R(t, n\alpha - j + 1, j)
 \end{aligned}$$

où $\alpha = \frac{n\lambda_o + \ln(1+i_r)}{n\lambda_o}$ et $R(t, v, w) = \lambda_o \int_0^t e^{-\lambda_o v u} (1 - e^{-\lambda_o u})^{w-1} du$.

Stratégie optimale

Cas de taux constants

Théorème (P6)

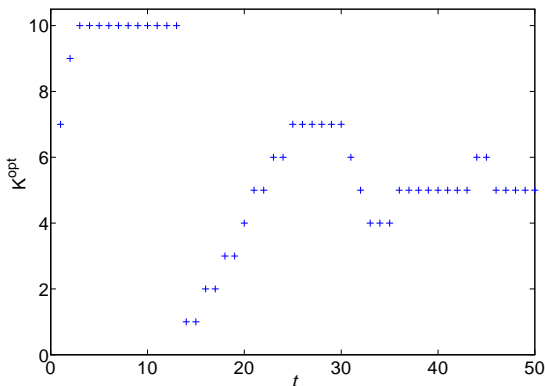
Dans le cas de taux *constants* (avec un taux d'actualisation i_r), la stratégie optimale ne peut être que purement préventive ($K^{opt} = 0$), presque purement préventive ($K^{opt} = 1$) ou purement corrective ($K^{opt} = n$).

Remarque

On a des conditions précises portant sur les paramètres et l'horizon de temps t permettant de spécifier K^{opt} .

Cas de taux non constants

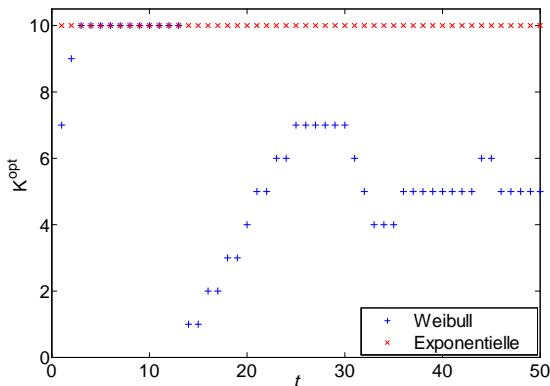
Un exemple



Données : $n = 10$, $\eta = 0$, $\nu = 0.06$, $c_p = 1$, $c_f = 1.1$, $r = 0$,
 $U_i \hookrightarrow W\left(\frac{1}{10^3}; 2.8\right)$, $V \hookrightarrow W\left(\frac{1}{2.25 \times 10^3}; 2.8\right)$ avec $\mathbb{E}(U_i) \simeq 10.5$ et $\mathbb{E}(V) \simeq 14$.

Cas de taux constants et non constants

Un exemple



Taux constants : *mêmes* données avec des lois exponentielles de *mêmes* moyennes ($\mathbb{E}(U_i) \simeq 10.5$ et $\mathbb{E}(V) \simeq 14$).

Cas de taux non constants

Résultats asymptotiques

Théorème (P14)

On pose $c = \frac{r+c_f-c_p}{\frac{r+c_f}{\mathbb{E}(V)}-\nu}$, $d = \frac{c_f-c_p}{\frac{r+c_f}{\mathbb{E}(V)}-\nu} \leq c$ et $D_K = (n-K) \mathbb{E}(U_{K+1:n} - U_{K:n})$

(K -ième *espace normalisé moyen* de $(U_{1:n}, \dots, U_{n:n})$).

Sous des conditions techniques (U_i i.i.d. IFR) :

- si $d \leq 0$, alors $K^{opt} = 0$,
- si $d > 0$:
 - ▶ si $c \leq D_{n-1}$, alors $K^{opt} = n$,
 - ▶ si $c > D_1$:
 - ▶ si $d > D_0$, alors $K^{opt} = 0$,
 - ▶ si $d \leq D_0$, alors $K^{opt} = 1$,
 - ▶ si $D_{K_0} < c \leq D_{K_0-1}$ où $2 \leq K_0 \leq n-1$, alors $K^{opt} = K_0$.

Plan de l'exposé

- 1 Politiques de maintenance
- 2 Calculs numériques par encadrement**
 - Travaux
 - Processus semi-markoviens
- 3 Fiabilité dynamique
- 4 Processus Gamma-Lévy bivariés
- 5 Travaux en cours, Perspectives

Travaux

- P9** Sophie Mercier (2007) Discrete random bounds for general random variables and applications to reliability, *European Journal of Operational Research*, Volume 177, Issue 1, Feb. 2007, pp. 378-405, available online 15 Feb. 2006.
- P11** Sophie Mercier (2008) Numerical bounds for semi-markovian quantities and application to reliability, *Methodology and Computing in Applied Probability*, Volume 10, Number 2, Jun. 2008, pp. 179-198, available online 3 Jul. 2007.
- P12** Sophie Mercier (2008) Bounds and approximations for continuous-time markovian transition probabilities and large systems, *European Journal of Operational Research*, Volume 185, Issue 1, Feb. 2008, pp. 216-234, available online 30 January 2007.

Plan de l'exposé

- 1 Politiques de maintenance
- 2 Calculs numériques par encadrement**
 - Travaux
 - Processus semi-markoviens
- 3 Fiabilité dynamique
- 4 Processus Gamma-Lévy bivariés
- 5 Travaux en cours, Perspectives

Processus semi-markoviens

Introduction

- On considère un système dont l'évolution est écrite par un processus *semi-markovien* (SMP).
- Les quantités fiabilistes associées : pas connues analytiquement
→ calcul numérique.
- Les quantités fiabilistes sont solutions d'équations de renouvellement markovien (ERM) → une solution : discrétiser ces ERM et résoudre ces ERM discrétisées.
- **Problème** : précision des résultats obtenus ?
- On propose ici *deux* discrétisations différentes de ces ERM, qui permettent d'obtenir un *encadrement* des quantités recherchées.

Notations

- $(X_t)_{t \geq 0}$: processus *semi-markovien* à valeurs dans E (fini ou dénombrable).
- $(q(i, j, dt))_{i, j \in E}$: noyau semi-markovien associé à $(X_t)_{t \geq 0}$,
- $(Y_n, T_n)_{n \in \mathbb{N}}$: processus de renouvellement markovien sous-jacent,
- $\rho(i, j, [0, t])$: fonction de renouvellement markovien avec

$$\rho(i, j, [0, t]) = \mathbb{E}_i \left(\sum_{n \geq 0} \mathbf{1}_{\{T_n \leq t\}} \mathbf{1}_{\{Y_n = j\}} \right),$$

- $\rho(i, j, dt)$: mesure de renouvellement markovien associée.

Equation de renouvellement markovien

- On note \mathbb{B}_+ l'ensemble des fonctions $f : E \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ uniformément bornées sur $E \times [0, T]$ pour tout $T > 0$.
- Pour $f \in \mathbb{B}_+$, on pose :

$$(dq * f)(i, t) = \sum_{j \in E} \int_{[0, t]} f(j, t - u) q(i, j, du)$$

$$(d\rho * f)(i, t) = \sum_{j \in E} \int_{[0, t]} f(j, t - s) \rho(i, j, ds)$$

- Une équation de renouvellement markovien (ERM) est de la forme :
 $f = g + dq * f$, où $g \in \mathbb{B}_+$.
- Pour toute $g \in \mathbb{B}_+$, l'ERM $f = g + dq * f$ admet une unique solution $f_g \in \mathbb{B}_+$ qui est $f_g = d\rho * g$.

Principe d'encadrement

Soit $\lfloor \dots \rfloor$ la fonction partie entière.

Pour toute v.a.r. U et tout réel $h > 0$, on pose :

$$U^h := h \left\lfloor \frac{U}{h} \right\rfloor \text{ et } U^{h+} := h \left\lfloor \frac{U}{h} \right\rfloor + h$$

On a alors :

$$U^h \leq U < U^{h+}$$

et

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} U^h = \lim_{h \rightarrow 0^+} U^{h+} = U.$$

Construction de deux SMP "encadrants"

On a :

$$(T_{n+1} - T_n)^h \leq T_{n+1} - T_n < (T_{n+1} - T_n)^{h+}.$$

On construit deux nouveaux SMP $(X_t^h)_{t \geq 0}$ et $(X_t^{h+})_{t \geq 0}$ tels que :

- les états successifs visités par $(X_t^h)_{t \geq 0}$ et par $(X_t^{h+})_{t \geq 0}$ sont les *mêmes* que ceux visités par $(X_t)_{t \geq 0}$, c'est-à-dire : *même* chaîne de Markov sous-jacente $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$,
- intervalle inter-arrivées pour $(X_t^h)_{t \geq 0}$: $(T_{n+1} - T_n)^h \implies$ le SMP $(X_t^h)_{t \geq 0}$ reste *moins* longtemps dans chaque état que $(X_t)_{t \geq 0}$,
- intervalle inter-arrivées pour $(X_t^{h+})_{t \geq 0}$: $(T_{n+1} - T_n)^{h+} \implies$ le SMP $(X_t^{h+})_{t \geq 0}$ reste *plus* longtemps dans chaque état que $(X_t)_{t \geq 0}$.

Calcul de f_g^h et f_g^{h+}

- Soient $q^h(i, j, dt)$ et $q^{h+}(i, j, dt)$ les noyaux de $(X_t^h)_{t \geq 0}$ et $(X_t^{h+})_{t \geq 0}$.
- Ces noyaux sont discrets et, pour $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} q^h(i, j, kh) &= q(i, j, [kh, (k+1)h]) \\ q^{h+}(i, j, kh) &= \mathbf{1}_{\{k \geq 1\}} q(i, j, [(k-1)h, kh]) \end{aligned}$$

➡ noyaux faciles à calculer à partir de $q(i, j, dt)$.

- Les ERM associées $f = g + dq^h * f$ et $f = g + dq^{h+} * f$ sont discrètes. On a par exemple :

$$f(\cdot, Nh) = g(\cdot, Nh) + \mathbf{1}_{\{N \geq 1\}} \sum_{k=0}^{N-1} q^h(\cdot, \cdot, (N-k-1)h) f(\cdot, kh)$$

pour tout $N \in \mathbb{N}$ ➡ ces ERM sont faciles à résoudre récursivement (solutions : f_g^h et f_g^{h+}).

Résultat principal

Théorème

Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ un SMP tel que $C = \sup_{\{(i,j):P(i,j) \neq 0\}} \mathbb{E}_i(\exp(-T_1) | Y_1 = j) < 1$.

Pour toute $g \in \mathbb{B}_+$:

- 1 si $t \mapsto g(i, t)$ est croissante pour tout $i \in E$, alors, pour tout $0 < h < -\ln C$, on a :

$$f_g^{h+} \leq f_g \leq f_g^h < +\infty,$$

- 2 si $g = g_1 - g_2$ où $t \mapsto g_j(i, t)$ est croissante pour $j = 1, 2$ et tout $i \in E$, alors, pour tout $0 < h < -\ln C$, on a :

$$f_{g_1}^{h+} - f_{g_2}^h \leq f_g = f_{g_1} - f_{g_2} \leq f_{g_1}^h - f_{g_2}^{h+} < +\infty,$$

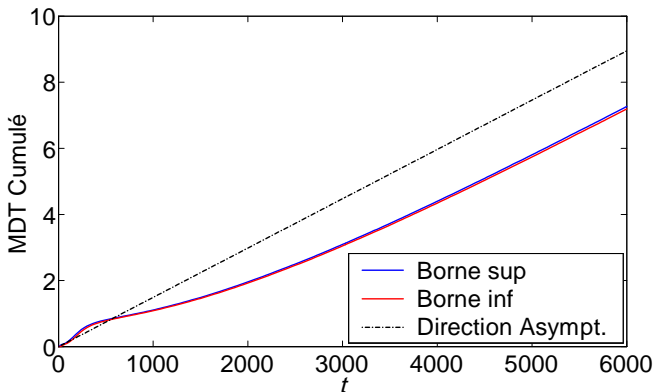
- 3 si g est uniformément continue sur $E \times [0, t]$, alors :

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} f_g^h(i, t) = \lim_{h \rightarrow 0^+} f_g^{h+}(i, t) = f_g(i, t).$$

Durée moyenne de panne (MDT) cumulée

$$C_D(i, t) = \mathbb{E}_i \left(\int_{[0, t]} \mathbf{1}_{\{X_u \in D\}} du \right) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} t \times \frac{\sum_{j \in D} \mathbb{E}_j(T_1) \nu(j)}{\sum_{k=1}^5 \nu(k) \mathbb{E}_k(T_1)},$$

où ν est la loi stationnaire de $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$.



Plan de l'exposé

- 1 Politiques de maintenance
- 2 Calculs numériques par encadrement
- 3 Fiabilité dynamique**
 - Le modèle
 - Travaux
 - Etudes de sensibilité
- 4 Processus Gamma-Lévy bivariés
- 5 Travaux en cours, Perspectives

Le modèle

En *fiabilité dynamique*, l'évolution d'un système est décrite par un processus markovien déterministe par morceaux (PDMP) noté

$(I_t, X_t)_{t \geq 0}$:

- $(I_t)_{t \geq 0}$ est à valeurs dans un espace discret E (composants en panne, valve ouverte ou fermée...),
- $(X_t)_{t \geq 0}$ est à valeurs dans \mathbb{R}^d (variables physiques : température, pression, durée passée dans l'état courant...).

$(I_t)_{t \geq 0}$ et $(X_t)_{t \geq 0}$ sont en *double* interaction.

$(I_t, X_t)_{t \geq 0}$ saute à des instants isolés.

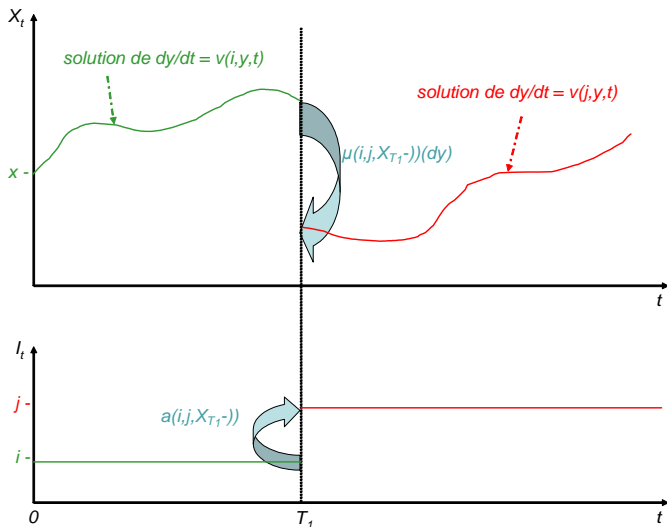
Evolution de $(I_t, X_t)_{t \geq 0}$

- Sauts de $(I_{t-}, X_{t-}) = (i, x)$ à $(I_t, X_t) = (j, y)$ à l'instant t :
 - ▶ pour I_t : le *taux de transition* $i \rightarrow j$ est $a(i, j, x)$,
 - ▶ pour X_t : la loi de X_t après le saut est $\mu(i, j, x)(dy)$.
- Entre deux sauts :
 - ▶ la composante I_t est *constante*,
 - ▶ sachant que $I_t = i$, la composante X_t suit une trajectoire *déterministe* solution de :

$$\frac{dy}{dt} = \mathbf{v}(i, y)$$

- Remarques :
 - ▶ modèle *moins* général que celui de M.H.A Davis,
 - ▶ le processus $(I_t, X_t)_{t \geq 0}$ est *markovien*.

Schéma



Quantités d'intérêt

Les quantités d'intérêt sont de la forme $\mathbb{E}_{\rho_0}(h(I_s, X_s))$ ou $\int_0^t \mathbb{E}_{\rho_0}(h(I_s, X_s)) ds$ avec :

$$\mathbb{E}_{\rho_0}(h(I_s, X_s)) = \sum_{i \in E} \int_V h(i, x) \rho_s(i, dx) = \rho_s h$$

où :

- h est une fonction mesurable bornée,
- $\rho_0(i, dx)$ est la loi initiale du processus $(I_t, X_t)_{t \geq 0}$,
- $\rho_s(i, dx)$ est la loi de (I_s, X_s) .

➡ intérêt de savoir calculer $\rho_s(i, dx)$.

Travaux

Equation CK, méthodes de volumes finis

- P7** **Christiane Coccozza-Thivent**, **Robert Eymard**, Sophie Mercier, **Michel Roussignol** (2006) Characterization of the marginal distributions of Markov processes used in dynamic reliability, *Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis*, Volume 2006, Article ID 92156, pp. 1-18.
- P8** **C. Coccozza-Thivent**, **R. Eymard**, S. Mercier (2006) A finite volume scheme for dynamic reliability models, *IMA Journal of Numerical Analysis*, 26(3), pp. 446-471.
- P10** **Robert Eymard**, Sophie Mercier (2008) Comparison of numerical methods for the assessment of production availability of a hybrid system, *Reliability Engineering & System Safety*, Volume 93, Issue 1, Jan. 2008, pp. 169-178, available online 29 Dec. 2006.
- P13** **Robert Eymard**, Sophie Mercier, **Alain Prignet** (2008) An implicit finite volume scheme for a scalar hyperbolic problem with measure data related to piecewise deterministic Markov processes, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 222(2), 15 Dec. 2008, pp. 293-323, available online 1 Nov. 2007.

Travaux

Thèse Margot Desgrouas, Etudes de sensibilité

- TMG** Margot Desgrouas (2007). *Comportement asymptotique de processus utilisés en fiabilité dynamique*. Thèse de doctorat, soutenue le 30 janvier 2007 à l'Université de Marne-la-Vallée. Co-directrices de Thèse : Christiane Coccozza-Thivent & Sophie Mercier.
- P15** Robert Eymard, Sophie Mercier, Michel Roussinol, Importance and sensitivity analysis in dynamic reliability, article *en révision* pour *Methodology and Computing in Applied Probability*.
- CL1** Sophie Mercier, Michel Roussinol (2008) Sensitivity Estimates in Dynamic Reliability, in *Advances in Mathematical Modeling for Reliability*, Editeurs : T. Bedford, J. Quigley, L. Walls, B. Alkali, A. Daneshkhah and G. Hardman, IOS Press, Amsterdam (Pays-Bas), pp. 208-216 (chapitre de livre).

Plan de l'exposé

- 1 Politiques de maintenance
- 2 Calculs numériques par encadrement
- 3 Fiabilité dynamique**
 - Le modèle
 - Travaux
 - Etudes de sensibilité
- 4 Processus Gamma-Lévy bivariés
- 5 Travaux en cours, Perspectives

Le problème

- L'objet d'étude :

$$R(t) = \mathbb{E}_{\rho_0} \left(\int_0^t h(I_s, X_s) ds \right) = \int_0^t \rho_s h ds$$

- Les données $a(i, j, x)$, $\mathbf{v}(i, x)$, $\mu_{(i,j,x)}(dy)$ et $h(i, x)$ dépendent d'un paramètre $p \in \mathbb{R}$.
- **Problème** : on veut donner un sens et calculer

$$\frac{\partial R^{(p)}(t)}{\partial p} \text{ et } \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \frac{\partial R^{(p)}(t)}{\partial p}$$

qui sont des indicateurs de *sensibilité*.

(On rajoute (p) pour insister sur la dépendance en p).

Un outil : le générateur infinitésimal

Sous des hypothèses techniques, $(I_t, X_t, t)_{t \geq 0}$ est un processus *markovien* dont le *générateur infinitésimal* $H^{(p)}$ est donné par :

$$H^{(p)}\varphi(i, x, s) = \sum_j a^{(p)}(i, j, x) \int (\varphi(j, y, s) - \varphi(i, x, s)) \mu_{(i,j,x)}^{(p)}(dy) \\ + \frac{\partial \varphi}{\partial s}(i, x, s) + \mathbf{v}^{(p)}(i, x) \cdot \nabla \varphi(i, x, s)$$

pour $\varphi \in \mathcal{D}_H$, tout $(i, x, s) \in E \times V \times \mathbb{R}_+$.

On pose :

$$\frac{\partial H^{(p)}}{\partial p} \varphi(i, x, s) := \frac{\partial}{\partial p} \left(H^{(p)} \varphi(i, x, s) \right)$$

pour toute $\varphi \in \mathcal{D}_H$, tout $(i, x, s) \in E \times V \times \mathbb{R}_+$.

Résultats transitoires

Théorème

Sous des hypothèses techniques, $R^{(p)}(t)$ est dérivable par rapport à p et on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial R^{(p)}}{\partial p}(t) &= \frac{\partial}{\partial p} \left(\int_0^t \rho_s^{(p)} h^{(p)} ds \right) \\ &= \int_0^t \rho_s^{(p)} \frac{\partial h^{(p)}}{\partial p} ds - \int_0^t \rho_s^{(p)} \frac{\partial H^{(p)}}{\partial p} \varphi_t^{(p)}(\cdot, \cdot, s) ds\end{aligned}$$

où $\varphi_t^{(p)} \in \mathcal{D}_H$ est l'unique fonction (la fonction d'importance) telle que :

- $H^{(p)} \varphi_t^{(p)}(i, x, s) = h^{(p)}(i, x)$ pour tout $s \in [0, t]$, tout $(i, x) \in E \times V$.
- $\varphi_t^{(p)}(i, x, t) = 0$ pour tout $(i, x) \in E \times V$.

Intérêt des formules obtenues

Lorsque $R^{(\mathcal{P})}(t)$ dépend d'une famille de paramètres \mathcal{P} , le calcul de tous les $\frac{\partial R^{(\mathcal{P})}}{\partial p}(t)$ pour $p \in \mathcal{P}$ nécessite :

- un seul calcul de $\rho_s^{(\mathcal{P})}(i, dx)$ et de $\varphi_t^{(\mathcal{P})}(i, x, s)$,
- des sommations pour chaque $p \in \mathcal{P}$,

c'est-à-dire *deux* calculs réels.

A comparer avec la méthode usuelle de *différences finies*, qui nécessite :

- une première évaluation de $\rho_s^{(\mathcal{P})}(i, dx)$,
- plus un autre calcul de $\rho_s^{(\mathcal{P}_p, \varepsilon)}(i, dx)$ pour chaque valeur de $p \in \mathcal{P}$,

soit $\text{card}(\mathcal{P}) + 1$ calcul de lois marginales.

Résultats asymptotiques

Théorème

Si le processus $(I_t, X_t)_{t \geq 0}$ est **Harris-récurrent positif** (...) et $\pi^{(\rho)}$ est son unique loi stationnaire, on a :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \frac{\partial R^{(\rho)}(t)}{\partial \rho} = \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\pi^{(\rho)} h^{(\rho)} \right) = \pi^{(\rho)} \frac{\partial h^{(\rho)}}{\partial \rho} + \pi^{(\rho)} \frac{\partial H^{(\rho)}}{\partial \rho} U h^{(\rho)}$$

où $U h^{(\rho)}$ est l'unique fonction (la fonction **potentiel**) telle que

$$H^{(\rho)} U h^{(\rho)}(i, x) = \pi^{(\rho)} h^{(\rho)} - h^{(\rho)}(i, x)$$

pour tout $(i, x) \in E \times V$, avec $\pi^{(\rho)} U h^{(\rho)} = 0$.

Comme pour le cas transitoire : un seul calcul de $\pi^{(\rho)}(i, dx)$ et $U h^{(\rho)}(i, x)$.

Calculs numériques

- Schéma implicite pour $\rho_s(i, dx)$ de [P13] de la forme :

$$A \bar{\rho}^{(n+1)} + \frac{\bar{\rho}^{(n+1)} - \bar{\rho}^{(n)}}{\delta t} = 0$$

où δt représente le pas de temps.

- Schéma implicite pour $\varphi_t(i, x, s)$ de la forme :

$$A^t \bar{\varphi}^{(n)} + \frac{\bar{\varphi}^{(n)} - \bar{\varphi}^{(n+1)}}{\delta t} = \bar{h} \text{ pour } n \leq N - 1$$

avec $\bar{\varphi}^{(N)} = 0$.

- Schéma *duaux*  facilite l'implémentation.
(Idem pour le cas asymptotique).

Plan de l'exposé

- 1 Politiques de maintenance
- 2 Calculs numériques par encadrement
- 3 Fiabilité dynamique
- 4 Processus Gamma-Lévy bivariés**
 - Travail soumis
- 5 Travaux en cours, Perspectives

Introduction

- S1** Sophie Mercier, Michel Roussignol, On bivariate Gamma-Lévy Processes, article *soumis* à *Stochastic Processes and their Applications* en novembre 2008.
- **But** : proposer un modèle de dégradation croissante *bivarié*.
 - Par exemple : longueur de *deux* fissures proches.
 - Modèle de dégradation *univarié* usuel : processus **Gamma**
→ processus marginaux de notre modèle = processus **Gamma**.
 - On souhaiterait avoir :
 - ▶ une dépendance *positive* entre les processus marginaux,
 - ▶ une propriété de *vieillessement* pour les temps d'atteinte d'un seuil.

Processus de Lévy sur \mathbb{R}_+^2

Proposition

Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ un *processus de Lévy* sur \mathbb{R}_+^2 , avec $X_t = (X_t^{(1)}, X_t^{(2)})$.

- On a :

$$[X_{t_2}^{(2)} | X_{t_1}^{(1)} > x_1] \succ_{sto} X_{t_2}^{(2)} \text{ pour tout } x_1 \geq 0 \text{ et } 0 < t_1 \leq t_2$$

(conséquence de [Bäuerle - Blatter - Müller 2007]),

- Si \mathcal{U} est un ensemble clos vers le haut (closed upper set), le temps d'atteinte de \mathcal{U} est *NBU* (New Better Than Used) :

$$[T_{\mathcal{U}} - t | T_{\mathcal{U}} > t] \prec_{sto} T_{\mathcal{U}} \text{ pour tout } t \geq 0.$$

➡ bon candidat pour un modèle de *dégradation bivarié*.

Processus Gamma-Lévy

Définition

Un processus de Lévy bivarié dont les processus marginaux sont des processus Gamma de paramètres (a_1, b_1) et (a_2, b_2) est appelé processus Gamma-Lévy de paramètres marginaux (a_1, b_1, a_2, b_2) .

Proposition

Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ un processus Gamma-Lévy bivarié de paramètres marginaux (a_1, b_1, a_2, b_2) et soit E_1 la fonction exponentielle intégrale :

$$E_1(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-y}}{y} dy \text{ pour } x > 0.$$

On pose $\alpha = \frac{a_1}{a_2}$. Alors :

$$0 \leq \rho_{X_t} = \rho_X \leq \rho_{\max}(\alpha) = \iint_{\mathbb{R}_+^2} \min \left(\sqrt{\alpha} E_1(u_1), \frac{1}{\sqrt{\alpha}} E_1(u_2) \right) du_1 du_2$$

Premier modèle (Trivariate Reduction)

- $(Y_t^{(j)})_{t \geq 0}$: processus Gamma indépendants de paramètres $(\alpha_j, 1)$.
- On pose :

$$\begin{cases} X_t^{(1)} = (Y_t^{(1)} + Y_t^{(3)}) / b_1 \\ X_t^{(2)} = (Y_t^{(2)} + Y_t^{(3)}) / b_2 \end{cases} \quad \text{où } b_1 > 0 \text{ et } b_2 > 0.$$

- Le processus $(X_t)_{t \geq 0} = (X_t^{(1)}, X_t^{(2)})_{t \geq 0}$ est alors un processus Gamma-Lévy de paramètres marginaux (a_1, b_1, a_2, b_2) , avec

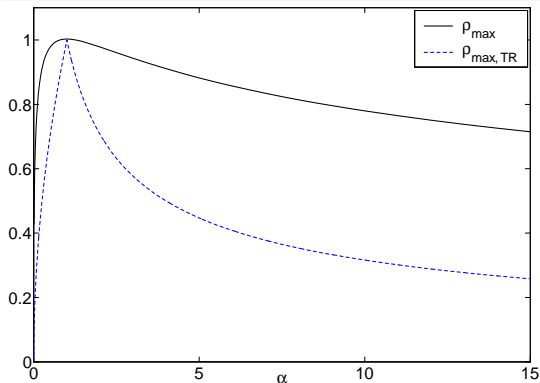
$$\begin{cases} a_1 = \alpha_1 + \alpha_3, \\ a_2 = \alpha_2 + \alpha_3. \end{cases}$$

- On l'appelle processus *TR Gamma-Lévy* (TRGL).

Contrainte sur ρ_X pour un processus TRGL

Proposition

Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ un processus TRGL de paramètres marginaux (a_1, b_1, a_2, b_2) et $\alpha = \frac{a_1}{a_2}$. On a alors : $\rho_X \leq \rho_{\max, TR}(\alpha) = \min\left(\sqrt{\alpha}, \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right) < \rho_{\max}(\alpha)$ pour $\alpha \neq 1$.



➔ Un processus TR Gamma-Lévy ne permet donc pas de modéliser tout type de dépendance.

Deuxième modèle

Notations

Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ un processus **GL** bivarié de paramètres marginaux (a_1, b_1, a_2, b_2) .

On note :

- μ_X : mesure de Lévy de $(X_t)_{t \geq 0}$,
- μ_i : mesure de Lévy de $(X_t^{(i)})_{t \geq 0}$, avec $\mu_i(dx_i) = a_i \frac{e^{-b_i x_i}}{x_i} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x_i) dx_i$,
- μ_{\perp} : mesure de Lévy d'un processus **GL** à composantes **indépendantes** :

$$\mu_{\perp}(dx_1, dx_2) = \mu_1(dx_1) \times \delta_0(dx_2) + \delta_0(dx_1) \times \mu_2(dx_2),$$

- U_i : fonction intégrale de queue de $(X_t^{(i)})_{t \geq 0}$, avec

$$U_i(x_i) = \int_{[x_i, +\infty[} \mu_i(dy) \text{ pour } x_i \in \mathbb{R}_+^*, U_i(0) = +\infty \text{ et } U_i(+\infty) = 0.$$

- μ_{\parallel} : mesure de Lévy d'un processus **GL** à composantes **complètement dépendantes** :

$$\mu_{\parallel}(dx_1, dx_2) = \mu_1(dx_1) \times \delta_{U_2^{-1}(U_1(x_1))}(dx_2) = \delta_{U_1^{-1}(U_2(x_2))}(dx_1) \times \mu_2(dx_2).$$

Deuxième modèle (TDIGL)

Définition

Soient $a_1, b_1, a_2, b_2 > 0$ et $\tau \in [0, 1]$. Un processus de Lévy est appelé processus "**Tossed Dependent-Independent**" Gamma-Lévy (**TDIGL**) de paramètres $(a_1, b_1, a_2, b_2, \tau)$ si sa mesure de Lévy est donnée par :

$$\mu(dx_1, dx_2) = (1 - \tau) \mu_{\perp}(dx_1, dx_2) + \tau \mu_{\parallel}(dx_1, dx_2).$$

Proposition

Pour un processus **TDIGL** de paramètres $(a_1, b_1, a_2, b_2, \tau)$, on a :

$$\rho_X = \tau \times \rho_{\max}(\alpha) \text{ où } \alpha = \frac{a_1}{a_2}.$$

➡ permet de modéliser **tous** les ρ_X possibles.

Calculs numériques : simulations de Monte-Carlo [Cont-Tankov 2004] ou méthode déterministe.

Calculs numériques déterministes

- Calcul de $F_t(\mathbf{x}) = \mathbb{P}_0 \left(X_t^{(1)} \leq x_1, X_t^{(2)} \leq x_2 \right)$?
- Equation de Chapman-Kolmogorov pour un processus de Lévy :

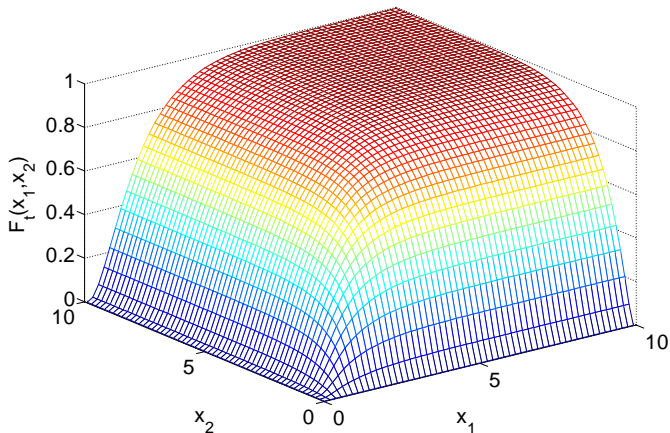
$$P_t f(\mathbf{0}) = f(\mathbf{0}) + \int_0^t \iint_{\mathbb{R}_+^2 \setminus \{0,0\}} (P_s f(\mathbf{y}) - P_s f(\mathbf{0})) \mu_X(d\mathbf{y}) ds$$

- En prenant $f(\mathbf{y}) = 1_{\{\mathbf{y} \leq \mathbf{x}\}}$ dans CK, on obtient :

$$F_t(\mathbf{x}) = 1 + \int_0^t \iint_{\mathbb{R}_+^2 \setminus \{0,0\}} (F_s(\mathbf{x} - \mathbf{y}) - F_s(\mathbf{x})) \mu_X(d\mathbf{y}) ds.$$

- On remplace μ_X par la mesure de Lévy d'un processus *TDIGL* et on discrétise l'équation.

Calcul de $F_t(x_1, x_2)$ pour un TDIGL, un exemple



Données : $a_1 = 1.2$, $a_2 = 1.7$, $b_1 = b_2 = 1$, $\tau = 0.5$ ($\rho_X \simeq 0.4968$).

Troisième modèle

Notations

Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ un processus *GL* de paramètres marginaux (a_1, b_1, a_2, b_2) . On note :

- U_X : fonction *intégrale de queue* de $(X_t)_{t \geq 0}$, avec :

$$U_X(\mathbf{x}) = \int_{[x_1, +\infty[} \int_{[x_2, +\infty[} \mu_X(d\mathbf{y}) \text{ pour tout } \mathbf{x} = (x_1, x_2) \neq (0, 0),$$

$$U_X(x_1, \infty) = U_X(\infty, x_2) = 0 \text{ et } U_X(0, 0) = +\infty.$$

- F : *copule de Lévy* de $(X_t)_{t \geq 0}$ [Cont-Tankov 2004], avec

$$U_X(x_1, x_2) = F(U_1(x_1), U_2(x_2)) \text{ pour tout } (x_1, x_2) \in [0, \infty]^2,$$

où U_i est la fonction intégrale de queue de $(X_t^{(i)})_{t \geq 0}$.


Troisième modèle (CGL)

Définition

Soient $a_1, b_1, a_2, b_2, \theta > 0$. Un processus est appelé processus **Clayton-Gamma-Lévy (CGL)** de paramètres $(a_1, b_1, a_2, b_2, \theta)$ si c'est un processus **GL** de paramètres marginaux (a_1, b_1, a_2, b_2) et de copule de Lévy F_θ , avec

$$F_\theta(u_1, u_2) = \left(u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta}\right)^{-\frac{1}{\theta}} \text{ pour tout } (u_1, u_2) \in [0, +\infty]^2.$$

(copule de Clayton-Lévy de paramètre θ).

Remarque : on sait que $F_\theta \rightarrow F_{\parallel}$ quand $\theta \rightarrow +\infty$ et que $F_\theta \rightarrow F_{\perp}$ quand $\theta \rightarrow 0^+$ [Cont-Tankov 2004]  permet de modéliser **tous** les ρ_X possibles.

Calculs numériques :

- simulations de Monte-Carlo (algorithme de [Cont-Tankov 2004] modifié),
- discrétisation de l'équation de Chapman-Kolmogorov.

Processus Gamma-Lévy

Conclusion

On a proposé trois modèles de *dégradation bivariable* :

- modèle **TRGL** (Trivariate Reduction GL),
 - ▶ points forts : simplicité et facilité d'interprétation,
 - ▶ point faible : dépendance réduite,
- modèle **TDIGL** (Tossed Dependent-Independent GL),
 - ▶ point fort : permet de modéliser n'importe quel ρ_X ,
- modèle **CGL** (Clayton GL),
 - ▶ point fort : permet de modéliser n'importe quel ρ_X .

➡ Problème : comment choisir entre ces différents modèles ?

Plan de l'exposé

- 1 Politiques de maintenance
- 2 Calculs numériques par encadrement
- 3 Fiabilité dynamique
- 4 Processus Gamma-Lévy bivariés
- 5 **Travaux en cours, Perspectives**
 - Processus Gamma-Lévy bivariés
 - Politiques de maintenance
 - Processus de Markov déterministes par morceaux

Processus Gamma-Lévy bivariés

Application industrielle

- Travail en collaboration avec *Carolina Meier-Hirmer* (SNCF) et *Michel Roussignol*.
- Données industrielles fournies par C. M.-H., concernant la géométrie des voies ferroviaires en France.
- On dispose de différents indicateurs, qui sont relevés régulièrement tous les km : NL (Nivellement Longitudinal) et NT (Nivellement Transversal).
- C. M.-H. a déjà étudié dans sa thèse l'indicateur NL sur une portion de la LGV Paris-Lyon.
- Elle a en particulier montré que l'on pouvait modéliser son évolution par un processus *Gamma* (univarié) et en a estimé les paramètres.


➡ Etude du couple (NL, NT).

Plan de l'exposé

- 1 Politiques de maintenance
- 2 Calculs numériques par encadrement
- 3 Fiabilité dynamique
- 4 Processus Gamma-Lévy bivariés
- 5 **Travaux en cours, Perspectives**
 - Processus Gamma-Lévy bivariés
 - Politiques de maintenance
 - Processus de Markov déterministes par morceaux


Politiques de maintenance en cas d'obsolescence

Travail en cours, Perspectives de travail

1. Les politiques de maintenance préventive classiques n'envisagent pas de *changement de technologie*  reprendre des modèles classiques en envisageant des innovations technologiques.

Travail en cours : politique de maintenance selon l'*âge*, avec une seule innovation technologique.

2. Les travaux *économiques* consacrés à l'innovation technologique considèrent fréquemment la dégradation d'un système comme *déterministe*, avec un coût de maintenance *constant* par unité de temps.

Dans la partie ①, on a vu que le mode de dégradation envisagé influe fortement sur la politique de maintenance optimale  reprendre des travaux issus de la littérature économique avec un mode de dégradation *aléatoire*.

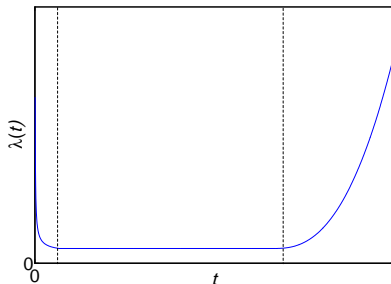
Maintenance en cas de courbes en baignoire

Travail en cours, Perspectives de travail

De nombreuses études de politiques de maintenance n'envisagent que le cas où les composants sont **IFR**.

Dans la réalité,
il semble cependant que les
taux de panne ont fréquemment
une courbe en "*baignoire*"

➡ proposer et optimiser
des politiques de maintenance
pour ce type de taux.



Premier travail :

- 1ère période : "continuous monitoring", rép. minimales en cas de panne,
- 2ème période : état du système connu par des inspections périodiques ; en cas de panne : coût d'indisponibilité unitaire et système remis à neuf,
- 3ème période : "continuous monitoring" ; système remis à neuf.

Plan de l'exposé

- 1 Politiques de maintenance
- 2 Calculs numériques par encadrement
- 3 Fiabilité dynamique
- 4 Processus Gamma-Lévy bivariés
- 5 **Travaux en cours, Perspectives**
 - Processus Gamma-Lévy bivariés
 - Politiques de maintenance
 - Processus de Markov déterministes par morceaux


Utilisation de PDMP en milieu industriel

Travail en cours, Perspectives de travail

- Co-encadrement du stage et de la thèse de **William Lair** (Master Rech. Math. & Appl. de l'UPEMLV) en convention **CIFRE** avec la **SNCF**, avec :
 - ▶ **Rachid Ziani** (SNCF),
 - ▶ Sophie Mercier, **Michel Roussignol** (UPEMLV).
- **Sujet de thèse** : étude de systèmes appartenant à l'infrastructure ferroviaire, dans le but d'améliorer les politiques de maintenance préventive existantes.
- Typiquement : petits systèmes formés de composants **vieillissants**, pouvant présenter des dépendances fonctionnelles et/ou stochastiques
➡ **PDMP** semblent bien adaptés.
- Aspects :
 - ▶ **statistique** : estimation des durées de vie des composants,
 - ▶ **probabiliste** : modélisation des systèmes (maintenus) à l'aide de PDMP,
 - ▶ **numérique** : évaluation quantitative des critères d'optimisation de maintenance par méthodes de volumes finis et/ou par simulations de Monte-Carlo.

Encadrement de PDMP

Perspectives de travail

- Les techniques d'*encadrement* présentées dans un cadre *semi-markovien* dans la partie ② reposent fondamentalement sur les **ERM** vérifiées par les quantités fiabilistes.
- Pour un **PDMP**, on a aussi une structure de processus de **RM** sous-jacente et on peut aussi écrire des **ERM** pour les quantités d'intérêt  évaluation numérique par encadrement pour un **PDMP** (dans des cas simples...).

Plan de l'exposé

1 Politiques de maintenance

- Travaux
- Composants obsolètes

2 Calculs numériques par encadrement

- Travaux
- Processus semi-markoviens

3 Fiabilité dynamique

- Le modèle
- Travaux
- Etudes de sensibilité

4 Processus Gamma-Lévy bivariés

- Travail soumis

5 Travaux en cours, Perspectives

- Processus Gamma-Lévy bivariés
- Politiques de maintenance
- Processus de Markov déterministes par morceaux