

Modélisation du comportement mécanique des liaisons soudées hétérogènes Ta/TA6V : Comportement et critère de rupture

Thomas Paris

▶ **To cite this version:**

Thomas Paris. Modélisation du comportement mécanique des liaisons soudées hétérogènes Ta/TA6V : Comportement et critère de rupture. Mécanique [physics.med-ph]. Université de Technologie de Troyes, 2008. Français. NNT : . tel-00368316

HAL Id: tel-00368316

https://theses.hal.science/tel-00368316

Submitted on 16 Mar 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE TECHNOLOGIE
DE TROYES

Ecole doctorale

THESE

en vue de l'obtention du
Doctorat de l'Université de Technologie de Troyes
Spécialité Systèmes Mécaniques et Matériaux

Thomas PARIS

soutenance prévue le 8 décembre 2008

Modélisation du comportement mécanique des liaisons soudées hétérogènes Ta/TA6V: Comportement et critère de rupture.

– Mémoire Provisoire –

Jury

M. P. PILVIN	Rapporteur	Professeur, Université de Bretagne-Sud
Mme E. AEBY-GAUTIER	Rapporteur	Professeur, École des Mines de Nancy
M. J.-L. CHABOCHE	Examinateur	Directeur de Recherche, ONERA
Mme M. GASPERINI	Présidente	Professeur, Université Paris-Nord
M. D. DELAPLANCHE	Examinateur	Ingénieur, CEA Valduc
M. R. BESNARD	Examinateur	Ingénieur, CEA Valduc
M. K. SAANOUNI	Directeur de thèse	Professeur, Université de Technologie de Troyes
M. M. FRANCOIS	Codirecteur de thèse	Professeur, Université de Technologie de Troyes

Université de Technologie de Troyes,
12 rue Marie Curie, 10010 Troyes Cedex

Remerciements

Á travers ces quelques lignes, je tiens à remercier les différents instigateurs de cette étude, fruit d'une collaboration de longue date entre le Commissariat à l'Énergie Atomique et l'Université de Technologie de Troyes.

En premier lieu, mes remerciements se tournent vers mes directeurs de thèse que sont Khémaïs Saanouni et Manuel François pour leur soutien, leurs conseils et l'ensemble des moyens mis à ma disposition pour mener à bien ce travail. Je remercie plus précisément Manuel d'avoir bien voulu investir cette étude alors qu'une année s'était déjà écoulée et, en tant que directeur du laboratoire, de m'avoir accueilli au sein du LASMIS. J'exprime toute ma gratitude à Khémaïs qui, pour moi, est exemplaire dans sa persévérance et sa passion de la recherche. Il a su m'appuyer au moment où j'en avais le plus besoin et cultiver cet équilibre fragile entre autonomie du doctorant et implication du directeur de thèse, rendant cet "apprentissage" de la recherche encore plus enrichissant.

Un grand merci aux différentes instances du CEA de Valduc et principalement aux personnes composant le LCSI et le LCM. Elles sont nombreuses et ont pu suivre de près ou de loin l'avancée de cette étude dont la richesse a fait mon intérêt. Je remercie, bien sûr, Damien Delaplanche, initiateur du sujet, pour sa pertinence dans les relations humaines et sa perspicacité scientifique afin de toujours recentrer ce travail au sein d'une problématique industrielle. Sa disponibilité et sa capacité au dialogue ont grandement accru l'efficacité de ce travail, merci DD.

Je remercie chacun des membres du jury d'avoir accepté de juger ce travail, et plus particulièrement Mme Élisabeth Aeby-Gautier et M. Philippe Pilvin pour avoir rapporté avec intérêt sur mes travaux dans un délai relativement restreint.

Merci également à mes collègues Flo (M. Cochelin), Laurent, Niko, Remi(x), Christophe (Cart'less) et les autres, qui ont rendu ce travail sympathique, convivial et avec qui j'ai pu échanger sur de nombreux sujets. Enfin, merci à Natacha pour sa relecture attentive et son soutien.

Á ma famille,
Á mes parents,
Á Natacha.

Notations

Notation [unité]	Signification
$a[a]$	scalaire [unité de a]
$\underline{\mathbf{a}}[\underline{\mathbf{a}}]$	vecteur (notation tensorielle) [unité de chacune des composantes de $\underline{\mathbf{a}}$]
$\{a\}\,[\{a\}]$	vecteur colonne (notation matricielle) [unité de chacune des composantes de $\{a\}$]
$\langle a\rangle[\langle a\rangle]$	vecteur ligne (notation matricielle) [unité de chacune des composantes de $\langle a\rangle$]
$\underset{\sim}{\mathbf{A}}[\underset{\sim}{\mathbf{A}}]$	tenseur d'ordre 2 (notation tensorielle) [unité de chacune des composantes de $\underset{\sim}{\mathbf{A}}$]
$[A]\,[[A]]$	tenseur d'ordre 2 (notation matricielle) [unité de chacune des composantes de $[A]$]
$\underset{\sim}{\underset{\sim}{\mathbf{A}}}[\underset{\sim}{\underset{\sim}{\mathbf{A}}}]$	tenseur d'ordre 4 [unité de chacune des composantes de $\underset{\sim}{\underset{\sim}{\mathbf{A}}}$]
$\underline{\mathbf{a}} \otimes \underline{\mathbf{b}}$	produit tensoriel $a_i b_j$
$\underset{\sim}{\mathbf{A}} : \underset{\sim}{\mathbf{B}}$	double contraction $A_{ij}B_{ij}$
$\tilde{\underset{\sim}{\mathbf{A}}}$	tenseur modifié par le mapping
$\underset{\sim}{\mathbf{A}}^{-e}$	inverse du tenseur $\underset{\sim}{\mathbf{A}}^{e}$
$\underset{\sim}{\mathbf{A}}^{\star}$	tenseur résultant d'une prédiction élastique
$\underset{\sim}{\mathbf{A}}_{,\underset{\sim}{\mathbf{B}}}$	dérivée partielle de $\underset{\sim}{\mathbf{A}}$ par rapport à $\underset{\sim}{\mathbf{B}}$

Table des matières

Remerciements **i**

Notations **iii**

Introduction **ix**

Partie A Caractérisation expérimentale **1**

I Caractérisation des matériaux de base **3**
I.1 Introduction . . . 5
I.2 Essais de traction à différentes vitesses . . . 6
I.2.1 tantale . . . 8
I.2.2 TA6V . . . 12
I.3 Essais de traction dans différentes directions pour le tantale . . . 14
I.4 Essais de traction avec charge-décharge . . . 16
I.4.1 Contraintes interne et effective . . . 16
I.4.1.1 tantale . . . 18
I.4.1.2 TA6V . . . 19
I.4.2 Evolution du module d'élasticité . . . 20
I.4.2.1 tantale . . . 20
I.4.2.2 TA6V . . . 23
I.5 Essais de relaxation . . . 27
I.5.1 tantale . . . 28
I.5.2 TA6V . . . 30
I.6 Essais de cisaillement cyclique . . . 32
I.6.1 Courbes de durcissement/adoucissement cyclique . . . 32
I.6.1.1 tantale . . . 33
I.6.1.2 TA6V . . . 35
I.6.2 Courbes de consolidation cyclique, méthode à une éprouvette par niveau 38
I.6.2.1 tantale . . . 38
I.6.2.2 TA6V . . . 40

II Caractérisation sur joint soudé **43**
II.1 Réalisation de liaisons soudées hétérogènes par soudage laser . . . 45
II.1.1 Soudage et paramétrie . . . 45
II.1.2 Nos matériaux face au soudage . . . 47
II.1.2.1 Le Ta . . . 47
II.1.2.2 Le TA6V . . . 47
II.2 Identification des phases au sein de la Z.F . . . 53

II.2.1 Identification de phase par Diffraction des rayons X 53
II.2.1.1 Introduction et conditions expérimentales 53
II.2.1.2 Diffractogramme des différents matériaux 54
II.2.2 M.E.T 57
II.3 Problématique expérimentale de caractérisation 59
II.4 Essais de flexion quatre points 63
II.4.1 Réponse des matériaux de base 63
II.4.2 Réponse de la liaison soudée 64
II.4.2.1 Etude de la paramétrie G2 64
II.4.2.2 Analyse de la déformation locale, paramétrie G2 69
II.4.2.3 Fractographie 83
II.4.3 Confrontation des différentes paramétries 86
II.4.3.1 Paramétrie G3 86
II.4.3.2 Paramétrie G4-5-6 95
II.5 Essais d'indentation 99
II.5.1 Essais de nanoindentation 99
II.5.1.1 Généralités 99
II.5.1.2 Réponse de la paramétrie G2 101
II.5.2 Oscillations de dureté et de module dans la Zone fondue 107
II.5.2.1 Etude comparative sur les liaisons soudées Ta/TA6V 107
II.5.2.2 Etude comparative sur des composés Ta-Ti 109
II.5.3 Confrontation des différentes paramétries 113
II.5.3.1 Paramétrie G3 113
II.5.3.2 Paramétries G4-5-6 116
II.6 Essais de traction longitudinale 120
II.6.1 Introduction 120
II.6.2 Réponse globale 121
II.6.3 Réponse locale 124
II.6.3.1 Lithographie 124
II.6.3.2 Algorithme de traitement et repérage 126
II.6.3.3 Estimation de l'erreur 130
II.6.3.4 Mesures de déformations locales in-situ 130

Partie B Modélisation du comportement 143

III Formulation du modèle 145
III.1 Potentiel d'état et relations d'état 147
III.2 Analyse des dissipations et relations complémentaires 151
III.2.1 Plasticité indépendante du temps 151
III.2.2 Viscoplasticité 153
III.3 Écrouissage de nature isotrope 162
III.4 Synthèse des équations du modèle et application au cas de l'isotropie 167
III.5 Traitement de la contrainte plane 170
III.5.1 Généralités 170
III.5.2 Formulation spécifique du modèle (Simo et Taylor, 1986) 172
III.6 Généralisation aux transformations finies 180
III.6.1 Cinématique en grandes transformations 180
III.6.2 Décomposition multiplicative du gradient de la transformation 184
III.6.3 Indifférence matérielle et objectivité 186

III.7 Étude paramétrique du modèle . . . 187
III.7.1 Influence des paramètres sur la réponse en traction . . . 187
III.7.2 Influence de la vitesse de chargement sur la réponse en traction . . . 191
III.7.3 Validation du modèle anisotrope et comparaison à l'étude (Badreddine, 2006) . . . 191
III.8 Prise en compte d'un phénomène particulier : l'effet mémoire . . . 195

IV Aspects numériques 199
IV.1 Introduction . . . 201
IV.2 Discrétisation spatiale . . . 201
IV.2.1 Principe des puissances virtuelles . . . 201
IV.2.2 Méthodes de résolution . . . 204
IV.2.2.1 Méthode statique implicite . . . 205
IV.2.2.2 Méthode dynamique explicite . . . 206
IV.3 Discrétisation temporelle . . . 207
IV.3.1 Intégration explicite . . . 208
IV.3.2 Intégration implicite . . . 209
IV.4 Intégration locale du modèle 3D . . . 214
IV.4.1 Intégration des équations constitutives couplées . . . 214
IV.4.2 Réduction du système . . . 216
IV.5 Intégration locale du modèle en contraintes planes . . . 220
IV.5.1 Algorithme CP1 (Hammi, 2000), (Lestriez, 2003) . . . 220
IV.5.2 Algorithme CP2 (Aravas, 1987), (Doghri, 1995) . . . 222
IV.5.3 Algorithme CP3 (Simo et Taylor, 1986) . . . 228
IV.5.3.1 Intégration des équations constitutives couplées . . . 228
IV.5.3.2 Réduction du système . . . 229
IV.6 Calcul de la matrice tangente . . . 233
IV.7 Confrontation des différents algorithmes . . . 239
IV.7.1 Tests académiques . . . 240
IV.7.2 Emboutissage : Essai Swift . . . 241

Partie C Application 249

V Application aux liaisons Ta/TA6V 251
V.1 Introduction . . . 253
V.2 Identification . . . 255
V.2.1 Identification du comportement non couplé des matériaux de base . . . 255
V.2.1.1 Identification du tantale . . . 255
V.2.1.2 Identification de l'effet mémoire . . . 260
V.2.1.3 Identification du TA6V . . . 262
V.2.2 Identification du comportement non couplé de la Z.F . . . 265
V.2.2.1 Hypothèse et validation de la mise en donnée . . . 267
V.2.2.2 Optimisation du comportement de la Z.F . . . 269
V.2.3 Identification du comportement couplé à l'endommagement . . . 273
V.2.3.1 Identification du TA6V . . . 273
V.2.3.2 Identification du Ta . . . 280
V.2.3.3 Identification de la Z.F . . . 287
V.3 Essais de validation . . . 289
V.3.1 Essais de nanoindentation . . . 289

V.3.2 Essais de traction longitudinale 296
V.4 Autres applications 298
V.4.1 Éprouvettes soudées doublement entaillées 298
V.4.2 Influence des hétérogénéités locales 303

Conclusions – Perspectives **311**

References **315**

Partie D Annexes **1**

A Aspects expérimentaux **3**
A.1 Géométries d'éprouvettes 3
A.2 Mesure de module d'élasticité pour des essais de charge-décharge 6
A.3 Outillage de flexion quatre points 9
A.4 Essai de flexion quatre points et hauteur liaisonnée 10
A.5 Géométrie d'éprouvette M.F.T et micromachine 20
A.6 Procédure de polissage 21
A.7 Fiche P.D.F des phases en présence dans la Z.F 21

B Aspects numériques **23**
B.1 Algorithme 3D 23
B.2 Algorithme CP1 26
B.3 Algorithme CP2 26
B.4 Algorithme CP3 31
B.5 Matrice tangente consistante 35

Introduction

Dans un contexte industriel où la sûreté est le maître mot, l'étude des propriétés mécaniques des matériaux, ainsi que de leurs assemblages, est primordiale. L'avènement de l'informatique, durant ces quelques dernières décennies et, par là-même, l'apparition de stations de calculs toujours plus performantes, permet, aujourd'hui, d'envisager la prise en compte de zones aux comportements spécifiques, au sein même de structures industrielles. L'étude des jonctions entre matériaux, quelles qu'elles soient, se positionne exactement au sein de cette problématique. La taille de ces jonctions est, très souvent, faible devant celle de la structure mais leurs comportements mécaniques sont radicalement différents de leurs voisinages. Ainsi, elles constituent des zones à ne pas négliger dans la conception et le dimensionnement des structures, tant du point de vue du comportement que de celui de la rupture.

Parmi les procédés d'assemblage, le rivetage est le procédé le plus employé jusqu'au début des années 1950 mais il est ensuite rapidement détrôné par le soudage. D'abord par le soudage à l'arc, puis le soudage par résistance, pour finalement aboutir, dans les années 1980, au soudage laser. Ces assemblages soudés doivent faire l'objet d'une attention particulière lors de la conception des structures. En effet, de nombreuses catastrophes ont été provoquées par la méconnaissance de la tenue en service des soudures dont l'exemple le plus connu est le Liberty Ship. Ce navire de guerre, construit en nombre durant la seconde guerre mondiale, est l'un des premiers présentant de nombreuses liaisons soudées dont la tenue mécanique s'est avérée catastrophique.

Les phénomènes physiques liés au soudage, sont souvent très complexes par leurs pluridisciplinarités. En effet, les cycles thermiques extrêmement rapides conduisent à des transformations métallurgiques parfois étonnantes et toujours spécifiques aux matériaux d'étude. Les microstructures formées sont sensiblement différentes des matériaux de base. Elles sont parfois fines ou plus grossières, dendritiques, lamellaires, globulaires ou autre, dépendant des gradients thermiques vus par le matériau. Chaque soudure est donc un cas d'étude à part entière et celui du soudage laser hétérogène en est l'un des plus ardues.

Parmi les procédés de soudage, on distingue les procédés avec métal d'apport (M.I.G Metal Inert Gas, T.I.G Transfert Inert Gas ...) des procédés sans métal d'apport (laser, faisceaux d'électrons...). Pour les soudures sans métal d'apport, on différencie les cas homogènes (jonction de deux matériaux identiques) des cas hétérogènes (jonction de deux matériaux différents). Le soudage laser hétérogène fait donc partie de cette dernière famille. Les cycles thermiques y sont les plus intenses et rapides, la zone fondue (Z.F) la plus locale et la plus hétérogène. Dès lors, la complexité de l'étude du comportement mécanique s'en trouve augmentée. La taille de la Z.F diminue tandis que l'hétérogénéité augmente.

Le présent travail s'inscrit dans ce cadre et s'applique à étudier le comportement et la rupture des liaisons soudées hétérogènes Ta/TA6V. Le soudage laser de deux matériaux différents (soudage hétérogène) conduit à la formation d'une jonction de taille caractéristique proche du millimètre et donc, très inférieure à celle d'une structure. Cependant, la sollicitation thermique intense, les transformations métallurgiques induites, font de cette jonction, une zone aux propriétés mécaniques radicalement différentes. Dès lors, la prise en compte de ces jonctions, et de leurs propriétés spécifiques, ne peut être négligée, au sein des structures, sans en valider l'hypothèse. L'objet de cette thèse est donc de développer un modèle de comportement, suffisamment souple et robuste, pour représenter, à la fois, le comportement mécanique du Ta, du TA6V, et de la zone fondue (Z.F) au sein d'un calcul de structure. Ce modèle doit être capable de prendre en compte la plasticité ou viscoplasticité, mais aussi de fournir un critère de rupture à travers la mécanique de l'endommagement et son couplage avec le comportement. Il doit être d'emploi "simple" et identifiable au moyen d'une procédure composée d'essais "classiques". De plus, il a pour ambition d'être suffisamment souple pour décrire le comportement de la Z.F suite à une modification des paramètres ou de la configuration de soudage.

Ces objectifs, vastes et ambitieux, passent, naturellement, par une phase importante de caractérisation expérimentale, composant la partie A, puis par une phase de modélisation du comportement, composant la partie B, pour se terminer par une partie C, présentant l'application spécifique du modèle aux liaisons Ta/TA6V.

La partie A se compose de deux chapitres, naturellement articulés autour de la caractérisation expérimentale des matériaux de base (Ta et TA6V, chapitre I) puis de celle de la Z.F pour différentes paramétries de soudage (chapitre II).

La partie B, regroupant deux chapitres, traite, tout d'abord, de la formulation du modèle (chapitre III) puis des aspects numériques associés (chapitre IV).

Pour finir, la partie C, se consacre, au sein d'un chapitre unique (chapitre V), à l'identification et à la validation du modèle sur Ta, TA6V et Z.F.

Chacun des chapitres mentionnés s'attache à détailler les points suivants :

- le chapitre I cherche à tirer une information pertinente d'essais classiques sur Ta et TA6V. Pour ce faire, il détaille l'exploitation d'essais de traction à différentes vitesses (quasi-statiques) et différentes directions, d'essais de relaxation, ou encore de cisaillement cyclique.

- le chapitre II décrit l'influence du traitement thermique, induit par le soudage, sur la formation de la Z.F et l'apparition de phases spécifiques. Il présente, ensuite, les différentes problématiques de caractérisation de la Z.F et les essais fournissant une information pertinente. Ces essais se composent de flexion quatre points sur éprouvettes entaillées, de nanoindentation, et de traction longitudinale.

- le chapitre III détaille la formulation du modèle dans le cadre de la thermodynamique des milieux continus. Il s'intéresse, plus particulièrement, au comportement élasto-viscoplastique anisotrope couplé à l'endommagement ductile isotrope. La prise en compte de quelques phénomènes particuliers tels que l'introduction d'écrouissages de type isotrope de manière spécifique, à travers leurs couplages avec l'écrouissage cinématique ou la viscosité, ou encore l'effet mémoire, sont débattus.

- le chapitre IV présente les aspects numériques associés à la formulation du modèle et l'intégration des équations constitutives couplées. Il s'attache à traiter le cas spécifique

des contraintes planes en comparant différents algorithmes formulés pour ce même modèle.

- le chapitre V vise à instaurer le dialogue essai-calcul via, tout d'abord, l'identification du comportement couplé et non couplé des matériaux de base et de la Z.F. Puis, il détaille certains essais de validation tels que la nanoindentation et la traction longitudinale pour, finalement, explorer quelques applications purement numériques.

Partie A

Caractérisation expérimentale

Chapitre -I-

Caractérisation des matériaux de base

Sommaire

I.1 Introduction 5
I.2 Essais de traction à différentes vitesses 6
I.2.1 tantale 8
I.2.2 TA6V 12
I.3 Essais de traction dans différentes directions pour le tantale . . . 14
I.4 Essais de traction avec charge-décharge 16
I.4.1 Contraintes interne et effective 16
I.4.1.1 tantale 18
I.4.1.2 TA6V 19
I.4.2 Evolution du module d'élasticité 20
I.4.2.1 tantale 20
I.4.2.2 TA6V 23
I.5 Essais de relaxation 27
I.5.1 tantale 28
I.5.2 TA6V 30
I.6 Essais de cisaillement cyclique 32
I.6.1 Courbes de durcissement/adoucissement cyclique 32
I.6.1.1 tantale 33
I.6.1.2 TA6V 35
I.6.2 Courbes de consolidation cyclique, méthode à une éprouvette par niveau 38
I.6.2.1 tantale 38
I.6.2.2 TA6V 40

I.1 Introduction

La mise en place d'une démarche expérimentale de caractérisation est un exercice complexe, tant les modes de sollicitation, les conditions extérieures, les nuances microstructurales, les géométries d'éprouvette etc... peuvent varier. Il est donc nécessaire d'identifier au maximum l'influence de chacun de ces paramètres et, si possible, d'en découpler les effets par un choix judicieux des essais.

De plus, le choix de la gamme expérimentale, sur laquelle sera identifié le comportement des matériaux, se doit d'être représentative des sollicitations perçues par ce dernier, au sein même de la structure. Ces sollicitations sont souvent très diverses, de nature à la fois, chimique, thermique, mécanique, et des choix, sur les paramètres extérieurs les plus influents, doivent être réalisés. L'objectif de modélisation du comportement en vue d'un calcul de structure, impose au mécanicien des matériaux, de formuler un modèle capable de capter les phénomènes majeurs en conservant un formalisme des plus simples. Tout l'art du calcul de structure vise à modéliser un maximum de phénomènes à l'aide d'un minimum de paramètres matériaux.

Les phénomènes physiques, intervenant sur le matériau au sein de la structure, déterminent le choix de la loi de comportement. Cette dernière impose, quant à elle, la gamme d'essais nécessaire à l'identification.

D'autres contraintes peuvent s'ajouter comme par exemple, l'approvisionnement matière (géométrie(barre, tôle...)), l'état microstructural (traitement thermique, laminage...), les moyens d'essais etc.

Dans ce paragraphe, nous présentons les essais réalisés sur les matériaux de base, TiAl6V4 (ou TA6V selon l'ancienne norme et l'usage courant) et tantale, dont l'approvisionnement se compose de tôles laminées d'épaisseur 3 mm et 5.25 mm. Les essais sont systématiquement réalisés pour les deux matériaux afin de conserver une démarche d'identification et de modélisation cohérente.

Les deux matériaux, Ta et TA6V, révèlent des comportements mécaniques très différents, à la fois en terme de résistance mécanique, mais aussi de ductilité. Le TA6V, communément admis comme ductile, apparaît, en comparaison du Ta, comme un matériau "quasi-fragile". Leurs limites d'élasticité sont aussi très différentes ainsi que leurs écrouissages (cf. figure I.1).

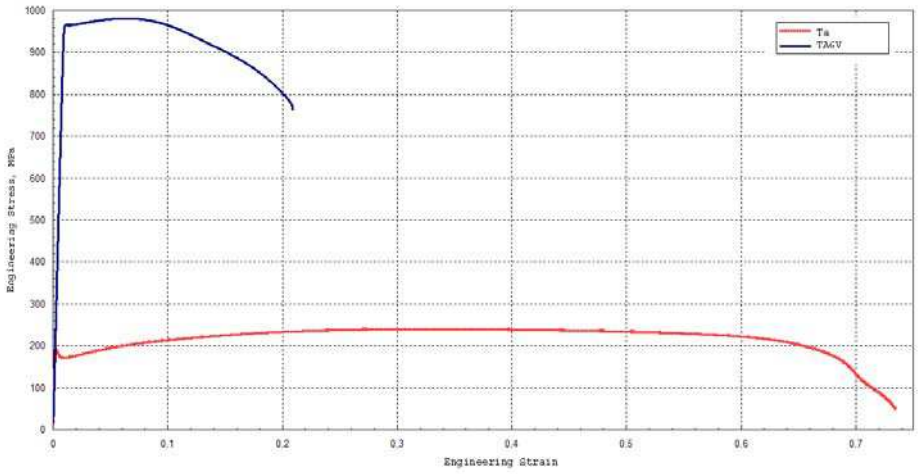


Figure I.1 : Comparaison des courbes contrainte-déformation nominale (ou de l'ingénieur) pour le Ta et le TA6V, traction uniaxiale à $\dot{\varepsilon} = 10^{-3}s^{-1}$

Ces courbes seront analysées pour chacun des matériaux, nous pouvons cependant les comparer de manière relative. Le Ta est 3.5 à 4 fois plus ductile que le TA6V, sa limite d'élasticité est 5 à 5.5 fois inférieure tandis que la contrainte maximale atteinte est 4 à 4.5 fois inférieure à celle du TA6V.

En tenant compte des paramètres cités précédemment, nous décidons de ne pas considérer l'effet de la température sur le comportement, ainsi que celui de l'environnement (corrosion, radiation ...). La gamme de vitesse caractéristique au sein de la structure à modéliser reste quasi-statique. Les deux matériaux provenant d'un approvisionnement de tôle, les essais cycliques seront réalisés par cisaillement. Nous composons donc la base expérimentale permettant d'identifier nos matériaux de base, à partir des essais suivants :

- essais de traction uniaxiale à différentes vitesses et dans différentes directions
- essais de charge-décharge en traction uniaxiale
- essais de relaxation
- essais de cisaillement cyclique à différentes amplitudes de déformation

Cette gamme d'essais nous permettra d'identifier un comportement élasto-viscoplastique endommageable au paragraphe V.2. Par la suite, nous présenterons, en parallèle, les résultats d'essais pour les deux matériaux en commençant par les essais de traction.

I.2 Essais de traction à différentes vitesses

L'objectif de ces essais est de caractériser la réponse des matériaux en traction uniaxiale pour différentes décades de vitesse. Ces essais ne permettent pas d'isoler les contributions de la viscosité et des écrouissages mais permet de voir l'évolution de la contrainte visqueuse avec la déformation plastique cumulée.

L'essai de traction est le plus simple et le plus utilisé car il permet d'obtenir de nombreuses informations (module d'élasticité, limite d'élasticité, charge maximale, allongement à rupture...) et de maintenir une déformation homogène dans la partie utile.

Par la suite, nous ferons la distinction entre deux mesures de contrainte et de déformation :

- la déformation et la contrainte nominales (conventionnelles, de l'ingénieur ("engineering strain")), définies à partir des données brutes sans correction de section

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} \tag{I.1}$$

$$\sigma = \frac{F}{S_0} \tag{I.2}$$

- la déformation et la contrainte vraies ("true strain", déformation logarithmique), (contrainte de Cauchy, rationnelle), tenant compte de la diminution de section

$$\varepsilon_v = ln(\frac{l}{l_0}) \tag{I.3}$$

$$\sigma_v = \frac{F}{S} \tag{I.4}$$

Moyennant les hypothèses classiques de plasticité isochore et en négligeant l'élasticité face à la plasticité, il est possible de lier les mesures vraies aux mesures nominales,

$$\varepsilon_v = ln(1+\varepsilon) \tag{I.5}$$

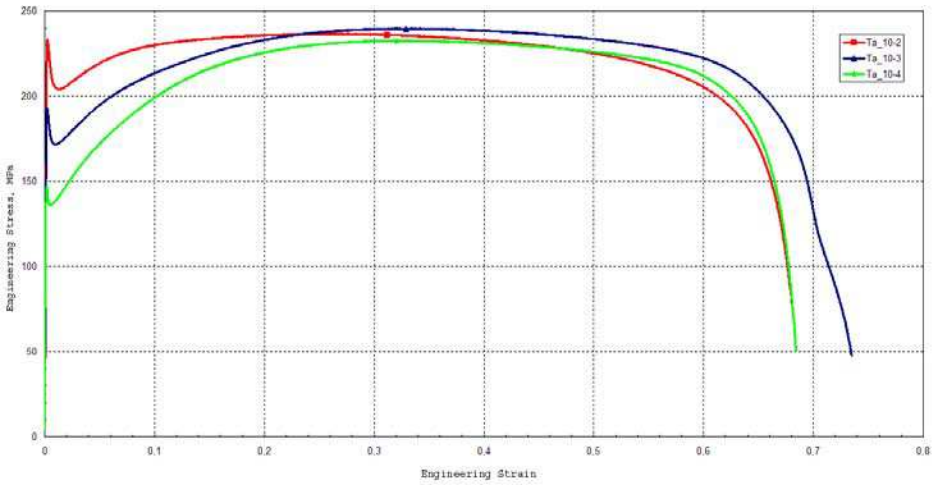
$$\sigma_v = \frac{F}{S_0} e^{\varepsilon_v} \tag{I.6}$$

Les essais ont été réalisés sur une machine SWICK de traction-compression de capacité 100 kN. La mesure de déplacement est réalisée à l'aide d'un extensomètre à couteaux dont l'étendue de mesure est très importante (Δ l = 80 mm) et permet de réaliser l'essai complet à l'aide de l'extensomètre. L'essai est piloté en déplacement traverse et implique donc une légère différence entre la vitesse de déformation réelle et pilotée (différence fonction de la rigidité machine principalement).

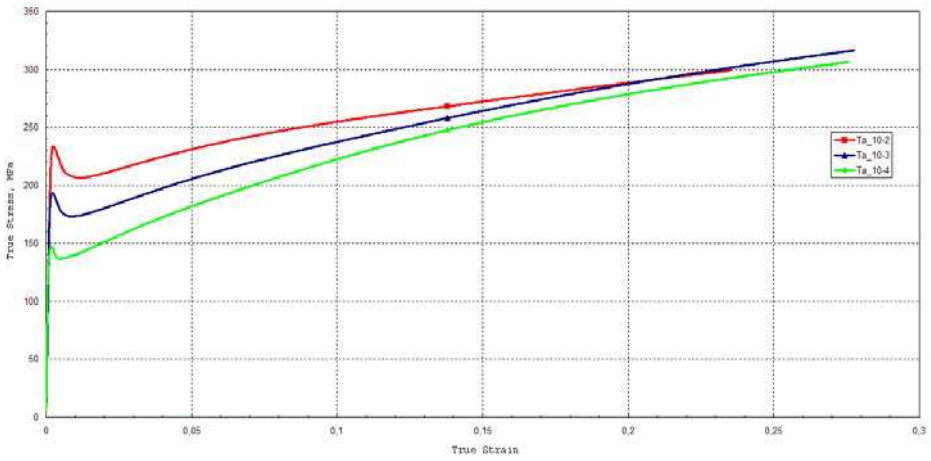
L'ensemble des éprouvettes est ici prélevé dans le sens longitudinal de la tôle, sauf mention spécifiée dans le texte. Les géométries d'éprouvette sont spécifiées en annexe A.1.

I.2.1 tantale

Pour le tantale, la comparaison de trois décades de vitesses en traction uniaxiale est donnée figure I.2.



(a)

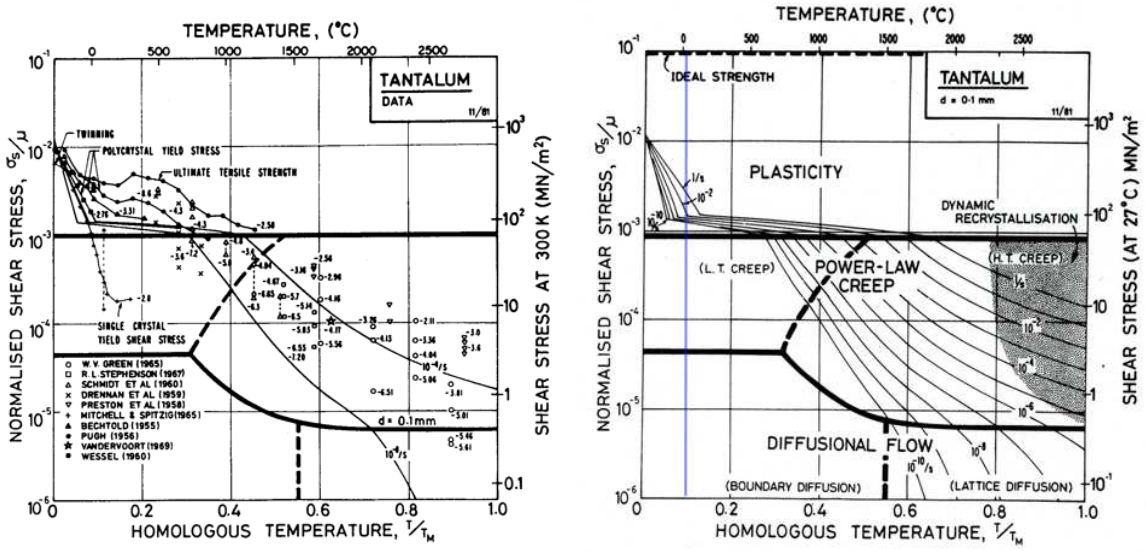


(b)

Figure I.2 : Comparaison des courbes contrainte-déformation (a) nominales (b) rationnelles pour le Ta à trois décades de vitesses ($\dot{\varepsilon} = 10^{-2}s^{-1}$ $\dot{\varepsilon} = 10^{-3}s^{-1}$ $\dot{\varepsilon} = 10^{-4}s^{-1}$)

Les courbes contrainte-déformation nominales permettent le tracé de courbes allant jusqu'à la rupture de l'éprouvette tandis que les courbes rationalisées doivent se terminer au début de la striction donnée par le critère de Considère ($\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = 0$ en contrainte et déformation nominales). Suivant la vitesse de sollicitation, ce point intervient plus ou moins tôt entre 24 et 27 %. Notons qu'à partir de $\dot{\varepsilon} = 10^{-2}s^{-1}$, un phénomène d'adoucissement apparaît aux alentours des 10%. Ce phénomène devient de plus en plus marqué lorsque la vitesse de sollicitation augmente et semble être lié à un adoucissement thermomécanique dû à l'autoéchauffement du matériau (Frénois, 2001). Il est donc difficile de rationaliser ces courbes puisqu'elles présentent déjà une rupture de pente avant d'atteindre leur maximum. De plus, la transition entre mécanismes thermiquement activés et athermiques s'effectue à température ambiante. Ceci rend la réponse du matériau très dépendante de la vitesse de sollicitation,

passant d'un mécanisme à un autre en variant d'une décade (figure I.3).



(a) (b)

Figure I.3 : Schéma représentant la contrainte de cisaillement normalisée en fonction du rapport température/température de fusion, (a) données sources, (b) extrapolation, d'après (Frost et Ashby, 1982).

Un autre phénomène caractéristique concerne le pic de traction et sa dépendance à la vitesse. En effet, plus la vitesse de sollicitation est importante, plus le pic est marqué. Les paramètres décrivant le pic sont la limite haute et basse ainsi que la largeur du plateau (cf. figure I.4)

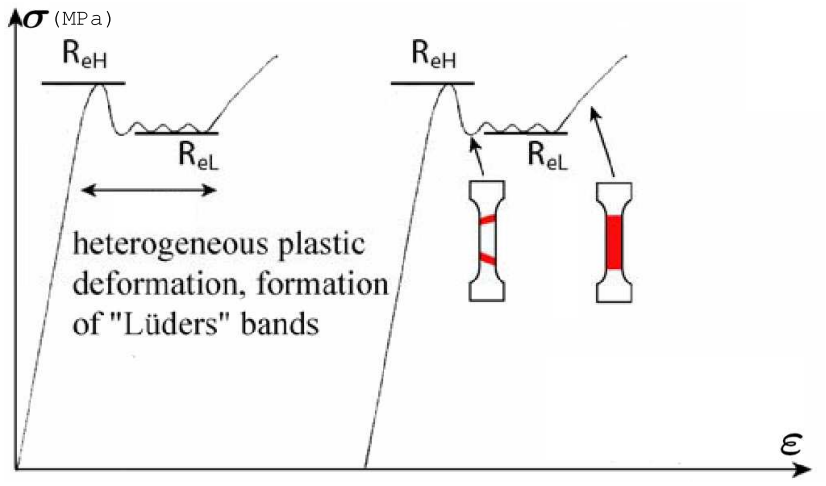


Figure I.4 : Schéma décrivant la propagation de bandes de Piobert-Lüders au cours d'un essai de traction, R_{eH} et R_{eL} désignant respectivement les limites d'élasticité haute et basse

Ce pic est associé à la propagation de bandes de Piobert-Lüders. Cottrell et Bilby (Cottrell et Bilby, 1949) ont montré que l'introduction d'une dislocation dans un métal présentant des impuretés, créait un champ de contrainte provenant de la diffusion et du réarrangement de celles-ci autour des dislocations. Ce nuage prend alors le nom d'atmosphère (ou nuage) de

Cottrell. La formation de ces atmosphères nécessite donc suffisamment de temps pour que les impuretés diffusent, ce qui rend ce phénomène dépendant du temps (vieillissement) et de la température.

En laissant suffisamment de temps pour que les impuretés s'organisent en atmosphères, les dislocations se retrouvent solidement ancrées. Il est alors nécessaire d'appliquer une contrainte mécanique beaucoup plus importante afin d'arracher ces dislocations aux atmosphères qui se propagent ensuite plus facilement expliquant ainsi le pic puis la chute de contrainte.

Ce phénomène provoque la formation d'instabilités limitées de la déformation. Jaoul (Jaoul, 1965) suppose que cette instabilité est liée aux rotations des cristaux se déformant par glissement sur un seul système. La direction moyenne d'une bande qui traverserait plusieurs grains sans orientation préférentielle et n'activant qu'un seul système de glissement, est de 50.8°. Cette orientation correspond aux observations expérimentales, faites dans la littérature, oscillant entre 45 et 55°. Des bandes de localisation sont alors visibles et se propagent à travers l'éprouvette jusqu'à atteindre une déformation homogène au sein de la partie utile (cf. figure I.4). Une fois les dislocations désancrées de leurs atmosphères, seul un temps suffisant pour les reformer peut permettre de retrouver ce phénomène. Une décharge puis une charge après les quelques pourcents de déformation hétérogène dues aux bandes de Piobert-Lüders, ne permettent donc pas de retrouver le pic de contrainte (cf. figure I.5).

Ce phénomène provoque un état de surface médiocre et cherche parfois à être évité. On peut alors effectuer un "skin-pass" consistant à dépasser le palier par une prédéformation avant de mettre en forme le matériau.

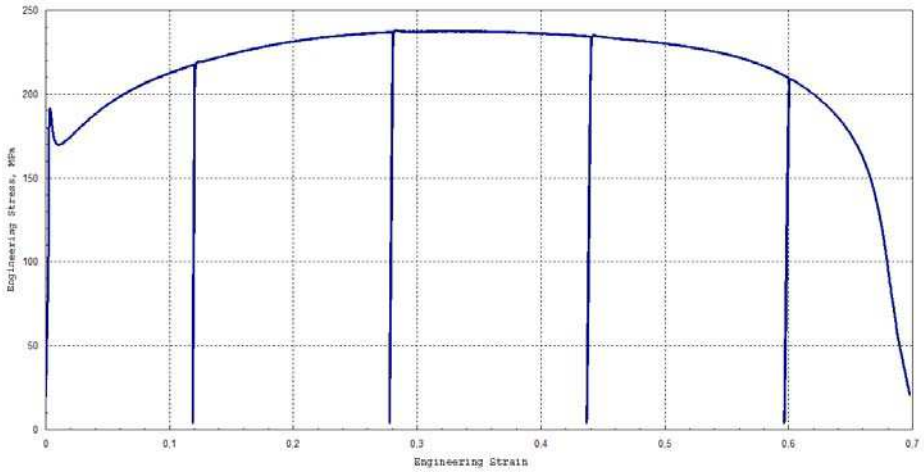


Figure I.5 : Traction uniaxiale avec charge-décharge, contrainte-déformation nominale pour le Ta ($\dot{\varepsilon} = 10^{-3}s^{-1}$)

Les bandes de Piobert-Lüders sont un phénomène complexe dépendant de multiples paramètres comme la taille de grains, le type de sollicitation, le taux d'impuretés, la température, la géométrie des éprouvettes.

Ces observations mises à part, les courbes I.2(a) et (b) permettent surtout de caractériser la sensibilité du tantale à la vitesse de déformation ainsi qu'à la déformation plastique cumulée. Dans les premiers taux de déformations, le tantale présente une forte influence de la viscosité qui s'atténue nettement aux alentours des 10% de déformation totale, pour finalement ne quasiment plus avoir d'influence aux alentours des 20%. Ces observations justifient les choix de modélisation fait au chapitre III, présentant un couplage écrouissage isotrope-viscosité.

Les données caractéristiques des courbes I.2 sont synthétisées dans le tableau I.1,

Vitesse de déformation $\dot{\varepsilon}$ (s^{-1})	E (GPa)	R_{eH} et R_{eL} (MPa)	R_m (MPa)	A_{gt} (%)	A_t (%)
10^{-2}	161	232.6; 204	236.6	26.5	68.4
10^{-3}	148	192; 171.5	240	32	74.4
10^{-4}	203	146; 136	232.5	31.7	68.4

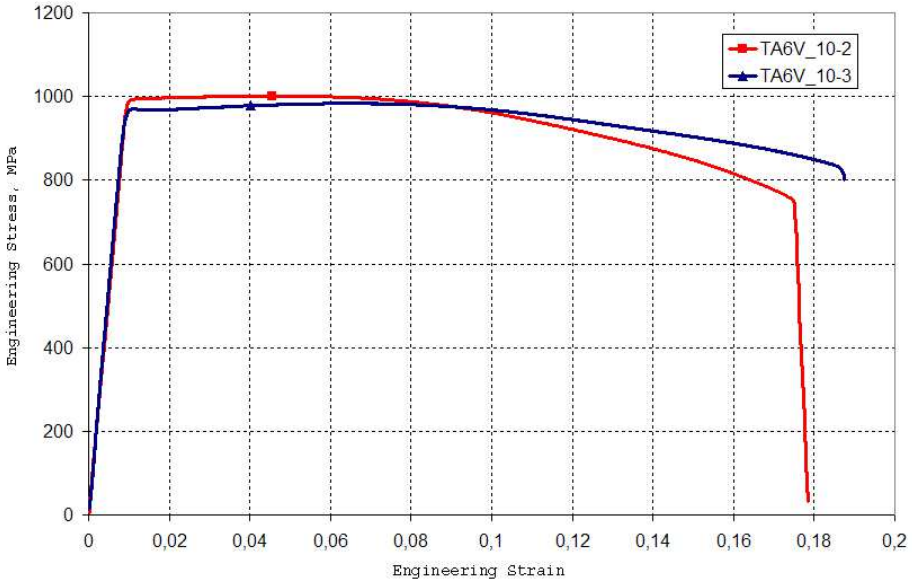
Tableau I.1 : Données caractéristiques des essais de traction à trois décades de vitesse sur Ta.

avec, E désignant le module d'élasticité, R_{eH} et R_{eL} les limites d'élasticité haute et basse, R_m la valeur maximale de la contrainte nominale, A_{gt} la déformation totale nominale correspondant à la contrainte maximale, A_t la déformation nominale maximale à rupture.

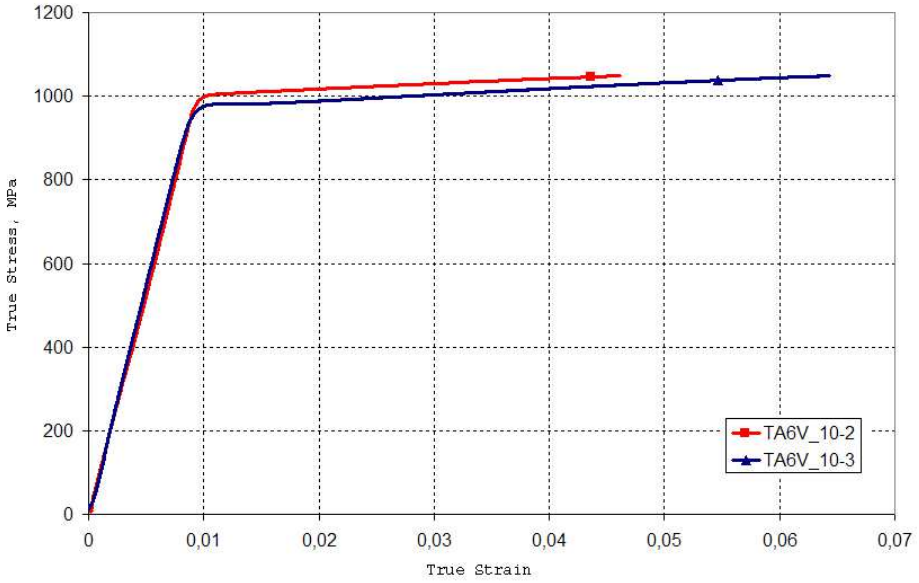
Il existe une forte dispersion des mesures de module d'élasticité pour les trois essais malgré les précautions et la précision des mesures réalisées. Ces valeurs sont assez éloignées des valeurs obtenues par mesure ultrasonore (Nadal, 1996) avoisinant les 187 GPa. Ces écarts peuvent s'expliquer par une non linéarité dans le domaine d'élasticité, rendant difficile l'évaluation du module. Frenois (Frénois, 2001) montre qu'il existe une déformation irréversible bien avant la limite d'élasticité R_{eH} en réalisant un essai de traction avec des phases de charge-décharge avant que la limite d'élasticité haute ne soit atteinte. Ce phénomène est attribué à une phase de microplasticité dont la limite de microélasticité se situerait aux alentours de 60 MPa (Frénois, 2001), (Mitchell et Spitzig, 1965), (Louchet, 1976).

I.2.2 TA6V

Concernant le TA6V, la sensibilité à la vitesse n'est, a priori, pas très importante pour cette gamme de vitesse et de température (cf. figure I.6). Cependant, le taux d'écrouissage étant très faible, l'écart entre les deux courbes peut révéler une viscosité significative.



(a)



(b)

Figure I.6 : Comparaison des courbes contrainte-déformation (a) nominales (b) rationnelles pour le TA6V à deux décades de vitesses ($\dot{\varepsilon} = 10^{-2}s^{-1}$ $\dot{\varepsilon} = 10^{-3}s^{-1}$)

En effet, pour une contrainte vraie donnée de 1000 MPa par exemple, l'écart en déformation totale vraie entre les deux courbes est de 1.5 à 2%. Cette différence de déformation provient d'une viscosité "de type fluage" qui n'est pas négligeable, comme nous

le verrons par la suite (cf. paragraphe I.5). L'influence de la température et de la vitesse de sollicitation peut être schématisée sur un graphique contrainte de cisaillement normalisée en fonction de la température, figure I.7, ici présenté à titre indicatif pour un titane α pur de taille de grain 100 μm.

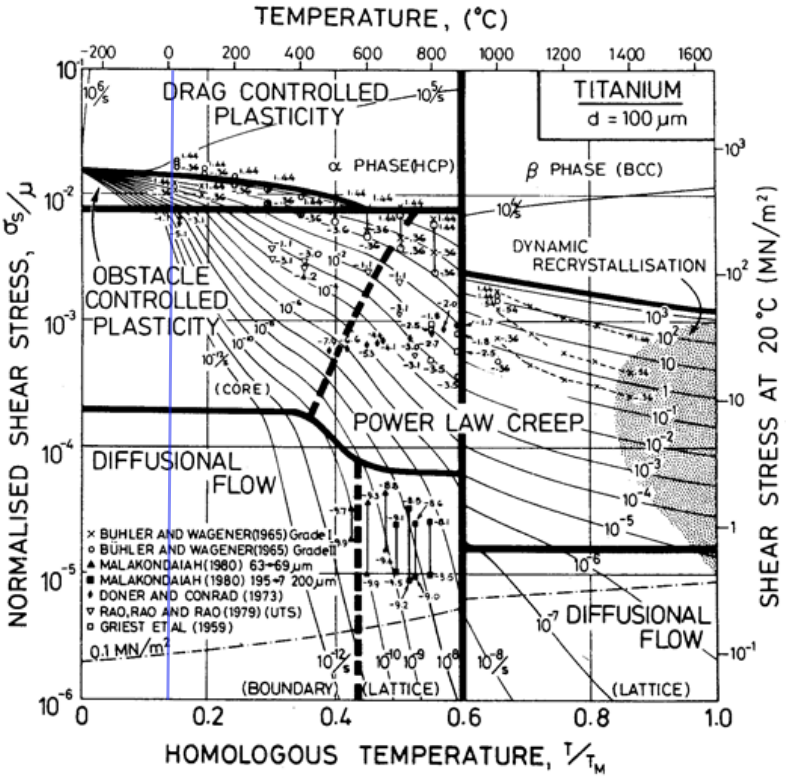


Figure I.7 : Schéma représentant la contrainte de cisaillement normalisée en fonction du rapport température/température de fusion d'après (Frost et Ashby, 1982).

Il est à noter, sur les figures I.6(a) et (b), que l'entrée en plasticité est très "brutale" et que les courbes présentent un faible plateau en début de plasticité.

Les données caractéristiques des courbes I.6 sont synthétisées dans le tableau I.2,

Vitesse de déformation $\dot{\varepsilon}$ (s^{-1})	E (GPa)	$R_{p0,2}$ (MPa)	R_m (MPa)	A_{gt} (%)	A_t (%)
10^{-2}	109	994	1001	4.6	17.85
10^{-3}	112	967	983	6.6	18.75

Tableau I.2 : Données caractéristiques des essais de traction à deux décades de vitesse sur TA6V.

Ces valeurs sont très proches des valeurs données, par exemple, dans (Combres, 1999), et synthétisées dans le tableau I.3 présentant trois titanes, α (T40), duplex $\alpha + \beta$ (TA6V) et βmétastable (β CEZ),

Nuance	E (GPa)	$R_{p0,2}$ (MPa)	R_m (MPa)	A_t (%)
T40	110	352	483	28
TA6V	110	910	1000	18
βCEZ	70	723	927	9

Tableau I.3 : Données caractéristiques en traction pour différents alliages.

I.3 Essais de traction dans différentes directions pour le tantale

Les données expérimentales de ce paragraphe sont reprises des travaux de Frenois (Frénois, 2001) sur la même nuance de tantale. Après comparaison des essais de traction dans le sens longitudinal pour les trois décades de vitesse, présentés paragraphe I.2.1, il apparaît une différence systématique de 10 MPa que nous reportons sur les courbes dans les trois directions du plan. Ainsi, avec les références de la figure I.8, nous obtenons les courbes figure I.9.

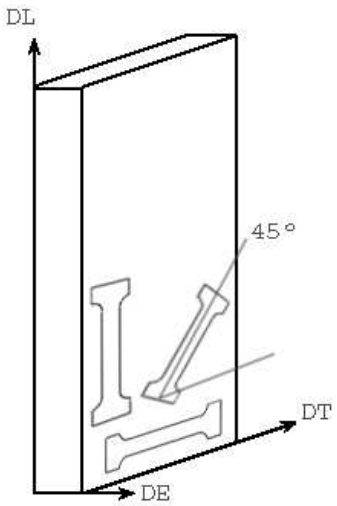
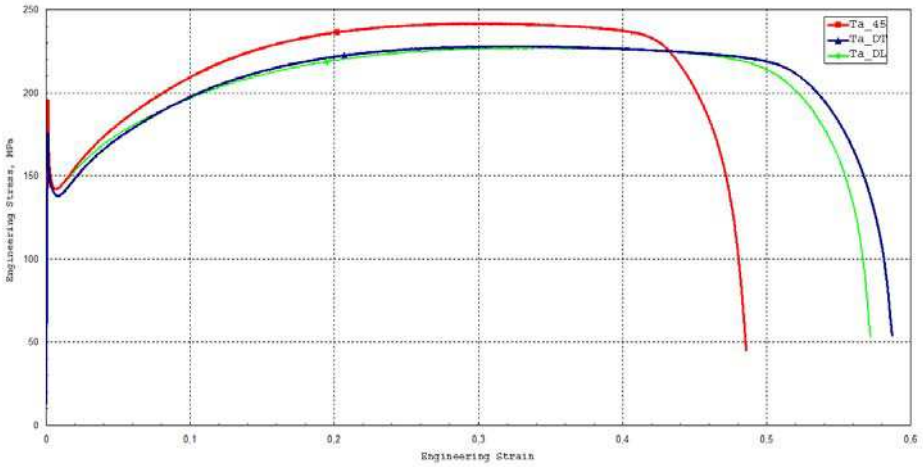
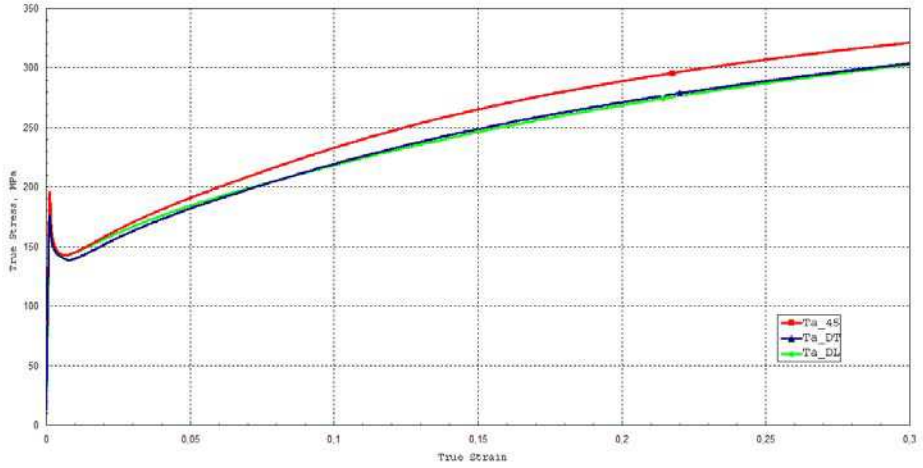


Figure I.8 : Schéma de prélèvement dans les trois directions de la tôle, longitudinale (DL), transversale (DT) et 45° (45).



(a)



(b)

Figure I.9 : Comparaison des courbes contrainte-déformation (a) nominales, (b) rationnelles sur Ta dans les trois directions du plan à $\dot{\varepsilon} = 10^{-4}s^{-1}$.

Le comportement du Ta est quasi-identique dans les directions longitudinale et transverse. Par contre, à 45°, il présente des niveaux de contrainte plus élevés de 14 MPa à 10% à 18 MPa à 20% en valeurs rationnelles.

Les données caractéristiques des courbes sont synthétisées dans le tableau I.4,

Direction de sollicitation	R_m (MPa)	A_{gt} (%)	A_t (%)
DL	227	35	57.2
DT	227	32	58.7
45	241	30	48.5

Tableau I.4 : Données caractéristiques des essais de traction dans les trois directions du plan.

La déformation à rupture est également plus faible à 45° que dans les deux autres directions

et ceci d'environ 10%

Remarques :

L'anisotropie du TA6V n'est pas considérée mais n'a pas été testée spécifiquement. L'hypothèse d'isotropie du comportement se base sur un bon "dialogue" essai de traction, essai de cisaillement (cf. paragraphe V.2.1.3), ainsi que le choix généralement fait dans la littérature, et notamment au CEA (Robert, 2007), d'un comportement isotrope.

I.4 Essais de traction avec charge-décharge

Ce type d'essai revêt deux intérêts : un premier concernant l'identification des contraintes interne et effective et un second concernant l'évolution du module d'élasticité.

I.4.1 Contraintes interne et effective

En inversant le sens de sollicitation, il est possible de mesurer la position et la dimension du domaine d'élasticité et de définir la contrainte effective σ_{eff} ("effective or friction stress") et la contrainte interne X ("internal or back stress") au sens de Cottrell (Cottrell, 1953). La méthode d'identification des contributions de ces différents types de contrainte sera ensuite reprise par (Kuhlmann-Wilsdorf et Laird, 1979), (Dickson et al., 1983), (Dickson et al., 1984) dans le cas de chargements cycliques puis étendue au cas monotone par (Feaugas, 1999a)

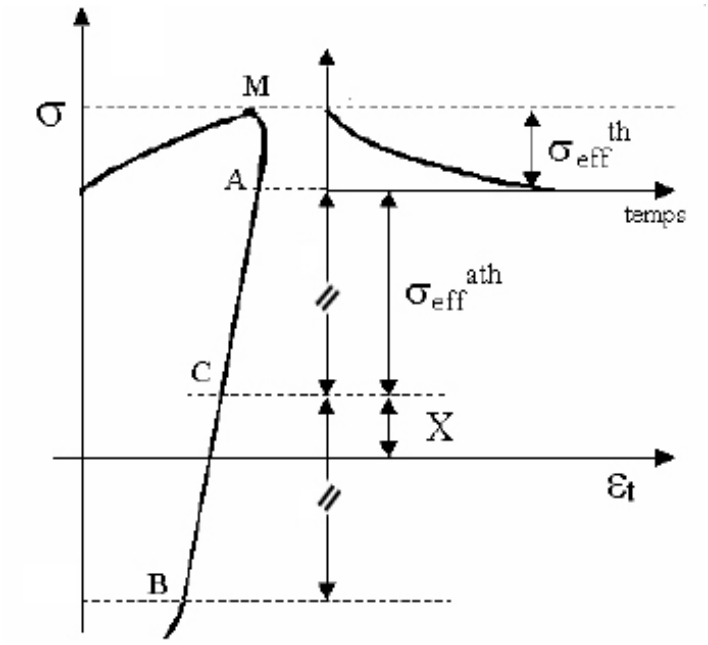


Figure I.10 : Répartition des différentes contributions de la contrainte effective et de la contrainte interne au cour d'un essai alterné (Feaugas, 1999a)

Après avoir atteint la contrainte maximale en M (figure I.10), l'effet du changement de trajet de chargement sur le matériau n'est pas immédiat. Il existe un intervalle de temps durant lequel l'écoulement plastique continue à s'effectuer dans la même direction que précédemment (avant la décharge). Cet intervalle correspond à l'intervalle M-A de la figure I.10 et caractérise la contrainte effective thermiquement activée σ_{eff}^{th}.

La variation linéaire entre A et B donne l'étendue du domaine d'élasticité. La limite d'élasticité en compression (point B) est inférieure à la limite d'élasticité de la traction précédente. Cette caractéristique est connue sous le nom d'effet Bauschinger. La contrainte effective athermique σ_{eff}^{ath} est égale à la moitié de la taille du domaine d'élasticité.

La contrainte effective σ_{eff} est la contrainte nécessaire localement pour qu'une dislocation puisse franchir un obstacle et se déplacer. Cette contrainte est donc reliée à des interactions à courte distance (friction du réseau, interaction dislocation/dislocation, cisaillement de précipités...) pouvant être thermiquement activées ou non. La contrainte effective se divise donc en une partie thermiquement activée et une partie athermique,

$$\sigma_{eff} = \sigma_{eff}^{th} + \sigma_{eff}^{ath} \tag{I.7}$$

Par analogie au modèle développé chapitre III, la contrainte effective représente l'ensemble des composantes isotropes, la partie thermiquement activée étant la contrainte visqueuse,

$$\sigma_{eff} \equiv \sigma_y + R + \sigma_v \tag{I.8}$$
$$\sigma_{eff}^{th} \equiv \sigma_v \tag{I.9}$$
$$\sigma_{eff}^{ath} \equiv \sigma_y + R \tag{I.10}$$

Par conséquent, seule la partie thermiquement activée de la contrainte effective peut se relaxer (figure I.10) en l'absence de phénomène de restauration statique.

La contrainte interne X est, quant à elle, représentative d'interactions à longue distance (interactions entre dislocations mobiles, joints de grains...). Ces obstacles interagissent, à longue distance, avec les dislocations et modifient leurs évolutions bien avant qu'elles ne soient à proximité. Ainsi, la contrainte interne peut s'opposer, suivant les cas, à la direction de sollicitation et possède donc un caractère directionnel. Cette contrainte correspond à l'écrouissage cinématique (tensoriel) du modèle développé par la suite,

$$X \equiv \underset{\sim}{\mathbf{X}} \tag{I.11}$$

I.4.1.1 tantale

Les essais de charge-décharge réalisés sur Ta (figure I.11) permettent de mettre en évidence les différentes contributions discutées ci-dessus,

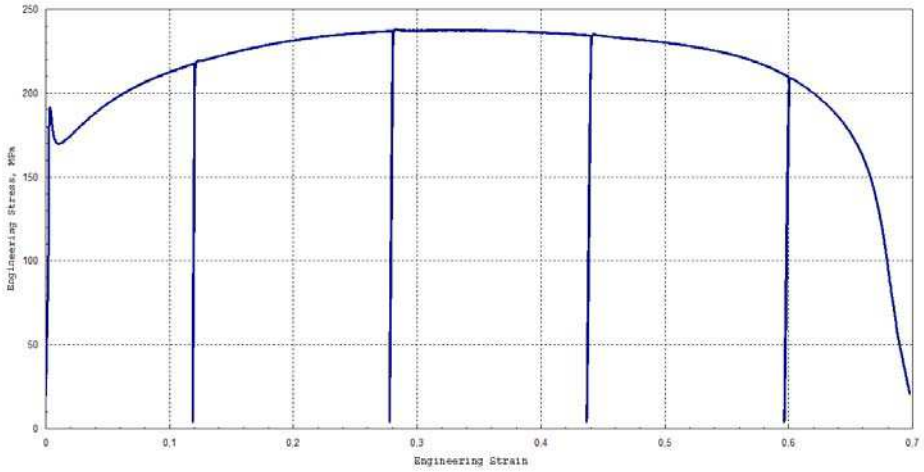


Figure I.11 : Traction uniaxiale avec charge-décharge, contrainte-déformation nominales pour le Ta ($\dot{\varepsilon} = 10^{-3}s^{-1}$).

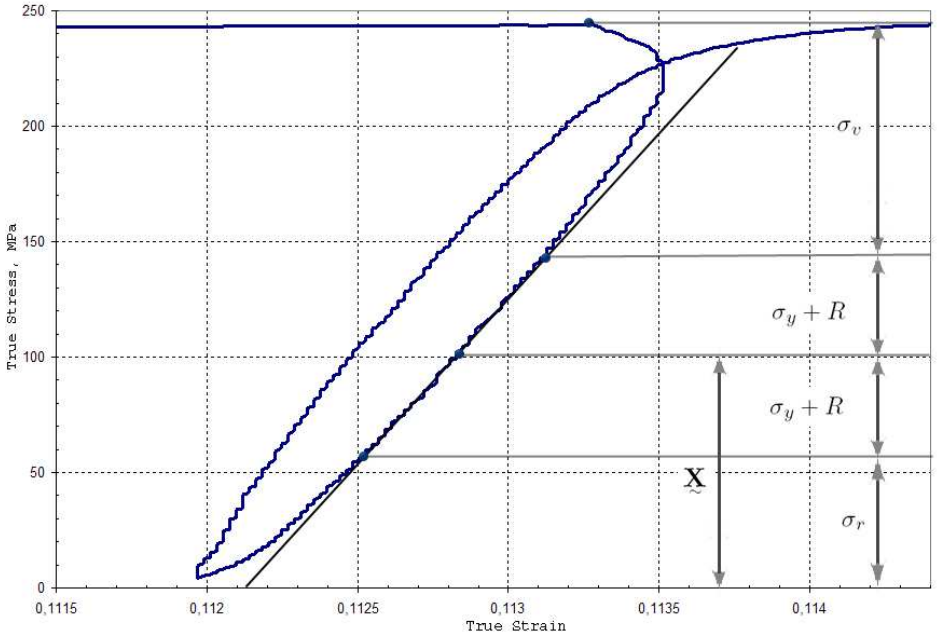


Figure I.12 : Ouverture de la première boucle de charge-décharge en contrainte-déformation rationnelles et mesure des différentes contributions pour le Ta.

σ_r est la limite d'élasticité en retour. L'effet Bauschinger est tel que le matériau plastifie à la décharge sans même entrer en compression. L'influence de l'écrouissage cinématique est importante tout comme celle de la viscosité, toutes deux de l'ordre de 100 MPa. Au contraire, la part de la contrainte effective athermique ($\sigma_y + R$) est faible et se situe aux alentours des

40 MPa.

Il existe une part d'arbitraire dans la détermination de la partie linéaire de la boucle. Cependant, nous verrons au paragraphe I.5 que la quantification de la contrainte visqueuse par cette méthode est de l'ordre de grandeur de celle obtenue par relaxation.

I.4.1.2 TA6V

De la même façon pour le TA6V, on obtient,

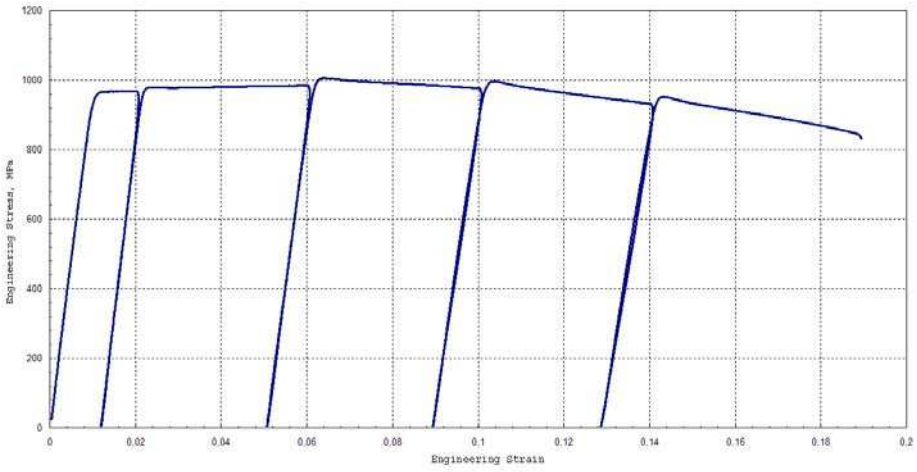


Figure I.13 : Traction uniaxiale avec charge-décharge, contrainte-déformation nominales pour le TA6V ($\dot{\varepsilon} = 10^{-3}s^{-1}$)

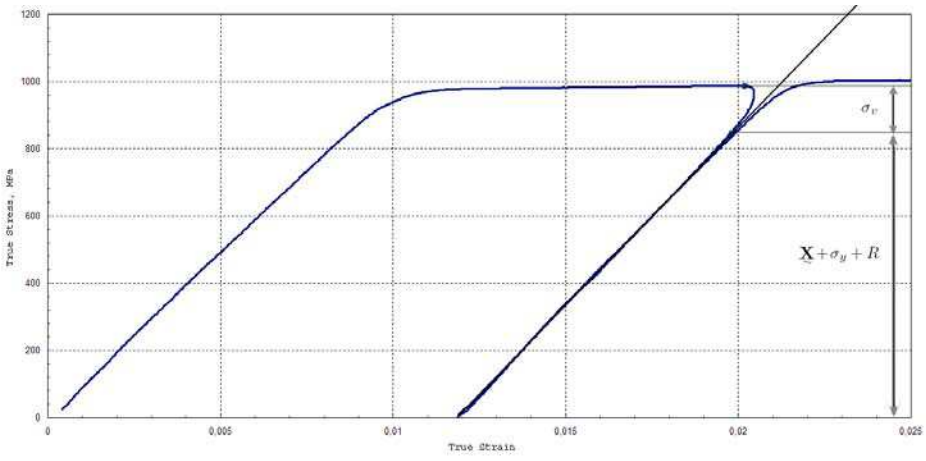


Figure I.14 : Ouverture de la première boucle de charge-décharge en contrainte-déformation rationnelles et mesure des différentes contributions pour le TA6V

Dans le cas du TA6V, cet essai apporte moins d'information puisque le matériau ne plastifie pas en retour. Il n'est donc pas possible de distinguer les contributions de la contrainte effective athermique ($\sigma_y + R$) et de la contrainte interne ($\underset{\sim}{\mathbf{X}}$). Cependant, il est possible d'évaluer la contrainte visqueuse estimée aux alentours des 130 MPa. Comme pour

le Ta, nous pourrons voir au paragraphe I.5 la bonne adéquation entre cette valeur et celle obtenue par relaxation.

I.4.2 Evolution du module d'élasticité

Une seconde information importante donnée par les essais de charge-décharge est l'évolution du module d'élasticité avec la déformation plastique. Cette évolution est souvent observée afin de quantifier l'endommagement au sein de l'éprouvette. Initialement proposée par Lemaître et Dufailly (Lemaître et al., 1979), (Dufailly, 1980), cette méthode a souvent été reprise et ceci pour différents matériaux métalliques et composites.

Beaucoup utilisée depuis le début des formulations de lois de comportement présentant un couplage avec l'endommagement, cette méthode de mesure directe de la chute de rigidité est rapide, simple mais nécessite certaines précautions. Il est, bien sûr, nécessaire de réaliser une mesure de déformation la plus précise possible à l'aide d'un extensomètre. La mesure du module d'élasticité la plus précise est réalisée pour la phase de décharge, dans un domaine de contrainte se situant entre 15% et 85% de la contrainte maximale (Lemaître et Dufailly, 1987). En effet, différentes non linéarités sont observées en dehors de ces zones et parfois même au delà, comme nous l'avons vu précédemment. Ceci est dû aux effets combinés de la viscosité, de l'écrouissage ainsi que du pilotage machine.

De plus, les premières décharges peuvent être perturbées par différents phénomènes dont la microplasticité, due au mouvement réversible des dislocations, ou bien à la formation de texture (Ledbetter et Kim, 1988), (Feaugas, 1999b). Le phénomène de microplasticité intervient lorsque la contrainte appliquée reste inférieure à la contrainte nécessaire au passage de la dislocation bloquée par un obstacle. La dislocation se courbe alors puis revient à sa configuration initiale au cours de la décharge (cf. figure I.15). Ces phénomènes peuvent influencer l'évolution du module d'élasticité dans les premiers stades de plasticité.

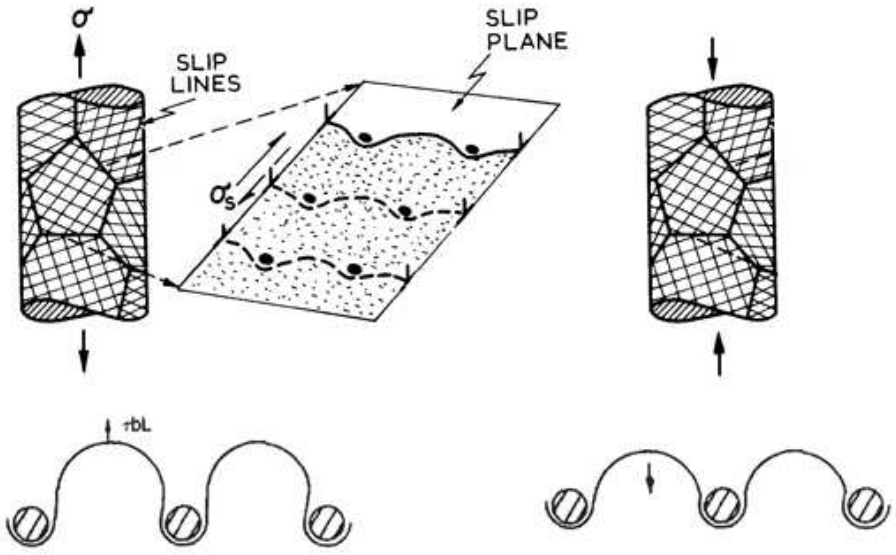


Figure I.15 : Schéma décrivant le phénomène de microplasticité à partir de (Frost et Ashby, 1982)

I.4.2.1 tantale

Concernant le tantale, l'étude est particulièrement délicate à cause de différents paramètres :

- La part thermiquement activée de la contrainte effective est étendue et réduit considérablement la taille du domaine d'élasticité et donc la partie linéaire dont nous cherchons à quantifier la pente.

- L'influence de la texture et de la microplasticité très marquée provoquant une chute importante et rapide du module d'élasticité.

- Une striction très importante rendant hasardeuses les mesures de contrainte et de déformation rationalisées sur une large plage de déformation.

Malgré ces difficultés, il est possible de tracer l'évolution du module d'élasticité pour quelques décharges sur l'ensemble de la plage de déformation du tantale,

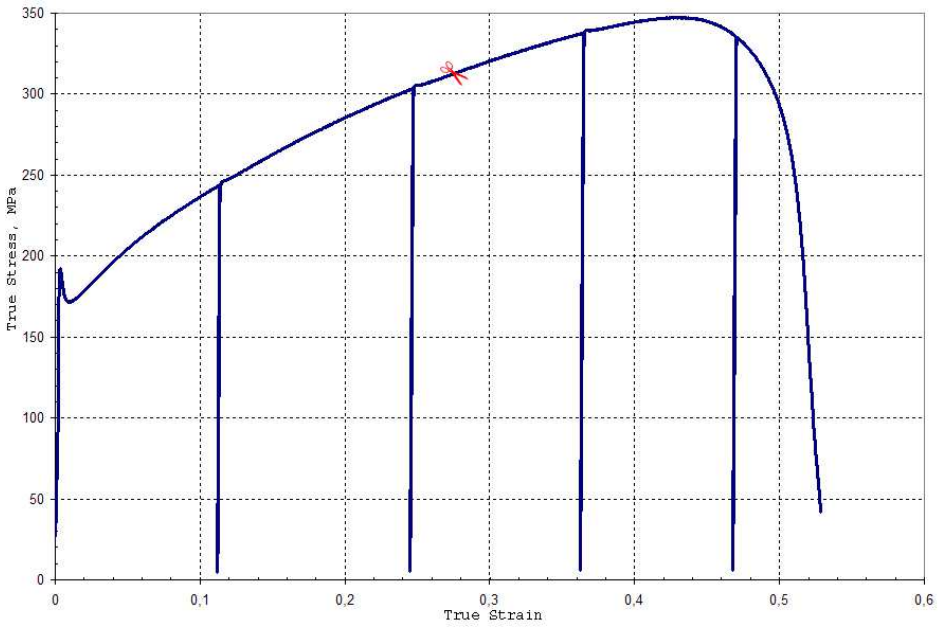


Figure I.16 : Traction uniaxiale avec charge-décharge, contrainte-déformation rationnelles pour le Ta ($\dot{\varepsilon} = 10^{-3}s^{-1}$)

La paire de ciseau symbolise le début de la striction et donc le point à partir duquel la déformation n'est plus homogène. La courbe rationnelle ne devrait donc plus être tracée à partir de ce point.

A titre d'exemple, le tracé permettant la mesure du module d'élasticité à la charge et à la décharge est présenté figure I.17. La mesure des autres boucles est renvoyée en annexe A.2.

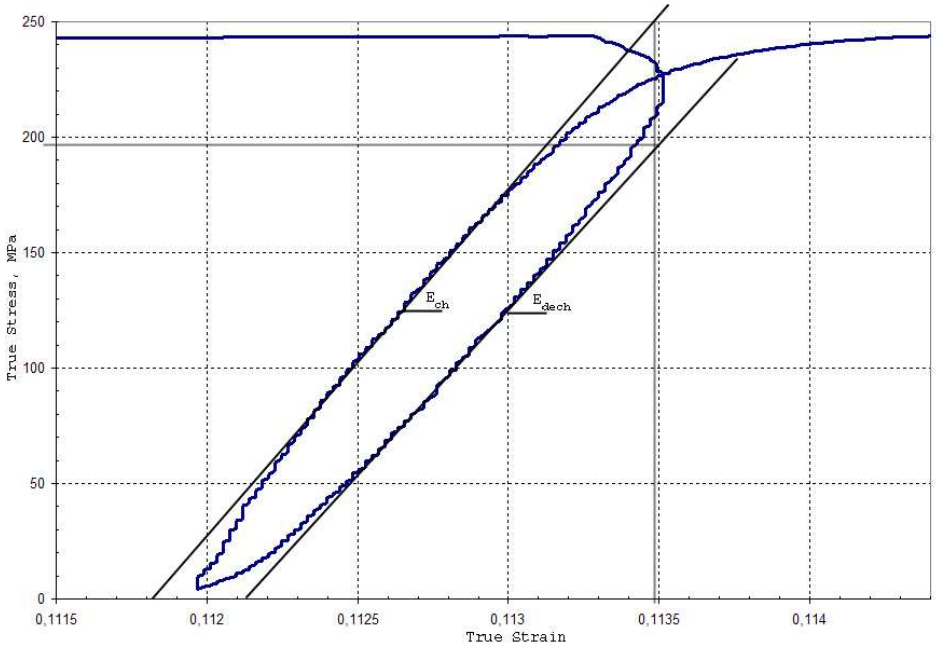


Figure I.17 : Ouverture de boucle à la première décharge, contrainte-déformation rationnelles pour le Ta ($\dot{\varepsilon} = 10^{-3}s^{-1}$)

Il est très délicat de bien discerner la partie linéaire à la charge et à la décharge. Les valeurs varient donc entre le module mesuré pour l'un ou l'autre cas.

Le tableau synthétisant l'évolution du module d'élasticité pour les phases de charge et de décharge des différentes boucles d'hystérésis est donné tableau I.5.

	Boucle 1	Boucle 2	Boucle 3	Boucle 4
E_{dech} (MPa)	142753	125000	133333	127659
E_{ch} (MPa)	148809	137500	140000	137254

Tableau I.5 : Module d'élasticité mesuré au cours des charge-décharge sur Ta

En prenant une valeur initiale du module d'élasticité de 187 GPa et en rationalisant les modules mesurés par cette valeur, on obtient le graphique I.18 montrant l'évolution du module d'élasticité normalisé en fonction de la déformation totale rationnelle.

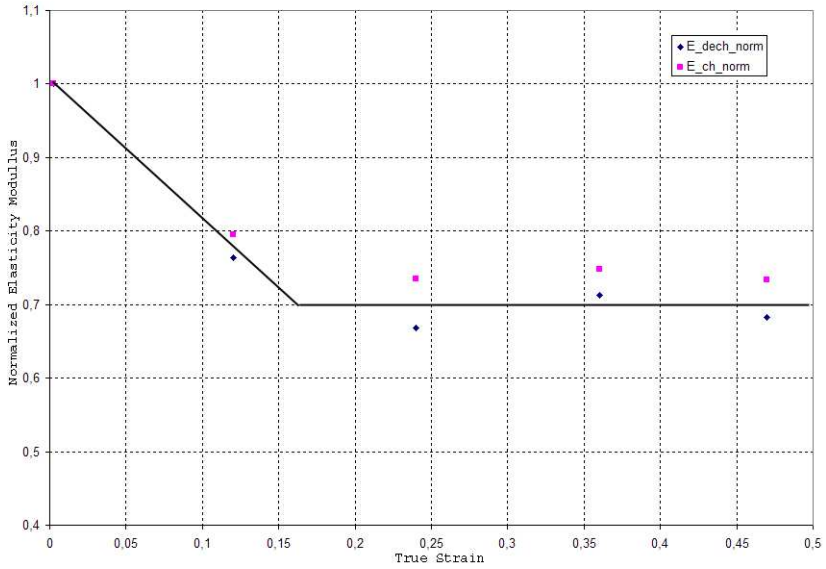


Figure I.18 : Module d'élasticité normalisé en fonction de la déformation rationnelle du Ta

La majeure partie de l'évolution du module d'élasticité a lieu avant la striction puis atteint un plateau au delà montrant la faible influence de l'endommagement sur la quasi totalité de l'étendue de mesure.

I.4.2.2 TA6V

Concernant le TA6V, la mesure du module d'élasticité est plus simple car les phénomènes perturbant dans le Ta, sont inexistant ou beaucoup moins marqués.

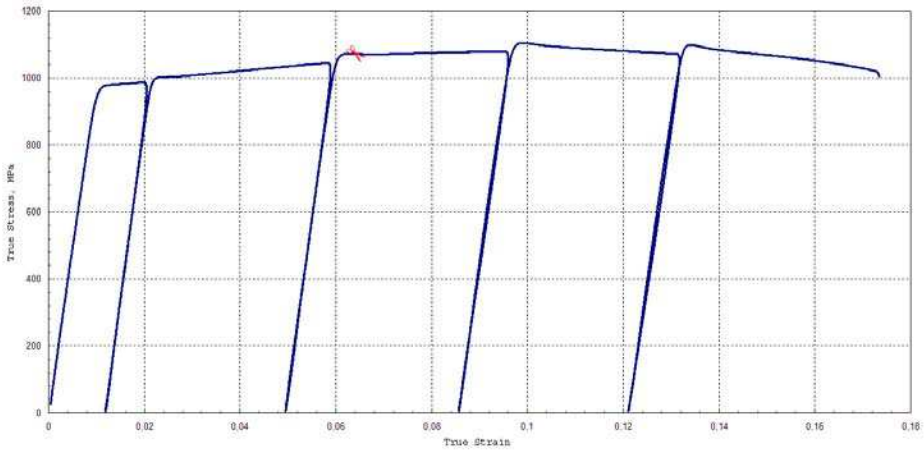


Figure I.19 : Traction uniaxiale avec charge-décharge, contrainte-déformation rationnelles pour le TA6V ($\dot{\varepsilon} = 10^{-3}s^{-1}$)

Remarque :

La paire de ciseaux, symbolisant la striction de l'éprouvette, est positionnée en référence à la courbe monotone.

La courbe I.19 est plus facilement exploitable car les boucles d'hystérésis présentent une partie linéaire beaucoup plus importante,

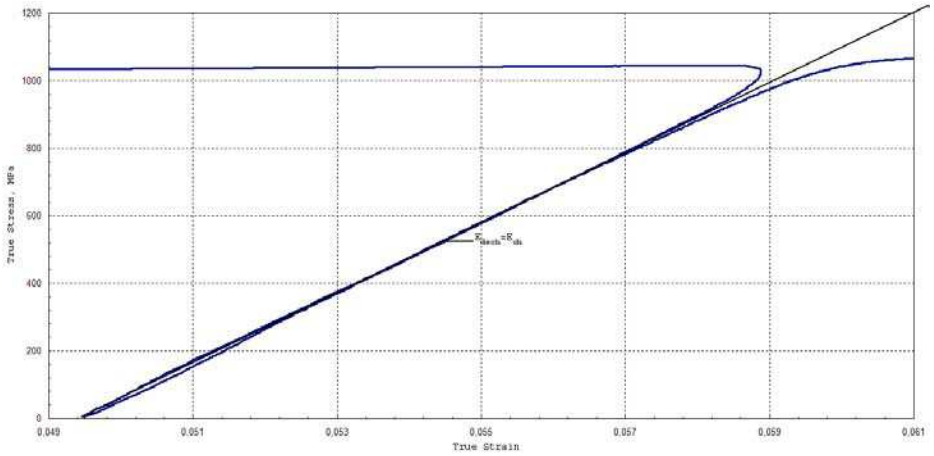


Figure I.20 : Ouverture de boucle à la deuxième décharge, contrainte-déformation rationnelles pour le TA6V ($\dot{\varepsilon} = 10^{-3}s^{-1}$)

L'exploitation des autres boucles est renvoyée en annexe A.2 et fournit le tableau I.6 d'évolution du module d'élasticité au cours des différentes décharges,

	Boucle 1	Boucle 2	Boucle 3	Boucle 4
E_{dech} (MPa)	108108	103438	98360	91603

Tableau I.6 : Module d'élasticité mesuré au cour des charges-décharges sur TA6V

Le module mesuré lors de la phase de charge est identique et n'apparaît donc pas ici.

En rationalisant les mesures de module d'élasticité par celui du matériau initial à 110 GPa, on obtient l'évolution du module d'élasticité normalisé,

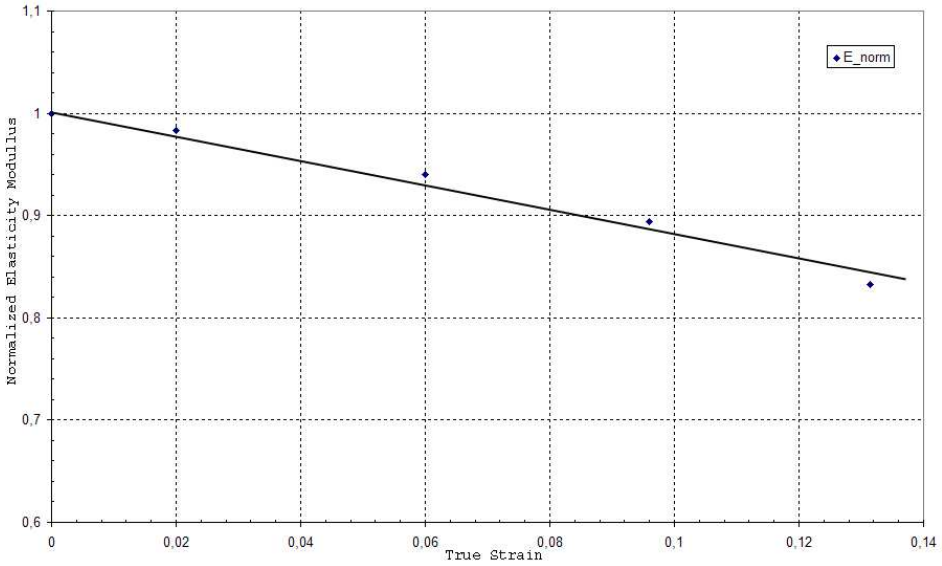


Figure I.21 : Module d'élasticité normalisé en fonction de la déformation rationnelle du TA6V

L'évolution du module d'élasticité normalisé est quasi linéaire sur toute la gamme de déformation.

De ces mesures, il est possible d'estimer directement l'évolution de l'endommagement. En effet, dans le cas de notre formulation, les variables effectives sont définies par équivalence en énergie (cf. paragraphe III.1). On obtient donc,

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2}\frac{\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} : \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}}{\tilde{E}} \\ \tilde{W} &= \frac{1}{2}\frac{\underset{\sim}{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}} : \underset{\sim}{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}}{E} \end{aligned} \tag{I.12}$$

En écrivant l'équivalence en énergie $W = \tilde{W}$, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{E}}{E} &= 1 - D \\ D &= 1 - \frac{\tilde{E}}{E} \end{aligned} \tag{I.13}$$

où les composantes notées $\tilde{.}$ sont les variables effectives.

D'autres techniques d'évaluation de l'endommagement sont envisageables et synthétisées dans (Lemaître et Chaboche, 1985), (Lemaître et Dufailly, 1987), (Lemaître, 1992). Une synthèse des moyens de mesure et de leur qualité est donné tableau I.22,

Damage		Brittle	Ductile	Creep	Low cycle fatigue	High cycle fatigue
Micrography	$D = \frac{\partial S_D}{\partial S}$	*	**	**	*	*
Density	$D = 1 - \left(\frac{\tilde{\rho}}{\rho}\right)^{2/3}$		**	*	*	
Elasticity modulus	$D = 1 - \frac{\tilde{E}}{E}$	**	***	***	***	
Ultrasonic waves	$D = 1 - \frac{\tilde{V}_L^2}{V_L^2}$	***	**	**	*	*
Cyclic stress amplitude	$D = 1 - \frac{\Delta\sigma}{\Delta\sigma^*}$		*	*	**	*
Tertiary creep	$D = 1 - \left(\frac{\dot{\epsilon}_p^*}{\dot{\epsilon}_p}\right)^{1/N}$		*	***	*	
Micro-hardness	$D = 1 - \frac{H}{H^*}$	**	***	**	***	*
Electrical resistance	$D = 1 - \frac{V}{\tilde{V}}$	*	**	**	*	*

Figure I.22 : Synthèse des méthodes de mesure de l'endommagement classées par qualité (nombre d'étoiles) d'après (Lemaître et Dufailly, 1987)

I.5 Essais de relaxation

L'essai le plus classique permettant de mettre en évidence la contrainte visqueuse est l'essai de relaxation. La quantification de la contrainte visqueuse est beaucoup plus précise, par cette méthode, que par celle basée sur les charges-décharges. De plus, un intérêt majeur provient du fait que l'on balaye une large gamme de vitesses de déformation au cours de l'essai jusqu'à atteindre des vitesses très lentes. Cependant, l'essai devient très long pour atteindre la saturation de la contrainte visqueuse et ne donne d'informations qu'en un point de l'espace des déformations.

L'essai de relaxation étant, par définition, réalisé à déformation constante, on obtient les relations suivantes, permettant de lier l'évolution de la contrainte au cours du temps en fonction de la déformation plastique.

$$\begin{aligned}
&\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^e + \dot{\varepsilon}^{vp} \\
&\dot{\sigma} = E\dot{\varepsilon}^e \\
&\text{Or, en relaxation,} \\
&\dot{\varepsilon} = 0 \\
&\text{D'où} \\
&\dot{\varepsilon}^{vp} = -\frac{\dot{\sigma}}{E}
\end{aligned} \tag{I.14}$$

Ainsi, la courbe de relaxation $\sigma(t)$ donne la contrainte et la vitesse de déformation viscoplastique. Durant l'essai, on atteint rapidement des vitesses de déformation viscoplastique très lentes (de l'ordre de $10^{-10}s^{-1}$) permettant d'obtenir une bonne évaluation de la contrainte interne et de la partie athermique de la contrainte effective. Par conséquent, la seule quantité qui évolue en relaxation, en l'absence de phénomène de restauration statique, est la contrainte visqueuse (partie thermiquement activée de la contrainte effective).

I.5.1 tantale

Pour un essai de relaxation sur tantale à une déformation nominale de 10% pendant 3h15 (figure I.23), la contrainte visqueuse a entièrement relaxé et atteint un palier au bout d'1h20 environ,

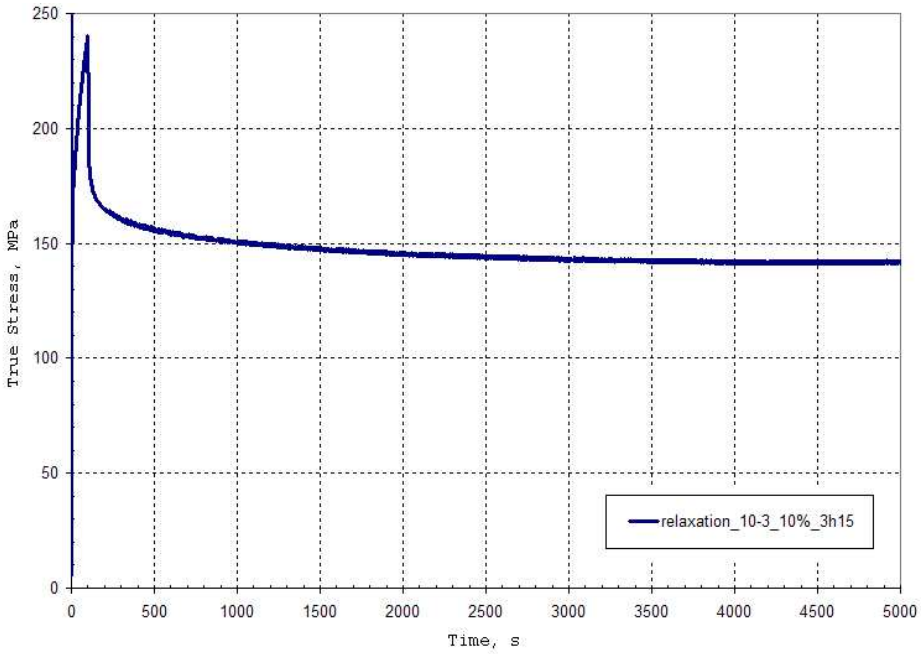


Figure I.23 : Essai de relaxation du Ta à 10% de déformation nominale pendant 3h15 à $\dot{\varepsilon} = 10^{-3}s^{-1}$ de vitesse initiale.

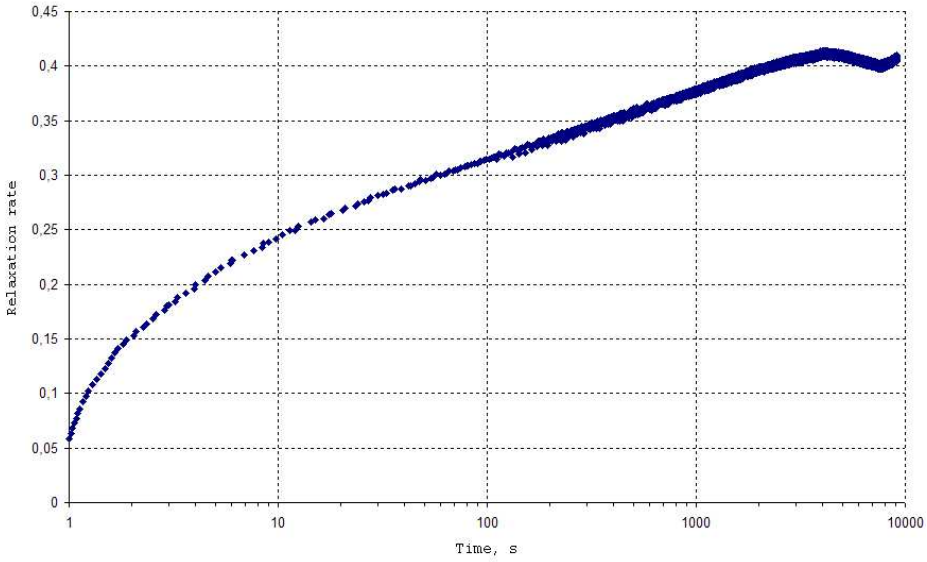


Figure I.24 : Essai de relaxation du Ta à 10% de déformation nominale pendant 3h15 à $\dot{\varepsilon} = 10^{-3}s^{-1}$ de vitesse initiale, mesure du taux de relaxation en fonction du temps (échelle semi-logarithmique).

Il est possible de quantifier un taux de relaxation tel que $\tau = 1 - \frac{\sigma}{\sigma_{init}}$, où σ est la contrainte actuelle et σ_{init} la contrainte au début de la phase de relaxation (cf. figure I.24).

Le taux de relaxation pour le tantale est d'environ 40%, soit une contrainte effective athermique et une contrainte interne de 141 MPa. La valeur de la contrainte visqueuse à $\dot{\varepsilon} = 10^{-3}s^{-1}$ est donc de 97 MPa et confirme la forte viscosité du Ta (la contrainte visqueuse représente environ 40% de la contrainte). Cette valeur de 97 MPa est proche de la valeur estimée de la contrainte visqueuse par charge-décharge (100 MPa, paragraphe I.4) et confirme la pertinence de ces mesures malgré les difficultés expérimentales soulevées.

Un dernier graphique d'exploitation de cet essai permet de comparer l'évolution de la contrainte visqueuse en fonction de la vitesse de déformation viscoplastique obtenue par l'équation I.14,

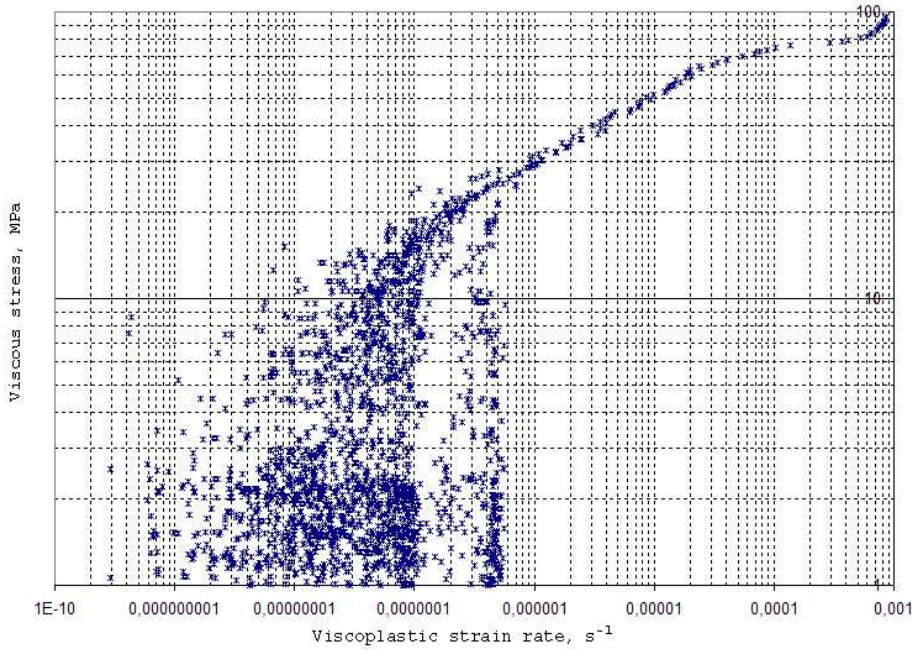


Figure I.25 : Essai de relaxation du Ta à 10% de déformation nominale pendant 3h15 à $\dot{\varepsilon} = 10^{-3}s^{-1}$ de vitesse initiale, mesure de la contrainte visqueuse en fonction de la vitesse de déformation viscoplastique, tracé log-log.

L'évolution chronologique de l'essai conduit à lire le graphique de droite à gauche. Le début de la courbe présente une petite courbure exacerbée par l'échelle logarithmique puis une évolution linéaire jusqu'à $\dot{\varepsilon}^{vp} = 10^{-4}s^{-1}$, une transition de $\dot{\varepsilon}^{vp} = 10^{-4}s^{-1}$ à $\dot{\varepsilon}^{vp} = 3.10^{-5}s^{-1}$ puis une deuxième partie linéaire jusqu'à des valeurs de $\dot{\varepsilon}^{vp}$ de l'ordre de $5.10^{-7}s^{-1}$. La fin de la courbe chute brutalement mais comporte un fort bruit de mesure.

Cette évolution pourrait donc être représentée, au moins en partie, par une viscosité de type Norton à double pentes (Chaboche, 1989) mais aussi, entre autre, par une fonction asinh qui permet une bonne corrélation simulation-expérience sur toute la gamme de vitesse comme nous le verrons au paragraphe V.2.1.1.

I.5.2 TA6V

Concernant le TA6V, la relaxation de la contrainte visqueuse sature en 2h15 environ pour un essai d'une vitesse initiale $\dot{\varepsilon} = 10^{-3}s^{-1}$ à 3% de déformation nominale. Le tracé de la courbe $\sigma(t)$ est donné figure I.26

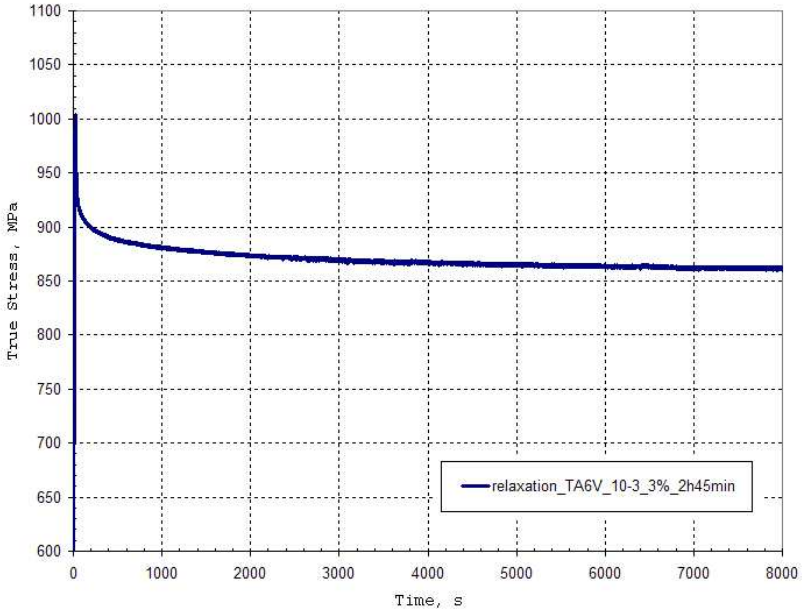


Figure I.26 : Essai de relaxation du TA6V à 3% de déformation nominale pendant 2h45 à $\dot{\varepsilon} = 10^{-3}s^{-1}$ de vitesse initiale.

Il est possible de quantifier un taux de relaxation (cf. figure I.27),

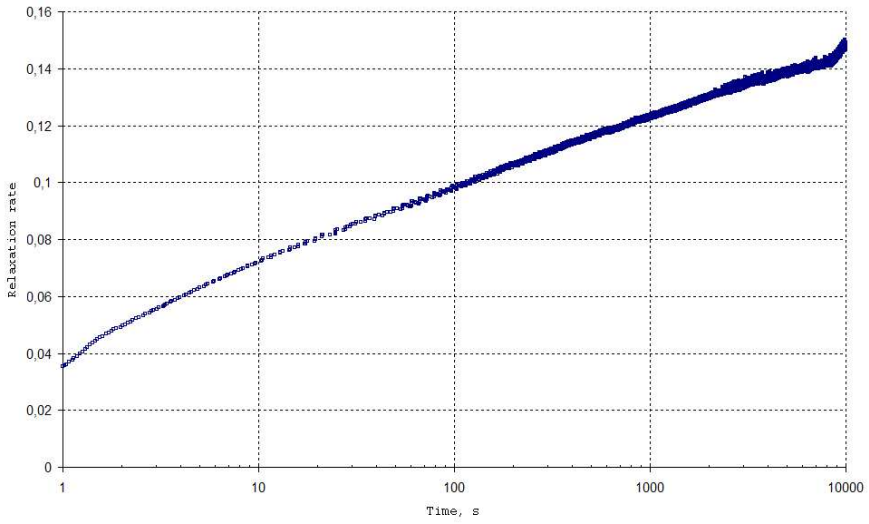


Figure I.27 : Essai de relaxation du TA6V à 3% de déformation nominale pendant 2h45 à $\dot{\varepsilon} = 10^{-3}s^{-1}$ de vitesse initiale, mesure du taux de relaxation en fonction du temps (échelle logarithmique).

La somme de la contrainte effective athermique et de la contrainte interne à 3% de déformation nominale est de 863 MPa, soit une contrainte visqueuse à $\dot{\varepsilon} = 10^{-3}s^{-1}$ de 137 MPa. Cette valeur n'est pas négligeable et correspond à un taux de relaxation d'environ 14% (la contrainte visqueuse représente 14% de la contrainte totale). Notons qu'elle est en bonne accord avec la mesure estimée par charge-décharge à environ 130 MPa.

En traçant la contrainte visqueuse en fonction de la vitesse de déformation viscoplastique, on obtient,

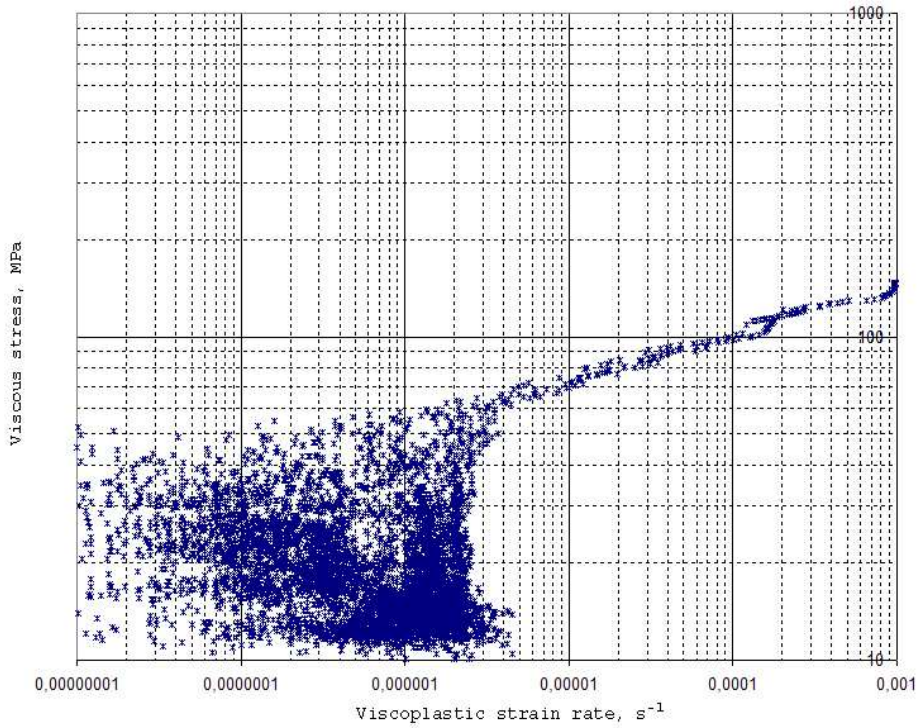


Figure I.28 : Essai de relaxation du TA6V à 3% de déformation nominale pendant 2h45 à $\dot{\varepsilon} = 10^{-3}s^{-1}$, mesure de la contrainte visqueuse en fonction de la vitesse de déformation viscoplastique (échelle log-log).

De $\dot{\varepsilon}^{vp} = 10^{-3}s^{-1}$ à $\dot{\varepsilon}^{vp} = 2.10^{-6}s^{-1}$, l'évolution de la contrainte visqueuse en fonction de la vitesse de déformation viscoplastique est linéaire (en échelle logarithmique), puis de $\dot{\varepsilon}^{vp} = 2.10^{-6}s^{-1}$ à $\dot{\varepsilon}^{vp} = 10^{-8}s^{-1}$, il existe un fort bruit de mesure semblant cependant présenter une rupture de pente.

Il est donc possible d'interpoler linéairement, bilinéairement ou encore à l'aide d'une fonction asinh. Ce dernier choix sera privilégié afin d'uniformiser la description de la viscosité du Ta et du TA6V.

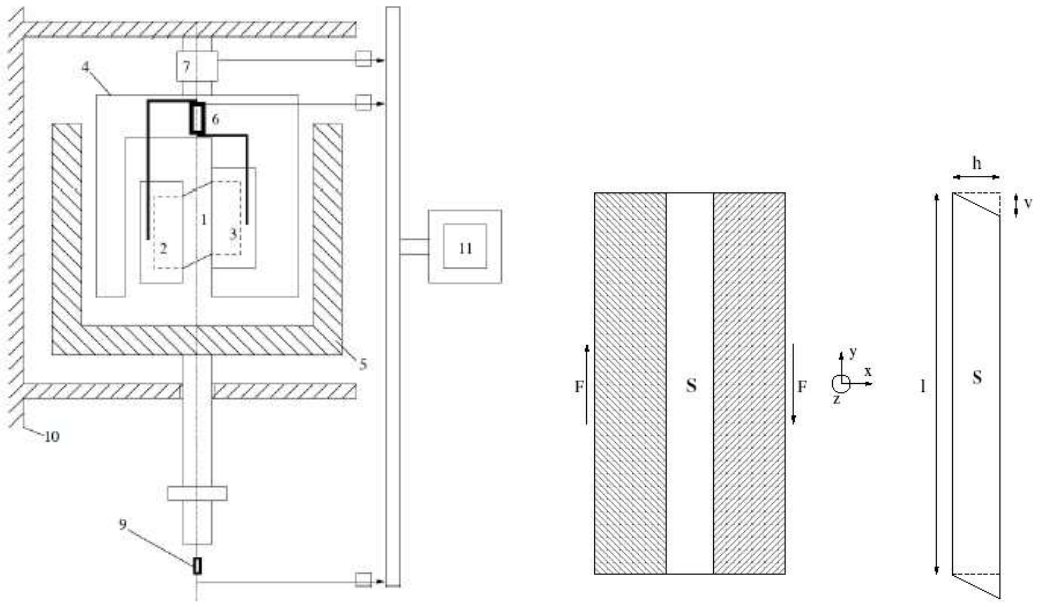
I.6 Essais de cisaillement cyclique

I.6.1 Courbes de durcissement/adoucissement cyclique

Les essais de charge-décharge (paragraphe I.4) donnent une première information sur la partition entre l'écrouissage cinématique et l'écrouissage isotrope si, par chance, le matériau plastifie à la décharge (cas du Ta). Si tel n'est pas le cas (TA6V), il est nécessaire de réaliser de réels essais alternés traction-compression. On s'expose alors à une difficulté majeure, celle du flambage qui ne peut être résolue que par une géométrie d'éprouvette adaptée (souvent cylindrique de section suffisamment importante).

Notre approvisionnement matière sous forme de tôle ne permettant pas la réalisation de ces éprouvettes, nous décidons de réaliser des essais de cisaillement cyclique dont la géométrie d'éprouvette est donnée en annexe A.1.

Les essais de cisaillement cyclique ont été menés au LPMTM de l'Université Paris 13. Ces essais sont pilotés à l'aide d'une mesure optique de l'angle de cisaillement (Genevois et al., 1990), (Gaspérini et al., 1996), (Gallée, 2005), (Bouvier et al., 2006a), (Bouvier et al., 2006b) (Makarova, 2006) tandis qu'un capteur de force permet d'obtenir une mesure de la contrainte de cisaillement.



(a) (b)

Figure I.29 : Schéma du dispositif de cisaillement (a) Outillage de cisaillement simple, (b) Partie utile de l'éprouvette de cisaillement d'après (Gallée, 2005)

Pour un critère isotrope de von-Mises, les mesures de contrainte et déformation équivalentes sont données par l'équation I.16.

$$\sigma_{eq} = \tau\sqrt{3} \tag{I.15}$$

$$\epsilon_{eq} = \frac{\gamma}{\sqrt{3}} \tag{I.16}$$

Ainsi, pour obtenir une vitesse de déformation équivalente $\dot{\varepsilon}_{eq} = 10^{-3}s^{-1}$, il est nécessaire

de solliciter à une vitesse de cisaillement de $\dot{\gamma} = 1.73\ 10^{-3}s^{-1}$.

Ce type d'essai est bien sûr très intéressant puisqu'il permet de solliciter cycliquement nos tôles et va donc permettre de caractériser le durcissement ou l'adoucissement cyclique ainsi que de déterminer la partition écrouissage cinématique, écrouissage isotrope. De plus, une sollicitation en cisaillement permet de varier le type de sollicitation (à la différence d'un essai cyclique en traction-compression), et ainsi obtenir une information complémentaire sur l'étude de l'anisotropie des matériaux en comparant les essais de traction et de cisaillement réalisés dans la même direction de laminage. Enfin, cet essai permet d'atteindre de très grandes déformations en conservant une sollicitation homogène dans la partie utile (Rauch et G'Sell, 1989), (Genevois et al., 1990), (Rauch, 1998), (Bouvier et al., 2006a), (Bouvier et al., 2006b), (Haddadi et al., 2006).

I.6.1.1 tantale

Concernant le tantale, les éprouvettes ont été prélevées dans la direction longitudinale de la tôle et sont sollicitées à une vitesse de déformations équivalentes de $\dot{\varepsilon}_{eq} = 10^{-3}s^{-1}$. Le cisaillement est alterné sur une gamme de déformation équivalente de +/- 5.2% (+/- 9% de déformation de cisaillement) figure I.30,

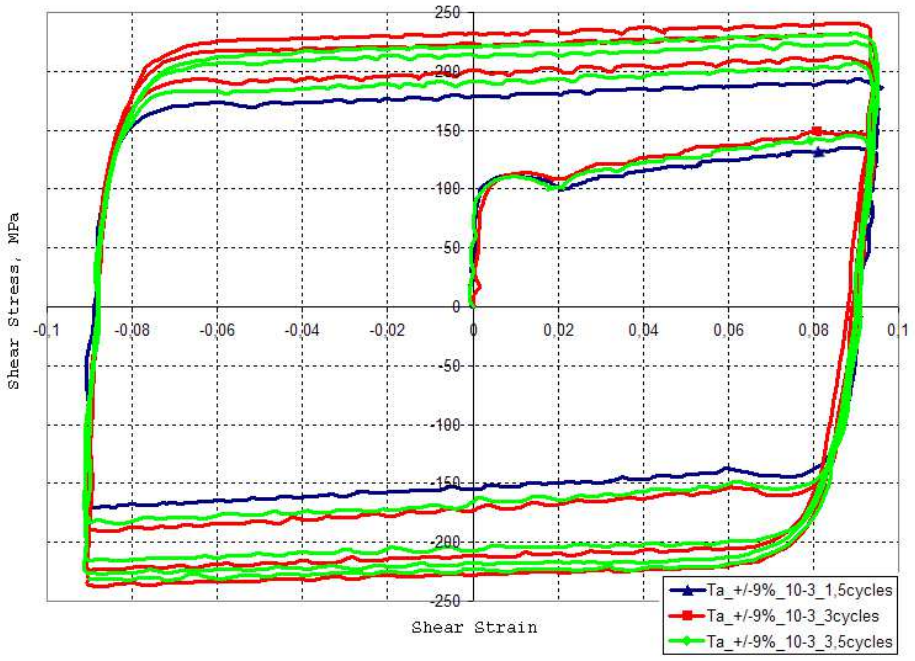


Figure I.30 : Essai de cisaillement cyclique du Ta à +/- 9% de déformation de cisaillement. Superposition de trois courbes pour 1.5, 3 et 3.5 cycles.

Il existe une dispersion dans les résultats d'essais sur trois éprouvettes soumises au même chargement. Nous gardons la courbe moyenne, qui est aussi celle dont le nombre de cycles est le plus important (figure I.31),

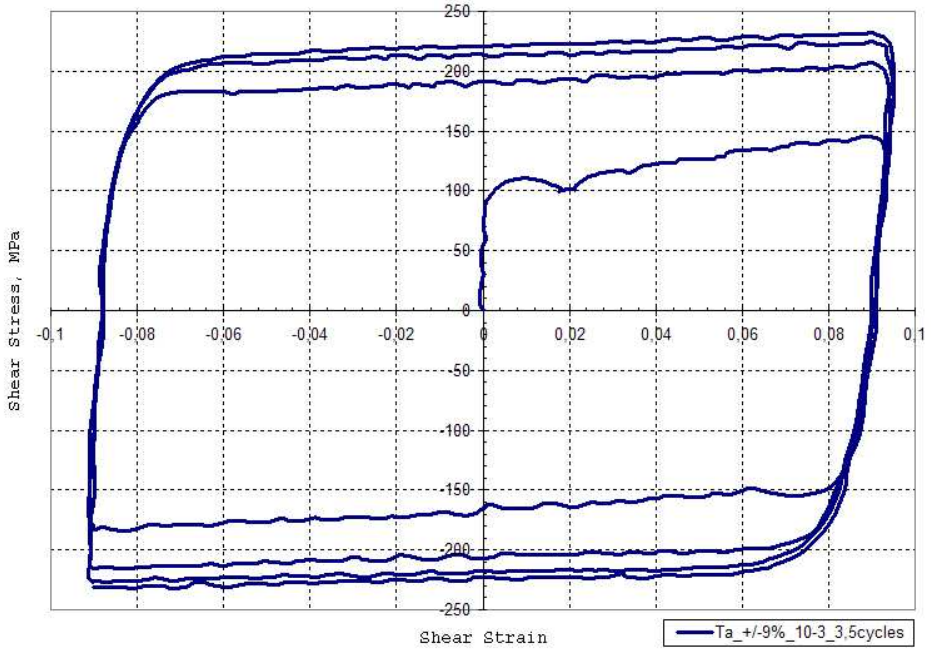


Figure I.31 : Essai de cisaillement cyclique du Ta à +/- 9% de déformation de cisaillement.

Le nombre de cycles est limité par les conditions d'acquisition machine ainsi que par les conditions d'amarrage de l'éprouvette de cisaillement (glissement dans les mors, localisation de la déformation près des mors...). Cependant, ces 3.5 cycles permettent d'être très proche du cycle stabilisé tracé figure I.32,

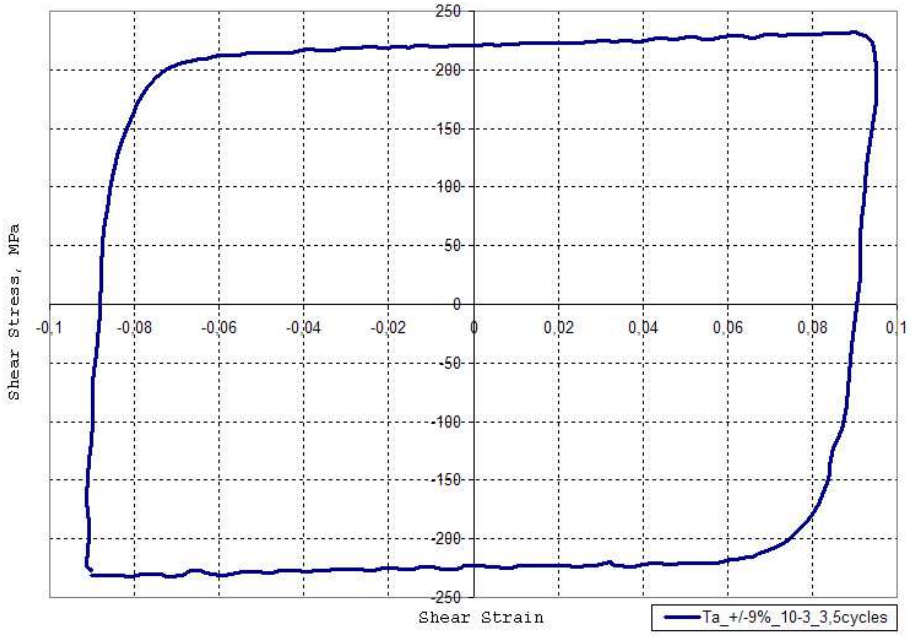


Figure I.32 : Essai de cisaillement cyclique du Ta à +/- 9% de déformation, tracé du cycle stabilisé

Une analyse rapide de la courbe I.31 permet de voir le durcissement cyclique notable du

Ta. On note la présence du pic de Piobert-Lüders jusqu'à 2% de déformation. Celui ci, à la différence de celui observé en traction, est beaucoup plus étalé. On observe donc l'influence de la géométrie de l'éprouvette et du trajet de chargement sur la formation de ce pic. L'inversion du trajet de chargement donne lieu à un nouveau pic en compression mais d'amplitude plus faible.

L'évolution du durcissement cyclique en cisaillement ξ en fonction de la déformation plastique cumulée peut être rendue par le calcul de,

$$\xi = \left[\frac{\Delta\tau}{2}\right]_N - \left[\frac{\Delta\tau}{2}\right]_0 \tag{I.17}$$

où N et 0 font respectivement références au N^{ime} et premier cycle. τ est la contrainte de cisaillement.

On obtient alors la figure I.33,

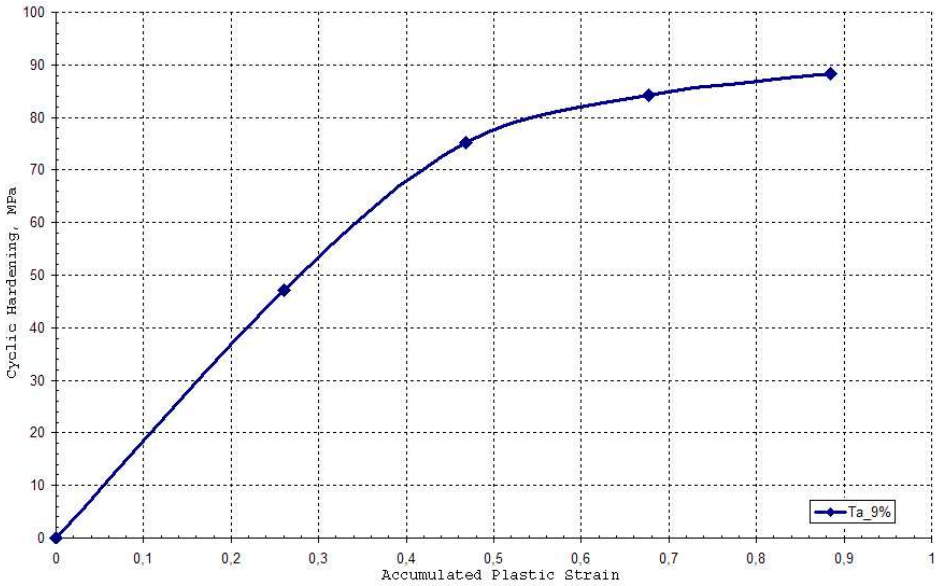


Figure I.33 : Essai de cisaillement cyclique du Ta à +/- 9% de déformation, évolution du durcissement cyclique en cisaillement en fonction de la déformation plastique cumulée.

Si l'évolution de l'écrouissage isotrope est quasi linéaire entre 0 et 20% de déformation plastique cumulée, il est possible d'estimer la partie athermique (σ_y+R) de la contrainte effective à 12% afin de la comparer aux résultats du paragraphe I.4. D'après le graphique I.33, la partie athermique de la contrainte de cisaillement effective vaut environ 22 MPa à 12%, soit une contrainte équivalente de 38 MPa. Cette valeur correspond bien à celle estimée par charge-décharge à partir de la figure I.12.

I.6.1.2 TA6V

De même que pour le Ta, des essais de cisaillement cyclique ont été réalisés sur le TA6V. Le chargement est réalisé à une vitesse de déformation équivalente de $\dot{\varepsilon}_{eq} = 10^{-3}s^{-1}$ et

alterné sur une gamme de déformation équivalente de +/- 5.2% (+/- 9% de déformation de cisaillement) figure I.34,

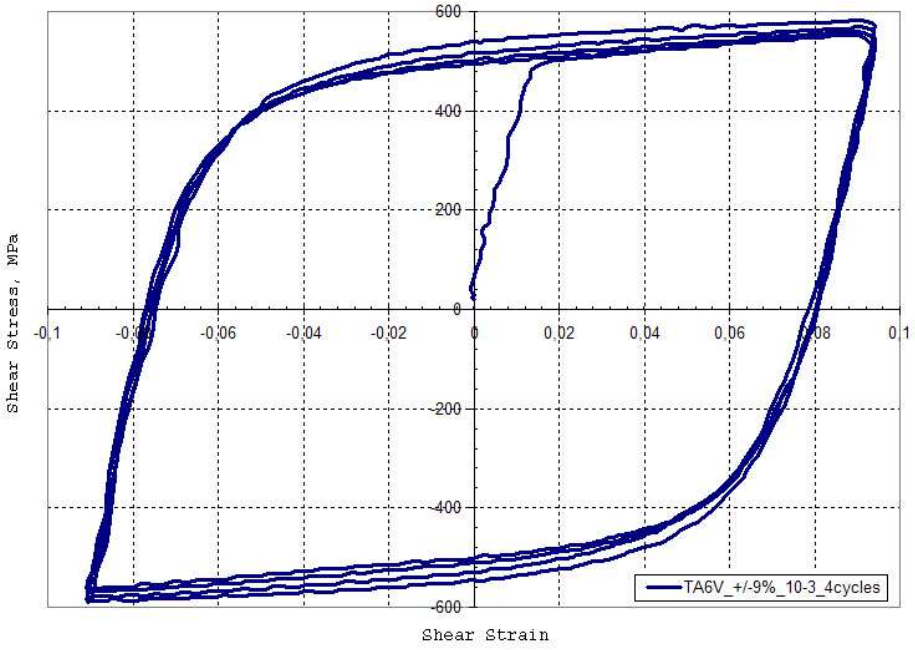


Figure I.34 : Essai de cisaillement cyclique du TA6V à +/- 9% de déformation.

En zoomant sur la zone de changement de direction de sollicitation (partie positive), il est possible de voir un faible adoucissement cyclique du TA6V (cf. figure I.35). Les points rouges correspondent à la courbe de mise en charge initiale puis les numéros faisant référence aux n cycles complets.

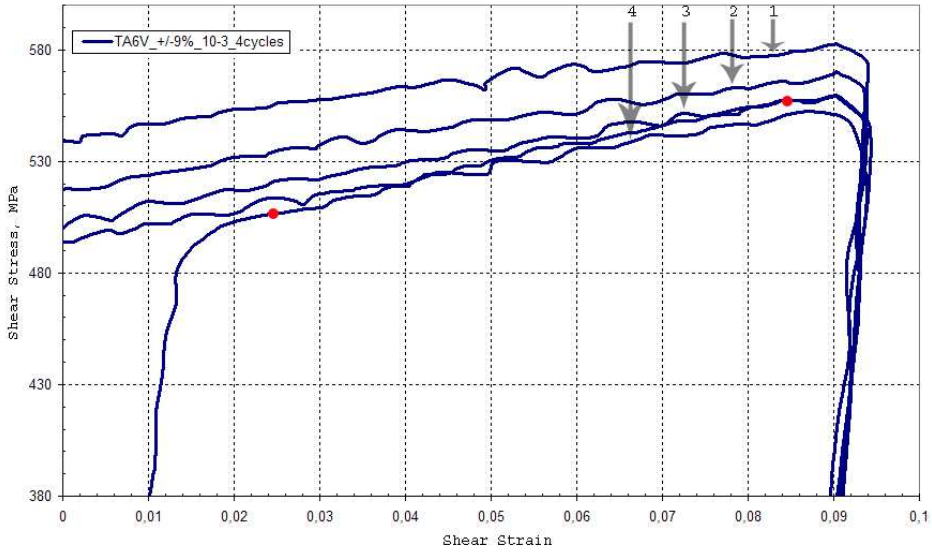


Figure I.35 : Essai de cisaillement cyclique du TA6V à +/- 9% de déformation, mise en avant de l'adoucissement cyclique.

Il y a donc d'abord durcissement puis adoucissement cyclique, la première phase de charge se trouvant en dessous du premier cycle complet. Cet effet se répète sur les trois autres éprouvettes sollicitées et semble être un réel effet matériau.

Le cycle "stabilisé" peut être tracé figure I.36,

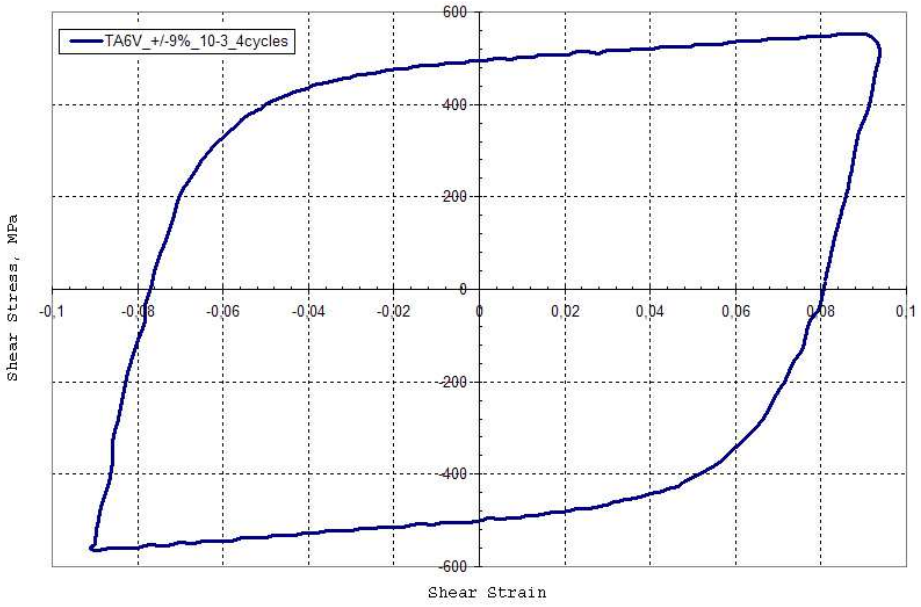


Figure I.36 : Essai de cisaillement cyclique du TA6V à +/- 9% de déformation, tracé du cycle stabilisé.

Finalement, l'évolution du durcissement cyclique est tracé à partir de l'équation I.17 et prend l'allure donnée en figure I.37,

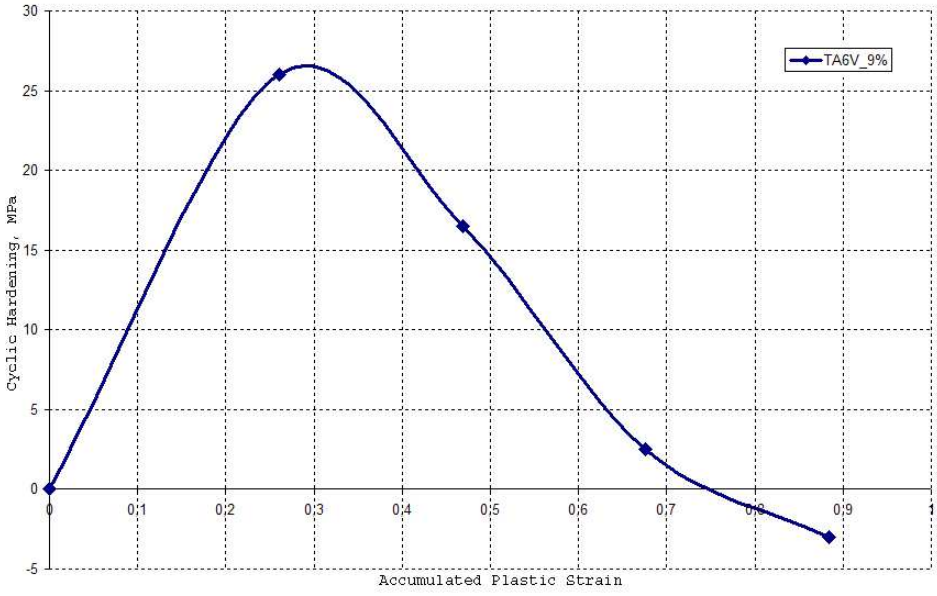


Figure I.37 : Essai de cisaillement cyclique du TA6V à +/- 9% de déformation, évolution de l'adoucissement cyclique en fonction de la déformation plastique cumulée.

L'adoucissement cyclique est de l'ordre de 25 MPa, soit environ 4.5% ce qui reste relativement faible.

I.6.2 Courbes de consolidation cyclique, méthode à une éprouvette par niveau

Cette méthode nécessite de réaliser le même type d'essai qu'au chapitre précédent mais pour différentes amplitudes de déformation. Cette amplitude reste constante et la méthode nécessite donc une éprouvette par niveau d'amplitude afin d'établir la courbe représentant les valeurs maximales en contrainte des points du cycle stabilisé. Ce type d'essai conduit à un nombre important d'éprouvettes pour n'obtenir que quelques points de la courbe de consolidation cyclique. Trois amplitudes de déformation ont été testées pour nos deux matériaux, soit une vingtaine d'éprouvettes (essais triplés) pour obtenir deux courbes de consolidation à trois points. La vitesse de sollicitation reste constante à une valeur de vitesse déformation équivalente de $\dot{\varepsilon}_{eq} = 10^{-3}s^{-1}$.

I.6.2.1 tantale

Les courbes de cisaillement cyclique pour trois amplitudes de déformation pour le Ta sont présentées figure I.38

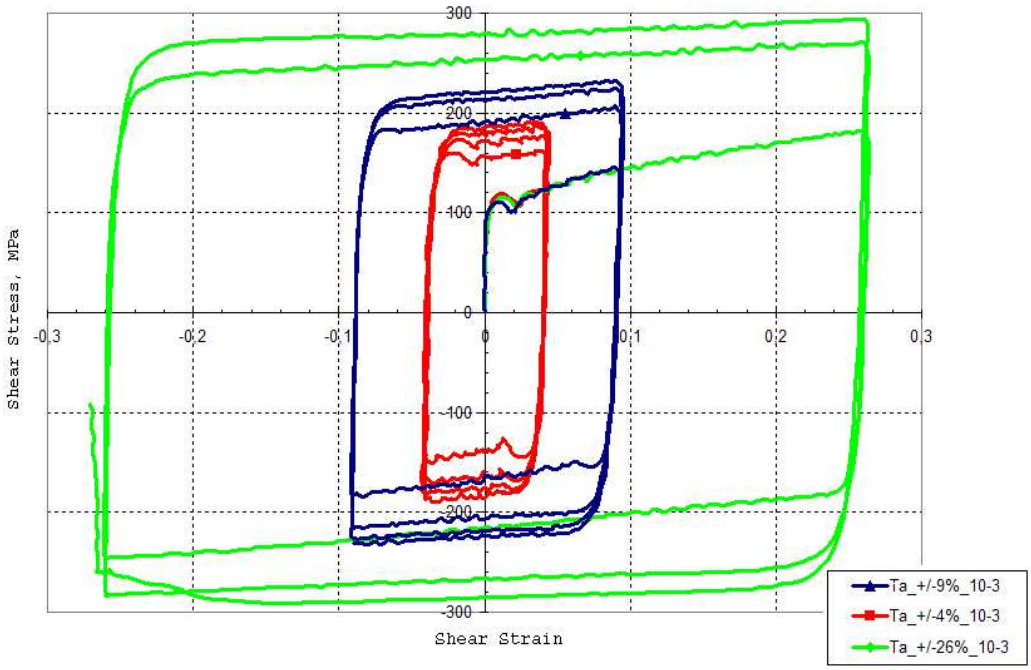


Figure I.38 : Essai de cisaillement cyclique du Ta à +/- 4%, +/- 9%, +/- 26% de déformation.

Notons que l'on atteint la rupture de l'éprouvette pour l'essai à 26% d'amplitude de déformation. Cette rupture intervient au centre de l'éprouvette de cisaillement pour une déformation équivalente d'environ 165%.

En comparant la courbe de cisaillement monotone, obtenue pour le premier quart de cycle de l'essai à 26% d'amplitude de déformation, à la courbe de consolidation cyclique, on obtient le tracé de la figure I.39.

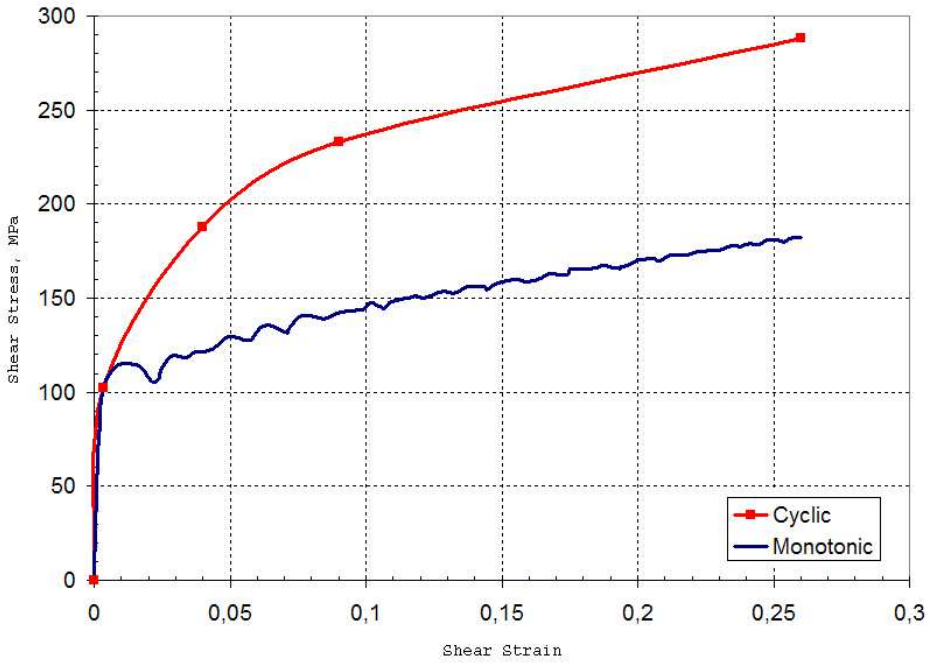


Figure I.39 : Comparaison de la courbe de consolidation cyclique et de la courbe monotone en cisaillement sur Ta.

Cette différence entre la courbe monotone et la courbe de consolidation cyclique s'explique par un effet de mémoire de l'écrouissage. En effet, le durcissement cyclique est d'autant plus important que l'amplitude de déformation imposée est plus grande. Il existe donc une dépendance entre l'écrouissage isotrope et l'amplitude de déformation imposée. Pour modéliser cet effet, il est donc nécessaire d'introduire une nouvelle variable d'état gardant mémoire de la déformation maximale déjà "vue" par le matériau (Nouailhas et al., 1984), (Nouailhas et al., 1985a), (Nouailhas et al., 1985b), (Nouailhas, 1989), (Chaboche et al., 1979), (Chaboche, 1986), (Ohno, 1982), (Ohno et al., 1998a), (Ohno et al., 1998b).

I.6.2.2 TA6V

De la même façon, pour le TA6V, on réalise trois types d'essais aux amplitudes de déformation +/- 2%, +/- 6%, +/- 9% afin d'obtenir la courbe de consolidation figure I.41

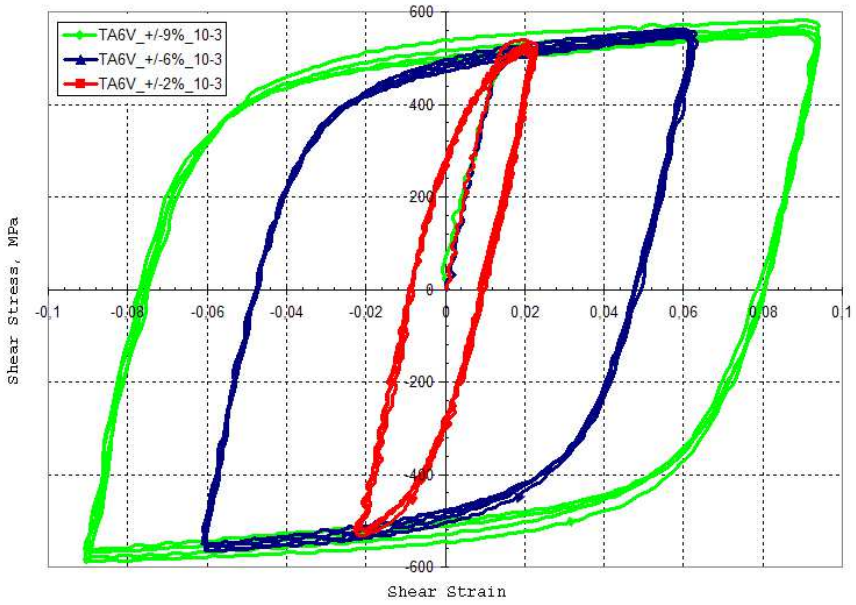


Figure I.40 : Essai de cisaillement cyclique du TA6V à +/- 2%, +/- 6%, +/- 9% de déformation

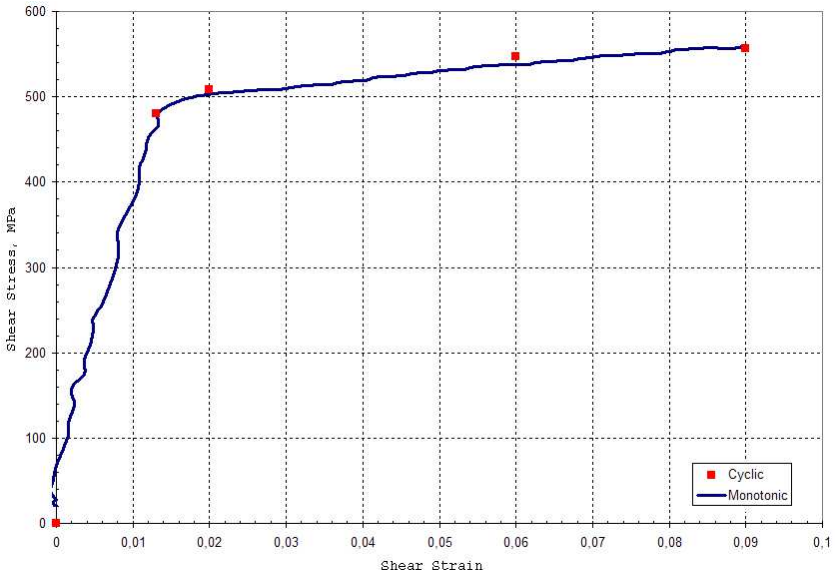


Figure I.41 : Comparaison de la courbe de consolidation cyclique et de la courbe monotone en cisaillement sur TA6V

A la différence du Ta, le TA6V ne présente pas d'influence de l'histoire de chargement. L'adoucissement étant faible, les deux courbes, monotone et de consolidation cyclique, sont confondues.

En conclusion

Différentes caractérisations mécaniques des matériaux de base, tantale et TA6V, ont été réalisées. Ces caractérisations expérimentales se résument à :

- *des essais de traction uniaxiale à différentes vitesses afin de caractériser leur sensibilité à la vitesse de déformation ainsi que l'évolution de la contrainte visqueuse sur toute la gamme de déformation.*

  Le Ta présente une forte sensibilité à la vitesse et celle-ci évolue avec la déformation plastique. Le TA6V possède, quant à lui, une contrainte visqueuse notable à l'ambiante.

- *des essais de traction uniaxiale dans les trois directions du plan mettant en avant l'anisotropie de la tôle de Ta à 45°.*

- *des essais de charge-décharge permettant d'identifier les différentes contributions des parties athermique (limite d'élasticité et écrouissage isotrope) et thermiquement activée (contrainte visqueuse) de la contrainte effective ainsi que de la contrainte interne (écrouissage cinématique).*

  L'évolution du module d'élasticité au cours de l'essai est quantifiée et présente une influence majeure de la microplasticité dans les premiers pourcents de déformation. Cette évolution est ensuite stable montrant l'absence d'endommagement jusqu'à striction ultime (Roy, 2003). Le module de TA6V décroît linéairement jusqu'à rupture, synonyme d'une évolution de la surface effective et donc de la croissance de cavités.

- *des essais de relaxation permettant de quantifier exactement la contrainte visqueuse. Les estimations provenant de l'exploitation des essais de charge-décharge sont en bon accord avec les valeurs obtenues par relaxation, à savoir 97 MPa pour le Ta et 137 MPa pour le TA6V.*

- *des essais de cisaillement cyclique caractérisant le durcissement cyclique notable du Ta et l'adoucissement cyclique léger du TA6V.*

  L'ajout d'essais à différentes amplitudes de déformation montre la forte influence de l'histoire du chargement du Ta. L'effet de mémoire de l'écrouissage est mis en évidence par le tracé des courbes de consolidation cyclique pour les deux matériaux.

Chapitre -II-

Caractérisation sur joint soudé

Sommaire

II.1 Réalisation de liaisons soudées hétérogènes par soudage laser . . 45
II.1.1 Soudage et paramétrie 45
II.1.2 Nos matériaux face au soudage 47
II.1.2.1 Le Ta 47
II.1.2.2 Le TA6V 47
II.2 Identification des phases au sein de la Z.F 53
II.2.1 Identification de phase par Diffraction des rayons X 53
II.2.1.1 Introduction et conditions expérimentales 53
II.2.1.2 Diffractogramme des différents matériaux 54
II.2.2 M.E.T 57
II.3 Problématique expérimentale de caractérisation 59
II.4 Essais de flexion quatre points 63
II.4.1 Réponse des matériaux de base 63
II.4.2 Réponse de la liaison soudée 64
II.4.2.1 Etude de la paramétrie G2 64
II.4.2.2 Analyse de la déformation locale, paramétrie G2 69
II.4.2.3 Fractographie 83
II.4.3 Confrontation des différentes paramétries 86
II.4.3.1 Paramétrie G3 86
II.4.3.2 Paramétrie G4-5-6 95
II.5 Essais d'indentation 99
II.5.1 Essais de nanoindentation 99
II.5.1.1 Généralités 99
II.5.1.2 Réponse de la paramétrie G2 101
II.5.2 Oscillations de dureté et de module dans la Zone fondue 107
II.5.2.1 Etude comparative sur les liaisons soudées Ta/TA6V . . . 107
II.5.2.2 Etude comparative sur des composés Ta-Ti 109
II.5.3 Confrontation des différentes paramétries 113

II.5.3.1 Paramétrie G3 113
II.5.3.2 Paramétries G4-5-6 116
II.6 Essais de traction longitudinale 120
II.6.1 Introduction 120
II.6.2 Réponse globale 121
II.6.3 Réponse locale 124
II.6.3.1 Lithographie 124
II.6.3.2 Algorithme de traitement et repérage 126
II.6.3.3 Estimation de l'erreur 130
II.6.3.4 Mesures de déformations locales in-situ 130

II.1 Réalisation de liaisons soudées hétérogènes par soudage laser

II.1.1 Soudage et paramétrie

Le soudage laser est un procédé à haute densité d'énergie caractérisé par un dépôt d'énergie important au point d'impact et permettant de réaliser une jonction sans métal d'apport. Il existe différentes sources de laser dont le Laser YAG Impulsionnel et le Laser YAG Continu (L.Y.I et L.Y.C). Le premier est un laser pulsé caractérisé par une fréquence et un pas d'avance tandis que l'autre est, comme son nom l'indique, un procédé continu caractérisé par une vitesse d'avance. D'autres paramètres rentrent évidemment en compte et sont bien résumés par le schéma figure II.1.

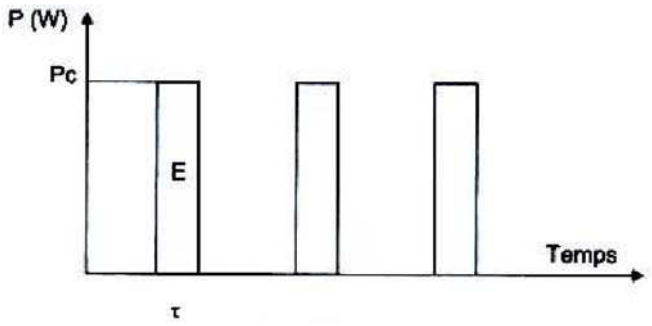


Figure II.1 : Schéma du régime de fonctionnement d'un L.Y.I d'après (Blondeau et Collectif, 2001)

Les paramètres décrivant le régime de fonctionnement du L.Y.I sont :

- la puissance crête : $P_c = \frac{E}{\tau}$ (kW)
- la puissance moyenne : P_m = E.f (kW)
- la durée d'interaction : τ (ms)
- l'énergie par impulsion : E (J)
- la fréquence de pulsation : f (Hz)

Les autres paramètres définissent l'évolution et le positionnement du laser :

- le pas d'avance : p (mm)
- la focalisation : foc (mm) définissant la position du point focal par rapport à la surface de la pièce
- le déport : dép (mm) définissant la position du point focal par rapport au plan de joint
- l'angle d'inclinaison : θ (°)

Les soudages sont réalisés bord à bord et le plan de joint est donc défini par les faces en contact. La paramétrie ne fait pas tout et le matériel employé est très important. Il faut en fait garantir un dépôt d'énergie (Retamel, 2007). L'interaction laser/matière est aussi

un facteur essentiel et la réflectivité des matériaux peut être étudiée en utilisant une sphère intégrante (Xhaard, 2006).

Les différentes paramétries employées au cours de cette thèse sont synthétisées dans le tableau II.1 et le schéma de principe du soudage laser est présenté figure II.2.

Paramétries	G1	G2	G3	G4	G5	G6
Mode de fonctionnement	LYC	LYI	LYI	LYI	LYI	LYI
Puissance crête, P_c (kW)	1.5	2.8	1.4	2.13	2.4	2.53
Vitesse, v ($m.min^{-1}$)	1.5	-	-	-	-	-
Fréquence, f (Hz)	-	1.	10.	5.	5.	5.
Pas d'avance, p (mm)	-	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2
Durée d'interaction, τ (ms)	-	10.	15.	15.	15.	15.
Focalisation, foc (mm)	0.	+2.5	+1.	0.	0.	0.
Déport côté Ta, dép (mm)	0.2	0.2	0.1	0.1	0.1	0.1
Angle d'inclinaison vers le TA6V θ (°)	15.	15.	15.	5.	15.	22.

Tableau II.1 : Paramétries utilisées

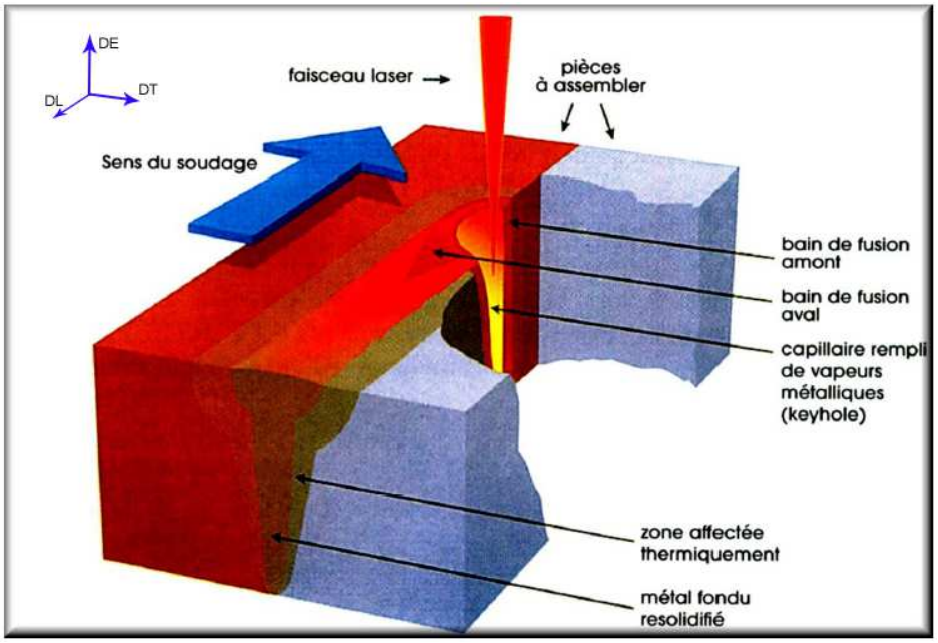


Figure II.2 : Schéma de principe du soudage laser et repère utilisé.

Le repère de la figure II.2 sera utilisé tout au long de ce manuscrit et désigne respectivement les directions longitudinale, transverse et dans l'épaisseur par rapport au sens de la passe. Les caractéristiques morphologiques majeures de la jonction obtenue sont désignées, sur la figure II.2 :

- keyhole ou Zone Fondue (Z.F), qui est la zone de matière ayant dépassée sa température de fusion et qui donnera la jonction proprement dite après refroidissement

- la Zone Affectée Thermiquement (Z.A.T), qui est une zone adjacente au keyhole mais n'ayant pas été portée à fusion. Cette Z.A.T dépend donc fortement du matériau et du procédé.

Les procédés laser sont des procédés à grande vitesse de soudage qui entrainent des cinétiques de chauffe et de refroidissement très rapide (de l'ordre de $10^4 C.s^{-1}$ au chauffage et $10^3 C.s^{-1}$ au refroidissement). La Z.A.T est généralement assez peu étendue et les distorsions liées au soudage sont faibles.

Le succès de la réalisation et de la tenue mécanique d'une liaison se définit à travers deux concepts (Murry, 1994) :

- la soudabilité opératoire : concernant la réalisation proprement dite et la maîtrise de la paramétrie.
- la soudabilité métallurgique : concernant le comportement de cette liaison et la tenue en service.

Nous nous intéressons plus particulièrement à ce second concept où les cycles thermiques "vus" par les matériaux sont d'une importance majeure et dont l'influence est détaillée dans le paragraphe II.1.2

II.1.2 Nos matériaux face au soudage

La soudabilité opératoire des liaisons Ta/TA6V est difficile puisque les propriétés thermiques des deux matériaux (tableau II.2) ne facilitent pas la formation d'une liaison correcte.

Propriétés thermiques	Ta	TA6V
Température de fusion T_f, K	3269	1923
Conductivité thermique λ, W/mK à 293 K	69.5	7.1

Tableau II.2 : Température de fusion et conductivité thermique des deux matériaux.

Le Ta fond difficilement et conduit facilement la chaleur, la réalisation des soudures nécessite donc un décalage du faisceau côté Ta. Le retour d'expérience sur la réalisation de ces liaisons au centre de Valduc est important et nous traiterons, par la suite, les problématiques de soudabilité métallurgique. Pour cela, nous présentons les matériaux de l'étude et l'influence des cycles thermiques sur les phases cristallographiques en présence.

II.1.2.1 Le Ta

Le Ta ne subit pas de transformation de phase suite à un traitement thermique, que les cinétiques soient lentes ou rapides. Il est initialement cubique centré (C.C) et le reste donc au sein de la Z.F. Par contre, sa présence conditionne fortement la présence de certaines phases du Ti.

II.1.2.2 Le TA6V

Les alliages de titane TA6V sont des alliages composés de 4% d'Al et 6% de V. Au sein du TA6V, le Ti peut se présenter sous la forme de deux variétés allotropiques α et β dont les structures cristallines sont respectivement hexagonale compacte (H.C) et cubique centrée

(C.C). Cet alliage est biphasé mais toutefois majoritairement α. La température de transus β (T_β), i.e provoquant la transition de la phase α en phase β, dépend fortement des éléments d'alliage et vaut théoriquement 882°C pour le Ti pur. La propension à stabiliser la phase α ou β, i.e à déplacer T_β, peut être évaluée en considérant le nombre n d'électrons de valence par atome de l'élément considéré. Ainsi, les éléments de valence supérieure au Ti stabilisent la configuration C.C et abaissent T_β (cf. tableau II.3 et figure II.3)

n	Type d'élément	Élément
n>4	bêtagène	Mo, V, Fe, Ta, Cr ...
n=4	neutre	Zr, Sn
n<4	alphagène	Al, O, N ...

Tableau II.3 : Nature des éléments d'alliage vis-à-vis des phases du Ti.

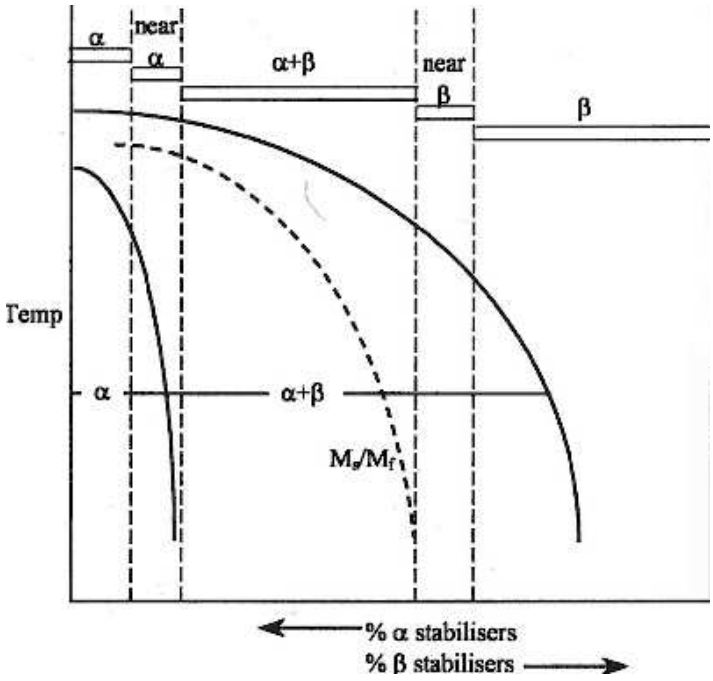


Figure II.3 : Diagramme pseudo-binaire présentant l'influence des éléments d'alliage sur T_β d'après (Dye, 2007).

Les éléments bêtagènes se divisent en deux catégories :

- les éléments bêtagènes isomorphes conduisant à une solution solide continue (Mo, V, Nb, Ta)

- les éléments bêtagènes eutectoïdes favorisant l'apparition de composés intermétalliques (H, Mn, Fe, Cr, Au ...) notés MX figure II.4

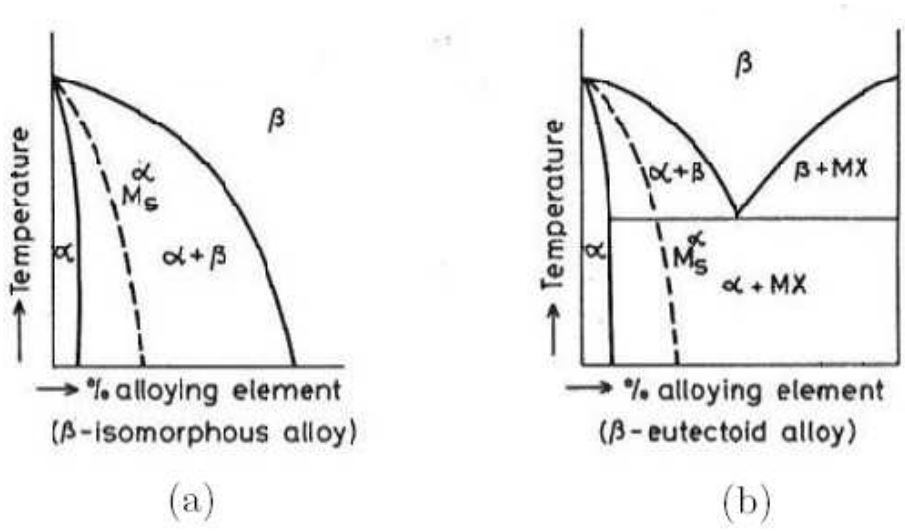


Figure II.4 : Diagramme pseudo-binaire présentant l'influence (a) des éléments bêtagènes isomorphes, (b) des éléments bêtagènes eutectoïdes d'après (Dye, 2007).

L'ajout de Ta au sein de la Z.F va donc permettre de stabiliser la phase Tiβ sans favoriser la formation d'intermétalliques tel que Ti_3Al ou TiAl qui sont des phases fragilisantes d'un point de vue mécanique.

Il existe différents éléments d'alliages dont les effets se combinent. On synthétise l'influence des éléments alphagènes à travers le calcul d'un aluminium équivalent (Al_{eq}) et celle des éléments bêtagènes à travers le calcul d'un molybdène équivalent (Mo_{eq}) suivant les formules II.1 et II.2.

$$[Al]_{eq} = [Al] + 0.17[Zr] + 0.33[Sn] + 10[O] \quad \text{(II.1)}$$

$$\begin{aligned}[Mo]_{eq} &= [Mo] + 0.2[Ta] + 0.28[Nb] + 0.4[W] + 0.67[V] + 1.25[Cr] + 1.25[Ni] \\ &+ 1.7[Mn] + 1.7[Co] + 2.5[Fe] \end{aligned} \quad \text{(II.2)}$$

Le pourcentage massique de Mo_{eq} nécessaire à la stabilisation de la phase Tiβ vaut 10%.

Toutes ces considérations ne sont théoriquement valables qu'à l'équilibre et la trempe à partir des différents domaines du diagramme II.3 modifie la microstructure. Ce diagramme est complété par (Combres, 1999) précisant les modifications microstructurales pour ces cinétiques de refroidissement (figure II.5).

Nous voyons donc que les cinétiques de refroidissement durant le soudage, équivalentes à une trempe énergique, peuvent conduire, suivant la quantité d'éléments bêtagènes, à la formation d'une phase α' aciculaire résultant d'une transformation martensitique. Cette transformation est, par définition, sans diffusion. La phase α' possède donc la même structure cristalline que la phase α (H.C) mais la composition chimique de la phase β à haute température.

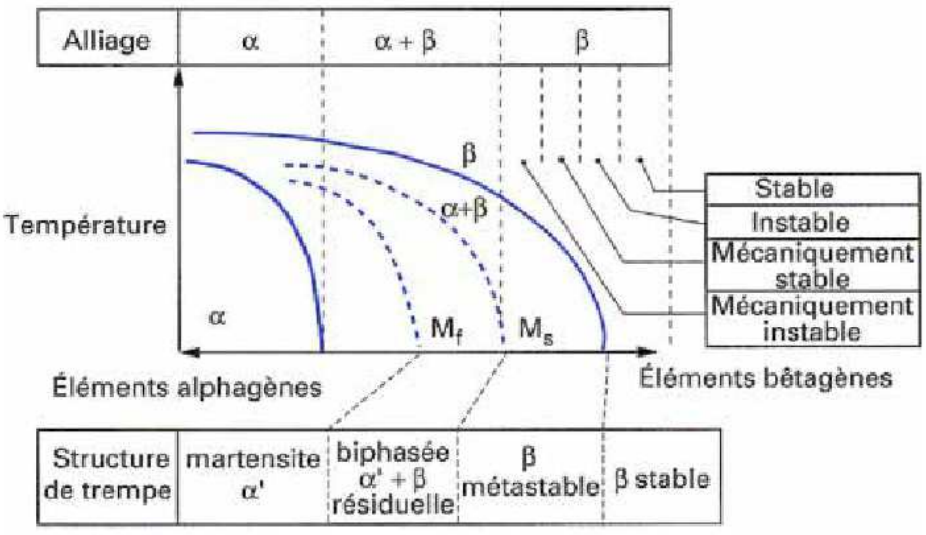


Figure II.5 : Diagramme pseudo-binaire présentant les transformations de phase provoquées par une trempe à partir des différents domaines d'après (Combres, 1999).

Si la quantité d'éléments bêtagènes est suffisante, la phase β peut être conservée à l'ambiante même en condition de trempe. Elle est plus ou moins fortement stabilisée en fonction de la quantité d'éléments bêtagènes et peut être mécaniquement instable. Il est possible alors de retrouver un effet T.R.I.P (TRansformation Induced Plasticity) dans les composés Ta-Ti suivant la proportion de Ta en présence (Cotton et al., 1994), (Margevicius et Cotton, 1998), (Patterson et al., 2000).

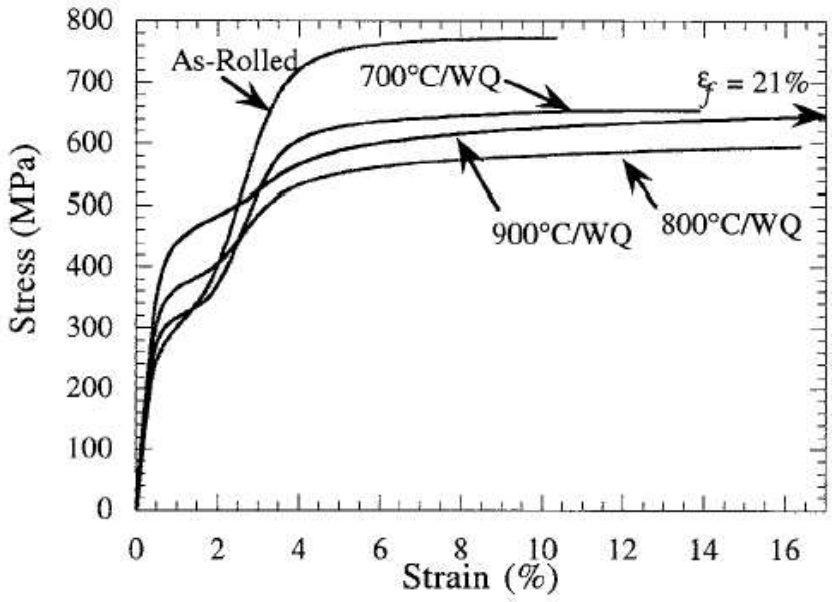


Figure II.6 : Effet T.R.I.P observé sur des composés Ti-Ta à 60% massique de Ta dans différentes conditions de traitement thermique d'après (Margevicius et Cotton, 1998) (WQ faisant référence à une trempe à l'eau).

La phase β se transforme alors en martensite d'écrouissage. On obtient la phase α" sous l'effet de la déformation plastique à température ambiante. Cette phase est orthorhombique.

Enfin, la phase ω dont la structure cristalline est controversée peut être obtenue soit lors du refroidissement rapide de β métastable (ω athermique), soit au cours d'un traitement thermique (ω isotherme) (figure II.7).

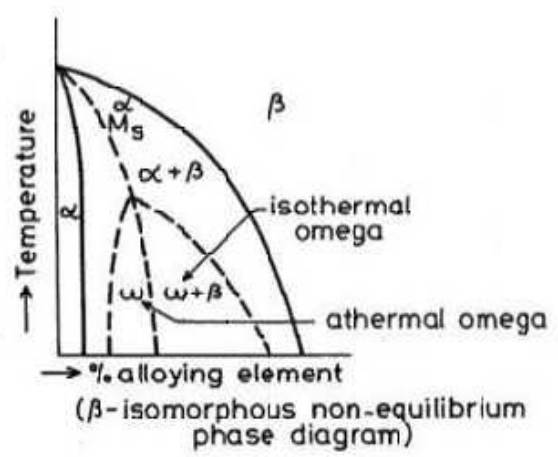


Figure II.7 : Diagramme pseudo-binaire présentant l'influence des éléments bêtagènes isomorphes sur la formation de la phase ω d'après (Dye, 2007).

Pour conclure, au sein de la Z.F, nous sommes susceptibles de trouver l'ensemble des phases mentionnées ci-dessus en fonction de la teneur locale en éléments bêtagènes et le cycle thermique vu par le matériau. Une synthèse des phases formées en fonction du pourcentage massique de Ta dans des composées homogènes Ta-Ti est donnée dans (Margevicius et Cotton, 1998) et reportée tableau II.8.

Composition Range (wt.%)	Phase(s)	Structure
0–26	α'	hexagonal martensite
26–52	α''	orthorhombic martensite
52–65	α'', (β + ω)	orthorhombic martensite, (b.c.c. + hexagonal)
>65	β	b.c.c.

Figure II.8 : Tableau résumant l'existence possible des phases du Ti en fonction de la teneur massique en Ta à température ambiante, d'après (Margevicius et Cotton, 1998).

Le diagramme de phase Ti-Ta est présenté figure II.9,

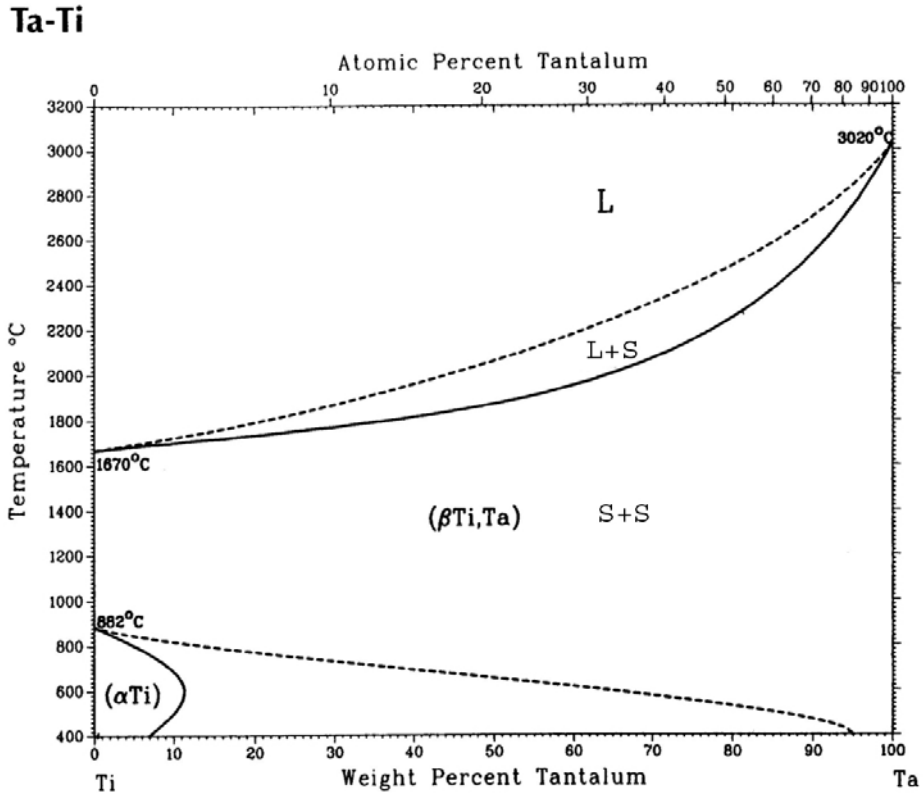
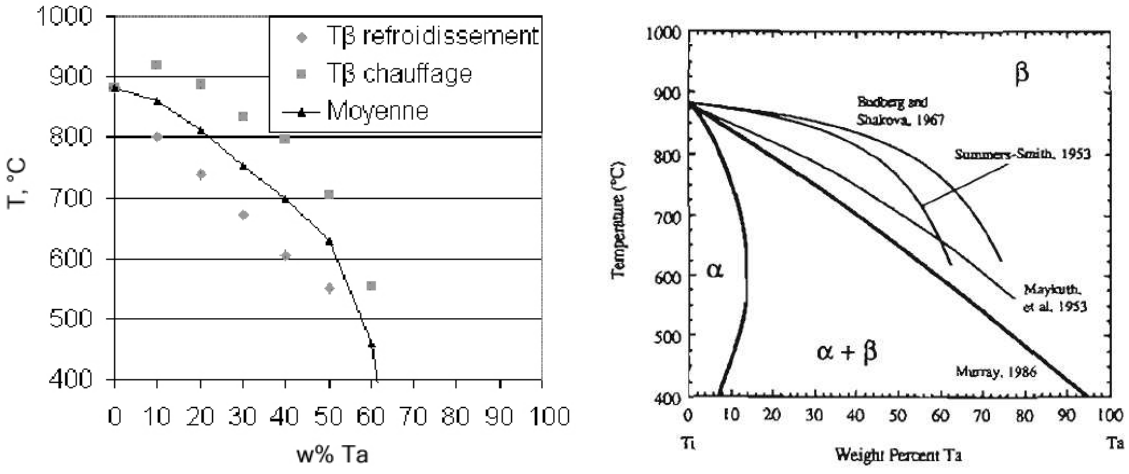


Figure II.9 : Diagramme de phase Ti-Ta d'après (Murray, 1987).

Cependant, certaines études récentes (Delvat, 2006), tendent à prouver que le transus β, pour des composés Ti-Ta homogènes, chute plus rapidement avec la teneur en Ta et que 60% massique de Ta suffisent à stabiliser totalement la phase β à l'ambiante (figure II.10),



(a) (b)

Figure II.10 : Diagramme de phase Ti-Ta présentant différentes valeurs de transus β au sein de la littérature, d'après (a) (Delvat, 2006), (b) (Cotton et al., 1994).

II.2 Identification des phases au sein de la Z.F

II.2.1 Identification de phase par Diffraction des rayons X

II.2.1.1 Introduction et conditions expérimentales

Afin de pouvoir identifier les phases en présence au sein de la Z.F, il est possible d'utiliser la diffraction des rayons X. En effet, les phases α et β du Ti sont respectivement hexagonale compact (H.C) et cubique centrée (C.C) et peuvent donc être identifiées par leurs pics de diffraction pour différents angles 2θ. La faible zone du cordon de soudure implique des conditions de manipulation difficiles. Afin de ne pas englober les matériaux de base (diamètre de faisceau environ 2mm), il est nécessaire d'installer un masque pour obtenir la réponse "unique" de la Z.F et ainsi identifier la présence de phase β métastable. Cependant, le masque perturbe la réponse en diminuant la quantité de rayons X diffractés (baisse de l'intensité des pics) et en diffractant pour certaines valeurs de 2θ. Le dépouillement du diffractogramme de la liaison est donc délicat et il est nécessaire de soustraire le diffractogramme du masque (cf. figure II.11) pour identifier l'évolution de la phase α et β du Ti.

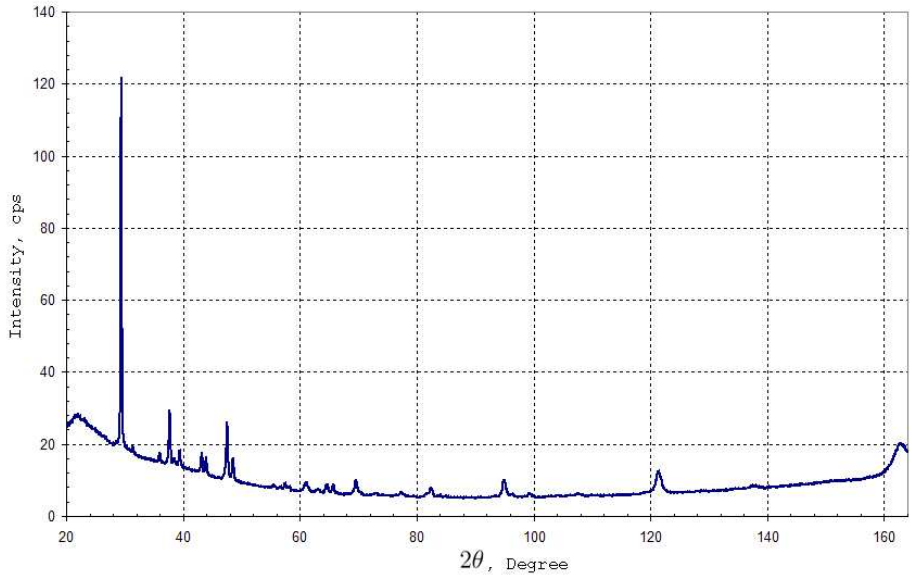


Figure II.11 : Diffractogramme du masque

II.2.1.2 Diffractogramme des différents matériaux

Les diffractogrammes des matériaux de base sont réalisés avec une anticathode de Cu et présentés figure II.12 et II.13

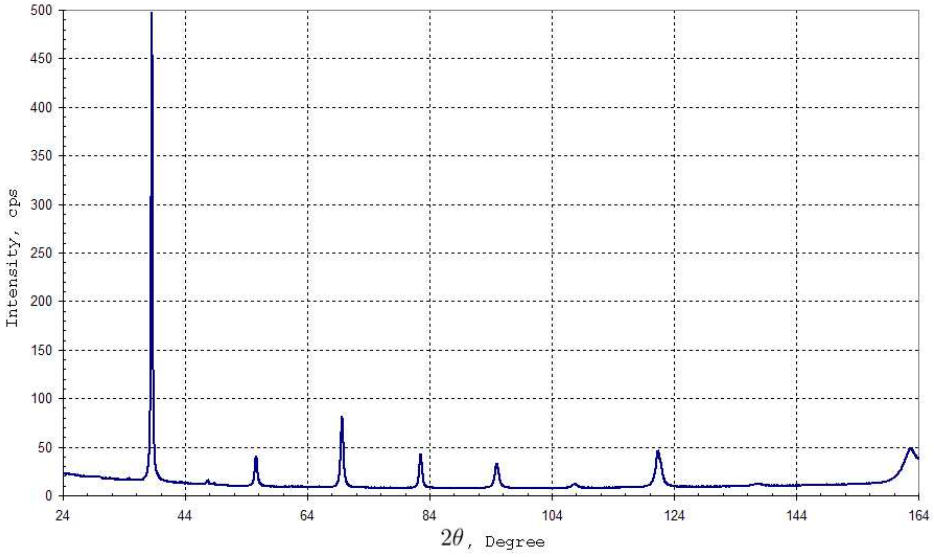


Figure II.12 : Diffractogramme du Ta

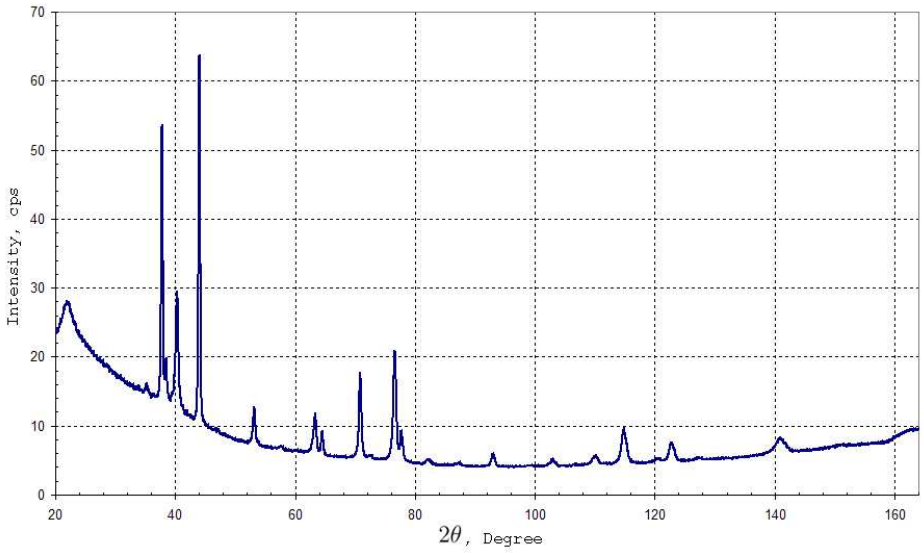


Figure II.13 : Diffractogramme du TA6V

A partir de ce diffractogramme, il est possible d'identifier les plans diffractants comme pour le Ta pur figure II.14.

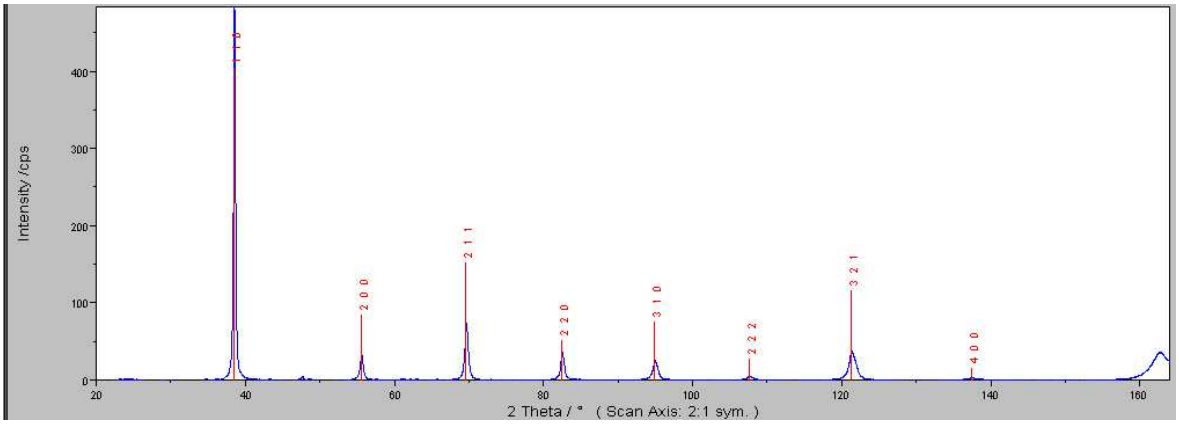


Figure II.14 : Diffractogramme indexé du Ta

Sans s'intéresser précisément à chacun des plans, nous indexons simplement les phases en présence comme sur l'exemple du TA6V, figure II.15, avec les plans diffractants de la phase α en triangles bleus et les plans diffractants de la phase β en ronds rouges.

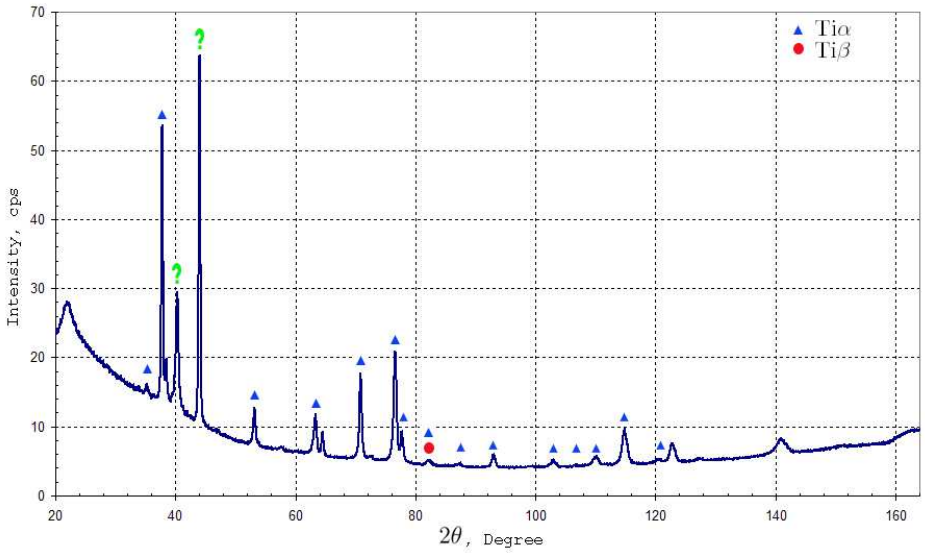


Figure II.15 : Diffractogramme indexé du TA6V

L'indexation des plans est réalisée à l'aide d'une base de donnée P.D.F (Powder Diffraction File) répertoriant les diffractogrammes de nombre de matériaux. Cette base de donnée stocke une grande connaissance expérimentale qui implique une dispersion obligatoire dans les résultats. Certains pics ne trouvent donc pas de correspondance, même pour deux matériaux censés être identiques. Ces pics non identifiés sont alors indexés par un point d'interrogation.

Sur ce diffractogramme indexé, on voit que le TA6V est un alliage duplex α-β majoritairement α puisque la quasi totalité des plans ayant diffractés sont des plans de la phase α.

En superposant les diffractogrammes du TA6V et du masque (figure II.16), nous voyons que certains pics se superposent, rendant difficile l'identification des phases Tiα et Tiβ au sein de la Z.F.

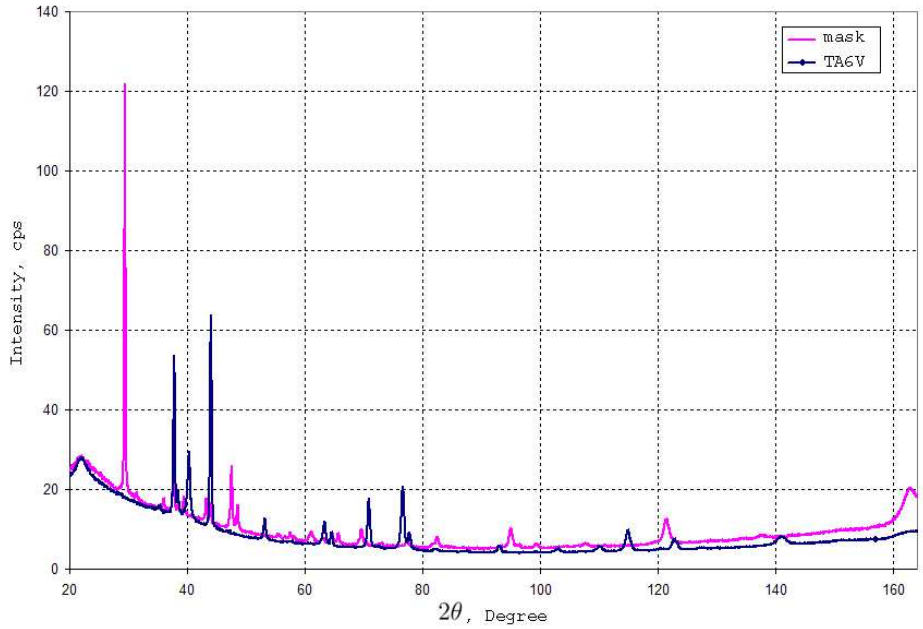


Figure II.16 : Superposition des diffractogrammes du TA6V et du masque

En ce qui concerne le joint soudé, le diffractogramme brut est présenté figure II.17 et doit être confronté au diffractogramme du masque figure II.11. On peut ainsi indexer l'ensemble du diffractogramme (figure II.18) et mettre en évidence une augmentation du nombre de plans ayant diffractés appartenant à la phase β (cf. figure II.15).

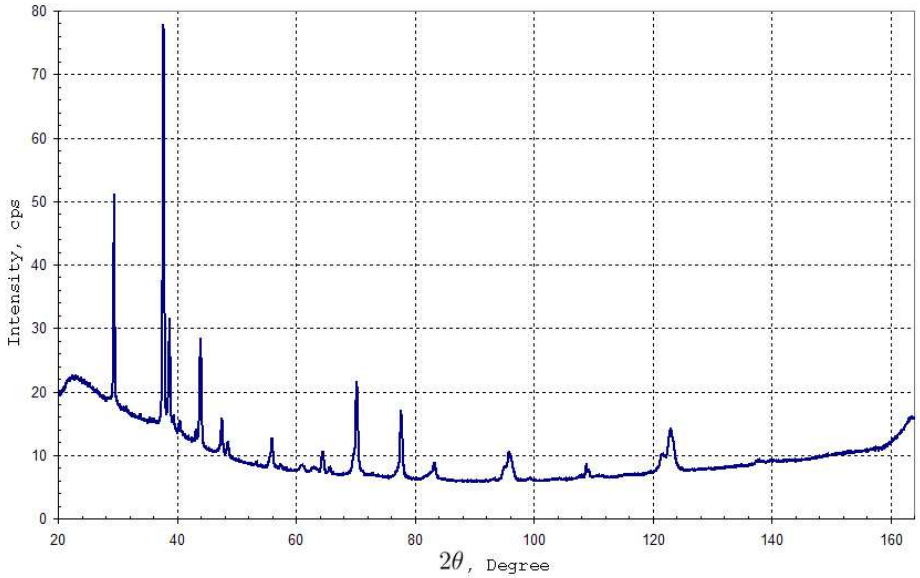


Figure II.17 : Diffractogramme du joint soudé

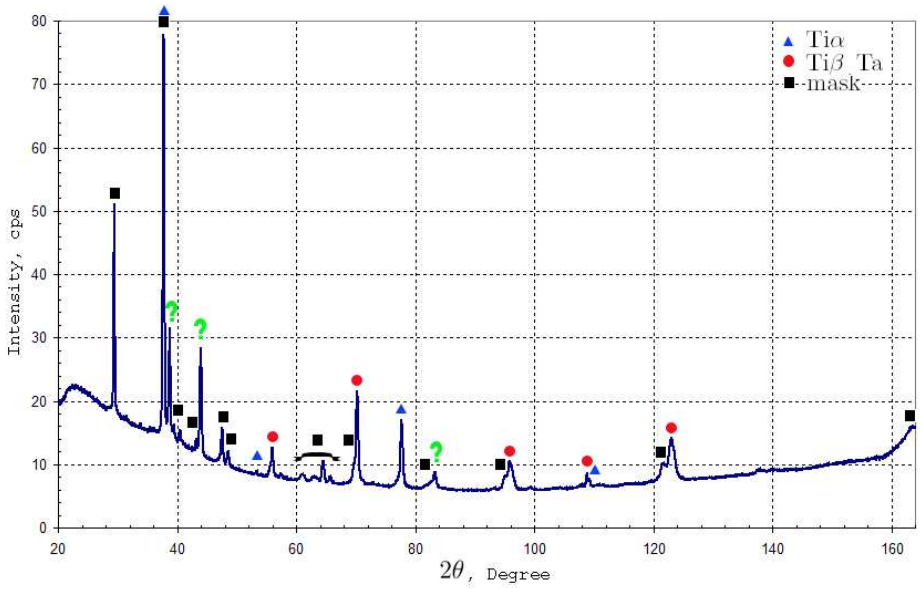


Figure II.18 : Diffractogramme indexé du joint soudé

Nous avons soulevé le problème du volume diffractant plus important que la zone pertinente d'analyse imposant l'utilisation d'un masque. Un second problème, de taille cette fois, empêche de différentier la phase Tiβ du Ta.

En effet, cette phase Tiβ est de structure cristalline C.C comme le Ta et ces deux phases possèdent des paramètres de maille très proches (cf. annexe A.7 a=3.3065 pour Tiβ et 3.3058 pour Ta). Les pics de diffraction des deux phases vont donc "sortir" pour les mêmes angles 2θ, on ne pourra donc qu'indexer une phase Tiβ+Ta. Malgré cette difficulté, il est net que la phase Tiβ a augmenté par rapport à la phase α au sein du joint soudé. L'apparition de pics aux angles correspondant à la phase Tiβ ne peut nous renseigner sur la présence réelle de cette phase (présence inévitable de Ta qui diffracte aux mêmes angles). Cependant, la baisse du nombre de pics de diffraction liés à la phase Tiα nous informe sur sa diminution mais aussi sa présence. En réalité, les pics de diffraction indexés α sont vraisemblablement des pics de la phase α' dont la structure cristalline est H.C comme la phase α.

En conclusion, il est difficile de tirer plus que des tendances de ces analyses trop globales. Cependant, elles apportent des preuves incontestables de l'apparition de la phase Tiβ et de la diminution de la phase Tiα. La présence de la phase Tiα' (voir Tiα" ou Tiω) est possible mais doit être confirmée par des moyens d'expertise à une échelle plus fine.

Pour cette raison, le paragraphe suivant est dédié à l'analyse d'échantillons par Microscope Électronique à Transmission (M.E.T).

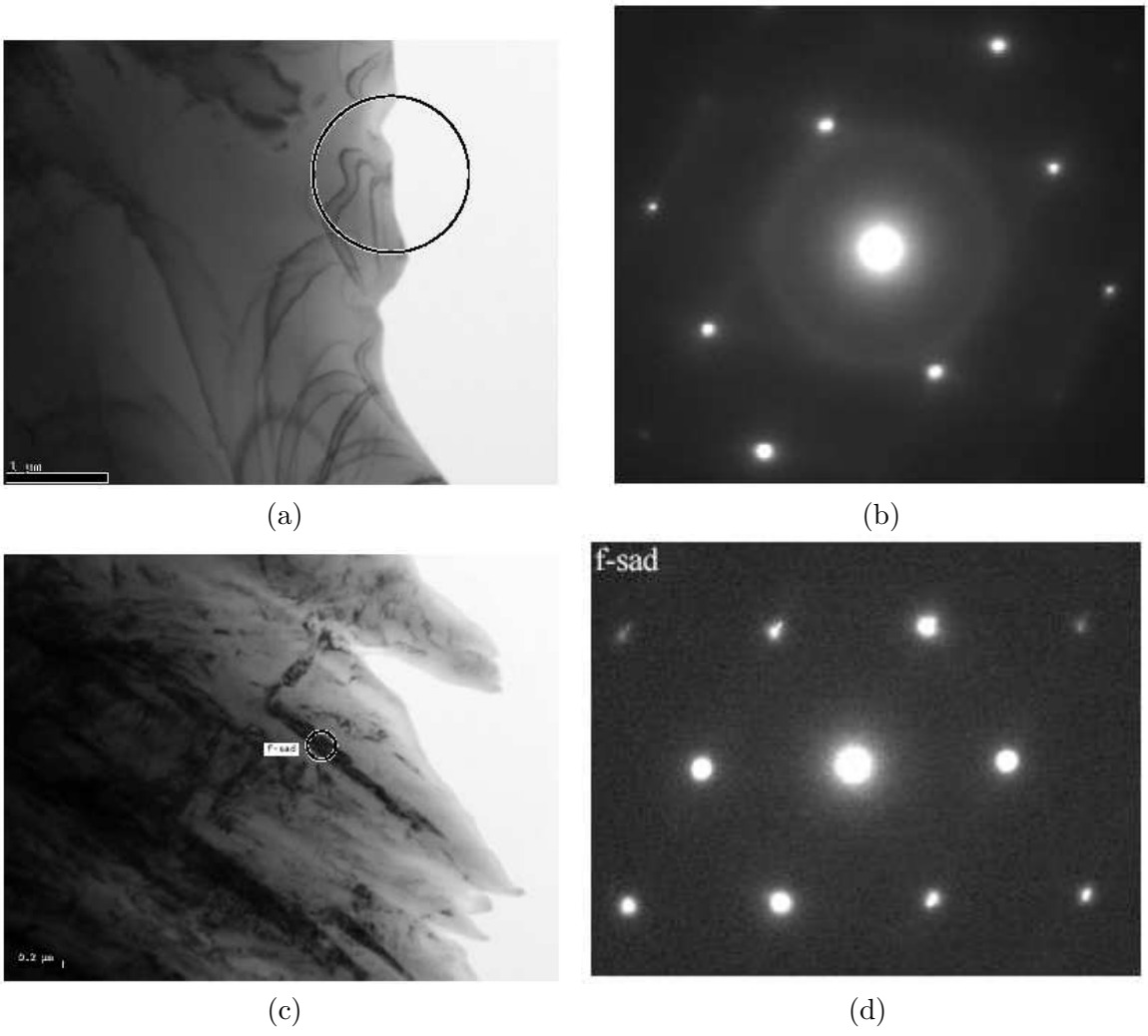
II.2.2 M.E.T

L'ensemble des images M.E.T de ce paragraphe a été réalisé par Carole Dessolin durant son stage de Master Recherche (Dessolin, 2006) sur un cordon de paramétrie G1.

L'identification de phase au M.E.T permet de palier le problème du masque lors de l'utilisation de la D.R.X. Ce masque vient se superposer au diffractogramme de la Z.F et perturbe l'exploitation des résultats. De plus, l'analyse D.R.X englobe une zone de diamètre assez importante (faible épaisseur toutefois) et ne permet pas d'allier analyse de phase et imagerie. En D.R.X, il n'y a pas d'identification de la microstructure analysée. Ces

inconvénients sont gommés par une analyse très locale au M.E.T. D'autres inconvénients apparaissent, ceux-ci d'un ordre statistique, puisque l'absence d'une phase à l'endroit de l'analyse ne permet pas d'assurer que celle-ci soit absente partout. Les analyses M.E.T, puisque très locales, se doivent d'être statistiquement représentatives.

Quoi qu'il en soit, l'analyse M.E.T sur deux coupes en bas (cf. figure II.19a) et au milieu du cordon (cf. figure II.19c) ne mettent pas en évidence la présence d'autres phases que Tiβ.



(a) (b)

(c) (d)

Figure II.19 : Analyse M.E.T sur deux coupes au milieu et au fond du cordon : (a) Vue en champ clair au milieu du cordon dans une zone à 44% en masse de Ta, (b) Diffraction pattern β[011], (c) Vue en champ clair en fond de cordon, structure aciculaire à 2.8% en masse de Ta, (d) Diffraction pattern β[111].

Nous concluons donc en la présence quasi exclusive de la phase Tiβ au sein de la Z.F. La cinétique de refroidissement liée au soudage ainsi que la teneur en éléments bêtagènes suffisent à stabiliser la phase β en fond de cordon et donc, à fortiori, dans toute la Z.F[1]. Ces

[1]Chose très spéciale, on observe une microstructure aciculaire caractéristique de la phase α' indexée comme étant de la phase β (figure II.19(c)(d)). Malgré le caractère très local de l'analyse M.E.T ainsi que la problématique de représentativité statistique associée, les zones d'analyse sont des zones préférentielles pour la présence de phase α' puisque le fond de cordon est une zone pauvre en éléments bêtagènes. La teneur en Ta dans la structure aciculaire est mesurée à 2.82% massique et ne devrait donc théoriquement pas être suffisante pour stabiliser la phase Tiβ

conclusions sont à valider pour d'autres paramétries et notamment pour la paramétrie G3 mettant en jeu plus de TA6V et dont les conclusions du paragraphe II.5.3.1 tendent à prouver la présence d'une autre phase.

II.3 Problématique expérimentale de caractérisation

Comme présenté au paragraphe I.1 figure I.1, le comportement mécanique du Ta et du TA6V est très différent, l'un pouvant supporter une contrainte très importante et l'autre un allongement avoisinant les 80%. Ce constat complique considérablement la réalisation d'essais de structure soudée. En effet, dans l'objectif d'identifier le comportement du joint soudé, il est nécessaire de réaliser des essais permettant d'extraire le comportement du joint, indépendamment des matériaux de base. Ceci constitue une réelle difficulté expérimentale, avec pour preuves, les études amont présentant les premières tentatives de caractérisation et de modélisation (Farre et al., 2002), (Delaplanche et al., 2002), (Robert, 2003).

Ces études portent principalement sur la caractérisation de liaisons soudées hétérogènes Ta/TA6V réalisées par L.Y.I (Laser Yag Impulsionnel) et par F.E (Faisceaux d'Électrons). L'essai utilisé est un essai de traction transversale (i.e le cordon de soudure est perpendiculaire à la direction de sollicitation).

Lors d'un essai de traction transversale, le matériau possédant la plus petite limite d'élasticité (à taux d'écrouissage identique) "pilotera" la réponse en déformation de l'assemblage (hypothèse d'iso-contrainte dans chaque section) (cf. figure II.20). Dans notre cas, lors d'une traction transversale, le Ta supportera toute la déformation jusqu'à rupture tandis que l'utilisation d'un essai de traction longitudinale peut permettre de localiser la déformation dans le cordon de soudure. Nous reparlerons de cet essai par la suite (paragraphe II.6).

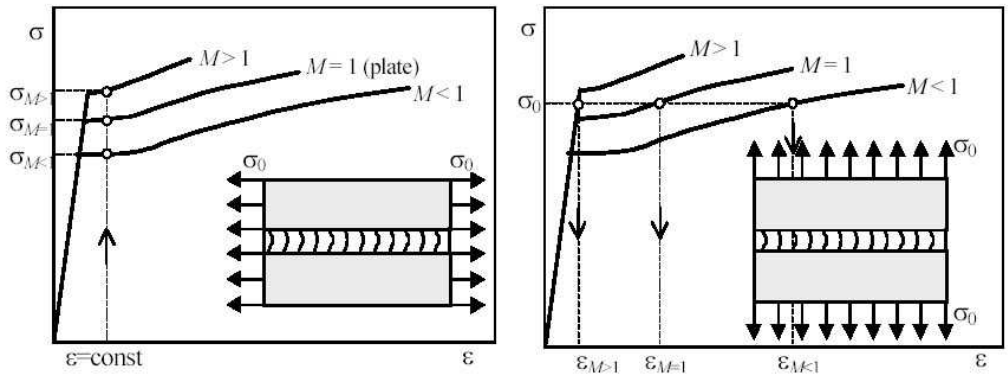


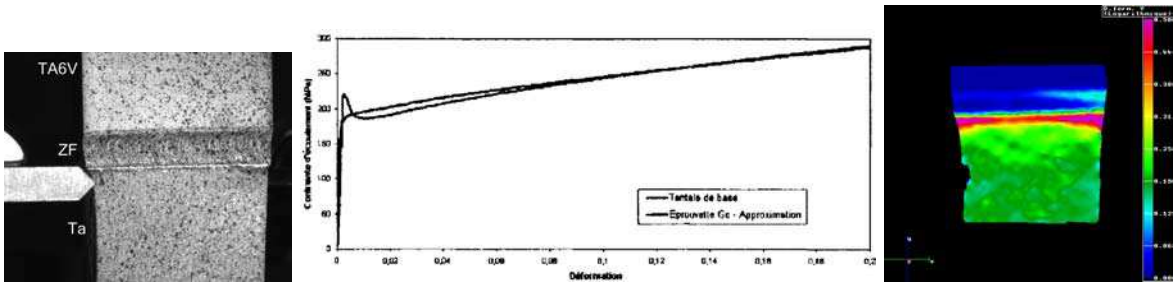
Figure II.20 : Traction longitudinale et transversale sur joint soudé d'après (Kozak et al., 2002a).

La figure II.20 présente le cas d'un joint soudé homogène (soudage de 2 tôles d'un même matériau par exemple) dont les caractéristiques mécaniques peuvent être supérieures M>1, inférieures M<1 ou égales M=1 à celles du matériau de base. On parle alors respectivement d'overmatching, d'undermatching, de matching. Cette différence influence notablement la plasticité et l'on montre (Satoh et Toyoda, 1970b), (Satoh et Toyoda, 1970a), (Satoh et Toyoda, 1971), (Kocak et K.H., 1998), (Kocak et Denys, 1994), (Kozak et al., 2002a), (Kozak

et al., 2002b), (Toyoda, 2002) que la plasticité reste confinée dans le cas undermatch, tandis qu'elle s'étend au matériau le plus mou dans le cas overmatch.

Le soudage hétérogène complexifie encore l'étude puisque le concept de mismatching doit être discuté indépendamment d'un côté et de l'autre de la soudure. Dans l'hypothèse où le comportement du joint soudé est intermédiaire entre celui des deux matériaux, ce dont nous rediscuterons un peu plus tard (paragraphe II.4 et II.5.1), on se trouve alors overmatch d'un côté, celui du Ta, et undermatch de l'autre, celui du TA6V. La plasticité est donc confinée dans le joint par la présence du TA6V et s'étend au Ta.

Dans le cas d'une traction transversale, on se situe proche d'un état de contrainte homogène dans chaque section. Au cours de l'essai, le Ta aura atteint sa contrainte maximale R_m alors que le TA6V sera toujours dans son domaine élastique. Si le comportement du joint soudé n'est pas inférieur à celui du Ta, la réponse de l'éprouvette sera la réponse du Ta comme observé dans l'étude (Farre et al., 2002)(figure II.21).



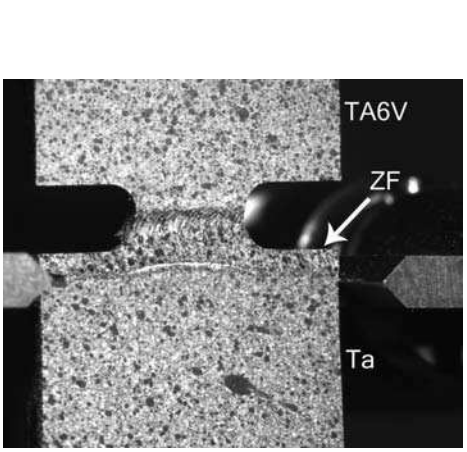
(a) (b) (c)

Figure II.21 : Traction transversale sur joint soudé : (a) cliché de l'essai, (b) réponse globale, (c) mesure de déformation locale rationnelle par corrélation d'images dans la direction de sollicitation (DT au cordon) d'après (Farre et al., 2002).

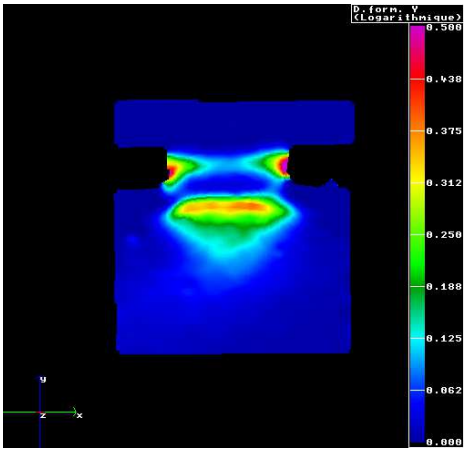
La figure II.21 montre bien, à la fois la réponse globale très proche du Ta (figure II.21 (b)) mais aussi la localisation forte au sein de ce même matériau grâce à un moyen de corrélation d'image permettant des mesures de déformation locale (figure II.21 (c)).

Comme le soulève Farre, l'essai ne permet pas d'extraire le comportement de la soudure et l'étude se poursuit par l'exploitation d'éprouvettes entaillées dans la zone fondue afin de forcer la localisation de la déformation. Deux configurations sont testées, la première présentant un rayon d'entaille de 1mm et une profondeur de 3mm et l'autre un rayon de 0.5 mm et une profondeur de 3.5 mm. Les éprouvettes sont doublement entaillées au niveau de l'interface TA6V-cordon. La première configuration est conservée car elle permet l'obtention de résultat plus reproductibles.

La comparaison entre la réponse globale d'une éprouvette de Ta et celle de l'essai sur joint soudé n'est pas présentée. Cependant, malgré ces précautions, la localisation de la déformation reste très forte dans le Ta et la réponse globale est donc nécessairement très dépendante de ce matériau (cf. figure II.22, II.23). L'évolution de la déformation locale au cours de l'essai sur la configuration d'entaille de rayon 1 mm est présentée figure II.24.

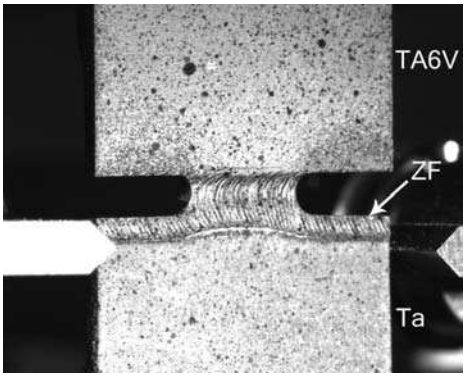


(a)

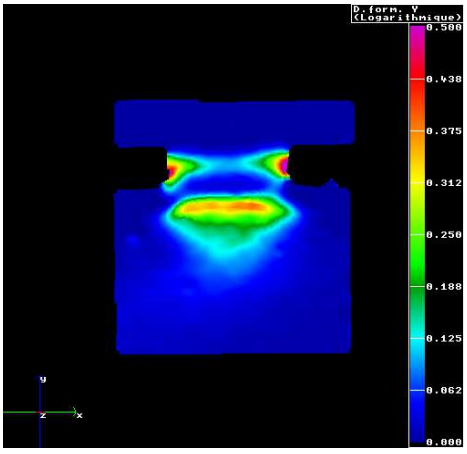


(b)

Figure II.22 : Traction transversale sur joint soudé, éprouvette entaillée rayon 1 mm : (a) cliché de l'essai, (b) mesure de déformation locale rationnelle par corrélation d'images dans la direction de sollicitation (DT au cordon).



(a)



(b)

Figure II.23 : Traction transversale sur joint soudé, éprouvette entaillée rayon 0.5 mm : (a) cliché de l'essai, (b) mesure de déformation locale rationnelle par corrélation d'images dans la direction de sollicitation (DT au cordon).

Cet essai rend très difficile l'exploitation brute des résultats et nécessite un calcul de structure ainsi que la prise en compte précise du comportement du Ta (Delaplanche et al., 2002). De plus, la sensibilité de l'essai à la variation du procédé ne permet pas de mettre en avant de différences notables entre deux procédés différents (Laser YAG Impulsionnel L.Y.I et Faisceaux d'Électrons F.E), laissant à penser que la réponse n'est que faiblement dépendante du comportement de la zone fondue.

La problématique expérimentale de caractérisation du joint soudé étant présentée à travers les études amont réalisées au CEA, nous développons par la suite un essai de flexion sur éprouvette entaillée permettant de s'affranchir des difficultés soulevées dans ce chapitre.

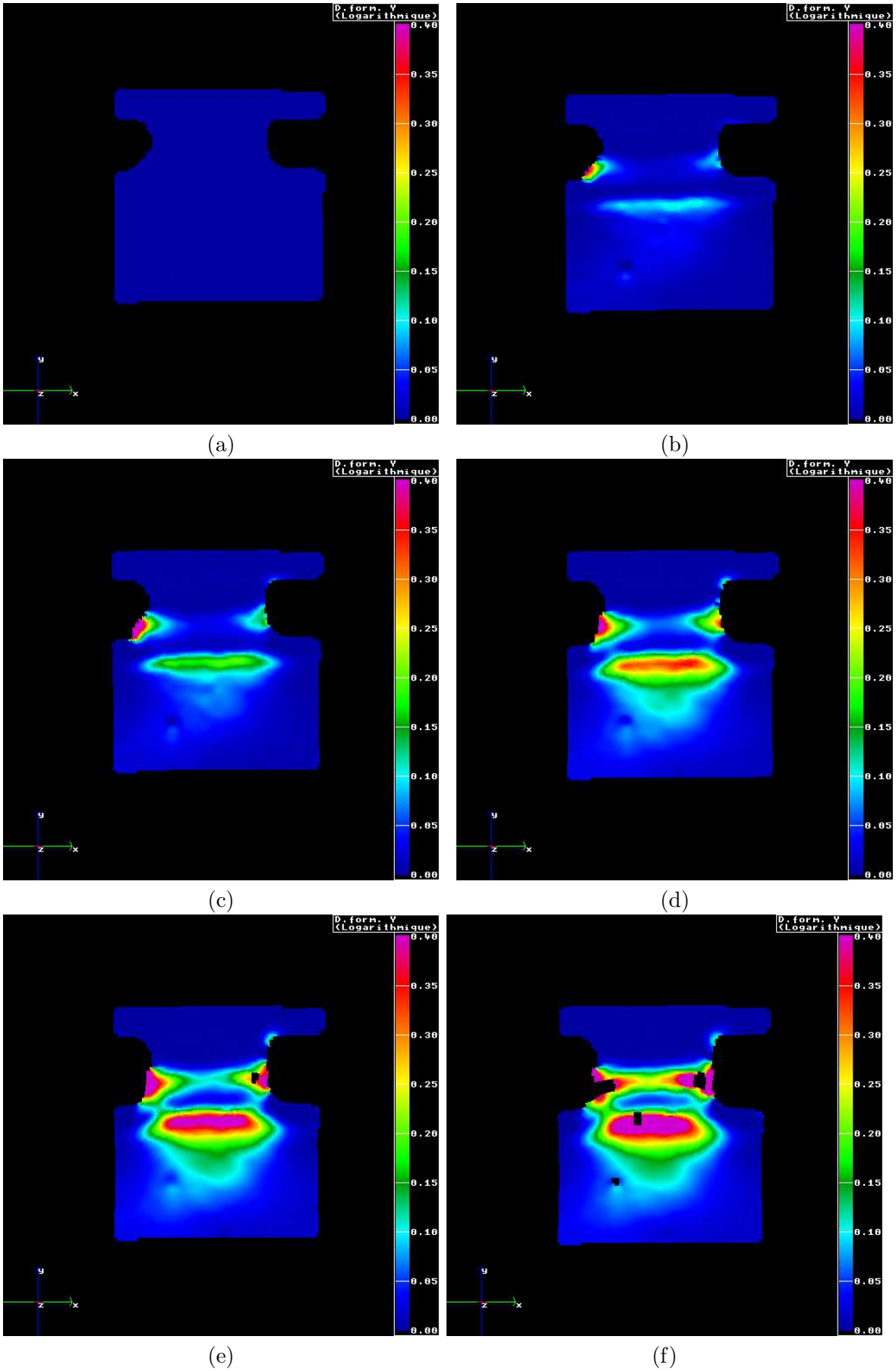


Figure II.24 : Traction transversale sur joint soudé, éprouvette entaillée rayon 1 mm, mesure de déformation locale rationnelle par corrélation d'images dans la direction de sollicitation (DT au cordon) pour t : (a) 0, (b) 130 s, (c) 150, (d) 190 s, (e) 230 s, (f) 260 s.

II.4 Essais de flexion quatre points

Dans l'objectif d'identifier le comportement du cordon de soudure en s'affranchissant au maximum de la présence des matériaux de base, nous avons développé et mis au point un essai de flexion quatre points sur éprouvettes entaillées associé à un moyen d'extensométrie optique permettant de mesurer la déformation locale dans la zone fondue.

Des calculs amont (Paris, 2005) ont permis de mettre au point une géométrie optimale pour la réalisation d'éprouvettes entaillées ainsi que de voir l'influence des paramètres d'entaille sur la rupture dans le cordon de soudure. La configuration optimisée des éprouvettes entaillées choisies pour réaliser les essais de flexion est donnée en annexe A.1. L'usinage des éprouvettes est délicat et la hauteur liaisonnée restante influence notablement la réponse globale. Ceci conduit donc parfois à une dispersion des résultats d'essais devant toujours être mise en regard de la hauteur liaisonnée.

L'outillage, initialement développé pour s'adapter sur une machine SWICK de traction-compression de capacité 100 kN, est présenté en annexe A.3. Cet outillage est ensuite adapté afin d'être utilisé sur une machine INSTRON de traction-compression de capacité 10 kN.

Afin d'être en mesure de comparer les résultats d'essais sur éprouvettes soudées entaillées, nous réalisons le même type d'essais sur les matériaux de base. Ces essais serviront de validation pour l'identification du comportement à partir des données expérimentales du paragraphe I.

II.4.1 Réponse des matériaux de base

Les essais sont réalisés sur la machine INSTRON, cellule de force 10 kN. La réponse force-déplacement du TA6V à l'essai de flexion quatre points est donnée figure II.25. La hauteur liaisonnée est de 0.57 mm pour une entaille de rayon 0.2 mm (cf. annexe A.4).

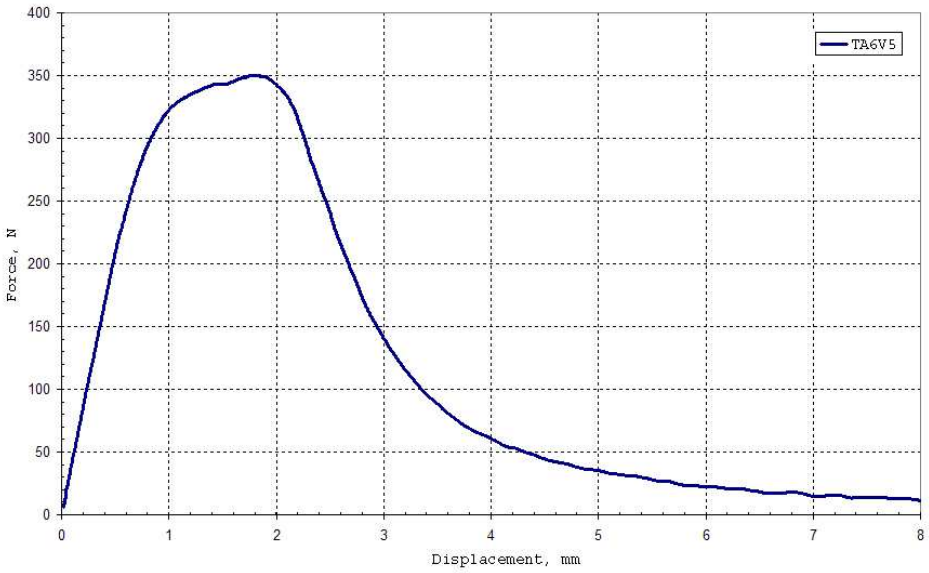


Figure II.25 : Réponse force-déplacement à l'essai de flexion sur éprouvette entaillée de rayon 0.2 mm en TA6V.

Concernant le tantale, il existe une forte dispersion des essais liée, entre autres, à une difficulté d'usinage de ce matériau causant parfois des différences importantes de hauteurs

liaisonnées (cf. annexe A.4). La réponse représentative de l'essai est tracée figure II.26 pour une hauteur liaisonnée de 0.54 mm.

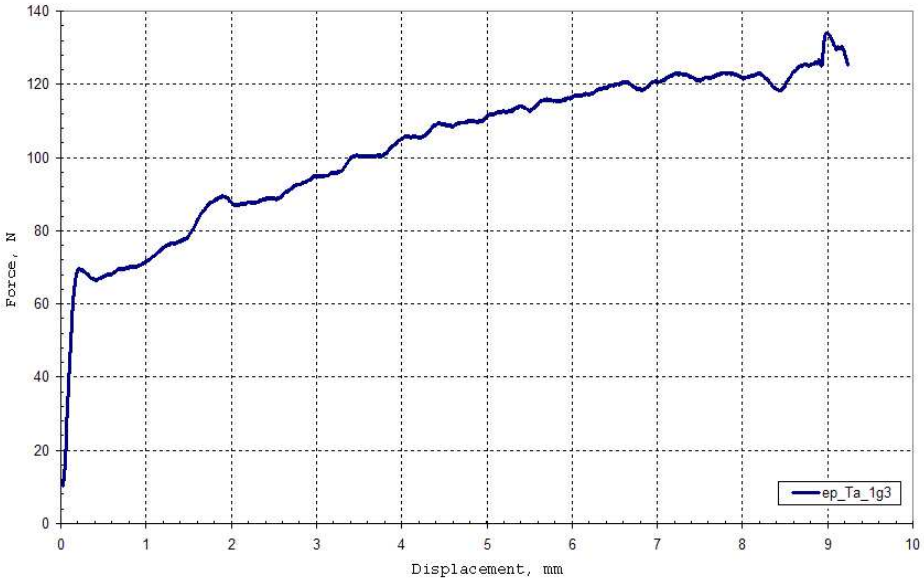


Figure II.26 : Réponse force-déplacement à l'essai de flexion sur éprouvette entaillée de rayon 0.2 mm en Ta.

Le comportement mécanique des deux matériaux peut être comparé en conservant à l'esprit que les hauteurs liaisonnées ne sont pas strictement identiques. La forte ductilité du Ta ne permet pas d'obtenir la rupture du matériau au cours de l'essai. Les oscillations sur la courbe proviennent du contact et du frottement entre les appuis et l'éprouvette. Il n'y a pas de lubrification des appuis et la rugosité du Ta est supérieure à celle du TA6V. Ceci explique qu'une courbe soit "chahutée" et pas l'autre.

II.4.2 Réponse de la liaison soudée

II.4.2.1 Etude de la paramétrie G2

De la même façon, on réalise cet essai sur une éprouvette soudée entaillée en prenant soin de décaler l'entaille de 0.2 mm côté TA6V (cote par rapport au plan de joint). Ceci permet de garantir la meilleure localisation de la déformation dans la zone fondue (Paris, 2005). Une "fenêtre" d'environ 500 μm permet théoriquement de conserver la rupture dans le cordon de soudure.

Les résultats obtenus pour cette paramétrie sont assez peu dispersés (cf. annexe A.4). Le comportement représentatif de la réponse de la paramétrie G2 est donné figure II.27 pour une hauteur liaisonnée de 0.39 mm,

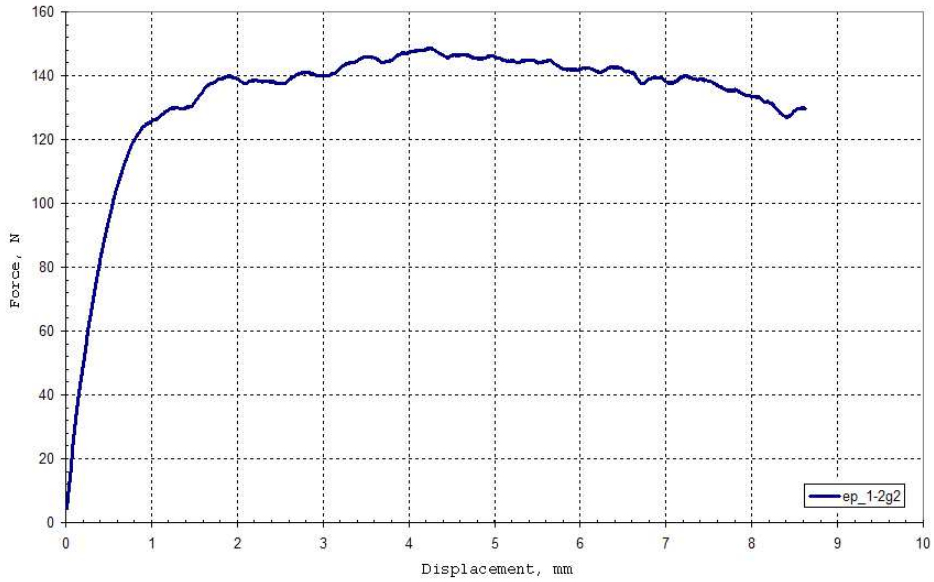


Figure II.27 : Réponse force-déplacement à l'essai de flexion sur éprouvettes soudées entaillées de rayon 0.2 mm, paramétrie G2.

En gardant toujours à l'esprit que les hauteurs liaisonnées ne sont pas strictement identiques (surtout pour l'essai G2 tableau II.4), nous pouvons tracer un graphique comparatif de la réponse des matériaux de base et de la paramétrie G2, figure II.28.

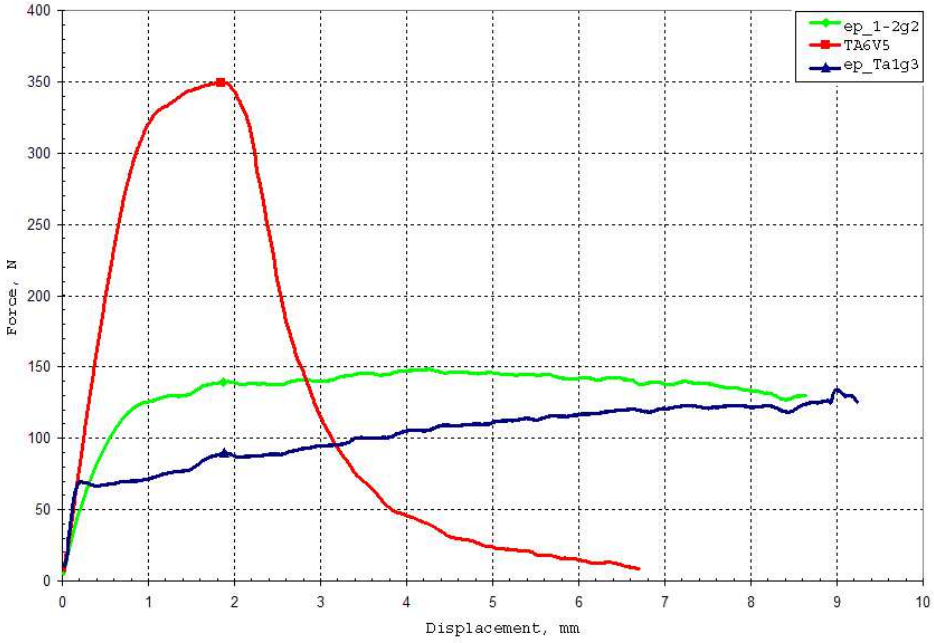


Figure II.28 : Réponses force-déplacement à l'essai de flexion sur éprouvettes entaillées de rayon 0.2 mm, comparaison de la paramétrie G2 et des matériaux de base.

Eprouvettes	Ta1g3	TA6V5	1-2g2
Hauteurs liaisonnées (mm)	0.52	0.55	0.39

Tableau II.4 : Hauteurs liaisonnées après usinage des entailles pour les trois éprouvettes.

Sur ce tracé, il est possible de distinguer plusieurs faits marquants sur le comportement de la zone fondue. Tout d'abord, il existe une chute marquée du module d'élasticité puisque les modules du Ta et du TA6V sont respectivement de 187 et 110 GPa et la réponse mécanique de la zone fondue, en élasticité, est bien inférieure. L'entrée en plasticité se situe entre celles des deux matériaux avec une influence marquée du Ta sur la réponse mécanique. Notons que la faible hauteur liaisonnée de l'éprouvette soudée conduit fatalement à un comportement mécanique plus faible. A hauteur liaisonnée équivalente à celles des matériaux de base, la courbe serait donc plus élevée.

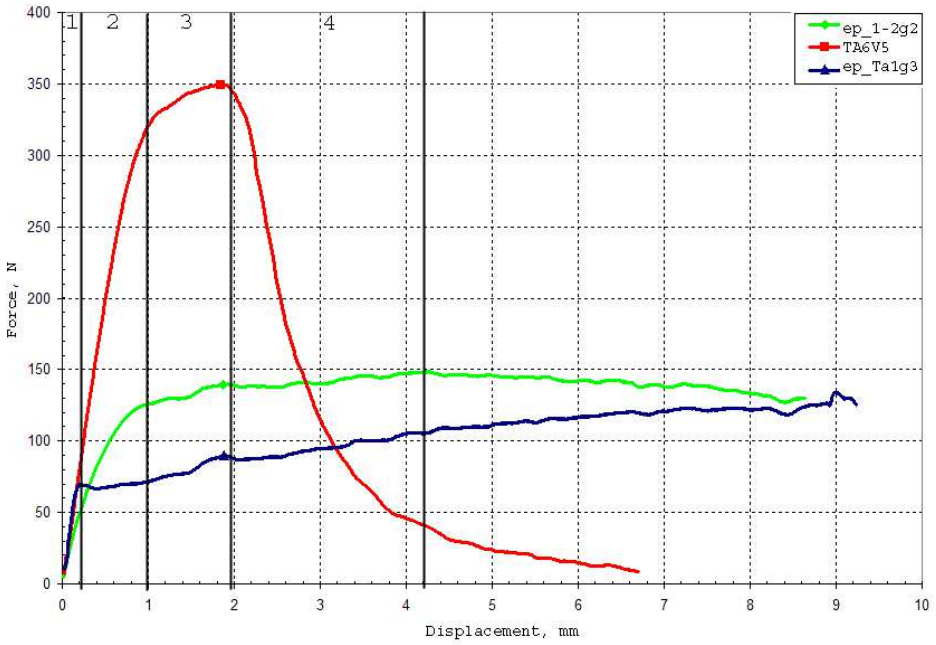


Figure II.29 : Essais de flexion sur éprouvettes entaillées de rayon 0.2 mm sur liaisons soudées de paramétrie G2, changement de comportement de la zone fondue au cours de l'essai.

L'essai peut se découper en différents intervalles caractéristiques de l'influence de l'hétérogénéité du mélange. En effet, en regard de la réponse du Ta et du TA6V, il est possible de distinguer quatre zones au cours de l'essai (cf. figure II.29). Les quatre zones identifiées correspondent à :

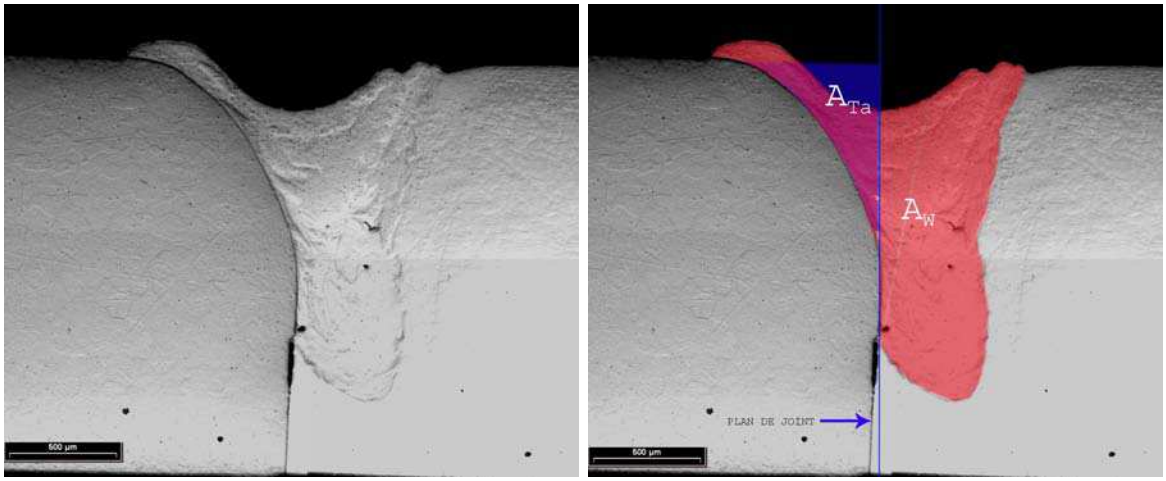
- zone 1 : Les deux matériaux ainsi que la Z.F restent dans leur domaine d'élasticité.
- zone 2 : Le Ta entre en plasticité tandis que le TA6V reste lui en élasticité. Dans cette zone, le Ta s'écrouit peu et la réponse de la Z.F est donc quasiment linéaire. Le module d'élasticité est plus faible que celui des deux matériaux.
- zone 3 : Le TA6V, le Ta et la Z.F sont entrés en plasticité. L'entrée en plasticité de cette dernière intervient quasiment au même moment que celle du TA6V.

- zone 4 : Le TA6V s'endommage et sa courbe s'adoucit, le Ta et la Z.F continuent à s'écrouir.

- au delà de la zone 4, le comportement de la Z.F commence à s'adoucir tandis que le Ta s'écrouit toujours. La forte ductilité de zones riches en Ta, au sein de la Z.F, ralentit la propagation de la fissure.

En identifiant le module d'élasticité par méthode inverse en simulant l'essai de flexion (cf. paragraphe V.2.2), le module d'élasticité de la Z.F est estimé à 92 GPa. Cette valeur est confirmée par les mesures de nanoindentation (paragraphe II.5.1). Ce module d'élasticité très bas et bien inférieur au matériau de base s'explique par la transformation de phase du $Ti\alpha$, majoritaire au sein du TA6V, en $Ti\beta$. La phase β ne peut être obtenue seule à l'ambiante mais plusieurs éléments sont bêtagènes vis-à-vis de la phase β du Ti. C'est le cas notamment du Ta, mais également du Mo, V etc. De nombreuses études portent sur la caractérisation métallurgique de nouveaux alliages de Ti permettant de stabiliser cette phase β à l'ambiante et reportent des modules d'élasticité (pour différents alliages Tiβ) compris entre 55 et 85 GPa (Niinomi, 1998), (Cotton et al., 1994), (Zhou et al., 2004), (Delvat, 2006), (Texier, 2005), (Patterson et al., 2000). Cette caractéristique mécanique en fait le principal atout de ces alliages, s'approchant du module d'élasticité des os et permettant ainsi une meilleure biocompatibilité.

Ces valeurs de la littérature sont cohérentes avec la valeur mesurée lors de nos essais. A partir de ces données, il est possible d'estimer une valeur du module d'élasticité de la phase β. Pour cela, il est nécessaire d'établir la fraction volumique de chacun des constituants mis en jeu lors du soudage. Pour cela, on estime la contribution à partir d'une micrographie 2D de la soudure (cf. figure II.30(a)) en calculant l'aire de la soudure (A_W) et l'aire de la surface initiale de Ta mis en jeu (A_{Ta}) par rapport au plan de joint (cf. figure II.30(b)). On obtient, pour la paramétrie G2, une fraction volumique de 34% de Ta mis en jeu dans la soudure.



(a) (b)

Figure II.30 : Volume de Ta mis en jeu dans la zone fondue, (a) micrographie, (b) partition des aires mesurées.

De manière simple, on peut estimer les bornes supérieures et inférieures du module d'élasticité de la phase β par les bornes de Voigt et Reuss par les équations,

$$G_v = \langle G \rangle \quad \text{(II.3)}$$
$$K_v = \langle K \rangle \quad \text{(II.4)}$$
$$G_r = \langle G^{-1} \rangle^{-1} \quad \text{(II.5)}$$
$$K_r = \langle K^{-1} \rangle^{-1} \quad \text{(II.6)}$$

où G_v et K_v désignent les modules de cisaillement et de compressibilité pour la borne de Voigt et, G_r et K_r désignent les mêmes quantités pour la borne de Reuss. L'opérateur $\langle . \rangle$ désigne la moyenne telle que,

$$\langle P \rangle = f.P_{Ta} + (1-f).P_{Ti\beta} \quad \text{(II.7)}$$

avec f la fraction volumique et ceci sous l'hypothèse de l'absence de $Ti\alpha$.
Les modules de cisaillement et de compressibilité hydrostatique sont donnés par,

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad \text{(II.8)}$$
$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \text{(II.9)}$$

avec E et ν donnés dans le tableau II.5

Phase	E (GPa)	ν
Ta	187	0.346
$Ti\beta$	*	*
Z.F	92	*

Tableau II.5 : Module d'élasticité et coefficient de Poisson des différentes phases en présence dans la zone fondue.

On suppose connu le coefficient de Poisson de la phase $Ti\beta$ que l'on prend égal à 0.34 (coefficient de Poisson du TA6V), le module d'élasticité de la Z.F est alors donné par,

$$\frac{1}{E} = \frac{1}{9K} + \frac{1}{3G} \quad \text{(II.10)}$$

Pour f valant 0.34, on obtient des valeurs du module d'élasticité de la phase β comprises entre 43 et 73 GPa permettant, moyennant la borne considérée, d'obtenir une valeur du module d'élasticité de 92 GPa.

Remarque :
L'utilisation d'un coefficient de Poisson de 0.38 pour la phase β (Fréour et al., 2006) ne modifie que très peu l'évaluation de ces bornes (inférieur à 1 GPa).

Il est possible d'améliorer ces bornes en utilisant, par exemple, des bornes d'ordre 3 en tirant l'information de la microstructure pour des distributions statistiques bien spécifiques. Le modèle booléen est un modèle d'arrangement de sphères pouvant s'interconnecter et peut représenter certaines microstructures. Pour un développement complet de ces modèles nous renvoyons à (Milton, 1982), (Jeulin et Le Cöent, 1996), (Torquato, 1998), (Bornert, 1996), (Bornert et al., 2001a), (Bornert et al., 2001b).

On obtient alors des bornes très resserrées donnant des modules effectifs de 92.95 GPa et 91.91 GPa pour les bornes de supérieure et inférieure pour un module de la phase β de 65 GPa. On trace sur la figure II.31, l'évolution du module effectif en fonction de la fraction volumique.

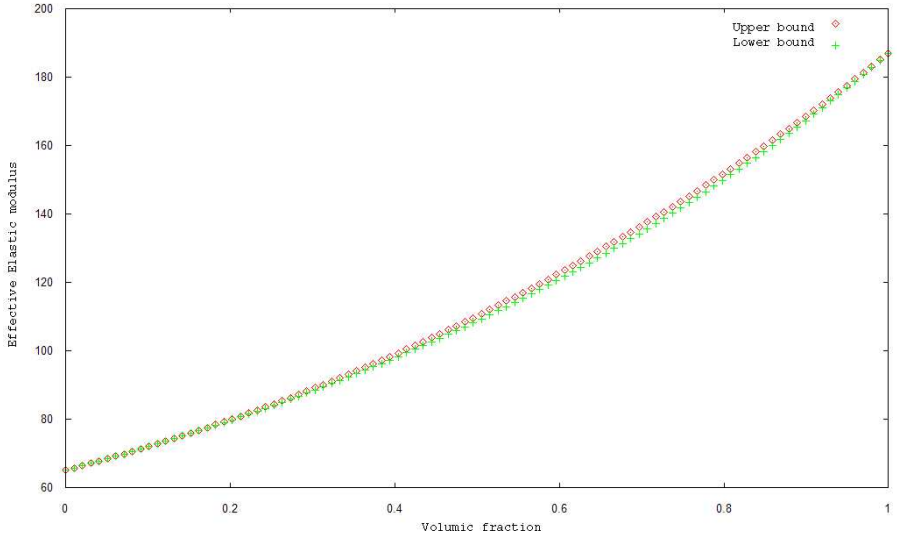


Figure II.31 : Tracé des bornes supérieure et inférieure d'ordre 3 du module d'élasticité effectif de la zone fondue en fonction de la fraction volumique de Ta.

Ce calcul ne tient pas compte de l'influence du vanadium et de l'aluminium. Le tracé de la figure II.31 suppose que la phase β du titane est stabilisée, quelle que soit la fraction volumique de Ta.

Tout comme le mélange tantale-titane modifie les propriétés d'élasticité, la plasticité subit l'influence des hétérogénéités du mélange. En effet, la plasticité se localise principalement dans les zones plus riches en Ta influençant notablement le trajet de rupture. Nous discutons de ce point au paragraphe II.4.2.2 à l'aide d'un moyen d'extensométrie optique associé à l'essai de flexion du présent paragraphe.

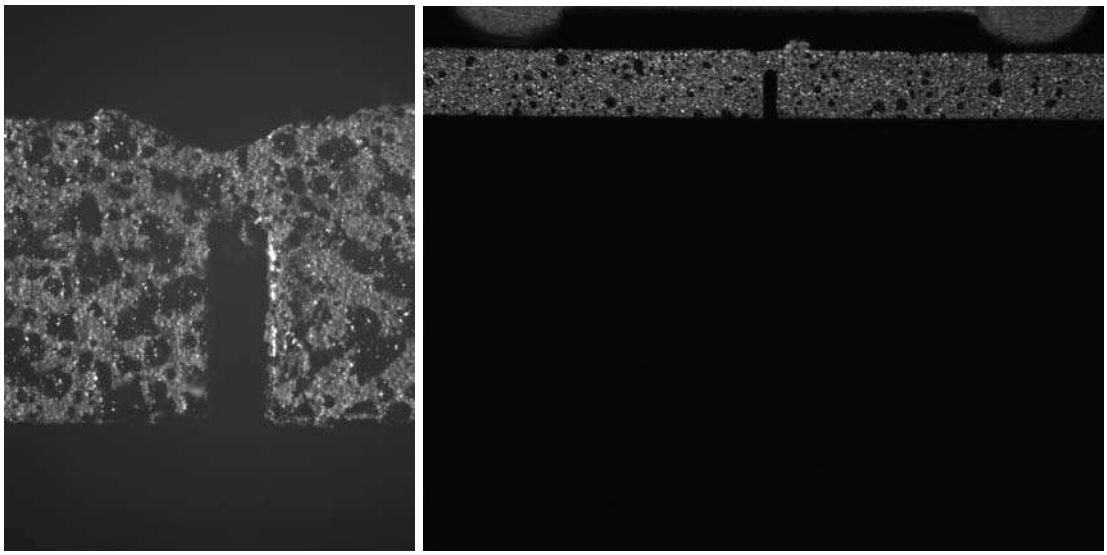
II.4.2.2 Analyse de la déformation locale, paramétrie G2

- Dispositif expérimental

Afin de caractériser correctement le comportement de la Z.F, nous avons mis en place un essai de flexion quatre points permettant d'obtenir une réponse globale pertinente.

Cependant, il est plus difficile d'y ajouter un moyen de mesure locale de déformation que pour un essai simple de traction uniaxiale. En effet, la région d'intérêt est beaucoup plus faible (de l'ordre de 500x500 μm^2) et cette zone est mobile (mouvement de corps rigide correspondant à la flèche de l'éprouvette). La première solution envisageable consiste en l'utilisation d'une caméra fixe englobant l'ensemble de la déformée possible de l'éprouvette. Cette solution a été utilisée dans un premier temps mais diminue fortement la résolution spatiale possible. Une deuxième option consiste à zoomer plus fortement sur la région d'intérêt mais il est alors nécessaire de translater la caméra à la vitesse de la flèche. Ceci permet d'augmenter la résolution spatiale théoriquement d'un facteur de 16 (pour une flèche de 8 mm). En pratique, on conserve une marge afin de garantir le suivi de région d'intérêt et l'on conserve donc une zone d'environ 3.5 mm de hauteur. On obtient donc une résolution spatiale de 1360 pixels sur 3.5 mm, soit 1 pixel mesurant 2.6 μm. La région d'intérêt est donc constituée de 192 pixels sur la hauteur.

Une comparaison des deux configurations d'essai permet d'apprécier la différence (figure II.32).



(a) (b)

Figure II.32 : Comparaison des configurations d'essai pour les mesures de déformation locale.

La caméra est donc montée sur une table de translation qui démarre en même temps que l'essai à une vitesse de 125 $\mu m.s^{-1}$ pour un essai de flexion à une vitesse de 5 $mm.min^{-1}$. La caméra est une caméra Pixel-Fly 12 bit de 1380x1024 pixel prenant 2 images par seconde.

Le dépôt de peinture permet d'avoir un motif aléatoire et est réalisé à l'aide d'une bombe de peinture classique. Ce motif aléatoire est nécessaire pour la corrélation d'image mais a l'inconvénient de masquer la microstructure.

- Corrélation d'image

L'objectif de la corrélation d'image est d'apparier les points de deux images prises dans un état initial et dans un état déformé. On discrétise la région d'intérêt (R.O.I Region Of Interest) en plusieurs imagettes ou zones d'intérêt (Z.O.I Zone Of Interest) dont on calcul le déplacement du centre. Le principe de la corrélation d'image consiste à apparier le motif de la Z.O.I dans la configuration initiale et déformée afin de quantifier le déplacement de son centre (figure II.33).

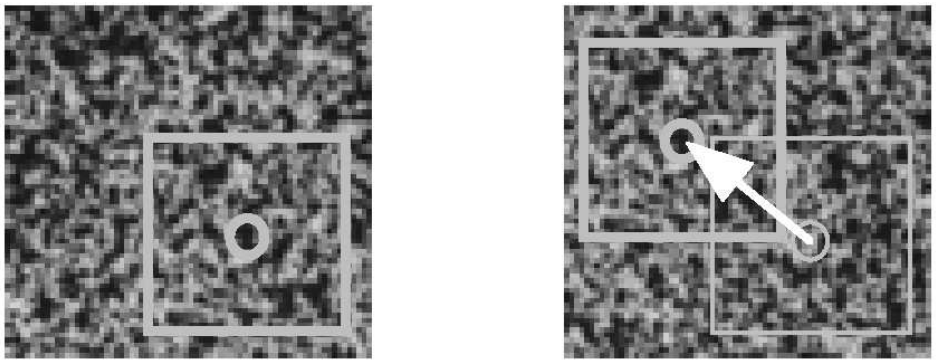


Figure II.33 : Appariement du motif de l'imagette dans la configuration initiale (a) et dans la configuration déformée (b).

Le déplacement de la Z.O.I correspond donc à un décalage de l'intensité du signal numérisé par une caméra CCD.

Soit deux signaux, le signal de l'image initiale donné par f et celui de l'image déformée par g. $\underline{\mathbf{u}}$ est un champ de déplacement et b($\underline{\mathbf{x}}$) un bruit aléatoire. g s'écrit alors,

$$g(\underline{\mathbf{x}}) \quad = \quad f(\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{u}}) + b(\underline{\mathbf{x}}) \tag{II.11}$$

L'évaluation du déplacement $\underline{\mathbf{d}}$ se fait par minimisation de la norme quadratique, donnée par $||f||^2 = \int f^2(\underline{\mathbf{x}}) d\underline{\mathbf{x}}$, telle que,

$$min_{\underline{\mathbf{d}}} \, ||g(\underline{\mathbf{x}}) - f(\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{d}})||^2 \tag{II.12}$$

Le problème de minimisation se ramène alors à maximiser le produit de corrélation $g \star f$ tel que

$$g \star f(d) \quad = \quad \int_{-\infty}^{+\infty} g(\underline{\mathbf{x}}) f(\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{d}}) d\underline{\mathbf{x}} \tag{II.13}$$

Une interprétation graphique de la détermination du champ de déplacement est donnée figure II.35

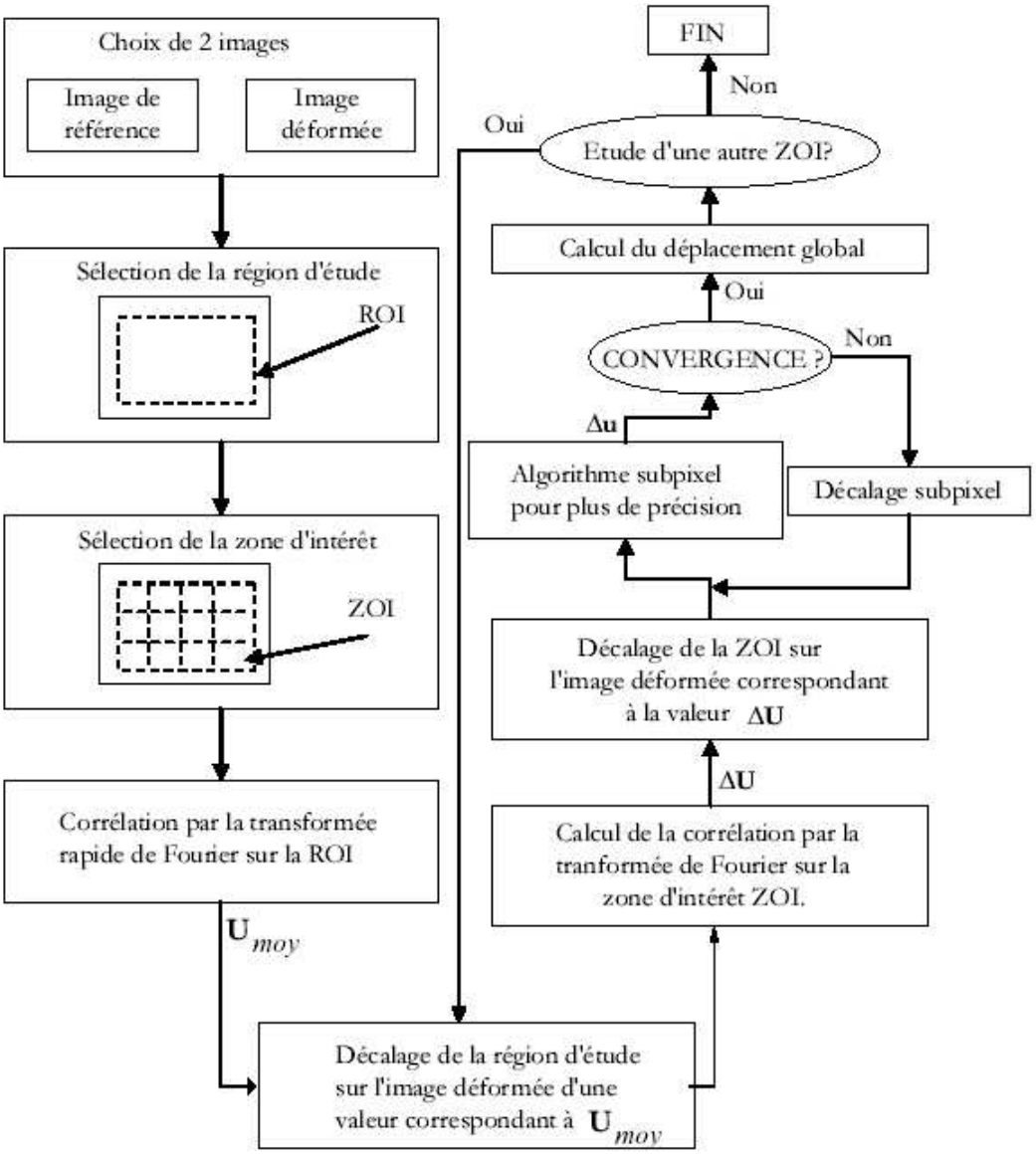


Figure II.34 : Algorithme décrivant la procédure de corrélation mise en place dans $CORRELI^{LMT}$, d'après (Triconnet, 2007).

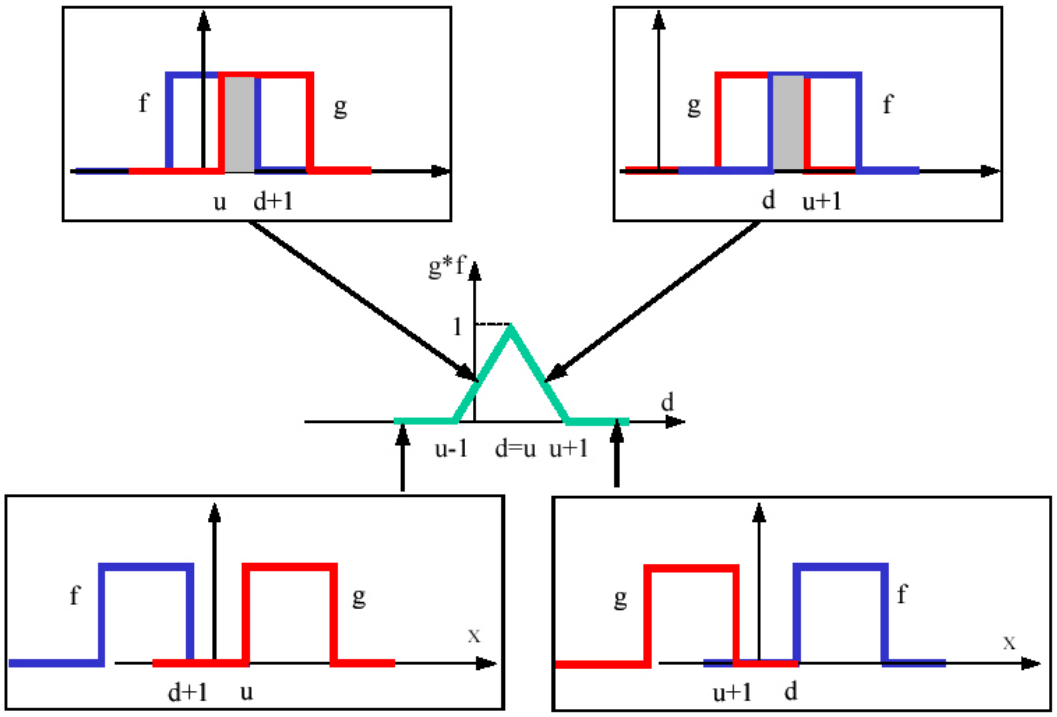


Figure II.35 : Intercorrélation de deux fonctions semblables décalées l'une par rapport à l'autre d'une valeur $\underline{u}$, d'après (Hild, 2003).

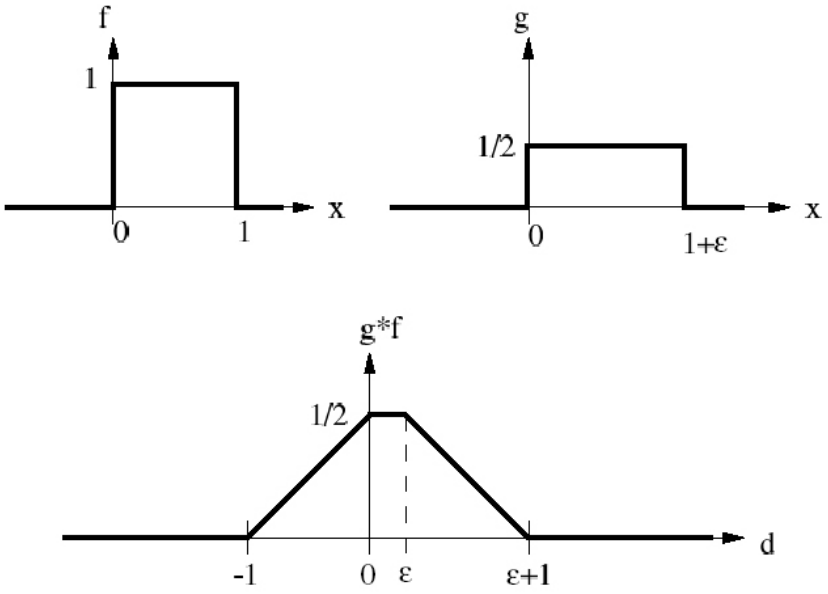


Figure II.36 : Intercorrélation de deux fonctions semblables déformées l'une par rapport à l'autre d'une valeur ε, d'après (Hild, 2003).

Si la fonction g subit une déformation ε et que l'intensité est divisée par 2, on obtient une

fonction de corrélation tracée sur la figure II.36.

En utilisant une interpolation parabolique, il est possible de déterminer le maximum en $\frac{\varepsilon}{2}$ qui correspond au déplacement moyen de la fonction g par rapport à f. On note que ce maximum n'est pas forcément atteint pour un nombre entier de pixels dans le cas d'une image par caméra CCD. Il est donc possible d'atteindre une précision sub-pixel du champ de déplacement.

Le calcul du produit de corrélation peut aussi bien être réalisé dans l'espace réel que dans l'espace de Fourier en utilisant la transformée de Fourier rapide. Ce traitement accélère considérablement le calcul. Le lecteur intéressé par un approfondissement des techniques de corrélation est renvoyé à (Hild, 2003), (Hild et Roux, 2005), (Sutton et al., 1983), (Sutton et al., 1988) pour ne citer qu'eux. La littérature est riche de développements théoriques et d'applications pratiques sur la corrélation d'image dont nous citons quelques applications sur des problèmatiques proches des notres (Puyo-Pain et al., 2005), (Lockwood, 2000), (Lockwood et Reynolds, 2003), (Reynolds et F., 1999), (Liu et Chao, 2005).

La sensibilité S de la méthode est donnée par l'inverse du gradient de f (équation II.11), soit

$$S = \frac{1}{\nabla f} \tag{II.14}$$

La sensibilité dépend donc de l'inverse du nombre de niveaux de gris dans une direction donnée. Elle dépend, par conséquent, aussi de la texture, i.e du nombre de niveaux de gris occupés par l'image. Dans l'hypothèse où toute la dynamique de l'image est présente dans chaque direction de corrélation, la sensibilité est donnée par le tableau II.6,

Encodage (bits)	Niveaux de gris	Sensibilité (pixels)
8	256	$3.9\ 10^{-3}$
10	1024	$9.76\ 10^{-4}$
12	4096	$2.44\ 10^{-4}$
16	65536	$1.52\ 10^{-5}$

Tableau II.6 : Sensibilité de la corrélation en fonction de la dynamique de l'image.

En passant d'une caméra de 8 bits à 12 bits, on améliore la sensibilité d'un facteur de 16 environ. Il est donc important d'obtenir un histogramme des niveaux de gris aussi large que possible, tout en évitant la saturation. De plus, l'influence de la direction sur la sensibilité impose donc, au maximum, d'établir un mouchetis de peinture homogène et isotrope.

- Résultats

En reprenant l'essai représentatif de la paramétrie G2 du paragraphe II.4.2.1, il est possible d'en extraire le champ de déplacement local et, par dérivation discrète, le champ de déformation associé. L'acquisition des images est réalisée par la caméra en translation dont la position initiale correspond à la zone indiquée sur la figure II.37. La zone représentant la R.O.I est donnée figure II.38 ainsi que le champ de déplacement associé dans la direction transverse (verticale descendante).

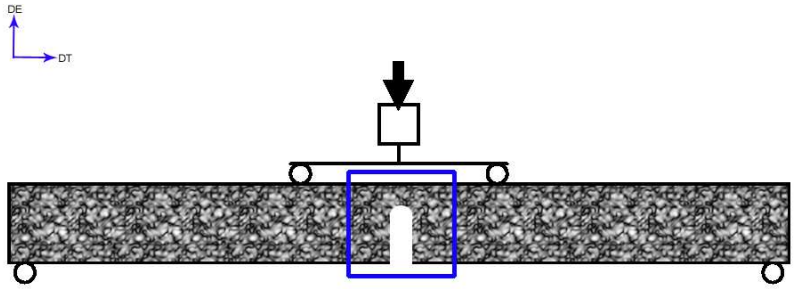
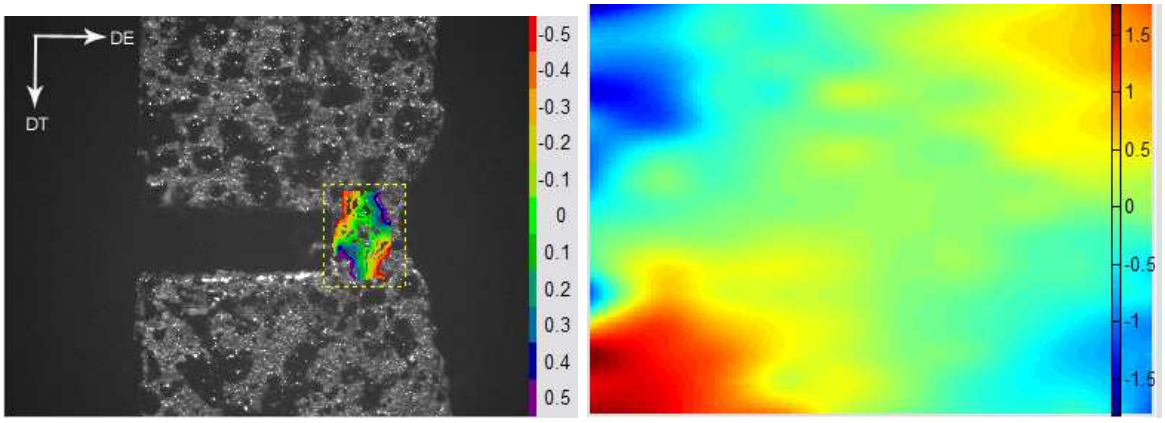


Figure II.37 : Zone d'acquisition initiale de l'image par la caméra CCD.



(a) (b)

Figure II.38 : Cartes des déplacements transverses en pixel (2.6 $\mu m.pixel^{-1}$) pour t=5s : (a) sur l'image de référence entière, (b) zoom sur la R.O.I.

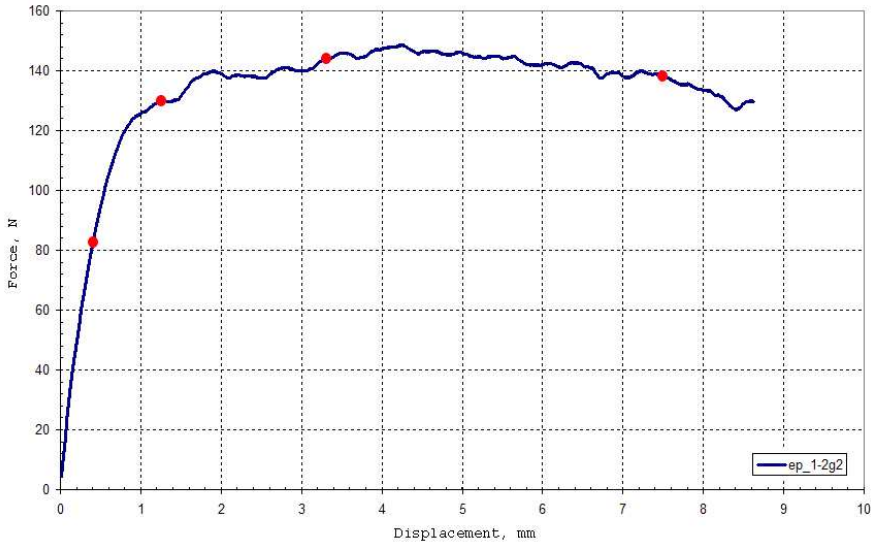


Figure II.39 : Points sur la courbe force-déplacement correspondant au instant t=5, 15, 40, 90 s.

L'évolution du champ de déplacement et de la déformation en mode I (ouverture de fissure) peut être suivie tout au long de l'essai (cf. figure II.40 et suivantes). Ces mesures correspondent à quatre instants de l'essai repérés sur la courbe force-déplacement (figure II.39).

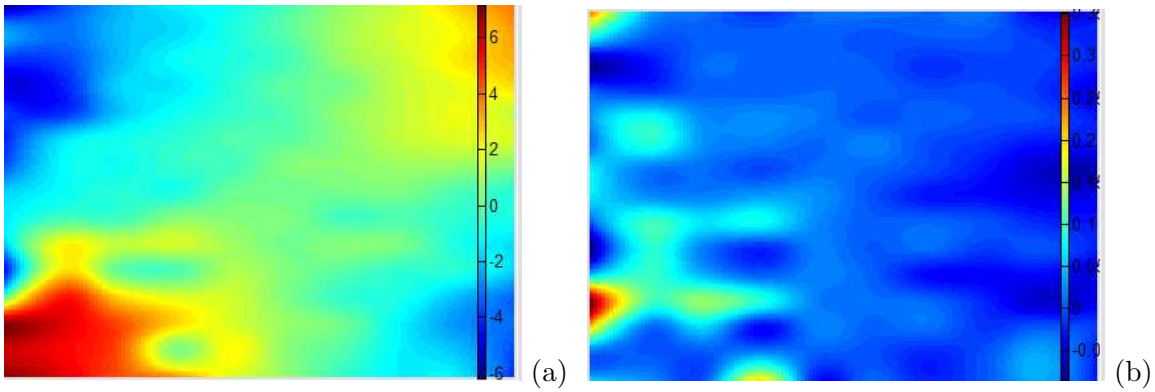


Figure II.40 : Carte de déplacement (a) et de déformation nominale (b) suivant DT pour t=15 s.

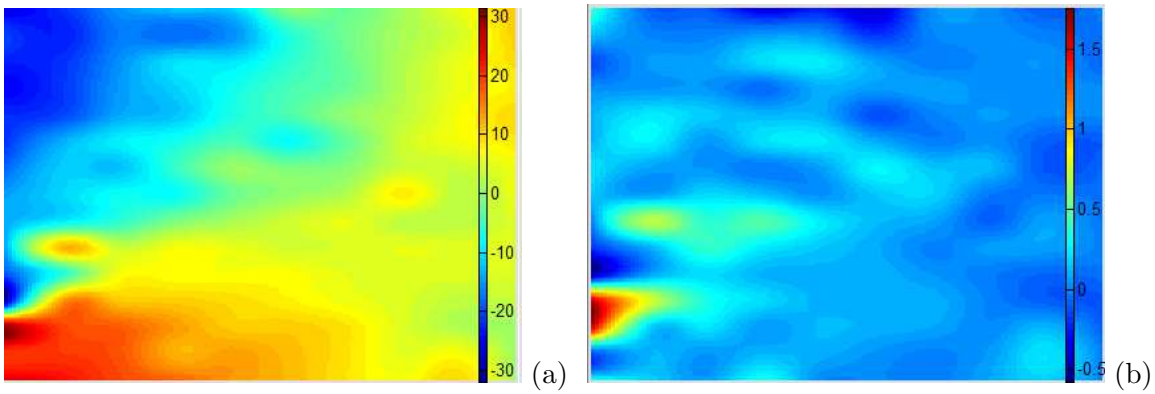


Figure II.41 : Carte de déplacement (a) et de déformation nominale (b) suivant DT pour t=40 s.

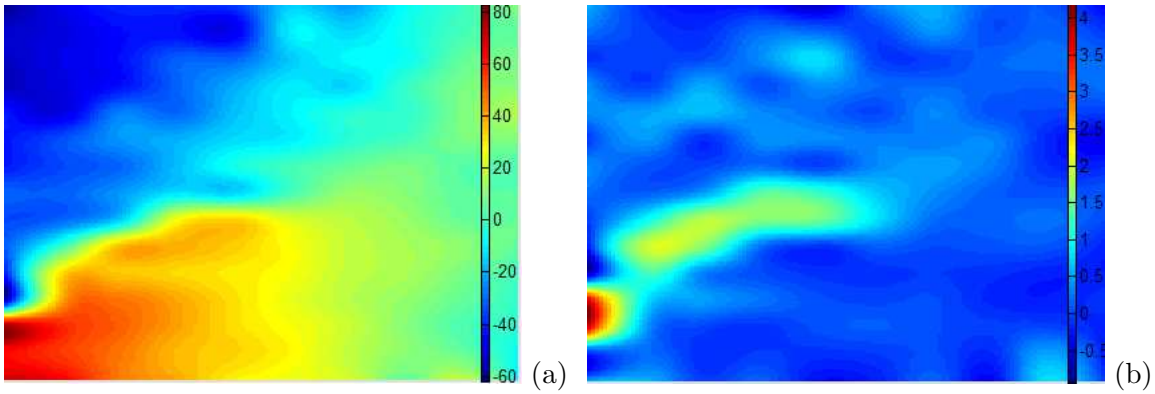


Figure II.42 : Carte de déplacement (a) et de déformation nominale (b) suivant DT pour t=90 s.

Le champ de déplacement est donné en pixel dans la direction DT et projeté sur la configuration initiale. Ainsi, la figure II.38 met bien en évidence les conditions d'un essai de

flexion classique, avec une partie supérieure en compression, une partie inférieure en traction et un déplacement nul sur la fibre neutre.

Dès l'entrée en plasticité, l'influence de l'entaille se fait sentir et cette distribution du champ de déplacement est perturbée (figure II.40). La déformation locale maximale en fond d'entaille est déjà de 30% et se localise suivant deux directions préférentielles. Juste avant l'adoucissement de la réponse globale (figure II.41), le champ de déformation se localise fortement, atteignant des valeurs locales très élevées de l'ordre de 150 %. Il existe un gradient de déplacement fort en fond d'entaille synonyme, en corrélation d'image, de fissuration. Il est possible qu'à ce stade la fissure se soit initiée proche de la surface, elle n'est pas encore visible à l'oeil nu. Finalement, la fissure se propage et dévie sur la partie gauche. Le champ de déplacement présente une large ligne où le gradient de déplacement est important, preuve de la fissuration de l'éprouvette. A ce stade, la fissuration en fond d'entaille est apparue à la surface et augmente l'erreur de mesure. Cependant, il est possible de suivre la localisation de la déformation prenant un chemin bien particulier.

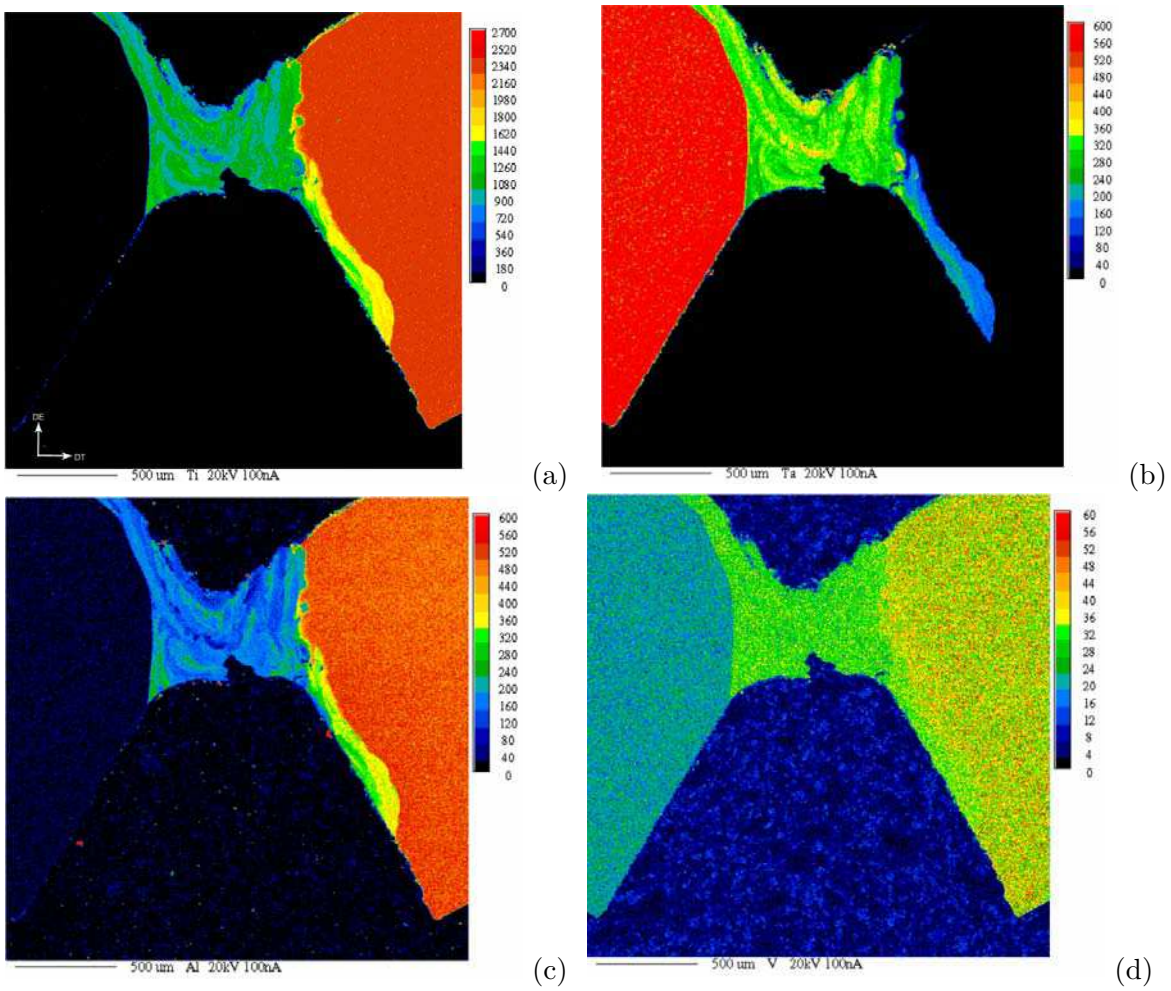
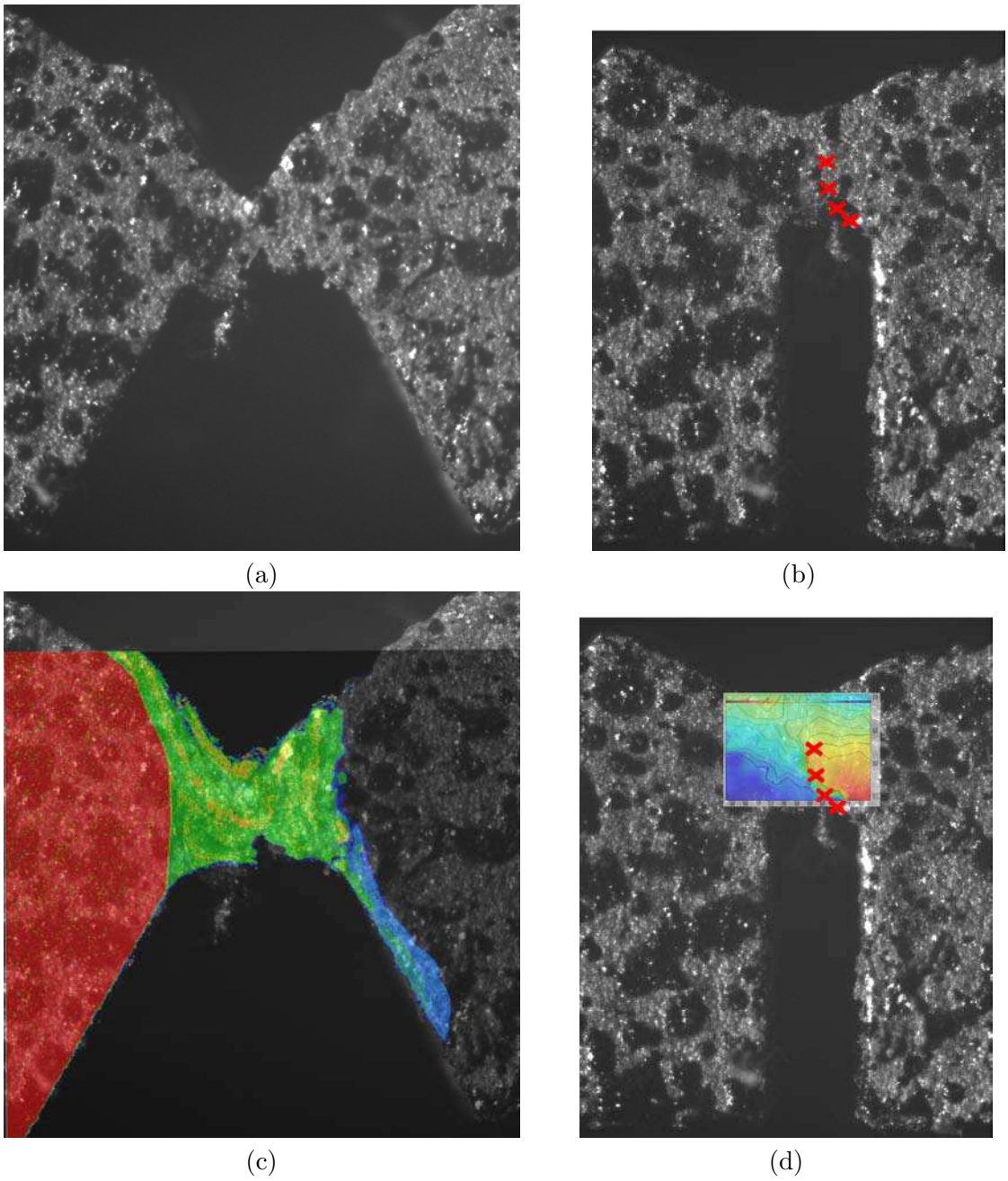


Figure II.43 : Mesure microsonde en nombre de coups : (a) Répartition du titane, (b) Répartition du tantale, (c) Répartition de l'aluminium, (d) Répartition du vanadium.

Pour cela, il est nécessaire d'avoir l'information sous la surface masquée par le mouchetis de peinture. Nous avons réalisé un polissage de surface suivant une procédure donnée en annexe A.6, en tentant de retirer le moins de matière possible pour réaliser des cartographies par microsondes de Castaing (W.D.S Wavelength Dispersive Spectroscopy) représentatives de

la distribution chimique. Les résultats sont présentés figure II.43 pour les 4 éléments présents.

L'analyse microsonde est réalisée avec un pas de 5 μm et le diamètre de la sonde est de l'ordre de 5 μm. On analyse ainsi toute la surface afin d'obtenir une cartographie complète de la zone. Globalement, le mélange est assez bien brassé avec parfois la présence de zones plus riches en Ta. Ces zones sont présentes sur les lignes de courant convectif du soudage.



(a) (b)

(c) (d)

Figure II.44 : Localisation de la fissuration : (a) Image finale de l'essai à t=100 s (b) représentation du lieu des points de la fissure sur l'image initiale, (c) superposition de la répartition du Ta par mesure microsonde et de l'image finale de l'essai, (d) superposition du champ de déplacement mesuré à t=90 s et de l'image initiale.

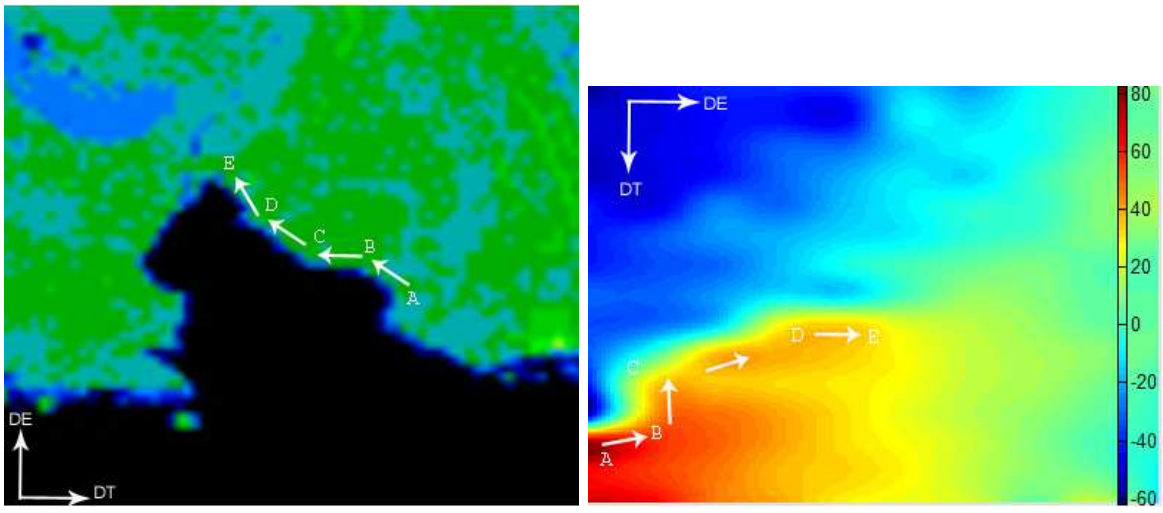
Une des difficultés d'interprétation des mesures locales par corrélation d'image réside dans le masquage de la microstructure mais aussi dans le fait que les mesures soient exprimées dans

une configuration non déformée. Ainsi, les champs de déplacement et de déformation obtenus sont exprimés dans le repère de l'image initiale. La figure II.44 tente de résoudre ces problèmes en repérant le lieu des points de la fissure dans l'image initiale et en la juxtaposant à l'image finale (fin d'essai à t=100 s), ainsi qu'en confrontant la mesure microsonde sur l'image finale et la mesure du champ de déplacement sur l'image initiale.

Tout d'abord, le gradient de déplacement présenté en figure II.42 et reporté figure II.44(d) localise bien le passage de la fissure. Cette fissure se propage sur environ les $\frac{2}{3}$ de la hauteur liaisonnée initiale (figure II.44(b)). Cette longueur de fissure n'apparaît pas si importante sur l'image finale à cause de différents paramètres comme : l'effet de striction dans la direction DE et le cisaillement dans le plan de la fissure (plan (DE, DL)).

Sur la figure II.44(c), il est possible de voir l'influence de l'hétérogénéité chimique de la Z.F sur la propagation de rupture. En effet, la fissure tente de se propager dans les zones les moins ductiles donc les moins riches en Ta. Sa propagation est bloquée par une zone de forte concentration en Ta et tente alors de suivre les interfaces de ces zones comme nous le verrons paragraphe II.4.2.3.

En s'intéressant de plus près à la zone de fissuration, il est possible de mettre en avant 3 changement de direction dans la propagation (figure II.47).



(a) (b)

Figure II.45 : Zoom sur la fissuration (a) Identification du chemin de propagation sur la cartographie microsonde (répartition du Ti), (b) Champ de déplacement suivant DT.

Partant du point A, la fissure se propage dans la direction DE jusqu'à B puis s'écarte dans la direction opposée à DT pour atteindre B. La présence d'une zone plus riche en Ta (zone 1 figure II.46) semble influencer la direction de propagation. A partir de C, la fissure subit l'influence de 2 zones (1 et 2 figure II.46) orientant la propagation dans une direction intermédiaire (section C-D). L'influence majeure de la zone 2, plus riche encore en Ta que la zone 1 mais aussi plus proche, devient majeure et oriente la propagation suivant la direction DE. Finalement, la propagation est stoppée en E face à l'importante zone ductile et l'approche de la partie supérieure de l'éprouvette soumise à une sollicitation en compression.

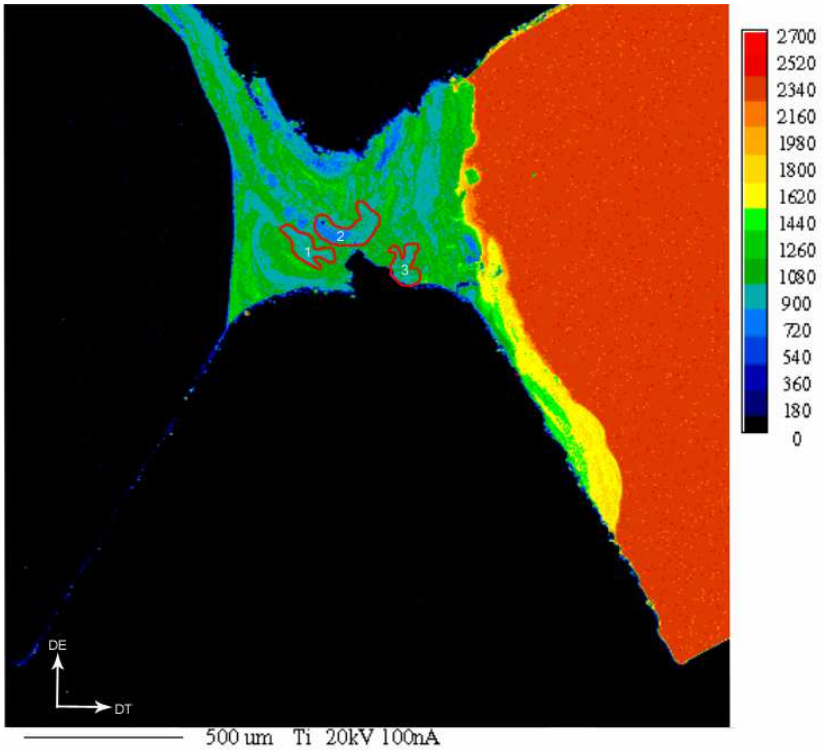
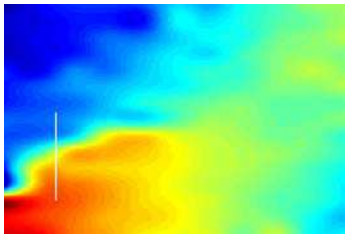
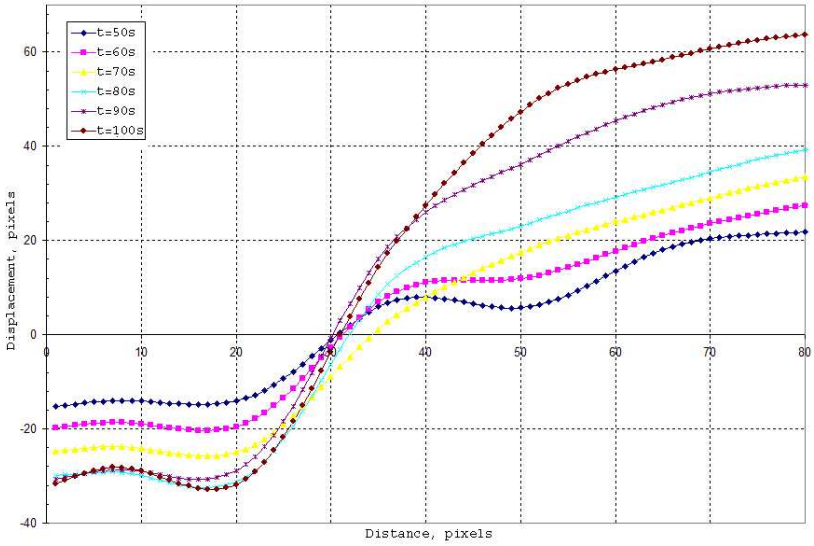


Figure II.46 : Microsonde, répartition du Ti : Localisation des zones pauvres en Ti (donc riches en Ta).

En mesurant le champ de déplacement et le champ de déformation suivant DT pour deux segments intersectant la portion CD, on trace l'évolution de ces quantités de 50 à 100 s. Ces durées sont représentatives de la phase d'adoucissement du comportement global.

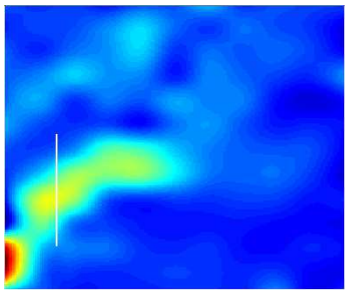


(a)

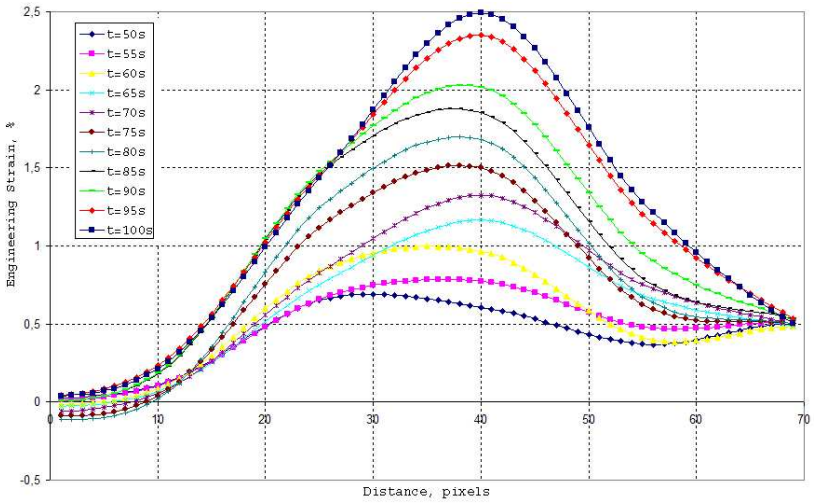


(b)

Figure II.47 : Mesure de déformation suivant un profil : (a) localisation du profil pour t=90 s (b) évolution du déplacement de 50 à 100 s.



(a)



(b)

Figure II.48 : Mesure de déformation suivant un profil : (a) localisation du profil pour t=90 s (b) evolution de la déformation de 50 à 100 s.

L'évolution du champ de déformation est stable, preuve d'une propagation de fissure régulière. Il est quasi nul à gauche de la fissure et stable à environ 50% sur la droite de celle-ci. Cette déformation provient de l'état antérieure et se localise dans la zone 3 (figure II.46). La fissure aurait pu bifurquer sur la droite comme le montre le champ déformation des figures II.40(b) et II.41(b) ainsi que le profil à t=50 s, présentant deux maxima en 30 et 70 pixels.

Les considérations développées ci-dessus concernant l'influence d'un mismatching local sur la propagation de rupture sont en accord avec la littérature. Nous citerons, entre autres, deux études (Ohata et al., 1996), (Kim, 1998) discutant de l'influence du mismatch sur le trajet de rupture pour une jonction hétérogène réalisée par soudage diffusion. Les essais sont réalisés sur des éprouvettes entaillées en flexion 3 points. Les résultats sont les mêmes et les auteurs concluent à la déviation de la fissure vers le matériau le plus mou. De plus, l'orientation de la fissure est dépendante de la distance d'influence comme le montre les figures II.49 et II.50.

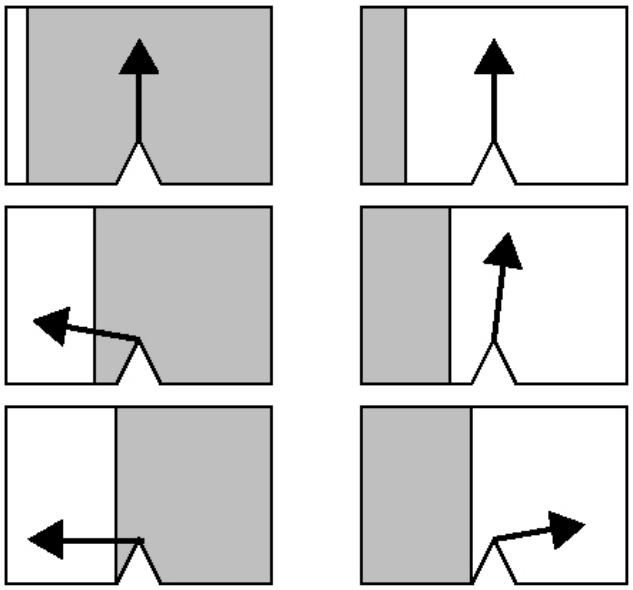
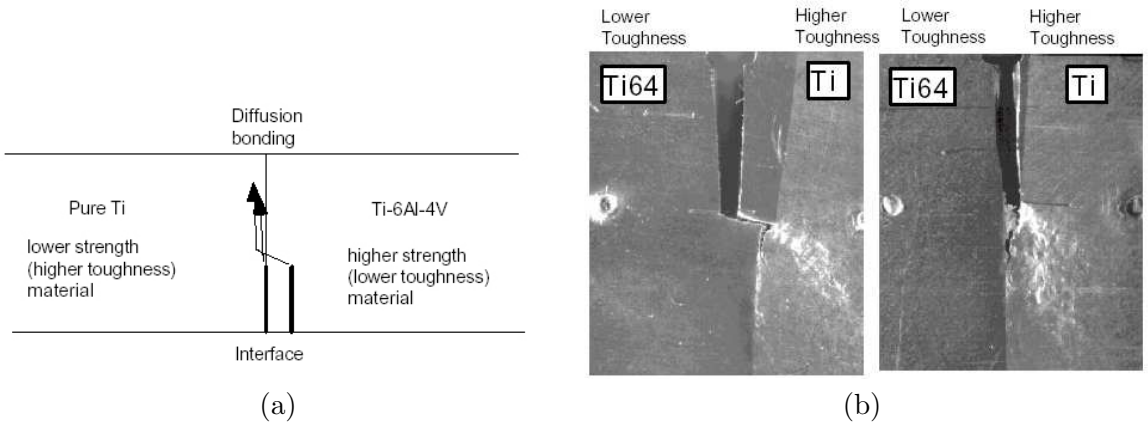


Figure II.49 : Influence du mismatch sur la propagation de rupture, où les zones grisées désignent le matériau le plus dur, d'après (Ohata et al., 1996).



(a) (b)

Figure II.50 : Influence du mismatch sur la propagation de rupture, d'après (Kim, 1998) : (a) Schéma de la propagation en fonction de la position d'entaille (b) Clichés comparatifs des deux essais.

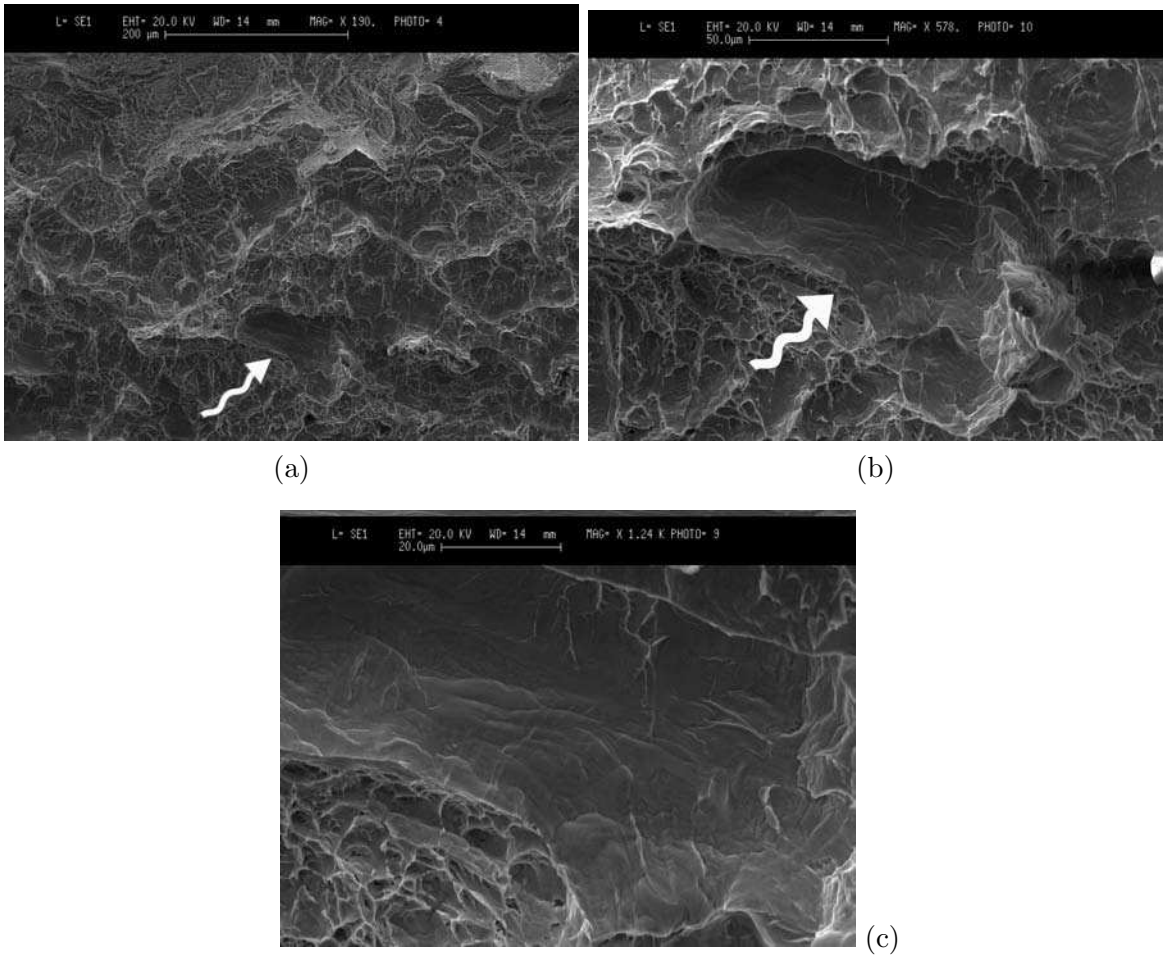
Dans ce paragraphe, nous avons présenté les analyses provenant des mesures de champs déformation locale et tenté de mettre en évidence l'influence de l'hétérogénéité du mélange sur

la propagation de rupture. Le paragraphe suivant, complète ces investigations en analysant les faciès de rupture des éprouvettes sollicitées en flexion.

II.4.2.3 Fractographie

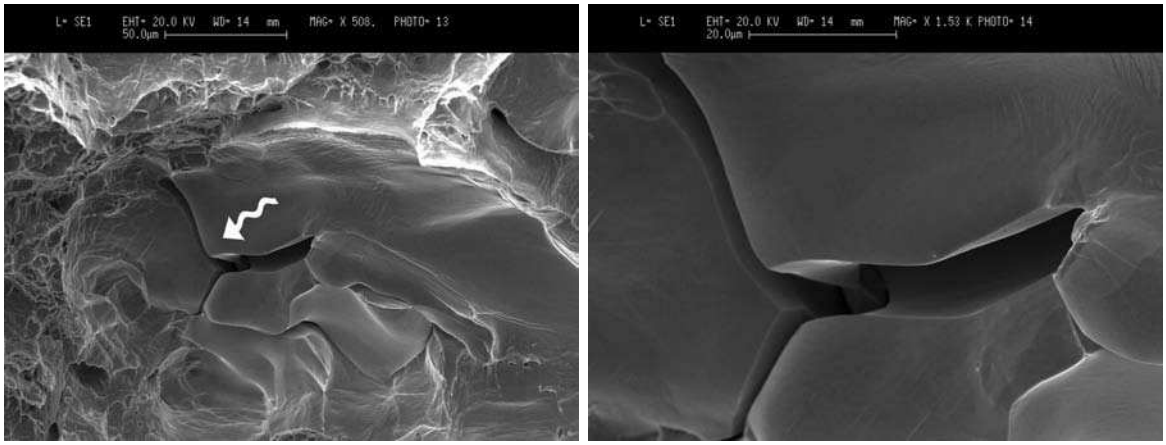
Les mécanismes identifiés dans ce paragraphe se retrouvent pour toutes les configurations de soudage. Les observations sont réalisées dans le plan (DE,DL) par Microscope Electronique à Balayage (M.E.B) utilisé en mode secondaire.

Les faciès de rupture des différentes éprouvettes de flexion testées révèlent un faciès mixte ductile fragile. Ce faciès est globalement ductile (cf. figure II.51 (a)) mais certaines zones réparties de manière aléatoire mettent en avant de larges surfaces lisses (cf. figure II.51 (b)).



(a) (b) (c)

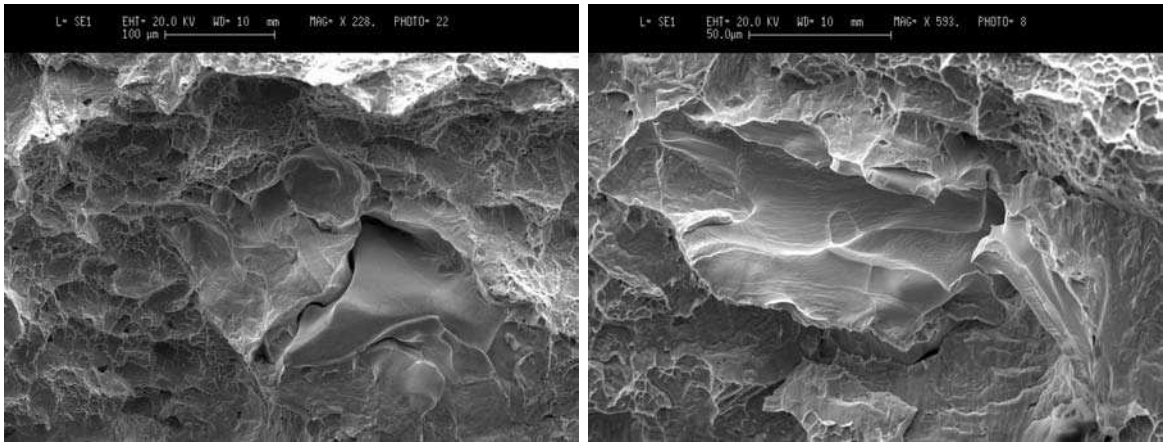
Figure II.51 : Faciès de rupture d'une éprouvette testée en flexion quatre points : (a) Vue générale globalement ductile, (b) Zoom sur une zone fragile, (c) Zoom sur les rivières de clivage caractéristiques d'une rupture fragile.



(a) (b)

Figure II.52 : (a) Rupture intergranulaire avec présence d'un point triple , (b) Zoom sur ce point triple.

De plus, la rupture semble être intergranulaire, comme on peut le voir sur la figure II.52 présentant un point triple en plein coeur d'une zone fragile. D'autres zones sont remarquables, comme par exemple, les clichés figure II.53, présentant bien la complexité des faciès de rupture et les mécanismes de clivage (figure II.54).



(a) (b)

Figure II.53 : Autres clichés de rupture fragile.

La rupture par clivage se produit par décohésion en mode I des plans cristallographiques d'un grain et se propage ensuite de grain en grain. La contrainte normale théorique pour cliver est de l'ordre de $\frac{E}{10}$. Les valeurs expérimentales sont beaucoup plus faibles et s'expliquent par la présence de défauts ou d'inclusion provoquant une concentration de contraintes locale. Aucun composé pouvant fragiliser ces zones n'a été mis en évidence. L'empilement de dislocations aux joints de grain et aux points triples, ainsi que les gradients de composition semblent suffisant pour déclencher ce type de mécanisme.

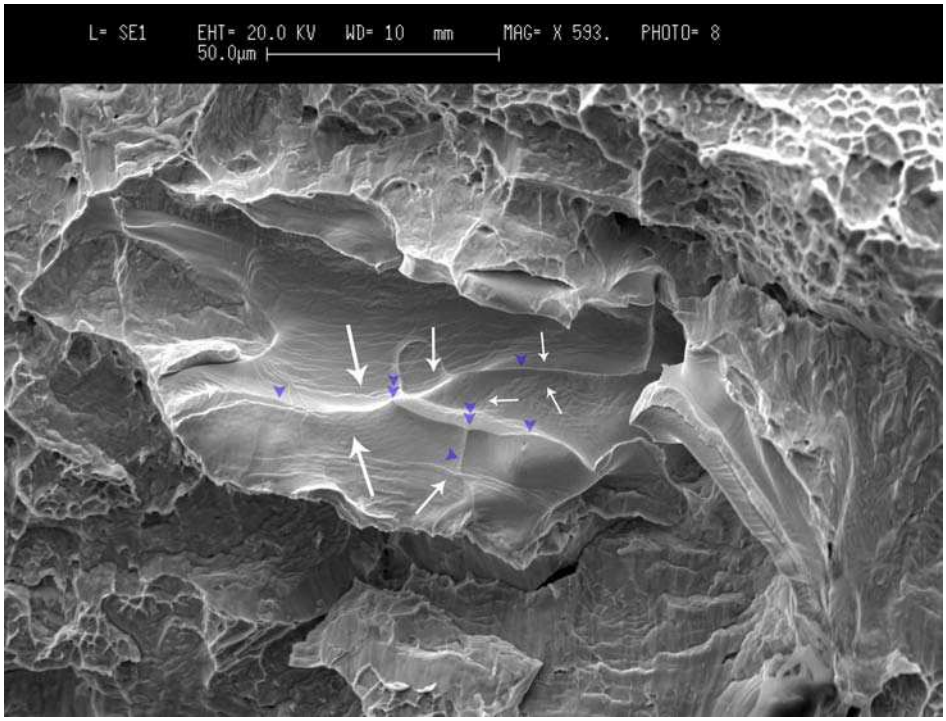
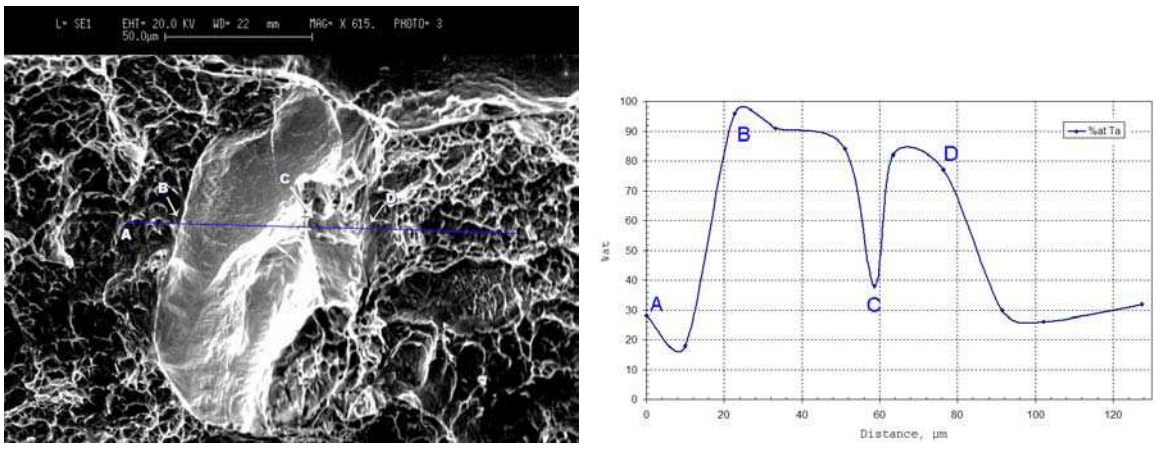


Figure II.54 : Rupture fragile : les flèches indiquent la direction normale aux rivières de clivages dans chaque grain, les triangles simples indiquent les joints de grain, les triangles doubles indiquent les points triples

Ces zones sont très riches en Ta et présentent des sites d'amorçage caractérisés par une chute de cette teneur. Les mesures faites par microsonde E.D.S (Energy Dispersive Spectroscopy) montrent l'évolution du pourcentage atomique de Ta des zones ductiles à cupules en traversant les zones de clivage (cf. figure II.55).



(a) (b)

Figure II.55 : Zone fragile du faciès de rupture : (a) vue M.E.B , (b) pointés E.D.S

D'après les pointés E.D.S, la face lisse caractéristique d'une zone fragile correspond à une zone riche en Ta (de 82 à 98% atomique soit environ 94 à 96% massique) allant du point B au point D de la figure II.55(a). Le point C semble être un site d'amorçage de rupture dont la teneur en Ta est beaucoup plus faible (38% atomique soit 70% massique). Les zones ductiles

se composent de 20 à 30% atomique en Ta (48 à 62% massique).

Ces mécanismes d'endommagement se retrouvent dans toutes les soudures quelle que soit la paramétrie. Les décohésions d'interface sont alors plus ou moins marquées en fonction du brassage du bain. Ces conclusions dépendent principalement des gradients locaux et donc du brassage et de l'homogénéité de la Z.F obtenue. Cependant, les modifications des paramètres de soudage peuvent faire varier la réponse locale en conservant les mêmes mécanismes de rupture. Dans le paragraphe suivant, nous tenterons de confronter les réponses globales des différentes paramétries ainsi que de voir les paramètres influants.

II.4.3 Confrontation des différentes paramétries

II.4.3.1 Paramétrie G3

Les résultats obtenus pour la paramétrie G3 restent assez peu dispersés bien qu'un peu plus que G2 (cf. annexe A.4). Le comportement représentatif de la réponse de la paramétrie G3 est donné figure II.56 pour une hauteur liaisonnée de 0.48 mm,

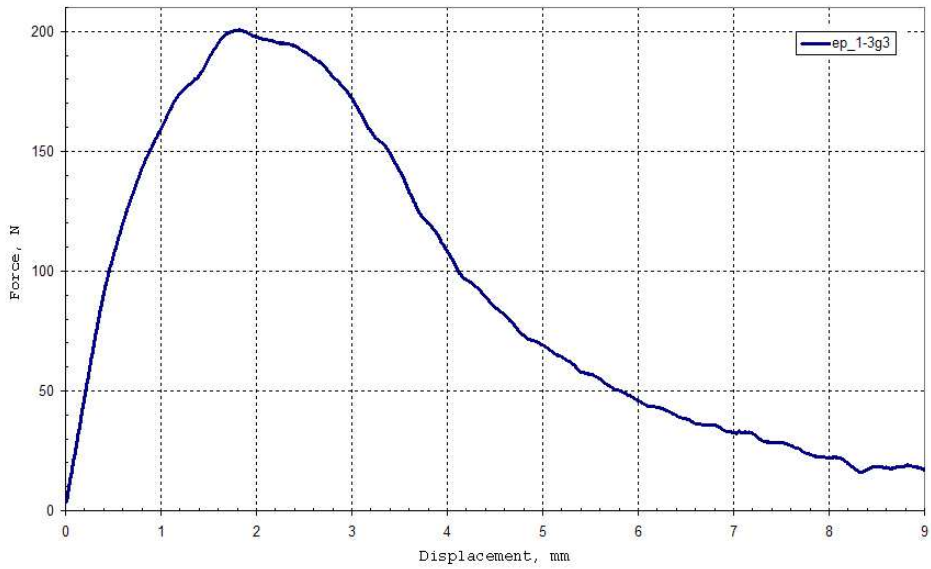


Figure II.56 : Réponse force-déplacement à l'essai de flexion sur éprouvettes soudées entaillées de rayon 0.2 mm, paramétrie G3

Le passage de la paramétrie G2 à la paramétrie G3 implique une mise en jeu plus importante de TA6V au sein de la zone fondue. Ceci est principalement dû à la modification des paramètres de puissance crête et de déport(cf. tableau II.1). Le déport côté Ta étant plus faible pour la paramétrie G3, la zone fondue comporte donc moins de Ta et présente un comportement mécanique plus élevé mais aussi plus fragile comme le montre la figure II.57. La répartition des éléments au sein de la Z.F est donnée par microsonde W.D.S (figure II.58).

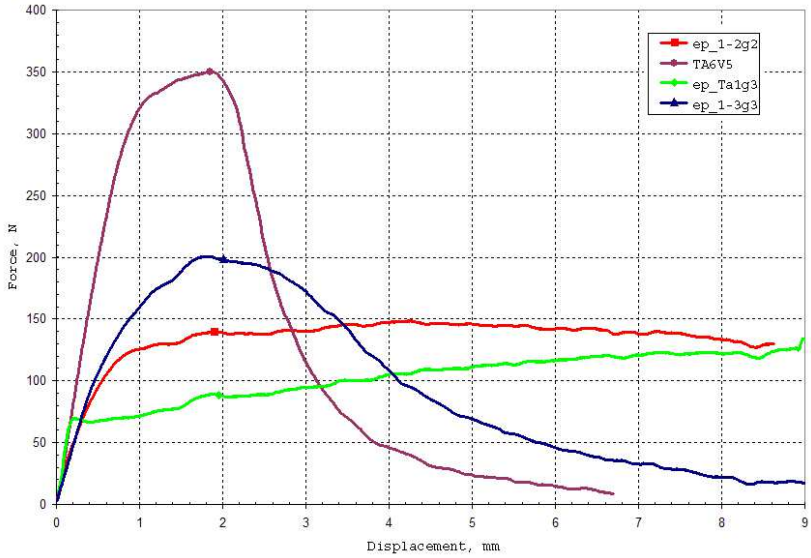


Figure II.57 : Essais de flexion sur éprouvettes entaillées de rayon 0.2 mm sur liaisons soudées de paramétrie G2 et G3

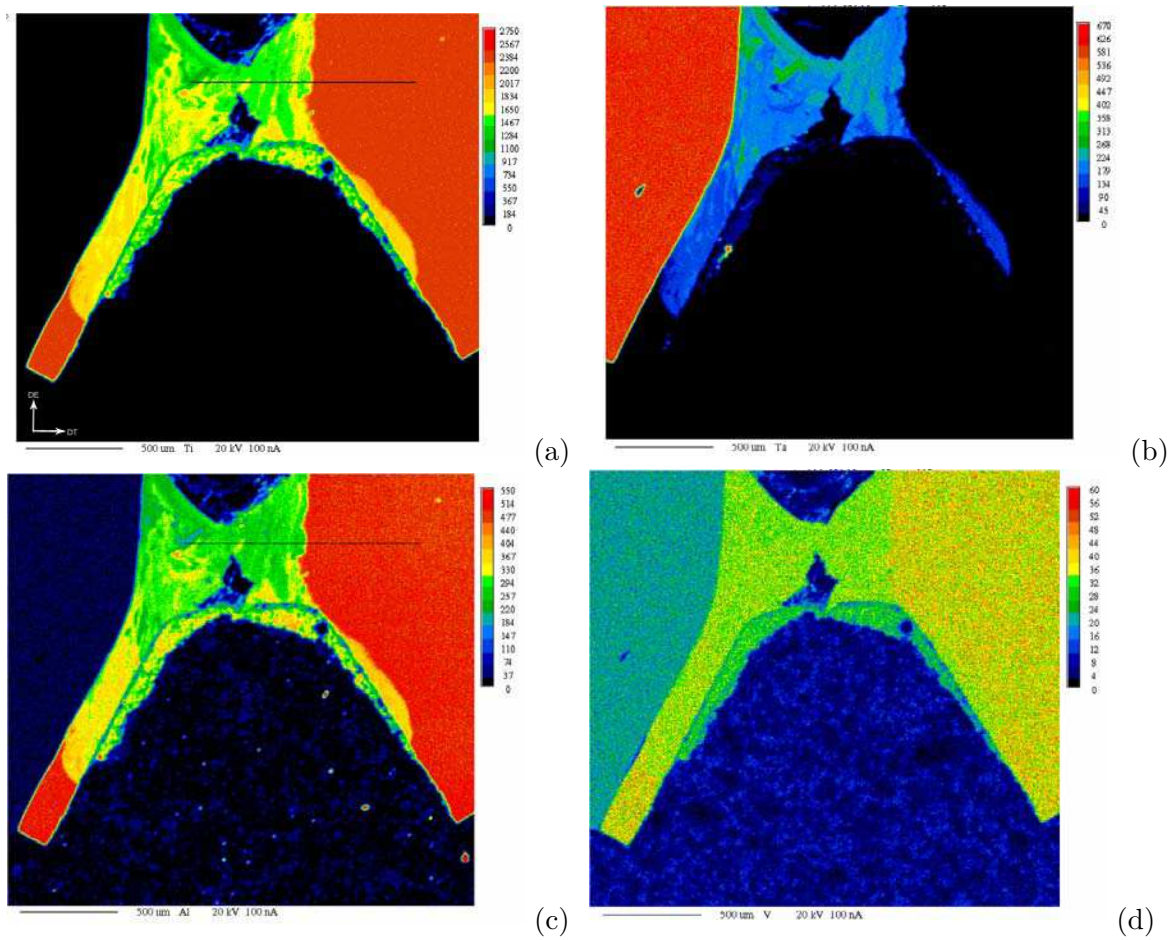
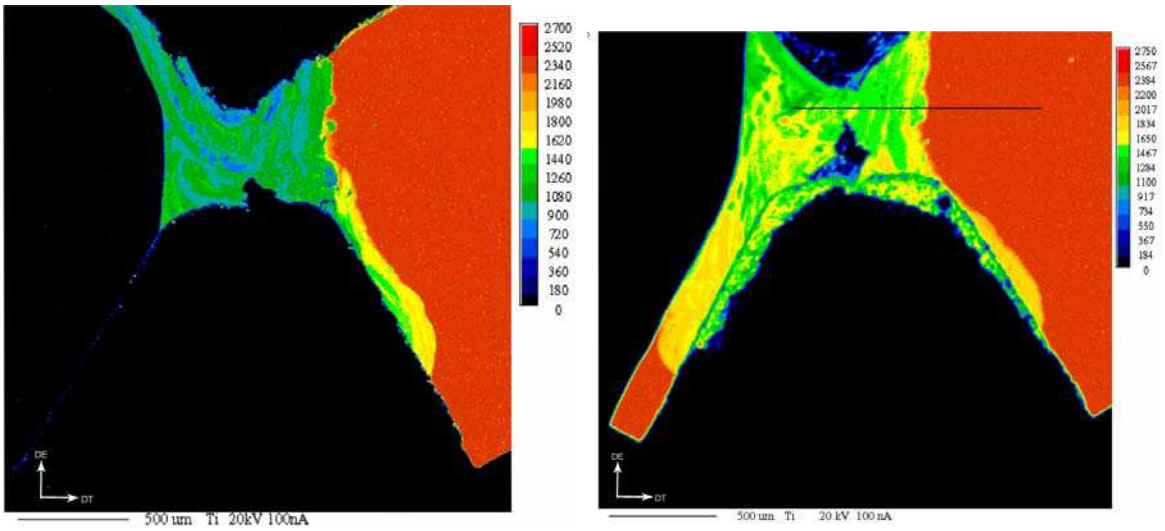


Figure II.58 : Mesure microsonde en nombre de coups : (a) Répartition du titane, (b) Répartition du tantale, (c) Répartition du aluminium, (d) Répartition du vanadium.

Remarques :

Le polissage de l'échantillon peut parfois déposer de fines particules sur la résine d'enrobage. On obtient alors une zone, en périphérie de l'échantillon, dont les valeurs microsonde sont non nulles comme sur les figures II.58. Ces lisérés n'ont, bien sûr, aucune signification.

Par la même méthode que celle présentée figure II.30, on estime le taux de Ta mis en jeu dans la soudure à environ 21%. Les tendances de ces mesures sont respectées si l'on compare la répartition du Ti, obtenue par microsonde, dans les deux soudures de paramétrie G2 et G3 (figure II.59)



(a) (b)

Figure II.59 : Répartition du Ti au sein de la zone fondue pour les paramétries : (a) G2, (b) G3.

Il est possible de comparer ces analyses par microsonde puisqu'elles se trouvent approximativement étalonnées. La mesure dans le TA6V renvoie pour l'un 2700 coups et pour l'autre 2750. Sans être une mesure exacte, il est possible de comparer ces cartographies et d'en tirer quelques faits marquants. La paramétrie G3 met en jeu, en moyenne, plus de Ti (1467 coups contre 1080 dans la majeure partie de la soudure). Le bain apparaît moins bien brassé mais aussi et surtout, on semble se trouver dans un configuration inversée. La paramétrie G2 présente plutôt une configuration inclusion molle dans une matrice dure tandis que la paramétrie G3 est inversée et s'apparente à une configuration inclusion dure dans une matrice molle. Ceci est bien sûr à entendre de manière relative puisque la matrice de G2 devrait être plus molle et plus ductile que la matrice G3, à en juger par la teneur globale en Ti.

La fissure dans G3 va donc se propager dans la matrice en étant repoussée par les inclusions dures. Son trajet dans la matrice sera donc facilité. La réponse globale de G3 s'explique donc par une matrice plus dure et plus fragile que G2 et des inclusions facilitant la propagation dans cette matrice. A l'inverse, la fissuration de G2 se déroule dans une matrice plus molle et plus ductile que G3 dont les inclusions freinent cette propagation.

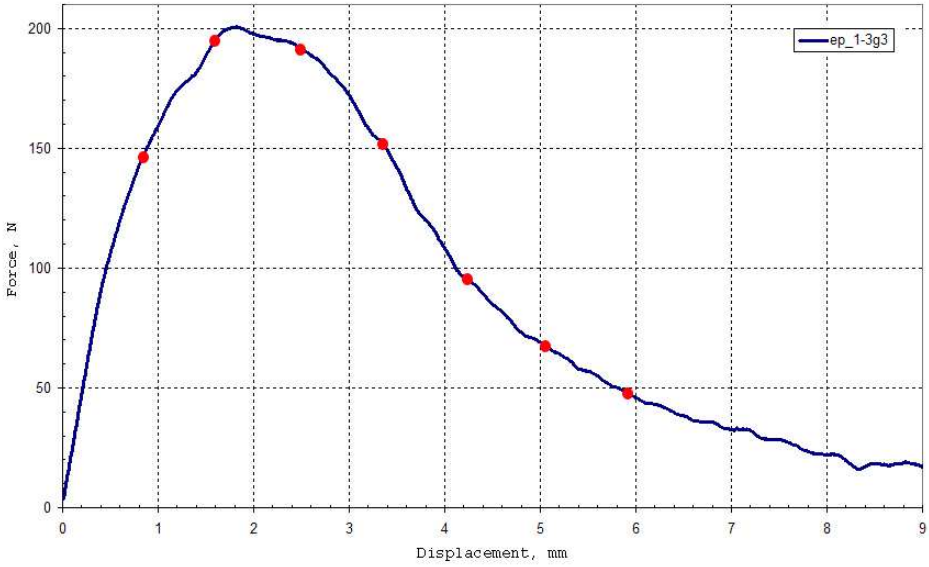
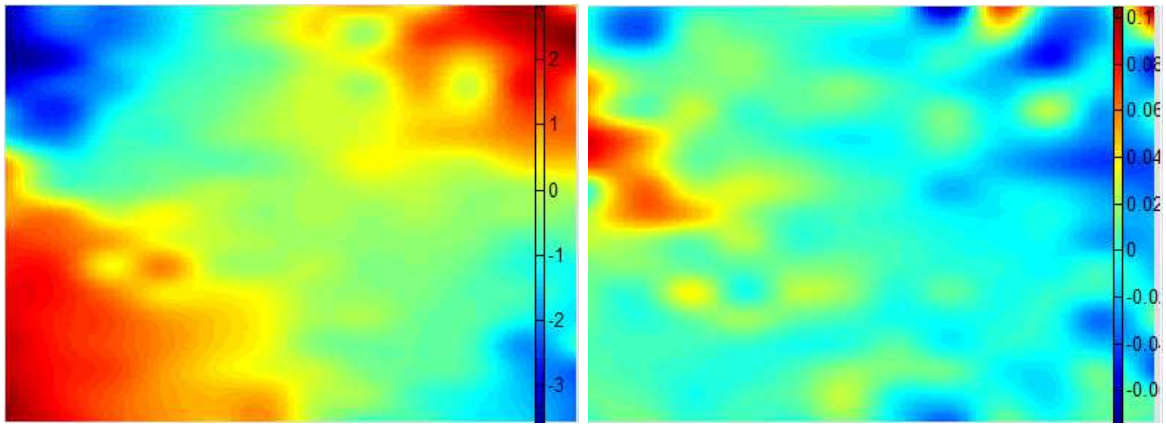
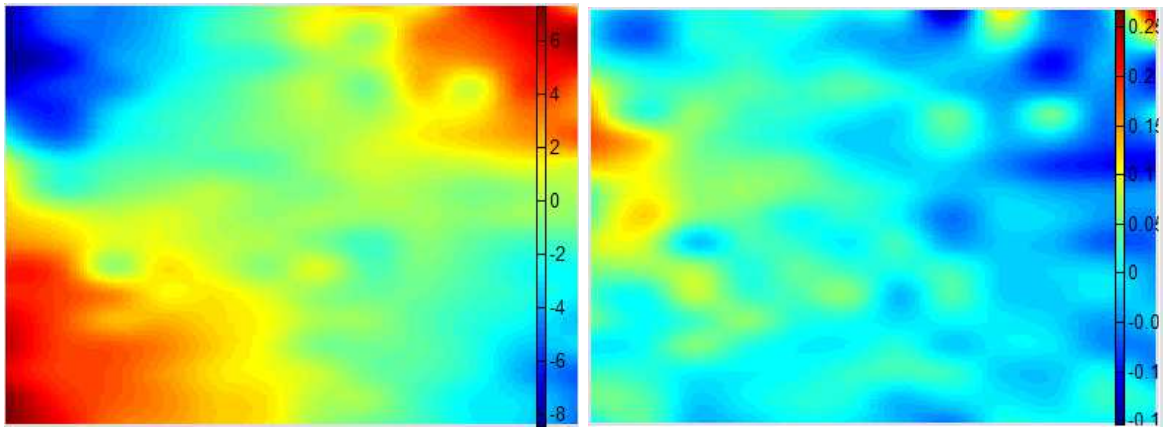


Figure II.60 : Points sur la courbe force-déplacement correspondants au instant t=10, 20, 30, 40, 50, 60, 70 s.



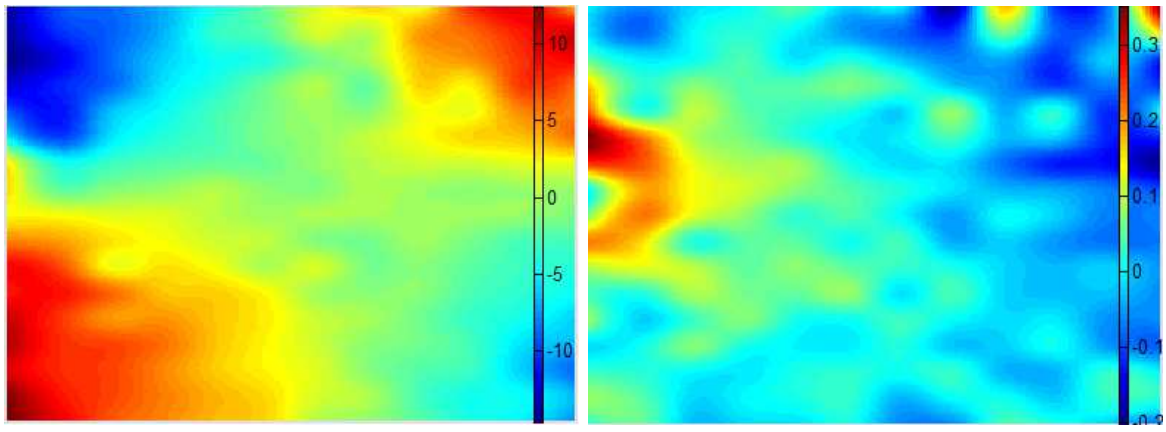
(a) (b)

Figure II.61 : Cartes de déplacement (a) et de déformation nominale (b) suivant DT pour t=10 s.



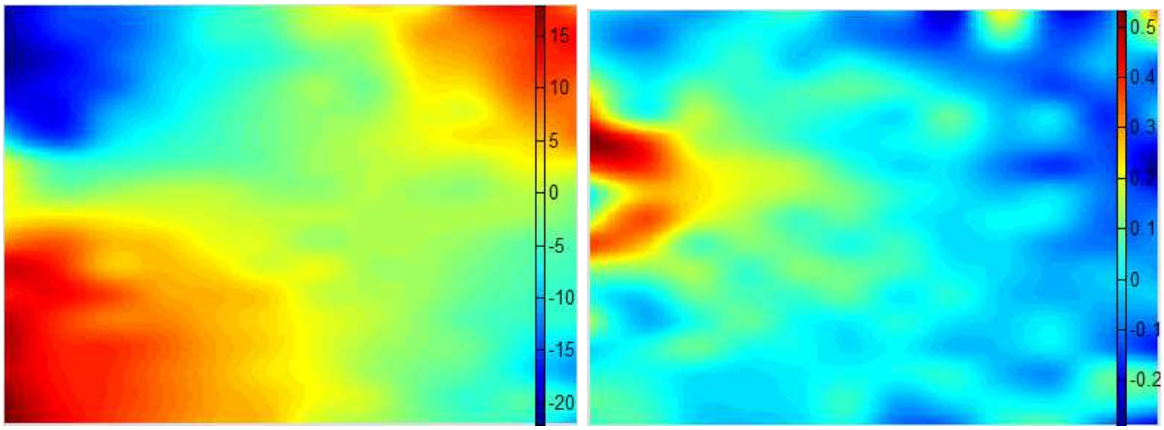
(a) (b)

Figure II.62 : Cartes de déplacement (a) et de déformation nominale (b) suivant DT pour t=20 s.



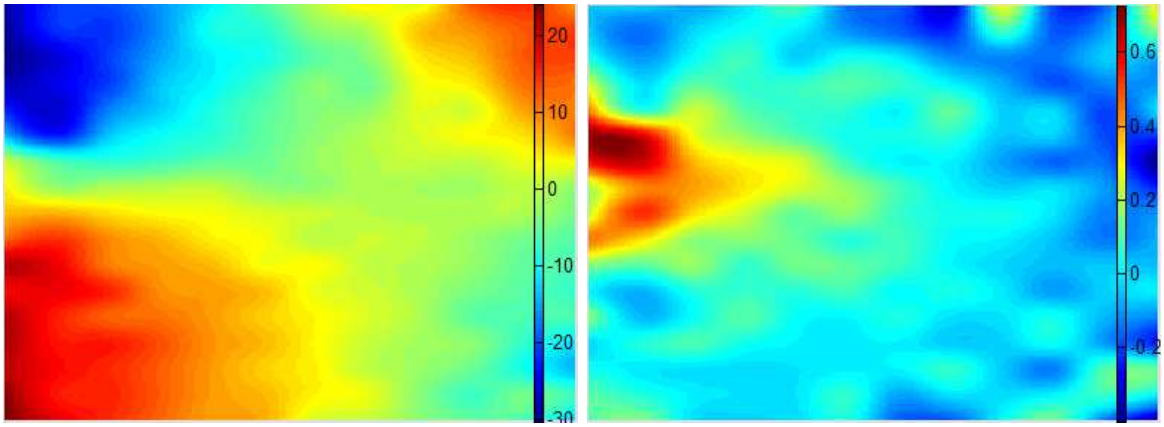
(a) (b)

Figure II.63 : Cartes de déplacement (a) et de déformation nominale (b) suivant DT pour t=30 s.



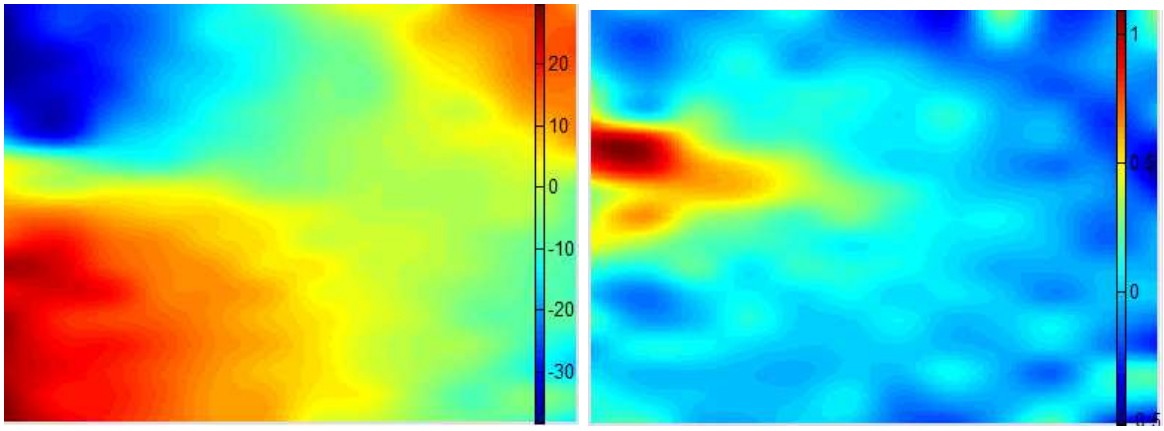
(a) (b)

Figure II.64 : Cartes de déplacement (a) et de déformation nominale (b) suivant DT pour t=40 s.



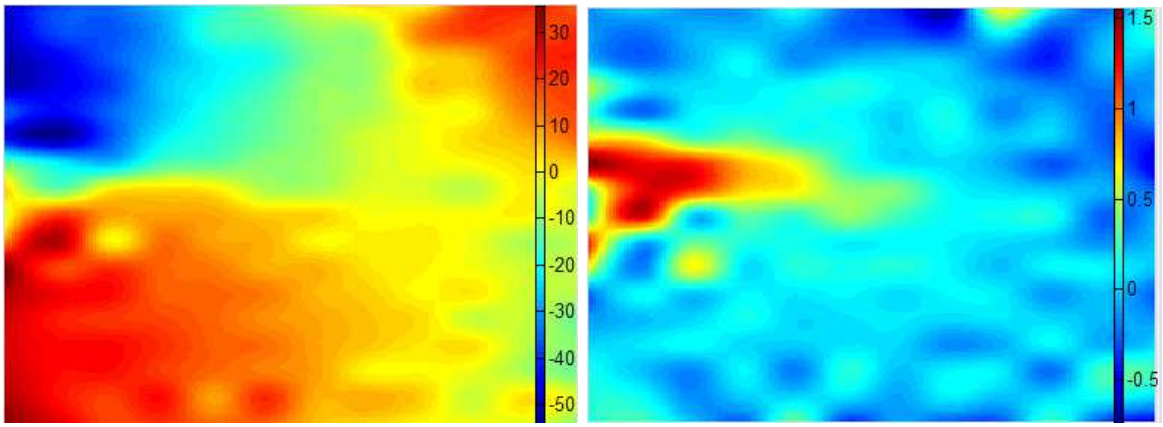
(a) (b)

Figure II.65 : Cartes de déplacement (a) et de déformation nominale (b) suivant DT pour t=50 s.



(a) (b)

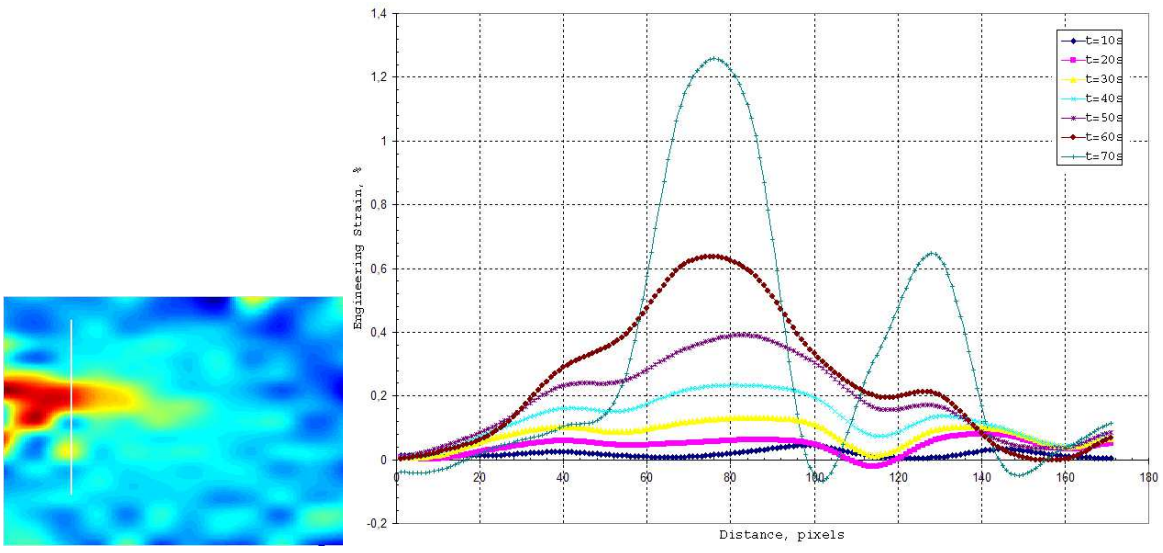
Figure II.66 : Cartes de déplacement (a) et de déformation nominale (b) suivant DT pour t=60 s.



(a) (b)

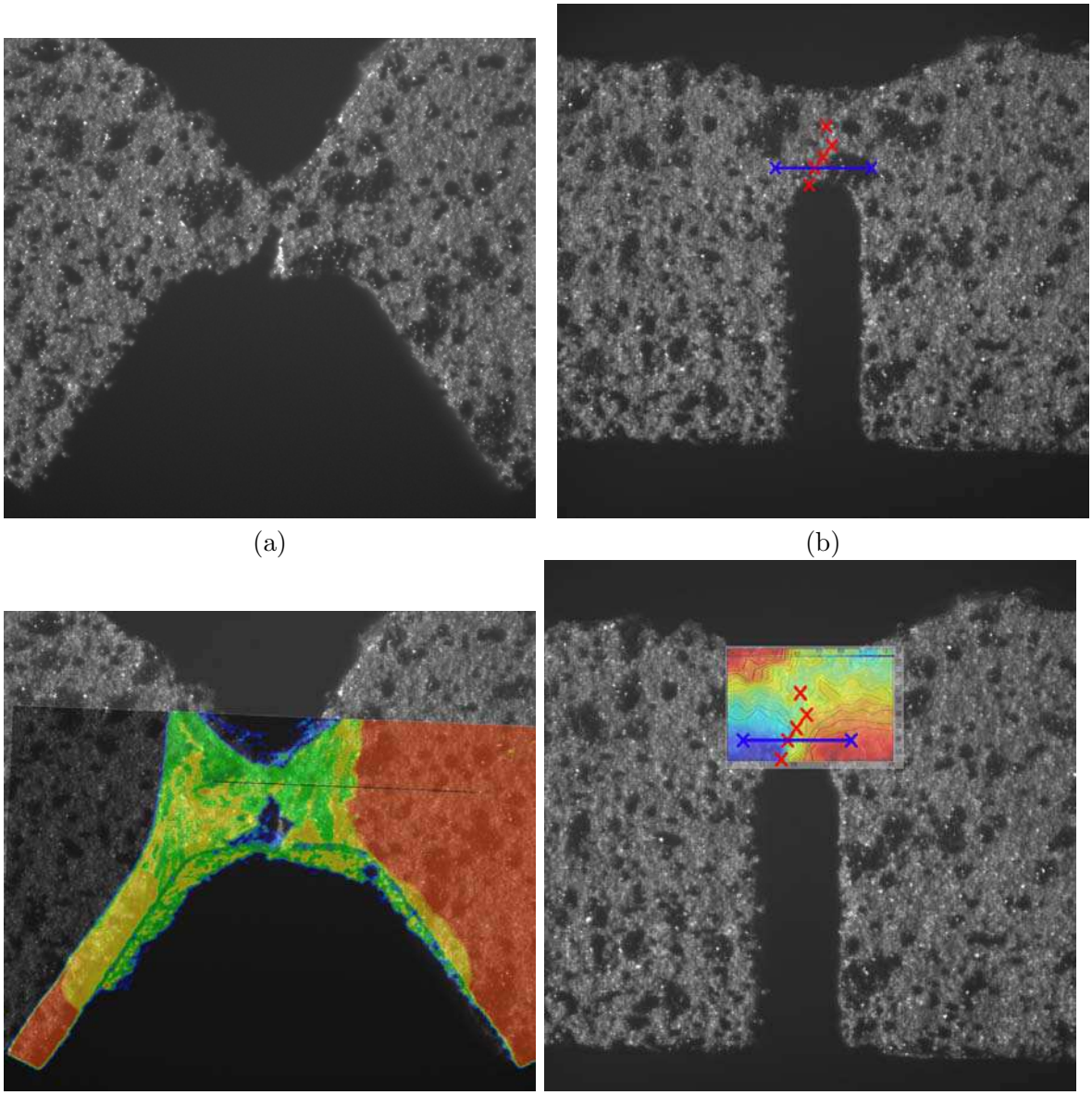
Figure II.67 : Cartes de déplacement (a) et de déformation nominale (b) suivant DT pour t=70 s.

La localisation de la déformation en surface intervient bien plus tard que l'adoucissement global. Ceci est synonyme de fissuration à coeur bien avant qu'elle ne rejoigne les bords libres. La fissure atteint la surface aux alentours des 50 s puis se propage rapidement pour atteindre quasiment sa longueur finale à t=70 s. On peut voir l'augmentation rapide du taux de déformation à partir de t=50 s (figure II.68).



(a) (b)

Figure II.68 : Mesure de déformation suivant un profil : (a) localisation du profil pour t=70 s (b) évolution de la déformation de 10 à 70 s.



(a) (b)

(c) (d)

Figure II.69 : Localisation de la fissuration : (a) Image finale de l'essai à t=108 s (b) représentation du lieu des points de la fissure sur l'image initiale (la ligne représente la localisation du profil représenté figure II.68), (c) superposition de la répartion du Ti par mesure microsonde et de l'image finale de l'essai, (d) superposition du champ de déplacement mesuré à t=70 s et de l'image initiale.

Deux chemins d'écoulement sont préférentiels, l'un situé à 78 pixels et l'autre 130 pixels environ (figure II.68), dont l'un seulement mène à la rupture (figures II.69). Ces chemins de localisation de la déformation correspondent respectivement à la fissure et à la zone 2 sur la figure II.70. On peut noter que la zone 1 passe en compression lorsque la déformation se localise dans les 2 zones avoisinantes.

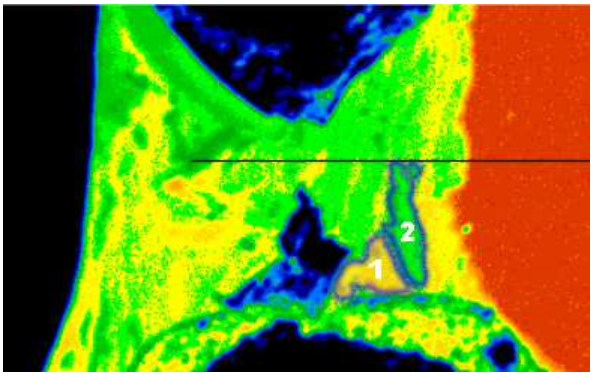
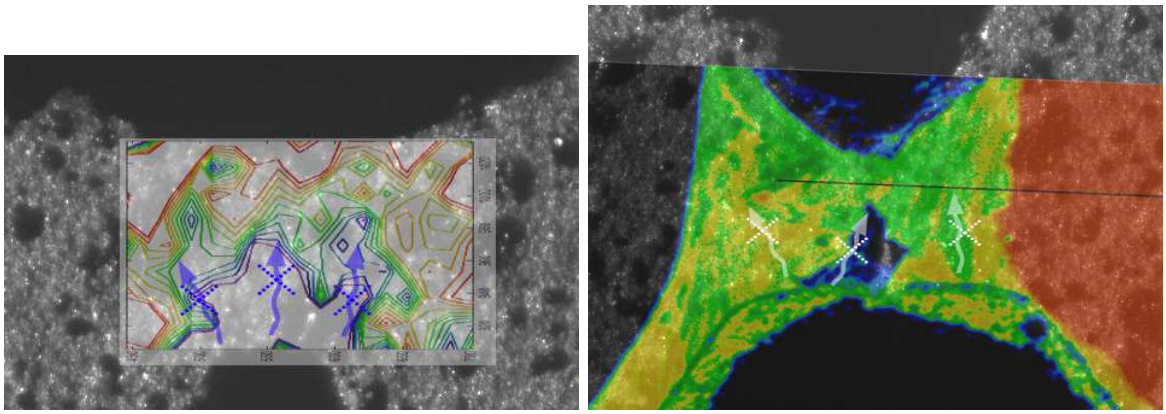


Figure II.70 : Répartition microsonde du Ti : localisation des zones 1 et 2 (le trait noir n'a pas, ici, de signification).

Une troisième direction de localisation existe un peu plus tôt au cours de l'essai, matérialisée sur les configurations initiale et déformée figure II.71.



(a) (b)

Figure II.71 : Localisation de la déformation dans trois directions à t=30 s : (a) dans la configuration non-déformée et une carte de déformation suivant DT (les flèches matérialisent les directions d'écoulement) (b) dans la configuration déformée avec superposition de la microsonde du Ti (les flèches matérialisent les directions d'écoulement).

Ces directions privilégiées sont la preuve de l'influence des hétérogénéités chimiques sur les champs de déformation locaux ainsi que sur la propagation de rupture.

Finalement, la réponse globale est cohérente avec les observations locales mais l'interaction est complexe. L'interprétation reste difficile puisque l'information n'est qu'une information de surface et l'influence d'hétérogénéité subsurfacique ne peut être écartée.

II.4.3.2 Paramétrie G4-5-6

Nous analysons, dans ce paragraphe, uniquement la réponse globale des trois paramétries G4, G5, G6, qui ne se différencient que par l'inclinaison du faisceau laser lors du soudage. Cette inclinaison implique une morphologie de cordon différente mais surtout une mise en jeu de Ta et de TA6V différente (cf. figure II.72).

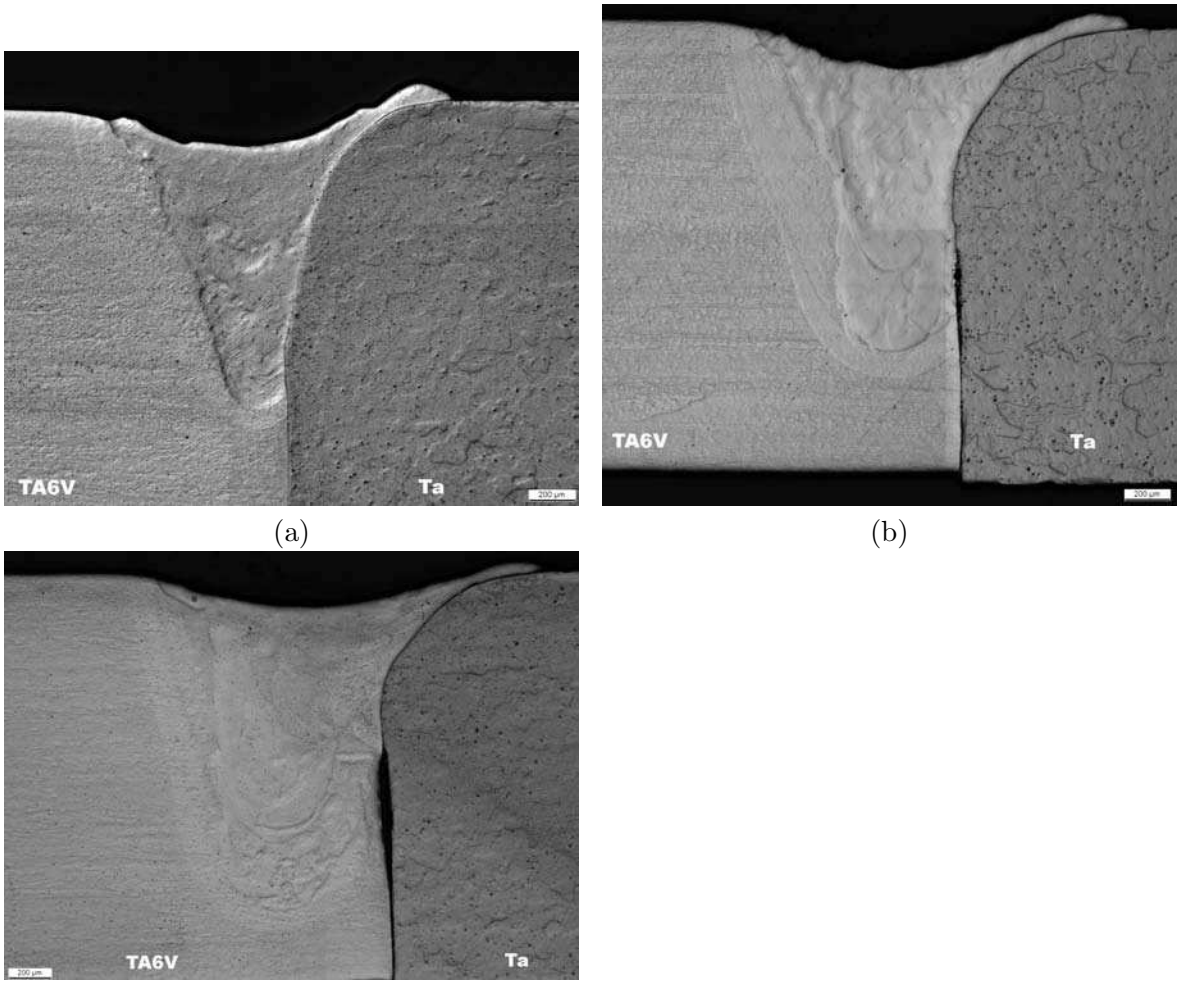


Figure II.72 : Coupe transverse (plan (DE,DT)) des liaisons soudées : (a) paramétrie G4, (b) paramétrie G5, (c) paramétrie G6.

Les mesures de taux de dilution par la méthode des aires donnent des valeurs notablement différentes de 28, 22 et 16.5% en volume de Ta, respectivement pour les paramétries G4, G5, G6. Cependant, les réponses mécaniques des essais sont assez dispersées mais ne semblent pas révéler une différence de comportement importante.

La réponse globale de la paramétrie G4 reste assez peu dispersée (cf. annexe A.4). La courbe représentative de cette paramétrie est donnée figure II.73 pour une hauteur liaisonnée de 0.38 mm. Au contraire, les paramétries G5 et G6 présentent des réponses très dispersées principalement à cause de problèmes d'usinage qui impliquent une grande dispersion dans les hauteurs liaisonnées (cf. annexe A.4). Les courbes représentatives de ces paramétries sont tracées figure II.74 et II.75 pour des hauteurs liaisonnées respectivement de 0.35 et 0.38 mm.

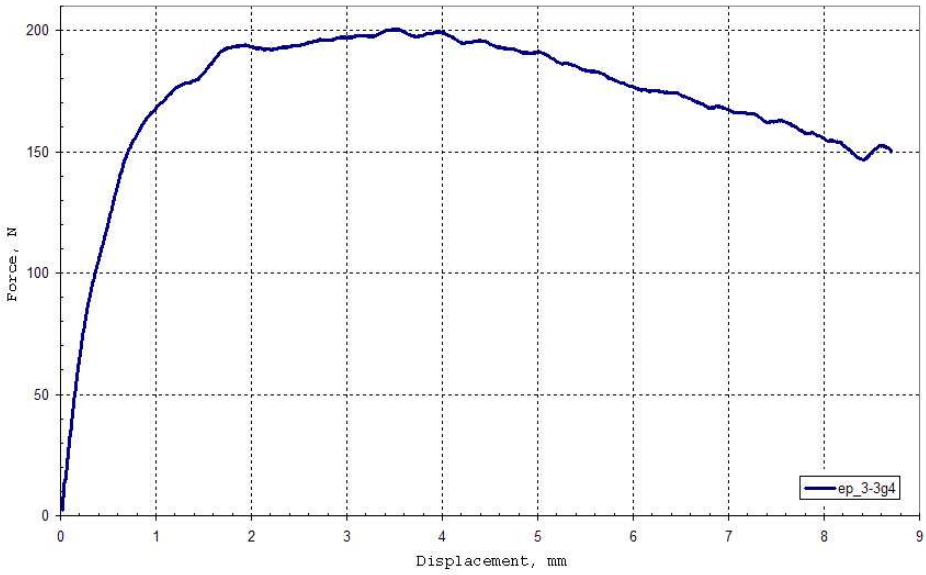


Figure II.73 : Réponse force-déplacement à l'essai de flexion sur éprouvettes soudées entaillées de rayon 0.2 mm, paramétrie G4.

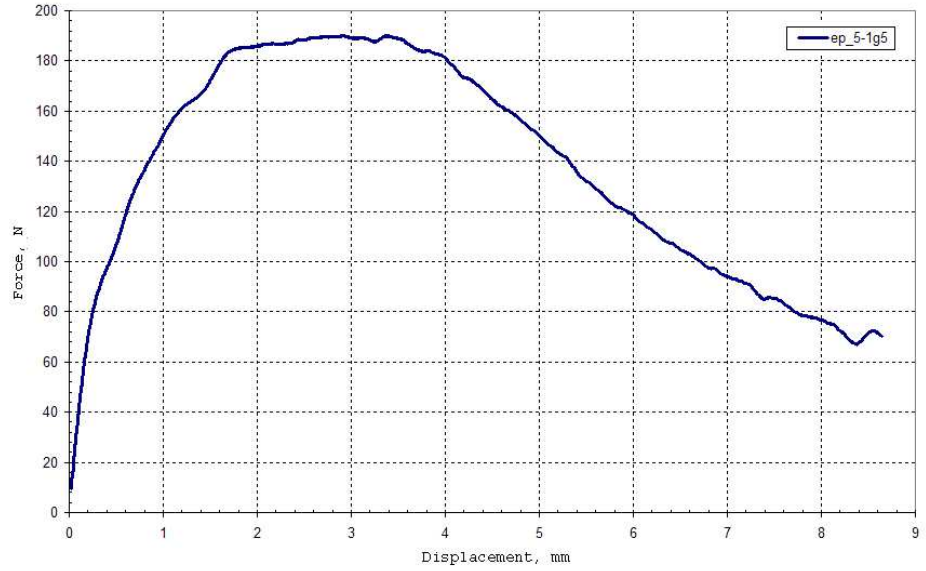


Figure II.74 : Réponse force-déplacement à l'essai de flexion sur éprouvettes soudées entaillées de rayon 0.2 mm, paramétrie G5.

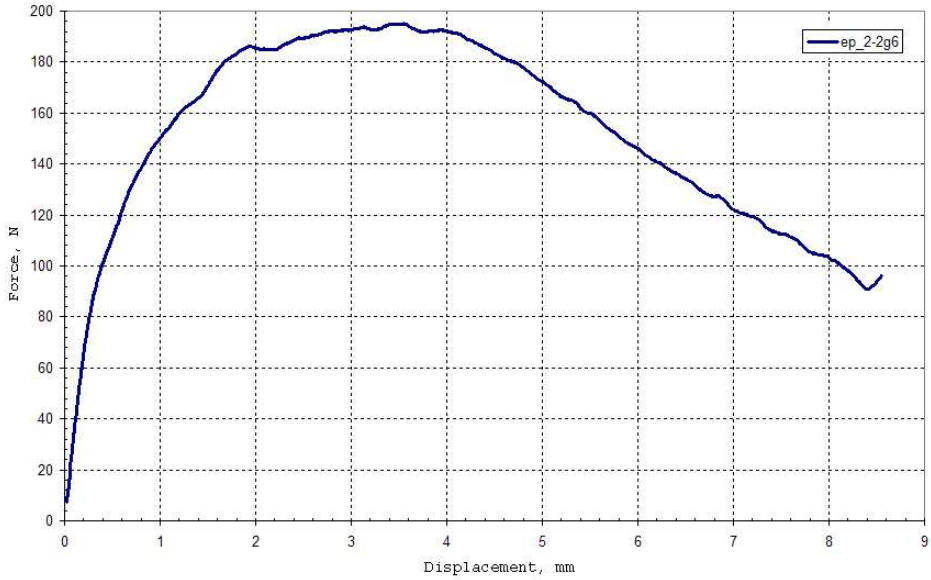


Figure II.75 : Réponse force-déplacement à l'essai de flexion sur éprouvettes soudées entaillées de rayon 0.2 mm, paramétrie G6.

La comparaison des paramétries G4, G5, G6, avec les matériaux de base est réalisée figure II.76, en gardant à l'esprit que les hauteurs liaisonnées restantes après usinage ne sont pas strictement identiques (récapitulées tableau II.7).

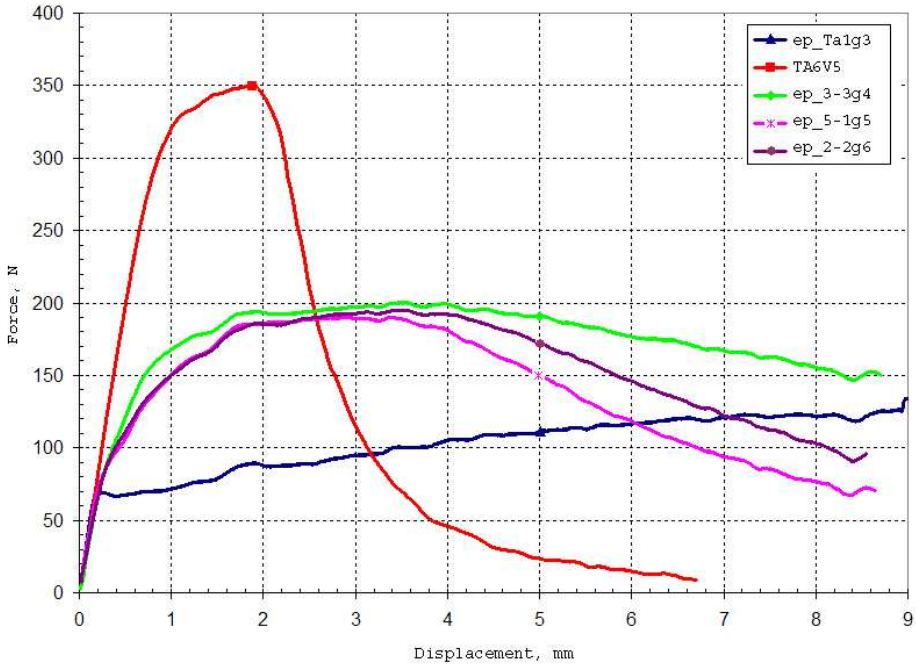


Figure II.76 : Réponse force-déplacement à l'essai de flexion sur éprouvettes soudées entaillées de rayon 0.2 mm, confrontation des paramétries G4-5-6 et des matériaux de base

Eprouvette	epTa1g3	TA6V5	ep3-3g4	ep5-1g5	ep2-2g6
Hauteur liaisonnée (mm)	0.52	0.55	0.38	0.35	0.38

Tableau II.7 : Récapitulatif des hauteurs liaisonnées restantes après usinage des entailles.

La comparaison des paramétries G4, G5, G6, ne révèle pas de différence de comportement mécanique jusqu'au début de la phase de localisation. Il est ensuite difficile de tirer des conclusions marquantes, même si le comportement de G4 semble un peu plus ductile (la pente est plus douce) vraisemblablement grâce à l'augmentation du pourcentage de Ta dans la Z.F.

En conclusion, si l'on résume l'ensemble des réponses des paramétries allant de G2 à G6, on obtient pour les hauteurs liaisonnées du tableau II.8

Eprouvette	epTa1g3	TA6V5	ep1-2g2	ep1-3g3	ep3-3g4	ep5-1g5	ep2-2g6
Hauteur liaisonnée (mm)	0.52	0.55	0.39	0.48	0.38	0.35	0.38

Tableau II.8 : Récapitulatif des hauteurs liaisonnées restantes après usinage des entailles.

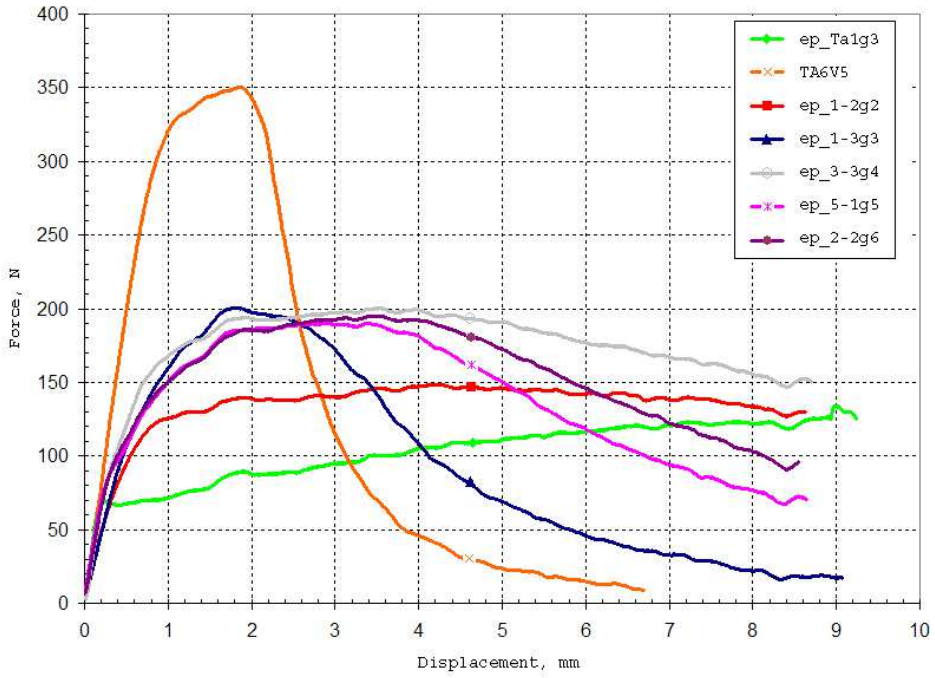


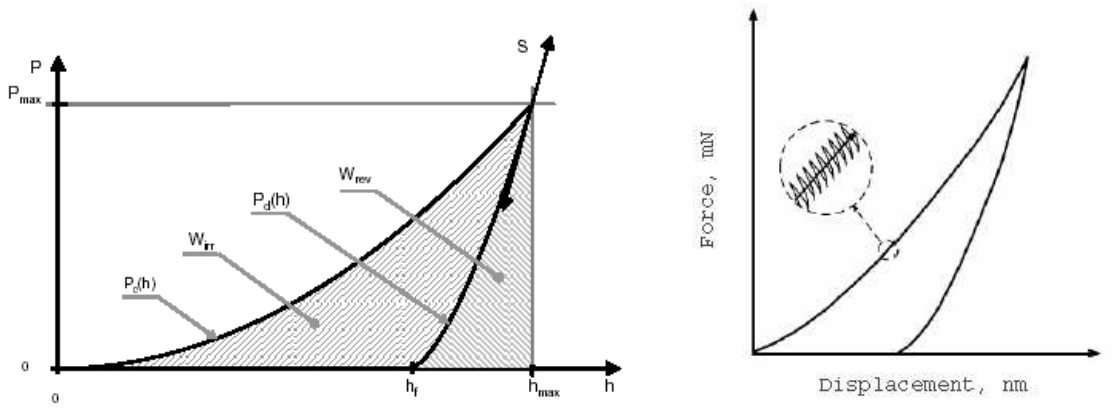
Figure II.77 : Réponse force-déplacement à l'essai de flexion sur éprouvettes soudées entaillées de rayon 0.2 mm, confrontation des paramétries allant de G2 à G6 et des matériaux de base.

II.5 Essais d'indentation

II.5.1 Essais de nanoindentation

II.5.1.1 Généralités

L'indenteur utilisé est un NanoIndenteur XP MTS permettant de réaliser des mesures de dureté et de module d'élasticité par méthode C.S.M (Continuous Stiffness Measurement). Cette méthode se base sur l'ajout d'un signal de chargement oscillant, au chargement global, comme le montre la figure II.78(b). Cette méthode revient à réaliser de multiples charges-décharges dont chaque pente à la décharge permet de mesurer le module d'élasticité (figure II.78(a))



(a) (b)

Figure II.78 : (a) Mesure de la pente à la décharge sur un essai "classique" d'après (Charleux, 2006), (b) Schéma de la mesure par méthode C.S.M d'après (Oliver et Pharr, 2004).

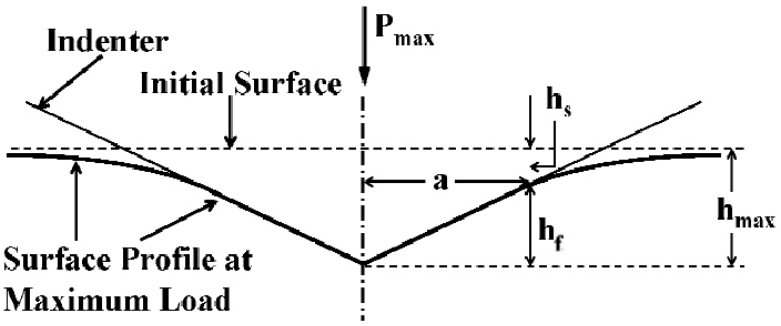


Figure II.79 : Topologie de l'essai d'indentation pour un indenteur conique d'après (VanLandingham, 2003).

La courbe d'indentation présente la charge P appliquée à l'indenteur en fonction de la pénétration h de ce dernier. On obtient alors deux phases caractéristiques que sont, la phase de charge jusqu'au couple de valeurs $(P_{max}; h_{max})$, et la phase de décharge caractérisée par la valeur h_f (profondeur de l'empreinte résiduelle cf. figure II.78(a) et II.79). Les aires sous la courbe représentent, classiquement, les travaux dissipés en plasticité W_{irr} et les travaux réversibles W_{rev} caractéristiques du retour élastique du matériau. La pente à la décharge est

alors donnée par S sur la figure II.78(a) et permet, moyennant le calcul de l'aire de l'empreinte sous charge, de calculer le module d'élasticité (Sneddon, 1965), (Oliver et Pharr, 1992).

Nous utilisons, ici, un indenteur de type Berkovitch faisant partie de la famille des indenteurs autosimilaires (figure II.80(a)). Ces indenteurs ont la propriété de conserver une homothétie de toutes les grandeurs topologiques de contact à la profondeur d'indentation. Ainsi, l'aire de la surface projetée d'un indenteur Berkovitch peut être décrite par un cône équivalent dont la mesure d'aire transverse A est fonction de la profondeur d'indentation et vaut $A(h) = 24.5h^2$

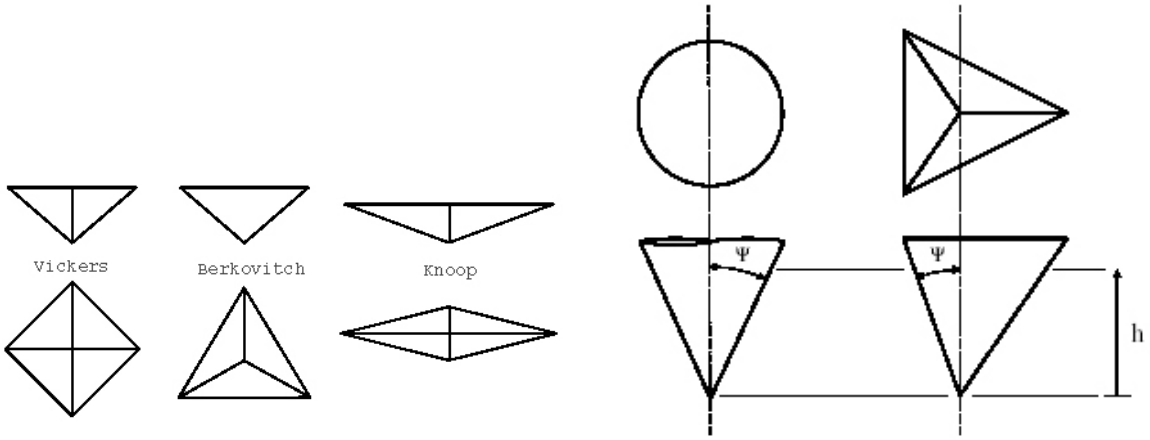


Figure II.80 : (a) Schéma d'indenteur autosimilaire, (b) Schéma de l'indenteur Berkovitch et du cône équivalent associé dont les demi-angles au sommet sont respectivement 65°3 et 70°3 d'après (Charleux, 2006)

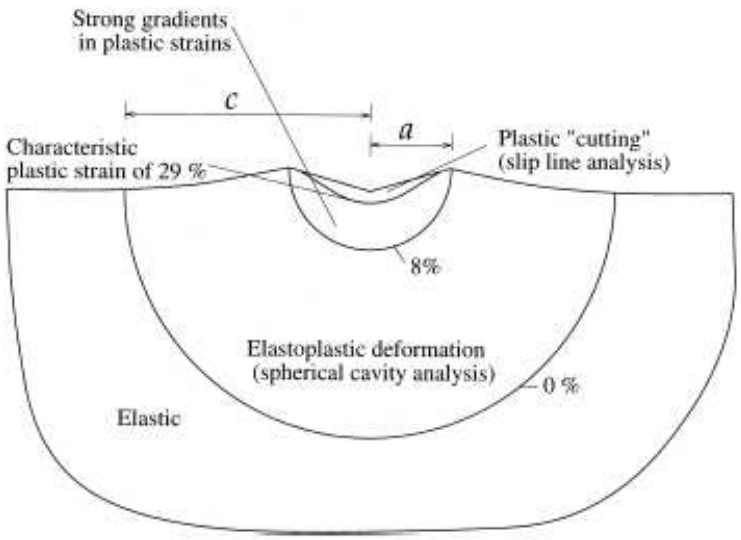


Figure II.81 : Schéma des différents régimes de déformation sous l'indenteur d'après (Giannakopoulos et Suresh, 1999).

L'indentation est réalisée à une profondeur de 1 μm et la mesure C.S.M est moyennée sur la partie de la courbe de charge la moins perturbée, à savoir l'intervalle 400-900 nm. Cette profondeur d'indentation représente une sphère de plasticité d'au plus 35 μm, soit 3 à 5 fois la diagonale d'empreinte (ISO-14577, 2002) (cf. figure II.81). La sphère d'élasticité est plus grande, le volume englobé lors de la mesure du module d'élasticité sera donc légèrement supérieur.

Les essais sont pilotés à un taux de déformation constant de $0.05s^{-1}$. Le taux de déformation en indentation est défini par l'équation II.15 provenant de (Lucas et al., 1997).

$$\dot{\epsilon_i} = \frac{\dot{h}}{h} = \frac{1}{\beta}\left(\frac{\dot{P}}{P} - \frac{\dot{H}}{H}\right) \tag{II.15}$$

avec H la dureté du matériau $H = \frac{P}{A}$, β désignant un paramètre correspondant à la forme de l'indenteur. La dureté est en fait une pression moyenne, constante en fonction de la profondeur d'indentation, de sorte qu'il est possible d'approximer un taux de déformation par le rapport $\frac{\dot{P}}{P}$. La machine est donc pilotée en force.

II.5.1.2 Réponse de la paramétrie G2

Les résultats d'un prélèvement central d'un cordon de paramétrie G2 sont présentés ici. Quatre filiations de 30 à 40 indents sont réalisées avec un espacement de 50 μm entre chaque indent. Ces filiations sont réparties à différentes profondeurs par rapport à la face supérieure de l'échantillon côté Ta. Les filiations B1 à B4 figure II.82, ont été réalisées respectivement à 271 μm, 343 μm, 542 μm et 650 μm.

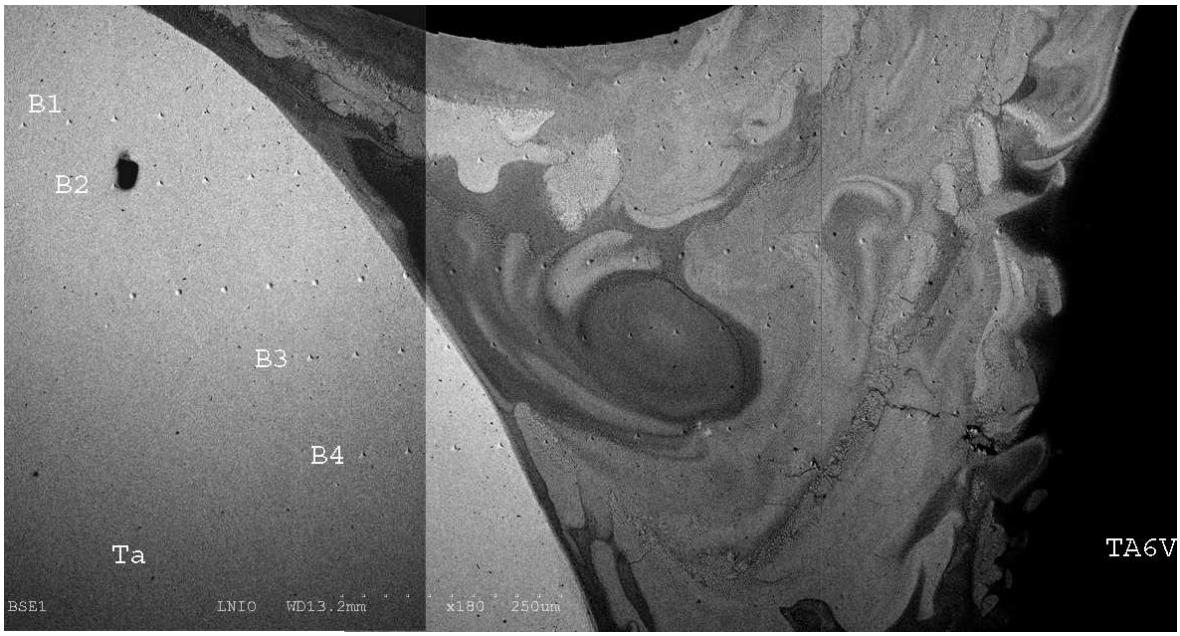
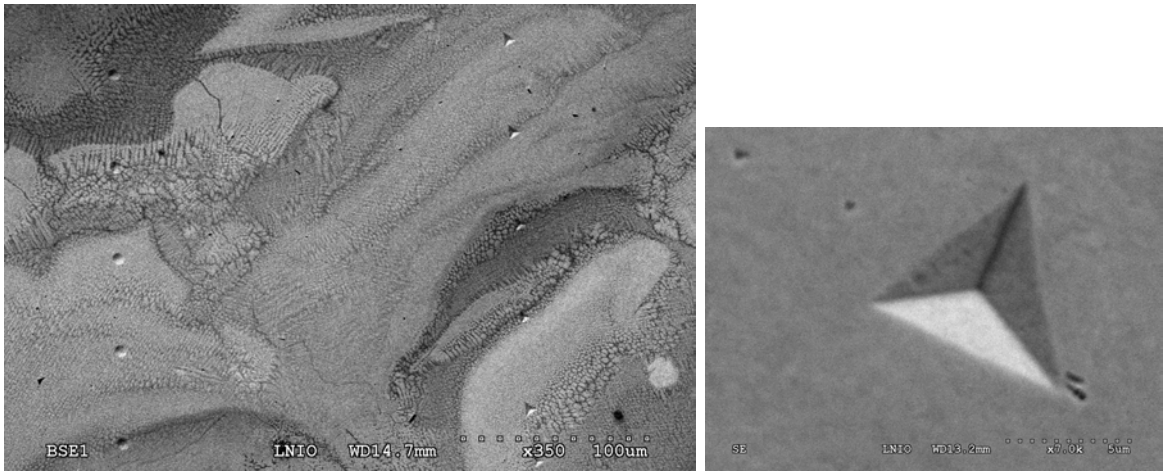


Figure II.82 : Quatre filiations d'indents Berkovitch (notées B1 à B4) traversant la Z.F de paramétrie G2, vue M.E.B aux électrons rétrodiffusés.



(a) (b)

Figure II.83 : Vue M.E.B aux électrons secondaires : (a) x350 sur 2 filiations d'indent Berkovitch et Sphérique, (b) x7000 sur un indent Berkovitch.

L'utilisation du M.E.B en mode B.S.E (Back Scattering Electron) permet d'obtenir un bon contraste de phases entre les zones riches en Ta et les zones plus riches en Ti. En effet, la différence de numéro atomique des deux éléments Ta et Ti (respectivement 73 et 22) fait "ressortir" le Ta en blanc et le Ti en noir. Les différentes filiations traversent donc des zones de contraste chimique important au sein de la Z.F.

Les résultats des mesures de module d'élasticité et de dureté pour ces 4 filiations sont présentés figure II.84,

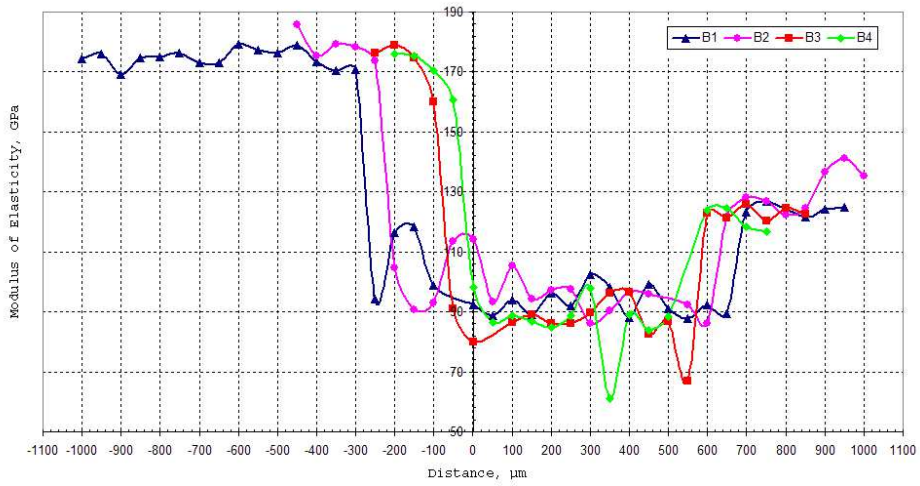


Figure II.84 : Evolution du module d'élasticité en fonction de la distance au plan de joint.

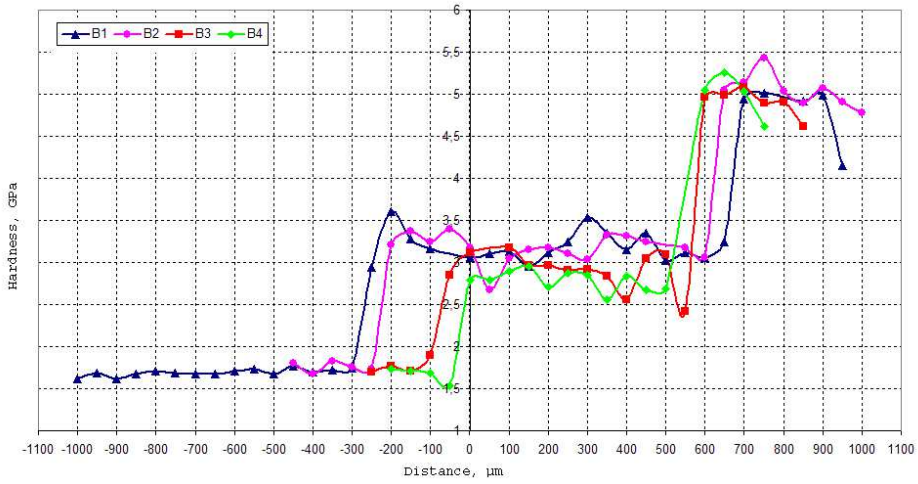


Figure II.85 : Evolution de la dureté en fonction de la distance au plan de joint.

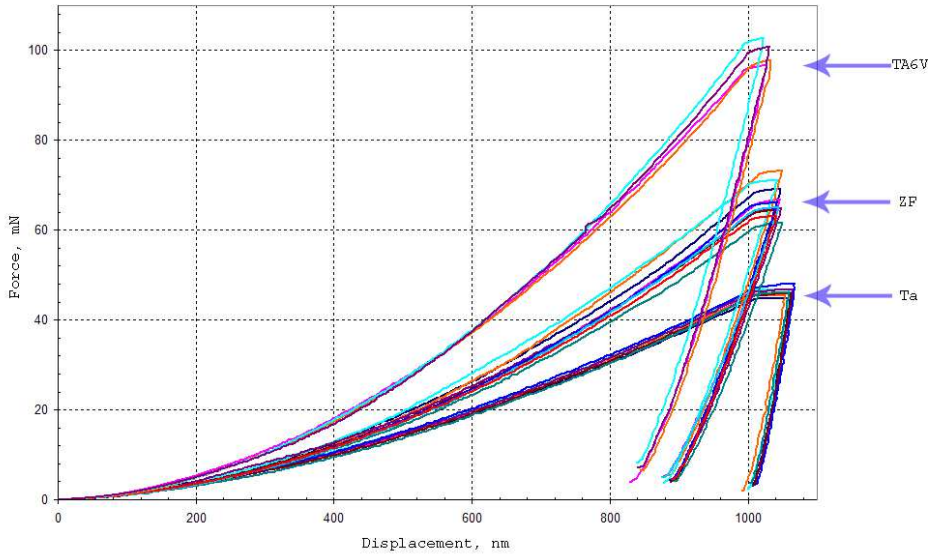


Figure II.86 : Réponse force-pénétration pour les indents de la filiation B1.

Les quatre filiations (figure II.84 et II.85) présentent des résultats très proches dont les valeurs moyennes sont synthétisées dans le tableau II.10.

Matériaux	Ta	TA6V
Module d'élasticité, GPa (écart type)	174 (5.2)	125 (5.7)
Dureté, GPa (écart type)	1.7 (0.07)	4.95 (0.24)

Tableau II.9 : Tableau récapitulatif des valeurs moyennes de module d'élasticité et de dureté des matériaux de base.

Matériaux	Z.F B1	Z.F B2	Z.F B3	Z.F B4
Module d'élasticité, GPa (écart type)	96 (8.8)	96.4 (8.5)	86.5 (7.8)	86.8 (9.7)
Dureté, GPa (écart type)	3.14 (0.27)	3.17 (0.17)	3.06 (0.61)	2.78 (0.11)

Tableau II.10 : Tableau récapitulatif des valeurs moyennes de module d'élasticité et de dureté pour la paramétrie G2.

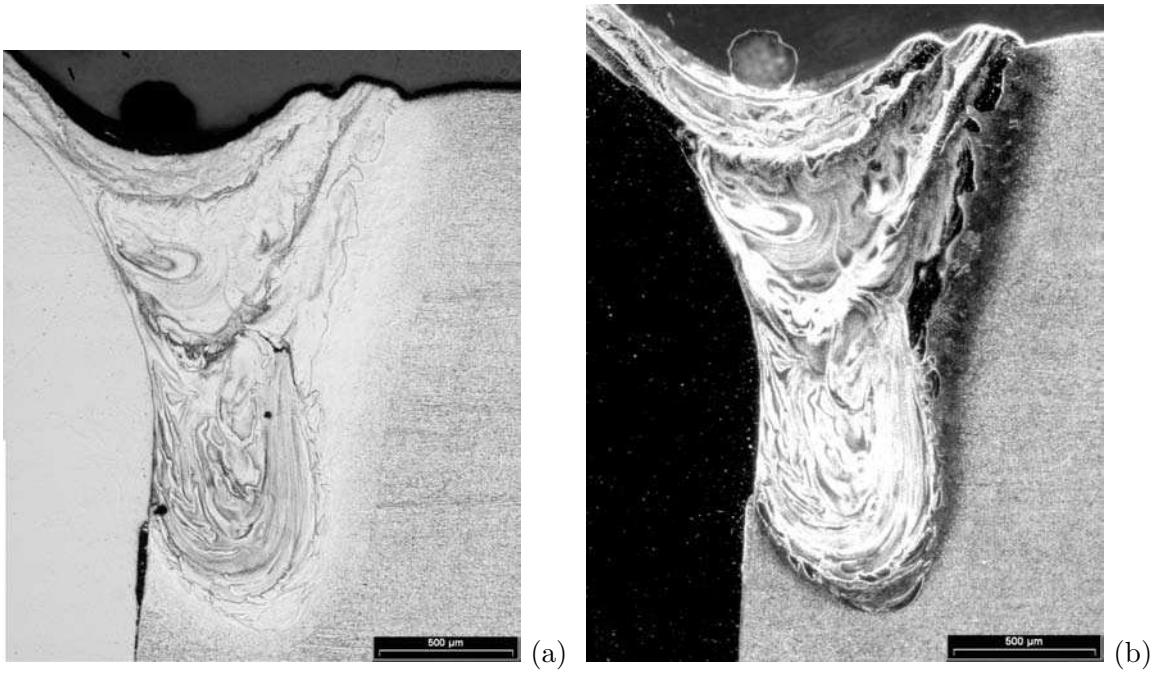
Les mesures du module d'élasticité dans les matériaux de base sont cohérentes avec les valeurs théoriques de 187 GPa pour le Ta et de 118 GPa pour le TA6V. Par contre, le module de la Z.F est très inférieur à celui des deux matériaux de base. Cette valeur s'explique par la transformation de phase du $Ti\alpha$ en $Ti\beta$ lors du soudage. La phase β est connue pour avoir un module d'élasticité très faible et provoque donc cette chute importante. Il est à noter que les deux filiations de la partie supérieure du cordon (B1 et B2) possèdent un module supérieur de 10 GPa à celle réalisée plus bas (B3 et B4). Ceci caractérise une tendance générale de la Z.F présentant une teneur en Ta plus élevée sur sa partie supérieure que sur sa partie inférieure.

Concernant les mesures de dureté, elles sont intermédiaires entre celles des matériaux de base. Ces valeurs sont caractéristiques des propriétés mécaniques d'un matériau en plasticité. On relie classiquement les mesures de dureté à une contrainte représentative estimée à une valeur de déformation donnée (7 à 8% pour (Tabor, 1951), (Johnson, 1985); 3.3% pour (Dao et al., 2001), 29% pour (Giannakopoulos et Suresh, 1999)). Malgré la variété des propositions faites pour la déformation représentative et les méthodes associées de traitement des résultats d'indentation, il est admis que la dureté est représentative du comportement en plasticité. Sans aller plus loin dans les différentes stratégies d'identification de loi de comportement par méthodes inverses associées à l'essai d'indentation dont la littérature regorge, nous citons quelques travaux majeurs, ou ayant particulièrement retenu notre attention : (Pelletier, 2006), (Giannakopoulos et Suresh, 1999), (Dao et al., 2001), (Cao et Lu, 2004), (Laval, 1995), (Kermouche, 2005), (Charleux, 2006), (Bucaille et al., 2003), (Bucaille, 2001), (Seifert, 2003) et quelques synthèses importantes (VanLandingham, 2003), (Hay et Pharr, 2000), (Oliver et Pharr, 1992), (Fischer-Cripps, 2002) etc.

L'analyse des résultats de la figure II.84 est réalisée en regard des essais de flexion (cf. paragraphe II.4, figure II.28). Le module d'élasticité est inférieur à celui des deux matériaux et évalué à 92 GPa dans le cas de la flexion, contre 96 à 87 GPa en indentation. Lors de l'essai de flexion, l'entaille réalisée implique une sollicitation de la partie supérieure du joint et s'approche donc logiquement des valeurs supérieures obtenues en indentation. Concernant la dureté, elle prouve un comportement intermédiaire en plasticité tout comme les résultats obtenus en flexion. Toutefois, il est impossible de comparer les valeurs respectives de dureté et de limite d'élasticité sans l'utilisation de méthodes inverses d'identification. Quoiqu'il en soit, l'ensemble de ces résultats, qu'il soit de dureté ou de module, est cohérent et permet de quantifier, par mesures expérimentales, la valeur du module d'élasticité. Nous utiliserons donc, par la suite, une valeur moyenne du module d'élasticité de la paramétrie G2 de 92 GPa.

Lors de l'opération de soudage, il est fréquent de voir apparaître au abord de la Z.F des Zones Affectées Thermiquement (Z.A.T). Ces zones subissent l'équivalent d'un traitement thermique énergique pouvant modifier la microstructure des matériaux de base. Aucune Z.A.T n'a été mise en évidence côté Ta, qu'elle soit métallurgique ou mécanique. Par contre, côté TA6V, il existe une large Z.A.T métallurgique (cf. figure II.87) mais dont le comportement mécanique n'est pas radicalement différent de celui du TA6V de base. Ces

conclusions sont confirmées par des données internes (Durut, 2002), (Durut, 2003).



(a) (b)

Figure II.87 : Vue au microscope optique du cordon de paramétrie G2 : (a) sans attaque, (b) avec attaque TA6V et en champ sombre.

Sur la figure II.87(b), le liseré noir côté TA6V (à droite sur la figure) représente la Z.A.T ayant subi une transformation martensique. La phase en présence dans cette Z.A.T est la phase α' aciculaire, que l'on obtient classiquement lors d'une trempe à partir du domaine β en l'absence d'éléments bêtagènes. Elle est H.C et se présente sous la forme de fines aiguilles enchevêtrées (figure II.88). On estime cette Z.A.T à environ 170 μm mais sa taille dépend bien sûr de la paramétrie. Il existe une seconde Z.A.T dont la teneur en phase α' diminue en fonction du gradient thermique. Cette Z.A.T se compose des phases $\alpha + \beta$ ainsi qu'α'. Le matériau n'a pas vu de température supérieure au transus β mais le refroidissement rapide au cours du soudage induit l'apparition de la phase α' au sein de la phase β. Que l'on se trouve dans la première ou la seconde Z.A.T, les propriétés mécaniques varient faiblement par rapport au matériau de base. Nous ne considérerons donc pas ces Z.A.T d'un point de vue mécanique.

Finalement, pour conclure les remarques concernant les courbes II.84 et II.85, il est intéressant de noter que malgré la forte hétérogénéité du mélange, les variations locales de module d'élasticité et de dureté restent assez faibles. Ce sujet fait l'objet du paragraphe suivant confrontant les mesures, ainsi que leur écart type, à différentes études sur le sujet ou connexes.

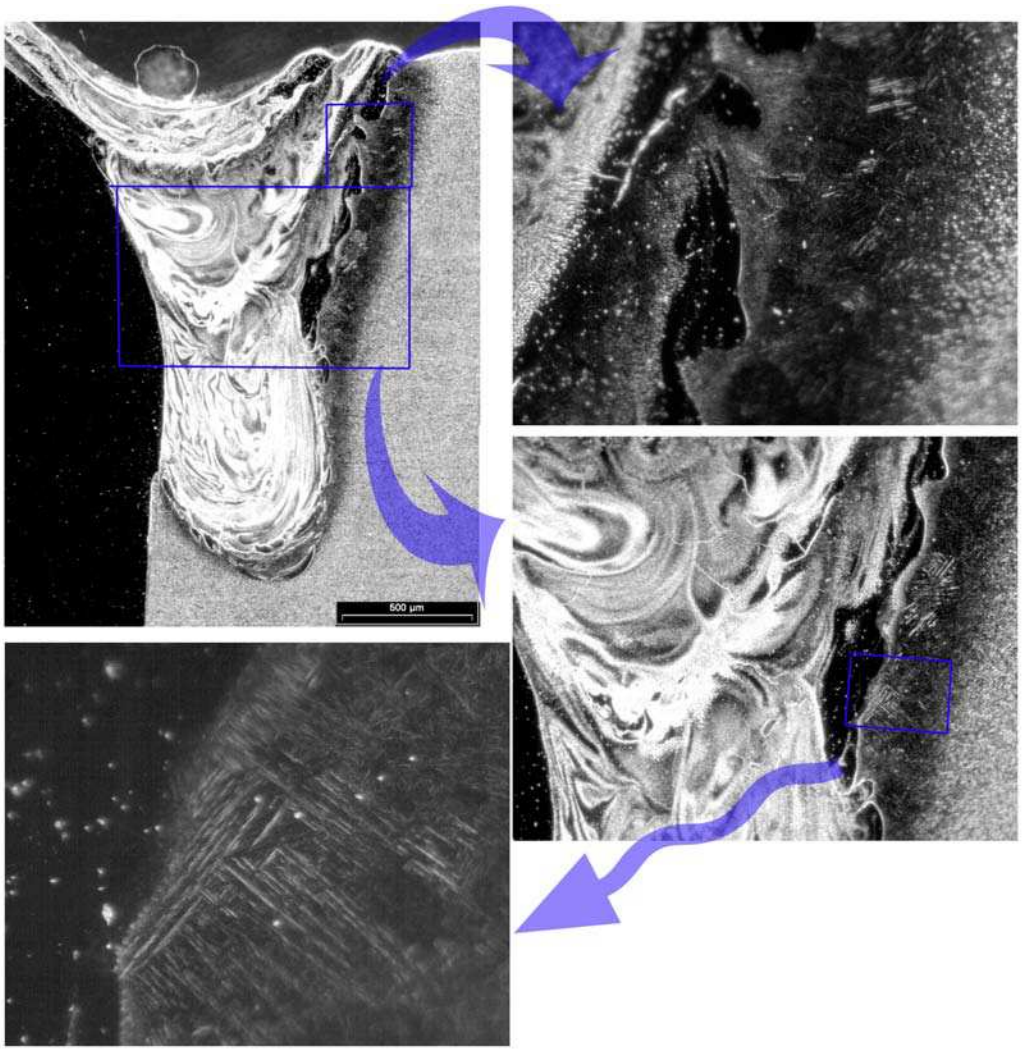


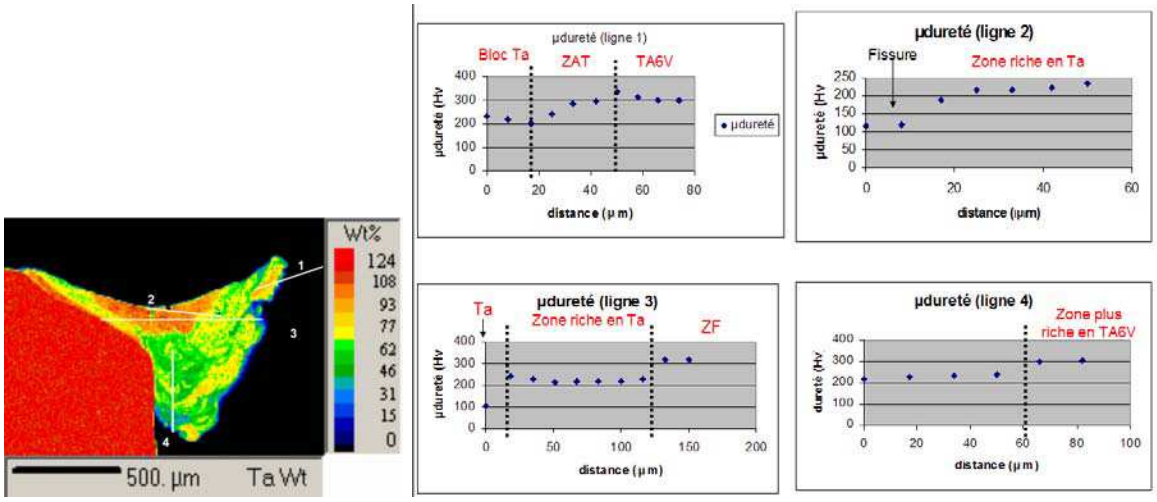
Figure II.88 : Vue détaillée au microscope optique en champ sombre des zones figure II.87.

II.5.2 Oscillations de dureté et de module dans la Zone fondue

II.5.2.1 Etude comparative sur les liaisons soudées Ta/TA6V

Différentes études concernant des mesures de dureté Vickers dans les liaisons Ta/TA6V ont été réalisées. Parmi celles-ci, nous présentons les résultats des études (Malicrot, 2006) et (Durut, 2002).

Les valeurs de dureté Vickers sous 100g, HV_{100}, de l'étude (Malicrot, 2006) sont résumées figure II.89,



(a) (b)

Figure II.89 : Evolution de microdureté sur différentes filiations : (a) Cartographie microsonde et filiations, (b) Mesure de dureté Vickers.

Les valeurs de dureté sont synthétisées tableau II.11

Matériaux	Ta	TA6V	TA6V Z.A.T	Z.F
Dureté, HV_{100} (écart type)	100	309 (15.6)	258 (46.5)	234 (39)

Tableau II.11 : Tableau récapitulatif des valeurs moyennes de dureté Vickers d'après (Malicrot, 2006).

Les valeurs de duretés Vickers relevées dans le document (Durut, 2002) sont données dans le tableau ci-joint II.12.

	Echantillon 7-G1.4	11-N1	Moyenne
TA6V (écart type)	261 (32)	335 (13)	308 (44)
ZAT côté TA6V (écart type)	330 (31)	335 (17)	332 (25)
Z.F (écart type)	245 (52)	270 (62)	259 (58)
Ta proche interface (écart type)	91 (6)	99 (6)	94 (7)
Ta loin interface (écart type)	109 (6)	104 (11)	106 (8)

Tableau II.12 : Tableau récapitulatif des valeurs moyennes de dureté Vickers d'après (Durut, 2002).

Pour convertir les valeurs de dureté Vickers en dureté Berkovitch, nous réalisons des mesures de dureté Vickers sur notre Ta de base. Nous obtenons une valeur de moyenne de 109 HV_{100} et utilisons cette mesure comme référence de conversion. Ce choix se justifie par le faible écart type des mesures de nanoindentation. Nous avons alors,

$$\begin{aligned} 1GPa &= 64.12HV_{100} \\ 1HV &= 0.0156GPa \end{aligned} \tag{II.16}$$

Remarques :

Il est possible de convertir les valeurs de dureté Berkovitch et Vickers en calculant les rapports des surfaces projetées. Cependant, nous introduisons une erreur en tentant cette comparaison à cause de différentes hypothèses (notamment celle d'indents idéaux). La conversion est donnée équation II.17 et s'écarte largement de la valeur expérimentale.

$$\begin{aligned} 1GPa &= 94.76920HV \\ 1HV &= 0.010552GPa \end{aligned} \tag{II.17}$$

En utilisant la conversion basée sur les mesures expérimentales, les tableaux II.11 et II.12 peuvent être récrit en équivalent Berkovitch en GPa,

Matériaux	Ta	TA6V	TA6V Z.A.T	Z.F
Dureté, GPa (écart type)	1.56	4.82 (0.24)	4.02 (0.72)	3.65 (0.61)

Tableau II.13 : Tableau récapitulatif des valeurs moyennes de dureté Berkovitch équivalentes d'après (Malicrot, 2006).

	Echantillon 7-G1.4	11-N1	Moyenne
TA6V (écart type)	4.07 (0.5)	5.22 (0.2)	4.8 (0.69)
ZAT côté TA6V (écart type)	5.14 (0.48)	5.22 (0.26)	5.18 (0.39)
Z.F (écart type)	3.82 (0.81)	4.21 (0.97)	4.04 (0.9)
Ta proche interface (écart type)	1.42 (0.09)	1.54 (0.09)	1.47 (0.11)
Ta loin interface (écart type)	1.7 (0.09)	1.62 (0.17)	1.65 (0.12)

Tableau II.14 : Tableau récapitulatif des valeurs moyennes de dureté Berkovitch équivalentes d'après (Durut, 2002).

On relève la valeur particulièrement faible des mesures dans le TA6V de l'échantillon 7-G1.4 qui ne concorde pas avec celle obtenue dans 11-N1, ni dans l'étude (Malicrot, 2006). On résume les valeurs de l'étude 1 (Malicrot, 2006), de l'étude 2 pour 11-N1 (Durut, 2002) et celle de nanoindentation dans le tableau II.15.

Matériaux	Ta	TA6V	TA6V Z.A.T	Z.F
Dureté étude 1, GPa (écart type)	1.56	4.82 (0.24)	4.02 (0.72)	3.65 (0.61)
Dureté étude 2, GPa (écart type)	1.62 (0.17)	5.22 (0.2)	5.22 (0.26)	4.21 (0.97)
Dureté nanoindentation, GPa (écart type)	1.7 (0.07)	4.95 (0.24)	$\star$	3.06 (0.61)

Tableau II.15 : Tableau récapitulatif des valeurs moyennes de dureté Berkovitch équivalentes pour les trois études.

Les valeurs moyennes sont cohérentes, tout comme l'écart type pour les matériaux de base. Concernant la zone fondue, les valeurs moyennes sont sensiblement différentes mais les écarts type sont du même ordre de grandeur. Ceci s'explique par des paramétries différentes et des lignes d'indentation passant par différentes zones de cordon (aussi bien hautes que basses). Malgré cela, les écarts type restent relativement faibles, montrant bien que les variations de dureté dans la Z.F ne sont pas si importantes que l'hétérogénéité chimique nous le fait présumer.

Pour conclure ce point, notons que le rapport $\frac{R_m}{HV}$ proche de 3, donne une bonne tendance, avec toutefois un écart notable pour le Ta (tableau II.16)

Matériaux	Ta	TA6V	Z.F
Dureté nanoindentation, HV (écart type)	109 (4.49)	317.4 (15.39)	196.21 (39.11)
R_m pour un rapport de 3, MPa	327	952	588
R_m en traction à $\dot{\varepsilon} = 10^{-3}s^{-1}$, MPa	240	983	$\star$

Tableau II.16 : Tableau récapitulatif des valeurs équivalentes de dureté Vickers et de résistance mécanique associée.

II.5.2.2 Etude comparative sur des composés Ta-Ti

A travers la littérature, il est possible de trouver des études portant sur les composés Ta-Ti homogènes. Il est donc intéressant de comparer les valeurs de module d'élasticité et de dureté de ces études avec celles relevées dans la Z.F.

Parmi ces travaux, nous mentionnons ceux de l'équipe de Chimie-Métallurgie de Rennes (Texier, 2005), (Delvat, 2006), faisant état de mesures sur des composés Ti-Ta homogènes formés par fusion en semi-lévitation. Les différences principales entre les études citées et la notre concernent les cinétiques de refroidissement puisque nous sommes dans des conditions assimilables à une trempe et pouvant modifier les microstructures formées.

Malgré cette différence majeure, nous comparons les résultats en transcrivant les mesures de dureté Vickers sous 300g (HV_{300}) (figure II.90) en mesure de dureté Berkovitch (GPa) (figure II.91) à partir de l'étude (Delvat, 2006).

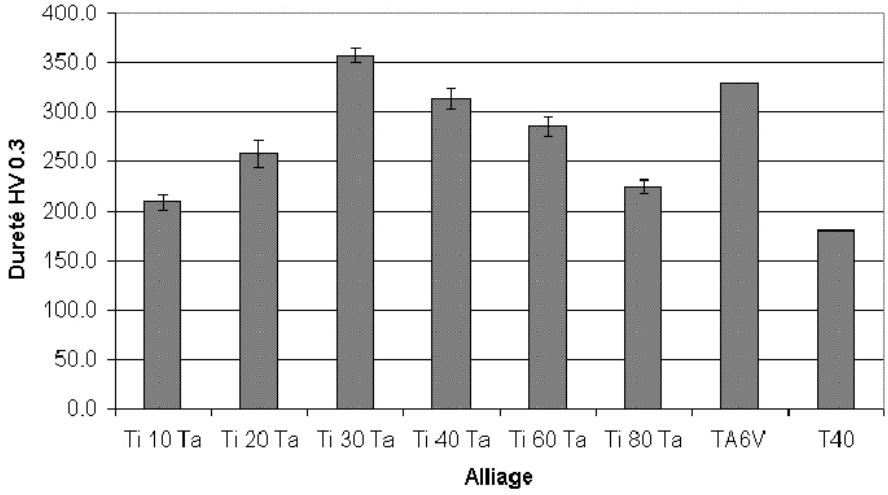


Figure II.90 : Evolution des mesures de dureté Vickers en fonction des composés Ti-Ta homogènes formés par fusion semi-lévitation

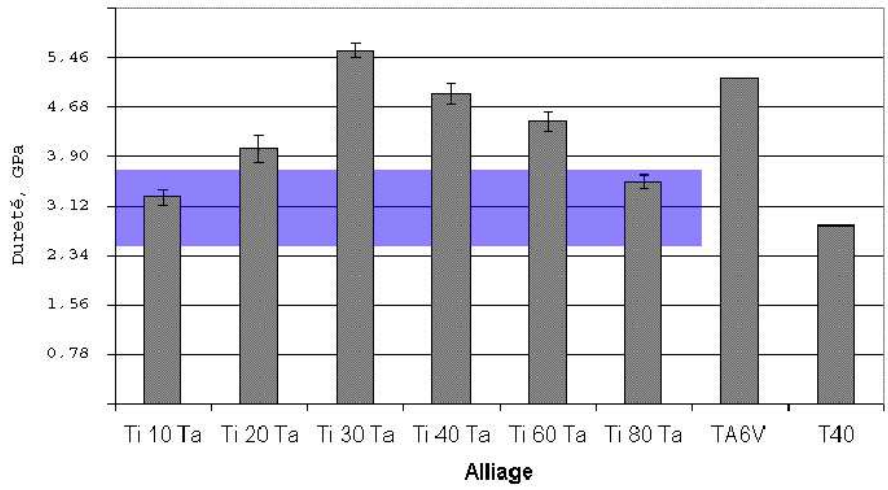


Figure II.91 : Evolution des mesures de dureté convertie en GPa en fonction des composés Ti-Ta homogènes formés par fusion semi-lévitation

Les références en abscisse se lisent Ti ”n pourcent massique de” Ta. Au sein des soudures de paramétrie G2, nous atteignons rarement des teneurs massiques en Ta supérieure à 5% massique, comme en atteste les figures II.93 sur un échantillon de paramétrie G2.

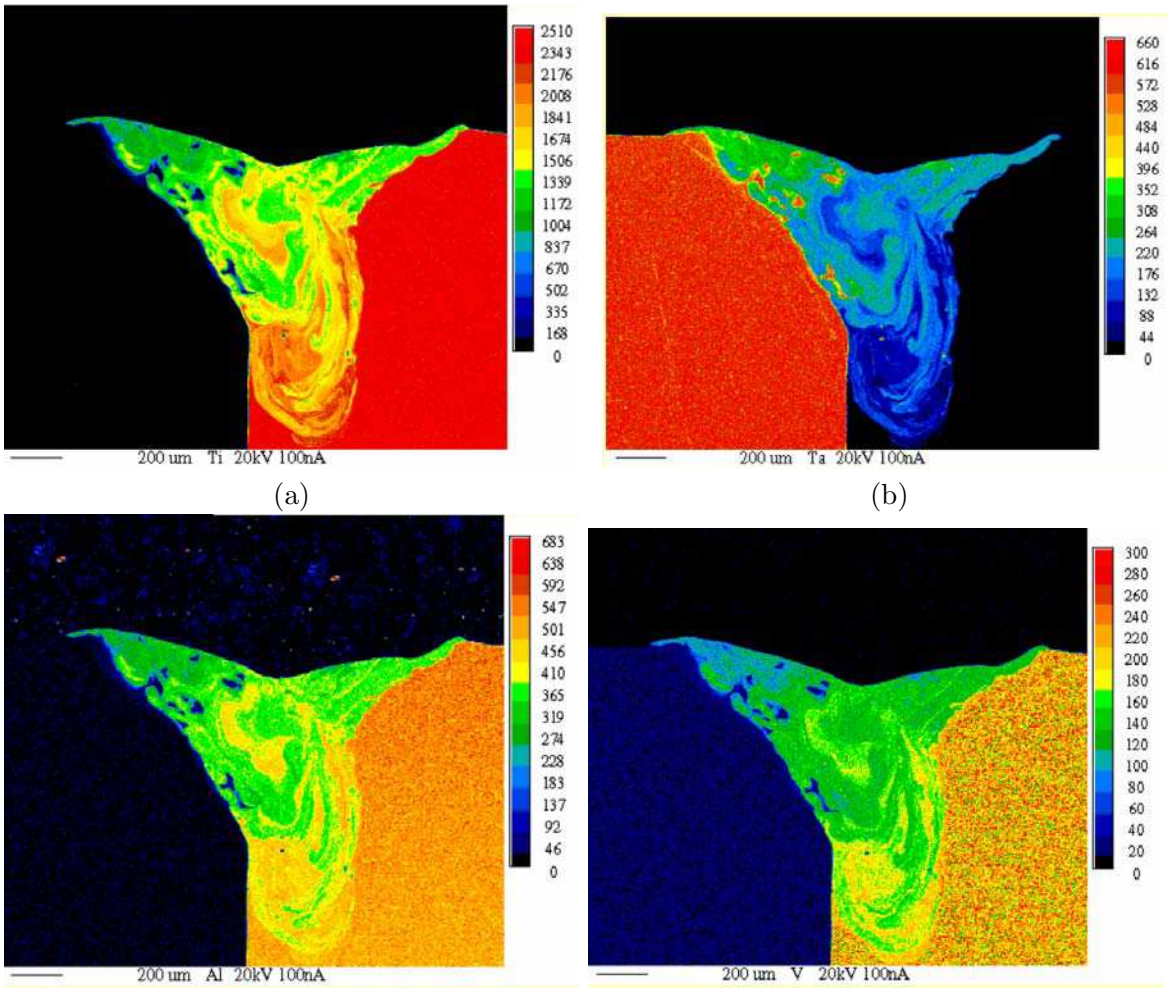


Figure II.92 : Mesure microsonde en nombre de coups : (a) Répartition du titane, (b) Répartition du tantale, (c) Répartition de l'aluminium, (d) Répartition du vanadium, d'après (Malicrot, 2006).

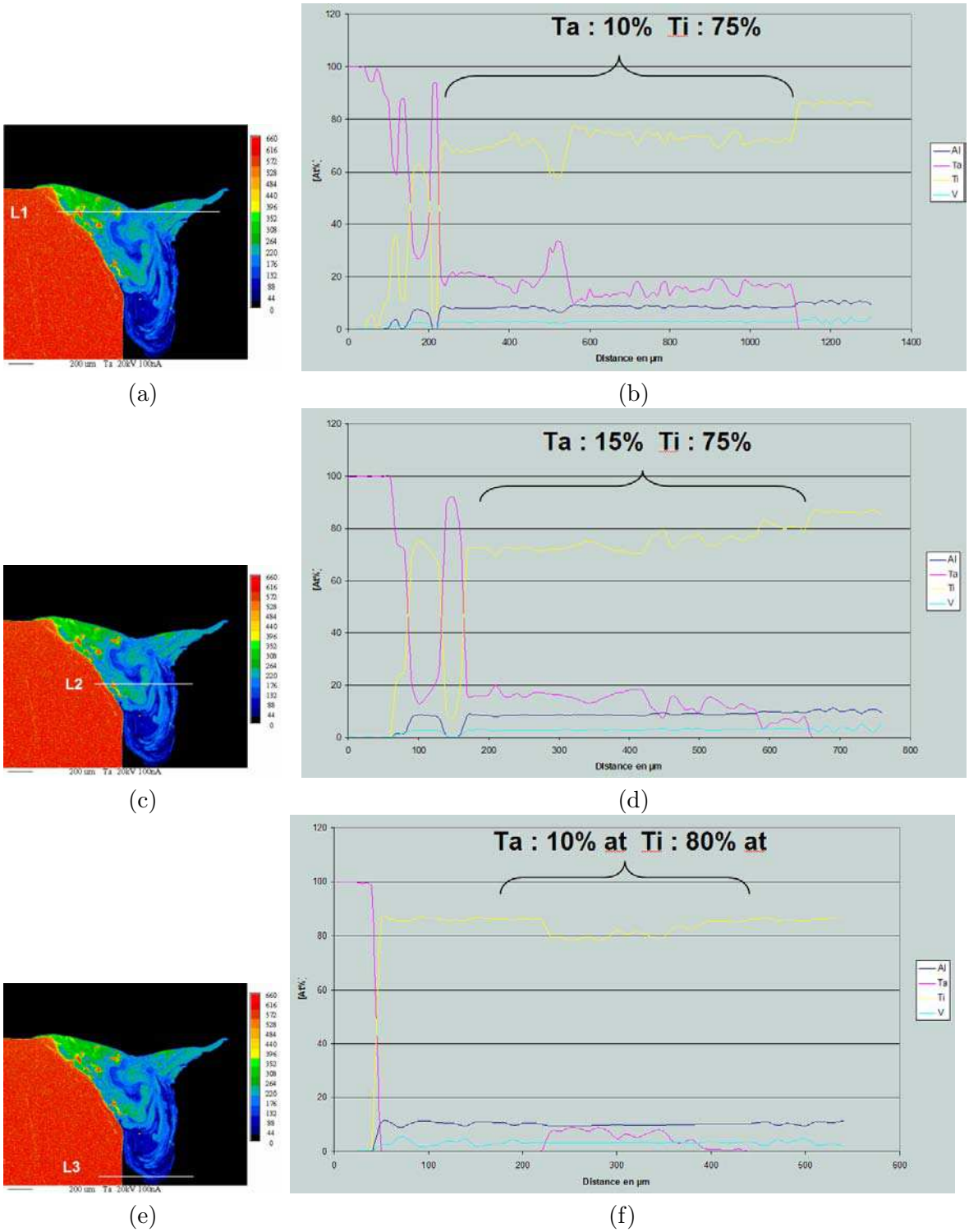


Figure II.93 : Profil quantitatif de mesure microsonde en % atomique : (a)(c)(e) Localisation des profils, (b)(d)(f) Composition en fonction des quatres éléments, d'après (Malicrot, 2006).

Les teneurs moyennes avoisinent donc au maximum 15% atomique, soit environ 40% massique. Nous nous trouvons donc dans des gammes de composés du type Ti40Ta dont la dureté mesurée est très élevée. Nos mesures, ainsi que la dispersion observée, sont en accord avec les composés homogènes jusqu'à 20% en masse mais n'atteignent jamais les valeurs

obtenues dans (Delvat, 2006) pour des composés à 30 et 40 % en masse de Ta.

On note le résultat remarquable, en terme de dureté, des composés Ti30Ta et Ti40Ta dont les valeurs sont équivalentes, voir supérieures, à celles du TA6V. En outre, l'évolution des composés Ta-Ti homogènes formés n'est pas linéaire en fonction du taux de Ta mis en jeu. Ces observations ne sont pas expliquées par l'auteur mais tendent à prouver l'existence d'une phase supplémentaire (phase α" ou ω (Combres, 1995), (Zhou et al., 2004)) dépendant de la teneur en éléments bêtagènes. Une trempe énergique doit permettre d'éviter la formation de phase ω fragilisante (Combres, 1995). Il est donc vraisemblable, d'après les mesures de nanoindentation, que nous n'ayons pas formation de cette phase fragilisante.

Une seconde étude sur des composés homogènes Ta-Ti permet d'évaluer les évolutions de module d'élasticité (Zhou et al., 2004).

Les mesures de module d'élasticité sont réalisées par méthode vibratoire et sont synthétisées sur la figure II.94

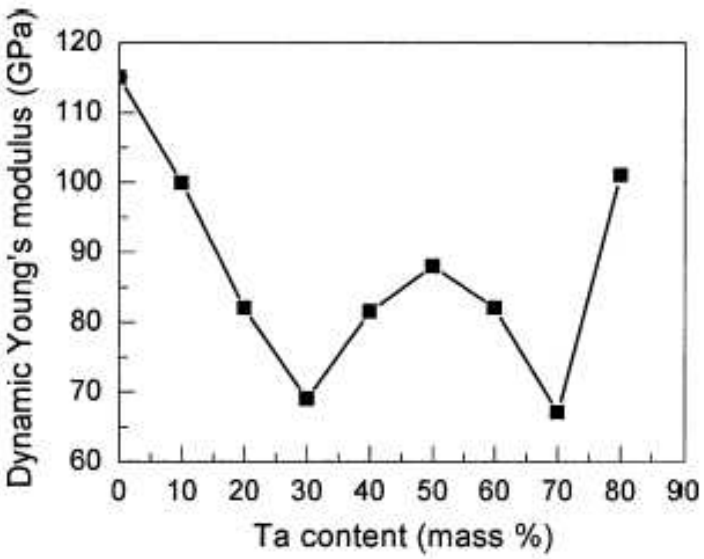


Figure II.94 : Evolution des mesures de module d'élasticité en fonction des composés Ti-Ta homogènes dans (Zhou et al., 2004)

On peut remarquer que les variations ne sont pas d'une amplitude très importante malgré la forte différence de composition. Nos mesures varient entre 120 et 60 GPa, tandis que les valeurs maximales mesurées par Zhou varient entre 110 et 65 GPa. Encore une fois, les mesures réalisées dans la Z.F sont cohérentes tout comme l'écart type des résultats obtenus.

II.5.3 Confrontation des différentes paramétries

II.5.3.1 Paramétrie G3

Comme réalisé sur la paramétrie G2 et dans les mêmes conditions expérimentales, nous réalisons 3 filiations d'indentation à 200 μm, 1077 μm et 1177 μm par rapport à la surface supérieure côté Ta. Les résultats des mesures de module d'élasticité et de dureté pour ces 3 filiations sont présentés figures II.95 et II.96

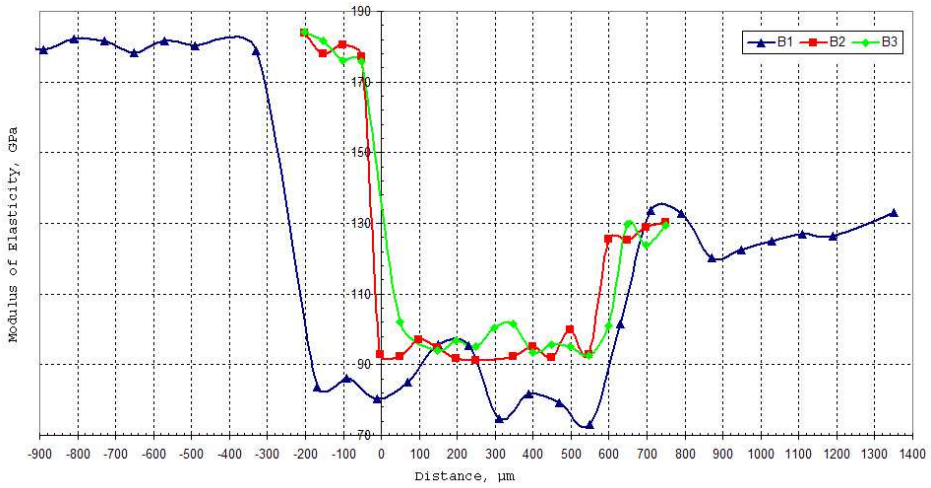


Figure II.95 : Evolution du module d'élasticité en fonction de la distance au plan de joint pour la paramétrie G3

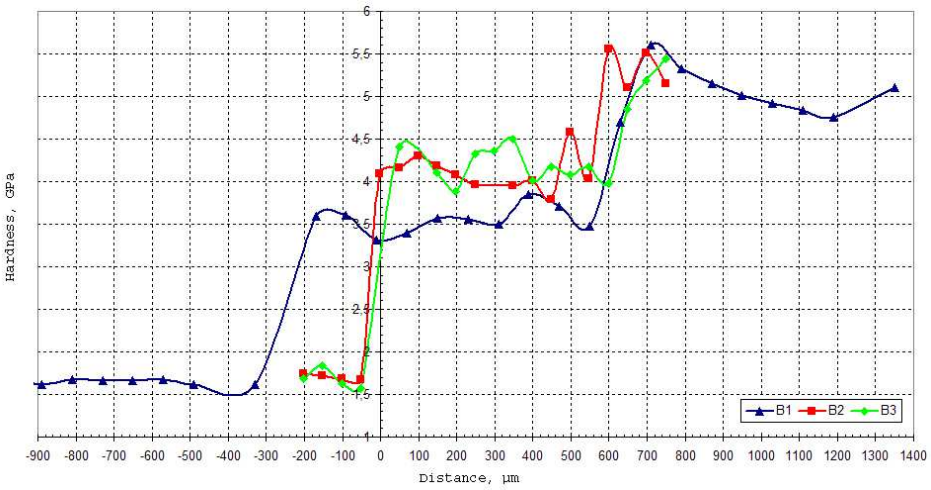


Figure II.96 : Evolution de la dureté en fonction de la distance au plan de joint pour la paramétrie G3

Les filiations ont été réalisées sur la partie supérieure du cordon pour la filiation B1, puis sur l'extrême fond de cordon pour les deux autres. Nombre de remarques peuvent être faites sur ces résultats, d'abord entre les 3 filiations elles-mêmes, mais aussi entre la réponse de la paramétrie G3 et G2 face aux résultats de flexion.

Tout d'abord, nous voyons qu'il existe une différence visible entre le comportement mécanique moyen de la partie haute et de la partie basse du cordon. Les résultats sont assez peu dispersés et peuvent se synthétiser dans le tableau II.18,

Matériaux	Ta	TA6V
Module d'élasticité, GPa (écart type)	180 (2.57)	127.6 (3.98)
Dureté, GPa (écart type)	1.67 (0.06)	5.17 (0.27)

Tableau II.17 : Tableau récapitulatif des valeurs moyennes de module d'élasticité et de dureté dans les matériaux de base.

Matériaux	B1 (Z.F haut)	B2 (Z.F bas)	B3 (Z.F bas)
Module d'élasticité, GPa (écart type)	85.2 (9.02)	93.8 (2.64)	97.1 (3.47)
Dureté, GPa (écart type)	3.66 (0.37)	4.1 (0.21)	4.18 (0.19)

Tableau II.18 : Tableau récapitulatif des valeurs moyennes de module d'élasticité et de dureté pour la paramétrie G3.

Le module d'élasticité de la partie supérieure du cordon est de 85 GPa, contre 94 à 97 GPa dans la partie basse. De même, la dureté passe de 3.7 à 4.1 à 4.2 GPa. Les tendances sont donc identiques : en tendant vers le fond de cordon, on obtient un comportement mécanique et un module d'élasticité plus élevé. Dans l'hypothèse où seule la phase Tiβ est en présence, l'augmentation de la teneur en Ti en fond de cordon devrait impliquer une augmentation de dureté (résistance mécanique plus élevée de la phase β) et une baisse du module d'élasticité (faible module d'élasticité de la phase β). Nous constatons bien l'augmentation de la dureté mais pas la chute du module. Ces tendances ne peuvent être obtenues en considérant la présence seule de Tiβ, mais le pourraient en présumant l'apparition d'une autre phase du Ti (Tiα résiduelle, Tiα' voir Tiα" ou Tiω). La littérature reporte généralement une évolution du module d'élasticité des phase du Ti dans l'ordre croissant suivant : β<α"<α'<ω (Collings, 1984), (Fan, 1993), (Lee et al., 2002). Certaines publications concluent quant à une valeur de la phase α" plus faible que β (Ho et al., 1999) ou équivalente (Hao et al., 2002). En outre, les cinétiques de refroidissement rapide du soudage ne favorisent pas la présence de Tiα et Tiω (Combres, 1995) mais favorisent la transformation martensitique. La phase la plus probable, cohérente avec les mesures de nanoindentation, est donc la phase Tiα'.

En comparant les résultats d'indentation des paramétries G2 et G3 (figures II.85 II.84 et tableau II.10), la dureté est plus élevée pour la filiation B1 de la paramétrie G3 tandis que le module est plus faible. Concernant les deux autres filiations, la dureté est beaucoup plus élevée (environ 1 GPa) et le module est quasiment équivalent. Sur la partie supérieure du cordon, l'écart se justifie simplement par l'augmentation de la proportion de phase Tiβ puisqu'il y a plus de TA6V mis en jeu mais suffisament de Ta pour stabiliser la phase β. Sur la partie inférieure du cordon G3, comme nous l'avons expliqué précédemment, Tiα' augmente vraisemblablement à la fois le module d'élasticité et la dureté. On obtient donc un module d'élasticité presque équivalent mais entre deux "alliages" différents, l'un est composé de Tiβ+Ta et l'autre de Tiβ+Tiα'+Ta avec une proportion de Ta notablement plus faible (qui peut être estimée à environ 20 à 30% massique). Ces alliages ont donc une dureté bien différente. La comparaison avec les résultats de flexion vont totalement dans ce sens puisque la paramétrie G3 présente une réponse mécaniquement plus élevée mais aussi plus fragile que G2 (figure II.57).

II.5.3.2 Paramétries G4-5-6

Les conditions expérimentales de nanoindentation restent les mêmes pour ces 3 paramétries. Pour chaque échantillon, 3 filiations sont réalisées à des distances différentes de la surface supérieure côté Ta. Ces distances sont synthétisées dans le tableau II.19 pour les 3 filiations des 3 paramétries.

Filiation	Paramétrie G4	Paramétrie G5	Paramétrie G6
B1, μm	311	611	911
B2, μm	357	607	857
B3, μm	336	636	936

Tableau II.19 : Tableau récapitulatif des hauteurs des filiations pour les 3 paramétries G4, G5, G6.

Les résultats de ces 3 filiations pour les 3 échantillons sont présentés en vis-à-vis de leur micrographie (figure II.97 et II.98). La dispersion des résultats est un peu plus élevée que pour les paramétries G2 et G3, notamment pour les mesures de module d'élasticité dans le Ta de base (figure II.97(f)), mais aussi pour les mesures de dureté dans le TA6V. Notons que les valeurs obtenues pour les filiations B2 et B3 de la paramétrie G6 aux alentours du plan de joint (+/- 200μm) sont faussées par le désaccostage des tôles bien visible sur la micrographie (figure II.97(e)). Ce désaccostage s'amplifie avec l'angle du faisceau laser et provient de la différence de température de fusion du TA6V et du Ta. La température en ces points n'est plus suffisante pour fondre le Ta.

Les moyennes et écarts types des mesures en Z.F sont résumés dans le tableau II.20 sans prendre en compte ceux perturbés par le désaccostage.

Paramétrie	Caractéristique	B1	B2	B3
G4	Module d'élasticité, GPa (écart type)	85.9 (9.4)	88.3 (7.4)	90.4 (6.1)
	Dureté, GPa (écart type)	2.31 (0.41)	2.39 (0.17)	2.35 (0.35)
G5	Module d'élasticité, GPa (écart type)	77.1 (3.8)	84 (4.3)	80.6 (5.7)
	Dureté, GPa (écart type)	2.84 (0.23)	3.2 (0.34)	3.14 (0.27)
G6	Module d'élasticité, GPa (écart type)	84.6 (11.9)	87.8 (7.1)	85.1 (5.9)
	Dureté, GPa (écart type)	2.83 (0.67)	3.29 (0.35)	3.11 (0.33)

Tableau II.20 : Tableau récapitulatif des valeurs moyennes et écart type de dureté et module d'élasticité pour les 3 filiations des 3 paramétries G4, G5, G6.

Les moyennes des modules d'élasticité sont sensiblement équivalentes entre G4 et G6 et légèrement inférieures pour G5. Concernant les mesures de dureté, elles sont, cette fois, équivalentes entre G5 et G6 et notablement plus faibles pour G4.

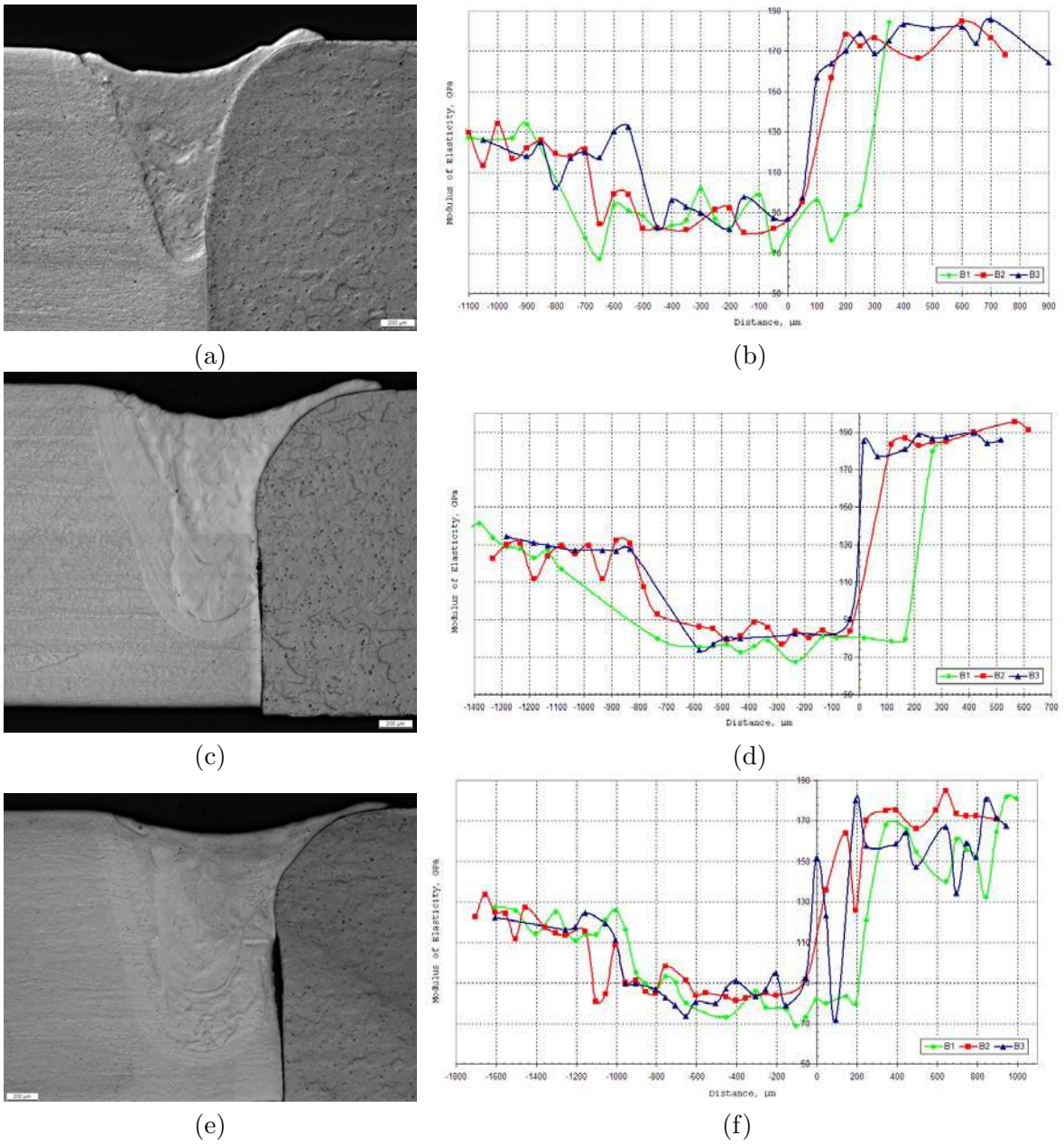
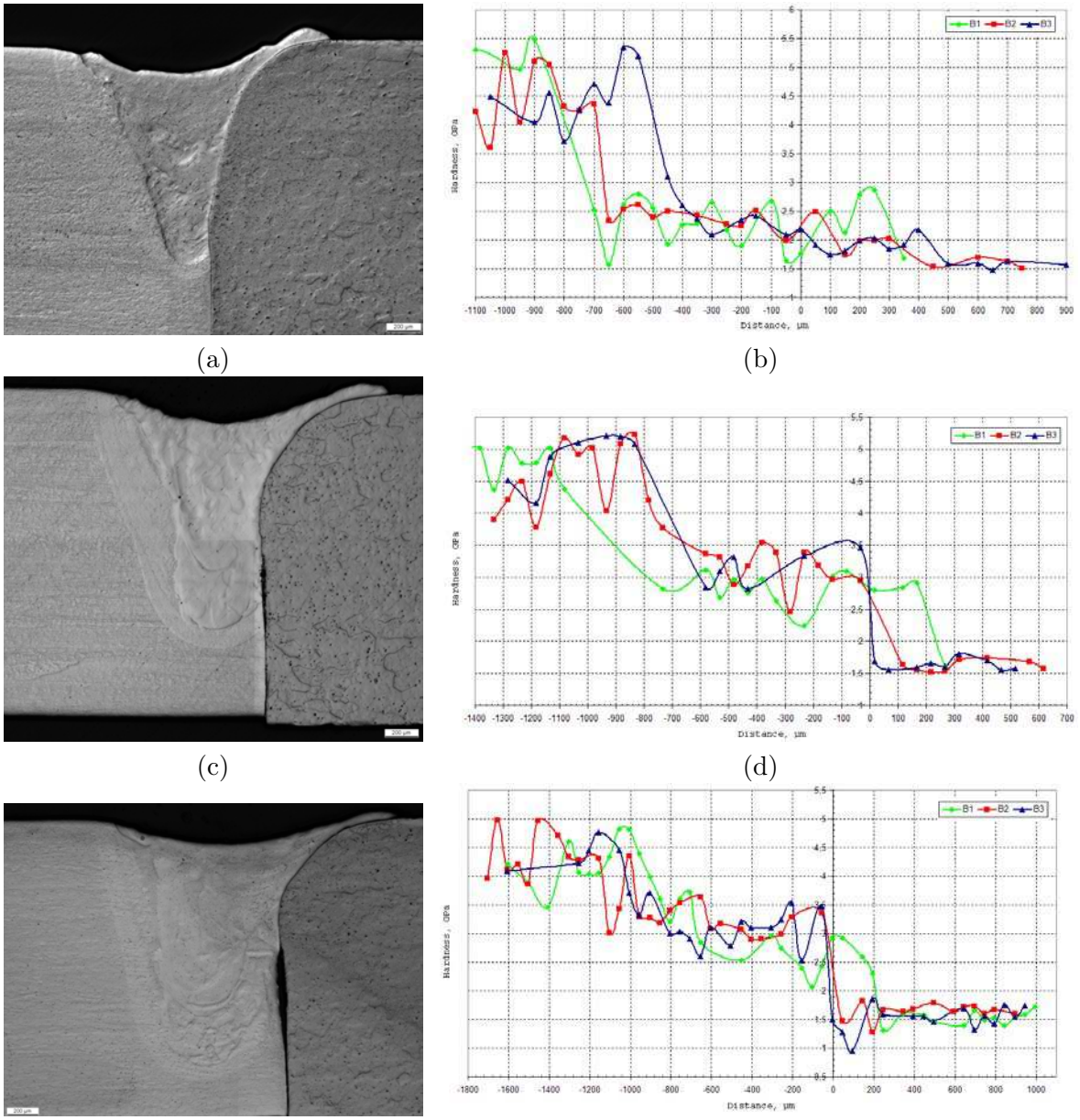


Figure II.97 : Comparaison des métallographies (à gauche) et des évolutions de module d'Young (à droite) : (a)(b) pour la paramétrie G4, (c)(d) pour la paramétrie G5, (e)(f) pour la paramétrie G6.



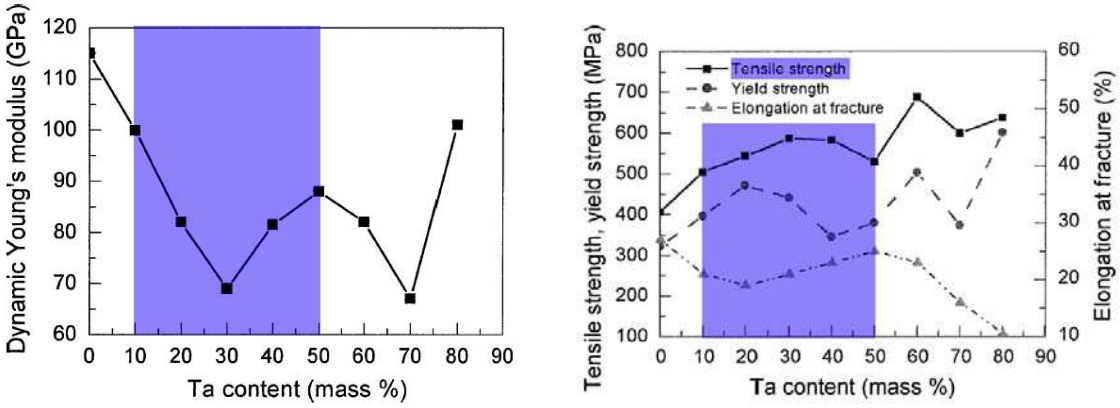
(a) (b)

(c) (d)

(e) (f)

Figure II.98 : Comparaison des métallographies (à gauche) et des évolutions de dureté (à droite) : (a)(b) pour la paramétrie G4, (c)(d) pour la paramétrie G5, (e)(f) pour la paramétrie G6.

Encore une fois, on donne en référence l'étude de (Zhou et al., 2004) dont les résultats de module d'élasticité et de résistance mécanique sur des composés homogènes reflètent totalement ces tendances (figure II.99).



(a) (b)

Figure II.99 : Evolution des propriétés mécaniques en fonction du pourcentage massique de Ta d'après (Zhou et al., 2004) :(a) Module d'élasticité, (b) Résistance mécanique.

Les zones nous concernant plus particulièrement pour la comparaison avec les paramétries G4, G5, G6, sont surlignées sur la figure II.99. Nous voyons la baisse du module d'élasticité puis son augmentation tandis que la résistance mécanique augmente puis se stabilise.

Remarques :

On note une propriété intéressante de la paramétrie G4 qui n'est retrouvée pour aucune autre. Cette propriété est visible sur la figure II.98(b) et concerne l'évolution de la dureté au sein de la Z.F. Cette dureté tend progressivement vers une valeur "asymptotique" très proche de celle du Ta. Ce gradient de propriété permet de progressivement estomper l'overmatching de la Z.F par rapport au Ta. Les jonctions à gradient de propriété permettent généralement d'améliorer les caractéristiques de ténacité (Tohgo et al., 2005), (Becker, 2000), (Lee, 2001), (Suresh et Mortensen, 1998) et pourraient donc potentiellement avoir un intérêt dans la tenue mécanique des soudures.

II.6 Essais de traction longitudinale

II.6.1 Introduction

Au paragraphe II.3, nous avons présenté la problématique expérimentale liée à la caractérisation de la Z.F en présence de Ta et TA6V dont les propriétés mécaniques sont radicalement différentes. L'essai de flexion quatre points est présenté comme l'essai permettant de palier les problèmes de la traction transversale. Cet essai est très pertinent puisqu'il caractérise uniquement la réponse de la Z.F sans une influence importante des matériaux environnants. Il nécessite cependant une simulation éléments finis pour "remonter" au comportement matériau.

La traction longitudinale est une alternative à cet essai puisqu'elle permet de palier la problématique de la traction transversale comme l'illustre la figure II.20. Cet essai ne caractérise pas la réponse unique de la Z.F mais permet de solliciter la Z.F "plus loin" en déformation, sans localiser dans le Ta comme en traction transversale. De plus, un calcul analytique simple peut permettre d'évaluer rapidement le comportement mécanique de la Z.F.

Certaines études, et notamment celles menées au GKSS research center, réalisent des éprouvettes complètes de cordon soudé par laser et dont les dimensions sont proches de nos problématiques. Différentes études menées valident la procédure permettant d'identifier le comportement unique de la Z.F sur des éprouvettes de section 2x0.5 mm^2 et de longueur utile 9 mm sans perturbation mécanique (cf. figure II.100), (Scheider et al., 2004), (Nègre, 2006), (Cam et al., 1999).

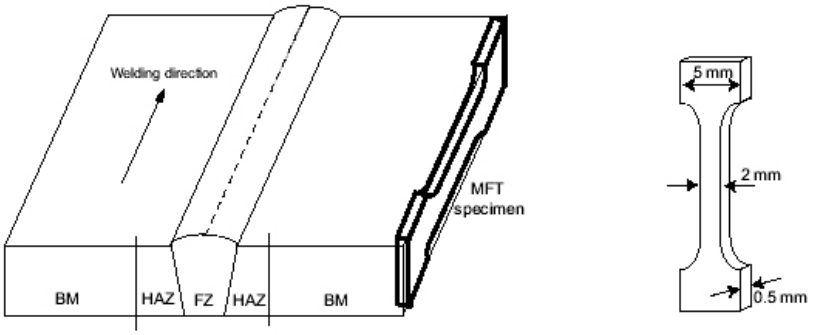


Figure II.100 : Extraction d'éprouvette M.F.T (Micro Flat Tensile specimen) pour la caractérisation de la zone fondue, d'après (Nègre, 2006).

L'usinage de telles éprouvettes est délicat et nécessite un retour d'expérience important sur les matériaux usinés. L'extraction de telles éprouvettes, dans notre cas, nécessiterait des dimensions de l'ordre de 1.4x0.5 mm^2.

D'autres études remontent au comportement de la Z.F par l'utilisation d'éprouvettes de traction longitudinales et de calcul analytique, sans pour autant extraire une éprouvette de cordon. Parmi celle-ci nous citons (Abdullah et al., 2001), (Saunders et Wagoner, 1996), (Zhao et al., 2001), (Liu et Chao, 2005).

Notre Z.F possédant des dimensions faibles, il est nécessaire de réaliser des éprouvettes dont la part de matériaux de base n'est pas prépondérante face à celle de la Z.F. Nous avons donc fait usiner par électro-érosion des éprouvettes de section 2x1.4 mm^2 et de longueur utile 9 mm dans le plan est donné en annexe A.5.

Cette éprouvette est sollicitée en traction uniaxiale sur une micromachine de traction (cf. annexe A.5) dont les dimensions et la capacité (5 kN) sont adaptées à de telles éprouvettes.

II.6.2 Réponse globale

L'essai est donc un essai de structure dont la réponse dépend à la fois du comportement de la Z.F mais aussi des matériaux de base. La réponse contrainte-déformation nominale de l'essai de traction longitudinale sur la paramétrie G2 est présentée figure II.101.

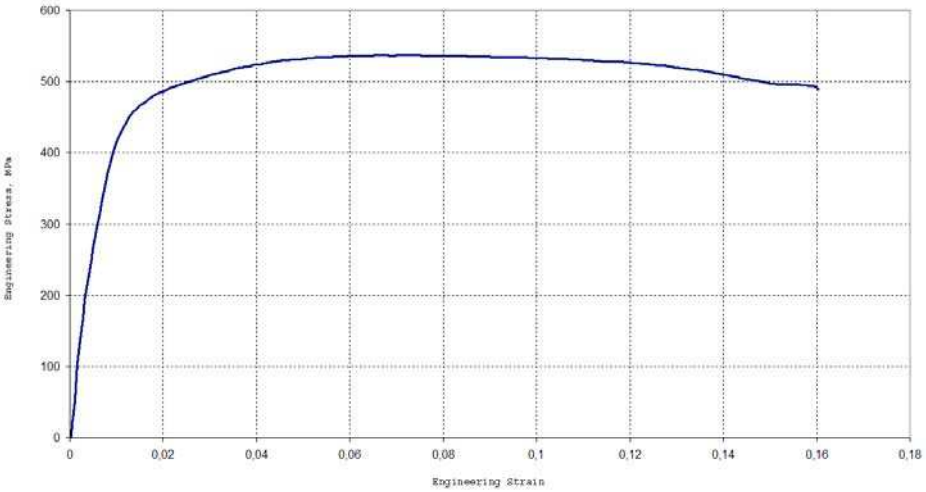


Figure II.101 : Traction longitudinale sur éprouvette soudée de paramétrie G2 à $\dot{\varepsilon} = 5.10^{-4}s^{-1}$, contrainte-déformation nominale.

Dans le cas de la traction longitudinale, l'hypothèse d'iso-déformation dans chacune des sections de l'éprouvette est l'hypothèse la plus réaliste. Dans ces conditions, le premier matériau à rompre est le moins ductile. L'assemblage est donc logiquement proche de l'allongement à rupture du TA6V (environ 16% ici).

Sous cette même hypothèse, la connaissance de la fraction volumique suffit à estimer l'état de contrainte dans la Z.F. En évaluant les surfaces occupées par chacun des constituants de l'éprouvette (Ta, Z.F et TA6V), le calcul de la contrainte dans la Z.F est donnée par

$$\sigma_{ZF} = \frac{\sigma - \sigma_{Ta}\frac{S_{Ta}}{S} - \sigma_{TA6V}\frac{S_{TA6V}}{S}}{\frac{S_{ZF}}{S}} \tag{II.18}$$

En réalisant une coupe de la partie utile dans la zone la moins déformée (en fin de rayon de raccordement), nous estimons le rapport des surfaces de chaque constituant par la surface totale (cf. figure II.102).

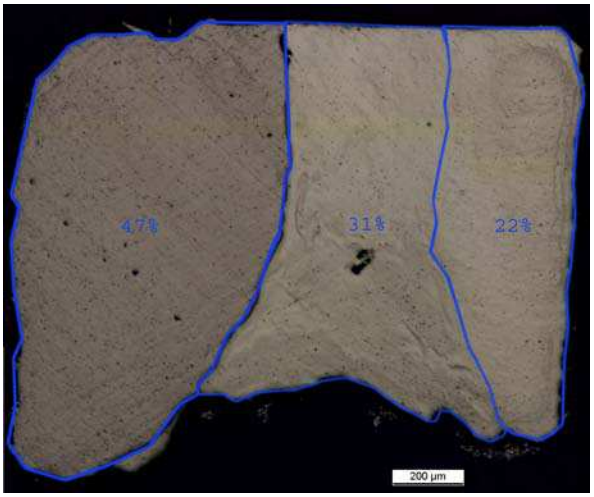


Figure II.102 : Estimation de la part de section totale pour chacun des constituants de l'éprouvette soudée.

Il reste une part non négligeable de Ta 47% (à gauche sur la figure II.102) ainsi que du TA6V 22% (à droite sur la figure II.102) et 31% de Z.F.

L'équation II.18 donne une estimation de la valeur de la contrainte dans la Z.F. Nous choisissons d'estimer cette valeur à 5% de déformation nominale pour laquelle la résistance mécanique R_m du TA6V est atteinte. Les valeurs utilisées et calculées sont synthétisées dans le tableau II.21.

Constituants	Assemblage	TA6V	Ta	Z.F
Pourcentage de section occupée, %	100	22	47	31
Contrainte nominale mesurée à 5%, MPa	533	985	195	$\star$
Contrainte nominale calculée à 5%, MPa				727

Tableau II.21 : Tableau récapitulatif des valeurs utilisées pour estimer la contrainte dans la Z.F.

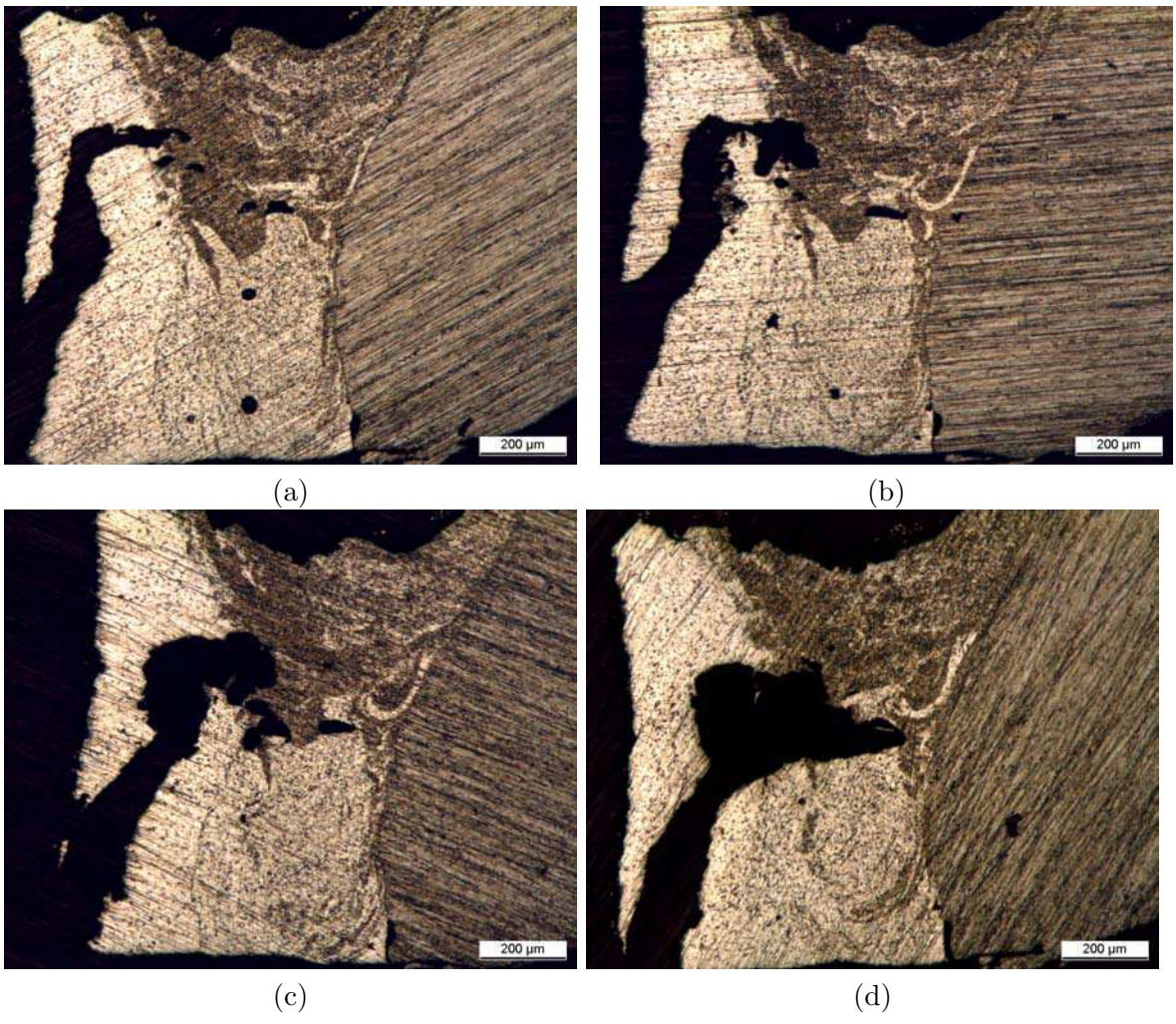
Si, au sein même de la Z.F, on réalise le même type de calcul, en estimant que seule la phase β est présente et que sa résistance mécanique est équivalente à celle du TA6V (hypothèse raisonnable aux vues des valeurs du tableau II.103), on obtient,

$$f = \frac{\sigma_{ZF} - \sigma_\beta}{\sigma_{Ta} - \sigma_\beta} \tag{II.19}$$

On obtient alors une fraction volumique f de 32%, en bon accord avec l'estimation du taux de dilution de 34% de Ta (figure II.30 paragraphe II.4.2.1).

Nuance	R_m (MPa)	$R_{p0,2}$ (MPa)	A (%)	E (GPa)
T40	483	352 (1)	28	110
IMI 685	1 020	914	8	110
TA6V	1 000	910 (1)	18	110
IMI 550	1 138	1 035	12	110
β-CEZ	1 250	1 150	11	115
β-CEZmax	1 700	1 650	7	115
β-CEZ100 %β	927	723	9	70
(1) Valeurs supérieures.				

Figure II.103 : Caractéristiques mécaniques en traction sur différents alliages de Ti, d'après (Combres, 1999).



(a) (b)

(c) (d)

Figure II.104 : Coupes transversales successives dans la zone de striction de l'éprouvette de traction longitudinale paramétrie G2.

.

De plus, des mesures de nanoindentation, dans les mêmes conditions qu'au paragraphe II.5, sont réalisées et donnent une moyenne de 3.65 GPa. Au regard des résultats du

paragraphe II.5.1.2 sur la même paramétrie, on peut noter une augmentation de la dureté représentative de l'écrouissage subi lors de l'essai de traction. Moyennant la même valeur de conversion pour le dureté Vickers et le rapport de 3 entre la résistance mécanique et la dureté Vickers, on estime la résistance mécanique à 700 MPa. L'évaluation du comportement mécanique du joint soudé par cette méthode semble donc cohérente.

Finalement, une dernière information à caractère global peut être tirée de cet essai. Elle concerne la propagation de fissure dans le plan (DE,DT) qu'il est possible d'appréhender par plusieurs coupes longitudinales successives dans la zone de striction (figure II.104). Le polissage n'est volontairement pas fini à l'OPS (simplement au papier 4000) afin de conserver un contraste entre les zones riches en Ta (zones marrons) et les zones plus riche en TA6V (zones blanches).

Nous avons mis en évidence l'influence des hétérogénéités et des zones d'interface faible sur la rupture de la Z.F lors d'essais de flexion sur éprouvettes entaillées. Cependant, ces essais ne nous permettent pas d'observer l'influence du fond de cordon sur le comportement et la rupture puisque cette zone est la zone de localisation de l'entaille. Or, entre les zones haute et basse du cordon de soudure existe un important gradient de composition semblant être un chemin de propagation préférentielle. La propagation de fissure se fait par croissance et coalescence de vides initiés aux interfaces, où les gradients de composition sont les plus importants.

La traction longitudinale, par la dimension des éprouvettes et sa configuration, est très bien adaptée à la réalisation d'essais in-situ au M.E.B avec une information, jusqu'alors non traitée, portant sur l'hétérogénéité dans le plan d'observation (DT,DL).

II.6.3 Réponse locale

Lors des essais de flexion, l'hétérogénéité du champ de déformation est observée dans le plan (DE,DT) tandis qu'au cours de l'essai de traction longitudinale, il est possible d'associer un moyen d'extensométrie optique en permettant la mesure dans le plan (DT,DL).

La corrélation d'images occasionne quelques difficultés dans l'interprétation des résultats puisque le dépôt de mouchetis masque la microstructure. Le dialogue entre mesure de champ et phase en présence est donc rendu délicat, nécessitant des mesures par microsonde postmortem.

L'intérêt d'une mesure locale in-situ ne masquant pas la microstructure est alors évident :

- associer en temps réel, l'hétérogénéité mécanique et chimique par utilisation du M.E.B dont le contraste est donné par la différence de numéro atomique des éléments.

- visualiser l'hétérogénéité cristalline éventuelle par l'apparition de lignes de glissement en surface.

Les mesures de champs locaux passent alors par un moyen différent de la corrélation d'images par dépôt de mouchetis et nécessite la réalisation de micro-grilles de plots d'or.

II.6.3.1 Lithographie

Le dépôt de plots d'or, servant de marqueurs à la surface de l'échantillon, est réalisé par lithographie suivant le schéma suivant (cf. figure II.105).

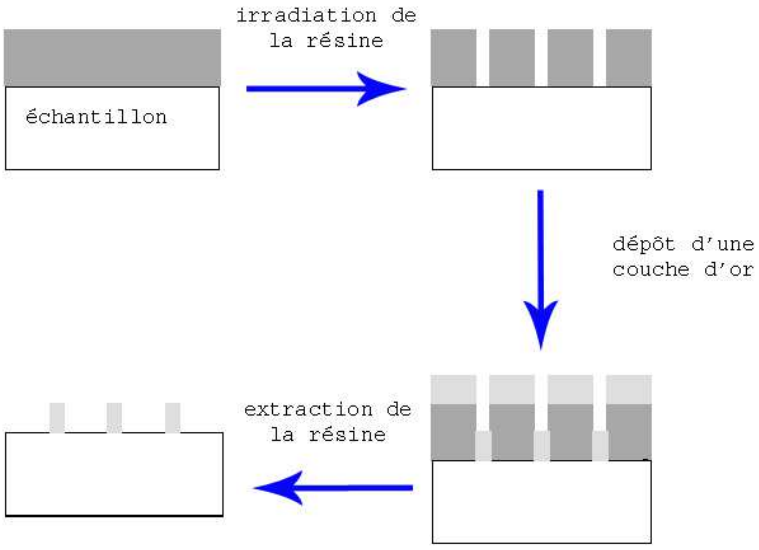


Figure II.105 : Schéma représentatif du dépôt de plots par lithographie réalisé au LNIO (UTT).

Les plots déposés pour l'essai de traction longitudinale in situ au M.E.B sont de diamètre 800 nm pour une hauteur de 60 nm. Le pas de la grille est de 10 μm sur une surface de 500x500 μm^2. Un exemple de cette zone de dépôt est présenté figure II.106.



Figure II.106 : Dépôt de plots d'or par lithographie, vue M.E.B aux électrons secondaires grandissement x1000.

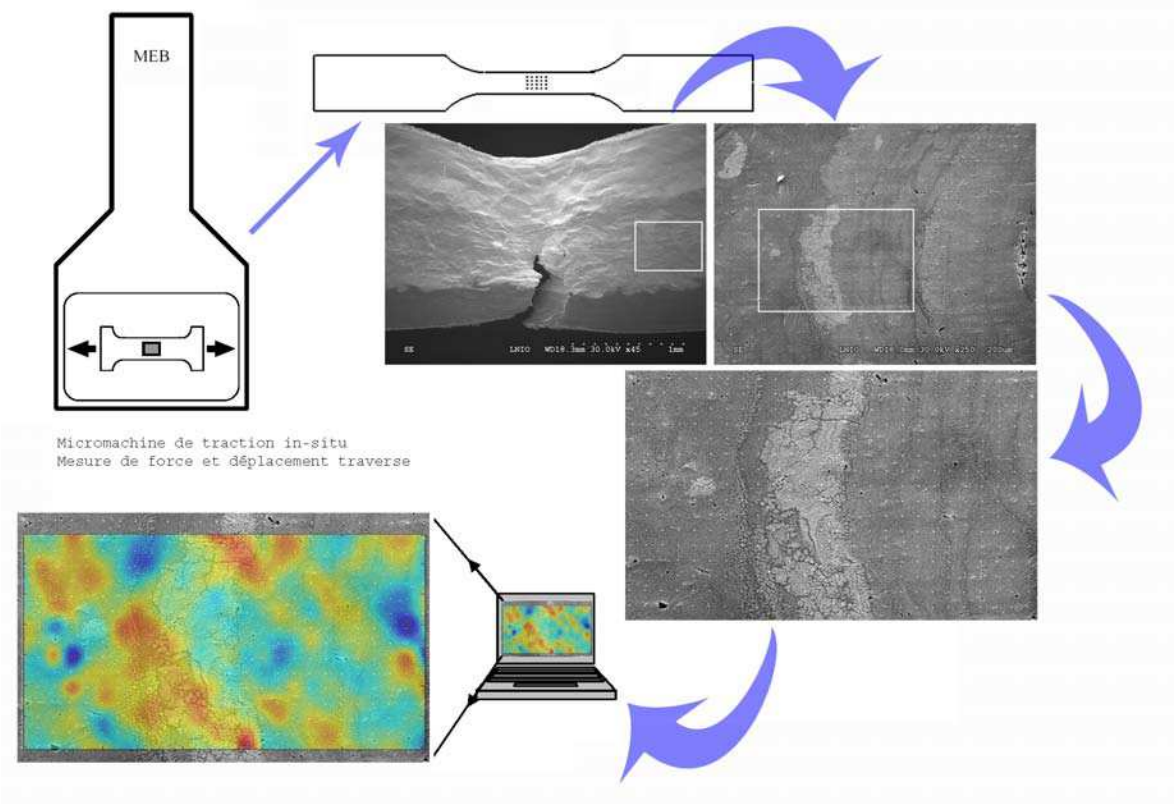


Figure II.107 : Schéma de principe du dispositif expérimental et zone d'analyse.

La procédure de polissage standard (cf. annexe A.6) est utilisée pour préparer la surface avant dépôt. La zone de 500x500 μm^2 est placée au centre de la zone fondue et approximativement au centre de la partie utile. Au cours de cet essai, la fissure de l'échantillon intervient en dehors de la zone de dépôt, ne permettant pas d'observer l'évolution de la fissure au sein de la microstructure. Le champ de déformation locale mesuré est néanmoins très important et suffit à observer l'influence des hétérogénéités du mélange.

Le schéma de principe du dispositif expérimental ainsi que la zone d'analyse sont représentés figure II.107. La zone d'analyse est réduite afin de faciliter le traitement numérique et mesure environ 150x200 μm^2.

II.6.3.2 Algorithme de traitement et repérage

Le traitement et la localisation des plots d'or sont réalisés sous MATLAB et se basent sur des traitements de base de morphologie mathématique. Le dépouillement est semi-automatique. Une première étape, automatisée, permet de détecter les plots sur l'image par différentes opérations de morphologie mathématique (dilatation, érosion...). Ensuite, il est nécessaire de contrôler ce processus manuellement afin d'ajouter ou soustraire certains plots oubliés ou erronés. Ceci doit être réalisé sur toutes les images de la séquence. Les tâches suivantes sont totalement automatisées et portent sur l'exploitation du suivi des plots : calcul de déplacement, dérivation discrète, déformation, affichage du post-traitement.

Sans rentrer dans les détails des nombreuses opérations de traitement d'image, nous rappelons les concepts de base de manière élémentaire :

- Élément structurant : domaine définissant la taille et la direction de l'opération

morphologique.

- Érosion : réduction d'un domaine par un élément structurant dont la taille et la forme conditionnent le résultat final.

- Dilatation : augmentation d'un domaine par un élément structurant dont la taille et la forme conditionnent le résultat final.

- Ouverture : érosion suivie d'une dilatation. Cette opération supprime de l'image toute partie qui ne peut pas contenir l'élément structurant. Ceci permet notamment de supprimer le bruit d'une image.

- Fermeture : dilatation suivie d'une érosion.

- Reconstruction : permet de reconstruire une image f en tenant compte d'un marqueur g, figure II.108.

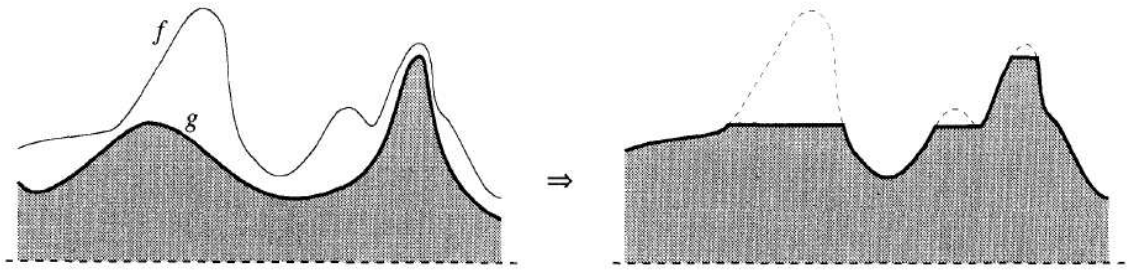


Figure II.108 : Reconstruction d'une image f en tenant compte d'un marqueur g, d'après (Vincent, 1993)

L'étape cruciale est, bien entendu, le repérage des plots. Après avoir testé différentes combinaisons d'opération morphologique élémentaire, nous avons opté pour le traitement algorithmique suivant :

- Une ouverture avec un élément structurant de type disque, dont le rayon vaut 1 pixel. Ce traitement permet de supprimer le bruit de l'image. Le rayon de l'élément structurant doit être inférieur à la taille du plot.

- Une reconstruction de l'image initiale avec comme marqueur l'ouverture précédente (cf. figure II.109(b)).

- Une seconde ouverture avec un élément structurant de type disque, dont le rayon vaut 5 pixels. Ce traitement permet de "gommer" la présence des plots.

- Une reconstruction de l'image initiale avec comme marqueur la seconde ouverture (cf. figure II.109(d)).

- Une soustraction de la reconstruction 1 par la reconstruction 2 (cf. figure II.109(f)).

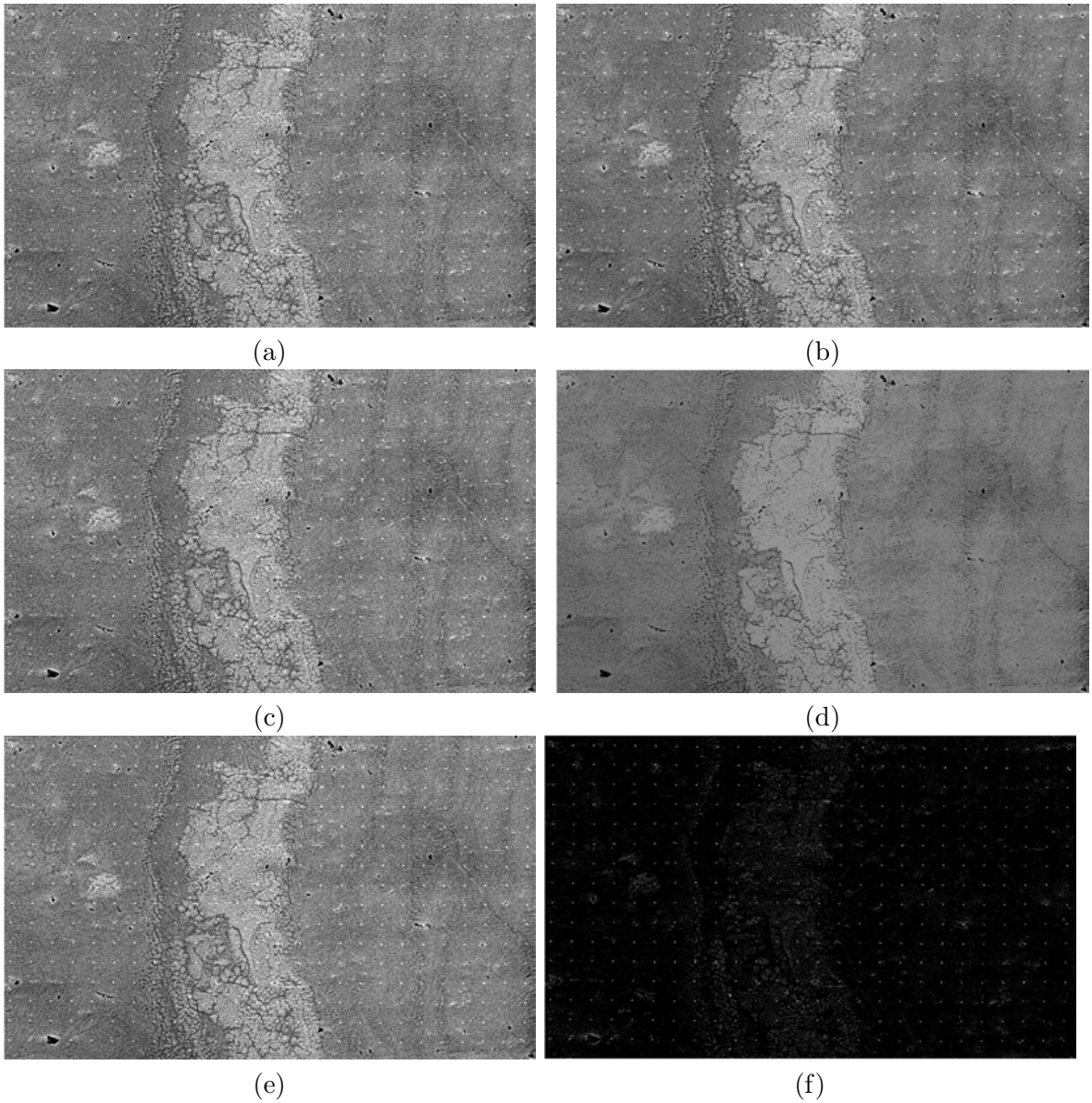
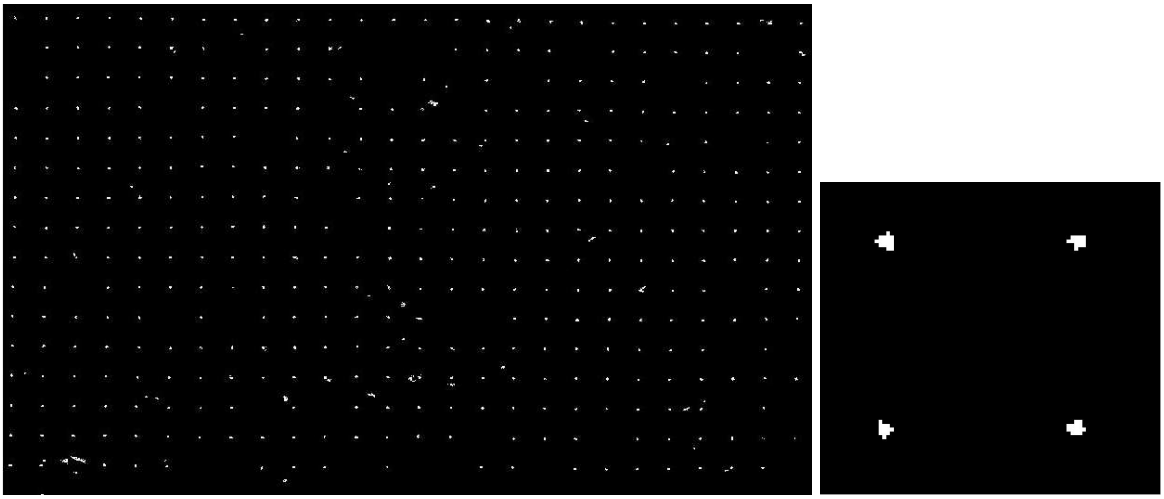


Figure II.109 : Traitement successif de l'image initiale (a)(c)(e) pour, (b) la reconstruction 1, (d) la reconstruction 2, (e) la soustraction de la reconstruction 1 et de la reconstruction 2.
.

Ces traitements permettent de préparer l'image 8 bits à une convertion en image binaire dont le seuil peut être ajusté. On obtient l'image II.110 à partir de l'image II.109(f) pour un seuil de 0.28 (le seuil étant étalonné de 0 à 1).



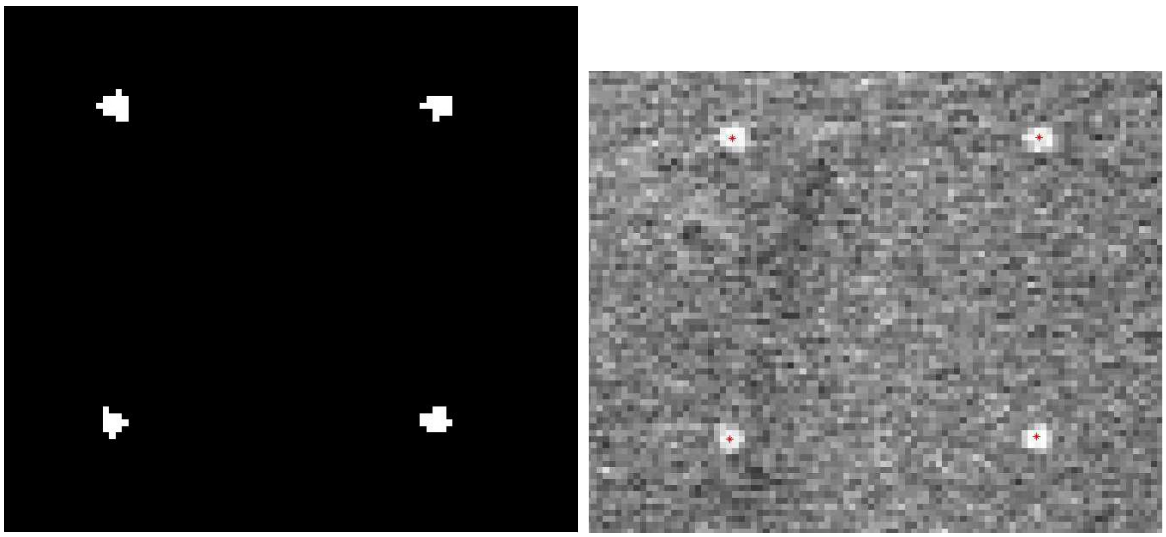
(a) (b)

Figure II.110 : Image binaire obtenue par seuillage de la figure II.109(f) : (a) vue globale, (b) zoom sur 4 plots.

.

Comme on peut le voir, il existe toujours une erreur sur la détermination des plots, principalement à cause du contraste trop faible entre les zones riches en Ta et les plots d'or. Le Ta étant un élément très lourd et le contraste de phase provenant de la différence de numéro atomique des éléments, il est difficile d'obtenir mieux par un traitement automatique. L'intervention de l'opérateur est alors nécessaire afin d'ajouter ou supprimer les points erronés de la figure II.110(a).

Le repérage du plot est défini par une aire (figure II.110(b)) dont on peut déterminer le centre d'inertie repérant donc la position du plot (figure II.111).



(a) (b)

Figure II.111 : Comparaison (a) du zoom de l'image II.110(b), (b) de la position du centre d'inertie sur l'image initiale.

.

Si tous les points d'or sont correctement repérés sur une image initiale et une image

déformée, le reste de la procédure est assez simple et consiste à apparier chacun des points de la configuration initiale et déformée et de calculer son déplacement. Il faut définir un point de référence qui est le plot supérieur gauche. L'ensemble des déplacements des points est repéré par rapport à ce point d'origine. Les champs de déformation sont ensuite obtenus par dérivation discrète.

II.6.3.3 Estimation de l'erreur

La position des centres d'inertie ne sont pas des nombres entiers de pixel. Nous estimons cependant une erreur sur la détermination du centre de l'ordre du pixel. L'erreur sur la mesure de la longueur de la jauge est donc :

$$e = \frac{"ErreurDeLocalisation"}{"Pas"/"TailleDuPixel"} \tag{II.20}$$

Dans notre cas, le pas est de 10 μm, l'erreur de localisation des plots vaut 2 pixels (1 pour chacun des 2 plots) et, la taille d'un pixel est d'environ 0.2 μm. On obtient une erreur e de 4 % sur la détermination de la longueur. Cette erreur se cumule lors du calcul de la déformation soit une erreur de 8 %. Sur un base de mesure de 10 plots, l'erreur sur la déformation chute donc à 0.8%, ce qui correspond aux valeurs classiquement obtenues dans la littérature (Vignal et al., 2005), (Doumalin, 2000), (Bornert, 1996).

L'augmentation de la précision de la mesure passe donc par l'augmentation du rapport $\frac{"Pas"}{"TailleDuPixel"}$. Il est alors nécessaire d'augmenter le pas de la grille ou d'augmenter la résolution. Le pas de la grille est généralement conditionné par la taille de l'hétérogénéité et ne peut donc pas être augmenté sans perdre l'information recherchée. Une meilleure précision passe donc obligatoirement par une augmentation de la résolution. A plus fort grossissement se pose alors le problème de la représentativité du volume élémentaire qui ne peut être résolue que par la réalisation de sous-images impliquant alors un temps d'essai beaucoup plus important.

II.6.3.4 Mesures de déformations locales in-situ

L'essai de traction longitudinale est réalisé à une vitesse de déformation d'environ $\dot{\varepsilon} = 5.10^{-4}s^{-1}$. L'essai est arrêté lors de la réalisation de l'image au M.E.B. L'ensemble de la grille de 500x500 μm est imagée en haute résolution (2560x1920 pixels) en mode secondaire pour un grandissement x250. Les instants de prise de vue sont matérialisés par les points rouges sur la courbe II.112.

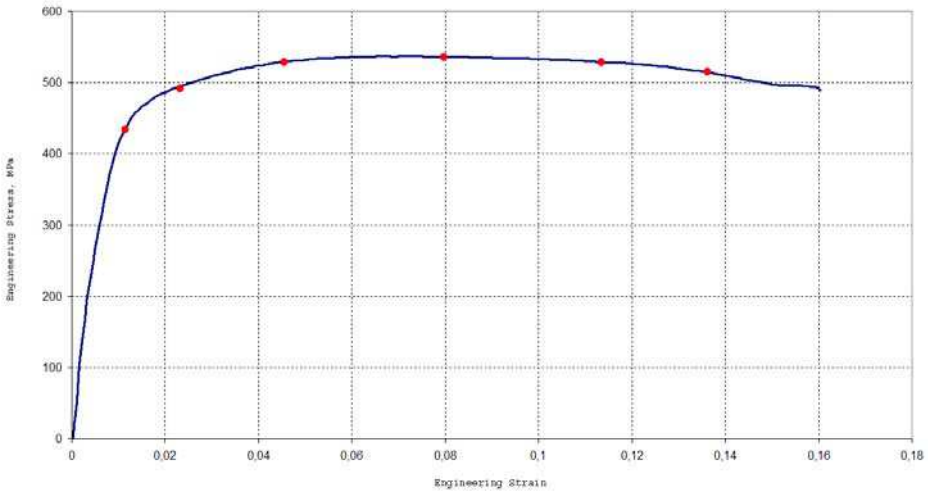


Figure II.112 : Localisation des instants de prise de vue sur la courbe contrainte-déformation nominale.

Nous présentons le dépouillement réalisé sur une zone réduite de 150x200 μm pour un instant correspondant à 8% de déformation nominale globale (figure II.113 à II.116)

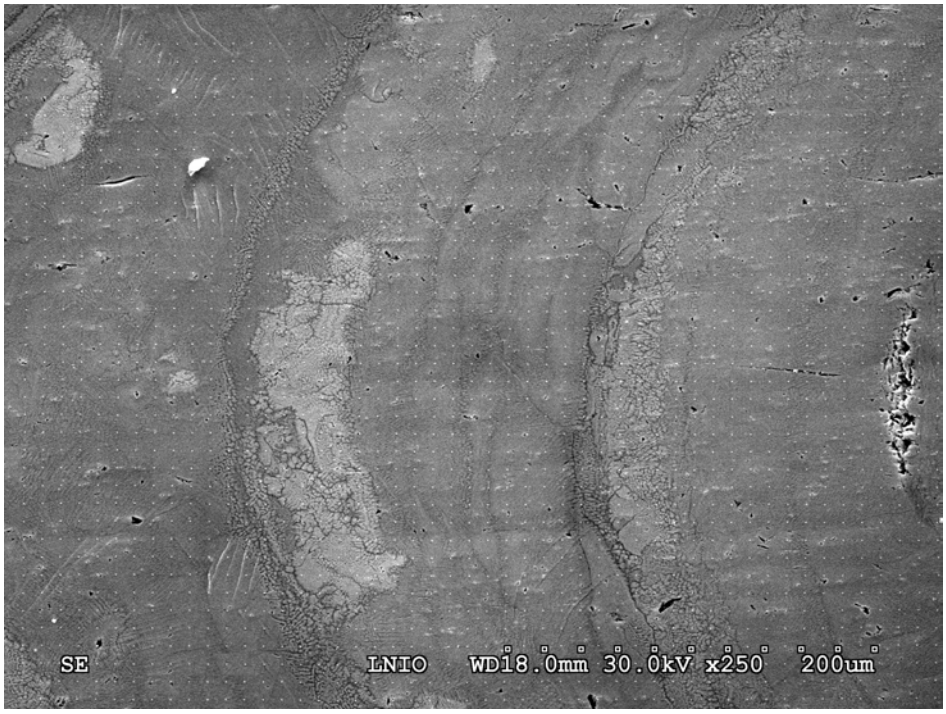


Figure II.113 : Zone d'étude complète à l'état non déformé.

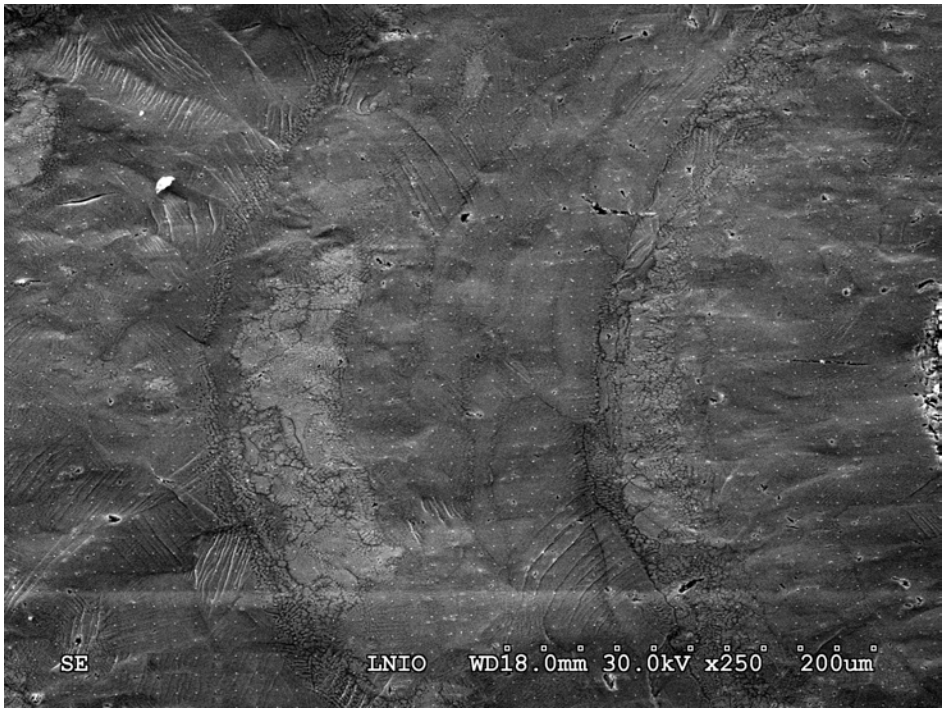


Figure II.114 : Zone d'étude complète à l'état déformé.

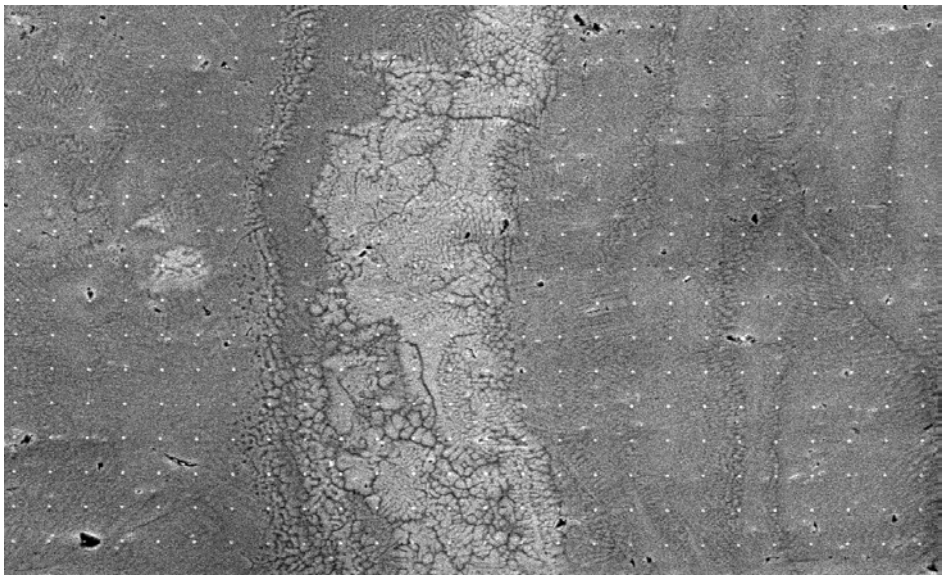


Figure II.115 : Zone d'étude à l'état non déformé.

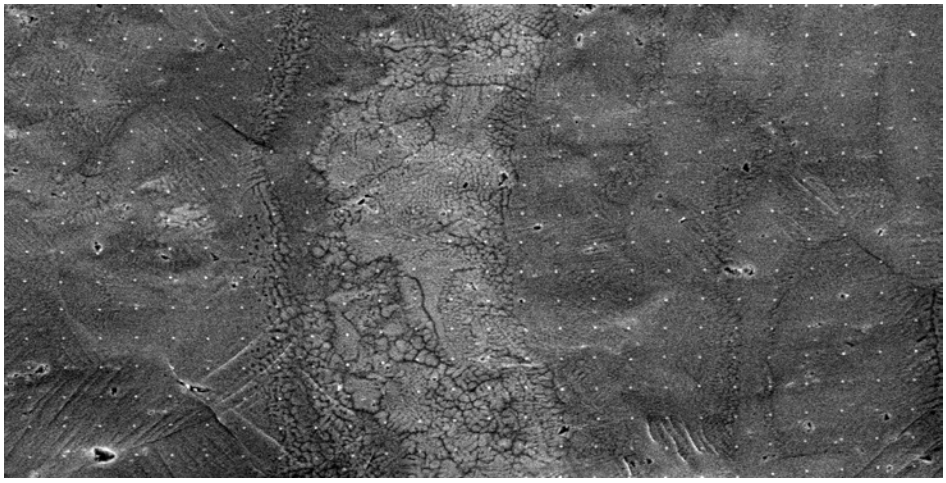


Figure II.116 : Zone d'étude à l'état déformé (8% de déformation nominale globale).

Le repérage des plots dans la configuration initiale est matérialisé par les croix rouges tandis que les plots de la configuration déformée sont représentés par les croix bleues. Chacun des points est relié par une flèche donnant la direction et l'intensité du déplacement dans la configuration initiale (figure II.117).

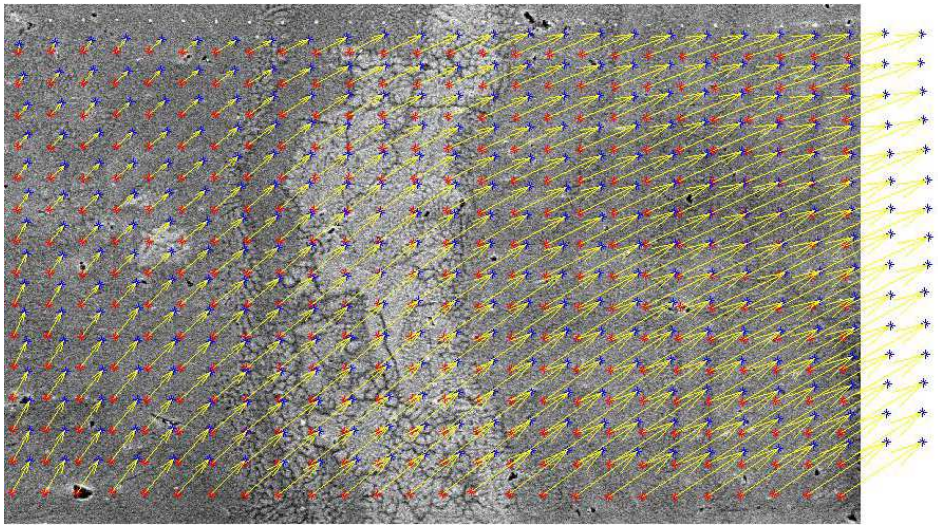
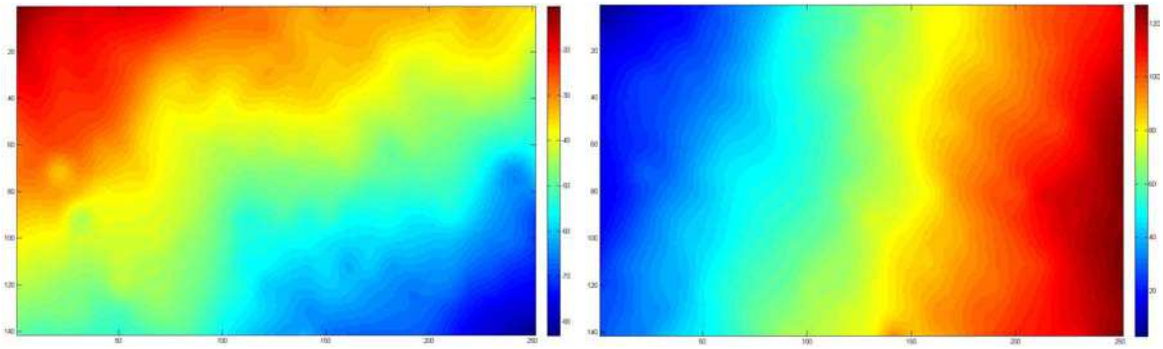


Figure II.117 : Repérage des plots de la configuration initiale et de la configuration déformée, la flèche indiquant le direction et l'intensité du champ de déplacement représenté dans la configuration initiale.

Il est intéressant de remarquer que ce type de dépouillement ne rencontre pas le problème du choix de l'image de référence comme en corrélation d'image. L'appariement des plots et la structure ordonnée de la grille permettent de suivre les déplacements même lorsqu'ils représentent, comme ici, environ deux fois le pas de la grille.

Il est possible de tracer les composantes du champ de déplacements obtenues dans les deux directions (cf. figure II.118).

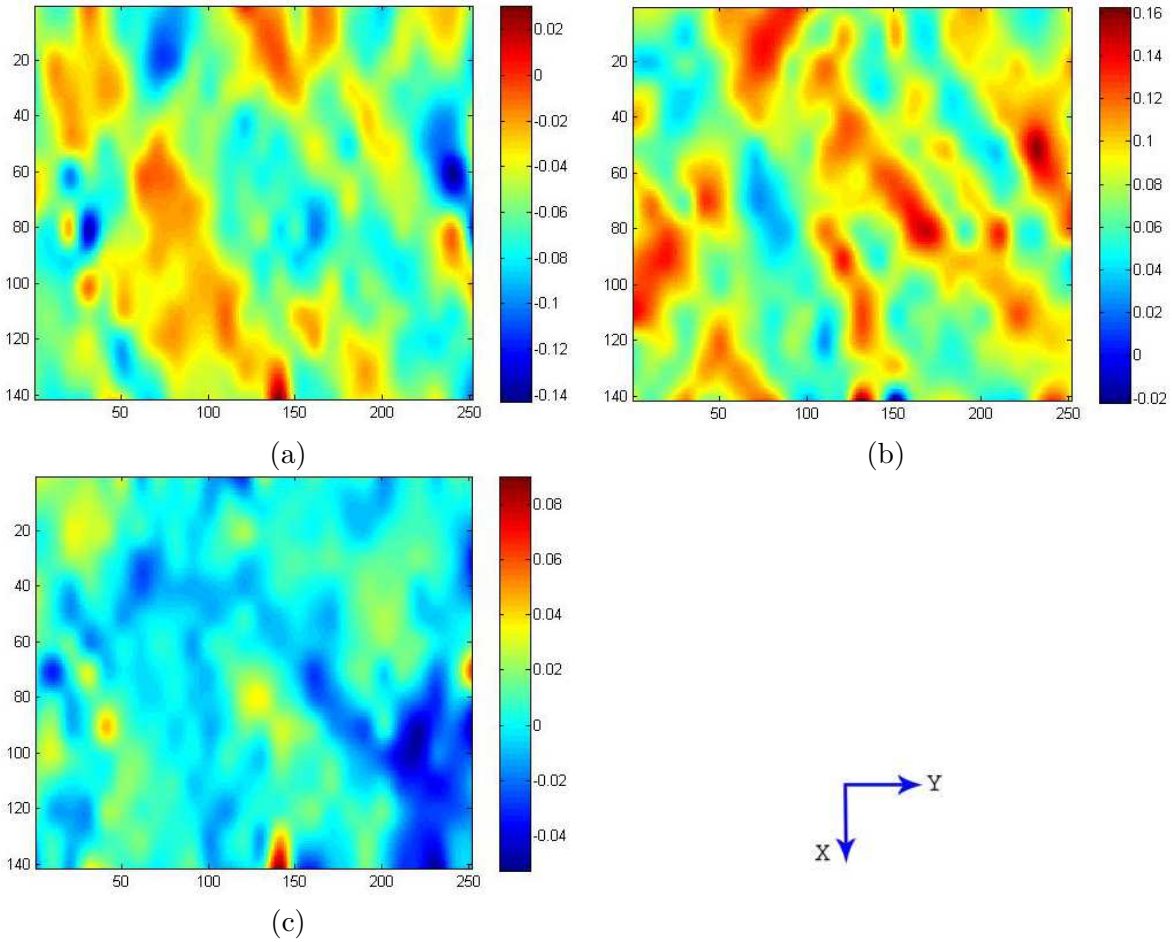


(a) (b)

Figure II.118 : Champs de déplacement : (a) Suivant X (DT) (verticalement de haut en bas), (b) Suivant Y (DL) (horizontalement de gauche à droite).

Sur cette zone de 200 μm de longueur, le déplacement suivant DL vaut 120 pixels soit environ 24 μm. La déformation nominale globale de cette zone vaut donc 12%. A ce stade, la déformation n'est déjà plus homogène puisque la déformation nominale de l'éprouvette vaut 8%.

A partir de ces champs de déplacement, on calcule les champs de déformation correspondant présentés en figure II.119.

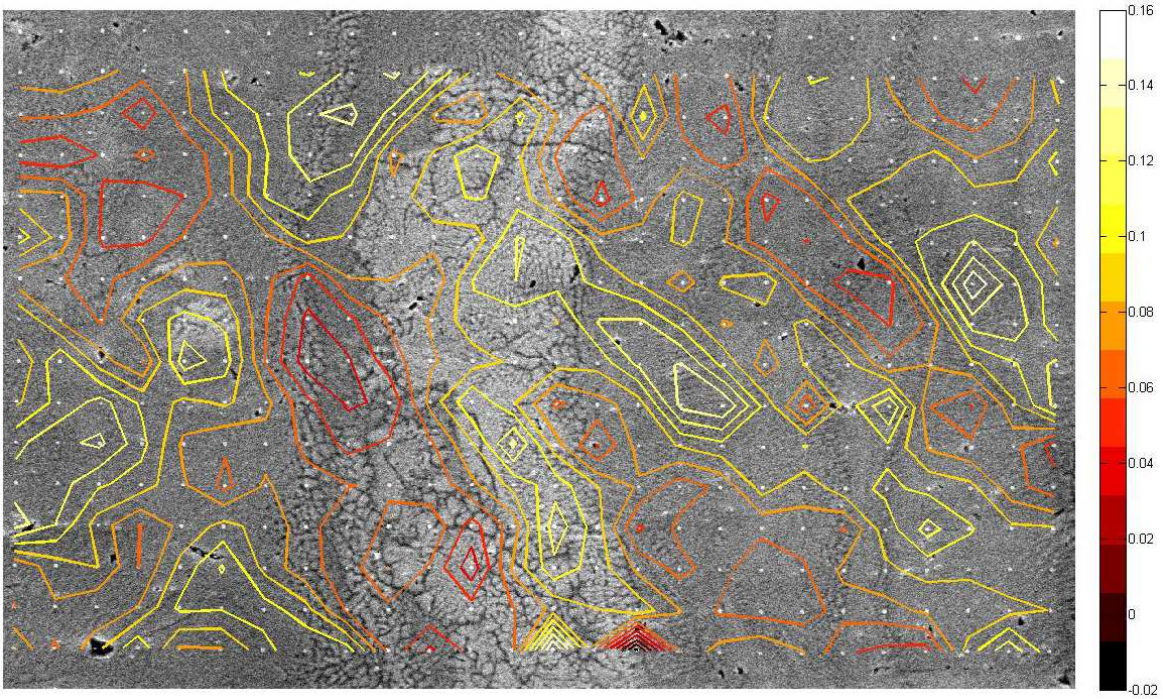


(a) (b)

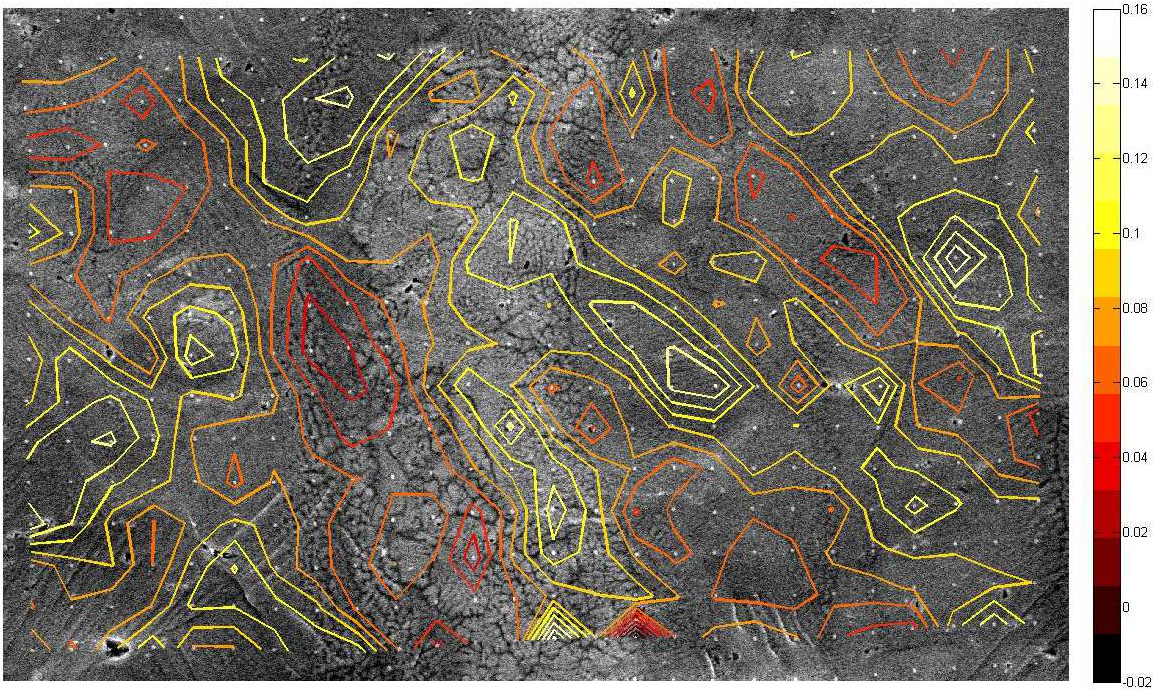
(c)

Figure II.119 : Champs de déformation : (a) ϵ_{11} (X $\equiv$ DT), (b) ϵ_{22} (Y $\equiv$ DL), (c) ϵ_{12}.

Afin de mieux se rendre compte de l'influence des hétérogénéités sur la localisation de la déformation, il est possible de réaliser un tracé par lignes d'isovaleur sur l'image non déformée (cf. figure II.120 (a)) ou déformé (cf. figure II.120 (b)).



(a)



(b)

Figure II.120 : Champs de déformation ϵ_{22} (DL) : (a) pour une configuration non déformée, (b) pour une configuration déformée.

De la même façon, il est possible de tracer les profils de déformation (cf. figure II.119) en

transparence sur l'image initiale (cf. figure II.121).

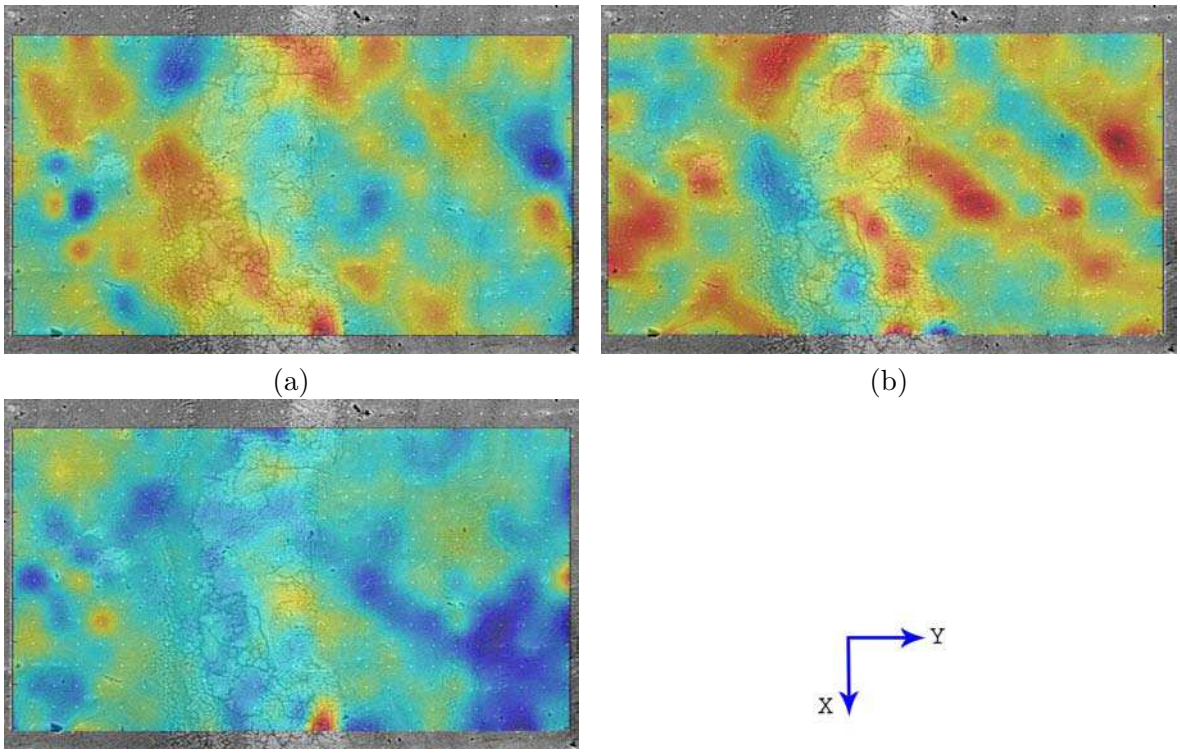


Figure II.121 : Champs de déformation par rapport à la microstructure pour une configuration non déformée : (a) ϵ_{11}, (b) ϵ_{22}, (c) ϵ_{12}.

Les cartes présentées mettent en évidence toute la complexité du champ de déformation locale et son hétérogénéité. Pour une déformation nominale macroscopique de 8%, on atteint localement des valeurs de 16%. Il apparaît clairement que l'hétérogénéité est double, à la fois chimique et cristalline. Les champs de déformation au sein de la zone riche en Ta au centre de la figure II.120(b) sont parmi les plus importants, reflétant l'influence de l'hétérogénéité chimique. Cependant, on observe une hétérogénéité mécanique importante dans des zones paraissant chimiquement homogènes. L'hétérogénéité cristalline prédomine dans ces zones, la déformation se localise dans des bandes orientées à 45° par rapport à l'axe de traction, soit selon la direction de cisaillement maximal.

L'éprouvette se rompt à quelques millimètres de la zone de dépôt de la micro-grille comme on peut le voir sur la figure II.122. La zone directement adjacente au dépôt présente une hétérogénéité cristalline très importante (figure II.123).

Figure II.122 : Vue globale de l'éprouvette de traction longitudinale présentant la zone de fissuration par rapport à la zone d'étude.

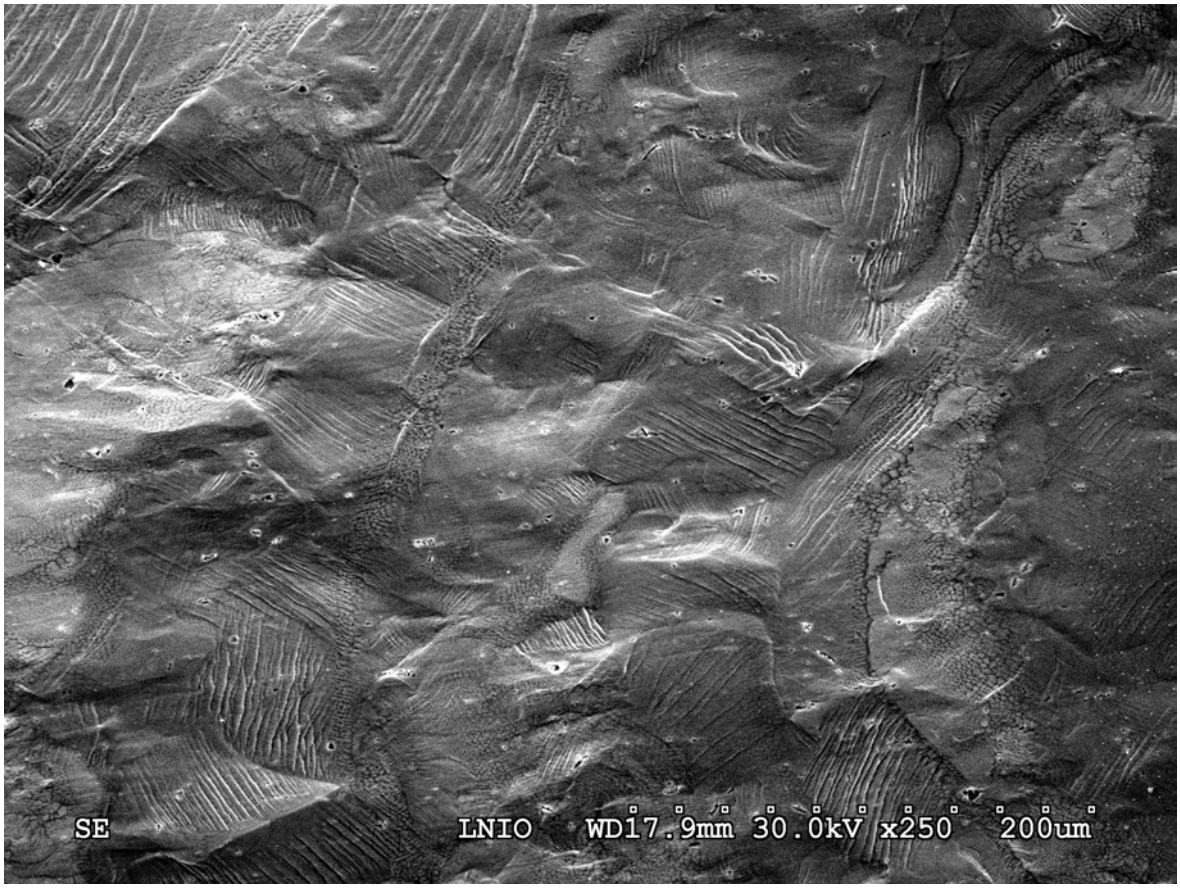


Figure II.123 : Vue M.E.B de la zone directement adjacente à la zone de dépôt de plots présentant l'hétérogénéité cristalline importante au sein de la Z.F.

Les zones d'hétérogénéités chimiques semblent être des "précurseurs" d'une hétérogénéité cristalline forte comme en atteste les nombreuses lignes de glissement en périphérie des zones riches en Ta (figure II.124).

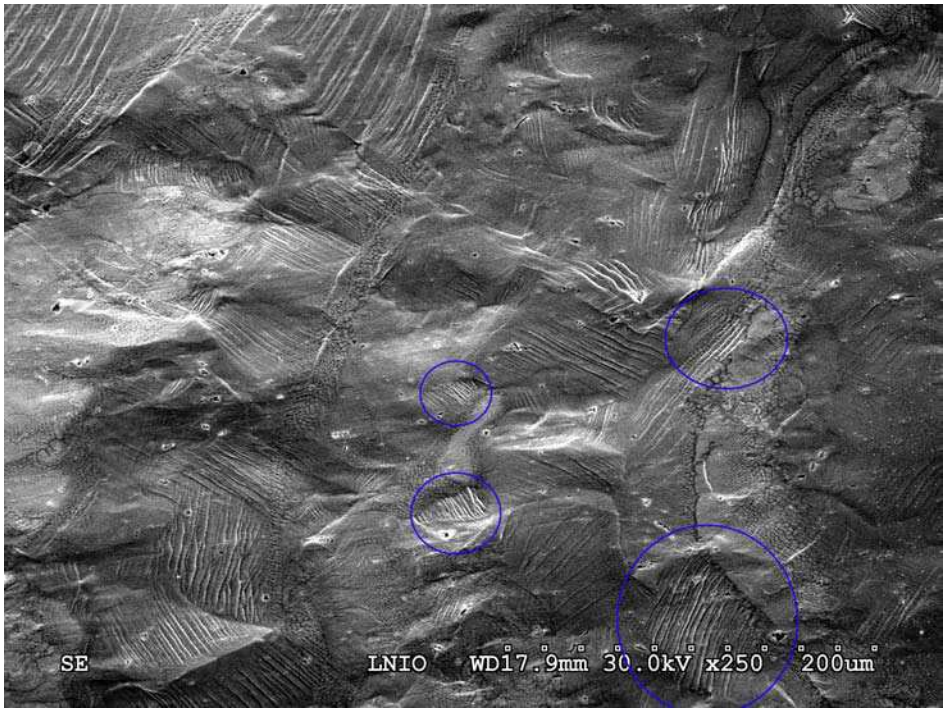


Figure II.124 : Vue M.E.B de la zone directement adjacente à la zone de dépôt de plots présentant l'influence de l'hétérogénéité chimique sur l'apparition de lignes de glissement.

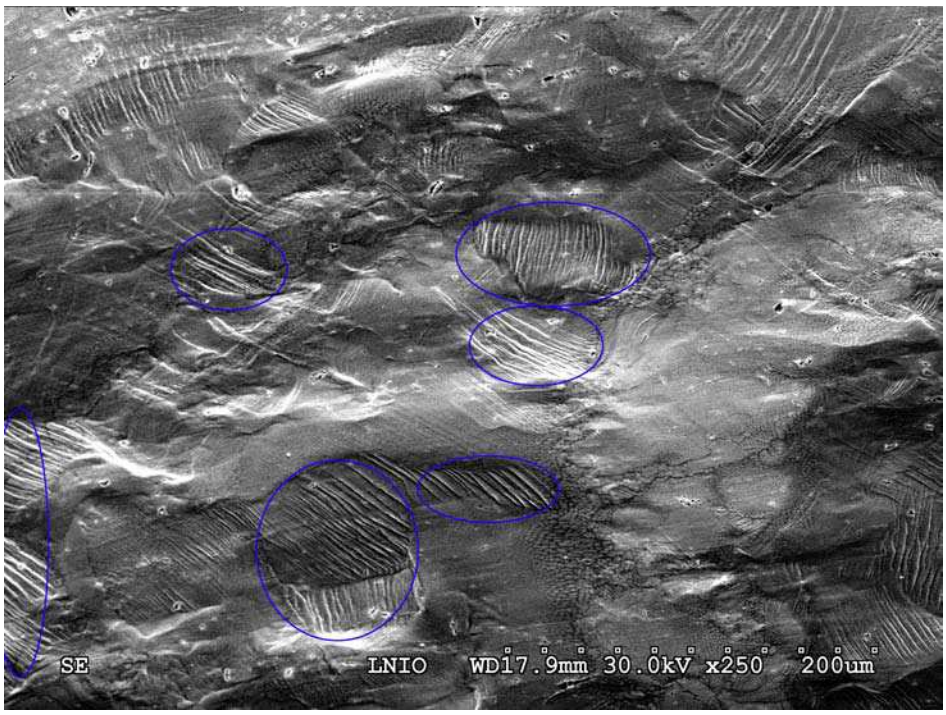


Figure II.125 : Vue M.E.B de la zone situé à $500\mu m$ de la zone de dépôt de plots présentant l'influence de l'hétérogénéité chimique sur l'apparition de lignes de glissement.

En conclusion, il semble que l'hétérogénéité liée au caractère polycristallin de la Z.F

prend une part importante dans les mécanismes de déformation. Néanmoins, l'hétérogénéité chimique reste une hétérogénéité majeure qui semble activer certains plans de glissement en périphérie comme en atteste la présence de lignes de glissement en surface. L'intensité du champ de déformation, dans les zones où les différentes hétérogénéités sont prépondérantes, est du même ordre de grandeur. Cette observation tend à prouver qu'aucune des hétérogénéités ne peut être légitimement négligée sans commettre une erreur notable.

Concernant la rupture de la liaison soudée, il est vraisemblable que les conclusions du paragraphe II.4.2 sur la propagation préférentielle aux interfaces soit confirmée aux vues des mesures de déformations locales. Cependant, il est nécessaire de compléter ces essais par des éprouvettes forçant la localisation au sein de la zone de dépôt afin de valider cette hypothèse.

En conclusion

Les cinétiques de chauffe et de refroidissement liées au soudage laser sont des cinétiques très rapides, équivalentes, au refroidissement, à une trempe énergique. Ceci induit des transformations de phases au sein du Ti fortement dépendantes de la teneur en éléments bêtagènes dont fait partie le Ta. Des études par D.R.X et au M.E.T ont montré la présence quasi exclusive de la phase Tiβ au sein de la Z.F. Cependant, il n'est pas exclu que d'autres phases puissent exister en quantité faible à l'instar de la phase Tiα'.

Les caractéristiques mécaniques de la Z.F ont été étudiées au moyen d'essais de flexion quatre points sur éprouvettes entaillées et de nanoindentation, dont les principaux résultats sont :

- *une chute du module d'élasticité dont la valeur moyenne pour la paramétrie G2 est établie à 92 GPa.*
- *un comportement mécanique intermédiaire dont la dureté moyenne pour la paramétrie G2 vaut 3.06 GPa.*

Ces valeurs évoluent avec la paramétrie et le taux de dilution qu'elle implique. L'explication de l'ensemble des résultats expérimentaux de nanoindentation nécessite la prise en compte, dans certaines zones, de la présence de la phase Tiα'.

Un moyen d'extensométrie optique par corrélation d'images est associé aux essais de flexion et met en évidence l'influence de l'hétérogénéité chimique sur la propagation de rupture. Les faciès de rupture confirment la présence d'interfaces faibles dans les zones où le gradient de composition est important.

Enfin, des essais de traction longitudinale in-situ révèlent l'influence non négligeable de l'hétérogénéité cristalline sur la distribution des champs de déformation.

En conclusion, les investigations expérimentales sur la Z.F ont permis de caractériser le comportement global pour certaines sollicitations simples et ont mis en évidence la complexité des mécanismes locaux. Une triple hétérogénéité est présente et ne permet pas de distinguer simplement une phase au sens de l'homogénéisation. En effet, la nature physique des phases "pilotant" l'hétérogénéité du champ de déformation varie suivant les cas sans qu'aucune de celles-ci ne soient négligeables. La structure cristalline peut évoluer en fonction de la teneur en éléments bêtagènes et constitue une première hétérogénéité. La seconde est la composition chimique, tandis que la troisième est de nature polycristalline.

Ces phases interagissent, et notamment les deux dernières, rendant l'étude du comportement local très complexe.

Partie B

Modélisation du comportement

Chapitre -III-

Formulation du modèle

Sommaire

III.1 Potentiel d'état et relations d'état 147
III.2 Analyse des dissipations et relations complémentaires 151
III.2.1 Plasticité indépendante du temps 151
III.2.2 Viscoplasticité 153
III.3 Écrouissage de nature isotrope 162
III.4 Synthèse des équations du modèle et application au cas de l'isotropie 167
III.5 Traitement de la contrainte plane 170
III.5.1 Généralités 170
III.5.2 Formulation spécifique du modèle (Simo et Taylor, 1986) 172
III.6 Généralisation aux transformations finies 180
III.6.1 Cinématique en grandes transformations 180
III.6.2 Décomposition multiplicative du gradient de la transformation . . . 184
III.6.3 Indifférence matérielle et objectivité 186
III.7 Étude paramétrique du modèle 187
III.7.1 Influence des paramètres sur la réponse en traction 187
III.7.2 Influence de la vitesse de chargement sur la réponse en traction . . 191
III.7.3 Validation du modèle anisotrope et comparaison à l'étude (Badreddine, 2006) 191
III.8 Prise en compte d'un phénomène particulier : l'effet mémoire . . 195

III.1 Potentiel d'état et relations d'état

Le principe de l'état local postule que l'état thermomécanique d'un milieu matériel en un point donné de l'espace et du temps, est totalement défini par la connaissance des valeurs à cet instant d'un nombre fini de variables ne dépendant que du point considéré. Ces variables sont nommées variables d'état et se décomposent en variables observables (température, déformation totale dans le cas des milieux matériellement simples) et en variables internes.

L'ensemble des phénomènes, aussi bien liés à la plasticité (ou à la viscoplasticité) qu'à l'endommagement, sont des phénomènes consommateurs d'énergie: phénomènes dissipatifs. La réponse d'un matériau dépend de la sollicitation et de ses propriétés à l'instant t, mais aussi de son histoire (hérédité). Une façon de décrire pour les phénomènes dissipatifs, l'histoire du matériau, consiste à utiliser des variables internes représentant chacun des phénomènes à modéliser.

Dans cette étude, le comportement du matériau est décrit dans le cadre de la thermodynamique des milieux continus et associe les couples de variables internes aux phénomènes suivants,

$$\begin{array}{ll} (\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp}, \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}) & : \text{représentant l'écoulement viscoplastique} \\ (\underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}_i, \underset{\sim}{\mathbf{X}}_i) & : \text{représentant le } i^{ème} \text{ écrouissage cinématique} \\ (r, R) & : \text{représentant l'écrouissage isotrope} \\ (D, Y) & : \text{représentant l'endommagement ductile isotrope} \end{array} \tag{III.1}$$

Un soin particulier a été apporté à la description des phénomènes visqueux et nous porterons donc notre attention sur deux potentiels des dissipations dont l'un est décrit par une loi puissance (type Norton) et l'autre par une loi en sinus hyperbolique. Les indices i représentent la sommation de plusieurs écrouissages cinématiques.

Le cadre formel de ce modèle s'appuie sur la thermodynamique des processus irréversibles pour décrire les phénomènes dissipatifs. Ainsi, l'expression du premier et du second principe de la thermodynamique permet d'écrire l'inégalité fondamentale ou inégalité de Clausius-Duhem (équation III.2),

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} : \dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}} - \rho(\dot{\psi} + s\dot{T}) - \underline{\mathbf{q}}.\frac{\overline{\text{grad}T}}{T} \quad \geq \quad 0 \tag{III.2}$$

où s est l'entropie, $\underline{\mathbf{q}}$ le vecteur flux de chaleur, ρ la masse volumique, T la température et ψ l'énergie libre.

La dérivation temporelle de l'énergie libre peut s'écrire dans le cas général,

$$\dot{\psi}(\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}^e, \underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}_i, r, D, T) \quad = \quad \frac{\partial \psi}{\partial \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}^e} : \dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}}^e + \sum_i \frac{\partial \psi}{\partial \underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}_i} : \dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}}_i + \frac{\partial \psi}{\partial r} : \dot{r} + \frac{\partial \psi}{\partial D} : \dot{D} + \frac{\partial \psi}{\partial T} : \dot{T} \tag{III.3}$$

Nous considérons la décomposition additive de la déformation totale en une partie élastique et une partie viscoplastique. En combinant les équations III.3 et III.2, et en regroupant les termes en fonction des variables d'état,

$$\left(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} - \rho\frac{\partial\psi}{\partial\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}^e}\right) : \dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}}^e - \rho\left(s + \frac{\partial\psi}{\partial T}\right) : \dot{T} + \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} : \dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}}^{vp}$$
$$-\sum_i \rho\frac{\partial\psi}{\partial\underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}_i} : \dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}}_i - \rho\frac{\partial\psi}{\partial r} : \dot{r} - \rho\frac{\partial\psi}{\partial D} : \dot{D} - \underline{\mathbf{q}}.\frac{\overline{\overline{\mathrm{grad}T}}}{T} \geq 0 \qquad \text{(III.4)}$$

L'inégalité fondamentale fournit les principales relations d'état suivant une démarche classique (Germain, 1973) (équations III.5 et III.6), ainsi qu'une inégalité résiduelle représentant la somme des dissipations intrinsèques et thermiques (équations III.7).

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} = \rho\frac{\partial\psi}{\partial\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}^e} \qquad \text{(III.5)}$$

$$s = -\frac{\partial\psi}{\partial T} \qquad \text{(III.6)}$$

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} : \dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}}^{vp} - \sum_i \rho\frac{\partial\psi}{\partial\underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}_i} : \dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}}_i - \rho\frac{\partial\psi}{\partial r} : \dot{r} - \rho\frac{\partial\psi}{\partial D} : \dot{D} - \underline{\mathbf{q}}.\frac{\overline{\overline{\mathrm{grad}T}}}{T} \geq 0 \qquad \text{(III.7)}$$

Par analogie avec les relations d'état précédentes, on définit les relations d'état des variables internes décrivant l'écrouissage et l'endommagement de la façon suivante,

$$\underset{\sim}{\mathbf{X}}_i = \rho\frac{\partial\psi}{\partial\underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}_i} \qquad \text{(III.8)}$$

$$R = \rho\frac{\partial\psi}{\partial r} \qquad \text{(III.9)}$$

$$Y = -\rho\frac{\partial\psi}{\partial D} \qquad \text{(III.10)}$$

On suppose qu'il y a découplage entre les dissipations intrinsèque et thermique afin d'écrire les deux inégalités,

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} : \dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}}^{vp} - \sum_i \underset{\sim}{\mathbf{X}}_i : \dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}}_i - R : \dot{r} + Y : \dot{D} \geq 0 \qquad \text{(III.11)}$$

$$-\underline{\mathbf{q}}.\frac{\overline{\overline{\mathrm{grad}T}}}{T} \geq 0 \qquad \text{(III.12)}$$

Dans l'hypothèse où l'élasticité n'est pas affectée par la plasticité mais seulement par l'endommagement, la partition du potentiel d'état sous la forme de l'équation III.13 est justifiée. On construit donc un potentiel convexe sous la forme,

$$\rho\Psi = \rho\Psi_e(\underset{\sim}{\varepsilon}^e, D) + \rho\Psi_{in}(\underset{\sim}{\alpha}_i, r, D) \tag{III.13}$$

Il est possible d'écrire ce potentiel d'état à partir de l'utilisation des contraintes effectives. Cette notion, introduite par Chaboche (Chaboche, 1977), peut se formuler suivant différentes hypothèses portant sur l'équivalence entre le milieu endommagé et le milieu sain équivalent. Ainsi, la contrainte effective est donnée par la définition suivante : "Le tenseur des contraintes effectives $\tilde{\underset{\sim}{\sigma}}$ est celui qu'il faudrait appliquer à l'E.V.R vierge afin d'obtenir la même déformation que dans l'E.V.R endommagé soumis à la contrainte actuelle $\underset{\sim}{\sigma}$". L'équivalence entre le milieu sain et le milieu endommagé peut donc se faire classiquement suivant deux méthodes : l'équivalence en déformation (Chaboche, 1977) ou l'équivalence en énergie (Cordebois et Sidoroff, 1979), (Cordebois, 1982), (Saanouni et al., 1994), (Ju, 1989). L'équivalence en énergie totale fournie une formulation beaucoup plus symétrique du problème et affecte à la fois les variables d'état et les variables duales (variables forces thermodynamiquement associées)(cf. figure III.1).

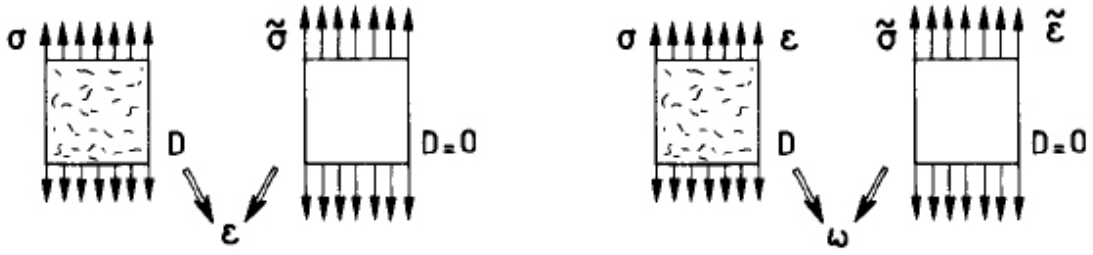


Figure III.1 : Comparaison entre l'hypothèse d'équivalence en déformation (figure de gauche) et celle d'équivalence en énergie totale (figure de droite)

Comme,

$$W_e = \frac{1}{2}\underset{\sim}{\sigma} : \underset{\sim}{\varepsilon}^e \tag{III.14}$$

$$\tilde{W}_e = \frac{1}{2}\tilde{\underset{\sim}{\sigma}} : \tilde{\underset{\sim}{\varepsilon}}^e \tag{III.15}$$

L'équivalence en énergie élastique fournit les relations entre les variables effectives et les variables actuelles,

$$\tilde{\underset{\sim}{\sigma}} = \frac{\underset{\sim}{\sigma}}{\sqrt{1-D}} \tag{III.16}$$

$$\tilde{\underset{\sim}{\varepsilon}}^e = \sqrt{1-D}\,\underset{\sim}{\varepsilon}^e \tag{III.17}$$

De la même façon, l'équivalence en énergie stockée par écrouissage peut s'écrire,

$$W_{cin} = \frac{1}{2}\sum_i \underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}_i : \underset{\approx}{\mathbf{C}}_i : \underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}_i \tag{III.18}$$

$$\tilde{W}_{cin} = \frac{1}{2}\sum_i \underset{\sim}{\tilde{\boldsymbol{\alpha}}}_i : \underset{\approx}{\mathbf{C}}_i : \underset{\sim}{\tilde{\boldsymbol{\alpha}}}_i \tag{III.19}$$

$$W_{iso} = \frac{1}{2}Qr^2 \tag{III.20}$$

$$\tilde{W}_{iso} = \frac{1}{2}Q\tilde{r}^2 \tag{III.21}$$

avec $\underset{\approx}{\mathbf{C}}_i$ et Q respectivement les modules d'écrouissage cinématique et isotrope.
Ceci fournit les relations reliant les variables d'état à leurs variables effectives,

$$\underset{\sim}{\tilde{\mathbf{X}}} = \frac{\underset{\sim}{\mathbf{X}}}{\sqrt{1-D}} \tag{III.22}$$

$$\underset{\sim}{\tilde{\boldsymbol{\alpha}}} = \sqrt{1-D}\,\underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}} \tag{III.23}$$

$$\tilde{R} = \frac{R}{\sqrt{1-D}} \tag{III.24}$$

$$\tilde{r} = \sqrt{1-D}\,r \tag{III.25}$$

Le potentiel d'état peut donc s'écrire en fonction des variables effectives dans le cas isotherme,

$$\rho\Psi = \rho\Psi_e(\underset{\sim}{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}^e) + \rho\Psi_{in}(\underset{\sim}{\tilde{\boldsymbol{\alpha}}}_i, \tilde{r}) \tag{III.26}$$

avec

$$\rho\Psi_e = \frac{1}{2}\underset{\sim}{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}^e : \underset{\approx}{\boldsymbol{\Lambda}} : \underset{\sim}{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}^e \tag{III.27}$$

et

$$\rho\Psi_{in} = \frac{1}{2}\sum_i \underset{\sim}{\tilde{\boldsymbol{\alpha}}}_i : \underset{\approx}{\mathbf{C}}_i : \underset{\sim}{\tilde{\boldsymbol{\alpha}}}_i + \frac{1}{2}Q\tilde{r}^2 \tag{III.28}$$

où encore, en faisant apparaître explicitement l'endommagement,

$$\rho\Psi = \rho\Psi_e(\underset{\sim}{\varepsilon}^e, D) + \rho\Psi_{in}(\underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}_i, r, D) \tag{III.29}$$

avec

$$\rho\Psi_e = \frac{1}{2}(1-D)\underset{\sim}{\varepsilon}^e : \underset{\approx}{\mathbf{\Lambda}} : \underset{\sim}{\varepsilon}^e \tag{III.30}$$

et

$$\rho\Psi_{in} = (1-D)\left(\frac{1}{2}\sum_i \underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}_i : \underset{\approx}{\mathbf{C}}_i : \underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}_i + \frac{1}{2}Qr^2\right) \tag{III.31}$$

$\underset{\approx}{\mathbf{\Lambda}}$ est l'opérateur d'élasticité (rigidité), tandis que $\underset{\approx}{\mathbf{C}}_i$ et Q sont respectivement les modules d'écrouissage cinématique et isotrope. Ces opérateurs pourront prendre différentes formes suivant l'isotropie ou l'anisotropie du matériau, l'anisotropie d'écrouissage, le couplage écrouissage cinématique-isotrope et seront spécifiés dans les paragraphes suivants.

En utilisant les relations III.5, III.8, III.9 et III.10, les expressions des variables forces s'écrivent en fonction de l'endommagement sous la forme

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} = \rho\frac{\partial\psi}{\partial\underset{\sim}{\varepsilon}^e} = (1-D)\underset{\approx}{\mathbf{\Lambda}} : \underset{\sim}{\varepsilon}^e \tag{III.32}$$

$$\underset{\sim}{\mathbf{X}}_i = \rho\frac{\partial\psi}{\partial\underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}_i} = (1-D)\underset{\approx}{\mathbf{C}}_i : \underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}_i \tag{III.33}$$

$$R = \rho\frac{\partial\psi}{\partial r} = (1-D)Qr \tag{III.34}$$

$$Y = -\rho\frac{\partial\psi}{\partial D} =$$

$$= \frac{1}{2}\underset{\sim}{\varepsilon}^e : \underset{\approx}{\mathbf{\Lambda}} : \underset{\sim}{\varepsilon}^e + \frac{1}{2}\sum_i \underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}_i : \underset{\approx}{\mathbf{C}}_i : \underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}_i + \frac{1}{2}Qr^2 \tag{III.35}$$

Pour vérifier, à posteriori, l'expression de la dissipation intrinsèque (équation III.11), il est nécessaire de se donner les équations d'évolution des phénomènes dissipatifs. Pour cela, il nous faut postuler l'expression du pseudo-potentiel des dissipations convexe que nous explicitons au paragraphe suivant.

III.2 Analyse des dissipations et relations complémentaires

III.2.1 Plasticité indépendante du temps

Le potentiel des dissipations est postulé comme étant une fonction scalaire convexe vis-à-vis des variables flux et dont les variables d'état peuvent agir en tant que paramètres.

$$\Phi = \Phi(\underset{\sim}{\dot{\varepsilon}}^{ip}, \underset{\sim}{\dot{\boldsymbol{\alpha}}}_i, \dot{r}, \dot{D}, \frac{\underline{\mathbf{q}}}{T}) \tag{III.36}$$

Pour obtenir les équations d'évolution des variables flux, il est alors nécessaire d'exprimer le pseudo-potentiel des dissipations en fonction des variables duales par la transformée de

Legendre-Fenchel. Les propriétés de convexité sont conservées par cette transformée et l'on peut écrire le pseudo-potentiel des dissipations $\Phi^\star$ dans l'espace dual,

$$\Phi^\star = \Phi^\star(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}, \underset{\sim}{\mathbf{X}}_i, R, Y, \underline{\mathrm{grad}}T) \tag{III.37}$$

$\Phi^\star$ est une fonction indicatrice d'un domaine convexe $\mathcal{C}$ tel que,

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} \ \epsilon \ \mathcal{C} \Leftrightarrow f(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}, \underset{\sim}{\mathbf{X}}_i, R, D) \leq 0 \tag{III.38}$$

où f est la fonction de charge convexe dans l'espace de contrainte et des variables forces. On obtient alors,

$$\begin{array}{rcccl} \Phi^\star & = & 0 & si & f < 0 \\ \Phi^\star & = & +\infty & si & f = 0 \\ & & & et & \dot{f} = 0 \end{array}$$

Ce système conditionnel exprime le fait qu'il ne peut y avoir de dissipation qu'en plasticité. Les équations d'évolution (ou équations complémentaires) dérivent donc de ce pseudo-potentiel $\Phi^\star$ et peuvent s'écrire,

$$\underset{\approx}{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}^{vp} = \frac{\partial \Phi^\star}{\partial \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}} \tag{III.39}$$

$$\underset{\sim}{\dot{\boldsymbol{\alpha}}}_i = -\frac{\partial \Phi^\star}{\partial \underset{\sim}{\mathbf{X}}_i} \tag{III.40}$$

$$\dot{r} = -\frac{\partial \Phi^\star}{\partial R} \tag{III.41}$$

$$\dot{D} = \frac{\partial \Phi^\star}{\partial Y} \tag{III.42}$$

$$\frac{\underline{\underline{\mathbf{q}}}}{T} = -\frac{\partial \Phi^\star}{\partial \underline{\mathrm{grad}}\mathbf{T}} \tag{III.43}$$

Plusieurs choix de formulation sont alors possibles, faisant intervenir un ou plusieurs potentiels plastiques, un ou plusieurs critères (Hammi, 2000). Nous nous restreignons, dans cette étude, à un unique potentiel des dissipations dont la partition s'écrit comme la somme d'un potentiel des dissipations plastiques, d'endommagement et thermique,

$$\Phi^\star = F_p(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}, \underset{\sim}{\mathbf{X}}_i, R; D) + F_d(Y; D) + F_{th}(\underline{\mathrm{grad}}\mathbf{T}; T) \tag{III.44}$$

Les dissipations thermiques sont classiquement fournies par le potentiel de Fourier. Le lecteur intéressé par le développement de ce type de modèle thermomécanique couplé peut

se référer à (Lestriez, 2003). L'influence de la température sur le comportement n'étant pas traitée par la suite, nous ne développerons pas les termes provenant de la dérivation de ce potentiel des dissipations thermiques. Notons que les variables spécifiées à droite du ";" peuvent intervenir comme paramètres.

En plasticité indépendante du temps, les équations d'évolution III.39 à III.42 peuvent donc se mettre sous la forme suivante, en utilisant la règle de normalité généralisée,

$$\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}^p = \frac{\partial \Phi^\star}{\partial \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}} = \dot{\lambda}_p \frac{\partial F_p}{\partial \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}} \tag{III.45}$$

$$\dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}}_i = -\frac{\partial \Phi^\star}{\partial \underset{\sim}{\mathbf{X}}_i} = -\dot{\lambda}_p \frac{\partial F_p}{\partial \underset{\sim}{\mathbf{X}}_i} \tag{III.46}$$

$$\dot{r} = -\frac{\partial \Phi^\star}{\partial R} = -\dot{\lambda}_p \frac{\partial F_p}{\partial R} \tag{III.47}$$

$$\dot{D} = -\frac{\partial \Phi^\star}{\partial Y} = \dot{\lambda}_p \frac{\partial F_d}{\partial Y} \tag{III.48}$$

où la condition III.39, est exprimée par le multiplicateur plastique calculé par la condition de consistance $f = 0$ et $\dot{f} = 0$.

Dans le cadre d'une formulation normale dans l'espace des contraintes mais non associée ($F_p \neq f$), il est possible de choisir un potentiel plastique permettant de décrire des équations d'évolution non linéaires des variables internes,

$$F_p = f + \frac{1}{2}\frac{1}{(1-D)} \sum_i a_i \underset{\sim}{\mathbf{X}}_i \; : \underset{\approx}{\mathbf{C}}_i^{-1} : \underset{\sim}{\mathbf{X}}_i + \frac{1}{2}\frac{b}{Q(1-D)} R^2 \tag{III.49}$$

a_i et b sont des paramètres décrivant la non linéarité des écrouissages cinématiques et isotrope.

Le potentiel des dissipations d'endommagement n'étant pas affecté par le choix d'une formulation plastique ou viscoplastique, il sera explicité dans la chapitre suivant.

III.2.2 Viscoplasticité

Dans la cadre de la plasticité indépendante du temps, la contrainte ne peut sortir de la surface de charge et la condition $f = 0$ est une condition nécessaire de l'écoulement. En aucun cas la fonction de charge ne peut devenir strictement positive. Ce n'est pas le cas en viscoplasticité où un point représentatif de l'état de contrainte du matériau peut se trouver en dehors de la surface de plasticité. $f > 0$ fournit donc la distance entre l'état de contrainte actuel du matériau et la surface de plasticité. Cette distance n'est autre que la contrainte visqueuse. Les surfaces équipotentielles définies par la fonction $\Phi^\star$ en viscoplasticité sont très resserrées ce qui implique que la contrainte varie très vite en fonction de la vitesse de déformation viscoplastique. Ceci favorise donc une contrainte visqueuse quasi instantanée (cf. figure III.3). Pour les matériaux très visqueux, la limite d'élasticité peut donc tendre vers des valeurs très faibles comme nous le verrons au paragraphe V.2.1.1.

Certaines théories viscoplastiques n'utilisent pas de domaine d'élasticité et ne font intervenir l'écrouissage isotrope qu'à travers la contrainte de traînée définissant l'intensité de la contrainte visqueuse (Miller, 1987), (Bodner et Partom, 1975), (Walker, 1981). Lorsque

la limite d'élasticité n'est pas nulle, il est possible de formuler un modèle de plasticité indépendante du temps comme l'état limite d'un modèle viscoplastique. Pour une contrainte visqueuse tendant vers 0, l'ensemble des surfaces équipotentielles (Ω figure III.2 et III.3) se projettent, dans l'espace des contraintes et des forces thermodynamiques (A_i figure III.2), sur f=0.

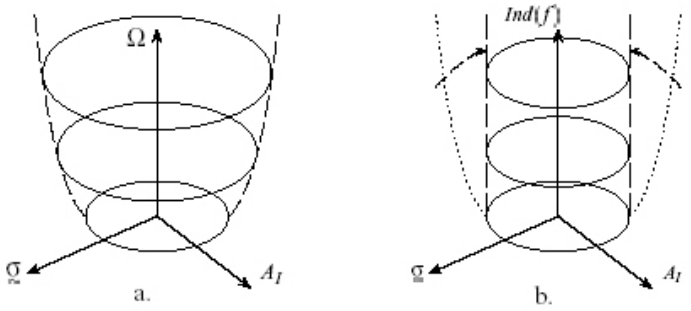


Figure III.2 : Comparaison des surfaces équipotentielles (a) en viscoplasticité et (b) plasticité (Besson et al., 2001).

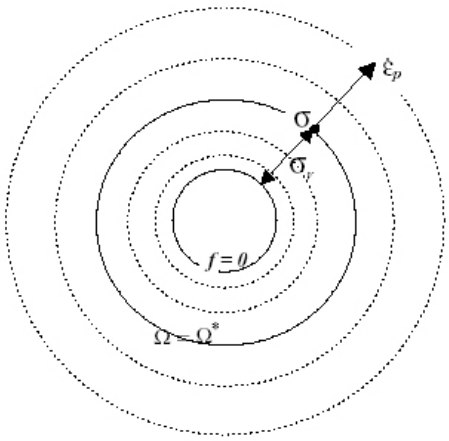


Figure III.3 : Schéma représentatif des surfaces équipotentielles en viscoplasticité (Chaboche, 2007).

Le multiplicateur plastique n'étant plus donné par la condition de consistance, il est nécessaire de définir une fonction de viscosité permettant l'expression d'un potentiel viscoplastique approprié. Cette fonction de viscosité est représentative de la dépendance du comportement mécanique vis-à-vis du temps à travers l'expression du multiplicateur viscoplastique. Différentes fonctions de viscosité g_v peuvent être proposées mais doivent vérifier les conditions suivantes,

$$\begin{aligned} g_v(\tfrac{f}{K}) &= 0 \quad si \quad f < 0 \\ g_v(\tfrac{f}{K}) &= \dot{\lambda}_{vp} \quad si \quad f \geq 0 \end{aligned}$$

où K est la contrainte de traînée (”drag stress”).

De manière générale, il est toujours possible d'exprimer un potentiel viscoplastique à partir de la fonction de viscosité choisie de la façon suivante,

$$\Phi^{\star}_{vp} = \int K g_v(\frac{f}{K}) df \tag{III.50}$$

Dans le cadre de cette étude, nous nous appuierons sur des fonctions de viscosité permettant l'expression explicite d'un potentiel viscoplastique. Nous traiterons donc le cas de la fonction puissance (viscoplasticité de type Norton) et celui de la fonction sinus hyperbolique. Beaucoup d'autres fonctions peuvent être proposées mais il n'est pas toujours possible d'exprimer le potentiel viscoplastique associé autrement que par l'expression III.50. Une étude détaillée des fonctions de viscosité possibles est réalisée dans (Chaboche, 2007) et se synthétise par le tableau III.5 et la figure III.4.

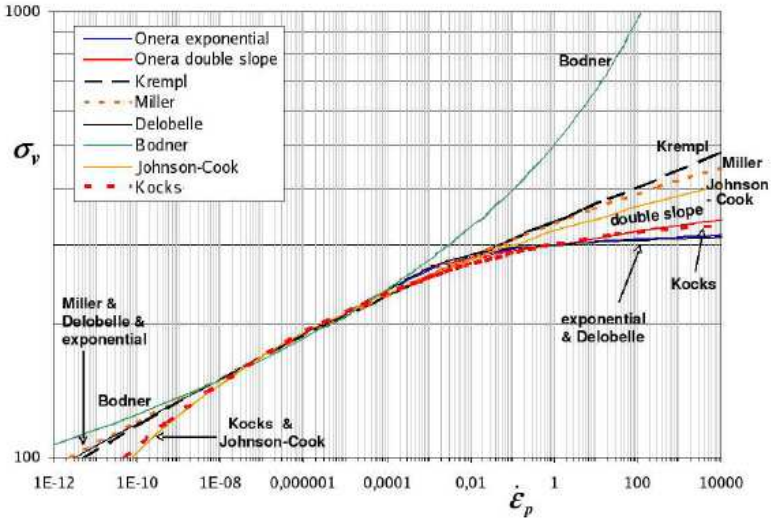


Figure III.4 : Graphique représentant les différentes fonctions de viscosité associées au tableau III.5 (Chaboche, 2007)

Model	viscoplastic strain rate $\dot{p}$	equivalent exponent N	Values of parameters
Onera exponential	$\left(\frac{\sigma}{D}\right)^n \exp\left(\alpha \left(\frac{\sigma}{D}\right)^{n+1}\right)$	$n + \alpha(n+1)\left(\frac{\sigma}{D}\right)^{n+1}$	$n = N_0,\ D = 376.8,$ $\alpha = 546.5$
Onera double slope	$\left(\frac{\sigma}{D}\right)^n \left[1 + \left(\frac{\sigma}{q}\right)^{\alpha}\right]$	$n + \frac{\alpha}{1+(\sigma/q)^{-\alpha}}$	$n = N_0,\ D = 376.8,$ $\alpha = 50,\ q = 274$
Krempl	$\frac{\sigma}{E k_1}\left(1 + \frac{\sigma}{k_2}\right)^{k_3}$	$1 + k_3 \frac{\sigma}{k_2+\sigma}$	$E\,k_1 = 1.\ 10^{23},$ $k_2 = 93.3,\ \ k_3 = 31$
Miller	$B\left[\sinh\left(\frac{\sigma}{D}\right)^{1.5}\right]^n$	$\frac{3}{2} n \left(\frac{\sigma}{D}\right)^{1.5} \mathrm{Th}^{-1}\left(\frac{\sigma}{D}\right)^{1.5}$	$n = \frac{2}{3}N_0,\ D = 311.2,$ $B = 0.017$
Delobelle	$A \sinh\left(\frac{\sigma}{D}\right)^n$	$n \left(\frac{\sigma}{D}\right)^n \mathrm{Th}^{-1}\left(\frac{\sigma}{D}\right)^n$	$n = N_0,\ \ D = 271.8,$ $A = 0.00145$
Bodner	$\dot{p}_0 \exp\left(-\frac{Z}{\sigma}\right)^{2n}$	$n \left(\frac{Z}{\sigma}\right)^{2n}$	$n = 0.395,\ Z = 11095,$ $\dot{p}_0 = 10^5$
Johnson - Cook	$\dot{p}_0 \exp\left[\frac{1}{C}\left(\frac{\sigma}{D} - 1\right)\right]$	$\frac{\sigma}{CD}$	$C = 1/N_0,\ D = 190.,$ $\dot{p}_0 = 10^{-6}$
Kocks	$\dot{p}_\infty \exp\left[-\frac{1}{C}\left\langle 1 - \left(\frac{\sigma}{D}\right)^p \right\rangle^q\right]$	$\frac{pq}{C}\left(\frac{\sigma}{D}\right)^p \left\langle 1 - \left(\frac{\sigma}{D}\right)^p \right\rangle^{q-1}$	$p = 0.1,\ q = 0.44,$ $D = 328.5,$ $C = 0.0107,\ \dot{p}_\infty = 10^5$

Figure III.5 : Tableau regroupant différentes fonctions de viscosité (Chaboche, 2007). Les paramètres donnés permettent de comparer de manière qualitative les évolutions des contraintes visqueuses tracées figure III.4.

Les équations d'évolution des variables internes peuvent être obtenues selon deux approches équivalentes mais où le concept de pseudo-potentiel des dissipations est introduit de façon différente.

Une première approche s'inspire fortement du cas indépendant du temps où l'on exprime le pseudo-potentiel des dissipations à l'aide de termes quadratiques en $\underset{\sim}{\mathbf{X}}_i$ et R. La règle de normalité généralisée fait donc intervenir un "multiplicateur" viscoplastique unique, dont le choix est laissé libre. Il peut donc être défini par une fonction de viscosité quelconque ne permettant pas (forcément) de s'intégrer analytiquement et n'est plus donné par la condition de consistance. Les équations d'évolution des variables internes sont donc données, comme en plasticité indépendante du temps (équations III.45 à III.48), par,

$$\underset{\sim}{\dot{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda}_{vp} \frac{\partial F_p}{\partial \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}} \tag{III.51}$$

$$\underset{\sim}{\dot{\boldsymbol{\alpha}}}_i = -\dot{\lambda}_{vp} \frac{\partial F_p}{\partial \underset{\sim}{\mathbf{X}}_i} \tag{III.52}$$

$$\dot{r} = -\dot{\lambda}_{vp} \frac{\partial F_p}{\partial R} \tag{III.53}$$

$$\dot{D} = \dot{\lambda}_{vp} \frac{\partial F_d}{\partial Y} \tag{III.54}$$

où le multiplicateur viscoplastique $\dot{\lambda}_{vp}$, est donné par la fonction de viscosité,

$$\dot{\lambda}_{vp} = g_v(\frac{f}{K}) \tag{III.55}$$

Cette formulation peut être décrite comme une formulation normale ($\frac{\partial F_p}{\partial \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}} = \frac{\partial f}{\partial \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}}$) et non associée ($F_p \neq f$) dans l'espace des contraintes.

Ce formalisme, comme en plasticité indépendante du temps, peut s'étendre à un formalisme multicritère afin de décrire séparément les évolutions de la viscoplasticité et de l'endommagement. Les équations d'évolution s'écrivent alors,

$$\underset{\sim}{\dot{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda}_{vp} \frac{\partial F_p}{\partial \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}} \tag{III.56}$$

$$\underset{\sim}{\dot{\boldsymbol{\alpha}}}_i = -\dot{\lambda}_{vp} \frac{\partial F_p}{\partial \underset{\sim}{\mathbf{X}}_i} \tag{III.57}$$

$$\dot{r} = -\dot{\lambda}_{vp} \frac{\partial F_p}{\partial R} \tag{III.58}$$

$$\dot{D} = \dot{\lambda}_d \frac{\partial F_d}{\partial Y} \tag{III.59}$$

Dans le cas de la plasticité indépendante du temps, les deux multiplicateurs $\dot{\lambda}_p$ et $\dot{\lambda}_d$ sont déterminés par la condition de consistance associée aux deux critères. Dans le cas de la viscoplasticité, les deux multiplicateurs $\dot{\lambda}_{vp}$ et $\dot{\lambda}_d$ sont librement choisis à partir de deux fonctions de viscosité éventuellement différentes. Notons qu'il est possible d'exprimer $\dot{\lambda}_d$ en

fonction de la contrainte et non plus de la force thermodynamiquement associée au dommage Y, et ainsi retrouver le critére de Hayhurst décrivant l'endommagement de fluage (Hayhurst, 1972). Les deux multiplicateurs viscoplastiques sont positifs et assurent donc par construction la positivité de la dissipation par le choix des potentiels définis, positifs, convexes dans l'espace des contraintes et des variables forces (cf équation III.61).

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} : \dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}^{vp} - \sum_i \underset{\sim}{\mathbf{X}}_i : \dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}}_i - R : \dot{r} + Y : \dot{D} = \quad \text{(III.60)}$$

$$\dot{\lambda}_{vp} \left(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} : \frac{\partial F_p}{\partial \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}} + \sum_i \underset{\sim}{\mathbf{X}}_i : \frac{\partial F_p}{\partial \underset{\sim}{\mathbf{X}}_i} + R : \frac{\partial F_p}{\partial R} \right) + \dot{\lambda}_d Y : \frac{\partial F_d}{\partial Y} \geq 0 \quad \text{(III.61)}$$

Une seconde approche se base sur la construction d'un pseudo-potentiel des dissipations formé à partir des fonctions de viscosité choisies. Dans le cadre de cette étude, nous développons l'expression de deux potentiels provenant du choix de fonctions de viscosité de type puissance et sinus hyperbolique. Ainsi, il est possible d'écrire,

$$\Phi^{\star}_{vp} = F_{vp}(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}, \underset{\sim}{\mathbf{X}}_i, R; \underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}_i, r) + F_d(Y; D) \quad \text{(III.62)}$$

où les variables d'état $\underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}_i$, r, D sont utilisées comme paramètres.

Le pseudo-potentiel viscoplastique se déduit de la fonction de viscosité choisie tandis que le pseudo-potentiel des dissipations d'endommagement dépend de la nature du dommage. Ici, nous choisissons de décrire l'endommagement ductile dû à la viscoplasticité sans tenir compte de l'endommagement de fluage (Hayhurst, 1972), (Chaboche, 1984), (Saanouni et al., 1986) ou de fatigue (Dang van, 1973), (Chaboche, 1979), (Chaboche, 1981). En ajoutant et soustrayant des termes égaux dans la fonction de viscosité, il est possible d'introduire l'évolution non linéaire des écrouissages grâce à l'expression du potentiel,

$$\begin{aligned} F_{vp}(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}, X_i, R; \underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}_i, r) = & \int K g_v \Bigg(\frac{1}{K} \Big(f + \frac{1}{2} \frac{1}{(1-D)} \sum_i a_i \underset{\sim}{\mathbf{X}}_i \ : \underset{\sim}{\mathbf{C}}_i^{-1} : \underset{\sim}{\mathbf{X}}_i \\ & - \frac{1}{2}(1-D) \sum_i a_i \underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}_i \ : \underset{\sim}{\mathbf{C}}_i : \underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}_i \\ & + \frac{1}{2} \frac{b}{Q(1-D)} R^2 - \frac{1}{2} Q b (1-D) r^2 \Big) \Bigg) \partial f \end{aligned} \quad \text{(III.63)}$$

$$F_d(Y; D) = \frac{\dot{p}}{(1-D)^{\beta}} \left\langle \frac{Y - Y_0}{S} \right\rangle^{s+1} \frac{S}{s+1} \quad \text{(III.64)}$$

Les pseudo-potentiels viscoplastiques correspondant aux fonctions de viscosité puissance (équation III.67) ou sinus hyperbolique (équation III.68) nous donnent respectivement,

$$
\begin{aligned}
F_{vp}^{Norton}(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}, X_i, R; \underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}_i, r) &= \frac{K}{n+1}\Big\langle \frac{1}{K}(f + \frac{1}{2}\frac{1}{(1-D)}\sum_i a_i \underset{\sim}{\mathbf{X}}_i \ : \underset{\approx}{\mathbf{C}}_i^{-1} : \underset{\sim}{\mathbf{X}}_i \\
&\quad -\frac{1}{2}(1-D)\sum_i a_i \underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}_i \ : \underset{\approx}{\mathbf{C}}_i : \underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}_i \\
&\quad +\frac{1}{2}\frac{b}{Q(1-D)}R^2 - \frac{1}{2}Qb(1-D)r^2)\Big\rangle^{n+1} \qquad \text{(III.65)} \\
F_{vp}^{sinh}(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}, X_i, R; \underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}_i, r) &= K_1 K_2 cosh\Big\langle \frac{1}{K_2}(f + \frac{1}{2}\frac{1}{(1-D)}\sum_i a_i \underset{\sim}{\mathbf{X}}_i \ : \underset{\approx}{\mathbf{C}}_i^{-1} : \underset{\sim}{\mathbf{X}}_i \\
&\quad -\frac{1}{2}(1-D)\sum_i a_i \underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}_i \ : \underset{\approx}{\mathbf{C}}_i : \underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}_i \\
&\quad +\frac{1}{2}\frac{b}{Q(1-D)}R^2 - \frac{1}{2}Qb(1-D)r^2)\Big\rangle \qquad \text{(III.66)}
\end{aligned}
$$

correspondant à une fonction de viscosité (donnant accès au multiplicateur viscoplastique),

$$
\begin{aligned}
g_v^{Norton}(f) &= \left\langle \frac{f}{K} \right\rangle^n \qquad \text{(III.67)} \\
g_v^{sinh}(f) &= K_1 sinh \left\langle \frac{f}{K_2} \right\rangle \qquad \text{(III.68)}
\end{aligned}
$$

K (respectivement K_2) est la contrainte de traînée pour une fonction de viscosité de type Norton (respectivement de type sinus hyperbolique). (K, n) et (K_1, K_2) sont des couples de paramètres qu'il est nécessaire d'identifier afin de décrire la viscosité du matériau.

La contrainte visqueuse s'écrit donc pour les deux potentiels,

$$
\begin{aligned}
\sigma_v^{Norton} &= K(\dot{\lambda}_{vp})^{\frac{1}{n}} \qquad \text{(III.69)} \\
\sigma_v^{sinh} &= K_2 arcsinh\left(\frac{\dot{\lambda}_{vp}}{K_1}\right) \qquad \text{(III.70)}
\end{aligned}
$$

Cette formulation peut être qualifiée de formulation normale et associée dans l'espace des contraintes. En effet, l'introduction plus ou moins "artificielle" des termes dont la somme est nulle dans l'équation III.63 permet de décrire une évolution non linéaire des écrouissages, mais n'impose pas pour autant $f \neq F_p$ (équation III.71) comme dans le cas de la plasticité indépendante du temps.

$$
\begin{aligned}
F_p &= f + \frac{1}{2}\frac{1}{(1-D)}\sum_i a_i \underset{\sim}{\mathbf{X}}_i \ : \underset{\approx}{\mathbf{C}}_i^{-1} : \underset{\sim}{\mathbf{X}}_i - \frac{1}{2}(1-D)\sum_i a_i \underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}_i \ : \underset{\approx}{\mathbf{C}}_i : \underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}_i \\
&\quad +\frac{1}{2}\frac{b}{Q(1-D)}R^2 - \frac{1}{2}Qb(1-D)r^2 \qquad \text{(III.71)}
\end{aligned}
$$

tel que,

$$F_{vp}^{Norton}(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}, X_i, R; \underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}_i, r) = \frac{K}{n+1}\left\langle \frac{F_p}{K} \right\rangle^{n+1} \quad \text{(III.72)}$$

$$F_{vp}^{sinh}(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}, X_i, R; \underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}_i, r) = K_1 K_2 cosh\left\langle \frac{F_p}{K_2} \right\rangle \quad \text{(III.73)}$$

Finalement, les équations d'évolution prendront la même forme que celle obtenues dans le cas indépendant du temps (équations III.45 à III.48) avec le multiplicateur viscoplastique imposé par le choix de la fonction de viscosité,

$$\dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}}^{vp} = \dot{\lambda}_{vp}\frac{\partial F_p}{\partial \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}} \quad \text{(III.74)}$$

$$\dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}}_i = -\dot{\lambda}_{vp}\frac{\partial F_p}{\partial \underset{\sim}{\mathbf{X}}_i} \quad \text{(III.75)}$$

$$\dot{r} = -\dot{\lambda}_{vp}\frac{\partial F_p}{\partial R} \quad \text{(III.76)}$$

$$\dot{D} = \dot{\lambda}_{vp}\frac{\partial F_d}{\partial Y} \quad \text{(III.77)}$$

où le multiplicateur viscoplastique $\dot{\lambda}_{vp}$, peut être celui provenant d'une loi puissance $\dot{\lambda}_{vp}^{Norton}$ ou celui provenant d'une loi en sinus hyperbolique $\dot{\lambda}_{vp}^{sinh}$,

$$\dot{\lambda}_{vp}^{Norton} = \left\langle \frac{f}{K} \right\rangle^{n} \quad \text{(III.78)}$$

$$\dot{\lambda}_{vp}^{sinh} = K_1 sinh\left\langle \frac{f}{K_2} \right\rangle \quad \text{(III.79)}$$

Que l'on choisisse d'écrire le potentiel viscoplastique F_{vp} selon la première ou la seconde approche présentée ci-dessus, où même dans le cadre de la plasticité indépendante du temps, les équations d'évolution s'écrivent sous la même forme.

Pour une fonction de charge f,

$$f = \frac{\left|\left|\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} - \sum_i \underset{\sim}{\mathbf{X}}_i\right|\right| - R}{\sqrt{1-D}} - \sigma_y \quad \text{(III.80)}$$

où σ_y désigne la limite d'élasticité et la norme s'écrit,

$$\left|\left|\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} - \sum_i \underset{\sim}{\mathbf{X}}_i\right|\right| = \sqrt{(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} - \sum_i \underset{\sim}{\mathbf{X}}_i) : \underset{\sim}{\mathbf{H}} : (\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} - \sum_i \underset{\sim}{\mathbf{X}}_i)} \quad \text{(III.81)}$$

avec $\underset{\sim}{\mathbf{H}}$ un tenseur d'ordre 4 dont le choix permet de rendre compte de la forme de la surface de charge. Pour un matériau anisotrope, différents choix peuvent être faits mais le choix le plus classique reste celui de Hill (Hill, 1948). D'autres perspectives peuvent être envisagées, comme par exemple celle proposées par Barlat (Barlat et al., 2007) permettant de généraliser la description de matériau anisotrope par l'utilisation de la théorie de la représentation des fonctions tensorielles proposée par Boehler (Boehler, 1978). Notons qu'en conservant cette forme, nous retrouvons simplement le critère de von Mises en écrivant $\underset{\sim}{\mathbf{H}} = \frac{3}{2}\underset{\sim}{\mathbf{I}}^d$, $\underset{\sim}{\mathbf{I}}^d$ désignant la partie déviatrice du tenseur identité d'ordre 4.

Dans ce cadre général, les équations d'évolution (équations III.74 à III.77) s'écrivent, en utilisant la règle de normalité généralisée ainsi que les équations d'état (équations III.32 à III.34),

$$\begin{aligned}
\dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}}^{vp} &= \dot{\lambda}_{vp}\frac{\partial F_p}{\partial \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}} \\
&= \dot{\lambda}_{vp}\frac{\partial f}{\partial \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}} \\
&= \frac{\dot{\lambda}_{vp}}{\sqrt{1-D}}\underset{\sim}{\mathbf{n}} && \text{(III.82)} \\
\text{avec } \underset{\sim}{\mathbf{n}} &= \frac{\underset{\sim}{\mathbf{H}} : (\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} - \sum_i \underset{\sim}{\mathbf{X}}_i)}{\left|\left|\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} - \sum_i \underset{\sim}{\mathbf{X}}_i\right|\right|} && \text{(III.83)} \\
\dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}}_i &= -\dot{\lambda}_{vp}\frac{\partial F_p}{\partial \underset{\sim}{\mathbf{X}}_i} \\
&= -\dot{\lambda}_{vp}\left(\frac{\partial f}{\partial \underset{\sim}{\mathbf{X}}_i} + \frac{a_i}{1-D}\underset{\sim}{\mathbf{C}}_i^{-1} : \underset{\sim}{\mathbf{X}}_i\right) \\
&= -\dot{\lambda}_{vp}\left(-\frac{\underset{\sim}{\mathbf{n}}}{\sqrt{1-D}} + a_i\underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}_i\right) \\
&= \dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}}^{vp} - \dot{\lambda}_{vp}a_i\underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}_i && \text{(III.84)} \\
\dot{r} &= -\dot{\lambda}_{vp}\frac{\partial F_p}{\partial R} \\
&= -\dot{\lambda}_{vp}\left(\frac{\partial f}{\partial R} + \frac{b}{Q(1-D)}R\right) \\
&= \dot{\lambda}_{vp}\left(\frac{1}{\sqrt{1-D}} - br\right) && \text{(III.85)}
\end{aligned}$$

où $\underset{\sim}{\mathbf{n}}$ est la normale sortante à la surface de charge, les couples de constantes (Q,b) et (C_i,a_i) sont les coefficients des écrouissages isotropes et cinématiques non linéaires.

Le choix du potentiel d'endommagement conduit à une dépendance vis-à-vis de la vitesse de déformation plastique cumulée (équation III.64). Or, celle ci peut s'exprimer en fonction du multiplicateur viscoplastique (équation III.87), en rappelant que $\left|\left|\underset{\sim}{\mathbf{n}} : \underset{\sim}{\mathbf{n}}\right|\right|_{H^{-1}}$=1 (équation III.86),

$$\begin{aligned}\left|\left|\underset{\sim}{\mathbf{n}} : \underset{\sim}{\mathbf{n}}\right|\right|_{H^{-1}} &= \sqrt{\frac{\underset{\sim}{\mathbf{H}} : (\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} - \sum_i \underset{\sim}{\mathbf{X}}_i)}{\left|\left|\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} - \sum_i \underset{\sim}{\mathbf{X}}_i\right|\right|} : \underset{\sim}{\mathbf{H}}^{-1} : \frac{\underset{\sim}{\mathbf{H}} : (\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} - \sum_i \underset{\sim}{\mathbf{X}}_i)}{\left|\left|\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} - \sum_i \underset{\sim}{\mathbf{X}}_i\right|\right|}} \\ &= \sqrt{\frac{\left|\left|\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} - \sum_i \underset{\sim}{\mathbf{X}}_i\right|\right|^2}{\left|\left|\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} - \sum_i \underset{\sim}{\mathbf{X}}_i\right|\right|^2}} = 1 \end{aligned} \tag{III.86}$$

$$\begin{aligned}\dot{p} &= \sqrt{\dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}}^{vp} : \underset{\sim}{\mathbf{H}}^{-1} : \dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}}^{vp}} \\ &= \sqrt{\dot{\lambda}_{vp}^2 \frac{\underset{\sim}{\mathbf{n}} : \underset{\sim}{\mathbf{H}}^{-1} : \underset{\sim}{\mathbf{n}}}{1-D}} \\ &= \frac{\dot{\lambda}_{vp}}{\sqrt{1-D}} \end{aligned} \tag{III.87}$$

On obtient donc la loi d'évolution de l'endommagement (équation III.64) qui s'écrit, en fonction du multiplicateur viscoplastique,

$$\dot{D} = \frac{\dot{\lambda}_{vp}}{(1-D)^{\beta+\frac{1}{2}}} \left\langle \frac{Y - Y_0}{S} \right\rangle^s \tag{III.88}$$

III.3 Écrouissage de nature isotrope

Différentes possibilités peuvent être envisagées afin de modéliser l'influence de l'écrouissage isotrope ainsi que son couplage avec les autres phénomènes. Ces possibilités apparaissent clairement dans la formulation de la fonction de viscosité,

$$\dot{\lambda}_{vp} = g_v \left(\frac{\frac{\left|\left|\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} - \sum_i \underset{\sim}{\mathbf{X}}_i\right|\right| - R}{\sqrt{1-D}} - \sigma_y}{K} \right) \tag{III.89}$$

Le plus simple et le plus naturel est, bien sûr, d'écrire l'augmentation du rayon de la surface de charge à travers l'évolution de la variable d'état R. Il est aussi possible d'augmenter la contrainte de traînée K, ou encore de coupler l'évolution de la variable cinématique $\underset{\sim}{\mathbf{X}}_i$ avec la déformation plastique cumulée.

Plusieurs choix sont possibles afin de décrire un écrouissage isotrope à travers la contrainte de traînée et n'impliquant aucune modification dans la formulation. En effet, l'influence de l'écrouissage isotrope peut être retranscrite par l'emploi, soit de la déformation plastique cumulée comme paramètre (celle ci n'étant pas une variable d'état), soit de la variable interne

r. Le cas, a priori, le plus contraignant est le second. Cependant, par construction du modèle viscoplastique, la contrainte de traînée n'apparaît pas dans le potentiel d'état mais seulement dans le potentiel des dissipations (équations III.13 et III.63). Or, les équations d'évolution des variables flux sont écrites par dérivation du potentiel des dissipations par rapport aux variables duales (équation III.82 à III.85). Aucun terme supplémentaire n'intervient dans les équations constitutives du modèle, quel que soit le choix du couplage entre viscosité et écrouissage isotrope.

$$\frac{\partial K(r)}{\partial \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}} = \frac{\partial K(r)}{\partial R} = \frac{\partial K(r)}{\partial \underset{\sim}{\mathbf{X}}_i} = 0 \tag{III.90}$$

Le couplage entre la contrainte de traînée et la variable interne isotrope est plus restrictif que celui avec la déformation plastique cumulée, puisqu'il impose des vitesses de saturation égales et ne laisse de "degré de liberté" que sur la valeur de la contrainte à saturation. Une proposition pour un tel couplage pourrait être,

$$K(r) = K_0 + \xi R(r) \tag{III.91}$$

où K_0 représente la valeur initiale de la contrainte de traînée, tandis que ξ est un paramètre pondérant l'influence de l'écrouissage isotrope. Cette proposition correspond à celle faite par Perzyna (Perzyna, 1964) pour ξ=1.

Le couplage entre la viscosité et l'écrouissage isotrope à travers le paramètre p est une modélisation plus souple permettant à la fois, de maîtriser la contrainte de traînée à saturation, mais aussi la vitesse à laquelle elle tend vers cette saturation. Nous proposons une loi d'évolution de la contrainte de traînée sous une forme exponentielle,

$$K = K_2 = K_m e^{-K_v p} \tag{III.92}$$

où K et K_2 sont les contraintes de traînée pour les modèles en loi puissance et sinus hyperbolique, K_m et K_v sont des paramètres permettant de décrire l'influence de l'écrouissage isotrope sur la viscosité. On retrouve alors une loi à écrouissage multiplicatif proposée par Lemaître (Lemaître, 1971).

La contrainte visqueuse s'exprime alors pour les deux modèles sous la forme,

$$\sigma_v^{Norton} = K_m e^{-K_v p} (\dot{\lambda}^{vp})^{\frac{1}{n}} \tag{III.93}$$

$$\sigma_v^{sinh} = K_m e^{-K_v p} arcsinh\left(\frac{\dot{\lambda}^{vp}}{K_1}\right) \tag{III.94}$$

L'introduction de cet écrouissage isotrope dans la contrainte de traînée n'est, bien évidemment, pas de même nature que celui introduit par la variable d'état R. Ainsi, l'espacement des surfaces équipotentielles (figure III.3) est plus ou moins important avec

la déformation plastique cumulée. Il est donc possible de passer d'un comportement viscoplastique très marqué à un comportement quasi plastique au cours d'un même essai. Cet effet est très marqué sur le tantale passant d'un comportement fortement viscoplastique, dont les premiers pourcents présentent un pic de Piobert-Lüders, à un comportement presque indépendant du temps. Les bandes de Piobert-Lüders étant un mécanisme thermiquement activé, il peut être phénoménologiquement décrit par la contrainte visqueuse. Pour ce faire, un choix possible est d'ajouter un second écrouissage multiplicatif dont la cinétique est beaucoup plus rapide que celle du premier ($K_{0v} \gg K_v$ équation III.95). Ceci revient donc à écrire la contrainte de traînée sous la forme,

$$K \quad = \quad K_2 = \left(K_m + (K_M - K_m)e^{-K_{0v}p}\right) e^{-K_v p} \tag{III.95}$$

où K_M et K_{0v} sont des paramètres permettant de décrire respectivement la valeur maximale du pic de Piobert-Lüders atteinte en contrainte et la vitesse de saturation du phénomène. La description expérimentale des courbes de traction, présentant un phénomène de localisation de la déformation sous forme de bande de Piobert-Lüders, se base, entre autre, sur les valeurs maximales et minimales du pic que l'on nomme respectivement limite d'élasticité haute et basse (cf. figure III.6). Ces valeurs correspondent aux paramètres K_M et K_m, et l'amplitude de contrainte entre la limite d'élasticité haute et basse dépend de la vitesse de sollicitation.

La réponse de ce type de couplage, à un essai de traction uniaxiale est représentée sur la figure III.7 pour cinq décades de vitesse allant de $\dot{\varepsilon} = 10^{-5}s^{-1}$ à $\dot{\varepsilon} = 10^{-1}s^{-1}$. Une étude paramétrique complète du modèle sera réalisée au paragraphe III.7.

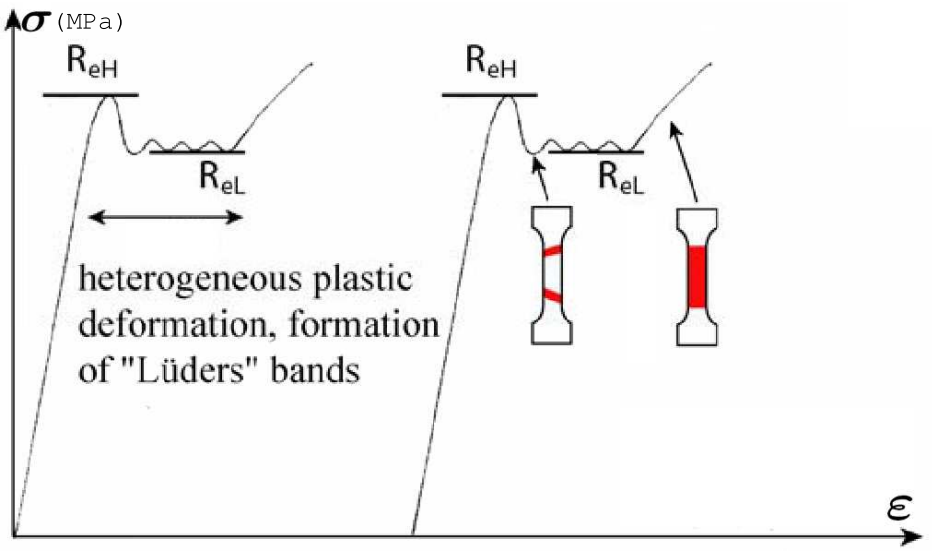


Figure III.6 : Schéma décrivant la propagation de bandes de Piobert-Lüders au cour d'un essai de traction, R_{eH} et R_{eL} désignant respectivement les limites d'élasticité haute et basse

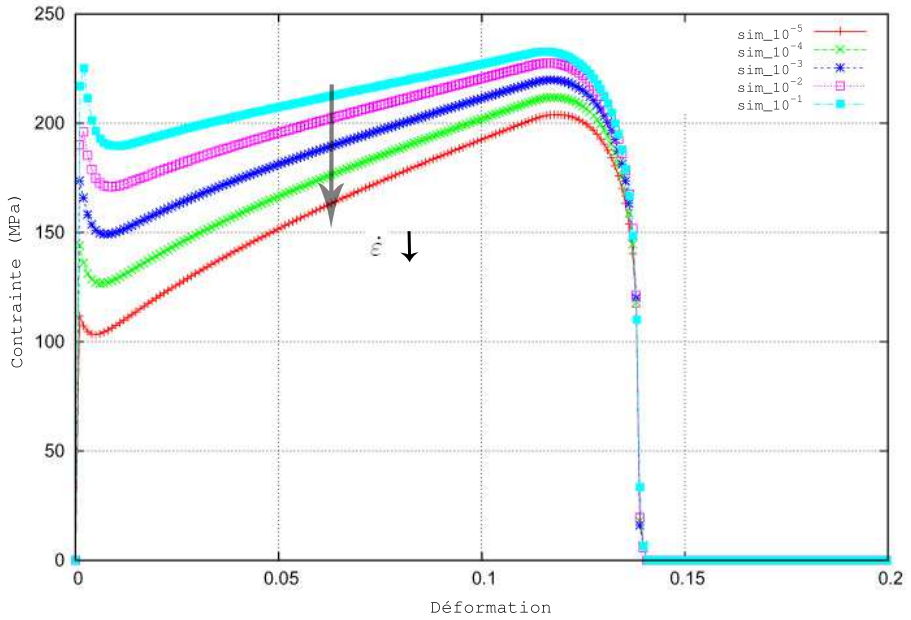


Figure III.7 : Influence de la vitesse de chargement sur la réponse du modèle avec couplage viscosité-écrouissage isotrope pour des vitesses allant de $\dot{\varepsilon} = 10^{-4}s^{-1}$ à $\dot{\varepsilon} = 10^{-1}s^{-1}$

Un second moyen d'introduire l'écrouissage isotrope autrement que par sa variable d'état, consiste à coupler ce dernier avec l'écrouissage cinématique. Encore une fois, plusieurs possibilités peuvent être envisagées mais mènent à plus ou moins de complication. Ces couplages peuvent être faits de manière identique quelle que soit la somme d'écrouissages cinématiques utilisée. La complexité réside plutôt dans le choix de la variable ou du paramètre de couplage (r ou p) ainsi que sur le choix du ou des paramètres affectés ($\underset{\sim}{\mathbf{C}}_i$ et/ou a_i). En effet, à la différence de la contrainte de traînée, les couples de paramètres décrivant l'écrouissage cinématique ($\underset{\sim}{\mathbf{C}}_i$,$a_i$) entrent en jeu, à la fois dans le potentiel d'état et dans le potentiel des dissipations. Les premières considérations d'introduction d'écrouissage isotrope par la variable force cinématique sont faites par Armstrong et Frederick (Armstrong et Frederick, 1966) puis par Marquis (Marquis, 1979) et portent sur le paramètre a_i. Ce couplage permet de ne pas introduire de termes supplémentaires dans les équations d'état et d'évolution. En effet, a_i n'intervient pas explicitement dans le potentiel d'état mais seulement dans le potentiel des dissipations. Les équations d'évolution des variables flux dérivent du potentiel des dissipations par rapport aux variables duales et n'introduisent donc pas de terme supplémentaire (cf. équation III.96).

$$\frac{\partial a_i(r)}{\partial \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}} = \frac{\partial a_i(r)}{\partial R} = \frac{\partial a_i(r)}{\partial \underset{\sim}{\mathbf{X}}_i} = 0 \tag{III.96}$$

La seule modification apportée au modèle réside donc dans l'expression choisie pour a_i qui modifie le terme de rappel de l'équation d'évolution des variables d'état cinématiques,

$$\dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}}_i = \dot{\lambda}_{vp}\left(\frac{\underset{\sim}{\mathbf{n}}}{\sqrt{1-D}} - a_i(r)\underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}_i\right) \tag{III.97}$$

Le choix des fonctions a_i peut donc dépendre librement de r ou p. Les formulations les plus usuelles prennent la forme des équations III.98 proposées par Marquis (Marquis, 1979) ou III.99 provenant de la théorie endochronique développée par Valanis (Valanis, 1980),(Watanabe et Atluri, 1986).

$$a_i(p) = a_{i\infty} + (a_{i0} - a_{i\infty})e^{-\phi p} \tag{III.98}$$

$$a_i(p) = \frac{a_{i0}}{1 + \omega R(p)} \tag{III.99}$$

La réelle difficulté de ce couplage se pose lorsqu'on cherche à le décrire au travers du paramètre $\underset{\sim}{\underset{\sim}{\mathbf{C}}}_i$. En effet, celui-ci intervient dans le potentiel d'état et doit être dérivé par rapport à r dans l'expression de la variable force R,

$$R = \rho\frac{\partial\psi}{\partial r} = (1-D)Qr + (1-D)\frac{1}{2}\sum_i \underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}_i : \frac{\partial \underset{\sim}{\underset{\sim}{\mathbf{C}}}_i(r)}{\partial r} : \underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}_i \tag{III.100}$$

Cette modification de l'équation d'état se répercute sur l'équation d'évolution qui s'écrit alors,

$$\begin{aligned} \dot{r} &= -\dot{\lambda}_{vp}\left(\frac{\partial f}{\partial R} + \frac{b}{Q(1-D)}R\right) \\ &= \dot{\lambda}_{vp}\left(\frac{1}{\sqrt{1-D}} - br - \frac{b}{2Q}\sum_i \underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}_i : \frac{\partial \underset{\sim}{\underset{\sim}{\mathbf{C}}}_i(r)}{\partial r} : \underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}_i\right) \end{aligned} \tag{III.101}$$

L'ajout de ce terme complique notablement l'intégration de cette équation d'évolution pour $C_i(r)$ quelconque.

En revanche, si l'on choisit de coupler l'écrouissage cinématique par la déformation plastique cumulée p, les termes additionnels disparaissent car $(1-D)\frac{1}{2}\sum_i \underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}_i : \frac{\partial \underset{\sim}{\underset{\sim}{\mathbf{C}}}_i(p)}{\partial r} : \underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}_i$ est nulle.

Nous choisissons donc d'introduire ce couplage écrouissage cinématique et isotrope à travers cette dernière formulation qui est souple et mieux adaptée à la description des évolutions cycliques de nos matériaux d'études.

En effet, l'un des intérêts majeurs de cette formulation réside dans sa capacité à décrire l'évolution cyclique du module tangent initial (entrée en plasticité) sans pour autant modifier la vitesse de saturation de l'écrouissage cinématique. Ceci permet de décrire les évolutions cycliques observées sur le tantale présentant un durcissement cyclique en conservant un

cycle très "carré". L'étude paramétrique du modèle et l'identification seront détaillées aux paragraphes III.7 et V.2.

Il est donc possible de choisir toute forme d'évolution de $\underset{\sim}{\mathbf{C}}_i$ en fonction de la déformation plastique cumulée sans changer, ni les équations d'état, ni les équations d'évolution. Parmi les choix possibles, la fonction C(p) peut être définie telle que :

$$\underset{\sim}{\mathbf{C}}_i(p) = \left(C_0 + (C_\infty - C_0)(1 - e^{-\phi p})\right) \underset{\sim}{\mathbf{C}}_i \tag{III.102}$$

III.4 Synthèse des équations du modèle et application au cas de l'isotropie

Dans les paragraphes précédents, nous avons réalisé l'ensemble des développements permettant d'aboutir à la formulation du modèle dans le cadre de la thermodynamique des processus irréversibles (paragraphe III.2). Ensuite, nous avons discuté (paragraphe III.3) des différents moyens d'introduire un écrouissage de nature isotrope, en restant dans le cadre de la formulation thermodynamique. Dans ce paragraphe, nous allons synthétiser les équations du modèle en intégrant les choix d'introduction des écrouissages de nature isotrope et ceci pour les deux formulations viscoplastique proposées. En outre, nous ferons apparaître les différences de formulation entre le cas isotrope et anisotrope.

Particulariser le comportement anisotrope développé revient à exprimer les opérateurs de plasticité d'ordre 4 sous la forme,

$$\underset{\sim}{\mathbf{H}} = \frac{3}{2}\underset{\sim}{\mathbf{I}}^d \tag{III.103}$$

$$\underset{\sim}{\mathbf{C}}_i(p) = \frac{2}{3}C_i(p)\underset{\sim}{\mathbf{I}}^d \tag{III.104}$$

où $\underset{\sim}{\mathbf{I}}^d = \underset{\sim}{\mathbf{I}} - \frac{1}{3}\mathbf{I} \otimes \underset{\sim}{\mathbf{I}}$ est le tenseur identité déviatorique d'ordre 4.
Le potentiel d'état s'écrit,

$$\rho\Psi = \rho\Psi_e(\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}^e, D) + \rho\Psi_{in}(\underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}_i, r, D) \tag{III.105}$$

$$\rho\Psi = \begin{cases} (1-D)\left(\frac{1}{2}\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}^e : \underset{\sim}{\boldsymbol{\Lambda}} : \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \frac{1}{2}\sum_i \underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}_i : \underset{\sim}{\mathbf{C}}_i(p) : \underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}_i + \frac{1}{2}Qr^2\right) & \text{"Aniso"} \\ (1-D)\left(\frac{1}{2}\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}^e : \underset{\sim}{\boldsymbol{\Lambda}} : \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \frac{1}{3}\sum_i C_i(p)\underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}_i : \underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}_i + \frac{1}{2}Qr^2\right) & \text{"Iso"} \end{cases} \tag{III.106}$$

On obtient les relations d'état,

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} = \begin{cases} (1-D)\underset{\approx}{\mathbf{\Lambda}} : \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}^e & \text{"Aniso"} \\ (1-D)\left(\lambda \mathrm{Tr}\,\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}^e \underset{\sim}{\mathbf{I}} + 2\mu \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}^e\right) & \text{"Iso"} \\ (1-D)\left(K \mathrm{Tr}\,\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}^e \underset{\sim}{\mathbf{I}} + 2G \underset{\sim}{\boldsymbol{e}}^e\right) & \text{"Iso"} \end{cases} \tag{III.107}$$

$$\underset{\sim}{\mathbf{X}}_i = \begin{cases} (1-D)\underset{\approx}{\mathbf{C}}_i(p) : \underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}_i & \text{"Aniso"} \\ (1-D)\frac{2}{3}C_i(p) : \underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}_i & \text{"Iso"} \end{cases} \tag{III.108}$$

$$R = (1-D)Qr \tag{III.109}$$

$$Y = \begin{cases} \frac{1}{2}\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}^e : \underset{\approx}{\mathbf{\Lambda}} : \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \frac{1}{2}\sum_i \underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}_i : \underset{\approx}{\mathbf{C}}_i(p) : \underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}_i + \frac{1}{2}Qr^2 & \text{"Aniso"} \\ \frac{1}{2}\lambda(\mathrm{Tr}\,\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}^e)^2 + \mu \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}^e : \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \frac{1}{3}\sum_i C_i(p)\underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}_i : \underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}_i + \frac{1}{2}Qr^2 & \text{"Iso"} \\ \frac{1}{2}K(\mathrm{Tr}\,\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}^e)^2 + G\underset{\sim}{\boldsymbol{e}}^e : \underset{\sim}{\boldsymbol{e}}^e + \frac{1}{3}\sum_i C_i(p)\underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}_i : \underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}_i + \frac{1}{2}Qr^2 & \text{"Iso"} \end{cases} \tag{III.110}$$

où λ et μ désignent les coefficients de Lamé, G et K respectivement les modules de cisaillement et de compressibilité hydrostatique. Leurs expressions, en fonction du module d'élasticité E et du coefficient de Poisson ν, sont rappelées équations III.111 et III.112,

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{III.111}$$

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} = \frac{3\lambda + 2\mu}{3}, \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \mu \tag{III.112}$$

La fonction de charge s'écrit,

$$f = \frac{\left|\left|\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} - \sum_i \underset{\sim}{\mathbf{X}}_i\right|\right| - R}{\sqrt{1-D}} - \sigma_y \tag{III.113}$$

où la norme désigne,

$$\left|\left|\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} - \sum_i \underset{\sim}{\mathbf{X}}_i\right|\right| = \begin{cases} \sqrt{(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} - \sum_i \underset{\sim}{\mathbf{X}}_i) : \underset{\approx}{\mathbf{H}} : (\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} - \sum_i \underset{\sim}{\mathbf{X}}_i)} & \text{"Aniso"} \\ \sqrt{\frac{3}{2}(\underset{\sim}{\mathbf{S}} - \sum_i \underset{\sim}{\mathbf{X}}_i) : (\underset{\sim}{\mathbf{S}} - \sum_i \underset{\sim}{\mathbf{X}}_i)} & \text{"Iso"} \end{cases} \tag{III.114}$$

Le potentiel viscoplastique s'écrit pour le modèle de Norton ("Norton") et celui en sinus hyperbolique ("sinh"),

$$F_{vp} = \begin{cases} \frac{K(p)}{n+1}\left\langle \frac{F_p}{K(p)} \right\rangle^{n+1} & \text{"Norton"} \\ K_1 K_2(p) cosh\left\langle \frac{F_p}{K_2(p)} \right\rangle & \text{"sinh"} \end{cases} \tag{III.115}$$

où F_p est donné par,

$$\begin{aligned} F_p &= f + \frac{1}{2}\frac{b}{Q(1-D)}R^2 - \frac{1}{2}Qb(1-D)r^2 \\ &+ \begin{cases} \frac{1}{2}\frac{1}{(1-D)}\sum_i a_i \underset{\sim}{\mathbf{X}}_i \ : \underset{\approx}{\mathbf{C}}_i^{-1} : \underset{\sim}{\mathbf{X}}_i - \frac{1}{2}(1-D)\sum_i a_i \underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}_i \ : \underset{\approx}{\mathbf{C}}_i : \underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}_i & \text{"Aniso"} \\ \frac{3}{4}\frac{1}{(1-D)}\sum_i \frac{a_i}{C_i(p)}\underset{\sim}{\mathbf{X}}_i \ : \underset{\sim}{\mathbf{X}}_i - \frac{1}{3}(1-D)\sum_i C_i a_i \underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}_i \ : \underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}_i & \text{"Iso"} \end{cases} \end{aligned} \tag{III.116}$$

Les équations d'évolution qui en découlent s'expriment sous la même forme quel que soit le modèle,

$$\underset{\sim}{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}^{vp} = \frac{\dot{\lambda}_{vp}}{\sqrt{1-D}}\underset{\sim}{\mathbf{n}} \tag{III.117}$$

$$\underset{\sim}{\dot{\boldsymbol{\alpha}}}_i = \dot{\lambda}_{vp}\left(\frac{\underset{\sim}{\mathbf{n}}}{\sqrt{1-D}} - a_i \underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}_i\right) \tag{III.118}$$

$$\dot{r} = \dot{\lambda}_{vp}\left(\frac{1}{\sqrt{1-D}} - br\right) \tag{III.119}$$

$$\dot{D} = \frac{\dot{\lambda}_{vp}}{(1-D)^{\beta+\frac{1}{2}}}\left\langle \frac{Y - Y_0}{S} \right\rangle^s \tag{III.120}$$

où,

$$\underset{\sim}{\mathbf{n}} = \begin{cases} \frac{\underset{\approx}{\mathbf{H}} : (\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} - \sum_i \underset{\sim}{\mathbf{X}}_i)}{||\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} - \sum_i \underset{\sim}{\mathbf{X}}_i||} & \text{"Aniso"} \\ \frac{3}{2}\frac{\underset{\sim}{\mathbf{S}} - \sum_i \underset{\sim}{\mathbf{X}}_i}{||\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} - \sum_i \underset{\sim}{\mathbf{X}}_i||} & \text{"Iso"} \end{cases} \tag{III.121}$$

et,

$$\dot{\lambda}_{vp} = \begin{cases} \left\langle \frac{f}{K(p)} \right\rangle^n & \text{"Norton"} \\ K_1 sinh\left\langle \frac{f}{K_2(p)} \right\rangle & \text{"sinh"} \end{cases} \tag{III.122}$$

Le choix d'introduction d'écrouissages isotropes supplémentaires a été discuté au paragraphe III.3. Les évolutions des paramètres $\underset{\approx}{\mathbf{C}}_i(p)$ ou $C_i(p)$ et $K_2(p)$ ou $K(p)$ sont données par les mêmes fonctions,

$$\begin{cases} \underset{\approx}{\mathbf{C}}_i(p) = \left(C_0 + (C_\infty - C_0)(1 - e^{-\phi p})\right) \underset{\approx}{\mathbf{C}}_i & \text{"Aniso"} \\ \\ C_i(p) = \left(C_0 + (C_\infty - C_0)(1 - e^{-\phi p})\right) C_i & \text{"Iso"} \end{cases} \tag{III.123}$$

$$K(p) \quad = \quad K_2(p) = \left(K_m + (K_M - K_m)e^{-K_{0v}p}\right) e^{-K_v p} \tag{III.124}$$

Nous avons développé le modèle dans un cadre général comportant à la fois anisotropie du critère et anisotropie de l'écrouissage puis nous l'avons particularisé au cas de l'isotropie totale. En théorie, la loi de comportement ne devrait pas être modifiée par un choix spécifique de repère (objectivité), de conditions initiales ou aux limites, ni même d'élément dans le cadre de la méthode éléments finis. Un cas spécifique ne vérifie pas cette dernière condition, c'est le cas de la contrainte plane que nous allons étudier dans le paragraphe suivant (III.5).

III.5 Traitement de la contrainte plane

III.5.1 Généralités

Les codes éléments finis sont généralement pilotés en déplacement. Ainsi, les hypothèses sur les champs de déformation, comme la déformation plane, sont gérées par la cinématique de l'élément et dérivent donc du cas général 3D.

Il n'en va pas de même pour la contrainte plane dont l'hypothèse ne peut être gérée au niveau de l'élément et doit être traitée au niveau de la loi de comportement. L'hypothèse de contraintes planes, $\sigma_{i3} = 0$ avec $i = \{1, 2, 3\}$, implique de déterminer une nouvelle inconnue ε_{33}.

La méthode la plus générale, de résolution de ce type de problème, consiste à modifier la formulation de l'élément. En effet, on s'affranchit ainsi de la création d'un lien entre l'élément et le comportement. La formulation d'un nouvel élément permet de ne pas avoir à traiter le cas des contraintes planes pour chaque nouveau comportement. Cette solution implique de développer un "élément contraintes planes" et s'adresse donc plutôt à des chercheurs travaillant sur des codes "ouverts" même si les UEL et VUEL d'ABAQUS doivent permettre ce type de développement. Un "élément contraintes planes" a été développé par Besson sur Zebulon (Besson et Foerch, 1997) mais aussi traité par De Borst (De Borst, 1991).

Le traitement le plus classique reste cependant d'imposer la condition de contraintes planes au niveau de la loi de comportement et nous traiterons exclusivement des formulations de ce type. L'hypothèse de contraintes planes traite le solide comme étant purement bidimensionnel (plan (1,2)) et ne tient pas compte de la compatibilité des déformations dans la direction 3. Ainsi, l'équation de compatibilité de la déformation s'écrit en notation indicielle,

$$\varepsilon_{11,22} + \varepsilon_{22,11} - 2\varepsilon_{12,12} \quad = \quad 0 \tag{III.125}$$

$$\varepsilon_{33,11} = \varepsilon_{33,22} = \varepsilon_{33,12} \quad = \quad 0 \tag{III.126}$$

On ne tient généralement pas compte de l'équation III.126 et la compatibilité de la déformation dans la direction 3 n'est donc pas assurée. Le problème reste purement bidimensionnel et il faut considérer le solide comme un pavage d'éléments n'interagissant pas entre eux selon la troisième direction. Par conséquent, l'hypothèse de contraintes planes reste strictement adaptée à des structures minces pour lesquelles les incompatibilités dans la troisième direction sont limitées.

La condition de contraintes planes donne,

$$\sigma_{13} = 0 \tag{III.127}$$
$$\sigma_{23} = 0 \tag{III.128}$$
$$\sigma_{33} = \lambda\varepsilon^e_{kk}\delta_{33} + 2\mu\varepsilon^e_{33} \tag{III.129}$$

On obtient donc,

$$\varepsilon^e_{33} = -\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\left(\varepsilon^e_{11}+\varepsilon^e_{22}\right) \tag{III.130}$$

que l'on peut écrire, d'après les équations III.111,

$$\varepsilon^e_{33} = -\frac{\nu}{1-\nu}\left(\varepsilon^e_{11}+\varepsilon^e_{22}\right) \tag{III.131}$$

La loi d'élasticité 3D classique peut donc être remplacée par,

$$\sigma_{ij} = \tilde{\lambda}\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} \tag{III.132}$$

avec i,j={1,2} et,

$$\tilde{\lambda} = \frac{\nu E}{1-\nu^2} \tag{III.133}$$

En plasticité ou viscoplasticité, on ajoute, pour certains matériaux, une condition supplémentaire sur l'incompressibilité de la déformation inélastique,

$$\mathrm{Tr}\,\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp} = 0 \tag{III.134}$$
$$\varepsilon^{vp}_{33} = -\varepsilon^{vp}_{11} - \varepsilon^{vp}_{22} \tag{III.135}$$

La déformation totale dans la direction 3 peut donc s'écrire,

$$\varepsilon_{33} = -\frac{\nu}{1-\nu}\left(\varepsilon^e_{11}+\varepsilon^e_{22}\right)-\varepsilon^{vp}_{11}-\varepsilon^{vp}_{22} \tag{III.136}$$

$$\varepsilon_{33} = -\frac{\nu}{1-\nu}\left(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}\right)+\frac{1-2\nu}{1-\nu}\varepsilon^{vp}_{33} \tag{III.137}$$

L'ajout de cette équation suffit à formuler un modèle cohérent en contraintes planes. Cependant, nous verrons que l'ajout "brutal" de cette équation dans la formulation algorithmique du modèle général (section IV.4) ne permet pas d'obtenir une formulation robuste (section IV.5.1).

Pour cette raison, différentes formulations algorithmiques sont proposées au paragraphe IV.5. Parmi ces formulations, l'une d'entre elles implique de reformuler les équations du modèle.

III.5.2 Formulation spécifique du modèle (Simo et Taylor, 1986)

Dans ce chapitre, nous développons les équations du modèle adaptées à l'utilisation d'un algorithme basé sur l'utilisation d'une matrice de mapping (Simo et Taylor, 1986), (Simo et Hughes, 1997).

Afin de mieux comprendre l'intérêt et les possibilités d'une telle approche, nous allons reprendre les équations du modèle dans le cas de l'isotropie totale et utiliser la formulation proposée par Simo pour le traitement de la contrainte plane. Nous verrons ainsi en quoi le traitement de la contrainte plane peut se voir comme une particularisation du cas général grâce à cette formulation.

Cet algorithme propose d'étendre la formulation classique du modèle au problème des contraintes planes en réalisant un mapping[1] (et non une projection) du sous espace des contraintes planes S_P vers le sous espace déviatorique S_D.
Le sous espace des contraintes planes S_P est donc un sous espace de dimension 3 de l'espace des contraintes S définie par l'équation III.138

$$S_P = \left\{ \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} \in S \mid \sigma_{13}=\sigma_{23}=\sigma_{33}=0 \right\} \tag{III.138}$$

De la même façon, le sous espace des contraintes déviatoriques S_D est alors défini comme étant un sous espace de dimension 3 de l'espace des contraintes S défini par l'équation III.139

$$S_D = \left\{ \underset{\sim}{\mathbf{S}} \in S \mid S_{13}=S_{23}=0, \mathrm{Tr}\left[\underset{\sim}{\mathbf{S}}\right]=0 \right\} \tag{III.139}$$

Il est alors proposé par Simo et Hugues (Simo et Hughes, 1997) d'utiliser une matrice de mapping du sous espace des contraintes planes vers le sous espace déviatorique, ce qui peut s'écrire sous la forme matricielle de la façon suivante (cf. équation III.141):

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix}, \quad \underset{\sim}{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{12} \end{pmatrix} \tag{III.140}$$

[1] On ne réalise pas une projection $\underset{\sim}{\mathbf{P}}$ au sens où $\underset{\sim}{\mathbf{P}}^2 \neq \underset{\sim}{\mathbf{P}}$

Soit la matrice de passage $\underset{\sim}{\underset{\sim}{\mathbf{P}}}$ telle que $\underset{\sim}{\underset{\sim}{\mathbf{P}}} : S_P \rightarrow S_D$ et son inverse $\underset{\sim}{\underset{\sim}{\mathbf{R}}}$ définie par :

$$\underset{\sim}{\underset{\sim}{\mathbf{P}}} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \underset{\sim}{\underset{\sim}{\mathbf{R}}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{III.141}$$

L'objectif de ce "mapping" est de se placer dans les meilleurs conditions pour utiliser un algorithme général de correction plastique. En effet, si l'ensemble des tenseurs (et notamment le tenseur d'écrouissage cinématique) n'est pas exprimé dans S_P, la normale ne peut plus être considérée comme constante et l'algorithme de retour radial ne devrait pas être utilisé (Dodds, 1987). Les formulations précédentes (Hammi, 2000), (Lestriez, 2003) violent ce principe et conduisent à des instabilités numériques pour des conditions de chargement sévères (vitesses élevées ou endommagement). Si l'on décide de ne pas réaliser ce mapping pour traiter les contraintes planes, il est alors nécessaire de réaliser un retour normal qui implique de recalculer la normale pour chaque incrément permettant le retour sur la surface de charge (cf. figure III.8). Cette méthode oblige donc à résoudre un système de trois équations dont une est tensorielle (celle concernant la normale) et compliquent donc la convergence de l'algorithme de Newton Raphson. Notons que ce traitement est réalisé généralement au sein du LASMIS dans le cadre du traitement de comportements anisotropes (Badreddine et Saanouni, 2007).

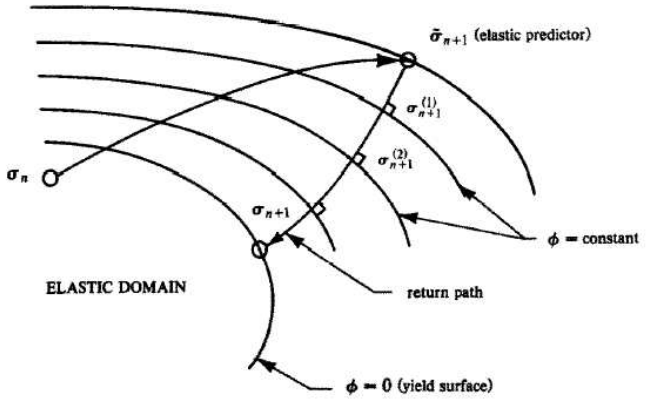


Figure III.8 : Schéma de l'algorithme de retour normal (Simo et Ortiz, 1985).

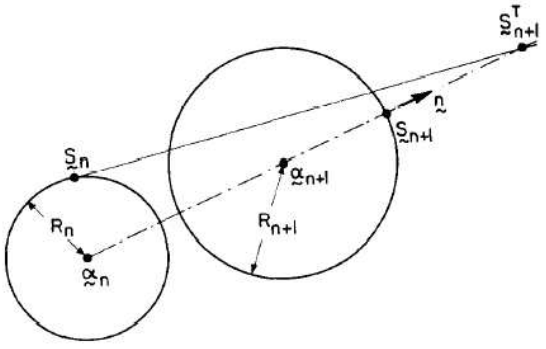


Figure III.9 : Schéma de l'algorithme de retour radial (Simo et Taylor, 1985).

Il est possible de s'assurer rapidement de la validité de ce mapping par une application algébrique simple.

Calculons la contrainte équivalente de von Mises (sans écrouissage cinématique) dans le cas des contraintes planes, pour la formulation avec et sans mapping. Pour la formulation sans mapping,

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2}\underset{\sim}{\mathbf{S}} : \underset{\sim}{\mathbf{S}}} \tag{III.142}$$

qui vaut donc, sous forme matricielle,

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2}\left(\left(\frac{1}{3}\right)^2 \begin{pmatrix} 2\sigma_{11}-\sigma_{22} \\ 2\sigma_{22}-\sigma_{11} \\ -\sigma_{11}-\sigma_{22} \\ 3\sigma_{12} \end{pmatrix}^T . \begin{pmatrix} 2\sigma_{11}-\sigma_{22} \\ 2\sigma_{22}-\sigma_{11} \\ -\sigma_{11}-\sigma_{22} \\ 3\sigma_{12} \end{pmatrix}\right)} \tag{III.143}$$

soit,

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{1}{6}\left[\left(2\sigma_{11}-\sigma_{22}\right)^2 + \left(2\sigma_{22}-\sigma_{11}\right)^2 + \left(\sigma_{11}\sigma_{22}\right)^2 + 9\sigma_{12}^2\right]} \tag{III.144}$$

que l'on peut écrire sous la forme,

$$\sigma_{eq}^2 = \sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} + \frac{3}{2}\sigma_{12}^2 \tag{III.145}$$

Pour la formulation avec mapping, la contrainte équivalente de von Mises s'écrit (cf. équation III.146)

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2}\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} : \underset{\sim}{\mathbf{P}} : \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}} \tag{III.146}$$

En calculant d'abord $\underset{\sim}{\mathbf{P}} : \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}$ sous forme matricielle, on peut bien voir que le tenseur correspond au tenseur déviateur de l'équation III.143 (dont la valeur S_{33}, bien que non nulle, n'est pas explicitement prise en compte),

$$\underset{\sim}{\mathbf{P}} : \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} . \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2\sigma_{11}-\sigma_{22} \\ 2\sigma_{22}-\sigma_{11} \\ 3\sigma_{12} \end{pmatrix} \tag{III.147}$$

puis calculer la contrainte équivalente proprement dit,

$$\begin{aligned} \sigma_{eq} = \sqrt{\tfrac{3}{2}\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} : \underset{\sim}{\mathbf{P}} : \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}} &= \sqrt{\tfrac{3}{2}\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix}^T . \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} . \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix}} \\ &= \sqrt{\tfrac{3}{2}\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix}^T . \tfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2\sigma_{11}-\sigma_{22} \\ 2\sigma_{22}-\sigma_{11} \\ 3\sigma_{12} \end{pmatrix}} \end{aligned} \tag{III.148}$$

soit la contrainte équivalente,

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(2\sigma_{11}^2 + 2\sigma_{22}^2 - 2\sigma_{11}\sigma_{22} + 3\sigma_{12}^2\right)} \tag{III.149}$$

que l'on peut écrire sous la forme,

$$\sigma_{eq}^2 = \sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} + \frac{3}{2}\sigma_{12}^2 \tag{III.150}$$

On voit ici par un calcul matriciel rapide, la validité de cette projection (cf. équations III.145 et III.150)

De nombreuses méthodes d'intégration numérique temporelle des équations d'évolution ont été proposées et sont présentées au paragraphe IV.3. L'algorithme de retour radial est donc le meilleur (Krieg et Krieg, 1977) mais pose le problème de ne plus être valable dans le cas des contraintes planes. Dés lors, il est donc intéressant de chercher à se placer dans les bonnes conditions pour utiliser cet algorithme. C'est l'objectif de l'approche de Simo.

Dans ce qui suit, les tenseurs ayant "subi" le mapping sont notés $\tilde{}$ et ne font donc plus référence à des tenseurs déviatoriques.

Les équations du modèle synthétisées au paragraphe III.4 peuvent être réécrites sous l'hypothèse de mapping des quantités déviatoriques. Les équations, dont la mention "CP" suit, font référence à un comportement isotrope en contraintes planes tandis que les équations, dont la mention "3D" suit, font référence au comportement le plus général d'anisotropie du critère et de l'écrouissage.

Les relations d'état s'écrivent,

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} = \begin{cases} (1-D)\underset{\sim}{\tilde{\mathbf{\Lambda}}} : \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}^e & \text{"CP"} \\ (1-D)\underset{\sim}{\mathbf{\Lambda}} : \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}^e & \text{"3D"} \end{cases} \tag{III.151}$$

où,

$$\begin{cases} \underset{\sim}{\tilde{\mathbf{\Lambda}}} = \tilde{\lambda}\underset{\sim}{\mathbf{I}} \otimes \underset{\sim}{\mathbf{I}} + 2\mu\underset{\sim}{\mathbf{I}} & \text{"CP"} \\ \underset{\sim}{\mathbf{\Lambda}} = \lambda\underset{\sim}{\mathbf{I}} \otimes \underset{\sim}{\mathbf{I}} + 2\mu\underset{\sim}{\mathbf{I}} & \text{"3D"} \end{cases} \tag{III.152}$$

$$\begin{cases} \tilde{\lambda} = \frac{\nu E}{1-\nu^2} & \text{"CP"} \\ \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \text{"3D"} \end{cases} \tag{III.153}$$

$$\begin{cases} \underset{\sim}{\tilde{\mathbf{\Lambda}}} = \tilde{K}\underset{\sim}{\mathbf{I}} \otimes \underset{\sim}{\mathbf{I}} + 2G\underset{\sim}{\mathbf{I}}^d & \text{"CP"} \\ \underset{\sim}{\mathbf{\Lambda}} = K\underset{\sim}{\mathbf{I}} \otimes \underset{\sim}{\mathbf{I}} + 2G\underset{\sim}{\mathbf{I}}^d & \text{"3D"} \end{cases} \tag{III.154}$$

$$\begin{cases} \tilde{K} = \frac{E(1+2\nu)}{3(1-\nu^2)} & \text{"CP"} \\ K = \frac{E}{3(1-2\nu)} & \text{"3D"} \end{cases} \tag{III.155}$$

$$\underset{\sim}{\tilde{\mathbf{X}}}_i = \begin{cases} (1-D)\frac{2}{3}C_i(p)\underset{\sim}{\mathbf{R}} : \underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}_i & \text{"CP"} \\ (1-D)\underset{\sim}{\mathbf{C}}_i(p) : \underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}_i & \text{"3D"} \end{cases} \tag{III.156}$$

$$R = (1-D)Qr \tag{III.157}$$

$$\tilde{Y} = \begin{cases} \frac{1}{2}\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}^e : \underset{\sim}{\tilde{\mathbf{\Lambda}}} : \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \frac{1}{3}\sum_i C_i(p)\underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}_i : \underset{\sim}{\mathbf{R}} : \underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}_i + \frac{1}{2}Qr^2 & \text{"CP"} \\ \frac{1}{2}\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}^e : \underset{\sim}{\mathbf{\Lambda}} : \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \frac{1}{2}\sum_i \underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}_i : \underset{\sim}{\mathbf{C}}_i(p) : \underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}_i + \frac{1}{2}Qr^2 & \text{"3D"} \end{cases} \tag{III.158}$$

où $\underset{\sim}{\mathbf{I}}^d$ désigne le tenseur unité d'ordre 4 déviatorique. Dans les équations précédentes, $\underset{\sim}{\tilde{\mathbf{X}}}_i$ n'est pas une quantité déviatorique à la différence de $\underset{\sim}{\mathbf{X}}_i$. Par contre, la variable interne $\underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}_i$ désigne partout une quantité déviatorique. L'écrouissage isotrope, décrit par des variables scalaires, n'est donc pas affecté par le mapping.

La fonction de charge s'écrit,

$$f = \begin{cases} \frac{\left|\left|\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} - \sum_i \underset{\sim}{\tilde{\mathbf{X}}}_i\right|\right| - R}{\sqrt{1-D}} - \sigma_y & \text{"CP"} \\ \frac{\left|\left|\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} - \sum_i \underset{\sim}{\mathbf{X}}_i\right|\right| - R}{\sqrt{1-D}} - \sigma_y & \text{"3D"} \end{cases} \tag{III.159}$$

où la norme désigne, pour l'un la norme de Hill et pour l'autre la norme de von Mises dans le cas des contraintes planes,

$$\begin{cases} \left|\left|\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} - \sum_i \underset{\sim}{\tilde{\mathbf{X}}}_i\right|\right| = \sqrt{\frac{3}{2}(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} - \sum_i \underset{\sim}{\tilde{\mathbf{X}}}_i) : \underset{\approx}{\mathbf{P}} : (\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} - \sum_i \underset{\sim}{\tilde{\mathbf{X}}}_i)} & \text{"CP"} \\ \left|\left|\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} - \sum_i \underset{\sim}{\mathbf{X}}_i\right|\right| = \sqrt{(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} - \sum_i \underset{\sim}{\mathbf{X}}_i) : \underset{\approx}{\mathbf{H}} : (\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} - \sum_i \underset{\sim}{\mathbf{X}}_i)} & \text{"3D"} \end{cases} \tag{III.160}$$

Notons que, dans la norme de von Mises, le tenseur déviateur des contraintes peut être remplacé par le tenseur des contraintes lui-même car $\underset{\approx}{\mathbf{P}} : \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}$ est une quantité déviatorique.

De manière générale, le potentiel des dissipations s'écrit comme la somme d'un potentiel viscoplastique et d'un potentiel des dissipations d'endommagement,

$$\Phi^{\star}_{vp} = \begin{cases} F_{vp}(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}, \underset{\sim}{\tilde{\mathbf{X}}}_i, R; \underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}_i, r) + F_d(\tilde{Y}; D) & \text{"CP"} \\ F_{vp}(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}, \underset{\sim}{\mathbf{X}}_i, R; \underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}_i, r) + F_d(Y; D) & \text{"3D"} \end{cases} \tag{III.161}$$

Le potentiel viscoplastique n'est pas modifié explicitement et s'écrit pour le modèle de Norton ("Norton") et celui en sinus hyperbolique ("sinh"),

$$F_{vp} = \begin{cases} \frac{K(p)}{n+1}\left\langle \frac{F_p}{K(p)} \right\rangle^{n+1} & \text{"Norton"} \\ K_1 K_2(p) cosh\left\langle \frac{F_p}{K_2(p)} \right\rangle & \text{"sinh"} \end{cases} \tag{III.162}$$

où F_p est donné par,

$$\begin{aligned} F_p &= f + \frac{1}{2}\frac{b}{Q(1-D)}R^2 - \frac{1}{2}Qb(1-D)r^2 \\ &+ \begin{cases} \frac{3}{4}\frac{1}{(1-D)}\sum_i \frac{a_i}{C_i(p)}\underset{\sim}{\tilde{\mathbf{X}}}_i : \underset{\approx}{\mathbf{P}} : \underset{\sim}{\tilde{\mathbf{X}}}_i - \frac{1}{3}(1-D)\sum_i C_i a_i \underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}_i : \underset{\sim}{\mathbf{R}} : \underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}_i & \text{"CP"} \\ \frac{1}{2}\frac{1}{(1-D)}\sum_i a_i \underset{\sim}{\mathbf{X}}_i : \underset{\approx}{\mathbf{C}}_i^{-1} : \underset{\sim}{\mathbf{X}}_i - \frac{1}{2}(1-D)\sum_i a_i \underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}_i : \underset{\approx}{\mathbf{C}}_i : \underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}_i & \text{"3D"} \end{cases} \end{aligned} \tag{III.163}$$

et le potentiel des dissipations d'endommagement par l'expression suivante,

$$F_d = \begin{cases} \frac{\dot{p}}{(1-D)^{\beta}}\left\langle \frac{\tilde{Y}-Y_0}{S} \right\rangle^{s+1}\frac{S}{s+1} & \text{"CP"} \\ \frac{\dot{p}}{(1-D)^{\beta}}\left\langle \frac{Y-Y_0}{S} \right\rangle^{s+1}\frac{S}{s+1} & \text{"3D"} \end{cases} \tag{III.164}$$

Les équations d'évolution qui en découlent sont,

$$\underset{\sim}{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}^{vp} = \begin{cases} \frac{\dot{\lambda}_{vp}}{\sqrt{1-D}} \underset{\sim}{\mathbf{P}} : \underset{\sim}{\tilde{\mathbf{n}}} & \text{"CP"} \\ \frac{\dot{\lambda}_{vp}}{\sqrt{1-D}} \underset{\sim}{\mathbf{n}} & \text{"3D"} \end{cases} \tag{III.165}$$

$$\underset{\sim}{\dot{\boldsymbol{\alpha}}}_i = \begin{cases} \dot{\lambda}_{vp} \left(\frac{\underset{\sim}{\mathbf{P}} : \underset{\sim}{\tilde{\mathbf{n}}}}{\sqrt{1-D}} - a_i \underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}_i \right) & \text{"CP"} \\ \dot{\lambda}_{vp} \left(\frac{\underset{\sim}{\mathbf{n}}}{\sqrt{1-D}} - a_i \underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}_i \right) & \text{"3D"} \end{cases} \tag{III.166}$$

$$\dot{r} = \dot{\lambda}_{vp} \left(\frac{1}{\sqrt{1-D}} - br \right) \tag{III.167}$$

$$\dot{D} = \begin{cases} \frac{\dot{\lambda}_{vp}}{(1-D)^{\beta+\frac{1}{2}}} \left\langle \frac{\tilde{Y}-Y_0}{S} \right\rangle^s & \text{"CP"} \\ \frac{\dot{\lambda}_{vp}}{(1-D)^{\beta+\frac{1}{2}}} \left\langle \frac{Y-Y_0}{S} \right\rangle^s & \text{"3D"} \end{cases} \tag{III.168}$$

où la normale à la surface de charge dans l'espace des contraintes est donnée par,

$$\underset{\sim}{\mathbf{n}} = \begin{cases} \frac{3}{2} \frac{\underset{\sim}{\mathbf{P}} : (\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} - \sum_i \underset{\sim}{\tilde{\mathbf{X}}}_i)}{\left|\left| \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} - \sum_i \underset{\sim}{\tilde{\mathbf{X}}}_i \right|\right|} & \text{"CP"} \\ \frac{\underset{\sim}{\mathbf{H}} : (\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} - \sum_i \underset{\sim}{\mathbf{X}}_i)}{||\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} - \sum_i \underset{\sim}{\mathbf{X}}_i||} & \text{"3D"} \end{cases} \tag{III.169}$$

La quantité $\underset{\sim}{\tilde{\mathbf{n}}}$ n'étant plus une quantité déviatrice, elle s'écrit,

$$\underset{\sim}{\tilde{\mathbf{n}}} = \frac{3}{2} \frac{\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} - \sum_i \underset{\sim}{\tilde{\mathbf{X}}}_i}{\left|\left| \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} - \sum_i \underset{\sim}{\tilde{\mathbf{X}}}_i \right|\right|} \tag{III.170}$$

ce qui donne, bien sûr,

$$\underset{\sim}{\mathbf{n}} = \underset{\sim}{\mathbf{P}} : \underset{\sim}{\tilde{\mathbf{n}}} \tag{III.171}$$

Remarques :

La déformation plastique cumulée reste liée de la même façon au multiplicateur viscoplastique,

$$\begin{aligned}
\dot{p} &= \sqrt{\frac{2}{3}\underset{\sim}{\dot{\varepsilon}}^p : \underset{\sim}{\dot{\varepsilon}}^p} \\
&= \frac{\dot{\lambda}_{vp}}{\sqrt{1-D}}\sqrt{\frac{2}{3}\underset{\sim}{\tilde{\mathbf{n}}} : \underset{\sim}{\mathbf{P}} : \underset{\sim}{\tilde{\mathbf{n}}}} \\
&= \frac{\dot{\lambda}_{vp}}{\sqrt{1-D}}\sqrt{\frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^2 \frac{(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} - \sum_i \underset{\sim}{\tilde{\mathbf{X}}}_i) : \underset{\sim}{\mathbf{P}} : (\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} - \sum_i \underset{\sim}{\tilde{\mathbf{X}}}_i)}{\left\|\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} - \sum_i \underset{\sim}{\tilde{\mathbf{X}}}_i\right\|^2}} \\
&= \frac{\dot{\lambda}_{vp}}{\sqrt{1-D}}
\end{aligned} \tag{III.172}$$

comme $\underset{\sim}{\mathbf{P}} : \underset{\sim}{\tilde{\mathbf{n}}} \in S_D$, $\underset{\sim}{\tilde{\mathbf{n}}} : \underset{\sim}{\mathbf{P}} : \underset{\sim}{\tilde{\mathbf{n}}} \in S_D$. On a donc bien l'égalité $\underset{\sim}{\mathbf{P}} : \underset{\sim}{\tilde{\mathbf{n}}} : \underset{\sim}{\mathbf{P}} : \underset{\sim}{\tilde{\mathbf{n}}} = \underset{\sim}{\tilde{\mathbf{n}}} : \underset{\sim}{\mathbf{P}} : \underset{\sim}{\tilde{\mathbf{n}}}$.

L'ensemble des équations précédentes a été volontairement développée parallèlement pour deux formulations du même modèle : une formulation générale comportant à la fois, la possibilité de décrire l'anisotropie du critère mais aussi celle des écrouissages de manière indépendante, et une formulation particulière de ce modèle général présentant le cas de l'isotropie totale. Cette particularisation du modèle est traitée dans le cas des contraintes planes par une approche de "mapping" proposée par Simo. En développant conjointement ces deux descriptions, nous cherchons à mettre en évidence les similitudes des équations constitutives obtenues.

Les équations d'état III.151 à III.158 et d'évolution III.165 à III.167 montrent clairement l'analogie entre l'opérateur de Hill et la matrice de "mapping" $\underset{\sim}{\mathbf{P}}$ ainsi que celle existant entre l'opérateur d'anisotropie d'écrouissage et l'inverse de la matrice de "mapping" $\underset{\sim}{\mathbf{R}}$,

$$\underset{\sim}{\mathbf{H}} = \frac{3}{2}\underset{\sim}{\mathbf{P}} \tag{III.173}$$

$$\underset{\sim}{\mathbf{C}}_i(p) = \frac{2}{3}C_i(p)\underset{\sim}{\mathbf{R}} \tag{III.174}$$

On voit donc que le traitement de la contrainte plane par cette méthode permet d'étendre notablement les potentialités d'un modèle isotrope au cas de l'anisotropie plastique du critère et des écrouissages.

La méthode étant originalement proposée par Simo pour résoudre le problème du retour radial en contrainte plane, on peut raisonnablement espérer faire de même dans le cas de l'anisotropie et donc s'affranchir de réaliser la convergence sur l'équation de la normale au sein de l'algorithme de Newton-Raphson. Cette remarque sera discutée dans le chapitre IV concernant les aspect numériques.

Comme très souvent dans le traitement du comportement anisotrope, le système d'équations se compose de trois équations dont les inconnues sont, le multiplicateur plastique, la normale et l'endommagement. Dans le cas des contraintes planes, une équation s'ajoute pour atteindre un système de quatre équations (dont une tensorielle) (Badreddine, 2006), (Khelifa, 2004). Moyennant certaines hypothèses sur l'endommagement, faites aussi bien pour un comportement isotrope (Lestriez, 2003) qu'anisotrope (Khelifa, 2004), le système peut se réduire à deux équations dans le cas de l'anisotropie et une équation dans celle

de l'isotropie. En contraintes planes, une équation est classiquement ajoutée. La méthode de "mapping" de Simo permet à la fois de décrire un comportement anisotrope mais aussi d'inclure l'hypothèse de contrainte plane et de valider celle du retour radial. Ainsi, le système se réduit à une équation scalaire et permet donc une convergence de l'algorithme de Newton-Raphson beaucoup plus aisée et rapide.

III.6 Généralisation aux transformations finies

La description du modèle, dans les paragraphes précédents, est faite sans se soucier des grandes transformations et de leurs influences sur l'expression des lois de comportement. Dans ce paragraphe, nous présentons une démarche générale permettant de prendre en compte les rotations matérielles, sans pour autant modifier explicitement les équations du modèle en petites déformations (Dogui, 1989). Pour cela, nous présenterons rapidement l'approche en grandes transformations, les problèmes causés, puis le choix fait d'une formulation en référentiel tournant.

III.6.1 Cinématique en grandes transformations

Dans le cadre des transformations finies (T.F.), il est nécessaire de distinguer la configuration de référence $\mathcal{C}_0$ du solide, de celle déformée $\mathcal{C}_t$ puisque l'hypothèse des petites perturbations (H.P.P.) n'est plus vérifiée. La position d'un point matériel dans la configuration $\mathcal{C}_0$ est donnée par le vecteur $\underline{\mathbf{X}}$ et correspond au vecteur position $\underline{\mathbf{x}}$ dans la configuration $\mathcal{C}_t$, moyennant une application ϕ décrivant le mouvement de chaque point du solide tel que :

$$\phi : \underline{\mathbf{X}} \longmapsto \underline{\mathbf{x}}(\underline{\mathbf{X}}, t) \tag{III.175}$$

Ainsi, le vecteur déplacement de tout point matériel du solide est donné par $\underline{\mathbf{u}} = \underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{X}}$. L'application linéaire tangente qui à $d\underline{\mathbf{X}}$ associe $d\underline{\mathbf{x}}$ est donnée par le gradient de la transformation $\underset{\sim}{\mathbf{F}}$ tel que :

$$d\underline{\mathbf{x}} = \underset{\sim}{\mathbf{F}} d\underline{\mathbf{X}} \tag{III.176}$$

avec

$$\underset{\sim}{\mathbf{F}} = \frac{\partial \phi(\underline{\mathbf{X}}, t)}{\partial \underline{\mathbf{X}}} = \underset{\sim}{\mathbf{I}} + \frac{\partial \underline{\mathbf{u}}}{\partial \underline{\mathbf{X}}} \tag{III.177}$$

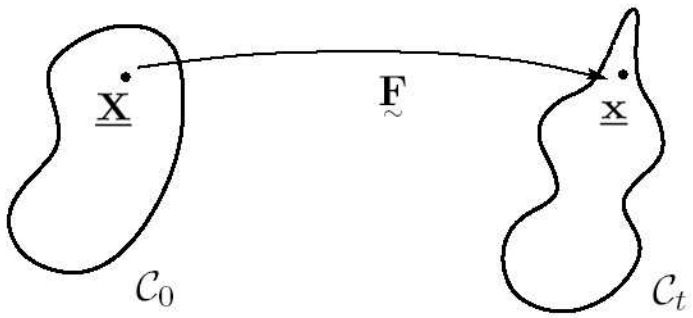


Figure III.10 : Schéma représentant le passage d'un configuration de référence à une configuration déformée.

Il est à noter que $\underset{\sim}{\mathbf{F}}$ est un tenseur mi-eulérien, mi-lagrangien décrivant le passage d'une configuration lagrangienne $\mathcal{C}_0$ vers une configuration eulérienne $\mathcal{C}_t$. On note souvent J le jacobien de la transformation, c'est-à-dire le déterminant du gradient de la transformation $\underset{\sim}{\mathbf{F}}$, $J = det(\underset{\sim}{\mathbf{F}})$. La transformation est isochore (conservation du volume) si J>0. Dans ces conditions, $\underset{\sim}{\mathbf{F}}$ est inversible, il existe alors deux tenseurs symétriques définis positifs $\underset{\sim}{\mathbf{U}}$ et $\underset{\sim}{\mathbf{V}}$ et un tenseur orthogonal $\underset{\sim}{\mathbf{R}}$ uniques tels que,

$$\underset{\sim}{\mathbf{F}} = \underset{\sim}{\mathbf{R}}.\underset{\sim}{\mathbf{U}} \quad \text{(III.178)}$$

$$= \underset{\sim}{\mathbf{V}}.\underset{\sim}{\mathbf{R}} \quad \text{(III.179)}$$

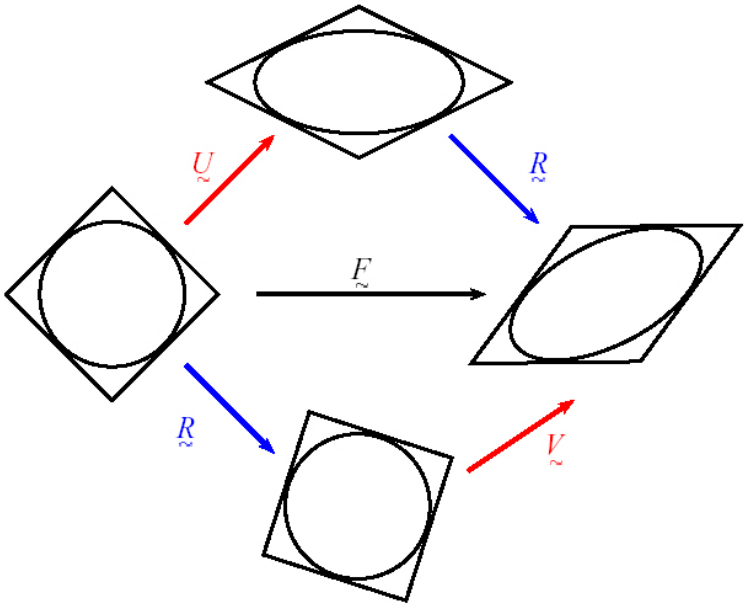


Figure III.11 : Schéma représentant la décomposition polaire du gradient de la transformation d'après (Forest et al., 2005).

Cette décomposition polaire permet de distinguer la contribution de la rotation propre $\underset{\sim}{\mathbf{R}}$ de celle des déformations pures à droite $\underset{\sim}{\mathbf{U}}$ et à gauche $\underset{\sim}{\mathbf{V}}$. L'évaluation de la déformation du milieu est composée de la variation locale de longueur et d'angle des vecteurs positions et peut donc être introduite à travers le produit scalaire de deux vecteurs positions lagrangiens donnant le tenseur de Cauchy-Green droit $\underset{\sim}{\mathbf{C}}$, ou de deux tenseurs positions eulériens donnant le tenseur de Cauchy-Green gauche $\underset{\sim}{\mathbf{B}}$,

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{d}}\mathbf{x}_1.\underline{\mathbf{d}}\mathbf{x}_2 &= (\underset{\sim}{\mathbf{F}}\underline{\mathbf{d}}\mathbf{X}_1).(\underset{\sim}{\mathbf{F}}\underline{\mathbf{d}}\mathbf{X}_2) \\ &= \underline{\mathbf{d}}\mathbf{X}_1.\underset{\sim}{\mathbf{F}}^T.\underset{\sim}{\mathbf{F}}.\underline{\mathbf{d}}\mathbf{X}_2 \\ &= \underline{\mathbf{d}}\mathbf{X}_1.\underset{\sim}{\mathbf{C}}.\underline{\mathbf{d}}\mathbf{X}_2 \end{aligned} \tag{III.180}$$

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{d}}\mathbf{X}_1.\underline{\mathbf{d}}\mathbf{X}_2 &= (\underset{\sim}{\mathbf{F}}^{-1}\underline{\mathbf{d}}\mathbf{x}_1).(\underset{\sim}{\mathbf{F}}^{-1}\underline{\mathbf{d}}\mathbf{x}_2) \\ &= \underline{\mathbf{d}}\mathbf{x}_1.\underset{\sim}{\mathbf{F}}^{-T}.\underset{\sim}{\mathbf{F}}^{-1}.\underline{\mathbf{d}}\mathbf{x}_2 \\ &= \underline{\mathbf{d}}\mathbf{x}_1.\underset{\sim}{\mathbf{B}}^{-1}.\underline{\mathbf{d}}\mathbf{x}_2 \end{aligned} \tag{III.181}$$

$$\underset{\sim}{\mathbf{C}} = \underset{\sim}{\mathbf{F}}^T.\underset{\sim}{\mathbf{F}} = \underset{\sim}{\mathbf{U}}^2 \tag{III.182}$$

$$\underset{\sim}{\mathbf{B}} = \underset{\sim}{\mathbf{F}}.\underset{\sim}{\mathbf{F}}^T = \underset{\sim}{\mathbf{V}}^2 \tag{III.183}$$

Une mesure de déformation doit être sans dimension, nulle pour un mouvement de corps rigide et en $\underset{\sim}{\mathbf{F}} = \underset{\sim}{\mathbf{I}}$. Lors d'un mouvement de corps rigide, $\underset{\sim}{\mathbf{U}} = \underset{\sim}{\mathbf{V}} = \underset{\sim}{\mathbf{I}}$ d'où $\underset{\sim}{\mathbf{F}} = \underset{\sim}{\mathbf{R}}$. On peut donc définir une mesure de déformation s'annulant pour un mouvement de corps rigide telle que,

$$\underset{\sim}{\mathbf{E}} = \frac{1}{2}\left(\underset{\sim}{\mathbf{C}} - \underset{\sim}{\mathbf{I}}\right) \tag{III.184}$$

$$\underset{\sim}{\mathbf{A}} = \frac{1}{2}\left(\underset{\sim}{\mathbf{I}} - \underset{\sim}{\mathbf{B}}^{-1}\right) \tag{III.185}$$

$\underset{\sim}{\mathbf{E}}$ est le tenseur lagrangien de Green-Lagrange tandis que $\underset{\sim}{\mathbf{A}}$ est le tenseur eulérien d'Euler-Almansi. Il existe plusieurs mesures de déformation qui doivent impérativement vérifier les trois conditions précédemment citées, ainsi que permettre, par un développement limité autour de $\underset{\sim}{\mathbf{F}} = \underset{\sim}{\mathbf{I}}$, de retrouver la mesure de déformation infinitésimale. En posant, $\underset{\sim}{\mathbf{H}} = \underset{\sim}{\mathbf{F}} - \underset{\sim}{\mathbf{I}} = \nabla\underset{\sim}{\mathbf{u}}$, on obtient,

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{\mathbf{A}} &= \underset{\sim}{\mathbf{E}} \\ &= \frac{1}{2}\left(\underset{\sim}{\mathbf{H}} + \underset{\sim}{\mathbf{H}}^T + \underset{\sim}{\mathbf{H}}^T.\underset{\sim}{\mathbf{H}}\right) \end{aligned} \tag{III.186}$$

En négligeant les termes d'ordre 2 dans le cadre des petites perturbations, on retrouve la mesure de déformation infinitésimale

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{2}\left(\underset{\sim}{\mathbf{H}} + \underset{\sim}{\mathbf{H}}^T\right) \tag{III.187}$$

Le gradient des vitesses varie lui aussi suivant qu'il soit exprimé dans la configuration de référence ou dans la configuration déformée.

Dans $\mathcal{C}_0$,

$$d\underline{\dot{\mathbf{x}}} = \underset{\sim}{\dot{\mathbf{F}}}.d\underline{\mathbf{X}} \tag{III.188}$$

avec

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{\dot{\mathbf{F}}} &= \frac{\partial(\underset{\sim}{\mathbf{I}} + \nabla\underline{\mathbf{u}})}{\partial t} \\ &= \nabla\underline{\dot{\mathbf{u}}} \end{aligned} \tag{III.189}$$

le gradient lagrangien des vitesses de déformation est donné par $\underset{\sim}{\dot{\mathbf{F}}}$.

Dans $\mathcal{C}_t$, en utilisant III.176 et III.188, on obtient,

$$d\underline{\dot{\mathbf{x}}} = \underset{\sim}{\mathbf{L}}d\underline{\mathbf{x}} \tag{III.190}$$

avec

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{\mathbf{L}} &= \underset{\sim}{\dot{\mathbf{F}}}.\underset{\sim}{\mathbf{F}}^{-1} \\ &= \frac{\partial\underline{\dot{\mathbf{u}}}}{\partial\underline{\mathbf{X}}}.\frac{\partial\underline{\mathbf{X}}}{\partial\underline{\mathbf{x}}} \\ &= \frac{\partial\underline{\dot{\mathbf{u}}}}{\partial\underline{\mathbf{x}}} \end{aligned} \tag{III.191}$$

le gradient eulérien des vitesses de déformation est donné par $\underset{\sim}{\mathbf{L}} = \underset{\sim}{\dot{\mathbf{F}}}.\underset{\sim}{\mathbf{F}}^{-1}$.

Le gradient de vitesses peut être décomposé en la somme d'un taux de déformation $\underset{\sim}{\mathbf{D}}$ correspondant à la partie symétrique de $\underset{\sim}{\mathbf{L}}$ et d'un taux de rotation $\underset{\sim}{\mathbf{W}}$ correspondant à sa partie antisymétrique tels que,

$$\underset{\sim}{\mathbf{D}} = \underset{\sim}{\mathbf{L}}^S = \frac{1}{2}(\underset{\sim}{\mathbf{L}} + \underset{\sim}{\mathbf{L}}^T) \tag{III.192}$$

$$\underset{\sim}{\mathbf{W}} = \underset{\sim}{\mathbf{L}}^A = \frac{1}{2}(\underset{\sim}{\mathbf{L}} - \underset{\sim}{\mathbf{L}}^T) \tag{III.193}$$

A chaque mesure de déformation correspond une mesure de contraintes conjuguées, ainsi, on définit différents tenseurs de contrainte : le tenseur de Piola Kirchoff 2 ($\underset{\sim}{\mathbf{S}}$) dans la

configuration de référence, le tenseur de Cauchy ($\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}$) dans la configuration déformée, ou encore le tenseur de Piola Kirchhoff 1 ($\underset{\sim}{\pi}$), tenseur bipoint (mi eulérien mi lagrangien). Le tenseur de Kirchhoff ($\underset{\sim}{\tau}$) est aussi utilisé et défini à partir du tenseur de Cauchy par $\underset{\sim}{\tau} = J\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}$. Seul le tenseur de Piola Kirchhoff 1 n'est pas symétrique. La puissance massique des efforts intérieurs est constante et pour chacun des choix de mesure de déformation et de contrainte, on a,

$$\frac{1}{\rho}\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} : \underset{\sim}{\mathbf{D}} = \frac{1}{\rho_0}\underset{\sim}{\mathbf{S}} : \dot{\underset{\sim}{\mathbf{E}}} = \frac{1}{\rho}\underset{\sim}{\pi} : \dot{\underset{\sim}{\mathbf{F}}} = \frac{1}{\rho_0}\underset{\sim}{\tau} : \underset{\sim}{\mathbf{D}} \tag{III.194}$$

L'ensemble de ces mesures de déformation et de contrainte est équivalent en H.P.P car l'hypothèse revient à considérer les deux configurations, déformée et de référence, comme étant identiques. Comme les mesures de déformation sont définies telles que leur développement limité autour de $\underset{\sim}{\mathbf{F}} = \underset{\sim}{\mathbf{I}}$ permet de retrouver la déformation infinitésimale, on obtient une mesure unique des petites déformations.

L'un des problèmes majeures des grandes transformations, mis à part le choix de la mesure de déformation et de contrainte, réside dans le principe d'indifférence matérielle. En effet, la loi de comportement doit être indépendante du choix du référentiel et les tenseurs utilisés, ainsi que leurs dérivées temporelles, doivent donc être objectifs. Dans la cadre des T.F., il est donc nécessaire d'utiliser une dérivée objective afin de garantir le principe d'indifférence matérielle.

III.6.2 Décomposition multiplicative du gradient de la transformation

En grande transformation, la décomposition de la déformation élastique et plastique est réalisée de manière multiplicative sur le gradient de la transformation,

$$\underset{\sim}{\mathbf{F}} = \underset{\sim}{\mathbf{F}}^e\underset{\sim}{\mathbf{F}}^p \tag{III.195}$$

On introduit donc une configuration intermédiaire relâchée $\mathcal{C}_i$ correspondant à une "décharge" à partir de la configuration $\mathcal{C}_t$ (cf. figure III.12).

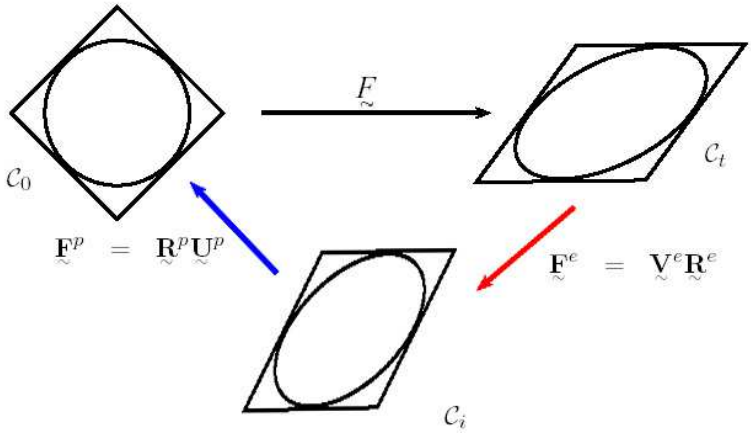


Figure III.12 : Schéma représentant la décomposition du gradient de la transformation en partie élastique et partie plastique.

A partir de l'hypothèse d'une configuration relâchée, il est possible d'exprimer les composantes élastiques et plastiques du gradient de la transformation de la façon suivante,

$$\underset{\sim}{\mathbf{F}}^p = \underset{\sim}{\mathbf{R}}^p\underset{\sim}{\mathbf{U}}^p \tag{III.196}$$
$$\underset{\sim}{\mathbf{F}}^e = \underset{\sim}{\mathbf{V}}^e\underset{\sim}{\mathbf{R}}^e \tag{III.197}$$

$\mathcal{C}_i$ n'est définie qu'à une rotation près. Il faut donc choisir une décharge permettant d'obtenir l'unicité de la configuration relâchée. Le choix le plus simple consiste à considérer que la configuration $\mathcal{C}_i$ est obtenue par une décharge purement élastique, soit $\underset{\sim}{\mathbf{R}}^e = \underset{\sim}{\mathbf{I}}$. Une seconde hypothèse permet d'écrire la décomposition du taux de déformation en partie élastique et partie plastique. Cette hypothèse s'appuie sur le fait que la déformation élastique peut être considérée comme infinitésimale de sorte que,

$$\underset{\sim}{\mathbf{V}}^e = \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \underset{\sim}{\mathbf{I}} \tag{III.198}$$

On obtient alors,

$$\begin{aligned}\underset{\sim}{\mathbf{L}} &= \dot{\underset{\sim}{\mathbf{F}}}\underset{\sim}{\mathbf{F}}^{-1} \\ &= \dot{\overbrace{\underset{\sim}{\mathbf{V}}^e\underset{\sim}{\mathbf{R}}^e\underset{\sim}{\mathbf{F}}^p}}(\underset{\sim}{\mathbf{V}}^e\underset{\sim}{\mathbf{R}}^e\underset{\sim}{\mathbf{F}}^p)^{-1} \\ &= \dot{\underset{\sim}{\mathbf{V}}}^e\underset{\sim}{\mathbf{V}}^{-e} + \underset{\sim}{\mathbf{V}}^e\dot{\underset{\sim}{\mathbf{R}}}^e\underset{\sim}{\mathbf{R}}^{eT}\underset{\sim}{\mathbf{V}}^{-e} + \underset{\sim}{\mathbf{V}}^e\underset{\sim}{\mathbf{R}}^e\dot{\underset{\sim}{\mathbf{F}}}^p\underset{\sim}{\mathbf{F}}^{-p}\underset{\sim}{\mathbf{R}}^{eT}\underset{\sim}{\mathbf{V}}^{-e}\end{aligned} \tag{III.199}$$

Soit,

$$\begin{aligned}\underset{\sim}{\mathbf{D}} &= \underset{\sim}{\mathbf{L}}^S \\ &= (\dot{\underset{\sim}{\mathbf{V}}}^e\underset{\sim}{\mathbf{V}}^{-e})^S + (\underset{\sim}{\mathbf{V}}^e\dot{\underset{\sim}{\mathbf{R}}}^e\underset{\sim}{\mathbf{R}}^{eT}\underset{\sim}{\mathbf{V}}^{-e})^S + (\underset{\sim}{\mathbf{V}}^e\underset{\sim}{\mathbf{R}}^e\dot{\underset{\sim}{\mathbf{F}}}^p\underset{\sim}{\mathbf{F}}^{-p}\underset{\sim}{\mathbf{R}}^{eT}\underset{\sim}{\mathbf{V}}^{-e})^S\end{aligned} \tag{III.200}$$

D'où comme $\underset{\sim}{\mathbf{R}}^e = \underset{\sim}{\mathbf{I}}$ et $\underset{\sim}{\mathbf{V}}^e = \underset{\sim}{\varepsilon}^e + \underset{\sim}{\mathbf{I}}$,

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{\mathbf{D}} &= \dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}^{eS} + (\underset{\sim}{\mathbf{L}}^p + 2\underset{\sim}{\varepsilon}^e\underset{\sim}{\mathbf{W}}^p)^S \\ &= \dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}^e{}_J + \underset{\sim}{\mathbf{D}}^p \end{aligned} \tag{III.201}$$

En négligeant les termes d'ordre deux en $\underset{\sim}{\varepsilon}^e$ et en posant $\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}^e{}_J$ la dérivée de Jaumann par rapport à $\underset{\sim}{\mathbf{W}}^p$, on écrit, $\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}^e{}_J = \dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}^e + 2(\underset{\sim}{\varepsilon}^e\underset{\sim}{\mathbf{W}}^p)^S$.

On peut voir que, moyennant certaines hypothèses, la décomposition multiplicative du gradient de la transformation permet d'obtenir l'additivité du taux de déformation.

III.6.3 Indifférence matérielle et objectivité

Une fois le choix de la décomposition multiplicative du gradient de la transformation réalisé, il est possible d'adopter une formulation en référentiel tournant permettant de garantir l'objectivité de la loi de comportement. Le formalisme en référentiel tournant permet de généraliser aux T.F. les modèles de comportement formulés en H.P.P. Ce formalisme est détaillé dans (Dogui, 1989) et suit trois étapes afin de garantir une dérivée objective :

- Transport des tenseurs de la configuration $\mathcal{C}_0$ vers la configuration $\mathcal{C}_t$ par une rotation $\underset{\sim}{\mathbf{Q}}$
- Dérivation des tenseurs "tournés" dans la configuration $\mathcal{C}_t$
- Transport inverse pour ramener les tenseurs dérivés dans la configuration $\mathcal{C}_0$

Notons que $\underset{\sim}{\mathbf{Q}}$ est un tenseur mi-eulérien, mi-lagrangien et que $\underset{\sim}{\mathbf{Q}}^T\underset{\sim}{\mathbf{Q}} = \underset{\sim}{\mathbf{I}}$.

Pour un tenseur lagrangien quelconque $\underset{\sim}{\mathbf{Z}}$, en appliquant la rotation $\underset{\sim}{\mathbf{Q}}$, on obtient un tenseur $\underset{\sim}{\mathbf{Z}}_Q$ eulérien par son orientation mais lagrangien par ses valeurs propres,

$$\underset{\sim}{\mathbf{Z}}_Q = \underset{\sim}{\mathbf{Q}}^T\underset{\sim}{\mathbf{Z}}\underset{\sim}{\mathbf{Q}} \tag{III.202}$$

Si l'on définit la dérivée temporelle par rapport à ce référentiel tournant,

$$\begin{aligned} \frac{D_Q\underset{\sim}{\mathbf{Z}}}{Dt} &= \underset{\sim}{\mathbf{Q}}\frac{d(\underset{\sim}{\mathbf{Q}}^T\underset{\sim}{\mathbf{Z}}\underset{\sim}{\mathbf{Q}})}{dt}\underset{\sim}{\mathbf{Q}}^T \\ &= \dot{\underset{\sim}{\mathbf{Z}}} + \underset{\sim}{\mathbf{Z}}\underset{\sim}{\mathbf{W}}_Q - \underset{\sim}{\mathbf{W}}_Q\underset{\sim}{\mathbf{Z}} \end{aligned} \tag{III.203}$$

On retrouve ici la forme classique de la dérivée rotationnelle. Si $\underset{\sim}{\mathbf{W}}_Q = \underset{\sim}{\mathbf{W}} = \underset{\sim}{\mathbf{L}}^A$, on obtient la dérivée de Jaumann, si $\underset{\sim}{\mathbf{W}}_Q = \dot{\underset{\sim}{\mathbf{R}}}^T\underset{\sim}{\mathbf{R}}$, on retrouve alors la dérivée de Green-Naghdi (ou dérivée en rotation propre).

La dérivée matérielle de l'équation III.202 donnerait,

$$\underset{\sim}{\dot{\mathbf{Z}}}_Q = \underset{\sim}{\dot{\mathbf{Q}}}^T \underset{\sim}{\mathbf{Z}} \underset{\sim}{\mathbf{Q}} + \underset{\sim}{\mathbf{Q}}^T \underset{\sim}{\dot{\mathbf{Z}}} \underset{\sim}{\mathbf{Q}} + \underset{\sim}{\mathbf{Q}}^T \underset{\sim}{\mathbf{Z}} \underset{\sim}{\dot{\mathbf{Q}}} \tag{III.204}$$

D'où, comme $\underset{\sim}{\dot{\mathbf{Q}}} \underset{\sim}{\mathbf{Q}}^T = \underset{\sim}{\mathbf{W}}_Q$,

$$\underset{\sim}{\dot{\mathbf{Z}}}_Q = Q^T \frac{D_Q \underset{\sim}{\mathbf{Z}}}{Dt} \underset{\sim}{\mathbf{Q}} \tag{III.205}$$

Ainsi, une dérivée objective peut être une dérivée en référentiel tournant qui ne fait intervenir que la dérivé matérielle et la rotation $\underset{\sim}{\mathbf{Q}}$. Le seul choix nécessaire à l'extension aux T.F d'un modèle H.P.P. est le choix de la rotation. Il peut être guidé par l'anisotropie matérielle dans certains cas biens spécifiques (composite à fibre, stratifiés... (cf. (Dogui, 1989)) ou reste au libre choix du numéricien. Les rotations de Jaumann et Green-Naghdi étant déjà implémentées dans ABAQUS, nous nous limiterons au choix de ces rotations.

III.7 Étude paramétrique du modèle

III.7.1 Influence des paramètres sur la réponse en traction

Une étude paramétrique du modèle développé le long des paragraphes précédents est présentée ici. Cette étude permet de voir l'influence, sur une courbe de traction uniaxiale, de la modification d'un des paramètres tandis que les autres restent constants. Pour cette étude, nous avons utilisé un matériau modèle dont les paramètres, lorsqu'ils ne sont pas modifiés pour appréhender leur influence, sont donnés dans le tableau III.1. Nous utilisons ,ici, un écrouissage cinématique simple, les paramètres d'endommagement restent fixes et la fonction de viscosité est de type sinus hyperbolique. Les tests sont réalisés sur un élément en contrainte plane à intégration réduite CPS4R dont les conditions aux limites sont présentées figure III.13. Cet élément est sollicité à vitesse de déformation constante $\dot{\varepsilon} = 10^{-3} s^{-1}$.

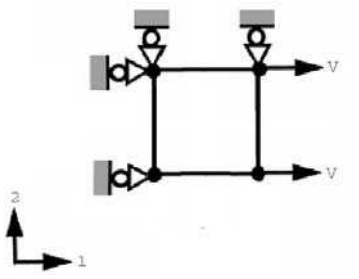
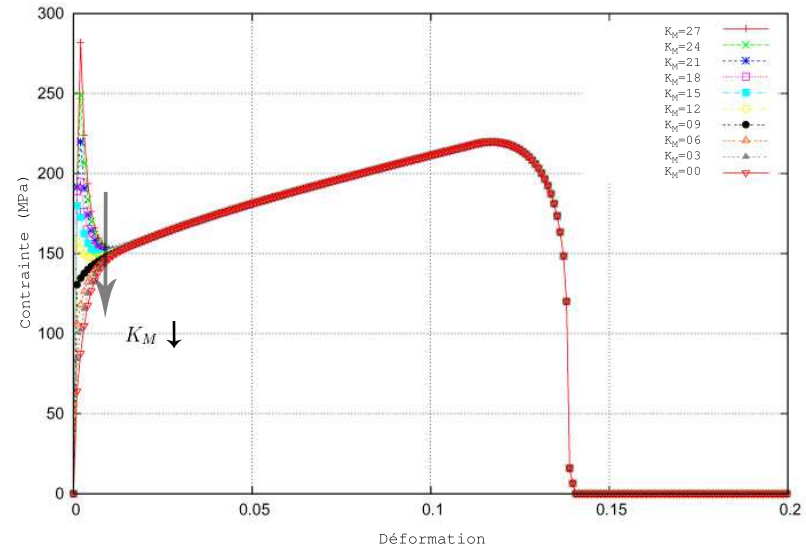
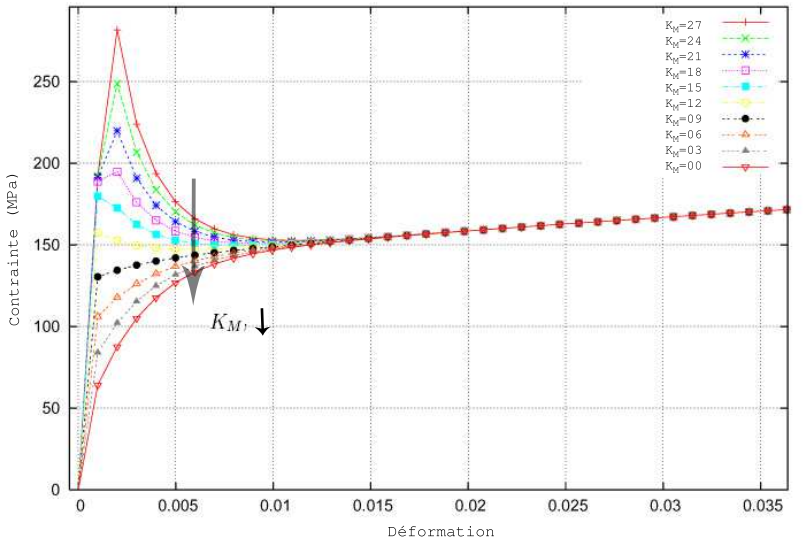


Figure III.13 : Élément CPS4R en traction uniaxiale

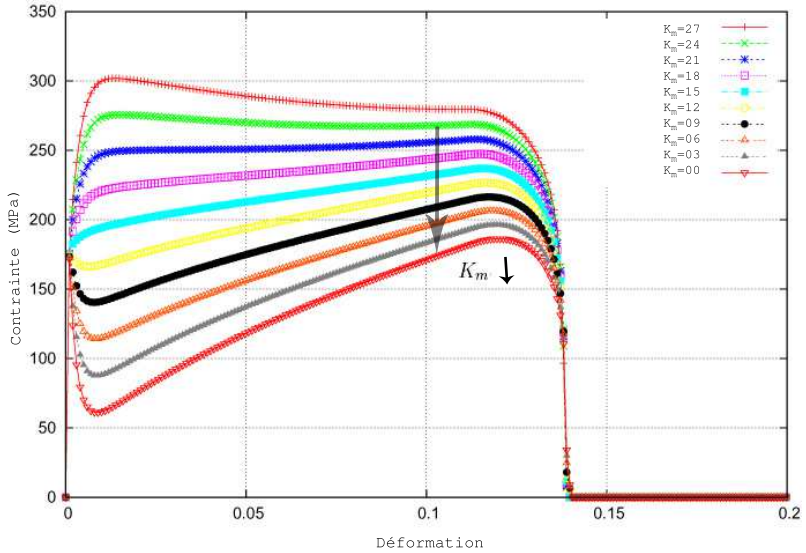
Le paramètre K_M (cf. figure III.14 a et b), plus précisément la différence entre K_M et K_m, permet de piloter la hauteur du pic de Piobert-Lüders. Pour K_m fixé à 10 MPa, lorsque K_M varie de 27 à 12 MPa, il y a formation d'un pic dont la hauteur dépend de la valeur de K_M. Lorsque K_M varie de 0 à 9 MPa, la différence entre K_M et K_m est négative et l'entrée en plasticité est plus ou moins brutale en fonction de la valeur de K_M. Cet aspect


Contrainte (MPa)
Déformation
K_M
K_M=27
K_M=24
K_M=21
K_M=18
K_M=15
K_M=12
K_M=09
K_M=06
K_M=03
K_M=00

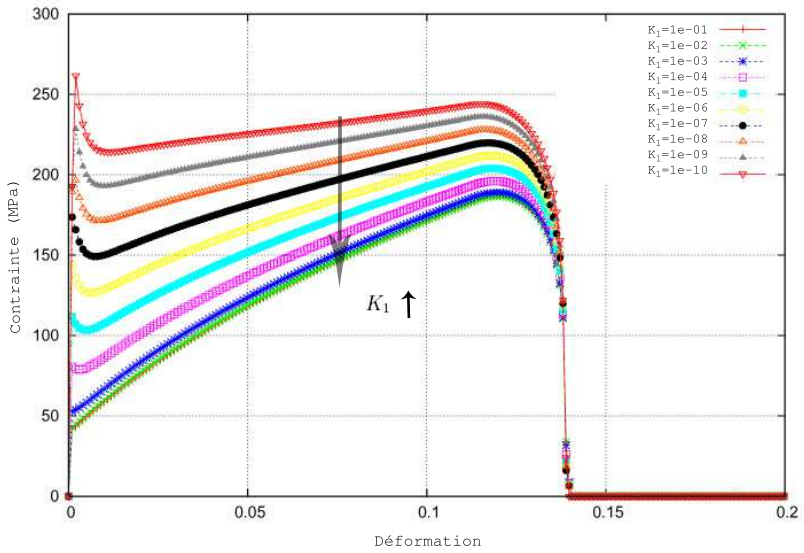
(a)


Contrainte (MPa)
Déformation
K_M
K_M=27
K_M=24
K_M=21
K_M=18
K_M=15
K_M=12
K_M=09
K_M=06
K_M=03
K_M=00

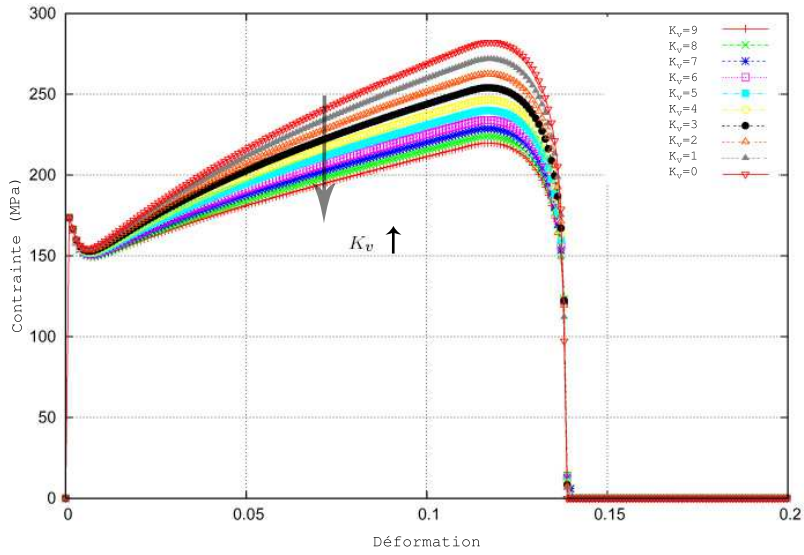
(b)


Contrainte (MPa)
Déformation
K_m
K_m=27
K_m=24
K_m=21
K_m=18
K_m=15
K_m=12
K_m=09
K_m=06
K_m=03
K_m=00

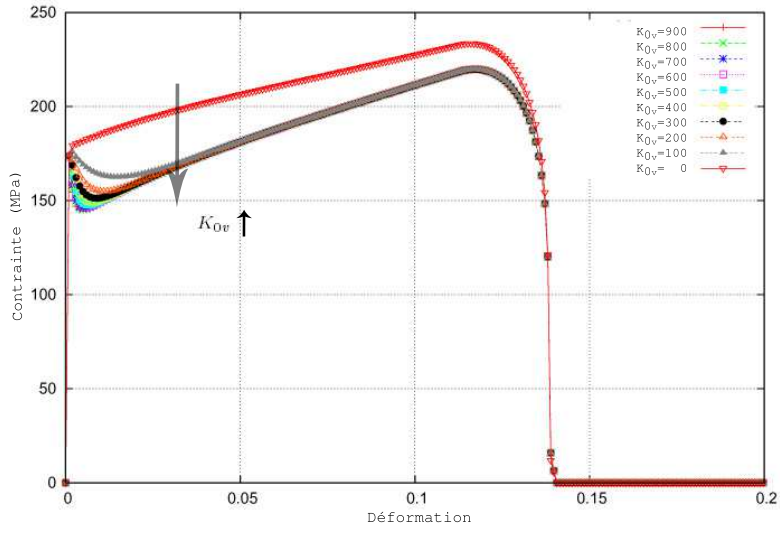
(c)



(d)



(e)



(f)

Figure III.14 : Etude paramétrique : (a) K_M allant de 0 à 27 MPa, (b) K_M zoom sur le pic, (c) K_m allant de 0 à 27 MPa, (d) K_1 allant de 10^{-1} à 10^{-10} s, (e) K_v allant de 0 à 9, (f) K_{0v} allant de 0 à 900.

E (MPa)	ν	σ_y (MPa)	Q (MPa)	b	C (MPa)	a	K_1 (s)	K_M (MPa)
193000	0,346	40	1200	3	900	30	10^{-7}	14

K_m (MPa)	K_{ov}	K_v	S (MPa)	s	β	Y_0 (MPa)
10	400	1	0,125	1	3,4	5,9

Tableau III.1 : Coefficients du matériau modèle

de la formulation peut revêtir un intérêt quant à la modélisation de matériau dont l'entrée en plasticité est notablement différente après une inversion du sens de sollicitation. En effet, lors de sollicitations cycliques par exemple, la première entrée en plasticité se fera pour une valeur proche de $\sigma_y + K_M asinh\left(\frac{\Delta\lambda}{K_1}\right)$, tandis que l'entrée pour les cycles suivants, moyennant une déformation plastique cumulée suffisante pour atteindre la saturation (ici aux alentours des 1%), se fera pour une valeur plus faible proche de $\sigma_y + K_m asinh\left(\frac{\Delta\lambda}{K_1}\right)$ (pour $K_v p \ll 1$). Si par exemple, on choisit $K_m = 0$ et $K_M = 9$, la première entrée en plasticité se fera avec une courbure du type de la courbe en rond noir, tandis que les suivantes auront une courbure ressemblant à celle de la courbe en triangle rouge pointe vers le bas. Nous verrons un exemple de ce type de matériau avec le TA6V dont l'entrée en plasticité est très "raide" tandis que les cycles sont très "ronds". Cette étude sera développée au paragraphe V.2.1.3 concernant l'identification du TA6V.

Le paramètre K_m (cf. figure III.14 c) permet, de la même façon que K_M, de modéliser le pic de Piobert-Lüders lorsque la différence entre K_M et K_m est positive (K_m de 0 à 12 MPa). Par contre, un autre intérêt de ce paramètre, lorsque la différence entre K_M et K_m est négative (K_m de 15 à 27 MPa), pourrait être de modéliser des comportements de type superplasticité. En effet, la courbe supérieure de la figure III.14 c (croix rouge) présente une allure caractéristique des matériaux superplastiques comme par exemple le TA6V en température. Cet effet de la modélisation est lié conjointement à la valeur élevée de K_m et à la présence de K_v. La contrainte visqueuse contribue de manière tellement importante à la contrainte totale que sa saturation avec la plasticité conduit à un adoucissement du comportement global.

Le paramètre K_1 (cf. figure III.14 d) définit la valeur de la contrainte visqueuse lorsque $K_2(p)$ est constant. Ainsi, lorsque K_1 croît, la contrainte visqueuse diminue. On peut voir que lorsque K_1 atteint des valeurs aux alentours de $10^{-10}s^{-1}$ (tout autre paramètre restant égal par ailleurs), la contrainte visqueuse est quasi nulle, on tend alors vers σ_y. Une autre remarque intéressante concerne l'évolution de l'amplitude du pic de Piobert-Lüders avec la valeur de K_1. En effet, l'introduction d'un écrouissage de type isotrope couplé à la viscosité (K_2 fonction de la déformation plastique cumulée) introduit une dépendance du pic de Piobert-Lüders vis à vis de la vitesse de déformation plastique. A K_1 constant, l'amplitude du pic va donc augmenter avec la vitesse de sollicitation et, à $\dot{\varepsilon}$ constante, l'amplitude du pic augmente lorsque K_1 diminue (la contrainte visqueuse augmente). Ce phénomène est observé sur le tantale, l'introduction d'un écrouissage multiplicatif se justifie donc par ces observations expérimentales.

Le paramètre K_v (cf. figure III.14 e) pilote la vitesse de saturation de la contrainte visqueuse avec la déformation plastique cumulée. Cet effet est lui aussi observé sur le tantale dont les courbes à différentes vitesses présentent une saturation de la contrainte visqueuse. Ainsi, lorsque K_v augmente, l'influence de la déformation plastique sur la contrainte visqueuse augmente. Pour la courbe supérieure, triangle rouge pointe en bas, $K_v = 0$, il n'y alors plus d'influence de la déformation plastique sur la viscosité au delà d'environ 1% de déformation

(fin du pic de Piobert-Lüders). Dans ce cas, si des essais à différentes vitesses de déformation sont réalisés, les courbes seront toutes "parallèles". Au contraire, lorsque K_v prend des valeurs non nulles, l'influence de la déformation plastique sur la contrainte visqueuse devient notable et la réponse devient de moins en moins dépendante de la vitesse.

Enfin le paramètre K_{0v} (cf. figure III.14 f) contrôle l'étendue du plateau de Piobert-Lüders. Plus K_{0v} augmente, plus le plateau diminue. On peut voir qu'en choisissant correctement les cinétiques décrivant chacun des phénomènes, il est simple de découpler ces derniers. Ainsi, la description du pic n'a plus d'influence au delà de quelques pour cents et l'ensemble des courbes n'en forment plus qu'une à l'exception du cas limite où $K_{0v} = 0$.

III.7.2 Influence de la vitesse de chargement sur la réponse en traction

En reprenant les paramètres "standard" du matériau modèle utilisé (table III.1), l'influence de la vitesse de sollicitation sur la réponse en traction uniaxiale est présentée sur la figure III.15.

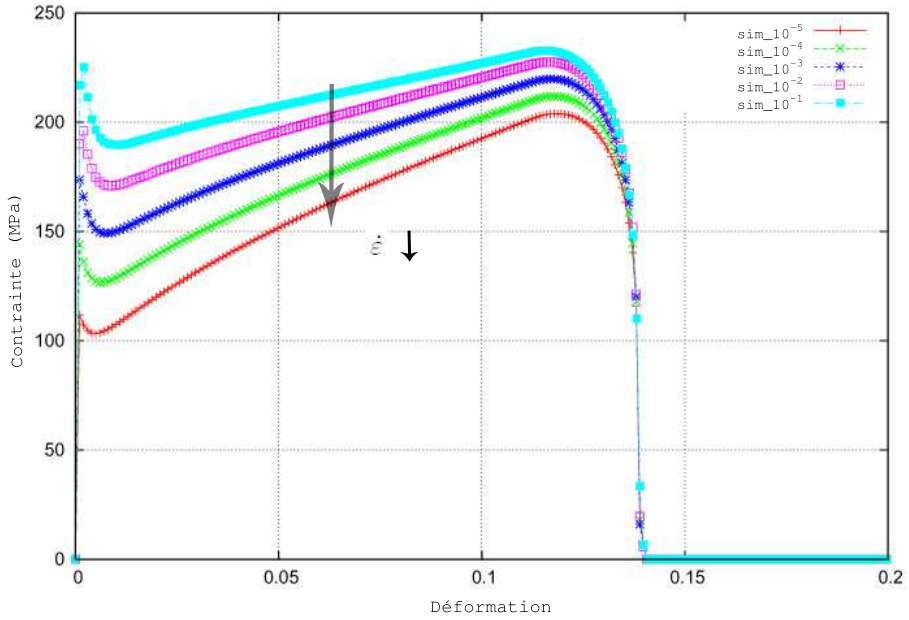


Figure III.15 : Influence de la vitesse de chargement pour $\dot{\varepsilon}$ allant de 10^{-1} à 10^{-5} s^{-1}

Comme précisé précédemment, il est possible d'observer l'influence de la vitesse de sollicitation sur la hauteur du pic de Piobert-Lüders et plus précisément sur la différence entre la limite d'élasticité haute et basse qui augmente lorsque la vitesse augmente. De plus, l'influence de la vitesse de sollicitation sur le comportement évolue avec la déformation plastique jusqu'à atteindre une limite où la réponse du matériau est quasi indépendante de la vitesse de sollicitation. Ainsi, l'endommagement intervient pour une même valeur de déformation quelle que soit la vitesse. On atteint le cas limite du comportement plastique indépendant du temps. Ce modèle décrit très bien le comportement viscoplastique très particulier du tantale, des premiers pour cents de déformation jusqu'à la rupture du matériau.

III.7.3 Validation du modèle anisotrope et comparaison à l'étude (Badreddine, 2006)

Comme souligné dans le paragraphe IV.5.3, le traitement des contraintes planes par le modèle de Simo introduit un tenseur d'ordre 4 jouant le même rôle que le tenseur de Hill décrivant l'anisotropie. Dans ce paragraphe, nous allons valider le modèle à travers une étude préalable (Badreddine, 2006) comportant à la fois une étude expérimentale et numérique. Cette étude est dédiée au comportement élastoplastique anisotrope en grandes déformations et a fait l'objet d'une étude approfondie de l'anisotropie du critère mais aussi de l'écrouissage ainsi que de l'influence du choix de la cinématique en transformations finies. Nous allons donc tester la pertinence du modèle proposé en particularisant le comportement à celui d'un matériau élastoplastique anisotrope endommageable. Les paramètres utilisés et identifiés sur des essais de traction uniaxiale dans les trois directions du plan sont,

E (MPa)	ν	σ_y (MPa)	Q (MPa)	b	C (MPa)	a	F	G
195000	0,3	290	2682	1,65	3650	75	0,496	0,405

H	L	M	N
0,595	1,5	1,5	1,885

Tableau III.2 : Coefficients du modèle utilisés dans (Badreddine, 2006)

Ces paramètres ont été validés par des simulations de traction uniaxiale dans le cas 3D dont la réponse est comparée aux résultats expérimentaux figure III.16 (colonne de droite).

Le jeu de paramètre utilisé en contraintes planes est donné par la table III.3 et correspond aux paramètres précédents moyennant la correspondance entre les deux modèles pour les paramètres décrivant l'anisotropie (équation V.1).

E (MPa)	ν	σ_y (MPa)	Q (MPa)	b	C (MPa)	a	P_{11}	P_{22}
195000	0,3	290	2682	1,65	3650	75	0,6666	0,7273

P_{12}	P_{33}
-0,3966	1,2566

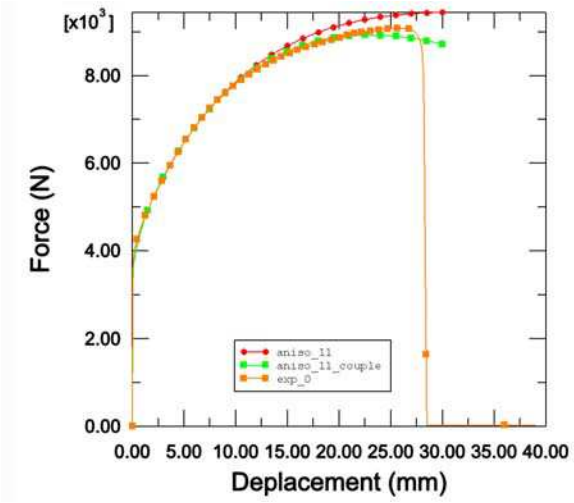
Tableau III.3 : Jeu de paramètre équivalent utilisé pour simuler l'essai de traction uniaxiale en contraintes planes

$$\underset{\sim}{\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} G+H & -H & -G & 0 & 0 & 0 \\ -H & H+F & -F & 0 & 0 & 0 \\ -G & -F & F+H & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2N & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2M & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2L \end{bmatrix}, \quad \underset{\sim}{\mathbf{P}} = \tfrac{1}{3} \begin{bmatrix} 2(G+H) & -H & 0 \\ -H & 2(H+F) & 0 \\ 0 & 0 & 2N \end{bmatrix} \tag{III.206}$$

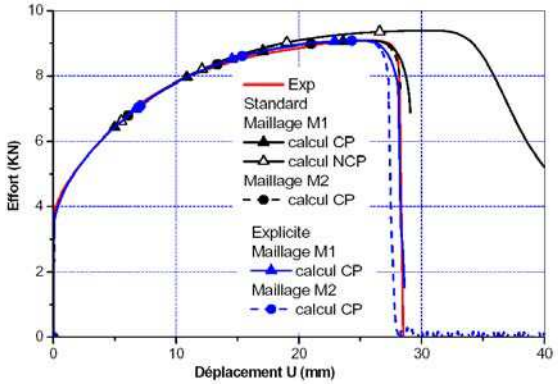
La réponse du modèle particularisé au cas élastoplastique (indépendant du temps) est présentée sur la figure III.16 (colonne de gauche) et confrontée aux résultats expérimentaux dans les trois directions du plan. La simulation est réalisée sur un élément en contraintes planes. La colonne de droite correspondant aux résultats de la thèse (Badreddine, 2006) dans le cas 3D.

En raison de l'influence du maillage sur la localisation de l'endommagement, les courbes les plus pertinentes à comparer sont celles non couplées (courbe à point rouge sur la figure III.16 de la colonne de gauche et courbe à triangle noir vide de la colonne de droite). Les courbes expérimentales et numériques sont très proches pour les directions longitudinale et transverse et quasi confondues pour la direction 45°. De plus, les tendances sont respectées puisque l'écart entre la simulation et les données expérimentales, pour la traction longitudinale, est d'environ +200 N, à la fois pour l'étude de référence (figure III.16(b)) et pour notre modèle (figure III.16(a)). Pour la traction transverse, on observe une petite différence entre l'étude de référence qui présente un écart d'environ +300 N avec la courbe expérimentale (figure III.16(d)) tandis que cet écart diminue pour la réponse de notre modèle (environ +100 N figure III.16(c)). La réponse du modèle est donc cohérente et prend correctement en compte l'anisotropie à travers une formulation unifiée permettant le traitement de la contrainte plane. L'anisotropie de ce matériau (acier inox X6CrNi18-09) reste faible mais nous pourrons voir, paragraphe V.2.1.1, que le modèle est bien capable de prendre en compte l'anisotropie du tantale.

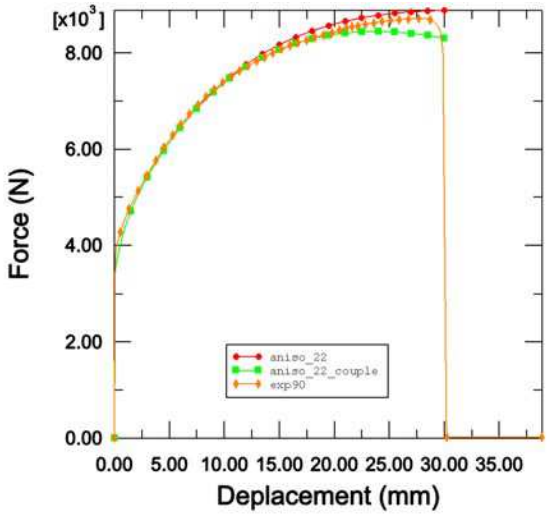
De plus, nous pouvons voir ici que le cas élastoplastique (indépendant du temps) peut bien être décrit comme un cas limite d'un comportement viscoplastique et que notre modèle décrit correctement ce cas en imposant une contrainte visqueuse nulle.



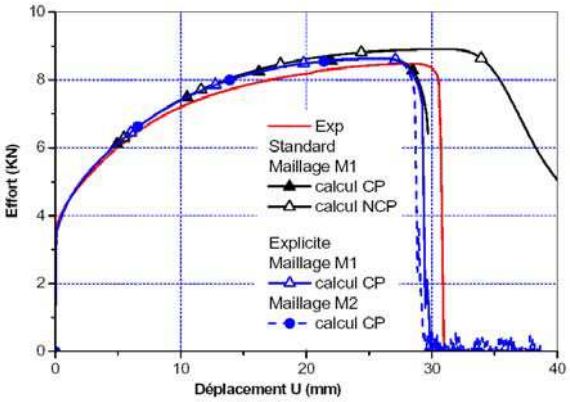
(a)



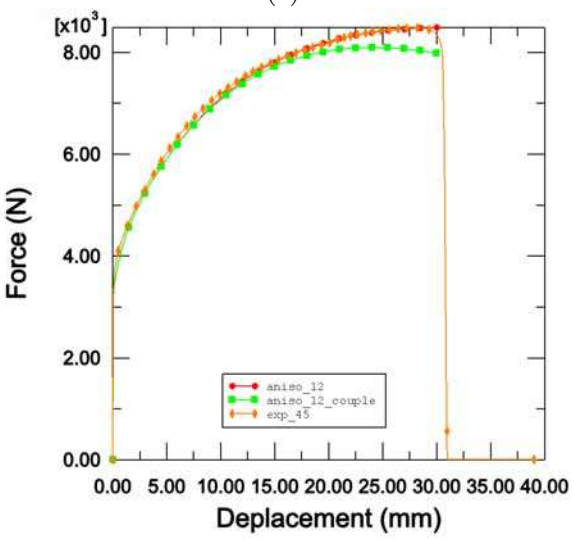
(b)



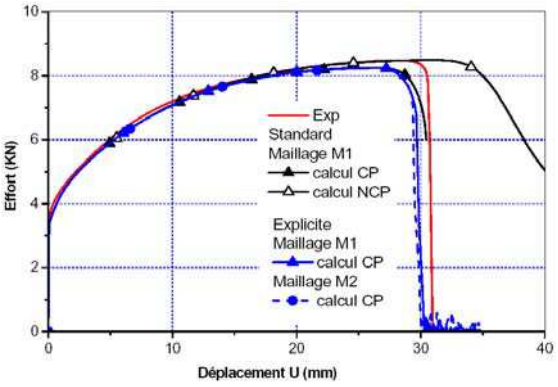
(c)



(d)



(e)



(f)

Figure III.16 : Comparaison des courbes de traction uniaxiale dans différentes directions entre la réponse du modèle "calcul NCP" de la thèse (Badreddine, 2006) (b)(d)(f) et notre modèle (a)(c)(e) : (a)(b) direction de laminage, (c)(d) à 45°, (e)(f) à 90°.

III.8 Prise en compte d'un phénomène particulier : l'effet mémoire

Dans ce paragraphe, nous détaillons certains aspects spécifiques de la modélisation du comportement sous chargement cyclique. En effet, nous avons montré au paragraphe I.6.2 que le tantale présente un durcissement cyclique spécifique dont la courbe de consolidation cyclique est bien différente de sa courbe monotone.

Le durcissement cyclique s'identifie totalement par les écrouissages de type isotrope et sature avec la déformation plastique cumulée. Cette évolution est donc identique quelle que soit l'amplitude de la sollicitation, autrement dit le cycle stabilisé est unique pour un chargement cyclique donné. Cette caractéristique du modèle n'est bien sûr pas du tout en accord avec les observations faites sur le Ta.

Pour palier ce problème, il est nécessaire de décrire les valeurs à saturation des écrouissages de type isotrope (au moins un) par une nouvelle variable dont l'influence ne sature pas avec les cycles. La déformation maximale est un bon candidat pour ce type de modélisation comme l'ont proposé (Chaboche et al., 1979), (Ohno, 1982), (Nouailhas et al., 1985a), (Nouailhas et al., 1985b).

Dans le cadre de notre formulation, nous proposons d'introduire cette nouvelle variable pour décrire l'évolution du couplage écrouissage isotrope-viscosité uniquement. En appelant ρ cette nouvelle variable gardant mémoire de la déformation maximale, on peut décrire l'évolution de ρ à l'aide d'une surface index dans l'espace des déformations (figure III.17).

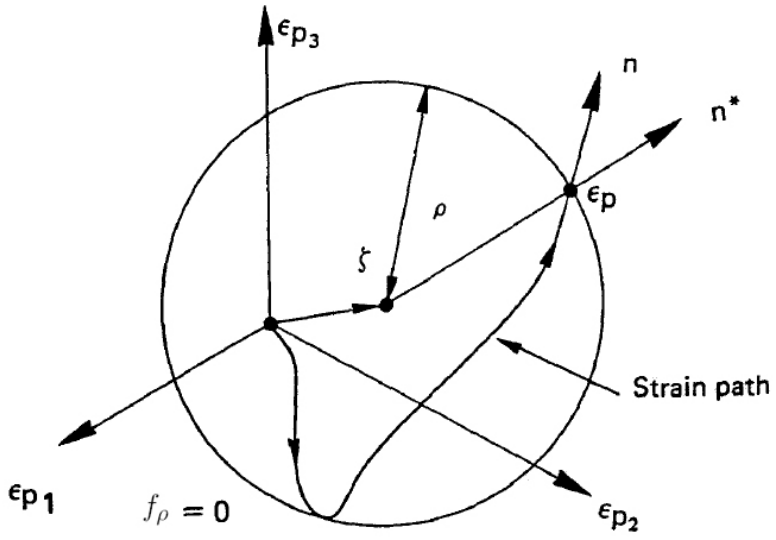


Figure III.17 : Surface index gardant mémoire de la déformation plastique maximale d'après (Chaboche et al., 1979).

Où $\underset{\sim}{\mathbf{n}}$ et $\underset{\sim}{\mathbf{n}}^\star$ désignent respectivement les normales aux surfaces de charge et index. Cette surface index est le pendant de la surface de charge dans l'espace des déformations, ξ désigne son centre (équivalent à l'écrouissage cinématique) et ρ son rayon (équivalent à l'écrouissage isotrope).

Nous décidons de conserver une surface de charge centrée ($\xi = 0$) et l'évolution de ρ suit celle de la déformation plastique maximale jusqu'à un certain seuil ρ_{max}. La surface index s'écrit,

$$f_\rho = \frac{2}{3}\left|\left|\underset{\sim}{\varepsilon}^{vp}\right|\right| - \rho \leq 0 \tag{III.207}$$

Il n'y a écoulement que lorsque l'état de déformation plastique se trouve sur la surface, l'équation d'évolution du rayon de la surface index est alors donnée par,

$$\dot{\rho} = \dot{p} \tag{III.208}$$

Dans la cas d'une sollicitation alternée uniaxiale, ρ conserve donc la mémoire de $\frac{1}{2}\Delta\varepsilon^{vp}_{max}$. En outre, on bloque la dilatation de cette surface index à une valeur de ρ_{max} permettant de saturer l'influence du couplage écrouissage cinématique-viscosité. L'évolution de la contrainte de traînée ne dépend alors plus de la déformation plastique cumulée p mais du rayon de la surface index ρ telle que,

$$K_2 = \left(K_m + (K_M - K_m)e^{-K_{0v}\rho}\right)e^{-K_v\rho} \tag{III.209}$$

On obtient ainsi une contrainte visqueuse qui diminue avec l'amplitude de la déformation plastique maximale jusqu'à un certain seuil où cette évolution sature.

Cette modélisation introduit un effet mémoire permanent puisque la surface index ne peut qu'augmenter. D'autres équations d'évolution de la surface peuvent être proposées afin de modéliser l'évanescence partielle ou totale de la mémoire (Nouailhas et al., 1985a).

En conclusion

Nous avons formulé un modèle de comportement dans le cadre de la thermodynamique des milieux continus dont les principales caractéristiques sont,

- *des écrouissages multi-cinématique et isotrope*
- *l'introduction d'écrouissages de type isotrope permettant le couplage écrouissage cinématique-isotrope et viscosité-écrouissage isotrope*
- *différentes formulations de la contrainte visqueuse de type loi puissance et sinus hyperbolique*
- *le couplage avec l'endommagement ductile isotrope décrit par une variable scalaire unique*

Ce modèle de comportement est étendu au traitement de la contrainte plane par une formulation de type "mapping" permettant,

- *d'imposer naturellement la contrainte plane sur l'ensemble des variables et notamment l'écrouissage cinématique*
- *de modéliser l'anisotropie du critère et de l'écrouissage*

L'extension de cette formulation aux transformations finies est réalisée à l'aide d'une formulation en référentiel tournant permettant de séparer les non-linéarités cinématiques et matérielles.

Enfin, la prise en compte d'un effet de mémoire de la déformation à travers le couplage écrouissage isotrope-viscosité est présentée.

Chapitre -IV-

Aspects numériques

Sommaire

IV.1 Introduction 201
IV.2 Discrétisation spatiale 201
IV.2.1 Principe des puissances virtuelles 201
IV.2.2 Méthodes de résolution 204
IV.2.2.1 Méthode statique implicite 205
IV.2.2.2 Méthode dynamique explicite 206
IV.3 Discrétisation temporelle 207
IV.3.1 Intégration explicite 208
IV.3.2 Intégration implicite 209
IV.4 Intégration locale du modèle 3D 214
IV.4.1 Intégration des équations constitutives couplées 214
IV.4.2 Réduction du système 216
IV.5 Intégration locale du modèle en contraintes planes 220
IV.5.1 Algorithme CP1 (Hammi, 2000), (Lestriez, 2003) 220
IV.5.2 Algorithme CP2 (Aravas, 1987), (Doghri, 1995) 222
IV.5.3 Algorithme CP3 (Simo et Taylor, 1986) 228
IV.5.3.1 Intégration des équations constitutives couplées 228
IV.5.3.2 Réduction du système 229
IV.6 Calcul de la matrice tangente 233
IV.7 Confrontation des différents algorithmes 239
IV.7.1 Tests académiques 240
IV.7.2 Emboutissage : Essai Swift 241

IV.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons détailler les principales étapes de la résolution du problème mécanique 3D, ainsi que l'intégration de la loi de comportement élastoviscoplastique endommageable développée au chapitre précédent. De nombreux ouvrages en mécanique non linéaire des structures détaillent les aspects numériques du traitement d'un problème aux valeurs initiales et aux limites (PVIL). Nous n'en citerons que quelques uns comme (Crisfield, 1991), (Zienkiewicz, 1994), (Bonnet et Wood, 1997), (Simo et Hughes, 1997), (Ibrahimbegovic, 2006).

IV.2 Discrétisation spatiale

IV.2.1 Principe des puissances virtuelles

Soit une structure déformable de volume $\Omega \subset \mathcal{R}^3$ et de frontière $\partial\Omega \subset \mathcal{R}^2$ soumise à un chargement constitué de forces volumiques $\underline{\mathbf{f}}^v$, forces surfaciques $\underline{\mathbf{t}}^d$ appliquées sur $\partial\Omega_t$ ainsi qu'un champs de déplacement $\underline{\mathbf{u}}^d$ imposé sur $\partial\Omega_u$.

Les équations d'équilibre sont vérifiées en tout point du volume du solide. Les conditions aux limites sont quant à elles appliquées sur la surface extérieure du domaine et conditionnent l'état d'équilibre du solide s'écrivant,

$$\mathrm{div}\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} + \underline{\mathbf{f}}^v = \rho\underline{\ddot{\mathbf{u}}} \tag{IV.1}$$

où ρ désigne la masse volumique et $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}$ le champ de contraintes.

Les conditions aux limites peuvent être de deux types, les conditions en contraintes imposées sur $\partial\Omega_t$ et les conditions en déplacements imposés sur $\partial\Omega_u$ (figure IV.1) avec $\partial\Omega = \partial\Omega_u \cup \partial\Omega_t$ et $\partial\Omega_u \cap \partial\Omega_t = \emptyset$

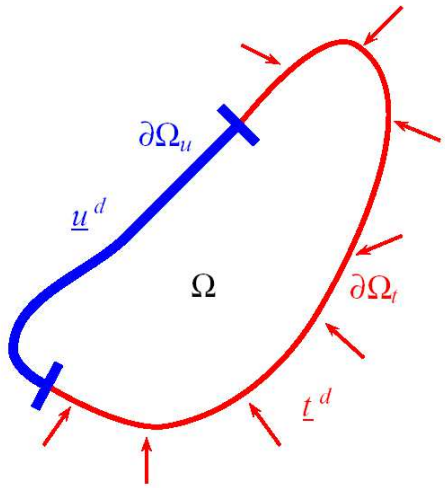


Figure IV.1 : Conditions aux limites appliquées à un solide Ω d'après (Forest et al., 2005).

Ces conditions s'écrivent,

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}.\underset{\sim}{\mathbf{n}} = \underline{\mathbf{t}}^d \text{ sur } \partial\Omega_t \quad \text{(IV.2)}$$

$$\underline{\mathbf{u}} = \underline{\mathbf{u}}^d \text{ sur } \partial\Omega_u \quad \text{(IV.3)}$$

où $\underset{\sim}{\mathbf{n}}$ est la normale sortante à la surface $\partial\Omega$.

La forme forte du problème mécanique est définie par l'ensemble des équations de conservation, ainsi que par la prise en compte des conditions aux limites. La première équation de conservation est celle de la quantité de mouvement écrite équation IV.1, tandis que la seconde est l'équation de conservation de la masse s'écrivant,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \dot{\underline{\mathbf{u}}}) = 0 \quad \text{(IV.4)}$$

Dans le cas d'un matériau incompressible, la masse volumique est constante, et l'incompressibilité se traduit par,

$$\text{div}(\dot{\underline{\mathbf{u}}}) = 0 \quad \text{(IV.5)}$$

La résolution du problème d'équilibre doit permettre d'obtenir les champs de déformations et de contraintes en tout point $\underline{\mathbf{x}}$ du solide Ω (ainsi, bien sur, que les champs des variables d'état). Les champs solutions doivent donc vérifier, en outre, les équations de comportement et de compatibilité des déformations. Le tenseur taux de déformation $\underset{\sim}{\mathbf{D}}$ compatible s'écrit alors (équation IV.6),

$$\underset{\sim}{\mathbf{D}} = \frac{1}{2}(\text{grad}(\dot{\underline{\mathbf{u}}}) + \text{grad}(\dot{\underline{\mathbf{u}}})^T) \quad \text{(IV.6)}$$

La forme faible associée au problème d'équilibre s'écrit sous la forme du principe des puissances virtuelles (P.P.V) de la façon suivante,

$$\int_\Omega \rho \ddot{\underline{\mathbf{u}}}.\delta\dot{\underline{\mathbf{u}}} d\Omega = -\int_\Omega \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} : \delta\underset{\sim}{\mathbf{D}} d\Omega + \int_\Omega \underline{\mathbf{f}}^v.\delta\dot{\underline{\mathbf{u}}} d\Omega + \int_{\Omega_t} \underline{\mathbf{t}}^d.\delta\dot{\underline{\mathbf{u}}} dS \quad \text{(IV.7)}$$

quel que soit $\delta\dot{\underline{\mathbf{u}}}$ le champ de vitesse virtuel cinématiquement admissible. $\delta\underset{\sim}{\mathbf{D}}$ représente le champ taux de déformation virtuel.

La méthode des éléments finis nécessite la discrétisation du domaine Ω afin de linéariser la forme variationnelle faible de l'équation d'équilibre. Le membre de droite de l'équation IV.7 s'écrit alors, en notation matricielle,

$$\begin{aligned} I_e &= -\int_{\Omega_e} \langle \delta \dot{u}_e^N \rangle [B^e]^T \{\sigma_e\} \, d\Omega_e + \int_{\Omega_e} \langle \delta \dot{u}_e^N \rangle [N_e]^T \{f_e^v\} \, d\Omega_e \\ &\quad + \int_{\Omega_t} \langle \delta \dot{u}_e^N \rangle [N_e]^T \left\{t_e^d\right\} dS \end{aligned} \tag{IV.8}$$

L'indice (e) faisant référence à un élément de la discrétisation et N à un noeud de cet élément, les champs de déplacement sont alors approchés par la matrice de fonction d'interpolation au noeud $[N_e]$ tels que,

$$\{u_e\} = [N_e] \left\{u_e^N\right\} \tag{IV.9}$$

La même fonction d'interpolation est utilisée pour les champs virtuels de déplacement et de vitesse en vertu de l'hypothèse de Galerkine. La matrice déformation-déplacement de l'élément (e) relie le taux de déformation à la vitesse de déplacement au noeud,

$$\{D_e\} = [B_e] \left\{\dot{u}_e^N\right\} \tag{IV.10}$$

$$[B_e] = \frac{\partial \{N_e\}}{\partial \{x^N\}} \tag{IV.11}$$

Il est possible de synthétiser l'équation IV.8 sous la forme IV.12 en distinguant les efforts intérieurs des efforts extérieurs,

$$I_e = \langle \delta \dot{u}_e^N \rangle \left(- \left\{F_e^{int}\right\} + \left\{F_e^{ext}\right\} \right) \tag{IV.12}$$

où les forces extérieures et intérieures s'écrivent,

$$\left\{F_e^{int}\right\} = \int_{\Omega_e} [B^e]^T \{\sigma_e\} \, d\Omega_e \tag{IV.13}$$

$$\left\{F_e^{ext}\right\} = \int_{\Omega_e} [N_e]^T \{f_e^v\} \, d\Omega_e + \int_{\Omega_t} [N_e]^T \left\{t_e^d\right\} dS \tag{IV.14}$$

L'équilibre global du solide s'obtient par sommation de la fonctionnelle élémentaire I_e quel que soit le champ global de déplacement virtuel cinématiquement admissible,

$$I = \sum_e I_e = \langle \delta \dot{u}^N \rangle \left(- \left\{F^{int}\right\} + \left\{F^{ext}\right\} \right) = 0 \tag{IV.15}$$

Classiquement, la quantité de droite de l'équation IV.15 prend le nom de résidu. L'équilibre global du solide est atteint en statique lorsque ce résidu est nul ou bien, en dynamique, lorsqu'il est égal à l'opposé du produit de la masse par l'accélération.

$$\left\{F^{int}\right\} = \sum_e \left\{F_e^{int}\right\} \tag{IV.16}$$

$$\left\{F^{ext}\right\} = \sum_e \left\{F_e^{ext}\right\} \tag{IV.17}$$

$$\{R\} = \left\{F^{int}\right\} - \left\{F^{ext}\right\} \tag{IV.18}$$

Dans le cas quasi-statique, I est nulle et l'équilibre s'écrit,

$$\{R\} = \{0\} \tag{IV.19}$$

Dans le cas dynamique, I prend la forme de l'équation IV.20,

$$I = \langle \delta \dot{u}^N \rangle \left(\sum_e \int_{\Omega_e} \rho [N_e]^T [N_e] \, d\Omega \right) \left\{ \delta \ddot{u}^N \right\} \tag{IV.20}$$

L'équilibre global doit alors vérifier,

$$[M] \left\{ \delta \ddot{u}^N \right\} + \{R\} = \{0\} \tag{IV.21}$$

avec l'expression de la matrice masse globale donnée par l'expression IV.22,

$$[M] = \sum_e \int_{\Omega_e} \rho [N_e]^T [N_e] \, d\Omega \tag{IV.22}$$

Suivant le choix de la méthode de résolution, il est possible, sous ABAQUS, pour un même problème quasi-statique, d'utiliser soit la méthode statique implicite résolvant de manière itérative l'équation IV.19, soit la méthode dynamique explicite résolvant l'équation IV.21. Par la suite, nous présenterons ces deux méthodes que nous avons utilisées pour le même modèle.

IV.2.2 Méthodes de résolution

Le système non linéaire obtenu à l'équation IV.15 caractérise le problème d'équilibre de la structure élasto-viscoplastique. Sa résolution peut suivre deux schémas que nous allons développer : l'un dit statique implicite et l'autre dynamique explicite.

Le schéma statique implicite passe par une linéarisation incrémentale associée à une résolution itérative de type Newton. Cet algorithme possède l'avantage d'une convergence quadratique pourvu que la matrice Jacobienne soit consistante avec le schéma d'intégration locale (Simo et Taylor, 1985), (Nagtegaal, 1982).

Le schéma dynamique explicite, quant à lui, peut parfois être utilisé pour traiter des cas quasi-statiques. Cependant, cette méthode est conditionnellement stable (à la différence de la méthode implicite) en fonction du pas de temps mais ne nécessite pas le calcul de la matrice Jacobienne. Le calcul de structure en grandes déformations avec endommagement et contact frottement est souvent plus aisé à réaliser avec une méthode de résolution dynamique explicite. En effet, la matrice Jacobienne devenant mal conditionnée lors de l'apparition de l'endommagement, pénalise considérablement la convergence du schéma de résolution global. Cette Jacobienne n'étant pas nécessaire aux algorithmes explicites, ces derniers permettent de simuler la propagation de fissures sans effet sur la convergence. Cependant, il est nécessaire de bien maîtriser le pas de temps pour conserver la stabilité de la solution.

IV.2.2.1 Méthode statique implicite

Le résidu de l'équation IV.19 doit être nul sur un intervalle de temps donné [0;t] afin de satisfaire les conditions d'équilibre de la structure. Ainsi, la résolution de cette équation passe par sa linéarisation. L'équation IV.19 s'écrit alors sur l'intervalle $[t_n; t_{n+1}]$,

$$\{R\}^{s+1} = \{R\}^s + \frac{\partial \{R\}}{\partial \{u\}}^s (\{u\}^{s+1} - \{u\}^s) \tag{IV.23}$$

Ainsi, l'objectif de la méthode itérative est de déterminer le champ de déplacement à l'instant t_{n+1} permettant d'obtenir un résidu nul à l'instant t_{n+1} et donc de vérifier les équations d'équilibre. Initialement, i.e à l'itéré s=0, les quantités à l'instant t_{n+1} valent les quantités à l'instant t_n. A convergence, les quantités à l'itéré s+1 valent les quantités à l'instant t_{n+1}.

Lors du développement de Taylor à l'ordre 1, la matrice Jacobienne $[K_T]$ apparaît

$$[K_T]^s = \frac{\partial \{R\}}{\partial \{u\}}^s \tag{IV.24}$$

Il existe deux non linéarités dans le résidu, une non linéarité matérielle par la présence de $\{\sigma\}$ et une non linéarité géométrique provenant de la dépendance des fonctions de forme au déplacement. En négligeant cette dernière non-linéarité (faible distorsion sur un incrément de temps), la matrice tangente élémentaire peut s'écrire, en dérivant l'équation IV.18,

$$\begin{aligned}[K_T] = & \int_{\Omega_e} [B^e]^T \frac{\partial \{\sigma_e\}}{\partial \{\varepsilon_e\}} [B^e] \, d\Omega_e - \int_{\Omega_e} [N_e]^T \frac{\partial \{f_e^v\}}{\partial \{u\}} d\Omega_e \\ & - \int_{\Omega_t} [N_e]^T \frac{\partial \{t_e^d\}}{\partial \{u\}} dS \end{aligned} \tag{IV.25}$$

Différents termes apparaissent dans l'équation IV.25 : un terme correspondant à l'influence du comportement sur la rigidité globale de la structure, un autre à la variation des forces de volume et un troisième présentant la variation des forces extérieures appliquées. $[K_T]$ est la matrice de rigidité tangente, tandis que $\frac{\partial\{\sigma\}}{\partial\{\varepsilon\}}$ est la matrice tangente matérielle ou Jacobienne matérielle. Cette Jacobienne matérielle nécessite l'intégration locale des équations constitutives et doit être calculée et retournée au solveur éléments finis afin de résoudre l'équilibre globale. Son calcul est déterminant et conditionne la convergence de l'algorithme de Newton-Raphson global. La matrice tangente matérielle incrémentale permet une meilleure convergence que la matrice tangente matérielle continue, pourvue qu'elle soit consistante avec le schéma d'intégration local. Le calcul de cette matrice sera explicité au paragraphe IV.6.

Un des avantages majeurs de la méthode explicite réside dans l'absence du calcul de la matrice Jacobienne matérielle afin de résoudre l'équilibre global. Par la suite, nous nous attacherons à présenter cette méthode permettant de pousser plus loin les calculs couplés.

IV.2.2.2 Méthode dynamique explicite

Bien que très attractive pour sa robustesse, la méthode explicite possède quelques inconvénients. Cette méthode est conditionnellement stable et peut atteindre des pas de temps très petits menant à des temps de calcul prohibitifs. Initialement développée, comme son nom l'indique, pour traiter des cas dynamiques, cette méthode peut s'appliquer aux cas quasi-statiques. C'est dans ce cas précis que le pas de temps peut atteindre des valeurs de l'ordre de $10^{-9}s$.

Pour résoudre ce problème, il est possible de jouer sur la valeur de la densité pilotant le pas de temps (cf. équation IV.29). Cependant, cette densité intervenant aussi dans le calcul de la matrice masse (équation IV.22), il existe une limite au delà de laquelle le calcul devient très instable, présentant des effets d'inertie notables. Le produit de la matrice masse par l'accélération n'est alors plus négligeable même si le cas traité est quasi-statique.

Le principe de l'algorithme est le suivant, en reprenant l'équation IV.21, il est d'abord possible d'obtenir l'accélération à l'instant t de pas Δt_{i+1},

$$\{\ddot{u}\}_t = [M]^{-1}\left(\left\{F^{ext}\right\}_t - \left\{F^{int}\right\}_t\right) \tag{IV.26}$$

De cette valeur découle la valeur de la vitesse au milieu du pas,

$$\{\dot{u}\}_{t+\frac{\Delta t_{i+1}}{2}} = \{\dot{u}\}_{t-\frac{\Delta t_i}{2}} + \frac{\Delta t_{i+1} - \Delta t_i}{2}\{\ddot{u}\}_t \tag{IV.27}$$

La vitesse au milieu du pas permet d'obtenir la valeur du déplacement à la fin du pas,

$$\{u\}_{t+\Delta t_{i+1}} = \{u\}_t + \Delta t_{i+1}\{\dot{u}\}_{t+\frac{\Delta t_{i+1}}{2}} \tag{IV.28}$$

La stabilité d'un tel schéma d'intégration est fortement conditionné par le pas de temps. Ce pas de temps est calculé, sous ABAQUS, de la façon suivante,

$$\Delta t = min(\frac{h_{min}}{C_d}) \tag{IV.29}$$

où h_{min} représente la taille de maille minimale et C_d la vitesse d'une onde traversant l'élément. Cette vitesse est donc dépendante de certaines caractéristiques matériau et peut être écrite,

$$C_d = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \tag{IV.30}$$

avec λ et μ les coefficients de Lamé et ρ la densité du matériau.

Ainsi, le pas de temps diminue principalement lorsque la taille de maille diminue et lorsque la densité diminue.

Afin d'augmenter le pas de temps, dans l'objectif d'utiliser la méthode dynamique explicite en quasi-statique, il est souvent nécessaire, à taille de maille fixée, d'augmenter artificiellement la densité.

Ceci peut se réaliser de plusieurs façons suivant les cas. La première consiste à choisir une densité supérieure à la densité réelle. Ce moyen n'est bien sûr utilisable que dans le cas où la densité réelle n'intervient pas dans la loi de comportement. Ceci est un point limitant pour certain type de comportement (lors d'un couplage thermo-mécanique par exemple) et peut être pallié par l'utilisation du "mass scaling" (Hibbit et al., 2004) qui permet artificiellement d'augmenter la densité dans le calcul du pas de temps, tout en gardant la densité réelle dans la loi de comportement.

Une dernière voie pour diminuer le temps de calcul en conservant la densité réelle consiste à augmenter la vitesse de sollicitation pendant un temps plus court. Ceci n'est jamais envisagé par la suite car nos matériaux sont visqueux et donc très dépendant de la vitesse de chargement.

Après avoir abordé les aspects de la discrétisation spatiale ainsi que les méthodes de résolution associées, nous allons maintenant nous attacher à décrire les méthodes de discrétisation temporelle afin d'intégrer les équations constitutives.

IV.3 Discrétisation temporelle

Les équations constitutives du modèle de comportement synthétisées au paragraphe III.4 font apparaître les équations d'évolution (temporelle) des déformations plastiques et autres variables d'état.

La discrétisation temporelle des équations d'évolution sur l'intervalle de temps $[t; t + \Delta t]$ nécessite généralement la mise en oeuvre de méthodes numériques d'intégration. Ces équations d'évolution sont des équations différentielles d'ordre 1 et peuvent s'écrire sous la forme de l'équation IV.31. Leur résolution est classique et développée dans différents ouvrages traitant des aspects numériques des équations constitutives (Crisfield, 1991), (Simo et Hughes, 1997), (Besson et al., 2001), (Ibrahimbegovic, 2006).

$$\dot{\underset{\sim}{\mathbf{X}}} = \dot{\lambda} \underset{\sim}{\mathbf{F}}(\underset{\sim}{\mathbf{X}}, t) \tag{IV.31}$$

Dans tous les cas, il existe une erreur d'évaluation des quantités à l'instant t+Δt. Cette erreur est principalement due au fait que l'on néglige les termes d'ordres 2 dans les différents algorithmes d'intégration.

Pour résoudre ce problème, il existe deux stratégies :

- Augmenter la précision de l'algorithme d'intégration permettant de calculer les quantités à t+Δt. Ceci s'adresse donc principalement aux méthodes explicites (Euler explicite, Runge Kutta...) que l'on peut améliorer en élevant l'ordre des méthodes ou bien en utilisant des méthodes de sous-incréments.

- Utiliser une correction des valeurs calculées dans un premier temps (prédiction) pour les ramener sur la surface de charge (correction). Ces algorithmes composent la large famille des algorithmes de prédiction/correction, dont la prédiction peut être toute forme d'estimation des quantités t+Δt et la correction, toute forme de retour sur la surface de charge permettant de minimiser l'erreur commise sur la prédiction.

Dès lors, différents algorithmes d'intégration des équations d'évolution sont possibles se basant sur une stratégie de minimisation de l'erreur pour les méthodes explicites et sur des stratégies de combinaisons de prédiction/correction pour les méthodes implicites.

De manière générale, le choix se porte bien souvent sur les algorithmes de prédiction/correction (et notamment celui bien connu de prédiction élastique retour radial) au détriment des algorithmes explicites plus gourmands en temps de calcul. Ces derniers sont utilisés lorsque le calcul de la matrice Jacobienne matérielle est difficile, voir impossible.
Parmi les algorithmes de prédiction/correction, nous pouvons citer les algorithmes :

- de prédiction élastique retour radial (PERR) (Wilkins, 1964), (Mendelson, 1986)

- de prédiction élastique retour sécant ((PERS) la correction est réalisée suivant la contrainte moyenne (Rice et Tracey, 1973))

- de prédiction tangente retour radial ((PTRR) la prévision provient cette fois de l'intégration des équations d'évolution par la méthode d'Euler explicite) (Schreyer et al., 1979)(Yoder et Whirley, 1984).

Notons qu'il est aussi possible d'améliorer les méthodes de prédiction/correction en utilisant une sous-incrémentation.

Les facteurs déterminant d'un bon algorithme d'intégration sont sa précision, sa capacité de convergence, et sa stabilité.

IV.3.1 Intégration explicite

Nous ne présentons ici que certains schémas d'intégration explicite à pas indépendants. Dans ces algorithmes, la solution à la fin de l'incrément ne dépend pas de celle obtenue à la fin du pas précédent. Les schémas d'intégration explicites permettent d'exprimer une quantité à la fin de l'incrément, uniquement fonction de quantités connues au début de cet incrément. La méthode la plus classique d'intégration explicite d'ordre 1 est la méthode d'Euler explicite ("Forward Euler scheme"). Elle s'écrit,

$$\underset{\sim}{\mathbf{X}}_{n+1} = \underset{\sim}{\mathbf{X}}_{n} + \underset{\sim}{\mathbf{k}}_{1} \tag{IV.32}$$

avec $\underset{\sim}{\mathbf{k}}_1$ valant,

$$\underset{\sim}{\mathbf{k}}_1 = \Delta\lambda_1 \underset{\sim}{\mathbf{F}}(\underset{\sim}{\mathbf{X}}_n, t_n) \tag{IV.33}$$

$\underset{\sim}{\mathbf{k}}_1$ est d'ordre 1 en t. Il existe la méthode d'Euler d'ordre 2 obtenue par un développement de Taylor à l'ordre 2 et améliorant la précision de ce type d'algorithme.

L'autre méthode la plus connue des algorithmes d'intégration explicite est la méthode de Runge-Kutta dont le développement est donné ici à l'ordre 2. L'intégration se fait en deux étapes successives, où l'on utilise la variable $\underset{\sim}{\mathbf{X}}$ à l'instant n, ainsi que sa prédiction explicite $\underset{\sim}{\mathbf{X}}_{n+\frac{1}{2}}$,

$$\underset{\sim}{\mathbf{X}}_{n+1} = \underset{\sim}{\mathbf{X}}_n + \frac{1}{2}(\underset{\sim}{\mathbf{k}}_1 + \underset{\sim}{\mathbf{k}}_2) \tag{IV.34}$$

avec, $\underset{\sim}{\mathbf{k}}_1$ et $\underset{\sim}{\mathbf{k}}_2$ valant respectivement,

$$\underset{\sim}{\mathbf{k}}_1 = \Delta\lambda_1 \underset{\sim}{\mathbf{F}}(\underset{\sim}{\mathbf{X}}_n, t_n) \tag{IV.35}$$

$$\underset{\sim}{\mathbf{k}}_2 = \Delta\lambda_2 \underset{\sim}{\mathbf{F}}(\underset{\sim}{\mathbf{X}}_n + \frac{1}{2}\underset{\sim}{\mathbf{k}}_1, t_n + \frac{1}{2}\Delta t) \tag{IV.36}$$

De la même façon que pour la méthode d'Euler, on peut augmenter le degré de précision de cette méthode. La méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 est communément utilisée dans certains codes de calcul comme Zebulon. Toutefois, ce type de méthode alourdit l'intégration locale et est souvent associé à une méthode d'adaptation du pas de temps pour conserver à la fois une bonne précision et un temps de calcul acceptable (Z-set package, 1996), (Boudifa, 2006).

IV.3.2 Intégration implicite

Dans le cas de l'intégration implicite, il n'est pas possible de distinguer l'étape d'intégration de l'équation différentielle du premier ordre de l'étape itérative de résolution de l'équation non linéaire obtenue. L'intégration explicite, par essence, ne nécessite pas de résolution itérative associée.

Dans un premier temps, nous développerons les différentes possibilités d'intégration des équations différentielles du premier ordre en comparant les formulations classiques et leurs pendants asymptotiques (Freed et al., 1992).

En écrivant l'équation différentielle du premier ordre sous la forme de l'équation IV.31, avec le tenseur $\underset{\sim}{\mathbf{F}}$ prenant la forme,

$$\underset{\sim}{\mathbf{F}}(\underset{\sim}{\mathbf{X}}(t)) = C(\underset{\sim}{\mathbf{X}}(t)) \left(\underset{\sim}{\mathbf{A}}(\underset{\sim}{\mathbf{X}}(t)) - \underset{\sim}{\mathbf{X}}(t)\right) \tag{IV.37}$$

C est une fonction scalaire. Si C et $\underset{\sim}{\mathbf{A}}$ ne dépendent pas de $\underset{\sim}{\mathbf{X}}$, l'équation est linéaire. Le

tenseur $\underset{\sim}{\mathbf{F}}$ doit nécessairement se mettre sous la forme de l'équation IV.37 afin de pouvoir utiliser l'intégration asymptotique. Ceci est souvent le cas pour l'intégration des équations d'évolution des écrouissages.

Il est alors possible d'obtenir une intégration exacte de l'équation IV.31 telle que,

$$\begin{aligned}\underset{\sim}{\mathbf{X}}(t+\Delta t) &= e^{-\int_{\xi=t}^{t+\Delta t} C(\underset{\sim}{\mathbf{X}}(\xi))d\xi}\underset{\sim}{\mathbf{X}}(t) \\ &\quad + \int_{\xi=t}^{t+\Delta t} e^{-\int_{\zeta=\xi}^{t+\Delta t} C(\underset{\sim}{\mathbf{X}}(\zeta))d\zeta} C(\underset{\sim}{\mathbf{X}}(\xi))\underset{\sim}{\mathbf{A}}(\underset{\sim}{\mathbf{X}}(\xi))d\xi \qquad \text{(IV.38)}\end{aligned}$$

Il est possible de considérer plusieurs discrétisations de cette formulation exacte dont trois sont implicites,

- une intégration d'Euler purement implicite ("Backward Euler scheme")

$$\underset{\sim}{\mathbf{X}}_{n+1} = \underset{\sim}{\mathbf{X}}_n + \underset{\sim}{\mathcal{F}}_b(\underset{\sim}{\mathbf{X}}_{n+1})\Delta\lambda \qquad \text{(IV.39)}$$

  avec respectivement dans le cas classique et dans le cas asymptotique,

$$\underset{\sim}{\mathcal{F}}_b(\underset{\sim}{\mathbf{X}}_{n+1}) = \underset{\sim}{\mathbf{F}}(\underset{\sim}{\mathbf{X}}_{n+1}) \qquad \text{(IV.40)}$$

$$\underset{\sim}{\mathcal{F}}_b(\underset{\sim}{\mathbf{X}}_{n+1}) = \frac{e^{C(\underset{\sim}{\mathbf{X}}_{n+1})\Delta t}-1}{C(\underset{\sim}{\mathbf{X}}_{n+1})\Delta t}\underset{\sim}{\mathbf{F}}(\underset{\sim}{\mathbf{X}}_{n+1}) \qquad \text{(IV.41)}$$

- une intégration par la méthode du point milieu généralisée

$$\underset{\sim}{\mathbf{X}}_{n+1} = \underset{\sim}{\mathbf{X}}_n + \underset{\sim}{\mathcal{F}}_\phi(\underset{\sim}{\mathbf{X}}_{n+\phi})\Delta\lambda \qquad \text{(IV.42)}$$

  avec respectivement dans le cas classique et dans le cas asymptotique,

$$\underset{\sim}{\mathcal{F}}_\phi(\underset{\sim}{\mathbf{X}}_{n+\phi}) = \underset{\sim}{\mathbf{F}}(\underset{\sim}{\mathbf{X}}_{n+\phi}) \qquad \text{(IV.43)}$$

$$\underset{\sim}{\mathcal{F}}_\phi(\underset{\sim}{\mathbf{X}}_{n+\phi}) = \frac{1-e^{-C(\underset{\sim}{\mathbf{X}}_{n+\phi})\Delta t}}{C(\underset{\sim}{\mathbf{X}}_{n+\phi})\Delta t\left(1-\phi\left(1-e^{-C(\underset{\sim}{\mathbf{X}}_{n+\phi})\Delta t}\right)\right)}\underset{\sim}{\mathbf{F}}(\underset{\sim}{\mathbf{X}}_{n+\phi}) \qquad \text{(IV.44)}$$

- une intégration par la méthode des trapèzes généralisée

$$\underset{\sim}{\mathbf{X}}_{n+1} = \underset{\sim}{\mathbf{X}}_n + \underset{\sim}{\mathcal{F}}_t(\underset{\sim}{\mathbf{X}}_n, \underset{\sim}{\mathbf{X}}_{n+1})\Delta\lambda \qquad \text{(IV.45)}$$

  avec respectivement dans le cas classique et dans le cas asymptotique,

$$\underset{\sim}{\mathcal{F}}_t(\underset{\sim}{\mathbf{X}}_n, \underset{\sim}{\mathbf{X}}_{n+1}) = (1-\phi)\underset{\sim}{\mathbf{F}}(\underset{\sim}{\mathbf{X}}_n) + \phi\underset{\sim}{\mathbf{F}}(\underset{\sim}{\mathbf{X}}_{n+1}) \qquad \text{(IV.46)}$$

$$\begin{aligned}\underset{\sim}{\mathcal{F}}_t(\underset{\sim}{\mathbf{X}}_n, \underset{\sim}{\mathbf{X}}_{n+1}) &= C_1(\underset{\sim}{\mathbf{X}}_n, \underset{\sim}{\mathbf{X}}_{n+1})\left[\frac{1-e^{-C_2(\underset{\sim}{\mathbf{X}}_n, \underset{\sim}{\mathbf{X}}_{n+1})\Delta t}}{C_2(\underset{\sim}{\mathbf{X}}_n, \underset{\sim}{\mathbf{X}}_{n+1})\Delta t}\underset{\sim}{\mathbf{A}}_1(\underset{\sim}{\mathbf{X}}_n, \underset{\sim}{\mathbf{X}}_{n+1})\right. \\ &\quad \left. -\frac{1-e^{-C_1(\underset{\sim}{\mathbf{X}}_n, \underset{\sim}{\mathbf{X}}_{n+1})\Delta t}}{C_1(\underset{\sim}{\mathbf{X}}_n, \underset{\sim}{\mathbf{X}}_{n+1})\Delta t}\underset{\sim}{\mathbf{X}}_n\right] \qquad \text{(IV.47)}\end{aligned}$$

avec,

$$\underset{\sim}{\mathbf{A}}_1(\underset{\sim}{\mathbf{X}}_n, \underset{\sim}{\mathbf{X}}_{n+1}) = (1-\phi)\underset{\sim}{\mathbf{A}}(\underset{\sim}{\mathbf{X}}_n) + \phi\underset{\sim}{\mathbf{A}}(\underset{\sim}{\mathbf{X}}_{n+1}) \quad \text{(IV.48)}$$

$$C_1(\underset{\sim}{\mathbf{X}}_n, \underset{\sim}{\mathbf{X}}_{n+1}) = (1-\phi)C(\underset{\sim}{\mathbf{X}}_n) + \phi C(\underset{\sim}{\mathbf{X}}_{n+1}) \quad \text{(IV.49)}$$

$$C_2(\underset{\sim}{\mathbf{X}}_n, \underset{\sim}{\mathbf{X}}_{n+1}) = (1-\phi)^2 C(\underset{\sim}{\mathbf{X}}_n) + \phi(2-\phi)C(\underset{\sim}{\mathbf{X}}_{n+1}) \quad \text{(IV.50)}$$

Remarque :
L'intégration d'Euler purement explicite s'écrirait alors,

$$\underset{\sim}{\mathbf{X}}_{n+1} = \underset{\sim}{\mathbf{X}}_n + \underset{\sim}{\mathcal{F}}_f(\underset{\sim}{\mathbf{X}}_n)\Delta\lambda \quad \text{(IV.51)}$$

$$\underset{\sim}{\mathcal{F}}_f(\underset{\sim}{\mathbf{X}}_n) = \underset{\sim}{\mathbf{F}}(\underset{\sim}{\mathbf{X}}_n) \quad \text{(IV.52)}$$

$$\underset{\sim}{\mathcal{F}}_f(\underset{\sim}{\mathbf{X}}_n) = \frac{1-e^{-C(\underset{\sim}{\mathbf{X}}_n)\Delta t}}{C(\underset{\sim}{\mathbf{X}}_n)\Delta t}\underset{\sim}{\mathbf{F}}(\underset{\sim}{\mathbf{X}}_n) \quad \text{(IV.53)}$$

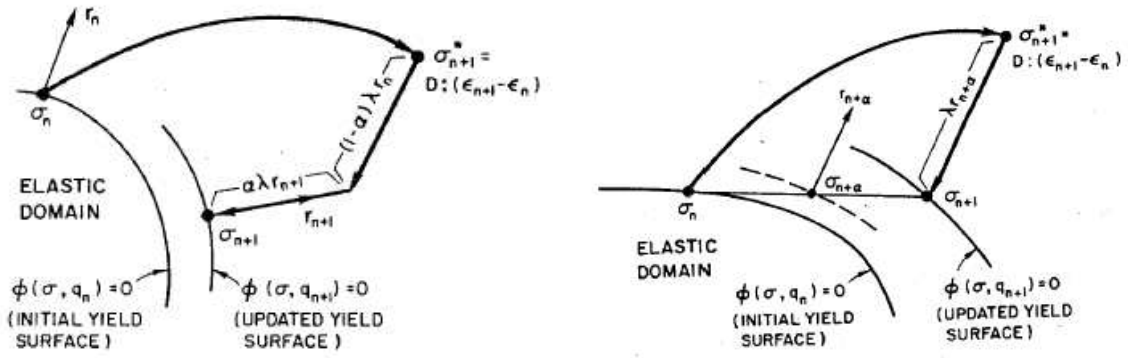
La différence entre les expressions classiques et asymptotiques des tenseurs $\underset{\sim}{\mathcal{F}}(\underset{\sim}{\mathbf{X}}_n, \underset{\sim}{\mathbf{X}}_{n+1})$ sont :

- une fonction linéaire (respectivement non linéaire)
- pas de dépendance explicite au temps (respectivement dépendance)
- l'expression classique se retrouve à partir de l'expression asymptotique lorsque Δt tend vers zero.

La méthode du point milieu généralisée est une méthode semi-implicite puisqu'elle nécessite la connaissance de $\underset{\sim}{\mathbf{X}}_{n+\phi}$. Celui ci est déterminé par une méthode d'Euler implicite entre t et $t + \phi\Delta t$, puis explicite pour obtenir $\underset{\sim}{\mathbf{X}}_{n+1}$.

De manière générale, les formulations d'Euler purement implicite et explicite forment des bornes supérieures et inférieures de l'intégration exacte. Les schémas d'intégration du point milieu généralisé et du trapèze généralisé tentent de moyenner cette erreur. Ces deux derniers schémas permettent de retrouver les méthodes d'Euler implicite et explicite respectivement pour $\phi = 1$ et $\phi = 0$ et regroupent ce que l'on appelle communément les θ-méthodes.

En appliquant les méthodes d'intégration les plus générales, méthodes du point milieu généralisée ou du trapèze généralisée, englobant les méthodes d'Euler purement implicite et explicite, (Ortiz et Popov, 1985) mettent en évidence l'interprétation graphique des méthodes d'intégration d'équation différentielle du premier ordre appliquées aux équations d'évolution des loi de comportement (cf. figure IV.2).



(a) (b)

Figure IV.2 : Schéma de la méthode des trapèzes généralisée (a), schéma de la méthode du point milieu généralisée (b) (Ortiz et Popov, 1985).

Pour la méthode des trapèzes généralisée, après une phase de prédiction élastique, le retour sur la surface de charge se fait en deux temps. D'abord, les contraintes et variables d'état sont projetées suivant la normale initiale puis suivant la normale finale. Le paramètre ϕ (α sur la figure IV.2a) détermine la part du retour suivant la normale initiale et finale. Il apparaît ici clairement que cette méthode englobe les méthodes purement implicite (ϕ=1, retour uniquement suivant la normale finale), et purement explicite ($\phi = 0$, retour uniquement suivant la normale initiale donc pas de nécessité de méthode itérative). Concernant la méthode implicite pure, celle ci englobe la méthode du retour radial (retour suivant la normale essai $\underset{\sim}{\mathbf{n}}^\star$ calculée au moment de la prédiction élastique) qui n'est, en toute rigueur, plus valable avec écrouissage cinématique non linéaire ou encore dans le cas des contraintes planes. Ces aspects seront débattus dans les sections IV.4, IV.5.3 et IV.5.2.

Concernant la méthode du point milieu généralisée, le retour sur la surface de charge est effectué de manière complète suivant la normale calculée au point milieu (cf. figure IV.2b).

Pour compléter ces méthodes d'intégration, notons qu'il est possible de modifier la prédiction élastique par une prédiction tangente bien adaptée aux codes de calcul implicite nécessitant le calcul de la matrice Jacobienne matérielle pour vérifier l'équilibre de la structure (cf. figure IV.3b).

Sur la figure IV.3 sont présentés les interprétations graphiques de différents algorithmes d'intégration répandus dans la littérature. En particularisant les cas à partir de la méthode du trapèze généralisé (cf figure IV.3a), il est possible d'obtenir les trois méthodes connues que sont :

- la prédiction tangente retour radial (cf figure IV.3b) pour $\phi = 0$ (γ sur la figure).
- la prédiction élastique retour sécant (ou normale moyenne) (cf. figure IV.3c) pour $\phi = \frac{1}{2}$.
- la prédiction élastique retour radial (cf. figure IV.3d) pour $\phi = 1$.

Pour $\phi \geq \frac{1}{2}$, ces méthodes sont inconditionnellement stables (Ortiz et Popov, 1985), (Ortiz et Simo, 1986). Cependant, Nagtegaal montre que l'algorithme de prédiction tangente retour radial est instable en contrainte plane (Nagtegaal et de Jong, 1981). L'algorithme de la normale moyenne (cf. figure IV.3c) implique une erreur dans la mesure du rayon de la surface de charge et n'est plus valide dans le cas de la contrainte plane, puisqu'il nécessite de connaître $\Delta\varepsilon_{33}$ pour le calcul de la contrainte au point milieu. De la même façon, l'algorithme de prédiction élastique retour radial (cf. figure IV.3d) n'est plus valide pour la contrainte plane puisqu'il nécessite aussi la connaissance de $\Delta\varepsilon_{33}$.

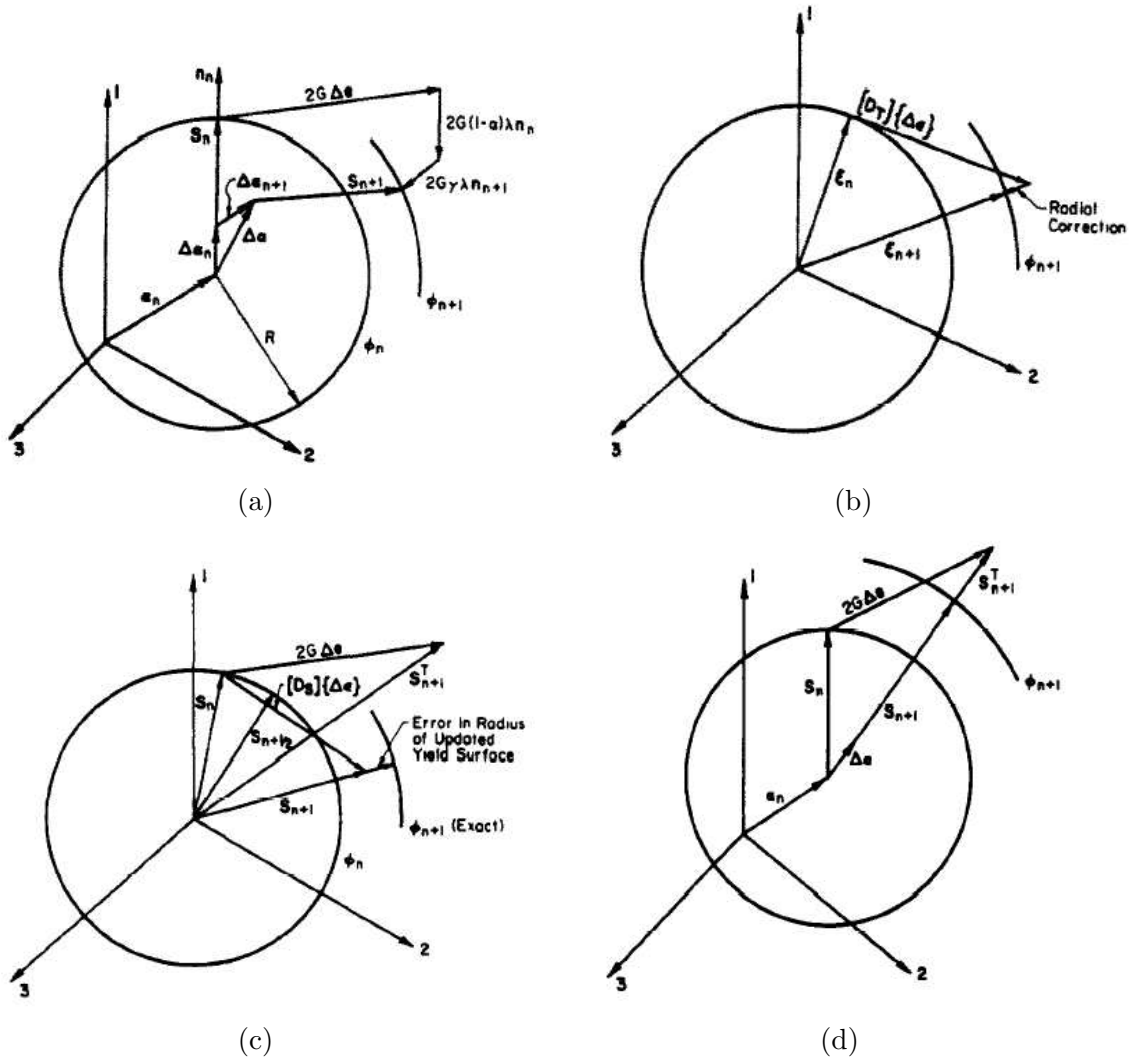


Figure IV.3 : Schéma de la méthode des trapèzes généralisée (a), schéma de l'algorithme de prédiction tangente retour radial (b), de la normale moyenne (c), de prédiction élastique retour radial (d) (Dodds, 1987).

Dans le paragraphe IV.4, nous détaillons l'utilisation de certains de ces algorithmes d'intégration appliqués au modèle développé paragraphe III.4.

Le cas des contraintes planes étant spécifique, il sera traité indépendamment aux paragraphes IV.5.2 et IV.5.3.

IV.4 Intégration locale du modèle 3D

Par la suite, nous développerons l'intégration des équations d'évolution selon les méthodes présentées précédemment. Nous utiliserons exclusivement la prédiction élastique afin de ne pas avoir à calculer la matrice Jacobienne matérielle si cela n'est pas nécessaire pour la résolution globale (résolution explicite).

Dans la mesure du possible, l'intégration asymptotique sera utilisée, permettant une meilleur précision (Freed et al., 1992). Les schémas purement implicites seront utilisés aussi bien pour les méthodes classiques qu'asymptotiques. Ces schémas présentent une stabilité inconditionnelle mais la convergence n'est plus quadratique comme pour la méthode des trapèzes généralisée pour $\phi = \frac{1}{2}$ (Chaboche et Cailletaud, 1996). Un intérêt majeur de l'intégration purement implicite ($\phi = 1$ pour la méthode des trapèzes généralisée) repose sur le fait qu'elle s'effectue en une seule étape. En effet, pour $\phi < 1$, la méthode est semi-implicite et se fait en deux étapes : une première étape implicite suivant la normale initiale puis une seconde explicite suivant la normale finale. Ce type de retour sur la surface de charge peut aboutir à des problèmes d'oscillation autour de la valeur exacte de la réponse globale (cf. figure IV.4) (Besson et al., 2001), (Chaboche et Cailletaud, 1996). Ce type de problème provient généralement du fait que la condition de consistance n'est pas satisfaite au même instant que le calcul de la normale. Il n'est pas possible d'éviter ce problème sans dégrader la vitesse de convergence de l'algorithme (Chaboche et Cailletaud, 1996), (Ortiz et Popov, 1985), (Simo et Govindjee, 1991).

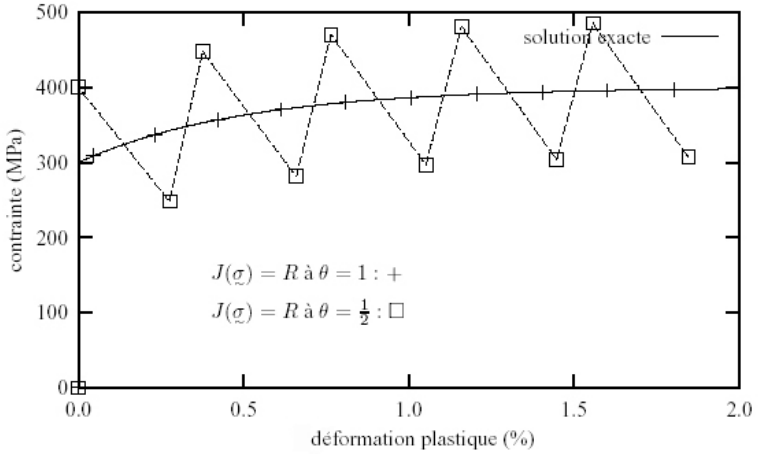


Figure IV.4 : Comparaison de la méthode des trapèzes généralisée pour $\phi = 1$ ou $\phi = \frac{1}{2}$ (Besson et al., 2001)

IV.4.1 Intégration des équations constitutives couplées

En rappelant le système d'équations différentielles non linéaires obtenues au paragraphe III.4,

$$\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}^{vp} = \frac{\dot{\lambda}_{vp}}{\sqrt{1-D}}\underset{\sim}{\mathbf{n}} \tag{IV.54}$$

$$\dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}}_i = \dot{\lambda}_{vp}\left(\frac{\underset{\sim}{\mathbf{n}}}{\sqrt{1-D}} - a_i\underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}_i\right) \tag{IV.55}$$

$$\dot{r} = \dot{\lambda}_{vp}\left(\frac{1}{\sqrt{1-D}} - br\right) \tag{IV.56}$$

$$\dot{D} = \frac{\dot{\lambda}_{vp}}{(1-D)^{\beta+\frac{1}{2}}}\left\langle\frac{Y-Y_0}{S}\right\rangle^s \tag{IV.57}$$

L'objectif de l'intégration implicite est de transformer les équations différentielles III.82 à III.85 en équations algébriques. En ajoutant à ces équations algébriques l'équation du critère de plasticité, on obtient un système d'équations algébriques non linéaire permettant de déterminer l'ensemble des variables du modèle à la fin du pas.

Ainsi, nous pouvons écrire l'intégration asymptotique (purement implicite) des variables d'écrouissage sur l'intervalle $[t_n, t_{n+1} = t_n + \Delta t]$,

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}_{i_{n+1}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}_{i_n} e^{-a_i\Delta\lambda_{vp}} + \frac{\underset{\sim}{\mathbf{n}}_{n+1}}{a_i\sqrt{1-D_{n+1}}}\left(1-e^{-a_i\Delta\lambda_{vp}}\right) \tag{IV.58}$$

$$r_{n+1} = r_n e^{-b\Delta\lambda_{vp}} + \frac{1}{b\sqrt{1-D_{n+1}}}\left(1-e^{-b\Delta\lambda_{vp}}\right) \tag{IV.59}$$

Les équations d'évolution de la déformation viscoplastique et de l'endommagement sont intégrées par un schéma classique d'Euler purement implicite puisqu'elles ne peuvent se mettre sous la forme voulue pour l'intégration asymptotique (cf. paragraphe IV.3.2),

$$\Delta\underset{\sim}{\varepsilon}^{vp} = \Delta\lambda_{vp}\frac{\underset{\sim}{\mathbf{n}}_{n+1}}{\sqrt{1-D_{n+1}}} \tag{IV.60}$$

$$D_{n+1} = D_n + \frac{\Delta\lambda_{vp}}{(1-D_{n+1})^{\beta+\frac{1}{2}}}\left\langle\frac{Y-Y_0}{S}\right\rangle^s \tag{IV.61}$$

En ajoutant aux équations précédentes, l'équation de la fonction de charge viscoplastique,

$$f_{vp_{n+1}}(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}, \underset{\sim}{\mathbf{X}}, R, D) = \frac{\left|\left|\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} - \underset{\sim}{\mathbf{X}}_{i_{n+1}}\right|\right| - R_{n+1}}{\sqrt{1-D_{n+1}}} - \sigma_y - \sigma_{v_{n+1}} = 0 \tag{IV.62}$$

Remarques :

La sommation sur i, des écrouissages cinématiques, n'est pas écrite afin d'alléger les notations. Jusqu'à la fin du paragraphe IV.4, l'indice i sous entend une sommation.

Nous obtenons un système de 15 équations algébriques (2 tensorielles et 3 scalaires) pour un écrouissage cinématique simple et 21 équations pour un double. Ce système peut être résolu de manière générale sans réduire le nombre d'équations et d'inconnues. Cependant, l'efficacité de la résolution du système dépend fortement du nombre de variables internes et de la non linéarité du problème. Des problèmes de divergence pour les modèles complexes ne rendent pas cette méthode optimale mais elle reste possible (Foerch et al., 1997), (Z-set package, 1996), (Keavey, 2001).

Dans ce travail, nous cherchons à optimiser la résolution du système d'équations algébriques obtenu en le réduisant au maximum (Simo et Taylor, 1985), (Hartmann et Haupt, 1993), (Auricchio et Taylor, 1995), (Hartmann et al., 1997), (Lührs et al., 1997), (Hammi, 2000), (Lestriez, 2003).

IV.4.2 Réduction du système

Cette méthode, bien que moins générale que la résolution systématique du système complet, possède des avantages de taille. En effet, la réduction du système précédent implique de particulariser sa résolution à chacun des modèles formulés et perd donc la généralité de sa formulation. Cependant, il est possible de réduire les 15 ou 21 équations du système à une équation scalaire unique, permettant ainsi une résolution des plus efficaces par l'algorithme de Newton-Raphson. Il n'y a alors plus d'inversion de matrice de grande taille pour la résolution itérative du système ce qui permet un gain de temps notable.

En utilisant, les équations algébriques découlant de l'intégration des équations d'évolution (eq IV.58 à IV.61, et en réalisant un prédiction élastique, il est possible d'exprimer le critère de plasticité fonction unique du multiplicateur viscoplastique.

Pour cela, nous réalisons, dans un premier temps, une prédiction élastique. Cette prédiction se base sur l'hypothèse d'un incrément de déformation totale purement élastique.

$$\Delta\lambda_{vp} = 0 \tag{IV.63}$$
$$\Delta\underset{\sim}{\varepsilon}^{vp} = \underset{\sim}{\mathbf{0}} \tag{IV.64}$$
$$\Delta\underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}_i = \underset{\sim}{\mathbf{0}} \tag{IV.65}$$
$$\Delta r = 0 \tag{IV.66}$$
$$\Delta D = 0 \tag{IV.67}$$

La contrainte "essai" i.e correspondant à cette prédiction (noté $\star$) peut alors s'écrire,

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^{\star}_{n+1} = (1-D_n)\left(2\mu\underset{\sim}{\varepsilon}^{\star}_{n+1} + \lambda \mathrm{Tr}\,\underset{\sim}{\varepsilon}^{\star}_{n+1}\underset{\sim}{\mathbf{1}}\right) \tag{IV.68}$$

Or la contrainte à l'instant $t+\Delta t$ est définie par,

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} = (1-D_{n+1})\left(2\mu\underset{\sim}{\varepsilon}^{e}_{n+1} + \lambda \mathrm{Tr}\,\underset{\sim}{\varepsilon}^{e}_{n+1}\underset{\sim}{\mathbf{1}}\right) \tag{IV.69}$$

On obtient donc la relation entre la partie déviatrice du tenseur des contraintes et du tenseur des contraintes essai,

$$\underset{\sim}{\mathbf{S}}_{n+1} = (1-D_{n+1})\left(\frac{\underset{\sim}{\mathbf{S}}^{\star}_{n+1}}{1-D_n} - 2\mu\frac{\Delta\lambda_{vp}}{\sqrt{1-D_{n+1}}}\underset{\sim}{\mathbf{n}}_{n+1}\right) \tag{IV.70}$$

En posant, $\underset{\sim}{\mathbf{Z}}_{n+1} = \underset{\sim}{\mathbf{S}}_{n+1} - \underset{\sim}{\mathbf{X}}_{i_{n+1}}$, il vient des équations IV.58 et IV.70,

$$\begin{aligned}\underset{\sim}{\mathbf{Z}}_{n+1} &= \frac{1-D_{n+1}}{1-D_n}\left(\underset{\sim}{\mathbf{S}}^{\star}_{n+1} - \underset{\sim}{\mathbf{X}}_{i_n}e^{-a_i\Delta\lambda_{vp}}\right)\\ &\quad -2\sqrt{1-D_{n+1}}\left(\mu\Delta\lambda_{vp} + \frac{C_i(1-e^{-a_i\Delta\lambda_{vp}})}{3a_i}\right)\underset{\sim}{\mathbf{n}}_{n+1}\end{aligned} \tag{IV.71}$$

En regroupant les termes de cette équation tensorielle, sachant que $\underset{\sim}{\mathbf{n}}_{n+1} = \frac{3}{2}\frac{\underset{\sim}{\mathbf{Z}}_{n+1}}{||\underset{\sim}{\mathbf{Z}}_{n+1}||}$

$$\begin{aligned}&\frac{1-D_{n+1}}{1-D_n}\frac{2}{3}\left|\left|\underset{\sim}{\mathbf{S}}^{\star}_{n+1} - \underset{\sim}{\mathbf{X}}_{i_n}e^{-a_i\Delta\lambda_{vp}}\right|\right|\frac{3}{2}\frac{\left(\underset{\sim}{\mathbf{S}}^{\star}_{n+1} - \underset{\sim}{\mathbf{X}}_{i_n}e^{-a_i\Delta\lambda_{vp}}\right)}{\left|\left|\underset{\sim}{\mathbf{S}}^{\star}_{n+1} - \underset{\sim}{\mathbf{X}}_{i_n}e^{-a_i\Delta\lambda_{vp}}\right|\right|}\\ &= \left(\frac{2}{3}\left|\left|\underset{\sim}{\mathbf{Z}}_{n+1}\right|\right| + 2\sqrt{1-D_{n+1}}\left(\mu\Delta\lambda_{vp} + \frac{C_i(1-e^{-a_i\Delta\lambda_{vp}})}{3a_i}\right)\right)\underset{\sim}{\mathbf{n}}_{n+1}\end{aligned} \tag{IV.72}$$

Cette équation tensorielle peut être écrite sous la forme de deux équations dont l'une est scalaire (norme de l'équation tensorielle) et l'autre tensorielle (direction). Sachant que la norme de la normale à la surface de charge vaut $\frac{3}{2}$, l'équation scalaire s'écrit

$$\begin{aligned}\frac{1-D_{n+1}}{1-D_n}\left|\left|\underset{\sim}{\mathbf{S}}^{\star}_{n+1} - \underset{\sim}{\mathbf{X}}_{i_n}e^{-a_i\Delta\lambda_{vp}}\right|\right| &= \left|\left|\underset{\sim}{\mathbf{Z}}_{n+1}\right|\right| + 3\sqrt{1-D_{n+1}}\left(\mu\Delta\lambda_{vp} + \right.\\ &\quad \left.\frac{C_i(1-e^{-a_i\Delta\lambda_{vp}})}{3a_i}\right)\end{aligned} \tag{IV.73}$$

tandis que la direction de l'écoulement s'écrit,

$$\underset{\sim}{\mathbf{n}}_{n+1} = \frac{3}{2}\frac{\left(\underset{\sim}{\mathbf{S}}^{\star}_{n+1} - \underset{\sim}{\mathbf{X}}_{i_n}e^{-a_i\Delta\lambda_{vp}}\right)}{\left|\left|\underset{\sim}{\mathbf{S}}^{\star}_{n+1} - \underset{\sim}{\mathbf{X}}_{i_n}e^{-a_i\Delta\lambda_{vp}}\right|\right|} \tag{IV.74}$$

Il apparaît clairement dans l'équation IV.74, que la normale n'est pas constante lors du retour sur la surface de charge. Ceci n'est vrai, en toute rigueur, que dans le cas d'un écrouissage cinématique linéaire (a_i=0).

Par conséquent, le retour radial (cf. équation IV.75) ne peut pas être utilisé conjointement avec un écrouissage cinématique non linéaire sans faire l'hypothèse $e^{-a_i\Delta\lambda_{vp}} \simeq 1$.

$$\underset{\sim}{\mathbf{n}}_{n+1} = \underset{\sim}{\mathbf{n}}^{\star}_{n+1} = \frac{3}{2}\frac{\underset{\sim}{\mathbf{S}}^{\star}_{n+1} - \underset{\sim}{\mathbf{X}}_{i_n}}{\left|\left|\underset{\sim}{\mathbf{S}}^{\star}_{n+1} - \underset{\sim}{\mathbf{X}}_{i_n}\right|\right|} \tag{IV.75}$$

Notons que Simo et Hugues justifient d'un retour radial exact par une intégration différente de leurs équations d'évolutions ((Simo et Hughes, 1997) p. 120).

Dans la pratique, que l'on utilise un retour radial ou un retour normal (réactualisation de la normale à chaque itération de l'algorithme de Newton-Raphson), l'erreur est numériquement faible pour les pas de chargement classiquement utilisés. Nous utiliserons donc, par la suite, le retour radial en sachant qu'il comporte une approximation ne portant pas à conséquence (Auricchio et Taylor, 1995).

Finalement, nous injectons l'expression de la norme de la contrainte relative $\left|\left|\underset{\sim}{\mathbf{Z}}_{n+1}\right|\right|$ (équation IV.73) dans celle de la surface de charge viscoplastique $f_{vp_{n+1}}$ (équation IV.62) pour obtenir,

$$\begin{aligned}\overline{f}_{vp_{n+1}} &= \left|\left|\underset{\sim}{\mathbf{S}}^{\star}_{n+1} - \underset{\sim}{\mathbf{X}}_{i_n} e^{-a_i\Delta\lambda_{vp}}\right|\right| - \frac{1-D_n}{\sqrt{1-D_{n+1}}}\left(3\mu\Delta\lambda_{vp} + \frac{\sqrt{1-D_{n+1}}}{1-D_n}R_n e^{-b\Delta\lambda_{vp}}\right. \\ &\left. + \frac{C_i}{a_i}(1-e^{-a_i\Delta\lambda_{vp}}) + \frac{Q}{b}(1-e^{-b\Delta\lambda_{vp}}) + \sigma_y + \sigma_{v_{n+1}}\right) \qquad \text{(IV.76)}\end{aligned}$$

Cette expression $\overline{f}_{vp_{n+1}}$ est la fonction de charge viscoplastique du système réduit.
Ce système s'écrit alors,

$$\begin{aligned}\overline{f}_{vp_{n+1}} &= \left|\left|\underset{\sim}{\mathbf{S}}^{\star}_{n+1} - \underset{\sim}{\mathbf{X}}_{i_n} e^{-a_i\Delta\lambda_{vp}}\right|\right| - \frac{1-D_n}{\sqrt{1-D_{n+1}}}\left(3\mu\Delta\lambda_{vp} + \frac{\sqrt{1-D_{n+1}}}{1-D_n}R_n e^{-b\Delta\lambda_{vp}}\right. \\ &\left. + \frac{C_i}{a_i}(1-e^{-a_i\Delta\lambda_{vp}}) + \frac{Q}{b}(1-e^{-b\Delta\lambda_{vp}}) + \sigma_y + \sigma_{v_{n+1}}\right) = 0 \qquad \text{(IV.77)} \\ g_D &= D_{n+1} - D_n - \frac{\Delta\lambda_{vp}}{(1-D_{n+1})^{\beta+\frac{1}{2}}}\left\langle\frac{Y_{n+1}(D_{n+1},\Delta\lambda_{vp}) - Y_0}{S}\right\rangle^s = 0 \qquad \text{(IV.78)}\end{aligned}$$

Dans l'objectif d'une réduction du système à une seule équation scalaire (Lestriez, 2003), il est possible de faire l'hypothèse que $\dot{D}$ n'est fonction que de D_n une fois intégré. L'équation IV.78 devient alors,

$$g_D = D_{n+1} - D_n - \frac{\Delta\lambda_{vp}}{(1-D_n)^{\beta+\frac{1}{2}}}\left\langle\frac{Y_{n+1}(D_n,\Delta\lambda_{vp}) - Y_0}{S}\right\rangle^s = 0 \qquad \text{(IV.79)}$$

et $Y_{n+1}(D_n,\Delta\lambda_{vp})$ prend alors la forme,

$$\begin{aligned}Y_{n+1}(D_n,\Delta\lambda_{vp}) &= \frac{1}{2}K\,\mathrm{Tr}\,\underset{\sim}{\varepsilon}^{\star}_{n+1}{}^2 + G\left(\underset{\sim}{\boldsymbol{e}}^{\star}_{n+1} - \frac{\Delta\lambda_{vp}}{\sqrt{1-D_n}}\underset{\sim}{\mathbf{n}}_{n+1}\right) : \left(\underset{\sim}{\boldsymbol{e}}^{\star}_{n+1} - \frac{\Delta\lambda_{vp}}{\sqrt{1-D_n}}\underset{\sim}{\mathbf{n}}_{n+1}\right) \\ &+ \frac{1}{3}C_i\left(\underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}_{i_n} e^{-a_i\Delta\lambda_{vp}} + \frac{\underset{\sim}{\mathbf{n}}_{n+1}}{a_i\sqrt{1-D_n}}(1-e^{-a_i\Delta\lambda_{vp}})\right) : \\ &\quad \left(\underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}_{i_n} e^{-a_i\Delta\lambda_{vp}} + \frac{\underset{\sim}{\mathbf{n}}_{n+1}}{a_i\sqrt{1-D_n}}(1-e^{-a_i\Delta\lambda_{vp}})\right) \\ &+ \frac{1}{2}Q\left(r_n e^{-b\Delta\lambda_{vp}} + \frac{1}{b\sqrt{1-D_n}}(1-e^{-b\Delta\lambda_{vp}})\right)^2 \qquad \text{(IV.80)}\end{aligned}$$

L'équation non linéaire obtenue (équation IV.76) peut être résolue par la méthode de Newton-Raphson en supposant un retour radial. L'algorithme est donné table IV.1.

Le calcul des dérivées nécessaire à la résolution par la méthode de Newton-Raphson est reporté en annexe B.1.

Comme précisé précédemment, le retour radial n'est pas avéré pour un écrouissage cinématique non linéaire. Cependant, l'hypothèse reste acceptable dans le cas 3D et dans le cas de la déformation plane.

En revanche, l'hypothèse des contraintes planes ne permet en aucune façon de réaliser un retour radial et complique la résolution algorithmique du problème. De nombreux auteurs se sont penchés sur la question, formulant différentes approches de résolution du problème (Simo et Taylor, 1986), (Dodds, 1987), (Aravas, 1987), (Simo et Govindjee, 1988), (Waltz et al., 1990), (Fuschi et al., 1992), (Doghri, 1995), (Simo et Hughes, 1997), (Alfano et al., 1998), (Lee et al., 1998), (Singh et Pandey, 1999), (Doghri, 2000), (Lee, 2001), (Sawyer et al., 2001), (Kumar et Nukala, 2005).

Dans le paragraphe IV.5, nous présenterons 3 algorithmes dont l'un viole cette condition afin de mettre en évidence la problématique.

IV.5 Intégration locale du modèle en contraintes planes

IV.5.1 Algorithme CP1 (Hammi, 2000), (Lestriez, 2003)

Classiquement, au sein du LASMIS, la gestion des contraintes planes est réalisée en ajoutant une équation permettant de déterminer l'inconnue $\Delta\varepsilon_{33}$ (cf. équation III.137) et provenant de l'hypothèse de contraintes nulles hors plan, $\sigma_{i3} = 0$ (cf. paragraphe III.5.1). Il est alors nécessaire de résoudre un système non linéaire de trois équations à trois inconnues (l'incrément du multiplicateur viscoplastique $\Delta\lambda_{vp}$, l'incrément d'endommagement ΔD et la déformation $\Delta\varepsilon_{33}$ (Hammi, 2000)) ramené à deux équations à deux inconnues ($\Delta\lambda_{vp}$ et $\Delta\varepsilon_{33}$) dans (Lestriez, 2003). On obtient alors le système constitué des équations IV.81 et IV.82 que l'on résout par la méthode de Newton-Raphson.

$$\begin{aligned}
\overline{f}_{vp_{n+1}}(\Delta\lambda_{vp},\Delta\varepsilon_{33}) &= \left|\left|\underset{\sim}{\mathbf{S}}^{\star}_{n+1} - \underset{\sim}{\mathbf{X}}_{i_n} e^{-a_i\Delta\lambda_{vp}}\right|\right| - \frac{1-D_n}{\sqrt{1-D_{n+1}}}\left(3\mu\Delta\lambda_{vp} + \frac{\sqrt{1-D_{n+1}}}{1-D_n}R_n e^{-b\Delta\lambda_{vp}}\right. \\
&\quad \left. + \frac{C_i}{a_i}(1-e^{-a_i\Delta\lambda_{vp}}) + \frac{Q}{b}(1-e^{-b\Delta\lambda_{vp}}) + \sigma_y + \sigma_{v_{n+1}}\right) = 0 \qquad \text{(IV.81)} \\
h_{n+1}(\Delta\lambda_{vp},\Delta\varepsilon_{33}) &= \Delta\varepsilon_{33_{n+1}} + \frac{\nu}{1-\nu}\left(\Delta\varepsilon_{11_{n+1}} + \Delta\varepsilon_{22_{n+1}}\right) - \frac{1-2\nu}{1-\nu}\Delta\varepsilon^{vp}_{33_{n+1}} = 0 \qquad \text{(IV.82)}
\end{aligned}$$

Remarques :

La sommation sur i, des écrouissages cinématiques, n'est pas écrite afin d'alléger les notations.

L'algorithme de Newton-Raphson associé à la résolution de ce système, sous l'hypothèse du retour radial, est synthétisé table IV.2.

Le calcul des dérivées nécessaires à la résolution par la méthode de Newton-Raphson est reportées en annexe B.2.

1. Initialisation $\Delta\lambda_{vp} = 0$, $\underset{\sim}{\varepsilon}^{vp}_{n+1} = \underset{\sim}{\varepsilon}^{vp}_{n}$, $\underset{\sim}{\mathbf{X}}_{i_{n+1}} = \underset{\sim}{\mathbf{X}}_{i_n}$, $R_{n+1} = R_n$, $D_{n+1} = D_n$

2. Calcul des quantités essai $\star$

3. Vérification du critère de plasticité $f^{\star}_{n+1}$ (équation III.80)

4. SI $f^{\star}_{n+1} \leq TOL$ ALORS $(.)_{n+1} = (.)^{\star}_{n+1}$

   SINON

5. Itérer sur i TANT QUE $\overline{f}^{(i)}_{vp_{n+1}}(\Delta\lambda^{(i)}_{vp}) \geq$ TOL (équation IV.76)

   Calcul des quantités à l'itéré i

   $$\delta\Delta\lambda_{vp} = -\overline{f}^{(i)}_{vp_{n+1}} \left(\frac{\partial \overline{f}^{(i)}_{vp_{n+1}}}{\partial \Delta\lambda_{vp}} \right)^{-1}$$

   $$\Delta\lambda^{(i+1)}_{vp} = \Delta\lambda^{(i)}_{vp} + \delta\Delta\lambda_{vp}$$

6. FIN TANT QUE
   FIN SI

Tableau IV.1 : Algorithme de retour radial dans le cas 3D

1. Initialisation $\Delta\lambda_{vp} = 0$, $\underset{\sim}{\varepsilon}^{vp}_{n+1} = \underset{\sim}{\varepsilon}^{vp}_{n}$, $\underset{\sim}{\mathbf{X}}_{i_{n+1}} = \underset{\sim}{\mathbf{X}}_{i_n}$, $R_{n+1} = R_n$, $D_{n+1} = D_n$

2. Calcul des quantités essai $\star$

3. Vérification du critère de plasticité
   $f^{\star}_{n+1}$ (équation III.80)

4. SI $f^{\star}_{n+1} \leq TOL$ ALORS
   $(.)_{n+1} = (.)^{\star}_{n+1}$

   SINON

5. Itérer sur i TANT QUE
   $\overline{f}^{(i)}_{vp_{n+1}}(\Delta\lambda^{(i)}_{vp}, \Delta\varepsilon^{(i)}_{33}) \geq$ TOL ou
   $h^{(i)}_{n+1}(\Delta\lambda^{(i)}_{vp}, \Delta\varepsilon^{(i)}_{33}) \geq$ TOL (équations IV.81 et IV.82)

   Calcul des quantités à l'itéré i

$$\delta\Delta\lambda_{vp} = -\left(\overline{f}^{(i)}_{vp_{n+1}} + \frac{\partial\overline{f}^{(i)}_{vp_{n+1}}}{\partial\Delta\varepsilon^{(i)}_{33}}\delta\Delta\varepsilon_{33}\right)\left(\frac{\partial\overline{f}^{(i)}_{vp_{n+1}}}{\partial\Delta\lambda^{(i)}_{vp}}\right)^{-1}$$
$$\delta\Delta\varepsilon_{33} = -\left(h^{(i)}_{n+1} + \frac{\partial h^{(i)}_{n+1}}{\partial\Delta\lambda^{(i)}_{vp}}\delta\Delta\lambda_{vp}\right)\left(\frac{\partial h^{(i)}_{n+1}}{\partial\Delta\varepsilon^{(i)}_{33}}\right)^{-1}$$

   $\Delta\lambda^{(i+1)}_{vp} = \Delta\lambda^{(i)}_{vp} + \delta\Delta\lambda_{vp}$
   $\Delta\varepsilon^{(i+1)}_{33} = \Delta\varepsilon^{(i)}_{33} + \delta\Delta\varepsilon_{33}$

6. FIN TANT QUE
   FIN SI

Tableau IV.2 : Algorithme CP1 de retour radial dans le cas des contraintes planes.

On note donc que, dans cet algorithme, l'itération est réalisée simultanément sur les deux variables et que les deux conditions, correspondant aux équations IV.81 et IV.82, doivent être satisfaites simultanément.

Cependant, aucune prédiction n'est réalisée sur $\Delta\varepsilon_{33}$ et aucun traitement spécifique ne permet d'autoriser l'utilisation du retour radial. Les deux algorithmes suivant traitent ces deux aspects permettant d'obtenir un algorithme robuste en contraintes planes.

L'algorithme 2, basé sur l'utilisation d'une prédiction sur $\Delta\varepsilon_{33}$, se prête bien à la mise en évidence de la rotation de la normale lors du retour sur la surface de charge. Ainsi, les développements du paragraphe IV.5.2 mettent en évidence, mathématiquement, l'erreur commise en maintenant la direction de la normale constante au cours de la correction plastique.

IV.5.2 Algorithme CP2 (Aravas, 1987), (Doghri, 1995)

Cet algorithme ne modifie en aucune façon, la formulation du modèle paragraphe III.4. Il se base sur l'utilisation d'une prédiction élastique sur l'incrément $\Delta\varepsilon_{33}$.

En effet, la différence majeure , dans le traitement des contraintes planes, vient du fait que le chargement n'est plus totalement connu à priori. L'algorithme de résolution est donc modifié puisqu'il n'est plus piloté par la déformation ("strain driven" (Simo et Hughes, 1997)). Il est donc nécessaire de modifier la manière de réaliser la prédiction élastique afin de réaliser à la fois la prédiction sur $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}$ et sur $\Delta\varepsilon_{33}$. Dans la suite, on se place sous l'hypothèse des contraintes planes imposant $\sigma_{i3} = 0$ dont les mêmes conclusions qu'au paragraphe III.5.1 peuvent être tirées.

La prédiction élastique s'écrit alors,

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^{\star}_{n+1} \quad = \quad (1 - D_n)\underset{\approx}{\mathbf{\Lambda}} : (\underset{\sim}{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}}_{n+1} - \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp}_{n} + \Delta\varepsilon^{\star}_{33}\underset{\sim}{\mathbf{1}}_3) \tag{IV.83}$$

où $\underset{\sim}{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}}_{n+1}$ fait référence aux composantes connues du tenseur des déformations à l'instant $t + \Delta t$, soit :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11,n+1} \\ \varepsilon_{22,n+1} \\ \varepsilon_{33,n} \\ \varepsilon_{12,n+1} \end{pmatrix} \tag{IV.84}$$

et $\Delta\varepsilon^{\star}_{33}$ est la prédiction de l'incrément de déformation hors plan.

$\underset{\sim}{\mathbf{1}}_3$ correspondant au tenseur unité dont la seule composante non nulle est la composante hors plan :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{IV.85}$$

On note donc $\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\star}_{n+1}$ la prédiction élastique dans le cas des contraintes planes, telle que :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\star}_{n+1} = \underset{\sim}{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}}_{n+1} - \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp}_{n} + \Delta\varepsilon^{\star}_{33}\underset{\sim}{\mathbf{1}}_3 \tag{IV.86}$$

Remarques :

Dans le cas des déformations planes (comme dans le cas 3D), on retrouve bien, $\Delta\varepsilon^{\star}_{33} = 0$ et $\underset{\sim}{\varepsilon}^{\star}_{n+1} = \underset{\sim}{\varepsilon}_{n+1} - \underset{\sim}{\varepsilon}^{vp}_{n}$, où cette fois, l'ensemble des composantes du tenseur des déformations sont connues à l'instant n+1.

L'équation IV.83 devient alors dans le cas isotrope :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^{\star}_{n+1} = (1 - D_n)\left(2G\underset{\sim}{\boldsymbol{e}}^{\star}_{n+1} + K\mathrm{Tr}\,\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\star}_{n+1}\underset{\sim}{\mathbf{1}}\right) \tag{IV.87}$$

Où $\underset{\sim}{\boldsymbol{e}}^{\star}_{n+1}$ est le tenseur déviateur des déformations essai.
On peut donc écrire la déformation élastique $\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}^{e}_{n+1}$ de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}^{e}_{n+1} &= \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1} - \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp}_{n+1} \\
&= \overline{\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}}_{n+1} + \Delta\varepsilon_{33}\underset{\sim}{\mathbf{1}}_3 - \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp}_{n} - \Delta\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp} \\
&= \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\star}_{n+1} - \Delta\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp} + (\Delta\varepsilon_{33} - \Delta\varepsilon^{\star}_{33})\underset{\sim}{\mathbf{1}}_3
\end{aligned} \tag{IV.88}$$

et

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{e}}^{e}_{n+1} = \underset{\sim}{\boldsymbol{e}}^{\star}_{n+1} - \Delta\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp} + (\Delta\varepsilon_{33} - \Delta\varepsilon^{\star}_{33})\underset{\sim}{\mathbf{1}}^{d}_3 \tag{IV.89}$$

Cette façon de réaliser la prédiction élastique est la clé de la formulation de cet algorithme et conduit à des différences notables dans les équations qui en découlent. Dés lors, il est possible d'écrire la relation liant $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^{\star}_{n+1}$ et $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}$ en faisant apparaître les parties sphériques et déviatrices :

$$\begin{aligned}
\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} &= (1 - D_{n+1})\Bigg[2G\left(\underset{\sim}{\boldsymbol{e}}^{\star}_{n+1} - \Delta\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp} + (\Delta\varepsilon_{33} - \Delta\varepsilon^{\star}_{33})\underset{\sim}{\mathbf{1}}^{d}_3\right) \\
&\quad + K\left(\mathrm{Tr}\,\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\star}_{n+1} + \Delta\varepsilon_{33} - \Delta\varepsilon^{\star}_{33}\right)\underset{\sim}{\mathbf{1}}\Bigg]
\end{aligned} \tag{IV.90}$$

$$\begin{aligned}
\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} &= (1 - D_{n+1})\Bigg[\frac{\underset{\sim}{\mathbf{S}}^{\star}_{n+1}}{1 - D_n} - 2G\Delta\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp} + +K\mathrm{Tr}\,\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\star}_{n+1}\underset{\sim}{\mathbf{1}} \\
&\quad + 2G(\Delta\varepsilon_{33} - \Delta\varepsilon^{\star}_{33})\underset{\sim}{\mathbf{1}}^{d}_3 + (\Delta\varepsilon_{33} - \Delta\varepsilon^{\star}_{33})\underset{\sim}{\mathbf{1}}\Bigg]
\end{aligned} \tag{IV.91}$$

Remarques :

Dans le cas des déformations planes (comme dans le cas 3D), si $\Delta\varepsilon^{\star}_{33} = \Delta\varepsilon_{33}$, on retrouve bien l'expression de $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}$,

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} = (1 - D_{n+1})\left[\frac{\underset{\sim}{\mathbf{S}}^{\star}_{n+1}}{1 - D_n} - 2G\Delta\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp} + +K\mathrm{Tr}\,\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\star}_{n+1}\underset{\sim}{\mathbf{1}}\right] \tag{IV.92}$$

Les parties sphériques et déviatrices apparaissent alors clairement,

$$\underset{\sim}{\mathbf{S}}_{n+1} = (1-D_{n+1})\left[\frac{\underset{\sim}{\mathbf{S}}^{\star}_{n+1}}{1-D_n} - 2G\Delta\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp} + 2G(\Delta\varepsilon_{33}-\Delta\varepsilon^{\star}_{33})\underset{\sim}{\mathbf{1}}^{d}_{3}\right] \tag{IV.93}$$

$$\sigma^{H}_{n+1} = (1-D_{n+1})\left[\frac{\sigma^{\star H}_{n+1}}{1-D_n} + 3K(\Delta\varepsilon_{33}-\Delta\varepsilon^{\star}_{33})\right] \tag{IV.94}$$

où $\sigma^{H}_{n+1} = \mathrm{Tr}\,\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}$ correspond à la partie hydrostatique de la contrainte.

L'expression de $\underset{\sim}{\mathbf{Z}}_{n+1} = \underset{\sim}{\mathbf{S}}_{n+1} - \underset{\sim}{\mathbf{X}}_{i_{n+1}}$ prend alors la forme,

$$\begin{aligned}
\underset{\sim}{\mathbf{Z}}_{n+1} &= (1-D_{n+1})\left[\frac{\underset{\sim}{\mathbf{S}}^{\star}_{n+1}}{1-D_n} - \frac{2G\Delta\lambda_{vp}}{\sqrt{1-D_{n+1}}}\underset{\sim}{\mathbf{n}}_{n+1} + 2G(\Delta\varepsilon_{33}-\Delta\varepsilon^{\star}_{33})\underset{\sim}{\mathbf{1}}^{d}_{3}\right] \\
&\quad -(1-D_{n+1})\left[\frac{\underset{\sim}{\mathbf{X}}_{i_n}e^{-a_i\Delta\lambda_{vp}}}{1-D_n} + \frac{2}{3}\frac{C_i(1-e^{-a_i\Delta\lambda_{vp}})}{a_i\sqrt{1-D_{n+1}}}\underset{\sim}{\mathbf{n}}_{n+1}\right] \\
&= (1-D_{n+1})\left[\frac{\underset{\sim}{\mathbf{S}}^{\star}_{n+1} - \underset{\sim}{\mathbf{X}}_{i_n}e^{-a_i\Delta\lambda_{vp}}}{1-D_n}\right] - 2\sqrt{1-D_{n+1}}\left[G\Delta\lambda_{vp} + \frac{C_i(1-e^{-a_i\Delta\lambda_{vp}})}{3a_i}\right]\underset{\sim}{\mathbf{n}}_{n+1} \\
&\quad +2G(1-D_{n+1})(\Delta\varepsilon_{33}-\Delta\varepsilon^{\star}_{33})\underset{\sim}{\mathbf{1}}^{d}_{3}
\end{aligned} \tag{IV.95}$$

Remarques :

Dans le cas des déformations planes (comme dans le cas 3D), si $\Delta\varepsilon^{\star}_{33} = \Delta\varepsilon_{33}$, on retrouve bien l'expression de $\underset{\sim}{\mathbf{Z}}_{n+1}$ (équation IV.71).

La sommation sur i, des écrouissages cinématiques, n'est pas écrite afin d'alléger les notations. Jusqu'à la fin du paragraphe IV.5.2, l'indice i sous entend une sommation.

De l'expression IV.95, il est possible de regrouper les différents membres en faisant apparaître l'expression de la normale $\underset{\sim}{\mathbf{n}}_{n+1} = \frac{3}{2}\frac{\underset{\sim}{\mathbf{Z}}_{n+1}}{||\underset{\sim}{\mathbf{Z}}_{n+1}||}$,

$$\begin{aligned}
&\underset{\sim}{\mathbf{n}}_{n+1}\left[\frac{2}{3}\left|\left|\underset{\sim}{\mathbf{Z}}_{n+1}\right|\right| + 2\sqrt{1-D_{n+1}}\left(G\Delta\lambda_{vp} + \frac{C_i(1-e^{-a_i\Delta\lambda_{vp}})}{3a_i}\right)\right] \\
&= (1-D_{n+1})\frac{\underset{\sim}{\mathbf{S}}^{\star}_{n+1} - \underset{\sim}{\mathbf{X}}_{i_n}e^{-a_i\Delta\lambda_{vp}}}{1-D_n} + 2G(1-D_{n+1})(\Delta\varepsilon_{33}-\Delta\varepsilon^{\star}_{33})\underset{\sim}{\mathbf{1}}^{d}_{3}
\end{aligned} \tag{IV.96}$$

En utilisant l'expression de la surface de charge viscoplastique (cf. équation IV.62), on obtient une expression de $\left|\left|\underset{\sim}{\mathbf{Z}}_{n+1}\right|\right|$ que l'on injecte dans l'équation IV.96,

$$\begin{aligned}
&\underset{\sim}{\mathbf{n}}_{n+1}\left[R_n e^{-b\Delta\lambda_{vp}} + \frac{1-D_n}{\sqrt{1-D_{n+1}}}\left(\frac{Q}{b}\left(1-e^{-b\Delta\lambda_{vp}}\right)\right.\right. \\
&\left.\left.+\frac{C_i}{a_i}\left(1-e^{-a_i\Delta\lambda_{vp}}\right) + \sigma_y + \sigma_v + 3G\Delta\lambda_{vp}\right)\right] \\
&= \frac{3}{2}\left|\left|\underset{\sim}{\mathbf{S}}^{\star}_{n+1} - \underset{\sim}{\mathbf{X}}_{i_n}e^{-a_i\Delta\lambda_{vp}} + 2G(1-D_n)(\Delta\varepsilon_{33}-\Delta\varepsilon^{\star}_{33})\underset{\sim}{\mathbf{1}}^{d}_{3}\right|\right| \\
&\quad \frac{\underset{\sim}{\mathbf{S}}^{\star}_{n+1} - \underset{\sim}{\mathbf{X}}_{i_n}e^{-a\Delta\lambda_{vp}} + 2G(1-D_n)(\Delta\varepsilon_{33}-\Delta\varepsilon^{\star}_{33})\underset{\sim}{\mathbf{1}}^{d}_{3}}{\left|\left|\underset{\sim}{\mathbf{S}}^{\star}_{n+1} - \underset{\sim}{\mathbf{X}}_{i_n}e^{-a\Delta\lambda_{vp}} + 2G(1-D_n)(\Delta\varepsilon_{33}-\Delta\varepsilon^{\star}_{33})\underset{\sim}{\mathbf{1}}^{d}_{3}\right|\right|}
\end{aligned} \tag{IV.97}$$

De cette équation IV.97, on peut tirer deux équations définissant l'égalité de la "direction" et l'équation scalaire $\overline{f}_{vp_{n+1}}$ définissant l'égalité de la norme,

$$\underset{\sim}{\mathbf{n}}_{n+1} = \frac{3}{2}\frac{\underset{\sim}{\mathbf{S}}^{\star}_{n+1} - \underset{\sim}{\mathbf{X}}_{i_n} e^{-a_i\Delta\lambda_{vp}} + 2G(1-D_n)(\Delta\varepsilon_{33} - \Delta\varepsilon^{\star}_{33})\underset{\sim}{\mathbf{1}}^d_3}{\left|\left|\underset{\sim}{\mathbf{S}}^{\star}_{n+1} - \underset{\sim}{\mathbf{X}}_{i_n} e^{-a_i\Delta\lambda_{vp}} + 2G(1-D_n)(\Delta\varepsilon_{33} - \Delta\varepsilon^{\star}_{33})\underset{\sim}{\mathbf{1}}^d_3\right|\right|} \tag{IV.98}$$

$$\begin{aligned}\overline{f}_{vp_{n+1}} = &\left|\left|\underset{\sim}{\mathbf{S}}^{\star}_{n+1} - \underset{\sim}{\mathbf{X}}_{i_n} e^{-a_i\Delta\lambda_{vp}} + 2G(1-D_n)(\Delta\varepsilon_{33} - \Delta\varepsilon^{\star}_{33})\underset{\sim}{\mathbf{1}}^d_3\right|\right| \\ &-\left[R_n e^{-b\Delta\lambda_{vp}} + \frac{1-D_n}{\sqrt{1-D_{n+1}}}\left(\frac{Q}{b}\left(1-e^{-b\Delta\lambda_{vp}}\right)\right.\right. \\ &\left.\left.+\frac{C_i}{a_i}\left(1-e^{-a_i\Delta\lambda_{vp}}\right) + \sigma_y + \sigma_v + 3G\Delta\lambda_{vp}\right)\right] = 0\end{aligned} \tag{IV.99}$$

Remarques :

Dans le cas des déformations planes (comme dans le cas 3D), si $\Delta\varepsilon^{\star}_{33} = \Delta\varepsilon_{33}$, on retrouve bien les équations du modèle classique tel que,

$$\underset{\sim}{\mathbf{n}}_{n+1} = \frac{3}{2}\frac{\underset{\sim}{\mathbf{S}}^{\star}_{n+1} - \underset{\sim}{\mathbf{X}}_{i_n} e^{-a_i\Delta\lambda_{vp}}}{\left|\left|\underset{\sim}{\mathbf{S}}^{\star}_{n+1} - \underset{\sim}{\mathbf{X}}_{i_n} e^{-a_i\Delta\lambda_{vp}}\right|\right|} \tag{IV.100}$$

$$\begin{aligned}\overline{f}_{vp_{n+1}} = &\left|\left|\underset{\sim}{\mathbf{S}}^{\star}_{n+1} - \underset{\sim}{\mathbf{X}}_{i_n} e^{-a_i\Delta\lambda_{vp}}\right|\right| \\ &-\left[R_n e^{-b\Delta\lambda_{vp}} + \frac{1-D_n}{\sqrt{1-D_{n+1}}}\left(\frac{Q}{b}\left(1-e^{-b\Delta\lambda_{vp}}\right)\right.\right. \\ &\left.\left.+\frac{C_i}{a_i}\left(1-e^{-a_i\Delta\lambda_{vp}}\right) + \sigma_y + \sigma_v + 3G\Delta\lambda_{vp}\right)\right] = 0\end{aligned} \tag{IV.101}$$

L'expression IV.98 permet de voir clairement la rotation de la normale au cour de la correction plastique. En comparant l'expression de la normale prenant en considération la prédiction sur l'incrément de déformation $\Delta\varepsilon^{\star}_{33}$, et celle découlant des calculs sans prédiction sur ce même incrément, il est possible de quantifier l'erreur commise par l'algorithme CP1 sur la rotation de la normale. Ainsi, lorsque le pas de chargement est petit, $\Delta\varepsilon^{\star}_{33} \simeq \Delta\varepsilon_{33}$, l'erreur commise devient faible. Lorsque le pas de chargement est important, l'erreur sur la rotation de la normale devient notable et des instabilités sont visibles sur la réponse contrainte-déformation. On s'approche alors, typiquement, du type de réponse prise comme exemple figure IV.4 et obtenue pour une intégration avec la méthode du trapèze généralisé pour $\phi = \frac{1}{2}$ ou $\phi = 1$. Cette réponse erronée provient d'une évaluation de la normale $\underset{\sim}{\mathbf{n}}_{n+\frac{1}{2}}$ à un instant différent de celle de $\overline{f}_{vp_{n+1}}$. En réalisant un retour radial, l'algorithme CP1 se place exactement dans ces conditions et commet la même erreur qu'un algorithme évaluant la normale à l'instant t et $\overline{f}_{vp_{n+1}}$ à l'instant $t + \Delta t$ sans justifier d'une normale constante au cour de la correction plastique.

L'équation permettant d'imposer la condition de contraintes planes peut s'écrire à partir de l'équation IV.91,

$$\begin{aligned} 0 &= \sigma_{33} \\ 0 &= S_{33} + \frac{1}{3}\mathrm{Tr}\,\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} \\ 0 &= \frac{1}{1-D_n}\left[(\underset{\approx}{\mathbf{S}}^{\star}_{n+1})_{33} + \frac{1}{3}\boldsymbol{\sigma}^{\star H}_{n+1}\right] - \frac{2G\Delta\lambda_{vp}}{\sqrt{1-D_{n+1}}}(\underset{\approx}{\mathbf{n}}_{n+1})_{33} + \left(K + \frac{4}{3}G\right)(\Delta\varepsilon_{33} - \Delta\varepsilon^{\star}_{33}) \end{aligned} \tag{IV.102}$$

On notera cette équation supplémentaire h_{n+1},

$$\begin{aligned} h_{n+1} &= \frac{1}{1-D_n}\left[(\underset{\approx}{\mathbf{S}}^{\star}_{n+1})_{33} + \frac{1}{3}\sigma^{\star H}_{n+1}\right] - \frac{2G\Delta\lambda_{vp}}{\sqrt{1-D_{n+1}}}(\underset{\approx}{\mathbf{n}}_{n+1})_{33} \\ &\quad + \left(K + \frac{4}{3}G\right)(\Delta\varepsilon_{33} - \Delta\varepsilon^{\star}_{33}) = 0 \end{aligned} \tag{IV.103}$$

Enfin la dernière équation concerne la forme incrémentale de l'équation d'évolution de l'endommagement que l'on peut écrire, moyennant l'hypothèse simplificatrice déjà utilisée en IV.4.2,

$$D_{n+1} = D_n + \frac{\Delta\lambda_{vp}}{(1-D_n)^{\beta+\frac{1}{2}}}\left\langle \frac{Y_{n+1}(\Delta\lambda_{vp}, \Delta\varepsilon_{33}, D_n, \underset{\approx}{\mathbf{n}}_{n+1}) - Y_0}{S} \right\rangle^s \tag{IV.104}$$

avec,

$$\begin{aligned} Y_{n+1} &= \frac{1}{2}K(\mathrm{Tr}\,\underset{\approx}{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\star}_{n+1} + (\Delta\varepsilon_{33} - \Delta\varepsilon^{\star}_{33}))^2 + G\left(\underset{\approx}{\boldsymbol{e}}^{\star}_{n+1} - \frac{\Delta\lambda_{vp}}{\sqrt{1-D_n}}\underset{\approx}{\mathbf{n}}_{n+1} + (\Delta\varepsilon_{33} - \Delta\varepsilon^{\star}_{33})\underset{\approx}{\mathbf{1}}^d_3\right) \\ &\quad : \left(\underset{\approx}{\boldsymbol{e}}^{\star}_{n+1} - \frac{\Delta\lambda_{vp}}{\sqrt{1-D_n}}\underset{\approx}{\mathbf{n}}_{n+1} + (\Delta\varepsilon_{33} - \Delta\varepsilon^{\star}_{33})\underset{\approx}{\mathbf{1}}^d_3\right) \\ &\quad + \frac{1}{3}C_i\left(\underset{\approx}{\boldsymbol{\alpha}}_{i_n}e^{-a_i\Delta\lambda_{vp}} + \frac{\underset{\approx}{\mathbf{n}}_{n+1}}{a_i\sqrt{1-D_n}}(1 - e^{-a_i\Delta\lambda_{vp}})\right) \\ &\quad : \left(\underset{\approx}{\boldsymbol{\alpha}}_{i_n}e^{-a_i\Delta\lambda_{vp}} + \frac{\underset{\approx}{\mathbf{n}}_{n+1}}{a_i\sqrt{1-D_n}}(1 - e^{-a_i\Delta\lambda_{vp}})\right) \\ &\quad + \frac{1}{2}Q\left(r_n e^{-b\Delta\lambda_{vp}} + \frac{1}{b\sqrt{1-D_n}}(1 - e^{-b\Delta\lambda_{vp}})\right)^2 \end{aligned} \tag{IV.105}$$

Finalement, il est possible de réduire le système de 4 équations (3 équations scalaires IV.99, IV.103, IV.104 et une équation tensorielle IV.98) à 4 inconnues $(\Delta\lambda_{vp}, \Delta\varepsilon_{33}, D_{n+1}, \underset{\sim}{\mathbf{n}}_{n+1})$ à seulement 2 équations scalaires (IV.99, IV.103) et 2 inconnues $(\Delta\lambda_{vp}, \Delta\varepsilon_{33})$ en réactualisant les quantités à chaque itération de la boucle de Newton-Raphson. Cette réduction se justifie

1. Initialisation $\Delta\lambda_{vp} = 0$, $\underset{\sim}{\varepsilon}^{vp}_{n+1} = \underset{\sim}{\varepsilon}^{vp}_{n}$, $\underset{\sim}{\mathbf{X}}_{i_{n+1}} = \underset{\sim}{\mathbf{X}}_{i_n}$,
   $R_{n+1} = R_n$, $D_{n+1} = D_n$, $\underline{\Delta\varepsilon_{33} = \Delta\varepsilon^{\star}_{33}}$

2. Calcul des quantités essais $\star$

3. Vérification du critère de plasticité
   $f^{\star}_{n+1}$ (équation III.80)

4. SI $f^{\star}_{n+1} \leq TOL$ ALORS
   $(.)_{n+1} = (.)^{\star}_{n+1}$

   SINON

5. Itérer sur i TANT QUE
   $\overline{f}^{(i)}_{vp_{n+1}}(\Delta\lambda^{(i)}_{vp}, \Delta\varepsilon^{(i)}_{33}) \geq$ TOL ou
   $h^{(i)}_{n+1}(\Delta\lambda^{(i)}_{vp}, \Delta\varepsilon^{(i)}_{33}) \geq$ TOL (équation IV.103)

   Calcul des quantités à l'itéré i, ainsi que la normal (équation IV.98)

$$\delta\Delta\lambda_{vp} = -\left(\overline{f}^{(i)}_{vp_{n+1}} + \frac{\partial\overline{f}^{(i)}_{vp_{n+1}}}{\partial\Delta\varepsilon^{(i)}_{33}}\delta\Delta\varepsilon_{33}\right)\left(\frac{\partial\overline{f}^{(i)}_{vp_{n+1}}}{\partial\Delta\lambda^{(i)}_{vp}}\right)^{-1}$$
$$\delta\Delta\varepsilon_{33} = -\left(h^{(i)}_{n+1} + \frac{\partial h^{(i)}_{n+1}}{\partial\Delta\lambda^{(i)}_{vp}}\delta\Delta\lambda_{vp}\right)\left(\frac{\partial h^{(i)}_{n+1}}{\partial\Delta\varepsilon^{(i)}_{33}}\right)^{-1}$$

   $\Delta\lambda^{(i+1)}_{vp} = \Delta\lambda^{(i)}_{vp} + \delta\Delta\lambda_{vp}$
   $\Delta\varepsilon^{(i+1)}_{33} = \Delta\varepsilon^{(i)}_{33} + \delta\Delta\varepsilon_{33}$

6. FIN TANT QUE
   FIN SI

Tableau IV.3 : Algorithme CP2 de retour normal dans le cas des contraintes planes.

par le fait que les équations IV.98 et IV.104 peuvent s'exprimer exclusivement en fonction de $\Delta\lambda_{vp}$ et $\Delta\varepsilon_{33}$. La synthèse de l'algorithme est donnée table IV.3.

Il est important de noter que dans cet algorithme, le retour n'est pas radial mais normal (i.e la normale doit être réactualisée à chaque itération de l'algorithme de Newton-Raphson (cf. figure IV.5)).

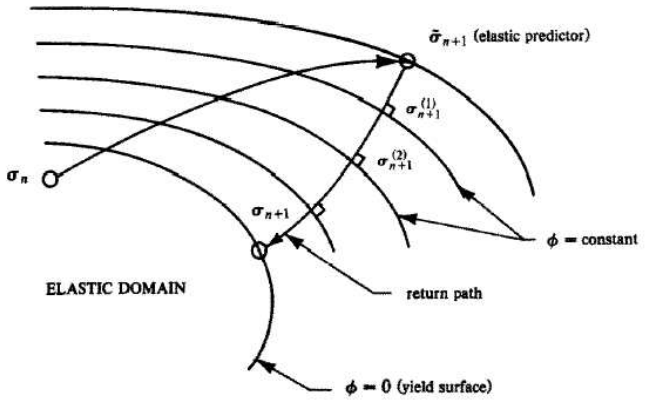


Figure IV.5 : Schéma de l'algorithme de retour normal (Simo et Ortiz, 1985).

Dans la suite, nous formulons le seul algorithme permettant d'obtenir une seule équation scalaire à résoudre dans le cas des contraintes planes.

IV.5.3 Algorithme CP3 (Simo et Taylor, 1986)

IV.5.3.1 Intégration des équations constitutives couplées

Cet algorithme modifie la formulation du modèle présentée paragraphe III.4. Il est donc nécessaire de reformuler l'intégration complète à partir des équations d'évolution que nous rappelons ici,

$$\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}^{vp} = \frac{\dot{\lambda}_{vp}}{\sqrt{1-D}}\underset{\sim}{\mathbf{P}} : \underset{\sim}{\tilde{\mathbf{n}}} \tag{IV.106}$$

$$\dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}}_i = \dot{\lambda}_{vp}\left(\frac{\underset{\sim}{\mathbf{P}} : \underset{\sim}{\tilde{\mathbf{n}}}}{\sqrt{1-D}} - a_i\underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}_i\right) \tag{IV.107}$$

$$\dot{r} = \dot{\lambda}_{vp}\left(\frac{1}{\sqrt{1-D}} - br\right) \tag{IV.108}$$

$$\dot{D} = \frac{\dot{\lambda}_{vp}}{(1-D)^{\beta+\frac{1}{2}}}\left\langle\frac{\tilde{Y}-Y_0}{S}\right\rangle^s \tag{IV.109}$$

La discrétisation des équations d'évolution des écrouissages cinématiques et isotrope par la méthode asymptotique donne,

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}_{i_{n+1}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}_{i_n} e^{-a_i \Delta\lambda_{vp}} + \frac{\underset{\sim}{\mathbf{P}} : \underset{\sim}{\tilde{\mathbf{n}}}}{a_i\sqrt{1-D_{n+1}}}\left(1 - e^{-a_i\Delta\lambda_{vp}}\right) \tag{IV.110}$$

$$r_{n+1} = r_n e^{-b\Delta\lambda_{vp}} + \frac{1}{b\sqrt{1-D_{n+1}}}\left(1 - e^{-b\Delta\lambda_{vp}}\right) \tag{IV.111}$$

Les équations d'évolution des déformations plastiques et de l'endommagement s'obtiennent par intégration classique purement implicite,

$$\Delta\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp} = \Delta\lambda_{vp}\frac{\underset{\sim}{\mathbf{P}} : \underset{\sim}{\tilde{\mathbf{n}}}_{n+1}}{\sqrt{1-D_{n+1}}} \tag{IV.112}$$

$$D_{n+1} = D_n + \frac{\Delta\lambda_{vp}}{(1-D_{n+1})^{\beta+\frac{1}{2}}}\left\langle\frac{\tilde{Y}(D_{n+1},\Delta\lambda_{vp}) - Y_0}{S}\right\rangle^s \tag{IV.113}$$

Suivant la même démarche qu'au paragraphe IV.4.2, nous allons réduire le nombre d'équation afin d'optimiser le coût de résolution.

IV.5.3.2 Réduction du système

Dans un premier temps, on réalise une prédiction élastique "classique". La condition est imposée sur $\Delta\lambda_{vp}$ uniquement ($\Delta\lambda_{vp} = 0$).

La contrainte "essai" s'écrit alors,

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^{\star}_{n+1} = (1-D_n)\left(2\mu\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\star}_{n+1} + \overline{\lambda}\mathrm{Tr}\,\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\star}_{n+1}\underset{\sim}{\mathbf{1}}\right) \tag{IV.114}$$

Or la contrainte à l'instant $t + \Delta t$ est définie par,

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} = (1-D_{n+1})\left(2\mu\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1} + \overline{\lambda}\mathrm{Tr}\,\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}\underset{\sim}{\mathbf{1}}\right) \tag{IV.115}$$

On obtient donc la relation entre la contrainte et la contrainte "essai",

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} = (1-D_{n+1})\left(\frac{\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^{\star}_{n+1}}{1-D_n} - 2\mu\frac{\Delta\lambda_{vp}}{\sqrt{1-D_{n+1}}}\underset{\sim}{\mathbf{P}} : \underset{\sim}{\tilde{\mathbf{n}}}_{n+1}\right) \tag{IV.116}$$

En posant, $\underset{\sim}{\tilde{\mathbf{Z}}}_{n+1} = \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} - \underset{\sim}{\tilde{\mathbf{X}}}_{i_{n+1}}$, il vient des équations IV.110 et IV.116, ainsi que des équations d'état III.156,

$$\begin{aligned}\underset{\sim}{\tilde{\mathbf{Z}}}_{n+1} &= (1-D_{n+1})\left(\frac{\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^{\star}_{n+1}}{1-D_n} - 2\mu\frac{\Delta\lambda_{vp}}{\sqrt{1-D_{n+1}}}\underset{\sim}{\mathbf{P}} : \underset{\sim}{\tilde{\mathbf{n}}}_{n+1}\right)\\ &- \frac{2}{3}C_i(1-D_{n+1})\left(\underset{\sim}{\mathbf{R}} : \underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}_{i_n} e^{-a_i\Delta\lambda_{vp}} + \frac{(1-e^{-a_i\Delta\lambda_{vp}})}{a_i\sqrt{1-D_{n+1}}}\underset{\sim}{\mathbf{R}} : (\underset{\sim}{\mathbf{P}} : \underset{\sim}{\tilde{\mathbf{n}}}_{n+1})\right)\end{aligned} \tag{IV.117}$$

que l'on peut écrire sous la forme,

$$\begin{aligned}\tilde{\underset{\sim}{\mathbf{Z}}}_{n+1} &= \frac{1-D_{n+1}}{1-D_n}\left(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^{\star}_{n+1} - \tilde{\underset{\sim}{\mathbf{X}}}_{i_n} e^{-a_i\Delta\lambda_{vp}}\right) \\ &- 2\sqrt{1-D_{n+1}}\left(\mu\Delta\lambda_{vp}\underset{\sim}{\mathbf{P}} : \tilde{\underset{\sim}{\mathbf{n}}}_{n+1} + \frac{1}{3}\frac{C_i(1-e^{-a_i\Delta\lambda_{vp}})}{a_i}\underset{\sim}{\mathbf{R}} : (\underset{\sim}{\mathbf{P}} : \tilde{\underset{\sim}{\mathbf{n}}}_{n+1})\right)\end{aligned} \tag{IV.118}$$

Remarques :

La sommation sur i, des écrouissages cinématiques, n'est pas écrite afin d'alléger les notations. Jusqu'à la fin du paragraphe IV.5.3.2, l'indice i sous entend une sommation.

En faisant apparaître la normale,

$$\begin{aligned}\frac{2}{3}\left|\left|\tilde{\underset{\sim}{\mathbf{Z}}}_{n+1}\right|\right|\tilde{\underset{\sim}{\mathbf{n}}}_{n+1} &= \frac{1-D_{n+1}}{1-D_n}\frac{2}{3}\left|\left|\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^{\star}_{n+1} - \tilde{\underset{\sim}{\mathbf{X}}}_{i_n} e^{-a_i\Delta\lambda_{vp}}\right|\right|\frac{3}{2}\frac{\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^{\star}_{n+1} - \tilde{\underset{\sim}{\mathbf{X}}}_{i_n} e^{-a_i\Delta\lambda_{vp}}}{\left|\left|\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^{\star}_{n+1} - \tilde{\underset{\sim}{\mathbf{X}}}_{i_n} e^{-a_i\Delta\lambda_{vp}}\right|\right|} \\ &- 2\sqrt{1-D_{n+1}}\left(\mu\Delta\lambda_{vp}\underset{\sim}{\mathbf{P}} + \frac{1}{3}\frac{C_i(1-e^{-a_i\Delta\lambda_{vp}})}{a_i}\underset{\sim}{\mathbf{R}} : \underset{\sim}{\mathbf{P}}\right) : \tilde{\underset{\sim}{\mathbf{n}}}_{n+1}\end{aligned} \tag{IV.119}$$

puis en regroupant, on obtient,

$$\begin{aligned}&\frac{1-D_{n+1}}{1-D_n}\left|\left|\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^{\star}_{n+1} - \tilde{\underset{\sim}{\mathbf{X}}}_{i_n} e^{-a_i\Delta\lambda_{vp}}\right|\right|\frac{3}{2}\frac{\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^{\star}_{n+1} - \tilde{\underset{\sim}{\mathbf{X}}}_{i_n} e^{-a_i\Delta\lambda_{vp}}}{\left|\left|\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^{\star}_{n+1} - \tilde{\underset{\sim}{\mathbf{X}}}_{i_n} e^{-a_i\Delta\lambda_{vp}}\right|\right|} \\ = &\left(\left|\left|\tilde{\underset{\sim}{\mathbf{Z}}}_{n+1}\right|\right|\underset{\sim}{\mathbf{1}} + \frac{C_i\sqrt{1-D_{n+1}}}{a_i}(1-e^{-a_i\Delta\lambda_{vp}})\underset{\sim}{\mathbf{R}} : \underset{\sim}{\mathbf{P}} + 3\mu\sqrt{1-D_{n+1}}\Delta\lambda_{vp}\underset{\sim}{\mathbf{P}}\right) : \tilde{\underset{\sim}{\mathbf{n}}}_{n+1}\end{aligned} \tag{IV.120}$$

Il n'est pas aussi simple que dans le cas de l'algorithme CP1 ou dans le cas 3D, de faire apparaître la direction et la norme de l'écoulement. Cependant, on voit que la normale à l'instant $t+\Delta t$ ne dépend que de $\Delta\lambda_{vp}$. En effet, les seules quantités restantes prises à l'instant $t+\Delta t$ sont $\left|\left|\tilde{\underset{\sim}{\mathbf{Z}}}_{n+1}\right|\right|$, D_{n+1}.

D_{n+1} étant dépendant de $\Delta\lambda_{vp}$ et de $\tilde{\underset{\sim}{\mathbf{n}}}_{n+1}$ (cf. équation IV.122 et IV.123), $\left|\left|\tilde{\underset{\sim}{\mathbf{Z}}}_{n+1}\right|\right|$ dépendant de $\Delta\lambda_{vp}$,de $\tilde{\underset{\sim}{\mathbf{n}}}_{n+1}$ et D_{n+1} (équation IV.117), il est donc a priori possible d'exprimer la normale $\tilde{\underset{\sim}{\mathbf{n}}}_{n+1}$, fonction exclusivement de $\Delta\lambda_{vp}$ dans l'équation IV.120.

Le fait de ne pouvoir extraire facilement la normale dans IV.120 complique notablement l'expression des dérivées nécessaires à l'algorithme de Newton-Raphson. Cependant, il n'est pas nécessaire d'ajouter une équation supplémentaire (celle de la normale $\tilde{\underset{\sim}{\mathbf{n}}}_{n+1}$) sur

laquelle réaliser la convergence de l'algorithme comme cela est souvent réalisé dans le cas du comportement anisotrope (Khelifa, 2004), (Belamri, 2004), (Badreddine, 2006).

$\Delta\lambda_{vp}$ s'obtient en utilisant la fonction de charge viscoplastique. En injectant l'expression IV.117 dans celle de la fonction de charge viscoplastique (équation IV.62), on obtient,

$$\begin{aligned} \overline{f}_{vp_{n+1}} &= \frac{\left|\left|\tilde{\underset{\sim}{\mathbf{Z}}}_{n+1}\right|\right|}{\sqrt{1-D_{n+1}}} - \sqrt{1-D_{n+1}}Qr_n e^{-b\Delta\lambda_{vp}} - \frac{Q}{b}\left(1-e^{-b\Delta\lambda_{vp}}\right) \\ &\quad -\sigma_y - \sigma_{v_{n+1}} = 0 \end{aligned} \tag{IV.121}$$

Comme précédemment, dans l'objectif d'une réduction du système à une équation, il est possible de faire l'hypothèse suivante,

$$D_{n+1}(\Delta\lambda_{vp}) = D_n + \frac{\Delta\lambda_{vp}}{(1-D_n)^{\beta+\frac{1}{2}}}\left\langle\frac{\tilde{Y}(\Delta\lambda_{vp},\tilde{\underset{\sim}{\mathbf{n}}}_{n+1})-Y_0}{S}\right\rangle^s \tag{IV.122}$$

et $\tilde{Y}(D_n,\Delta\lambda_{vp})$ prend alors la forme,

$$\begin{aligned} \tilde{Y}(\Delta\lambda_{vp},\tilde{\underset{\sim}{\mathbf{n}}}_{n+1}) &= \frac{1}{2}\overline{K}\,\mathrm{Tr}\,{\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\star}_{n+1}}^2 + G\left(\underset{\sim}{\boldsymbol{e}}^{\star}_{n+1} - \frac{\Delta\lambda_{vp}}{\sqrt{1-D_n}}\underset{\approx}{\mathbf{P}}:\tilde{\underset{\sim}{\mathbf{n}}}_{n+1}\right): \\ &\quad \left(\underset{\sim}{\boldsymbol{e}}^{\star}_{n+1} - \frac{\Delta\lambda_{vp}}{\sqrt{1-D_n}}\underset{\approx}{\mathbf{P}}:\tilde{\underset{\sim}{\mathbf{n}}}_{n+1}\right) \\ &+ \frac{1}{3}C_i\left(\underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}_{i_n}e^{-a_i\Delta\lambda_{vp}} + \frac{\underset{\approx}{\mathbf{P}}:\tilde{\underset{\sim}{\mathbf{n}}}_{n+1}}{a_i\sqrt{1-D_n}}(1-e^{-a_i\Delta\lambda_{vp}})\right): \\ &\quad \underset{\approx}{\mathbf{R}}:\left(\underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}_{i_n}e^{-a_i\Delta\lambda_{vp}} + \frac{\underset{\approx}{\mathbf{P}}:\tilde{\underset{\sim}{\mathbf{n}}}_{n+1}}{a_i\sqrt{1-D_n}}(1-e^{-a_i\Delta\lambda_{vp}})\right) \\ &+ \frac{1}{2}Q\left(r_n e^{-b\Delta\lambda_{vp}} + \frac{1}{b\sqrt{1-D_n}}(1-e^{-b\Delta\lambda_{vp}})\right)^2 \end{aligned} \tag{IV.123}$$

La résolution algorithmique devient alors plus délicate mais permet de résoudre le problème à l'aide d'une seule équation scalaire (équation IV.121). La normale doit être réactualisée à chaque itération dans l'algorithme de Newton-Raphson. La synthèse de l'algorithme est donnée table IV.4. Le calcul des dérivées dans l'algorithme de Newton-Raphson est reporté en annexe B.4.

Notons encore une fois, que le retour est ici de type normal comme pour l'algorithme CP2. Cependant, les dérivées dans l'algorithme de Newton-Raphson deviennent plus compliquées que pour l'algorithme CP2 principalement parce que la normale $\tilde{\underset{\sim}{\mathbf{n}}}_{n+1}$ ne peut être exprimée simplement. Dans l'algorithme CP1, la normale est dépendante de $\Delta\lambda_{vp}$ (équation IV.74), dans CP2, elle est dépendante de $\Delta\lambda_{vp}$, $\Delta\varepsilon_{33}$ (équation IV.98) et dans CP3, elle dépend de $\Delta\lambda_{vp}$, D_{n+1} et $\left|\left|\tilde{\underset{\sim}{\mathbf{Z}}}_{n+1}\right|\right|$ (équation IV.120)

Malgré cette difficulté, cet algorithme permet d'avoir une unique équation scalaire à résoudre grâce à la formulation dans le sous espace des contraintes planes ($\Delta\varepsilon_{33}$ n'est plus

1. Initialisation $\Delta\lambda_{vp} = 0$, $\underset{\sim}{\varepsilon}^{vp}_{n+1} = \underset{\sim}{\varepsilon}^{vp}_{n}$, $\underset{\sim}{\mathbf{X}}_{i_{n+1}} = \underset{\sim}{\mathbf{X}}_{i_n}$,
   $R_{n+1} = R_n$, $D_{n+1} = D_n$

2. Calcul des quantités essais $\star$
   et notamment $\underset{\sim}{\mathbf{n}}_{n+1} = \underset{\sim}{\mathbf{n}}^{\star}_{n+1}$ (initialisation de la normale)

3. Vérification du critère de plasticité
   $f^{\star}_{n+1}$ (équation III.159)

4. SI $f^{\star}_{n+1} \leq TOL$ ALORS
   $(.)_{n+1} = (.)^{\star}_{n+1}$

   SINON

5. Itérer sur i TANT QUE
   $\overline{f}^{(i)}_{vp_{n+1}}(\Delta\lambda^{(i)}_{vp}) \geq$ TOL (cf. équation IV.121)

   Calcul des quantités à l'itéré i :
   Calcul de D_{n+1} équation IV.122
   Calcul de $\underset{\sim}{\tilde{\mathbf{Z}}}_{n+1}$ et de sa norme (équation IV.117)
   Calcule de $\overline{f}^{(i)}_{vp_{n+1}}$ et des dérivées associés.

   $$\delta\Delta\lambda_{vp} = -\overline{f}^{(i)}_{vp_{n+1}} \left(\frac{\partial \overline{f}^{(i)}_{vp_{n+1}}}{\partial \Delta\lambda_{vp}} \right)^{-1}$$

   $\Delta\lambda^{(i+1)}_{vp} = \Delta\lambda^{(i)}_{vp} + \delta\Delta\lambda_{vp}$
   Mise à jour de la normale $\underset{\sim}{\tilde{\mathbf{n}}}^{(i)}_{n+1}$ équation IV.120

6. FIN TANT QUE
   FIN SI

Tableau IV.4 : Algorithme CP3 de retour normal dans le cas des contraintes planes.

une inconnue du problème car elle n'est pas traitée explicitement). Ainsi, par construction, la condition de contraintes planes est automatiquement vérifiée. Les composantes hors plan n'entrent pas explicitement dans la formulation et le traitement, au sein de l'algorithme CP3, ne concerne que les composantes planes. Les composantes hors plan (notamment $\Delta\varepsilon_{33}$ qu'il est nécessaire de renvoyer à ABAQUS) sont calculées à convergence à partir des composantes planes. Ainsi, on retrouve le formalisme classique piloté par la déformation ("strain driven") permettant l'utilisation des algorithmes généraux de correction plastique.

Comme précisé dans le paragraphe III.5.2, ce traitement permet d'obtenir naturellement la modélisation de l'anisotropie. Pour cette raison, cette formulation ayant été préférée par la suite, deux formulations (explicite et implicite) ont été implémentées dans des subroutines utilisateurs VUMAT et UMAT. La formulation implicite nécessitant le calcul de la matrice Jacobienne matérielle en vue de la résolution globale, nous formulons celle-ci dans le chapitre suivant.

IV.6 Calcul de la matrice tangente

Lors de la résolution de l'équilibre global par un schéma statique implicite, nous avons besoin de connaître la matrice de rigidité tangente (cf. paragraphe IV.2.2.1). Pour déterminer cette matrice, il est nécessaire d'évaluer la matrice Jacobienne matérielle (cf. équation IV.25) qui doit être calculée à convergence de l'algorithme de Newton-Raphson local (paragraphes IV.4 et IV.5).

Nous ne traiterons que la formulation de la matrice Jacobienne pour le modèle 3 (correspondant à l'algorithme CP3, paragraphe IV.5.3) dont dérive simplement la formulation du modèle 3D (en posant $\underset{\sim}{\mathbf{P}}$ et $\underset{\sim}{\mathbf{R}}$ les matrices identités pour le cas isotrope par exemple). Nous développons ci-dessous le calcul de la matrice Jacobienne matérielle consistante.

En différenciant, $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}$ et $\underset{\sim}{\tilde{\mathbf{X}}}_{i_{n+1}}$, ainsi qu'en utilisant la condition de consistance, il est possible d'exprimer la matrice tangente consistante (i.e consistante avec le schéma d'intégration).

En reprenant l'expression de la contrainte sous sa forme III.151 et en utilisant la forme intégrée de l'équation d'évolution de la déformation plastique (équation IV.112), on obtient,

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} = (1-D_{n+1})\underset{\sim}{\mathbf{\Lambda}} : \left(\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1} - \left(\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n}^{vp} + \Delta\lambda_{vp}\frac{\underset{\sim}{\mathbf{P}} : \underset{\sim}{\tilde{\mathbf{n}}}_{n+1}}{\sqrt{1-D_{n+1}}}\right)\right) \tag{IV.124}$$

En reprenant l'expression de la variable force thermodynamique associée à l'écrouissage cinématique (équation III.156) ainsi que la forme intégrée de l'équation d'évolution de la variable flux (équation IV.110), on obtient,

$$\begin{aligned}\underset{\sim}{\tilde{\mathbf{X}}}_{i_{n+1}} &= \underset{\sim}{\tilde{\mathbf{X}}}_{i_n}(1-D_{n+1})e^{-a_i\Delta\lambda_{vp}} \\ &+ \frac{2}{3}C_i\sqrt{1-D_{n+1}}\left(1-e^{-a_i\Delta\lambda_{vp}}\right)\underset{\sim}{\mathbf{R}} : (\underset{\sim}{\mathbf{P}} : \underset{\sim}{\tilde{\mathbf{n}}}_{n+1})\end{aligned} \tag{IV.125}$$

En différentiant ces deux expressions par rapport aux quantités à l'instant "n+1" restantes, à $\Delta\lambda_{vp}$ et $\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}$

$$\begin{aligned} d\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} &= \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1,D_{n+1}} dD_{n+1} + \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1,\Delta\lambda_{vp}} d\Delta\lambda_{vp} \\ &+ \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1,\underset{\approx}{\mathbf{P}}:\tilde{\underset{\sim}{\mathbf{n}}}_{n+1}} : d(\underset{\approx}{\mathbf{P}} : \tilde{\underset{\sim}{\mathbf{n}}}_{n+1}) + \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1,\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}} : d\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1} \end{aligned} \tag{IV.126}$$

$$\begin{aligned} d\tilde{\underset{\sim}{\mathbf{X}}}_{i_{n+1}} &= \tilde{\underset{\sim}{\mathbf{X}}}_{i_{n+1},D_{n+1}} dD_{n+1} + \tilde{\underset{\sim}{\mathbf{X}}}_{i_{n+1},\Delta\lambda_{vp}} d\Delta\lambda_{vp} \\ &+ \tilde{\underset{\sim}{\mathbf{X}}}_{i_{n+1},\underset{\approx}{\mathbf{P}}:\tilde{\underset{\sim}{\mathbf{n}}}_{n+1}} : d(\underset{\approx}{\mathbf{P}} : \tilde{\underset{\sim}{\mathbf{n}}}_{n+1}) \end{aligned} \tag{IV.127}$$

Les dérivées partielles sont reportées en annexe B.5 (équations B.70 et B.73).
Le terme $d(\underset{\approx}{\mathbf{P}} : \tilde{\underset{\sim}{\mathbf{n}}}_{n+1})$ peut être exprimé simplement en fonction de $\tilde{\underset{\sim}{\mathbf{Z}}}_{n+1}$,

$$\begin{aligned} d(\underset{\approx}{\mathbf{P}} : \tilde{\underset{\sim}{\mathbf{n}}}_{n+1}) &= \frac{\frac{3}{2}\underset{\approx}{\mathbf{P}} - (\underset{\approx}{\mathbf{P}} : \tilde{\underset{\sim}{\mathbf{n}}}_{n+1}) \otimes (\underset{\approx}{\mathbf{P}} : \tilde{\underset{\sim}{\mathbf{n}}}_{n+1})}{\left|\left|\tilde{\underset{\sim}{\mathbf{Z}}}_{n+1}\right|\right|} : d\tilde{\underset{\sim}{\mathbf{Z}}}_{n+1} \\ &= \underset{\approx}{\mathbf{N}} : d\tilde{\underset{\sim}{\mathbf{Z}}}_{n+1} \end{aligned} \tag{IV.128}$$

et dD_{n+1} s'écrit, à partir de IV.122 et en utilisant IV.128,

$$\begin{aligned} dD_{n+1} &= D_{n+1,\Delta\lambda_{vp}} d\Delta\lambda_{vp} + D_{n+1,\underset{\approx}{\mathbf{P}}:\tilde{\underset{\sim}{\mathbf{n}}}_{n+1}} : \underset{\approx}{\mathbf{N}} : d\tilde{\underset{\sim}{\mathbf{Z}}}_{n+1} \\ &+ D_{n+1,\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}} : d\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1} \end{aligned} \tag{IV.129}$$

Les dérivées partielles sont reportées en annexe B.5 (équation B.74).
Les trois quantités qu'il est nécessaire de substituer dans IV.126 sont $d(\underset{\approx}{\mathbf{P}} : \tilde{\underset{\sim}{\mathbf{n}}}_{n+1})$, dD_{n+1} et $\Delta\lambda_{vp}$ afin de pouvoir exprimer $d\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}$ fonction unique de $d\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}$. Les équations IV.128 et IV.129, nous donnent deux conditions et la condition de consistance nous donne la dernière.
En différentiant la fonction de charge viscoplastique IV.121 par rapport aux quantités "n+1" et à $\Delta\lambda_{vp}$,

$$d\overline{f}_{vp_{n+1}} = \frac{d\left|\left|\tilde{\underset{\sim}{\mathbf{Z}}}_{n+1}\right|\right|}{\sqrt{1-D_{n+1}}} + \overline{f}_{vp_{n+1},D_{n+1}} dD_{n+1} + \overline{f}_{vp_{n+1},\Delta\lambda_{vp}} d\Delta\lambda_{vp} \tag{IV.130}$$

Les dérivées sont calculées en annexe B.5 (équations B.45 et B.66).
Or $d\left|\left|\tilde{\underset{\sim}{\mathbf{Z}}}_{n+1}\right|\right|$ s'écrit,

$$
\begin{aligned}
d\left|\left|\tilde{\underset{\sim}{\mathbf{Z}}}_{n+1}\right|\right| &= \frac{3}{2}\frac{\tilde{\underset{\sim}{\mathbf{Z}}}_{n+1} : \underset{\sim}{\mathbf{P}} : d\tilde{\underset{\sim}{\mathbf{Z}}}_{n+1}}{\left|\left|\tilde{\underset{\sim}{\mathbf{Z}}}_{n+1}\right|\right|} \\
&= \frac{\underset{\sim}{\mathbf{P}} : \tilde{\underset{\sim}{\mathbf{n}}}_{n+1}}{\left|\left|\tilde{\underset{\sim}{\mathbf{Z}}}_{n+1}\right|\right|} : d\tilde{\underset{\sim}{\mathbf{Z}}}_{n+1} \qquad \text{(IV.131)}
\end{aligned}
$$

D'où,

$$
d\overline{f}_{vp_{n+1}} = \overline{f}_{vp_{n+1},\tilde{\underset{\sim}{\mathbf{Z}}}_{n+1}} : d\tilde{\underset{\sim}{\mathbf{Z}}}_{n+1} + \overline{f}_{vp_{n+1},D_{n+1}} dD_{n+1} + \overline{f}_{vp_{n+1},\Delta\lambda_{vp}} d\Delta\lambda_{vp} \qquad \text{(IV.132)}
$$

En notant,

$$
\overline{f}_{vp_{n+1},\tilde{\underset{\sim}{\mathbf{Z}}}_{n+1}} = \frac{\underset{\sim}{\mathbf{P}} : \tilde{\underset{\sim}{\mathbf{n}}}_{n+1}}{\left|\left|\tilde{\underset{\sim}{\mathbf{Z}}}_{n+1}\right|\right| \sqrt{1 - D_{n+1}}} \qquad \text{(IV.133)}
$$

Nous insistons ici sur la méthode de substitution et utilisons les expressions déjà calculées en annexes.

En injectant IV.129 dans IV.132,

$$
\begin{aligned}
d\overline{f}_{vp_{n+1}} &= \left(\overline{f}_{vp_{n+1},\tilde{\underset{\sim}{\mathbf{Z}}}_{n+1}} + \overline{f}_{vp_{n+1},D_{n+1}} D_{n+1,\tilde{\underset{\sim}{\mathbf{Z}}}_{n+1}}\right) : d\tilde{\underset{\sim}{\mathbf{Z}}}_{n+1} \\
&+ \left(\overline{f}_{vp_{n+1},\Delta\lambda_{vp}} + \overline{f}_{vp_{n+1},D_{n+1}} D_{n+1,\Delta\lambda_{vp}}\right) : d\Delta\lambda_{vp} \\
&+ \left(\overline{f}_{vp_{n+1},D_{n+1}} D_{n+1,\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}}\right) : d\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1} \qquad \text{(IV.134)}
\end{aligned}
$$

la condition de consistance permet d'exprimer $\mathrm{d}\Delta\lambda_{vp}(d\tilde{\underset{\sim}{\mathbf{Z}}}_{n+1}, d\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1})$,

$$
\begin{aligned}
d\Delta\lambda_{vp} &= \left[\left(\overline{f}_{vp_{n+1},\tilde{\underset{\sim}{\mathbf{Z}}}_{n+1}} + \overline{f}_{vp_{n+1},D_{n+1}} D_{n+1,\tilde{\underset{\sim}{\mathbf{Z}}}_{n+1}}\right) : d\tilde{\underset{\sim}{\mathbf{Z}}}_{n+1}\right. \\
&+ \left.\left(\overline{f}_{vp_{n+1},D_{n+1}} D_{n+1,\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}}\right) : d\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}\right] \\
&\cdot \left(\overline{f}_{vp_{n+1},\Delta\lambda_{vp}} + \overline{f}_{vp_{n+1},D_{n+1}} D_{n+1,\Delta\lambda_{vp}}\right)^{-1} \qquad \text{(IV.135)}
\end{aligned}
$$

En substituant les expressions de $dD_{n+1}(\Delta\lambda_{vp}, d\tilde{\underset{\sim}{\mathbf{Z}}}_{n+1}, d\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1})$ (équation IV.129) et de $d(\underset{\sim}{\mathbf{P}} : \tilde{\underset{\sim}{\mathbf{n}}}_{n+1})(d\tilde{\underset{\sim}{\mathbf{Z}}}_{n+1})$ (équation IV.128), on exprime $\mathrm{d}\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}(d\Delta\lambda_{vp}, d\tilde{\underset{\sim}{\mathbf{Z}}}_{n+1}, d\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1})$

$$\begin{aligned} d\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} &= \left(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1,D_{n+1}} D_{n+1,\Delta\lambda_{vp}} + \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1,\Delta\lambda_{vp}}\right) d\Delta\lambda_{vp} \\ &+ \left(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1,D_{n+1}} \otimes D_{n+1,\underset{\sim}{\tilde{\mathbf{Z}}}_{n+1}} + \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1,\underset{\sim}{\mathbf{P}}:\underset{\sim}{\tilde{\mathbf{n}}}_{n+1}} : \underset{\sim}{\mathbf{N}}\right) d\underset{\sim}{\tilde{\mathbf{Z}}}_{n+1} \\ &+ \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1,\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}} : d\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1} \end{aligned} \tag{IV.136}$$

IV.136 avec IV.135 permettent d'obtenir une expression de la forme $d\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}(d\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}, d\underset{\sim}{\tilde{\mathbf{Z}}}_{n+1})$,

$$d\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} = \underset{\approx}{\mathbf{A}}_s : d\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1} + \underset{\approx}{\mathbf{B}}_s : d\underset{\sim}{\tilde{\mathbf{Z}}}_{n+1} \tag{IV.137}$$

avec

$$\begin{aligned} \underset{\approx}{\mathbf{A}}_s &= \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1,\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}} \\ &+ \left(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1,D_{n+1}} D_{n+1,\Delta\lambda_{vp}} + \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1,\Delta\lambda_{vp}}\right) \\ &\otimes \left(\overline{f}_{vp_{n+1},D_{n+1}} D_{n+1,\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}}\right) \\ &\cdot \left(\overline{f}_{vp_{n+1},\Delta\lambda_{vp}} + \overline{f}_{vp_{n+1},D_{n+1}} D_{n+1,\Delta\lambda_{vp}}\right)^{-1} \end{aligned} \tag{IV.138}$$

$$\begin{aligned} \underset{\approx}{\mathbf{B}}_s &= \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1,D_{n+1}} \otimes D_{n+1,\underset{\sim}{\tilde{\mathbf{Z}}}_{n+1}} + \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1,\underset{\sim}{\mathbf{P}}:\underset{\sim}{\tilde{\mathbf{n}}}_{n+1}} : \underset{\sim}{\mathbf{N}} \\ &+ \left(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1,D_{n+1}} D_{n+1,\Delta\lambda_{vp}} + \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1,\Delta\lambda_{vp}}\right) \\ &\otimes \left(\overline{f}_{vp_{n+1},\underset{\sim}{\tilde{\mathbf{Z}}}_{n+1}} + \overline{f}_{vp_{n+1},D_{n+1}} D_{n+1,\underset{\sim}{\tilde{\mathbf{Z}}}_{n+1}}\right) \\ &\cdot \left(\overline{f}_{vp_{n+1},\Delta\lambda_{vp}} + \overline{f}_{vp_{n+1},D_{n+1}} D_{n+1,\Delta\lambda_{vp}}\right)^{-1} \end{aligned} \tag{IV.139}$$

que l'on peut écrire sous la forme,

$$(\underset{\approx}{\mathbf{I}} - \underset{\approx}{\mathbf{B}}_s) : d\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} = -\underset{\approx}{\mathbf{B}}_s : d\underset{\sim}{\tilde{\mathbf{X}}}_{i_{n+1}} + \underset{\approx}{\mathbf{A}}_s : d\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1} \tag{IV.140}$$

De la même façon, pour $\underset{\sim}{\tilde{\mathbf{X}}}_{i_{n+1}}(d\Delta\lambda_{vp}, dD_{n+1}, d(\underset{\sim}{\mathbf{P}} : \underset{\sim}{\tilde{\mathbf{n}}}_{n+1}))$ (équation IV.127), en substituant les expressions de $dD_{n+1}(\Delta\lambda_{vp}, d\underset{\sim}{\tilde{\mathbf{Z}}}_{n+1}, d\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1})$ (équation IV.129) et de $d(\underset{\sim}{\mathbf{P}} : \underset{\sim}{\tilde{\mathbf{n}}}_{n+1})(d\underset{\sim}{\tilde{\mathbf{Z}}}_{n+1})$ (équation IV.128), on exprime $\mathrm{d}\underset{\sim}{\tilde{\mathbf{X}}}_{i_{n+1}}(d\Delta\lambda_{vp}, d\underset{\sim}{\tilde{\mathbf{Z}}}_{n+1}, d\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1})$,

$$
\begin{aligned}
d\tilde{\underset{\sim}{\mathbf{X}}}_{i_{n+1}} &= \left(\tilde{\underset{\sim}{\mathbf{X}}}_{i_{n+1},D_{n+1}} D_{n+1,\Delta\lambda_{vp}} + \tilde{\underset{\sim}{\mathbf{X}}}_{i_{n+1},\Delta\lambda_{vp}}\right) d\Delta\lambda_{vp} \\
&+ \left(\tilde{\underset{\sim}{\mathbf{X}}}_{i_{n+1},D_{n+1}} \otimes D_{n+1,\tilde{\underset{\sim}{\mathbf{Z}}}_{n+1}} + \tilde{\underset{\sim}{\mathbf{X}}}_{i_{n+1},\underset{\sim}{\mathbf{P}}:\tilde{\underset{\sim}{\mathbf{n}}}_{n+1}} : \underset{\sim}{\mathbf{N}}\right) d\tilde{\underset{\sim}{\mathbf{Z}}}_{n+1} \\
&+ \left(\tilde{\underset{\sim}{\mathbf{X}}}_{i_{n+1},D_{n+1}} D_{n+1,\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}}\right) : d\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}
\end{aligned}
\tag{IV.141}
$$

IV.141 avec IV.135 permettent d'obtenir une expression de la forme $d\tilde{\underset{\sim}{\mathbf{X}}}_{i_{n+1}}(d\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}, d\tilde{\underset{\sim}{\mathbf{Z}}}_{n+1})$,

$$
d\tilde{\underset{\sim}{\mathbf{X}}}_{i_{n+1}} = \underset{\sim}{\mathbf{A}}_x : d\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1} + \underset{\sim}{\mathbf{B}}_x : d\tilde{\underset{\sim}{\mathbf{Z}}}_{n+1} \tag{IV.142}
$$

avec

$$
\begin{aligned}
\underset{\sim}{\mathbf{A}}_x &= \tilde{\underset{\sim}{\mathbf{X}}}_{i_{n+1},D_{n+1}} D_{n+1,\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}} \\
&+ \left(\tilde{\underset{\sim}{\mathbf{X}}}_{i_{n+1},D_{n+1}} D_{n+1,\Delta\lambda_{vp}} + \tilde{\underset{\sim}{\mathbf{X}}}_{i_{n+1},\Delta\lambda_{vp}}\right) \\
&\otimes \left(\overline{f}_{vp_{n+1},D_{n+1}} D_{n+1,\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}}\right) \\
&\cdot \left(\overline{f}_{vp_{n+1},\Delta\lambda_{vp}} + \overline{f}_{vp_{n+1},D_{n+1}} D_{n+1,\Delta\lambda_{vp}}\right)^{-1}
\end{aligned}
\tag{IV.143}
$$

$$
\begin{aligned}
\underset{\sim}{\mathbf{B}}_x &= \tilde{\underset{\sim}{\mathbf{X}}}_{i_{n+1},D_{n+1}} \otimes D_{n+1,\tilde{\underset{\sim}{\mathbf{Z}}}_{n+1}} + \tilde{\underset{\sim}{\mathbf{X}}}_{i_{n+1},\underset{\sim}{\mathbf{P}}:\tilde{\underset{\sim}{\mathbf{n}}}_{n+1}} : \underset{\sim}{\mathbf{N}} \\
&+ \left(\tilde{\underset{\sim}{\mathbf{X}}}_{i_{n+1},D_{n+1}} D_{n+1,\Delta\lambda_{vp}} + \tilde{\underset{\sim}{\mathbf{X}}}_{i_{n+1},\Delta\lambda_{vp}}\right) \\
&\otimes \left(\overline{f}_{vp_{n+1},\tilde{\underset{\sim}{\mathbf{Z}}}_{n+1}} + \overline{f}_{vp_{n+1},D_{n+1}} D_{n+1,\tilde{\underset{\sim}{\mathbf{Z}}}_{n+1}}\right) \\
&\cdot \left(\overline{f}_{vp_{n+1},\Delta\lambda_{vp}} + \overline{f}_{vp_{n+1},D_{n+1}} D_{n+1,\Delta\lambda_{vp}}\right)^{-1}
\end{aligned}
\tag{IV.144}
$$

que l'on peut écrire sous la forme,

$$
(\underset{\sim}{\mathbf{I}} + \underset{\sim}{\mathbf{B}}_x) : d\tilde{\underset{\sim}{\mathbf{X}}}_{i_{n+1}} = \underset{\sim}{\mathbf{B}}_x : d\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} + \underset{\sim}{\mathbf{A}}_x : d\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1} \tag{IV.145}
$$

En éliminant $d\tilde{\underset{\sim}{\mathbf{X}}}_{i_{n+1}}$ entre les équations IV.140 et IV.145, et en regroupant les termes, nous obtenons l'expression de l'opérateur tangent consistant sous la forme,

$$
d\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} = \underset{\sim}{\mathbf{K}}_{inc} : d\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1} \tag{IV.146}
$$

avec,

$$\underset{\approx}{\mathbf{K}}_{inc} = \left[\underset{\approx}{\mathbf{I}} - \underset{\approx}{\mathbf{B}}_s + \underset{\approx}{\mathbf{B}}_s : (\underset{\approx}{\mathbf{I}} + \underset{\approx}{\mathbf{B}}_x)^{-1} : \underset{\approx}{\mathbf{B}}_x\right]^{-1} : \left[\underset{\approx}{\mathbf{A}}_s - \underset{\approx}{\mathbf{B}}_s : (\underset{\approx}{\mathbf{I}} + \underset{\approx}{\mathbf{B}}_x)^{-1} : \underset{\approx}{\mathbf{A}}_x\right] \quad \text{(IV.147)}$$

IV.7 Confrontation des différents algorithmes

A travers différents cas tests plus ou moins simples, nous allons tenter de comparer les réponses des différentes formulations pour un même modèle de comportement. Pour cela, nous utiliserons un matériau modèle dont les paramètres sont résumés tableau IV.5.

La comparaison sera réalisée sur la réponse en traction à différentes vitesses en comparant la réponse d'un élément en contraintes planes (figure IV.6) puis d'une éprouvette par rapport au cas 3D (figure IV.7). Enfin, nous traiterons un cas d'emboutissage validant ainsi les algorithmes sur un cas plus complexe.

E (MPa)	ν	σ_y (MPa)	Q (MPa)	b	C (MPa)	a	n	K (MPa)
193000	0,3	173	790	7	12500	300	2.7	331

S (MPa)	s	β	Y_0 (MPa)
0,125	1	3,4	5,9

Tableau IV.5 : Coefficients du modèle utilisés pour une viscosité de type Norton

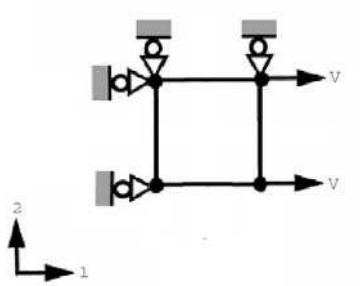
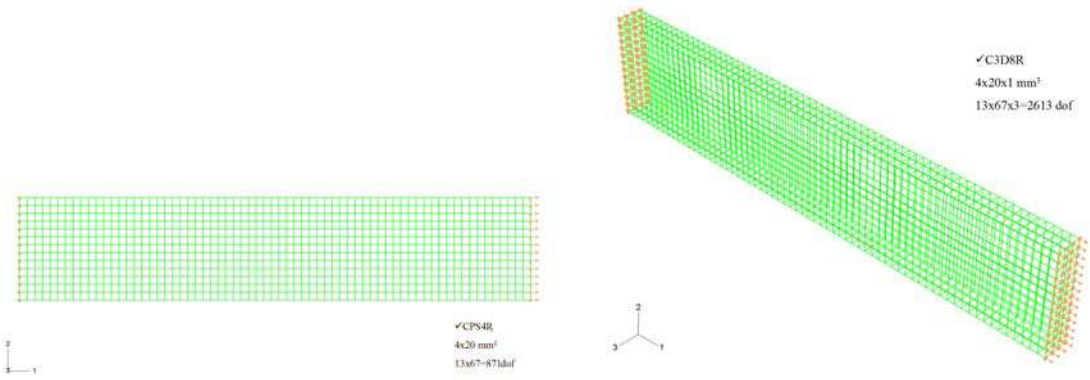


Figure IV.6 : Élément CPS4R en traction uniaxiale.



(a) (b)

Figure IV.7 : Eprouvettes de traction uniaxiale : (a) dans le cas 2D en contraintes planes (CPS4R 13x67 éléments), (b) dans le cas 3D (C3D8R 13x67x3 éléments).

IV.7.1 Tests académiques

A travers ces tests académiques, nous tentons de mettre en évidence la problématique concernant la modélisation du comportement en contraintes planes. Pour ce faire, nous présentons d'abord une sollicitation sur un élément en contraintes planes permettant de "découpler" les effets de structures, des effets de comportement, puis nous comparons la réponse 3D à celle en contraintes planes, de la même éprouvette de traction.

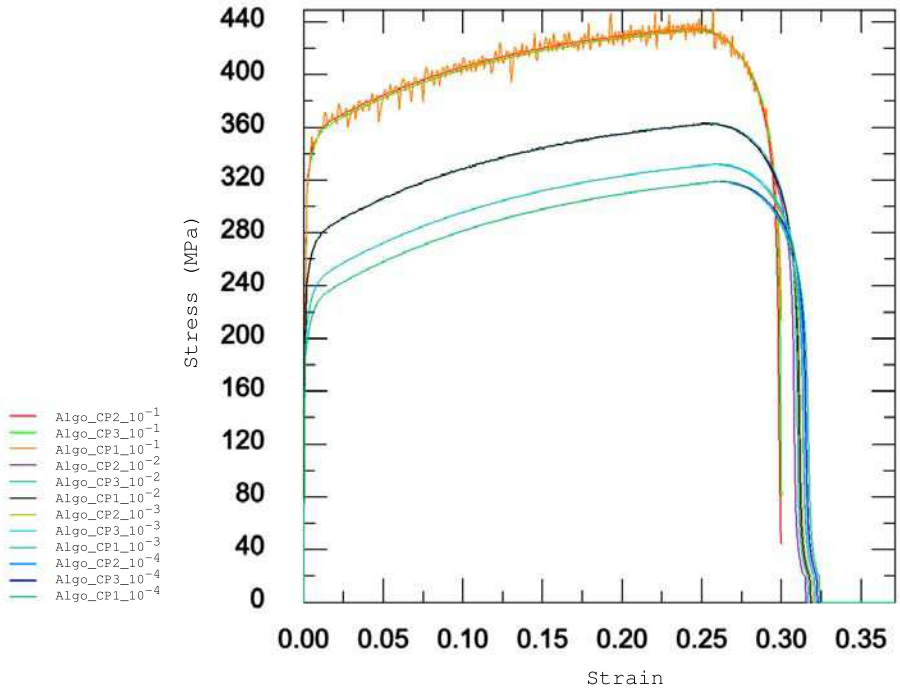


Figure IV.8 : Réponse contrainte-déformation des 3 algorithmes en contraintes planes, sollicitation en traction à 4 décades de vitesses ($\dot{\varepsilon} = 10^{-1}s^{-1}$, $\dot{\varepsilon} = 10^{-2}s^{-1}$, $\dot{\varepsilon} = 10^{-3}s^{-1}$, $\dot{\varepsilon} = 10^{-4}s^{-1}$) sur un élément CPS4R.

La figure IV.8 compare la réponse containte-déformation des 3 algorithmes présentés paragraphe III.5. Cette réponse fait suite à une sollicitation en traction uniaxiale à 4 décades de vitesses sur un élément CPS4R. Ces 3 algorithmes présentent sensiblement la même réponse mais l'algorithme CP1 montre une instabilité lorsqu'on atteint des vitesses de chargement élevées ($\dot{\varepsilon} = 10^{-1}s^{-1}$). Ces instabilités sont présentes pour les chargements plus lents mais sont beaucoup plus atténuées. Cette instabilité est due au fait que l'algorithme CP1 ne prend pas en compte la rotation de la normale au cours de la correction plastique comme discuté paragraphes III.5 et IV.5.1.

La réponse contrainte-déformation sur un élément n'est pas un cas critique puisqu'il n'implique pas de rotation de l'élément. Pour voir l'influence d'une telle rotation sur la réponse en traction, nous simulons une éprouvette complète en contraintes planes et en 3D (cf. figure IV.7). La réponse force-déplacement pour une vitesse de sollicitation de $\dot{\varepsilon} = 10^{-4}s^{-1}$ (cas le plus stable) est donnée figure IV.9.

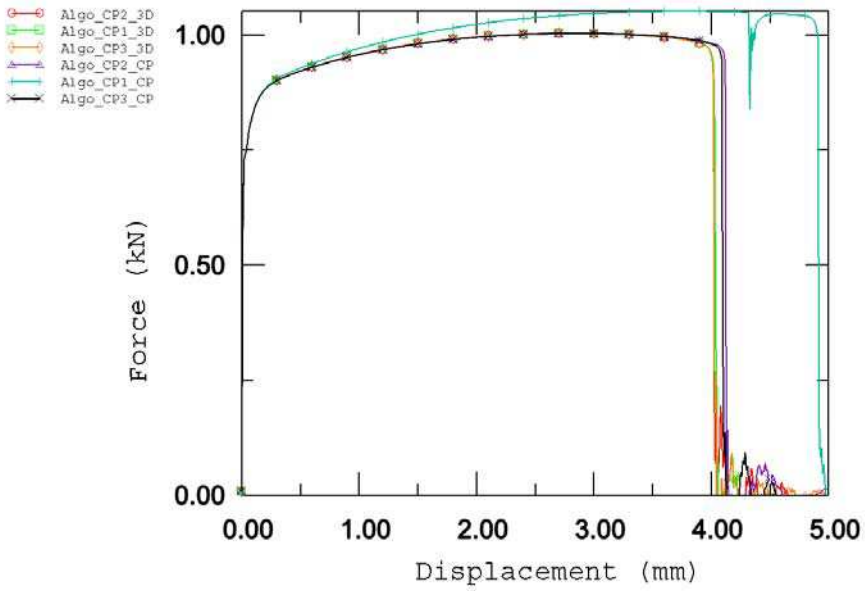


Figure IV.9 : Réponse force-déplacement des 3 algorithmes en contraintes planes et en 3D, sollicitation en traction à $\dot{\varepsilon} = 10^{-4}s^{-1}$ sur éprouvettes.

On peut voir, sur cette figure IV.9, que les réponses force-déplacement des algorithmes CP2 et CP3 en contraintes planes sont confondues avec l'ensemble des réponses 3D (y compris celle de l'algorithme CP1). On peut noter une petite différence sur l'instant de la rupture entre les cas 3D et contraintes planes. Cette différence provient vraisemblablement du fait que l'on s'écarte de l'hypothèse de contraintes planes lorsque la striction intervient. La sollicitation devient alors plus complexe et triaxiale, le fait de négliger σ_{i3} retarde légèrement l'apparition de l'endommagement. En outre, la dépendance de l'endommagement au maillage, phénomène bien connu, peut aussi avoir une influence sur ce phénomène même si la taille de maille dans le plan est identique (Besson et al., 2004).

Par contre, une différence notable est observée pour la réponse de l'algorithme CP1 qui s'écarte, à la fois des réponses 3D et CP des algorithmes CP2 et CP3, mais aussi de sa propre réponse 3D. Les mêmes raisons, provoquant des instabilités sur un élément (figure IV.8), fournissent une réponse surestimant d'environ 5 à 6 % la force et retardant d'environ 20 % l'apparition de la rupture finale.

Nous avons choisi ici le cas le moins critique correspondant à une sollicitation lente permettant une réponse stable de l'algorithme CP1. Pourtant, même dans ce cas, ce traitement ne permet pas d'avoir une réponse satisfaisante en contraintes planes dans l'objectif d'un calcul de structure. Cette contre performance de l'algorithme CP1 vient du fait qu'il néglige l'effet de la composante $\Delta\varepsilon_{33}$ sur la rotation de la normale (cf. paragraphe IV.5).

IV.7.2 Emboutissage : Essai Swift

Afin de traiter un cas un peu plus complexe, nous simulons l'essai d'emboutissage circulaire de type Swift (Francois, 1984), (Col, 2002b), (Col, 2002a) en 3D et en contraintes planes, dont les caractéristiques géométriques, de maillage et de conditions initiales, sont données sur la figure IV.10.

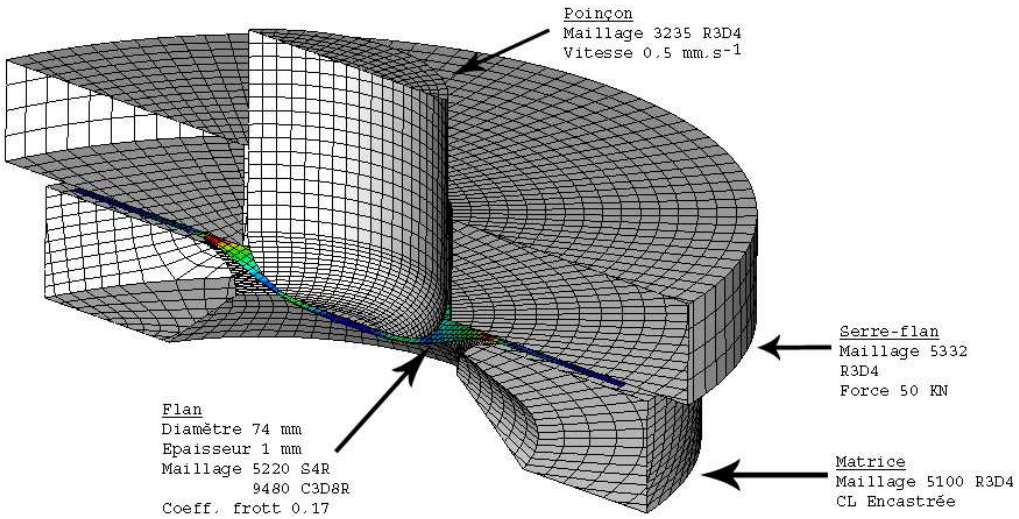


Figure IV.10 : Schéma de l'essai d'emboutissage Swift.

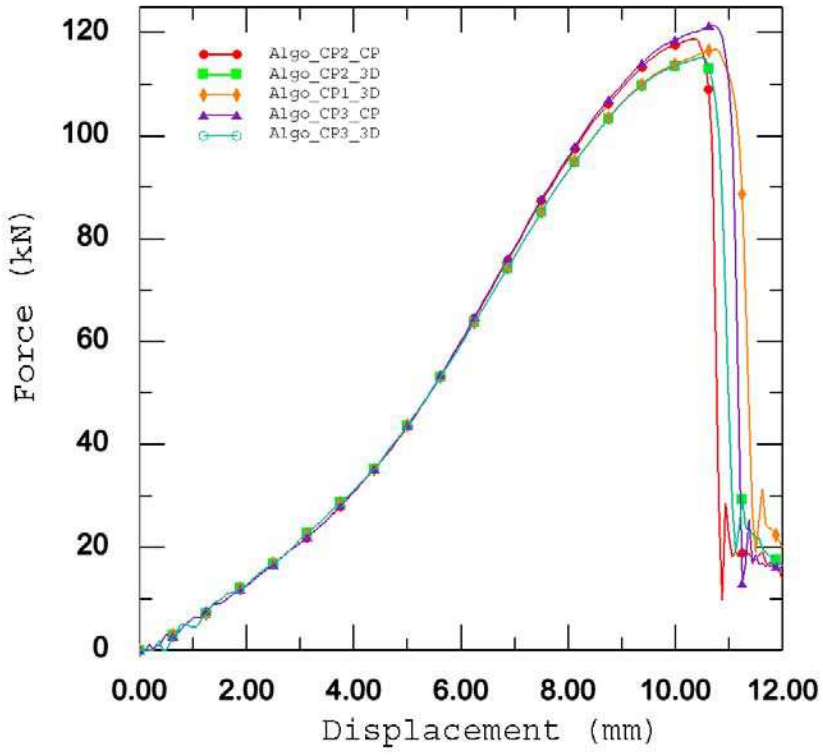


Figure IV.11 : Réponse force-déplacement des algorithmes CP2 et CP3 en contraintes planes et CP1, CP2 et CP3 en 3D pour un essai d'emboutissage de type Swift.

Le poinçon est un cylindre à fond plat et le flan n'est pas bloqué. Si le rayon de raccordement du poinçon est suffisamment petit, il n'y a pas d'expansion sous le nez du poinçon et la déformation dominante est le rétreint sous serre flan (Col, 2002a), (Marciniak et al., 2002).

L'objectif de cette simulation est de valider la robustesse des algorithmes sur des cas plus complexes. La figure IV.11 montre les réponses force-déplacement du poinçon pour les 2 algorithmes CP2 et CP3 en contraintes planes et 3D ainsi que la réponse 3D de CP1 (la réponse en contraintes planes de CP1 n'étant pas pertinente, elle n'est pas présentée ici).

La réponse force-déplacement est cohérente entre les cas en contraintes planes et les cas 3D. Les 2 simulations en contraintes planes (courbe aux symboles rond et triangle) surestiment la force maximale d'environ 4% et s'écartent de la réponse 3D à environ 60% du trajet d'emboutissage. Dans ces conditions, l'endommagement intervient un peu plus tôt pour l'algorithme CP2 que CP3 et la réponse 3D se situe entre les deux. L'erreur est de l'ordre de plus ou moins 1%.

Concernant la localisation de l'endommagement, elle intervient, aussi bien dans le cas des contraintes planes que dans le cas 3D, au niveau de l'arrondi de la matrice (figures IV.12 à IV.19).

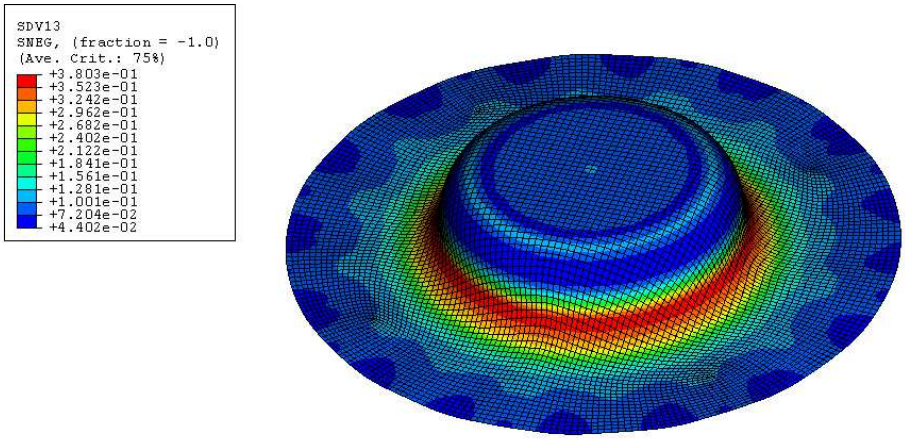


Figure IV.12 : Distribution de la déformation plastique cumulée face envers (pour l'algorithme CP3 en CP) pour un déplacement de poinçon de 10 mm.

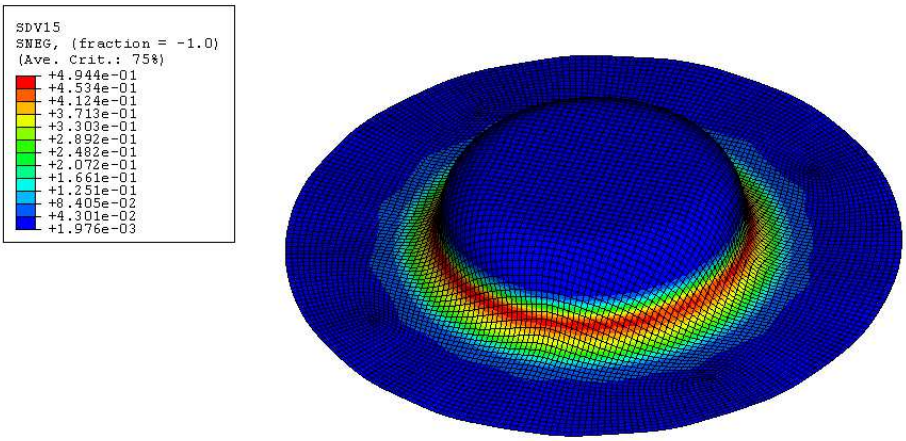


Figure IV.13 : Distribution de l'endommagement face envers (pour l'algorithme CP3 en CP) pour un déplacement de poinçon de 10 mm.

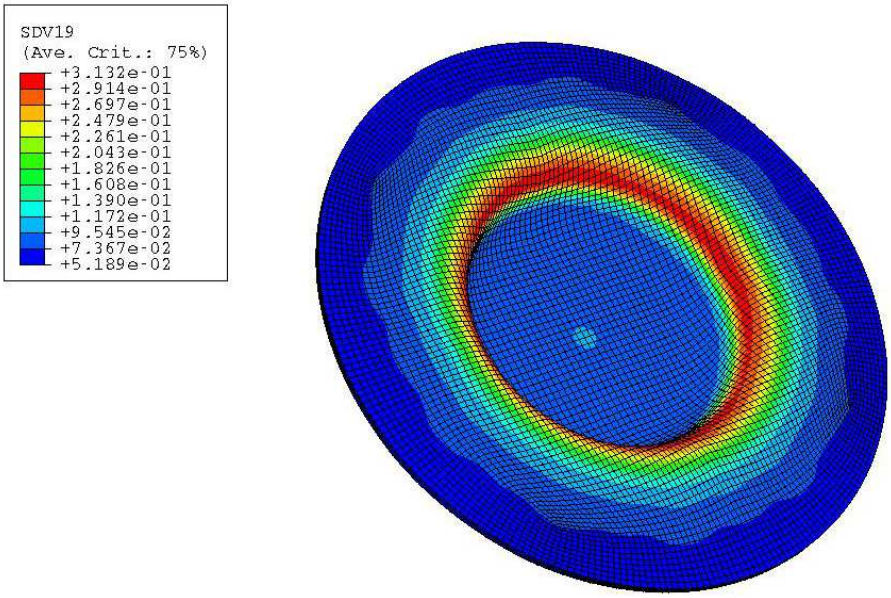


Figure IV.14 : Distribution de la déformation plastique cumulée face envers (pour l'algorithme CP3 en 3D) pour un déplacement de poinçon de 10 mm.

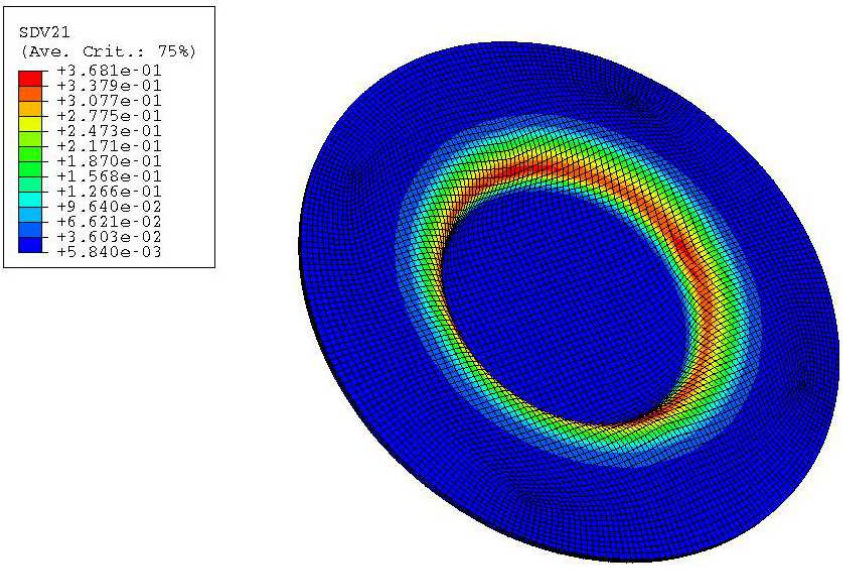


Figure IV.15 : Distribution de l'endommagement face envers (pour l'algorithme CP3 en 3D) pour un déplacement de poinçon de 10 mm.

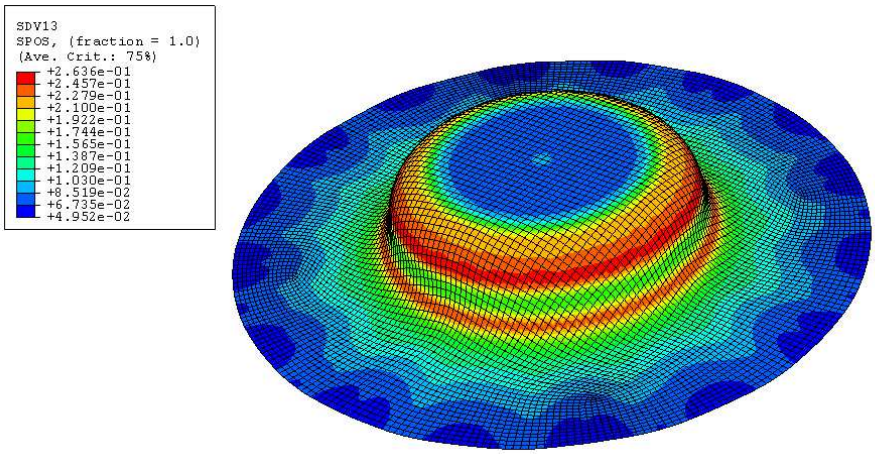


Figure IV.16 : Distribution de la déformation plastique cumulée face endroit (pour l'algorithme CP3 en CP) pour un déplacement de poinçon de 10 mm.

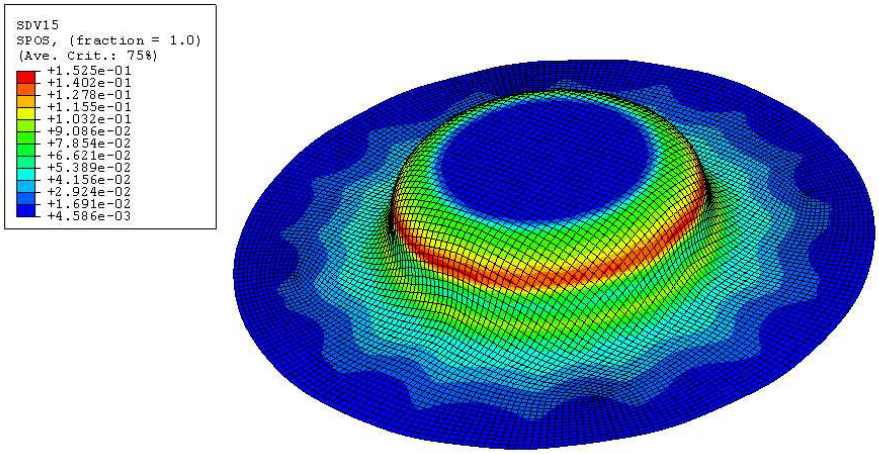


Figure IV.17 : Distribution de l'endommagement face endroit (pour l'algorithme CP3 en CP) pour un déplacement de poinçon de 10 mm.

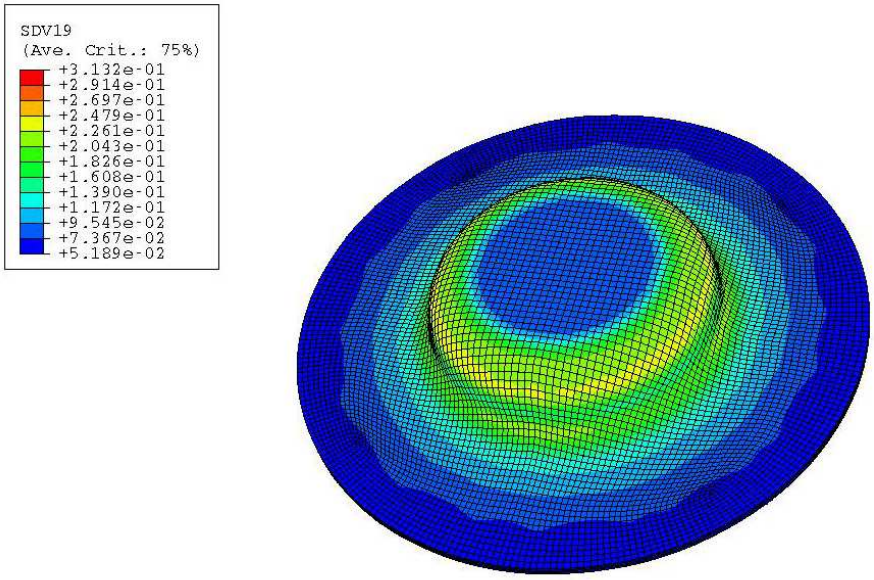


Figure IV.18 : Distribution de la déformation plastique cumulée face endroit (pour l'algorithme CP3 en 3D) pour un déplacement de poinçon de 10 mm.

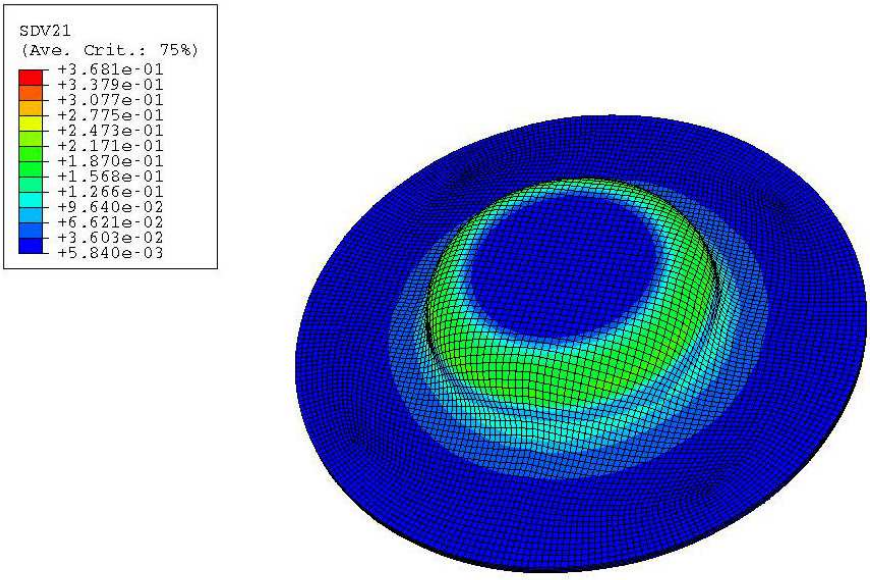


Figure IV.19 : Distribution de l'endommagement face endroit (pour l'algorithme CP3 en 3D) pour un déplacement de poinçon de 10 mm.

En conclusion

Nous avons présenté ici, les aspects numériques concernant aussi bien la discrétisation spatiale pour la méthode des éléments finis que la discrétisation temporelle pour l'intégration des équations d'évolution. Dans ce cadre, nous avons formulé un algorithme d'intégration locale basé sur :

- *l'intégration asymptotique purement implicite des équations d'évolution des écrouissages*
- *l'intégration d'Euler purement implicite des équations d'évolution de la déformation plastique et de l'endommagement*
- *un algorithme de prédiction élastique correction plastique où le retour radial n'est pas un fait, mais une hypothèse dont la validité est avérée*
- *la résolution itérative du système algébrique non linéaire par la méthode de Newton-Raphson*

Différents algorithmes d'intégration pour le cas des contraintes planes sont formulés et mènent à :

- *un algorithme CP1 basé sur l'ajout simple d'une équation*
- *un algorithme CP2 basé sur une modification de la prédiction et l'ajout d'une équation*
- *un algorithme CP3 basé sur un "mapping" permettant de contraindre l'ensemble des variables pour ne conserver qu'une équation*

Pour ce dernier algorithme, la matrice tangente consistante a été calculée en vue de son utilisation dans un code implicite.
Enfin, les algorithmes sont confrontés et mettent en avant l'erreur commise en réalisant un retour radial en contrainte plane par la méthode CP1 ainsi qu'en étudiant la robustesse des deux autres formulations.

Partie C

Application

Chapitre -V-

Application aux liaisons Ta/TA6V

Sommaire

V.1 Introduction 253
V.2 Identification 255
V.2.1 Identification du comportement non couplé des matériaux de base . 255
V.2.1.1 Identification du tantale 255
V.2.1.2 Identification de l'effet mémoire 260
V.2.1.3 Identification du TA6V 262
V.2.2 Identification du comportement non couplé de la Z.F 265
V.2.2.1 Hypothèse et validation de la mise en donnée 267
V.2.2.2 Optimisation du comportement de la Z.F 269
V.2.3 Identification du comportement couplé à l'endommagement 273
V.2.3.1 Identification du TA6V 273
V.2.3.2 Identification du Ta 280
V.2.3.3 Identification de la Z.F 287
V.3 Essais de validation 289
V.3.1 Essais de nanoindentation 289
V.3.2 Essais de traction longitudinale 296
V.4 Autres applications 298
V.4.1 Éprouvettes soudées doublement entaillées 298
V.4.2 Influence des hétérogénéités locales 303

V.1 Introduction

Dans cette partie, nous nous attacherons à mettre en place le dialogue essais-calculs, passant, dans un premier temps, par une démarche d'identification, puis, dans un second temps, par des essais de validation. Enfin, nous traiterons quelques exemples numériques qui feront vraisemblablement l'objet d'essais expérimentaux dans les perspectives de travail à court terme.

Le tableau V.1 dresse un bilan des essais mis en œuvre nous permettant d'identifier les différents mécanismes et paramètres présents dans le modèle. Ce tableau est donné à titre qualitatif et tente de mettre en évidence l'importance des différents essais formant la base expérimentale et leur pertinence face aux mécanismes à identifier. Dans ce tableau, nous ne nous sommes intéressés qu'à l'étude du comportement, sans faire état de l'identification de l'endommagement restant délicate et faisant l'objet d'un chapitre distinct. Les essais pertinents pour l'identification précise de ce mécanisme étant encore aujourd'hui l'objet de nombreux débats, nous présenterons les difficultés d'une telle démarche dans le paragraphe V.2.3.

Les essais, n'ayant pas servi à l'identification, seront utilisés pour la validation du modèle comme, par exemple, les essais de nanoindentation ou encore les éprouvettes soudées sollicitées en traction longitudinale.

	Anisotropie	Écrouissage isotrope	Écrouissage cinématique	Viscosité
Traction dans différentes directions	★★★			
Traction à différentes vitesses		★	★	★
Relaxation				★★★
Cisaillement cyclique $\Delta\varepsilon = cste$	★	★★★	★★	
Cisaillement cyclique $\Delta\varepsilon = cste$ plusieurs niveaux	★	★★★	★★	
	Couplage isotrope-viscosité		Couplage isotrope-cinématique	Effet mémoire
Traction dans différentes directions				
Traction à différentes vitesses	★★★			
Relaxation				
Cisaillement cyclique $\Delta\varepsilon = cste$			★★	
Cisaillement cyclique $\Delta\varepsilon = cste$ plusieurs niveaux			★★	★★★
Légende				
★★★	Essai permettant l'identification du mécanisme sans identification préalable d'un autre mécanisme			
★★	Essai permettant l'identification du mécanisme après identification préalable d'un ou plusieurs autres mécanismes			
★	Essai permettant l'identification partielle du mécanisme			

Tableau V.1 : Tableau de correspondance entre essais mécaniques et mécanismes identifiables

V.2 Identification

V.2.1 Identification du comportement non couplé des matériaux de base

V.2.1.1 Identification du tantale

Nous nous intéressons, dans un premier temps, au comportement non couplé avec l'endommagement et sans effet de mémoire de l'écrouissage. Comme nous l'avons vu au chapitre I, le Ta ne semble pas présenter d'endommagement important avant rupture qui se produit par striction ultime. Nous discuterons de ce point ultérieurement. Un autre aspect caractéristique du comportement, ayant été mis en évidence par les essais de cisaillement cyclique à différentes amplitudes de déformation, concerne l'effet mémoire du Ta. Nous envisagerons sa modélisation et son identification indépendamment de ce paragraphe. Enfin, nous ne considérons pas, ici, la présence du pic de Piobert-Lüders.

La base expérimentale d'identification se compose donc :

- d'essais de traction pour trois décades de vitesse $\dot{\varepsilon} = 10^{-4}s^{-1}$, $\dot{\varepsilon} = 10^{-3}s^{-1}$, $\dot{\varepsilon} = 10^{-2}s^{-1}$ dans la direction longitudinale.
- d'essais de traction dans les trois directions du plan de la tôle à une vitesse $\dot{\varepsilon} = 10^{-4}s^{-1}$.
- d'un essai de relaxation à 10% de déformation avec une vitesse de chargement de $\dot{\varepsilon} = 10^{-3}s^{-1}$.
- d'essais de cisaillement cyclique à une vitesse de cisaillement de $\dot{\gamma} = \sqrt{3}.10^{-3}s^{-1}$ et une amplitude de déformation $\gamma = +/-9\%$ pour 1 et 3.5 cycles.

Le pic de traction n'étant pas modélisé, le paramètre K_{ov} est donc mis à zéro et K_m peut prendre une valeur quelconque (ici zéro). Les paramètres identifiés sont,

E (MPa)	ν	σ_y (MPa)	Q (MPa)	b	C_0 (MPa)	a	C_∞ (MPa)	ϕ
187000	0.346	1	1135	4	6000	200	20000	5

K_M (MPa)	K_m (MPa)	K_{ov}	K_v	K_1 (s^{-1})	P_{12}
13	0	0	4	6.10^{-8}	0.85

Tableau V.2 : Coefficients du modèle non couplé identifiés pour le Ta

Les valeurs du module d'élasticité et du coefficient de Poisson sont fixées aux valeurs données par mesures ultrasonores (Nadal, 1996). La procédure d'identification est la suivante :

- identification des paramètres de viscosité pour une déformation donnée à partir de l'essai de relaxation.
- identification des paramètres décrivant l'évolution de la contrainte de traînée en fonction de la déformation plastique cumulée par les essais de traction à trois décades de vitesse.
- identification des paramètres d'anisotropie sur les essais de traction dans les trois directions du plan.
- identification des paramètres d'écrouissage isotrope et du couplage cinématique-isotrope (pour une gamme de déformation plastique cumulée importante) à partir des essais de cisaillement cyclique.

- identification des paramètres d'écrouissages isotrope et cinématique (pour une gamme de déformation plastique cumulée faible) à partir des essais de traction uniaxiale.
- "boucler" sur les deux dernières étapes.

De nombreux essais ne permettent pas d'isoler un mécanisme unique (cf. tableau V.1), il est donc nécessaire d'itérer afin de trouver le meilleur jeu de paramètres décrivant l'ensemble de la base expérimentale. Ce processus peut être réalisé "manuellement" ou de manière automatisée par l'utilisation d'un optimiseur tel que Z-optim pour Zebulon (Z-set package, 1996) ou encore Sidolo (Pilvin, 1988), parmi les plus connus dans le domaine de la mécanique.

On rappelle la correspondance de $\underset{\sim}{\mathbf{P}}$ et de la matrice de Hill $\underset{\sim}{\mathbf{H}}$,

$$\underset{\sim}{\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} G+H & -H & -G & 0 & 0 & 0 \\ -H & H+F & -F & 0 & 0 & 0 \\ -G & -F & F+H & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2N & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2M & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2L \end{bmatrix}, \quad \underset{\sim}{\mathbf{P}} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2(G+H) & -H & 0 \\ -H & 2(H+F) & 0 \\ 0 & 0 & 2N \end{bmatrix} \tag{V.1}$$

Le coefficient identifié par Frénois (Frénois, 2001) permet bien de retrouver l'anisotropie dans la direction 45° (figure V.1). Soit N=2.56 chez Frénois qui nous donne P_{12}=0.85. Les autres coefficients de la matrice prennent leurs valeurs correspondant au cas isotrope.

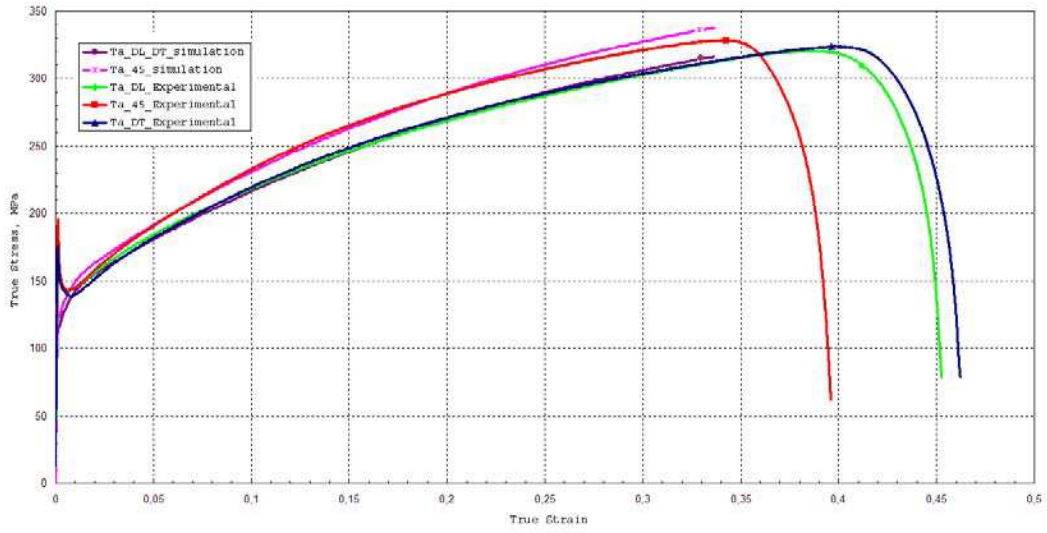


Figure V.1 : Comparaison modèle-expérience des essais de traction uniaxiale dans les trois directions du plan sur Ta.

Dans la direction longitudinale, le couplage écrouissage isotrope-viscosité donne de bons résultats pour trois décades de vitesse en décrivant la saturation de la contrainte visqueuse avec l'augmentation de la déformation plastique cumulée (figure V.2). Seul subsiste une surestimation de la réponse en traction à $\dot{\varepsilon} = 10^{-2}s^{-1}$ au delà de 8% de déformation. A

partir de cette vitesse, l'autoéchauffement du matériau prend une part non négligeable dans l'inflexion de la réponse (figures V.2)

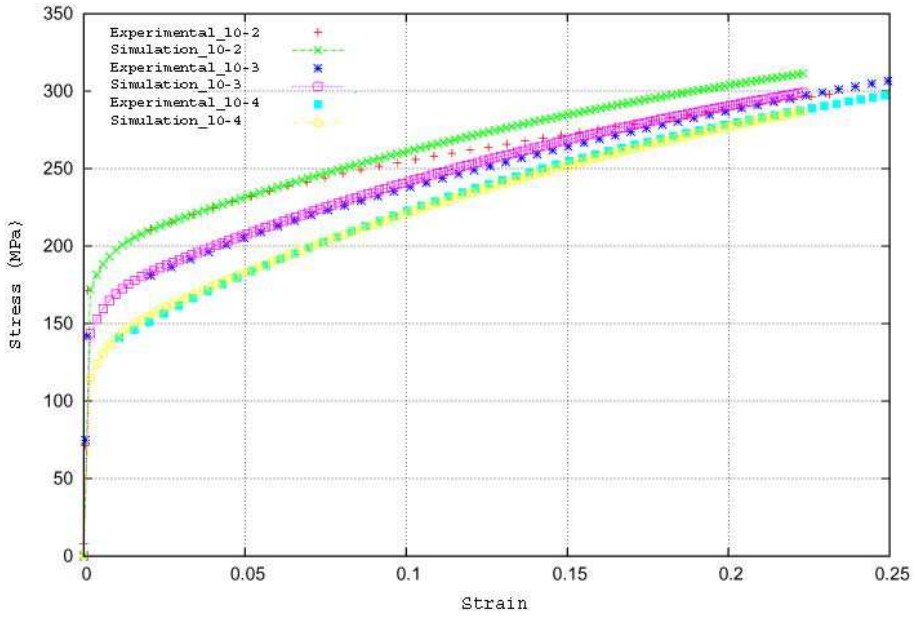


Figure V.2 : Comparaison modèle-expérience des essais de traction uniaxiale à 3 décades de vitesse sur Ta

Indépendamment du couplage écrouissage isotrope-viscosité, on note que le choix d'une fonction de viscosité en sinus hyperbolique permet de très bien décrire l'évolution de la contrainte visqueuse sur une très large gamme de vitesses de déformation quasi statique tout en conservant une saturation à grande vitesse (figure V.4 et V.3).

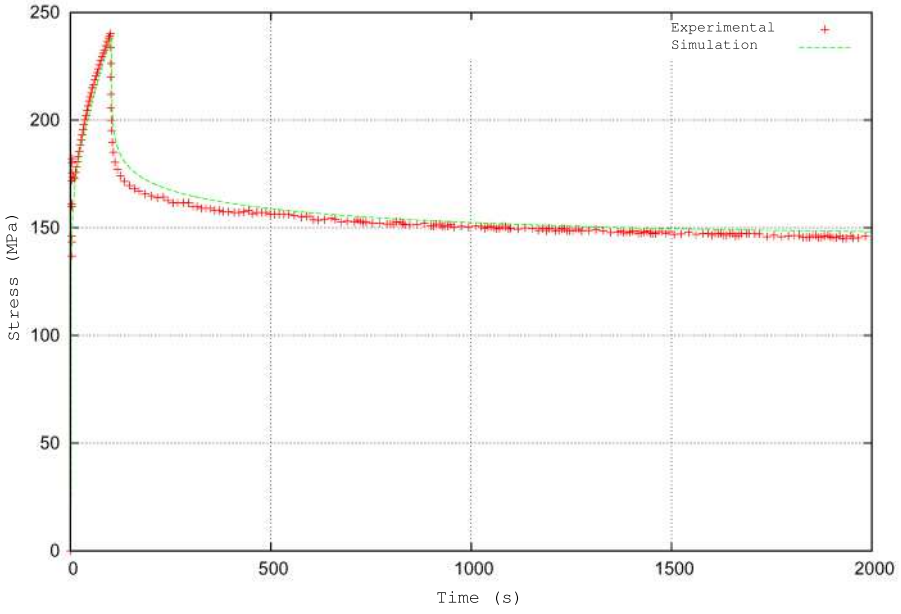


Figure V.3 : Comparaison modèle-expérience pour l'essai de relaxation à 10% de déformation sur Ta.

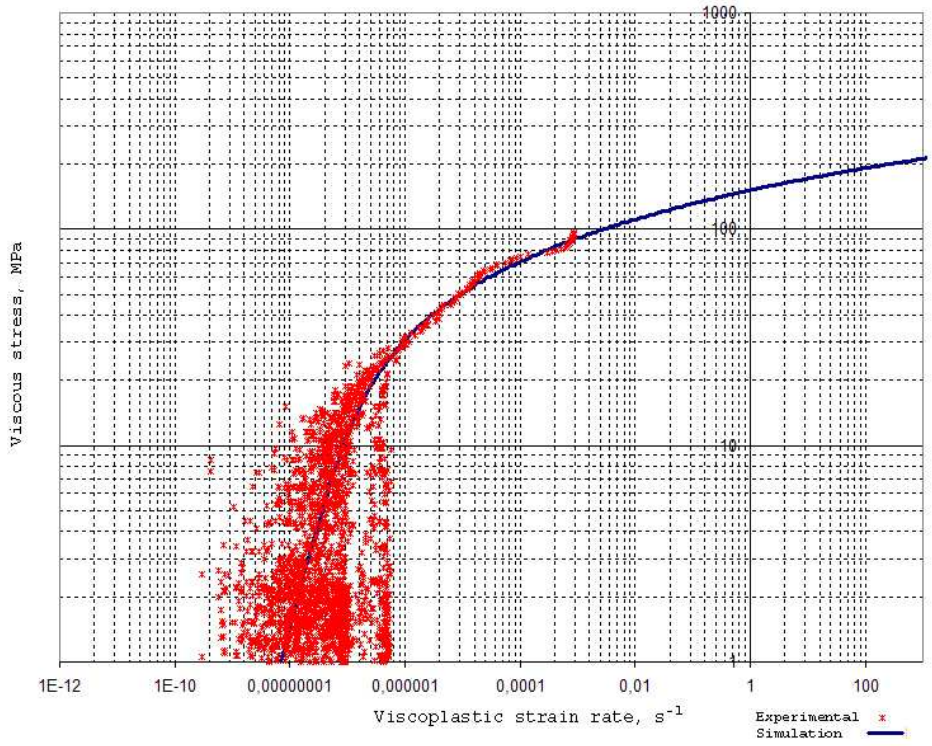


Figure V.4 : Comparaison modèle-expérience pour l'essai de relaxation à 10% de déformation sur Ta, tracé contrainte visqueuse en fonction de la vitesse de déformation plastique.

Concernant le cisaillement cyclique, il existe une dispersion expérimentale entre les essais à 1 cycle et à 3.5 cycles. Or, nous cherchons à caractériser le durcissement cyclique, il nous faut donc au moins quelques cycles afin d'approcher le cycle stabilisé. De plus, le premier quart de cycle en cisaillement doit trouver une correspondance exacte avec l'essai de traction uniaxiale en contrainte et déformation équivalentes. L'anisotropie à 45° joue alors un rôle non négligeable (un matériau isotrope présenterait une courbe plus basse en cisaillement pour une identification en traction par exemple). Le dialogue traction-cisaillement est très correct pour l'essai à 1 cycle (figure V.5) et un peu moins pour l'essai à 3.5 cycles (figure V.6) . Toutefois, le durcissement cyclique est identifié sur la courbe à 3.5 cycles malgré la dispersion expérimentale.

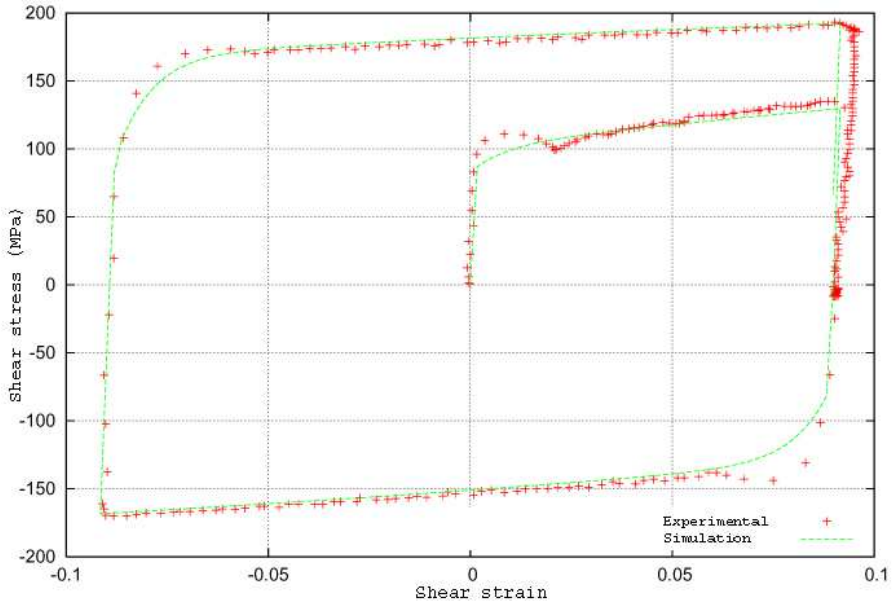


Figure V.5 : Comparaison modèle-expérience pour l'essai de cisaillement cyclique sur Ta.

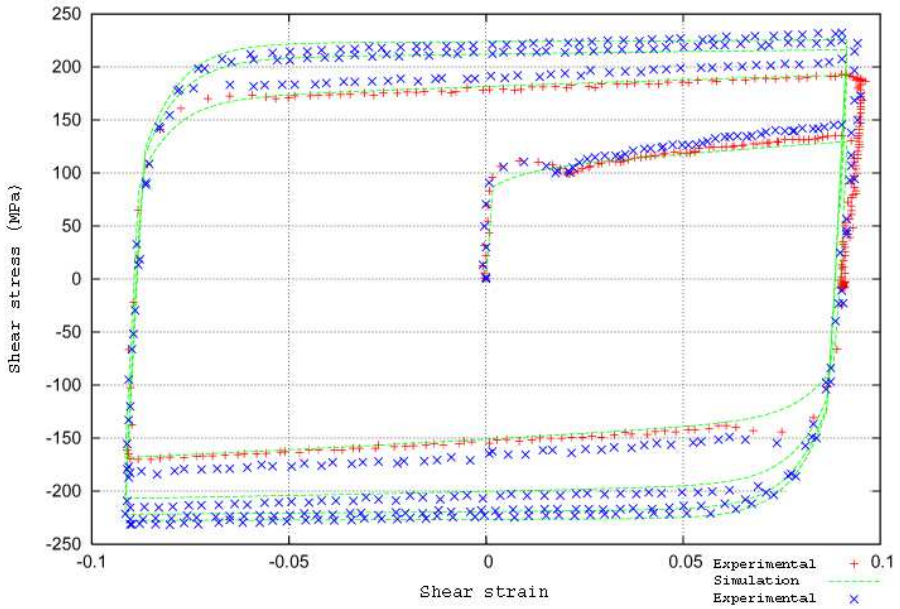


Figure V.6 : Comparaison modèle-expérience pour les essais de cisaillement cyclique à 1 et 3.5 cycles sur Ta.

Les cycles expérimentaux sont très "carrés", le durcissement cyclique intervient très rapidement à chacun des cycles puis évolue peu jusqu'au prochain changement du sens de sollicitation. Le couplage écrouissage isotrope-cinématique permet de bien modéliser ces observations en augmentant la valeur du module d'écrouissage cinématique avec la déformation plastique cumulée. On obtient un module tangent, à l'entrée en plasticité, qui évolue à chaque cycles et qui décrit très correctement les quelques premiers pourcents de déformation inélastique à chaque changement de sens de sollicitation (figure V.6).

Les traits caractéristiques de la réponse du matériau et donc du modèle, sont :

- une dépendance de la viscosité à la déformation plastique cumulée permettant de bien décrire les essais de traction à trois décades (figure V.2).
- une très forte contrainte visqueuse nécessitant une limite d'élasticité quasi nulle pour décrire à la fois, la traction uniaxiale et la relaxation (figure V.2, V.3 et V.4)
- un cycle très "carré" avec une évolution du module plastique tangent à l'entrée en plasticité au cours des cycles. Ce phénomène est modélisé par le couplage écrouissage cinématique-isotrope (figure V.6)

Il est possible d'ajouter à ces observations, celle déjà mentionnée d'un effet de mémoire de la déformation maximale perçue. Ce point fait l'objet du paragraphe suivant, détaillant l'influence de l'amplitude de la déformation imposée en cisaillement cyclique.

V.2.1.2 Identification de l'effet mémoire

Comme nous l'avons présenté au paragraphe III.8, il existe, sur certains matériaux, une influence de l'histoire de chargement. Celui-ci conserve la mémoire de la plus grande déformation plastique subie et se comporte alors de manière différente. Ce type de comportement ne peut être modélisé simplement et impose d'introduire une nouvelle variable, gouvernée par une surface seuil permettant de décrire l'évolution des déformations maximales perçues.

Pour identifier ce mécanisme, nous conservons la base expérimentale précédente à laquelle nous ajoutons une sollicitation en cisaillement cyclique suivant deux nouvelles amplitudes. Ainsi la base expérimentale se constitue :

- d'essais de traction pour trois décades de vitesse $\dot{\varepsilon} = 10^{-4}s^{-1}$, $\dot{\varepsilon} = 10^{-3}s^{-1}$, $\dot{\varepsilon} = 10^{-2}s^{-1}$ dans la direction longitudinale.
- d'essais de traction dans les trois directions du plan de la tôle à une vitesse $\dot{\varepsilon} = 10^{-4}s^{-1}$.
- d'un essai de relaxation à 10% de déformation avec une vitesse de chargement de $\dot{\varepsilon} = 10^{-3}s^{-1}$.
- d'essais de cisaillement cyclique à une vitesse de cisaillement de $\dot{\gamma} = \sqrt{3}.10^{-3}s^{-1}$ et une amplitude de déformation de $\gamma = +/-4\%$, $\gamma = +/-9\%$ et $\gamma = +/-26\%$.

L'utilisation du jeu de paramètres et du modèle précédent ne permettent pas de décrire correctement les trois cycles à différentes amplitudes (cf. figure V.7). En effet, le modèle sous-estime la réponse du cycle dont l'amplitude de déformation est importante ($+/-26\%$). Il n'est pas possible d'améliorer la description du cycle de plus grande amplitude sans dégrader celle des autres cycles. Cette caractéristique vient du fait que le durcissement cyclique, sans effet mémoire, est uniquement piloté par la déformation plastique cumulée. Les points des cycles possédant une déformation plastique cumulée égale (par exemple les points correspondant à une déformation de cisaillement de 12x9 pour le cycle $+/-9\%$ et 4x26 pour le cycle $+/-26\%$) ont donc une valeur de contrainte égale, quelle que soit l'histoire du chargement.

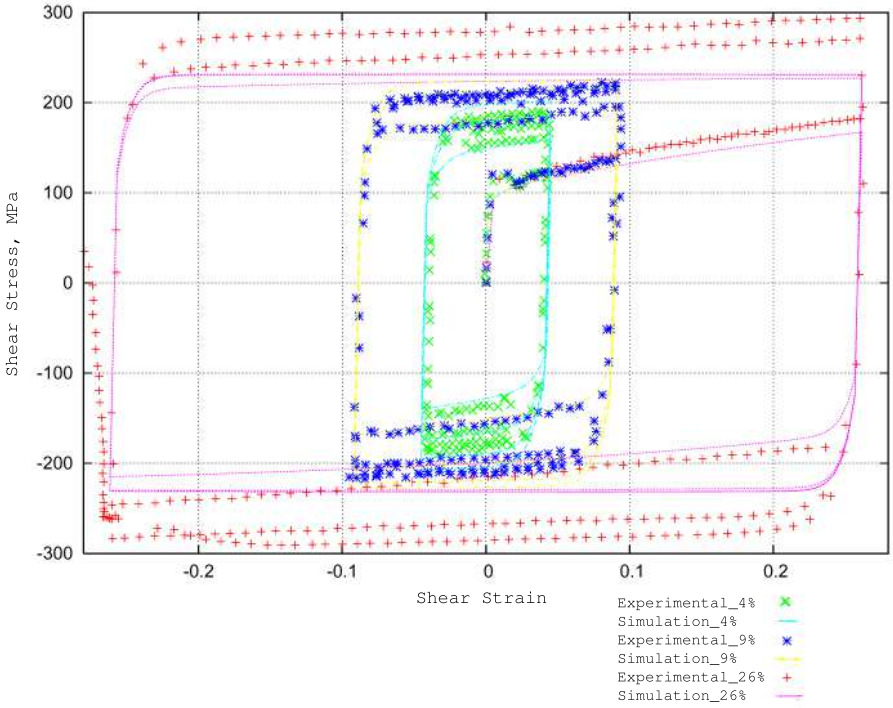


Figure V.7 : Comparaison modèle-expérience sur le Ta pour les essais de cisaillement cyclique à trois amplitudes de déformation : +/- 4%, +/- 9%, +/- 26%.

La modélisation de l'effet mémoire permet de palier cette déficience du modèle, tout en conservant les autres paramètres identifiés (cf. tableau V.3).

E (MPa)	ν	σ_y (MPa)	Q (MPa)	b	C_0 (MPa)	a	C_∞ (MPa)	ϕ
187000	0.346	1	1135	4	6000	200	20000	5

K_M (MPa)	K_m (MPa)	K_{ov}	K_v	K_1 (s^{-1})	P_{12}	ρ_{max}
13	0	0	4	6.10^{-8}	0.85	0.15

Tableau V.3 : Coefficients du modèle non couplé, avec effet mémoire, identifiés sur le Ta.

Le seul paramètre ajouté est le paramètre ρ_{max} qui définit le rayon maximal de la surface index gardant mémoire de la déformation plastique maximale (tableau V.3). A partir de cette valeur de ρ_{max}, le couplage écrouissage isotrope-viscosité se sature si le matériau subit une déformation plus faible. Dans le cas d'une sollicitation uniaxiale monotone, la prise en compte de l'effet mémoire ne modifie donc pas la réponse du modèle. Les confrontations simulation-expérience des figures V.2 et V.3 ne sont donc pas altérées. Seul le cisaillement cyclique à $+/-26\%$ est modifié comme le montre la figure V.8

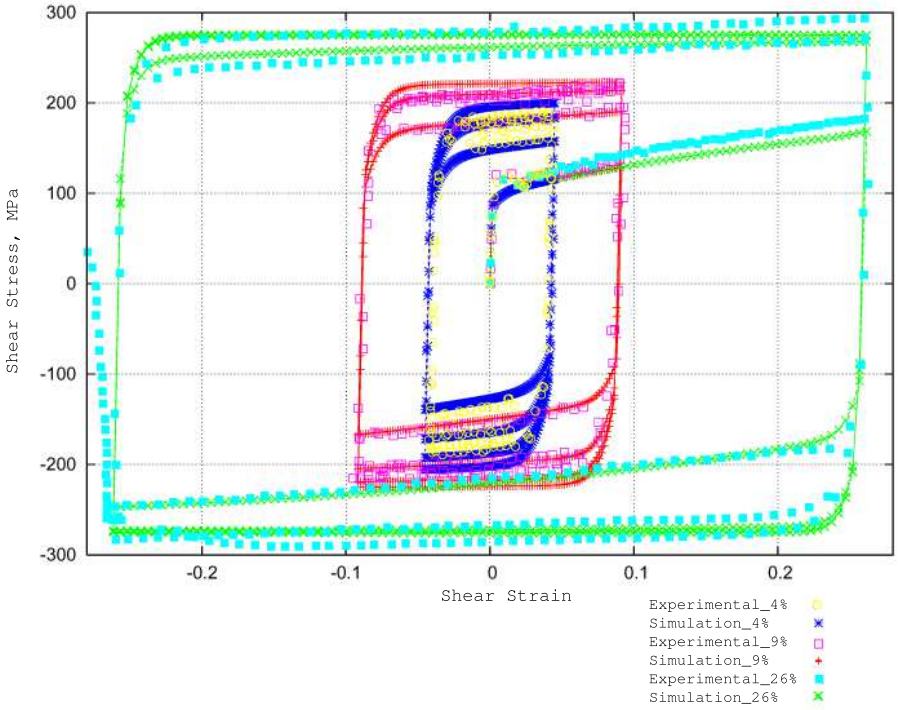


Figure V.8 : Comparaison modèle-expérience pour l'essai de cisaillement cyclique à trois amplitudes de déformation sur Ta.

La description du durcissement cyclique pour une amplitude de déformation de $+/-26\%$ est très nettement améliorée (figure V.8 face à la figure V.7). Pour le cycle à $+/-26\%$ de déformation de cisaillement, la déformation plastique maximale ($\rho_{max} = 15\%$) est atteinte et la contrainte visqueuse ne se sature plus, contrairement aux cycles d'amplitudes plus faibles. Les points des cycles d'amplitudes $+/-9\%$ et $+/-26\%$, possédant la même déformation plastique cumulée (par exemple les points correspondant à un trajet de chargement en cisaillement de 12x9 pour le cycle $+/-9\%$ et 4x26 pour le cycle $+/-26\%$), ne sont alors plus confondus. On obtient donc une description très correcte de l'ensemble de la base expérimentale.

V.2.1.3 Identification du TA6V

La base d'identification utilisée se compose :

- d'essais de traction pour deux décades de vitesse $\dot{\varepsilon} = 10^{-3}s^{-1}$, $\dot{\varepsilon} = 10^{-2}s^{-1}$
- d'un essai de relaxation à 3% de déformation avec une vitesse de chargement de $\dot{\varepsilon} = 10^{-3}s^{-1}$
- d'un essai de cisaillement cyclique à une vitesse de cisaillement de $\dot{\gamma} = \sqrt{3}.10^{-3}s^{-1}$ et une amplitude de déformation $\gamma = +/-9\%$

Les paramètres identifiés sont alors donnés tableau V.4.

E (MPa)	ν	σ_y (MPa)	Q (MPa)	b	C_1 (MPa)	a_1	C_2 (MPa)	a_2
110000	0.34	572	-180	1	36500	130	1850	6

K_M (MPa)	K_m (MPa)	K_{ov}	K_v	K_1 (s^{-1})
36	12	130	0	10^{-7}

Tableau V.4 : Coefficients du modèle non couplé identifiés pour le TA6V.

Le modèle utilisé est un modèle à écrouissage cinématique double, permettant à la fois l'écrouissage positif en traction monotone et l'adoucissement cyclique (grâce à un module d'écrouissage isotrope négatif). Les deux écrouissages cinématiques possèdent des cinétiques très différentes permettant de décrire au mieux la base expérimentale sur toute la gamme de déformation.

Le module d'élasticité est le module moyen mesuré sur les essais de traction et le coefficient de Poisson est fixé à sa valeur théorique.

La même procédure d'identification que celle utilisée pour le Ta (paragraphe V.2.1.1) est adoptée. Cependant, le comportement est plus simple à identifier puisqu'il ne nécessite pas de couplage écrouissage isotrope-viscosité, ni écrouissage cinématique-isotrope. L'ajout d'un écrouissage cinématique lent donne plus de souplesse à la modélisation et rend donc l'identification plus simple.

Les courbes obtenues pour l'identification du TA6V, sont présentées ci-dessous :

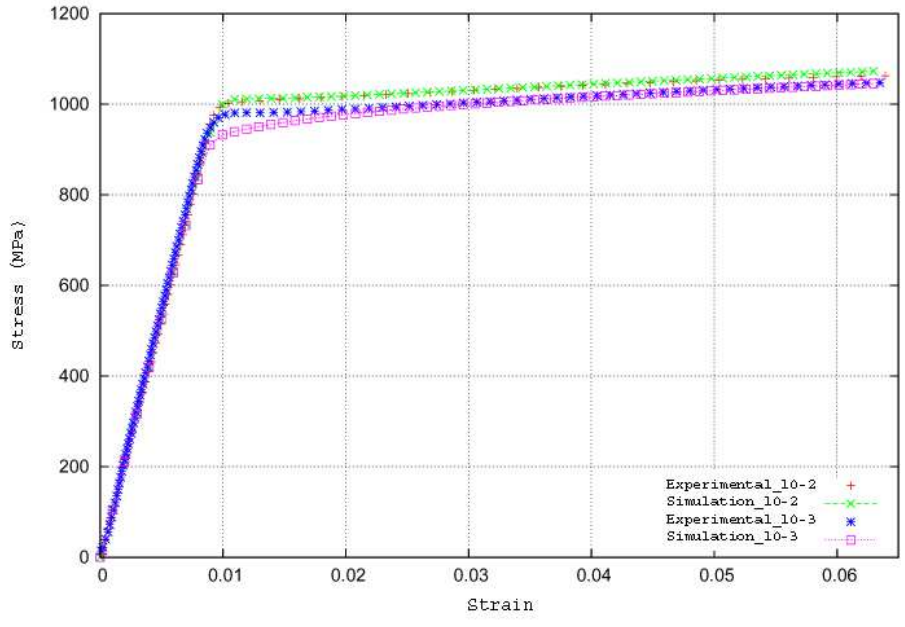


Figure V.9 : Comparaison modèle-expérience pour les essais de traction uniaxiale à deux décades de vitesse sur TA6V.

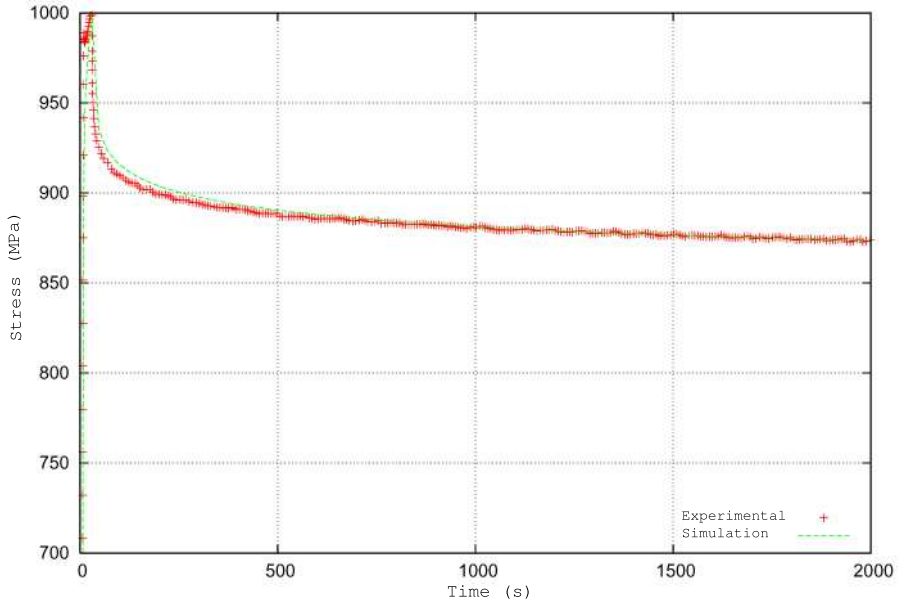


Figure V.10 : Comparaison modèle-expérience pour l'essai de relaxation à 3% de déformation sur TA6V.

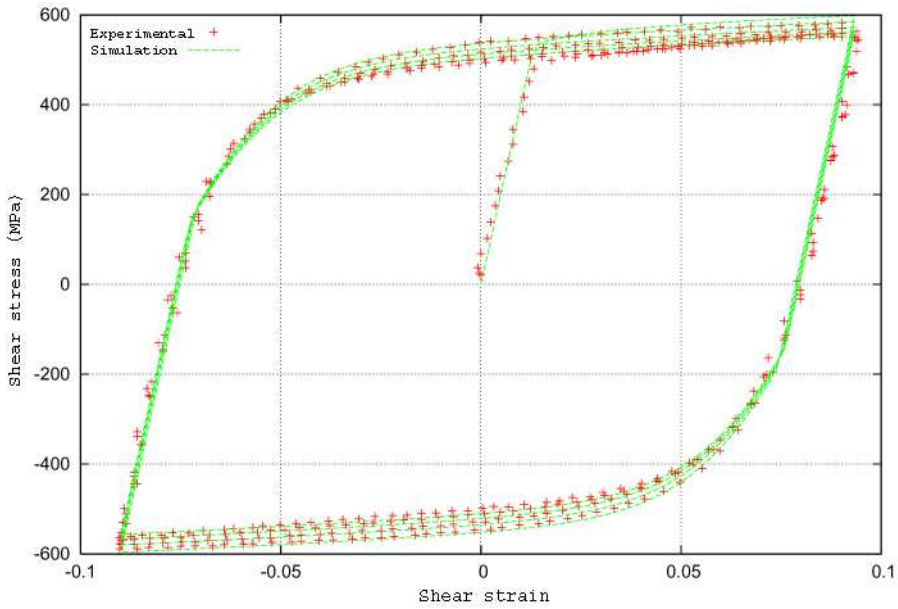


Figure V.11 : Comparaison modèle-expérience pour l'essai de cisaillement cyclique sur TA6V.

Les points marquants de la modélisation du TA6V se résument à :

- un comportement monotone présentant une entrée en plasticité très "brutale" (figure V.9) puis un comportement cyclique dont les cycles sont très arrondis (figure V.11). Pour modéliser ce point, nous avons utilisé un couplage écrouissage isotrope-viscosité initialement prévu pour modéliser le pic de Piobert-Lüders du Ta. Ainsi, on obtient

non pas un pic, mais un plateau qui sature rapidement avec la déformation plastique. Les cycles sont ensuite très arrondis par l'influence forte de l'écrouissage cinématique.

- un adoucissement cyclique (figure V.11). Celui-ci reste assez faible et s'identifie à l'aide d'un module d'écrouissage isotrope négatif. Il est alors nécessaire d'équilibrer cet effet par un écrouissage cinématique lent, permettant de maintenir l'écrouissage positif observé en sollicitation monotone (figure V.9).
- une viscosité non négligeable (figure V.10) qui implique une limite d'élasticité faible face aux valeurs expérimentales de $R_{p0,2}$.

La base expérimentale est correctement décrite. Cependant, nous ne modélisons pas le durcissement observé au premier cycle (cf. paragraphe I.6.1 figure I.35) et la correspondance traction-cisaillement place naturellement le premier quart de cycle monotone de la simulation au niveau du premier cycle complet expérimental.

Les essais cycliques à différentes amplitudes de déformation donnent une courbe de consolidation cyclique exactement superposée à la courbe monotone (cf. paragraphe I.6.2 figure I.41). Le modèle est donc prédictif pour différentes amplitudes de déformation (figure V.12).

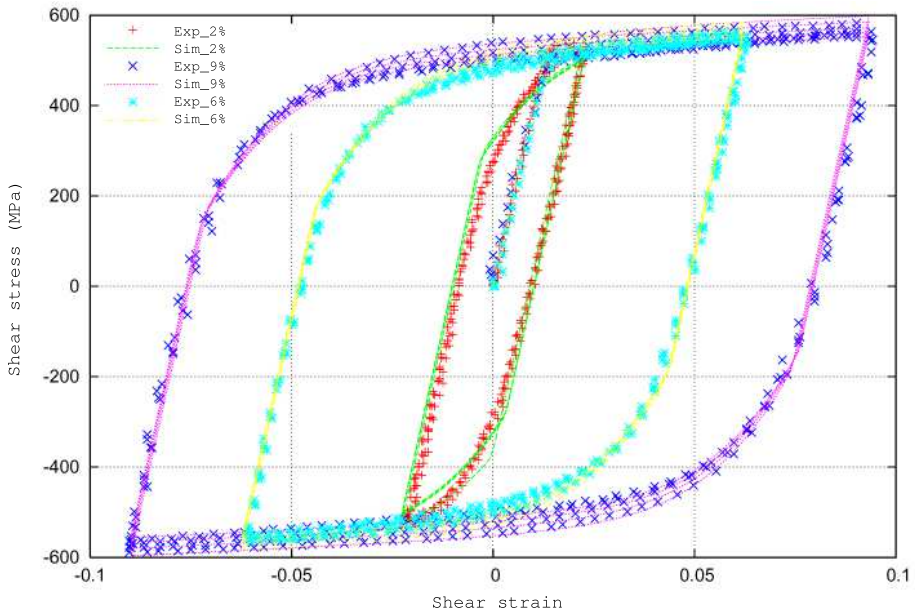


Figure V.12 : Comparaison modèle-expérience sur le TA6V pour les essais de cisaillement cyclique à trois amplitudes de déformation : +/- 2%, +/- 6%, +/- 9%.

V.2.2 Identification du comportement non couplé de la Z.F

Afin d'identifier le comportement de la Z.F, nous nous appuyons sur le seul essai permettant de caractériser sa réponse indépendamment des matériaux de base. Cet essai est l'essai de flexion quatre points sur éprouvette entaillée. Cependant, l'identification de la Z.F par cet essai complexe nécessite un calcul de structure complet afin d'obtenir la réponse force-déplacement des appuis et comparer l'écart simulation-expérience. Il est alors nécessaire de mettre en place une procédure d'optimisation longue et coûteuse impliquant à chaque itération la simulation de l'essai complet (cf. figure V.13).

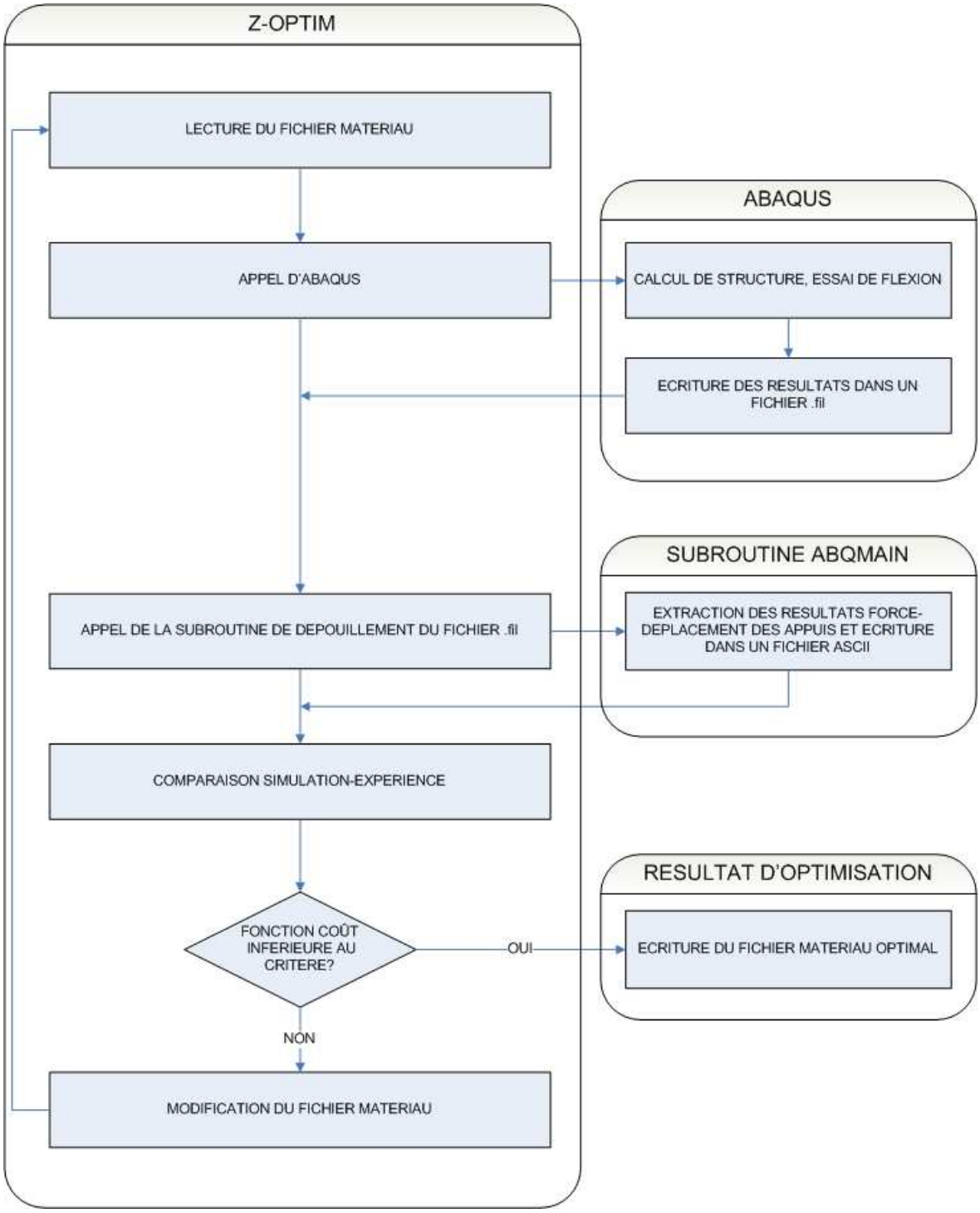


Figure V.13 : Diagramme d'optimisation des coefficients matériau de la Z.F.

Cette procédure englobe deux problèmes, l'un de simulation et l'autre d'optimisation. Les problématiques d'optimisation se caractérisent principalement par le gain de temps et la robustesse de la convergence, tandis que les problématiques de simulation concernent plutôt la stabilité du calcul et la pertinence des résultats.

Nous détaillerons, dans un premier temps, les aspects simulations avec la validation de la mise en donnée par la simulation de l'essai de flexion sur éprouvette entaillée de matériaux

de base. Puis nous présenterons les résultats d'identification du comportement de la Z.F par optimisation.

V.2.2.1 Hypothèse et validation de la mise en donnée

Dans l'objectif d'une optimisation, nous cherchons à diminuer le temps de calcul utilisé pour la simulation et donc la taille du problème. Le passage du 3D au 2D est réalisé moyennant l'hypothèse des déformations planes. Cette hypothèse est valide sur toute la longueur du cordon à l'exception de la proximité des surfaces libres de l'éprouvette. Pour s'en assurer, nous réalisons un calcul sur une éprouvette 3D dont les mesures de déformation suivant la direction DL sont tracées (figure V.14).

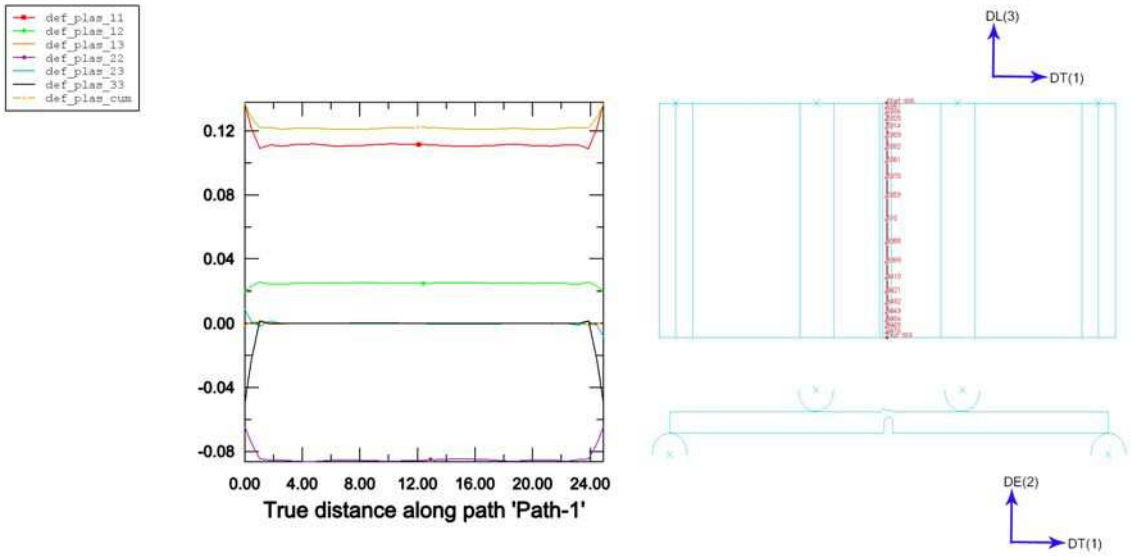


Figure V.14 : Profil de déformations dans la direction longitudinale d'une éprouvette 3D.

Le choix des éléments est très important. Les éléments triangulaires permettent une meilleure discrétisation géométrique mais donnent des résultats beaucoup trop rigides (Hibbit et al., 2004), (Belytschko et al., 2000). Il est donc essentiel d'utiliser des éléments quadrangulaires, en nombre suffisant dans l'épaisseur, en s'assurant de contrôler les modes d'hourglass. Certains éléments spécifiques sont parfois utilisés tels que les éléments bulles (Bilat, 2007). Le maillage utilisé est présenté en figure V.15 et s'appuie sur des éléments quadrangulaires bilinéaires CPE4.

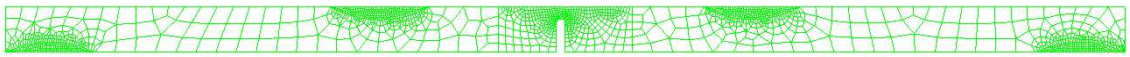


Figure V.15 : Maillage de l'éprouvette de flexion entaillée, 1742 éléments quadrangulaires linéaires CPE4.

Le maillage de l'éprouvette est raffiné dans la zone d'entaille et compte 8 à 10 éléments dans l'épaisseur. Les zones de contact sont aussi des zones où le maillage nécessite une finesse plus importante afin d'éviter l'interpénétration entre la surface maître et la surface

esclave. Les appuis sont décrits par une surface analytique rigide et la pression de contact est transmise totalement lorsque l'écart entre les deux surfaces devient nul. Le frottement entre les deux surfaces est défini par un modèle tangentiel de Coulomb dont le coefficient de frottement dépend du matériau. La gestion du contact est parfois rendue difficile et notamment lors de la simulation de structures soudées impliquant une "dissymétrie" dans les conditions de contact entre Ta d'un côté et TA6V de l'autre. De plus, le décollement des surfaces étant autorisé, la reprise de contact complique notablement la convergence du calcul.

Un dernier problème concernant la simulation de l'essai de flexion porte sur l'effet d'inertie important qu'il implique. En effet, l'utilisation du code ABAQUS dans sa version explicite amplifie les effets inertiels et provoque une perte de contact importante entre l'éprouvette et les appuis. Dans ces conditions, le pas de temps doit être diminué afin d'atteindre une bonne stabilité. La taille de maille étant déjà très petite (de l'ordre de 50 μm), on atteint alors rapidement des temps de calcul prohibitifs, n'assurant pourtant pas la stabilité du calcul dans toutes les conditions. Ainsi, il est essentiel d'utiliser le code dans sa version implicite et de coder la subroutine explicite vumat dans sa version implicite umat. On obtient un calcul beaucoup plus stable où les problèmes de perte de contact sont minimisés par l'absence d'effet inertiel artificiellement introduit par le calcul de la matrice masse dans le cas explicite.

La validation de cette mise en donnée est réalisée sur la comparaison simulation-expérience des essais sur éprouvettes entaillées de matériaux de base (figure V.16). Ces résultats constituent à la fois une validation de la mise en donnée dans l'objectif de l'identification du comportement de la Z.F, mais aussi une validation des résultats d'identification du Ta et du TA6V sur leur base expérimentale (cf. paragraphe V.2.1.1 et V.2.1.3).

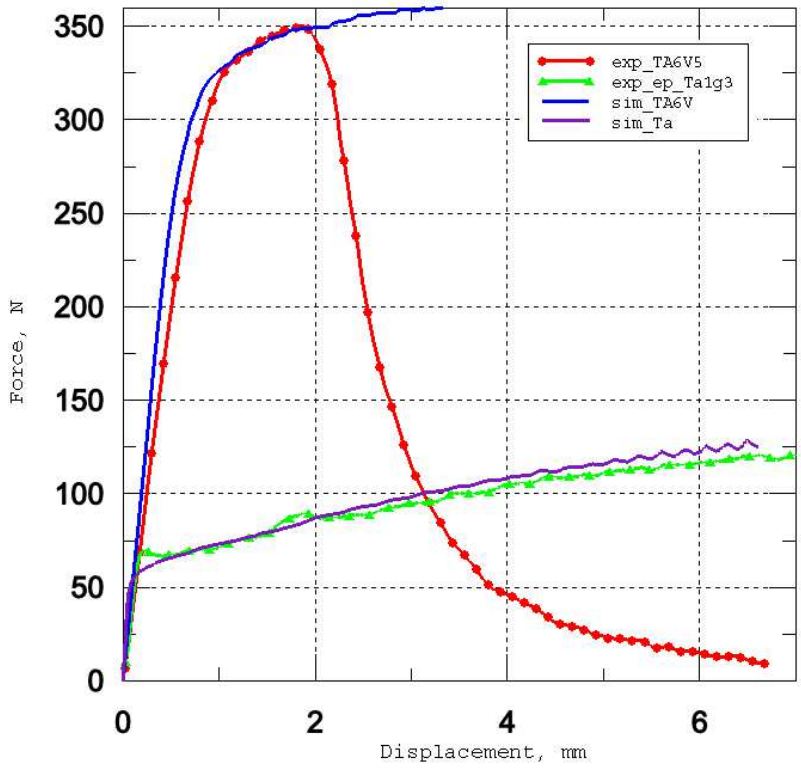


Figure V.16 : Comparaison simulation-expérience sur Ta et TA6V.

La hauteur liaisonnée utilisée pour simuler l'essai est de 0.52 mm et le coefficient de frottement vaut $\eta = 0.21$. On obtient une bonne correspondance simulation-expérience avec toutefois un bémol sur la hauteur liaisonnée du TA6V qui est mesurée expérimentalement à 0.55 mm. On sous-estime donc la hauteur liaisonnée d'une trentaine de μm soit un écart en force d'environ 20 N. Cet écart peut être dû à plusieurs paramètres :

- une hauteur liaisonnée non constante sur la longueur du cordon puisque l'évaluation expérimentale n'est réalisée que sur une coupe.
- un coefficient de frottement plus faible que celui affecté pour la simulation, celui-ci n'ayant pas été évalué expérimentalement.

En conclusion, la mise en donnée de l'essai de flexion sur éprouvette entaillée ainsi que ses hypothèses sont validées par la simulation des matériaux de base (figure V.16). La réponse de ces matériaux, identifiés précédemment, est en bon accord avec les essais expérimentaux et constitue à la fois, une validation du jeu de paramètres identifiés pour le Ta et le TA6V, mais aussi, un validation des hypothèses de simulation. Nous pouvons donc identifier le comportement de la Z.F à partir de cet essai, en conservant un bon degré de confiance quant aux hypothèses formulées.

V.2.2.2 Optimisation du comportement de la Z.F

Paramétrie G2

Le contour de la Z.F est estimé à travers la morphologie des coupes micrographiques. La soudure possède une hauteur liaisonnée de 1.2 mm tandis que la hauteur restante après entaille est de 0.39 mm. L'entaille possède un rayon de 0.2 mm et est décalée de 0.2 mm côté TA6V par rapport au plan de joint.

Les hypothèses de mise en donnée permettent de diminuer le temps de calcul (environ 20' de temps CPU) et d'envisager l'optimisation de paramètres sur un calcul de structures. Cependant, l'identification d'un comportement aussi complexe que celui formulé au chapitre III, moyennant un seul essai expérimental, n'est pas raisonnable. Nous décidons donc de fixer certains paramètres :

- E est fixé à 92 GPa à partir des résultats moyens de nanoindentation (paragraphe II.5.1).
- ν est fixé à 0.34, valeur très proche de celle des matériaux de base.
- Nous évaluons les paramètres de viscosité à partir des valeurs de relaxation à 10% de déformation des matériaux de base (figure V.17).
- Nous fixons, de manière arbitraire, les coefficients d'écrouissages de la Z.F à ceux identifiés pour le TA6V.
- Nous faisons l'hypothèse d'un comportement isotrope.
- Nous identifions, comme seul paramètre, la limite d'élasticité σ_y sur l'essai de flexion quatre points.

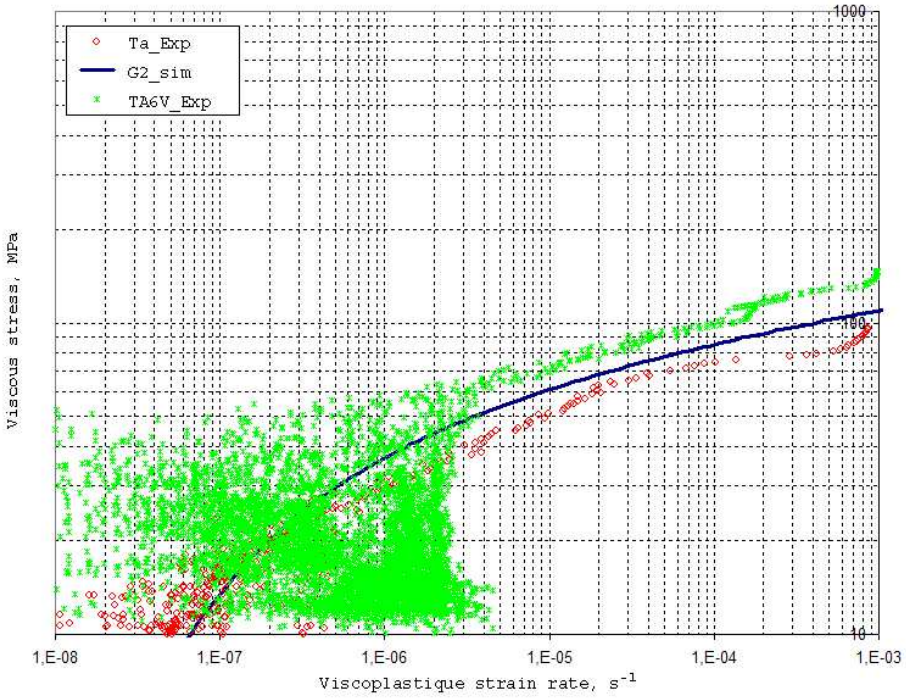


Figure V.17 : Comparaison des essais de relaxation pour le Ta et le TA6V et identification d'un comportement moyen pour la paramétrie G2

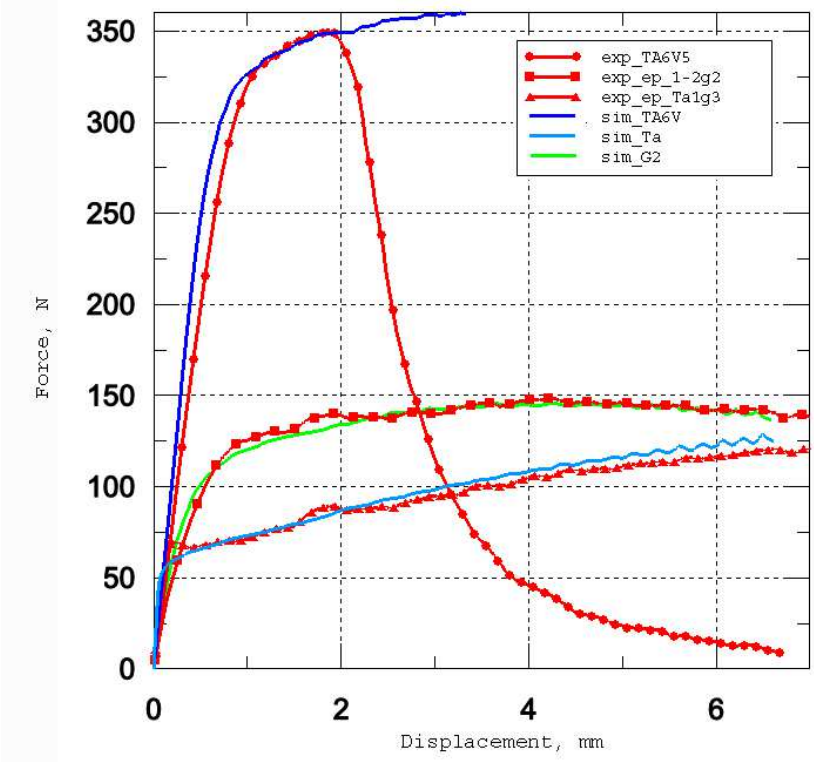


Figure V.18 : Comparaison simulation-expérience pour la paramétrie G2.

Selon cette procédure, nous obtenons donc le jeu de paramètres suivant :

E (MPa)	ν	σ_y (MPa)	Q (MPa)	b	C_1 (MPa)	a_1	C_2 (MPa)	a_2
92000	0.34	271	-180	1	36500	130	1850	6

K_M (MPa)	K_m (MPa)	K_{ov}	K_v	K_1 (s^{-1})
10.5	0	0	0	6.10^{-8}

Tableau V.5 : Coefficients du modèle non couplé identifiés pour la paramétrie G2.

La figure V.18 montre que ces choix de modélisation (un paramètre d'identification unique, σ_y) sont suffisants pour identifier le comportement de la Z.F en flexion quatre points. On obtient une correspondance très correcte entre simulation et expérience avec toutefois une réponse du modèle légèrement plus raide en élasticité. Il en est d'ailleurs de même pour les matériaux de base. Les choix d'identification ont des conséquences importantes qu'il serait nécessaire de valider. En effet, les paramètres utilisés supposent une viscosité importante de la Z.F ainsi qu'un adoucissement cyclique. Il serait important de poursuivre les recherches sur la caractérisation expérimentale de la Z.F afin de pouvoir lever ces hypothèses. Les essais de caractérisation nécessaires seront, bien sûr, sujets aux mêmes restrictions et problématiques que ceux de cette étude et imposent encore un travail important de mise au point et de validation.

Cet essai ne permet pas d'identifier les paramètres d'endommagement de la Z.F. La ductilité est telle que la déformée nécessaire à la fissuration de la Z.F devient très importante. Lorsque le matériau est moins ductile, comme c'est le cas pour le TA6V, l'essai peut devenir pertinent pour l'identification d'un tel mécanisme.

Paramétrie G4

Les paramétries G4, G5 et G6 présentent une réponse du même type, même si l'adoucissement est un peu plus important pour la paramétrie G6 (cf. paragraphe II.4.3 figure II.76). Nous identifions donc le comportement de la Z.F pour la paramétrie G4 dont la hauteur liaisonnée est proche de celle de la paramétrie G2 mais dont le comportement est notablement plus élevé. En suivant la même démarche que précédemment, nous obtenons le jeu de paramètres donné en tableau V.6.

E (MPa)	ν	σ_y (MPa)	Q (MPa)	b	C_1 (MPa)	a_1	C_2 (MPa)	a_2
92000	0.34	618	-180	1	36500	130	1850	6

K_M (MPa)	K_m (MPa)	K_{ov}	K_v	K_1 (s^{-1})
10.5	0	0	0	6.10^{-8}

Tableau V.6 : Coefficients du modèle non couplé identifiés pour la paramétrie G4.

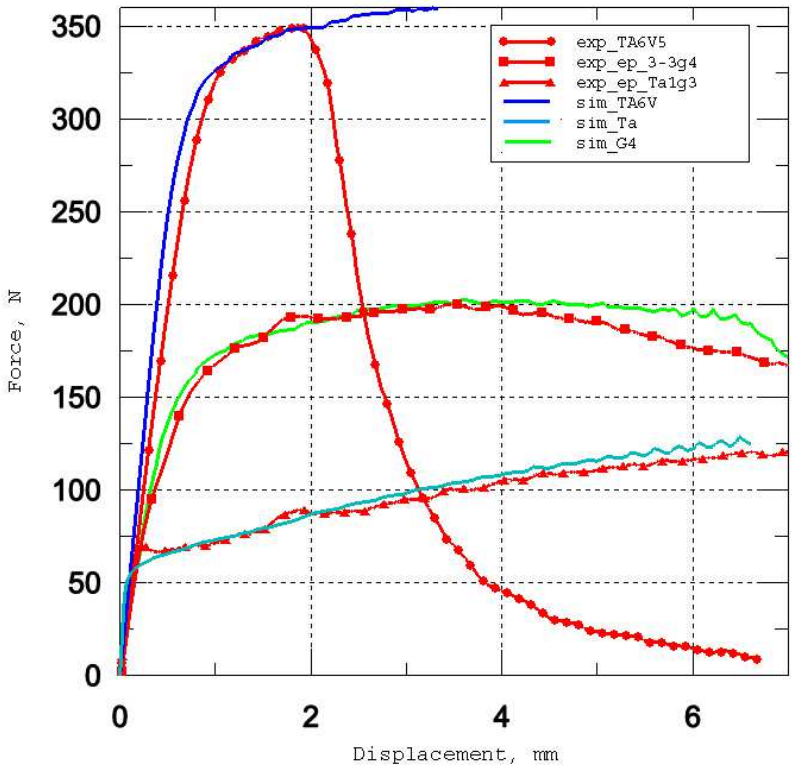


Figure V.19 : Comparaison simulation-expérience pour la paramétrie G4.

Encore une fois, l'identification d'un unique paramètre permet d'obtenir une réponse du modèle très cohérente face à la réponse expérimentale (figure V.19). Au delà de 4mm de déplacement d'appuis, il existe un écart entre la courbe simulée et la réponse expérimentale provenant vraisemblablement de l'endommagement dans la Z.F. Celui-ci ne présente pas une influence marquée sur la réponse globale et est en compétition avec le glissement dans ces gammes de déformée.

Remarque :
La comparaison des courbes et des paramètres identifiés pour les matériaux de base et la Z.F peut induire en erreur puisque la hauteur liaisonnée est différente. La réponse mécanique de la Z.F pour la paramétrie G4 est, en fait, assez proche de celle du TA6V seul.

V.2.3 Identification du comportement couplé à l'endommagement

V.2.3.1 Identification du TA6V

L'identification des paramètres d'endommagement est une procédure relativement difficile puisqu'il est impossible de découpler les effets de structure (striction géométrique) des effets liés à l'endommagement. En effet, la striction d'une éprouvette de traction conduit à un adoucissement de la réponse globale. Cette striction géométrique peut être simulée sans avoir recours à un modèle couplé et présente les mêmes inconvénients de dépendance au maillage que le couplage comportement-endommagement. Il y a donc deux principaux problèmes à l'identification de l'endommagement que sont, l'effet de striction géométrique et la dépendance au maillage. Le premier phénomène nécessite de réaliser le calcul complet d'une éprouvette maillée et d'identifier les paramètres d'endommagement sur la réponse globale. Le second impose une taille de maille caractéristique dont le choix devra "piloter" la finesse du maillage dans les zones de localisation, en l'absence d'une formulation non locale.

Pour illustrer ces phénomènes, nous réalisons trois simulations d'éprouvette de traction en faisant varier la finesse du maillage. Nous utilisons les paramètres du tableau V.4 pour réaliser un calcul non couplé.

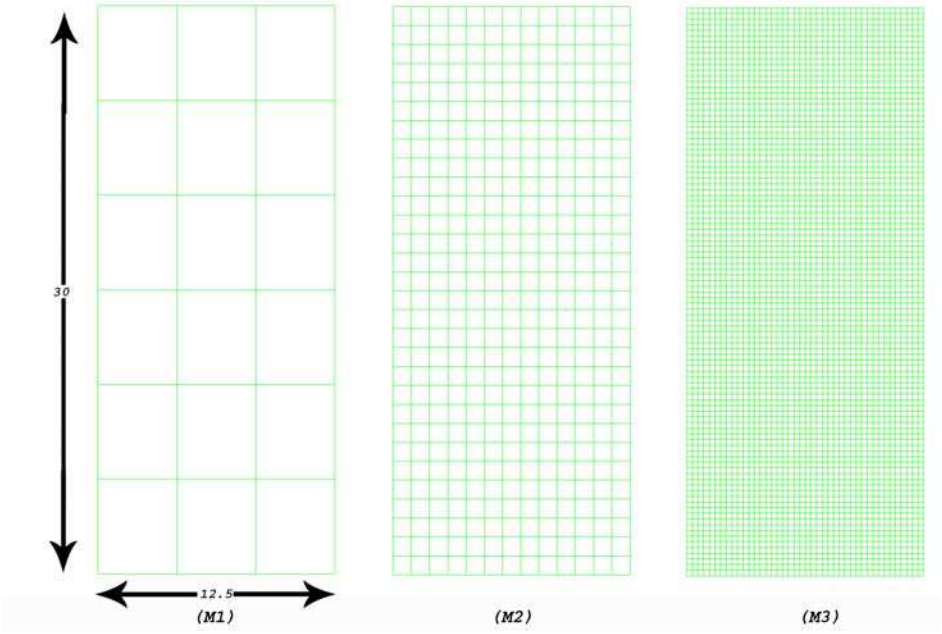


Figure V.20 : Maillage de la partie utile de l'éprouvette de traction (30x12.5 mm^2) : (M1) 18 éléments CPS4R (h_{min}=5 mm), (M2) 390 éléments CPS4R (h_{min}=1 mm), (M3) 4200 éléments CPS4R (h_{min}=0.3 mm).

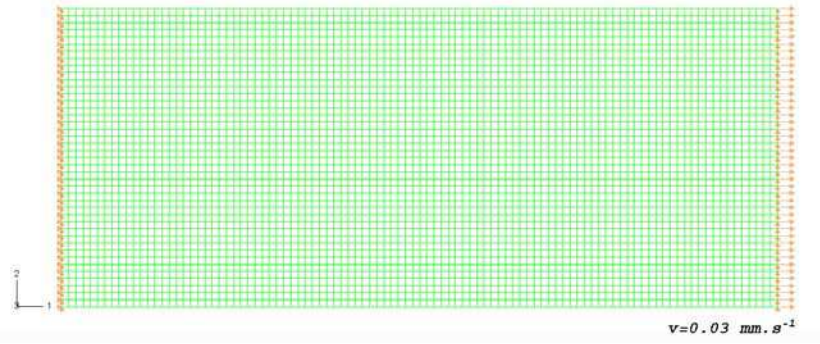


Figure V.21 : Conditions aux limites imposées sur l'éprouvette de traction uniaxiale.

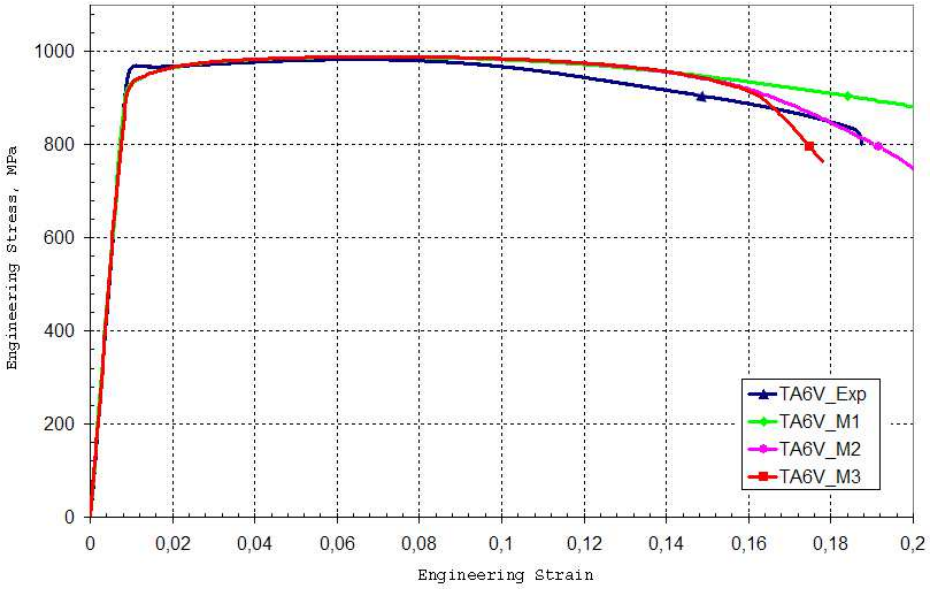


Figure V.22 : Comparaison modèle-expérience sur le TA6V pour l'essai de traction uniaxiale à $\dot{\varepsilon} = 10^{-3}s^{-1}$ avec un calcul non couplé à l'endommagement : Dépendance au maillage pour 3 tailles de mailles (5 mm, 1 mm et 0.3 mm).

Le point de bifurcation dû à l'effet de striction intervient relativement tôt, entre 15 et 16 % de déformation nominale sur la figure V.22. Ce point ne peut être repoussé sans modifier les paramètres identifiés précédemment et notamment la vitesse de saturation des écrouissages. Ceci perturbe alors l'ensemble de l'identification et n'est pas envisagé ici. Un second moyen pour repousser ce point de bifurcation consiste à formuler un modèle de plasticité non locale afin de s'affranchir de l'influence de la discrétisation spatiale. Ces formulations dépassent le cadre de ce travail et ne seront pas envisagées. Nous ne pourrons donc qu'obtenir un compromis entre finesse de maillage et pertinence de la confrontation calcul-expérience, la réponse n'étant de toute façon pas unique dans cette partie de la courbe de traction. Nous revenons sur cette question au paragraphe V.2.3.2 traitant de l'identification du comportement couplé du Ta.

La taille caractéristique de la Z.F étant de l'ordre du millimètre (voir moins lorsque l'éprouvette est entaillée), nous choisissons d'imposer une taille de maille de l'ordre de 0.3 mm qui constitue un compromis entre les deux échelles, celle de l'éprouvette de traction et

celle de l'éprouvette de flexion entaillée.

En s'appuyant sur les constatations provenant des essais de traction avec charge-décharge (cf. paragraphe I.4), nous imposons une valeur critique de l'endommagement (D_c) de l'ordre de 0.13. Le jeu de paramètres du comportement couplé est alors donné tableau V.7.

E (MPa)	ν	σ_y (MPa)	Q (MPa)	b	C_1 (MPa)	a_1	C_2 (MPa)	a_2
110000	0.34	572	-180	1	36500	130	1850	6

K_M (MPa)	K_m (MPa)	K_{ov}	K_v	K_1 (s^{-1})
36	12	130	0	10^{-7}

S (MPa)	s	β	Y_0 (MPa)	D_c
40	1	0	0	0.13

Tableau V.7 : Coefficients du modèle couplé identifiés pour le TA6V.

Ce jeu de paramètres permet d'obtenir une bonne correspondance calcul-expérience pour un calcul couplé (figure V.23) jusqu'à un point correspondant au point de bifurcation du calcul non couplé (figure V.22). La dépendance au maillage dans cette zone ne permet pas d'obtenir de meilleurs résultats pour une taille de maille fixée.

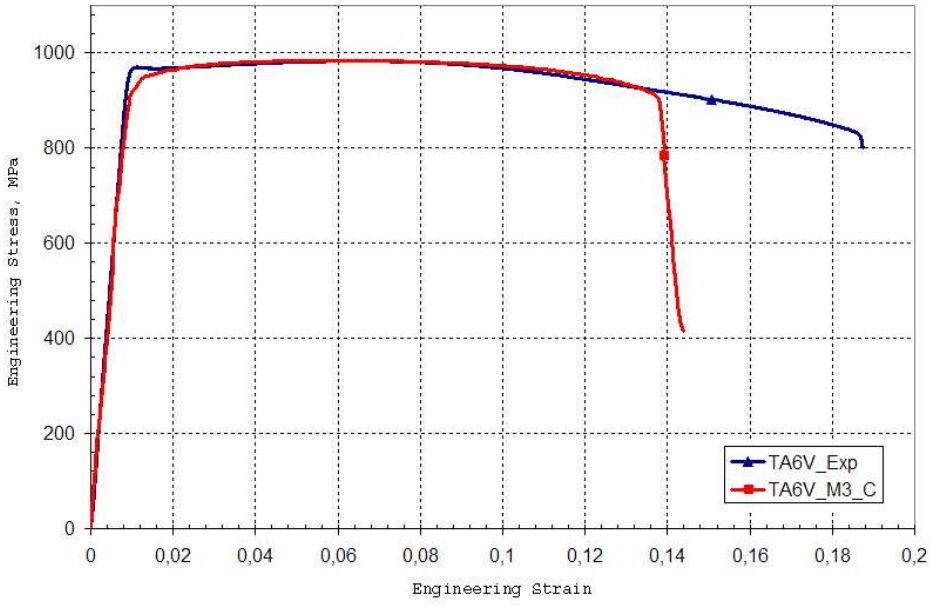


Figure V.23 : Comparaison modèle-expérience sur le TA6V pour les essais de traction uniaxiale à $\dot{\varepsilon} = 10^{-3}s^{-1}$ avec un calcul couplé à l'endommagement pour le maillage M3.

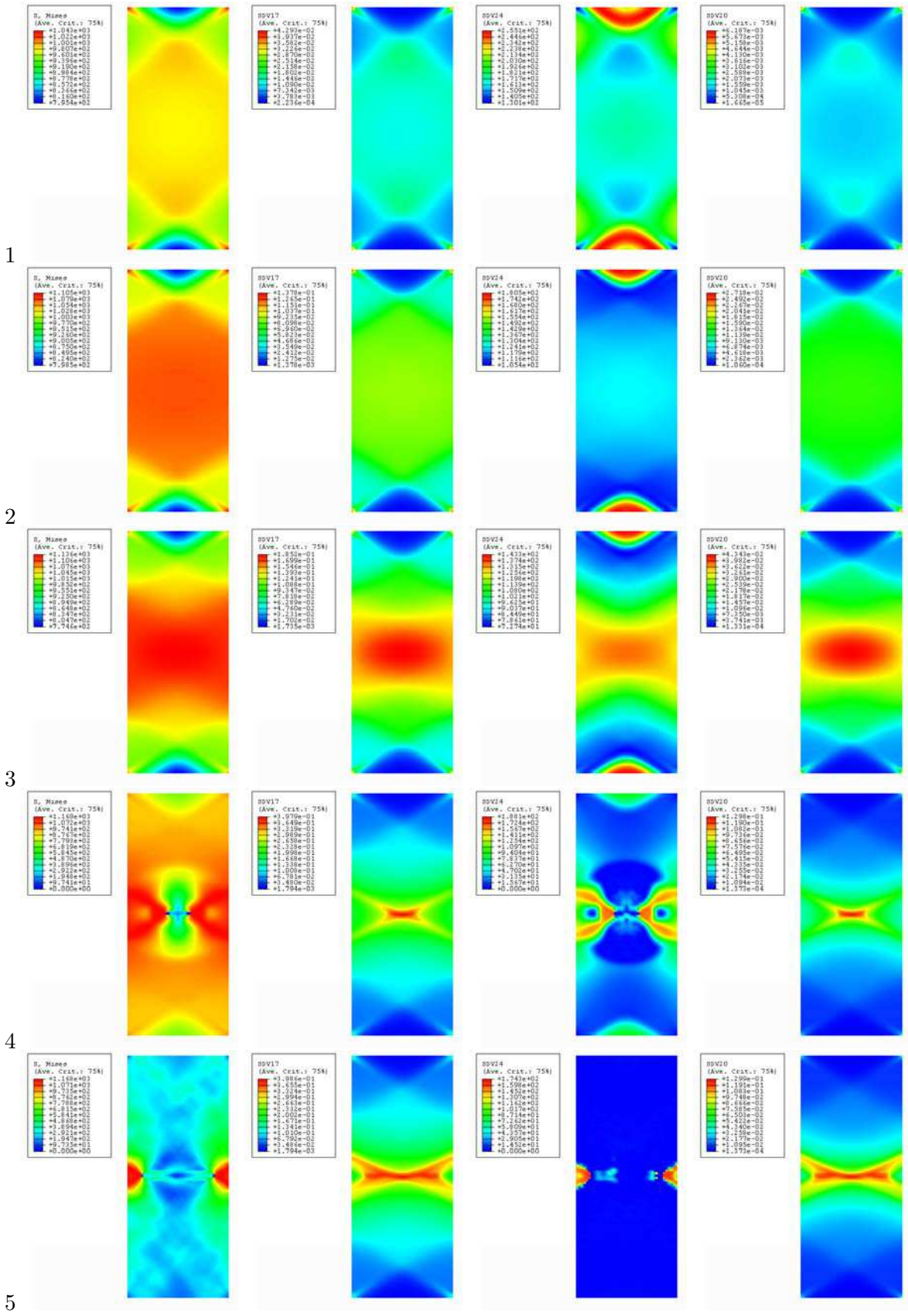


Figure V.24 : Tracé des isovaleurs, colonne : (a) de σ_{eq}, (b) de p, (c) de σ_v, (d) de D, pour différents instants pointés sur la courbe de la figure V.25.

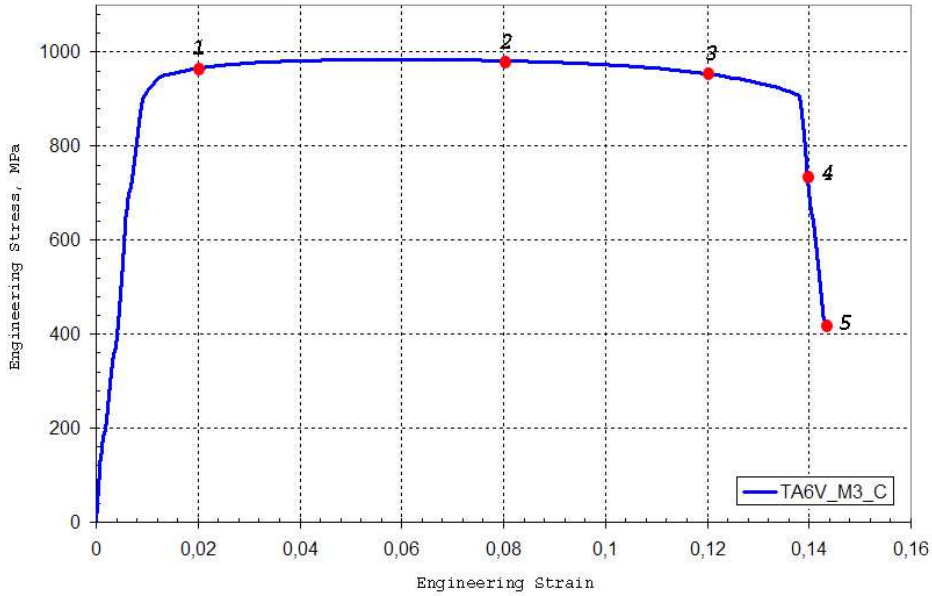


Figure V.25 : Localisation des instants correspondants aux isovaleurs figure V.24 sur la courbe contrainte-déformation nominale.

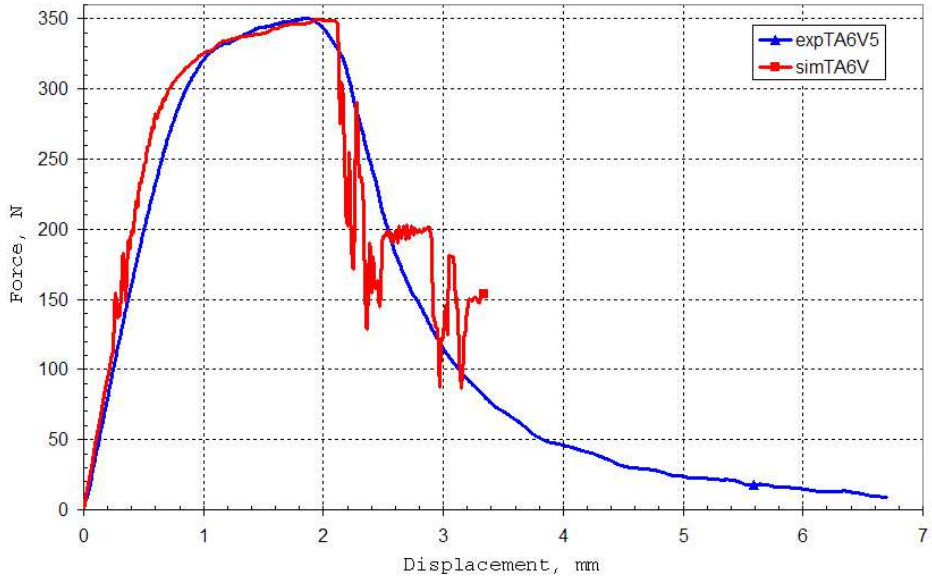


Figure V.26 : Comparaison simulation-expérience d'un calcul couplé sur TA6V : Essai de flexion sur éprouvette entaillée.

Le tracé des isovaleurs de l'essai de traction montre l'homogénéité de la déformation plastique cumulée sur la majeure partie de la zone utile (figure V.24(b)) jusqu'au point 3. La contrainte visqueuse et l'endommagement deviennent alors très localisés (figure V.24-3(c) et V.24-3(d)). La localisation de la contrainte visqueuse est caractéristique de l'augmentation de la vitesse d'écoulement au centre de l'éprouvette. Au point 4, la localisation des champs sous forme de bandes de cisaillement est très visible, à la fois sur la déformation plastique cumulée (figure V.24-4(b)), la contrainte visqueuse (figure V.24-4(c)) et l'endommagement (figure

V.24-4(d)). A ce stade, les premiers éléments sont endommagés au centre de l'éprouvette et leur contrainte devient nulle (figure V.24-4(a)). La rupture complète suit finalement un trajet normal à la direction de sollicitation (figure V.24-5(d)).

Ce même jeu de paramètres, utilisé pour simuler la flexion sur éprouvette entaillée suivant la configuration du paragraphe V.2.2, donne une information cohérente sur l'instant de rupture. Pour cet essai, nous avons utilisé la version explicite du code afin de simuler l'endommagement sans pâtir d'une matrice jacobienne mal conditionnée. Cependant, comme nous l'avons déjà mentionné au paragraphe V.2.2.1, des problèmes d'instabilités et d'effets inertiels sont critiques dans cette configuration d'essai, provoquant une réponse chahutée (figure V.26).

Dans ce cas, la taille de maille est environ 6 fois plus petite que celle utilisée en traction et provoque vraisemblablement une rupture un peu plus rapide. La rupture intervient brutalement par rapport à l'expérience. Ce constat peut être dû à la modélisation 2D où la rupture d'un élément provoque une perte de rigidité importante. En réalité, la propagation de la fissure intervient suivant deux directions puisque l'endommagement s'initie d'abord à coeur. La propagation a lieu dans la direction longitudinale, allant du centre de l'éprouvette vers le bord, mais aussi dans l'épaisseur, allant du fond d'entaille à la surface supérieure du cordon. L'hypothèse d'un calcul 2D suppose que la propagation de la rupture du centre de l'éprouvette vers le bord est quasi-instantanée et rend donc plus abrupte la réponse du modèle.

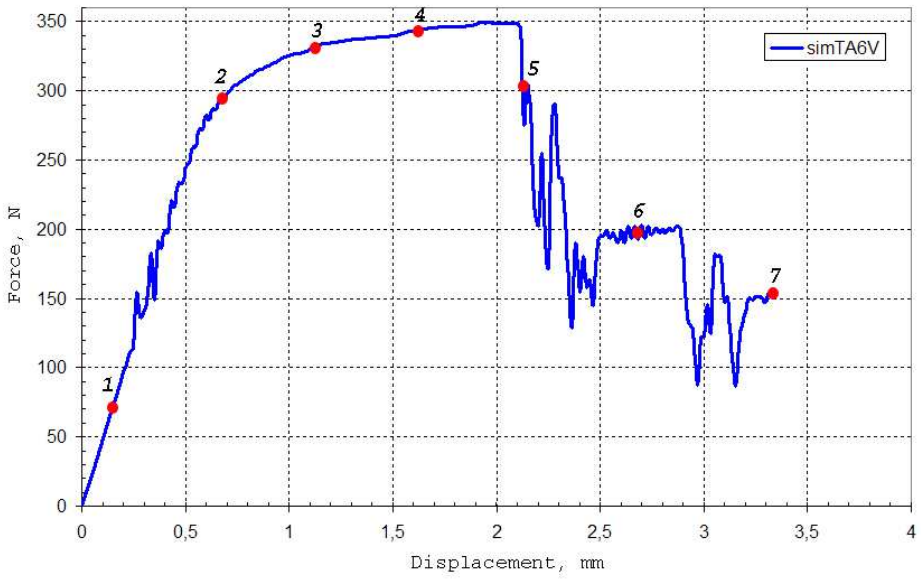


Figure V.27 : Localisation des instants correspondants aux isovaleurs figure V.28 sur la courbe force-déplacement.

Des points 1 à 2 (figure V.27), le comportement reste principalement dans son domaine d'élasticité comme en atteste les faibles valeurs de la déformation plastique cumulée et de l'endommagement (figures V.28-1(b)(c) et V.28-2(b)(c)). La contrainte équivalente localise naturellement en fond d'entaille et sur la partie supérieure de l'éprouvette, laissant une fibre neutre (contrainte nulle) au milieu de la hauteur liaisonnée (figure V.28-1(a)). Une fois cette zone entrée en plasticité, le champ de contrainte augmente et devient plus homogène (figures V.28-3(a) et V.28-4(a)) tandis que la déformation plastique cumulée et l'endommagement

localisent rapidement en fond d'entaille (figures V.28-3(b)(c) et V.28-4(b)(c)). Au point 5, le premier élément est totalement endommagé en fond d'entaille (figure V.28-5(c)). La fissure se propage alors à partir de cette zone, cherchant à rejoindre la surface supérieure de la Z.F (figures V.28-6 et V.28-7).

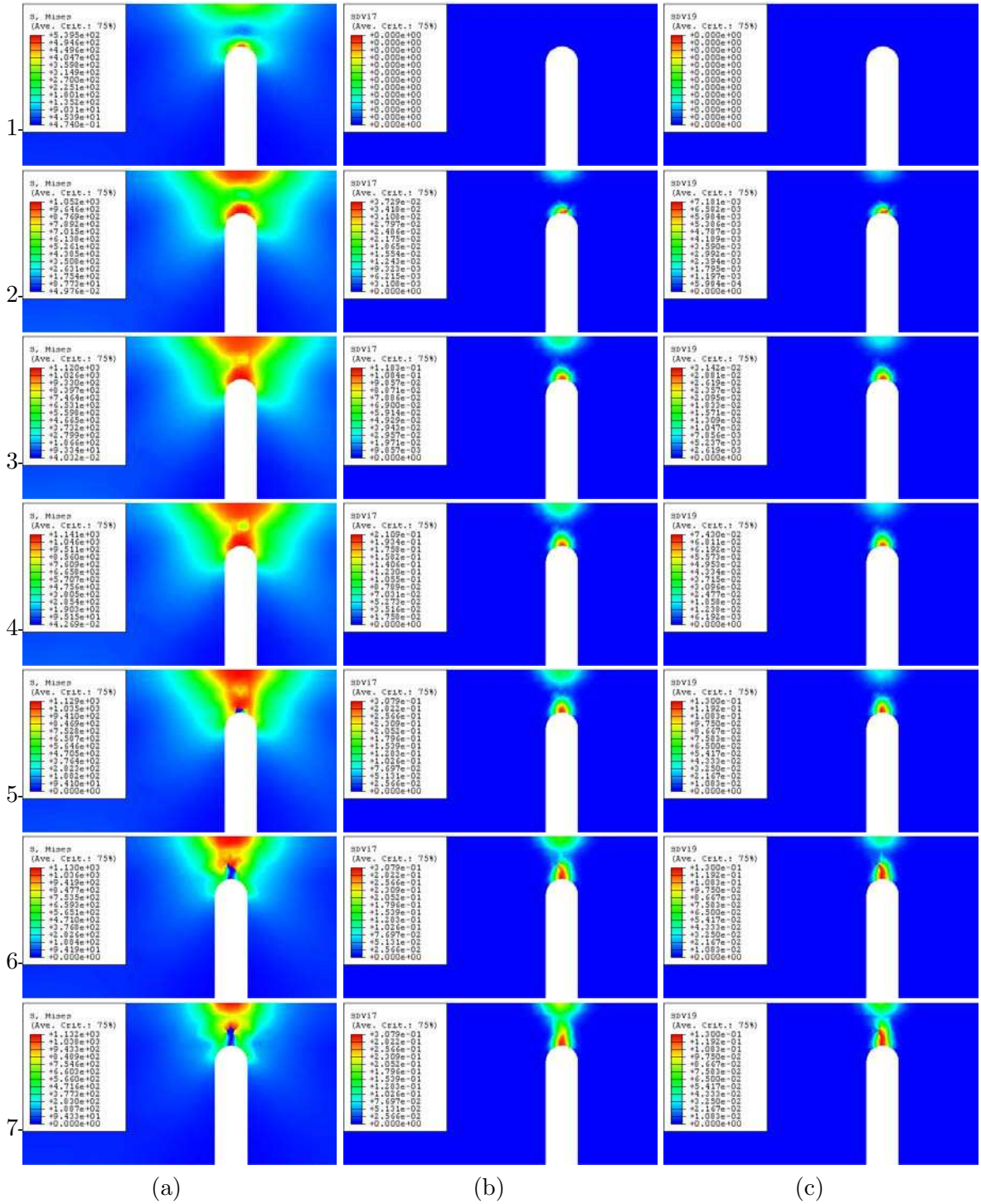


Figure V.28 : Tracé des isovaleurs, colonne : (a) de σ_{eq}, (b) de p, (c) de D, pour différents instants pointés sur la courbe V.27.

V.2.3.2 Identification du Ta

Malgré le fait que l'on ne puisse pas réellement parler d'endommagement au sein du Ta (pas de croissance et coalescence de cavités (Roy, 2003) et pas de chute de rigidité (paragraphe I.4)), nous allons tenter de modéliser le comportement adoucissant jusqu'à la rupture du matériau par la mécanique de l'endommagement.

Comme pour le TA6V, l'apparition prématurée de la striction localisée pose des difficultés à l'identification des paramètres d'endommagement du Ta. En reprenant les trois mêmes maillages que précédemment, M1 à M3 de taille de mailles valant respectivement 5, 1 et 0.3 mm, nous obtenons une réponse contrainte-déformation nominale localisant très tôt (figure V.29) avec les paramètres identifiés (tableau V.3).

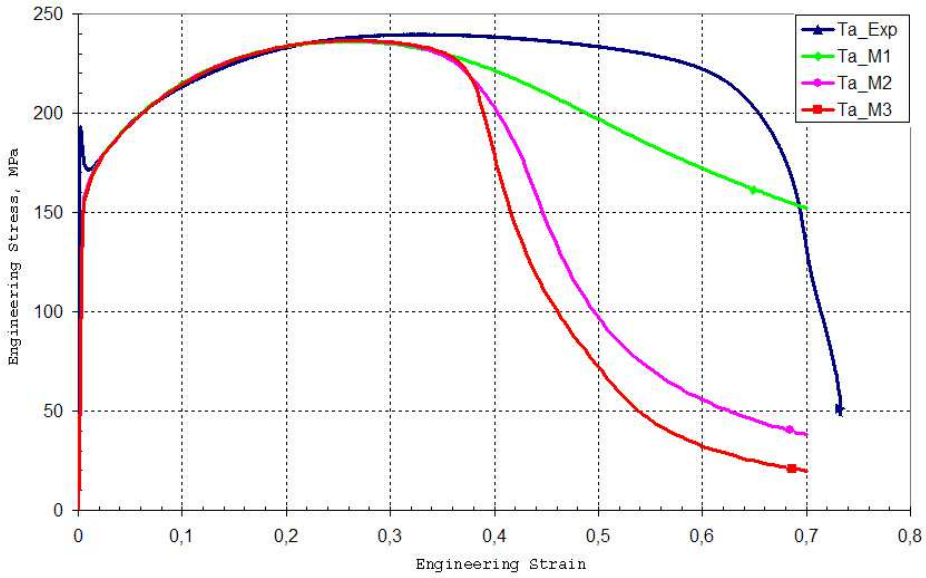


Figure V.29 : Comparaison modèle-expérience sur le Ta pour l'essai de traction uniaxiale à $\dot{\varepsilon} = 10^{-3}s^{-1}$ avec un calcul non couplé à l'endommagement : Dépendance au maillage pour 3 tailles de mailles (5 mm, 1 mm et 0.3 mm).

L'adoucissement provoqué par la striction est très important (figure V.29), aussi bien pour un maillage grossier (M1), que pour un maillage fin (M3). Notons que l'apparition prématurée de cet adoucissement est due à une striction fortement localisée. Pour retarder ce phénomène, il nous faut empêcher cette localisation afin de maintenir une striction diffuse. Il faut donc agir sur les paramètres gouvernant la saturation ou la décroissance des contraintes internes. C'est le cas, par exemple, des couples ($\frac{Q}{b}$,b) pour l'écrouissage isotrope et ($\frac{C_i}{a_i}$,a_i) pour les écrouissages cinématiques. De plus, les choix de modélisation de la viscosité du Ta impliquent, à la fois, une saturation de la contrainte visqueuse à grande vitesse par l'utilisation d'une fonction de viscosité en sinus hyperbolique (cf. paragraphe III.2.2, équation III.68), mais aussi et surtout une baisse de la contrainte de traînée avec la déformation plastique cumulée (couplage écrouissage isotrope-viscosité, cf. paragraphe III.3 et III.7). Ces facteurs influent significativement sur l'apparition de la striction en l'absence d'endommagement.

Le Ta étant très ductile, il est possible de contrecarrer cet effet par un écrouissage fort, afin de repousser le point de bifurcation apparaissant à environ 38% (figure V.29). Cependant, l'ajout d'un écrouissage, sans précaution, perturbe notablement l'identification sur la base expérimentale complète. Le point de bifurcation ne peut donc être repoussé que par un

écrouissage se déclenchant tardivement et dont l'apparition ne provoque pas une modification trop brutale du module tangent. Pour ne pas perturber l'identification réalisée sans couplage, nous ajoutons un écrouissage cinématique se déclenchant à partir d'un seuil en déformation plastique cumulée (de la même façon que nous l'avons fait pour l'effet mémoire paragraphe III.8). Pour s'opposer à l'influence de la striction géométrique, un écrouissage linéaire n'est pas suffisant. Nous avons donc choisi d'ajouter un écrouissage cinématique non linéaire dont le coefficient de saturation est négatif (fonction à croissance exponentielle) afin de contrecarrer l'adoucissement. Ceci permet, en outre, d'obtenir une transition "lisse" lors du déclenchement de ce dernier. Cependant, ce moyen pour repousser la striction est limité puisqu'il accélère en même temps l'endommagement (cf. équation III.110). A moins d'amortir l'impact de cet écrouissage sur Y, nous observons qu'il n'est pas possible de repousser la rupture beaucoup plus loin que le point d'inflexion de la réponse non couplée (figure V.30).

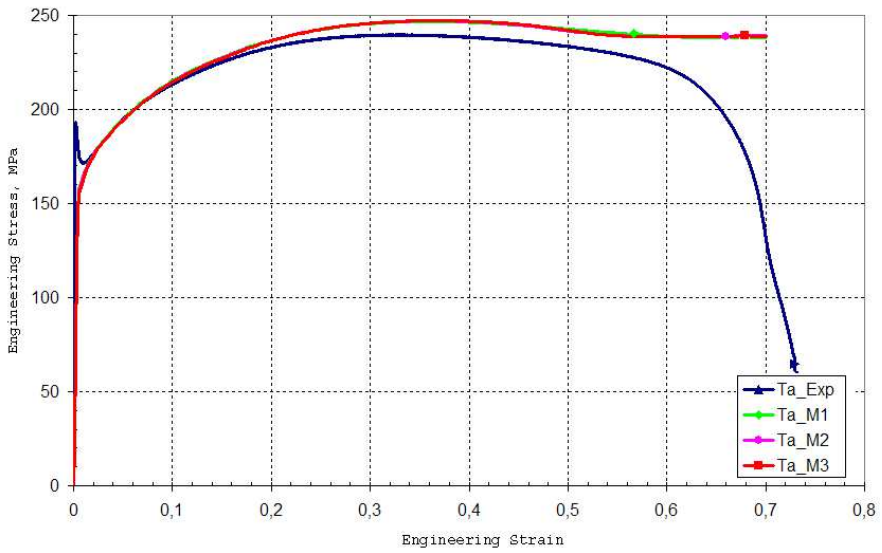


Figure V.30 : Comparaison modèle-expérience sur le Ta pour l'essai de traction uniaxiale à $\dot{\varepsilon} = 10^{-3}s^{-1}$ avec un calcul non couplé à l'endommagement pour 3 maillages : Ajout d'un écrouissage pour repousser le point de bifurcation.

Sur l'exemple de la figure V.30, on ajoute un écrouissage cinématique (C_2=80 MPa, $a_2 = -3$) pour un seuil en déformation plastique cumulée valant 15%. La réponse des trois maillages est alors confondue. L'écrouissage est suffisamment fort pour contrecarrer l'adoucissement provoqué par la striction géométrique, il n'y a alors plus de dépendance au maillage (figure V.29 face à la figure V.30). Pour ce jeu de paramètres, la courbe ne pourra pas être décrite correctement au delà de 56% (point d'inflexion des courbes simulées figure V.30). En décalant alors le seuil de déclenchement de l'écrouissage à 20%, on repousse suffisamment ce point pour que l'endommagement puisse être le phénomène adoucissant exclusif (figure V.31).

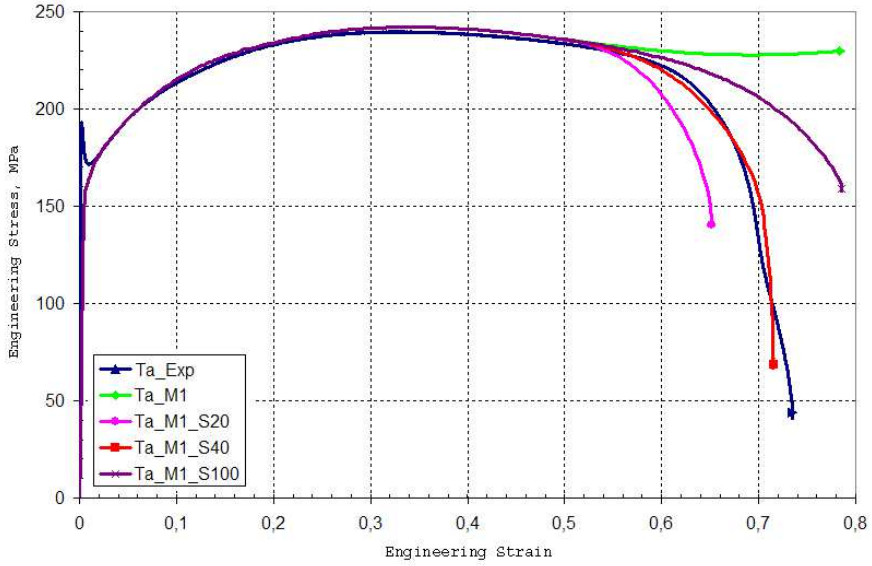


Figure V.31 : Comparaison modèle-expérience sur le Ta pour l'essai de traction uniaxiale à $\dot{\varepsilon} = 10^{-3}s^{-1}$ pour le maillage M1 : Influence du paramètre S pour un jeu de paramètres donné (tableau V.9).

p_{max}	C_2 (MPa)	a_2	S (MPa)	s	β	Y_0 (MPa)	D_c
0.2	80	-3	$\star$	1	1	40	0.99

Tableau V.8 : Paramètres d'endommagement et d'écrouissage à seuil, utilisés pour le Ta pour un maillage M1.

La figure V.31 présente les réponses contrainte-déformation nominales en traction pour un maillage M1. Un calcul non couplé et trois calculs couplés, où seul S varie (cf. tableau V.8), permettent de montrer que ce paramètre gouverne déformation à rupture. On obtient alors une bonne correspondance simulation-expérience pour S=40 MPa. Le jeu de paramètres complet est synthétisé tableau V.9.

E (MPa)	ν	σ_y (MPa)	Q (MPa)	b	C_0 (MPa)	a	C_∞ (MPa)	ϕ
187000	0.346	1	1135	4	6000	200	20000	5

K_M (MPa)	K_m (MPa)	K_{ov}	K_v	K_1 (s^{-1})	P_{12}	ρ_{max}
13	0	0	4	6.10^{-8}	0.85	0.15

p_{max}	C_2 (MPa)	a_2	S (MPa)	s	β	Y_0 (MPa)	D_c
0.2	80	-3	40	1	1	40	0.99

Tableau V.9 : Coefficients du modèle couplé identifiés pour le Ta et pertinent pour un maillage M1.

Le jeu de paramètres (tableau V.9) est pertinent pour un maillage M1 (grossier) mais

doit être modifié pour une taille de maille plus petite (maillage M2 et M3). Cependant, la diminution de la taille de maille complique l'identification, à la fois par une augmentation du temps de calcul, mais aussi par la difficulté accrue à repousser le point de bifurcation. Néanmoins, l'augmentation de l'écrouissage ne doit pas provoquer un point d'inflexion sur la réponse globale non couplée, ceci étant synonyme d'accélération de l'endommagement lors du passage au calcul couplé. L'équilibre est alors très fragile et l'identification des paramètres de l'écrouissage à seuil très délicate. La réponse contrainte-déformation nominales est présentée figure V.32 pour le jeu de paramètre du tableau V.10.

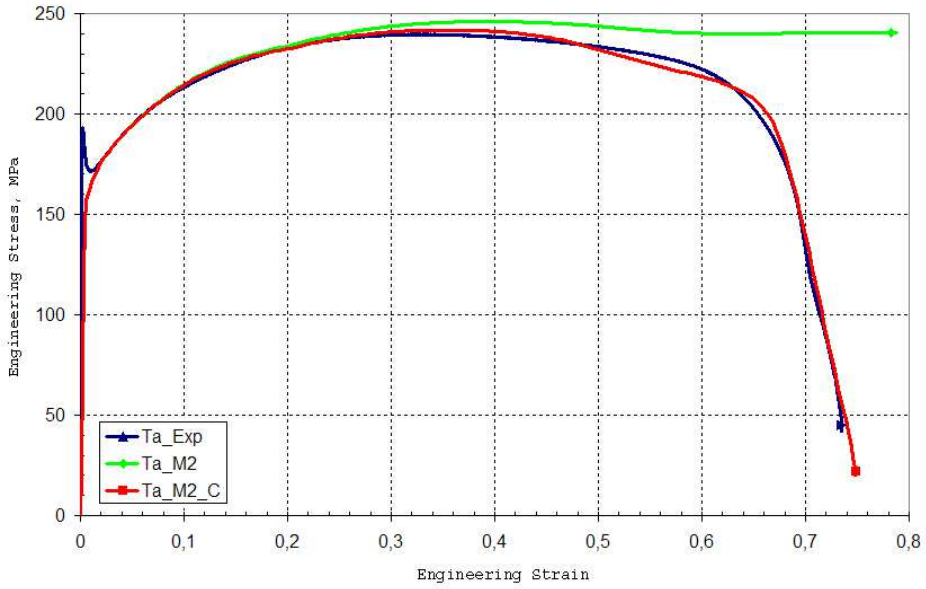


Figure V.32 : Comparaison modèle-expérience sur le Ta pour l'essai de traction uniaxiale à $\dot{\varepsilon} = 10^{-3}s^{-1}$ pour le maillage M2 : Calcul couplé et non couplé.

E (MPa)	ν	σ_y (MPa)	Q (MPa)	b	C_0 (MPa)	a	C_∞ (MPa)	ϕ
187000	0.346	1	1135	4	6000	200	20000	5

K_M (MPa)	K_m (MPa)	K_{ov}	K_v	K_1 (s^{-1})	P_{12}	ρ_{max}
13	0	0	4	6.10^{-8}	0.85	0.15

p_{max}	C_2 (MPa)	a_2	S (MPa)	s	β	Y_0 (MPa)	D_c
0.2	110	-2.7	2000	0.5	-0.5	0	0.99

Tableau V.10 : Coefficients du modèle couplé identifiés pour le Ta et pertinent pour un maillage M2.

L'augmentation du module d'écrouissage (C_2 tableau V.10), pour contrecarrer l'adoucissement dû à la striction, provoque une surestimation de la contrainte pour un calcul non couplé (figure V.32). L'endommagement permet d'obtenir une meilleure correspondance simulation-expérience lors du calcul couplé mais doit être initié très tôt ($Y_0 = 0\ MPa$). La réponse du modèle pour un calcul couplé (figure V.32) présente plusieurs points d'inflexion

au delà du maximum de contrainte, montrant la compétition entre les différents termes de durcissement et d'adoucissement. On atteint alors les limites d'une telle formulation. On voit alors clairement la difficulté, dans le cadre d'une démarche d'identification, d'utiliser un maillage M3 encore plus fin. Cette identification n'est donc pas réalisée.

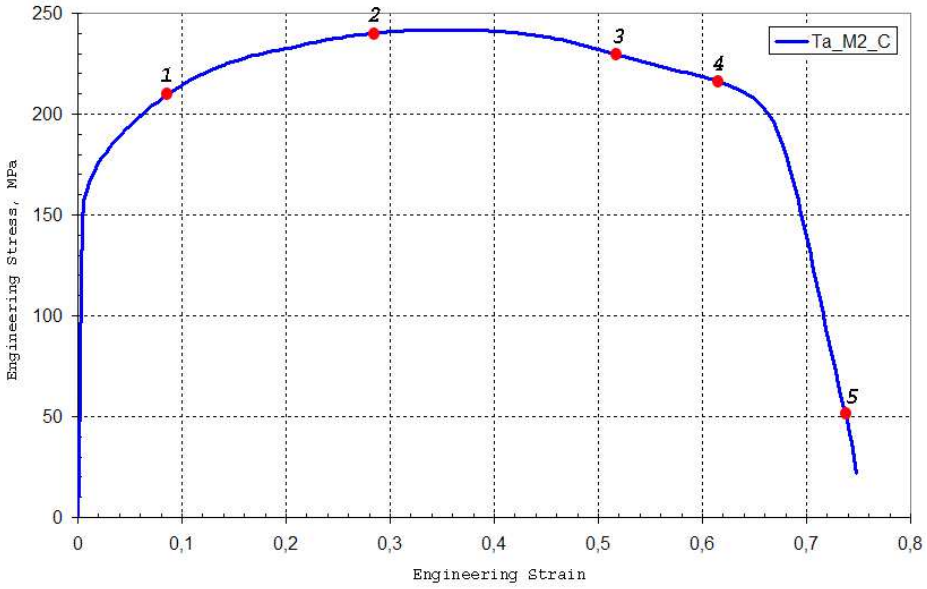


Figure V.33 : Localisation des instants correspondants aux isovaleurs figure V.34 sur la courbe contrainte-déformation nominale.

Pour les points 1 et 2 (figure V.33), les champs de contrainte et de déformation sont homogènes dans la partie centrale de l'éprouvette (figures V.34-1 et V.34-2). Au delà du maximum de contrainte (pour les points 3, 4 et 5 figure V.33), la localisation des champs de contrainte équivalente, de déformation plastique cumulée, et d'endommagement se situe au sein d'une bande normale à la direction de sollicitation (figures V.34-3(a)(b)(d), figures V.34-4(a)(b)(d) et figures V.34-5(a)(b)(d)). Les bandes de cisaillement sont très peu marquées car l'ajout d'un écrouissage à seuil empêche leur formation. Le matériau se durcit fortement dans les zones de localisation. La contrainte visqueuse, quant à elle, sature progressivement (figures V.34-(c)) prouvant bien que l'effet mémoire ne modifie pas la réponse monotone (cf. paragraphe V.2.1.2).

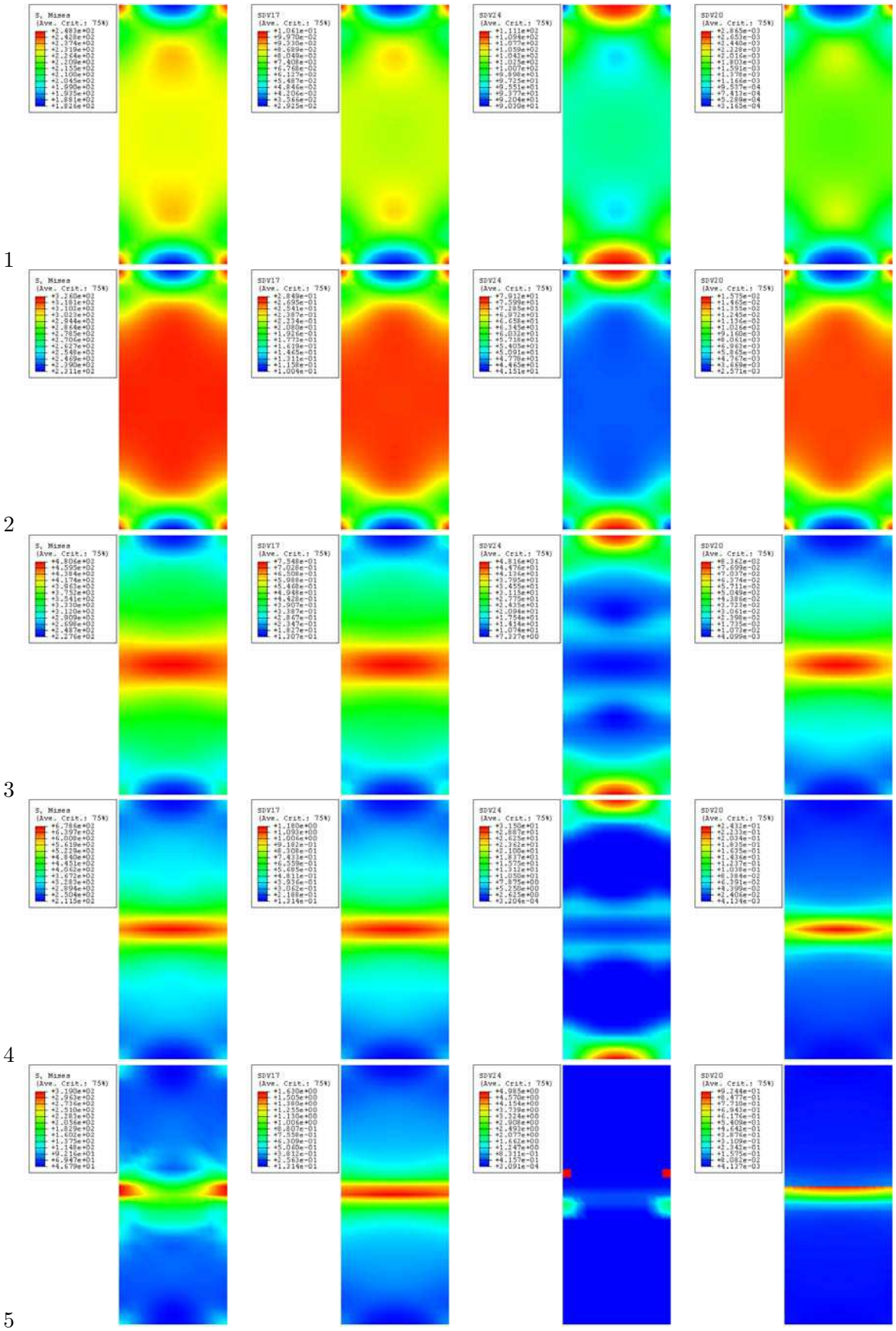
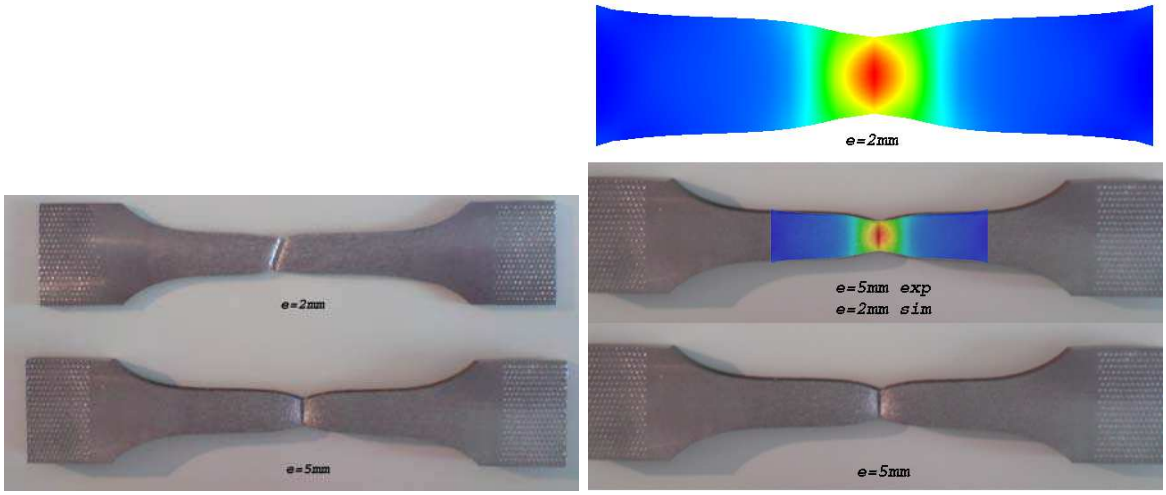


Figure V.34 : Tracé des isovaleurs, colonne : (a) de σ_{eq}, (b) de p, (c) de σ_v, (d) de D, pour différents instants pointés sur la courbe V.33.



(a) (b)

Figure V.35 : (a) Clichés des éprouvettes rompues d'épaisseur 2 et 5 mm en Ta, (b) Comparaison des isovaleurs d'endommagement (épaisseur 2 mm) et de la fissuration observée sur une éprouvette d'épaisseur 5 mm.

Le faciès de rupture du Ta est très dépendant de la configuration géométrique de l'éprouvette. Les éprouvettes minces (2 mm d'épaisseur) cassent suivant un angle d'environ 70° par rapport à la direction de sollicitation, tandis que les éprouvettes plus épaisses (5 mm) cassent suivant une direction normale (figure V.35(a)). A titre de comparaison, les isovaleurs d'endommagement de l'éprouvette déformée (épaisseur 2 mm) sont superposées sur le cliché de l'éprouvette d'épaisseur 5 mm (figure V.35(b)).

V.2.3.3 Identification de la Z.F

Même si l'essai de flexion permet de localiser la déformation au sein de la Z.F, la réponse globale de l'éprouvette ne présente pas d'adoucissement notable. Il n'est donc pas possible d'identifier un endommagement sur ces résultats. Néanmoins, nous proposons une démarche d'identification des paramètres d'endommagement de la Z.F par comparaison de la réponse globale à un essai de traction uniaxiale entre les matériaux de base et le cordon.

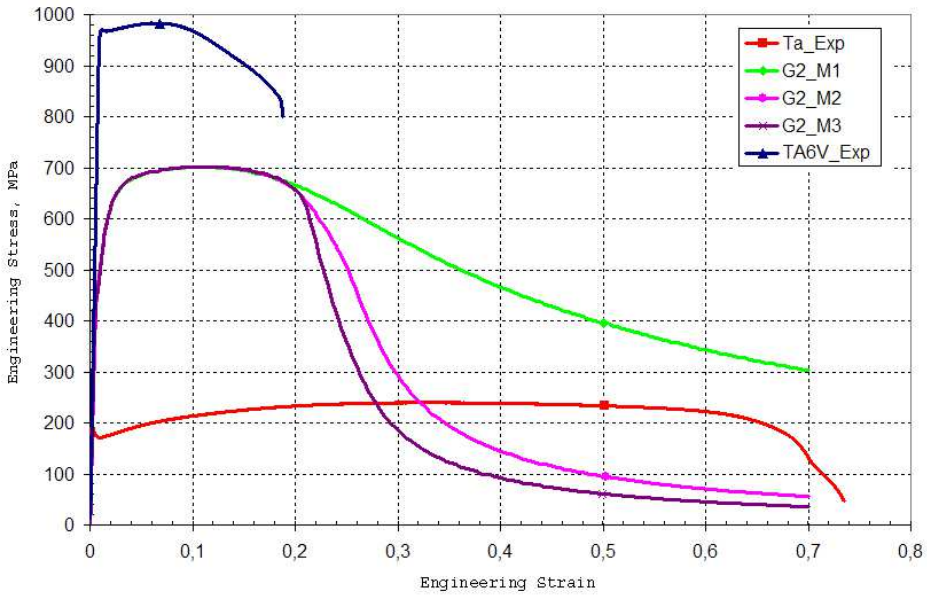


Figure V.36 : Réponse du modèle pour la paramétrie G2 pour l'essai de traction uniaxiale à $\dot{\varepsilon} = 10^{-3}s^{-1}$ avec un calcul non couplé à l'endommagement pour 3 maillages : Comparaison à la réponse expérimentale des matériaux de base.

Pour cela, nous utilisons les paramètres du modèle identifiés pour la paramétrie G2 (tableau V.5) ainsi que les 3 maillages des sections précédentes. La réponse contrainte-déformation nominales, en comparaison aux réponses expérimentales des matériaux de base, est tracée figure V.36. Encore une fois, la dépendance au maillage est importante et le point de bifurcation des calculs non couplés se situe aux alentours des 20% de déformation nominale (figure V.36).

Dans l'objectif de repousser l'adoucissement provoqué par la striction, nous ajoutons, comme pour le Ta, un écrouissage cinématique dont l'apparition est pilotée par un seuil en déformation plastique cumulée (p_{max}). Nous fixons la rupture de la Z.F, arbitrairement, à environ la moitié de l'allongement à rupture du Ta. Un jeu de paramètres possible pour modéliser cette réponse est donné dans le tableau V.11 et la réponse contrainte-déformation nominales est présentée figure V.37.

E (MPa)	ν	σ_y (MPa)	Q (MPa)	b	C_1 (MPa)	a_1	C_2 (MPa)	a_2
92000	0.34	271	-180	1	36500	130	1850	6

K_M (MPa)	K_m (MPa)	K_{ov}	K_v	K_1 (s^{-1})
10.5	0	0	0	6.10^{-8}

p_{max}	C_3 (MPa)	a_3	S (MPa)	s	β	Y_0 (MPa)	D_c
0.12	400	-2.7	40	0.5	-0.5	30	0.99

Tableau V.11 : Coefficients du modèle couplé identifiés pour la paramétrie G2 et un maillage M2.

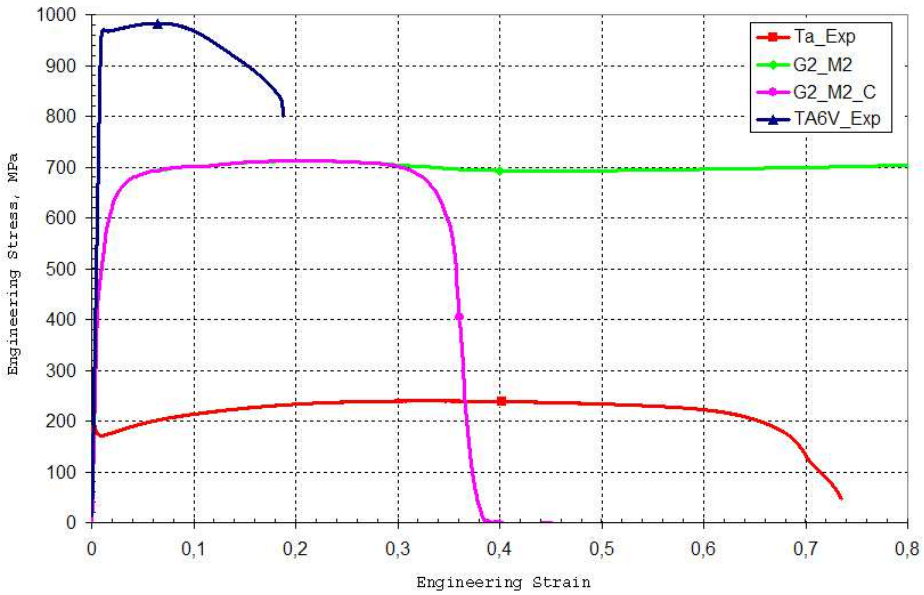


Figure V.37 : Réponse du modèle pour la paramétrie G2 pour l'essai de traction uniaxiale à $\dot{\varepsilon} = 10^{-3}s^{-1}$ avec un calcul couplé et non couplé à l'endommagement pour un maillage M2 : Comparaison à la réponse expérimentale des matériaux de base.

L'utilisation d'un troisième écrouissage cinématique à seuil permet de pratiquement annuler l'adoucissement provoqué par la striction géométrique (courbe G2 M2 figure V.37). Il est alors relativement simple d'imposer une rupture se produisant entre 30 et 40% pour un calcul couplé.

L'utilisation d'un écrouissage à seuil, en repoussant l'apparition de l'adoucissement pour un calcul non couplé, réduit la dépendance au maillage du couplage comportement endommagement (figure V.38). Le passage d'un maillage M2 (taille de maille critique 1 mm) à un maillage M3 (taille de maille critique 0.3 mm) provoque une rupture totale intervenant pour une déformation nominale plus faible de 4% (figure V.38).

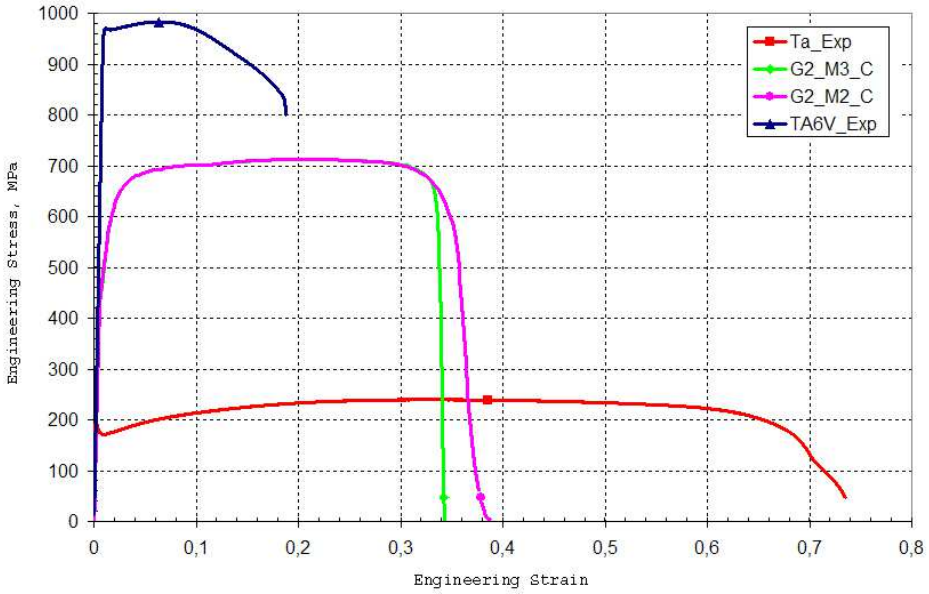


Figure V.38 : Réponse du modèle pour la paramétrie G2 pour l'essai de traction uniaxiale à $\dot{\varepsilon} = 10^{-3}s^{-1}$ pour un calcul couplé : Comparaison à la réponse expérimentale des matériaux de base et influence du maillage.

V.3 Essais de validation

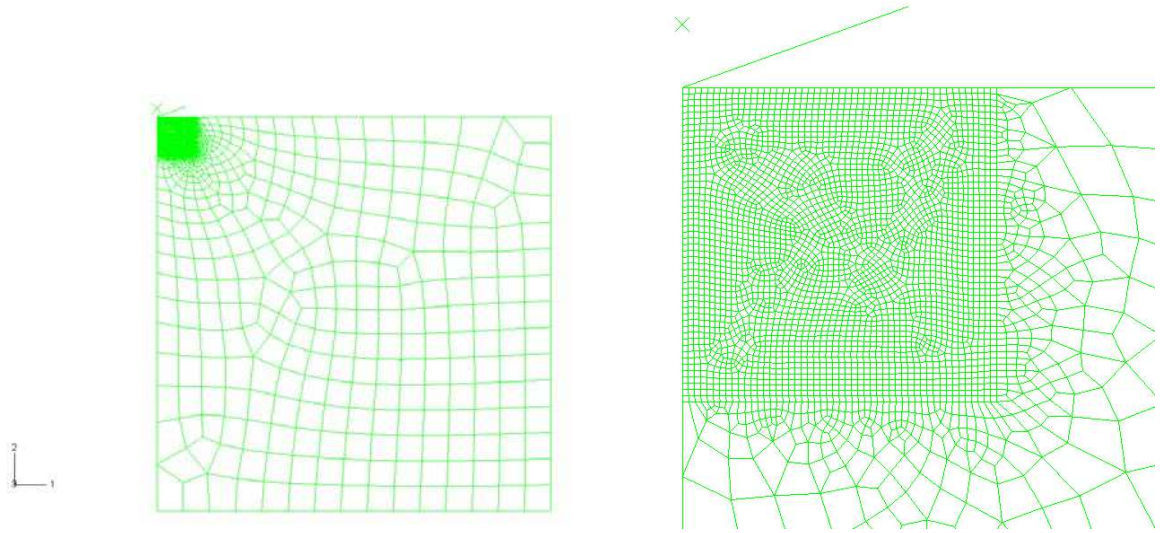
Après avoir identifié les différents jeux de paramètres, couplés et non couplés, des matériaux de base et des Z.F pour les paramétries G2 et G4, nous simulons différents essais de validation. Ces essais de validation se composent d'essais de nanoindentation et de traction longitudinale sur éprouvette soudée. La nanoindentation permet de tester la réponse locale à une sollicitation de type compression. Au contraire, la traction longitudinale permet de valider la réponse globale de l'assemblage pour une sollicitation conduisant à la fissuration de la Z.F. Ces deux essais sont donc intéressants afin d'examiner la pertinence du modèle et de l'identification à des sollicitations variées.

V.3.1 Essais de nanoindentation

Afin de simuler l'essai de nanoindentation, nous nous appuyons sur différentes hypothèses généralement admises (Seifert, 2003), (Charleux, 2006), (Bucaille, 2001) :

- une modélisation axisymétrique.
- le remplacement de l'indenteur Berkovitch par un cône équivalent de demi-angle 70,3°.
- un indenteur rigide dont le contact avec le massif est supposé sans frottement.
- un maillage dont l'étendue est suffisamment grande pour que les conditions aux limites ne perturbent pas le calcul (supérieure à 5 fois la diagonale d'empreinte).

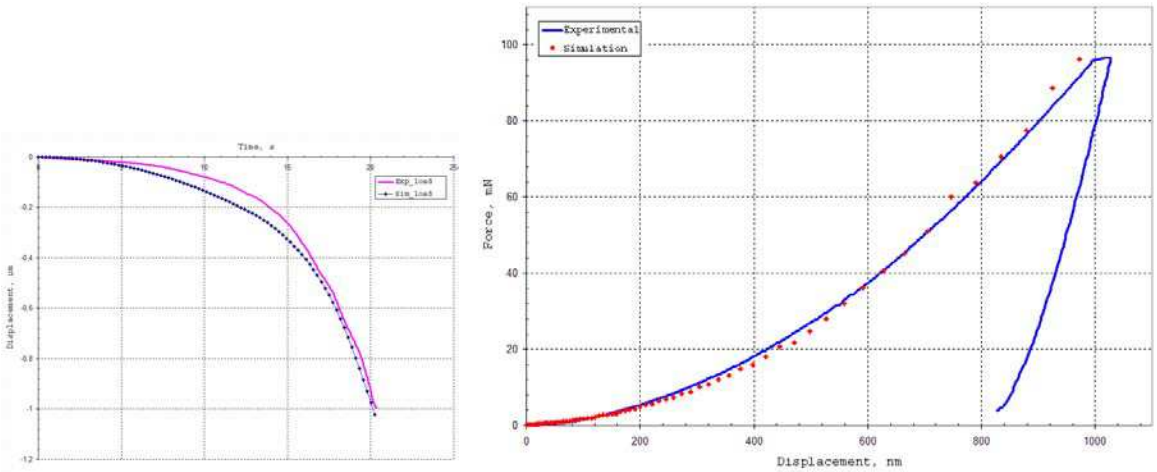
Le maillage utilisé est présenté figure V.39 et se compose de 3728 éléments quadrangles bilinéaires axisymétriques à intégration réduite (CAX4R).



(a) (b)

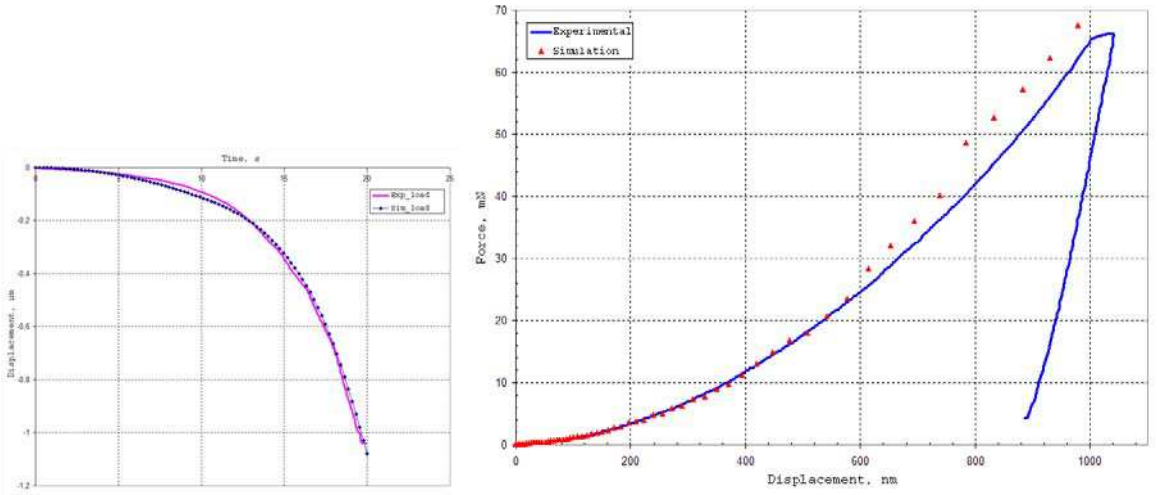
Figure V.39 : Maillage du massif pour la simulation de l'essai de nanoindentation : (a) vue générale de la zone maillée, (b) zoom sur la zone de maillage raffiné dont la taille de maille est d'environ 0,1 μm.

Nous imposons la condition d'axisymétrie sur l'axe de révolution du massif et encastrons l'arête inférieure de celui-ci. Le calcul est réalisé sous ABAQUS/EXPLICIT et impose donc, pour des raisons de stabilité, un chargement en vitesse. Comme nous l'avons spécifié au paragraphe II.5.1, le chargement expérimentalement imposé vaut $\dot{\epsilon}_i = 0,05 s^{-1}$, il est donc nécessaire d'approcher l'équivalent de ce chargement en vitesse. La vitesse n'est donc pas constante au cours du chargement et le déplacement de l'indenteur n'évolue pas linéairement au cours du temps (cf. figures V.40(a), V.41(a) et V.42(a)). L'essai dure donc typiquement 20 s pour atteindre une vitesse de chargement, en fin de phase de charge, d'environ 0,2 $\mu m.s^{-1}$. Enfin, l'utilisation du Mass Scaling (Hibbit et al., 2004) permet d'imposer un pas de temps permettant de conserver la stabilité valant typiquement $5.10^{-3} s$. Nous présentons systématiquement la confrontation entre le déplacement expérimental et simulé, correspondant au chargement en vitesse imposée, afin de mettre en avant l'équivalence du chargement. La validation du modèle et de l'identification des paramètres est donc réalisée sur la phase de charge de la courbe force-déplacement d'indent pour les matériaux de base (Ta et TA6V) et pour la Z.F (figures V.40(b), V.41(b) et V.42(b))



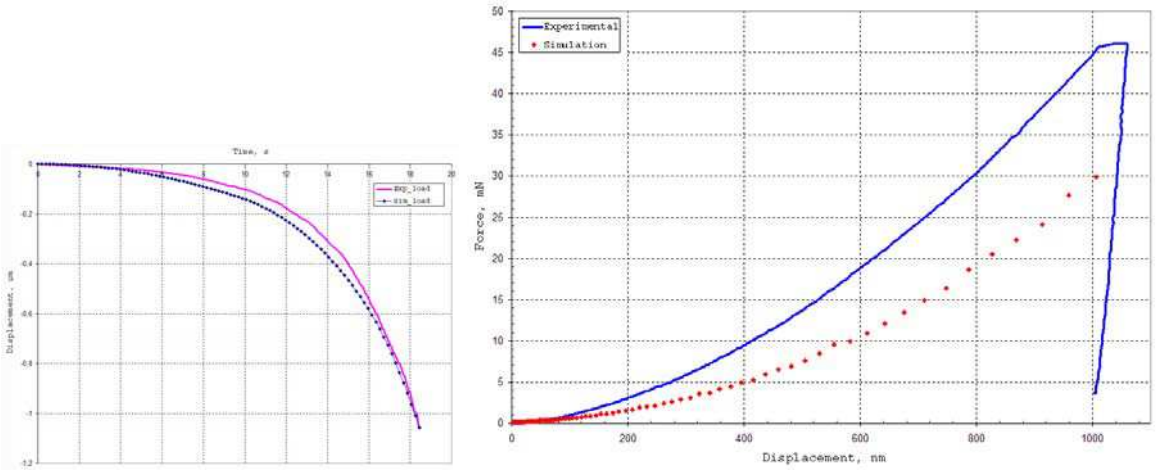
(a) (b)

Figure V.40 : Comparaison simulation expérience de l'essai d'indentation sur TA6V : (a) chargement imposé, (b) réponse force-déplacement d'indent.



(a) (b)

Figure V.41 : Comparaison simulation expérience de l'essai d'indentation sur Z.F de paramétrie G2 : (a) chargement imposé, (b) réponse force-déplacement d'indent.



(a) (b)

Figure V.42 : Comparaison simulation expérience de l'essai d'indentation sur Ta : (a) chargement imposé, (b) réponse force-déplacement d'indent.

Les résultats précédents sont rassemblés sur la figure V.43 présentant la réponse pour différentes indentations dans la Z.F et les matériaux de base.

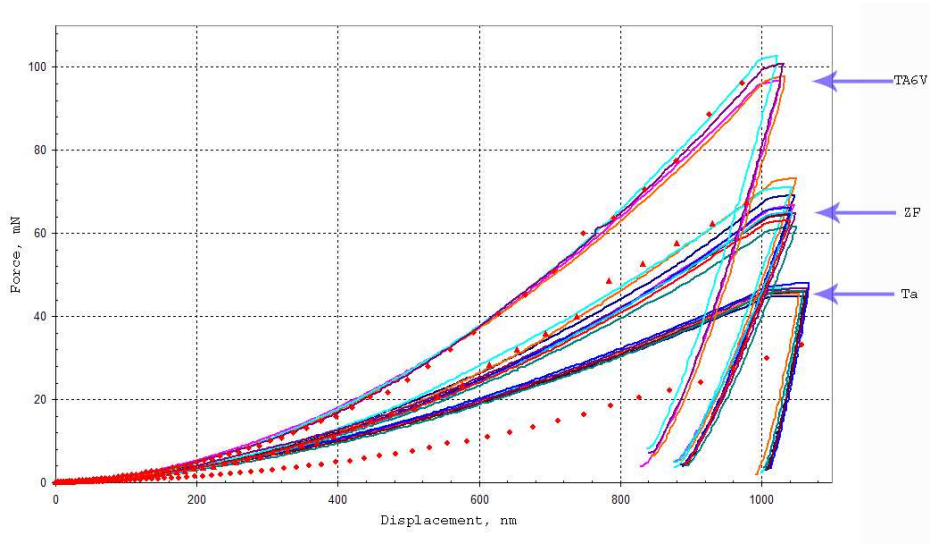


Figure V.43 : Comparaison simulation expérience de l'essai d'indentation.

La réponse du TA6V (figure V.40) et de la Z.F (figure V.41) est assez bien représentée. Pour la Z.F, il existe une petite différence entre la simulation et l'expérience mais qui reste de l'ordre de grandeur de la dispersion expérimentale (cf. figure V.43). Au contraire, la réponse force-déplacement de l'essai d'indentation sur Ta est largement sous estimée par le modèle (figure V.42). Ce point sera discuté par la suite.

Par ailleurs, la courbe expérimentale du Ta, pendant la phase de charge, prend une allure inhabituelle. En effet, pour un indenteur idéal (sans défaut de pointe), la courbe de charge suit, théoriquement, une parabole telle que $P = Ch^2$ (où P est la charge, en mN, h la profondeur d'indentation, en μm et C un préfacteur caractéristique du matériau, en GPa). Cette évolution parabolique de la courbe de charge est souvent trouvée sous le nom de loi de

Kick dans les ouvrages anglo-saxons. Le Ta ne suit pas la loi de Kick à la différence du TA6V et de la Z.F. Au cours de la phase de charge, nous avons donc une dépendance du préfacteur C à la profondeur d'indentation, C(h). Différentes hypothèses peuvent être émises quant à ces observations :

- Existence d'un défaut de pointe : cette première hypothèse est rejetée car la pointe a été calibrée juste avant la mesure sur un échantillon référence de Si. De plus, des essais concluant sur TA6V et Z.F sont réalisés au cours de la même filiation.
- Raideur du montage : la raideur du montage ne peut pas être mise en cause car le même phénomène apparaît pour différentes charges (cf. figure V.44).
- Écrouissage de surface induit par polissage : de même, cet effet devrait s'annuler lorsqu'on indente à des profondeurs plus importantes, ce qui n'est pas observé expérimentalement.

En indentant à différentes profondeurs, on s'affranchit des éventuelles perturbations liées à la raideur du montage ou à l'écrouissage de surface en conservant, pourtant, un écart notable entre théorie et expérience. Sur les figures V.44(a)(b)(c), nous comparons les résultats de quelques indents à la réponse parabolique théorique (Loi de Kick) pour un préfacteur donné (tableau V.12) et ceci pour trois profondeurs : 500, 1000 et 1500 nm.

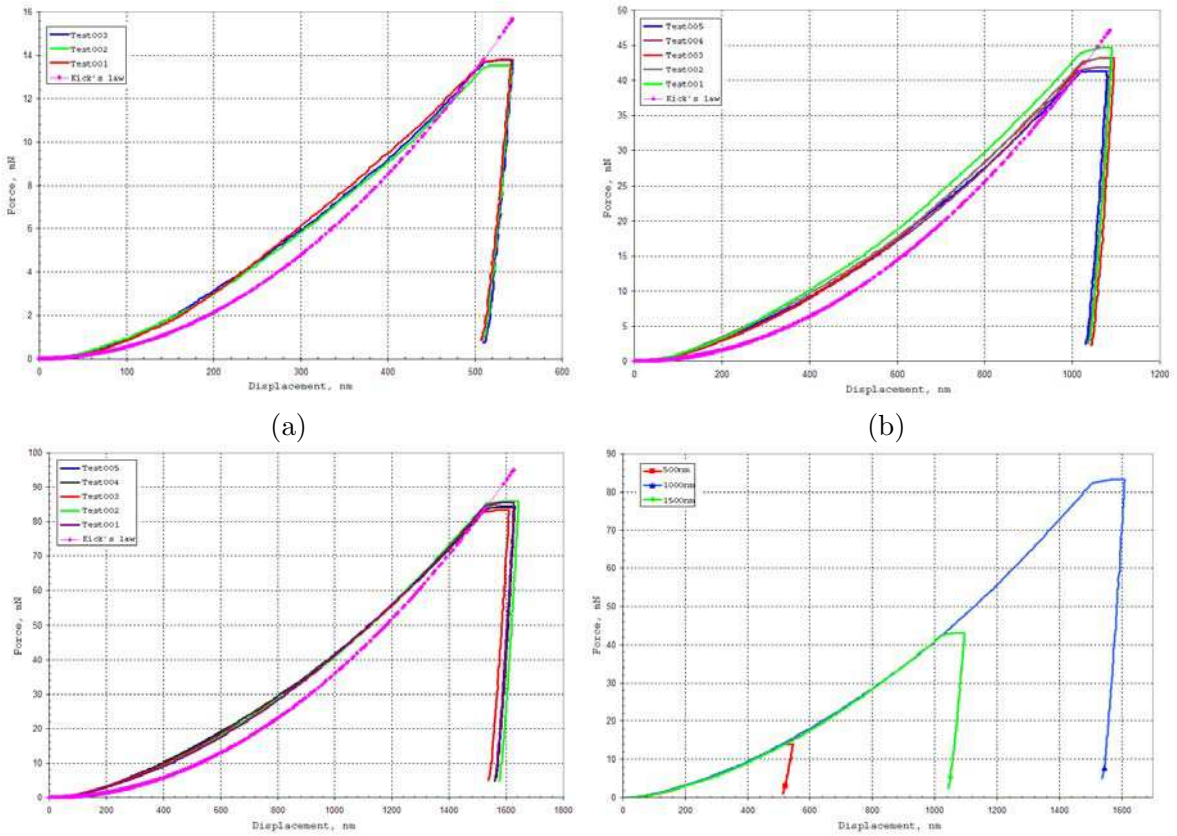


Figure V.44 : Indentation à différentes profondeur sur Ta : (a) à 500 nm, (b) à 1000 nm, (c) à 1500 nm, (d) comparaison des trois profondeurs.

Les préfacteurs utilisés sont donnés dans le tableau V.12.

Profondeur d'indentation	500 nm	1000 nm	1500 nm
Coefficient C en GPa	53	40	36

Tableau V.12 : Préfacteur C, utilisé pour la loi de Kick des 3 profondeurs d'indentation.

L'erreur mesurée, entre les courbes expérimentales et la loi de Kick, reste assez stable. En effet, en mesurant l'écart maximal en déplacement, rationalisé par la profondeur d'indentation, on obtient une mesure d'erreur dont les résultats sont synthétisés tableau V.13.

Profondeur d'indentation	500 nm	1000 nm	1500 nm
Erreur courbe expérimentale et théorique, $\frac{\Delta h}{h}$ en %	17	16.16	15.14

Tableau V.13 : Mesure de l'erreur à la loi de Kick pour les 3 profondeurs.

L'écart expérimental-théorique ne semble donc pas fortement lié à la profondeur d'indentation et peut alors laisser penser à une erreur dans l'évaluation de la topologie de contact. Dans le cas où un bourrelet est présent lors de la phase de charge, il est avéré que l'évaluation de la surface de contact via la méthode de (Oliver et Pharr, 1992) est erronée (Cheng et Cheng, 1998). Les paramètres matériau prépondérant favorisant la formation d'un bourrelet sont d'après (Taljat et Pharr, 2004) :

- l'influence de la déformation élastique quantifiée par un rapport $\frac{E}{\sigma_y}$ important.
- un coefficient de frottement faible.
- un comportement faiblement écrouissable.

L'influence de la viscosité du matériau est rarement débattue dans la littérature, mais devrait vraisemblablement favoriser la formation d'un bourrelet. Une erreur dans l'évaluation de la topologie du contact peut donc être la source de cet écart à la loi de Kick.

Concernant la sous-estimation de la phase de charge (figure V.42), elle semble liée à la présence d'une asymétrie du comportement en traction et en compression (Frénois, 2001). Ce dernier montre qu'il existe une asymétrie du comportement de l'ordre de 50 à 60 MPa pour des essais à $\dot{\varepsilon} = 10^{-3}s^{-1}$. Cependant, cet écart n'explique pas toute la différence observée. Pour s'en convaincre, on réalise le même essai en augmentant la limite d'élasticité de 60 MPa. On réduit alors l'écart entre la courbe expérimentale et simulée sans pour autant obtenir un résultat correct (figure V.45).

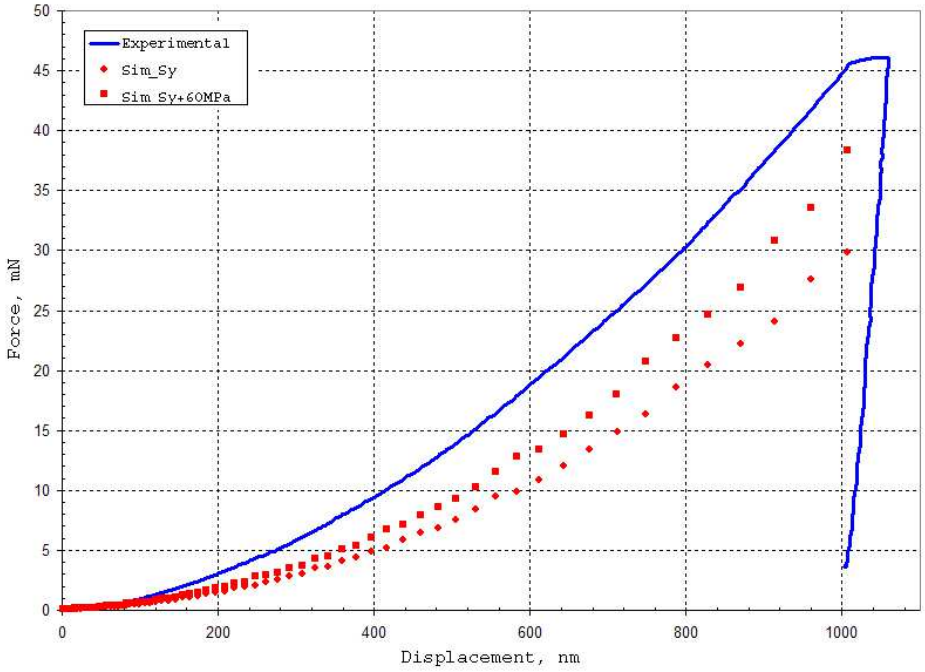


Figure V.45 : Comparaison simulation expérience de l'essai d'indentation sur Ta, simulation avec et sans prise en compte de l'asymétrie traction-compression de 60 MPa.

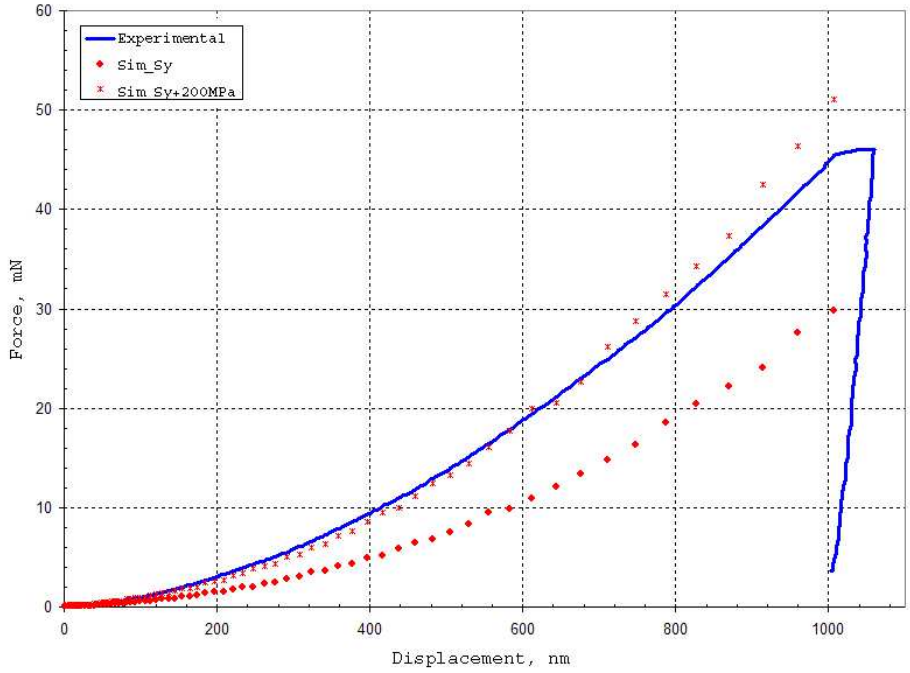


Figure V.46 : Comparaison simulation expérience de l'essai d'indentation sur Ta, simulation avec et sans prise en compte de l'asymétrie traction-compression de 200 MPa.

Cette asymétrie de comportement provient de l'influence de la pression hydrostatique sur la partie thermiquement activée de la contrainte effective (Frénois, 2001). Or, la formule

analytique de la pression hydrostatique en compression donne $-\frac{\sigma_y}{3}$. Celle-ci est beaucoup plus élevée en indentation et de l'ordre de $-\frac{4\sigma_y}{3}$ (Bucaille, 2001). En supposant une relation linéaire afin d'estimer l'influence du phénomène, une augmentation de 4 fois la pression hydrostatique correspond à une élévation du comportement de l'ordre de 200 à 240 MPa. En appliquant une valeur de 200 MPa sur la limite d'élasticité, on obtient la courbe de la figure V.46. L'utilisation d'un modèle prenant en compte l'influence de la pression hydrostatique sur le comportement devrait donc permettre de modéliser correctement la réponse en traction, compression et indentation. Ce modèle n'a pas été développé et reste donc une hypothèse à valider.

V.3.2 Essais de traction longitudinale

Nous simulons la configuration de traction longitudinale (paragraphe II.6) à l'aide d'une modélisation en contrainte plane. L'éprouvette se compose de trois zones (Ta, TA6V, Z.F) dont les largeurs sont données figure V.47. La largeur de chacune des zones correspond à une fraction de la largeur totale de l'éprouvette. Cette fraction de chacun des matériaux (Ta, TA6V, Z.F) est mesurée sur la micrographie de la coupe de l'éprouvette expérimentale (figure II.102). La configuration de l'essai est présentée figure V.47 pour une taille de maille d'environ 0.1 mm.

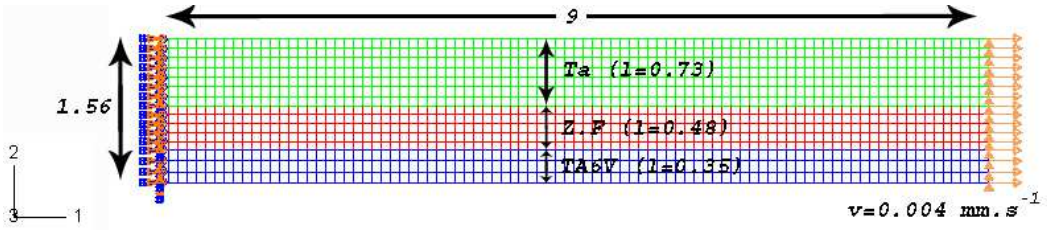


Figure V.47 : Schéma de configuration de l'essai de traction longitudinale sur éprouvette soudée et conditions aux limites imposées.

La figure V.48 présente la réponse contrainte-déformation nominales couplée et non couplée pour le jeu de paramètres identifié et rappelé tableau V.14.

E (MPa)	ν	σ_y (MPa)	Q (MPa)	b	C_1 (MPa)	a_1	C_2 (MPa)	a_2
92000	0.34	271	-180	1	36500	130	1850	6

K_M (MPa)	K_m (MPa)	K_{ov}	K_v	K_1 (s^{-1})	p_{max}	C_3 (MPa)	a_3
10.5	0	0	0	6.10^{-8}	0.12	400	-2.7

S (MPa)	s	β	Y_0 (MPa)	D_c
40	0.5	-0.5	30	0.99

Tableau V.14 : Coefficients du modèle couplé identifiés pour la paramétrie G2.

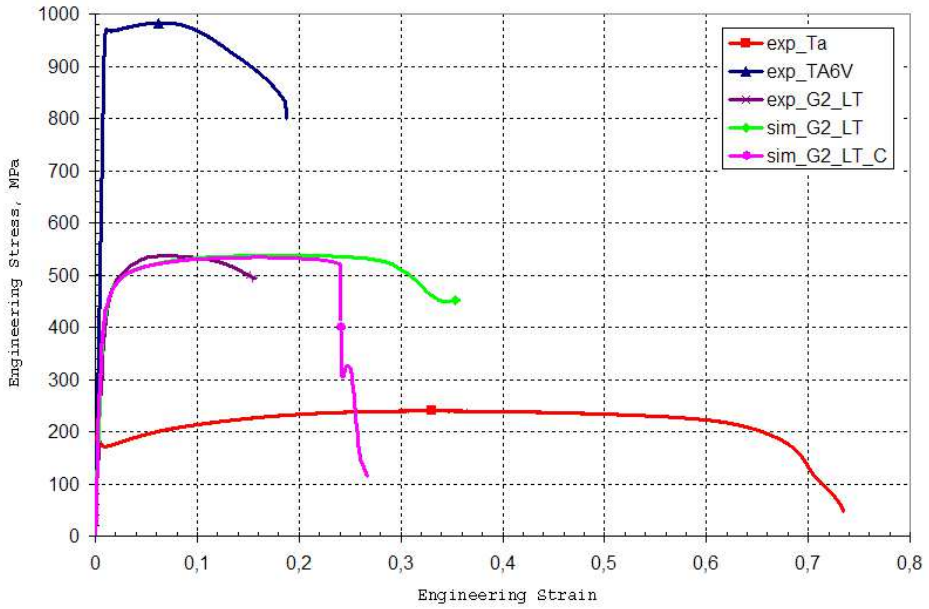


Figure V.48 : Comparaison modèle-expérience pour un essai de traction longitudinale sur éprouvette soudée avec le jeu de paramètres du tableau V.14 pour la Z.F.

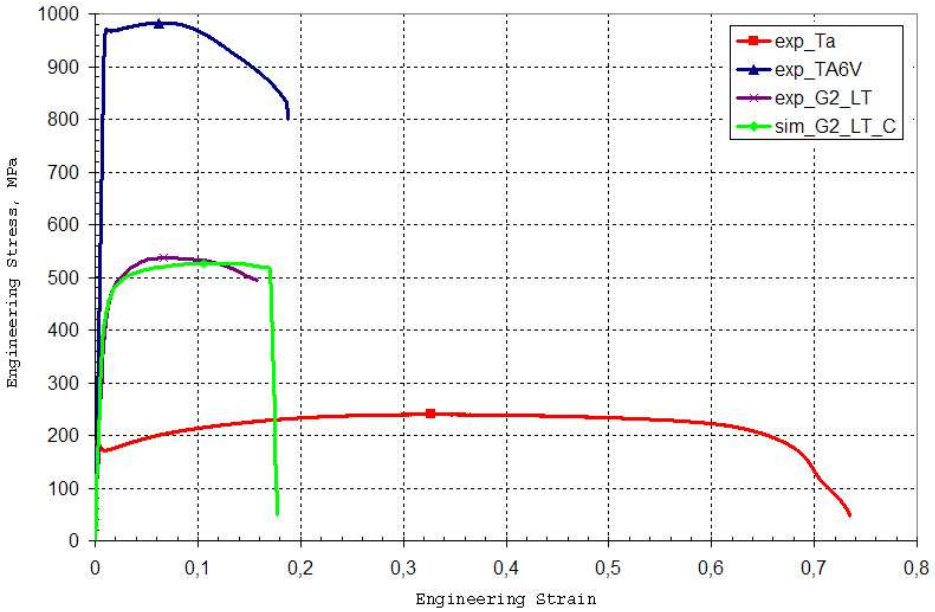


Figure V.49 : Comparaison modèle-expérience pour un essai de traction longitudinale sur éprouvette soudée avec le jeu de paramètres du tableau V.15 pour la Z.F.

Comme on le voit figure V.48, la contrainte est quelque peu sous estimée mais la valeur de R_m est correcte. L'allongement est naturellement sur estimé pour la simulation non couplée mais l'est aussi pour le calcul couplé. Pour ce dernier, la modification des paramètres d'endommagement ainsi que la suppression de l'écrouissage cinématique à seuil ((C_3, a_3) tableau V.14), permettent de s'approcher de la réponse expérimentale comme on le constate

figure V.49. Le jeu de paramètres est alors résumé tableau V.15 et la réponse du modèle décrit relativement bien celle expérimentale de traction longitudinale.

E (MPa)	ν	σ_y (MPa)	Q (MPa)	b	C_1 (MPa)	a_1	C_2 (MPa)	a_2
92000	0.34	271	-180	1	36500	130	1850	6

K_M (MPa)	K_m (MPa)	K_{ov}	K_v	K_1 (s^{-1})	S (MPa)	s	β	Y_0 (MPa)	D_c
10.5	0	0	0	6.10^{-8}	40	0.5	-0.5	0	0.13

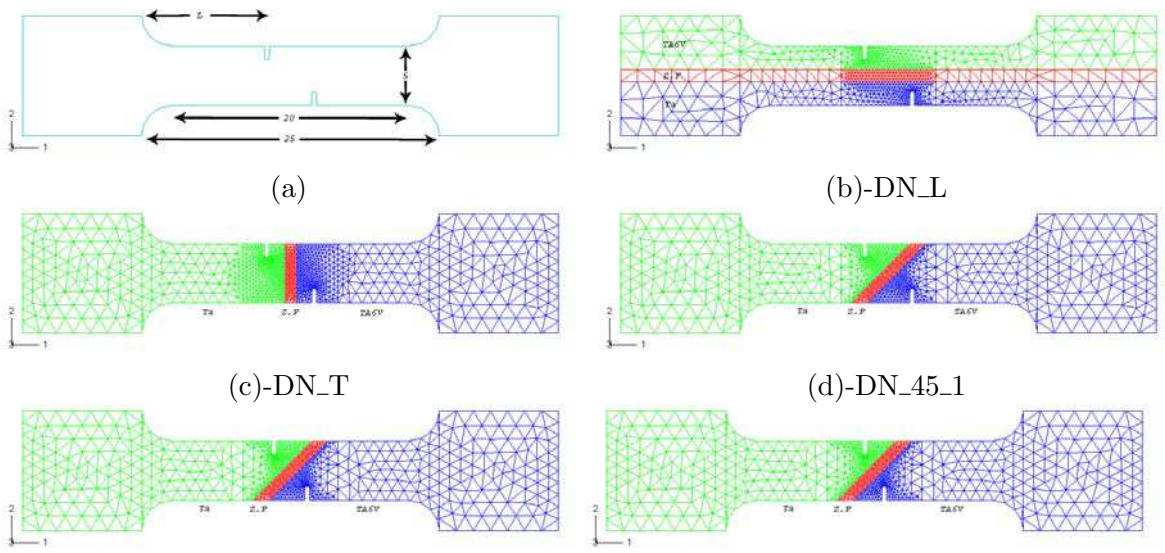
Tableau V.15 : Coefficients du modèle couplé pour la paramétrie G2, utilisés pour obtenir la réponse figure V.49.

V.4 Autres applications

Dans ce paragraphe, nous présentons quelques applications purement numériques. La réalisation d'essais expérimentaux de traction sur éprouvettes soudées doublement entaillées est envisagée et fait partie des perspectives de travail à court terme afin de valider la modélisation. Un deuxième exemple détaille les potentialités du modèle à décrire naturellement l'influence des hétérogénéités locales sur la propagation de la fissure à partir d'un maillage de microstructure.

V.4.1 Éprouvettes soudées doublement entaillées

Différentes configurations d'essais sont envisagées, allant de la traction longitudinale à la traction transversale, en passant par trois configurations dont la Z.F se trouve inclinée d'un angle de 45° par rapport à la direction de sollicitation. Ces trois configurations varient par l'espacement entre les entailles dont la position est donnée par la côte L en figure V.50(a). Les entailles sont de profondeur 1.2 mm avec un rayon de 0.2 mm. Les autres côtes restent fixes et sont données figure V.50(a) pour une épaisseur de 2 mm.



(a) (b)-DN_L

(c)-DN_T (d)-DN_45_1

(e)-DN_45_2 (f)-DN_45_3

Figure V.50 : Schéma des éprouvettes de traction, soudées, doublement entaillées : (a) côtes générales de l'éprouvette, (b) configuration longitudinale (L=10.5 mm), (c) configuration transversale (L=10.5 mm), (d) configuration 1 à 45° (L=10.5 mm), (e) configuration 2 à 45° (L=11.2 mm), (f) configuration 3 à 45° (L=11.7 mm).

Dans tous les cas traités, le maillage est composé d'environ 1800 éléments triangulaires linéaires en contrainte plane (CPS3) dont la taille de maille critique est d'environ 0.1 mm. Les têtes d'amarrage sont encastrées et la vitesse de sollicitation est de 0.02 $mm.s^{-1}$.

Les réponses globales force-déplacement des différentes éprouvettes sont données figures V.51 et V.54.

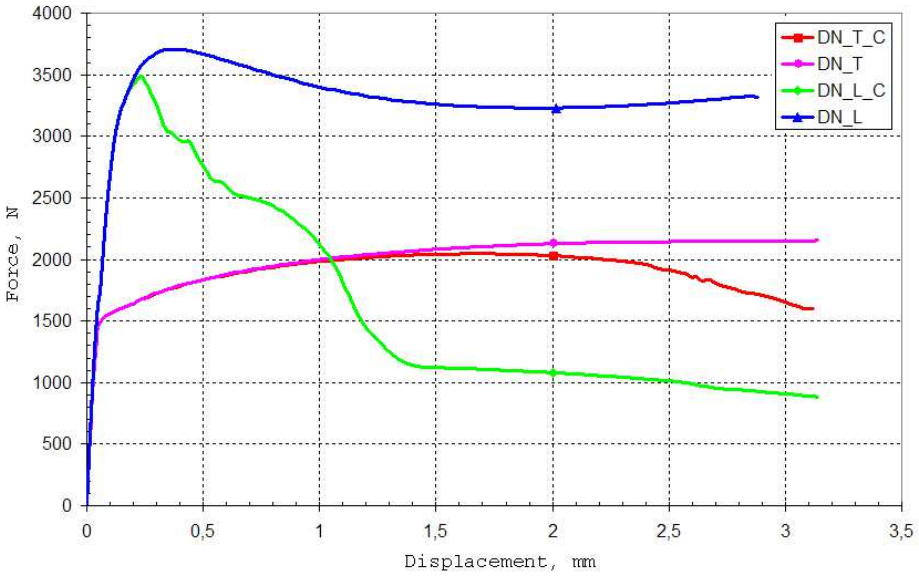


Figure V.51 : Réponse force-déplacement des éprouvettes longitudinale et transversale pour un calcul couplé et non couplé.

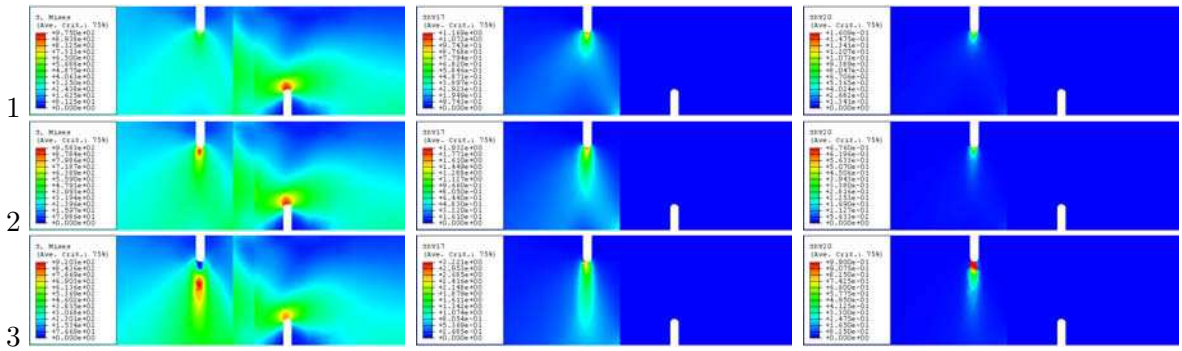


Figure V.52 : Distribution des champs dans l'éprouvette de traction transversale : (a) colonne 1 σ_{eq}, (b) colonne 2 p, (c) colonne 3 D, correspondant à un déplacement global de 1, 2, 3 mm.

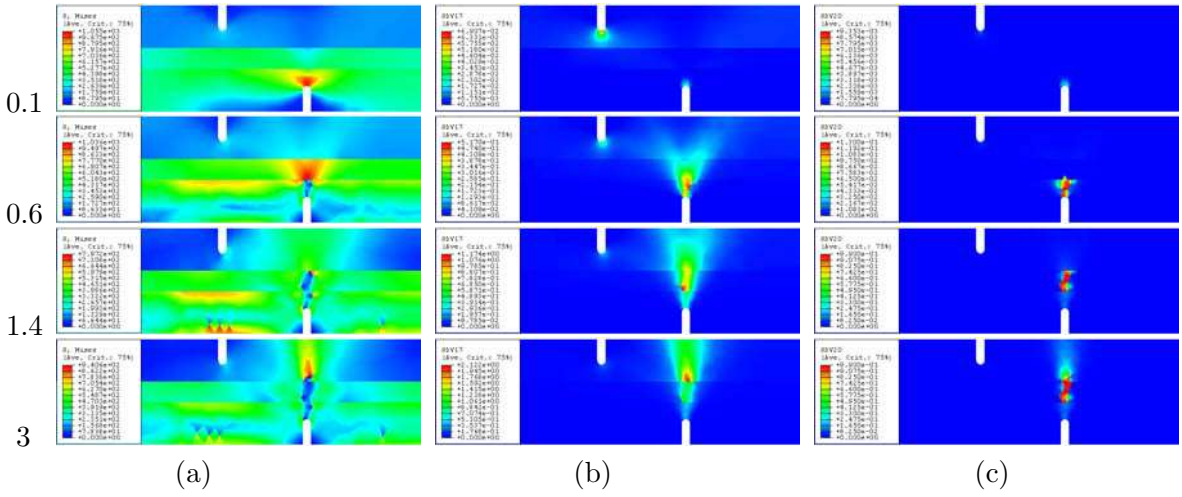


Figure V.53 : Distribution des champs dans l'éprouvette de traction longitudinale : (a) colonne 1 σ_{eq}, (b) colonne 2 p, (c) colonne 3 D, correspondant à un déplacement global de 0.1, 0.6, 1.4, 3 mm.

Remarque :

L'endommagement critique du TA6V étant de 0.13, l'apparition d'endommagement au sein de la Z.F ($D_c = 0.99$) "masque" les éléments déjà endommagés dans le TA6V. Les valeurs nulles de contrainte attestent que ces éléments ne possèdent plus de résistance mécanique et sont donc bien totalement rompus.

Éprouvettes longitudinale et transversale

L'allure peu commune de la courbe force-déplacement de l'éprouvette de traction longitudinale (figure V.51) s'explique par l'utilisation de l'écrouissage cinématique à seuil utilisé dans la Z.F. Cet écrouissage est nécessaire afin de repousser l'adoucissement provoqué par la striction géométrique et ceci dans l'objectif d'utiliser un calcul couplé pour modéliser l'endommagement de l'éprouvette. La majeure partie de la contrainte est d'abord supportée par le TA6V, matériau dont la résistance mécanique est la plus élevée. A partir d'un certain seuil de déformation, l'écrouissage mentionné précédemment, s'accélère pour faire de la Z.F la section la plus résistante et donc celle pilotant la réponse en force de la structure. Sur la réponse couplée, il est possible de voir les trois stades de la rupture. Celle-ci débute au sein

du TA6V jusqu'à environ 0.6 mm de déplacement global, puis, de 0.6 à 1.4 mm, la rupture se propage dans la Z.F pour finalement atteindre le Ta et se propager très lentement jusqu'à la fin de l'essai (cf. figures V.53(c)).

Concernant la réponse en traction transversale, elle prend une allure plus classique puisque le Ta pilote ici la majeure partie de la réponse mécanique (figure V.51). Ce dernier présente aussi un écrouissage à seuil mais sa contribution s'équilibre encore, à ce niveau de déformation, avec la striction importante de l'éprouvette. Pour un calcul couplé, comme pour celui non couplé, le Ta pilote la réponse de l'éprouvette et la rupture intervient exclusivement dans celui-ci (cf figure V.52).

Éprouvettes à 45°

Concernant les trois configurations d'essais des éprouvettes à 45°, les réponses force-déplacement des calculs sont présentées figure V.54. Un seul calcul non couplé est tracé (configuration 3) pour ne pas alourdir la figure, les deux autres réponses étant très proches.

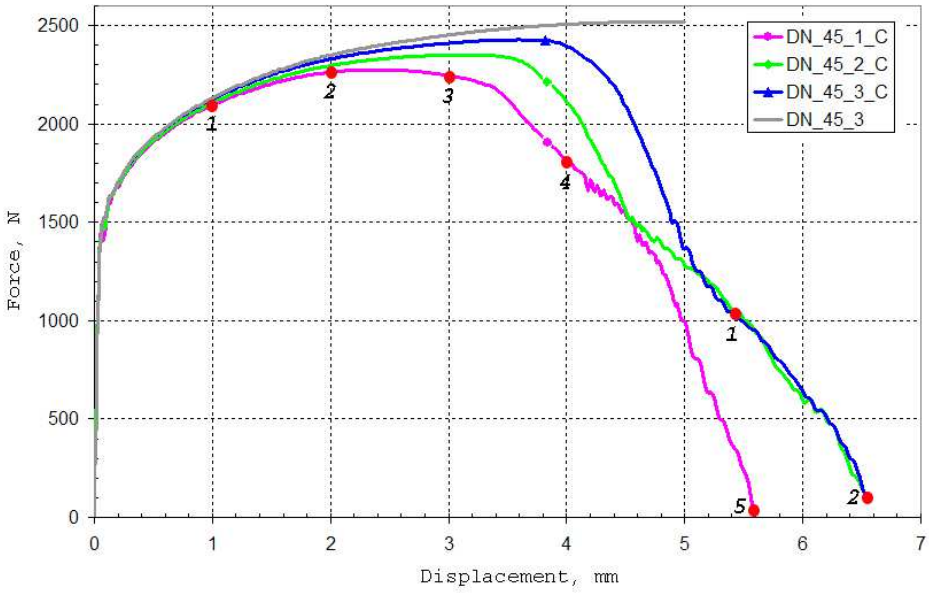


Figure V.54 : Réponse force-déplacement des éprouvettes à 45° dans les 3 configurations pour un calcul couplé et non couplé.

La réponse globale force-déplacement (figure V.54) est assez proche de celle du Ta et, quelle que soit la configuration d'essai à 45°, la rupture finale intervient dans ce dernier uniquement. Cependant, le trajet de rupture est dévié en fonction de la proximité de l'entaille au cordon. L'interface Ta-Z.F devient naturellement le lieu privilégié de la propagation de fissure (figures V.55, V.56 et V.57). Pour forcer la propagation de fissure au sein de Z.F, il faudrait donc se rapprocher de la configuration longitudinale en diminuant l'angle entre la Z.F et la direction de sollicitation, ou encore supprimer l'entaille dans le Ta en ne gardant que celle dans le TA6V.

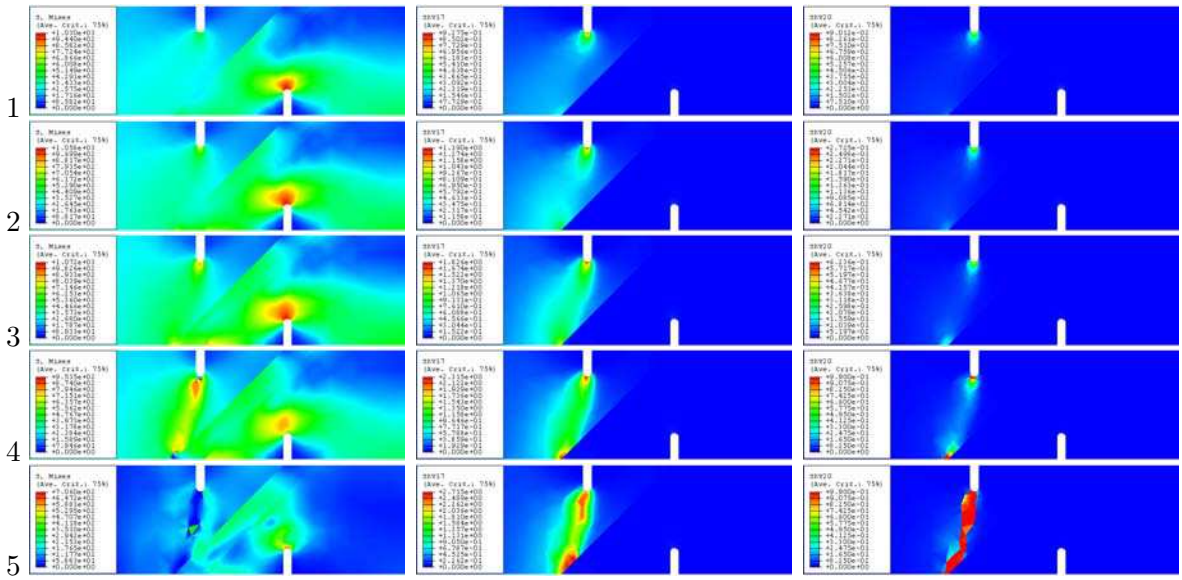


Figure V.55 : Distribution des champs dans l'éprouvette de traction 45° configuration 1 : (a) colonne 1 σ_{eq}, (b) colonne 2 p, (c) colonne 3 D, correspondant aux points repérés figure V.54

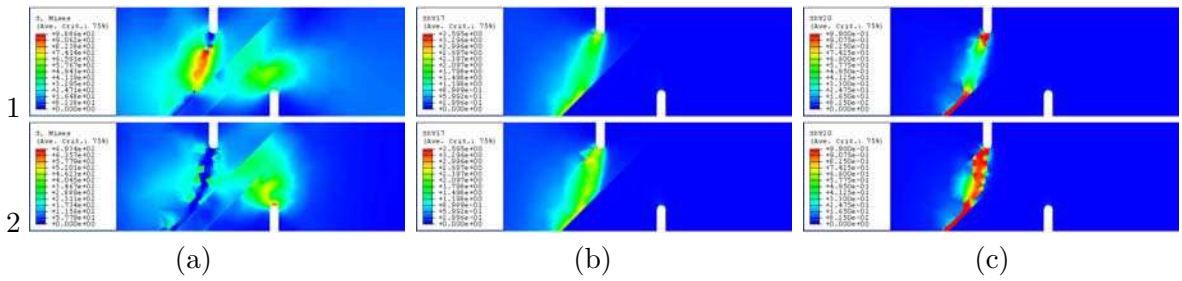


Figure V.56 : Distribution des champs dans l'éprouvette de traction 45° configuration 2 : (a) colonne 1 σ_{eq}, (b) colonne 2 p, (c) colonne 3 D, correspondant aux points repérés figure V.54

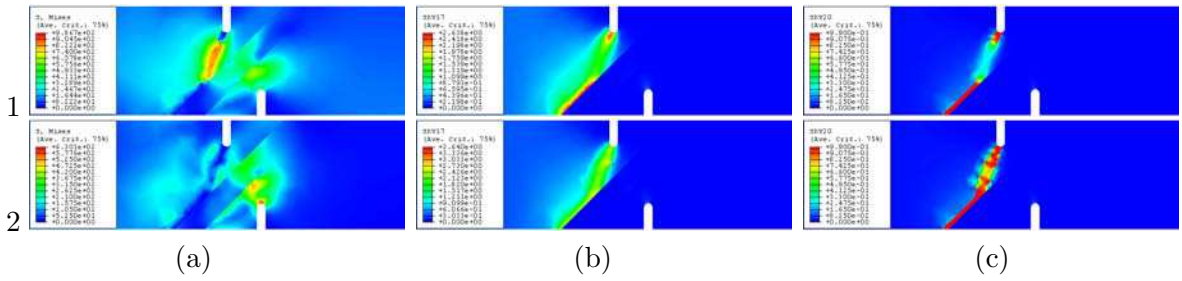


Figure V.57 : Distribution des champs dans l'éprouvette de traction 45° configuration 3 : (a) colonne 1 σ_{eq}, (b) colonne 2 p, (c) colonne 3 D, correspondant aux points repérés figure V.54

Au sein de ce paragraphe, nous avons pu voir l'influence de la Z.F sur la réponse d'une structure soudée. La prise en compte de la Z.F, comme un matériau macroscopiquement homogène, permet d'étudier la sensibilité de la structure à la présence d'une liaison soudée.

Comme nous avons pu le voir au travers des différents paragraphes du chapitre II, les hétérogénéités locales peuvent influencer la propagation de la rupture. Nous proposons donc, au paragraphe suivant, d'explorer numériquement les potentialités du modèle à décrire cette constatation.

V.4.2 Influence des hétérogénéités locales

Pour discrétiser géométriquement une zone particulière du cordon, nous avons développé une routine, s'exécutant sous MATLAB, permettant de réaliser la mise en donnée d'un calcul ABAQUS représentant une zone hétérogène du cordon. La procédure est décrite dans le diagramme V.58.

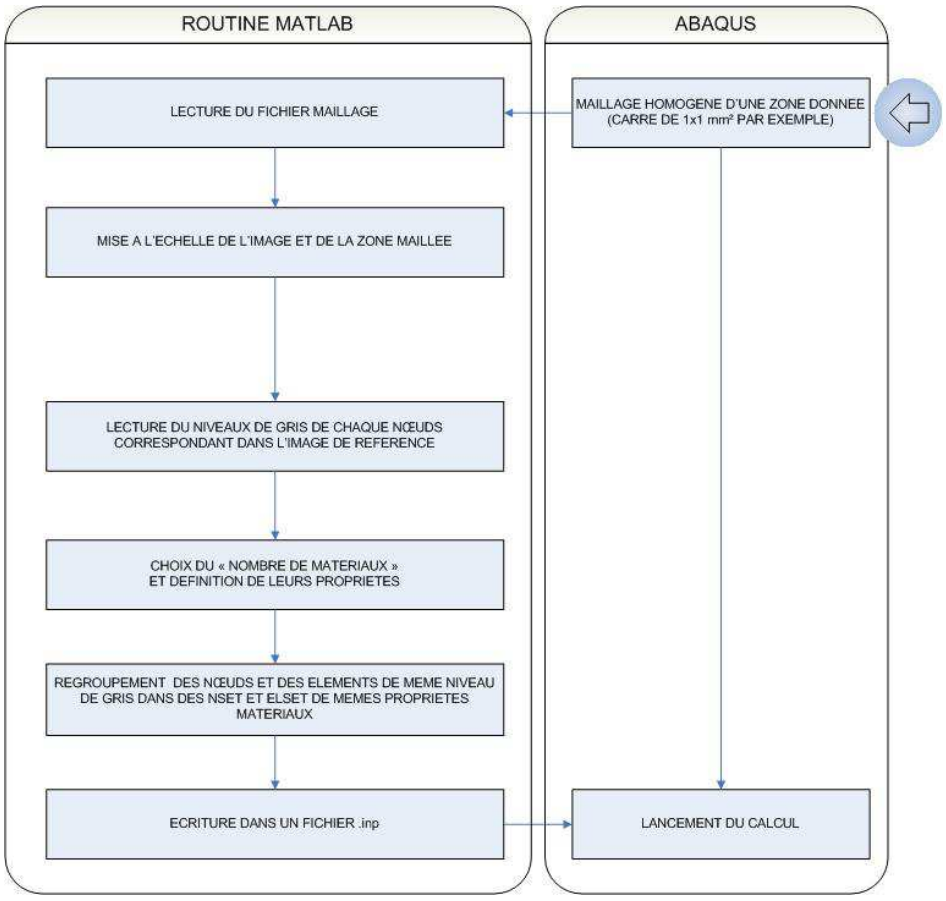
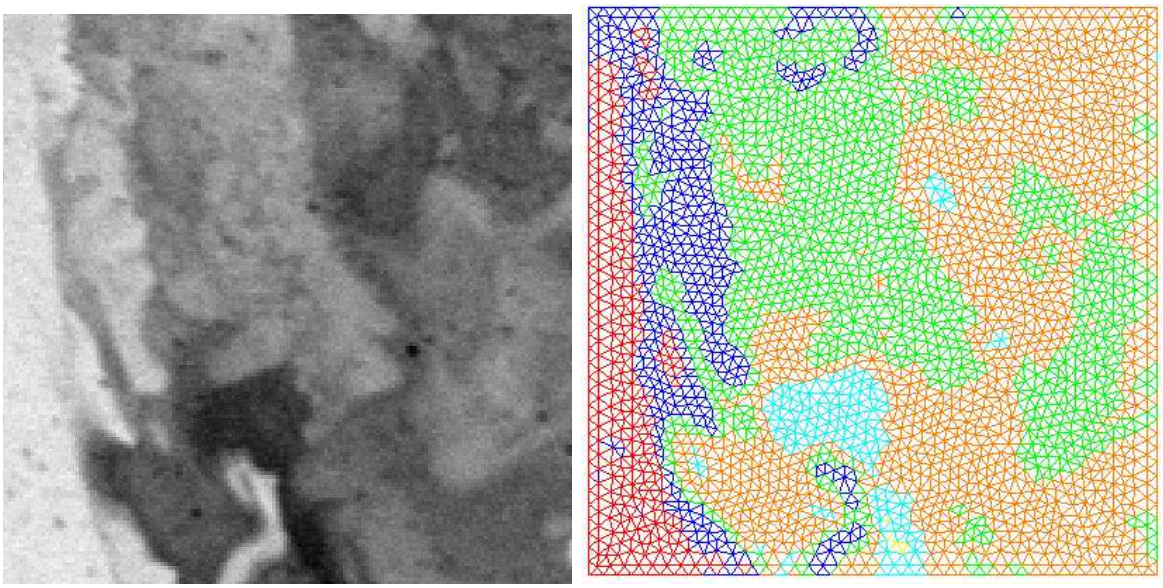


Figure V.58 : Étape composant la routine de mise en donnée d'un calcul ABAQUS à partir d'une image de référence de la microstructure.

On extrait une zone de 600x600 pixels^2 d'un cliché M.E.B bien contrasté (figure V.59(a)) représentant environ 500x500 μm^2. En choisissant de représenter la zone par six matériaux, nous obtenons le maillage figure V.59(b) où chaque zones possèdent des propriétés matériaux différentes dépendant du coefficient de mélange (niveau de gris de l'image).



(a) (b)

Figure V.59 : Zone particulière de la soudure : (a) Vue M.E.B, (b) Maillage en fonction des hétérogénéités chimiques locales.

Pour les propriétés matériaux du modèle, nous faisons arbitrairement le choix suivant :

- pour les zones les plus blanches de l'image M.E.B, nous affectons les coefficients du Ta (tableau V.10).
- pour les zones les plus sombres de l'image M.E.B, nous affectons les paramètres du TA6V (tableau V.7).
- pour les niveaux de gris intermédiaires de l'image M.E.B, nous affectons les paramètres de la Z.F (tableau V.15) dont seule varie la limite d'élasticité, conformément à la figure V.60.

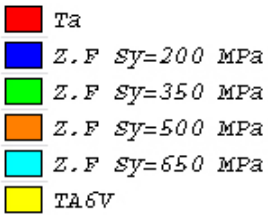


Figure V.60 : Coefficients matériaux affectés aux différentes zones maillées de la figure V.59(b).

Les conditions aux limites sont données figure V.61. Notons qu'elles peuvent être rendues plus réalistes en imposant les champs de déplacement réellement mesurés (Heripre, 2006).

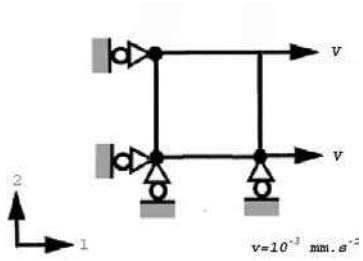


Figure V.61 : Schéma des conditions aux limites imposées sur le carré de la figure V.59(b).

Les champs de contrainte, de déformation et d'endommagement obtenus sont présentés figure V.62.

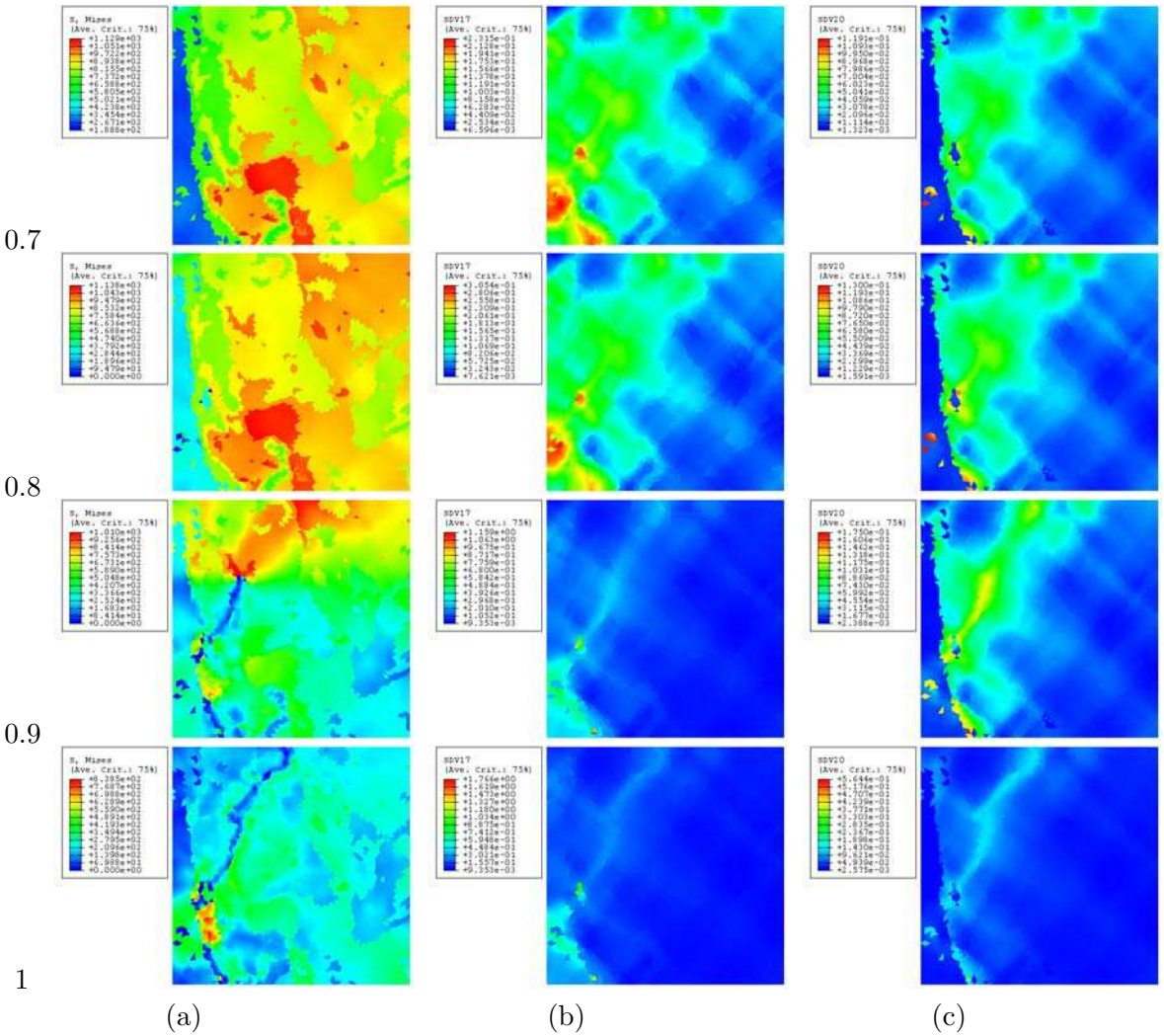


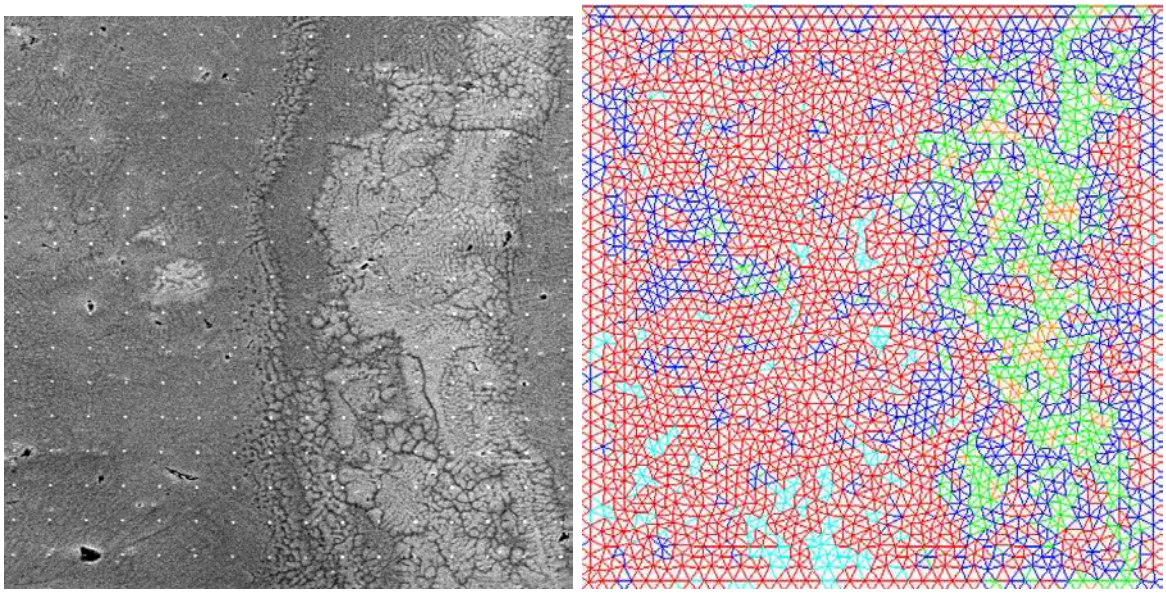
Figure V.62 : Distribution des champs de la configuration figure V.59(b) : (a) colonne 1 σ_{eq}, (b) colonne 2 p, (c) colonne 3 D, pour un déplacement de 0.7, 0.8, 0.9 et 1 mm.

Les zones les plus riches en Ta supportent la majeure partie de la déformation (figure V.62-0.7(b) et V.62-0.8(b)). L'endommagement s'initie dans les zones dont le gradient de composition, et donc de comportement, est important (figure V.62-0.7(c) et V.62-0.8(c)). La fissure se propage ensuite dans les zones molles du cordon jusqu'à atteindre un îlot plus

résistant (figures V.62-0.9(a)(c)). La fissure dévie sur la gauche en direction des zones les plus molles pour finalement rejoindre une seconde fissure initiée dans une autre zone de fort gradient (figure V.62-1(a)(c)).

La propagation de la fissure est cohérente avec les observations expérimentales réalisées paragraphe II.4.2.2. Ce type de modélisation capte bien l'influence des hétérogénéités du mélange. Le problème majeur pour la mise en place d'une modélisation crédible avec ce type de démarche réside principalement dans l'identification expérimentale du comportement local de chaque zone afin d'y affecter des paramètres matériaux justifiés.

L'application d'une telle procédure sur les clichés des essais de traction longitudinale in-situ s'avère plus ardue. Le maillage de zones moins contrastées, et perturbées par le dépôt de plots, complique la discrétisation correcte de la Z.F. Sur l'image de référence de la traction longitudinale (paragraphe II.6.3), nous obtenons, pour un carré de 795x795 pixels^2 (soit environ 150x150 μm^2), la discrétisation de la figure V.63(b).



(a) (b)

Figure V.63 : Zone de lithographie des essais de traction longitudinale : (a) Vue M.E.B, (b) Maillage en fonction des hétérogénéités chimiques locales.

Nous utilisons la même procédure d'affectation des paramètres matériaux que celle explicitée précédemment. Seule la limite d'élasticité de la Z.F varie conformément à la figure V.64.

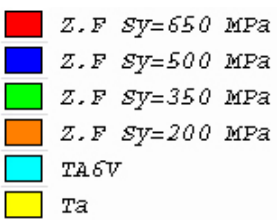
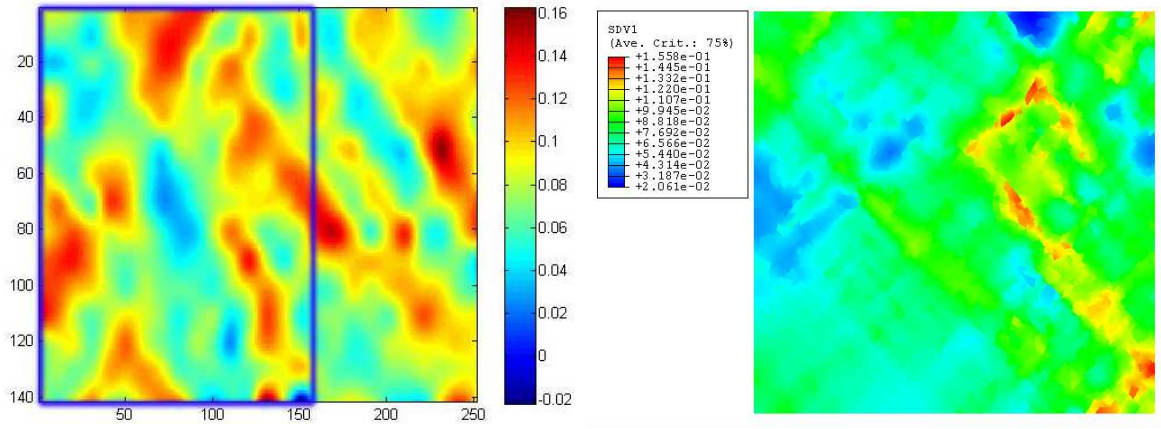


Figure V.64 : Coefficients matériaux affectés aux différentes zones maillées de la figure V.63(b).

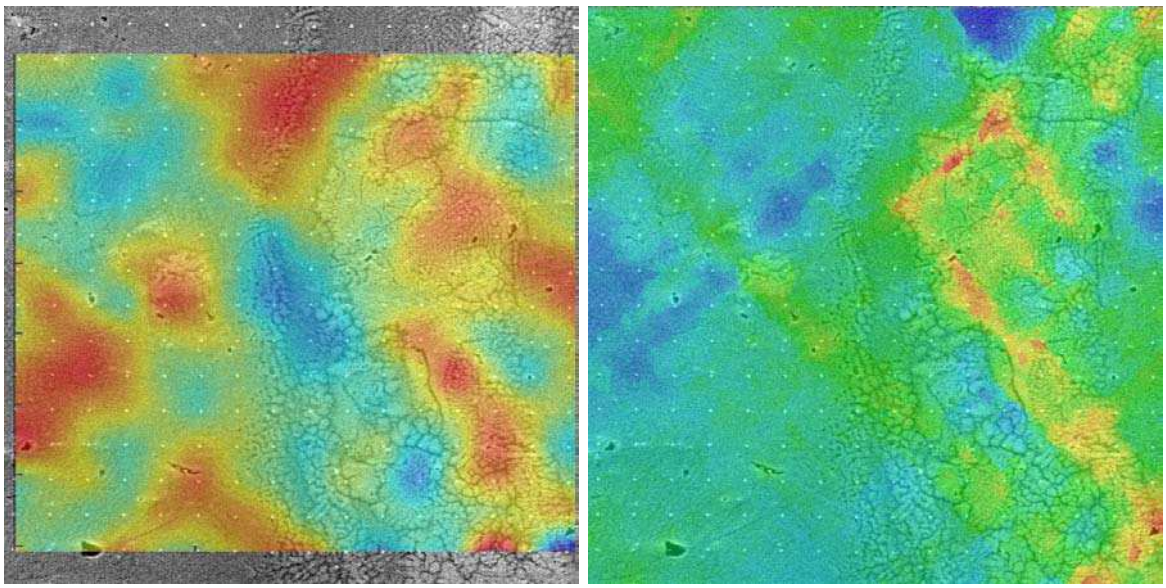
En sollicitant cette zone de la même façon que précédemment (figure V.61), on obtient une distribution de ε_{11} (SDV1 figure V.65(b)) avec un maximum de 15% pour une déformation globale imposée de 8%. La distribution de ce champ présente des similitudes avec les mesures locales de déformation par lithographie (paragraphe II.6.3.4 figure II.119) comparées figures V.65 et V.66.



(a) (b)

Figure V.65 : Mesure de déformation locale dans la direction de sollicitation : (a) Mesure expérimentale par lithographie pour un déformation nominale globale de 12% (le cadre désigne la zone sur laquelle le maillage est réalisé), (b) Résultat de simulation pour un déformation nominale globale de 8%.

En superposant les résultats précédents sur l'image de référence afin d'obtenir une échelle commune, la comparaison est rendue plus aisée (figure V.66).



(a) (b)

Figure V.66 : Superposition du champ de déformation longitudinale sur la microstructure : (a) mesuré expérimentalement, (b) obtenu par simulation

L'hétérogénéité des déformations est relativement bien décrite pour les zones à fort gradient de composition chimique, là où l'hétérogénéité majeure est bien la composition (partie droite de la figure V.65(b)). Cependant, dans les zones plus homogènes en composition, cette méthode s'avère beaucoup moins pertinente. Il peut exister différentes sources d'erreur, dont deux principales :

- une hétérogénéité sous la surface, dont l'influence est visible sur le champ de déformation expérimentale et non prise en compte lors de la modélisation.
- une seconde hétérogénéité (vraisemblablement cristalline) dont l'importance ne peut être négligée dans les zones d'hétérogénéités chimiques faibles.

En conclusion

La démarche d'identification est une étape cruciale de la modélisation du comportement. Elle nécessite une base expérimentale souvent importante et des essais bien choisis afin de "découpler" au maximum les différents mécanismes mis en jeu. Pour ce faire, nous avons identifié dans cette partie :

- *le comportement élasto-viscoplastique endommageable du Ta (présentant une anisotropie plastique et un effet mémoire) et du TA6V sur une base expérimentale contenant des essais de traction à différentes vitesses, dans différentes directions, des essais de relaxation ainsi que de cisaillement cyclique à différentes amplitudes.*
- *le comportement de la Z.F obtenue pour différentes paramétries sur un essai de flexion quatre points sur éprouvette entaillée.*

Ces identifications ont ensuite été validées sur des simulations d'essai de nanoindentation et de traction longitudinale montrant la cohérence des résultats obtenus.

Nous avons également traité quelques exemples numériques sur des éprouvettes soudées doublement entaillées de différentes configuration sollicitées en traction. Suivant les configurations d'essai, l'influence de la Z.F sur la réponse globale ainsi que sur la fissuration est mise en évidence. Enfin, le maillage de microstructures particulières permet de décrire l'influence des hétérogénéités chimiques du mélange sur le comportement mais se heurte à certaines limites lorsque l'hétérogénéité majeure est discutable, celle-ci pouvant être chimique ou cristalline.

Conclusions – Perspectives

Le principal objectif de ce travail était de développer un modèle de comportement, à la fois souple et robuste, capable de décrire, de manière pertinente, le comportement du Ta, du TA6V, et de la Z.F, au sein d'un calcul de structures. Ce modèle devait être ajustable simplement, à toute modification de paramétrie ou de configuration de soudage. Cet objectif général comporte, implicitement, une large phase de caractérisation expérimentale des matériaux de base et de la Z.F.

Dans un premier temps, les caractérisations expérimentales, sur Ta, ont permis de mettre en évidence une anisotropie de comportement, une forte viscosité dépendante du niveau de chargement, un durcissement cyclique, et une influence notable de l'histoire du chargement (effet mémoire). Concernant le TA6V, il présente un comportement élasto-viscoplastique isotrope à l'ambiante. Les essais de cisaillement cyclique montrent un faible adoucissement cyclique et une indépendance vis-à-vis de l'histoire du chargement.

L'étude expérimentale de la Z.F a pu mettre en évidence la présence quasi exclusive de la phase ($Ti\beta$, Ta) à l'aide d'analyse par D.R.X et par M.E.T. Ces conclusions sont confirmées par les mesures faibles de module d'élasticité de la Z.F face à ceux des matériaux de base (environ 92 GPa), tant par flexion quatre points que par nanoindentation. Cependant, la présence très locale d'autres phases du Ti, telles que la phase $Ti\alpha$', n'est pas omise. La réponse globale de la Z.F est testée par flexion quatre points et l'influence des hétérogénéités chimiques locales sur la fissuration est mise en évidence par corrélation d'images. Ces analyses, tout comme les fractographies au M.E.B, révèlent la présence d'interfaces faibles dans les zones où le gradient de composition est important. Néanmoins, l'hétérogénéité cristalline ne peut être négligée, notamment dans les zones de composition homogène, comme en atteste les mesures locales, par dépôt de plot d'or (lithographie), au cours des essais de traction longitudinale in-situ au M.E.B.

Les travaux ayant portés sur la formulation du modèle de comportement s'inscrivent dans le cadre de la thermodynamique des milieux continus et proposent d'utiliser différents couplages afin d'affiner la description des différents phénomènes. Le modèle le plus complet obtenu, est un modèle élasto-viscoplastique anisotrope (de critère et d'écrouissage) à écrouissage multi-cinématique et isotrope couplé à l'endommagement ductile isotrope. En outre, il permet de décrire certains phénomènes spécifiques, tels que l'effet mémoire, la dépendance de la viscosité à la déformation plastique cumulée, le pic de Piobert-Lüders et le couplage écrouissage cinématique-isotrope. Enfin, une formulation dédiée au traitement des contraintes planes est développée, se basant sur l'idée fondatrice de Simo (Simo et Taylor, 1986) et s'appuyant sur le mapping du sous-espace des contraintes planes vers le sous-espace déviateur.

La formulation du modèle s'accompagne de développement concernant les aspects

numériques associés et l'intégration des équations constitutives couplées. Le traitement algorithmique des contraintes planes est débattu à travers trois formulations, dont l'une mène à une instabilité de la réponse pour des pas de chargement importants. L'explication de ce phénomène s'appuie principalement sur le fait que l'hypothèse de retour radial est erronée dans le cas des contraintes planes. Les deux autres algorithmes traitent correctement ce cas.

Finalement, la capacité du modèle à décrire une base expérimentale d'identification relativement riche, est démontrée à travers l'application sur Ta et sur TA6V. Une démarche d'identification du comportement de la Z.F est proposée en s'appuyant sur la simulation complète de l'essai de flexion quatre points sur éprouvette entaillée. L'identification du comportement couplé et non couplé est distinguée afin de détailler les problèmes d'adoucissement provoqués par la striction géométrique dans le cadre d'une formulation locale. Nous proposons d'utiliser un écrouissage cinématique supplémentaire, s'activant à partir d'un seuil en déformation, afin de contrecarrer cet effet.

Des essais de validation montrent la cohérence des résultats obtenus pour deux essais en marge de la base expérimentale d'identification (traction longitudinale et nanoindentation). Dans ce dernier cas, le modèle montre ses limites à décrire l'asymétrie traction-compression du Ta. Une application, purement numérique, est réalisée sur des éprouvettes soudées doublement entaillées sollicitées en traction longitudinale, transversale et dont la Z.F est positionnée avec un angle de 45° par rapport à la direction de sollicitation. Ces applications montrent l'influence de la Z.F sur la localisation finale de la rupture, où l'interface Ta-Z.F constitue une interface faible. Enfin, un travail exploratoire, sur les potentialités d'un maillage de microstructure à capter l'influence des hétérogénéités chimiques locales, montre bien la nécessité de prendre en compte la double hétérogénéité, chimique et cristalline.

Les perspectives de ce travail se déclinent suivant deux axes principaux, portés par les problématiques expérimentales, d'une part, et par les problématiques de modélisation, d'autre part.

Concernant ce premier point et afin d'asseoir les choix de modélisation, il est essentiel de développer d'autres essais capables de solliciter différemment la Z.F (principalement en sollicitation cyclique). L'adaptation de l'outillage de flexion quatre points peut constituer un bon point de départ pour solliciter la Z.F en flexion cyclique. Cet essai nécessite une phase de développement et de validation notable mais constitue une voix importante pour lever les hypothèses faites sur le comportement de la Z.F. Des essais de cisaillement sur éprouvettes soudées, éventuellement in-situ, permettraient, aussi, d'envisager une sollicitation cyclique différente de la flexion. Enfin, une voix d'étude "royale" afin de constituer une base expérimentale importante pour différentes sollicitations, serait l'utilisation de composés homogènes formés par fusion en semi-lévitation (Texier, 2005) (Delvat, 2006). Ces composés ont le principal avantage de s'affranchir des dimensions caractéristiques de la Z.F (de l'ordre du mm) et ouvrent donc les champs d'exploration vers des essais plus classiques. Cependant, la fabrication de ces composés reste limitée, pour l'instant, à de faibles proportion de Ta. De plus, les cinétiques de chauffage et de refroidissement sont différentes des conditions imposées à la Z.F et nécessite une étude importante de validation métallurgique et mécanique pour l'utilisation de ces composés.

Un second problème expérimental restant ouvert, porte sur la caractérisation expérimentale de l'endommagement de la Z.F. Celle-ci doit se tourner vers des méthodes plus précises, capables de mesurer localement l'influence de l'endommagement afin de le découpler des effets de striction géométrique. On peut citer, par exemple :

- les mesures ultrasonores afin d'améliorer la quantification de l'évolution du module d'élasticité.

- les mesures par tomographie, relevant de l'imagerie 3D, pour quantifier la proportion de microcavités.

- les mesures de champs locaux par corrélation d'images et analyse inverse afin de quantifier l'évolution des paramètres d'élasticité identifiés (Claire et al., 2003).

En outre, la Z.F pose le problème d'être réellement sollicitée jusqu'à rupture. L'essai de flexion quatre points, tel qu'il a été développé, ne permet pas de solliciter les matériaux très ductiles jusqu'à rupture sans glissement de l'éprouvette. La mise au point d'un dispositif expérimental de bridage, peut être envisagée pour palier ce problème. De plus, l'endommagement intervient à coeur de l'éprouvette et doit être détecté plus tôt que par corrélation d'images sur la tranche. Une alternative peut, par exemple, résider dans l'utilisation de l'émission acoustique pour détecter les premiers instants de la fissuration. L'essai de traction longitudinale permet, quant à lui, d'obtenir la fissuration au sein de la Z.F mais rend difficile la quantification de l'endommagement. Celui-ci se doit de passer par des mesures locales in-situ par lithographie ou par corrélation d'images. Il faut donc s'assurer de la localisation au sein de la zone d'étude. Un soin particulier doit être apporté à la réalisation des éprouvettes afin d'obtenir la fissuration au sein de la zone de dépôt de plots ou de la R.O.I (Region Of Interest) en corrélation d'images. Ces essais sont envisagés à court terme, en s'appuyant sur des éprouvettes diabolo ou des éprouvettes doublement entaillées. L'utilisation d'éprouvette C.T (Compact Tension) peut aussi être une alternative intéressante pour l'étude de la rupture. Enfin, l'étude de l'interface Ta-Z.F, ainsi que des zones locales à fort gradient de composition dans la Z.F, peut faire l'objet d'un intérêt particulier. Pour cela, des essais de rayure pourraient fournir une information expérimentale intéressante.

Concernant les perspectives de modélisation, elle passe par l'amélioration du modèle proposé pour prendre en compte l'asymétrie traction-compression observée sur le Ta, ainsi que par le couplage thermo-mécanique, afin de modéliser la baisse du module tangent pour les vitesses supérieures ou égales à $\dot{\varepsilon} = 10^{-2}s^{-1}$ pour ce même matériau. Concernant le couplage comportement endommagement, il est bien sûr possible de se tourner vers une prise en compte plus complexe des phénomènes d'endommagement (anisotropie d'endommagement, critère de refermeture de micro-défauts...) mais il nous semble, néanmoins, prioritaire, de régler correctement les problèmes liés à la formulation locale du modèle. L'étude de matériaux très ductiles (Ta) montre les limites de cette formulation, tant pour les modèles couplés que non couplés. Par ailleurs, chaque fois que le comportement est adoucissant, par saturation ou chute des contraintes internes due à l'endommagement, à l'effet thermique, ou simplement à l'effet de striction géométrique, la formulation d'un modèle de plasticité non locale est impérative.

La Z.F présentant de fortes hétérogénéités, il parait naturel de s'orienter vers une modélisation par passage micro-macro. Cependant, de nombreuses difficultés sont à attendre, tant par l'application prévue (calcul de structure) que par la formulation elle-même. Pour ce dernier point, les premiers verrous à lever sont les suivants :

- la définition d'un V.E.R (Volume Élémentaire Représentatif). La taille caractéristique de l'hétérogénéité reste relativement proche de celle de la Z.F (d'un facteur dix environ).

- la définition de l'hétérogénéité majeure. Nous avons vu que l'hétérogénéité principale varie au sein de la Z.F, parfois chimique ou parfois cristalline.

- la caractérisation expérimentale de la phase β du Ti.

Tous ces aspects montrent bien la réelle difficulté, à la fois de caractérisation expérimentale et de modélisation, de l'étude des liaisons soudées hétérogènes Ta/TA6V. Ce travail constitue

une approche globale de cette problématique et couvre de nombreux champs d'expertises. Nous espérons qu'il constituera une base solide au développement de travaux futurs et qu'il sera compris comme l'une des premières pierres à un édifice encore à bâtir.

Bibliographie

Abdullah K., Wild P.M., Jeswiet J.J., et Ghasempoor A. (2001). *Tensile testing of weld deformation properties in similar gage tailor welded blanks using the rule of mixtures.* J. Mater. Proc. Technol., vol. 112, pp 91–97.

Alfano G., De Angelis F., et Rosati L. (1998). *An implicit integration procedure for plane stress J2 elastoplasticity.* Dans : Proceedings of the IV World Congress on Computational Mechanics. CIMNE, Barcelona.

Aravas N. (1987). *On the numerical integration of a class of pressure dependent plasticity models.* Int. J. Numer. Meth. Engng., vol. 24, pp 1395–1416.

Armstrong P.J. et Frederick C.O. (1966). *A mathematical representation of the multiaxial Bauschinger effect.* Technical Report, Berkeley Nuclear Laboratories, vol. .

Auricchio F. et Taylor R.L. (1995). *Two material models for cyclic plasticity Nonlinear kinematic hardening and generalized plasticity.* Int. J. of Plasticity, vol. 11, pp 65–98.

Badreddine H. (2006). *Elastoplasticité anisotrope endommageable en grandes déformations : aspects théoriques, numériques et applications.* Thèse de Doctorat, Université de Technologie de Troyes, École Nationale d'Ingénieurs de Monastir.

Badreddine H. et Saanouni K. (2007). *Damage Prediction in Sheet Metal Forming.* Dans : NUMIFORM '07, pp 105–110.

Barlat F., Yoon J.W., et Cazacu O. (2007). *On linear transformations of stress tensors for the description of plastic anisotropy.* Int. J. of Plasticity, vol. 23, pp 876–896.

Becker T.L. (2000). *Gradient effects on the fracture of inhomogeneous materials.* Thèse de Doctorat, University of California, Berkeley.

Belamri N. (2004). *Simulation numérique des procédés de découpage.* Thèse de Doctorat, Université de Technologie de Troyes.

Belytschko T., Liu W.K., et Moran B. (2000). *Nonlinear finite elements for continua and structures.* John Wiley, New York.

Besson J., Berdin C., Bugat S., Feyel F., et Collectif (2004). *Local approach to fracture.* Presses de l'Ecole des Mines de Paris.

Besson J., Cailletaud G., Chaboche J. L., et Forest S. (2001). *Mécanique non linéaire des matériaux.* 445 p., Hermès, France.

Besson J. et Foerch R. (1997). *Large scale object-oriented finite element code design.* Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., vol. 142, pp 165–187.

Bilat A.S. (2007). *Estimation du risque de rupture fragile de soudures de pipelines en aciers à haut grade caractérisation et modélisation.* Thèse de Doctorat, École Nationale Supérieure des Mines de Paris.

Blondeau R. et Collectif (2001). *Métallurgie et mécanique du soudage.* Hermès, France.

Bodner S. et Partom Y. (1975). *Constitutive equations for elastic-viscoplastic strain hardening materials.* J. of Applied Mechanics, vol. 42, pp 385–389.

Boehler J.P. (1978). *Lois de comportement anisotrope des milieux continus.* Journal de Mécanique, vol. 17 n° 2, pp 154–190.

Bonnet J. et Wood R.D. (1997). *Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis.* Cambridge University Press.

Bornert M. (1996). *Morphologie microstructurale et comportement mécanique; caractérisations expérimentales, approches par bornes et estimations autocohérentes généralisées.* Thèse de Doctorat, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées,.

Bornert M., Bretheau T., et Gilormini P. (2001a). *Homogénéisation en mécanique des matériaux 1, Matériaux aléatoires élastiques et milieux périodiques.* Editions Hermès.

Bornert M., Bretheau T., et Gilormini P. (2001b). *Homogénéisation en mécanique des matériaux 2, Comportements non linéaires et problèmes ouverts.* Editions Hermès.

Boudifa M. (2006). *Modélisation macro et micro-macro des matériaux polycristallins.* Thèse de Doctorat, Université de Technologie de Troyes.

Bouvier S., Gardey B., Haddadi H., et Teodosiu C. (2006a). *Characterization of the strain-induced plastic anisotropy of rolled sheets by using sequences of simple shear and uniaxial tensile tests.* Journal of Materials Processing Technology, vol. 174, pp 115–126.

Bouvier S., Haddadi H., Levée P., et Teodosiu C. (2006b). *Simple shear tests Experimental techniques and characterization of the plastic anisotropy of rolled sheets at large strains.* Journal of Materials Processing Technology, vol. 172, pp 96–103.

Bucaille J.L. (2001). *Simulation numérique de l'indentation et de la rayure des verres organiques.* Thèse de Doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris.

Bucaille J.L., Stauss S., Felder E., et Michler J. (2003). *Determination of plastic properties of metals by instrumented indentation using different sharp indenters.* Acta Materialia, vol. 51, pp 1663–1678.

Cam G., Erim S., Yeni C., et Kocak M. (1999). *Determination of mechanical and fracture properties of laser beam welded steel joints Weld.* Welding Journal, vol. 78, pp 193–201.

Cao Y.P. et Lu J. (2004). *A new method to extract the plastic properties of metal materials from an instrumented spherical indentation loading curve.* Acta Materialia, vol. 52, pp 4023–4032.

Chaboche J.L. (1977). *Sur l'utilisation des variables d'état interne pour la description du comportement viscoplastique et de la rupture par endommagement.* Dans : Symposium Franco-Polonais de Rhéologie et Mécanique, pp 137–159.

Chaboche J.L. (1979). *Amorcage en fatigue à faible ou grand nombre de cycles.* Dans : Séminaire sur les Effets Cycliques et Transitoires dans les Structures.

Chaboche J.L. (1981). *Continuous Damage Mechanics, a tool to describe phenomena before crack initiation.* Nuclear Engineering and Design, vol. 64, pp 233–247.

Chaboche J.L. (1984). *Anisotropic creep damage in the framework of continuum damage mechanics.* Nuclear Engineering and Design, vol. 79, pp 309–319.

Chaboche J.L. (1986). *Time-independent constitutive theories for cyclic plasticity.* Int. J. of Plasticity, vol. 2 n° 2, pp 149–148.

Chaboche J.L. (1989). *Constitutive equations for cyclic viscoplasticity and cyclic viscoplasticity.* Int. J. of Plasticity, vol. 5, pp 247–302.

Chaboche J.L. (2007). *A review of some plasticity and viscoplasticity constitutive theories.* Int. J. of Plasticity, vol. Preprint submitted.

Chaboche J.L. et Cailletaud G. (1996). *Integration methods for complex plastic constitutive equations.* Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., vol. 133, pp 125–155.

Chaboche J.L., Dang-Van K., et Cordier G. (1979). *Modelization of the Strain Memory Effect on the Cyclic Hardening of 316 Stainless Steels.* Dans : SMIRT-5. Division L, Berlin.

Charleux L. (2006). *Micromécanique de l'essai d'indentation : expériences et simulations.* Thèse de Doctorat, Institut Nationale Polytechnique de Grenoble.

Cheng Y.T. et Cheng C.H. (1998). *Effects of sink in and pile up on estimating the contact area under load in indentation.* Phylosophical Magazine Letters, vol. 78.

Claire D., Roux S., et Hild F. (2003). *Identification de conductivités thermiques et de propriétés élastiques locales par analyse de champs.* Mécanique et Industries, vol. 4, pp 655–665.

Col A. (2002a). *Emboutissage des tôles : Importance des modes de déformation.* Techniques de l'Ingénieur, vol. BM7 510.

Col A. (2002b). *Emboutissage des tôles : Aspects mécaniques.* Techniques de l'Ingénieur, vol. M3 181.

Collings E.W. (1984). *The Physical Metallurgy of Titanium Alloys.* ASM, Metals Park.

Combres Y. (1995). *Traitements thermiques des alliages de titane.* Techniques de l'Ingénieur, vol. M1 135.

Combres Y. (1999). *Propriétés du titane et de ses alliages.* Techniques de l'Ingénieur, vol. M557.

Cordebois J.P. (1982). *Endommagement anisotrope en élasticité et plasticité.* J. Méc. Théo. App. (Special Edition), pp 45–60.

Cordebois J.P. et Sidoroff F. (1979). *Damage induced elastic anisotropy.* Dans : Euromech, vol. 115.

Cotton J.D., Bingert J.F., Dunn P.S., et Patterson R.A. (1994). *Microstructure and Mechanical Properties of Ti–40 wt. Ta (Ti–15 at. Ta).* Metallurgical and Materials Transactions A, vol. 25A n° 3, pp 461–472.

Cottrell A.H. (1953). *Dislocations and plastic flow in crystals.* Oxford University Press, London, vol. , pp 111–116.

Cottrell A.H. et Bilby B.A. (1949). *Dislocation theory of yielding and strain ageing of iron.* Proc. Phys. Soc. London, vol. Sec. A62, pp 49–62.

Crisfield M.A. (1991). *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*, vol. 1-2. John Wiley, New York.

Dang van K. (1973). *Sur la résistance à la fatigue des métaux,.* Sciences et Techniques de l'Armement, vol. 47 n° 3.

Dao M., Chollacoop N., Van Vliet K.J., Venkatesh T.A., et Suresh S. (2001). *Computational modeling of the forward and reverse problems in instrumented sharp indentation.* Acta Materialia, vol. 49, pp 3899–3918.

De Borst R. (1991). *The zero-normal-stress condition in plane stress and shell elastoplasticity.* Comm. Appl. Num. Meth, vol. 7, pp 29–33.

Delaplanche D., Durut L., et Munier E. (2002). *Identification du comportement mécanique de liaisons soudées hétérogènes Ta/TA6V : méthodologie et premiers résultats.* Journal de physique, vol. 4, pp 301–308.

Delvat E. (2006). *Contribution au développement de nouveaux alliages biocompatibles à base de titane.* Thèse de Doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Rennes.

Dessolin C. (2006). *Etude par microscopie électronique en transmission d'une soudure hétérogène Ta/TA6V.* Rapport de Master, Université de Bourgogne.

Dickson J.I., Boutin J., et Handfield L. (1984). *A comparison of two simple methods for measuring cyclic internal and effective stresses.* Materials Science and Engineering, Letter, vol. 64, pp 3–7.

Dickson J.I., Handfield L., et L'Esperance G. (1983). *Cyclic softening and thermally activated deformation of titanium and zirconium.* Materials Science and Engineering, Letter, vol. 60, pp 7–11.

Dodds R. H. (1987). *Numerical techniques for plasticity computations in finite element analysis.* Computers and Structures, vol. 26 n°5, pp 767–779.

Doghri I. (1995). *Numerical implementation and analysis of a class of metal plasticity models coupled with ductile damage.* Int. J. Numer. Methods Engrg., vol. 38, pp 3403–3431.

Doghri I. (2000). *Mechanics of Deformable Solids.* Springer-Verlag, Berlin.

Dogui A. (1989). *Plasticité anisotrope en grandes déformations.* Thèse de Doctorat, Université Claude Bernard, Lyon.

Doumalin P. (2000). *Microextensométrie locale par corrélation d'images numérique.* Thèse de Doctorat, École Polytechnique.

Dufailly J. (1980). *Modélisation mécanique et identification de l'endommagement plastique des matériaux*. Thèse de Doctorat, Université Paris VI.

Durut L. (2002). *Etude et caractérisations métallurgiques de liaisons soudées hétérogènes*. Rapport interne.

Durut L. (2003). *Dureté des soudures Ta/TA6V*. Rapport interne.

Dye D. (2007). *Engineering Alloys : β-Ti Alloys*. Cour de l'Imperial College of London.

Fan Z. (1993). *On the Young's moduli of Ti_6Al_4V alloys*. Scripta Metallurgica et Materialia, vol. 29 n° 11, pp 1427–1432.

Farre J., Buy F., et Llorca F. (2002). *Tenue mécanique des soudures Ta/TA6V : caractérisation mécanique et premières interprétations*. Journal de physique, vol. 4, pp 309–315.

Feaugas X. (1999a). *Contribution à la compréhension des mécanismes de déformation plastique et d'endommagement des matériaux : un point de vue expérimental*. Mémoire d'habilitation à diriger des recherches, Université de Technologie de Compiègne.

Feaugas X. (1999b). *On the origin of the tensile flow stress in the stainless steel AISI 316L at 300K : back stress an effective stress*. Acta Materialia, vol. 47 n° 13, pp 3617–3632.

Fischer-Cripps (2002). *Nanoindentation*. Mechanical Engineering. Springer-Verlag.

Foerch R., Besson J., Cailletaud G., et Pilvin Ph. (1997). *Polymorphic constitutive equations in finite element codes*. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., vol. 141, pp 355–372.

Forest S., Amestoy M., Cantournet S., Damamme G., et Kruch S. (2005). *Mécanique des milieux continus*. Cours de l'École Nationale Supérieure des Mines de Paris.

Francois D. (1984). *Essais mécaniques des métaux : Essais d'aptitude à la mise en forme*. Techniques de l'Ingénieur, vol. M125 07.

Freed A.D., Walker K.P., et Minwu Y. (1992). *Asymptotic integration algorithms for first-order ODEs with application to viscoplasticity*. Dans : Recent Advances in Damage Mechanics and Plasticity. NASA Technical Memorandum.

Frénois S. (2001). *Modélisation polycristalline du comportement mécanique du tantale, Application à la mise en forme par hydroformage*. Thèse de Doctorat, École Centrale Paris.

Frost H.J. et Ashby M.F. (1982). *Deformation-Mechanism Maps, The Plasticity and Creep of Metals and Ceramics*. Pergamon Press.

Fréour S., Gloaguen D., François M., et Guillén R. (2006). *Application of inverse models and XRD analysis to the determination of Ti-17 beta-phase coefficients of thermal expansion*. Scripta Materialia, vol. 54, pp 1475–1478.

Fuschi P., Peric D., et Owen D.R.J. (1992). *Studies on generalized mid point integration in rate-independent plasticity with reference to a plane stress J2-flow theory*. Computers and Structures, vol. 43, pp 1117–1133.

Gallée S. (2005). *Caractérisation expérimentale et simulation numérique des procédés d'emboutissage profond application aux aciers inoxydables austénitiques.* Thèse de Doctorat, Université Bretagne-Sud.

Gaspérini M., Pinna C., et Swiatnicki W. (1996). *Microstructure evolution and strain localization during shear deformation of an aluminium alloy.* Acta. Mater., vol. 44, pp 4195–4208.

Genevois P., Teodosiu C., et Moussy F. (1990). *The test of simple shear : experimental techniques and application to the identification of constitutive laws for metal sheet.* Dans : Proceedings of the 16th International Congress IDDRG'90.

Germain P. (1973). *Cours de mécanique des milieux continus*, vol. 1. Masson, Paris.

Giannakopoulos A.E. et Suresh S. (1999). *Determination of elasto-plastic properties by instrumented sharp indentation Guidelines for property extraction.* Scripta Materialia, vol. 40 n° 10, pp 1191–1198.

Haddadi H., Bouvier S., Banu M., Maier C., et Teodosiu C. (2006). *Towards an accurate description of the anisotropic behaviour of sheet metals under large plastic deformations Modelling, numerical analysis and identification.* International Journal of Plasticity, vol. 22, pp 2226–2271.

Hammi Y. (2000). *Simulation numérique de l'endommagement des procédés de mise en forme.* Thèse de Doctorat, Université de Technologie de Compiègne.

Hao Y.L., Niinomi M., Kuroda D., Fukunaga K., Zhou Y.L., Yang R., et Suzuki A. (2002). *Young's modulus and mechanical properties of Ti-29Nb-13Ta-4.6Zr in relation to α" martensite.* Metallurgical and Materials Transactions A, vol. 33 n° 10, pp 3137–3144.

Hartmann S. et Haupt P. (1993). *Stress computation and consistent tangent operator using nonlinear kinematic hardening models.* Int. J. Numer. Meth. Engng., vol. 36, pp 3801–3814.

Hartmann S., Lührs G., et Haupt P. (1997). *An efficient stress algorithm with applications in viscoplasticity and plasticity.* Int. J. Numer. Meth. Engng., vol. 40, pp 991–1013.

Hay J.L. et Pharr G.M. (2000). *Instrumented indentation testing.* ASM Handbook, vol. 8, pp 231–242.

Hayhurst D.R. (1972). *Creep rupture under multi-axial states of stress.* J. Mech. Phys. Solids, vol. 20, pp 381–390.

Heripre E. (2006). *Méthode de couplage multi-échelles entre simulations numériques polycristallines et mesures de champs pour l'identification des paramètres de loi de comportement et de fissuration des matériaux.* Thèse de Doctorat, École Polytechnique.

Hibbit, Karson, et Sorensen (2004). *ABAQUS Theory Manual, Version 6.5.*

Hild F. (2003). *Mesure de champs de déplacement par corrélation d'images et applications en mécanique des solides.* cours de l'IPSI.

Hild F. et Roux S. (2005). *Digital Image Correlation From Displacement Measurement to Identification of Elastic Properties - A Review.* Strain, vol. 42, pp 69–80.

Hill R. (1948). *A theory of the yielding and plastic flow of anisotropic metals.* Proc Roy Soc (London) Ser A, vol. 193, pp 281–297.

Ho W.F., Ju C.P., et Chern Lin J.H. (1999). *Structure and properties of cast binary Ti-Mo alloys.* Biomaterials, vol. 20, pp 2115–2122.

Ibrahimbegovic A. (2006). *Mécanique non linéaire des solides déformables : formulation théorique et résolution numérique par éléments finis.* Hermès science.

ISO-14577 (2002). *Metallic materials Instrumented indentation test for hardness and materials parameters.* vol. .

Jaoul B. (1965). *Etude de la plasticité et application aux métaux.* Dunod.

Jeulin D. et Le Cöent A. (1996). *Morphological modeling of random composites.* Dans : Continuum Models and Discrete Systems, éd. Markov K., pp 199–206. World Scientific Publishing Company.

Johnson K.L. (1985). *Contact Mechanics.* Cambridge University Press, Cambridge.

Ju J.W. (1989). *DOn energy-based coupled elastoplastic damage theories Constitutive modeling and computational aspects.* Int. J. Solids Structures, vol. 25, pp 803–833.

Keavey M.A. (2001). *A canonical form return mapping algorithm for rate independent plasticity.* Int. J. Numer. Methods Engng., vol. 53, pp 1491–1510.

Kermouche G. (2005). *Contribution à la modélisation théorique et numérique des essais d'indentation et de rayure.* Thèse de Doctorat, École Centrale Lyon.

Khelifa M. (2004). *Simulation numérique de l'endommagement en formage des structures minces.* Thèse de Doctorat, Université de Technologie de Troyes.

Kim Y.J. (1998). *Results from Bi-material Testing Programme.* SINTAP project, vol. GKSS/14.

Kocak M. et Denys R. (1994). *CTOD and wide plate testing of welds with particular emphasis on mismatch welded joints.* Dans : 10th European Conf. on Fracture, ECF 10, éds. K.H. Ed. Schwalbe et C. Berger, pp 97–120.

Kocak M. et K.H. Schwalbe (1998). *Fracture of weld joints: mismatch effect.* Dans : Neuentwicklungen im Konstruktiven Ingenieurbau, éds. Saal Ed. H. et Bucak Ö, pp 137–155.

Kozak D., Gubeljak N., et Konjatic P. (2002a). *Fracture mechanics approach to heterogeneous welded structures.* Dans : Second International Conference Research and development in mechanical industry.

Kozak D., Sedmak A., Adziev G., et Gubeljak N. (2002b). *Application of J-integral to strength overmatch welded structures.* Dans : 6th International Research/Expert Conference, Trends in the Development of Machinery and Associated Technology.

Krieg R.D. et Krieg D.B. (1977). *Accuracies of numerical solution methods for the elasticperfectly plastic model.* Journal of Pressure Vessel Technology, vol. 99, pp 510–515.

Kuhlmann-Wilsdorf D. et Laird C. (1979). *Dislocation behaviour in fatigue.* Materials Science and Engineering, vol. 37, pp 111.

KUMAR P. ET NUKALA V.V. (2005). *A return mapping algorithm for cyclic viscoplastic constitutive models*. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., vol. 195, pp 148–178.

LAVAL P. (1995). *Étude théorique et expérimentale de l'indentation des matériaux élastoplastiques homogène et revêtus*. Thèse de Doctorat, École Nationale Supérieure des Mines de Paris.

LEDBETTER H.M. ET KIM S.A. (1988). *Low temperature elastic constants of deformed polycrystalline copper*. Materials Science and Engineering A, vol. 101, pp 87–92.

LEE C.S. (2001). *Novel joining of dissimilar ceramics in the Si3N4-Al2O3 system using polytypoid functional gradients*. Thèse de Doctorat, University of California, Berkeley.

LEE C.M., HO W.F., JU C.P., ET CHERN LIN J.H. (2002). *Structure and properties of Titanium-25 Niobium-x iron alloys*. Journal of Materials Science: Materials in Medicine, vol. 13 n° 7, pp 695–700.

LEE S.W., YOON M.J., ET YANG D.Y. (1998). *A stress integration algorithm for plane stress elastoplasticity and its application to explicit finite element analysis of sheet metal forming processes*. Computers and Structures, vol. 66, pp 301–311.

LEMAÎTRE J. (1971). *Sur la détermination des lois de comportement des matériaux élasto-viscoplastiques*. Thèse de Doctorat, Université Paris VI.

LEMAÎTRE J. (1992). *A course on damage mechanics*. Springer-Verlag.

LEMAÎTRE J. ET CHABOCHE J.L. (1985). *Mécanique des matériaux solides*. Dunod, France.

LEMAÎTRE J., CORDEBOIS J.P., ET DUFAILLY J. (1979). *Sur le couplage endommagement-élasticité*. C.R. Acad. Sci. Paris, vol. B. 391.

LEMAÎTRE J. ET DUFAILLY J. (1987). *Damage measurements*. Engineering Fracture Mechanics, vol. 28, pp 643–661.

LESTRIEZ PH. (2003). *Modélisation numérique du couplage thermomécanique endommagement en transformations finies: Application à la mise en forme*. Thèse de Doctorat, Université de Technologie de Troyes.

LÜHRS G., HARTMANN S., ET HAUPT P. (1997). *On the numerical treatment of finite deformations in elastoviscoplasticity*. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., vol. 144, pp 1–21.

LIU S. ET CHAO Y.J. (2005). *Determination of global mechanical response of friction stir welded plates using local constitutive properties*. Modelling Simul. Mater. Sci. Eng., vol. 13, pp 1–15.

LOCKWOOD W.D. (2000). *Determination of local constitutive properties of heterogeneous materials using digital image correlation and finite element analysis*. Thèse de Doctorat, Department of Mechanical Engineering, University of South Carolina.

LOCKWOOD W.D. ET REYNOLDS A.P. (2003). *Simulation of the global response of a friction stir weld using local constitutive behavior*. Mater. Sci. Eng. A, vol. 339, pp 35–42.

LOUCHET F. (1976). *Plasticité des métaux de structure cubique centrée à basse température : déformation "in Situ" par microscopie électronique à haute tension*. Thèse de Doctorat, Université de Toulouse.

Lucas B. N., Oliver W. C., Pharr G. M., et Loubet J. L. (1997). *Time dependent deformation during indentation testing, in Thin-Films: Stresses and Mechanical Properties VI.* Materials Research Society, vol. 436, pp 233–238.

Makarova O. (2006). *Définition de protocoles rationnels d'identification de loi de comportement élastoplastique Application à la simulation éléments finis d'opérations industrielles d'embou.* Thèse de Doctorat, Université de Savoie.

Malicrot A. (2006). *Etude métallurgique des liaisons Ta-TA6V.* Dans : Rapport Interne.

Marciniak Z., Duncan J.L., et Hu S.J. (2002). *Mechanics of Sheet Metal Forming.* Butterworth-Heinemann.

Margevicius R.W. et Cotton J.D. (1998). *Stress-Assisted Transformation in Ti-60 Wt Pct Ta Alloys.* Metallurgical and Materials Transactions A, vol. 29A, pp 139–147.

Marquis D. (1979). *Etude théorique et vérification expérimentale d'un modèle de plasticité cyclique.* Rapport de Master, Université Pierre et Marie Curie, Paris 6.

Mendelson A. (1986). *Plasticity: Theory and Application.* Kriger publishing company.

Miller A.K. (1987). *The MATMOD equations.* Dans : Unified Constitutive Equations for Creep and Plasticity, éd. Miller A.K., pp 139–219. Elsevier Applied Science.

Milton G.W. (1982). *Bounds on the elastic and transport properties of two-component composites.* J. Mech. Phys. Solids, vol. 30 n° 3, pp 177–191.

Mitchell T.E. et Spitzig W.A. (1965). *Three-stage hardening in tantalum single crystals.* Acta Met., vol. 13, pp 1169–1179.

Murray J.L. (1987). *Phase Diagram of Binary Titanium Alloys.* ASM International.

Murry G. (1994). *Soudage et soudabilité métallurgique des métaux.* Techniques de l'Ingénieur, vol. M715.

Nadal M.H. (1996). *Caractérisation ultrasonore du tantale Cabot à l'état recristallisé entre 20°C et 1000°C : analyse et synthèse des travaux.* Rapport interne.

Nagtegaal J.C. (1982). *On the implementation of inelastic constitutive equations with special reference to large deformation problems.* Comput. Meth. Appl. Engrg., vol. 33, pp 469–484.

Nagtegaal J.C. et de Jong J.E. (1981). *Some computational aspects of elastic-plastic, large strain analysis.* Int. J. Numer. Meth. Engng., vol. 17, pp 15–41.

Nègre P. (2006). *Damage and fracture mechanisms investigations of an aluminium laser beam weld.* Thèse de Doctorat, GKSS Research Center, Germany.

Niinomi M. (1998). *Mechanical properties of biomedical titanium alloys.* Materials Science and Engineering A, vol. 243, pp 231–236.

Nouailhas D. (1989). *Unified modelling of cyclic viscoplasticity Application to austenitic stainless steels.* Int. J. of Plasticity, vol. 5, pp 501–520.

Nouailhas D., Cailletaud G., et Policella H. (1984). *A review of creep-fatigue life prediction methods identification and extrapolation to long term and low strain cyclic loading.* Nuclear Engineering and Design, vol. 83, pp 267–278.

Nouailhas D., Cailletaud G., et Policella H. (1985a). *On the description of cyclic hardening and initial cold working.* Engineering Fracture Mechanics, vol. 21 n° 4, pp 887–895.

Nouailhas D., Chaboche J.L., Savalle S., et Cailletaud G. (1985b). *On the constitutive equations for cyclic plasticity under nonproportional loading.* Int. J. of Plasticity, vol. 1, pp 317–330.

Ohata M., Minami F., et Toyoda M. (1996). *Local approach to strength mismatch effect on cleavage fracture of notched material.* Dans : 1st European Mechanics of Materials Conference on Local Approach to Fracture EUROMECH-MECAMAT '96.

Ohno N. (1982). *A Constitutive Model of Cyclic Plasticity With a Nonhardening Strain Region.* ASME J. Appl. Mech., vol. 49, pp 721.

Ohno N., Abdel-Karim M., M. Kobayashi, et Igari T. (1998a). *Ratchetting characteristics of 316FR steel at high temperature, part I Strain-controlled ratchetting experiments and simulations.* International Journal of Plasticity, vol. 14 n° 4-5, pp 355–372.

Ohno N., Abdel-Karim M., M. Kobayashi, et Igari T. (1998b). *Ratchetting characteristics of 316FR steel at high temperature, part II Analysis of thermal ratchetting induced by spatial variation of temperature.* International Journal of Plasticity, vol. 14 n° 4-5, pp 373–390.

Oliver W.C. et Pharr G.M. (1992). *An improved technique for determining hardness and elastic modulus using load and displacement sensing indentation experiments.* Journal of materials research, vol. 7 n° 6, pp 1564–1583.

Oliver W.C. et Pharr G.M. (2004). *Measurement of hardness and elastic modulus by instrumented indentation : Advances in understanding and refinements to methodology.* Journal of materials research, vol. 19 n° 1, pp 3–20.

Ortiz M. et Popov E.P. (1985). *Accuracy and Stability of Integration Algorithms for Elastoplastic Constitutive Relations.* Int. J. Num. Meth. Engng., vol. 21 n°9, pp 1561–1576.

Ortiz M. et Simo J.C. (1986). *Analysis of a new class of integration algorithms for elastoplastic constitutive relations.* Int. J. Num. Meth. Engng., vol. 23 n°3, pp 353–366.

Paris T. (2005). *Comportement des liaisons soudées hétérogènes Ta/TA6V.* Rapport de Master, Université de Technologie de Troyes.

Patterson, R.A.and Cotton J.D., Bingert J.F., et Dunn P.S. (2000). *Titanium-Tantalum alloys.* United States Patent, vol. US006027585A.

Pelletier H. (2006). *Predictive model to estimate the stress-strain curves of bulk metals using nanoindentation.* Tribology International, vol. 39, pp 593–606.

Perzyna P. (1964). *On the constitutive equations for work-hardening and rate sensitive plastic materials.* Bull. Acad. Polon. Sci., vol. 12 n° 4, pp 199–206.

Pilvin P. (1988). *Notice d'utilisation du logiciel SiDoLo.*

Puyo-Pain M., Lamon J., et Hild F. (2005). *Méthodes de mesures de champs et d'identification des propriétés élastiques par corrélation d'images numériques application à l'étude d'un joint de brasure céramique.* Revue des Composites et des Matériaux Avancés, vol. 15 n° 1, pp 19–31.

Rauch E.F. (1998). *Plastic anisotropy of sheet metals determined by simple shear tests.* Mater. Sci. Eng., vol. A241, pp 179–183.

Rauch E.F. et G'Sell C. (1989). *Flow localisation induced by a change in strain path in mild steel,.* Mater. Sci. Eng., vol. A111, pp 71–80.

Retamel J.D. (2007). *Caractérisation du faisceau de sources laser.* Rapport interne.

Reynolds A.P. et F. Duvall (1999). *Digital Image Correlation for Determination of Weld and Base Metal Constitutive Behavior.* Welding Journal, vol. 78 n° 10, pp 355–360.

Rice J.R. et Tracey D.M. (1973). *Computational Fracture Mechanics.* Dans : Numerical and Computer Methods in Structural Mechanics, pp 585–623. Academic Press, N.Y.

Robert Y. (2003). *Comportement des liaisons hétérogènes Ta/TA6V.* Rapport de Master, Université de Technologie de Troyes.

Robert Y. (2007). *Simulation numérique du soudage du TA6V par laser YAG impulsionnel : caractérisation expérimentale et modélisation des aspects thermomécanique associées à ce procédé.* Thèse de Doctorat, École Nationale Supérieure des Mines de Paris.

Roy G. (2003). *Vers une modélisation approfondie de l'endommagement ductile dynamique. Investigation expérimentale d'une nuance de tantale et développements théoriques.* Thèse de Doctorat, Université de Poîtiers.

Saanouni K., Chaboche J.L., et Bathias C. (1986). *On the creep crack growth prediction by a local approach.* Eng. Fract. Mech., vol. 25 n° 5-6, pp 677–691.

Saanouni K., Forster C., et BenHatira F. (1994). *On the inelastic flow with damage.* Int. J. Damage Mech, vol. 3 n° 2, pp 140–169.

Satoh K. et Toyoda M. (1970a). *Static strength of welded plates including soft interlayer under tension across the weld line.* Trans. Japan Welding Society, vol. 1 n°2, pp 10–17.

Satoh K. et Toyoda M. (1970b). *Static tensile properties of welded joints including soft interlayer.* Trans. Japan Welding Society, vol. 1 n°1, pp 10–17.

Satoh K. et Toyoda M. (1971). *Mechanical behavior of welded plates including soft interlayer under tension parallel to the weld line.* Trans. Japan Welding Society, vol. 2 n°1, pp 52–59.

Saunders F. et Wagoner R.H. (1996). *Forming of tailor-welded aluminum blanks.* Metall. Mater. Trans. A, vol. 27, pp 2605–2616.

Sawyer J.P.G., Wang C.H., et Jones R. (2001). *An implicit algorithm using explicit correctors for the kinematic hardening model with multiple back stresses.* Int. J. Numer. Methods Engrg, vol. 50, pp 2093–2107.

Scheider I., Brocks W., et Cornec A. (2004). *Procedure for the Determination of True Stress-Strain Curves From Tensile Tests With Rectangular Cross-Section Specimens.* J. Eng. Mater. Techn., vol. 126, pp 70–75.

Schreyer H.L., Kulak R.F., et Kramer J.M. (1979). *Accurate numerical solutions for elastic-plastic models.* Journal of Pressure Vessel Technology, vol. 101, pp 226–234.

Seifert T. (2003). *Identification of Material Parameters Using Instrumented Indentation Test Data.* Thèse de Doctorat, Fraunhofer Institute for Mechanics of Materials.

Simo J.C. et Govindjee S. (1988). *Exact closed-form solution of the return mapping algorithm in plane stress elasto-viscoplasticity.* Eng. Comput., vol. 5, pp 254–258.

Simo J.C. et Govindjee S. (1991). *B-Stability and symmetry preserving return mapping algorithms for plasticity and viscoplasticity.* Int. J. Numer. Methods Engrg., vol. 31, pp 151–176.

Simo J.C. et Hughes T.R.J. (1997). *Computational Inelasticity.* Springer Verlag.

Simo J.C. et Ortiz M. (1985). *A unified approach to finite deformation elastoplastic analysis based on the use of hyperelastic constitutive equations.* Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 49, pp 221–245.

Simo J.C. et Taylor R.L. (1985). *Consistent tangent operators for rate-independent elastoplasticity.* Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 48, pp 101–118.

Simo J.C. et Taylor R.L. (1986). *A return mapping algorithm for plane stress elastoplasticity.* Int. J. Num. Meth. Engng., vol. 22, pp 649–670.

Singh n A.K. et Pandey P.C. (1999). *An implicit integration algorithm for plane stress damage coupled elastoplasticity.* Mechanics Research Communications, vol. 26, pp 693–700.

Sneddon I.N. (1965). *The relationship between load and penetration in the axisymmetric Boussinesq problem for a punch of arbitrary profile.* Int. J. Engng. Sci., vol. 3, pp 47–57.

Suresh S. et Mortensen A. (1998). *Fundamentals of functionally graded material.* The University Press, Cambridge.

Sutton M.A., McNeill S.R., Jang J., et Babai M. (1988). *Effects of subpixel image restoration on digital correlation error estimates.* Optical Engineering„ vol. 27 n° 10, pp 870–877.

Sutton M.A., Wolters W.J., Peters W.H., Ranson W.F., et McNeill S.R. (1983). *Determination of displacements using an improved digital correlation method.* Image and Vision Computing, vol. 1 n° 3, pp 133–139.

Tabor D. (1951). *Hardness of Metals.* Cambridge University Press, Cambridge.

Taljat B. et Pharr G.M. (2004). *Development of pile-up during spherical indentation of elastic-plastic solids.* International Journal of Solids and Structures, vol. 41, pp 3891–3904.

Texier G. (2005). *Elaborations et caractérisations micro et nanostructurales d'alliages à base de titane à destination biomédicale.* Thèse de Doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Rennes.

Tohgo K., Suzuki T., et Araki H. (2005). *Evaluation of R-curve behavior of ceramic-metal functionally graded materials by stable crack growth.* Engineering Fracture Mechanics, vol. 72, pp 2359–2372.

TORQUATO S. (1998). *Morphology and effective properties of disordered heterogeneous media.* Int J. Solids Structures, vol. 35 n° 19, pp 2385–2406.

TOYODA M. (2002). *Transferability of fracture mechanics parameters to fracture performance evaluation of welds with mismatching.* Prog. Struct. Engng Mater., vol. 4, pp 117–125.

TRICONNET K. (2007). *Identification des propriétés mécaniques à partir de mesures de champs dans un matériau multiphase.* Thèse de Doctorat, École Nationale Supérieure d'Arts et Métiers.

VALANIS K.C. (1980). *Fundamental consequences of a new intrinsic time measure : plasticity as a limit of the endochronic theory.* Arch. Mech. Stosow, vol. 32, pp 171–191.

VANLANDINGHAM M.R. (2003). *Review of Instrumented Indentation.* J. Res. Natl. Inst. Stand. Technol., vol. 108, pp 249–265.

VIGNAL V., FINOT E., OLTRA R., LACROUTE Y., BOURILLOT E., ET DEREUX A. (2005). *Mapping the 3D-surface strain field of patterned tensile stainless steels using atomic force microscopy.* Ultramicroscopy, vol. 103, pp 183–189.

VINCENT L. (1993). *Morphological grayscale reconstruction in image analysis applications and efficient algorithms.* IEEE Transactions on Image Processing, vol. 2 n° 2, pp 176–201.

WALKER K.P. (1981). *Research and Development Program for Nonlinear Structural Modeling With Advanced Time-Temperature Dependent Constitutive Relationships.* Dans : NASA Technical Report.

WALTZ G., HORNBERGER K, ET STAMM H. (1990). *An implicit integration algorithm for plane stress viscoplastic constitutive equations.* Computers and Structures, vol. 3, pp 539–546.

WATANABE O. ET ATLURI S.N. (1986). *Constitutive modeling of cyclic plasticity and creep, using an internal time concept.* Int. J. of Plasticity, vol. 2, pp 107–134.

WILKINS M.L. (1964). *Calculation of elastic-plastic flow.* Dans : Methods of computational physics, vol. 3, pp 211–263. Academic Press, N.Y.

XHAARD C. (2006). *Etude thermohydraulique du soudage impulsionnel de l'alliage TA6V.* Thèse de Doctorat, École Polytechnique Universitaire de Marseille.

YODER P.S. ET WHIRLEY R.G. (1984). *On the numerical implementation of elastoplastic models.* Journal of Applied Mechanics, vol. 51, pp 283–287.

Z-SET PACKAGE (1996). *www.nwnumerics.com.*

ZHAO K.M., CHUN B.K., ET LEE J.K. (2001). *Finite element analysis of tailor-welded blanks.* Finite Elements in Analysis and Design, vol. 37, pp 117–130.

ZHOU Y.L., MITSUO N., ET TOSHIKAZU A. (2004). *Effect of Ta content on Young's modulus and tensile properties of binary Ti-Ta alloys for biomedical applications.* Materials Science and Engineering, vol. A371, pp 283–290.

ZIENKIEWICZ O. (1994). *The finite element method*, vol. 1-2. McGraw-Hill.

Partie D

Annexes

Annexe -A-

Aspects expérimentaux

A.1 Géométries d'éprouvettes

- Éprouvette de traction uniaxiale

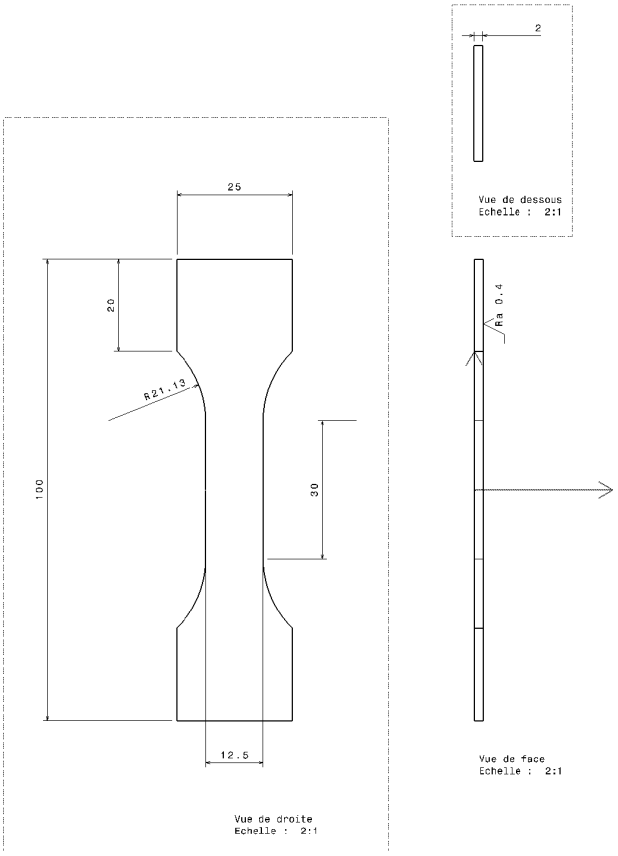


Figure A.1 : Éprouvette de traction uniaxiale

- Éprouvettes de cisaillement

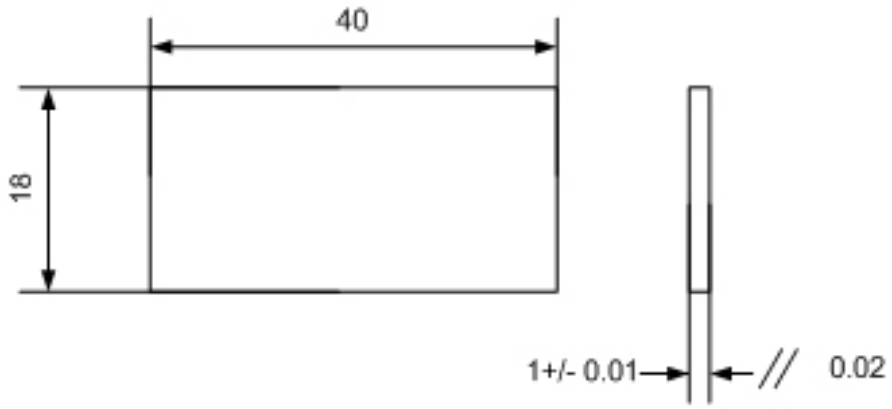


Figure A.2 : Éprouvette de cisaillement pour le Ta

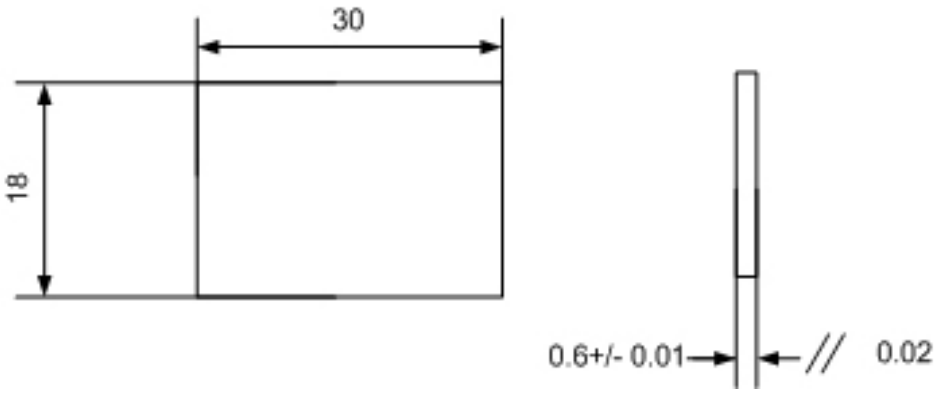


Figure A.3 : Éprouvette de cisaillement pour le TA6V

- Éprouvette de flexion entaillée

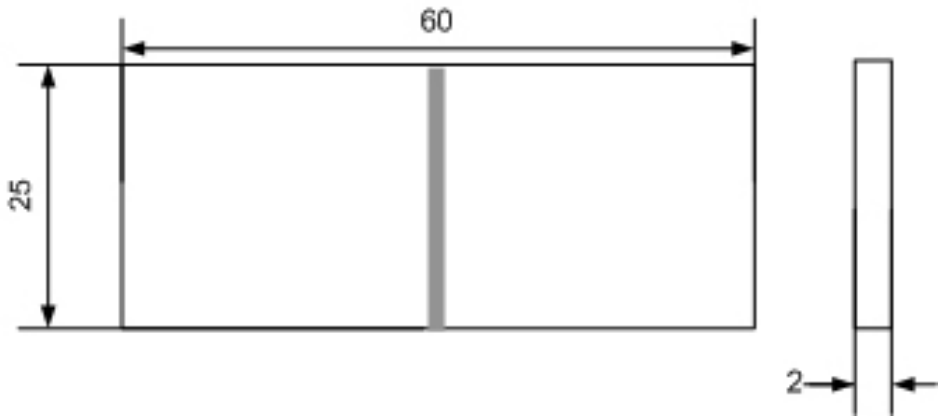


Figure A.4 : Éprouvette de flexion soudée entaillée, vue de dessus.

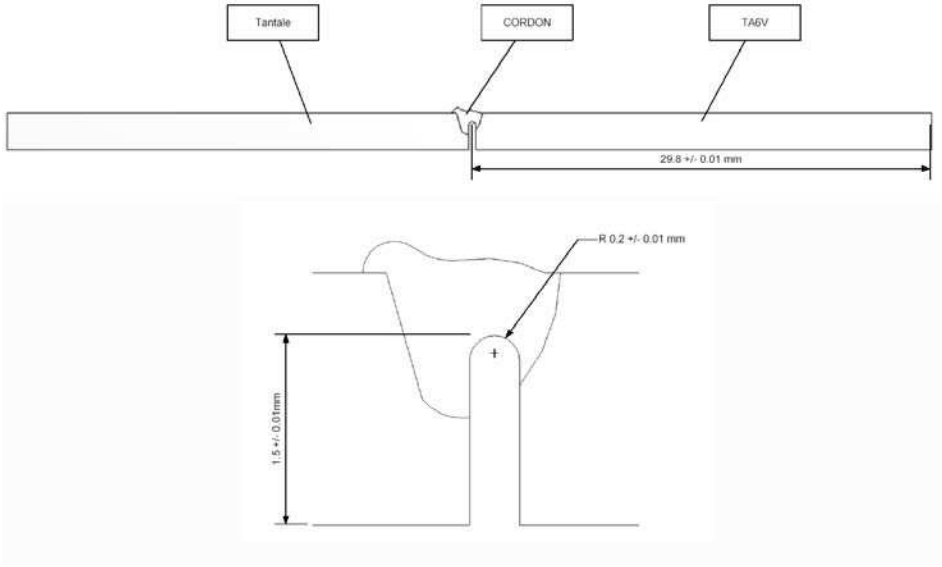


Figure A.5 : Éprouvette de flexion soudée entaillée, vue de la tranche.

A.2 Mesure de module d'élasticité pour des essais de charge-décharge

- tantale

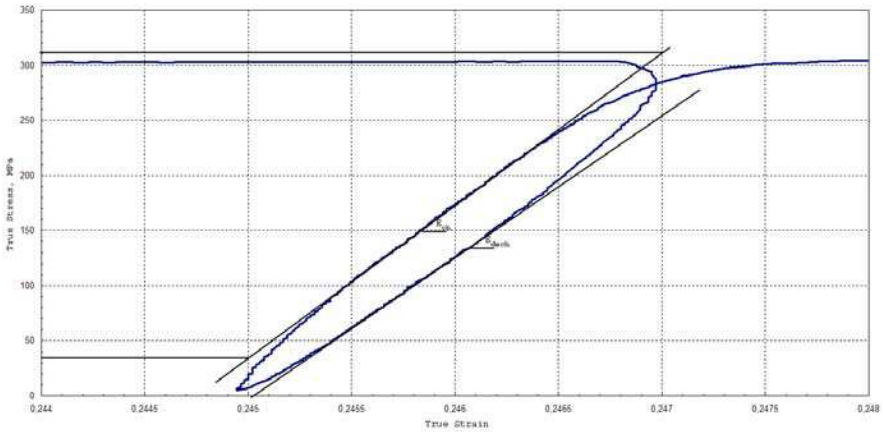


Figure A.6 : Ouverture de boucle à la deuxième décharge, contrainte-déformation rationnelles pour le Ta ($\dot{\varepsilon} = 10^{-3}s^{-1}$)

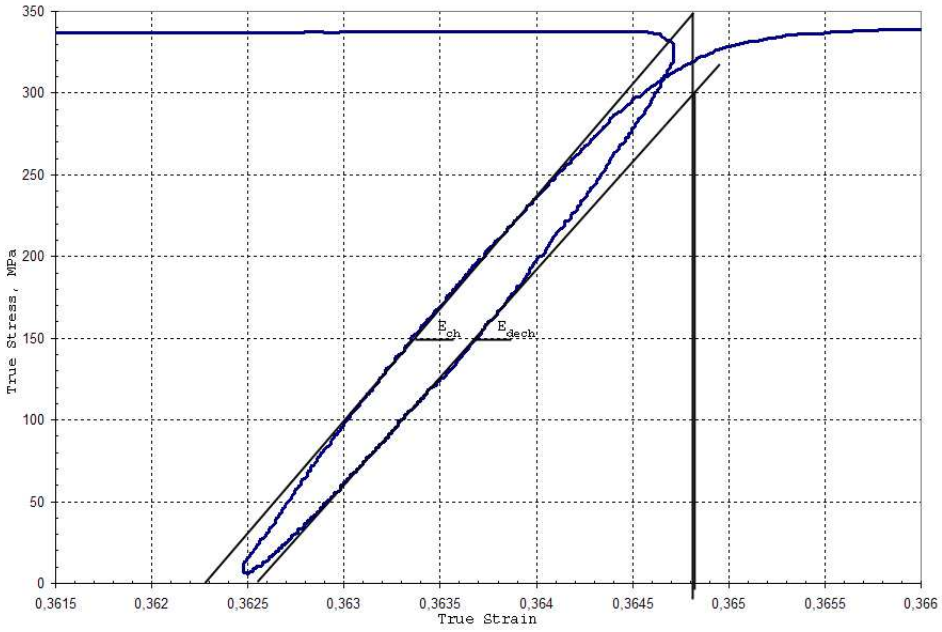


Figure A.7 : Ouverture de boucle à la troisième décharge, contrainte-déformation rationnelles pour le Ta ($\dot{\varepsilon} = 10^{-3}s^{-1}$)

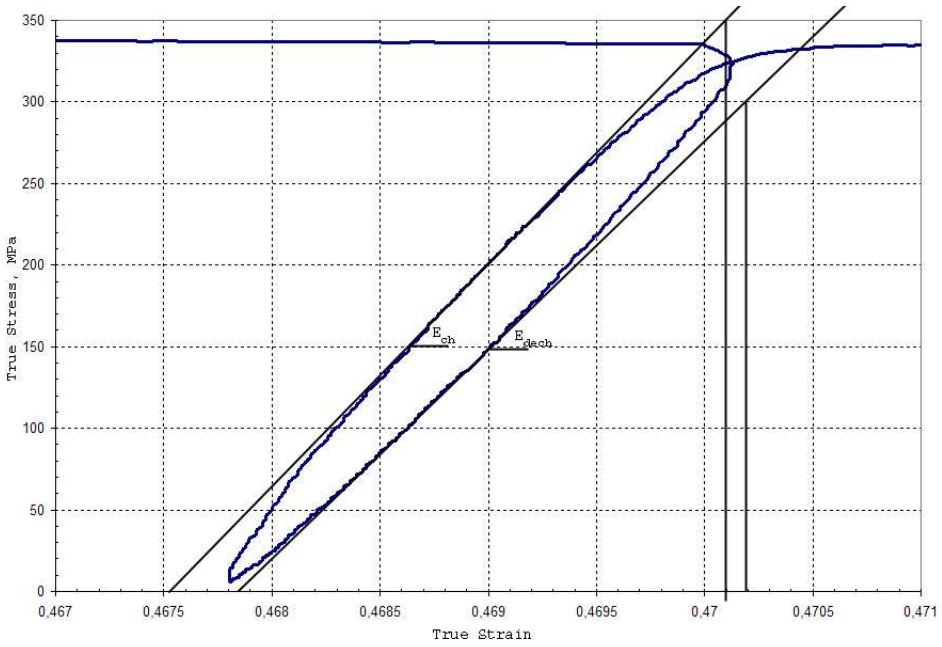


Figure A.8 : Ouverture de boucle à la quatrième décharge, contrainte-déformation rationnelles pour le Ta ($\dot{\varepsilon} = 10^{-3}s^{-1}$)

- TA6V

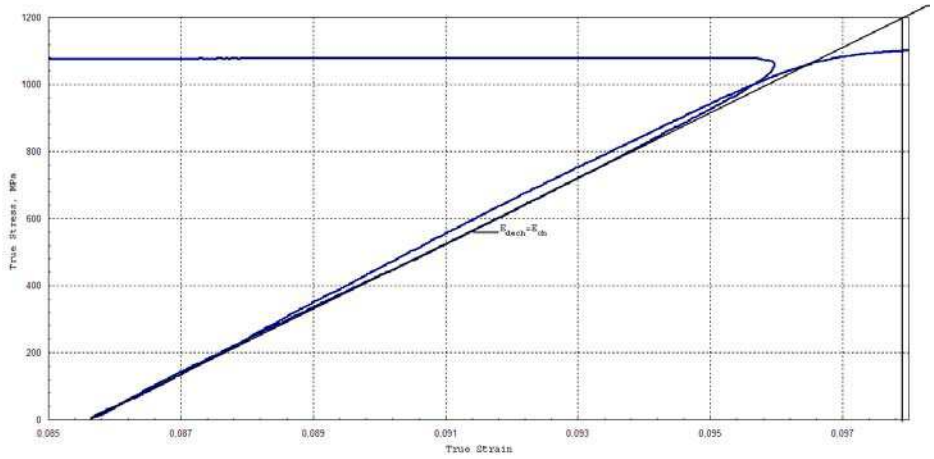


Figure A.9 : Ouverture de boucle à la troisième décharge, contrainte-déformation rationnelles pour le TA6V ($\dot{\varepsilon} = 10^{-3}s^{-1}$)

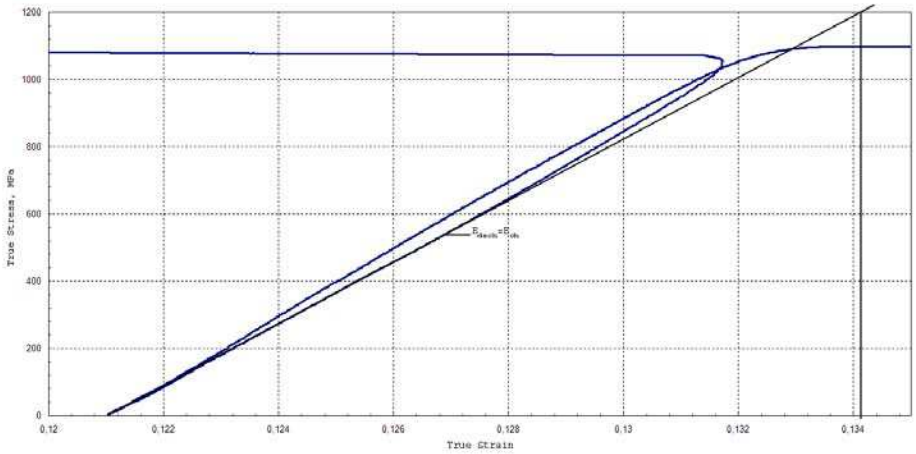


Figure A.10 : Ouverture de boucle à la quatrième décharge, contrainte-déformation rationnelles pour le TA6V ($\dot{\varepsilon} = 10^{-3}s^{-1}$)

A.3 Outillage de flexion quatre points

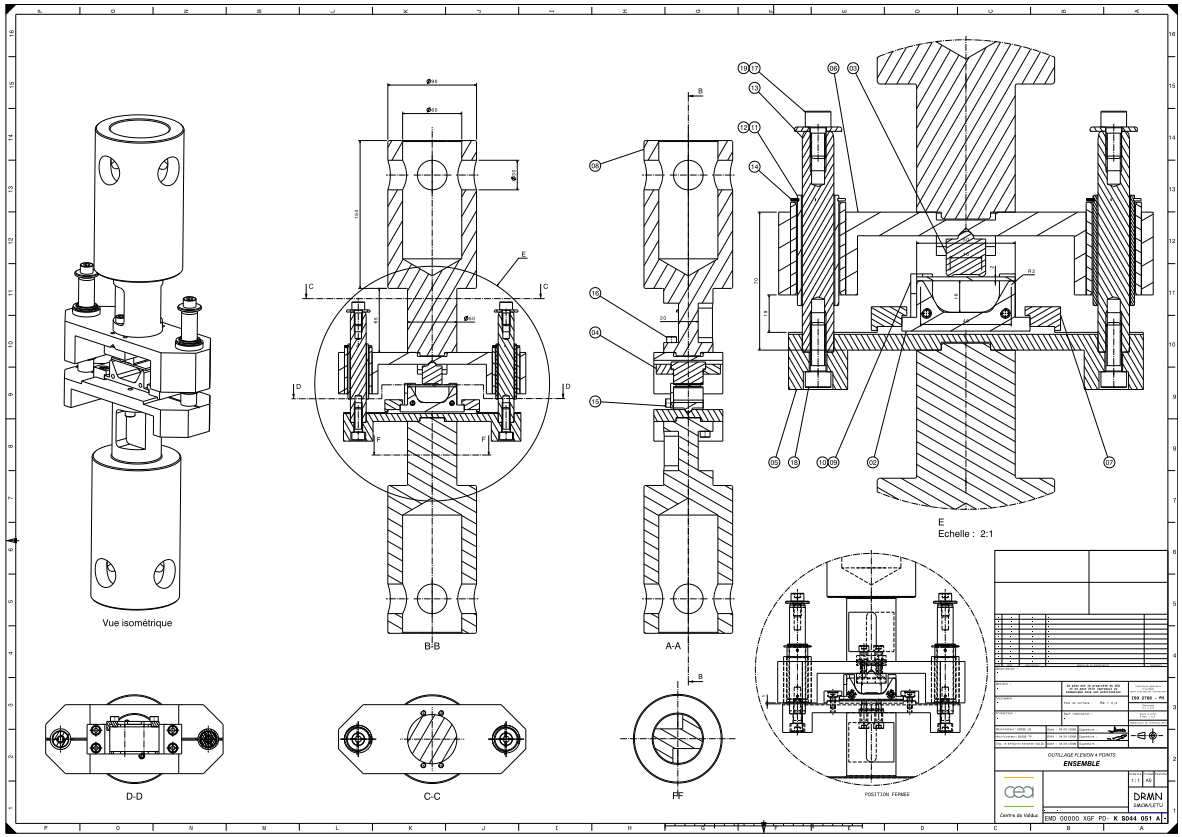


Figure A.11 : Plan d'ensemble de l'outillage de flexion quatre points.

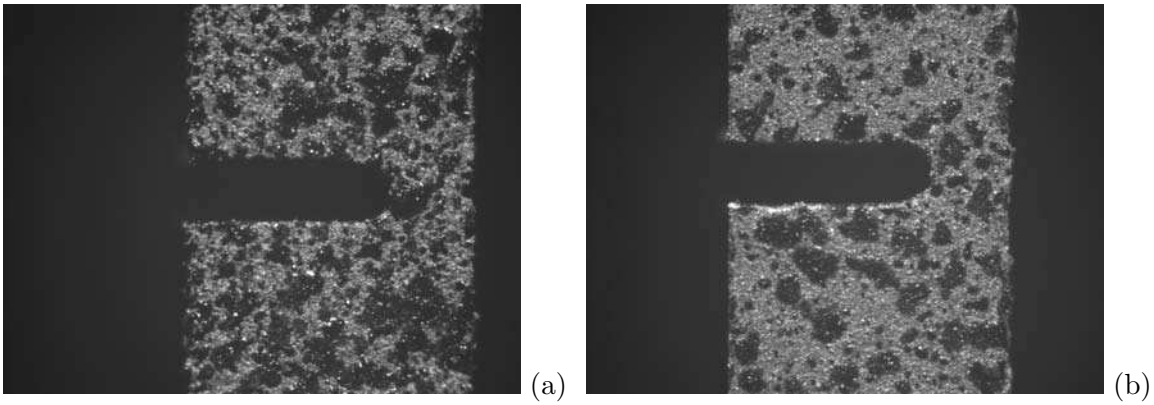
A.4 Essai de flexion quatre points et hauteur liaisonnée

- TA6V

Les essais sont réalisés sur la machine Instron, cellule de force 10 kN. Il y a peu de dispersion dans les résultats malgré une petite différence de hauteur liaisonnée (cf. tableau A.1) mesuré à partir des clichés sur la tranche de l'éprouvette (figure A.12).

Eprouvette	TA6V 04	TA6V 05
Hauteur liaisonnée (mm)	0.62	0.55

Tableau A.1 : Mesure des hauteurs liaisonnées restantes après usinage des entailles



(a) (b)

Figure A.12 : Clichés de la tranche des éprouvettes (a) TA6V04 et (b) TA6V05

La réponse force-déplacement des deux éprouvettes est très proche,

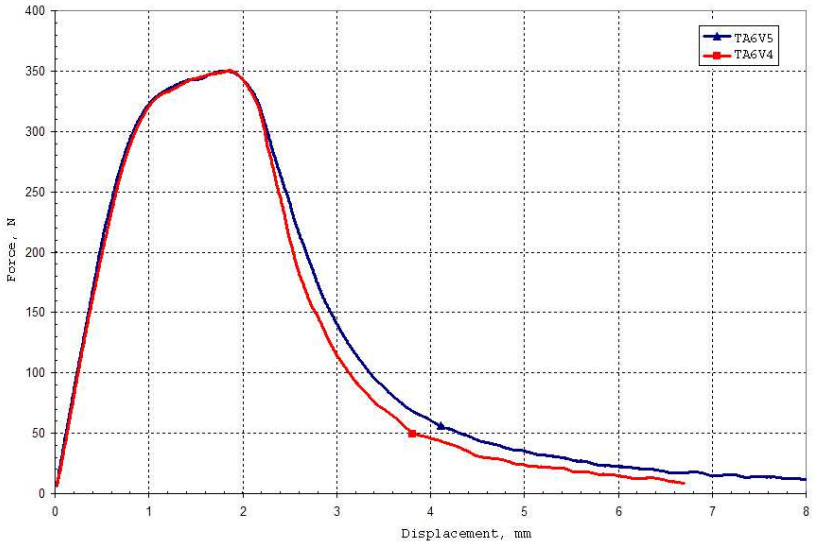


Figure A.13 : Essais de flexion sur éprouvettes entaillées de rayon 0.2 mm en TA6V

- Ta

Les mesures de hauteur liaisonnée (tableau A.2) sont obtenues à partir des clichés (figures A.14).

Eprouvette	Ta 04	Ta 05	Ta 01g3	Ta 02g3
Hauteur liaisonnée (mm)	0.57	0.69	0.52	0.54

Tableau A.2 : Mesure des hauteurs liaisonnées restantes après usinage des entailles

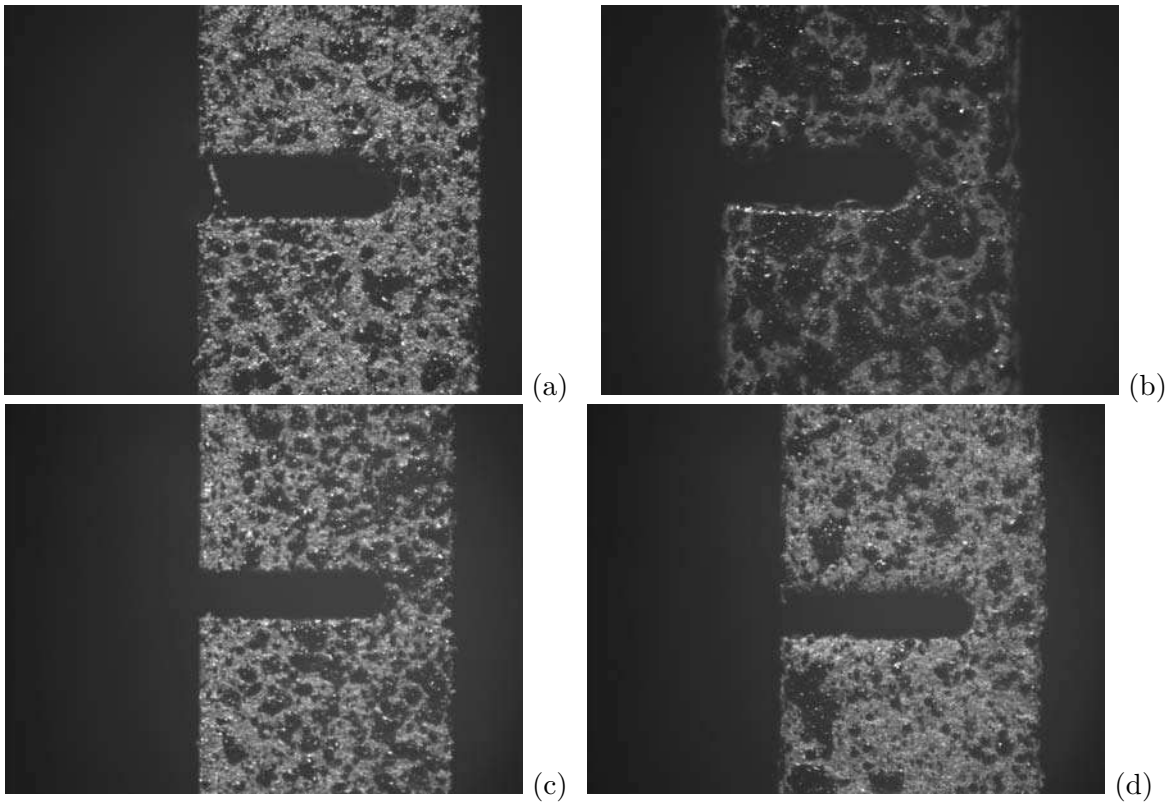


Figure A.14 : Clichés de la tranche des éprouvettes (a) Ta04, (b) Ta05, (c) Ta01g3, (d) Ta02g3

Pour le Ta05, la hauteur liaisonnée est beaucoup plus importante que pour les autres éprouvettes et la réponse mécanique se retrouve naturellement bien plus élevée que celle des autres éprouvettes.

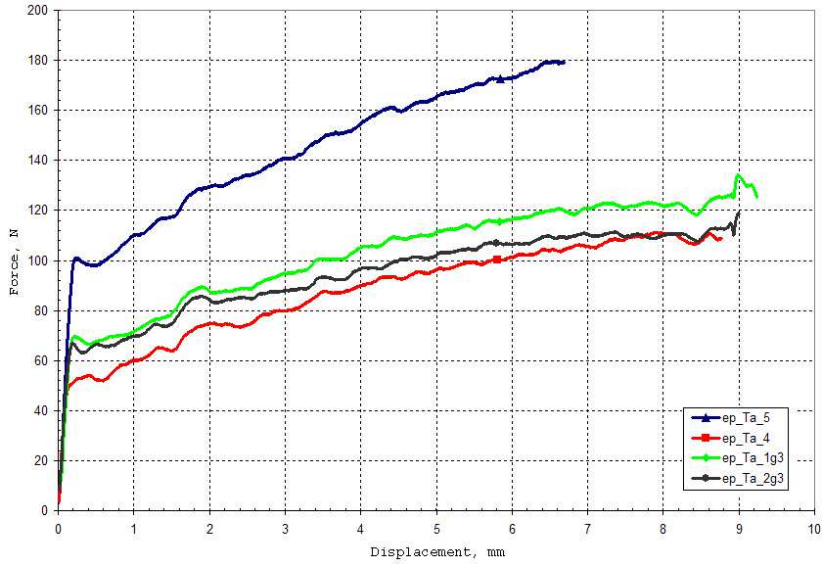


Figure A.15 : Essais de flexion sur éprouvettes entaillées de rayon 0.2 mm en Ta

- Paramétrie G2

Les mesures de hauteur liaisonnée (tableau A.3) sont obtenues à partir des clichés (figures A.17).

Eprouvette	ep1-2g2	ep2-2g2	ep5-2g2	ep6-2g2	ep1-3g2	ep2-3g2
Hauteur liaisonnée (mm)	0.39	0.35	$\star$	0.34	0.32	0.41

Tableau A.3 : Mesure des hauteurs liaisonnées restantes après usinage des entailles

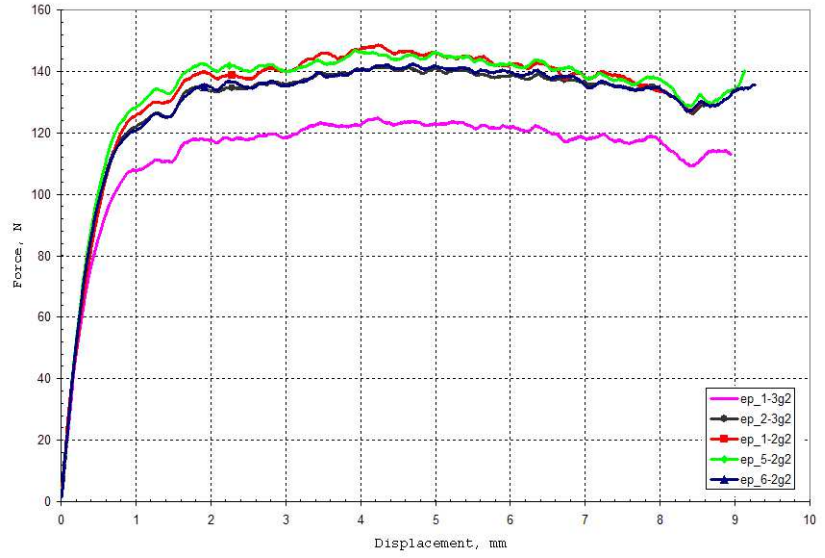


Figure A.16 : Essais de flexion sur éprouvettes soudées entaillées de rayon 0,2 mm, paramétrie G2

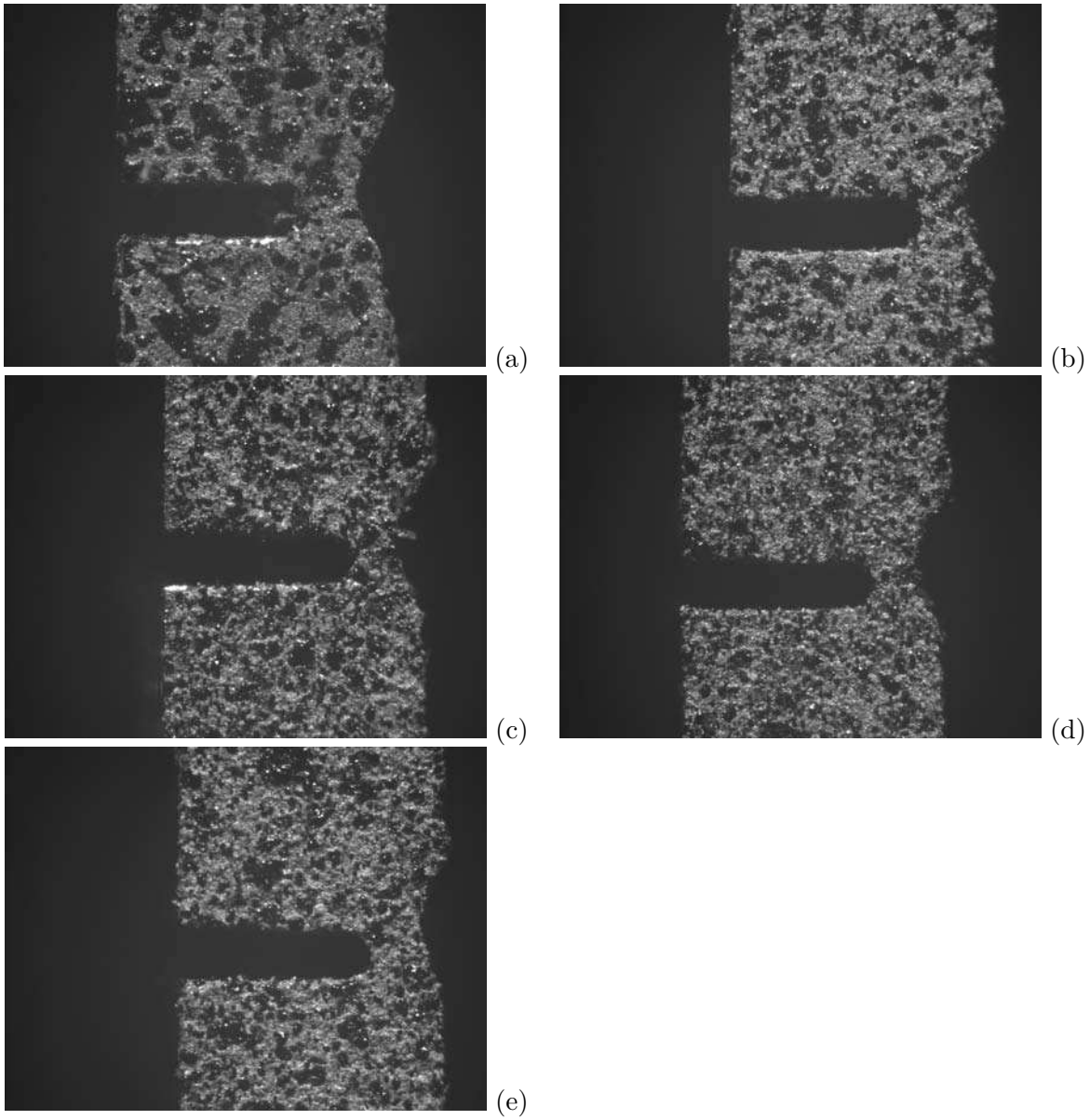


Figure A.17 : Clichés de la tranche des éprouvettes (a) ep1-2g2, (b) ep2-2g2, (c) ep6-2g2, (d) ep1-3g2, (e) ep2-3g2

- Paramétrie G3

Les mesures de hauteur liaisonnée (tableau A.4) sont obtenues à partir des clichés (figures A.18).

Eprouvette	ep1-1g3	ep1-2g3	ep1-3g3	ep1-4g3
Hauteur liaisonnée (mm)	0.46	0.52	0.48	0.49

Tableau A.4 : Mesure des hauteurs liaisonnées restantes après usinage des entailles

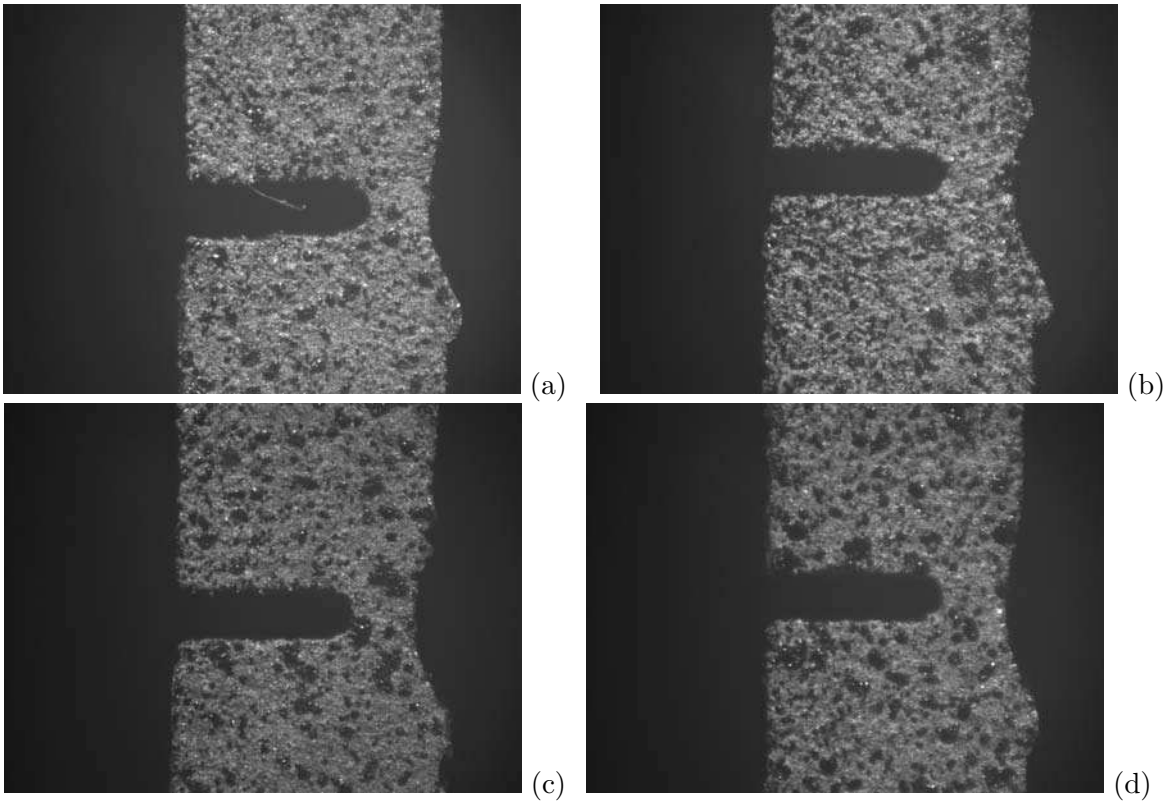


Figure A.18 : Clichés de la tranche des éprouvettes (a) ep1-1g3, (b) ep1-2g3, (c) ep1-3g3, (d) ep1-4g3

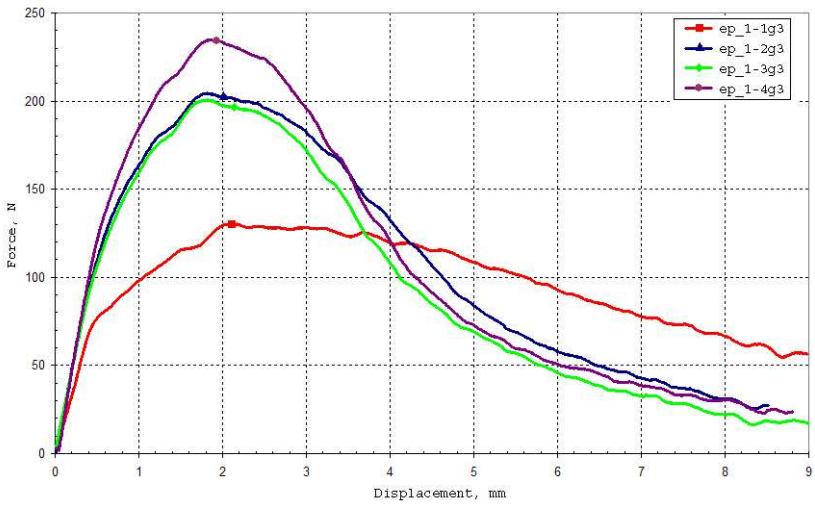


Figure A.19 : Essais de flexion sur éprouvettes soudées entaillées de rayon 0,2 mm, paramétrie G3

- Paramétrie G4

Les mesures de hauteur liaisonnée (tableau A.5) sont obtenues à partir des clichés (figures A.20).

Eprouvette	ep1-3g4	ep2-3g4	ep3-3g4	ep4-3g4	ep5-3g4
Hauteur liaisonnée (mm)	0.36	0.41	0.38	0.34	0.37

Tableau A.5 : Mesure des hauteurs liaisonnées restantes après usinage des entailles

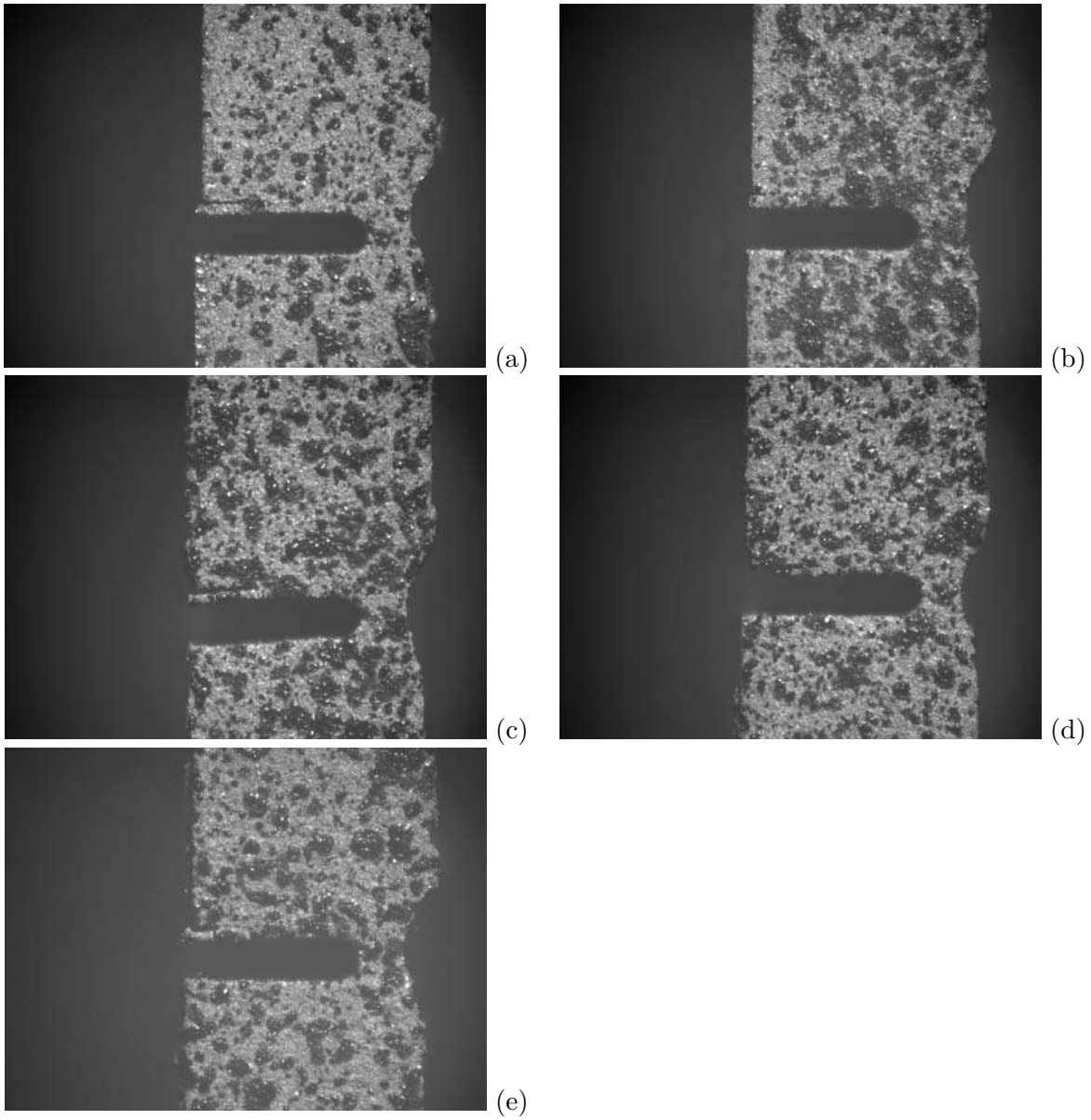


Figure A.20 : Clichés de la tranche des éprouvettes (a) ep1-3g4, (b) ep2-3g4, (c) ep3-3g4, (d) ep4-3g4, (e) ep5-3g4

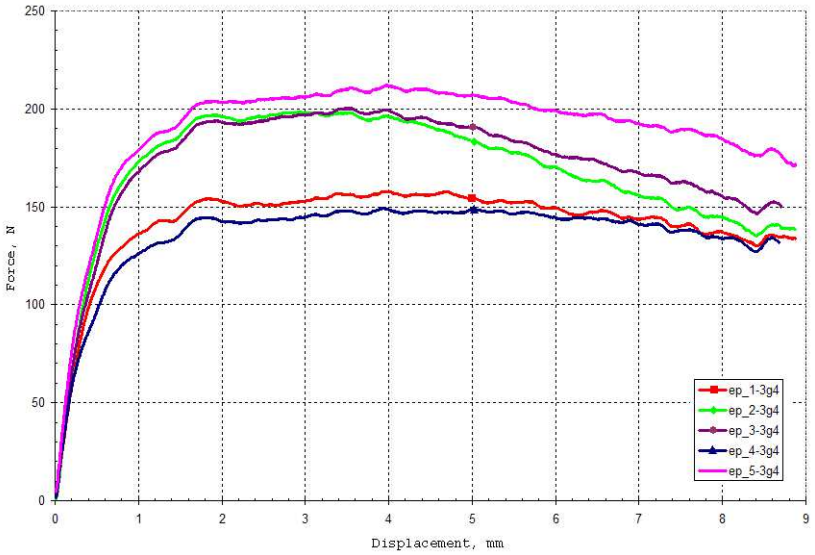


Figure A.21 : Essais de flexion sur éprouvettes soudées entaillées de rayon 0.2 mm, paramétrie G4

- Paramétrie G5

Les mesures de hauteur liaisonnée (tableau A.6) sont obtenues à partir des clichés (figures A.23).

Eprouvette	ep1-1g5	ep2-1g5	ep3-1g5	ep4-1g5	ep5-1g5	ep6-1g5
Hauteur liaisonnée (mm)	0.5	$\star$	0.23	0.31	0.35	0.39

Tableau A.6 : Mesure des hauteurs liaisonnées restantes après usinage des entailles

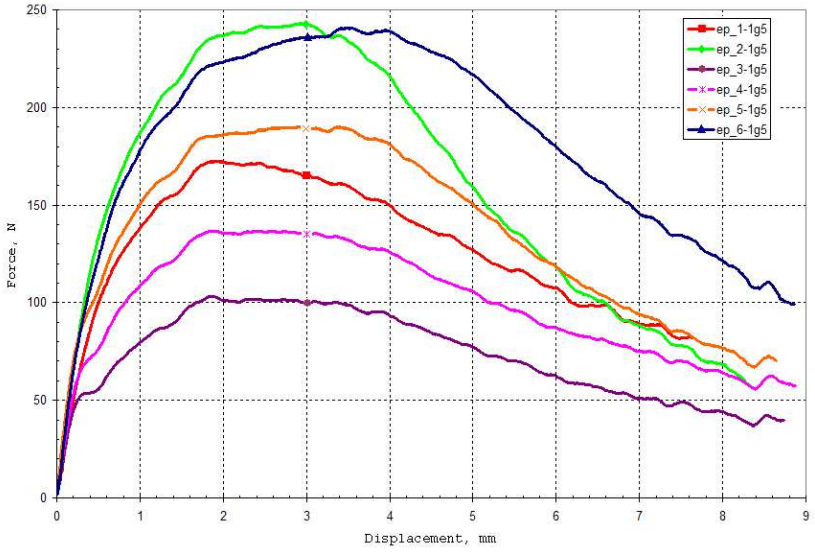


Figure A.22 : Essais de flexion sur éprouvettes soudées entaillées de rayon 0.2 mm, paramétrie G5

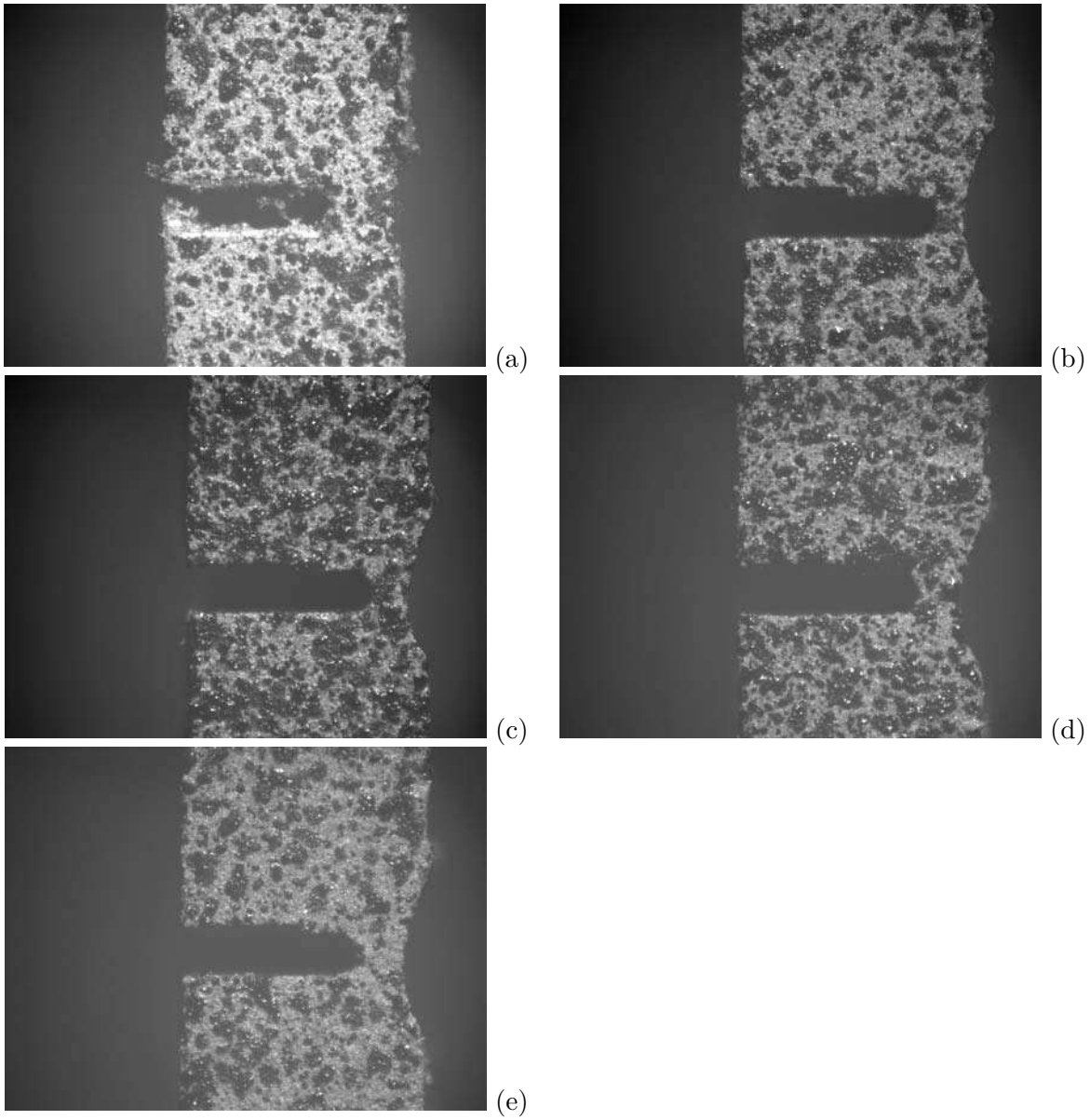


Figure A.23 : Clichés de la tranche des éprouvettes (a) ep1-1g5, (b) ep3-1g5, (c) ep4-1g5, (d) ep5-1g5, (e) ep6-1g5

- Paramétrie G6

Les mesures de hauteur liaisonnée (tableau A.7) sont obtenues à partir des clichés (figures A.25).

Eprouvette	ep1-2g6	ep2-2g6	ep3-2g6	ep4-2g6	ep5-2g6	ep6-2g6
Hauteur liaisonnée (mm)	0.48	0.38	0.4	0.42	0.31	0.15

Tableau A.7 : Mesure des hauteurs liaisonnées restantes après usinage des entailles

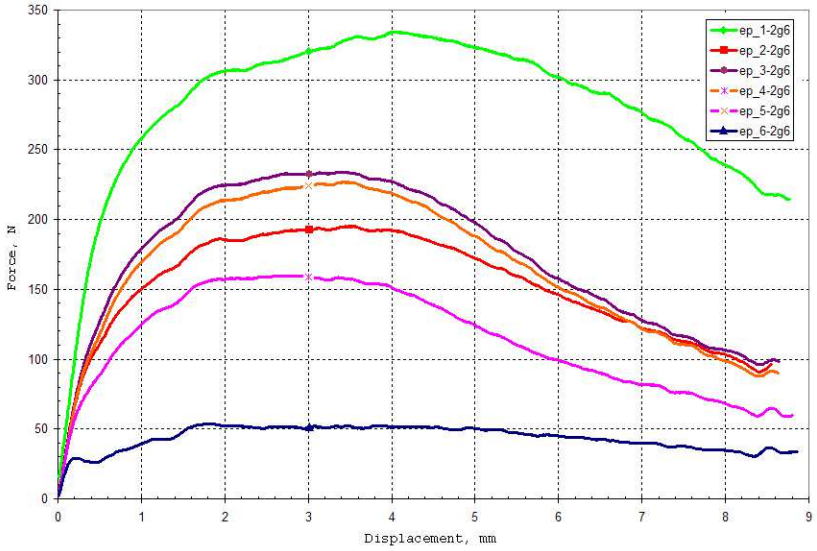


Figure A.24 : Essais de flexion sur éprouvettes soudées entaillées de rayon 0.2 mm, paramétrie G6

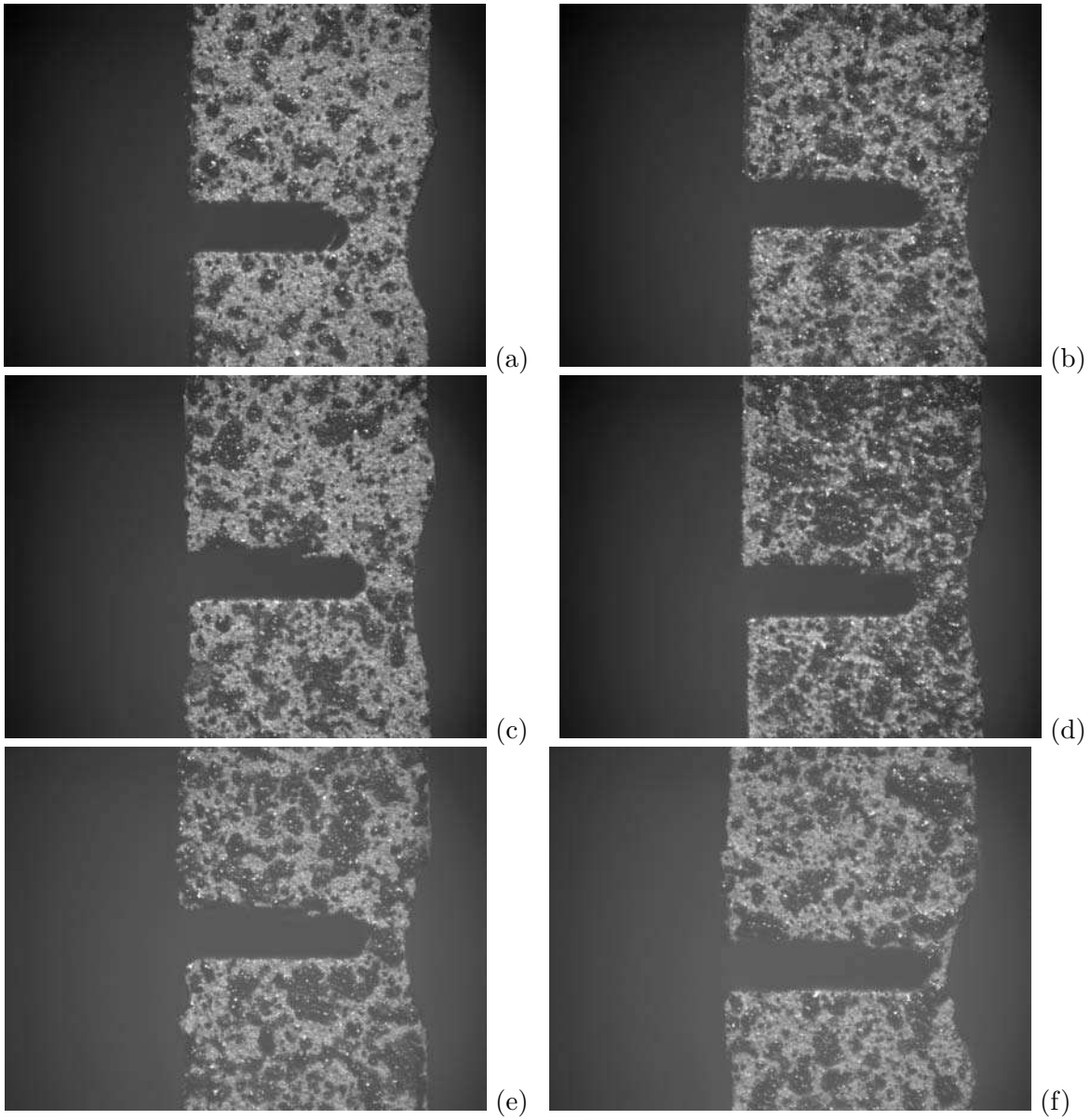


Figure A.25 : Clichés de la tranche des éprouvettes (a) ep1-2g6, (b) ep2-2g6, (c) ep3-2g6, (d) ep4-2g6, (e) ep5-2g6, (f) ep6-2g6

A.5 Géométrie d'éprouvette M.F.T et micromachine

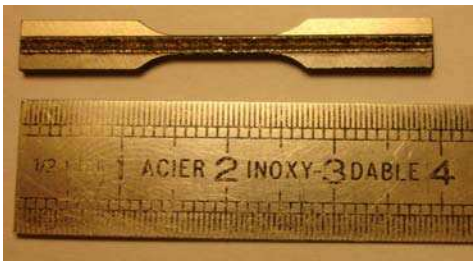


Figure A.26 : Eprouvette de cordon (Micro Flat Tensile specimen)

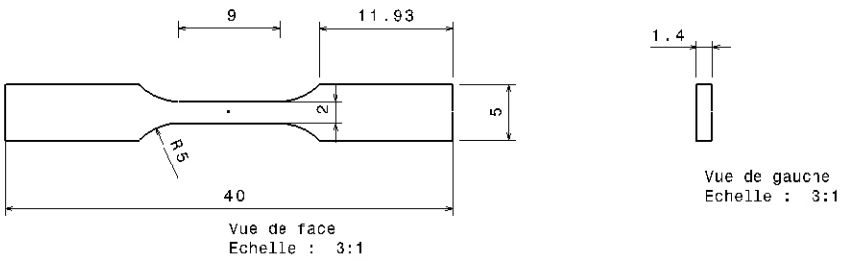


Figure A.27 : Plan de l'éprouvette de cordon(Micro Flat Tensile specimen)

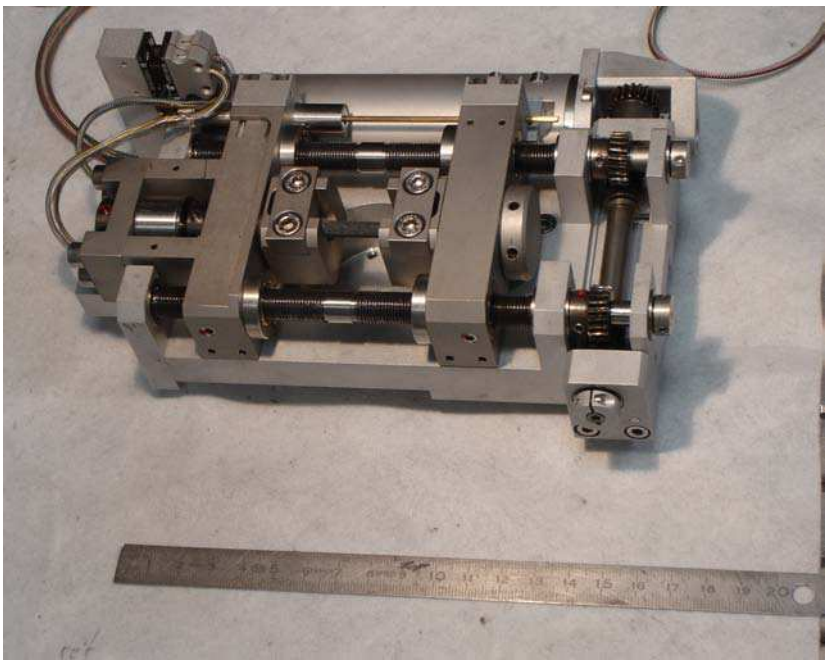


Figure A.28 : Micromachine de traction in-situ

A.6 Procédure de polissage

Papiers (grain)	Pression appliquée (daN)	Temps (min)
180	3	2
240	4	2
400	5	2
600	6	2
800	7	2
1200	8	2
2400	9	2
4000	10	2
OPS+feutre	15	5

Tableau A.8 : Procédure de polissage automatique.

A.7 Fiche P.D.F des phases en présence dans la Z.F

4-788 Quality:star Wavelength 1.540598
Tantalum
Subfiles: I A NBS CP EDU
Ta

Rad:CuKa1 λ: 1.5405 Filter:beta d-sp:
Cut: Int: I/Icor:4.437
Ref: Swanson, Tatge., NBSCAA Vol. I, (1953) p. 29

Sys:Cubic S.G.:Im3m
a:3.3058 b: c: A: C:
α: β: γ: Z: 2 mp:
Dx:16.634 Dm SS/FOM:

Structur:cI 2.00: \W\
Color: Gray
Comment: Color from \ITMerck Index\RG, 8th Ed., p. 1012. Sample procured from Johnson Matthey Company, Ltd., London, England, UK. The material contained dissolved gases which caused broadening of diffraction peaks, and TaH, which contributed extra reflections. After annealing at 1500 C in vacuum for 30 minutes in a tantalum boat, the sample gave very sharp reflections including only traces of the hydride. Spectroscopic analysis shows faint traces of Nb, Al, Si, Fe, Mn. Pattern taken at 26 C.
Mwt: 180.95, Volume[CD]: 36.13

2Theta/°	Int	h	k	l
38.473	100	1	1	0
55.550	21	2	0	0
69.583	38	2	1	1
82.464	13	2	2	0
94.939	19	3	1	0
107.644	7	2	2	2
121.354	29	3	2	1
137.498	4	4	0	0

Figure A.29 : Fiche P.D.F du Ta

44-1294 Quality:star Wavelength 1.540598

Titanium

Subfiles: I A CP FOR
Ti

Rad:CuKa1 λ: 1.54056 Filter:mono d-sp:Diffr.
Cut: Int: I/Icor:0.9
Ref: Sailer, R., McCarthy, G., North Dakota State University, Fargo, North Dakota, USA., 00GRNT(1993)

Sys:Hexagonal S.G.:P63/mmc
a:2.9505 b: c:4.6826 A: C:
α: β: γ: Z: 2 mp:
Dx: 4.506 Dm SS/FOM:

Structur:hP 2.00: \Mg\
Color: Gray
Comment: Sample was obtained from A.D. Mackay Inc. Average relative standard deviation in intensity of the ten strongest reflections for three specimen mounts = 6.7%. Validated by calculated pattern. To replace 5-682.
Mwt: 47.90, Volume[CD]: 35.30

2Theta/°	Int	h	k	l
35.094	25	1	0	0
38.422	30	0	0	2
40.171	100	1	0	1
53.005	13	1	0	2
62.951	11	1	1	0
70.662	11	1	0	3
74.160	1	2	0	0
76.221	9	1	1	2
77.370	6	2	0	1
82.292	1	0	0	4
86.762	1	2	0	2
92.732	1	1	0	4
102.364	2	2	0	3
105.802	1	2	1	0
109.046	4	2	1	1
114.283	3	1	1	4
119.260	1	2	1	2

Figure A.30 : Fiche P.D.F du Tiα

44-1288 Quality:calc. Wavelength 1.540598

Titanium

Subfiles: I A
Ti

Rad:CuKa1 λ: 1.540598 Filter: d-sp:Calcul.
Cut: Int: I/Icor:8.679
Ref: Calvert, L., Lakes Entrance, Victoria, Australia., 0PCOMC(1993)

Sys:Cubic S.G.:Im3m
a:3.3065 b: c: A: C:
α: β: γ: Z: 2 mp:
Ref: Eppelsheimer, D., Perman, R., NATUAS Vol. 166, (1950) p. 960
Dx: 4.401 Dm SS/FOM:

Structur:cI 2.00: $GB \W\
Comment: High temperature phase, stable above 1153 K.
Mwt: 47.90, Volume[CD]: 36.15

2Theta/°	Int	h	k	l
38.482	100	1	1	0
55.543	12	2	0	0
69.607	17	2	1	1
82.447	4	2	2	0
94.927	5	3	1	0
107.628	1	2	2	2
121.308	6	3	2	1
137.462	1	4	0	0
162.567	4	4	1	1

Figure A.31 : Fiche P.D.F du Tiβ

Annexe -B-

Aspects numériques

B.1 Algorithme 3D

Remarques :

La sommation sur i, des écrouissages cinématiques, n'est pas écrite afin d'alléger les notations. Jusqu'à la fin du paragraphe B.1, l'indice i sous entend une sommation.

En différentiant IV.76, on obtient,

$$d\overline{f}_{vp_{n+1}} = d\left|\left|\underset{\sim}{\mathbf{S}}^{\star}_{n+1} - \underset{\sim}{\mathbf{X}}_{i_n} e^{-a_i \Delta\lambda_{vp}}\right|\right| + \overline{f}_{vp_{n+1},D_{n+1}} dD_{n+1} + \overline{f}_{vp_{n+1},\Delta\lambda_{vp}} d\Delta\lambda_{vp} \quad \text{(B.1)}$$

- Dérivées de $\overline{f}_{vp_{n+1}}$

$$\begin{aligned} \overline{f}_{vp_{n+1},\Delta\lambda_{vp}} &= \left[-\frac{1-D_n}{\sqrt{1-D_{n+1}}}\left(3\mu + C_i e^{-a_i\Delta\lambda_{vp}} + Q e^{-b\Delta\lambda_{vp}}\right.\right. \\ &+ \left.\left.\frac{\partial\sigma_{v_{n+1}}}{\partial\Delta\lambda_{vp}}\right) - bR_n e^{-b\Delta\lambda_{vp}}\right] \end{aligned} \quad \text{(B.2)}$$

où, suivant le choix de la fonction de viscosité, $\frac{\partial\sigma_{v_{n+1}}}{\partial\Delta\lambda_{vp}}$ prend la forme,

$$\frac{\partial\sigma_{v_{n+1}}}{\partial\Delta\lambda_{vp}} = \begin{cases} \frac{K}{n\Delta t}\left(\frac{\Delta\lambda_{vp}}{\Delta t}\right)^{\frac{1}{n}-1} & \text{"norton"} \\ \\ \frac{K_1 K_2}{\sqrt{\Delta t^2 + (K_1\Delta\lambda)^2}} & \text{"sinh"} \end{cases} \quad \text{(B.3)}$$

$$\begin{aligned}\overline{f}_{vp_{n+1},D_{n+1}} &= -\frac{1-D_n}{2(1-D_{n+1})^{\frac{3}{2}}}\Big(3\mu\Delta\lambda_{vp} \\ &+ \frac{C_i}{a_i}(1-e^{-a_i\Delta\lambda_{vp}})+\frac{Q}{b}(1-e^{-b\Delta\lambda_{vp}})+\sigma_y+\sigma_{v_{n+1}}\Big)\end{aligned} \tag{B.4}$$

- Calcul de $d\left|\left|\underset{\sim}{\mathbf{S}}^{\star}_{n+1}-\underset{\sim}{\mathbf{X}}_{i_n}e^{-a_i\Delta\lambda_{vp}}\right|\right|$

$$\begin{aligned}d\left|\left|\underset{\sim}{\mathbf{S}}^{\star}_{n+1}-\underset{\sim}{\mathbf{X}}_{i_n}e^{-a_i\Delta\lambda_{vp}}\right|\right| &= \frac{3}{2}\frac{(\underset{\sim}{\mathbf{S}}^{\star}_{n+1}-\underset{\sim}{\mathbf{X}}_{i_n}e^{-a_i\Delta\lambda_{vp}}):a_i\underset{\sim}{\mathbf{X}}_{i_n}e^{-a_i\Delta\lambda_{vp}}}{\left|\left|\underset{\sim}{\mathbf{S}}^{\star}_{n+1}-\underset{\sim}{\mathbf{X}}_{i_n}e^{-a_i\Delta\lambda_{vp}}\right|\right|}d\Delta\lambda_{vp} \\ &= \underset{\sim}{\mathbf{n}}_{n+1}:a_i\underset{\sim}{\mathbf{X}}_{i_n}e^{-a_i\Delta\lambda_{vp}}d\Delta\lambda_{vp}\end{aligned} \tag{B.5}$$

- Calcul de $d\underset{\sim}{\mathbf{n}}_{n+1}$

En vue de calculer dD_{n+1}, il est nécessaire de connaître $d\underset{\sim}{\mathbf{n}}_{n+1}$.
D'après l'équation IV.74 rappelée ici,

$$\underset{\sim}{\mathbf{n}}_{n+1} = \frac{3}{2}\frac{\left(\underset{\sim}{\mathbf{S}}^{\star}_{n+1}-\underset{\sim}{\mathbf{X}}_{i_n}e^{-a_i\Delta\lambda_{vp}}\right)}{\left|\left|\underset{\sim}{\mathbf{S}}^{\star}_{n+1}-\underset{\sim}{\mathbf{X}}_{i_n}e^{-a_i\Delta\lambda_{vp}}\right|\right|} \tag{B.6}$$

$$d\underset{\sim}{\mathbf{n}}_{n+1} = \underset{\sim}{\mathbf{N}}d\Delta\lambda_{vp} \tag{B.7}$$

avec,

$$\underset{\sim}{\mathbf{N}} = \frac{\frac{3}{2}\underset{\sim}{\mathbf{I}}-\underset{\sim}{\mathbf{n}}_{n+1}\otimes\underset{\sim}{\mathbf{n}}_{n+1}}{\left|\left|\underset{\sim}{\mathbf{S}}^{\star}_{n+1}-\underset{\sim}{\mathbf{X}}_{i_n}e^{-a_i\Delta\lambda_{vp}}\right|\right|}:(a_i\underset{\sim}{\mathbf{X}}_{i_n}e^{-a_i\Delta\lambda_{vp}}) \tag{B.8}$$

- Calcul de dD_{n+1}

$$dD_{n+1} = D_{n+1,\Delta\lambda_{vp}}d\Delta\lambda_{vp}+D_{n+1,\underset{\sim}{\mathbf{n}}_{n+1}}d\underset{\sim}{\mathbf{n}}_{n+1} \tag{B.9}$$

On obtient alors,

$$
\begin{aligned}
D_{n+1,\Delta\lambda_{vp}} &= \frac{1}{(1-D_n)^{\beta+\frac{1}{2}}}\left\langle\frac{Y-Y_0}{S}\right\rangle^{s} \\
&+ \frac{s\Delta\lambda_{vp}}{S(1-D_n)^{\beta+\frac{1}{2}}}\left\langle\frac{Y-Y_0}{S}\right\rangle^{s-1} Y_{,\Delta\lambda_{vp}}
\end{aligned}
\tag{B.10}
$$

avec $Y_{,\Delta\lambda_{vp}}$ obtenu à partir de l'expression IV.80

$$
\begin{aligned}
Y_{,\Delta\lambda_{vp}} &= -2\mu\frac{\underset{\sim}{\mathbf{n}}_{n+1}}{\sqrt{1-D_n}} : \left(\underset{\sim}{\boldsymbol{e}}^{\star}_{n+1} - \Delta\lambda_{vp}\frac{\underset{\sim}{\mathbf{n}}_{n+1}}{\sqrt{1-D_n}}\right) \\
&+ \frac{2}{3}C_i\left(-a_i\underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}_{i_n}e^{-a_i\Delta\lambda_{vp}} + \frac{\underset{\sim}{\mathbf{n}}_{n+1}}{\sqrt{1-D_n}}e^{-a_i\Delta\lambda_{vp}}\right) \\
&: \left(\underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}_{i_n}e^{-a_i\Delta\lambda_{vp}} + \frac{\underset{\sim}{\mathbf{n}}_{n+1}}{a_i\sqrt{1-D_n}}(1-e^{-a_i\Delta\lambda_{vp}})\right) \\
&+ Q\left(-br_ne^{-b\Delta\lambda_{vp}} + \frac{1}{\sqrt{1-D_n}}e^{-b\Delta\lambda_{vp}}\right) \\
&. \left(r_ne^{-b\Delta\lambda_{vp}} + \frac{1}{b\sqrt{1-D_n}}(1-e^{-b\Delta\lambda_{vp}})\right)
\end{aligned}
\tag{B.11}
$$

et

$$
D_{n+1,\underset{\sim}{\mathbf{n}}_{n+1}} = \frac{s\Delta\lambda_{vp}}{S(1-D_n)^{\beta+\frac{1}{2}}}\left\langle\frac{Y-Y_0}{S}\right\rangle^{s-1} Y_{,\underset{\sim}{\mathbf{n}}_{n+1}} \tag{B.12}
$$

avec,

$$
\begin{aligned}
Y_{,\underset{\sim}{\mathbf{n}}_{n+1}} &= -2\mu\frac{\Delta\lambda_{vp}}{\sqrt{1-D_n}} : \left(\underset{\sim}{\boldsymbol{e}}^{\star}_{n+1} - \Delta\lambda_{vp}\frac{\underset{\sim}{\mathbf{n}}_{n+1}}{\sqrt{1-D_n}}\right) \\
&+ \frac{2C_i}{3a_i}\frac{1-e^{-a_i\Delta\lambda_{vp}}}{\sqrt{1-D_n}} \\
&: \left(\underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}_{i_n}e^{-a_i\Delta\lambda_{vp}} + \frac{\underset{\sim}{\mathbf{n}}_{n+1}}{a_i\sqrt{1-D_n}}(1-e^{-a_i\Delta\lambda_{vp}})\right)
\end{aligned}
\tag{B.13}
$$

- Expression de $d\overline{f}_{vp_{n+1}}(d\Delta\lambda_{vp})$

En combinant ces différentes équations, il est possible d'exprimer $d\overline{f}_{vp_{n+1}}$ fonction unique de $d\Delta\lambda_{vp}$.

En utilisant B.7 dans B.9, on exprime dD_{n+1} fonction de $\Delta\lambda_{vp}$,

$$dD_{n+1} = \left(D_{n+1,\Delta\lambda_{vp}} + D_{n+1,\underset{\sim}{\mathbf{n}}_{n+1}} : \underset{\sim}{\mathbf{N}}\right) d\Delta\lambda_{vp} \tag{B.14}$$

En combinant maintenant, B.14 et B.5 dans B.1,

$$\begin{aligned} d\overline{f}_{vp_{n+1}} &= \Big(\overline{f}_{vp_{n+1},\Delta\lambda_{vp}} + \underset{\sim}{\mathbf{n}}_{n+1} : a_i \underset{\sim}{\mathbf{X}}_{i_n} e^{-a_i\Delta\lambda_{vp}} \\ &+ \overline{f}_{vp_{n+1},D_{n+1}} \left(D_{n+1,\Delta\lambda_{vp}} + D_{n+1,\underset{\sim}{\mathbf{n}}_{n+1}} : \underset{\sim}{\mathbf{N}}\right)\Big) d\Delta\lambda_{vp} \end{aligned} \tag{B.15}$$

Toutes les quantités de cette équation sont explicitement calculées précédemment, on voit donc qu'il est possible d'exprimer explicitement $d\overline{f}_{vp_{n+1}}$ fonction uniquement de $\Delta\lambda_{vp}$.

La quantité $\frac{\partial \overline{f}_{vp_{n+1}}}{\partial \Delta\lambda_{vp}}$ de l'algorithme dans le cas 3D (cf. table IV.1) s'écrit donc,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{f}_{vp_{n+1}}}{\partial \Delta\lambda_{vp}} &= \overline{f}_{vp_{n+1},\Delta\lambda_{vp}} + \underset{\sim}{\mathbf{n}}_{n+1} : a_i \underset{\sim}{\mathbf{X}}_{i_n} e^{-a_i\Delta\lambda_{vp}} \\ &+ \overline{f}_{vp_{n+1},D_{n+1}} \left(D_{n+1,\Delta\lambda_{vp}} + D_{n+1,\underset{\sim}{\mathbf{n}}_{n+1}} : \underset{\sim}{\mathbf{N}}\right) \end{aligned} \tag{B.16}$$

Remarques :
L'équivalent de cette expression pour un retour radial s'écrirait

$$\frac{\partial \overline{f}_{vp_{n+1}}}{\partial \Delta\lambda_{vp}} = \overline{f}_{vp_{n+1},\Delta\lambda_{vp}} + \overline{f}_{vp_{n+1},D_{n+1}} D_{n+1,\Delta\lambda_{vp}} \tag{B.17}$$

les expressions de ces termes restant inchangées.

B.2 Algorithme CP1

Nous renvoyons aux travaux antérieurs (Hammi, 2000), (Lestriez, 2003).

B.3 Algorithme CP2

Remarques :

La sommation sur i, des écrouissages cinématiques, n'est pas écrite afin d'alléger les notations. Jusqu'à la fin du paragraphe B.3, l'indice i sous entend une sommation.

La résolution de cette algorithme se fait suivant deux variables que sont $\Delta\lambda_{vp}$ et $\Delta\varepsilon_{33}$.

Pour la fonction $\overline{f}_{vp_{n+1}}$ (équation IV.99), on maintient donc $\Delta\varepsilon_{33}$ constant lors de la dérivation par rapport à $\Delta\lambda_{vp}$ puis inversement. On procède de la même façon pour h_{n+1} (équation IV.103).

- Dérivées de $\overline{f}_{vp_{n+1}}$ à $\Delta\varepsilon_{33}$ fixé

Les quantités "n+1" restantes explicitement dans l'équation sont D_{n+1} et $\left|\left|\underset{\sim}{\mathbf{Z}}^{\star}_{n+}\right|\right|$ avec $\underset{\sim}{\mathbf{Z}}^{\star}_{n+} = \underset{\sim}{\mathbf{S}}^{\star}_{n+1} - \underset{\sim}{\mathbf{X}}_{i_n} e^{-a_i\Delta\lambda_{vp}} + 2G(1-D_n)(\Delta\varepsilon_{33} - \Delta\varepsilon^{\star}_{33})\underset{\sim}{\mathbf{1}}^{D}_{3}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\overline{f}_{vp_{n+1},\Delta\lambda_{vp}} &= \overline{f}_{vp_{n+1},\Delta\lambda_{vp}}\Big]_{D_{n+1},||\underset{\sim}{\mathbf{Z}}^{\star}_{n+1}||=cst} + \overline{f}_{vp_{n+1},D_{n+1}} D_{n+1,\Delta\lambda_{vp}} \\ &+ \overline{f}_{vp_{n+1},||\underset{\sim}{\mathbf{Z}}^{\star}_{n+1}||}\left|\left|\underset{\sim}{\mathbf{Z}}^{\star}_{n+1}\right|\right|_{,\Delta\lambda_{vp}} \end{aligned} \tag{B.18}$$

$\overline{f}_{vp_{n+1},\Delta\lambda_{vp}}\Big]_{D_{n+1},||\underset{\sim}{\mathbf{Z}}^{\star}_{n+1}||=cst}$ désignent la dérivée de $\overline{f}_{vp_{n+1}}$ où $D_{n+1},\left|\left|\underset{\sim}{\mathbf{Z}}^{\star}_{n+1}\right|\right|$ sont fixés. Lorsqu'il n'y pas d'ambiguïté, les indices seront omis comme ci-dessous,

$$\begin{aligned}\overline{f}_{vp_{n+1},\Delta\lambda_{vp}} &= -\frac{1-D_n}{\sqrt{1-D_{n+1}}}\big(3\mu + C_i e^{-a_i\Delta\lambda_{vp}} + Qe^{-b\Delta\lambda_{vp}} \\ &+ \frac{\partial\sigma_{v_{n+1}}}{\partial\Delta\lambda_{vp}}\big) - bR_n e^{-b\Delta\lambda_{vp}} \end{aligned} \tag{B.19}$$

où, suivant le choix de la fonction de viscosité, $\frac{\partial\sigma_{v_{n+1}}}{\partial\Delta\lambda_{vp}}$ prend la forme,

$$\frac{\partial\sigma_{v_{n+1}}}{\partial\Delta\lambda_{vp}} = \begin{cases} \frac{K}{n\Delta t}\left(\frac{\Delta\lambda_{vp}}{\Delta t}\right)^{\frac{1}{n}-1} & \text{"norton"} \\ \\ \frac{K_1K_2}{\sqrt{\Delta t^2+(K_1\Delta\lambda)^2}} & \text{"sinh"} \end{cases} \tag{B.20}$$

$$\begin{aligned}\overline{f}_{vp_{n+1},D_{n+1}} &= -\frac{1-D_n}{2(1-D_{n+1})^{\frac{3}{2}}}\Bigg(3\mu\Delta\lambda_{vp} \\ &+ \frac{C_i}{a_i}(1-e^{-a_i\Delta\lambda_{vp}}) + \frac{Q}{b}(1-e^{-b\Delta\lambda_{vp}}) + \sigma_y + \sigma_{v_{n+1}}\Bigg) \end{aligned} \tag{B.21}$$

$$\overline{f}_{vp_{n+1},||\underset{\sim}{\mathbf{Z}}^{\star}_{n+1}||} = 1 \tag{B.22}$$

- Calcul de $\frac{\partial\left|\left|\underset{\sim}{\mathbf{Z}}^{\star}_{n+1}\right|\right|}{\partial\Delta\lambda_{vp}}$

$$\begin{aligned}\left|\left|\underset{\sim}{\mathbf{Z}}^{\star}_{n+1}\right|\right|_{,\Delta\lambda_{vp}} &= \frac{3}{2}\frac{\underset{\sim}{\mathbf{Z}}^{\star}_{n+1} : a_i\underset{\sim}{\mathbf{X}}_{i_n}e^{-a_i\Delta\lambda_{vp}}}{\left|\left|\underset{\sim}{\mathbf{Z}}^{\star}_{n+1}\right|\right|} \\ &= \underset{\sim}{\mathbf{n}}_{n+1} : a_i\underset{\sim}{\mathbf{X}}_{i_n}e^{-a_i\Delta\lambda_{vp}} \end{aligned} \tag{B.23}$$

- Calcul de $\frac{\partial \underset{\sim}{\mathbf{n}}_{n+1}}{\partial \Delta\lambda_{vp}}$

En vue de calculer $D_{n+1,\Delta\lambda_{vp}}$, il est nécessaire de connaître $\underset{\sim}{\mathbf{n}}_{n+1,\Delta\lambda_{vp}}$.
D'après l'équation IV.98 rappelée ici,

$$\underset{\sim}{\mathbf{n}}_{n+1} = \frac{3}{2}\frac{\underset{\sim}{\mathbf{S}}^{\star}_{n+1} - \underset{\sim}{\mathbf{X}}_{i_n} e^{-a_i\Delta\lambda_{vp}} + 2G(1-D_n)(\Delta\varepsilon_{33} - \Delta\varepsilon^{\star}_{33})\underset{\sim}{\mathbf{1}}^{D}_{3}}{\left|\left|\underset{\sim}{\mathbf{S}}^{\star}_{n+1} - \underset{\sim}{\mathbf{X}}_{i_n} e^{-a_i\Delta\lambda_{vp}}\right|\right| + 2G(1-D_n)(\Delta\varepsilon_{33} - \Delta\varepsilon^{\star}_{33})\underset{\sim}{\mathbf{1}}^{D}_{3}} \tag{B.24}$$

$$\underset{\sim}{\mathbf{n}}_{n+1,\Delta\lambda_{vp}} = \frac{\frac{3}{2}\underset{\sim}{\mathbf{I}} - \underset{\sim}{\mathbf{n}}_{n+1}\otimes\underset{\sim}{\mathbf{n}}_{n+1}}{\left|\left|\underset{\sim}{\mathbf{Z}}^{\star}_{n+1}\right|\right|} : (a_i \underset{\sim}{\mathbf{X}}_{i_n} e^{-a_i\Delta\lambda_{vp}}) \tag{B.25}$$

- Calcul de $\frac{\partial D_{n+1}}{\partial \Delta\lambda_{vp}}$

Avec les mêmes notations de dérivation que pour $\overline{f}_{vp_{n+1}}$

$$D_{n+1,\Delta\lambda_{vp}} = D_{n+1,\Delta\lambda_{vp}}\Big]_{\underset{\sim}{\mathbf{n}}_{n+1}=cst} + D_{n+1,\underset{\sim}{\mathbf{n}}_{n+1}} : \underset{\sim}{\mathbf{n}}_{n+1,\Delta\lambda_{vp}} \tag{B.26}$$

On obtient alors, en délaissant les indices pour la dérivation,

$$\begin{aligned} D_{n+1,\Delta\lambda_{vp}} &= \frac{1}{(1-D_n)^{\beta+\frac{1}{2}}}\left\langle\frac{Y-Y_0}{S}\right\rangle^{s} \\ &+ \frac{s\Delta\lambda_{vp}}{S(1-D_n)^{\beta+\frac{1}{2}}}\left\langle\frac{Y-Y_0}{S}\right\rangle^{s-1} Y_{,\Delta\lambda_{vp}} \end{aligned} \tag{B.27}$$

avec $Y_{,\Delta\lambda_{vp}}$ obtenu à partir de l'expression IV.105

$$\begin{aligned} Y_{,\Delta\lambda_{vp}} &= -2\mu\frac{\underset{\sim}{\mathbf{n}}_{n+1}}{\sqrt{1-D_n}} : \left(\underset{\sim}{\boldsymbol{e}}^{\star}_{n+1} - \Delta\lambda_{vp}\frac{\underset{\sim}{\mathbf{n}}_{n+1}}{\sqrt{1-D_n}} + (\Delta\varepsilon_{33} - \Delta\varepsilon^{\star}_{33})\underset{\sim}{\mathbf{1}}^{D}_{3}\right) \\ &+ \frac{2}{3}C_i\left(-a_i\underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}_{i_n}e^{-a_i\Delta\lambda_{vp}} + \frac{\underset{\sim}{\mathbf{n}}_{n+1}}{\sqrt{1-D_n}}e^{-a_i\Delta\lambda_{vp}}\right) \\ &: \left(\underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}_{i_n}e^{-a_i\Delta\lambda_{vp}} + \frac{\underset{\sim}{\mathbf{n}}_{n+1}}{a_i\sqrt{1-D_n}}(1-e^{-a_i\Delta\lambda_{vp}})\right) \\ &+ Q\left(-br_ne^{-b\Delta\lambda_{vp}} + \frac{1}{\sqrt{1-D_n}}e^{-b\Delta\lambda_{vp}}\right) \\ &. \left(r_ne^{-b\Delta\lambda_{vp}} + \frac{1}{b\sqrt{1-D_n}}(1-e^{-b\Delta\lambda_{vp}})\right) \end{aligned} \tag{B.28}$$

et

$$D_{n+1,\underset{\sim}{\mathbf{n}}_{n+1}} = \frac{s\Delta\lambda_{vp}}{S(1-D_n)^{\beta+\frac{1}{2}}}\left\langle\frac{Y-Y_0}{S}\right\rangle^{s-1} Y_{,\underset{\sim}{\mathbf{n}}_{n+1}} \tag{B.29}$$

avec,

$$\begin{aligned} Y_{,\underset{\sim}{\mathbf{n}}_{n+1}} &= -2\mu\frac{\Delta\lambda_{vp}}{\sqrt{1-D_n}} : \left(\underset{\sim}{\boldsymbol{e}}^{\star}_{n+1} - \Delta\lambda_{vp}\frac{\underset{\sim}{\mathbf{n}}_{n+1}}{\sqrt{1-D_n}} + (\Delta\varepsilon_{33} - \Delta\varepsilon^{\star}_{33})\underset{\sim}{\mathbf{1}}^{D}_{3}\right) \\ &+ \frac{2C_i}{3a_i}\frac{1-e^{-a_i\Delta\lambda_{vp}}}{\sqrt{1-D_n}} \\ &: \left(\underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}_{i_n}e^{-a_i\Delta\lambda_{vp}} + \frac{\underset{\sim}{\mathbf{n}}_{n+1}}{a_i\sqrt{1-D_n}}(1-e^{-a_i\Delta\lambda_{vp}})\right) \end{aligned} \tag{B.30}$$

- Dérivées de $\overline{f}_{vp_{n+1}}$ à $\Delta\lambda_{vp}$ fixé

$$\begin{aligned} \overline{f}_{vp_{n+1},\Delta\varepsilon_{33}} &= \overline{f}_{vp_{n+1},D_{n+1}}D_{n+1,\Delta\varepsilon_{33}} \\ &+ \overline{f}_{vp_{n+1},||\underset{\sim}{\mathbf{Z}}^{\star}_{n+1}||}\left|\left|\underset{\sim}{\mathbf{Z}}^{\star}_{n+1}\right|\right|_{,\Delta\varepsilon_{33}} \end{aligned} \tag{B.31}$$

$\overline{f}_{vp_{n+1},D_{n+1}}$ et $\overline{f}_{vp_{n+1},||\underset{\sim}{\mathbf{Z}}^{\star}_{n+1}||}$ sont données équations B.21 et B.22.

- Calcul de $\frac{\partial\underset{\sim}{\mathbf{n}}_{n+1}}{\partial\Delta\varepsilon_{33}}$

En vue de calculer, $D_{n+1,\Delta\varepsilon_{33}}$, il est nécessaire de connaître $\underset{\sim}{\mathbf{n}}_{n+1,\Delta\varepsilon_{33}}$

$$\underset{\sim}{\mathbf{n}}_{n+1,\Delta\varepsilon_{33}} = \frac{\frac{3}{2}\underset{\sim}{\mathbf{I}} - \underset{\sim}{\mathbf{n}}_{n+1}\otimes\underset{\sim}{\mathbf{n}}_{n+1}}{\left|\left|\underset{\sim}{\mathbf{Z}}^{\star}_{n+1}\right|\right|} : 2\mu(1-D_n)\underset{\sim}{\mathbf{1}}^{D}_{3} \tag{B.32}$$

- Calcul de $\frac{\partial D_{n+1}}{\partial\Delta\varepsilon_{33}}$

$$D_{n+1,\Delta\varepsilon_{33}} = D_{n+1,\Delta\varepsilon_{33}}\Big]_{\underset{\sim}{\mathbf{n}}_{n+1}=cst} + D_{n+1,\underset{\sim}{\mathbf{n}}_{n+1}} : \underset{\sim}{\mathbf{n}}_{n+1,\Delta\varepsilon_{33}} \tag{B.33}$$

avec, en abandonnant les indices de dérivation,

$$D_{n+1,\Delta\varepsilon_{33}} = \frac{s\Delta\lambda_{vp}}{S(1-D_n)^{\beta+\frac{1}{2}}}\left\langle\frac{Y-Y_0}{S}\right\rangle^{s-1} Y_{,\Delta\varepsilon_{33}} \tag{B.34}$$

avec,

$$\begin{aligned} Y_{,\Delta\varepsilon_{33}} &= K(\mathrm{Tr}\,\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\star}_{n+1} + (\Delta\varepsilon_{33} - \Delta\varepsilon^{\star}_{33})) \\ &+ 2\mu\underset{\sim}{\mathbf{1}}_3^D : \left(\underset{\sim}{\boldsymbol{e}}^{\star}_{n+1} - \Delta\lambda_{vp}\frac{\underset{\sim}{\mathbf{n}}_{n+1}}{\sqrt{1-D_n}} + (\Delta\varepsilon_{33} - \Delta\varepsilon^{\star}_{33})\underset{\sim}{\mathbf{1}}_3^D\right) \end{aligned} \tag{B.35}$$

$D_{n+1,\underset{\sim}{\mathbf{n}}_{n+1}}$ et $\underset{\sim}{\mathbf{n}}_{n+1,\Delta\varepsilon_{33}}$ sont calculées en B.29 et B.32

- Calcul de $\frac{\partial||\underset{\sim}{\mathbf{Z}}^{\star}_{n+1}||}{\partial\Delta\varepsilon_{33}}$

$$\begin{aligned} \left|\left|\underset{\sim}{\mathbf{Z}}^{\star}_{n+1}\right|\right|_{,\Delta\varepsilon_{33}} &= \frac{3}{2}\frac{\underset{\sim}{\mathbf{Z}}^{\star}_{n+1}}{\left|\left|\underset{\sim}{\mathbf{Z}}^{\star}_{n+1}\right|\right|} : 2\mu(1-D_n)\underset{\sim}{\mathbf{1}}_3^D \\ &= \underset{\sim}{\mathbf{n}}_{n+1} : 2\mu(1-D_n)\underset{\sim}{\mathbf{1}}_3^D \end{aligned} \tag{B.36}$$

- Dérivées de h_{n+1} à $\Delta\varepsilon_{33}$ fixé

Les quantités "n+1" restantes explicitement dans l'équation IV.103 sont D_{n+1} et $(\underset{\sim}{\mathbf{n}}_{n+1})_{33}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} h_{n+1,\Delta\lambda_{vp}} &= h_{n+1,\Delta\lambda_{vp}}\Big]_{D_{n+1},\underset{\sim}{\mathbf{n}}_{n+1}=cst} + h_{n+1,D_{n+1}}D_{n+1,\Delta\lambda_{vp}} \\ &+ h_{n+1,\underset{\sim}{\mathbf{n}}_{n+1}} : \underset{\sim}{\mathbf{n}}_{n+1,\Delta\lambda_{vp}} \end{aligned} \tag{B.37}$$

$h_{n+1,\Delta\lambda_{vp}}\Big]_{D_{n+1},\underset{\sim}{\mathbf{n}}_{n+1}=cst}$ désignent la dérivée de h_{n+1} où D_{n+1} et $\underset{\sim}{\mathbf{n}}_{n+1}$ sont fixés (et donc a fortiori $(\underset{\sim}{\mathbf{n}}_{n+1})_{33}$). Lorsqu'il n'y pas d'ambiguïté, les indices seront omis comme ci-dessous,

$$h_{n+1,\Delta\lambda_{vp}} = -\frac{2\mu}{\sqrt{1-D_{n+1}}}(\underset{\sim}{\mathbf{n}}_{n+1})_{33} \tag{B.38}$$

$$h_{n+1,D_{n+1}} = -\frac{\mu\Delta\lambda_{vp}}{(1-D_{n+1})^{\frac{3}{2}}}(\underset{\sim}{\mathbf{n}}_{n+1})_{33} \tag{B.39}$$

$$h_{n+1,\underset{\sim}{\mathbf{n}}_{n+1}} = -\frac{2\mu\Delta\lambda_{vp}}{\sqrt{1-D_{n+1}}}\underset{\sim}{\mathbf{1}}_3 \tag{B.40}$$

$D_{n+1,\Delta\lambda_{vp}}$ est donné équation B.27 et $\underset{\sim}{\mathbf{n}}_{n+1,\Delta\lambda_{vp}}$ équation B.25

- Dérivées de h_{n+1} à $\Delta\lambda_{vp}$ fixé

$$\begin{aligned} h_{n+1,\Delta\varepsilon_{33}} &= h_{n+1,\Delta\varepsilon_{33}}\Big]_{D_{n+1},\underset{\sim}{\mathbf{n}}_{n+1}=cst} + h_{n+1,D_{n+1}} D_{n+1,\Delta\varepsilon_{33}} \\ &+ h_{n+1,\underset{\sim}{\mathbf{n}}_{n+1}} : \underset{\sim}{\mathbf{n}}_{n+1,\Delta\varepsilon_{33}} \end{aligned} \tag{B.41}$$

Avec les mêmes conventions que précédemment,

$$h_{n+1,\Delta\varepsilon_{33}} = K + \frac{4}{3}\mu \tag{B.42}$$

Les autres dérivées ont déjà été calculées équations B.39, B.34, B.40, B.32.

B.4 Algorithme CP3

Remarques :

La sommation sur i, des écrouissages cinématiques, n'est pas écrite afin d'alléger les notations. Jusqu'à la fin du paragraphe B.4, l'indice i sous entend une sommation.

En différentiant IV.121, on obtient,

$$d\overline{f}_{vp_{n+1}} = \frac{d\left|\left|\underset{\sim}{\tilde{\mathbf{Z}}}_{n+1}\right|\right|}{\sqrt{1-D_{n+1}}} + \overline{f}_{vp_{n+1},D_{n+1}} dD_{n+1} + \overline{f}_{vp_{n+1},\Delta\lambda_{vp}} d\Delta\lambda_{vp} \tag{B.43}$$

- Dérivées de $\overline{f}_{vp_{n+1}}$

$$\overline{f}_{vp_{n+1},D_{n+1}} = \frac{\left|\left|\underset{\sim}{\tilde{\mathbf{Z}}}_{n+1}\right|\right|}{2(1-D_{n+1})^{\frac{3}{2}}} + \frac{Qr_n e^{-b\Delta\lambda_{vp}}}{2\sqrt{1-D_{n+1}}} \tag{B.44}$$

(B.45)

$$\begin{aligned} \overline{f}_{vp_{n+1},\Delta\lambda_{vp}} &= \sqrt{1-D_{n+1}} Qbr_n e^{-b\Delta\lambda_{vp}} - Qe^{-b\Delta\lambda_{vp}} \\ &- \frac{\partial\sigma_{v_{n+1}}}{\partial\Delta\lambda_{vp}} \end{aligned} \tag{B.46}$$

où, suivant le choix de la fonction de viscosité, $\frac{\partial\sigma_{v_{n+1}}}{\partial\Delta\lambda_{vp}}$ prend la forme,

$$\frac{\partial \sigma_{v_{n+1}}}{\partial \Delta\lambda_{vp}} = \begin{cases} \frac{K}{n\Delta t}\left(\frac{\Delta\lambda_{vp}}{\Delta t}\right)^{\frac{1}{n}-1} & \text{"norton"} \\ \\ \frac{K_1 K_2}{\sqrt{\Delta t^2+(K_1\Delta\lambda)^2}} & \text{"sinh"} \end{cases} \tag{B.47}$$

- Calcul de $d\left|\left|\underset{\sim}{\tilde{\mathbf{Z}}}_{n+1}\right|\right|$

$$\begin{aligned} d\left|\left|\underset{\sim}{\tilde{\mathbf{Z}}}_{n+1}\right|\right| &= \frac{3}{2}\frac{\underset{\sim}{\tilde{\mathbf{Z}}}_{n+1} : \underset{\sim}{\mathbf{P}} : d\underset{\sim}{\tilde{\mathbf{Z}}}_{n+1}}{\left|\left|\underset{\sim}{\tilde{\mathbf{Z}}}_{n+1}\right|\right|} \\ &= \frac{\underset{\sim}{\mathbf{P}} : \underset{\sim}{\tilde{\mathbf{n}}}_{n+1}}{\left|\left|\underset{\sim}{\tilde{\mathbf{Z}}}_{n+1}\right|\right|} : d\underset{\sim}{\tilde{\mathbf{Z}}}_{n+1} \end{aligned} \tag{B.48}$$

- Calcul de $d\underset{\sim}{\tilde{\mathbf{Z}}}_{n+1}$

A partir de l'expression IV.118, on différentie par rapport à chaque variable "n+1" restante et par rapport à $\Delta\lambda_{vp}$,

$$d\underset{\sim}{\tilde{\mathbf{Z}}}_{n+1} = \underset{\sim}{\tilde{\mathbf{Z}}}_{n+1,\Delta\lambda_{vp}} d\Delta\lambda_{vp} + \underset{\sim}{\tilde{\mathbf{Z}}}_{n+1,\underset{\sim}{\mathbf{P}}:\underset{\sim}{\tilde{\mathbf{n}}}_{n+1}} d(\underset{\sim}{\mathbf{P}} : \underset{\sim}{\tilde{\mathbf{n}}}_{n+1}) + \underset{\sim}{\tilde{\mathbf{Z}}}_{n+1,D_{n+1}} dD_{n+1} \tag{B.49}$$

Les dérivées partielles prennent alors des expressions relativement simples,

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{\tilde{\mathbf{Z}}}_{n+1,\Delta\lambda_{vp}} &= \frac{1-D_{n+1}}{1-D_n} a_i \underset{\sim}{\tilde{\mathbf{X}}}_n e^{-a_i\Delta\lambda_{vp}} \\ &- 2\sqrt{1-D_{n+1}}\left(\mu\underset{\sim}{\mathbf{I}} + \frac{1}{3}C_i e^{-a_i\Delta\lambda_{vp}}\underset{\sim}{\mathbf{R}}\right) : (\underset{\sim}{\mathbf{P}} : \underset{\sim}{\tilde{\mathbf{n}}}_{n+1}) \end{aligned} \tag{B.50}$$

$$\underset{\sim}{\tilde{\mathbf{Z}}}_{n+1,\underset{\sim}{\mathbf{P}}:\underset{\sim}{\tilde{\mathbf{n}}}_{n+1}} = -2\sqrt{1-D_{n+1}}\left(\mu\Delta\lambda_{vp}\underset{\sim}{\mathbf{I}} + \frac{C_i}{3a_i}(1-e^{-a_i\Delta\lambda_{vp}})\underset{\sim}{\mathbf{R}}\right) \tag{B.51}$$

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{\tilde{\mathbf{Z}}}_{n+1,D_{n+1}} &= -\frac{\underset{\sim}{\tilde{\mathbf{Z}}}^{\star}_{n+1}}{1-D_n} \\ &+ \frac{1}{\sqrt{1-D_{n+1}}}\left(\mu\Delta\lambda_{vp}\underset{\sim}{\mathbf{I}} + \frac{1}{3}\frac{C_i}{a_i}(1-e^{-a_i\Delta\lambda_{vp}})\underset{\sim}{\mathbf{R}}\right) : (\underset{\sim}{\mathbf{P}} : \underset{\sim}{\tilde{\mathbf{n}}}_{n+1}) \end{aligned} \tag{B.52}$$

- Calcul de $d(\underset{\sim}{\mathbf{P}} : \underset{\sim}{\tilde{\mathbf{n}}}_{n+1})$

$$
\begin{aligned}
d(\underset{\sim}{\mathbf{P}} : \tilde{\underset{\sim}{\mathbf{n}}}_{n+1}) &= \frac{\frac{3}{2}\underset{\sim}{\mathbf{P}} - (\underset{\sim}{\mathbf{P}} : \tilde{\underset{\sim}{\mathbf{n}}}_{n+1}) \otimes (\underset{\sim}{\mathbf{P}} : \tilde{\underset{\sim}{\mathbf{n}}}_{n+1})}{\left|\left|\tilde{\underset{\sim}{\mathbf{Z}}}_{n+1}\right|\right|} : d\tilde{\underset{\sim}{\mathbf{Z}}}_{n+1} \\
&= \underset{\sim}{\mathbf{N}} : d\tilde{\underset{\sim}{\mathbf{Z}}}_{n+1}
\end{aligned} \tag{B.53}
$$

avec $\underset{\sim}{\mathbf{N}} = \frac{\frac{3}{2}\underset{\sim}{\mathbf{P}} - (\underset{\sim}{\mathbf{P}} : \tilde{\underset{\sim}{\mathbf{n}}}_{n+1}) \otimes (\underset{\sim}{\mathbf{P}} : \tilde{\underset{\sim}{\mathbf{n}}}_{n+1})}{\left|\left|\tilde{\underset{\sim}{\mathbf{Z}}}_{n+1}\right|\right|}$

- Calcul de dD_{n+1}

$$
dD_{n+1} = D_{n+1,\Delta\lambda_{vp}} d\Delta\lambda_{vp} + D_{n+1,\underset{\sim}{\mathbf{P}} : \tilde{\underset{\sim}{\mathbf{n}}}_{n+1}} d(\underset{\sim}{\mathbf{P}} : \tilde{\underset{\sim}{\mathbf{n}}}_{n+1}) \tag{B.54}
$$

On obtient alors,

$$
\begin{aligned}
D_{n+1,\Delta\lambda_{vp}} &= \frac{1}{(1-D_n)^{\beta+\frac{1}{2}}} \left\langle \frac{\tilde{Y} - Y_0}{S} \right\rangle^s \\
&+ \frac{s\Delta\lambda_{vp}}{S(1-D_n)^{\beta+\frac{1}{2}}} \left\langle \frac{\tilde{Y} - Y_0}{S} \right\rangle^{s-1} \tilde{Y}_{,\Delta\lambda_{vp}}
\end{aligned} \tag{B.55}
$$

avec $\tilde{Y}_{,\Delta\lambda_{vp}}$ obtenu à partir de l'expression IV.123

$$
\begin{aligned}
\tilde{Y}_{,\Delta\lambda_{vp}} &= -2\mu \frac{\underset{\sim}{\mathbf{P}} : \tilde{\underset{\sim}{\mathbf{n}}}_{n+1}}{\sqrt{1-D_n}} : \left(\underset{\sim}{\boldsymbol{e}}^{\star}_{n+1} - \Delta\lambda_{vp} \frac{\underset{\sim}{\mathbf{P}} : \tilde{\underset{\sim}{\mathbf{n}}}_{n+1}}{\sqrt{1-D_n}} \right) \\
&+ \frac{2}{3} C_i \left(-a_i \underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}_{i_n} e^{-a_i\Delta\lambda_{vp}} + \frac{\underset{\sim}{\mathbf{P}} : \tilde{\underset{\sim}{\mathbf{n}}}_{n+1}}{\sqrt{1-D_n}} e^{-a_i\Delta\lambda_{vp}} \right) : \underset{\sim}{\mathbf{R}} \\
&: \left(\underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}_{i_n} e^{-a_i\Delta\lambda_{vp}} + \frac{\underset{\sim}{\mathbf{P}} : \tilde{\underset{\sim}{\mathbf{n}}}_{n+1}}{a_i\sqrt{1-D_n}} (1 - e^{-a_i\Delta\lambda_{vp}}) \right) \\
&+ Q \left(-b r_n e^{-b\Delta\lambda_{vp}} + \frac{1}{\sqrt{1-D_n}} e^{-b\Delta\lambda_{vp}} \right) \\
&. \left(r_n e^{-b\Delta\lambda_{vp}} + \frac{1}{b\sqrt{1-D_n}} (1 - e^{-b\Delta\lambda_{vp}}) \right)
\end{aligned} \tag{B.56}
$$

et

$$
D_{n+1,\underset{\sim}{\mathbf{P}} : \tilde{\underset{\sim}{\mathbf{n}}}_{n+1}} = \frac{s\Delta\lambda_{vp}}{S(1-D_n)^{\beta+\frac{1}{2}}} \left\langle \frac{\tilde{Y} - Y_0}{S} \right\rangle^{s-1} \tilde{Y}_{,\underset{\sim}{\mathbf{P}} : \tilde{\underset{\sim}{\mathbf{n}}}_{n+1}} \tag{B.57}
$$

avec,

$$\begin{aligned}\tilde{Y}_{,\underset{\sim}{\underset{\sim}{\mathbf{P}}}:\tilde{\underset{\sim}{\mathbf{n}}}_{n+1}} &= -2\mu\frac{\Delta\lambda_{vp}}{\sqrt{1-D_n}} : \left(\underset{\sim}{\boldsymbol{e}}^{\star}_{n+1} - \Delta\lambda_{vp}\frac{\underset{\sim}{\underset{\sim}{\mathbf{P}}} : \tilde{\underset{\sim}{\mathbf{n}}}_{n+1}}{\sqrt{1-D_n}}\right) \\ &+ \frac{2}{3}C_i\frac{1-e^{-a_i\Delta\lambda_{vp}}}{a_i\sqrt{1-D_n}} : \underset{\sim}{\underset{\sim}{\mathbf{R}}} \\ &: \left(\underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}_{i_n}e^{-a_i\Delta\lambda_{vp}} + \frac{\underset{\sim}{\underset{\sim}{\mathbf{P}}} : \tilde{\underset{\sim}{\mathbf{n}}}_{n+1}}{a_i\sqrt{1-D_n}}(1-e^{-a_i\Delta\lambda_{vp}})\right) \end{aligned} \tag{B.58}$$

- Expression de $d\overline{f}_{vp_{n+1}}(d\Delta\lambda_{vp})$

En combinant ces différentes équations, il est possible d'exprimer $d\overline{f}_{vp_{n+1}}$ fonction unique de $d\Delta\lambda_{vp}$.

En utilisant B.53 dans B.54, on exprime dD_{n+1} fonction de $\Delta\lambda_{vp}$ et de $d\tilde{\underset{\sim}{\mathbf{Z}}}_{n+1}$,

$$dD_{n+1} = D_{n+1,\Delta\lambda_{vp}}d\Delta\lambda_{vp} + D_{n+1,\underset{\sim}{\underset{\sim}{\mathbf{P}}}:\tilde{\underset{\sim}{\mathbf{n}}}_{n+1}} : \underset{\sim}{\underset{\sim}{\mathbf{N}}} : d\tilde{\underset{\sim}{\mathbf{Z}}}_{n+1} \tag{B.59}$$

Les équations B.59, B.53 dans B.49 donnent,

$$\begin{aligned}&\left(\underset{\sim}{\underset{\sim}{\mathbf{I}}} - \tilde{\underset{\sim}{\mathbf{Z}}}_{n+1,\underset{\sim}{\underset{\sim}{\mathbf{P}}}:\tilde{\underset{\sim}{\mathbf{n}}}_{n+1}} : \underset{\sim}{\underset{\sim}{\mathbf{N}}} - \tilde{\underset{\sim}{\mathbf{Z}}}_{n+1,D_{n+1}}D_{n+1,\underset{\sim}{\underset{\sim}{\mathbf{P}}}:\tilde{\underset{\sim}{\mathbf{n}}}_{n+1}} : \underset{\sim}{\underset{\sim}{\mathbf{N}}}\right) : d\tilde{\underset{\sim}{\mathbf{Z}}}_{n+1} \\ = &\left(\tilde{\underset{\sim}{\mathbf{Z}}}_{n+1,\Delta\lambda_{vp}} + \tilde{\underset{\sim}{\mathbf{Z}}}_{n+1,D_{n+1}}D_{n+1,\Delta\lambda_{vp}}\right)d\Delta\lambda_{vp}\end{aligned} \tag{B.60}$$

En notant, $\underset{\sim}{\underset{\sim}{\mathbf{B}}}$,

$$\underset{\sim}{\underset{\sim}{\mathbf{B}}} = \underset{\sim}{\underset{\sim}{\mathbf{I}}} - \tilde{\underset{\sim}{\mathbf{Z}}}_{n+1,\underset{\sim}{\underset{\sim}{\mathbf{P}}}:\tilde{\underset{\sim}{\mathbf{n}}}_{n+1}} : \underset{\sim}{\underset{\sim}{\mathbf{N}}} - \tilde{\underset{\sim}{\mathbf{Z}}}_{n+1,D_{n+1}}D_{n+1,\underset{\sim}{\underset{\sim}{\mathbf{P}}}:\tilde{\underset{\sim}{\mathbf{n}}}_{n+1}} : \underset{\sim}{\underset{\sim}{\mathbf{N}}} \tag{B.61}$$

et $\underset{\sim}{\mathbf{A}}$,

$$\underset{\sim}{\mathbf{A}} = \tilde{\underset{\sim}{\mathbf{Z}}}_{n+1,\Delta\lambda_{vp}} + \tilde{\underset{\sim}{\mathbf{Z}}}_{n+1,D_{n+1}}D_{n+1,\Delta\lambda_{vp}} \tag{B.62}$$

L'équation B.60 peut alors s'écrire,

$$d\tilde{\underset{\sim}{\mathbf{Z}}}_{n+1} = \underset{\approx}{\mathbf{B}}^{-1} : \underset{\sim}{\mathbf{A}} d\Delta\lambda_{vp} \tag{B.63}$$

En combinant maintenant, B.59, B.63 dans B.43,

$$\begin{aligned} d\overline{f}_{vp_{n+1}} &= \left(\overline{f}_{vp_{n+1},\tilde{\underset{\sim}{\mathbf{Z}}}_{n+1}} : \underset{\approx}{\mathbf{B}}^{-1} : \underset{\sim}{\mathbf{A}} + \overline{f}_{vp_{n+1},\Delta\lambda_{vp}} + \overline{f}_{vp_{n+1},D_{n+1}} D_{n+1,\Delta\lambda_{vp}} \right. \\ &+ \left. \overline{f}_{vp_{n+1},D_{n+1}} D_{n+1,\underset{\sim}{\mathbf{P}}:\tilde{\underset{\sim}{\mathbf{n}}}_{n+1}} : \underset{\sim}{\mathbf{N}} : \underset{\approx}{\mathbf{B}}^{-1} : \underset{\sim}{\mathbf{A}} \right) d\Delta\lambda_{vp} \end{aligned} \tag{B.64}$$

avec,

$$\overline{f}_{vp_{n+1},\tilde{\underset{\sim}{\mathbf{Z}}}_{n+1}} = \frac{\underset{\sim}{\mathbf{P}} : \tilde{\underset{\sim}{\mathbf{n}}}_{n+1}}{\left|\left|\tilde{\underset{\sim}{\mathbf{Z}}}_{n+1}\right|\right| \sqrt{1 - D_{n+1}}} \tag{B.65}$$

Toutes les quantités de cette équation sont explicitement calculées précédemment, on voit donc qu'il est possible d'exprimer explicitement $d\overline{f}_{vp_{n+1}}$ fonction uniquement de $\Delta\lambda_{vp}$.

La quantité $\frac{\partial \overline{f}_{vp_{n+1}}}{\partial \Delta\lambda_{vp}}$ de l'algorithme CP3 (cf. table IV.4) s'écrit donc,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{f}_{vp_{n+1}}}{\partial \Delta\lambda_{vp}} &= \overline{f}_{vp_{n+1},\tilde{\underset{\sim}{\mathbf{Z}}}_{n+1}} : \underset{\approx}{\mathbf{B}}^{-1} : \underset{\sim}{\mathbf{A}} + \overline{f}_{vp_{n+1},\Delta\lambda_{vp}} + \overline{f}_{vp_{n+1},D_{n+1}} D_{n+1,\Delta\lambda_{vp}} \\ &+ \overline{f}_{vp_{n+1},D_{n+1}} D_{n+1,\underset{\sim}{\mathbf{P}}:\tilde{\underset{\sim}{\mathbf{n}}}_{n+1}} : \underset{\sim}{\mathbf{N}} : \underset{\approx}{\mathbf{B}}^{-1} : \underset{\sim}{\mathbf{A}} \end{aligned} \tag{B.66}$$

B.5 Matrice tangente consistante

Remarques :

La sommation sur i, des écrouissages cinématiques, n'est pas écrite afin d'alléger les notations. Jusqu'à la fin du paragraphe B.5, l'indice i sous entend une sommation.

- Dérivées de $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}$

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1,D_{n+1}} = -\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} + \Delta\lambda_{vp} \frac{\underset{\approx}{\boldsymbol{\Lambda}} : (\underset{\sim}{\mathbf{P}} : \tilde{\underset{\sim}{\mathbf{n}}}_{n+1})}{2\sqrt{1 - D_{n+1}}} \tag{B.67}$$

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1,\Delta\lambda_{vp}} = -\sqrt{1 - D_{n+1}}\, \underset{\approx}{\boldsymbol{\Lambda}} : (\underset{\sim}{\mathbf{P}} : \tilde{\underset{\sim}{\mathbf{n}}}_{n+1}) \tag{B.68}$$

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1,\underset{\sim}{\mathbf{P}}:\tilde{\underset{\sim}{\mathbf{n}}}_{n+1}} = -\sqrt{1 - D_{n+1}}\, \Delta\lambda_{vp} \underset{\approx}{\boldsymbol{\Lambda}} \tag{B.69}$$

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1,\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}} = (1 - D_{n+1}) \underset{\approx}{\boldsymbol{\Lambda}} \tag{B.70}$$

- Dérivées de $\underset{\sim}{\tilde{\mathbf{X}}}_{i_{n+1}}$

$$\underset{\sim}{\tilde{\mathbf{X}}}_{i_{n+1},D_{n+1}} = -\underset{\sim}{\tilde{\mathbf{X}}}_{i_n} e^{-a_i\Delta\lambda_{vp}} - \frac{C_i(1-e^{-a_i\Delta\lambda_{vp}})}{3a_i\sqrt{1-D_{n+1}}}\underset{\sim}{\mathbf{R}} : (\underset{\sim}{\mathbf{P}} : \underset{\sim}{\tilde{\mathbf{n}}}_{n+1}) \tag{B.71}$$

$$\begin{aligned}\underset{\sim}{\tilde{\mathbf{X}}}_{i_{n+1},\Delta\lambda_{vp}} &= -a_i(1-D_{n+1})\underset{\sim}{\tilde{\mathbf{X}}}_{i_n} e^{-a_i\Delta\lambda_{vp}} \\ &- \frac{2}{3}C_i\sqrt{1-D_{n+1}}e^{-a_i\Delta\lambda_{vp}}\underset{\sim}{\mathbf{R}} : (\underset{\sim}{\mathbf{P}} : \underset{\sim}{\tilde{\mathbf{n}}}_{n+1})\end{aligned} \tag{B.72}$$

$$\underset{\sim}{\tilde{\mathbf{X}}}_{i_{n+1},\underset{\sim}{\mathbf{P}}:\underset{\sim}{\tilde{\mathbf{n}}}_{n+1}} = \frac{2}{3}\frac{C_i}{a_i}\sqrt{1-D_{n+1}}(1-e^{-a_i\Delta\lambda_{vp}})\underset{\sim}{\mathbf{R}} \tag{B.73}$$

- Dérivées de D_{n+1}

$D_{n+1,\Delta\lambda_{vp}}$ et $D_{n+1,\underset{\sim}{\mathbf{P}}:\underset{\sim}{\tilde{\mathbf{n}}}_{n+1}}$ sont données par l'intégration locale (équation B.55 et B.57).

$$D_{n+1,\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}} = \frac{s\Delta\lambda_{vp}}{S(1-D_n)^{\beta+\frac{1}{2}}}\left\langle\frac{\tilde{Y}-Y_0}{S}\right\rangle^{s-1}\tilde{Y}_{,\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}} \tag{B.74}$$

avec,

$$\tilde{Y}_{,\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}} = \frac{\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}}{1-D_{n+1}} \tag{B.75}$$

- Dérivées de $\overline{f}_{vp_{n+1}}$

$\overline{f}_{vp_{n+1},D_{n+1}}dD_{n+1}$ et $\overline{f}_{vp_{n+1},\Delta\lambda_{vp}}d\Delta\lambda_{vp}$ sont données par l'intégration locale (équation B.45 et B.66).