



HAL
open science

Développement d'outils et de méthodes de télédétection spatiale optique et radar nécessaires à la haute résolution spatiale

Lionel Bombrun

► **To cite this version:**

Lionel Bombrun. Développement d'outils et de méthodes de télédétection spatiale optique et radar nécessaires à la haute résolution spatiale. Traitement du signal et de l'image [eess.SP]. Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG, 2008. Français. NNT : . tel-00369350

HAL Id: tel-00369350

<https://theses.hal.science/tel-00369350>

Submitted on 19 Mar 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

INSTITUT POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE

N° attribué par la bibliothèque

THÈSE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'Institut Polytechnique de Grenoble

Spécialité : «Signal, Image, Parole, Télécommunications»

préparée au laboratoire Grenoble Image Parole Signal et Automatique

dans le cadre de l'École Doctorale EEATS

«Électronique, Électrotechnique, Automatique, Télécommunications, Signal»

présentée et soutenue publiquement

par

Lionel BOMBRUN

le 18 novembre 2008

Titre :

**DÉVELOPPEMENT D'OUTILS ET DE MÉTHODES DE TÉLÉDÉTECTION
SPATIALE OPTIQUE ET RADAR NÉCESSAIRES À LA HAUTE
RÉSOLUTION SPATIALE**

Directeurs de thèse : M. GAY et J. MARS

JURY

Monsieur	Henri MAÎTRE,	Président
Monsieur	Laurent FERRO-FAMIL,	Rapporteur
Monsieur	Philippe RÉFRÉGIER,	Rapporteur
Monsieur	Jérôme MARS,	Directeur de thèse
Monsieur	Michel GAY,	Co-encadrant de thèse
Monsieur	Jean-Marie BEAULIEU,	Examineur
Monsieur	Emmanuel TROUVÉ,	Examineur

Remerciements

Ces travaux de thèse ont été réalisés au sein du département des images et des signaux du laboratoire GIPSA-lab à Grenoble sous la direction de Messieurs Jérôme MARS et Michel GAY. Je tiens tout d'abord à les remercier pour leurs conseils et la confiance qu'ils m'ont accordés durant ces trois années de thèse.

Je tiens également à remercier Monsieur Henri MAÎTRE, Professeur à TELECOM Paris-Tech, de m'avoir fait l'honneur de présider le jury de thèse et de l'intérêt qu'il a porté à mes travaux.

Je remercie particulièrement Monsieur Laurent FERRO-FAMIL, Maître de conférences à l'Université de Rennes 1, et Monsieur Philippe RÉFRÉGIER, Professeur à l'École Centrale de Marseille, d'avoir accepté d'être rapporteur de mes travaux de thèse. Je les remercie pour l'intérêt qu'ils ont bien voulu porter à mes travaux de thèse ainsi que pour leurs commentaires constructifs.

Je suis également très reconnaissant envers Monsieur Emmanuel Trouvé, Professeur au LIS-TIC à Annecy, d'avoir suivi mes travaux tout au long de cette thèse. Je tiens à le remercier pour les nombreuses discussions scientifiques que nous avons eues durant ces trois années. Je le remercie aussi d'avoir participé à mon jury de thèse.

Je remercie également Monsieur Jean-Marie Beaulieu, Professeur à l'Université Laval à Québec, et Monsieur Ridha Touzi, Chercheur au Centre Canadien de Télédétection à Ottawa d'avoir acceptés de m'accueillir et de m'encadrer durant mon séjour de 6 mois à l'Université Laval. Je leur suis particulièrement reconnaissant des travaux que l'on a effectué ensemble.

Toute ma considération va aux membres du laboratoire GIPSA-lab. Merci à Monsieur Jean-Marc Chassery, directeur du GIPSA-lab, de m'avoir accueilli dans son laboratoire. Je remercie aussi Daniel Baudois, Jocelyn Chanussot de m'avoir fait découvrir la recherche. Merci à Éric Moisan et Frédéric Maussang qui m'ont encadré durant mon stage de master.

Mes remerciements vont également à ceux avec qui j'ai effectué mes enseignements : Cornel, Patrick, Pierre, ... ainsi qu'à tous mes élèves de l'ENSE3 et de PHELMA.

Je n'oublie pas non plus de remercier tous les doctorants du GIPSA-lab. Pour ne pas faire de jaloux, je les classe par ordre alphabétique, merci à Ahmad, Alberto, Amir, Ana Maria, Bastien, Bertrand, Christian, Cédric, Cyril, Fabien, François, Gabriel, Geoffrey, Hussein, Ion, Ivan, Jordi, Julien B., Julien H., Loïc, Ludovic, Mathieu, Meryem, Mohamed, Murtaza, Nicolas, Nuttapol, Olivier, Paolo, Salem, Sébastien, Sophie, Sun, Tarek, Tien, Vincent, Yuliya et Zaher.

Je remercie aussi les deux stagiaires que j'ai pu encadrer durant ces années : merci à Loïc et à Olivier.

Je n'oublie pas non plus mes amis d'Ardèche et d'ailleurs, je pense tout particulièrement à Anthony, Aurélien, Bob, Boni, Carine, Emmanuel, Mayeul, Mickaël, Nicolas, Olivier, Sylvain, . . .

Je remercie également toute ma famille. Je dédie cette thèse à mes parents qui m'ont toujours soutenu durant mes études.

La vie ne vaut rien. Mais rien ne vaut la vie.
André Malraux

Table des matières

Liste des Notations	i
Liste des sigles	iii
Introduction	1
1 Mesures de déplacement et interférométrie différentielle	5
1.1 Introduction	7
1.2 L'interférométrie RSO	8
1.2.1 Le principe de l'interférométrie RSO	8
1.2.2 Calcul d'un interférogramme	9
1.2.2.1 Filtrage	10
1.2.2.2 Déroulement de phase	10
1.2.3 Présentation des données	11
1.2.4 Analyse de la cohérence	14
1.3 Mesure de déplacement par interférométrie radar à partir d'une passe	17
1.3.1 Calcul de la vitesse 3D à partir de sa projection en ligne de visée du satellite (LOS)	17
1.3.1.1 Calcul de \hat{e}_{ec}	17
1.3.1.2 Calcul de \hat{e}_{LOS}	19
1.3.2 Résultats sur les images ERS-1/2	21
1.3.2.1 Calage de l'offset	21
1.3.2.2 Champ de vitesse 3-D	22
1.3.3 Évaluation des performances	22
1.3.3.1 Incertitudes liées aux données et aux traitements	22
1.3.3.2 Hypothèse d'écoulement parallèle à la surface des glaciers et dans la ligne de plus grande pente	23
1.4 Combinaison des passes ascendante et descendante pour estimer les offsets	28
1.4.1 Positionnement du problème	28
1.4.2 Résultats	30
1.4.2.1 Sur une image simulée	30
1.4.2.2 Sur un couple d'images ERS-1/2	31
1.5 Analyse des franges résiduelles	34
1.5.1 Principe de la méthode	34
1.5.2 Résultats	37
1.5.2.1 Sur des images simulées	37
1.5.2.2 Sur une série d'images ERS-1/2	39
1.5.2.3 Résultat sur le lac de Serre-Ponçon	42

1.6	Méthodes d'offset-tracking	46
1.6.1	Principe	46
1.6.2	Résultat sur des images ENVISAT	47
1.7	Conclusion	50
2	La polarimétrie radar	51
2.1	Introduction	53
2.2	Propagation des ondes électromagnétiques planes	53
2.2.1	Ellipse de polarisation	54
2.2.2	Caractérisation de l'état de polarisation	56
2.2.2.1	Vecteur de Jones	56
2.2.2.2	Vecteur de Stokes	56
2.2.2.3	Sphère de Poincaré	57
2.3	Représentation des ondes partiellement polarisées	57
2.3.1	Matrice de cohérence	57
2.3.2	Vecteur de Stokes	58
2.3.3	Degré de polarisation	58
2.4	Représentation polarimétrique d'une cible radar	58
2.4.1	Représentation cohérente	59
2.4.1.1	Matrice de rétrodiffusion	59
2.4.1.2	Matrice de Graves	59
2.4.1.3	Vecteur de rétrodiffusion	59
2.4.2	Représentation incohérente	61
2.4.2.1	Matrices de cohérence et de covariance	61
2.4.2.2	Équations monostatiques de la cible	61
2.5	Décompositions incohérentes de la matrice de cohérence (ICTD)	62
2.5.1	Principe des décompositions incohérentes	62
2.5.2	Extraction de paramètres à partir des valeurs propres	63
2.5.2.1	Le span	63
2.5.2.2	L'entropie	63
2.5.2.3	L'anisotropie	64
2.5.3	Extraction de paramètres à partir des vecteurs propres	64
2.5.3.1	Le modèle α/β	64
2.5.3.2	Le Target Scattering Vector Model (TSVM-ICTD)	66
2.5.4	Comparaison des modèles α/β et TSVM	69
2.5.4.1	Cas d'une cible symétrique $\tau_m = 0$	69
2.5.4.2	Cas d'une cible non symétrique $\tau_m \neq 0$	71
2.5.4.3	Résultats sur des images réelles	72
2.6	La notion de mécanisme moyen de rétrodiffusion	73
2.6.1	Positionnement du problème	73
2.6.2	Mécanisme de rétrodiffusion moyen	76
2.6.2.1	Modèle α/β	79
2.6.2.2	Modèle TSVM	80
2.6.2.3	Applications	80
2.6.3	Comparaison des vecteurs de rétrodiffusion associés aux mécanismes moyens de rétrodiffusion	80
2.6.4	Propriétés du vecteur de rétrodiffusion associé au mécanisme de rétrodiffusion moyen	82

2.7	Conclusion et perspectives	83
3	Segmentation hiérarchique d'images polarimétriques	85
3.1	Introduction	87
3.2	La segmentation d'image	87
3.2.1	Définition	87
3.2.2	Le principe de la segmentation hiérarchique	88
3.2.2.1	L'approche au sens du maximum de vraisemblance	89
3.2.2.2	Le critère de fusion des segments	90
3.3	Pour des zones non texturées	90
3.3.1	Les statistiques dans le cas 1-vue et L-vues	90
3.3.2	Calcul du critère	91
3.3.2.1	En 1-vue	91
3.3.2.2	En L-vues	92
3.4	Pour des zones texturées	93
3.4.1	Le modèle multiplicatif	93
3.4.1.1	En 1-vue	93
3.4.1.2	En L-vues	93
3.4.1.3	Estimation au sens du maximum de vraisemblance de la texture et de la matrice de covariance moyenne	94
3.4.2	Les statistiques associées à une texture distribuée selon une loi Gamma .	95
3.4.2.1	La distribution Gamma	95
3.4.2.2	En 1-vue	96
3.4.2.3	En L-vues	97
3.4.3	Calcul du critère pour une texture distribuée selon une loi Gamma	97
3.4.3.1	En 1-vue	97
3.4.3.2	En L-vues	98
3.4.4	La distribution de Fisher	98
3.4.4.1	La transformée de Mellin	100
3.4.4.2	Les statistiques de deuxième espèce	100
3.4.4.3	L'estimation des paramètres	101
3.4.4.4	Le plan κ_2/κ_3	102
3.4.4.5	Validation de l'utilisation de la loi de Fisher	103
3.4.5	Les statistiques associées à une texture distribuée selon une loi de Fisher .	104
3.4.5.1	En 1-vue	104
3.4.5.2	En L-vues	105
3.4.6	Calcul du critère pour une texture distribuée selon une loi de Fisher . . .	106
3.4.6.1	En 1-vue	106
3.4.6.2	En L-vues	106
3.5	Présentation de l'algorithme de segmentation hiérarchique	107
3.5.1	Test de présence de texture	107
3.5.2	Le facteur de forme	107
3.5.3	Le principe	109
3.6	Évaluation des performances	112
3.6.1	Courbes Caractéristique Opérationnelle de Réception (COR)	112
3.6.1.1	Pour un problème de détection	112
3.6.1.2	Pour un problème de segmentation	113
3.6.1.3	Lien avec les "matrices de confusion"	114

3.6.2	Variances inter-classe et intra-classe	116
3.6.3	Le lambda de Wilks	117
3.6.4	Distances inter-classes et intra-classe	117
3.6.4.1	Dans le cas de la distribution de Wishart	118
3.6.4.2	Dans le cas de la distribution de KummerU	120
3.7	Résultats de segmentation	121
3.7.1	Sur des images synthétiques	121
3.7.2	Sur des images ESAR	126
3.7.2.1	Calcul du critère sur différentes zones	127
3.7.2.2	Résultats de segmentation sur l'image E-SAR	129
3.8	Classification d'images polarimétriques	135
3.8.1	Principe de la méthode	135
3.8.2	Résultats de classification	135
3.9	Conclusion et perspectives	138
Conclusion		141
Annexes		147
A Implémentation du modèle α/β		147
A.1	Calcul des paramètres du modèle α/β	147
A.2	Modification du domaine de définition des paramètres	147
B Implémentation du modèle TSVM		149
B.1	Mise en place du TSVM	149
B.2	Calcul littéral de la matrice de diffusion $\tilde{\mathbf{S}}$	150
B.3	Vecteur de diffusion	151
B.4	Expression littérale des paramètres du TSVM via le vecteur de rétrodiffusion	152
B.4.1	Calcul de m et γ	152
B.4.2	Calcul de Φ_s et ψ	153
B.4.3	Calcul de α_s , τ_m et Φ_{α_s}	153
B.4.4	Calcul de ν	154
B.5	Expression littérale des paramètres du TSVM via la matrice de cohérence	155
B.6	Ambiguïté sur l'angle ψ	156
C Distances inter-classes et intra-classe pour la distribution de KummerU		159
D Cas limite de la distribution de KummerU		161
D.1	Calcul du premier terme	161
D.2	Calcul du deuxième terme	162
Bibliographie		163

Liste de Notations

λ	Longueur d'onde
B_{\perp}	Baseline perpendiculaire
e_a	Altitude d'ambiguïté
\hat{e}_{LOS}	Vecteur unitaire du déplacement dans la ligne de visée du satellite
\hat{e}_{ec}	Vecteur unitaire d'écoulement au sol
ΔT	Intervalle de temps entre deux acquisitions
∇_x et ∇_y	Opérateur de Sobel
$\Delta\Phi^{i-j}$	Différence de phases entre interférogrammes différentiels
$\Delta\Phi_{topo}^{ij}$	Phase résiduelle dues à la topographie du terrain
ΔB_{\perp}^{ij}	Baseline perpendiculaire équivalente
Δe_a^{ij}	Altitude d'ambiguïté équivalente
Δ_r	Taille des portes en distance
Δ_a	Taille des portes en azimuth
δ_r	Résolution en distance
δ_a	Résolution en azimuth
K	Constante du chirp
τ	Durée du chirp
L	Longueur de l'antenne
V_s	Vitesse du porteur
c	Célérité de l'onde électromagnétique dans le vide
$\nabla = \left[\frac{\partial}{\partial x}; \frac{\partial}{\partial y}; \frac{\partial}{\partial z} \right]^T$	Opérateur gradient
t	Variable temps
w	Fréquence angulaire
$k = \frac{2\pi}{\lambda}$	Nombre d'onde
\vec{r}	Position définie dans un système de coordonnées
$\vec{E}(\vec{r}, t)$	Vecteur champ électrique
\vec{E}	Vecteur de Jones
\vec{S}	Vecteur de Stokes
ψ	Orientation
χ	Ellipticité
p	Degré de polarisation
\mathbf{S}	Matrice de rétrodiffusion
\mathbf{G}	Matrice de Graves
\mathbf{k}	Vecteur de rétrodiffusion
\mathbf{C}	Matrice de covariance
\mathbf{T}	Matrice de cohérence
Trace	Opérateur trace

$ \cdot $	Opérateur déterminant
\dagger	Opérateur transposé conjugué
T	Opérateur transposé
$*$	Opérateur conjugué
H	Entropie
A	Anisotropie
P	Partition d'une image
S_i	Segment numéro i
$LLF(P)$	Log-vraisemblance de la partition P
$MLL(S_i)$	Log-vraisemblance maximale du segment S_i
$SC_{i,j}$	Critère de fusion des segments S_i et S_j
n_i	Nombre de pixels du segment S_i
$\Gamma(\cdot)$	Fonction Gamma
μ	Paramètre de texture
$BesselK(\cdot)$	Fonction de Bessel modifiée de seconde espèce
\mathcal{L}, \mathcal{M} et m	Paramètres de la distribution de Fisher
$TM[f(u)]$	Transformée de Mellin de la fonction $f(u)$
$\hat{\star}$	Convolution de Mellin
$KummerU(\cdot, \cdot, \cdot)$	Fonction confluyente hypergéométrique de seconde espèce
p_{fa}	Probabilité de fausse alarme
p_d	Probabilité de bonne détection

Liste des sigles

RSO	Radar à Synthèse d'Ouverture
ERS	European Remote Sensing satellite system
ENVISAT	ENVIronnement SATellite
LOS	Ligne de Visée du Satellite
MNT	Modèle Numérique de Terrain
ROI-PAC	Repeat Orbit Interferometry PACkage
IDAN	Intensity Driven Adaptative Neighborhood
IPS	Isolated Point Scatterer
FRI	Fréquence de Répétition des Impulsions
TSVM	Target Scattering Vector Model
COR	courbe Caractéristique Opérationnelle de Réception

Introduction

La télédétection désigne, dans son acception la plus large, la mesure ou l'acquisition d'informations sur un objet ou un phénomène, par l'intermédiaire d'un instrument de mesure n'ayant pas de contact avec l'objet étudié. C'est l'utilisation à distance (d'un avion, d'un satellite, ...) de n'importe quel type d'instrument permettant l'acquisition d'informations sur l'environnement. L'imagerie satellitaire analyse le rayonnement réfléchi dans une certaine bande de fréquence par les cibles étudiées. Deux types de capteurs peuvent être utilisés pour imager la surface terrestre : les capteurs optiques et les capteurs radars.

Les capteurs optiques utilisent le rayonnement solaire rétrodiffusé par la scène imagée dans le domaine du visible et de l'infrarouge. L'imagerie optique est facilement interprétable car elle est conforme à la perception qu'a l'oeil humain de notre environnement. Néanmoins, les capteurs optiques requièrent la présence d'une source d'illumination externe telle que le soleil. Ce sont des capteurs dit "passifs". De plus, l'utilisation de ce type de capteur est conditionnée par l'aléa météorologique (couverture nuageuse).

Les capteurs radar opèrent dans le domaine des micro-ondes. Ces capteurs sont dit "actifs" car ils utilisent leur propre source d'illumination, ce qui les rend indépendants des conditions d'illumination solaire. Comme les longueurs d'ondes utilisées sont de l'ordre du centimètre, les images radars sont quasi-indépendantes de la couverture nuageuse. Les capteurs radar possèdent ainsi la dénomination de "capteur tous temps". Néanmoins les images radar sont affectées par deux phénomènes : le chatoiement (speckle) qui donne une apparence granuleuse aux images et nuit fortement à leur interprétation ; et la géométrie radar qui modifie l'échantillonnage au sol des zones de fort relief (effet de compression, dilatation, repliement).

Comme les capteurs optiques et les capteurs radars ne fonctionnent pas dans la même bande de fréquence, les images optiques et radars fournissent des informations complémentaires sur la zone étudiée. Là où l'optique renseigne sur la forme et la couleur des objets, le radar est sensible à leur rugosité et à leur géométrie. Nous inscrivons cette thèse dans le cadre du traitement des images Radar à Synthèse d'Ouverture (RSO). Ce domaine est composé de deux grandes familles : l'interférométrie et la polarimétrie. Ce mémoire de thèse a pour objectif de présenter des nouvelles méthodes de télédétection radar interférométriques et polarimétriques.

Le projet MEGATOR

La première partie de ce travail de thèse s'inscrit dans le cadre du projet MEGATOR (Mesures de l'Évolution des Glaciers Alpins par Télédétection Optique et Radar, www.gipsa-lab.inpg.fr/megator) financé par l'ANR (Agence Nationale de la Recherche) dans le cadre d'une ACI (Action Concertée Incitative) "Masse de données" du Ministère de la Recherche de 2004 à

2007 et du projet EFIDIR (Extraction et Fusion d'Informations pour la mesure des Déplacements en Imagerie Radar, www.efidir.fr) financé dans le cadre du programme Masse de données et Connaissance de 2008 à 2011. Le projet MEGATOR regroupe quatre laboratoires spécialisés en traitement du signal et en traitement d'image :

- Le LISTIC (Laboratoire d'Informatique, Systèmes, Traitement de l'Information et de la Connaissance) de l'Université de Savoie.
- Le GIPSA-lab (Grenoble Image Parole Signal Télécom) de l'Institut National Polytechnique de Grenoble.
- L'équipe MAP-PAGE (Photogrammétrie Architecturale et GEomatique) de l'Institut National des Sciences Appliquées de Strasbourg.
- Le département TSI (Traitement du Signal et des Images) de Télécom Paris.

Le projet MEGATOR a pour objectif de développer, à partir d'images archives et de données simulées, une méthodologie complète de traitement des données optiques et radar satellitaires à haute résolution appliquée à la surveillance des glaciers. Ce projet s'articule autour de trois principaux axes de recherche (figure 1) :

1. La réalisation de MNT (Modèles Numériques de Terrains), d'ortho-images et de MNT différentiels optiques sur une échelle de temps longue (pluriannuelle).
2. La synthèse RSO (Radar à Synthèse d'Ouverture) et la génération d'interférogrammes différentiels dans le contexte haute montagne, haute résolution pour des déplacements importants sur une échelle de temps courte (quelques jours).
3. La fusion de données multi-dates pour la détection et le suivi temporel d'objets.

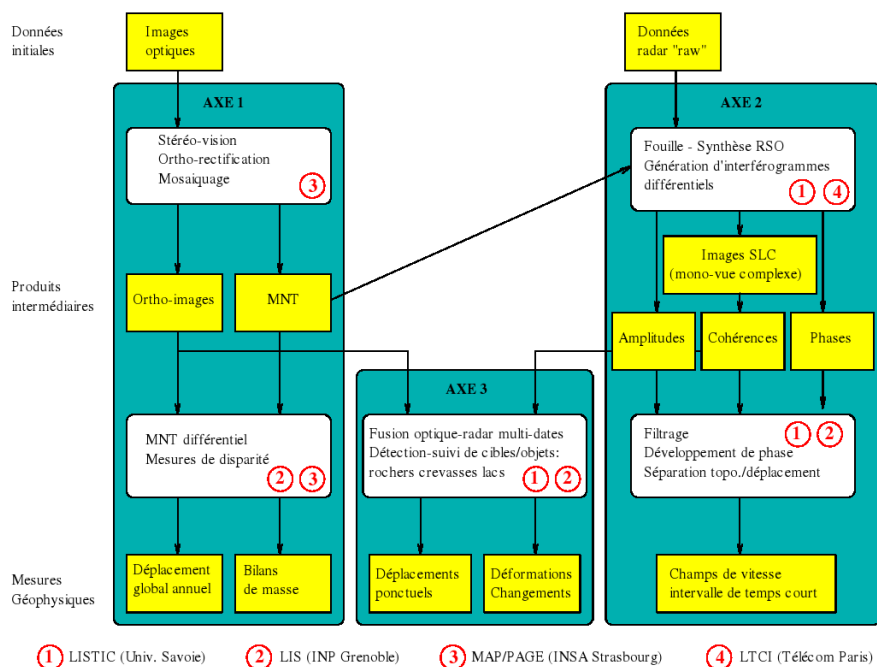


FIG. 1 – Axes de recherche du projet MEGATOR [Trou 06]

Les travaux présentés dans ce manuscrit s’organisent autour de l’axe 2 du projet MEGATOR. L’objectif est de mettre en place des traitements interférométriques pour estimer un déplacement. Ces méthodes sont appliquées sur le site test des glaciers alpins de la vallée de Chamonix/Mont-Blanc.

La haute résolution spatiale

La deuxième partie de mon travail de thèse concerne la haute résolution spatiale dans les images polarimétriques. L’avènement de satellites radar à haute résolution (ALOS, COSMO-Skymed, RADARSAT-2, TerraSAR-X) va accroître considérablement les possibilités de surveillance par imagerie spatiale sous réserve que certains verrous méthodologiques soient levés.

Ridha Touzi du Centre Canadien de Télédétection¹ (CCT) à Ottawa au Canada et Jean-Marie Beaulieu de l’Université Laval² à Québec au Canada ont eu l’idée originale d’utiliser la texture dans les images polarimétriques. En effet, avec la haute résolution spatiale, le nombre de rétrodiffuseurs présents dans chaque cellule de rétrodiffusion va diminuer considérablement. Les statistiques couramment utilisées dans la littérature (Wishart) peuvent dans ce cas être remises en cause. La deuxième partie de ma thèse a donc été consacrée à l’utilisation de la texture dans les images polarimétriques.

Ce travail a été réalisé à l’Université Laval à Québec au Canada dans le cadre du programme de mobilité des doctorants EXPLOR’DOC de la région Rhône-Alpes.

Plan

Le manuscrit de thèse s’organise en trois chapitres :

Le premier chapitre est dédié aux méthodes d’estimation de déplacement à partir d’images radar. Nous nous intéresserons dans un premier temps à l’interférométrie radar différentielle et nous en présenterons les principes.

Ces traitements interférométriques seront appliqués aux glaciers de la Vallée de Chamonix à partir d’images ERS-1/2 acquises en mission tandem. Nous détaillerons comment faire pour passer d’un déplacement projeté dans la ligne de visée du satellite en champ de déplacement tridimensionnel au sol.

L’un des principaux problèmes de l’interférométrie est que la phase interférométrique déroulée est connue à un offset près. Nous proposerons dans ce chapitre une méthode qui permet d’estimer ces offsets à partir d’une combinaison des phases interférométriques acquises en passes ascendante et descendante.

Puis, nous analyserons les franges résiduelles restantes dans les images de différences de phase entre interférogrammes différentiels. Nous mettrons en place un algorithme qui permet de tester si les franges résiduelles sont dues à la topographie. Si tel est le cas, nous montrerons qu’il est possible d’estimer l’erreur du MNT à partir d’une série d’interférogrammes différentiels.

La dernière section de ce chapitre sera consacrée aux méthodes d’offset-tracking pour estimer le déplacement à partir de deux images RSO. Nous implémenterons une méthode basée sur les réflecteurs isolés qui possèdent une réponse impulsionnelle en sinus cardinal bidimensionnel. Cette méthode sera appliquée sur des images ENVISAT pour estimer le déplacement d’un corner

¹www.ccrs.nrcan.gc.ca

²www.ulaval.ca

réflecteur installé sur le glacier d'Argentière.

Le deuxième chapitre est consacré à la polarimétrie radar. Après avoir présenté les bases de la polarimétrie, nous nous intéresserons aux représentations incohérentes afin de caractériser les différents mécanismes de rétrodiffusions mis en jeu.

Nous analyserons les deux modèles de paramétrisation du vecteur de rétrodiffusion utilisés dans la littérature : le modèle α/β introduit par S.R. Cloude et E. Pottier, et le modèle TSVM proposé par R. Touzi. Nous détaillerons comment calculer les paramètres de ces modèles à partir de la matrice de cohérence. Nous effectuerons une comparaison des paramètres de ces deux modèles dans le cas où la cible est symétrique ou non.

Enfin, nous proposerons une définition du vecteur de rétrodiffusion associé au mécanisme de rétrodiffusion moyen comme étant une combinaison linéaire des vecteurs propres de la matrice de cohérence.

Le troisième chapitre s'intéresse à la segmentation hiérarchique d'images polarimétriques, et plus précisément à l'utilisation de la texture dans les images radar.

En utilisant le modèle multiplicatif scalaire, nous proposerons d'utiliser la distribution de Fisher pour modéliser la composante de texture. Cette distribution possède la propriété intéressante d'avoir deux comportements distincts : loi à tête lourde et loi à queue lourde, permettant de modéliser différents types de milieux. En utilisant une texture distribuée selon une loi de Fisher, nous dériverons l'expression analytique de la distribution de la matrice de cohérence.

Nous implémenterons cette distribution dans un algorithme de segmentation hiérarchique d'images polarimétriques où le critère de fusion des segments est basé sur une approche de maximum de vraisemblance.

Nous évaluerons les performances de l'algorithme de segmentation hiérarchique basé sur la loi de Fisher par rapport aux autres distributions couramment utilisées dans la littérature (Wishart, \mathcal{K}) sur des images synthétiques et sur des images acquises par le capteur ESAR de l'agence aérospatiale allemande (DLR).

Le manuscrit se termine par une conclusion et des perspectives générales de ce travail de thèse.

Chapitre 1

Mesures de déplacement et interférométrie différentielle

Sommaire

1.1	Introduction	7
1.2	L'interférométrie RSO	8
1.2.1	Le principe de l'interférométrie RSO	8
1.2.2	Calcul d'un interférogramme	9
1.2.2.1	Filtrage	10
1.2.2.2	Déroulement de phase	10
1.2.3	Présentation des données	11
1.2.4	Analyse de la cohérence	14
1.3	Mesure de déplacement par interférométrie radar à partir d'une passe	17
1.3.1	Calcul de la vitesse 3D à partir de sa projection en ligne de visée du satellite (LOS)	17
1.3.1.1	Calcul de \hat{e}_{ec}	17
1.3.1.2	Calcul de \hat{e}_{LOS}	19
1.3.2	Résultats sur les images ERS-1/2	21
1.3.2.1	Calage de l'offset	21
1.3.2.2	Champ de vitesse 3-D	22
1.3.3	Évaluation des performances	22
1.3.3.1	Incertitudes liées aux données et aux traitements	22
1.3.3.2	Hypothèse d'écoulement parallèle à la surface des glaciers et dans la ligne de plus grande pente	23
1.4	Combinaison des passes ascendante et descendante pour estimer les offsets	28
1.4.1	Positionnement du problème	28
1.4.2	Résultats	30
1.4.2.1	Sur une image simulée	30
1.4.2.2	Sur un couple d'images ERS-1/2	31
1.5	Analyse des franges résiduelles	34
1.5.1	Principe de la méthode	34
1.5.2	Résultats	37
1.5.2.1	Sur des images simulées	37
1.5.2.2	Sur une série d'images ERS-1/2	39

1.5.2.3	Résultat sur le lac de Serre-Ponçon	42
1.6	Méthodes d'offset-tracking	46
1.6.1	Principe	46
1.6.2	Résultat sur des images ENVISAT	47
1.7	Conclusion	50

1.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser aux méthodes d'estimation de déplacement à partir d'images radar. L'interférométrie radar à synthèse d'ouverture (RSO) a très tôt été employée pour mesurer des déplacements de glaciers dans des zones polaires [Gold 93] [Joug 98] [Reeh 03]. En revanche, très peu de résultats ont été publiés sur les glaciers tempérés [Matt 98] [Rign 96].

Le contexte des glaciers tempérés, comme les glaciers alpins, diffère de celui des glaciers polaires pour différentes raisons [Trou 06] [Trou 07] :

- Le contexte de fort relief réduit la visibilité des glaciers alpins à cause des phénomènes d'ombre et de repliement.
- La petite taille des glaciers alpins (environ 10km de long pour 1 à 2km de large) augmente le risque de morcellement des glaciers en régions déconnectées par des zones où la phase est inexploitable.
- La température de la glace est proche de 0°C pour les glaciers alpins alors qu'elle est fortement négative pour les glaciers polaires, ce qui limite fortement les possibilités de l'interférométrie.

Ces différences de contexte conditionnent certaines étapes de traitements des données interférométriques telles que le filtrage ou le déroulement de phase. Le travail proposé dans ce chapitre concerne l'étude de la faisabilité de l'interférométrie RSO appliquée aux glaciers alpins pour l'obtention d'un champ de déplacement.

La première partie de ce chapitre est consacrée à une présentation générale des principes de l'interférométrie RSO. Nous allons ensuite appliquer ces méthodes pour estimer le déplacement des glaciers de la vallée de Chamonix à partir d'images ERS-1/2 acquises en mission tandem. Puis nous évaluerons les performances en analysant les différentes sources d'erreurs liées aux traitements des images et aux hypothèses simplificatrices utilisées pour estimer les trois composantes du déplacement sol.

Un des problèmes majeurs de l'interférométrie RSO est que la phase interférométrique déroulée est connue à un offset près. Il est nécessaire d'avoir un point de recalage pour pouvoir caler la phase et ensuite estimer le déplacement au sol. Dans ce chapitre, nous proposerons une méthode d'estimation des offsets sur les passes ascendante et descendante. Elle repose sur le fait qu'un ensemble de pixels est visible dans les deux passes du satellite (ascendante et descendante) et que l'on a une connaissance *a priori* sur la direction de l'écoulement du glacier. Nous montrerons les résultats de cette méthode sur des images synthétiques ainsi que sur un interférogramme acquis en mission tandem.

La troisième partie de ce chapitre est dédiée à l'analyse des franges résiduelles présentes dans les images de différence de phase entre interférogrammes différentiels. Nous proposerons un algorithme qui permet de détecter si les franges résiduelles sont des franges topographiques qui ne sont pas correctement prises en compte par le modèle numérique de terrain (MNT). Si tel est le cas, nous montrerons qu'il est possible d'estimer l'erreur du MNT à partir d'une série d'images de différences de phase entre interférogrammes différentiels. Nous montrerons les résultats sur des images synthétiques ainsi que sur des interférogrammes ERS-1/2.

La dernière partie de ce chapitre est consacrée aux méthodes d’offset-tracking pour estimer le déplacement à partir de deux images RSO. On s’intéresse plus précisément ici à l’estimation du déplacement d’un corner réflecteur installé sur le glacier d’Argentière en février 2007. Nous disposons de deux images ENVISAT acquises à 350 jours d’intervalle. Nous avons implémenté la méthode proposée par F. Serafino en 2006 [Sera 06] qui consiste à estimer le déplacement par corrélation d’amplitude avec la réponse idéale du corner réflecteur : un sinus cardinal en deux dimensions.

1.2 L’interférométrie RSO

L’interférométrie RSO est une technique qui exploite les interférences entre plusieurs sources cohérentes dans le but d’extraire des informations sur l’objet géophysique étudié au moyen de la phase du signal radar.

Dans les années 1980, l’interférométrie a été appliquée avec succès sur des données satellitaires pour effectuer des mesures topographiques [Zebk 86]. Depuis, les missions satellitaires se sont multipliées. Par exemple, les acquisitions radar des satellites ERS-1 et ERS-2 prises à un jour d’intervalle (mission tandem) ont permis d’estimer très précisément le déplacement d’objets géophysiques tels que les phénomènes de subsidence, le déplacement des glaciers, ou encore les mouvements tectoniques [Mass 93].

Nous allons maintenant présenter le principe de l’interférométrie RSO.

1.2.1 Le principe de l’interférométrie RSO

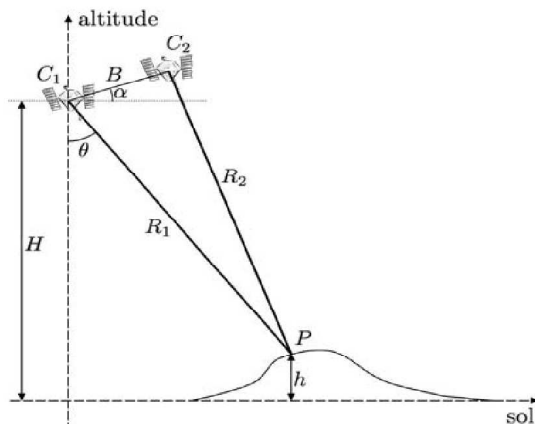


FIG. 1.1 – Géométrie utilisée en interférométrie RSO [Guil 03]

La figure 1.1 montre la géométrie utilisée en interférométrie RSO [Guil 03]. Soient C_1 et C_2 deux capteurs qui imagent une même scène au sol. Les deux capteurs sont séparés par une "baseline" interférométrique B . Soit P une cible située à une hauteur h . P est situé respectivement à une distance radiale R_1 et R_2 des capteurs C_1 et C_2 . θ est l’angle de visée du capteur C_1 et α est défini comme étant l’angle entre la base interférométrique B et l’horizontale.

Soient $u_1(r, a)$ et $u_2(r, a)$ les deux images RSO acquises par les capteurs C_1 et C_2

$$u_i(r, a) = |u_i(r, a)| e^{j\Phi_i(r, a)} \quad \text{où } i = \{1, 2\} \quad (1.1)$$

avec r et a respectivement les positions en distance (range) et azimut du pixel considéré. La phase d'une image RSO se décompose comme la somme de deux termes exprimée par :

$$\Phi_i(r, a) = \Phi_i^{propree}(r, a) + \frac{4\pi}{\lambda} R_i \quad (1.2)$$

$\Phi_i^{propree}(r, a)$ correspond au déphasage introduit par l'interaction entre l'onde et la cible. Le second terme correspond au trajet aller-retour de l'onde.

L'interférométrie RSO repose sur le fait que les phases propres des deux images RSO sont égales ($\Phi_1^{propree}(r, a) \approx \Phi_2^{propree}(r, a)$). La phase interférométrique $\Delta\Phi(r, a)$ est directement reliée à la différence de trajet $\Delta R = R_1 - R_2$ par :

$$\Delta\Phi(r, a) = \Phi_1(r, a) - \Phi_2(r, a) \approx \frac{4\pi}{\lambda} (R_1 - R_2) = \frac{4\pi}{\lambda} \Delta R \quad (1.3)$$

Les informations contenues dans la phase interférométrique proviennent de plusieurs contributions. Cette phase peut s'écrire comme la somme de cinq termes par [Mass 93] :

$$\Delta\Phi(r, a) = \Phi^{orb} + \Phi^{topo} + \Phi^{depl} + \Phi^{atm} + \Phi^{bruit} \quad (1.4)$$

où Φ^{orb} correspond à la phase orbitale (ou phase de terrain plat), Φ^{topo} la phase topographique, Φ^{depl} le terme dû à un déplacement, Φ^{atm} la phase atmosphérique et Φ^{bruit} le terme de phase résiduelle considéré comme du bruit.

Les phases topographique et orbitale sont deux composantes déterministes que l'on peut retirer de l'interférogramme si lors de la synthèse radar, on injecte dans la chaîne de traitement un MNT et les orbites précises.

En considérant le cas où les acquisitions radar ne sont pas simultanées mais avec un écart de temps ΔT , une zone imagée par le radar peut s'être déplacée durant ce laps de temps¹. En considérant les effets atmosphériques (Φ^{atm}) et les modifications de l'interaction entre l'onde et les cibles (Φ^{bruit}) comme négligeables et après avoir injecté un MNT et les orbites précises durant la synthèse radar, la phase interférométrique résultante contient uniquement la contribution du déplacement. Le terme Φ^{depl} s'exprime alors à l'aide du déplacement tridimensionnel au sol projeté dans la ligne de visée du satellite (LOS²) par :

$$\Delta\Phi \approx \Phi^{depl} = \frac{4\pi}{\lambda} d_{LOS} \quad (1.5)$$

1.2.2 Calcul d'un interférogramme

En notant u_1 et u_2 les deux images acquises par le radar, on définit la cohérence interférométrique ρ et la phase interférométrique ϕ par :

$$C = \rho e^{j\phi} = \frac{E\{u_1 u_2^*\}}{\sqrt{E|u_1|^2 E|u_2|^2}} \quad (1.6)$$

¹Par exemple, dans les cas des satellites ERS-1 et ERS-2 en mission tandem, ΔT est égale à un jour.

²Line Of Sight en anglais

En utilisant l’hypothèse d’ergodicité, on remplace l’espérance mathématique E par un moyennage spatial de L réalisations³. La cohérence et la phase interférométrique sont ainsi définies par :

$$\rho = \frac{\left| \sum_{i=1}^L u_1 u_2^* \right|}{\sqrt{\sum_{i=1}^L |u_1|^2 \sum_{i=1}^L |u_2|^2}} \text{ et } \phi = \arg \left\{ \sum_{i=1}^L u_1 u_2^* \right\} \quad (1.7)$$

Dans la suite de ce chapitre, les interférogrammes seront générés avec le logiciel ROI-PAC⁴ du Jet Propulsion Laboratory (JPL) [Rose 00]. Ce logiciel traite les images RAW en utilisant le MNT ainsi que les orbites du satellites. Ces orbites précises sont fournies par l’Université de Delft [Scha 98] et permettent de compenser les franges orbitales présentes dans l’interférogramme. Le MNT est utilisé pour retirer les franges topographiques de l’interférogramme et géoréférencer les produits interférométriques (amplitude, phase et cohérence).

1.2.2.1 Filtrage

La présence du chatoiement (ou speckle) dans les images radar nuit à la perception des détails et à l’estimation de paramètres tels que la cohérence interférométrique [Touz 99]. De nombreux filtres ont été proposés dans la littérature tels que les filtres de Lee [Lee 81] [Lee 83] [Lee 08]. Dans ce chapitre, nous utiliserons le filtre IDAN⁵ proposé par G. Vasile *et al.* [Vasi 04] [Vasi 06]. Ce filtre est basé sur le concept de voisinage adaptatif. Le principe est d’effectuer pour chaque pixel une croissance de région avec un test d’agrégation. L’algorithme permet de filtrer les images radar en moyennant des pixels qui appartiennent à une même population.

1.2.2.2 Déroulement de phase

Comme la phase interférométrique $\Delta\Phi(r, a)$ est connue modulo 2π , il est nécessaire de procéder à une étape de déroulement de phase pour convertir une image de phase enroulée en champ de déplacement en géométrie radar. Deux grandes approches de développement de phase ont été proposées dans la littérature [Trou 96] :

- Le développement par propagation le long de chemins les plus sûrs avec placement de coupures [Gold 88] pour interdire le passage par des zones de sources d’erreurs possibles. Cette méthode a l’avantage d’être exacte tant qu’aucune ”marche” n’est omise. Dans le cas contraire, les erreurs se propagent et les zones sont affectées d’une erreur égale à un multiple de 2π [Trou 06].
- L’approche globale par moindres carrés qui minimise l’écart entre le gradient de la phase repliée et le gradient de la phase développée [Ghig 94]. Cette approche conduit à un résultat global dans lequel les sources d’erreur (les gradients de phase mal corrigés ou mal estimés) ont un impact local avec une décroissance en $1/R^2$ où R est la distance à la source

³Dans le cas des images ERS, nous appliquons un moyennage spatial 5×1

⁴Repeat Orbit Interferometry PACkage

⁵Intensity Driven Adaptative Neighborhood

TAB. 1.1 – Baseline perpendiculaire et altitude d’ambiguïté (en mètres)

dates	B_{\perp} (m)	e_a (m)
95.07.09/95.07.10	-29	298
95.10.22/95.10.23	-107	81
95.12.31/96.01.01	208	42
96.03.10/96.03.11	9	960
96.04.14/96.04.15	93	93

d’erreur [Trou 06].

Dans ce chapitre, nous utiliserons une approche globale pour effectuer le déroulement de la phase [Trou 98].

1.2.3 Présentation des données

Les glaciers alpins de la vallée de Chamonix/Mont-Blanc sont les sites tests utilisés dans le cadre du projet MEGATOR⁶. L’un des objectifs de ce projet est d’essayer d’estimer le déplacement des glaciers à partir d’acquisitions satellitaires radar.

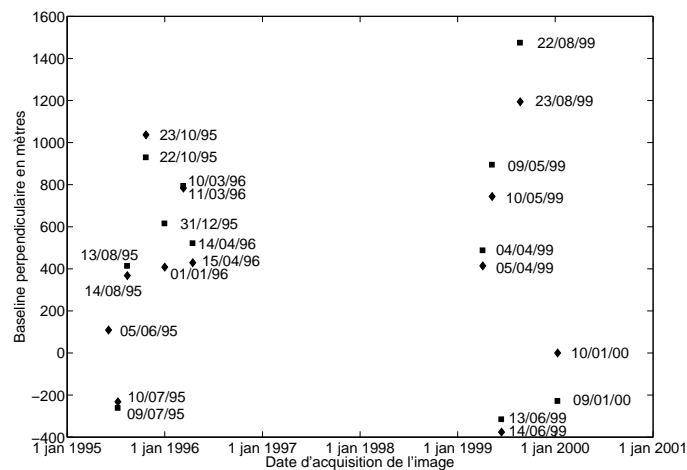
Nous allons ainsi générer en utilisant ROI-PAC des interférogrammes à partir des images RAW des satellites ERS-1 et ERS-2. Nous disposons de 23 images en passe descendante et de 14 images en passe ascendante sur le site test du glacier d’Argentière. Les figures 1.2(a) et 1.2(b) montrent les images ERS disponibles acquises en passes descendante et ascendante en fonction de la baseline perpendiculaire B_{\perp} . Les carrés correspondent aux images du satellite ERS-1, et les diamants aux images du satellite ERS-2.

Par la suite, on analysera plus particulièrement une série composée de cinq interférogrammes générés à partir d’images acquises pendant la mission tandem. Cette série couvre la période de juillet 1995 à avril 1996. Ces cinq couples ont été choisis car ils permettent de couvrir quasiment une année d’étude des glaciers. Le tableau 1.1 montre les ”baseline” perpendiculaires pour les cinq couples. La ”baseline” perpendiculaire doit être faible pour que la composante topographique résiduelle soit négligeable. Les couples de juillet 1995 et de mars 1996 sont ceux qui possèdent les ”baseline” perpendiculaires la plus faible, ce qui conduit à une altitude d’ambiguïté⁷ de plusieurs centaines de mètres. L’influence de la topographie sur la phase interférométrique sera minime pour ces deux couples.

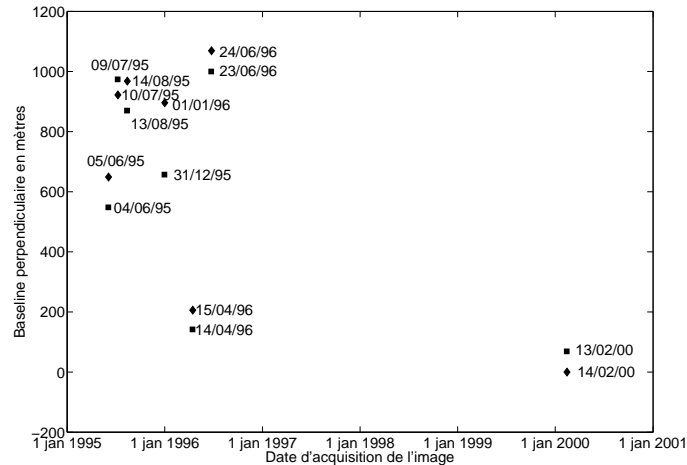
La figure 1.3(a) représente l’image d’amplitude du 10 mars 1996 en passe descendante obtenue avec ROI-PAC. La figure 1.3(b) montre les neuf glaciers visibles en passe descendante par les satellites ERS-1 et ERS-2.

⁶Mesure de l’Évolution des Glaciers Alpins par Télédétection Optique et Radar, www.gipsa-lab.inpg.fr/megator

⁷Différence d’altitude qui introduit un déphasage de 2π sur la phase interférométrique



(a)



(b)

FIG. 1.2 – Images ERS-1 et ERS-2 disponibles, tracées en fonction de la "baseline" perpendiculaire B_{\perp} en mètres référencée par rapport à la dernière image : (a) en passe descendante et (b) en passe ascendante.

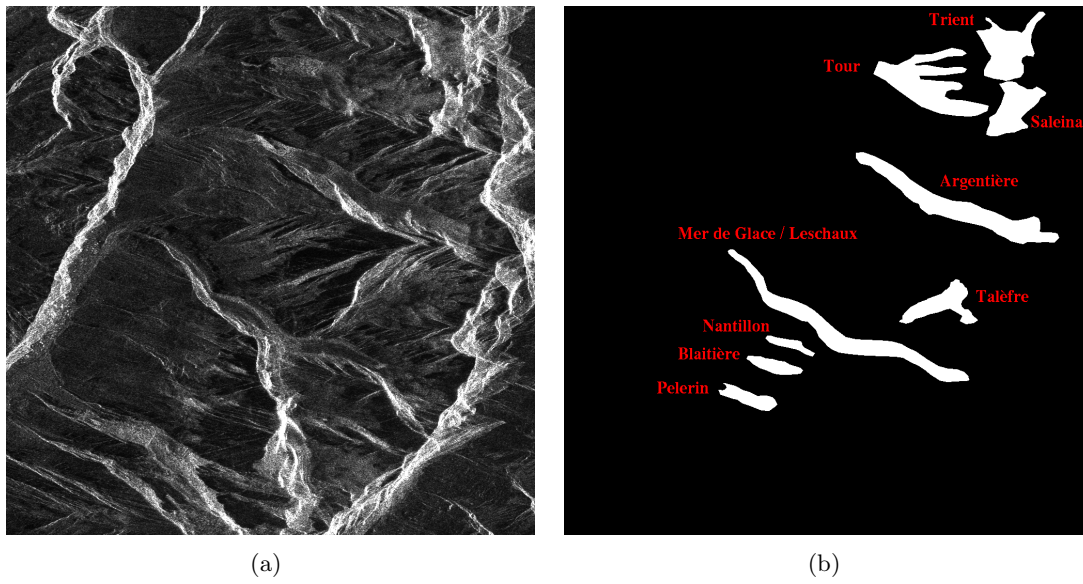


FIG. 1.3 – (a) image d'amplitude du 10 mars 1996 et (b) masque des glaciers

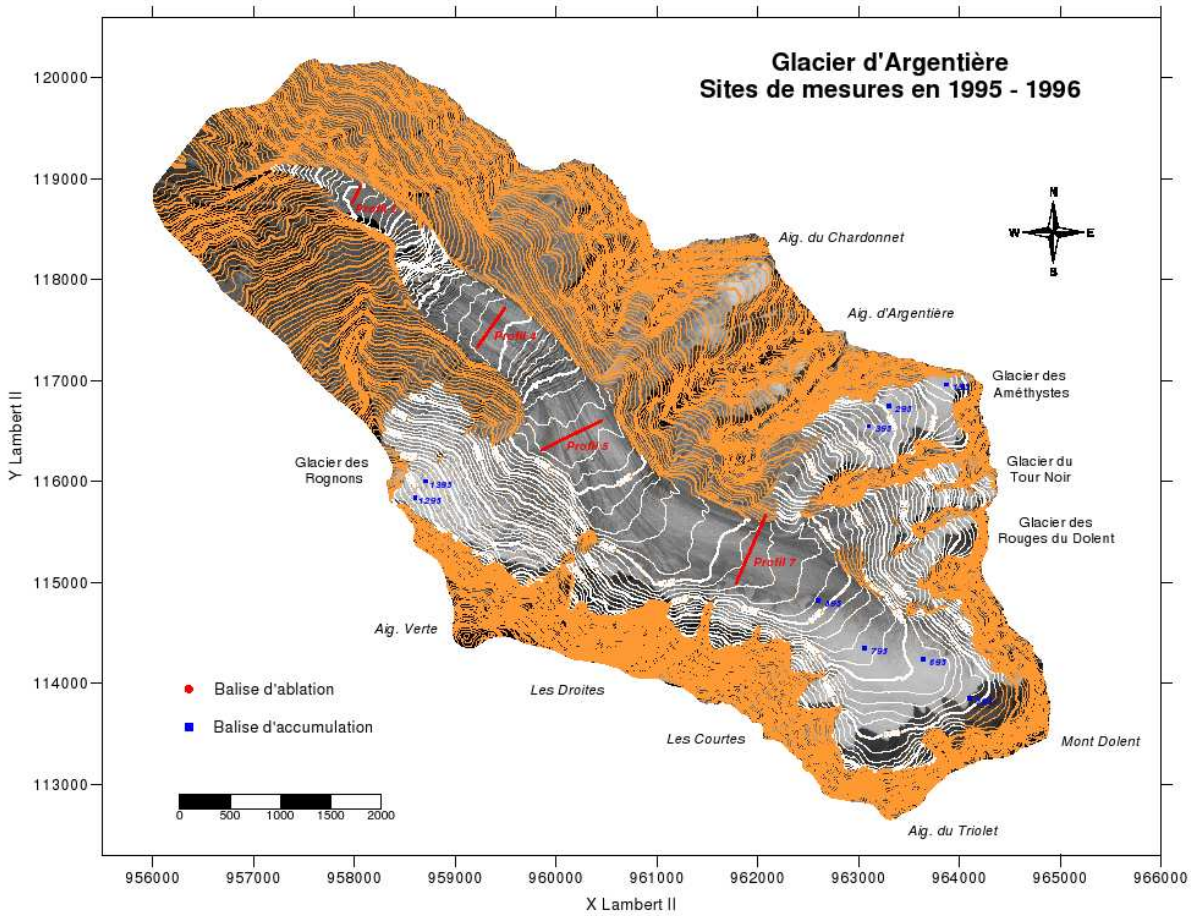


FIG. 1.4 – Le glacier d'Argentière ©GLACIOCLIM

1.2.4 Analyse de la cohérence

Comme la cohérence (équation 1.7) est une mesure de confiance de la phase interférométrique, il est intéressant d’analyser cette information pour les 5 interférogrammes ERS-1/2 obtenus de juillet 1995 à avril 1996 dans la vallée de Chamonix.

TAB. 1.2 – Pourcentage de pixels possédant une cohérence ≥ 0.5

date	nom du glacier		zones non glaciaires
	Mer de Glace Leschaux	Argentière	
Juillet 1995	5.33	0.70	38.65
Octobre 1995	27.75	37.17	39.28
Décembre 1995	2.45	1.49	7.34
Mars 1996	35.05	44.94	32.20
Avril 1996	1.37	34.90	9.41

Pour quantifier la cohérence interférométrique présente dans les interférogrammes, nous avons calculé pour chaque couple le pourcentage de pixel qui possède une cohérence supérieure ou égale à 0.5⁸. Le tableau 1.2 montre ces résultats sur des zones non glaciaires ainsi que sur les glaciers de la Mer de Glace/Leschaux et d’Argentière. Un masque de visibilité a été utilisé pour prendre en compte uniquement les zones visibles par les satellites ERS-1/2.

Parmi les cinq images de cohérence interférométrique montrées dans la figure 1.5, le couple de mars 1996 (figure 1.5(d)) est celui qui la préserve le mieux. En effet, 45% des pixels du glacier d’Argentière possèdent une cohérence supérieure ou égale à 0.5 (cf : table 1.2). Cela s’explique par le fait que le couple du 10 et 11 mars 1996 est celui qui possède la baseline perpendiculaire la plus petite ($B_{\perp} = 9m$) (cf table 1.1) et aussi par le fait que les images sont acquises en hiver. La décorrélation due à la topographie est minimale pour ce couple.

L’interférogramme de décembre 1995 montre une chute de cohérence par rapport à celui de mars 1996. Cette perte de cohérence est visible sur les glaciers (2%) et sur les zones non glaciaires (7%). La valeur élevée de la baseline perpendiculaire pour ce couple ($B_{\perp} = 208m$) entraîne une décorrélation volumique importante, et cela explique cette perte de cohérence.

Pour les périodes plus chaudes (octobre et avril), la cohérence est préservée uniquement sur les parties hautes du glacier. En effet, à basse altitude, les températures sont plus élevées et conduisent à un changement d’état de surface du glacier, ce qui entraîne la perte de la cohérence interférométrique. De même, durant l’été, la cohérence n’est pas préservée sur les glaciers.

En avril 1996, la cohérence est préservée uniquement sur la partie haute du glacier d’Argentière. En effet, 35% des pixels du glacier d’Argentière possèdent une cohérence supérieure ou égale à 0.5, alors que ce pourcentage est de 1% pour le glacier de la Mer de Glace/Leschaux. Comme l’altitude de la partie haute du glacier d’Argentière (3200 m) est plus élevée que celle sur

⁸Le choix d’un seuil à 0.5 a été fixé de façon empirique. On considère que la cohérence est préservée lorsque celle-ci est supérieure ou égale à ce seuil.

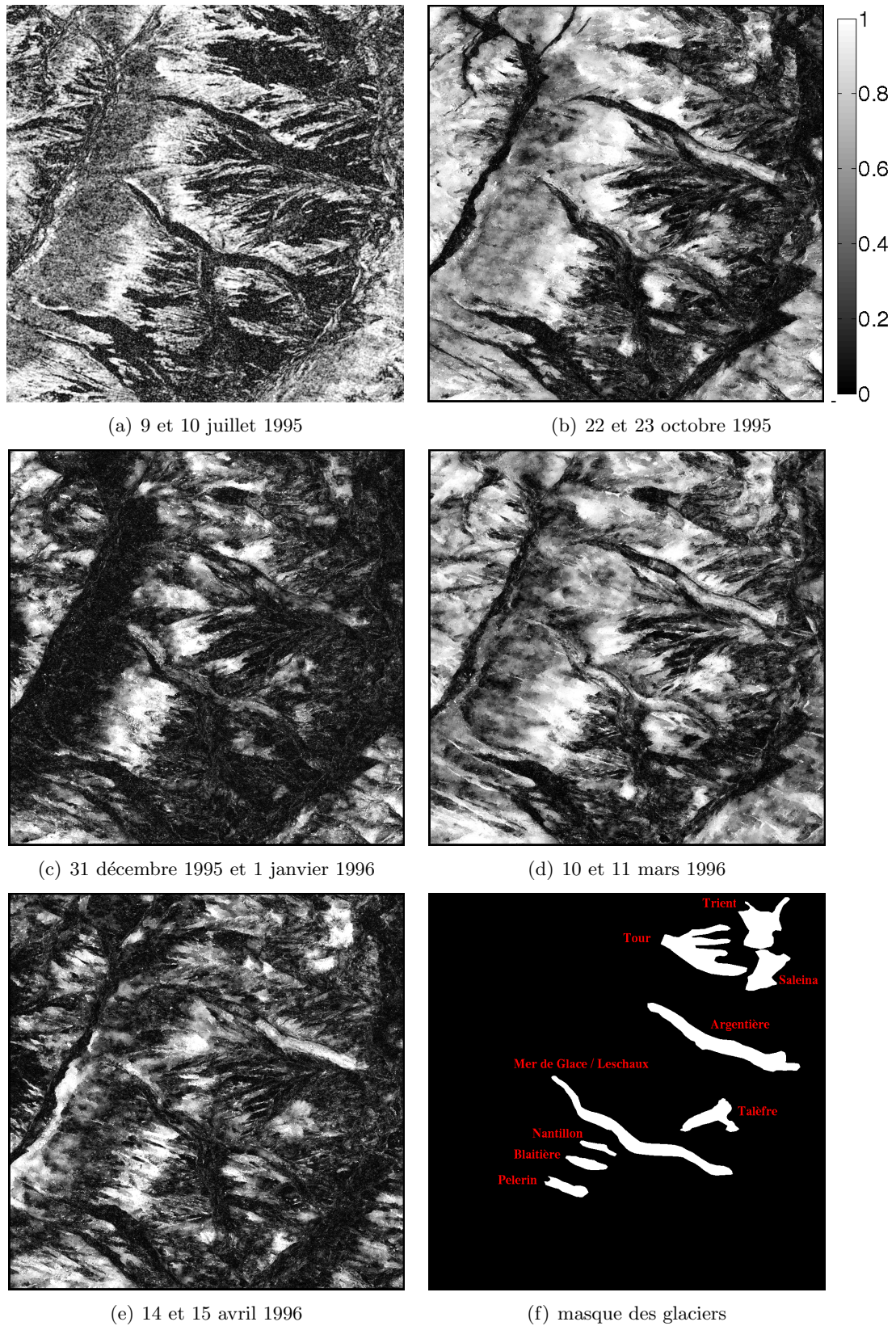


FIG. 1.5 – Analyse de la cohérence interférométrique : (a) 9 et 10 juillet 1995, (b) 22 et 23 octobre 1995, (c) 31 décembre 1995 et 1 janvier 1996, (d) 10 et 11 mars 1996, (e) 14 et 15 avril 1996 et (f) masque des glaciers

le glacier de la Mer de Glace/Leschaux (2400m), nous pouvons en déduire que la préservation de la cohérence est en partie dépendante de l'altitude du glacier.

Influence de l'altitude et de la pente sur la cohérence interférométrique La figure 1.6 montre la valeur de la cohérence moyenne des cinq interférogrammes en fonction de l'altitude sur le glacier d'Argentière (figure 1.6(a)) et sur les zones non glaciaires (figure 1.6(b)).

Le couple de décembre 1995 (trait vert) possède une cohérence relativement faible. Cette faible cohérence est présente pour les zones non glaciaires et pour le glacier d'Argentière. Cela s'explique par le fait que la baseline perpendiculaire est grande pour ce couple.

Pour le couple de juillet 1995 (trait noir), la cohérence est bien préservée sur les zones non glaciaires. Ce n'est pas le cas à la surface des glaciers où le changement d'état de surface entre les deux acquisitions est trop important pour permettre de préserver la cohérence.

Pour les couples d'octobre 1995 (en jaune), de mars 1996 (en bleu) et d'avril 1996 (en rouge), la cohérence augmente avec l'altitude du glacier d'Argentière. Plus le glacier est élevé, meilleure est la cohérence. En revanche, pour le glacier d'Argentière, on peut remarquer qu'à partir de 2900m d'altitude, la cohérence chute. Cela est dû à la pente (trait gris) qui est relativement raide sur la partie haute du glacier d'Argentière (entre 20° et 30°).

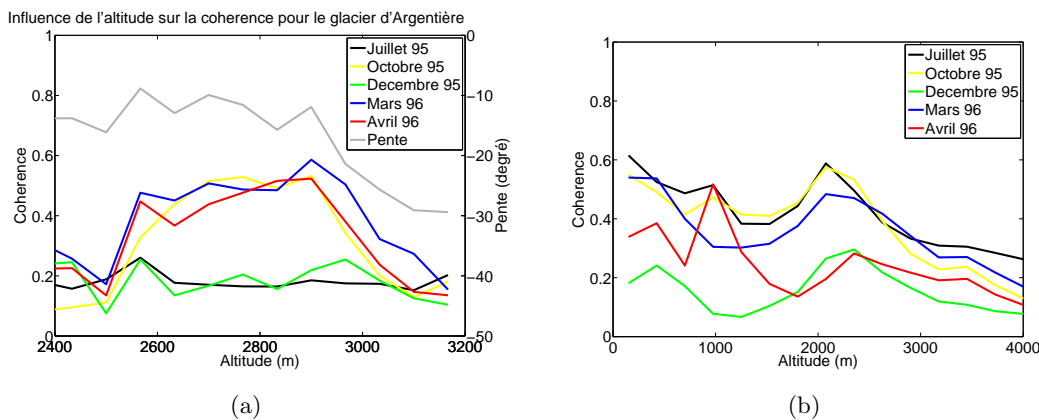


FIG. 1.6 – Influence de l'altitude sur la cohérence interférométrique. (a) sur le glacier d'Argentière, (b) sur les zones non glaciaires

Cette analyse de la cohérence interférométrique sur les cinq couples montre que l'interférométrie radar peut être appliquée sur les glaciers alpins en hiver. Il est cependant nécessaire d'avoir une baseline perpendiculaire assez faible ($\leq 200\text{m}$) pour pouvoir préserver la cohérence. Pour les périodes où les températures sont plus élevées (au printemps et en automne), la cohérence est préservée uniquement sur les parties hautes et pour des pentes inférieures à 23°.

Après avoir brièvement présenté le principe de l'interférométrie RSO, nous venons de voir que la cohérence est préservée en certains endroits des glaciers. C'est pourquoi, nous allons maintenant nous intéresser à l'estimation du déplacement des glaciers par interférométrie radar aux endroits où la phase interférométrique est exploitable.

1.3 Mesure de déplacement par interférométrie radar à partir d'une passe

Après compensation des termes qui ne sont pas liés au déplacement (cf Eq.1.4), la phase interférométrique déroulée est reliée à la projection du déplacement au sol dans la ligne de visée du satellite (d_{LOS}) par :

$$\Phi = \frac{4\pi}{\lambda} d_{LOS} \quad (1.8)$$

1.3.1 Calcul de la vitesse 3D à partir de sa projection en ligne de visée du satellite (LOS)

La dernière étape de la chaîne de traitement interférométrique est la conversion du déplacement mesuré dans la ligne de visée du satellite par interférométrie radar en déplacement 3D. L'équation 1.8 traduit la composante mesurée par interférométrie radar comme étant égale à la projection du déplacement sur l'axe de visée du satellite. La phase interférométrique donne donc une seule composante du déplacement au sol. Par conséquent, il est nécessaire de faire des hypothèses sur l'écoulement du glacier pour pouvoir estimer les trois composantes du vecteur vitesse.

Les deux hypothèses que nous proposons dans le cas des glaciers sont :

- hypothèse 1 : L'écoulement s'effectue selon la ligne de plus grande pente.
- hypothèse 2 : Il n'y a pas d'ablation durant le temps ΔT qui sépare les deux acquisitions d'images radar ($\Delta T = 1$ jour pour le satellite ERS-1/2 en mission tandem)

Dans la suite, nous noterons \hat{e}_{LOS} le vecteur unitaire du déplacement dans la ligne de visée du satellite et \hat{e}_{ec} le vecteur unitaire d'écoulement au sol. La formule 1.8 montre que le déplacement mesuré par interférométrie radar (v_{LOS}) est la projection de la vitesse 3D ($v_{ec}\hat{e}_{ec}$). On peut donc écrire la relation suivante :

$$v_{ec} = \frac{v_{LOS}}{\hat{e}_{LOS} \cdot \hat{e}_{ec}} \quad (1.9)$$

et

$$v_{LOS} = \frac{d_{LOS}}{\Delta T}$$

Pour pouvoir calculer l'équation 1.9, on a besoin d'exprimer \hat{e}_{ec} et \hat{e}_{LOS} à partir de données connues.

1.3.1.1 Calcul de \hat{e}_{ec}

Nous désirons exprimer le vecteur unitaire d'écoulement \hat{e}_{ec} en émettant les hypothèses que l'écoulement s'effectue selon la ligne de plus grande pente et sans ablation.

Tout d'abord, nous exprimons les composantes en x et y du gradient notés respectivement g_x et g_y par :

$$g_x = \frac{\partial MNT}{\partial x} = \frac{1}{4} \frac{1}{pas_{Lat}} \nabla_x \quad (1.10)$$

$$g_y = \frac{\partial MNT}{\partial y} = \frac{1}{4} \frac{1}{pas_{Long}} \nabla_y \quad (1.11)$$

où pas_{Lat} et pas_{Long} représentent respectivement les pas en latitude et en longitude, ∇_x et ∇_y sont la sortie de la convolution du MNT par l'opérateur Sobel défini par :

$$\nabla_x : \begin{array}{|c|c|c|} \hline -1 & -2 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 1 \\ \hline \end{array} \quad (1.12)$$

$$\nabla_y : \begin{array}{|c|c|c|} \hline -1 & 0 & 1 \\ \hline -2 & 0 & 2 \\ \hline -1 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \quad (1.13)$$

Les gradients g_x et g_y sont obtenus en lissant le MNT sur une fenêtre de taille $250\text{m} \times 250\text{m}$ ⁹. Nous utilisons un masque du glacier dans le but de limiter le calcul des pentes strictement au glacier (sans empiéter sur les moraines).

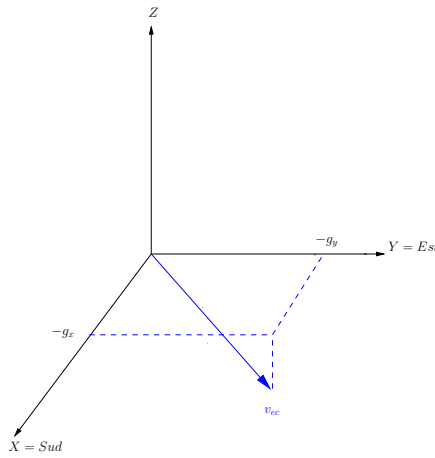


FIG. 1.7 – Géométrie utilisée pour exprimer \hat{e}_{ec} dans le repère (x,y,z) .

Il est alors possible d'écrire à partir des équations 1.10 et 1.11 et de la figure 1.7, les vecteurs directeurs \vec{S}_x et \vec{S}_y des plans tangents au vecteur d'écoulement \hat{e}_{ec} .

$$\vec{S}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ g_x \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{S}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ g_y \end{pmatrix} \quad (1.14)$$

La composante normale \vec{n} au vecteur écoulement est obtenue en effectuant le produit vectoriel entre \vec{S}_x et \vec{S}_y . Ainsi,

$$\vec{n} = \vec{S}_x \wedge \vec{S}_y = \begin{pmatrix} -g_x \\ -g_y \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1.15)$$

Ensuite, pour obtenir le vecteur \vec{t} tangentiel à la surface dans la ligne de plus grande pente, il faut chercher \vec{t} de telle façon que le produit scalaire entre \vec{n} et \vec{t} soit nul. Tout d'abord, on connaît les deux composantes du vecteur \vec{t} selon x et y car il s'agit respectivement de g_x et g_y . On peut donc écrire le vecteur \vec{t} de la façon suivante :

$$\vec{t} = \begin{pmatrix} g_x \\ g_y \\ t_z \end{pmatrix}$$

⁹250m a été choisi pour permettre de bien lisser le MNT et de ne garder que sa composante basse fréquence.

On a donc une inconnue qui est la composante tangentielle selon l'axe z et une équation ($\vec{n} \cdot \vec{t} = 0$). On peut donc résoudre le système pour obtenir le résultat suivant :

$$-g_x^2 - g_y^2 + t_z = 0$$

Le vecteur \vec{t} tangentiell tangentiell à la surface dans la ligne de plus grande pente s'écrit donc :

$$\vec{t} = \begin{pmatrix} g_x \\ g_y \\ g_x^2 + g_y^2 \end{pmatrix}$$

La figure 1.7 montre que le vecteur unitaire \hat{e}_{ec} est dirigé dans la direction opposée à \vec{t} . On obtient par conséquent la formule littérale suivante en normalisant le vecteur :

$$\hat{e}_{ec} = \frac{1}{\sqrt{g_x^2 + g_y^2 + (g_x^2 + g_y^2)^2}} \begin{pmatrix} -g_x \\ -g_y \\ -(g_x^2 + g_y^2) \end{pmatrix} \quad (1.16)$$

1.3.1.2 Calcul de \hat{e}_{LOS}

Les figures 1.8, 1.9 et 1.10 montrent le vecteur unitaire de déplacement dans la ligne de visée du satellite (\hat{e}_{LOS}) dans le repère (x, y, z) . L'angle θ_h correspond à l'incidence horizontale et l'angle θ_v à l'incidence verticale.

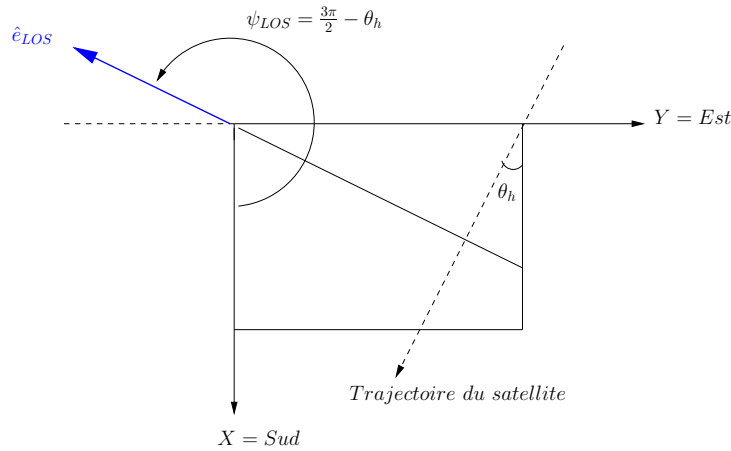


FIG. 1.8 – Géométrie utilisée pour exprimer \hat{e}_{LOS} dans le repère (x, y, z) dans le cas d'une trajectoire descendante.

D'après les conventions établies et décrites par les figures 1.8, 1.9 et 1.10, on peut exprimer le vecteur unitaire \hat{e}_{LOS} de la façon suivante :

$$\hat{e}_{LOS} = \begin{pmatrix} \sin \theta_v \cos \psi_{LOS} \\ \sin \theta_v \sin \psi_{LOS} \\ -\cos \theta_v \end{pmatrix} \quad (1.17)$$

Avec ψ_{LOS} qui est défini de la façon suivante :

$$\psi_{LOS} = \begin{cases} \frac{3\pi}{2} - \theta_h & \text{si trajectoire descendante} \\ \frac{\pi}{2} + \theta_h & \text{si trajectoire ascendante} \end{cases}$$

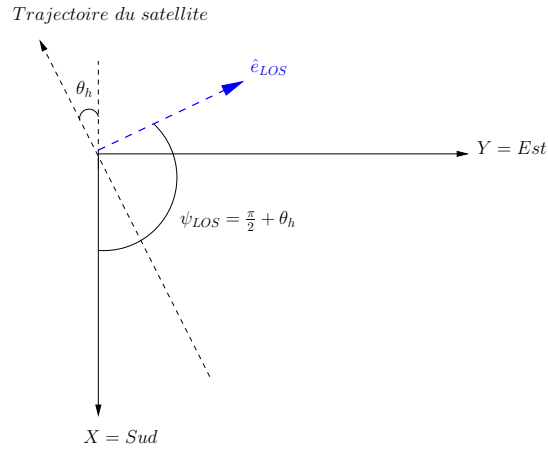


FIG. 1.9 – Géométrie utilisée pour exprimer \hat{e}_{LOS} dans le repère (x, y, z) dans le cas d'une trajectoire ascendante.

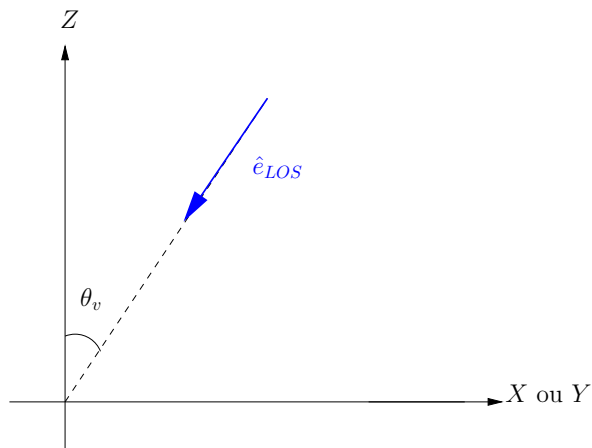


FIG. 1.10 – Géométrie utilisée pour exprimer \hat{e}_{LOS} dans le repère (x, y, z) .

En utilisant les équations 1.9, 1.16 et 1.17, on peut estimer les trois composantes du vecteur vitesse à partir du déplacement mesuré dans la ligne de visée du satellite, d'un modèle numérique de terrain et de deux hypothèses sur l'écoulement du glacier.

Il est à noter que l'on retrouve les formules proposées par B.T. Rabus et D.R. Fatland [Rabu 00] dans le cas particulier des passes ascendantes. Dans cette partie, on vient d'étendre la conversion de la vitesse projetée dans la ligne de visée du satellite à une estimation des trois composantes de la vitesse au sol pour tous types de passes.

1.3.2 Résultats sur les images ERS-1/2

1.3.2.1 Calage de l'offset

La phase interférométrique, représentative du champ de déplacement est connue modulo 2π , on doit trouver le bon multiple de 2π à ajouter sur la phase interférométrique pour pouvoir ensuite projeter le déplacement au sol. Ici, le développement de phase est réalisé par une méthode de moindres carrés qui minimise l'écart entre le gradient de la phase repliée et le gradient de la phase développée [Trou 98]. Une fois cette étape de déroulement de phase effectuée, nous devons connaître l'offset à appliquer sur chaque composante de la phase interférométrique.

En pratique, deux solutions s'offrent à nous :

- Soit on connaît une zone de vitesse nulle.
- Soit on possède une mesure de déplacement ponctuelle *in situ* (balise, mesure GPS, offset tracking d'une cible particulière, ...).

Le glacier d'Argentière ne possédant pas de zone de vitesse nulle, nous allons donc étudier les mesures *in situ* disponibles pour connaître l'offset de la phase. La figure 1.11 montre la valeur de la vitesse annuelle du glacier d'Argentière de 1994 à 2004 à 4 endroits.

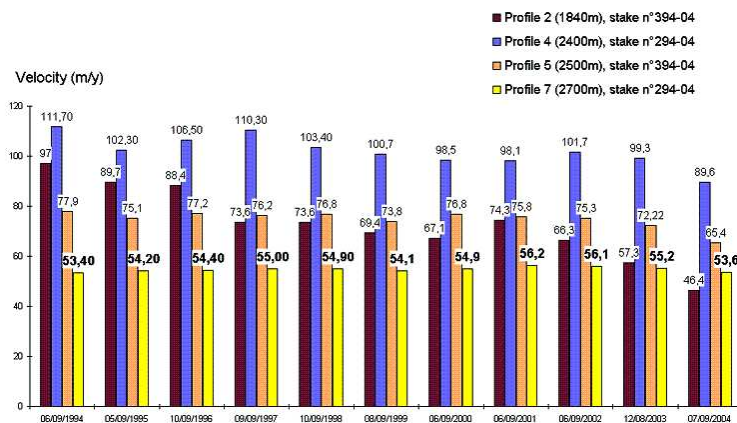


FIG. 1.11 – Comparaison des vitesses annuelles du glacier d'Argentière de 1994 à 2004

Dans la partie haute du glacier d'Argentière (profil 7 à 2700m¹⁰), nous pouvons considérer la vitesse annuelle comme stationnaire (moyenne : 54.7 m/an, écart-type : 0.91). De plus, une

¹⁰bande droite de chaque groupe de la figure 1.11

connaissance experte de cette zone confirme que le déplacement du glacier d'Argentière à 2700m est indépendant de la saison. Nous faisons l'hypothèse qu'il n'y a pas de variation saisonnière de la vitesse dans cette zone du glacier. Il est donc possible d'utiliser la mesure d'une balise annuelle (ramenée à un jour) pour fixer l'offset sur la phase interférométrique des interférogrammes ERS-1/2 en mission tandem.

1.3.2.2 Champ de vitesse 3-D

Les figures 1.12(a) et 1.12(b) montrent les profils longitudinaux de vitesse obtenus par interférométrie sur les glaciers d'Argentière et de la Mer de Glace/Leschaux. L'offset des phases interférométriques a été fixé en prenant la première balise annuelle de chacun des profils. Pour le glacier d'Argentière, nous avons tracé les profils des 4 interférogrammes de 1995-1996 présentant une cohérence suffisante. Pour le glacier de la Mer de Glace/Leschaux, seuls les interférogrammes de décembre 1995 (en vert) et mars 1996 (en bleu) ont été utilisés pour tracer le profil longitudinal. Pour les autres couples, les changements d'états de surface du glacier à un jour ne permettent pas de préserver la cohérence.

On peut remarquer un point aberrant sur le profil longitudinal de la Mer de Glace (distance 7000m). Les vitesses estimées sont respectivement de 56 cm/jour à 45 cm/jour en décembre 1995 et mars 1996. Cela est dû au fait qu'à cet endroit la pente est d'environ 20° , le produit scalaire entre le vecteur directeur de la ligne de visée du satellite \hat{e}_{LOS} et le vecteur d'écoulement \hat{e}_{ec} tend vers 0. Le déplacement estimé tend vers ∞ quand $\hat{e}_{LOS} \cdot \hat{e}_{ec}$ tend vers 0.

Nous montrons sur la figure 1.13 le champ de vitesse sur le glacier d'Argentière que l'on obtient à partir du couple de mars 1996 en effectuant l'hypothèse que l'écoulement s'effectue dans la ligne de plus grande pente et parallèlement au glacier.

1.3.3 Évaluation des performances

Pour évaluer la précision de la mesure du champ de vitesse obtenu par interférométrie, nous devons examiner les différentes sources d'erreurs possibles [Mohr 03].

Dans notre cas, on peut distinguer deux types de sources d'erreurs :

- Les erreurs liées aux données et aux traitements appliqués sur ces données : le couple interférométrique, le modèle numérique de terrain et le point de mesure *in situ* pour caler l'offset de la phase interférométrique.
- Les incertitudes liées aux hypothèses utilisées pour projeter le déplacement mesuré par interférométrie dans la ligne de visée du satellite en déplacement au sol : dans notre cas, écoulement parallèle à la surface du glacier et dans la ligne de plus grande pente.

1.3.3.1 Incertitudes liées aux données et aux traitements

La première source d'erreur liée à la mesure de la phase interférométrique est due au bruit de speckle. Cette incertitude affecte chacun des pixels de l'interférogramme par une variable aléatoire ϕ . Cette variable aléatoire est décrite par son écart-type σ_ϕ qui peut être approximé par sa borne de Cramer Rao donnée par [Rodr 92] :

$$\sigma_\phi = \sqrt{\langle (\hat{\phi} - \langle \hat{\phi} \rangle)^2 \rangle} = \frac{1}{\sqrt{2M}} \frac{\sqrt{1 - \gamma^2}}{\gamma} \quad (1.18)$$

où γ est la cohérence du pixel considéré et M est le nombre de réalisations indépendantes utilisées pour estimer la phase $\hat{\phi}$.

La deuxième source d'erreur provient de la présence de franges résiduelles qui ne sont pas dues au déplacement. Par exemple, dans un interférogramme différentiel, il peut subsister des franges topographiques qui ne sont pas correctement prises en compte par le MNT ou encore des franges dues aux perturbations atmosphériques.

L'analyse faite dans la partie 1.5.2.2 montre que les franges topographiques sont parfaitement prises en compte par le MNT sur les glaciers de la Mer de Glace et d'Argentière. Comme les glaciers alpins sont de petites tailles par rapport à une scène ERS, la mesure interférométrique est affectée uniquement par les changements atmosphériques locaux. La formule de Smith-Weintraub indique que la vitesse de propagation dépend principalement de la température et de la pression de vapeur d'eau [Tara 96]. Étant donné la faible pression de vapeur d'eau saturante autour de 0°C sur les glaciers, nous avons considéré négligeable les perturbations atmosphériques [Trou 06].

La troisième source d'incertitude provient de l'étape du déroulement de phase et du calage de l'offset. L'algorithme utilisé ici minimise l'écart entre le gradient de phase enroulée et celui de la phase déroulée [Trou 98]. Pour caler l'offset sur la phase déroulée, nous avons utilisé la mesure *in situ* d'une balise annuelle présente dans une zone où le déplacement est stable au cours de l'année.

La figure 1.14 représente le profil longitudinal de vitesse (en jaune) obtenu par interférométrie radar sur le glacier d'Argentière pour le couple du 10 et 11 mars 1996. Les traits bleu et vert correspondent respectivement aux bornes supérieure et inférieure de l'intervalle de confiance de la mesure interférométrique. Pour tracer ces courbes, nous avons ajouté $\pm \frac{\pi}{2}$ (incertitude liée au développement de la phase) et $\pm \sigma_\phi$ sur la phase interférométrique avec un nombre de vues équivalent M qui vaut environ 25 dans notre cas après filtrage.

La figure 1.15 montre une comparaison de la vitesse obtenue par interférométrie radar sur le glacier d'Argentière avec celle issue des balises annuelles de l'année 1995-1996. Ces barres d'erreurs montrent une bonne adéquation entre la vitesse obtenue par interférométrie et la vitesse *in situ* mesurée par les balises.

1.3.3.2 Hypothèse d'écoulement parallèle à la surface des glaciers et dans la ligne de plus grande pente

L'autre source d'erreur possible est celle sur les hypothèses émises pour convertir le déplacement mesuré dans la ligne de visée du satellite en déplacement au sol. Ici, à partir d'un interférogramme acquis en passe descendante, nous avons considéré les hypothèses 1 et 2 décrites dans la partie 1.3.1

À partir de mesures de terrain annuelles en 1995 et 1996 effectuées par le LGGE¹¹, nous pouvons calculer le bilan de masse local sur les deux glaciers étudiés (Argentière et Mer de

¹¹Laboratoire de Glaciologie et Géophysique de l'Environnement, www-lgge.ujf-grenoble.fr

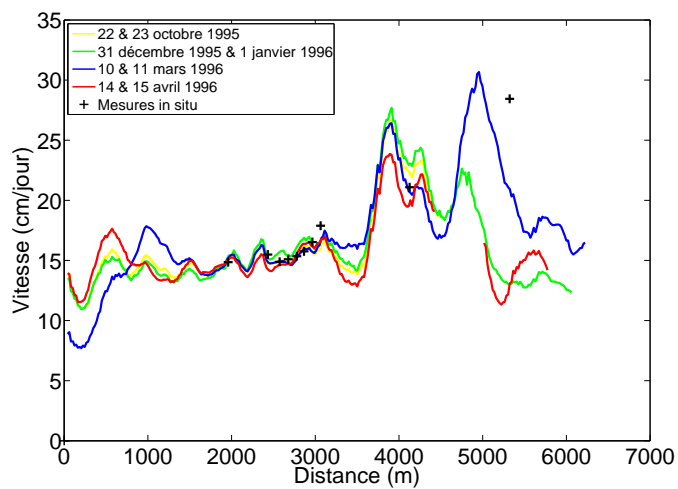
TAB. 1.3 – Comparaison entre la direction d’écoulement mesurée par des balises *in situ* et celle obtenue par le MNT.

Glacier	Altitude	Nombre de balises	Déplacement horizontal	Déplacement vertical	Ablation	erreur sur la direction de l’écoulement	
						moyenne	écart-type
Argentière	2700m	11	56.6m	-5.0m	-0.9m	8.9°	17.0°
Mer de Glace	1900m	4	82.4m	-8.9m	-6.7m	8.4°	30.7°

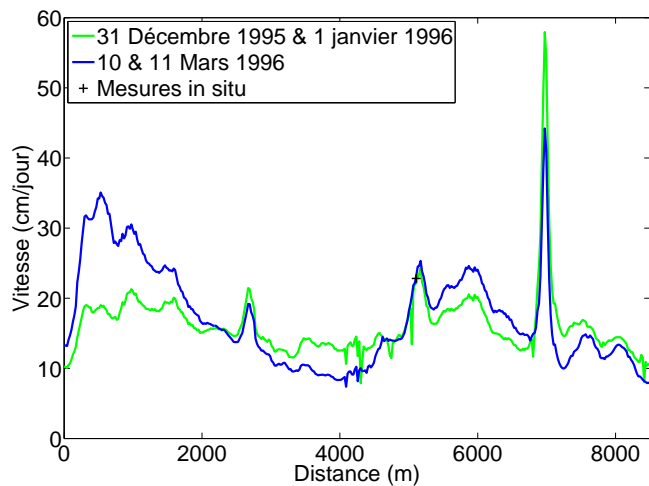
Glace). Le tableau 1.3 montre que l’ablation annuelle représente respectivement 20% et 75% du déplacement vertical des glaciers d’Argentière et de la Mer de Glace. Par conséquent, l’hypothèse d’écoulement parallèle à la surface des glaciers peut être remise en cause. Néanmoins, nous avons vu que la cohérence est préservée uniquement durant les saisons froides, et durant cette période l’ablation est presque nulle. Nous ne pouvons pas vérifier cette hypothèse car nous ne disposons de mesures d’ablation mensuelle *in situ* pour l’année 1995-1996.

Concernant l’hypothèse d’écoulement dans la ligne de plus grande pente, nous avons comparé la direction d’écoulement obtenue par lissage du MNT avec la direction obtenue par les balises annuelles. Pour les glaciers d’Argentière et de la Mer de Glace, l’erreur sur la direction d’écoulement est en moyenne de 9° (cf. tableau 1.3). On peut donc en conclure que du fait de leur forme étroite et allongée, les glaciers d’Argentière et de la Mer de Glace s’écoulent selon la ligne de plus grande pente.

Nous avons montré que l’interférométrie radar permet d’estimer le déplacement des glaciers. Il est cependant nécessaire de caler l’offset de la phase interférométrique pour pouvoir projeter le déplacement au sol. Cette étape est réalisable si l’on possède des connaissances *in situ* (balise, zone de vitesse nulle) de la zone étudiée. Nous allons maintenant proposer une méthode d’estimation de cet offset en s’affranchissant de ces connaissances *a priori*.



(a)



(b)

FIG. 1.12 – Profils longitudinaux obtenus par interférométrie sur les glaciers (de la partie haute à la partie basse) : (a) d'Argentière et (b) de la Mer de Glace/Leschaux

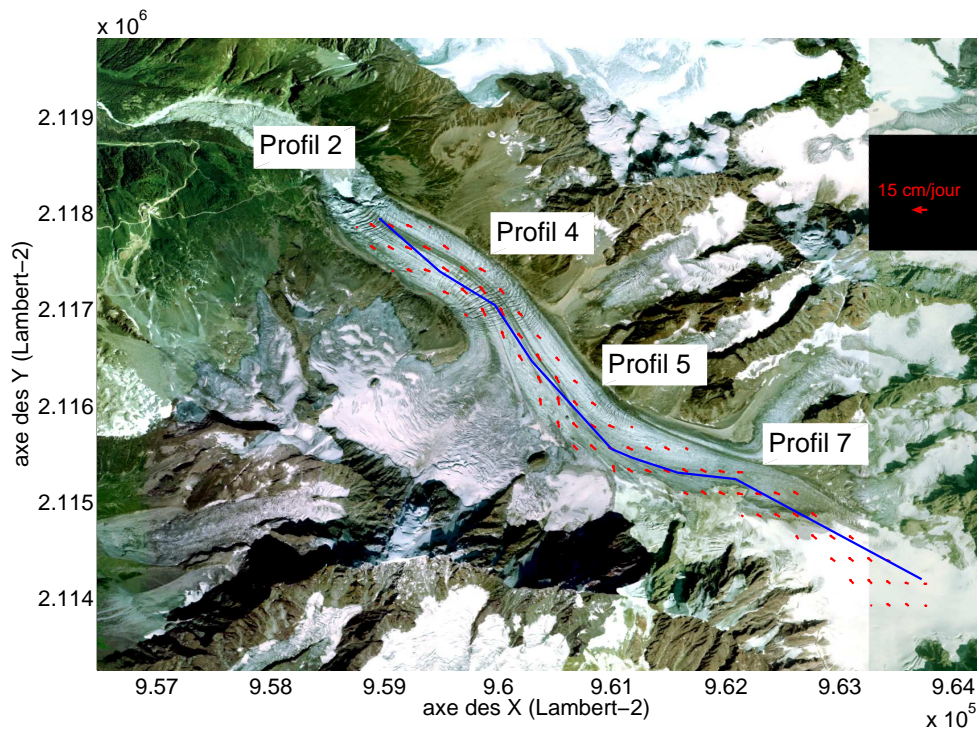


FIG. 1.13 – Champ de déplacement sur le glacier d’Argentière

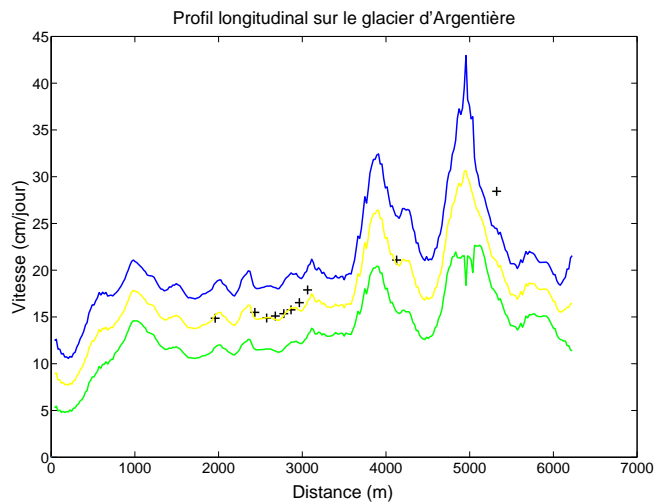


FIG. 1.14 – Intervalle de confiance sur la mesure interférométrique radar. Profil longitudinal sur le glacier d’Argentière

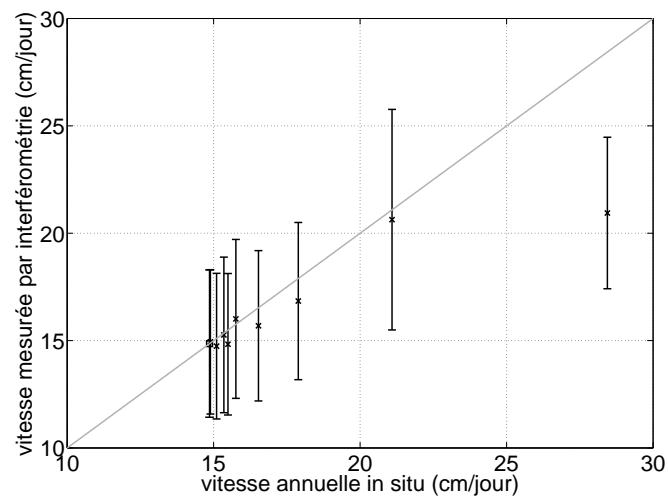


FIG. 1.15 – Comparaison des vitesses obtenues par interférométrie radar sur le glacier d'Argentine avec les balises annuelles de l'année 1995-1996.

1.4 Combinaison des passes ascendante et descendante pour estimer les offsets

1.4.1 Positionnement du problème

Pour caler l'offset sur les phases interférométriques, nous avons besoin d'avoir des connaissances *in situ* (balise, zone de vitesse nulle) de l'objet géophysique étudié. Une autre alternative que nous proposons est d'utiliser deux passes de satellites (passes ascendante et descendante qui sont acquises à 12 heures d'intervalle dans le cas d'ERS-1 et ERS-2). La méthode proposée consiste à estimer les offsets sur les passes ascendante et descendante en effectuant l'hypothèse que l'écoulement s'effectue parallèlement au glacier et dans la ligne de plus grande pente.

Soit (P_1, \dots, P_N) un ensemble de N points tel que les déplacements en LOS en passes ascendante et descendante sont connus à une constante près (i.e. : la cohérence est préservée en ces points). Posons $v(P_i)$ le module du déplacement au sol pour $i = 1 \dots N$. On pose $\vec{e}_{ec}(P_i)$ le vecteur écoulement au sol au point P_i . $\vec{e}_{LOS_{asc}}$ (respectivement $\vec{e}_{LOS_{desc}}$) définit le vecteur unitaire de déplacement dans la ligne de visée du satellite en passe ascendante (respectivement descendante). $\phi_{asc}(P_i)$ et $\phi_{desc}(P_i)$ correspondent aux phases déroulées en LOS en passes ascendante et descendante. Soient K_{asc} et K_{desc} les constantes à appliquer sur les phases en LOS en passe ascendante et descendante, nous pouvons établir les $2N$ relations suivantes qui expriment le déplacement en ligne de visée du satellite comme le déplacement au sol projeté sur la ligne de visée du satellite.

$$v(P_i) \vec{e}_{ec}(P_i) \cdot \vec{e}_{LOS_{asc}} = \phi_{asc}(P_i) + K_{asc} \quad \forall i = 1 \dots N \quad (1.19)$$

$$v(P_i) \vec{e}_{ec}(P_i) \cdot \vec{e}_{LOS_{desc}} = \phi_{desc}(P_i) + K_{desc} \quad \forall i = 1 \dots N \quad (1.20)$$

On doit résoudre un système de $2N$ équations à $N + 2$ inconnues. On se propose donc d'estimer les constantes K_{asc} et K_{desc} (noté respectivement \hat{K}_{asc} et \hat{K}_{desc}) en minimisant l'erreur quadratique moyenne R définie par :

$$R = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left[\left(K_{asc} - \hat{K}_{asc} \right)^2 + \left(K_{desc} - \hat{K}_{desc} \right)^2 \right] \quad (1.21)$$

$$R = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left[\left(v(P_i) \vec{e}_{ec}(P_i) \cdot \vec{e}_{LOS_{asc}} - \phi_{asc}(P_i) - K_{asc} \right)^2 + \left(v(P_i) \vec{e}_{ec}(P_i) \cdot \vec{e}_{LOS_{desc}} - \phi_{desc}(P_i) - K_{desc} \right)^2 \right] \quad (1.22)$$

On dérive l'erreur quadratique moyenne R par rapport aux variables $(v(P_i), K_{asc}$ et $K_{desc})$ et on obtient les $N + 2$ relations suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial v(P_i)} &= \frac{1}{N} \left\{ 2v(P_i) \left(\vec{e}_{ec}(P_i) \cdot \vec{e}_{LOS_{asc}} \right)^2 - 2 \left(\phi_{asc}(P_i) + K_{asc} \right) \left(\vec{e}_{ec}(P_i) \cdot \vec{e}_{LOS_{asc}} \right) \right. \\ &\quad \left. + 2v(P_i) \left(\vec{e}_{ec}(P_i) \cdot \vec{e}_{LOS_{desc}} \right)^2 - 2 \left(\phi_{desc}(P_i) + K_{desc} \right) \left(\vec{e}_{ec}(P_i) \cdot \vec{e}_{LOS_{desc}} \right) \right\} \end{aligned} \quad (1.23)$$

$$\frac{\partial R}{\partial K_{asc}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left[-2 \left(v(P_i) \vec{e}_{ec}(P_i) \cdot \vec{e}_{LOS_{asc}} - \phi_{asc}(P_i) \right) + 2K_{asc} \right] \quad (1.24)$$

$$\frac{\partial R}{\partial K_{desc}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left[-2 \left(v(P_i) \vec{e}_{ec}(P_i) \cdot \vec{e}_{LOS_{desc}} - \phi_{desc}(P_i) \right) + 2K_{desc} \right] \quad (1.25)$$

On obtient l'estimation des variables ($v(P_i)$, K_{asc} et K_{desc}) en annulant les équations 1.23, 1.24 et 1.25. On a donc :

$$\hat{K}_{asc} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\hat{v}(P_i) \vec{e}_{ec}(P_i) \cdot \vec{e}_{LOS_{asc}} - \phi_{asc}(P_i) \right) \quad (1.26)$$

Par analogie, en remplaçant les composantes en passe ascendante par les composantes en passe descendante, on obtient :

$$\hat{K}_{desc} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\hat{v}(P_i) \vec{e}_{ec}(P_i) \cdot \vec{e}_{LOS_{desc}} - \phi_{desc}(P_i) \right) \quad (1.27)$$

En annulant la dérivée de l'erreur quadratique moyenne par rapport à la vitesse au point P_i , on peut écrire :

$$\begin{aligned} \hat{v}(P_i) \left[\left(\vec{e}_{ec}(P_i) \cdot \vec{e}_{LOS_{asc}} \right)^2 + \left(\vec{e}_{ec}(P_i) \cdot \vec{e}_{LOS_{desc}} \right)^2 \right] &= \\ \left(\phi_{asc}(P_i) + \hat{K}_{asc} \right) \left(\vec{e}_{ec}(P_i) \cdot \vec{e}_{LOS_{asc}} \right) + \left(\phi_{desc}(P_i) + \hat{K}_{desc} \right) \left(\vec{e}_{ec}(P_i) \cdot \vec{e}_{LOS_{desc}} \right) \end{aligned} \quad (1.28)$$

Posons les trois relations suivantes :

$$\begin{aligned} E_{asc}(P_i) &= \vec{e}_{ec}(P_i) \cdot \vec{e}_{LOS_{asc}} \\ E_{desc}(P_i) &= \vec{e}_{ec}(P_i) \cdot \vec{e}_{LOS_{desc}} \\ A(P_i) &= E_{asc}^2(P_i) + E_{desc}^2(P_i) \end{aligned}$$

Ensuite, on remplace $\hat{v}(P_i)$ par son expression que l'on a trouvée en 1.28 dans les équations 1.26 et 1.27 afin de déterminer \hat{K}_{asc} et \hat{K}_{desc} . Après simplification, on obtient les deux expressions suivantes :

$$\widehat{K}_{asc} B_{asc} = \frac{1}{N} \left[\sum_{i=1}^N \frac{E_{asc}(P_i)}{A(P_i)} \left(\phi_{asc}(P_i) E_{asc}(P_i) + \left(\phi_{asc}(P_i) + \widehat{K}_{desc} \right) E_{desc}(P_i) \right) - \phi_{asc}(P_i) \right] \quad (1.29)$$

$$\widehat{K}_{desc} B_{desc} = \frac{1}{N} \left[\sum_{i=1}^N \frac{E_{desc}(P_i)}{A(P_i)} \left(\phi_{desc}(P_i) E_{desc}(P_i) + \left(\phi_{desc}(P_i) + \widehat{K}_{asc} \right) E_{asc}(P_i) \right) - \phi_{desc}(P_i) \right] \quad (1.30)$$

Avec B_{asc} et B_{desc} deux constantes définies par :

$$B_{asc} = 1 - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{E_{asc}^2(P_i)}{A(P_i)}$$

$$B_{desc} = 1 - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{E_{desc}^2(P_i)}{A(P_i)}$$

En combinant les équations 1.29 et 1.30, on exprime \widehat{K}_{asc} à l'aide des paramètres connus de la façon suivante :

$$\widehat{K}_{asc} \left[B_{asc} - \frac{1}{B_{desc}} \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{E_{asc}(P_i) E_{desc}(P_i)}{A(P_i)} \right)^2 \right] = \frac{1}{N} \left[\sum_{i=1}^N \frac{1}{A(P_i)} \left\{ \phi_{asc}(P_i) E_{asc}(P_i) + E_{asc}(P_i) \left(\phi_{desc}(P_i) + \frac{E_{desc}(P_i)}{B_{desc}} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \left[\frac{E_{desc}(P_j)}{A(P_j)} \left(\phi_{asc}(P_j) E_{asc}(P_j) + \phi_{desc}(P_j) E_{desc}(P_j) \right) - \phi_{desc}(P_j) \right] - \phi_{asc}(P_i) \right\} \right] \quad (1.31)$$

1.4.2 Résultats

1.4.2.1 Sur une image simulée

Dans cette partie, on se propose d'appliquer sur une image simulée la méthode présentée pour estimer les offsets sur les passes ascendante et descendante en émettant les hypothèses que l'écoulement s'effectue parallèlement au glacier et dans la ligne de plus grande pente (hypothèses 1 et 2). Pour cela, nous allons créer un champ de vitesse 3D au sol, puis nous projetons ce champ de vitesse dans les lignes de visée du satellite en passes ascendante ($\vec{e}_{LOS_{asc}}$) et descendante ($\vec{e}_{LOS_{desc}}$). Finalement, nous bruitons les images du déplacement en passes ascendante et descendante en ajoutant un bruit blanc gaussien de variance unitaire sur chacune des images. On obtient ainsi les composantes simulées ϕ_{asc} (figure 1.16(a)) et ϕ_{desc} (figure 1.16(b)) du déplacement en ligne de visée du satellite équivalente à celles obtenues par interférométrie sur des images réelles.

On cherche donc les offsets \widehat{K}_{asc} et \widehat{K}_{desc} que l'on doit ajouter aux phases simulées ϕ_{asc} et ϕ_{desc} . Dans cette simulation, nous avons rajouté un offset de 4 sur la phase en passe ascendante ($K_{asc} = -4$) et un offset de -2 sur la phase en passe descendante ($K_{desc} = 2$).

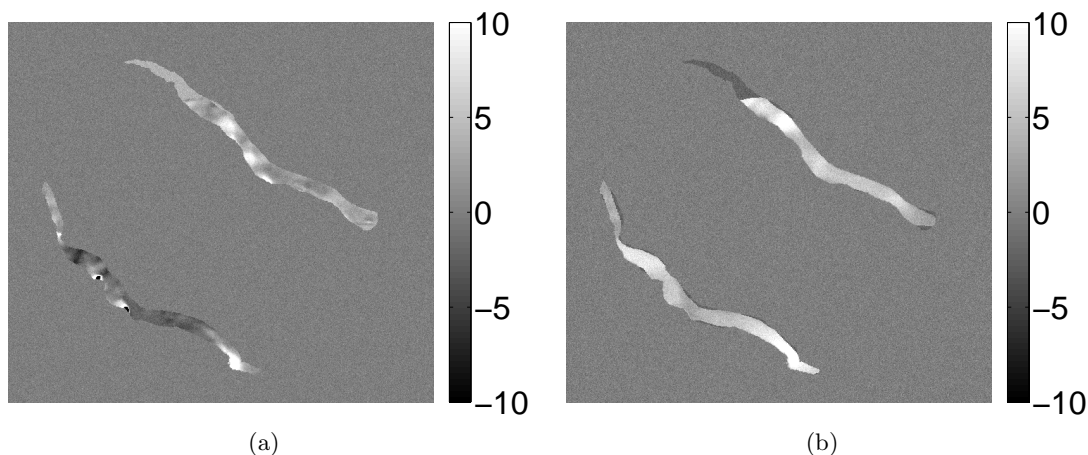


FIG. 1.16 – Composantes du déplacement simulé : (a) en passe ascendante ϕ_{asc} , (b) en passe descendante ϕ_{desc} .

TAB. 1.4 – Combinaison des passes ascendante et descendante pour estimer les offsets sur les phases interférométriques.

Glacier	nombre de points	\hat{K}_{asc}	\hat{K}_{desc}
Mer de Glace	9191	-4.00579	2.0206
Argentière	8107	-3.98358	1.99097

Le tableau 1.4 montre les résultats obtenus sur cet exemple simulé.

On peut remarquer que sur les deux glaciers étudiés (Mer de Glace et Argentière), la méthode proposée pour estimer les offsets a fonctionné car les constantes estimées \hat{K}_{asc} et \hat{K}_{desc} sont proches de K_{asc} et K_{desc} .

1.4.2.2 Sur un couple d'images ERS-1/2

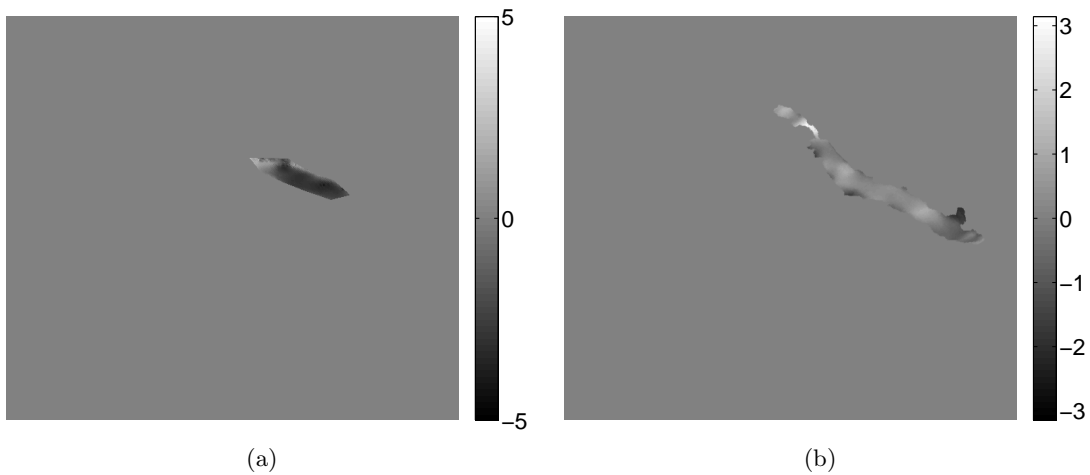
Nous allons maintenant appliquer l'algorithme d'estimation des offsets sur les passes ascendante et descendante sur un interférogramme ERS-1/2. Nous avons choisi le couple du 14 et 15 avril 1996 où la cohérence est préservée sur les glaciers à cette date. Le tableau 1.5 montre les caractéristiques de ce couple. Les images en passes ascendante et descendante sont acquises à 12 heures d'intervalle.

Les figures 1.17(a) et 1.17(b) montrent respectivement les phases déroulées des interférogrammes différentiels acquis les 14 et 15 avril 1996 en passes ascendante et descendante.

Le contexte de fort relief du site étudié implique que le glacier d'Argentière n'est pas visible en totalité par le radar en passes ascendante et descendante. Seulement une petite partie du glacier est visible par les deux modes d'acquisition. On applique l'algorithme proposé d'estimation des offsets, et on trouve $\hat{K}_{asc} = 1.553$ et $\hat{K}_{desc} = 2.759$ pour un nombre de pixel N de 2751.

TAB. 1.5 – Caractéristiques du couple ERS du 14 et 15 avril 1996

pas	orbite	frame	B_{\perp} (m)	e_a (m)
ascendante	24838 5165	909	-39	222
descendante	24831 5158	2673	93	93

FIG. 1.17 – Phase interférométrique déroulée sur le glacier d’Argentière : (a) en passe ascendante ϕ_{asc} , (b) en passe descendante ϕ_{desc} .

Après ajout de ces offsets sur les passes ascendante et descendante, on estime les trois composantes du déplacement au sol.

- Dans les zones visibles par une seule passe du satellite, deux hypothèses sont nécessaires pour estimer le déplacement. On utilise les hypothèses 1 et 2 (écoulement parallèle à la surface du glacier et dans la ligne de plus grande pente).
- En revanche, si la zone est visible par le satellite en passe ascendante et descendante, on utilise l’hypothèse d’écoulement parallèle à la surface du glacier pour estimer les trois composantes du déplacement au sol [Joug 98].

La figure 1.18 montre une comparaison des vitesses obtenues par interférométrie radar sur le glacier d’Argentière en utilisant la méthode proposée pour estimer les offsets avec les mesures annuelles des balises de l’année 1995-1996. On peut constater que les valeurs estimées du déplacement sont très inférieures à celles mesurées par les balises. Nous avons vu précédemment que les hypothèses d’écoulement parallèle au glacier et dans la ligne de plus grande pente sont valables en avril. Le problème vient donc de l’estimation des offsets \hat{K}_{asc} et \hat{K}_{desc} . Une première explication vient du fait que la zone commune de visibilité du glacier est très petite pour les deux types de passes (figures 1.17(a) et 1.17(b)). De plus, cette zone commune est assez homogène, elle ne présente pas de motifs de franges marqués. Cela rend difficile l’estimation des offsets.

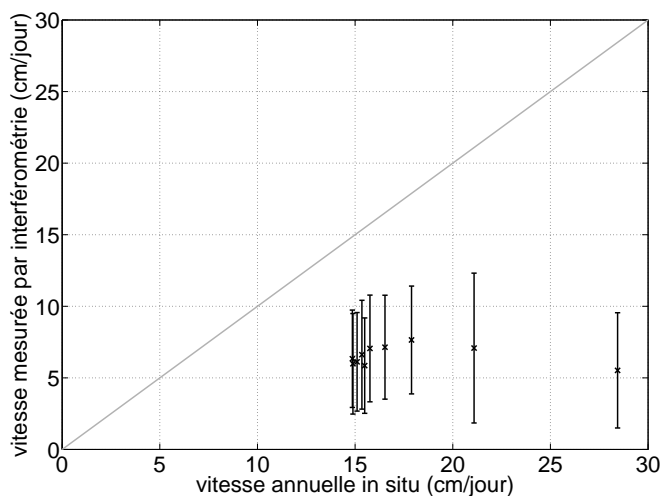


FIG. 1.18 – Comparaison des vitesses obtenues par interférométrie radar sur le glacier d’Argentière avec les balises annuelles de l’année 1995-1996.

Après avoir obtenu par interférométrie radar un champ de déplacement à la surface des glaciers, nous allons tenter de caractériser l’évolution temporelle de ce champ de vitesse. Pour cela nous devons analyser les images de différence de phase entre les interférogrammes différentiels [Bomb 07] [Bomb 08c] [Koeh 08].

1.5 Analyse des franges résiduelles

Les franges résiduelles restantes dans les images de différences de phases entre interférogrammes sont soit des franges dues aux perturbations atmosphériques, soit des franges topographiques résiduelles, soit des franges qui traduisent une évolution spatio-temporelle du champ de vitesse. Nous proposons un algorithme qui détermine si ces franges varient avec la baseline perpendiculaire équivalente. Dans ce cas, les franges restantes sont des franges topographiques résiduelles et nous proposons une méthode pour estimer l'erreur du MNT. Dans le cas contraire, si les franges résiduelles dans les différences de phases ne varient pas avec la baseline perpendiculaire équivalente, nous pouvons conclure que ces franges sont dues à une possible évolution du champ de vitesse ou à des perturbations atmosphériques.

1.5.1 Principe de la méthode

Soit Φ^i la phase interférométrique d'un interférogramme acquis à la date $(i, i + 1)$. Notons Φ_{topo}^i le terme de phase dû à la topographie. Les variations d'altitude entre deux points Δz s'exprime comme la somme des variations d'altitude données par le MNT (Δz^{MNT}) et celles de l'erreur du MNT (Δz^{err}).

$$\Delta z = \Delta z^{MNT} + \Delta z^{err} \quad (1.32)$$

Φ_{topo}^i peut être exprimé à l'aide de la baseline perpendiculaire à la date i (B_{\perp}^i) par :

$$\Phi_{topo}^i = \frac{4\pi}{\lambda} \frac{B_{\perp}^i}{R_1 \sin \theta} \Delta z = \frac{2\pi}{e_a^i} \Delta z \quad (1.33)$$

avec e_a^i l'altitude d'ambiguïté définie par :

$$e_a^i = \frac{\lambda R_1 \sin \theta}{2 B_{\perp}^i} \quad (1.34)$$

En combinant les équations 1.32 et 1.33, la composante topographique se décompose comme la somme de deux termes par :

$$\Phi_{topo}^i = \frac{4\pi}{\lambda} \frac{B_{\perp}^i}{R_1 \sin \theta} \Delta z^{MNT} + \frac{4\pi}{\lambda} \frac{B_{\perp}^i}{R_1 \sin \theta} \Delta z^{err} \quad (1.35)$$

$$= \Phi_{topo}^{i,MNT} + \Phi_{topo}^{i,err} \quad (1.36)$$

où $\Phi_{topo}^{i,MNT}$ représente la composante topographique prise en compte par le MNT. $\Phi_{topo}^{i,err}$ peut être définie comme le terme de topographie résiduelle, i.e. les franges topographiques qui ne sont pas compensées par le MNT.

La phase de l'interférogramme différentiel (noté Φ_d^i) sera alors définie comme la phase interférométrique de l'interférogramme à laquelle on soustrait la composante topographique prise en compte par le MNT. Cette phase différentielle Φ_d^i s'exprime par :

$$\Phi_d^i = \Phi^i - \Phi_{topo}^{i,MNT} \quad (1.37)$$

Soient ρ_d^i et ρ_d^j deux interférogrammes différentiels acquis aux dates $(i, i + 1)$ et $(j, j + 1)$. On définit la différence entre interférogrammes différentiels (noté ρ^{ij}) comme le produit hermitien

entre les deux interférogrammes différentiels. On obtient :

$$\rho^{ij} = \rho_d^i \rho_d^{j\dagger} = c^i c^j e^{i(\Phi_d^i - \Phi_d^j)} \quad (1.38)$$

$$= c^{ij} e^{i\Delta\Phi^{i-j}} \quad (1.39)$$

où le terme c^{ij} peut être interprété comme la cohérence équivalente.

La phase de la différence entre interférogrammes différentiels ($\Delta\Phi^{i-j}$) est définie par l'équation 1.40 comme la différence des phases des interférogrammes différentiels acquis aux dates $(i, i + 1)$ et $(j, j + 1)$:

$$\Delta\Phi^{i-j} = \text{Arg}(\rho^{ij}) = [\Phi_d^i - \Phi_d^j] \text{ modulo } 2\pi \quad (1.40)$$

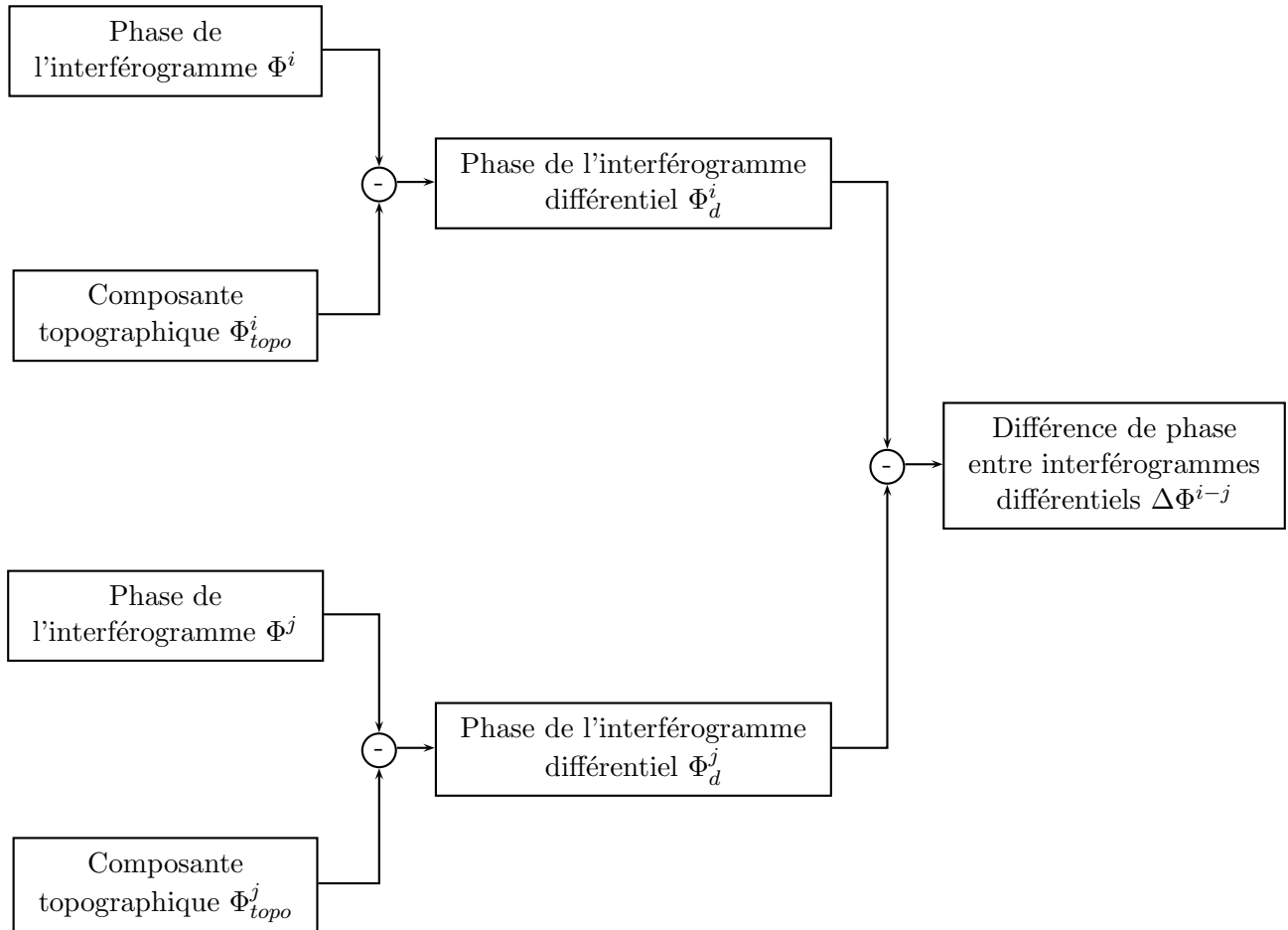


FIG. 1.19 – Principe du calcul de la phase de la différence entre interférogramme différentiel ($\Delta\Phi^{i-j}$)

La différence de phase entre interférogrammes différentiels $\Delta\Phi^{i-j}$ se décompose alors comme la somme de quatre termes par :

$$\Delta\Phi^{i-j} = \Delta\Phi_{topo}^{ij} + \Delta\Phi_{atm}^{ij} + \Delta\Phi_{depl}^{ij} + \Delta\Phi_{bruit}^{ij} \quad (1.41)$$

où $\Delta\hat{\Phi}_{topo}^{ij}$ caractérise les franges résiduelles dues à la topographie du terrain. $\Delta\Phi_{atm}^{ij}$ est un terme de phase résiduelle dû aux perturbations atmosphériques. $\Delta\Phi_{depl}^{ij}$ caractérise une évolution du champ de vitesse, et $\Delta\Phi_{bruit}^{ij}$ est un terme de bruit résiduel, par exemple dû à la décorrélation temporelle de chacun des interférogrammes.

Le terme dû à la topographie dans la différence entre les interférogrammes différentiels aux dates i et j peut s'exprimer à l'aide de l'erreur du MNT Δz^{err} par :

$$\Delta\Phi_{topo}^{ij} = \left(\Phi_{topo}^i - \Phi_{topo}^{i,MNT} \right) - \left(\Phi_{topo}^j - \Phi_{topo}^{j,MNT} \right) \quad (1.42)$$

$$= \frac{4\pi}{\lambda} \frac{(B_{\perp}^i - B_{\perp}^j)}{R_1 \sin \theta} \Delta z^{err} \quad (1.43)$$

$$= \frac{4\pi}{\lambda} \frac{\Delta B_{\perp}^{ij}}{R_1 \sin \theta} \Delta z^{err} \quad (1.44)$$

$$= \frac{2\pi}{\Delta e_a^{ij}} \Delta z^{err} \quad (1.45)$$

où la baseline perpendiculaire équivalente ΔB_{\perp}^{ij} peut être définie comme la différence entre les baselines perpendiculaires aux dates i et j . De la même façon, l'altitude d'ambiguïté équivalente Δe_a^{ij} peut être définie par la relation 1.47 :

$$\Delta B_{\perp}^{ij} = B_{\perp}^i - B_{\perp}^j \quad (1.46)$$

$$\Delta e_a^{ij} = \frac{\lambda}{2} \frac{R_1 \sin \theta}{B_{\perp}^i - B_{\perp}^j} = \frac{1}{\frac{1}{e_a^i} - \frac{1}{e_a^j}} \quad (1.47)$$

Soit $N_{ij}(X, Y)$ le nombre de franges observées sur l'image de différences de phases entre interférogrammes différentiels $\Delta\Phi^{i-j}$ entre les points X et Y . Posons $\Delta z(X, Y)$ l'élévation non prise en compte par le MNT entre les deux points X et Y (l'erreur du MNT). Le nombre de franges $N_{ij}(X, Y)$ est compté positivement si la frange suit un dégradé de niveaux de gris du noir au blanc. Sous l'hypothèse que les franges résiduelles sont des franges topographiques, on a la relation :

$$\Delta\Phi_{topo}^{ij} = 2\pi N_{ij}(X, Y) \quad (1.48)$$

D'après les équations 1.45 et 1.48, on peut relier l'erreur du MNT entre les points X et Y au nombre de franges observé entre ces points par :

$$\Delta z^{err}(X, Y) = N_{ij}(X, Y) \Delta e_a^{ij} \quad (1.49)$$

Comme le terme $\Delta z(X, Y)$ est indépendant de la paire (i, j) d'interférogrammes choisie, on peut tester l'hypothèse selon laquelle les franges résiduelles sont dues à la topographie en vérifiant si le produit $N_{ij}(X, Y) \Delta e_a^{ij}$ est constant pour les différentes paires d'interférogrammes.

$$N_{ij}(X, Y) \Delta e_a^{ij} = K(X, Y) \quad \forall i, j \quad (1.50)$$

Dans le cas où $K(X, Y)$ est constant pour les différentes paires d'interférogrammes, $K(X, Y)$ peut être interprété comme l'erreur d'altitude du MNT. En d'autres termes, l'altitude d'ambiguïté équivalente multipliée par le nombre de franges observé est un indicateur de la présence

de franges topographiques résiduelles.

Si les franges résiduelles des différences entre interférogrammes sont dues à la topographie, l'équation 1.45 permet d'estimer l'erreur du MNT (MNT_{erreur}^i) à partir de la différence de phase des interférogrammes aux dates i et j . Cette estimation est faite pour tous les couples possibles. Puis on calcule l'image d'erreur du MNT comme étant la valeur moyenne des erreurs trouvées pour chacune des différences d'interférogrammes.

$$MNT_{erreur} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N MNT_{erreur}^i \quad (1.51)$$

Le nouveau MNT est égal à l'ancien MNT auquel on ajoute l'erreur estimée du MNT (MNT_{erreur}).

1.5.2 Résultats

Dans cette partie, nous appliquons l'algorithme proposé précédemment sur des images simulées puis sur une série d'interférogrammes ERS-1/2 en mission tandem.

1.5.2.1 Sur des images simulées

Dans cette simulation, nous prenons les paramètres suivants

- $R_1 = 790$ km
- $\lambda = 5.6$ cm
- $\theta = 23^\circ$

La figure 1.20(a) montre le MNT utilisé dans la simulation. Les figures 1.20(b) et 1.20(c) représentent les franges topographiques simulées avec respectivement des baselines perpendiculaires B_\perp de -100 m et 200 m. Les figures 1.20(b) et 1.20(c) sont donc les phases Φ^1 et Φ^2 des interférogrammes.

Ensuite, nous modifions le MNT à deux endroits (sur les glaciers de la Mer de Glace et d'Argentière). Le MNT ainsi obtenu sera appelé le "faux MNT" (noté FMNT). Nous traçons les franges topographiques associées au MNT erroné avec des baselines perpendiculaires de $B_\perp = -100$ m et $B_\perp = 200$ m (figures 1.21(a) et 1.21(b)). Ces images sont respectivement les composantes topographiques Φ_{topo}^1 et Φ_{topo}^2 associées au faux MNT.

Le but est d'estimer l'erreur du MNT en comparant les franges résiduelles avec la baseline perpendiculaire équivalente. Pour cela, on calcule l'image de différence entre interférogrammes différentiels $\Delta\Phi^{1-2} = (\Phi^1 - \Phi_{topo}^1) - (\Phi^2 - \Phi_{topo}^2)$.

La figure 1.22(a) montre l'image de différence de phases entre interférogrammes différentiels $\Delta\Phi^{1-2}$. Nous avons utilisé uniquement des franges topographiques, par conséquent les franges résiduelles présentes dans la différence entre interférogrammes différentiels $\Delta\Phi^{1-2}$ sont liées uniquement à la topographie. Avec une baseline perpendiculaire équivalente ΔB_\perp^{ij} de -300 m, l'équation 1.45 permet d'estimer l'erreur du MNT (figure 1.22). En ajoutant cette estimée au faux MNT, on retrouve le MNT initial si l'étape de déroulement de phase de $\Delta\Phi^{1-2}$ s'effectue sans erreur.

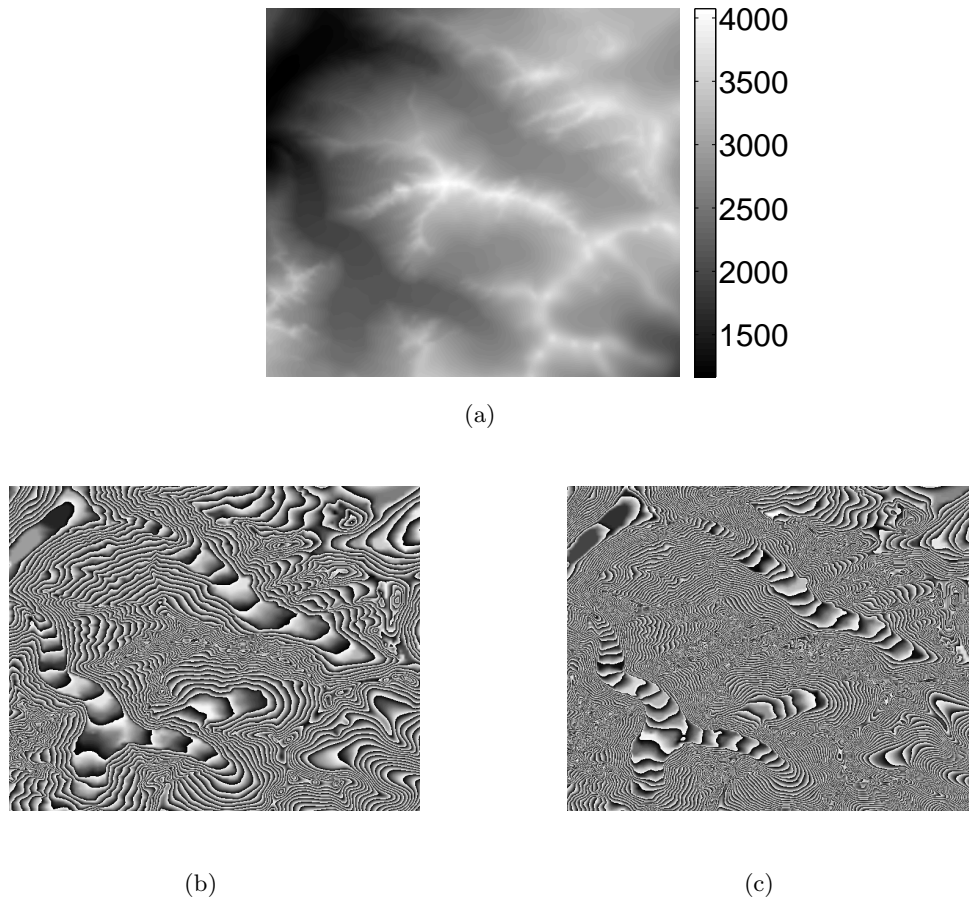


FIG. 1.20 – (a) modèle numérique de terrain, (b) franges topographiques (Φ^1) avec $B_{\perp} = -100\text{m}$, (c) franges topographiques (Φ^2) avec $B_{\perp} = 200\text{m}$

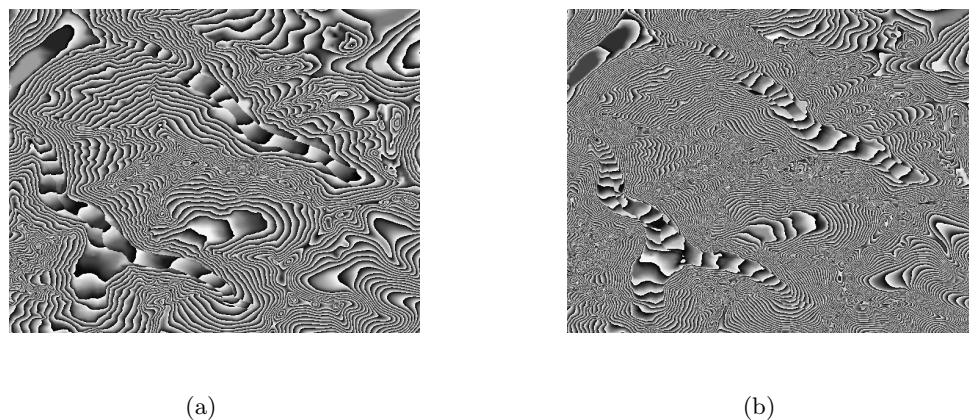


FIG. 1.21 – Franges topographiques simulées en utilisant le MNT erroné (FMNT). (a) Φ_{topo}^1 pour $B_{\perp} = -100\text{m}$, (b) Φ_{topo}^2 pour $B_{\perp} = 200\text{m}$

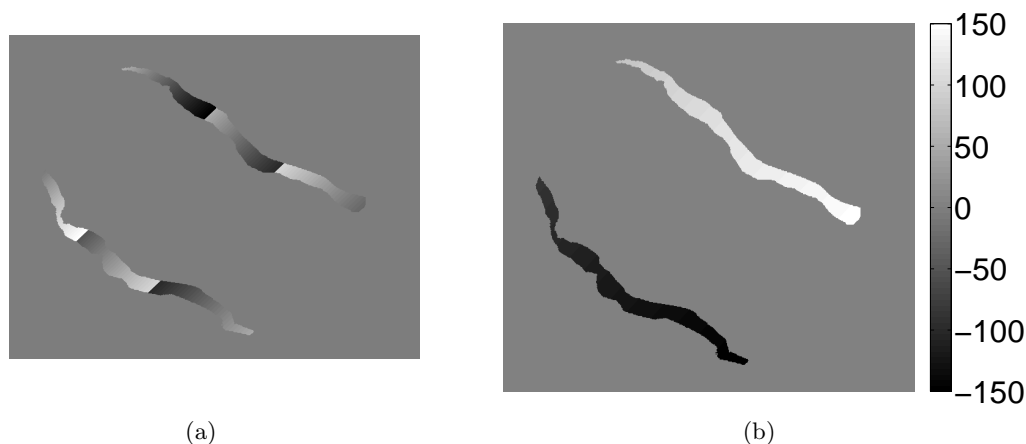


FIG. 1.22 – (a) Différence de phases entre interférogrammes différentiels $\Delta\Phi^{1-2}$, (b) Erreur du MNT estimé par la méthode proposée (altitude en mètres)

1.5.2.2 Sur une série d'images ERS-1/2

Dans cette partie, nous allons analyser les motifs des franges de quatre couples d'interférogrammes ERS-1/2 acquis en mission tandem d'octobre 1995 à avril 1996. À partir des interférogrammes différentiels, on peut calculer à l'aide de l'équation 1.40 les trois différences de phases entre interférogrammes différentiels ($\Delta\Phi_{\text{Avril-Mars}}$, $\Delta\Phi_{\text{Avril-Décembre}}$ et $\Delta\Phi_{\text{Avril-Octobre}}$) ainsi que les trois images de cohérence équivalente (équation 1.39). Puis, pour chaque glacier, les trois images des différences de phases entre interférogrammes différentiels sont déroulées en utilisant un algorithme qui minimise l'écart entre le gradient de phase enroulée et celui de la phase déroulée [Trou 98].

Le tableau 1.6 montre les baselines perpendiculaires équivalentes et les altitudes d'ambiguïté équivalentes pour les trois images de différences de phases entre interférogrammes différentiels. Nous testons si les franges résiduelles sont liées à l'altitude d'ambiguïté équivalente et donc dues à la topographie. Pour cela, nous sélectionnons uniquement les pixels qui possèdent une cohérence équivalente suffisante pour les trois couples. Puis pour chaque pixel sélectionné X et Y , l'équation 1.50 permet de calculer $K^{ij}(X, Y)$ pour les trois différences de phases entre interférogrammes différentiels. Si $K^{ij}(X, Y)$ est constant pour les différents couples ij , alors les franges résiduelles sont des franges topographiques et le pixel considéré est affecté à la classe "topographique". Dans le cas contraire, $K^{ij}(X, Y)$ varie en fonction de la paire d'interférogrammes considérée et le pixel est affecté à la classe "non topographique".

Pour tester si $K^{ij}(X, Y)$ est dépendant de la paire d'interférogrammes ij considérée, nous choisissons d'utiliser son coefficient de variation γ entre les couples. Soit $\vec{K}(X, Y)$ le vecteur qui contient les valeurs de $K^{ij}(X, Y)$ pour tous les couples d'interférogrammes i et j aux points X et Y .

- Si $|\gamma(X, Y)|$ est plus petit qu'un certain seuil alors $K^{ij}(X, Y)$ est indépendant du couple d'interférogrammes ij choisi, et l'hypothèse que les franges résiduelles sont des franges topographiques est validée.
- Si $|\gamma(X, Y)|$ est plus grand qu'un certain seuil, $K^{ij}(X, Y)$ est dépendant du couple d'interférogrammes ij considéré et les franges résiduelles ne sont pas dues à la topographie.

TAB. 1.6 – Baseline perpendiculaire équivalente et altitude d’ambiguïté équivalente

dates	Avril Mars	Avril Décembre	Avril Octobre
ΔB_{\perp} (m)	84	-115	200
Δe_a (m)	103	-75	43

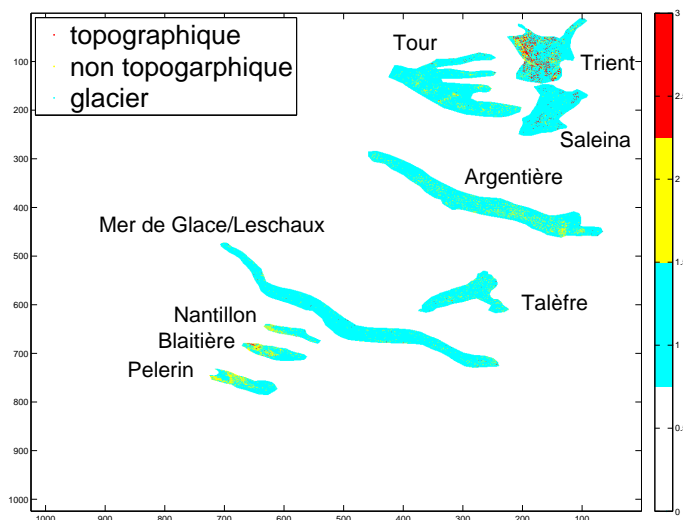


FIG. 1.23 – Résultat de la classification des pixels : classes "topographique" et "non topographique"

La figure 1.23 montre le résultat de la classification des pixels dans les classes "topographique" et "non topographique". Les zones ne correspondant pas aux glaciers sont en blanc. Les pixels qui possèdent une cohérence équivalente insuffisante pour chaque paire sont en cyan. Ces pixels ne sont pas utilisés dans la classification proposée. Les pixels en rouge sont ceux affectés à la classe "topographique" et en jaune ceux à la classe "non topographique".

Nous pouvons remarquer que la plupart des pixels classifiés sont affectés à la classe "non topographique". La majeure partie des franges topographiques semblent donc correctement retirées des interférogrammes différentiels. Sur le glacier du Trient (figure 1.23), un grand nombre de pixels est affecté à la classe topographique. Notre méthode basée sur la comparaison des motifs de franges résiduelles avec la baseline perpendiculaire équivalente permet de conclure que les franges topographiques ne sont pas totalement retirées des interférogrammes différentiels. Cela est dû à une précision insuffisante du MNT sur le glacier du Trient (glacier situé en Suisse).

La figure 1.24 montre les différences de phases entre interférogrammes différentiels sur les glaciers du Tour, Trient et Saleina. La méthode proposée a permis de caractériser les franges résiduelles présentes sur le glacier du Trient comme étant liées à la topographie. Il est donc possible d’estimer l’erreur du MNT sur le glacier du Trient en utilisant l’équation 1.51. La figure

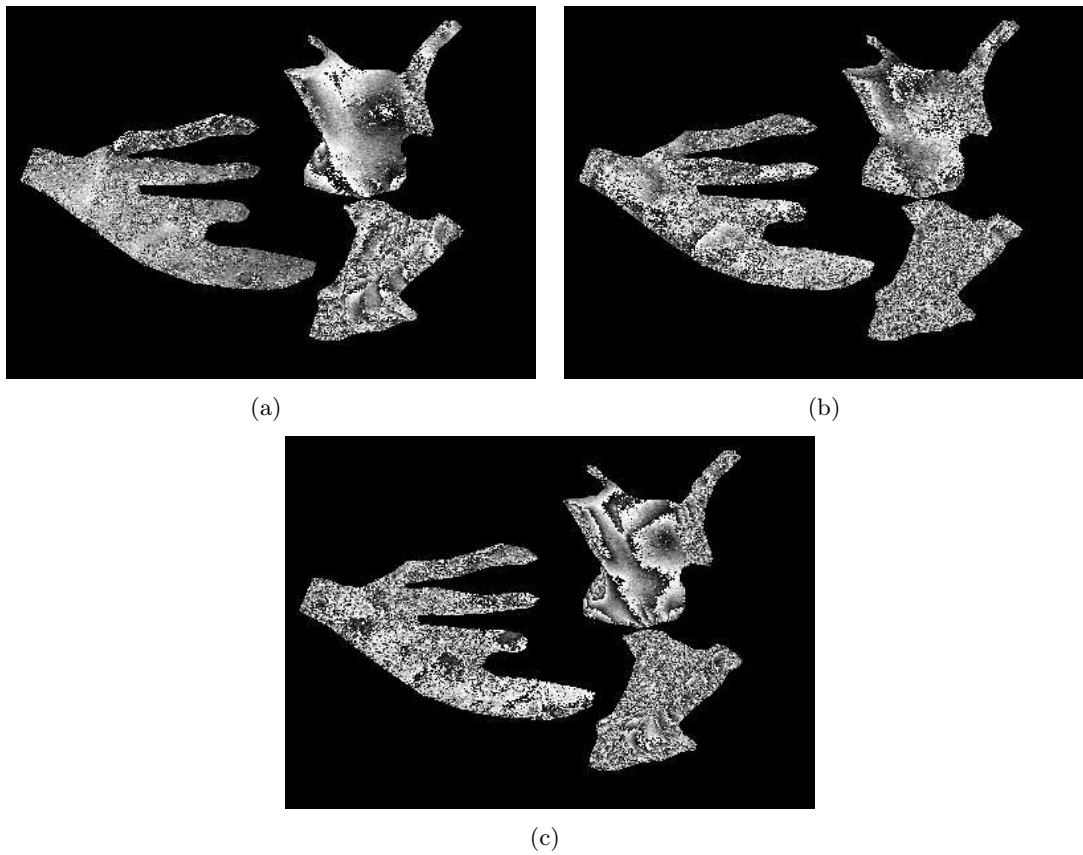


FIG. 1.24 – Différences de phases entre interférogrammes différentiels sur les glaciers du Tour, Trient et Saleina : (a) $\Delta\Phi_{\text{Avril-Mars}}$, (b) $\Delta\Phi_{\text{Avril-Décembre}}$, (c) $\Delta\Phi_{\text{Avril-Octobre}}$

1.25 montre cette image.

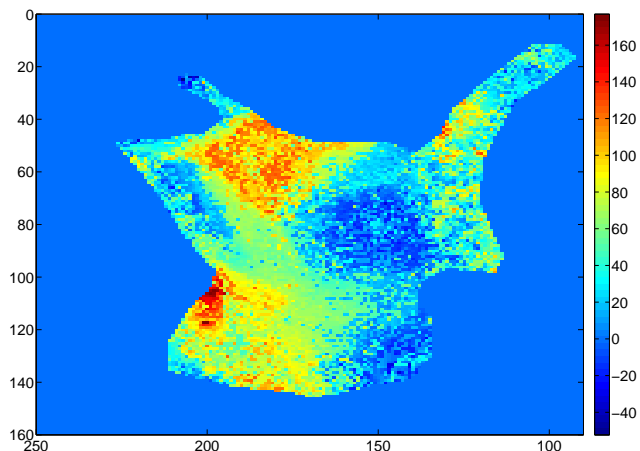


FIG. 1.25 – Erreur estimée du MNT sur le glacier du Trient en mètres

À partir de l'estimation de l'erreur du MNT, on peut corriger le MNT et recalculer les interférogrammes différentiels pour les quatre couples. La figure 1.26 montre les différences de phases entre interférogrammes différentiels sur les glaciers du Tour, Trient et Saleina en utilisant le nouveau MNT.

Cette fois, les franges résiduelles ne varient plus avec la baseline perpendiculaire équivalente, cela confirme que les franges résiduelles avant modification du MNT étaient bien liées à la topographie.

La figure 1.27 montre la différence de phases entre interférogrammes différentiels de Avril et Octobre ($\Delta\Phi_{\text{Avril-Octobre}}$). Sur le glacier d'Argentière situé en haut de l'image, on peut observer des franges résiduelles. L'algorithme proposée n'a pas détecté ces franges comme étant des franges topographiques. Ces franges résiduelles sont donc liées soit aux perturbations atmosphériques, soit à une évolution du champ de vitesse. Or les changements atmosphériques sont minimaux à un jour en hiver [Trou 07]. On peut donc interpréter les franges résiduelles sur la partie haute du glacier d'Argentière comme étant des franges résiduelles liées à une évolution du champ de déplacement. Ces franges montrent donc une accélération de la partie haute du glacier d'Argentière en octobre 1995 par rapport à avril 1996.

1.5.2.3 Résultat sur le lac de Serre-Ponçon

Nous allons maintenant analyser deux interférogrammes ERS-1/ERS-1 sur le lac de Serre-Ponçon situé à la limite des départements des Hautes-Alpes et des Alpes-de-Haute-Provence. La figure 1.28 montre le triplé amplitude/cohérence/phase pour l'interférogramme du 4 juin 1995 et 13 août 1995, ainsi que pour l'interférogramme du 10 mars 1996 et 14 avril 1996. Le cercle blanc indique la position du barrage dans l'image.

Nous pouvons constater que des franges sont présentes sur le barrage de Serre-Ponçon dans les deux interférogrammes différentiels. Comme les deux interférogrammes ont des baselines perpendiculaires de signe opposé (cf : tableau 1.7), on peut vérifier si la phase interférométrique

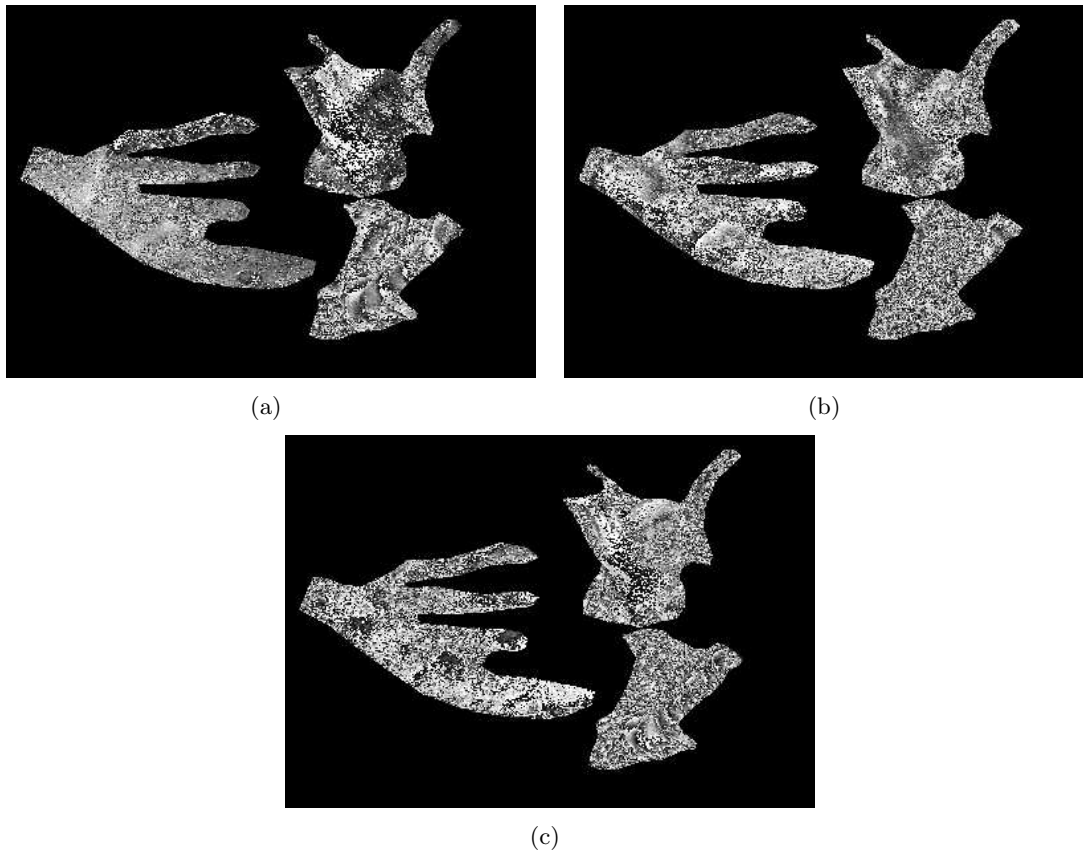


FIG. 1.26 – Différences de phases entre interférogrammes différentiels sur les glaciers du Tour, Trient et Saleina avec le nouveau MNT : (a) $\Delta\Phi_{\text{Avril-Mars}}$, (b) $\Delta\Phi_{\text{Avril-Décembre}}$, (c) $\Delta\Phi_{\text{Avril-Octobre}}$



FIG. 1.27 – Différence de phases entre interférogrammes différentiels sur le glacier d'Argentière : $\Delta\Phi_{\text{Avril-Octobre}}$

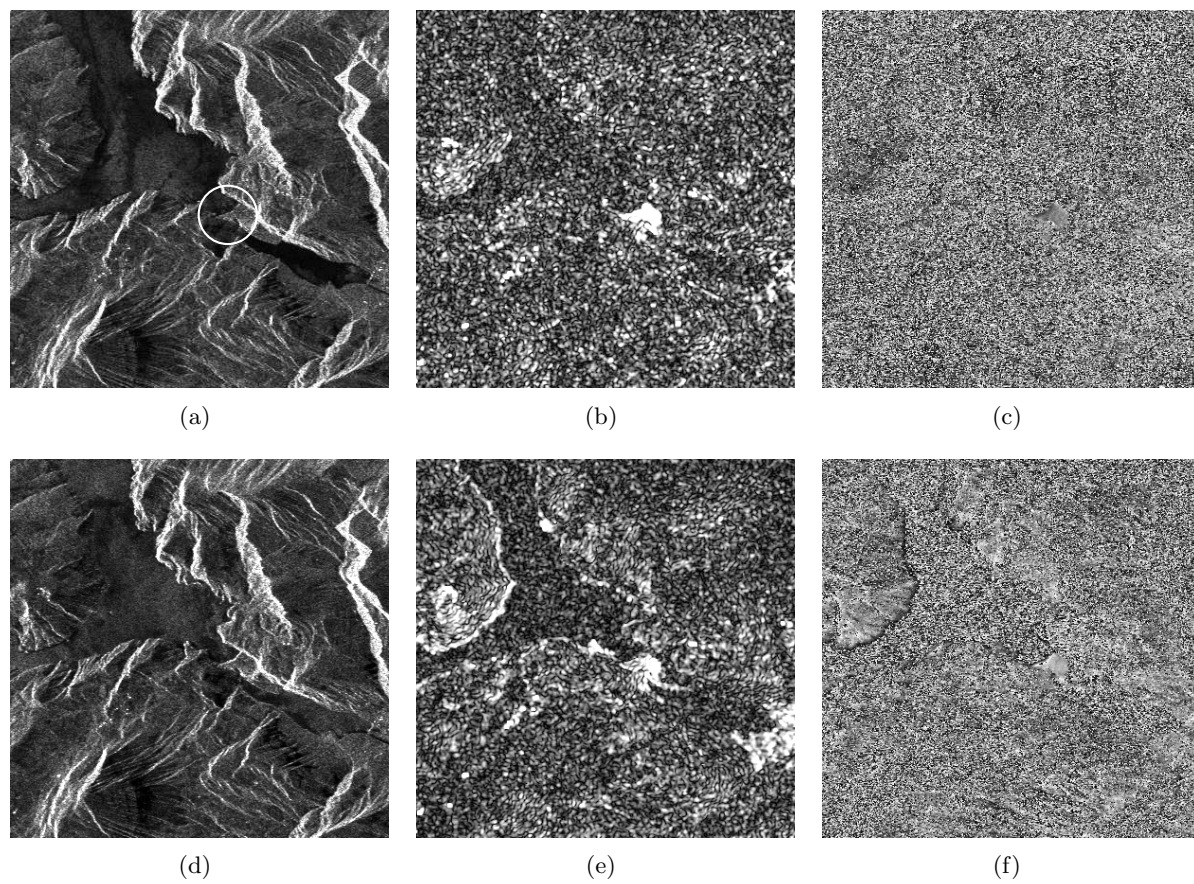


FIG. 1.28 – Interférogrammes ERS sur le lac de Serre-Ponçon en passe descendante (400×400 pixels) : 4 juin 1995 et 13 août 1995 (a) amplitude, (b) cohérence et (c) phase ; 10 mars 1996 et 14 avril 1996 (d) amplitude, (e) cohérence et (f) phase

TAB. 1.7 – Baseline perpendiculaire (en mètres)

dates	B_{\perp} (m)
13 août 1995/4 juin 1995	179
10 mars 1996/14 avril 1996	-242

est liée à la baseline perpendiculaire et donc savoir si ce sont des franges dues à la topographie. Pour ce faire, nous avons tracé un profil longitudinal de la phase interférométrique sur le barrage (figure 1.29). On constate que la phase interférométrique du couple du 10 mars 1996/14 avril 1996 (trait rouge, $B_{\perp} = -242\text{m}$) croît alors que celle du couple 13 août 1995/4 juin 1995 (trait bleu, $B_{\perp} = -179\text{m}$) décroît. On peut donc en conclure que les franges observées sur ce barrage sont dues à la topographie.

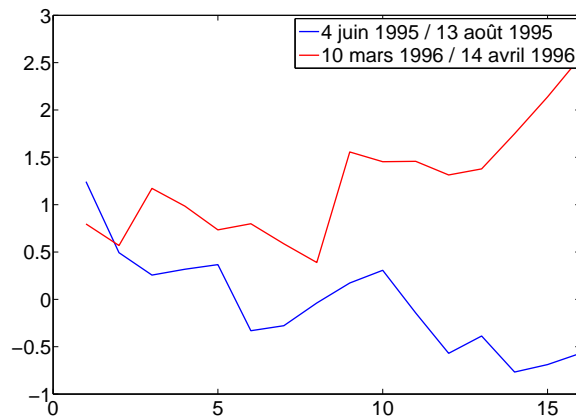


FIG. 1.29 – Profil longitudinal de la phase interférométrique sur le barrage de Serre-Ponçon

1.6 Méthodes d'offset-tracking

1.6.1 Principe

Nous venons de voir que l'interférométrie RSO peut être utilisée sur les glaciers en hiver pour estimer leur déplacement. Mais en été, la cohérence n'étant pas préservée, les techniques interférométriques ne peuvent plus être appliquées. Une alternative à ces méthodes pour obtenir un champ de vitesse même en été est l'utilisation de méthodes de corrélation d'images (offset-tracking). Ces méthodes ont connu leur essor dans les années 1990 pour estimer le déplacement d'objets géophysiques tels que les glaciers [Gray 98] [Gray 01] [Stro 02] [Shor 04] [Bert 05], les volcans ou encore les tremblements de terre [Mich 99] [Path 06]. Le principe des méthodes d'offset-tracking est de chercher le déplacement en distance et en azimuth maximisant un certain critère : en général l'intercorrélation entre image maître et esclave. Les offsets sont obtenus à l'aide de la position du pic de la fonction l'intercorrélation 2-D. Récemment, un nouveau critère basé sur une combinaison du coefficient de variation et de la corrélation a été proposé [Tupi 02] [Tupi 05] et appliqué avec succès en radargrammétrie.

F. Serafino propose d'estimer le déplacement par corrélation avec la réponse idéale d'un corner réflecteur [Sera 06]. Sa réponse impulsionnelle idéale est un sinus cardinal bidimensionnel défini par [Maît 01] :

$$h(r, a) = \text{sinc}\left(\frac{\Delta_r}{\delta_r}\right) \text{sinc}\left(\frac{\Delta_a}{\delta_a}\right) \quad (1.52)$$

avec Δ_r et Δ_a respectivement les tailles des portes en distance et en azimuth et δ_r et δ_a les résolutions en distance et en azimuth. Les tailles des portes s'expriment par :

$$\Delta_r = \frac{c}{2f_e} \text{ et } \Delta_a = \frac{V_s}{FRI} \quad (1.53)$$

avec c est la célérité de l'onde électromagnétique dans le vide, f_e la fréquence d'échantillonnage, V_s la vitesse du porteur et FRI la fréquence de répétition des impulsions.

À l'aide des caractéristiques de l'antenne et des paramètres du signal "chirp" émis, δ_r et δ_a sont définis par :

$$\delta_r = \frac{c}{K\tau} \text{ et } \delta_a = \frac{L}{2} \quad (1.54)$$

avec K la constante du chirp, τ sa durée et L la longueur de l'antenne.

Le tableau 1.8 montre les caractéristiques d'ENVISAT.

TAB. 1.8 – Caractéristiques d'ENVISAT

Δ_r	7.9048 m	Δ_a	4 m
δ_r	9.65 m	δ_a	5 m

La méthode proposée par F. Serafino [Sera 06] permet d'estimer le déplacement d'IPS (Isolated Point Scatterers). Un rétrodiffuseur est considéré comme IPS s'il possède une réponse

impulsionnelle en sinus cardinal (équation 1.52) et qu'aucun autre rétrodiffuseur ne se trouve à proximité.

Le principe de la méthode d'estimation du déplacement par corrélation avec le sinus cardinal 2-D est présenté dans la figure 1.30. Prenons le cas où l'on dispose de deux IPS (noté A et B). La méthode consiste à estimer la position des points A et B dans la première image. Pour cela, on calcule l'intercorrélation entre l'image 1 et la réponse impulsionnelle idéale (le sinus cardinal). La maximisation de cette fonction d'intercorrélation donne la position en distance et en azimuth des points A et B dans l'image 1. Puis, de la même façon, on estime les positions en distance et azimuth des points A et B dans l'image 2. Dans notre cas, le point A correspond au corner réflecteur installé sur le glacier d'Argentière et le point B est un IPS situé dans la vallée. Comme le point B n'a pas bougé entre les deux acquisitions, on peut s'en servir pour recalibrer les images. On en déduit ainsi le déplacement du point A.

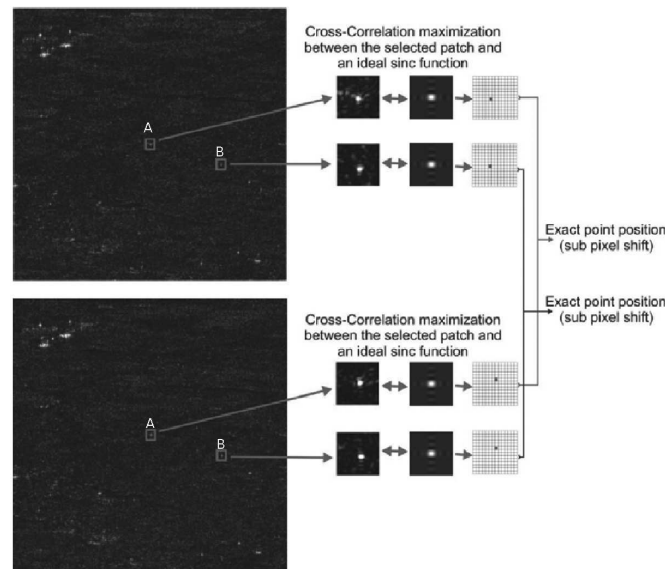


FIG. 1.30 – Principe de la méthode d'estimation du déplacement par corrélation avec le sinus cardinal 2-D [Sera 06]

1.6.2 Résultat sur des images ENVISAT

Nous appliquons la méthode de corrélation avec la réponse impulsionnelle idéale d'un IPS sur le site test du glacier d'Argentière. Un corner réflecteur a été installé sur le glacier d'Argentière le 21 février 2007. Le 22 février 2007, le satellite ENVISAT a effectué une acquisition en passe descendante en mode de polarisation alternée (AP). Le satellite a émis en polarisation verticale (V) et a reçu l'onde électromagnétique en polarisation horizontale (H) et verticale (V). Les deux canaux reçus sont VV et VH. L'image est acquise pour une fauchée IS6, l'angle d'incidence varie de 39.1° à 42.8° . Le 7 février 2008, le satellite ENVISAT a effectué, dans la même configuration, une deuxième acquisition 350 jours après la première.

Les figures 1.31(a) et 1.31(b) montrent respectivement les images d'amplitudes (après moyennage 4×1) en polarisation VV acquises le 22 février 2007 et le 7 février 2008. Les cercles blancs indiquent la position du corner réflecteur dans les images.

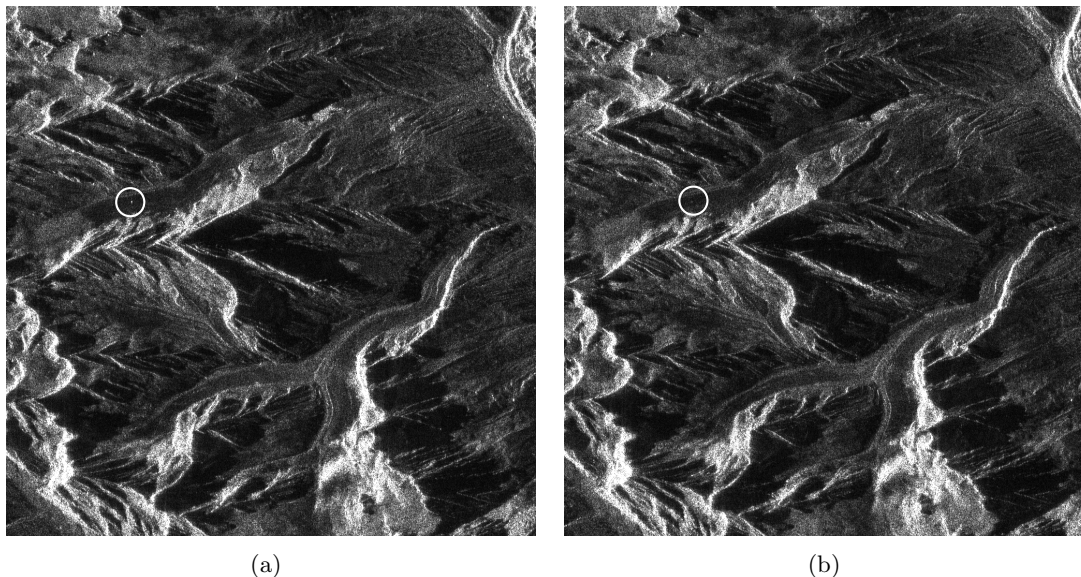


FIG. 1.31 – Images ENVISAT en polarisation VV acquises en passe descendante (1024×1024 pixels) : (a) le 22 février 2007 et (b) le 7 février 2008

Les figures 1.32(a) et 1.32(b) montrent la réponse du corner réflecteur sur l'image de février 2007 ainsi que son approximation par un sinus cardinal. Nous pouvons ainsi estimer précisément la position du corner réflecteur dans la première image en cherchant la position subpixelique de la valeur maximale du critère. Nous effectuons la même chose pour un IPS situé dans la vallée, les figures 1.32(c) et 1.32(d) représentent respectivement l'IPS et son approximation par le sinc.

Afin d'évaluer les performances de la méthode d'estimation de déplacement, un GPS (Global Positioning System) a été installé avec le corner le 21 février 2007. Ce GPS permanent effectue une mesure de position toutes les 6 heures. Une analyse du déplacement du corner au cours de l'année 2007 est détaillée dans [Trou 08]. Le tableau 1.9 montre les coordonnées Lambert 2 du corner réflecteur le 23 février 2007 et le 27 février 2008.

TAB. 1.9 – Coordonnées Lambert 2 étendu du corner réflecteur sur le glacier d'Argentière

date	position du corner réflecteur		
	x en mètres	y en mètres	z en mètres
23 février 2007	961830.88	2115306.42	2773.46
27 février 2008	961779.57	2115323.09	2767.76

En appliquant l'algorithme d'estimation de déplacement du corner, nous trouvons un déplacement au sol moyen de 17.45 cm/jour alors que la mesure GPS nous donne un déplacement de 14.70 cm/jour.

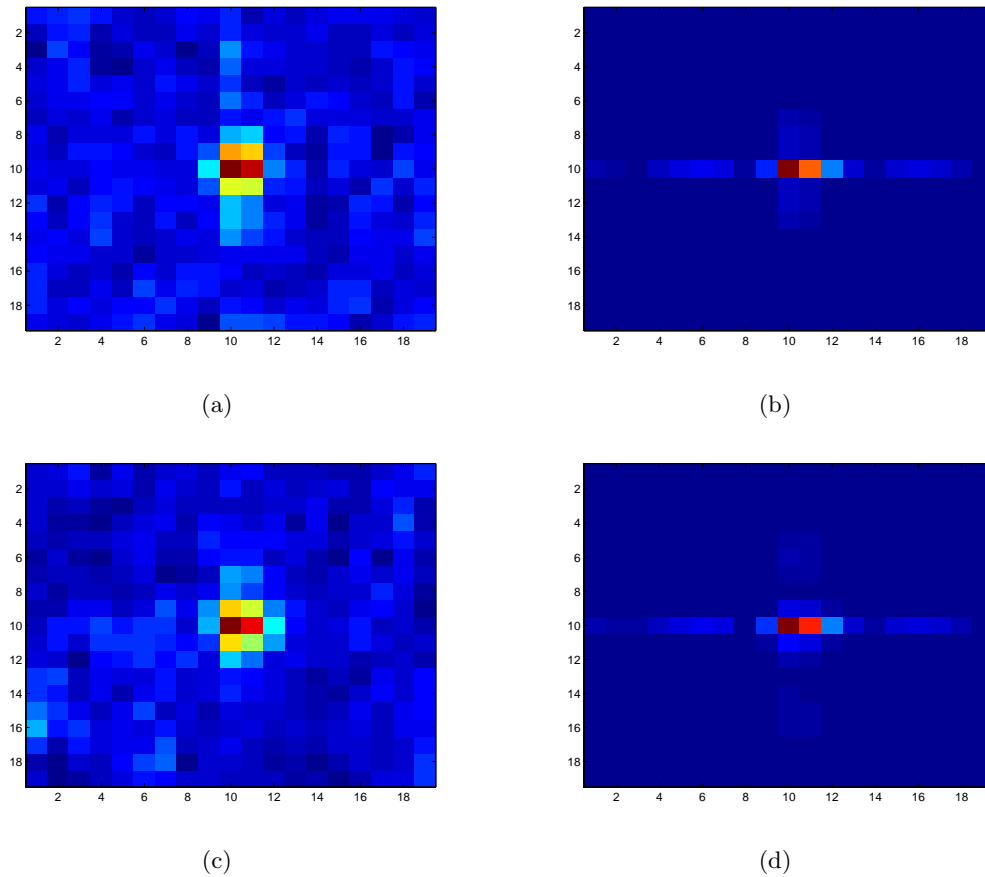


FIG. 1.32 – Approximation de la réponse d'un corner réflecteur sur le glacier d'Argentière et d'un IPS situé dans la vallée de Chamonix par un sinus cardinal : (a) image du corner réflecteur, (b) approximation de la réponse du corner réflecteur par un sinus cardinal, (c) image d'un IPS dans la vallée et (d) son approximation par un sinus cardinal

1.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés à l'étude des méthodes pour obtenir un champ de déplacement.

Dans un premier temps, nous nous sommes consacrés à l'interférométrie RSO différentielle. Nous avons analysé la cohérence sur une série de 5 interférogrammes ERS acquis pendant la mission tandem de juillet 1995 à avril 1996. Cette analyse a révélé que durant les périodes où les températures sont plus chaudes, la cohérence est préservée uniquement sur les parties hautes et faiblement pentues du glacier. Lorsque la cohérence est préservée, les franges d'interférences sont représentatives du déplacement au sol. En utilisant l'hypothèse d'écoulement parallèle au glacier et dans la ligne de plus grande pente, nous avons obtenu un champ de vitesse 3D au sol. Une comparaison de ce champ de vitesse avec des mesures annuelles *in situ* a confirmé que les hypothèses effectuées pour projeter le déplacement au sol sont valides. L'interférométrie satellitaire en bande C à un jour d'intervalle permet d'obtenir des vitesses instantanées à la surface des glaciers.

Nous avons ensuite proposé une nouvelle méthode pour estimer les offsets sur les passes ascendante et descendante. Cette méthode repose sur le fait que l'on possède un ensemble de points visibles pour les deux passes et que l'écoulement s'effectue parallèlement au glacier et dans la ligne de plus grande pente. Cette méthode d'estimation des offsets a été validée avec succès sur des images simulées. En revanche, les tests effectués sur le couple ERS-1/2 du 14 et 15 avril 1996 n'ont pas donné de bons résultats car la zone commune visible par les deux passes est étroite et ne présente pas de motifs de franges marqués rendant difficile l'estimation des offsets.

Puis, nous avons analysé les franges résiduelles présentes dans les images de différence de phases entre interférogrammes différentiels. Nous savons que ces franges résiduelles sont dues soit à la topographie, soit à une évolution du champ de vitesse ou soit à des termes de perturbations atmosphériques. Nous avons mis en place une méthode qui permet de tester si la composante topographique est parfaitement retirée des interférogrammes en comparant les franges résiduelles avec la baseline perpendiculaire équivalente. Si les franges résiduelles sont dues à la topographie, nous avons montré à partir d'images simulées qu'il est possible d'estimer l'erreur du MNT et de retrouver le vrai MNT. Nous avons ensuite appliqué ces traitements sur une série de 4 interférogrammes différentiels ERS-1/2 en mission tandem d'octobre 1995 à avril 1996. Nous avons montré sur le glacier du Trient que les franges observées dans les interférogrammes différentiels étaient dues à des erreurs de topographie.

Puis finalement, nous avons implémenté l'algorithme proposé par F. Serafino [Sera 06] basé sur les IPS (réflecteurs isolés qui possèdent une réponse impulsionnelle en sinus cardinal). Nous avons appliqué cette méthode sur le glacier d'Argentière pour mesurer le déplacement d'un corner réflecteur installé sur le glacier à l'aide de deux images ENVISAT acquises à 350 jours d'intervalle. Cette méthode a montré des résultats en adéquation avec les mesures GPS.

Chapitre 2

La polarimétrie radar

Sommaire

2.1	Introduction	53
2.2	Propagation des ondes électromagnétiques planes	53
2.2.1	Ellipse de polarisation	54
2.2.2	Caractérisation de l'état de polarisation	56
2.2.2.1	Vecteur de Jones	56
2.2.2.2	Vecteur de Stokes	56
2.2.2.3	Sphère de Poincaré	57
2.3	Représentation des ondes partiellement polarisées	57
2.3.1	Matrice de cohérence	57
2.3.2	Vecteur de Stokes	58
2.3.3	Degré de polarisation	58
2.4	Représentation polarimétrique d'une cible radar	58
2.4.1	Représentation cohérente	59
2.4.1.1	Matrice de rétrodiffusion	59
2.4.1.2	Matrice de Graves	59
2.4.1.3	Vecteur de rétrodiffusion	59
2.4.2	Représentation incohérente	61
2.4.2.1	Matrices de cohérence et de covariance	61
2.4.2.2	Équations monostatiques de la cible	61
2.5	Décompositions incohérentes de la matrice de cohérence (ICTD)	62
2.5.1	Principe des décompositions incohérentes	62
2.5.2	Extraction de paramètres à partir des valeurs propres	63
2.5.2.1	Le span	63
2.5.2.2	L'entropie	63
2.5.2.3	L'anisotropie	64
2.5.3	Extraction de paramètres à partir des vecteurs propres	64
2.5.3.1	Le modèle α/β	64
2.5.3.2	Le Target Scattering Vector Model (TSVM-ICTD)	66
2.5.4	Comparaison des modèles α/β et TSVM	69
2.5.4.1	Cas d'une cible symétrique $\tau_m = 0$	69
2.5.4.2	Cas d'une cible non symétrique $\tau_m \neq 0$	71
2.5.4.3	Résultats sur des images réelles	72
2.6	La notion de mécanisme moyen de rétrodiffusion	73

2.6.1	Positionnement du problème	73
2.6.2	Mécanisme de rétrodiffusion moyen	76
2.6.2.1	Modèle α/β	79
2.6.2.2	Modèle TSVM	80
2.6.2.3	Applications	80
2.6.3	Comparaison des vecteurs de rétrodiffusion associés aux mécanismes moyens de rétrodiffusion	80
2.6.4	Propriétés du vecteur de rétrodiffusion associé au mécanisme de rétro- diffusion moyen	82
2.7	Conclusion et perspectives	83

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser à la polarimétrie radar. La polarisation d'une onde électromagnétique est une propriété essentielle de celle-ci. Elle décrit l'alignement et la régularité de ses champs électriques et magnétiques dans le plan transverse à sa propagation. Dans les années 1950, G.W. Sinclair établit les bases de la polarimétrie radar [Sinc 50] en montrant qu'une cible radar se comporte comme un modificateur de la polarisation. Cette transformation est complètement définie par une matrice complexe 2×2 appelée matrice de rétrodiffusion ou encore matrice de Sinclair. Dans les années 1970, J.R. Huynen proposa une approche phénoménologique des cibles radar [Huyn 78] qui permit de franchir un pas décisif dans la compréhension des processus d'interaction entre l'onde électromagnétique et les rétrodiffuseurs.

La première partie de ce chapitre est consacrée à un état de l'art sur les principes de la polarimétrie radar, dont nous détaillerons les bases mathématiques.

Dans le cas où différents types de rétrodiffuseurs interagissent avec l'onde électromagnétique, la rétrodiffusion est dite incohérente et on utilise la matrice de cohérence \mathbf{T} pour caractériser les cibles. On s'intéressera donc dans un deuxième temps aux théorèmes de décompositions incohérentes de cette matrice de cohérence et plus précisément aux théorèmes de décompositions en valeurs propres et vecteurs propres. Pour caractériser les différents mécanismes de rétrodiffusion mis en jeu, on extrait des paramètres issus des valeurs propres et vecteurs propres de \mathbf{T} . Pour cela, il est nécessaire d'avoir un modèle de paramétrisation des vecteurs propres. Nous analyserons dans ce chapitre les deux modèles existants :

- Le modèle α/β introduit par S.R. Cloude et E. Pottier [Clou 97].
- Le modèle "Target Scattering Vector Model" (TSVM) introduit par R. Touzi [Touz 07b].

Nous comparerons ces modèles dans le cas de cibles symétriques et non symétriques.

La dernière partie de ce chapitre sera dédiée à la définition de la notion de mécanisme de rétrodiffusion moyen. Nous montrerons que, dans le cas de cibles étendues, la définition du vecteur de rétrodiffusion associé au mécanisme de rétrodiffusion moyen introduit par S.R. Cloude et E. Pottier dépend du choix du modèle utilisé pour paramétrer les vecteurs propres. Nous proposerons une définition du vecteur de rétrodiffusion associé au mécanisme de rétrodiffusion moyen et nous en étudierons les propriétés.

2.2 Propagation des ondes électromagnétiques planes

Une onde électromagnétique est constituée d'un champ électrique et d'un champ magnétique mutuellement orthogonaux qui oscillent dans le plan transverse à la direction de propagation. Comme les champs électrique et magnétique sont reliés entre eux par les équations de Maxwell, on peut s'intéresser uniquement à une seule de ces quantités pour décrire complètement l'onde électromagnétique. On représente généralement l'onde électromagnétique en décrivant les variations du champ électrique au cours du temps.

En l'absence de charge, le champ électrique $\vec{E}(\vec{r}, t)$ à la position \vec{r} et au temps t est régie par l'équation de propagation :

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{E}(\vec{r}, t) = 0 \quad (2.1)$$

où c est la constante de célérité de l'onde dans le vide.

Soit $(0, \hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ un repère cartésien orthonormé, si l'onde électromagnétique se propage selon la direction de l'axe z , le champ électrique \vec{E} oscillera dans le plan orthogonal à la direction de propagation.

Le champ électrique d'une onde électromagnétique monochromatique se propageant suivant la direction de l'axe z s'écrit [Desc 51] [Grav 56] [Born 59] [Boer 91] [Touz 04b] :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = E_x \hat{x} + E_y \hat{y} \quad (2.2)$$

$$= \Re \left\{ [a_x \exp(j\delta_x) \hat{x} + a_y \exp(j\delta_y) \hat{y}] \cdot \exp[j(\omega t - kz)] \right\} \quad (2.3)$$

avec ω la fréquence angulaire, δ_x et δ_y les phases absolues du champ électrique selon les axes \hat{x} et \hat{y} à $t = 0$ et $z = 0$. Le champ électrique s'exprime ainsi par :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x \cos(\omega t - kz + \delta_x) \\ a_y \cos(\omega t - kz + \delta_y) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

À partir de l'équation 2.4, on peut éliminer la variable $\tau = \omega t - kz$. On obtient ainsi l'équation décrite par l'extrémité du vecteur du champ électrique dans le plan (x, y) [Born 59] [Touz 04b] :

$$\left(\frac{E_x}{a_x}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{a_y}\right)^2 - 2\frac{E_x E_y}{a_x a_y} \cos \delta = \sin^2 \delta \quad (2.5)$$

où $\delta = \delta_y - \delta_x$ est la différence de phase entre les deux composantes du champ électrique selon x et y . L'équation 2.5 du champ électrique dans le plan (x, y) est celle d'une ellipse.

2.2.1 Ellipse de polarisation

La figure 2.1 montre un exemple de propagation d'une onde électromagnétique plane. La ligne "bleue" correspond au tracé de la pointe du vecteur champ électrique au cours du temps. Ce champ électrique est la somme de deux contributions : le champ électrique selon l'axe des x (en rouge) et le champ électrique selon l'axe des y (en cyan).

Dans le plan (x, y) , l'ellipse de polarisation (figure 2.2) est totalement définie par les trois paramètres de l'équation de l'ellipse (a_x , a_y et δ). On peut aussi la caractériser à l'aide des trois entités suivantes :

- L'orientation ψ .
- L'ellipticité χ .
- L'intensité totale s_0

L'orientation $\psi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ est définie comme étant l'angle entre l'axe horizontal x et le grand axe de l'ellipse de polarisation.

L'ellipticité $\chi \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ est l'angle dont la tangente est égale au rapport entre le petit axe de l'ellipse (noté b) et son grand axe (noté a). Lorsque $\chi = 0$, la polarisation est linéaire. Pour $\chi = \pm\frac{\pi}{4}$, la polarisation est circulaire. Le signe de l'ellipticité indique le sens de parcours de l'ellipse (droite ou gauche).

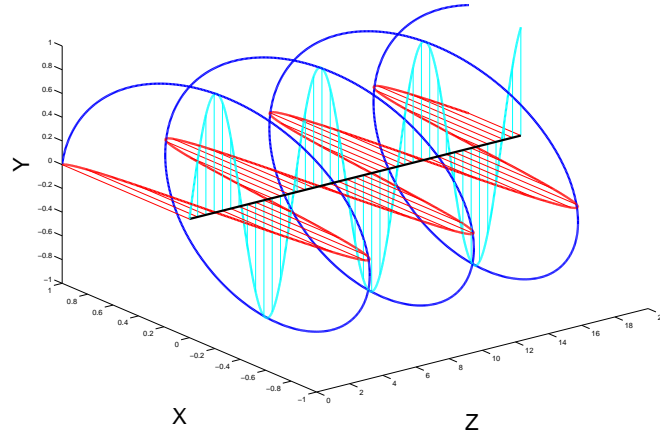


FIG. 2.1 – Propagation d’une onde électromagnétique plane

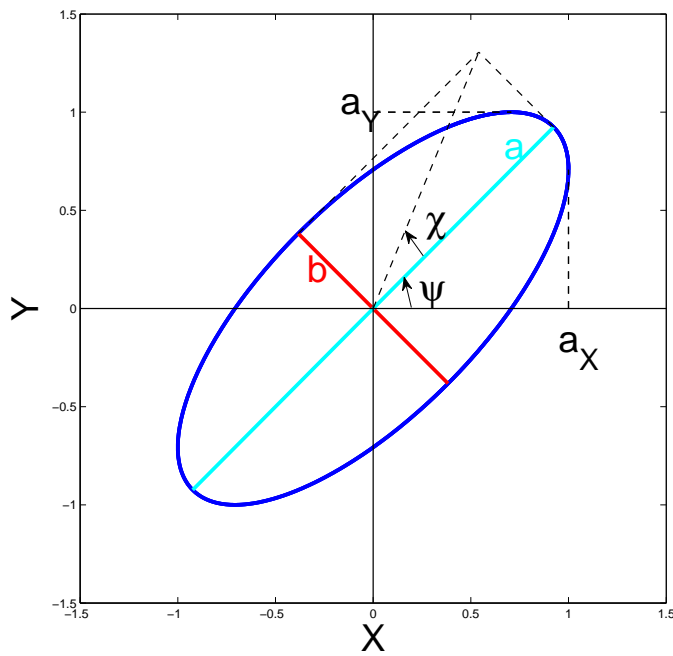


FIG. 2.2 – Ellipse de polarisation

Le paramètre s_0 correspond à l'intensité totale définie par $s_0 = a_x^2 + a_y^2$.

2.2.2 Caractérisation de l'état de polarisation

2.2.2.1 Vecteur de Jones

Le vecteur de Jones $\vec{\underline{E}}$ est défini comme étant une représentation du champ électrique indépendante du temps et de la position le long de l'axe z de propagation par :

$$\vec{\underline{E}} = \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x e^{j\delta_x} \\ a_y e^{j\delta_y} \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Le vecteur de Jones contient toute l'information sur une onde électromagnétique monochromatique transverse. Ainsi, tout état de polarisation est caractérisé par son vecteur de Jones dans une base orthogonale (x, y) . Généralement, la base de polarisation de référence utilisée pour la définition de l'ellipse de polarisation est la base de polarisation (H, V) où H et V définissent respectivement les polarisations horizontale et verticale.

Le vecteur de Jones dans la base de polarisation (H, V) s'écrit

$$\vec{\underline{E}} = s_0 \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi \\ \sin \psi & \cos \psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \chi & j \sin \chi \\ j \sin \chi & \cos \chi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-j\alpha} & 0 \\ 0 & e^{j\alpha} \end{bmatrix} u_x \quad (2.7)$$

$$= s_0 [\mathbf{U}_2(\psi)] [\mathbf{U}_2(\chi)] [\mathbf{U}_2(\alpha)] u_x \quad (2.8)$$

où l'angle α est la phase absolue du champ électrique \vec{E} à $t = 0$.

$u_x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ représente le vecteur de Jones normalisé d'une polarisation horizontale exprimée dans la base de polarisation (H, V) .

Les matrices $[\mathbf{U}_2(\psi)]$, $[\mathbf{U}_2(\chi)]$ et $[\mathbf{U}_2(\alpha)]$ sont les trois matrices de transformation. Elles appartiennent au groupe des matrices 2×2 spéciales unitaires $\text{SU}(2)$.

2.2.2.2 Vecteur de Stokes

Dans le cas d'une onde totalement polarisée, l'ellipse de polarisation est totalement définie par les trois paramètres indépendants a_x , a_y et δ . Stokes a proposé en 1852 de ranger ces paramètres dans un vecteur \vec{S} appelé vecteur de Stokes par :

$$\vec{S} = \begin{bmatrix} s_0 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x^2 + a_y^2 \\ a_x^2 - a_y^2 \\ 2a_x a_y \cos \delta \\ 2a_x a_y \sin \delta \end{bmatrix} = s_0 \begin{bmatrix} 1 \\ \cos(2\chi) \cos(2\psi) \\ \cos(2\chi) \sin(2\psi) \\ \sin(2\psi) \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

Ce vecteur \vec{S} contient quatre éléments, mais seulement trois de ces paramètres sont indépendants dans le cas où l'onde est totalement polarisée. En effet, on a la relation suivante :

$$s_0^2 = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 \quad (2.10)$$

2.2.2.3 Sphère de Poincaré

En utilisant la représentation de Stokes, on peut décrire l'état de polarisation d'une onde totalement polarisée par un point P sur la sphère de Poincaré (figure 2.3). Le point P se trouve à la latitude correspondant à deux fois l'ellipticité (2χ) et à la longitude deux fois l'orientation de l'onde (2ψ). Le rayon de la sphère est égale à l'intensité s_0 de l'onde.

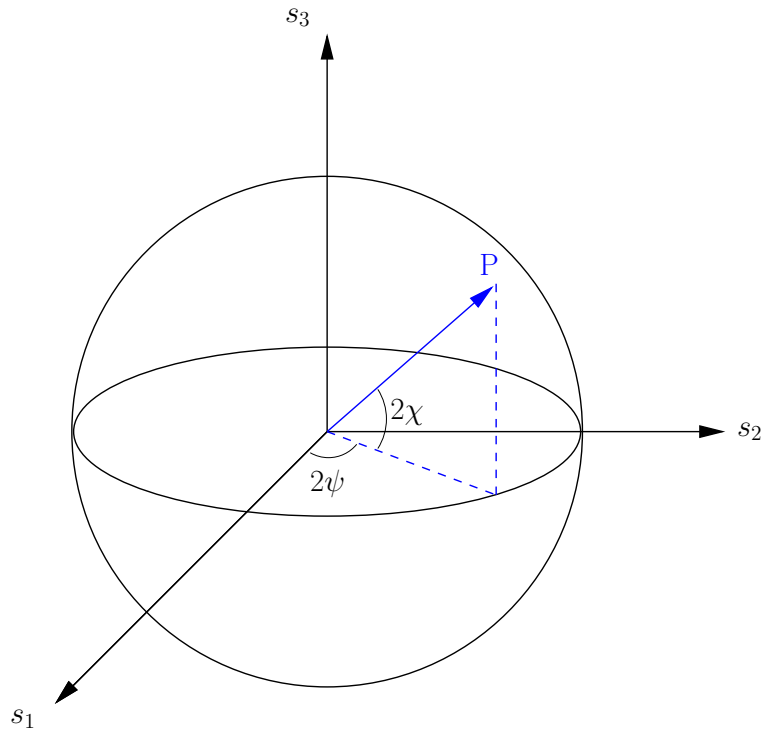


FIG. 2.3 – Sphère de Poincaré

Les polarisations horizontale et verticale, qui possèdent une ellipticité χ nulle, se trouvent sur l'équateur de la sphère de Poincaré. Les polarisations circulaires gauche et droite se situent respectivement sur les pôles Nord et Sud de la sphère.

2.3 Représentation des ondes partiellement polarisées

Nous venons de présenter le cas des ondes totalement polarisées qui sont complètement caractérisées à l'aide des paramètres de l'ellipse, du vecteur de Jones, ou encore via la sphère de Poincaré. Néanmoins, lors d'une acquisition radar, il est fréquent que les paramètres de polarisation de l'onde varient au cours du temps. Le vecteur de Jones n'est donc plus suffisant pour caractériser les variations temporelles de l'état de polarisation de l'onde. On étudie donc le moment d'ordre 2 du vecteur de Jones appelé la matrice de cohérence \mathbf{J} [Born 59].

2.3.1 Matrice de cohérence

Cette matrice de cohérence s'exprime par :

$$\mathbf{J} = \langle \underline{\vec{E}} \underline{\vec{E}}^\dagger \rangle = \begin{bmatrix} \langle |E_x|^2 \rangle & \langle E_x E_y^* \rangle \\ \langle E_y E_x^* \rangle & \langle |E_y|^2 \rangle \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

$$= \begin{bmatrix} \langle |a_x|^2 \rangle & \langle a_x a_y e^{-j\delta} \rangle \\ \langle a_x a_y e^{j\delta} \rangle & \langle |a_y|^2 \rangle \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

où les éléments diagonaux de la matrice de cohérence \mathbf{J} correspondent aux variances des éléments du vecteur de Jones. Les éléments non diagonaux sont les intercorrélations.

2.3.2 Vecteur de Stokes

Le vecteur de Stokes peut être utilisé pour caractériser les ondes partiellement polarisées. C'est une réécriture vectorielle de la matrice de cohérence \mathbf{J} . Elle consiste en la projection dans le base de Pauli de la matrice \mathbf{J} .

En notant $V(\dots)$ l'opérateur de vectorisation, le vecteur de Stokes \vec{S} est égal à $V(\mathbf{J}) = \text{Trace}(\mathbf{J}\Psi)$.

La base de matrices spin de Pauli est définie par :

$$\Psi_{\mathbf{P}} : \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}; \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

le vecteur de Stokes \vec{S} s'exprime donc par :

$$\vec{S} = \begin{bmatrix} s_0 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle |E_x|^2 \rangle + \langle |E_y|^2 \rangle \\ \langle |E_x|^2 \rangle - \langle |E_y|^2 \rangle \\ 2\Re(\langle E_x E_y^* \rangle) \\ -2\Im(\langle E_x E_y^* \rangle) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \langle |a_x|^2 \rangle + \langle |a_y|^2 \rangle \\ \langle |a_x|^2 \rangle - \langle |a_y|^2 \rangle \\ 2 \langle a_x a_y \cos \delta \rangle \\ 2 \langle a_x a_y \sin \delta \rangle \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

2.3.3 Degré de polarisation

Un paramètre important en polarimétrie est la mesure du degré de polarisation. Ce degré de polarisation p est une mesure du rapport de la puissance du signal polarisé sur la puissance totale. Elle s'exprime soit à l'aide des paramètres de Stokes, soit par la matrice de cohérence \mathbf{J} par :

$$p = \frac{\sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2}}{s_0} = \sqrt{1 - \frac{4|\mathbf{J}|}{\text{Trace}(\mathbf{J})^2}} = \frac{|\lambda_1 - \lambda_2|}{\lambda_1 + \lambda_2} \quad (2.15)$$

avec λ_1 et λ_2 sont les valeurs propres de la matrice de cohérence hermitienne \mathbf{J} .

Le degré de polarisation p prend des valeurs dans l'intervalle $[0, 1]$. L'onde est totalement polarisée lorsque $p = 1$. Cela correspond au cas où la matrice de cohérence \mathbf{J} est de rang 1.

2.4 Représentation polarimétrique d'une cible radar

Après avoir défini la propagation des ondes polarimétriques, nous allons maintenant nous intéresser aux interactions entre l'onde électromagnétique et les rétrodiffuseurs. Nous allons présenter les représentations cohérente et incohérente.

2.4.1 Représentation cohérente

2.4.1.1 Matrice de rétrodiffusion

Le radar émet une onde électromagnétique incidente \vec{E}_i qui se propage et illumine une cible. L'onde rétrodiffusée \vec{E}_s par la cible se propage jusqu'au capteur de l'antenne en réception.

La matrice de rétrodiffusion \mathbf{S} est une matrice qui exprime le champ électrique de l'onde rétrodiffusée à partir du champ électrique de l'onde incidente. Elle relie le vecteur de Jones de l'onde incidente \vec{E}_i au vecteur de Jones de l'onde rétrodiffusée \vec{E}_s par :

$$\vec{E}_s = \frac{e^{jkr}}{r} \mathbf{S} \vec{E}_i \quad (2.16)$$

où $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ est le nombre d'onde, et r est la distance entre le radar et la cible. Le terme en $\frac{1}{r}$ décrit l'atténuation du champ électrique.

La matrice de rétrodiffusion \mathbf{S} est donc une matrice de taille 2×2 de paramètres complexes définie par :

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_{HH} & S_{HV} \\ S_{VH} & S_{VV} \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

où S_{HV} signifie que l'antenne est polarisée horizontalement à l'émission et verticalement à la réception. S_{HH} et S_{VV} sont les éléments co-polaires et les S_{HV} et S_{VH} sont les éléments en polarisation croisée.

Dans le cas monostatique, l'émetteur et le récepteur du champ électromagnétique sont situés au même endroit, les éléments en polarisation croisée de la matrice de rétrodiffusion \mathbf{S} sont égaux ($S_{HV} = S_{VH}$). La matrice \mathbf{S} devient symétrique.

Le tableau 2.1 montre des exemples de matrices de rétrodiffusion associées à différents types de diffuseurs.

2.4.1.2 Matrice de Graves

Il est possible de caractériser la cible par le biais des puissances. Si l'on note \mathbf{P}_s la puissance totale rétrodiffusée par la cible. On peut relier la puissance reçue [Grav 56] par le capteur à l'aide du champ électrique à la réception ou du champ électrique à l'émission et de la matrice de rétrodiffusion par :

$$\mathbf{P}_s = \vec{E}_s^\dagger \vec{E}_s = \frac{1}{r^2} \vec{E}_i^\dagger \mathbf{G} \vec{E}_i \quad (2.18)$$

où $\mathbf{G} = \mathbf{S}^\dagger \mathbf{S}$ est appelée la matrice de Graves. \mathbf{G} est une matrice hermitienne semi-définie positive.

2.4.1.3 Vecteur de rétrodiffusion

Le vecteur de rétrodiffusion est une réécriture vectorielle de la matrice de rétrodiffusion \mathbf{S} . Pour cela, on utilise l'opérateur de vectorisation $V(\cdot)$ défini par :

Cible	Matrice de diffusion \mathbf{S}
Sphère, plan, trièdre	$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
Dipôle	$\begin{bmatrix} \cos^2 \Psi & \frac{1}{2} \sin(2\Psi) \\ \frac{1}{2} \sin(2\Psi) & \sin^2 \Psi \end{bmatrix}$
Dièdre	$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \cos(2\Psi) & \sin(2\Psi) \\ \sin(2\Psi) & -\cos(2\Psi) \end{bmatrix}$
Hélice droite	$\frac{1}{2} e^{-2i\Psi} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & -1 \end{bmatrix}$
Hélice gauche	$\frac{1}{2} e^{2i\Psi} \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{bmatrix}$

TAB. 2.1 – Exemples de matrices de diffusion associées à différents types de diffuseurs.

$$\mathbf{k} = V(\mathbf{S}) = \text{Trace}(\mathbf{S}\Psi) \quad (2.19)$$

où Ψ est soit la base de Pauli (équation 2.13), soit la base lexicographique définie par :

$$\Psi_{\mathbf{L}} : \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

Dans le cas monostatique, l'hypothèse de réciprocité assure l'égalité entre les éléments en polarisation croisée ($S_{HV} = S_{VH}$). Par conséquent, les vecteurs de rétrodiffusion dans la base de Pauli (k_P) et dans la base lexicographiques (k_L) sont égaux à :

$$k_P = \begin{bmatrix} S_{HH} \\ S_{VV} \\ \sqrt{2}S_{HV} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad k_L = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} S_{HH} + S_{VV} \\ S_{HH} - S_{VV} \\ 2S_{HV} \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

Dans le cas où les cibles sont distribuées, le signal rétrodiffusé est la somme de réponses élémentaires réparties dans la cellule de rétrodiffusion. Plusieurs mécanismes de rétrodiffusion sont mis en jeu et la matrice \mathbf{S} ne suffit plus pour les caractériser complètement. On parle alors de représentation incohérente des cibles.

2.4.2 Représentation incohérente

2.4.2.1 Matrices de cohérence et de covariance

Lorsque les cibles sont distribuées, on calcule donc les moments d'ordre 2, ce sont les matrices de covariance \mathbf{C} et de cohérences \mathbf{T} définies par :

$$\mathbf{C} = E\{\vec{k}_L \cdot \vec{k}_L^\dagger\} = \begin{bmatrix} E\{|S_{HH}|^2\} & E\{S_{HH}S_{VV}^*\} & \sqrt{2}E\{S_{HH}S_{HV}^*\} \\ E\{S_{VV}S_{HH}^*\} & E\{|S_{VV}|^2\} & \sqrt{2}E\{S_{VV}S_{HV}^*\} \\ \sqrt{2}E\{S_{HV}S_{HH}^*\} & \sqrt{2}E\{S_{HV}S_{VV}^*\} & 2E\{|S_{HV}|^2\} \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= E\{\vec{k}_P \cdot \vec{k}_P^\dagger\} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} E\{|S_{HH} + S_{VV}|^2\} & E\{(S_{HH} + S_{VV})(S_{HH} - S_{VV})^*\} & 2E\{(S_{HH} + S_{VV})(S_{HV})^*\} \\ E\{(S_{HH} - S_{VV})(S_{HH} + S_{VV})^*\} & E\{|S_{HH} - S_{VV}|^2\} & E\{(S_{HH} - S_{VV})(S_{HV})^*\} \\ E\{(S_{HV})(S_{HH} + S_{VV})^*\} & E\{(S_{HV})(S_{HH} + S_{VV})^*\} & 4E\{|S_{HV}|^2\} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.23)$$

2.4.2.2 Équations monostatiques de la cible

Comme la matrice de cohérence \mathbf{T} est une matrice complexe hermitienne, elle peut être paramétrée à l'aide de neuf variables par :

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 2A_0 & C - jD & H + jG \\ C + jD & B_0 + B & E + jF \\ H - jG & E - jF & B_0 - B \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

Si la matrice de cohérence \mathbf{T} est associée à une cible pure, \mathbf{T} possède une seule valeur propre non nulle. La matrice de cohérence est alors de rang 1. On obtient les neuf relations suivantes :

$$\begin{aligned} 2A_0(B_0 + B) - C^2 - D^2 &= 0 & CE + DF - H(B_0 + B) &= 0 \\ 2A_0(B_0 - B) - G^2 - H^2 &= 0 & CF - DE - G(B_0 + B) &= 0 \\ 2A_0E - CH + DG &= 0 & C(B_0 - B) - EH - FG &= 0 \\ 2A_0F - CG - DH &= 0 & D(B_0 - B) - FH - EG &= 0 \\ B_0^2 - B^2 - E^2 - F^2 &= 0 \end{aligned} \quad (2.25)$$

Dans le cas monostatique, la matrice de rétrodiffusion \mathbf{S} est caractérisée complètement à l'aide de cinq paramètres. Les neuf relations précédentes sont liées, et J.R. Huynen définit les équations monostatique de la cible par les expressions suivantes [Huyn 78] :

$$2A_0(B_0 + B) - C^2 - D^2 = 0 \quad 2A_0E - CH + DG = 0 \quad (2.26)$$

$$2A_0(B_0 - B) - G^2 - H^2 = 0 \quad 2A_0F - CG - DH = 0 \quad (2.27)$$

2.5 Décompositions incohérentes de la matrice de cohérence (ICTD)

Dans cette partie, nous allons nous intéresser aux théorèmes de décomposition polarimétriques incohérents. Dans un premier temps, nous rappellerons le principe des décompositions incohérentes. Puis, nous nous intéresserons à l'extraction de paramètres issus des valeurs propres (entropie et anisotropie) et des vecteurs propres de la matrice de cohérence. Concernant les vecteurs propres, nous analyserons les deux modèles de paramétrisation les plus couramment utilisés :

- Le modèle α/β introduit par S.R. Cloude et E. Pottier [Clou 97].
- Le modèle "Target Scattering Vector Model" (TSVM) introduit par R. Touzi [Touz 07b].

2.5.1 Principe des décompositions incohérentes

Les théorèmes de décomposition polarimétrique incohérente ont pour but de décomposer une matrice incohérente en une somme de mécanismes élémentaires caractérisés par leur matrice de rétrodiffusion ou leur vecteur cible.

Le premier théorème de décomposition a été introduit par J.R. Huynen en 1978 [Huyn 78]. L'approche d'Huynen repose sur l'idée originale qu'une cible distribuée peut être décomposée en la somme d'une cible pure et d'une cible résiduelle.

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_0 + \mathbf{T}_N \quad (2.28)$$

La cible pure possède une matrice de cohérence \mathbf{T}_0 de rang 1, elle peut être considérée comme un mécanisme de rétrodiffusion moyen. La cible résiduelle est caractérisée par sa matrice de cohérence associée \mathbf{T}_N , appelé N-target. Sa forme générale est définie par :

$$\mathbf{T}_N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_{0N} + B_N & E_N + jF_N \\ 0 & E_N - jF_N & B_{0N} - B_N \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

Un N-target possède la propriété d'être invariante par rotation autour de la ligne de visée du satellite (i.e. : roll-invariant).

La décomposition introduite par J.R. Huynen est bien adaptée pour caractériser les milieux composés majoritairement par des cibles pures (milieu faiblement entropique), comme par exemple le milieu urbain. En revanche, pour les milieux naturels, comme plusieurs mécanismes de rétrodiffusion sont mis en jeu, la décomposition de Huynen peut interpréter certains de ces mécanismes comme étant du bruit.

Ainsi, une seconde classe de théorème de décomposition polarimétrique incohérent a été proposée par S.R. Cloude et E. Pottier [Clou 97]. Ils sont basés sur la décomposition en valeurs propres et vecteurs propres de la matrice de cohérence \mathbf{T} . Comme cette matrice est hermitienne semi-définie positive, elle peut se décomposer en valeurs propres et vecteurs propres de la façon suivante :

$$\mathbf{T} = \mathbf{V}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^\dagger \quad (2.30)$$

où Σ est la matrice diagonale contenant les valeurs propres rangées par ordre décroissant de la matrice de cohérence \mathbf{T} , et \mathbf{V} est la matrice complexe contenant les vecteurs propres de \mathbf{T} .

$$\mathbf{V} = [\mathbf{k}_1 \quad \mathbf{k}_2 \quad \mathbf{k}_3] \quad \text{et} \quad \Sigma = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq 0 \quad (2.31)$$

La décomposition en valeurs propres/vecteurs propres permet de décomposer la matrice de cohérence \mathbf{T} en la somme de trois mécanismes élémentaires \mathbf{T}_i par :

$$\mathbf{T} = \lambda_1 \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_1^\dagger + \lambda_2 \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_2^\dagger + \lambda_3 \mathbf{k}_3 \mathbf{k}_3^\dagger \quad (2.32)$$

$$= \lambda_1 \mathbf{T}_1 + \lambda_2 \mathbf{T}_2 + \lambda_3 \mathbf{T}_3 \quad (2.33)$$

Le vecteur propre \mathbf{k}_i caractérise le mécanisme de rétrodiffusion élémentaire \mathbf{T}_i mis en jeu, et la valeur propre λ_i représente la puissance associée.

À partir de la décomposition en valeurs propres et vecteurs propres de la matrice de cohérence, on peut extraire des paramètres issus des valeurs propres et des vecteurs propres.

2.5.2 Extraction de paramètres à partir des valeurs propres

2.5.2.1 Le span

Comme la valeur propre λ_i représente la puissance associée au mécanisme de rétrodiffusion élémentaire \mathbf{T}_i , la somme des valeurs propres de la matrice de cohérence \mathbf{T} représente la puissance totale rétrodiffusée par la cible, c'est le SPAN défini par :

$$\text{SPAN} = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \quad (2.34)$$

2.5.2.2 L'entropie

L'entropie H de la cible est définie comme une mesure du caractère aléatoire du mécanisme de rétrodiffusion globale. Elle est définie au sens de Von Neumann, dans le cas monostatique [Clou 96], par :

$$H = \sum_{i=1}^3 -p_i \log_3 p_i \quad \text{avec} \quad p_i = \frac{\lambda_i}{\sum_{j=1}^3 \lambda_j} \quad (2.35)$$

- Si l'entropie est nulle, la matrice de cohérence contient une seule valeur propre non nulle. La cible observée est pure et la rétrodiffusion est déterministe.
- À l'opposé, si l'entropie vaut 1. La matrice de cohérence possède trois valeurs propres égales. Les pseudo-probabilités p_i sont toutes égales et la cible possède un caractère complètement aléatoire.

2.5.2.3 L'anisotropie

L'anisotropie est une mesure de l'importance relative des mécanismes de rétrodiffusion secondaires. Elle prend des valeurs dans l'intervalle $[0, 1]$ et est définie par :

$$A = \frac{\lambda_2 - \lambda_3}{\lambda_2 + \lambda_3} = \frac{p_2 - p_3}{p_2 + p_3} \quad (2.36)$$

- Si l'anisotropie est proche de 0, les deux mécanismes de rétrodiffusion secondaire ont une probabilité d'apparition égale.
- Si l'anisotropie est élevée, alors $p_2 \gg p_3$. Le deuxième mécanisme de rétrodiffusion est prépondérant devant le troisième mécanisme.

2.5.3 Extraction de paramètres à partir des vecteurs propres

A partir de la décomposition en valeurs propres et vecteurs propres de la matrice de cohérence \mathbf{T} , il est possible d'extraire des paramètres polarimétriques associés aux vecteurs propres. Pour cela, nous avons besoin de modèles de paramétrisation des vecteurs propres. Nous allons nous intéresser aux deux modèles suivants :

- Le modèle α/β introduit par S.R. Cloude et E. Pottier [Clou 97] qui repose sur la paramétrisation d'un vecteur de taille 3×1 à l'aide de 6 paramètres.
- Le modèle TSVM introduit par R. Touzi [Touz 07b] qui repose sur une interprétation physique de l'interaction entre l'onde électromagnétique et la cible.

2.5.3.1 Le modèle α/β

Pour paramétrer un vecteur propre de taille 3×1 , six paramètres sont nécessaires (un module et une phase pour chacune des trois composantes). En rajoutant la contrainte qu'un vecteur propre est normé, cinq paramètres suffisent. Ainsi, S.R. Cloude et E. Pottier [Clou 97] paramètrent les vecteurs propres à l'aide de cinq angles par :

$$\mathbf{k}_i = e^{j\theta} \begin{bmatrix} \cos \alpha_i \\ \sin \alpha_i \cos \beta_i e^{j\delta_i} \\ \sin \alpha_i \sin \beta_i e^{j\gamma_i} \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

L'angle θ n'est pas observable car dans le calcul de $\mathbf{T}_i = \mathbf{k}_i \mathbf{k}_i^\dagger$, le terme $e^{j\theta}$ disparaît. Ce terme n'a pas d'importance pour caractériser les cibles.

Dans le modèle α/β , l'angle α est le seul paramètre invariant par rotation autour de la ligne de visée du satellite. S.R. Cloude et E. Pottier proposent une interprétation des différents mécanismes de rétrodiffusion mis en jeu en fonction des valeurs de l'entropie, de l'anisotropie et de l'angle α .

- L'angle α prend des valeurs dans l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$.
- Si l'angle α est nul, la rétrodiffusion est surfacique.
- Si $\alpha = \frac{\pi}{4}$, la rétrodiffusion est celle d'un dipôle.
- Si $\alpha = \frac{\pi}{2}$, la rétrodiffusion est celle d'un dièdre.

On trouvera en annexe A, les informations nécessaires pour implémenter le modèle α/β à partir des vecteurs propres de la matrice de cohérence.

À partir des équations 2.38, 2.39 et 2.40 présentées ci-dessous, on peut étendre le domaine de définition de l'angle α à l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. En utilisant ces trois relations, les quatre angles du modèle α/β sont ainsi définis sur l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

$$\mathbf{k}_{\alpha/\beta}(\alpha, \beta, \delta, \gamma) = \mathbf{k}_{\alpha/\beta}(-\alpha, \beta, \delta \pm \pi, \gamma \pm \pi) \quad (2.38)$$

$$= \mathbf{k}_{\alpha/\beta}(\alpha, -\beta, \delta, \gamma \pm \pi) \quad (2.39)$$

$$= \mathbf{k}_{\alpha/\beta}(-\alpha, -\beta, \delta \pm \pi, \gamma) \quad (2.40)$$

Résultats des paramètres du modèle α/β . La figure 2.4 montre la valeur des paramètres du modèle α/β sur l'image d'Oberpfaffenhofen ¹. Les angles α , β et δ sont ceux issus du premier vecteur propre \mathbf{k}_1 associé à la valeur propre λ_1 de la matrice de cohérence.

¹<http://earth.esa.int/polsarpro/datasets.html>

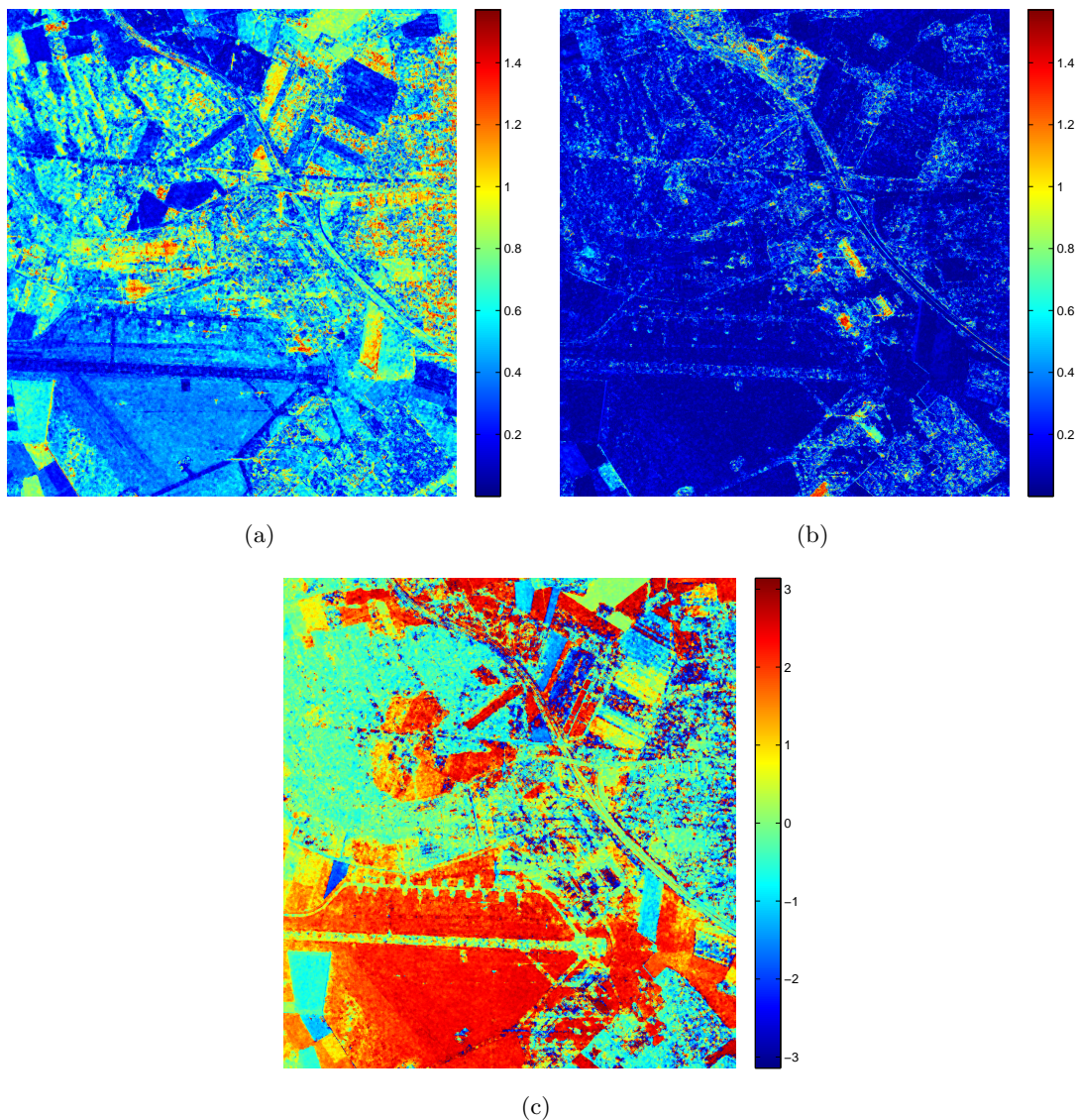


FIG. 2.4 – Paramètres du modèle α/β associés au premier vecteur propre de l'image d'Oberpfaffenhofen : (a) angle α , (b) angle β , et (c) angle δ .

2.5.3.2 Le Target Scattering Vector Model (TSVM-ICTD)

Le modèle "Target Scattering Vector Model" (TSVM) a été introduit par R. Touzi pour caractériser les cibles cohérentes [Touz 04a] [Touz 05] [Touz 07b]. Le TSVM est basé sur la décomposition de Huynen. Elle consiste en la projection de la matrice de diffusion, codiagonalisée par la méthode de Takagi [Taka 27], dans la base de Pauli. Puis en l'extraction de paramètres pour caractériser les mécanismes de rétrodiffusion mis en jeu.

Sous l'hypothèse de réciprocité (i.e. : $\tilde{\mathbf{S}}$ symétrique), J.R. Huynen a proposé en 1978 une méthode de décomposition de la matrice de rétrodiffusion $\tilde{\mathbf{S}}$ à l'aide d'un jeu de paramètres

qui sont directement reliés à des données physiques mesurables [Huyn 78] [Xi 92]. Ce jeu de paramètres est le suivant : $\{\psi, \tau_m, m, \nu, \gamma, \rho\}$.

- Les angles ψ et τ_m représentent respectivement l'orientation et l'ellipticité de l'onde électromagnétique.
- m correspond à l'amplitude maximale de l'onde rétrodiffusée, elle est aussi appelée amplitude maximale de la cible.
- L'angle γ est définie comme étant l'angle caractéristique, tandis que l'angle ρ représente la phase absolue de la cible.

La décomposition de Huynen s'écrit de la façon suivante :

$$\tilde{\mathbf{S}} = \tilde{\mathbf{R}}(\psi)\tilde{\mathbf{T}}(\tau_m)\tilde{\mathbf{S}}_d\tilde{\mathbf{T}}(\tau_m)\tilde{\mathbf{R}}(-\psi) \quad (2.41)$$

avec :

$$\tilde{\mathbf{S}}_d = \begin{bmatrix} m \cdot e^{2j(\nu+\rho)} & 0 \\ 0 & m \cdot \tan^2 \gamma e^{-2j(\nu-\rho)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

$$\tilde{\mathbf{R}}(\psi) = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi \\ \sin \psi & \cos \psi \end{bmatrix} \text{ et } \tilde{\mathbf{T}}(\tau_m) = \begin{bmatrix} \cos \tau_m & -j \sin \tau_m \\ -j \sin \tau_m & \cos \tau_m \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

Après simplification (détaillée dans l'annexe B), le modèle du TSVM peut se mettre sous la forme suivante [Touz 07b] :

$$\vec{e}_T^{\text{SV}} = m \cdot |\vec{e}_T|_m e^{j\Phi_s} \begin{bmatrix} \cos \alpha_s \cos(2\tau_m) \\ j \cos \alpha_s \sin(2\psi) \sin(2\tau_m) + \cos(2\psi) \sin \alpha_s e^{j\Phi_{\alpha_s}} \\ -j \cos \alpha_s \cos(2\psi) \sin(2\tau_m) + \sin(2\psi) \sin \alpha_s e^{j\Phi_{\alpha_s}} \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

$$= m \cdot |\vec{e}_T|_m e^{j\Phi_s} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(2\psi) & -\sin(2\psi) \\ 0 & \sin(2\psi) & \cos(2\psi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha_s \cos(2\tau_m) \\ \sin \alpha_s e^{j\Phi_{\alpha_s}} \\ -j \cos \alpha_s \sin(2\tau_m) \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

avec $|\vec{e}_T|_m = |\vec{e}_T^{\text{SV}}|/m$.

Comme $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(2\psi) & -\sin(2\psi) \\ 0 & \sin(2\psi) & \cos(2\psi) \end{bmatrix}$ est la matrice de rotation d'angle 2ψ , R. Touzi [Touz 07b]

a défini le vecteur invariant par orientation $\vec{V}^{\text{orient-inv}}$ en fonction des paramètres m , τ_m , α_s et Φ_{α_s} de la façon suivante :

$$\vec{V}^{\text{orient-inv}} = m \begin{bmatrix} \cos \alpha_s \cos(2\tau_m) \\ \sin \alpha_s e^{j\Phi_{\alpha_s}} \\ -j \cos \alpha_s \sin(2\tau_m) \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

Du fait de leur invariance par rotation, les paramètres τ_m , α_s et Φ_{α_s} sont nécessaires pour une description non-ambiguës des différents mécanismes de rétrodiffusion mis en jeu [Touz 06] [Touz 07b] [Touz 07c].

Dans l'annexe B, nous détaillons le calcul des paramètres du TSVM à partir du vecteur de rétrodiffusion \mathbf{k} ou de la matrice de cohérence \mathbf{T} .

La figure 2.5 montre la sphère de Poincaré pour une cible symétrique ($\tau_m = 0$). Si on utilise uniquement le paramètre α_s issu de la décomposition du TSVM, on caractérise uniquement les

points situés sur l'équateur de la sphère. L'angle Φ_{α_s} permet de discerner si la cible symétrique se trouve sur l'hémisphère Nord ou sur l'hémisphère Sud de la sphère de Poincaré. Cet angle est donc nécessaire pour une description précise des cibles [Touz 07b].

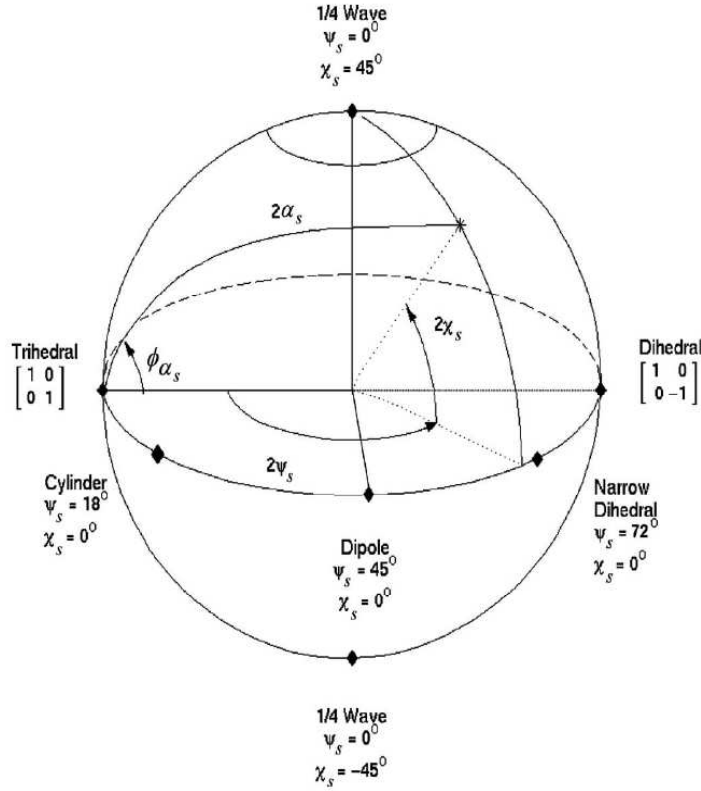


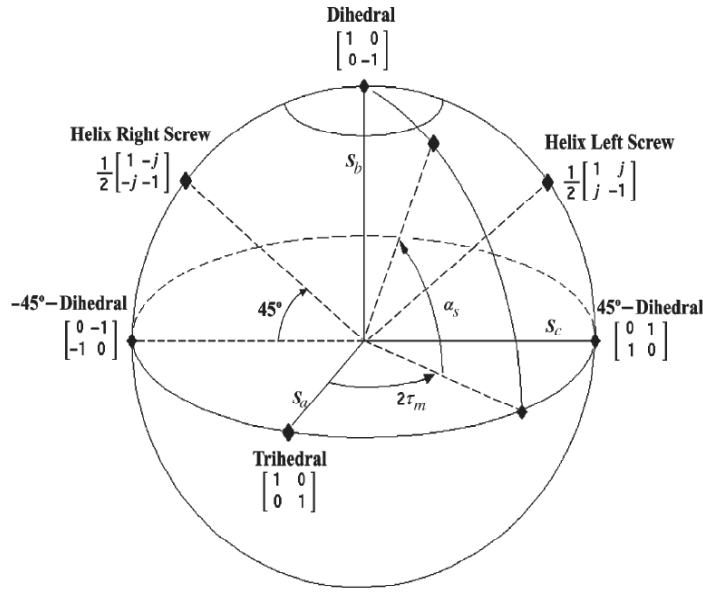
FIG. 2.5 – Sphère de Poincaré pour une cible symétrique ($\tau_m = 0$) d'après [Touz 07b]

La figure 2.6 montre la sphère de Poincaré pour $\Phi_{\alpha_s} = 0$. Ainsi, chaque cible est caractérisée par un point de latitude $2\tau_m$ et de longitude α_s sur la sphère de Poincaré. Il est important de prendre l'information provenant de l'angle τ_m pour caractériser les diffuseurs. En effet, les hélices droite (Helix Right Screw) et gauche (Helix Left Screw) sont caractérisées par la même valeur de l'angle α_s (en l'occurrence $\frac{\pi}{4}$), mais ne possède pas la même ellipticité τ_m car τ_m vaut $-\frac{\pi}{4}$ pour une hélice droite et $\frac{\pi}{4}$ pour une hélice gauche [Touz 07b].

Ambiguïté sur l'angle ψ . J.R. Huynen a montré que si ψ est une solution de l'équation 2.41 alors $\psi \pm \frac{\pi}{2}$ est aussi une solution [Huyn 78]. R. Touzi propose de restreindre l'intervalle de définition de ψ à $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$. Le calcul détaillé dans l'annexe B.6 nous permet d'obtenir les deux relations suivantes :

$$\vec{e}_T^{\text{SV}}(\Phi_s, \psi, \tau_m, m, \alpha_s, \Phi_{\alpha_s}) = \vec{e}_T^{\text{SV}}(\Phi_s, \psi \pm \frac{\pi}{2}, -\tau_m, m, -\alpha_s, \Phi_{\alpha_s}) \quad (2.47)$$

$$= \vec{e}_T^{\text{SV}}(\Phi_s, \psi \pm \frac{\pi}{2}, -\tau_m, m, \alpha_s, \Phi_{\alpha_s} \pm \pi) \quad (2.48)$$


 FIG. 2.6 – Sphère de Poincaré pour $\Phi_{\alpha_s} = 0$ d'après [Touz 07b]

Résultats des paramètres du TSVM. Le modèle TSVM a été conçu à l'origine pour caractériser les cibles pures. En effet, le modèle est basé sur la paramétrisation de la matrice de rétrodiffusion \mathbf{S} . R. Touzi a proposé en 2007 de l'utiliser comme une méthode de décomposition incohérente [Touz 07b]. La décomposition en valeurs propres et vecteurs propres de la matrice de cohérence permet de décomposer la matrice de cohérence comme étant la somme de trois matrices de rang 1. Chaque matrice $\mathbf{T}_i = \mathbf{k}_i \mathbf{k}_i^\dagger$ caractérise une cible pure. Il est donc possible d'appliquer le modèle TSVM sur chacun des vecteurs propres \mathbf{k}_i de la matrice de cohérence. C'est le TSVM-ICTD².

La figure 2.7 montre les images des paramètres du TSVM associé au premier vecteur propre de la matrice de cohérence. Les résultats sont montrés sur la même image d'Oberpfaffenhofen utilisée précédemment lors de la présentation du modèle α/β .

2.5.4 Comparaison des modèles α/β et TSVM

Après avoir présenté les deux modèles utilisés, on s'intéresse maintenant à la comparaison de ces modèles de paramétrisation des vecteurs propres dans le cas d'une cible symétrique $\tau_m = 0$ et dans le cas d'une cible asymétrique.

2.5.4.1 Cas d'une cible symétrique $\tau_m = 0$

Une cible symétrique est définie par une ellipticité nulle ($\tau_m = 0$). On peut donc remplacer dans le modèle TSVM, le paramètre τ_m par 0 dans l'équation 2.45. On obtient ainsi :

²Target Scattering Vector Model-InCoherent Target Decomposition

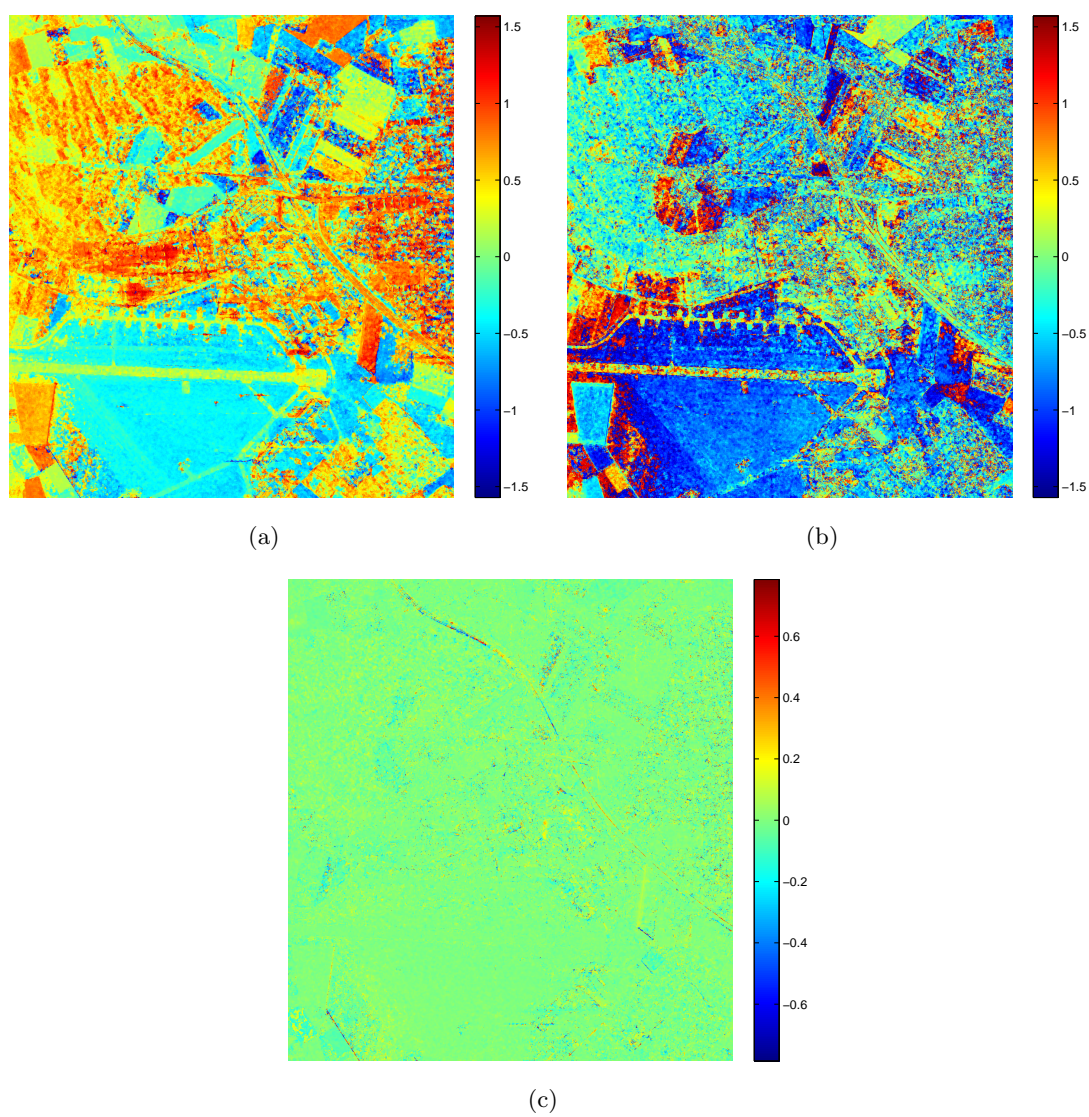


FIG. 2.7 – Paramètres du TSVM associés au premier vecteur propre de l’image d’Oberpfaffenhofen : (a) angle α_s , (b) angle Φ_{α_s} , et (c) angle τ_m

$$\begin{aligned}
 \vec{e}_T^{\text{SV}} &= m|\vec{e}_T|_m e^{j\Phi_s} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(2\psi) & -\sin(2\psi) \\ 0 & \sin(2\psi) & \cos(2\psi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha_s \\ \sin \alpha_s e^{j\Phi_{\alpha_s}} \\ 0 \end{bmatrix} \\
 &= m|\vec{e}_T|_m e^{j\Phi_s} \begin{bmatrix} \cos \alpha_s \\ \sin \alpha_s \cos(2\psi) e^{j\Phi_{\alpha_s}} \\ \sin \alpha_s \sin(2\psi) e^{j\Phi_{\alpha_s}} \end{bmatrix} \quad (2.49)
 \end{aligned}$$

Par analogie entre les équations 2.49 et 2.37, on obtient que pour une cible symétrique :

- L'angle α du modèle α/β est égal à l'angle α_s du modèle TSVM.
- L'angle β est égal à 2ψ .
- Les angles δ et Φ_{α_s} sont égaux.

Par conséquent, le modèle α/β et le modèle TSVM conduisent à la même paramétrisation des vecteurs propres dans le cas d'une cible symétrique.

2.5.4.2 Cas d'une cible non symétrique $\tau_m \neq 0$

Nous allons présenter le cas d'une cible non symétrique (l'ellipticité τ_m n'est plus nulle). Pour cela, il faut étudier le comportement des différents angles.

Étude de l'angle α : La figure 2.8 trace l'allure du paramètres α du modèle α/β en fonction du paramètre α_s du TSVM pour différentes valeurs de l'angle τ_m .

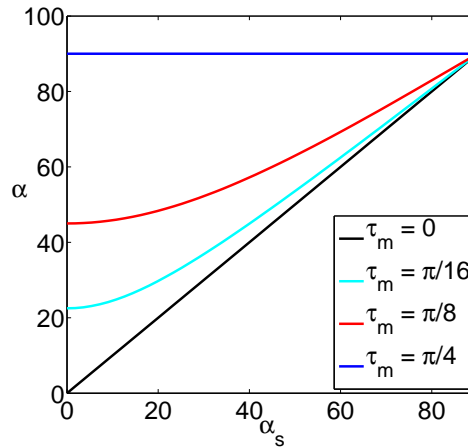


FIG. 2.8 – Évolution de l'angle α du modèle α/β en fonction de l'angle α_s du TSVM pour différentes valeurs de l'angle τ_m

Tout d'abord, on peut constater que lorsque la cible est symétrique ($\tau_m = 0$), les paramètres du modèle α/β sont égaux aux paramètres du modèle TSVM. On retrouve bien ce qui a été montré précédemment en remplaçant τ_m par 0 dans le modèle TSVM.

Sur la figure 2.8, l'angle α diffère de l'angle α_s lorsque la cible n'est pas symétrique. On peut constater que plus l'angle τ_m augmente (tend vers $\frac{\pi}{4}$), plus l'écart entre les angles α et α_s augmente. Ceci est démontré en utilisant la relation suivante qui relie l'angle α du modèle α/β aux angles α_s et τ_m du modèle TSVM :

$$\cos \alpha = \cos \alpha_s \cos(2\tau_m) \quad (2.50)$$

On peut aussi remarquer que plus l'angle α_s du TSVM est grand (proche de $\frac{\pi}{2}$), plus l'écart entre les paramètres α et α_s est petit.

Étude de l'angle β : La figure 2.9 trace l'évolution de l'angle β du modèle α/β en fonction de l'angle 2ψ du TSVM (équation 2.49). Ce tracé a été fait pour $\alpha_s = \frac{\pi}{4}$ et $\Phi_{\alpha_s} = \frac{\pi}{4}$.

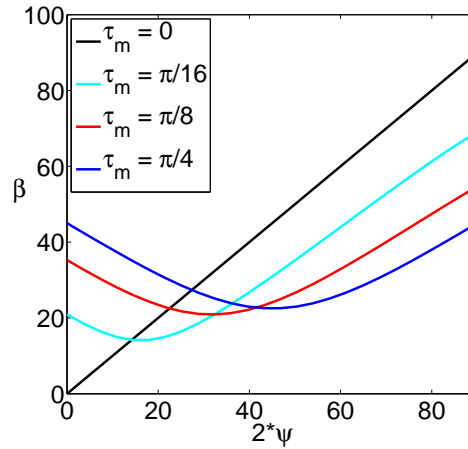


FIG. 2.9 – Évolution de l'angle β du modèle α/β en fonction de l'angle ψ du TSVM pour différentes valeurs de l'angle τ_m , avec $\alpha_s = \frac{\pi}{4}$ et $\Phi_{\alpha_s} = \frac{\pi}{4}$

On constate comme précédemment que lorsque l'angle τ_m est différent de 0, les deux modèles sont différents.

Étude de l'angle δ : Les figures 2.10(a) et 2.10(b) montrent l'influence du paramètre δ du modèle α/β en fonction de l'angle Φ_{α_s} du TSVM. Les courbes sont tracées pour différentes valeurs d'ellipticité τ_m ($0, \frac{\pi}{16}, \frac{\pi}{8}$ et $\frac{\pi}{4}$). La figure 2.10(a) est tracée pour $\alpha_s = \frac{\pi}{4}$ et $\psi = \frac{\pi}{8}$, tandis que la figure 2.10(b) est tracée pour $\alpha_s = \frac{\pi}{4}$ et $\psi = \frac{\pi}{12}$.

On constate une nouvelle fois que pour des cibles non symétriques ($\tau_m \neq 0$), les angles δ et Φ_{α_s} ne sont pas égaux. De plus, l'angle δ du modèle α/β dépend de la valeur de l'angle ψ . δ n'est donc pas invariant par rotation.

2.5.4.3 Résultats sur des images réelles

Dans cette partie, on compare les paramètres des modèles α/β et TSVM sur l'image d'Oberpfaffenhofen en Allemagne.

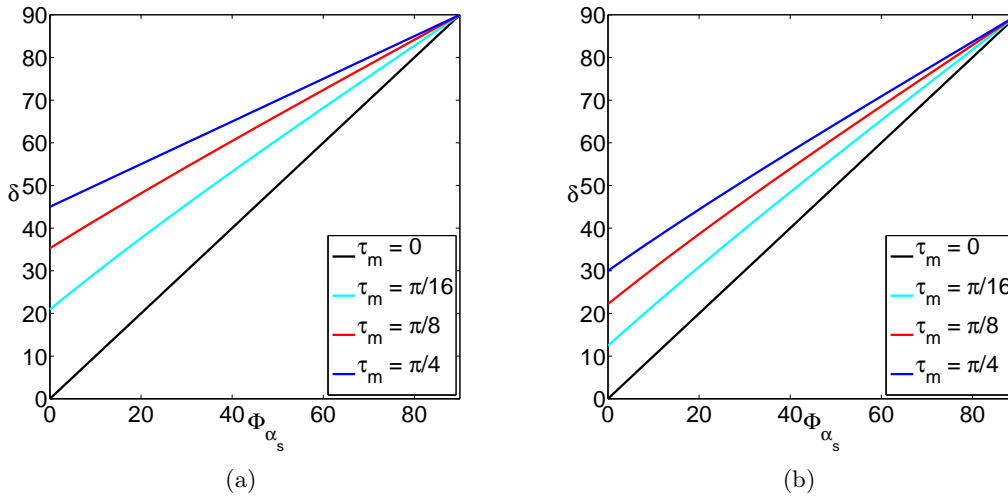


FIG. 2.10 – Comparaison des modèles α/β et TSVM pour différentes valeurs de l’angle τ_m : (a) δ en fonction de Φ_{α_s} pour $\alpha_s = \frac{\pi}{4}$ et $\psi = \frac{\pi}{8}$, (b) δ en fonction de Φ_{α_s} pour $\alpha_s = \frac{\pi}{4}$ et $\psi = \frac{\pi}{12}$.

Comme l’ellipticité τ_m (figure 2.7(c)) est proche de 0, la majorité des cibles sur l’image d’Oberpfaffenhofen sont symétriques. Or, nous venons de montrer que dans le cas de cibles symétriques, les modèles α/β et TSVM conduisent donc à la même paramétrisation des vecteurs propres. C’est pourquoi les angles α du modèle α/β et $|\alpha_s|$ du TSVM sont très proches l’un de l’autre.

2.6 La notion de mécanisme moyen de rétrodiffusion

S.R Cloude et E. Pottier [Clou 97] ont proposé une méthode de classification supervisée en 16 classes basée sur les paramètres polarimétriques issus des valeurs propres (entropie et anisotropie) et des vecteurs propres (angle $\bar{\alpha}$ du modèle α/β). $\bar{\alpha}$ correspond au paramètre α du vecteur de rétrodiffusion associé au mécanisme de rétrodiffusion moyen.

Dans cette partie, on s’intéresse à la définition de la notion de mécanisme moyen de rétrodiffusion. Dans un premier temps, on positionne le problème puis on donne une définition du vecteur de rétrodiffusion associé au mécanisme de rétrodiffusion moyen. Enfin, on applique cette définition au cas des modèles α/β et TSVM afin d’extraire les paramètres caractérisant le mécanisme moyen de rétrodiffusion.

2.6.1 Positionnement du problème

Tout d’abord, partons d’une matrice de cohérence \mathbf{T} . Comme cette matrice est hermitienne semi-définie positive, nous avons vu qu’elle se décompose en valeurs propres et vecteurs propres de la façon suivante.

$$\mathbf{T} = \lambda_1 \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_1^\dagger + \lambda_2 \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_2^\dagger + \lambda_3 \mathbf{k}_3 \mathbf{k}_3^\dagger \quad (2.51)$$

avec \mathbf{k}_i le vecteur propre associé à la valeur propre λ_i .

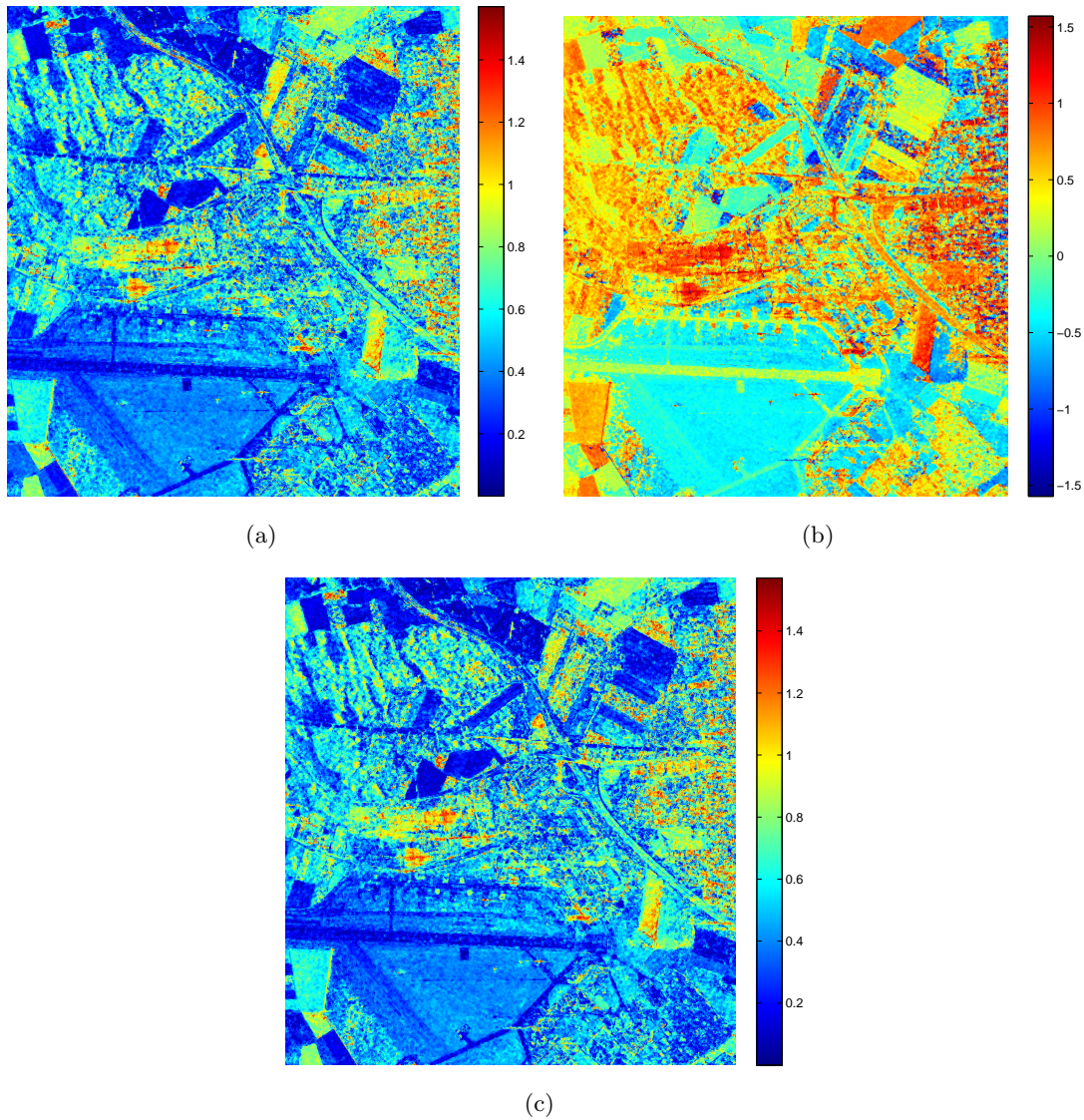


FIG. 2.11 – Comparaison de l'angle α du modèle α/β et de l'angle α_s du modèle TSVM sur l'image d'Oberpfaffenhofen (a) angle α du modèle α/β ($\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$), (b) angle α_s du TSVM ($\alpha_s \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$), et (c) valeur absolue de l'angle α_s du TSVM ($|\alpha_s| \in [0, \frac{\pi}{2}]$)

On peut extraire des paramètres issus des valeurs propres (entropie, anisotropie) et des vecteurs propres pour classifier l'image polarimétrique. Avec le modèle α/β proposé par S.R. Cloude et E. Pottier, le vecteur propre \mathbf{k}_i se décompose de la façon suivante :

$$\mathbf{k}_i = \begin{bmatrix} \cos \alpha_i \\ \sin \alpha_i \cos \beta_i e^{j\delta_i} \\ \sin \alpha_i \sin \beta_i e^{j\gamma_i} \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

S.R. Cloude et E. Pottier proposent de calculer des paramètres associés au mécanisme de rétrodiffusion moyen en pondérant les paramètres du modèle α/β par la pseudo-probabilité d'apparition du mécanisme associée.

$$(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}, \bar{\delta}, \bar{\lambda}) = \sum_{i=1}^3 p_i (\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i, \lambda_i) \quad \text{avec} \quad p_i = \frac{\lambda_i}{\sum_{i=1}^3 \lambda_i} \quad (2.53)$$

Ainsi, S.R. Cloude et E. Pottier introduisent la notion de vecteur de rétrodiffusion associé au mécanisme moyen de rétrodiffusion par le vecteur $\bar{\mathbf{k}}^{\text{cloude}}$ défini par [Lope 05a] :

$$\bar{\mathbf{k}}^{\text{cloude}} = \sqrt{\bar{\lambda}} \begin{bmatrix} \cos \bar{\alpha} \\ \sin \bar{\alpha} \cos \bar{\beta} e^{j\bar{\delta}} \\ \sin \bar{\alpha} \sin \bar{\beta} e^{j\bar{\gamma}} \end{bmatrix} \quad (2.54)$$

Exemple 1 Si on définit le paramètre $a = \cos \alpha$, en prenant la définition précédente, le paramètre \bar{a} associé au mécanisme de rétrodiffusion moyen va être égale à :

$$\bar{a} = \sum_{i=1}^3 p_i a_i = \sum_{i=1}^3 p_i \cos \alpha_i \neq \cos \bar{\alpha} = \cos \left(\sum_{i=1}^3 p_i \alpha_i \right) \quad (2.55)$$

On peut donc se demander pourquoi moyenner l'angle α alors que dans la définition du modèle α/β , l'angle α caractérisant les cibles intervient via son cosinus et son sinus.

Exemple 2 De la même façon, dans le cas du modèle TSVM, le paramètre introduit pour caractériser les cibles symétriques (α_s^c) est complexe.

$$\alpha_s^c = \tan(\alpha_s) e^{j\Phi_{\alpha_s}} \quad (2.56)$$

Le problème concerne la définition du paramètre associé au mécanisme de rétrodiffusion moyen. Doit-on le définir comme la moyenne des trois quantités complexes pondéré par leur probabilité associée (équation 2.57) ou comme le produit de $\tan(\bar{\alpha}_s)$ par $e^{j\bar{\Phi}_{\alpha_s}}$ (équation 2.58).

$$\bar{\alpha}_s^c = \sum_{i=1}^3 p_i \alpha_{s_i}^c = \sum_{i=1}^3 p_i \tan(\alpha_{s_i}) e^{j\Phi_{\alpha_{s_i}}} \quad (2.57)$$

$$\bar{\alpha}_s^c = \tan(\bar{\alpha}_s) e^{j\bar{\Phi}_{\alpha_s}} = \tan \left(\sum_{i=1}^3 p_i \alpha_{s_i} \right) e^{j \sum_{i=1}^3 p_i \Phi_{\alpha_{s_i}}} \quad (2.58)$$

Exemple 3 Soit \mathbf{T} la matrice de cohérence définie par :

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1.7561 & 0.2407 + 0.1950j & 0.0888 + 0.1412j \\ 0.2407 - 0.1950j & 0.5129 & -0.2072 - 0.0564j \\ 0.0888 - 0.1412j & -0.2072 + 0.0564j & 0.3103 \end{bmatrix}$$

En utilisant le modèle α/β pour paramétrer les vecteurs propres de la matrice de cohérence, et en calculant les paramètres moyen du modèle α/β (équation 2.53), on obtient la matrice de cohérence associée au mécanisme moyen par :

$$\overline{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} 1.8135 & 1.0360 - 0.2467j & 0.3270 + 0.3843j \\ 1.0360 + 0.2467j & 0.6255 & 0.1345 + 0.2641j \\ 0.3270 - 0.3843j & 0.1345 - 0.2641j & 0.1404 \end{bmatrix}$$

Maintenant, si l'on utilise le modèle TSVM pour paramétrer les vecteurs propres de la matrice de cohérence \mathbf{T} , on peut calculer les paramètres moyen du TSVM ($\overline{\psi}$, $\overline{\alpha}_s$, $\overline{\Phi}_{\alpha_s}$ et $\overline{\tau}_m$) en utilisant la définition introduite par S.R. Cloude et E. Pottier. La matrice de cohérence de rang 1 associée à ces paramètres moyens est donnée par :

$$\overline{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} 1.7904 & 1.0974 - 0.2355j & 0.0764 + 0.3834j \\ 1.0974 + 0.2355j & 0.7035 & -0.0036 + 0.2450j \\ 0.0764 - 0.3834j & -0.0036 - 0.2450j & 0.0854 \end{bmatrix}$$

Cet exemple montre que la définition de S.R. Cloude et E. Pottier du vecteur de rétrodiffusion associé au mécanisme de rétrodiffusion moyen dépend de la façon dont sont paramétrés les vecteurs propres alors que l'on a la même matrice de cohérence.

2.6.2 Mécanisme de rétrodiffusion moyen

Pour résoudre ce problème de dépendance, revenons à la définition d'un mécanisme de rétrodiffusion. Un mécanisme de rétrodiffusion est représenté par une matrice de cohérence de rang 1. C'est une cible pure. Il est donc caractérisé complètement par son vecteur de rétrodiffusion. Ce vecteur noté $\overline{\mathbf{k}}$ est appelé vecteur de rétrodiffusion associé au mécanisme de rétrodiffusion moyen. Ce vecteur contient tous les paramètres associés au mécanisme de rétrodiffusion moyen.

Dans le cas du modèle α/β , $\overline{\mathbf{k}}$ s'écrit de la façon suivante :

$$\overline{\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} \cos \overline{\alpha} \\ \sin \overline{\alpha} \cos \overline{\beta} e^{j\overline{\delta}} \\ \sin \overline{\alpha} \sin \overline{\beta} e^{j\overline{\gamma}} \end{bmatrix} \quad (2.59)$$

Attention, les paramètres $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$, $\overline{\gamma}$ et $\overline{\delta}$ ne sont pas égaux à ceux définis par S.R. Cloude et E. Pottier. On verra plus loin comment on les calcule (cf : section 2.6.2.1).

Afin de dériver l'expression littérale du vecteur de rétrodiffusion moyen, réécrivons la décomposition en valeurs propres et vecteurs propres de la matrice de cohérence T .

$$\begin{aligned}
 \mathbf{T} &= \lambda_1 \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_1^\dagger + \lambda_2 \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_2^\dagger + \lambda_3 \mathbf{k}_3 \mathbf{k}_3^\dagger \\
 &= \left(\sqrt{\lambda_1} \mathbf{k}_1 \right) \left(\sqrt{\lambda_1} \mathbf{k}_1^\dagger \right) + \left(\sqrt{\lambda_2} \mathbf{k}_2 \right) \left(\sqrt{\lambda_2} \mathbf{k}_2^\dagger \right) + \left(\sqrt{\lambda_3} \mathbf{k}_3 \right) \left(\sqrt{\lambda_3} \mathbf{k}_3^\dagger \right)
 \end{aligned} \tag{2.60}$$

$$= \left(\sqrt{\lambda_1} e^{j\psi_1} \mathbf{k}_1 \right) \left(\sqrt{\lambda_1} e^{j\psi_1} \mathbf{k}_1 \right)^\dagger + \left(\sqrt{\lambda_2} e^{j\psi_2} \mathbf{k}_2 \right) \left(\sqrt{\lambda_2} e^{j\psi_2} \mathbf{k}_2 \right)^\dagger + \left(\sqrt{\lambda_3} e^{j\psi_3} \mathbf{k}_3 \right) \left(\sqrt{\lambda_3} e^{j\psi_3} \mathbf{k}_3 \right)^\dagger \tag{2.61}$$

À partir de cette décomposition, on a créé une base orthonormée directe $(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3)$. Le vecteur associé au mécanisme moyen de rétrodiffusion $\bar{\mathbf{k}}$ peut donc se décomposer dans cette base et s'écrit comme une combinaison linéaire des vecteurs propres $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2$ et \mathbf{k}_3 . De plus, on peut remarquer que dans l'équation 2.60, le terme $\sqrt{\lambda_i}$ indique la puissance associée au vecteur propre \mathbf{k}_i .

Ainsi, on peut définir le vecteur $\bar{\mathbf{k}}$ de la façon suivante :

$$\bar{\mathbf{k}} = \sum_{i=1}^3 \sqrt{\lambda_i} e^{j\psi_i} \mathbf{k}_i \tag{2.62}$$

La figure 2.12 montre la définition du vecteur de rétrodiffusion associé au mécanisme de rétrodiffusion moyen dans le cas à deux dimensions ($\lambda_3 = 0$). C'est le vecteur qui maximise la projection sur les vecteurs propres.

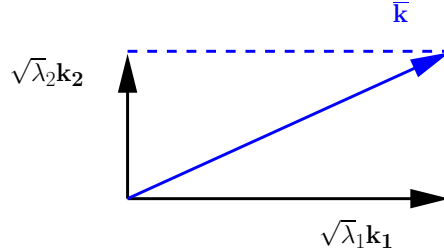


FIG. 2.12 – Définition du vecteur de rétrodiffusion associé au mécanisme de rétrodiffusion moyen dans le cas à 2 dimensions ($\lambda_3 = 0$)

Il est important de noter que dans la définition du vecteur de rétrodiffusion associé au mécanisme de rétrodiffusion moyen, le terme $e^{j\psi_i}$ intervient. Ce terme correspond à la phase propre de chaque vecteur propre. En effet, si x est un vecteur propre associé à la valeur propre λ , alors $u = e^{j\psi} x$ est aussi un vecteur propre. Il se pose donc naturellement la question du choix des paramètres ψ_1, ψ_2 et ψ_3 .

En factorisant le terme $e^{j\psi_3}$ dans l'expression de $\bar{\mathbf{k}}$, on obtient :

$$\bar{\mathbf{k}} = e^{j\psi_3} \left\{ \sqrt{\lambda_1} e^{j(\psi_1 - \psi_3)} \mathbf{k}_1 + \sqrt{\lambda_2} e^{j(\psi_2 - \psi_3)} \mathbf{k}_2 + \sqrt{\lambda_3} \mathbf{k}_3 \right\} \tag{2.63}$$

Le terme ψ_3 de l'équation 2.63 peut être interprété comme la phase propre du vecteur de rétrodiffusion associé au mécanisme moyen de rétrodiffusion. Ce terme n'est pas observable. Il correspond au trajet aller-retour de l'onde électromagnétique. Il n'entre pas dans le calcul de la

matrice de cohérence associée. Par la suite, on laissera de côté ce terme.

On doit donc s'intéresser aux deux phases relatives entre les vecteurs propres $(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_3)$ et $(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3)$.

On peut réécrire $\bar{\mathbf{k}}$ à l'aide de trois phases θ_1, θ_2 et θ_3 par :

$$\bar{\mathbf{k}} = \sqrt{\lambda_1} e^{j\theta_1} \mathbf{k}_1 + \sqrt{\lambda_2} e^{j\theta_2} \mathbf{k}_2 + \sqrt{\lambda_3} e^{j\theta_3} \mathbf{k}_3 \quad (2.64)$$

avec :

$$\theta_3 = \theta_1 + \theta_2 \quad (2.65)$$

Tout d'abord, calculons la norme de ce vecteur.

$$\begin{aligned} \|\bar{\mathbf{k}}\|^2 &= \bar{\mathbf{k}}^\dagger \bar{\mathbf{k}} \\ &= \sum_{i=1}^3 \sqrt{\lambda_i} e^{-j\theta_i} \mathbf{k}_i^\dagger \sum_{j=1}^3 \sqrt{\lambda_j} e^{j\theta_j} \mathbf{k}_j \\ &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sqrt{\lambda_i} \sqrt{\lambda_j} e^{j(\theta_j - \theta_i)} \mathbf{k}_i^\dagger \mathbf{k}_j \end{aligned}$$

Comme $(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3)$ est une base orthonormée, $\mathbf{k}_i^\dagger \mathbf{k}_j = \delta_{ij}$ avec δ_{ij} le symbole de Kronecker.

$$\|\bar{\mathbf{k}}\|^2 = \sum_{i=1}^3 \lambda_i$$

Par conséquent, le vecteur de rétrodiffusion normé associé au mécanisme de rétrodiffusion moyen est défini par :

$$\bar{\mathbf{k}}_n = \frac{\bar{\mathbf{k}}}{\|\bar{\mathbf{k}}\|^2} = \sum_{i=1}^3 \sqrt{p_i} e^{j\theta_i} \mathbf{k}_i \quad (2.66)$$

Si l'on note $\bar{\mathbf{T}}$ la matrice de cohérence de rang 1 obtenue à partir du vecteur de rétrodiffusion associé au mécanisme de rétrodiffusion moyen, on a :

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{T}} &= \bar{\mathbf{k}} \bar{\mathbf{k}}^\dagger \\ &= \sum_{i=1}^3 \sqrt{\lambda_i} e^{j\theta_i} \mathbf{k}_i \sum_{j=1}^3 \sqrt{\lambda_j} e^{-j\theta_j} \mathbf{k}_j^\dagger \\ &= \lambda_1 \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_1^\dagger + \lambda_2 \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_2^\dagger + \lambda_3 \mathbf{k}_3 \mathbf{k}_3^\dagger + \sqrt{\lambda_1 \lambda_2} \left(\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2^\dagger e^{j(\theta_1 - \theta_2)} + \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_1^\dagger e^{j(\theta_2 - \theta_1)} \right) \\ &\quad + \sqrt{\lambda_1 \lambda_3} \left(\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_3^\dagger e^{j(\theta_1 - \theta_3)} + \mathbf{k}_3 \mathbf{k}_1^\dagger e^{j(\theta_3 - \theta_1)} \right) + \sqrt{\lambda_2 \lambda_3} \left(\mathbf{k}_2 \mathbf{k}_3^\dagger e^{j(\theta_2 - \theta_3)} + \mathbf{k}_3 \mathbf{k}_2^\dagger e^{j(\theta_3 - \theta_2)} \right) \\ &= \mathbf{T} + \sqrt{\lambda_1 \lambda_2} \left(\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2^\dagger e^{j(\theta_1 - \theta_2)} + \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_1^\dagger e^{j(\theta_2 - \theta_1)} \right) + \sqrt{\lambda_1 \lambda_3} \left(\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_3^\dagger e^{j(\theta_1 - \theta_3)} + \mathbf{k}_3 \mathbf{k}_1^\dagger e^{j(\theta_3 - \theta_1)} \right) \\ &\quad + \sqrt{\lambda_2 \lambda_3} \left(\mathbf{k}_2 \mathbf{k}_3^\dagger e^{j(\theta_2 - \theta_3)} + \mathbf{k}_3 \mathbf{k}_2^\dagger e^{j(\theta_3 - \theta_2)} \right) \quad (2.67) \\ &= \mathbf{T} + \mathbf{T}_N \quad (2.68) \end{aligned}$$

Dans l'expression de $\bar{\mathbf{T}}$, on voit donc apparaître la matrice de cohérence initiale \mathbf{T} ainsi qu'une matrice \mathbf{T}_N qu'on appellera matrice de bruit. On peut tout d'abord remplacer θ_3 par

son expression donnée par 2.65 dans l'équation 2.67 pour exprimer la matrice de bruit \mathbf{T}_N . On obtient donc :

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_N &= \sqrt{\lambda_1 \lambda_2} \left(\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2^\dagger e^{j(\theta_1 - \theta_2)} + \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_1^\dagger e^{j(\theta_2 - \theta_1)} \right) \\ &+ \sqrt{\lambda_1 \lambda_3} \left(\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_3^\dagger e^{j(-\theta_2)} + \mathbf{k}_3 \mathbf{k}_1^\dagger e^{j(\theta_2)} \right) \\ &+ \sqrt{\lambda_2 \lambda_3} \left(\mathbf{k}_2 \mathbf{k}_3^\dagger e^{j(-\theta_1)} + \mathbf{k}_3 \mathbf{k}_2^\dagger e^{j(\theta_1)} \right) \end{aligned} \quad (2.69)$$

On doit ainsi chercher θ_1 et θ_2 de sorte que la matrice \mathbf{T}_N soit faible au sens d'un certain critère. Nous choisissons ici comme critère la somme du module des carrés des termes diagonaux de la matrice de bruit. On estime les paramètres θ_1 et θ_2 en minimisant le critère par descente de gradient.

Une fois que l'on a estimé θ_1 et θ_2 , le vecteur de rétrodiffusion associé au mécanisme de rétrodiffusion moyen $\bar{\mathbf{k}}$ est obtenu grâce à l'équation 2.64. On peut en déduire aussi la matrice de cohérence de rang 1 associée à ce mécanisme de rétrodiffusion moyen par l'équation 2.67.

Maintenant, pour pouvoir caractériser le mécanisme de rétrodiffusion moyen mis en jeu, il faut extraire des paramètres du vecteur de rétrodiffusion associé au mécanisme de rétrodiffusion moyen ($\bar{\mathbf{k}}$). Pour cela, on se base sur les deux modèles étudiés précédemment :

- le modèle α/β
- le modèle TSVM (Target Scattering Vector Model)

2.6.2.1 Modèle α/β

En prenant le formalisme de J.R. Huynen, la matrice de cohérence $\bar{\mathbf{T}}$ peut s'écrire de la façon suivante :

$$\bar{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} 2A_0 & C - jD & H + jG \\ C + jD & B_0 + B & E + jF \\ H - jG & E - jF & B_0 - B \end{bmatrix} \quad (2.70)$$

Par identification de la matrice $\bar{\mathbf{T}}$ avec les paramètres de Huynen, on obtient l'expression littérale des paramètres du vecteur de rétrodiffusion.

$$\begin{aligned} \bar{\alpha} &= \operatorname{atan} \left(\sqrt{\frac{B_0}{A_0}} \right) \\ \bar{\beta} &= \operatorname{atan} \left(\sqrt{\frac{B_0 - B}{B_0 + B}} \right) \\ \bar{\gamma} &= \operatorname{atan} \left(\sqrt{\frac{D}{C}} \right) \\ \bar{\delta} &= -\operatorname{atan} \left(\sqrt{\frac{G}{H}} \right) \end{aligned}$$

2.6.2.2 Modèle TSVM

De la même façon, on calcule les paramètres du vecteur associé au mécanisme de rétrodiffusion moyen pour le cas du TSVM. On obtient (cf : Annexe B.5) :

$$\begin{aligned}\overline{\psi} &= \frac{1}{2} \operatorname{atan} \left(\frac{H}{C} \right) \\ \overline{\tau}_m &= \frac{1}{2} \operatorname{atan} \left(\frac{F \cos(2\overline{\psi})}{C} \right) \\ \overline{\alpha}_s &= \operatorname{acos} \left(\sqrt{\frac{2A_0}{\cos^2(2\overline{\tau}_m)}} \right) \\ \overline{\Phi}_{\alpha_s} &= \operatorname{asin} \left(\frac{D - \cos^2(\overline{\alpha}_s) \cos(2\overline{\tau}_m) \sin(2\overline{\tau}_m) \sin(2\overline{\psi})}{\cos(\overline{\alpha}_s) \sin(\overline{\alpha}_s) \cos(2\overline{\tau}_m) \cos(2\overline{\psi})} \right)\end{aligned}$$

2.6.2.3 Applications

Exemple Dans cette partie, nous analysons les définitions du mécanisme de rétrodiffusion moyen vu précédemment sur l'exemple étudié par [Ferr 03]. Si l'on prend la matrice de cohérence suivante :

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0.4731 & -0.3242 & 0 \\ -0.3242 & 0.2369 & 0 \\ 0 & 0 & 0.29 \end{bmatrix}$$

Les trois valeurs propres sont ($\lambda_1 = 0.7$, $\lambda_2 = 0.29$ et $\lambda_3 = 0.01$). L'entropie H est donc de 0.6, et l'anisotropie A est de 0.93.

En utilisant, le modèle α/β , on trouve ($\alpha_1 = 35^\circ$, $\alpha_2 = 90^\circ$ et $\alpha_3 = 55^\circ$). Par conséquent, l'angle moyen $\overline{\alpha}^{\text{cloude}}$ vaut :

$$\overline{\alpha}^{\text{cloude}} = p_1\alpha_1 + p_2\alpha_2 + p_3\alpha_3 = 51.15^\circ$$

Tandis qu'avec la définition du mécanisme de rétrodiffusion moyen que l'on propose, l'angle $\overline{\alpha}$ vaut 46.26° .

Cet exemple montre qu'avec la définition donnée par S.R Cloude et E. Pottier, le deuxième mécanisme de rétrodiffusion biaise l'interprétation du mécanisme moyen. En effet, le mécanisme moyen est affecté à un mécanisme de double rebonds alors que 70% de la puissance totale correspond à une rétrodiffusion surfacique. La forte valeur de l'angle α_2 contraint à augmenter la valeur de l'angle $\overline{\alpha}^{\text{cloude}}$ alors que le deuxième mécanisme de rétrodiffusion représente seulement 29% de la puissance totale. En prenant la définition que nous proposons, l'angle $\overline{\alpha}$ est d'environ 46° . Ce qui correspond juste à la limite de séparation entre la zone de rétrodiffusion surfacique et la zone de double rebonds.

2.6.3 Comparaison des vecteurs de rétrodiffusion associés aux mécanismes moyens de rétrodiffusion

Dans cette partie, on s'intéresse à comparer le vecteur de rétrodiffusion associé au mécanisme de rétrodiffusion moyen défini par S.R. Cloude et E. Pottier (équation 2.54) avec celui que l'on propose (équation 2.66).

Tout d'abord, on peut remarquer que le vecteur $\bar{\mathbf{k}}$ est défini uniquement à partir des valeurs propres et des vecteurs propres de la matrice de cohérence. Par conséquent, le vecteur de rétrodiffusion $\bar{\mathbf{k}}$ associé au mécanisme moyen de rétrodiffusion est indépendant de la façon dont on paramètre chaque vecteur propre. En effet, $\bar{\mathbf{k}}$ restera le même que l'on utilise le modèle α/β ou le modèle TSVM. En revanche, le vecteur $\bar{\mathbf{k}}^{\text{cloude}}$ dépend du modèle choisit pour la paramétrisation des vecteurs propres. Si l'on note $\bar{\mathbf{k}}_{\alpha/\beta}^{\text{cloude}}$ le vecteur de rétrodiffusion associé au mécanisme moyen de rétrodiffusion au sens définit par S.R. Cloude et E. Pottier en utilisant le modèle α/β et $\bar{\mathbf{k}}_{\text{TSVM}}^{\text{cloude}}$ celui obtenu avec le modèle TSVM. On peut remarquer que ces deux vecteurs ne sont pas égaux pour des cibles non pures. Par conséquent, deux choix de modèles de paramétrisation des vecteurs propres donnent deux vecteurs de rétrodiffusion associé au mécanisme de rétrodiffusion moyen différents, alors que l'on étudie la même matrice de cohérence.

Pour comprendre quelles sont les différences entre la définition de S.R. Cloude et E. Pottier, et notre proposition ; nous allons comparer ces deux vecteurs dans le cas du modèle α/β . Réécrivons ces vecteurs en fonction des paramètres du modèle α/β de chaque vecteur propre.

$$\bar{\mathbf{k}}_{\alpha/\beta}^{\text{cloude}} = e^{j\theta} \begin{bmatrix} \cos \bar{\alpha} \\ \sin \bar{\alpha} \cos \bar{\beta} e^{j\bar{\delta}} \\ \sin \bar{\alpha} \sin \bar{\beta} e^{j\bar{\gamma}} \end{bmatrix} = e^{j\theta} \begin{bmatrix} \cos \left(\sum_{i=1}^3 p_i \alpha_i \right) \\ \sin \left(\sum_{i=1}^3 p_i \alpha_i \right) \cos \left(\sum_{i=1}^3 p_i \beta_i \right) e^{j \sum_{i=1}^3 p_i \delta_i} \\ \sin \left(\sum_{i=1}^3 p_i \alpha_i \right) \sin \left(\sum_{i=1}^3 p_i \beta_i \right) e^{j \sum_{i=1}^3 p_i \gamma_i} \end{bmatrix} \quad (2.71)$$

$$\bar{\mathbf{k}}^{\text{propose}} = \sum_{i=1}^3 \sqrt{p_i} e^{j\theta_i} \mathbf{k}_i = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^3 \sqrt{p_i} \cos \alpha_i e^{j\theta_i} \\ \sum_{i=1}^3 \sqrt{p_i} \sin \alpha_i \cos \beta_i e^{j\delta_i} e^{j\theta_i} \\ \sum_{i=1}^3 \sqrt{p_i} \sin \alpha_i \sin \beta_i e^{j\gamma_i} e^{j\theta_i} \end{bmatrix} \quad (2.72)$$

Pour comparer les vecteurs de rétrodiffusion, nous allons nous placer dans deux cas particulier ($H = 0$ et $H = 1$).

- Si l'entropie est nulle, cela signifie qu'un seul mécanisme de rétrodiffusion est présent dans la matrice de cohérence. Par conséquent la matrice de cohérence est de rang 1 et ne contient qu'une seule valeur propre non nulle. $\mathbf{T} = \lambda_1 \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_1^\dagger$. Il est donc possible de simplifier les expressions 2.71 et 2.72 en remplaçant p_1 par 1 et, p_2 et p_3 par 0. On constate aisément que les deux vecteurs de rétrodiffusion sont égaux et que le mécanisme moyen de rétrodiffusion est égal à celui donné par le vecteur propre associé à la seule valeur propre non nulle.
- Si l'entropie est égale à 1, alors la matrice de cohérence est de rang 3 et ses trois valeurs propres sont égales. On simplifie les expressions 2.71 et 2.72 en remplaçant p_1 , p_2 et p_3 par $\frac{1}{3}$.

$$\bar{\mathbf{k}}_{\alpha/\beta}^{\text{cloude}} = e^{j\theta} \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{1}{3}\sum_{i=1}^3 \alpha_i\right) \\ \sin\left(\frac{1}{3}\sum_{i=1}^3 \alpha_i\right) \cos\left(\frac{1}{3}\sum_{i=1}^3 \beta_i\right) e^{j\frac{1}{3}\sum_{i=1}^3 \delta_i} \\ \sin\left(\frac{1}{3}\sum_{i=1}^3 \alpha_i\right) \sin\left(\frac{1}{3}\sum_{i=1}^3 \beta_i\right) e^{j\frac{1}{3}\sum_{i=1}^3 \gamma_i} \end{bmatrix} \quad (2.73)$$

$$\bar{\mathbf{k}}^{\text{propose}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}\sum_{i=1}^3 \cos \alpha_i e^{j\theta_i} \\ \frac{1}{3}\sum_{i=1}^3 \sin \alpha_i \cos \beta_i e^{j\delta_i} e^{j\theta_i} \\ \frac{1}{3}\sum_{i=1}^3 \sin \alpha_i \sin \beta_i e^{j\gamma_i} e^{j\theta_i} \end{bmatrix} \quad (2.74)$$

On remarque que dans le cas de cibles étendues, ces deux vecteurs ne sont pas égaux.

2.6.4 Propriétés du vecteur de rétrodiffusion associé au mécanisme de rétrodiffusion moyen

A partir de la définition du vecteur associé au mécanisme de rétrodiffusion moyen (équation 2.66), la matrice de cohérence initiale peut se décomposer comme une matrice de rang 1 ($\bar{\mathbf{T}}$) et une autre matrice ($\mathbf{T}_{\mathbf{N}}$) qui sera associé au bruit. On peut constater qu'avec cette définition, on décompose, comme Huynen l'avait fait, la matrice de cohérence en deux termes. J.R. Huynen avait introduit sa décomposition de sorte que la matrice $\mathbf{T}_{\mathbf{N}}$ (N-target) était invariante par rotation autour de l'axe de visée du satellite. Avec notre définition, la matrice $\mathbf{T}_{\mathbf{N}}$ ne vérifie pas cette propriété. En revanche, cette matrice $\mathbf{T}_{\mathbf{N}}$ possède une autre caractéristique. Elle appartient à l'ensemble des matrices hermitiennes de trace nulle. Pour démontrer cette propriété, repartons de la définition de $T_{\mathbf{N}}$ et calculons sa trace.

$$\begin{aligned} \text{Trace}(\mathbf{T}_{\mathbf{N}}) &= \text{Trace} \left[\sqrt{\lambda_1 \lambda_2} \left(e^{j(\theta_1 - \theta_2)} \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2^\dagger + e^{j(\theta_2 - \theta_1)} \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_1^\dagger \right) \right] \\ &+ \text{Trace} \left[\sqrt{\lambda_1 \lambda_3} \left(e^{j(\theta_1 - \theta_3)} \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_3^\dagger + e^{j(\theta_3 - \theta_1)} \mathbf{k}_3 \mathbf{k}_1^\dagger \right) \right] \\ &+ \text{Trace} \left[\sqrt{\lambda_2 \lambda_3} \left(e^{j(\theta_2 - \theta_3)} \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_3^\dagger + e^{j(\theta_3 - \theta_2)} \mathbf{k}_3 \mathbf{k}_2^\dagger \right) \right] \\ &= \text{Trace} \left(\sum_{i=1}^3 \sum_{j \neq i}^3 \sqrt{\lambda_i \lambda_j} e^{j(\theta_i - \theta_j)} \mathbf{k}_i \mathbf{k}_j^\dagger \right) \end{aligned}$$

Or $\text{Trace}(\mathbf{AB}) = \text{Trace}(\mathbf{BA})$

$$\begin{aligned} \text{Trace}(\mathbf{T}_{\mathbf{N}}) &= \text{Trace} \left(\sum_{i=1}^3 \sum_{j \neq i}^3 \sqrt{\lambda_i \lambda_j} e^{j(\theta_i - \theta_j)} \mathbf{k}_j^\dagger \mathbf{k}_i \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

En effet, $\mathbf{k}_j^\dagger \mathbf{k}_i$ est le produit scalaire entre les vecteurs \mathbf{k}_j et \mathbf{k}_i , et ces vecteurs sont orthogonaux du fait de la décomposition en valeurs propres et vecteurs propres.

Il faut noter que la définition du vecteur de rétrodiffusion associé au mécanisme de rétrodiffusion moyen que l'on propose dépend du critère choisi pour minimiser la matrice \mathbf{T}_N . Une étude concernant l'existence de l'unicité de cette décomposition doit cependant être mise en oeuvre pour valider l'approche que l'on propose.

2.7 Conclusion et perspectives

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés à la polarimétrie radar. Nous en avons d'abord présenté les principes. Puis nous nous sommes intéressés aux théorèmes de décompositions polarimétriques incohérents et plus précisément à la méthode de décomposition en valeurs propres et vecteurs propres de la matrice de cohérence \mathbf{T} . Pour pouvoir caractériser les rétrodiffuseurs, il est nécessaire d'avoir un modèle pour paramétrer les vecteurs propres. Nous avons donc comparé deux modèles existant : le modèle α/β et le modèle TSVM. Nous avons vu que dans le cas où la cible est symétrique ($\tau_m = 0$), les deux modèles conduisent aux mêmes paramètres. En revanche, pour le cas général où les cibles sont asymétrique ($\tau_m \neq 0$), les paramètres des deux modèles ne sont pas équivalents. Une description complète des rétrodiffuseurs est ainsi donnée par l'étude conjointe des trois paramètres invariants par rotations du TSVM : α_s , Φ_{α_s} et τ_m .

Dans un deuxième temps, on s'est attaché à donner une définition du vecteur de rétrodiffusion associé au mécanisme de rétrodiffusion moyen. En partant de la décomposition en valeurs propres et vecteurs propres de la matrice de cohérence \mathbf{T} , nous avons défini une matrice de cohérence associée au mécanisme de rétrodiffusion moyen comme étant une matrice de rang 1. Nous avons ensuite proposé une définition du vecteur de rétrodiffusion associé au mécanisme de rétrodiffusion moyen à l'aide d'une combinaison linéaire des vecteurs propres de la matrice de cohérence \mathbf{T} , où chaque vecteur propre est pondéré par la racine carrée de la valeur propre associée.

En perspective de ce travail, nous pouvons proposer deux idées :

- Comme les paramètres α_s , Φ_{α_s} et τ_m du modèle TSVM sont des paramètres invariants par rotation, ils sont utiles pour classifier précisément les différents types de rétrodiffuseurs. Ces paramètres pourraient en complément d'autres informations (entropie, anisotropie, span, ...) servir d'attribut dans un algorithme de classification tels que les machines à support vecteur (SVM).
- La deuxième piste concerne le cas où le satellite n'effectue pas des acquisitions en "full polar". Par exemple, on peut avoir un seul canal de polarisation à l'émission (H) et deux canaux à la réception (H et V). Le nouveau vecteur de rétrodiffusion sera donc de taille 2×1 . Dans ce cas, il peut être intéressant de reprendre les travaux de R. Touzi sur le TSVM et de voir s'il est possible d'extraire de ce nouveau vecteur des paramètres invariants par rotation.

Chapitre 3

Segmentation hiérarchique d'images polarimétriques

Sommaire

3.1	Introduction	87
3.2	La segmentation d'image	87
3.2.1	Définition	87
3.2.2	Le principe de la segmentation hiérarchique	88
3.2.2.1	L'approche au sens du maximum de vraisemblance	89
3.2.2.2	Le critère de fusion des segments	90
3.3	Pour des zones non texturées	90
3.3.1	Les statistiques dans le cas 1-vue et L-vues	90
3.3.2	Calcul du critère	91
3.3.2.1	En 1-vue	91
3.3.2.2	En L-vues	92
3.4	Pour des zones texturées	93
3.4.1	Le modèle multiplicatif	93
3.4.1.1	En 1-vue	93
3.4.1.2	En L-vues	93
3.4.1.3	Estimation au sens du maximum de vraisemblance de la texture et de la matrice de covariance moyenne	94
3.4.2	Les statistiques associées à une texture distribuée selon une loi Gamma	95
3.4.2.1	La distribution Gamma	95
3.4.2.2	En 1-vue	96
3.4.2.3	En L-vues	97
3.4.3	Calcul du critère pour une texture distribuée selon une loi Gamma	97
3.4.3.1	En 1-vue	97
3.4.3.2	En L-vues	98
3.4.4	La distribution de Fisher	98
3.4.4.1	La transformée de Mellin	100
3.4.4.2	Les statistiques de deuxième espèce	100
3.4.4.3	L'estimation des paramètres	101
3.4.4.4	Le plan κ_2/κ_3	102
3.4.4.5	Validation de l'utilisation de la loi de Fisher	103
3.4.5	Les statistiques associées à une texture distribuée selon une loi de Fisher	104

3.4.5.1	En 1-vue	104
3.4.5.2	En L-vues	105
3.4.6	Calcul du critère pour une texture distribuée selon une loi de Fisher	106
3.4.6.1	En 1-vue	106
3.4.6.2	En L-vues	106
3.5	Présentation de l'algorithme de segmentation hiérarchique	107
3.5.1	Test de présence de texture	107
3.5.2	Le facteur de forme	107
3.5.3	Le principe	109
3.6	Évaluation des performances	112
3.6.1	Courbes Caractéristique Opérationnelle de Réception (COR)	112
3.6.1.1	Pour un problème de détection	112
3.6.1.2	Pour un problème de segmentation	113
3.6.1.3	Lien avec les "matrices de confusion"	114
3.6.2	Variations inter-classe et intra-classe	116
3.6.3	Le lambda de Wilks	117
3.6.4	Distances inter-classes et intra-classe	117
3.6.4.1	Dans le cas de la distribution de Wishart	118
3.6.4.2	Dans le cas de la distribution de KummerU	120
3.7	Résultats de segmentation	121
3.7.1	Sur des images synthétiques	121
3.7.2	Sur des images ESAR	126
3.7.2.1	Calcul du critère sur différentes zones	127
3.7.2.2	Résultats de segmentation sur l'image E-SAR	129
3.8	Classification d'images polarimétriques	135
3.8.1	Principe de la méthode	135
3.8.2	Résultats de classification	135
3.9	Conclusion et perspectives	138

3.1 Introduction

Dans le chapitre 2, nous avons vu que la polarimétrie radar permet de comprendre quels sont les différents processus d'interaction entre l'onde électromagnétique et les rétrodiffuseurs. Pour caractériser les cibles, on peut extraire des paramètres (entropie, anisotropie, angle α , \dots) à partir des valeurs propres et vecteurs propres de la matrice de cohérence \mathbf{T} . Néanmoins, la présence du speckle dans les images radar biaise leur estimation. Une fenêtre d'analyse contenant un minimum de 60 vues est requise pour une estimation non biaisée de ces paramètres [Lope 05b] [Touz 07a].

Pour résoudre ce problème, on peut penser à segmenter les images polarimétriques de sorte que chaque pixel en moyenne soit inclus dans un segment contenant environ 60 vues. Dans ce chapitre, nous allons ainsi nous intéresser à la segmentation d'images polarimétriques. L'approche retenue dans cette thèse est la segmentation hiérarchique. Cette méthode a été validée avec succès par J.-M. Beaulieu et R. Touzi [Beau 04b].

L'idée originale proposée dans cette thèse est l'utilisation de la texture dans les traitements polarimétriques. Nous montrerons que la modélisation de la texture par une distribution de Fisher semble être bien adaptée pour modéliser différents types de milieux. Nous dériverons les expressions des statistiques du vecteur de rétrodiffusion (en 1-vue) et de la matrice de covariance (en L-vues) dans le cas où la texture est distribuée selon une loi de Fisher. Une fois que ces statistiques seront démontrées, nous calculerons la log-vraisemblance et exprimerons la valeur du critère utilisé lors de la fusion des segments dans la segmentation hiérarchique. Puis, nous présenterons l'algorithme de segmentation hiérarchique utilisé pour segmenter les images polarimétriques.

Afin d'analyser les performances de l'algorithme de segmentation, plusieurs critères tels que les courbes Caractéristique Opérationnelle de Réception (courbes COR), les distances inter-classes et intra-classes seront mis en œuvre. Enfin, l'algorithme de segmentation hiérarchique sera appliqué sur des images polarimétriques synthétiques et réelles. Nous montrerons que l'utilisation de la texture est nécessaire pour segmenter efficacement les images polarimétriques.

Finalement, nous mettrons en place un algorithme de classification non supervisé d'images polarimétriques basé sur la texture. Puis nous montrerons les résultats de la classification sur des images réelles.

3.2 La segmentation d'image

3.2.1 Définition

La segmentation d'une image I est une partition P qui découpe cette image en k régions distinctes S_i (avec $S_i \subseteq I$) de sorte que $P = \{S_1, \dots, S_k\}$, $S_i \cap S_j = \emptyset$ pour $i \neq j$, et $I = \bigcup_{i=1}^k S_i$.

Une région est un ensemble connexe de pixels ayant des propriétés communes qui les différencient des pixels des régions voisines. Il n'y a pas de méthode unique de segmentation d'une image. La segmentation d'image est étroitement liée aux notions de différence et de similarité comme le perçoit le système visuel humain. Deux grandes familles de segmentation ont vu le

jour : l'approche "frontière" et l'approche "région" [Cocq 95].

- La notion de frontière (ou contour) est associée à une discontinuité entre les propriétés de deux ensembles connexes de points. Les techniques de détection de contour sont incluses dans les méthodes d'approche frontière. Néanmoins, comme les contours sont rarement connexes, une étape de post-traitement est nécessaire : c'est la fermeture des contours. Puis, on définit une région comme étant l'intérieur d'une ligne fermée.
- La notion de région fait référence à des groupes de pixels ayant des propriétés communes (intensité, texture, ...). Ces méthodes conduisent directement à une partition de l'image où chaque pixel appartient à une seule et unique région.

Dans la suite de ce chapitre, nous allons nous intéresser essentiellement à la segmentation hiérarchique d'image. Cette méthode fait partie intégrante de l'approche région. La segmentation hiérarchique d'images polarimétriques a déjà été proposée et validée par J.-M. Beaulieu et R. Touzi [Beau 04b]. Nous proposons ici d'étendre leur approche en utilisant une nouvelle distribution qui prend en compte la texture présente dans les images polarimétriques. Dans un premier temps, nous allons présenter la segmentation hiérarchique.

3.2.2 Le principe de la segmentation hiérarchique

La figure 3.1 montre un exemple de dendrogramme obtenu par un algorithme de segmentation hiérarchique. La partition initiale est composée de 12 segments. À chaque itération, l'algorithme fusionne les deux segments 4-connexes les plus proches au sens d'un certain critère jusqu'à obtenir une partition finale composée d'un seul segment.

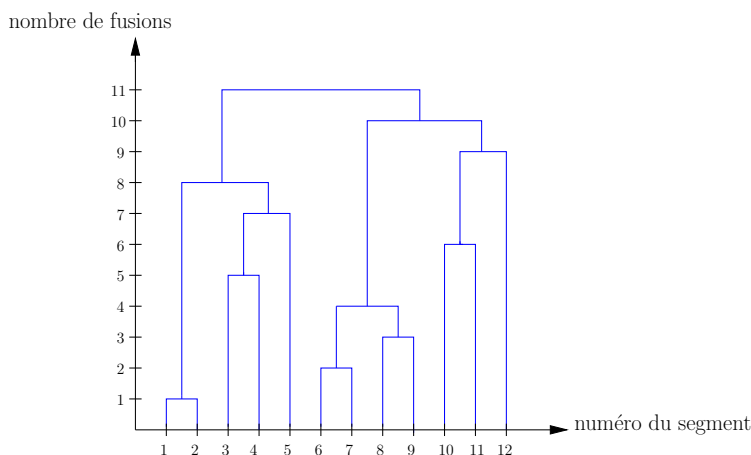


FIG. 3.1 – Un exemple de dendrogramme

Nous allons maintenant exprimer le critère de fusion des segments à l'aide d'une approche au sens du maximum de vraisemblance.

3.2.2.1 L'approche au sens du maximum de vraisemblance

Soit \mathbf{x} une variable aléatoire de paramètre θ , \mathbf{x}_i désigne la valeur de \mathbf{x} au point i . Pour le segment S , la densité de probabilité de \mathbf{x} au point i de paramètre θ_S est égale à $p_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_i|\theta_S)$.

Soient X l'ensemble des pixels de l'image I , $X = \{x_i|i \in I\}$ et Θ_P l'ensemble contenant les paramètres de la distribution de \mathbf{x} pour la partition P , $\Theta_P = \{\theta_S|S \in P\}$, la fonction de vraisemblance de X sachant Θ_P et P est donnée par :

$$L(X|\Theta_P, P) = p(X|\Theta_P, P) \quad (3.1)$$

En supposant les \mathbf{x}_i indépendants deux à deux, la fonction de vraisemblance devient égale à :

$$L(X|\Theta_P, P) = \prod_{i \in I} p(x_i|\theta_{S_i}) \Big|_P \quad (3.2)$$

où S_i désigne le segment contenant le pixel i .

L'approche au sens du maximum de vraisemblance cherche la partition P ainsi que l'ensemble Θ_P contenant les paramètres de la distribution de \mathbf{x} pour la partition P qui maximise la fonction de vraisemblance.

À partir d'une partition donnée P , les paramètres de la distribution de \mathbf{x} pour le segment S sont estimés à partir de statistiques calculées sur ce segment. En général, les paramètres θ_S sont estimés par la méthode du maximum de vraisemblance, par la méthodes des moments ou encore à partir des cumulants [Tiso 04]. La log-vraisemblance pour la partition P (noté LLF(P)) s'exprime en fonction de la log-vraisemblance maximale pour chaque segment (noté MLL(S)) par [Beau 04b] :

$$\begin{aligned} \text{LLF}(P) &= \sum_{i \in I} \ln(p(x_i|\theta_{S_i})) \\ &= \sum_{k=1}^{nb_seg} \sum_{i \in S_k} \ln(p(x_i|\theta_{S_k})) \\ &= \sum_{k=1}^{nb_seg} \text{MLL}(S_k) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Ainsi, la log-vraisemblance pour la partition P est égale à la somme des vraisemblances calculées sur chaque segment S de la partition P .

L'objectif est de trouver pour un nombre de segments k fixé, la partition P_k qui maximise la vraisemblance. Si n désigne la taille de l'image I , il existe un grand nombre de partition P_k à k segments. La recherche de la partition P_k qui maximise globalement la log-vraisemblance est trop coûteuse en temps de calcul.

Pour trouver une solution certes sous-optimale mais moins coûteuse en temps de calcul, il faut revenir sur les propriétés de la log-vraisemblance. La log-vraisemblance est une fonction monotone croissante qui croît avec le nombre de segments de la partition. La log-vraisemblance est maximale lorsque le nombre de segments est égale au nombre de pixels de l'image I . C'est à dire que chaque pixel correspond à un segment. À l'opposé, la log-vraisemblance est minimale

lorsque la partition est constituée d'un seul segment. La partition P_1 est égale à l'image totale I , et entre ces deux extrêmes, la log-vraisemblance diminue au fur et à mesure que l'on fusionne des segments.

Lorsque l'on utilise un algorithme de segmentation hiérarchique, la partition P_k à k segments est obtenue en fusionnant deux segments 4-connexes de la partition P_{k+1} .

Notons D_k , la chute de la log-vraisemblance lors de la fusion des deux segments [Beau 04b].

$$D_k = \text{LLF}(P_{k+1}) - \text{LLF}(P_k) \quad (3.4)$$

On peut réécrire la valeur de la log-vraisemblance pour une partition contenant k segments comme étant égale à la log-vraisemblance pour une partition de n segments à laquelle on retranche la log-vraisemblance perdue à chaque itération pour passer de n à k segments.

$$\text{LLF}(P_k) = \text{LLF}(P_n) - \sum_{q=k}^{n-1} D_q \quad (3.5)$$

Trouver la partition P_k à k segments revient donc à maximiser la log-vraisemblance $\text{LLF}(P_k)$.

Si P_n désigne la partition initiale, dans un algorithme de segmentation hiérarchique, la maximisation de $\text{LLF}(P_k)$ est égale à la minimisation des D_q . A chaque itération, l'algorithme de segmentation hiérarchique va fusionner les deux segments 4-connexes qui minimisent la chute de la log-vraisemblance. La segmentation hiérarchique donne ainsi une solution sous optimale au problème de maximisation de vraisemblance. Cette solution est en revanche plus rapide à trouver que la solution optimale.

3.2.2.2 Le critère de fusion des segments

À chaque itération, l'algorithme de segmentation hiérarchique cherche à fusionner les segments S_i et S_j qui minimisent la décroissance D_q de la log-vraisemblance. En combinant les équations 3.3 et 3.4, D_q s'écrit simplement [Beau 04b] en fonction de la log-vraisemblance calculée sur les deux segments à fusionner S_i et S_j , et de la log-vraisemblance calculée sur la fusion de ces deux segments par :

$$D_q = \text{SC}_{i,j} = \text{MLL}(S_i) + \text{MLL}(S_j) - \text{MLL}(S_i \cup S_j) \quad (3.6)$$

Dans le cadre de la segmentation hiérarchique, nous venons de voir que le critère de fusion des segments est basé sur leur log-vraisemblance. On va ainsi s'intéresser aux statistiques des images polarimétriques. Étudions d'abord le cas des images non texturées.

3.3 Pour des zones non texturées

3.3.1 Les statistiques dans le cas 1-vue et L-vues

Le système polarimétrique radar mesure le champ électromagnétique rétrodiffusé par les cibles au sol.

En 1-vue, les données polarimétriques sont complètement caractérisées par la matrice de rétrodiffusion \mathbf{S} . Le signal rétrodiffusé est décrit par le vecteur de rétrodiffusion à p composantes

$\mathbf{x}_h = [S_1, \dots, S_p]$. Sous l'hypothèse que le speckle est complètement développé dans une zone homogène (sans texture, noté par l'indice h), \mathbf{x}_h est un processus gaussien complexe circulaire de moyenne nulle [Good 63]. Sa distribution est donnée par :

$$p_{\mathbf{x}_h}(\mathbf{x}_h|\Sigma_h) = \frac{1}{\pi^p |\Sigma_h|} \exp(-\mathbf{x}_h^H \Sigma_h^{-1} \mathbf{x}_h) \quad (3.7)$$

$\Sigma_h = E[\mathbf{x}_h \mathbf{x}_h^H]$ est la matrice de covariance.

$E[\cdot]$ et $|\cdot|$ désignent respectivement l'espérance mathématique et le déterminant. L'exposant H est l'opérateur de transposition complexe conjugué et p est la dimension du vecteur de rétrodiffusion \mathbf{x}_h ($p = 3$ dans le cas monostatique).

La matrice de covariance L-vues \mathbf{Z}_h est obtenue en moyennant L réalisations 1-vue de la matrice de cohérence ($\mathbf{Z}_h = \frac{1}{L} \sum_{k=1}^L \mathbf{x}_{hk} \mathbf{x}_{hk}^H$).

Pour une image L-vues, sous les mêmes hypothèses, la matrice de covariance suit une distribution de Wishart [Good 63]

$$p_{\mathbf{Z}_h}(\mathbf{Z}_h|\Sigma_h) = \frac{L^L |\mathbf{Z}_h|^{L-p} \exp\{-L \operatorname{tr}(\Sigma_h^{-1} \mathbf{Z}_h)\}}{\pi^{\frac{p(p-1)}{2}} \Gamma(L) \cdots \Gamma(L-p+1) |\Sigma_h|^L} \quad (3.8)$$

où $\Gamma(\cdot)$ est la fonction Gamma définie par $\Gamma(z+1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^z dt$.

3.3.2 Calcul du critère

3.3.2.1 En 1-vue

Comme on vient de le voir, pour segmenter une image polarimétrique 1-vue, il faut travailler sur la distribution du vecteur de rétrodiffusion \mathbf{x}_h . Cette distribution est caractérisée par sa matrice de covariance. Pour un segment S de n_S pixels, l'estimée au sens du maximum de vraisemblance de Σ_h est la matrice de covariance C_S définie comme la moyenne des matrices de covariance du segment S par :

$$C_{Sh} = \frac{1}{n_S} \sum_{k \in S} \mathbf{x}_{hk} \cdot \mathbf{x}_{hk}^H \quad (3.9)$$

Comme \mathbf{x}_h est un processus gaussien complexe circulaire de moyenne nulle, la log-vraisemblance du segment S est égale à [Beau 04b] :

$$\begin{aligned} \text{MLL}(S) &= \sum_{k \in S} \ln \left(\frac{1}{\pi^p |C_{Sh}|} \exp(-\mathbf{x}_{hk}^H C_{Sh}^{-1} \mathbf{x}_{hk}) \right) \\ &= \sum_{k \in S} [-\ln |C_{Sh}| - p \ln \pi - \mathbf{x}_{hk}^H C_{Sh}^{-1} \mathbf{x}_{hk}] \\ &= -n_S \ln |C_{Sh}| - n_S p \ln \pi - \sum_{k \in S} \mathbf{x}_{hk}^H C_{Sh}^{-1} \mathbf{x}_{hk} \\ &= -n_S \ln |C_{Sh}| - n_S p \ln \pi - 3n_s \end{aligned} \quad (3.10)$$

En injectant l'expression de la log-vraisemblance pour le segment S dans l'équation 3.6, on obtient la valeur du critère utilisé lors de la fusion des segments S_i et S_j [Beau 04b] [Skri 02].

$$\text{SC}_{i,j} = (n_i + n_j) \ln |C_{S_i \cup S_j}| - n_i \ln |C_{S_i}| - n_j \ln |C_{S_j}| \quad (3.11)$$

3.3.2.2 En L-vues

Dans le cas multi-vues, la segmentation hiérarchique est basée sur les statistiques de la matrice de covariance \mathbf{Z} . Pour un segment S contenant m_S pixels, la matrice de covariance moyenne est définie par :

$$C_{Sh} = \frac{1}{m_S} \sum_{k \in S} \mathbf{z}_{hk} \quad (3.12)$$

À partir de l'expression de la distribution de Wishart (Eq. 3.8), on exprime la log-vraisemblance du segment S par [Beau 04b] :

$$\begin{aligned} \text{MLL}(S) &= \sum_{k \in S} \ln(p(\mathbf{z}_{hk} | C_{Sh})) \\ &= m_S \ln \left(\frac{L^{Lp}}{\pi^{\frac{p(p-1)}{2}} \Gamma(L) \cdots \Gamma(L-p+1)} \right) - L \sum_{k \in S} \ln |C_{Sh}| + (L-p) \sum_{k \in S} \ln |\mathbf{z}_{hk}| \\ &\quad - L \sum_{k \in S} \text{tr}(C_{Sh}^{-1} \mathbf{z}_{hk}) \end{aligned} \quad (3.13)$$

Pour simplifier le calcul de la log-vraisemblance, on montre que $\sum_{k \in S} \text{tr}(C_{Sh}^{-1} \mathbf{z}_{hk})$ s'exprime simplement en fonction du nombre de pixels du segment S . En effet,

$$\begin{aligned} \sum_{k \in S} \text{tr}(C_{Sh}^{-1} \mathbf{z}_{hk}) &= \sum_{k \in S} \text{tr} \left(\left(\frac{1}{m_S} \sum_{i \in S} \mathbf{z}_{hi} \right)^{-1} \mathbf{z}_{hk} \right) \\ &= m_S \text{tr} \left(\sum_{k \in S} \left(\sum_{i \in S} \mathbf{z}_{hi} \right)^{-1} \mathbf{z}_{hk} \right) \\ &= m_S \text{tr} \left(\left(\sum_{i \in S} \mathbf{z}_{hi} \right)^{-1} \left(\sum_{k \in S} \mathbf{z}_{hk} \right) \right) \\ &= m_S \text{tr}(\mathbf{I}_p) \text{ où } \mathbf{I}_p \text{ est la matrice identité de taille } p \times p \\ &= p m_S \end{aligned} \quad (3.14)$$

En combinant les équations 3.13 et 3.14, la log-vraisemblance du segment S dans le cas où la matrice de covariance est distribuée selon une loi de Wishart vaut

$$\begin{aligned} \text{MLL}(S) &= m_S \ln \left(\frac{L^{Lp}}{\pi^{\frac{p(p-1)}{2}} \Gamma(L) \cdots \Gamma(L-p+1)} \right) - L \sum_{k \in S} \ln |C_{Sh}| \\ &\quad + (L-p) \sum_{k \in S} \ln |\mathbf{z}_{hk}| - Lp m_S \end{aligned} \quad (3.15)$$

Par conséquent, la valeur du critère utilisé lors de la fusion des segments S_i et S_j est égale à :

$$\text{SC}_{i,j} = L(m_i + m_j) \ln |C_{Sh_i \cup Sh_j}| - Lm_i \ln |C_{Sh_i}| - Lm_j \ln |C_{Sh_j}| \quad (3.16)$$

On peut constater que ce critère est équivalent à celui obtenu par les statistiques 1-vue en prenant $n_i = Lm_i$. Dans ce cas, on peut interpréter n_i comme étant le nombre de vues équivalent du segment S_i . En effet, dans le cas multi-vues, la matrice de covariance moyenne du segment S (C_{Sh}) est égale à la moyenne de m_S matrices de covariance L-vues.

3.4 Pour des zones texturées

3.4.1 Le modèle multiplicatif

Lorsque la matrice de cohérence Σ varie spatialement dans l'image, la surface est dite hétérogène ou encore texturée. Dans le cas général, le vecteur de rétrodiffusion observé \mathbf{x} peut se décomposer comme le produit d'une matrice G diagonale par un vecteur de rétrodiffusion associé à une surface homogène équivalente [Nova 90] [Yueh 91] [Yu 96].

$$\mathbf{x} = G\mathbf{x}_h = \begin{bmatrix} \sqrt{\mu_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{\mu_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \sqrt{\mu_p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{h1} \\ \mathbf{x}_{h2} \\ \vdots \\ \mathbf{x}_{hp} \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

G est une matrice qui caractérise la texture dans chaque canal polarimétrique. Sous l'hypothèse que la texture est indépendante du canal de polarisation et que le speckle est complètement développé, la matrice de covariance observée (Σ) s'écrit comme le produit d'une variable aléatoire scalaire positive $\mu = \mu_1 = \cdots = \mu_p$ par une matrice de covariance associée à une zone homogène Σ_h .

$$\Sigma = \mu\Sigma_h \quad (3.18)$$

où Σ_h est distribuée selon une loi de Wishart.

3.4.1.1 En 1-vue

La distribution du vecteur de rétrodiffusion \mathbf{x} s'exprime à partir de la densité de probabilité du vecteur de rétrodiffusion pour une zone homogène et de la distribution de la texture par la relation suivante [Nova 90] [Yueh 91] [Joug 94] [Touz 04b] :

$$p_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}|\Sigma_h, \alpha) = \int_0^{\infty} p_{\mathbf{x}_h}(\mathbf{x}|\mu\Sigma_h) p_{\mu}(\mu|\alpha) d\mu \quad (3.19)$$

où α représente l'ensemble des paramètres de la distribution de la texture.

3.4.1.2 En L-vues

De la même façon qu'en 1-vue, la distribution de la matrice de covariance \mathbf{Z} s'exprime par la relation suivante [Nova 90] [Yueh 91] [Joug 94] [Touz 04b] :

$$p_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}|\Sigma_h, \alpha) = \int_0^{\infty} p_{\mathbf{Z}_h}(\mathbf{Z}|\mu\Sigma_h) p_{\mu}(\mu|\alpha) d\mu \quad (3.20)$$

où α représente l'ensemble des paramètres de la distribution de la texture.

Les équations 3.19 et 3.20 permettent de calculer la distribution du vecteur de rétrodiffusion (en 1-vue) ou de la matrice de cohérence (en L-vues) à partir d'un modèle a priori de la texture.

3.4.1.3 Estimation au sens du maximum de vraisemblance de la texture et de la matrice de covariance moyenne

L'estimation du paramètre de texture au sens du maximum de vraisemblance s'obtient à partir de la distribution de la matrice de covariance $p_{\mathbf{Z}_h}(\mathbf{Z}|\mu\Sigma_h)$ en considérant le paramètre μ comme déterministe. En remplaçant Σ_h par $\mu^{-1}\Sigma$ dans l'expression de la distribution de la matrice de covariance homogène observée \mathbf{Z}_h , on obtient :

$$p_{\mathbf{Z}_h}(\mathbf{Z}|\mu\Sigma_h) = \frac{L^L |\mathbf{Z}|^{L-p} \exp \left\{ -\frac{L}{\mu} \text{tr} (\Sigma_h^{-1} \mathbf{Z}) \right\}}{\pi^{\frac{p(p-1)}{2}} \Gamma(L) \cdots \Gamma(L-p+1) \mu^L |\Sigma_h|^L} \quad (3.21)$$

À partir de l'équation 3.21, la log-vraisemblance $L(\mu)$ s'exprime par :

$$L(\mu) = -\frac{L}{\mu} \text{tr} (\Sigma_h^{-1} \mathbf{Z}) - Lp \ln \mu + K \quad (3.22)$$

où K est une constante indépendante de μ . Après avoir dérivé par rapport à μ l'expression 3.22 et annulé ce terme, l'estimateur $\hat{\mu}_{MV}$ au sens du maximum de vraisemblance du paramètre de texture est donné par [Nova 92] [Lope 97] :

$$\hat{\mu}_{MV} = \frac{1}{p} \text{tr} (\Sigma_h^{-1} \mathbf{Z}) \quad (3.23)$$

$$= \mu \frac{1}{p} \text{tr} (\Sigma_h^{-1} \mathbf{Z}_h) \quad (3.24)$$

$\hat{\mu}_{MV}$ est un estimateur non biaisé car $E[\hat{\mu}_{MV}] = \mu$. Sa variance vaut $\frac{\mu^2}{Lp}$ et atteint la borne de Cramer-Rao.

L'estimation de la matrice de covariance pour une zone homogène. Soient N réalisations du signal rétrodiffusé. Les N paramètres déterministes de la texture μ_n sont estimés par :

$$\hat{\mu}_{MV_n} = \frac{1}{p} \text{tr} (\Sigma_h^{-1} \mathbf{Z}_n)$$

La log-vraisemblance de la distribution de la matrice de covariance homogène vaut [Lope 97] :

$$\begin{aligned} L(\Sigma_h) &= \sum_{n=1}^N \ln p_{\mathbf{Z}_h}(\mathbf{Z}_n|\mu_n \Sigma_h) \\ &= -\sum_{n=1}^N \left[\frac{L}{\mu_n} \text{tr} (\Sigma_h^{-1} \mathbf{Z}_n) + L \ln |\Sigma_h| \right] \end{aligned} \quad (3.25)$$

L'estimée au sens du maximum de vraisemblance est obtenue en dérivant l'expression 3.25 par rapport à Σ_h , en utilisant les relations de dérivée par rapport à une matrice $\frac{d}{d\mathbf{C}} |\mathbf{C}| = |\mathbf{C}| {}^t \mathbf{C}^{-1}$ et $\frac{d}{d\mathbf{C}} \text{tr} (\mathbf{A}\mathbf{C}) = {}^t \mathbf{A}$, on obtient [Lope 97] :

$$\sum_{n=1}^N \left[\frac{L}{\mu_n} \mathbf{Z}_n - L \Sigma_h \right] = \mathbf{0} \quad (3.26)$$

où $\mathbf{0}$ désigne la matrice nulle de taille $p \times p$. L'estimateur $\hat{\Sigma}_h$ au sens du maximum de vraisemblance de la matrice de covariance homogène est donc égal à :

$$\hat{\Sigma}_h = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \frac{1}{\mu_n} \mathbf{Z}_n \quad (3.27)$$

Par la suite, nous allons dériver les expressions des distributions de la matrice de cohérence en utilisant le modèle multiplicatif scalaire pour la texture. Nous allons utiliser deux modèles de distribution pour la texture :

- la distribution Gamma.
- la distribution de Fisher.

Tout d'abord, intéressons nous à la distribution la plus couramment utilisée, la distribution Gamma. Nous allons redémontrer les statistiques du vecteur de rétrodiffusion et de la matrice de covariance dans le cas 1-vue et L-vues.

3.4.2 Les statistiques associées à une texture distribuée selon une loi Gamma

3.4.2.1 La distribution Gamma

La distribution Gamma de moyenne 1 est une loi à un paramètre définie par :

$$p_\mu(\mu) = \frac{\alpha^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \mu^{\alpha-1} \exp(-\alpha\mu) \quad (3.28)$$

avec $\alpha > 0$.

La figure 3.2 montre l'allure de la distribution Gamma pour différentes valeurs du paramètre de forme α .

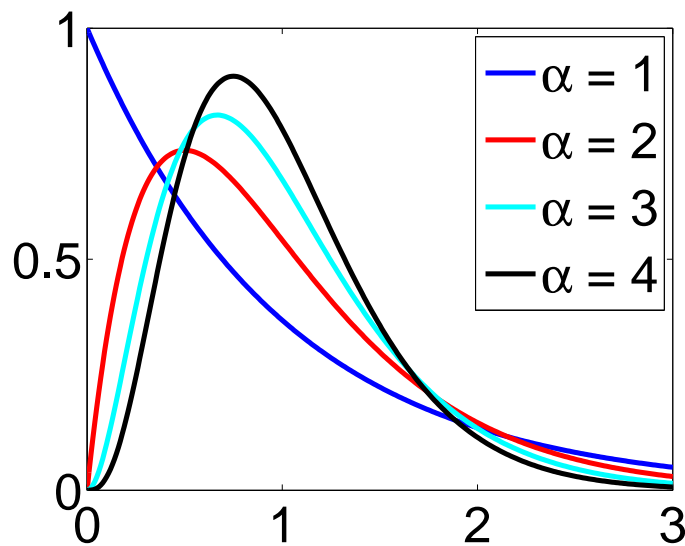


FIG. 3.2 – Exemples de distributions Gamma

3.4.2.2 En 1-vue

Connaissant l'expression de la distribution Gamma, on peut déduire la distribution du vecteur de rétrodiffusion \mathbf{x} en utilisant le modèle multiplicatif scalaire.

En combinant les équations 3.7 et 3.28, on obtient :

$$\begin{aligned}
 p_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}|\Sigma_h, \alpha) &= \int_0^{\infty} \frac{1}{\pi^p \mu^p |\Sigma_h|} \exp\left(-\frac{1}{\mu} \mathbf{x}^H \Sigma_h^{-1} \mathbf{x}\right) \frac{\alpha^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \mu^{\alpha-1} \exp(-\alpha\mu) d\mu \\
 &= \frac{1}{\pi^p |\Sigma_h|} \frac{\alpha^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} \mu^{\alpha-1-p} \exp(-\alpha\mu) \exp\left(-\frac{1}{\mu} \mathbf{x}^H \Sigma_h^{-1} \mathbf{x}\right) d\mu \\
 &= \frac{1}{\pi^p |\Sigma_h|} \frac{\alpha^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \mathbf{I}(\Sigma_h, \alpha)
 \end{aligned} \tag{3.29}$$

Nous allons redémontrer que l'intégrale $\mathbf{I}(\Sigma_h, \alpha)$ s'exprime à l'aide de la fonction de Bessel modifiée de seconde espèce (notée BesselK). Pour cela, nous allons utiliser une relation publiée dans le livre de Gradshteyn et Ryzhik qui relie une intégrale à la fonction BesselK [Grad 80, Eq. 3.471.9].

$$\int_0^{\infty} x^{\nu-1} \exp\left(-\frac{\beta}{x} - \gamma x\right) dx = 2 \left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^{\frac{\nu}{2}} \text{BesselK}_\nu\left(2\sqrt{\beta\gamma}\right) \tag{3.30}$$

avec $\Re(\beta) > 0$ et $\Re(\gamma) > 0$.

La fonction de Bessel est solution de l'équation différentielle :

$$z^2 y'' + zy' - (z^2 + \nu^2)y = 0$$

On a la relation $\text{BesselK}_\nu(z) = \text{BesselK}_{-\nu}(z)$.

Par analogie avec les équations 3.29 et 3.30, on peut poser $\nu = \alpha - p$, $\beta = \mathbf{x}^H \Sigma_h^{-1} \mathbf{x}$ et $\gamma = \alpha$. On vérifie bien que $\Re(\beta) > 0$ et $\Re(\gamma) > 0$. La distribution du vecteur de rétrodiffusion \mathbf{x} dans le cas 1-vue pour une texture distribuée selon une loi Gamma s'exprime à l'aide de la fonction de Bessel modifiée de seconde espèce par :

$$\begin{aligned}
 p_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}|\Sigma_h, \alpha) &= \frac{1}{\pi^p |\Sigma_h|} \frac{\alpha^\alpha}{\Gamma(\alpha)} 2 \left(\frac{\mathbf{x}^H \Sigma_h^{-1} \mathbf{x}}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha-p}{2}} \text{BesselK}_{\alpha-p}\left(2\sqrt{\alpha \mathbf{x}^H \Sigma_h^{-1} \mathbf{x}}\right) \\
 &= \frac{2}{\pi^p |\Sigma_h| \Gamma(\alpha)} \left(\mathbf{x}^H \Sigma_h^{-1} \mathbf{x}\right)^{\frac{\alpha-p}{2}} \alpha^{\frac{\alpha+p}{2}} \text{BesselK}_{p-\alpha}\left(2\sqrt{\alpha \mathbf{x}^H \Sigma_h^{-1} \mathbf{x}}\right)
 \end{aligned} \tag{3.31}$$

Par la suite, nous dirons que le vecteur de rétrodiffusion \mathbf{x} pour une texture distribuée selon une loi Gamma suit une distribution \mathcal{K} (car elle est reliée avec la fonction BesselK).

3.4.2.3 En L-vues

Dans cette partie, on s'intéresse au calcul analytique de l'expression de la distribution de la matrice de covariance dans le cas où la texture suit une loi Gamma. Pour cela, partons de la définition de la distribution de la matrice de covariance en utilisant le modèle multiplicatif, et injectons l'expression de la loi de la texture dans cette équation. Nous obtenons :

$$\begin{aligned}
p_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}|\Sigma_h, \alpha) &= \int_0^\infty \frac{L^{Lp} |\mathbf{Z}|^{L-p} \exp\left\{-\frac{L}{\mu} \text{tr}(\Sigma_h^{-1} \mathbf{Z})\right\}}{\pi^{\frac{p(p-1)}{2}} \Gamma(L) \cdots \Gamma(L-p+1) \mu^{Lp} |\Sigma_h|^L} \frac{\alpha^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \mu^{\alpha-1} \exp(-\alpha\mu) d\mu \\
&= \frac{L^{Lp} |\mathbf{Z}|^{L-p}}{\pi^{\frac{p(p-1)}{2}} \Gamma(L) \cdots \Gamma(L-p+1) |\Sigma_h|^L} \frac{\alpha^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \exp\left\{-\frac{L}{\mu} \text{tr}(\Sigma_h^{-1} \mathbf{Z})\right\} \frac{1}{\mu^{Lp}} \mu^{\alpha-1} \exp(-\alpha\mu) d\mu \\
&= \frac{L^{Lp} |\mathbf{Z}|^{L-p}}{\pi^{\frac{p(p-1)}{2}} \Gamma(L) \cdots \Gamma(L-p+1) |\Sigma_h|^L} \frac{\alpha^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \mathbf{I}(\Sigma_h, \alpha)
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Par analogie avec l'expression de $\mathbf{I}(\Sigma_h, \alpha)$ et l'équation 3.30, on pose : $\nu = \alpha - Lp$; $\beta = Ltr(\Sigma_h^{-1} \mathbf{Z})$ et $\gamma = \alpha$. Ce choix de paramètres vérifie $\Re(\beta) > 0$ et $\Re(\gamma) > 0$.

En combinant les équations 3.30 et 3.32, on obtient l'expression littérale de la distribution de la matrice de covariance [Lee 94b] [Lope 97] définie par :

$$\begin{aligned}
p_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}|\Sigma_h, \alpha) &= \frac{L^{Lp} |\mathbf{Z}|^{L-p}}{\pi^{\frac{p(p-1)}{2}} \Gamma(L) \cdots \Gamma(L-p+1) |\Sigma_h|^L} \frac{\alpha^\alpha}{\Gamma(\alpha)} 2 \left(\frac{Ltr(\Sigma_h^{-1} \mathbf{Z})}{\alpha} \right)^{\frac{\alpha-Lp}{2}} \\
&\quad \times \text{BesselK}_{\alpha-Lp} \left(2\sqrt{\alpha Ltr(\Sigma_h^{-1} \mathbf{Z})} \right) \\
&= \frac{2|\mathbf{Z}|^{L-p} [tr(\Sigma_h^{-1} \mathbf{Z})]^{\frac{\alpha-Lp}{2}} (\alpha L)^{\frac{\alpha+Lp}{2}}}{\pi^{\frac{p(p-1)}{2}} \Gamma(L) \cdots \Gamma(L-p+1) \Gamma(\alpha) |\Sigma_h|^L} \text{BesselK}_{Lp-\alpha} \left(2\sqrt{\alpha Ltr(\Sigma_h^{-1} \mathbf{Z})} \right)
\end{aligned} \tag{3.33}$$

3.4.3 Calcul du critère pour une texture distribuée selon une loi Gamma

À partir des expressions des distributions du vecteur de rétrodiffusion \mathbf{x} et de la matrice de cohérence \mathbf{Z} établies précédemment, on peut dériver les expressions littérales des critères utilisés lors la fusion de segments durant l'étape de segmentation hiérarchique des images 1-vue et L-vues.

3.4.3.1 En 1-vue

Dans le cas de données 1-vue, pour une texture distribuée selon la loi Gamma, la log-vraisemblance maximale du segment S ($\text{MLL}(S)$) se déduit de la distribution \mathcal{K} pour le vecteur de rétrodiffusion \mathbf{x} (Eq. 3.31). Après suppression des termes qui s'annulent dans le calcul du critère $\text{SC}_{i,j}$, on obtient :

$$\begin{aligned}
 \text{MLL}(S) &\simeq \frac{1}{2}n(\hat{\alpha} + p) \ln(\hat{\alpha}) - n \ln(\Gamma(\hat{\alpha})) - n \ln(|C_h|) + \frac{1}{2}(\hat{\alpha} - p) \sum_{\mathbf{x}_k \in S} \ln\{\mathbf{x}_k^H C_h^{-1} \mathbf{x}_k\} \\
 &+ \sum_{\mathbf{x}_k \in S} \ln \left\{ \text{BesselK}_{p-\hat{\alpha}} \left(2\sqrt{\hat{\alpha} \mathbf{x}_k^H C_h^{-1} \mathbf{x}_k} \right) \right\}
 \end{aligned} \tag{3.34}$$

avec C_h l'estimée au sens du maximum de vraisemblance de Σ_h pour le segment S (Eq. 3.27), $\hat{\alpha}$ l'estimée au sens du maximum de vraisemblance du paramètre α de la distribution Gamma. L'expression de $\hat{\alpha}$ s'obtient aisément à partir de la définition de la loi Gamma (Eq. 3.28) et est la solution de l'équation suivante :

$$\ln \alpha - \Psi(\alpha) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln \mu_i \tag{3.35}$$

avec $\Psi(\cdot)$ la fonction digamma définie par $\Psi(\cdot) = \frac{\Gamma'(\cdot)}{\Gamma(\cdot)}$

3.4.3.2 En L-vues

De la même façon que dans le cas 1-vue, on déduit la valeur du critère utilisé lors de la segmentation hiérarchique à partir de la distribution de la matrice de covariance pour une texture distribuée selon une loi Gamma. Après suppression des termes qui s'annulent dans le calcul du critère $\text{SC}_{i,j}$, on obtient [Beau 04b] :

$$\begin{aligned}
 \text{MLL}(S) &\simeq \frac{1}{2}n(\hat{\alpha} + Lp) \ln(\hat{\alpha}L) - n \ln(\Gamma(\hat{\alpha})) - nL \ln(|C_h|) + \frac{1}{2}(\hat{\alpha} - Lp) \sum_{\mathbf{z}_k \in S} \ln \{ \text{tr}(C_h^{-1} \mathbf{z}_k) \} \\
 &+ \sum_{\mathbf{z}_k \in S} \ln \left\{ \text{BesselK}_{Lp-\hat{\alpha}} \left(2\sqrt{\hat{\alpha}L \text{tr}(C_h^{-1} \mathbf{z}_k)} \right) \right\}
 \end{aligned} \tag{3.36}$$

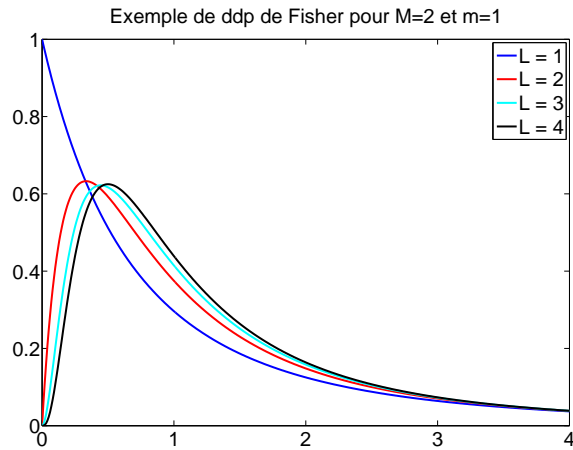
où C_h est l'estimée au sens du maximum de vraisemblance de Σ_h pour le segment S (Eq. 3.27). $\hat{\alpha}$ étant l'estimée au sens du maximum de vraisemblance du paramètre α de la distribution Gamma (Eq. 3.35).

3.4.4 La distribution de Fisher

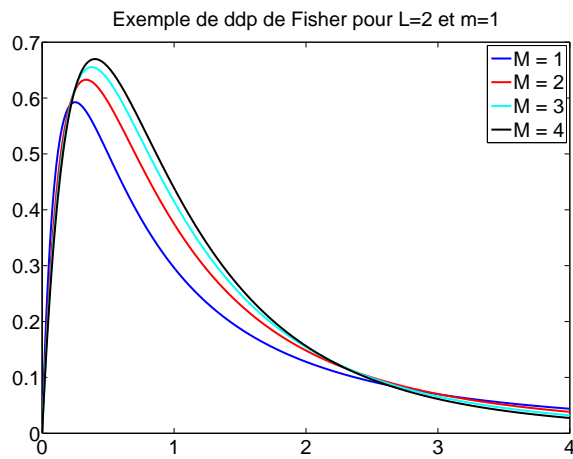
La distribution de Fisher [Cram 46] est une loi à trois paramètres définie par :

$$p_\mu(\mu) = \mathcal{F}[m, \mathcal{L}, \mathcal{M}] = \frac{\Gamma(\mathcal{L} + \mathcal{M})}{\Gamma(\mathcal{L})\Gamma(\mathcal{M})} \frac{\mathcal{L}}{\mathcal{M}m} \frac{\left(\frac{\mathcal{L}\mu}{\mathcal{M}m}\right)^{\mathcal{L}-1}}{\left(1 + \frac{\mathcal{L}\mu}{\mathcal{M}m}\right)^{\mathcal{L}+\mathcal{M}}} \tag{3.37}$$

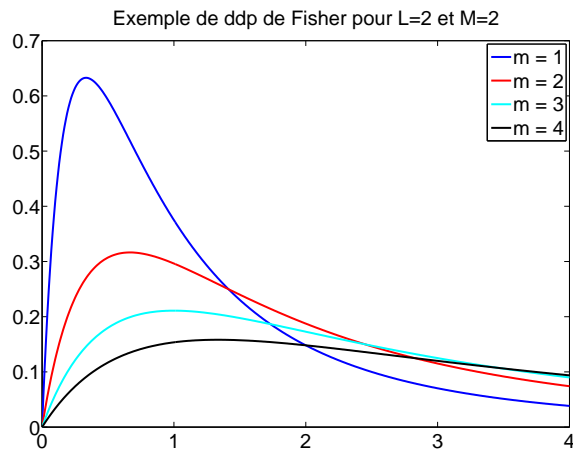
avec $\mathcal{L} > 0, \mathcal{M} > 0$. La distribution de Fisher n'est pas reliée à la théorie des ondes électromagnétiques. Elle est reliée à la transformée de Mellin et aux statistiques de seconde espèce [Nico 06].



(a)



(b)



(c)

FIG. 3.3 – Quelques exemples de ddp de Fisher : (a) avec le paramètre \mathcal{L} qui varie, (b) avec le paramètre \mathcal{M} qui varie, et (c) avec le paramètre m qui varie.

3.4.4.1 La transformée de Mellin

Soit f une fonction définie sur \mathbb{R}^+ , la transformée de Mellin (notée TM) est l'application qui à $f(u)$ fait correspondre $\phi(s)$ avec $s \in \mathbb{C}$ par :

$$\phi(s) = \text{TM}[f(u)] = \int_0^{+\infty} u^{s-1} f(u) du \quad (3.38)$$

Soient f et g deux fonctions définies sur \mathbb{R}^+ , la convolution de Mellin (noté $\hat{\star}$) de f par g est donnée par :

$$h(u) = (f \hat{\star} g)(u) = \int_0^{\infty} f(y) g\left(\frac{u}{y}\right) \frac{dy}{y} = \int_0^{\infty} f\left(\frac{u}{y}\right) g(y) \frac{dy}{y} \quad (3.39)$$

La distribution de Fisher s'exprime simplement dans le domaine de Mellin à l'aide des lois Gamma et Gamma inverse. En effet, on peut montrer que la distribution de Fisher ($\mathcal{F}[m, \mathcal{L}, \mathcal{M}]$) est égale à la convolution de Mellin d'une distribution Gamma ($\mathcal{G}[m, \mathcal{L}]$) par une distribution Gamma inverse ($\mathcal{GI}[1, \mathcal{M}]$) [Nico 02] [Nico 03] [Nico 06].

$$\mathcal{F}[m, \mathcal{L}, \mathcal{M}] = \mathcal{G}[m, \mathcal{L}] \hat{\star} \mathcal{GI}[1, \mathcal{M}] \quad (3.40)$$

Par conséquent, l'équation 3.40 montre que la distribution de Fisher peut être vue comme une généralisation de la distribution Gamma. De plus, la distribution de Fisher possède deux comportements opposés :

- un comportement de loi dit à tête lourde.
- un comportement de loi dit à queue lourde.

Le comportement de loi à tête lourde est guidé par le paramètre \mathcal{L} de la loi Gamma. Plus \mathcal{L} est grand, moins la loi de Fisher possède un comportement de loi à tête lourde. De la même façon, le comportement de loi à queue lourde est piloté par le paramètre \mathcal{M} de la loi Gamma inverse. La loi de Fisher permet d'avoir un comportement hybride entre ces deux comportements. Il peut donc être intéressant de modéliser la texture dans les images polarimétriques par une distribution de Fisher.

3.4.4.2 Les statistiques de deuxième espèce

Soit x une variable aléatoire à valeurs réelles positives de sorte que sa densité de probabilité $p_x(u)$ soit définie pour $u \in \mathbb{R}^+$.

La première fonction caractéristique de deuxième espèce, noté $\phi_x(s)$, est égale par définition à la transformée de Mellin de la densité de probabilité de x .

$$\phi_x(s) = \text{TM}[p_x(u)] = \int_0^{+\infty} u^{s-1} p_x(u) du \quad (3.41)$$

La seconde fonction caractéristique de deuxième espèce, noté $\psi_x(u)$ est définie comme le logarithme népérien de la première fonction caractéristique de deuxième espèce.

$$\psi_x(u) = \ln(\phi_x(s)) \quad (3.42)$$

Les moments de deuxième espèce, aussi appelés log-moments, \tilde{m}_ν pour $\nu \in \mathbb{N}$ s'expriment par :

$$\tilde{m}_\nu = \left. \frac{d^\nu \phi_x(s)}{ds^\nu} \right|_{s=1} \quad (3.43)$$

$$= \int_0^{+\infty} (\ln u)^\nu p_x(u) du \quad (3.44)$$

Les cumulants de deuxième espèce, notés $\tilde{\kappa}_{x(r)}$, sont définis par les dérivées de la seconde fonction caractéristique de deuxième espèce prise en $s = 1$:

$$\tilde{\kappa}_{x(r)} = \left. \frac{d^r \psi_x(s)}{ds^r} \right|_{s=1} \quad (3.45)$$

Les cumulants de deuxième espèce sont aussi appelés log-cumulants.

Les trois premiers cumulants de deuxième espèce s'expriment en fonction des trois premiers moments de deuxième espèce par :

$$\tilde{\kappa}_{x(1)} = \tilde{m}_1 \quad (3.46)$$

$$\tilde{\kappa}_{x(2)} = \tilde{m}_2 - \tilde{m}_1^2 \quad (3.47)$$

$$\tilde{\kappa}_{x(3)} = \tilde{m}_3 - 3\tilde{m}_1\tilde{m}_2 + 2\tilde{m}_1^3 \quad (3.48)$$

À partir de N échantillons (x_1, \dots, x_N) de la variable aléatoire x , les estimateurs $\hat{\kappa}_{x(1)}$, $\hat{\kappa}_{x(2)}$ et $\hat{\kappa}_{x(3)}$ des trois premiers log-cumulants sont donnés par :

$$\hat{\kappa}_{x(1)} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [\ln(x_i)] \quad (3.49)$$

$$\hat{\kappa}_{x(2)} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [\ln(x_i) - \hat{\kappa}_{x(1)}]^2 \quad (3.50)$$

$$\hat{\kappa}_{x(3)} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [\ln(x_i) - \hat{\kappa}_{x(1)}]^3 \quad (3.51)$$

3.4.4.3 L'estimation des paramètres

L'estimation des paramètres de la distribution de Fisher au sens du maximum de vraisemblance ne conduit pas à un système d'expressions explicites [Nico 06]. L'inversion d'un tel système est difficile à résoudre, c'est pourquoi, la méthode du maximum de vraisemblance n'est jamais utilisée en pratique pour la loi de Fisher. La méthode des moments peut être utilisée, mais celle-ci nécessite l'existence du moment d'ordre 3. Seule une partie de l'espace des distributions de Fisher vérifie cette propriété (Il faut que $\mathcal{L} \in \mathbb{N}$ et $\mathcal{M} \in]3, +\infty[$ [Nico 06]). La méthode des moments n'est donc pas satisfaisante pour estimer les paramètres de la loi de Fisher.

Le théorème suivant montre une condition suffisante d'existence des log-moments et log-cumulants :

Théorème 3.1. *Si une densité de probabilité a sa fonction caractéristique de deuxième espèce définie sur un ouvert $\Omega =]s_a, s_b[$, $s = 1 \in \Omega$, alors elle possède tout ses log-moments et log-cumulants.*

Comme la loi de Fisher est définie sur \mathbb{R}^+ , tous ses log-moments et log-cumulants existent. Il est donc possible d'estimer les paramètres de la loi de Fisher à partir des trois premiers log-cumulants. On prend les trois premiers car c'est une loi à trois paramètres. Les log-cumulants $\tilde{\kappa}_1$, $\tilde{\kappa}_2$ et $\tilde{\kappa}_3$ pour une loi de Fisher valent :

$$\tilde{\kappa}_1 = \ln(m) + (\Psi(\mathcal{L}) - \ln(\mathcal{L})) - (\Psi(\mathcal{M}) - \ln(\mathcal{M})) \quad (3.52)$$

$$\tilde{\kappa}_2 = \Psi(1, \mathcal{L}) + \Psi(1, \mathcal{M}) \quad (3.53)$$

$$\tilde{\kappa}_3 = \Psi(2, \mathcal{L}) - \Psi(2, \mathcal{M}) \quad (3.54)$$

J.-M. Nicolas propose d'utiliser l'algorithme suivant pour estimer les paramètres de la loi de Fisher [Nico 06]. Comme les log-cumulants $\tilde{\kappa}_2$ et $\tilde{\kappa}_3$ s'expriment uniquement en fonction des paramètres \mathcal{L} et \mathcal{M} , on peut inverser numériquement ces équations en connaissant les valeurs des cumulants $\tilde{\kappa}_2$ et $\tilde{\kappa}_3$. L'algorithme [Nico 06] est le suivant :

- À initialiser les valeurs de \mathcal{L}_0 et \mathcal{M}_0 par

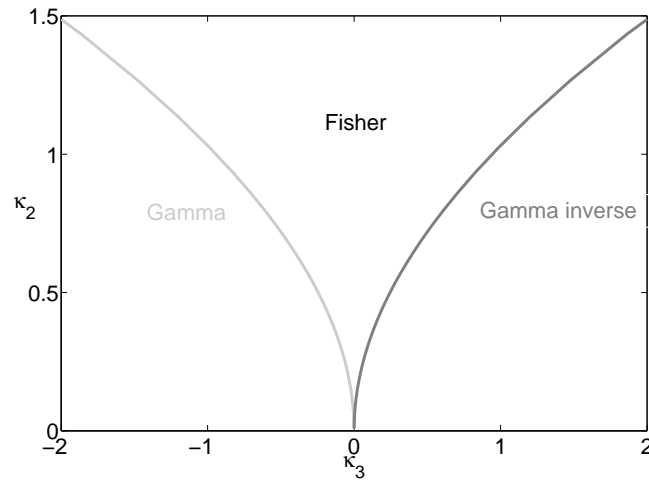
$$\begin{aligned} \Psi(1, \mathcal{L}_0) &= \frac{\tilde{\kappa}_2}{2} \\ \Psi(1, \mathcal{M}_0) &= \frac{\tilde{\kappa}_2}{2} \end{aligned}$$

- Prendre l'option $\mathcal{L} < \mathcal{M}$
- Choisir un pas incrémental pour les valeurs de \mathcal{M}
- Effectuer itérativement les étapes suivantes jusqu'à convergence (ou arrêt de l'algorithme sur test)
 - Calculer $\Psi(2, \mathcal{L}_i) - \Psi(2, \mathcal{M}_i)$
 - Incrémenter \mathcal{M}_i selon le gradient de $\tilde{\kappa}_3$, ce qui donne \mathcal{M}_{i+1}
 - Calculer \mathcal{L}_{i+1} vérifiant $\Psi(1, \mathcal{L}_{i+1}) + \Psi(1, \mathcal{M}_{i+1}) = \tilde{\kappa}_2$
- Calculer m à partir du premier log-cumulant $\tilde{\kappa}_1$ en inversant l'équation 3.52.

3.4.4.4 Le plan κ_2/κ_3

J.-M. Nicolas a proposé de caractériser les ddp définies sur \mathbb{R}^+ à l'aide du plan κ_2/κ_3 [Nico 02]. Le diagramme κ_2/κ_3 correspond au tracé du log-cumulant d'ordre 2 en fonction du log-cumulant d'ordre 3. Le diagramme κ_2/κ_3 est une extension du diagramme β_1/β_2 utilisé pour caractériser les lois avec la transformée de Fourier. β_1 et β_2 étant respectivement les coefficients d'asymétrie (skewness) et d'aplatissement (kurtosis). Contrairement au plan β_1/β_2 , le plan κ_2/κ_3 permet de distinguer deux lois ayant un coefficient d'asymétrie opposé. Ce diagramme est donc bien adapté pour étudier les lois définies sur \mathbb{R}^+ .

La figure 3.4 montre le domaine de définition couvert par les lois Gamma, Gamma inverse et de Fisher. Le trait gris clair correspond à l'ensemble défini par la loi Gamma et le trait gris foncé à celui de la loi Gamma inverse. La distribution de Fisher couvre tout le domaine compris entre ces deux courbes. Cette figure montre bien que la distribution de Fisher peut être vue comme une généralisation de la distribution Gamma.

FIG. 3.4 – Le plan κ_2/κ_3

3.4.4.5 Validation de l'utilisation de la loi de Fisher

Afin de valider le choix de l'utilisation d'une loi de Fisher pour modéliser la texture, nous comparons différents modèles de distributions. La figure 3.5 représente l'histogramme empirique de la texture dans une zone urbaine (en trait plein gris). La courbe en gris foncé montre la modélisation par une loi Gamma. Les courbes en pointillés correspondent à la distribution de Fisher avec une estimation des paramètres par la méthode des moments (en gris clair) et des log-moments (en gris foncé).

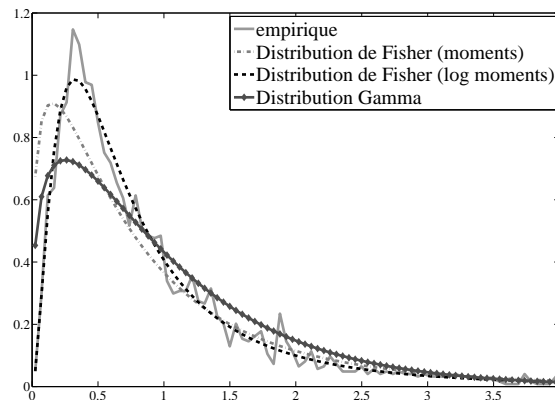


FIG. 3.5 – Modélisation de la texture pour une zone urbaine

On constate tout d'abord que la loi Gamma n'est pas adaptée à ce type de texture. De plus, la méthode basée sur les log-moments permet une meilleure modélisation de la texture pour une distribution de Fisher que la méthode basée sur les moments. C'est pourquoi, par la suite, nous estimerons les paramètres de la distribution de Fisher par la méthode des log-moments.

3.4.5 Les statistiques associées à une texture distribuée selon une loi de Fisher

Nous venons de voir que la distribution de Fisher permet de modéliser correctement un large éventail de distributions. Il est donc intéressant de connaître analytiquement l'expression littérale de la densité de probabilité du vecteur de rétrodiffusion et de la matrice de covariance dans le cas où la texture est distribuée selon une loi de Fisher. Dans le cadre de cette thèse, nous avons calculé ces expressions dans le cas 1-vue puis dans le cas L-vues.

3.4.5.1 En 1-vue

En introduisant les expressions analytiques de la densité de probabilité du vecteur de rétrodiffusion non texturé $p_{\mathbf{x}_h}$ (Eq. 3.7) et de la loi de Fisher pour le paramètre de texture (Eq. 3.37) dans l'équation 3.19, on obtient :

$$\begin{aligned}
p_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}|\Sigma_h, \mathcal{L}, \mathcal{M}, m) &= \int_0^\infty \frac{1}{\pi^p \mu^p |\Sigma_h|} \exp\left(-\frac{1}{\mu} \mathbf{x}^H \Sigma_h^{-1} \mathbf{x}\right) \frac{\Gamma(\mathcal{L} + \mathcal{M})}{\Gamma(\mathcal{L})\Gamma(\mathcal{M})} \frac{\mathcal{L}}{\mathcal{M}m} \frac{\left(\frac{\mathcal{L}\mu}{\mathcal{M}m}\right)^{\mathcal{L}-1}}{\left(1 + \frac{\mathcal{L}\mu}{\mathcal{M}m}\right)^{\mathcal{L}+\mathcal{M}}} d\mu \\
&= \frac{1}{\pi^p |\Sigma_h|} \frac{\Gamma(\mathcal{L} + \mathcal{M})}{\Gamma(\mathcal{L})\Gamma(\mathcal{M})} \frac{\mathcal{L}}{\mathcal{M}m} \int_0^\infty \frac{1}{\mu^p} \exp\left(-\frac{1}{\mu} \mathbf{x}^H \Sigma_h^{-1} \mathbf{x}\right) \frac{\left(\frac{\mathcal{L}\mu}{\mathcal{M}m}\right)^{\mathcal{L}-1}}{\left(1 + \frac{\mathcal{L}\mu}{\mathcal{M}m}\right)^{\mathcal{L}+\mathcal{M}}} d\mu \\
&= \frac{1}{\pi^p |\Sigma_h|} \frac{\Gamma(\mathcal{L} + \mathcal{M})}{\Gamma(\mathcal{L})\Gamma(\mathcal{M})} \frac{\mathcal{L}}{\mathcal{M}m} \mathbf{I}(\Sigma_h, \mathcal{L}, \mathcal{M}, m) \tag{3.55}
\end{aligned}$$

Nous allons montrer que cette intégrale peut s'exprimer simplement à l'aide de la fonction confluyente hypergéométrique de seconde espèce KummerU. On notera cette fonction $U(\cdot, \cdot, \cdot)$. Abramowitz et Stegun ont montré la relation suivante qui lie une intégrale à la fonction de KummerU [Abra 64, Eq. 13.2.5].

$$\Gamma(a)U(a, b, z) = \int_0^\infty \exp(-zt) t^{a-1} (1+t)^{b-a-1} dt \tag{3.56}$$

avec $\Re(a) > 0$ et $\Re(z) > 0$.

Si l'on remplace le paramètre de texture μ par $t = \frac{\mathcal{M}m}{\mathcal{L}} \frac{1}{\mu}$ dans l'équation 3.55, on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathbf{I}(\Sigma_h, \mathcal{L}, \mathcal{M}, m) &= \int_0^\infty \left(\frac{\mathcal{L}t}{\mathcal{M}m}\right)^p \exp\left(-\frac{\mathcal{L}}{\mathcal{M}m} \mathbf{x}^H \Sigma_h^{-1} \mathbf{x} t\right) \frac{\left(\frac{1}{t}\right)^{\mathcal{L}-1}}{\left(1 + \frac{1}{t}\right)^{\mathcal{L}+\mathcal{M}}} \frac{\mathcal{M}m}{\mathcal{L}t^2} dt \\
&= \left(\frac{\mathcal{L}}{\mathcal{M}m}\right)^{p-1} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{\mathcal{L}}{\mathcal{M}m} \mathbf{x}^H \Sigma_h^{-1} \mathbf{x} t\right) \frac{t^{p+\mathcal{M}-1}}{(1+t)^{\mathcal{L}+\mathcal{M}}} dt \tag{3.57}
\end{aligned}$$

Si l'on pose $z = \frac{\mathcal{L}}{\mathcal{M}m} \mathbf{x}^H \Sigma_h^{-1} \mathbf{x}$, $a = p + \mathcal{M}$ et $b = 1 + p - \mathcal{L}$, on peut exprimer l'intégrale $\mathbf{I}(\Sigma_h, \mathcal{L}, \mathcal{M}, m)$ à l'aide de la fonction confluyente hypergéométrique de seconde espèce KummerU

(Eq. 3.56). On notera que $\Re(a)$ et $\Re(z)$ sont bien strictement positifs. La distribution du vecteur de rétrodiffusion \mathbf{x} s'écrit donc avec la fonction KummerU dans le cas où la texture est distribuée selon une loi de Fisher par :

$$p_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}|\Sigma_h, \mathcal{L}, \mathcal{M}, m) = \frac{1}{\pi^p |\Sigma_h|} \frac{\Gamma(\mathcal{L} + \mathcal{M})}{\Gamma(\mathcal{L})\Gamma(\mathcal{M})} \left(\frac{\mathcal{L}}{\mathcal{M}m} \right)^p \Gamma(p + \mathcal{M}) U \left(p + \mathcal{M}; 1 + p - \mathcal{L}; \frac{\mathcal{L}}{\mathcal{M}m} \mathbf{x}^H \Sigma_h^{-1} \mathbf{x} \right) \quad (3.58)$$

Par la suite, nous dirons que le vecteur de rétrodiffusion \mathbf{x} pour une texture distribuée selon une loi de Fisher suit une distribution de KummerU.

3.4.5.2 En L-vues

De la même façon qu'en 1-vue, on calcule la distribution de la matrice de covariance \mathbf{Z} à partir de la densité de probabilité de la texture et de la distribution de Wishart pour la matrice de covariance homogène. Dans le cas de la distribution de Fisher pour la texture, on remplace $p_{\mu}(\mu|\alpha)$ par son expression définie par l'équation 3.37 dans l'équation 3.20. On obtient :

$$p_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}|\Sigma_h, \mathcal{L}, \mathcal{M}, m) = \int_0^{\infty} \frac{L^{Lp} |\mathbf{Z}|^{L-p} \exp \left\{ -\frac{L}{\mu} \text{tr}(\Sigma_h^{-1} \mathbf{Z}) \right\}}{\pi^{\frac{p(p-1)}{2}} \Gamma(L) \cdots \Gamma(L-p+1) \mu^{Lp} |\Sigma_h|^L} \frac{\Gamma(\mathcal{L} + \mathcal{M})}{\Gamma(\mathcal{L})\Gamma(\mathcal{M})} \frac{\mathcal{L}}{\mathcal{M}m} \frac{\left(\frac{\mathcal{L}\mu}{\mathcal{M}m} \right)^{\mathcal{L}-1}}{\left(1 + \frac{\mathcal{L}\mu}{\mathcal{M}m} \right)^{\mathcal{L}+\mathcal{M}}} d\mu \quad (3.59)$$

En sortant de l'intégrale les termes qui ne dépendent pas du paramètre de texture μ , la distribution de la matrice de covariance texturée par une loi de Fisher s'obtient en calculant l'intégrale $\mathbf{I}(\Sigma_h, \mathcal{L}, \mathcal{M}, m)$ définie par :

$$\mathbf{I}(\Sigma_h, \mathcal{L}, \mathcal{M}, m) = \int_0^{\infty} \frac{\exp \left\{ -\frac{L}{\mu} \text{tr}(\Sigma_h^{-1} \mathbf{Z}) \right\} \left(\frac{\mathcal{L}\mu}{\mathcal{M}m} \right)^{\mathcal{L}-1}}{\mu^{Lp} \left(1 + \frac{\mathcal{L}\mu}{\mathcal{M}m} \right)^{\mathcal{L}+\mathcal{M}}} d\mu \quad (3.60)$$

Comme dans le cas 1-vue, nous allons démontrer que l'intégrale $\mathbf{I}(\Sigma_h, \mathcal{L}, \mathcal{M}, m)$ s'exprime à l'aide de la fonction de KummerU. On procède exactement au même changement de variable. C'est à dire que l'on remplace le paramètre de texture μ par $t = \frac{\mathcal{M}m}{\mathcal{L}} \frac{1}{\mu}$ dans l'équation 3.60, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbf{I}(\Sigma_h, \mathcal{L}, \mathcal{M}, m) &= \int_0^{\infty} \frac{\exp \left\{ -\frac{L \text{tr}(\Sigma_h^{-1} \mathbf{Z}) \mathcal{L}}{\mathcal{M}m} t \right\} \left(\frac{1}{t} \right)^{\mathcal{L}-1}}{\left(\frac{\mathcal{M}m}{\mathcal{L}t} \right)^{Lp} \left(1 + \frac{1}{t} \right)^{\mathcal{L}+\mathcal{M}}} \frac{\mathcal{M}m}{\mathcal{L}t^2} dt \\ &= \left(\frac{\mathcal{L}}{\mathcal{M}m} \right)^{Lp-1} \int_0^{\infty} \frac{\exp \left\{ -\frac{L \text{tr}(\Sigma_h^{-1} \mathbf{Z}) \mathcal{L}}{\mathcal{M}m} t \right\} t^{Lp+\mathcal{M}-1}}{(1+t)^{\mathcal{L}+\mathcal{M}}} dt \quad (3.61) \end{aligned}$$

Puis en comparant les équations 3.56 et 3.61, on remarque que l'intégrale $\mathbf{I}(\Sigma_h, \mathcal{L}, \mathcal{M}, m)$ s'exprime par la fonction de KummerU en posant $z = \frac{L \text{tr}(\Sigma_h^{-1} \mathbf{Z}) \mathcal{L}}{\mathcal{M}m}$, $a = Lp + \mathcal{M}$ et $b =$

$1 + Lp - \mathcal{L}$. On vérifie bien que $\Re(a) > 0$ et $\Re(z) > 0$. Ainsi, la densité de probabilité de la matrice de covariance pour une texture distribuée selon une loi de Fisher s'écrit de la façon suivante [Bomb 08a] [Bomb 08b] :

$$p_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}|\Sigma_h, \mathcal{L}, \mathcal{M}, m) = \frac{L^{Lp} |\mathbf{Z}|^{L-p}}{\pi^{\frac{p(p-1)}{2}} \Gamma(L) \cdots \Gamma(L-p+1) |\Sigma_h|^L} \frac{\Gamma(\mathcal{L} + \mathcal{M})}{\Gamma(\mathcal{L})\Gamma(\mathcal{M})} \left(\frac{\mathcal{L}}{\mathcal{M}m} \right)^{Lp} \Gamma(Lp + \mathcal{M}) U(a, b, z) \quad (3.62)$$

Par la suite, pour une texture distribuée selon une loi de Fisher, nous dirons que la matrice de covariance suit une distribution de KummerU.

3.4.6 Calcul du critère pour une texture distribuée selon une loi de Fisher

A partir des distributions de KummerU pour le vecteur de rétrodiffusion \mathbf{x} et de la matrice de covariance \mathbf{Z} , on calcule l'expression analytique du critère de segmentation utilisé pour fusionner les segments.

3.4.6.1 En 1-vue

Dans le cas de donnée 1-vue, pour une texture distribuée selon la loi de Fisher, la log-vraisemblance maximale du segment S (MLL(S)) se déduit de la distribution de KummerU pour le vecteur de rétrodiffusion \mathbf{x} (Eq. 3.58). Après suppression des termes qui s'annulent dans le calcul du critère $SC_{i,j}$, on obtient :

$$\begin{aligned} \text{MLL}(S) &\simeq -n \ln |C_h| + n \ln \left\{ \Gamma(\hat{\mathcal{L}} + \hat{\mathcal{M}}) \right\} - n \ln \left\{ \Gamma(\hat{\mathcal{L}}) \right\} - n \ln \left\{ \Gamma(\hat{\mathcal{M}}) \right\} \\ &+ np \ln \left(\frac{\hat{\mathcal{L}}}{\hat{\mathcal{M}}\hat{m}} \right) + n \ln \left\{ \Gamma(p + \hat{\mathcal{M}}) \right\} \\ &+ \sum_{\mathbf{x}_k \in S} \ln \left\{ U \left(p + \hat{\mathcal{M}}; 1 + p - \hat{\mathcal{L}}; \frac{\mathbf{x}_k^H C_h^{-1} \mathbf{x}_k \hat{\mathcal{L}}}{\hat{\mathcal{M}}\hat{m}} \right) \right\} \end{aligned} \quad (3.63)$$

où $\hat{\mathcal{L}}$, $\hat{\mathcal{M}}$, \hat{m} sont respectivement les estimés des paramètres \mathcal{L} , \mathcal{M} , m de la distribution de Fisher par la méthode des log-cumulants [Tiso 04] [Nico 06]. C_h étant l'estimée au sens du maximum de vraisemblance de Σ_h pour le segment S (Eq. 3.27).

3.4.6.2 En L-vues

De même, dans le cas multi-vues, la log-vraisemblance maximale est déduite de la distribution KummerU de la matrice de covariance (Eq. 3.62). En supprimant les termes qui s'annulent lors du calcul de $SC_{i,j}$, on obtient l'expression suivante [Bomb 08a] [Bomb 08b] :

$$\begin{aligned} \text{MLL}(S) &\simeq -nL \ln |C_h| + n \ln \left\{ \Gamma(\hat{\mathcal{L}} + \hat{\mathcal{M}}) \right\} - n \ln \left\{ \Gamma(\hat{\mathcal{L}}) \right\} - n \ln \left\{ \Gamma(\hat{\mathcal{M}}) \right\} \\ &+ nLp \ln \left(\frac{\hat{\mathcal{L}}}{\hat{\mathcal{M}}\hat{m}} \right) + n \ln \left\{ \Gamma(Lp + \hat{\mathcal{M}}) \right\} \\ &+ \sum_{\mathbf{Z}_k \in S} \ln \left\{ U \left(Lp + \hat{\mathcal{M}}; 1 + Lp - \hat{\mathcal{L}}; \frac{L \text{tr}(C_h^{-1} \mathbf{Z}_k) \hat{\mathcal{L}}}{\hat{\mathcal{M}}\hat{m}} \right) \right\} \end{aligned} \quad (3.64)$$

où $\hat{\mathcal{L}}$, $\hat{\mathcal{M}}$, \hat{m} sont respectivement les estimés des paramètres \mathcal{L} , \mathcal{M} , m de la distribution de Fisher par la méthode des log-cumulants [Tiso 04] [Nico 06]. C_h étant l'estimée au sens du maximum de vraisemblance de Σ_h pour le segment S (Eq. 3.27).

3.5 Présentation de l'algorithme de segmentation hiérarchique

3.5.1 Test de présence de texture

Pour mesurer l'homogénéité du signal rétrodiffusé, D.R. Sheen and L.P. Johnston ont utilisé le paramètre de forme τ associé à la texture [Shee 92] [Beau 04b] [Beau 05] [Frer 07]. Il s'exprime à l'aide du coefficient de variation γ calculé à partir des données 1-vue par :

$$\tau = \frac{2}{\gamma^2 - 1} \quad (3.65)$$

où τ est le carré de l'inverse du coefficient de variation de la texture. $\tau = \frac{m_t^2}{\sigma_t^2} = \frac{1}{\gamma_t^2}$.

Lorsque la moyenne m_t de la texture est très grande devant l'écart-type σ_t de la texture ($m_t \gg \sigma_t$), alors τ tend vers l'infini et le signal peut être considéré comme homogène. Dans ce cas, la loi de Wishart convient pour modéliser la distribution de la matrice de covariance. À l'inverse, lorsque l'écart-type est très grand devant la moyenne ($\sigma_t \gg m_t$), τ égale 0 et la surface est très hétérogène. La texture doit être prise en compte pour modéliser la distribution de la matrice de covariance.

D.R. Sheen and L.P. Johnston ont montré que la paramètre τ est indépendant du canal de polarisation utilisé. En pratique, on calcule τ comme étant la moyenne des facteurs de forme pour chacun des trois canaux de polarisations utilisés (HH, VV et HV).

$$\tau = \frac{\tau_{HH} + \tau_{VV} + \tau_{HV}}{3}$$

En pratique, lorsqu'un segment est de petite taille (inférieur à une vingtaine de pixels), on ne peut pas calculer de statistiques (paramètres de texture), on simplifie alors le modèle et on considère qu'il n'y a pas de texture. On utilise ainsi le critère de Wishart pour fusionner les segments. Par conséquent, le critère de forme est introduit pour des segments de taille plus importante et permet de décider si l'on doit utiliser ou non la texture pour modéliser les images polarimétriques.

3.5.2 Le facteur de forme

Lors du calcul du critère de fusion des segments, il est possible d'introduire de l'information spatiale pour guider l'algorithme de segmentation. Cette information permet de favoriser la fusion de segments qui crée des formes régulières [Beau 04a] [Beau 06]. J.-M. Beaulieu propose d'utiliser trois facteurs de forme C_p , C_a et C_l [Beau 04a]. Ces trois paramètres sont reliés respectivement au périmètre, à l'aire du segment et à la longueur du contour. Ces trois facteurs sont combinés de manière ad hoc avec le critère basé sur la log-vraisemblance $SC_{i,j}$ pour former le nouveau critère de fusion des segments $SC_{i,j}^{contour}$ par [Beau 04a] :

$$SC_{i,j}^{contour} = SC_{i,j} \times C_p^2 \times C_a \times C_l \quad (3.66)$$

Le paramètre C_p est un critère basé sur le périmètre des segments. Il est défini comme le rapport de la valeur du périmètre de l'union des segments S_i et S_j sur le périmètre du plus petit rectangle qui englobe $S_i \cup S_j$.

$$C_p = \frac{\text{périmètre de } S_i \cup S_j}{\text{périmètre de la boîte englobante}} \quad (3.67)$$

La figure 3.6 montre un exemple de calcul de C_p . La ligne verte désigne l'intersection des segments S_i et S_j . Les lignes bleu et rouge désignent respectivement le contour du segment S_i et S_j auquel on a enlevé l'intersection. La ligne en pointillés représente la boîte englobante. Le critère de forme basé sur le périmètre C_p est donc égal à la longueur de la ligne bleu et rouge divisée par la longueur de la ligne en pointillés. La valeur minimale de ce facteur est 1, cela correspond au cas où $S_i \cup S_j$ est égale à la boîte englobante. C_p augmente lorsque $S_i \cup S_j$ est constitué de creux. C_p agit donc comme une pénalité pour les segments ne créant pas une forme régulière.

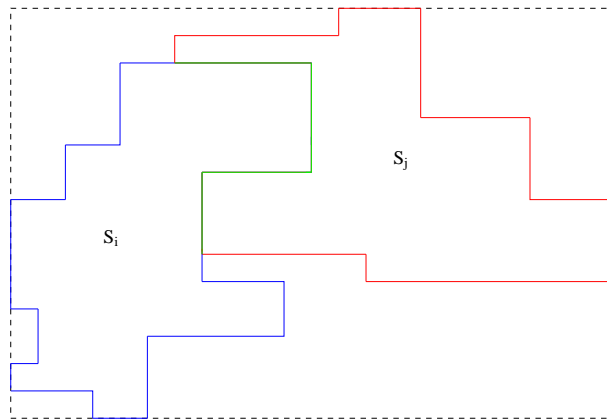


FIG. 3.6 – Exemple de calcul du critère de forme du périmètre

Dans le cas de la figure 3.6, en supposant qu'un pixel est de taille 1×1 , C_p vaut $\frac{84}{74} \simeq 1.135$

Le paramètre C_a est basée sur l'aire des segments. Il s'exprime comme étant l'aire de la boîte englobante sur l'aire de l'union des segments S_i et S_j .

$$C_a = \frac{\text{aire de la boîte englobante}}{\text{aire de } S_i \cup S_j} \quad (3.68)$$

La figure 3.7 montre sur le même exemple que précédemment comment le calcul de ce paramètre s'effectue. Cette fois l'union des deux segments est représentée en bleu sur la figure. Comme pour C_p , ce paramètre vaut au minimum 1. Cela se passe lorsque $S_i \cup S_j$ est égale à la boîte englobante.

Dans notre exemple, C_a vaut $\frac{330}{173} \simeq 1.908$

Le paramètre C_l est un paramètre de forme basé sur la longueur commune des segments S_i et S_j . Son expression est donnée par la formule suivante [Beau 04a] :

$$C_l = \text{Min} \left\{ \frac{\text{lex}_i}{L_c}, \frac{\text{lex}_j}{L_c} \right\} \quad (3.69)$$

L_c désigne la longueur de l'intersection des contours de S_i et S_j . Elle est représentée en vert sur la figure 3.8. lex_i représente la longueur du contour du segment S_i auquel, on a retranché L_c .

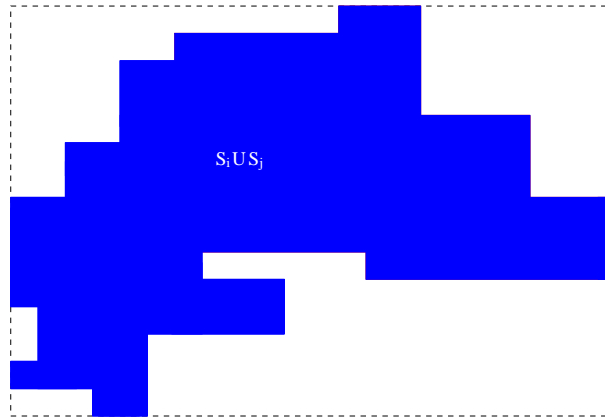


FIG. 3.7 – Exemple de calcul du critère de forme de l'aire

Elle est représentée en bleu (respectivement en rouge) pour le segment S_i (respectivement S_j). C_l peut être inférieur à 1 lorsqu'un segment est en grande partie (au moins 50% du contour) inclus dans l'autre.

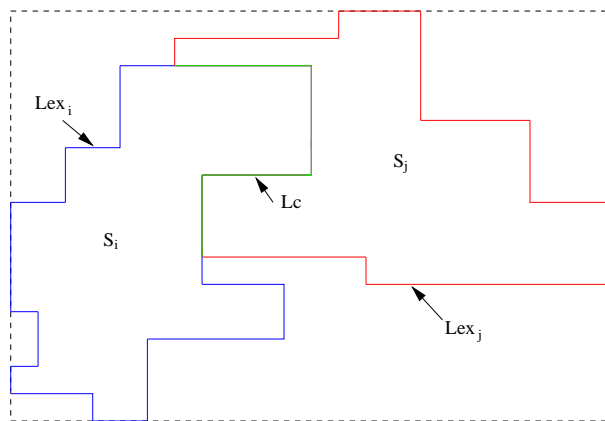


FIG. 3.8 – Exemple de calcul du critère de forme basée sur la longueur commune des segments

Dans l'exemple, C_l vaut $\text{Min} \left\{ \frac{86}{16}, \frac{87}{16} \right\} = \frac{86}{16} = 5.375$

3.5.3 Le principe

La figure 3.9 montre le principe de la méthode utilisée pour segmenter hiérarchiquement une image polarimétrique.

Tout d'abord, l'algorithme de segmentation hiérarchique débute par une partition initiale. Par exemple, la partition initiale peut être composée d'un pixel par segment. Ensuite, pour chaque paire de segments 4-connexe, un test est effectué pour savoir si on est en présence de texture.

- Dans le cas où la zone est homogène (sans texture), le critère de Wishart est calculé.

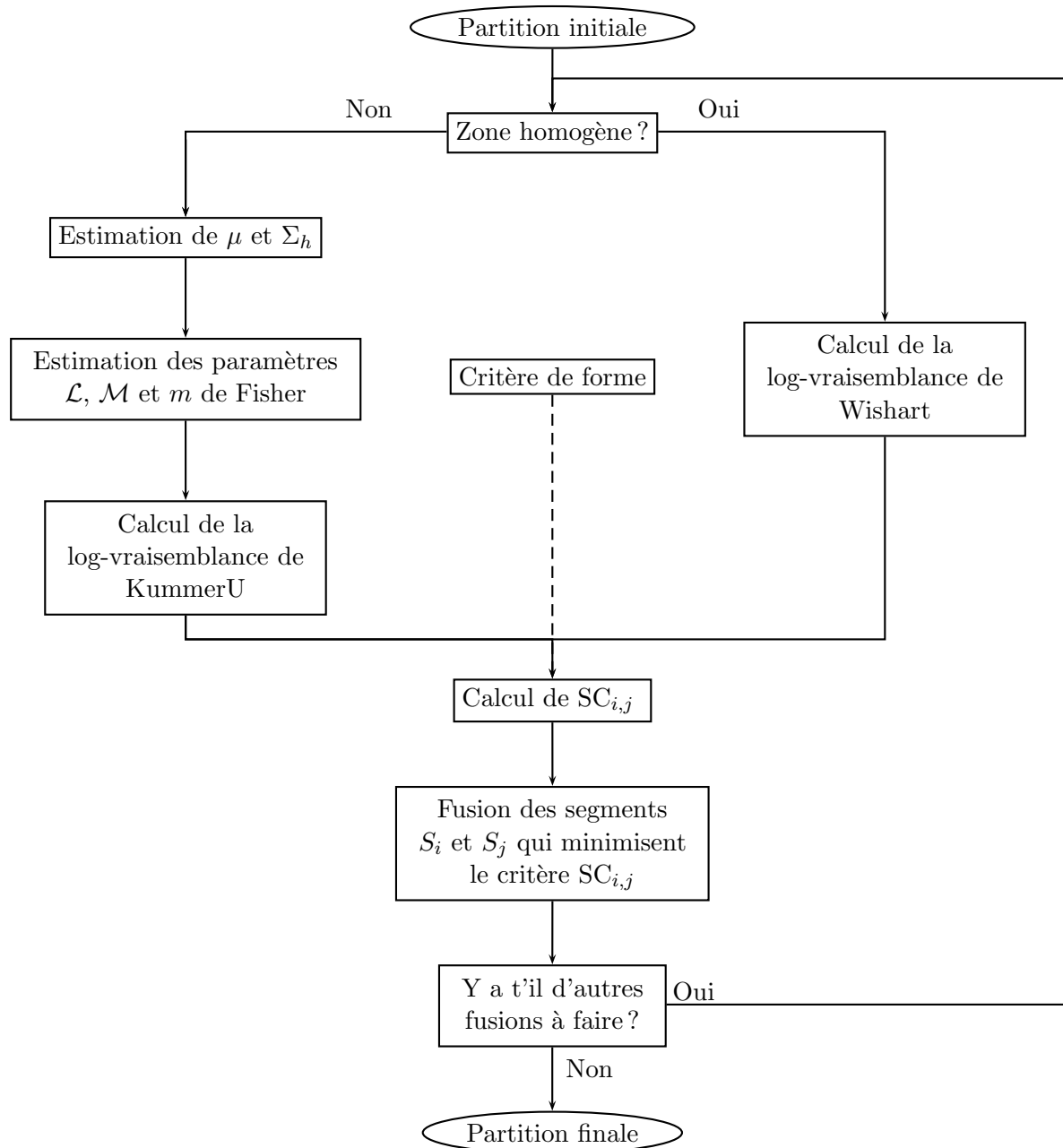


FIG. 3.9 – Le principe de la méthode de la segmentation hiérarchique basée sur la texture

- Dans le cas contraire, μ et Σ_h sont estimés au sens du maximum de vraisemblance par les équations 3.24 et 3.27.
- Ensuite, à partir des $n_i + n_j$ estimées de la texture, les paramètres \mathcal{L} , \mathcal{M} et m de la distribution de Fisher sont estimés par la méthode des log-moments (partie 3.4.4.3).
- Puis, le critère de KummerU basé sur la log-vraisemblance est calculé (équation 3.64).
- Une fois le critère de vraisemblance calculé (basé sur la distribution de Wishart ou KummerU), on peut multiplier ce critère par un facteur de forme (équation 3.66). Dans la suite, on précisera explicitement si le facteur de forme est utilisé ou non lors de la fusion des segments.
- On obtient ainsi $SC_{i,j}$ et on cherche les deux segments S_i et S_j qui minimisent ce critère. On réitère ces étapes jusqu'à ce que le nombre de segments dans la partition finale soit atteint.

3.6 Évaluation des performances

Dans cette partie, nous allons analyser différents critères qui permettent d'évaluer les performances d'un algorithme de segmentation hiérarchique. Tout d'abord, le calcul des courbes Caractéristique Opérationnelle de Réception (COR) est présenté. En partant de la définition du tracé des courbes COR pour un problème de détection, nous présenterons une méthode de calcul de ces courbes dans le cas de la segmentation hiérarchique. Puis, nous nous intéresserons aux variances inter-classes et intra-classe. Ensuite, en utilisant le formalisme introduit par J.S. Lee *et al.* [Lee 94a], nous calculerons les distances inter-classes et intra-classe dans le cas où la matrice de cohérence suit une loi de Wishart. Puis nous ferons le même calcul dans le cas où la matrice de covariance est distribuée sur une loi de KummerU.

3.6.1 Courbes Caractéristique Opérationnelle de Réception (COR)

3.6.1.1 Pour un problème de détection

Lors d'un problème de détection d'objets dans une image, les courbes Caractéristique Opérationnelle de Réception sont généralement tracées pour évaluer les performances de l'algorithme. Elle représente l'évolution de la probabilité de bonne détection p_d en fonction de la probabilité de fausse alarme p_{fa} .

Soient A la région contenant les véritables échos, et B la région segmentée par l'algorithme de détection. L'image A , appelée masque, est construite manuellement grâce aux informations a priori sur les objets. C'est l'image de vérité terrain. Les probabilités de détection et de fausse alarme sont définies par les formules suivantes :

$$p_d = \frac{n_{A \cap B}}{n_B} \quad (3.70)$$

$$p_{fa} = \frac{n_{\bar{A} \cap B}}{n_B} = \frac{n_B - n_{A \cap B}}{n_B} \quad (3.71)$$

où n_X désigne le nombre de pixels non nuls de l'image X .

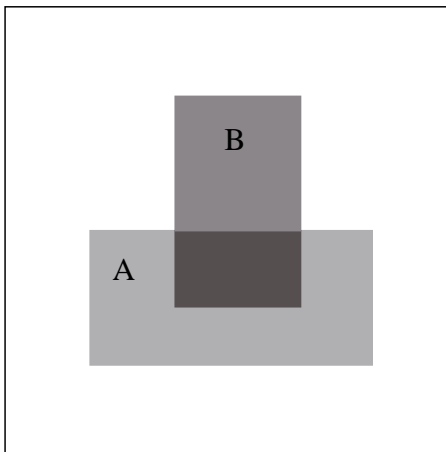


FIG. 3.10 – Évaluation des probabilités de détection et de fausse alarme : A est la région contenant la vérité terrain et B est la région segmentée par l'algorithme.

En pratique, on applique un seuil sur l'image segmentée. Cette image binaire ainsi obtenue est notée B . Puis à l'aide des formules 3.70 et 3.71, on calcule les probabilités de bonne détection et

de fausse alarme. On a donc un point sur la courbe COR. Puis on augmente le seuil sur l'image en niveaux de gris obtenue par l'algorithme de détection pour balayer l'ensemble des valeurs possibles des probabilités de détection et de fausses alarmes. Une fois la courbe COR tracée, on fixe la probabilité de fausse alarme à un seuil acceptable défini par l'utilisateur et on regarde quel algorithme de détection donne la meilleure performance en terme de probabilité de bonne détection [Bomb 06].

3.6.1.2 Pour un problème de segmentation

Lors d'un problème de détection d'objet, l'algorithme donne une image contenant la valeur du critère utilisé. On cherche donc sur cette image en niveaux de gris le seuil à appliquer pour détecter au mieux les objets présents dans l'image. Dans le cas de la segmentation hiérarchique, le problème est un peu différent. À chaque itération, l'algorithme fusionne les deux segments 4-connexes les plus similaires au sens d'un certain critère (dans notre cas la log-vraisemblance). Un dendrogramme est ainsi construit. Puis, on cherche le nombre de fusions à appliquer pour segmenter au mieux l'image. L'algorithme suivant est appliqué pour calculer les probabilités de détection et de fausse alarme nécessaire au tracé des courbes COR lors d'un algorithme de segmentation hiérarchique.

Pour un pixel x , posons S_x l'ensemble des pixels qui appartiennent au même segment que x et posons T_x l'ensemble des pixels qui appartiennent au même segment de vérité terrain que le pixel x . Si l'on note C_x le complémentaire de T_x , et $|T|$ le cardinal de l'ensemble T , alors pour chaque pixels x de l'image, on définit le rapport de bonne détection par $\frac{|S_x \cap T_x|}{|T_x|}$ et le rapport de fausse alarme par $\frac{|S_x \cap C_x|}{|C_x|}$. Puis, en prenant la valeur moyenne de ces deux quantités sur toute l'image, on obtient les quantités correspondant aux probabilités de bonne détection (noté p_d) et de fausse alarme (noté p_{fa}). À chaque itération de l'algorithme de segmentation hiérarchique, une nouvelle partition est créée par la fusion de deux segments. Les probabilités de bonne détection et de fausse alarme sont calculées pour chaque partition de sorte que ces deux quantités parcourent tout leur domaine de définition.

La courbe Caractéristique Opérationnelle de Réception est obtenue en affichant les valeurs des probabilités de détection et de fausse alarme calculées pour chaque partition.

En résumé, on applique l'algorithme suivant :

```

1: for  $k = 1 : \text{nb\_fusion\_max}$  do
2:   for  $x = 1 : N$  do
3:      $\text{detection}(x) = \frac{|S_x \cap T_x|}{|T_x|}$ 
4:      $\text{false\_alarme}(x) = \frac{|S_x \cap C_x|}{|C_x|}$ 
5:   end for
6:    $p_d(k) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \text{detection}(i)$ 
7:    $p_{fa}(k) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \text{false\_alarme}(i)$ 
8: end for

```


3.6.1.3 Lien avec les "matrices de confusion"

Dans le problème de segmentation hiérarchique, on peut relier la notion de courbes COR introduite précédemment avec les matrices de confusion. En effet, pour une partition donnée de k segments, la "matrice de confusion" compare les P classes (vérités terrain) avec les k segments de la partition obtenue. La "matrice de confusion" possède un nombre de ligne égal au nombre de segments de la partition et un nombre de colonne égal au nombre de classe de la vérité terrain. C'est donc une matrice rectangulaire de taille $k \times P$.

Pour définir cette "matrice de confusion", partons d'un exemple.

Les figures 3.11(a) et 3.11(b) montrent respectivement un exemple de vérité terrain composé de 4 classes et une partition de 5 segments. L'image est composée de 4×4 pixels ($N = 16$).

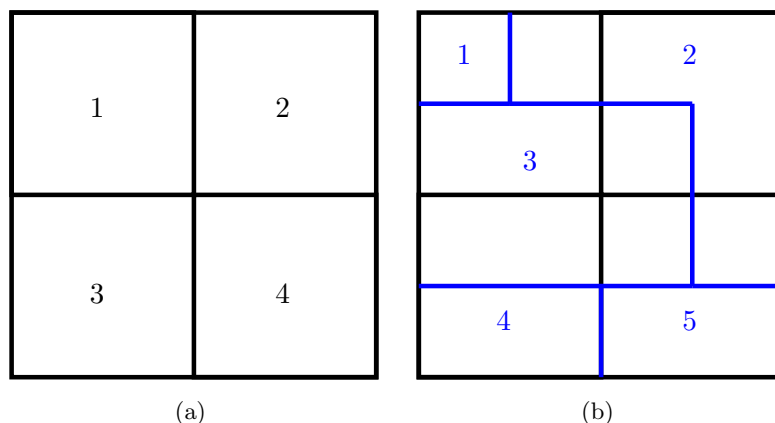


FIG. 3.11 – Exemple de calcul de la matrice de confusion. (a) image de vérité terrain (4 classes) et (b) résultat de la segmentation pour une partition composée de 5 segments.

On peut représenter la "matrice de confusion" comme un tableau où l'élément en position (i, j) noté K_{ij} représente le nombre de pixels du segment i présent dans la classe j . Pour l'exemple précédent, on obtient la "matrice de confusion" présentée dans le tableau 3.1.

TAB. 3.1 – Matrice de confusion.

K_{ij}	1	2	3	4
1	1	0	0	0
2	1	3	0	1
3	2	1	2	1
4	0	0	2	0
5	0	0	0	2

Eu utilisant les définitions des probabilités de détection et de fausse alarme que nous avons définies dans la partie 3.6.1.2, on obtient :

$$\begin{aligned}
p_d &= \frac{1}{16} \left(1 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{3}{4} + 1 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{2}{4} + 1 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{2}{4} + 1 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{2}{4} + 2 \times \frac{2}{4} \right) \\
p_{fa} &= \frac{1}{16} \left(0 + 1 \times \frac{4}{12} + 3 \times \frac{2}{12} + 1 \times \frac{4}{12} + 2 \times \frac{4}{12} + 1 \times \frac{5}{12} + 2 \times \frac{4}{12} + 1 \times \frac{5}{12} + 0 + 0 \right)
\end{aligned}$$

À partir de ces deux relations et de la "matrice de confusion", on peut déduire les expressions littérales des probabilités de détection et de fausse alarme à partir des éléments K_{ij} de la "matrice de confusion" par :

$$p_d(k) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^P \frac{(K_{ij})^2}{\text{card}(\text{classe } j)} \quad (3.72)$$

$$p_{fa}(k) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^P \frac{K_{ij}(K_i - K_{ij})}{\text{card}(\text{classe } j)} \quad (3.73)$$

où

$$\begin{aligned}
K_i &= \sum_{j=1}^P K_{ij} \\
\text{card}(\text{classe } j) &= \sum_{i=1}^k K_{ij} \\
\text{card}(\overline{\text{classe } j}) &= N - \sum_{i=1}^k K_{ij}
\end{aligned}$$

Cas limite Si l'on prend une partition où chaque segment est composé de 1 pixel. La partition est composée de N segments. Cette partition est construite de sorte que chacun des segments est inclu totalement dans une seule et unique classe. La "matrice de confusion" est de taille $N \times P$, et chaque ligne de cette matrice est composée de 0 sauf pour une ordonnée j où $K_{ij} = 1$. Par construction de la partition, la probabilité de fausse alarme p_{fa} est nulle. La probabilité de détection p_d est quant à elle égale à $\frac{P}{N}$.

Si l'on prend une partition où chaque segment est composé de N/k pixels. La partition est composée de k segments. Cette partition est construite de sorte que chacun des segments est incluse totalement dans une seule et unique classe. La "matrice de confusion" est de taille $k \times P$, et comme dans le cas précédent, chaque ligne de cette matrice est composée de 0 sauf pour une ordonnée j où $K_{ij} = 1$. Par construction de la partition, la probabilité de fausse alarme p_{fa} est nulle. La probabilité de détection p_d est quant à elle égale à $\frac{N}{k} \times \frac{P}{N} = \frac{P}{k}$.

Si la partition P est composée d'un seul segment, la matrice de confusion est de taille $1 \times P$. Elle est donnée par le tableau 3.2

A partir des relations 3.72 et 3.73, on en déduit que les probabilités de détection p_d et de fausse alarme p_{fa} sont égales à 1.

TAB. 3.2 – Matrice de confusion.

K_{ij}	1	2	...	P
1	card(classe 1)	card(classe 2)	...	card(classe P)

En l'absence d'image de vérité terrain, les probabilités de détection p_d et de fausse alarme p_{fa} définies précédemment, ne peuvent pas être calculées. Les courbes COR ne peuvent donc pas être tracées. D'autres critères sont envisageable pour évaluer les performances d'un algorithme de segmentation hiérarchique, comme par exemple les notions de variances inter-classe et intra-classe.

3.6.2 Variances inter-classe et intra-classe

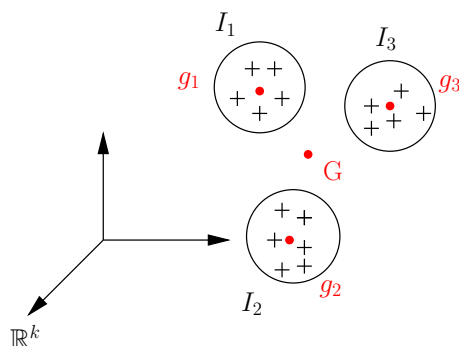


FIG. 3.12 – Variances inter-classe et intra-classe

Soit I un nuage de points composé de n observations x_i , avec $x_i \in \mathbb{R}^k$. Ce nuage de points est partagé en q sous-nuages. Chaque sous-nuage (aussi appelé classe I_q) est composé de n_q individus. Soit G le centre de gravité du nuage I . Posons g_q le centre de gravité de la classe I_q .

$$G = \frac{1}{n} \sum_{i \in I} x_i \quad \text{et} \quad g_q = \frac{1}{n_q} \sum_{i \in I_q} x_i \quad (3.74)$$

D'après le théorème de Koëning-Huygens, la matrice de variance-covariance \mathbf{T} se décompose comme étant la somme de deux matrices \mathbf{B} et \mathbf{W} ($\mathbf{T} = \mathbf{B} + \mathbf{W}$) avec :

$$\mathbf{B} = \frac{1}{n} \sum_{q \in Q} n_q (g_q - G)(g_q - G)^T \quad (3.75)$$

$$\mathbf{W} = \frac{1}{n} \sum_{q \in Q} \sum_{i \in I_q} (x_i - g_q)(x_i - g_q)^T \quad (3.76)$$

\mathbf{B} est la matrice de variance inter-classe ("Between"), elle mesure la dispersion du centre des classes (g_q) par rapport au centre de gravité du nuage (G). \mathbf{W} est la matrice de variance intra-classe ("Within"), elle rend compte de la dispersion à l'intérieur de chaque classe.

Dans le cas de la segmentation hiérarchique, chaque segment est assimilé à une classe. Le nombre de classes est donc égal au nombre de segments présent dans la partition. Le nuage de points I correspond à l'ensemble des pixels de l'image à segmenter, et le vecteur d'observation x_i contient quand à lui les termes de la matrice de covariance.

3.6.3 Le lambda de Wilks

Dans un algorithme de segmentation/classification, on cherche à maximiser la variance inter-classe et à minimiser la dispersion à l'intérieur des classes (variance intra-classe). Il est possible d'utiliser la statistique du lambda de Wilks pour analyser les performances de l'algorithme. Le lambda de Wilks, noté Λ est égal par définition au rapport du déterminant de la matrice de variance intra-classe sur le déterminant de la matrice de variance-covariance totale.

$$\Lambda = \frac{|W|}{|T|} \quad (3.77)$$

Une faible valeur du lambda de Wilks indique une bonne séparation entre les segments et donc une bonne segmentation du nuage de points.

3.6.4 Distances inter-classes et intra-classe

Pour évaluer les performances de l'algorithme de segmentation hiérarchique, on peut utiliser les notions de distance inter-classes et intra-classe au sens d'une distribution *a priori*. Si l'on note D_{ii} la distance à l'intérieur de la classe i , et D_{ij} la distance entre les classes i et j . On exprime ces distances en fonction de la distribution $p(\mathbf{Z}_k|\Sigma_i)$ de la matrice de covariances \mathbf{Z}_k par les deux relations suivantes :

$$D_{ii} = -\frac{1}{n_i} \sum_{k=1}^{n_i} \ln(p(\mathbf{Z}_k|\Sigma_i)) \quad (3.78)$$

$$D_{ij} = -\frac{1}{n_j} \sum_{k=1}^{n_j} \ln(p(\mathbf{Z}_k|\Sigma_i)) \quad (3.79)$$

où n_i désigne le nombre de pixels de la classe i .

La distance à l'intérieur de la classe i est égale à moins la log-vraisemblance de cette classe i . Il y a un signe moins car l'algorithme de segmentation hiérarchique maximise la log-vraisemblance de la classe i et cherche donc à minimiser la distance à l'intérieur de la classe i . L'algorithme de segmentation hiérarchique utilisé est basé sur le critère de maximum de vraisemblance, une distance intra-classe faible traduit une forte log-vraisemblance et donc une bonne adéquation des pixels de la classe i à la matrice de covariance moyenne de cette classe (Σ_i). De même, la distance D_{ij} mesure la similarité des pixels de la classe j à la matrice de covariance moyenne de la classe i . Une distance inter-classes grande indiquera une bonne séparabilité des classes i et j .

Ensuite, les distances inter-classes (noté B pour Between) et intra-classe (noté W pour Within) globales sont déduites par :

$$W = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{nb} n_i D_{ii} \quad (3.80)$$

$$B = \frac{1}{N(nb-1)} \sum_{i=1}^{nb} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{nb} n_j D_{ij} \quad (3.81)$$

Dans la suite, on se propose de calculer les expressions littérales des distances inter-classes et intra-classe dans le cas où la matrice de covariance \mathbf{Z}_k suit une distribution de Wishart, puis dans le cas de la distribution KummerU.

3.6.4.1 Dans le cas de la distribution de Wishart

Par la suite, nous noterons W_{Wishart} (respectivement B_{Wishart}) la distance intra-classe (respectivement inter-classes) pour une matrice de covariance distribuée selon la loi de Wishart.

À partir de l'expression de la distribution de Wishart (Eq. 3.8) et de la définition de la distance intra-classe (Eq. 3.80), on peut écrire :

$$\begin{aligned} W_{\text{Wishart}} &= -\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{nb} \sum_{k=1}^{n_i} \ln(p(\mathbf{Z}_k | \Sigma_i)) \\ &= -\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{nb} \sum_{k=1}^{n_i} \left\{ (L-3) \ln |\mathbf{Z}_k| - L \text{tr} \left(C_{S_i}^{-1} \mathbf{Z}_k \right) - \ln(Q(L)) - L \ln |C_{S_i}| \right\} \\ &= -\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{nb} \left\{ (L-3) \sum_{k=1}^{n_i} \ln |\mathbf{Z}_k| - 3Ln_i - n_i \ln(Q(L)) - Ln_i \ln |C_{S_i}| \right\} \end{aligned}$$

La distance intra-classe pour une matrice de covariance qui suit une distribution de Wishart est égale à :

$$W_{\text{Wishart}} = -\frac{L-3}{N} \sum_{k=1}^N \ln |\mathbf{Z}_k| + 3L + \ln(Q(L)) + \frac{L}{N} \sum_{i=1}^{nb} n_i \ln |C_{S_i}| \quad (3.82)$$

On peut remarquer que le terme $\sum_{k=1}^N \ln |\mathbf{Z}_k|$ est une constante pour une image polarimétrique donnée. Ce terme est indépendant de l'image obtenue après segmentation ou classification. Le calcul de la distance intra-classe se résume donc au calcul de $\frac{L}{N} \sum_{i=1}^{nb} n_i \ln |C_{S_i}|$.

De la même façon, on procède au calcul de la distance inter-classes pour une matrice de covariance distribuée selon une loi de Wishart.

$$\begin{aligned} B_{\text{Wishart}} &= -\frac{1}{N(nb-1)} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{nb} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{nb} \sum_{k=1}^{n_i} \ln(p(\mathbf{Z}_k | \Sigma_i)) \\ &= -\frac{1}{N(nb-1)} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{nb} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{nb} \sum_{k=1}^{n_i} \left\{ (L-3) \ln |\mathbf{Z}_k| - L \text{tr} \left(C_{S_i}^{-1} \mathbf{Z}_k \right) - \ln(Q(L)) - L \ln |C_{S_i}| \right\} \\ &= -\frac{L-3}{N(nb-1)} \sum_{i=1}^{nb} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{nb} \sum_{k=1}^{n_i} \ln |\mathbf{Z}_k| + \frac{L}{N(nb-1)} \sum_{i=1}^{nb} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{nb} \sum_{k=1}^{n_i} \text{tr} \left(C_{S_i}^{-1} \mathbf{Z}_k \right) \\ &\quad + \frac{1}{N(nb-1)} \ln(Q(L)) \sum_{i=1}^{nb} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{nb} \sum_{k=1}^{n_i} 1 + \frac{L}{N(nb-1)} \sum_{i=1}^{nb} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{nb} \sum_{k=1}^{n_i} \ln |C_{S_i}| \end{aligned} \quad (3.83)$$

Afin de simplifier l'équation 3.83, on calcule la triple somme suivante :

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^{nb} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{nb} \sum_{k=1}^{n_i} \ln |\mathbf{Z}_k| &= \sum_{i=1}^{nb} \sum_{k \notin S_i} \ln |\mathbf{Z}_k| \\
 &= \sum_{i=1}^{nb} \left(\sum_{k=1}^N \ln |\mathbf{Z}_k| - \sum_{k \in S_i} \ln |\mathbf{Z}_k| \right) \\
 &= nb \sum_{k=1}^N \ln |\mathbf{Z}_k| - \sum_{k=1}^N \ln |\mathbf{Z}_k| \\
 &= (nb - 1) \sum_{k=1}^N \ln |\mathbf{Z}_k| \tag{3.84}
 \end{aligned}$$

Puis, on calcule le deuxième terme de l'équation 3.83

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^{nb} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{nb} \sum_{k=1}^{n_i} \text{tr} \left(C_{S_i}^{-1} \mathbf{Z}_k \right) &= \sum_{i=1}^{nb} \sum_{k \notin S_i} \text{tr} \left(C_{S_i}^{-1} \mathbf{Z}_k \right) \\
 &= \sum_{i=1}^{nb} \left(\sum_{k=1}^N \text{tr} \left(C_{S_i}^{-1} \mathbf{Z}_k \right) - \sum_{k \in S_i} \text{tr} \left(C_{S_i}^{-1} \mathbf{Z}_k \right) \right) \\
 &= \sum_{i=1}^{nb} \sum_{k=1}^N \text{tr} \left(C_{S_i}^{-1} \mathbf{Z}_k \right) - \sum_{i=1}^{nb} 3n_i \\
 &= \sum_{i=1}^{nb} \text{tr} \left(\sum_{k=1}^N C_{S_i}^{-1} \mathbf{Z}_k \right) - 3N \\
 &= \sum_{i=1}^{nb} \text{tr} \left(C_{S_i}^{-1} \sum_{k=1}^N \mathbf{Z}_k \right) - 3N
 \end{aligned}$$

Si l'on note $\bar{\mathbf{Z}} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \mathbf{Z}_k$. $\bar{\mathbf{Z}}$ représente la matrice de cohérence moyenne de toute l'image, on peut écrire :

$$\sum_{i=1}^{nb} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{nb} \sum_{k=1}^{n_i} \text{tr} \left(C_{S_i}^{-1} \mathbf{Z}_k \right) = N \left(\sum_{i=1}^{nb} \text{tr} \left(C_{S_i}^{-1} \bar{\mathbf{Z}} \right) - 3 \right) \tag{3.85}$$

En combinant les équations 3.83, 3.84 et 3.85, la distance inter-classes pour une matrice de covariance qui suit une loi de Wishart s'exprime par :

$$\begin{aligned}
 B_{\text{Wishart}} &= -\frac{L-3}{N} \sum_{k=1}^N \ln |\mathbf{Z}_k| + \frac{L}{nb-1} \left(\sum_{i=1}^{nb} \text{tr} \left(C_{S_i}^{-1} \bar{\mathbf{Z}} \right) - 3 \right) \\
 &\quad + \ln(Q(L)) + \frac{L}{N(nb-1)} \sum_{i=1}^{nb} (N - n_i) \ln |C_{S_i}| \tag{3.86}
 \end{aligned}$$

La distance inter-classes pour la distribution de Wishart dépend uniquement de $\sum_{i=1}^{nb} \text{tr} \left(C_{S_i}^{-1} \bar{\mathbf{Z}} \right)$ et de $\sum_{i=1}^{nb} (N - n_i) \ln |C_{S_i}|$. On peut noter que les simplifications numériques effectuées ci-dessus permettent de passer de trois sommes imbriquées à une seule sur le nombre de segments.

3.6.4.2 Dans le cas de la distribution de KummerU

On se propose maintenant de calculer les distances intra-classe et inter-classes pour une matrice de covariance distribuée selon une loi de KummerU. Ces deux distances seront notées respectivement W_{KummerU} et B_{KummerU} .

Dans la suite, \mathcal{L}_i , \mathcal{M}_i et m_i désigneront respectivement les paramètres \mathcal{L} , \mathcal{M} et m de la distribution de Fisher de la texture associés à la classe i . De plus, $a_i = Lp + \mathcal{M}_i$, $b_i = 1 + Lp - \mathcal{L}_i$ et $z_{i,k} = \frac{L \text{tr} (\Sigma_{hi}^{-1} \mathbf{Z}_k) \mathcal{L}_i}{\mathcal{M}_i m_i}$ désigneront les paramètres a , b et z de la distribution de KummerU pour le pixel k et la classe i .

Les détails de calculs des distances intra-classe et inter-classes sont détaillées dans l'annexe C. On obtient les deux relations suivantes :

$$\begin{aligned} W_{\text{KummerU}} &= -\frac{L-3}{N} \sum_{k=1}^N \ln |\mathbf{Z}_k| + \ln (Q(L)) + \frac{L}{N} \sum_{i=1}^{nb} n_i \ln |\Sigma_{hi}| \\ &\quad - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{nb} n_i \ln (\Gamma(Lp + \mathcal{M}_i)) - \frac{3L}{N} \sum_{i=1}^{nb} n_i \ln \left(\frac{\mathcal{L}_i}{\mathcal{M}_i m_i} \right) \\ &\quad - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{nb} n_i \ln (\Gamma(Lp + \mathcal{M}_i)) - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{nb} \sum_{k=1}^{n_i} \ln U(a_i; b_i; z_{i,k}) \end{aligned} \quad (3.87)$$

$$\begin{aligned} B_{\text{KummerU}} &= -\frac{L-3}{N} \sum_{k=1}^N \ln |\mathbf{Z}_k| + \ln (Q(L)) \\ &\quad + \frac{L}{N(nb-1)} \sum_{i=1}^{nb} (N - n_i) \ln |\Sigma_{hi}| - \frac{1}{N(nb-1)} \sum_{i=1}^{nb} (N - n_i) \ln \left(\frac{\Gamma(\mathcal{L}_i) + \mathcal{M}_i}{\Gamma(\mathcal{L}_i)\Gamma(\mathcal{M}_i)} \right) \\ &\quad - \frac{3L}{N(nb-1)} \sum_{i=1}^{nb} (N - n_i) \ln \left(\frac{\mathcal{L}_i}{\mathcal{M}_i m_i} \right) - \frac{1}{N(nb-1)} \sum_{i=1}^{nb} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{nb} \sum_{k=1}^{n_j} \ln U(a_i; b_i; z_{i,k}) \end{aligned} \quad (3.88)$$

Contrairement au cas de la distribution de Wishart, le terme de la variance inter-classes pour la distribution de KummerU est coûteux en temps de calcul car on a une somme triple sur la fonction de KummerU. Il faut de plus estimer les paramètres de texture ainsi que les paramètres de la distribution de Fisher.

3.7 Résultats de segmentation

Afin de valider l'apport de l'utilisation de la texture pour segmenter des images SAR polarimétriques, nous allons appliquer l'algorithme de segmentation hiérarchique décrit dans la section 3.5 sur des images synthétiques et réelles.

3.7.1 Sur des images synthétiques

Dans cette partie, on désire montrer l'apport de la modélisation de la texture dans les images polarimétriques pour la segmentation. Pour ce faire, nous créons une image synthétique composée de quatre classes. Chaque classe est représentée par une texture distribuée selon une distribution de Fisher. La figure 3.13(b) montre l'image contenant les quatre réalisations de la texture (200×200 pixels).

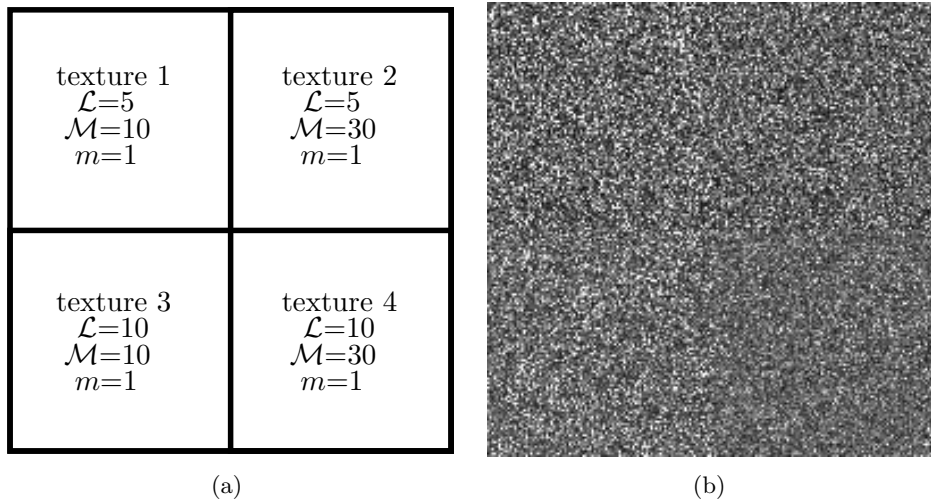


FIG. 3.13 – Présentation du jeu de donnée simulé (a) les quatre quadrants (vérité terrain), (b) Texture simulée par quatre distributions de Fisher.

Sur la figure 3.14, on montre les quatre distributions de Fisher utilisées pour simuler la texture. Nous avons pris des textures relativement semblables. On peut constater que visuellement, la segmentation d'une telle image n'est pas évidente (figure 3.13).

Pour quantifier la similarité entre les quatre distributions de Fisher utilisées pour modéliser la texture, nous avons utilisé la distance de Kolmogorov. Soit $\{x_1, \dots, x_N\}$ un échantillon de N réalisations indépendantes de la variable aléatoire X de fonction de répartition empirique $F_N^*(x)$. Si $F(x)$ est la fonction de répartition théorique, alors la distance de Kolmogorov est définie par la formule suivante :

$$D_N = \sup_x |F_N^*(x) - F(x)| \quad (3.89)$$

Nous avons ainsi calculé la distance de Kolmogorov pour chacune des paires de texture possible (tableau 3.3). Nous pouvons constater que la distance de Kolmogorov est relativement faible (de l'ordre de 0.07). La segmentation d'un tel jeu de donnée n'est pas chose aisée.

De plus, pour augmenter la difficulté de ce problème de segmentation, nous utiliserons la même distribution de Wishart partout dans l'image. Nous prendrons un nombre de vues L égale

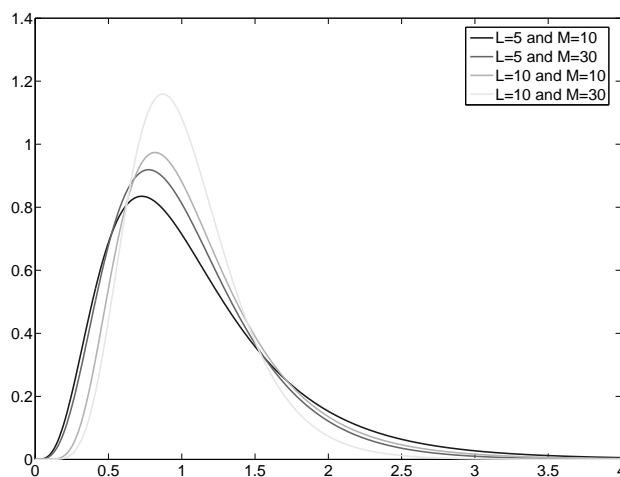


FIG. 3.14 – Les quatre distributions de Fisher utilisées pour modéliser la texture.

TAB. 3.3 – Distances de Kolmogorov entre les 4 ddp utilisées pour modéliser la texture.

textures	1-2	1-3	1-4	2-3	2-4	3-4
d_K	0.049	0.074	0.102	0.063	0.092	0.072

à 8. Nous générons les échantillons de la distribution de Wishart en utilisant l'algorithme proposé par Odell et Feiveson [Odell 66]. Ce jeu de données polarimétriques est ainsi caractérisé par un speckle qui est le même sur l'image entière. Seul la texture permet de différencier les quatre classes. La segmentation d'une telle image est un problème difficile. Nous appliquons l'algorithme de segmentation hiérarchique basée sur le critère de Wishart, de la distribution \mathcal{K} et celui sur le critère de KummerU. Ici, nous n'utiliserons pas de facteur de forme dans le calcul du critère de fusion des segments.

Afin de pouvoir calculer des statistiques sur les segments initiaux (calcul des cumulants), nous débuterons la segmentation avec une partition initiale où chaque segment est composé de 10×10 pixels. La partition initiale est ainsi composée de 400 segments.

Les figures 3.15(a), 3.15(b) et 3.15(c) montrent respectivement les résultats de la segmentation basée sur le critère de Wishart, de la distribution \mathcal{K} et sur le critère de KummerU. Sur ces figures, la couleur du contour dépend de l'ordre dans lequel il est fusionné. Si deux segments sont fusionnés tôt, l'intersection du contour de ces deux segments sera de niveaux de gris clair. Et à l'opposé si deux segments sont fusionnés plus tard, le contour sera foncé. Sur ces images, nous montrons ce dégradé de niveaux de gris pour un nombre de segments de la partition allant de 50 à 4.

On peut remarquer que le résultat de la segmentation hiérarchique basée sur le critère de Wishart (Fig 3.15(a)) et sur la distribution \mathcal{K} ne semblent pas très bon. En effet, sur la partie droite de la figure 3.15(a), l'algorithme basée sur le critère de Wishart a fusionné des segments

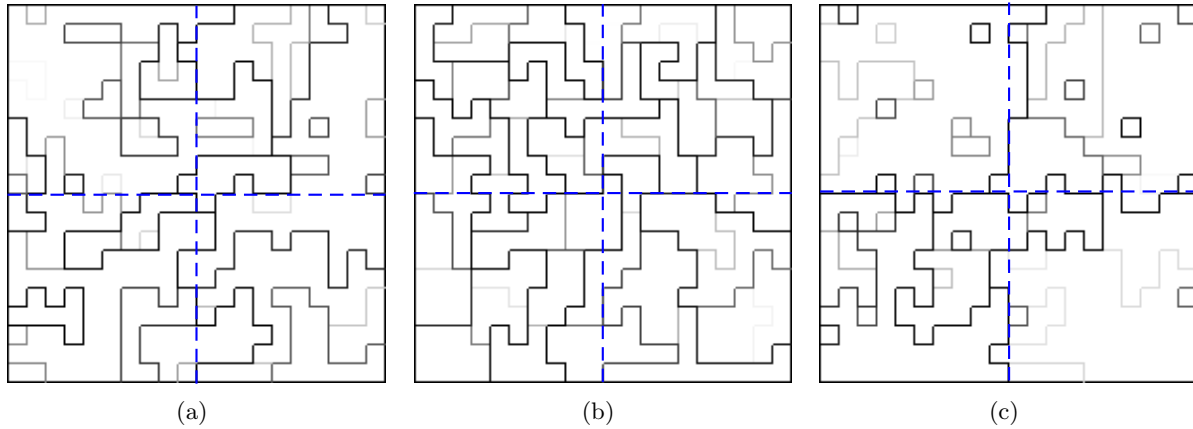


FIG. 3.15 – Résultat de la segmentation hiérarchique de l'image synthétique basée sur (a) le critère de Wishart, (b) le critère de la distribution \mathcal{K} , et (c) le critère de KummerU

de deux classes différentes très tôt. De plus cette erreur se propage rapidement.

Pour le critère basé sur la distribution \mathcal{K} , les bordures des quatre quadrants ne sont pas respectées. L'algorithme fusionne beaucoup de segments appartenant à des textures différentes. Par contre, les erreurs de segmentation semblent moins se propager que dans le cas de la distribution de Wishart.

Pour la segmentation basée sur la distribution de KummerU, les contours des quatre classes sont assez bien respectés, les erreurs ne se sont pas trop propagées.

Pour quantifier les performances de ces deux algorithmes de segmentation, nous traçons les courbes COR pour le problème de segmentation hiérarchique comme nous les avons définis dans la partie 3.6.1.2 [Bomb 08a] [Bomb 08b]. Le masque est défini par l'ensemble des quatre zones de taille 100×100 pixels (Fig. 3.13(a)).

La figure 3.16 montre les courbes COR pour l'algorithme basé sur le critère de Wishart (en trait plein noir), sur le critère de la distribution \mathcal{K} (en pointillés noirs) et celui basé sur la distribution de KummerU (en trait plein gris).

Ces courbes montrent que pour ce difficile problème de segmentation (même distribution de Wishart et texture très similaire), l'algorithme basé sur la distribution de KummerU donne des résultats meilleurs que ceux basés sur les distributions de Wishart et \mathcal{K} . En effet, pour une probabilité de fausse alarme de 0.05, la probabilité de bonne détection est de 0.3 avec le critère de Wishart et de la distribution \mathcal{K} et de 0.85 avec le critère de KummerU. De plus, pour cette probabilité de fausse alarme, l'image est partitionnée en 29 segments en utilisant la distribution de Wishart, en 11 segments avec la distribution \mathcal{K} et en 5 segments avec la distribution de KummerU. La figure 3.17 montre ces trois partitions.

Les courbes COR montrent que le critère de Wishart et celui basé sur la distribution \mathcal{K} ont

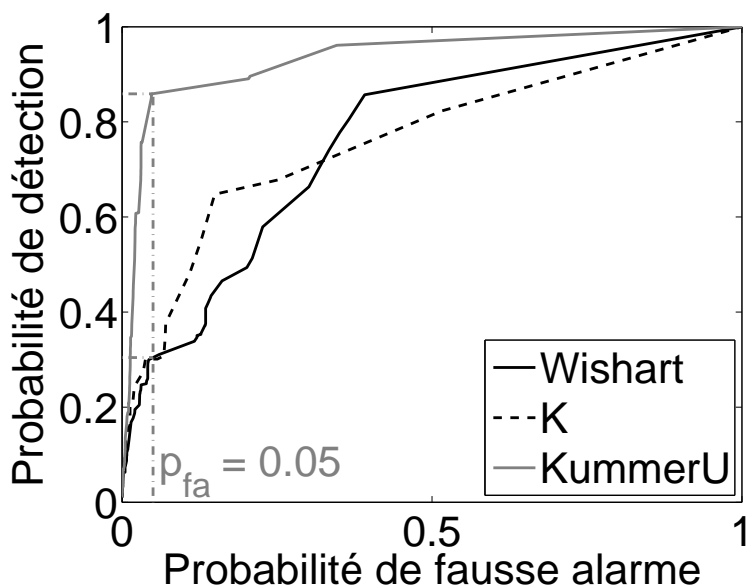
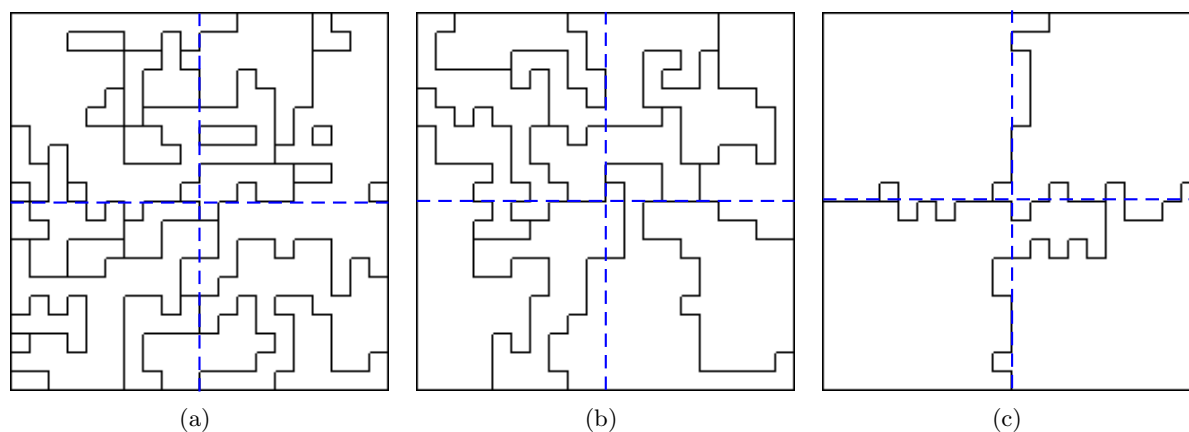


FIG. 3.16 – Courbes COR pour l'image synthétique

FIG. 3.17 – Résultat de la segmentation hiérarchique de l'image synthétique pour une probabilité de fausse alarme de 0.05 : (a) avec le critère de Wishart (29 segments), (b) avec le critère basé sur la distribution \mathcal{K} (11 segments), et (c) avec le critère de KummerU (5 segments)

la même probabilité de détection pour une probabilité de fausse alarme de 0.05. Mais pour cette p_{fa} , les deux partitions correspondantes possèdent un nombre de segments différents (29 pour Wishart contre 11 pour \mathcal{K}). On peut donc essayer d'analyser l'influence du nombre de segments dans la partition finale.

En s'inspirant des courbes COR définies précédemment, on peut tracer les probabilités de détection et de fausse alarme en fonction du nombre de segments dans la partition. Les figures 3.18(a) et 3.18(b) illustrent ces résultats.

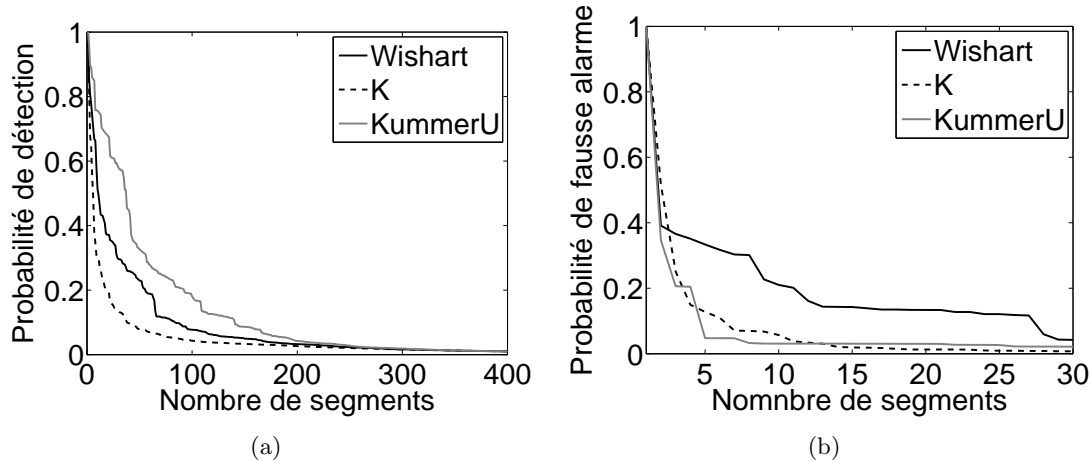


FIG. 3.18 – Évaluation des performances des trois critères de segmentation : (a) tracé de la probabilité de détection en fonction du nombre de segments dans la partition, (b) tracé de la probabilité de fausse alarme en fonction du nombre de segments dans la partition

L'analyse des figures 3.18(a) et 3.18(b) permet de dire que :

- Du point de vue de la probabilité de fausse alarme, les critères basés sur les distributions \mathcal{K} et KummerU donnent les meilleurs performances. Cela signifie que pour ce problème, l'utilisation de la texture permet de baisser le taux de fausse alarme par rapport à une segmentation basée sur la distribution de Wishart. Ceci est normal car dans ce jeu de donnée simulé, seul la texture permet de différencier les quatre quadrants. Le critère de Wishart est basé sur la matrice de covariance moyenne, la texture n'est pas prise en compte dans ce critère, d'où une mauvaise segmentation avec ce critère.
- Dans le cas de la distribution \mathcal{K} , la texture est assimilée à une loi Gamma. Or pour ce jeu de donnée, la texture est distribuée par une loi de Fisher. La modélisation de la texture par une loi Gamma est donc mal appropriée. L'algorithme de segmentation basé sur la distribution \mathcal{K} ne va donc pas pouvoir arriver à différencier des textures relativement proche d'un point de vue statistique.
- Le critère basé sur la distribution de KummerU donne les meilleurs performances en terme de probabilités de détection et de fausse alarme, et cela quelque soit le nombre de segments dans la partition. Cela se justifie de part le fait que la distribution de Fisher pour la texture est une généralisation de la loi Gamma. La segmentation basée sur le critère de KummerU donne donc des performances au moins aussi bonne que celle basée sur la distribution \mathcal{K} .

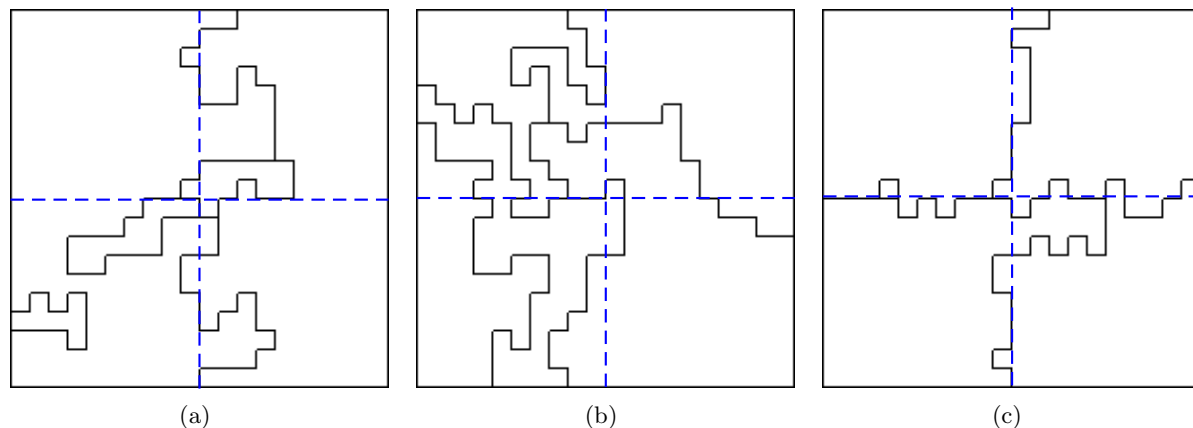


FIG. 3.19 – Résultat de la segmentation hiérarchique de l'image synthétique pour une partition contenant 5 segments : (a) avec le critère de Wishart, (b) avec le critère basé sur la distribution \mathcal{K} , et (c) avec le critère de KummerU

Les figures 3.19(a), 3.19(b) et 3.19(c) montrent les résultats de la segmentation hiérarchique sur l'image synthétique pour des partitions contenant 5 segments. Ces figures montrent que l'utilisation d'une distribution adéquate pour modéliser la texture est nécessaire pour segmenter correctement ce type d'images.

La distribution de Fisher étant une loi hybride entre la distribution Gamma et la distribution Gamma inverse. Le comportement hybride de la loi de Fisher, pouvant aller de loi à tête lourde (loi Gamma) à loi à queue lourde (loi Gamma Inverse), permet une bonne modélisation de la texture. Par conséquent, l'utilisation du critère de KummerU permet de segmenter correctement les images polarimétriques.

Pour ce jeu de donnée, la même distribution de Wishart a été utilisée pour modéliser le speckle. Seule la texture est différente pour chaque classe. Nous avons simulé chacune de ces textures par une distribution de Fisher. Ces quatre distributions étaient néanmoins très similaires, rendant visuellement la segmentation très difficile. Nous venons de voir que là où l'utilisation des distributions de Wishart ou \mathcal{K} ont échoué, l'utilisation de la distribution de KummerU a donné des résultats convaincants. Les courbes COR ont confirmé ce résultat selon lequel la modélisation de la texture dans les images polarimétriques par une distribution appropriée est nécessaire pour segmenter correctement ce type d'images.

3.7.2 Sur des images ESAR

Après avoir présenté l'intérêt de l'utilisation de la texture dans les images polarimétriques, nous allons appliquer cet algorithme de segmentation hiérarchique sur une image acquise par le capteur E-SAR en bande L sur le site d'Oberpfaffenhofen en Allemagne. Un moyennage multi-vues 2×4 a été appliqué. La figure 3.20 montre une composition colorée de la matrice de cohérence dans la base de Pauli.



FIG. 3.20 – Composition colorée dans la base de Pauli de la matrice de cohérence (770×704 pixels)

3.7.2.1 Calcul du critère sur différentes zones

Dans cette partie, on s'intéresse au pouvoir de segmentation des trois critères de fusion de segments sur différents types de surface. Pour cela, on extrait six zones de taille 30×30 pixels de l'image d'Oberpfaffenhofen :

- deux zones urbaines.
- deux zones de forêt.
- deux zones de champs.

La figure 3.21 montre la localisation de ces 6 zones sur l'image d'Oberpfaffenhofen.

Le tableau 3.4 montre la valeur du critère de fusion des segments pour les différentes zones et pour les trois distributions utilisées. Une faible valeur indique que les deux régions sont similaires.

- Pour la distribution de Wishart, la valeur du critère entre les deux régions urbaines (10290) est plus grande que la distance entre une zone urbaine et une zone de forêt. Ceci indique que le critère de Wishart ne va pas arriver à séparer correctement les zones urbaines des zones de forêt. Ce qui n'est pas le cas des distributions \mathcal{K} et KummerU qui ont des distances Urbain1-Urbain2 (340 pour \mathcal{K} et 68 pour KummerU) plus petites que des distances Urbain-Forêt.
- Le critère de KummerU considère les deux régions urbaines plus similaire que le critère \mathcal{K} (68 contre 340). De plus, pour la distribution de KummerU, la distance Urbain1-Urbain2 est environ sept fois plus petite que la distance Urbain1-Forêt1. Alors que ce rapport n'est que de deux pour la distribution \mathcal{K} . La distribution de KummerU va donc permettre une meilleure segmentation des zones urbaines. Cela s'explique par le fait que la loi de Fisher a un comportement hybride entre une loi à tête lourde et une loi à queue lourde, permettant

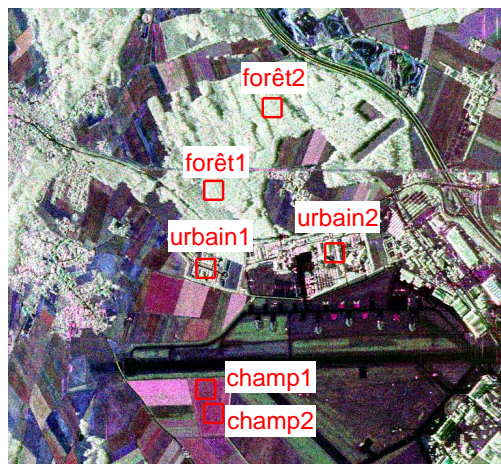


FIG. 3.21 – Localisation des 6 zones pour le calcul du critère.

TAB. 3.4 – Comparaison des critères de Wishart, \mathcal{K} et KummerU pour les six zones choisies

	Urbain 1	Urbain 2	Forêt 1	Forêt 2	Champ1
Distribution de Wishart					
Urbain 2	10290				
Forêt 1	6850	7178			
Forêt 2	6826	7238	201		
Champ 1	36116	47936	28600	28235	
Champ 2	36665	48201	29274	28812	116
Distribution \mathcal{K}					
Urbain 2	340				
Forêt 1	645	1221			
Forêt 2	609	975	199		
Champ 1	5159	5422	8172	7507	
Champ 2	6286	6351	9547	8696	100
Distribution de KummerU					
Urbain 2	68				
Forêt 1	471	1499			
Forêt 2	436	1244	200		
Champ 1	4239	4723	8147	7486	
Champ 2	8788	5667	9521	8672	100

ainsi une meilleure modélisation de la texture.

- Pour les régions Forêt1 et Forêt2, le critère est d'environ 200 pour n'importe quelle distribution. L'utilisation de la texture ne semble donc pas être nécessaire pour segmenter correctement ces zones de forêt.
- De la même façon, les zones Champ1 et Champ2 ont une valeur de critère ($\simeq 100$) qui ne dépend pas de la distribution utilisée pour modéliser la matrice de covariance.

Comme la distribution de KummerU est une généralisation de la distribution \mathcal{K} , les performances de segmentation de la distribution de KummerU sont au moins aussi bonne que celles de la distribution \mathcal{K} . Par la suite, nous comparerons uniquement les résultats de segmentation basés sur les distributions de Wishart et de KummerU.

3.7.2.2 Résultats de segmentation sur l'image E-SAR

Nous appliquons maintenant l'algorithme de segmentation hiérarchique sur l'image d'Oberpfaffenhofen en utilisant les quatre critères suivants :

- le critère de Wishart avec le paramètre de forme (noté Wishart).
- le critère de Wishart sans le paramètre de forme (noté Wishart sans critère de forme).
- la combinaison du critère de Wishart et de KummerU avec le paramètre de forme (noté KummerU).
- la combinaison du critère de Wishart et de KummerU sans le paramètre de forme (noté KummerU sans critère de forme).

La figure 3.22 montre les partitions contenant 5000 segments obtenues par l'algorithme de segmentation hiérarchique en utilisant les quatre critères. L'image contenant les contours des segments (de couleur jaune) est superposée à la composition colorée dans la base de Pauli de la matrice de covariance. Cela permet de voir si la segmentation a fonctionné ou non.

Tout d'abord, on peut noter que l'utilisation d'un critère de forme (figures 3.22(a) et 3.22(c)) dans le calcul du critère de fusion des segments permet de lisser les contours obtenus dans la partition finale. L'ajout du critère de forme permet de ne pas avoir d'effets "spaghetti" comme on peut le voir sur les figures 3.22(b) et 3.22(d). Néanmoins, l'utilisation d'un tel critère force à fusionner des segments qui ne sont pas nécessairement similaire d'un point de vue statistique. Les objets de taille assez étroite sont mal segmentés si l'on utilise un critère de forme. Par exemple, on peut constater que les pistes de l'aéroport sont moins bien segmentées en ajoutant un facteur de forme dans le calcul du critère de fusion des segments.

La figure 3.23 montre les compositions colorées dans la base de Pauli de la matrice de covariance moyenne calculée sur les segments pour des partitions contenant 5000 segments. Si on utilise dans le calcul du critère un paramètre de forme (figures 3.23(a) et 3.23(c)), les objets de petites tailles sont mal segmentés. Par exemple, on peut remarquer que la route située au centre de l'image a tendance à être fusionnée avec les zones forestières voisines. En revanche, les zones agricoles sont bien segmentées. Cela vient du fait que les champs ont des formes relativement régulières. Le facteur de forme va ainsi favoriser la fusion de segments créant ce type de formes.

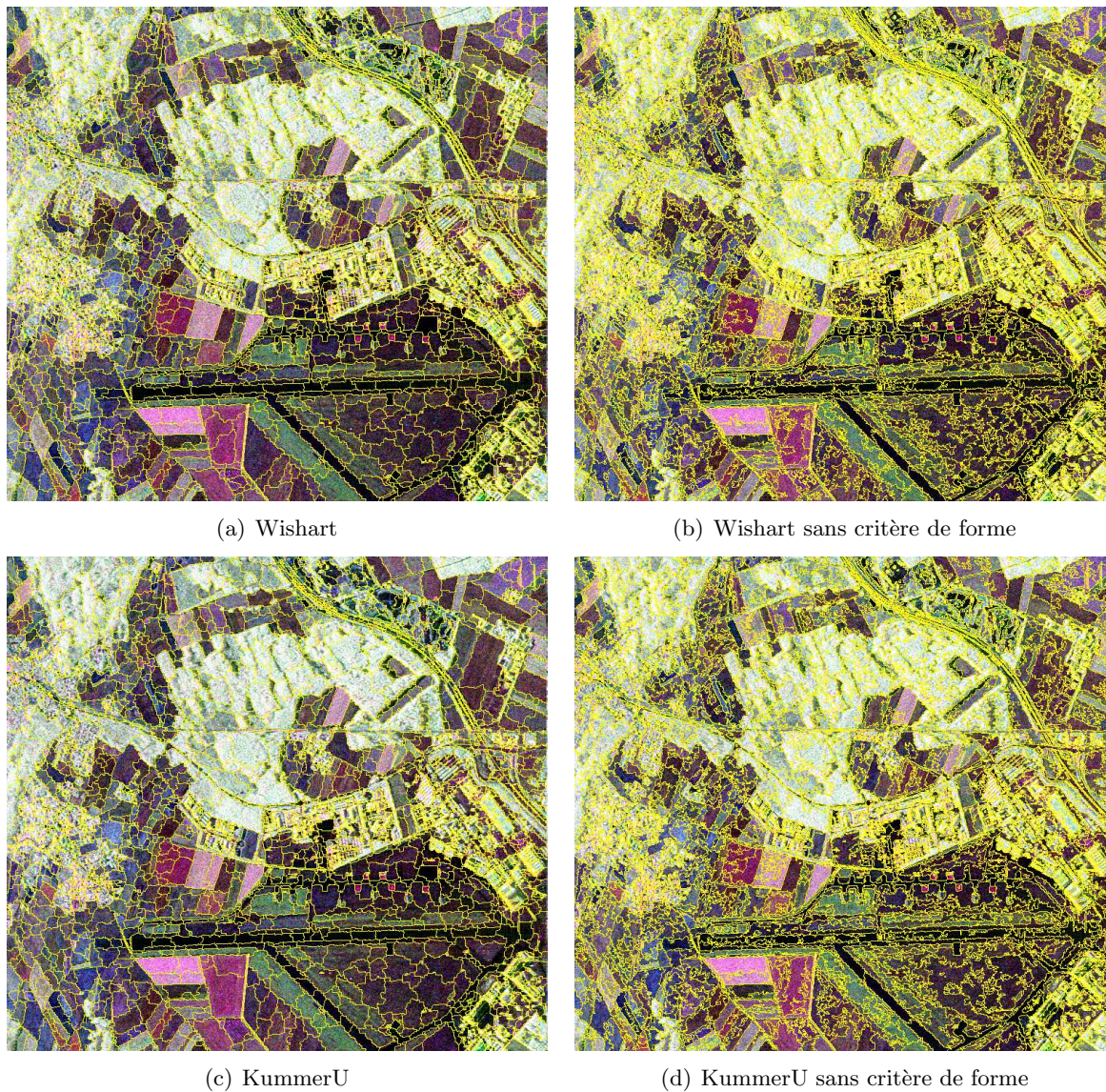
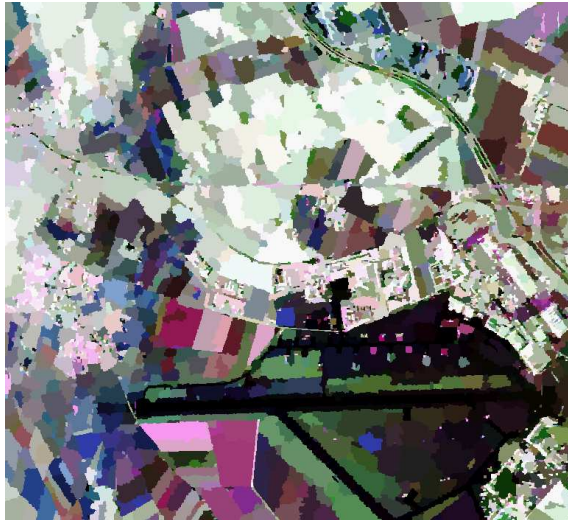


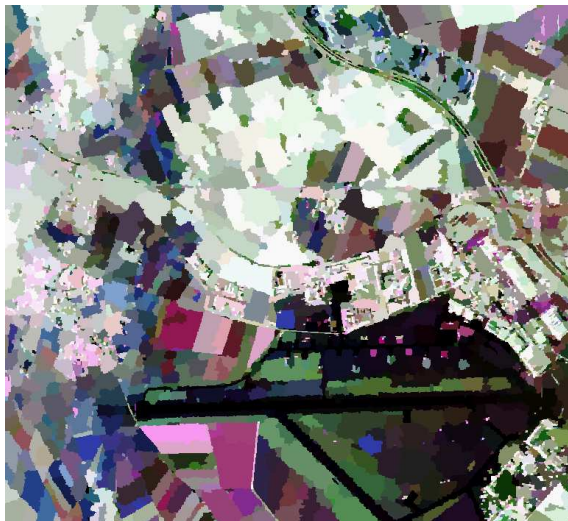
FIG. 3.22 – Résultat de la segmentation hiérarchique pour une partition contenant 5000 segments en utilisant : (a) Wishart, (b) Wishart sans critère de forme, (c) KummerU, (d) KummerU sans critère de forme.



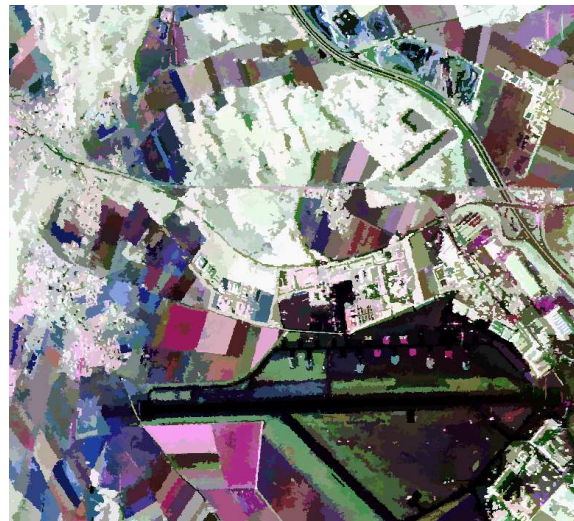
(a) Wishart



(b) Wishart sans critère de forme



(c) KummerU



(d) KummerU sans critère de forme

FIG. 3.23 – Composition colorée dans la base de Pauli de la matrice de covariance moyenne pour des partitions contenant 5000 segments en utilisant : (a) Wishart, (b) Wishart sans critère de forme, (c) KummerU, (d) KummerU sans critère de forme.

Il est assez difficile de comparer visuellement la performance de la segmentation basée sur le critère de Wishart avec celle basée sur le critère de KummerU. Nous allons donc analyser mathématiquement les résultats issus de la segmentation.

La figure 3.24 montre la variance inter-segments en fonction du nombre de segments dans la partition pour les quatre critères définis précédemment. Les courbes 3.24(a) et 3.24(b) tracent la variance inter-segments pour le canal $t_{11} = |S_{hh} + S_{vv}|^2$. Les courbes 3.24(c) et 3.24(d) montrent l'évolution de la variance inter-segments moyenne en fonction du nombre de segments. C'est la moyenne de la variance inter-segments pour chacun des 9 canaux de la matrice de covariance.

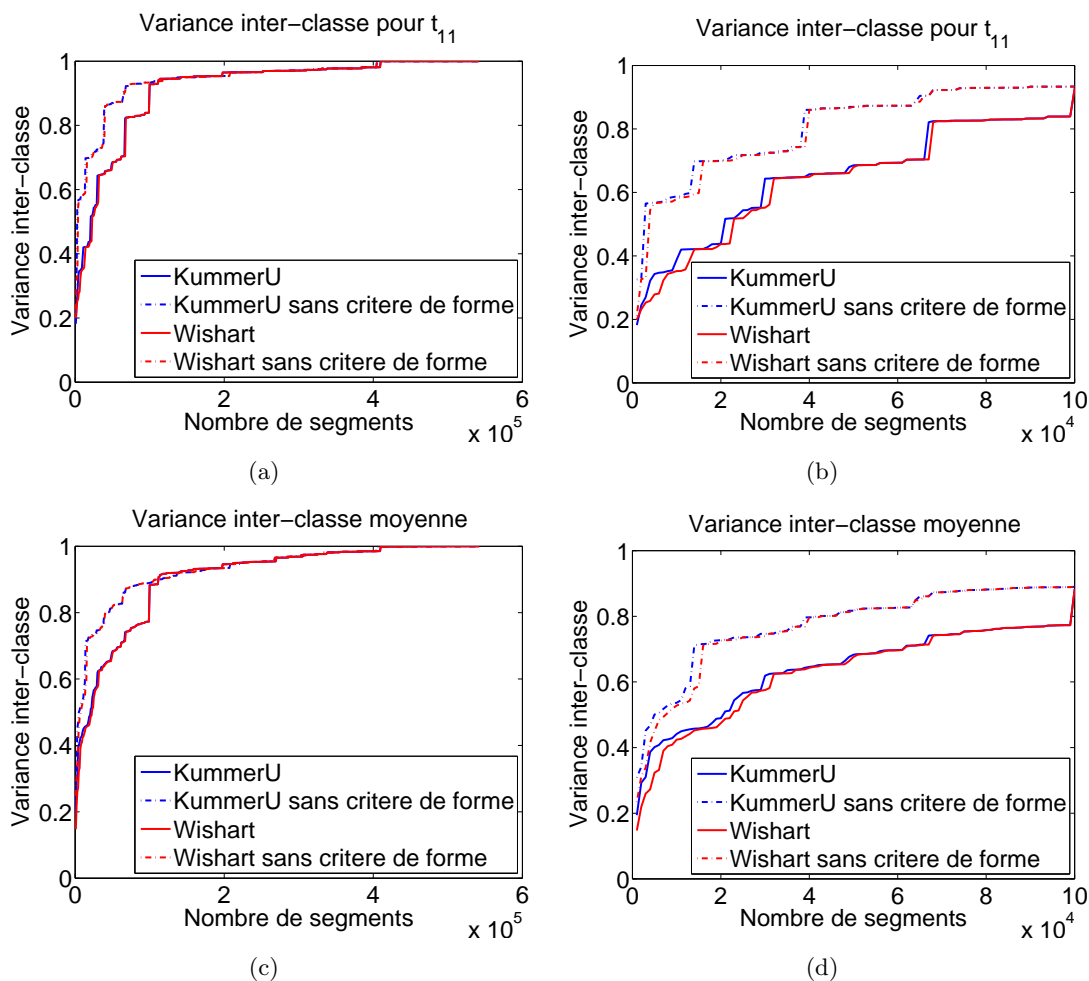


FIG. 3.24 – Tracé de la variance inter-classes en fonction du nombre de segments pour les différents critères de fusion : (a) variance inter-classes dans le canal t_{11} , (b) variance inter-classes dans le canal t_{11} pour des partition contenant 1 à 100000 segments, (c) variance inter-classes moyenne, (d) variance inter-classes moyenne pour des partition contenant 1 à 100000 segments

Le meilleur critère de segmentation est celui qui pour une partition donnée donne la plus forte variance inter-segments. On peut tout d'abord constater que les critères n'utilisant pas de facteur de forme sont toujours meilleurs au sens de la variance inter-segments que les critères prenant en compte un facteur de forme. Cela s'explique par le fait que le facteur de forme permet de

créer des segments ayant une forme régulière. Ils favorisent la fusion des segments qui peuvent être différents d'un point de vue statistique et par conséquent la variance inter-segments est plus faible. De plus, on peut constater que l'utilisation de la distribution de KummerU permet d'améliorer les résultats de segmentation par rapport au critère de Wishart. L'utilisation d'une distribution appropriée pour modéliser la texture est un plus du point de vue de la segmentation.

La figure 3.25 montre la valeur du lambda de Wilks en fonction du nombre de segments dans la partition pour les quatre critères définies précédemment. Pour tracer ces courbes, nous avons pris comme vecteur d'observation x les trois éléments diagonaux de la matrice de covariance :

$$x = \begin{bmatrix} t_{11} \\ t_{22} \\ t_{33} \end{bmatrix} \quad (3.90)$$

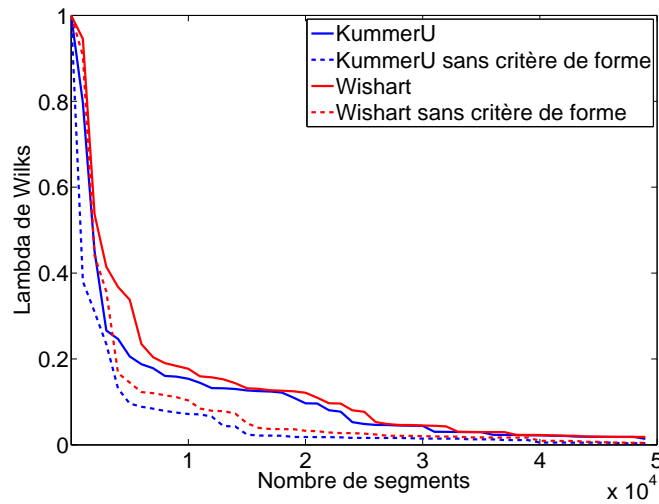


FIG. 3.25 – Lambda de Wilks

Une valeur faible du lambda de Wilks indique une bonne séparabilité des segments. La figure 3.25 montre la valeur du lambda de Wilks pour des partitions contenant 1 à 50000 segments. Cette figure indique que la distance de KummerU permet une meilleure segmentation de l'image que celle basée sur le critère de Wishart.

La figure 3.26 trace l'évolution des distances de Wishart inter-classes et intra-classe en fonction du nombre de segments dans la partition pour les quatre critères utilisés lors de la segmentation hiérarchique. Les figures 3.26(a) et 3.26(b) montrent l'évolution de la distance inter-classes. Le tracé de la variance intra-classe est affiché sur les figures 3.26(c) et 3.26(d).

Il faut noter que les courbes bleues correspondant à l'utilisation de la distribution de KummerU ne sont pas très importantes car les distances inter-classes B_{Wishart} (Eq. 3.86) et intra-classe W_{Wishart} (Eq. 3.82) sont calculées au sens de la distribution de Wishart. Les distances inter-classes B_{KummerU} (Eq. C.2) et intra-classe W_{KummerU} (Eq. 3.87) pour la distribution de KummerU ne seront pas tracées car le temps de calcul est trop important. Il faut donc s'intéres-

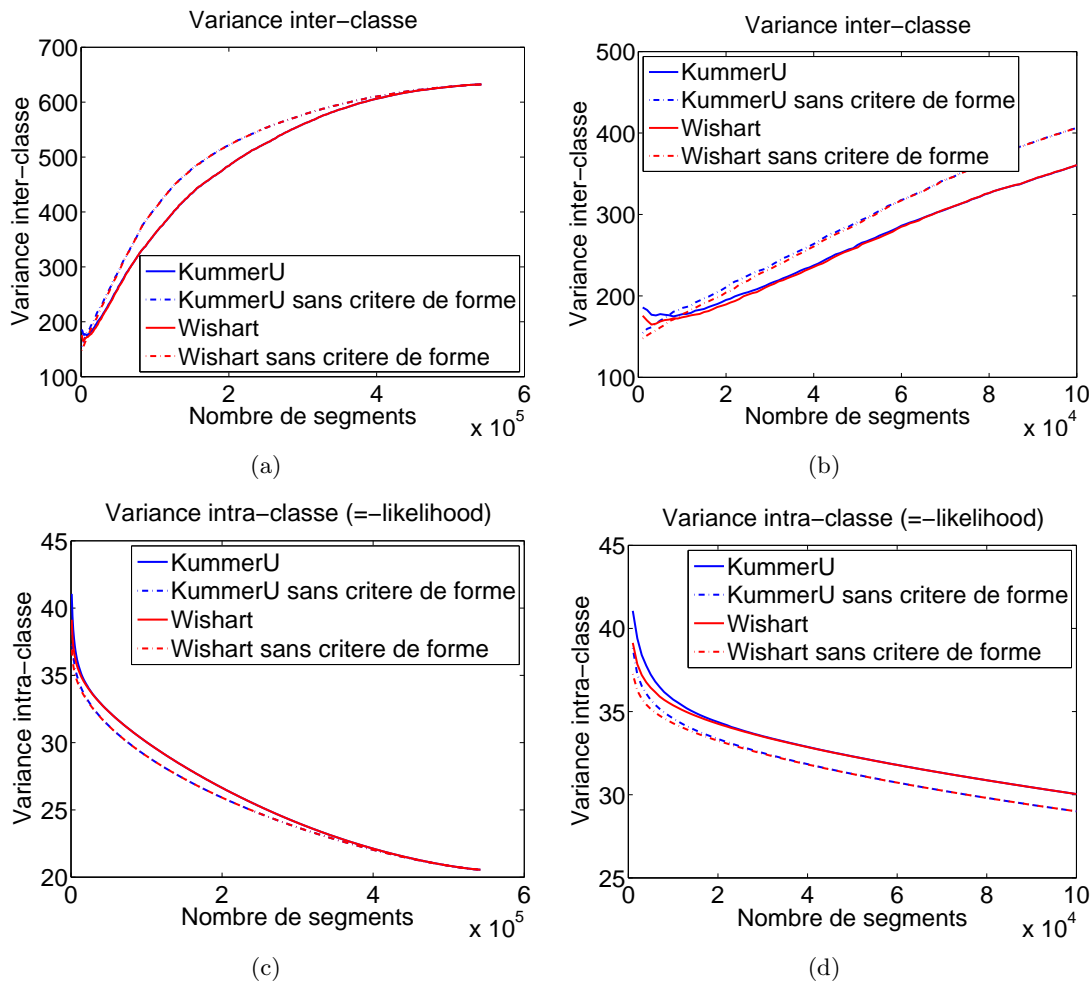


FIG. 3.26 – Tracé de la distance inter-classes et intra-classe de Wishart en fonction du nombre de segments dans la partition pour les différents critères utilisés lors de la fusion des segments : (a) distance inter-classes, (b) distance inter-classes pour une partition allant de 1 à 100000 segments, (c) distance intra-classe , (d) distance intra-classe pour une partition allant de 1 à 100000 segments

ser aux courbes en rouge qui correspondent à l'utilisation du critère de Wishart avec le paramètre de forme (en trait plein) et au critère de Wishart sans paramètre de forme (en pointillés). Ces tracés montrent que sans critère de forme, la segmentation est meilleure du point de vue statistique. Cela est dû au fait que le critère de forme favorise la fusion de segments créant une forme régulière, et cela au dépend de segments plus proche au sens de la log-vraisemblance de Wishart.

3.8 Classification d'images polarimétriques

Dans la partie précédente, nous nous sommes intéressés à la segmentation hiérarchique d'images polarimétriques. Dans la segmentation, on cherche les voisins 4-connexes qui minimisent un certain critère. En classification, il n'y a pas de contraintes de voisinage, il faut donc chercher la paire de segments qui minimise la chute de log-vraisemblance.

3.8.1 Principe de la méthode

La figure 3.27 présente la méthode utilisée pour classifier les images polarimétriques en utilisant la distribution de KummerU. Tout d'abord, on part d'une partition initiale contenant N segments. Cette partition est issue de l'algorithme de segmentation hiérarchique présenté précédemment (Fig. 3.9). L'algorithme de classification que l'on propose étant basé sur le critère de KummerU, il est nécessaire d'avoir des régions assez grandes pour estimer les paramètres de la distribution de Fisher. Ainsi, à partir de cette partition initiale, on extrait les segments les plus gros.

Un segment est considéré comme "gros" s'il contient au moins 20 pixels. Puis, pour chaque "gros" segment, on estime les paramètres de texture ainsi que les paramètres de la distribution de Fisher. À partir de ces quantités, on calcule la log-vraisemblance de la distribution de KummerU pour chaque "gros segment". Ensuite, on fusionne les deux "gros" segments qui minimisent le critère SC. Dans SC, on ne prend pas en compte de terme de facteur de forme car contrairement à la segmentation, il n'y a pas de contrainte de voisinage en classification. On itère ces étapes jusqu'à ce qu'on arrive au nombre de classes désirées. Si l'on désire classifier l'image en P classes, on itère l'algorithme $N - P$ fois. Une fois que les P classes sont obtenues, on fusionne chaque "petits" segments à la classe la plus proche du point de vue de la distribution de Wishart.

3.8.2 Résultats de classification

La figure 3.28 montre les résultats de la classification de KummerU sur l'image 8-vues d'Oberpfaffenhofen. Les images sont une composition colorée dans la base de Pauli de la matrice covariante. La partition initiale est obtenue à partir de la segmentation hiérarchique de l'image 3.28(a) en utilisant le critère de KummerU sans facteur de forme. Nous avons pris une partition initiale composée de 10000 segments. Puis, nous extrayons les 3567 segments les plus gros. Ces 3567 clusters sont fusionnés hiérarchiquement par minimisation de la log-vraisemblance de KummerU jusqu'à obtenir le nombre P de classes désiré. Ensuite, chacun des 6433 petits segments est fusionné à la classe la plus proche du point de vue du critère de Wishart.

Les figures 3.28(b), 3.28(c) et 3.28(d) montrent respectivement les résultats de la classification de KummerU pour un nombre de classes de 100, 50 et 16.

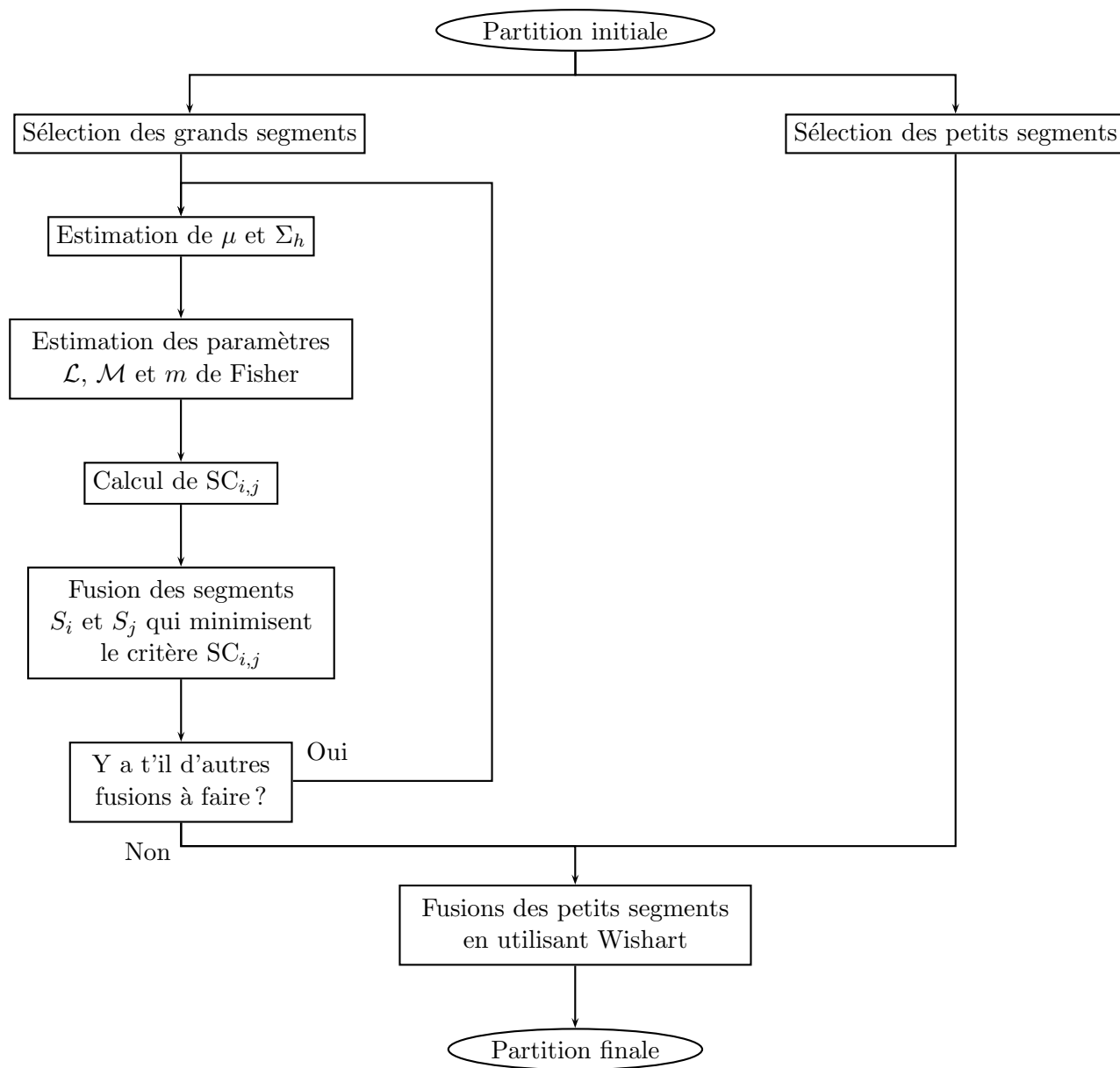


FIG. 3.27 – Le principe de la méthode de classification basée sur la distribution de KummerU



FIG. 3.28 – Résultat de la classification de KummerU : (a) image de départ, (b) 100 classes, (c) 50 classes, (d) 16 classes.

Nous pouvons voir sur ces images que les détails "haute résolution" dans le milieu urbain (routes, maison) sont bien préservés.

3.9 Conclusion et perspectives

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressé au problème de la segmentation hiérarchique d'images polarimétriques. La première partie de ce chapitre a été consacrée au problème général de la segmentation d'images. L'approche proposée par J.-M. Beaulieu et R. Touzi [Beau 04b] permet de voir la segmentation hiérarchique comme un problème de maximum de vraisemblance. Il se pose donc la question du choix de la distribution à utiliser pour modéliser la matrice de covariance. Nous nous sommes donc intéressé dans un premier temps au cas des images non texturées. Un rappel sur la distribution de Wishart a été présenté. Cette distribution est largement utilisée par la communauté scientifique pour modéliser la matrice de covariance. On peut par exemple citer les travaux de Lee *et al.* [Lee 99] pour classifier les images polarimétriques, ou encore ceux de Skriver *et al.* [Skri 02] qui s'intéressent à la segmentation d'images polarimétriques basée sur la distribution de Wishart. Néanmoins cette distribution est valable uniquement sous l'hypothèse que le speckle est complètement développé dans une zone homogène.

Dans le cas de zones texturées, la distribution de Wishart n'est pas appropriée pour modéliser la matrice de covariance. Dans cette thèse, nous avons utilisé le modèle multiplicatif scalaire. Connaissant la distribution de la texture et la loi de Wishart, il est possible de déterminer les distributions du vecteur de rétrodiffusion et de la matrice de covariance. Pour une texture distribuée selon une loi Gamma, on trouve une distribution \mathcal{K} pour la matrice de covariance.

Un des objectifs de cette thèse a été de choisir une distribution beaucoup plus générale pour modéliser la texture, et de dériver les statistiques de la matrice de covariance. Nous avons choisi de prendre une distribution Fisher. Cette distribution présente l'avantage d'avoir un comportement hybride entre une loi à tête lourde et une loi à queue lourde. Sa flexibilité lui permet de modéliser correctement différents types de milieux. La distribution de Fisher a été récemment utilisée en imagerie SAR monocal. On peut par exemple citer les travaux de Tison *et al.* sur la classification d'images urbaines [Tiso 04]. En utilisant la distribution de Fisher pour la texture, nous avons dérivé les distributions du vecteur de rétrodiffusion (en 1-vue) et de la matrice de covariance (en L-vues) en utilisant le modèle multiplicatif scalaire. Celles-ci s'expriment à l'aide de la fonction confluyente hypergéométrique de seconde espèce KummerU.

À partir de la définition de la distribution de KummerU pour la matrice de covariance, il est possible de réadapter tout ce qui a été fait avec la distribution de Wishart à la distribution de KummerU. Ici, nous nous sommes intéressés à la segmentation hiérarchique d'images polarimétriques. Nous avons donc dérivé le calcul du critère de log-vraisemblance pour les distributions de Wishart, \mathcal{K} et KummerU.

Nous avons appliqué l'algorithme de segmentation hiérarchique sur des images simulées et sur des images réelles. Différents critères pour évaluer les performances de segmentation ont été mis en œuvre. Par exemple, nous avons montré une méthode pour tracer des courbes Caractéristique Opérationnelle de Réception (COR) en segmentation hiérarchique. Ces différents critères ont montré que l'utilisation d'une distribution appropriée pour modéliser la texture est nécessaire pour segmenter correctement les images polarimétriques. De plus, les résultats sur l'image d'Oberpfaffenhofen ont montré que le caractère hybride de la distribution de Fisher permet de

modéliser précisément différents types de textures (urbain, forêt et champ).

Enfin, nous avons proposé une méthode de classification non supervisée basée sur la distribution de KummerU. Cette méthode a été validée sur une image ESAR acquise sur le site d'Oberpfaffenhofen.

En perspectives de ce travail, nous pouvons explorer plusieurs pistes :

- Comme nous l'avons dit précédemment, tout ce qui a déjà été publié avec la distribution de Wishart peut être adapté à la distribution de KummerU. Dans ce chapitre, on s'est principalement intéressé à la segmentation d'images. Mais, la distribution de KummerU peut aussi être utilisée pour faire du filtrage. Une autre piste intéressante à explorer peut être l'adaptation du classifieur de Wishart à la distribution de KummerU.
- L'algorithme de classification que l'on a proposé est un algorithme totalement non supervisé. On ne prend donc pas en compte la notion de mécanisme de rétrodiffusion. Il peut donc être intéressant d'adapter l'algorithme de classification en y injectant des paramètres polarimétriques qui permettent de caractériser les cibles. Ces paramètres peuvent être ceux issus de la décomposition H/ α /A introduit par S.R. Cloude et E. Pottier [Clou 97], ou encore les paramètres du Target Scattering Vector Model (TSVM) de R. Touzi [Touz 07b].
- Comme la distribution de Fisher est égale à la convolution de Mellin d'une distribution Gamma par une distribution Gamma inverse [Nico 02] [Nico 03] [Nico 06], on peut étudier les cas aux limites de cette distribution. En effet, si le paramètre \mathcal{M} de la distribution de Fisher tend vers l'infini, la distribution de Fisher tend vers la distribution Gamma. Nous avons montré que la distribution de KummerU tend alors vers la distribution \mathcal{K} (cf : Annexe D). On peut se demander ce qu'il se passe pour la distribution de KummerU lorsque la distribution de Fisher tend vers la distribution Gamma Inverse (\mathcal{L} tend vers l'infini).
- Des travaux ont montré que l'utilisation d'un développement en série de Edgeworth était bien adapté pour modéliser un histogramme d'une image radar en intensité [Ingl 07]. Cette approche a l'avantage d'avoir un temps de calcul très faible. On peut donc s'intéresser à modéliser la variable scalaire représentant la texture à l'aide de ce développement en série de Edgeworth et démontrer quelle est la distribution de la matrice de covariance dans le cas du modèle multiplicatif scalaire.
- Dans ce chapitre, on s'est intéressé au cas où la texture est indépendante du canal de polarisation. On est donc dans le cas du modèle multiplicatif scalaire. Maintenant, si on se place dans le cas où la texture est dépendante du canal de polarisation, la matrice de covariance s'exprime de la façon suivante :

$$\Sigma = \mu \Sigma_h \tag{3.91}$$

où μ est cette fois une matrice diagonale de taille $p \times p$. Il peut être intéressant de reprendre toute l'analyse faite dans ce chapitre dans le cas où la texture est dépendante du canal de polarisation.

Conclusion

Conclusion

Les travaux présentés dans cette thèse ont été consacrés au développement d'outils et de méthodes en traitement des images RSO interférométriques et polarimétriques.

La première partie de ces travaux a été dédiée à la mise en place de traitements interférométriques RSO. Ces méthodes ont été appliquées dans le cadre du projet MEGATOR à l'observation des glaciers tempérés. L'objectif était de tester le potentiel et les limites de l'interférométrie RSO dans des zones de fort relief.

Pour cela, nous avons étudié une série de 5 interférogrammes ERS-1/2 acquis en mission tandem durant l'année 1995-1996. Cette analyse a révélé la faisabilité de la surveillance des glaciers du site test de Chamonix/Mont-Blanc par interférométrie radar différentielle à un jour en bande C en hiver.

Afin de caler l'offset de la phase interférométrique, il est nécessaire d'avoir des connaissances *in situ* (balise, zone de vitesse nulle) de la zone étudiée. Pour s'affranchir de ces connaissances *a priori*, nous avons mis en place une méthode permettant d'estimer les offsets à ajouter sur les phases interférométriques acquises en passes ascendante et descendante pour pouvoir ensuite obtenir un champ de déplacement au sol. Cette analyse repose sur le fait qu'une zone commune est visible dans les deux interférogrammes et que la direction de l'écoulement soit connue à cet endroit. Un exemple sur des images synthétiques a permis de valider la méthode proposée.

Puis, nous avons analysé les franges résiduelles présentes dans les images de différence de phases entre interférogrammes différentiels. Nous avons mis en place une nouvelle méthode qui permet de tester si la composante topographique est parfaitement retirée des interférogrammes en comparant les franges résiduelles avec la baseline perpendiculaire équivalente. Si les franges résiduelles sont dues à la topographie, nous avons montré qu'il est possible d'estimer l'erreur du MNT et de retrouver le vrai MNT. Cette méthode a été validée sur des images simulées. Nous avons ensuite appliqué ces traitements sur une série d'interférogrammes différentiels ERS-1/2 acquis en mission tandem d'octobre 1995 à avril 1996. Nous avons montré sur le glacier du Trient que les franges observées dans les interférogrammes différentiels étaient dues à des erreurs de topographie.

La deuxième partie de cette thèse a été consacrée à la polarimétrie radar et plus précisément aux théorèmes de décomposition incohérent de la matrice de cohérence. Après décomposition en valeurs propres et vecteurs propres de la matrice T , il est nécessaire d'avoir un modèle de référence pour paramétrer les vecteurs propres.

C'est pourquoi, nous avons étudié en détail les deux modèles utilisés dans la littérature : le modèle α/β introduit par S.R. Cloude et E. Pottier, et le TSVM proposé par R. Touzi. Cette analyse a révélé que dans le cas d'une cible symétrique ($\tau_m = 0$), les paramètres du TSVM sont

égaux à ceux du modèle α/β . En revanche, cette égalité n'est pas vérifiée dans le cas général d'une cible asymétrique. Une description non ambiguë des différents rétrodiffuseurs mis en jeu est obtenue par une étude conjointe des trois paramètres invariants par rotation α_s , Φ_{α_s} et τ_m .

Nous avons ensuite proposé une définition du vecteur de rétrodiffusion associé au mécanisme de rétrodiffusion moyen comme étant une combinaison linéaire des vecteurs propres de la matrice de cohérence pondéré par la racine carrée de la valeur propre associée.

La dernière partie de ces travaux de thèse a été consacrée à la segmentation d'images polarimétriques et plus précisément à l'importance de l'utilisation de la texture.

De part son comportement de loi à "queue lourde" et à "tête lourde", nous avons montré que la distribution de Fisher était bien adaptée pour modéliser correctement différents types de milieux (champs, forêt, urbain). En utilisant le modèle multiplicatif scalaire, nous avons dérivé l'expression littérale de la distribution de la matrice de cohérence pour une texture distribuée selon un loi de Fisher à l'aide de la fonction confluyente hypergéométrique de seconde espèce (KummerU).

Nous avons ensuite proposé d'implémenter cette nouvelle distribution dans un algorithme de segmentation hiérarchique. Nous avons comparé les performances de l'algorithme de segmentation hiérarchique basé sur la distribution de KummerU avec d'autres distributions usuelles (Wishart, \mathcal{K}) par l'intermédiaire des courbes COR, des variances inter-classes et intra-classe, ... Ces analyses, sur des images synthétiques et sur des images acquises par le capteur E-SAR, ont montré que l'utilisation de la texture est nécessaire pour caractériser parfaitement les cibles.

TAB. 3.5 – Travaux réalisés.

Interférométrie RSO	<ul style="list-style-type: none"> • Analyse d'une série d'interférogrammes ERS-1/2. • Estimation de déplacement de glaciers. • Proposition d'une méthode d'estimation des offsets des phases interférométriques. • Analyse des franges résiduelles présentes dans les interférogrammes.
Polarimétrie	<ul style="list-style-type: none"> • Comparaison des modèles α/β et TSVM. • Proposition d'une définition d'un vecteur de rétrodiffusion associé au mécanisme de rétrodiffusion moyen.
Segmentation	<ul style="list-style-type: none"> • Modélisation de la texture par une distribution de Fisher. • Démonstration de la distribution de KummerU. • Proposition de courbes COR. • Validation de l'apport de la texture pour la segmentation d'image.

Perspectives

Comme perspectives de ces travaux de thèse, nous pouvons dégager plusieurs pistes :

1. En premier lieu, on peut s'intéresser à la validation de la méthode proposée pour estimer

les offsets sur les phases interférométriques à partir de deux interférogrammes acquis en passes ascendante et descendante. Nous avons vu que sur l'exemple synthétique, l'algorithme estime parfaitement les offsets. On peut se demander quelles sont les performances de cette méthode vis à vis du rapport signal sur bruit.

2. Une deuxième piste prometteuse concerne l'utilisation de la texture dans les images polarimétriques. Nous avons montré que l'utilisation d'une distribution appropriée pour modéliser la texture est nécessaire pour segmenter correctement les images polarimétriques. De part son comportement de loi à queue lourde et de loi à tête lourde, la distribution de Fisher est un bon candidat pour modéliser ce terme. Contrairement aux distributions usuelles, la distribution de Fisher/KummerU permet une bonne caractérisation des milieux urbains. Il est intéressant d'implémenter la distribution de KummerU pour la matrice de cohérence dans des algorithmes de classification tel que le classifieur Wishart proposé par Lee *et al.* [Lee 99].
3. La présence du speckle dans les images radar biaise l'estimation des paramètres polarimétriques. Une fenêtre d'analyse contenant environ 60 vues indépendantes est requise pour une estimation non biaisée de ces paramètres [Lope 05b] [Touz 07a]. Une approche possible serait d'utiliser une partition sur-segmentée obtenue par l'algorithme de segmentation hiérarchique pour estimer des quantités polarimétriques nécessaires à la caractérisation des cibles (entropie, anisotropie, paramètres des modèles α/β et TSVM). Ces paramètres peuvent être injectés dans un classifieur non supervisé $H/\alpha/A$ en utilisant le critère de Wishart ou encore celui basé sur la distribution de KummerU.
4. On peut aussi s'intéresser à la démonstration de la distribution de KummerU en utilisant uniquement des relations issues de la transformée de Mellin. En effet, la distribution de Fisher s'exprime via les statistiques de seconde espèce comme étant la convolution de Mellin d'une distribution Gamma par une distribution Gamma inverse [Nico 02] [Nico 03] [Nico 06].

$$\mathcal{F}[m, \mathcal{L}, \mathcal{M}] = \mathcal{G}[m, \mathcal{L}] \hat{\star} \mathcal{GI}[1, \mathcal{M}] \quad (3.92)$$

Or le produit d'une distribution Gamma par une distribution de Wishart s'exprime à l'aide de la fonction de Bessel modifiée de seconde espèce BesselK. On peut aussi noter que la fonction KummerU est une fonction de seconde espèce, elle est donc explicitement liée à la transformée de Mellin. L'utilisation de la transformée de Mellin semble prometteur pour exprimer la distribution de la matrice de cohérence pour une texture distribuée selon une loi de Fisher à l'aide de la fonction de KummerU.

5. J. Inglada et G. Mercier ont proposé d'utiliser un développement en série de Edgeworth pour modéliser un histogramme d'une image radar en intensité [Ingl 07]. Cette approche peut être utilisée afin de modéliser la texture présente dans les images polarimétriques. En utilisant le modèle multiplicatif scalaire, on peut se demander quelle est la distribution de la matrice de covariance.
6. Dans cette thèse, nous avons toujours utilisé le modèle multiplicatif scalaire. La texture est ainsi considérée indépendante du canal de polarisation. Il peut être intéressant d'étendre

le travail proposé dans cette thèse au cas où la texture est dépendante du canal de polarisation, la matrice de covariance s'exprime de la façon suivante :

$$\Sigma = \mu \Sigma_h \quad (3.93)$$

où μ est cette fois ci une matrice diagonale de taille $p \times p$.

TAB. 3.6 – Perspectives.

Interférométrie RSO	<ul style="list-style-type: none"> • Valider la méthode d'estimation des offsets sur d'autres données réelles. • Évaluer la robustesse de l'algorithme vis à vis du bruit.
Polarimétrie	<ul style="list-style-type: none"> • Proposer une méthode de classification à l'aide de paramètres invariant par rotation. • Adapter le TSVM dans le cas "dual pol".
Segmentation	<ul style="list-style-type: none"> • Utiliser la distribution de KummerU dans d'autres algorithmes de segmentation ou classification. • Étudier les cas aux limites de la distribution de Fisher/KummerU. • Modéliser la texture en utilisant le développement en série de Edgeworth. • Reprendre les travaux dans le cas du modèle multiplicatif non scalaire.

Annexes

Annexe A

Implémentation du modèle α/β

A.1 Calcul des paramètres du modèle α/β

Le modèle α/β a été introduit par S.R. Cloude et E. Pottier pour paramétriser un vecteur propre normé à l'aide de cinq angles par [Clou 97] :

$$\mathbf{k}_{\alpha/\beta}(\alpha, \beta, \delta, \gamma) = e^{j\theta} \begin{bmatrix} \cos \alpha_i \\ \sin \alpha_i \cos \beta_i e^{j\delta_i} \\ \sin \alpha_i \sin \beta_i e^{j\gamma_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

Les cinq paramètres du modèle α/β sont calculés par :

$$\theta = \arg(k_1) \quad (\text{A.2})$$

$$\alpha = \text{atan} \left(\sqrt{\frac{|k_2|^2 + |k_3|^2}{|k_1|^2}} \right) \quad (\text{A.3})$$

$$\beta = \text{atan} \left(\sqrt{\frac{|k_3|^2}{|k_2|^2}} \right) \quad (\text{A.4})$$

$$\gamma = \arg(k_3) \quad (\text{A.5})$$

$$\delta = \arg(k_2) \quad (\text{A.6})$$

$$(\text{A.7})$$

Les angles α et β prennent des valeurs dans l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$. Les trois autres angles sont définis dans l'intervalle $[0, \pi]$.

A.2 Modification du domaine de définition des paramètres

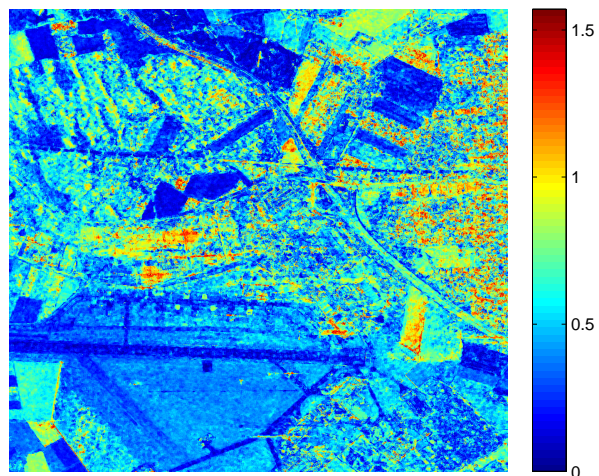
Les équations A.8, A.9 et A.10 permettent d'étendre le domaine de définition de l'angle α à l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

$$\mathbf{k}_{\alpha/\beta}(\alpha, \beta, \delta, \gamma) = \mathbf{k}_{\alpha/\beta}(-\alpha, \beta, \delta \pm \pi, \gamma \pm \pi) \quad (\text{A.8})$$

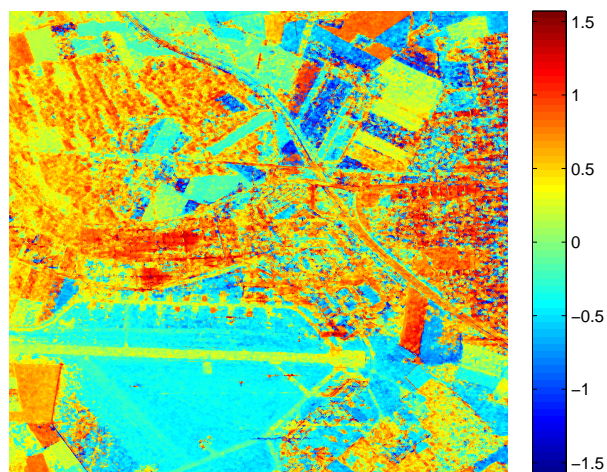
$$= \mathbf{k}_{\alpha/\beta}(\alpha, -\beta, \delta, \gamma \pm \pi) \quad (\text{A.9})$$

$$= \mathbf{k}_{\alpha/\beta}(-\alpha, -\beta, \delta \pm \pi, \gamma) \quad (\text{A.10})$$

Les figures A.1(a) et A.1(b) montrent respectivement l'image contenant la valeur de l'angle α du premier vecteur propre pour $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$ et pour $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Les résultats sont montrés sur l'image d'Oberpfaffenhofen.



(a)



(b)

FIG. A.1 – Angle α du premier vecteur propre sur l'image d'Oberpfaffenhofen (1200×1300 pixels) (a) pour $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$, (b) pour $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

Annexe B

Implémentation du modèle TSVM

Le Target Scattering Vector Model (TSVM) proposé par R. Touzi est une méthode basée sur la décomposition de Huynen [Touz 04a] [Touz 05] [Touz 07b]. Elle consiste en la projection de la matrice de diffusion, codiagonalisée par la méthode de Takagi [Taka 27], dans la base de Pauli. Puis en l'extraction de paramètres pour caractériser les mécanismes de rétrodiffusion mis en jeu.

B.1 Mise en place du TSVM

J.R. Huynen a proposé en 1978 un méthode de décomposition de la matrice de rétrodiffusion $\tilde{\mathbf{S}}$ à l'aide d'un jeu de paramètres qui sont directement reliés à des données physiques mesurables [Huyn 78]. Ce jeu de paramètres est le suivant : $\{\psi, \tau_m, m, \nu, \gamma, \rho\}$. Les angles ψ et τ_m représentent respectivement l'orientation et l'ellipticité de l'onde électromagnétique. Le paramètre m correspond à l'amplitude maximale de l'onde rétrodiffusée, elle est aussi appelée amplitude maximale de la cible. L'angle γ est définie comme étant l'angle caractéristique, tandis que l'angle ρ représente l'angle absolue de la cible. La décomposition de Huynen s'écrit de la façon suivante :

$$\tilde{\mathbf{S}} = \tilde{\mathbf{R}}(\psi) \tilde{\mathbf{T}}(\tau_m) \tilde{\mathbf{S}}_d \tilde{\mathbf{T}}(\tau_m) \tilde{\mathbf{R}}(-\psi) \quad (\text{B.1})$$

avec :

$$\tilde{\mathbf{S}}_d = \begin{bmatrix} m e^{2j(\nu+\rho)} & 0 \\ 0 & m \tan^2 \gamma e^{-2j(\nu-\rho)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{bmatrix} \quad (\text{B.2})$$

$$\tilde{\mathbf{R}}(\psi) = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi \\ \sin \psi & \cos \psi \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \tilde{\mathbf{T}}(\tau_m) = \begin{bmatrix} \cos \tau_m & -j \sin \tau_m \\ -j \sin \tau_m & \cos \tau_m \end{bmatrix} \quad (\text{B.3})$$

B.2 Calcul littéral de la matrice de diffusion $\tilde{\mathbf{S}}$

Dans ce paragraphe, on se propose de calculer littéralement l'expression de la matrice de diffusion $\tilde{\mathbf{S}}$. Pour cela, calculons le terme $\tilde{\mathbf{R}}(\psi)\tilde{\mathbf{T}}(\tau_m)$:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{R}}(\psi)\tilde{\mathbf{T}}(\tau_m) &= \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi \\ \sin \psi & \cos \psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \tau_m & -j \sin \tau_m \\ -j \sin \tau_m & \cos \tau_m \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \tau_m + j \sin \psi \sin \tau_m & -\sin \psi \cos \tau_m - j \cos \psi \sin \tau_m \\ \sin \psi \cos \tau_m - j \cos \psi \sin \tau_m & \cos \psi \cos \tau_m - j \sin \psi \sin \tau_m \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a + jb & -(c + jd) \\ c - jd & a - jb \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (\text{B.4})$$

avec :

$$a = \cos \psi \cos \tau_m \quad (\text{B.5})$$

$$b = \sin \psi \sin \tau_m \quad (\text{B.6})$$

$$c = \sin \psi \cos \tau_m \quad (\text{B.7})$$

$$d = \cos \psi \sin \tau_m \quad (\text{B.8})$$

On peut tout de suite remarquer que $ab = cd$. Cette relation va nous permettre de simplifier les expressions suivantes. De la même façon que précédemment, on calcule le produit $\tilde{\mathbf{T}}(\tau_m)\tilde{\mathbf{R}}(-\psi)$

$$\tilde{\mathbf{T}}(\tau_m)\tilde{\mathbf{R}}(-\psi) = \begin{bmatrix} a + jb & c - jd \\ -(c + jd) & a - jb \end{bmatrix} \quad (\text{B.9})$$

En combinant les équations B.1, B.4 et B.9, on obtient l'expression littérale de la matrice de diffusion en fonction des paramètres de la décomposition de Huynen.

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{S}} &= \begin{bmatrix} a + jb & -(c + jd) \\ c - jd & a - jb \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a + jb & c - jd \\ -(c + jd) & a - jb \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mu_1(a + jb)^2 + \mu_2(c + jd)^2 & \mu_1(a + jb)(c - jd) - \mu_2(a - jb)(c + jd) \\ \mu_1(a + jb)(c - jd) - \mu_2(a - jb)(c + jd) & \mu_1(c - jd)^2 + \mu_2(a - jb)^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} S_{hh} & S_{hv} \\ S_{hv} & S_{vv} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Maintenant, il nous faut décomposer la matrice de diffusion $\tilde{\mathbf{S}}$ dans la base de Pauli, on doit donc calculer les trois termes suivants : $S_{hh} + S_{vv}$, $S_{hh} - S_{vv}$ et $2S_{hv}$ en utilisant l'hypothèse de réciprocité.

Calcul de $S_{hh} + S_{vv}$. On peut exprimer les paramètres S_{hh} et S_{vv} par les deux relations suivantes :

$$S_{hh} = \mu_1(a^2 - b^2 + 2jab) + \mu_2(c^2 - d^2 + 2jcd) \quad (\text{B.10})$$

$$S_{vv} = \mu_1(c^2 - d^2 - 2jcd) + \mu_2(a^2 - b^2 - 2jab) \quad (\text{B.11})$$

Par conséquent, on obtient facilement l'expression du terme $S_{hh} + S_{vv}$.

$$\begin{aligned}S_{hh} + S_{vv} &= \mu_1(a^2 - b^2 + c^2 - d^2) + \mu_2(a^2 - b^2 + c^2 - d^2) \\ &= (\mu_1 + \mu_2)(\cos^2 \psi \cos^2 \tau_m - \sin^2 \psi \sin^2 \tau_m + \sin^2 \psi \cos^2 \tau_m - \cos^2 \psi \sin^2 \tau_m) \\ &= (\mu_1 + \mu_2)(\cos^2 \tau_m - \sin^2 \tau_m) \\ &= (\mu_1 + \mu_2) \cos(2\tau_m)\end{aligned}\quad (\text{B.12})$$

Calcul de $S_{hh} - S_{vv}$. De la même façon que précédemment, on calcule le terme $S_{hh} - S_{vv}$. Pour cela, on utilise les équations B.10 et B.11, on a :

$$\begin{aligned} S_{hh} - S_{vv} &= \mu_1(a^2 - b^2 - c^2 + d^2 + 4jab) + \mu_2(-a^2 + b^2 + c^2 - d^2 + 4jab) \\ &= (\mu_1 - \mu_2)(a^2 - b^2 - c^2 + d^2) + j(\mu_1 + \mu_2)4ab \end{aligned}$$

Pour pouvoir exprimer $S_{hh} - S_{vv}$ à l'aide des paramètres de la décomposition de Huynen, il faut calculer deux termes : $a^2 - b^2 - c^2 + d^2$ et $4ab$.

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 - c^2 + d^2 &= (\cos^2 \psi \cos^2 \tau_m - \sin^2 \psi \sin^2 \tau_m - \sin^2 \psi \cos^2 \tau_m - \cos^2 \psi \sin^2 \tau_m) \\ &= \cos^2 \psi - \sin^2 \psi \\ &= \cos(2\psi) \end{aligned} \tag{B.13}$$

$$\begin{aligned} 4ab &= 2 \cos \psi \sin \psi \ 2 \cos \tau_m \sin \tau_m \\ &= \sin(2\psi) \sin(2\tau_m) \end{aligned} \tag{B.14}$$

Les équations B.13 et B.14 nous permettent donc de pouvoir exprimer $S_{hh} - S_{vv}$ de la façon suivante :

$$S_{hh} - S_{vv} = (\mu_1 - \mu_2) \cos(2\psi) + j(\mu_1 + \mu_2) \sin(2\psi) \sin(2\tau_m) \tag{B.15}$$

Calcul de $2S_{hv}$.

$$\begin{aligned} 2S_{hh} &= \mu_1(ac - jad + jbc + bd) - \mu_2(ac + jad - jbc + bd) \\ &= (\mu_1 - \mu_2)(2ac + 2bd) + j(\mu_1 + \mu_2)(-2ad + 2bc) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2ac + 2bd &= (2 \cos \psi \sin \psi \cos^2 \tau_m + 2 \cos \psi \sin \psi \sin^2 \tau_m) \\ &= 2 \cos \psi \sin \psi \\ &= \sin(2\psi) \end{aligned} \tag{B.16}$$

$$\begin{aligned} 2ad - 2bc &= 2 \cos^2 \psi \cos \tau_m \sin \tau_m - 2 \sin^2 \psi \cos \tau_m \sin \tau_m \\ &= (\cos^2 \psi - \sin^2 \psi)(2 \cos \tau_m \sin \tau_m) \\ &= \cos(2\psi) \sin(2\tau_m) \end{aligned} \tag{B.17}$$

Par conséquent, on obtient :

$$2S_{hv} = (\mu_1 - \mu_2) \sin(2\psi) - j(\mu_1 + \mu_2) \cos(2\psi) \sin(2\tau_m) \tag{B.18}$$

B.3 Vecteur de diffusion

Le vecteur de diffusion \vec{k} s'exprime donc de la façon suivante :

$$\vec{k} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} S_{hh} + S_{vv} \\ S_{hh} - S_{vv} \\ 2S_{hv} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} (\mu_1 + \mu_2) \cos(2\tau_m) \\ j(\mu_1 + \mu_2) \sin(2\psi) \sin(2\tau_m) + (\mu_1 - \mu_2) \cos(2\psi) \\ -j(\mu_1 + \mu_2) \cos(2\psi) \sin(2\tau_m) + (\mu_1 - \mu_2) \sin(2\psi) \end{bmatrix} \tag{B.19}$$

R. Touzi définit le vecteur de diffusion de la méthode TSVM (\vec{e}_T^{TSVM}) comme étant la projection dans la base de Pauli de matrice de diffusion codiagonalisée par la méthode de Takagi [Taka 27] [Touz 04a] [Touz 07b]. Son expression est la suivante,

$$\vec{e}_T^{\text{TSVM}} = m |\vec{e}_T| e^{j\Phi_s} \vec{V} \quad (\text{B.20})$$

avec :

$$\vec{V} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_s \cos(2\tau_m) \\ j \cos \alpha_s \sin(2\psi) \sin(2\tau_m) + \cos(2\psi) \sin \alpha_s e^{j\Phi_{\alpha_s}} \\ -j \cos \alpha_s \cos(2\psi) \sin(2\tau_m) + \sin(2\psi) \sin \alpha_s e^{j\Phi_{\alpha_s}} \end{bmatrix} \quad (\text{B.21})$$

Le terme Φ_s correspond à la phase absolue de la cible. Ce terme n'est pas observable. Par la suite, nous laisserons de côté ce terme. Le modèle TSVM caractérise les réflecteurs cohérents à l'aide de cinq paramètres : $(\psi, \tau_m, m, \alpha_s, \Phi_{\alpha_s})$. Les trois premiers termes sont ceux issus de la décomposition de Huynen. α_s et Φ_{α_s} sont les coordonnées polaires du réflecteur symétrique.

Ainsi, par analogie entre les équations B.19 et B.21, on obtient aisément la relation suivante entre les paramètres α_s , Φ_{α_s} et les covaleurs propres de la matrice de diffusion (μ_1 et μ_2).

$$\tan(\alpha_s) e^{j\Phi_{\alpha_s}} = \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \quad (\text{B.22})$$

Le modèle du TSVM peut se mettre sous la forme [Touz 07b] :

$$\vec{e}_T^{\text{SV}} = m |\vec{e}_T|_m e^{j\Phi_s} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(2\psi) & -\sin(2\psi) \\ 0 & \sin(2\psi) & \cos(2\psi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha_s \cos(2\tau_m) \\ \sin \alpha_s e^{j\Phi_{\alpha_s}} \\ -j \cos \alpha_s \sin(2\tau_m) \end{bmatrix} \quad (\text{B.23})$$

avec $|\vec{e}_T|_m = |\vec{e}_T^{\text{SV}}|/m$. Par conséquent, R. Touzi définit le vecteur invariant par orientation $\vec{V}^{\text{orient-inv}}$ en fonction des paramètres m , τ_m , α_s et Φ_{α_s} de la façon suivante :

$$\vec{V}^{\text{orient-inv}} = m \begin{bmatrix} \cos \alpha_s \cos(2\tau_m) \\ \sin \alpha_s e^{j\Phi_{\alpha_s}} \\ -j \cos \alpha_s \sin(2\tau_m) \end{bmatrix} \quad (\text{B.24})$$

Du fait de leur invariance par rotation, les paramètres τ_m , α_s et Φ_{α_s} sont nécessaires pour une description non-ambiguës du mécanisme de rétrodiffusion mis en jeu. Nous allons voir dans la partie suivante, comment faire pour calculer les paramètres du TSVM.

B.4 Expression littérale des paramètres du TSVM via le vecteur de rétrodiffusion

B.4.1 Calcul de m et γ

$$|\vec{e}_T|_m = \frac{\sqrt{2}}{m} \sqrt{|S_{hh}|^2 + |S_{vv}|^2 + 2|S_{hv}|^2} \quad (\text{B.25})$$

Comme R. Touzi et F. Charbonneau l'ont montré [Touz 02], le paramètre m correspondant à l'amplitude maximum de l'onde rétrodiffusée, peut-être déterminé numériquement à l'aide des

valeurs propres de la matrice de Graves [Kost 86]. Si l'on note μ_1 et μ_2 les covaleurs propres de la matrice de rétrodiffusion \mathbf{S} . En notant x le covecteur propre associé à la covaleur propre μ_i , par définition, on obtient la relation :

$$\begin{aligned} \mathbf{S}x &= \mu_i x^* \\ \mathbf{S}\mu_i^* x &= \mu_i \mu_i^* x^* \text{ après multiplication par } \mu_i^* \\ \mathbf{S}(\mu_i x^*)^* &= |\mu_i|^2 x^* \\ \mathbf{S}(\mathbf{S}x)^* &= |\mu_i|^2 x^* \\ \mathbf{S}\mathbf{S}^* x^* &= |\mu_i|^2 x^* \\ \mathbf{S}^* \mathbf{S}x &= |\mu_i|^2 x \\ \mathbf{G}x &= |\mu_i|^2 x \end{aligned}$$

Comme la matrice de rétrodiffusion \mathbf{S} est symétrique, la matrice de Graves $\mathbf{G} = \mathbf{S}^* \mathbf{S}$ est une matrice hermitienne, et par conséquent ses valeurs propres (λ_1 et λ_2) sont des réels positifs. On a donc la relation suivante entre λ_i et μ_i .

$$\lambda_i = |\mu_i|^2$$

L'équation B.2 montre la relation entre m , γ et les covaleurs propres de la matrice de rétrodiffusion. On obtient ainsi l'expression littérale des paramètres m et γ :

$$m = |\mu_1| = \sqrt{\lambda_1} \quad (\text{B.26})$$

$$\gamma = \sqrt{\text{atan}\left(\frac{\sqrt{\lambda_2}}{m}\right)} \quad (\text{B.27})$$

B.4.2 Calcul de Φ_s et ψ

A l'aide de B.21, on obtient aisément l'expression de Φ_s :

$$\Phi_s = \arg(S_{hh} + S_{vv}) \quad (\text{B.28})$$

En utilisant la même équation, on obtient les deux relations suivantes :

$$\begin{aligned} \Re\left(\frac{S_{hh} - S_{vv}}{m|\vec{e}_T|_m e^{j\Phi_s}}\right) &= \cos(2\psi) \sin \alpha_s \cos \Phi_{\alpha_s} = R_2 \\ \Re\left(\frac{2S_{hv}}{m|\vec{e}_T|_m e^{j\Phi_s}}\right) &= \sin(2\psi) \sin \alpha_s \cos \Phi_{\alpha_s} = R_3 \end{aligned}$$

L'angle ψ s'exprime donc par la relation suivante :

$$\psi = \frac{1}{2} \text{atan}\left(\frac{R_3}{R_2}\right) \quad (\text{B.29})$$

B.4.3 Calcul de α_s , τ_m et Φ_{α_s}

En utilisant l'équation B.21, on exprime les deux relations suivantes :

$$\Im\left(\frac{S_{hh} - S_{vv}}{m|\vec{e}_T|_m e^{j\Phi_s}}\right) = \cos(2\psi) \sin \alpha_s \sin \Phi_{\alpha_s} + \cos \alpha_s \sin(2\tau_m) \sin(2\psi) = I_2 \quad (\text{B.30})$$

$$\Im\left(\frac{2S_{hv}}{m|\vec{e}_T|_m e^{j\Phi_s}}\right) = \sin(2\psi) \sin \alpha_s \sin \Phi_{\alpha_s} - \cos \alpha_s \sin(2\tau_m) \cos(2\psi) = I_3 \quad (\text{B.31})$$

L'équation B.31 permet d'exprimer Φ_{α_s} à l'aide de ψ , τ_m et α_s de la façon suivante

$$\sin \Phi_{\alpha_s} = \frac{1}{\sin(2\psi) \sin \alpha_s} (I_3 + \cos \alpha_s \sin(2\tau_m) \cos(2\psi)) \quad (\text{B.32})$$

En combinant les équations B.30 et B.32, on a :

$$I_2 = \frac{\sin(2\psi)}{\cos(2\psi)} (I_3 + \cos \alpha_s \sin(2\tau_m) \cos(2\psi)) + \cos \alpha_s \sin(2\tau_m) \sin(2\psi) \quad (\text{B.33})$$

De plus, l'équation B.21 permet de relier l'angle α_s en fonction de l'angle τ_m par :

$$\cos \alpha_s = \frac{|S_{hh} + S_{vv}|}{\cos(2\tau_m) m |\vec{e}_T|_m} \quad (\text{B.34})$$

Finalement, on peut combiner les équations B.33 et B.34 pour exprimer τ_m en fonction de variables connues analytiquement. On obtient ainsi :

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{\cos(2\psi)}{\sin(2\psi)} I_3 + \frac{(\cos(2\psi))^2 \tan(2\tau_m)}{\sin(2\psi)} \frac{|S_{hh} + S_{vv}|}{\cos(2\tau_m) m |\vec{e}_T|_m} + \frac{\tan(2\tau_m) \sin(2\psi) |S_{hh} + S_{vv}|}{m |\vec{e}_T|_m} \\ I_2 - \frac{I_3}{\tan(2\psi)} &= \tan(2\tau_m) \left(\frac{(\cos(2\psi))^2}{\sin(2\psi)} + \sin(2\psi) \right) \frac{|S_{hh} + S_{vv}|}{m |\vec{e}_T|_m} \\ \tan(2\tau_m) &= \frac{m |\vec{e}_T|_m}{|S_{hh} + S_{vv}|} \left(I_2 - \frac{I_3}{\tan(2\psi)} \right) \sin(2\psi) \end{aligned}$$

Au final, on exprime les paramètres τ_m , α_s et Φ_{α_s} à l'aide des trois équations suivantes :

$$\tau_m = \frac{1}{2} \operatorname{atan} \left(\frac{m |\vec{e}_T|_m}{|S_{hh} + S_{vv}|} \left(I_2 - \frac{I_3}{\tan(2\psi)} \right) \sin(2\psi) \right) \quad (\text{B.35})$$

$$\alpha_s = \operatorname{acos} \left(\frac{|S_{hh} + S_{vv}|}{\cos(2\tau_m) m |\vec{e}_T|_m} \right) \quad (\text{B.36})$$

$$\Phi_{\alpha_s} = \operatorname{asin} \left(\frac{1}{\sin(2\psi) \sin \alpha_s} \left(I_3 + \cos \alpha_s \sin(2\tau_m) \cos(2\psi) \right) \right) \quad (\text{B.37})$$

B.4.4 Calcul de ν

En remplaçant l'expression des covaleurs propres (μ_1 et μ_2) de la matrice \mathbf{S} définie par [Huy 65] (équation B.2) dans l'équation B.22, on obtient :

$$\begin{aligned} \tan(\alpha_s) e^{j\Phi_{\alpha_s}} &= \frac{e^{2j(\nu+\rho)} - e^{-2j(\nu-\rho)} \tan^2 \gamma}{e^{2j(\nu+\rho)} + e^{-2j(\nu-\rho)} \tan^2 \gamma} \\ e^{2j(\nu+\rho)} - \tan^2 \gamma e^{-2j(\nu-\rho)} &= \tan(\alpha_s) e^{j\Phi_{\alpha_s}} \left(e^{2j(\nu+\rho)} + \tan^2 \gamma e^{-2j(\nu-\rho)} \right) \\ e^{2j\nu} - \tan^2 \gamma e^{-2j\nu} &= \tan(\alpha_s) e^{j\Phi_{\alpha_s}} \left(e^{2j\nu} + \tan^2 \gamma e^{-2j\nu} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.38})$$

En prenant la partie réelle de l'équation B.38, on obtient :

$$\begin{aligned} \cos(2\nu) (1 - \tan^2 \gamma) &= \tan(\alpha_s) \cos \Phi_{\alpha_s} (\cos(2\nu) + \tan^2 \gamma \cos(2\nu)) + \\ &\quad \tan(\alpha_s) \sin \Phi_{\alpha_s} (\sin(2\nu) - \tan^2 \gamma \sin(2\nu)) \\ \sin(2\nu) (\tan(\alpha_s) \sin \Phi_{\alpha_s} (1 - \tan^2 \gamma)) &= \cos(2\nu) (1 - \tan^2 \gamma - \tan(\alpha_s) \cos \Phi_{\alpha_s} (1 + \tan^2 \gamma)) \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\nu = \frac{1}{2} \operatorname{atan} \left(\frac{1 - \tan^2 \gamma - \tan(\alpha_s) \cos \Phi_{\alpha_s} (1 + \tan^2 \gamma)}{\tan(\alpha_s) \sin \Phi_{\alpha_s} (1 - \tan^2 \gamma)} \right) \quad (\text{B.39})$$

B.5 Expression littérale des paramètres du TSVM via la matrice de cohérence

Dans cette partie, on montre comment faire pour calculer les paramètres du TSVM via la matrice de cohérence. Tout d'abord, partons de l'expression générale d'une matrice de cohérence T , on a :

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 2A_0 & C - jD & H + jG \\ C + jD & B_0 + B & E + jF \\ H - jG & E - jF & B_0 - B \end{bmatrix} \quad (\text{B.40})$$

À partir de l'expression du vecteur de rétrodiffusion $\vec{e}_T^{\mathbf{SV}}$ donnée par R. Touzi (Eq. B.23), on peut calculer les paramètres de la matrice de cohérence à l'aide des paramètres du modèle TSVM. On obtient les neuf relations suivantes :

$$2A_0 = \cos^2 \alpha_s \cos^2(2\tau_m) \quad (\text{B.41})$$

$$C = \cos \alpha_s \cos(2\tau_m) \cos(2\psi) \sin \alpha_s \cos \Phi_{\alpha_s} \quad (\text{B.42})$$

$$D = \cos \alpha_s \cos(2\tau_m) \left(\cos(2\psi) \sin \alpha_s \sin \Phi_{\alpha_s} + \sin(2\psi) \cos \alpha_s \sin(2\tau_m) \right) \quad (\text{B.43})$$

$$H = \cos \alpha_s \cos(2\tau_m) \sin(2\psi) \sin \alpha_s \cos \Phi_{\alpha_s} \quad (\text{B.44})$$

$$G = -\cos \alpha_s \cos(2\tau_m) \left(\sin(2\psi) \sin \alpha_s \sin \Phi_{\alpha_s} - \cos(2\psi) \cos \alpha_s \sin(2\tau_m) \right) \quad (\text{B.45})$$

$$\begin{aligned} B_0 + B &= \cos^2(2\psi) \sin^2 \alpha_s \cos^2 \Phi_{\alpha_s} + \cos^2(2\psi) \sin^2 \alpha_s \sin^2 \Phi_{\alpha_s} \\ &\quad + 2 \cos(2\psi) \sin \alpha_s \sin \Phi_{\alpha_s} \sin(2\psi) \cos \alpha_s \sin(2\tau_m) \\ &\quad + \sin^2(2\psi) \cos^2 \alpha_s \sin^2(2\tau_m) \end{aligned} \quad (\text{B.46})$$

$$\begin{aligned} B_0 - B &= \sin^2(2\psi) \sin^2 \alpha_s \cos^2 \Phi_{\alpha_s} + \sin^2(2\psi) \sin^2 \alpha_s \sin^2 \Phi_{\alpha_s} \\ &\quad - 2 \cos(2\psi) \sin \alpha_s \sin \Phi_{\alpha_s} \sin(2\psi) \cos \alpha_s \sin(2\tau_m) \\ &\quad + \cos^2(2\psi) \cos^2 \alpha_s \sin^2(2\tau_m) \end{aligned} \quad (\text{B.47})$$

$$\begin{aligned} E &= \cos(2\psi) \sin(2\psi) - 2 \cos(2\psi) \sin(2\psi) \cos^2 \alpha_s - 2 \cos^2(2\psi) \sin \alpha_s \sin \Phi_{\alpha_s} \cos \alpha_s \sin(2\tau_m) \\ &\quad + \cos \alpha_s \sin(2\tau_m) \sin \alpha_s \sin \Phi_{\alpha_s} + \cos(2\psi) \sin(2\psi) \cos^2 \alpha_s \cos^2(2\tau_m) \end{aligned} \quad (\text{B.48})$$

$$F = \sin \alpha_s \cos \Phi_{\alpha_s} \cos \alpha_s \sin(2\tau_m) \quad (\text{B.49})$$

À partir des équations B.42 et B.44, on en déduit l'angle ψ du modèle TSVM.

$$\psi = \frac{1}{2} \operatorname{atan} \left(\frac{H}{C} \right) \quad (\text{B.50})$$

À l'aide des équations B.42 et B.49, on exprime l'angle τ_m à l'aide de l'angle ψ défini précédemment.

$$\tau_m = \frac{1}{2} \operatorname{atan} \left(\frac{F \cos(2\psi)}{C} \right) \quad (\text{B.51})$$

Maintenant que l'angle τ_m est connu, on peut calculer l'angle α_s en utilisant l'expression du générateur A_0 (Eq. B.41)

$$\alpha_s = a \cos \left(\sqrt{\frac{2A_0}{\cos^2(2\tau_m)}} \right) \quad (\text{B.52})$$

Puis, on obtient l'expression littérale de l'angle Φ_{α_s} par l'équation B.43 :

$$\Phi_{\alpha_s} = a \sin \left(\frac{D - \cos^2 \alpha_s \cos(2\tau_m) \sin(2\tau_m) \sin(2\psi)}{\cos \alpha_s \sin \alpha_s \cos(2\tau_m) \cos(2\psi)} \right) \quad (\text{B.53})$$

B.6 Ambiguïté sur l'angle ψ

J.R. Huynen a montré que si ψ est une solution de l'équation B.1 alors $\psi \pm \frac{\pi}{2}$ est aussi une solution [Huyn 78]. R. Touzi propose de restreindre l'intervalle de définition de ψ à $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ [Touz 07b].

Afin de comprendre l'influence de la solution $\psi + \frac{\pi}{2}$ sur les autres paramètres du TSVM, on cherche les nouveaux paramètres du TSVM (Φ_s^{new} , τ_m^{new} , m^{new} , α_s^{new} et $\Phi_{\alpha_s}^{new}$) pour que le modèle soit valable. On doit donc résoudre le système suivant :

$$\vec{e}_T^{\text{SV}}(\Phi_s, \psi, \tau_m, m, \alpha_s, \Phi_{\alpha_s}) = \vec{e}_T^{\text{SV}}(\Phi_s^{new}, \psi \pm \frac{\pi}{2}, \tau_m^{new}, m^{new}, \alpha_s^{new}, \Phi_{\alpha_s}^{new}) \quad (\text{B.54})$$

R. Touzi a montré qu'il faut prendre $\tau_m^{new} = -\tau_m$. On cherche maintenant les valeurs des autres paramètres du modèle TSVM. Pour cela, repartons de l'équation de base du TSVM (Eq. B.1), en remplaçant les nouveaux paramètres du TSVM par leur expression. On obtient donc :

$$\tilde{\mathbf{S}} = \tilde{\mathbf{R}}(\psi + \frac{\pi}{2}) \tilde{\mathbf{T}}(-\tau_m) \tilde{\mathbf{S}}_d \tilde{\mathbf{T}}(-\tau_m) \tilde{\mathbf{R}}(-(\psi + \frac{\pi}{2})) \quad (\text{B.55})$$

Comme $\tilde{\mathbf{R}}$ est la matrice de rotation, on montre facilement que $\tilde{\mathbf{R}}(\psi + \frac{\pi}{2}) = \tilde{\mathbf{R}}(\psi) \tilde{\mathbf{R}}(\frac{\pi}{2})$. De la même façon, on montre que :

$$\tilde{\mathbf{R}}(\psi + \frac{\pi}{2}) \tilde{\mathbf{T}}(-\tau_m) = \tilde{\mathbf{R}}(\psi) \tilde{\mathbf{T}}(\tau_m) \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.56})$$

Un calcul similaire permet d'obtenir la relation suivante :

$$\tilde{\mathbf{T}}(-\tau_m) \tilde{\mathbf{R}}(-(\psi + \frac{\pi}{2})) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{T}}(\tau_m) \tilde{\mathbf{R}}(-\psi) \quad (\text{B.57})$$

En injectant les équations B.56 et B.57 dans B.55, on obtient :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{R}}(\psi + \frac{\pi}{2}) \tilde{\mathbf{T}}(-\tau_m) \tilde{\mathbf{S}}_d \tilde{\mathbf{T}}(-\tau_m) \tilde{\mathbf{R}}(-(\psi + \frac{\pi}{2})) &= \tilde{\mathbf{R}}(\psi) \tilde{\mathbf{T}}(\tau_m) \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{S}}_d \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{T}}(\tau_m) \tilde{\mathbf{R}}(-\psi) \\ &= \tilde{\mathbf{R}}(\psi) \tilde{\mathbf{T}}(\tau_m) \begin{bmatrix} \mu_2 & 0 \\ 0 & \mu_1 \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{T}}(\tau_m) \tilde{\mathbf{R}}(-\psi) \end{aligned} \quad (\text{B.58})$$

On en déduit les paramètres α_s^{new} et $\Phi_{\alpha_s}^{new}$ en comparant les équations B.58 et B.22, on obtient :

$$\tan \alpha_s^{new} e^{j\Phi_{\alpha_s}^{new}} = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1} \quad (\text{B.59})$$

$$= -\frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \quad (\text{B.60})$$

$$= -\tan(\alpha_s) e^{j\Phi_{\alpha_s}} \quad (\text{B.61})$$

L'équation B.61 montre que le signe "moins" est en facteur devant les termes $\tan(\alpha_s)$ et $e^{j\Phi_{\alpha_s}}$. Il y a donc deux choix possibles pour résoudre le problème de l'ambiguïté sur l'angle ψ .

- Le premier choix consiste à faire rentrer le signe "moins" dans la fonction tangente, par conséquent $\alpha_s^{new} = -\alpha_s$. On étend ainsi le domaine de définition de l'angle α_s à l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
- Le second choix est celui de prendre en compte le signe "moins" par l'intermédiaire de l'angle Φ_{α_s} . L'angle Φ_{α_s} va ainsi voir son domaine de définition agrandi à l'intervalle $[-\pi, \pi]$.

Les équations B.62 et B.63 montrent ces deux solutions.

$$\tan \alpha_s^{new} e^{j\Phi_{\alpha_s}^{new}} = \tan(-\alpha_s) e^{j\Phi_{\alpha_s}} \quad (\text{B.62})$$

$$= \tan(\alpha_s) e^{j(\Phi_{\alpha_s} \pm \pi)} \quad (\text{B.63})$$

On trouve ainsi les deux relations suivantes qui permettent de prendre en compte l'ambiguïté sur l'angle ψ :

$$\vec{e}_T^{\text{SV}}(\Phi_s, \psi, \tau_m, m, \alpha_s, \Phi_{\alpha_s}) = \vec{e}_T^{\text{SV}}(\Phi_s, \psi \pm \frac{\pi}{2}, -\tau_m, m, -\alpha_s, \Phi_{\alpha_s}) \quad (\text{B.64})$$

$$= \vec{e}_T^{\text{SV}}(\Phi_s, \psi \pm \frac{\pi}{2}, -\tau_m, m, \alpha_s, \Phi_{\alpha_s} \pm \pi) \quad (\text{B.65})$$

Il est important de noter que l'on peut utiliser l'une ou l'autre des solutions. En effet, R. Touzi a montré qu'une description non ambiguës des cibles est donnée par l'étude conjointe des trois paramètres α_s , Φ_{α_s} et τ_m .

Annexe C

Distances inter-classes et intra-classe pour la distribution de KummerU

On se propose de calculer les distances intra-classe et inter-classes pour une matrice de covariance distribuée selon une loi de KummerU. Ces deux distances seront notées respectivement W_{KummerU} et B_{KummerU} .

Dans la suite, \mathcal{L}_i , \mathcal{M}_i et m_i désigneront respectivement les paramètres \mathcal{L} , \mathcal{M} et m de la distribution de Fisher de la texture associés à la classe i . De plus, $a_i = Lp + \mathcal{M}_i$, $b_i = 1 + Lp - \mathcal{L}_i$ et $z_{i,k} = \frac{L \operatorname{tr}(\Sigma_{hi}^{-1} \mathbf{Z}_k) \mathcal{L}_i}{\mathcal{M}_i m_i}$ désigneront les paramètres a , b et z de la distribution de KummerU pour le pixel k et la classe i .

À partir de l'expression analytique de la distribution de KummerU (Eq. 3.62), on calcule la distance intra-classe par :

$$\begin{aligned}
 W_{\text{KummerU}} &= -\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{nb} \sum_{k=1}^{n_i} \ln(p(\mathbf{Z}_k | \Sigma_{hi}, \mathcal{L}_i, \mathcal{M}_i, m_i)) \\
 &= -\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{nb} \left[(L-3) \sum_{k=1}^{n_i} \ln |\mathbf{Z}_k| - n_i \ln(Q(L)) - Ln_i \ln |\Sigma_{hi}| \right. \\
 &\quad \left. + n_i \ln \left(\frac{\Gamma(\mathcal{L}_i) + \mathcal{M}_i}{\Gamma(\mathcal{L}_i) \Gamma(\mathcal{M}_i)} \right) + 3Ln_i \ln \left(\frac{\mathcal{L}_i}{\mathcal{M}_i m_i} \right) \right. \\
 &\quad \left. + n_i \ln(\Gamma(Lp + \mathcal{M}_i)) + \sum_{k=1}^{n_i} \ln U(a_i; b_i; z_{i,k}) \right] \\
 &= -\frac{L-3}{N} \sum_{k=1}^N \ln |\mathbf{Z}_k| + \ln(Q(L)) + \frac{L}{N} \sum_{i=1}^{nb} n_i \ln |\Sigma_{hi}| \\
 &\quad - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{nb} n_i \ln(\Gamma(Lp + \mathcal{M}_i)) - \frac{3L}{N} \sum_{i=1}^{nb} n_i \ln \left(\frac{\mathcal{L}_i}{\mathcal{M}_i m_i} \right) \\
 &\quad - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{nb} n_i \ln(\Gamma(Lp + \mathcal{M}_i)) - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{nb} \sum_{k=1}^{n_i} \ln U(a_i; b_i; z_{i,k}) \quad (\text{C.1})
 \end{aligned}$$

De la même façon, la distance inter-classes pour une matrice de covariance distribuée selon

une loi de KummerU s'exprime par :

$$\begin{aligned}
 B_{\text{KummerU}} &= -\frac{1}{N(nb-1)} \sum_{i=1}^{nb} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{nb} \sum_{k=1}^{n_j} \ln(p(\mathbf{Z}_k | \Sigma_{hi}, \mathcal{L}_i, \mathcal{M}_i, m_i)) \\
 &= -\frac{1}{N(nb-1)} \sum_{i=1}^{nb} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{nb} \sum_{k=1}^{n_j} \left[(L-3) \ln |\mathbf{Z}_k| - \ln(Q(L)) - L \ln |\Sigma_{hi}| \right. \\
 &\quad \left. + \ln \left(\frac{\Gamma(\mathcal{L}_i) + \mathcal{M}_i}{\Gamma(\mathcal{L}_i)\Gamma(\mathcal{M}_i)} \right) + 3L \ln \left(\frac{\mathcal{L}_i}{\mathcal{M}_i m_i} \right) + \ln(\Gamma(Lp + \mathcal{M}_i)) + \ln U(a_i; b_i; z_{i,k}) \right] \\
 &= -\frac{L-3}{N(nb-1)} \sum_{i=1}^{nb} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{nb} \sum_{k=1}^{n_j} \ln |\mathbf{Z}_k| + \frac{1}{N(nb-1)} \ln(Q(L)) \sum_{i=1}^{nb} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{nb} \sum_{k=1}^{n_j} 1 \\
 &\quad + \frac{L}{N(nb-1)} \sum_{i=1}^{nb} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{nb} n_j \ln |\Sigma_{hi}| - \frac{1}{N(nb-1)} \sum_{i=1}^{nb} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{nb} n_j \ln \left(\frac{\Gamma(\mathcal{L}_i) + \mathcal{M}_i}{\Gamma(\mathcal{L}_i)\Gamma(\mathcal{M}_i)} \right) \\
 &\quad - \frac{3L}{N(nb-1)} \sum_{i=1}^{nb} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{nb} n_j \ln \left(\frac{\mathcal{L}_i}{\mathcal{M}_i m_i} \right) - \frac{1}{N(nb-1)} \sum_{i=1}^{nb} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{nb} \sum_{k=1}^{n_j} \ln U(a_i; b_i; z_{i,k})
 \end{aligned}$$

En utilisant les simplifications utilisées dans le cas de la distribution de Wishart (équation 3.84), la distance inter-classes pour la distribution de KummerU est égale à :

$$\begin{aligned}
 B_{\text{KummerU}} &= -\frac{L-3}{N} \sum_{k=1}^N \ln |\mathbf{Z}_k| + \ln(Q(L)) \\
 &\quad + \frac{L}{N(nb-1)} \sum_{i=1}^{nb} (N - n_i) \ln |\Sigma_{hi}| - \frac{1}{N(nb-1)} \sum_{i=1}^{nb} (N - n_i) \ln \left(\frac{\Gamma(\mathcal{L}_i) + \mathcal{M}_i}{\Gamma(\mathcal{L}_i)\Gamma(\mathcal{M}_i)} \right) \\
 &\quad - \frac{3L}{N(nb-1)} \sum_{i=1}^{nb} (N - n_i) \ln \left(\frac{\mathcal{L}_i}{\mathcal{M}_i m_i} \right) - \frac{1}{N(nb-1)} \sum_{i=1}^{nb} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{nb} \sum_{k=1}^{n_j} \ln U(a_i; b_i; z_{i,k})
 \end{aligned} \tag{C.2}$$

Annexe D

Cas limite de la distribution de KummerU

On peut montrer que la distribution de Fisher ($\mathcal{F}[m, \mathcal{L}, \mathcal{M}]$) est égale à la convolution de Mellin d'une distribution Gamma ($\mathcal{G}[m, \mathcal{L}]$) par une distribution Gamma inverse ($\mathcal{GI}[1, \mathcal{M}]$) [Nico 02] [Nico 03] [Nico 06].

$$\mathcal{F}[m, \mathcal{L}, \mathcal{M}] = \mathcal{G}[m, \mathcal{L}] \hat{\star} \mathcal{GI}[1, \mathcal{M}] \quad (\text{D.1})$$

Le comportement de loi à tête lourde est guidé par le paramètre \mathcal{L} de la loi Gamma. Plus \mathcal{L} est grand, moins la loi de Fisher possède un comportement de loi à tête lourde. De la même façon, le comportement de loi à queue lourde est piloté par le paramètre \mathcal{M} de la loi Gamma inverse. La loi de Fisher permet d'avoir un comportement hybride entre ces deux comportements.

En utilisant le modèle multiplicatif scalaire, on peut montrer que la distribution de la matrice de cohérence dans le cas où la texture suit une loi de Fisher s'exprime à l'aide de la fonction confluyente hypergéométrique de seconde espèce (KummerU) par :

$$p_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}|\Sigma_h, \mathcal{L}, \mathcal{M}, m) = \frac{L^{Lp} |\mathbf{Z}|^{L-p}}{\pi^{\frac{p(p-1)}{2}} \Gamma(L) \cdots \Gamma(L-p+1) |\Sigma_h|^L} \frac{\Gamma(\mathcal{L} + \mathcal{M})}{\Gamma(\mathcal{L})\Gamma(\mathcal{M})} \left(\frac{\mathcal{L}}{\mathcal{M}m} \right)^{Lp} \Gamma(Lp + \mathcal{M}) U(a, b, z) \quad (\text{D.2})$$

En faisant tendre le paramètre \mathcal{M} de la distribution de Fisher vers l'infini, la Fisher a le même comportement que la distribution Gamma. Nous allons montrer que pour la matrice de cohérence, la distribution de KummerU tend vers la distribution \mathcal{K} lorsque \mathcal{M} tend vers l'infini.

D.1 Calcul du premier terme

Abramowitz et Stegun ont montré la relation suivante concernant la limite de la fonction de KummerU [Abra 64, Eq. 13.3.3].

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \{\Gamma(1+a-b)U(a, b, z/a)\} = 2 z^{\frac{1}{2}-\frac{b}{2}} \text{BesselK}_{b-1}(2\sqrt{z}) \quad (\text{D.3})$$

où BesselK est la fonction de Bessel modifiée de seconde espèce.

On pose $a = Lp + \mathcal{M}$, $b = 1 + Lp - \mathcal{L}$ et $z = \frac{Lp + \mathcal{M}}{\mathcal{M}m} L\mathcal{L} \operatorname{tr}(\Sigma_h^{-1}\mathbf{Z})$. Lorsque l'on fait tendre \mathcal{M} vers l'infini, on obtient :

$$\begin{aligned}\lim_{\mathcal{M} \rightarrow \infty} a &= +\infty \\ \lim_{\mathcal{M} \rightarrow \infty} b &= b \\ \lim_{\mathcal{M} \rightarrow \infty} z &= \frac{L\mathcal{L}}{m} \operatorname{tr}(\Sigma_h^{-1}\mathbf{Z})\end{aligned}$$

Par la suite, nous prendrons $m = 1$ pour que la distribution de Fisher soit égale à la distribution Gamma de moyenne égale à 1. En utilisant l'équation D.3, on obtient :

$$\begin{aligned}\lim_{\mathcal{M} \rightarrow \infty} \left\{ \Gamma(\mathcal{L} + \mathcal{M}) U(Lp + \mathcal{M}, 1 + Lp - \mathcal{L}, \frac{L \operatorname{tr}(\Sigma_h^{-1}\mathbf{Z}) \mathcal{L}}{\mathcal{M}m}) \right\} = \\ 2 \left[L\mathcal{L} \operatorname{tr}(\Sigma_h^{-1}\mathbf{Z}) \right]^{\frac{1}{2} - \frac{(1+Lp-\mathcal{L})}{2}} \operatorname{BesselK}_{Lp-\mathcal{L}} \left(2\sqrt{L\mathcal{L} \operatorname{tr}(\Sigma_h^{-1}\mathbf{Z})} \right)\end{aligned}\quad (\text{D.4})$$

D.2 Calcul du deuxième terme

On doit maintenant calculer la limite quand \mathcal{M} tend vers l'infini de $\frac{\Gamma(Lp + \mathcal{M})}{\Gamma(\mathcal{M})\mathcal{M}^{Lp}}$

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma(Lp + \mathcal{M})}{\Gamma(\mathcal{M})\mathcal{M}^{Lp}} &= \frac{\prod_{i=0}^{Lp-1} (i + \mathcal{M})}{\mathcal{M}^{Lp}} \\ &= \frac{\prod_{i=0}^{Lp-1} \mathcal{M} \left(1 + \frac{i}{\mathcal{M}} \right)}{\mathcal{M}^{Lp}} \\ &= \prod_{i=0}^{Lp-1} \left(1 + \frac{i}{\mathcal{M}} \right)\end{aligned}\quad (\text{D.5})$$

Par conséquent,

$$\lim_{\mathcal{M} \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(Lp + \mathcal{M})}{\Gamma(\mathcal{M})\mathcal{M}^{Lp}} = 1 \quad (\text{D.6})$$

En injectant les expressions obtenues lorsque \mathcal{M} tend vers l'infini (équations D.4 et D.6) dans l'équation D.2, on obtient l'expression de la distribution de la matrice de cohérence dans le cas où la texture suit une loi de Fisher de paramètre $m = 1$ et $\mathcal{M} = \infty$ par :

$$\begin{aligned}
 p_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}|\Sigma_h, \mathcal{L}, \mathcal{M}, m) &= \frac{L^{Lp}|\mathbf{Z}|^{L-p}}{\pi^{\frac{p(p-1)}{2}}\Gamma(L)\cdots\Gamma(L-p+1)|\Sigma_h|^L}\frac{2\mathcal{L}^{Lp}}{\Gamma(\mathcal{L})}\left[L\mathcal{L}\operatorname{tr}(\Sigma_h^{-1}\mathbf{Z})\right]^{\frac{1}{2}-\frac{(1+Lp-\mathcal{L})}{2}} \\
 &\times \operatorname{BesselK}_{Lp-\mathcal{L}}\left(2\sqrt{L\mathcal{L}\operatorname{tr}(\Sigma_h^{-1}\mathbf{Z})}\right) \\
 &= \frac{L^{Lp}|\mathbf{Z}|^{L-p}}{\pi^{\frac{p(p-1)}{2}}\Gamma(L)\cdots\Gamma(L-p+1)|\Sigma_h|^L}\frac{2\mathcal{L}^{\mathcal{L}}}{\Gamma(\mathcal{L})}\left[\frac{L\operatorname{tr}(\Sigma_h^{-1}\mathbf{Z})}{\mathcal{L}}\right]^{\frac{\mathcal{L}-Lp}{2}} \\
 &\times \operatorname{BesselK}_{\mathcal{L}-Lp}\left(2\sqrt{L\mathcal{L}\operatorname{tr}(\Sigma_h^{-1}\mathbf{Z})}\right) \tag{D.7}
 \end{aligned}$$

On retrouve que dans le cas où la texture est distribuée selon une loi Gamma de paramètre \mathcal{L} , la matrice de cohérence suit une distribution \mathcal{K} [Lee 94b] [Lope 97].

Bibliographie

- [Abra 64] M. Abramowitz and I. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. 1964.
- [Beau 04a] J.-M. Beaulieu. “Utilisation of Contour Criteria in Micro-Segmentation of SAR images”. *International Journal of Remote Sensing*, Vol. 25, No. 17, pp. 3497–3512, September 2004.
- [Beau 04b] J.-M. Beaulieu and R. Touzi. “Segmentation of Textured Polarimetric SAR Scenes by Likelihood Approximation”. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, Vol. 42, No. 10, pp. 2063–2072, Octobre 2004.
- [Beau 05] J.-M. Beaulieu and R. Touzi. “Segmentation of Polarimetric SAR Images Composed of Textured and Non-Textured Fields”. In : *Advanced SAR Workshop 2005, Canadian Space Agency, 15-17 Novembre, Québec, Canada, 2005*.
- [Beau 06] J.-M. Beaulieu. “Pseudo-Convex Contour Criterion for Hierarchical Segmentation of SAR Images”. In : *3rd Canadian Conference on Computer and Robot Vision, CRV’06, 2006*.
- [Bert 05] E. Berthier, H. Vadon, D. Baratoux, Y. Arnaud, C. Vincent, K. L. Feigl, F. Rémy, and B. Legrésy. “Mountain Glacier Surface Motion Derived From Satellite Optical Imagery”. *Remote Sensing of Environment*, Vol. 95, No. 1, pp. 14–28, 2005.
- [Boer 91] W.-M. Boerner, W.-L. Yan, A.-Q. Xi, and Y. Yamaguchi. “On the Basic Principles of Radar Polarimetry : the Target Characteristic Polarization State Theory of Kennaugh, Huynen’s Polarization Fork Concept, and its Extension to the Partially Polarized Case”. *Proceedings of the IEEE*, Vol. 79, No. 10, pp. 1538–1550, Octobre 1991.
- [Bomb 06] L. Bombrun, F. Maussang, E. Moisan, and A. Hétet. “Use of Statistical Hypothesis Test for Mines Detection in SAS Imagery”. In : *European Signal Processing Conference, EUSIPCO, Florence, Italie, 2006*.
- [Bomb 07] L. Bombrun, I. Pétillet, G. Vasile, M. Gay, E. Trouvé, P. Bolon, J.-M. Nicolas, and T. Landes. “Multi-date ERS Tandem Interferogram Analysis : Application to Alpine Glaciers”. In : *MULTITEMP, Leuven, Belgique, 2007*.
- [Bomb 08a] L. Bombrun and J.-M. Beaulieu. “Fisher Distribution for Texture Modeling of Polarimetric SAR Data”. *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters*, Vol. 5, No. 3, Juillet 2008.

- [Bomb 08b] L. Bombrun and J.-M. Beaulieu. “Segmentation of Polarimetric SAR Data Based on the Fisher Distribution for Texture Modeling”. In : *Geoscience and Remote Sensing, IGARSS '08, Boston, USA*, 2008.
- [Bomb 08c] L. Bombrun, M. Gay, E. Trouvé, G. Vasile, and J. Mars. “DEM Error Retrieval by an Analysis of the Wrapped Phase Difference Between Differential Interferograms”. *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters*, en révision, 2008.
- [Born 59] M. Born and E. Wolf. *Principles of Optics : Electromagnetic Theory of Propagation, Interference and Diffraction of Light*. Elmsford, N.Y., 1959.
- [Clou 96] S. Cloude and E. Pottier. “A Review of Target Decomposition Theorems in Radar Polarimetry”. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, Vol. 34, No. 2, pp. 498–518, 1996.
- [Clou 97] S. Cloude and E. Pottier. “An Entropy Based Classification Scheme for Land Applications of Polarimetric SAR”. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, Vol. 35, No. 1, pp. 68–78, 1997.
- [Cocq 95] J.-P. Cocquerez and S. Philipp. *Analyses d’Images : Filtrage et Segmentation*. Masson, 1995.
- [Cram 46] H. Cramér. *Mathematical Methods of Statistics*. Princeton University Press, 1946.
- [Desc 51] G. Deschamps. “Part II—Geometrical Representation of the Polarization of a Plane Electromagnetic Wave”. *Proceedings of the IRE*, Vol. 39, pp. 540–544, 1951.
- [Ferr 03] L. Ferro-Famil, E. Pottier, D. Corr, and A. Rodrigues. “Statistical Segmentation of Polarimetric SAR Data”. In : *PolInSAR '03, Frascati, Italie*, 2003.
- [Frer 07] A. Frery, A. Correia, and C. Freitas. “Classifying Multifrequency Fully Polarimetric Imagery With Multiple Source of Statistical Evidence and Contextual Information”. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, Vol. 45, No. 10, pp. 3098–3109, Octobre 2007.
- [Ghig 94] D. C. Ghiglia and L. A. Romero. “Robust Two-Dimensional Weighted and Unweighted Phase Unwrapping That Uses Fast Transforms and Iterative Methods”. *Journal of Optical Society of America (JOSA-A)*, Vol. 11, No. 1, pp. 107–117, 1994.
- [Gold 88] R. M. Goldstein, H. A. Zebker, and C. L. Werner. “Satellite Radar Interferometry : Two-Dimensional Phase Unwrapping”. *Radio Science*, Vol. 23, No. 4, pp. 713–720, July 1988.
- [Gold 93] R. Goldstein, H. Engelhardt, B. Kamb, and R. Frolich. “Satellite Radar Interferometry for Monitoring Ice Sheet Motion : Application to an Antarctic Ice Stream”. *Science*, Vol. 262, pp. 1525–1530, 1993.
- [Good 63] N. Goodman. “Statistical Analysis Based on a Certain Multivariate Complex Gaussian Distribution (an Introduction)”. In : *Annals of Mathematical Statistics*, pp. 152–177, 1963.
- [Grad 80] I. Gradshteyn and I. Ryzhik. *Tables of Integrals, Series and Products*. New York : Academic Press, 1980.

- [Grav 56] C. Graves. “Radar Polarization Power Scattering Matrix”. *Proceedings of the IEEE*, Vol. 44, No. 2, pp. 248–252, Février 1956.
- [Gray 01] A. Gray, N. Short, K. Matter, and K. Jezek. “Velocities and Ice Flux of the Filchner Ice Shelf and its Tributaries Determined from Speckle Tracking Interferometry”. *Canadian Journal of Remote Sensing*, Vol. 27, No. 3, pp. 193–206, 2001.
- [Gray 98] A. Gray, K. Matter, and P. Vachon. “InSAR Results from RADARSAT Antarctic Mapping Mission Data : Estimation of Glacier Motion Using a Simple Registration Procedure”. In : *Geoscience and Remote Sensing, IGARSS '98, Seattle, USA*, pp. 1638–1640, 1998.
- [Guil 03] S. Guillaso. *Complémentarité Polarimétrie / Interférométrie pour la Détection et la Caractérisation des Cibles*. PhD thesis, Université de Rennes I, Rennes, France, 2003.
- [Huyn 65] J. Huynen. “Measurement of the target scattering matrix”. *Proceedings of the IEEE*, Vol. 53, No. 8, pp. 936–946, août 1965.
- [Huyn 78] J. Huynen. *Phenomenological Theory of Radar Targets*. Academic Press, 1978.
- [Ingl 07] J. Inglada and G. Mercier. “A New Statistical Similarity Measure for Change Detection in Multitemporal SAR Images and Its Extension to Multiscale Change Analysis”. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, Vol. 45, No. 5, pp. 1432–1445, 2007.
- [Joug 94] I. Joughin, D. Winebrenner, and D. Percival. “Polarimetric Density Functions for Multilook Polarimetric Signatures”. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, Vol. 32, No. 3, pp. 562–574, 1994.
- [Joug 98] I. Joughin, R. Kwok, and M. Fahnestock. “Interferometric Estimation of Three-Dimensional Ice-Flow Using Ascending and Descending Passes”. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, Vol. 36, No. 1, pp. 25–37, 1998.
- [Koeh 08] M. Koehl, L. Bombrun, M. Gay, E. Trouvé, P. Bolon, J.-M. Nicolas, G. Vasile, Y. Pétilot, T. Landes, and P. Grussenmeyer. “Recalage de Mesures Satellitaires de Vitesse d’Écoulement du Glacier d’Argentière par Mesures Géodésiques in-situ”. *Traitement du Signal, en révision*, 2008.
- [Kost 86] A. Kostinski and W.-M. Boerner. “On Foundation of Radar Polarimetry”. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, Vol. 34, No. 12, pp. 1395–1404, Décembre 1986.
- [Lee 08] J. Lee, T. Ainsworth, and K. Chen. “Speckle Filtering of Dual-Polarization and Polarimetric SAR Data Based on Improved Sigma Filter”. In : *Geoscience and Remote Sensing, IGARSS'08, Boston, États-Unis*, 2008.
- [Lee 81] J. Lee. “Refined Filtering of Image Noise Using Local Statistics”. *Computer Graphics and Image Processing*, Vol. 15, pp. 380–389, 1981.
- [Lee 83] J. Lee. “Digital Noise Smoothing and the Sigma Filter”. *Computer Graphics and Image Processing*, Vol. 24, pp. 255–269, 1983.

- [Lee 94a] J. Lee, M. Grunes, and R. Kwok. “Classification of Multi-Look Polarimetric SAR Imagery Based on the Complex Wishart Distribution”. *International Journal of Remote Sensing*, Vol. 15, No. 11, 1994.
- [Lee 94b] J. Lee, D. Schuler, R. Lang, and K. Ranson. “K-Distribution for Multi-Look Processed Polarimetric SAR Imagery”. In : *Geoscience and Remote Sensing, IGARSS '94, Pasadena, Californie, États-Unis*, pp. 2179–2181, 1994.
- [Lee 99] J. Lee, M. Grunes, T. Ainsworth, L. Du, D. Schuler, and S. Cloude. “Unsupervised Classification Using Polarimetric Decomposition and the Complex Wishart Classifier”. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, Vol. 37, No. 5, pp. 2249–2258, 1999.
- [Lope 05a] C. López-Martínez, L. Ferro-Famil, and E. Pottier. “Polarimetric Decompositions”. In : *POLSARPRO Tutorial, Part 1, Radar Polarimetry*, 2005.
- [Lope 05b] C. López-Martínez, E. Pottier, and S. Cloude. “Statistical Assessment of Eigenvector-Based Target Decomposition Theorems in Radar Polarimetry”. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, Vol. 43, No. 9, pp. 2058–2074, 2005.
- [Lope 97] A. Lopès and F. Séry. “Optimal Speckle Reduction for the Product Model in Multi-look Polarimetric SAR Imagery and the Wishart Distribution”. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, Vol. 35, No. 3, pp. 632–647, 1997.
- [Mass 93] D. Massonnet and T. Rabaute. “Radar Interferometry, Limits and Potential”. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, Vol. 31, No. 2, pp. 455–464, 1993.
- [Matt 98] K. Mattar, P. Vachon, D. Geudtner, A. Gray, I. Cumming, and M. Brugman. “Validation of Alpine Glacier Velocity Measurements Using ERS Tandem-Mission SAR Data”. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, Vol. 36, No. 3, pp. 974–984, 1998.
- [Maît 01] H. Maître. *Traitement des images RSO*. Hermès, Paris, 2001.
- [Mich 99] R. Michel, J. P. Avouac, and J. Taboury. “Measuring Ground Displacements From SAR Amplitude Images : Application to the Landers Earthquake”. *Geophysical Research Letters*, Vol. 26, No. 7, pp. 875–878, 1999.
- [Mohr 03] J. Mohr, N. Reeh, and S. Madsen. “Accuracy of Three-Dimensional Glacier Surface Velocities Derived From Radar Interferometry and Ice-Sounding Radar Measurements”. *Journal of Glaciology*, Vol. 49, pp. 210–222, 2003.
- [Nico 02] J.-M. Nicolas. “Introduction aux Statistiques de Deuxième Espèce : Applications des Logs-moments et des Logs-cumulants à l’Analyse des Lois d’Images Radar”. *Traitement du Signal*, Vol. 19, No. 3, pp. 139–167, 2002.
- [Nico 03] J.-M. Nicolas. “La Loi de Fisher et ses Applications aux Images de Radar à Synthèse d’Ouverture”. In : *GRETSI, Paris, France*, pp. 209–212, Septembre 2003.
- [Nico 06] J.-M. Nicolas. “Application de la Transformée de Mellin : Étude des Lois Statistiques de l’Imagerie Cohérente”. In : *Rapport de recherche, 2006D010*, 2006.

- [Nova 90] L. Novak and M. Burl. "Optimal Speckle Reduction in Polarimetric SAR Imagery". *IEEE Transactions on Aerospace and Electronics Systems*, Vol. 26, No. 2, pp. 293–305, 1990.
- [Nova 92] L. Novak and C. Netishen. "Polarimetric Synthetic Aperture Radar Imaging". *International Journal of Imaging Systems and Technology*, Vol. 4, pp. 306–318, 1992.
- [Odel 66] P. Odell and A. Feiveson. "A Numerical Procedure to Generate a Sample Covariance Matrix". *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 61, No. 313, pp. 199–203, 1966.
- [Path 06] E. Pathier, E. Fielding, T. Wright, R. Walker, B. Parsons, and S. Hensley. "Displacement Field and Slip Distribution of the 2005 Kashmir Earthquake from SAR Imagery". *Geophysical Research Letters*, Vol. 33, pp. 20310–20315, 2006.
- [Rabu 00] B. Rabus and D. Fatland. "Comparison of SAR-Interferometric and Surveyed Velocities on a Mountain Glacier : Black Rapids Glacier". *Journal of Glaciology*, Vol. 152, No. 46, pp. 119–128, 2000.
- [Reeh 03] N. Reeh, J. Mohr, S. Madsen, H. Oerter, and N. Gundestrup. "Three-Dimensional Surface Velocities of Storstrømmen Glacier, Greenland, Derived from Radar Interferometry and Ice-Sounding Radar Measurements". *Journal of Glaciology*, Vol. 49, No. 165, pp. 201–209, 2003.
- [Rign 96] E. Rignot, R. Forster, and B. Isacks. "Radar Interferometric Observations of Glacier San Rafael, Chile". *Journal of Glaciology*, Vol. 42, No. 141, pp. 279–291, 1996.
- [Rodr 92] E. Rodriguez and J.-M. Martin. "Theory and Design of Interferometric Synthetic Aperture Radars". *IEE Proceedings - Part F : Radar and Signal Processing*, Vol. 139, No. 2, pp. 147–159, 1992.
- [Rose 00] P. Rosen, S. Hensley, I. Joughin, F. Li, S. N. Madsen, E. Rodriguez, and R. Goldstein. "Synthetic Aperture Radar Interferometry". *Proceedings of the IEEE*, Vol. 88, No. 3, pp. 333–382, 2000.
- [Scha 98] R. Scharoo and P. Viesser. "Precise Orbit Determination and Gravity Field Improvement for the ERS Satellites". *Journal of Geophysical Research*, Vol. 103, No. C4, pp. 8113–8127, 1998.
- [Sera 06] F. Serafino. "SAR Image Coregistration Based on Isolated Point Scatterers". *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters*, Vol. 3, No. 3, pp. 354–358, 2006.
- [Shee 92] D. Sheen and L. Johnston. "Statistical and Spatial Properties of Forest Clutter Measured with Polarimetric Synthetic Aperture Radar (SAR)". *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, Vol. 30, No. 3, pp. 578–588, Mai 1992.
- [Shor 04] N. Short and A. Gray. "Potential for RADARSAT-2 Interferometry : Glacier Monitoring Using Speckle Tracking". *Canadian Journal of Remote Sensing*, Vol. 30, No. 3, pp. 504–509, 2004.
- [Sinc 50] G. Sinclair. "Transmission and Reception of Elliptically Polarized Waves". *Proceedings of the IRE*, Vol. 38, pp. 148–151, 1950.

- [Skri 02] H. Skriver, J. Schou, A. Nielsen, and K. Conradsen. “Polarimetric Segmentation using Wishart Test Statistic”. In : *Geoscience and Remote Sensing, IGARSS '02, Toronto, Canada*, pp. 1011 – 1013, 2002.
- [Stro 02] T. Strozzi, A. Luckman, T. Murray, U. Wegmuller, and C. Werner. “Glacier Motion Estimation Using SAR Offset-Tracking Procedures”. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, Vol. 40, No. 11, pp. 2384–2391, 2002.
- [Taka 27] T. Takagi. “On an Algebraic Problem Related to an Analytical Theorem of Caratheodory and Fejer and on an Allied Theorem of Landau”. *Japanese Journal of Mathematics*, Vol. 1, pp. 83–93, 1927.
- [Tara 96] H. Tarayre. *Extraction de Modèles Numériques de Terrain par Interféométrie Radar Satellitaire : Algorithmie et Artéfacts Atmosphériques*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Toulouse, 1996.
- [Tiso 04] C. Tison, J.-M. Nicolas, F. Tupin, and H. Maître. “A New Statistical Model for Markovian Classification of Urban Areas in High-Resolution SAR Images”. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, Vol. 42, No. 10, pp. 2046–2057, Octobre 2004.
- [Touz 02] R. Touzi and F. Charbonneau. “Characterization of Target Symmetric Scattering Using Polarimetric SARs”. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, Vol. 40, No. 11, pp. 2507–2516, Novembre 2002.
- [Touz 04a] R. Touzi. “Target Scattering Decomposition of One-Look and Multi-Look SAR Data Using a New Coherent Scattering Model : the TSVM”. In : *Geoscience and Remote Sensing, IGARSS '05, Anchorage, Alaska, USA*, pp. 2491–2493, Septembre 2004.
- [Touz 04b] R. Touzi, W. Boerner, J. Lee, and E. Lueneburg. “A Review of Polarimetry in the Context of Synthetic Aperture Radar : Concepts and Information Extraction”. *Canadian Journal of Remote Sensing*, Vol. 30, No. 3, pp. 380–407, 2004.
- [Touz 05] R. Touzi. “A Unified Model for Decomposition of Coherent and Partially Coherent Target Scattering Using Polarimetric SARs”. In : *Geoscience and Remote Sensing, IGARSS '05, Seoul, Corée du Sud*, pp. 4844–4847, Juillet 2005.
- [Touz 06] R. Touzi. “Wetland Characterization Using Polarimetric RADARSAT-2 Capability”. In : *Geoscience and Remote Sensing, IGARSS '06, Denver, Colorado, USA*, pp. 1639–1642, Juillet 2006.
- [Touz 07a] R. Touzi. “Speckle Effect on Polarimetric Target Scattering Decomposition of SAR Imagery”. *Canadian Journal of Remote Sensing*, Vol. 33, pp. 543–551, Février 2007.
- [Touz 07b] R. Touzi. “Target Scattering Decomposition in Terms of Roll-Invariant Target Parameters”. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, Vol. 45, No. 1, pp. 73–84, Janvier 2007.
- [Touz 07c] R. Touzi, A. Deschamps, and G. Rother. “Wetland Characterization using Polarimetric RADARSAT-2 Capability”. *Canadian Journal of Remote Sensing*, Vol. 33, pp. S56–S67, 2007.

- [Touz 99] R. Touzi, A. Lopès, J. Bruniquel, and P. Vachon. “Coherence Estimation for SAR Imagery”. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, Vol. 37, No. 1, pp. 135–149, Janvier 1999.
- [Trou 06] E. Trouvé. “Filtrage, Extraction et Fusion d’Informations en Imagerie Radar Multi-Composantes”. *Habilitation à Diriger des Recherches, Université de Savoie, Annecy, France*, 2006.
- [Trou 07] E. Trouvé, G. Vasile, M. Gay, L. Bombrun, P. Grussenmeyer, T. Landes, J. Nicolas, P. Bolon, I. Petillot, A. Julea, L. Valet, J. Chanussot, and M. Koehl. “Combining Airborne Photographs and Spaceborne SAR Data to Monitor Temperate Glaciers. Potentials and Limits”. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, Vol. 45, No. 4, pp. 905–924, Avril 2007.
- [Trou 08] E. Trouvé, I. Pétillet, P. Bolon, M. Gay, L. Bombrun, J.-M. Nicolas, F. Tupin, A. Walpersdorf, N. Cotte, I. Hajnsek, and M. Keller. “Monitoring Alpine Glacier Activity by a Combined Use of TerraSAR-X Images and Continuous GPS Measurements - the Argentière Glacier Experiment”. In : *EUSAR '08, Friedrichshafen, Germany*, Juin 2008.
- [Trou 96] E. Trouvé. *Imagerie Interférentielle en Radar à Ouverture Synthétique*. PhD thesis, Ecole Nationale Supérieure de Télécommunications, Paris, France, 1996.
- [Trou 98] E. Trouvé, J. M. Nicolas, and H. Maître. “Improving Phase Unwrapping Techniques by the Use of Local Frequency”. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, Vol. 36, No. 6, pp. 1963–1972, Novembre 1998.
- [Tupi 02] F. Tupin and J.-M. Nicolas. “Matching Criteria for Radargrammetry”. In : *Geoscience and Remote Sensing, IGARSS '02, Toronto, Canada*, pp. 2608–2610, 2002.
- [Tupi 05] F. Tupin, M. Roux, and S. Homayouni. “Evaluation of Correlation Criteria for SAR Images”. In : *URBAN*, 2005.
- [Vasi 04] G. Vasile, E. Trouvé, M. Ciuc, and V. Buzuloiu. “General Adaptive Neighborhood Technique for Improving SAR Interferometric Coherence Estimation”. *Journal of Optical Society of America*, Vol. 21, No. 8, pp. 1455–1464, 2004.
- [Vasi 06] G. Vasile, E. Trouvé, J.-S. Lee, and V. Buzuloiu. “Intensity-Driven-Adaptive-Neighborhood Technique for Polarimetric and Interferometric SAR Parameters Estimation”. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, Vol. 44, No. 6, pp. 1609–1621, 2006.
- [Xi 92] A.-Q. Xi and W.-M. Boerner. “Determination of the Characteristic Polarization States of the Radar Target Scattering Matrix [S(AB)] for the Coherent Monostatic and Reciprocal Propagation Space by Using the Complex Polarization Ratio ρ Transformation”. *Journal of the Optical Society of America, Part A*, Vol. 9, No. 3, pp. 437–455, 1992.
- [Yu 96] Y. Yu, A. Torre, and S. Huan. “Partially Correlated K-distribution for Multi-look Polarimetric SAR Imagery”. In : *Geoscience and Remote Sensing Symposium, IGARSS '99, Hambourg, Allemagne*, pp. 60–62, 1996.

- [Yueh 91] S. Yueh, J. Kong, J. Jao, R. Shin, L. Novak, and T. L. Toan. “K Distribution and Multi-Frequency Polarimetric Terrain Radar Clutter”. *Journal of Electromagnetic Waves and Application*, Vol. 5, No. 1, pp. 1–15, 1991.
- [Zebk 86] H. Zebker and R. Goldstein. “Topographic Mapping from Interferometric SAR Observations”. *Journal of Geophysical Research*, Vol. 91, pp. 4993–4999, 1986.

Résumé

Le travail de recherche présenté dans ce mémoire de thèse est dédié au développement des méthodes en télédétection radar polarimétrique et interférométrique.

L'interférométrie radar à synthèse d'ouverture renseigne sur la topographie de la zone étudiée ou sur ses déformations. Nous mettons en place des traitements interférométriques pour obtenir un champ de déplacement au sol.

La polarimétrie radar étudie les interactions de l'onde électromagnétique avec le milieu étudié et nous informe sur les propriétés physiques des rétrodiffuseurs. Nous examinons en détail les deux modèles de paramétrisation des vecteurs de rétrodiffusion : le modèle α/β et le modèle TSVM. Nous proposons ensuite d'utiliser la distribution de Fisher pour modéliser la texture dans les images polarimétriques. En utilisant le modèle multiplicatif scalaire, nous dérivons l'expression littérale de la distribution de la matrice de cohérence et nous proposons d'implémenter cette nouvelle distribution dans un algorithme de segmentation hiérarchique.

Les différentes méthodes proposées durant cette thèse ont été appliquées sur des données interférométriques en bande C sur les glaciers et sur des données polarimétriques en bande L dans le milieu urbain.

Mots-clés : Classification, Interférométrie, Polarimétrie, Segmentation, Télédétection, Texture.

Abstract

This Ph.D. thesis research work is dedicated to the development of polarimetric and interferometric remote sensing methods.

Synthetic aperture radar interferometry estimates the topography of the observed scene or his deformations. Interferometric processings are implemented to derive displacement field.

SAR Polarimetry study the interactions between the electromagnetic wave and the scene to characterize the scatterers. Two parametrization model of the target scattering vector are analyzed : the α/β model and the TSVM. Next, we propose to model the texture parameter by a Fisher distribution. Under the scalar product model assumption, we mathematically establish the covariance matrix distribution and we propose to implement this new distribution in a hierarchical segmentation algorithm.

All the proposed methods are applied on C-band interferometric SAR data over glaciers and on L-band polarimetric SAR data over urban areas.

Key-words : Classification, Interferometry, Polarimetry, Segmentation, Remote Sensing, Texture.

Laboratoire Grenoble Image Parole Signal et Automatique
Département des Images et des Signaux
Domaine Universitaire, BP 46,
38402 St-Martin-d'Hères Cedex, France