



HAL
open science

Analyse et résolution numérique de méthodes de sous-domaines non conformes pour des problèmes de plaques.

Catherine Lacour

► To cite this version:

Catherine Lacour. Analyse et résolution numérique de méthodes de sous-domaines non conformes pour des problèmes de plaques.. Mathématiques [math]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 1997. Français. NNT: . tel-00369578

HAL Id: tel-00369578

<https://theses.hal.science/tel-00369578>

Submitted on 23 Mar 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE de DOCTORAT
de L'UNIVERSITE PARIS 6

Spécialité:

Mathématiques Appliquées

présentée par

CATHERINE LACOUR

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE PARIS 6

Sujet de la thèse:

**ANALYSE ET RESOLUTION NUMERIQUE DE METHODES DE
SOUS-DOMAINES NON CONFORMES POUR DES PROBLEMES DE
PLAQUES.**

Soutenue le 15.01.97 devant le jury composé de:

Monsieur Hervé LE DRET	Président
Monsieur Yves ACHDOU	Rapporteur
Monsieur Patrick LE TALLEC	Rapporteur
Monsieur Yvon MADAY	Directeur
Madame Christine BERNARDI	
Monsieur François-Xavier ROUX	

Table des matières

1	Introduction	3
2	Raccordement de maillages non conformes: choix de la colle	7
2.1	Une approche duale de décomposition de domaines	7
2.1.1	Formulation variationnelle	7
2.1.2	Décomposition de domaines	8
2.1.3	Discrétisation	10
2.2	Article 1. Two different approaches for matching nonconforming grids: the Mortar Element method and the FETI method	10
3	Résolution par sous-domaines	33
3.1	La méthode du complément de Schur	33
3.2	Le problème dual	36
3.3	Résolution du problème dual: algorithme du gradient conjugué	39
3.4	Sous-domaines flottants	41
3.4.1	Résolution du système hybride: algorithme du gradient conjugué projeté	46
3.4.2	Calcul de la projection du gradient sur le noyau de G^t .	50
3.4.3	Solveur à deux niveaux	50
3.5	Reconjugaison des directions de descente	51
4	Les méthodes de préconditionnement	55
4.1	Rappel du préconditionneur condensé	56
4.1.1	Préconditionnement à l'aide des matrices de rigidité locales	58
4.2	Extension du préconditionneur au cas non conforme	60
4.2.1	Résultats numériques	63
4.3	Approche hiérarchique	70

4.3.1	Introduction	70
4.3.2	Formulation variationnelle	70
4.3.3	La méthode des joints hiérarchiques	73
4.4	Conclusion et discussion	76
5	Modèle d'approximation DKT: Discrete Kirchhoff Triangle	87
5.1	Hypothèses Fondamentales pour la Théorie des Plaques	87
5.2	Relations cinématiques	90
5.2.1	Théorie de Mindlin	90
5.2.2	Théorie de Kirchhoff	90
5.3	Éléments de plaques	91
5.4	Equations constitutives. Tenseurs des déformations	92
5.4.1	Théorie de Kirchhoff	92
5.4.2	Théorie de Mindlin	94
5.5	Discrétisation éléments finis	95
5.5.1	Formules générales	95
5.6	Rappel des équations de coques	96
5.6.1	Description de la géométrie	97
5.6.2	Le modèle de Naghdi	98
5.6.3	Le modèle de Koiter	100
5.7	Méthode d'approximation DKT (Discrete Kirchhoff Triangle) .	100
5.7.1	Construction du modèle DKT	101
5.7.2	Espaces associés à la méthode D.K.T.	104
5.7.3	Formulation variationnelle du problème D.K.T.	104
6	On the convergence of D.K.T. for the mortar method	107
6.1	Introduction	107
6.2	The Mortar element method for the D.K.T. approximation . .	109
6.3	Analysis of a simplified problem	112
6.4	Analysis of the best fit error	122
6.5	Analysis of the consistency error	126
6.6	Extensions to the shell problem	128
7	Mise en oeuvre de la méthode des joints pour les problèmes de plaques et coques	135
7.1	La résolution à deux niveaux	135
7.1.1	Le problème de coins	135
7.1.2	Résolution du problème grossier	139

7.1.3	Calcul de la projection Q	140
7.2	Résultats Numériques	141
7.2.1	Plaque en cisaillement transversal	141
7.2.2	Cas test: Plaque	144
8	Conclusion	161
	Annexe	164
A	Quelle architecture pour quel modèle de programmation?	165
A.1	Quelle architecture?	166
A.1.1	Architecture SIMD	166
A.1.2	Architecture MIMD	167
A.2	Quel modèle de programmation?	169
A.2.1	Le Paragon Intel	169

Chapitre 1

Introduction

De nombreux centres de calcul scientifique et simulation numérique sont équipés de calculateurs à architecture parallèle. L'intérêt majeur de ces machines est d'offrir potentiellement une grande puissance de calcul que ce soit en terme de place mémoire ou de rapidité de calculs par la multiplication des performances d'un processeur par le nombre de processeurs.

En annexe, nous expliquons l'architecture sur laquelle nous avons travaillé ainsi que le modèle de programmation *programmation par échange de messages* utilisé.

Pour exploiter le potentiel des machines parallèles, il est nécessaire que le temps utilisé par le système pour assurer le transfert des données entre les processeurs soit négligeable devant le temps de calcul des processeurs.

Les méthodes de décomposition de domaine constituent une approche naturelle et prometteuse en ce qui concerne le parallélisme.

Les méthodes de décomposition de domaine consistent à partager le domaine de résolution d'une équation aux dérivées partielles en sous-domaines de plus petite taille. Chacun est attribué à un processeur, ou à un groupe de processeurs, qui résout son problème à l'aide des données contenues dans la (es) mémoire(s) locale(s). Les phases de communication permettent de résoudre les interactions entre sous-domaines. Pour ces méthodes, les conditions de transmission telles les contraintes de raccord aux interfaces des sous-domaines sont déterminantes pour une bonne approximation de la solution du problème initial.

On distingue deux grands types de méthodes de décomposition de domaines: celles avec recouvrement des sous-domaines telles les méthodes de Schwarz (Schwarz 1870), (Lions 1988), (M.Dryja, B.F.Smith, O.B.Widlund 1993), qui sont assez coûteuses du point de vue numérique, et celles sans recouvrement (Le Tallec 1994, Quarteroni). On peut classer les méthodes de décomposition de domaines sans recouvrement en deux catégories: conforme et non conforme.

Une première motivation est de pouvoir traiter des géométries complexes et de raccorder des maillages non conformes, issus par exemple, d'un raffinement local. Dans ce travail, on s'intéresse alors, aux **méthodes sans recouvrement, non conformes, parallélisables**, applicables à la résolution de systèmes linéaires issus d'une discrétisation par éléments finis.

La méthode des éléments avec joint s'inscrit dans le cadre de méthodes de décomposition de domaines sans recouvrement, non conformes avec discrétisation de type variationnel. Elle a été introduite et étudiée pour des problèmes d'ordre deux (C.Bernardi, Y.Maday, A.T.Patera 1992), pour le couplage de méthode éléments spectraux et/ou éléments finis (C.A.Mavripilis, Y.Maday, A.T.Patera 1988), (C.Bernardi, N.Débit, Y.Maday 1990). De nombreuses applications de la méthode des éléments avec joint ont vu le jour pour des problèmes d'ordre deux avec notamment l'extension aux problèmes tridimensionnels (F.Ben Belgacem 1993) et pour la résolution de problème d'ordre quatre dans le cadre de discrétisation spectrale (Z.Belhachmi 1994).

De manière générale, une fois le domaine divisé en sous-domaines, on utilise sur chacun de ces sous-domaines une discrétisation de type éléments finis ou éléments spectraux avec des maillages qui ne coïncident pas aux interfaces. La méthode des éléments avec joint utilise une formulation hybride des équations du problème de départ qui repose sur l'introduction de multiplieurs de Lagrange λ pour traiter la contrainte de continuité aux interfaces entre les sous-domaines.

L'objet de ce travail est dans un premier temps l'étude de méthodes de préconditionnement du problème hybride. Dans un second temps, nous avons étendu la méthode des éléments avec joint aux modèles de plaques en formulation D.K.T. (Discrete Kirchhoff Triangle). Cette étude est réalisée

du point de vue de l'analyse numérique (étude de la convergence de la méthode et estimations d'erreur correspondantes) et de la mise en œuvre.

La présentation de la méthode des éléments avec joint et sa comparaison avec la méthode FETI, Finite Element Tearing and Interconnecting (C.Farhat, F.X.Roux 1991), (C.Farhat, M.Geradin 1992) en ce qui concerne l'espace des multiplicateurs de Lagrange fait l'objet du chapitre 2. On y montre en particulier le lien entre la condition inf-sup et le conditionnement de la matrice issue de l'opérateur dual.

Nous avons mis en évidence les avantages de la méthode des éléments avec joint par rapport à la méthode FETI: la condition inf-sup est indépendante du paramètre de discrétisation, le système à résoudre possède un meilleur conditionnement, la précision est meilleure.

Le chapitre 3 est consacré à l'étude de la méthode de résolution du problème dual en contraintes, c'est-à-dire la méthode du gradient conjugué. Nous introduisons une méthode d'accélération de la convergence qui est basée sur une procédure de reconjugaison des directions de descentes. Puis, nous étudions la généralisation de cette méthode au cas d'un découpage quelconque du maillage.

Le choix de préconditionneurs facilitant la convergence des méthodes de type gradient conjugué appliquées au problème interface est une question centrale pour les méthodes de sous-structuration. Par conséquent, le chapitre 4 est consacré à l'étude de méthodes de préconditionnement de la méthode des éléments avec joint.

Dans un premier temps, nous nous sommes inspirés des travaux réalisés par F.X.Roux (1989), C.Farhat et F.X.Roux (1994) sur l'étude de préconditionneurs conformes pour la méthode du complément de Schur dual afin de construire une extension du préconditionneur condensé aux méthodes de décomposition de domaines non conformes.

Nous montrons que la méthode est efficace, numériquement, du fait des propriétés du spectre de l'opérateur condensé. En particulier, le conditionnement est un peu diminué mais l'amélioration tient plus de la répartition des valeurs propres.

Une deuxième approche des méthodes de préconditionnement est inspirée des travaux de H.Yserentant (1986) sur les bases hiérarchiques. Notre étude sur ce nouveau préconditionneur consiste à construire une base hiérarchique de l'espace des multiplicateurs de Lagrange. Différents tests numériques ont mis en valeur l'optimalité du préconditionneur hiérarchique .

Dans le chapitre 5, nous étudions le modèle d'approximation D.K.T.: Discrete Kirchhoff Triangle, maintenant très utilisé pour approcher les problèmes de plaques. En effet, pour les plaques d'épaisseur modérée, on approxime le modèle par des méthodes d'éléments finis C^0 . Cependant on assiste à des phénomènes de verrouillage lorsque l'épaisseur devient petite. Les méthodes DKT sont à mi chemin entre les méthodes d'approximation du modèle de Mindlin et celles du modèle de Kirchhoff. Ces méthodes consistent à introduire les contraintes Kirchhoff-Love en un nombre fini de points.

L'objet du chapitre 6 est l'étude théorique de la convergence de la méthode des éléments avec joint appliquée aux problèmes de plaques D.K.T. et d'étendre l'analyse numérique proposé par (Bernardou, Matao, Trounev, 1993) pour prendre en compte la non conformité de la méthode des éléments avec joint. Nous avons fait le choix de recoller tous les champs (déplacement transverse et ses dérivées normales et tangentielles) et d'avoir les conditions D.K.T. partout.

Dans le chapitre 7, nous avons détaillé la mise en oeuvre d'une telle méthode. Elle est basée sur une résolution à deux niveaux. Nous montrons des résultats issus de problèmes de plaques. Le choix de l'espace des multiplicateurs de Lagrange s'est avéré efficace en ce qui concerne le recollement des champs déplacement. De plus, nous avons remarqué que la vitesse de convergence de l'algorithme du gradient conjugué projeté préconditionné ne se dégrade pas lorsque le nombre de sous-domaines augmente, la parallélisation donne ainsi son efficacité optimale.

Chapitre 2

Raccordement de maillages non conformes: choix de la colle

2.1 Une approche duale de décomposition de domaines

2.1.1 Formulation variationnelle

Soit Ω un domaine de \mathbb{R}^3 de frontière Γ . Soit V l'ensemble des champs de vecteurs v tels que $v \in (H^1(\Omega)^3)$ et v s'annulent sur la frontière Γ_0 . Soit f donnée par exemple dans $L^2(\Omega)$.

On veut résoudre un problème d'équations aux dérivées partielles elliptique du second ordre:

Trouver u tel que

$$\begin{aligned} Ku &= f \quad \text{dans } \Omega \\ u &= 0 \quad \text{sur } \Gamma_0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

où K est un opérateur continu de $V \rightarrow V'$ (l'opérateur elliptique est par exemple celui du Laplacien avec condition de Neuman). On introduit la fonctionnelle $J : V \rightarrow V$, définie par

$$\begin{aligned} \forall v &\in V \\ J(v) &= \frac{1}{2} \langle Kv, v \rangle - \langle f, v \rangle \end{aligned}$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ représente le produit de dualité entre V' et V .

Nous avons le résultat classique, conséquence du théorème de Lax-Milgram:

Théorème 2.1. – J admet un minimum unique en v_m

– v_m est l'unique solution du problème (2.1)

Décomposons maintenant Ω en plusieurs sous-domaines.

2.1.2 Décomposition de domaines

Supposons que Ω soit la réunion de K sous-domaines disjoints $\{\Omega^k\}_{k=1,\dots,K}$ comme le montre la figure (2.1):

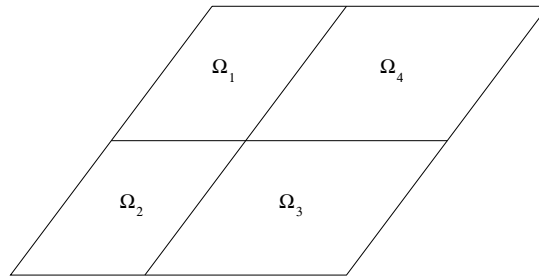


FIG. 2.1 - *Décomposition de domaines*

Proposition 2.1. Résoudre le problème (2.1) équivaut à trouver les champs $(u_k)_{k=1,\dots,K}$ minimisant la fonctionnelle:

$$\sum_k J_k(v_k) = \sum_k \frac{1}{2} \langle K v_k, v_k \rangle_{\Omega^k} - \langle f, v_k \rangle_{\Omega^k} \quad k = 1, \dots, K \quad (2.2)$$

sous les contraintes de continuité sur les interfaces:

$$v_k = v_\ell \quad \text{sur } \Gamma_{k\ell} = \cup_{k,\ell=1}^K \bar{\Omega}^k \cap \bar{\Omega}^\ell \quad (2.3)$$

La condition de continuité aux interfaces $\Gamma_{k\ell}$ peut être dualisée de la façon suivante:

$$(v_k - v_\ell, \mu_{k\ell})_{\Gamma_{k\ell}} = 0 \quad \forall \mu_{k\ell} \in ((H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_{k\ell}))')^3$$

Par conséquent, résoudre les K problèmes variationnels (2.2) avec les conditions de continuité (2.3) conduit à introduire le problème de point selle du Lagrangien:

$$\mathcal{L}(v_1, v_2, \dots, v_K, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_t) = \sum_{k=1}^K J_k(v_k) + \sum_{k,\ell=1, k<\ell}^K (v_k - v_\ell, \mu_{k\ell})_{\Gamma_{k\ell}}$$

où

$$(v_k - v_\ell, \mu_{k\ell})_{\Gamma_{k\ell}} = \langle \mu_{k\ell}, (v_k - v_\ell) \rangle$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit de dualité entre $(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_{k\ell}))'$ et $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_{k\ell})$.

Trouver le point selle de ce Lagrangien revient à trouver les champs $\{u_k\}_{k=1,\dots,K}$ ainsi que les multiplicateurs de Lagrange $\lambda_{k\ell}$ qui satisfont:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(u_1, u_2, \dots, u_K, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_t) &\leq \mathcal{L}(u_1, u_2, \dots, u_K, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_t) \\ &\leq \mathcal{L}(v_1, v_2, \dots, v_K, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_t) \end{aligned} \quad (2.4)$$

pour tout champ admissible $\{v_k\}_{k=1,\dots,K}$ et $\{\mu_i\}_{i=1,\dots,t}$

L'inégalité de gauche, c'est-à-dire

$$\mathcal{L}(u_1, u_2, \dots, u_K, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_t) \leq \mathcal{L}(u_1, u_2, \dots, u_K, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_t) \quad (2.5)$$

entraîne la condition de continuité à l'interface. En effet, (2.5) n'est possible que si

$$\sum_{k,\ell=1, k<\ell}^K (v_k - v_\ell, \mu_{k\ell}) = 0 \quad \forall \mu_{k\ell} \in ((H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_{k\ell}))')^3$$

L'inégalité de droite entraîne le problème de minimisation (2.2). On en déduit que l'ensemble des champs $\{u_k\}_{k=1,\dots,K}$ solution du problème (2.4) est aussi la solution du problème initial (2.2).

2.1.3 Discrétisation

En introduisant une discrétisation éléments finis sur chaque sous-domaine et en écrivant le champ $\{u_k\}_{k=1,\dots,K}$ dans sa base nodale, le problème variationnel hybride est transformé en système algébrique donné par:

$$\begin{aligned} A_k u_k + B_k^t \lambda &= f_k \quad k = 1, 2, \dots, K \\ \sum_{k=1}^K B_k u_k &= 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

où A_k est la matrice de rigidité associée à la discrétisation élément fini sur Ω^k .

Les matrices B_k sont les matrices associées à la forme discrète de la contrainte de continuité:

$$(v_k - v_\ell, \mu_{k\ell})_{\Gamma_{k\ell}} = 0 \quad \forall \mu_{k\ell} \in ((H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_{k\ell}))')^3$$

Le problème important maintenant est le choix de l'espace discret des multiplicateurs de Lagrange λ . Pour faire ce choix, deux approches ont été étudiées: la méthode des éléments avec joints (Mortar Element Method) et la méthode FETI: "Finite Element Tearing and Interconnecting".

La méthode des éléments avec joint est une approche non conforme optimale des décompositions de domaines tandis que la première motivation de l'approche FETI est de réduire le nombre de multiplicateurs de Lagrange servant à renforcer la continuité à l'interface.

Comparons ces deux méthodes du point de vue de la prise en compte des multiplicateurs de Lagrange. Cette comparaison est étudiée dans l'article qui suit intitulé 'Two different approaches for matching nonconforming grids: the Mortar Element method and the FETI method'.

2.2 Article 1. Two different approaches for matching nonconforming grids: the Mortar Element method and the FETI method

Chapitre 3

Résolution par sous-domaines

Remarque 3.1. *Tout ce qui suit a pour application finale la résolution de problèmes de plaques et coques. Afin de simplifier l'exposé, nous considérerons dans un premier temps le problème de Laplace mais assurerons le vocabulaire de la mécanique du solide, c'est-à-dire*

- déplacement u
- déplacement rigide $u = c$
- flux $\lambda = \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$

3.1 La méthode du complément de Schur

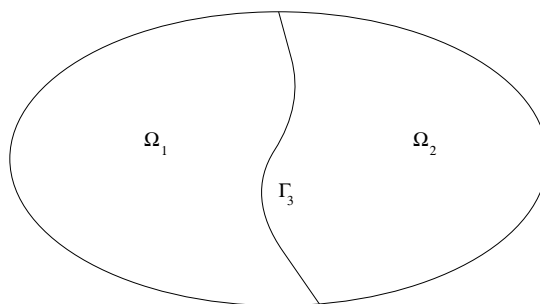


FIG. 3.1 - Décomposition de domaines sans recouvrement

Considérons un domaine Ω décomposé en deux ouverts disjoints Ω_1 et Ω_2 , d'interface Γ_3 sur lesquels on résout le problème elliptique $Ku = f$ avec des conditions aux limites de type Dirichlet ($u = g$ sur $\partial\Omega$). Si on numérote les degrés de liberté conformément à la décomposition du domaine, on trouve alors, dans le sous-domaine numéro 1, les degrés de liberté associés à des points du maillage situés à l'intérieur, au sens strict, de Ω_1 , dans le sous-domaine numéro 2, ceux associés à des points strictement intérieurs à Ω_2 , et sur l'interface, les degrés de liberté de Γ_3 . On obtient alors la matrice suivante:

$$K = \begin{pmatrix} K_{11} & 0 & K_{13} \\ 0 & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

Les blocs K_{ij} et K_{ji} sont transposés l'un de l'autre et les blocs K_{11} et K_{22} sont associés aux problèmes du Laplacien sur Ω_1 et Ω_2 avec conditions aux limites de type Dirichlet. On peut ensuite par une élimination de Gauss appliquée à la matrice par blocs K , ramener le problème à la résolution d'un problème condensé sur l'interface:

$$(K_{33} - K_{31}K_{11}^{-1}K_{13} - K_{32}K_{22}^{-1}K_{23})u_3 = b_3 \quad (3.2)$$

avec

$$b_3 = f_3 - K_{31}K_{11}^{-1}f_1 - K_{32}K_{22}^{-1}f_2$$

La matrice condensée

$$S = K_{33} - K_{31}K_{11}^{-1}K_{13} - K_{32}K_{22}^{-1}K_{23} \quad (3.3)$$

est appelée la matrice du complément de Schur.

Cette matrice est symétrique, définie positive. S est aussi une matrice pleine, par conséquent, (3.2) est résolu par la méthode du gradient conjugué sans calculer explicitement la matrice du complément de Schur (Roux 1989).

Calcul du produit de la matrice du complément de Schur par un vecteur

La matrice du complément de Schur s'écrit comme la somme de deux matrices S_1 et S_2 qui sont les contributions respectives de Ω_1 et Ω_2 à S :

$$\begin{aligned} S_1 &= K_{33}^{(1)} - K_{31} K_{11}^{-1} K_{13} \\ S_2 &= K_{33}^{(2)} - K_{32} K_{22}^{-1} K_{23} \end{aligned}$$

$K_{33}^{(1)}$ et $K_{33}^{(2)}$ désignent respectivement les contributions des domaines Ω_1 et Ω_2 aux termes de la matrice associés aux degrés de liberté sur la frontière Γ_3 .

On obtient deux problèmes locaux condensés sur l'interface et découplés que nous pouvons calculer en parallèle.

En pratique, le calcul du produit $S_1 w_3$ se fait en deux étapes:

- Première étape, résolution du problème local de type Dirichlet:

$$K_{11} w_1 = -K_{13} w_3$$

ce qui définit:

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -K_{11}^{-1} K_{13} w_3 \\ w_3 \end{bmatrix}$$

- Deuxième étape, calcul du produit matriciel:

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{13} \\ K_{31} & K_{33}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ S_1 w_3 \end{bmatrix}$$

Remarque 3.2. S_i est la discrétisation de l'opérateur qui fait passer de la trace d'une fonction (un déplacement) à sa dérivée normale (son flux).

3.2 Le problème dual

Les conclusions du chapitre précédent nous amènent à privilégier la méthode des éléments avec joint pour la discrétisation des multiplicateurs de Lagrange apparaissant dans la condition de continuité faible aux interfaces. Pour des problèmes d'élasticité, ce multiplicateur de Lagrange correspond au flux qu'il faut ajouter aux solutions des problèmes locaux pour que le saut de ces solutions soit nul à l'interface. On va montrer que la résolution par sous-domaines du problème initial se ramène à la résolution d'un problème d'interface concernant le multiplicateur de Lagrange.

On rappelle que la condition de continuité s'écrit sur l'interface:

$$\langle u_1 - u_2, \mu \rangle = 0, \forall \mu \in (H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_3))' \quad (3.4)$$

On cherche u_1 , u_2 et λ solutions des problèmes suivants résolus sur les deux sous-domaines:

$$\begin{aligned} -\Delta u_1 &= g_1 && \text{sur } \Omega_1 \\ \frac{\partial u_1}{\partial \mathbf{n}_1} &= \lambda && \text{sur } \Gamma_3 \\ u_1 &= 0 && \text{sur } \partial\Omega_1 \setminus \Gamma_3 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} -\Delta u_2 &= g_2 && \text{sur } \Omega_2 \\ \frac{\partial u_2}{\partial \mathbf{n}_2} &= -\lambda && \text{sur } \Gamma_3 \\ u_2 &= 0 && \text{sur } \partial\Omega_2 \setminus \Gamma_3 \end{aligned}$$

et vérifiant la condition de continuité sur l'interface (3.4), (où \mathbf{n}_1 et \mathbf{n}_2 sont les normales extérieures de Ω_1 et Ω_2).

On obtient, après l'introduction des champs v_1 et v_2 cinématiquement admissibles et après intégration:

$$\begin{aligned}
\forall v_1 \in H^1(\Omega_1), \forall v_2 \in H^1(\Omega_2) \quad & \text{tels que } v_1 = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega_1 \setminus \Gamma_3 \\
& v_2 = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega_2 \setminus \Gamma_3 \\
\forall \mu \in (H^{\frac{1}{2}})'(\Gamma_3) \quad & \int_{\Omega_1} (\nabla u_1)(\nabla v_1) d\Omega + \langle v_1, \mu \rangle = \int_{\Omega_1} g_1 v_1 d\Omega \\
& \int_{\Omega_2} (\nabla u_2)(\nabla v_2) d\Omega - \langle v_2, \mu \rangle = \int_{\Omega_2} g_2 v_2 d\Omega \\
& (u_1 - u_2, \mu)_{\Gamma_3} = \langle u_1 - u_2, \mu \rangle = 0 \\
& u_1 = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega_1 \setminus \Gamma_3 \\
& u_2 = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega_2 \setminus \Gamma_3
\end{aligned}$$

Si on assemble ces deux problèmes, nous retrouvons le problème initial:

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} (\nabla u)(\nabla v) d\Omega = \int_{\Omega} g v d\Omega, \forall v \in H^1(\Omega) \quad & \text{avec } v_1 = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega_1 \setminus \Gamma_3 \\
& v_2 = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega_2 \setminus \Gamma_3
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
u &= u_1 \quad \text{sur } \Omega_1 \\
u &= u_2 \quad \text{sur } \Omega_2
\end{aligned}$$

Remarque 3.3. Deux déplacements v_1 et v_2 sur Ω_1 et Ω_2 qui satisfont la contrainte $\langle v_1 - v_2, \mu \rangle = 0 \quad \forall \mu \in (H^{\frac{1}{2}})'(\Gamma_3)$ sont les restrictions d'un déplacement v appartenant à $H^1(\Omega)$.

Alors $H^1(\Omega)$ s'identifie au sous-espace de $H^1(\Omega_1) \times H^1(\Omega_2)$ des couples (v_1, v_2) satisfaisant la condition de continuité à l'interface.

Après l'introduction d'une discrétisation par éléments finis compatibles¹, on a vu qu'on obtenait le système linéaire suivant:

$$\begin{aligned}
K_1 u_1 + B_1^t \lambda &= g_1 \\
K_2 u_2 - B_2^t \lambda &= g_2 \\
B_1 u_1 - B_2 u_2 &= 0
\end{aligned} \tag{3.5}$$

1. au sens où la condition inf-sup est satisfaite, en particulier $\lambda \rightarrow B_1^t \lambda, B_2^t \lambda$ est injective.

où B_1 (respectivement B_2) sont les matrices associées aux opérateurs de trace T^k . Si l'on reprend les notations de la section précédente, on voit que les matrices K_1 et K_2 s'écrivent, si l'on numérote les degrés de liberté globalement, en commençant par ceux qui sont associés à des points internes à Ω_1 puis Ω_2 , et en finissant par les noeuds situés sur l'interface Γ_3 :

$$K_1 = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{13} \\ K_{31} & K_{33}^{(1)} \end{pmatrix} \text{ et } K_2 = \begin{pmatrix} K_{22} & K_{23} \\ K_{32} & K_{33}^{(2)} \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

Remarque 3.4. *Les matrices K_1 et K_2 sont les matrices de rigidité Neumann sur Γ_3 associées aux problèmes discrétisés sur Ω_1 et Ω_2 . Elles sont inversibles si et seulement si chacun des sous-domaines a une partie de sa frontière encastrée.*

Dans le cas où K est inversible, l'inversion des matrices K_1 et K_2 permet d'éliminer la valeur de u et de transformer le système en λ seulement.

$$\begin{aligned} u_1 &= K_1^{-1}(g_1 - B_1^t \lambda) \\ u_2 &= K_2^{-1}(g_2 + B_2^t \lambda) \end{aligned}$$

Le problème est de trouver la valeur du multiplicateur de Lagrange tel que le saut de la solution à l'interface soit nul.

Si on élimine u_1 et u_2 dans le système mixte, nous obtenons le système linéaire suivant en λ :

$$(B_1 K_1^{-1} B_1^t + B_2 K_2^{-1} B_2^t) \lambda = B_1 K_1^{-1} g_1 - B_2 K_2^{-1} g_2$$

Le système (3.5) est équivalent au système linéaire dual suivant:

$$D\lambda = b$$

Proposition 3.1. *Les matrices K_1 et K_2 étant symétriques, la matrice D est aussi symétrique.*

Preuve de la proposition 3.1.

La matrice D est définie par

$$D = B_1 K_1^{-1} B_1^t + B_2 K_2^{-1} B_2^t$$

est clairement symétrique.

Démontrons aussi que D est une matrice définie positive.

Si λ un champ sur l'interface non nul alors, vérifions que

$$(D\lambda, \lambda) = (K_1^{-1} B_1^t \lambda, B_1^t \lambda) + (K_2^{-1} B_2^t \lambda, B_2^t \lambda) > 0$$

Comme K_1 et K_2 sont symétriques, définies positives, $(D\lambda, \lambda)$ ne sera nul que si $B_1^t \lambda$ et $B_2^t \lambda$ sont nuls, ceci n'étant possible que si $\lambda = 0$, ce qui contredit l'hypothèse.

□

Par conséquent, on résout ce système par la méthode du gradient conjugué. Une fois obtenu le multiplicateur de Lagrange, la solution des systèmes locaux est donnée par une inversion locale sur chaque sous-domaine.

Nous verrons dans une prochaine section le traitement du cas où la matrice K n'est pas inversible.

3.3 Résolution du problème dual: algorithme du gradient conjugué

L'application de la méthode du gradient conjugué au problème condensé dual à l'interface nous amène à itérer sur les valeurs des flux à l'interface λ jusqu'à l'obtention de la continuité des solutions locales.

La résolution par la méthode du gradient conjugué conduit à calculer dans les différents sous-domaines avec des conditions de bord libre sur l'interface

$$\begin{aligned} u_1^0 &= K_1^{-1} f_1 \\ u_2^0 &= K_2^{-1} f_2 \end{aligned}$$

Puis, on en déduit le second membre qui est égal au saut à l'interface des déplacements:

$$b = B_1 u_1^0 - B_2 u_2^0$$

Phase d'initialisation

$$\lambda^0 = 0$$

ce qui donne pour le gradient et la direction de descente:

$$w^0 = g^0 = -b$$

Phase d'itération

On suppose connus les vecteurs λ^n, g^n, w^n

$$v_1^n = K_1^{-1} B_1^t w^n$$

$$v_2^n = K_2^{-1} B_2^t w^n$$

Calcul du saut à l'interface:

$$p^n = B_1 v_1^n - B_2 v_2^n$$

On calcule les coefficients de descente et de conjugaison et les nouvelles valeurs des différents vecteurs:

$$\rho_n = -\frac{(g^n, w^n)}{(p^n, w^n)}$$

$$\lambda^{n+1} = \lambda^n + \rho_n w^n$$

$$g^{n+1} = g^n + \rho_n p^n$$

$$\gamma_n = -\frac{(g^{n+1}, p^n)}{(p^n, w^n)}$$

$$w^{n+1} = g^{n+1} + \gamma_n w^n$$

Remarque 3.5. *A chaque itération de l'algorithme du gradient conjugué appliqué au problème condensé, on effectue différentes étapes:*

- *On calcule la solution des problèmes de Neumann locaux en effectuant une opération de descente-remontée indépendante dans chaque sous-domaine.*

- On calcule le nouveau résidu à l'interface, c'est-à-dire, on calcule le saut des solutions locales par un transfert de données entre sous-domaines voisins.
- On remet à jour les nouvelles valeurs des différents vecteurs en calculant les produits scalaires par sommation au travers du réseau d'interconnexion.

3.4 Sous-domaines flottants

Si le problème est tel que chaque sous-domaine est en contact avec une portion de la frontière extérieure sur laquelle est appliquée une condition de limite de Dirichlet, les matrices de rigidités locales K_1 et K_2 sont inversibles. Ceci est contraignant en ce qui concerne le découpage en sous-domaines car ceux-ci doivent alors tous avoir une frontière en commun avec l'encastrement du problème global. Pour avoir une liberté totale en ce qui concerne la décomposition de domaines, une technique d'élimination des mouvements rigides dans les sous-domaines est introduite.

Dans le cas d'un découpage en deux sous-domaines avec Ω_2 possédant une frontière sur laquelle des conditions de type bords libres sont imposées (Figure 3.2):

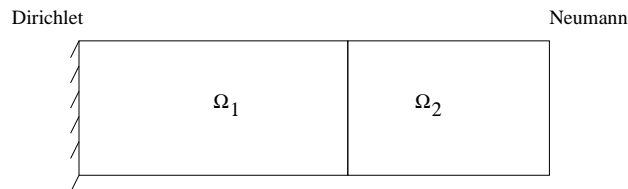


FIG. 3.2 - Découpage avec un sous-domaine non encasté

la matrice K_2 n'est plus inversible.

On rappelle que le système (3.5) s'écrivait:

$$\begin{aligned}
 K_1 u_1 &= f_1 - B_1^t \lambda \\
 K_2 u_2 &= f_2 + B_2^t \lambda \\
 B_1 u_1 &= B_2 u_2
 \end{aligned}
 \tag{3.7}$$

Si on considère la décomposition de la figure précédente, la matrice K_1 est définie positive et K_2 est semi-définie positive du fait qu'il n'y a aucune condition aux limites spécifiée sur Ω_2 .

Par conséquent, on doit prêter une attention particulière à l'équation

$$K_2 u_2 = f_2 + B_2^t \lambda$$

Comment fait-on pour résoudre un système de la forme $Kx = b$ lorsque la matrice K n'est pas inversible?

K étant symétrique, l'équation $Kx = b$ admet une solution si et seulement si le second membre est dans l'image de K . Puisque $\text{Im } K \oplus \ker K$ est égal à l'espace tout entier, ceci est équivalent à dire que b ne possède pas de composantes dans $\ker(K)$. Pour que la solution existe, il faut donc rajouter la condition

$$b \perp \ker(K)$$

c'est-à-dire que le second membre b doit appartenir au sous-espace orthogonal au noyau de K .

On introduit K^+ un inverse généralisé de K . Pour le problème $Kx = b$, la solution s'écrit:

$$x = K^+ b + R\alpha$$

où $R = \text{Ker}(K)$ est une matrice rectangulaire dont les colonnes forment une base du noyau de K et α sont les inconnues.

L'interprétation physique de cette matrice R et du vecteur α est que R représente les mouvements rigides de Ω_2 et α une combinaison linéaire de ceux-ci.

Dans le cas de deux sous-domaines, moyennant éventuellement une permutation des lignes et colonnes, équivalente à un changement de base par permutation, la matrice admet la partition suivante (en ayant choisi une base sur $\text{Im } K \oplus \ker K$):

$$K = \begin{pmatrix} K_A & K_C \\ K_C^t & K_B \end{pmatrix}$$

où le bloc K_A est inversible et de dimension égale au rang de K et K_B est une matrice dont la dimension est égale à celle du noyau de K , alors un inverse généralisé de K s'écrit:

$$K^+ = \begin{pmatrix} K_A^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si on applique à K le changement de base associé à la factorisation de Gauss du bloc pivot K_A , on obtient:

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ -K_C^t K_A^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_A & K_C \\ K_C^t & K_B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -K_A^{-1} K_C \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_A & 0 \\ 0 & K_B - K_C^t K_A^{-1} K_C \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

Le rang de la matrice de droite est égal au rang de K_A , on en déduit que la matrice $K_B - K_C^t K_A^{-1} K_C$ est de rang égal à 0, ce qui signifie qu'elle est nulle.

Par ailleurs, on déduit de l'égalité suivante:

$$\begin{pmatrix} K_A & K_C \\ K_C^t & K_B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -K_A^{-1} K_C \\ I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ K_B - K_C^t K_A^{-1} K_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

que les colonnes de la matrice R définie par:

$$R = \begin{pmatrix} -K_A^{-1} K_C \\ I \end{pmatrix}$$

forment une base du noyau de K .

Réécrivons le système (3.7):

$$\begin{aligned} u_1 &= K_1^{-1}(f_1 - B_1^t \lambda) \quad \text{car } K_1 \text{ est inversible} \\ R_2^t(f_2 + B_2^t \lambda) &= 0 \quad \text{condition d'admissibilité} \\ u_2 &= K_2^+(f_2 + B_2^t \lambda) + R_2 \alpha \\ B_1 u_1 &= B_2 u_2 \end{aligned} \quad (3.9)$$

En substituant u_1 et u_2 dans la dernière équation du système (3.9) et en utilisant la deuxième, on obtient:

$$B_1 K_1^{-1}(f_1 - B_1^t \lambda) - B_2 K_2^+(f_2 + B_2^t \lambda) + B_2 R_2 \alpha = 0 \quad (3.10)$$

$$R_2^t(f_2 + B_2^t \lambda) = 0 \quad (3.11)$$

Le système (3.10,3.11) représente un système hybride satisfait par le flux λ et par les constantes α :

$$\begin{pmatrix} D & G \\ G^t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

Théorème 3.1 (Roux, 1989). *Le couple (λ, α) où λ est le multiplicateur de Lagrange et α la variable décrivant les mouvements rigides du ou des sous-domaines flottants est solution du système hybride:*

$$\begin{pmatrix} D & G \\ G^t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix}$$

avec

$$\begin{aligned} d &= B_1 K_1^{-1} f_1 - B_2 K_2^+ f_2 \\ e &= R_2^t f_2 \end{aligned}$$

Ce système admet une solution et une seule.

Considérons maintenant le cas d'une décomposition quelconque de sous-domaines. Dans chaque sous-domaine, on peut déterminer le pseudo-inverse et le noyau de la matrice de rigidité.

Le système (3.9) s'écrit en posant

$$\begin{aligned} K^+ &= K_1^{-1} \quad \text{sur les domaines Dirichlet} \\ &= K_2^+ \quad \text{sur les domaines Neumann} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_i^t B_i^t \lambda &= -R_i^t f_i \\ u_i &= K_i^+(f_i + B_i^t \lambda) + R_i \alpha_i \\ \sum_i B_i u_i &= 0 \end{aligned} \quad (3.13)$$

Une interprétation de la deuxième équation du système (3.13) est que la solution du problème est la somme d'une solution particulière calculée à partir du pseudo-inverse de K_i et d'un élément du noyau.

En substituant u_i dans l'équation de continuité, on obtient:

$$\begin{aligned} \sum_i B_i K_i^+ B_i^t \lambda + \sum_i B_i R_i \alpha_i &= - \sum_i B_i K_i^+ f_i \\ R_i^t B_i^t \lambda &= -R_i^t f_i \end{aligned}$$

Ces deux équations représentent un système hybride satisfait par les flux aux interfaces λ et les constantes locales α :

$$\begin{pmatrix} D & G \\ G^t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

avec

$$\begin{aligned} d &= - \sum_i B_i K_i^+ f_i \\ e &= -R_i^t f_i \end{aligned}$$

Théorème 3.2 (Roux, chapitre XI, 1989). *S'il n'existe aucun point qui soit à l'interface entre plus de deux sous-domaines, et que l'une des sous-structures, au moins, est encastrée, l'algorithme du gradient conjugué projeté, appliqué au système hybride (3.14), converge vers la solution unique du système.*

Pour une décomposition quelconque, le théorème d'unicité de solution ainsi que sa démonstration est un peu plus complexe et est donné dans (Roux, 1989)

Interprétation du point de vue physique.

L'opérateur $D = \sum_i B_i K_i^+ B_i^t$ représente le complément de Schur dual. D est l'opérateur qui fait passer de la dérivée normale $\frac{\partial u}{\partial n}$ (un flux) à la trace de la fonction u (son déplacement).

La matrice G représente une matrice de correspondance entre les mouvements rigides du sous-domaine flottant et les déplacements de l'interface.

$G\alpha = \sum_i B_i R_i \alpha_i$ représente le saut aux interfaces des champs constants locaux, $G^t \lambda = R_i^t B_i^t \lambda$ représente le flux global sortant du sous domaine Ω_i .

Le lemme suivant est démontré dans Roux(1989).

Lemme 3.1. – Soit n_b le nombre de degrés de liberté bloqués. Si une des sous-structures, au moins, est encastrée, la matrice G est de rang n_b .

– La matrice G possède n_b colonnes linéairement indépendantes.

Comme le rang de G vaut n_b , on a

$$(G^t G x, x) = (G x, G x) = \|G x\|^2 > 0 \quad \text{pour } x \neq 0$$

Proposition 3.1. La matrice $(G^t G)$ est définie positive.

Nous présentons maintenant un algorithme de résolution pour le système hybride précédent.

3.4.1 Résolution du système hybride: algorithme du gradient conjugué projeté

Le problème (3.14) peut s'interpréter en terme de minimisation d'une fonctionnelle quadratique, définie à l'aide de l'opérateur D :

$$\min_{\lambda} \phi(\lambda) = \frac{1}{2}(D\lambda, \lambda) - (b, \lambda)$$

sous la contrainte

$$G^t \lambda = e$$

On résout un tel problème par la méthode du gradient conjugué projeté.

Ce problème de minimisation est équivalent à

$$\lambda^* \text{ réalise le } \min_{\lambda, G^t \lambda = e} \left(\frac{1}{2} (D\lambda, \lambda) - (b, \lambda) \right)$$

soit encore $G^t \lambda^* = e$ et $\forall y \in \text{Ker}(G^t), (D\lambda^* - b, y) = 0$ (3.15)

On introduit P la projection orthogonale par rapport au produit scalaire ℓ^2 (noté (\dots) dans (3.15)) sur le noyau de G^t ,

$$\begin{aligned} P & : x \longmapsto Px \in \text{Ker}(G^t) \\ P & = P^t \end{aligned}$$

Comme $y \in \text{Ker}(G^t)$, on a $P y = y$ par conséquent (3.15) donne

$$\forall y \in \text{Ker}(G^t) (P(D\lambda^* - b), P y) = 0 \quad (3.16)$$

On introduit λ^0 et μ tels que:

$$\lambda^* = \lambda^0 + P\mu$$

vérifiant

$$\begin{aligned} G^t \lambda^0 &= e \\ G^t \mu &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \forall y \in \text{Ker}(G^t), (P\{D[\lambda^0 + P\mu] - b\}, P y) = 0 \\ \iff & ((PDP\mu, P\mu) - P(D\lambda^0 - b), P y) = 0 \\ & \mu \text{ réalise le minimum de} \\ & \min \frac{1}{2} (PDP\mu, \mu) - (P(D\lambda^0 - b), P\mu) \quad (3.17) \end{aligned}$$

La méthode du gradient conjugué projeté est, en fait, équivalente à la méthode du gradient conjugué appliquée à (3.17).

Donnons l'algorithme du gradient conjugué projeté:

Phase d'initialisation de λ

On part d'un λ^0 vérifiant

$$G^t \lambda^0 = e \quad (3.18)$$

Si on écrit λ^0 comme suit afin que l'écriture $\lambda = \lambda^0 + \mu$ soit unique:

$$\lambda^0 = G\alpha^0$$

alors le problème (3.18) devient

$$(G^t G)\alpha^0 = e$$

or d'après le lemme 3.1, $G^t G$ est inversible aussi:

$$\alpha^0 = (G^t G)^{-1} e$$

Par conséquent, un vecteur initial λ^0 satisfaisant la contrainte (3.18) est donné par

$$\lambda^0 = G(G^t G)^{-1} e$$

Phase d'initialisation, calcul de d et e

Le calcul de

$$d = -\sum_i B_i K_i^+ f_i$$

revient à résoudre un problème en déplacements dans chaque sous-domaine et calculer le saut de ces déplacements aux interfaces (par la multiplication par B_i).

Pour le calcul de

$$e = -R_i^t f_i$$

on détermine la trace sur les interfaces des contraintes des sous-domaines flottants, en supposant α nul.

Pour le gradient et la direction de descente, on a

$$g^0 = D\lambda^0 - d$$

$$w^0 = P(g^0)$$

P étant la projection orthogonale sur le noyau de G^t .

Phase d'itération

On suppose connus les vecteurs λ^n, g^n, w^n

Calcul de Dw^n

$$\rho_n = -\frac{(g^n, w^n)}{(Dw^n, w^n)}$$

$$\lambda^{n+1} = \lambda^n + \rho_n w^n$$

$$g^{n+1} = g^n + \rho_n Dw^n$$

Calcul de Pg^{n+1}

$$\gamma_n = -\frac{(Pg^{n+1}, Dw^n)}{(Dw^n, w^n)}$$

$$w^{n+1} = Pg^{n+1} + \gamma_n w^n$$

La différence de cet algorithme par rapport à la méthode du gradient conjugué est que les directions de descentes sont calculées dorénavant à partir de la projection orthogonale du gradient sur le noyau de G^t , et non plus seulement à partir du gradient. Ainsi, λ^n vérifie toujours la contrainte (3.18).

À convergence, $P(g^n) = 0$ c'est-à-dire que le gradient appartient à l'image de G ,

3.4.2 Calcul de la projection du gradient sur le noyau de G^t

Rappelant que la matrice G^tG est inversible, on remarque que le calcul de la projection orthogonale du gradient sur le noyau de G^t consiste à trouver un β tel que:

$$Pg = g + G\beta$$

$G^tPg = 0$, ceci implique que β est solution du système suivant:

$$G^tG\beta = -G^tg \quad (3.19)$$

ce qui nous amène à l'expression de la projection orthogonale du gradient sur le noyau de G^t :

$$P(g) = g - G(G^tG)^{-1}G^tg$$

Remarque 3.6. G^tG est une matrice creuse, symétrique définie positive. En effet, il y a 3 modes rigides par sous-domaines flottants en dimension 2, et 6 au plus en dimension 3. Par conséquent, la taille de la matrice G^tG est $3N_{ss} \times 3N_{ss}$ pour les problèmes bi-dimensionnels et $6N_{ss} \times 6N_{ss}$ pour les problèmes tri-dimensionnels, N_{ss} étant le nombre de sous-structures flottantes.

Le calcul du gradient projeté demande un produit par la matrice G et par G^t et la solution du système (3.19). Or, la matrice (G^tG) est creuse par conséquent, la résolution du système (3.19) ne représente qu'un coût tout à fait négligeable. En résumé, le calcul de la projection ne représente pas une augmentation significative du coût de la méthode.

3.4.3 Solveur à deux niveaux

L'application de la projection revient à résoudre complètement le problème de minimisation sur la grille grossière, à chaque itération du Gradient Conjugué du problème dual sur la grille fine. Ce problème de minimisation

est un problème de minimisation des sauts des solutions locales aux interfaces. Les paramètres de cette minimisation sont les valeurs des constantes dans les différents sous-domaines.

Comme cela a été remarqué dans C.Farhat, F.X.Roux (1991), la méthode duale avec projection peut être vue comme une méthode de résolution à deux niveaux. Le niveau global “grille grossière” défini par la projection et un niveau de maillage fin dans chaque sous-domaine, avec les opérateurs locaux K_i^+ . La projection revient à résoudre un problème global couplant les constantes sur tous les sous-domaines. Elle représente un mécanisme de transmission globale d’information à l’ensemble des sous-domaines.

Avec les corrections grille grossière, les méthodes de sous-domaines présentent des caractères similaires aux méthodes multigrilles avec toutefois l’avantage de ne pas nécessiter de maillages emboîtés. De plus, ce type de méthode se prête extrêmement bien à la parallélisation sur machines multi-processeurs à mémoire distribuée.

3.5 Reconjugaison des directions de descente

Nous avons donc comme algorithme de résolution, l’algorithme du gradient conjugué projeté. On s’est aperçu, en observant les courbes des résidus, que la décroissance de ceux-ci s’effectue de façon oscillante.

Pour expliquer ce phénomène, on rappelle que le calcul de l’opérateur dual s’effectuait à partir d’inversions locales. Or, plus les matrices locales sont mal conditionnées, plus l’erreur due aux inversions locales est grande. Cette erreur se répercute lorsqu’on multiplie par la matrice de l’opérateur dual entraînant ainsi des conséquences sur les relations d’orthogonalité qui sont désormais vérifiées à un facteur d’erreur de calcul près.

On rappelle rapidement l’algorithme du Gradient conjugué pour mettre en évidence les corrections à apporter afin d’assurer numériquement l’orthogonalité.

La résolution d’un problème $Ax = b$ par l’algorithme du gradient conjugué s’effectue de la manière suivante:

On choisit x_0 , on calcule alors

$$\begin{aligned}g_0 &= Ax_0 - b \\w_0 &= g_0\end{aligned}$$

On suppose connus x_n , g_n et w_n , et on calcule Aw_n

$$\rho_n = -\frac{(g_n, w_n)}{(Aw_n, w_n)}$$

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + \rho_n w_n \\ g_{n+1} &= g_n + \rho_n Aw_n \end{aligned}$$

La nouvelle direction de descente w_{n+1} est calculée à partir de g_{n+1} et de la direction de descente précédente.

$$w_{n+1} = g_{n+1} + \gamma_n w_n \quad (3.20)$$

avec

$$\gamma_n = -\frac{(g_{n+1}, Aw_n)}{(Aw_n, w_n)}$$

On se souvient que le gradient conjugué possède des propriétés d'orthogonalité que l'on peut démontrer par récurrence.

Proposition 3.2 (Propriétés du Gradient Conjugué).

$$\begin{aligned} (g_i, g_j) &= 0 \\ (w_i, g_j) &= 0 \\ (w_i, Aw_j) &= 0 \quad \forall 0 \leq i < j \leq n \end{aligned}$$

Ce sont ces conditions d'orthogonalité qui ne sont plus exactement vérifiées. Pour assurer l'orthogonalité de la nouvelle direction de descente calculée par rapport aux $p+1$ directions précédentes, on remplace la condition (3.20) par la relation suivante:

$$w_{n+1} = g_{n+1} + \sum_{i=0}^p \gamma_{n-i} w_{n-i} \quad (3.21)$$

avec

$$\gamma_{n-i} = -\frac{(g_{n+1}, Aw_{n-i})}{(Aw_{n-i}, w_{n-i})}$$

La relation (3.21) revient donc à stocker un certain nombre $p + 1$ de directions de descentes afin de construire la nouvelle direction de descente de façon à ce qu'elle soit orthogonale aux $p + 1$ directions précédentes.

La relation (3.21) implique le stockage des p directions de descente précédentes et des $p + 1$ vecteurs Aw . Les calculs supplémentaires sont qu'à chaque itération, il est nécessaire de calculer $p + 1$ produits scalaires

$$(g_{n+1}, Aw_{n-i})$$

En ce qui concerne le calcul de la nouvelle direction de descente, il nécessite $p + 1$ combinaisons linéaires.

Le coût est par conséquent plus important que pour l'algorithme initial mais les calculs introduits sont facilement parallélisables.

Chapitre 4

Les méthodes de préconditionnement

On a abouti, au chapitre précédent, à la méthode de résolution du gradient conjugué projeté avec conservation des directions de descente. On rappelle que ce solveur est appliqué à la résolution d'un problème en contrainte sur l'interface avec, à chaque itération une inversion des problèmes locaux. Ici, les inversions locales sont faites de façon directe. Le préconditionnement du gradient conjugué pour le problème d'interface est un aspect très important de la méthode mixte. En ce qui concerne l'implémentation sur ordinateur parallèle, non seulement il faut veiller à ce que chaque itération ne soit pas trop coûteuse en terme de communication, mais en plus ces méthodes doivent converger rapidement. Aussi, le choix du préconditionnement est important pour accélérer la convergence du solveur.

Nous savons, d'après la relation

$$D\lambda = b \tag{4.1}$$

que le gradient du problème interface à l'itération n est défini par

$$g_n = D\lambda_n - b$$

où

$$D = \sum_{i=1}^N B_i K_i^{-1} B_i^t$$

Le gradient est égal à l'inverse des sauts des déplacements aux interfaces:

$$\sum_i B_i(u_n)_i \quad (4.2)$$

L'intuition numérique pour définir un préconditionnement est de rechercher une matrice M qui soit une bonne approximation de D^{-1} . Appliquer le préconditionneur M consistera à transformer le vecteur (4.2), homogène à des déplacements, en un vecteur homogène à des contraintes. Ceci sera fait en relevant le champ des déplacements associés à g_n , par résolution de problèmes locaux, puis en calculant le saut des contraintes aux interfaces.

4.1 Rappel du préconditionneur condensé

En reprenant l'interprétation du préconditionnement en terme de transformation d'un gradient en un vecteur homogène à des contraintes, Roux (1989) a analysé un préconditionneur de la matrice de la méthode hybride dans le cas où les maillages sont conformes.

Considérons la matrice de l'opérateur dual D obtenu par la formulation hybride:

$$\begin{aligned} K_1 u_1 + B_1^t \lambda &= f_1 \\ K_2 u_2 - B_2^t \lambda &= f_2 \\ B_1 u_1 - B_2 u_2 &= 0 \end{aligned}$$

La matrice K est diagonale par bloc, chaque bloc diagonal étant la matrice K_i d'un problème sur un sous-domaine.

La matrice B est une matrice globale des sauts aux interfaces. Elle est formée de blocs soit nuls, soit égaux aux blocs B_i pour les relations entre les multiplicateurs de Lagrange et les degrés de liberté localisés sur les interfaces du i -ème sous-domaine. Le nombre de colonnes est égal à la somme des nombres de degrés de liberté dans les différents sous-domaines, et le nombre de lignes égal au nombre de degrés de liberté du multiplicateur de Lagrange.

λ vérifie l'équation suivante:

$$D\lambda = b \quad (4.3)$$

avec

$$D = \begin{pmatrix} B_1 & -B_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_1^{-1} & 0 \\ 0 & K_2^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1^t \\ -B_2^t \end{pmatrix}$$

et

$$b = \begin{pmatrix} B_1 & -B_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_1^{-1} & 0 \\ 0 & K_2^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$$

Considérons un sous-domaine Ω_i , et numérotons ses degrés de liberté en commençant par ceux qui se trouvent à l'intérieur ou sur les bords libres de Ω_i , et en numérotant en dernier ceux qui se trouvent sur l'interface entre Ω_i et les autres domaines.

Avec une telle numérotation, la matrice de rigidité de Ω_i a la structure par blocs suivante:

$$K_i = \begin{pmatrix} K_{ii} & K_{if} \\ K_{fi} & K_{ff} \end{pmatrix}$$

où K_{ii} représente la matrice du problème avec conditions aux limites de Dirichlet sur l'interface, alors que K_{ff} est la restriction de la matrice de rigidité de Ω_i aux degrés de liberté localisés sur l'interface.

La contribution d'un sous-domaine Ω_i à la matrice du complément de Schur (3.3) s'écrit:

$$S^{(i)} = K_{ff} - K_{fi}K_{ii}^{-1}K_{if} \quad (4.4)$$

La restriction de la matrice B à l'interface est la matrice qui, à chaque couple (u_i, u_j) de degrés de liberté localisés en un point de l'interface, associe leur saut $u_i - u_j$ orienté arbitrairement une fois pour toute.

On note B_i la matrice de restriction à l'interface de la matrice B , c'est-à-dire la matrice de correspondance entre les degrés de liberté sur l'interface, et ceux du multiplicateur de Lagrange.

La contribution du sous-domaine Ω_i à la restriction de l'opérateur dual complet D aux degrés de liberté du multiplicateur de Lagrange associés à ce sous-domaine s'écrit:

$$D^{(i)} = B_i K_i^{-1} B_i^t \quad (4.5)$$

Si l'on numérote les degrés de liberté en déplacements localisés sur des points de l'interface dans le même ordre que les degrés de liberté du multiplicateur de Lagrange, la matrice B_i a la forme suivante:

$$B_i = \begin{pmatrix} 0 & I \end{pmatrix}$$

où 0 est une matrice nulle ayant un nombre de colonnes égal au nombre de degrés de liberté internes à Ω_i , et I est la matrice identité de dimension égale aux nombres de degrés de liberté en déplacements sur l'interface. C'est une matrice de restriction.

On a donc la relation suivante:

$$D^{(i)} = \begin{pmatrix} 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_{ii} & K_{if} \\ K_{fi} & K_{ff} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix}$$

On considère maintenant la matrice:

$$\begin{pmatrix} C_{ii} \\ C_{ff} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{ii} & K_{if} \\ K_{fi} & K_{ff} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix}$$

Grâce à la définition de $D^{(i)}$: nous avons $D^{(i)} = C_{ff}$.

De plus, par définition de C_{ii} et C_{ff} , on a

$$\begin{aligned} K_{ii}C_{ii} + K_{if}C_{ff} &= 0 \\ K_{fi}C_{ii} + K_{ff}C_{ff} &= I \end{aligned} \quad (4.6)$$

Par élimination de la matrice C_{ii} dans les équations (4.6), on obtient:

$$-K_{fi}K_{ii}^{-1}K_{if}C_{ff} + K_{ff}C_{ff} = [K_{ff} - K_{fi}K_{ii}^{-1}K_{if}]C_{ff} = I \quad (4.7)$$

d'où

$$D^{(i)} = [S^{(i)}]^{-1}$$

4.1.1 Préconditionnement à l'aide des matrices de rigidité locales

Une idée naturelle pour trouver un préconditionneur est de remarquer que la matrice D est construite à partir des inverses locaux de $S^{(i)}$ et de

proposer un premier préconditionneur \bar{M} à partir de $S^{(i)}$.

$$\bar{M} = \sum_i S^{(i)} = \sum_i B_i \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S^{(i)} \end{pmatrix} B_i^t \quad (4.8)$$

Il apparaît que les $S^{(i)}$ sont trop coûteux à calculer, on cherche ainsi à les simplifier.

Etude du spectre de la matrice duale préconditionnée Supposons que le préconditionnement soit parfait, c'est-à-dire que $SD = I$. Par conséquent, les vecteurs propres associés aux plus grandes valeurs propres de S sont des vecteurs propres de D associés aux plus petites valeurs propres. Les plus grandes valeurs propres de S sont d'ordre $\frac{1}{h}$ et la densité du haut du spectre tend à augmenter lorsque h tend vers 0, (Bjorstadt et Widlund (1986)).

Reprenons le cas d'un domaine Ω décomposé en deux sous-domaines Ω_1 et Ω_2 séparés par une interface Γ_3 . Considérons le sous-espace engendré par les vecteurs propres de S associés à des valeurs propres supérieures à une constante C , grande devant 1. On a pour tout λ unitaire dans ce sous-espace:

$$(S\lambda, \lambda) = (K_{33}\lambda, \lambda) - (K_{31}K_{11}^{-1}K_{13}\lambda, \lambda) - (K_{32}K_{22}^{-1}K_{23}\lambda, \lambda) > C \gg 1 \quad (4.9)$$

Les matrices $K_{31}K_{11}^{-1}K_{13}$ et $K_{32}K_{22}^{-1}K_{23}$ sont positives, ceci entraîne que K_{33} est spectralement dominante devant $K_{31}K_{11}^{-1}K_{13} + K_{32}K_{22}^{-1}K_{23}$.

Ceci explique pourquoi le préconditionnement par la matrice K_{33} a des effets comparables au préconditionnement par S sur la partie haute du spectre.

Grâce à cette étude spectrale, nous pouvons revenir sur le préconditionneur donné en (4.8). Puisque le préconditionnement par la matrice K_{33} a des effets comparables au préconditionnement par S , on propose donc le nouveau préconditionneur:

$$M = \sum_i K_{33} = \sum_i B_i \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{33} \end{pmatrix} B_i^t$$

qui s'écrit aussi

$$M = \sum_i B_i K_i B_i^t$$

On remarque que M est construit à partir des matrices locales. C.Fahrat et F.X.Roux (1994) ont montré que M est une bonne approximation de D^{-1} au sens où elle accélère la convergence de la méthode. Le préconditionnement s'interprète alors comme une transformation du champ de déplacements en un champ de contraintes.

Dans le cas conforme, F.X. Roux a noté que le préconditionnement de la matrice D par la matrice $\sum_i B_i K_i B_i^t = B K B^t$ tend à concentrer les valeurs propres et à tasser le spectre amplifiant ainsi les phénomènes de super convergence de l'algorithme du gradient conjugué.

Nous allons maintenant proposer une extension de ce préconditionneur au cas non conforme et noterons les mêmes phénomènes de tassement du spectre.

4.2 Extension du préconditionneur au cas non conforme

La matrice d'interface est la matrice de correspondance entre les degrés de liberté situés sur l'interface et les degrés de liberté des multiplicateurs de Lagrange.

B_i n'est plus ici une matrice de restriction. Nous rappelons que le calcul des termes de la matrice d'interface dans le cas de deux sous-domaines dont les maillages ne coïncident pas sur l'interface Γ est donné par:

$$\int_{\Gamma} (u_1 - u_2) \Psi(y) = 0 \quad (4.10)$$

où les fonctions de base de u_i sont linéaires par morceaux et celles de Ψ linéaires par morceaux avec des pentes nulles aux extrémités de l'interface.

En renumérotant les points situés sur l'interface, la matrice interface B_i prend alors la forme suivante:

$$B_i = P_i R_i$$

où P_i est une matrice 'projection' rectangulaire dont les coefficients sont égaux à ceux issus du calcul de l'intégrale 4.10 et R_i est la matrice rectangulaire, restriction des déplacements de Ω_i à l'interface.

Ainsi, la matrice de l'opérateur dual D s'écrit

$$D = \sum_i B_i K_i^{-1} B_i^t = \sum_i P_i R_i K_i^{-1} R_i^t P_i^t$$

La matrice de préconditionnement que nous proposons est:

$$M_1 = \sum_i (P_i P_i^t)^{-1} (P_i R_i K_i R_i^t P_i^t) (P_i P_i^t)^{-1} \quad (4.11)$$

Nous pouvons justifier ce choix en considérant le cas d'un maillage uniforme en éléments finis rectangulaires sur chaque sous-domaine et en considérant K_i diagonale. En effet, dans ce cas, on remarque que les matrices $R_i K_i R_i^t = k_i$ sont constantes par interface. Les matrices R_i étant des matrices de restriction, il est clair que l'on a $R_i K_i^{-1} R_i^t = k_i^{-1}$.

De ce fait, la matrice de l'opérateur D s'écrit

$$D = \sum_i P_i k_i^{-1} P_i^t$$

Comme on l'a vu précédemment, un bon 'candidat' pour préconditionner la matrice D est:

$$M = \sum_i (P_i k_i^{-1} P_i^t)^{-1} \quad (4.12)$$

qui peut encore s'écrire comme (4.11) car P_i et k_i commutent (k_i est constante par interface).

Remarque 4.1. *Nous remarquons que dans le cas conforme FETI classique, le terme $(P_i P_i^t)^{-1}$ correspond au quotient 1 / nombre de sous-domaines auxquels appartient le point interface.*

Remarque 4.2 (Factorisation QR). Pour le calcul de $(P_i P_i^t)^{-1}$, nous utiliserons la factorisation $P_i^t = QR$ par la méthode de Householder.

La matrice P_i^t est une matrice rectangulaire (M, N) . Nous allons transformer P_i^t , à l'aide de N transformations élémentaires de Householder successives, en une matrice 'triangulaire' R ayant la structure :

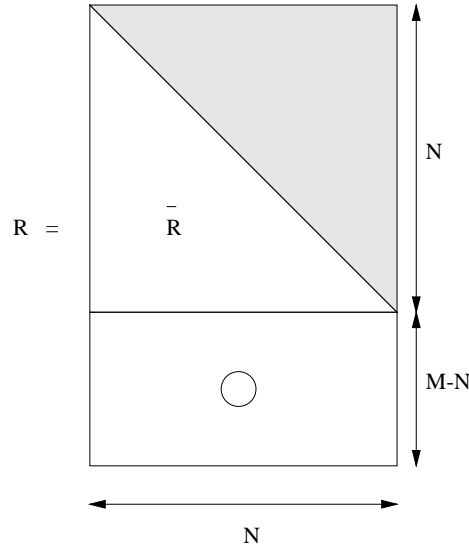


FIG. 4.1 - Factorisation QR

où \bar{R} est une matrice carrée (N, N) , triangulaire supérieure.

Lien avec la factorisation de $(P_i P_i^t)$:

Puisque $P_i^t = QR$, Q étant orthogonale, on a :

$$P_i P_i^t = R^t Q^t Q R = R^t R = \begin{bmatrix} \bar{R}^t & 0 \\ \bar{R} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{R} \\ 0 \end{bmatrix} = \bar{R}^t \bar{R}$$

La factorisation QR utilisée est une factorisation en structure pleine, par bloc, par interface. On pourrait réduire le coût de la factorisation en travaillant en structure creuse.

4.2.1 Résultats numériques

Dans les sections résultats numériques, le problème étudié est:

Trouver u tel que

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f, & \text{dans } \Omega \\ u &= 0, & \text{sur } \partial\Omega \end{aligned} \tag{4.13}$$

Théorème 4.1. *Si A est un opérateur compact autoadjoint sur H alors le seul point d'accumulation possible du spectre est 0.*

Le théorème suivant est démontré dans [Roux, 1989].

Théorème 4.2. *L'opérateur dual est un opérateur compact autoadjoint de $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ dans lui-même*

Les théorèmes 4.1 et 4.2 nous permettent de dire que les valeurs propres de l'opérateur dual continu forment une suite décroissante vers 0. Ceci se caractérise par le fait que les valeurs propres de la matrice de l'opérateur dual discrétisé s'accumulent dans la partie basse du spectre lorsque le paramètre de discrétisation tend vers 0.

Nous allons premièrement étudier le cas d'un domaine Ω carré, décomposé en 4 (2×2) sous-domaines, chaque sous-domaine étant maillé de façon indépendante, puis raffiné par 2, par 4 et par 8. Nous étudions le cas où $f = 2 \sin(x) \sin(y)$.

Les courbes suivantes représentent les spectres de la matrice duale, avec et sans préconditionnement.

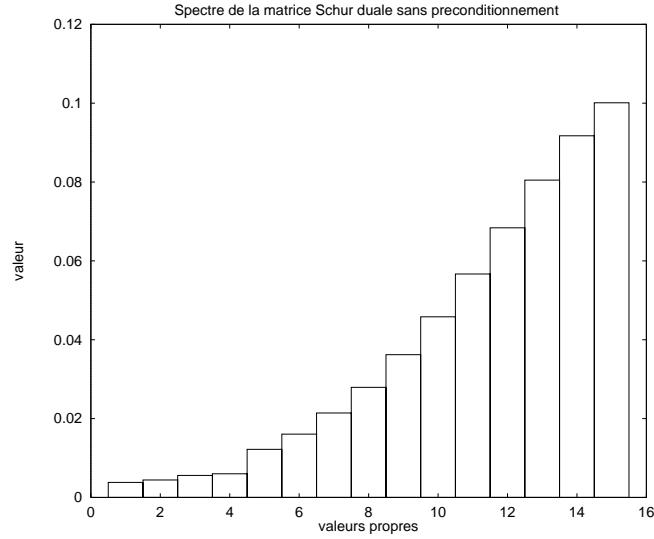


FIG. 4.2 - *Spectre de la matrice Schur duale sans préconditionneur, décomposition 2×2 , $c = 1$, $h_1^{-1} = h_2^{-1} = 16$, $h_3^{-1} = h_4^{-1} = 24$*

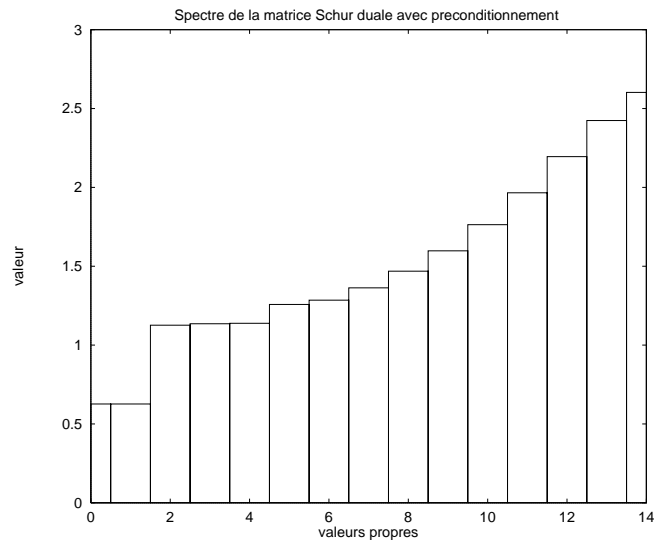


FIG. 4.3 - *Spectre de la matrice Schur duale avec préconditionneur, décomposition 2×2 , $c = 1$, $h_1^{-1} = h_2^{-1} = 16$, $h_3^{-1} = h_4^{-1} = 24$*

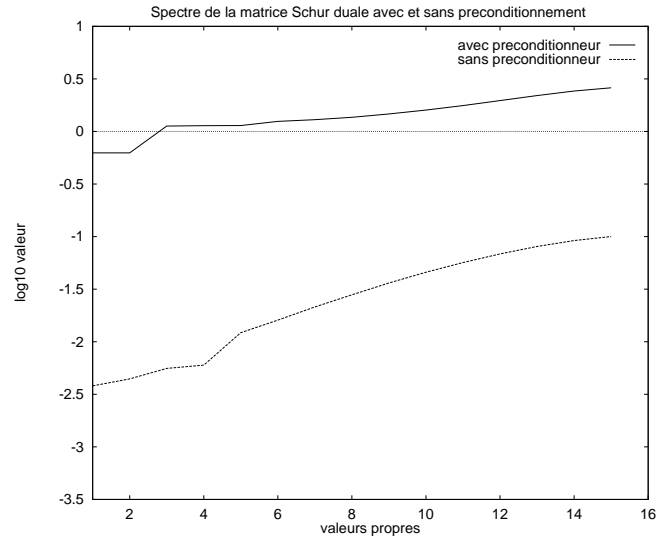


FIG. 4.4 - Influence du préconditionneur sur le spectre de la matrice Schur duale, décomposition 2×2 , $c = 1$, $h_1^{-1} = h_2^{-1} = 16$, $h_3^{-1} = h_4^{-1} = 24$

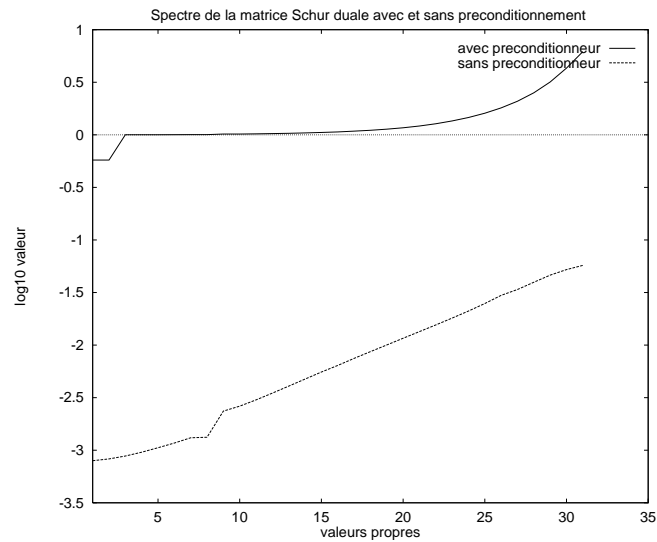


FIG. 4.5 - Influence du préconditionneur sur le spectre de la matrice Schur duale, décomposition 2×2 , $c = 1$, $h_1^{-1} = h_2^{-1} = 32$, $h_3^{-1} = h_4^{-1} = 48$

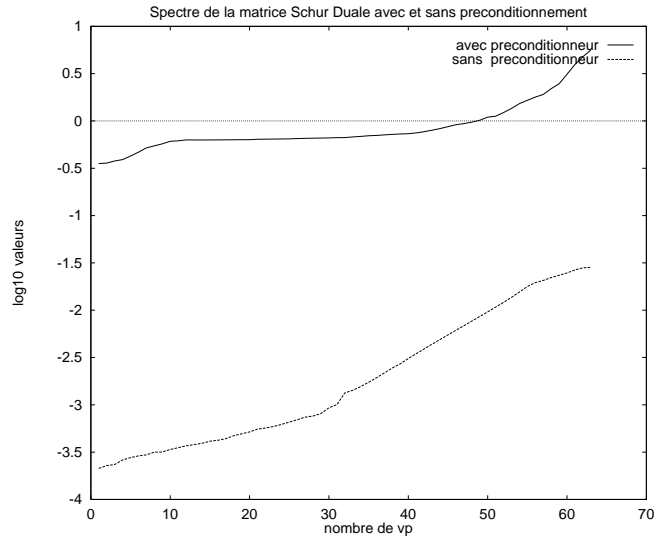


FIG. 4.6 - Influence du préconditionneur sur le spectre de la matrice Schur duale, décomposition 2×2 , $c = 1$, $h_1^{-1} = h_2^{-1} = 64$, $h_3^{-1} = h_4^{-1} = 96$

Nous remarquons sur les figures 4.4, 4.5, 4.6 une accumulation des petites valeurs propres de la matrice duale lorsque le paramètre de discrétisation, c'est-à-dire les pas du maillage, tend vers 0.

De plus, en préconditionnant par le préconditionneur non conforme basé sur les matrices de rigidité locales, nous remarquons sur ces mêmes figures que le conditionnement des opérateurs est amélioré.

En résumé, il apparaît que le préconditionneur a non seulement des effets sur la largeur totale du spectre mais aussi sur la partie basse de celui-ci, le phénomène remarqué étant le tassement des petites valeurs propres. Par conséquent, le préconditionneur accélère la vitesse de convergence du gradient conjugué qui converge plus vite lorsque les grandes valeurs propres sont bien séparées.

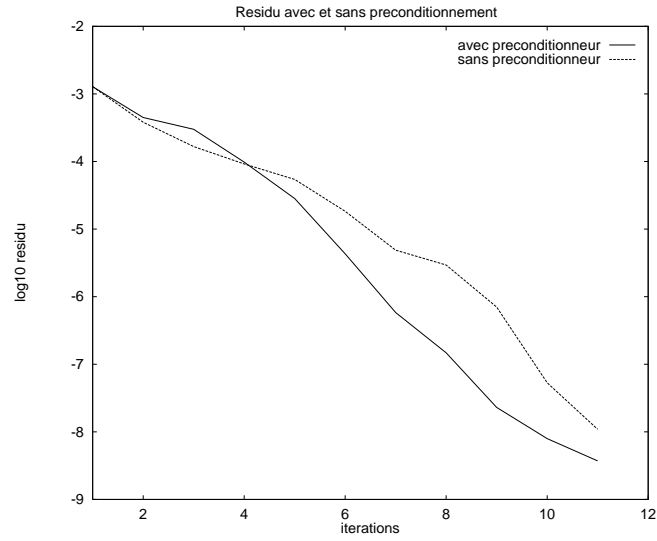


FIG. 4.7 - Influence du préconditionneur sur le résidu, décomposition 2×2 , $c = 1$, $h_1^{-1} = h_2^{-1} = 16$, $h_3^{-1} = h_4^{-1} = 24$

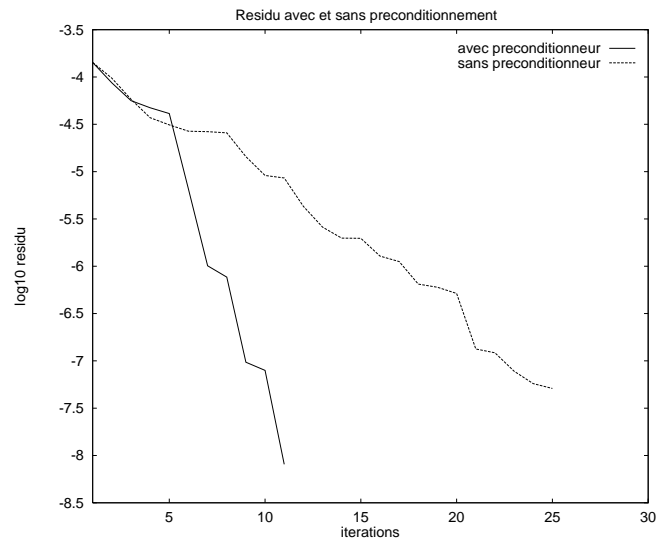


FIG. 4.8 - Influence du préconditionneur sur le résidu, décomposition 2×2 , $c = 1$, $h_1^{-1} = h_2^{-1} = 32$, $h_3^{-1} = h_4^{-1} = 48$

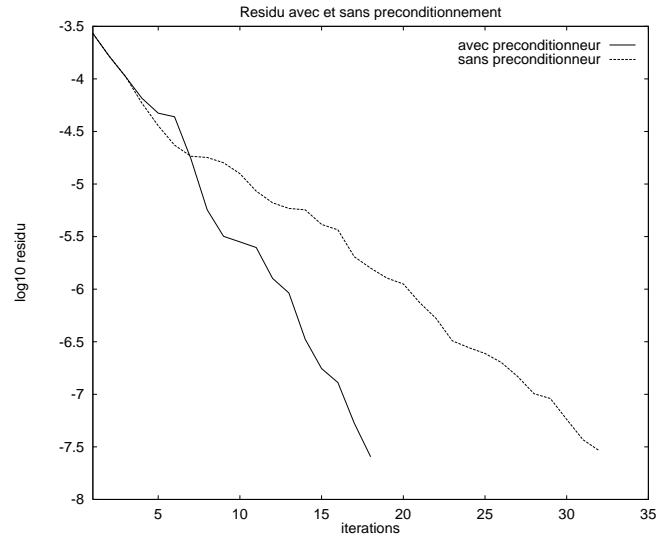


FIG. 4.9 - Influence du préconditionneur sur le résidu, décomposition 2×2 , $c = 1$, $h_1^{-1} = h_2^{-1} = 64$, $h_3^{-1} = h_4^{-1} = 96$

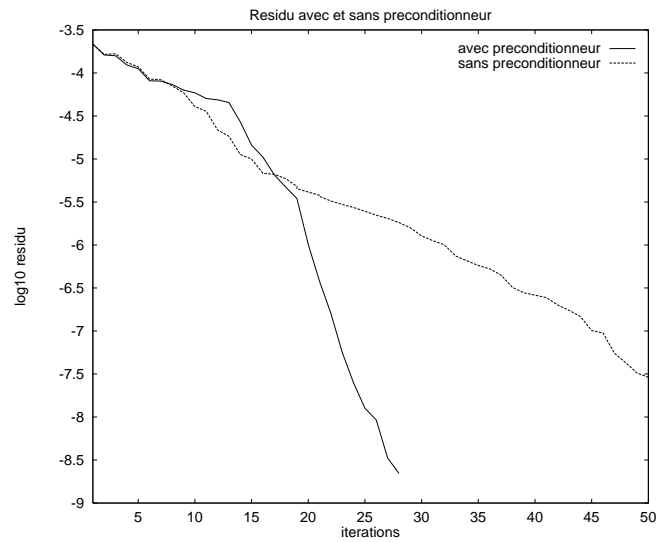


FIG. 4.10 - Influence du préconditionneur sur le résidu, décomposition 2×2 , $c = 1$, $h_1^{-1} = h_2^{-1} = 128$, $h_3^{-1} = h_4^{-1} = 192$

Le préconditionneur M_1 s'est avéré efficace comme le montrent les courbes

4.7, 4.8, 4.9 et 4.10 pour un test quatre sous-domaines, raffinés plusieurs fois. Chaque résidu est calculé pour un problème avec ou sans préconditionneur. Cependant, il apparaît que le préconditionneur n'accélère pas la convergence aux premières itérations. Au contraire, celle-ci est légèrement ralentie au départ. Par contre, après un certain nombre d'itérations, lorsque l'on commence à atteindre un degré de précision tel que les phénomènes mis en jeu sont associés à des basses fréquences de la matrice duale, le préconditionneur non conforme accélère la convergence. Le facteur gagné est environ 2.

Pour un test avec maillage constant, par exemple, pour un pas de discrétisation égal à $h_1^{-1} = h_2^{-1} = 64$, $h_3^{-1} = h_4^{-1} = 96$, on décompose le domaine en 2×4 sous-domaines.

Les expériences numériques ont montré que le phénomène de tassement du bas du spectre obtenu par le préconditionnement de la matrice duale à l'aide des matrices de rigidités locales s'observait encore pour des nombres de sous-domaines plus importants.

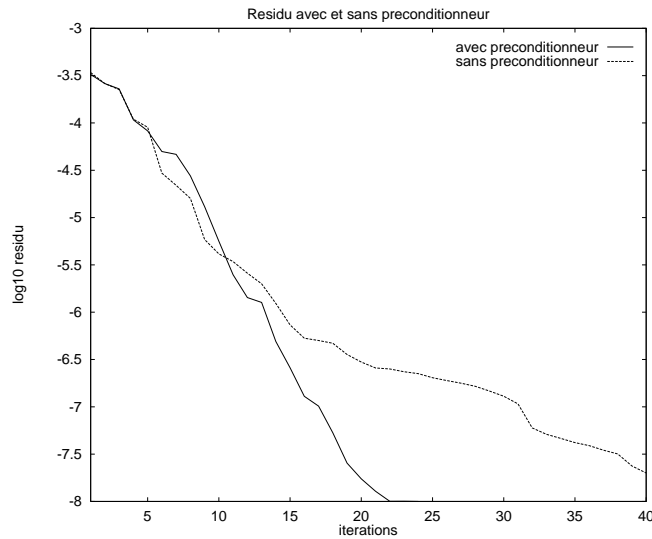


FIG. 4.11 - Influence du préconditionneur sur le résidu, décomposition 2×4 , $c = 1$, $h_1^{-1} = h_2^{-1} = h_5^{-1} = h_6^{-1} = 64$, $h_3^{-1} = h_4^{-1} = h_1^{-7} = h_2^{-8} = 96$

Remarque 4.3. Les calculs ont été effectués sur le 'petit' Paragon

possédant 8 processeurs. Les décompositions ne faisaient pas apparaître de sous-domaines flottants. Des résultats sur des problèmes plus complexes, le problème de plaques, avec présence de sous-domaines flottants seront présentés dans le chapitre 7.

4.3 Approche hiérarchique

4.3.1 Introduction

Notre motivation vient des résultats des travaux de H. Yserentant (1986). Dans ses articles, il analyse le nombre de conditionnement des matrices de rigidité issues d'un problème elliptique d'ordre 2 discrétisé par la méthode des éléments finis utilisant une approche "base hiérarchique" de l'espace éléments finis au lieu de l'approche classique "base nodale". Il a été montré que le nombre de conditionnement de la matrice de rigidité se comporte en $O((\log K)^2)$ où K est le nombre de conditionnement de la matrice de rigidité écrite dans sa base nodale.

Dans le cas d'une triangularisation uniforme, de pas de maillage h , le nombre de conditionnement de la matrice de rigidité écrite dans sa base hiérarchique se comporte donc en $O((\log \frac{1}{h})^2)$ au lieu de $O((\frac{1}{h})^2)$ pour la matrice de rigidité écrite dans sa base nodale. Ce résultat n'est valable qu'en dimension 2 d'espace.

Par conséquent, dans la même optique, nous allons considérer la matrice de l'opérateur dual D , qui peut être interprété comme un opérateur d'ordre 1, définie dans sa base hiérarchique. Pour ce faire, nous allons construire une base hiérarchique de l'espace des multiplicateurs de Lagrange.

Nous commençons dans cette section, à donner la méthodologie de la construction d'une base hiérarchique dans le cas général.

4.3.2 Formulation variationnelle

Le problème à résoudre est:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in V \text{ tel que} \\ a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in V \\ \text{avec les notations:} \\ V = \{v \in H^1(\Omega), v = 0 \text{ sur } \Gamma \} \end{array} \right. \quad (4.14)$$

La résolution de ce problème dans le cadre des éléments finis hiérarchiques consiste à générer, à partir d'un maillage initial \mathcal{T}_1 , une série de maillages $\{\mathcal{T}_\alpha\}$.

Lorsque le maillage est raffiné au cours du calcul, l'espace d'approximation éléments finis est enrichi par l'introduction des fonctions de base associées aux nœuds nouvellement créés. Ces fonctions de base successivement ajoutées restent inchangées une fois qu'elles sont introduites et forment une base, dite hiérarchique de l'espace éléments finis. Cette base entraîne certains recouvrements non-standard des supports des fonctions de base associées aux nœuds qui n'appartiennent pas forcément à un même élément.



FIG. 4.12 - Bases nodales et hiérarchiques pour des fonctions linéaires par morceaux

Par conséquent, l'espace $V(\Omega)$ est approché par la série des espaces éléments finis correspondants $\{V_\alpha(\Omega)\}$. Dans notre cas à deux dimensions, un maillage $\mathcal{T}_{\alpha+1}$ est généré en subdivisant certains éléments du maillage \mathcal{T}_α et $V_{\alpha+1}(\Omega)$ est obtenu en ajoutant dans $V_\alpha(\Omega)$ les fonctions de bases $\Phi_A^{\alpha+1}$ aux nœuds créés à ce niveau de raffinement et en laissant inchangées toutes les anciennes fonctions de base.

Par construction, ces espaces vérifient la relation suivante:

$$V_1(\Omega) \subset V_2(\Omega) \subset \dots \subset V_\alpha(\Omega) \subset V_{\alpha+1}(\Omega) \subset \dots \subset V(\Omega)$$

Le champ de déplacement approché $u^\alpha \in V_\alpha(\Omega)$ est développé sous la forme suivante:

$$u^\alpha(x) = \sum_{\delta=1}^{\alpha} \sum_{A \in \text{nœud}(\mathcal{T}_\delta)} u_A^\delta \Phi_A^\delta$$

On note que les degrés de liberté associés aux nœuds adaptatifs créés au niveau “ $\alpha + 1$ ” ne représentent qu’une correction de déplacement pour u^α appartenant à $V_\alpha(\Omega)$.

La formulation variationnelle discrétisée de (4.14) s’écrit alors:

$$\begin{aligned} \text{Trouver } u^\alpha &= \sum_{\delta, A} u_A^\delta \Phi_A^\delta \in V_\alpha(\Omega) \quad \text{tel que} \\ &\forall \Phi_B^\beta \in V_\alpha(\Omega) \\ \sum_{\delta, A} u_A^\delta a(\Phi_A^\delta, \Phi_B^\beta) &= L(\Phi_B^\beta) \end{aligned} \quad (4.15)$$

On remarque que le système à résoudre ($A^{\alpha\alpha}$) possède une structure par blocs et ($A^{\alpha\alpha}$) est pleine puisque les blocs de couplage entre deux niveaux différents de raffinement sont composés de termes non nuls à cause des fonctions de formes hiérarchiques.

$$\begin{pmatrix} (A^{11}) & \dots & (A^{1\delta}) & \dots & (A^{1\alpha}) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ (A^{\delta 1}) & \dots & (A^{\delta\delta}) & \dots & (A^{\delta\alpha}) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ (A^{\alpha 1}) & \dots & (A^{\alpha\delta}) & \dots & (A^{\alpha\alpha}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (U^1) \\ \vdots \\ (U^\delta) \\ \vdots \\ (U^\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (F^1) \\ \vdots \\ (F^\delta) \\ \vdots \\ (F^\alpha) \end{pmatrix}$$

Construction de V_Ω

On a la relation très importante:

$$V_{\alpha+1} = V_\alpha \oplus \nu_{\alpha+1}$$

$\nu_{\alpha+1}$ est le sous-espace de $V_{\alpha+1}$ contenant les fonctions nulles à tous les points du maillage \mathcal{T}_k , au niveau l avec $1 \leq l \leq k$.

Ainsi, une base hiérarchique de $V_{\alpha+1}$ est l'union d'une base hiérarchique de V_α et de la base nodale de $\nu_{\alpha+1}$.

On a:

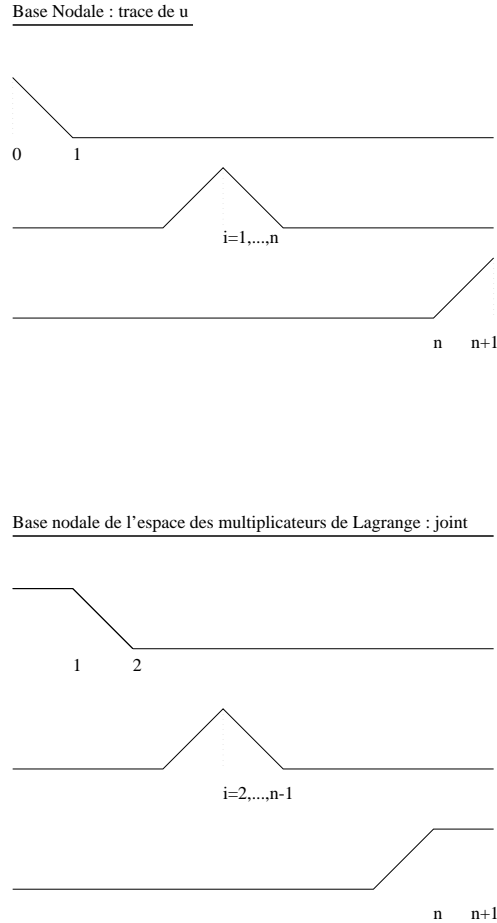
$$\begin{aligned}\nu_{\alpha+1} &= \text{Vect} \left\{ \Phi_i^{\alpha+1}; p_i \in \mathcal{T}_{\alpha+1} \setminus \mathcal{T}_\alpha \right\} \\ &= \{w \in V_{\alpha+1}; w(p_i) = 0 \ p_i \in \mathcal{T}_\alpha\}\end{aligned}$$

4.3.3 La méthode des joints hiérarchiques

Nous rappelons brièvement la construction des fonctions de bases nodales pour u . On associe une fonction de base Φ_i à chaque sommet M_i du maillage \mathcal{T}_h donné telle que:

$$\begin{aligned}\Phi_i(M_i) &= 1 \\ \Phi_i(M_j) &= 0 \quad \text{pour } i \neq j\end{aligned}$$

En ce qui concerne les fonctions de bases nodales pour l'espace des joints, nous avons la même construction excepté aux extrémités de l'interface où les pentes des fonctions sont nulles.

FIG. 4.13 - *Fonctions de bases nodales*

Détaillons la construction des fonctions de base hiérarchique pour l'espace des fonctions joints.

La base hiérarchique est construite sur une famille de grilles emboîtées $\{\mathcal{T}_i\}_{i=1}^L$ issues d'un processus de raffinement. Sur la première grille \mathcal{T}_1 , la base hiérarchique est équivalente à la base nodale sous la contrainte 'pentes nulles' aux extrémités de l'interface. Par la suite, à chaque division due au procédé de raffinement, un ou plusieurs nœuds sont ajoutés et pour chacun de ces nœuds, une nouvelle fonction de base Φ_i^H est définie vérifiant la propriété suivante:

$$\begin{aligned}\Phi_i^H &= 1 && \text{aux nœuds nouvellement créés} \\ \Phi_i^H &= 0 && \text{sur tous les anciens nœuds}\end{aligned}$$

Ces fonctions de base hiérarchique ajoutées au cours du raffinement sont *inchangées une fois qu'elles ont été introduites*.

La figure 4.14 suivante illustre ce procédé dans le cas simple mono-dimensionnel.

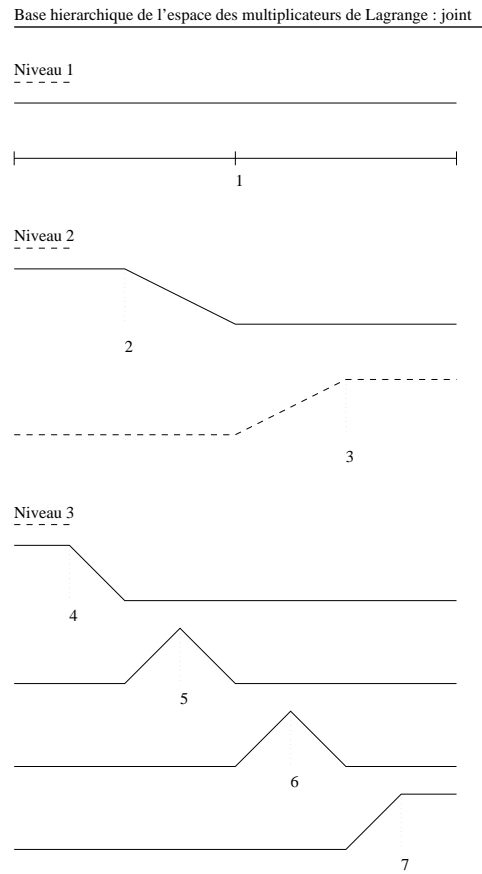


FIG. 4.14 - *Fonctions de bases hiérarchiques*

Préconditionneur “hiérarchique” Notre motivation maintenant est de trouver un préconditionnement pour la matrice de l’opérateur Schur dual construite dans sa base hiérarchique. Nous rappelons que la base hiérarchique porte uniquement sur l’espace des multiplicateurs de Lagrange (et non pas à l’intérieur des sous-domaines). Notre idée fut de trouver un préconditionneur associé à un maillage grossier, c’est à dire au premier niveau de raffinement.

La matrice Schur dual est construite sur les différentes grilles emboîtées générées à partir du premier niveau grossier par raffinement successif. Nous utilisons comme préconditionneur le bloc de la matrice Schur duale associé aux premières grilles grossières. Nous obtenons ainsi un problème sur l’interface préconditionné par son premier niveau.

Puisque nous travaillons en base hiérarchique, le préconditionneur grille grossière correspond à un préconditionneur bloc diagonal pour la matrice D issue de l’opérateur Schur dual. Ce préconditionneur est calculé, assemblé et inversé par la méthode du gradient conjugué avec reconjugaison des directions de descente.

Dans un second temps, nous préconditionnons ce problème par le préconditionneur M_1 , construit à l’aide des matrices de rigidité locales, étudié dans la section précédente.

Au chapitre 3, nous avons introduit l’algorithme du gradient conjugué avec reconjugaison des directions de descente. On peut alors juxtaposer les préconditionneurs, quitte à perdre la symétrie du préconditionneur, dans la mesure où l’algorithme est totalement reconjugué, c’est-à-dire qu’on a imposé fortement les relations d’orthogonalité.

Une autre façon de faire serait d’utiliser le préconditionneur comme projecteur associé à la contrainte de continuité faible sur la grille grossière, voir [C.Farhat, P.S.Chen et F.X.Roux, 1996].

4.4 Conclusion et discussion

Nous allons premièrement étudier le cas d’un domaine carré, décomposé en 4 (2×2) sous-domaines, chaque sous-domaine étant maillé de façon

indépendante. On considère les bases des multiplicateurs de Lagrange hiérarchiques aux niveaux 4, puis 5 et 6.

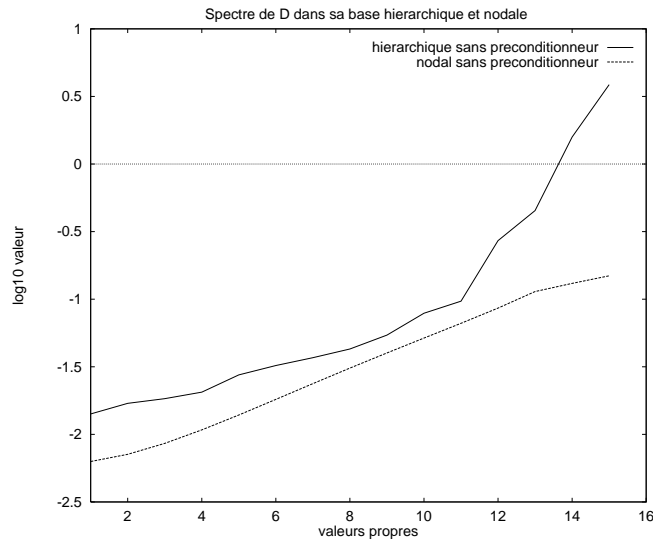


FIG. 4.15 - *Spectre de la matrice Schur dual écrite dans sa base hiérarchique et dans sa base nodale sans préconditionnement (raffinement: niveau 4).*

La première remarque est que l’approche hiérarchique de l’espace des multiplicateurs de Lagrange n’a pas eu l’effet escompté en ce qui concerne le conditionnement de la matrice Schur dual. Le conditionnement de D écrite dans sa base hiérarchique est plus important que celui de D écrite dans sa base nodale. Cependant, on remarque que le conditionnement local de la partie inférieure du spectre “hiérarchique” est inférieur à celui de la partie inférieure du spectre “nodal”, voir figure 4.15.

Par conséquent, afin d’exploiter les propriétés de *super-convergence* du gradient conjugué, nous avons préconditionné le problème dual hiérarchique par le préconditionneur grille grossière. Ce préconditionneur étant symétrique, le conditionnement de la matrice Schur dual est calculé à partir de ses valeurs propres.

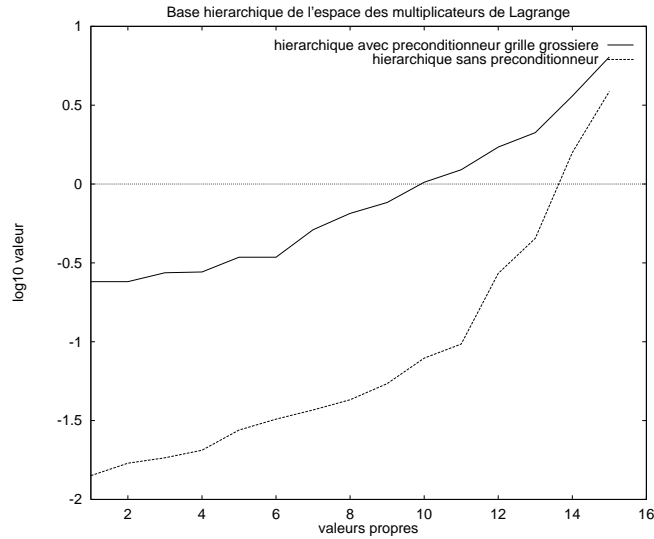


FIG. 4.16 - *Spectre de la matrice Schur dual écrite dans sa base hiérarchique avec ou sans préconditionnement (raffinement: niveau 4).*

Visualisons sur la figure 4.16 le spectre de la matrice Schur dual écrite dans sa base hiérarchique sans préconditionneur et avec le préconditionneur grille grossière. Le conditionnement de la matrice duale hiérarchique et préconditionnée est plus petit que celui de la matrice duale hiérarchique sans préconditionneur.

Une remarque intéressante est que le préconditionneur a tendance à amplifier le phénomène de tassement de la partie basse du spectre.

Visualisons, sur la figure 4.17, les résidus dans le cas hiérarchique avec et sans préconditionneur.

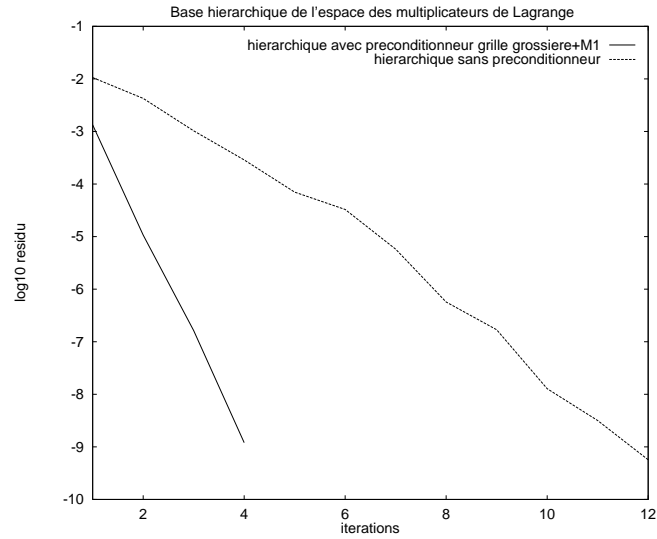


FIG. 4.17 - Influence du préconditionneur sur le résidu (raffinement: niveau 4).

L'approche hiérarchique préconditionnée est réellement efficace, le nombre d'itérations étant réduit d'un facteur 3.

Pour un niveau de hiérarchie supérieur, nous comparons le spectre de la matrice Schur dual écrite dans sa base hiérarchique et dans sa base nodale avec ou non préconditionnement du problème. Dans les deux cas (hiérarchique et nodal), on assiste au tassement de la partie inférieure du spectre, le conditionnement total étant toutefois meilleur pour le cas nodal préconditionné à l'aide des matrices de rigidités locales. Figure 4.18 et 4.19

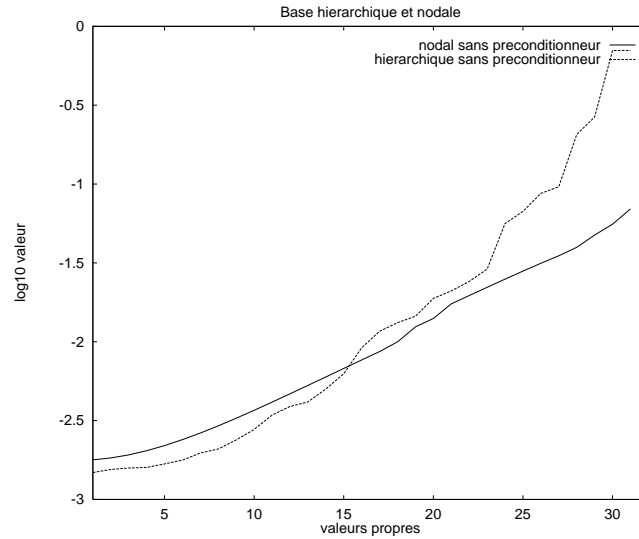


FIG. 4.18 - Spectre de la matrice Schur dual écrite dans sa base hiérarchique et nodale sans préconditionnement (raffinement: niveau 5).

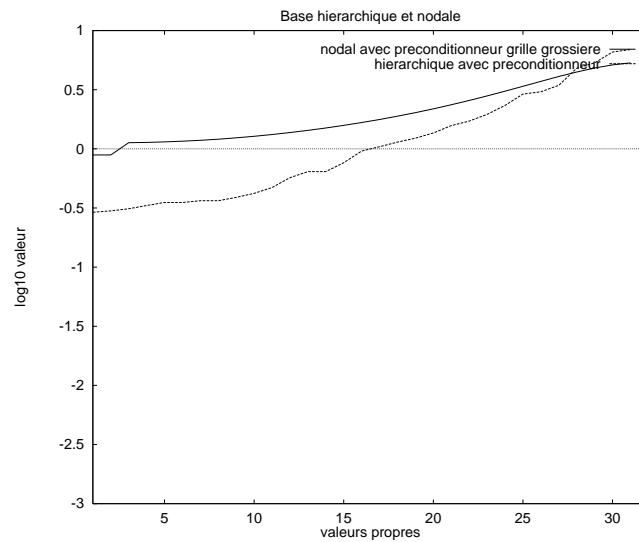


FIG. 4.19 - Spectre de la matrice Schur dual écrite dans sa base hiérarchique et nodale avec préconditionnement (raffinement: niveau 5).

La comparaison des résidus est donnée sur les figures 4.20 et 4.21.

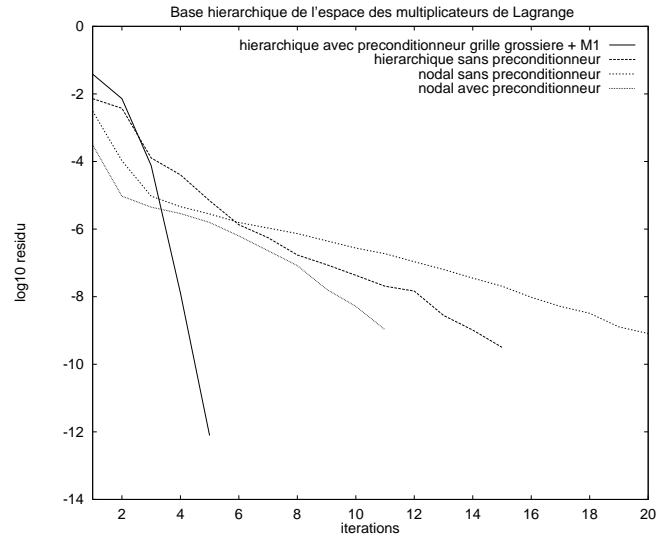


FIG. 4.20 - Influence du préconditionneur sur le résidu (niveau 5).

Le résidu dans le cas hiérarchique préconditionné est amélioré d'un facteur 4 par rapport au résidu calculé dans le cas nodal sans préconditionneur et d'un facteur 2.5 par rapport au résidu calculé dans le cas nodal avec préconditionneur.

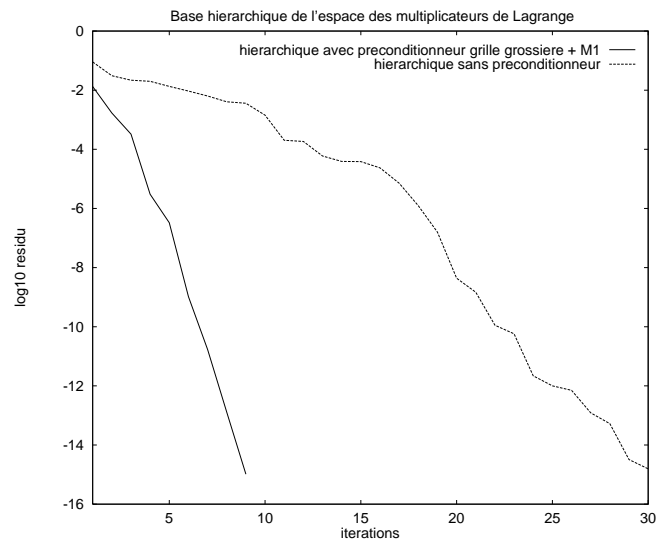


FIG. 4.21 - Influence du préconditionneur sur le résidu (raffinement: niveau 6).

Dans le cas d'un niveau de hiérarchie numéro 6, nous avons décomposé le domaine en 2×4 sous domaines. Les résidus sont donnés sur la figure 4.22.

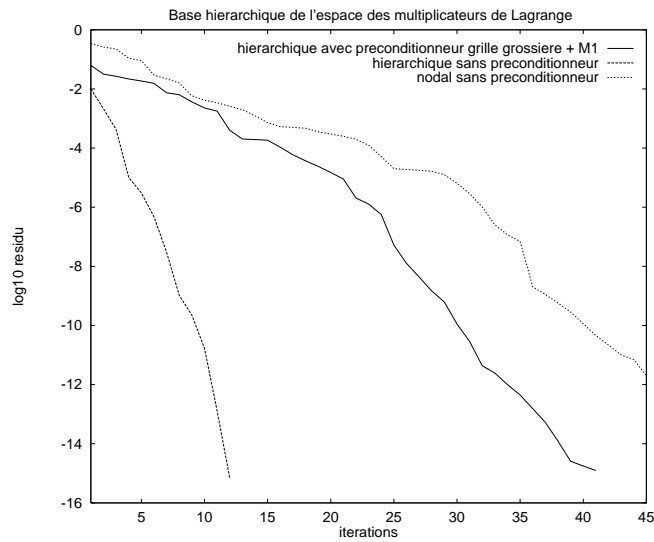


FIG. 4.22 - Influence du préconditionneur sur le résidu (raffinement: niveau 6, décomposition 2×4 sous-domaines).

Préconditionneur hiérarchique diagonal On introduit un deuxième preconditionneur. Il s'agit cette fois de preconditionner par l'inverse de la diagonale de la matrice Schur duale. Le gradient conjugué devrait converger plus vite sur le problème preconditionné que sur le problème initial.

Visualisons, sur la figure 4.23 et 4.24, les résidus dans le cas hiérarchique sans preconditionneur et avec le preconditionneur grille grossière étudié dans le paragraphe précédent et le preconditionneur hiérarchique diagonal.

Nous considérons toujours le même problème du Laplacien sur un domaine carré, décomposé en $4 \times 2 \times 2$ sous-domaines. On considère les bases des multiplicateurs de Lagrange hiérarchique aux niveaux 4 et 5. Les calculs sont effectués sur le Paragon à 8 processeurs, il n'y a donc pas présence de sous-domaines flottants.

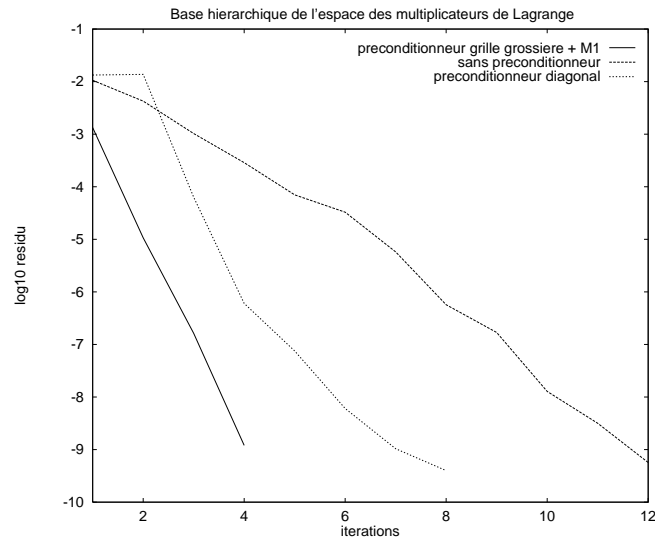


FIG. 4.23 - Influence des preconditionneurs sur le résidu (raffinement: niveau 4).

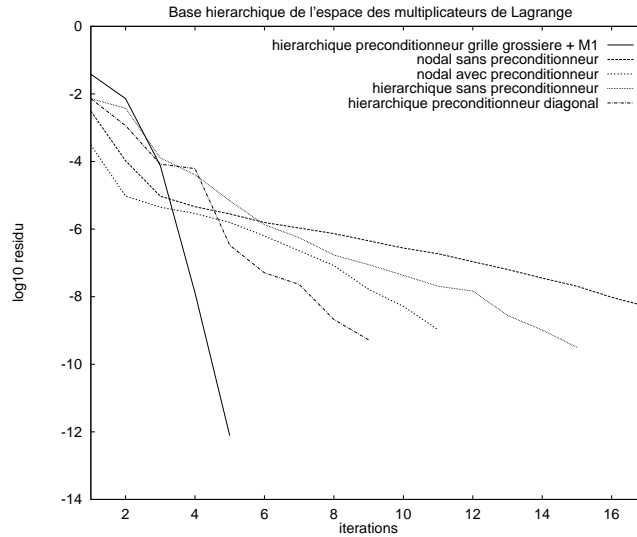


FIG. 4.24 - Influence des préconditionneurs sur le résidu (raffinement: niveau 5).

L'approche hiérarchique préconditionnée par le préconditionneur diagonal s'avère efficace, le nombre d'itérations étant réduit d'un facteur 2 par rapport au cas hiérarchique non préconditionné. Cependant, l'avantage est laissé au préconditionneur hiérarchique grille grossière étudié précédemment, voir figures 4.23 et 4.24.

Dans ce paragraphe, il s'agit juste d'essayer de comprendre numériquement le comportement du préconditionneur. Du fait que ce préconditionneur est coûteux, et moins performant que le préconditionneur 'grille grossière', on ne retiendra pas cette idée.

Visualisons sur la figure 4.25 le spectre de la matrice de rigidité formulée dans la base hiérarchique avec les préconditionneurs grille grossière et diagonal. Nous remarquons que le conditionnement de la matrice préconditionnée par les deux préconditionneurs est amélioré. Cependant, la partie basse du spectre dans le cas du préconditionnement diagonal est moins tassée. Cela pourrait expliquer les résultats sur le nombre d'itérations, figure 4.23

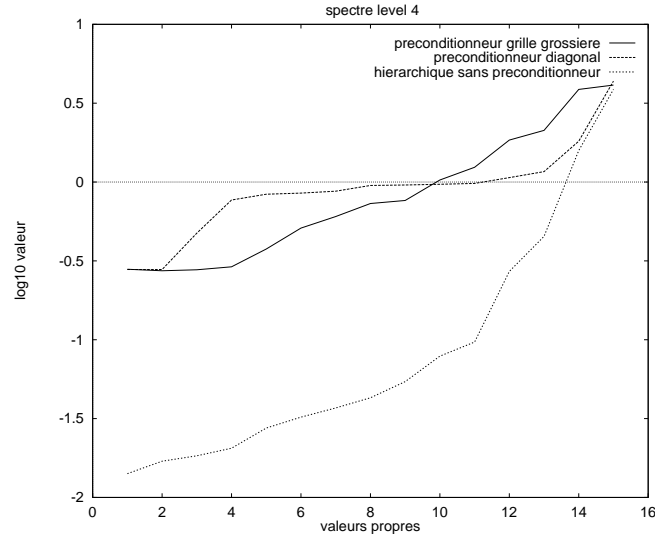


FIG. 4.25 - Influence des préconditionneurs sur le spectre (raffinement: niveau 4).

Remarque 4.4. Nous avons également testé un double préconditionneur, c'est-à-dire le préconditionneur grille grossière suivi du préconditionneur diagonal. Les résultats numériques n'étant pas significatifs, nous donnerons à l'issue de cette section l'avantage au préconditionneur basé sur la grille grossière.

Dans les prochains chapitres, nous allons appliquer l'algorithme de gradient conjugué projeté préconditionné sur des problèmes plus complexes tels les problèmes de plaques et coques. Après avoir rappelé les modèles de plaques et le modèle d'approximation D.K.T, nous ferons l'étude théorique de la méthode des éléments avec joint appliqué au modèle D.K.T. Les résultats numériques issus de ce problème seront effectués sur Paragon, nous pourrons ainsi augmenter le nombre de sous domaines afin de faire intervenir des sous domaine flottants.

Chapitre 5

Modèle d'approximation DKT: Discrete Kirchhoff Triangle

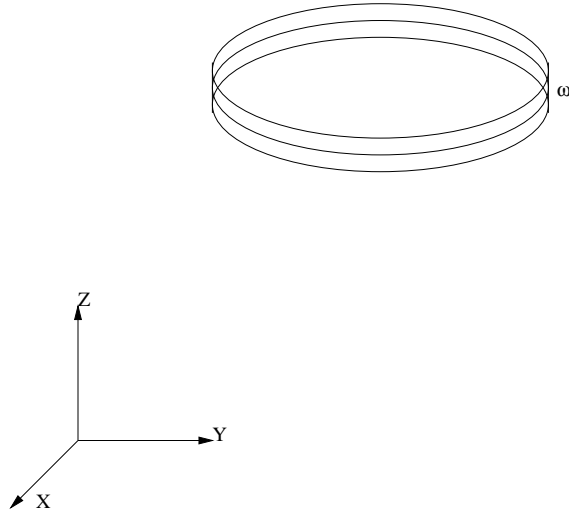
5.1 Hypothèses Fondamentales pour la Théorie des Plaques

Rappelons les hypothèses fondamentales utilisées dans la théorie des plaques. Nous nous plaçons dans le cadre de l'étude des plaques en petits déplacements.

Donnons tout d'abord une première définition:

Définition 1. *Une plaque est un solide élastique dont une dimension selon l'épaisseur que nous noterons dans la suite du mémoire e , est petite en comparaison des deux autres et qui généralement comporte un plan de symétrie au milieu de l'épaisseur que nous appellerons la surface moyenne notée ω .*

Par convention, cette surface moyenne sera le plan xy , l'axe Oz correspondant à l'axe transverse selon l'épaisseur.

FIG. 5.1 - *Plaque*

Les hypothèses fondamentales sont:

– **Hypothèse 1:**

Les contraintes normales sont négligeables par rapport aux autres composantes de contraintes:

$$\sigma_{zz} = 0$$

– **Hypothèse 2:**

Les pentes de la surface moyenne après déformation sont supposées petites par rapport à l'unité.

– **Hypothèse 3:**

On néglige les contraintes dans la surface moyenne induites par les déformations transverses.

– **Hypothèse 4:**

Les phénomènes de membrane et flexion sont découplés.

– **Hypothèse 5:**

Les points situés sur une normale à la surface moyenne avant

déformation restent sur cette normale au cours de la déformation. Ceci revient à négliger l'effet de cisaillement transverse. On a dans ce cas:

$$\epsilon_{zx} = \epsilon_{zy} = 0$$

La théorie des plaques admet l'hypothèse 1. Les hypothèses 2 et 3 correspondent aux hypothèses classiques des petites déformations de la théorie de l'Elasticité Linéaire. L'hypothèse 4 sera adoptée ce qui permettra de faire une étude découplée.

Nous distinguerons deux grandes théories qui sont les suivantes:

- La théorie de Kirchhoff ou la théorie linéaire des plaques sans cisaillement transverse admet les hypothèses 1, 2, 3, 5.
- La théorie de Mindlin ou la théorie des plaques avec cisaillement transverse admet les hypothèses 1, 2, 3.

Nous noterons les déplacements dans le plan u , v , le déplacement transverse w et les rotations β_x dans le plan YZ , β_y dans le plan XZ .

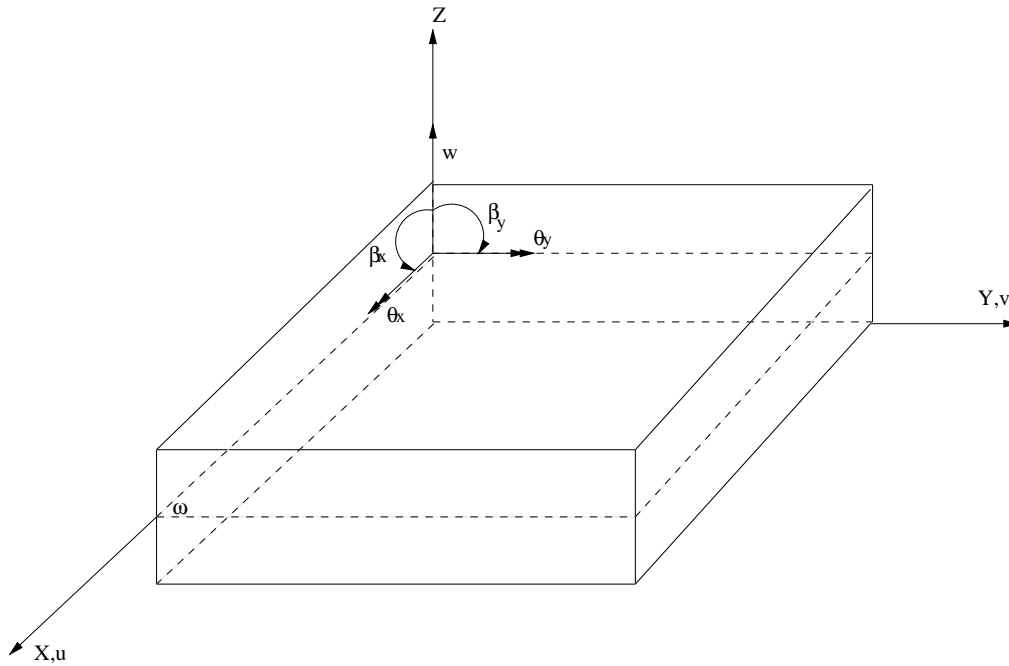


FIG. 5.2 - Convention de signe

Nous définissons aussi:

$$\begin{aligned}\theta_x &= -\beta_y \\ \theta_y &= \beta_x\end{aligned}\tag{5.1}$$

d'après les conventions de signe de la figure 5.2.

5.2 Relations cinématiques

5.2.1 Théorie de Mindlin

Donnons nous un modèle de déplacement en trois variables indépendantes $w(x, y)$, $\beta_x(x, y)$, $\beta_y(x, y)$.

Le champ de déplacement s'exprime alors en fonction de ces trois variables par la relation suivante:

$$\begin{aligned}u &= z\beta_x(x, y) \\ v &= z\beta_y(x, y) \\ w &= w(x, y)\end{aligned}$$

Le tenseur des déformations est défini par:

$$\begin{aligned}\epsilon_{xx} &= z\frac{\partial\beta_x}{\partial x} \\ \epsilon_{yy} &= z\frac{\partial\beta_y}{\partial y} \\ 2\epsilon_{xy} &= \gamma_{xy} = z\left(\frac{\partial\beta_x}{\partial y} + \frac{\partial\beta_y}{\partial x}\right) \\ 2\epsilon_{xz} &= \gamma_{xz} = \beta_x + \frac{\partial w}{\partial x} \\ 2\epsilon_{yz} &= \gamma_{yz} = \beta_y + \frac{\partial w}{\partial y}\end{aligned}$$

5.2.2 Théorie de Kirchhoff

On néglige dans cette théorie l'effet de cisaillement, c'est-à-dire que l'on a les relations suivantes:

$$\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

Il en vient:

$$\begin{aligned}\beta_x &= -\frac{\partial w}{\partial x} \\ \beta_y &= -\frac{\partial w}{\partial y}\end{aligned}$$

Le champ des déplacements est défini par w et peut s'écrire sous la forme suivante:

$$\begin{aligned}u &= -z \frac{\partial w}{\partial x} \\ v &= -z \frac{\partial w}{\partial y} \\ w &= w(x, y)\end{aligned}$$

Le tenseur des déformations est donné par:

$$\begin{aligned}\epsilon_{xx} &= -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \epsilon_{yy} &= -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2\epsilon_{xy} &= \gamma_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\end{aligned}$$

5.3 Éléments de plaques

Les éléments de plaques en flexion de type déplacement peuvent être classés en deux catégories:

- Les éléments basés sur la théorie de Kirchhoff.
- Les éléments basés sur la théorie de Mindlin.

Les éléments basés sur la théorie de Kirchhoff sont en principe mieux adaptés à la modélisation des plaques minces. Leur formulation ne nécessite que l'approximation d'une seule composante de déplacement w . On remarque que les dérivées secondes interviennent dans l'expression de l'énergie de déformation.

Les éléments basés sur la théorie de Mindlin avec prise en compte du cisaillement transverse sont les mieux adaptés dans le cas de plaques d'épaisseur modérée. Leur formulation est basée sur l'approximation de trois variables indépendantes qui sont: $w(x, y)$, $\beta_x(x, y)$, $\beta_y(x, y)$. On note que n'interviennent que des dérivées premières de w , β_x , et β_y dans l'expression de l'énergie de déformation. Ce type d'élément utilisé pour la modélisation de plaques minces entraîne une dégradation de la précision provoquée par des problèmes numériques.

5.4 Equations constitutives. Tenseurs des déformations

5.4.1 Théorie de Kirchhoff

Nous avons

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ 2\epsilon_{xy} \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -w_{,xx} \\ -w_{,yy} \\ -2w_{,xy} \end{pmatrix}$$

que nous pouvons écrire

$$\epsilon = z\kappa \tag{5.2}$$

où κ est le vecteur des courbures.

La loi de comportement s'écrit:

$$\sigma = C\epsilon$$

Nous rappelons que cette loi de comportement, traduisant un comportement élastique isotrope en contraintes planes, est une relation portant uniquement sur les composantes planes des tenseurs des contraintes et de déformation:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ 2\epsilon_{xy} \end{pmatrix}$$

avec pour un matériau isotrope, par exemple,

$$C = \frac{E}{1 + \nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix}$$

L'énergie de déformation d'une plaque en flexion s'exprime par:

$$\begin{aligned} U_F &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma^t \epsilon \, d\Omega \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \epsilon^t C \epsilon \, d\Omega \end{aligned} \quad (5.3)$$

D'après les équations 5.2 et 5.3, on en déduit:

$$\begin{aligned} U_F &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} z^2 \kappa^t C \kappa \, d\Omega \\ &= \frac{1}{2} \int_w \kappa^t \left[\int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} z^2 C \, dz \right] \kappa \, dx dy \end{aligned}$$

d'où l'expression de l'énergie de déformation:

$$U_F = \frac{1}{2} \int_w \kappa^t \tilde{C} \kappa \, dx dy$$

où \tilde{C} est obtenue par intégration dans l'épaisseur $\tilde{C} = \frac{e^3}{12} C$

5.4.2 Théorie de Mindlin

L'effort de cisaillement transversal s'écrit:

$$\gamma = \epsilon^* = \begin{bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix}$$

De même,

$$\sigma^* = \begin{bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{bmatrix}$$

On note C^* la matrice de comportement pour le cisaillement transverse:

$$\sigma^* = C^* \epsilon^*$$

En ce qui concerne la partie flexion, on peut comme précédemment effectuer l'intégration suivant z :

$$\epsilon = z \begin{bmatrix} \beta_{x,x} \\ \beta_{y,y} \\ \beta_{x,y} + \beta_{y,x} \end{bmatrix}$$

Pour la partie cisaillement, on a:

$$\epsilon^* = \gamma = \begin{bmatrix} \beta_x + w_{,x} \\ \beta_y + w_{,y} \end{bmatrix}$$

Les relations établies précédemment pour l'énergie de déformation de flexion restent valables.

$$U = U_F \quad (\text{Flexion}) + U_C \quad (\text{Cisaillement})$$

soit

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma^t \epsilon \, d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma^{*t} \epsilon^* \, d\Omega \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \epsilon^t C \epsilon \, d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \epsilon^{*t} C^* \epsilon^* \, d\Omega \end{aligned} \quad (5.4)$$

L'énergie de déformation en flexion est donc donnée par:

$$\begin{aligned} U_F &= \frac{1}{2} \int_w \kappa^t \tilde{C} \kappa \, dx dy \\ &= \frac{1}{2} \int_w \tilde{\sigma}^t \kappa \, dx dy \quad \text{avec } \tilde{\sigma} = \tilde{C} \kappa \end{aligned}$$

L'énergie de déformation en cisaillement est régie par les équations suivantes:

$$\begin{aligned} U_C &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma^{*t} \epsilon^* \, d\Omega \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma^{*t} C^{*-1} \sigma^* \, d\Omega \end{aligned}$$

5.5 Discrétisation éléments finis

5.5.1 Formules générales

Afin de modéliser le comportement des plaques, la méthode des éléments finis que nous utilisons s'appuie sur la formulation variationnelle des équations d'équilibre à partir du Principe des Déplacements Virtuels.

La formulation variationnelle des équations d'équilibre s'écrit:

$$\int_{\Omega} \delta \epsilon^t \sigma \, d\Omega = \int_{\Omega} \delta u^t \phi \, d\Omega + \int_S \delta u^t \Phi \, dS + \sum_i \delta u_i^t F_i \quad (5.5)$$

où les $\delta \epsilon = \epsilon(\delta u)$ et les δu_i sont les déplacements virtuels ponctuels et où on a introduit les notations suivantes:

F sont les forces ponctuelles, Φ sont les forces extérieures exercées sur la surface des plaques et ϕ sont les forces de masse.

Appelons m la restriction à l'élément numéro m , nous avons le déplacement u en fonction des déplacements des nœuds de ce même élément donné par:

$$u^m(x, y, z) = H^m(x, y, z)\hat{u}$$

avec H^m la matrice d'interpolation des déplacements et \hat{u} , le vecteur déplacement des nœuds de l'élément.

Le tenseur des déformations et des contraintes s'écrivent alors:

$$\begin{aligned}\epsilon^m(x, y, z) &= B^m(x, y, z)\hat{u} \\ \sigma^m(x, y, z) &= C^m B^m(x, y, z)\hat{u}\end{aligned}$$

La discrétisation du domaine en éléments permet de réécrire (5.5) sous la forme:

$$\sum_{m=1}^N \int_{\Omega^m} \delta \epsilon^{mt} \sigma^m d\Omega^m = \sum_{m=1}^N \int_{\Omega^m} \delta u^{mt} \phi^m d\Omega^m + \sum_{m=1}^N \int_{S^m} \delta u^{mt} \Phi^m dS^m + \sum_i \delta u_i^t F_i$$

où N représente le nombre d'éléments. Cette égalité devient:

$$\begin{aligned}\delta \hat{u}^t \left\{ \sum_m \int_{\Omega^m} B^{mt} C^m B^m d\Omega^m \right\} \hat{u} &= \delta \hat{u}^t \left\{ \sum_m \int_{\Omega^m} H^{mt} \phi^m d\Omega^m \right\} \\ &+ \delta \hat{u}^t \left\{ \sum_m \int_{S^m} H^{mt} \Phi^m dS^m \right\} \\ &+ \delta \hat{u}^t F\end{aligned}$$

Si nous appliquons maintenant le théorème des déplacements virtuels, en imposant un déplacement virtuel unitaire, nous obtenons après calcul un système matriciel à résoudre.

5.6 Rappel des équations de coques

Nous rappelons, dans cette section, l'énoncé des deux principaux modèles linéaires de coques: le modèle de coques minces de Koiter qui s'apparente à la famille des modèles de Kirchhoff[1876] et Love[1934], puis le modèle de coques minces et semi-épaisses de Naghdi qui prend en compte les effets du cisaillement transverse.

5.6.1 Description de la géométrie

Nous rappelons ci-après les principaux résultats concernant la description géométrique d'une coque mince. Nous utilisons des lettres grecques pour des indices prenant leurs valeurs dans l'ensemble 1,2, des lettres latines pour les indices prenant leurs valeurs dans l'ensemble 1,2,3 et nous adoptons la convention de sommation sur les indices répétés.

Soit Ω un ouvert borné du plan \mathcal{E}^2 de frontière lipschitzienne Γ . La surface moyenne \mathcal{S} de la coque peut être définie comme l'image de $\bar{\Omega}$ par une application $\vec{\Phi} : \bar{\Omega} \subset \mathcal{E}^2 \rightarrow \mathcal{E}^3$ - l'espace Euclidien usuel dont $(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ sera un système orthogonal de référence -, i.e.

$$\bar{\mathcal{S}} = \{\vec{\Phi}(\xi), \xi = (\xi^1, \xi^2) \in \bar{\Omega}\}$$

Nous supposons que l'application $\vec{\Phi}$ vérifie les hypothèses suivantes :

- (i) $\vec{\Phi} \in (\mathcal{C}^3(\bar{\Omega}))^3$
- (ii) tous les points de la surface $\bar{\mathcal{S}}$ sont *réguliers*, i.e. les deux vecteurs

$$\vec{a}_\alpha = \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial \xi^\alpha} = \vec{\Phi}_{,\alpha} \quad \alpha = 1, 2$$

sont linéairement indépendants pour tous les points $\xi = (\xi^1, \xi^2) \in \bar{\Omega}$.

La *première forme fondamentale* $a_{\alpha\beta}$ de la surface moyenne est donnée par :

$$a_{\alpha\beta} = \vec{a}_\alpha \cdot \vec{a}_\beta$$

et on note $\det(a_{\alpha\beta}) = a$.

En tout point $\xi \in \bar{\Omega}$, on associe à la *base covariante* $(\vec{a}_\alpha(\xi))$ du plant tangent à $\bar{\mathcal{S}}$ au point $\xi \in \bar{\Omega}$ la *base contravariante* $(\vec{a}^\alpha(\xi))$, à l'aide des relations :

$$\vec{a}^\alpha \cdot \vec{a}_\beta = \delta_\beta^\alpha \quad (\text{symbole de Kronecker})$$

Enfin, on introduit le vecteur unitaire $\vec{a}_3 = \vec{a}^3$, normal à la surface moyenne, orienté de telle façon que le trièdre $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$ soit direct.

La *deuxième forme fondamentale* $(b_{\alpha\beta})$ de la surface est donnée par :

$$\begin{aligned} b_{\alpha\beta} &= b_{\beta\alpha} = -\vec{a}_\alpha \cdot \vec{a}_{3,\beta} \\ &= \vec{a}_3 \cdot \vec{a}_{\alpha,\beta} \end{aligned}$$

On en déduit la *troisième forme fondamentale* $c_{\alpha\beta}$:

$$c_{\alpha\beta} = c_{\beta\alpha} = b_{\alpha}^{\lambda} b_{\lambda\beta} \quad \text{où}$$

$$b_{\alpha}^{\lambda} = a^{\lambda\mu} b_{\alpha\mu}$$

Etant donné que les bases $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$ et $(\vec{a}^1, \vec{a}^2, \vec{a}^3)$ ne sont en général ni normées, ni orthogonales, il est commode d'introduire les *symboles de Christoffel* $\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}$ pour calculer les dérivées de ces vecteurs de base

$$\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} = \Gamma_{\gamma\beta}^{\alpha} = \vec{a}^{\alpha} \cdot \vec{a}_{\gamma,\beta} = \vec{a}^{\alpha} \cdot \vec{a}_{\beta,\gamma}$$

ainsi que la notion de *dérivation covariante* pour un tenseur de surface. Par exemple, pour des tenseurs d'ordre 1 ou 2, nous obtenons leurs dérivées covariantes (notées à l'aide d'une barre verticale) à l'aide de leurs dérivées usuelles (notées à l'aide d'une virgule) comme suit:

$$\begin{aligned} T_{\alpha|\gamma} &= T_{\alpha,\gamma} - \Gamma_{\alpha\gamma}^{\lambda} T_{\lambda} \\ T_{|\gamma}^{\alpha} &= T_{,\gamma}^{\alpha} + \Gamma_{\lambda\gamma}^{\alpha} T^{\lambda} \end{aligned} \tag{5.6}$$

$$\begin{aligned} T_{\alpha\beta|\gamma} &= T_{\alpha\beta,\gamma} - \Gamma_{\alpha\gamma}^{\lambda} T_{\lambda\beta} - \Gamma_{\beta\gamma}^{\lambda} T_{\alpha\lambda} \\ T_{|\beta|\gamma}^{\alpha} &= T_{,\beta,\gamma}^{\alpha} + \Gamma_{\gamma\lambda}^{\alpha} T_{,\beta}^{\lambda} - \Gamma_{\beta\gamma}^{\lambda} T_{,\lambda}^{\alpha} \\ T_{|\gamma}^{\alpha\beta} &= T_{,\gamma}^{\alpha\beta} + \Gamma_{\lambda\gamma}^{\alpha} T^{\lambda\beta} + \Gamma_{\lambda\gamma}^{\beta} T^{\alpha\lambda} \end{aligned} \tag{5.7}$$

5.6.2 Le modèle de Naghdi

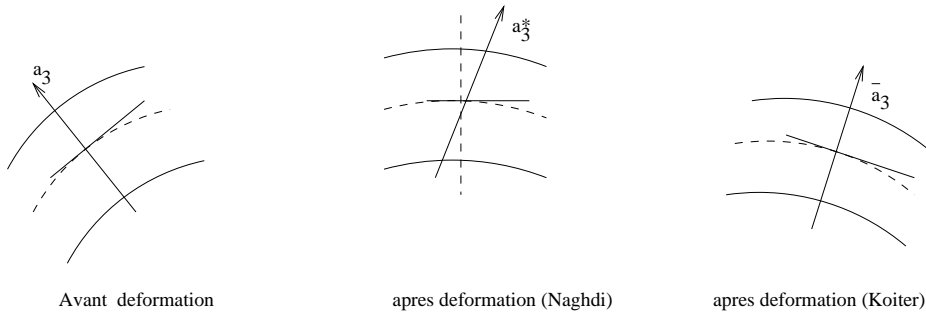


FIG. 5.3 - Aspects de la déformation de la plaque

Nous considérons une plaque telle qu'elle soit :

- encastrée sur $\Gamma_0 \subset \Gamma = \partial\Omega$
- chargée par une force volumique dont la résultante est \vec{p}
- chargée par une force surfacique appliquée à $\Gamma_1 = \Gamma - \Gamma_0 \times]-\frac{\epsilon}{2}; \frac{\epsilon}{2}[$. Nous notons par \vec{N} la résultante sur Γ_1 et par $M = \epsilon_{\alpha\beta} M^{\beta} \vec{a}^{\alpha}$ le moment résultant sur Γ_1 .

La formulation variationnelle de ce problème s'écrit:

Problème 5.1. $\forall \vec{p} \in (L^2(\Omega))^3$, $\vec{N} \in (L^2(\Gamma_1))^3$, $M \in (L^2(\Gamma_1))^2$, trouver $(\vec{u}, \beta) \in \vec{V}$, $\beta = \beta_{\alpha} \vec{a}^{\alpha}$ tels que:

$$a[(\vec{u}, \beta); (\vec{v}, \delta)] + b[(\vec{u}, \beta); (\vec{v}, \delta)] = l(\vec{v}, \delta) \quad \forall (\vec{v}, \delta) \in \vec{V} \quad (5.8)$$

avec

$$a[(\vec{u}, \beta); (\vec{v}, \delta)] = \int_{\Omega} e E^{\alpha\beta\lambda\mu} [\gamma_{\alpha\beta}(\vec{u}) \gamma_{\lambda\mu}(\vec{v}) + \frac{e^2}{12} \chi_{\alpha\beta}(\vec{u}, \beta) \chi_{\lambda\mu}(\vec{v}, \delta)] \sqrt{a} ds^1 ds^2$$

$$b[(\vec{u}, \beta); (\vec{v}, \delta)] = \int_{\Omega} \frac{e E a^{\alpha\beta}}{2(1+\nu)} (\phi_{\alpha}(\vec{u}) + \beta_{\alpha}) (\phi_{\beta}(\vec{v}) + \delta_{\beta}) \sqrt{a} ds^1 ds^2$$

$$l(\vec{v}, \delta) = \int_{\Omega} \vec{p} \vec{v} \sqrt{a} ds^1 ds^2 + \int_{\Gamma_1} (\vec{N} \vec{v} - M^{\alpha} \delta_{\alpha}) d\gamma$$

$$E^{\alpha\beta\lambda\mu} = \frac{E}{2(1+\nu)} (a^{\alpha\lambda} a^{\beta\mu} + a^{\alpha\mu} a^{\beta\lambda} + \frac{2\nu}{1-\nu} a^{\alpha\beta} a^{\lambda\mu})$$

$$\vec{V} = (\{v \in H^1(\Omega); v|_{\Gamma_0} = 0\})^5$$

Nous rappelons:

$$\gamma_{\alpha\beta}(\vec{v}) = \frac{1}{2} (v_{\alpha|\beta} + v_{\beta|\alpha}) - b_{\alpha\beta} v_3$$

$$\chi_{\alpha\beta}(\vec{v}, \delta) = \frac{1}{2} (\delta_{\alpha|\beta} + \delta_{\beta|\alpha}) - \frac{1}{2} (b_{\alpha}^{\lambda} v_{\lambda|\beta} + b_{\beta}^{\lambda} v_{\lambda|\alpha}) + c_{\alpha\beta} v_3$$

$$\phi_{\alpha}(\vec{v}) = v_{3,\alpha} + b_{\alpha}^{\lambda} v_{\lambda}$$

Théorème 5.1. *Le problème 5.1 a une unique solution.*

La démonstration est donnée dans [Coutris, 76].

5.6.3 Le modèle de Koiter

La normale à la surface moyenne reste normale à la surface moyenne pendant la déformation, voir figure (5.3). La formulation variationnelle du modèle de Koiter est donnée par:

Problème 5.2. $\forall \vec{p} \in (L^2(\Omega))^3$, $\vec{N} \in (L^2(\Gamma_1))^3$, $M \in (L^2(\Gamma_1))^2$, trouver $(\vec{u}^*) \in \vec{V}^*$ tels que:

$$a^*(\vec{u}^*, \vec{v}) = f^*(\vec{v}), \quad \vec{v} \in \vec{V}^* \quad (5.9)$$

où

$$\begin{aligned} a^*(\vec{u}, \vec{v}) &= \int_{\Omega} e E^{\alpha\beta\lambda\mu} [\gamma_{\alpha\beta}(\vec{u}) \gamma_{\lambda\mu}(\vec{v}) + \frac{e^2}{12} \bar{\rho}_{\alpha\beta}(\vec{u}) \bar{\rho}_{\lambda\mu}(\vec{v})] \sqrt{a} ds^1 ds^2 \\ f^*(\vec{v}) &= \int_{\Omega} \vec{p} \vec{v} \sqrt{a} ds^1 ds^2 + \int_{\Gamma_1} [\vec{N} \vec{v} + M^\alpha (v_{3,\alpha} + b_\alpha^\lambda v_\lambda)] d\gamma \\ \bar{\rho}_{\alpha\beta}(\vec{u}) &= v_{3|\alpha\beta} - c_{\alpha\beta} v_3 + b_\alpha^\lambda v_{\lambda|\beta} + b_\lambda^\beta v_{\lambda|\alpha} + b_{\lambda|\beta}^\lambda v_\lambda \\ \vec{V}^* &= \{ \vec{v} \in (H^1(\Omega))^3 \times H^2(\Omega), \vec{v}|_{\Gamma_0} = \vec{0}, \partial_n v_{3|\Gamma_0} = 0 \} \end{aligned}$$

Nous notons que:

Théorème 5.2. *Le problème 5.2 a une unique solution.*

La démonstration est donnée dans [Bernadou, Ciarlet 76].

5.7 Méthode d'approximation DKT (Discrete Kirchhoff Triangle)

Nous avons vu, que pour les plaques d'épaisseur modérée où on ne néglige pas le cisaillement transverse, les modèles de type Mindlin étaient les mieux adaptés. On approxime souvent ce modèle par des méthodes d'éléments finis C^0 car leur implémentation est assez aisée. Cependant on assiste à des phénomènes de verrouillage lorsque l'épaisseur devient petite.

Cependant, il existe actuellement des méthodes qui permettent d'envisager l'utilisation des éléments de type Mindlin pour des problèmes de

plaques minces. L'une de ces méthodes est fondée sur la prise en compte d'hypothèses de type Kirchhoff discrètes (méthode D.K.T.). L'autre méthode est basée sur l'intégration réduite de la matrice de rigidité correspondant au phénomène de cisaillement (C.Lacour 1993).

Les méthodes DKT sont à mi chemin entre les méthodes d'approximation du modèle de Mindlin et celles du modèle de Kirchhoff. Ces méthodes consistent à négliger les effets du cisaillement transverse et à introduire les contraintes Kirchhoff-Love en un nombre fini de points. On ne parle de méthode DKT que pour la partie flexion d'une plaque.

Ces méthodes DKT sont intéressantes dans la mesure où elles autorisent quelques déformations de cisaillement transverse en dehors des points sur lesquels on a imposé les contraintes de Kirchhoff-Love, par conséquent, elles peuvent prendre en compte les plaques d'épaisseur modérée. De plus, du fait que l'on a négligé le terme de cisaillement transverse dans le calcul de l'énergie totale de la plaque, les méthodes DKT s'appliquent dans le cas de plaques minces sans apparition de phénomène de verrouillage en cisaillement.

5.7.1 Construction du modèle DKT

Espaces éléments finis pour approcher le déplacement transverse et les rotations

Le DKT est un modèle intermédiaire entre le modèle de Mindlin et celui de Kirchhoff. On part donc du modèle de Mindlin dans lequel on ne néglige pas les effets du cisaillement transverse. Nous n'avons pas $\theta = \nabla w$. Sur la figure suivante, nous avons représenté les degrés de liberté de l'élément fini considéré. On remarque que les dérivées de w sont distinctes par rapport aux rotations θ

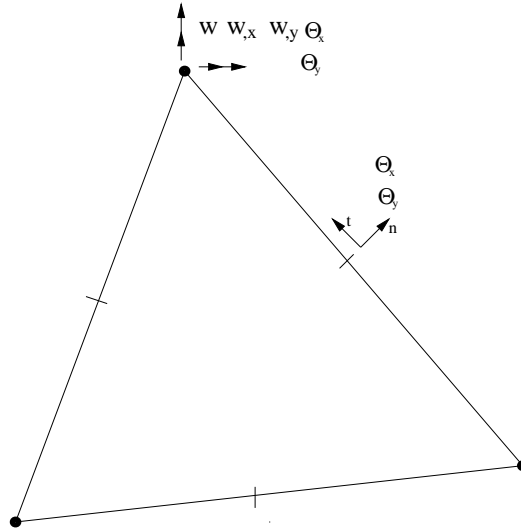


FIG. 5.4 - DKT

Nous approchons les composantes θ_x et θ_y par l'élément fini P_2 -Lagrange représenté par le dessin ci-après. Nous avons donc 12 degrés de liberté définis sur les noeuds et à l'intérieur.

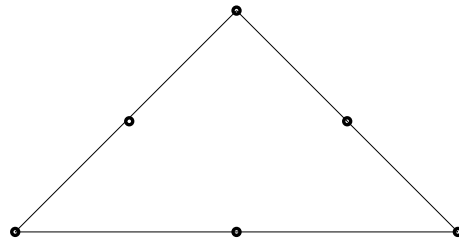
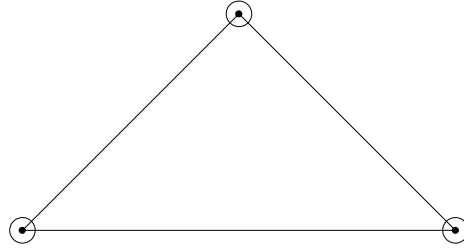


FIG. 5.5 - P_2 -Lagrange

Nous approchons la composante w par l'élément fini P_3' -Hermite. Ceci donne 9 degrés de liberté définis sur les côtés.

FIG. 5.6 - P_3' -Hermite

Nous avons donc $12 + 9 = 21$ degrés de liberté au total.

Les contraintes de type Kirchhoff

Pour un triangle donné, nous avons au total 21 degrés de liberté. Nous allons imposer 12 contraintes ce qui ramène ce nombre à 9 degrés de liberté effectifs. Dans la définition du problème discret, nous avons vu que nous négligeons le cisaillement transverse. Ces contraintes permettent de lier de façon convenable les degrés de liberté en déplacement transverse et de rotation. Ces 12 contraintes de Kirchhoff-Love sont:

– **Contraintes aux sommets**

On impose sur les trois sommets du triangle:

$$\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0 \iff \theta = \nabla w$$

Ceci donne 6 contraintes.

– **Contraintes tangentielles**

On exige que les contraintes de cisaillement soit nulles sur les côtés:

$$\gamma_{tz} = 0$$

Ceci donne 3 contraintes.

– **Contraintes normales**

On note a_i et b_i respectivement les sommets et les milieux de côté du

triangle $K \in \mathcal{T}_h$. On écrit la dérivée normale comme une moyenne sur les côtés du triangle $K \in \mathcal{T}_h$ d'extrémités a_{i-1} et a_{i+1} :

$$\theta_{,n}(b_i) = \frac{1}{2}(w_{,n_{a_{i-1}}} + w_{,n_{a_{i+1}}}) \quad (5.10)$$

Ceci donne 3 contraintes.

Les contraintes sur $\theta_{,n}$ et $\theta_{,t}$ se réduisent à six contraintes algébriques indépendantes, voir [Stricklin, Haisler, Tisdale et Gurderson 1969]. Grâce à ces 12 contraintes, nous obtenons les $21 - 12 = 9$ *degrés de liberté effectifs* annoncés.

5.7.2 Espaces associés à la méthode D.K.T.

Sur la triangulation, nous construisons les espaces V_{h1}^k (resp. V_{h2}^k) constitués d'éléments P_2 -Lagrange (resp. P_3 -Hermite). Nous définissons l'espace \vec{V}_h par l'espace $V_{h1}^k \times V_{h1}^k \times V_{h2}^k$ constitué des triplets (v_{h1}, v_{h2}, v_{h3}) . Nous notons \vec{Z}_h l'espace élément fini donné par:

$$\vec{Z}_h = \{(\vec{v}_h, \delta_h) \in \vec{V}; v_{h\alpha} \in V_{h1}^k, v_{h\alpha}|_{\Gamma_0} = 0 \quad \alpha = 1, 2; v_{h3} \in V_{h2}^k; v_{h3}|_{\Gamma_0} = 0 \forall T \in \mathcal{T}_h(\vec{v}_h, \delta_h)|_T \text{ satisfait les contraintes Kirchhoff discrètes.}\} \quad (5.11)$$

5.7.3 Formulation variationnelle du problème D.K.T.

Les équations du modèle D.K.T. s'écrivent:

Problème 5.3. $\forall \vec{p} \in (L^2(\Omega))^3, \vec{N} \in (L^2(\Gamma_1))^3, M \in (L^2(\Gamma_1))^2$, Trouver $(\vec{u}_h, \beta_h) \in \vec{Z}_h$, tels que:

$$a[(\vec{u}_h, \beta_h); (\vec{v}_h, \delta_h)] = l(\vec{v}_h, \delta_h) \quad \forall (\vec{v}_h, \delta_h) \in \vec{Z}_h \quad (5.12)$$

Donnons une autre formulation du **problème 5.3**.

Remarque 5.1. Nous notons \vec{Z} le sous-espace de \vec{V} tel que:

$$\vec{Z} = \{(\vec{v}, \delta) \in \vec{V} \text{ tel que } \delta_\alpha + v_{3,\alpha} + b_\alpha^\lambda v_\lambda = 0 \text{ dans } L^2(\Omega)\} \quad (5.13)$$

par conséquent le problème

$\forall \vec{p} \in (L^2(\Omega))^3$, $\vec{N} \in (L^2(\Gamma_1))^3$, $M \in (L^2(\Gamma_1))^2$, Trouver $(\vec{u}, \beta) \in \vec{Z}$, tels que:

$$a[(\vec{u}, \beta); (\vec{v}, \delta)] = l(\vec{v}, \delta) \quad \forall (\vec{v}, \delta) \in \vec{Z} \quad (5.14)$$

est équivalente au problème (5.2) en posant

$$\begin{aligned} l(\vec{v}, \delta) &= f^*(\vec{v}) \\ \chi_{\alpha\beta}(\vec{v}, \delta) &= -\rho_{\alpha\beta}(\vec{v}) \quad \forall (\vec{v}, \delta) \in \vec{Z} \end{aligned} \quad (5.15)$$

Le **problème 5.3** est une approximation non conforme du problème (5.15) et par conséquent du modèle de Koiter donné en (5.2), nous avons $\vec{Z}_h \not\subset \vec{Z}$.

Il est commode d'éliminer les inconnues δ_h et de donner une formulation équivalente au **problème 5.3**.

Par conséquent, nous introduisons les définitions suivantes:

Définition 5.1 (Dérivées discrètes).

$$\partial_{h\alpha}(\vec{v}_h) = -\delta_{h\alpha} - b_\alpha^\lambda v_{h\lambda} \quad \forall (\vec{v}_h, \delta_h) \in \vec{Z}_h \quad (5.16)$$

$\partial_{h\alpha}(\vec{v}_h)$ est une bonne approximation de $v_{3h,\alpha}$

Définition 5.2. $\forall \vec{v}_h \in \vec{V}_h$, nous définissons:

$$\bar{\rho}_{h\alpha\beta}(\vec{v}_h) \stackrel{def}{=} \partial_{h\alpha\beta}(\vec{v}_h) - \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda \partial_{h\lambda}(\vec{v}_h) - c_{\alpha\beta} v_{h3} + b_\alpha^\lambda v_{h\lambda|\beta} + b_\alpha^\beta v_{h\lambda|\alpha} + b_\alpha^\lambda |\beta v_{h\lambda}$$

où

$$\partial_{h\alpha\beta}(\vec{v}_h) = \frac{1}{2}(\partial_\beta \partial_{h\alpha}(\vec{v}_h) + \partial_\alpha \partial_{h\beta}(\vec{v}_h))$$

par conséquent

$$\bar{\rho}_{h\alpha\beta}(\vec{v}_h) = -\chi_{\alpha\beta}(\vec{v}_h, \delta_h) \quad \forall (\vec{v}_h, \delta_h) \in \vec{Z}_h \quad (5.17)$$

Avec ces définitions, nous pouvons prouver que:

$$\begin{aligned} a[(\vec{u}_h, \beta_h); (\vec{v}_h, \delta_h)] &= a_h(\vec{u}_h, \vec{v}_h), \forall (\vec{u}_h, \beta_h), (\vec{u}_h, \delta_h) \in \vec{Z}_h \\ l(\vec{v}_h, \delta_h) &= f_h(\vec{v}_h), \forall (\vec{v}_h, \delta_h) \in \vec{Z}_h \end{aligned} \quad (5.18)$$

où

$$\begin{aligned} a_h(\vec{u}_h, \vec{v}_h) &= \int_{\Omega} e E^{\alpha\beta\lambda\mu} [\gamma_{\alpha\beta}(\vec{u}_h) \gamma_{\lambda\mu}(\vec{v}_h) + \frac{e^2}{12} \bar{\rho}_{h\alpha\beta}(\vec{u}_h) \bar{\rho}_{h\lambda\mu}(\vec{v}_h)] \sqrt{a} ds^1 ds^2 \\ f_h(\vec{v}_h) &= \int_{\Omega} \vec{p} \vec{v}_h \sqrt{a} ds^1 ds^2 + \int_{\Gamma_1} [\vec{N} \vec{v}_h + M^\lambda (\partial_{h\lambda} \vec{v}_h + b_\lambda^\mu v_{h\mu})] d\gamma \end{aligned}$$

A partir de (5.18), nous donnons une formulation équivalente du problème D.K.T. (5.3):

Problème 5.4. $\forall \vec{p} \in (L^2(\Omega))^3$, $\vec{N} \in (L^2(\Gamma_1))^3$, $M \in (L^2(\Gamma_1))^2$, Trouver $(\vec{u}_h) \in V_h$, tels que:

$$a_h(\vec{u}_h, \vec{v}_h) = f_h(\vec{v}_h), \forall \vec{v}_h \in V_h \quad (5.19)$$

Dans le chapitre suivant, nous étudions l'analyse numérique de la méthode des éléments avec joints appliquée au problème de plaques D.K.T.

Chapitre 6

On the convergence of D.K.T. for the mortar method

6.1 Introduction

In the previous sections, we have introduced the mortar element method for the Poisson equation and in this case, we have also introduced a standard numerical scheme for the approximation of the plate and shell equations : the DKT method. This method was presented in the case of a triangulation of the plate that is conforming, our purpose is now to explain the suitable definition of the mortar element method in this context. The starting point is again the one of a decomposition of the domain of computation in nonoverlapping set

$$\overline{\Omega} = \cup_{k=1}^K \overline{\Omega}^k, \quad \Omega^k \cap \Omega^\ell = \emptyset$$

We assume that the Ω^k are shape regular. We assume furthermore that each Ω^k is a curved polygonal domain with sides $\Gamma^{k,j}$, $1 \leq j \leq J(j)$. This domain decomposition of Ω induces a domain decomposition of the skeleton $\mathcal{S} = \cup_k \partial\Omega^k$. Indeed we recall that we choose, among the $\Gamma^{k,j}$ $1 \leq k \leq K, 1 \leq j \leq J(k)$ a nonoverlapping partition of the skeleton, each element of this partition being called a mortar $\gamma^m \equiv \Gamma^{k,j}$

$$\mathcal{S} = \cup_{m=1}^M \gamma^m.$$

Remind that once this choice is done in qualifying some edges $\Gamma^{k,j}$ as mortars, the remaining edges are called non-mortars and are denoted as γ_p^* , $1 \leq p \leq P$. In what follows, we also need to denote by $\Gamma_{k,\ell}$ the intersection of $\partial\Omega^k \cap \partial\Omega^\ell$.

We assume now that, over each subdomain Ω^k , a suitable conforming triangulation is associated. On this triangulation, we build the spaces V_{h1}^k (resp. V_{h2}^k) of Lagrange quadratic elements (resp. of Hermite P^3 elements) as indicated in the previous section. This allows to define the spaces \vec{V}_h^k of triples $(v_{h1}^k, v_{h2}^k, w_h^k)$ of $V_{h1}^k \times V_{h1}^k \times V_{h2}^k$ of local displacements in Ω^k .

The definition of the local spaces allows to define a global space \vec{Y}_h as follows

$$\vec{Y}_h = \{(v_{h1}, v_{h2}, w_h) \in L^2(\Omega)^3, (v_{h1}|_{\Omega^k}, v_{h2}|_{\Omega^k}, w_h|_{\Omega^k}) \in \vec{V}_h^k\} \quad (6.1)$$

The point is now to determine the suitable matching condition through the interface in order to determine the global space \vec{V}_h^k of admissible displacements. The definition of the matching condition is explained in section 2. Once this is done the problem can be set as a Galerkin approximation that reads: Find $\vec{u}_h \in \vec{V}_h$ such that

$$a_h(\vec{u}_h, \vec{v}_h) = f_h(\vec{v}_h), \quad \forall \vec{v}_h \in \vec{V}_h \quad (6.2)$$

where

$$a_h(\vec{u}_h, \vec{v}_h) = \int_{\Omega} e E^{\alpha\beta\lambda\mu} [\gamma_{\alpha\beta}(\vec{u}_h) \gamma_{\lambda\mu}(\vec{v}_h) + \frac{e^2}{12} \bar{\rho}_{h\alpha\beta}(\vec{u}_h) \bar{\rho}_{h\lambda\mu}(\vec{v}_h)] \sqrt{a} ds^1 ds^2 \quad (6.3)$$

$$f_h(\vec{v}_h) = \int_{\Omega} \bar{p} \vec{v}_h \sqrt{a} ds^1 ds^2 + \int_{\Gamma_1} [\bar{N} \vec{v}_h + M^\lambda (\partial_{h\lambda} \vec{v}_h + b_\lambda^\mu v_{h\mu})] d\gamma \quad (6.4)$$

with suitable definition of the quantities appearing under the integrals. This definition was given in the previous chapter and will be recalled in section 6. In order to focuss on the nonconformity involved by the mortar method, we shall introduce, in section 3, a simplified problem and will conduct its numerical analysis first. As proposed in (Kikuchi, 1975), we shall consider the Dirichlet boundary value problem for the biharmonic operator given by

$$\Delta\Delta u = f \quad \text{in } \Omega \quad (6.5)$$

$$u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{over } \partial\Omega \quad (6.6)$$

that corresponds to the problem of a clamped isotropic homogeneous plate (Ω is assumed here being a part of \mathbb{R}^2) under static loading f , the bending rigidity and Poisson's ratio being unity and zero respectively. In particular

we explain on this scalar problem the main issue of the matching of a function in H^2 that satisfies the DKT conditions. The error analysis involves a term of best fit error and one of consistency error. Section 4 addresses the best fit error and section 5 addresses the consistency error.

The extension to the original problem of the DKT approximation of the plate and shell problem is addressed in section 6. The well posedness of the problem is in particular the question that is answered in this section. We end the numerical analysis by treating the extra terms of consistency and prove an optimal approximation result.

6.2 The Mortar element method for the D.K.T. approximation

Our purpose is to explain what has to be changed in the definition of the D.K.T. method when the triangulation is nonconforming. To the nonoverlapping decomposition of the domain Ω is associated, as explained previously, the skeleton of the decomposition and the mortar and nonmortar sides are then chosen.

For the shell equation, we have many functions to be matched, first come the tangential displacements $v_{h\alpha}$, then the transverse displacement denoted w_h . Actually, the definition of the discrete scheme involves a bilinear form a_h that requires in addition the rotations ζ_h associated to the displacement those have to be matched also. For the two first components of the displacement, the matching is easy since these functions are independent and are involved in a second order equation. Their natural space is $H^1(\Omega)$ and the standard mortar method for piecewise parabolic elements is used. We recall that it involves the space of traces W_{h1} of functions of V_{h1} on the nonmortar sides and the subspace \tilde{W}_{h1} of W_{h1} of functions that are linear on the first and final (1D) element of the triangulation of this nonmortar side.

Let us state the matching across one particular non-mortar γ_p^* and denote by $^+$ the mortar (master) side and by $^-$ the nonmortar (slave) side of the decomposition. Then, for any function $v_{h\alpha}$, $\alpha = 1, 2$, we impose

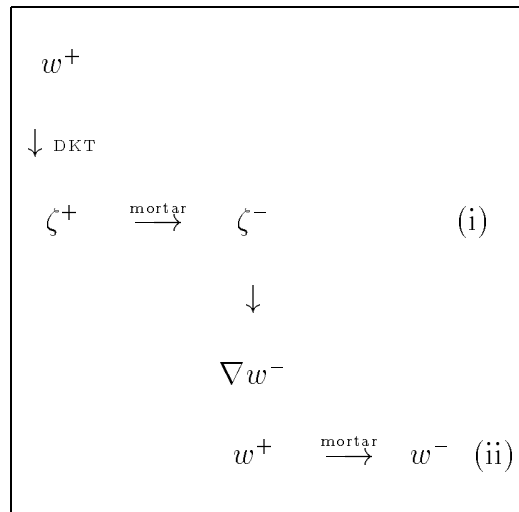
$$\forall \psi_h \in \tilde{W}_{h1}, \quad \int_{\gamma_p^*} (v_{h\alpha}^- - v_{h\alpha}^+) \psi_h = 0 \quad (6.7)$$

The space V_{h1} of approximation for the global tangential components of the

displacements is thus given by

$$V_{h1} = \{v_h \in L^2(\Omega), v_h|_{\Omega^k} \in V_{h1}^k \text{ and satisfies (6.7) along any non-mortar } \gamma_p^*, 1 \leq p \leq P\} \quad (6.8)$$

The novelty in the matching here is what is done on the third displacement condition and the related rotations. We recall that the D.K.T condition is a relation between the derivatives of the transverse displacement and the rotations, see formula 5.13. The nonmortar side is recovered from the mortar side in the following way



TAB. 6.1 - *Mortar and D.K.T*

We start from w^+ given on the master side of the mortar, then by the D.K.T condition, we obtain ζ^+ as explained in (5.13). The construction of ζ^- is then done in step (i)

Explanation of step (i)

We match ζ^- and ζ^+ by the mortar relations. These are different on the normal and the tangential components (normal and tangential with respect to the interface). First comes the tangential rotation, denoted as ζ^{t-} .

The purpose is to define a relation between two piecewise second order polynomials. The relation is naturally the same as for the displacements $v_{h\alpha}$, $\alpha = 1, 2$, so that we impose

$$\forall \psi_h \in \tilde{W}_{h1}, \quad \int_{\gamma_p^*} (\zeta^{t-} - \zeta^{t+}) \psi_h = 0. \quad (6.9)$$

Let us turn now to the normal rotations. We note first that from the DKT conditions, the normal rotations are, on the mortar side piecewise linear (since the normal rotations are second order polynomials and verify the normal constraints 5.10). Since we want to preserve, as much as possible, the Kirchoff conditions, we shall glue the normal rotations as piecewise linear finite element functions. To this purpose, we define W_{h0} as being the set of continuous piecewise linear functions on γ_p^* (provided with the non-mortar triangulation) and \tilde{W}_{h0} as the subset of those functions of W_{h0} that are constant on the first and last segment of the (nonmortar) triangulation. We then impose the following relation between the (piecewise linear) normal rotations:

$$\forall \psi_h \in \tilde{W}_{h0}, \quad \int_{\gamma_p^*} (\zeta^{n-} - \zeta^{n+}) \psi_h = 0 \quad (6.10)$$

Explanation of step (ii)

Now that the rotations are completely glued together and are uniquely defined over the interface from the corner values of ζ^- and all nodal values of ζ^+ (themselves derived from v_α^+ , w^+), we specify the relations that define w^- . The first set of constraints will be to satisfy “inverse DKT conditions” i.e. to impose that the values of w^- match with the rotations ζ^- . We thus impose that

- the tangential derivatives of w coincide with $\zeta^{t-} + v_\alpha^-$ at any Lagrange node (vertex and middle point)
- this allows to define a piecewise P_2 function on the nonmortar elements of γ_p^* and
- the normal derivative of w coincide with ζ^{n-} at each vertex of the triangulation of γ_p^* . Since ζ^{n-} is piecewise linear, the DKT condition at the

middle node of each element is automatically satisfied, in addition, since $\zeta^{\text{t-}}$ is piecewise quadratic, it coincides with the tangential derivative of w^- not only at the nodal points but on the whole interface γ_p^* . Since the tangential derivative of w^- is determined, it suffices to impose the value of w^- at one of the endpoints of γ_p^* to determine entirely the value of w^- . Since, by construction $\partial w^- / \partial \tau - \partial w^+ / \partial \tau$ ($\equiv (\zeta^{\text{t-}} + \zeta^{\text{t+}} + v_\alpha^- + v_\alpha^+)$) is (in particular) orthogonal to the constants, it is zero average; hence imposing that w^- coincides with w^+ at one end point implies that it coincides also at the other one. Let us introduce the space \tilde{W}_{2h}^- of piecewise cubic functions on the triangulation of γ_p^* that are quadratic only on the two end elements of γ_p^* , it is immediate to note that then

$$\forall \psi \in \tilde{W}_{2h}^-, \quad \int_{\gamma_p^*} \frac{\partial(w^- - w^+)}{\partial \tau} \psi' = 0 \quad (6.11)$$

integrating by part this relation, and using that $w^- - w^+$ vanishes at the endpoints of $\gamma_p^* = (\alpha_p, \beta_p)$ we deduce that

$$\forall \psi \in \tilde{W}_{0h}^-, \quad \int_{\gamma_p^*} (w^- - w^+) \psi = 0 \quad (6.12)$$

$$w^-(\alpha_p) = w^+(\alpha_p) \quad (6.13)$$

$$w^-(\beta_p) = w^+(\beta_p) \quad (6.14)$$

which can be seen as the relation that determines the nodal values of w^- that are lacking.

We insist on the fact that this construction leads to finite element functions that satisfy the DKT conditions on each subdomain Ω^k . It allows to define the global space V_{h2} of transverse displacements as follows

$$V_{h2} = \{w_h \in L^2(\Omega) \ w_h|_{\Omega^k} \in V_{h2}^k \text{ and satisfy (6.10), (6.11), (6.13) and (6.14)}\} \quad (6.15)$$

another equivalent definition being

$$V_{h2} = \{w_h \in L^2(\Omega) \ w_h|_{\Omega^k} \in V_{h2}^k \text{ and satisfy (6.9), (6.10), (6.13), (6.12) and (6.14)}\} \quad (6.16)$$

6.3 Analysis of a simplified problem

We first consider the DKT-like approximation of problem (6.5), (6.6). To any v_h in V_{h2} defined in (6.15), we associate the rotations as explained in

the previous section with no tangential displacement. On each side except the interfaces the rotations are uniquely defined from the DKT conditions and on the interfaces two values coexist that satisfy the DKT conditions on the corresponding edges. These rotations are built as tangential and normal (to the edges) rotations. We then consider their cartesian components noted $\zeta_{x_1}(v_h)$ and $\zeta_{x_2}(v_h)$. Note that their restrictions to Ω^k both belong to V_{h1}^k , by definition (but that they do not belong to V_{h1} since the normal derivatives are not matched as tangential derivatives with piecewise second order polynomials). We then introduce the bilinear form

$$a_h^*(u_h, v_h) = \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \int_{\Omega^k} \frac{\partial \zeta_{x_i}(u_h)}{\partial x_j} \frac{\partial \zeta_{x_i}(v_h)}{\partial x_j}.$$

The problem is then: Find u_h in V_{h2} such that

$$\forall v_h \in V_{h2}, \quad a_h^*(u_h, v_h) = \int_{\Omega} f v_h \quad (6.17)$$

In order to prove that this problem is well posed we first verify that there exists a constant α , that may depend on the discretization parameters such that

$$\forall v_h \in V_{h2}, \quad a_h^*(v_h, v_h) \geq \alpha \|v_h\|_*^2 \quad (6.18)$$

where $\|v_h\|_*$ denotes the standard broken norm

$$\|v_h\|_*^2 = \sum_{k=1}^K \|v_h\|_{H^1(\Omega^k)}^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} |v_h|_{2,T}^2.$$

Proving (6.18) is equivalent to prove that $a_h^*(v_h, v_h) \neq 0$ only when $v_h \neq 0$. If $a_h^*(v_h, v_h) = 0$ then $\frac{\partial \zeta_{x_i}(v_h)}{\partial x_j} = 0$. It follows that $\zeta_{x_i}(v_h)$ are constant over each subdomain Ω^k . From the mortar conditions (6.9) and (6.10), all constants are equal. Now the boundary conditions on v_h prove that this constant is 0. This does not prove yet that v_h itself vanishes. But from the DKT conditions, we derive that the tangential derivatives of v_h along each side of the triangles T of \mathcal{T}_h actually vanish. This means that v_h is constant along each of these edges, thus constant on each triangle. From the continuity of v_h in each subdomain Ω^k , we derive that v_h is constant in each Ω^k . We end the proof again by using the mortar condition (6.11) that implies that the constant is the same all over Ω . Finally, this constant is zero from the boundary conditions.

We thus have proven that

Lemma 6.1 (Existence result). *There exists a unique solution in V_h to problem (6.17)*

The ellipticity result stated in (6.18) with α possibly depending on the discretization is not sufficient to prove that the discrete solution u_h converges to the exact solution u to (6.5). Besides in order to expect an *optimal* approximation we need to obtain a uniform ellipticity in the sense that the constant α arising in (6.18) is independent of the discretization. Indeed we want to use the following abstract lemma the proof of which is standart.

Theorem 6.1 (Abstract error estimate). *Assume that the bilinear form $a_h(.,.)$ is uniformly continuous and elliptic on V_h , ie, there exists constants $\alpha > 0$ and $\delta > 0$ independant of h , such that*

$$\begin{aligned} \alpha \|v_h\|_h^2 &\leq a_h(v_h, v_h) \quad \forall v_h \in V_h \\ a_h(v_h, w_h) &\leq \delta \|v_h\|_h \|w_h\|_h \quad \forall v_h, w_h \in V_h \end{aligned} \quad (6.19)$$

Then, there exists a constant $C > 0$, independant of h such that;

$$\|u - u_h\|_h \leq C \left\{ \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_h + \sup_{w_h \in V_h} \frac{|(f, w_h) - a_h(u, w_h)|}{\|w_h\|_h} \right\} \quad (6.20)$$

where u and u_h are respectively the solutions of problems (6.5) and (6.17)

The first term in the right hand side of (6.20) is known as the best fit error while the second one is known as the consistency error. The best fit error term will be analysed in the next section while the second one will be considered in the section 5.

We end this section by considering the uniform ellipticity and continuity condition stated in (6.18). It is proven following the same lines as in (Bernardi, Maday). There is no restriction in assuming that the domain Ω is a rectangle $]a, a'[\times]b, b'[$, as can be seen by imbedding it in such a rectangle and prolongating the elements of V_h by 0 outside Ω . The proof that follows requires a natural assumption on the domain decomposition

Assumption 6.1. *There exists a constant c , independant of the decomposition of the domain Ω such that for all j , $1 \leq j \leq J(k)$ such that $\Gamma_{k,\ell} \subset \Gamma^{k,j}$:*

$$meas(\Gamma_{k,\ell}) > c \, meas(\Gamma^{k,j}) \quad (6.21)$$

This assumption states that two domains $\overline{\Omega^k}$ and $\overline{\Omega^\ell}$ intersect along a curve $\Gamma_{k,\ell}$ with nonnegligible measure with respect to the measures of $\Gamma^{k,j}$ and $\Gamma^{\ell,i}$ where we have assumed that $\Gamma_{k,\ell} \subset \Gamma^{k,j}$ and $\Gamma_{k,\ell} \subset \Gamma^{\ell,i}$.

We then associate, with any y , $b < y < b'$ the x -coordinates a_j^y , $j = 1, \dots, J_y$ sorted in increasing order, of intersection of the line of constant y with the interface $\Gamma_{k(j),\ell(j)}$ between the subdomains $\Omega^{k(j)}$ and $\Omega^{\ell(j)}$. The points (a_j^y, y) are generally points of discontinuity of $\zeta_\alpha(v_h)$ ($\alpha = 1, 2$). In addition, we set $a_0^y = a$ and $a_{J_y+1}^y = a'$. We then write, for any point (x, y) in Ω and any v_h in V_h

$$\begin{aligned} \zeta_\alpha(v_h)(x, y) = & \int_a^{a_1^y} \left(\frac{\partial \zeta_\alpha(v_h)}{\partial x}(t, y) dt \right) + [\zeta_\alpha(v_h)](a_1^y, y) + \int_{a_1^y}^{a_2^y} \left(\frac{\partial \zeta_\alpha(v_h)}{\partial x}(t, y) dt \right) + \dots \\ & + [\zeta_\alpha(v_h)](a_i^y, y) + \int_{a_i^y}^x \left(\frac{\partial \zeta_\alpha(v_h)}{\partial x}(t, y) dt \right) \end{aligned} \quad (6.22)$$

where $[\zeta_\alpha(v_h)](a_j^y, y)$ denotes the jump of $\zeta_\alpha(v_h)$ at (a_j^y, y) and a_i^y is the last point before x . This yields

$$|\zeta_\alpha(v_h)(x, y)| \leq \sum_{j=0}^{J_y} \left| \int_{a_j^y}^{a_{j+1}^y} \left(\frac{\partial \zeta_\alpha(v_h)}{\partial x}(t, y) dt \right) \right| + \sum_{j=1}^{J_y} |[\zeta_\alpha(v_h)](a_j^y, y)|. \quad (6.23)$$

Integrating the square of this inequality and using a Cauchy Schwarz inequality yields

$$\begin{aligned} \|\zeta_\alpha(v_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 & \leq (a' - a) \int_\Omega \sum_{j=0}^{J_y} \int_{a_j^y}^{a_{j+1}^y} \left(\frac{\partial \zeta_\alpha(v_h)}{\partial x}(t, y) \right)^2(t, y) dt dx dy \\ & + \int_\Omega \left(\sum_{j=1}^{J_y} \text{meas}(\Gamma_{k(j),\ell(j)}) \right) \left(\sum_{j=1}^{J_y} [\text{meas}(\Gamma_{k(j),\ell(j)})]^{-1} [\zeta_\alpha(v_h)]^2(a_j^y, y) \right) dx dy. \end{aligned} \quad (6.24)$$

The first term on the right hand side is quite easy to deal with. Indeed, the contribution that is integrated is independant of x so that

$$\int_\Omega \sum_{j=0}^{J_y} \int_{a_j^y}^{a_{j+1}^y} \left(\frac{\partial \zeta_\alpha(v_h)}{\partial x}(t, y) \right)^2(t, y) dt dx dy \leq (a' - a) \sum_{k=1}^K \int_{\Omega^k} \left(\frac{\partial \zeta_\alpha(v_h)}{\partial x}(t, y) \right)^2(t, y) dt dy$$

Second, a close look at the contribution $(\sum_{j=1}^{J_y} \text{meas}(\Gamma_{k(j),\ell(j)}))$ yields that it is independant of the domain decomposition. Indeed, as is proven in (Bernardi,

Maday, Lemma 2.2), it is a consequence of the shape regularity hypothesis that was made on the domain decomposition. We thus write

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \left(\sum_{j=1}^{J_y} \text{meas}(\Gamma_{k(j),\ell(j)}) \right) \left(\sum_{j=1}^{J_y} [\text{meas}(\Gamma_{k(j),\ell(j)})]^{-1} [\zeta_{\alpha}(v_h)]^2(a_j^y, y) \right) dx dy \\
& \leq \left\| \sum_{j=1}^{J_y} \text{meas}(\Gamma_{k(j),\ell(j)}) \right\|_{L^{\infty}(y)} \int_{\Omega} \left(\sum_{j=1}^{J_y} [\text{meas}(\Gamma_{k(j),\ell(j)})]^{-1} [\zeta_{\alpha}(v_h)]^2(a_j^y, y) \right) dx dy \\
& \leq c(a' - a) \int_{y=b}^{b'} \left(\sum_{j=1}^{J_y} [\text{meas}(\Gamma_{k(j),\ell(j)})]^{-1} [\zeta_{\alpha}(v_h)]^2(a_j^y, y) \right) dy \quad (6.25)
\end{aligned}$$

It is immediate to notice that, for $y \in (b, b')$, J_y is piecewise constant, so that there exists a sequence $(b_p)_p$ of points in (b, b') such that $J_y = J_p$ over the segment (b_p, b_{p+1}) (say $1 \leq p \leq P$). This allows to derive

$$\begin{aligned}
& \int_{y=b}^{b'} \left(\sum_{j=1}^{J_y} [\text{meas}(\Gamma_{k(j),\ell(j)})]^{-1} [\zeta_{\alpha}(v_h)]^2(a_j^y, y) \right) dy \\
& = \sum_{p=1}^P \sum_{j=1}^{J_p} [\text{meas}(\Gamma_{k(j),\ell(j)})]^{-1} \int_{y=b_p}^{b_{p+1}} [\zeta_{\alpha}(v_h)]^2(a_j^y, y) dy \quad (6.26)
\end{aligned}$$

We now observe that each interface between two subdomains intersecting the line of constant y at a point (a_j^y, y) is a non horizontal line $x = \lambda_j y + \mu_j$. Its element of integration $d\tau$ is thus equal to $\sqrt{1 + \lambda_j^2} dy \geq dy$ hence from (6.26)

$$\begin{aligned}
& \int_{y=b}^{b'} \left(\sum_{j=1}^{J_y} [\text{meas}(\Gamma_{k(j),\ell(j)})]^{-1} [\zeta_{\alpha}(v_h)]^2(a_j^y, y) \right) dy \\
& \leq \sum_{p=1}^P \sum_{j=1}^{J_p} [\text{meas}(\Gamma_{k(j),\ell(j)})]^{-1} \int_{\Gamma_{k(j),\ell(j)} \cap \{b_p \leq y \leq b_{p+1}\}} [\zeta_{\alpha}(v_h)]^2(\tau) d\tau \\
& \leq c \sum_{k < \ell} [\text{meas}(\Gamma_{k,\ell})]^{-1} \int_{\Gamma_{k,\ell}} [\zeta_{\alpha}(v_h)]^2(\tau) d\tau \quad (6.27)
\end{aligned}$$

We note that the functions that are constant over $\Gamma_{k,\ell}$ are almost in both the spaces \tilde{W}_{h1} and \tilde{W}_{h2} associated to the nonmortar side $\Gamma^{\ell,i}$. Hence $[\zeta_{\alpha}(v_h)]$ is almost of zero average along the nonmortar side. More precisely, let us denote by t_{m-1} , t_m and t_{m+1} three consecutive mesh points derived from the triangulation of the non mortar side that are such that :

$$a \in [t_m, t_{m+1}[$$

where a is the end point of $\Gamma_{k,\ell}$ that is not an end point of $\Gamma^{\ell,i}$, see figure 6.1.

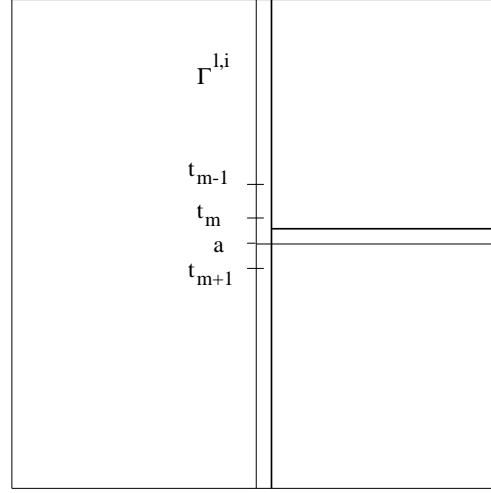


FIG. 6.1 - *Decomposition*

Then the function ϕ that is 1 over $\Gamma_{k,\ell} \setminus [t_{m-1}, t_{m+1}]$ linear over $[t_{m-1}, t_m]$ and zero otherwise can be extended to $\Gamma^{\ell,i}$ by zero to belongs to both the spaces \tilde{W}_{h1} and \tilde{W}_{h2} , meaning that

$$\int_{\Gamma_{k,\ell}} [v_\delta] \phi d\tau = 0$$

or again

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_{k,\ell}} [\zeta_\alpha(v_h)] d\tau &= \int_{\Gamma_{k,\ell}} [\zeta_\alpha(v_h)] (1 - \phi) d\tau \\ &\leq c \|\zeta_\alpha(v_h)\|_{L^2(\Gamma_{k,\ell})} \sqrt{h} \end{aligned} \quad (6.28)$$

Let us denote by μ^- (resp. μ^+) the average value of $\zeta_\alpha^-(v_h)$ (resp. $\zeta_\alpha^+(v_h)$) over $\Gamma_{k,\ell}$, we first derive from (6.28) that

$$|\mu^- - \mu^+| \leq c \|\zeta_\alpha(v_h)\|_{L^2(\Gamma_{k,\ell})} \sqrt{h} \quad (6.29)$$

With this information, we return to (6.28) and derive:

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_{k,\ell}} [\zeta_\alpha(v_h)] d\tau = \int_{\Gamma_{k,\ell}} [\zeta_\alpha(v_h)](1-\phi) d\tau \\ & = \int_{\Gamma_{k,\ell}} ((\zeta_\alpha^-(v_h) - \mu^-) + (\mu^- - \mu^+) d\tau + (\mu^+ - \zeta_\alpha^+(v_h)))(1-\phi) \quad (6.30) \end{aligned}$$

Therefore

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_{k,\ell}} [\zeta_\alpha(v_h)] d\tau \leq ch \|\zeta_\alpha(v_h)\|_{L^2(\Gamma_{k,\ell})} \\ & + \int_{\Gamma_{k,\ell}} ((\zeta_\alpha^-(v_h) - \mu^-) + (\mu^+ - \zeta_\alpha^+(v_h)))(1-\phi) d\tau \\ & \leq ch \|\zeta_\alpha(v_h)\|_{L^2(\Gamma_{k,\ell})} + \sqrt{h} \left[\int_{\Gamma_{k,\ell}} [(\zeta_\alpha^-(v_h) - \mu^-)^2 + (\mu^+ - \zeta_\alpha^+(v_h))^2] d\tau \right]^{1/2} \quad (6.31) \end{aligned}$$

Using an inverse inequality result on the boundary, we get

$$\sqrt{h} \|\zeta_\alpha(v_h)\|_{L^2(\Gamma_{k,\ell})} \leq c \|\zeta_\alpha(v_h)\|_{L^2(\Omega_k)}$$

which allows to improve (6.29) as follows

$$\begin{aligned} |\mu^- - \mu^+| & \leq c[\sqrt{h} \|\zeta_\alpha(v_h)\|_{L^2(\Omega_k)} \\ & + \sqrt{h} \int_{\Gamma_{k,\ell}} [(\zeta_\alpha^-(v_h) - \mu^-)^2 + (\mu^+ - \zeta_\alpha^+(v_h))^2] d\tau]^{1/2} \quad (6.32) \end{aligned}$$

As a by product of the Bramble Hilbert lemma, we recall that

$$\begin{aligned} [\text{meas}(\Gamma_{k,\ell})]^{-1} \int_{\Gamma_{k,\ell}} (\zeta_\alpha^-(v_h) - \mu^-)^2(\tau) d\tau & \leq c \|\zeta_\alpha^-(v_h) - \mu^-\|_{H^{1/2}(\Gamma_{k,\ell})}^2 \\ & \leq c |\zeta_\alpha^-(v_h)|_{H^1(\Omega^k)}^2 \quad (6.33) \end{aligned}$$

where we have used the assumption (6.21) and we assume that Ω^k is the slave side at the level of $\Gamma_{k,\ell}$. Similarly, we also have

$$[\text{meas}(\Gamma_{k,\ell})]^{-1} \int_{\Gamma_{k,\ell}} (\zeta_\alpha^+(v_h) - \mu^+)^2(\tau) d\tau \leq c |\zeta_\alpha^+(v_h)|_{H^1(\Omega^\ell)}^2 \quad (6.34)$$

Let us go back to (6.27) and incorporate this average value

$$\begin{aligned} & [\text{meas}(\Gamma_{k,\ell})]^{-1} \int_{\Gamma_{k,\ell}} [\zeta_\alpha(v_h)]^2(\tau) d\tau \\ & \leq c \{ [\text{meas}(\Gamma_{k,\ell})]^{-1} \int_{\Gamma_{k,\ell}} (\zeta_\alpha^-(v_h) - \mu^-)^2(\tau) d\tau \quad (6.35) \end{aligned}$$

$$+ [\text{meas}(\Gamma_{k,\ell})]^{-1} \int_{\Gamma_{k,\ell}} (\zeta_\alpha^+(v_h) - \mu^+)^2(\tau) d\tau \quad (6.36)$$

$$+ [\text{meas}(\Gamma_{k,\ell})]^{-1} (\mu^- - \mu^+)^2 \} \quad (6.37)$$

each of the contribution (6.35), (6.36), (6.37) is upper bounded first from (6.32), and then from (6.33), (6.34). Summing up, we have obtained

$$[\text{meas}(\Gamma_{k(j),\ell(j)})]^{-1} \int_{\Gamma_{k(j),\ell(j)}} [\zeta_\alpha(v_h)]^2(\tau) d\tau \leq c(|\zeta_\alpha^-(v_h)|_{H^1(\Omega^k)}^2 + |\zeta_\alpha^-(v_h)|_{H^1(\Omega^\ell)}^2) + \sqrt{h}[\text{meas}(\Gamma_{k(j),\ell(j)})]^{-1} \|\zeta_\alpha(v_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad (6.38)$$

which yields, from (6.24)

$$\begin{aligned} \|\zeta_\alpha(v_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq (a' - a)^2 \sum_{k=1}^K \int_{\Omega^k} \left(\frac{\partial \zeta_\alpha(v_h)}{\partial x} \right)^2(t, y) dt dy \\ &+ c(|\zeta_\alpha^-(v_h)|_{H^1(\Omega^k)}^2 + |\zeta_\alpha^-(v_h)|_{H^1(\Omega^\ell)}^2) \\ &+ \sqrt{h}[\text{meas}(\Gamma_{k(j),\ell(j)})]^{-1} \|\zeta_\alpha(v_h)\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned} \quad (6.39)$$

and finally

$$\|\zeta_\alpha(v_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq ca_h^*(v_h, v_h) \quad (6.40)$$

Following the same strategy, we deduce from (6.11) that the average of v_h is the same on both side of a non mortar edge and thus

$$\|v_h\|_{L^2(\Omega)} \leq c|v_h|_{H^1(\Omega)} \quad (6.41)$$

It remains to prove that

$$|v_h|_{H^1(\Omega)} \leq c\|\zeta_\alpha(v_h)\|_{L^2(\Omega)} \quad (6.42)$$

with a uniform constant c . This is an easy consequence of the fact that, over each triangle \mathcal{T} of the triangulation, the tangential derivative $\frac{\partial v_h}{\partial \tau}$ coincides with ζ^t so that, following a standard argument of scaling over the reference domain we prove that

$$|v_h|_{H^1(\mathcal{T})} \leq c\sqrt{h} \left| \frac{\partial v_h}{\partial \tau} \right|_{L^2(\partial \mathcal{T})}$$

and similarly

$$\|\zeta^t\|_{L^2(\partial \mathcal{T})} \leq \frac{c}{\sqrt{h}} \|\zeta^t\|_{L^2(\mathcal{T})}$$

which immediately gives (6.42). At this level, we have proven that

$$\|v_h\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|\zeta_\alpha(v_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq ca_h^*(v_h, v_h) \quad (6.43)$$

In order to prove (6.18) we are left to check the following statement

$$\sum_{\mathcal{T} \in \mathcal{T}_h} |v_h|_{H^2(\mathcal{T})}^2 \leq c a_h^*(v_h, v_h) \quad (6.44)$$

Naturally this is a consequence

$$\forall \mathcal{T} \in \mathcal{T}_h, \quad |v_h|_{H^2(\mathcal{T})} \leq c \sum_{\alpha=1}^2 |\zeta_\alpha(v_h)|_{H^1(\mathcal{T})} \quad (6.45)$$

This inequality is immediate with a constant c that may depend on the triangle since both terms are norms over the quotient space P'_3/P_1 . In order to prove the independance of the constant with respect to \mathcal{T} , we express, following (Bernadou, Matao Eiroa, Troune, 1993) both hand sides as functions of the barycentric coordinates $(\lambda_i, i = 1, 2, 3)$. Since $v_h|_{\mathcal{T}}$ belongs to P'_3 , we recall first that

$$v_h(x_1, x_2) = [DLLC3(v_h)]_{1 \times 9} [A_3]_{9 \times 10} [\lambda 3]_{10 \times 1},$$

where

$$[DLLC3(v_h)]_{1 \times 9} = [v_h(a_1) \ v_h(a_2) \ v_h(a_3) \ Dv_h(a_1)(a_3 - a_1) \ Dv_h(a_1)(a_2 - a_1) \\ Dv_h(a_2)(a_1 - a_2) \ Dv_h(a_2)(a_3 - a_2) \ Dv_h(a_3)(a_2 - a_3) \ Dv_h(a_3)(a_1 - a_3)]$$

$$[A_3]_{9 \times 10} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 6 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 6 & 6 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

and finally

$${}^t[\lambda 3] = [\lambda_1^3 \ \lambda_2^3 \ \lambda_3^3 \ \lambda_1^2 \lambda_3 \ \lambda_1^2 \lambda_2 \ \lambda_2^2 \lambda_1 \ \lambda_2^2 \lambda_3 \ \lambda_3^2 \lambda_2 \ \lambda_3^2 \lambda_1 \ \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3]$$

consequently

$$\frac{\partial^2 v_h}{\partial x_i \partial x_j}(x_1, x_2) = [DLLC3(v_h)]_{1 \times 9} [A_3]_{9 \times 10} \left[\frac{\partial^2 \lambda_3}{\partial x_i \partial x_j} \right]_{10 \times 1},$$

This yields

$$|v_h|_{2, \mathcal{T}}^2 = [DLLC3(v_h)]_{1 \times 9} [A_3]_{9 \times 10} [Y]_{10 \times 10}^t [A_3]_{9 \times 10}^t [DLLC3(v_h)]_{1 \times 9}$$

where

$$[Y]_{10 \times 10} = \int_{\mathcal{T}} ([\partial_{11} \lambda_3]^t [\partial_{11} \lambda_3] + 2[\partial_{12} \lambda_3]^t [\partial_{12} \lambda_3] + [\partial_{22} \lambda_3]^t [\partial_{22} \lambda_3]) dx_1 dx_2,$$

and with

$$\begin{aligned} [\partial_{11} \lambda_3] &= \frac{1}{\Delta^2} (x_2(a_2) - x_2(a_3))^2 \left\{ \frac{\partial^2 \lambda_3}{(\partial \lambda_1)^2} \right\} \\ &+ (x_2(a_3) - x_2(a_1))^2 \left\{ \frac{\partial^2 \lambda_3}{(\partial \lambda_2)^2} \right\} \\ &+ (x_2(a_1) - x_2(a_2))^2 \left\{ \frac{\partial^2 \lambda_3}{(\partial \lambda_3)^2} \right\} \\ &+ 2(x_2(a_2) - x_2(a_3))(x_2(a_3) - x_2(a_1)) \left\{ \frac{\partial^2 \lambda_3}{(\partial \lambda_1)(\partial \lambda_2)} \right\} \\ &+ 2(x_2(a_3) - x_2(a_1))(x_2(a_1) - x_2(a_2)) \left\{ \frac{\partial^2 \lambda_3}{(\partial \lambda_2)(\partial \lambda_3)} \right\} \\ &+ 2(x_2(a_1) - x_2(a_2))(x_2(a_2) - x_2(a_3)) \left\{ \frac{\partial^2 \lambda_3}{(\partial \lambda_3)(\partial \lambda_1)} \right\} \end{aligned}$$

with $\Delta = 2 \text{ area}(\mathcal{T})$ and similar expressions for the remaining terms in $[Y]$. We note that $\Delta = \mathcal{O}(h_{\mathcal{T}}^2)$ hence $[Y] = \mathcal{O}(h_{\mathcal{T}}^{-2})$

Let us turn now to the analysis of the uniform continuity (6.19). This is actually already proven in e.g. (Bernadou, Matao Eiroa, Troune) over each Ω^k separately and thus over all Ω by summation. Nevertheless, we are going to recall rapidly the main ingredients of the proof, for sake of completeness. The first point tells that $\zeta_{\alpha}(v_h)$ is closed to $\frac{\partial v_h}{\partial x_{\alpha}}$. Indeed, following (Bernadou, Matao Eiroa, Troune, lemma 3.1) we can state

Lemma 6.2. *There exists a constant c , independant of the triangle \mathcal{T} such that, for $m = 0, 1$ and $\alpha = 1, 2$*

$$\forall v_h \in V_{2h}, \quad \left| \frac{\partial v_h}{\partial x_{\alpha}} - \zeta_{\alpha}(v_h) \right|_{H^m(\mathcal{T})} \leq c h_{\mathcal{T}}^{1-m} |v_h|_{H^2(\mathcal{T})} \quad (6.46)$$

This lemma then immediately gives what we need since

$$\begin{aligned} \|\zeta_\alpha(v_h)\|_{H^1(\mathcal{T})} &\leq \left\| \frac{\partial v_h}{\partial x_\alpha} - \zeta_\alpha(v_h) \right\|_{H^1(\mathcal{T})} + \left\| \frac{\partial v_h}{\partial x_\alpha} \right\|_{H^1(\mathcal{T})} \\ &\leq c \left\| \frac{\partial v_h}{\partial x_\alpha} \right\|_{H^2(\mathcal{T})} \end{aligned}$$

We have thus proven in this section that the hypothesis of uniform ellipticity and continuity (6.18) and (6.19) hold. The abstract error estimate theorem 6.1 is thus applicable and yields the estimate (6.20). We are then naturally led to analyse the best fit error and the consistency error terms. This is the subject of the two next sections.

6.4 Analysis of the best fit error

The analysis of the best fit of the solution \vec{u}^* involves some technical materials, the first one — standard in nonconforming approximations — is related to the existence of stable finite element liftings of finite element traces. Let $\Gamma^{k,j}$ be a non mortar edge of some element Ω^k .

Lemma 6.3. *For any part $\Gamma^{k,j}$ of the boundary $\partial\Omega^k$, there exists a lifting operator $\mathcal{R}_h^{k,j}$ from $[W_{h2}(\Gamma^{k,j}) \cap H_0^2(\Gamma^{k,j})] \times [W_{h1}(\Gamma^{k,j}) \cap H_0^1(\Gamma^{k,j})]$ onto V_{h2} such that, for any (v_h, z_h) in $[W_{h2}(\Gamma^{k,j}) \cap H_0^2(\Gamma^{k,j})] \times [W_{h1}(\Gamma^{k,j}) \cap H_0^1(\Gamma^{k,j})]$, $\mathcal{R}_h^{k,j}(v_h, z_h)$ is, over $\Gamma^{k,j}$, equal to v_h , its normal derivatives is z_h , and both traces vanish over $\partial\Omega^k \setminus \Gamma^{k,j}$. In addition, it satisfies:*

$$\sqrt{\sum_{\mathcal{T} \in \mathcal{T}_h} |\mathcal{R}_h^{k,j}(v_h, z_h)|_{2,\mathcal{T}}^2} \leq c(\|v_h\|_{H_{00}^{\frac{3}{2}}(\Gamma^{k,j})} + \|z_h\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma^{k,j})}) \quad (6.47)$$

The second ingredient that we shall use deals with the approximation properties of the mortar projection operators. Let us introduce the projection operator $\tilde{\pi}_h$ from $H_0^1(\Gamma^{k,j})$ over $W_{h1}(\Gamma^{k,j}) \cap H_0^1(\Gamma^{k,j})$ as follows

$$\forall \varphi \in H_0^1(\Gamma^{k,j}), \forall \psi_h \in \tilde{W}_{h1}(\Gamma^{k,j}), \int_{\Gamma^{k,j}} (\varphi - \tilde{\pi}_h \varphi) \psi_h = 0$$

The second projection operator of interest is the one involved in the projection of the normal trace. This mortar projection operator is denoted as π_h and defined from $H_0^1(\Gamma^{k,j})$ over $W_{h0}(\Gamma^{k,j}) \cap H_0^1(\Gamma^{k,j})$ as follows

$$\forall \varphi \in H_0^1(\Gamma^{k,j}), \forall \psi_h \in \tilde{W}_{h0}(\Gamma^{k,j}), \int_{\Gamma^{k,j}} (\varphi - \pi_h \varphi) \psi_h = 0$$

For these two projection operators, the standard tools of finite element approximation lead to

Lemma 6.4. *There exists a constant $C > 0$ such that for any element $w \in H^{\frac{3}{2}}(\Gamma^{k,j}) \cap H_0^1(\Gamma^{k,j})$, such that:*

$$\| \tilde{\pi}_h w - w \|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma^{k,j})} + \| \pi_h w - w \|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma^{k,j})} \leq Ch \| w \|_{H^{\frac{3}{2}}(\Gamma^{k,j})}$$

The next projection operator we need is the one corresponding to the mortar glue on the trace of w . For any element Φ in $H_0^2(\Gamma^{k,j})$, it is the element of $W_{h2}(\Gamma^{k,j}) \cap H_0^2(\Gamma^{k,j})$ defined a being

$$\forall \Psi_h \in \tilde{W}_{h2}(\Gamma^{k,j}), \quad \int_{\Gamma^{k,j}} \frac{\partial(\Phi - \tilde{\Pi}_h \Phi)}{\partial \tau} \Psi_h' = 0$$

for which it is easy to derive for instance

Lemma 6.5. *There exists a constant $C > 0$ such that for any element $w \in H^2(\Gamma^{k,j})$*

$$\| \tilde{\Pi}_h w - w \|_{H_{00}^{\frac{3}{2}}(\Gamma^{k,j})} \leq Ch^{1/2} \| w \|_{H^2(\Gamma^{k,j})}$$

We are now in a position to prove the optimality of the best error approximation in the nonconforming space.

Theorem 6.2 (Best fit error term). *Let us assume that the solution u of problem (6.5), (6.6) belongs to the space $H^3(\Omega)$. Then, there exists a constant $C > 0$, independent of h , such that:*

$$\inf_{v_h \in V_{h2}} \| u - v_h \|_* \leq Ch \| u \|_{3,\Omega} \quad (6.48)$$

PROOF. We first build a good approximation of u over each subdomain Ω^k by taking the correct interpolant independently on each subdomain. This one is taken e.g. as being P_3' -Hermite interpolation of u . As is well known, see e.g. (Bernadou, Matao Eiroa, Troune), this element, denoted as u_h^* is a good approximation in the sense that

$$\| u - u_h^* \|_* \leq Ch \| u \|_{3,\Omega}. \quad (6.49)$$

The strategy consists now in modifying u_h^* on the non mortar side so that the compatibility condition is satisfied across the interfaces. Let us first assume that the decomposition is geometrically conforming. From the value of the derivatives of the u_h^* , we first build the associated DKT rotations $\vec{\zeta}_h$ by requiring (6.9), (6.10) on the mortar sides. On the interfaces, the values of the master traces are conserved (u_h^{*+} and $\vec{\zeta}_h^+$). From these values we now modify the non mortar values. Let us consider a non mortar side $\Gamma^{k,j}$, we start by correcting the rotations $\vec{\zeta}_h^-$. The new tangential component $\vec{\zeta}_h^{t-}$ has to be equal to $\zeta_h^{t-} + \tilde{\pi}_h^-(\zeta_h^{t+} - \zeta_h^{t-})$ (note that, as a result of the geometrical conformity, $\zeta_h^{t+} - \zeta_h^{t-}$ belongs to $H_0^1(\Gamma^{k,j})$ so that its projection is well defined) Similarly, the new normal component ζ_h^{n-} has to be equal to $\zeta_h^{n-} + \pi_h^-(\zeta_h^{n+} - \zeta_h^{n-})$. From these new values of the rotations on the nonmortar side, we define the new degrees of freedom of \tilde{u}_h^{*-} related to the derivatives nodal values in such a way that the DKT conditions are satisfied on the nonmortar side. It remains to define the nodal values of \tilde{u}_h^{*-} which is done by ensuring the last condition (6.11). As already noticed (6.12), the value of \tilde{u}_h^{*-} is obtained as a projection of u_h^{*+} , actually, we have

$$\tilde{u}_h^{*-} = u_h^{*-} + \tilde{\Pi}_h^-(u_h^{*+} - u_h^{*-})$$

Now the correct values of the degrees of freedom of \tilde{u}_h^{*-} on the non mortar side are known, it remains to lift the correction, i.e. the new value of \tilde{u}_h^{*-} over Ω^k is now

$$\tilde{u}_h^{*-} = u_h^{*-} + \mathcal{R}_h^{k,j}(\tilde{\Pi}_h^-(u_h^{*+} - u_h^{*-}), \pi_h^-(\zeta_h^{n+} - \zeta_h^{n-}))$$

In order to check that \tilde{u}_h^{*-} is still a good approximation of u , we first make use of the triangular inequality

$$\sqrt{\sum_{\mathcal{T} \in \mathcal{T}_h} |u - \tilde{u}_h^*|_{2,\mathcal{T}}^2} \leq \sqrt{\sum_{\mathcal{T} \in \mathcal{T}_h} |u - u_h^*|_{2,\mathcal{T}}^2} + \sqrt{\sum_{\mathcal{T} \in \mathcal{T}_h} |u_h^* - \tilde{u}_h^*|_{2,\mathcal{T}}^2}$$

The first term in the right hand side is part of the norm in (6.49) whereas the second term is bounded, from Lemma 6.3 as follows

$$\begin{aligned} \sqrt{\sum_{\mathcal{T} \in \mathcal{T}_h} |u_h^* - \tilde{u}_h^*|_{2,\mathcal{T}}^2} &= \sqrt{\sum_{\mathcal{T} \in \mathcal{T}_h} |\mathcal{R}_h^{k,j}(\tilde{\Pi}_h^-(u_h^{*+} - u_h^{*-}), \pi_h^-(\zeta_h^{n+} - \zeta_h^{n-}))|_{2,\mathcal{T}}^2} \\ &\leq c(\|\tilde{\Pi}_h^-(u_h^{*+} - u_h^{*-})\|_{H_{00}^{\frac{3}{2}}(\Gamma^{k,j})} + \|\pi_h^-(\zeta_h^{n+} - \zeta_h^{n-})\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma^{k,j})}) \end{aligned} \quad (6.50)$$

Let us assume now that the discretization on the nonmortar side (denoted as h_-) is smaller than the one on the mortar side (denoted as h_+), hence we are in the situation where (asymptotically) there exists a constant c such that

$$h_- \leq ch_+$$

the optimality of the approximation then results by noting that

$$\begin{aligned} \|\tilde{\Pi}_h^-(u_h^{*+} - u_h^{*-})\|_{H_{00}^{\frac{3}{2}}(\Gamma^{k,j})} &\leq \|u_h^{*+} - u_h^{*-}\|_{H_{00}^{\frac{3}{2}}(\Gamma^{k,j})} + \|(u_h^{*+} - u_h^{*-}) - \tilde{\Pi}_h^-(u_h^{*+} - u_h^{*-})\|_{H_{00}^{\frac{3}{2}}(\Gamma^{k,j})} \\ &\leq \|u_h^{*+} - u_h^{*-}\|_{H_{00}^{\frac{3}{2}}(\Gamma^{k,j})} + h_-^{\frac{1}{2}} \|u_h^{*+} - u_h^{*-}\|_{H^2(\Gamma^{k,j})} \\ &\leq \|u_h^{*+} - u\|_{H_{00}^{\frac{3}{2}}(\Gamma^{k,j})} + \|u - u_h^{*-}\|_{H_{00}^{\frac{3}{2}}(\Gamma^{k,j})} \\ &\quad + h_-^{\frac{1}{2}} \{ \|u_h^{*+} - u\|_{H^2(\Gamma^{k,j})} + \|u - u_h^{*-}\|_{H^2(\Gamma^{k,j})} \} \end{aligned}$$

Now from the trace theorem and the standard approximation results on the interpolation operator, we obtain

$$\begin{aligned} \|\tilde{\Pi}_h^-(u_h^{*+} - u_h^{*-})\|_{H_{00}^{\frac{3}{2}}(\Gamma^{k,j})} &\leq c\{h_- \|u\|_{H^3(\Omega^-)} + \{1 + (\frac{h_-}{h_+})^{\frac{1}{2}}\}h_+ \|u\|_{H^3(\Omega^+)}\} \\ &\leq c\{h_- \|u\|_{H^3(\Omega^-)} + h_+ \|u\|_{H^3(\Omega^+)}\} \end{aligned}$$

where the last bound results from the hypothesis $h_- \leq ch_+$. The other term on the right hand side of (6.50) is treated similarly. In case where, on the contrary, there exists a constant c where (still asymptotically) $h_- \geq ch_+$ then the inverse inequality leads to

$$\|\tilde{\Pi}_h^-(u_h^{*+} - u_h^{*-})\|_{H_{00}^{\frac{3}{2}}(\Gamma^{k,j})} \leq h_-^{\frac{-1}{2}} \|\tilde{\Pi}_h^-(u_h^{*+} - u_h^{*-})\|_{H_0^1(\Gamma^{k,j})} \quad (6.51)$$

the stability in the H^1 norm of the projection operator $\tilde{\Pi}_h^-$ then produces

$$\|\tilde{\Pi}_h^-(u_h^{*+} - u_h^{*-})\|_{H_{00}^{\frac{3}{2}}(\Gamma^{k,j})} \leq ch_-^{\frac{-1}{2}} \|u_h^{*+} - u_h^{*-}\|_{H_0^1(\Gamma^{k,j})} \quad (6.52)$$

and the result follows again by inserting $u - u$ in this last norm, using Cauchy Schwarz inequality and bounding independently both contributions in the $H_0^1(\Gamma^{k,j})$ -norm yielding

$$\begin{aligned} \|\tilde{\Pi}_h^-(u_h^{*+} - u_h^{*-})\|_{H_{00}^{\frac{3}{2}}(\Gamma^{k,j})} &\leq ch_-^{\frac{-1}{2}} \{h_-^{\frac{3}{2}} \|u\|_{H^3(\Omega^-)} + h_+^{\frac{3}{2}} \|u\|_{H^3(\Omega^+)}\} \\ &\leq c\{h_- \|u\|_{H^3(\Omega^-)} + \{1 + (\frac{h_+}{h_-})^{\frac{1}{2}}\}h_+ \|u\|_{H^3(\Omega^+)}\} \end{aligned}$$

and the optimality is achieved also in this case.

6.5 Analysis of the consistency error

We turn now to the analysis of the consistency term in the right hand side of (6.20). We follow here the same lines as in of (Bernadou, Matao Eiroa, Trounev) that relies on the important lemma 6.2. Indeed, the consistency error terms reads

$$\sup_{w_h \in V_h} \frac{|(f, w_h) - a_h^*(u, w_h)|}{\|w_h\|_h} \quad (6.53)$$

It is an easy matter to note that

$$(f, w_h) - a_h^*(u, w_h) = \sum_{k=1}^K \int_{\Omega^k} f w_h - \int_{\Omega^k} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial \zeta_{x_i}(w_h)}{\partial x_j}$$

From the definition of the continuous problem we know that this can also be written as

$$(f, w_h) - a_h^*(u, w_h) = \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \left\{ \int_{\Omega^k} \frac{\partial^4 u}{\partial x_i^2 \partial x_j^2} w_h - \int_{\Omega^k} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial \zeta_{x_i}(w_h)}{\partial x_j} \right\}$$

Using a simple integration by parts, yields

$$\int_{\Omega^k} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial \zeta_{x_i}(w_h)}{\partial x_j} = - \int_{\Omega^k} \frac{\partial^3 u}{\partial x_i \partial x_j^2} \zeta_{x_i}(w_h) + \int_{\partial \Omega^k} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \mathbf{n}_j^k \zeta_{x_i}(w_h)$$

where \mathbf{n}^k is the normal to $\partial \Omega^k$. Summing up these expression yields

$$\sum_{k=1}^K \int_{\Omega^k} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial \zeta_{x_i}(w_h)}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^K - \int_{\Omega^k} \frac{\partial^3 u}{\partial x_i \partial x_j^2} \zeta_{x_i}(w_h) + \int_S \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial \mathbf{n}} [\zeta_{x_i}(w_h)]$$

where $[\zeta_{x_i}(w_h)]$ denotes the jump of $\zeta_{x_i}(w_h)$ through the skeleton. In addition we also note that

$$\int_{\Omega^k} \frac{\partial^3 u}{\partial x_i \partial x_j^2} \zeta_{x_i}(w_h) = \int_{\Omega^k} \frac{\partial^3 u}{\partial x_i \partial x_j^2} (\zeta_{x_i}(w_h) - \frac{\partial w_h}{\partial x_i}) + \int_{\Omega^k} \frac{\partial^3 u}{\partial x_i \partial x_j^2} \frac{\partial w_h}{\partial x_i}$$

From lemma 6.2 we first note that

$$\left| \int_{\Omega^k} \frac{\partial^3 u}{\partial x_i \partial x_j^2} (\zeta_{x_i}(w_h) - \frac{\partial w_h}{\partial x_i}) \right| \leq ch \|u\|_{H^3(\Omega^k)} \left(\sum_{\mathcal{T} \in \Omega^k} |w_h|_{H^2(\mathcal{T})}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

besides it is immediate to note that

$$\int_{\Omega^k} \frac{\partial^3 u}{\partial x_i \partial x_j^2} \frac{\partial w_h}{\partial x_i} = - \int_{\Omega^k} \frac{\partial^4 u}{\partial x_i^2 \partial x_j^2} w_h + \int_{\partial \Omega^k} \frac{\partial^3 u}{\partial x_i \partial x_j^2} \cdot \mathbf{n}_i^k(w_h)$$

so that again from summation we derive a consistency error bounded by

$$\begin{aligned} |(f, w_h) - a_h^*(u, w_h)| &\leq ch \|u\|_{H^3(\Omega^k)} \|w_h\|_* + \left| \int_{\mathcal{S}} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial \mathbf{n}} [\zeta_{x_i}(w_h)] \right| \\ &\quad + \left| \int_{\mathcal{S}} \frac{\partial^3 u}{\partial x_i \partial x_j \partial \mathbf{n}} [w_h] \right| \end{aligned} \quad (6.54)$$

The mortar condition then allows to derive, for any $\psi_i \in \tilde{W}_{h0}(\mathcal{S})$

$$\int_{\mathcal{S}} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial \mathbf{n}} [\zeta_{x_i}(w_h)] = \int_{\mathcal{S}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial \mathbf{n}} - \psi_i \right) [\zeta_{x_i}(w_h)] \quad (6.55)$$

and for any $\chi_{ij} \in \tilde{W}_{h0}(\mathcal{S})$

$$\int_{\mathcal{S}} \frac{\partial^3 u}{\partial x_i \partial x_j \partial \mathbf{n}} [w_h] = \int_{\mathcal{S}} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x_i \partial x_j \partial \mathbf{n}} - \chi_{ij} \right) [w_h]$$

choosing ψ_i and χ_{ij} as good approximations of $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial \mathbf{n}}$, and $\frac{\partial^3 u}{\partial x_i \partial x_j \partial \mathbf{n}}$ respectively yield

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{S}} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial \mathbf{n}} [\zeta_{x_i}(w_h)] &\leq c \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial \mathbf{n}} - \psi_i \right\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\mathcal{S})} \|w_h\|_* \\ &\leq ch \|u\|_{H^3(\Omega^k)} \|w_h\|_* \end{aligned} \quad (6.56)$$

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{S}} \frac{\partial^3 u}{\partial x_i \partial x_j \partial \mathbf{n}} [w_h] &\leq c \left\| \frac{\partial^3 u}{\partial x_i \partial x_j \partial \mathbf{n}} - \chi_{ij} \right\|_{H^{-\frac{3}{2}}(\mathcal{S})} \|w_h\|_* \\ &\leq ch \|u\|_{H^3(\Omega^k)} \|w_h\|_* \end{aligned} \quad (6.57)$$

Summing up (6.55), (6.56), (6.57) this ends the proof that the consistency term is optimal

6.6 Extensions to the shell problem

Our purpose is to extend the mortar element method for the DKT approximation to handle the approximation of the shell problem. As it has been introduced in the previous section, we assume that the middle surface of the shell is defined as the image of a domain Ω by a mapping $\vec{\Phi}$ which will be assumed to be regular enough (actually $\in W^{4,\infty}(\Omega)$). In all what follows, we note the transverse displacement v_3 and the rotations δ .

The problem we want to tackle now is the following

Definition 6.1. For any $\vec{p} \in (L^2(\Omega))^3$, $\vec{N} \in (L^2(\Gamma_1))^3$, $M \in (L^2(\Gamma_1))^2$, Find $(\vec{u}^*) \in \vec{V}^* = H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \times H^2(\Omega)$ such that:

$$a^*(\vec{u}^*, \vec{v}) = f^*(\vec{v}), \quad \forall \vec{v} \in \vec{V}^* \quad (6.58)$$

where

$$\begin{aligned} a^*(\vec{u}, \vec{v}) &= \int_{\Omega} e E^{\alpha\beta\lambda\mu} [\gamma_{\alpha\beta}(\vec{u}) \gamma_{\lambda\mu}(\vec{v}) + \frac{e^2}{12} \bar{\rho}_{\alpha\beta}(\vec{u}) \bar{\rho}_{\lambda\mu}(\vec{v})] \sqrt{a} ds^1 ds^2 \\ f^*(\vec{v}) &= \int_{\Omega} \vec{p} \vec{v} \sqrt{a} ds^1 ds^2 + \int_{\Gamma_1} [\vec{N} \vec{v} + M^\alpha (v_{3,\alpha} + b_\alpha^\lambda v_\lambda)] d\gamma \\ \bar{\rho}_{\alpha\beta}(\vec{u}) &= v_{3|\alpha\beta} - c_{\alpha\beta} v_3 + b_\alpha^\lambda v_{\lambda|\beta} + b_\lambda^\beta v_{\lambda|\alpha} + b_{\lambda|\beta}^\lambda v_\lambda \\ \vec{V}^* &= \{ \vec{v} \in (H^1(\Omega))^3 \times H^2(\Omega), \vec{v}|_{\Gamma_0} = \vec{0}, \partial_n v_{3|\Gamma_0} = 0 \} \end{aligned}$$

where the various constants are of geometric nature and detailed in the previous section. We recall that:

Theorem 6.3. The problem (6.58) has one and only one solution.

The proof is given in (Bernadou, Ciarlet 1976). We propose now the discretization of this problem. The triangulation is the same as before and does not allow to have a standard approximation (it is again twice non conforming!). The discrete space has been introduced in section 2 and consists in the space $\vec{V}_h = V_{h1} \times V_{h1} \times V_{h2}$ and, as indicated in the introduction, the discrete problem is (6.2) where in the definition of a_h (6.3) and f_h (6.4) enters the discrete derivatives defined here after.

Definition 6.2 (discrete derivatives).

$$\partial_{h\alpha}(\vec{v}_h) = -\delta_{h\alpha} - b_\alpha^\lambda v_{h\lambda} \quad \forall (\vec{v}_h, \delta_h) \in \vec{Z}_h \quad (6.59)$$

$\partial_{h\alpha}(\vec{v}_h)$ is supposed to be a good approximation of $v_{h3,\alpha}$

Definition 6.3. For any $\vec{v}_h \in \vec{V}_h$, we define:

$$\bar{\rho}_{h\alpha\beta}(\vec{v}_h) \stackrel{\text{def}}{=} \partial_{h\alpha\beta}(\vec{v}_h) - \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda \partial_{h\lambda}(\vec{v}_h) - c_{\alpha\beta} v_{h3} + b_\alpha^\lambda v_{h\lambda|\beta} + b_\alpha^\beta v_{h\lambda|\alpha} + b_\alpha^\lambda |\beta v_{h\lambda}$$

where

$$\partial_{h\alpha\beta}(\vec{v}_h) = \frac{1}{2}(\partial_\beta \partial_{h\alpha}(\vec{v}_h) + \partial_\alpha \partial_{h\beta}(\vec{v}_h))$$

so that

$$\bar{\rho}_{h\alpha\beta}(\vec{v}_h) = -\chi_{\alpha\beta}(\vec{v}_h, \delta_h) \quad \forall (\vec{v}_h, \delta_h) \in \vec{Z}_h \quad (6.60)$$

The discrete norm we shall be working with in order to measure the discrete function is

Definition 6.4.

$$\| \vec{v}_h \|_h = (\| \vec{v}_h \|_{1,\Omega}^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} |v_{h3}|_{2,T}^2)^{\frac{1}{2}} \quad (6.61)$$

Following the same strategy as in section 3, we manage to obtain the existence of the discrete solution to problem (6.2). Indeed we remark that if $\vec{v}_h \in \vec{V}_h$ satisfies $a_h(\vec{v}_h, \vec{v}_h) = 0$ then \vec{v}_h is locally, on each subdomain Ω^k a rigid motion. From the mortar conditions on the three components of \vec{v}_h this rigid motion is, first, the same on Ω and second vanishes since the shell is assumed to be clamped on a part of the boundary. In order to derive an optimal error bound, we first state an abstract error estimate, close to (6.20) and that reads as follows

Theorem 6.4 (Abstract error estimate). Assume that the bilinear form $a_h(.,.)$ is uniformly continuous on $\vec{V}_h \cup \vec{Z}$ and elliptic on \vec{V}_h , ie, there exists constants $\gamma > 0$ and $\delta > 0$ independant of h , such that

$$\begin{aligned} \gamma \| \vec{v}_h \|_h^2 &\leq a_h(\vec{v}_h, \vec{v}_h) \quad \forall \vec{v}_h \in \vec{V}_h \\ a_h(\vec{v}_h, \vec{w}_h) &\leq \delta \| \vec{v}_h \|_h \| \vec{w}_h \|_h \quad \forall \vec{v}_h, \vec{w}_h \in \vec{V}_h \cup \vec{Z}. \end{aligned} \quad (6.62)$$

Then, there exists a constant $C > 0$, independant of h such that;

$$\begin{aligned} \|\vec{u}^* - \vec{u}_h\|_h \leq C \left\{ \inf_{\vec{v}_h \in \vec{V}_h} \|\vec{u}^* - \vec{v}_h\|_h + \sup_{\vec{w}_h \in \vec{V}_h} \frac{|f^*(\vec{w}_h) - f_h(\vec{w}_h)|}{\|\vec{w}_h\|_h} \right. \\ \left. + \sup_{\vec{w}_h \in \vec{V}_h} \frac{|f^*(\vec{w}_h) - a_h(\vec{u}^*, \vec{w}_h)|}{\|\vec{w}_h\|_h} \right\} \end{aligned} \quad (6.63)$$

where \vec{u}^* and \vec{u}_h are respectively the solutions of problems (6.58) and (6.2)

The uniform continuity of a_h is proven following the same lines as in (Bernadou, Matao Eiroa, Trouvé, 1993) and relies on an extension of lemma 6.2 proven in the case of conforming triangulation in (Bernadou, Matao Eiroa, Trouvé, Lemma 3.1) and valid here also for obvious reasons

Lemma 6.6. *There exists a constant c , independant of the triangle \mathcal{T} such that, for $m = 0, 1$ and $\alpha = 1, 2$*

$$\forall \vec{v}_h \in \vec{V}_h, \quad |\partial_{h\alpha}(\vec{v}_h) - v_{3h,\alpha}|_{H^m(\mathcal{T})} \leq ch_{\mathcal{T}}^{1-m} (\|v_{h1}\|_{H^1(\mathcal{T})} + \|v_{h2}\|_{H^1(\mathcal{T})} + |v_{h3}|_{H^2(\mathcal{T})}) \quad (6.64)$$

The uniform ellipticity is proven also with the same type of arguments but are much more involved since they are based on the discrete compactness properties for nonconforming approximations obtained in (Stummel, 1980). The proof is standard in the analysis of plate and shell problems and first consists in establishing a coercivity result stating that the contribution, over every triangle \mathcal{T} , to the bilinear form a_h satisfies

$$\begin{aligned} a_{h\mathcal{T}}(\vec{v}_h, \vec{v}_h) &\geq C_1 \{ \|v_{h1}\|_{H^1(\mathcal{T})}^2 + \|v_{h2}\|_{H^1(\mathcal{T})}^2 + \|v_{h3}\|_{H^2(\mathcal{T})}^2 \} \\ &\quad - C_2 \{ \|v_{h1}\|_{L^2(\mathcal{T})}^2 + \|v_{h2}\|_{L^2(\mathcal{T})}^2 + \|v_{h3}\|_{H^1(\mathcal{T})}^2 \} \end{aligned} \quad (6.65)$$

with constants C_1 and C_2 that are independant of \mathcal{T} if h is small enough, [Bernadou, Mato Eiroa, Trouvé, lemma 4.6]. By summing up these contributions one gets

$$a_h(\vec{v}_h, \vec{v}_h) \geq C_1 \|\vec{v}_h\|_h^2 - C_2 \{ \|v_{h1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|v_{h2}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{k=1}^K \|v_{h3}\|_{H^1(\Omega^k)}^2 \} \quad (6.66)$$

Then we can proceed to prove the ellipticity of a_h . Assuming that it does not hold, there exists a sequence \vec{v}_{h_q} of functions of \vec{V}_{h_q} with $\lim_{q \rightarrow \infty} h_q = 0$, such that

$$\|\vec{v}_{h_q}\|_{h_q} = 1, \quad (a_{h_q}(\vec{v}_{h_q}, \vec{v}_{h_q}))^{\frac{1}{2}} < \frac{1}{q} \quad (6.67)$$

The frame is now the space \vec{V}_0 defined by

$$\vec{V}_0 = \{ \vec{v} \in (L^2(\Omega))^3, \forall k, 1 \leq k \leq K \\ v_{1|\Omega^k} \in H^1(\Omega^k), v_{2|\Omega^k} \in H^1(\Omega^k), v_{3|\Omega^k} \in H^2(\Omega^k), \quad (6.68)$$

$$\vec{v} = 0 \text{ over } \Gamma_0, \frac{\partial v_3}{\partial \mathbf{n}} = 0 \text{ over } \Gamma_0, \quad (6.69)$$

$$\forall \gamma^p \text{ non mortar } \int_{\gamma^p} (v_{i|\Omega^k} - v_{i|\Omega^\ell}) = 0, \quad (6.70)$$

$$\int_{\gamma^p} \left(\frac{\partial v_{i|\Omega^k}}{\partial \mathbf{n}} - \frac{\partial v_{i|\Omega^\ell}}{\partial \mathbf{n}} \right) = 0 \} \quad (6.71)$$

Let $L^{m,2}(\Omega^k)$ be the space of all vector-valued functions $\mathbf{u} = (u^\mu)$ having components u^μ in $L^2(\Omega^k)$ for $|\mu| \leq m$ with $\mu = (\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{N}^2$ and $|\mu| = \mu_1 + \mu_2$. To any $u_h \in \vec{Y}_h$, we note $\mathbf{u}_h = (D^\mu u_h)_{|\mu| \leq m}$ where D^μ are the *local* (in sense over each triangle of \mathcal{T}_h partial derivatives, without the Dirac mass).

We also introduce the space $\vec{Y}_h \cap \vec{V}_0$. As in [Stummel, 1980], we introduce the following concept:

• *the strong convergence* of the sequence (u_h) to a function u is equivalent to

$$\| u_h - u \|_{m,2,\Omega} \equiv \left(\sum_{|\mu| \leq m} \sum_{\mathcal{T} \in \mathcal{T}_h} \int_{\mathcal{T}} |D^\mu u_h - D^\mu u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \rightarrow 0 \quad (h \rightarrow 0) \quad (6.72)$$

We recall the following properties:

Property V_0 :

There exists a constant θ such that all functions $v_h \in \vec{Y}_h \cap \vec{V}_0$ and their partial derivatives up to the order $m - 1$ satisfy the weak continuity condition (in sense of Stummel) defined as follows:

$$|D^\mu v_h|_{\mathcal{T}}(x) - D^\mu v_h|_{\mathcal{T}'}(x)| \leq \theta h \sup_{\mathcal{T} \in \mathcal{T}_h} \sup_{\mathcal{T}'} |\nabla v_h| \quad (6.73)$$

holds uniformly in h and x , for $|\mu| \leq m - 1$, for all points x at interelement boundaries, for all adjacent triangles $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$ in Ω^k , $\forall k = 1, \dots, K$

We remark that the jump between Ω^k and Ω^ℓ can be large.

Property V₁:

$$\forall v_0 \in \vec{V}_0, \quad \inf_{v_{h_q} \in \vec{Y}_h \cap \vec{V}_0} \|v_0 - v_{h_q}\|_{m,2,\Omega} \rightarrow 0 \quad (q \rightarrow \infty)$$

where $\|\cdot\|_{m,2,\Omega}$ is defined in (6.72).

Property V₂:

The limits of all weakly convergent sequences of functions v_{h_q} in $\vec{Y}_h \cap \vec{V}_0$ belong to the subspace \vec{V}_0 .

Property V_0 (local on Ω^k) is standart. The properties V_1 and V_2 are verified locally on Ω^k and since we have the conditions (6.70) and (6.71), the two properties hold everywhere on Ω .

We derive from (Stummel, section 2.3, 1980), that as we verified the properties V_0 , V_1 , and V_2 , then we have as a consequence the property V_3 on the sequence \vec{v}_{h_q} that satisfies (6.67).

There exists a subsequence $v_{h_{q'}}$, extrated from v_{h_q} such that $v_{h_{q'}}$ converges weakly (in sense of Stummel, ie in sense of p-uplet) to $\vec{v}^* \in \vec{V}_0$ and moreover $v_{h_{q'}}$ converges strongly in $(L^2(\Omega))^2 \times \Pi_k H^1(\Omega_k)$. Moreover it satisfies, for any element \vec{w} in \vec{V}_0

$$a(\vec{v}^*, \vec{w}) = \lim_{q \rightarrow \infty} a_{h_q}(\vec{v}_{h_q}, \vec{w}_{h_q})$$

where $w_{h_q} \rightarrow \vec{w}$ strongly in \vec{V}_0 in sense of Stummel (as introduced in property V_1). Using Cauchy-Schwartz inequality, we then have:

$$|a_{h_q}(\vec{v}_{h_q}, \vec{w}_{h_q})| \leq C a_{h_q}(\vec{v}_{h_q}, \vec{v}_{h_q})^{\frac{1}{2}} a_{h_k}(\vec{w}_{h_k}, \vec{w}_{h_k})^{\frac{1}{2}}$$

Since we have (6.67) and $a_{h_q}(\vec{w}_{h_q}, \vec{w}_{h_q})^{\frac{1}{2}}$ is bounded, we obtain

$$a(\vec{v}^*, \vec{w}) = 0$$

proving that \vec{v}^* is, over each Ω^k a rigid body motion. Since it is in \vec{V}_0 , it must vanish, using (6.70) and (6.71), which obviously contradicts the fact

that $\|\vec{v}_{h_k}\|_{h_k} = 1$. We have thus proven, by contradiction that

Lemma 6.7. *Assume h is small enough, then, the bilinear form a_h is uniformly elliptic and continuous over the space $[V_h]^2$.*

In order to use the approximation result of Lemma 6.4 we are led to analyse each terms in the right hand side of (6.63). The best fit term is treated in a complete analogous way as the one in the simpler case (see section 4) combined with the arguments used in the standard mortar analysis for approximations of $H^1(\Omega)$ by elements of V_{h1} . The second consistency term is also treated in a similar way, only the first term is new

$$\sup_{\vec{w}_h \in \vec{V}_h} \frac{|f^*(\vec{w}_h) - f_h(\vec{w}_h)|}{\|\vec{w}_h\|_h}$$

and is equal to

$$\int_{\Gamma_1} M^\lambda (\partial_{h\lambda} \vec{v}_h - v_{3,\lambda}) d\gamma$$

The integral over Γ_1 is decomposed into the sum over all sides S_j of triangles of the triangulation, each contribution is then treated as follows

$$\begin{aligned} \left| \int_{S_j} M^\lambda (\partial_{h\lambda} \vec{v}_h - v_{3,\lambda}) d\gamma \right| &\leq C |M^\lambda|_{\frac{1}{2}, S_j} |\partial_{h\lambda} \vec{v}_h - v_{3,\lambda}|_{-\frac{1}{2}, S_j} \\ &\leq ch |M^\lambda|_{\frac{1}{2}, S_j} \{ \|w_{h1}\|_{H^1(\mathcal{T})} + \|w_{h2}\|_{H^1(\mathcal{T})} + |w_{h3}|_{H^2(\mathcal{T})} \} \end{aligned} \quad (6.74)$$

as results from lemma 3.2 of (Bernadou, Matao Eiroa, Trouvé, 1993). Summing up all these expressions leads to

$$\sup_{\vec{w}_h \in \vec{V}_h} \frac{|f^*(\vec{w}_h) - f_h(\vec{w}_h)|}{\|\vec{w}_h\|_h} \leq ch |M|_{\frac{1}{2}, \Gamma_1}$$

We end this section by stating the main result

Theorem 6.5. *Let us assume that the middle surface of the shell is the image of a plane polygonal domain Ω by a mapping $\vec{\Phi} \in (W^{4,\infty}(\Omega))^3$, the triangulation of the domain is uniformly regular over each subdomain Ω , that the data \vec{p} , \vec{N} and M are regular enough so that the solution \vec{u} of Koiter problem (6.58) belongs to $\vec{V} \cap [(H^2(\Omega))^2 \times H^3(\Omega)]$, then, for h sufficiently small, there exists a unique solution u_h to problem (6.2) and it satisfies*

$$\|u - u_h\|_h \leq Ch (\|u_1\|_{H^2(\Omega)} + \|u_2\|_{H^2(\Omega)} + \|u_3\|_{H^3(\Omega)} + |M|_{\frac{1}{2}, \Gamma_1})$$

Chapitre 7

Mise en oeuvre de la méthode des joints pour les problèmes de plaques et coques

7.1 La résolution à deux niveaux

7.1.1 Le problème de coins

Dans cette section, nous détaillons la mise en oeuvre de la méthode des éléments avec joint au problème de coques.

Dans le cas conforme, C. Farhat et F.X Roux ont noté qu'en utilisant la méthode de résolution étudiée au chapitre 3 avec résolution de problèmes de Neumann locaux, qu'il apparaissait une discontinuité au niveau du saut des solutions locales aux points de croisement des interfaces. Pour remédier à cette singularité, l'idée principale est de forcer le multiplicateur de Lagrange à générer des champs de déplacements locaux continus aux points de croisement des interfaces, au fur et à mesure des itérations du gradient conjugué projeté. En introduisant cette contrainte de continuité supplémentaire, on introduit aussi un niveau supplémentaire dans la méthode de résolution. En effet, le problème revient, pareillement à la section 3.4.1 du chapitre 3, à résoudre un problème de minimisation sous la contrainte nouvellement introduite.

Dans le cas non conforme, le recollement de sous-domaines par la méthode

des éléments avec joint en imposant un raccord intégral a été étudiée au chapitre précédent. Sachant que dans le cas conforme, il existait une mise en oeuvre qui traitait spécialement le recollement des points de croisement des interfaces, nous avons proposé pour le recollement de la troisième composante correspondant au déplacement transverse, une fonction joint qui prend naturellement en compte les problèmes aux points de croisement des interfaces.

Par conséquent, nous nous intéressons à la résolution du problème hybride, où les matrices de rigidités K_i sont issues de la discrétisation élément fini du modèle de plaque D.K.T. et où les matrices d'interfaces B_i sont définies par des raccords intégraux étudiés dans le chapitre 6, par la méthode du gradient conjugué projeté.

Formulons de façon algébrique la méthode de résolution traitant la continuité aux coins.

Nous rappelons que le domaine Ω est décomposé en N sous-domaines $\{\Omega_i\}_{i=1}^N$.

Rappels

Dans la méthode du gradient conjugué projeté vue au chapitre 3, que nous appellerons *solve 1*, la projection P définie par

$$Pg = g + G\alpha = \sum_{i=1}^N B_i u_i \quad (7.1)$$

était une projection orthogonale sur $Ker(G^t)$. Le gradient projeté est en fait égal au gradient g corrigé par les sauts des modes de coins.

Par conséquent,

$$(Pg, G\beta) = \left(\sum_{i=1}^N B_i u_i, \sum_{i=1}^N B_i R_i \beta_i \right) = 0 \quad (7.2)$$

Nous rappelons l'équation suivante:

$$G^t P g = 0 \quad (7.3)$$

On résolvait un problème de minimisation sous contrainte, d'opérateur $P^t DP$, de la forme:

$$\begin{aligned}(P^t DP\lambda - P^t c, y) &= 0 \\ G^t \lambda &= 0\end{aligned}$$

Définition des modes de coins

Nous introduisons une matrice rectangulaire C dont le nombre de lignes est égal au nombre de degrés de liberté global sur l'interface et le nombre de colonnes égal au nombre de degrés de liberté sur l'interface pour lesquels on impose la continuité à travers les itérations. Nous notons C_i l'ensemble des modes de coins dans le sous domaine Ω_i .

Imposer la continuité du champ déplacement aux points de croisement des interfaces est équivalent à imposer que le saut des solutions doit être orthogonal au saut des 'modes de coins':

$$(B_i C_i)^t P g^n = 0 \quad \forall i$$

ou

$$\left(\sum_i B_i C_i \beta_i\right)^t P g^n = 0 \quad \forall \beta$$

Le problème grossier

Par analogie avec (7.1), le gradient projeté preconditionné par les modes de coins s'écrit:

$$M P g^n = P g^n + \sum_i B_i C_i \beta_i \tag{7.4}$$

Maintenant, nous souhaitons rendre les déplacements 'générés' issus de *solve 1* continus aux coins. Ceci s'exprime par

$$(P^t DP(Pg + C\beta)) \text{ orthogonal à } C = \sum_i B_i C_i$$

c'est-à-dire, puisque la projection est orthogonale $P^t = P$, et $P^2 = P$

$$\begin{aligned} (PD(Pg + PC\beta), C\gamma) &= 0 \quad \forall \gamma \\ \iff (D(Pg + PC\beta), PC\gamma) &= 0 \quad \forall \gamma \end{aligned}$$

On introduit maintenant le sous-espace grossier défini par les modes rigides et les modes de coins. On note α les coefficients des modes rigides et β ceux des modes de coins.

Des relations (7.1) et (7.3), on écrit:

$$PC\beta = C\beta + G\alpha = C_G X$$

avec

$$C_G = [C \ G] \quad \text{et} \quad X = \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix} \quad (7.5)$$

et

$$G^t PC\beta = 0$$

Par conséquent, en posant

$$Y = \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix} \quad (7.6)$$

nous avons

$$\begin{aligned} (D(Pg + C\beta + G\alpha), C\gamma + G\delta) &= 0 \\ \text{sous les contraintes } G^t(C\beta + G\alpha) &= G^t(C\gamma + G\delta) = 0 \\ (D(Pg + C_G X), C_G Y) &= 0 \\ \text{sous contraintes } G^t C_G X &= G^t C_G Y = 0 \end{aligned}$$

Ce problème est équivalent au problème que nous appellerons *solve 2*.

$$\begin{pmatrix} C_G^t D C_G & C_G^t G \\ G^t C_G & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_G^t D P g \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7.7)$$

avec

$$C_G = \begin{pmatrix} C & G \end{pmatrix} \quad (7.8)$$

$$C = \sum_i B_i C_i \quad (7.9)$$

La “nouvelle” méthode *solve 2*, applicable aux problèmes de plaques et coques peut être résolue par une méthode du Gradient Conjugué Projeté (Préconditionné). Celle-ci peut être interprétée comme étant une méthode de résolution *deux niveaux*:

- Premier niveau:
un multiplicateur de Lagrange λ_n est calculé à chaque itération dans le but de réduire le saut du champ déplacement sur les interfaces entre les sous-domaines.
- Deuxième niveau:
un problème de coins qu’on qualifie de grossier, est résolu afin de renforcer la continuité du champ déplacement transverse sur les coins des sous-domaines

7.1.2 Résolution du problème grossier

Le problème grossier associé aux corrections de coins est donné par:

$$\begin{pmatrix} C_G^t D C_G & C_G^t G \\ G^t C_G & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_G^t D \\ 0 \end{pmatrix} y \quad (7.10)$$

avec

$$C_G = \begin{pmatrix} C & G \end{pmatrix} \quad (7.11)$$

$$C = \sum_i B_i C_i \quad (7.12)$$

On écrit le problème, comme dans le chapitre 3, en terme de minimisation d’une fonctionnelle quadratique:

$$\min \phi(\beta, \alpha) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \beta^t & \alpha^t \end{bmatrix} C_G^t D C_G \begin{bmatrix} \beta \\ \alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta^t & \alpha^t \end{bmatrix} \begin{pmatrix} C_G^t D \\ 0 \end{pmatrix} y$$

sous la contrainte

$$G^t C_G \begin{bmatrix} \beta \\ \alpha \end{bmatrix} = 0$$

Ce problème peut également être résolu par la méthode du Gradient Conjugué Projeté. On se souvient que la projection orthogonale sur le noyau de G^t dans la méthode du Gradient Conjugué Projeté du chapitre 3 était:

$$P = I - G(G^t G)^{-1} G^t \tag{7.13}$$

Pour le problème de coins, la projection sur les modes de coins est donné par:

$$Q = I - C_G^t G (G^t C_G C_G^t G)^{-1} G^t C_G$$

Le produit matrice-vecteur $Q \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ nous amène à résoudre un troisième problème grossier de la forme

$$(G^t C_G C_G^t G) \Psi = G^t C_G \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Afin d'éviter la résolution de ce problème supplémentaire, on réécrira, dans la prochaine section, la matrice projection.

Cette nouvelle écriture fera intervenir un opérateur à inverser, identique à celui de l'équation (7.13).

7.1.3 Calcul de la projection Q

On résoud le système (7.10) par un algorithme de gradient conjugué avec projection. La matrice de projection Q est introduite dans le but de corriger, à chaque itération p , la solution (β_p, α_p) afin que celle-ci satisfasse la contrainte de continuité:

$$G^t C_G \begin{bmatrix} \beta_p \\ \alpha_p \end{bmatrix} = 0 \tag{7.14}$$

avec $C_G = [C \ G]$

$$Q \begin{bmatrix} \beta_p \\ \alpha_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_p \\ \alpha_p + \delta_p \end{bmatrix} \quad (7.15)$$

On déduit des équations (7.14) et (7.15),

$$\delta_p = -(G^t G)^{-1} (G^t C \beta_p + G^t G \alpha_p) \quad (7.16)$$

ainsi, on obtient l'expression suivante de l'opérateur de projection:

$$Q = I - \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} (G^t G)^{-1} G^t C_G \quad (7.17)$$

Remarque 7.1. *On remarque que l'opérateur de projection Q et l'opérateur de projection P possèdent le même opérateur $(G^t G)^{-1}$. Par conséquent, ils engendrent les mêmes problèmes grossiers où seuls les seconds membres sont différents.*

Remarque 7.2. *La matrice de projection Q est non orthogonale, par conséquent, dans l'algorithme du gradient conjugué projeté, on multiplierà, dans la phase projection, par*

$$Q^t = I - C_G^t G (G^t G)^{-1} \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \quad (7.18)$$

7.2 Résultats Numériques

7.2.1 Plaque en cisaillement transversal

Afin de valider le code de décomposition de domaines recollés par la méthode des éléments avec joint pour les problèmes de plaques, nous avons modélisé une plaque en cisaillement perpendiculaire à la surface moyenne, simulation pour laquelle nous possédons une valeur analytique de référence.

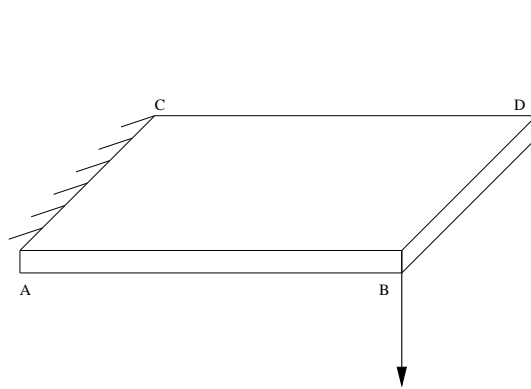


FIG. 7.1 - *Plaque en cisaillement transverse*

La géométrie est donnée dans le tableau suivant:

Epaisseur	$e = 0.05 \text{ m}$
Longueur	$L = 12 \text{ m}$
Largeur	$l = 1 \text{ m}$

- Les propriétés du matériau sont: $E = 1.0E7 \text{ Pa}$ et $\nu = 0.25$.
- Les conditions aux limites sont: AC encastéré.
- Le chargement est: en B : $F_z = -1.0 \text{ N}$ et en D : $F_z = 1.0 \text{ N}$. La valeur de référence, dans le cadre du modèle de Kirchhoff, est: en D , le déplacement de la flèche est égal à $35.37 \cdot 10^{-03} \text{ m}$ (communication personnelle de monsieur Destuynder).

Nous obtenons une bonne adéquation entre la solution (déplacement transverse) trouvée $35.288 \cdot 10^{-03}$ (voir figure 7.2) et la valeur de référence.

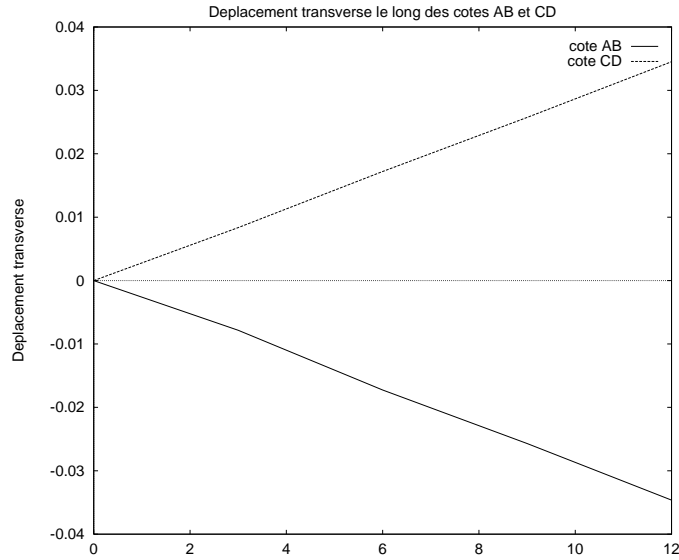


FIG. 7.2 - *Plaque en cisaillement: déplacement transverse le long de AB et CD*

80 * 80	40 * 40
80 * 80	40 * 40

FIG. 7.3 - *Plaque en cisaillement: maillage non conforme*

Nous avons modélisé la plaque en cisaillement en la décomposant en 2×2 sous-domaines et en raffinant le maillage 7.3 par 2 puis 4. Nous avons représenté le logarithme du pas de maillage en fonction du logarithme de l'erreur de la flèche au point D , voir figure 7.4. L'erreur considérée étant la valeur absolue de la différence entre la flèche de référence au point D et la flèche calculée sur les différents maillages au point D

Nous trouvons:

$$\log(\text{erreur})/\log(h) = \alpha$$

La valeur calculée numériquement de α est environ 4.0. (Voir figure 7.4).

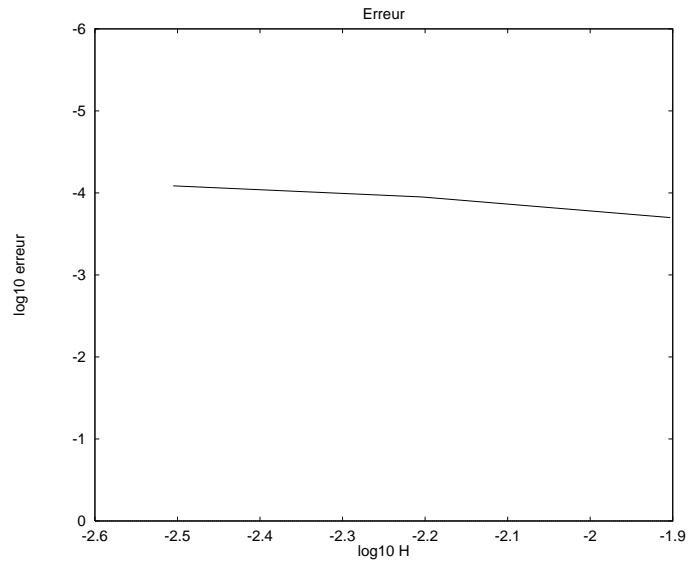


FIG. 7.4 - Plaque en cisaillement: erreur

7.2.2 Cas test: Plaque

Nous simulons maintenant la plaque représentée sur la figure 7.5.

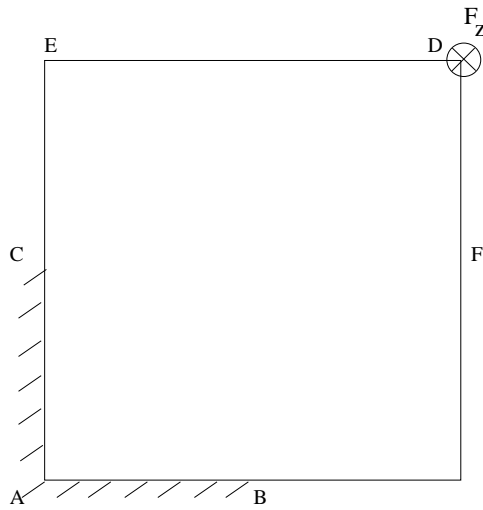


FIG. 7.5 - Plaque en cisaillement

La géométrie est donnée dans le tableau suivant:

Epaisseur	$e = 0.05 \text{ m}$
Longueur	$L = 1 \text{ m}$
Largeur	$l = 1 \text{ m}$

- Les propriétés du matériau sont: $E = 1.0E7 \text{ Pa}$ et $\nu = 0.25$.
- Les conditions aux limites sont: AB et AC encastres.
- Le chargement est: en D : $F_z = -1.0 \text{ N}$.

Résultats de recollement

Afin de valider le choix de l'espace des multiplicateurs de Lagrange pour le recollement du déplacement transverse et de ses dérivées, nous avons découpé la plaque en 2, 4 et 8 sous-domaines. Nous visualisons sur les courbes suivantes le déplacement transverse et les rotations et remarquons un raccord parfait au travers des interfaces de la décomposition.

Regardons sur les figures 7.6, 7.7, 7.8 le déplacement transverse ainsi que ses dérivées le long du côté ED (figure 7.5).

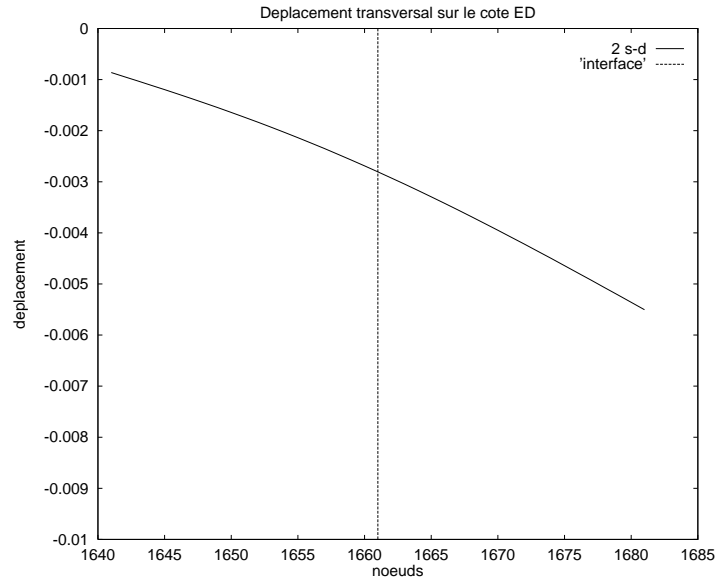


FIG. 7.6 - *Plaque: maillage 40×40 , conforme, décomposition 2×1 , déplacement transverse le long de la coupe ED.*

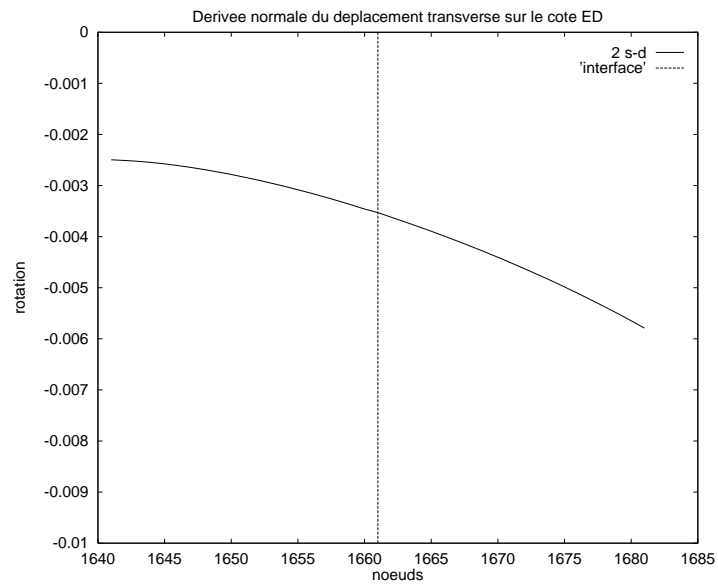


FIG. 7.7 - *Plaque: maillage 40×40 , conforme, décomposition 2×1 , dérivée normale du déplacement transverse le long de la coupe ED.*

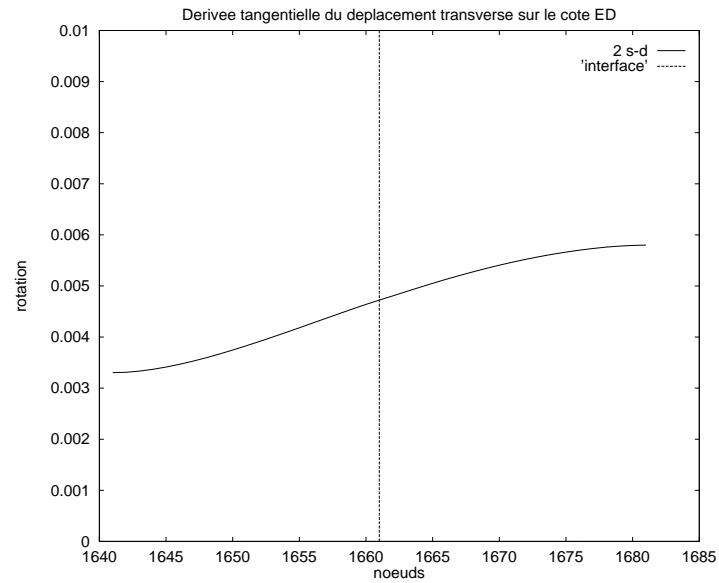


FIG. 7.8 - Plaque: maillage 40×40 , conforme, décomposition 2×1 , dérivée tangentielle du déplacement transverse le long de la coupe ED

Afin de compléter les coupes, visualisons sur les figures 7.9, 7.10 et 7.11 les distributions surfaciques du déplacement transverse ainsi que de ses dérivées normales et tangentielles.

Distribution surfacique: déplacement transversal

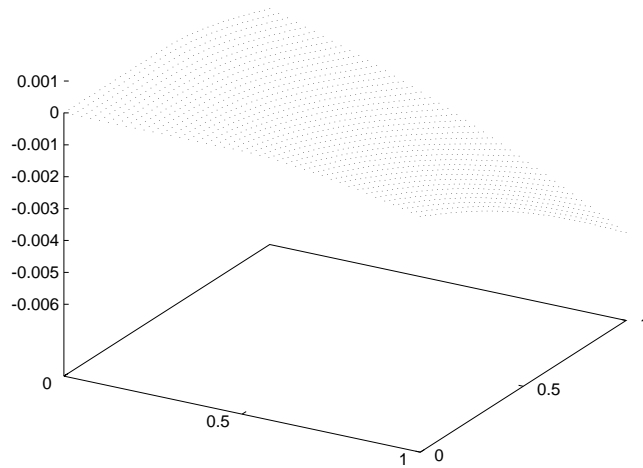


FIG. 7.9 - *Plaque: maillage 40×40 , conforme, décomposition 2×1 , déplacement transverse.*

Distribution surfacique: dérivée normale du déplacement transverse

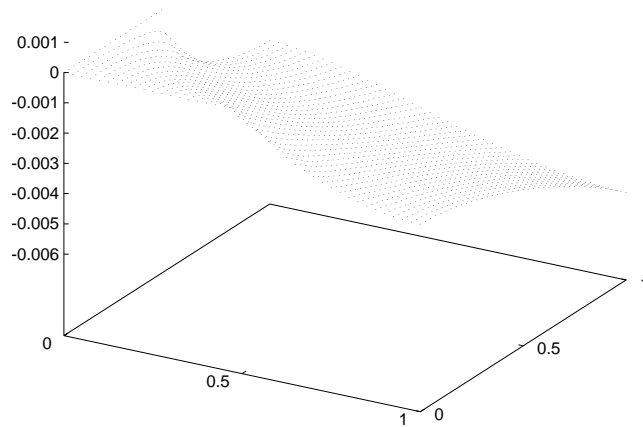


FIG. 7.10 - *Plaque: maillage 40×40 , conforme, décomposition 2×1 , dérivée normale du déplacement transverse.*

Distribution surfacique: dérivée tangentielle du déplacement transverse

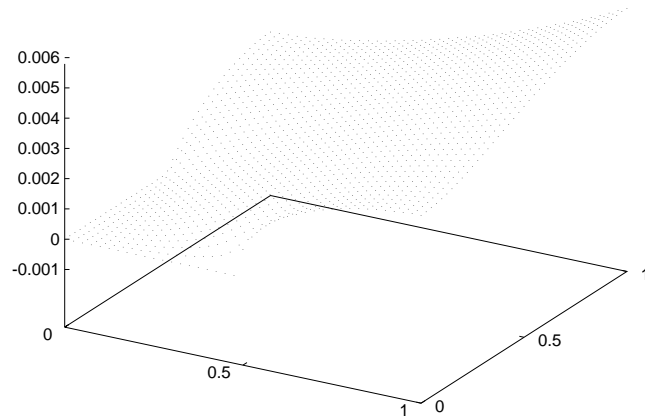


FIG. 7.11 - *Plaque: maillage 40×40 , conforme, décomposition 2×1 , dérivée tangentielle du déplacement transverse*

Décomposons maintenant le domaine en 4 sous-domaines avec maillages non coïncident aux interfaces comme représenté sur la figure 7.12 et visualisons le raccord à travers les 3 interfaces sur les figures 7.13, 7.14, 7.15.

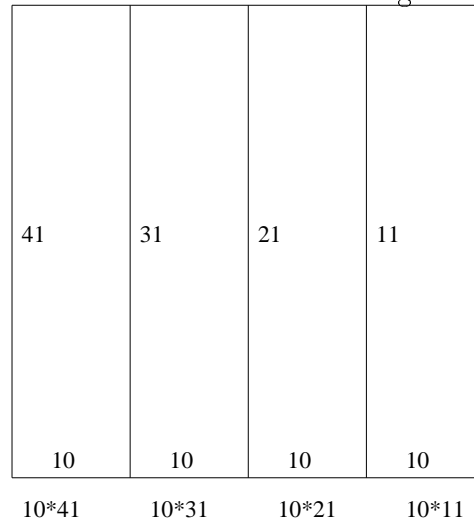


FIG. 7.12 - *Décomposition et Maillage non conforme de la plaque.*

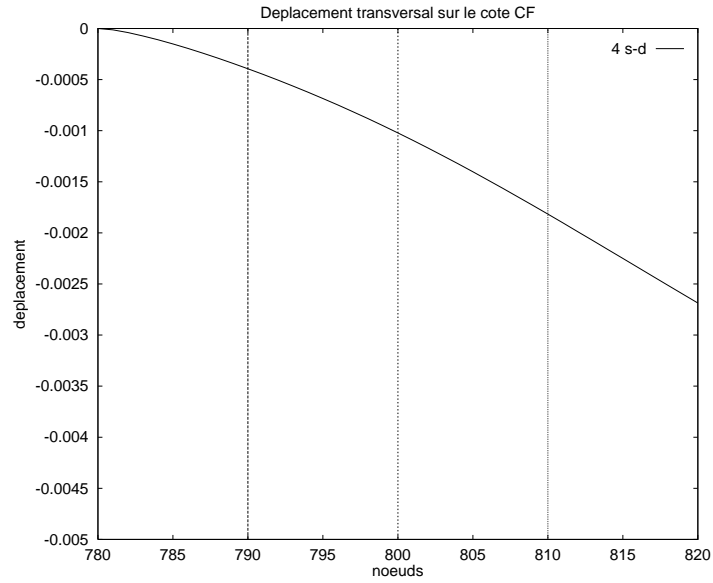


FIG. 7.13 - *Maillage non conforme: déplacement transverse le long de la coupe CF*

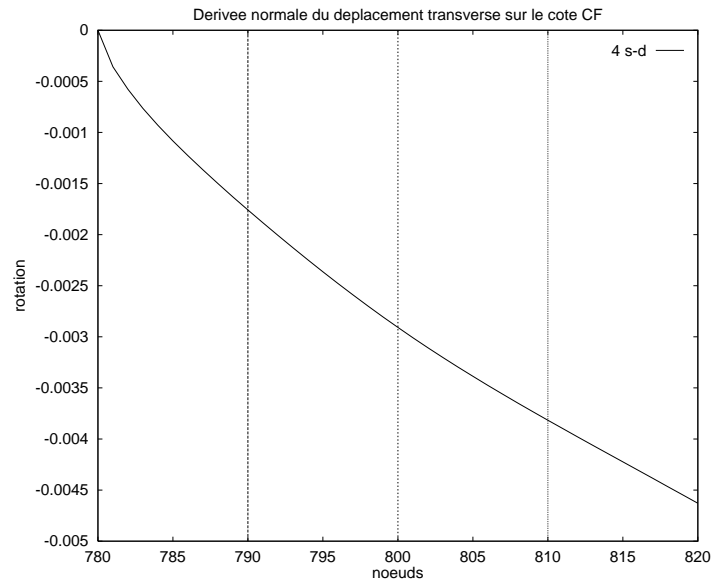


FIG. 7.14 - *Maillage non conforme: dérivée normale du déplacement transverse le long de la coupe CF*

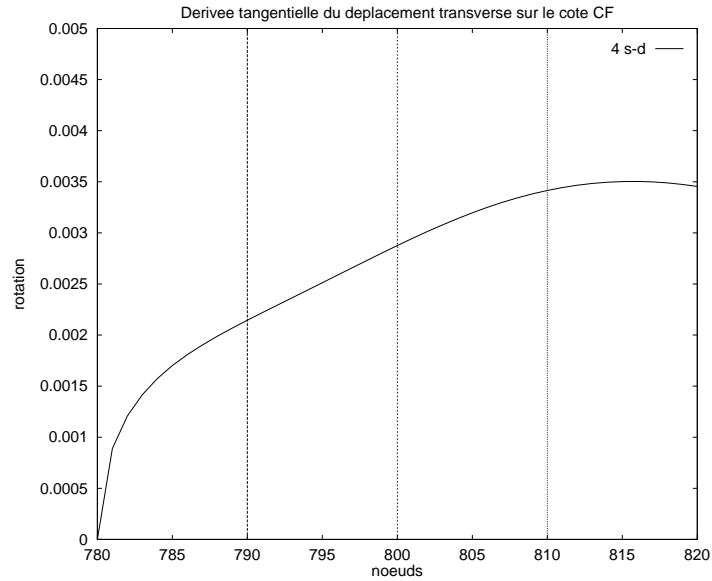


FIG. 7.15 - *Maillage non conforme: dérivée tangentielle du déplacement transverse le long de CF*

Pour une même décomposition avec le pas du maillage raffiné par 2, nous obtenons également un bon recollement à travers les interfaces de la décomposition, figure 7.16.

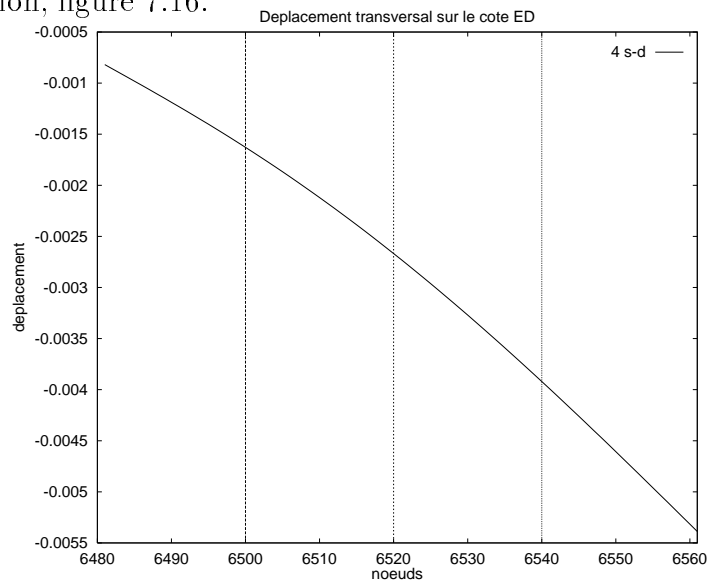


FIG. 7.16 - *Plaque: maillage non conforme, décomposition 4×1 , déplacement transverse le long de la coupe CF*

Regardons le cas d'un découpage 2×2 sous-domaines, maillé finement (voir figure 7.17) dont la solution servira de solution de référence, puis maillé comme sur les figures 7.18 et 7.19. Deux maillages non conformes seront considérés, maillés finement près de l'encastrement et grossièrement au voisinage de la force imposée (voir figure 7.20 et 7.21)

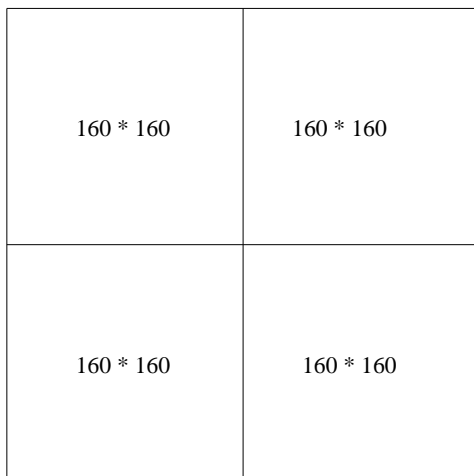


FIG. 7.17 - *Mesh1: maillage conforme, décomposition 2×2*

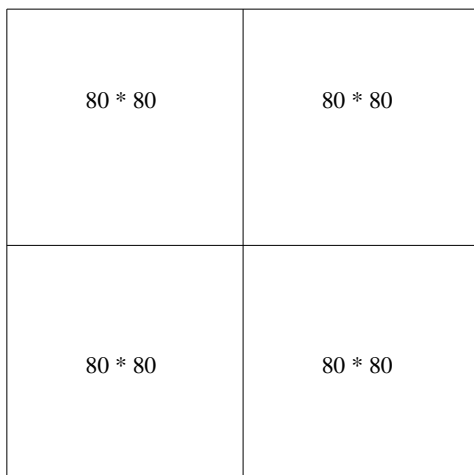
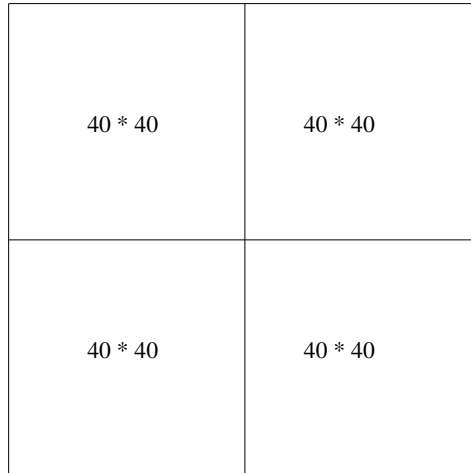
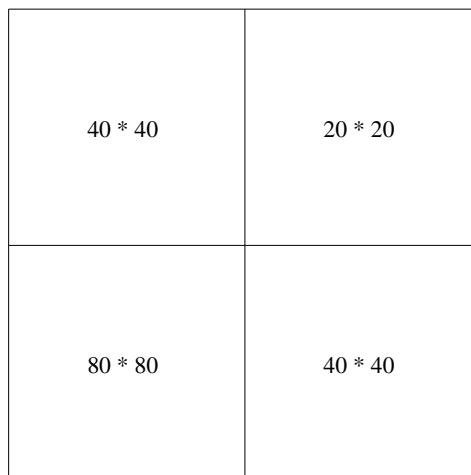


FIG. 7.18 - *Mesh2: maillage conforme, décomposition 2×2*

FIG. 7.19 - *Mesh3*: maillage conforme, décomposition 2×2 FIG. 7.20 - *Mesh4*: maillage non conforme, décomposition 2×2

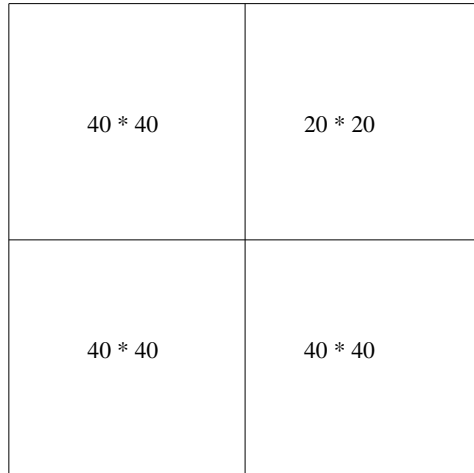


FIG. 7.21 - *Mesh5: maillage non conforme, décomposition 2×2*

Comparons les champs déplacement transverse ainsi que ses dérivées normales et tangentielles.

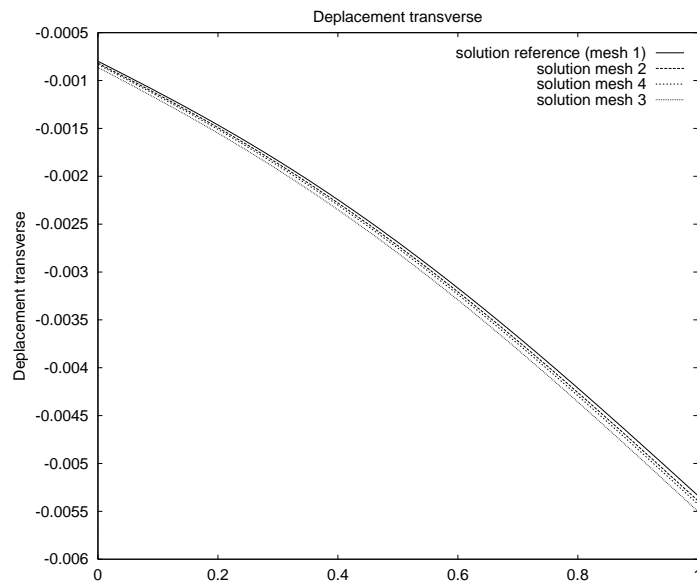


FIG. 7.22 - *Déplacement transverse le long de la coupe ED*

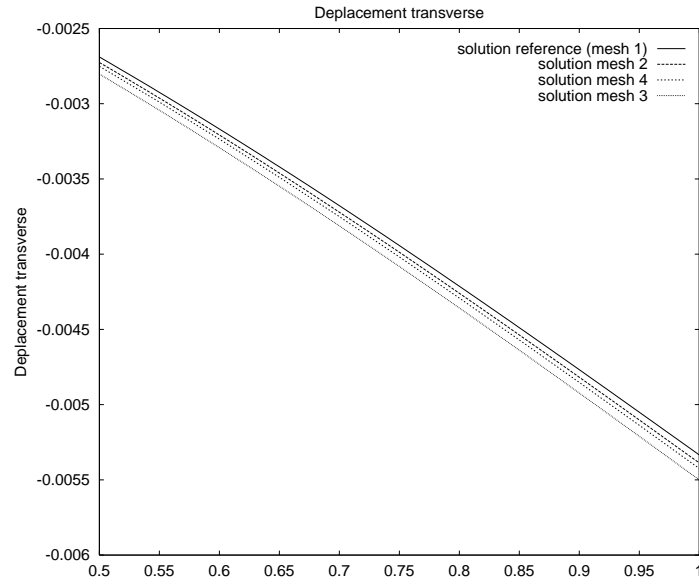


FIG. 7.23 - Zoom du déplacement transverse le long de la coupe ED

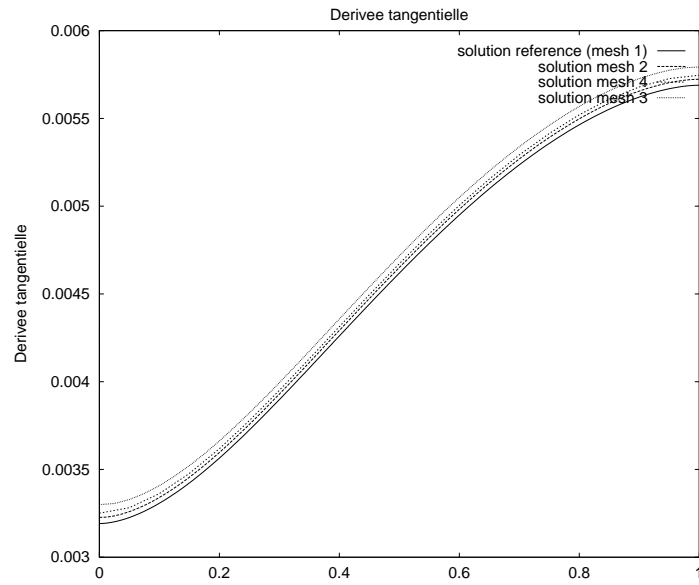


FIG. 7.24 - Dérivée tangentielle du déplacement transverse le long de ED

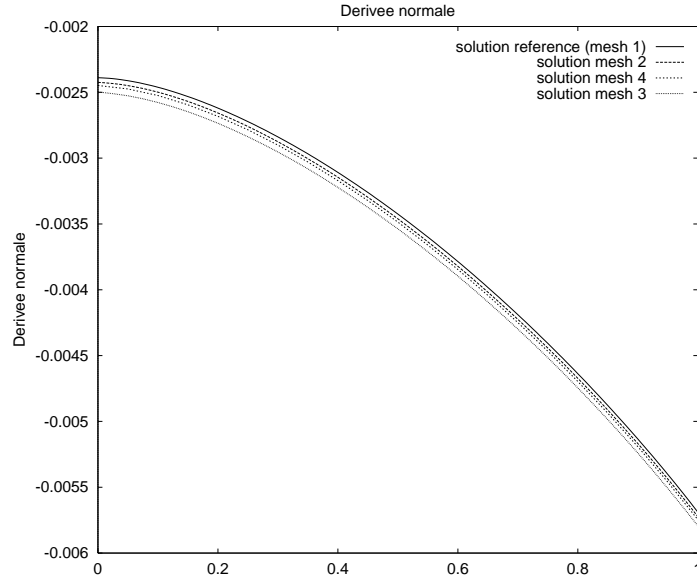


FIG. 7.25 - *Dérivée normale du déplacement transverse le long de la coupe ED*

Visualisons sur les courbes 7.27, 7.26 l'erreur entre la solution calculée sur tous les points du maillage fin et celles calculées sur tous les points des autres maillages. L'erreur considérée est donnée par la valeur absolue de la différence entre la solution calculée sur sur tous les points du maillage fin et la solution calculée sur sur tous les points des autres maillages.

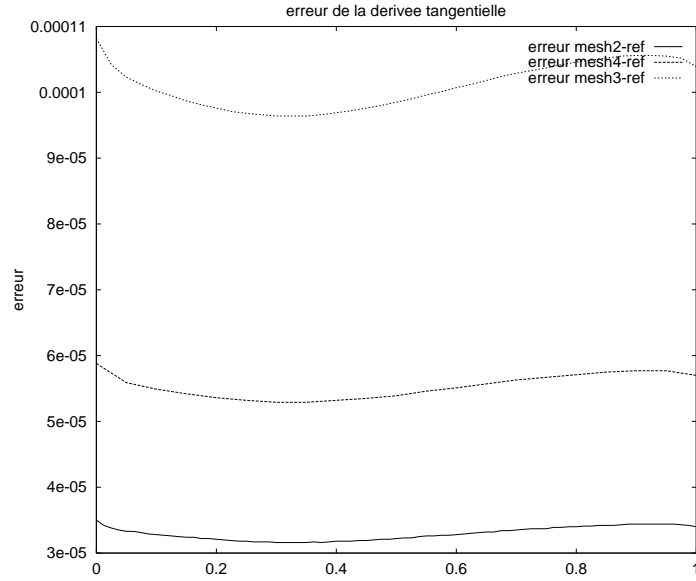


FIG. 7.26 - Calcul de l'erreur.

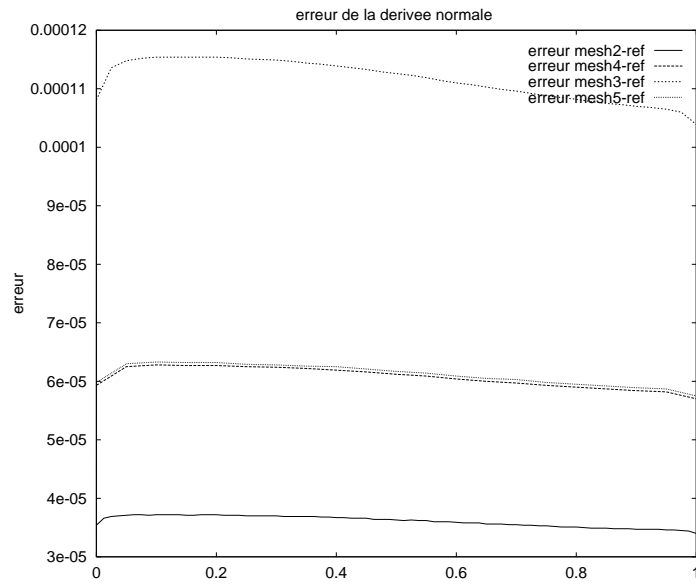


FIG. 7.27 - Calcul de l'erreur.

Sur la figure 7.23, nous remarquons que la solution obtenue avec le

maillage non conforme *mesh4* est meilleure que celle obtenue avec le maillage conforme *mesh3*. L'avantage est de pouvoir raffiner localement le maillage dans les zones où l'information à capter est la plus intéressante.

Résultats de résidus

Nous avons préconditionné le problème par le premier préconditionneur étudié au chapitre 4, c'est-à-dire par le préconditionneur M_1 , extension du 'condensé' préconditionneur au cas non conforme.

Une première simulation étudiée est le cas d'un pas de maillage h local fixé comme sur la figure 7.21 pour lequel nous avons augmenté le nombre de sous-domaines. La taille globale augmente avec le nombre de sous-domaines, tandis que le h local reste constant. Sur les deux tableaux suivants, nous avons représenté le nombre d'itérations ainsi que le résidu dans le cas d'un problème sans préconditionneur et avec le préconditionneur M_1 .

Nombre de s-domaines	Itérations	Résidu
4 (2 × 2)	49	7.10E-004
8 (4 × 2)	76	8.202E-004
16 (4 × 4)	77	7.835E-004
32 (8 × 4)	96	7.166E-004

Tableau 6.1: Maillage non conforme, sans préconditionneur.

Nombre de s-domaines	Itérations	Résidu
4 (2 × 2)	14	5.256E-004
8 (4 × 2)	16	7.566E-004
16 (4 × 4)	16	8.966E-004
32 (8 × 4)	16	9.662E-004
64 (8 × 8)	16	8.662E-004

Tableau 6.2: Maillage non conforme, avec le préconditionneur M_1 .

A pas de maillage local fixé, nous avons donc augmenté le nombre de sous-domaines. Le préconditionneur appliqué à un problème plus complexe, celui de la modélisation D.K.T d'une plaque, s'est avéré efficace comme le montrent les tableaux 6.1 et 6.2.

Dans ce cas, on remarque une indépendance en fonction du nombre de sous-domaines. En fait, il serait intéressant de démontrer que le conditionnement de l'opérateur projeté $P^t DP$ ne dépend plus du nombre de sous-domaines comme ceci a été fait dans le cas conforme, voir [J.Mandel, R.Tezaur et C.Farhat, 1995]. Une telle méthode est numériquement extensible puisque la vitesse de convergence ne se dégrade pas lorsque le nombre de sous-domaines augmente. La parallélisation donne ici son efficacité optimale.

Par la suite, nous avons considéré une décomposition en un nombre fixe (8×4) sous domaines et avons raffiné le pas du maillage h . Les tableaux suivants donnent le nombre d'itérations et le résidu dans le cas d'une simulation sans et avec le préconditionneur M_1 .

Pas du maillage	Itérations	Résidu
h	44	8.280E-004
$h/2$	96	8.166E-004
$h/4$	169	7.283E-004

Tableau 6.3: Maillage non conforme, décomposition 8×4 , sans préconditionneur.

Pas du maillage	Itérations	Résidu
h	13	9.733E-004
$h/2$	16	9.662E-004
$h/4$	20	7.082E-004

Tableau 6.4: Maillage non conforme, décomposition 8×4 , avec le préconditionneur M_1 .

Comme l'ont mis en évidence C.Farhat et F.X.Roux (1994), l'utilisation du préconditionneur condensé ne fait pas disparaître la dépendance en h . Sur le tableau 6.4, le nombre d'itérations augmente légèrement lorsque l'on raffine le pas du maillage h . On peut remarquer que le rapport entre les itérations lorsqu'on raffine le pas du maillage par 2 est sensiblement le même que celui calculé pour le problème du Laplacien. Dans le cas d'un nombre de processeurs fixé, et d'un pas de maillage raffiné, nous observons que le préconditionneur reste relativement efficace.

Chapitre 8

Conclusion

Dans cette étude, nous avons présenté une méthode de décomposition de domaines sans recouvrement, non conforme, recollant des maillages non coïncidant aux interfaces. Nous rappelons que la méthode des éléments avec joint utilise une formulation hybride des équations du problème de départ qui repose sur l'introduction de multiplicateurs de Lagrange λ pour traiter la contrainte de continuité aux interfaces entre les sous-domaines.

On a mis en évidence les propriétés du spectre de l'opérateur condensé et montré, numériquement, que la méthode de résolution du système hybride, c'est-à-dire, la méthode du gradient conjugué utilisant la technique de reconjugaison des directions de descente, était très efficace.

Différents préconditionneurs pour cette méthode de résolution ont été proposés.

Le premier est une extension du préconditionneur condensé, étudié dans la thèse de F.X. Roux, au cas de maillage non conforme. Vue la forme de ce préconditionneur, son influence s'est faite ressentir surtout sur les petites valeurs propres de la matrice mettant ainsi en évidence un phénomène de 'super-convergence' très intéressant.

L'originalité du deuxième préconditionneur réside dans la construction de l'espace des multiplicateurs de Lagrange. En effet, nous avons construit une base hiérarchique de l'espace des joints. Nous avons remarqué que cette nouvelle formulation du problème hybride influait surtout sur les hautes fréquences de la matrice, mettant ainsi en évidence les mêmes phénomènes

précédemment cités. Un préconditionneur basé sur les grilles grossières s'est avéré très efficace.

Une telle approche 'adaptative' des interfaces pourrait être étendue naturellement à la prise en compte des contraintes de continuités aux interfaces entre maillages non conformes issus d'un processus de raffinement.

La méthode de résolution étudiée, appliquée sur des problèmes elliptiques, est une méthode numériquement très efficace et présente un grand intérêt du point de vue du parallélisme. On a montré que la méthode pouvait s'appliquer pour des découpages quelconques, même avec certaines sous-structures flottantes, et que la méthode du gradient conjugué préconditionné projeté avec reconjugaison des directions de descente était numériquement extensible.

Nous avons étendu la méthode des éléments avec joint sur des problèmes plus complexes, comme celui des plaques et coques.

Pour le type d'équations issues de problèmes de plaques et coques, les problèmes de modélisation des conditions de raccord ont été plus complexes. Leur analyse a posé de sérieuses questions mathématiques. L'analyse numérique de la méthode des éléments avec joint pour une modélisation de plaques formulées par la méthode D.K.T. a conduit à des résultats optimaux en ce qui concerne l'analyse d'estimation d'erreurs.

La méthode de résolution par sous domaines du problème hybride s'est avérée également très efficace pour des problèmes plus complexes. En effet, on a remarqué que la méthode du gradient conjugué projeté sur l'espace grossier des modes rigides et des modes de coins est numériquement extensible. Lorsqu'on a augmenté le nombre de sous-domaines, la vitesse de convergence ne s'est pas dégradée.

L'étude de la méthode des éléments avec joint appliquée aux problèmes de coques intéresse actuellement les industriels tels P.S.A.

L'étude de la méthode des éléments avec joint étendue à la résolution des équations de Navier-Stokes en simulation numérique directe fait aujourd'hui l'objet de la thèse de Lydie Cazabeau. La méthode de résolution hybride préconditionnée pourrait être un solveur efficace et naturellement adapté à

ce type de problèmes.

Les études sur le recollement de maillages non conformes peuvent être étendues aux problèmes d'interaction fluide-structure et constituent un premier pas sur la voie du couplage de modèles numériques différents.

Annexe A

Quelle architecture pour quel modèle de programmation?

La performance obtenue par une simulation numérique se fait au détriment du coût calcul et de la mémoire. Les problèmes auxquels les industriels sont confrontés donnent des systèmes linéaires sans cesse plus gros et gourmands en mémoire. Or, la technologie demande de plus en plus des simulations précises. Aussi, le besoin en calculateurs de plus en plus puissants se fait sentir.

Pour concevoir des calculateurs performants, plusieurs solutions peuvent être envisagées. Notre approche fut celle du parallélisme. On distingue deux types de parallélisme, le parallélisme à faible nombre de processeurs et à mémoire partagée et les calculateurs massivement parallèles à mémoire distribuée.

Les machines à faible nombre de processeurs permettent une bonne performance des calculs en se reposant sur la puissance des processeurs vectoriels et l'exploitation d'un parallélisme modéré. La programmation sur ce type de machine ne pose pas véritablement de problème du point de vue algorithmique. On y exploite surtout la vectorisation de code et la répartition des grandes boucles externes en plusieurs sous-tâches. Le fait que les processeurs y partagent le même espace mémoire limite le nombre de processeurs pouvant être implémentés sur le calculateur, car afin de minimiser l'attente d'accès à la mémoire, on doit partager cette mémoire en plusieurs bancs interlacés permettant ainsi des écritures et des lectures simultanées des différents processeurs.

C'est pourquoi la tendance actuelle est de se tourner vers les calculateurs massivement parallèles (Paragon, Cray T3D). Les processeurs y sont de type scalaire, et donc beaucoup moins onéreux. La puissance de calcul de la machine repose sur le nombre de processeurs que peut contenir un tel type de machine. Afin de ne pas être limité par le nombre de processeurs, chaque processeur adresse une unité mémoire qui lui est propre. Les données locales à un processeur peuvent être envoyées aux autres processeurs grâce à un réseau de communication reliant les processeurs. Sur ces types de machine, la performance d'un algorithme dépend fortement du nombre de variables pouvant être local à un processeur.

A.1 Quelle architecture?

Les machines massivement parallèles à mémoire distribuée sont de deux types. Ces deux types sont le type **SIMD** et le type **MIMD**.

A.1.1 Architecture SIMD

Le modèle de programmation SIMD, "Single Instruction Multiple Data", classifié par Flynn en 1972, permet d'effectuer simultanément la même opération sur des données différentes. Contrairement aux machines à faible nombre de processeurs, ces machines tirent leur puissance du grand nombre de processeurs élémentaires constituant le calculateur, et non de la puissance même des processeurs.

Ce type de machine présente quelques inconvénients:

Sur une machine SIMD, l'algorithme le plus efficace n'est plus celui qui demande le moins d'opérations si celui-ci ne permet pas d'utiliser simultanément les différentes unités de calcul.

Pour cette raison, le développement d'un code est dépendant de la machine SIMD sur laquelle il est implémenté.

Néanmoins, ces machines permettent de bonnes performances dans le domaine de l'intelligence artificielle et l'image de synthèse, car ce sont des domaines où les algorithmes présentent des dépendances qui restent locales. Dans le domaine du calcul scientifique, cette localité des données est rarement vérifiée.

A.1.2 Architecture MIMD

Dans le domaine du calcul scientifique, on utilise un autre type de machine exploitant un autre type de parallélisme. Ce sont les machines MIMD, "Multiple Instructions Multiple Data" comme Paragon, Cray T3D, IBM SP2. La machine possède plusieurs processeurs indépendants ayant chacun ses propres unités de contrôle et de calcul. Tous les processeurs travaillent simultanément, chacun traitant son propre flot d'instructions, constituant un processus. Ces processus peuvent être des codes entiers indépendants, ou des sous-parties d'un même code. Dans ce dernier cas, il faut qu'ils partagent un certain nombre de données, ce partage est assuré si on dispose d'une mémoire commune. Ce type de machine exploite un parallélisme dont l'efficacité dépend du nombre de processeurs travaillant et du volume de calcul effectué par chaque processeur.

Les machines MIMD sont des machines qui possèdent un nombre de processeurs allant de quelques dizaines à quelques milliers. Ce sont des processeurs évolués qui effectuent un nombre important de macro-instructions, qui peuvent être différentes d'un processeur à l'autre, sur des données locales. Leur architecture est adaptée à un parallélisme de **forte granularité**, c'est-à-dire que le rapport temps de calcul sur temps de communication est important. L'inconvénient d'une telle architecture est du à la non-conformité du coût d'accès aux données, suivant qu'elles sont situées dans la mémoire locale du processeur ou non et à la gestion de la mémoire distribuée. C'est pour cette raison qu'il convient de définir des sous-structures de données locales propres à chaque processeurs.

L'approche décomposition de domaines est bien adaptée à ce type de d'architecture. En effet, la philosophie de l'approche décomposition de domaines consiste à considérer les dépendances au niveau du programme complet pour découper, par la suite, le domaine d'étude en plusieurs sous-groupes et s'intéresser au problème local associé à chaque sous-ensemble.

Chaque sous-domaine sera associé à un processeur, ou à un groupe de processeurs, qui aura la tâche de résoudre son propre problème local avec ses propres données locales. Par la suite, pour obtenir la solution globale sur le domaine complet, il faudra raccorder les solutions locales. Les phases de communication permettent de résoudre les interactions entre sous-domaines. Cette approche définit de façon naturelle les tâches volumineuses puisqu'elles correspondent à l'exécution du problème complet mais à l'échelle locale. Ces tâches sont suffisamment indépendantes pour autoriser l'exploitation d'un parallélisme massif associé à un grand nombre de processeurs.

Les avantages d'une telle approche sont multiples:

Cette approche permet de préserver le code scalaire qui est dupliqué sur chaque processeur. Ainsi, on peut effectuer une première parallélisation sans à avoir à modifier de façon très importante l'écriture du code, les choix numériques, la modélisation de la physique.

Un des grands avantages de cette approche est que le cadre de l'étude est peu dépendant de la nature du code et de la machine d'accueil.

Enfin, la souplesse de la décomposition en sous-domaines peut répondre à plusieurs démarches issues des contraintes du parallélisme (granularité, équilibrage es tâches...) ou de celles de la physique (prise en compte de phénomènes locaux...)

Ce sont pour ces multiples avantages que ce type de machine a été privilégié pour le développement du modèle décomposition de domaines non conformes, afin que l'implémentation de ce modèle puisse être le plus possible indépendant de la machine de développement. On peut noter que ce choix semble être aujourd'hui une tendance générale dans le domaine du calcul scientifique.

A.2 Quel modèle de programmation?

Pour ces machines à architectures parallèle, différents modèles de programmation peuvent être considérés. On choisira la programmation par échange de messages.

La programmation par échange de messages

On a vu que la machine à architecture parallèle est équivalente à une multi-machine (Intel Paragon, Cray T3D) où chaque processeur a sa propre mémoire locale. Par conséquent, le développeur organise les transferts d'information locaux et globaux de façon à tenir compte de la distribution de la mémoire.

Le modèle de programmation par échange de messages est suffisamment général pour être utilisé pour une très large gamme d'applications du calcul scientifique. De plus ce modèle est très bien adapté pour la mise en oeuvre de l'approche par décomposition de domaine. En effet, si chaque processeur résout en parallèle un problème en déplacements local relatif à un sous-domaine, alors, le déplacement global est obtenue de façon naturelle grâce à des phases de communication entre processeurs. Ces phases font intervenir des appels de bibliothèques pour les transferts de données via les interfaces de couplage entre sous-domaines voisins. Elles font également intervenir des opérations comme la somme, le maximum, pour le calcul de coefficients globaux.

Aussi, la structure initiale du programme scalaire reste préservée tandis que les dépendances entre sous-domaines sont gérées de façon naturelle.

Enfin, il est important de savoir qu'il existe des bibliothèques standards de communication (PVM, MPI) qui permettent de s'affranchir de la spécificité de la machine de développement. En fait, le modèle de programmation par échange de messages est assez universel pour assurer à un large éventail de modèles numériques la portabilité sur la plupart des ordinateurs actuels.

A.2.1 Le Paragon Intel

Le développement du code décomposition de domaines à l'O.N.E.R.A., en direction de l'informatique s'est effectué sur le Paragon Intel.

Sa topologie est une grille bidimensionnelle. C'est une machine à mémoire distribuée, chaque noeud de calcul possède sa mémoire locale de 64 Megaoctets dont 11 sont utilisés par le système. Chaque noeud possède deux processeurs de calcul i860 de vitesse crête 75 Megaflops.

De plus chaque noeud possède un processeur alloué aux communications. Les améliorations apportées par le paragon sont:

- Les performances de communication permettent un transfert des données de 90Mo/s et une latence de 46 microsecondes.
- L'existence d'un système de fichiers parallèles, PFS, dont le débit est de 2Mo/s en écriture et de 3Mo/s pour la lecture.
- L'environnement d'exploitation de la machine est un véritable système UNIX.

Références bibliographiques

- [1] G.S.Abdoulaev, Yu.A. Kuznetsov, O.Pironneau,
The numerical implementation of the domain decomposition method with mortar finite elements for a 3D problem.
A paraître
- [2] Y.Achdou, Yu.A.Kuznetsov,
Substructuring preconditioners for finite element methods on nonmatching grids.
East-West J. Numer. Math. Vol.3, No.1, pp.1-28, 1995.
- [3] G.Adjedj, D.Aubry,
Development of a hierarchical and adaptive finite element software.
Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 75, pp.153-165, 1989.
- [4] K.Alvin, H.M.de la Fuente, B.Haugen, C.A.Felippa,
Membrane triangles with corner drilling freedoms-I.The EFF element.
Finite Elements in Analysis and Design 12, pp.163-187, 1992.
- [5] G.Anagnostou, Y.Maday, A.T.Patera,
A sliding mesh method for partial differential equations in nonstationary geometries: Application to the incompressible Navier-Stokes equations.
Publications du laboratoire d'Analyse Numérique de Paris VI, 1991.
- [6] R.E.Bank, T.F.Dupont, H.Yserentant,
The hierarchical basis multigrid method.
Numer. Math. 52, pp.427-458, 1988.
- [7] R.E.Bank, J.Xu,
The hierarchical basis multigrid method and incomplete LU decomposi-

- tion.
Contemporary Mathematics, Volume 180, 1994.
- [8] J.L.Batoz, M.Ben Tahar,
Evaluation of new thin plate quadrilateral element.
International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol.18,
pp.1655-1677, 1982.
- [9] Z.Belhachmi,
Méthodes d'éléments spectraux avec joints pour la résolution de problèmes d'ordre quatre.
Thèse de doctorat de l'université Pierre et Marie Curie, 1994.
- [10] F. Ben Belgacem,
The mortar finite element method with Lagrange multipliers.
Rapport interne MIP numero 94-1, Université Paul Sabatier (1994).
- [11] F. Ben Belgacem, Y. Maday,
Coupling Spectral and finite Element Discretizations for second Order Elliptic Three Dimensional Equations.
A paraître.
- [12] M.Bernadou,
Méthodes d'éléments finis pour les problèmes de coques minces.
RMA, Masson, Springer Verlag co-publication, 1994.
- [13] M.Bernadou, P.G.Ciarlet,
Sur l'ellipticité du modèle linéaire de coques de W.T.Koiter.
in Computing Methods in Applied Sciences and Engineering
(R.Glowinski and J.L.Lions Ed), pp.89-136, Lectures Notes in Economics and Mathematical Systems, Vol.134, Springer-Verlag, Berlin, 1976.
- [14] M.Bernadou, P.Matao Eiroa, P.Trouve
On the convergence of a D.K.T Method Vallid for Shells of Arbitrary Shape.
Rapport de Recherche INRIA, No 2010, Août 1993.
- [15] C.Bernardi, N.Debit, Y.Maday,
Couplage de méthodes spectrale et d'éléments finis: premiers résultats d'approximation.
Note aux C.R.A.S. Série I 305, pp.353-356, 1987.

- [16] C.Bernardi, V.Girault, Y.Maday,
Mixed spectral element approximation of the Navier-Stockes equations in the stream-function and vorticity formulation.
IMA Journal of Numerical Analysis 12, pp.565-608, 1992.
- [17] C.Bernardi, Y. Maday,
Mesh adaptivity in finite elements by the mortar method. Publications du laboratoire d'Analyse Numérique de Paris VI, numéro 94029.
- [18] C.Bernardi, Y. Maday et A.T. Patera,
A new nonconforming approach to domain decomposition: the mortar element method.
Collège de France Seminar, 1990, Pitman, H.Brezis, J-L.Lions.
- [19] C.Bernardi, B.Métivet et R.Verfürth,
Analyse numérique d'indicateurs d'erreur.
Publications du laboratoire d'Analyse Numérique de Paris VI, 1993.
- [20] P.E.Bjorstad, O.B.Widlund
Iterative methods for solving elliptic problems on regions partitioned into substructures.
SIAM Journal of Numerical Analysis, Vol.23, No 6, December 1986.
- [21] D.Braess,
The contraction number of a multigrid method for solving the Poisson equation.
Numer. Math. 37, pp.387-404, 1981.
- [22] L.Cazabeau,
Méthodes multi-domaines pour la résolution des équations de Navier-Stockes en simulation numérique directe.
Thèse en préparation.
- [23] P.G.Ciarlet,
The Finite Element Method for Elliptic Problems.
North-Holland, Amsterdam, 1978.
- [24] Ph.Destuynder,
On non linear membrane theory.
Computer methods in applied mechanics and engineering 32, pp.377-399, 1982.

- [25] Ph.Destuynder,
An existence theorem for a non linear shell model in large displacements analysis.
Math. Meth. in the Appl. Sci. 5, pp.68-83, 1983.
- [26] M.Dryja, B.F.Smith, O.B.Widlund,
Schwarz analysis of iterative substructuring algorithms for elliptic problems in three dimensions
SIAM J. Numer. Anal., Vol.6, No.31, pp.1662-1694, December 1994.
- [27] C.Farhat, M.Geradin,
Using a reduced number of Lagrange multipliers for assembling parallel incomplete field finite element approximations.
Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 97, pp.333-354, 1992.
- [28] C.Farhat, P.S. Chen, F.X.Roux,
The two-level FETI method part II: extension to shell problems, parallel implementation, and performance results.
College of Engineering University of Colorado, 1996.
- [29] C.Farhat, F.X.Roux,
Implicit parallel processing in structural mechanics.
Computational Mechanics Advances 2, pp.1-124, 1994.
- [30] C.Farhat, F.X.Roux,
A Method of Finite Element Tearing and Interconnecting and its Parallel Solution Algorithm.
International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol.32, pp.1205-1227, 1991.
- [31] C.A.Felippa,
A survey of parametrized variational principles and applications to computational mechanics.
Computer methods in Applied Mechanics and Engineering 113, pp.109-139, 1994.
- [32] C.A.Felippa, S.Alexander
Membrane triangles with corner drilling freedoms-III.Implementation

- and performance evaluation.*
Finite Elements in Analysis and Design 12, pp.203-239, 1992.
- [33] C.A.Felippa, C.Militello
Membrane triangles with corner drilling freedoms-II.The ANDES element.
Finite Elements in Analysis and Design 12, pp.189-201, 1992.
- [34] V.Girault, P.A.Raviart,
Methods for Navier-Stokes Equations Theory and Algorithms.
Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York, Tokyo, 1986.
- [35] P.Joly,
Mise en oeuvre de la méthode des éléments finis.
Mathématiques et applications, Vol.2, SMAI, 1990.
- [36] F.Kikuchi,
On a finite element scheme based on the discrete Kirchhoff assumption.
Numer.Math., 24, pp.211-231, 1975.
- [37] YU.A.Kuznetsov,
Efficient iterative solvers for elliptic finite element problems on nonmatching grids.
J Numer. Anal. Math. Modelling, Vol.10, No3, pp.187-211, 1995.
- [38] C.Lacour,
Expertise d'un élément fini de type coque sous code ABAQUS.
Rapport de stage du DEA d'Analyse Numérique, Université PARIS VI, 1993.
- [39] C.Lacour,
Iterative Substructuring preconditioners for the Mortar Finite Element Method
Proceedings of the ninth international Conference on Domain Decomposition, Bergen June 1996, Wiley and Sons.
- [40] C.Lacour, Y.Maday
Two different approaches for matching nonconforming grids: The Mortar Element Method and the FETI Method.
pp.13-32 de la thèse.

- [41] P. Lascaux et R. Théodor,
Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur.,
Tome 1 et 2, Masson, Paris, 1986.
- [42] P. Le Tallec,
Domain decomposition methods in computational mechanics.,
Computational Mechanics Advances, Volume 1, No.2, pp.121-220, Fe-
bruary 1994.
- [43] P. Le Tallec, J.Mandel, M.Vidrascu,
*A Neumann-Neumann Domain Decomposition Algorithm for Solving
Plate and Shell Problems.*
Rapport de Recherche INRIA, No 2635, Août 1995.
- [44] P. Le Tallec, M.Carrive-Bedouani, J.Mouro,
Finite Element Approximation of a Geometrically Exact Shell Model.,
Rapport de Recherche INRIA, No 2504, Mars 1995.
- [45] P.L.Lions,
On the Schwarz Alternating Method I, First International Symposium
on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations,
SIAM, Philadelphia, 1988.
- [46] J.Mandel, R.Tezaur, C.Farhat,
*An optimal Lagrange multiplier based domain decomposition method for
plate bending problems.*
College of Engineering University of Colorado, 1995.
- [47] D.J.Mavripilis,
Multigrid solution strategies for adaptative meshing problems.
NASA Contractor Report 195049, ICASE Report No. 95-14, 1995.
- [48] C.Mitello, C.A.Felippa,
The first ANDES elements: 9-dof plate bending triangles.
Computer methods in Applied Mechanics and Engineering 93, pp.217-
246, 1991.
- [49] P. Raviart et J.M. Thomas,
Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles.
Masson, Paris, 1983.

- [50] D.Rixen, C.Farhat, M.Geradin
A Ritz based smoothing procedure for improving the static and dynamic assembly via lagrange multipliers of independent substructure solutions.
College of Engineering University of Colorado, 1995.
- [51] F.X.Roux,
Méthode de décomposition de domaine à l'aide de multiplicateurs de Lagrange et application à la résolution en parallèle des équations de l'élasticité linéaire.
Thèse de doctorat de l'université Pierre et Marie Curie, 1989.
- [52] F.X.Roux,
Accélération de la convergence par reconjugaison des directions de descentes d'une méthode de résolution par sous-domaines d'un problème d'élasticité linéaire.
C. R. Acad Sci. Paris, t.308, Série I, pp.193-198.
- [53] F.X.Roux, C.Lacour, C.Japhet, D.Kalfon
Méthodes de résolution par sous-domaines et calcul parallèle.
Rapport technique RT 13/3717 CY, ONERA Direction de l'Informatique, Mars 1996.
- [54] F.X.Roux, J.Ryan, C.Lacour, E.Brière de l'Isle
Parallélisation de codes de calcul en mécanique des fluides.
Rapport technique de Synthèse RTS 45/3479 CY, ONERA Direction de l'Informatique, Juin 1996.
- [55] T.Sassi,
Méthodes de décomposition de domaines pour la résolution de problème d'élasticité non linéaire avec maillages incompatibles.
Thèse de l'université Paris IX, 1993.
- [56] H.A.Schwarz,
Gesammelete Mathematische Abhandlungen.
vol. 2, Springer, Berlin, 1890, pp.133-143. First published in Vierteljahrschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich, volume 15, 1870, pp.272-286.
- [57] J.A.Stricklin, W.E.Haisler, P.R.Tisdale, R.A.Gusderson,
A rapidly converging triangular plate element.
AIAA J. 7, pp.180-181.

- [58] F. Stummel,
Basic compactness properties of nonconforming and hybrid finite element spaces.
R.A.I.R.O. Analyse Numérique, 4, numéro 1, pp.81-115, 1980.
- [59] H. Yserentant,
On the multi-level splitting of finite element spaces.
Numer.Math., 49, pp.379-412, 1986.